

**Lexikon**

**Mathe**

**matik**

# Lexikon der Mathematik



# Lexikon der Mathematik

Rund 700 Textabbildungen und Tabellen

Herausgeber

Walter Gellert · Herbert Kästner

Dr. Siegfried Neuber

VEB Bibliographisches Institut Leipzig



**Gutachter: Prof. Dr. habil. Helmut Koch**  
**Bereichsleiter im Zentralinstitut für Mathematik**  
**und Mechanik der AdW der DDR**

**4., durchgesehene Auflage**

**© VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1985**

**Verlagslizenz-Nr. 433 – 130/220/85**

**Printed in the German Democratic Republic**

**Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg**

**Fotomechanischer Nachdruck**

**Druck und Einband: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97**

**Lektorat: Eva Wypler**

**Bildredaktion: Elke Kubitzki**

**Einbandentwurf: Rolf Kunze**

**LSV 1017**

**Best.-Nr. 576 289 3**

**01800**

# Vorwort

Mathematische Methoden und Prinzipien dringen in immer stärkerem Maße nicht nur in die verschiedenen Disziplinen der Naturwissenschaften, sondern auch in die der Technik, der Ökonomie und der Gesellschaftswissenschaften ein. Damit wächst das Bedürfnis nach Information über mathematische Begriffe vom Wort her, d. h., ohne die Kenntnis der mathematischen Systematik vorauszusetzen. Dem Niveau nach sind die Grundlagenartikel bzw. die einführenden Teile größerer Artikel für Schüler der Zehnklassenschule verständlich, es gibt aber auch Artikel bzw. Abschnitte in anderen, die weiterführende Sätze und Formelzusammenstellungen enthalten. Das Lexikon richtet sich danach an Schüler aller Klassen, an Studenten von Fach- und Ingenieurschulen, sowie von Ingenieurhochschulen, an Facharbeiter und Ingenieure. Auch Studenten mathematischer Disziplinen können einen Überblick über ein noch nicht beherrschtes Gebiet erhalten oder Lücken auf Nachbargebieten schnell schließen.

Komplexartikel schildern einen abgeschlossenen Sachzusammenhang. Sie sind gegliedert, die Gliederung wird durch römische Zahlen gekennzeichnet. Der Leser kann dadurch auf überblickbare Teile eines Stichworts verwiesen werden. Der Verweis wird durch einen Pfeil ↗ vor dem Wort angegeben, das als Stichwort zu finden ist. Dieser Verweispeil steht aber nicht vor jedem Wort im Text, das als Stichwort enthalten ist, wohl aber haben sich die Herausgeber sorgfältig bemüht, daß jeder im Text verwendete Sachbegriff im Buche auch erläutert wird. Hinweise auf andere Stichwörter, deren Inhalt geeignet ist, ein besseres Verständnis zu verschaffen, sind in Klammern nach einem Verweispeil angegeben. Der Rat, weitere Informationen aufzusuchen, wird auch in Klammern und häufig am Schluß von Artikeln durch die Hinweise vgl. und s. a. gegeben.

Die Anordnung der Stichwörter erfolgt alphabetisch nach der Folge ihrer Buchstaben vom ersten bis zum letzten. Die Umlaute ä, ö und ü werden wie die entsprechenden einfachen Vokale behandelt. Wörtern mit ihnen folgen aber unmittelbar sonst buchstabengleichen Wörtern mit den einfachen Vokalen, ae, oe bzw. ue werden als zwei getrennte Vokale angesehen. Stichwörter, die aus mehreren Wörtern bestehen, sind im Alphabet unter dem Wort abgehandelt, das als Grundbegriff angesehen werden kann. Die übliche Regel, stets unter dem Grundwort zu suchen, läßt sich allerdings nicht durchführen, da große Teile des Buches unter den Stichwörtern „Funktion“ bzw. „Gleichung“ zu suchen wären. Bezeichnungen wie „Winkelfunktion“ oder „quadratische Gleichung“ werden als Ganzheit empfunden und sind deshalb im Alphabet unter W bzw. Q zu finden. Von jedem durch Umstellung möglichen anderen Stichwort und zusätzlich von jedem Synonym wird auf das Stichwort verwiesen, unter dem der Begriff erläutert wird; am Schluß des Artikels „Gleichung“ z. B. sind alle mit diesem Wort zusammengesetzten Begriffe zusammengestellt, die nach dem Adjektiv alphabetisiert wurden.

Bezieht sich der Text eines Abschnitts bevorzugt auf eine mathematische Disziplin, so ist diese in kursiver Schrift am Anfang des Abschnitts angegeben. Im Artikel ist das Stichwort durch seinen bzw. seine Anfangsbuchstaben abgekürzt; Kasus- bzw. Pluralendungen werden nur angegeben, wenn sie für das Verständnis notwendig erscheinen. Auch die Silben -lich und -isch nach einem Kosonanten werden in Adjektiven oft abgekürzt und allgemein folgende Abkürzungen verwendet:

Abb.	Abbildung	gest.	gestorben	Tab.	Tabelle
Abk.	Abkürzung	i. allg.	im allgemeinen	u. a.	und andere
ben.	benannt	i. e. S.	im engeren Sinne	usw.	und so weiter
bes.	besonders	insbes.	insbesondere	u. Z.	unsere Zeitrechnung
bzgl.	bezüglich	i. w. S.	im weiteren Sinne	vgl.	vergleiche
bzw.	beziehungsweise	Jh.	Jahrhundert	v. u. Z.	vor unserer Zeitrechnung
d. h.	das heißt	Pl.	Plural	z. B.	zum Beispiel
f., ff.	folgende	s. a.	siehe auch	z. T.	zum Teil
geb.	geboren	Sing.	Singular		
gen.	genannt	svw.	soviel wie		

Folgende Stoffgebiete sind behandelt worden:

- |   |  |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Abbildungen und Funktionen,</li> <li>2. algebraische Geometrie,</li> <li>3. algebraische Gleichungen und Ungleichungen,</li> <li>4. algebraische Strukturen, z. B. Gruppen, Körper,</li> <li>5. analytische Geometrie,</li> <li>6. darstellende Geometrie,</li> <li>7. Differentialgleichungen,</li> <li>8. Differentialgeometrie,</li> <li>9. Differentialrechnung,</li> <li>10. Funktionalanalysis,</li> <li>11. Funktionentheorie,</li> <li>12. Graphentheorie,</li> <li>13. Grundlagen der Geometrie,</li> <li>14. Grundrechenarten,</li> <li>15. höhere Rechenarten,</li> <li>16. Integralgleichungen,</li> <li>17. Integralrechnung,</li> <li>18. Kybernetik,</li> <li>19. lineare Algebra und Vektoralgebra,</li> <li>20. Maßtheorie,</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>21. mathematische Geräte,</li> <li>22. mathematische Logik,</li> <li>23. Mathematikerbiographien</li> <li>24. Mengenlehre,</li> <li>25. projektive Geometrie,</li> <li>26. numerische Mathematik,</li> <li>27. Operationsforschung,</li> <li>28. Optimierung,</li> <li>29. Planimetrie,</li> <li>30. Rechentechnik,</li> <li>31. Statistik,</li> <li>32. Stereometrie,</li> <li>33. Topologie,</li> <li>34. Trigonometrie,</li> <li>35. unendliche Reihen,</li> <li>36. Variationsrechnung,</li> <li>37. Vektoranalysis,</li> <li>38. Wahrscheinlichkeitsrechnung,</li> <li>39. Zahlentheorie,</li> <li>40. Zins-, Zinseszins- und Rentenrechnung.</li> </ol> |
|---|--|

Mathematikerbiographien geben Hinweise auf geschichtliche Zusammenhänge. Zur Veranschaulichung der im Text dargestellten Zusammenhänge sind rund 700 Abbildungen und Tabellen beigegeben worden. Wir danken allen Autoren für die geleistete Arbeit und hoffen, daß mit ihrer Hilfe vielen Interessierten der Zugang zur Mathematik gebnet wird. Für die weitere Verbesserung des Buches sind wir für jeden Hinweis auf Unzulänglichkeiten und Lücken dankbar.

Herausgeber und Verlag

## Autoren und Gebiete

- |   |  |
|---|--|
| <p>Beckmann, Peter, Dipl.-Math. (2, 4, 34)<br/>         Belger, Martin, Dr. rer. nat. (11)<br/>         Burkhardt, Manfred, Dipl.-Math. (8, 25, 33)<br/>         Deweß, Günther, Dr. rer. nat. (27, 28)<br/>         Drechsler, Konrad, Dr. rer. nat. (5)<br/>         Gentemann, Helmut, Dipl.-Math. (11)<br/>         Gimpel, Manfred, Prof. Dr. sc. (6)<br/>         Göhde, Dietrich, Prof. Dr. sc. nat. (16, 20)<br/>         Göhring, Christine (29, 32)<br/>         Göthner, Peter, Dr. paed. (1)<br/>         Gottwald, Siegfried, Dr. rer. nat. (13, 22, 24)<br/>         Großmann, Dietrich (15)<br/>         Helmholz, Claus-Peter (3)<br/>         Hilbig, Harald, Dr. rer. nat. (17)<br/>         Hofmann, Reinhard, Dr. rer. nat. (26)<br/>         Ihle, Wolfgang, Dr. rer. nat. (29, 32)<br/>         Ilgauds, Joachim, Dipl.-Päd. (23)</p> | <p>Kästner, Herbert (19)<br/>         Koch, Edeltraut (14)<br/>         Kraft, Rolf-Jürgen, Dipl.-Ing. (30)<br/>         Krebs, Heinrich, Dipl.-Ing. (30)<br/>         Krötenheerdt, Margarete (29, 32)<br/>         Miersemann, Erich, Dr. rer. nat. (36)<br/>         Purkert, Walter, Dr. rer. nat. (31, 38)<br/>         Reutter, Werner (39)<br/>         Scheidt, Jürgen vom, Dr. rer. nat. (7, 35, 37)<br/>         Schlote, Karl-Heinz (23)<br/>         Schmüdgen, Konrad, Dr. rer. nat. (10)<br/>         Stanka, Emil (40)<br/>         Sterz, Ulrich, Dr. rer. nat. (5)<br/>         Voß, Heinz-Jürgen, Dr. sc. nat. (12)<br/>         Weißbrod, Jürgen, Dr. rer. nat. (21)<br/>         Weller, Wolfgang, Prof. Dr. sc. techn. (18)<br/>         Zaremba, Jürgen, Dr. sc. techn. (30)</p> |
|---|--|

### Grafiker und technische Zeichner

Borleis, Jens, Leipzig  
 Gohle, Kurt, Halle

Weitzmann, Willi, Leipzig  
 Zindler, Joachim, Leipzig

## Tafel der mathematischen Zeichen

### 1. Mengenlehre

$\in$	Element von, z. B. $a \in \{a, b\}$
$\notin$	nicht Element von, z. B. $c \notin \{a, b\}$
$\subseteq$	Teilmenge von, enthalten in
$\subset$	echte Teilmenge von, z. B. $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$
$\cup, \bigcup_{i=1}^n$	Vereinigung von 2 bzw. $n$ Mengen, z. B. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
$\cap, \bigcap_{i=1}^n$	Durchschnitt von 2 bzw. $n$ Mengen, z. B. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$
$\setminus$	Differenzmenge, z. B. $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$
$C_E A$	Komplementmenge von $A$ in bezug auf $E$ , z. B. $C_{\mathbb{N}}\{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$
$\emptyset$	leere Menge

### 2. Logik

$\neg$	Negation, »nicht«
$\wedge$	Konjunktion, »und«
$\vee$	Alternative, »oder«
$\rightarrow$	Implikation, »wenn ..., so«
$\leftrightarrow$	Äquivalenz, »genau dann, wenn ...«
$\exists$	Existentialquantor, »es gibt ein ...«
$\forall$	Allquantor, »für alle ...«

### 3. Algebra, Arithmetik, Zahlentheorie

$=, \neq$	gleich, nicht gleich bzw. ungleich, z. B. $1 \neq 2$
$:=$	definiert durch
$<$	kleiner als, z. B. $0 < 1$
$>$	größer als, z. B. $2 > 1$
$\leq$	kleiner oder gleich, z. B. $x \leq 0$ , d. h., $x$ nicht positiv
$\geq$	größer oder gleich, z. B. $x \geq 0$ , d. h., $x$ nicht negativ
$+$	plus, z. B. $2 + 3 = 5$
$\sum$	Summenzeichen, z. B. $\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$
$-$	minus, z. B. $5 - 2 = 3, -5 = 0 - 5$
$\cdot, \times$	mal, z. B. $2 \cdot 6 = 2 \times 6 = 6 + 6 = 12$
$\prod$	Produktzeichen, z. B. $\prod_{i=1}^3 a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$
$:/, -$	geteilt durch, z. B. $10 : 5 = 10/5 = \frac{10}{5} = 2$

$a^n$	$n$ -te Potenz von $a$ , z. B. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$\sqrt{\quad}, \sqrt[n]{\quad}$	Quadratwurzel, $n$ -te Wurzel aus
$\log_b$	Logarithmus zur Basis $b$
$\ln$	natürlicher Logarithmus, $b = e$
$\lg$	dekadischer oder Zehnerlogarithmus, $b = 10$
$\lg$	dyadischer oder Zweierlogarithmus, $b = 2$
$!$	Fakultät, z. B. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$\binom{n}{p}$	Binomialkoeffizient, » $n$ über $p$ «, z. B. $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$
$ a $	absoluter Betrag von $a$ , z. B. $ -7  = 7,  3 + 4i  = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
$i$	imaginäre Einheit, $i^2 = -1$
$\bar{a}$	zu $a$ konjugiert komplexe Zahl, z. B. $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalares Produkt zweier Vektoren
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$ \mathbf{a} $	Betrag oder Norm, Länge des Vektors $\mathbf{a}$
$(a_{ik}) = \mathbf{A}$	Matrix mit den Elementen $a_{ik}$
$ a_{ik}  = \det \mathbf{A}$	Determinante der quadratischen Matrix $\mathbf{A}$
$ $	teilt, ist Teiler von, z. B. $7 21$
$\nmid$	teilt nicht, z. B. $7 \nmid 20$
$\equiv$	kongruent, z. B. $13 \equiv 3 \pmod{10}$
$\mathbf{N}$	Bereich der natürlichen Zahlen
$\mathbf{Z}$	Bereich der ganzen Zahlen
$\mathbf{Q}$	Bereich der rationalen Zahlen
$\mathbf{R}$	Bereich der reellen Zahlen
$\mathbf{C}$	Bereich der komplexen Zahlen

### 4. Analysis

$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall, $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	offenes Intervall, $a < x < b$
$]a, b]$	links offenes Intervall, $a < x \leq b$
$[a, b[$	rechts offenes Intervall, $a \leq x < b$
$\rightarrow$	geht gegen, konvergiert
$x \downarrow a$	monoton abnehmend mit dem Grenzwert $a$
$x \uparrow a$	monoton zunehmend mit dem Grenzwert $a$
$\lim$	Limes, Grenzwert
$\infty$	unendlich
$\approx$	angenähert gleich
$\sim$	asymptotisch äquivalent

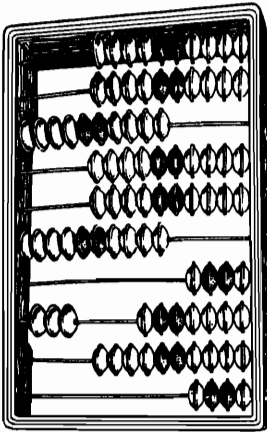
$d, d^n$	einfache bzw. $n$ -fache Differentiation
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^ny}{dx^n}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Differentialquotient, Ableitung} \\ \text{1. bzw. } n\text{-ter Ordnung} \end{array} \right.$
$y', y^{(n)}$	
$\partial, \partial^n$	partielle Differentiation
$\delta f$	Variation von $f$
$\nabla$	Nablaoperator
$\Delta$	Laplace-Operator
$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral
$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral
$ f , \ f\ $	Norm von $f$
sin	Sinus
cos	Kosinus
tan	Tangens
cot	Kotangens
arcsin, ...	Arkusfunktionen
sinh, ...	Hyperbelfunktionen
arsinh, ...	Areafunktionen
exp	Exponentialfunktion, z. B. $\exp x = e^x$
$\Gamma$	Gammafunktion
$\wp$	Weierstraßsche Funktion
grad	Gradient
div	Divergenz
rot	Rotation

**5. Geometrie**

$\parallel$	parallel
$\perp$	senkrecht auf
$\triangle$	Dreieck
$\sim$	ähnlich, z. B. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$
$\cong$	kongruent, z. B. $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$
$\sphericalangle$	Winkel, z. B. $\sphericalangle BAC, \sphericalangle (s, t)$
$ \sphericalangle (s, t) $	Größe des Winkels
$m(\sphericalangle (s, t))$	Maßzahl der Winkelgröße in einer orientierten Ebene
$^\circ, ', ''$	Grad, Minute, Sekunde, $60' = 1^\circ, 60'' = 1'$
rad	Radian, Einheit des Bogenmaßes
$\triangle$	entspricht, z. B. $90^\circ \triangle \pi/2$
$AB$	Strecke, auch Gerade durch die Punkte $A$ und $B$
$\overrightarrow{AB}$	gerichtete Strecke von $A$ nach $B$
$ AB $	Länge der Strecke $AB$
$m(AB)$	Maßzahl der Streckenlänge auf einer orientierten Geraden
$\cap$	Schnittpunkt, »schneiden einander in«, z. B. $S = s \cap t$
$\widehat{AB}$	Bogen $AB$
$\hat{\alpha}$	arc $\alpha$ , Bogen, auch Bogenmaß

## A

**Abakus, Rechenbrett:** Rechengertät aus einer Stein- oder Holztafel mit aufgezeichneten oder eingeschnittenen *Linien*, auf denen die *Rechensteine* [lat. *calculi*] geschoben wurden. Die Steine einer Linie entsprechen Zahlen der gleichen Größenordnung, im Zehnersystem z. B. stellt jeder eine Einheit der gleichen Zehnerpotenz dar, d. h., 10 Steine dieser Linie werden ersetzt durch einen auf der folgenden Linie der um 1 höheren Ordnung. Mit dem A. konnte addiert und subtrahiert werden. Das Rechnen mit dem A. hat sich aus der *Staubrechnung* der Inder entwickelt, bei der das Wegnehmen durch Auslösen auf den Linien gehandhabt wurde. Im Mittelalter sind besondere Rechensteine entwickelt worden. Beim Aufkommen des schriftl. Rechnens unterschied Adam Ries vom »Rechnen auf der Linien« das »Rechnen mit der Feder«. In vielen Kulturkreisen haben sich aber *Handrechengeräte* (Abb.) auf der Grundlage des A. bis in die Neuzeit



Abakus: Russisches Rechenbrett

erhalten, z. B. in der Sowjetunion oder in Japan. In ihnen sind die Linien durch Drähte ersetzt, auf denen durchlöchernte Kugeln verschoben werden, meist je 5 in verschiedener Farbe. Auch Rechentafeln, mit denen Kinder das Zusammenzählen und Abziehen üben, beruhen auf dem gleichen Prinzip. **Abbildung:** I. Zuordnung von Elementen einer nichtleeren Menge  $Y$  zu Elementen einer nichtleeren Menge  $X$ . Wird z. B. dem Element  $x \in X$  durch die A.  $F$  das Element  $y \in Y$  zugeordnet, so nennt man  $y$  ein *Bild* von  $x$  bzgl.  $F$  und  $x$  ein *Urbild* oder *Original* von  $y$  bzgl.  $F$ . Für eine A.  $F$  von  $X$  in  $Y$  schreibt man  $F: X \rightarrow Y$ ; um auszudrücken, daß durch  $F$  dem Element  $x \in X$  als Bild  $y \in Y$  zugeordnet wird, schreibt man  $x \xrightarrow{F} y$  oder  $x^F = y$  oder  $y = F(x)$  oder  $(x, y) \in F$ . Die letztgenannte Schreibweise, in der einander durch  $F$  zugeordnete Elemente als Partner *geordneter Paare* auftreten, läßt erkennen, daß eine A.  $F: X \rightarrow Y$  als Teilmenge des

*Kreuzproduktes*  $X \times Y$  (s. a. Kartesisches Produkt) aufgefaßt werden kann, denn dieses enthält alle geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $x \in X, y \in Y$ ;  $F \subseteq X \times Y$ .

Alle  $x \in X$ , denen durch  $F$  mindestens ein Element  $y \in Y$  zugeordnet wird, bilden den *Vorbereich* oder *Definitionsbereich*  $D(F)$  der A.  $F$ ; die Menge aller  $y \in Y$ , die als Bilder von Elementen  $x \in X$  auftreten, bezeichnet man als *Nachbereich* oder *Wertebereich*  $W(F)$  von  $F$ . Natürlich ist  $D(F) \subseteq X, W(F) \subseteq Y$ . Falls  $D(F) = X$ , spricht man von einer »A.  $F$  von  $X$  in  $Y$  bzw. auf  $Y$ « je nachdem, ob  $W(F) \subseteq Y$  oder  $W(F) = Y$ . Ist  $D(F) \subseteq X$ , so heißt  $F$  eine »A. aus  $X$  in  $Y$  bzw. auf  $Y$ «. Eine A. von  $X$  auf  $Y$  heißt *surjektiv* bzw. eine *Surjektion*. I. allg. kann ein Element  $x \in D(F)$  mehrere Bilder in  $Y$  haben; hat jedoch jedes Element  $x \in D(F)$  genau ein Bild  $F(x) \in W(F)$ , so heißt  $F$  eine *eindeutige A.*;  $F(x)$  wird dann auch als *Wert* von  $F$  an der Stelle  $x$  bezeichnet. Ist  $F$  eine eindeutige A. mit der Eigenschaft, daß auch umgekehrt jedes Bild  $y \in W(F)$  genau ein Original in  $X$  hat, so nennt man  $F$  *eindeutig*. Ist  $(x_1, y_1) \in F, (x_2, y_2) \in F$ , so gilt bei eindeutigem  $F: x_1 = x_2 \Leftrightarrow y_1 = y_2$ . Eine eindeutige A.  $F$  von  $X$  in  $Y$  heißt *injektiv* bzw. eine *Injektion*. Eine A.  $F: X \rightarrow Y$ ; die sowohl surjektiv als injektiv ist, heißt *bijektiv* oder *Bijektion*.

II. Zwei A.en  $F$  und  $G$  stimmen als Mengen genau dann überein, wenn sie die gleichen Elementepaare enthalten; d. h., wenn  $D(F) = D(G)$  und wenn für alle  $x \in D(F)$  gilt  $F(x) = G(x)$ . Erfüllt bei einer A.  $F: X \rightarrow Y$  ein Element  $x \in D(F)$  die Gleichung  $F(x) = x$ , so heißt  $x$  *Fixelement* von  $X$  bzgl.  $F$ .

*Beispiele:* II.1. Die A.  $F$ , die jeder reellen Zahl  $x$  ihr Quadrat  $x^2$  zuordnet, ist eine eindeutige, aber nicht eineindeutige A. der Menge der reellen Zahlen in sich.

II.2. Ist  $X$  die Menge aller Punkte der Peripherie eines Kreises der Ebene  $E$ ,  $Y$  die Menge aller Geraden in  $E$  und soll jedem Punkt  $x \in X$  die Tangente an den Kreis an der Stelle  $x$  zugeordnet werden, so wird durch diese A. die Menge  $X$  auf die Menge  $G$  aller Kreistangenten abgebildet. Das ist eine eindeutige A. von  $X$  in  $Y$ .

II.3. Die *ident. A.*  $I: X \rightarrow X$ , die eineindeutig ist und jedes Element  $x \in X$  auf sich selbst abbildet, ist bijektiv. Man bezeichnet  $I$  als die *Diagonale* von  $X \times X$ .

II.4. Ist  $y$  ein festes Element von  $Y$ , dann ist  $X \times \{y\}$  eine eindeutige A. von  $X$  in  $Y$ , die jedem  $x \in X$  dasselbe Element  $y \in Y$  zuordnet; sie wird *konstante A.* gen.

II.5. Die A.en  $P_1: X \times Y \rightarrow X$  und  $P_2: X \times Y \rightarrow Y$ , die durch  $(x, y) \rightarrow x$  bzw.  $(x, y) \rightarrow y$  definiert sind, heißen *Projektionen* von  $X \times Y$  auf  $X$  bzw.  $Y$ .  $P_1$  und  $P_2$  sind surjektive A.en.

II.6. Ist  $A$  eine Teilmenge von  $X$  und  $F$  eine A. von  $X$  in  $Y$ , so ist die Menge  $F \cap (A \times Y)$  eine A., die die *Einschränkung* von  $F$  auf die Menge  $A$  gen. und mit  $F|_A$  bezeichnet wird. Sie enthält mithin genau diejenigen geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $(x, y) \in F$  und  $x \in A$ , es gilt deshalb  $F|_A \subseteq F$ .

**III.** Betrachtet man die Menge  $G$  aller geordneten Paare  $(y, x)$ , wenn  $(x, y)$  ein Element einer A.  $F: X \rightarrow Y$  ist, so stellt  $G$  eine A. aus  $Y$  in  $X$  dar und heißt die zu  $F$  inverse A. Dann ist  $F$  auch die zu  $G$  inverse A., d. h.,  $F$  und  $G$  sind *zueinander invers*. Mit  $F$  ist auch  $G$  bijektiv und umgekehrt, man schreibt für  $G$  dann auch  $F^{-1}$ , und es gilt  $(F^{-1})^{-1} = F$ . Die ident. A.  $I$  (vgl. II.3.) ist zu sich selbst invers.

Für eindeutige A.en  $F: X \rightarrow Y$  und  $G: Y \rightarrow Z$  mit  $W(F) \cap D(G) \neq \emptyset$  wird eine *Verknüpfung*, die *Hintereinanderausführung*  $G \circ F$  der A.en  $F$  und  $G$  erklärt als A. von  $X$  in  $Z$  mit  $(G \circ F)(x) = G(F(x))$ , bei der für ein gegebenes  $x \in X$  genau dann  $(x, z) \in G \circ F$  gilt, wenn es ein  $y \in Y$  gibt mit  $(x, y) \in F$  und  $(y, z) \in G$ . Sind sowohl  $F$  als auch  $G$  injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, so ist auch  $G \circ F$  injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv. Für eine Bijektion  $F: X \rightarrow Y$  folgt  $F^{-1} \circ F = I_X$ , die ident. A. von  $X$ , und  $F \circ F^{-1} = I_Y$ , die ident. A. von  $Y$ . Sind  $n$  eindeutige A.en  $F_i: X_i \rightarrow Y_i$  gegeben mit  $D(F_i) = X_i$  und  $Y_i = X_{i+1}$  für  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , so kann man den Begriff der *Hintereinanderausführung* auf mehr als zwei A.en ausdehnen durch die Definition  $F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(x) = F_n(F_{n-1}(\dots F_1(x) \dots))$ . Die so definierte Verknüpfung ist assoziativ; für drei A.en  $F_1, F_2$  und  $F_3$  gilt  $(F_1 \circ F_2) \circ F_3 = F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$ , sofern die Produkte alle existieren. Die Menge aller Bijektionen  $F: X \rightarrow X$  bildet bzgl. der Hintereinanderausführung eine  $\nearrow$  Gruppe.

**IV.** Der Begriff der A. kann verallgemeinert werden zu einer *k-stelligen A.*  $F$  von  $X$  in  $Y$ ; d. h. zu einer A. von  $X \times X \times \dots \times X = X^k$  in  $Y$  für eine natürl. Zahl  $k > 0$ . Dabei wird durch  $F$  jedem  $k$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$  ein Element  $y \in Y$  zugeordnet. Ist die Urbildmenge  $X$  einer eindeutigen A.  $F: X \rightarrow Y$  die Produktmenge nicht notwendig verschiedener Mengen  $X_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ , gilt also  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , so wird durch  $F$  jedem  $n$ -Tupel von Elementen  $x_i$  mit  $x_i \in X_i$  eindeutig ein Element  $y \in Y$  zugeordnet (vgl. II.5.).

S. a. Funktion I.

**Abbildung, affine:** Abbildung eines  $\nearrow$  affinen Raumes  $R_n$  auf sich oder auf einen anderen  $\bar{R}_m$  bzw. in sich oder in einen anderen, die die *Geradlinigkeit*, die *Parallelität* und die *Teilverhältnisse* auf jeder Geraden erhält. Der Raum  $\bar{R}_m$  heißt der *Bildraum*, der Raum  $R_n$  der *Urbild- oder Originalraum*. Streckenlängen, Winkelgrößen, Flächeninhalte und Orientierung können bei affinen Abbildungen i. allg. geändert werden. Figuren können verzerrt, aber nicht zerrissen werden ( $\nearrow$  *Abbildung, topologische*). A. A.en sind *inzidenzerhaltend*. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so liegt sein Bildpunkt auf ihrer Bildgeraden. Figuren mit Mittelpunkt werden in Figuren mit Mittelpunkt abgebildet ( $\nearrow$  *Kegelechnit I.*). Sind die Urbildpunktmenge *beschränkt*, d. h., liegen sie ganz im Endlichen, so auch die Bildpunktmenge. Jeder a. A.  $T$  entspricht eine *lineare Abbildung*  $L$  der zu  $R_n$  und  $\bar{R}_m$  gehörenden *Vektorräume*  $V_n$  und  $\bar{V}_m$ ; d. h., eine Abbildung  $L$ , für die gilt

$L(\lambda v) = \lambda Lv$  und  $L(v + w) = Lv + Lw$ . Sie ist folgendermaßen gegeben: Ist  $v$  der Vektor  $PQ$ , so ist  $Lv$  der Vektor  $T(P)T(Q)$ . Die Bilder  $T(O)$  bzw.  $Lu_1, \dots, Lu_n$  des Ursprungs  $O$  bzw. der Basisvektoren  $u_1, \dots, u_n$  eines  $\nearrow$  *Parallelkoordinatensystems* im  $R_n$  mögen im Koordinatensystem  $O, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$  in  $\bar{R}_m$  die Koordinaten  $\epsilon_i$  bzw.  $c_{ij}$  haben, d. h., es gilt  $OT(O) = \sum_{i=1}^m c_i \bar{u}_i$  und  $Lu_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} \bar{u}_i$  für  $j = 1, \dots, n$ . Der Bildpunkt  $T(X)$  eines beliebigen Punktes  $X$  mit den Koordinaten  $x_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  im Koordinatensystem  $O; u_1, \dots, u_n$  des  $R_n$  hat dann die Koordinaten (1) im Koordi-

$$(1) \quad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + c_i, \quad i = 1, \dots, m$$

natensystem des  $\bar{R}_m$ . Für die Koordinaten  $\bar{v}_i$  des Bildvektors  $Lv$  eines beliebigen Vektors  $v$  gilt entsprechend (2).

$$(2) \quad \bar{v}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j, \quad i = 1, \dots, m$$

Diese *Abbildungsgleichungen* (1) und (2) der a. A. vermitteln also in jedem beliebigen Parallelkoordinatensystem eine *ganze lineare Transformation* der Koordinaten der Punkte und Vektoren, die charakteristisch für eine a. A. ist. In Matrixschreibweise sind (1'), (2') die Abbildungsgleichungen mit  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)^T$ ,  $C = (c_{ij})$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ ,  $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)^T$  und  $c = (c_1, \dots, c_m)^T$ .

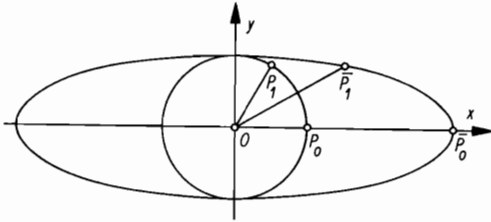
$$(1') \quad \bar{x} = Cx + c$$

$$(2') \quad \bar{v} = Cv$$

Dabei bezeichnet man  $c$  als *Translationsvektor* und  $C$  als *Abbildungsmatrix*. Auf jeden Punkt  $\bar{X}$  von  $\bar{R}_m$ , der überhaupt Bildpunkt ist, werden alle Punkte eines  $d$ -dimensionalen *Teitraumes*  $U_d(\bar{X})$  von  $R_n$  abgebildet. Dabei ist  $d = n - \text{Rang } C$  ( $\nearrow$  *lineares Gleichungssystem I.*).  $U_d(\bar{X})$  entspricht ein einziger *Unterraum*  $V_d$  des zu  $R_n$  gehörenden Vektorraumes  $V_n$ . Er besteht aus allen Vektoren, die bei  $L$  auf den Nullvektor abgebildet werden, und heißt der *Kern* von  $L$ . Genau dann, wenn der Kern nur aus dem Nullvektor besteht, ist die a. A. *umkehrbar eindeutig*, denn dann ist  $d = 0$ , also  $\text{Rang } C = n$  und infolgedessen  $C$  eine reguläre Matrix, d. h. eine quadratische Matrix mit nichtverschwindender Determinante. Häufig wird von a. A.en gefordert, daß sie umkehrbar eindeutig sein sollen, d. h. daß ihre Abbildungsmatrix regulär ist. *Beispiel:* Bei der a. A.  $\bar{x} = 2x - 2y + 1, \bar{y} = x - y$  treten nur die Punkte der Geraden  $\bar{x} - 2\bar{y} - 1 = 0$  als Bildpunkte auf. Es ist  $n = 2$  und  $\text{Rang } C = 1$ , also  $d = 1$ . Auf den Punkt  $\bar{X}(1, 0)$  werden alle Punkte der Geraden  $x - y = 0$  abgebildet. Der Raum der Vektoren  $v = (v, v)$  ist der Kern der Abbildung. Ist  $n = 2$ , d. h., ist  $R_n$  eine Ebene, so lauten die Abbildungsgleichungen

$$(1'') \quad \bar{x} = c_{11}x + c_{12}y + c_1, \quad \bar{y} = c_{21}x + c_{22}y + c_2.$$

$|C| \neq 0$  bedeutet dann  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$ . Eine umkehrbar eindeutige a. A. der Ebene ist durch die Vorgabe dreier nicht auf einer Geraden liegender Punkte und die Angabe ihrer nicht auf einer Geraden liegenden Bildpunkte eindeutig bestimmt. Dieser Satz gilt entsprechend formuliert auch allgemein für a. A.en des  $R_n$ . *Beispiel:* Die Abbildungsgleichungen (1) seien  $\bar{x} = 3x$ ,  $\bar{y} = y$ . Der Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 4$  wird auf die Ellipse mit der Gleichung  $\bar{x}^2/36 + \bar{y}^2/4 = 1$  abgebildet (Abb. 1).



Abbildung, affine. Abb. 1: Abbildung des Kreises mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 4$  auf die Ellipse mit der Gleichung  $\bar{x}^2/36 + \bar{y}^2/4 = 1$

Das Streckungsverhältnis auf den Geraden durch den Nullpunkt ist unterschiedlich. Es hat zwei Extremwerte, hier in Richtung der x- und der y-Achse. Die Strecke  $OP_1$  mit  $P_1(1, \sqrt{3})$  der Länge 2 geht über in die Strecke  $OP_1$  mit  $P_1(3, \sqrt{3})$  der Länge  $2\sqrt{3}$ , der Winkel  $\sphericalangle P_0OP_1$  von  $60^\circ$  in den  $\sphericalangle P_0\bar{O}\bar{P}_1$  von  $30^\circ$ . Die Menge aller umkehrbar eindeutigen a. A.en affiner Räume enthält folgende Untermengen:

- I. die orientierungserhaltenden a. A.en,
- II. die inhaltserhaltenden a. A.en,
- III. die Ähnlichkeitsabbildungen,
- IV. die metrischen a. A.en,
- V. die Bewegungen,
- VI. die Verschiebungen,
- VII. die Umlegungen.

Die umkehrbar eindeutigen a. A.en eines  $R_n$  auf sich bilden eine Gruppe ( $\sphericalangle$  Erlanger Programm). Die Verknüpfung in dieser Gruppe ist die NacheinanderAusführung zweier solcher Abbildungen. Das *Eins-element* in dieser Gruppe ist die *identische Abbildung*, die jeden Punkt fest läßt. Die den a. A. I bis VI entsprechenden Untermengen dieser Gruppe sind Untergruppen, die Umlegungen bilden jedoch keine Gruppe.

I. Die orientierungserhaltenden a. A.en sind durch  $|C| > 0$  charakterisiert.

II. Die inhaltserhaltenden a. A.en werden durch  $|C| = \pm 1$  beschrieben.

III. Ähnlichkeitsabbildungen, auch äquiforme Abbildungen gen., sind die a. A.en, bei denen alle Winkelbeträge und Längenverhältnisse fest bleiben. Es genügt, eines von beiden zu fordern. Die andere Eigenschaft ist dann auch erfüllt. Für Ähnlichkeitsabbildungen muß im  $R_n$  eine Winkel- oder Längenmessung eingeführt sein, etwa durch die Angabe eines *Skalarprodukts*. Eine a. A. ist genau dann eine Ähnlichkeitsabbildung, wenn die *Abbildungsmatrix*

$C$  bzgl. kartesischer Koordinaten das Produkt einer Zahl  $\lambda > 0$  mit einer orthogonalen Matrix ist, d. h., wenn  $CC^T = \lambda^2 E$  ist. Für die Ebene bedeutet das  $c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0$  und  $c_{11}^2 + c_{12}^2 = c_{21}^2 + c_{22}^2 = \lambda^2$ . Die Gleichungen  $\bar{x} = 2x - 3y$ ,  $\bar{y} = 3x + 2y$  sind z. B. die einer Ähnlichkeitsabbildung der Ebene mit  $\lambda = \sqrt{13}$ . Ein Kreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  wird in einen Kreis mit der Gleichung  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 13$  abgebildet, und die Zahl  $\lambda$  ist das für alle Strecken gleiche Verhältnis der Längen von Bild- und Urbildstrecke. Eine *Dehnung* oder *Streckung* bzw. eine *Stauchung* ist eine Ähnlichkeitsabbildung, bei der ein Punkt fest bleibt und alle an diesem Punkt beginnenden Strecken auf das  $\lambda$ -fache verlängert bzw. verkürzt werden. Ist der *Fixpunkt* der Nullpunkt, so lauten die Abbildungsgleichungen  $\bar{x}_i = \lambda x_i$  für  $i = 1, \dots, n$  bzw.  $\bar{x} = \lambda x$  mit  $|\lambda| > 1$  für Dehnungen und  $0 < |\lambda| < 1$  für Stauchungen. Jede Ähnlichkeitsabbildung läßt sich zusammensetzen aus einer Streckung oder Stauchung und einer metr. a. A.

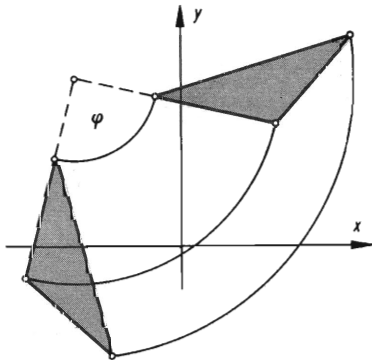
IV. Metr. a. A.en sind Ähnlichkeitsabbildungen, für die  $\lambda = 1$  ist. Bei diesen bleiben alle Längen, Winkelbeträge und Inhalte erhalten. Es genügt, die Längentreue allein zu fordern; dann sind auch die anderen Eigenschaften erfüllt. Figuren ändern nur ihre Lage; Form und Ausdehnung bleiben erhalten. Es sind *Kongruenzabbildungen*. Eine a. A. ist genau dann eine metr. a. A., wenn die *Abbildungsmatrix*  $C$  bzgl. kartes. Koordinatensysteme eine *orthogonale Matrix* ist, d. h., wenn  $CC^T = E$  ist. Für die Ebene bedeutet das  $c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0$  und  $c_{11}^2 + c_{12}^2 = c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1$ ; z. B. sind  $\bar{x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\sqrt{3} + 1$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 2$  die Abbildungsgleichungen für eine metr. a. A. in der Ebene. Für metr. a. A.en gilt  $|C| = \pm 1$ , weil  $C$  orthogonal ist. Die Abbildungsmatrix einer metr. a. A. der Ebene läßt sich immer in einer der Formen (3) schreiben.

$$(3) \quad C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \mp \sin \varphi \\ \sin \varphi & \pm \cos \varphi \end{pmatrix}$$

V. Bewegungen sind metr. a. A.en, für deren orthogonale Abbildungsmatrix die Determinante  $|C| = 1$  ist, bei denen deshalb alle Längen, Winkelgrößen, Inhalte und die Orientierung erhalten bleiben. Es genügt, die Längentreue und die Erhaltung der Orientierung allein zu fordern, dann sind die anderen Eigenschaften auch erfüllt. Bei Bewegungen ändern Figuren nur ihre Lage. Form, Ausdehnung und Durchlaufsinne bleiben erhalten. Für den Fall  $n = 2$  der Ebene bedeutet  $|C| = 1$ , daß  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$  ist. Jede Bewegung einer Ebene läßt sich durch die Abbildungsgleichungen  $\bar{x} = x \cos \varphi - y \sin \varphi + c_1$ ,  $\bar{y} = x \sin \varphi + y \cos \varphi + c_2$  beschreiben. Diese Bewegung ist genau dann eine *Verschiebung*, wenn  $\varphi = 0$  ist. Ist  $\varphi \neq 0$ , so ist diese ebene Bewegung eine *Drehung* um den Drehwinkel  $\varphi$  (Abb. 2). Bei einer solchen Drehung bleibt genau ein Punkt bei der Bewegung fest ( $\sphericalangle$  Fixelemente). Es ist der *Drehpunkt*. *Beispiel:*  $\bar{x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\sqrt{3} + 1$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{2}x\sqrt{3} + \frac{1}{2}y - 2$  sind die Abbildungsgleichungen für eine Bewegung in der Ebene. Es ist



$\varphi = 60^\circ$ , und der Drehpunkt ist der Punkt mit den Koordinaten  $(\sqrt{3} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)$ . Ist  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 0$ , so ist der Drehpunkt der Nullpunkt. *Jede Drehung läßt sich zusammensetzen aus einer Drehung um den Nullpunkt und einer Verschiebung* (↗ Spiegelung IV.). Bei Bewegungen des dreidimensionalen Raumes gibt es mindestens einen Fixvektor (↗ Fixelemente), d. h., es bleibt eine Richtung fest. Die Bewegung erfolgt entlang einer Geraden bzw. um eine Drehachse, die diese Richtung hat. Sie ist entweder eine Verschiebung entlang dieser Achse oder eine Drehung um sie oder eine Schraubung um diese Achse. Eine Drehung ist unter den Bewegungen des dreidimensionalen Raumes dadurch charakterisiert, daß die Drehachse punktweise fest bleibt. Man kann diese Drehung auch als eine Drehung um einen Punkt dieser Achse auffassen. Eine Drehung ist beschrieben durch die Angabe der Richtung der Drehachse und den Drehwinkel  $\varphi$ , um den um die Achse gedreht wird. Die Richtung dieser Achse kann durch einen Einheitsvektor bzw. durch die Kosinus der Winkel zwischen Drehachse und Koordinatenachsen angegeben werden (↗ Richtungskosinusse). Die Verwendung dieser Größen gestattet eine besonders elegante Beschreibung der Drehung durch Quaternionen. Die Drehung um einen

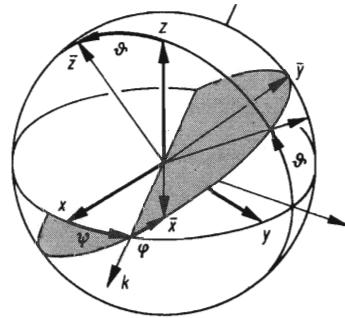


Abbildung, affine. Abb. 2: Drehung in der Ebene

Punkt kann auch beschrieben werden durch die Lage der Bilder der Koordinatenachsen zu den Koordinatenachsen. Ist der Drehpunkt der Ursprung und schneiden sich die  $x,y$ -Ebene und die  $\bar{x},\bar{y}$ -Ebene in einer Geraden  $k$ , so ist dies durch die Angabe der *Eulerschen Winkel* möglich (Abb. 3): Der *Nutationswinkel*  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen den positiven  $z$ - und  $\bar{z}$ -Achsen,  $0 < \vartheta < \pi$ . Der *Präzessionswinkel*  $\psi$  ist der Winkel zwischen der positiven  $x$ -Achse und der Schnittgeraden  $k$ . Dabei soll  $k$  so orientiert sein, daß die  $z$ -Achse,  $\bar{z}$ -Achse und  $k$  dieselbe Orientierung wie das Koordinatensystem haben und  $\psi$  von der  $x$ -Achse aus in Richtung zur  $y$ -Achse gemessen wird,  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Der Winkel  $\varphi$  ist der Winkel zwischen  $k$  und der  $\bar{x}$ -Achse,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

VI. *Verschiebungen, auch Translationen gen., sind Bewegungen, für die die Abbildungsmatrix C die*

*Einheitsmatrix ist. Die Abbildungsgleichungen lauten in Matrizenform  $\bar{x} = x + c$ , in Koordinaten für den  $n$ -dimensionalen Raum  $\bar{x}_i = x_i + c_i$ , für den dreidimensionalen Raum  $\bar{x} = x + a$ ,  $\bar{y} = y + b$ ,  $\bar{z} = z + c$  und für die Ebene  $\bar{x} = x + a$ ,  $\bar{y} = y + b$ .*



Abbildung, affine. Abb. 3: Eulersche Winkel,  $\vartheta$  Nutationswinkel,  $\psi$  Präzessionswinkel,  $\varphi = \sphericalangle(k, \bar{x})$

Dabei ist  $c$  der *Translationsvektor*, um den jeder Punkt des Raumes verschoben wird. Ist  $c = 0$ , bzw. sind  $a = 0$ ,  $b = 0$  und  $c = 0$ , so ist die Abbildung keine eigentliche Verschiebung sondern die *identische Abbildung*. Alle Punkte bleiben fest. Bei einer Verschiebung bleibt jeder Vektor fest (↗ Fixelement I.), bei einer eigentl.en Verschiebung jedoch kein Punkt.

VII. *Umlegungen, auch Umklappungen gen. (↗ Spiegelung I.), sind metr. a. A.en, für die  $|C| = -1$  ist. Bei ihnen bleiben Längen, Winkelbeträge und Inhalte erhalten, und die Orientierung wird umgekehrt. Es genügt, die Längentreue und die Umkehrung der Orientierung allein zu fordern. Dann sind die anderen Eigenschaften auch erfüllt. Bei Umlegungen ändern Figuren i. allg. ihre Lage und die Orientierung. Form und Ausdehnung bleiben erhalten. Für den Fall  $n = 2$  der Ebene bedeutet  $|C| = -1$ , daß  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = -1$  ist. Jede Umlegung einer Ebene läßt sich durch die Abbildungsgleichungen (4) beschreiben. Dabei ist  $\varphi/2$  der*

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \varphi + y \sin \varphi + c_1, \\ \bar{y} &= x \sin \varphi - y \cos \varphi + c_2 \end{aligned}$$

Winkel zwischen Spiegelachse und  $x$ -Achse. Die *Spiegelachse*  $g$  (s. a. Spiegelung I.) ist diejenige Gerade, die bei der Umlegung fest bleibt (↗ Fixelemente). Sie muß nicht notwendig punktweise fest bleiben. Bleibt  $g$  punktweise fest, ist die Umlegung (4) eine *Spiegelung* an  $g$ . Verschieben sich die Punkte von  $g$  entlang der Geraden  $g$ , so ist (4) eine *Gleit Spiegelung* (↗ Spiegelung IV.), die man sich aus einer reinen Spiegelung an  $g$  und einer Verschiebung entlang  $g$  erzeugen kann (Abb. ↗ Spiegelung). *Beispiel:*  $\bar{x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\sqrt{3} + 1$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}y - 2$  sind die Abbildungsgleichungen für eine Umlegung in der Ebene. Es ist  $\varphi = 60^\circ$ . Sie ist eine Gleit Spiegelung. Eine Gleichung der Gleit- und Spiegelachse ist  $2x\sqrt{3} - 6y$

$-\sqrt{3} - 6 = 0$ . Sind  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 0$ , so führt  $g$  durch den Ursprung. Die Umlegung (4) ist dann eine reine Spiegelung, aber nicht nur dann. Für  $\varphi = 0$  ist diese die Spiegelung an der  $x$ -Achse, für  $\varphi = \pi$  die an der  $y$ -Achse. Für jede Umlegung im dreidimensionalen Raum gibt es einen Vektor  $v$ , der in seinen entgegengesetzten  $-v$  übergeht. Er ist *Stellungsvektor* der *Spiegelebene*  $E$ .  $E$  ist eine Ebene, die bei der Umlegung fest bleibt. Bleibt  $E$  punktweise fest, so ist die Umlegung eine reine *Spiegelung* an dieser Spiegelebene. Bleibt genau ein Punkt  $P$  der Spiegelebene fest, so ist die Umlegung eine *Drehspiegelung* ( $\nearrow$  Spiegelung V.), die man sich erzeugt denken kann aus einer reinen Spiegelung an  $E$  und einer Drehung um eine auf  $E$  senkrecht stehende durch  $P$  gehende Achse. Bleibt kein Punkt fest, so ist die Umlegung eine *Gleitspiegelung*, die man sich erzeugt denken kann aus einer reinen Spiegelung an  $E$  und einer Verschiebung entlang  $E$ . Imaginäre a. A.  $\nearrow$  Hyperbel III.

**Abbildung, isometrische** svw. Isometrie, s. a. Räume, isometrische.

**Abbildung, lineare**  $\nearrow$  lineare Abbildung.

**Abbildung, topologische**, auch *Homöomorphismus*: Abbildung  $f$ , die jedem Punkt  $p$ , dem *Urbild*, aus einer Figur  $F$  einen Bildpunkt  $f(p)$  aus der Figur  $F'$  zuordnet, in Zeichen  $f: F \rightarrow F'$ ; dabei soll jeder Punkt aus  $F'$  Bildpunkt eines Punktes aus  $F$  sein, aus  $p \neq q$  soll stets folgen, daß  $f(p) \neq f(q)$ , und sowohl  $f$  als auch die inverse Abbildung  $f^{-1}$  sollen stetig sein. Liegen die Figuren  $F$  und  $F'$  in einem metrischen Raum, so heißt eine solche *Abbildung stetig*, falls sie die Figur  $F$  nicht zerreißt, d. h., daß sie Punkte  $p, q$ , die in  $F$  genügend nahe beieinanderliegen, in nahe beieinanderliegende Punkte  $f(p), f(q)$  aus  $F'$  überführt, so daß zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon > 0$  eine positive Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  mit der Eigenschaft existiert, daß zwei Urbilder  $p, q$  mit einem Abstand  $d(p, q) < \delta(\varepsilon)$  durch  $f$  in Bildpunkte  $f(p), f(q)$  mit dem Abstand  $d[f(p), f(q)] < \varepsilon$  übergeführt werden. Um zu verhindern, daß die Abbildung  $f$  in  $F$  getrennte Teile in  $F'$  verheft oder Löcher in  $F'$  schließt, wird gefordert, daß auch die inverse Abbildung  $f^{-1}$  stetig ist. In einem *topologischen Räume* wird eine t. A.  $y = f(x)$ , die  $R$  in  $R'$  abbildet und weder Löcher aufreißt noch schließt, *lokal stetig* gen. und von ihr folgendes gefordert: jede Umgebung  $U \in U(x)$  eines Punktes  $x \in R$  wird abgebildet in eine Umgebung  $V \in U(y)$  des Bildpunkts durch  $f(U) \subseteq V$ , und zugleich wird durch die inverse Funktion  $f^{-1}(V) \subseteq U(x)$  jede Umgebung  $V \in U(y)$  des Bildpunkts auf eine Umgebung  $U \in U(x)$  des Urbildes abgebildet. Dabei werden mit  $U(x)$  bzw.  $U(y)$  Systeme von Teilmengen in  $R$  bzw.  $R'$  bezeichnet. Die Abbildung  $f$  heißt *global stetig* oder *stetig* in  $R$ , wenn  $f$  für jedes  $x \in R$  stetig ist. Gleichbedeutend damit ist die Forderung, daß die Urbildmenge  $f^{-1}(S')$  jeder offenen Menge  $S' \subseteq R'$  offen ist oder die Urbildmenge jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen ist. Zwei Figuren  $F$  und  $F'$ , die sich durch eine t. A. ineinander überführen lassen, heißen *topologisch äquivalent* oder *homöomorph*. Eine Vollkugel und ein Würfel sind

z. B. stets homöomorph, während von den drei Figuren Torus, Vollkugel und Kugelschale keine zwei topologisch äquivalent sind. Um festzustellen, ob zwei Figuren  $F$  und  $F'$  homöomorph sind, d. h., ob eine t. A. von  $F$  auf  $F'$  existiert, können z. B. die Zusammenhangsverhältnisse der Figuren  $F$  und  $F'$  untersucht werden ( $\nearrow$  Bettische Zahlen). Aus anschaul. Prinzipien sind die *Homologietheorie* und die *Homotopietheorie* entwickelt worden.

**Abbildungsmatrix**  $\nearrow$  Abbildung, affine.

**Abbüschung**  $\nearrow$  Böschungsaufgaben.

**Abbruchfehler**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichungen III.

**Abel**, Niels Henrik, geb. 5. 8. 1802 Findö als Sohn eines Dorfpfarrers, gest. 6. 4. 1829 Kristiania (Oslo). — Während seines Studiums in Kristiania untersuchte A. die Lösbarkeit der Gleichung 5. Grades in Radikalen. Ausgehend von seiner vermeintlichen eigenen Lösung bewies er 1824 die *Unmöglichkeit der Auflösung von Gleichungen von höherem als dem vierten Grade* in Radikalen. Das Stipendium für diese Leistung machte ihm Reisen nach Berlin, Italien und Frankreich möglich. Danach war er an der Universität von Kristiania tätig und starb an Tuberkulose, wenige Tage bevor die Berufung als Professor an die Universität Berlin eintraf. — Neben seinem Unmöglichkeitssatz fand A. die heute nach ihm benannten Gleichungen, entwickelte eine Theorie der *algebraischen Funktionen* und untersuchte die Konvergenz unendlicher Reihen. Mit JACOBI ist A. der Begründer der *Theorie der ellipt. Funktionen*, da GAUSS seine Ergebnisse nicht veröffentlicht hatte.

**abelsche Gruppe**  $\nearrow$  Gruppe I.

**abelsche partielle Summation**: eine durch den Ausdruck (1) für  $m \geq 0$  und  $n \geq m$  gegebene Umgruppierung der Summe  $\sum_{k=m}^n a_k b_k \equiv a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \dots + a_n b_n$ . Dabei sind  $(a_k)$  und  $(b_k)$  irgend zwei vorgegebene Zahlenfolgen und  $A_k := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$  für  $k \geq 0$ ,  $A_{-1} := 0$ . Im Falle  $m = 0$  nimmt (1) die Form (2) an. Als Anwendung der a. p. S. ergibt sich das *Abelsche Konvergenzkriterium*

$$(1) \quad \sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^n A_k (b_k - b_{k+1}) - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1}$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$$

für unendl. Reihen: *Eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$  ist dann konvergent, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$  und die Zahlenfolge  $(A_n b_{n+1})$  konvergent sind, oder spezieller: Eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$  ist dann konvergent, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent und die Zahlenfolge  $(b_n)$  monoton und beschränkt sind.* Der Erfolg dieses Kriteriums hängt wesentlich davon ab, wie man eine gegebene Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  in eine

Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$  zerlegt. Auf die Reihe (3) mit  $|q| < 1$  läßt sich das Abelsche Kriterium anwenden, wenn man  $a_k = q^k, b_k = (1 + 1/k)^k$  setzt. Für  $|q| < 1$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ , und die Zahlenfolge  $(b_k)$  ist monoton und beschränkt ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen). Daher konvergiert (3) nach dem Abelschen Kriterium.

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (q + q/k)^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k (1 + 1/k)^k$$

**Abelscher Stetigkeitssatz**  $\nearrow$  Potenzreihe VIII.  
**Abelsches Konvergenzkriterium**  $\nearrow$  abelsche partielle Summation.

**abgeschlossene Menge**  $\nearrow$  Menge IV.,  $\nearrow$   $n$ -dimensionaler reeller Punktraum.

**abhängige Variable**  $\nearrow$  Funktion II.

**Abhängigkeit, funktionale**: Eigenschaft von  $n$  Funktionen  $y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  der  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , die einen gemeinsamen Definitionsbereich  $D(f)$  haben und in ihm einmal stetig partiell differenzierbar sind, daß ihre  $\nearrow$  Funktionaldeterminante Null ist. Ist die Funktionaldeterminante in  $M \subseteq D(f)$  nicht Null, so sind die Funktionen  $f_i$  *funktional unabhängig*, und die *Zuordnung* zwischen den inneren Punkten von  $M$  und den Funktionswerten der  $f_i$  für jeden Index  $i$  ist in einer genügend kleinen Umgebung der Punkte *eindeutig*. Sind für  $i = 1, 2, \dots, n$  die  $n$  Funktionen  $f_i$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit den Gleichungen  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  sowie die  $n$  Funktionen  $x_i = \varphi_i(z_1, \dots, z_n)$  der  $n$  Variablen  $z_1, \dots, z_n$  gegeben und ist jede dieser  $2n$  Funktionen einmal stetig partiell differenzierbar, so existieren die Funktionaldeterminante der  $f_i$  und die der  $\varphi_i$ . Werden dann in den Funktionen  $f_i$  für die Variablen  $x_j$  mit  $j = 1, 2, \dots, n$  die Funktionen  $\varphi_j$  eingesetzt, so erhält man nach (1) die  $n$  Funktionen  $g_i$  der  $n$  Variablen  $z_1, \dots, z_n$ , für deren Funktionaldeterminante der **Produktsatz** (2) gilt.

$$(1) \quad g_1 = f_1(\varphi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \varphi_n(z_1, \dots, z_n)), \dots, \\ g_n = f_n(\varphi_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \varphi_n(z_1, \dots, z_n))$$

$$(2) \quad \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}$$

Für  $n = 1$  folgt hieraus die Kettenregel für die Differentiation einer Funktion von einer Funktion.

Ist die Anzahl  $k$  der betrachteten Funktionen  $f_i$  mit  $i = 1, \dots, k$  kleiner als die Anzahl  $n$  der Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , dann sind diese Funktionen funktional unabhängig, falls die Funktionalmatrix den Rang  $k$  hat. Die Anzahl der unabhängigen Funktionen wird stets durch den *Rang ihrer Funktionalmatrix* angegeben. Ist  $k$  größer als die Anzahl  $n$  der Variablen, dann können somit höchstens  $n$  unter den  $k$  Funktionen funktional unabhängig sein.

**Abhängigkeit, lineare**  $\nearrow$  lineare Abhängigkeit.

**Abhängigkeitsgebiet**  $\nearrow$  hyperbolische Differentialgleichung I.

**Ablehnungsbereich**  $\nearrow$  Signifikanztest.

**Ableitung** svw. Differentialquotient.

**Ableitung, erste**  $\nearrow$  Differentialquotient I.

**Ableitung, gemischte**  $\nearrow$  Differentialquotient, partieller, I.

**Ableitung, logarithmische**  $\nearrow$  Differentiationsregeln VIII.

**Ableitung, partielle**  $\nearrow$  Differentialquotient, partieller.

**Ableitungsgleichungen**  $\nearrow$  Frenetsche Formeln.

**abrunden**  $\nearrow$  Runden.

**Absehluß**  $\nearrow$  Menge IV.

**absolute Geometrie**: vom Parallelenaxiom unabhängiger Teil der elementaren Geometrie, der damit allerdings in seinem Umfang nicht genau abgegrenzt ist; meist versteht man darunter die Menge aller der Folgerungen, die sich aus einem um das Parallelenaxiom verminderten Axiomensystem der euklid. Geometrie ergeben.

**absolute Häufigkeit**  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses.

**absolute Konvergenz**: I. Eigenschaft einer Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , daß sogar die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  aus den Beträgen ihrer Glieder konvergiert. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen II.) folgt aus der a. K. die Konvergenz der gegebenen Reihe. Die Reihe (1) konvergiert nach dem Leibnizschen Kriterium ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen IV.), hingegen ist die Reihe (2) aus den Beträgen der Glieder von (1) die harmon. Reihe und daher divergent. Reihe (1) ist nicht absolut konvergent. Die Reihe (3) dagegen ist für  $\alpha > 1$  absolut konvergent wegen  $|a_k| \leq 1/k^\alpha$  nach dem Majorantenkriterium.

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad (2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta k)}{k^\alpha}$$

**II.** Kommt jede natürl. Zahl 1, 2, 3, ... in der Folge  $n_1, n_2, n_3, \dots$  von natürl. Zahlen genau einmal vor, so heißt  $n_1, n_2, n_3, \dots$  eine Umordnung der Folge

1, 2, ... der natürl. Zahlen. Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine beliebige

Reihe und setzt man  $a_k' = a_{n_k}$ , so nennt man  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$  eine *Umordnung der Reihe*  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Im Unter-

schied zu endl. Summen reeller Zahlen, für die das *Kommutativgesetz* gilt, können sich bei unendl. Reihen das Konvergenzverhalten und die Summe durch Umordnung der Reihenglieder ändern. Ein Beispiel dafür ist die konvergente Reihe (1) und eine ihrer Umordnungen, deren Summen in (4) bzw. (4a) abgeschätzt werden.

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - 1/2 + 1/3 - (1/4 - 1/5) \\ \dots \leq 1 - 1/2 + 1/3 = 10/12$$

$$(4a) \quad (1 + 1/3 - 1/2) + (1/5 + 1/7 - 1/4) \\ + (1/9 + 1/11 - 1/6) + \dots \geq 5/6 + 13/140 \\ = 389/420 > 11/12.$$

Bei der Abschätzung wurde benutzt, daß alle Klammern  $[1/(2k - 1) + 1/(2k + 1) - 1/(k + 1)]$  positiv sind.

Wenn eine konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  dagegen die Eigenschaft hat, daß auch jede Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$  von ihr konvergiert und immer dieselbe Summe hat, so spricht man von *unbedingter Konvergenz der Reihe*. Andernfalls heißt die Reihe, wie z. B. die in (1) betrachtete, *bedingt konvergent*. Es gelten folgende Sätze:

**II.1.** *Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung der Reihe wieder konvergent und hat dieselbe Summe wie die Ausgangsreihe.* Die Begriffe absolut konvergent und unbedingte konvergent sind äquivalent.

**II.2. Satz von Riemann:** *Ist die Reihe  $\sum a_n$  bedingt konvergent und  $\sigma$  eine beliebig vorgegebene reelle Zahl, so kann man die Glieder der Reihe so umordnen, daß die umgeordnete Reihe konvergiert und die Summe  $\sigma$  hat.*

**III.** Die *Multiplikation* von zwei Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  könnte in Analogie zu endl. Summen erklärt werden als Summe aller mögl. Produkte  $a_n b_m$  mit  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ . Ordnet man diese Produkte zu einer unendl. Matrix (5) an, so können die Glieder beim Summieren nach Diagonalen wie in (5a), nach Quadraten wie in (5b) oder anderweitig angeordnet werden.

$$(5) \begin{matrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

$$(5a) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \equiv a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

$$(5b) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \equiv a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + a_1 b_0 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_0 + \dots$$

Man spricht nur dann vom *Produkt der Reihen*, wenn alle diese mögl. Produktreihen konvergieren und dieselbe Summe haben. Das ist offenbar der Fall, wenn eine dieser Produktreihen absolut konvergiert. Dafür ist die a. K. der Ausgangsreihen hinreichend, wie der *Satz von Cauchy* zeigt: *Sind die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  mit den Summen  $A$  bzw.  $B$  beide absolut konvergent, so existiert das Produkt der beiden Reihen, und es gilt (6), die man oft als *Cauchysche Produktformel* bezeichnet.*

$$(6) A \cdot B = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k a_s b_{k-s} \right)$$

Ihr liegt das Aufsummieren aller Produkte  $a_n b_m$  nach dem *Diagonalverfahren* in der Produktmatrix

(5) zugrunde, deren erste Glieder lauten:  $k = 0: a_0 b_0, k = 1: a_0 b_1 + a_1 b_0, k = 2: a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$ .

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  z. B. ist für alle  $x$  absolut konvergent und hat die Summe  $e^x$  ( $\nearrow$  Taylorsche Reihe). Deshalb kann man in (7) die Cauchysche Produktformel anwenden und erhält das *Additionstheorem der Exponentialfunktion*  $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ . Dagegen wird das Produkt zweier Reihen ohne die Voraussetzung der a. K. wenigstens einer der beiden Reihen i. allg. nicht existieren, wie das formal gebildete Quadrat der in (8) betrachteten Reihe zeigt, in der die Produktreihe divergent ist, da sie wegen (9) bereits ein notwendiges Konvergenzkriterium verletzt.

$$(7) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k \frac{x^s y^{k-s}}{s!(k-s)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} x^s y^{k-s} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

$$(8) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{s=1}^k \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{s} \sqrt{k-s+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \left( \sum_{s=1}^k \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{k-s+1}} \right)$$

$$(9) \sum_{s=1}^k \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{k-s+1}} \geq \frac{k}{\sqrt{k} \sqrt{k}} = 1$$

S. a. *Integral, uneigentliches, IV.*; *Potenzreihe IV. absolute Momente*  $\nearrow$  *Momente I.*

**absoluter Betrag:** Funktion, die jeder reellen Zahl  $a$  eine nichtnegative reelle Zahl  $|a|$  zuordnet, wobei  $|a| = a$  für  $a \geq 0, |a| = -a$  für  $a < 0$ ; z. B. ist  $|+5| = +5$  und  $|-5| = +5$ . Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, haben denselben a. B. Der a. B. einer *komplexen Zahl*  $a + bi$  ist  $+\sqrt{a^2 + b^2}$ . Bei der Darstellung einer reellen oder komplexen Zahl als Punkt in einem ebenen Koordinatensystem bedeutet der a. B. geometrisch den positiv gemessenen Abstand dieses Punktes vom Koordinatenanfangspunkt ( $\nearrow$  *Gaußsche Zahlenebene II.*). Die Regel, daß der a. B. eines Produktes gleich dem Produkt der absoluten Beträge der Faktoren ist, schreibt man  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ . In der Zahlentheorie werden neben dem a. B. andre Arten von Beträgen betrachtet, die *p-adischen Bewertungen*. S. a. *Dreiecksungleichung.*

**absolute Redundanz**  $\nearrow$  *Redundanz I.*

**absolutes Extremum**  $\nearrow$  *Extremwert I.,*  $\nearrow$  *Variationsrechnung I.*

**absolutes Glied**  $\nearrow$  *kubische Gleichung I.,*  $\nearrow$  *quadratische Gleichung I.,*  $\nearrow$  *lineare Gleichung I.,*  $\nearrow$  *lineares Gleichungssystem I.*

**absolut stetig**  $\nearrow$  *Lebesguesches Integral V.*

**Abspalte-Methode**  $\nearrow$  *Reihendarstellung II.3.*

**Abstand**  $\nearrow$  *Geradengleichung IV.,*  $\nearrow$  *n-dimensionaler reeller Punktraum,*  $\nearrow$  *Raum, metrischer, I.*

**Abstandsfunktion**  $\nearrow$  *Raum, metrischer, I.*

**Abstand windschiefer Geraden** ↗ Lotgerade IV.  
**Abstand zweier Punkte A und B:** Länge der durch A und B bestimmten Strecke.

**Abstiegsverfahren:** Methoden zur Ermittlung des Minimums einer stetigen Funktion  $F(x)$  mehrerer Variabler mit oder ohne Nebenbedingungen; für die Maximumsuche werden entsprechende *Aufstiegsverfahren* verwendet, oder es wird das Minimum der mit  $-1$  multiplizierten Funktion gesucht. Die Verfahren beginnen damit, an einem allen Nebenbedingungen genügenden Punkt  $x^{(1)}$  mit dem Wert  $F(x^{(1)})$  eine Richtung mit dem Richtungsvektor  $s^{(1)}$  zu wählen, die *brauchbar* ist, weil für hinreichend kleine  $\lambda > 0$  gilt  $F(x^{(1)} + \lambda s^{(1)}) < F(x^{(1)})$ , die aber auch *zulässig* ist (↗ Optimierung I.), weil  $x^{(1)} + \lambda s^{(1)}$  noch den Nebenbedingungen genügt. In einem A. ohne Nebenbedingungen sind alle Punkte zulässig. Ist  $F(x)$  differenzierbar, so ist  $s^{(1)}$  in  $x^{(1)}$  genau dann brauchbar, wenn  $s^{(1)}$  **grad**  $F(x^{(1)}) < 0$ , insbes. ist  $-\text{grad } F(x^{(1)})$  brauchbar. Durch Fortschreiten in Richtung  $s^{(1)}$  wird ein neuer Punkt  $x^{(2)} = x^{(1)} + \mu s^{(1)}$  erreicht, der durch die Wahl von  $\mu > 0$  brauchbar und zulässig ist. Er dient als neuer Ausgangspunkt. Damit die Folge  $\{x^{(i)}\}$  gegen den gesuchten Minimalpunkt  $x^*$  von  $F(x)$  konvergiert, wird meist die Konvexität von  $F(x)$  und des durch die Nebenbedingungen beschriebenen Bereichs vorausgesetzt. Dies ist aber keine hinreichende Bedingung. Die *Gradientenverfahren* benutzen bei differenzierbarem  $F(x)$  die Größe **grad**  $F$ , die *Methode des steilsten Abstiegs* benutzt  $-\text{grad } F$ . Durch die Nebenbedingungen kann es jedoch vorkommen, daß die Richtung  $-\text{grad } F$  nicht mehr zulässig ist. Im Verfahren mit *optimal brauchbarer Richtung* wird dann unter den zulässigen Richtungen die bestimmt, die den kleinsten Winkel mit  $-\text{grad } F$  bildet. Beim Verfahren der *projizierten Gradienten* von ROSEN wird  $-\text{grad } F$  auf den Rand des durch die Nebenbedingungen beschriebenen Bereichs projiziert. Bei allen Gradientenverfahren besteht die Gefahr, daß der Abstiegsweg im Zickzack verläuft und die Folge  $\{x^{(i)}\}$  sich häuft, ohne  $x^*$  zu erreichen. Das wird durch eine bes. *Antizickzackvorkehrung* verhindert.

**abstrakte Automatentheorie** ↗ Automat, determinierter, abstrakter, III.

**Abstraktionsprozeß** ↗ Äquivalenzrelation.

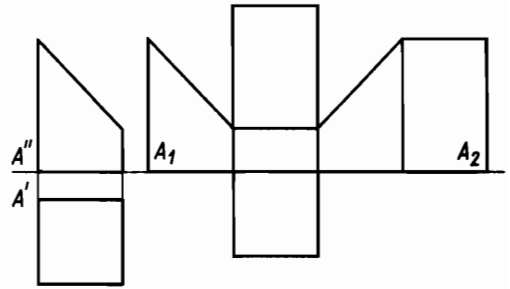
**Abzissenachse** ↗ Koordinatensystem II.

**Abtastregelung** ↗ Regelung VI.

**Abtasttheorem:** Lehrsatz der Informationstheorie, der aussagt, daß jedes stetige Signal  $x(t)$ , das ein begrenztes Spektrum mit der Grenzfrequenz  $f_g$  hat, vollständig definiert ist durch abzählbar viele Funktionswerte, die im Abstand  $T_0 = \pi/\omega_0$  voneinander entfernt liegen, wenn mit  $\omega_0$  die Tastfrequenz bezeichnet wird (vgl. Regelung VI.). Praktisch bedeutet dies, daß es möglich ist, aus einem Abtastsignal  $x^*(t)$  das ursprüngl. Signal  $x(t)$  ohne Informationsverlust wiederzugewinnen, falls bzgl. der Bandbreite  $B$  des Signals und der Tasterperiode  $T_0$  die Bedingung  $T_0 < 1/(2B)$  erfüllt ist. Das A. ist mit dem Namen C. E. SHANNON verknüpft. Es spielt vor allem in der Nachrichten-

technik im Zusammenhang mit der Rekonstruktion von Nachrichten am Ende einer Kommunikationskette (↗ Information II.) sowie für die Theorie der Abtastregelung (↗ Regelung V.) eine wesentl. Rolle. **Abtrennungsregel** ↗ Aussagenkalkül II., ↗ Prädikatenkalkül IV.

**abwickelbare Fläche:** Fläche, die sich, in geeigneter Weise aufgeschnitten, isometrisch auf ein ebenes Flächenstück abbilden läßt, d. h. nur durch Verbiegen, ohne daß auch nur ein Teil von ihr gedehnt oder gestaucht wird. Ein Kegelmantel z. B., der längs einer Mantellinie aufgeschnitten wurde, läßt sich als Kreisabschnitt auf eine Ebene abwickeln. *Tangentenflächen* oder *Torse*, die sich aus Tangenten an einer Raumkurve erzeugen lassen, sind a. F.n. Die Kugeloberfläche ist keine a. F. Ist die Oberfläche eines Körpers eine a. F., so heißt ihre verebene Oberfläche eine *Abwicklung*, im Falle eben-



Abwicklung. Abb. 1: Netz des Restkörpers eines geraden quadratischen Prismas

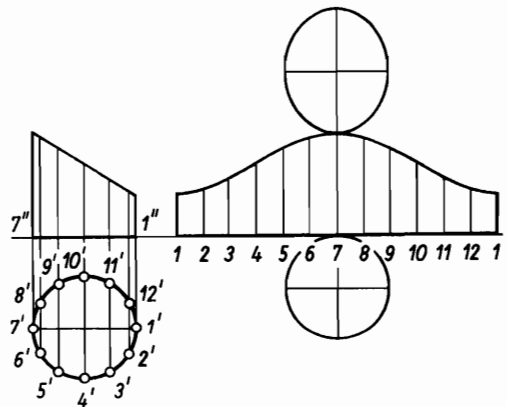


Abb. 2: Abwicklung des Restkörpers eines geraden Kreiszylinders

flächig begrenzter Körper ein *Netz* (Abb. 1). Bei krummflächig begrenzten Körpern spricht man von A. i. e. S. (Abb. 2). Das Zeichnen eines Netzes bzw. einer A. ist oft zur Anfertigung eines Körpers aus Blech, Karton oder ähnl. Materialien erforderlich.

**abzählbar unendlich** ↗ Menge III.

**Abziehen** ↗ Subtraktion II.1.

**Abzinsungsfaktor** ↗ Zinseszinsrechnung III.

**Achsenabschnittsgleichung** ↗ Ebenengleichung I., ↗ Geradengleichung II.

**Achsenschnitt** ↗ Körper V., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I.

**Achtflächner** ↗ regelmäßige Polyeder I.

**Adams, John Couch**, geb. 5. 6. 1819 Lidcot, gest. 21. 1. 1892 Cambridge. — Nach seinem Studium am St. John's College in Cambridge war A. vor allem als Astronom tätig und erhielt 1858 die Berufung zum Professor für Astronomie und Geometrie an der Universität Cambridge; ab 1861 war er Direktor der dortigen Sternwarte. Nach der mathemat. Analyse der Störung der Uranusbewegung entdeckte er 1845 den Planeten Neptun unabhängig von LE VERRIER.

**Adams-Bashforth-Verfahren** ↗ gewöhnliche Differentialgleichungen V.

**Adams-Moulton-Verfahren** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung V.

**Adams-Verfahren** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung V.

**Adaption, Selbstanpassung**: I. allgemein die Fähigkeit kybernet. Systeme, das innere Milieu trotz äußerer Einwirkungen aus der Umgebung aufrechtzuerhalten bzw. sich verändernden Umweltbedingungen anzupassen. Äußere Beeinflussungen führen zu Veränderungen des Systems, seiner Parameter bzw. seiner Struktur. Charakteristisch ist hierbei, daß über das System nur unvollständige oder sogar nur äußerst geringe a-priori-Informationen vorliegen. Unter diesen Bedingungen werden dann auf der Grundlage der laufenden Informationen aus der Beobachtung des Prozeßverlaufs durch A. solche Parameter- und Strukturveränderungen wie auch Änderungen der Steuereinflüsse vorgenommen, daß unter den jeweils bestehenden Umständen ein vorgegebener oder ein optimaler Zustand des Systems erreicht wird. Die A. ist eng mit dem Lernen verknüpft, und zwar derart, daß bei der A. das Lernen angewendet wird, um das Verhalten oder die Arbeitsweise eines Systems zu verbessern.

Der Begriff der A. wird als Oberbegriff für eine sehr weitgefächerte Klasse kybernet. Systeme gebraucht, die über die Eigenschaft der A.fähigkeit verfügen. Hierzu zählen die Systeme mit Adaptivsteuerung, Adaptivregelung, Selbsteinstellung, Selbstoptimierung, Selbstorganisation u. a.

II. Das einfachste A.sverfahren ist die *Adaptivsteuerung*, bei der die Einwirkungen aus der Umgebung durch Messung erfaßt und zu korrektiven Steuereingriffen im Sinne einer möglichst vollständigen Wiederherstellung des ursprüngl. Systemzustands ausgewertet werden. Der adaptive Eingriff erfolgt hierbei im Sinne einer ↗ Steuerung, d. h. ohne Kontrolle durch Rückführung. Die Adaptivsteuerung ist oftmals einem Grundregelkreis überlagert und wirkt auf dessen einstellbare Parameter bzw. Struktur.

III. Bei der *Adaptivregelung* wird die A. durch eine Rückführung überwacht. Die Adaptivregelung wird ebenfalls häufig im Zusammenhang mit einem Grundregelkreis angewendet, dessen Parameter bzw.

Struktur zur Kompensation von äußeren Einwirkungen verstellt werden. Die meisten Adaptivregelungen arbeiten mit einem Bezugsmodell, das durch fortlaufende Informationsaufnahme aus dem Prozeß aktualisiert wird.

IV. Die A. auf *optimales Verhalten* hat als Selbstoptimierung eine über die Anwendung in Regelungen weit hinausreichende Bedeutung. Wesentl. Anwendungsgebiete sind z. B. die optimale Steuerung bei unzureichender Information, die Identifikation, die Nachrichtentechnik und im besonderen die Filtertheorie, die Diagnose, Zeichenerkennung und die Zuverlässigkeitstheorie. Bei der Erläuterung des Grundprinzips ist von der Optimierung auszugehen. Das *Optimierungsproblem* läßt sich auf die Auswahl einer in einem bestimmten Sinne besten Variante für die Lösung einer Aufgabe unter einer Vielzahl mögl. Varianten zurückführen. Zur Bewertung einer Variante im Hinblick auf das gestellte Ziel dient ein Gütekriterium.

V. Das *Gütekriterium*  $Q(c)$  wird häufig in Form eines Erwartungswertes  $Q(c) = E\{F(x, c)\}$  dargestellt, wenn  $F$  ein Funktional des Vektors  $x$  des stochast. Prozesses und des zunächst unbekanntem Parametervektors  $c$  ist. Die Bestimmung der optimalen Variante erfordert, daß der Gradient (1) Null wird.

$$(1) \quad \nabla Q(c) = \left( \frac{\partial Q(c)}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial Q(c)}{\partial c_n} \right)$$

Bei vorliegender Anfangsunbestimmtheit und sich ändernden Arbeitsbedingungen sind die notwendigen Kenntnisse über das Gütekriterium, über die zu berücksichtigenden Nebenbedingungen oder über beide nicht in analyt. Form bekannt. Die A. besteht dann darin, daß zunächst ein geeigneter adaptiver Ansatz bestimmt wird. Sehr verbreitet ist die Verwendung eines rekursiven Ansatzes nach der *Methode der stochast. Iteration*  $c = c - \gamma \nabla Q(c)$ , in der  $\gamma$  eine geeignet gewählte skalare Größe bedeutet. Der optimale Vektor  $c = c_{opt}$  läßt sich dann mittels Iteration schrittweise bestimmen; dabei können die hierfür übl. Algorithmen auf die Form  $c_n = c_{n-1} - \gamma_n \nabla Q(c_{n-1})$  zurückgeführt werden. Der Wert des Skalars  $\gamma_n$  bestimmt die nachfolgende Schrittgröße. Er hängt von der Nummer  $n$  des Schritts und i. allg. vom Parametervektor  $c$  ab.

**Adaptivregelung** ↗ Adaption III.

**Adaptivsteuerung** ↗ Adaption II.

**Addierer** ↗ digitale Rechenanlage II.2.

**Addition**: I. Operation, die zwei elementfremden endl. Mengen eine dritte zuordnet, die jedes Element der beiden gegebenen Mengen enthält. Bezeichnen  $a$  und  $b$  die Kardinalzahlen der gegebenen Mengen und  $c$  die der gesuchten Menge, so gilt  $a + b = c$  zunächst für natürliche Zahlen  $\mathbf{N}$ ,  $a$  und  $b$  heißen *Summanden* und  $c$  oder  $a + b$ , als Operationsergebnis aufgefaßt, *Summe*. Durch Nacheinanderausführen wird die Summe von 3, 4 ... und schließlich endlich vieler Summanden festgesetzt. Dabei gelten das *Assoziativ-* und das *Kommutativgesetz*, d. h.,  $(a + b) + c = a + (b + c)$  und  $a + b = b + a$ . Die Summe von unendlich vielen Summanden wird als Grenzwert definiert (↗ Reihe I.).

Die A. läßt sich erweitern auf ganze Zahlen **Z**, auf rationale Zahlen **Q**, auf reelle Zahlen **R** sowie auf komplexe Zahlen **C**. In diesen Zahlenbereichen gelten das *Assoziativ-* und das *Kommutativgesetz* ebenfalls. Wird die A. für andre mathematische Größen definiert, z. B. für Vektoren oder Matrizen, so ist die Gültigkeit dieser Gesetze jeweils nachzuprüfen. Bei Veranschaulichung der Summanden *a* und *b* als Strecken auf einer Zahlengeraden ergibt sich  $c = a + b$  durch Aneinandersetzen zweier Strecken mittels einer *geometrischen Konstruktion* (↗ Strecke).

II. Stellt man die Zahlen *a*, *b*, *c* nach (1), (2), (3)

$$(1) \quad a = a_n \cdot g^n + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + a_1 \cdot g^{n-i} + \dots + a_0 g^0 + a_{-1} g^{-1} + \dots,$$

$$(2) \quad b = b_m \cdot g^m + b_{m-1} \cdot g^{m-1} + \dots + b_1 \cdot g^{m-i} + \dots + b_0 g^0 + b_{-1} g^{-1} + \dots,$$

$$(3) \quad c = c_p \cdot g^p + c_{p-1} \cdot g^{p-1} + \dots + c_i \cdot g^{p-i} + \dots + c_0 g^0 + c_{-1} g^{-1} + \dots$$

in einem Positionssystem mit der Grundzahl *g* dar (↗ Zahlensystem III.) mit  $p = \max(n, m)$  bzw.  $p = m + 1$ , falls  $m = n$  und  $a_n + b_m > g$ , so gilt für positive oder negative *i* die Beziehung  $a_i + b_i = c_i$  mit dem Zusatz, daß für  $c_i \geq g$  der Koeffizient  $c'_i = c_i - g$  tritt und für  $c_{i+1}$  zu setzen ist  $c'_{i-1} = c_{i+1} + 1$  (↗ Zahlensystem). Dieser *Übertrag* wird im dekadischen Zahlensystem *Zehnerübertrag* im dyadischen *Zweierübertrag* genannt und erfolgt in Rechenmaschinen automatisch. Bei *s* Summanden kann er *s* Einheiten betragen. Im folgenden Beispiel für  $g = 10$  ist der Übertrag durch halbfette Ziffern angegeben. Ziffern, die der gleichen Potenz der Grundzahl entsprechen, sind dabei untereinander zu setzen.

	<b>1212</b>		<b>11</b>
<i>Beispiel 1</i>	3257	<i>Beispiel 2</i>	713,25
	+ 866		+ 1,095
	+ 5642		+ 22,9
	+ 509		<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
			737,245

10274

Treten in den Summanden Stellen nach dem Komma auf, so lautet die Regel für schriftliches Addieren, daß Komma unter Komma zu setzen ist (↗ dyadisches Zahlensystem). S. a. Boolesche Algebra; Brüche I.3.; Gaußsche Zahlenebene I.; Polynom I.; Potenzreihe XI.; Runden.

**Additionsaxiom** ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.

**Additionssatz: I.** *Wahrscheinlichkeitsrechnung* Satz für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer Summe von Ereignissen: Sind  $A_1, A_2, \dots, A_n$  paarweise unvereinbare Ereignisse, d. h., gilt  $A_i \cap A_j = \emptyset$

für  $i \neq j$ , so gilt  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

Die Wahrscheinlichkeit einer Summe paarweise unvereinbarer Ereignisse ist danach gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. So sind z. B.  $A$  und  $\bar{A}$  unvereinbar, deshalb folgt:  $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ . Wegen  $A \cup \bar{A} = S$  und

$P(S) = 1$  (↗ zufälliges Ereignis, ↗ Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses) ergibt sich:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . Eine weitere Folge aus dem A. ist die Formel (1),

$$(1) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P_1 - P_2 + P_3 - \dots + (-1)^{n-1} P_n$$

die für beliebige Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gilt und in der  $P_1, P_2, \dots, P_n$  die in (2) angegebene Bedeutung haben. Im Fall zweier Ereignisse, für  $n = 2$  nimmt (1) die Form (3) an.

$$(2) \quad P_1 = \sum_{i=1}^n P(A_i), \quad P_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}),$$

$$P_3 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}), \dots, P_n = P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

$$(3) \quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

S. a. Laplacetransformation II.1.

**Additionssystem** ↗ Zahlensystem I.2., II.

**Additionstheorem** ↗ Binomialkoeffizient (s. a. Potenzreihe VI.), ↗ Exponentialfunktion I. (s. a. Taylorsche Reihe II.4.), ↗ hyperbolische Funktion II.1., ↗ Potenzreihe VI., ↗ Winkelfunktion VI.

**Additionsverfahren** ↗ lineare Gleichung III.3.

**additive Zahlentheorie** ↗ Zahlentheorie III.

**adjazent** ↗ Graph II.

**Adjazenzmatrix:** eine einem ungerichteten Graphen *G* mit den Knotenpunkten  $1, 2, \dots, n$  zugeordnete Matrix  $A = (a_{ik})$ , deren Elemente  $a_{ik}$  die Anzahl der Kanten angeben, die den Knoten *i* mit dem Knoten *k* verbinden; Schlingen werden dabei doppelt gezählt, d. h.  $a_{ii}$  ist gleich der doppelten Anzahl der mit *i* inzidierenden Schlingen (↗ Graph). Bei gerichteten Graphen gibt  $a_{ik}$  die Anzahl der Bögen an, deren Startpunkt *i* und deren Zielpunkt *k* ist. Ist *G* schlicht, so enthält  $A$  nur Nullen und Einsen. Für schlichte ungerichtete Graphen kann nach reellen Zahlen  $\lambda$  gefragt werden, zu denen es eine Bewertung der Knotenpunkte  $1, 2, \dots, n$  durch reelle Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$  gibt, so daß gilt  $\lambda x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$  mit  $1 \leq i \leq n$ ; in Worten

gesagt, soll für jeden Knotenpunkt *i* die Summe der Bewertungen aller Nachbarn von *i* dem  $\lambda$ -fachen der Bewertung von *i* gleich sein. In Matrizenform lautet die Bedingung für  $\lambda$ :  $Ax = \lambda x$ , wenn  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Daraus folgt  $(\lambda E - A)x = 0$ , wenn  $E$  die  $(n, n)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Nichttriviale Lösungen  $x \neq 0$  für  $\lambda$  erhält man daraus genau dann, wenn das *charakterist. Polynom*  $\det(\lambda E - A)$  gleich 0 ist. Aus den Koeffizienten und den Wurzeln des charakteristischen Polynoms  $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$  kann man gewisse Eigenschaften des Graphen ablesen: Ist *G* z. B. ein zusammenhängender regulärer Graph vom Grade *r*, so ist  $\lambda = r$  stets einfacher Eigenwert von *G*.

**adjungierter Operator** ↗ Operator, linearer, V.

**adjungierter Raum** ↗ Funktional II.

**Adjunkte** ↗ Determinante IV.

**Adjunktion:** das Hinzufügen eines Elementes oder einer beliebigen Menge zu einer gewissen ↗ alge-

braischen Struktur, insbes. zu einem Ring oder zu einem Körper, so daß wieder eine gleichartige Struktur entsteht, die sowohl das adjungierte Element bzw. die Menge als auch die ursprüngl. Struktur bis auf Isomorphie enthält. Ist  $K$  ein Körper und damit auch ein Ring, so bezeichnet  $K[x]$  Ring- $A.$  des Elementes  $x$  und  $K(x)$  Körper- $A.$  Das Element  $x$  kann einem Oberring  $L$  von  $K$  entnommen sein, dann ist  $K[x]$  ein Unterring von  $L$ ; wird  $x$  einem Oberkörper  $L$  von  $K$  entnommen, dann ist  $K(x)$  Unterkörper von  $L$ . Man kann jedoch auch  $x$  symbolisch an  $K$  adjungieren und etwa verlangen, daß es einer Gleichung  $f(x) = 0$  mit Koeffizienten aus  $K$  genügt. Durch  $A.$  der imaginären Einheit  $i$ , d. h. einer Lösung der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ , an den Körper der reellen Zahlen erhält man z. B. den Körper der komplexen Zahlen. Genügt  $x$  keiner Gleichung, so ist  $K[x]$  der Ring der Polynome in der Unbestimmten  $x$  mit Koeffizienten aus  $K$ , und  $K(x)$  ist der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten  $x$  mit Koeffizienten aus  $K$ . S. a. Polynomring.

Adresse ↗ Befehl, ↗ Speicherplatz.  
 Adreßteil ↗ Befehl, ↗ digitale Rechanlage II.3.  
 affine Geometrie ↗ Erlanger Programm III.

affine Koordinaten ↗ Koordinatensystem II.  
 affiner Raum, eine Menge von Punkten und eine Menge von Vektoren, die folgenden Bedingungen genügen: (1) Die Menge der Vektoren bildet einen endlichdimensionalen Vektorraum. (2) Es gibt eine Zuordnung zwischen den Punkten und den Vektoren, so daß zwei Punkten  $P$  und  $Q$  in dieser Reihenfolge genau ein Vektor  $v = PQ$  zugeordnet ist und zu jedem Paar, das aus einem Punkt  $P$  und einem Vektor  $v$  besteht, genau ein Punkt  $Q$  existiert, so daß  $v = PQ$ . (3) Sind  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  drei Punkte, so gilt  $Q_1Q_3 = Q_1Q_2 + Q_2Q_3$ . Die Dimension des affinen Raumes  $R_n$  ist die Dimension des zugehörigen Vektorraumes  $V_n$ , d. h., sie ist die größte Anzahl linear unabhängiger Vektoren in  $V_n$ . Ist  $n = 2$ , so heißt  $R_2$  eine affine Ebene. Im  $R_n$  kann man ein Parallelkoordinatensystem (↗ Koordinatensystem I.) einführen, indem man einen Punkt  $O$  und eine Basis von  $V_n$ , d. h.  $n$  linear unabhängige Vektoren  $u_1, \dots, u_n$  auszeichnet. Die Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  eines beliebigen Punktes  $X \in R_n$  sind dann gegeben

durch die Basisdarstellung  $OX = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ ; des zu den Punkten  $O$  und  $X$  gehörenden Vektors  $OX$ . Ein  $m$ -dimensionaler Teilraum oder Unterraum  $T_m$  eines affinen Raumes  $R_n$  ist eine Teilmenge von Punkten und Vektoren des  $R_n$ , die selbst ein  $m$ -dimensionaler affiner Raum ist. Sind  $A$  ein Punkt und  $v_1, \dots, v_m$   $m$  linear unabhängige Vektoren des Teilraumes  $T_m$ , so läßt sich jeder Punkt  $Y$  von  $T_m$

darstellen durch  $AY = \sum_{i=1}^m y_i v_i$  mit geeigneten  $y_1, \dots, y_m$ . Ist in  $V_n$  ein Skalarprodukt  $a \cdot b$  gegeben, so wird  $R_n$  zu einem metr. affinen Raum bzw. für  $n = 2$  zu einer metr. affinen Ebene durch die Festlegung eines Abstandes  $|PQ|$  zweier beliebiger Punkte  $P$  und  $Q$  mit  $|PQ| = \sqrt{PQ \cdot PQ}$  und eines

Maßes  $|\sphericalangle QPR|$  mit  $0 \leq |\sphericalangle QPR| \leq \pi$  für den Winkel  $\sphericalangle QPR$  durch  $\cos |\sphericalangle QPR| = \frac{(PQ \cdot PR)}{|PQ| \cdot |PR|}$ .

Beispiel: Die Lösungsmannigfaltigkeit des Gleichungssystems  $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -1$  im Bereich der reellen Zahlen bildet einen a. R. Die Punkte dieses Raumes sind die Lösungen  $x_1 = t_1 + t_2, x_2 = 2t_1 - 2t_2 - 1, x_3 = t_1, x_4 = t_2$  des Gleichungssystems. Die Vektoren sind die Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems  $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ . Die Zuordnung eines Vektors zu zwei Punkten geschieht hier durch die Subtraktion der Koordinaten. Dieser affine Raum ist zweidimensional. Man kann ihn als Ebene eines  $R_4$  auffassen, dessen Punkte  $(x_1, \dots, x_4)$  alle Quadrupel reeller Zahlen  $x_1, \dots, x_4$  sind.

affine Transformation ↗ Koordinatentransformation II.

Affinität ↗ Ellipsenkonstruktionen I.  
 Affinitätsgerade ↗ Ellipsenkonstruktionen I.  
 Affinograph ↗ Gelenkmechanismus II.  
 Affinzeichner ↗ Gelenkmechanismus II.

ägyptisches Zahlensystem ↗ Zahlensystem I.  
 Ahmes, auch Ahmose, 17. Jh. v. u. Z. — Er ist der Verfasser des Papyrus Rhind, einer der ältesten bekannten Quellen zur ägypt. Mathematik. Die Vorlage der Schrift kann auf das 19. Jh. v. u. Z. datiert werden.

Ahmose ↗ Ahmes.  
 ähnliche Matrizen ↗ Matrix V.  
 Ähnlichkeit ↗ Matrix V., s. a. Ähnlichkeitssätze.  
 Ähnlichkeitsabbildungen ↗ Abbildung, affine III., ↗ lineare Abbildung I.5.  
 Ähnlichkeitsachse ↗ Ähnlichkeitspunkt II.  
 Ähnlichkeitsgeometrie ↗ Erlanger Programm II.  
 Ähnlichkeitslinie ↗ Ähnlichkeitspunkt I.

Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise: I. Punkt auf der gemeinsamen Zentralen zweier Kreise, der eine Ähnlichkeitstransformation zwischen ihnen vermittelt. Sind sowohl die Radien als auch die Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  der beiden Kreise verschieden, so gibt es einen inneren und einen äußeren Ä. Der innere Ä.  $I$  liegt auf der Strecke  $M_1M_2$  und ist der Schnittpunkt aller Geraden, die durch die Endpunkte paralleler Radien verlaufen, die in bezug auf die Zentrale auf verschiedenen Seiten liegen. Geraden, die durch die Endpunkte paralleler Radien der beiden Kreise verlaufen, die auf der gleichen Seite der Zentralen liegen, schneiden sich außerhalb der Strecke  $M_1M_2$  im äußeren Ä. Diese sich in einem Ä. schneidenden Geraden nennt man Ähnlichkeitslinien. Gemeinsame Tangenten zweier Kreise sind auch Ähnlichkeitslinien (↗ Kreistangente III.). Schneidet eine Gerade durch den Ä. den ersten Kreis in den Punkten  $X_1, Y_1$  und den zweiten Kreis in den Punkten  $X_2, Y_2$  in der angegebenen Reihenfolge, so ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $M_1X_1A$  und  $M_2X_2A$  bzw.  $M_1Y_1A$  und  $M_2Y_2A$  die Beziehung  $|AX_1| \cdot |AY_2| = |AX_2| \cdot |AY_1|$  (Abb. 1). Sind  $c_1$  und  $c_2$  die Potenzen des Punktes  $A$  in bezug auf die beiden Kreise, so ergibt sich aus dem



**Sekantensatz**, daß  $|AX_1| \cdot |AY_2| = |AX_2| \cdot |AY_1| = \sqrt{c_1 c_2} = \text{const}$  für alle Ähnlichkeitslinien durch  $A$ . — Die Ä.e. teilen die Strecke  $M_1 M_2$  harmonisch. **II.** Sind durch drei Kreise paarweise drei äußere Ä.e. bestimmt, so liegen sie auf einer Geraden; außerdem liegt der äußere Ä.e. eines jeden Paares mit den inneren Ä.en der anderen Paare auf einer Geraden

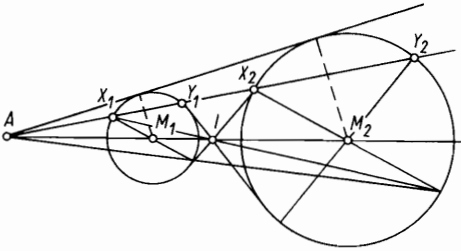


Abb. 1: Ähnlichkeitspunkte  $I$  und  $A$  zweier Kreise

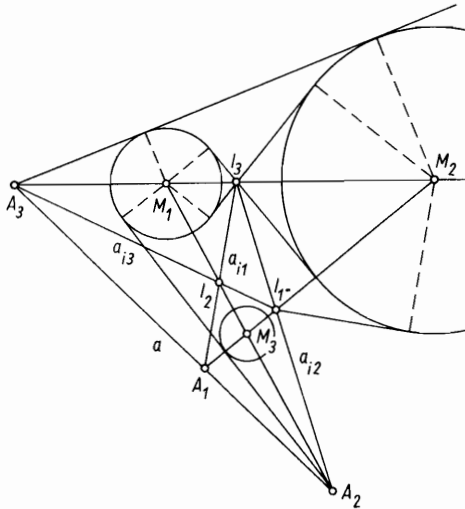
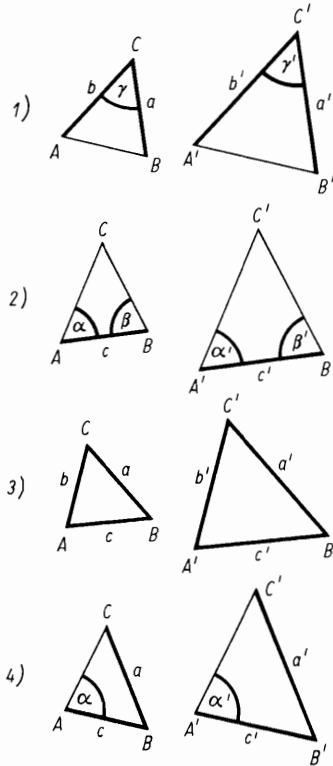


Abb. 2: Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise

(Abb. 2). Diese Geraden heißen *Ähnlichkeitsachsen*. — Kreise mit gleichem Radius haben keinen äußeren Ä. Die entsprechenden Ähnlichkeitslinien verlaufen parallel zur Zentralen. Die Ä.e. konzentrischer Kreise fallen im Mittelpunkt der beiden Kreise zusammen.

**Ähnlichkeitssatz** ↗ Laplacetransformation II.5.

**Ähnlichkeitssätze:** zwei Dreiecke sind ähnlich, in Zeichen  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  (Abb.), wenn sie übereinstimmen: 1. in der Größe eines Winkels und im Längenverhältnis der diesem Winkel anliegenden Seiten, z. B.  $\gamma = \gamma'$  und  $a : b = a' : b'$ ; oder 2. in der Größe zweier Innenwinkel, z. B.  $\alpha = \alpha'$  und  $\beta = \beta'$ ; oder 3. im Längenverhältnis entsprechender Seiten, z. B.  $a : b = a' : b'$ ;  $b : c = b' : c'$  und deshalb  $a : c = a' : c'$ ; oder 4. im Längenverhältnis zweier Seiten und der Größe des Winkels, der der Seite größerer



**Ähnlichkeitssätze:** Beispiele für die Bedingungen, unter denen die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  einander ähnlich sind

Länge gegenüberliegt, z. B.  $\alpha = \alpha'$  und  $a : c = a' : c'$ , falls  $a > c$ .

**Aiken-Kode** ↗ Kodierung III.

**Aktivität** ↗ Netzplantechnik II., III., IV.

**Alembert**, Jean le Rond d', geb. 16. oder 17. 11. 1717 Paris als Sohn eines Generals, gest. 29. 10. 1783 Paris. — A. wurde von der Mutter ausgesetzt, bei der Kirche Jean le Rond gefunden und von der Familie eines Glasers aufgezogen. Später, durch Zuwendungen unterstützt, wurde er seinem Stande gemäß erzogen. Er studierte am Collège des Quatre Nations und wurde 1741 Mitglied der Académie des sciences. — In der Mechanik ist das *d'A.sche Prinzip* nach ihm ben., außerdem arbeitete er über die Theorie der analyt. Funktionen (1746), über partielle Differentialgleichungen (1747) und über Grundlagen der Algebra. A. ist der Verfasser der mathemat. Artikel der *Encyclopédie*.

**d'Alembertsche Lösung** ↗ hyperbolische Differentialgleichung I.

**d'Alembertsches Kriterium** ↗ Konvergenzkriterien für Reihen, VII.

**Aleph-Problem** ↗ Kardinalzahl II.

**Alexander-Pontrjaginscher Dualitätssatz:** Sind  $F$  und  $F'$  zwei homöomorphe Figuren im dreidimensionalen Raum  $R$  und bestehen die Figuren  $G$  bzw.  $G'$  aus allen Punkten, die nicht zu  $F$  bzw.  $F'$  ge-

hören, die mithin übrigbleiben, wenn man  $F$  bzw.  $F'$  aus dem Raum  $R$  herausnimmt, so haben die Figuren  $G$  bzw.  $G'$  stets die gleichen Bettischen Zahlen.

Dieser topolog. Satz ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes.

**Alexandrow, Pawel Sergejewitsch**, geb. 7. 5. 1896 Bogorodsk. — A. wirkte bis 1964 an der Moskauer Universität, seit 1928 als Professor. Er schuf eine berühmte *topolog. Schule* und zählte A. TYCHONOW und L. PONTRJAGIN zu seinen Schülern. Zusammen mit P. URYSOHN entwickelte A. die Theorie der *kompakten Räume*. Die Studien zur Mengenlehre und der Theorie der Funktionen führten ihn zu grundlegenden Erkenntnissen in der kombinator. Topologie (1947). Weiter befaßte sich A. mit der Funktionalanalysis, der Logik und der Geschichte der Mathematik.

**Algebra: I.** Teilgebiet der Mathematik, eine ihrer ältesten Disziplinen. Die Grundaufgabe der *klass. A.* bestand in der Auflösung von Gleichungen. Im Laufe der Zeit rückten die Fragen nach der Existenz der Lösungen, nach ihrer Anzahl und ihren Eigenschaften in den Vordergrund und mit der Entwicklung allgemeiner formaler Lösungsmethoden die Frage nach den zugrunde gelegten Zahlenbereichen. Begriffe wie Determinante, Matrix, Gruppe, Ring oder Körper bilden den Inhalt der modernen A., die im 20. Jh. zur Lehre von den  $\nearrow$  *algebraischen Strukturen* führte. Sie beschäftigt sich mit Gesamtheiten von *Elementen*, die z. B. Zahlen, Polynome, Funktionen, Vektoren oder Permutationen sein können, und in denen *algebraische Operationen* definiert sind. Die Methoden der modernen A. durchdringen immer weitere Teilgebiete der Mathematik, bes. die Analysis und die Geometrie, und werden auch in der Physik und in anderen Naturwissenschaften mit Erfolg angewendet.

**II.1. Geschichtliches.** Verfahren zur Lösung von Gleichungen 1. und 2. Grades waren schon im Altertum bekannt. Infolge der Bedürfnisse ihrer gesellschaftl. Praxis, z. B. von Handel, Baukunst und Feldvermessung, gelangten schon die alten *Ägypter* und die *Babylonier* zur Aufstellung und Lösung von Gleichungen; man begann nach allgemeinen Methoden zur Lösung bestimmter arithmet. Aufgaben zu suchen. Die A. entwickelte sich aus der Arithmetik zu einem selbständigen Gebiet. Die *Griechen* bemühten sich mehr um geometr. Lösungsmethoden. Höhepunkt der algebraischen Untersuchungen dieser Periode sind die Abhandlungen des griech. Mathematikers DIOPHANTOS (etwa im 3. Jh. u. Z.).

**II.2.** Im *Mittelalter* beschäftigten sich die Mathematiker des Orients, z. B. AL-CHWARISMI, eingehend mit algebraischen Untersuchungen. Aus der latinisierten Form des arab. Titels seines Werkes „Hisab fil-dschabr wal-Mukabala“ (um 825) entstand der Name A., als das Wissen des Orients über Nordafrika durch die Araber nach Europa gelangte. Hier setzte im 16. Jh. im Zusammenhang mit der frühkapitalist. Entwicklung, bes. der des Handels und der Manufakturen, sowie mit der Erschließung neuer Märkte, ein starker Aufschwung ein, der ge-

tragen wurde von S. DEL FERRO (1465—1526), N. TARTAGLIA (um 1500—1557), G. CARDANO (1501 bis 1576) und L. FERRARI (1522—1565). Die Lösungen der Gleichungen 3. und 4. Grades konnten auf *Radikale* zurückgeführt werden, d. h. auf ineinandergeschachtelte Wurzelausdrücke. Die intensive Suche nach entsprechenden Lösungen für Gleichungen höheren als 4. Grades war erfolglos. Die spätere Entwicklung wurde durch die *Einführung von Buchstaben* 1591 durch VIETA befruchtet, die nicht nur zur Bezeichnung der gesuchten Unbekannten diente, sondern auch zur Kennzeichnung aller in die Gleichung eingehenden Größen. 1799 zeigten P. RUFFINI (1765—1822) und 1826 N. H. ABEL (1802 bis 1829), daß die algebraischen Gleichungen höheren als 4. Grades i. allg. nicht durch Radikale lösbar sind.

**II.3.** 1799 bewies C. F. GAUSS (1777—1855) den *Fundamentalsatz der A.*, nach dem jede algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades in einer Unbekannten  $x$  mit komplexen Koeffizienten genau  $n$  komplexe Lösungen hat, wenn möglicherweise mehrfach auftretende Lösungen entsprechend mehrfach gezählt werden. 1801 löste GAUSS auf rein rechner. Wege die *Kreisteilungsgleichungen*  $x^n - 1 = 0$ . E. GALOIS (1811—1832) erkannte den Zusammenhang zwischen dem durch die Lösungen der algebraischen Gleichung erweiterten Koeffizientenbereich, dem *Erweiterungskörper*, und einer gewissen Permutationsgruppe. Er zeigte, daß die Auflösbarkeit der Gleichung in Radikalen allein von der inneren Struktur dieser Gruppe abhängt ( $\nearrow$  Galoissche Theorie) und begründete so die *Gruppentheorie* und damit die *moderne A.* Die Idee von GALOIS war jedoch ihrer Zeit voraus und wurde erst ein halbes Jahrhundert später verstanden. R. DEDEKIND (1831 bis 1916) und L. KRONECKER (1823—1891) untersuchten unabhängig voneinander Zahlen- und Funktionenkörper.

**II.4.** Beim Studium konkreter Strukturen stellte man Struktur analogien fest ( $\nearrow$  Isomorphismus). Dies führte zur Untersuchung abstrakter Gruppen und Körper und später, unter Benutzung der Resultate der *Mengenlehre*, zur axiomat. Definition. Parallel zur Gruppen- und zur *Körpertheorie* entwickelte sich die Theorie der Algebren ( $\nearrow$  Algebra III.) und davon abgeleitet die *Ringtheorie*. In hohem Maße wurde die Entwicklung der A. auch von der Zahlentheorie befruchtet. Die Untersuchung der Unterstrukturen der betrachteten algebraischen Strukturen führte in den 30er Jahren dieses Jahrhunderts zur verstärkten Entwicklung der *Verbandstheorie*. Eine weitere Abstraktionsstufe wurde nach dem 2. Weltkrieg durch die Entwicklung der *kategorischen A.* ( $\nearrow$  Kategorie I.) erreicht; allgemeine Eigenschaften der algebraischen Strukturen werden in einer *Theorie der universalen Algebren* untersucht. Weiter gewann die *Theorie der Halbgruppen* an Bedeutung.

**III. hyperkomplexes System:** Operatorstruktur  $A$  ( $\nearrow$  algebraische Struktur I.) mit zwei binären Operationen, der *Addition* und der *Multiplikation*, und einer äußeren Multiplikation mit Elementen eines

Körpers  $K$ , des *Operatorenbereiches*; dabei muß  $A$  bzgl. Addition und Multiplikation einen *Ring*, bzgl. Addition und äußerer Multiplikation einen *Vektorraum* bilden, und außerdem muß  $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$  für beliebige  $a, b \in A$  und  $\lambda \in K$  gelten. Eine Basis des Vektorraums, der der  $A$  zugrunde liegt, heißt *Basis* der  $A$ . *Beispiele* für Algebren über dem Körper der reellen Zahlen: 1. die komplexen Zahlen mit der Basis  $\{1, i\}$ ; 2. die Quaternionen mit der Basis  $\{1, i, j, k\}$ ; 3. die Polynome in der Unbestimmten  $x$  mit reellen Koeffizienten und der Basis  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ .

**Algebra, partielle** ↗ Struktur IV.

**Algebra, universelle** svw. algebraische Struktur, s. a. Struktur IV.

**Algebra des Signallaufbildes** ↗ Blockschaltbild II. **algebraisch abgeschlossen**: Eigenschaft eines Körpers  $K$ , daß jedes Polynom  $f(x)$  mit Koeffizienten aus  $K$  in Linearfaktoren zerfällt; dazu braucht nur jedes Polynom  $f(x)$  mindestens eine Nullstelle in  $K$  zu haben. Der Körper der komplexen Zahlen ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra a. a. Zu jedem Körper  $K$  gibt es genau einen a. a. Körper  $L$ , der eine algebraische Erweiterung des Körpers  $K$  ist (s. a. Körper III.).

**algebraisch abhängig**: Eigenschaft eines  $n$ -Tupels  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  von Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  eines Körpers  $L$  über einem Teilkörper  $K$ , daß diese Elemente der algebraischen Gleichung  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  mit Koeffizienten aus  $K$  genügen. Ein Element  $y \in L$  heißt a. a. von  $a_1, \dots, a_n$  über  $K$ , wenn es einer Gleichung  $f_0 + f_1 y + \dots + f_m y^m = 0$  genügt, in der die  $f_0, f_1, \dots, f_m$  Polynome in  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sind und mindestens eines vom Nullpolynom verschieden ist. Die Elemente  $a_1, \dots, a_n$  heißen *algebraisch unabhängig* über  $K$ , wenn sie keiner algebraischen Gleichung  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  genügen; die Maximalzahl algebraisch unabhängiger Elemente von  $L$  heißt *Transzendenzgrad* von  $L$  über  $K$ . S. a. Körper III.

**algebraische Fläche**: Gesamtheit von Punkten eines Raumes, deren kartesische Koordinaten einer algebraischen Gleichung  $F(x, y, z) = 0$  genügen. Die Oberfläche der Kugel mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $(a, b, c)$  ist z. B. eine a. F., die durch die Gleichung (1) gegeben ist.

$$(1) \quad F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$$

**algebraische Funktion**: Funktion  $y = f(x)$ , die einer Gleichung  $\sum_{i=0}^n p_i(x) y^i = 0$  genügt, in der die  $p_i(x)$

Polynome in  $x$  sind, die gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen genügen und sich erst befriedigend erklären lassen, wenn man die Beschränkung auf reelle Variable aufgibt. Eine Funktion, die nicht algebraisch ist, heißt *transzendent*, z. B. die Exponentialfunktion, die sich nicht durch eine endl. Summe von Polynomen darstellen läßt. Zur Klasse der a. F. gehören die *Wurzelfunktionen* und solche Funktionen, deren analyt. Ausdruck durch eine endl. Anzahl von Anwendungen der

rationalen Operationen und des Radizierens gebildet wird. Dabei darf keiner der Divisoren Null und keiner der Radikanden negativ werden. Die durch (1) und (2) gegebenen Ausdrücke sind z. B. a. F. von

$$(1) \quad f(x) = 2x^3 + \sqrt{1 + x^2}$$

$$(2) \quad g(x, y) = xy + \sqrt[4]{[4 - 2x^2 - 3y^2]/[3 \cdot \sqrt{1 + x^2 + y^2}]}$$

einer bzw. von zwei unabhängigen Variablen. Dagegen ist die durch  $y = h(x) = |x|$  dargestellte Funktion  $h$  nicht algebraisch, obwohl sie sich durch einen analyt. Ausdruck  $y^2 - x^2 = 0$  beschreiben läßt; die Funktion  $h$  ist an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar. S. a. ganzrationale, gebrochenrationale Funktion.

**algebraische Geometrie**: I. Lehre von den *algebraischen Mannigfaltigkeiten*; sie benutzt neben algebraischen auch Methoden der Analysis und hat sich aus der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen entwickelt. In der *klass. a. G.* wurden insbesondere die algebraischen Kurven und Flächen eines *projektiven Raumes* mit *komplexen* Koordinaten untersucht; im  $n$ -dimensionalen projektiven Raum mit den Koordinaten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  wird dabei eine algebraische Mannigfaltigkeit durch  $m$  algebraische Gleichungen (1) definiert, wobei  $F_1, \dots, F_m$  *homogene*

$$(1) \quad \begin{aligned} F_1(x_0, x_1, \dots, x_n) &= 0 \dots \\ F_m(x_0, x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

*Polynome* in  $x_0, x_1, \dots, x_n$  mit komplexen Koeffizienten sind. Für  $n = 2$  und  $m = 1$  erhält man eine *ebene algebraische Kurve*, für  $n = 3$  und  $m = 1$  eine *räuml. algebraische Fläche*, für  $n = 3$  und  $m = 2$  mit unabhängigen  $F_1$  und  $F_2$  eine *räuml. algebraische Kurve* als Schnitt der von  $F_1$  und  $F_2$  definierten Flächen. Für beliebiges  $n$  liefert  $m = 1$  eine *Hyperfläche*. Im Vordergrund steht dabei die Untersuchung von Eigenschaften, die gegenüber *projektiven Transformationen* und allgemeiner gegenüber *birationalen Transformationen* invariant sind, d. h., die sich bei Anwendung dieser Transformationen nicht ändern. Die *Ordnung* einer algebraischen Kurve ist z. B. projektive Invariante und das *Geschlecht*  $p = (m - 1)(m - 2)/2 - d$  ist eine birationale Invariante einer Kurve der Ordnung  $m$ , die  $d$  Doppelpunkte hat. Die Kegelschnitte haben z. B. mit  $m = 2$  und  $d = 0$  das Geschlecht  $p = 0$ ; auch das kartesische Blatt  $x^2 - 3xy + y^3 = 0$  mit  $m = 3$  und  $d = 1$  hat das Geschlecht  $p = 0$ .

II. In der modernen a. G. werden algebraische Mannigfaltigkeiten nicht mehr über dem Körper der komplexen Zahlen, sondern über beliebigen Körpern betrachtet. Oft wird eingeschränkt, daß der Körper die *Charakteristik* Null haben oder *algebraisch abgeschlossen* sein soll. Legt man z. B. den Körper der reellen Zahlen zugrunde, der nicht algebraisch abgeschlossen ist, so definieren die beiden Gleichungen  $x^2 + y^2 = 0$  und  $x^4 + 3y^4 = 0$  in der affinen  $x, y$ -Ebene dieselbe »Kurve«, nämlich den Ursprung; auf den beiden Kurven liegen zu wenig

Punkte. Bei einer strengen Begründung der a.n G. definiert man gewöhnlich zuerst einen projektiven Raum mit Koordinaten aus dem betrachteten Körper und anschließend darin algebraische Mannigfaltigkeiten. Die Mannigfaltigkeiten im  $n$ -dimensionalen affinen Raum erhält man aus den Mannigfaltigkeiten des  $n$ -dimensionalen projektiven Raums, indem man nur die Punkte  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  betrachtet, für die  $x_0 \neq 0$  gilt. Die Gleichungen (2) bestim-

$$(2) \quad y_1 = x_1/x_0, y_2 = x_2/x_0, \dots, y_n = x_n/x_0$$

men dann die Punkte der entsprechenden Mannigfaltigkeiten im affinen Raum. Die Punkte der von (1) definierten Mannigfaltigkeit, in der  $F_1, \dots, F_m$  homogene Polynome oder Formen mit Koeffizienten aus dem betrachteten Körper  $K$  sind, erfüllen auch die Gleichungen  $F_i \pm F_j = 0$  und  $GF_i = 0$ , wenn  $G$  ein beliebiges Polynom in  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ist. Die Polynome  $F_i$ , die man aus  $F_1, \dots, F_m$  erhält, indem man endlich oft addiert oder mit Polynom  $G$  multipliziert, bilden ein  $\nearrow$  Ideal im Polynomring  $K[x_0, \dots, x_n]$ ; beschränkt man sich auf Formen, erhält man ein *Formenideal*. Die Summe  $F_i + F_j$  ist eine Form, wenn  $F_i$  und  $F_j$  denselben Grad haben. Ist  $G$  eine Form, so auch  $GF_i$ . Ein Punkt  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$  des projektiven Raums heißt *Nullstelle* des homogenen Ideals  $\mathfrak{a}$ , wenn jede Form  $F(x_0, x_1, \dots, x_n)$  aus  $\mathfrak{a}$  für  $x_0 = \xi_0, x_1 = \xi_1, \dots, x_n = \xi_n$  Null wird; die Gesamtheit aller Nullstellen von  $\mathfrak{a}$  heißt *Nullstellengebilde* NG von  $\mathfrak{a}$ . Der mengentheoret. *Durchschnitt*  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  zweier Ideale  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  ist wieder ein Ideal; sein Nullstellengebilde ist die Vereinigung der entsprechenden Nullstellengebilde von  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ , d. h., es gilt (3).

$$(3) \quad \text{NG}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \text{NG}(\mathfrak{a}) \cup \text{NG}(\mathfrak{b})$$

Als Summe  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$  von  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  bezeichnet man die Gesamtheit aller Elemente der Form  $a + b$  mit  $a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$ . Sie ist das kleinste Ideal, dem sowohl alle Elemente von  $\mathfrak{a}$  als auch von  $\mathfrak{b}$  angehören; ihr Nullstellengebilde ist der Durchschnitt (4) der Nullstellengebilde von  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$ .

$$(4) \quad \text{NG}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \text{NG}(\mathfrak{a}) \cap \text{NG}(\mathfrak{b})$$

III. Ein Ideal  $\mathfrak{a}$  heißt *reduzibel*, wenn es der Durchschnitt zweier von  $\mathfrak{a}$  verschiedener Ideale ist, andernfalls *irreduzibel*. Entsprechend bezeichnet man  $\text{NG}(\mathfrak{a})$  als *reduzibel* oder *irreduzibel*, je nachdem ob  $\mathfrak{a}$  es ist, z. B. ist  $\mathfrak{a} = (x_1^2 - x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$  reduzibel; das NG von  $\mathfrak{a}$  in der projektiven Ebene ist das Geradenpaar  $x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0$ . Ein Polynomideal ist jedoch durch sein NG nicht eindeutig bestimmt, z. B. haben die Ideale  $\mathfrak{a} = (x_1 - x_2)$  und  $\mathfrak{b} = ((x_1 - x_2)^2)$  dasselbe NG, nämlich in der Ebene die Gerade  $x_1 - x_2 = 0$ . Es empfiehlt sich daher, festzulegen, daß eine algebraische Mannigfaltigkeit  $\text{AM}(\mathfrak{a})$  nicht allein durch  $\text{NG}(\mathfrak{a})$ , sondern noch durch weitere Angaben bestimmt sein soll; z. B. könnte man  $\text{AM}(\mathfrak{a})$  durch das homogene Ideal  $\mathfrak{a}$  selbst charakterisieren. In diesem Sinne ist im obigen Beispiel  $\text{AM}(\mathfrak{a}) \neq \text{AM}(\mathfrak{b})$ . Es gilt der *Lasker-Noethersche Satz*: *Jedes Polynomideal läßt sich als*

*Durchschnitt (5) endlich vieler irreduzibler Ideale darstellen.* Entsprechend (3) erhält man so die Zer-

$$(5) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$$

legung (6). Die irreduziblen Ideale sind *Primär-*

$$(6) \quad \text{AM}(\mathfrak{a}) = \text{AM}(\mathfrak{q}_1) \cup \text{AM}(\mathfrak{q}_2) \cup \dots \cup \text{AM}(\mathfrak{q}_s)$$

*ideale* ( $\nearrow$  Primideal), doch ist nicht jedes Primärideal irreduzibel. Jedes Primideal ist irreduzibel, und zu jedem Primärideal  $\mathfrak{q}$  gibt es genau ein Primideal  $\mathfrak{p}$  mit  $\text{NG}(\mathfrak{q}) = \text{NG}(\mathfrak{p})$ . Die zu den irreduziblen Bestandteilen  $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_s$  aus (5) gehörenden Primideale  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_s$  sind durch  $\mathfrak{a}$  eindeutig bestimmt; sie heißen die zu  $\mathfrak{a}$  gehörigen Primideale. Hieraus folgt, daß es zu jedem NG eines irreduziblen Ideals  $\mathfrak{q}$  genau ein Primideal  $\mathfrak{p}$  mit  $\text{NG}(\mathfrak{q}) = \text{NG}(\mathfrak{p})$  gibt. Ein Primideal ist danach durch sein NG bereits eindeutig bestimmt. Abweichend von der Charakterisierung der  $\text{AM}(\mathfrak{a})$  durch das Ideal  $\mathfrak{a}$  kann man eine AM auch dadurch charakterisieren, daß man die zu  $\mathfrak{a}$  gehörigen Primideale und zu jedem von ihnen eine nichtnegative ganze Zahl als *Vielfachheit* oder *Multiplizität* vorgibt. Dem Ideal  $((x_1 - x_2)^2)$  kann man z. B. als AM die Gerade  $x_1 - x_2 = 0$  mit der Multiplizität 2 zuordnen. Es gibt verschiedene Definitionen der Multiplizität; insbesondere wird untersucht, ob für die betrachtete Multiplizität eine Verallgemeinerung des Bezoutschen Satzes gültig ist. Der *Bezoutsche Satz* für ebene Kurven besagt, daß die Summe der Multiplizitäten des Schnittes zweier Kurven der Ordnungen  $m$  und  $n$  gleich  $m \cdot n$  ist.

IV. Die ersten Beiträge zur Theorie der ebenen algebraischen Kurven lieferten I. NEWTON (1643–1727), C. MACLAURIN (1698–1746), L. EULER (1707 bis 1783) und G. CRAMER (1704–1752). Der Schöpfer der a. G. im engeren Sinne war MAX NOETHER (1844 bis 1921). Die italienischen Geometer, in erster Linie C. SEGRE (1863–1924), F. SEVERI (1879–1961) und F. ENRIQUES (1871–1946) brachten sie zur vollen Entfaltung. Der systemat. Aufbau der a. G. wurde z. B. durch EMMY NOETHER (1882–1935), die Tochter von MAX NOETHER, B. L. VAN DER WAERDEN (geb. 1903), W. GRÖBNER (geb. 1899) und ANDRÉ WEIL (geb. 1906) gefördert. Die moderne Theorie zeichnet sich insbesondere durch die Verwendung topolog. Methoden aus.

**algebraische Gleichung:** Gleichung, in der mit den Gleichungsvariablen nur algebraische Operationen vorgenommen werden ( $\nearrow$  Term I.), z. B. sind  $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0, 4x + 8 = 1 + \sqrt{4x - 7}$  und  $(x + c)^3 = b/(x + a)$  a. G. in  $x$ . Dabei können sowohl die auftretenden Zahlen als auch die Lösungen transzendente Zahlen sein, wie bei der in  $x$  a. G.  $px - 2 = 1$ . Die Gleichung  $\sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$  dagegen ist nicht algebraisch in  $x$ , jedoch algebraisch in der Variablen  $\sin x$ . Gleichungen, die nicht algebraisch sind, z. B. Exponentialgleichungen, logarithmische Gleichungen und goniometrische Gleichungen, heißen *transzendente Gleichungen*. Zu ihrer Lösung werden oft grafische oder Näherungsverfahren herangezogen.

Jede a. G. mit genau einer Variablen läßt sich in der allgemeinen Form

$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0$  schreiben, deren Koeffizienten  $A_j$  für  $j = 0, 1, \dots, n$  komplexe Zahlen mit  $A_n \neq 0$  sind und deren Definitionsbereich die Menge  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen ist. Die natürl. Zahl  $n$  heißt Grad der a. G.

*Beispiel:* Die Gleichung  $x^7/3 + x^3 - 2x^2 + 1 = 0$  ist eine a. G. siebenten Grades, mit den Koeffizienten  $A_7 = 1/3, A_6 = A_5 = A_4 = A_1 = 0, A_3 = 1, A_2 = -2$  und  $A_0 = 1$ . Dividiert man die allgemeine Form durch den von Null verschiedenen Koeffizienten  $A_n$ , so erhält man mit den Abkürzungen  $A_{n-i} : A_n = a_i, i = 1, \dots, n$  die Normalform der a. G.  $n$ -ten Grades

$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$  mit  $x \in \mathbf{C}; a_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2, \dots, n$ ; für das Beispiel erhält man  $x^7 + 3x^3 - 6x^2 + 3 = 0$  mit  $a_1 = a_2 = a_3 = a_6 = 0, a_4 = 3, a_5 = -6, a_7 = 3$ .

Nur für einen Grad  $n \leq 4$  gibt es für die allgemeine a. G.  $n$ -ten Grades Lösungsformeln, in denen nur ineinandergeschachtelte Wurzeln stehen. S. a. quadratische Gleichung, kubische Gleichung, Gleichung 4. Grades, Fundamentalsatz der Algebra.

**algebraische Kurve:** Gesamtheit von Punkten, etwa in einem kartes. Koordinatensystem, deren Koordinaten algebraischen Gleichungen genügen. Eine ebene a. K. wird durch eine Gleichung  $F(x, y) = 0$  gegeben, wenn  $F(x, y)$  ein Polynom in  $x$  und  $y$  ist. Ebene a. K.n sind z. B. die Geraden sowie die Kegelschnitte. Der Grad von  $F(x, y)$  gibt die Ordnung der a.n K. an. Eine räuml. a. K. ist als Schnitt zweier algebraischer Flächen definiert durch zwei unabhängige und sich nicht widersprechende Gleichungen  $F(x, y, z) = 0$  und  $G(x, y, z) = 0$ , wobei  $F$  und  $G$  Polynome in  $x, y$  und  $z$  sind.

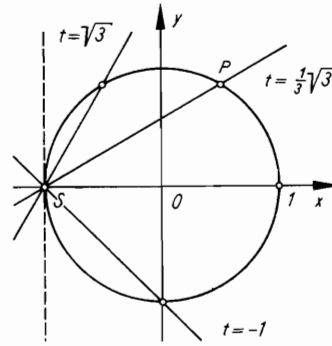
Die Ordnung einer ebenen a.n K. gibt die Höchstzahl der Schnittpunkte mit einer Geraden an. Wenn  $F(x, y)$  in zwei Faktoren zerfällt, z. B.  $F = G \cdot H$ , so ist die durch  $F(x, y) = 0$  bestimmte a. K. die Vereinigung der durch  $G(x, y) = 0$  und  $H(x, y) = 0$  bestimmten Kurven. Ist das Polynom  $F(x, y)$  irreduzibel, so heißt die von  $F(x, y) = 0$  bestimmte a. K. *irreduzibel*. Die durch  $F(x, y) = 0$  bestimmte ebene a. K. heißt *rational*, wenn es zwei rationale Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  gibt, die nicht beide Konstanten sind, so daß  $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$  identisch in  $t$  erfüllt ist ( $\nearrow$  rationale Kurve I.). Der Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$  z. B. ist nach der Parameterdarstellung (1) eine rationale a. K., wie man aus  $\varphi^2 + \psi^2 = 1$  ersieht (Abb.). Die Parameterdarstellung (1) liefert eine eineindeutige Zuordnung zwi-

$$(1) \quad \varphi(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \psi(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

schen den Parameterwerten  $t \in ]-\infty, +\infty[$  und den Punkten des Einheitskreises mit Ausnahme von  $(-1, 0)$ .

Alle Geraden durch  $S = (-1, 0)$  mit dem Anstieg  $t$  haben die Gleichung  $y = t(x + 1)$ . Setzt man diese Gleichung in die des Einheitskreises ein, so erhält man die in  $x$  quadrat. Gleichung  $x^2(1+t^2) + 2xt^2$

$- (1-t^2) = 0$  mit den Lösungen  $x_1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  und  $x_2 = -1$  bzw.  $y_1 = 2t/(1+t^2)$  und  $y_2 = 0$ . Jede Kurve 1. und 2. Ordnung ist rational, die durch  $x^2 + y^2 = 1$  definierte Kurve 3. Ordnung ist nicht rational.



algebraische Kurve: rationale Parameterdarstellung des Einheitskreises

**algebraische Mannigfaltigkeit:** Punktmenge eines projektiven Raumes, die durch ein System algebraischer Gleichungen definiert wird, denen die Koordinaten ihrer Punkte genügen, die a. M. ist der grundlegende Begriff der modernen algebraischen Geometrie, der den eindimensionalen Begriff der Kurve und den zweidimensionalen der Fläche auf beliebige Dimensionen verallgemeinert. Die a. M. kann auch durch eine Parameterdarstellung charakterisiert werden, die Anzahl der zur Beschreibung notwendigen Parameter ist gleich der Dimension der a. M. S. a. algebraische Geometrie I.

**algebraische Operationen:** eine Funktion  $f$  des  $n$ -fachen Mengenproduktes  $A \times A \times \dots \times A$  in die Menge  $A$ ; sie heißt genauer  $n$ -stellige oder  $n$ -äre a. O.; jedem geordneten  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in A$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  wird eindeutig ein Funktionswert  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$  zugeordnet. Im Fall  $n = 2$  spricht man von einer binären a. O. oder von einer Verknüpfung  $f$ , durch die jedem geordneten Paar  $(a_1, a_2) \in A \times A$  ein eindeutig bestimmter Wert  $f(a_1, a_2) \in A$  zugeordnet wird. Statt  $f(a_1, a_2)$  schreibt man etwa  $a_1 \circ a_2$  oder auch  $a_1 \cdot a_2$  oder  $a_1 + a_2$  und spricht in den beiden letzten Fällen von einer Multiplikation bzw. von einer Addition. Im Falle  $n = 3$  spricht man von einer ternären a. O.; im Falle  $n = 1$  von einer unären a. O., die jedem  $x \in A$  eindeutig ein Element  $f(x) \in A$  zuordnet und folglich eine Funktion von  $A$  in sich ist. Im Falle  $n = 0$  liegt eine nulläre a. O. vor; man versteht darunter das Festhalten eines Elementes von  $A$ .

Die Addition und die Multiplikation in der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen oder in der Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen sind z. B. binäre a. O.en. Die Subtraktion bildet in der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen keine a. O., denn die Differenz zweier Elemente ist nicht notwendig wieder eine natürl. Zahl. Die Bildung des Kehrwertes in der Menge der positiven rationalen

Zahlen ist z. B. eine *unäre a. O.* Die skalare Multiplikation der Elemente eines Vektorraums mit einer festen reellen Zahl  $\alpha$  ist ebenfalls eine unäre a. O. Die Bildung des Schwerpunktes dreier Punkte in der Menge der Punkte der Ebene ist z. B. eine *ternäre a. O.*

Wird durch  $f$  nicht jedem  $n$ -Tupel, sondern nur gewissen  $n$ -Tupeln  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  eindeutig ein Funktionswert  $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  zugeordnet, nennt man  $f$  eine *partielle a. O.*;  $f$  ist eine Funktion von  $B \subset A \times A \cdots \times A$  in  $A$ . Die Subtraktion in der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen ist z. B. eine partielle a. O.; nur den Paaren  $(a_1, a_2)$  mit  $a_1 > a_2$  ist ein Funktionswert  $f(a_1, a_2) = a_1 - a_2$  zugeordnet.

**algebraischer Erweiterungskörper**  $\nearrow$  Körper II.

**algebraischer Zahlkörper**  $\nearrow$  Zahlkörper II.

**algebraisches Komplement**  $\nearrow$  Determinante IV.

**algebraische Struktur, universelle Algebra**, auch *Algebra*: I. eine nichtleere Menge  $A$ , in der mindestens eine *algebraische Operation* definiert ist; auch *partielle algebraische Operationen* können zugelassen sein. Insbes. werden a. S.en mit *assoziativen binären algebraischen Operationen* betrachtet.

*Beispiele*: Die Menge  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen bildet eine a. S. mit den drei binären algebraischen Operationen Addition, Multiplikation und Subtraktion, von denen keine aus dem Bereich  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen herausführt. — Die *positiven rationalen Zahlen* bilden eine a. S. mit der Addition, der Multiplikation und der Division. Die Subtraktion führt aus diesem Bereich heraus und ist deshalb nur eine partielle algebraische Operation.

In einer a. S. können unendlich viele algebraische Operationen definiert sein. Die skalare Multiplikation der Elemente  $x$  eines reellen Vektorraums mit einer festen reellen Zahl  $\alpha$  ist z. B. eine algebraische Operation:  $f_\alpha(x) = \alpha \cdot x$ . Der Vektorraum bildet eine Operatorstruktur. Bei einer *Operatorstruktur*  $A$  bildet eine Menge  $B$ , die selbst a. S. sein kann, den *Operatorenbereich*, und jedes Element  $\alpha \in B$  definiert eine unäre algebraische Operation, d. h., jedem  $x \in A$  wird eindeutig ein  $\alpha x \in A$  zugeordnet (s. a. Modul; Algebra III.).

Der Begriff a. S. ist eine Verallgemeinerung der Begriffe *Gruppe, Körper, Algebra, hyperkomplexes System* und *Ring* ( $\nearrow$  Verband II. und Halbgruppe).

In den 40er und 50er Jahren dieses Jahrhunderts begann man allgemeine Eigenschaften aller a. S.en in einer Theorie der *universellen Algebren* zu untersuchen; ein wichtiges Hilfsmittel dafür ist die *Kategorientheorie* ( $\nearrow$  Kategorie II.).

**II.** Die *Arten a. S.en* lassen sich *axiomatisch charakterisieren*. Eine *Gruppe* z. B. wird charakterisiert durch eine nichtleere Menge, in der eine assoziative und umkehrbare algebraische Operation definiert ist. In einem Körper sind zwei assoziative und kommutative algebraische Operationen erklärt, die meist als *Addition* und *Multiplikation* bezeichnet und geschrieben werden, die über das Distributivgesetz  $a(b + c) = ab + ac$  miteinander zusammenhängen sowie dadurch charakterisiert sind, daß die Gleichungen  $a + x = b$  und  $cy = d$  stets Lösungen

$x, y$  haben, sofern  $c$  nicht das Nullelement ist, d. h. keine Lösung  $z$  der Gleichung  $a + z = a$ .

Eine *Unterstruktur* oder *Teilstruktur*  $B$  einer a. S.  $A$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $A$ , die bzgl. der in  $A$  definierten algebraischen Operationen eine a. S. derselben Art wie  $A$  ist, d. h., die abgeschlossen bzgl. der Operationen ist und dieselben Axiome erfüllt. Dazu reicht es i. allg. nicht aus, daß die algebraischen Operationen nicht aus  $B$  herausführen. Die Menge der positiven ganzen Zahlen ist z. B. zwar abgeschlossen gegenüber der Addition, aber keine Untergruppe, sondern nur *Unterhalbgruppe* der additiven Gruppe der ganzen Zahlen (s. a. Gruppe, Ring, Körper).

Die meisten a. S.en kann man durch gewisse algebraische Operationen und das Erfülltsein gewisser Gleichungen für alle Elemente einer solchen a. S. axiomatisch definieren, so daß die entsprechenden Unterstrukturen dadurch charakterisiert sind, daß sie gegenüber den Operationen abgeschlossen sind. Man spricht von *durch Gleichungen definierten* a. S.en. Eine *Gruppe* läßt sich z. B. definieren durch die nulläre Operation Einselement  $e$ , die unäre Operation der Inversenbildung, die binäre Operation der Multiplikation mit den *Gleichungen*: Assoziativgesetz  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , Linkseinselementeigenschaft  $e \cdot a = a$  und Linksinverseigenschaft  $a^{-1} \cdot a = e$ .

Die bzgl. dieser Operationen abgeschlossenen Untermengen einer Gruppe sind die *Untergruppen* dieser Gruppe. Nimmt man zu den Operationen noch alle *inneren Automorphismen* hinzu, d. h. alle unären Operationen der Form  $f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ , in denen  $a$  ein beliebiges Gruppenelement ist, so erhält man als Teilstrukturen die *Normalteiler* ( $\nearrow$  Gruppe II.) dieser Gruppe.

**III.** Sind in den a. S.en  $A$  und  $B$  die gleichen algebraischen Operationen definiert, so ist die Funktion  $\varphi$  von  $A$  in bzw. auf  $B$  ein *Homomorphismus* von  $A$  in bzw. auf  $B$ , falls für jede  $n$ -stellige algebraische Operation  $f$  von  $A$  und von  $B$  und für jedes  $n$ -Tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in A$  für  $i = 1, \dots, n$  die Beziehung (1) gilt. Kurz gesagt, das Bild der Operation der

$$(1) \quad \varphi(f(a_1, \dots, a_n)) = f(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$$

Verknüpfung, des Produktes, ist gleich der Operation der Verknüpfung, des Produktes der Bilder.

Ist  $\varphi$  eine *eindeutige* Abbildung von  $A$  auf  $B$  und sind  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  Homomorphismen, so liegt ein *Isomorphismus* zwischen den a. S.en  $A$  und  $B$  vor. Zwischen isomorphen a. S.en unterscheidet man gewöhnlich nicht. Eine wichtige Ausnahme ist die Unterscheidung zwischen isomorphen Unterstrukturen einer a. S.

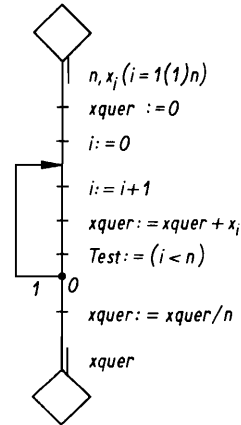
Besteht ein Homomorphismus  $\varphi$  der a. S.  $A$  auf die a. S.  $B$ , so heißt  $B$  das *homomorphe Bild* von  $A$  bzgl.  $\varphi$ . Zwei Elemente  $a$  und  $b$  von  $A$  heißen *kongruent*,  $a \sim b$ , wenn  $\varphi(a) = \varphi(b)$  ist. Die Relation  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation. In der Menge der Äquivalenzklassen bzgl. dieser Relation kann man durch (2) die gleichen algebraischen Operationen wie in  $A$

$$(2) \quad f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \dots, a_n)}$$

definieren, dabei bezeichnet  $\bar{a}_1$  diejenige Äquivalenzklasse, in der  $a_1$  liegt. Die Äquivalenzklassen, Kongruenzklassen gen., bilden danach eine a. S. derselben Art wie  $A$ , die Faktorstruktur von  $A$  bzgl.  $\varphi$  (vgl. Faktorgruppe, Restklassenring), die isomorph ist zum homomorphen Bild  $B$  von  $A$ .

**algebraische Zahl** ↗ Zahlkörper II.  
**algebraische Zahlentheorie** ↗ Zahlentheorie IV.  
**algebraisch unabhängig** ↗ algebraisch abhängig.  
**ALGOL** ↗ Programmierung des Digitalrechners I.  
**Algorithmus: I.** eine endliche Folge von Regeln, nach denen sich nach endlich vielen eindeutig festgelegten Schritten die Lösung einer Aufgabe so ergibt, daß sie eindeutig den in ihr enthaltenen Bedingungen entspricht. Die verwendeten Regeln müssen mit den zugelassenen Hilfsmitteln ausführbar sein und in einer Sprache (↗ Zeichen) formuliert werden, die von den mit ihrer Abarbeitung betrauten Menschen oder Automaten verstanden wird. In der numer. Mathematik besteht die Aufgabe meist darin, aus gegebenen Zahlen ein oder mehrere Zahlen zu berechnen. In der Rechentechnik wird der A. in einem Programm formuliert. S. a. numerisches Rechnen.

**II.** In der Rechentechnik wird unter A. ein Verfahren verstanden, das in endlich vielen eindeutig festgelegten Schritten zur Lösung einer bestimmten Aufgabe führt. Ein wichtiges Problem stellt die Beschreibung eines A. dar. In der Rechentechnik dienen diesem Zweck Programmiersprachen (↗ Programmierung des Digitalrechners I.) und graphische Ausarbeitungen. Bzgl. der zweiten Methode

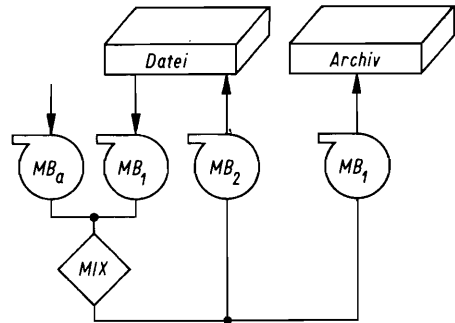


Algorithmus. Abb. 1: Berechnung des arithmetischen Mittelwertes  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

haben besonders Programmablaufpläne oder Flußdiagramme eine weite Verbreitung gefunden, die, wegen ihrer Anschaulichkeit geschätzt, meist zur Vorbereitung der eigentl. Programmierung erarbeitet werden. Die geometr. Gestalt und zum Teil auch die Beschriftung von Programmablaufplänen bzw. Flußdiagrammen sind in der TGL 22451, Blatt 1 von 1967 festgelegt. Abb. 1 zeigt ein elementares

Beispiel, das die Berechnung des arithmet. Mittelwertes einer endl. Zahlenfolge  $x_i$ , d. h. die Ermittlung von  $x$  quer  $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , programmiert.

Nach der Aufführung der Ausgangsgrößen der Rechnung wird  $x$  quer der Wert Null zugewiesen. Danach erhält der Index  $i$  zunächst den Wert Null und wird anschließend sofort um Eins erhöht. Diesem Schritt folgt die Addition von  $x_i$  zu  $x$  quer. Ist der Test  $i < n$  erfüllt, so setzt die Rechnung wieder mit der Erhöhung des Index  $i$  ein. Andernfalls, wenn  $\sum_{i=1}^n x_i$  zyklisch gebildet ist, endet der A.



Algorithmus. Abb. 2: Ausschnitt aus einem Datenflußplan

mit der Division des bisherigen Wertes von  $x$  quer durch  $n$ . Dabei ist z. B. die Anweisung  $x$  quer  $:= x$  quer  $+ x_i$ ; so zu verstehen, daß  $x_i$  zu dem alten Wert von  $x$  quer addiert wird. Das Ergebnis dieser Operation bildet den neuen Wert von  $x$  quer.

Weniger detaillierte Darstellungen rechner. Verfahren, die jedoch als Prinzipübersichten methodisch äußerst wertvoll sind, werden Blockdiagramme gen. Ein weiteres wichtiges graph. Beschreibungsmittel von A. sind Datenflußpläne, die zur Fixierung organisator. Verfahren, z. B. für den technolog. Arbeitsablauf in einem Rechenzentrum, aufgestellt werden. Abb. 2 enthält einen Ausschnitt aus einem typ. Datenflußplan.

Die Daten auf dem Magnetband  $MB_a$  werden mit denen auf dem Magnetband  $MB_1$ , das einer Datei zu entnehmen ist, mittels einer Rechanlage und eines bestimmten A. gemischt. Nach diesem Vorgang ist das Ergebnis auf dem Magnetband  $MB_2$  gespeichert. Während  $MB_1$  zu archivieren ist, wird  $MB_2$  in die Datei gegeben.

Alle in einem Datenflußplan zulässigen geometr. Zeichen sind ebenfalls in der TGL 22451, Blatt 1 von 1967 aufgelistet.

**Alhazen** ↗ Ibn al-Haitham.

**Alhidade** ↗ Winkelmeßinstrumente II.

**al-Hwarizmi**, ibn Musa, geb. etwa 780 in Choresm, gest. etwa 850 Bagdad (?). — Seine Vorfahren waren offenbar Magier. Er selbst wirkte am »Haus der Weisheit« in Bagdad. Von al-H. sind fünf Werke überliefert. In seiner Arithmetik erläutert er als erster im arab. Raum das dezimale Stellenwertsystem und die Rechenoperationen in ihm. Seine

Algebra enthält kaufmänn. Rechnungen, Probleme des Messens und einen umfangreichen Teil über Testamentsangelegenheiten.

**allgemeine Potenz** ↗ Potenz VI., ↗ komplexwertige Funktion, elementare, IV.

**allgemeingültig** ↗ Gleichung I., ↗ Ungleichung I., ↗ Prädikatenlogik III.

**allgemeingültige Ausdrücke** ↗ Aussagenlogik III.

**Allklasse** ↗ Menge I.

**Alloperator** ↗ Prädikatenlogik I.

**Allrelation** ↗ Relation II.

**Alphabet** ↗ Zeichen, ↗ Sprache, ↗ Wort II.

**alphanumerisch** ↗ Zeichen.

**Alternante** ↗ Approximation II.

**Alternative** ↗ Aussagenlogik II.

**alternative Normalform** ↗ Normalform I.

**Alternativhypothese** ↗ Signifikanztest II.

**alternierende Gruppe** ↗ Permutationsgruppe.

**alternierende Reihe** ↗ Reihe III., ↗ Konvergenzkriterien für Reihen IV.

**alternierende Zahlenfolge** ↗ Zahlenfolge III.

**AM** svw. Amplitudenmodulation, ↗ Modulation I.

**Amortisation:** Rechenverfahren, eine aufgenommene Schuld  $S$  durch konstante jährl. Raten  $A$ , *Annuitäten* gen., zu tilgen, wenn ein Zinsfuß von  $p\%$  vereinbart wurde (↗ Zinsrechnung). Die Annuität  $A$  muß größer sein als der Zinsbetrag  $S \cdot p/100$  am Ende des ersten Jahres, so daß am Anfang des 2. Jahres die Schuld nur noch

$$S_1 = S - (A - Sp/100) = S(1 + p/100) - A = Sr - A$$

beträgt, wenn  $r = (1 + p/100)$  gesetzt wird. Nach dem gleichen Schluß gilt für den Anfang des 3. Jahres  $S_2 = Sr^2 - Ar - A$  und nach  $n$  Jahren  $S_n = Sr^n - A(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + 1) = S \cdot r^n - \frac{A(r^n - 1)}{(r - 1)}$  (↗ Zinseszinsrechnung). Die Schuld ist

getilgt, wenn  $S_n = 0$  oder  $Sr^n = A(r^n - 1)/(r - 1)$ . Eine Schuld z. B. von 8000,- M wird mit Annuitäten von  $A = 500,-$  M bei  $p = 3,5\%$  in  $n = 23,87$  Jahren amortisiert, d. h. nach 24 Jahren.

**Amplitude** ↗ Koordinatensystem IV., ↗ Winkel-funktion VIII.

**Amplitudenkennlinien** ↗ Frequenzgang III.

**Analog-Digital-Umsetzer** ↗ Kodierung II.

**analoges Signal** ↗ Signal.

**analoge Steuerung** ↗ Steuerung I.1.

**Analogrechner (AR):** I. universeller, programmierbarer, elektron. Rechner, dessen analoges Wirkprinzip darauf beruht, daß bestimmte Funktions- oder Recheneinheiten zu einem elektr. System so vereinigt werden, daß dessen mathemat. Beschreibung mit der einer vorgegebenen Aufgabe bis auf die *Variablentransformation* (↗ Programmierung des Analogrechners II.) übereinstimmt (s. a. Rechenanlage). Die gesuchten Lösungen können daher durch Messung der elektr. Ausgangsgrößen des Systems gewonnen und i. allg. mit Hilfe von Oszillographen oder Kurvenschreibern dargestellt werden. Die wichtigsten *Einsatzgebiete* des A.s sind die Integration gewöhnl. Differentialgleichungen sowie die Modellierung dynam. Systeme. Im Vergleich zum *Digitalrechner* zeichnet sich der A. durch hohe

*Rechengeschwindigkeit*, durch die Ausführbarkeit *nichtdiskreter Operationen* wie das Integrieren und durch verhältnismäßig *geringe Kosten* aus. Wesentl. Nachteile bestehen im eingegrenzten Anwendungsbereich und in beträchtl. und unvermeidl. Rechenungenauigkeiten. Jede Operation des A.s ist mit einem relativen Fehler von  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  behaftet.

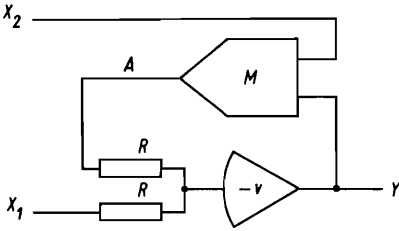
Name und Operationsgleichung	Symbol
<b>Potentiometer</b> $Y = kX, 0 \leq k \leq 1$	
<b>Operationsverstärker</b> $Y = -vX, 10^4 \leq v \leq 10^8$	
<b>Summator</b> $Y = -\sum_{i=1}^n k_i X_i$	
<b>Inverter</b> $Y = -X$	
<b>Integrator</b> $Y = -\int_0^{\tau} \sum k_i X_i d\tau - A$	
<b>Multiplikator</b> $Y = X_1 \cdot X_2$	
<b>Funktionswandler</b> $Y = f(X)$	
<b>Komparator</b> $Y = \begin{cases} X_1 & \text{für } X_{S1} + X_{S2} > 0 \\ X_2 & \text{für } X_{S1} + X_{S2} < 0 \end{cases}$	

Abb. 1: Die wichtigsten Recheneinheiten des Analogrechners, ihre Symbole und ihre Operationsgleichungen

Abb. 1 gibt eine Übersicht über die gebräuchlichsten Recheneinheiten des A. sowie ihre Symbole und Operationsgleichungen. Die *Subtraktion* wird mit Hilfe von Inverter und Summator durchgeführt. Für die *Division* enthalten die meisten A. ebenfalls keine spezielle Recheneinheit. Dividiert wird durch *Zusammenschaltung*



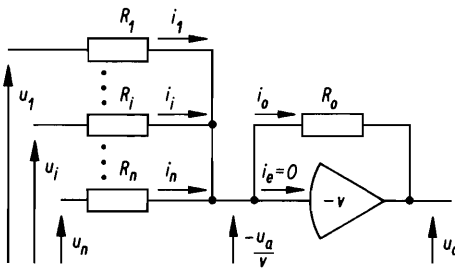
von Multiplikator und Operationsverstärker (Abb. 2). Der *Operationsverstärker*, dessen Verstärkung  $v$  nach Abb. 1 praktisch als unendlich angesehen werden kann, bewirkt mit seinen beiden Eingangswiderständen  $Y = -v(A + X_1)$ . Für die Ausgangsgröße  $A$  des Multiplikators gilt  $A = X_2 \cdot Y$ . Damit wird  $Y/(-v) = X_2 \cdot Y + X_1$  und  $Y = -X_1/X_2$  für  $v \rightarrow \infty$ .



Analogrechner. Abb. 2: Realisierung der Division

II. Ein grundlegender Baustein des A. ist der *Operationsverstärker*. Durch modifizierte Beschaltung können verschiedene Recheneinheiten realisiert werden.

II.1. Mit einem idealen Operationsverstärker, der frei von Störsignalquellen ist, keinen Eingangsstrom



Analogrechner. Abb. 3: Schaltung des Summators

hat und über eine unendl. Verstärkung verfügt, stellt die in Abb. 3 angegebene Schaltung einen idealen *Summator* dar. Nach den Kirchhoffschen Gesetzen gilt das Gleichungssystem (1). Aus diesem ergibt sich (2) und mit  $v \rightarrow \infty$  Gleichung (2a).

$$(1a) \quad i_i = -(1/R_i) \cdot (u_i + u_a/v),$$

$$(1b) \quad i_o = (1/R_o) \cdot (u_a + u_a/v), \quad (1c) \quad \sum_{i=1}^n i_i = i_o$$

$$(2) \quad u_a \left[ 1 + (1/v) + (1/v) \cdot \sum_{i=1}^n (R_o/R_i) \right] = - \sum_{i=1}^n (R_o/R_i) \cdot u_i \quad (2a) \quad u_a = - \sum_{i=1}^n (R_o/R_i) \cdot u_i$$

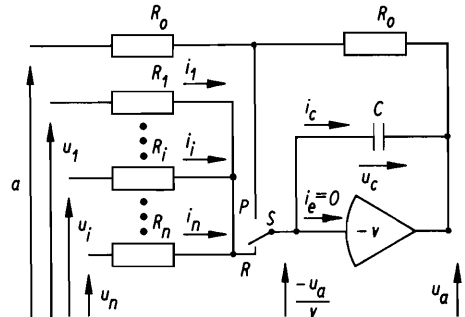
Es ist üblich, die Ein- und Ausgangsgrößen des A.s auf die *Maschineneinheit E*, z. B. auf 10 V zu beziehen. Mit  $X_i = u_i/E, Y = u_a/E$  und  $K_i = R_o/R_i$  ergibt sich die Operationsgleichung (3), die frei

$$(3) \quad Y = - \sum_{i=1}^n K_i \cdot X_i$$

von physikal. Dimensionen ist. Für die Ein- und Ausgangsgrößen gilt die Beschränkung  $-1 \leq X_i, Y \leq +1$ .

II.2. Die Summatorschaltung für  $n = 1$  und  $K_1 = 1$  liefert einen *Inverter*, auch *Umkehrverstärker* gen., der bei konstanter Amplitude nur die Phase des Eingangssignals um  $180^\circ$  dreht und damit einer Multiplikation mit  $-1$  entspricht.

III. *Integrator*. Der A. hat zwei Arbeitszustände (Abb. 4). Im Zustand *Pause* übernehmen alle Integratoren die programmierten Anfangswerte. Dabei stehen die Schalter *S* aller Integratoren in der Stellung *P*. Im Zustand *Rechnen* wird die Integration durchgeführt. Die Schalter *S* befinden sich in der Stellung *R*. Die *Anfangswertübernahme* läßt sich ohne Rechnung wie folgt erklären. Da  $u$  konstant ist, kann die Ausgangsgröße  $u_a$  nach Ablauf einer Übergangszeit ebenfalls als konstant angesehen werden. Damit ist auch  $u_c$  konstant und infolgedessen  $i_c = C \frac{du_c}{d\tau} = 0$ , d. h., der Kondensator ist ohne Einfluß. Das bedeutet, der Integrator wirkt unter den geschilderten Bedingungen wie ein Inverter, so daß  $u_a = -a$  gilt. Beim Übergang des Schalters *S* von *P* nach *R* beginnt die Integration



Analogrechner. Abb. 4: Integratorschaltung: *S* in Stellung *R* bedeutet Rechnen, in Stellung *P* Pause

der  $u_i$ , wobei  $u_a(0) = -a$  ist. Für einen idealen Operationsverstärker gilt das Gleichungssystem (4).

$$(4a) \quad i_i = -(1/R_i) (u_i + u_a/v),$$

$$(4b) \quad i_c = C \frac{du_c}{d\tau}, \quad (4c) \quad u_a - u_c + u_a/v = 0,$$

$$(4d) \quad \sum_{i=1}^n i_i = i_c, \quad (4e) \quad u_a(0) = -a$$

Hieraus folgt das System (5) und mit  $v \rightarrow \infty$  und anschließender Integration Gleichung (6).

$$(5) \quad C \left( 1 + \frac{1}{v} \right) \frac{du_a}{d\tau} + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n \frac{u_a}{R_i} = - \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{R_i},$$

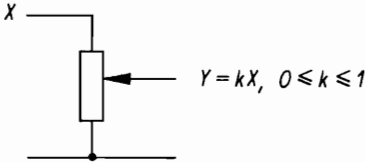
$$(5a) \quad u_a(0) = -a \quad (6) \quad u_a = - \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{CR_i} d\tau - a$$

Wird analog zum Summator  $A = a/E, X_i = u_i/E, Y = u_a/E$  und  $k_i = 1/(CR_i)$  gesetzt, so entsteht die

dimensionslose Beziehung (7). Dabei ist die Be-

$$(7) \quad Y = - \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^n k_i X_i d\tau - A$$

schränkung  $-1 \leq A, X_i, Y \leq +1$  zu beachten.  
**IV. Multiplikator.** Eine einfache Form der Multiplikation ist die *Konstantenmultiplikation*, die mit Hilfe eines *Potentiometers* ausgeführt wird (Abb. 5). Für  $|k| > 1$  muß ein Potentiometer mit nachgeschaltetem Operationsverstärker verwendet werden. Zur Realisierung einer Funktionsmultiplikation

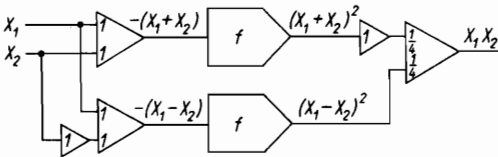


Analogrechner. Abb. 5: Konstantenmultiplikation

wird meist ein *Diodenmultiplikator* (Abb. 6) benutzt. Diesem liegt die Beziehung (8) zugrunde.

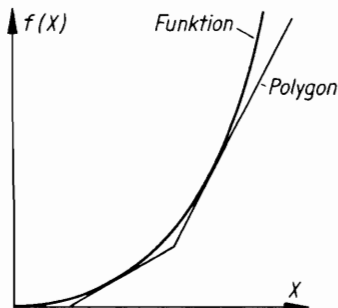
$$(8) \quad X_1 X_2 = 1/4 [(X_1 + X_2)^2 - (X_1 - X_2)^2]$$

Das Kernstück eines derartigen Multiplikators sind zwei Quadrierer, die spezielle Funktionswandler darstellen.

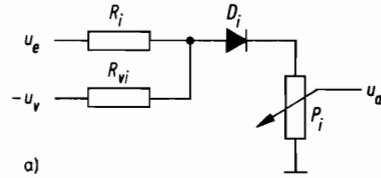


Analogrechner. Abb. 6: Blockbild des Diodenmultiplikators

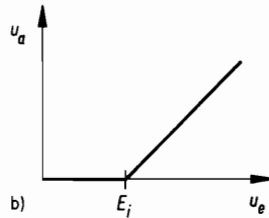
**V. Der Funktionswandler** erzeugt als Recheneinheit bei gegebenem Argument  $X(\tau)$  die Ausgangsgröße  $Y(\tau) = f(X(\tau))$ . Die Kurve der gewünschten Funktion  $f$  wird vor Beginn der Rechnung am Wandler durch einen Polygonzug approximiert (Abb. 7). Zur Verwirklichung eines Geradenabschnittes ist



Analogrechner. Abb. 7: Funktionsapproximation

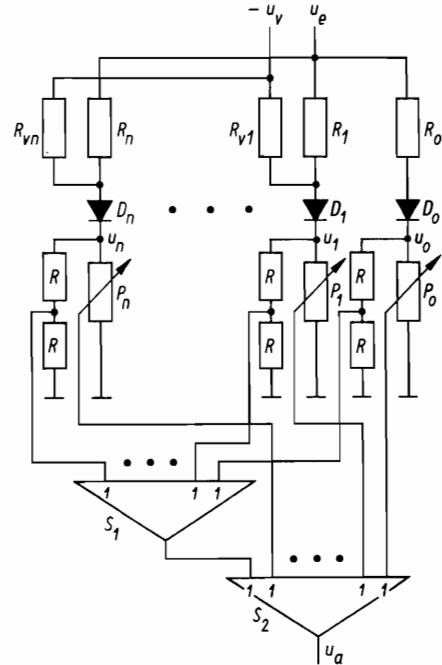


a)



b)

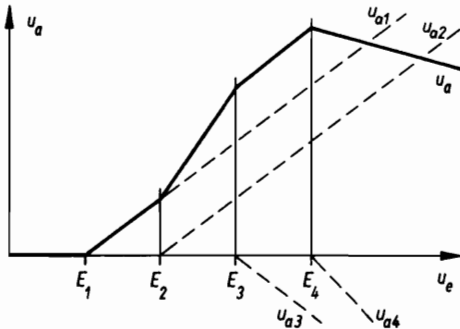
Analogrechner. Abb. 8: Widerstands-Diodenzweig:  
 a) Schaltung, b) Kennlinie



Analogrechner. Abb. 9: Prinzipschaltung eines Funktionswandlers für  $u_e > 0$

ein *Widerstands-Diodenzweig* notwendig (Abb. 8). Für  $u_e < E_i$  ist die Diode gesperrt und die Ausgangsspannung Null. Die *Knickspannung*  $E_i$  hat den Wert  $u_v \cdot R_i / R_{vi}$ . Der Anstieg der Geraden kann durch Stellen des Potentiometers  $P_i$  beeinflusst werden. Die angegebene Schaltung (Abb. 9) läßt nur positive Steigungen zu und erlaubt damit lediglich die Nachbildung monoton wachsender Funktionen. Wird dem Potentiometer ein Inverter

nachgeschaltet, sind auch negative Steigungen möglich. Die meisten Funktionswandler verfügen über fest vorgegebene, äquidistant verteilte Knickspannungen. Mit jedem der Potentiometer  $P_i$  lassen sich sowohl positive als auch negative Steigungen einstellen. Die an den Eingängen der  $P_i$  liegenden Spannungen  $u_i$  haben in Abhängigkeit von  $u_e$  den Verlauf geknickter Geraden mit positivem Anstieg. Am Ausgang des Summators  $S_1$  liegt das Signal  $-0,5 \sum_{i=0}^n u_i$ . Daher verursachen die  $u_i$  am Ausgang des Summators  $S_2$  Spannungsanteile der Form  $u_{ai} = u_i(0,5 - k_i)$ , wobei  $k_i$  mit  $0 \leq k_i \leq 1$  das einstellbare Teilverhältnis des Potentiometers  $P_i$  ist. Für  $k_i < 0,5$  ergibt sich ein positiver und für  $k_i > 0,5$  ein negativer Geradenanstieg. Abb. 10 demonstriert die Konstruktion einer Kurve aus geknickten Geraden.



Analogrechner. Abb. 10: Approximation einer Kurve durch Geradenabschnitte

Neben dem beschriebenen universellen Funktionswandler gibt es spezielle, die für bestimmte wichtige Funktionen, z. B.  $Y = X^2$ ,  $Y = X^3$ , fest eingestellt sind.

**VI. Der Komparator** ermöglicht die Ausführung von Schaltvorgängen in Abhängigkeit von einem Vergleich. Er entspricht einem *elektron. Relais*, das als Folge eines Vergleichs der Steuergrößen  $X_{S1}$  und  $X_{S2}$  eine der Eingangsgrößen  $X_1$  oder  $X_2$  durchschaltet. **Analysator**  $\nearrow$  harmonischer Analysator.

**Analysatorenlenker**  $\nearrow$  harmonischer Analysator.  
**analytische Fortsetzung:** I. Fortsetzung einer im Gebiet  $G_1$  analyt. Funktion  $f_1$  in das Gebiet  $G_2$  der  $z$ -Ebene durch eine in  $G_2$  analyt. Funktion  $f_2$ , für die  $f_1 = f_2$  auf  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$  ist. Nach dem Eindeutigkeitssatz über analyt. Funktionen bestimmen sich  $f_1$  und  $f_2$  gegenseitig eindeutig. Ist z. B.  $f_1(z)$  durch die Potenzreihe  $P_1(z - z_1)$  in deren Konvergenzkreis  $K_1: |z - z_1| < r_1$  vom Radius  $0 < r_1 < \infty$  gegeben, so läßt sich  $P_1$  für jeden Punkt  $z_2 \in K_1$  wegen  $z - z_1 = [(z - z_2) + (z_2 - z_1)]$  in eine gleichfalls konvergente Potenzreihe  $P_2$  nach Potenzen von  $(z - z_2)$  umordnen. Für die durch sie dargestellte analytische Funktion  $f_2(z)$  gilt  $f_1 = f_2$  im Durchschnitt  $G_1 \cap G_2$  nach dem Identitätssatz für Potenzreihen. Enthält der Konvergenzkreis  $K_2: |z - z_2| < r_2$  mit  $0 < r_2 < \infty$  auch Punkte  $z$ , die außerhalb

von  $K_1$  liegen, so heißt  $f_2(z)$  die a. F. von  $f_1(z)$ . Für einen Punkt  $z_3 \in K_2$  kann die Überlegung wiederholt werden. So ergibt sich eine Potenzreihe  $P_3(z - z_3)$ , die eine weitere a. F. festlegt, wenn ihr Konvergenzkreis  $K_3$  Punkte außerhalb von  $K_2$  enthält.

**II.** Setzt man dieses *Kreiskettenverfahren* auf jede mögliche Art fort, so erhält man das *vollständige analytische Gebilde*, das durch die Potenzreihe  $P_1$  erzeugt wird und für das die Funktionen  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ...,  $f_n(z)$  *Funktionselemente* sind. Es kann z. B. jedem Punkte der  $z$ -Ebene genau einen Funktionswert  $f(z)$  zuordnen und damit eine komplexe analyt. Funktion definieren. Es kann aber auch Punkte  $z_0$  geben, über denen je nach dem Wege, auf dem man sich ihnen nähert, verschiedene Funktionswerte  $f_j(z_0)$  erhalten werden. Um bei diesen mehrdeutigen Zuordnungsvorschriften die Eindeutigkeit der Zuordnung zu erreichen, betrachtet man so viele Exemplare der  $z$ -Ebene, wie es verschiedene Werte  $f_j(z_0)$  zu einem Punkte  $z_0$  gibt. Alle diese Exemplare werden übereinandergelegt und längs gewisser Schnitte miteinander zu einem Gebilde verheftet, das man *Riemannsche Fläche* nennt, die Exemplare aber *Blätter* der Riemannschen Fläche. Eine mehrdeutige Zuordnungsvorschrift über der  $z$ -Ebene kann über der entsprechenden Riemannschen Fläche als eindeutige Zuordnung und damit als komplexe Funktion aufgefaßt werden. Die durch  $w = \sqrt{z} = r \exp(i\varphi/2)$  definierte Zuordnung z. B. nimmt für  $\varphi_1 = -\pi/2$ ,  $\varphi_2 = +\pi/2$  und  $\varphi_3 = +3\pi/2$  die Werte  $w_1 = r \exp(-\pi i/2)$ ,  $w_2 = r \exp(+\pi i/2)$  und  $w_3 = r \exp(+3\pi i/2) = r \exp(-\pi i/2) = w_1$  an. Die Riemannsche Fläche der Funktion  $w = \sqrt{z}$  hat deshalb zwei Blätter, die man sich als zwei  $z$ -Ebenen vorstellen kann, die übereinander liegen, von denen jede längs der negativen reellen Achse von  $z = 0$  bis  $z = \infty$  aufgeschnitten wurde, und die dann so miteinander verheftet worden sind, daß der untere Rand des einen Blattes mit dem oberen Rand des anderen zusammenhängt. Wächst das Argument im positiven Sinne von  $\varphi_1$  aus, so enthält das erste Blatt die  $z$ -Werte für  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$  und das zweite die für  $\varphi_2 < \varphi < \varphi_3$ , und der Anfangswert jedes Intervalls kennzeichnet den unteren, der Endwert den oberen

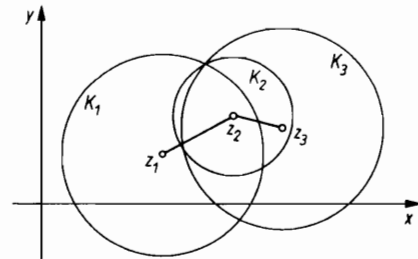
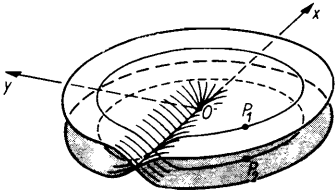


Abb. 1: Analytische Fortsetzung durch eine Kreiskette

Rand (Abb.) (s. a. Moirvesche Formel III.). Die Punkte  $z = 0$  und  $z = \infty$  heißen *Verzweigungspunkte*. Man überlegt sich leicht, daß die Riemannsche Fläche der Funktion  $w = \sqrt[3]{z}$  drei Blätter, aber

die gleichen Verzweigungspunkte hat (vgl. Potenz V.). Die Funktionselemente, die über einem Blatt der Riemannschen Fläche dargestellt werden, bezeichnet man als *Funktionszweige*. Die Riemannsche Fläche der Funktion  $w = \ln z$  hat unendlich viele Blätter ( $\nearrow$  komplexwertige Funktion, elementare, III.).



analytische Fortsetzung. Abb. 2: Riemannsche Fläche der analytischen Funktion  $f(z) = \sqrt{z}$

**analytische Funktion, holomorphe Funktion, reguläre Funktion:**

**I. Funktion  $f(x)$ , die Summenfunktion einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  ist.** Genauer heißt die Funktion  $f(x)$  für  $x = x_0$  analytisch, falls eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  existiert und  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  in einer Umgebung von  $x = x_0$ , etwa für  $|x - x_0| < r$  mit  $r > 0$  gilt. Die Funktion  $f(x)$  heißt in einem offenen Intervall analytisch, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls analytisch ist. Jede in  $x_0$  a. F. ist auch in einer Umgebung von  $x_0$  analytisch, denn die Potenzreihe, die  $f(x)$  definiert, kann stets so transformiert werden, daß jeder Punkt  $x_1$  mit  $|x_1 - x_0| < r$  Mittelpunkt der Potenzreihe wird:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_1)^k$  für  $|x - x_1| < \rho$  mit  $\rho \leq r - |x_1 - x_0|$  ( $\nearrow$  Potenzreihe VII.).

Die Funktionen  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  sind z. B. für alle  $x$  a. F.en. Die Funktion  $\ln x$  ist für  $x > 0$  analytisch und  $1/x$  ist analytisch für alle  $x \neq 0$  ( $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen IV.). Durch (1) wird gezeigt, daß die Funktion  $1/x$  in  $x_0 \neq 0$  analytisch ist.

$$(1) \quad \begin{aligned} 1/x &= \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + (x - x_0)/x_0} \\ &= \frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1/x_0)^k (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Diese Entwicklung gilt für  $|x - x_0| < |x_0| = r$ . Jede in  $x_0$  a. F.  $f(x)$  ist in einer Umgebung von  $x_0$  beliebig oft differenzierbar, und für die Koeffizienten der Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  gilt  $a_k = (1/k!) f^{(k)}(x_0)$ , d. h., ist  $f(x)$  in  $x_0$  analytisch, so gilt (2) für alle Punkte aus einer Umgebung von  $x_0$  ( $\nearrow$  Taylorsche Reihe I.).

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

**II. Summe, Differenz und Produkt** a. F.en sind wieder a. F.en. Ist  $f(x)$  eine für  $|x - x_0| < r$  a. F. und ist  $f(x) \neq 0$  für diese  $x$ -Werte, so ist auch  $1/f(x)$  eine für  $|x - x_0| < r$  a. F. Die *mittelbare Funktion*  $f(g(x))$  ist für  $|x - x_0| < r$  analytisch, falls  $u = g(x)$  eine für  $|x - x_0| < r$  und  $f(u)$  eine für  $|u - u_0| < \rho$  a. F. ist und darüber hinaus  $|g(x) - u_0| < \rho$  für  $|x - x_0| < r$  ausfällt. Ist die Funktion  $y = f(x)$  in  $x_0$  analytisch, so ist auch die Umkehrfunktion  $x = g(y)$  in  $y_0 = f(x_0)$  analytisch, falls sie überhaupt existiert ( $\nearrow$  Potenzreihe XIV.).

Die Funktion  $\ln x + e^{\sin x}$  z. B. ist für alle  $x > 0$  analytisch, da  $e^{\sin x}$  als zusammengesetzte Funktion analytisch ist und die Summe a. F.en wieder analytisch ist. Ebenso ist  $\tan x = \sin x / \cos x$  für alle  $x \neq (2k + 1) \cdot \pi/2$  mit  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  analytisch, denn für diese  $x$ -Werte ist  $\cos x \neq 0$ , und  $\sin x$  und  $\cos x$  sind a. F.en. Die *elementaren Funktionen* sind mit Ausnahme einiger Punkte überall analytisch; diese Ausnahmepunkte nennt man *singulär* oder *Singularitäten*. Da die Funktion  $y = \sin x$  für alle  $x$  analytisch ist und in dem Intervall  $-\pi/2 < x < \pi/2$ , das dem Wertebereich  $-1 < y < 1$  entspricht, die Umkehrfunktion gebildet werden kann, so ist diese in  $] -1, 1[$  analytisch, d. h., die Funktion  $y = \arcsin x$  ist für alle  $x$  mit  $-1 < x < 1$  analytisch.

**III.** Ein für a. F.en gültiger wichtiger Satz folgt aus dem *Identitätssatz* für Potenzreihen ( $\nearrow$  Potenzreihe VI.): *Sind die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $|x - x_0| < r$  analytisch und gilt  $f(x) = g(x)$  für ein offenes Intervall in  $|x_0 - r, x_0 + r|$ , so folgt daraus  $f(x) = g(x)$  für alle  $x$  aus  $|x_0 - r, x_0 + r|$ .* Dieselbe Folgerung kann man bereits ziehen, wenn  $f(x_k) = g(x_k)$  nur für eine Zahlenfolge  $(x_k)$  mit  $|x_k - x_0| < r$  gilt, die einen Häufungswert  $a$  mit  $|a - x_0| < r$  hat.

Mit Hilfe dieses Satzes zeigt man sofort, daß es Funktionen gibt, die *unendlich oft differenzierbar, aber nicht analytisch* sind, z. B. die Funktion  $f(x)$ , die für  $x > 0$  die Werte  $e^{-1/x}$  hat, für  $x \leq 0$  aber 0 ist. Zunächst ist  $f(x)$  beliebig oft differenzierbar, wie man für  $x \neq 0$  sofort und für  $x = 0$  nach (3) sieht.

$$(3) \quad \begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} e^{-1/h} = 0, \\ f''(0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h^3} e^{-1/h} = 0 \end{aligned}$$

Wäre die Funktion  $f(x)$  in einer Umgebung  $-c < x < c$  von  $x = 0$  analytisch, so würde aus  $f(x) = g(x)$  für  $-c < x < 0$  mit  $g(x) \equiv 0$  folgen, daß auch  $f(x) \equiv 0$  in  $-c < x < c$  ist. Das ist ein Widerspruch, denn  $f(x) = e^{-1/x} \neq 0$  für  $x > 0$ . Die Funktion  $f(x)$  ist deshalb keine für  $x = 0$  a. F.

**IV.** Die Definition einer a. F. läßt sich auf *komplexwertige Funktionen*  $f(z)$  einer komplexen Variablen übertragen;  $f(z)$  ist eine in  $z = z_0$  a. F. genau dann, wenn sie in  $|z - z_0| < r$  mit  $r > 0$  durch eine konvergente Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$  dargestellt werden kann. Wie im Reellen sind die elementaren Funktionen in der ganzen  $z$ -Ebene mit Ausnahme

einiger isolierter singulärer Punkte a. F.en. A. F.en haben in allen nicht singulären Punkten Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Nach dem *Maximumprinzip* nehmen sie in einem abgeschlossenen Gebiet  $G$  betragsmäßig das Maximum auf dem Rand von  $G$  an; nach dem *Satz von Liouville* sind sie konstant, wenn sie in der ganzen  $z$ -Ebene beschränkt und analytisch sind. Im Gebiet  $G_1$  sind zwei a. F. identisch, falls sie auf einem Teilgebiet von  $G_1$  identisch sind.

**analytische Geometrie:** Untersuchung geometr. Probleme mit rechner. Methoden; die Verschmelzung geometr. und algebraischen Denkens ist ein mächtiges Hilfsmittel zur Erforschung geometr. Gebilde. Die Entstehung der a. G. geht auf R. DESCARTES (1596–1650) und P. DE FERMAT (1601–1665) zurück und wurde besonders von L. EULER (1707 bis 1783) weiterentwickelt. Die a. G. wird dadurch möglich, daß durch Koordinatensysteme den Punkten und anderen geometr. Gebilden Zahlen zugeordnet werden, durch die sie sich voneinander unterscheiden. Der Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$  z. B. ist unter allen *Kurven zweiter Ordnung*  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$  dadurch ausgezeichnet, daß die Koeffizienten  $A = B = 1, F = -1$  und  $C = D = E = 0$  sind. Ein geometr. Objekt kann als *geometr. Ort*, d. h. als Menge aller Punkte aufgefaßt werden, die einer bestimmten Bedingung genügen. Die Punkte eines Kreises genügen z. B. der Bedingung, von einem festen Punkt gleichen Abstand zu haben. Diese Bedingung drückt sich algebraisch dadurch aus, daß zwischen den den Punkten zugeordneten Zahlen  $x$  und  $y$  die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  besteht. Denkt man sich jede solche Gleichung auf eine Form gebracht, in der auf der rechten Seite Null steht, so ist das zu betrachtende geometr. Objekt die Menge aller Punkte, deren zugeordnete Zahlen die Ausdrücke auf der linken Seite zum Verschwinden bringen. Es wird auch *Nullstellengebilde* gen., z. B.  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Die für das geometr. Objekt geltenden einschränkenden Bedingungen lassen sich analytisch auch dadurch erfassen, daß man die den Punkten zugeordneten Zahlen in Abhängigkeit von weiteren Größen, von *Parametern*, beschreibt. Eine *Parameterdarstellung* des Einheitskreises ist z. B.  $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi$  mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

**analytisches Gebilde** ↗ analytische Fortsetzung II.  
**analytische Zahlentheorie** ↗ Zahlentheorie II.  
**Anfangsbedingung** ↗ Anfangswertproblem I.  
**Anfangsmoment** ↗ Momente I., s. a. Stichprobenmoment.  
**Anfangsphase** ↗ Winkelfunktion VIII.  
**Anfangs-Randwertprobleme** ↗ parabolische Differentialgleichung II.

**Anfangswertproblem:** Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung, falls die gesuchte Lösung noch gewissen Bedingungen, den *Anfangsbedingungen*, unterliegt. Das A. tritt sowohl bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen als auch bei partiellen Differentialgleichungen auf. Das A. bezeichnet man häufig auch als *Cauchysches Problem*.

I. Der einfachste Fall eines A. tritt bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung auf. Gesucht ist eine Lösung  $y(x)$  der expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ , die der *Anfangsbedingung*  $y(x^0) = y^0$  unterliegt, d. h., die durch den Punkt  $(x^0, y^0)$  gehen soll. Für dieses A. gilt der folgende *Existenz- und Eindeutigkeitsatz*: Die Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  hat genau eine Lösung  $y = y(x)$  mit  $y^0 = y(x^0)$ , wenn die Funktion  $f(x, y)$  in einem abgeschlossenen Gebiet  $G = \{(x, y) | x^0 - a \leq x \leq x^0 + a, y^0 - b \leq y \leq y^0 + b\}$  mit  $a, b > 0$  die folgenden Forderungen erfüllt: 1.  $f(x, y)$  ist in  $G$  stetig, also auch beschränkt:  $|f(x, y)| \leq M$  für alle Punkte  $(x, y) \in G$  und 2.  $f(x, y)$  genügt in  $G$  bzgl.  $y$  einer *Lipschitzbedingung*, d. h., es existiert eine positive Zahl  $L$ , so daß für jeden Wert  $x$  mit  $|x - x^0| \leq a$  und je zwei Werte  $y_1$  und  $y_2$  mit  $|y_1 - y^0| \leq b, |y_2 - y^0| \leq b$  die Ungleichung  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$  erfüllt ist. Die gesuchte Lösung  $y = y(x)$  der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  existiert dann in dem Intervall  $x^0 - h \leq x \leq x^0 + h$  mit  $h = \text{Min}(a, b/M)$ , und man erhält sie aus einer Folge von *suksessiven Approximationen*  $y^{(n)}(x)$ , in denen man bei der Berechnung der  $y^{(n)}(x)$  von  $y^{(0)}(x) = y^0$  ausgeht und die folgenden Näherungen aus (1) für  $n = 1, 2, \dots$  berechnet. Die sukzessiven Approximationen konvergieren in

$$(1) \quad y^{(n)}(x) = y^0 - \int_{x^0}^x f(t, y^{(n-1)}(t)) dt$$

$x^0 - h \leq x \leq x^0 + h$  gleichmäßig gegen die Lösung des A., es gilt (2)  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}(x)$ .

Für das A.  $y' = xy$  mit  $y(0) = 1$  berechnet man z. B. die sukzessiven Approximationen aus  $y^{(0)}(x) = 1$  und (3), man findet (3/0), (3/1), (3/2), (3/n).

$$(3) \quad y^{(n)}(x) = 1 + \int_0^x ty^{(n-1)}(t) dt \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

$$(3/0) \quad y^{(0)}(x) = 1, \quad (3/1) \quad y^{(1)}(x) = 1 + x^2/2$$

$$(3/2) \quad y^{(2)}(x) = 4 + x^2/2 + x^4/(2 \cdot 4), \dots$$

$$(3/n) \quad y^{(n)}(x) = 1 + x^2/2 + \dots + \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$

Dann ist (4) die Lösung des A., denn  $y' = \frac{d}{dx}(e^{x^2/2}) = xy$  und  $y(0) = 1$ .

$$(4) \quad y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{x^2/2}$$

II. Das A. für eine *explizite gewöhnl. Differentialgleichung* (5)  $y^{(r)} = f(x, y, y', \dots, y^{(r-1)})$  der Ordnung  $r$  ist folgendermaßen gestellt: Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung (5), die für  $x^0$  den Anfangsbedingungen  $y(x^0) = y_0^0, y'(x^0) = y_1^0, \dots, y^{(r-1)}(x^0) = y_{r-1}^0$  genügt. Die Werte  $y_0^0, y_1^0, \dots, y_{r-1}^0$  sind beliebig vorgegeben. Durch die Einführung der Funktionen  $y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \dots, y_r(x) = y^{(r-1)}(x)$  ist das gestellte

A. äquivalent dem Problem, eine Lösung des Systems (6) gewöhnl. Differentialgleichungen

$$(6) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{r-1}' = y_r, \\ y_r' &= f(x, y_1, \dots, y_r) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten  $y_1(x^0) = y_1^0, y_2(x^0) = y_2^0, \dots, y_r(x^0) = y_r^0$  zu finden. Für solche Systeme (6a) gilt der folgende Existenz- und Eindeigkeitsatz für

$$(6a) \quad y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_r) \text{ mit } i = 1, 2, \dots, r$$

das A.: Das A., eine Lösung  $y_1(x), \dots, y_r(x)$  des Systems (6a) mit den Anfangsbedingungen  $y_i(x^0) = y_i^0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ , zu finden, ist in der Umgebung von  $x^0$  eindeutig lösbar, wenn die Funktionen  $f_i(x, y_1, \dots, y_r)$  für  $i = 1, 2, \dots, r$  in der Umgebung von  $(x^0, y_1^0, \dots, y_r^0)$  stetig sind und einer Lipschitzbedingung (7) bzgl. der  $y_i$ , genügen.

$$(7) \quad \begin{aligned} &|f_i(x, y_1, \dots, y_r) - f_i(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r)| \\ &\leq L \sum_{k=1}^r |y_k - \bar{y}_k| \text{ für } i = 1, 2, \dots, r \end{aligned}$$

Es ist möglich, diese Lösung  $y_1(x), \dots, y_r(x)$  durch sukzessive Approximationen zu gewinnen. Hat man die allgemeine Lösung  $y = y(x; c_1, \dots, c_r)$  einer expliziten Differentialgleichung (5), so kann man die Lösung des A.  $y^{(r)} = f(x, y, y', \dots, y^{(r-1)})$  mit  $y(x^0) = y_0^0, y'(x^0) = y_1^0, \dots, y^{(r-1)}(x^0) = y_{r-1}^0$  erhalten, indem man die Konstanten  $c_1, \dots, c_r$  aus den  $r$  Gleichungen  $y_0^0 = y(x^0; c_1, \dots, c_r), y_1^0 = \frac{\partial y}{\partial x}(x^0; c_1, \dots, c_r), \dots, y_{r-1}^0 = \frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}}(x^0; c_1, \dots, c_r)$  berechnet und in  $y = y(x; c_1, \dots, c_r)$  einsetzt. Ist z. B.  $y = y(x; c) = ce^{x^2}$  die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y' = xy$  so erhält man die Lösung des A.  $y' = xy$  mit  $y(0) = 1$  durch Ermittlung von  $c$  aus  $1 = ce^0 = c$  zu  $y = e^{x^2/2}$ . Ist in der expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  die rechte Seite  $f(x, y)$  eine analytische Funktion in einer Umgebung von  $(x^0, y^0)$  der  $x, y$ -Ebene, d. h., läßt sich  $f(x, y)$  durch eine Potenzreihe (8) darstellen, so ist auch die

$$(8) \quad f(x, y) = \sum_{l,k=0}^{\infty} a_{lk}(x - x^0)^l (y - y^0)^k$$

Lösung des A.  $y' = f(x, y)$  mit  $y(x^0) = y^0$  in eine Potenzreihe (9) entwickelbar. Um nun die Lösung zu berechnen, geht man mit dem Ansatz (9), in dem

$$(9) \quad y(x) = y^0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x - x^0)^k$$

die  $b_k$  für  $k = 1, 2, \dots$ , zunächst noch unbestimmte Koeffizienten sind, in die Differentialgleichung ein und bestimmt die  $b_k$  durch Koeffizientenvergleich. Zur Bestimmung der Lösung des A.  $y' = y + x^2$  mit  $y(0) = 1$  setzt man z. B. den Ansatz (9a) in die

$$(9a) \quad y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

Differentialgleichung ein. Aus (10) erhält man

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1} = x^2 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

durch Koeffizientenvergleich  $b_1 = 1, 2b_2 = b_1, 3b_3 = 1 + b_2$ , und  $kb_k = b_{k-1}$  für  $k \geq 4$ . Daraus ergibt sich dann  $b_1 = 1, b_2 = 1/2, b_3 = 1/2$  und  $b_k = 3/k!$  für  $k \geq 4$ . Als Lösung hat man (11).

$$(11) \quad \begin{aligned} y(x) &= 1 + x + 1/2 x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3}{k!} x^k \\ &= -2 - 2x - x^2 + 3e^x \end{aligned}$$

Über das A. für partielle Differentialgleichungen vgl. partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen.

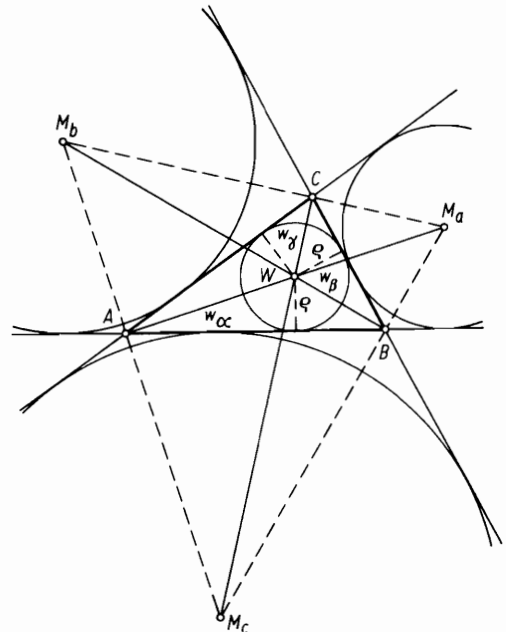
S. a. gewöhnliche Differentialgleichung I., III., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I., ↗ hyperbolische Differentialgleichung I., ↗ parabolische Differentialgleichung II., ↗ partielle Differentialgleichung II.

Anfangswertübernahme ↗ Analogrechner III.

Anfangszahl, ordinale ↗ Ordinalzahl.

Ankathete ↗ Winkelfunktion III.

Ankreis eines Dreiecks: Kreis, der eine Dreiecksseite von außen und die Verlängerungen der beiden anderen Dreiecksseiten berührt. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines



Ankreis eines Dreiecks mit den Mittelpunkten  $M_a, M_b, M_c$  sowie Inkreis mit dem Mittelpunkt  $W$  und Radius  $\rho$

Innenwinkels mit den Winkelhalbierenden der beiden Außenwinkel, die nicht zu dem halbierten Innenwinkel gehören. Es gibt genau drei A. e mit den Mittelpunkten  $M_a, M_b$  und  $M_c$  (Abb.). Die beiden äußeren Berührungspunkte des A. es liegen auf den Verlängerungen der Seiten, z. B. auf den Strahlen  $AB^+$  und  $AC^+$ .

Annuität ↗ Amortisation.

**Anordnungsaxiome** ↗ axiomatischer Aufbau der Geometrie.

**Anordnungsrelationen:** Mengenlehre binäre Relationen, die gewisse Eigenschaften der natürl. Größenordnungsbeziehung der natürl. Zahlen haben. —

**I. Quasiordnung bzw. Präordnung** in einer Menge  $M$  ist eine Relation  $R$ , falls  $R$  in  $M$  reflexiv und transitiv ist. Eine *quasiordnete Menge* ist eine Menge zusammen mit einer Quasiordnung in ihr. —

**II. Halbordnung** in einer Menge  $M$  ist eine Relation  $R$ , falls  $R$  in  $M$  reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist; z. B. ist die Inklusion ( $\supset$  Relation II.) von Mengen eine Halbordnung in jeder Potenzmenge. Eine *halbgeordnete Menge* ist eine Menge zusammen mit einer Halbordnung in ihr. Eine Teilmenge  $K$  einer halbgeordneten Menge ist eine *Kette*, falls die betrachtete Halbordnung in  $K$  sogar eine lineare Ordnung ist. —

**III. Lineare Ordnung bzw. Totalordnung** in einer Menge  $M$  ist eine Relation  $R$ , falls  $R$  reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und linear ist; z. B. ist die natürl. Größenordnungsbeziehung zwischen ganzen Zahlen eine lineare Ordnung. Eine *geordnete bzw. linear geordnete bzw. totalgeordnete Menge* ist eine Menge zusammen mit einer linearen Ordnung in ihr. —

**IV. Wohlordnung** in einer Menge  $M$  ist eine Relation  $R$ , falls  $R$  reflexiv, transitiv, antisymmetrisch ist und falls jede nichtleere Teilmenge  $X$  von  $M$  bezüglich  $R$  ein Minimum hat; äquivalent dazu ist:  $R$  ist Wohlordnung in  $M$ , falls  $R$  lineare Ordnung in  $M$  ist und jede nichtleere Teilmenge  $X$  von  $M$  bzgl.  $R$  ein minimales Element hat; z. B. ist die natürl. Größenordnungsbeziehung zwischen natürl. Zahlen eine Wohlordnung. Eine *wohlgeordnete Menge* ist eine Menge zusammen mit einer Wohlordnung in ihr. — Jede Wohlordnung ist auch eine lineare Ordnung, jede lineare Ordnung eine Halbordnung, jede Halbordnung eine Quasiordnung. — Ist  $M$  eine Menge und  $R$  eine solche Anordnungsrelation in  $M$ , so sagt man häufig für Elemente  $a, b \in M$ , die in der Relation  $R$  zueinander stehen, » $a$  kommt vor  $b$  bezüglich  $R$ «, oder » $a$  ist bezüglich  $R$  kleiner oder gleich  $b$ «; in Zeichen:  $a \leq b(R)$ .

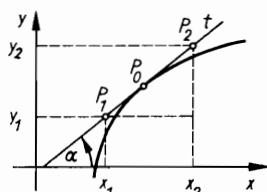
**Wohlordnungssatz** ↗ Mengenlehre II. — S. a. Infimum, Supremum, Minimum, Maximum, minimales Element, maximales Element, Hasse-Diagramm.

**Anpassungstest:** ein Test zur Prüfung der *Hypothese*, daß die Verteilungsfunktion einer *Zufallsgröße* mit einer vorgegebenen Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  zusammenfällt oder allgemeiner zu einer vorgegebenen Klasse von Verteilungsfunktionen gehört, z. B. der  $\chi^2$ -Anpassungstest.

**Ansperechmpfindlichkeit** ↗ Übertragungsglied II.

**Ansteckungsverteilung** ↗ Pólya-Verteilung.

**Anstieg, Steigung:** Maß für das Verhältnis der Zunahme der Ordinaten der Punkte einer Geraden zur Zunahme der Abszissen in einem kartes. Koordinatensystem. Für einen Punkt  $P_0$  der Kurve wird er als  $A$ . der Tangente  $t$  im Punkt  $P_0$  an die Kurve festgelegt. Schneidet die Tangente die  $x$ -Achse unter einem Winkel der Größe  $\alpha$  und sind  $P_1 = (x_1, y_1)$  und  $P_2 = (x_2, y_2)$  zwei von  $P_0$  ver-



Anstieg einer Kurve im Punkte  $P_0$

schiedene Punkte der Tangente, so gilt für den  $A$ .  $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) = \tan \alpha$  (Abb.). Ist die Kurve das Bild einer differenzierbaren Funktion  $y = f(x)$ , so gilt  $m = \tan \alpha = f'(x_0)$ .

S. a. Geradengleichung III., lineare Funktion I.

**Anstieg** ↗ Zeitfunktion I.3.

**Antialternative** ↗ Aussagenlogik II., III.

**Antikommutativität** ↗ Vektorprodukt I.

**Antikonjunktion** ↗ Aussagenlogik III.

**Antinomie:** *mathematische Logik* Widerspruch, der als log. bzw. als semant.  $A$ . auftritt. Eine *log. A.* ist ein Widerspruch, der sich in einer Theorie ergibt trotz korrekter Benutzung der übl. Schlußregeln, die von gültigen Aussagen wieder zu gültigen Aussagen führen. Eine *log. A.* ist darauf zurückzuführen, daß die in den Axiomen den Grundbegriffen zugeschriebenen Eigenschaften nicht miteinander verträglich sind. *Log. A.*n treten z. B. in der Mengenlehre auf, wenn man die Bildung der »Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten« oder der Mengen aller Ordinal- bzw. aller Kardinalzahlen gestattet; aus ihnen folgt, daß derartige Mengen nicht existieren.

Eine *semant. A.* ist ein Widerspruch, der sich ergibt auf Grund unrichtigen Gebrauchs semant. Begriffe bzw. wegen fehlender Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache. Man kann z. B. in der Arithmetik der natürl. Zahlen zu einer semantischen  $A$ . kommen, wenn man die Formulierung » $n_0$  sei die kleinste natürl. Zahl, die nicht mit weniger als 100 Buchstaben definiert werden kann« als eine Definition zuläßt, denn sie wäre dann eine Definition von  $n_0$  mit sogar weniger als 90 Buchstaben. Wegen des Auftretens des Begriffes »definierbar« gehört diese Formulierung jedoch zur Metasprache der Arithmetik, nicht aber zur Objektsprache der Arithmetik.

**antisymmetrisch** ↗ Relation II.

**Antivalenz** ↗ Aussagenlogik II.

**Antizickzackvorkehrung** ↗ Abstiegsverfahren.

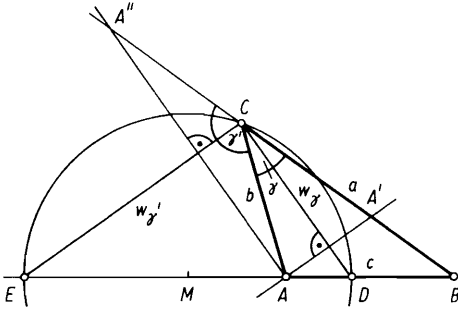
**Anweisung** ↗ Programmierung des Digitalrechners I.

**Anzugsverzögerung** ↗ Übertragungsglied IV.

**Aperiodograph** ↗ Umzeichner.

**Apollonios, Satz von:** *Der geometr. Ort der Eckpunkte  $C_i$  aller Dreiecke  $ABC_i$ , in denen eine Seite die gegebene Länge  $c = |AB|$  hat und die Längen der anderen Seiten im konstanten Verhältnis  $|AC_i| : |BC_i| = \lambda$  stehen, ist der Thaleskreis über der Strecke  $DE$  als Durchmesser, deren Endpunkte  $D$  und  $E$  die Strecke  $AB$  innen und außen im Verhältnis  $\pm \lambda$  teilen.*

Im Dreieck teilen sowohl die Halbierende eines Innenwinkels als auch die des zugehörigen Außenwinkels die dem halbierten Innenwinkel gegenüberliegende Seite im Verhältnis  $\lambda$  der anliegenden Seiten. Ist im Dreieck  $ABC$  z. B.  $w_\gamma = |CD|$  die Halbierende des Innenwinkels  $\gamma$  (Abb.), so steht  $w_{\gamma'} = |CE|$  als



Zum Satz des Apollonios

Halbierende des Außenwinkels  $\gamma'$  senkrecht zu  $CD$ . Ist  $A'$  das Spiegelbild von Punkt  $A$  in bezug auf die Gerade  $CD$  und  $A''$  das von  $A$  in bezug auf  $CE$ , so gilt  $AA'' \parallel CD$  und  $CE \parallel AA'$  sowie  $b = |AC| = |CA'| = |CA''|$ . Nach den Strahlensätzen gelten dann für die Geraden  $BE$  und  $BA''$  die Proportionen  $|AD|:|DB| = |CA''|:|CB| = b:a = \lambda$ , und  $|AE|:|EB| = |CA'|:|CB| = b:a = \lambda$ . Für den inneren Teilpunkt  $D$  ist das Teilverhältnis positiv, für den äußeren Teilpunkt  $E$  negativ. Da für jeden Punkt  $C_i$  auf dem Umfang des Thaleskreises über  $DE$  als Durchmesser die Strecken  $C_iD$  und  $C_iE$  aufeinander senkrecht stehen, gelten für jede Lage  $C_i$  die Beziehungen  $|C_iA'|:|C_iB| = |C_iA'':|C_iB| = \lambda$ . **Apollonios von Perge:** etwa 262 bis 190 v. u. Z.; altgriech. Mathematiker. — In seinem achtbändigen Werk *Conica*, von dem 4 Bände in griech. Sprache und 3 in arab. Übersetzung überliefert sind, gab A. eine zusammenfassende Darstellung der antiken Kegelschnittlehre, die noch im 16. und 17. Jh. anregend auf die Mathematiker in Europa gewirkt hat.

**a-posteriori-Wahrscheinlichkeit**  $\nearrow$  Bayessche Formel.

**Applikationsprogramm:** problemspezif. Programm für eine digitale Rechenanlage, das nicht Bestandteil des Betriebssystems ist.

**Approximation: I.** Bestimmung einer Funktion  $\hat{g}(x)$  aus einer fest vorgegebenen Funktionenklasse  $G$ , die in einem bestimmten Sinne von einer gegebenen und  $G$  nicht angehörenden Funktion  $f(x)$  möglichst wenig abweicht. Als Maß der Abweichung tritt sehr häufig eine *Halbnorm* auf, das ist eine Zahl  $\|\varphi(x)\|$ , die jeder Funktion  $\varphi(x)$  einer gewissen Funktionenklasse  $V$  zugeordnet wird und die Eigenschaften (1.1) bis (1.3) hat.

- (1.1)  $\|\varphi\| \geq 0$  für alle  $\varphi \in V$
- (1.2)  $\|a \cdot \varphi\| = |a| \|\varphi\|$ , für  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\varphi \in V$
- (1.3)  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$  für alle  $\varphi, \psi \in V$

Das *allgemeine A.problem* fordert dann, für ein gegebenes  $f \in V$  ein  $\hat{g} \in G$  zu bestimmen, das der Bedingung (2) für alle  $g \in G$  genügt. Die Zahl

$$(2) \quad \|f - \hat{g}\| = \inf_{g \in G} \|f - g\| \text{ oder } \|f - \hat{g}\| \leq \|f - g\|$$

$D_G(f) = \inf_{g \in G} \|f - g\|$  heißt *Defekt* oder *Minimalabweichung* von  $f$  bezüglich  $G$ . Die Funktion  $\hat{g}$  heißt, falls sie existiert, *Best-A.* oder *Proximum* von  $f$  zu  $G$ . Die vielen speziellen A.aufgaben unterscheiden sich vor allem in der Halbnorm und der Funktionenklasse  $G$  voneinander. In einem linearem A.problem ist  $G$  ein *linearer Raum*. In der Numerik ist  $G = G_n$  darüber hinaus stets *endlichdimensional*, d. h., jede Funktion  $g(x)$  aus  $G_n$  kann als endliche *Linearkombination* einer gegebenen *Basis* von  $G_n$  nach (3) dargestellt werden. Wichtigste Spezialfälle

$$(3) \quad g(x) = a_1g_1(x) + a_2g_2(x) + \dots + a_ng_n(x)$$

hiervon wiederum sind die *Polynom-A.* (*PA*), bei der  $g_1(x) = 1$ ,  $g_2(x) = x$ , ...,  $g_n(x) = x^{n-1}$  und damit  $G = P_n$  die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten höchstens vom Grade  $(n - 1)$  ist, und die *trigonometr. A.* (*TA*), bei der  $g(x)$  als *trigonometr. Polynom* (4) angesetzt wird.

$$(4) \quad g(x) = c/2 + \sum_{j=1}^n c_j \cos jx + \sum_{j=1}^n d_j \sin jx$$

**II.** Hinsichtlich der verwendeten Halbnorm unterscheidet man vor allem die *Tschebyschow-A.* (*T*) und die *quadrat. A.* (*Q*). Je nach der Norm (5) kann jede von ihnen eine kontinuierl. oder eine diskrete A. sein.

$$(5) \quad \begin{aligned} \tau\|\varphi\| &:= \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x)| && \text{kontinuierlich} \\ \rho\|\varphi(x)\| &:= \int_a^b (\varphi(x))^2 dx \\ \tau\|\varphi\|_D &:= \max_{1 \leq i \leq N} |\varphi(x_i)| && \text{diskret} \\ \rho\|\varphi(x)\|_D &:= \sum_{i=1}^N (\varphi(x_i))^2 \end{aligned}$$

(*PT*). Die *polynomiale Tschebyschow-A.* sucht zu einer in  $[a, b]$  gegebenen stetigen Funktion  $f(x)$  ein Polynom  $\hat{P}_n(x) \in P_n$ , für dessen Defekt (6) gilt für alle  $P_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in P_n$ .

$$(6) \quad D_{P_n}(f) = \tau\|f - \hat{P}_n\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \hat{P}_n(x)| \leq \tau\|f - P_n\|$$

Ist die A. *kontinuierlich*, so sind folgende Ergebnisse praktisch wichtig:

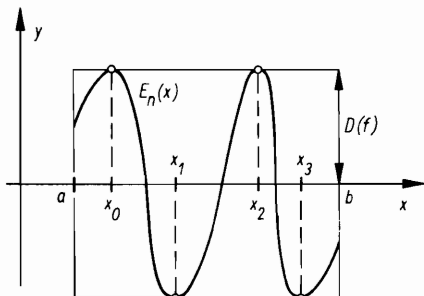
(*PT*) (1k) Nach dem *Existenz- und Eindeutigkeitsatz* gibt es bei fest gegebenem  $n$  genau ein Minimalpolynom  $\hat{P}_n(x) \in P_n$ .

(*PT*) (2k) Nach dem *Charakterisierungssatz* oder *Alternantsatz* gibt es stets eine *Menge* von  $n + 2$  Punkten  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ , die man als *Alternante* bezeichnet, und ein eindeutig bestimmtes Polynom  $Q_n(x) \in P_n$ , für das (7) gilt für  $j = 0, 1, \dots, n$ .

$$(7) \quad \begin{aligned} |f(x_j) - Q_n(x_j)| &= D_{P_n}(f) \text{ und} \\ (f(x_j) - Q_n(x_j)) + (f(x_{j+1}) - Q_n(x_{j+1})) &= 0 \end{aligned}$$



Wegen (1k) muß somit  $Q_n(x) = \hat{P}_n(x)$  sein, d. h., die Best-A. hat die Eigenschaft, daß die Fehlerfunktion  $E_n(x) = f(x) - \hat{P}_n(x)$  symmetrisch um Null schwingt (Abb.).



Fehlerverlauf bei T-Approximation

Der Charakterisierungssatz wird im *Remes-Algorithmus* zur Konstruktion von  $\hat{P}_n$  benutzt, indem man ausgehend von einer Punktmenge  $M_0 = \{x_0^0, x_1^0, \dots, x_{n+1}^0\}$  durch gezielten *Austausch* von Punkten schließlich zu einer so guten Näherung der Alternante gelangt, daß das zugehörige  $Q_n$  innerhalb der Rechengenauigkeit mit  $\hat{P}_n$  übereinstimmt.

Betrachtet man  $f(x)$  und  $\hat{P}_n(x)$  nur an den diskreten *Stützstellen*  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$  und verwendet die diskrete T-Halbnorm  $\tau\|\varphi(x)\|_D$  nach (5), so erhält man die *diskrete Tschebyschow-A.* Für  $N > n + 1$  gelten dann Sätze (1d) und (2d) analog zu (1k), (2k) im stetigen Fall. Für  $N \leq n + 1$  handelt es sich um das Problem der  $\nearrow$  Interpolation, das für  $n + 1 = N$  eindeutig lösbar ist, während es für  $N \leq n$  mehrere Lösungen hat. Numerisch führt das diskrete Problem unter Verwendung des Alternantensatzes auf ein lineares *Optimierungsproblem*  $z(d_j, D) = D \rightarrow \text{Min!}$  mit den Nebenbedingungen (8). Seine Lösung ergibt die Koeffizienten des Minimalpolynoms  $\hat{P}_n(x)$ .

$$(8) \quad \sum_{P=0}^n \hat{a}_j x_k^j - f(x_k) + D \leq 0, \\ - \sum_{P=0}^n \hat{a}_j x_k^j + f(x_k) + D \leq 0 \text{ für } k = 1, 2, \dots, N$$

III. (PQ) Bei der *quadratischen A.* besteht die Besonderheit der verwendeten Halbnormen  $q\|\varphi\|$  und  $q\|\varphi\|_D$  darin, daß sie in der Form  $q\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$  bzw.  $q\|\varphi\|_D^2 = (\varphi, \varphi)_D$  als Sonderfall eines durch (9) definierten *Skalarproduktes* erscheinen. Für die Best-A. für  $f(x)$  aus der Menge  $P_n$  der Polynome gelten in *beiden* Fällen folgende Sätze:

$$(9k) \quad (\varphi, \psi) := \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx \text{ bzw.}$$

$$(9d) \quad (\varphi, \psi)_D := \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) \psi(x_i)$$

(PQ) (1) *Existenz- und Eindeutigkeitsatz:* Zu jedem  $f$  gibt es bei gegebenem  $n$  genau ein Minimalpolynom  $\hat{P}_n(x) \in P_n$ .

(PQ) (2) *Charakterisierungssatz:* Die Koeffizienten  $\hat{a}_j$  von  $\hat{P}_n(x)$  sind Lösungen des linearen Systems (10) von Gleichungen, die man auch *Normalgleichungen* nennt ( $\nearrow$  Ausgleichung).

$$(10) \quad \begin{aligned} \hat{a}_0(1, 1) + \hat{a}_1(1, x) + \hat{a}_2(1, x^2) + \dots \\ + \hat{a}_n(1, x^n) &= (f, 1) \\ \hat{a}_0(x, 1) + \hat{a}_1(x, x) + \hat{a}_2(x, x^2) + \dots \\ + \hat{a}_n(x, x^n) &= (f, x) \\ \hat{a}_0(x^n, 1) + \hat{a}_1(x^n, x) + \hat{a}_2(x^n, x^2) + \dots \\ + \hat{a}_n(x^n, x^n) &= (f, x^n) \end{aligned}$$

Die Menge der Polynome  $P_n$  kann aber nicht nur durch die *Potenzfunktionen*  $1, x, x^2, \dots, x^n$  als *Basis* aufgespannt werden, sondern auch durch jedes andere maximale System  $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)$  linear unabhängiger Polynome aus  $P_n$ . Jedes Polynom  $P_n(x)$  kann demnach auch als *Linearkombination*  $P_n = c_0 Q_0 + c_1 Q_1 + \dots + c_n Q_n$  dargestellt werden, und die Koeffizienten  $c_i$  des Minimalpolynoms berechnen sich aus dem System der Normalgleichungen

$$\sum_{i=0}^n c_i (Q_i, Q_j) = (Q_j, f) \text{ mit } i = 0, \dots, n.$$

Das System wird besonders einfach, wenn  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  ein *Orthogonalsystem* bilden, für das Gleichung (11) mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{ij}$  gilt.

$$(11) \quad \int_a^b Q_i(x) Q_j(x) dx = (Q_i, Q_j) = \delta_{ij} d_i$$

Die Lösung der Normalgleichungen kann dann sofort angegeben werden, und (12) ist das Minimalpolynom.

$$(12) \quad \hat{P}_n(x) = Q_0(x) [(Q_0, f)/(Q_0, Q_0)] + Q_1(x) [(Q_1, f)/(Q_1, Q_1)] + \dots + Q_n(x) [(Q_n, f)/(Q_n, Q_n)]$$

Für das Intervall  $[a, b] = [-1, 1]$  bilden die *Legendrepolynome* ein solches System orthogonaler Polynome.

IV. Vollkommen analoge Ergebnisse erhält man für die *trigonometr. A.* ( $\mathcal{L}A$ ), deren Best-A. als trigonometr. Polynom gesucht wird. Das Funktionensystem  $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$  ist über dem Intervall  $[-\pi, +\pi]$  ein Orthogonalsystem, so daß (13) die Best-A. von  $f$  über diesem Intervall ist.

$$(13) \quad \hat{g} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right) \cdot \cos kx + \sum_{k=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \cdot \sin kx \right]$$

Die trigonometr. A. nennt man auch *harmon. Analyse* und  $\hat{g}$  das *Fourier-Polynom*  $n$ -ter Ordnung zu  $f(x)$ .

**Approximationen, sukzessive  $\nearrow$  Anfangswertproblem I.**

**Approximationsfunktion** ↗ Funktionenreihe I.  
**a-priori-Wahrscheinlichkeit** ↗ Bayessche Formel.  
**Äq-Funktion** ↗ Aussagenlogik II.  
**Äquator** ↗ Koordinatensystem V., ↗ Kugeldarstellung.  
**Äquiforme Abbildung** ↗ Abbildung, affine, III.  
**Äquiforme Geometrie** ↗ Erlanger Programm II.  
**Äquiforme Gruppe** ↗ Erlanger Programm II.  
**Äquivalent** ↗ Aussagenkalkül II.  
**Äquivalente Erweiterung** ↗ Körper II.  
**Äquivalente Funktion** ↗ Lebesguesches Integral II.  
**Äquivalente Matrizen** ↗ Matrix V.  
**Äquivalente Termumformung** ↗ Term II., s. a. Gleichung II., Ungleichung II.  
**Äquivalente Umformung** ↗ Gleichung II., lineares Gleichungssystem III.  
**Äquivalenz** ↗ Aussagenlogik II.  
**Äquivalenzklasse** ↗ Äquivalenzrelation II.  
**Äquivalenzrelation: I.** *Mengenlehre* binäre Relation  $R$  in einer Menge  $M$ , die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Steht ein Element  $x$  von  $M$  zu einem Element  $y$  von  $M$  in der Ä.  $R$ , so sagt man, daß  $x$  zu  $y$  modulo  $R$  äquivalent ist und schreibt dafür  $x \sim y(R)$  oder, falls Verwechslungen bzgl. der Ä.  $R$  ausgeschlossen sind, auch kurz  $x \sim y$ . Ist etwa  $\mathbf{N}$  die Menge der natürl. Zahlen, stehen zwei natürl. Zahlen  $m$  und  $n$  genau dann in der Relation  $R_1$  zueinander, wenn  $m$  und  $n$  bei Division durch 5 den gleichen Rest lassen, und genau dann in der Relation  $R_2$  zueinander, wenn sie bei der Division durch 6 den gleichen Rest lassen, so sind  $R_1$  und  $R_2$  beides Ä.en in  $\mathbf{N}$ ; für diese Ä.en gelten z. B.  $3 \sim 18 (R_1)$  und  $14 \sim 38 (R_2)$ . Die Gleichheitsrelation und die Allrelation in einer beliebigen Menge  $M$  sind stets Ä.en in dieser Menge.  
**II.** Ist  $R$  eine Ä. in einer Menge  $M$ , so heißt die Menge aller zu einem festen Element  $x$  von  $M$  modulo  $R$  äquivalenten Elemente von  $M$  die *Äquivalenzklasse* bzw. *Restklasse* von  $x$  modulo  $R$ . Diese wird mit  $x \bmod R$ ,  $\bar{x}^R$ ,  $[x]_R$  oder, falls bzgl. der betrachteten Ä.  $R$  Verwechslungen nicht möglich sind, auch einfach mit  $\bar{x}$  bezeichnet. Sind zwei Elemente  $x$  und  $y$  von  $M$  modulo  $R$  äquivalent, so stimmen die Äquivalenzklassen  $x \bmod R$  und  $y \bmod R$  überein; sind  $x$  und  $y$  dagegen modulo  $R$  nicht äquivalent, so sind die Restklassen  $x \bmod R$  und  $y \bmod R$  elementfremd; z. B. ist, wenn  $R_1$  die oben erklärte Ä. in der Menge der natürl. Zahlen bezeichnet, die Äquivalenzklasse  $3 \bmod R_1$  die Menge aller natürl. Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 3 lassen; diese Restklasse  $3 \bmod R_1$  wird auch Restklasse von 3 modulo 5 genannt.  
**III.** Ist  $M$  eine Menge,  $R$  eine Ä. in der Menge  $M$ , so heißt die Menge aller Äquivalenzklassen  $x \bmod R$  für alle  $x \in M$  die *Quotienten-* bzw. *Faktormenge* bzw. der *Quotient von  $M$  nach  $R$*  und wird mit  $M/R$  bezeichnet.  $M/R$  ist eine durch  $R$  eindeutig bestimmte *Zerlegung von  $M$* , d. h. ein disjunktes Mengensystem von Teilmengen von  $M$ , dessen Vereinigung  $M$  ist. Ist umgekehrt eine Zerlegung  $Z$  einer Menge  $M$  gegeben, so ist durch  $Z$  in  $M$  eine Ä.  $R_Z$  induziert, deren zugehöriger Quotient  $M/R_Z$  wieder  $Z$  ist. Elemente  $x$  und  $y$  von  $M$  sind genau

dann bzgl.  $R_Z$  äquivalent, wenn sie zum selben Element des Mengensystems  $Z$  gehören.

**IV.** Ist  $F$  eine eindeutige *Abbildung* einer Menge  $M$  in eine Menge  $M_2$ , so wird durch  $F$  in  $M$  eine Ä.  $R$  induziert: Elemente  $x_1$  und  $x_2$  von  $M$  werden genau dann modulo  $R$  äquivalent genannt, wenn für ihre  $F$ -Bilder gilt  $F(x_1) = F(x_2)$ . Umgekehrt ist für jede Ä.  $R$  in einer Menge  $M$  die für alle  $x \in M$  durch  $F(x) = [x]_R$  erklärte Abbildung  $F$  eine eindeutige Abbildung auf den Quotienten  $M/R$ . — Ä.en sind die wesentl. Grundlage *mathematischer Abstraktionsprozesse*. Denn ist eine Menge  $M$  und eine Ä.  $R$  in  $M$  gegeben, so kann man den Übergang von  $M$  zur Quotientenmenge  $M/R$  so auffassen, daß dabei alle zu einer Äquivalenzklasse gehörenden Elemente als „gleich“ angesehen und zu einem neuen Objekt zusammengefaßt werden, d. h., es wird von allen Eigenschaften der Elemente von  $M$  abstrahiert, die für das Bestehen oder Nichtbestehen der Relation  $R$  zwischen je zweien von ihnen keine Bedeutung haben.

**Äquivalenz von Gleichungen** ↗ Gleichung II.

**Äquivalenz von Matrizen** ↗ Matrix V.

**Arbeit einer Kraft:** Bezeichnung für das Produkt  $Fl \cos \vartheta$ , wenn  $F$  den Betrag einer konstanten Kraft bedeutet, die unter dem Winkel konstanter Größe  $\vartheta$  gegen die Richtung eines geradlinigen Weges der Länge  $l$  wirkt. Ist die Kraft längs der Kurve  $k$  veränderl., so berechnet sich die Arbeit durch das Kurvenintegral erster Art  $\int F \cos \vartheta ds$ . Bezeichnen  $P$  und  $Q$  die Komponenten der Kraft,  $\alpha$  und  $\beta$  die Größen der Winkel, die die Tangente der Kurve  $k$  mit den Koordinatenachsen bilden, so gilt (1), und aus dem Zusammenhang zwischen dem Kurvenintegral erster und zweiter Art folgt (2) (↗ Kurvenintegral III.).

$$(1) \quad \int_{(k)} F \cos \vartheta ds = \int_{(k)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$$

$$(2) \quad \int_{(k)} F \cos \vartheta ds = \int_{(k)} (P dx + Q dy)$$

Für ein *räuml. Kraftfeld* mit den Komponenten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  gilt analog (3). Hat das Kraftfeld z. B. die Komponenten  $P = x - y$ ,  $Q = xy$ , so wird längs der durch  $y^2 = x$  gegebenen Parabel zwischen den Punkten  $(0, 0)$  und  $(1, 1)$  die Arbeit (4) geleistet.

$$(3) \quad \int_{(k)} F \cos \vartheta ds = \int_{(k)} (P dx + Q dy + R dz)$$

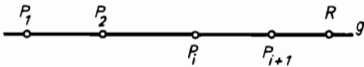
$$(4) \quad \int_{(k)} [(x - y) dx + xy dy] \\ = \int_0^1 (y^2 - y) 2y dy + \int_0^1 y^3 dy = 1/12$$

Wenn die Kraft aus einem *Potential* ableitbar ist, d. h., wenn es eine *Potentialfunktion*  $U(x, y, z)$  gibt mit  $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z} = R$ , dann hängt die

Arbeit nicht von der die beiden Punkte  $A = (x_A, y_A, z_A)$  und  $B = (x_B, y_B, z_B)$  verbindenden Kurve  $k$  ab, und es gilt (5)  $\int_{(k)} (P dx + Q dy + R dz) = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A)$  (↗ Kurvenintegral II.).

**Archimedes**, geb. um 287 v. u. Z. Syrakus als Sohn des Astronomen Pheidias, gest. 212 v. u. Z. Syrakus. — A. studierte in Alexandria. Nach Syrakus zurückgekehrt, widmete er sich ausschließlich seinen Studien. Als die Römer im 2. Punischen Krieg seine Heimatstadt belagerten, war A. mit seinen Kriegsmaschinen der Kopf des Widerstandes. Bei der Eroberung der Stadt kam A. ums Leben. — A. gilt als der bedeutendste Mathematiker und Physiker der Antike. Er gab die exakte Quadratur des *Parabelsegments*, gute *Näherungswerte* für  $\pi$ , den Beweis der *Unbegrenztheit des Zahlensystems* sowie viele andere Ergebnisse, die heute der Infinitesimalrechnung zugeordnet werden. Von seinen physikal. Forschungen sind der Beweis des *Hebelgesetzes* und das Gesetz des *hydrostat. Auftriebs* am bekanntesten.

**archimedisches Körper**  $\nearrow$  regelmäßige Polyeder III.  
**archimedisches Axiom**: I. *Algebra* die Aussage, daß das Produkt aus dem absoluten Betrag einer beliebigen, von Null verschiedenen reellen Zahl mit einer hinreichend großen natürlichen Zahl jede positive Größe überschreitet. Das a. A. gilt nicht für *p*-adische Bewertungen ( $\nearrow$  absoluter Betrag).



Zum archimedischen Axiom

II. *Geometrie* die Aussage, daß man zu jeder Halbgeraden *g* mit Anfangspunkt  $P_1$ , jeder Strecke  $P_1P_2$  mit  $P_1 \neq P_2$  und zu jedem Punkt *R* von *g* eine natürliche Zahl *m* finden kann, so daß man nach *m*-maligem sukzessiven Abtragen von Strecken  $|P_iP_{i+1}| = |P_1P_2|$  auf *g* von  $P_1$  aus den Punkt *R* erreicht bzw. überschritten hat (Abb.), so daß  $m|P_1P_2| \geq |P_1R|$  gilt.

**archimedisches Spirale**  $\nearrow$  Spirale I.

**Areafunktion**: I. Umkehrfunktion einer hyperbol. Funktion; sie wird durch eine der folgenden Funktionsgleichungen definiert:

I.1. *Areasinus* [*Area Sinus hyperbolicus*]:  $y = \text{arsh } x = \text{arsinh } x$  für  $x = \sinh x$ .

I.2. *Areacosinus* [*Area Cosinus hyperbolicus*]:  $y = \text{arch } x = \text{arcosh } x$  für  $x = \cosh y$ .

Da  $y = \cosh x$  nicht im gesamten Definitionsbereich monoton verläuft, erhält man für jedes der beiden Monotonieintervalle eine inverse Funktion.

I.3. *Areatangens* [*Area Tangens hyperbolicus*]:  $y = \text{arth } x = \text{artanh } x$  für  $x = \tanh y$ .

I.4. *Areakotangens* [*Area Cotangens hyperbolicus*]:  $y = \text{arcth } x = \text{arcoth } x$  für  $x = \coth y$ .

II. Vertauscht man in den Funktionsgleichungen der hyperbol. Funktionen formal die Variablen *x* und *y* und löst anschließend nach der abhängigen Variablen *y* auf, so lassen sich die A.en nach (1), (2), (3), (4) explizit durch logarithm. Funktionen darstellen.

- (1)  $y = \text{arsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- (2a)  $y = \text{arch } x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$  als Umkehrung im Intervall  $-\infty < x \leq 0$
- (2b)  $y = \text{arch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  als Umkehrung im Intervall  $0 \leq x < +\infty$
- (3)  $y = \text{arth } x = \ln \sqrt{(1+x)/(1-x)}$   
 $= \frac{1}{2} \ln [(1+x)/(1-x)]$  für  $1 > |x|$
- (4)  $y = \text{arcth } x = \ln \sqrt{(x+1)/(x-1)}$   
 $= \frac{1}{2} \ln [(x+1)/(x-1)]$  für  $|x| > 1$

Die Bilder der A.en (Abb. 1) ergeben sich aus den Bildern der entsprechenden hyperbol. Funktionen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten eines kartes. Koordinatensystems. Wesentl. Eigenschaften der A.en sind in der nachstehenden Übersicht (5) zusammengestellt; *D* ist der größtmögl. Definitionsbereich, *W* der Wertebereich, unter  $y = 0$  findet man die Nullstellen, unter *Asympt.* die Asymptoten, unter  $x \rightarrow \pm\infty$  das Verhalten im Unendlichen, für  $y = \text{arch } x$  steht an erster Stelle das für  $x \rightarrow +\infty$ , unter *Wendep.* die Wendepunkte und in der letzten Zeile die Angabe, ob die A. gerade oder ungerade ist, falls sie für  $x < 0$  definiert ist.

III. Jede A. kann nach (6), (7), (8) bzw. (9) durch jede andere ausgedrückt werden, wie man durch Einsetzen in (1), (2), (3) oder (4) bestätigt.

(5)	$y = \text{arsh } x$	$y = \text{arch } x$	$y = \text{arth } x$	$y = \text{arcth } x$
<i>D</i>	$]-\infty, +\infty[$	$[1, +\infty[$	$]-1, +1[$	$]-\infty, -1[$ $]1, +\infty[$
<i>W</i>	$]-\infty, +\infty[$	$[0, +\infty[$ $]-\infty, 0]$	$[-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$ $y \neq 0$
$y = 0$	$x_N = 0$	$x_N = 1$	$x_N = 0$	—
<i>Asympt.</i>	—	—	$x = +1, x = -1$	$y = 0, x = \pm 1$
$x \rightarrow \pm\infty$	$y \rightarrow \pm\infty$	$y \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow -\infty$	—	$y \rightarrow 0$
<i>Wendep.</i>	$x_W = 0$	—	$x_W = 0$	—
	ungerade	—	ungerade	ungerade

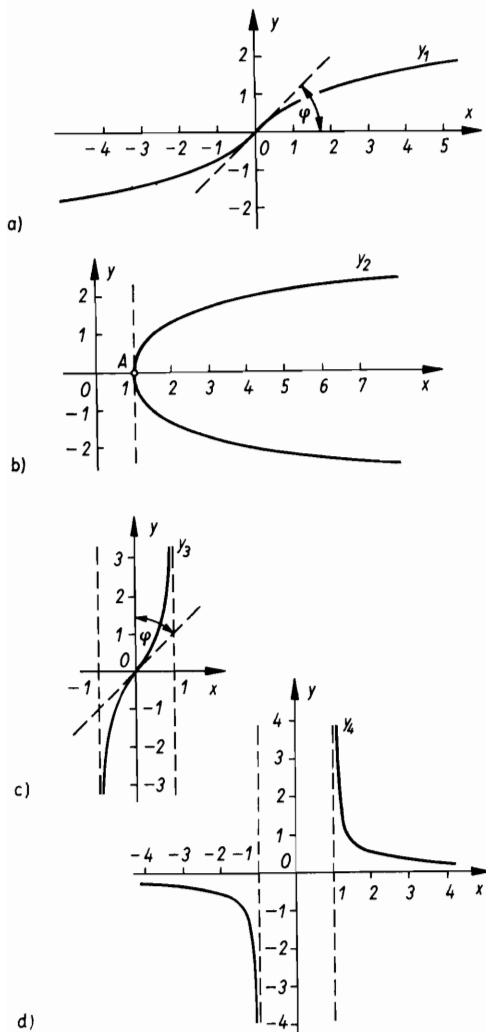


Abb. 1: Graphische Darstellung der Areafunktionen  
 a)  $y_1 = \operatorname{arsinh} x$ , b)  $y_2 = \operatorname{arcosh} x$ , c)  $y_3 = \operatorname{artanh} x$ ,  
 d)  $y_4 = \operatorname{arcoth} x$

(6) 
$$y = \operatorname{arsh} x = \pm \operatorname{arch} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \operatorname{arth} [x/\sqrt{x^2 + 1}] = \operatorname{arch} [\sqrt{x^2 + 1}/x],$$

(7) 
$$y = \operatorname{arch} x = \pm \operatorname{arsh} \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \pm \operatorname{arth} [\sqrt{x^2 - 1}/x]$$

$$= \pm \operatorname{arch} [x/\sqrt{x^2 - 1}],$$

(8) 
$$y = \operatorname{arth} x = \operatorname{arsh} [x/\sqrt{1 - x^2}]$$

$$= \operatorname{arch} [1/\sqrt{1 - x^2}] = \operatorname{arch} (1/x),$$

(9) 
$$y = \operatorname{arcoth} x = \operatorname{arsh} [1/\sqrt{x^2 - 1}]$$

$$= \pm \operatorname{arch} [x/\sqrt{x^2 - 1}] = \operatorname{arth} (1/x).$$

Tritt vor einer Funktion ein doppeltes Vorzeichen auf, so gilt das Pluszeichen für  $x > 0$  und das Minuszeichen für  $x < 0$ .

IV. A.en können geometrisch gedeutet werden: Bildet man mit den Hyperbelfunktionen  $y = \sinh t$  und  $x = \cosh t$  eine Parameterdarstellung der Gleichung  $x^2 - y^2 = 1$  der gleichseitigen Hyperbel (Abb. 2), so läßt sich der Parameter  $t$  wegen  $OSP_0 = \frac{1}{2} t_0 = \frac{1}{2} \ln |x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}| = \frac{1}{2} \ln |y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}|$  als doppelter Inhalt der Fläche  $OSP_0$  deuten, die begrenzt wird durch die Strecke  $|OS|$  auf der Abszisse, den Hyperbelbogen  $SP_0$  und die Strecke  $|OP_0|$ , d. h., jeder reellen Zahl  $x_0 \geq 1$  bzw. jeder reellen Zahl  $y_0$  wird durch  $t_0 = \operatorname{arch} x_0$  bzw. durch  $t_0 = \operatorname{arsh} y_0$  der doppelte Inhalt des beschriebenen Flächenstückes zugeordnet.

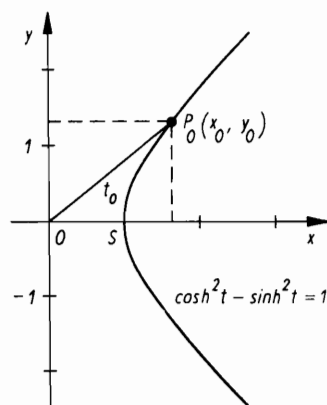


Abb. 2: Geometrische Deutung der Areafunktionen

Zu den Ableitungen der A.en vgl. Differentiationsregeln IV., zu ihrer Entwicklung in Potenzreihen ↗ Entwicklung von Funktionen VI. S. a. komplexwertige Funktion, elementare, IV.

**Areakosinus:** ↗ Areafunktion I.

**Areakotangens:** ↗ Areafunktion I.

**Areasinus:** ↗ Areafunktion I.

**Areatangens:** ↗ Areafunktion I.

**Argument:** ↗ Funktion I., ↗ Gaußsche Zahlenebene II.

**Aristarch von Samos**, geb. um 320, gest. 250 v. u. Z. — Als Astronom und Mathematiker hat A. als erster versucht, die Entfernungen der Erde von Sonne und Mond festzustellen; die recht guten Ergebnisse sind erhalten. Seine bedeutendste Leistung ist die Aufstellung eines *heliozentrischen Weltbildes*.

**Aristoteles**, geb. 384 v. u. Z. Stagira als Sohn eines Arztes, gest. 322 v. u. Z. Chalkis. — A. war ein Schüler von PLATON und ab 342 der Lehrer von Alexander dem Großen; 355 kehrte er nach Athen zurück. Nach Alexanders Tod wurde er von polit. Gegnern gezwungen, in das Exil nach Chalkis zu gehen. — A. ist der bedeutendste Denker der Antike. Für die Mathematik ist bes. der Aufbau seiner *Logik* bedeutungsvoll, da A. sich fast ausschließlich

auf mathemat. Schlüsse bezieht. Der eigentl. mathemat. Tagesforschung stand A. fern.

**Arität**  $\nearrow$  Prädikat.

**Arithmetik:** Teilgebiet der Mathematik, das die verschiedenen Zahlenarten und ihre Rechengesetze behandelt (s. a. Zahl). Die *niedere A.* umfaßt die vier Grundrechenarten und die Potenzrechnung mit ihrem Umkehrungen, mit dem Wurzelziehen und dem Logarithmieren. Zur *höheren A.* gehören die Theorie der unendl. Folgen und Reihen, die Kombinatorik und die Zahlentheorie. Die A. überschneidet sich teilweise mit der Algebra und der Analysis.

**arithmetische Reihe:** Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} [a + (k - 1) d]$  aus den Gliedern einer arithmet. Zahlenfolge  $(a_n)$  mit  $a_n = a + (n - 1) d$ . Da für  $d \neq 0$  jede arithmet. Folge bestimmt divergiert, ist auch jede unendl. a. R. bestimmt divergent ( $\nearrow$  Reihe). Man kann nur von der *n*-ten *Partialsumme* (1) einer a. R. sprechen.

$$(1) \quad s_n = \sum_{k=1}^n [a + (k - 1) d] \\ = (n/2) [2a + d(n - 1)] = (n/2) (a + a_n)$$

Dabei bedeuten  $a_1 = a$  das *Anfangsglied*,  $a_n = a + (n - 1) d$  das *n*-te Glied und  $d$  die *Differenz* der a. R. Für die fünf Größen  $a, d, a_n, n$  und  $s_n$  bestehen die beiden Beziehungen  $s_n = (n/2) (a + a_n)$  und  $a_n = a + (n - 1) d$ , so daß sich aus jeweils drei Größen die anderen beiden bestimmen lassen; z. B. ergeben sich aus den bekannten Größen  $a_n = 46$ ,  $s_n = 325$  und  $d = 3$  über die Gleichungen  $325 = (n/2) (a + 46)$  und  $46 = a + (n - 1) 3$  die restl. Größen zu  $n = 10$  und  $a = 19$ .

**arithmetisches Mittel:** die Größe (1), die genauer

$$(1) \quad \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

a. M. der *n* Größen  $a_1, \dots, a_n$  heißt.  $\nearrow$  Mittelwerte I. **arithmetische Zahlenfolge:** I. Zahlenfolge  $(a_n)$ , in der die Differenz  $d = a_{n+1} - a_n$  zweier benachbarter Glieder stets konstant ist. Mit dem *Anfangsglied*  $a$  und der *Differenz*  $d$  hat eine a. Z. die Form  $a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, \dots, a_n = a + (n - 1) d, \dots$  Die a. Z.  $(a_n)$  mit  $a = -2$  und  $d = 1$  hat z. B. das allgemeine Glied  $a_n = -2 + (n - 1)$ . Für  $d > 0$  ist die a. Z. eigentlich monoton wachsend, nach oben unbeschränkt und bestimmt divergent nach  $+\infty$ ; für  $d < 0$  ist die a. Z. eigentlich monoton fallend, nach unten unbeschränkt und bestimmt divergent nach  $-\infty$  ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen I.). Für  $d = 0$  erhält man eine *konstante Folge*.

Der Name a. Z. deutet an, daß jedes Glied  $a_k$  für  $k \geq 2$  das arithmet. Mittel seiner Nachbarglieder ist:  $\frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1}) = \frac{1}{2}[a + (k - 2) d + a + kd] = a + (k - 1) d = a_k$ . Addiert man zu  $s_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1) d)$  die gleiche Summe in umgekehrter Reihenfolge, so erhält man für die Summe der *i*-ten Glieder mit  $i \leq n$  beider Summen stets  $a + (i - 1) d + a + (n - i) d = 2a + (n - 1) d$ . Daraus ergibt sich  $s_n =$

$\frac{1}{2} n [2a + (n - 1) d] = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n)$ . Die Summe  $s_n$  der ersten *n* Glieder der a. Z.  $-2, -1, 0, 1, \dots$  mit  $a = -2, d = 1$  ist z. B. gleich  $n(n - 5)/2$ .

Die *lineare Interpolation* fordert, *m* Glieder zwischen zwei Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  mit der Differenz  $z_2 - z_1 = d$  so einzuschreiben, daß eine endl. a. Z. entsteht, deren erstes Glied  $z_1$  und deren  $(m + 2)$ -tes Glied  $z_2$  ist. Nennt man  $\bar{d}$  die Differenz der gesuchten a. Z., so ist  $z_2 = z_1 + (m + 1) \bar{d} = z_1 + d$ , d. h.,  $\bar{d} = d/(m + 1)$ . Sollen z. B. zwischen je zwei Gliedern der a. Z.  $-2, -1, 0, 1, \dots$  je drei Glieder eingeschrieben werden, so daß wieder eine a. Z. entsteht, so ist in diesem Fall  $\bar{d} = 1/4$ , und man erhält die a. Z. (1).

$$(1) \quad -2, -7/4, -6/4, -5/4, -1, -3/4, -2/4, \\ -1/4, 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, \dots$$

II. Die aus einer gegebenen Zahlenfolge  $(a_n)$  gebildete Zahlenfolge  $(b_n^1)$  mit  $b_n^1 = a_{n+1} - a_n$  heißt die *erste Differenzenfolge* von  $(a_n)$ . Entsprechend nennt man  $(b_n^k)$  mit  $b_n^k = b_{n+1}^{k-1} - b_n^{k-1}$  die *k*-te Differenzenfolge von  $(a_n)$ . Eine a. Z. ist dadurch ausgezeichnet, daß ihre erste Differenzenfolge konstant ist. Verallgemeinert nennt man für  $p > 1$  eine Zahlenfolge  $(a_n)$ , deren *p*-te Differenzenfolge konstant, aber nicht gleich Null ist, eine a. Z. von *p*-ter Ordnung. Die Zahlenfolge 1, 4, 9, 16, 25, 36 ... mit dem allgemeinen Glied  $a_n = n^2$  ist z. B. eine a. Z. von 2-ter Ordnung, denn  $(b_n^1)$  ist die Zahlenfolge 3, 5, 7, 9, 11, ... und  $(b_n^2)$  die konstante Zahlenfolge 2, 2, 2, ... Jede Zahlenfolge  $(a_n)$  mit dem allgemeinen Glied  $a_n = c_p n^p + c_{p-1} n^{p-1} + \dots + c_0$  mit  $p \geq 1$ , ganz,  $c_0, c_1, \dots, c_p$  konstant und  $c_p \neq 0$ , ist z. B. eine a. Z. von *p*-ter Ordnung, denn ihre *p*-te Differenzenfolge ist identisch gleich  $p! c_p, p! c_p, p! c_p, \dots$

Ist  $(a_n)$  eine a. Z. von *p*-ter Ordnung, so ist die *Summenfolge*  $(s_n), s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , eine a. Z. von  $(p + 1)$ -ter Ordnung, und es gilt (2). Zu der a. Z. von 2-ter Ordnung mit dem allgemeinen Glied  $a_n = n^2$  berechnet man (3), und für die a. Z. von 3-ter Ordnung mit dem allgemeinen Glied  $a_n = n^3$  ermittelt man (4), denn  $b_1^1 = 7, b_1^2 = 12$  und  $b_1^3 = 6$ , wie man aus den schemat. Übersichten

$$(2) \quad s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1^1 + \binom{n}{3} b_1^2 + \dots \\ + \binom{n}{p+1} b_1^p$$

$$(3) \quad s_n = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \\ \binom{n}{1} 1 + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 2 = n(n + 1) (2n + 1)/6$$

$$(4) \quad s_n = 1 + 8 + 27 + 64 + \dots + n^3 = \\ \binom{n}{1} 1 + \binom{n}{2} 7 + \binom{n}{3} 12 + \binom{n}{4} 6 = [n(n + 1)/2]^2$$

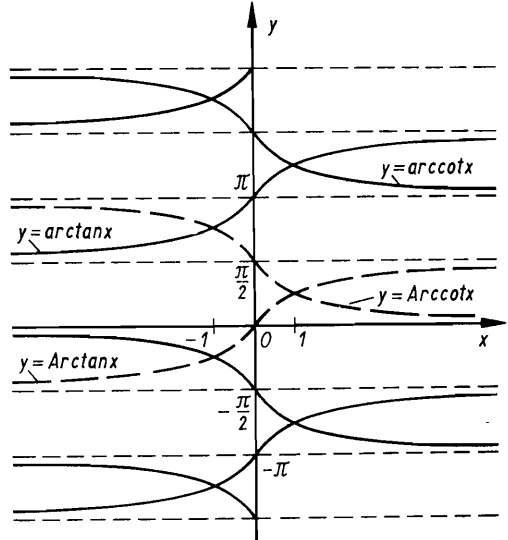
$$(5) \quad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots \\ b_1^1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & \\ b_1^2 & 2 & 2 & 2 & \dots & & \end{array}$$

(6)

$b_1^1$	1	8	27	64	125 ...
$b_1^2$		7	19	37	61 ...
$b_1^3$			12	18	24 ...
				6	6 ...

(5) für  $n^2$  und (6) für  $n^3$  entnimmt. **Arithmetisierung**, auch *Gödelisierung*, *Gödelkodierung* [nach dem Mathematiker K. GÖDEL]: *mathemat. Logik* Kodierung der Symbole und Ausdrücke einer formalen Sprache durch natürl. Zahlen. Dadurch lassen sich Operationen mit den Ausdrücken dieser Sprache, z. B. die des Ableitens, d. h. die Anwendung von Schlussregeln, in arithmet. Operationen überführen. Die A. ist ein grundlegendes Werkzeug bei der metatheoret. Untersuchung formalisierter Theorien. Um eine formale Sprache zu arithmetisieren, muß jedem Grundzeichen eine natürl. Zahl derart zugeordnet und ein Verfahren derart angegeben werden, daß aus den den Grundzeichen zugeordneten Zahlen die einer Zeichenreihe aus solchen Zeichen zugeordnete Zahl zu bestimmen ist. Zuordnung und Verfahren müssen so beschaffen sein, daß den Zeichenreihen eineindeutig natürl. Zahlen entsprechen.

**Arkusfunktion**, auch *zyklometrische Funktion*: I. Umkehrfunktion einer Winkelfunktion, die jeweils mit dem Vorsatz Arkus-, im Symbol »arc«, vor dem Namen der Winkelfunktion bezeichnet wird; z. B. bedeutet  $y = \arccos x$  »der Bogen  $y$ , dessen Kosinus



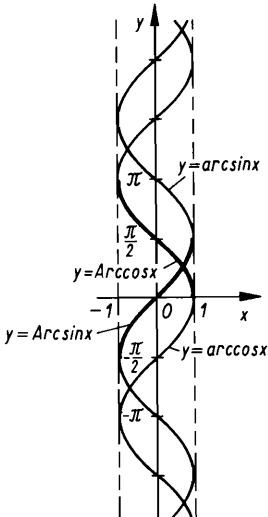
Arkusfunktion. Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktionen  $y = \arctan x$  und  $y = \operatorname{arccot} x$

geschlossen (Abb. 1, Abb. 2). In der folgenden Übersicht sind diese Monotonieintervalle  $I_k$  angegeben, dabei ist  $k$  eine ganze Zahl. Für  $k = 0$  erhält man den *Hauptwert* der A., der mit Arc bezeichnet wird.

- (1)  $y = \operatorname{Arcsin} x$  für  $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$ ,  
 $I_k = [(2k - 1)\pi/2, (2k + 1)\pi/2]$ ,  
 $D: -1 \leq x \leq +1$ , wachsend,
- (2)  $y = \operatorname{Arccos} x$  für  $0 \leq y \leq \pi$ ,  
 $I_k = [k\pi, (k + 1)\pi]$ ,  
 $D: 1 \geq x \geq -1$ , fallend,
- (3)  $y = \operatorname{Arctan} x$  für  $-\pi/2 < y < +\pi/2$ ,  
 $I_k = ](2k - 1) \cdot \pi/2, (2k + 1) \cdot \pi/2[$ ,  
 $D: -\infty < x < +\infty$ , wachsend,
- (4)  $y = \operatorname{Arccot} x$  für  $0 < y < \pi$ ,  
 $I_k = ]k\pi, (k + 1)\pi[$ ,  
 $D: +\infty > x > -\infty$ , fallend.

In der Übersicht steht jeweils unter dem Wertebereich der Definitionsbereich  $D$  mit der Angabe, ob wachsende oder fallende Monotonie vorliegt. *Beispiele*, in denen  $k \in \mathbf{Z}$ :  $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$ ;  $\operatorname{arccos} 1/3 = \pi/3 + k\pi$ ;  $\operatorname{arctan} 1 = \pi/4 + k\pi$ ;  $\operatorname{arccot} \sqrt{3} = \pi/6$ . Zum Aufsuchen der Funktionswerte der A.en benutzt man die Tafel für die Winkelfunktionen. Die Beziehungen zwischen beiden Funktionsarten zeigen auch die Kurven der A.en. Sie liegen symmetrisch zu den Bildern der entsprechenden Winkelfunktionen bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.

II. Als Umkehrfunktionen stetiger und differenzierbarer Funktionen sind auch die A.en in den angegebenen Intervallen stetig und differenzierbar. Ihre



Arkusfunktion. Abb. 1: Graphische Darstellung der Funktionen  $y = \arcsin x$  und  $y = \operatorname{arccos} x$

die Größe  $x$  hat«. Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen ist dieser Bogen nur dann eindeutig bezeichnet, wenn ein Intervall angegeben wird, in dem die betreffende Winkelfunktion alle ihre Werte annimmt und zugleich monoton ist. Wegen der Pole der Tangens- und Kotangensfunktion sind diese Intervalle für Arkustangens und Arkuskotangens offen, für Arkussinus und Arkuskosinus aber ge-

ersten Ableitungen sind algebraische Funktionen (↗ Differentiationsregeln IV.).

$$(1a) \quad \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$(2a) \quad \frac{d \arccos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$(3a) \quad \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(4a) \quad \frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Entwickelt man diese algebraischen Funktionen in eine Reihe, so erhält man durch gliedweise Integration *Potenzreihenentwicklungen* der A.en mit dem Konvergenzradius  $r = 1$  (↗ Entwicklung von Funktionen VI.).

$$(5) \quad \arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n-1)} + \dots$$

$$(6) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)(2n-1)} - \dots$$

$$(7) \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots$$

$$(8) \quad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots$$

III. Die gleichen geometr. Zusammenhänge etwa am Einheitskreis lassen sich als *Beziehungen* zwischen Winkelfunktion oder nach (9), (10), (11), (12) *zwischen A.en* darstellen.

$$(9) \quad \operatorname{Arc} \sin x = -\operatorname{Arc} \sin (-x) = \pi/2 - \operatorname{Arccos} x$$

$$(10) \quad \operatorname{Arccos} x = \pi - \operatorname{Arccos} (-x) = \pi/2 - \operatorname{Arcsin} x$$

$$(11) \quad \operatorname{Arctan} x = -\operatorname{Arctan} (-x) = \pi/2 - \operatorname{Arccot} x$$

$$(12) \quad \operatorname{Arccot} x = \pi - \operatorname{Arccot} (-x) = \pi/2 - \operatorname{Arctan} x$$

Auch aus den *Additionstheoremen* der Winkelfunktionen lassen sich *Beziehungen* zwischen den A.en herleiten. Setzt man z. B. in  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$  ein  $\alpha = \operatorname{Arccos} x$ ,  $\beta = \operatorname{Arccos} y$  und demnach  $\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$ ,  $\sin \beta = \sqrt{1-y^2}$ , so erhält man (13) und (14).

$$(13) \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos} y = \operatorname{Arccos} [xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}] \quad \text{für } x+y \geq 0$$

$$(14) \quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos} y = 2\pi - \operatorname{Arccos} [xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}] \quad \text{für } x+y < 0$$

Dabei liegt für  $x+y \geq 0$ , der Winkel  $\alpha + \beta$  im Quadranten I oder IV, für  $x+y < 0$  aber im Quadranten II oder III.

Entsprechend erhält man z. B. aus  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  für  $\alpha = \operatorname{Arcsin} x$  und  $\beta = \operatorname{Arcsin} y$  die Gleichungen (15), (16), (17).

$$(15) \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} y = \operatorname{Arcsin} [x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}]$$

für  $xy \leq 0$  oder für  $x^2 + y^2 \leq 1$

$$(16) \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} y = \pi - \operatorname{Arcsin} [x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}]$$

für  $x > 0, y > 0$  und  $x^2 + y^2 > 1$

$$(17) \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} y = -\pi - \operatorname{Arcsin} [x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}]$$

für  $x < 0, y < 0$  und  $x^2 + y^2 > 1$

Da nur Hauptwerte betrachtet werden, wird in (15) ausgesagt, daß  $\alpha + \beta$  im I. oder IV. Quadranten liegt, in (16) im II. und in (17) im III., da die angegebene A. für  $x > 0, y > 0$  positiv, für  $x < 0, y < 0$  negativ ist. Für die Beträge der Winkelgrößen  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt sich aus  $x^2 + y^2 \leq 1$  nach der Beziehung zur Kofunktion, daß ihre Summe  $\pi/2$  nicht überschreitet, wohl aber für  $x^2 + y^2 > 1$ .

Entsprechend findet man die Gleichungen (18), (19), (20), (21).

$$(18) \quad \operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcsin} y = \operatorname{Arcsin} [x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2}]$$

für  $x \cdot y \geq 0$  oder  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,

$$= \pi - \operatorname{Arcsin} [x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2}]$$

für  $x > 0, y < 0$  und  $x^2 + y^2 > 1$ ,

$$= -\pi - \operatorname{Arcsin} [x \sqrt{1-y^2} - y \sqrt{1-x^2}]$$

für  $x < 0, y > 0$  und  $x^2 + y^2 > 1$

$$(19) \quad \operatorname{Arccos} x - \operatorname{Arccos} y = -\operatorname{Arccos} [xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}] \quad \text{für } x \geq y$$

$$= \operatorname{Arccos} [xy + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}] \quad \text{für } x < y$$

$$(20) \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} [(x+y)/(1-xy)] \quad \text{für } xy < 1,$$

$$= \pi + \operatorname{Arctan} [(x+y)/(1-xy)] \quad \text{für } x > 0, xy > 1,$$

$$= -\pi + \operatorname{Arctan} [(x+y)/(1-xy)] \quad \text{für } x < 0, xy > 1.$$

$$(21) \quad \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} [(x-y)/(1+xy)] \quad \text{für } xy > -1,$$

$$= \pi + \operatorname{Arctan} [(x-y)/(1+xy)] \quad \text{für } x > 0, xy < -1,$$

$$= -\pi + \operatorname{Arctan} [(x-y)/(1+xy)] \quad \text{für } x < 0, xy < -1.$$

S. a. komplexwertige Funktion, elementare, IV.  
**Artin**, Emil, geb. 3. 3. 1898 Wien, gest. 20. 12. 1962 Hamburg. — Er studierte in Wien und in Leipzig, 1921 promovierte er bei Gustav HERGLOTZ (1881 bis 1953) mit der zahlentheoret. Arbeit »Quadratische Körper im Gebiet der höheren Kongruenzen«. 1923 habilitierte er sich in Hamburg, erhielt dort 1925 eine Professur, emigrierte 1937 in die USA (Indiana University und Princeton), und war von 1958 an

wieder Professor in Hamburg. Seine Forschungsgebiete waren vor allem Zahlentheorie, Algebra und Topologie. 1927 gab er eine neue kanon. Formulierung der zuvor von Philipp FURTWÄGLER (1869 bis 1940) und Teiji TAKAGI (1875–1960) aufgestellten Klassenkörpertheorie. Vom Artinschen Reziprozitätsgesetz ist das quadrat. Reziprozitätsgesetz von C. F. GAUSS ein Spezialfall. Die Arithmetik der Algebren hat A. 1928 auf der Grundlage der Ideen von H. BRANDT allgemein begründet. Zusammen mit SCHREIER schuf er eine Theorie der reellen Körper und damit die Lösung eines der Probleme von HILBERT. Die Aufzeichnungen des 1951/52 in Princeton von A. zusammen mit seinem Schüler John TATE durchgeführten berühmten Seminars über Klassenkörpertheorie wurden zu einem Standardwerk der algebraischen Zahlentheorie. „Emil A. fut un mathématicien génial. C'était aussi un artiste et, pour tout dire, un homme complet.“ (H. CARTAN).

**Assembler** ↗ Programmierung des Digitalrechners II., ↗ Betriebssystem II.

**Assoziativgesetz:** Eigenschaft einer Operation, bei der Verknüpfung von drei Größen zum gleichen Ergebnis zu führen, ganz gleich, ob man sie zuerst auf die ersten beiden oder zuerst auf die letzten beiden Größen anwendet. Bezeichnet man die Größen mit  $a, b, c$ , so lautet das A. für die Addition  $(a + b) + c = a + (b + c)$  und für die Multiplikation  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . Das A. gilt für die Bereiche  $\mathbf{N}$  der natürlichen,  $\mathbf{Z}$  der ganzen,  $\mathbf{Q}$  der rationalen,  $\mathbf{R}$  der reellen und  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen, es gilt z. B. nicht für das innere Produkt von Vektoren, weil z. B.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  ein skalares Vielfaches des Vektors  $\mathbf{a}$ ,  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  aber ein skalares Vielfaches des Vektors  $\mathbf{c}$  ist.

S. a. Addition I., Funktion I., Reihe III.4., Vektorraum I., Verband I., zufälliges Ereignis II.

**Assoziativität von Verknüpfungen** ↗ Abbildung III. assoziiertes Element ↗ Einheit.

**astabiles Glied** ↗ Übertragungsglied IV.

**Äste der Hyperbel** ↗ Hyperbel I.

**Astroide** ↗ Zykloide III., Flächenintegral III.

**astronomische Einheit AE** ↗ Strecke V.

**asymmetrisch** ↗ Relation II.

**Asymptote einer ebenen Kurve:** I. Gerade der Ebene, die sich einem Stück einer ebenen Kurve unbegrenzt nähert, das sich ins Unendliche erstreckt. Ist in einem kartes.  $x, y$ -Koordinatensystem das Kurvenstück durch  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  gegeben und streben  $|x(t)|$  oder  $|y(t)|$  oder beide für  $t \rightarrow t_0$  oder  $t \rightarrow \infty$  oder für  $t \rightarrow -\infty$  gegen  $\infty$ , so ist die durch  $y = mx + n$  bestimmte Gerade A., wenn die Grenzwerte  $\lim [y(t)/x(t)] = m$  und  $\lim [y(t) - m \cdot x(t)] = n$  existieren; die Gerade  $x = a$  ist A., wenn  $\lim x(t) = a \neq \infty$  und  $\lim y(t) = \infty$  ist, jeweils für  $t \rightarrow t_0$  oder  $t \rightarrow \infty$  oder für  $t \rightarrow -\infty$ . Der Abstand der Kurvenpunkte  $P(t) = (x(t), y(t))$  von der A. strebt gegen Null für  $t \rightarrow t_0$ , für  $t \rightarrow \infty$  oder für  $t \rightarrow -\infty$ .

**Beispiel:** Die Parameterdarstellung (1) für  $-\infty < t < \infty$  ist äquivalent mit (2), aus der sich für  $t \rightarrow +\infty$  die Grenzwerte  $\lim x(t) = +\infty$ ,

$\lim y(t) = -\infty$  und  $\lim [y(t)/x(t)] = -1$  sowie

$$(1) \quad x(t) = \frac{(1+t)(1-t)^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{(1+t)^2(1-t)}{1+t^2}$$

$$(2) \quad x(t) = \frac{t(1+1/t)(1/t-1)^2}{(1+1/t^2)}, \\ y(t) = \frac{t(1+1/t)^2(1/t-1)}{1+1/t^2}$$

$\lim [y(t) + x(t)] = -2$  ergeben, d. h., die A. ist bestimmt durch  $y = -x - 2$ . Für den Grenzwert  $t \rightarrow -\infty$  gilt das Gleiche.

Ist die Kurve oder ein Kurvenstück durch  $y = f(x)$  gegeben, so ist  $x = a$  A., wenn für  $x \rightarrow a$  gilt  $\lim |f(x)| = \infty$ . Die A. hat die Gleichung  $y = mx + n$ , wenn für  $x \rightarrow \infty$  oder für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $\lim [f(x)/x] = m$  und  $\lim [f(x) - mx] = n$ .

**Beispiel:** Für  $x \geq 2$  wird ein Stück der Hyperbel  $y^2 - 2xy + 4 = 0$  (↗ Kurve zweiter Ordnung I.) dargestellt durch  $y = x + \sqrt{x^2 - 4}$ . Wegen  $\lim [f(x)/x] = \lim [1 + \sqrt{1 - 4/x^2}] = 2$  für  $x \rightarrow \infty$  sowie wegen (3) ist  $y = 2x$  die Gleichung einer A.

$$(3) \quad \lim [f(x) - 2x] \\ = \lim \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} \\ = \lim \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

**II.** Eine Kurve, falls sie nicht *algebraisch* ist, kann mit einer ihrer A.n unendlich viele Schnittpunkte haben, z. B.  $y = (\sin x)/x$  mit  $y = 0$ ; eine Kurve zweiter Ordnung, die A.n hat, schneidet diese nicht; die Kurve dritter Ordnung  $y + yx^2 - x = 0$  schneidet z. B. die A.  $y = 0$  in einem Punkt (0, 0).

Für eine *algebraische* Kurve ist eine A. zugleich Tangente in einem *uneigentlichen Punkt* der Kurve, die man nach Einführung *homogener Koordinaten* bestimmen kann.

Vgl. Hyperbel I., Konchoide II., Logarithmusfunktionen II., rationale Funktion III., rationale Kurve III., Spirale II.

**asymptotischer Punkt** ↗ Spirale II., III.

**asymptotische Stabilität** ↗ Stabilität.

**asymptotische Verteilung** ↗ Stichprobenfunktion.

**asynchrone Steuerung** ↗ Steuerung II.

**attisches Zahlensystem** ↗ Zahlensystem IV.

**Atto** ↗ Strecke V.

**Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung in Radikalen:** wichtigstes Problem der klass. Algebra: Fragestellung, ob *alle* Lösungen einer algebraischen Gleichung  $f(x) = 0$  durch rationale Operationen und Wurzeln in endlich vielen Schritten, d. h. als ineinandergeschachtelte Wurzelausdrücke, aus den Koeffizienten der Gleichung darstellbar sind. Die allgemeinen Gleichungen 2., 3. und 4. Grades sind in Radikalen auflösbar (↗ algebraische Gleichung), die allgemeine Gleichung von höherem als dem 4. Grade nicht (↗ Galoissche Theorie).

**Aufriß** ↗ Zweitafelprojektion I.



**aufrunden** ↗ Runden.

**Aufstiegsverfahren** ↗ Abstiegsverfahren.

**Aufteilungsproblem:** Standardaufgabe der *Operationsforschung*, die verfügbaren Mittel in der Weise auf verschiedene Einsatzarten zu verteilen, daß sich ein maximaler Gesamtgewinn ergibt. Die Lösung wird in der Regel durch lineare oder, bei Betrachtung mehrerer Perioden, durch dynam. Optimierung ermittelt.

**Auftragegerät** svw. Koordinatograph.

**Aufwandskoeffizienten** ↗ Verflechtungsbilanz.

**Aufzinsungsfaktor** ↗ Zinseszinsrechnung I.

**Augenhöhe** ↗ Projektion I.

**Augenpunkt** ↗ Projektion I.

**Ausdruck** ↗ Aussagenkalkül I.

**Ausfallwahrscheinlichkeit** ↗ Zuverlässigkeitstheorie.

**Ausgabe, Output:** Übertragung von Informationen vom Rechner zu den peripheren Geräten (↗ Peripherie). Zur Ausgabe gehört sowohl die Übertragung von Informationen zu den Ausgabegeräten als auch von einem internen zu einem externen Speicher (↗ digitale Rechenanlage I.2.). S. a. System I.; Verflechtungsbilanz.

**Ausgabegeräte** ↗ digitale Rechenanlage I.2.

**Ausgabesignal** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.

**Ausgangsgröße** ↗ System I., II.

**ausgeschlossenen Dritten, Satz vom** ↗ Aussagenlogik I.

**ausgeschlossenen Widerspruch, Satz vom** ↗ Aussagenlogik I.

**Ausgleich bedingter Beobachtung** ↗ Ausgleichsrechnung I.

**Ausgleichsrechnung:** I. eine im wesentlichen auf C. F. GAUSS zurückgehende Methode mit dem Ziel, aus fehlerbehafteten Meßwerten Näherungswerte, *Schätzwerte*, für die zu messenden Größen zu gewinnen und ihre Genauigkeit anzugeben. Die A. steht in engem Zusammenhang mit den *Punkt- und Konfidenzschätzungen*. Die Grundlage der A. ist das Gaußsche Fehlerverteilungsgesetz, das von der Tatsache ausgeht, daß der *zufällige Fehler* einer Messung normalverteilt ist (↗ *Normalverteilung*) und den Erwartungswert 0 hat. Die prakt. Durchführung von Ausgleichungen beruht auf der *Methode der kleinsten Quadrate*, die wiederum eine direkte Folgerung aus dem *Maximum-Likelihood-Prinzip* ist (↗ *Maximum-Likelihood-Methode*) und an einem wichtigen Spezialfall erläutert werden soll. Sind  $y_1, \dots, y_n$  die zu messenden Größen und  $a_1, \dots, a_n$  konkrete Meßwerte von ihnen, sind außerdem alle  $y_i$  voneinander verschieden und bestehen zwischen ihnen keinerlei Beziehungen, so sind die  $a_i$  selbst die besten Schätzungen für  $y_i$ , d. h., es kann kein Ausgleich der Fehler stattfinden. Zum Unterschied dazu kann in praktisch bedeutsamen Fragestellungen meist angenommen werden, daß sich die  $n$  Meßgrößen  $y_i$  durch lineare Beziehungen  $y_i = c_{i1}z_1 + c_{i2}z_2 + \dots + c_{ik}z_k$  zwischen  $k$  Unbekannten  $z_k$  mit  $k < n$  darstellen lassen. In diesem Ansatz ist der Fall  $y_i = y$  enthalten, in dem sich die  $n$  Meß-

werte auf die gleiche Meßgröße  $y$  beziehen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate gelten jene Werte  $\hat{z}_i$  als die besten Schätzungen für die Unbekannten  $z_i$ , die die Größe  $Q$  aus (1) zu einem Minimum machen.

$$(1) \quad Q = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i - y_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i - c_{i1}z_1 - \dots - c_{ik}z_k}{\sigma_i} \right)^2$$

Dabei ist  $\sigma_i$  der mittlere Fehler der  $i$ -ten Messung. Um die  $\hat{z}_i$  zu berechnen, müssen die Gleichungen  $\frac{\partial Q}{\partial z_i} = 0$  nach  $z_i$  aufgelöst werden. Daraus erhält man die *Normalgleichungen*, die im betrachteten Fall lineare Gleichungen sind. Eine zusätzl. Schwierigkeit ergibt sich daraus, daß in vielen Fällen die  $\sigma_i$  auch ihrerseits geschätzt werden müssen. Man spricht vom *Ausgleich bedingter Beobachtungen*, wenn zwischen den wahren Werten der zu messenden Größen noch *Bedingungsbeziehungen* bestehen, für die drei Winkel eines Dreiecks z. B. die Beziehung  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Die Methode der kleinsten Quadrate muß dann mit der Methode der *Lagrangeschen Multiplikatoren* kombiniert werden (↗ *Extremwert VI.*). Vom *Ausgleich vermittelnder Beobachtungen* spricht man, wenn die interessierenden Größen nicht direkt gemessen werden, sondern andere Größen, aus denen sich die interessierenden Größen in irgendeiner Weise berechnen lassen, z. B. die Höhe eines Turmes aus der Entfernung zum Beobachter und dem zugehörigen Blickwinkel. Die klassischen Resultate der A. lassen sich in die moderne mathemat. Statistik als Teilgebiet der *Schätztheorie* und der *Regressionsanalyse* völlig einordnen. II. Ein wesentl. Teil der A. ist die *Ausgleichung von Meßreihen*. In ihr ist aus einer gegebenen Funktionenfamilie eine Funktion so zu bestimmen, daß ihr  $N$  gegebene Meßwertpaare  $(x_i, y_i)$  mit  $i = 1, 2, \dots, N$  möglichst genau genügen. Im einfachsten Falle der *Polynomausgleichung* ist das Polynom  $\hat{f}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1x + \dots + \hat{a}_nx^n$  mit  $n < N$  gesucht, für das  $\varrho(\hat{f}(x_i) - y_i) \leq \varrho(f(x_i) - y_i)$  für alle Polynome  $f(x)$  von höchstens  $n$ -tem Grad ist. Dabei bezeichnet  $\varrho$  ein bestimmtes *Maß der Abweichungen*  $e_i = f(x_i) - y_i$  und beschreibt damit das verwendete Ausgleichsprinzip. Am bekanntesten ist die *Gaußsche Fehlerquadratmethode* oder *Methode der kleinsten Quadrate*, bei der nach (1) gilt

$$\varrho(f(x_i) - y_i) = \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y_i)^2.$$

Die Koeffizienten  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$  von  $\hat{f}(x)$  lassen sich dann aus den *Normalgleichungen*, einem linearen Gleichungssystem (2), eindeutig berechnen. In (2) ist dabei stets von  $i = 1$  bis  $i = N$  zu summieren. In der prakt. Anwendung kommt es darauf an, die Anzahl der Parameter niedrig zu halten, d. h., ein Polynom mit möglichst kleinem  $n$  im Ansatz zu verwenden. Man prüft deshalb vorher anschaulich oder mit dem *Differenzenschema*, ob die Meßpunkte z. B. in der Nähe einer Konstanten, einer Geraden oder einer Parabel liegen.

**Normalgleichungen (2)**

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + \dots + a_n \sum x_i^n &= \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + \dots + a_n \sum x_i^{n+1} &= \sum x_i y_i \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + \dots + a_n \sum x_i^{n+2} &= \sum x_i^2 y_i \\ &\dots \\ a_0 \sum x_i^n + a_1 \sum x_i^{n+1} + \dots + a_n \sum x_i^{2n} &= \sum x_i^n y_i \end{aligned}$$

**Beispiel 1:** Bei Fallzeitmessungen von Körpern der Massen  $m_i$  in kg in einem Rohr von 5 m Länge ergeben sich folgende Fallzeiten  $t_i$  in Sekunden:

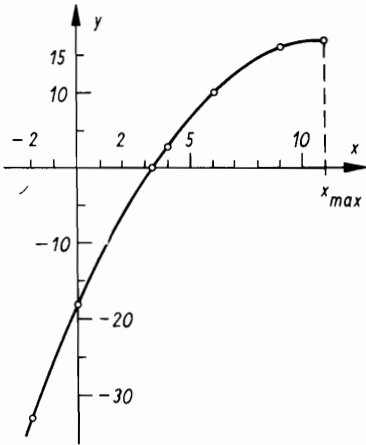
$x_i = m_i$	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$y_i = t_i$	1,01	1,00	0,98	1,10	1,05	1,00

Danach kann  $t_i = \text{const}$  vermutet werden, so daß man  $f(x) = a_0$  als Polynom 0-ter Ordnung ansetzt. Mit  $n = 0, N = 6$  erhält man nach (2):  $a_0 = (y_1 + \dots + y_6)/6 = 6,15/6 = 1,03$ ; dieser Wert ist dann **Mittelwert** der Fallzeiten, von dem die Meßwerte im Quadrat. Mittel am wenigsten abweichen ( $\nearrow$  Fehlerrechnung).

**Beispiel 2:** Zeichnet man die Punkte

$x_i$	-2	0	3	4	6	9
$y_i$	-33	-18	0	2	8	16

in ein **kartes. Koordinatensystem** (Abb.), so kann man eine **quadrat. Parabel** als geeignete Ausgleichskurve vermuten und wählt deshalb  $n = 2$  und



**Ausgleichsrechnung:** Lage der gegebenen Punkte und Bild der Ausgleichsparabel  $\hat{f}(x) = -0,3x^2 + 6,5x - 18,4$  in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Das System der Normalgleichungen ist dann (2a) und hat die Lösung:  $a_0 = -18,4; a_1 = 6,5; a_2 = -0,3$ .

$$\begin{aligned} (2a) \quad 6a_0 + 20a_1 + 146a_2 &= -25 \\ 20a_0 + 146a_1 + 1028a_2 &= 266 \\ 146a_0 + 1028a_1 + 8210a_2 &= 1484 \end{aligned}$$

Damit ist  $\hat{f}(x) = -0,3x^2 + 6,5x - 18,4$  die Gleichung der gesuchten **Ausgleichsparabel**. Ausgleichs-

funktionen stellen **empir. Formeln** für physikal. Zusammenhänge, aber noch keine Naturgesetze dar. **Ausgleich von Meßreihen**  $\nearrow$  Ausgleichsrechnung II. **Aussage**  $\nearrow$  Prädikat.

**Aussageform**  $\nearrow$  Prädikat,  $\nearrow$  Prädikatenlogik II.,  $\nearrow$  Ungleichung I.

**Aussagenkalkül:** *mathematische Logik I.* Kalkül zur Herleitung aller aussagenlog. Identitäten aus vorgegebenen **Axiomen** mittels gewisser **Ableitungsregeln**. Axiome für den A. sind dabei gewisse Ausdrücke, die unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Bestandteile stets wahr sind, und unter einem **Ausdruck** versteht man eine Zeichenreihe, die aus Aussagenvariablen  $p, q, r, \dots$ , aus **aussagenlog. Funktoren**  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ , die auch **aussagenlog. Konstanten** oder **Junktoren** gen. werden ( $\nearrow$  Aussagenlogik II.), und aus **techn. Zeichen** ( $\cdot$ ) besteht. Die genaue Festlegung der Ausdrücke des A.s geschieht **induktiv**: (a) jede Aussagenvariable ist ein Ausdruck; (b) ist A ein Ausdruck, so auch  $\neg A$ ; (c) sind A, B Ausdrücke, so auch  $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$  und  $(A \leftrightarrow B)$ ; (d) jeder Ausdruck läßt sich sukzessiv mittels (a), (b), (c) herstellen (s. a. Prädikatenkalkül). — Ausdrücke sind z. B.  $(p \wedge (q \rightarrow r)), ((p \wedge \neg q) \vee (r \leftrightarrow p)), (r \vee \neg(p \wedge \neg p))$ ; keine Ausdrücke sind  $\neg p \vee q, q \neg r$ . — Ein mögl. System von Axiomen für den A. besteht aus den folgenden 15 aussagenlogischen Identitäten:

- (1)  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ , (2)  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ,
- (3)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ , (4)  $p \wedge q \rightarrow p$ ,
- (5)  $p \wedge q \rightarrow q$ , (6)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)))$ , (7)  $p \rightarrow (p \vee q)$  (8)  $q \rightarrow (p \vee q)$ ,
- (9)  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$ ,
- (10)  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ , (11)  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ ,
- (12)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$ , (13)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ , (14)  $p \rightarrow \neg \neg p$ , (15)  $\neg \neg p \rightarrow p$ .

Etwa an Hand der Tabelle für die Wahrheitswertfunktionen ( $\nearrow$  Aussagenlogik II.) überzeugt man sich leicht, daß diese Ausdrücke Identitäten sind. Der Wert von (1) z. B. könnte als Wert der seq-Funktion nur dann F sein, wenn p den Wert W und  $(q \rightarrow p)$  den Wert F haben; da aber für die seq-Funktion  $\text{seq}(W, W) = W$  und  $\text{seq}(F, W) = W$  gelten, ist das ausgeschlossen. Damit der Wert von (12) zu F würde, müßten nach dem gleichen Schluß  $(p \rightarrow q)$  den Wert W und  $((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$  den Wert F haben. Dieser Wert F ist nur möglich, wenn  $(q \rightarrow p)$  wahr und  $(p \leftrightarrow q)$  falsch ist. Nach der äq-Funktion kann  $(p \leftrightarrow q)$  nur falsch sein, wenn p und q verschiedene Wahrheitswerte haben. Dann aber folgt aus  $(p \rightarrow q)$  wahr, daß p falsch und q wahr, also  $(q \rightarrow p)$  falsch sein muß im Widerspruch dazu, daß  $(q \rightarrow p)$  wahr sein sollte; d. h., (12) kann den Wahrheitswert F nicht haben.

II. Als Regeln zum Ableiten neuer Identitäten gehören zu diesen Axiomen einmal die **Abtrennungsregel**, auch **modus ponens** gen., nach der aus den

Ausdrücken  $A$  und  $A \rightarrow B$  der Ausdruck  $B$  abgeleitet werden kann, und zum anderen die *Einsetzungsregel*, nach der aus Ausdrücken  $A$  und  $B$  jeder Ausdruck abgeleitet werden kann, den man erhält, indem man eine in  $A$  vorkommende Aussagenvariable an allen Stellen ihres Vorkommens in  $A$  durch  $B$  ersetzt (s. a. Prädikatenkalkül). Da alle aufgeführten Axiome aussagenlog. Identitäten sind und da die beiden Ableitungsregeln von aussagenlog. Identitäten stets wieder zu aussagenlog. Identitäten führen, lassen sich nur aussagenlog. Identitäten ableiten. Daß auch wirklich alle aussagenlog. Identitäten ableitbar sind, ist die Aussage des *Vollständigkeitsatzes* für den A. — Die Einsetzungsregel kann man verallgemeinern zum *Ersetzbarkeitstheorem*, das besagt: *Sind  $H, A, B$  Ausdrücke und  $A, B$  äquivalent, d. h., ist  $A \leftrightarrow B$  eine Tautologie, kommt weiterhin  $A$  in  $H$  als Teilausdruck vor und entsteht  $H'$  aus  $H$  dadurch, daß an gewissen Stellen in  $H$  der Teilausdruck  $A$  durch den Ausdruck  $B$  ersetzt wird, so sind  $H$  und  $H'$  äquivalent, d. h.,  $H \leftrightarrow H'$  ist eine Tautologie.* Insbesondere führt danach eine solche Ersetzung von einer Tautologie  $H$  stets wieder zu einer Tautologie  $H'$ . — Jeder Ausdruck mit  $n$  Variablen repräsentiert eine  $n$ -stellige Wahrheitswertfunktion ( $\nearrow$  Aussagenlogik II.), wenn man die Variablen mit Wahrheitswerten belegt und die Junktoren durch die ihnen entsprechenden Wahrheitswertfunktionen interpretiert; z. B. repräsentiert der Ausdruck  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$  »nicht  $p$  und  $q$  genau dann, wenn nicht  $p$  oder nicht  $q$ « die Wahrheitswertfunktion von zwei Variablen, die stets den Wert  $W$  (wahr) annimmt, wie man leicht einsieht, weil die Ausdrücke  $\neg(p \wedge q)$  und  $(\neg p \vee \neg q)$  stets beide zugleich wahr oder zugleich falsch sind, ganz gleich, ob  $p$  und  $q$  mit gleichen oder verschiedenen Wahrheitswerten belegt werden. — Da jede  $n$ -stellige Wahrheitsfunktion genau  $2^n$  verschiedene Belegungen zuläßt, kann man für jeden Ausdruck des A.s in endlich vielen Schritten nachprüfen, ob die ihm entsprechende Wahrheitswertfunktion immer den Wert  $W$  hat, d. h., ob dieser Ausdruck eine Tautologie ist. Da genau die Tautologien im A. abgeleitet werden können, hat man damit eine Methode, von einem beliebigen, vorgegebenen Ausdruck des A.s zu entscheiden, ob er ableitbar ist oder nicht, d. h., der A. ist *entscheidbar*. — Sowohl Axiome als auch Ableitungsregeln können je nach Zielsetzung modifiziert werden. Auch für nichtklass. Logiken, z. B. mehrwertige Logiken, die intuitionist. Logik oder modale Logiken, sind A.e angegeben worden. — Die Entwicklung des modernen A.s geht auf Gottlob FREGE (1848–1925) zurück. Der A. hat zahlreiche Anwendungen in der maschinellen Informationsverarbeitung (s. Schaltalgebra).

**Aussagenlogik:** *mathematische Logik I.* Teil der Logik, in dem Eigenschaften von Aussagen, die mittels gewisser *Aussagenverknüpfungen* aus anderen Aussagen entstehen, untersucht werden. Der Begriff der Aussage wird nicht inhaltlich analysiert ( $\nearrow$  Prädikat); es wird jedoch vorausgesetzt, daß jede Aussage einen *Wahrheitswert* hat; die Aussage »5 ist eine

gerade Zahl« z. B. ist falsch, die Aussage »25 ist die Summe von 18 und 7« ist wahr; die Formulierung »die Schwester von Klaus« dagegen ist weder wahr noch falsch, also keine Aussage. Grundlegend sind zwei Prinzipien: das Prinzip der *Zweiwertigkeit* und das Prinzip der *Extensionalität*. Das *Zweiwertigkeitsprinzip* besagt, daß jede in Betracht kommende Aussage entweder den Wahrheitswert »wahr« oder den Wahrheitswert »falsch« hat. Das *Extensionalitätsprinzip* besagt, daß der Wahrheitswert einer Aussagenverknüpfung ausschließlich von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile, nicht aber von deren Inhalt abhängt. Das *Zweiwertigkeitsprinzip* enthält den *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* — oft als *tertium non datur* bezeichnet —, der besagt, daß jede Aussage wahr oder falsch ist, und den *Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch*, der besagt, daß keine Aussage zugleich wahr und falsch ist.

II. Es ist bequem, den wahren Aussagen das Symbol  $W$  bzw. 1 und den falschen das Symbol  $F$  bzw. 0 zuzuordnen und diese Symbole als die beiden Wahrheitswerte zu bezeichnen. Nach dem *Extensionalitätsprinzip* ist jeder Verknüpfung  $H(A_1, \dots, A_n)$  von Aussagen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eindeutig eine  $n$ -stellige *Wahrheitswertfunktion* zugeordnet, d. h. eine Funktion, die jedem  $n$ -Tupel von Wahrheitswerten, die die Argumente  $A_i$  annehmen, einen Wahrheitswert zuordnet ( $\nearrow$  Relation II.). Mit diesem Funktionswert beschreibt sie den Wahrheitswert der durch Verknüpfung entstandenen Aussage als Funktion der Wahrheitswerte der dabei verknüpften Aussagen.

Die bedeutendste einstellige Aussagenverknüpfung ist die *Negation*, die jeder Aussage  $p$  die Aussage »nicht  $p$ « zuordnet; z. B. wird der Aussage »Dresden ist eine Großstadt« die Aussage »nicht: Dresden ist eine Großstadt« als Negation zugeordnet, stilistisch besser die Aussage »es ist nicht so, daß Dresden eine Großstadt ist« bzw. »Dresden ist keine Großstadt«. Der Negation entspricht die *non-Funktion* mit  $\text{non}(W) = F$  und  $\text{non}(F) = W$ . Für eine zwei-stellige Wahrheitswertfunktion  $\mu$  können die Argumente vier Werte annehmen, so daß  $\mu$  durch die vier Wahrheitswerte für  $\mu(W, W), \mu(W, F), \mu(F, W), \mu(F, F)$  bestimmt ist. Da jeder dieser Werte unabhängig von den anderen die zwei Werte  $W$  oder  $F$  annehmen kann, gibt es  $2^4 = 16$  zweistellige Wahrheitswertfunktionen. Die vier Wahrheitswerte  $\mu(W, W), \mu(W, F), \mu(F, W), \mu(F, F)$ , die jede solche Wahrheitsfunktion  $\mu$  festlegen, werden das *kanon. Quadrupel* dieser Funktion gen. Jedes  $\mu$  entspricht einer Aussagenverknüpfung: die wichtigsten  $\mu$  werden im Aussagen- bzw. Prädikatenkalkül durch *Junktoren* oder *Funktoren* symbolisch dargestellt. Der Junktor für die Negation bzw. die non-Funktion ist  $\neg$ . Bei der *Konjunktion* werden in  $H(A_1, A_2)$  die Aussagen  $A_1$  und  $A_2$  durch »und« verknüpft; ihr entspricht die *et-Funktion* mit dem Junktor  $\wedge$ . Ihr kanon. Quadrupel ist  $(W, F, F, F)$ , wie man erkennt, wenn z. B. als wahre Aussage  $A_1$  »4 ist durch 2 teilbar«, symbolisch »2|4«, und für die wahre Aussage  $A_2$  »6 ist durch 2 teilbar«, symbolisch »2|6«, wählt, weil von den folgenden 4 Konjunktionen nur

die erste wahr ist: 1) »2|4 und 2|6«, 2) »2|4 und 2|6«, 3) »2|4 und 2|6«, 4) »2|4 und 2|6«. In der *Alternative* werden in  $H(A_1, A_2)$  die Aussagen  $A_1$  und  $A_2$  durch »oder« im nicht ausschließenden Sinne verknüpft; ihr entspricht die *vel-Funktion* mit dem Junktoren  $\vee$ . Ihr kanon. Quadrupel ist  $(W, W, W, F)$ , wie man beim gleichen Beispiel am Wahrheitswert der folgenden vier Alternativen erkennt:

1) »2|4 oder 2|6«, 2) »2|4 oder 2|6«, 3) »2|4 oder 2|6«, 4) »2|4 oder 2|6«, von denen nur die letzte falsch ist. Bei der *Implikation* bedeutet  $H(A_1, A_2)$  »wenn  $A_1$ , so  $A_2$ « oder »aus  $A_1$  folgt  $A_2$ «. Ihr entspricht die *seq-Funktion* mit dem Junktoren  $\rightarrow$  und dem kanon. Quadrupel  $(W, F, W, W)$ ; wie man aus folgenden Beispielen erkennt: 1) »wenn es regnet, wird der Boden naß«, 2) »wenn es regnet, wird der Boden nicht naß«, 3) »wenn es bei wolkenlosem Himmel regnet, wird der Boden naß«, 4) »wenn es auf dem Mond Lebewesen gibt, ist 4 eine Primzahl«. Bei der *Äquivalenz* bedeutet  $H(A_1, A_2)$  »genau dann  $A_2$ , wenn  $A_1$ «; ihr entspricht die *äq-Funktion* mit dem Junktoren  $\leftrightarrow$  und dem kanon. Quadrupel  $(W, F, F, W)$ ; zu dem sich mit den gleichen Beispielen wie für

das kanon. Quadrupel der Negation der Konjunktion ist.

Jede Wahrheitswertfunktion kann durch eine Tabelle beschrieben werden, die man ihre *Wahrheitstafel* bzw. *log. Matrix* nennt. Für  $n \geq 3$  läßt sich jede  $n$ -stellige Aussagenverknüpfung mittels ein- und zweistelliger Aussagenverknüpfungen darstellen. Für zweistellige Funktionen hat die log. Matrix zwei Zeilen und zwei Spalten, und ihre 4 Werte bilden das kanon. Quadrupel. Um einen Überblick über die wichtigsten Aussagenverknüpfungen, ihre Wahrheitswertfunktionen und ihre Junktoren zu haben, sind die kanon. Quadrupel in der Tabelle enthalten.

III. Ein Problem der A. ist die Frage nach Aussagenverknüpfungen, die mit Hilfe anderer Aussagenverknüpfungen definiert werden können; z. B. ist » $p$  oder  $q$ « gleichwertig mit »nicht- $p$  und nicht- $q$ «, d. h., die Alternative ist mittels Konjunktion und Negation definierbar. Man kann zeigen, daß alle Aussagenverknüpfungen mittels zwei oder gar nur einer der oben angeführten Verknüpfungen definiert werden können: (1) mittels *Negation und Konjunk-*

Tabelle der wichtigsten ein- und zweistelligen Aussagenverknüpfungen  $H(A_1, A_2)$ , der entsprechenden Wahrheitswertfunktionen  $\mu$  und der gebräuchlichsten Funktoren

$H(A_1, A_2)$	$\mu$	Funktoren	$\mu(W)$ $\mu(F)$	$\mu(W, W)$ $\mu(W, F)$ $\mu(F, W)$ $\mu(F, F)$
Negation	non	$\neg$	$F$ $W$	
Konjunktion	et	$\wedge$		$W$ $F$ $F$ $F$
Alternative	vel	$\vee$		$W$ $W$ $W$ $F$
Implikation	seq	$\rightarrow$		$W$ $F$ $W$ $W$
Äquivalenz	äq	$\leftrightarrow$		$W$ $F$ $F$ $W$
Antivalenz	aut			$F$ $W$ $W$ $F$
Antialternative	Nicodsche Funktion			$F$ $F$ $F$ $W$
Antikonjunktion	Sheffersche Funktion			$F$ $W$ $W$ $W$

Konjunktion und Alternative folgende Aussageverknüpfungen ergeben.

- 1)  $(W, W) \rightarrow W$  »2|4 genau dann, wenn 2|6«,
- 2)  $(W, F) \rightarrow F$  »2|4 genau dann, wenn 2|6«,
- 3)  $(F, W) \rightarrow F$  »2|4 genau dann, wenn 2|6«,
- 4)  $(F, F) \rightarrow W$  »2|4 genau dann, wenn 2|6«.

Bei der *Antivalenz* bedeutet  $H(A_1, A_2)$  »entweder  $A_1$  oder  $A_2$ «. Ihr entspricht die *aut-Funktion* mit dem kanon. Quadrupel  $(F, W, W, F)$ , das zugleich das Quadrupel der Negation der Äquivalenz ist.

Entsprechendes gilt für die *Antialternative* in bezug auf die Alternative, wie sich aus ihrem kanon. Quadrupel  $(F, F, F, W)$  ergibt. Ihr entspricht die *Nicodsche Funktion*.  $H(A_1, A_2)$  kann dabei durch »weder  $A_1$  noch  $A_2$ « angegeben werden. Für die *Antikonjunktion* bedeutet  $H(A_1, A_2)$  »nicht sowohl  $A_1$  als auch  $A_2$ «; ihr entspricht die *Sheffersche Funktion* mit dem kanon. Quadrupel  $(F, W, W, W)$ , das

(2) mittels *Negation und Alternative*, (3) mittels *Negation und Implikation*, (4) mittels der *Antialternative* und (5) mittels der *Antikonjunktion*. Ein wichtiges Problem der A. ist die Kennzeichnung aller der Aussagenverknüpfungen, die unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Bestandteile stets wahr sind. Sie werden *Tautologien* bzw. *aussagenlog. Identitäten* bzw. *allgemeingültige Ausdrücke* gen. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die ihnen entsprechenden Wahrheitsfunktionen nur den Funktionswert  $W$  haben. Mit der Charakterisierung und Bestimmung der Tautologien, insbes. ihrer Herleitung aus gewissen Axiomen mittels geeigneter Ableitungsregeln beschäftigt sich der *Aussagenkalkül*. — Die Negationen der Tautologien sind die *Kontradiktionen*; das sind diejenigen Aussagenverknüpfungen, die unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Bestandteile immer falsch sind. Die ihnen entsprechenden Wahrheitswertfunktionen haben also nur den Funktionswert  $F$ . Diejenigen Aussagen, die

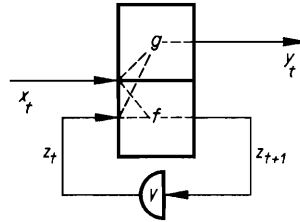
weder Tautologien noch Kontradiktionen sind, heißen *Neutralitäten*. Sie können abhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen vorkommenden Bestandteile sowohl wahr als auch falsch sein. S. a. Aussagenverknüpfung, Wahrheitswertfunktion.

- aussagenlogische Identität:** *mathematische Logik* Ausdruck der Aussagenlogik, der bei jeder Belegung der Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten wahr wird.
- aussagenlogische Konstante** ↗ Aussagenkalkül I.
- Aussagenverknüpfungen** ↗ Aussagenlogik I.
- Außenglieder** ↗ Proportion I.
- Außenwinkel** ↗ Dreieck I., ↗ *n*-Eck II.
- äußere Funktion** ↗ mittelbare Funktion I.
- äußerer Automorphismus** ↗ Gruppe III.
- äußerer Punkt** ↗ Menge IV.
- äußeres Produkt** svw. Vektorprodukt.
- äußere Tangente** ↗ Kreistangente III.
- äußere Teilung** ↗ Teilverhältnis I.
- Austauschsatz von Steinitz** ↗ Vektorraum VII.
- Austauschschritt** ↗ Simplexalgorithmus II.
- Auswahlaxiom** ↗ Mengenlehre II.
- Auswahlfunktion** ↗ Mengenlehre II.
- Auswahlmenge** ↗ Mengenlehre II.
- Auszahlungsfunktion** ↗ Spieltheorie I.
- Auszahlungsmatrix** ↗ Spieltheorie II.
- aut-Funktion** ↗ Aussagenlogik II.

**Automat:** im techn. Sinne eine Maschine, die ihr Verhalten ohne unmittelbares Eingreifen des Menschen steuert. Sie enthält eine Eingabe- und eine Ausgabevorrichtung, über die sie Signale aufnimmt bzw. abgibt. Diese Signale machen die Kommunikation zwischen der Umwelt und dem Innern des A.en möglich. Im Laufe der Zeit hat sich der Begriff des *abstrakten A.en* herausgebildet, der von jeder techn. Realisierung abstrahiert und den A. als digital arbeitendes System auffaßt, das Informationen über die Eingabevorrichtung aufnimmt, speichert, verarbeitet und über die Ausgabevorrichtung wieder Information an die Umwelt abgibt. Idealisiert wird der A. als *abstrakte Struktur* im algebraischen Sinne aufgefaßt, die als *Modell* eines realen Systems gilt, wenn sich aus diesem durch Abstraktion eine *abstrakte Struktur* gewinnen läßt und wenn zwischen beiden Strukturen eine Analogierelation, ein Homomorphismus besteht. Diesem Vorgehen kommt große praktische Bedeutung zu, da nach der Analogierelation Rückschlüsse vom Modell auf Vorgänge in realen Systemen gezogen werden können und z. B. auch die Leistungsfähigkeit konkreter A.en untersucht werden kann. S. a. Turing-Maschine; digitale Rechenanlage.

**Automat, determinierter, abstrakter:** I. Quintupel  $A = (X, Y, Z, f, g)$ , in dem  $X$  die Menge aller *Eingabesignale*  $x$ ,  $Y$  die Menge aller *Ausgabesignale*  $y$ ,  $Z$  die Menge aller *inneren Zustände*  $z$  von  $A$  bedeuten. Die *Überföhrungsfunktion*  $f$  ist eine eindeutige Abbildung von  $Z \times X$  in  $Z$ , die *Ergebnisfunktion*  $g$  eine eindeutige Abbildung von  $Z \times X$  in  $Y$ . Der A.  $A$  arbeitet in einer diskreten Zeitskala mit abzählbar-unendlich vielen Takten  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Ein *Takt* ist dabei ein Zeitintervall, dem in der Reihenfolge seines Auftretens eine positive natürl. Zahl  $t$  zuge-

ordnet wird. Der erste Arbeitstakt erhält die Nummer  $t = 1$ . Der Takt  $t$  erhöht sich auf  $t + 1$  immer dann, wenn sich das Eingangssignal ändert. Die Arbeitsweise von  $A$  kann folgendermaßen charakterisiert werden: Ist  $z_t$  der Zustand von  $A$  im Takt  $t$  und ist  $x_t$  das in diesem Takt eingeegebene Signal, so gibt  $A$  im Takt  $t$  das Signal  $y_t = g(z_t, x_t)$  aus und nimmt im Takt  $t + 1$  den Zustand  $z_{t+1}$



Automat, determinierter, abstrakter. Abb. 1: Arbeitsweise eines determinierten Mealy-Automaten.  $V$  ist ein initiales Verzögerungsglied, das die Taktung der Schaltung ermöglicht. Es gibt  $z_t$  im Takt  $t$  aus und speichert  $z_{t+1}$  bis zum Takt  $z + 1$

=  $f(z_t, x_t)$  an (Abb. 1). Ein A. dieser Arbeitsweise wird *Mealy-A. gen.*  $A$  heißt *determiniert*, weil jeder Situation  $(z, x) \in Z \times X$  durch  $f$  genau ein Zustand und durch  $g$  genau ein Ausgabesignal zugeordnet wird. Er heißt *abstrakt*, weil von jeder techn. Realisierung abgesehen wird (↗ Steuerung). Sind  $X, Y, Z$  endl. Mengen, so heißt  $A$  *endl. A.*;  $A$  wird *initial gen.*, wenn ein bestimmter Zustand  $z_0 \in Z$  als Anfangszustand fest vorgeschrieben ist. *Beispiel 1:*  $A_1 = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, \{z_1, z_2\}, f_1, g_1)$ , wenn  $f_1$  und  $g_1$  durch die nachstehende Tabelle definiert werden.

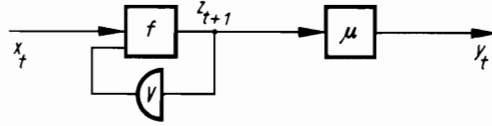
$z$	$x$	$f_1(z, x)$	$g_1(z, x)$
$z_1$	0	$z_1$	0
$z_1$	1	$z_2$	0
$z_2$	0	$z_1$	1
$z_2$	1	$z_2$	1

Hängt das Ausgangssignal nur von dem Zustand ab, in den der A. bei einer bestimmten Situation übergeht, so spricht man von einem *Moore-A.*, der danach bestimmt ist, wenn es eine auf  $Z$  definierte Funktion  $\mu$  mit Werten in  $Y$  derart gibt, daß für alle  $z \in Z, x \in X$  gilt:  $g(z, x) = \mu(f(z, x))$ . Man notiert deshalb Moore-A. durch  $A = (X, Y, Z, f, \mu)$  und nennt  $\mu$  die *Markierungsfunktion*. *Beispiel 2:*  $A_2 = (\{0, 1\}, \{0, 1\}, \{z_1, z_2\}, f_2, \mu)$ , wenn etwa die Überföhrungsfunktion  $f_2(z, x)$  und die Ergebnisfunktion  $\mu$  durch folgende Tabelle definiert werden.

$z$	$x$	$f_2(z, x)$	$\mu(f_2(z, x))$
$z_1$	0	$z_1$	0
$z_1$	1	$z_2$	1
$z_2$	0	$z_2$	1
$z_2$	1	$z_1$	0

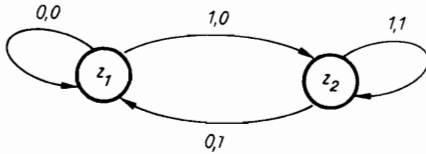
Die Arbeitsweise eines Moore-A. ist in Abb. 2 veranschaulicht.

II. Jedem abstrakten A. kann eindeutig ein gerichteter Graph  $G_A = (K, U, \alpha_A)$  zugeordnet werden, dessen Knotenpunkte  $K$  die Zustände von A, d. h. die Elemente der Menge  $Z$  sind, dessen gerichtete

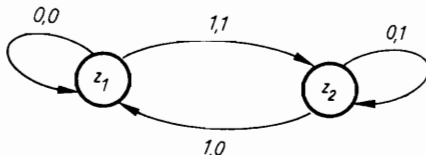


Automat, determinierter, abstrakter. Abb. 2: Arbeitsweise eines determinierten Moore-Automaten

Bögen  $U$  durch  $U = \{(z, x, y) \mid z \in Z \wedge x \in X \wedge y = g(z, x)\}$  bestimmt werden und in dem die Inzidenzfunktion  $\alpha_A$  für jeden Bogen  $(z, x, y) \in U$  gegeben ist durch  $\alpha_A(z, x, y) = (z, f(z, x))$ . In Abb. 3 und 4



Automat, determinierter, abstrakter. Abb. 3: Graph zum determinierten abstrakten Automaten  $A_1$  von Beispiel 1



Automat, determinierter, abstrakter. Abb. 4: Graph zum determinierten abstrakten Automaten  $A_2$  von Beispiel 2

sind die Graphen von  $A_1$  und  $A_2$  dargestellt. Dabei wird jeder Bogen nur durch die Angabe  $x, y$  gekennzeichnet, da aus der geometr. Darstellung von  $G_A$  hervorgeht, aus welchem Knotenpunkt der Bogen entspringt.

III. Die *abstrakte A.en*theorie ist ein Hilfsmittel zur mathemat. Beschreibung von Systemen und Prozessen in Natur und Gesellschaft.

Entscheidend ist, daß die auftretenden Probleme losgelöst von speziellen Realisierungen betrachtet werden. Dadurch erhält man aus realen Systemen oder Prozessen der Umwelt kybernet. Systeme, für die man repräsentativ die abstrakten Automaten einführt. Für die Anwendung sind neben determinierten A.en noch die nicht-determinierten und stochast. A.en von Bedeutung.

**Automorphismus:** Isomorphismus einer algebraischen Struktur auf sich, s. a. Homomorphismus; Gruppe III.

**Axiomatisierung** ↗ Regelung VIII.

**axiales Feld** ↗ skalares Feld I.

**axiales Trägheitsmoment** ↗ Trägheitsmoment.

**axialsymmetrisch** ↗ Symmetrie I.

**Axiom** ↗ Axiomatik.

**Axiomatik:** *mathematische Logik* Lehre von den axiomat. Theorien. Als *Axiom* wurde ursprünglich eine Aussage bezeichnet, die als so evident angesehen wurde, daß sie keines Beweises bedarf. Nach heutiger Auffassung versteht man darunter eine durch Verallgemeinerung oder Abstraktion gewonnene Aussage, die einem bestimmten Teilgebiet der Wissenschaft zugrunde gelegt wird und aus der man mittels der Regeln der Logik weitere Aussagen ableitet. Eine endl. oder zumindest eine wohlüberschaubare Menge von Axiomen, die die Grundtatsachen einer nicht unbedingt mathemat. Theorie ausdrücken, bilden ein *Axiomensystem*. Die aus ihm mittels Ableitungsregeln hergeleiteten weiteren Aussagen werden als die *zutreffenden* bzw. *wahren Aussagen* der betreffenden Theorie und diese selbst als *axiomat. Theorie* bezeichnet. Die Frage nach der Herkunft der Axiome ist keine Frage der Theorie, sondern der zugehörigen *Metatheorie*. Dabei ist es i. allg. möglich, eine Theorie durch verschiedene Axiomensysteme zu axiomatisieren. Die A. untersucht Fragen der Metatheorie, z. B. die Fragen der Widerspruchsfreiheit, der Vollständigkeit und der Unabhängigkeit. Eine axiomat. Theorie heißt formal *widerspruchsfrei*, falls es unmöglich ist, in ihr eine Aussage zugleich mit ihrer Negation herzuleiten. Andere Definitionen der Widerspruchsfreiheit beziehen sich auf die Möglichkeiten realer Interpretationen der Grundbegriffe der Theorie. Die *Vollständigkeit* einer Theorie besagt, daß aus ihren Axiomen jede formulierbare Aussage bzw. deren Negation ableitbar ist. Die *Unabhängigkeit* bedeutet, daß keines der Axiome aus den übrigen herleitbar ist.

Für mathemat. Theorien ist eine Präzisierung des Begriffes der axiomat. Theorie vollständig möglich und erfordert eine klare Abgrenzung der *Sprache der Theorie*, d. h. aller in dieser Theorie überhaupt formulierbaren Aussagen und eine Präzisierung der zulässigen *Ableitungsregeln*. I. allg. sind diese log. Natur, andere Gesetzmäßigkeiten ergeben sich aus allgemeinen Erkenntnissen über die objektive Realität. S. a. axiomatischer Aufbau der Geometrie; Mengenlehre II.

**axiomatische Definition** ↗ Definition.

**axiomatischer Aufbau der Geometrie:** I. Darstellung verschiedener Teilgebiete der Geometrie als axiomat. Theorie; z. B. der euklid. Geometrie (↗ Grundlagen der Geometrie). Die gesamte Geometrie hingegen kann nicht aus einem Axiomensystem abgeleitet werden. — Der historisch erste, uns erhaltene a. A. d. G. wurde um 300 v. u. Z. von dem in Alexandrien wirkenden griech. Mathematiker EUKLID in den »Elementen« gegeben, vor ihm soll aber schon HIPPOKRATES von Chios »Elemente« verfaßt haben. Dieser a. A. d. G. war für etwa 2 Jahrtausende das Beispiel für eine axiomatisch begründete mathemat. Theorie. Die *Widerspruchsfreiheit* der aus diesem System entwickelten Geometrie hat

sich in der Weise gezeigt, daß in rund 2000 Jahren nie eine Aussage und zugleich ihre Negation aus dem Axiomensystem deduziert wurden. M. PASCH und D. HILBERT zeigten jedoch, daß zusätzlich Axiome über die Zwischen-Relation ( $\nearrow$  Pasch, Axiom von) und Stetigkeitsaxiome ( $\nearrow$  archimedisches Axiom) aufgenommen werden mußten, um bei den gestiegenen Anforderungen an Exaktheit Aussagen herleiten zu können, die EUKLID noch für selbstverständlich hielt. In der Fassung von HILBERT ist dieses Axiomensystem in dem Sinne *vollständig*, daß es im wesentlichen nur von einem Bereich von Dingen erfüllt wird. Die *Unabhängigkeit* des Axiomensystems ist schon frühzeitig bezweifelt worden, wie die zahlreichen Versuche zeigen, das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen herzuleiten. Erst die Arbeiten von GAUSS, BÓLYAI und LOBATSCHESKI zeigten die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms.

II. EUKLID unterschied zwischen *Definitionen*, *Axiomen* als allgemeinen Vorstellungen, d. h. *inhaltlich evidenten Aussagen* und *Postulaten* als *echten geometr. Forderungen*. M. PASCH vermied nicht nur Angaben von Eigenschaften der Zwischen-Relation, er wies auch darauf hin, daß die in die Axiome notwendigerweise eingehenden *Grundbegriffe* nicht definiert werden können, wie es EUKLID getan hatte, da eine Rückführung auf allgemeinere Begriffe nicht erfolgen kann, weil diese fehlen, daß vielmehr diese Grundbegriffe nur durch die ihnen in den Axiomen zugeschriebenen Eigenschaften bzw. durch Hinweis auf den realen Hintergrund, dem sie entstammen, gegeben werden können. Sie werden der Umgangssprache entnommen, und erst auf den ihnen in den Axiomen zugeschriebenen Eigenschaften baut die Geometrie auf.

III. Zu einer strengen und in sich abgeschlossenen Axiomatisierung gelangte auf dieser Basis D. HILBERT im Jahre 1899 und begründete damit die moderne Axiomatik. — Das *Hilbertsche Axiomensystem* der euklid. Geometrie verwendet die undefinierten Grundbegriffe *Punkt*, *Gerade* und *Ebene*, sowie die Relationen der *Inzidenz* zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, des *Zwischenliegens* für Punkte auf Geraden und der *Kongruenz* von Strecken, d. h. von Paaren von Punkten. Die Axiomengruppen sind III.1. die *Inzidenzaxiome*, III.2. die *Anordnungsaxiome*, die Eigenschaften der Zwischen-Relation angeben, III.3. die *Kongruenzaxiome*, III.4. das *Parallelenaxiom* und III.5. die *Stetigkeitsaxiome*, und zwar das  $\nearrow$  archimedische Axiom und das  $\nearrow$  Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom.

IV. Eine teilweise anschaulich noch näherliegende Axiomatisierung der euklid. Geometrie erhält man, wenn man statt des Kongruenzbegriffes den Begriff der *Bewegung* als Grundbegriff in das Axiomensystem einführt und die Kongruenzaxiome durch Bewegungsaxiome ersetzt. Beide Axiomatisierungen sind gleichwertig; ausgehend von der *Kongruenz* als Grundbegriff kann man die Bewegungen als eindeutige Abbildungen definieren, die sowohl die Menge aller Punkte als auch die Mengen aller Ge-

raden und aller Ebenen jeweils auf sich abbilden und zudem jede Strecke in eine zu ihr kongruente Strecke überführen; ausgehend von der *Bewegung* als Grundbegriff aber lassen sich alle Figuren als kongruent definieren, die durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können. In jedem Falle haben die definierten Begriffe alle die Eigenschaften, die im anderen Falle als Axiome formuliert werden.

V. Eine dritte wichtige Art der Axiomatisierung der euklidischen Geometrie benutzt den Begriff der  $\nearrow$  *Spiegelung* an Ebenen, Geraden und Punkten. Sie ist besonders anschaulich für eine Axiomatisierung der ebenen Geometrie. Neben den Spiegelungsaxiomen können dabei auch Gruppen von Inzidenzaxiomen oder von Orthogonalitätsaxiomen auftreten; es ist aber auch möglich, nur von der Spiegelung auszugehen, so daß die Axiome nur Spiegelungseigenschaften formulieren. Die damit charakterisierte Geometrie ist so allgemein, daß sie sowohl die hyperbol. als auch die ellipt. Geometrie umfaßt; d. h., zum Aufbau der euklid. Geometrie braucht man dann zu ihrer Charakterisierung noch weitere spezielle Axiome, die z. B. die Existenz eines *Rechts* fordern, d. h. von vier paarweise verschiedenen Geraden  $a, b, c, d$ , von denen jede auf der vorangehenden senkrecht steht, und Axiome, die fordern, daß je zwei Geraden stets einen Punkt oder ein Lot gemeinsam haben.

**axiomatische Theorie**  $\nearrow$  Axiomatik.

**Axiom der Symmetrie**  $\nearrow$  Raum, metrischer, I.

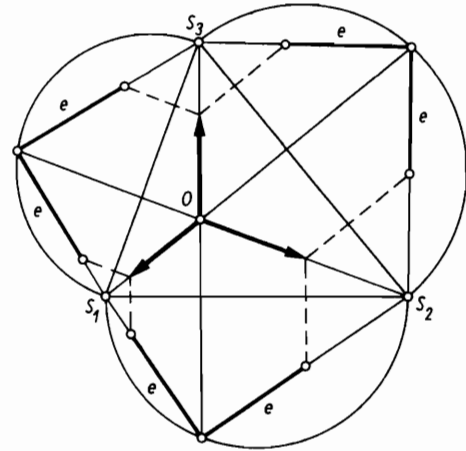
**Axiome des Zirkels** swv. Kreis-Axiome.

**Axiomensystem**  $\nearrow$  Axiomatik.

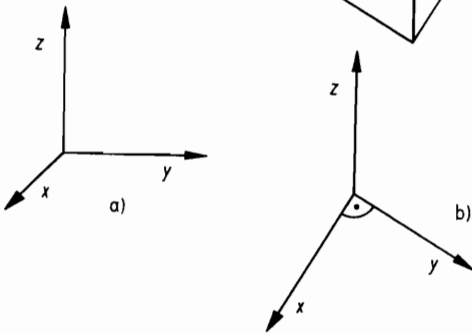
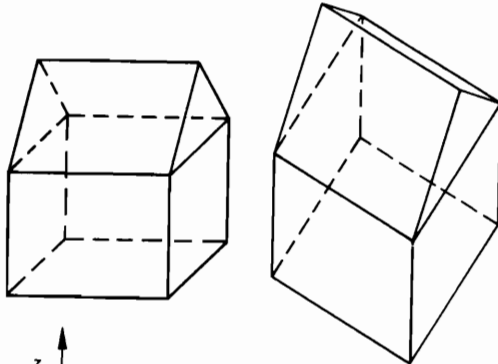
**Axonometrie**: Verfahren, um auf der Grundlage der Parallelprojektion eines räuml. Dreibeins, das als *Achsenkreuz* gilt, Bilder von Körpern zu gewinnen. Nach dem *Satz von Pohlke* können drei beliebige von einem Punkt unter beliebigen Winkeln ausgehende Strecken einer Ebene stets als Bild von drei aufeinander senkrecht stehenden gleichlangen Strecken im Raum aufgefaßt werden, falls ihre Endpunkte nicht alle auf einer Geraden durch den Ausgangspunkt liegen. Werden diese drei Strecken im Raum als Achsen  $X, Y, Z$  eines kartes. Koordinatensystems aufgefaßt, so ist jeder Punkt  $P$  des Körpers durch seine Koordinaten und sein Bild  $P'$  durch Parallelprojektion ( $\nearrow$  Projektion) bestimmt. Um möglichst anschaul. Bilder zu erhalten, haben sich für die Lage der Bilder  $X', Y', Z'$  folgende Spezialfälle bewährt: 1. In der *Kavalierperspektive* (Abb. 1a) stehen  $Y'$  und  $Z'$  senkrecht zueinander und liegen parallel zur Bildebene  $\Pi$ , die  $X'$ -Achse bildet mit der  $Y'$ -Achse einen *Verzerrungswinkel* von  $\alpha = 135^\circ$ , und die Tiefenstrecken auf ihr haben ein *Verkürzungsverhältnis* von  $q = 1/2$ . Die Bezeichnung dieser A. stammt wahrscheinlich aus der Praxis des Festungsbaus im 18. Jh. — 2. In der *Militärperspektive* (Abb. 1b) ist das Bild der Grundfläche des Körpers kongruent zum Original, da  $X'$ - und  $Y'$ -Achse senkrecht aufeinanderstehen. Die  $Z'$ -Achse und damit die Höhen im Körper verlaufen vertikal. Alle Kanten, die parallel zu einer der Achsen liegen, werden in wahrer Länge gezeichnet.

3. Um die bei krummflächig begrenzten Körpern in *Kavalierperspektive* auftretende Verzerrung zu vermeiden, verwendet man oft einen Verzerrungswinkel  $\alpha = 90^\circ$  (Abb. 2).

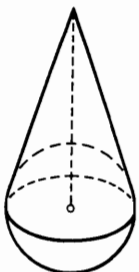
Am wenigstens verzerrt wirken die axonometr. Bilder bei senkrechter Parallelprojektion. Um das Bild eines *Achsenkreuzes* in senkrechter Parallelprojektion zu konstruieren, zeichnet man ein *Spurdreieck* (Abb. 3). In den Punkten  $S_1, S_2$  und  $S_3$  durchstoßen die Achsen die Projektionsebene  $\Pi$ . Durch Umlappen der Ebenen, in denen jeweils zwei Achsen liegen, um ihre Spuren  $S_1S_2, S_2S_3$  und  $S_1S_3$  kann man die Achsenabschnitte in wahrer Länge darstellen und die Einheiten festlegen. Die Bilder der Einheitsstrecken erhält man durch Zurückklappen. Ein zweites Verfahren zur Konstruktion des Bildes eines Achsenkreuzes in senkrechter Parallelprojektion liefert die Kugeldarstellung.



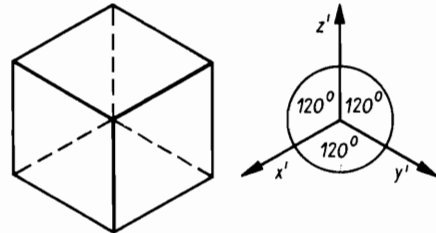
Axonometrie. Abb. 3: Spurdreieck



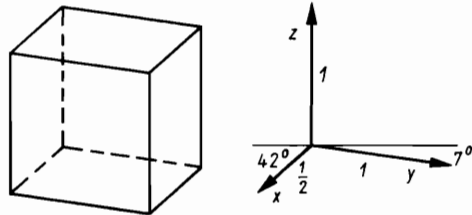
Axonometrie. Abb. 1: Achsenkreuz und Modell eines Hauses a) in Kavalierperspektive, b) in Militärspektive



Axonometrie. Abb. 2: Gerader Kreiskegel in schräger Parallelprojektion



Axonometrie. Abb. 4: Senkrechte Isometrie



Axonometrie. Abb. 5: Ingenieurperspektive

In der Praxis haben sich folgende Spezialfälle der senkrechten Parallelprojektion als axonometr. Verfahren bewährt: 1. *Isometrie*: Alle drei Verkürzungsverhältnisse sind gleich (Abb. 4). 2. *Ingenieurperspektive*, ein Verfahren der *Dimetrie*: Zwei Verkürzungsverhältnisse sind gleich (Abb. 5). Sind die drei Verkürzungsverhältnisse verschieden voneinander, so spricht man von *Trimetrie*. Ein Beispiel für unterschiedl. axonometr. Verfahren liefert die Darstellung der Schraubenlinie.

**Azimut** [arab., die Wege]  $m$  oder  $n$ : in der *Geometrie* der Winkel zwischen der positiven Abszissenachse und dem Radiusvektor bei ebenen Polarkoordinaten; in der *Geodäsie* im Unterschied dazu der Winkel von der geograph. Nordrichtung im Uhrzeigersinn bis zur Streckenrichtung.



## B

**babylonisches Zahlensystem** ↗ Zahlensystem III.

**Bahn** ↗ Durchlaufungen von Graphen II.

**Balkendiagramm** ↗ Netzplantechnik V.

**Banach**, Stefan, geb. 30. 3. 1892 Kraków, gest. 31. 8. 1945 Lwów. — B. studierte in Lwów und Kraków, promovierte 1920 und wurde bereits 1922 Professor in Lwów. Nach dem faschist. Überfall auf Polen wurde B. gezwungen, als Tierpfleger zu arbeiten. — Er lieferte fundamentale Arbeiten zur *Funktionalanalysis*, zur Theorie der reellen Funktionen, zur Maßtheorie und zur Theorie der reellen Reihen. **Banachiewicz**, Tadeusz, geb. 13. 2. 1882 Warschau, gest. 17. 9. 1954 Kraków. — Als Astronom und seit 1919 Direktor des Observatoriums Kraków befaßte sich B. vorwiegend mit Kometentheorie, Problemen der Bahnbestimmung und mit der Geodäsie. Er fand eine neue Methode zur Auflösung linearer Gleichungen.

**Banachraum**: ein vollständiger normierter linearer Raum (↗ Raum, normierter linearer). Die Banachräume sind eine wichtige Klasse abstrakter Räume (↗ Funktionalanalysis I.), z. B. ist jeder Hilbertraum ein B., aber nicht umgekehrt.

**Barriere-Funktion, Methode der**: Zurückführen einer konvexen Optimierungsaufgabe mit Zielfunktion  $F(x)$  und zulässigem Bereich  $B$  auf freie Optimierung einer Funktion  $B_r(x)$ .  $B_r(x)$  entsteht aus  $F(x)$  durch Addition einer geeigneten Funktion  $b_r(x)$ , die bei Annäherung an den Rand von  $B$  gegen  $\infty$  geht und ansonsten in  $B$  für kleine  $r$  sehr kleine Werte annimmt. Die B.-F.  $b_r(x)$  bildet eine Barriere gegen das Verlassen von  $B$  bei der Minimumsuche. **Barwert** ↗ Rentenrechnung II.

**Bashforth**, Francis, geb. 8. 1. 1819 Thurnscoe (Yorkshire), gest. 12. 1. 1912 London. — B. wirkte 1844 bis 1858 in Cambridge und 1864/74 als Professor der angewandten Mathematik an der Artillerieschule Woolwich. Er forschte zu Problemen der Ballistik und erfand einen Chronographen für Geschütze.

**Basis**: Grundgröße, Grundlinie, Grundfläche, Grundzahl. ↗ Algebra III., ↗ Dreieck III., ↗ dyadisches Zahlensystem I., ↗ Exponentialfunktion I., ↗ Koordinatensystem II., ↗ lineare Abbildung IV., ↗ Logarithmus I., ↗ Potenz I., ↗ Vektorraum V., VII., ↗ Zahlensystem V.

**Basislösung** ↗ Simplexalgorithmus I., II.

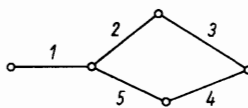
**Basisvektor** ↗ Koordinatensystem II., III., ↗ Koordinatentransformation II.

**Basiswechsel** ↗ Simplexalgorithmus II.

**Basiswinkel** ↗ Dreieck III., ↗ sphärisches Dreieck.

**Baum**: ein zusammenhängender kreisfreier Graph, der mindestens zwei Knotenpunkte enthält. Jeder B. enthält mindestens zwei hängende Knotenpunkte (↗ Graph III.). Ein beliebiger kreisfreier Graph heißt *Wald*. Die Komponenten (↗ Durchlaufungen von Graphen I.) jedes Waldes sind Bäume und isolierte Knotenpunkte. Durch vollständige Induktion kann gezeigt werden, daß jeder B. mit  $n$  Knotenpunkten genau  $n - 1$  Kanten enthält. Jeder zu-

sammenhängende endliche Graph  $G$  enthält ein *Gerüst*  $G$ , d. h. einen B., der alle Knotenpunkte von  $G$  enthält. Der Graph  $G$  wird, um dies zu zeigen, in folgenden Schritten in einen kreisfreien zusammenhängenden Graphen  $G$  übergeführt: Enthält  $G$  einen Kreis, so löscht man in  $G$  eine Kante dieses Kreises. Der so entstandene Graph  $G_1$  ist wieder zusammenhängend und kann, falls er noch einen Kreis enthält, wieder durch Löschen einer Kante dieses Kreises in einen Graphen  $G_2$  übergeführt werden, der wieder zusammenhängend ist. Da der gegebene Graph  $G$  als endlich angenommen war, erhält man nach endlich vielen dieser Schritte das Gerüst  $G$ . Zusammenhängende Graphen, die Kreise enthalten, haben mehrere Gerüste; z. B. bilden die Kanten 1, 2, 3, 4 und die Kanten 1, 2, 5, 4 verschiedene Gerüste des Graphen der Abb. aus.



Baum: Graph, in dem die Kanten 1, 2, 3, 4 und die Kanten 1, 2, 5, 4 verschiedene Gerüste bilden

E. CAYLEY konnte für vollständige Graphen zeigen: **Satz von Cayley**: Jeder vollständige Graph mit  $n$  Knotenpunkten hat genau  $n^{n-2}$  Gerüste. S. a. Extremalproblem.

**Bayessche Formel**: eine Formel, die eng mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit zusammenhängt. Sind dieselben Voraussetzungen über  $A_1, \dots, A_n$  und  $B$  wie beim Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit erfüllt, so kann auch nach der Wahrscheinlichkeit von  $A_i$  unter der Bedingung gefragt werden, daß  $B$  eingetreten ist. Es gilt (1). Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(A_i|B)$  heißen

$$(1) \quad P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B|A_j)}$$

auch *a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten*, während  $P(B|A_i)$  *a-priori-Wahrscheinlichkeiten* heißen. Die a-priori-Wahrscheinlichkeiten kann man aus den Versuchsbedingungen von vornherein, a-priori, berechnen, während man die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten erst nach Ausführung des Versuchs berechnen kann. Im Beispiel für den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (↗ Wahrscheinlichkeit, totale) wird die Wahrscheinlichkeit  $P(B|A_1)$  oder  $P(B|A_2)$  berechnet, eine weiße Kugel unter der Voraussetzung zu ziehen, daß sie aus einer der drei Urnen mit dem gleichen Inhalt  $A_1$  oder aus der vierten Urne mit dem Inhalt  $A_2$  stammt. Jetzt kann die Wahrscheinlichkeit  $P(A_1|B)$  dafür berechnet werden, daß aus einer der Urnen  $A_1$  eine weiße Kugel gezogen wurde. — Nach (1) erhält man (2).

$$(2) \quad P(A_1|B) = \frac{P(A_1) P(B|A_1)}{P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2)} = \frac{3/4 \cdot 1/4}{3/4 \cdot 1/4 + 1/4 \cdot 1/4} \approx 0,871.$$

**Beale, Verfahren von:** ein Verfahren der quadrat. Optimierung, bei dem in jedem Eckpunkt die Zielfunktion als Funktion der Nichtbasisvariablen angegeben wird und die Koeffizienten in den linearen Gliedern die Rolle der für den Optimalitätstest und die Pivotspaltensuche wichtigen Koeffizienten im Simplexverfahren spielen. Das Fortschreiten längs der Kante wird bis zur Nachbarecke ausgeführt, falls die Zielfunktion bis dorthin fällt, sonst nur bis zum Minimum der Zielfunktion längs der Kante. In diesem Fall wird eine Hilfsvariable eingeführt, um den formalen Fortgang des Simplexverfahrens zu ermöglichen.

**Bedarf** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**Bedienungstheorie**, auch *Warteschlangentheorie*: Teilgebiet der Operationsforschung, in dem die Bedienungs- und Wartevorgänge in einem *Bedienungssystem* untersucht werden, z. B. in Wartesystemen. Bedienungssysteme treten z. B. auf im Handel, im Gesundheitswesen, bei der Ent- und Beladung von Schiffen im Hafen, im Nachrichtenwesen, bei der Kontrolle und Wartung mehrerer Maschinen durch einen Arbeiter, aber auch bei bestimmten Meßvorgängen. Seine Grundelemente sind der Kundenstrom, die Warteschlange und die Bedienungsgeräte. Der *Kundenstrom*, auch *Eingangstrom* gen., ist der Strom der Forderungen, der durch die Verteilungsfunktion der *Zwischenankunftszeiten*, der Zeitspanne zwischen dem Eintreffen zweier Kunden, charakterisiert wird. Die *Wartezeit* wird vom Eintreffen des Kunden im System bis zum Beginn der Bedienung gerechnet, die *Bedienungszeit* vom Beginn bis zum Ende der eigentl. Bedienung. Die *Verweilzeit* ist die Summe beider Zeiten. Bei positiven Wartezeiten bildet sich eine *Warteschlange* aus. Die *Bedienungsgeräte* werden durch die Verteilungsfunktionen der Bedienungszeiten charakterisiert. Systeme ohne Warteplätze heißen *Verlustsysteme*, z. B. das der Telefonanschlüsse für ankommende Gespräche. Ihre wichtigste Kenngröße ist die *Verlustwahrscheinlichkeit*, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine eintreffende Forderung, z. B. ein Anruf, abgewiesen wird. In *Wartesystemen* interessieren Wartezeit, Verweilzeit und Warteschlangenlänge. Für beide Arten von Systemen ist die *Untütigkeitszeit* der Bedienungsgeräte wichtig.

In vielen Fällen sind die Zwischenankunftszeiten unabhängig gemäß der Verteilungsdichte  $1 - e^{-\lambda x}$  für  $x \geq 0$  verteilt, negative Zwischenankunftszeiten treten nicht auf. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau  $k$  Kunden im Zeitintervall der Länge  $t$  eintreffen, beträgt dann  $[(\lambda t)^k / k!] e^{-\lambda t}$ ; man spricht dann von einem *Poissonschen Strom* (↗ Poisson-Verteilung). Da die mittlere Anzahl der in einem Zeitintervall der Länge  $t$  eintreffenden Kunden  $\lambda t$  ist, kennzeichnet der konstante Parameter  $\lambda > 0$  die im Mittel je Zeiteinheit ankommende Anzahl von Kunden und heißt *Stromintensität*.

Ist nur ein Bedienungsgerät vorhanden und dessen Bedienungszeit nach  $1 - e^{-\nu x}$  für  $x \geq 0$  verteilt, so heißt  $\nu > 0$  die *Bedienungsintensität*, und für  $\lambda \geq \nu$  wächst die Warteschlange unbeschränkt an, für  $\lambda < \nu$  dagegen bildet sich ein *stationärer Zustand*

heraus. Der Quotient  $\rho = \lambda/\nu$  kennzeichnet die *Belastung* des Systems, die man *schwach* nennt für kleine  $\rho$ , *stark* für  $\rho$  fast bei 1, *kritisch* für  $\rho = 1$  und *überkritisch* für  $\rho > 1$ . Für  $\rho < 1$  gibt  $\rho^2/(1 - \rho)$  die mittlere Warteschlangenlänge und  $\rho/(\nu - \lambda)$  die mittlere Wartezeit an (↗ Erlangverteilung).

Kompliziertere Bedienungssysteme verfügen über *Reserveelemente*, die bei Ausfall eines Bedienungsgerätes sofort bis zur Reparatur des ausgefallenen Gerätes eingesetzt werden, um ein Versagen des Bedienungssystems zu vermeiden (↗ Zuverlässigkeitstheorie).

Die Abfertigung der Warteschlange wird durch die *Warteschlangendisziplin* geregelt. Im einfachsten Fall werden die Forderungen in der Reihenfolge ihres Eintreffens bedient. Manche Anwendungen erfordern jedoch *Abfertigung mit Prioritäten*, z. B. werden dringende Ferngespräche vor normalen vermittelt, auch wenn sie später angemeldet wurden.

**bedingte Beobachtungen** ↗ Ausgleichsrechnung I.  
**bedingte Konvergenz** ↗ absolute Konvergenz von Reihen II.2.

**bedingter Erwartungswert** ↗ bedingte Verteilung.  
**bedingte Verteilung**: Verteilung einer *Zufallsgröße*  $X$  unter der Bedingung, daß eine andere Zufallsgröße  $Y$  einen gewissen Wert  $y$  angenommen hat, exakt definiert durch den Grenzwert (1).

$$(1) \quad F(x | y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X < x, y \leq Y < y + h)}{P(y \leq Y < y + h)}$$

Die b. V.  $F(y | x)$  von  $Y$  unter der Bedingung, daß  $X$  den Wert  $x$  annimmt, wird analog definiert. Im diskreten Fall ergibt sich (2) für die bedingte

$$(2) \quad \begin{aligned} P(X = x^{(i)} | Y = y^{(k)}) &= p_{ik} / \sum_i p_{ik} \\ P(Y = y^{(k)} | X = x^{(i)}) &= p_{ik} / \sum_k p_{ik} \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion, in der  $p_{ik} = P(X = x^{(i)}, Y = y^{(k)})$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $(X, Y)$  ist (↗ Zufallsvektor). Im stetigen Fall erhält man die *bedingten Verteilungsdichten* gemäß (3), in der  $f(x, y)$  die Dichte von  $(X, Y)$  ist.

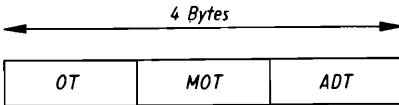
$$(3) \quad \begin{aligned} f(x | y) &= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx} ; \\ f(y | x) &= \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy} \end{aligned}$$

Im Nenner stehen danach jeweils die ↗ *Randverteilungen* der Komponenten, die die Bedingung definieren. Mittels der b. n. V. en lassen sich die *bedingten Erwartungswerte* gemäß (4) definieren.

$$(4) \quad \begin{aligned} E(X | Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x | y) , \\ E(Y | X) &= \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y | x) \end{aligned}$$

**bedingte Verteilungsdichten** ↗ bedingte Verteilung.

**Befehl:** kleinste Einheit von Maschinenprogrammen oder von Programmen, die in einer maschinenorientierten Programmiersprache formuliert sind (↗ Programmierung des Digitalrechners II.). Der Aufbau eines B.s kann sehr vielfältig sein und hängt stark von der techn. Konzeption der zugehörigen Rechenanlage ab. Bes. verbreitet ist eine *B.sstruktur*, wie sie die Abb. zeigt. Im *Operationsteil* (OT) können von der



Befehl: Beispiel für den Befehlsaufbau, OT Operationsteil, MOT Modifikationsteil, ADT Adressteil

Rechenanlage ausführbare Operationen angegeben werden. Dazu gehören neben den vier Grundrechenarten auch der Transport des Inhalts eines Hauptspeicherplatzes in ein spezielles Register des Rechenwerkes und viele andere. Durch den *Adresteil* (ADT) wird die *Adresse* eines an der Operationsabarbeitung beteiligten Speicherplatzes im Hauptspeicher fixiert. Der *Modifikationsteil* (MOT) gestattet darüber hinaus die Angabe zweier Register, auf die sich die Operation entweder direkt bezieht oder die zur weiteren Spezifizierung der Adresse dienen. Auf diese Weise lassen sich Operationen ausführen, bei denen der eine Operand in einem Register und der zweite im Hauptspeicher oder ebenfalls in einem Register enthalten ist.

Mit einem *Sprung-B.* unterbricht das Steuerwerk die natürl. Reihenfolge der B.sabarbeitung (↗ digitale Rechenanlage II.).

**Befehlsregister** ↗ digitale Rechenanlage II.3.

**Befehlszähler** ↗ digitale Rechenanlage II.3.

**befreundete Zahlen**, auch *verwandte Zahlen*: Bezeichnung für zwei natürl. Zahlen  $a, b$ , deren Teilersummen  $\sigma(a), \sigma(b)$  (↗ zahlentheoretische Funktionen) die Gleichung  $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$  erfüllen. Gleichbedeutend damit ist, daß die Summe aller

echten Teiler einer der  $b$ . Z. die andere der  $b$ . Z. liefert. Allgemeine Ergebnisse haben sich über  $b$ . Z. noch nicht gewinnen lassen. Man kennt außer den Paaren  $(\nu, \nu)$  mit einer vollkommenen Zahl  $\nu$  (↗ Primzahl) bisher 111 Paare  $b$ . Z., beginnend mit dem Paar (220, 284).

**begleitendes Dreibein:** ein orthonormiertes Tripel von Vektoren, das für jeden Punkt einer Kurve  $C$  vom *Tangentenvektor*  $t$ , dem *Hauptnormalenvektor*  $n$  und dem *Binormalenvektor*  $b$  in diesem Punkt gebildet wird (↗ Normalebene). Diese Vektoren sind dabei so orientiert, daß sie in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden; je zwei von ihnen spannen die *Schmiegebene*  $S$ , die *Normalebene*  $N$  und die *rektifizierende Ebene*  $R$  zwischen sich auf (Abb.). Ihre Änderungen beim Durchlaufen der Kurve bestimmen die Frenetschen Formeln.

**Begrenzung** ↗ Übertragungsglied II.

**Beilplanimeter** ↗ Planimeter IV.

**Belastung** ↗ Bedienungstheorie.

**Belegleser** ↗ digitale Rechenanlage I.1.

**Bellmansche Funktionalgleichung** [nach R. BELLMANN], *dynamische Funktionalgleichung*: Funktionalgleichung, in der die gesuchte Funktion  $f(p)$  als Bestandteil einer Maximum- oder Supremumbildung auftritt. Die allgemeine B. F. hat die Gestalt (1); der feste Bereich  $B$ , in dem  $q$  betrachtet wird, heißt *Entscheidungsbereich*, der Bereich, in dem  $p$  liegen kann, *Zustandsbereich* (↗ Optimierung, dynamische, IV.). Als Lösungsverfahren kommt häufig die sukzessive Approximation in Frage: Beginnend mit

$$(1) \quad f(p) = \sup_{q \in B} \{g(p, q) + v(p, q) \cdot f(T(p, q))\}$$

einer Näherung  $f_0(p)$ , oft  $f_0(p) \equiv 0$ , wird jeweils durch Einsetzen von  $f_n(p)$  in die rechte Seite der B. F. links  $f_{n+1}(p)$  erhalten. Unter bestimmten Voraussetzungen konvergiert die Folge  $f_i(p)$  für  $i \rightarrow \infty$  gegen eine Lösung  $f(p)$  der Funktionalgleichung.

**Bellmannsches Optimalitätsprinzip** [nach R. BELLMANN] ↗ Optimierung, dynamische, III.

**benachbart** ↗ Graph II.

**Berechenbarkeit** ↗ Churchsche Hypothese.

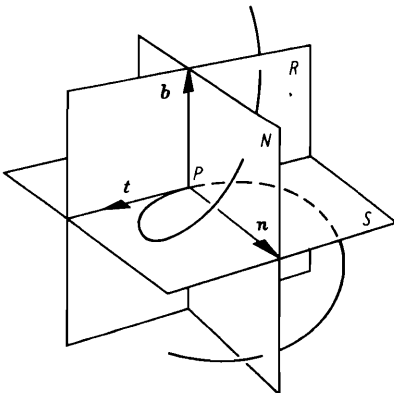
**Bereich:** zusammenhängende, aber abgeschlossene Punktmenge (↗ Gebiet).

**Bereich, zulässiger** ↗ Optimierung I.

**Bereichsschätzung** svw. Konfidenzschätzung.

**Bernays**, Isaak Paul, geb. 17. 10. 1888 London, gest. 18. 9. 1977 Zürich. Promotion 1912 als Schüler von LANDAU in Göttingen, dort 1917/33 tätig, erst als Assistent von HILBERT, ab 1922 als Professor. Er beschäftigte sich vor allem mit der mathemat. Logik, mit Axiomensystemen und Fragen ihrer Unabhängigkeit. 1945 ging er als Professor an die TH Zürich.

**Bernoulli**, Daniel, geb. 29. 1. 1700 Groningen als Sohn von Johann B., gest. 17. 3. 1782 Basel. — Er erwarb den Titel eines Doktors der Medizin und war, nach längerem Aufenthalt in Italien, 1725/33 Professor der Mathematik in Petersburg, anschließend lehrte er an der Universität Basel. Seine Aufmerksamkeit galt der Astronomie und der Physik; 1738 veröffentlichte er ein Buch über *Hydrodynamik*. Er entwickelte die *kinet. Gastheorie*, mit EULER und



Begleitendes Dreibein,  $t$  Tangente,  $n$  Hauptnormale,  $b$  Binormale,  $S$  Schmiegebene,  $N$  Normalebene,  $R$  rektifizierende Ebene

D'ALEMBERT die Theorie der schwingenden Saite. Als einer der ersten erzielte er bedeutende Resultate auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen.

**Bernoulli, Jakob**, geb. 27. 12. 1654 Basel als Sohn eines Kaufmanns und Bruder von Johann B., gest. 16. 8. 1705 Basel. — B. studierte Theologie und heimlich Mathematik. Nach 1676 unternahm er eine ausgedehnte Studienreise in verschiedene Länder. Danach las er in Basel Experimentalphysik, seit 1687 Mathematik. — Seine »*Ars conjectandi*« enthält die Grundlagen der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, die B.schen Zahlen und das Gesetz der großen Zahlen. Sein Briefwechsel mit LEIBNIZ enthält Grundgedanken der Fehlertheorie. B. war der erste Mathematiker, der den *Leibnizschen Calculus* begriff und ausbaute. Er arbeitete über Differentialgeometrie, über das isoperimetr. Problem und über Reihenlehre.

**Bernoulli, Johann**, geb. 27. 7. 1667 Basel als jüngster Bruder von Jakob B., gest. 1. 1. 1748 Basel. — Er promovierte in Medizin, die Arbeiten von LEIBNIZ bewogen ihn aber, Mathematiker zu werden. 1695 wurde er Professor in Groningen und 1705 der Nachfolger seines Bruders in Basel. Er unterhielt einen umfangreichen Briefwechsel mit LEIBNIZ. Er gab die erste systemat. Darlegung der Differential- und Integralrechnung, fand Methoden zur Integration von Differentialgleichungen und untersuchte Extremalprobleme der Geometrie, geodät. Linien sowie Aufgaben der Mechanik. Viele Resultate erzielte er im ständigen Gedankenaustausch mit LEIBNIZ und — oft in heftiger Rivalität — mit seinem Bruder.

**Bernoulli, Satz von** ↗ Gestze der großen Zahl II.1. **Bernoullische Differentialgleichung** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.7.

**Bernoullisches Schema** ↗ Binomialverteilung I.

**Bernoullische Ungleichung:**  $(1 + a)^n > 1 + na$ , die für alle reellen Zahlen  $a$  mit  $a \neq 0$  und  $a > -1$  und für jede natürl. Zahl  $n \geq 2$  gilt.

**Bernoullische Verteilung** svw. Binomialverteilung.

**Bernoullische Zahlen:** die rekursiv durch (1) definierten rationalen Zahlen  $B_n$ . Die ersten B. Z. sind  $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, B_5 = 0, B_6 = 1/42, B_7 = 0, B_8 = -1/30, B_9 = 0, B_{10} = 5/66$ . Für  $n \geq 1$  gilt stets  $B_{2n+1} = 0$ . Die B. Z. wurden durch Jakob BERNOULLI eingeführt als die eindeutig bestimmten und weder von  $k$  noch von  $n$  abhängigen Zahlen  $B_n$ , mit denen Gleichung (2) für  $k = 0, 1, 2, \dots$  und  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt. Diese Aussage ist äquivalent zu (1).

Entwickelt man die komplexe Funktion  $z/(e^z - 1)$

$$(1) \quad B_0 = 1; \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} B_\nu = 0 \text{ für } n \geq 2$$

$$(2) \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \mu^k = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^k \binom{k+1}{\nu} B_\nu n^{k+1-\nu}$$

$$(3) \quad \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{2n} \\ = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (2\pi)^{2n} \cdot B_{2n}}{2 \cdot (2n)!} \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

in  $0 < |z| < 2\pi$  in eine Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ , so hängen

die Koeffizienten  $a_\nu$  über die Gleichung  $a_\nu = B_\nu/\nu!$  mit den B. Z. zusammen. Die B. Z. finden bei zahlreichen Problemen der Analysis und Zahlentheorie Anwendung; z. B. gilt (3) für die *Riemannsche* ↗ *Zetafunktion*. Hiernach läßt sich die Summe der reziproken Werte jeder geraden Potenz aller natürl. Zahlen stets in einfacher Weise durch die B. Z. ausdrücken.

Nach dem *Staudt-Clausenschen Satz* aus der Zahlentheorie läßt sich jede B. Z.  $B_{2n}$  in der Form  $B_{2n} = m - \sum 1/(k+1)$  darstellen, wenn  $m$  eine ganze Zahl ist und die Summation über alle ganzen  $k > 0$  erstreckt wird, für die  $k$  ein Teiler von  $2n$  und  $k+1$  eine Primzahl ist.

**Bertrand, Joseph**, geb. 11. 3. 1822 und gest. 3. 4. 1900 Paris. — B. arbeitete hauptsächlich über Differentialgeometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Bertrandsches Postulat** ↗ Primzahl VI.11.

**Berührungsproblem des Apollonios:** Aufgabe, mit Zirkel und Lineal einen Kreis zu konstruieren, der drei in einer Ebene liegende Kreise berührt. Vieta (1600) und wahrscheinl. auch Apollonios (200 v. Z.) lösten das Problem, indem sie alle 10 Aufgaben betrachteten, die sich ergeben, wenn man auch Punkte und Geraden als Kreise mit dem Radius 0 bzw. mit unendlich großem Radius als vorgegebene Kreise zuläßt, und benutzten beim Lösen der schwierigeren dieser Aufgaben die Lösungen der einfacheren. Die Anzahl der Lösungen dieser 10 Aufgaben hängt von der speziellen Lage der gegebenen Stücke ab. Für den Fall, daß drei verschiedene Punkte gegeben sind, gibt es z. B. genau eine Lösung, wenn diese Punkte nicht auf einer Geraden liegen, andernfalls keine Lösung. Sind in einer Aufgabe nicht zwei Stücke identisch, und bedeuten die Symbole P, G und K Punkt, Gerade und Kreis, so gibt es maximal zwei Lösungen für die Fälle  $P_1, P_2, G; P_1, P_2, K; P, G_1, G_2$ ; maximal vier Lösungen für  $P, G, K; P, K_1, K_2; G_1, G_2, G_3$ ; maximal acht Lösungen für  $G_1, G_2, K; G, K_1, K_2; K_1, K_2, K_3$ . Lösungen des B. d. A. mit Hilfe der Ähnlichkeitsachsen und des Potenzmittelpunktes der gegebenen Kreise ohne Rückführung auf vereinfachte Aufgaben gaben zuerst L. GAULTIER (1813) und J. D. GERGONNE (1816). — Hat das B. d. A. für drei gegebene Kreise Lösungen, so findet man diese z. B. durch folgende Konstruktion: Man konstruiert den Potenzmittelpunkt und die vier Ähnlichkeitsachsen dieser Kreise und bestimmt die Pole der Ähnlichkeitsachsen in bezug auf die gegebenen Kreise. Nun legt man durch den Potenzmittelpunkt und je einen dieser Pole Geraden. Besitzt die Aufgabe acht Lösungen, so schneidet jede dieser Geraden den Kreis, der den Pol, durch den sie gelegt wurde, bestimmt, in zwei Punkten. Auf diese Weise sind jeder Ähnlichkeitsachse 6 Punkte zugeordnet. Je drei davon bestimmen einen der gesuchten Kreise. Hat die Aufgabe weniger als acht Lösungen, so merkt man das bei der Konstruktion daran, daß nicht alle der gen. Geraden zwei Schnittpunkte mit den entsprechenden Kreisen haben.

**Berührungspunkt** ↗ Menge IV., ↗ Kreistangente I., ↗ Kugel II.

**Berührungsradius** ↗ Kreistangente I., ↗ Kugel II.

**Berührungsehne** ↗ Kreistangente I.

**Beschaffungskosten** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**beschränkte Funktion:** I. Funktion  $f$ , deren Funktionswerte sämtl. zwischen zwei festen Zahlen  $m$  und  $M$  liegen, so daß für alle  $x$  des Definitionsbereichs von  $f$  gilt  $m \leq f(x) \leq M$ . Dies ist gleichbedeutend mit der Ungleichung  $|f(x)| \leq K$ , sofern man  $K = \max(|M|, |m|)$  setzt. Man nennt  $m$  eine *untere*,  $M$  eine *obere Schranke* bzw.  $K$  schlechthin eine *Schranke* von  $f$ . Damit sind auch  $m' < m$  bzw.  $M' > M$  je eine untere bzw. eine obere Schranke von  $f$ . Gilt die Ungleichung  $|f(x)| \leq K$  nur für alle  $x$  eines Intervalls  $I$ , so heißt  $f$  in  $I$  *beschränkt*: gilt nur  $m \leq f(x)$  für alle  $x$ , so heißt  $f$  *nach unten beschränkt*, gilt nur  $f(x) \leq M$ , *nach oben beschränkt*. Wird das Bild einer b. F. bzgl. eines Parallelkoordinatensystems dargestellt, so verläuft es vollständig zwischen zwei Parallelen zur Abszissenachse. Eine stetige Funktion  $f$  ist in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stets beschränkt.

**Beispiel 1:** Die Funktion  $f_1$  mit  $y = f_1(x) = x^3$  ist auf jedem abgeschlossenen Intervall beschränkt: bzgl. des Intervalls  $[-2, 2]$  z. B. ist jede Zahl  $K \geq 8$  Schranke der Funktion. Im gesamten Definitionsbereich ist  $f_1$  nicht beschränkt.

**Beispiel 2:** Die Funktion  $f_2$  mit  $y = f_2(x) = x^2$  ist im gesamten Definitionsbereich nur nach unten, nicht aber nach oben beschränkt. Jede nichtpositive Zahl ist untere Schranke der Funktion  $f_2$ .

**Beispiel 3:** Die Funktion  $f_3$  mit  $f_3(x) = \sin x$  ist in ihrem gesamten Definitionsbereich  $x \in \mathbb{R}$  beschränkt. Jede Zahl  $K \geq 1$  ist Schranke von  $f_3$ . II. Ist  $f$  eine im Intervall  $I$  nach oben b. F., so nennt man die kleinste ihrer oberen Schranken die *obere Grenze* oder auch das *Supremum* von  $f$ . Diese obere Grenze von  $f$  existiert stets, falls  $f$  nach oben beschränkt ist, und entsprechend existiert für jede in einem Intervall  $I$  nach unten b. F.  $f$  eine größte untere Schranke, die *untere Grenze* oder auch *Infimum* gen. wird. Die Funktion  $y = 1/x$  z. B. hat im Intervall  $[1, \infty[$  das Supremum 1 und das Infimum 0.

Auch reellwertige Funktionen mit mehreren unabhängigen reellwertigen Variablen (↗ Funktion V.) können beschränkt sein. Die Funktion  $y = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_3^3$  z. B. ist im Würfel  $-1 \leq x_i \leq 1$  für  $i = 1, 2, 3$  beschränkt, denn es gilt dort  $-2 \leq f(x_1, x_2, x_3) \leq 3$ .

**beschränkte Menge** ↗ Menge V.

**Beschränktheit** ↗ Punktmenge, ↗ Operator, linearer, IV., ↗ Zahlenfolge II.

**Beschreibungsfunktion** ↗ Regelung V.

**Beseitigung von**  $\wedge, \vee, \forall, \exists, \rightarrow, \neg$  ↗ Regellogik.

**Bessel**, Friedrich Wilhelm, geb. 22. 7. 1784 Minden, gest. 17. 3. 1846 Königsberg (Kaliningrad). — B. war erst Handelslehrling in Bremen, bis 1809 Gehilfe an der Sternwarte in Lilienthal und danach Professor der Astronomie in Königsberg und Direktor der dortigen Sternwarte. Als Mathematiker trat

B. bes. hervor durch Untersuchungen über Differentialgleichungen und *B.sche Funktionen*.

**Besselsche Differentialgleichung:** lineare gewöhnl. Differentialgleichung 2. Ordnung  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ , in der  $n$  ein beliebiger Parameter mit  $n \neq -1, -2, -3, \dots$  ist. Die Lösungen dieser B. D. heißen *Zylinderfunktionen*. Der Potenzreihenansatz (1) liefert eine Lösung (2) dieser B. D.

$$(1) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$$

$$(2) \quad y_n(x) = a_0 x^n + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k} k! (n+1) \dots (n+k)}$$

Diese Reihe ist für alle  $x$  konvergent. Setzt man  $a_0 = 1/[2^n \Gamma(n+1)]$ , so erhält man aus  $y_n(x)$  die *Besselsche Funktion* (3). Dabei bezeichnet  $\Gamma(x)$  die

$$(3) \quad J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Eulersche Gammafunktion. Ist  $n$  keine ganze Zahl, so bilden  $J_n(x)$  und  $J_{-n}(x)$  zwei linear unabhängige Lösungen der B. D., und es ist in diesem Fall  $y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x)$  die allgemeine Lösung der B. D. **Besselsche Funktion** ↗ Besselsche Differentialgleichung.

**Besselsche Ungleichung** ↗ Fouriersche Reihe II.

**beständig konvergent** ↗ Potenzreihe I.

**Bestellabstand, optimaler** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**Bestellkosten** svw. Beschaffungskosten, ↗ Lagerhaltungstheorie.

**bestimmt divergent** ↗ divergente Zahlenfolge I.

**bestimmtes Integral** ↗ Integral I., ↗ Integral, komplexes, II.

**Bestimmungsdreieck** ↗  $n$ -Eck III.

**Bestimmungsgleichung:** ältere Bezeichnung für eine Gleichung mit einer Variablen.

**Bestimmungslinie** ↗ geometrischer Ort.

**Betrag**  $|\mathbf{x}|$  eines Vektors  $\mathbf{x}$  eines euklid. Vektorraumes ist die Quadratwurzel aus dem Skalarprodukt von  $\mathbf{x}$  mit sich selbst:  $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ . Den B. eines Vektors nennt man auch seine *Norm* bzw. seine *Länge*; es gilt  $|\mathbf{x}| \geq 0$  für alle  $\mathbf{x}$ , und  $|\mathbf{x}| = 0$  genau dann, wenn  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ ;  $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| |\mathbf{x}|$  für alle  $\mathbf{x}$  und alle reellen  $\alpha$ ;  $|\mathbf{x}|$  ist dabei der gewöhnl. Betrag einer reellen Zahl. Ferner gilt die Dreiecksungleichung (↗ Vektorraum X.). Vektoren vom Betrage 1 heißen *Einheitsvektoren*.

**Betragsfläche** ↗ Funktion VI.

**Betragskennlinie** ↗ Frequenzgang III.

**Betriebssystem, Operatingsystem:** I. Zusammenfassung einer Vielzahl von Programmen zur Steuerung und Überwachung des Arbeitsablaufs bei digitalen Rechenanlagen. B.e dienen dem Ziel, die hohe Rechengeschwindigkeit derartiger Anlagen weitgehend optimal zu nutzen und den *manuellen Bedienungsaufwand zu minimieren*. Der Rechenablauf ist prinzipiell so organisiert, daß alle Applikationsprogramme unter der Regie des B. eingegeben, aufbereitet und ausgeführt werden. Bei modernen

Rechenanlagen sind die *B. plattenresident*, d. h., die einzelnen Programme sind bei kurzer Zugriffszeit in einem Plattenspeicher, der *Systemresidenz*, verfügbar. Ihr Aufbau hängt stark von der Größe und der Art des Einsatzes der Rechenanlage ab, z. B. unterscheiden sich in der Regel *B.* für die Realisierung von *Teilnehmerbetrieb* erheblich von denen zur Durchführung von *Jobstapelverarbeitung im Multiprogrammbetrieb*. Eine dritte Gruppe bilden die zur *Führung von Prozessen* geeigneten *B.* ( $\nearrow$  Programmierung des Prozeßrechners). Der *Teilnehmerbetrieb* ermöglicht die simultane Beanspruchung einer Rechenanlage durch mehrere Benutzer, die über eigene *Terminals* verfügen. Eine derartige Arbeitsweise setzt die Ausführung eines *Zeiteilverfahrens* voraus, auch *time-sharing* oder *Zeitmultiplexbetrieb* gen. ( $\nearrow$  Programmierung des Prozeßrechners II.). Der Multiprogrammbetrieb verwirklicht das Prinzip des *Multiprogramming*. Dabei befinden sich gleichzeitig mehrere Programme im Hauptspeicher, die zeitgeteilt nach festgelegten Prioritäten abgearbeitet werden. Techn. Voraussetzung für diese Betriebsart ist die Ausrüstung des Rechners mit einer *Vorrangsteuerung*, vermöge der *Programmunterbrechungen*, z. B. zur Aktivierung peripherer Geräte, ausgelöst und vom *B.* behandelt werden. Da die den unterschiedl. Programmen zugeordneten Ein- und Ausgabegeräte auf Grund der Funktionsweise der Kanäle gleichzeitig arbeiten können, ist trotz der seriellen Programmausführung die Möglichkeit einer effektiveren Nutzung der Rechenanlage gegeben. Ein bes. effektives Multiprogramming gelingt immer dann, wenn rechenintensive Programme mit ein- und ausgabeintensiven Programmen, die gegenüber den ersten den Vorrang haben, kombiniert werden.

II. Um einen überschlägl. Eindruck von Aufbau und Arbeitsweise eines *B.* zu geben, wird hier ein typ. Anwendungsbeispiel betrachtet, das sich auf Multiprogrammbetrieb bei *Jobstapelverarbeitung* bezieht; der automat. Übergang von der Ausführung eines Jobs zum nächsten muß dabei gewährleistet sein.

Die Aufgabe besteht in folgendem: Liegen die beiden bzgl. des *B.* selbständigen Programmteile  $M_{01}$  und  $M_{02}$ , die als *Moduln* bezeichnet werden, vor, so bilden  $M_{01}$ , das in einer maschinenorientierten Sprache, und  $M_{02}$ , das in einer problemorientierten Programmiersprache formuliert ist, gemeinsam mit einem weiteren Modul  $M_{03}$  das sogen. *Quellenprogramm*.  $M_{01}$  und  $M_{02}$  sowie die durch deren Übersetzung in die Maschinensprache ( $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners I.) entstehenden Moduln  $M_{01}$  und  $M_{02}$  sind der auf einem Plattenspeicher lokalisierten *Programmbibliothek* zu übergeben. Danach sollen die Moduln  $M_{01}$  und  $M_{02}$  sowie der Modul  $M_{03}$ , der bereits übersetzt in der Bibliothek enthalten ist, zu einem arbeitsfähigen Programm, dem *Objektprogramm*, verbunden werden. Dieses ist abschließend zum Zweck der Verarbeitung beigefügter Daten auszuführen. Im Hinblick auf die Einflußnahme des *B.* ist es zunächst verständlich, daß der der Aufgabenstellung ent-

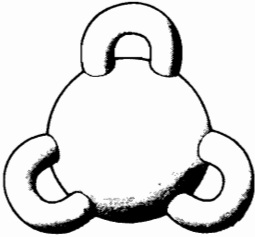
sprechende Job zu seiner Beschreibung über die zu verarbeitenden Daten und die Moduln  $M_{01}$  und  $M_{02}$  hinaus weitere Informationen braucht, um Arbeitsablauf und Aufgabenspezifika genau festlegen zu können. Angaben hierzu sind in zusätzl. *Jobsteueranweisungen* enthalten. Den Kern der hier diskutierten Typen von *B.* stellen die *Steuerprogramme* dar, von denen der Supervisor und die Jobsteuerung die bedeutendsten sind. Der *Supervisor* ist das zentrale Regieprogramm für die Ausführung eines Jobs. Er lädt alle anderen Teile des *B.* bei Bedarf in den Hauptspeicher und entscheidet in Fällen von Programmunterbrechungen, so daß die gesamte Ein- und Ausgabe sowie das Multiprogramming von ihm gesteuert werden. Die *Jobsteuerung* dient zur Entschlüsselung der Jobsteueranweisungen und zur Veranlassung entsprechender Maßnahmen, z. B. der Zuordnung phys. Ein- und Ausgabegeräte oder der Information des Supervisors. Während die Einspeicherung der Moduln  $M_{01}$  und  $M_{02}$  sowie der Objektmoduln  $M_{01}$  und  $M_{02}$  in die Programmbibliothek von gewissen Verwaltungsprogrammen zur Bibliotheksführung übernommen wird, muß der Supervisor zur Erzeugung der Objektmoduln geeignete *Übersetzer* aktivieren. Dabei wird  $M_{01}$  durch einen *Assembler* und  $M_{02}$  durch einen *Kompiler* bearbeitet ( $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners II.), die beide zu den *Arbeitsprogrammen* zählen. Der Aufbau des Objektprogramms obliegt wieder einem Verwaltungsprogramm, dem *Programmverbinder* oder *Composer*.

*B.*, die bei größeren Rechenanlagen wesentlich mehr als die eben genannten Komponenten enthalten und damit sehr effektive Methoden zur Entwicklung und Erprobung von Applikationsprogrammen bieten, werden als wichtigste Software von Anlagenherstellern geliefert.

**Betti**, Enrico, geb. 21. 10. 1823 bei Pistoia, gest. 11. 8. 1892 Pisa. — Nach seinem Studium wurde *B.* Assistent in Pisa, beteiligte sich 1848 aktiv am italien. Freiheitskampf und wurde 1849 Professor in Pistoia, dann in Florenz. Seit 1857 war *B.* an der Universität von Pisa tätig. — *B.* lieferte bedeutende Beiträge zur *Topologie* (*B.sche Zahlen*), zur Theorie der algebraischen und ellipt. Funktionen sowie zur mathemat. Physik.

**Bettische Zahlen**: *Topologie* drei einer Figur  $F$  zugeordnete Zahlen, die deren Zusammenhangsverhältnisse kennzeichnen. Die *nullte B. Z.* gibt die Anzahl der zusammenhängenden Teile an, aus denen sich  $F$  zusammensetzt. Die *erste B. Z.* gibt die Anzahl der Löcher an, die einen Durchgang durch die Figur bilden, z. B. das Loch im Torus oder die Löcher in einem Sieb. Die *zweite Bettische Zahl* gibt die Anzahl der Löcher an, die ganz vom Außenraum abgetrennt sind, z. B. das Innere einer Kugelschale oder die Löcher im Schweizer Käse. Nach der Homologietheorie sind die *B. Z.* homöomorpher Figuren gleich. Gelingt es zu zeigen, daß zwei Figuren nicht die gleichen *B. Z.* haben, so können sie nicht homöomorph sein. In dem wichtigen Spezialfall aller geschlossenen Flächen, d. h. aller Flächen, die keinen Rand haben, gelingt so die vollständige Klassifi-

kation. Es läßt sich zeigen, daß diese Flächen zur Oberfläche einer Kugel, an die eventuell mehrere Henkel angehängt sind, homöomorph sind (Abb.). Andererseits sind zwei derartige Oberflächen nur



Bettische Zahlen:  
Kugel mit drei Henkeln

dann homöomorph, wenn sie die gleiche Anzahl von Henkeln haben. Jede Fläche ist mithin zu genau einer Henkelkugel homöomorph.

**Bevölkerungsstatistik:** die auf Volkszählungen oder Schätzungen beruhende Erfassung der Bevölkerungsbewegung, ihrer Veränderungen z. B. durch Geburten und Sterbefälle oder durch Zu- und Abwanderungen. Die B. dient als Grundlage zur Berechnung der Lebenserwartung, des Lebensbaums und anderer *demograph. Größen*, die z. B. für die Versicherungsmathematik, die Arbeitskräfteplanung und für die Wohnraumplanung von großer Bedeutung sind.

**Bewegung** ↗ Abbildung, affine, V., ↗ axiomatischer Aufbau der Geometrie III., ↗ Erlanger Programm I.

**Beweistheorie:** von D. HILBERT geprägte Bezeichnung für eine Disziplin der mathemat. Logik, deren Betrachtungsobjekte formale Aussagen mathemat. Inhalts sind, und die sich mit kombinator. Begriffen, z. B. dem des *Beweises*, für solche Objekte auf der Basis finiter, das Unendliche vermeidender Überlegungen beschäftigt. Die B. wurde ursprünglich zu dem Zwecke geschaffen, die Widerspruchsfreiheit infinitist. Methoden der Mathematik mit finiten kombinator. Methoden, die inhaltlich sicherer erscheinen, zu begründen. Sie war von großem Einfluß auf die Theorie der *Berechenbarkeit*. Ihr ursprüngl. Programm ist im Laufe der Zeit modifiziert worden, da sich nach Erkenntnissen von K. GÖDEL der streng finite Standpunkt als zu eng erwiesen hat.

**Bezout, Étienne**, geb. 31. 3. 1730 Nemours, gest. 27. 9. 1783 auf seinem Gut in Gatinois. — B. war tätig als Examinator verschiedener Armee-Einheiten. Er arbeitete vorwiegend über Eliminationstheorie und über die Theorie der algebraischen Gleichungen sowie Determinantentheorie.

**Bezoutscher Satz** ↗ algebraische Geometrie III.

**Bhaskara I.**, ind. Mathematiker des 6. Jh. — Er untersuchte lineare Gleichungen und den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen. Er ist ein Wegbereiter bei der Einführung des dekad. Stellenwertsystems.

**Bhaskara II.**, geb. 1114 Bidur (Dekan), gest. 1185. — B. ist der bedeutendste ind. Mathematiker im 12. Jh. Er wirkte lange in der Mathematikerschule Ujjain. B. fand ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$x^2 - py^2 = 1$  und löste durch geschickte Ansätze allgemeinere Gleichungen 2. Grades. Sein stark beachtetes Buch »Der Kranz der Wissenschaft« enthielt arithmet., algebraische und geometr. Studien, aber auch Anwendungen aus der Astronomie.

**bianguläre Koordinaten** ↗ Koordinatensystem VII.

**Bias:** systematischer Fehler, ↗ Punktschätzung.

**bichromatischer Graph** ↗ Färbung von Graphen.

**bidualer Vektorraum** ↗ Linearform II.

**Bijektion:** Abbildung  $F$  einer Menge  $A$  auf eine Menge  $B$ , die sowohl *Injektion* als *Surjektion* ist; d. h.,  $F$  ist eine eindeutige Abbildung mit  $D(F) = A$  und  $W(F) = B$ . S. a. Funktion.

**bijektiv** ↗ Abbildung I., ↗ Bijektion, ↗ Gruppe III.

**Bild** ↗ Abbildung I., ↗ Funktion I., IV., ↗ Operator.

**Bildachse** ↗ Zweifapelprojektion I.

**Bildebene** ↗ Projektion.

**Bildpunkt** ↗ Abbildung, topologische.

**Bildraum** ↗ Abbildung, affine, I.

**Bildtafel** ↗ Projektion I.

**Bilinearform:** auf einem Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$  definierte eindeutige Abbildung  $\varphi$  von  $V \times V$  in  $K$ , die in jedem Argument linear ist. Sie ordnet jedem Paar  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  von Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  ein Element aus  $K$  so zu, daß für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$  und alle  $\lambda \in K$  gilt:

$$(1) \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2),$$

$$(2) \quad \varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}),$$

$$(3) \quad \varphi(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

*Beispiele. 1:* Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum,  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  eine feste Basis von  $V$  und sind  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)\mathbf{B}$  irgend zwei Vektoren aus  $V$ , so ist die Abbildung  $\varphi$

mit  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k = \mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{y}^T$  eine B. auf  $V$ ,

wobei  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  und  $a_{ik}$  beliebige reelle Zahlen sind. Jede B.  $\varphi$  auf  $V$  bestimmt bzgl. einer festen Basis  $\mathbf{B}$  von  $V$  eine quadrat. Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  vermöge  $a_{ik} = \varphi(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_k)$ , und umgekehrt definiert jede quadrat. Matrix bzgl. einer festen Basis von  $V$  eine B. auf  $V$ . 2: Jedes Skalarprodukt auf einem Vektorraum  $V$  ist eine B. auf  $V$ .

Eine B.  $\varphi$  heißt *symmetrisch* genau dann, wenn  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  gilt für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Ist  $V$  endlichdimensional, so ist die B.  $\varphi$  symmetrisch genau dann, wenn die ihr zugehörige Matrix symmetrisch ist. S. a. quadratische Form; Linearform; Skalarprodukt III.; Tensor.

**Billiarde** ↗ Zehnerpotenzen.

**Billion** ↗ Zehnerpotenzen.

**binär** ↗ Prädikat, ↗ Relation II., ↗ algebraische Operation, ↗ Signal II.

**Binäralphabet** ↗ Zeichen.

**Binärentscheidung** ↗ Information II.

**binäres Speicherglied** ↗ Übertragungsglied IV.

**Binärkode** ↗ Kodierung III.

**Binärzeichen:** Zeichen aus einem Zeichenvorrat von zwei Zeichen. B. werden meist durch O und L dargestellt (↗ Zahlensystem VI.).

**Binomialkoeffizient:** eine mit  $\binom{\alpha}{k}$  [gelesen  $\alpha$  über  $k$ ] bezeichnete reelle Zahl, die für beliebiges reelles  $\alpha$  und natürl.  $k$  nach (1) definiert ist (↗ Fakultät),

$$(1) \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

z. B. gelten (2). Ist  $\alpha = n$  eine natürl. Zahl  $n$ , so

$$(2) \quad \binom{1/2}{3} = \frac{1/2 \cdot (-1/2) \cdot (-3/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{16};$$

$$\binom{\pi}{2} = \frac{\pi(\pi-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\pi^2 - \pi}{2}; \quad \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

gilt (3), und  $\binom{\alpha}{0}$  wird als 1 festgesetzt,  $\binom{n}{k}$  ist dann der

$$(3) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Koeffizient bei der Potenz  $a^n \cdot b^k$  in der Entwicklung (4) des Binoms  $(a+b)^n$  (↗ binomischer Lehrsatz);

$$(4) \quad (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

aus dieser Anwendung stammt die Bezeichnung B. Es gilt (5) für natürl. Zahlen  $n$  und  $k$ , eine Formel,

$$(5) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

die die Grundlage für das *Pascalsche Dreieck* (6) ist, mit dem man die B.en  $\binom{n}{k}$  durch einfache Addition berechnen kann, wenn man alle  $\binom{n-1}{k}$  schon hat.

(6)	$(a+b)^0 \rightarrow$	1	für $n=0$
	$(a+b)^1 \rightarrow$	1 1	für $n=1$
	$(a+b)^2 \rightarrow$	1 2 1	für $n=2$
	$(a+b)^3 \rightarrow$	1 3 3 1	für $n=3$
	$(a+b)^4 \rightarrow$	1 4 6 4 1	für $n=4$
	$(a+b)^5 \rightarrow$	1 5 10 10 5 1	für $n=5$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Man braucht nur immer die zwei darüberstehenden Zahlen zu addieren und das Ergebnis auf Lücke zu setzen; man liest z. B. (7) sofort aus (6) ab.

$$(7) \quad \binom{6}{2} = 15, \quad \binom{6}{3} = 20, \quad \binom{6}{4} = 15$$

Aus dem Pascalschen Dreieck ersieht man die *Symmetrie* (8) der B.en, die sich aus (3) ergibt. Die *Gesetzmäßigkeit* (5), die als Regel aus (6) abgelesen

wurde, ergibt sich nach (9).

$$(8) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(9) \quad \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n! [(k+1) + (n-k)]}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Die B.en  $\binom{n}{k}$  mit natürlichen  $n$  und  $k$  spielen in der Kombinatorik eine wichtige Rolle (↗ Kombination). Für die B.en gilt das *Additionstheorem* (10). — S. a. Potenzreihe VI.

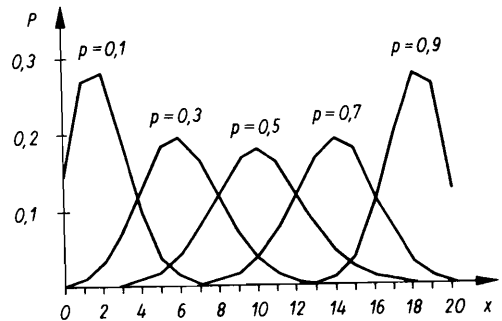
$$(10) \quad \binom{\alpha}{0} \binom{\beta}{k} + \binom{\alpha}{1} \binom{\beta}{k-1} + \dots + \binom{\alpha}{k-1} \binom{\beta}{1} + \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

für  $\alpha, \beta$  beliebig reell und  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Binomialverteilung, Bernoullische Verteilung:** I. spezielles Verteilungsgesetz für eine *diskrete Zufallsgröße*  $X$ , die binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$  heißt, wenn sie die mögl. Werte  $0, 1, \dots, n$  hat und diese mit den *Wahrscheinlichkeiten*  $p_k^{(n)}$  gemäß (1) annimmt. Die Parameter  $n$  und  $p$

$$(1) \quad P(X = k) = p_k^{(n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

mit  $q = 1 - p$  für  $k = 0, \dots, n$



Binomialverteilungen für  $n = 20$  und  $p = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$

legen die B. vollständig fest. Für die *Verteilungsfunktion* ergibt sich (2). Die Abb. zeigt Polygone

$$(2) \quad F(x) = \sum_{k < x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{mit } q = 1 - p$$

als Bilder der *Wahrscheinlichkeitsfunktion* von B.en für  $n = 20$  und verschiedene  $p$ . Dabei sind auf der Ordinate die jeweiligen  $p_k^{(n)}$  aufgetragen und durch Streckenzüge verbunden. Die  $p_k^{(n)}$  können, bei  $p_0^{(n)}$  beginnend, durch die Rekursionsformel (3) leicht



berechnet werden.

$$(3) \quad \frac{p_z^{(n)}}{p_{k-1}^{(n)}} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq},$$

$$p_0^{(n)} = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = q^n$$

Der Erwartungswert der B. mit den Parametern  $n$  und  $p$  ist  $np$ , die Streuung  $\sqrt{npq}$ . Auf die B. wird man durch folgendes Versuchsschema geführt, das als *Bernoullisches Schema* bezeichnet wird: Man nimmt an, daß ein Versuch beliebig oft wiederholt wird, daß die Einzelversuche dieser Serie voneinander unabhängig sind, daß in jedem dieser Versuche ein Ereignis  $A$  entweder eintritt oder nicht eintritt und daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von  $A$  in Einzelversuch unabhängig von der Nummer des Versuchs den Wert  $p$  hat. Ist dann  $X^{(n)}$  die Anzahl des Eintretens von  $A$  in  $n$  Stück dieser Versuche, so sind die mögl. Werte von  $X^{(n)}$  offenbar die Zahlen  $0, 1, 2, \dots, n$ . Es zeigt sich, daß  $X^{(n)}$  gerade binomialverteilt ist mit den Parametern  $n$  und  $p$ , d. h., es gilt (4).

$$(4) \quad P(X^{(n)} = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ für } k = 0, \dots, n$$

**II.1.** Soll z. B. aus der Wahrscheinlichkeit 0,515 einer Knabengeburt die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß unter 10 zufällig aus der Geburtenstatistik ausgewählten Geburten genau sechs Knabengeburt sind, so kann die Voraussetzung der Unabhängigkeit als erfüllt angesehen werden. Folglich gilt (5) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$$(5) \quad P(A) = p_6^{(10)} = \binom{10}{6} (0,515)^6 \cdot (0,485)^4$$

**II.2.** Sind in einer Urne  $N$  Kugeln, von denen  $M$  weiß sind, so besteht die Serie von  $n$  Versuchen darin, jeweils eine Kugel zu ziehen, zu notieren, ob sie weiß ist, und sie zurückzulegen. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeit dafür,  $k$  mal eine weiße Kugel zu ziehen, offenbar aus dem Binomialgesetz, sie ist gleich (6):

$$(6) \quad \binom{n}{k} (M/N)^k \cdot (1 - M/N)^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, \dots, n$$

Das Binomialgesetz beschreibt ganz allgemein das Auftreten eines qualitativen Merkmals in einer Stichprobe vom Umfang  $n$  mit Zurücklegen.

**II.3.** Ist 0,01 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stück eines Erzeugnisses fehlerhaft ist, so kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß unter 100 Stück höchstens drei fehlerhafte auftreten. — Nach dem Binomialgesetz und dem Additionssatz erhält man (7).

$$(7) \quad P(A) = \binom{100}{0} (0,01)^0 \cdot (0,99)^{100}$$

$$+ \binom{100}{1} (0,01)^1 (0,99)^{99} + \binom{100}{2} (0,01)^2 (0,99)^{98}$$

$$+ \binom{100}{3} (0,01)^3 (0,99)^{97} = 0,9816$$

S. a. Galtonbrett.

**binomische Kongruenz** ↗ Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

**binomische Reihe** ↗ Entwicklung von Funktionen V.

**binomischer Lehrsatz** ↗ Entwicklung von Funktionen V.

**binomisches Integral** ↗ Integration spezieller Funktionenklassen II.

**Binormale** ↗ Normale II., ↗ Normalebene, ↗ Schmiegebene.

**Biometrie:** die Lehre von der Anwendung mathemat., vor allem mathematisch-statist. Verfahren bei der Erforschung der Sphäre des Lebendigen. Die Kompliziertheit der biolog. Erscheinungen und die oft nur geringe Zahl von Daten zwingen dabei zu einer gut durchdachten Versuchsplanung. Im Laufe der Entwicklung der B. haben sich spezielle Verfahren zur Anlage von Versuchen bzw. Beobachtungen herausgebildet. Zur Auswertung der Versuche wurden Methoden geschaffen, die die spezif. Bedingungen, bes. den geringen Stichprobenumfang, berücksichtigen.

**Bipolarkoordinaten** ↗ Koordinatensystem VII.

**biquadratische Gleichung:** spezielle Gleichung 4. Grades mit der Normalform  $x^4 + px^2 + q = 0$ ;  $x \in \mathbf{C}$ ;  $p, q \in \mathbf{R}$ . Durch die Substitution  $x^2 = z$  geht sie über in die quadrat. Gleichung  $z^2 + pz + q = 0$ , aus deren Lösungen  $z_1$  und  $z_2$  sich nach  $x^2 = z_1$  und  $x^2 = z_2$  die Lösungen der b. G. ergeben. *Beispiel:* Die b. G.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  mit  $x \in \mathbf{C}$  geht durch  $x^2 = z$  in die quadrat. Gleichung  $z^2 - 5z + 4 = 0$  über mit den Lösungen  $z_1 = 4, z_2 = 1$ . Daraus erhält man  $x_{11} = 2, x_{12} = -2, x_{21} = 1$  und  $x_{22} = -1$ .

**birationale Transformation:** eindeutige Abbildung eines Raumes auf sich, die in beiden Richtungen durch rationale Funktionen darstellbar ist. Die Inversion am Einheitskreis ist z. B. eine b. T.; bei ihr bestehen zwischen den Koordinaten des Punktes  $P(x, y)$  und denen seines Bildes  $P'(x', y')$  die Gleichungen (2) und (2a).

$$(2) \quad x' = x/(x^2 + y^2), \quad y' = y/(x^2 + y^2),$$

$$(2a) \quad x = x'/(x'^2 + y'^2), \quad y = y'/(x'^2 + y'^2)$$

**Birkhoff, Georg David,** geb. 21. 3. 1884 Overisel (Mich.), gest. 12. 11. 1944 Cambridge (Mass.). — B. studierte in Chicago und Cambridge, promovierte 1907 in Chicago, lehrte 1909/12 in Princeton und kehrte 1912 als Professor an die Harvard-Universität Cambridge zurück. — B. lieferte wichtige Beiträge zur Theorie der Differential- und Differenzengleichungen und zur *Theorie dynam. Systeme*. Auf dem Gebiet der Mechanik arbeitete er z. B. über *Ergodentheorie* und die Existenz period. Bewegungen, in der Relativitätstheorie wendete er Methoden der Topologie und der Mengenlehre an.

**Bisektionsverfahren** ↗ Nullstellenberechnung I.

**bistabiles Glied** ↗ Übertragungsglied IV.

**Bit** [binary digit]: Einheit des Informationsgehalts, die einer Ja-nein-Entscheidung entspricht und damit einer Stelle in einer Folge von Binärzeichen (↗ Zeichen). Um die Kapazität eines Speichers

oder den Informationsfluß einer techn. Anlage angeben zu können, werden größere Einheiten gebildet: 1 *Byte* besteht häufig aus 8 B.s und in der EDV ist KByte mit  $K = 1024 = 2^{10}$  üblich. Auch die Anzahl der gespeicherten Wörter kann die Kapazität kennzeichnen. S. a. Prüfbit.

**Black-box, schwarzer Kasten:** Bezeichnung für ein kybernet. System, dessen interne Struktur entweder überhaupt nicht oder nur unvollständig bekannt ist und von dem nur seine Ein- und Ausgangsgrößen zugänglich sind. Der Begriff ist der Netzwerkktheorie entlehnt. Die Betrachtungsweise der B.-b. bildet die Grundlage der *B.-b.-Analyse* oder *B.-b.-Methode*. Dieses Erkenntnisverfahren wird angewendet, wenn der Aufbau eines vorgegebenen Systems nicht unmittelbar untersucht werden kann, so daß darüber Informationen nur aus gemessenen Relationen zwischen der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße gewonnen werden können. Durch die B.-b.-Methode sollen danach die Funktion und die Struktur des gegebenen kybernet. Systems so bestimmt werden, daß eine den Bedürfnissen entsprechende mathemat. Beschreibung möglich ist. S. a. Modell, Systemidentifikation.

**Blaschke, Wilhelm, geb. 13. 9. 1885 Graz, gest. 17. 3. 1962 Hamburg.** — B. studierte in Graz und Wien. Nach seiner Promotion 1908 lehrte er an mehreren Hochschulen und war seit 1919 Professor an der Hamburger Universität. Schon sein Vater, ein Mathematiklehrer, hatte ihn auf die Schönheit der Geometrie hingewiesen. B.s Hauptforschungsgebiet wurde die *Differentialgeometrie*. Er begründete die affine Differentialgeometrie und lieferte wichtige Beiträge zur Theorie konvexer Körper und zu topolog. Fragen der Differentialgeometrie.

**Blockdiagramm**  $\nearrow$  Algorithmus II.

**Blockschaltbild, Blockschaltplan, Strukturbild:** graph. Darstellung der Struktur von Systemen, bei der von der inneren Struktur der Teilsysteme bzw. der Elemente abstrahiert wird ( $\nearrow$  Black-box). Für sie werden durch Blöcke symbolisierte Darstellungselemente verwendet, die durch Linien zur Beschreibung der strukturellen Verknüpfungen verbunden sind. Das B. erweist sich als wesentl. method. Hilfsmittel zur gedankl. Erfassung und Verarbeitung struktureller Zusammenhänge, weil es das Wesentliche erkennen läßt und eine Detaillierung der Struktur nur insoweit vorgenommen werden muß, als es zur Lösung der jeweiligen Aufgabe erforderlich ist. Die Darstellung macht das Gemeinsame in unterschiedl. Systemen deutlich.

Das B. orientiert sich bzgl. der Aufteilung in Teilsysteme an dem zu Grunde liegenden konkreten System. Der Begriff des B.es entstammt der Elektrotechnik und wurde von der Kybernetik übernommen und verallgemeinert.

I. Eine spezielle Form des B.es ist das *Signalflußbild*, das die Signalübertragung in kybernet. Systemen veranschaulicht. In ihm wird auf das betrachtete konkrete System nur Bezug genommen, soweit es die funktionelle Betrachtungsweise erfordert. Die benutzten graf. Elemente sind Blöcke, Kreise und gepfeilte Linien. Nähere Hinweise gibt die TGL 14 091.

Ein *Block* symbolisiert die Signaltransformation eines Übertragungsgliedes. Zur Kennzeichnung der Funktion der Glieder können wahlweise die Übergangsfunktion oder die Übertragungsfunktion ( $\nearrow$  Übertragungsglied), der  $\nearrow$  Frequenzgang oder auch die stat. oder dynam. Kennlinien eingetragen werden.

*Kreise* kennzeichnen die Verknüpfung von Signalen und werden meist mit zusätzl. Rechensymbolen versehen; *gepfeilte Linien* beschreiben Signalverbindungen, z. B. Leitungen, zwischen einander benachbarten Gliedern und kennzeichnen die Übertragungsrichtung.

Im Falle der Übertragung von Signalvektoren bzw. Zustandsvektoren ( $\nearrow$  System) werden zur Unterscheidung meist gepfeilte Doppellinien verwendet. II. Neben dem Signalflußbild erlangt der *Signalflußgraph* eine zunehmende Bedeutung ( $\nearrow$  Graph). Beim Signalflußgraphen symbolisieren die *gerichteten Kanten* die Signaltransformation und die Übertragungsrichtung, während die *Knoten* die einzelnen Signale repräsentieren. Zur näheren Kennzeichnung der Teilfunktionen werden den gerichteten Kanten meist noch Symbole für die entsprechende Übertragungsfunktion beigeordnet.

Die Anwendungsmöglichkeiten des Signalflußgraphen entsprechen denen des Signalflußbildes, haben aber diesen gegenüber den Vorteil der größeren Übersichtlichkeit und Einfachheit in der Handhabung. Sie sind daher bes. zur Darstellung komplexerer Systeme geeignet.

Die Darstellungen des Signalflußbildes und des Signalflußgraphen können ebenfalls zur Grundlage einer graphisch-analyt. Ermittlung des Gesamtübertragungsverhaltens vorliegender kybernet. Systeme benutzt werden, z. B. wurde eine *Algebra des Signalflußbildes* entwickelt, nach deren Regeln eine schrittweise Reduktion von Signalflußbildern möglich ist. Im Falle der Signalflußgraphen kann zu dem gleichen Zweck auf die *Methode der Knotenspaltung* zurückgegriffen werden. Ein besonders effektives, da einschrittiges Verfahren gründet sich auf die Formel (1) von *Mason*. Diese ist für die Abrechnung von Signalflußbildern und Signalflußgraphen gleichermaßen geeignet; in ihr haben die

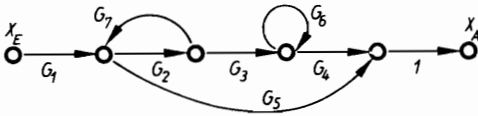
(1) *Formel von Mason:*

$$G(p) = X_A(p)/X_E(p) = \sum [M_k \cdot \Delta_k / \Delta]$$

$$\text{mit } \Delta = 1 - \sum_m P_{m1} + \sum_m P_{m2} - \sum_m P_{m3} \pm \dots,$$

Symbole folgende Bedeutung:

- $M_k$ : = die Übertragungsfunktion des  $k$ -ten Vorwärtszweiges,
- $P_{m1}$ : = die Übertragungsfunktion aller einzelnen Schleifen,
- $P_{m2}$ : = die Produkte der Übertragungsfunktionen von zwei sich nicht berührenden Schleifen,
- $P_{m3}$ : = die Produkte der Übertragungsfunktionen von drei sich nicht berührenden Schleifen usw.,
- $\Delta_k$ : = der Ausdruck von  $\Delta$ , der den  $k$ -ten Vorwärtszweig nicht berührt,
- $k$ : = die Anzahl der Vorwärtszweige und
- $m$ : = die Anzahl der Schleifen.



Blockschaltbild: Signalflußgraph eines Beispiels zur Formel von Mason

Für das in der Abbildung dargestellte Beispiel gilt  $k = 2, m = 2$ . Nach der Formel von Mason erhält man schrittweise:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= G_1 G_2 G_3 G_4, \\
 M_2 &= G_1 G_5, \\
 P_{11} &= G_2 G_7, P_{21} = G_6, P_{12} = G_2 G_7 G_6, \\
 P_{22} &= P_{32} = \dots = 0, \\
 \Delta &= 1 - (G_2 G_7 + G_6) + G_2 G_6 G_7, \\
 \Delta_1 &= 1, \Delta_2 = 1 - G_6 \\
 M &= \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5 (1 - G_6)}{1 - G_2 G_7 - G_6 + G_2 G_6 G_7}
 \end{aligned}$$

Blockschaltplan svw. Blockschaltbild.

Bochner – Chintschin, Satz von ↗ charakteristische Funktion II.

Bogen: I. Stück einer Kurve, ↗ Kreis I., ↗ Bogenlänge.

II. gerichtete Kante, ↗ Graph I.

Bogenelement ↗ Rektifikation einer Kurve, ↗ Grundformen einer Fläche I.

Bogenlänge: Länge einer durch  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  gegebene Kurve  $C$  für Parameterwerte von  $t = a$  bis  $t = b$ , die bestimmt wird durch das Integral (1).

$$(1) \quad s = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\mathbf{x}' \mathbf{x}'} dt$$

Der Wert der B. ist wie jedes bestimmte Integral eine Funktion seiner Grenzen, ist aber unabhängig von der speziellen Wahl der zulässigen Darstellung von  $C$ . Zu seiner Herleitung werden durch die Unterteilung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  des Parameterintervalls  $n + 1$  Punkte auf dem betrachteten Kurvenstück bestimmt und als Eckpunkte eines Polygonzugs  $Z$  geradlinig verbunden. Strebt seine Länge  $l(Z)$  gegen einen Grenzwert  $s$  für  $n \rightarrow \infty$ , wenn gleichzeitig  $\sigma(Z) = \max(t_j - t_{j-1})$  für  $1 \leq j \leq n$  gegen Null geht, so heißt das Kurvenstück  $C$  rektifizierbar, und der Grenzwert  $s$  heißt seine Länge.

$$(2) \quad l(Z) = \sum_{j=1}^n \left\{ (t_j - t_{j-1}) \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i'^2(t_j^{(j)})} \right\}$$

Ist  $C$  ein glattes Kurvenstück (↗ regulärer Punkt), so kann man die B. als neuen Parameter einführen, der durch seine geomet. Bedeutung ausgezeichnet ist. Man nennt die B.  $s$  den natürl. Parameter der Kurve, die dann durch  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  gegeben ist. S. a. Rektifikation einer Kurve, Kurvenmesser.

Bogenmaß ↗ Winkel VII.2.

Bólyai, János, geb. 15. 12. 1802 Klausenburg (Cluj) als Sohn des Mathematikprofessors Farkas B., gest.

17. 1. 1860 Maros-Vásárhely. — B. erhielt an der militär. Ingenieur-Akademie Wien eine gute Mathematikausbildung. Trotz väterl. Warnung wandte er sich schon früh der Geometrie und dem *Parallelenproblem* zu, das der Vater jahrelang vergeblich zu lösen versucht hatte. Nach Eintritt in die Armee setzte B. seine Studien fort. Er erkannte die Unbeweisbarkeit des 5. Postulats von EUKLID mittels der übrigen und 1825 die Möglichkeit, eine auf anderen Axiomen beruhende Geometrie aufzubauen. Er veröffentlichte seine Resultate 1832 als Anhang zu einem Buch seines Vaters. Dieser bat seinen Freund GAUSS um eine Einschätzung. GAUSS lobte János, machte ihm aber die Priorität streitig. Die Enttäuschung von B. darüber verstärkte sich nach den deutschen Veröffentlichungen von LOBATSCHEWSKI, und er wandte sich völlig von der Mathematik ab. Erst nach seinem Tod erkannte man die Bedeutung seiner Arbeiten.

Bolzano, Bernard, geb. 5. 10. 1781 und gest. 18. 12. 1848 Prag. — Der Kaufmannssohn B. studierte seit 1796 Philosophie, Theologie und später auch Mathematik in Prag. 1805 wurde er zum Priester geweiht und übernahm wenige Tage später die Professur für Religionsphilosophie an der Prager Universität, wurde aber kirchenfeindl. Äußerungen beschuldigt und 1819 entlassen; es wurde ihm auch untersagt, weitere Schriften zu veröffentlichen. Seit seiner Entlassung lebte B. auf seinem Landgut. — B. gab fundamentale Beiträge zur *Begründung der Analysis*. Er gilt als Vorläufer der Mengentheoretiker und versuchte, eine strenge Theorie der reellen Zahlen aufzubauen. In seinen philosoph. Schriften ist B. stark von LEIBNIZ beeinflusst.

Bolzano, Satz von ↗ Stetigkeit IV.1., ↗ Stetigkeit einer Funktion III.

Bolzano-Weierstraß, Satz von ↗ Punktmenge, ↗ Zahlenfolge III.

Bonnet, Ossian, geb. 22. 12. 1819 Montpellier, gest. 22. 6. 1892 Paris. — B. war an der École Polytechnique tätig und seit 1878 Professor der Astronomie an der Sorbonne in Paris. B. lieferte Beiträge zur Flächentheorie (↗ Gauß-Bonnetscher Satz).

Boole, George, geb. 2. 11. 1815 Lincoln (England), gest. 8. 12. 1864 Cork (Irland). — B. wuchs in sehr ärm. Verhältnissen auf und suchte schon als Kind seine klassenmäßige Lage durch bessere Bildung zu verbessern. Er lernte autodidaktisch mehrere Sprachen und mußte als Hilfslehrer den Lebensunterhalt für seine Eltern verdienen. Er wandte sich dann der Mathematik zu und veröffentlichte Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik. Dabei galt seine Aufmerksamkeit stets der Verbesserung der *formalen Logik*, die er 1848 begründet hatte. Obwohl er nie ein Studium absolvierte, wurde er 1849 Professor für Mathematik in Cork.

Boolesche Algebra: komplementärer distributiver ↗ Verband. Die Komplementbildung ist eindeutig; das Komplement des Komplements ist mit dem ursprüngl. Element identisch:  $\bar{\bar{a}} = a$ . In einer B. A. gelten die *Formeln von de Morgan*:  $\overline{a \cap b} = \bar{a} \cup \bar{b}$  und  $\overline{a \cup b} = \bar{a} \cap \bar{b}$ ; außerdem gelten  $\delta = e$  und

$\bar{e} = o$ . Ein Beispiel für eine B. A. ist die Potenzmenge  $P(M)$  zu einer Menge  $M$  mit den mengentheoret. Operationen der Durchschnitts-, Vereinigungs- und der Komplementbildung.

Definiert man für die Elemente der B. A. durch  $a + b = (a \cap b) \cup (\bar{a} \cap b)$  eine *Addition* und durch  $a \cdot b = a \cap b$  eine *Multiplikation*, so erhält man einen *Ring*, *Boolescher Ring* gen. Die Addition entspricht dabei der mengentheoret. Bildung der symmetr. Differenz. Das Null- bzw. Einselement der B. A. ist Null- bzw. Einselement des Ringes; die Multiplikation ist kommutativ und *idempotent*, d. h., es gilt  $a \cdot a = a$ ; der Ring hat die Charakteristik 2. Umgekehrt kann man jeden Ring mit Einselement und mit idempotenter Multiplikation durch  $a \cap b = a \cdot b$  und  $a \cup b = a + b + a \cdot b$  als B. A. auffassen.

Die Booleschen Algebren wurden zuerst von G. BOOLE im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen auf dem Gebiete der mathemat. Logik untersucht. Die Aussagen bzw. Ereignisse bilden z. B. eine B. A.; dem Zeichen  $\cap$  entspricht dabei das logische »und«, dem  $\cup$  das »oder«, der Komplementbildung die Verneinung. Die Booleschen Algebren spielen weiter in der Mengenlehre und in der Maßtheorie eine wichtige Rolle ( $\nearrow$  Maß I.).

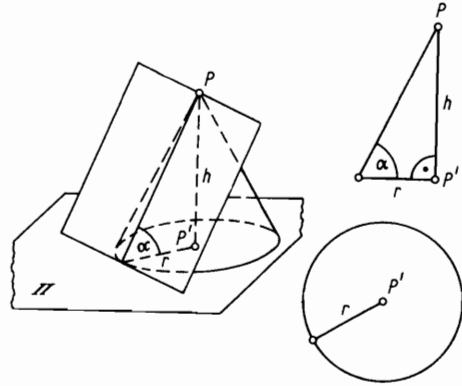
**Boolesche Funktion:** Funktion einer beliebigen endl. Stellenzahl  $n$ , deren Argumente und Funktionswerte nur zwei Werte annehmen, 1 für »wahr« und 0 für »falsch«. Sie kann aufgefaßt werden als Abbildung von dem  $n$ -fachen kartes. Produkt der Menge  $\{0, 1\}$  in die Menge  $\{0, 1\}$ . Bekannte Beispiele von B.F.en sind die Wahrheitsfunktionen et, vel, seq. **Boolesche Optimierung**  $\nearrow$  Optimierung, ganzzahlige.

**Borel, Émile**, geb. 7. 1. 1871 Saint Affrique, gest. 3. 2. 1956 Paris. — B. studierte in Paris und war dort auch als Professor tätig. Er lieferte grundlegende Beiträge zur Funktionentheorie, zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zur Spieltheorie, zur Mengenlehre, zur Maßtheorie und zu philosoph. Problemen der Mathematik.

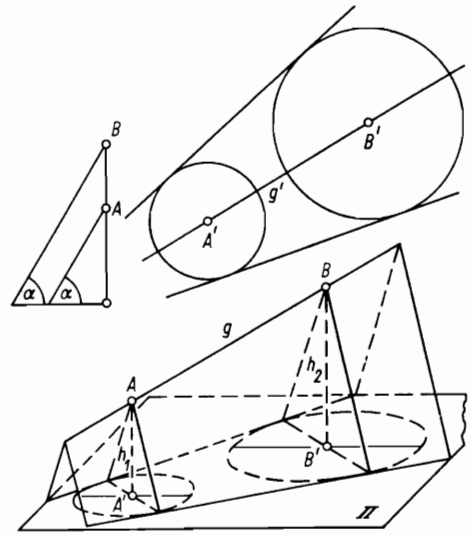
**Borel, Satz von**  $\nearrow$  Gesetz der großen Zahl III.

**Borelkörper**  $\nearrow$  Maß I.

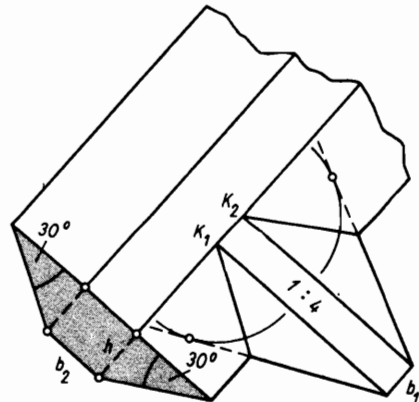
**Böschungsaufgaben:** Bestimmung der Eintafelprojektion von Körpern, die beim Aufschütten lockeren Materials auf einer horizontalen Ebene entstehen. Durch Aufschütten von einem Punkt  $P$  aus bildet sich ein gerader Kreiskegel, der *Böschungkegel* des Punktes  $P$  (Abb. 1). Seine Grundfläche heißt *Böschungskreis*, dessen Radius  $r$  *Böschungsradius*. Der Neigungswinkel  $\alpha$  einer Mantellinie gegen die horizontale Ebene hängt vom geschütteten Material ab und heißt *Böschungswinkel*, nach der Beziehung  $\tan \alpha = h/r$  kann er aus dem *Böschungsverhältnis* berechnet werden. Sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  im Raum gegeben durch die Fußpunkte  $A'$ ,  $B'$  ihrer Höhen und durch deren Länge  $h_1, h_2$ , so ist durch sie die Lage einer Geraden  $g = AB$  bestimmt. Als ihre *Abböschung* bezeichnet man den durch Aufschütten von jedem ihrer Punkte aus entstandenen Körper (Abb. 2). Er wird durch zwei Ebenen begrenzt, die Tangentialebenen an die durch den Bö-



Böschungsaufgaben. Abb. 1: Böschungkegel

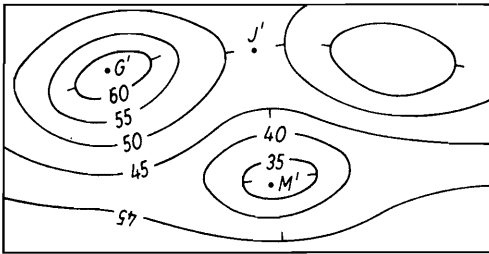


Böschungsaufgaben. Abb. 2: Abböschung einer Geraden

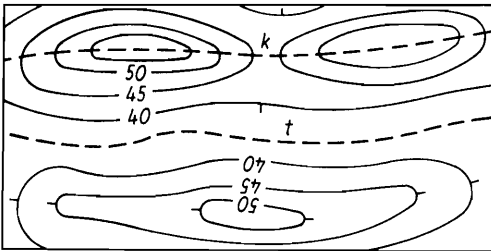


Böschungsaufgaben. Abb. 3: Böschung eines Weges mit Zufahrt

schungswinkel  $\alpha$  des Materials bestimmten Böschungswinkel der Punkte  $A$  und  $B$  sind. Diese Ebenen schneiden die Bildebene  $II$  in den äußeren Tangenten an die Böschungskreise mit den Mittelpunkten  $A'$  und  $B'$ . Für  $h = h_1 = h_2$  läuft die Gerade  $g$  parallel zur Bildebene  $II$ . Führt auf der Krone des entstandenen Damms ein Weg der Breite  $b_2$ , so ist die Aufgabe zeichnerisch lösbar, einen Weg der Breite  $b_1$  und mit einem Aufstieg 1:4 anzugeben, der senkrecht zur Dammrichtung auf die Dammkrone führt. Aus einem senkrechten Schnitt in Form eines Trapezes ergibt sich die Eintafelprojektion des gegebenen Damms und aus der Länge von  $4h$  die Projektion des gesuchten Weges (Abb. 3). Aus einem Stützdreieck ergeben sich die Böschungs-



Böschungsaufgaben. Abb. 4:  $G'$  Gipfel-,  $J'$  Joch- und  $M'$  Muldenpunkt



Böschungsaufgaben. Abb. 5:  $k$  Kamm- und  $t$  Talweg

radien und damit die Böschungskreise für die Kreuzungspunkte  $K_1, K_2$ . Die Tangenten an sie bestimmen die Abböschung des gesuchten Weges. B. bilden die Grundlage für Geländekonstruktionen, in denen *Gipfel-, Joch- und Muldenpunkte* (Abb. 4) bzw. *Kamm- und Talwege* (Abb. 5) unterschieden werden.

**Bound:** Schranke, ↗ Verzweungsverfahren.

**Bourbaki,** Nicolas, Pseudonym einer Gruppe von Mathematikern — meist Franzosen, die Schüler der École Normale waren. Ausgehend von den Ideen von HILBERT, suchen sie die gesamte Mathematik formal, axiomatisch darzulegen. Seit 1939 sind über 40 Bücher der Abhandlung »*Éléments der Mathematik*« erschienen, die die Entwicklung wichtiger mathemat. Gebiete stark beeinflussten. Die Zusammensetzung der Gruppe blieb stets geheim; wenn man jedoch einer „Traueranzeige“, die 1969 führende mathemat. Institute erließen, Glauben

schenkt, so gehörten u. a. DIXMIER, SCHWARTZ, GODEMENT, WEYL, CARTAN, CHEVALLEY und DIEUDONNÉ zum Bourbakikreis und das Schöpferkollektiv beabsichtigt die Einstellung seiner Tätigkeit.

**Brachistochronen-Problem** ↗ Variationsrechnung I. **Brahmagupta,** geb. 598, lebte in Ujjain, der Hauptstadt des Guptastaates. — Das von ihm überlieferte, teilweise mathemat. Werk enthält vorzügl. *algebraisch-zahlentheoret. Ergebnisse* z. B. zu Pellischen Gleichungen. Der Näherungswert  $\sqrt{10}$  für  $\pi$  geht wahrscheinlich auf B. zurück.

**Branch-and-Bound-Prinzip** ↗ Verzweungsverfahren.

**Brandt,** Heinrich, geb. 8. 11. 1886 Fendingen, gest. 9. 10. 1954 Halle. — B. studierte in Göttingen und Straßburg (Strasbourg) und promovierte dort bei Heinrich WEBER (1842—1913) mit der Arbeit »Zur Kompositionstheorie der quaternären quadrat. Formen«. Er habilitierte sich 1917 in Karlsruhe und wirkte seit 1920 in Aachen und von 1930 an als Nachfolger von Helmut HASSE an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Seine Arbeitsgebiete waren Algebra und Zahlentheorie, er ist hervorgetreten durch grundlegende Arbeiten zur Formentheorie, zur Theorie der hyperkomplexen Systeme (Algebren), zur Arithmetik der Quaternionenalgebren und zur nichtkommutativen Idealtheorie. Seine Forschungstätigkeit führte ihn zu einer wichtigen Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, dem Begriff des Gruppoids. Sein „letzter wesentl. Beitrag zum Fortschritt der Mathematik ... erfolgte an einem der fruchtbarsten Vegetationspunkte der Mathematik seit ABEL, JACOBI, RIEMANN überhaupt, wo sich die Theorie der quadrat. Formen (Thetafunktionen), der hyperkomplexen Systeme (Riemannsche Matrizen) und der algebraischen Funktionen (und Modulfunktionen) unter der Idee der algebraischen oder geometr. Korrespondenz vereinigen“ (M. EICHLER) und betraf Formeln für die Anzahlen der Darstellungen von Zahlen durch kompositionsfähige quaternäre quadrat. Formen.

**Brechungswinkel** ↗ Polygonzug.

**Breitenkoordinate** ↗ Koordinatensystem V.

**Breitenkreis** ↗ Koordinatensystem V., ↗ Kugeldarstellung.

**Brennpunkt** ↗ Ellipse I., ↗ Hyperbel I., ↗ Kegelschnitt II., ↗ Parabel I.

**Brennpunktsgleichung** ↗ Kurve zweiter Ordnung III.

**Brennweite** ↗ Ellipse I., ↗ Hyperbel I.

**Brianchon,** Charles Julien, geb. 19. 12. 1783 Sèvres, gest. 29. 4. 1864 Versailles. — B. war Angehöriger der französ. Armee und als Professor an der Artillerieschule in Paris tätig. Er arbeitete vorwiegend über geometr. Probleme, z. B. über höhere Kurven und fand den zum Pascalschen Satz dualen Satz. **Brianchon, Satz von** ↗ Dualität II.

**Briggs,** Henry, geb. 1561 Warley Wood, gest. 26. 1. 1630 Oxford. — B. lehrte nach seinem Studium in Cambridge, wurde 1596 Professor am neugegründeten Gresham-College in London und 1619 Professor

der Geometrie in Oxford. Von B. stammen die *Berechnungen der ersten dekad. Logarithmen*, die in enger Zusammenarbeit mit NEPER entstanden. Im Jahre 1617 veröffentlichte er sein Buch »Logarithmorum Chilias prima«, das die dekad. Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 1000 auf acht Dezimalen enthält, 1624 die »*Arithmetica logarithmica*«, in der 14stellige Logarithmen für die Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000 verzeichnet sind. B. entwickelte die Berechnung von Logarithmen durch fortlaufendes Quadratwurzelziehen und Tafelinterpolation.

**Briggscher Logarithmus** svw. dekadischer Logarithmus; s. a. Logarithmensystem I.

**Brooks, Satz von** ↗ Färbung von Graphen.

**Brouwer, Luitzen, Egbertus Jan**, geb. 27. 2. 1881 Overschie, gest. 2. 12. 1966 Amsterdam. — B. promovierte 1907 in Amsterdam, wurde Privatdozent und 1913 zum ordentl. Professor für Mathematik berufen. Er beschäftigte sich vor allem mit der *Axiomatik der Mengenlehre* und mit der mathemat. Logik. Er entwickelte die *intuitionist. oder konstruktive Logik*, in der das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten für unendl. Mengen negiert wird. Die in diesem Zusammenhang verfaßten philosoph. Schriften zeigen B. als Vertreter des Kantischen Idealismus. Vor allem in den Jahren 1911/13 veröffentlichte B. auch bedeutende Arbeiten zur Topologie.

**Brouwerscher Fixpunktsatz:** Ist  $F$  eine zur Vollkugel homöomorphe Figur und  $F'$  eine Teilfigur von  $F$ , so hat jede stetige Abbildung  $f$  von  $F$  auf  $F'$  einen Fixpunkt, d. h. einen Punkt, für den  $f(p) = p$  gilt. Zu jeder stetigen Abbildung der Kugeloberfläche auf sich selbst gibt es einen Punkt  $p$ , der durch  $f$  in sich selbst,  $f(p) = p$ , oder in seinen Gegenpunkt übergeführt wird.

**Brüche:** Zahlen, die auch Teile eines Ganzen, der Einheit, darstellen; dabei gibt der *Nenner*  $n$  der Zahl  $r = m/n$  an, in wieviele Teile die Einheit zerlegt wurde, und der *Zähler*  $m$ , wieviele dieser Teile die Zahl  $r$  enthält. In *gemeinen oder gewöhnl.* B.n kann jede von Null verschiedene Zahl  $n$  Nenner sein, in *Dezimal-B.n* ist der Nenner stets eine Potenz von 10. Während Dezimal-B. im Zehnersystem (↗ Zahlensystem) durch Ziffern rechts vom Komma angegeben werden, trennt man Zähler und Nenner gewöhnl. B. meist durch einen horizontalen Bruchstrich, der seiner Bedeutung nach auch durch das Zeichen für Division ersetzt werden kann und aus techn. Gründen zunehmend, in angelsächs. Ländern fast durchgehend, als schräger Bruchstrich geschrieben wird. Dabei muß der Bruch oder der Aufbau seines Zählers und seines Nenners durch Klammern eindeutig gekennzeichnet sein.

**I.1. Gemeine B.** Man bezeichnet eine Zahl  $r = m/n$  mit  $n \neq 0$  als *echten Bruch*, falls  $m < n$ , im Falle  $m \geq n$  als *unechten Bruch*. B. mit dem Zähler 1 nennt man *Stammbrüche*. Von *quotientengleichen B.n*, z. B. von  $r_1 = m_1/n_1$  und  $r_2 = m_2/n_2$ , falls  $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$ , kann jeder als Repräsentant einer Klasse aufgefaßt werden, die eine ↗ *rationale Zahl* darstellt. Aus dem Repräsentanten, etwa  $r = m/n$ , dessen Zähler und Nenner keinen gemeinsamen

Teiler haben, d. h., für den  $(m, n) = 1$  gilt, erhält man einen weiteren Repräsentanten, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen von Null verschiedenen ganzen Zahl multipliziert. Diese Operation nennt man *Erweitern*. Umgekehrt spricht man von *Kürzen*, wenn man quotientengleiche Brüche dadurch erhält, daß man Zähler und Nenner eines gegebenen Bruchs durch die gleiche, von Null verschiedene Zahl dividiert. Durch Erweitern mit 2, 3, 12 ergeben sich z. B. folgende Gleichheiten:  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{24}{36}$ . In  $\frac{2}{7} = (2 \cdot 3)/(7 \cdot 3) = \frac{6}{21}$  wird der Übergang von links nach rechts durch Erweitern, der von rechts nach links durch Kürzen vollzogen. Da jeder gemeinsame Teiler von Zähler  $m$  und Nenner  $n$  *Kürzungsfaktor* sein kann, ist der *größte gemeinsame Teiler*  $(m, n)$  offenbar der größte Kürzungsfaktor, von  $25a^2 - 9b^2$  und  $25a^2 + 30ab + 9b^2$  mithin  $(5a + 3b)$ , weil  $(25a^2 - 9b^2) = (5a + 3b)(5a - 3b)$  und  $25a^2 + 30ab + 9b^2 = (5a + 3b)^2$  oder von  $36a^2b^3c$  und  $27ab^2$  der Faktor  $9ab^2$ , so daß  $(36a^2b^3c)/(27ab^2) = (4/3)abc$ .

**I.2. Gleichnamige B.** haben den gleichen Nenner, z. B.  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{4}{5}$  und  $\frac{7}{5}$ , *ungleichnamige B.* haben verschiedene Nenner, z. B.  $\frac{3}{8}$  und  $\frac{7}{12}$ . Nach der Definition der B. ist von gleichnamigen B.n der der größte, der den größten Zähler hat, z. B.  $\frac{2}{7} < \frac{6}{7}$ . Von B.n mit gleichem Zähler ist der der größte, der den kleinsten Nenner hat, z. B.  $\frac{5}{9} < \frac{6}{8}$ . Zähler oder Nenner können auch negativ sein, z. B.  $(-3)/5$ ,  $(-2)/(-9)$  oder  $7/(-4)$ . Es gelten die Vorzeichenregeln der Multiplikation, nach denen der Bruch negativ ist, wenn Zähler und Nenner verschiedene Vorzeichen haben, z. B.  $(-3)/5 = 3/(-5) = -3/5$ . Zur Vereinfachung der Schreibweise werden ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit positive Nenner bevorzugt. Auch ganze Zahlen lassen sich durch B. darstellen, z. B.  $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \dots = \frac{18}{6} = \dots$  oder  $\frac{15}{3} = \frac{5}{1} = 5$  oder  $\frac{8}{8} = \frac{1}{1} = 1$ . Die Zahl Null wird durch sämtl. B. dargestellt, die den Zähler 0 haben. Ein Nenner 0 ist in jedem Fall ausgeschlossen.

**I.3.** Wie für die natürl. und die ganzen Zahlen, gilt auch für zwei rationale Zahlen  $r_1$  und  $r_2$  genau einer der drei Fälle  $r_1 < r_2$  oder  $r_1 = r_2$  oder  $r_1 > r_2$ . Um allgemein zu entscheiden, welcher dieser Fälle vorliegt, macht man die B. *gleichnamig*. Das ist stets möglich, weil es zu zwei ganzen Zahlen, den Nennern der gegebenen B., stets gemeinsame Vielfache gibt, von denen man das *kleinste gemeinsame Vielfache* als *Hauptnenner* wählt. Von  $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$  und  $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$  ist es z. B.  $[12, 20] = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$  mit den *Erweiterungsfaktoren* 5 und 3, da  $5 \cdot 12 = 60$  und  $3 \cdot 20 = 60$ , so daß sich wegen  $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$  und  $\frac{11}{20} = \frac{33}{60}$  ergibt, daß  $\frac{11}{20} < \frac{7}{12}$ .

**I.4.** Die *Addition* und die *Subtraktion* von gemeinen B.n sind stets ausführbar, weil zwei B. durch Erweitern auf ihren Hauptnenner stets gleichnamig gemacht werden können, oder subtrahieren lassen, indem man ihre Nenner als Benennung auffaßt.

*Beispiele:*  $1. \frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$ .

$$2. \frac{4}{11} - \frac{7}{11} = -\frac{3}{11}$$

Die Zahl  $1\frac{1}{7}$  bedeutet dabei  $1 + \frac{1}{7}$  und wird auch als *gemischte Zahl* bezeichnet. Die Unrechnung einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch wird oft als *Einrichten* bezeichnet, z. B.  $4\frac{2}{5} = 4 + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$ . Zunächst ungleichnamige B. werden vor der Addition oder Subtraktion durch Erweitern auf den Hauptnenner gleichnamig gemacht. Für die Aufgabe  $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{4}$  ist 12 der Hauptnenner zu den gegebenen Nennern 3, 12 und 4, die Erweiterungsfaktoren für die drei B. sind 4, 1 und 3, so daß sich ergibt  $\frac{8}{12} - \frac{7}{12} + \frac{15}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ . Für  $\frac{1}{6} + \frac{3}{10} - \frac{11}{15}$  erhält man: Hauptnenner  $30 = 5 \cdot 6 = 3 \cdot 10 = 2 \cdot 15$  und deshalb  $\frac{5}{30} + \frac{9}{30} - \frac{22}{30} = \frac{-8}{30} = -\frac{4}{15}$ .

Wird der Hauptnenner als kleinstes gemeinsames Vielfaches durch Zerlegen in Primfaktoren bestimmt, so hat sich die folgende Anordnung bewährt, die sich auch auf allgemeine Zahlvariable anwenden läßt:

$$1. \quad 3\frac{17}{21} - \frac{3}{8} - \frac{11}{12} + 2 = 5 + \frac{17}{21} - \frac{3}{8} - \frac{11}{12} = 4 + \frac{38}{21} - \frac{3}{8} - \frac{11}{12}$$

Bezeichnet man mit HN den *Hauptnenner*, mit EF die *Erweiterungsfaktoren* und mit EF · m die erweiterten Zähler, so erhält man:

21 = 3 · 7	2 <sup>3</sup> = 8	EF · m
8 = 2 <sup>3</sup>	3 · 7 = 21	+304
12 = 2 <sup>2</sup> · 3	2 · 7 = 14	-63
HN 2 <sup>3</sup> · 3 · 7 = 168		+ 87

Das Ergebnis ist danach  $4 + \frac{87}{168} = 4 + \frac{29}{56} = 4\frac{29}{56}$ .

$$2. \quad 4 + \frac{3a}{a-b} - \frac{2b}{b-a} = 4 + \frac{3a}{a-b} + \frac{2b}{a-b} = \frac{4(a-b) + 3a + 2b}{a-b} = \frac{7a-2b}{a-b}$$

$$3. \quad \frac{3}{12r-18s} - \frac{2r-s}{36r^2-81s^2} + \frac{6r-5s}{8r^2+24rs+18s^2}$$

12r - 18s = 2 · 3 · (2r - 3s)	EF
36r <sup>2</sup> - 81s <sup>2</sup> = 3 <sup>2</sup> (2r - 3s)(2r + 3s)	3 · (2r + 3s) <sup>2</sup>
8r <sup>2</sup> + 24rs + 18s <sup>2</sup> = 2 · (2r + 3s) <sup>2</sup>	2 · (2r + 3s)
HN = 2 · 3 <sup>2</sup> · (2r - 3s)(2r + 3s) <sup>2</sup>	3 <sup>2</sup> (2r - 3s)

Für die Summe der erweiterten Zähler ergibt sich

$$3^2(2r + 3s)^2 - 2(2r + 3s)(2r - s) + 3^2(2r - 3s)(6r - 5s) = 36r^2 + 108rs + 81s^2 - 8r^2 + 4rs - 12rs + 6s^2 + 108r^2 - 90rs - 162rs + 135s^2 = 136r^2 - 152rs + 222s^2, \text{ nach Kürzen mit 2 das Ergebnis}$$

$$\frac{68r^2 - 76rs + 111s^2}{9 \cdot (2r - 3s)(2r + 3s)^2}$$

1.5. Faßt man die *Multiplikation* eines gemeinen Bruches mit einer positiven ganzen Zahl  $m_2$  als

Addition von  $m_2$  gleichen Summanden auf, so folgt aus  $r_1 = m_1/n_1$  sofort  $r_1 \cdot m_2 = m_1 m_2/n_1$ . Der *Quotient* ( $\nearrow$  Division) des Bruches  $r_1 = m_1/n_1$  durch die ganze positive Zahl  $n_2$  kann dadurch entstanden gedacht werden, daß jedes der  $m_1$  Teile der Größe  $1/n_1$  weiter in  $n_2$  Teile, die Einheit mithin in  $n_1 \cdot n_2$  Teile der Größe  $1/(n_1 \cdot n_2)$  geteilt wird. Beide Überlegungen zeigen, daß das Produkt der B.  $r_1 = m_1/n_1$  und  $r_2 = m_2/n_2$  wieder ein gemeiner Bruch  $p$  ist mit dem Zähler  $m_1 \cdot m_2$  und dem Nenner  $n_1 \cdot n_2$ , d. h.,  $p = r_1 \cdot r_2 = (m_1 \cdot m_2)/(n_1 \cdot n_2)$ . Daraus läßt sich der Bruch  $q = r_1/r_2$  bestimmen, der der Quotient zweier B. ist, denn aus  $r_1 : r_2 = q$  folgt  $r_1 = q \cdot r_2$ , oder  $(m_1/n_1) = (m/n)(m_2/n_2)$ . Werden hier beide Seiten mit  $(n_2/m_2)$  multipliziert, so erhält man

$$(m_1/n_1)(n_2/m_2) = m/n \text{ oder } \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{m_2} = \frac{m}{n} = q.$$

Man nennt  $n_2/m_2$  den *Kehrwert* oder *reziproken Wert* des gegebenen Bruchs  $m_2/n_2$  und hat die Regel: *Durch einen gemeinen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem reziproken Wert multipliziert.* Danach ist das Produkt eines Bruches mit seinem Kehrwert stets 1; z. B. bedeutet dies, daß  $-3$  und  $-1/3$  zueinander reziprok sind. Für die prakt. Rechnung ist es vorteilhaft, vor dem Multiplizieren der Zähler und Nenner soweit wie möglich zu kürzen. Selbstverständlich müssen gemischte Zahlen als Summen vorher eingerichtet werden.

Beispiele: 1.  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ .

2.  $\frac{4}{7} \cdot \frac{3^9}{32} = \frac{4}{7} \cdot \frac{105}{32} = \frac{1}{7} \cdot \frac{105}{8} = \frac{1}{7} \cdot \frac{15 \cdot 7}{8} = \frac{15}{8}$

3.  $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

4.  $\frac{7}{12} : \frac{5}{8} = \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{5} = \frac{(7 \cdot 2)}{(3 \cdot 5)} = \frac{14}{15}$

5.  $\frac{5}{7} : \frac{6}{7} = \frac{(5 \cdot 7)}{(1 \cdot 6)} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$

6.  $\frac{2^4}{13} : \frac{16}{39} = \frac{30}{13} \cdot \frac{39}{16} = \frac{15}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$

7.  $\frac{7p}{15m - 25n} \cdot (6m - 10n) = \frac{7p \cdot 2(3m - 5n)}{5(3m - 5n)} = 14p/5$

8.  $\frac{1/m^2 + 2/(m \cdot n) + 1/n^2}{3/m + 3/n} = \frac{n^2 + 2mn + m^2}{m^2 \cdot n^2} \cdot \frac{mn}{3n + 3m} = \frac{m + n}{3mn}$

1.6. Durch Division von Zähler durch Nenner lassen sich meist *Doppel-B.* vereinfachen, das sind gemeine B., deren Zähler oder Nenner bzw. Zähler und Nenner selbst wieder B. sind.

Beispiele für *Doppel-B.*:

1.  $\frac{3}{7/5} = 3 : \frac{7}{5} = 3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$

2.  $\frac{1/3}{9} = \frac{1}{3} : 9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$

3.  $\frac{2/5}{3/8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{15}$

11.1. *Dezimal-B.* Bei der Darstellung von B.n im Zehnersystem wird dessen Eigenschaft benutzt, daß der Stellenwert jeder Ziffer der zehnte Teil des

Stellenwertes der links von ihr stehenden Ziffer ist ( $\nearrow$  Zahlensystem V.). Nach den Einern wird dabei ein Komma gesetzt und die Stellen nach dem Komma werden *Dezimalen* oder *Dezimalstellen* gen. Die 1. Dezimale gibt Zehntel, die 2. Hundertstel, die 3. Tausendstel usw. an; 0,375 z. B. bedeutet 375 Tausendstel oder  $375/1000 = 3/8$ . Die Zahl 4,81 hat drei Stellen, aber nur zwei Dezimalen. Sie wird gelesen „vier-Komma-acht-eins“; vor der von dezimal geteilten Maßen herrührenden Ausdrucksweise 3 Mark 75 oder 3 Meter 75, bei der Pfennige oder Zentimeter weggelassen werden, ist zu warnen, wie die Scherzfrage deutlich macht: „Welche Zahl ist größer, drei-Komma-elf oder drei-Komma-neun?“

**II.2.** Zu jedem gemeinen Bruch läßt sich ein Dezimalbruch angeben, der die gleiche Zahl darstellt. Man erhält ihn, indem man den gemeinen Bruch als Division  $r_1 = m_1 : n_1$  auffaßt ( $\nearrow$  Division). Falls der Nenner des gemeinen Bruches ein Teiler einer Zehnerpotenz ist, läßt sich die Umwandlung in einen Dezimalbruch auch durch Erweitern erreichen.

*Beispiele:*

1.  $7/20 = 35/100 = 0,35$
2.  $13/8 = 1375/1000 = 1,375$
- 3:  $2 : 7 = 0,28571428 \dots$

Die Division ergibt  $2 : 7 = 0$  Einer,  $20 : 7 = 2$  Zehntel und 6 Zehntel oder 60 Hundertstel als Rest, d. h.,  $60 : 7 = 8$  Hundertstel und 40 Tausendstel als Rest, usw. Die Division bricht nie ab, sobald aber als Rest eine Zahl auftritt, die schon einmal Rest war, treten auch im Ergebnis die gleichen Ziffern wieder auf. Das bedeutet, der Dezimalbruch ist *unendlich*, es folgen ununterbrochen Ziffern, die allerdings von der Stelle ab, an der ein schon gewesener Rest wieder auftritt, sich regelmäßig wiederholen. Der unendl. Dezimalbruch ist *periodisch* und beim Divisor 7 können nur  $7 - 1 = 6$  Ziffern zur Periode gehören. Ist allgemein  $p/q$  ein gekürzter gemeiner Bruch und enthält  $q$  auch von 2 und 5 verschiedene Primfaktoren, so ist der zugehörige Dezimalbruch periodisch, und seine Periode hat höchstens  $q - 1$  Ziffern.

**II.3.** Die Periodizität wird gekennzeichnet, indem die Periode nur einmal geschrieben und überstrichen wird, z. B.  $1/3 = 0,33 \dots = 0,\overline{3}$ ;  $34/99 = 0,\overline{34}$  [lies null-Komma-drei-vier-Periode-drei-vier],  $17/12 = 1,41\overline{6}$ ,  $11/26 = 0,42307\overline{69}$  [lies null-Komma-vier-Periode-zwei-drei-null-sieben-sechs-neun]. In den ersten beiden Beispielen sind die Dezimal-B. *reinperiodisch*, d. h., die Periode beginnt gleich nach dem Komma. Die letzten beiden haben zwischen Komma und Beginn der Periode weitere Ziffern, die man *Vorziffern* oder *Vorperiode* nennt, die Dezimal-B. heißen *gemischt-periodisch*; sie entstehen immer, wenn der Nenner die Primfaktoren 2 oder 5 mit enthält. *Jeder gemeine Bruch kann als endl. oder als unendl., aber period. Dezimalbruch dargestellt werden.* Als Beispiel für die Umkehrung werden zwei period. Dezimal-B. als gemeine B. dargestellt.

Dabei werden Regeln der Algebra und die Eigenschaft period. Dezimal-B. benutzt, daß jede Dezimale bekannt ist.

*Beispiel 1:*

$$\begin{array}{r} p/q = 0,369369\dots \\ 1000 \overline{p/q = 369,369369\dots} \\ 999 \overline{p/q = 369} \\ p/q = 369/999 \\ p/q = 41/111 \end{array}$$

*Beispiel 2:*

$$\begin{array}{r} p/q = 0,35858\dots \\ 1000 \overline{p/q = 358,5858\dots} \\ 10 \overline{p/q = 3,5858\dots} \\ 990 \overline{p/q = 355,0} \\ p/q = 355/990 \\ p/q = 71/198 \end{array}$$

Während danach jede rationale Zahl entweder als gemeiner Bruch, als endl. oder als unendl., aber period. Dezimalbruch dargestellt werden kann, stellen unendl., aber nicht period. Dezimal-B. *irrationale Zahlen* dar.

**II.4.** Die *Grundrechenarten* lassen sich mit Dezimal-B.n, die rationale Zahlen darstellen, nach den Regeln für Positionssysteme durchführen ( $\nearrow$  Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division). Die Anwendung dieser Regeln auf unendl. unperiod. Dezimal-B. ergibt Näherungswerte, die nach der Definition der reellen Zahlen Summe, Differenz, Produkt oder Quotient der betreffenden reellen Zahlen beliebig genau darstellen.

**III. Geschichtliches.** Die Lehre von den gemeinen B.n ist das Werk der *Inder*, besonders von **BRAHMAGUPTA** (um 660 v. Z.). Von hier nahmen die B. ihren Weg über die *Araber* und die italienischen Kaufleute nach Europa. Jedoch zeigt schon das Rechenbuch des **AHMES** nach dem Papyrus Rhind (um 1700 v. u. Z.) eine erstaunlich gut entwickelte Bruchrechnung: Es werden, außer  $2/3$ , nur Stamm-B. benutzt und alle anderen B. zu solchen umgeformt, z. B.  $5/6 = 1/2 + 1/3$ . Dieses Umformen erfolgte allerdings weniger nach hergeleiteten Regeln, sondern nach Tafelzusammenstellungen; das Rechnen mit B.n war dadurch verhältnismäßig schwerfällig. Die *Babylonier* benutzten *Sechziger-B.* oder *Sexagesimal-B.* Das dazu benutzte Positionssystem war allerdings nicht voll ausgebildet. Das Rechnen gestaltete sich dadurch, daß keine Nenner geschrieben wurden, recht einfach. Die *Griechen* haben kein eigenes Bruchsystem entwickelt und das der *Römer* kannte nur B. mit dem Nenner 12, die von dem Gewichtsmaß 1 As = 12 Unzen abgeleitet wurden. Andere B. wurden durch Zwölferbrüche angenähert. In Deutschland bürgerten sich die gemeinen B. erst im *Mittelalter* ein; es dauerte jedoch bis etwa 1700, ehe die Bruchrechnung zum Unterrichtsgegenstand allgemeinbildender Schulen wurde. Auch hier wurde zunächst nur das Allernötigste, meist ohne Begründung in Form von Gedächtnisregeln, gelehrt. Die Dezimal-B. treten erst verhältnismäßig spät auf. Als Begründer der Lehre von den Dezimal-B.n gilt allgemein der holländ. Kaufmann und Ingenieur **Simon STEVIN** (1548—1620). In seinem Werk, das den Dezimal-B.n in Anlehnung an das dekad. Positionssystem vom Durchbruch verhalf, fordert er u. a. die Einführung dezimal geteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme in allen Ländern. Allerdings hat **STEVIN** Vorläufer; zu ihnen zählen



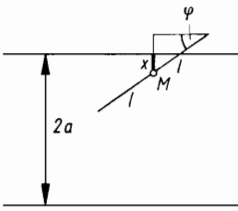
vor allem Johannes REGIOMONTANUS (1436–1476), VIETA (François VIÈTE, 1540–1603) und Christoff RUDOLFF (geb. um 1500).

**Bruchgleichung:** Gleichung, in der mindestens eine der Gleichungsvariablen mindestens einmal im Nenner eines Bruches auftritt, z. B.  $1/(x-1) + 2/(x+1) = 3/x$ . Für alle reellen Zahlen  $x$ , die verschieden von 1,  $-1$  und 0 sind, ist in diesem Beispiel die Multiplikation mit dem Hauptnenner  $x(x+1)(x-1)$  eine äquivalente Umformung, die auf die lineare Gleichung  $x - 3 = 0$  führt. Die Zahl 3 gehört zum Definitionsbereich der Ausgangsgleichung und führt diese beim Einsetzen für die Gleichungsvariable  $x$  in eine wahre Aussage über Gleichheit über, die Lösungsmenge ist mithin  $L = \{3\}$ . Jede B. mit einer Gleichungsvariablen läßt sich durch Multiplikation mit dem Hauptnenner aller auftretenden Brüche, in deren Nenner Gleichungsvariable auftreten, in eine algebraische Gleichung in allgemeiner Form überführen, deren Definitionsbereich gleich dem der vorliegenden B. ist.

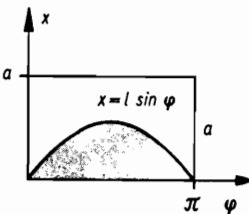
**Bruchziffern** ↗ Klammern I.

**Brücke** ↗ Untergraph.

**Buffonsches Nadelproblem:** von George BUFFON (1707--1788) gestelltes Problem über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Sind in einer Ebene Parallelen im Abstand  $2a$  voneinander gezogen und wird eine Nadel der Länge  $2l$  mit  $l < a$  auf gut Glück auf die Ebene fallengelassen, so schneidet die liegende Nadel mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 2l/(\pi a)$  eine der Parallelen. Bildet die Nadel mit den Parallelen einen Winkel der Größe  $\varphi$  mit  $0 \leq \varphi \leq \pi$  und hat ihr Mittelpunkt  $M$  von der nächstliegenden Parallelen den Abstand  $x$ , so tritt ein Schnittpunkt genau dann auf, wenn  $x < l \sin \varphi$  (Abb. 1), d. h. in einem kartes.  $\varphi, x$ -Koordinaten-



Buffonsches Nadelproblem. Abb. 1: Kennzeichnung der Lage der Nadel



Buffonsches Nadelproblem. Abb. 2: Flächen als Maße für die Anzahlen der günstigen und der mögl. Fälle

system (Abb. 2) für alle Punkte unterhalb der Kurve  $x = l \sin \varphi$  zwischen den Abszissen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$ . Durch Integration ergibt sich der Inhalt  $2l$  dieser Fläche. Er ist ein Maß für die Menge der Lagen, in denen die Nadel eine Parallele schneidet. Dagegen ist  $\pi a$  ein Maß für die Fläche, die für die

Hälfte der Nadel zur Verfügung steht (vgl. Wahrscheinlichkeit, geometrische). Das Verhältnis  $2l/(\pi a)$  beider Maße ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $p$ . Stellt man in einer Versuchsreihe durch Abzählen der Schnittpunkte eine relative Häufigkeit  $p \approx m/n$  fest, so kann aus  $\pi \approx 2ln/(am)$  ein Näherungswert für die Zahl  $\pi$  nach dem B. N. gefunden werden.

**Bunjakowski,** Viktor Jakowlewitsch, geb. 16. 12. 1804 Bar, gest. 12. 12. 1889 Petersburg (Leningrad). — B. war Sohn eines Offiziers und studierte in Coburg, Lausanne und Paris. 1826 kehrte er nach Petersburg zurück und war an verschiedenen Institutionen tätig, seit 1846 an der Universität. — Er arbeitete vorwiegend über Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

**Bunjakowskische Ungleichung** svw. Schwarzsche Ungleichung.

**Byte** ↗ Bit.

## C

**Cantor,** Georg, geb. 3. 3. 1845 Petersburg (Leningrad) als Sohn eines wohlhabenden Kaufmanns, gest. 6. 1. 1918 Halle. — C. studierte von 1862 bis 1867 in Zürich und Berlin und war seit 1869 an der Universität Halle tätig. C. war einer der Begründer der deutschen und der internationalen *Mathematikerkongresse*. Seine Hauptleistungen sind seine arithmet. Definition der *irrationalen Zahlen*, Arbeiten über Zahlensysteme, zu verschiedenen Gebieten der Analysis, zur Topologie, vor allem aber die Begründung der *Mengenlehre*. Erst nach heftigen Auseinandersetzungen, bes. mit KRONCKER, fand C. weltweite Anerkennung.

**Cantor, Satz von** ↗ Stetigkeit einer Funktion IV. **Cantorsches Diagonalverfahren** ↗ rationale Zahlen I., ↗ reelle Zahlen VI.

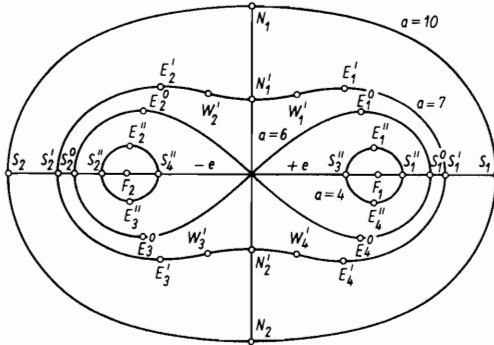
**Cardanische Formel** ↗ kubische Gleichung II.

**Cardano,** Geronimo, geb. 24.(?) 9. 1501 Pavia, gest. 21.(?) 9. 1576 Rom. — C. stammte aus einer vornehmen Familie und genoß eine ausgezeichnete Erziehung. 1523 lehrte er bereits Mathematik in Pavia und promovierte 1526 zum Doktor der Medizin in Padua, wurde aber in die Ärztekammer von Mailand erst 1535 aufgenommen. Später durchzog er Europa und lehrte von 1562 bis 1570 in Bologna. Seine bekannteste Arbeit ist die *«Ars magna»* (1545), in der erstmals die Auflösungsverfahren der Gleichungen dritten Grades nach TARTAGLIA und vierten Grades nach FERRARI öffentlich bekannt gemacht wurden.

**Cassini,** Giovanni Domenico, geb. 8. 6. 1625 Parnaldo, gest. 14.(?) 9. 1712 Paris. — C. war Professor der Astronomie in Bologna, gleichzeitig Festungsbaumeister und mit Arbeiten zur Flußregulierung betraut. Seit 1667 war er Direktor der Sternwarte in Paris. Er verfaßte meist astronom. Schriften; die *C.schen Kurven* sollten die Keplerschen Ellipsenbahnen ersetzen. Sie wurden jedoch erst 1740 von

seinem Sohn J. C. (1677–1756) in dessen Buch »Elements d'astronomie« veröffentlicht.

**Cassinische Kurve:** I. Menge aller Punkte  $P$  einer Ebene, für die das Produkt der Abstände  $r_1 = |PF_1|$  und  $r_2 = |PF_2|$  von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2$  den konstanten Wert  $a^2$  mit  $a \neq 0$  hat (Abb.).



Cassinische Kurven für  $e = 6$  und verschiedene Werte für  $a$ ; für  $a = e = 6$  entsteht eine Lemniskate, für  $a = 4 < e$  entstehen zwei getrennte, zur  $y$ -Achse spiegelsymmetr. Teile

Haben  $F_1$  und  $F_2$  in einem kartes. Koordinatensystem die Koordinaten  $(+e, 0)$  bzw.  $(-e, 0)$ , so gilt  $r_1^2 = (x - e)^2 + y^2$  und  $r_2^2 = (x + e)^2 + y^2$ , und aus  $r_1 \cdot r_2 = a^2$  erhält man durch Quadrieren die Gleichung (1) der C. K. Sie ist eine Kurve 4. Ordnung. Geht man durch  $x = r \cos \varphi$  und

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$$

$y = r \sin \varphi$  zu Polarkoordinaten über, so erhält man Gleichung (2). Die Gestalt einer C. K. hängt vom

$$(2) \quad r^2 = e^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{e^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - e^4)}$$

Verhältnis  $a$  zu  $e$  ab.

**II.** Für  $a \geq e$  ist die Kurve zusammenhängend. Sie schneidet die  $x$ -Achse in Punkten  $S_1(\sqrt{a^2 + e^2}, 0)$  und  $S_2(-\sqrt{a^2 + e^2}, 0)$  mit extremen Werten für  $x$ . Die  $y$ -Achse wird in den Punkten  $N_1(0, \sqrt{a^2 - e^2})$  und  $N_2(0, -\sqrt{a^2 - e^2})$  geschnitten. Im Fall  $a \geq e\sqrt{2}$  hat  $y$  in  $N_1$  ein Maximum und in  $N_2$  ein Minimum. Für  $a = e\sqrt{2}$  hat die Krümmung in den Punkten  $N_1$  und  $N_2$  den Wert Null. Die Berührung mit der Tangente ist dort besonders eng.

Im Fall  $e < a < e\sqrt{2}$  hat  $y$  in  $N_1'$  ein lokales Minimum und in  $N_2'$  ein lokales Maximum. Die Kurve ist eingebuchtet. Sie hat vier Wendepunkte  $W_i'$  mit den Koordinaten  $(\pm \sqrt{(p - q)/2}, \pm \sqrt{(p + q)/2})$  mit  $p = \sqrt{(a^4 - e^4)/3}$  und  $q = (a^4 - e^4)/(3e^2)$ , und sie hat vier weitere Extrema  $E_i'$  in  $(\pm \sqrt{4e^4 - a^4}/(2e), \pm a^2/(2e))$ .

**III.** Für  $a = e$  ist die C. K. eine Lemniskate. Ihre Gleichung ist  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$  in kartes. und  $r = a\sqrt{2} \cos 2\varphi$  in Polarkoordinaten. Sie hat einen Doppelpunkt im Koordinaten-

ursprung  $O$ . Die Punkte  $N_1, N_2$  und die Wendepunkte fallen in  $O$  zusammen. Die beiden Tangenten in  $O$  werden durch  $y = \pm x$  beschrieben. Die Lemniskate besteht aus zwei Schleifen in den Winkelräumen  $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$  und  $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$ . Sie schneidet die  $x$ -Achse in den Punkten  $S_1^0$  und  $S_2^0(\pm a\sqrt{2}, 0)$  mit extremen Werten für  $x$ . In den vier Punkten  $E_i^0 = (\pm(a\sqrt{3})/2, \pm a/2)$  nimmt  $y$  extreme Werte an. Der Flächeninhalt jeder Schleife beträgt  $a^2$ .

**IV.** Für  $0 < a < e$  zerfällt die Cassinische Kurve in zwei in bezug auf die  $y$ -Achse spiegelsymmetr. Teile, die die  $x$ -Achse in zwei weiteren Punkten  $S_3''(\sqrt{e^2 - a^2}, 0)$  und  $S_4''(-\sqrt{e^2 - a^2}, 0)$  schneiden. Die vier Punkte  $E_i''$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , mit den Koordinaten  $(\pm \sqrt{(4e^4 - a^4)}/(2e), \pm a^2/(2e))$  haben extreme  $y$ -Werte.

**Casus irreducibilis** ↗ kubische Gleichung II.

**Cauchy, Augustin Louis**, geb. 21. 8. 1789 Paris, gest. 23. 5. 1857 Seeaux. — C. war Schüler der École Polytechnique und wenige Jahre nach seinem Studium dort Professor. Nach der Julirevolution von 1830 mußte C. seiner extrem königstreuen Gesinnung wegen Frankreich verlassen und lebte bis 1838 vorwiegend in Turin und Prag. Nach seiner Rückkehr nach Paris lehrte C. an einer Schule der Jesuiten. — C. lieferte bahnbrechende Arbeiten zur Grundlegung der Analysis, zur Theorie der Differentialgleichungen und zur Funktionentheorie, aber auch über physikal. und astronom. Probleme.

**Cauchy, Satz von** ↗ absolute Konvergenz von Reihen, III.

**Cauchy-Folge** ↗ Fundamentalfolge, ↗ reelle Zahlen IV.

**Cauchy-Hadamardsche Formel** ↗ Potenzreihe III.

**Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen** ↗ Differenzierbarkeit in **C** I.

**Cauchysche Integralformel** ↗ Integral, komplexes, III.

**Cauchysche Produktformel** ↗ absolute Konvergenz von Reihen III.

**Cauchysche Restform** ↗ Taylorsche Reihe I.

**Cauchyscher Hauptwert** ↗ Integral, uneigentliches, I.4., II.2.

**Cauchyscher Integralsatz** ↗ Integral, komplexes, II.

**Cauchysches Konvergenzkriterium** ↗ Funktionenfolge III.1., ↗ Funktionenreihe III.1., ↗ Konvergenzkriterien für Funktionen III., ↗ Konvergenzkriterien für Reihen II., ↗ Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen II.

**Cauchysches Problem** svw. Anfangswertproblem, ↗ gewöhnliche Differentialgleichung I., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I., ↗ hyperbolische Differentialgleichung I., ↗ partielle Differentialgleichung II.

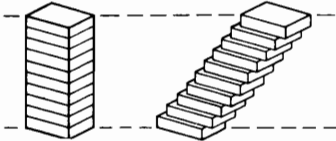
**Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung** ↗ Schwarzsche Ungleichung.

**Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** svw. Schwarzsche Ungleichung.

**Cavalieri, Francesco Bonaventura**, geb. um 1598 Bologna, gest. 3. 12. 1647 Bologna. — C. war Mit-

glied des Jesuitenordens und begann erst spät, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Dabei übte G. GALILEI großen Einfluß auf ihn aus. Seit 1629 war C. Professor der Mathematik in Bologna. In seiner »*Geometria indivisibilibus ...*« (1635) tritt das nach ihm ben. Prinzip auf.

**Cavalierisches Prinzip:** Aussage, daß der Rauminhalt, den jeder von zwei Körpern hat, dem des anderen gleich ist, wenn man sie so zwischen zwei parallele Ebenen legen kann, daß jede zu diesen parallele Ebene die beiden Körper in flächengleichen Schnittfiguren schneidet. Wird z. B. ein Quader durch diese Schnitte in sehr viele quaderförmige Platten sehr kleiner Höhe zerlegt oder aus einem Stapel kongruenter Rechtecke aus Papier aufgebaut, so ändert sich sein Rauminhalt nicht, wenn die Platten gegeneinander verschoben werden (Abb.).



Zur Veranschaulichung des Cavalierischen Prinzips

Bei Angaben über die Gesetzmäßigkeit dieser Verschiebung kann die anschaul. Vorstellung zu einem Satz der Integralrechnung präzisiert werden. Wie sehr die Anschauung fehlgehen kann, ersieht man, wenn man sich aus dem genannten Quader alle Rechtecksflächen, deren Abstand von der Grundfläche durch eine rationale Zahl gegeben ist, parallel zu einer Grundkante um eine halbe Kantenlänge verschoben denkt. Der entstehende Körper hat keinen Rauminhalt, obwohl er den Voraussetzungen des C. P.s zu genügen scheint.

**Cayley, Arthur**, geb. 16. 8. 1821 Richmond, gest. 26. 1. 1895 Cambridge. — Von Beruf Jurist, wurde C. später Professor der Mathematik an der Universität von Cambridge. Er ist einer der Begründer der *Invariantentheorie*, der algebraischen Geometrie und des *Matrizenkalküls*. Sehr bedeutend sind auch seine Arbeiten zur *Gruppentheorie*, zur Funktionentheorie und zur projektiven Geometrie.

**Cayley, Satz von** ↗ Baum.

**Cayley-Hamilton, Satz von** ↗ Eigenwert I.3.

**Cayleysche Tafel** svw. Gruppentafel.

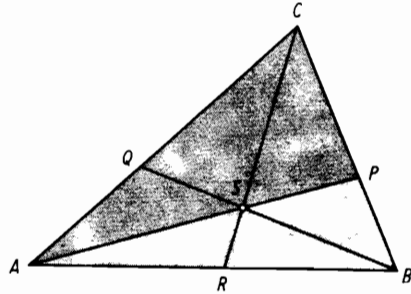
**Ceva, Giovanni**, 1647 bis 1734. — Er gab zu dem Satz von Menelaos über Dreieckstransversalen eine elegante Herleitung und bewies den nach ihm ben. dualen Satz.

**Ceva, Satz von:** *Drei Ecktransversalen (↗ Dreieckstransversalen) eines Dreiecks, die einen Punkt gemeinsam haben, der auf keiner der Geraden durch zwei Ecken des Dreiecks liegt, schneiden diese Geraden in Punkten, für die das Produkt der Teilverhältnisse mit den zwei Eckpunkten auf jeder Geraden den Wert +1 hat (Abb.).* Haben z. B. im Dreieck *ABC* die Ecktransversalen den Punkt *S* gemeinsam

und gilt  $(g_{AS} \cap g_{BC}) = P$ ,  $(g_{BS} \cap g_{CA}) = Q$ ,  $(g_{CS} \cap g_{AB}) = R$ , so wird (1) behauptet.

$$(1) \quad \frac{|AR|}{|RB|} \cdot \frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} = +1$$

Der Beweis ergibt sich aus dem *Satz von Menelaos*. Werden nur die absoluten Beträge der Teilverhältnisse betrachtet, so gilt im Dreieck *ABP* für die Transversale *CR* die Beziehung  $(|AR|/|RB|) \cdot (|BC|/|CP|) \cdot (|PS|/|SA|) = 1$  und im Dreieck *APC* für die Transversale *BQ* die Beziehung  $(|AS|/|SP|) \cdot (|PB|/|BC|) \cdot (|CQ|/|QA|) = 1$ .



Satz des Ceva

Das Produkt dieser Gleichungen ergibt die Behauptung. Liegt Punkt *S* im Innern des Dreiecks, so sind die drei Teilverhältnisse positiv, liegt *S* außerhalb des Dreiecks *ABC*, so sind stets zwei der Teilverhältnisse negativ, und eins ist positiv, so daß ihr Produkt stets positiv ist. Der Satz von Ceva ist die duale Aussage zum Satz von Menelaos (↗ Dualität). Teilen umgekehrt drei Ecktransversalen eines Dreiecks die Gegenseiten in Teilverhältnissen, deren Produkt +1 ist, so haben sie einen Punkt *S* gemeinsam, denn wenn *P, Q, R* diese Punkte sind und sich etwa die Verbindungsgeraden *AP* und *BQ* im Punkte *S* schneiden, ergibt die Verbindungsgerade *CS* auf der Geraden *AB* einen Schnittpunkt *R'*, der nach dem Satz von Ceva die Strecke *AB* im gleichen Verhältnis teilt wie der gegebene Punkt *R* und deshalb mit *R* zusammenfallen muß. Danach schneiden sich die *Seitenhalbierenden* eines Dreiecks in einem Punkte, weil für sie nach Definition gilt  $(|AR|/|RB|) = (|BP|/|PC|) = (|CQ|/|QA|) = 1$ .

**Charakterisierungssatz** ↗ Approximation II., III.

**Charakteristik:** einem Ring zugeordnete ganze Zahl, die den Wert 0 hat, wenn es für jedes vom Nullelement verschiedene Ringelement *a* keine natürl. Zahl *n* > 0 gibt, für die *n* · *a* = 0 gilt, und die den Wert *q* hat, wenn *q* ≠ 0 die kleinste natürl. Zahl ist, so daß *q* · *a* = 0 für alle Ringelemente *a* ≠ 0 gilt. Die C. eines nullteilerfreien Ringes, insbes. eines Körpers, ist Null oder eine Primzahl. S. a. Körper I.; algebraische Geometrie II.

**charakteristische Differentialgleichung** ↗ partielle Differentialgleichung II., III.

**charakteristische Fläche** ↗ parabolische Differentialgleichung I., ↗ partielle Differentialgleichung .III.

**charakteristische Funktion: I.** der Erwartungswert von  $e^{itx}$ , wobei  $X$  eine Zufallsgröße,  $t$  ein reeller Parameter und  $i$  die imaginäre Einheit bedeuten. Die ch. F. der Zufallsgröße  $X$  mit der Verteilungsfunktion  $F(x)$  ist dann gemäß Formel (1) definiert, die für eine diskrete Zufallsgröße mit

$$(1) \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

$P(X = x_k) = p_k$  die Formel (2), für eine stetige Zufallsgröße mit der Dichte  $f(x)$  die Form (3) annimmt. Die ch. F.  $\psi(t)$  ist danach im stetigen

$$(2) \quad \psi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k$$

$$(3) \quad \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Fall gerade die Fouriertransformierte der Dichte  $f(x)$ . Ist z. B.  $X$  poissonverteilt mit dem Parameter  $\lambda$  ( $\nearrow$  Poisson-Verteilung), so gilt (4) für die

$$(4) \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(\exp[it]-1)}$$

ch. F. von  $X$ . Ist  $X$  dagegen gleichverteilt in  $]-a, a[$  ( $\nearrow$  Gleichverteilung), so gilt (5) für die ch. F. von  $X$ . Für eine Normalverteilung  $X \in N(a, \sigma)$  schließlich gilt (6) für die ch. F. von  $X$ .

$$(5) \quad \psi(t) = \int_{-a}^a e^{itx} \frac{1}{2a} dx = \frac{\sin at}{at}$$

$$(6) \quad \psi(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[itx - (x-a)^2/(2\sigma^2)] dx = \exp[iat - \sigma^2 t^2/2]$$

**II. Eigenschaften ch. F.en:** **II.1.** Eine ch. F. ist auf  $]-\infty, \infty[$  gleichmäßig stetig. **II.2.** Für jede ch. F.  $\psi(t)$  gilt:  $\psi(0) = 1, |\psi(t)| \leq 1$  für alle  $t$ . **II.3.**  $\psi(t)$  ist positiv definit, d. h., für beliebige reelle Zahlen  $t_1, \dots, t_n$  und beliebige komplexe Zahlen  $z_1, \dots, z_n$  ist stets die Ungleichung (7) erfüllt.

$$(7) \quad \sum_{j,k=1}^n \psi(t_k - t_j) z_k \bar{z}_j \geq 0$$

Diese Eigenschaften charakterisieren die ch. F.en vollständig, denn es gilt der Satz von Bochner-Chintschin: Genügt eine Funktion  $\psi(t)$  des reellen Arguments  $t$  den Bedingungen II.1. bis II.3., so ist sie ch. F. einer gewissen Zufallsgröße  $X$ . Mittels der ch. F. lassen sich nach (8) leicht die

$$(8) \quad \psi^{(k)}(0) = i^k EX^k = i^k m_k$$

Momente berechnen. Für eine Normalverteilung  $X \in N(a, \sigma)$  z. B. folgen aus (9) die Beziehungen

$$(9) \quad \psi(t) = \exp[iat - \sigma^2 t^2/2]$$

(10) und (11), aus denen der Erwartungswert  $EX$

$$(10) \quad im_1 = \psi'(0) = ia$$

$$(11) \quad i^2 m_2 = -m_2 = \psi''(0) = -\sigma^2 - a^2$$

und die Varianz  $D^2X$  nach (12) und (13) berechnet werden können.

$$(12) \quad EX = m_1 = a$$

$$(13) \quad D^2X = m_2 - m_1^2 = \sigma^2 + a^2 - a^2 = \sigma^2$$

**III.** Von größter Bedeutung für die Anwendung ist der folgende Satz: Die ch. F. einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) ist gleich dem Produkt ihrer ch. F.en. Sind  $X_1, X_2$  stetig, so ist die Dichte der Summe die Faltung der beiden Dichten ( $\nearrow$  Funktionen von Zufallsgrößen), und dieser Satz ist dann der Faltungssatz der Fouriertransformation. Ist z. B.  $X$  binomialverteilt ( $\nearrow$  Binomialverteilung) mit den Parametern  $n$  und  $p$ , so kann die ch. F. von  $X$  bestimmt werden.  $X$  kann als Anzahl des Eintretens eines Ereignisses  $A$  in  $n$  unabhängigen Versuchen gedeutet werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von  $A$  in jedem Versuch  $p$  ist. Deshalb kann  $X$  durch (14) dargestellt werden mit  $X_i = 0$ , falls

$$(14) \quad X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$A$  im  $i$ -ten Versuch nicht eintritt, aber mit  $X_i = 1$ , falls  $A$  im  $i$ -ten Versuch eintritt.

Nach Voraussetzung sind die  $X_i$  unabhängige Zufallsgrößen. Deshalb gilt (15) nach dem Faltungs-

$$(15) \quad \psi_X(t) = \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t)$$

satz. Dabei ist  $\psi_{X_i}(t)$  die ch. F. von  $X_i$ ,  $\psi_X(t)$  die von  $X$ . Aus der Formel (2) folgt (16), so daß

$$(16) \quad \psi_{X_i}(t) = e^{it \cdot 0} q + e^{it \cdot 1} p = q + pe^{it}$$

man  $\psi_X(t) = (q + pe^{it})^n$  erhält.

**IV. Umkehrformel:** Ist  $F(x)$  die Verteilungsfunktion und  $\psi(t)$  die ch. F. einer Zufallsgröße  $X$  und sind  $x_1, x_2$  Stetigkeitsstellen von  $F(x)$ , so gilt die Beziehung (17). Diese Beziehung vereinfacht sich zu (18),

$$(17) \quad F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \psi(t) dt$$

falls  $X$  stetig und  $f(x)$  die Dichte von  $F(x)$  ist.

$$(18) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt$$

Die Dichte erhält man danach durch inverse Fouriertransformation aus der ch. F.

**Eindeutigkeitssatz:** Die Verteilungsfunktion ist durch ihre ch. F. eindeutig bestimmt. Der Eindeutigkeitssatz ist eine direkte Folgerung aus der Umkehrformel. Die Anwendungen dieses Satzes sind vorwiegend folgender Art: Erhält man durch irgendwelche Überlegungen für  $X$  z. B. die ch. F.  $e^{iat - \sigma^2 t^2/2}$ , so weiß man nach dem Eindeutigkeitssatz und (6) sofort, daß  $X \in N(a, \sigma)$  ist. Sind z. B.  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsgrößen und beide nach (19) und (19a)

poissonverteilt, so kann die Verteilung der Summe  $X + Y$  bestimmt werden. Nach (4) gelten (20)

$$(19) \quad P(X = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}$$

$$(19a) \quad P(Y = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}$$

$$(20) \quad \psi_X(t) = e^{\lambda_1(\exp\{t\}-1)}$$

$$(20a) \quad \psi_Y(t) = e^{\lambda_2(\exp\{t\}-1)}$$

und (20a). Wegen der Unabhängigkeit gilt nach dem Faltungssatz für  $\psi_{X+Y}(t)$  die Formel (21).

$$(21) \quad \psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t) \cdot \psi_Y(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(\exp\{t\}-1)}$$

Nach dem Eindeutigkeitsatz ist die einzige Verteilung, die (21) als ch. F. hat, die Poisson-Verteilung mit dem Parameter  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Die Summe zweier unabhängiger poissonverteilter Zufallsgrößen ist danach wieder poissonverteilt mit dem Parameter  $\lambda_1 + \lambda_2$ . V. Grenzwertsätze für ch. F.en. Man sagt, eine Folge  $\{F_n(x)\}$  von Verteilungsfunktionen konvergiert im wesentlichen gegen eine Verteilungsfunktion  $F(x)$ , wenn in allen Stetigkeitsstellen von  $F(x)$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ . Im diskreten Fall bedeutet die Konvergenz im wesentlichen von  $F_n(x)$  gegen  $F(x)$ , daß die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktionen konvergieren:  $p_k^{(n)} \rightarrow p_k$  für alle  $k$ . Im stetigen Fall folgt aus der Konvergenz im wesentlichen die Konvergenz der Dichten:  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x$ .

Satz 1: Wenn die Folge  $\{F_n(x)\}$  von Verteilungsfunktionen im wesentlichen gegen die Verteilungsfunktion  $F(x)$  konvergiert, so konvergiert die Folge  $\{\psi_n(t)\}$  der entsprechenden ch. F.en gegen die ch. F.  $\psi(t)$  von  $F(x)$ . Diese Konvergenz ist gleichmäßig in jedem endlichen Intervall.

Satz 2: Wenn eine Folge  $\{\psi_n(t)\}$  von ch. F.en gegen eine stetige Funktion  $\psi(t)$  konvergiert, so konvergiert die Folge  $\{F_n(x)\}$  der entsprechenden Verteilungsfunktionen gegen eine gewisse Verteilungsfunktion  $F(x)$ . Die ch. F.  $\psi(t)$  ist dann gemäß Satz 1 gerade die ch. F. von  $F(x)$ . Die Voraussetzung von Satz 2 ist insbes. erfüllt, wenn eine der beiden Voraussetzungen erfüllt ist: entweder konvergiert  $\{\psi_n(t)\}$  gleichmäßig in jedem endlichen Intervall gegen eine Funktion  $\psi(t)$ , oder  $\{\psi_n(t)\}$  konvergiert gegen eine ch. F.  $\psi(t)$ . Ist z. B. (22) eine Folge von Binomial-

$$(22) \quad p_k^{(n)} = \binom{n}{k} p_n^k q_n^{n-k} \text{ für } k = 0, 1, \dots, n$$

verteilungen mit den Parametern  $n$  und  $p_n$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ , so kann als Anwendung von Satz 2 bestimmt werden, gegen welche Verteilung diese Folge konvergiert. — Man erhält den Grenzwertsatz von Poisson. Es ist  $\psi_n(t) = (q_n + e^t p_n)^n$  die Folge der zugehörigen ch. F.en. Sie konvergiert offenbar gegen die ch. F.  $\psi(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$ , d. h., die Grenzverteilung ist die Poissonverteilung (23).

$$(23) \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

VI. Ch. F.en mehrdimensionaler Zufallsgrößen. Unter der ch. F. eines Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$  versteht man den Erwartungswert der Größe (24), in der

$$(24) \quad \exp \left[ i \sum_{k=1}^n t_k X_k \right]$$

$t_1, \dots, t_n$  reelle Parameter sind. Für eine mehrdimensionale Normalverteilung erhält man z. B., wenn die  $X_i$  unabhängig sind, die ch. F. des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$  als Produkt der ch. F.en der einzelnen Komponenten. Auch für ch. F.en mehrdimensionaler Zufallsgrößen gibt es eine Umkehrformel und einen Grenzwertsatz, so daß auch hier ein eindeutiger und stetiger Zusammenhang zwischen der ch. F. und der Verteilung besteht.

Über die Verwendung des Begriffes ch. F. in der Maßtheorie vgl. Lebesguesches Maß II. und Funktion, meßbare.

charakteristische Gleichung ↗ Eigenwert I., ↗ Eigenwertberechnung I., III., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung II., ↗ lineare gewöhnliche Differentialgleichung I.4., ↗ Stabilität, ↗ Übertragungsfunktion.

charakteristische Kurve ↗ partielle Differentialgleichung II.

charakteristische Linie ↗ partielle Differentialgleichung III., ↗ hyperbolische Differentialgleichung I.

charakteristischer Streifen ↗ partielle Differentialgleichung II.

charakteristisches Differentialgleichungssystem

↗ partielle Differentialgleichung II.

charakteristisches Polynom ↗ Adjazenzmatrix, ↗ Eigenwert I., ↗ Hauptachsentransformation III., V.

$\chi^2$ -Anpassungstest: ein parameterfreier (↗ Parametertest) Anpassungstest. Die Nullhypothese  $H_0$  (↗ Signifikanztest I.), die zu prüfen ist, lautet demnach  $F_X(x) = F_0(x)$ , wenn  $F_X(x)$  die unbekannte Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße  $X$  und  $F_0(x)$  eine vorgegebene, die hypothet. Verteilungsfunktion ist.

I. Liegt zunächst diese Funktion  $F_0(x)$  vollständig fest, d. h., enthält sie keine unbekannt Parameter mehr, so teilt man den Wertebereich der Zufallsgröße  $X$  in endlich viele disjunkte Mengen, sog. Klassen  $A_1, \dots, A_k$  ein. Bei stetigem  $X$  sind die  $A_i$  Intervalle, bei diskretem  $X$  Gruppen mögl. Werte von  $X$ . Als theoret. Wahrscheinlichkeit  $\varphi_i$  wird dann angesehen, daß  $X$  in  $A_i$  fällt, d. h., die Wahrscheinlichkeit von  $X \in A_i$  unter der Bedingung, daß die Hypothese  $H_0$  wahr ist. Ist  $A_i = [a_i, b_i[$ , so gilt  $\varphi_i = F_0(b_i) - F_0(a_i)$ . Wird nun aus  $X$  eine Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  vom Umfang  $n$  entnommen und ist  $M_i$  die Anzahl der Stichprobenwerte in  $A_i$ , so gelten  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$  und  $M_1 + \dots + M_k = n$ . Die Klasseneinteilung ist natürlich weitgehend willkürlich, es muß nur darauf geachtet werden, daß für die Randklassen  $np_i \geq 1$ , für die übrigen  $np_i \geq 5$  ist. Ist das nicht erfüllt, müssen Klassen zusammengelegt werden. Ist die Klasseneinteilung nach diesen Erfordernissen vorgenommen, so genügt die gemäß (1) definierte Testgröße  $\chi^2$ , unter der

Voraussetzung, daß  $H_0$  wahr ist, asymptotisch einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $m = k - 1$  Freiheitsgraden. Da  $\chi^2$  ein Maß für die Abweichung der wahren Verteilung von der hypothet. ist, wird man die Hypothese ablehnen, wenn der aus einer konkreten Stichprobe gemäß (1) berechnete Wert einen gewissen krit. Wert überschreitet.

$$(1) \quad \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(M_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{M_i^2}{np_i} - n$$

Diesen krit. Wert  $\chi_{\alpha}^2$  findet man zu vorgegebenem Signifikanzniveau  $\alpha$  aus Tafeln der *Quantile* der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $m = k - 1$  Freiheitsgraden:  $\chi_{\alpha}^2$  ist gerade das  $(1 - \alpha)$ -Quantil dieser Verteilung. Der krit. Bereich wird durch  $\chi^2 > \chi_{\alpha}^2$  beschrieben, d. h., ist der auf Grund einer konkreten Stichprobe gemäß (1) berechnete Wert  $\chi^2$  größer als  $\chi_{\alpha}^2$ , so wird  $H_0$  abgelehnt.

**II. Der Fall zusätzl. Parameter:** Meist ist die hypothet. Verteilung  $F_0(x)$  nicht eindeutig festgelegt, sondern die Hypothese sagt nur, daß  $F_0(x)$  aus einer bestimmten Menge von Verteilungsfunktionen  $F(x; \vartheta_1, \dots, \vartheta_r)$  stammt, die von  $r$  Parametern abhängen. Die Hypothese könnte z. B. lauten » $X$  ist normalverteilt mit den zwei Parametern  $a$  und  $\sigma$ « oder » $X$  ist poissonverteilt mit dem einen Parameter  $\lambda$ «. In diesem Fall berechnet man aus der Stichprobe Maximum-Likelihood-Schätzungen  $\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_r$  der Parameter ( $\nearrow$  Maximum-Likelihood-Methode) und wählt als Verteilungsfunktion  $F_0(x) = F(x; \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_r)$ , mit der die  $p_i$  und  $\chi^2$  wie in I. berechnet werden. Bei der Festlegung des krit. Bereichs ist zu beachten, daß man nur noch  $m = k - r - 1$  Freiheitsgrade hat, wenn  $r$  Parameter aus der Stichprobe geschätzt worden sind. Im übrigen bleibt der Test der gleiche wie in I.

**Chintschin, Khintchine, Alexander Jakowlewitsch,** geb. 19. 7. 1894 Kondrowo, gest. 18. 11. 1959 Moskau. — Ch., ein Schüler von LUSIN, hatte 1916 bei Beendigung des Studiums in Moskau schon über Maß- und Integrationstheorie publiziert. 1921 wurde er zum Professor berufen und arbeitete seit 1922 an der Moskauer Universität. Ch. gilt als einer der Begründer der sowjet. Schule der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Er befaßte sich bes. mit Grenzwerttheoremen und stationären Zufallsprozessen und benutzte die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathemat. Apparat der statist. Physik. Wichtige Resultate erzielte Ch. in der Zahlentheorie, der Informationstheorie, der Funktionentheorie und zur Geschichte der Mathematik.

**$\chi^2$ -Verteilung:** Verteilungsgesetz für eine stetige Zufallsgröße  $X$  mit  $n \in \mathbf{N}$  Freiheitsgraden, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  für  $x < 0$  den Wert 0 und für  $x \geq 0$  die Form (1) hat. Dabei ist  $\Gamma(x)$

$$(1) \quad f(x) = x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2} / [2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)]$$

die *Gammafunktion*. Der *Erwartungswert* der  $\chi^2$ -V. ist  $n$ , die *Streuung*  $\sqrt{2n}$ . Auf die  $\chi^2$ -V. wird man folgendermaßen geführt: Sind die  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsgrößen ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) mit  $X_i \in N(a, \sigma)$  für alle  $i$  ( $\nearrow$  Normal-

verteilung), so kann  $(X_1, \dots, X_n)$  als *Stichprobe* vom Umfang  $n$  aus einer Grundgesamtheit aufgefaßt werden, in der das Merkmal  $X$  nach  $N(a, \sigma)$  verteilt ist. Die *Stichprobenfunktion* (2) ist dann  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden.

$$(2) \quad \chi^2 = (1/\sigma^2) \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

Die  $\chi^2$ -V. spielt in der mathemat. Statistik eine wesentl. Rolle, z. B. beim  $\chi^2$ -Anpassungstest. Für die dazu notwendigen *Quantile* gibt es umfangreiche Tabellen.

**Christoffel, Elvin Bruno,** geb. 10. 11. 1829 Montjoie, gest. 15. 3. 1900 Strasbourg. — C. promovierte 1856 in Berlin, wurde 1860 dort Privatdozent, 1862 Professor in Zürich, 1869 in Berlin und schließlich 1872 in Strasbourg. — C. leistete bedeutende Beiträge über Invariantentheorie, über Funktionen- und Flächentheorie und über partielle Differentialgleichungen.

**Christoffelsche Symbole**  $\nearrow$  innere Geometrie II.

**chromatische Zahl**  $\nearrow$  Färbung von Graphen.

**Church, Alonzo,** geb. 14. 6. 1903 Washington. — Nach seinem Studium 1920/27 in Princeton setzte C. seine Ausbildung an der Harvard-Universität, in Göttingen und Amsterdam fort. Seit 1929 ist er an der Universität Princeton tätig, seit 1947 als Professor. — C. befaßte sich mit Problemen der Grundlagenforschung und Logik, am bekanntesten sind sein  $\lambda$ -Kalkül und die *C.sche Hypothese* geworden.

**Churchsche Hypothese** [nach dem Mathematiker A. Church]: *mathematische Logik* Hypothese, nach der die intuitiven Begriffe der *Berechenbarkeit* bzw. des *Verfahrens* durch die bisher angegebenen Präzisionen, d. h. durch allgemein-rekursive Funktionen, durch Turing-Maschinen oder durch Markow-Algorithmen, voll erfaßt werden. Die C. H. wird dadurch gestützt, daß sich alle diese verschiedenartigen Präzisionen des Berechenbarkeitsbegriffs als äquivalent erwiesen haben.

**Clairaut, Alexis Claude,** geb. 13(?) . 5. 1713 und gest. 17. 5. 1765 Paris. — C. war Sohn eines Mathematikers und ein Wunderkind. Bereits mit 18 Jahren wurde er Mitglied der Pariser Akademie und war einer der Teilnehmer der Gradmessung 1736/37 in Lappland. — Zuerst arbeitete er vorwiegend geometrisch über die graph. Verdopplung des Würfels, die Theorie der Raumkurven, über geodät. Linien u. a.; im Jahre 1743 veröffentlichte er das Standardwerk »Théorie de la figure de la terre«, dem 1752 die »Théorie de la lune« folgte. Auch über Differentialgleichungen hat C. erfolgreich gearbeitet und die Entdeckung des Uranus vorausgesagt.

**closed-loop**  $\nearrow$  Prozeßkopplung.

**COBOL**  $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners I.

**Codazzi, Delfino,** geb. 7. 3. 1824 Lodi, gest. 21. 7. 1873 Pavia. — C. war Gymnasiallehrer in Lodi und Pavia, seit 1865 Professor der Algebra und der analyt. Geometrie in Pavia. Er arbeitete vorwiegend über *Differentialgeometrie*. In einer Abhandlung 1858 über abwickelbare Flächen sind die *Mainardi-C.schen Formeln* enthalten.

**Code** swv. Kode, ↗ Kodierung III.

**Cohen, Paul**, geb. 2. 4. 1934 Longbranch (New Jersey). — C. ist zur Zeit als Professor der Mathematik an der Stanford-Universität tätig. Als seine bedeutendste Leistung gilt der Beweis der Unlösbarkeit der Cantorsche *Kontinuum-Hypothese* (1963).

**Cokreis** ↗ Cozyklus.

**Composer** ↗ Betriebssystem II.

**Computer** swv. Rechenanlage.

**Cosecans hyperbolicus** ↗ hyperbolische Funktion I.

**Cosinus hyperbolicus** ↗ hyperbolische Funktion I.

**Cotangens hyperbolicus** ↗ hyperbolische Funktion I.

**Coulombfeld** ↗ Vektorfeld.

**Cozyklenbasis** ↗ Spannungen auf Graphen III.

**cozyklomatische Zahl** ↗ Spannungen auf Graphen III.

**Cozyklus**: nichtleere Mengen  $\omega$  von Bögen, die zwei Knotenmengen  $A_1$  und  $A_2$  eines gerichteten Graphen  $G = (K, U)$  verbinden, für die gilt  $A_1 \neq \emptyset$ ,  $A_2 \neq \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cup A_2 = K$ . Wächst durch Löschen der Bögen von  $\omega$  die Anzahl der Komponenten von  $G$  um genau 1, so heißt der  $C. \omega$  *elementar* (↗ Spannungen auf Graphen III.). Sind in einem elementaren  $C.$  alle Bögen gleich gerichtet, so spricht man von einem *Cokreis*. In einem gerichteten Graphen  $G$  gilt stets die folgende Aussage: Durch jeden Bogen  $b$  von  $G$  geht entweder ein Kreis oder ein Cokreis.

Allgemeiner gilt in einem gerichteten Graphen  $G$  stets das von G. J. MINTY stammende *Lemma der farbigen Bögen*: Sind in einem gerichteten Graphen mit den Bögen 1, 2, ...,  $m$  die Bögen 2, 3, ...,  $m$  willkürlich rot, grün oder schwarz, der Bogen 1 aber schwarz gefärbt, so gilt genau eine der folgenden beiden Aussagen:

- 1) Durch den Bogen 1 geht ein Elementarzyklus, der nur aus schwarzen und roten Bögen besteht, und dabei sind alle schwarzen Bögen im gleichen Sinne gerichtet.
- 2) Durch den Bogen 1 geht ein elementarer Cozyklus, der nur aus schwarzen und grünen Bögen besteht, und dabei sind alle schwarzen Bögen im gleichen Sinne gerichtet.

**CPM**: Critical Path Method, ↗ Netzplantechnik VI.

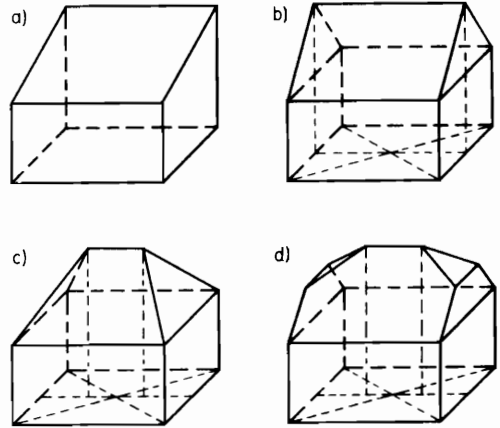
**Cramer, Gabriel**, geb. 31. 7. 1704 in Genf als Sohn eines Arztes, gest. 4. 1. 1752 Bagnols bei Nismes. — Nach seinem Studium an der Universität Genf wurde C. dort Professor der Philosophie und der Mathematik. Von 1727/29 unternahm er eine Studienreise durch viele Länder Europas. Seit seiner Heimkehr bekleidete C. hohe kommunale Ämter in Genf. Sein sich rasch verschlechternder Gesundheitszustand führte C. nach Südfrankreich, dort verstarb er bald. Sein Hauptwerk ist die »Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques« (1750), in dem auch die Theorie der Auflösung von Gleichungssystemen durch Determinanten gegeben wird.

**Cramersche Regel** ↗ lineares Gleichungssystem IV.

**Critical Path Method** ↗ Netzplantechnik VI.

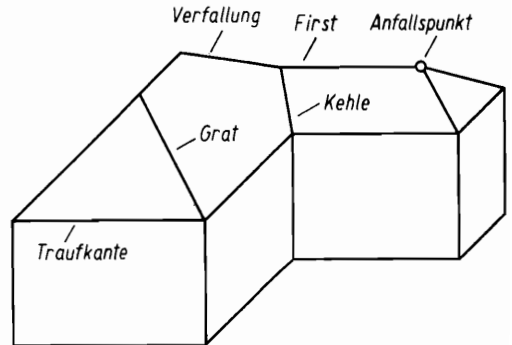
## D

**Dachausmittlung**: Bestimmung der Dachform eines Gebäudes in Eintafelprojektion aus dem gegebenen Grundriß. Man unterscheidet *Pult-, Sattel-, Walm- und Knüppelwalmdächer* (Abb. 1). Die Oberkanten



Dachausmittlung. Abb. 1: a) Pult-, b) Sattel-, c) Walm- und d) Knüppelwalmdach

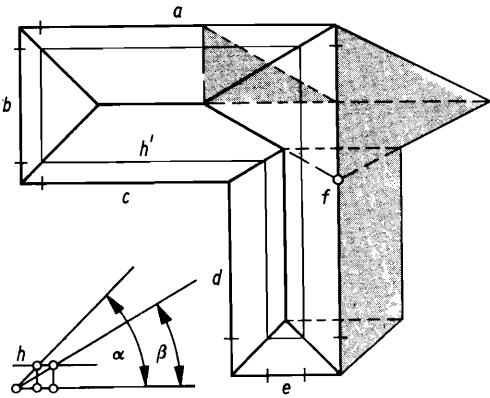
der Seitenmauern, von denen aus sich die Dächer erheben, werden *Traufkanten* genannt. An ihnen laufen die Regentraufen entlang. Die Schnittgerade zweier benachbarter Dachebenen heißt *Grat* oder *Kehle*, je nachdem sie von einer ausspringenden oder einspringenden Ecke aufsteigt (Abb. 2). Die Schnitt-



Dachausmittlung. Abb. 2: Dachkanten

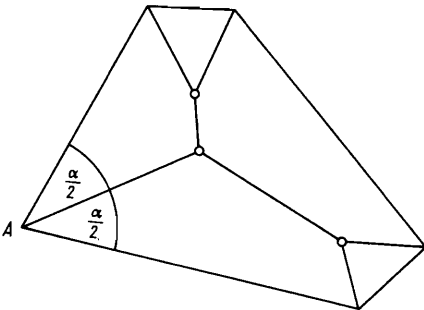
gerade zweier nicht benachbarter Dachebenen heißt *First* oder *Verfallung*, je nachdem, ob sie horizontal oder nicht horizontal verläuft. Punkte, in denen sich drei Dachebenen treffen, nennt man *Anfallspunkte*. Sollen zu dem gegebenen Traufkantenviereck  $abcdef$  die Dachebenen über den Traufen  $a, b$  und  $c$  den Neigungswinkel  $\alpha$ , die Dachebenen über den Traufen  $d, e$  und  $f$  den Neigungswinkel  $\beta$  haben

(Abb. 3), so werden die Schnittgeraden der Dachebenen bestimmt durch eine Höhenlinie der willkür. Höhe  $h$ . Die wahre Größe der Dachflächen wird



Dachausmittlung. Abb. 3

nach Konstruktion des Stützdreiecks durch Umklappen um die Traufkante in die Zeichenebene gewonnen. Ein „Dachkörper“ mit überall gleichen Neigungswinkeln tritt bei *Schutthalden* über einem vorgegebenen Grundstück auf. (Abb. 4). Der Nei-



Dachausmittlung. Abb. 4: Schutthalde

gungswinkel ist der natürl. Böschungswinkel des Schüttmaterials. Bei gleichen Neigungswinkeln werden die Grundrisse der Kanten und Kehlen als Winkelhalbierende gefunden. Der danach konstruierte Dachkörper stellt bei gegebenem Material die beste Ausnutzung des Grundstückes dar.

**Dämpfungssatz** ↗ Laplacetransformation II.4.

**Dandelin, Pierre**, geb. 12. 4. 1794 Bourget bei Paris, gest. 15. 2. 1847 Brüssel. — D. war Professor für Bergwesen in Lüttich und später für Physik in Namur. Sein bevorzugtes Arbeitsgebiet war die Theorie der Kegelschnitte.

**Dandelin'sche Kugel** ↗ Kegelschnitt I.

**Dantzig, George Bernard**, geb. 8. 11. 1914 Portland (Oregon). — D. hat wesentl. Anteil an der Ausarbeitung der *linearen Optimierung*. Er erzielte seine Ergebnisse unabhängig von KANTOROWITSCH und gab mit seiner *Simplexmethode* einen Lösungsalgorithmus an. Nach seinem Studium an der Universität

von Maryland promovierte er 1937 in Michigan und arbeitete an verschiedenen Universitäten der USA. Über ein Jahrzehnt war er in der militär. Forschung tätig. 1960 kehrte er an die Universität in Berkeley zurück und wurde dort zum Professor berufen.

**Darboux, Jean Gaston**, geb. 14. 8. 1842 Nîmes, gest. 23. 2. 1917 Paris. — D. stammte aus bescheidenen Verhältnissen. Nach Absolvierung der École Polytechnique und der École Normale 1861 entschied er sich für den Lehrberuf an der École Normale. Mit Unterstützung einflußreicher Pariser Gelehrter erhielt er nach seiner Promotion 1866 zwei Lehraufträge und wurde 1881 zum Professor berufen. Seit 1889 erwarb er sich als Dekan der naturwissenschaftl. Fakultät Verdienste beim Neuaufbau der Sorbonne und war ab 1900 ständiger Sekretär der Académie des sciences. Seine Hauptleistungen liegen auf dem Gebiet der *Flächentheorie*; er bemühte sich jedoch stets, möglichst an alle Gebiete der Mathematik anzuknüpfen, sie geometrisch zu durchdringen und in organ. Zusammenhang zwischen Mechanik, Variationsrechnung, Theorie der partiellen Differentialgleichungen und Invariantentheorie herauszuarbeiten.

**Darbouxsche Ober- bzw. Untersumme** ↗ Integral I. **darstellende Geometrie**: Theorie der zeichner. Mittel zur Konstruktion der eindeutigen Projektion geometr. Gebilde speziell des dreidimensionalen Raumes auf eine Ebene. Ist der Zusammenhang zwischen Original und Bild sogar eineindeutig, so lassen sich räuml. Probleme durch Konstruktion in der Zeichenebene lösen.

**Darstellung: I.** Homomorphismus einer Gruppe in die multiplikative Gruppe der regulären Matrizen (↗ Matrix III.) oder allgemeiner in eine Gruppe linearer Operatoren eines Vektorraumes. Ist der Homomorphismus ein Isomorphismus, so heißt die D. *treu*. Analog spricht man bei der homomorphen Abbildung einer Gruppe in die multiplikative Halbgruppe eines Ringes von einer D. der Gruppe oder bei dem Homomorphismus eines Ringes in einen Körper von einer D. des Ringes.

**II.** Die *D.stheorie* untersucht die homomorphen Abbildungen von Gruppen in die Gruppe der regulären Matrizen oder allgemeiner in eine Gruppe linearer Operatoren eines Vektorraums. Für Gruppen von endlich vielen Elementen läßt sich die Frage nach D.en dieser Gruppe auf eine entsprechende Frage nach Algebren (↗ Algebra, hyperkomplexes System) zurückführen. Für eine Reihe wichtiger Gruppen, z. B. die symmetr. Gruppen, sind bes. Methoden entwickelt worden, um ihre D. zu gewinnen. Für unendl. insbes. topolog. Gruppen sind die Probleme der D.stheorie außerordentlich schwierig. Für gewisse Liesche Gruppen, vor allem für die Drehgruppe und die Lorentzgruppe, sind jedoch die wichtigsten Fragen beantwortet.

Die D.stheorie dieser Gruppen wird in der Analysis vielfach angewendet. D.en der *Drehgruppe*, d. h. der Gruppe der Drehungen einer Kugel im Raum, geben z. B. Anlaß zu einer vertieften Theorie der *Kugelfunktionen*, während sich durch die D.en anderer Gruppen z. B. die *Besselfunktionen* herleiten lassen.



Die D.en der Lorentzgruppe sind für die Physik wichtig. Bes. in der *Quantentheorie* ist die D.theorie der Gruppen zu einem unentbehrl. Hilfsmittel der theoret. Physik geworden. Die D.theorie wurde von G. FROBENIUS (1849—1917), I. SCHUR (1875—1941) und E. NOETHER (1882—1935) begründet.

**Datei:** Zusammenfassung mehrerer Datensätze auf der Grundlage eines gemeinsamen Ordnungskriteriums in einem Speicher.

**Daten:** I. Informationen, die aus einer Folge von Zeichen bestehen und zur Beschreibung eines Sachverhaltes oder eines Objektes dienen. Vor ihrer Verarbeitung mit Hilfe einer digitalen Rechenanlage müssen D. auf einem maschinenlesbaren D.träger in kodierter Form bereitgestellt werden. Häufig verwendete D.träger sind Lochkarten, Lochstreifen, Magnetbänder sowie maschinell lesbare Schriftstücke.

II. Als *D.bank* bezeichnet man eine systemat. Zusammenfassung umfangreicher D. in einem Speicher. Dabei sind die einzelnen D. ständig verfügbar und lassen sich durch geeignete Programme weitgehend beliebig selektieren, kombinieren und aggregieren. Für eine D.bank kommen unterschiedl. *Organisationsformen* zur Anwendung. In der Regel besteht eine D.bank aus einzelnen *Dateien*, die keine gemeinsamen Informationen enthalten und durch Zuordnungstafeln hinsichtlich ihrer Ordnungsbegriffe miteinander verketten sind.

S. a. Datensatz.

**Datenbank** ↗ Daten II.

**Datenerfassung:** Vorgang der Übertragung von Daten auf einen Datenträger zum Zweck der Verarbeitung durch eine Rechenanlage. Die D. ist sehr zeitaufwendig und kostspielig. Sie kann durch den Einsatz von Klarschriftlesern rationell gestaltet werden (↗ digitale Rechenanlage I.1.).

**Datenfernübertragungs-Einrichtung** ↗ digitale Rechenanlage I.3.

**Datenflußplan** ↗ Algorithmus II.

**Datensatz:** Anzahl von Maschinenwörtern (↗ Zeichen), die bei der Übertragung von Daten zwischen dem Hauptspeicher und externen Speichern als Einheit betrachtet werden (↗ digitale Rechenanlage I.3.). Mitunter ist ein D. in einzelne Segmente gegliedert.

**Datenträger** ↗ Daten I.

**Datenverarbeitung:** Vorgang zur Lösung von Problemen durch Sortieren, Mischen sowie rechner. und log. Verknüpfung von Daten auf der Grundlage eines Algorithmus. D. mit Hilfe von Rechenanlagen wird *elektron. Datenverarbeitung*, abgekürzt *EDV*, genannt (↗ Rechenanlage).

**Datenverarbeitungsanlage:** Gerät bzw. Gerätegruppe zur Lösung von Aufgaben der Datenverarbeitung. Zu den D. gehören neben Rechenanlagen z. B. *Lochkartenmaschinen* und *konventionelle Tischrechner*.

**Deckebene** ↗ Zweitafelprojektion I.

**Deckfläche** ↗ Kegel III., ↗ Körper V., ↗ Prisma I., ↗ Zylinder II.

**Dedekind, Richard**, geb. 6. 10. 1831 und gest. 12. 2. 1916 Braunschweig. — D. studierte bis 1854 in Göttingen, war dann dort als Privatdozent und seit

1862 als Professor tätig. Er arbeitete neben CANTOR, WEIERSTRASS und MERAY eine strenge *Theorie des Irrationalen* aus, lieferte grundlegende Beiträge zur *Theorie der algebraischen Zahlen* und definierte den fundamentalen Begriff des *Ideals*.

**Dedekindscher Schnitt** ↗ reelle Zahlen III.

**Defekt** ↗ lineare Abbildung II.4., ↗ lineares Gleichungssystem V.

**Definiendum** ↗ Definition.

**Definiens** ↗ Definition.

**definierende Gleichung** ↗ Körper II.

**definit** ↗ quadratische Form III.

**Definition:** *mathematische Logik* im Rahmen eines Systems von als bekannt vorausgesetzten Begriffen die Festlegung einer *Bezeichnung* für ein *Individuum* bzw. für eine Klasse von solchen, oder für eine *Relation* oder für eine *Operation*. Die *explizite D. eines Namens N* für ein Individuum hat die Form »N ist dasjenige x, für das H(x)«, wenn H(x) ein Ausdruck ist, für den beweisbar ist, daß genau ein Objekt a existiert, das den Ausdruck H(x) erfüllt; z. B. kann die Eulersche Zahl e in dieser Art definiert werden mittels des Ausdrucks H(x):  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ . Die *explizite D.* für ein Prädikat P

hat die Form: P ist dasjenige Prädikat mit »für jedes x: Px genau dann, wenn H(x)«, wenn H(x) ein Ausdruck mit der freien Variablen x ist, der die Variable P nicht enthält; z. B. kann das Prädikat P: »... ist eine Primzahl« definiert werden durch den Ausdruck H(x): »x ist eine von 0 und 1 verschiedene natürl. Zahl, die außer 1 und x keine natürl. Zahl als Teiler hat«. Der in einer expliziten D. definierte Begriff heißt das *Definiendum*, die jenen erklärende Formulierung das *Definiens*. — Von den expliziten D. sind die *impliziten D.* zu unterscheiden. Ein Beispiel für eine implizite D. ist die *induktive D.*; z. B. die induktive D. des *arithmetischen Terms*: »(1). Die Variablen a, b, ... sind Terme; (2) wenn t und s Terme sind, so auch s + t und s · t; (3) jeder Term ist mittels (1), (2) erzeugbar«. Eine andere Form der impliziten D. ist die *axiomatische D.* In der axiomat. Mengenlehre z. B. geht man aus von einem möglichst umfassenden System von Eigenschaften des intuitiven Mengenbegriffs in Form eines Axiomensystems und „definiert“ den Mengenbegriff durch die Modelle dieses Systems. Die D. ist dabei nicht mehr in einem Schritt zu vollziehen und legt auch nicht mehr eindeutig bestimmte Dinge fest, daher spricht man besser von *Präzisierung* bzw. *Explikation* des Begriffs. — Damit eine *explizite D. korrekt* ist, muß sie folgende drei Bedingungen erfüllen: (1) *Eliminierbarkeit*: In jedem Kontext muß das Definiendum ohne Sinnänderung wenigstens im Prinzip durch das Definiens ersetzbar sein. (2) *Nichtkreativität*: Es dürfen durch eine D. keine neuen Begriff nicht enthaltende und vorher unweisbare Aussagen beweisbar werden. (3) *Zirkelfreiheit*: Der zu definierende Begriff darf nicht — offen oder versteckt — im Definiens vorkommen. **Definitionsbereich** ↗ Abbildung I., ↗ Funktion I., VI., ↗ Gleichung I., ↗ Operator, ↗ Relation II., ↗ Term I., ↗ Ungleichung I.

**Degeneration** ↗ Simplexalgorithmus I., II.3.4.

**Dehnung** ↗ Abbildung, affine, III.

**Deka** ↗ Strecke V.

**dekadischer Logarithmus**, auch *gewöhnlicher*, *Briggs'scher* oder *Zehnerlogarithmus* gen., Abk. lg.

I. Logarithmus zur Basis 10, der zu prakt. Berechnungen meist verwendet wird, weil 10 zugleich die Basis des Zahlensystems ist. Nach der Definition des Logarithmus ist  $\lg 10^n = n$  für jede ganze Zahl  $n$ ; z. B.  $\lg 10^3 = 3$ ,  $\lg 1 = \lg 10^0 = 0$ ,  $\lg 0,001 = \lg 10^{-3} = -3$ . Nach den Logarithmengesetzen (↗ Logarithmus II.) genügt es danach, den d. L. der Numeri  $p$  zwischen 1 und 10 zu kennen, da jede andere Zahl als Produkt von  $p$  mit einer Zehnerpotenz dargestellt werden kann, deren d. L. bekannt ist. Für  $l = \lg p$  mit  $1 < p < 10$  gilt aber  $0 < l < 1$ . Stellt man deshalb jeden zur Rechnung notwendigen d. L.  $l$  als gerundeten Dezimalbruch dar, so kann die Ziffer 0 mit dem Komma, weil selbstverständlich, weggelassen werden, in Tafeln brauchen nur die Stellen nach dem Komma angeführt zu werden. Diese Zifferngruppe heißt *Mantisse*, meist ist nur sie in Logarithmentafeln enthalten. Ausnahmen bilden die Tafeln der Winkelfunktionen, weil diese nach Winkelgrößen geordnet sind und dem Leser die Kenntnis der Größe der Winkelfunktion nicht immer zugenutzt werden kann, zu der er den d. L. aufsucht. In den übl. Tafeln werden die ersten 4 oder 5 Stellen der Mantisse angegeben, es gibt aber auch 7- und 10stellige *Logarithmentafeln*. Die Anzahl der Stellen vor dem Komma des Numerus  $p > 1$  gibt die *Kennziffer* an. Ist der Numerus einstellig, d. h. für  $1 < p < 10$ , ist die Kennziffer 0, ..., wenn die Mantisse durch 3 Punkte angedeutet wird; z. B. ist  $\lg 2,37 = 0,3747$ . Ein 3stelliger Numerus, z. B. 237, liegt zwischen 100 und 1000, seine Kennziffer ist 2, ..., weil  $\lg 237 = \lg (100 \cdot 2,37) = \lg 10^2 + \lg 2,37 = 2,3747$ . Für einen  $n$ -stelligen Numerus ist die Kennziffer  $(n - 1)$ . Für Numeri  $p$ , die echte Dezimalbrüche  $0 < p < 1$  sind, treten *negative Kennziffern* auf, sie werden wegen der Darstellung des Numerus als Produkt mit einer Zehnerpotenz so geschrieben, daß eine ganze negative Zahl nachgestellt wird, z. B. hat  $\lg 0,237 = \lg (2,37 \cdot 10^{-1}) = \lg 2,37 + \lg 10^{-1} = 0,3747 - 1$  die Kennziffer 0, ... -1 und  $\lg 0,00237 = \lg (2,37 \times 10^{-3}) = 0,3747 - 3$  die Kennziffer 0, ... -3. Man sieht, daß die *nachgestellte negative ganze Zahl* die Anzahl der Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer im Dezimalbruch des Numerus angibt. Dabei gilt z. B.  $0, \dots -1 = 1, \dots -2 = 2, \dots -3$ . Diese Umrechnung braucht man, weil auf den d. L. angewendete Operationen, z. B. Subtraktion oder Multiplikation mit einer ganzen Zahl oder Division durch sie, sich auf die Mantisse und auf die Kennziffer beziehen und weil eine nachgestellte negative Zahl auch nach der Operation ganz sein muß, z. B.  $\lg \sqrt{0,237} = \frac{1}{2} [\lg 2,37 + \lg 10^{-1}] = \frac{1}{2} [0,3747 - 1] = \frac{1}{2} [1,3747 - 2] = 0,6874 - 1$ . Oft, vor allem bei Rechnungen mit Winkelfunktionen, schreibt man -10 als nachgestellte ganze negative Zahl, z. B.  $\lg \cos 60^\circ = 9,69897 - 10$  an-

statt 0,69897 - 1. Das hat bei konsequenter Einhaltung den Vorteil, daß der nachgestellte Teil -10 der Kennziffer weggelassen werden kann. Ein in der Tafel angegebener Wert 8,35762 bedeutet dann  $8,35762 - 10 = 0,35762 - 2$ . Schließlich kann in Anwendungen das *Vorzeichen des Ergebnisses* ausschlaggebend sein; da aber Logarithmen nur von positiven Zahlen existieren, rechnet man mit ihrem absoluten Betrag und gibt nach dem Logarithmus durch ein  $p$  (positiv) oder  $n$  (negativ) das Vorzeichen des Numerus an; z. B. bedeutet  $\lg |\cos \varphi| = 9,69897 - 10(n)$ , daß  $\varphi = 120^\circ$  oder  $\varphi = 240^\circ$ . Nach den üblichen Vorzeichenregeln ergibt sich das Vorzeichen des Ergebnisses.

II. *Aufschlagen des d. L. und des Numerus in Tafeln*. Die Eingangsspalte enthält in vierstelligen Tafeln 2, in fünfstelligen 3 und in siebenstelligen 4 Ziffern des Numerus, die folgende Ziffer 0, 1, ... oder 9 steht am Kopf einer der 10 Spalten der Tafel. Der Wert für eine weitere Ziffer, bei siebenstelligen Tafeln für zwei, wird durch *lineare Interpolation* bestimmt [*interpolare*, lat., zwischenschalten]. Der für die ersten 3, 4 oder 5 Ziffern des Numerus in der Tafel unmittelbar gefundene Wert des d. L. wächst bis zur nächsthöheren letzten Ziffer um die Tafeldifferenz  $D$ . Das Kurvenbild wird dabei angenähert als eine Gerade angesehen (↗ Logarithmusfunktion).  $D/10$  ist dann die Zunahme für eine Einheit der nächsten Ziffer. Ist ihr Wert  $z$  mit  $z = 0, 1, 2, \dots$  oder 9, so ist  $v = z \cdot D/10$  die anzubringende *Verbesserung*. *Beispiel*: Um  $\lg 24687$  zu bestimmen, entnimmt man einer 5stelligen Tafel  $\lg 24680 = 4,39235$  und  $\lg 24690 = 4,39252$ . Die Tafeldifferenz  $D$  ist 17, genauer 0,00017, für  $z = 7$  ist dann  $v = 7 \cdot 17/10 = 11,9 \approx 12$ , genauer 0,00012, die Verbesserung und  $\lg 24687 = 4,39235 + 0,00012 = 4,39247$  das Ergebnis. Für große Tafeldifferenzen, z. B. in 7stelligen Tafeln, sind am Rande die Vielfachen von  $D/10$  abgedruckt: man nennt sie *Proportionaltafeln*, in älteren Tafeln *Partes proportionales* oder P. P. [*partes*, lat. Teile].

Wird zu einem gegebenen oder berechneten Logarithmus  $l$  der Numerus  $p$  gesucht, so kann  $l$  unmittelbar in der Tafel gefunden werden. Dann stehen die ersten 2, 3 oder 4 Ziffern in der gleichen Zeile in der Eingangsspalte und die folgende Ziffer am Kopf der Spalte. Im anderen Falle liegt  $l$  zwischen zwei Tafelwerten. Damit sind die Tafeldifferenz  $D$  und die Verbesserung  $v$  gegeben und aus  $z = 10v/D$  ergibt sich die folgende Ziffer  $z$ . *Beispiel*: Zu  $l = \lg p = 4,45460$  findet man 45454 und 45469. Zu 45454 steht in der Eingangsspalte die Zifferfolge 284 und am Kopf der Spalte die Ziffer 8. Aus der Tafeldifferenz  $D = 45469 - 45454 = 15$  und der Verbesserung 45460 - 45454 = 6 ergibt sich  $z = 10 \cdot 6/15 = 4$ , mithin die Zifferfolge 28484. Wegen der Kennziffer 4, ... hat der Numerus 5 Stellen vor dem Komma, d. h.  $p = 28484$ .

III. *Beispiele zur Berechnung von Zahlenausdrücken mit einer 5-stelligen Tafel*. Jede Berechnung sollte mit einer *Abschätzung  $p'$*  des Ergebnisses beginnen. Im danach aufgestellten *Rechenschema* ist bes. darauf zu achten, ob die durchgehende logarithm.

(6)	$N$	$\lg$	Operation	$\lg$	$\bar{N}$
	$c = 3,89$	$\rightarrow 0,58\ 995$	$\rightarrow \cdot 3$	$\rightarrow 1,76\ 985$	$c^3 = 58,864$
	$d = 0,9764$	$\rightarrow 0,98\ 963 - 1$	$\rightarrow \cdot 3$	$\rightarrow 0,96\ 889 - 1$	$d^3 = 0,931$
	$q = 57,933$			$1,76\ 292 \leftarrow$	$57,933$
	$a = 19,573$			$\rightarrow 1,29\ 166$	$+$
	$b = 2,012$	$\rightarrow 0,30\ 363$	$\rightarrow \cdot 3$	$\rightarrow 0,91\ 089$	$+$
	Zähler			$3,96\ 547$	
	5			$0,69\ 897$	$-$
	$c$			$0,58\ 995$	$-$
	$d$			$0,98\ 963 - 1$	$-$
	$p = 22,052$	$\leftarrow 1,34\ 346 \leftarrow$	$: 2$	$\leftarrow 2,68\ 692$	

Rechnung durch Summen oder Differenzen im Numerus  $p$  durch Aufsuchen der Numeri für Zwischenwerte  $q_i$  unterbrochen werden muß. Im Rechenschema trennt man üblicherweise die Numeri  $N$  von ihren Logarithmen durch eine senkrechte Gerade.

III.1. Zum gegebenen Numerus (1) ergibt (2) den Schätzwert  $p' = 0,05$ . Nach den Logarithmengesetzen gilt  $\lg p = \lg 19,47 + \lg 0,893 + \lg 207,68 - \lg 78,6 - \lg 1016,3$ . Zwischenwerte  $q_i$  sind nicht nötig.

$$(1) \quad p = \frac{19,47 \cdot 0,893 \cdot 207,68}{78,6 \cdot 1016,3}$$

$$(2) \quad p' = \frac{20 \cdot 1 \cdot 200}{80 \cdot 1000} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Im Rechenschema (3) ist die Kennziffer des Logarithmus vom Zähler von 4, ... -1 umgeschrieben worden auf 5, ... -2, um die folgenden Subtraktionen ausführen zu können. Das Ergebnis  $p = 0,045204$  stimmt befriedigend mit dem Schätzwert überein.

(3)	$N$	$\lg$	
	19,47	1,28 937	
	0,893	0,95 085 - 1	$+$
	207,68	2,31 740	$+$
	Zähler	4,55 762 - 1	
		5,55 762 - 2	
	78,6	1,89 542	$-$
	1016,3	3,00 702	$-$
	$p$	0,65 518 - 2	

$$p = 0,045\ 204$$

III.2. Für den Term (4) mit  $a = 19,573$ ,  $b = 2,012$ ,

$$(4) \quad p = \sqrt{\frac{ab^3(c^3 - d^3)}{5cd}}$$

$c = 3,89$ ,  $d = 0,9764$  gilt die Abschätzung (5). Mit dem Zwischenwert  $q = (c^3 - d^3)$  gilt nach den Logarithmengesetzen:  $\lg p = \frac{1}{2} [\lg a + 3 \lg b + \lg q - \lg 5 - \lg c - \lg d]$ . Im Rechenschema

$$(5) \quad p' = \sqrt{\frac{20 \cdot 8(64 - 1)}{5 \cdot 4 \cdot 1}} \approx \sqrt{8 \cdot 64} = 8 \cdot 2 \sqrt{2} \approx 20$$

(6) gibt eine bes. Spalte die Operation an, die auf die Logarithmen angewendet wird. Die Subtraktion  $c^3 - d^3$  zweier Numeri wird in Spalte  $\bar{N}$  ausgeführt. III.3. Für den Term (7) liefert die Abschätzung

$$(7) \quad p = \sqrt[4]{0,88775}$$

$\sqrt[4]{1} = 1$ . Nach den Logarithmengesetzen ist  $\lg p = \frac{1}{4} \lg 0,88775$ . Wegen der Division durch 4 wird im Rechenschema (8) die Kennziffer 0, ... -1 als 3, ... -4 geschrieben.

(8)	$N$	$\lg$	
	0,88775	3,94 830 - 4	$: 4$
	$p = 0,97068$	0,98 708 - 1	

**Dekodierung** ↗ Information II.

**Dekomposition:** Zerlegung großer Gleichungssysteme in kleinere für Teilmengen der Variablenmenge, die durch Kopplungsgleichungen verbunden sind; Mittel, große Gleichungssysteme oder umfangreiche lineare Optimierungsaufgaben zu lösen.

**Delambre, Jean Baptiste Joseph**, geb. 29. 9. 1749 Amiens, gest. 19. 8. 1822 Paris. - D. war erst Hauslehrer in Paris, wurde 1795 Mitglied der Kommission für die Gradmessung und war seit 1807 Professor der Astronomie am Collège de France. Die auch nach MOLLWEIDE oder GAUSS ben. Formelgruppe fand D. bereits im Jahre 1807.

**Delambresche Formeln, Gaußsche Formeln, auch Mollweidesche Formeln** der sphär. Trigonometrie gen.: in einem sphär. Dreieck  $ABC$  gültige Beziehungen, aus denen sich durch zykl. Vertauschen die entsprechenden Beziehungen für die anderen Stücke ergeben:

$$\begin{aligned} \sin(\gamma/2) \cdot \sin[(a+b)/2] &= \sin(c/2) \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2], \\ \sin(\gamma/2) \cdot \cos[(a+b)/2] &= \cos(c/2) \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2], \\ \cos(\gamma/2) \cdot \sin[(a-b)/2] &= \sin(c/2) \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2], \\ \cos(\gamma/2) \cdot \cos[(a-b)/2] &= \cos(c/2) \cdot \sin[(\alpha+\beta)/2]. \end{aligned}$$

**delisches Problem** ↗ Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.

**Deltafunktion** ↗ Zeitfunktion I.2.

**Deltoid** ↗ Drachenviereck.

**de Morgansche Formeln** ↗ Mengenalgebra.

**de Morgansche Gesetze** ↗ Normalform.

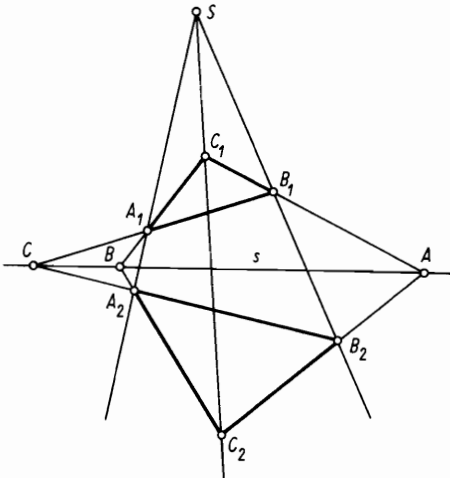
**Derivator** svw. Differenziergerät I.

**Derivimeter** ↗ Differenziergerät II.

**Desargues, Gérard**, geb. 1591 und gest. 1662 Lyon.

— D. war von Beruf Baumeister und Kriegsgenieur. Seit etwa 1626 lebte er in Paris und war mit einer Reihe bedeutender Gelehrter, z. B. DESCARTES, befreundet. Um 1650 kehrte D. als Architekt in seine Heimatstadt zurück. D. hat 1636 mathemat. Arbeiten zur *Perspektive*, 1640 zum Grund-Aufriß-Verfahren und 1639 eine Schrift zu Problemen der synthet. Geometrie verfaßt.

**Desargues, Satz von:** Gehen die Verbindungsgeraden  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  und  $C_1C_2$  entsprechender Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt  $S$ , so liegen die Schnittpunkte  $A = (B_1C_1 \cap B_2C_2)$ ,  $B = (C_1A_1 \cap C_2A_2)$  und  $C = (A_1B_1 \cap A_2B_2)$  entsprechender Seiten auf einer



Satz von Desargues

Geraden  $s$  (Abb.). Diese Gerade heißt *Desarguesche Gerade*. Zum Beweis faßt man die Abb. auf als Projektion von drei Strahlen  $SA_1A_2$ ,  $SB_1B_2$  und  $SC_1C_2$  des projektiven Raums auf die Ebene. Da die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  und  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  je ein Dreieck bestimmen, legen sie je eine Ebene fest, die sich in einer Geraden  $s$  schneiden.

**Desarguesche Gerade** ↗ Desargues, Satz von.

**Descartes, René**, geb. 31. 3. 1596 La Haye, gest. 11. 2. 1650 Stockholm. — D. war Sohn eines Rates beim Parlament der Bretagne und wurde in einem Jesuitenkolleg erzogen. Er begann anschließend ein Jurastudium und nahm seit 1618 an verschiedenen Feldzügen teil. Seit 1622 unternahm D. Reisen in viele Länder Europas, ließ sich 1628 in den Niederlanden nieder und lebte seit 1649 als Lehrer der Philosophie in Schweden. Das mathemat. Hauptverdienst von D. ist die Begründung der *analyt. Geometrie* in seiner «*Géométries*» (1637), die auch die

Weiterentwicklung der Infinitesimalrechnung wesentlich beeinflusst hat.

**Determinante:** I. Funktion, die jeder  $n$ -reihigen quadrat. Matrix  $A = (a_{ik})$  mit reellen bzw. komplexen Elementen  $a_{ik}$  eindeutig eine reelle bzw. komplexe Zahl  $D = \det A$  zuordnet; (1) sind gleichbedeutende Schreibweisen für die  $D$ . von  $A$ .

$$(1) \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Gelegentlich schreibt man auch kurz  $D = |a_{ik}|$  oder genauer  $D^{(n)} = |a_{ik}|$ , wobei der obere Index  $n$  die *Ordnung* der Determinante, d. i. die Anzahl ihrer Zeilen bzw. ihrer Spalten, angibt.

II. *Definition der D.:* Die  $D$ . ist nach (2) definiert

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \varepsilon(\pi) a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

mit  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

als die Summe aller der Produkte, die aus jeder Zeile und aus jeder Spalte genau ein Element als Faktor enthalten. Jeder Summand der  $D$ . ist demnach ein Produkt von  $n$  Faktoren der Gestalt  $a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ , wobei die zweiten Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_n$  eine Permutation  $\pi$  der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  sind. Da es  $n!$  solcher Permutationen gibt, hat die Summe  $n!$  Summanden. Das Vorzeichen  $\varepsilon(\pi) = (-1)^{j(\pi)}$  jedes Summanden ergibt sich aus der Anzahl  $j(\pi)$  der *Inversionen* von  $\pi$ , d. h., es gibt  $n!/2$  positive und ebenso viele negative Summanden.

Für eine  $D$ . 2. Ordnung hat man die  $2! = 2$  Permutationen (1, 2) und (2, 1) zu betrachten; für die erste ist  $j(\pi) = 0$ , für die zweite  $j(\pi) = 1$ . Nach der Definition (2) gilt dann (3).

$$(3) \det \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**Merkregel:** *Produkt der Hauptdiagonalelemente minus Produkt der Nebendiagonalelemente.*

Für die  $D$ . 3. Ordnung erhält man (4) mittels der  $3! = 6$  Permutationen der Zahlen  $1, 2, 3$ : 123, 231, 312, 321, 132, 213, deren erste drei das Vorzeichen  $+1$ , die übrigen das Vorzeichen  $-1$  haben.

$$(4) \det \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

III. *Eigenschaften der D.* Faßt man die Zeilen einer  $n$ -reihigen  $D$ . als  $n$ -Tupel ( $\nearrow$  Vektorraum)  $z_1, z_2, \dots, z_n$  auf und schreibt  $D(z_1, z_2, \dots, z_n)$  für die  $D$ . mit den *Zeilenvektoren*  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , dann lassen sich die Eigenschaften der  $D$ . bequem formulieren:

**III.1.** Änderung der Reihenfolge der Zeilen beeinflusst höchstens das Vorzeichen von  $D$ ; es gilt:

$D(z_1, z_2, \dots, z_n) = \varepsilon(\pi) D(z_{\pi(1)}, z_{\pi(2)}, \dots, z_{\pi(n)})$ , wobei  $\pi$  eine Permutation der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  und  $\varepsilon(\pi)$  ihr Vorzeichen ist. Insbes. folgt daraus, daß sich beim Vertauschen zweier Zeilen das Vorzeichen der  $D$ . ändert.

*Beispiel:* 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 12 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

**III.2.** Ein allen Elementen einer Zeile *gemeinsamer Faktor*  $\alpha$  kann als Faktor vor die  $D$ . gezogen werden:

$D(z_1, z_2, \dots, \alpha z_k, \dots, z_n) = \alpha D(z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n)$ . Das bedeutet andererseits: Eine  $D$ .  $D$  wird mit einem Faktor  $\alpha$  multipliziert, indem man alle Elemente irgendeiner Zeile von  $D$  mit  $\alpha$  multipliziert.

*Beispiel:* 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

**III.3.** Zwei  $D$ .n, die sich nur in einer ihrer Zeilen, etwa der  $k$ -ten, unterscheiden, können addiert werden; die *Summen- $D$ .* unterscheidet sich von den Summanden wieder nur in der  $k$ -ten Zeile, diese ist die Summe der  $k$ -ten Zeilen der Summanden:  $D(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) + D(z_1, \dots, z_k', \dots, z_n) = D(z_1, \dots, z_k + z_k', \dots, z_n)$ .

*Beispiel:* 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 13 & 1 & -5 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 13 & 0 & -2 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

**III.4.** Die  $D$ .  $D$  hat den Wert Null genau dann, wenn ihre Zeilenvektoren ein linear abhängiges Vektorsystem bilden ( $\nearrow$  lineare Abhängigkeit I.). Insbesondere ist  $D = 0$ , wenn eine Zeile von  $D$  aus lauter Nullen besteht oder wenn zwei Zeilen von  $D$  gleich bzw. einander proportional sind.

**III.5.** Addiert man zu irgendeiner, etwa der  $i$ -ten, Zeile von  $D$  ein Vielfaches einer anderen, etwa der  $k$ -ten, Zeile von  $D$ , so ändert sich dadurch der Wert von  $D$  nicht; für  $i \neq k$  gilt:

$D(z_1, \dots, z_i, \dots, z_k, \dots, z_n) = D(z_1, \dots, z_i + \alpha z_k, \dots, z_k, \dots, z_n)$ .

*Beispiel:* 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 + (-3)5 & -1 + (-3)2 & 3 + (-3)1 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -15 & -7 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

**III.6.** Eine  $D$ . ändert ihren Wert nicht, wenn man in ihr die *Spalten mit den Zeilen vertauscht*, d. h.

wenn man sie *transponiert*.

*Beispiel:* 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 8 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Daher sind alle vorstehenden, für Zeilen ausgesprochenen Sätze 1 bis 5 auch für Spalten gültig.

**IV.** *Unter- $D$ .n:* Ist  $(a_{ik})$  eine  $n$ -reihige quadrat. Matrix und  $D = |a_{ik}|$  ihre  $D$ ., so bezeichnet man die  $D$ . jeder  $p$ -reihigen quadrat. Untermatrix ( $\nearrow$  Matrix) mit  $p < n$  als eine *Unter- $D$ .  $p$ -ter Ordnung* oder einen *Minor  $p$ -ter Ordnung* von  $D$ .

Die Unter- $D$ .  $D_{ik}$  ( $5$ ) von  $(n - 1)$ -ter Ordnung, die aus  $D$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte hervorgeht, heißt Unter- $D$ . des Elementes  $a_{ik}$ . Die *Adjunkte* oder das *algebraische Komplement*  $A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$  des Elementes  $a_{ik}$  ist die mit dem Vorzeichen  $(-1)^{i+k}$  versehene Unter- $D$ .  $D_{ik}$  von  $a_{ik}$ .

(5) 
$$D_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt (6), d. h., die Summe

(6) 
$$D = \sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

der Produkte aller Elemente einer Zeile bzw. einer Spalte mit ihren Adjunkten ist gleich dem Wert der  $D$ . Damit ist es möglich, die Berechnung einer  $n$ -reihigen  $D$ . auf diejenige von  $(n - 1)$ -reihigen  $D$ .n zurückzuführen. Man sagt, die  $D$ . wird nach den Elementen der  $i$ -ten Zeile bzw. nach den Elementen der  $k$ -ten Spalte *entwickelt*. Für  $D^{(3)}$  gilt z. B. (7).

(7) 
$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_{1i} A_{1i} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}$$

Bildet man die Summe der Produkte aller Elemente einer Zeile bzw. Spalte mit den Adjunkten der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile bzw. Spalte, so erhält man stets Null, zusammengefaßt gilt der *Laplacesche Entwicklungssatz* (8).

(8) 
$$\sum_{i=1}^n a_{ki} A_{ki} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{il} = \begin{cases} D, & \text{falls } k = l, \\ 0, & \text{falls } k \neq l \end{cases}$$

**V.** *Berechnung von  $D$ .n:* Zweireihige und dreireihige  $D$ .n lassen sich sofort mittels der Definition berechnen, man erhält (3) und (4). So wie für eine zweireihige  $D$ ., läßt sich auch für eine dreireihige  $D$ . eine Merkregel formulieren, die *Sarrussche Regel*: Nach ihr schreibt man in (9) die ersten beiden Spalten der  $D$ . rechts von ihr noch einmal hin und bildet die

Summe aller Produkte zu je drei Elementen, die in einer Schrägreihe stehen; für nach rechts fallende Schrägreihen ist  $\varepsilon(\pi) = +1$ , für nach rechts steigende Schrägreihen gilt  $\varepsilon(\pi) = -1$ .

$$(9) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Höherreihige D.n nach Definition (2) zu berechnen, ist sehr aufwendig. Man führt vielmehr eine  $n$ -reihige D. auf  $(n - 1)$ -reihige D.n zurück, diese auf  $(n - 2)$ -reihige, usw., bis man schließlich zu 3- bzw. 2-reihigen D.n gelangt. Dieses schrittweise Reduzieren der Ordnung der D. gelingt z. B. mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Die Rechnung vereinfacht sich dabei, wenn man durch Anwendung der D.eigenschaft 4 in der Zeile oder Spalte, nach deren Elementen entwickelt werden soll, möglichst viele Nullen erzeugt, z. B. hat die Entwicklung nur einen Summanden, wenn eine Zeile nur ein von Null verschiedenes Element enthält.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 8 & -1 \\ 9 & 2 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & -11 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 9 & 10 & 0 \\ 1 & -30 & -19 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -14 & -11 \\ -1 & 9 & 10 \\ 1 & -30 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ -1 & 9 & 10 \\ 0 & -21 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 9 \end{vmatrix} = 24$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten D. wurde das  $\lambda_i$ -fache der 2. Zeile zur  $i$ -ten Zeile addiert für  $i = 1, 3, 4$ . Wählt man  $\lambda_1 = -4, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -8$ , so sind in der neuen D. die Elemente der letzten Spalte Null bis auf  $a_{24} = 1$ . Entwickelt man nach dieser Spalte, ergibt sich die dritte D. Wird diese D. analog behandelt, erhält man die vierte D., deren Entwicklung nach der 1. Spalte eine zweireihige D. ergibt. S. a. Vandermondesche Determinante; lineare Gleichungssysteme I.4., VI.4.

**deterministisch** ↗ Lagerhaltungstheorie, ↗ Modell II.

**deterministische Funktion** ↗ System II.

**Dezi** ↗ Strecke V.

**dezimal-binärer Kode** ↗ Kodierung III.

**Dezimalbrüche** ↗ Brüche II.1.

**dezimal-dualer Kode** ↗ Kodierung III.

**Dezimale** ↗ Brüche II.1.

**Dezimalstelle** ↗ Brüche II.1.

**Dezimalsystem** ↗ Zahlensystem V.

**Diagonaldominanz** ↗ lineare Gleichungssysteme VII.1.

**Diagonale:** Verbindungsstrecke zweier Ecken eines Polygons, die keine Seite ist (↗  $n$ -Eck). S. a. Viereck; vollständiges Vierseit.

An einem ebenflächigen Körper unterscheidet man *Flächen-D.n* und *Raum-D.n* je nachdem, ob die Endpunkte dieser Strecken auf der gleichen oder auf verschiedenen Seitenflächen liegen. An einem Quader z. B. mit den voneinander verschiedenen Kantenlängen  $a, b, c$  gibt es auf jeder Seitenfläche je zwei Flächendiagonalen der Längen  $f_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $f_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $f_3 = \sqrt{c^2 + a^2}$  und vier Raum-D.n der Länge  $f = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . (↗ Prisma, Abb. 3). **Diagonale von  $X \times X$**  ↗ Abbildung II.3.

**Diagonalmatrix** ↗ lineares Gleichungssystem V., ↗ Matrix I.

**Diagramm:** zeichner. Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs. Je nach der geometr. Veranschaulichung der abhängigen Funktionswerte spricht man von *Kurven-D.*, *Säulen-D.* oder *Kreis-D.* Kurven-D.e werden meist *Kurve* oder *Bildkurve* der dargestellten Funktion gen. S. a. Hasse-Diagramm, Histogramm; Relation III.; Übertragungsfunktion. **Dichte** ↗ Zufallsgröße III., ↗ Zufallsvektor III. **dichte Menge** ↗ Menge V.

**dichteste Kugelpackung** ↗ Geometrie der Zahlen.

**Dicke Graphentheorie** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.4.

**Differential:** I. einer Funktion  $f$  der reellen Variablen  $x$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  zugeordneter Ausdruck der Gestalt  $dy = a dx$ , wenn die Funktion  $f$  in  $x_0$  und einer gewissen Umgebung definiert ist. Den Zuwachs  $dx = \Delta x$  der unabhängigen Variablen nennt man das D. von  $x$ . Die Funktion  $f$  hat dann in  $x_0$  ein D., wenn sich der Funktionszuwachs  $\Delta y$  in  $x_0$  in der Gestalt (1) darstellen läßt, in der  $o(dx)$  eine Größe ist, die stärker als  $dx$  gegen Null geht und in der  $a$

$$(1) \quad \Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) = a dx + o(dx)$$

nicht von  $dx$  abhängt. Ist die Funktion  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt  $\Delta y/\Delta x = f'(x) + \varepsilon$  bzw.  $\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon dx$  mit der beliebig kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$ . In diesem Fall ist (2) das D. von  $f(x)$  und (1) nimmt die Gestalt (3) an. Danach kann der *Differentialquotient*  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  als Quotient zweier D.e aufgefaßt werden.

$$(2) \quad dy = df(x_0) = f'(x_0) dx = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} dx$$

$$(3) \quad \Delta y = a dx + o(dx) = f'(x_0) dx + o(dx) = dy + o(dx)$$

Geometrisch bedeutet der Übergang zum D. in genügender Nähe von  $P_0 = (x_0, y_0)$  die Annäherung des Kurvenbildes von  $f$  durch die Tangente in  $P_0$  (Abb. 1). Der Funktionszuwachs  $\Delta y$  wird durch die

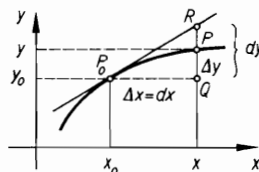


Abb. 1: Geometrische Bedeutung des Differentials

Länge der Strecke  $QP$  und das  $D. dy$  durch die Länge  $|QR|$  dargestellt. Diese Annäherung wird um so genauer sein, je kleiner der Zuwachs  $dx$  gewählt wird; für  $\Delta x \rightarrow 0$  gilt  $\Delta y/dy \rightarrow 1$ .

Ist  $x$  selbst eine Funktion der neuen unabhängigen Variablen  $t$ , dann bleibt die Beziehung (2) erhalten (Invarianzbedingung).

II. Zweite und höhere D.e werden definiert, indem man vom ersten D. ausgeht. Das zweite D. z. B. ist das D. des ersten, in Zeichen  $d(dy) = d^2y = f''(x) dx^2$ , solange  $x$  unabhängige Variable ist und  $f''(x)$  existiert. Analog sind die Bezeichnungen  $d(d^2y) = d^3y = f^{(3)}(x) dx^3$  usw. üblich.

III. Das erste partielle D. einer Funktion  $f$  der  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  nach einer der unabhängigen Variablen  $x_k, 1 \leq k \leq n$ , wird unter Voraussetzung der Existenz der entsprechenden *partiellen Ableitungen* durch (4) definiert. Entsprechend werden auch höhere partielle D.e festgesetzt.

$$(4) \quad d_{x_k} f = d_{x_k} y = f_{x_k} dx_k$$

Ist die Funktion  $f$  in  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  und in einer gewissen Umgebung definiert und sind  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  die D.e der unabhängigen Variablen, so hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  ein *vollständiges oder totales D.*, wenn sich der Funktionszuwachs  $\Delta y$  in  $P_0$  durch (5) darstellen läßt.

$$(5) \quad \Delta y = f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n + o(d)$$

Dabei hängen die  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nicht von den  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  ab, und es gilt  $d^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$ . Das vollständige oder totale D. ist dann charakterisiert durch (6) (s. a. (8) in Differentialquotient, partieller IV.). Existieren sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $f$  in  $P_0$

$$(6) \quad dy = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$$

und sind diese stetig, dann gilt (7), eine Beziehung, die bzgl. der eingehenden Variablen invariant ist.

$$(7) \quad dy = df = f_{x_1}(P_0) dx_1 + \dots + f_{x_n}(P_0) dx_n$$

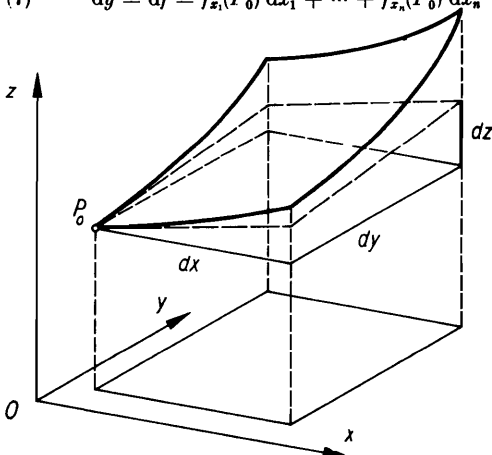


Abb. 2: Geometrische Bedeutung des totalen Differentials

Geometrisch bedeutet z. B. das vollständige oder totale D. dz einer Funktion  $f$  der zwei reellen Variablen  $x, y$  mit der Gleichung  $z = f(x, y)$  den Zuwachs der Applikate der Tangentialebene in dem betreffenden Punkt bei D.en der unabhängigen Variablen  $dx$  und  $dy$  (Abb. 2).

IV. D. *partiell*es Differentialquotient, partieller, IV. **Differentialausdruck:** I. Ausdruck  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)})$ , der von einer Funktion  $f$  der reellen Variablen  $x$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  neben der unabhängigen Variablen  $x$  und der abhängigen Variablen  $y$  noch Ableitungen von  $f$  bis zu einer gewissen Ordnung  $k$  enthält. In analoger Weise werden D.e bzgl. einer Funktion mehrerer Variablen erklärt. An die Stelle der gewöhnl. Ableitungen treten dann die partiellen Ableitungen nach den unabhängigen Variablen bis zu einer gewissen Ordnung, die für die einzelnen Variablen nicht die gleiche sein braucht.

II. Von besonderer prakt. Bedeutung sind D.e, in denen die unabhängige Variable  $x$  bzw. die unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  einer Variablensubstitution der Gestalt  $x = \varphi(u)$  bzw.  $x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_n)$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$  unterworfen werden. Sämtliche in  $F$  auftretende Ableitungen sind dann durch die Ableitungen nach  $u$  zu ersetzen.

In bezug auf eine Funktion  $f$  einer Variablen mit der Gleichung  $y = f(x)$  gilt dann (1) für  $y'$  und  $y''$ . In bezug auf eine Funktion  $f$  der zwei reellen Variablen  $x, y$  mit der Gleichung  $z = f(x, y)$  und für die Variablensubstitution  $x = \varphi_1(u_1, u_2)$  und  $y = \varphi_2(u_1, u_2)$  gilt (2). Die Auflösung des Systems

(2) nach  $\frac{\partial z}{\partial x}$  und  $\frac{\partial z}{\partial y}$  liefert die gewünschte Darstellung (3). Dabei bedeuten  $a_1, b_1, a_2, b_2$  Funktionen von  $u_1$  und  $u_2$ . Über die Darstellung der partiellen Ableitungen nach (3) werden die Ausdrücke für höhere partielle Ableitungen gewonnen.

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(u)} \frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(u)^3} \left( \varphi'(u) \frac{d^2y}{du^2} - \varphi''(u) \frac{dy}{du} \right)$$

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial u_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_2} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}$$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = a_1 \frac{\partial z}{\partial u_1} + b_1 \frac{\partial z}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a_2 \frac{\partial z}{\partial u_1} + b_2 \frac{\partial z}{\partial u_2}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \psi'(u)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} \psi'(u) + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \psi''(u)$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi_u + \psi_v \frac{dv}{du}}{\varphi_u + \varphi_v \frac{dv}{du}}$$

Wird die abhängige Variable  $y$  in  $y = f(x)$  einer Substitution  $y = \varphi(u)$  unterworfen, dann gilt entsprechend (4). Werden gleichzeitig für  $x$  und  $y$  neue Variable  $u$  und  $v$  nach  $x = \varphi(u, v)$  und  $y = \psi(u, v)$  substituiert, dann folgt z. B. für die erste

Ableitung  $\frac{dy}{dx}$  die Gleichung (5). Die Transformation (6) von kartes. Koordinaten  $x, y$  in Polarkoordinaten  $r, \vartheta$  nimmt z. B. nach (5) die Gestalt (7) an.

$$(6) \quad x = \varphi(\vartheta, r) = r \cos \vartheta, y = \psi(\vartheta, r) = r \sin \vartheta$$

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{r \cos \vartheta + \sin \vartheta \cdot \frac{dr}{d\vartheta}}{-r \sin \vartheta + \cos \vartheta \cdot \frac{dr}{d\vartheta}}$$

**Differentialgeometrie:** Zweig der höheren Mathematik, in dem die Begriffe und Methoden der Analysis, insbes. der Differential- und Integralrechnung sowie der Theorie der Differentialgleichungen auf die Untersuchung geometr. Gebilde angewendet werden. Die zugrundeliegenden geometr. Räume oder Mannigfaltigkeiten müssen daher, ähnlich wie in der analyt. Geometrie, auf Koordinaten bezogen sein. In diese Räume sind andere geometr. Gebilde eingebettet, z. B. allgemeine Kurven oder gekrümmte Flächen, die durch genügend oft differenzierbare Gleichungen oder Funktionen charakterisiert werden. Die höheren Teile der D. benutzen die Tensorrechnung. Ferner sind Kenntnisse aus der Topologie und aus anderen Gebieten der Mathematik erforderlich.

**Differentialgleichung:** Gleichung zwischen unabhängigen Variablen, gesuchten Funktionen dieser Variablen und den Ableitungen dieser Funktionen. Hängen die gesuchten Funktionen nur von einer unabhängigen Veränderlichen ab, so spricht man von einer *gewöhnl. D.*; hängen die gesuchten Funktionen von mehr als einer unabhängigen Veränderlichen ab, von einer *partiellen D.* Die D.en (1), (2) und (3) z. B. sind gewöhnl. D.en für die gesuchte

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -a \sin y \quad (2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{x-2}{x \cdot (x-1)} \cdot y = -\frac{1}{x^2(x-1)}$$

Funktion  $y(x)$  der einen unabhängigen Veränderlichen  $x$ ;  $\frac{du}{dx} = u - v$  ist ebenfalls eine gewöhnl. D. für die gesuchten Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$ . Die D.en (4), (5) und (6) sind partielle D.en für die

$$(4) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad (5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(6) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

gesuchte Funktion  $u(x, y)$  der beiden unabhängigen Veränderlichen  $x, y$ .

Unter der *Integration einer D.* versteht man das Auffinden von Funktionen einer bzw. mehrerer

unabhängiger Veränderlicher, durch deren Einsetzen in die D. diese in eine Identität in den unabhängigen Variablen übergeführt wird. Jede solche Funktion heißt *Lösung* oder *Integral* der D. Die Funktionen  $y(x) = \sqrt{x^2 + 5}$  und  $y(x) = -\sqrt{x^2 + 3}$  sind z. B. Lösungen der D. (2). Die Funktion (7) ist für jede

$$(7) \quad y(x) = \frac{x-1}{x^2} \left( \frac{1}{x-1} + c \right)$$

beliebige Konstante  $c$  Lösung der D. (3). Für beliebige Konstanten  $a, b$  ist (8) Lösung der partiellen D. (4), und (9) ist für beliebige zweimal stetig

$$(8) \quad u(x, y) = ax + y\sqrt{1-a^2} + b$$

$$(9) \quad u(x, y) = f_1(y + cx) + f_2(y - cx)$$

differenzierbare Funktionen  $f_1, f_2$  Lösung der partiellen D. (6). Die D. (10) hat keine Lösungen. Die

$$(10) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 + 1 = 0$$

angegebenen Lösungen zeigen, daß die Lösungsfunktionen, falls sie überhaupt existieren, durch die D. nicht eindeutig bestimmt werden. Bei gewöhnl. D.en können die Lösungen noch von beliebigen Konstanten abhängen und bei partiellen D.en sogar von beliebigen Funktionen. Man kann deshalb noch zusätzl. Bedingungen an die gesuchte Funktion stellen. Die Bewegung eines mathemat. Pendels z. B. vollzieht sich so, daß die D. (11)

$$(11) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\sin \varphi(t)$$

für den von der Ruhelage aus gemessenen Winkel  $\varphi(t)$  erfüllt ist. Je nach der Angabe der Daten zur Zeit  $t = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$  und  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = \varphi_1$ , wird sich der Ablauf des Bewegungsprozesses gestalten. Nach der Art dieser an die Lösung der D. gestellten Bedingungen unterscheidet man das *Anfangswertproblem* oder *Cauchysche Problem* und das *Randwertproblem*.

Man spricht von einem *System gewöhnl. D.en* ( $\mathcal{A}$  gewöhnliche Differentialgleichungen II.), wenn für  $n$  Funktionen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  einer unabhängigen Veränderlichen  $m$  gewöhnl. D.en gegeben sind, z. B. bildet (12) ein System von zwei gewöhnl. D.en für

$$(12) \quad \frac{dy_1}{dx} - y_1 + y_2 = 0, \quad \frac{dy_2}{dx} - 4y_1 + 3y_2 = 0$$

zwei gesuchte Funktionen  $y_1(x), y_2(x)$ . Für beliebige Konstanten  $c_1, c_2$  sind die Funktionen (13) Lösungen dieses Systems. Entsprechend kann man *Systeme partieller D.en* bilden, z. B. (14) für die gesuchten Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$ .

$$(13) \quad y_1(x) = c_1(1/4 + x/2) e^{-x} + 1/2 c_2 e^{-x}, \\ y_2(x) = c_1 x e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

$$(14) \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$



**Differentialgleichung der schwingenden Saite** ↗ hyperbolische Differentialgleichung I.

**Differentialgleichung mit getrennten Variablen** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.1.

**Differentialglied** ↗ Übertragungsglied I.

**Differentialoperator:** ein Operator  $A$ , der jeder Funktion  $f(t)$  eines Funktionsraumes  $X$  (↗ Funktionalanalysis) eine Funktion  $Af(t)$  eines möglicherweise anderen Raumes  $Y$  zuordnet, die von  $f$  und den Ableitungen von  $f$  abhängt. Sind  $a_k(t)$  stetige Funktionen auf dem endl. Intervall  $[a, b]$ , so ist z. B. durch (1) ein linearer D. erklärt, der den Banachraum  $C^n(a, b)$  (↗ Raum, normierter linearer) stetig in den Banachraum  $C(a, b)$  abbildet. Ist  $a_n(t) \equiv 0$ , so heißt  $n$  die *Ordnung des linearen D.s A.* D.en spielen bei der Anwendung von Ergebnissen und Methoden der Funktionalanalysis in der Theorie der Differentialgleichungen eine wichtige Rolle. S. a. Operator, linear, I.2.

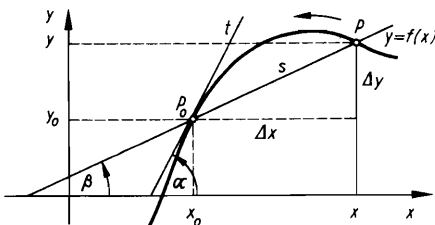
$$(1) \quad Af(t) = \sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d}{dt^k} f(t)$$

**Differentialquotient: I.** Grenzwert (1a) des *Differenzenquotienten* (1) einer reellen Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  an einer Stelle  $x_0$  des Definitionsbereichs von  $f$ ; ergibt der Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$  bzw.  $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$  oder  $h = \Delta x \rightarrow 0$  für jede Nullfolge ( $\Delta x$ ) bzw. ( $h$ ) denselben Grenzwert, so existiert der D.  $f'(x_0)$  und die Funktion  $f(x)$  ist an der Stelle  $x_0$  *differenzierbar*. Zur geometr. Deutung des D. betrachtet man das Bild der Funktion  $y = f(x)$ , z. B. in einem kartes. Koordinatensystem.

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$(1a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = y'(x_0)$$

Ist  $s$  eine Kurvensenkante durch den Punkt  $P_0$  mit den Koordinaten  $x_0, y_0 = f(x_0)$  und dem von  $P_0$  verschiedenen Punkt  $P$ , so stellt der Differenzenquotient (1) den *Anstieg*  $\Delta y/\Delta x = \tan \beta$  der Sekante  $s$  dar (Abb. 1). Für eine beliebige Nullfolge ( $\Delta x$ )



Differentialquotient. Abb. 1: Geometrische Bedeutung des Differenzenquotienten

ergibt sich eine Folge von Punkten  $P$  der Bildkurve, die sich für  $x \rightarrow x_0$  dem Punkt  $P_0$  beliebig nähern. Falls der D. existiert, geht die Folge der Anstiege der mit der Lage von  $P$  wechselnden Sekanten in den als D. eindeutig bestimmten Anstieg  $\tan \alpha$  der *Tangente*  $t$  im Punkte  $P_0$  an die Bildkurve von  $y = f(x)$  über. Es gilt (2).

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = f'(x_0) = y'(x_0) = \tan \alpha$$

Ist eine Funktion  $f$  für alle Punkte eines gegebenen Intervalls  $I$  bzw. einer beliebigen Teilmenge  $M$  des Definitionsbereichs  $D(f)$  von  $f$  differenzierbar, dann heißt  $f$  in  $I$  bzw.  $M$  *differenzierbar* bzw. *überall in  $D(f)$  differenzierbar*, falls  $M$  mit dem gesamten Definitionsbereich  $D(f)$  zusammenfällt. Jeder Stelle  $x_0$  aus  $M \subseteq D(f)$  ist dann eindeutig ein Wert  $f'(x_0)$  des D. zugeordnet, d. h., in  $M$  ist eine Funktion  $y'(x) = f'(x)$  definiert, die *erster D.* oder *erste Ableitung* von  $y = f(x)$  gen. wird. Der Funktionswert von  $f'$  in jedem Punkt  $x \in D(f')$  ist gleich dem *Anstieg* der Tangente an die Bildkurve von  $f$  im Punkt  $P$  mit der Abszisse  $x$ .

**Beispiel I.1.:** Der folgenden Tabelle für den Differenzenquotienten der Sinusfunktion mit  $x \rightarrow x_0 = 0$  entnimmt man die Vermutung  $\frac{d}{dx} \sin x|_{x=0} = 1$ , die sich auch als richtig erweist (↗ Ableitungen elementarer Funktionen).

$\Delta x = x - x_0$ $= x$	$y = f(x)$ $= \sin x$	$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x}{x}$
$\pi/2$	1,0000	0,6366
$\pi/3$	0,8660	0,8269
$\pi/4$	0,7071	0,9003
$\pi/6$	0,5236	0,9549
$\pi/12$	0,2618	0,9885
$\pi/18$	0,1745	0,9949
$\pi/36$	0,0872	0,9987
$\pi/90$	0,0349	0,9998

**Beispiel I.2.:** Die *konstante Funktion*  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x) = c = \text{const}$  ist für beliebiges  $x_0 \in ]-\infty, +\infty[$  differenzierbar, da nach (3)  $y' = f'(x) = 0$  für alle  $x$  gilt.

$$(3) \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

**Beispiel I.3.:** Die *lineare Funktion*  $y = f(x) = ax + b$  mit den beliebigen reellen Parametern  $a$  und  $b$  ist nach (4) für jedes  $x_0 \in D(f)$  differenzierbar, und die Ableitung  $f'$  hat die Gleichung  $y = a$ .

$$(4) \quad \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} a \frac{x - x_0}{x - x_0} = a$$

**Beispiel I.4.:** Die *Exponentialfunktion*  $y = f(x) = e^x$  ist nach (5) für beliebiges  $x_0$  differenzierbar, da  $(e^z - 1)/z$  für  $z \rightarrow 0$  den Grenzwert 1 hat. Wegen

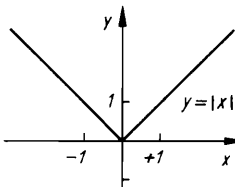
$y' = e^x$  stimmt die Exponentialfunktion mit ihrer Ableitung überein.

$$(5) \quad \frac{df}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

**Beispiel 1.5.:** Die Funktion  $f$ , die für  $x \neq 0$  der Gleichung  $y = f(x) = x^2 \sin(1/x)$  genügt, für  $x = 0$  aber den Wert 0 hat, ist für  $x_0 = 0$  differenzierbar, wie (6) zeigt.

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(1/x) = 0 \end{aligned}$$

**II.1.** Existieren die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ , so spricht man von *rechts-* bzw. *linksseitigem D.* Sind diese *einseitigen Ableitungen* voneinander verschieden, so ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht differenzierbar. Die Funktion  $f$  mit  $y = f(x) = |x|$ , z. B. hat an der Stelle  $x = 0$  zwar einseitige D.en,



Differentialquotient. Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktion  $|x|$

ist aber nach (7) dort nicht differenzierbar (Abb. 2); der rechtsseitige Grenzwert für  $x \downarrow 0$  ist  $+1$ , der linksseitige für  $x \uparrow 0$  ist  $-1$ . Da die Funktion  $f$  mit

$$(7) \quad \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$y = |x|$  an der Stelle  $x_0 = 0$  stetig ist, belegt sie die Tatsache, daß die Stetigkeit einer Funktion eine notwendige Voraussetzung, aber keine hinreichende Bedingung für ihre Differenzierbarkeit ist. Hat dagegen die Funktion  $f$  für  $x_0$  zwei einseitige Ableitungen (8), die einander gleich sind, so ist auch  $f(x)$  für  $x_0$  differenzierbar.

$$(8) \quad \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

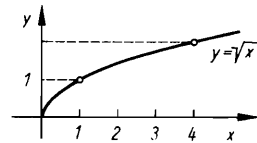
**II.2.** Auch wenn für  $x \rightarrow x_0$  der Differenzenquotient bestimmt divergent ist, existiert für  $x = x_0$  kein D. Für die Funktion  $y = \sqrt{x}$ , die nur für  $x \geq 0$  definiert ist, gilt z. B. (9), d. h., für  $x_0 = 0$  ist sie nicht differenzierbar (Abb. 3).

$$(9) \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

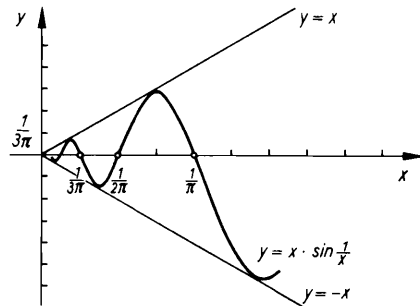
**II.3.** Eine weitere Funktion, die für  $x_0 = 0$  keinen D. hat, wird für  $x \neq 0$  durch die Gleichung  $y$

$= x \cdot \sin(1/x)$  und für  $x = 0$  durch den Funktionswert  $f(x) = 0$  definiert (Abb. 4). Nach (10) existiert für  $x \rightarrow 0$  der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht.

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$$



Differentialquotient. Abb. 3: Graphische Darstellung von  $\sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$



Differentialquotient. Abb. 4: Graphische Darstellung zu  $y = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

**III.** Ist eine Funktion  $f$  in  $M \subseteq D(f)$  stetig differenzierbar, so ist ihre erste Ableitung  $f'$  in  $M$  eine stetige Funktion, für die nach (1) der Differenzenquotient gebildet werden kann. Existiert für die Stelle  $x_0$  sein Grenzwert nach (11), so wird er  $D.$  zweiter Ordnung gen. Existiert er für jeden Punkt

$$(11) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \\ &= \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_0} = f''(x_0) = y''(x_0) \end{aligned}$$

einer Teilmenge  $M' \subseteq D(f)$  des Definitionsbereichs der Funktion, so ist  $f''$  eine Funktion von  $x \in M'$  und wird die *zweite Ableitung* von  $f$  in  $M'$  gen. Allgemein heißt eine Funktion  $f$  *n-mal differenzierbar* an der Stelle  $x_0$  bzw. in  $M^{(n)}$ , wenn der Grenzwert (12) des Differenzenquotienten der  $(n-1)$ -ten Ablei-

$$(12) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} = \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_0} \\ &= \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x_0} = f^{(n)}(x_0) = y^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

tung  $f^{(n-1)}$  an der Stelle  $x = x_0$  bzw. für alle  $x \in M^{(n)}$  existiert. Die Funktion  $f^{(n)}$  heißt *n-te Ableitung* der Funktion  $f$  in  $M^{(n)}$ . Zweite, dritte, ..., *n-te* Ableitungen einer Funktion  $f$  werden zusammenfassend auch

höhere Ableitungen bzw. Ableitungen erster, zweiter, ..., *n*-ter Ordnung gen.

IV. Für das Differenzieren ganzer Gruppen von Funktionen sind 7 Differentiationsregeln abgeleitet worden. Für häufig verwendete Funktionen  $f(x)$  einer reellen Variablen gibt die folgende Tabelle die erste Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0
$x$	1
$x^k, k > 1, k \in \mathbf{N}$	$kx^{k-1}$
$x^{-k}, k \geq 1, k \in \mathbf{N}$	$-kx^{-(k+1)}$
$e^x$	$e^x$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$
$\ln x, x > 0$	$1/x$
$\log_a x, a \neq 1, a, x > 0$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sqrt{x}, x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = f(x) = \sqrt[k]{x}, k > 2, k \in \mathbf{N}, x > 0$	$(1/k) \cdot x^{(1/k)-1} = \frac{1}{k \cdot \sqrt[k]{x^{k-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin(kx)$	$k \cos(kx)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos(kx)$	$-k \sin(kx)$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\text{Arcsin } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};  x  < 1$
$\text{Arccos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};  x  < 1$
$\text{arctan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
$\coth x$	$1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\text{Arsinh } x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\text{Arcosh } x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; x > 1$
$\text{Artanh } x$	$\frac{1}{1-x^2};  x  < 1$
$\text{Arcoth } x$	$-\frac{1}{x^2-1};  x  > 1$

höhere Ableitungen  $f^{(n)}(x)$  elementarer Funktionen

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$x^k, k > 1, k \in \mathbf{N}$	$k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n} = n! \binom{k}{n} x^{k-n}$ für $k \geq n, 0$ für $k < n$
$x^{-k}, k \geq 1, k \in \mathbf{N}$	$(-k)(-k-1) \dots (-k-n+1) x^{-k-n} = (-1)^n n! \binom{n+k-1}{n} x^{-(k+n)}$
$e^x$	$e^x$
$a^x, a > 0$	$(\ln a)^n a^x$
$\ln x, x > 0$	$(-1)^{n+1} (n-1)! x^{-n}$
$\log_a x, a \neq 1, a, x > 0$	$\frac{(-1)^{n+1}}{\ln a} (n-1)! x^{-n}$
$\sqrt{x}, x > 0$	$\binom{1/2}{n} n! x^{(1/2)-n}$
$y = f(x) = \sqrt[k]{x}, k > 2, k \in \mathbf{N}, x > 0$	$\binom{1/k}{n} n! x^{(1/k)-n}$
$\sin x$	$\sin(x + n \cdot \pi/2) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & \text{für } n = 2m + 1 \\ (-1)^m \sin x & \text{für } n = 2m \end{cases}$
$\sin(kx)$	$k^n \sin(kx + n \cdot \pi/2)$
$\cos x$	$\cos(x + n \cdot \pi/2) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \sin x & \text{für } n = 2m + 1 \\ (-1)^{m+1} \cos x & \text{für } n = 2m \end{cases}$
$\cos(kx)$	$k^n \cos(kx + n \cdot \pi/2)$

erste Ableitung  $f'(x)$  an sowie für einige die *n*-te Ableitung  $f^{(n)}(x)$  mit  $n > 1$  und  $n \in \mathbf{N}$ , die sich durch wiederholte Anwendung der Differentiationsregeln ergibt.

V. Zum D. einer komplexwertigen Funktion 7 Differenzierbarkeit in  $\mathbf{C}$ .

Differentialquotient, partieller: I. Grenzwert (1) des partiellen Differenzenquotienten einer Funktion  $f$  der *n* unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  an einer Stelle  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  des Definitionsbereichs  $D(f)$  von  $f$  für  $x_k \rightarrow x_k^0$  bzw.  $\Delta x_k = x_k - x_k^0 \rightarrow 0$ .

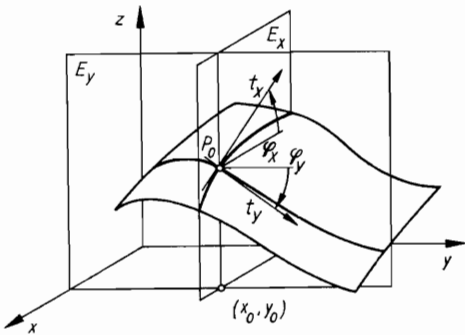
$$(1) \lim_{\substack{x_k \rightarrow x_k^0 \\ \Delta x_k \rightarrow 0}} \frac{f(x_1^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{x_k - x_k^0} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_k y}{\Delta x_k} = f_{x_k}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0)$$

Die Funktion  $f$  heißt dann an der Stelle  $P_0 \in D(f)$  partiell differenzierbar nach der unabhängigen Variablen  $x_k$ ; der Grenzwert heißt genauer p. D. erster Ordnung der Funktion  $f$  an der Stelle  $P_0$ . Für jede der *n* unabhängigen Variablen kann ein p. D. erster Ordnung  $f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0), \dots, f_{x_n}(P_0)$  an der Stelle  $P_0$  existieren. Ist eine Funktion  $f$  der *n* unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  für alle Punkte  $P$  einer Teilmenge  $M$  ihres Definitionsbereichs partiell differenzierbar nach  $x_k$ , dann wird analog zu

Funktionen mit einer Variablen durch die Zuordnung  $P \rightarrow f_x(P)$  eine Funktion  $f_x$  auf  $M$  definiert, die *partielle Ableitung* von  $f$  nach  $x_k$  gen. wird. Eine für  $P_0 = (x_0, y_0)$  partiell nach  $x$  und  $y$  differenzierbare Funktion  $f$  zweier unabhängiger Variablen  $x, y$  mit der Gleichung  $z = f(x, y)$  hat die beiden *partiellen Ableitungen* erster Ordnung (2). Zur geometr. Bedeutung der *partiellen Ableitung*

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_x(P_0), \\
 & \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = f_y(P_0)
 \end{aligned}$$

$f_x(x, y)$  und  $f_y(x, y)$  erster Ordnung für eine Funktion  $z = f(x, y)$  zweier Variablen wird die zur  $(x, z)$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallele Ebene  $E_x$  betrachtet, d. h.,  $y = y_0$  wird festgehalten (Abb. 1). An die Schnittkurve von



Differentialquotient, partieller. Abb. 1: Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen

$E_x$  mit der Fläche  $f(x, y)$  wird in  $P_0 = (x_0, y_0)$  die Tangente  $t_x$  gelegt, die mit der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $P_0$  den Winkel der Größe  $\varphi_x$  bildet, für den gilt  $f_x(P_0) = \tan \varphi_x$ . In der Ebene  $E_y$  parallel zur  $y, z$ -Ebene durch  $P_0$  bildet entsprechend die Tangente  $t_y$  in  $P_0$  an ihre Schnittkurve mit der Fläche  $f(x, y)$  gegen die Parallele zur  $y$ -Achse den Winkel der Größe  $\varphi_y$ , für den gilt  $f_y(P_0) = \tan \varphi_y$ . Formal werden partielle Ableitungen nach der Variablen  $x_k$  gebildet durch Anwendung der  $\nearrow$  Differentiationsregeln für Funktionen einer Varia-

blen, indem alle übrigen Variablen  $x_j, j \neq k$  für  $1 \leq j \leq n$  als Konstanten angesehen werden.

*Beispiel 1:* Von der Funktion  $y = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1^2x_2x_3^2 + \sin x_3^2$  erhält man die p. D.  $f_{x_1} = 2x_1 + 4x_1x_2x_3^2, f_{x_2} = 2x_1^2x_3^2, f_{x_3} = 4x_1^2x_2x_3 + 2x_3 \cos x_3^2$ .

*Beispiel 2:* Von  $z = f(x, y) = e^{xy} \sin(xy)$  erhält man die p. D.  $f_x = y e^{xy} (\sin(xy) + \cos(xy)), f_y = x e^{xy} (\sin(xy) + \cos(xy))$ .

II. In Analogie zur Bildung der ersten partiellen Ableitungen werden *höhere partielle Ableitungen* gebildet, falls die p. D.en erster Ordnung in einem Teilbereich  $M \subseteq D(f)$  des Definitionsbereichs partiell differenzierbar sind. Dabei bezeichnet man p. D.en nach verschiedenen Variablen als *gemischte p. D.en*. Für  $n = 2$  z. B. sind  $2^2 = 4$  p. D.en (3) möglich, von denen zwei gemischte p. D.en sind.

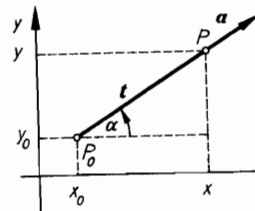
$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{\partial}{\partial x} (f_x) = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} (f_y) = f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\
 & \frac{\partial}{\partial y} (f_x) = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (f_y) = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich  $2^3$  *dritte partielle Ableitungen* oder *partielle Ableitungen dritter Ordnung*  $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx}, f_{xyy}, f_{yyx}$  und  $f_{yyy}$  bilden. Bei Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen werden die p. D.en entsprechend gebildet. Unter den Voraussetzungen des *Satzes von Schwarz* sind gemischte partielle Ableitungen nach den gleichen Variablen unabhängig von der Reihenfolge, in der nach ihnen differenziert wurde, einander gleich, es gilt z. B.  $f_{xzy} = f_{zyx} = f_{yzx}$ .

*Beispiel:* Von der Funktion  $z = f(x, y) = (xy)^2 e^{xy}$  erhält man

$$\begin{aligned}
 f_x &= 2y(xy) e^{xy} + y(xy)^2 e^{xy} = y(xy) e^{xy} (2 + xy), \\
 f_y &= 2x(xy) e^{xy} + x(xy)^2 e^{xy} = x(xy) e^{xy} (2 + xy), \\
 f_{xy} &= (xy)^2 e^{xy} + (xy) e^{xy} (2 + xy)^2 = f_{yx}.
 \end{aligned}$$

III. Die *Richtungsableitung* einer Funktion  $f$  der zwei Variablen  $x$  und  $y$  mit der Gleichung  $z = f(x, y)$ , die in  $P_0 = (x_0, y_0)$  und einer gewissen Umgebung von  $P_0$  definiert ist, kann festgelegt werden, wenn zusätzlich eine Richtung  $P_0\vec{P} = \vec{t}$  durch einen Vektor  $\vec{a}$  ausgezeichnet wird (Abb. 2).



Differentialquotient, partieller. Abb. 2: Richtungsableitung

Schließt  $\vec{t}$  mit der positiven  $x$ -Achse einen Winkel der Größe  $\alpha$  ein, so gilt  $x - x_0 = t \cos \alpha$  und  $y - y_0 = t \sin \alpha$  mit  $t = |P_0P|$ . Hat der Ausdruck (4) für  $P \rightarrow P_0$  einen Grenzwert, dann existiert für die

$$(4) \quad \frac{f(P) - f(P_0)}{|P_0P|}$$

Funktion  $f$  die *Richtungsableitung* (5) in Richtung von  $\mathbf{a}$  an der Stelle  $P_0$ .

$$(5) \quad \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|P_0P|} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_a}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0)$$

Hat  $f$  partielle Ableitungen erster Ordnung in  $P_0$  und einer Umgebung von  $P_0$  und sind diese dort stetig, dann gilt (6).

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0) = f_x(P_0) \cos \alpha + f_y(P_0) \sin \alpha$$

Der Vektor mit den Komponenten  $f_x(P_0), f_y(P_0)$  heißt *Gradient* der Funktion  $f$  im Punkt  $P_0$ , in Zeichen  $\mathbf{grad}_P f = \{f_x(P_0), f_y(P_0)\}$ . Dieser zeigt in Richtung maximaler Richtungsableitung bzw. in Richtung maximalen Anstiegs. Ist  $\mathbf{e} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  der Einheitsvektor in Richtung  $\mathbf{a}$ , dann läßt sich die Richtungsableitung auch als *Skalarprodukt* (7) schreiben.

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(P_0) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{grad}_P f$$

Der Gradient von  $f$  steht senkrecht auf den *Niveau-*linien, das sind die Projektionen der Schnittkurven der Fläche  $z = f(x, y)$  mit den Ebenen  $z = \text{const}$ , die als *Höhenlinien* der Fläche  $f(x, y)$  aufgefaßt werden können. Diese Betrachtungen können auf Funktionen in mehr als zwei Variablen übertragen werden. Als *Gradient* von  $f$  in einem Punkt  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  ist hier der Vektor  $\mathbf{grad}_P f = \{f_{x_1}(P_0), \dots, f_{x_n}(P_0)\}$  definiert. Er steht senkrecht auf den *Niveauhyperebenen*.

**IV. Das partielle Differential** ( $\nearrow$  Differential) einer Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  nach einer der  $n \geq 2$  unabhängigen Variablen  $x_k$  mit  $1 \leq k \leq n$  definiert man unter Voraussetzung der Existenz der entsprechenden partiellen Ableitungen als  $d_{x_k} f = f_{x_k} dx_k$ ; analog werden höhere Differentiale definiert. Ist die Funktion  $f$  in  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  und in einer gewissen Umgebung von  $P_0$  definiert und sind  $dx_1, \dots, dx_n$  die Differentiale der unabhängigen Variablen, dann hat  $f$  in  $P_0$  ein *vollständiges* bzw. *totales Differential*, wenn sich der Funktionszuwachs in  $P_0$  durch (8) darstellen läßt. Dabei hängen die  $a_1, \dots, a_n$  nicht von den  $dx_1, \dots, dx_n$

$$(8) \quad \Delta y = f(x_1^0 + dx_1, \dots, x_n^0 + dx_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n + o(d)$$

ab und  $o(d) := \varepsilon_1 dx_1 + \dots + \varepsilon_n dx_n$ , wobei die  $\varepsilon_i$  mit  $dx_i \rightarrow 0$  selbst gegen Null gehen, so daß  $o(d)$  mit höherer Ordnung gegen Null konvergiert als jedes  $dx_i$ . Das *vollständige Differential* ist dann durch  $dy = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$  charakterisiert. Die Funktion  $f$  heißt *total differenzierbar* in  $P_0$ , wenn  $f$  in  $P_0$  ein vollständiges oder totales Differential hat (s. a. Differential III.). Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen allein folgt noch nicht die totale Differenzierbarkeit, nicht einmal die Stetigkeit, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel:** Die Funktion  $f$  mit der Gleichung (9) ist an der Stelle  $(0, 0)$  unstetig, aber sämtl. Rich-

tungsableitungen existieren. Charakterisiert näm-

$$(9) \quad z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

lich  $\alpha$  eine beliebige Richtung  $\mathbf{t}$  durch  $x = t \cdot \cos \alpha$ ,  $y = t \cdot \sin \alpha$  und  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , so gilt (10) für alle  $\alpha$  mit  $0 < \alpha < 2\pi$ ,  $\alpha \neq \pi$ , und für  $\alpha = 0$  bzw.

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 \cos^5 \alpha}{t^2 (\sin \alpha - t^2 \cos^2 \alpha)^2 + t^8 \cos^8 \alpha} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^5 \alpha}{(\sin \alpha - t \cos^2 \alpha)^2 + t^6 \cos^8 \alpha} = 0$$

$\alpha = \pi$  ergibt sich nach (11) ebenfalls eine Richtungsableitung der Größe Null.

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pm t^3}{t^2 + t^6} = 0$$

Im Punkte  $(0, 0)$  existieren danach alle Richtungsableitungen und sind sämtlich gleich Null. Dagegen kann  $f$  wegen (12) an der Stelle  $(0, 0)$  nicht stetig sein, weil (12a) nicht existiert.

$$(12) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{x}{1 + x^4} = 0$$

$$(12a) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^5}{x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty$$

**Differentialrechnung:** Grunddisziplin der Analysis; untersucht Eigenschaften von Funktionen auf der Grundlage der reellen Zahlen, der Theorie der reellen Funktionen und des Grenzwertbegriffs durch Betrachtung ihres Differentialquotienten. Unabhängig voneinander wurde sie für den Fall einer reellen Variablen in der zweiten Hälfte des 17. Jh. von LEIBNIZ und NEWTON geschaffen ( $\nearrow$  Differentialquotient, Differentialquotient, partieller). Während NEWTON von physikal. Fragestellungen ausging, stellte LEIBNIZ das *Tangentenproblem* an die Spitze seiner Überlegungen. Die dabei von ihm geschaffenen Bezeichnungen und Symbole für den *Differentialquotienten* und das Integral sind heute noch üblich. Beide Problemkreise haben sich im Laufe der Zeit stark entwickelt und gegenseitig durchdrungen. Der geometr. erweiterte sich über die analyt. Geometrie der Ebene und die des Raumes bis zur Differentialgeometrie, der physikal. aber hat der gesamten Physik und Technik ihr Gepräge gegeben. Ohne die Theorie der reellen und komplexen Funktionen und ohne Differentialgleichungen sind diese Gebiete nicht mehr vorstellbar. Darüber hinaus hat das Bedürfnis, die Beschreibung kontinuierl. Abläufe mathematisch zu präzisieren, fruchtbare Auswirkungen auf die Grundlagen der Mathematik gehabt.

**Differentiation, implizite**  $\nearrow$  Differentiationsregeln VI.

**Differentiationsregeln: I.** Regeln, nach denen für spezielle Funktionsbildungen der *Differentialquotient* gefunden werden kann. Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $y = f(x)$  bzw.  $y = g(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  differenzierbar ( $\nearrow$  Differentialquotient), dann sind es auch die Funktionen  $c \cdot f$  mit der reellen Konstanten  $c$ ,  $f + g$ ,  $f - g$  und  $f \cdot g$ . Die *Faktorregel* (1) ergibt sich, weil schon im Differenzenquotienten der konstante reelle Faktor  $c$  ausge-

$$(1) \quad (cf)' = \frac{d(cf)}{dx} = c \frac{df}{dx} = cf'$$

klammert werden kann. Die *Summenregeln* (2) und (3) beruhen darauf, daß der Grenzwert einer

$$(2) \quad (f + g)' = \frac{d(f + g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} = f' + g'$$

$$(3) \quad (f - g)' = \frac{d(f - g)}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx} = f' - g'$$

algebraischen Summe gleich der algebraischen Summe der Grenzwerte ihrer Summanden ist. Sie gelten danach für eine endl. Anzahl von Summanden. Von der Gültigkeit der *Produktregel* (4) kann man

$$(4) \quad (f \cdot g)' = \frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx} \\ = f' \cdot g + f \cdot g'$$

sich z. B. dadurch überzeugen, daß man den Zähler des Differenzenquotienten von  $(f \cdot g)$  durch Addition von  $-f(x_0) \cdot g(x_0 + h) + f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h)$  in die Summe (5) zerlegt, deren Grenzwert nach den gemachten Voraussetzungen existiert. Auch dieses

$$(5) \quad [f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0 + h)] \\ + [f(x_0) \cdot g(x_0 + h) - f(x_0) \cdot g(x_0)]$$

Resultat kann auf mehrere Faktoren erweitert werden, indem man nach dem Assoziativgesetz, z. B. nach  $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c$ , erst die Ableitung von  $(a \cdot b) = p$  und danach die von  $p \cdot c = a \cdot b \cdot c$  bestimmt. Die Faktor- und die Summenregel lassen sich zusammenfassen zur Beziehung (6), in der  $c_1$  und  $c_2$  reelle Konstanten sind.

$$(6) \quad (c_1 f + c_2 g)' = \frac{d(c_1 f + c_2 g)}{dx} \\ = c_1 \frac{df}{dx} + c_2 \frac{dg}{dx} = c_1 f' + c_2 g'$$

Sinngemäß übertragen sich diese Regeln auf *partielle Ableitungen*; formal ist dabei lediglich  $d$  durch  $\partial$  zu ersetzen. Für die *Differentiale* gelten entsprechend die Beziehungen (7).

$$(7) \quad d(cf) = c df; \quad d(f + g) = df + dg; \\ d(f - g) = df - dg; \quad d(fg) = g \cdot df + f \cdot dg$$

Ist die Funktion  $g$  an der Stelle  $x = x_0$  differenzierbar und gilt  $g(x_0) \neq 0$ , dann ist auch die Funktion  $\varphi = 1/g$  an der Stelle  $x = x_0$  differenzierbar. Aus der Existenz von  $g'$  und  $\varphi'$  folgt die Differenzierbarkeit

von  $\varphi \cdot g = 1$ . Sie ergibt  $\varphi' \cdot g + g' \cdot \varphi = 0 = \varphi' \cdot g + g'/g$  und damit  $\varphi' = -g'/g^2$ . Aus (8) erhält man für eine Stelle  $x = x_0$  nach der Produktregel die *Quotientenregel* (9) unter der gemachten Voraussetzung  $g(x_0) \neq 0$ .

$$(8) \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{dg}{dx} \frac{1}{g^2(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$(9) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

**II.** Nach den Regeln in I. kann die Ableitung jeder rationalen Funktion berechnet werden. Zur Vereinfachung dient die *Potenzregel* (10), die sich aus der Produktregel ergibt. Nach der Quotientenregel läßt sich ihr Gültigkeitsbereich auf  $n \in \mathbf{Z}$  erweitern,

$$(10) \quad \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \text{ für } n > 0, n \in \mathbf{N}$$

denn für  $f(x) = 1/x^n$  mit der ganzen Zahl  $n > 1$  erhält man (11); danach gilt (10) auch für ganze Zahlen  $\nu < 0$ .

$$(11) \quad f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} \\ = -nx^{n-1} = \nu x^{\nu-1} \text{ für } \nu = -n$$

Mit Hilfe der in IV. angegebenen Kettenregel erhält man die Ableitung der durch die Gleichung  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  gegebenen Funktion durch Differentiation der Gleichung  $(f(x))^n = x$ . Nach (12) gewinnt man daraus die Ableitung für die Funktion  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^\alpha$

$$(12) \quad n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x) = 1 \text{ oder} \\ f'(x) = \frac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \frac{1}{n[\sqrt[n]{x}]^{n-1}} = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} \\ = \frac{1}{n \cdot x^{1-1/n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1}$$

mit  $\alpha = 1/n$  für positive natürl. Zahlen  $n$ , d. h. die Ableitung  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Danach gilt die Potenzregel (10) auch für Exponenten  $\alpha = 1/n$  und damit für rationale Exponenten. Mit Hilfe der Ableitung der Exponentialfunktion kann ihre Gültigkeit auch auf beliebige reelle Exponenten erweitert werden.

*Beispiel II.1.:* Für die Funktion mit der Gleichung  $f(x) = (3x^2 - 5x + 6)(4x^2 + 3x - 7)$  erhält man nach der Produktregel

$$f'(x) = (6x - 5)(4x^2 + 3x - 7) \\ + (3x^2 - 5x + 6)(8x + 3) = 48x^3 - 33x^2 - 24x + 53.$$

*Beispiel II.2.:* Nach der Quotientenregel hat die durch (13) bestimmte Funktion die Ableitung (14).

$$(13) \quad f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x^4 + 2}$$

$$(14) \quad f'(x) = \frac{6x(x^4 + 2) - 4x^3(3x^2 - 5)}{(x^4 + 2)^2} \\ = \frac{2x(6 + 10x^2 - 3x^4)}{(x^4 + 2)^2}$$

**III. Zur Ableitung einiger transzendenter Funktionen** geht man auf die Definition des Differentialquotienten zurück; z. B. gilt  $(e^x)' = e^x$  (vgl. Differentialquotient, Beispiel I.4.). Für die *Sinusfunktion*  $f(x) = \sin x$  wird der Zähler  $\sin(x_0 + h) - \sin x_0$  nach der goniometr. Beziehung

$\sin x_1 - \sin x_2 = 2 \cos [(x_1 + x_2)/2] \cdot \sin [(x_1 - x_2)/2]$  umgeformt zum Produkt  $2 \cos [x_0 + h/2] \cdot \sin (h/2)$ , dessen Faktoren für  $h \rightarrow 0$  die Grenzwerte  $\cos x_0$  und 1 haben, so daß (15) gilt. Die Ableitung (16) der *Kosinusfunktion* ergibt sich entsprechend. Nach der Quotientenregel erhält man die Ableitungen (17) und (18) der *Tangens-* bzw. *Kotangensfunktion*.

$$(15) \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$

$$(16) \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$(17) \quad \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)}{\cos^2 x} \\ = \frac{\cos x \cdot \cos x - (\sin x) (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(18) \quad \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

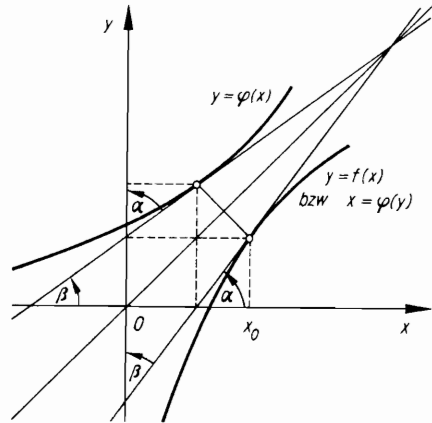
**IV. Die Ableitung einer mittelbaren Funktion** mit der Gleichung  $F(x) = \Phi(f(x))$  berechnet sich nach der *Kettenregel*. Ist  $f(x)$  für  $x = x_0$  und  $\Phi(z)$  für  $z = z_0 = f(x_0)$  differenzierbar, dann ist auch  $F(x) = \Phi(f(x))$  an der Stelle  $x = x_0$  differenzierbar, und es gilt die Kettenregel (19).

$$(19) \quad \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z=z_0} \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

**Ableitung der Umkehrfunktion.** Ist die reelle Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  in einem Intervall stetig, monoton und an einer Stelle  $x = x_0$  im Innern dieses Intervalls differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$ , dann existiert die Umkehrfunktion  $\varphi$  mit der Gleichung  $x = \varphi(y)$  und den gleichen Eigenschaften wie  $f$ , und für die Ableitung der Umkehrfunktion  $\varphi$  gilt (20) wegen  $y = f(x) = f(\varphi(y))$  bzw.  $x = \varphi(y) = \varphi(f(x))$ .

$$(20) \quad \left. \frac{d\varphi}{dy} \right|_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0=\varphi(y_0)}}$$

Vertauscht man wie üblich in der Bezeichnung der Umkehrfunktion die Variablen, so liegen die Bilder von  $y = f(x)$  und  $y = \varphi(x)$  spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten, und die Tangente im Punkte  $(x_0, y_0)$  von  $f(x)$  geht über in die im Punkte  $(y_0, x_0)$  von  $\varphi(x)$  (Abb.). Bildet jede den Winkel der Größe  $\alpha$  bzw.  $\beta$  mit der  $x$ -Achse, so gilt  $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \tan \alpha / \cot \beta = 1$ , weil diese Winkel Komplementwinkel sind. Dies ist eine geometr. Veranschaulichung von Gleichung (20), die in diesem Fall die Gestalt  $\varphi'(x) \cdot f'(x) = 1$  hat. Mit der Kettenregel können die bekannten D. auf



Differentiationsregeln: Anstieg der Kurven zweier zueinander inverser Funktionen in zwei zur Geraden mit der Gleichung  $y = x$  spiegelbildlichen Punkten

komplizierte Funktionen angewendet werden. Setzt man z. B.  $f(x) = 5x^3 - 7x + 8 = z$  in der Gleichung  $F(x) = \sqrt{5x^3 - 7x + 8}$  der Funktion  $F = \Phi(f(x))$  mit  $\Phi(z) = \sqrt{z}$ , so erhält man (21) nach (19).

$$(21) \quad \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dz} \Phi(z) \cdot \frac{d}{dx} f(x) \\ = \frac{1}{2} z^{-1/2} \cdot (15x^2 - 7) = \frac{15x^2 - 7}{2 \sqrt{5x^3 - 7x + 8}}$$

In den *Hyperbelfunktionen* ist  $\Phi(z)$  eine rationale Funktion der Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$ . Danach findet man in (22) die Ableitung von  $y = \sinh x$  und mit diesem Ergebnis nach (23) die von  $f(x) = \tanh x$ . Entsprechend findet man (24) und (25).

$$(22) \quad \frac{d \sinh x}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right] \\ = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$(23) \quad \frac{d \tanh x}{dx} = \frac{d \left[ \frac{\sinh x}{\cosh x} \right]}{\cosh^2 x - \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(24) \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x$$

$$(25) \quad \frac{d \coth x}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Den natürl. Logarithmus  $x = \varphi(y) = \ln y$  faßt man als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $y = f(x) = e^x$  auf; nach (20) gilt dann (26) wegen  $f'(x) = e^x$  bzw. (26a), wenn die Bezeichnung der

$$(26) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \quad \text{bzw.} \quad (26a) \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Variablen umgekehrt wird. Damit kann die *Produktregel* (10) auf beliebige reelle Zahlen  $\alpha$  als Exponent erweitert werden, indem man  $y = f(x) = x^\alpha$

=  $e^{a \ln x}$  setzt und wie in (27) gezeigt nach der Kettenregel differenziert.

$$(27) \quad \frac{df(x)}{dx} = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot \frac{x^a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

Auch der Differentialquotient des *Logarithmus*  $y = \log_a x$  kann über die zu ihm inverse Funktion  $x = a^y = e^{y \ln a}$  nach (28) gewonnen werden.

$$(28) \quad \frac{dy}{dx} = 1 / \left( \frac{dx}{dy} \right) = \frac{1}{e^{y \ln a} \cdot \ln a} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} \\ = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Die *Arkusfunktionen* sind die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen, z. B. sind  $y = \arcsin x$  und  $x = \sin y$  inverse Funktionen. Als Anwendung von (20) erhält man danach z. B. (29). Entsprechend

$$(29) \quad \frac{dy}{dx} = 1 / \left( \frac{dx}{dy} \right) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{d \arcsin x}{dx}$$

erhält man die Ableitungen (30), (31) und (32).

$$(30) \quad \frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(31) \quad \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(32) \quad \frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

Dabei sind die Wertebereiche der Umkehrfunktionen zu beachten. Im Hauptwertebereich  $-\pi/2 < y < \pi/2$  für  $y = \arcsin x$  und  $0 < y < \pi$  für  $y = \arccos x$  z. B. hat die Wurzel positives Vorzeichen. Die Ableitungen der transzendenten Arkusfunktionen erweisen sich als algebraische oder gar gebrochene rationale Funktionen. Entsprechendes gilt auch für die Ableitungen der *Areafunktionen*, die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen; z. B. sind  $y = \operatorname{arsinh} x$  und  $x = \sinh y$  inverse Funktionen. Nach (20) ergibt deshalb (33) ihre Ableitung.

$$(33) \quad \frac{dy}{dx} = 1 / \left( \frac{dx}{dy} \right) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} \\ = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{d \operatorname{arsinh} x}{dx}$$

Entsprechend ergeben sich die Ableitungen (34), (35) und (36), wenn man z. B. in (35) die Umrechnung  $1 - \tanh^2 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x) / \cosh^2 x = 1 / \cosh^2 x$  beachtet.

$$(34) \quad \frac{d \operatorname{arcosh} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ für } x > 1$$

$$(35) \quad \frac{d \operatorname{artanh} x}{dx} = \frac{1}{1 - x^2} \text{ für } |x| < 1$$

$$(36) \quad \frac{d \operatorname{arcoth} x}{dx} = \frac{1}{1 - x^2} \text{ für } |x| > 1$$

Trotz formaler Gleichheit stellen (35) und (36) verschiedene Funktionen dar, weil sie verschiedene Definitionsbereiche haben.

V. Der *Satz vom totalen Differential*, auch *verallgemeinerte Kettenregel* gen., bezieht sich auf Funktionen mehrerer reeller Variablen. Ist z. B.  $f$  eine Funktion der beiden reellen Variablen  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  mit der Gleichung  $z = f(x, y) = \Phi(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ , ist  $f$  an der Stelle  $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = P_0(x_0, y_0)$  und in einer Umgebung von  $P_0$  differenzierbar ( $\nearrow$  Differentialquotient, partieller), sind die *partiellen Ableitungen*  $f_x$  und  $f_y$  dort noch stetig,  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  für  $t = t_0$  differenzierbar, dann gilt für  $t = t_0$  (37) in Verallgemeinerung von (19) bzw. (38) für  $n$  innere Funktionen  $u_1, \dots, u_n$ .

$$(37) \quad \frac{d}{dt} \Phi(t) = f_x(x_0, y_0) \cdot \frac{d\varphi}{dt} + f_y(x_0, y_0) \frac{d\psi}{dt}$$

$$(38) \quad \frac{d}{dt} f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \\ = f_{u_1} \frac{du_1}{dt} + f_{u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + f_{u_n} \frac{du_n}{dt}$$

Als Spezialfall der verallgemeinerten Kettenregel ergibt sich (39) für eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $z = f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = F(x)$  und mit stetigen partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$ .

$$(39) \quad \frac{dF}{dx} = f_x + f_y \frac{d\varphi}{dx}$$

*Beispiel V.1.:* Zur Differentiation der Funktion  $z = f(x, y) = (\sqrt{x})^{y^2}$  setzt man  $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$  und erhält  $Z = z(x, y) = (\sqrt{x})^y = x^{y/2}$ , die nach (39) differenziert wird, wie (40) zeigt.

$$(40) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y}{2} x^{y/2-1} + (\sqrt{x})^y \ln \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ = \frac{1}{2} (\sqrt{x})^{y-1} (1 + \ln \sqrt{x})$$

VI. Die Differentiation *implizit gegebener Funktionen* ist nach der verallgemeinerten Kettenregel möglich. Ist  $F(x, y)$  eine Funktion zweier reeller Variabler  $x, y$ , so wird durch die Gleichung  $F(x, y) = 0$  eine Funktion  $y = f(x)$  der reellen Variablen  $x$  bestimmt, falls die Gleichung nach  $y$  auflösbar ist. Nach der Kettenregel gilt dann (41) bzw. (42). Die Ableitung  $y'$  der implizit durch  $F(x, y) = x^3 + e^y = 0$  für  $x < 0$  gegebenen Funktion ergibt sich nach (43).

$$(41) \quad F_x + F_y \frac{df}{dx} = 0$$

$$(42) \quad \frac{df}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}; \\ \frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{1}{F_y^3} (F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2)$$

$$(43) \quad y' = \frac{df}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2}{e^y} = -\frac{3x^2}{(-x^3)} = \frac{3}{x}$$

Analog bildet man nach (44) die partiellen Ableitungen einer Funktion  $f$  der  $n$  unabhängigen Varia-



blen  $x_1, \dots, x_n$ , die in der Form  $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$  gegeben ist.

$$(44) \quad f_{x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y}, \dots, f_{x_n} = -\frac{F_{x_n}}{F_y}$$

Die Ableitungen einer Funktion, deren *Gleichung in Parameterdarstellung*  $x = x(t), y = y(t)$  gegeben ist, ergeben sich nach (45). Dabei wird die Ordnung der Ableitung nach dem Parameter  $t$  durch die Anzahl der Punkte über  $x$  bzw.  $y$  angegeben.

$$(45) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}; \text{ usw.}$$

**VII.** Eine Verallgemeinerung der *Produktregel* ist die *Leibnizsche Formel* (46). In ihr bedeuten  $f$  und  $g$  zwei Funktionen der Variablen  $x$  und speziell

$$(46) \quad \frac{d^n(fg)}{dx^n} = (fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x)$$

$f^{(0)} = f, g^{(0)} = g, \binom{n}{i}$  sind die Binomkoeffizienten und  $f^{(k)}(x)$  ist die  $k$ -te Ableitung der Funktion  $f$ . Für  $n = 1$  ergibt sich die Produktregel (4) als Spezialfall.

*Beispiel:* Die  $n$ -te Ableitung der Funktion  $y = e^{2x}$  ergibt sich aus (47).

$$(47) \quad \begin{aligned} \frac{d^n(e^{2x})}{dx^n} &= (e^x \cdot e^x)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^x e^x \\ &= e^{2x} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n e^{2x} \end{aligned}$$

**VIII.** Unter der *logarithm. Ableitung* der Funktion  $f > 0$  der reellen Variablen  $x$  wird die Ableitung (48) der Funktion  $\ln f$  verstanden, d. h. der Ausdruck  $f'(x)/f(x)$ .

$$(48) \quad \frac{d \ln f}{dx} = \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \text{ bzw. } f'(x) = f(x) \cdot \frac{d \ln f}{dx}$$

In vielen Fällen schafft sie einen günstigeren Zugang zur numer. Rechnung. Für die Funktion  $y = f(x) = x^x$  mit dem Definitionsbereich  $x > 0$  erhält man wegen  $\ln y = y \ln x$  z. B. (49) und

$$(49) \quad \frac{d \ln y}{dx} = \frac{f'}{f} = \ln x + 1 = \frac{f'}{x^x}$$

daraus die Ableitung  $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ . Die *logarithm. Ableitung*  $(f \cdot g)'/(fg)$  eines Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe der logarithm. Ableitungen der Faktoren; die *logarithm. Ableitung*  $(f/g)'/(f/g)$  eines Quotienten aus zwei Funktionen ist gleich der Differenz der logarithm. Ableitungen der Funktionen, denn nach den Regeln für das Differenzieren eines Logarithmus bzw. eines Produkts oder Quotienten erhält man (50) und (51).

$$(50) \quad \frac{d \ln(f \cdot g)}{dx} = \frac{(f \cdot g)'}{(f \cdot g)} = \frac{f'g}{fg} + \frac{fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$$

$$(51) \quad \begin{aligned} \frac{d \ln(f/g)}{dx} &= \frac{(f/g)'}{(f/g)} = \frac{1}{(f/g)} \left( \frac{f'g - fg'}{g^2} \right) \\ &= \frac{1}{fg} (f'g - fg') = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \end{aligned}$$

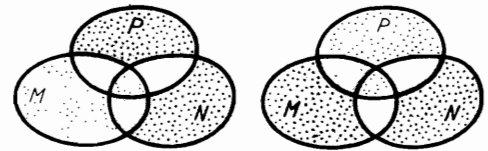
**IX. D.** für Vektorfelder ↗ Vektorfeld.

**Differentiationsatz** ↗ Laplacetransformation II.2.

**Differentiator** svw. Differenziergerät I.

**Differentiograph** ↗ Differenziergerät IV., ↗ Integriergerät III.

**Differenz:** I. *Mengenlehre* Verknüpfung zweier Mengen  $M, N$  zur D.menge  $M \setminus N$ , der Menge aller der Dinge, die Element von  $M$ , aber nicht Element von  $N$  sind:  $M \setminus N = \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}$ .  $M \setminus N$  liest man » $M$  minus  $N$ «. Bei  $M = \{a, b, c\}$  und  $N = \{b, c, d\}$  z. B. ist  $M \setminus N = \{a\}$  und  $N \setminus M = \{d\}$ , d. h., diese Verknüpfung ist nicht kommutativ. Es ist stets  $M \setminus N \subseteq M$  und  $M \setminus M = \emptyset$ . — Die D.  $M \setminus N$  nennt man häufig auch das *Komplement* von  $N$  bezüglich  $M$ , bes. dann, wenn  $N \subseteq M$  ist; es wird mit  $C_M N$  oder — falls klar ist, welche Menge  $M$  gemeint ist — auch mit  $\bar{N}$  bezeichnet. — Die *symmetr. D.* zweier Mengen  $M, N$  ist die Menge  $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ ; sie wird mit  $M \Delta N$  bezeichnet, lies » $M$  Delta  $N$ «. Für alle Mengen  $M, N, P$  ist  $M \Delta M = \emptyset, M \Delta N = N \Delta M$  und  $M \Delta (N \Delta P) = (M \Delta N) \Delta P$  (Abb.). S. a. Mengenalgebra.



Differenz: Euler-Vennsches Diagramm für  $M \Delta (N \Delta P) = (M \Delta N) \Delta P$ , grau ist links  $N \Delta P$ , rechts  $M \Delta N$  dargestellt, das Ergebnis links und rechts ist punktiert und auf beiden Seiten gleich groß

**II.** ↗ analytische Funktion II., ↗ arithmetische Reihe, ↗ arithmetische Zahlenfolge I., ↗ Grenzwert einer Zahlenfolge III.1., ↗ Matrix II., ↗ reelle Zahlen II., ↗ Stetigkeit III.1., ↗ Stetigkeit einer Funktion III., ↗ Subtraktion I., ↗ Vektorraum II.

**Differenz, reziproke** ↗ Kettenbruchentwicklung.

**Differenzen,** absteigende, aufsteigende, zentrale ↗ Interpolation II.

**Differenzenfolge** ↗ arithmetische Zahlenfolge II.

**Differenzenquotient:** für zwei Punkte  $P = (x, y)$  und  $P_0 = (x_0, y_0)$  im Definitionsbereich  $D(f)$  einer reellen Funktion  $f$  der Quotient (1) der Differenz  $\Delta y = y - y_0$  der Funktionswerte und der Differenz  $\Delta x = x - x_0$  der Argumente.

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

für  $\Delta x = h = x - x_0$ , bzw.  $x = x_0 + h = x_0 + \Delta x$

Für die lineare Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = mx + n$  ist der D. nach (2) eine Konstante, die den *Anstieg*  $m$  der durch die Funktionsgleichung beschriebenen Geraden angibt (↗ Differential-

quotient I.).

$$(2) \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{mx_1 + n - (mx_2 + n)}{x_1 - x_2} = m$$

Für eine Funktion  $f$  der  $n$  reellen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  wird für jede der Variablen  $x_k$  z. B. im Punkte  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  ein D. nach (3) bestimmt mit  $\Delta x_k = x_k - x_k^0$ . S. a. Differentialquotient, partieller, I.; Differenzierbarkeit in C I.

$$(3) \quad \frac{f(x_1^0, \dots, x_k, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)}{x_k - x_k^0} = \frac{f(x_1^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_k}$$

**Differenzenschema:** häufig verwendetes Schema zur übersichtl. Berechnung der *Differenzen*  $k$ -ter Ordnung einer Zahlenfolge  $\{y_i\}$ , die durch (1) und (2) definiert werden. (3) gibt die übl. Berechnungsweise an. Für  $y_i = i^3$  erhält man z. B. (3a).

- (1)  $\Delta^0 y_i := y_i$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, n$
- (2)  $\Delta^k y_i := \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$  für  $k > 0$
- (3)

$i$	$y_i$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
0	$y_0$			
1	$y_1$	$\Delta^1 y_0 = (y_1 - y_0)$		
2	$y_2$	$\Delta^1 y_1 = (y_2 - y_1)$	$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	
3	$y_3$	$\Delta^1 y_2 = (y_3 - y_2)$	$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	$\Delta^3 y_0$

(3a)

$i$	$y_i$	$\Delta^1 y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0				
1	1	1			
2	8	7	6		
3	27	19	12	6	0
4	64	37	18		

In Verallgemeinerung dieses Beispiels gilt, daß die Werte  $y_i$  genau dann Funktionswerte eines Polynoms  $k$ -ter Ordnung sind, wenn für Argumente  $x_i$ , die eine arithmet. Folge bilden, die  $(k + 1)$ -ten und alle folgenden Differenzen Null sind. Weiter wird das D. benutzt zur Interpolation und für *Quadratur und verwandte Prozesse* ( $\int$  Integration, numerische, II., III.); auch einzelne große Meß- oder Übertragungsfehler in Meßreihen lassen sich mit seiner Hilfe aufspüren, weil Abweichungen von einem Verteilungsgesetz in den höheren Differenzen deutlich werden. — S. a. Interpolation II.

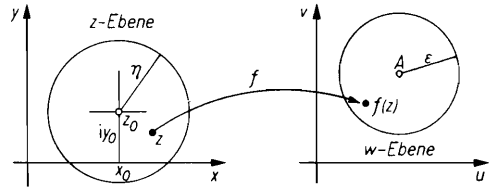
**differenzierbare Mannigfaltigkeit**  $\nearrow$  Liesche Gruppen.

**Differenzierbarkeit in C: I.** Eigenschaft einer komplexen Funktion  $w = f(z)$ , daß an einer Stelle  $z = z_0$  ihres Definitionsbereichs  $D$  der Grenzwert ihres *Differenzenquotienten* (1) einen bestimmten

$$(1) \quad \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

endl. Grenzwert  $A$  hat, den man als *Differentialquotienten*  $f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = A$  der Funktion  $f(z)$

an der Stelle  $z = z_0$  bezeichnet. Faßt man  $w = f(z)$  als punktweise Abbildung des Definitionsbereichs  $D$  der  $z$ -Ebene auf den Wertebereich  $W$  der  $w$ -Ebene auf, so bedeutet die Existenz von  $A$ , daß jeder Punkt einer  $\eta$ -Umgebung  $|z - z_0| < \eta$  von  $z_0$  auf einen Punkt der  $\varepsilon$ -Umgebung  $|f(z) - A| < \varepsilon$  von  $A$  abgebildet wird, wie klein auch  $\varepsilon > 0$  vorgegeben wird, falls  $\eta(\varepsilon) > 0$  passend gewählt wird (Abb.).



Differenzierbarkeit:  $\eta$ -Umgebung  $|z - z_0| < \eta$ , die durch  $w = f(z)$  in die  $\varepsilon$ -Umgebung  $|f(z) - A| < \varepsilon$  abgebildet wird

Insbesondere soll der Weg, auf dem sich eine Folge von Punkten  $z$  dem Punkte  $z_0$  nähert, keinen Einfluß auf den Grenzwert  $A$  haben. Aus  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ergibt sich (2) für den Differenzenquotienten (1), falls eine Folge von Punkten  $z_n$  auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse mit  $y_0 = \text{const}$  gewählt wird, bzw. (3), falls eine Punktfolge auf einer

$$(2) \quad \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{u(x_n, y_0) - u(x_0, y_0)}{x_n - x_0} + i \frac{v(x_n, y_0) - v(x_0, y_0)}{x_n - x_0}$$

$$(3) \quad \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = \frac{u(x_0, y_n) - u(x_0, y_0)}{i(y_n - y_0)} + i \frac{v(x_0, y_n) - v(x_0, y_0)}{i(y_n - y_0)}$$

Parallelen zur Achse des Imaginären mit  $x_0 = \text{const}$  gewählt wird. Durch den Grenzübergang  $z \rightarrow z_0$  erhält man (4) und (5), d. h., Voraussetzung für die

$$(4) \quad \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0} + i \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_0}$$

$$(5) \quad \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_0} + i \left. \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_0}$$

Existenz des Differentialquotienten  $f'(z_0)$  ist die Existenz der partiellen Differentialquotienten  $u_x, v_x$  und  $u_y, v_y$ . Die Forderung, daß  $f'(z_0)$  von der Richtung unabhängig sein soll, stellt Gleichung (6) dar; aus ihr ergeben sich die *Cauchy-Riemannschen*

$$(6) \quad f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

*Differentialgleichungen* (7) als notwendige und hin-

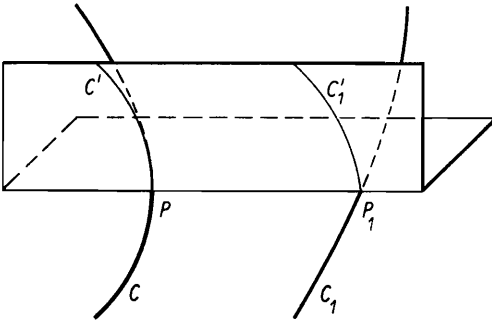
$$(7) \quad u_x = v_y, v_x = -u_y$$

reichende Bedingungen für die D. von  $f(z)$ .

**II.** Für differenzierbare Funktionen gelten die gleichen Differentiationsregeln wie im Reellen. Sind z. B. die Funktionen  $f(z)$  und  $g(z)$  im gleichen Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene differenzierbar, so sind auch  $f(z) + g(z)$  und  $f(z) \cdot g(z)$  differenzierbar sowie  $f(z)/g(z)$ , falls  $g(z) \neq 0$  in  $G$  gilt. Auch die Kettenregel für mittelbare Funktionen gilt; für  $f(z) = w = (7z + 4)^3$  mit  $w_1 = 7z + 4$  erhält man z. B.  $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dw_1} \cdot \frac{dw_1}{dz} = 3 \cdot w_1^2 \cdot 7 = 21(7z + 4)^2$ .

**Differenziergerät, Derivator, Differentiator:** Gerät, mit dem die 1. Ableitung in einem Punkt  $P$  einer durch ihr graph. Bild dargestellten Funktion mechanisch bestimmt wird, meist als Anstieg der Tangente an die gegebene Kurve mit dem Berührungspunkt  $P$ . D.e werden z. B. zur Untersuchung von Kurven eingesetzt, die durch selbsttätige Registriergeräte aufgezeichnet wurden.

**I.** Das einfachste Gerät dieser Art ist das *Spiegel-lineal* (Abb. 1), ein Winkeleisen, dessen zur Zeichen-

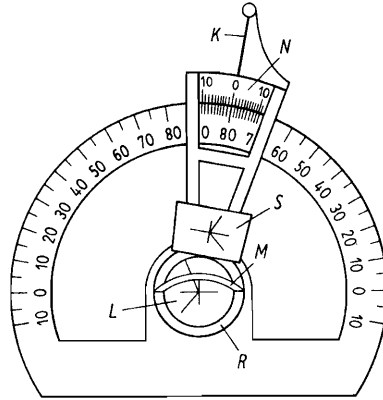


Differenziergerät. Abb. 1: Spiegellineal

ebene senkrechte Fläche spiegelnd poliert ist. Legt man die Unterkante der spiegelnden Fläche so durch  $P$ , daß der sichtbare Teil der Kurve  $C$  ohne Knick in sein Spiegelbild  $C'$  übergeht, so zeigt die Unterkante die Richtung der Kurvennormalen in  $P$  an, die Senkrechte zu ihr durch  $P$  deshalb die Kurventangente, mit deren Anstieg auch die 1. Ableitung in  $P$  bestimmt ist. Im Punkt  $P_1$  der Kurve  $C_1$  (Abb. 1) liegt die Unterkante nicht in Richtung der Kurvennormalen.

**II.** Eine wesentl. Verbesserung dieses Prinzips wird mit dem *Derivimeter* von OTT erreicht. Statt des Spiegels wird eine durch einen Meridianschnitt ge-

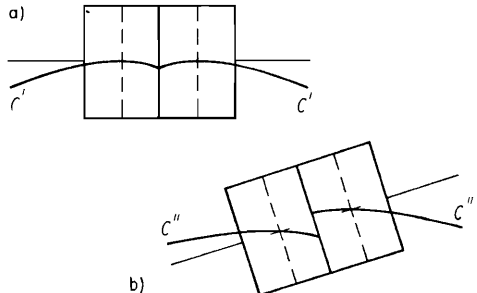
teilte *Kugellupe*  $L$  verwendet, die im Mittelpunkt eines Winkelmessers drehbar gelagert ist. Die Drehung erfolgt mittels eines Armes, der einen an der



Differenziergerät. Abb. 2: Derivimeter nach Ott

Kreisteilung des Winkelmessers gleitenden Nonius  $N$  trägt (Abb. 2). Das Instrument wird mit dem Mittelpunkt der Lupe so auf den Punkt  $P$  gesetzt, daß die gerade Kante des Winkelmessers parallel zur Abszissenachse liegt. Wird dann durch Drehen der Lupe ein knickfreier Übergang von der Kurve zu ihrem Spiegelbild auf der Schnittebene erreicht, so können am Dreharm mittels des Nonius  $N$  der Steigungswinkel der Tangente abgelesen und aus einer Tangententafel der Wert der 1. Ableitung bestimmt werden. Die knickfreie Einstellung wird durch einen über der Lupe angebrachten Spiegel erleichtert, durch den auch das hinter der Lupe liegende Kurvenstück und dessen Spiegelbild an der Lupe betrachtet werden können. Bei der Winkelablesung ist mit einem mittleren Fehler von etwa  $0,2^\circ$  zu rechnen.

**III.** Der *Prismenderivator* von V. HARBOU verwendet statt der Spiegelung die Brechung. Er besteht aus einem geraden Prisma mit einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck als Querschnitt und einer Fadenkreuzmarkierung auf der Hypotenusenfläche. Diese Markierung wird auf den Punkt  $P$  gelegt und



Differenziergerät. Abb. 3: Prismenderivator in zwei Lagen verschiedener Genauigkeit

das Prisma so gedreht, daß sich die Kurvenbilder ohne Sprung aneinanderfügen (Abb. 3). Die Prismenoberkante gibt dann die Richtung der Normalen an. Zusammen mit einer Lupe kann das Prisma auf einer mit einem Teilkreis versehenen Grundplatte montiert werden, auf dem Teilkreis ist dann der Steigungswinkel der Tangente sofort ablesbar.

IV. Instrumente, die nicht nur die Ableitung an einer Stelle liefern, sondern zu einer gegebenen Kurve  $Y = f(x)$  das Bild der Differentialkurve  $\eta = f'(x)$  zeichnen, werden *Differentiographen* gen. Dabei kann etwa ein drehbares Mikroskop mit Fadenkreuz verwendet werden, das so an der gegebenen Kurve entlang geführt wird, daß der eine Faden dieses Kreuzes stets die Kurve berührt. Ein durch ein geeignetes Getriebe gesteuerter Schreibstift zeichnet dann die *Differentialkurve*

unmittelbar mit der Zentraleinheit zusammenarbeiten oder nur der Erzeugung maschinenlesbarer Datenträger dienen, werden sie zur *ersten* oder *zweiten Peripherie* gezählt. Abb. 1 gibt einen groben Überblick über die zu einer d. R. mittlerer Größe gehörenden Geräte. Die *erste Peripherie* umfaßt Eingabegeräte, Ausgabegeräte und externe Speicher.

I.1. Zu den *Eingabegeräten* gehören *Lochkartenleser* (LKL), *Lochstreifenleser* (LSL) sowie *Belegleser* (BL). Die beiden erstgenannten Geräte interpretieren Lochkombinationen als Zeichen und übertragen diese als Impulsfolgen zur Zentraleinheit (↗ Lochkarte, ↘ Lochstreifen). *Belegleser* werten anstelle von Lochkombinationen Markierungen, z. B. Striche oder Kreuze aus, die in vorgeschriebene Felder eingetragen worden sind. Dadurch entfällt die manuelle Übertragung handgeschriebener Urbelege

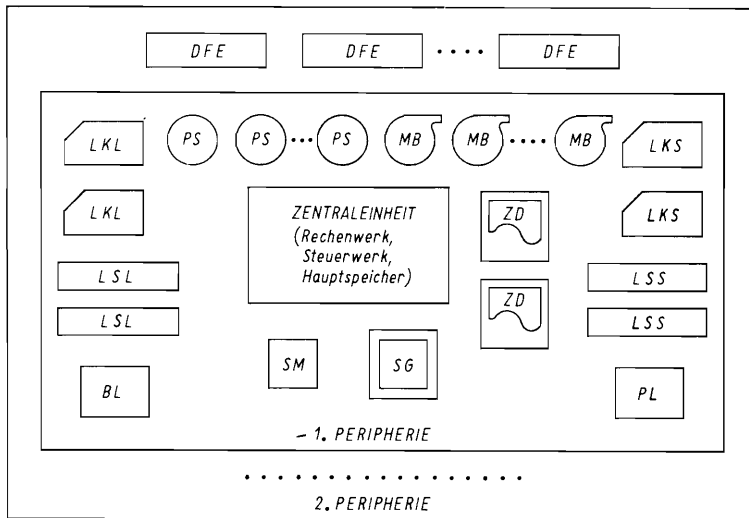


Abb. 1: Aufbau einer digitalen Rechanlage  
 LKL Lochkartenleser  
 LSL Lochstreifenleser  
 BL Belegleser  
 LKS Lochkartenstanzer  
 LSS Lochstreifenstanzer  
 ZD Zeilendrucker  
 PL Plotter  
 SM Schreibmaschine  
 SG Sichtgerät  
 PS Plattenspeicher  
 MB Magnetbandspeicher  
 DFE Datenfernübertragungs-Einrichtung

auf. Gebräuchlicher ist aber wohl die Verwendung von *Integraphen* (↗ Integriergerät III.), die sich leicht auch für die Differentiation einrichten lassen.

**Differenz k-ter Ordnung** ↗ Differenzenschema.

**Diffusion** ↗ parabolische Differentialgleichung I.

**digitale Automaten** ↗ Schaltsystem.

**digitale Rechanlage:** I. universelle, programmierbare, elektron. Rechanlage, in der die zu verarbeitenden Daten als endl. Impulsfolgen, d. h. digital, dargestellt und verarbeitet werden. Im Vergleich zum Analogrechner zeichnen sich d. R.n durch einen sehr breiten Anwendungsbereich und hohe *Rechengenauigkeit* aus. Nachteile sind die *geringe Rechengeschwindigkeit*, die erheblich höheren Kosten und die Beschränkung auf die Ausführbarkeit der *vier Grundrechenarten*. Eine d. R. besteht aus dem eigentl. Rechner, der als *Zentraleinheit* (ZE) bezeichnet wird, und einer Reihe von *Zusatzgeräten*, der *Peripherie*. Je nachdem, ob die Geräte

in Lochkarten bzw. Lochstreifen. Die modernste Form der Eingabegeräte sind *Klarschriftleser*. Mit diesen können Schreibmaschinenschrift und unter bestimmten Voraussetzungen auch handgeschriebene Zeichen direkt eingegeben werden.

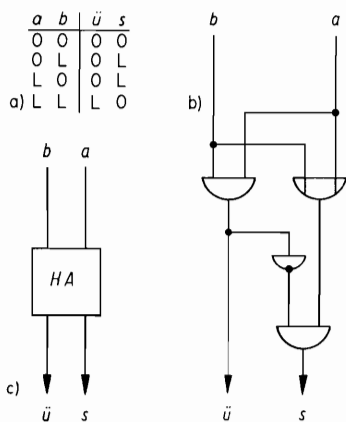
I.2. Zu den *Ausgabegeräten* zählen *Lochkartenstanzer* (LKS), *Lochstreifenstanzer* (LSS), *Zeilendrucker* (ZD) sowie *Plotter* (PL). Der *Zeilendrucker* ist ein zeilenweise arbeitender Schnelldrucker, dessen Druckgeschwindigkeit rund 1000 Zeilen/min beträgt. Mit Hilfe eines *Plotters* gelingt die graph. Ausgabe von Informationen, etwa in Form von Kurven oder techn. Zeichnungen. *Schreibmaschine* (SM) und *Sichtgerät* (SG) dienen sowohl der Aus- als auch der Eingabe. Mit einem *Sichtgerät*, für das auch der Name *Display* verwendet wird, lassen sich Informationen zeichenweise oder als graph. Darstellung über einen Bildschirm ausgeben. Umgekehrt können Informationen mittels eines *Lichtgriffels* eingegeben werden.

**1.3.** Die *Zentraleinheit* enthält einen *internen Speicher*, den *Hauptspeicher* der d. R. Dagegen stellen *Plattenspeicher* (PS) und *Magnetbandspeicher* (MB) *externe Speicher* dar. Das *Betriebssystem*, die *Applikationsprogramme* und sonstige umfangreiche Daten werden grundsätzlich von den externen Speichern aufgenommen und erst bei Bedarf in den Hauptspeicher übertragen. *Datenfernübertragungs-Einrichtungen* (DFE) gestatten die Übertragung von Daten über sehr große Entfernungen, z. B. kann mit einer DFE die zweiseitige Verbindung zwischen einem Buchungsplatz und einer d. R. in einem Rechenzentrum hergestellt werden.

**II.** Die *Zentraleinheit* kann in die Funktionseinheiten *Hauptspeicher*, *Rechenwerk* und *Steuerwerk* gegliedert werden (s. a. Digitalrechner).

**II.1.** Der *Hauptspeicher*, der häufig als *Kernspeicher* ausgeführt ist, unterscheidet sich von den externen Speichern durch eine kurze Zugriffszeit und durch eine verhältnismäßig geringe Speicherkapazität. Typ. Werte für diese Parameter sind im Falle des Hauptspeichers 1  $\mu$ s und 128 KByte, bei externen Speichern 100 ms bis 5 min bzw.  $10^4$  KByte. Steuer- und Rechenwerk haben zum Hauptspeicher einen direkten Zugriff.

**II.2.** Im *Rechenwerk* können die vier Grundrechenarten ausgeführt werden. Seine Arbeitsweise wird am Beispiel eines dualen Serienaddierers erläutert. Sollen zwei einstellige Dualzahlen ( $\nearrow$  Zahlensystem VI.) addiert werden, so ergeben sich die in der Additionstabelle der Abb. 2 zusammengestellten



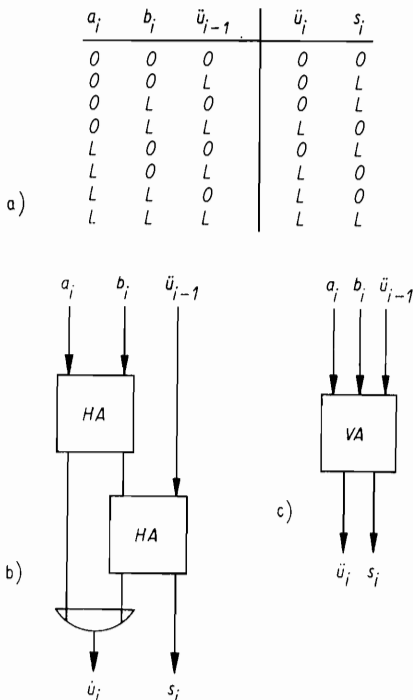
digitale Rechanlage. Abb. 2: Halbaddierer: a) Additionstabelle, b) Schaltung, c) Symbol

**Möglichkeiten.** Das Resultat  $a + b$  wird in Summe  $s$  und Übertrag  $\ddot{u}$  zerlegt. Die kombinator. Schaltung *Halbaddierer* realisiert alle Fälle der Additionstabelle in Abb. 2. Werden zwei  $n$ -stellige, ganze Dualzahlen  $a$  und  $b$  addiert, so treten bei Zählung von rechts nach links mit Ausnahme der ersten Stelle drei Summanden  $a_i, b_i, \ddot{u}_{i-1}$  auf. Dabei bedeuten  $a_i, b_i$  die  $i$ -ten Ziffern der Zahlen  $a, b$  und  $\ddot{u}_{i-1}$  den Übertrag aus der Verknüpfung der  $(i - 1)$ -ten

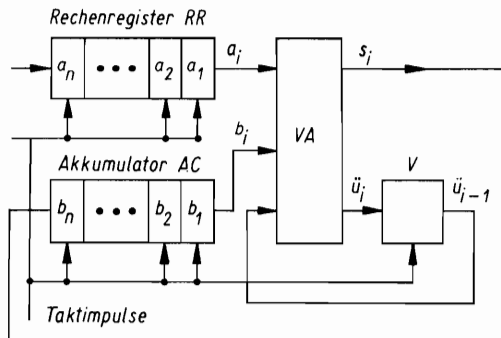
Ziffern. Ein *Addierer* für drei einstellige Summanden wird *Volladdierer* genannt. Abb. 3 verdeutlicht das mathemat. Prinzip sowie die entsprechende Schaltung.

Die angestrebte Addition zweier  $n$ -stelliger, ganzer Dualzahlen gelingt durch  $n$ -fache Benutzung eines Volladdierers unter Zuhilfenahme von Speichergliedern gemäß Abb. 4.

In der angegebenen Schaltung bedeuten *RR* und *AC* zwei  $n$ -stellige Schieberegister, die vor Beginn der Addition die beiden Summanden  $a$  und  $b$  enthalten. *V* ist ein einstelliges Schieberegister, das anfangs



digitale Rechanlage. Abb. 3: Volladdierer: a) Additionstabelle, b) Schaltung, c) Symbol



digitale Rechanlage. Abb. 4: Prinzipschaltung des seriell arbeitenden Addierers

auf Null gesetzt ist. Die Register *RR*, *AC* und *V* sind Speicher, die bei jedem der *Taktimpulse* ihren Inhalt um eine Stelle nach rechts verschieben. Dabei übernimmt die linke Registerstelle den Wert des Eingangssignals, das bei *AC* gleich  $s_i$  und bei *RR* gleich Null ist. Vor dem ersten Taktimpuls liegen  $a_1, b_1$  und  $\ddot{u}_0 = 0$  am Eingang von *VA*. Der Volladdierer liefert am Ausgang  $s_1$  und  $\ddot{u}_1$ . Der erste Taktimpuls verschiebt die Inhalte von *RR* und *AC* um eine Stelle. Gleichzeitig gelangen  $\ddot{u}_1$  nach *V* und  $s_1$  an die linke Stelle von *AC*. Am Eingang von *VA* liegen nun  $a_2, b_2$  und  $\ddot{u}_1$  und am Ausgang  $s_2$  und  $\ddot{u}_2$ . So wird mit jedem folgenden Taktimpuls eine weitere Stelle des Resultates in *AC* aufgebaut. Nach  $n$  Taktimpulsen enthalten *AC* die gesamte Summe und *V* den letzten Übertrag. Das Register *RR* ist leer. Wird der Volladdierer durch eine die Subtraktion realisierende kombinator. Schaltung ersetzt, so entsteht ein seriell arbeitender *Subtrahierer*. Die Ausführung der *Multiplikation* und *Division* basiert auf wiederholter Anwendung der Addition bzw. Subtraktion. Bei der Verknüpfung rationaler Zahlen ( $\nearrow$  Gleitkommadarstellung) vergrößert sich der Schaltungsaufwand.

**II.3. Das Steuerwerk** organisiert die Zusammenarbeit zwischen den einzelnen Funktionseinheiten (Abb. 5). Die abzuarbeitenden Programmbefehle, von denen bestimmte Adressenmodifikationen bewußt außerhalb der Betrachtung bleiben, befinden sich im Hauptspeicher. Zu Beginn der Rechnung wird der *Befehlszähler* auf die Programm-Anfangsadresse gestellt. Danach erfolgt die Übertragung des

diesem Zählerstand entsprechenden Befehls in das *Befehlsregister*. Durch die Entschlüsselung des *Operationsteils* (OT) wird, wenn es sich um eine arithmet. Operation handelt, das Rechenwerk aktiviert; dabei werden die durch den *Adreßteil* (ADT) fixierten Daten vom Hauptspeicher übertragen und verarbeitet. Handelt es sich bei der Operation um den Transport vom Rechenwerk zum Hauptspeicher, so bezeichnet der Adreßteil den Speicherplatz, auf den das zuletzt berechnete Resultat übertragen werden soll. Parallel zu derartigen arithmet. bzw. *Transportbefehlen* wird der Stand des Befehlszählers um Eins erhöht. Demgegenüber gelangt bei *Sprungbefehlen*, die zur Aufhebung der Befehlsabarbeitung in der natürl. Reihenfolge dienen, der Adreßteil in den Befehlszähler. Im weiteren wiederholt sich dieser Prozeß, wobei immer der Befehl in das *Befehlsregister* übertragen und ausgeführt wird, der durch den jeweiligen Stand des Befehlszählers adressiert ist.

**digitale Steuerung**  $\nearrow$  Steuerung II.  
**Digitalrechner, Ziffernrechner, Zentraleinheit:** zu einer digitalen Rechenanlage gehörender Rechner. D. bestehen aus Hauptspeicher, Rechenwerk und Steuerwerk ( $\nearrow$  digitale Rechenanlage II.3.) und sind über Kanäle mit Geräten zur Datenein- und -ausgabe sowie mit externen Speichern zu einer arbeitsfähigen Rechenanlage verbunden.

**Dimension:** I. *allgemein* Abmessung, Ausdehnung; Ausmaß. — Ausdehnung geometr. Figuren.

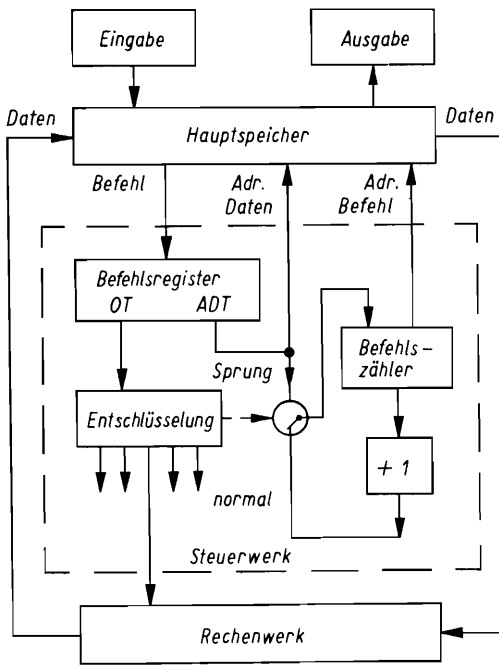
II. Die Anzahl  $n$  der D. eines linearen Raumes wird meist festgesetzt als die Anzahl  $n$  der Koordinaten, die zur Bestimmung der Lage jedes Punktes notwendig sind bzw. durch die Anzahl  $n$  der linear unabhängigen Grundvektoren eines Basissystems. Danach gilt für einen Punkt  $n = 0$ , für eine Gerade  $n = 1$ , für eine Ebene  $n = 2$  und für den Raum der Anschauung  $n = 3$ . Mathematisch sind auch Räume mit  $n > 3$  definiert. Diese Festlegung kann auf nichtlineare Ausdehnung, z. B. auf gekrümmte Räume, erweitert werden. In der inneren Geometrie einer Fläche, z. B. der Oberfläche einer Kugel, wird die Lage jedes Punktes durch zwei Koordinaten  $u, v$  bestimmt, so daß jede Fläche zweidimensional ist. Weitere Verallgemeinerungen des Begriffs D. werden in der Topologie untersucht.

S. a. System II.2., Vektorraum V., VII., VIII.; algebraische Mannigfaltigkeit.

**Dimensionssatz**  $\nearrow$  Vektorraum V.

**Dimetrie**  $\nearrow$  Axonometrie.

**diophantische Gleichung:** I. algebraische Gleichung  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$  mit der Menge  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen als Grundbereich, in der  $a$  eine ganzzahlige Konstante,  $n \geq 1$  eine natürl. Zahl und  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ein Polynom in  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit Koeffizienten aus der Menge  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen ist. Die Variablengrundbereiche können auch Teilmengen von  $\mathbf{Z}$  sein. D. G.en treten in der Praxis z. B. dann auf, wenn Beziehungen zwischen Stückzahlen beschrieben werden. Allgemein gelöst sind bisher nur die d. G.en bis zum zweiten Grade mit zwei Variablen. Für d. G.en höheren Grades sind nur in Spezialfällen Lösungen bekannt.



digitale Rechenanlage. Abb. 5: Vereinfachtes Blockschaltbild des Steuerwerkes

**II.** Einfach gestaltet sich das Lösen von *d. Gen beliebigen Grades mit nur einer Variablen*: Nach dem Viétaschen Satz kommen als Lösungen nur die endlich vielen Teiler des Absolutgliedes in Frage, so daß nur von jedem Teiler des Absolutgliedes zu überprüfen ist, ob er eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. Eine *lineare d. G. mit zwei Variablen*  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$  hat genau dann eine Lösung  $(x_1^0, x_2^0)$  mit  $x_1^0 \in \mathbf{Z}$  und  $x_2^0 \in \mathbf{Z}$ , wenn der größte gemeinsame Teiler von  $a_1$  und  $a_2$  ein Teiler der ganzen Zahl  $b$  ist. Wenn sie aber überhaupt eine Lösung hat, so hat jede lineare d. G. mit  $\mathbf{Z}$  als Variablenbereich stets unendlich viele Lösungen; für Teilmengen von  $\mathbf{Z}$  gilt dies aber nicht.

**III.** Da sich jede *lineare d. G.  $ax + by = b$*  mit zwei Variablen auch als Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{q}$  schreiben läßt, kann man die Lösungsverfahren für lineare Kongruenzen auf das Lösen dieser Gleichungen anwenden. Ein weiteres Verfahren zum Lösen von linearen d. G.en ist die *Eulersche Reduktionsmethode*, die an zwei Beispielen erläutert werden soll.

**III.1.** Die d. G.  $5x + 23y = 112$  stellt man zunächst nach der Variablen  $x = (112 - 23y)/5$  mit dem betragsmäßig kleineren Koeffizienten und dividiert soweit wie möglich  $x = 22 - 4y + (2 - 3y)/5$ . Da  $x$  und  $y$  ganz sein sollen, muß auch  $(2 - 3y)/5 = r$  ganz sein. Daraus ergibt sich  $y = (2 - 5r)/3 = -r + (2 - 2r)/3$ . Diesen Schluß wiederholt man so lange, bis ein leicht überschaubarer Ausdruck auftritt:  $s = (2 - 2r)/3$  muß ganz sein. Wegen  $r \in \mathbf{Z}$  und  $r = (2 - 3s)/2 = 1 - s - s/2$  muß  $t = s/2$  ganz sein. Das ist genau dann der Fall, wenn  $s = 2t$  für beliebiges  $t \in \mathbf{Z}$  ist. Setzt man dieses Ergebnis in die vorhergehenden Gleichungen ein, so erhält man  $r = 1 - 3t$ ,  $y = -1 + 5t$  und  $x = 27 - 23t$ . Die gegebene d. G. hat die Lösungsmenge  $L = \{(x, y) | x = 27 - 23t, y = -1 + 5t, t \in \mathbf{Z}\}$ . Wählt man als Variablenbereiche für die Variablen  $x$  und  $y$  jeweils die Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen, so sind nur diejenigen ganzzahligen Werte von  $t$  zulässig, für die gilt  $27 - 23t > 0$  und  $-1 + 5t > 0$ . Die erste Ungleichung ist genau für alle  $t \leq 1$ , die zweite Ungleichung ist genau für alle  $t \geq 1$  erfüllt, d. h., für  $t$  kommt nur der Wert 1 in Frage und man erhält jetzt die Lösungsmenge  $L' = \{(4, 4)\}$ .

**III.2.** In der d. G.  $3x + 2y + 5z = 10$  ergibt das Auflösen nach  $y$  den Ansatz  $y = (10 - 3x - 5z)/2 = 5 - x - 2z - (x + z)/2$  und wegen  $x, y, z \in \mathbf{Z}$  muß  $(x + z)/2 = s \in \mathbf{Z}$  sein. Es ist dann  $x = 2s - z$ . Setzt man  $z = t \in \mathbf{Z}$ , so ist  $x = 2s - t$  und  $y = 5 - 3s - t$ . Für jede Wahl von  $s, t \in \mathbf{Z}$  erhält man daraus eine Lösung  $(x, y, z)$  der gegebenen Gleichung, d. h., es ist  $L = \{(x, y, z) | x = 2s - t, y = 5 - 3s - t, z = t; s, t \in \mathbf{Z}\}$ . Liegt eine lineare d. G. in  $m$  Variablen vor, so treten in der Lösungsmenge im allgemeinen  $m - 1$  Parameter auf.

**IV.** Die d. G. 2. Grades mit zwei Variablen  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ , kann in Abhängigkeit von den Koeffizienten  $a, b, c, d, e, f$  keine, endlich viele oder unendlich viele Lösungen haben. Das Aufsuchen dieser Lösungen führt nur in einigen Spezialfällen schnell zur Lösungsmenge.

**IV.1.** Im Falle  $a = b = 0$  lautet die d. G.  $cxy + dx + ey + f = 0$ . Löst man sie nach  $x$  auf, so erhält man  $x = -(ey + f)/(cy + d)$  und kann analog zur Eulerschen Reduktionsmethode die zulässigen  $y$ -Werte ermitteln. Aus  $xy + 2x - y + 1 = 0$  z. B. ergibt dieser Ansatz  $x = (y - 1)/(y + 2) = (y + 2 - 3)/(y + 2) = 1 - [3/(y + 2)]$ . Da  $3/(y + 2) = r$  ganzzahlig ist, folgt  $y = (3/r) - 2$  und  $3/r = s \in \mathbf{Z}$ , folglich kann  $r$  nur die Werte 1, -1, 3 und -3 annehmen. Zu jedem dieser Werte von  $r$  findet man je einen  $x$ - und  $y$ -Wert:

$$\begin{array}{lll} r_1 = 1 & y_1 = 1 & x_1 = 0 \\ r_2 = -1 & y_2 = -5 & x_2 = 2 \\ r_3 = 3 & y_3 = -1 & x_3 = -2 \\ r_4 = -3 & y_4 = -3 & x_4 = 4 \end{array}$$

$$L = \{(x, y) | xy + 2x - y + 1 = 0\} \\ = \{(0, 1), (2, -5), (-2, -1), (4, -3)\}.$$

**IV.2.** Im Falle  $a = 0$  lautet die d. G.  $by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$  und analog für  $b = 0$ :  $ax^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ . Man löst die d. G. nach  $x$  auf und erhält  $x = -(by^2 + ey + f)/(cy + d)$ . Auch hier kann man analog zur Eulerschen Reduktionsmethode verfahren. Aus  $2y^2 + xy + 2x - y + 2 = 0$  z. B. ergibt sich der Ansatz  $x = (-2y^2 + y - 2)/(y + 2) = -2y + 5 - 12/(y + 2)$ . Mit  $12/(y + 2) = r \in \mathbf{Z}$  erhält man  $y = (12/r) - 2$ . Da  $12/r \in \mathbf{Z}$  sein muß, folgen (1), (2), (3), (1a),

$$\begin{array}{llllll} (1) & r = & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 12 \\ (2) & x = & -16 & -5 & -2 & -1 & -1 & -5 \\ (3) & y = & 10 & 4 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} (1a) & r = & -1 & -2 & -3 & -4 & -6 & -12 \\ (2a) & x = & 34 & 23 & 20 & 19 & 19 & 23 \\ (3a) & y = & -14 & -8 & -6 & -5 & -4 & -3 \end{array}$$

(2a), (3a) und daraus  $L = \{(-16, 10), (-5, 4), (-2, 2), (-1, 1), (-1, 0), (-5, -1), (34, -14), (23, -8), (20, -6), (19, -5), (19, -4), (23, -3)\}$ . Ein Beispiel für *quadratische d. G. mit drei Variablen* ist die *pythagoreische Gleichung*  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**IV.3.** Das allgemeine Lösungsverhalten von d. G. höheren als zweiten Grades ist noch weitgehend unbekannt. Für einen speziellen Typ solcher Gleichungen gilt der *Satz von Thue*: Die Gleichung  $a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = A$  für  $n \geq 3$  und  $a_0 \neq 0$  hat nur endlich viele Lösungen, wenn die linke Seite nicht in homogene Faktoren niedrigeren Grades mit ganzzahligen Koeffizienten zerlegt werden kann.

**Diophantos von Alexandria**, um 250 u. Z.; hellenist. Mathematiker. — In seinem Hauptwerk »Arithmetica« behandelte er im Anschluß an altägypt. und babylon. Überlieferungen lineare und quadrat. Gleichungen; für die Unbekannte und ihre ersten Potenzen führte er dabei feste Abkürzungen ein. **Dirac**, Paul Adrien Maurice, geb. 8. 8. 1902 Bristol. — D. studierte in Bristol, Cambridge und an mehreren ausländ. Universitäten. 1932 wurde er zum Professor der Mathematik berufen. D. gilt als einer der Begründer der *Quantenmechanik*. Das von ihm geschaffene mathemat. Äquivalent besteht wesent-

lich aus einer *nichtkommutativen Algebra* zur Berechnung der Eigenschaften der Atome. D. entwickelte eine *relativist. Theorie des Elektrons*, sagte 1928 die Existenz des *Positrons* voraus und lieferte wesentl. Beiträge zur *Quantenfeldtheorie*. 1933 erhielt D. den Nobelpreis.

**Diracsches Maß** ↗ Maß II.

**direkte Methode**: *Variationsrechnung* Verfahren zur Lösung des Variationsproblems ohne Benutzung der ↗ Eulerschen Differentialgleichung; bezeichnet in dem Variationsproblem (1)  $m$  das Infimum, d. h. die kleinste der Zahlen  $I(y)$ , wenn  $y$  alle zulässigen Funktionen (↗ Variationsrechnung) durchläuft, so besteht die d. M. darin, eine *Minimalfolge*  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  zu konstruieren, für die  $I(y_1) \geq I(y_2) \geq \dots$

$$(1) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Minimum!}$$

$\geq I(y_n) \geq \dots \geq m$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n) = m$  gilt. Eine solche Minimalfolge kann man mit dem *Ritzschen Verfahren* finden, das von einer vorgegebenen unendlichen Folge von Funktionen  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  ausgeht, die *Koordinatenfunktionen* gen. werden. Für  $y$  setzt man dann in das Variationsintegral (1) den Ausdruck  $y_n = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$  ein, in dem  $c_1, c_2, \dots, c_n$  beliebige reelle Zahlen sind. Gleichung (1) hängt dann nur von den reellen Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ab, die nach (2) berechnet werden.

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial c_1} I = \frac{\partial}{\partial c_2} I = \dots = \frac{\partial}{\partial c_n} I = 0$$

Die Funktion  $y_n(x)$  ist oft eine gute Näherung für die Lösung des Variationsproblems.

**direktkonform** ↗ konforme Abbildung I.

**Direktrix** svw. Leitlinie, ↗ Ellipse II., ↗ Hyperbel II., ↗ Kegelschnitt II., ↗ Parabel I.

**Dirichlet**, Lejeune-, Peter Gustav, geb. 13. 2. 1805 Düren, gest. 5. 5. 1859 Göttingen. — D. lebte nach ersten Studien von 1822/27 als Privatlehrer in Paris und wurde anschließend Dozent in Breslau (Wroclaw). Seit 1832 war D. in Berlin tätig und wurde 1855 als Nachfolger von GAUSS nach Göttingen berufen. D. leistete wichtige Beiträge zur Theorie der *Fourierreihen*, zur *Potentialtheorie*, zur *Variationsrechnung*, aber bes. zur *Zahlentheorie*. Er führte erstmals in umfangreicher Weise analyt. Funktionen zur Lösung arithmet. Probleme ein und wurde so zum Begründer der *analyt. Zahlentheorie*.

**Dirichletsche Funktion** ↗ Funktion II.1., ↗ Stetigkeit einer Funktion II.

**Dirichletscher Einheitensatz** ↗ Zahlkörper III.

**Dirichletscher Primzahlsatz** ↗ Primzahl VI. 1.

**Dirichletsches Problem** ↗ elliptische Differentialgleichung I.

**disjunkt** ↗ Durchschnitt.

**Disjunktion**: *mathematische Logik* früher teilweise gebrauchte Bezeichnung für Alternative.

**Diskontierung** ↗ Zinseszinsrechnung III.

**diskontinuierlich** ↗ System II., ↗ Signal.

**diskrete Optimierung** svw. Optimierung, ganzzahlige.

**diskreter Zufallsvektor** ↗ Zufallsvektor III.

**diskrete Steuerung** ↗ Steuerung I.2.

**diskrete Verteilung** ↗ Zufallsgröße II.

**diskrete Zufallsgröße** ↗ Zufallsgröße II.

**Diskriminante** ↗ kubische Gleichung I., ↗ quadratische Gleichung III.

**Dispersion** ↗ Streuung.

**Display** ↗ digitale Rechenanlage I.2.

**Distanzpunkt** ↗ Projektion I.

**Distribution**: eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs in der Funktionalanalysis; lineares Funktional über gewissen abstrakten Räumen. Die in der theoret. Physik wichtige *Diracsche Deltafunktion* ist z. B. eine D., aber keine Funktion. Die Theorie der D. wurde 1945–50 durch L. SCHWARTZ entwickelt und hat seit dieser Zeit in vielen Gebieten der Analysis, z. B. in der Theorie der Differentialgleichungen, und in der modernen Physik Anwendungen gefunden.

**distributiv**: Beziehung zwischen zwei binären ↗ algebraischen Operationen. So ist für Zahlen die Multiplikation d. zur Addition, d. h., für alle  $a, b, c$  gilt  $(a + b) \cdot c = ac + bc$ , das *Distributivgesetz*. Statt z. B. zu rechnen  $7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 28 + 42 = 70$ , kann man den gemeinsamen Faktor 7 ausklammern:  $7 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 7 \cdot (4 + 6) = 7 \cdot 10 = 70$ . In einem Ring, der nicht kommutativ ist, muß man zwischen dem *Rechtsdistributivgesetz*  $(a + b) \cdot c = ac + bc$  und dem *Links-distributivgesetz*  $c(a + b) = ca + cb$  unterscheiden, z. B. bei ↗ Matrizen. Die Mengenoperation Durchschnitt  $\cap$  ist d. zur Vereinigung  $\cup$ , und umgekehrt ist die Vereinigung d. zum Durchschnitt, d. h., es gelten  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  und  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ , wobei  $A, B$  und  $C$  beliebige Mengen sind. Doch ist für Zahlen die Addition nicht d. zur Multiplikation, i. allg. gilt nicht  $ab + c = (a + c)(b + c)$ .

S. a. Verband II.

**Distributivgesetz**: Beziehung, die in einem Bereich von Zahlen oder mathemat. Größen gilt, in dem zwei Verknüpfungen definiert sind, die nacheinander angewendet werden (s. a. distributiv). Sind z. B.  $a, b, c$  drei Größen aus einem der Bereiche  $\mathbf{N}$  der natürlichen,  $\mathbf{Z}$  der ganzen,  $\mathbf{Q}$  der rationalen,  $\mathbf{R}$  der reellen oder  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen, in denen die Addition und die Multiplikation erklärt sind, so lautet das D.  $(a + b) \cdot c = ac + bc$ . Für drei Mengen  $a, b, c$ , zwischen denen die Operationen  $\cap$  Durchschnitt und  $\cup$  Vereinigung definiert sind, gelten zwei Formen des D. (↗ Mengenalgebra):  $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$  und  $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ .

S. a. Matrix II.; Multiplikation II.; Normalform I.;

Vektorraum I.; zufälliges Ereignis II.

**Distributivgesetze für die Funktoren  $\wedge$  und  $\vee$**  ↗ Normalform.

**divergent, bestimmt** ↗ divergente Zahlenfolge I.

**divergente Zahlenfolge**: I. Zahlenfolge, die nicht konvergent ist (↗ Grenzwert einer Zahlenfolge I.). Die Zahlenfolgen mit den allgemeinen Gliedern  $a_n = (-1)^n$ ,  $b_n = n^2$  und  $c_n = -3^n + (-2)^n$  sind z. B. divergent;  $(a_n)$  ist keine Cauchyfolge, denn es ist  $|a_n - a_{n+k}| = 2$  für jedes  $n$  und alle ungeraden  $k$ ; folglich kann  $(a_n)$  nicht konver-



gent sein. Für die Zahlenfolgen  $(b_n) = (n^2)$  folgt die Divergenz aus  $b_n > n$ , für die Zahlenfolge  $(c_n) = (-3^n + (-2)^n)$  ergibt sie sich daraus, daß  $c_n$  nach (1) unbeschränkt ist.

$$(1) \quad c_n = -3^n + (-2)^n = -(2+1)^n + (-2)^n \\ = -\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} a^{n-v} + (-2)^n \\ < -2^n - \binom{n}{1} 2^{n-1} + (-2)^n \leq -n 2^{n-1} \leq -n$$

Die Divergenz der Zahlenfolgen  $(a_n) = ((-1)^n)$  und  $(b_n) = (n^2)$  ist jedoch wesentlich unterschiedl. Art. Die Zahlenfolge  $(a_n)$  oszilliert, die andere strebt beständig nach  $+\infty$ . Man definiert deshalb: Eine Zahlenfolge  $(a_n)$  heißt *bestimmt divergent nach  $+\infty$*  bzw. bestimmt divergent nach  $-\infty$ , falls zu jedem beliebig vorgegebenen Wert  $C > 0$  ein Index  $N(C)$  existiert, so daß  $a_n > C$  bzw.  $a_n < -C$  für alle Indizes  $n > N(C)$  gilt. Mit anderen Worten: Fast alle Glieder einer nach  $+\infty$  bestimmt divergenten Zahlenfolge sind größer als ein beliebig vorgegebener Wert  $C$ ; bei einer nach  $-\infty$  bestimmt d. Z. unterschreiten alle Glieder bis auf endlich viele jeden beliebig vorgegebenen Wert  $-C$  mit  $C > 0$ . Man schreibt dann:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  und bezeichnet  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  als *uneigentl. Grenzwert*. Die Folge  $(a_n) = (n^2)$  z. B. ist bestimmt divergent nach  $+\infty$ , denn gibt man sich einen Wert  $C > 0$  beliebig vor, so gilt für alle Glieder  $a_n$  mit  $n > N \geq \sqrt{C}$  die Abschätzung  $n^2 > N^2 > C$ ; d. h.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$ . Auch die Grenzübergänge (2), (3), (4) und (5) führen auf bestimmt divergente Zahlenfolgen.

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = +\infty \text{ für } \alpha > 0$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty \text{ für } q > 1 \\ (\nearrow \text{geometrische Zahlenfolge}).$$

Die geometr. Zahlenfolge  $(a_n) = (q^n)$  mit  $q < -1$  ist nicht bestimmt divergent.

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a + dn) = \begin{cases} +\infty & \text{für } d > 0 \\ -\infty & \text{für } d < 0 \end{cases} \\ (\nearrow \text{arithmetische Zahlenfolge})$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_r n^r + c_{r-1} n^{r-1} + \dots + c_0}{d_s n^s + d_{s-1} n^{s-1} + \dots + d_0} \\ = \begin{cases} +\infty & \text{für } c_r/d_s > 0 \text{ und } r > s \\ -\infty & \text{für } c_r/d_s < 0 \text{ und } r > s \end{cases} \\ (\nearrow \text{Grenzwert einer Zahlenfolge IV.})$$

II. Über bestimmt d. Z.n gelten die folgenden Sätze.

II.1. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty.$$

II.2. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$  folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty.$$

II.3. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$  folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \begin{cases} +\infty & \text{für } B > 0 \\ -\infty & \text{für } B < 0. \end{cases}$$

II.4. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{für } c > 0 \\ -\infty & \text{für } c < 0. \end{cases}$$

Im Satz II.3. kann man für  $B = 0$  keine Aussage treffen, denn z. B. bei  $a_n = n$  und  $b_n = 1/n$  konvergiert die Zahlenfolge  $(a_n b_n)$  gegen 1 und bei  $a_n = n^2$  und  $b_n = 1/n$  divergiert  $(a_n b_n)$  bestimmt gegen  $+\infty$ . Für die Folge  $(a_n)$  aus (6) erhält man nach Anwendung der Konvergenzsätze ( $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge VI.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$  ist.

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{n + 4} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[1 + 2/n + 2/n^2]}{(1 + 4/n)} = \infty$$

Die beiden folgenden Sätze werden oft angewendet:

II.5. Jede unbeschränkte Zahlenfolge ist divergent.

II.6. Jede monoton wachsende, nach oben unbeschränkte Zahlenfolge ist bestimmt divergent nach  $+\infty$ ; jede monoton fallende, nach unten unbeschränkte Zahlenfolge ist bestimmt divergent nach  $-\infty$ . Die Zahlenfolge  $a_n = q^n$  ist z. B. für  $q < -1$  unbeschränkt, also divergent; die Zahlenfolge  $b_n = \sqrt{n}$  ist monoton wachsend und nach oben nicht beschränkt, d. h. bestimmt divergent nach  $+\infty$ .

**Divergenz:** Zeichen *div*: I. das einem gegebenen Vektorfeld  $V(x, y, z) = u(x, y, z) \mathbf{i} + v(x, y, z) \mathbf{j} + w(x, y, z) \mathbf{k}$  in kartes. Koordinaten durch (1) zugeordnete skalare Feld  $U(x, y, z)$ . Die D. zum

$$(1) \quad \operatorname{div} V = U(x, y, z)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z)$$

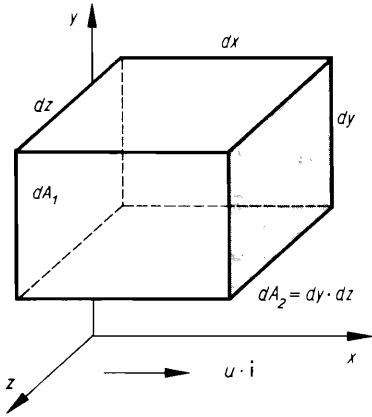
Vektorfeld  $V = \mathbf{r}/r^3$  berechnet sich z. B. nach (2).

$$(2) \quad \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = U = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = 0 \\ \text{mit } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Deutet man  $V(x, y, z)$  als Geschwindigkeitsfeld einer stationären strömenden Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho = \rho(x, y, z)$ , d. h. einer Strömung, die nicht explizit von der Zeit abhängt, so ergibt sich folgende anschaul. Bedeutung der D.: Die  $x$ -Komponente  $u$  von  $V$  gibt den in der Zeiteinheit von einem Flüssigkeitsteilchen zurückgelegten Weg an. Denkt man sich ein quaderförmiges Volumenelement mit achsenparallelen Kanten, so tritt durch die senkrecht zur  $x$ -Achse stehende Seitenfläche  $dA_1 = dy dz$  in der Zeiteinheit das Flüssigkeitsvolumen  $u dA_1 = u dy dz$  und damit die Masse  $\rho u dy dz$  in das Volumenelement ein (Abb. 1). Durch die Fläche  $dA_2 = dy dz$  tritt die Masse  $\rho(x + dx, y, z) u(x + dx, y, z) dy dz =$

$$\left[ \rho u(x, y, z) + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}(x, y, z) \right] dy \, dz \text{ wieder aus.}$$

Die Differenz  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}(x, y, z) dx \, dy \, dz$  ergibt den Masseverlust durch die Flächen  $dA_1$  und  $dA_2$ . Den gesamten Masseverlust des Volumenelements erhält man, wenn man die anderen Flächenpaare ebenso



Zur Deutung der Divergenz

berücksichtigt, zu (3). Die D. gibt danach den Masseverlust in der Volumen- und Zeiteinheit an. Man

$$(3) \quad \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) (x, y, z) dx \, dy \, dz = \text{div}(\rho \mathbf{V}) dx \, dy \, dz$$

bezeichnet die D. auch oft als *Ergiebigkeit*. Fließt ebensoviel Masse zu wie ab, so ist  $\text{div} \mathbf{V} = 0$ , das Vektorfeld heißt in diesen Punkten *quellenfrei*. Punkte des Vektorfeldes  $\mathbf{V}$  mit  $\text{div} \mathbf{V} > 0$  heißen *Quellen* und solche mit  $\text{div} \mathbf{V} < 0$  *Senken*. Das Raumintegral (4) heißt die *Ergiebigkeit* der im Körper  $K$  enthaltenen

$$(4) \quad \iiint_K \text{div} \mathbf{V} \, dx \, dy \, dz$$

Quellen und (4a) die *mittlere Ergiebigkeit* dieser Quellen.

$$(4a) \quad \frac{1}{|K|} \iiint_K \text{div} \mathbf{V} \, dx \, dy \, dz$$

mit  $|K| = \iiint_K dx \, dy \, dz$

II. Bezeichnen  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$  stetig differenzierbare Vektorfelder,  $U$  ein stetig differenzierbares skalares Feld,  $\mathbf{c}$  ein konstantes Vektorfeld und  $c$  eine beliebige Konstante, so gelten für die D. Rechenregeln (5), (6), (7), (8), (9). Als Anwendung dieser Beziehungen ergeben sich z. B. (10) und (11).

- (5)  $\text{div} \mathbf{c} = 0$       (6)  $\text{div}(c\mathbf{V}_1) = c \text{div} \mathbf{V}_1$
- (7)  $\text{div}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \text{div} \mathbf{V}_1 + \text{div} \mathbf{V}_2$
- (8)  $\text{div}(U\mathbf{V}_1) = U \text{div} \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \text{grad} U$   
(↗ Gradient)

$$(9) \quad \text{div}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2 \text{rot} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1 \text{rot} \mathbf{V}_2$$

(↗ Rotation)

$$(10) \quad \text{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$(11) \quad \text{div}(f(\mathbf{r}) \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \text{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \text{grad} f(\mathbf{r}) = 3f(\mathbf{r}) + r f'(\mathbf{r})$$

Zu weiteren Rechenregeln, insbes. in Verbindung mit dem *Gradienten* und der *Rotation* vgl. ↗ Nabla-operator.

Die gegebene Definition der D. hängt von dem in kartes. Koordinaten gegebenen Vektorfeld ab. Eine von der Koordinatendarstellung unabhängige Definition der D. kann mit Hilfe der Integralsätze gegeben werden (↗ Integralsätze I.).

**Divergenz einer Reihe ↗ Reihe I.**

**Dividend ↗ Division I.**

**Division: I.** Umkehroperation der Multiplikation, durch die zu zwei Zahlen  $p, b$  eines Zahlenbereichs die Zahl  $x$  als Lösung der Gleichung  $p = x \cdot b$  eindeutig bestimmt wird. Man schreibt  $x = p : b$  oder  $x = p/b = \frac{p}{b}$  und nennt  $p$  *Dividend* und  $b$  *Divisor*,

das Ergebnis  $x$  oder auch  $p/b$  *Quotient*. Da für  $b = 0$  stets  $x \cdot b = 0$  gilt, ist die D. durch Null nicht ausführbar und auch für  $p = 0$  nicht eindeutig (↗ Nullteiler), weil für beliebiges  $x$  für das Produkt gilt  $x \cdot 0 = 0$ . In den Bereichen **N** der natürlichen und **Z** der ganzen Zahlen ist die D. nicht immer ausführbar, dagegen stets in den Bereichen **Q** der rationalen, **R** der reellen und **C** der komplexen Zahlen.

II. Die D. zweier im Zehnersystem geschriebener Zahlen  $p$  und  $b$  bestimmt den Quotienten  $x$  schrittweise als die Zahl, deren Produkt mit dem Divisor  $b$  den Dividenten  $p$  ergibt. Im Beispiel sind in 4 Zehnern 3 Einer öfter als 10mal und weniger oft als

*Beispiel 1:*  $47,275 : 3,1 = 15,25$

$$\begin{array}{r} 16 \, 2 \\ 77 \\ 155 \\ 0 \end{array}$$

20mal enthalten, d. h. der erste Schritt ergibt 1 Zehner. Wird  $10 \cdot 3,1$  vom Dividenten abgezogen, so bleiben 16,275. Davon brauchen die Ziffern 75 im nächsten Schritt nicht beachtet zu werden. Er ergibt, daß 16,2 Einer fünfmal 3 Einer enthalten. Da  $10 \cdot 3,1$  schon subtrahiert wurde, bleibt nur  $5 \cdot 3,1$  abzuziehen. Der Rest ist 0,775 und ergibt im nächsten Schritt 2 Zehntel, bzw. nach Subtraktion von  $0,2 \cdot 3,1 = 0,62$  den Rest 0,155, der als letzte Ziffer 5 Hundertstel ergibt. Wegen  $0,05 \cdot 3,1 = 0,155$  bleibt kein Rest. Wäre ein Rest  $r$  geblieben, so könnte er als 10r Zehntausendstel angesehen und weiter dividiert werden. Im Beispiel 2 hat das einen Sinn, weil auf die ganze Zahl 1 tatsächlich beliebig

*Beispiel 2:*  $1,000000 \dots : 7 = 0,142857142857 \dots$

viele Nullen nach dem Komma folgen. Bei Maßzahlen ist dieses „Herunterziehen von Nullen“ meist

unberechtigt. Soll in Beispiel 3 das Ergebnis nur auf Zehntel angegeben werden, so daß Hundertstel

Beispiel 3:

$$\begin{array}{r} 67428,3 : 43917 = 1,535 \dots 6743 : 4392 = 1,54 \\ 235113 \qquad \qquad \qquad 2351 \\ 155280 \qquad \qquad \qquad 155 \\ 23529 \end{array}$$

zum sicheren Runden genügen, so brauchen nur die gerundeten Zehner in Dividend und Divisor mitgeführt zu werden und anstatt abgeworfene Ziffern zu dem Rest zu geben, wird von Schritt zu Schritt von einer mit Punkt bezeichneten Stelle des Divisors nur der Übertrag berücksichtigt. Für den zweiten Rest lautet dann die Rechnung »5 · 2 = 10, merke 1, 5 · 9 = 45 plus 1 ist 46 und 5 ist 51, merke 5«, »5 · 3 = 15 plus 5 ist 20 und 5 ist 25, merke 2«, »5 · 4 = 20 plus 2 ist 22 und 1 ist 23«.

III. Dieses Verfahren läßt sich auf die D. von Polynomen übertragen, wenn man bedenkt, daß im Positionssystem zuerst die höchste Potenz des Dividenden durch die höchste Potenz des Divisors geteilt wird, in Beispiel 4 ist das die D.  $10a^3 : 2a = 5a^2$ , in Beispiel 5 aber  $x^4 : x^2 = x^2$ .

Beispiel 4:

$$\begin{array}{r} (10a^3 + 13a^2x - ax^2 + 3x^3) : (2a + 3x) \\ \underline{10a^3 + 15a^2x} \qquad \qquad \qquad = 5a^2 - ax + x^2 \\ \qquad \qquad \qquad - 2a^2x - ax^2 + 3x^3 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{- 2a^2x - 3ax^2} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2ax^2 + 3x^3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{2ax^2 + 3x^3} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$$

Beispiel 5:

$$\begin{array}{r} (x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9) \\ \underline{x^4 + 3x^3 + 9x^2} \qquad \qquad \qquad = x^2 - 4x - 2 \\ \qquad \qquad \qquad - 4x^3 - 14x^2 - 40x + 7 \\ \qquad \qquad \qquad \underline{- 4x^3 - 12x^2 - 36x} \qquad \qquad \qquad + \frac{2x + 25}{x^2 + 3x + 9} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - 2x^2 - 4x + 7 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{- 2x^2 - 6x - 18} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 2x + 25 \end{array}$$

- S. a. Potenzreihe XIII.; ↗ Analogrechner I.
- Division durch eine Potenzreihe ↗ Potenzreihe XIII.
- Division mit Rest ↗ Teilbarkeit IV.
- Divisionsalgorithmus ↗ Gaußsche Zahlen I., ↗ Polynom II.
- Divisor ↗ Division I.
- Doppelbrüche ↗ Brüche I.6.
- Doppelebene ↗ Fläche zweiter Ordnung I.
- Doppelgerade ↗ Kurve zweiter Ordnung I., Cassinische Kurve II.
- Doppelintegral ↗ Flächenintegral III.1.
- doppelperiodische Funktion ↗ elliptische Funktion.
- Doppelpunkt: Punkt, der zwei Zweigen einer Kurve angehört, z. B. hat die Lemniskate einen D. (↗ Cassinische Kurven III.). S. a. Konchoide II., Pascalsche Schnecke, rationale Kurve III., Zykloide I.

**Doppelverhältnis: I.** Quotient zweier Verhältnisse; in der projektiven Geometrie definiert für vier Vektoren eines Strahlenbüschels. Hat dieses den Träger  $S$  und die Basisvektoren  $e_0$  und  $e_1$ , und sind die vier Vektoren  $a, b, c, d$  nach (1) durch ihre homogenen

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= a_0e_0 + a_1e_1, & b &= b_0e_0 + b_1e_1, \\ c &= c_0e_0 + c_1e_1, & d &= d_0e_0 + d_1e_1 \end{aligned}$$

projektiven Koordinaten definiert, so gilt (2) für das D. Dabei gibt die Funktion  $F(ac)$  z. B. den

$$(2) \quad DV(a, b; c, d) = \frac{F(ac)/F(cb)}{F(ad)/F(db)}$$

orientierten Flächeninhalt des von den Vektoren  $a$  und  $c$  aufgespannten Parallelogramms an. Das Vorzeichen von  $F(ac)$  ist positiv, wenn die Drehung der durch den Vektor  $a$  bestimmten Richtung in die durch  $c$  bestimmte Richtung auf dem kürzesten Wege mit einem für die Ebene angegebenen Dreh-sinn übereinstimmt. Wegen  $F(ac) = |a| \cdot |c| \cdot \sin \sphericalangle(ac)$  hängt das D. nur von den Sinus der Winkel zwischen den gegebenen Vektoren ab. Es kann nach (3) ausgedrückt werden in den projektiven Koor-

$$(3) \quad DV(a, b; c, d) = \frac{|ac|}{|cb|} : \frac{|ad|}{|db|}$$

dinaten der Vektoren, wenn für zweireihige Determinanten die Abkürzungen (4) eingeführt werden.

$$(4) \quad \begin{aligned} |ac| &= \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}, & |ad| &= \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}, \\ |cb| &= \begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}, & |db| &= \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

II. Die vier durch die Vektoren  $a, b, c, d$  gekennzeichneten Geraden eines Strahlenbüschels schneiden eine Gerade  $g$ , die nicht zum Strahlenbüschel gehört, in den Punkten  $A, B, C, D$ . Indem man über einen Faktor  $q$  der homogenen Koordinaten verfügt, läßt sich erreichen, daß je zwei der Vektoren mit der von ihnen ausgeschnittenen Strecke auf der Geraden  $g$  ein Dreieck bestimmen, dessen orientierter Flächeninhalt in die Größe des D. eingeht. Bezeichnet man mit  $h$  den Abstand der Geraden  $g$  vom Träger  $S$  des Strahlenbüschels (Abb. 1), so gilt (5):

$$(5) \quad DV(A, B; C, D) = [m(AC)/m(CB)] : [m(AD)/m(DB)]$$

Dabei sind in der Abb. die Strecken  $AC, CB$  und  $AD$  positiv und  $DB$  ist negativ zu zählen, wenn für die Winkel  $\sphericalangle(ac), \sphericalangle(cb), \sphericalangle(ad)$  der positive Dreh-sinn in der Ebene angenommen wird. Auch die Schnittpunkte der vier Geraden  $a, b, c, d$  mit einer zweiten von  $g$  verschiedenen Geraden  $g_1$  haben das gleiche D., wenn auch  $g_1$  nicht zum Geradenbüschel  $S$  gehört. Aus diesem *Hauptsatz der projektiven Geometrie* folgt, daß das D. eine *Invariante jeder projektiven Abbildung* ist.

III. Aus der Definition (3) ergibt sich, daß  $DV(A, B; C, D) = \infty$ , falls  $A = D$  oder  $B = C$ , d. h., wenn die äußeren oder die inneren Punkte

zusammenfallen, daß  $DV(A, B; C, D) = 0$ , falls  $B = D$  oder  $A = C$ , d. h., wenn von den beiden Punktpaaren  $A, B$  und  $C, D$  die zweiten oder die ersten Punkte zusammenfallen, und daß  $DV(A, B; C, D) = 1$ , falls  $C = D$ , d. h., wenn die Punkte des zweiten Paares zusammenfallen. Hat das D. den Wert  $-1$ , so spricht man von *harmonischen Punkten* bzw. *Strahlen*. Die beiden

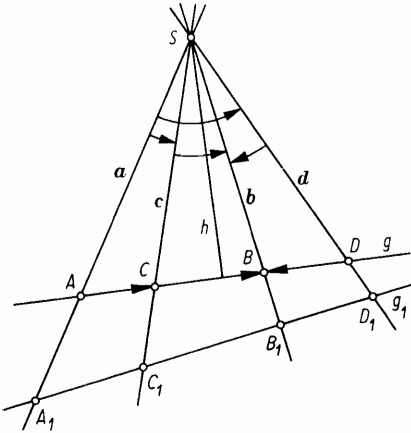


Abb. 1: Das Doppelverhältnis von vier Geraden  $a, b, c, d$  eines Geradenbüschels ist gleich dem Doppelverhältnis  $DV(A, B; C, D)$  der vier Schnittpunkte  $A, B, C, D$  auf einer nicht zum Geradenbüschel gehörenden Geraden  $g$

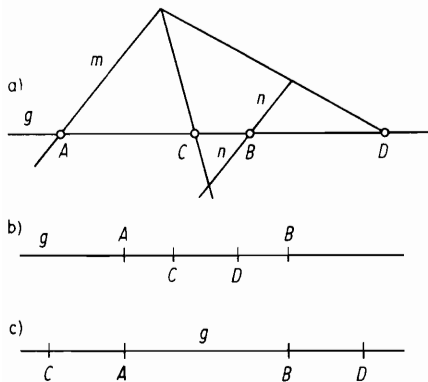


Abb. 2: Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden, a)  $DV(A, B; C, D) = -1$  nach dem Strahlensatz konstruiert, b) und c)  $DV(A, B; C, D) > 0$ .

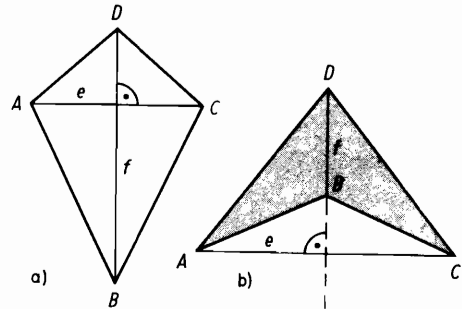
Teilverhältnisse, z. B.  $m(AC)/m(CB)$  und  $m(AD)/m(DB)$ , haben dann den gleichen Betrag, aber entgegengesetztes Vorzeichen, d. h., falls  $C$  ein „innerer“ Teilpunkt ist, ist  $D$  ein „äußerer“. Man sagt, die *Punktepaare*  $A, B$  und  $C, D$  trennen einander, weil eine projektive Gerade über ihren uneigentl. Punkt geschlossen ist. Für  $DV > 0$  schließt das eine Punktepaar das andere ein (Abb. 2). Die Konstruktion harmonischer Punkte nach dem Strahlensatz verwendet Sätze über Parallelen (↗ Teilverhältnis I.); eine

projektive Konstruktion ohne diese Sätze ergibt sich aus dem vollständigen Vierseit.

IV. Vier Punkten einer Geraden kommen danach je nach ihrer Anordnung zu Paaren verschiedene D.se zu. Da es  $4! = 24$  Permutationen gibt, sollten 24 D.se möglich sein. Nach  $DV(A, B; C, D) = DV(C, D; A, B) = DV(B, A; D, C) = DV(D, C; B, A)$  ändert das D. seinen Wert nicht beim Vertauschen der Paare  $A, B \Leftrightarrow C, D$  und ebensowenig beim Vertauschen  $A \Leftrightarrow B$  und  $C \Leftrightarrow D$  der Punkte in jedem Paar. Die danach noch möglichen  $24/4 = 6$  verschiedenen Werte treten auch auf. Durch Vertauschen der Punkte nur eines Paares ergibt sich der reziproke Wert des D., und durch Vertauschen der beiden inneren Punkte ergibt sich ein Wert, der sich mit dem ursprünglichen zu 1 ergänzt. Es gelten die Gleichungen (6) bis (11).

- (6)  $DV(A, B; C, D) = k$
- (7)  $DV(A, B; D, C) = 1/k$
- (8)  $DV(A, C; B, D) = 1 - k$
- (9)  $DV(A, D; B, C) = 1 - (1/k) = (k - 1)/k$
- (10)  $DV(A, D; C, B) = k/(k - 1)$
- (11)  $DV(A, C; D, B) = 1/(1 - k)$

**Drachenviereck:** *konvexes* Viereck  $ABCD$ , in dem jede Seite mindestens eine gleichlange Nachbarseite hat (Abb.). Seine Diagonalen stehen aufeinander

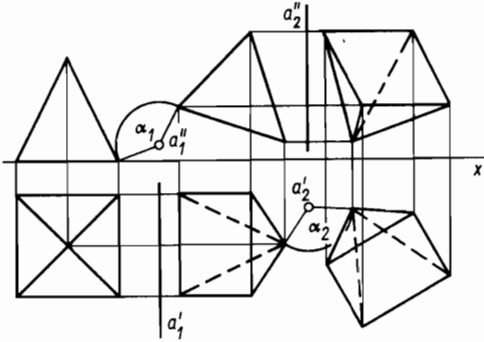


a) Drachenviereck, b) Deltoid

senkrecht. Sind  $e = |AC|$  und  $f = |BD|$  ihre Größen, so hat die Fläche des D.s den Inhalt  $A_D = ef/2$ . Die Summe der Innenwinkelgrößen ist  $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ . Ein *konkaves* Viereck mit mindestens einer gleichlangen Nachbarseite zu jeder Seite heißt *Deltoid*. Eine ihrer Diagonalen liegt außerhalb ihrer Fläche. Für die Größe der Fläche gilt  $A_D = ef/2$ . Genau eine der Diagonalen zerlegt jedes dieser Vierecke in zwei kongruente Dreiecke. S. a. Viereck.

- Drehachse** ↗ Abbildung, affine V.
- Drehfläche** ↗ Körper V.
- Drehsinn** ↗ Koordinatensystem II., III., IV., V.
- Drehspiegelung** ↗ Abbildung, affine, VII., ↗ Spiegelung V.
- Drehung** ↗ Abbildung, affine, V., ↗ Kongruenzabbildung, ↗ Koordinatentransformation III.2., ↗ Spiegelung I.

**Drehverfahren:** Verfahren der darstellenden Geometrie, einen in Zweitafelprojektion dargestellten Körper in eine bes. Lage zu drehen. Als Drehachse wählt man eine Gerade, die senkrecht zu einer Reißebene steht und dreht den darzustellenden Körper



Drehverfahren: Gedrehte Pyramide

um den Winkel  $\alpha$  (Abb.). Durch wiederholtes Anwenden des D. erreicht man gleiche Ergebnisse wie mit dem Seitenrißverfahren.

**Drehwinkel**  $\nearrow$  Winkel V.

**Dreieck:** I. einfacher geschlossener Streckenzug  $ABC$ . Mitunter versteht man in der Literatur unter D. auch das System aus dem einfach geschlossenen Streckenzug und dem Inneren dieses Streckenzugs, mitunter auch nur das System der drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , die nach der ersten Definition *Ecken* gen. werden. Die Strecken werden *Seiten* gen. und ihre Länge nach der gegenüberliegenden Ecke bezeichnet:  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ . In jedem D. ist die Summe der Längen zweier Seiten stets größer als die Länge der dritten Seite. Die Länge des einfachen geschlossenen Streckenzugs  $ABC$  wird *Umfang* des D.s gen. Die Vereinigungsmenge der Punkte des Streckenzugs und der des Inneren des D.s heißt *Fläche* des D.s Die Größe der *Innenwinkel*, d. h. der Winkel, deren Winkelfläche innere Punkte des D.s enthält, werden nach ihren Scheiteln bezeichnet,  $\alpha = |\sphericalangle CAB|$ ,  $\beta = |\sphericalangle ABC|$ ,  $\gamma = |\sphericalangle BCA|$ . Die Nebenwinkel der Innenwinkel heißen *Außenwinkel*, ihre Größe wird mit  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  bezeichnet. Im D. ist die Summe der Größen der Innenwinkel  $180^\circ$ , weil durch die Parallele zu einer Seite durch die gegenüberliegende Ecke Wechselwinkel entstehen, deren Größe der Größe der beiden nicht an dieser Ecke anliegenden Innenwinkel entspricht. Danach bilden die drei Innenwinkel einen gestreckten Winkel. Aus  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  folgt z. B.  $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha = \alpha'$ , d. h., im D. ist die Größe eines Außenwinkels gleich der Summe der Größen der nicht anliegenden Innenwinkel (Abb. 1).

Weiter ergibt sich aus der Summe der Innenwinkelgrößen, daß im D. höchstens ein Innenwinkel in Gradmaß gemessen größer oder gleich  $90^\circ$  ist, sowie der Satz: *Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind gleichgroß, falls keiner der*

*Scheitel in der Winkelfläche des anderen Winkels liegt; trifft dies zu, so sind die Winkel Supplementwinkel* (Abb. 2).

II. Für Diskussionen der Lösungen trigonometr. Aufgaben wird die Aussage benutzt, daß im D. der

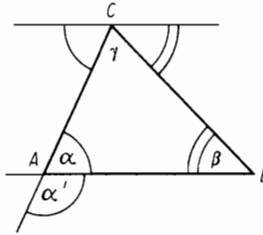
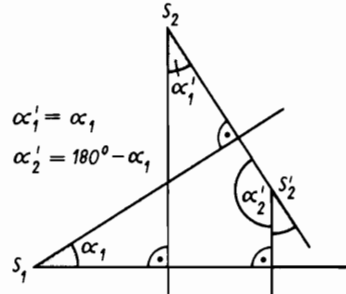


Abb. 1: Beziehungen zwischen Innenwinkeln und Außenwinkeln im Dreieck  $ABC$



Dreieck. Abb. 2: Winkel, deren Schenkel senkrecht aufeinander stehen

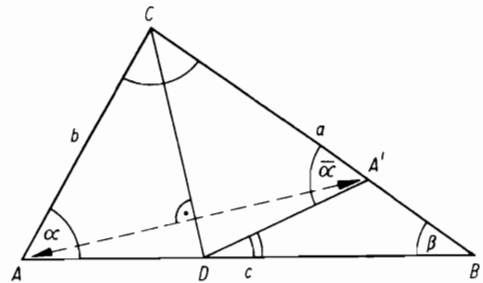


Abb. 3: Im Dreieck liegt dem größeren Winkel die längere Seite gegenüber

größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt und umgekehrt dem größeren Winkel die größere Seite (Abb. 3). Ist im D.  $ABC$  z. B.  $a > b$  und wird das Teil-D.  $ADC$  an der Winkelhalbierenden  $CD$  gespiegelt, so gilt  $\bar{\alpha} = \alpha$  und Punkt  $A'$  muß im Inneren der Strecke  $BC$  liegen. Im D.  $DBA'$  ist der Winkel der Größe  $\bar{\alpha}$  Außenwinkel, d. h.,  $\bar{\alpha}$  ist gleich der Summe der Größen der nichtanliegenden Innenwinkel und deshalb gilt  $\alpha = \bar{\alpha} > \beta$ .

III. Nach der Größe der Winkel unterscheidet man rechtwinklige und schiefwinklige D.e. Im rechtwinkligen D. sind die zwei anderen Innenwinkel

Komplementwinkel, aus  $\gamma = 90^\circ$  folgt z. B.  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Die Seiten, die auf den Schenkeln des rechten Winkels liegen, heißen *Katheten*, die längste Seite heißt *Hypotenuse*. Ein *schiefwinkliges D.* kann *stumpfwinklig* oder *spitzwinklig* sein (Abb. 4). Nach

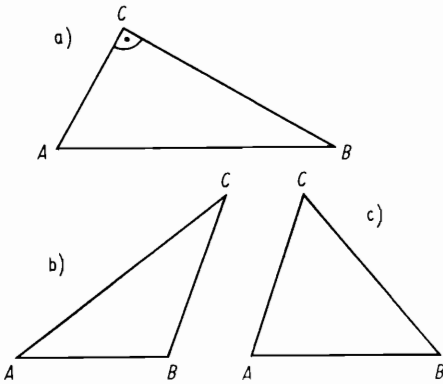


Abb. 4: Formen der Dreiecke nach den Winkelgrößen, a) rechtwinkliges Dreieck,  $\gamma = 90^\circ$ , b) und c) schiefwinklige Dreiecke, b) stumpfwinkliges, c) spitzwinkliges Dreieck

der Länge der Seiten unterscheidet man vom *ungleichseitigen D.* das *gleichseitige* und das *gleichschenklige D.* Im *gleichseitigen D.* sind auch die Innenwinkel gleich groß, d. h.,  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ . In ihm sind die Höhen zugleich Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende und Winkelhalbierende. Ein Dreieck wird *gleichschenklilig* genannt, wenn zwei Seiten die gleiche Länge haben. Diese gleichlangen Seiten werden *Schenkel s* gen., während die dritte Seite *Basis* heißt. Auch die Winkel an der Basis, die *Basiswinkel*, sind einander gleich, und die Winkelhalbierende des dritten Winkels, des *Winkels an der Spitze*, ist *Symmetrieachse* des gleichschenkligen D.s. Sie fällt mit der *Höhe* auf die Basis zusammen und halbiert die Basis (Abb. 5).

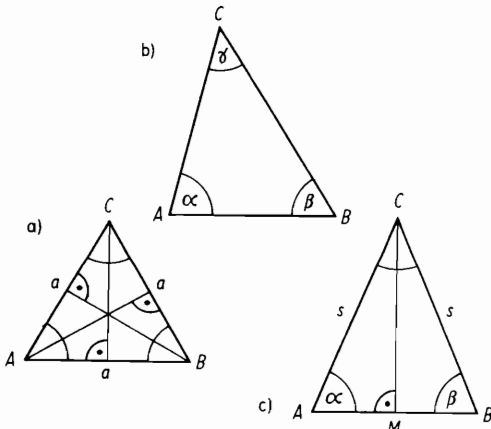


Abb. 5: Formen der Dreiecke nach den Seitenlängen, a) gleichseitiges Dreieck mit den Symmetrieachsen, b) ungleichseitiges Dreieck, c) gleichschenkliges Dreieck

IV. *Darstellung durch Koordinaten.* Sind  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  die Ortsvektoren der Ecken  $P_1, P_2, P_3$  eines D.s, so liegt ein Punkt  $P$  genau dann im Innern des D.s  $P_1P_2P_3$  oder auf seinem Rand, wenn (1) mit den Bedingungen  $0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1, 0 \leq \lambda_3 \leq 1$  sowie  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  die Parameterdarstellung seines Ortsvektors ist. Für  $\lambda_i = 0$  stellt  $\mathbf{x} = \lambda_j \mathbf{x}_j + \lambda_k \mathbf{x}_k$  mit  $j, k \neq i$  die Gegenseite zu  $P_i$  dar ( $\nearrow$  Strecke, Darstellung durch Koordinaten). Liegen die Punkte  $P_i(x_i, y_i)$  und die Punkte  $P(x, y)$  in der Ebene mit kartes. Koordinaten  $x, y$ , so erhält man aus (1)  $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$ , liegen sie im Raum mit kartes. Koordinaten  $x, y, z$ , so erhält man  $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$ , jeweils mit  $0 \leq \lambda_i \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Für den *D.sinhalt*  $A$  gilt (2) nach der Definition des Vektorprodukts, wenn das D. im Raum liegt. Liegt es

$$(1) \quad \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3$$

$$(2) \quad A = \frac{1}{2} |(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)|$$

in der  $x, y$ -Ebene, so ist (3) der Flächeninhalt,

$$(3) \quad A = \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_3)|$$

der auch in der Form (3a) oder nach (3b) mit

$$(3a) \quad A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$(3b) \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

einer Determinante dargestellt werden kann. Diese Determinante ist genau dann positiv, wenn man von  $P_1$  über  $P_2$  nach  $P_3$  im positiven Drehsinn ( $\nearrow$  Koordinatensystem III.) der Ebene gelangt. In der  $x, y$ -Ebene sind die Punkte des Dreiecks auch durch drei Ungleichungen zu erfassen. Enthält für  $i = 1, 2, 3$  die Gerade  $g_i$  die Dreiecksseite, auf der nicht  $P_i$  liegt, und hat man für jede der Geraden  $g_i$  mit der Gleichung  $A_i x + B_i y + C_i = 0$  die *Orientierung* ( $\nearrow$  Geradengleichung II.) so gewählt, daß der Stellungsvektor  $A_i \mathbf{i} + B_i \mathbf{j}$  ins Innere des Dreiecks gerichtet ist, so ist  $P(x, y)$  Punkt des Dreiecks genau dann, wenn die Koordinaten  $x, y$  die drei *Ungleichungen*  $A_i x + B_i y + C_i \geq 0$  für  $i = 1, 2, 3$  erfüllen.

S. a. ebene Trigonometrie II.

**Dreiecksinhalt**  $\nearrow$  Dreieck III.

**Dreieckskonstruktion: I.** Konstruktion eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal. Beschränkt man sich darauf, die drei vorzuzugenden Stücke aus den Seiten, Winkeln, Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden auszuwählen, dann gibt es  $\binom{15}{3} = 455$  derartige D.en, die durch jeweils drei der Größen  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, h_a, h_b, h_c, s_a, s_b, s_c, w_a, w_b$  oder  $w_\gamma$  in runden Klammern gekennzeichnet sind: z. B. steht das Symbol  $(a, b, c)$  für die Aufgabe, ein Dreieck aus den Längen der drei Seiten zu konstruieren. In der Schreibweise werden im folgenden die Bezeich-

nungen in lexikograph. Anordnung angegeben, und für Aufgaben des gleichen geometr. Sachverhalts wird nur eine Darstellung durch Symbole angegeben. Für die Aufgabe, ein Dreieck aus den Größen zweier Seiten und eines Gegenwinkels zu konstruieren, steht  $(a, b, \alpha)$  für die 6 Aufgaben  $(a, b, \alpha)$ ,  $(a, b, \beta)$ ,  $(b, c, \beta)$ ,  $(b, c, \gamma)$ ,  $(a, c, \alpha)$  und  $(a, c, \gamma)$ . Dieser Aufgabenkomplex hat die *Vielfachheit* [6], für  $(a, b, c)$  ist sie [1]. Die 455 Aufgaben zerfallen danach in 95 Komplexe, 60 mit [6], 30 mit [3] und 5 mit [1]. Die Komplexe 20.  $(a, \beta, h_c)$  mit [6] und 48.  $(\alpha, \beta, \gamma)$  mit [1] sind *unterbestimmt*, weil  $h_c = a \cdot \sin \beta$  und weil  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Die folgenden 30 Komplexe sind *unlösbar*:

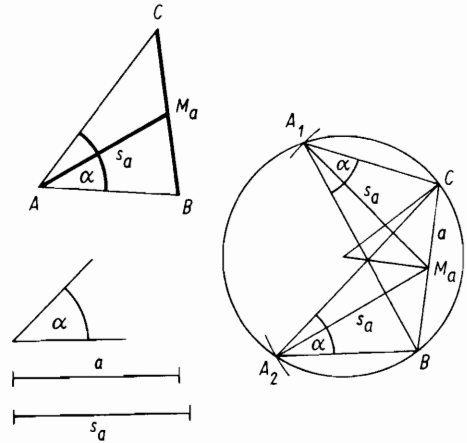
- |   |   |
|---|---|
| 8. $(a, b, w_a)$ mit [6],               | 16. $(a, \alpha, w_\beta)$ mit [6],     |
| 24. $(a, \beta, w_a)$ mit [6],          | 31. $(a, h_a, w_\beta)$ mit [6],        |
| 36. $(a, h_b, w_a)$ mit [6],            | 41. $(a, s_a, w_\beta)$ mit [6],        |
| 43. $(a, s_b, w_a)$ mit [6],            | 44. $(a, s_b, w_\beta)$ mit [6],        |
| 45. $(a, s_b, w_\gamma)$ mit [6],       | 46. $(a, w_a, w_\beta)$ mit [6],        |
| 47. $(a, w_\beta, w_\gamma)$ mit [3],   | 59. $(x, h_a, w_\beta)$ mit [6],        |
| 66. $(x, h_b, w_a)$ mit [6],            | 69. $(x, s_a, w_\beta)$ mit [6],        |
| 71. $(x, s_b, w_a)$ mit [6],            | 72. $(x, s_b, w_\beta)$ mit [6],        |
| 73. $(x, s_b, w_\gamma)$ mit [6],       | 74. $(x, w_a, w_\beta)$ mit [6],        |
| 75. $(x, w_\beta, w_\gamma)$ mit [3],   | 79. $(h_a, h_b, w_a)$ mit [6],          |
| 83. $(h_a, s_a, w_\beta)$ mit [6],      | 86. $(h_a, s_b, w_\beta)$ mit [6],      |
| 87. $(h_a, s_b, w_a)$ mit [6],          | 88. $(h_a, s_a, w_\beta)$ mit [6],      |
| 89. $(h_a, w_\beta, w_\gamma)$ mit [3], | 91. $(s_a, s_b, w_a)$ mit [6],          |
| 92. $(s_a, s_b, w_a)$ mit [3],          | 93. $(s_a, w_a, w_\beta)$ mit [6],      |
| 94. $(s_a, w_\beta, w_\gamma)$ mit [3], | 95. $(w_a, w_\beta, w_\gamma)$ mit [1]. |

Es bleiben 63 Komplexe, die lösbar sind:

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 1. $(a, b, c)$ mit [1],                  | 2. $(a, b, \alpha)$ mit [6],        |
| 3. $(a, b, \gamma)$ mit [3],             | 4. $(a, b, h_a)$ mit [6],           |
| 5. $(a, b, h_c)$ mit [3],                | 6. $(a, b, s_a)$ mit [6],           |
| 7. $(a, b, s_c)$ mit [3],                | 9. $(a, b, w_\gamma)$ mit [3],      |
| 10. $(a, \alpha, \beta)$ mit [6],        | 11. $(a, \alpha, h_a)$ mit [3],     |
| 12. $(a, \alpha, h_b)$ mit [6],          | 13. $(a, \alpha, s_a)$ mit [3],     |
| 14. $(a, \alpha, s_b)$ mit [6],          | 15. $(a, \alpha, w_a)$ mit [3],     |
| 17. $(a, \beta, \gamma)$ mit [3],        | 18. $(a, \beta, h_a)$ mit [6],      |
| 19. $(a, \beta, h_b)$ mit [6],           | 21. $(a, \beta, s_a)$ mit [6],      |
| 22. $(a, \beta, s_b)$ mit [6],           | 23. $(a, \beta, s_c)$ mit [6],      |
| 25. $(a, \beta, w_\beta)$ mit [6],       | 26. $(a, \beta, w_\gamma)$ mit [6], |
| 27. $(a, h_a, h_b)$ mit [6],             | 28. $(a, h_a, s_a)$ mit [3],        |
| 29. $(a, h_a, s_b)$ mit [6],             | 30. $(a, h_a, w_a)$ mit [3],        |
| 32. $(a, h_b, h_c)$ mit [3],             | 33. $(a, h_b, s_a)$ mit [6],        |
| 34. $(a, h_b, s_b)$ mit [6],             | 35. $(a, h_b, s_c)$ mit [6],        |
| 37. $(a, h_b, w_\beta)$ mit [6],         | 38. $(a, h_b, w_\gamma)$ mit [6],   |
| 39. $(a, s_a, s_b)$ mit [6],             | 40. $(a, s_a, w_a)$ mit [3],        |
| 42. $(a, s_b, s_c)$ mit [3],             | 49. $(\alpha, \beta, h_a)$ mit [6], |
| 50. $(a, \beta, h_c)$ mit [3],           | 51. $(\alpha, \beta, s_a)$ mit [6], |
| 52. $(\alpha, \beta, s_c)$ mit [3],      | 53. $(\alpha, \beta, w_a)$ mit [6], |
| 54. $(\alpha, \beta, w_\gamma)$ mit [3], | 55. $(\alpha, h_a, h_b)$ mit [6],   |
| 56. $(\alpha, h_a, s_a)$ mit [3],        | 57. $(\alpha, h_a, s_b)$ mit [6],   |
| 58. $(\alpha, h_a, w_a)$ mit [3],        | 60. $(\alpha, h_b, h_c)$ mit [3],   |
| 61. $(\alpha, h_b, s_a)$ mit [6],        | 62. $(\alpha, h_b, s_b)$ mit [6],   |
| 63. $(x, h_b, s_c)$ mit [6],             | 64. $(x, h_b, w_a)$ mit [6],        |
| 65. $(x, h_b, w_\beta)$ mit [6],         | 67. $(\alpha, s_a, s_b)$ mit [6],   |
| 68. $(x, s_a, w_a)$ mit [3],             | 70. $(x, s_b, s_c)$ mit [3],        |
| 76. $(h_a, h_b, h_c)$ mit [1],           | 77. $(h_a, h_b, s_a)$ mit [6],      |
| 78. $(h_a, h_b, s_c)$ mit [3],           | 80. $(h_a, h_b, w_\gamma)$ mit [3], |
| 81. $(h_a, s_a, s_b)$ mit [6],           | 82. $(h_a, s_a, w_a)$ mit [3],      |
| 84. $(h_a, s_b, s_c)$ mit [3],           | 85. $(h_a, s_b, w_a)$ mit [6],      |
| 90. $(s_a, s_b, s_c)$ mit [1],           |                                     |

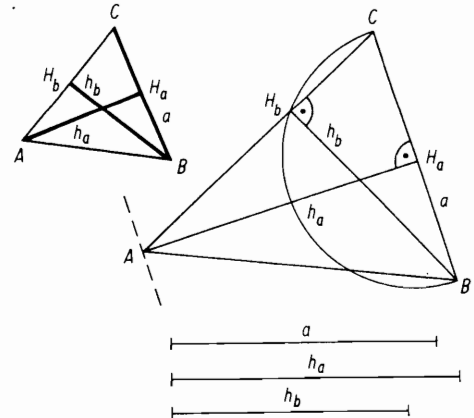
II. Zu einigen Aufgaben wird eine mögl. Analyse zur Lösung angedeutet und ein Beispiel konstruiert.

II.1. Komplex 13  $(a, \alpha, s_a)$ : Sind gegeben die Größen  $a$  der Seite  $BC$ , die Größe  $s_a$  der Seitenhalbierenden  $M_a A$  und die Größe  $\alpha$  des Innenwinkels  $\sphericalangle BAC$ , so sind die Punkte  $B, C$  als Endpunkte und  $M_a$  als Mittelpunkt von  $BC$  bestimmt. Punkt  $A$  liegt auf dem Ortskreis über  $AB$  als Sehne, der den Winkel der Größe  $\alpha$  als Umfangswinkel faßt, und zweitens auf dem Kreis um  $M_a$  mit  $s_a$  als Radius. Es hängt von  $s_a$  ab, ob kein oder zwei Schnittpunkte oder ein Berührungspunkt auftreten. In der Abb. 1 erhält man zwei Lösungen.



Dreieckskonstruktion. Abb. 1: Dreieck aus  $(a, \alpha, s_a)$

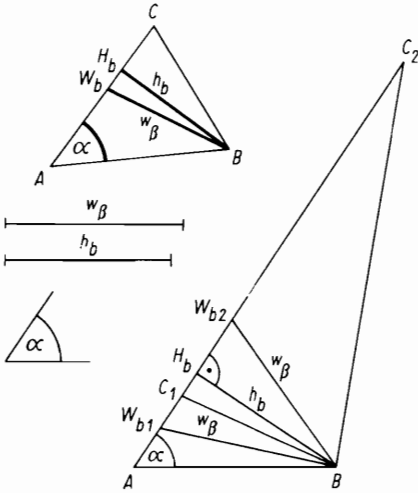
II.2. Komplex 27  $(a, h_a, h_b)$ : Sind gegeben die Größen  $a$  der Seite  $BC$  und  $h_a, h_b$  der Höhen  $AH_a$  und  $BH_b$ , so nimmt man die Eckpunkte  $B, C$  von  $a$  als bestimmt an. Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $BCH_b$  ergibt sich  $H_b$  als Schnitt des Thaleskreises über  $BC$  als Durchmesser mit dem Kreis um  $B$  mit Radius  $h_b$ . Es ergibt sich die Bedingung  $h_b < a$ . Punkt  $A$  ist der Schnittpunkt der Verlängerung



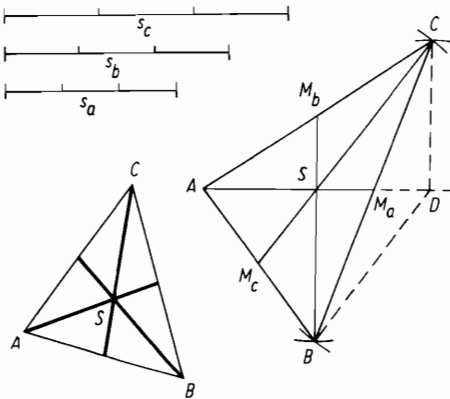
Dreieckskonstruktion. Abb. 2: Dreieck aus  $(a, h_a, h_b)$

zung von  $CH_b$  über  $H_b$  hinaus mit der Parallelen zu  $BC$  im Abstand  $h_a$  (Abb. 2). Die Lösung ist eindeutig für Höhen im Inneren vom Dreieck  $ABC$ .

**II.3. Komplex 65** ( $\alpha, h_b, w_\beta$ ): Sind gegeben die Größe  $\alpha$  des Winkels  $\sphericalangle BAC$ , die Größe  $h_b$  der Höhe  $BH_b$  und die Größe  $w_\beta$  der Winkelhalbierenden  $BW_\beta$ , so ist das rechtwinklige Dreieck  $ABH_b$  bestimmt aus der Größe  $h_b$  der Kathete und aus der Winkelgröße  $\alpha$ . Ein Kreis um  $B$  mit dem Radius  $w_\beta > h_b$  schneidet die Strecke  $AH_b$  und ihre Verlängerung in den Punkten  $W_{b1}$  und  $W_{b2}$ . Aus jedem dieser Punkte ergibt sich durch Verdopplung von  $\sphericalangle ABW_{b1}$  oder von  $\sphericalangle ABW_{b2}$  ein Punkt  $C_1$  bzw.  $C_2$  und somit die Dreiecke  $ABC_1$  bzw.  $ABC_2$  als Lösung (Abb. 3).



Dreieckskonstruktion. Abb. 3: Dreieck aus ( $\alpha, h_b, w_\beta$ )



Dreieckskonstruktion. Abb. 4: Dreieck aus ( $s_a, s_b, s_c$ )

**II.4. Komplex 90:** Sind die Längen  $s_a, s_b, s_c$  der Seitenhalbierenden gegeben, so teilt ihr Schnittpunkt  $S$  sie im Verhältnis 1 : 2, d. h., eine Parallele durch  $B$  zu  $CM_c$  und eine durch  $C$  zu  $BM_b$  schneiden sich in  $D$  und vom Parallelogramm  $SBDC$  sind gegeben die Seitenlängen  $|BD| = |SC| = 2s_c/3$ ,

$|CD| = |SB| = 2s_b/3$  und die Länge  $|SD| = 2s_a/3$  der Diagonale. Dreieck  $SDC$  ist aus den Längen seiner Seiten bestimmt. Punkt  $A$  ergibt sich auf der Geraden  $DS$  aus  $|SD| = |SA|$ , Punkt  $B$  als vierter Punkt des Parallelogramms  $SBDC$  (Abb. 4). Die Konstruktion ist eindeutig.

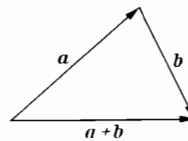
**Dreieckskurve** ↗ Fouriersche Reihe III.1.

**Dreiecksmatrix** ↗ lineares Gleichungssystem V., ↗ Matrix I.

**Dreiecksnetz** ↗ Triangulation.

**Dreieckstransversalen**, *Transversalen eines Dreiecks:* Geraden, die das Dreieck schneiden, sie heißen *Ecktransversalen*, wenn sie durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehen. Das Dreieck schneidet aus jeder  $D$ . eine Strecke bestimmter Länge aus: 1. Die *Mittelsenkrechten* mit den Längen  $m_a, m_b$  bzw.  $m_c$  werden von einem Dreieck  $ABC$  aus Geraden ausgeschnitten, die durch den Mittelpunkt von  $BC, CA$  bzw.  $AB$  gehen und senkrecht auf  $g_{BC}, g_{CA}$  bzw.  $g_{AB}$  stehen. 2. Die *Seitenhalbierenden* mit den Längen  $s_a, s_b$  bzw.  $s_c$  ergeben sich aus  $D$ , die durch  $A, B$  bzw.  $C$  und durch den Mittelpunkt von  $BC, AC$  bzw.  $AB$  gehen. 3. Die *Winkelhalbierenden* mit den Längen  $w_a, w_b$  bzw.  $w_c$  ergeben sich aus  $D$ , die durch  $A, B$  bzw.  $C$  gehen und die Innenwinkel bzgl. dieser Ecken halbieren. 4. Die *Höhen* mit den Längen  $h_a, h_b$  bzw.  $h_c$  ergeben sich aus  $D$  durch  $A, B$  bzw.  $C$ , die auf den diesen gegenüberliegenden Geraden  $g_{BC}, g_{CA}$  bzw.  $g_{AB}$  senkrecht stehen. Mittelsenkrechte, Halbierende von Seiten und Winkeln können in anderem Zusammenhang aber auch als Strahlen oder Geraden betrachtet werden. Ihre speziellen Eigenschaften werden in bes. Artikeln erläutert. S. a. Menelaos, Satz von und Ceva, Satz von.

**Dreiecksungleichung: I.**  $|a + b| \leq |a| + |b|$  für beliebige reelle Zahlen  $a$  und  $b$ , aber auch, wenn  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  Elemente eines beliebigen euklid. Vektorraumes sind. Im euklid. Vektorraum der Verschiebungen der Ebene läßt sich die  $D$ . geometrisch veranschaulichen (Abb.). Dies hat der Ungleichung den Namen gegeben.



Dreiecksungleichung  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

**II. In der Funktionalanalysis die Ungleichung (1),**

$$(1) \quad \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

die für beliebige Elemente  $x, y, z$  eines metr. Raumes (↗ Raum, metrischer I.) mit der Abstandsfunktion  $\varrho(x, y)$  gilt. Ist der Abstand  $\varrho(x, y)$  zweier Elemente  $x, y$  durch eine Norm  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$  definiert, so geht die  $D$ . mittels  $z - x = u, y - z = v$  über in  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ . Wählt man in einem euklid. Vektorraum als Norm  $\|\mathbf{x}\|$  des Vektors  $\mathbf{x}$  seine Länge  $|\mathbf{x}|$ , so bekommt die  $D$ . die Gestalt

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|;$$



sie besagt, daß die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten nicht größer ist als die Länge der dritten Seite. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $x = \alpha y$  mit einer reellen Zahl  $\alpha > 0$  erfüllt ist. S. a. Schwarzsche Ungleichung;  $n$ -dimensionaler reeller Punkttraum; Raum, metrischer, I.; Raum, normierter, linearer; Vektorraum VII.

- Dreieckscode** ↗ Kodierung III.
- Dreiprimzahlsatz** ↗ Zahlentheorie III.3.
- Dreipunktgleichung** ↗ Ebenengleichung I.
- Dreisatzrechnung** ↗ Proportion II.
- dreiseitige Ecke** svw. Triederecke ↗ körperliche Ecke I.
- Dreispiegelungssatz** ↗ Spiegelung I.
- Dreitafelprojektion:** senkrechte Parallelprojektion auf drei Projektionsebenen, die senkrecht aufeinander stehen; ein Sonderfall des Seitenriß-

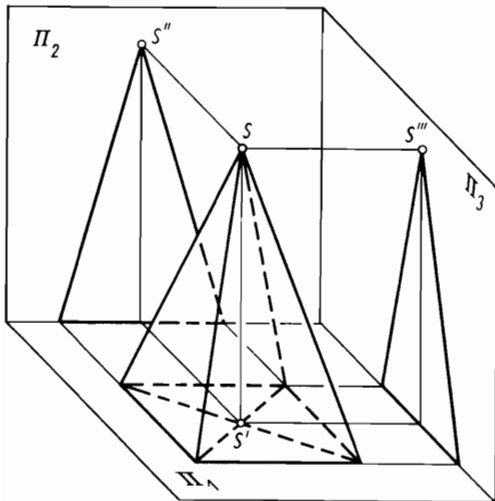


Abb. 1: Dreitafelprojektion

verfahrens, bei dem die Seitenrißebene senkrecht steht zur Grundriß- und zur Aufrißebene und Kreuzrißebene oder -tafel  $\Pi_3$  genannt wird (Abb. 1). In

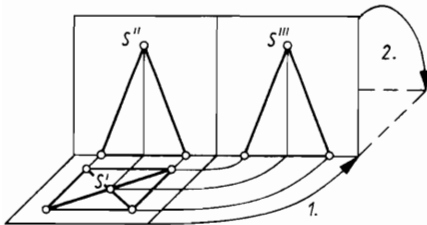
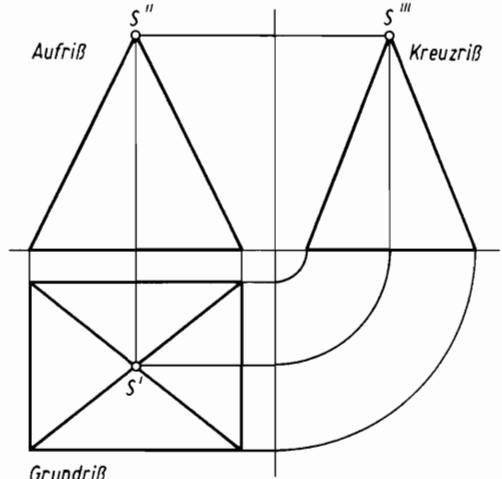


Abb. 2: Verknüpfung der Dreitafelprojektion

Anlehnung an die genannten Darstellungsverfahren im techn. Zeichnen wird die Kreuzrißtafel erst in die Aufrißebene und schließlich mit dieser in die Grundrißebene geklappt (Abb. 2). Dadurch erscheint der Kreuzriß in aufrechter Lage (Abb. 3).



Dreitafelprojektion. Abb. 3: Kreuzriß einer Pyramide

**Dreiteilung eines Winkels** ↗ Galoissche Theorie, ↗ geometrische Figur, ↗ Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.

**Drift** ↗ Irrfahrt.  
**dual** ↗ Landkarte II., ↗ Relation III., ↗ Verband I.

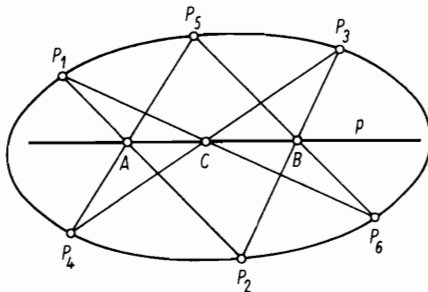
**Dualbruch** ↗ dyadisches Zahlensystem II.  
**duale Basis** ↗ Linearform II.

**duale Gebilde:** geometrische Gebilde, die in projektiver Betrachtung gleichwertig sind (↗ Dualität), z. B. sind in der Geradengleichung  $x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 = 0$  die homogenen Punktkoordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  algebraisch gleichwertig mit den homogenen Geradenkoordinaten  $(u_0, u_1, u_2)$ . Für feste Werte  $(u_0, u_1, u_2)$  stellt die Gleichung eine *Punktreihe* in der Ebene, d. h. eine Gerade, dar, für feste  $(x_0, x_1, x_2)$  ein *Geradenbüschel* mit dem Träger  $(x_0, x_1, x_2)$ . Der Punkt  $P$ , der zwei Punktreihen angehört, ist ihr Schnittpunkt, und die Gerade, die mit zwei Geradenbüscheln inzidiert, ist die Verbindungsgerade ihrer Träger. *Punkte und Gerade* sowie *Punktreihe* und *Geradenbüschel* sind danach d. G. der projektiven Ebene. Analog folgt aus der Ebenengleichung  $x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$ , daß im projektiven Raume folgende Begriffspaare d. G. bezeichnen: *Punkt* und *Ebene*, *Punktreihe* und *Ebenenbüschel* (↗ projektive Gebilde, Abb.), dabei entspricht der *Geraden* als Träger des einen die *Gerade* als Träger des anderen, sowie *Punktfeld* mit einer Ebene als Träger und *Ebenenbündel* mit einem Punkt als Träger.

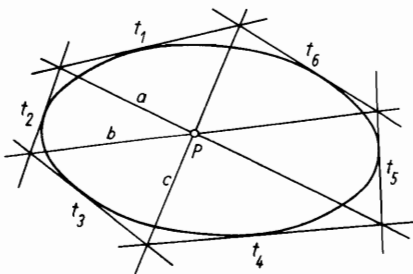
- duale Polyeder** ↗ regelmäßige Polyeder I.
- dualer Graph** ↗ Landkarte II.
- dualer Logarithmus** ↗ Logarithmensystem I.
- dualer Raum** ↗ Funktional II.
- dualer Simplexalgorithmus** ↗ Simplexalgorithmus IV.

**dualer Vektorraum** ↗ Linearform II.  
**Dualität, Reziprozität:** projektive Geometrie aus der Eigenart von Gleichungen der projektiven Geometrie, daß die homogenen Koordinaten einer geo-

metr. Größe algebraisch gleichwertig zu denen einer anderen Größe auftreten, hergeleitetes Prinzip, das Ergebnis als geometr. Aussage über die eine Größe und mit der gleichen Begründung als Aussage über die andere Größe zu formulieren (↗ duale Gebilde). Zu jedem Satz der projektiven Geometrie gibt es danach einen dualen, der aus dem gleichen Grunde wahr ist. Bei dieser Übertragung sind nicht nur die Elemente der Begriffspaare Punkt-Gerade in der Ebene oder Punkt-Ebene im Raum zu vertauschen, für die allgemeine Lagebeziehung der Inzidenz ist zu setzen »liegt auf« oder »geht durch« oder für »schneiden sich« die duale Beziehung »ergeben eine Verbindungsgerade«. In der Ebene geht der Satz »Zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden« über in den Satz »Zwei verschiedene Geraden gehen durch genau einen Punkt«. Die im projektiven Raum gültige Aussage »Zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden; ein Punkt und eine nicht durch ihn hindurchgehende Gerade bestimmen genau eine Ebene« lautet in dualer Form: »Zwei verschiedene Ebenen gehen durch genau eine Gerade; eine Ebene und eine nicht auf ihr liegende Gerade bestimmen genau einen Punkt«. Geschichtlich wurden oft getrennte Sätze aufgestellt und bewiesen, ehe sich herausstellte, daß der eine die Dualform des anderen ist, z. B. der Satz von Brianchon vom Satz von Pascal.



Dualität. Abb. 1: Satz von Pascal; im Sehnensechseck  $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$  liegen die Punkte  $A = (P_1P_2 \cap P_4P_5)$ ,  $B = (P_2P_3 \cap P_5P_6)$ ,  $C = (P_3P_4 \cap P_6P_1)$  auf der Pascalschen Geraden  $p = ACB$



Dualität. Abb. 2: Satz von Brianchon; im Tangentensechseck  $t_1t_2t_3t_4t_5t_6$  schneiden sich die Geraden  $a = (t_1 \cap t_2, t_4 \cap t_5)$ ,  $b = (t_2 \cap t_3, t_5 \cap t_6)$  und  $c = (t_3 \cap t_4, t_6 \cap t_1)$  im Brianchonschen Punkt  $P$

**Satz von Pascal:** Im Sehnensechseck eines Kegelschnitts liegen die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer Geraden, der Pascalschen Geraden  $p$  (Abb. 1).

**Satz von Brianchon:** Im Tangentensechseck eines Kegelschnitts schneiden sich die Verbindungsgeraden je zweier Gegenseiten in einem Punkt, im Brianchonschen Punkt  $P$  (Abb. 2).

S. a. Optimierung VII.  
**Dualkode** ↗ Kodierung III.1.

**Dualsystem** sw. dyadisches Zahlensystem, s. a. Zahlensystem VI.

**Dualzahl** ↗ Zahlensystem VI.

**Duhamel, Jean Marie Constant**, geb. 5. 2. 1797 St. Malo, gest. 29. 4. 1872 Paris. — Als Studiendirektor an der École Polytechnique in Paris verfaßte D. je ein Lehrbuch für Analysis und Mechanik und war später als Professor an der École Normale tätig. Er arbeitete über Probleme der Wärmeleitung und der Wellenausbreitung und untersuchte spezielle Aufgabenstellungen, die sich aus den entsprechenden partiellen Differentialgleichungen ergaben.

**Duhamel, Prinzip von** ↗ hyperbolische Differentialgleichung II.

**Duhamelsches Integral** ↗ Zeitfunktion II.

**Durchdringung:** Körper, dessen Punkte zugleich dem Innern zweier sich durchdringender Körper angehören. Die D. ebenflächig begrenzter Körper ergibt ein Polyeder, das meist nach dem *Kantenverfahren* konstruiert wird (Abb. 1), indem man die Durch-

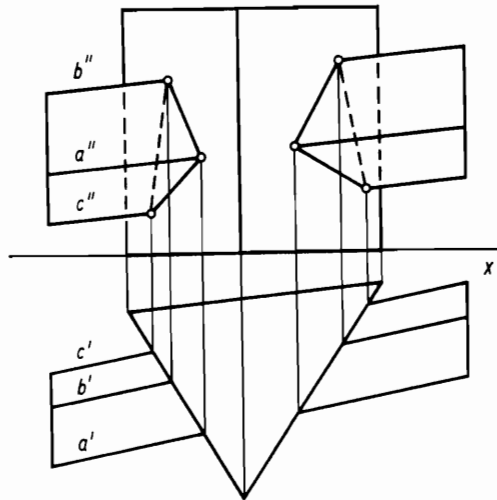
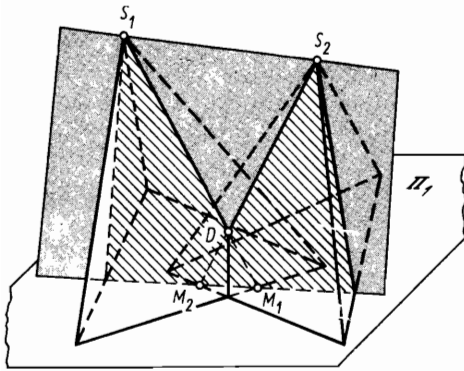


Abb. 1: Durchdringung zweier dreiseitiger Prismen

stoßpunkte der Kanten des einen Körpers durch die Flächen des anderen als Ecken der D. bestimmt (↗ Zweitafelprojektion). Durchdringen einander zwei Pyramiden, so ist das *Pendelebenenverfahren* oft zweckmäßig (Abb. 2): Man legt durch die Verbindungsgerade der beiden Pyramidenspitzen Ebenen, deren Lage durch ihre Schnittgerade mit der Ebene  $II_1$ , auf der die gegebenen Pyramiden stehen,



Durchdringung. Abb. 2: Pendelebenenverfahren

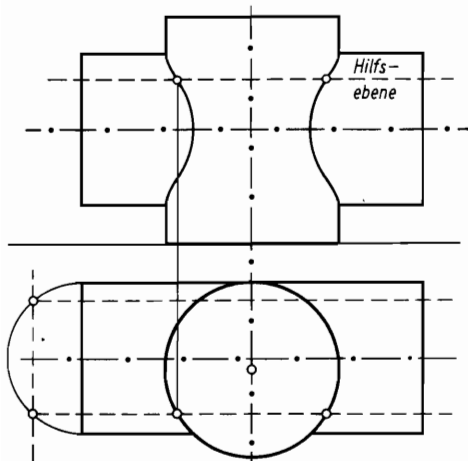


Abb. 3: Durchdringung zweier Zylinder im Ebenenverfahren

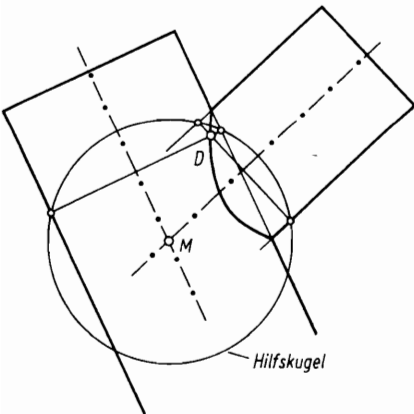
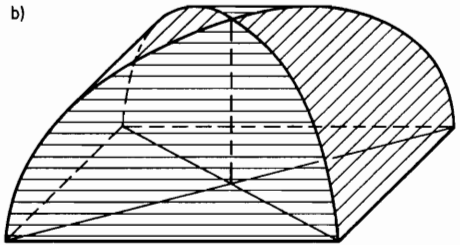
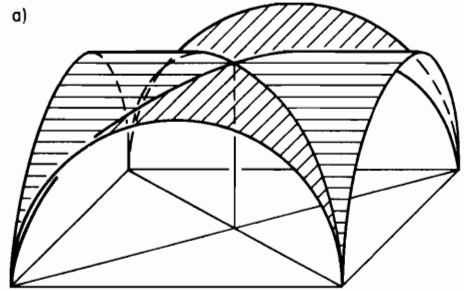
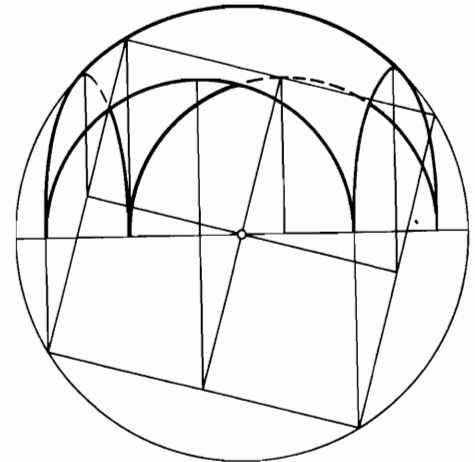


Abb. 4: Durchdringung zweier Zylinder im Kugelverfahren



Durchdringung. Abb. 5: a) Kreuzgewölbe, b) Klostergewölbe

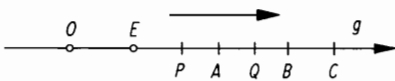


Durchdringung. Abb. 6: Hängekuppel

bestimmt ist. Die Schnittpunkte entsprechender Mantellinien mit einer Pendelebene sind Punkte der D.skurve. Dieses Verfahren kann auch bei der D. zweier Kegel angewendet werden. Bei krummflächig begrenzten Körpern werden das *Ebenenverfahren* und das *Kugelverfahren* verwendet. Beim *Ebenenverfahren* legt man horizontale Hilfsebenen durch beide Körper, auf denen die gemeinsamen Punkte der Schnittfiguren als Punkte der D.skurve liegen (Abb. 3). Beim *Kugelverfahren* werden durch zwei Rotationskörper mit einander schneidenden Achsen Hilfskugeln gelegt, deren gemeinsamer Mittel-

punkt im Schnittpunkt der Achsen liegt (Abb. 4). Die Hilfskugel schneidet jeden Rotationskörper in einem Kreis, deren gemeinsame Schnittpunkte der Durchdringungskurve angehören. Anwendungen der D. krummlinig begrenzten Körper bilden das *Kreuz- und Kloostergewölbe* (Abb. 5), die *Hängekuppel* (Abb. 6) und *Rohrverbindungen*.

**Durchlaufsinne einer Geraden:** Festlegung der Richtung, in der die Punkte einer Geraden aufeinander folgen sollen; z. B. durch die Angabe zweier voneinander verschiedener Punkte  $O$  und  $E$  der Geraden und durch die Angabe der Richtung von  $O$  nach  $E$  als  $D$ . Jede mit einem  $D$ . versehene Gerade heißt *orientierte Gerade*. Die Richtung von  $E$  nach  $O$  heißt der entgegengesetzte  $D$ . ( $\nearrow$  Zahlengerade). — Auf jeder orientierten Geraden besteht eine *Ordnungsrelation* in der Menge ihrer Punkte; » $A$  liegt vor  $B$ «, in Zeichen  $A < B$  genau dann, wenn man beim Durchlaufen von  $g$  zuerst auf  $A$  und dann auf  $B$  trifft (Abb.). Es gelten folgende Sätze: 1. Für keinen



Durchlaufsinne: Ordnungsrelation auf einer orientierten Geraden

Punkt  $A$  gilt  $A < A$ . 2. Aus  $A < B$  und  $B < C$  folgt  $A < C$ . 3. Aus  $A \neq B$  folgt  $A < B$  oder  $B < A$ . 4. Zu jedem Punkt  $A$  gibt es zwei Punkte  $P$  und  $Q$ , so daß  $P < A$  und  $A < Q$  gilt. Umgekehrt läßt sich aus der Gültigkeit dieser Sätze der Durchlaufsinne einer Geraden als Ordnungsrelation zwischen ihren Punkten ohne Zuhilfenahme der Anschauung axiomatisch begründen. S. a. Geradengleichung IV., V.

**Durchlaufungen von Graphen: I.** Die Kanten  $k_1, k_2, \dots, k_g$  eines *ungerichteten Graphen*  $G = \{K, U\}$  bilden eine *Kantenfolge*, wenn für  $i = 2, 3, \dots, g-1$  die Kante  $k_i$  einen ihrer Endpunkte mit  $k_{i-1}$  und den anderen mit  $k_{i+1}$  gemeinsam hat. Ein *Kantenzug* ist eine Kantenfolge, die keine Kante zweimal enthält; ein *Weg* ist ein Kantenzug, der keinen Knotenpunkt zweimal enthält und dessen beide Endpunkte verschieden sind. Einen die Knotenpunkte  $P$  und  $Q$  verbindenden Weg bezeichnet man durch Angabe der von ihm durchlaufenen Kanten und Knotenpunkte etwa wie folgt:

$$W = (P, k_1, P_1, k_2, \dots, P_{g-1}, k_g, Q);$$

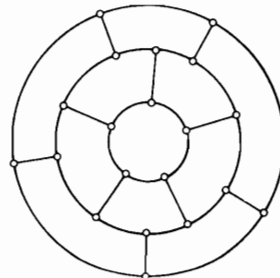
$P$  und  $Q$  heißen *Endpunkte*,  $P_1, \dots, P_{g-1}$  *innere Knotenpunkte* des Weges  $W$ ; als Weg der Länge 0 ist dabei  $P = Q$  zugelassen. Die Anzahl  $g$  der Kanten des Weges wird als seine *Länge*  $l(W)$  bezeichnet. Sind im Graphen  $G = \{K, U\}$  die Endpunkte eines Weges  $W$  der Länge  $g$  durch eine nicht zu  $W$  gehörende Kante  $k$  verbunden, so entsteht durch Hinzunahme der Kante  $k$  zu  $W$  ein *Kreis* der Länge  $g + 1$ ; umgekehrt geht ein Kreis der Länge  $g + 1$  durch Fortlassen einer beliebigen Kante in einen Weg der Länge  $g$  über. Jeder kürzeste Kreis von  $G$  heißt *Taillenkreis*, seine Länge nennt man die *Taillenweite* von  $G$ .  $G$  heißt *zusammenhängend*,

wenn je zwei Knotenpunkte  $X, Y \in K$  durch einen Weg verbunden sind. Nichtzusammenhängende Graphen zerfallen in zusammenhängende Teile, sogenannten *Komponenten*. Eine *Komponente*  $K$  von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph, d. h., es existiert kein  $K$  enthaltender Untergraph  $K'$ , dessen Knotenzahl größer als die von  $K$  ist und der ebenfalls zusammenhängend ist.

Fallen bei einem Kantenzug die beiden Endpunkte zusammen, so spricht man von einem *geschlossenen Kantenzug*. Ein geschlossener Kantenzug eines endlichen Graphen  $G$ , der alle Kanten von  $G$  enthält, heißt *Eulersche Linie*. Hat ein Graph  $G$  ohne isolierte Knotenpunkte eine Eulersche Linie, so sind je zwei Knotenpunkte durch einen Kantenzug und damit durch einen Weg verbunden, d. h.,  $G$  ist *zusammenhängend*. Ist  $G$  schlingenfrei, so gilt folgende Überlegung: Jedesmal, wenn man bei Durchlaufung einer Eulerschen Linie einen beliebigen Knotenpunkt  $X$  von  $G$  antrifft, läuft man über eine Kante in  $X$  ein und über eine zweite Kante aus  $X$  wieder heraus. Bei dem Durchgang der Eulerschen Linie durch  $X$  werden deshalb zwei von  $X$  ausgehende Kanten durchlaufen. Folglich ist die Valenz jedes Knotenpunktes gerade. Das gilt auch, wenn  $G$  Schlingen enthält. Die beiden hergeleiteten Eigenschaften einer Eulerschen Liniesichern ihre Existenz, wie L. EULER gezeigt hat.

**Satz von Euler:** Ein Graph  $G$  ohne isolierte Knotenpunkte hat genau dann eine Eulersche Linie, wenn er *zusammenhängend ist und alle Knotenpunkte von  $G$  gerade Valenz haben*.

Entsprechend kann man fordern, daß alle Knotenpunkte genau einmal durchlaufen werden. Ein geschlossener Kantenzug, der jeden Knotenpunkt genau einmal enthält, heißt *Hamilton-Linie*. Eine ähnlich abgerundete Lösung des Existenzproblems, wie sie der Satz von Euler angibt, gibt es hier nicht. Der Name *Hamilton-Linie* geht auf W. R. HAMILTON zurück, der im Jahre 1859 ein Spiel herausgab, das u. a. das Auffinden einer Hamilton-Linie für den Graphen der Abbildung verlangt (Abb.).



Durchlaufungen von Graphen: Graph zum Spiel von Hamilton

**II.** Für einen *gerichteten Graphen*  $G = \{K, U\}$  werden entsprechende Begriffe eingeführt, in denen aber die Orientierung der Bögen eine Rolle spielt. Einem Weg entsprechen die Begriffe *elementare Kette* und *elementare Bahn*, einem geschlossenen Kantenzug die Begriffe *Zyklus* und *Kreis*; zum

Begriff des Zusammenhangs tritt der des *starken Zusammenhangs*. Im einzelnen wird festgesetzt: Eine *Kette* ist eine Bogenfolge  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , in der jeder Bogen höchstens einmal auftritt, dabei soll für  $i = 2, 3, \dots, k - 1$  der Bogen  $b_i$  einen seiner Endpunkte mit dem Bogen  $b_{i-1}$  und den anderen mit dem Bogen  $b_{i+1}$  gemeinsam haben. Eine *Kette* heißt *geschlossen*, falls ihre Endpunkte zusammenfallen. Eine *Bahn* ist eine Kette, in der für  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  der Zielpunkt des Bogens  $b_i$  mit dem Startpunkt des Bogens  $b_{i+1}$  zusammenfällt. Beim Durchlaufen der Bahn werden danach alle Bögen im Sinne ihrer Orientierung durchlaufen. *Elementare Ketten und elementare Bahnen* sind solche, bei deren Durchlaufung jeder Knotenpunkt des Graphen höchstens einmal angetroffen wird. Eine geschlossene Kette wird als *Zyklus*, falls sie elementar ist, als *elementarer Zyklus*, und eine geschlossene elementare Bahn als *Kreis* bezeichnet. Ein gerichteter Graph heißt *zusammenhängend*, falls er zu je zwei Knotenpunkten eine sie verbindende Kette enthält; *G* heißt *stark zusammenhängend*, wenn *G* zu jedem Knotenpunktpaar *X, Y* eine Bahn von *X* nach *Y* und eine Bahn von *Y* nach *X* enthält.

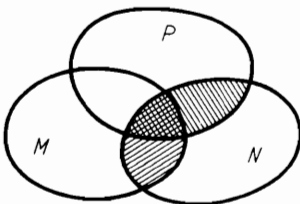
Eine *gerichtete Eulersche Linie* ist eine geschlossene Bahn, die alle Bögen von *G* enthält. Zunächst erkennt man: Ein gerichteter Graph ohne isolierte Knotenpunkte, der eine gerichtete Eulersche Linie enthält, ist *zusammenhängend* und *balanziert* ( $\nearrow$  Graph). Die Umkehrung gilt auch:

**Satz von Euler für gerichtete Graphen:** Jeder gerichtete Graph ohne isolierte Knotenpunkte enthält genau dann eine gerichtete Eulersche Linie, wenn er *zusammenhängend* und *balanziert* ist.

**Durchlaufungsrichtung**  $\nearrow$  Kurvenintegral II.2.

**Durchmesser**  $\nearrow$  Kreis II.,  $\nearrow$  Kugel II.,  $\nearrow$  Sehne.

**Durchschnitt:** *Mengenlehre* Verknüpfung zweier Mengen *M* und *N* zur *Durchschnittsmenge*  $M \cap N$ , der Menge aller der Elemente, die sowohl zu *M* als auch zu *N* gehören:  $M \cap N = \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$ .  $M \cap N$  liest man »*M* geschnitten mit *N*«. Bei  $M = \{a, b, c\}$  und  $N = \{b, c, d\}$  z. B. ist  $M \cap N = \{b, c\}$ . Ist der D. zweier Mengen *M* und *N* die leere Menge, d. h., ist  $M \cap N = \emptyset$ , so heißen *M* und *N* *elementfremd* bzw. *disjunkt*. — Für Mengen *M, N, P* gelten in bezug auf diese Verknüpfung das Kommutativgesetz  $M \cap N = N \cap M$ , das Assoziativgesetz  $M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$  (Abb.), sowie die Beziehung  $M \cap N \subseteq M$ . — Der D. eines Mengensystems  $M \neq \emptyset$  ist die Menge aller Dinge,



Durchschnitt: Assoziativgesetz für den Durchschnitt dreier Mengen *M, N* und *P*; die Durchschnittsmengen  $M \cap N$  und  $N \cap P$  sind in verschiedener Richtung schraffiert

die Element aller Elemente von *M* sind; Bezeichnung:  $\cap M$ , lies »Durchschnitt von *M*«. Es ist also  $\cap M = \{x\}$  für alle  $Y \in M: x \in Y$ . Bei  $M = \{\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$  ist z. B.  $\cap M = \{c\}$ .

S. a. Mengenalgebra.

**Durchstoßpunkt**  $\nearrow$  Zweitafelprojektion II.3.

**Dürer, Albrecht**, geb. 21. 5. 1471 und gest. 6. 4. 1528 Nürnberg. — Der berühmte Maler und Graphiker D. scheint um 1506 die von italien. Renaissancemalern gefundene *Perspektive* kennengelernt zu haben. Aber erst nach der niederländ. Reise beginnt D., sich mit theoret. Fragen zu befassen. 1525 erscheint die »*Unterweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt*«, mit der die Künstler in die perspektiv. Konstruktionen und ihre geometr. Grundlagen eingeführt wurden.

**dyadisches Zahlensystem, Zweiersystem, Dualsystem:**

1. Zahlensystem mit der *Grundzahl* oder *Basis*  $g = 2$  und den Ziffern 0 und 1 (s. a. Zahlensystem VI.). Durch Konvertieren kann jede Zahl im d. Z. dargestellt werden. Die ersten 12 Zahlen in der Darstellung  $[g]_{10}$  bzw.  $[g]_2$  sind:

$[g]_{10}$	$[g]_2$	$[g]_{10}$	$[g]_2$	$[g]_{10}$	$[g]_2$
1	L	5	LOL	9	LOLO
2	LO	6	LLO	10	LOLO
3	LL	7	LLL	11	LOLL
4	LOO	8	LOOO	12	LLOO

Die Zahlen des d. Z. eignen sich für Maschinenrechnen, weil für Addition und Multiplikation folgende Teiloperationen genügen:  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + L = L + 0 = L$ ,  $L + L = LO$  und  $0 \cdot 0 = 0 \cdot L = L \cdot 0 = 0$  sowie  $L \cdot L = L$ .

**Beispiel 1:**  $\begin{matrix} \text{LOLLOL} \\ + \text{LOLLL} \\ \hline \text{LOOOLOO} \end{matrix}$  **Beispiel 2:**  $\begin{matrix} \text{LLOLL} \cdot \text{LLOL} \\ \hline \text{LLOLL} \\ \text{LLOLL} \\ \hline \text{LLOLL} \\ \hline \text{LOLOLLLLL} \end{matrix}$

Beispiel 2 bedeutet im Zehnersystem wegen  $2^8 = 256$ ,  $2^6 = 64$ ,  $2^5 = 32$ ,  $2^4 = 16$ ,  $2^3 = 8$ ,  $2^2 = 4$  das Produkt  $27 \cdot 13 = 351$ . Der *Zehnerübertragung* beim Rechnen im Zehnersystem entspricht die *Zweierübertragung* ( $\nearrow$  Addition). Besonders nach der Methode der Ergänzung können auch die Subtraktion und mit ihrer Hilfe die Division ausgeführt werden.

**Beispiel 3:**  $\begin{matrix} \text{LOLLOL} \\ - \text{LOLLL} \\ \hline \text{OLOLO} \end{matrix}$

**Beispiel 4:**  $\begin{matrix} \text{LOLOLLLLL} : \text{LLOLL} = \text{LLOL} \\ \hline \text{LLOLL} \\ \text{LOOOL} \\ \hline \text{LLOLL} \\ \hline \text{OOLLOL} \\ \text{LLOLL} \\ \hline \text{OOOOO} \end{matrix}$

II. Die *Konvertierung* eines Dezimalbruchs  $0, a_1 a_2 a_3 \dots$  in einen *Dualbruch*  $0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$  ist stets möglich, da sich aus den gegebenen  $a_i$  die Ziffern  $d_i$  stets bestimmen lassen, weil für sie gilt  $d_j = 0$  oder  $d_j = L$ .

$$(1) \quad a_1/10 + a_2/10^2 + a_3/10^3 + \dots = d_1/2 + d_2/2^2 + d_3/2^3 + \dots$$

$$(2) \quad 2a_1/10 + 2a_2/10^2 + 2a_3/10^3 + \dots = d_1 + d_2/2 + d_3/2^2 + \dots$$

Multipliziert man (1) mit 2, so erhält man (2). Danach ist  $d_1 = L$ , falls  $2a_1/10 > 1$ . Dieser Schluß kann für  $(2a_1 - 10)/10 + 2a_2/10^2 + \dots = d_2/2 + d_3/2^2 + \dots$  wiederholt werden. Danach ist z. B.  $0,34375 \triangleq 0, OLOLL$ .

Zur *Rückkonvertierung* benutzt man:  $2^{-1} = 0,5, 2^{-2} = 0,25, 2^{-3} = 0,125, 2^{-4} = 0,0625, 2^{-5} = 0,03125$  und erhält  $0, OLOLL \triangleq 0,25 + 0,0625 + 0,03125 = 0,34375$ .

Die angestellte Überlegung zeigt, daß ein endl. Dezimalbruch, etwa mit dem letzten Glied  $b_i/(2^i \cdot 5^i)$ , nicht stets so konvertiert werden kann, daß er einem endl. Dualbruch gleich ist, etwa mit dem letzten Glied  $d_n/2^n$ . Die angenommene Gleichung beider Brüche erhält durch Multiplikation beider Seiten mit  $2^n$  eine rechte Seite, die ganzzahlig ist, während die linke Seite wegen des Nenners  $5^i$  nur für spezielle Koeffizienten  $a_j, j = 1, \dots, i$  ganzzahlig ist.

Auf die Vorteile des d. Z. machte schon LEIBNIZ 1703 aufmerksam.

- dynamisch** ↗ Modell II.
- dynamische Funktionalgleichung** svw. Bellmannsche Funktionalgleichung.
- dynamische Programmierung** ↗ Optimierung, dynamische V.
- dynamisches System** ↗ System II.

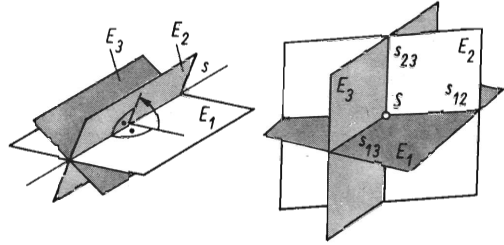
# E

**e:** Eulersche Zahl, definiert durch den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ ; ein Näherungswert für die transzendente Zahl  $e$  ist  $2,7182818$ . ↗ Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen I., ↗ Näherungsformel IV.

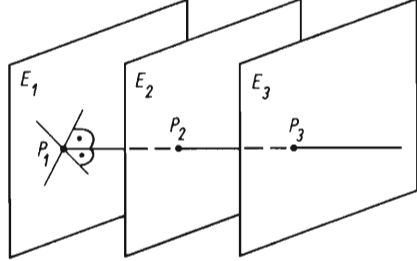
**Ebene:** I. eine zweidimensionale Punktmenge im Raum, die z. B. entsteht, wenn sich eine Gerade  $g$  um einen auf ihr gelegenen Punkt  $A$  dreht und dabei entlang einer zweiten Geraden  $h$ , die nicht durch  $A$  geht, gleitet (↗ Grundelemente). Außer durch eine Gerade  $h$  und einen nicht auf ihr gelegenen Punkt  $A$  ist eine Ebene eindeutig bestimmt durch zwei sich schneidende Geraden, durch zwei verschiedene parallele Geraden oder durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Zwei verschiedene E.n haben entweder keinen Punkt gemeinsam und heißen dann *parallel*, oder sie haben eine Gerade gemeinsam, ihre *Schnittgerade*. Als *Abstand zweier paralleler E.n* bezeichnet man die Länge des

Lotes von jedem beliebigen Punkt der einen E. auf die andere.

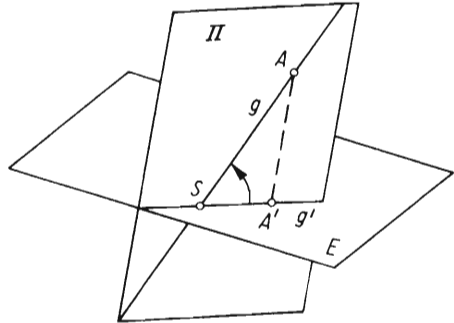
II. Die Menge aller E.n durch eine gemeinsame Gerade heißt *E.nbüschel*, die gemeinsame Gerade  $s$  *Trägergerade* oder *Träger* des Büschels (Abb. 1). Die Menge aller zu einer E. parallelen E.n nennt man *Parallelebenenbüschel* (Abb. 2). Die Menge aller



Ebene. Abb. 1: Ebenenbüschel mit Trägergerade  $s$  und Ebenenbündel mit Träger  $S$



Ebene. Abb. 2: Parallelebenenbüschel



Ebene. Abb. 3: Der Neigungswinkel einer Geraden  $g$  zu einer Ebene  $E$  wird in der projizierenden Ebene durch  $g$  gemessen

E.n, die genau einen Punkt gemeinsam haben, heißt *E.nbündel*, der gemeinsame Punkt der *Träger* des Bündels (↗ Abb. 1). Alle Schnittgeraden der E.n eines Bündels gehen durch den Träger.

III. Zwei E.n, die sich in einer Geraden  $g$  schneiden, ordnet man einen Winkel  $\sphericalangle(s, t)$  oder  $\sphericalangle(s^-, t)$  als *Schnittwinkel* zu; sein Scheitel liegt auf  $g$ , die Schenkel sind Halbgeraden  $s, t$ , die auf  $g$  senkrecht stehen und in je einer der beiden E.n liegen. Um Eindeutigkeit zu erzielen, kann z. B. zusätzlich vereinbart werden, daß die Größe des Schnittwinkels  $90^\circ$  nicht übertrifft; dadurch scheidet genau einer

der Supplementwinkel  $\sphericalangle(s, t)$ ,  $\sphericalangle(s^-, t)$  aus. Parallelen Ebenen ordnet man als Schnittwinkel den Nullwinkel zu.

IV. Hat eine Gerade mit der E. alle Punkte gemeinsam, so liegt sie in ihr, haben beide keinen Punkt gemeinsam, so nennt man sie *parallel*, und haben beide genau einen Punkt gemeinsam, so schneidet die Gerade die E. Ist  $S$  ihr Schnittpunkt und bildet die Gerade  $g$  mit jeder Geraden der E. durch  $S$  einen rechten Winkel, so steht die Gerade  $g$  in  $S$  senkrecht auf der E. Wenn  $g$  die Ebene  $E$  schneidet, ohne auf  $E$  senkrecht zu stehen, so heißt der spitze Winkel zwischen der Geraden  $g$  und ihrer senkrechten Projektion  $g'$  auf  $E$  *Neigungswinkel* der Geraden  $g$  zur E.  $E$ . Der Neigungswinkel liegt in der *projizierenden Ebene*  $\Pi$  durch  $g$ , die auf  $E$  senkrecht steht (Abb. 3). Ist  $g$  parallel zu  $E$ , so ordnet man ihr als Neigungswinkel den Nullwinkel zu, ist  $g \perp E$ , so ist ihr Neigungswinkel ein rechter.

Zur Orientierung einer Ebene  $\nearrow$  Koordinatensystem II.

**Ebenenbündel**  $\nearrow$  duale Gebilde,  $\nearrow$  Ebene II.,  $\nearrow$  projektive Gebilde.

**Ebenenbüschel**  $\nearrow$  duale Gebilde,  $\nearrow$  Ebene II.,  $\nearrow$  projektive Gebilde.

**Ebenengleichung:** I. Gleichung, die von den Koordinaten aller Punkte des Raumes erfüllt ist, die in einer Ebene liegen; sind  $x, y, z$  *kartes. Koordinaten*, so kann jede Ebene im Raum durch eine *lineare Gleichung* der Form (1) mit reellen Koeffizienten dargestellt werden, die *allgemeine E.* heißt. Dabei sind  $A, B, C$  nicht zugleich Null, und jede solche Gleichung stellt eine Ebene dar. Für  $D = 0$  geht die durch (1) dargestellte Ebene durch den Koordinatenursprung, für  $A = 0$  oder  $B = 0$  oder  $C = 0$  verläuft diese Ebene parallel zur  $x$ - oder zur  $y$ - oder zur  $z$ -Achse. Die Gleichungen  $x + D = 0$  oder  $y + D = 0$  oder  $z + D = 0$  stellen je eine Ebene dar, die parallel liegt zur  $y,z$ - zur  $x,z$ - oder zur  $x,y$ -Koordinatenebene. Eine allgemeine Lösung der linearen Gleichung (1) ist eine *Parameterdarstellung* oder *Parametergleichung* der durch sie gegebenen Ebene. Die Parameterdarstellung hat die Form (2) oder (3) in vektorieller Schreibweise.

$$(1) \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda u_x + \mu v_x, \\ y &= y_0 + \lambda u_y + \mu v_y, \\ z &= z_0 + \lambda u_z + \mu v_z. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$$

Dabei sind  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  der Ortsvektor eines beliebigen,  $\mathbf{x}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$  der eines festen Punktes der Ebene sowie  $\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$  und  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$  zwei *linear unabhängige* Vektoren, die die Ebene *aufspannen*;  $\lambda$  und  $\mu$  sind zwei voneinander unabhängige reelle Parameter mit  $-\infty < \lambda < \infty, -\infty < \mu < \infty$ . Aus (2) erhält man durch Elimination von  $\lambda$  und  $\mu$  wieder eine *parameterfreie Gleichung* der Form (1) der Ebene. Für die Ebene durch drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  mit den Ortsvektoren  $\mathbf{x}_i = x_i\mathbf{i}$

+  $y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$  für  $i = 0, 1, 2$  sind  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$  zwei Vektoren, die die Ebene aufspannen. Aus (2) oder (3) findet man somit eine Parameterdarstellung (4) dieser Ebene, oder vektoriell (5).

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{aligned}$$

$$(5) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mu(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)$$

Eine Gleichung der Form (1) für die Ebene durch  $P_0, P_1, P_2$  kann in Determinantenform (6) geschrieben werden.

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad (7) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

ben werden. Vier Punkte  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  für  $i = 0, 1, 2, 3$  sind *komplanar*, d. h. sie liegen in einer Ebene, genau dann, wenn (7) gilt. Werden die Ortsvektoren von  $P_i$  mit  $\mathbf{x}_i$  bezeichnet, so gilt auch: *Die vier Punkte  $P_0, P_1, P_2, P_3$  sind genau dann komplanar, wenn es vier Zahlen  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  gibt, die nicht alle Null sind und für die  $\lambda_0\mathbf{x}_0 + \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$  und  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  erfüllt sind.* Das ergibt sich durch Vergleich mit (5) bei  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_3$ . Die Gleichung (6) in Determinantenform oder die Parametergleichung (5) nennt man *Dreipunktgleichung* der Ebene. Sind gegeben  $P_0$  und eine Gerade, die  $P_0$  nicht enthält, so kann man zwei verschiedene Punkte  $P_1, P_2$  auf der Geraden wählen und durch (4), (5) oder (6) die *Verbindungsebene* von Punkt und Gerade darstellen. Eine spezielle Form der allgemeinen E. (1) ist die *Achsenabschnittsgleichung*  $x/a + y/b + z/c = 1$  für eine Ebene, die die Koordinatenachsen in Punkten  $x = a \neq 0, y = b \neq 0, z = c \neq 0$  schneidet.

II. Zwei verschiedene durch (8) und (9) dargestellte Ebenen sind genau dann parallel, wenn die Vektoren  $A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$  und  $A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$  parallel, d. h. linear abhängig sind. Sind diese beiden Ebenen nicht parallel, so schneiden sie sich in einer *Geraden*, und eine allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems aus (8) und (9) ist eine *Parameterdarstellung der Schnittgeraden der zwei Ebenen*. Ist neben (8), (9) durch (10) eine dritte Ebene gegeben, und sind die drei Vektoren  $A_i\mathbf{i} + B_i\mathbf{j} + C_i\mathbf{k}$  für  $i = 1, 2, 3$  linear unabhängig, so schneiden sich die drei Ebenen in einem Punkt, und die Lösung  $x_0, y_0, z_0$  des Gleichungssystems aus (8), (9), (10) liefert den *Schnittpunkt*  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  der drei Ebenen. Der so bestimmte Punkt  $P_0$  ist auch der Schnittpunkt der Ebenen (10) und der durch die zwei Gleichungen (8) und (9) dargestellten Geraden im Raum. Ist eine solche zur Ebene (10) nicht parallele Gerade durch eine Parameterdarstellung (11) gegeben, so berech-

$$(8) \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(9) \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$(10) \quad A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

$$(11) \quad x = x_1 + \lambda u_x, y = y_1 + \lambda u_y, z = z_1 + \lambda u_z$$

net man den *Schnittpunkt von Ebene und Gerade*, indem man (11) in (10) einsetzt und nach dem den Schnittpunkt bestimmenden Wert  $\lambda_0$  des Parameters  $\lambda$  von (10) auflöst.

**III.** Die bisher bezüglich der *kartes. Koordinaten*  $x, y, z$  gemachten Aussagen bleiben richtig, wenn man beliebige *Parallelkoordinaten* zugrunde legt ( $\nearrow$  *Koordinatensystem I.*). Speziell bei *kartes. Koordinaten*  $x, y, z$  ist es sinnvoll, die Gleichung einer Ebene mit einem *Stellungsvektor*, d. h. einem Vektor, der *senkrecht* auf der Ebene steht, in Verbindung zu bringen. Sind  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}_0$  ein Punkt einer Ebene und  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  ein *Stellungsvektor* dieser Ebene, so ist mit Hilfe des

$$(12) \quad \mathbf{N} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Skalarprodukts durch (12) eine vektorielle Gleichung der Ebene gegeben. In Koordinaten geschrieben hat (12) die Form  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ . Setzt man  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ , so erhält man die allgemeine Ebenengleichung (1). Aus (1) kann man daher wieder einen *Stellungsvektor*  $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  der durch (1) dargestellten Ebene ablesen. Die Ebene durch einen Punkt  $P_0$  mit Ortsvektor  $\mathbf{x}_0$ , die senkrecht zur Geraden  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{u}$  verläuft, hat die Gleichung  $\mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ . Ist  $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$  ein *Stellungsvektor* der Länge 1, so geht (12) in eine *Hessesche Normalform* (12a) über. Die durch (3) bzw. (5) gegebene Ebene kann darstellen mit einem *Stellungsvektor*  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  bzw.

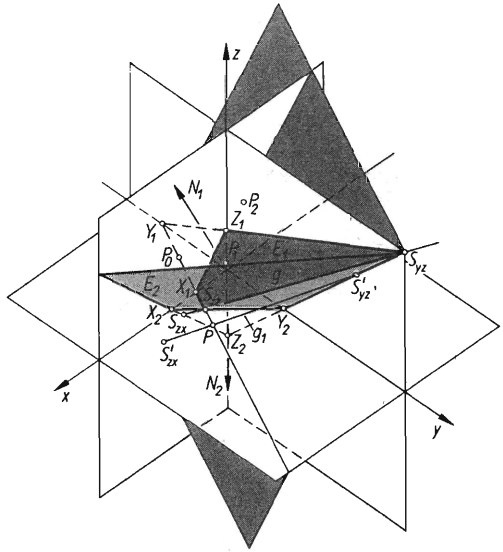
$$[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

$$(12a) \quad \mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

*Beispiel:* Die Ebene  $E_1$  durch  $P_0(1, -2, 0), P_1(1, 1, 1), P_2(-1, 0, 2)$  hat nach (4) eine Parameterdarstellung  $x = 1 - 2\mu, y = -2 + 3\lambda + 2\mu, z = \lambda + 2\mu$ . Elimination von  $\lambda$  und  $\mu$  ergibt über  $\mu = (1 - x)/2, \lambda = x + z - 1$  die Gleichung  $2x - y + 3z - 4 = 0$  der Ebene. Die Ebene wird aufgespannt von den Vektoren  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , ein *Stellungsvektor* ist  $\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . Ebenfalls ein *Stellungsvektor*, also parallel zu  $\mathbf{N}$ , ist  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ .

Eine weitere Ebene  $E_2$  (Abb.) sei durch die Gleichung  $2x + 2y - 3z - 7 = 0$  gegeben. Eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden  $g$  von  $E_1$  und  $E_2$  ergibt sich als allgemeine Lösung des Gleichungssystems  $2x - y + 3z - 4 = 0, 2x + 2y - 3z - 7 = 0$  zu  $x = \lambda, y = 11 - 4\lambda, z = 5 - 2\lambda$ . Der Schnittpunkt von  $E_1$  mit der durch  $x = 2 + \lambda, y = 4 - 2\lambda, z = 1 - \lambda$  dargestellten Geraden  $g_1$  wird bestimmt über  $2(2 + \lambda) - (4 - 2\lambda) + 3(1 - \lambda) - 4 = 0$  mit der Lösung  $\lambda_0 = 1$  zu  $P(3, 2, 0)$ .

In der Abb. ist die Ebene  $E_1$  gekennzeichnet durch ihre Schnittpunkte  $X_1(2, 0, 0), Y_1(0, -4, 0)$  und  $Z_1(0, 0, 4/3)$  mit den Achsen. Die Geraden durch je zwei dieser Punkte sind die Schnittgeraden von  $E_1$  mit den Koordinatenebenen. Die entsprechenden Achsenschnittpunkte der zweiten Ebene  $E_2$  sind  $X_2(7/2, 0, 0), Y_2(0, 7/2, 0)$  und  $Z_2(0, 0, -7/3)$ . Im ersten Oktanten sind die Ebenen nur soweit durch Rasterung hervorgehoben, soweit sie sich nicht ge-



Ebenengleichung: Die Ebenen  $E_1$  bzw.  $E_2$  schneiden die Achsen in  $X_1, Y_1, Z_1$  bzw. in  $X_2, Y_2, Z_2$  und einander in der Geraden  $g$ , die sichtbaren Teile von  $E_1$  sind gerastert; die Gerade  $g_1$  schneidet  $E_1$  in  $P$

seitig verdecken. Ihre Schnittgerade  $g$  durchstößt die Koordinatenebenen in den Spurpunkten  $S_{yz}(0, 11, 5), S_{zx}(11/4, 0, -1/2)$  und  $S_{xy}(5/2, 1, 0)$ . Die Spurpunkte der Geraden  $g_1$  sind  $S'_{xy}(3, 2, 0), S'_{yz}(0, 8, 3)$  und  $S'_{zx}(4, 0, -1)$ . Im Punkte  $S'_{xy} = P$  schneidet die Gerade  $g_1$  die Ebene  $E_1$ .

**IV.** Die für eine Ebene charakterist. Eigenschaft, durch eine lineare Gleichung (1) dargestellt zu werden, führt zu der Verallgemeinerung auf den  $n$ -dimensionalen Raum  $R_n$  zu dem Begriff der *Hyperebene*.

Eine *Hyperebene* ist die Menge aller derjenigen Punkte des  $R_n$ , deren Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer linearen Gleichung

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + A_0 = 0$$

genügen; dabei sind die Koeffizienten  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nicht zugleich Null. Eine *Hyperebene* des Raumes  $R_3$  bzw. der Ebene  $R_2$  ist eine Ebene bzw. eine Gerade.

**Ebenenkoordinaten**  $\nearrow$  *Koordinatensystem I.*

**ebenes Feld**  $\nearrow$  *skalares Feld I.*

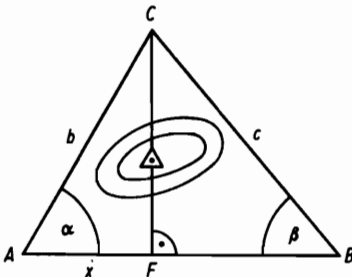
**ebene Trigonometrie:** I. Lehre von der Berechnung ebener Dreiecke mit Hilfe von Winkelfunktionen. Da sich jede geradlinig begrenzte Figur in einer Ebene durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen läßt und da ebene Schnitte auch Einblicke in räuml. Zusammenhänge geben, werden Verfahren der e. T. fast stets eingesetzt, wenn Winkelgrößen auftreten, z. B. in den Naturwissenschaften und in der Technik. Dazu kommt, daß die e. T. für viele nicht ebene Probleme eine hinreichende Näherung liefert, z. B. in der Küstenschifffahrt und in der Geodäsie. Auf der Erde kann z. B. ein Dreieck zwischen Kyffhäuser, Inselberg und Weimar mit Seitenlängen von



50 km, 60 km und 70 km als eben angesehen werden, solange die Genauigkeit der gemessenen Winkel nicht unter  $2,5''$  liegt, da sein sphär. Exzeß  $\varepsilon = 7,6''$  beträgt und nach dem Satz von Legendre jeder Winkel des ebenen Dreiecks um ein Drittel des Exzesses kleiner ist als der entsprechende Winkel des sphär. Dreiecks. Winkelmessungen wurden in der Geodäsie auch vorgezogen, weil sie bei geringerem Aufwand Ergebnisse mit größerer Genauigkeit als die Streckenmessung ergaben. Durch elektron. Methoden, z. B. Radarmessungen, sind Änderungen zugunsten der Streckenmessung zu erwarten. Die *Triangulation* wird dann verdrängt durch *Trilateration*, d. h., die Dreiecksmessung mit Hilfe von Winkeln durch die mit Hilfe von Längen.

Die geometr. Beziehungen in einem *rechtwinkligen Dreieck* werden durch die Definitionen der trigonometr. Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens vollständig erfaßt ( $\nearrow$  Winkelfunktionen), wenn man für Proben oder zur Erleichterung des Rechengangs den pythagoreischen Lehrsatz  $c^2 = a^2 + b^2$  und die Tatsache benutzt, daß im rechtwinkligen Dreieck *ABC* die spitzen Winkel Komplementwinkel sind, daß  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

*Beispiel:* Bestimmung eines rechten Winkels bei behinderter Sicht. Von der geradlinig zwischen den Orten *A* und *B* (Abb. 1) verlaufenden Wasserleitung



ebene Trigonometrie. Abb. 1: Bestimmung eines rechten Winkels bei behinderter Sicht

soll eine Zweigleitung senkrecht nach dem Ort *C* abgezweigt und der dazwischenliegende Höhenrücken zum Bau eines Wasserturms benutzt werden. Vom gesuchten Abzweigpunkt *F* ist keine Sicht nach *C*, wohl aber von *A* und *B* aus. Es werden die Strecke *AB* mit der Länge *c* und die Winkelgrößen  $\alpha$  und  $\beta$  gemessen. Die Lage von *F* auf *AB* soll durch die Länge  $x = |AF|$  festgelegt werden. Aus den rechtwinkligen Dreiecken *AFC* und *BFC* erhält man (1) und aus (2) die gesuchte Länge *x*.

$$(1) \quad |FC| = x \cdot \tan \alpha = (a - x) \cdot \tan \beta$$

$$(2) \quad x(\tan \alpha + \tan \beta) = a \cdot \tan \beta$$

II. Nach den Sätzen der Planimetrie ergeben sich folgende *Hauptfälle der Berechnung eines allgemeinen Dreiecks*.

II.1. gegeben sind die Länge einer Seite und die Größen der beiden anliegenden Winkel, z. B. *c*,  $\alpha$ ,  $\beta$ ;

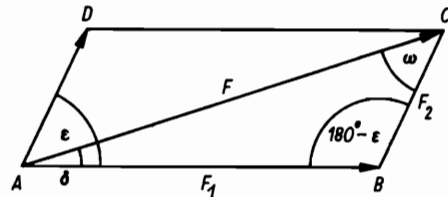
II.2. gegeben sind die Längen zweier Seiten und die Größe eines gegenüberliegenden Winkels, z. B. *a*, *b* und  $\alpha$ ;

II.3. gegeben sind die Längen zweier Seiten und die Größe des eingeschlossenen Winkels, z. B. *a*, *b* und  $\gamma$ .

II.4. gegeben sind die Längen dreier Seiten, von denen die Summe zweier stets größer als die dritte ist.

Betrachtet man die Paare (*a*,  $\alpha$ ), (*b*,  $\beta$ ), (*c*,  $\gamma$ ) aus den Größen je einer Seite und eines ihr gegenüberliegenden Winkels, so lassen sich mittels des *Sinussatzes* alle Aufgaben behandeln, in denen beide Größen in einem der Paare und eine Größe in einem der anderen Paare gegeben sind. Danach sind die Fälle II.1. und II.2. mittels des Sinussatzes zu lösen. Eine Aufgabe kann mehrere Lösungen haben, wenn den berechneten Sinuswerten mehrere Winkel entsprechen, die den geometr. Bedingungen genügen.

*Beispiel 1:* Eine Kraft *F* = 65 N soll so in zwei Teilkräfte *F*<sub>1</sub> und *F*<sub>2</sub> zerlegt werden, daß *F*<sub>1</sub> gegen *F* einen Winkel der Größe  $\delta = 18^\circ$ , die Teilkräfte untereinander einen solchen von  $\varepsilon = 65^\circ$  einschließen (Abb. 2). Vom Parallelogramm *ABCD* ist die



ebene Trigonometrie. Abb. 2: Zerlegung der Kraft *F* in zwei Komponenten *F*<sub>1</sub> und *F*<sub>2</sub>

Diagonale  $F = |AC|$  gegeben. Die Lage des Punktes *B* ist bestimmt durch die Winkelgrößen  $\delta$  und  $\omega = \varepsilon - \delta = 47^\circ$ . Im Dreieck *ABC* gilt:  $F_1 = F \cdot \sin \omega / \sin (180^\circ - \varepsilon) = F \sin 47^\circ / \sin 65^\circ = 52,5 \text{ N}$ ;

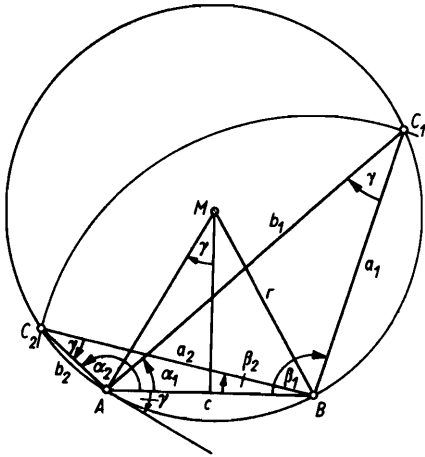
$F_2 = F \cdot \sin \delta / \sin \varepsilon = F \sin 18^\circ / \sin 65^\circ \approx 22,2 \text{ N}$ .

*Beispiel 2:* Gegeben sind die Seitenlängen  $a = 50,9 \text{ m}$ ,  $c = 68,0 \text{ m}$ , und die Winkelgröße  $\gamma = 63^\circ 57'$  eines ebenen Dreiecks. Da der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt, ist eine eindeutige Lösung zu erwarten. Der Sinussatz ergibt zwar  $\sin \alpha = (a/c) \cdot \sin \gamma$  und daraus  $\alpha_1 = 48^\circ 45'$ ,  $\alpha_2 = 131^\circ 15'$ , der Wert  $\alpha_2$  widerspricht aber der Bedingung, daß in einem Dreieck der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüberliegen muß, daß aus  $a < c$  folgt  $\alpha < \gamma$ .

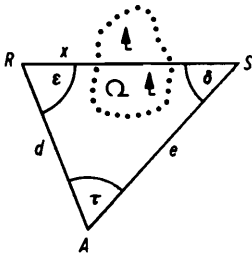
Mit Hilfe der gefundenen Größe  $\alpha$  erhält man aus  $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$  die Größe  $\beta = 67^\circ 18'$  eindeutig und daraus schließlich  $b = c \cdot (\sin \beta : \sin \gamma) = 69,8 \text{ m}$ .

*Beispiel 3:* Im Dreieck mit den Seiten der Längen  $a = 87,23 \text{ m}$ ,  $c = 65,95 \text{ m}$  liegt der gegebene Winkel der Größe  $\gamma = 30,42^\circ$  der kleineren Seite *c* gegenüber. Die nach dem Sinussatz  $\sin \alpha = (a/c) \cdot \sin \gamma$  erhaltenen Werte  $\alpha_1 = 42,04^\circ$  und  $\alpha_2 = 137,96^\circ$  sind wegen  $\alpha_1 > \gamma$ ,  $\alpha_2 > \gamma$  beide möglich. Man erhält deshalb aus der Winkelsumme auch zwei Werte  $\beta_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \gamma) = 107,54^\circ$  und  $\beta_2 = 11,62^\circ$  und für jeden von ihnen eine Seitenlänge  $b_1 =$

$c \cdot (\sin \beta_1 : \sin \gamma) = 124,2 \text{ m}$  und  $b_2 = 26,23 \text{ m}$ . Wie zu erwarten, ergeben sich zwei Lösungen (Abb. 3). Die Hauptfälle II.3. und II.4. erfordern eine Beziehung zwischen den Größen zweier Seiten, der des eingeschlossenen Winkels und der Größe der diesem gegenüberliegenden Seite, z. B. zwischen  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  und  $c$ . Der Kosinussatz  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  ist eine solche Beziehung. Im Falle II.3. ergeben sich aus ihr die Länge der dritten Seite  $c$  und nach dem Sinussatz



ebene Trigonometrie. Abb. 3: Dreieck aus den Längen  $a$  und  $c$  zweier Seiten und dem der Seite  $c < a$  gegenüberliegenden Winkel der Größe  $\gamma$ , die Punkte  $C_1$  und  $C_2$  der beiden Lösungen liegen auf dem Ortskreis



ebene Trigonometrie. Abb. 4: Bestimmung der Richtung  $RS$  und der Länge  $|RS|$  bei behinderter Sicht

die fehlenden Winkelgrößen. Im Falle II.4. erhält man  $\cos \gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$  und entsprechend für die anderen Winkel. Mit dem Sinus- und dem Kosinussatz sind mithin in jedem schiefwinkligen Dreieck die vier Hauptfälle lösbar. In der Zeit, in der genauere Berechnungen nur logarithmisch möglich waren, sind Sätze zu diesem Zweck abgeleitet worden. Das sind der *Tangenssatz* für den Hauptfall II.3. und der *Halbwinkelsatz* für II.4. Mit Rechenmaschinen, für die Multiplizieren, Quadrieren, Dividieren und Wurzelziehen keine Schwierigkeit sind, steigt die Bedeutung des Kosinussatzes. Zum Vergleich werden in den folgenden Beispielen beide Lösungswege angegeben.

**Beispiel 4:** Zwischen den Orten  $R$  und  $S$  soll ein Kabel geradlinig durch bewaldetes Gelände verlegt werden. Zwischen  $R$  und  $S$  ist keine freie Sicht, wohl

aber läßt sich ein Punkt  $A$  finden, von dem aus die Entfernungen  $d = |AR| = 2,473 \text{ km}$  und  $e = |AS| = 3,752 \text{ km}$  sowie der Winkel der Größe  $\tau = \sphericalangle RAS = 42^\circ 26' 10''$  gemessen werden können (Abb. 4). — Welche Länge  $x$  muß das Kabel haben und unter welchen Winkeln  $\epsilon$  bzw.  $\delta$  muß es von  $R$  bzw.  $S$  aus verlegt werden? — Nach dem *Kosinussatz* ergibt sich nach (3) die Länge  $x = 2,549 \text{ km}$ , und aus ihr und dem Sinussatz nach (4) erhält man zwei Winkelgrößen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sowie zwei Größen  $\delta_1, \delta_2$  nach (5). Da

$$(3) \quad x^2 = d^2 + e^2 - 2de \cos \tau$$

$$(4) \quad \sin \epsilon = (e/x) \cdot \sin \tau, \\ \epsilon_1 = 83^\circ 20' 00'', \epsilon_2 = 96^\circ 40' 00''$$

$$(5) \quad \delta = 180^\circ - (\epsilon + \tau), \delta_1 = 54^\circ 13' 50'', \\ \delta_2 = 40^\circ 53' 50''$$

aber  $e > x > d$ , muß auch  $\epsilon > \tau > \delta$  sein. Diese Bedingung ist nur für  $\epsilon_2, \delta_2$  erfüllt, d. h., die Werte  $x, \epsilon_2, \delta_2$  sind die einzige Lösung. Für den Tangenssatz (6) kennt man die Winkelgrößen (7) und berech-

$$(6) \quad \tan \left( \frac{\epsilon - \delta}{2} \right) = \frac{e - d}{e + d} \cdot \tan \left( \frac{\epsilon + \delta}{2} \right)$$

net damit (8) sowie aus (7) und (8) alle Winkelgrößen (9) mit befriedigender Probe. Damit erhält

$$(7) \quad \epsilon + \delta = 180^\circ - \tau = 137^\circ 33' 50'' \\ (\epsilon + \delta)/2 = 68^\circ 46' 55''$$

$$(8) \quad (\epsilon - \delta)/2 = 27^\circ 53' 18''$$

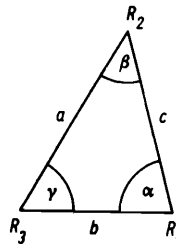
$$(9) \quad \epsilon = 96^\circ 40' 13'' \\ \delta = 40^\circ 53' 37'' \\ \tau = 42^\circ 26' 10''$$


---

Probe  $180^\circ 00' 00''$

man als Streckenlänge  $x = e (\sin \tau / \sin \epsilon) = 2,549 \text{ km}$ . Die Übereinstimmung zwischen den berechneten Winkelgrößen ist unbefriedigend. Die Ursache dafür ist, daß die Sinusfunktion für einen Winkel verwendet wurde, der nahe bei  $90^\circ$  liegt; man hat  $\sin 96^\circ 40' 00'' = 0,99324$ ,  $\sin 96^\circ 40' 10'' = 0,99323$ ,  $\sin 96^\circ 40' 20'' = 0,99323$ , über die Anzahl der Sekunden kann deshalb nichts Zuverlässiges ausgesagt werden. Eine größere Genauigkeit ergibt sich, wenn auch der Winkel  $\epsilon$  nach dem Kosinussatz berechnet wird.

**Beispiel 5:** Drei erhöht gelegene Geländepunkte  $R_1, R_2, R_3$  sollen durch Radar verbunden werden. Unter welchen Winkeln müssen Empfänger und Sender in  $R_1, R_2$  und  $R_3$  aufgebaut werden (Abb. 5), wenn die Abstände  $|R_1R_2| = c = 45,21 \text{ km}$ ,  $|R_2R_3| = a = 52,46 \text{ km}$ ,  $|R_3R_1| = b = 39,37 \text{ km}$  bekannt



ebene Trigonometrie. Abb. 5: Bestimmung der Winkel zwischen drei Punkten bekannten Abstandes voneinander

sind? — Nach dem *Halbwinkelsatz* ist in der durch Pfeile angegebenen Richtung zu berechnen:

$a = 52,46$	$s - a = 16,06$	lg
$b = 39,37$	$s - b = 29,15$	1,20575
$c = 45,21$	$s - c = 23,31$	1,46464
$2s = 137,04$	$s = 68,52$	1,36754
		1,83582

$\alpha = 76^\circ 19' 12''$ ,  $\beta = 46^\circ 49' 06''$ ,  $\gamma = 56^\circ 51' 42''$ .

**Echtzeit** ↗ Programmierung des Analogrechners II.

**Echtzeitdatenverarbeitung** ↗ Prozeßrechner I.

**Echtzeituhr** ↗ Prozeßrechner III.

**Ecke:** I. Punkt  $x$  einer konvexen Punktmenge  $M \in \mathbb{R}^n$ , der sich nicht als echte konvexe Linearkombination zweier Punkte von  $M$  darstellen läßt, d. h., für den keine Darstellung  $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$  mit  $0 < \lambda < 1$  und  $y \in M, z \in M$  existiert. Neben den Eckpunkten in der Planimetrie (↗  $n$ -Eck) sind z. B. alle Punkte einer Kreisperipherie E.n der eingeschlossenen Kreisfläche. Jede beschränkte abgeschlossene konvexe Menge hat mindestens eine E. Über einer solchen Menge nimmt eine konkave Funktion ihr Minimum und eine konvexe ihr Maximum stets in einer E. an, z. B. auch eine lineare Funktion. Zwei E.n, die durch eine *Kante* verbunden sind, heißen *Nachbar-E.n*.

In einem polyedr. Bereich  $B$  im  $\mathbb{R}^n$ , der gegeben ist durch  $a_i^T x = b_1, \dots, a_m^T x = b_m$ ,  $a_{m+1}^T x \leq b_{m+1}, \dots, a_k^T x \leq b_k$  mit  $a_i \in \mathbb{R}^n$  für  $i = 1, \dots, k$ , ist ein Punkt genau dann E., wenn er alle Bedingungen erfüllt und  $n$  davon mit linear unabhängigen  $a_i$  mit dem Gleichheitszeichen. Er heißt *entartete E.*, wenn er zusätzlich weitere Bedingungen mit dem Gleichheitszeichen erfüllt. Ein Punkt, der alle *Gleichungen* und insgesamt  $n$  Bedingungen mit linear unabhängigen  $a_i$  mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, heißt *Schnittpunkt*; eine E. ist danach ein Schnittpunkt, der alle *Ungleichungen* erfüllt.

II. Ein polyedrischer Bereich läßt sich stets (↗ Optimierung III.) allein durch Gleichungen und Nichtnegativbedingungen für alle Variablen beschreiben, d. h. durch Bedingungen

$c_1^T x = d_1, \dots, c_m^T x = d_m, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$  mit nichtnegativen  $d_i$  für  $i = 1, \dots, m$ . Eine E. dieses Bereichs läßt sich, falls sie existiert, dadurch bestimmen, daß *künstliche Variable, Scheinvariable*  $y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$  eingeführt werden und die in kanonischer Form (↗ Optimierung, lineare, II.) vorliegende lineare Optimierungsaufgabe (1) mit dem Simplexalgorithmus gelöst wird. Nach Streichen

$$(1) \quad \begin{array}{r} y_1 + \dots + y_m = \text{Min! für} \\ y_1 + c_1^T x = d_1 \\ y_2 + c_2^T x = d_2 \\ \vdots \\ y_m + c_m^T x = d_m \end{array}$$

mit  $x_j \geq 0$  für  $j = 1, \dots, n$  und  $y_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, m$

eventueller die  $y_i$  nur untereinander verknüpfender Zeilen kommt man zu einer *optimalen Basislösung*, in der alle  $y_i$  *Nichtbasisvariable* sind. Das

Simplextableau stellt dann nach Streichen der zu den  $y_i$  gehörenden Spalten eine E. des gegebenen polyedrischen Bereichs dar. S. a. Simplexalgorithmus I.; körperliche Ecke I.; Dreieck I.;  $n$ -Eck I.; vollständiges Viereck.

**Eckentübergang** ↗ Simplexalgorithmus II.

**Eckenwinkel** ↗  $n$ -Eck III.

**Ecktransversale** ↗ Dreieckstransversale.

**EDVA:** elektron. Datenverarbeitungsanlage (↗ Rechenanlage), s. a. Automat, determinierter, abstrakter.

**e-Funktion** ↗ Exponentialfunktion II.

**Eigenautonomie** ↗ Regelung VIII.

**Eigenelement** ↗ Eigenwert II.

**Eigenfunktion** ↗ Integralgleichung I.

**Eigenlösung** ↗ Eigenwert II.

**Eigenraum** ↗ Eigenwert I.

**Eigenschaften** ↗ Schattenkonstruktion.

**Eigenvektor** ↗ Eigenwert I., ↗ Hauptachsentransformation III.

**Eigenwert:** I. von einer  $(n,n)$ -Matrix  $A$ : jede reelle bzw. komplexe Zahl  $\lambda$ , für die die Gleichung  $Ax = \lambda x$  nichttriviale Lösungen  $x \neq 0$ ;  $x \in \mathbb{C}^n$  hat; diese Lösungen heißen dann zu  $\lambda$  gehörige *Eigenvektoren* von  $A$ . Die Matrixgleichung  $Ax = \lambda x$  ist äquivalent zu  $(A - \lambda E)x = 0$ ; dieses homogene lineare Gleichungssystem (↗ lineares Gleichungssystem) hat nichttriviale Lösungen genau dann, wenn der Rang  $r(A - \lambda E) < n$  ist, d. h. wenn  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Mithin findet man die Eigenwerte von  $A$  als Lösungen der *charakterist. Gleichung*  $\det(A - \lambda E) = 0$ . Ihre linke Seite  $\det(A - \lambda E)$  ist ein Polynom in  $\lambda$  und wird das *charakterist. Polynom* von  $A$  genannt. Dann kann man auch sagen: Die E.e einer quadrat. Matrix sind die Nullstellen ihres charakterist. Polynoms. Die zu einem E.  $\lambda$  gehörigen Eigenvektoren von  $A$  ergeben sich aus dem Gleichungssystem  $(A - \lambda E)x = 0$ ; nach der Theorie der homogenen linearen Gleichungssysteme bildet die Lösungsmenge dieses Systems einen Vektorraum, den man als den zu  $\lambda$  gehörigen *Eigenraum* von  $A$  bezeichnet. Jeder Vektor  $x \neq 0$  des zu  $\lambda$  gehörigen Eigenraumes von  $A$  ist ein zu  $\lambda$  gehörender Eigenvektor von  $A$ .

*Beispiel 1:* Die E.e der Matrix  $A$  in (1) ergeben sich als Lösungen ihrer charakterist. Gleichung. Nach (1) sind die E.e  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -3$ . Der zu  $\lambda_1$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

gehörende Eigenraum  $L_1$  ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems (2), d. h.,  $L_1 = \{\mu(5, 1), \mu \text{ reell}\}$ ,

$$(2) \quad (A - \lambda_1 E)x = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} x = 0$$

und analog erhält man aus (3) den Eigenraum  $L_2 = \{\mu(1, 1), \mu \text{ reell}\}$ .

$$(3) \quad (A - \lambda_2 E)x = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = 0$$

Beispiel 2: Die Matrix (4) hat das charakterist. Poly-

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nom  $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ ; ihre E. sind dessen Nullstellen  $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$ . Ein zu  $\lambda_1$  gehörender Eigenvektor ist z. B.  $\mathbf{x}_1 = (-1 + 2i, 1)$ , ein zu  $\lambda_2$  gehörender  $\mathbf{x}_2 = (-1 - 2i, 1)$ .

Beispiel 3: Die Matrix (5) hat die E.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ; daraus erhält man die Eigenräume  $L_1 = L_2 = \{\mu(1, 1), \mu \text{ beliebig reell}\}$ .

Über E.e und Eigenvektoren gelten folgende Sätze:  
**I.1.** Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  paarweise verschiedene E.e einer Matrix und  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$  entsprechend zugehörige Eigenvektoren, so ist  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  ein linear unabhängiges  $r$ -Tupel von Vektoren.

**I.2.** Hat die Matrix  $A$  den E.  $\lambda$ , so hat die Matrix  $B = \sum_{i=0}^n c_i A^i$  den E.  $\sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ , wenn  $A^1 = A$  und  $A^0 = E$  gesetzt werden.

Insbes. gilt danach: Hat  $A$  den E.  $\lambda$ , so hat  $A^m$  den E.  $\lambda^m$  mit  $m \in \mathbf{N}$ . Die Aussage gilt bei regulärem  $A$  auch noch für negatives ganzes  $m = -n$  (mit  $n$  positiv ganz), wenn man  $A^m = A^{-n} = (A^{-1})^n$  setzt.

**I.3.** Satz von Cayley-Hamilton. Ist  $\sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$  das charakterist. Polynom der Matrix  $A$ , so gilt  $\sum_{i=0}^n c_i A^i = 0$ , d. h., jede Matrix erfüllt ihre eigene charakterist. Gleichung.

**I.4.** Sind  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die E.e der Matrix  $A$ , so gilt  $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$  ( $\nearrow$  Determinante) und  $\text{Spur } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  ( $\nearrow$  Matrix I.). Dies kann als Rechenkontrolle benutzt werden. Aus  $\det A = \prod \lambda_i$  folgt weiter, daß  $A$  genau dann regulär ist, wenn Null nicht E. von  $A$  ist.

Genauere Aussagen lassen sich über bestimmte Klassen von Matrizen machen:

**I.5.** Sämtl. E.e einer symmetr. Matrix sind reell.  
**I.6.** Die zu paarweise verschiedenen E.en einer symmetr. Matrix gehörenden Eigenräume sind paarweise orthogonal.

**I.7.** Ist  $\lambda$  ein  $r$ -facher E. der symmetr. Matrix  $A$ , so ist der zu  $\lambda$  gehörende Eigenraum  $r$ -dimensional, d. h.,  $A$  hat genau  $r$  linear unabhängige zu  $\lambda$  gehörige Eigenvektoren.

**I.8.** Sämtl. E.e einer orthogonalen Matrix haben den Betrag 1.

**I.9.** Mit  $\lambda$  ist auch  $\bar{\lambda}$  E. einer orthogonalen Matrix, wenn  $\bar{\lambda}$  die zu  $\lambda$  konjugiert komplexe Zahl bezeichnet.

**II.** E. von einem linearen Operator  $A$  ( $\nearrow$  lineare Abbildung I.) eines reellen bzw. komplexen Vektorraums  $V$  ist jede reelle bzw. komplexe Zahl  $\lambda$ , für die die Gleichung  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  nichttriviale Lösungen  $\mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq 0$  hat; diese Lösungen heißen dann zu  $\lambda$  gehörige Eigenvektoren oder Eigenlösungen oder Eigen-elemente. Ist  $V$  endlich-dimensional, so läuft die Berechnung der E.e und der Eigenvektoren von  $A$  auf die Bestimmung der E.e und der Eigenvektoren

einer  $A$  beschreibenden Matrix hinaus. Genau dann, wenn man in  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$  finden kann, läßt sich der lineare Operator  $A$  bzgl. dieser Basis durch eine Diagonalmatrix beschreiben; die Hauptdiagonalelemente sind dann gerade die E.e von  $A$  (Normalformenproblem für lineare Operatoren). S. a. Operator, linearer.

**III.** Zum Normalformenproblem für lineare Abbildungen  $\nearrow$  lineare Abbildung IV. S. a. Hauptachsentransformation III.; Integralgleichung II.

**Eigenwertberechnung:** numerische Mathematik Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte  $\lambda_j$  und der zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{x}_j$  einer quadrat. Matrix  $A$ , die durch die Beziehung  $A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$  definiert und verknüpft sind ( $\nearrow$  Eigenwert I.). Bei der Auswahl aus vielen bekannten Möglichkeiten können das Ziel der Anwendung stärker berücksichtigt und spezielle Eigenschaften von  $A$  vorausgesetzt werden, z. B. soll die Symmetrie von  $A$ , d. h.,  $A = A^T$ , vorausgesetzt werden, wie es in vielen prakt. Fällen üblich ist.

**I.** Als numer. Hauptachsentransformation bezeichnet man direkte Methoden, die alle Eigenwerte und gegebenenfalls auch Eigenvektoren nach einem einheitl. Verfahren gleichzeitig zu bestimmen suchen. Als Lösung der charakterist. Gleichung sind die  $\lambda_j$  die Nullstellen des Polynoms  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$  ( $\nearrow$  Polynomwurzelberechnung). Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich zu jedem  $\lambda_j$  als Lösungsvektoren des linearen Gleichungssystems  $A\mathbf{x} = \lambda_j\mathbf{x}$  ( $\nearrow$  lineare Gleichungssysteme).

**II.** Im Jacobi-Verfahren werden spezielle Matrizen  $T_{pq}$  betrachtet, die aus der Einheitsmatrix durch elementare Jacobi-Rotation hervorgehen, indem man das  $p$ -te und  $q$ -te Diagonalelement gleich  $\cos \varphi$  sowie für das Element  $a_{pq}$  den Wert  $\sin \varphi$  und für  $a_{qp}$  den Wert  $-\sin \varphi$  setzt. Bestimmt man  $\varphi$  aus den Beziehungen

$\cot 2\varphi = [(a_{pp} - a_{qq})/2] a_{pq}, -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ , dann werden in der transformierten Matrix  $A' = T_{pq}^T \cdot A \cdot T_{pq}$  die Elemente  $a'_{pq} = a'_{qp}$  gleich Null. Wendet man nun auf  $A'$  erneut eine andere Jacobi-Rotation an, so werden zwei andere Elemente Null, ohne daß die vorher erzeugten Nullen erhalten bleiben müssen. Es ergeben sich folgende Schritte:

1. Auswahl des Pivots  $a_{ij}^{(k)}$  aus der Matrix  $A^{(k)}$ .
2. Berechnung von  $A^{(k+1)} = T_{pq}^T \cdot A^{(k)} \cdot T_{pq}$ .
3. Abbruch bei  $\sum_{i+j} a_{ij}^2 < \epsilon$ , denn dann liegt innerhalb einer gewünschten Stellenzahl Diagonalgestalt vor.

Die Konvergenz, die den Abbruch nach 3. sichert, hängt wesentlich von der Wahl des Pivots ab und ist bewiesen für das klass. Jacobi-Verfahren, bei dem stets das betragsgrößte Außendiagonalelement ausgewählt wird, und auch für zykl. Jacobi-Verfahren, in denen die Pivots in einer festgelegten Reihenfolge bestimmt werden, etwa zeilen- oder spaltenweise. Die gen. Verfahren eignen sich bes. für Automatenrechnung.

**III.** Iterative Methoden liefern zum Unterschied von den direkten stets nur einzelne Eigenwerte und

-vektoren. In der *einfachen Vektoriteration*, auch *Potenzmethode* gen., wird zur Berechnung des *betragsgrößten Eigenwertes*  $\lambda_1$  aus der Folge  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$  der Eigenwerte von  $A$  eine Vektorfolge nach der Vorschrift  $\mathbf{x}^{(m+1)} = A\mathbf{x}^{(m)} = A^{(m+1)}\mathbf{x}^{(0)}$  gebildet, die *asymptotisch* gegen den zu  $\lambda_1$  gehörigen Eigenvektor  $\mathbf{y}_1$  konvergiert, wenn der sonst beliebige Startvektor  $\mathbf{x}^{(0)}$  eine Komponente in Richtung von  $\mathbf{y}_1$  hat. Genauer gilt  $\mathbf{x}^{(m)} = \lambda_1^m c \mathbf{y}_1$ , und die Berechnung des Eigenwertes kann wegen  $\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} (x_i^{(m+1)} / x_i^{(m)})$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  mit beliebiger Genauigkeit erfolgen. Einen Vektor in  $\mathbf{y}_1$ -Richtung gewinnt man bei ständiger *Normierung* aus  $\mathbf{e}_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^{(m)} / \|\mathbf{x}^{(m)}\|)$ , falls  $\lambda_1 > 0$  ist.

*Beispiel:* Für die durch (1) gegebene Matrix  $A$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

erhält man die *charakterist. Gleichung*  $\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)(2 - 4\lambda + \lambda^2)$  mit den Nullstellen  $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ ;  $\lambda_3 = 2$ . Zum *betragsgrößten Eigenwert*  $\lambda_1$  gehört der Eigenvektor  $(1, -\sqrt{2}, 1)^T$ . Nach dem *Jacobi-Verfahren* mit dem Pivot  $a_{12}^{(0)} = -1$  erhält man im ersten Schritt  $\varphi = \pi/4$  und für  $A^{(1)} = T_{12}^T A T_{12}$  die Matrix (2). Im zweiten Schritt ist  $a_{13}^{(1)} = -1/2 \sqrt{2}$  Pivot und  $\cot 2\varphi = 1/2 \sqrt{2}$ . Nach dem 9. Zyklus erhält man die Matrix (3). Nach einer hier nicht diskutierten *Potenzmethode* erhält man Schema (4) und aus ihm  $\lambda_1 \approx 338/99 = 3,41414$ ,  $\lambda_1 \approx 478/140 = 3,41428$ , d. h. als Mittelwert  $\lambda_1 \approx 3,41428$  als gute Näherung für  $2 + \sqrt{2}$ . Außerdem ist  $\mathbf{x}^{(6)} \approx 338(1, -\sqrt{2}, 1)^T$  und somit Eigenvektor.

$$(2) \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \sqrt{2} \\ 0 & 3 & -1/2 \sqrt{2} \\ -1/2 \sqrt{2} & -1/2 \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

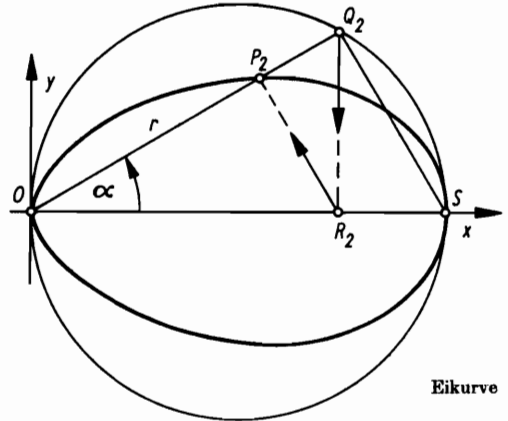
$$(3) \quad A^{(9)} = \begin{pmatrix} 0,58578 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 2,00000 & 0,00000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 3,41421 \end{pmatrix}$$

(4)

$A$	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$1/2 x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$1/2 x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$
2 -1 0	1	3	5	17	29	99	338
-1 2 -1	-1	-4	-7	-24	-41	-140	-478
0 -1 2	1	3	5	17	29	99	338

**Eikörper** svw. konvexer Körper.

**Eikurve, Oval:** eiförmige ebene Kurve. Man projiziert einen Punkt  $Q$  eines Kreises senkrecht auf einen festen Durchmesser  $OS$  und den Projektionspunkt  $R$  wieder senkrecht auf die Sehne  $OQ$  in den Punkt  $P$  (Abb.). Durchläuft  $Q$  den Kreis, so durchläuft  $P$  eine E. Wählt man ein *Polarkoordinatensystem* so, daß  $O$  der Pol ist und  $S$  auf dem Strahl  $o$  liegt, so ergibt sich die Gleichung  $r = a \cos^3 \alpha$  mit  $a = |OS| > 0$  dieses Ovals aus  $r = |OP| = |OR| \cos \alpha$ ,  $|OR| = |OQ| \cos \alpha$  und  $|OQ| = a \cos \alpha$ . Wegen  $x =$



Eikurve

$r \cos \alpha$  und  $x^2 + y^2 = r^2$  geht sie über in  $(x^2 + y^2)^2 = ax^3$  in kartes. Koordinaten.

- Ein-Ausgangs-Beschreibung** ↗ System II.
- Einblättrigkeit** ↗ Umkehrfunktion IV.
- Eindeutigkeitsatz** ↗ Anfangswertproblem I., ↗ charakteristische Funktion IV., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, I.
- eindeutig** ↗ Abbildung I., ↗ Relation II., ↗ Funktion I.
- Einermenge** ↗ Menge I.
- einfach** ↗  $n$ -Eck I.
- einfache Regression** ↗ Regression I.1., II.1.
- Eingabe, Input:** Übertragung von Informationen in einen Rechner. Die Eingabe erfolgt bei Digitalrechnern mit Hilfe von Eingabegeräten (↗ digitale Rechenanlage I.1.) und maschinenlesbaren Datenträgern (↗ Daten I.).
- Eingabegeräte** ↗ digitale Rechenanlage I.1.
- Eingabesignal** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.
- Einganggröße** ↗ System I., II.
- Eingangsstrom** ↗ Bedienungstheorie.
- Einheit:** jedes Element eines Ringes (↗ Ring I.) oder auch einer Halbgruppe  $R$  mit Einselement  $e$ , zu dem es ein Inverses bzgl. der Multiplikation gibt. Diese Elemente bilden eine Gruppe, deren Einselement das Einselement  $e$  des Ringes ist. Im Ring der ganzen Zahlen sind 1 und  $-1$  die E.n, im Ring der ganzen ↗ Gaußschen Zahlen 1,  $i$ ,  $-1$  und  $-i$ , in einem Körper jedes Element  $\neq 0$ .
- Ist  $R$  kommutativ, so heißt das Ringelement  $b$  *assoziiert* zum Ringelement  $a$ , wenn  $b$  aus  $a$  durch Multiplikation mit einer Einheit erhalten wird. Die Assoziiertheit ist eine Äquivalenzrelation; man kann den Ring in *Klassen assoziierter Elemente* zerlegen. Im Ring der ganzen Gaußschen Zahlen bilden z. B. die Elemente  $1 + i, -1 + i, -1 - i$  und  $1 - i$  eine Klasse; in einem Körper gibt es nur zwei Klassen, die eine besteht allein aus dem Nullelement, die andere aus allen übrigen Elementen. S. a. Zahlkörper III.
- Einheitselement** svw. Einselement.
- Einheitsgruppe:** Gruppe, die nur aus dem Einselement besteht, ↗ Gruppe III.
- Einheitsideal** ↗ Ideal.

**Einheitskreis** : Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt der z-Ebene als Mittelpunkt. Für die Punkte z des E.es gilt  $|z| = 1$  in der Gaußschen Zahlenebene. S. a. Kreis IV.

**Einheitsmatrix** ↗ Matrix I.

**Einheitspunkt** ↗ Koordinatensystem II., III.  
↗ Zahlengerade.

**Einheitssprungfunktion** ↗ Zeitfunktion I.1.

**Einheitsstrecke** ↗ Koordinatensystem I.

**Einheitsvektor** : Vektor eines euklid. Vektorraums vom Betrag 1, ↗ Vektorraum VII.

**Einheitswurzel, n-te** ↗ Kreisteilungsgleichung, ↗ Potenz V.2.

**Einkantengraph** ↗ Landkarte I.

**Einpunktverteilung** : Verteilungsgesetz einer speziellen diskreten Zufallsgröße X, wenn sie nur einen mögl. Wert  $x_0$  annehmen kann, so daß  $P(X = x_0) = 1$ . Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  hat dann den Wert  $F(x) = 0$  für  $x < x_0$  und den Wert  $F(x) = 1$  für  $x > x_0$ .

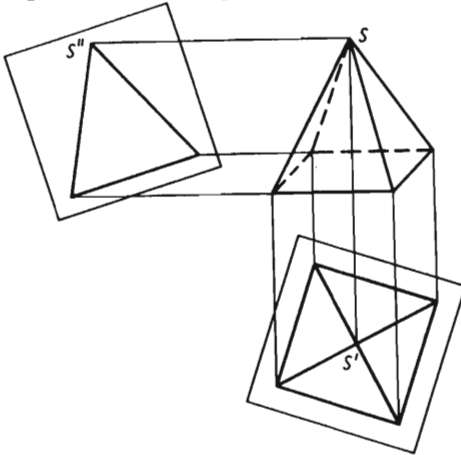
**einrichten** ↗ Brüche I.3.

**Einrollengerät** ↗ Kurvenmesser.

**Einschiebelineal** ↗ Lineal I.

**Einschließungssatz** ↗ Optimierung VII.

**Einschneideverfahren** : Verfahren der darstellenden Geometrie, aus Grund- und Aufriß eines Körpers eine Parallelprojektion des Körpers zu zeichnen. Bei



Parallelprojektion einer Pyramide im Einschneideverfahren

geeigneter Lage von Grund und Aufriß schneiden sich entsprechende Strahlen je eines Parallelstrahlenbüschels von jedem Riß in den Punkten der Parallelprojektion (Abb.).

**Einschränkung** ↗ Abbildung II.6., ↗ Funktion I., VII.

**Einschrittverfahren** ↗ gewöhnliche Differentialgleichungen IV.

**Einschwingzeit** ↗ Information II.

**Einselement** ↗ Gruppe I., ↗ Kategorie I., ↗ Körper I., ↗ Morphismus I., ↗ neutrales Element, ↗ Polynom I., ↗ Ring I., ↗ Verband II.

**Einsetzen einer Potenzreihe** ↗ Potenzreihe XII.

**Einsetzungsregel** ↗ Aussagenkalkül II.

**Einsetzungsverfahren** ↗ lineare Gleichung III.1.

**Eintafelprojektion** : senkrechte Parallelprojektion auf eine Projektionsebene. Alle Punkte eines Projektionsstrahls, z. B.  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , haben denselben Bildpunkt  $P'$  (Abb. 1). Um Eineindeutigkeit der

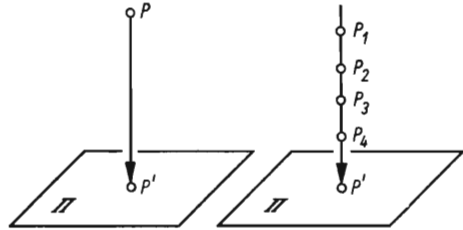


Abb. 1: Eintafelprojektion von Punkten

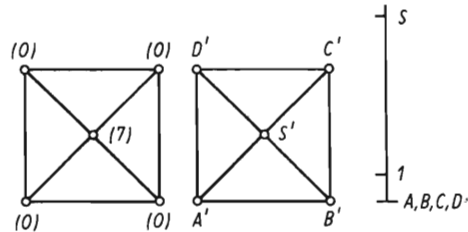
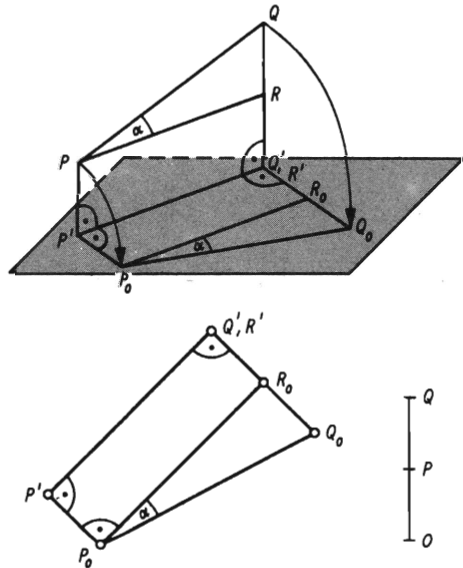


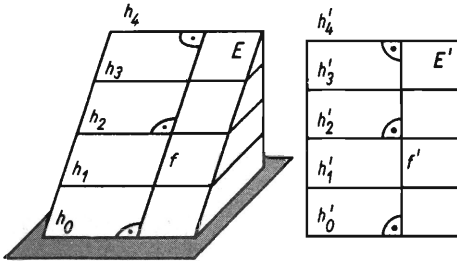
Abb. 2: Darstellung einer Pyramide in Eintafelprojektion mit Höhenmaßstab für die Koten



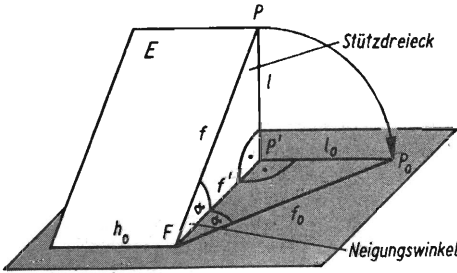
Eintafelprojektion. Abb. 3: Bestimmen der wahren Länge einer Strecke PQ durch Umklappen des projizierenden Trapezes

Zuordnung zwischen Original- und Bildpunkten zu erzielen, werden die Höhen der Punkte durch Zahlen, Koten, oder durch einen Höhenmaßstab angegeben (Abb. 2). Die Projektionsstrahlen der Punkte einer Geraden, die nicht senkrecht auf der Bildebene

$\Pi$  steht, bilden eine projizierende Ebene. Die wahre Länge einer Strecke, bzw. der Neigungswinkel einer Strecke gegen die Projektionsebene können durch Umlappung des projizierenden Trapezes, das durch die Strecke selbst, ihr Bild und die beiden Lote ihrer Endpunkte begrenzt wird, in die Projektionsebene bestimmt werden (Abb. 3). Zur Darstellung einer gegen die Projektionsebene geneigten Ebene kann man Höhenlinien benutzen. Das sind Geraden  $h$  der geneigten Ebene, auf der nur Punkte gleicher Höhe liegen. Alle Geraden  $f$  der geneigten Ebene, die senk-



Einfeldprojektion. Abb. 4: Höhenlinien  $h$  und Falllinien  $f$



Einfeldprojektion. Abb. 5: Stützdreieck einer Ebene

recht zu den Höhenlinien liegen, heißen *Falllinien*. Höhenlinien und Falllinien werden auch *Hauptlinien* genannt. Die Bilder von Höhenlinien liegen parallel zueinander; die Bilder von Falllinien liegen senkrecht zu den Bildern der Höhenlinien (Abb. 4). Um den Neigungswinkel einer zur Projektionsebene geneigten Ebene zu bestimmen, verwendet man ein *Stützdreieck*, das aus einer Falllinie, ihrem Bild und dem Lot eines Punktes der geneigten Ebene gebildet und in die Projektionsebene umgeklappt wird (Abb. 5).

**Einzelschrittverfahren** ↗ lineare Gleichungssysteme VII.2.

**Einzelwahrscheinlichkeiten** ↗ Zufallsgröße II.

**Elementaralternative** ↗ Normalform I.

**elementare Bahn** ↗ Durchlaufungen von Graphen II.

**elementare Funktion** ↗ Funktion X.

**elementare Kette** ↗ Durchlaufungen von Graphen II.

**Elementarereignis** ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, I.

**elementare Zahlentheorie** ↗ Zahlentheorie I.

**Elementarkonjunktion** ↗ Normalform I.

**Elementarspeicher** ↗ Übertragungsglied IV.

**elementarsymmetrische Funktion** ↗ Polynom IV., ↗ symmetrische Funktion I.

**Elementarwinkel** ↗ Winkel I.

**Elementarbeziehung** ↗ Mengenlehre II.

**elementefremd** ↗ Durchschnitt.

**Elferprobe**: Überprüfung der Richtigkeit einer Rechnung im Zehnersystem mittels der Reste einer Division durch 11. Die E. beruht darauf, daß aus  $a \equiv r_1 \pmod{11}$  und  $b \equiv r_2 \pmod{11}$  folgt  $a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{11}$  und  $a - b \equiv r_1 - r_2 \pmod{11}$  und  $a \cdot b \equiv r_1 \cdot r_2 \pmod{11}$ . Die Reste  $r_1$  und  $r_2$  werden aus den *Querdifferenzen* (↗ Teilbarkeit VI.) bestimmt. Für  $a = 13\,437$  und  $b = 52\,304$  z. B. erhält man wegen  $(12 - 6) \equiv 6 \pmod{11}$  und  $(12 - 2) \equiv 10 \pmod{11}$  für das Produkt  $a \cdot b = 702\,808\,848$  die Bedingung  $a \cdot b \equiv 6 \cdot 10 \equiv 5 \pmod{11}$ . Da die Querdifferenz  $(25 - 20) \equiv 5 \pmod{11}$  ergibt, ist das Ergebnis bis auf Vielfache von 11 richtig. Aus den Quersummen folgt:  $a \equiv 0 \pmod{9}$ ,  $b \equiv 5 \pmod{9}$  und  $a \cdot b \equiv 0 \pmod{9}$ , aus der Quersumme von 45 für  $a \cdot b$  folgt, daß das Ergebnis auch bis auf Vielfache von 9, d. h. bis auf Vielfache von  $9 \cdot 11 = 99$  richtig ist. ↗ Neunerprobe. Vgl. Teilbarkeit III.

**Eliminationssätze**: Sätze zur Auflösung eines implizit vorgegebenen Funktionensystems in der Nähe einer vorgegebenen Stelle.

**I.** Ist die Funktion  $F(x, y)$  der reellen Variablen  $x, y$  an der Stelle  $P_0 = (x_0, y_0)$  und in einer gewissen Umgebung von  $P_0$  stetig und hat für  $P_0$  den Wert  $F(x_0, y_0) = 0$ , existiert darüber hinaus  $F_y$  und ist in  $P_0 = (x_0, y_0)$  und einer Umgebung von  $x_0$  ebenfalls stetig mit  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ , dann existiert in einem gewissen Intervall um  $x_0$  genau eine stetige Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$ , so daß  $F(x, f(x)) = 0$  und  $y_0 = f(x_0)$  gilt. Ist dabei die Funktion  $F$   $k$ -mal stetig differenzierbar, dann ist auch  $f$   $k$ -mal stetig differenzierbar. Ein analoger Satz gilt für die Auflösung nach  $x$ .

**II.** Wenn die Funktion  $F$  mit der Gleichung  $z = F(x_1, \dots, x_n, y)$  in einer Umgebung von  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$  stetig ist und  $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$  gilt, darüber hinaus  $F_y$  existiert und stetig in einer Umgebung von  $P_0$  ist und  $F_y(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$  gilt, dann existiert in einer Umgebung von  $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$  genau eine stetige Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  und  $F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0$  sowie  $y_0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Hat  $F$  stetige Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung, dann gilt dies auch für  $f$ .

**III.** Sind die Funktionen  $F_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$  und

den Gleichungen  $z_i = F_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  an der Stelle  $P_0(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  und noch in einer gewissen Umgebung von  $P_0$  stetig sowie einmal stetig partiell differenzierbar nach allen  $y_j$  und gilt  $F_i(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0) \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ ; ist ferner die Funktionaldeterminante der  $F_i$  ungleich Null für  $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ , dann gibt es in einer Umgebung von  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  genau ein System von stetigen Funktionen  $f_i$  mit den Gleichungen (1) und (2).

- (1)  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_m)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$
- (2)  $F_i(x_1, \dots, x_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) = 0$   
und  $y_i(0) = f_i(x_1^0, \dots, x_m^0)$

Zur Berechnung der Ableitungen von  $f_i$  für  $i = 1, \dots, n$  ergibt sich bei Differentiation von  $F_i$  nach den  $x_j$  die Gleichung (3), die in einer Umgebung von  $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  gilt.

$$(3) \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0$$

Bei festem  $j$  sind dies  $n$  lineare Gleichungen für die  $n$  Unbekannten  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$  mit  $k = 1, 2, \dots, n$ . Die Koeffizientendeterminante ist die Funktionaldeterminante  $\Delta$ , die ungleich Null ist, so daß das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Sind  $\Delta_k^j$  die entsprechenden Unterdeterminanten, so ist (4) eine Darstellung der Lösung.

$$(4) \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = -\frac{\Delta_k^j}{\Delta}$$

**Eliminierbarkeit**  $\nearrow$  Definition.

**eliminieren:** in einer Gleichung eine Variable durch einen Term ersetzen, der sie nicht enthält, so daß nach dem Einsetzen die Anzahl der Variablen in der gegebenen Gleichung um 1 vermindert wurde. Diese Operation wird zum Lösen von Systemen von Gleichungen benutzt.  $\nearrow$  lineare Gleichung III.1.,  $\nearrow$  Einsetzungsverfahren.

**Ellipse: I.** geometr. Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten dieser Ebene gleich ist. Diese Punkte sind die **Brennpunkte**  $F_1$  und  $F_2$  der E. Die konstante Summe der Abstände wird mit  $2a$ , der Abstand der Brennpunkte mit  $2e$  bezeichnet;  $e$  heißt **Brennweite** oder **lineare Exzentrizität**. Gilt  $r_1 + r_2 = 2a$  für zwei Strecken der Längen  $r_1$  und  $r_2$ , so kann man nach

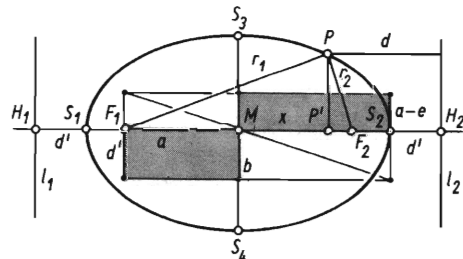


Abb. 1: Ellipse mit Leitlinien  $l_1$  und  $l_2$ ; Brennpunkte  $F_1, F_2$ , Scheitel  $S_1, S_2, S_3, S_4$

dieser Definition Punkte einer E. als Schnittpunkte zweier Kreise mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  um die vorgegebenen Brennpunkte konstruieren (Abb. 1). Nach der Konstruktion sind die Gerade durch  $F_1$  und  $F_2$  sowie die Mittelsenkrechte der Strecke  $F_1F_2$  **Symmetriachsen** der E. Ihr Schnittpunkt ist der **Mittelpunkt**  $M$  der E., ihre Schnittpunkte mit der E. sind die **Hauptscheitel**  $S_1$  und  $S_2$  mit  $|MS_1| = |MS_2| = a$  und die **Nebenscheitel**  $S_3$  und  $S_4$  mit  $|S_3F_1| = |S_3F_2| = a = |S_4F_1| = |S_4F_2| = a$ . Die Länge der **Hauptachse**  $S_1S_2$  ist danach  $2a$ , die der **Nebenachse**  $S_3S_4$  wird mit  $2b$  bezeichnet, dabei gilt  $b^2 = a^2 - e^2$ . Durch zwei der Größen  $a, b, e$  ist die Form der E. bestimmt, für  $a = b$  ergibt sich ein Kreis. Durch die **Gärtnerkonstruktion**, eine **Fadenkonstruktion**, kann man nicht nur einzelne Punkte, sondern einen ganzen Ellipsenbogen darstellen (Abb. 2). Ein in sich geschlossener Faden der Länge

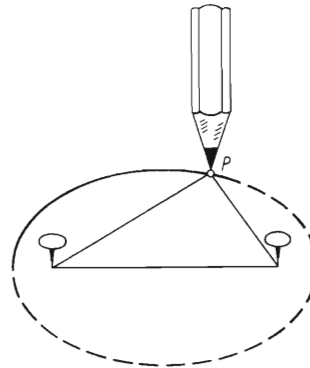


Abb. 2: Fadenkonstruktion einer Ellipse

$2a + 2e$  wird um die Brennpunkte, die durch Pflöcke oder Nadeln fixiert werden, gelegt und im E.punkt  $P$  gespannt gehalten.

**II.** Zur Beschreibung einer E. als Schnitt einer Kegel­fläche mit einer Ebene ( $\nearrow$  Kegelschnitt I.) werden zwei Leitlinien  $l_1$  und  $l_2$  eingeführt. Diese sind Geraden, die auf der verlängerten Hauptachse im Abstand  $d' = a(a - e)/e$  von den Hauptscheiteln senkrecht stehen. Eine Strecke der Länge  $d' = a(a - e)/e$  läßt sich nach dem Satz von den Ergänzungsparallelogrammen konstruieren. Bezeichnet man mit  $d$  den Abstand eines beliebigen Punktes  $P$  einer E. von einer ihrer Leitlinien und ist  $r$  der Abstand dieses Punktes vom zugehörigen Brennpunkt, so gilt, daß  $r/d = e/a = \epsilon$  eine von der Wahl des Punktes unabhängige Konstante der E. ist. Sie wird **numerische Exzentrizität** der E. genannt, und wegen  $a > e$  für jede E. ist  $\epsilon < 1$  (Abb. 1). Ist nämlich  $P'$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf die Hauptachse und setzt man  $|MP'| = x$  mit  $x$  positiv oder negativ, je nachdem  $P'$  rechts oder links von  $M$  liegt, so folgt durch Anwenden des Satzes von Pythagoras auf die Dreiecke  $F_2PP'$  und  $PP'F_1$  die Beziehung  $r_1^2 - r_2^2 = 4ex$ . Betrachtet man nun z. B. die Abstände eines Punktes  $P$  der E. von  $F_2$  und  $l_2$ , so findet man aus der gen. Beziehung und aus  $r_1 + r_2 = 2a$  die Beziehungen  $r_1 - r_2 = 2ex/a, r_2 = a - ex/a$  und  $r_1 = a + ex/a$  sowie  $d = a + d' - x$ . Durch Einsetzen von  $d' = a(a - e)/e$  folgt  $d = a^2/e - x$



$= (a^2 - ex)/e$ , so daß aus  $r_2 = (a^2 - ex)/a$  folgt  $r_2/d = e/a = \varepsilon$ . Aus Symmetriegründen gilt Entsprechendes für  $F_1$  und  $l_1$ . Eine E. ist der geometr. Ort aller Punkte einer Ebene, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt und einer festen Geraden dieser Ebene, die nicht durch diesen Punkt verläuft, einen konstanten Wert  $\varepsilon < 1$  hat.

III. Die Strecke  $S_1S_2$  wird von einem Brennpunkt und dem Schnittpunkt  $H$  der zugehörigen Leitlinie mit der Verlängerung der Hauptachse harmonisch geteilt. Betrachtet man z. B. die Punkte  $F_2$  und  $H_2$ , so sind die Verhältnisse  $d' : (2a + d')$  und  $(a - e) : (a + e)$  dem Betrage nach gleich, wie sich durch Einsetzen von  $d' = a(a - e)/e$  ergibt. In bezug auf die E. ist deshalb jede ihrer Leitlinien die Polare des zugehörigen Brennpunkts als Pol ( $\nearrow$  Polarität).

IV. Als Leitkreise einer E. bezeichnet man die beiden Kreise  $k_1, k_2$  um die Brennpunkte, die den Radius  $2a$  haben. Eine E. ist der geometr. Ort der Mittelpunkte aller Kreise einer Ebene, die einen in dieser Ebene liegenden Kreis  $k$  von innen berühren und durch einen im Innern dieses Kreises liegenden Punkt  $F$  gehen. Dabei ist  $k$  ein Leitkreis und  $F$  der Brennpunkt der E., der nicht Mittelpunkt dieses Leitkreises ist (Abb. 3). — Um die Tangente in einem

punkt erzeugt werden, im anderen Brennpunkt deutlich, im übrigen Raum aber kaum gehört. — Die Kreise um  $M$  mit den Radien  $a$  bzw.  $b$  werden Haupt-, bzw. Nebenseitelkreis genannt. Sie bestimmen die Dreiecks-konstruktion einer E. ( $\nearrow$  E.konstruktion). Ist  $Q_1$  der Mittelpunkt der Strecke  $F_2L_1$ , so sind die Dreiecke  $F_2Q_1M$  und  $F_2L_1F_1$  ähnlich, und es gilt  $|MQ_1| = \frac{1}{2}|F_1L_1| = a$ .  $Q_1$  liegt danach auf dem Hauptscheitelkreis. Die Tangente  $t_1$  schneidet ihn in einem weiteren Punkt  $Q_1'$ , der der Fußpunkt des Lotes von  $F_1$  auf die Tangente  $t_1$  ist.

Mit Hilfe eines Leitkreises lassen sich die Tangenten von einem Punkte  $R$  außerhalb der E. an diese konstruieren. In der Abbildung wird  $R$  zur Vereinfachung auf  $t_1$  angenommen. Wählt man für die Konstruktion den Leitkreis  $k_1$  und bezeichnet man die Schnittpunkte des Kreises um  $R$ , der durch  $F_2$  verläuft, mit diesem Leitkreis mit  $L_1$  und  $L_2$ , so sind die Mittelsenkrechten der Strecken  $F_2L_1$  und  $F_2L_2$  die gesuchten Tangenten  $t_1$  und  $t_2$ . Die Tangente  $t_1$  schneidet die Strecke  $F_1L_1$  in ihrem Berührungspunkt  $P_1$ .

V. Der Inhalt einer ebenen Fläche, deren Rand eine Ellipse mit Halbachsen der Längen  $a$  und  $b$  ist, ist  $A = \pi ab$ . Bei dem Umfang  $u$  einer Ellipse kann nur näherungsweise berechnet werden;

$$u \approx \pi [3(a + b)/2 - \sqrt{ab}]. \text{ S. a. Kegelschnitt II., IV.}$$

VI. E. als nicht zerfallender Mittelpunktskegelschnitt ( $\nearrow$  Kurve zweiter Ordnung I.) mit der Mittelpunkts-gleichung (1) in kartes. Koordinaten. Dabei liegen der Mittelpunkt der E. im Koordinatenursprung, die Haupt- bzw. Nebenachse in der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse,  $a$  bzw.  $b$  sind die große bzw. kleine Halbachse, die Hauptscheitel sind  $(a, 0)$  und  $(-a, 0)$ , die Nebenseitel  $(0, b)$  und  $(0, -b)$  und die Brennpunkte  $(e, 0)$  und  $(-e, 0)$  mit  $e^2 = a^2 - b^2$ . Punkte mit  $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$  liegen außerhalb, mit  $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$  innerhalb der E. Die E. hat eine Parameterdarstellung (2).

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(2) \quad x = a \cos t, y = b \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

VII. Die Ableitung  $\dot{x} = -a \sin t = -ay/b$ ;  $\dot{y} = b \cos t = bx/a$  der Parameterdarstellung (2) ergibt für einen Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  der E. einen Richtungsvektor der Tangente und einen Stellenvektor der Normale in  $P_0$  an die E. Daher stellen (3) die

$$(3) \quad x_0x/a^2 + y_0y/b^2 = 1$$

Tangente bzw. (4) die Gleichung der Normalen in  $P_0$  an die E. dar.

$$(4) \quad a^2y_0x - b^2x_0y = c^2x_0y_0$$

Liegt  $P_0$  nicht auf der E., so ist (3) die Gleichung der Polare  $p_0$  von  $P_0$  in bezug auf die E. Ist  $P_0$  außerhalb der E. gelegen (Abb. 4), so erfüllen die Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Tangenten von  $P_0$  an die E. die Polargleichung;  $p_0$  ist mithin die Gerade durch diese Berührungs-

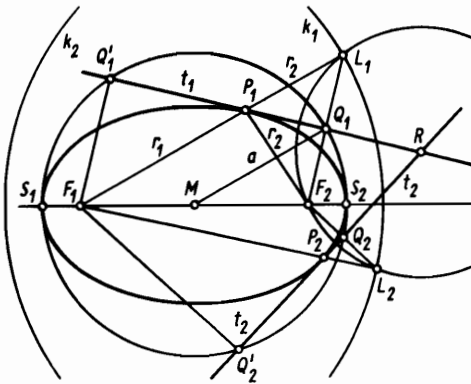


Abb. 3: Leitkreise  $k_1, k_2$  einer Ellipse und Tangenten  $t_1, t_2$  an die Ellipse

Punkt  $P_1$  einer E. zu konstruieren, wählt man einen Brennpunkt, z. B.  $F_1$ , und schneidet den von  $F_1$  durch  $P_1$  verlaufenden Strahl mit dem Leitkreis um  $F_1$  in  $L_1$ . Die Mittelsenkrechte der Strecke  $F_2L_1$  ist die gesuchte Tangente  $t_1$ , denn  $P_1$  liegt wegen  $|F_2P_1| = |P_1L_1| = r_2$  auf ihr, und für jeden von  $P_1$  verschiedenem Punkte  $P'$  auf ihr gilt  $|F_1P'| + |P'L_1| > |F_1P_1| + |P_1L_1| = 2a$ , die Gerade  $t_1$  hat deshalb nur einen Punkt mit der E. gemeinsam. Aus Symmetriegründen sind die Winkel, die die Strecken  $F_2P_1$  und  $P_1F_1$  mit der Tangente  $t_1$  bilden, kongruent. Daraus folgt, daß jeder von einem Brennpunkt einer E. ausgehende Strahl von der E. zu ihrem anderen Brennpunkt reflektiert wird. In einem Raum mit ellipt. Grundriß, einer Flüstergalerie, werden leise Geräusche, die in einem Brenn-

punkte. Liegt  $P_0$  innerhalb der E., so schneidet jede Gerade  $p_i$  durch  $P_0$  die E. in zwei Punkten, und der Schnittpunkt  $P_i$  der Tangenten in diesen liegt auf der Polaren  $p_0$  von  $P_0$  in bezug auf die E.

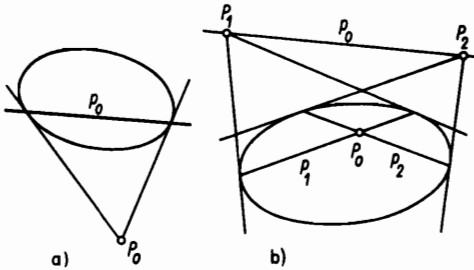


Abb. 4: Polare  $p_0$  zu einem Punkt  $P_0$  in bezug auf eine Ellipse,  $P_0$  ist in a) äußerer, in b) innerer Punkt

VIII. Durch die Transformation  $\xi = x, \eta = ya/b$  wird die E. mit  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  abgebildet auf den Kreis mit der Gleichung  $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ . Die Gleichungen  $\eta = \beta\xi/\alpha$  und  $\eta = -\alpha\xi/\beta$  stellen aufeinander senkrecht stehende Geraden durch den Kreismittelpunkt dar. Ihnen entsprechen im Bild die Geraden mit den Gleichungen  $x\beta/a - y\alpha/b = 0$  und  $\alpha x/a + \beta y/b = 0$ . Die auf ihnen liegenden Durchmesser der E. heißen *konjugierte Durchmesser*. Wird die E. parallel verschoben, so daß der Mittelpunkt  $(c, d)$  wird, so gilt für sie die Gleichung (5) für

$$(5) \quad \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$$

achsenparallele Lage. Für  $(c, d) = (a, 0)$  wird (5) die *Scheiteltgleichung*. Die Gleichung einer Tangente oder Polare der E. mit der Gleichung (5) lautet (3a), die Normalengleichung ist (4a). Für  $a = b$  stellen (1)

$$(3a) \quad (x_0 - c)(x - c)/a^2 + (y_0 - d)(y - d)/b^2 = 1$$

$$(4a) \quad a^2(y_0 - d)(x - c) - b^2(x_0 - c)(y - d) = e^2(x_0 - c)(y_0 - d)$$

bzw. (5) den Kreis um  $(0, 0)$  bzw. um  $(c, d)$  mit dem Radius  $a$  dar.

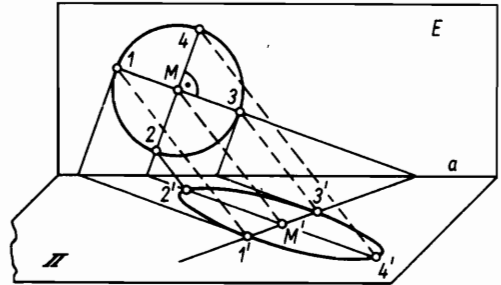
S. a. Zykloide V.

Ellipse, Flächeninhalt ↗ Ellipse V.

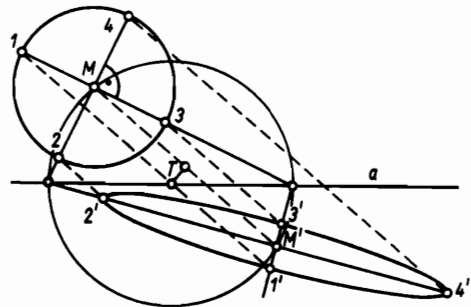
Ellipse, Umfang ↗ Ellipse V., ↗ Funktionenreihe III. 5.

Ellipsenkonstruktionen: I. in der darstellenden Geometrie verwendete punktweise Darstellung von Ellipsen. Für die Konstruktion als perspektiv-affines Bild eines Kreises der Originalenebene  $E$  benutzt man folgende Gesetze der *Affinität*: Originalenebene  $E$  und Bildebene  $\Pi$  schneiden sich in der *Affinitätsachse*  $a$  (Abb. 1). Die *Affinitätsgeraden* von Original- zu Bildpunkt sind einander parallel, und eine Bildgerade schneidet sich mit ihrer Originalgeraden auf der Affinitätsachse. Die Bilder der Kreisdurchmesser sind Ellipsendurchmesser. Die Bilder zweier zueinander orthogonaler Kreisdurchmesser heißen *konjugierte Durchmesser* der Ellipse. Unter ihnen gibt es ein Paar zu einander senkrechter

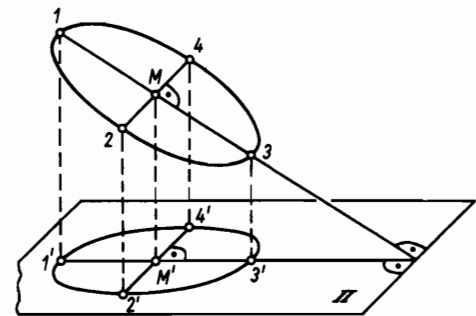
konjugierter Durchmesser, die sich mit dem Thaleskreis um  $T$  konstruieren lassen, der durch  $M$  und  $M'$  geht (Abb. 2). Sie bestimmen die *Haupt-* und die *Nebenchse* der Ellipse. Bei der Orthogonalprojektion eines Kreises (Abb. 3) wird der Höhenliniendurchmesser in wahrer Länge als Hauptachse der Länge  $2a$  und der Falliniendurchmesser als *Nebenchse* der Länge  $2b$  abgebildet.



Ellipsenkonstruktion. Abb. 1: Parallelprojektion des Kreises



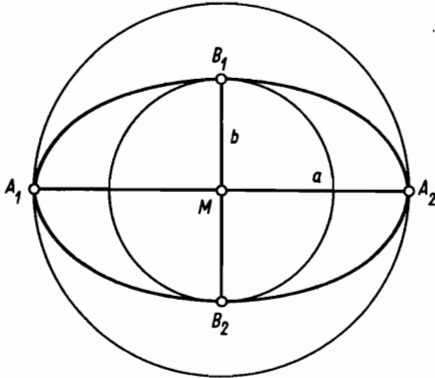
Ellipsenkonstruktion. Abb. 2: Perspektiv-affines Bild des Kreises,  $T$  Mittelpunkt des Thaleskreises durch  $M$  und  $M'$



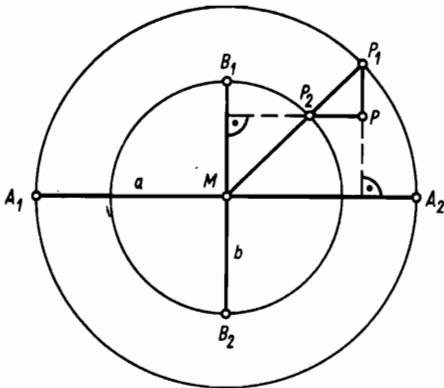
Ellipsenkonstruktion. Abb. 3: Senkrechte Projektion des Kreises

II. Der *Haupt-* und der *Nebenscheitelkreis* um den Mittelpunkt  $M$  der Ellipse haben den Radius  $a$  bzw.  $b$  (Abb. 4).  $A_1, A_2$  sind die *Hauptscheitelpunkte*,  $B_1, B_2$  die *Nebenscheitelpunkte*. Da alle Falllinien bei der senkrechten Projektion im Verhältnis  $b : a$  verkürzt werden, ergeben sich Ellipsenpunkte  $P$  nach der *Zweikreisconstruction*, indem man von den Endpunkten  $P_1$  und  $P_2$  eines Radius auf dem Haupt-

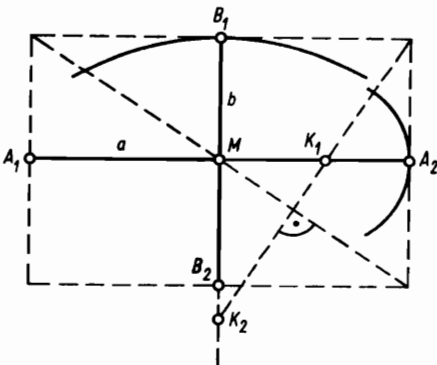
und dem Nebenseitelkreis je ein Lot auf die Haupt- und auf die Nebenachse fällt (Abb. 5). Die *Krümmungskreis*konstruktion gibt bei gegebener Haupt- und Nebenachse  $A_1A_2$  bzw.  $B_1B_2$  eine gute Näherung. In dem Tangentenrechteck durch  $A_1, B_2, A_2, B_1$  schneidet das von einer Ecke auf die nicht



Ellipsenkonstruktion. Abb. 4: Haupt- und Nebenachse der Ellipse



Ellipsenkonstruktion. Abb. 5: Zweikreisconstruction der Ellipse



Ellipsenkonstruktion. Abb. 6: Krümmungskreisconstruction der Ellipse

durch diese Ecke gehende Diagonale gefällte Lot die Achsen der Ellipse in den Mittelpunkten  $K_1$  und  $K_2$  der Krümmungskreise für die Haupt- und Nebenseitelpunkte (Abb. 6). Die anderen zwei Krümmungskreismitelpunkte liegen zu den gefundenen symmetrisch bzgl. des Ellipsenmittelpunktes. Die Verbindungsstücke zwischen den Krümmungskreisen werden mit Hilfe von Kurvenlinealen gezeichnet.

**III. Papierstreifenkonstruktionen** bilden die Grundlage für *Ellipsenzirkel*. **III.1.** Zur Konstruktion mit Hilfe des *kurzen Papierstreifens* benutzt man die aus der Zweikreisconstruction ableitbare Tatsache, daß  $MVPP_1$  und  $MUPP_2$  Parallelogramme sind (Abb. 7). Daraus folgt, daß  $|VP| = a$  und  $|UP| = b$  ist. Legt

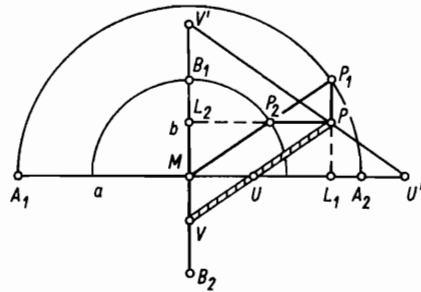


Abb. 7: Ellipsenkonstruktion mit kurzem Papierstreifen

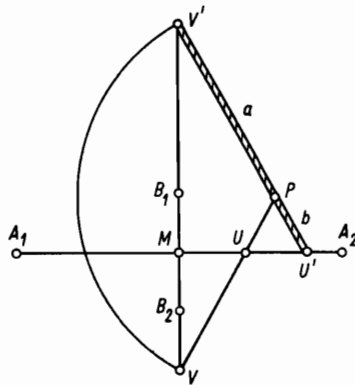
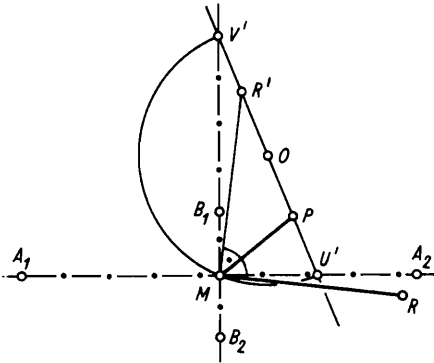


Abb. 8: Ellipsenkonstruktion mit langem Papierstreifen

man einen Papierstreifen mit den Punkten  $V, U$  und  $P$  so über ein Achsenkreuz, daß  $V$  und  $U$  auf verschiedenen Achsen liegen, erhält man in  $P$  einen Ellipsenpunkt. **III.2.** Die Konstruktion mit Hilfe des *langen Papierstreifens* ergibt sich aus Abb. 7 durch Spiegelung des Dreiecks  $PL_2V$  am Lot  $PL_2$  und des Dreiecks  $PL_1U$  am Lot  $PL_1$ . Die Spiegelpunkte  $V'$  und  $U'$  müssen auf den Achsen liegen und  $V'PU'$  muß eine Gerade sein, weil der Winkel bei  $P$  zwei Rechte beträgt. Dazu gilt  $|PV'| = a$ , und die Punkte  $V'$  bzw.  $U'$  ergeben sich als Schnittpunkte der Achsen mit je einem Kreis um  $P$  mit dem Radius  $a$  bzw.  $b$  (Abb. 8). Legt man einen Papierstreifen mit den Punkten  $V', P$  und  $U'$  so über ein Achsen-

kreuz, daß  $V'$  und  $U'$  auf verschiedenen Achsen liegen, so erhält man in  $P$  einen Ellipsenpunkt.

IV. Die nach David Rytz (1801 bis 1868) benannte *Achsenkonstruktion* wird benutzt, um aus gegebenen konjugierten Durchmessern einer Ellipse ihre Achsen zu konstruieren. Die Konstruktion beruht darauf, daß die Originale der konjugierten Halbmesser aufeinander senkrecht stehen. Sind  $MP$  und  $MR$  die gegebenen konjugierten Halbmesser (Abb. 9), so zeichnet man  $MR'$  senkrecht zu  $MR$



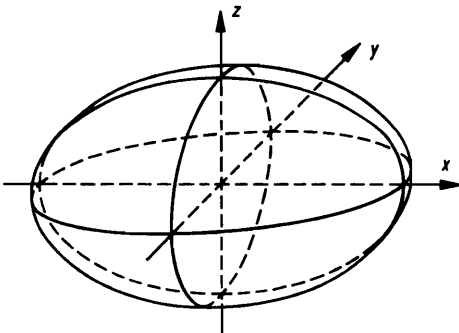
Ellipsenkonstruktion. Abb. 9: Rytzsche Achsenkonstruktion der Ellipse

und in gleicher Länge. Der Punkt  $O$  ist Mittelpunkt der Strecke  $R'P$ . Der Kreis um  $O$  mit  $|OM|$  als Radius schneidet die Gerade durch  $R'$  und  $P$  in  $V'$  und  $U'$ . Damit sind die Achsenrichtungen  $MV'$  und  $MU'$  gefunden. Die Länge der Achsen ist durch  $|PV'| = a$  und  $|PU'| = b$  gegeben.

Ellipsenzirkel  $\curvearrowright$  Ellipsenkonstruktionen III.,  $\curvearrowleft$  Kurvenzeichner II.

**Ellipsoid:** nicht entartete Fläche zweiter Ordnung mit *Mittelpunkt* oder *Zentrum*, deren Gleichung in einem kartesischen Koordinatensystem, das durch *Hauptachsentransformation* geeignet zu finden ist, die *Normalform* (1) hat. Dabei ist  $P_0(0, 0, 0)$  der *Mittelpunkt*. Das E. ist eine geschlossene, zusammen-

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Ellipsoid

hängende, ganz im Endlichen liegende Fläche (Abb.). Von einer Ebene, die das E. schneidet, wird i. allg. eine *Ellipse*, in speziellen Lagen ein *Kreis* ausgeschnitten. Die Gleichung der *Tangentialebene* an das E. im Punkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  des E.s gibt (2) an. Sind

$$(2) \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

zwei der reellen Zahlen  $a, b, c$  einander gleich, so stellt (1) ein *Rotations-E.* dar, z. B. entsteht das E.  $x^2/3 + y^2/4 + z^2/4 = 1$  durch Drehung der in der  $x, y$ -Ebene gelegenen *Ellipse*  $x^2/3 + y^2/4 = 1$  um die  $x$ -Achse. Für  $a = b = c$  stellt die Normalform eine *Kugel* mit dem Radius  $a$  dar. S. a. Kubatur; Erdellipsoid.

**elliptische Differentialgleichung: I.** lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (1), für die man

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f$$

die quadrat. Form  $Q(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i q_j$  durch eine lineare Transformation (2) auf (3) transfor-

$$(2) \quad q_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \bar{q}_j \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

mieren kann ( $\curvearrowleft$  partielle Differentialgleichung III.). Sind die Koeffizienten  $a_{ij}$  Funktionen von  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$(3) \quad Q(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) = \bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \dots + \bar{q}_n^2$$

so sagt man, daß die Differentialgleichung in den Punkten  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  elliptisch ist, in denen man die Transformation (2) durchführen kann und (3) erhält. Die Differentialgleichung  $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = f(x_1, x_2, x_3)$  z. B. ist elliptisch, denn  $Q(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$  hat bereits die für eine e. D. charakterist. Form. E. D.en beschreiben in der Physik stat. Zustände. Für e. D.en sind *Randwertprobleme* charakteristisch, d. h. Probleme, die in einem Gebiet  $G$  die Suche einer solchen Lösung der e. D. fordern, die auf dem Rand des Gebietes vorgegebene Werte annimmt. Solche Randwertprobleme sind für e. D. korrekt gestellte Probleme ( $\curvearrowleft$  partielle Differentialgleichung III.). Die Suche einer stetigen Funktion im Kreis  $x^2 + y^2 \leq 1$ , die für  $x^2 + y^2 < 1$  die zweidimensionale *Laplacesche Differentialgleichung*  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$  erfüllt und auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  vorgegebene Werte annimmt, ist z. B. ein solches Problem. Führt man Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  ein, so erhält man (4) und die gesuchte Funktion

$$(4) \quad \Delta \bar{u} = \bar{u}_{rr} + (1/r) \bar{u}_r + (1/r^2) \bar{u}_{\varphi\varphi}$$

$\bar{u}(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  hat dann für  $0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  die Differentialgleichung  $\Delta \bar{u} = 0$  und die Randbedingung  $\bar{u}(1, \varphi) = g(\varphi)$  zu erfüllen;  $g(\varphi)$  ist dabei eine auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  vorgegebene stetige Funktion. Die Lösung dieses Problems wird durch das *Poissonsche Integral* (5) gegeben.

$$(5) \quad \bar{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) g(\vartheta) d\vartheta}{1-2r \cos(\varphi-\vartheta) + r^2}$$

In der Bedingung (6), die an die Lösung der e. D.

$$(6) \quad \left( fu + g \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_S = h$$

auf dem Rand  $S$  eines Gebietes  $G$  gestellt werden kann, sind  $f, g$  und  $h$  vorgegebene Funktionen auf  $S$  und  $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot \mathbf{n}$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$

von  $S$  ist die *Normalenableitung* von  $u$  ( $\nearrow$  Gradient II.). Man unterscheidet im einzelnen *Randbedingungen 1. Art* mit  $u|_S = h$ , *Randbedingungen 2. Art*:  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = h$  und *Randbedingungen 3. Art*:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + fu \right) \Big|_S = h. \text{ Die dazu entsprechenden Randwertaufgaben werden als Randwertaufgaben erster, zweiter oder dritter Art bezeichnet. Für die Poisson'sche Differentialgleichung (7) bezeichnet man die}$$

$$(7) \quad \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} = -4\pi \rho(x_1, x_2, x_3)$$

Randwertaufgabe erster Art auch als *Dirichletsches Problem* und die Randwertaufgabe zweiter Art als *Neumannsches Problem*.

Die e. D.  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$  mit  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  wird *Laplace'sche Differentialgleichung* oder *Potentialgleichung* gen., und die Lösungen  $u(x, y, z)$  heißen *Potentialfunktionen* oder *harmon. Funktionen*.

II. Die *Potentialtheorie* ist die Theorie der Lösungen der Potentialgleichung  $\Delta u = 0$ . Für Potentialfunktionen lassen sich folgende wichtige Eigenschaften zusammenstellen:

II.1. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u(x, y, z)$  ist in einem Gebiet  $G$  genau dann eine Potentialfunktion, falls (8) für jede in  $G$  gelegene

$$(8) \quad \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

geschlossene Fläche  $S$  gilt;  $d\sigma$  ist dabei das *Oberflächenelement* der Fläche  $S$ , und  $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad } u \cdot \mathbf{n}$  bezeichnet die *Richtungsableitung* in Richtung der Normalen  $\mathbf{n}$  von  $S$ , die *Normalenableitung*. Dieser Satz folgt aus dem *Gauß-Ostrogradskischen Integralsatz* ( $\nearrow$  Integralsätze I.).

II.2. Ist  $G$  wie in II.1. ein Gebiet im Raum und  $S$  eine in  $G$  gelegene geschlossene Fläche mit dem nach außen zeigenden Normalenvektor  $\mathbf{n}$ , bezeichnet  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  irgendeinen Punkt in dem von  $S$  eingeschlossenen Gebiet und  $r$  den Abstand eines beliebigen Punktes  $P(x, y, z)$  von  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  mit  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ , dann gilt für eine beliebige Potentialfunktion  $u$  die *Greensche Darstellungsformel* (9) für Potentialfunktionen.

$$(9) \quad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) d\sigma$$

Eine Potentialfunktion  $u$  ist danach im Innern eines von einer geschlossenen Fläche  $S$  eingeschlossenen

Gebietes völlig bestimmt, wenn man nur die Werte der Funktion  $u$  und der Normalenableitung  $\frac{\partial u}{\partial n}$

auf der Fläche  $S$  kennt. Wählt man für  $S$  eine Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt  $P_0$  und dem Radius  $R$ , so gilt (10) auf  $S$ . Mit (8) folgt dann die

$$(10) \quad \frac{\partial(1/r)}{\partial n} = \frac{\partial(1/r)}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}, \quad r = R = \text{const}$$

*Gauß'sche Mittelwerteigenschaft* (11) für Potentialfunktionen.

$$(11) \quad u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u d\sigma$$

II.3. Ist  $u$  in  $G$  eine Potentialfunktion und in  $G \cup S$  stetig, wobei  $S$  der Rand von  $G$  ist, so werden das *Maximum* und das *Minimum* von  $u$  auf dem Rand  $S$  angenommen, es sei denn, in  $G$  gilt  $u = \text{const}$ . Diese Eigenschaft wird als *Maximum-Minimum-Prinzip* für harmon. Funktionen bezeichnet. Sie wird wesentlich dazu benutzt, um die Eindeutigkeit des Dirichletschen und des Neumannschen Problems zu beweisen.

III. Wichtige *Potentialfunktionen* erhält man aus den folgenden Betrachtungen.

III.1. Man nennt (12) das *Volumenpotential* oder das

$$(12) \quad u(x, y, z) = \iiint_G \frac{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{r} d\bar{v}$$

*Newtonsche Potential* über das beschränkte Gebiet  $G$  mit der *Dichte*  $f$ ; in ihm bezeichnet  $d\bar{v}$  das *Volumenelement* von  $G$  und  $r^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2$  den Abstand des Integrationspunktes  $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  von  $P(x, y, z)$ . Ist  $f$  in  $G$  und auf dem Rand  $S$  von  $G$  stetig differenzierbar, so gilt  $\Delta u = 0$  für alle Punkte  $P(x, y, z) \notin G$ , und  $\Delta u = -4\pi f$  für alle Punkte  $P \in G$ . Die Differentialgleichung  $\Delta u = -4\pi f$  bezeichnet man auch als die *Poisson'sche Differentialgleichung* im Raum. Ebenso bildet  $u(x, y, z) = c/r$  mit  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$  eine *Potentialfunktion* in allen Punkten  $P(x, y, z) \neq P_0(x_0, y_0, z_0)$ .

III.2. Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  erhält man durch die *Separation der Variablen* ( $\nearrow$  partielle Differentialgleichung I.). Macht man den Ansatz  $u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$ , so folgt aus  $\Delta u = 0$  zunächst (13) und dann (14).

$$(13) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2, \quad -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2$$

$$(14) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = k^2, \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = l^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -(k^2 + l^2)$$

Aus diesen *gewöhnl. Differentialgleichungen* erhält man die harmon. Funktionen  $u(x, y, z) = e^{kx+l y+m z}$ . Dabei können  $k, l$  und  $m$  beliebige komplexe Zahlen sein, die die Bedingungen  $k^2 + l^2 + m^2 = 0$  erfüllen. Für  $k = l = 0$  ergeben sich die harmon. Funk-

tionen  $u(x, y, z) = (a_1 + b_1x)(a_2 + b_2y)(a_3 + b_3z)$  mit beliebigen reellen Zahlen  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ . Ebenso erhält man spezielle harmon. Funktionen in Zylinderkoordinaten  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ , indem man den Ansatz  $u(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z)$  in den Ausdruck (15) für  $\Delta u$  in Zylinderkoordinaten einsetzt, und in Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$ , indem man den Ansatz  $u(r, \varphi, \vartheta) = R(r) \Phi(\varphi) \Theta(\vartheta)$  in den Ausdruck (16) für  $\Delta u$  in Polarkoordinaten einsetzt.

$$(15) \quad \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

derkoordinaten einsetzt, und in Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$ , indem man den Ansatz  $u(r, \varphi, \vartheta) = R(r) \Phi(\varphi) \Theta(\vartheta)$  in den Ausdruck (16) für  $\Delta u$  in Polarkoordinaten einsetzt.

$$(16) \quad \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0$$

**III.3. Einige Transformationen im dreidimensionalen Raum** lassen die Eigenschaft einer Funktion, Potentialfunktion zu sein, unverändert, z. B. die *Kelvin-Transformation*, d. h. die Spiegelung an der Oberfläche der Kugel mit dem Mittelpunkt  $O(0, 0, 0)$  und dem Radius  $R$ . Die Funktion  $\bar{u}(r, \varphi, \vartheta) = (R/r) u(R^2/r, \varphi, \vartheta)$  ist eine Potentialfunktion in Polarkoordinaten, wenn bereits  $u(r, \varphi, \vartheta)$  eine solche war. Aus  $u = 1/r$  wird z. B. die Potentialfunktion  $\bar{u} = 1/R = \text{const.}$

**IV.** Die e. D. (17) wird als *zweidimensionale Laplacesche Differentialgleichung* bezeichnet. Es lassen

$$(17) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sich ganz ähnl. Überlegungen wie im Fall der dreidimensionalen Laplaceschen Differentialgleichung anstellen. Die Lösungen dieser e. D. stehen im engen Zusammenhang mit der Funktionentheorie. Der Realteil  $u(x, y)$  und der Imaginärteil  $v(x, y)$  jeder komplexen analyt. Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $z = x + iy$  sind zweidimensionale Potentialfunktionen, d. h., es gilt  $\Delta u = 0$  und  $\Delta v = 0$ . Diese beiden Potentialfunktionen heißen *zueinander konjugiert*. Aus  $f(z) = \ln z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan (y/x)$  erhält man z. B. die beiden zueinander konjugierten Potentialfunktionen  $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $v(x, y) = \arctan (y/x)$ . Die Potentialfunktion  $\ln r$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  bezeichnet man als *logarithm. Potential*. Zur kanonischen Form der e. D.  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung III. **elliptische Funktion**: komplexe doppelperiod. Funktion, deren einzige Singularitäten in der endl. z-Ebene Pole sind und deren primitive Perioden  $w_1, w_2$  ein nichtreelles Verhältnis bilden. Es gilt danach  $f(z + mw_1 + nw_2) = f(z)$  für  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  mit  $\text{Im} (w_1/w_2) \neq 0$ , so daß der Wertevorrat von  $f(z)$  in dem *Fundamentalparallelogramm*  $[0, w_1, w_1 + w_2, w_2]$  bereits einmal vollständig auftritt und sich in allen anderen *Periodenparallelogrammen*  $[mw_1 + nw_2, (m+1)w_1 + nw_2, (m+1)w_1 + (n+1)w_2, mw_1 + (n+1)w_2]$  lediglich wieder-

holt. Beispiele ellipt. Funktionen sind die *Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion* als Umkehrfunktion des ellipt. Integrals (1) mit den komplexen Konstanten

$$(1) \quad z = \int_{\infty}^{p(z)} \frac{dw}{\sqrt{4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3)}}$$

$e_1, e_2, e_3$  und die *Jacobischen ellipt. Funktionen*. **elliptische Geometrie**  $\nearrow$  nichteuklidische Geometrie III.

**elliptischer Punkt**  $\nearrow$  Krümmung I.

**elliptisches Integral**: Integral (1), dessen Integrand eine rationale Funktion von  $x$  und der Quadratwurzel aus einem Polynom dritten bzw. vierten Grades ist. Die e. I.e lassen sich nur in speziellen Fällen durch elementare Funktionen ausdrücken. Durch Substitutionen lassen sie sich auf e. I.e erster, zweiter bzw. dritter Gattung (2) zurückführen. Substituiert man in (2)  $t = \sin \varphi$ , so ergeben sich

$$(1) \quad \int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + e}) dx \text{ bzw. } \int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f}) dx$$

$$(2/1) \quad \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$(2/2) \quad \int \frac{(1-k^2t^2) dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$(2/3) \quad \int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

die e. I.e erster, zweiter bzw. dritter Gattung in der *Legendreschen Normalform* (3). Die entsprechenden bestimmten Integrale sind tabelliert und werden nach (4) bezeichnet.

$$(3/1) \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$(3/2) \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$(3/3) \quad \int \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$(4) \quad F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$\Pi(h, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+h \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

**elliptisches Paraboloid**  $\nearrow$  Paraboloid I.

**Empfänger**  $\nearrow$  Information II.

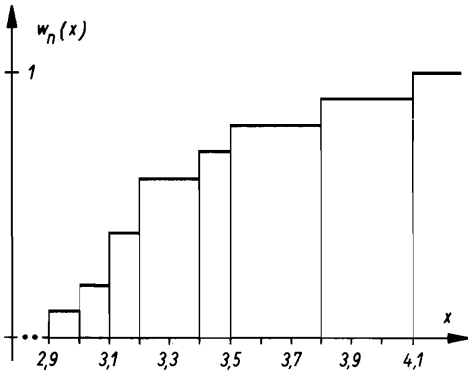
**empirische Kovarianz**  $\nearrow$  Stichprobenkovarianz.

**empirischer Korrelationskoeffizient**  $\nearrow$  Stichprobenkorrelationskoeffizient.

**empirischer Modalwert**  $\nearrow$  Mittelwerte III.

**empirischer Regressionskoeffizient**  $\nearrow$  Regressionsanalyse I.

**empirisches Mittel** ↗ Stichprobenmittel.  
**empirisches Moment** ↗ Stichprobenmoment.  
**empirische Streuung** ↗ Stichprobenvarianz, ↗ Streuungsmaße.  
**empirische Varianz** ↗ Stichprobenvarianz, ↗ Streuungsmaße.  
**empirische Verteilungsfunktion**: eine auf Grund einer Stichprobe berechnete *Treppenfunktion*, die eine ungefähre Vorstellung von der Verteilungsfunktion (↗ Zufallsgröße I.) des betrachteten Merkmals  $X$  in der Grundgesamtheit gibt. Für eine Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  vom Umfang  $n$  kann das entsprechende Merkmal  $X$  sowohl quantitativer wie auch qualitativer Natur sein. Für jede vorgegebene reelle Zahl  $x$  wird ausgezählt, wie viele Werte der Stichprobe kleiner als  $x$  sind. Ist  $m_n(x)$  diese Anzahl, so heißt  $w_n(x) = m_n(x)/n$  die e. V. der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$ . Haben z. B. 10 zufällig ausgewählte Neugeborene bei ihrer Geburt folgende Massen in kg: 3,0; 3,5; 3,2; 2,9; 3,1; 3,8; 4,1; 3,4; 3,1; 3,2, so zeigt die Abb. die zugehörige e. V.



Empir. Verteilungsfunktion für eine Stichprobe von 10 Geburtsgewichten

In welchem Sinne  $w_n(x)$  als Näherung für die wahre Verteilung  $F(x)$  angesehen werden kann, erkennt man, wenn man zur mathemat. Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  übergeht.  $M_n(x)$  ist die Anzahl der  $X_1, \dots, X_n$ , die kleiner als  $x$  sind, und  $W_n(x) = M_n(x)/n$  sind dann Zufallsgrößen. Ist  $D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |W_n(x) - F(x)|$ , so gilt der *Hauptsatz der mathemat. Statistik*, auch *Satz von Glivenko* gen.: Für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren die  $D_n$  fast sicher gegen Null, m. a. W.: für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Folge  $W_n(x)$  der e. V. en fast sicher gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion  $F(x)$  des Merkmals  $X$  in der Grundgesamtheit.  
**Endlichkeitssatz für Modelle** ↗ Widerspruchsfreiheit.

**Endomorphismus** ↗ Homomorphismus einer algebraischen Struktur in sich.  
**Enriques**, Federigo, geb. 5. 1. 1871 Livorno, gest. 14. 6. 1946 Rom. — Nach seiner Promotion 1891 in Pisa wirkte E. an der Universität von Bologna, übernahm 1902 eine Professur für Philosophie in Brüssel und kehrte danach als Professor der höheren Geometrie nach Rom zurück. Er arbeitete über

außerordentlich viele mathemat. und mathematisch-physikal. Probleme, z. B. über projektive und algebraische Geometrie, *Grundlagen der Mathematik* und *mathemat. Logik*, Relativitätstheorie und philosoph. Probleme.

**entartete Fläche** ↗ Fläche zweiter Ordnung I.  
**Entartung** ↗ Simplexalgorithmus I., II.3,4.  
**entgegengesetzter Vektor** ↗ Vektorraum II.  
**entgegengesetztes Element** ↗ Gruppe I.  
**entgegengesetzt liegende Winkel** ↗ Winkelpaare.  
**Enthaltenseinrelation** ↗ Relation II.  
**Entropie** ↗ Information II., ↗ Informationstheorie II.  
**entscheidbar** ↗ Aussagenkalkül II.

**Entscheidbarkeit**: *mathematische Logik* Relation zwischen einer Menge  $M$  und einer sie umfassenden Menge  $N$ , die genau dann zutrifft, wenn ein *Algorithmus* existiert, mit dessen Hilfe man für jedes Element  $x$  von  $N$  feststellen kann, ob  $x$  Element von  $M$  ist oder nicht. Die Menge aller Primzahlen z. B. ist entscheidbar bzgl. der Menge aller natürl. Zahlen. Eine präzise Fassung des Begriffs der E. erfordert eine präzise Definition des Algorithmusbegriffs. Ein zentrales *Entscheidungsproblem* ist dasjenige für eine Theorie, bei dem  $N$  die Menge aller formulierbaren Ausdrücke und  $M$  die Menge aller der Ausdrücke ist, die in der Theorie gelten. Seine Lösung hängt wesentlich von der Definition von  $M$  ab. Obwohl  $M$  bei axiomat. Theorien (↗ Axiomatik) aufzählbar ist, d. h., obwohl alle Elemente von  $M$  durch einen Algorithmus erzeugt werden können, braucht  $M$  nicht entscheidbar zu sein. Nach den vorliegenden Resultaten gilt als Faustregel, daß eine positive Lösung des E.sproblems um so weniger wahrscheinlich ist, je reichhaltiger die Theorie ist. Fundamental sind folgende positiven Ergebnisse: die E. der elementaren Arithmetik der reellen Zahlen und damit diejenige der auf jene reduzierbaren Theorien, z. B. die der elementaren Geometrie, die E. der elementaren Theorie der Booleschen Algebren und der elementaren Theorie der abelschen Gruppen. Negative Resultate sind z. B. die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik der ersten Stufe, der Mengenlehre und damit die der Prädikatenlogiken der höheren Stufen und auch die der elementaren Zahlentheorie. S. a. Aussagenkalkül II.

**Entscheidungsbereich** ↗ Bellmannsche Funktionalgleichung.  
**Entscheidungsfunktion** ↗ Optimierung, dynamische II.  
**Entscheidungsgehalt** ↗ Information II.  
**Entscheidungsproblem** ↗ Entscheidbarkeit, ↗ Prädikatenkalkül V.  
**Entscheidungsvariable** ↗ Optimierung, dynamische, I.  
**Entwicklungssatz** ↗ Vektorprodukt II.

**Entwicklung von Funktionen**: I. Bestimmung einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ , die in einer Umgebung von  $x = x_0$  eine gegebene Funktion  $f(x)$  zur Summenfunktion hat, d. h.,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = f(x)$  für

alle  $x$  mit  $|x - x_0| < a$ . Eine gegebene Funktion  $f(x)$  ist dann und nur dann für  $|x - x_0| < a$  in eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  entwickelbar, wenn  $f(x)$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < a$  beliebig oft differenzierbar ist und für das Restglied  $R_n(x)$  aus dem Taylorsche Satz  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  gilt. Unter diesen Voraussetzungen ist die Taylorsche Reihe

$\sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$  die Entwicklung der Funktion  $f(x)$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < a$ . Das Restglied kann nach (1) oder (2) durch die  $(n + 1)$ -te Ableitung der zu entwickelnden Funktion ausgedrückt werden.

$$(1) \quad R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))$$

mit  $0 < \vartheta < 1$

$$(2) \quad R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} (1 - \vartheta')^n f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta'(x - x_0))$$

mit  $0 < \vartheta' < 1$

Diese Methode der E. einer Funktion in eine Potenzreihe ist beschwerlich, wenn man eine allgemeine Formel für die Ableitungen  $f^{(n)}(x_0)$  herleiten muß. Sie ist aber brauchbar, wenn nur die ersten Glieder der E. interessieren.

**II. Entwicklung der trigonometr. Funktionen** (s. a. komplexwertige Funktion, elementare, II.). Für eine Potenzreihenentwicklung der Funktion  $f(x) = \cos x$  ergeben sich Ableitungen  $f^{(n+1)}(x)$  aus (3), und das Restglied (1) genügt für  $x_0 = 0$  der Abschätzung (4), d. h., wegen der Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^{n+1}/(n + 1)!$  kann auf  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  für alle  $x$  geschlossen werden. Folglich ist mit (5) die Taylorsche Reihe (6) die gesuchte Entwicklung von  $f(x) = \cos x$  für alle  $x$ .

$$(3) \quad f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (-1)^{(n+2)/2} \sin x & \text{für } n = 0, 2, 4, \dots \\ (-1)^{(n+1)/2} \cos x & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$(4) \quad R_n(x) = \left| \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!}$$

wegen  $|f^{(n+1)}(\vartheta x)| \leq 1$

$$(5) \quad \begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (-1)^k; \\ f^{(2k+1)}(0) &= 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} f(x) = \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Aus der gliedweisen Differentiation der Potenzreihe (6) innerhalb des Konvergenzintervalls folgt die Entwicklung (7) von  $\sin x$  für alle  $x$ .

$$(7) \quad \begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Für die Funktion  $f(x) = \tan x = \sin x / \cos x$  existiert eine E. in der Umgebung von  $x_0 = 0$ , da wegen  $\cos 0 = 1 \neq 0$  der Quotient der Potenzreihen von  $\sin x$  und  $\cos x$  gebildet werden kann ( $\nearrow$  Potenzreihe). Setzt man  $\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$ , da  $\tan x$  eine

ungerade Funktion ist, so kann man die Koeffizienten  $a_{2k+1}$  aus  $\cos x \cdot \tan x = \sin x$ , d. h. aus  $(1 - x^2/2! + x^4/4! \mp \dots)(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots) = x - x^3/3! + x^5/5! \mp \dots$  durch Koeffizientenvergleich ermitteln. Man erhält für  $\tan x$  die Entwicklung (8), die sicher in einer Umgebung von  $x = 0$  gilt; es läßt sich zeigen, daß sie sogar für  $|x| < \pi/2$  richtig ist. Ähnl. entwickelt man die

$$(8) \quad \tan x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + 17x^7/315 + \dots$$

Funktionen  $x/\sin x$ ,  $x \cot x$  und  $1/\cos x$  in der Umgebung von  $x = 0$  in Potenzreihen. Die Funktion  $\cot x$  ist für  $x = 0$  nicht differenzierbar, so daß eine E. von  $\cot x$  in der Umgebung von  $x = 0$  nicht möglich ist. Aber  $x \cot x$  erfüllt alle Forderungen.

Die E. der Funktion  $\sin^2 x$  erhält man nach (9) einfach durch Multiplikation der Potenzreihe für  $\sin x$  mit sich selbst.

$$(9) \quad \begin{aligned} \sin^2 x &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k + 1)!} \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sum_{s=0}^k \frac{1}{(2s + 1)!} \frac{1}{(2k - 2s + 1)!} \right) \cdot x^{2k+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+2}}{(2k + 2)!} \end{aligned}$$

wegen  $\sum_{s=0}^k \frac{1}{(2s + 1)!} \frac{1}{(2k - 2s + 1)!} = \frac{1}{(2k + 2)!} \sum_{s=0}^k \binom{2k + 2}{2s + 1} = \frac{1}{2} \frac{2^{2k+2}}{(2k + 2)!}$

Da die Potenzreihe für  $\sin x$  absolut konvergent für alle  $x$  ist, gilt die E. von  $\sin^2 x$  ebenfalls für alle  $x$  ( $\nearrow$  absolute Konvergenz von Reihen).

Eine andere Methode verwendet die Additionstheoreme ( $\nearrow$  Winkelfunktion VI.); z. B. gilt  $\cos^2 x = 1/2(1 + \cos(2x))$ , und unter Verwendung der E. der Funktion  $\cos(2x)$  erhält man (10). S. a. Bernoullische Zahlen.

$$(10) \quad \cos^2 x = 1/2 + 1/2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$$

Mit Zahlenkoeffizienten für die Anfangsglieder erhält man für die wichtigsten trigonometr. Funktionen die folgenden Potenzreihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - \frac{x^8}{315} \pm \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} \mp \dots \text{ für } |x| < \infty$$



$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} \pm \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^4}{8} - \frac{61x^6}{240} \pm \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \text{ für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \dots \text{ für } |x| < \pi$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \dots \text{ für } |x| < \pi$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \dots \text{ für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

III. Entwicklung der Exponentialfunktionen und Hyperbelfunktionen: Die Funktion  $f(x) = e^x$  ist beliebig oft differenzierbar, und es gilt  $f^{(n)}(x) = e^x$ . Weiterhin berechnet man wegen (11) den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  für alle  $x$ . Wegen  $f^{(k)}(0) = 1$  ergibt sich danach die für alle  $x$  gültige E. (12).

$$(11) \quad |R_n| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$(12) \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Für  $a^x = e^{x \ln a}$  mit  $a > 0$  erhält man dann die für alle  $x$  gültige E. (13). Die Reihenentwicklungen der

$$(13) \quad a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^k}{k!} x^k$$

Hyperbelfunktionen  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  bzw.  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  lassen sich aus der Reihe (12) herleiten. Man erhält (14) und (15).

$$(14) \quad \sinh x = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$(15) \quad \cosh x = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right)$$

Die E. für  $\tanh x = \sinh x / \cosh x$  und  $x \coth x = x \cosh x / \sinh x$  berechnet man durch Division der entsprechenden Potenzreihen. Man erhält für die wichtigsten aus der Exponentialfunktion hergeleiteten Funktionen die folgenden Anfangsglieder von Potenzreihen (s. a. komplexwertige Funktion, elementare, II., III.):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2!} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!} x^3 + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} \pm \dots \text{ für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$x \coth x = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \frac{2x^6}{945} \mp \dots \text{ für } |x| < \infty$$

IV. Entwicklung der Logarithmusfunktionen: Die Funktion  $f(x) = \ln(1+x)$  ist für  $|x| < 1$  differenzierbar, und es gilt  $f'(x) = 1/(1+x)$ . Die Ableitung kann für  $|x| < 1$  in eine Potenzreihe entwickelt werden:  $1/(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  (↗ geometrische Reihe). Durch gliedweise Integration erhält man dann (16) für  $|x| < 1$ . Diese Reihe (16a) für

$$(16) \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$(16a) \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$\ln(1+x)$  konvergiert für nicht sehr große  $x$  recht langsam, d. h., man muß sehr viele Glieder aufsummieren, um einen brauchbaren Näherungswert für die Summe dieser Reihe zu erhalten. Deshalb eignet sich diese Reihe wenig zur Berechnung der Logarithmen. Aus  $\ln[(1+x)/(1-x)] = \ln(1+x) - \ln(1-x)$  erhält man eine für  $|x| < 1$  besser konvergierende Reihe (17).

$$(17) \quad \ln[(1+x)/(1-x)] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Man erhält:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

für  $|x| < 1$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right)$$

für  $|x| < 1$

V. Die binomische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$  mit einer beliebigen reellen Zahl  $a$  ist für  $|x| < 1$  konvergent. Für die Summenfunktion  $f(x)$  zeigt man durch gliedweise Differentiation der Reihe, daß die gewöhnl. Differentialgleichung  $(1+x)f'(x) = af(x)$  gilt, die von  $f(x) = c(1+x)^a$  mit einer beliebigen Konstanten  $c$  gelöst wird; wegen  $f(0) = 1$  folgt  $c = 1$ . Damit ergibt sich die E. (18) für  $|x| < 1$ .

$$(18) \quad (1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \binom{a}{3} x^3 + \dots$$

Ist  $a$  eine natürl. Zahl  $n$ , so folgt aus  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$  der binom. Lehrsatz  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ , da  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$  gilt. Für  $a = -1$  ergibt

sich die geometr. Reihe  $1/(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ ,  
denn  $\binom{-1}{k} = (-1)^k$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$

Die binom. Reihe kann zur näherungsweisen Berechnung von Wurzeln und Potenzen mit beliebigen Exponenten verwendet werden (Näherungsformeln III.). Spezialfälle der binom. Reihe sind in der folgenden Zusammenfassung angeführt.

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \dots$$

für  $|x| < 1$

$$\sqrt[3]{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{3} x - \frac{2}{3 \cdot 6} x^2 \pm \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \dots$$

für  $|x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2} x + \frac{3}{2 \cdot 4} x^2 \mp \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

für  $|x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{3} x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \dots$$

für  $|x| < 1$

**VI. Entwicklung der Arkus- und Areefunktionen:** Die ersten Ableitungen dieser Funktionen sind Ausdrücke, die sich mit Hilfe der binom. Reihe entwickeln lassen. Durch gliedweise Integration erhält man dann die gewünschte E. der Ausgangsfunktion. Für die Ableitung der in dem Intervall  $-1 \leq x \leq 1$  definierten Funktion  $f(x) = \arcsin x$  ergibt sich die Reihe (19) mit dem Konvergenzradius 1, folglich nach gliedweiser Integration innerhalb des Konvergenzintervalls  $-1 < x < 1$  und unter Berücksichtigung von (20) die Entwicklung (21).

$$(19) \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k}$$

$$(20) \quad \arcsin 0 = 0 \text{ und } \binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

$$(21) \quad \arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

Ebenso verfährt man mit der Funktion  $\arccos x$  und erhält die E. (22).

$$(22) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

Aus diesen E.en erkennt man sofort den Zusammenhang  $\arccos x + \arcsin x = \pi/2$ . Die E. (23) für die Funktion  $g(x) = \arctan x$  erhält man durch

gliedweise Integration aus  $g'(x) = 1/(1+x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^{2k}$  für  $|x| < 1$ .

$$(23) \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

Aus  $\operatorname{arccot} x = \pi/2 - \arctan x$  folgt die E. (24).

$$(24) \quad \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

Die E.en (25) für  $\operatorname{arsinh} x$  und  $\operatorname{artanh} x$  erhält man ebenfalls durch gliedweise Integration aus den Reihen für ihre Ableitungen. Die Ableitung der Funktion  $y = \operatorname{arcosh} x$  für  $1 \leq x < \infty$  und  $0 \leq y < \infty$  läßt sich in die für jedes Intervall  $[t, 2]$ ,  $t > 1$ , gleichmäßig konvergente Reihe (26) entwickeln, deren gliedweise Integration (27) liefert. Unter Berücksichtigung von (28) erhält man schließlich die gesuchte E. (29). Verfahren man ähnlich bei der Funktion  $\operatorname{arcoth} x$ , so erhält man (30).

$$(25) \quad \operatorname{arsinh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

$$(25a) \quad \operatorname{artanh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für } |x| < 1$$

$$(26) \quad (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{1}{x^{2k+1}}$$

$$(27) \quad \int_2^t (\operatorname{arcosh} x)' dx = \operatorname{arcosh} t - \operatorname{arcosh} 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \int_2^t \frac{dx}{x^{2k+1}} = \ln \frac{t}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{1}{2k(2^{2k})} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{1}{2k(2^{2k})}$$

$$(28) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k-1} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sum \binom{-1/2}{k} (-1)^k \frac{1}{2k(2^{2k})} = 2 \ln 2 - \ln(2 + \sqrt{3}) = 2 \ln 2 - \operatorname{arcosh} 2$$

$$(29) \quad \operatorname{arcosh} x = \ln(2x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \cdot \frac{1}{2k} x^{-2k} \text{ für } x > 1$$

$$(30) \quad \operatorname{arcoth} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{-(2k+1)} \text{ für } |x| > 1$$

Schreitet eine Reihe mit Potenzen von  $x^{-1}$  fort, so spricht man von einer E. in  $x = \infty$ .

Daraus ergeben sich für die wichtigsten Arkus- und Areafunktionen die folgenden Potenzreihen:

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \text{ für } |x| < 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots \text{ für } |x| < 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots \text{ für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \mp \dots \text{ für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arsinh} x = x - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \pm \dots \text{ für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(2x) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} x^{-2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 4} x^{-4} - \dots \text{ für } x > 1$$

$$\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \text{ für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \text{ für } |x| > 1$$

**VII. Spezielle Funktionen:** Es gibt Integrale, die sich nur durch eine Reihenentwicklung auswerten lassen. Für das *Gaußsche Fehlerintegral*  $\Phi(x)$  z. B., das in der Wahrscheinlichkeitstheorie auftritt, erhält man (31), wenn man die für alle  $t$  konvergente Potenzreihe (32) in  $[0, x]$  gliedweise integriert. Ebenso berechnet man den *Integralsinus*  $\operatorname{Si}(x)$  in (33). Zur Entwicklung des *Integrallogarithmus*  $\operatorname{Li}(x)$   $= \int_0^x dt/\ln t$  muß das Integral für  $x > 1$  wegen der Singularität bei  $t = 1$  im Sinne von (34) aufgefaßt werden. Man berechnet in (35)  $\operatorname{Li}(e^{-u})$  nach der Substitution  $t = e^{-s}$ . Die dabei auftretende Konstante  $C = 0,57721 \dots$  ist die *Mascheron.* oder *Eulersche Konstante*. Ähnliche Überlegungen führen auf die Entwicklung (36) des *Integralkosinus*  $\operatorname{Ci}(x)$ .

$$(31) \quad \Phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ für alle } x$$

$$(32) \quad e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

$$(33) \quad \operatorname{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$(34) \quad \operatorname{Li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln t} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right)$$

$$(35) \quad \operatorname{Li}(e^{-u}) = \int_0^{e^{-u}} \frac{dt}{\ln t} = - \int_u^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \underbrace{\int_0^1 \frac{1-e^{-s}}{s} ds - \int_1^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds}_{C} + \int_1^u \frac{ds}{s} - \int_0^u \frac{1-e^{-s}}{s} ds = C + \ln |u| - \int_0^u \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{s^{k-1}}{k!} ds = C + \ln |u| - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k \cdot k!} \text{ für alle } u$$

$$(36) \quad \operatorname{Ci}(x) := - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \frac{x^{2k}}{2k} \text{ für } x > 0$$

Zusammenfassend erhält man folgende Potenzreihen:

$$(31a) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{1 \cdot x^3}{1! \cdot 3} + \frac{1 \cdot x^5}{2! \cdot 5} - \frac{1 \cdot x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \text{ für } |x| < \infty$$

$$(33a) \quad \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{1 \cdot x^3}{3! \cdot 3} + \frac{1 \cdot x^5}{5! \cdot 5} - \frac{1 \cdot x^7}{7! \cdot 7} \pm \dots \text{ für } |x| < \infty$$

$$(35a) \quad \operatorname{Li}(e^{-u}) = \int_0^{e^{-u}} \frac{dt}{\ln t} = C + \ln |u| - u + \frac{1 \cdot u^2}{2! \cdot 2} - \frac{1 \cdot u^3}{3! \cdot 3} \pm \dots \text{ für } |u| < \infty$$

$$(36a) \quad \operatorname{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = C + \ln x - \frac{1 \cdot x^2}{2! \cdot 2} + \frac{1 \cdot x^4}{4! \cdot 4} \mp \dots \text{ für } x > 0$$

**Envelope, Einhüllende, Hüllkurve:** Kurve, die jede Kurve einer einparametrischen Kurvenschar berührt und in jedem ihrer Punkte von einer Kurve der Schar berührt wird; z. B. ist die Astroide eine E. (↗ Zyklode III.). Ist  $f(x, y, \lambda) = 0$  die Gleichung der Kurvenschar mit dem Scharparameter  $\lambda$ , so kann dieser mit Hilfe der zusätzl. Gleichung  $\partial f / \partial \lambda = 0$  eliminiert und die Gleichung der E. bestimmt werden. In Verallgemeinerung spricht man auch von einer *Hüllfläche* in bezug auf eine Flächenschar bzw.

von einer *Hüllhyperfläche* in bezug auf eine einparametrische Schar von Hyperflächen.

**Epitrochoide** ↗ Zyklode VI.

**Epizykloide** ↗ Zyklode II.

**Eratosthenes** von Kyrene, geb. etwa 276 v. u. Z., gest. etwa 194 v. u. Z. — Seit 235 war er Vorsteher der Bibliothek von Alexandria. Auf ihn geht die erste Bestimmung des *Erdumfangs* und ein Verfahren zur Gewinnung „aller“ Primzahlen zurück, das *Sieb des E.* (↗ Primzahl III.).

**Erdellipsoid**: Bezugsfläche zur Lagebestimmung von Punkten auf der Erde durch Koordinaten. Das *Krassowski-E.* ist als Rotationsellipsoid bestimmt durch die große Äquatorhalbachse  $a = 6\,378,245$  km und die Abplattung  $(a - b)/a = 1 : 298,3$ , aus der sich der Polradius  $b = 6\,356,863$  km ergibt. In erster Näherung wird das E. als *Kugel* mit dem Radius  $R = 6\,371,221$  km angesehen. Das E. ist berechnet worden nach Messungen der höheren Geodäsie. Aus der Analyse des *Bahnverlaufs* der künstl. Erdsatelliten hat sich ein *dreiaxsiges Ellipsoid*, als bessere Annäherung an die wahre Gestalt, das *Geoid*, ergeben. Das Geoid ist physikalisch als Normalfläche zur Richtung der Erdanziehung in jedem Punkt festgelegt.

**Erdös/Posa, Satz von** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.3.

**Erdvermessung** svw. Geodäsie.

**Ereignis** svw. zufälliges Ereignis, s. a. Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, I.; Netzplantechnik I.

**Ereignisalgebra** ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, I.

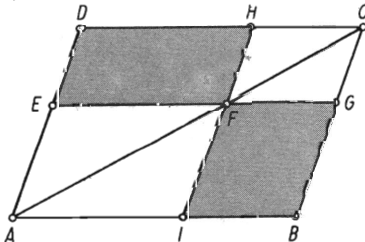
**Ereignisfeld** ↗ zufälliges Ereignis I., ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische I.

**erfüllbar** ↗ Prädikatenlogik III.

**Ergänzen** ↗ Subtraktion II.

**Ergänzungskegel** ↗ Kegel III.

**Ergänzungsparallelogramm**: jedes der beiden Parallelogramme, die aus einem gegebenen Parallelogramm  $ABCD$  entstehen, wenn durch einen inneren Punkt  $F$  einer Diagonale die Parallelen zu den Seiten gezogen werden und die Parallelogramme außer  $F$  keinen Punkt dieser Diagonalen enthalten. Die beiden E.e sind flächengleich (Abb.), d. h.  $|EFHD| = |IBGF|$ .



Ergänzungsparallelogramme  $EFHD$  und  $IBGF$

**Ergänzungspyramide** ↗ Pyramide III.

**Ergiebigkeit** ↗ Divergenz I.

**Erlanger Programm** *Geometrie*: von F. Klein in seiner Antrittsvorlesung 1872 in Erlangen entwickelte Auffassung einer systemat. Klassifikation geo-

metr. Teildisziplinen, die von der Auffassung ausgeht, daß die Geometrie die Eigenschaften von Figuren untersucht, die bei Lageänderungen erhalten bleiben, und daher eine Klassifizierung mittels der jeweils betrachteten mögl. Lageänderungen, d. h. der zugelassenen geometr. Transformationen anstrebt. Bei jeder der sich so ergebenden Geometrien bilden die zugehörigen Transformationen bzgl. ihrer Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *Transformationsgruppe* dieser Geometrie. Die in der betreffenden Geometrie untersuchten Eigenschaften bleiben bzgl. aller Transformationen der Transformationsgruppe invariant.

**I. Die elementare euklid. Geometrie** oder *Kongruenzgeometrie* ist die Geometrie des Anschauungsraumes, deren Transformationsgruppe die Gruppe der *Bewegungen*, der Translationen, Drehungen oder Spiegelungen ist, die alle längen- und winkeltreue Abbildungen sind.

**II.** Verzichtet man bei den zugelassenen Transformationen auf die Längentreue und läßt auch *Punktstreckungen* zu, so erhält man die *äquiforme Gruppe* der Transformationen, die die *Ähnlichkeits-* oder *äquiforme Geometrie* kennzeichnet.

**III.** Verzichtet man auch auf die Winkeltreue, so gelangt man zur Transformationsgruppe der bei Koordinatendarstellung *linearen Transformationen*, d. h. der Kollineationen, die das Teilverhältnis je dreier Punkte erhalten. Sie kennzeichnen die *affine Geometrie*.

**IV.** Fügt man schließl. zum Anschauungsraum noch unendlich ferne oder *uneigentl. Punkte* als Schnittpunkte von Parallelen hinzu, so lassen die Kollineationen in diesem Raum das Doppelverhältnis von je vier Punkten invariant und bilden die Gruppe der *projektiven Transformationen*, deren zugehörige Geometrie die *projektive Geometrie* ist.

**V.** Außer den bisher genannten *klass. Geometrien*, die alle durch Einschränkung der Transformationsgruppe aus der projektiven Geometrie hervorgehen, kann man auf diese Art von der projektiven Geometrie auch zur ellipt. und zur hyperbol. Geometrie gelangen, d. h., die nichteuklid. Geometrien lassen sich auch nach dem E. P. klassifizieren. — Allerdings reicht das E. P. nicht aus für eine vollständige Klassifizierung aller Geometrien; z. B. kann die der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegende *Riemannsche Geometrie* durch diese Klassifizierung nicht erfaßt werden (s. a. Liesche Gruppen).

**Erlangverteilung** [nach Angner Krarup ERLANG (1878—1929)]: Verteilung einer Zufallsgröße mit der Dichte  $\varphi_k(t) = 0$  für  $t \leq 0$  und  $\varphi_k(t) = \nu!(\nu t)^{k-1}/(k-1)! e^{-\nu t}$  für  $t > 0$  mit positivem reellem  $\nu$  und positivem ganzem  $k$ . Die E. tritt besonders in der Bedienungstheorie als Verallgemeinerung der Exponentialverteilung auf, da sie die Bedienungszeitverteilung oft besser beschreibt. Sie ist die Verteilung der Summe von  $k$  unabhängig exponentialverteilten Summanden.

**Erlebenswahrscheinlichkeit** ↗ Sterbetafel II.

**Erlebnisfallversicherung** ↗ Lebensversicherung III.

**Ermüdungsfehler** ↗ Zuverlässigkeitstheorie.

**Ernennungsproblem** svw. Zuordnungsproblem.

**Erneuerungsgleichung** ↗ Erneuerungstheorie.

**Erneuerungstheorie:** *Operationsforschung* geordnete Darstellung der Kriterien, nach denen gealterte oder defekte Elemente durch reparierte oder neue ersetzt werden, z. B. Autos in einem Fuhrpark, Leuchtstoffröhren in einem Warenhaus, Bäume in einem Waldstück oder Schienen in einem Eisenbahnnetz (s. a. Zuverlässigkeitstheorie). Die betrachtete Gesamtheit heißt *einheitlich*, wenn die für Funktion und Lebensdauer wichtigen Parameter der Elemente gleich sind. In anderen Eigenschaften können sich die Elemente unterscheiden. Bei einer *asymptotisch einheitlichen* Gesamtheit darf sich der Vektor  $(p_1, p_2, p_3, \dots)^T$  der Wahrscheinlichkeiten, daß die Elemente 1, 2, 3, ... Zeiteinheiten funktionieren, mit jedem Jahrgang ändern, ihre Werte müssen aber für in der Zukunft liegende Jahrgänge einander immer ähnlicher werden. Meist wird die Gesamtheit als einheitlich oder asymptotisch einheitlich angesehen.

Das einfachste Modell entsteht, wenn Systeme mit nur einem Element betrachtet werden, das genau dann durch ein neues gleichartiges ersetzt wird, wenn es defekt ist. Beginnt man im Zeitpunkt  $t = 0$  mit einem neuen Element, d. h., ist die Ersetzungswahrscheinlichkeit  $u_0 = 1$  für  $t = 0$ , so ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit  $u_n$ , daß im  $n$ -ten Zeitpunkt ersetzt werden muß, die *Erneuerungsgleichung*  $u_n = \sum_{k=1}^n p_k u_{n-k}$ . Bezeichnet man mit  $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k$  den *Erwartungswert der Lebensdauer*, so gilt unter schwachen Voraussetzungen  $1/\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , d. h., die erwartete Lebensdauer ist umgekehrt proportional zur stationären Ersetzungswahrscheinlichkeit.  $M(r) = \sum_{k=1}^r u_k$  heißt *Erneuerungsfunktion*; ihr Wert gibt die mittlere Anzahl der Ersetzungen bis zum Zeitpunkt  $r$  an. Hat die Zufallsgröße  $W$  mit  $p_k = P\{W = k\}$  noch ein zweites endliches Moment, so gilt (1) mit  $\sigma^2 = D^2\{W\}$  für  $r \rightarrow \infty$ .

$$(1) \quad M(r) = (r + \beta)/\mu + 0(1)$$

mit  $\beta = (\sigma^2 + \mu - \mu^2)/(2\mu)$

Bei Anwendungen treten meist Systeme mit mehreren Elementen auf, es überlagern sich dann die Erneuerungsprozesse.

Ziel der E. ist es, nicht nur die voraussichtl. Anzahl neu einzusetzender Elemente zu bestimmen, sondern Erneuerungsregeln zu finden, die, etwa bzgl. der Kosten, günstig sind, z. B. werden auch vorbeugende Erneuerungen vorgenommen, wenn ohne große Mehrkosten auch stark gealterte Elemente ersetzt werden. Gegenstand der E. ist auch das Verhältnis von Generalreparaturen, die mathematisch gesehen das Alter der Elemente senken, zum Einsatz völlig neuer Elemente, deren Alter auf 0 gesenkt wird.

**Ersatzfunktion** ↗ Interpolation II., ↗ Stetigkeit II.1.

**Ersetzbarkeitstheorem** ↗ Aussagenkalkül II.

**Ersetzungssaxiom** ↗ Mengenlehre II.

**erstes Integral** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung II.

**erwartungstreue Schätzung** ↗ Punktschätzung.

**Erwartungswert:** I. wichtige Maßzahl zur Charakterisierung der Verteilung einer Zufallsgröße  $X$ . Ist  $F(x)$  ihre Verteilungsfunktion und existiert (1), so existiert der E.  $EX$  und wird gemäß (2) definiert

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x)$$

$$(2) \quad EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

(↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III.). Der E. ist das Anfangsmoment 1. Ordnung (↗ Moment I.). Ist  $X$  eine diskrete Zufallsgröße mit  $P(X = x_i) = p_i$ , so gilt  $EX = \sum_i x_i p_i$ . Ist  $X$  eine stetige Zufallsgröße mit der Dichte  $f(x)$ , so gilt (3). Genügt z. B.  $X$  einer *Poisson-Verteilung* mit dem

$$(3) \quad EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Parameter  $\lambda$ , so gilt (4). Genügt dagegen  $X$  einer

$$(4) \quad EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$$

*Normalverteilung* mit den Parametern  $a$  und  $\sigma$ , so gilt (5).

$$(5) \quad EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx = a$$

II. Der E. ist ein Maß für das *Zentrum der Verteilung* in folgendem Sinn: Deutet man die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Verteilung von Massen über die reelle Achse, z. B. im diskreten Fall die  $p_k$  als Massen, die in den Punkten  $x_k$  angebracht sind, so ist  $EX$  gerade der Schwerpunkt dieses Systems auf der reellen Achse. Für den E. gelten folgende Aussagen:

II.1.  $E(aX + b) = aEX + b$  für konstante Parameter  $a$  und  $b$ .

II.2.  $E(X + Y) = EX + EY$ .

II.3. Sind  $X, Y$  unkorreliert (↗ Korrelationskoeffizient), so gilt  $E(XY) = EX \cdot EY$ . Das ist insbes. erfüllt, wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig sind (↗ Unabhängigkeit von Zufallsgrößen).

III. Als E. eines Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$  bezeichnet man den Vektor  $(EX_1, \dots, EX_n)$ . Vgl. auch Stichprobenmittel.

**Erwartungswert der Lebensdauer** ↗ Erneuerungstheorie.

**erweitern** ↗ Brüche I.1.

**erweiterte Koeffizientenmatrix** ↗ lineares Gleichungssystem II.

**Erweiterung** ↗ Funktion VII.

**Erweiterungsfaktor** ↗ Brüche I.3., I.4.

**Erweiterungskörper** ↗ Körper II.

**Erzeugende** ↗ Kegel I., ↗ Zylinder I.

**erzeugende Funktion:** I. Funktion einer komplexen Variablen  $z$ , die für diskrete Zufallsgrößen, die nur die Werte 0, 1, 2, ... annehmen können, oft an Stelle der *charakterist. Funktion* benutzt wird. Für

$P(X = k) = p_k$  z. B. wird die e. F. der Zufallsvariablen  $X$  durch (1) definiert mit  $z$  als komplexem

$$(1) \quad \varphi(z) = \sum_k p_k z^k$$

Parameter. Die e. F.  $\varphi(z)$  ist eine in  $|z| < 1$  analyt. Funktion, die nach (2) für  $z \rightarrow e^{it}$  gegen die charakterist. Funktion  $\psi(t)$  von  $X$  konvergiert.

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow \exp(it)} \varphi(z) = \psi(t)$$

II. Die e. F.en haben zu den charakterist. Funktionen völlig analoge Eigenschaften:

II.1. Man kann mittels der e. F.en die Momente leicht berechnen, z. B.  $EX = \varphi'(1)$ .

II.2. Die e. F. einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen ist gleich dem Produkt der e. F.en der Summanden.

II.3. Es gilt eine Umkehrformel, d. h., der Zusammenhang zwischen e. F. und Verteilung ist eineindeutig.

II.4. Es gilt ein Grenzwertsatz, d. h., der Zusammenhang zwischen e. F. und Verteilung ist stetig.

Erzeugendensystem  $\nearrow$  Vektorraum IV.,  $\nearrow$  Linear kombination.

$\epsilon$ -Umgebung  $\nearrow$  Menge IV.,  $\nearrow$   $n$ -dimensionaler reeller Punkttraum,  $\nearrow$  Punktmenge.

et-Funktion  $\nearrow$  Aussagenlogik II.

**Euklid**, geb. um 365 v. u. Z., gest. um 300 v. u. Z. — Über sein Leben ist nichts Sicheres bekannt. Er soll nach PROKLOS Vorlesungen in Athen gehört und später nach PAPPUS am Musaion in Alexandria gelehrt haben. — Sein Hauptwerk sind die »Elemente«. In ihnen werden die Ergebnisse der Schule des PYTHAGORAS, des EUDOXOS und von THEAETET zusammenfassend dargestellt. Das Werk ist streng logisch aufgebaut und ein Vorbild für alle ernsthaften mathemat. Schriften bis zum 19. Jh. geworden. E. hat auch elementargeometr. Schriften, Arbeiten über Kegelschnitte und eine Optik verfaßt.

**Euklid, Satz des** svw. Kathetensatz.

**euklidische Geometrie**  $\nearrow$  Grundlagen der Geometrie III.

**euklidischer Algorithmus**: Rechenverfahren, durch das der größte gemeinsame Teiler ( $a, b$ ) ( $\nearrow$  Teilbarkeit III.) zweier positiver natürl. Zahlen  $a > b$  durch schrittweise Division mit Rest bestimmt wird ( $\nearrow$  Teilbarkeit IV.). Im ersten Schritt ist  $b$  Divisor, in jedem folgenden Schritt wird der Divisor des vorhergehenden zum Dividenden gemacht und der Rest des vorhergehenden Schrittes zum Divisor. Da der Rest  $r_i$  jedes Schrittes kleiner als der Divisor ist, bricht der e. A. nach endlich vielen Schritten mit einem Rest  $r_{n+1} = 0$  ab. Bezeichnet man die Quotienten mit  $q_i$ , so läßt sich das Ergebnis des e. A. durch (1) darstellen:

$$(1) \quad \begin{aligned} a &= b \cdot q_1 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ &\dots \dots \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} + 0 \end{aligned}$$

(2) als Beispiel:

$$\begin{aligned} 13013 &= 390 \cdot 33 + 143 \\ 390 &= 143 \cdot 2 + 104 \\ 143 &= 104 \cdot 1 + 39 \\ 104 &= 39 \cdot 2 + 26 \\ 39 &= 26 \cdot 1 + 13 \\ 26 &= 13 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Setzt man nach der letzten Gleichung  $r_{n-1}$  in die vorhergehende ein, so zeigt sich, daß  $r_n$  ein Teiler von  $r_{n-2}$  ist. Führt man mit dem Rückwärtseinsetzen fort, so ergibt sich, daß  $r_n$  nach der 2. Gleichung Teiler von  $b$  und nach der ersten Gleichung auch von  $a$  ist. Nach dieser ersten Gleichung muß jeder gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  auch  $r_1$  teilen, damit auch  $r_2, \dots, r_n$ ; d. h.,  $r_n$  ist der größte gemeinsame Teiler. Im Zahlenbeispiel (2) ist  $r_n = 13 = (13013, 390)$ . S. a. Polynom II. (Divisionsalgorithmus).

**euklidischer Ring**: ein Integritätsbereich, in dem ein Divisionsalgorithmus ( $\nearrow$  Polynom II.) analog dem  $\nearrow$  euklidischen Algorithmus der ganzen Zahlen gilt (s. a. Polynomring). Jedem Element  $a \neq 0$  des e. R. wird eine nichtnegative ganze Zahl  $g(a)$  zugeordnet, für die gilt  $g(a \cdot b) \geq g(a)$ , und für je zwei Ringelemente  $a$  und  $b$  gibt es eine Darstellung  $b = q \cdot a + r$ , in der entweder  $r = 0$  oder  $g(r) < g(a)$  gilt.

Beispiele: 1. Im Ring der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  setzt man  $g(a) = |a|$ . 2. Im Polynomring  $K[x]$  über einem Körper  $K$  setzt man für  $g(a)$  den Grad des Polynoms. 3. Im Ring der ganzen  $\nearrow$  Gaußschen Zahlen setzt man für  $g(a)$  die Norm  $N(a) = a \cdot \bar{a}$  der komplexen Zahl  $a$ . In einem e. R. bestimmt man mit dem Divisionsalgorithmus den größten gemeinsamen Teiler  $d = (a, b)$  zweier Elemente  $a$  und  $b$  bis auf Einheiten. Außer dem größten gemeinsamen Teiler gibt es in einem e. R. auch stets ein kleinstes gemeinsames Vielfaches  $[a, b] = (a \cdot b)/(a, b)$ , das ebenfalls bis auf Einheiten festgelegt ist. Ein e. R. ist stets Hauptidealring ( $\nearrow$  Ring II.), er ist der wichtigste Fall eines Hauptidealrings. Im e. R. läßt sich jedes Element bis auf Einheiten eindeutig in  $\nearrow$  Prim-elemente zerlegen.

**euklidischer Vektorraum**  $\nearrow$  Vektorraum VII.

**Euler**, Leonhard, geb. 15. 4. 1707 Basel als Sohn eines mathematisch sehr interessierten Pfarrers, gest. 18. 9. 1783 Petersburg (Leningrad). — E. studierte seit 1720 in Basel Philosophie und seit 1723 Theologie. Nebenbei hörte er Privatvorlesungen von Johann BERNOULLI. 1727 ging E. nach Petersburg, wurde dort 1730 Professor für Physik und 1733 der Mathematik an der Akademie. 1741 erhielt er einen Ruf nach Berlin als Professor der Mathematik und Direktor der mathemat. Klasse der Akademie. Da sich in Berlin später das Verhältnis zwischen ihm und Friedrich II. recht unfreundlich gestaltete, kehrte er 1766 nach Petersburg zurück. Auch seine vollständige Erblindung im gleichen Jahr konnte seine mathemat. Schaffenskraft nicht brechen, und bereits in seinen letzten Lebensjahren galt er als legendäre Erscheinung.

Das Gesamtwerk von E. umfaßt 886 Titel, darunter viele umfangreiche Lehrbücher. In vielen Fachgebieten ist seine Darstellungsart endgültig gewesen, und alle bedeutenden Mathematiker der nachfolgenden Zeit haben sie übernommen. Das trifft zu auf die »Introductio in analysin infinitorum« (1748), in der z. B. Reihenlehre, Trigonometrie, analyt. Geometrie, Eliminationstheorie und die Zetafunktion behandelt werden, ebenso wie auf die »Institutiones calculi differentialis« (1755) und die »Institutiones calculi integralis« (1768—1774), die durchaus nicht

nur elementare Zusammenhänge behandeln. 1736 erschien sein *Lehrbuch der Mechanik*, in dem die erste analyt. Entwicklung der Newtonschen Dynamik enthalten ist, und 1744 die erste Darstellung der *Variationsrechnung*. Wichtige Einzelleistungen sind der E.sche Polyedersatz, die E.sche Gerade, die E.sche Konstante, das quadrat. Reziprozitätsgesetz und die Lösung des Königsberger Brückenproblems sowie die Feststellung, daß der Logarithmus unendlich vieldeutig ist (1749). Wesentl. Beiträge lieferte E. auch zur Astronomie, zur Mondtheorie und Himmelsmechanik, zum Schiffsbau, zur Kartographie, Optik, Hydraulik, Philosophie und Musiktheorie. Die Art, wie E. mathemat. Fragen angeht, war gekennzeichnet durch intuitives Erfassen des Wesentlichen und eine unerhörte formale Meisterschaft. Die Begründung seiner Schlüsse konnte E., wie übrigens alle Mathematiker bis zu GAUSS, oft nicht völlig einwandfrei geben.

**Euler, Satz von** ↗ Durchlaufungen von Graphen I. **Euler-Cauchyscher Polygonzug** ↗ gewöhnliche Differentialgleichungen III.

**Euler-Fouriersche Formeln** ↗ Fouriersche Reihe I. **Eulersche Differentialgleichung**: eine i. allg. nicht-lineare Differentialgleichung, die einem Variationsproblem (↗ Variationsrechnung I.) zugeordnet ist. Sie folgt aus der Tatsache, daß für die dabei gesuchte Extremale  $y_0(x)$  die erste ↗ Variation Null wird. Für das eindimensionale Variationsproblem (1) ist die E. D. (2) bzw. die zu ihr äquivalente Gleichung (3) i. allg. eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Hängt das Funktional  $I$  von mehreren Funktionen  $y_1, \dots, y_n$  ab wie in (4), so erhält man ein System (5) von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Für das zweidimensionale Variationsproblem (6) ist die E. D. (7) eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, und für das dreidimensionale Variationsproblem (8) erhält man die E. D. (9).

$$(1) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Extremum!}$$

$$(2) \quad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$(3) \quad F_y - F_{y_1 y_1} x - F_{y_1 y_1'} y' - F_{y_1 y_1''} y'' = 0$$

$$(4) \quad I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx = \text{Extr. !}$$

$$(5) \quad F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(6) \quad I(u) = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy = \text{Extremum!}$$

$$(7) \quad F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0$$

$$(8) \quad I(u) = \iiint_D F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz = \text{Extremum!}$$

$$(9) \quad F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{u_z} = 0$$

Die Bedeutung der E. D. besteht darin, daß damit das Variationsproblem zurückgeführt wird auf eine Differentialgleichung für die gesuchte Extremale.

Eine Extremale des Variationsproblems genügt stets der E. D.; ob jedoch eine Lösung der E. D. auch Extremale ist, prüft man mit *hinreichenden Bedingungen* (↗ Variationsrechnung), oder aber man begnügt sich damit, nachträglich zu untersuchen, ob die Lösung der E. D. unter den gegebenen geometrischen, technischen oder physikalischen Bedingungen wirklich extremale Eigenschaften hat.

**Eulersche Formel**: in der Funktionentheorie aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion  $w = e^z$  abgeleitete Beziehungen (1), aus denen man  $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$  bzw.  $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$  gewinnt.

$$(1) \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z \text{ bzw. } e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

Aus der Gültigkeit des Additionstheorems (2) für

$$(2) \quad e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2}$$

die Exponentialfunktion ergeben sich die Additionstheoreme der Funktionen  $\cos z$  und  $\sin z$  und daraus die Eigenschaft dieser Funktionen, daß  $2\pi$  ihre primitive Periode ist. Es gilt (3).

$$(3) \quad e^z = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man z. B. (4).

$$(4) \quad e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

Dagegen gelten für  $k = 1/2, 1/4$  und  $3/4$  die Gleichungen (5), (6), (7).

$$(5) \quad e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$(6) \quad e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$$

$$(7) \quad e^{3i\pi/2} = \cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2) = -i$$

Für eine beliebige reelle Winkelgröße  $\varphi$  in rad erhält man (8).

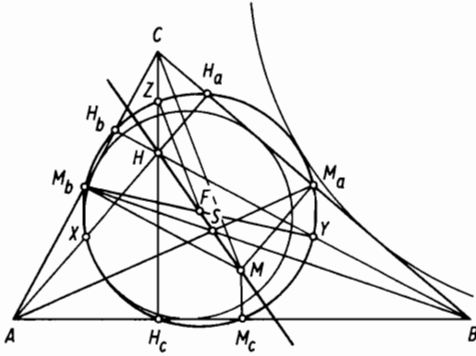
$$(8) \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

**Eulersche Funktion** ↗ Kongruenz von Zahlen III., ↗ zahlentheoretische Funktionen V.

**Eulersche Gammafunktion** ↗ Gammafunktion.

**Eulersche Gerade**: Dreieckstransversale durch die Schnittpunkte  $H$  der Höhen und  $M$  der Mittelsenkrechten. Die Seitenhalbierende  $BM_b$  teilt die Strecke  $HM$  im Verhältnis 2 : 1, wenn Punkt  $S$  auf  $BM_b$  der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist, denn, weil  $H_bB \parallel M_bM$ , gilt für die Strecken  $BM_b$  und  $HM$  mit dem Schnittpunkt  $S$  nach dem Strahlensatz  $|HS| : |SM| = |SB| : |SM_b| = 2 : 1$ . Faßt man die Strecken  $HM_c, H_aM_a, H_bM_b$  als die senkrechten Projektionen der Strecke  $HM$  auf die Dreiecksseiten auf (Abb.), so müssen die Projektionen des Mittelpunktes  $F$  der Strecke  $HM$  die angegebenen Strecken auf den Seiten halbieren, d. h.,  $F$  ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten dieser Strecken und damit der Mittelpunkt eines Kreises durch  $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c$ . Er heißt *Feuerbachscher Kreis*. Eine Gerade durch  $F$  und  $M_b$  z. B. schneidet  $HB$  im Punkt  $Y$ . Wegen der Parallelität von  $M_bM \parallel H_bB$

folgt für die Strecken  $M_bY$  und  $HM$  mit dem Schnittpunkt  $F$  nach dem Strahlensatz  $|M_bF| = |FY|$ , d. h.,  $Y$  liegt auf dem Feuerbachschen Kreis, sowie  $|MM_b| = |HY|$ . Für die Strecken  $M_bB$  und  $HM$  mit dem Schnittpunkt  $S$  aber folgt wegen der gleichen Parallelität  $|M_bM| : |HB| = 1 : 2$ , d. h., Punkt



Eulersche Gerade und Feuerbachscher Kreis

$Y$  halbiert den oberen Höhenabschnitt  $HB$ . Entsprechend halbiert auch  $Z$  den Abschnitt  $HC$ . Im Dreieck  $MCH$  gilt deshalb  $FZ \parallel MC$  und  $|FZ| = \frac{1}{2}|MC|$ , d. h., der Radius  $|FZ|$  des Feuerbachschen Kreises hat die halbe Länge von dem des Umkreises. Der Feuerbachsche Kreis ist ein *Neunpunktekreis* durch die Seitenmitten, die Höhenfußpunkte und die Mitten der oberen Höhenabschnitte  $X$  von  $HA$ ,  $Y$  von  $HB$  und  $Z$  von  $HC$ . Außerdem berührt der Feuerbachsche Kreis den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks.

**Eulersche Konstante** ↗ Entwicklung von Funktionen VII.

**Eulersche Linie** ↗ Durchlaufungen von Graphen I.

**Eulersche Reduktionsmethode** ↗ diophantische Gleichung III.

**Eulerscher Multiplikator** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.6.

**Eulerscher Polyedersatz:** Ist  $e$  die Anzahl der Ecken,  $f$  die Anzahl der Flächen und  $k$  die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders (↗ Körper), so gilt  $e + f - k = 2$ . Der Satz ist keine Aussage über Größen, sondern über Anzahlen sowie darüber, welche Stücke in einer gewissen Umgebung eines Randpunkts einander benachbart sind. Diese Aussage bleibt wahr, wenn unter Beibehaltung der angegebenen *topolog. Eigenschaften* die Oberfläche des Körpers deformiert wird.

**Eulerscher Satz** ↗ homogene Funktion III.

**Eulersches Dreieck:** sphär. Dreieck, in dem jede der drei Seiten kleiner als  $\pi$  ist (↗ Großkreis I.). Im E.n D. liegt die Summe der Winkelgrößen zwischen  $\pi$  und  $3\pi$ , die der Seitengrößen zwischen  $0$  und  $2\pi$ . S. a. sphärisches Dreieck I.

**Eulersches Kriterium** ↗ Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

**Eulersche Substitution** ↗ Integration spezieller Funktionenklassen III.2.

**Eulersche Winkel** ↗ Abbildung, affine V.

**Eulersche Zahl**  $e$  ↗ Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen I., ↗ Näherungsformel IV.

**Euler-Transformation** ↗ Reihendarstellung II.1.

**Euler-Venn-Diagramm** ↗ Mengenalgebra.

**exakte Differentialgleichung** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.5.

**Existential-Operator** ↗ Prädikatenlogik I.

**Existenzsatz** ↗ Anfangswertproblem I., II., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**Experiment** ↗ Systemidentifikation I.

**Explication** ↗ Definition.

**explizit:** Bezeichnung einer Darstellung  $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$  einer Funktion  $f$  im Unterschied zur *impliziten Darstellung*  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ ; sie existiert, wenn die Gleichung  $F(x_1, \dots, x_n) = 0$  im Gebiet der Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  nach einer von ihnen, z. B.  $x_n$ , eindeutig auflösbar ist; z. B. sind  $y = \pm \sqrt{2px}$  die e. Darstellungen zweier Funktionen, die sich aus der impliziten Gleichung  $y^2 - 2px = 0$  in den Gebieten  $x > 0, y > 0$  und  $x > 0, y < 0$  eindeutig bestimmen lassen.

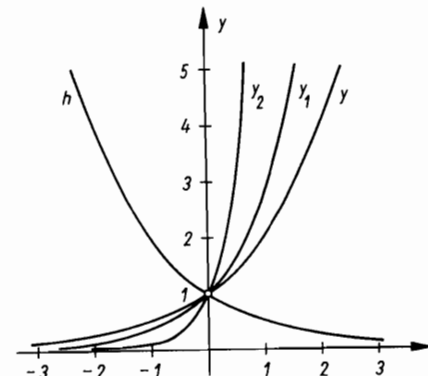
S. a. Funktion III., gewöhnliche Differentialgleichung I., V.

**explizite Definition** ↗ Definition.

**explizite gewöhnliche Differentialgleichung** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung I.

**Exponent** ↗ Potenz I., ↗ Wurzel I.

**Exponentialfunktion:** I. Funktion, die durch die Funktionsgleichung  $y = f(x) = a^x$  definiert ist, in der die Zahl  $a > 0$  und  $a \neq 1$  ist. Diese Zahl  $a$  heißt *Basis*. Die E. ist definiert für die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen; der Wertebereich ist wegen  $a^x > 0$  die Menge aller positiven reellen Zahlen, d. h., die E. hat keine Nullstelle. Für  $a > 1$  ist die Funktion streng monoton wachsend, für  $0 < a < 1$  streng monoton fallend, so daß zu jeder E. mit einer festen Basis  $a$  eine eindeutig bestimmte *Umkehrfunktion*, die *Logarithmusfunktion*  $\log_a y$  mit der Basis  $a$ , existiert. Jede E. ist in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig, differenzierbar und von unten konvex, d. h., es existieren weder Extremwerte noch Wendepunkte. Wegen



Graphische Darstellung der Exponentialfunktionen  $y = 2^x$  und  $h = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y_1 = e^x$  und  $y_2 = 10^x$



$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$  gilt für jede E. das *Additionstheorem*  $f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ . Bis auf die Funktion  $h(x) \equiv 0$  für  $x \in \mathbf{R}$  sind die E.en die einzigen stetigen im Intervall  $]-\infty, +\infty[$  definierten Funktionen, die diese Gleichung erfüllen. Das Bild jeder E., die *Exponentialkurve*, enthält den Punkt  $P(0, 1)$  (Abb.). Für jede Basis  $a \neq 1$  liegen die Bilder der Funktionen  $g$  und  $h$  mit  $g(x) = a^x$  und  $h(x) = (1/a)^x$  axialsymmetrisch zur Ordinatenachse, weil  $(1/a)^x = a^{-x}$ . Das Bild der Funktion  $g(x) = k \cdot a^x$  mit der positiven Konstante  $k = a^{\log_a k}$  geht wegen  $g(x) = a^{x+\log_a k}$  aus dem von  $f(x) = a^x$  durch eine Verschiebung um  $|\log_a k|$  Einheiten in Richtung der negativen Abszissenachse hervor, falls  $\log_a k > 0$ .

II. Wählt man als Basis einer E. die transzendente Zahl  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e \approx 2, 718\ 281\ 828\ 459$ , so

erhält man die E. i. e. S., auch *e-Funktion* gen. Ihre Funktionswerte lassen sich durch die für alle  $x \in \mathbf{R}$  konvergente Reihe (1) berechnen ( $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen III.,  $\nearrow$  Taylorsche Reihe II.4.). Die Ableitung von  $f = e^x$  stimmt mit  $f$  selbst überein, d. h., es gilt die Gleichung  $f(x) = f'(x)$ . Wegen dieser Eigenschaft ist die E. geeignet z. B. zur Schilderung von organ. Wachstum durch  $g(t) = g_0 e^{ct}$ , von Zerfallsprozessen  $m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t}$ ,

$$(1) \quad e^x = \exp x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots$$

von gedämpften Schwingungen  $f(t) = e^{-Rt} \sin(\omega t + \varrho)$  oder von Fehlerverteilungen  $f(x) = e^{-x^2}$ .

Die *allgemeine E.*  $y = a^x$  kann wegen  $e^{x \ln a} = a^x$  aus der e-Funktion gewonnen werden, indem man jedes Teilintervall  $\Delta x$  des Definitionsbereichs der e-Funktion gleichmäßig um den Faktor  $\ln a$  streckt oder staucht; d. h., die Funktionswerte der Funktion  $f$  mit  $f(x) = a^x$  wachsen für  $a < e$  langsamer und für  $a > e$  schneller als die der e-Funktion. Für ihre *Reihenentwicklung* gilt (2) für  $a > 0, a \neq 1$ ; sie konvergiert für alle reellen Zahlen  $x$ .

$$(2) \quad f(x) = a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots$$

S. a. komplexwertige Funktion, elementare, II., III., Logarithmusfunktion I.

**Exponentialgleichung:** I. transzendente Gleichung, in der mindestens eine Gleichungsvariable mindestens einmal in einem Wurzel- oder Potenzexponenten vorkommt, z. B.  $3^{2x} = 9$ ;  $\sqrt[3]{a} = 3b$ ;  $\sqrt[3]{12} \cdot 13 - 7 = 0$ ;  $e^x + x = 0$ . Beim Lösen von E.en ist man im allgemeinen auf Näherungsverfahren angewiesen. In speziellen Fällen kann man durch Substitutionen zu algebraischen Gleichungen kommen. Die in  $x$  transzendente E.  $e^x + 3e^{2x} - 2e^{4x} - 1 = 0$  geht z. B. durch die Substitution  $e^x = z$  über in die in  $z$  algebraische Gleichung  $z + 3z^2 - 2z^4 - 1 = 0$ , die sich lösen läßt ( $\nearrow$  Gleichung 4. Grades). Ist  $z_0$  eine Lösung, so löst man die *einfache E.*  $e^x = z_0$  durch Anwenden der Logarithmengesetze:  $\ln e^x = \ln z_0, x \ln e = \ln z_0, x = \ln z_0$ . Allerdings können auch für  $z_0$  im allgemeinen nur Näherungswerte aus Tafeln entnommen werden.

II. Exakt lösen lassen sich E., in denen sich *beide Seiten der E. als Potenzen derselben Basis* darstellen lassen, und wenn die dann auftretenden Exponenten algebraische Terme sind: Die E.  $3^{2x} = 9$  oder  $3^{2x} = 3^2$  geht durch Logarithmieren über in  $\log_3 3^{2x} = \log_3 3^2$ , d. h. in  $2x = 2$ , daraus liest man ab:  $x = 1$ ;  $L = \{1\}$ . Ein weiteres Beispiel ist

$$\sqrt[3]{9^{x+1}} = \sqrt[2]{27^{x+2}} \text{ oder } (3^2)^{(x+1)/(x+3)} = (3^3)^{(x+2)/(x+8)}$$

aus der sich durch Logarithmieren ergibt:  $\frac{(2x+2)}{(x+3)} = \frac{(3x+6)}{(x+8)}$ . Aus dieser Bruchgleichung erhält man

$$(2x+2)(x+8) = (3x+6)(x+3), 2x^2 + 16x + 2x + 16 = 3x^2 + 9x + 6x + 18, 0 = x^2 - 3x + 2 \text{ und daraus } x_1 = 1, x_2 = 2, \text{ so daß } L = \{1, 2\}.$$

S. a. graphisches Lösen von Gleichungen IV.

**Exponentialkurve**  $\nearrow$  Exponentialfunktion I.

**Exponentialverteilung:** Verteilungsgesetz einer stetigen Zufallsgröße  $X$ , die exponentialverteilt heißt, wenn sie eine Dichte der Gestalt (1) hat mit dem

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Parameter  $\lambda > 0$ . Die Lebensdauer von Glühlampen oder anderen elektr. Bauelementen kann in guter Näherung als exponentialverteilt angesehen werden.

**Extensionalitätsaxiom**  $\nearrow$  Mengenlehre II.

**Extensionalitätsprinzip**  $\nearrow$  Aussagenlogik I.

**externer Speicher**  $\nearrow$  digitale Rechenanlage I.3,  $\nearrow$  Prozeßrechenanlage.

**Extremale**  $\nearrow$  Variationsrechnung I.

**Extremalprobleme:** *Graphentheorie* von P. ERDÖS eingeführte Bezeichnung für Probleme der im folgenden an Beispielen gezeigter Art.

Man kann fragen: Wieviel Kanten kann ein  $\nearrow$  schlichter Graph mit  $n$  Knotenpunkten, der keinen Kreis enthält und deshalb ein Wald ist, höchstens enthalten? — oder: Wieviel Kanten kann ein schlichter Graph mit  $n$  Knotenpunkten, der kein Dreieck enthält, höchstens enthalten? — u. a.

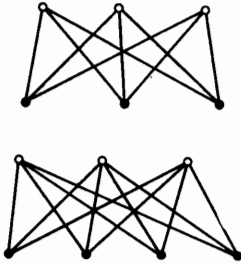
Die Antwort auf die erste Frage liefert die folgende Erkenntnis: *Jeder Baum mit  $n$  Knotenpunkten enthält genau  $n - 1$  Kanten.*

Die Antwort auf die zweite Frage liefert der Satz von P. TURAN: *Ein vollständiges  $k$ -Eck, auch  $k$ -Clique gen., ist ein schlichter Graph mit  $k$  Knotenpunkten, in dem je zwei Knotenpunkte durch eine Kante verbunden sind.* Unter einem *vollständigen  $l$ -chromatischen Graphen  $\Gamma_l$*  versteht man einen Graphen, der eine zulässige Färbung mit  $l$  Farben hat, so daß je zwei Knotenpunkte genau dann verbunden sind, wenn sie verschiedene Farbe haben. Die Mengen gleichgefärbter Knotenpunkte bezeichnet man hier als *Farbenklassen*, d. h., die Knotenmenge von  $\Gamma_l$  zerfällt in  $l$  Farbenklassen. Der von P. TURAN 1941 bewiesene Satz besagt:

*Sind  $n, k$  natürliche Zahlen mit  $n \geq k \geq 3$ , so hat jeder schlichte Graph mit  $n$  Knotenpunkten, der kein vollständiges  $k$ -Eck enthält, höchstens so viele Kanten wie ein vollständiger  $(k - 1)$ -chromatischer Graph,*

in dem sich die Anzahlen der Knotenpunkte von je zwei Farbenklassen höchstens um 1 unterscheiden.

Für  $k = 3$  bedeutet diese Aussage: Jeder dreikreisfreie schlichte Graph enthält höchstens so viele Kanten wie ein paarer Graph, dessen beide Klassen je  $n/2$  Knotenpunkte enthalten, falls  $n$  gerade ist, bzw. dessen eine Klasse  $(n + 1)/2$  und die andere Klasse  $(n - 1)/2$  Knotenpunkte enthält, falls  $n$  ungerade ist; die zugehörigen paaren Graphen sind für  $n = 6$  und  $n = 7$  in der Abb. angegeben. S. a. Variationsrechnung I.



Extremalproblem:  
Beispiel zum Satz von  
Turán für  $k = 3$ ,  $n = 6$   
und  $n = 7$

**Extremum** svw. **Extremwert**, s. a. Variationsrechnung II.

**Extremwert, Extremum** [pl. *Extrema*]: I. maximaler bzw. minimaler Wert einer Funktion  $f$ , der *lokaler* oder *relativer* E. heißt, wenn er nur in einer Umgebung der betrachteten Stelle extrem ist, dagegen *globaler* oder *absoluter* E. heißt, wenn er für den gesamten Definitionsbereich  $D(f)$  extrem ist. In einem Intervall  $I$ , das zum Definitionsbereich  $D(f)$  einer reellen Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  gehört, hat  $f$  ein relatives *Maximum* an der Stelle  $x_0 \in I$ , falls  $f(x_0) > f(x)$  für alle  $x \neq x_0$  einer Umgebung  $U(x_0) \subseteq I$  dieser Stelle gilt; sie hat unter den gleichen Bedingungen in  $x_0$  ein relatives *Minimum*, falls  $f(x_0) < f(x)$  für alle  $x \in U(x_0)$  gilt. Unter dem *absoluten Maximum* von  $f$  auf einer Teilmenge  $M \subseteq D(f)$  des Definitionsbereichs von  $f$  versteht man die *obere Grenze*  $\sup \{f(x) : x \in M\}$  sämtl. Funktionswerte von  $f$  über  $M$ , unter dem *absoluten Minimum* dagegen die *untere Grenze*  $\inf \{f(x) : x \in M\}$  der Funktionswerte, sofern diese Grenzen als Funktionswerte auftreten. Dies ist stets der Fall, wenn  $f$  stetig sowie  $M$  beschränkt und abgeschlossen sind. Dann gibt es ein  $x_{\max}$  mit  $f(x_{\max}) = \sup \{f(x) : x \in M\}$  bzw. ein  $x_{\min}$  mit  $f(x_{\min}) = \inf \{f(x) : x \in M\}$ .

Anschaulich handelt es sich bei den Extrema um höchste bzw. niedrigste Punkte der Bildkurve von  $f$  in bezug auf eine gewisse Umgebung  $U(x_0)$  der betrachteten Stelle  $x_0$  bzw. um die absolut höchsten bzw. niedrigsten Punkte der Bildkurve von  $f$ , sofern solche existieren. Jeder absolute E. ist demnach auch relativer E., jedoch nicht umgekehrt. Offenbar ist das absolute Minimum bzw. Maximum von  $f$  auf  $M \subseteq D(f)$ , falls es existiert, das kleinste aller relativen Minima bzw. das größte aller relativen Maxima von  $f$  auf  $M$  oder ein Funktionswert auf dem Rande von  $M$ .

Ist  $f$  eine Funktion der  $n$  reellen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , so liegt an der

Stelle  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D(f)$  ein relatives Minimum bzw. Maximum vor, wenn  $f(P_0) < f(P)$  bzw.  $f(P_0) > f(P)$  gilt für alle  $P = (x_1, \dots, x_n) \neq P_0$  einer gewissen Umgebung  $U(P_0)$  von  $P_0$ . Dabei wird vorausgesetzt, daß diese Umgebung  $U(P_0)$  zum Definitionsbereich  $D(f)$  gehört. Das betrachtete Extremum ist absolut, wenn die angegebenen Ungleichungen für alle  $P \in D(f)$  gelten. Für  $n = 2$  sind die absoluten Extrema von  $f$  anschaulich die höchsten bzw. die niedrigsten Punkte des „Funktionsgebirges“ von  $f$ , während die relativen Extrema diese Eigenschaft nur in einer gewissen Umgebung der betrachteten Stelle haben.

II. Ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  in einer Umgebung von  $x = x_0$  stetig differenzierbar, so kann  $f$  für  $x = x_0$  nur dann einen relativen Extremwert haben, wenn  $f'(x_0) = 0$  ist ( $\nearrow$  Fermat, Satz von). Ob  $f$  an einer Stelle  $x_0$  mit  $f'(x_0) = 0$  tatsächlich einen E. hat, müssen weitergehende Untersuchungen zeigen. Die Forderung  $f'(x_0) = 0$  ist eine *notwendige* Bedingung dafür, daß die in einer Umgebung von  $x_0$  stetig differenzierbare Funktion  $f$  für  $x = x_0$  einen relativen E. hat.

Ist  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  eine Funktion von  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , die in einer Umgebung des Punktes  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  stetig partiell differenzierbar nach den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist, so kann  $f$  für  $P = P_0$  nur dann einen relativen E. haben, wenn sämtl. partielle Ableitungen erster Ordnung für  $P = P_0$  verschwinden, d. h., wenn (1) gilt.

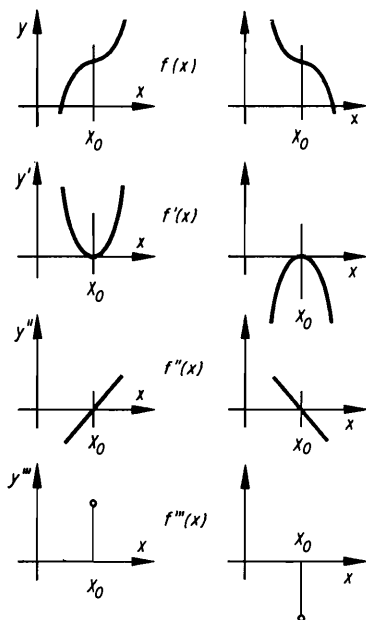
$$(1) \quad f_{x_1}(P_0) = 0; f_{x_2}(P_0) = 0; \dots; f_{x_n}(P_0) = 0$$

III. Ein *hinreichendes Kriterium* für die Existenz relativer Extrema kann angegeben werden für Funktionen  $f$  einer Variablen mit  $y = f(x)$ , die in einer gewissen Umgebung von  $x = x_0$  zweimal stetig differenzierbar sind. Gilt  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \neq 0$ , dann hat  $f$  für  $x = x_0$  einen relativen E., der ein Minimum oder Maximum ist, je nachdem, ob  $f''(x_0) > 0$  oder  $f''(x_0) < 0$ . — Die hinreichende Bedingung läßt sich wie folgt verallgemeinern: *Ist die Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$  in einer Umgebung von  $x = x_0$   $k$ -mal stetig differenzierbar und gilt  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ , aber  $f^{(k)}(x_0) \neq 0$ , dann hat  $f$  für  $x = x_0$  einen relativen E., sofern  $k$  gerade ist. Dieser E. ist ein relatives Minimum bzw. Maximum je nachdem, ob  $f^{(k)}(x_0) > 0$  oder  $f^{(k)}(x_0) < 0$  ist (Abb. 1).*

Eine Funktion  $f$  von  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , die in einer Umgebung von  $P_0$  zweimal stetig partiell differenzierbar nach den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist, hat für  $P_0$  einen relativen E., wenn (1) gilt und die quadrat. Form (2) *definit* ist. Der E. ist ein Minimum bzw. ein Maximum je nachdem, ob (2) positiv oder negativ definit ist.

$$(2) \quad Q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(P_0) \xi_i \xi_j$$

Die quadrat. Form (2) ist positiv bzw. negativ definit genau dann, wenn die Eigenwerte ihrer *Formenmatrix* (3) sämtlich positiv bzw. negativ sind



Extremwert. Abb. 1: Mögliches Verhalten einer Funktion  $y = f(x)$ , die an der Stelle  $x_0$  dreimal differenzierbar ist ( $\nearrow$  quadratische Form). Da das Produkt der Eigenwerte gleich der Determinante der Formenmatrix

$$(3) \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \dots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \dots & f_{x_2x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \dots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

ist, ist im Falle  $n = 2$  die quadrat. Form  $Q(\xi_1, \xi_2) = f_{xx}(P_0) \cdot \xi_1^2 + 2f_{xy}(P_0) \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 + f_{yy}(P_0) \cdot \xi_2^2$  definit genau dann, wenn  $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  ist, und zwar positiv definit oder negativ definit je nachdem, ob  $f_{xx}(P_0) > 0$  oder  $f_{xx}(P_0) < 0$ . Demzufolge ist (4) bei einer Funktion  $f$  von zwei Variablen  $x, y$

$$(4) \begin{cases} f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0 \\ D = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) > 0 \\ f_{xx}(P_0) > 0 \text{ bzw. } f_{xx}(P_0) < 0 \end{cases}$$

mit der Gleichung  $z = f(x, y)$ , die in einer Umgebung  $U(P_0) \subseteq D(f)$  des Punktes  $P_0 = (x_0, y_0)$  zweimal stetig partiell nach  $x$  und  $y$  differenzierbar ist, hinreichend für die Existenz eines relativen Minimums bzw. Maximums an der Stelle  $P_0$ .

Im Falle  $D < 0$  liegt kein relativer E. vor, im Falle  $D = 0$  kann mittels dieser Methode keine Aussage gemacht werden.

IV. Beispiele: IV.1. Die Funktion  $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$  kann E.e nur für solche  $x$  haben, für die  $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1) = 0$  ist, d. h., für  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 1$ . Wegen  $f''(x) = 12x + 6$  ist  $f''(-2) < 0$  und  $f''(1) > 0$ , d. h., die Funktion  $f$  hat für  $x_1 = -2$  ein relatives Maximum und für  $x_2 = 1$  ein relatives Minimum.

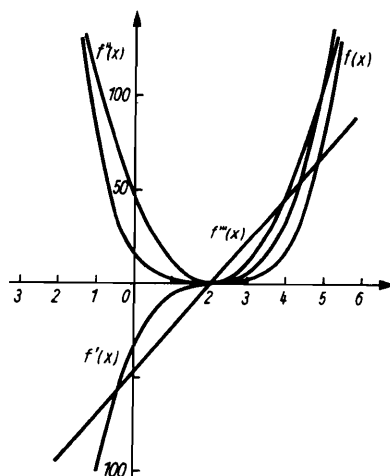
Absolute E.e hat  $f$  nicht, da die Funktion unbeschränkt ist:  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

IV.2. Die Funktion  $y = f(x) = 1/(1+x^2)$  hat für  $x_0 = 0$  ein relatives Maximum, denn es ist  $f'(x) = (-2x)/(1+x^2)^2$ , d. h.,  $f'(0) = 0$ , und  $f''(x) = (6x^2 - 2)/(1+x^2)^3$ , d. h.,  $f''(0) < 0$ . Dieses relative Maximum ist hier auch das absolute Maximum von  $f$ , wie man der Funktionsgleichung sofort entnimmt.

IV.3. Für  $y = f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x-2)^4$  ist  $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 4(x-2)^3$ , und  $x_0 = 2$  ist dreifache Nullstelle der Gleichung  $f'(x) = 0$  (Abb. 2). Es ist  $f''(x) = 12x^2 - 48x + 48 = 12(x-2)^2$ ;  $f''(2) = 0$ ;  $f'''(x) = 24x - 48 = 24(x-2)$ ;  $f'''(2) = 0$ ;  $f^{IV}(x) = 24$ ;  $f^{IV}(2) > 0$ . Da  $k = 4$  gerade, liegt bei  $x_0 = 2$  ein relativer E. vor, und zwar ein Minimum wegen  $f^{IV}(2) > 0$ .

IV.4. Um die Funktion  $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 5$  auf E.e zu untersuchen, wird  $f_x(x, y) = 2x - 2 = 0$  und  $f_y(x, y) = 2y = 0$  gesetzt. Daraus entnimmt man  $P_0 = (1, 0)$  als mögl. Extremstelle. Wegen  $f_{xx}(x, y) = 2$ ,  $f_{yy} = 2$ ,  $f_{xy} = f_{yx} = 0$  ist  $D(x_0, y_0) = 4 > 0$ , d. h., es liegt ein relatives Extremum vor, und wegen  $f_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0$  ist es ein relatives Minimum, ja sogar ein absolutes Minimum, denn die Fläche ist ein elliptisches Paraboloid mit dem Scheitelpunkt  $(1, 0, 4)$  und der Gleichung  $(z-4) = (x-1)^2 + y^2$ . Von einer Ebene parallel zur  $x, y$ -Ebene im Abstand  $d > 4$  wird es in Kreisen mit dem Radius  $\sqrt{d-4}$  geschnitten, von Ebenen parallel zur  $x, z$ -Ebene bzw. zur  $y, z$ -Ebene durch den Scheitelpunkt in den Parabeln mit den Gleichungen  $(z-4) = (x-1)^2$  bzw.  $(z-4) = y^2$ .

IV.5. Die Funktion  $z = f(x, y) = \sqrt{2-x^2-y^2} + 2y$  hat die partiellen Ableitungen  $f_x(x, y) = (-x)/f$ ;  $f_y(x, y) = (-y+1)/f$ , und diese sind nur Null für die Stelle  $(0, 1)$ . Wie häufig bei Funktionen mit mehreren Variablen wird hier die Anwendung



Extremwert. Abb. 2: Kurvenbilder der Funktion  $f(x) = (x-2)^4$  und ihrer Ableitungen in einem senkrechten Parallelkoordinatensystem

der hinreichenden Bedingung für E.e schwierig, man greift dann oft auf die Definition zurück. Schreibt man die Funktionsgleichung in der Gestalt

$z = f(x, y) = \sqrt{3 - [x^2 + (y - 1)^2]}$ , erkennt man sofort die Maximumeigenschaft von  $f$  für  $(0, 1)$ .

IV.6. Die Funktion  $z = f(x, y) = x^2y^2(1 - x - y)$  hat die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) = x^2y^2(3 - 4x - 3y);$$

$$f_y(x, y) = x^2y(2 - 2x - 3y);$$

$$f_{xx}(x, y) = xy^2(6 - 12x - 6y);$$

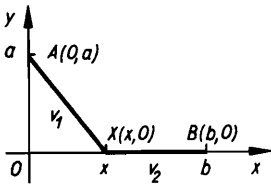
$$f_{yy}(x, y) = x^2(2 - 2x - 6y);$$

$$f_{xy}(x, y) = x^2y(6 - 8x - 9y).$$

Das Gleichungssystem  $f_x = 0; f_y = 0$  führt auf die mögl. E.stellen  $(0, c); (d, 0); (1/3, 1/3)$  mit  $c, d$  beliebig reell. Für  $x = 1/2, y = 1/3$  nehmen die zweiten partiellen Ableitungen die Werte  $f_{xx} = -1/9; f_{yy} = -1/4$  und  $f_{xy} = -1/12$  an. Wegen  $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3/144 > 0$  und  $f_{xx} < 0$  liegt für  $(1/2, 1/3)$  ein relatives Maximum vor. Wegen  $D(0, c) = D(d, 0) = 0$  ist für die anderen Stellen keine Entscheidung möglich. S. a. Kurvendiskussion II.3.

V. Hat die Funktion  $f$  die zur Anwendung der notwendigen bzw. hinreichenden E.skriterien erforderl. Differenzierbarkeitseigenschaften nicht, so versucht man, oft mittels Monotoniebetrachtungen in der Nähe der in Frage kommenden Stelle, die Existenz eines E.s direkt nachzuweisen. Das absolute Minimum der Funktion  $y = f(x) = |x|$  an der Stelle  $x_0 = 0$  z. B. erhält man mittels der in IV. angewandten Verfahren nicht, da  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar ist und die Kriterien sich auf Intervalle, die  $x_0 = 0$  enthalten, nicht anwenden lassen. Das Vorgehen in solchen Fällen wird durch Beispiel V.1. illustriert.

Beispiel V.1. Bewegt sich ein Punkt in der Ebene geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_1 > 0$  vom Punkte  $A = (0, a)$  bis zu einem Punkte  $X = (x, 0)$  und dann längs der  $x$ -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_2 > v_1$  bis zum Punkte  $B = (b, 0)$  (Abb. 3), so kann die Lage von  $X$  auf der



Extremwert. Abb. 3: Abbildung zum Beispiel V. 1.

$x$ -Achse so gewählt werden, daß  $B$  in kürzester Zeit erreicht wird; die reellen Konstanten  $a, b$  sollen dabei positiv sein. — In Abhängigkeit von der Variablen  $x$  sind  $s_1 = |AX| = \sqrt{x^2 + a^2}$  und  $s_2 = |XB| = |b - x|$  die Wege des Punktes. Sie zu durchlaufen, braucht der Punkt die Zeit (5). Da die Funktion  $t(x)$  für  $x = b$  nicht differenzierbar ist, können die Kriterien für Intervalle, die  $x = b$  im Inneren enthalten, nicht angewendet werden. Unter der Annahme  $x < b$  erhält man aus (6) die mögl. E.-

$$(5) \quad t(x) = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{|b - x|}{v_2}$$

$$(6) \quad t'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} = 0 \text{ für } x < b$$

$$(7) \quad x_0 = \frac{av_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}, \quad -x_0 = \frac{-av_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}$$

$$(8) \quad t''(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} > 0 \text{ für alle } x < b$$

stellen (7), von denen  $-x_0$  entfällt und  $x_0$  wegen (8) zu einem Minimum führt, solange  $x_0 < b$  ist. Im Falle  $x > b$ , insbes. für  $x_0 = av_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2} > b$ , gilt (9), und aus der Ableitung (10) folgt, daß  $t$  für alle  $x > b$  streng monoton wächst. Das Minimum wird demzufolge in diesem Falle für  $x = b$  angenommen. Für  $v_1 = 3, v_2 = 5, a = 3, b = 4$  z. B.

$$(9) \quad t(x) = (1/v_1) \sqrt{x^2 + a^2} + (1/v_2)(x - b) \text{ für } x > b$$

$$(10) \quad t'(x) = x/(v_1 \sqrt{x^2 + a^2}) + 1/v_2 > 0 \text{ für } x > b$$

tritt ein Minimum für  $x_0 = av_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2} = 9/4 < b$  ein, während sich für  $v_1 = 4, v_2 = 5, a = 4, b = 3$  der Wert  $x_0 = 16/3 > b$  ergibt und deshalb das Minimum für  $x_0 = b = 3$  angenommen wird.

VI. Extrema mit Nebenbedingungen sind relative E.e einer Funktion  $f$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $n \geq 1$  unter der Voraussetzung, daß diese Variablen noch gewisse Nebenbedingungen erfüllen. Die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ , deren Variable  $x_1, \dots, x_n$  noch der Nebenbedingung  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$  unterworfen sind, hat an der Stelle  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  nur dann einen relativen E., wenn ihre Lagrange-Funktion  $F$  mit der Gleichung (11) für  $P_0$  die Bedingungen (12) erfüllt. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, daß entsprechende

$$(11) \quad y = F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$$(12) \quad F_{x_i} = f_{x_i} + \lambda \varphi_{x_i} = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n, \\ F_\lambda = \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}^2(P_0) \neq 0$$

Differenzierbarkeitsforderungen erfüllt sind sowie daß (13) gilt. Die Zahl  $\lambda$  wird auch Lagrangescher Multiplikator gen.

Beispiel VI.1.: Es ist der kürzeste Abstand des Punktes  $P_1 = (1, 1, 1)$  von der Ebene  $E$  mit der Gleichung  $x + 2y + 3z + 4 = 0$  zu bestimmen. — Der Abstand  $r$  von  $P_1$  zu einem variablen Punkt  $P = (x, y, z)$  der Ebene  $E$  wird durch die Funktion  $r^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = f(x, y, z)$  gefunden, die unter der Nebenbedingung  $x + 2y + 3z + 4 = 0$  minimal werden soll. Die Lagrange-Funktion ist dann (14) und hat die in (15) zusammengestellten ersten partiellen Ableitungen.

$$(14) \quad F(x, y, z, \lambda) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + \lambda(x + 2y + 3z + 4)$$

$$(15) \quad F_x = 2(x - 1) + \lambda; F_y = 2(y - 1) + 2\lambda, \\ F_z = 2(z - 1) + 3\lambda; F_\lambda = x + 2y + 3z + 4$$

Aus  $F_x = F_y = F_z = 0$  erhält man  $x_0 = 1 - \lambda_0/2$ ,  $y_0 = 1 - \lambda_0$ ,  $z_0 = 1 - 3\lambda_0/2$ ; und durch Einsetzen dieser Werte in  $F_i = 0$  für den Lagrangeschen Multiplikator  $\lambda_0 = 10/7$ , und folglich als mögl. E.stelle  $P_0 = (2/7, -3/7, -8/7)$ . Da das Minimum in diesem Beispiel tatsächlich angenommen wird, weil von einem nicht in der Ebene  $E$  liegenden Punkt  $P$  ein Lot auf  $E$  existiert, tritt es für  $P_0$  ein, und der kürzeste Abstand ist  $|P_0P_1| = \sqrt{350}/7$ .

Läßt sich die Gleichung  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$  nach einer der Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , etwa nach  $x_1$  durch  $x_1 = x_1(x_2, \dots, x_n)$ , auflösen ( $\nearrow$  Eliminationsätze), so kann man dies in die zu untersuchende Funktion  $f$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  einsetzen und erhält nach (16) eine neue Funktion  $f^*$  von nur noch  $(n - 1)$  unabhängigen Variablen, die in übl. Weise auf relative Extrema untersucht wird. Im allgemeinen ist jedoch

$$(16) \quad y = f(x_1, \dots, x_n) \\ = f(x_1(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) = f^*(x_2, \dots, x_n)$$

diese Auflösung numerisch schwierig und aufwendig, so daß die *Lagrangesche Multiplikatorenmethode* vorzuziehen ist. Beispiel VI.1. läßt sich jedoch auch nach dieser Methode einfach lösen: Aus der Nebenbedingung  $x + 2y + 3z + 4 = 0$  erhält man z. B.  $x = -2y - 3z - 4$ . Damit geht  $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$  durch Einsetzen von  $x = -2y - 3z - 4$  über in  $f^*(y, z) = (5 + 2y + 3z)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$ . Das Gleichungssystem  $f_y^* = 5y + 6z + 9 = 0$ ,  $f_z^* = 3y + 5z + 7 = 0$  hat die eindeutige Lösung  $y_0 = -3/7$ ,  $z_0 = -8/7$ . Wegen  $f_{yy}^* = 10$ ,  $f_{zz}^* = 20$ ,  $f_{yz}^* = 12$  ist  $D = 10 \cdot 20 - 12^2 = 56 > 0$ , also liegt für  $P_0$  ein relatives Extremum vor, das wegen  $f_{yy}^* > 0$  ein relatives Minimum ist. Man erhält schließlich  $P_0 = (2/7, -3/7, -8/7)$ . Die Lagrangesche Multiplikatorenmethode läßt sich auch anwenden, wenn mehrere Nebenbedingungen  $\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = 0$  mit  $1 \leq j \leq k < n$  zu erfüllen sind. Die Lagrangesche Funktion  $F$  hat hier die Gestalt (17), und (18) sind die notwendigen Bedingungen für ein relatives Extremum von  $f$  an der Stelle  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

$$(17) \quad F(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \\ f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$$

$$(18) \quad F_{x_i} = f_{x_i}(P_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(P_0) = 0 \\ \text{für } i = 1, \dots, n$$

$$F_{\lambda_r} = \varphi_r(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \text{ für } r = 1, \dots, k$$

**VII. Viele prakt. Probleme erfordern die Bestimmung von E.en.**

*Beispiel VII.1.:* In einem Lagerhaltungsmodell mit Fehlmengen bedeuten  $Q$  die Losgröße,  $F$  die Fehlmengengröße,  $g$  die Fehlmengenkosten,  $k$  die Lagerhaltungskosten,  $K$  die fixen Kosten zur Erstellung der Serie,  $B$  der Gesamtbedarf und  $T$  der Planzeitraum; dann kann die Kostenfunktion  $C$  in der Gestalt (19) angenommen werden. Werden  $C$  durch  $z$ ,

$$(19) \quad C(Q, F) = \frac{KB}{Q} + \frac{kT(Q - F)^2}{2Q} + \frac{gTF^2}{2Q}$$

$Q$  durch  $x$  und  $F$  durch  $y$  bezeichnet und sind  $c_1, c_2, c_3$  positive reelle Konstanten, so nimmt die in (19) beschriebene Funktion die Gestalt (20) an. Für die Existenz relativer E.e enthält (21) die notwendigen Bedingungen. Aus ihnen folgt das nichtlineare Gleichungssystem (22) zur Bestimmung von  $x_0, y_0$ ,

$$(20) \quad z = f(x, y) = \frac{c_1}{x} + c_2 \cdot \frac{(x - y)^2}{x} + c_3 \cdot \frac{y^2}{x} \\ \text{mit } c_1, c_2, c_3 > 0$$

$$(21) \quad f_x = (1/x^2) [c_1 - c_2x^2 + (c_2 + c_3)y^2] = 0, \\ f_y = (2/x) \cdot [c_3y - c_2(x - y)] = 0$$

$$(22) \quad \begin{cases} c_1 - c_2x^2 + (c_2 + c_3)y^2 = 0 \\ (c_2 + c_3)y - c_2x = 0 \end{cases}$$

die als E.e möglich sind. Nach Einsetzen von  $x = (1 + c_3/c_2)y$  aus der zweiten in die erste Gleichung von (22) ergeben sich (23) und daraus die Lösung (24), da  $y_0 < 0$  entfällt.

$$(23) \quad c_1 + [-c_2(1 + c_3/c_2)^2 + c_3 - c_2] y^2 \\ = c_1 - (2c_2 + c_3 + c_3^2/c_2) y^2 = 0$$

$$(24) \quad x_0 = (1 + c_3/c_2) y_0,$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{2c_2^2 + c_2 c_3 + c_3^2}}$$

Für die zweiten Ableitungen erhält man (25) und daraus (26) ( $\nearrow$  III.). Wegen  $f_{xx}(P_0) > 0$  liegt für (27) ein relatives Minimum vor.

$$(25) \quad f_{xx}(P_0) = -(2/x_0^3) [c_1 + (c_2 + c_3) y_0^2 \\ - c_2 x_0^2] + (1/x_0^2) c_2 x_0 \\ = 2c_2/x_0 > 0,$$

$$f_{yy}(P_0) = (2/x_0) (c_2 + c_3) \text{ und} \\ f_{xy}(P_0) = -(1/x_0^2) [2(c_2 + c_3) y_0]$$

$$(26) \quad D = f_{xx}(P_0) f_{yy}(P_0) - f_{xy}^2(P_0) \\ = \frac{4(c_2 + c_3)}{x_0^4} - c_1 > 0$$

$$(27) \quad x_0 = \left(1 + \frac{c_3}{c_2}\right) y_0, \quad y_0 = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{2c_2^2 + c_2 c_3 + c_3^2}}$$

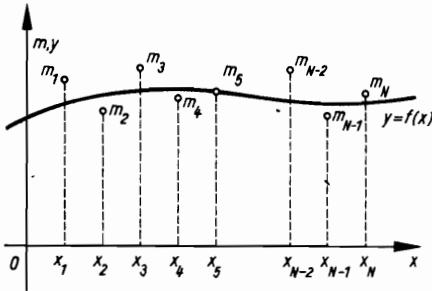
*Beispiel VII.2.:* Nach der *Methode der kleinsten Quadrate* kann zu einer Schar von  $N$  Meßwerten  $m_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, N$  eine Kurve  $y = f(x)$  so bestimmt werden, daß der Ausdruck (28) ein Minimum hat

$$(28) \quad Q = \sum_{i=1}^N [m_i - f(x_i)]^2$$

(Abb. 4, vgl. Kurvendiskussion I.). — Ein Polynomansatz (29) für  $f$  liefert für die Zielfunktion  $Q$ , eine

$$(29) \quad y = f(x) = P_n(x) \\ = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Funktion der  $n + 1$  unbekannt Parameter  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Diese müssen so bestimmt werden, daß (30) minimal ausfällt. Auf  $Q$  können die Kriterien für die Existenz relativer Extrema angewendet



Extremwert. Abb. 4: Ausgleich von Meßwerten

werden. Aus den  $(n + 1)$  notwendigen Bedingungen (31) folgt z. B. das lineare Gleichungssystem (32) für die  $n + 1$  Unbekannten  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , in dem nach GAUSS die Summation über die Indizes

$$(30) \quad Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^N (m_i - P_n(x_i))^2$$

$$(31) \quad \frac{\partial Q}{\partial a_i} = 2 \sum_{j=1}^N (m_j - P_n(x_j)) (-x_j^i) = 0$$

für  $i = 0, 1, \dots, n$

$$(32) \quad \begin{aligned} [x^n] a_n + [x^{n-1}] a_{n-1} + \dots + N a_0 &= [m] \\ [x^{n+1}] a_n + [x^n] a_{n-1} + \dots + [x] a_0 &= [mx] \\ \dots & \\ [x^{2n}] a_n + [x^{2n-1}] a_{n-1} + \dots + [x^n] a_0 &= [mx^n] \end{aligned}$$

$$(33/1) \quad [mx] = \sum_{i=1}^N m_i x_i \quad (33/2) \quad [x] = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$(33/3) \quad [x^2] = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (33/4) \quad [x^k] = \sum_{i=1}^N x_i^k$$

$$(33/5) \quad [m] = \sum_{i=1}^N m_i$$

von 1 bis  $N$  durch eine eckige Klammer angegeben ist, wie z. B. (33) zeigt. Wird speziell für  $f$  ein Polynomansatz erster Ordnung gewählt, etwa  $y = f(x) = ax + b$ , dann lassen sich die Lösbarkeit von (32) und die hinreichenden Bedingungen leicht nachprüfen. Aus dem Gleichungssystem (32) wird das System (34). Nach einer Ungleichung von SCHWARZ gilt aber (35), falls nicht alle  $x_i$  gleich sind. Damit ist die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems ungleich Null, und es existiert eine eindeutige Lösung von (34).

$$(34) \quad \begin{aligned} [x] b + N a &= [m], \\ [x^2] b + [x] a &= [mx] \end{aligned}$$

$$(35) \quad \begin{aligned} [x]^2 - N[x^2] &= \left( \sum_{i=1}^N 1 \cdot x_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^N 1 \right) \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) < 0 \end{aligned}$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen nach  $a$  bzw. nach  $b$  folgt (36) und nach der Schwarzischen Ungleichung (37). Deshalb ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (34) ein relatives Extremum.

Wegen  $Q_{aa} > 0$  ist dieses ein relatives Minimum.

$$(36) \quad Q(a, b) = \sum_{i=1}^N (m_i - a - b x_i)^2 \text{ mit}$$

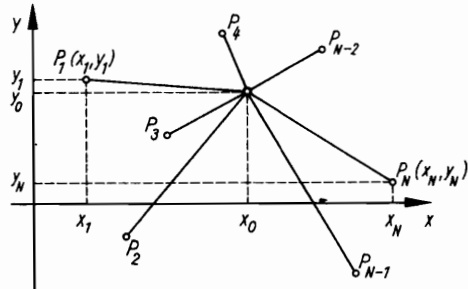
$$Q_a = -2 \sum_{i=1}^N (m_i - a - b x_i) \text{ und}$$

$$Q_b = -2 \sum_{i=1}^N (m_i - a - b x_i) x_i;$$

$$Q_{aa} = 2N; \quad Q_{bb} = 2 \sum_{i=1}^N x_i^2; \quad Q_{ab} = 2 \sum_{i=1}^N x_i;$$

$$(37) \quad \begin{aligned} D &= Q_{aa} Q_{bb} - Q_{ab}^2 \\ &= 4 \left( \sum_{i=1}^N 1 \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

**Beispiel VII.3.:** Für eine optimale Standortverteilung soll in einer  $x, y$ -Ebene ein Standort  $P_0 = (x_0, y_0)$  zwischen  $N$  vorgegebenen Standorten  $P_i = (x_i, y_i)$  so bestimmt werden, daß die Summe der Entfernungen zu allen Standorten  $P_i$  minimal wird (Abb. 5). Die Summe (38) der Abstände jedes Punktes  $P_i$  von  $P_0$  soll durch geeignete Wahl von  $P_0$  ein Minimum werden. Das setzt voraus, daß die beiden ersten Ableitungen nach  $x_0$  und  $y_0$  Null sind. Das System (39) zweier nicht linearer Gleichungen ist nicht explizit lösbar. Es kann aber eine Iterationsformel zur Bestimmung der gesuchten Parameter  $x_0, y_0$  angegeben werden, nach der wenigstens genügend gute



Extremwert. Abb. 5: Optimale Standortverteilung

Näherungswerte berechnet werden können. Wird (40) als 0-te Näherung gewählt, so berechnen sich die weiteren Näherungen nach den Formeln (41). Die hinreichenden Bedingungen werden wie im Falle der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. Beispiel VII.2.) nachgewiesen.

$$(38) \quad Z(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \rightarrow \text{Min!}$$

$$(39) \quad \begin{cases} Z_{x_0} = \sum_{i=1}^N \frac{x_0 - x_i}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}} = 0 \\ Z_{y_0} = \sum_{i=1}^N \frac{y_0 - y_i}{\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}} = 0 \end{cases}$$

$$(40) \quad x^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad y^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

$$(41a) \quad x^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \sqrt{(x^{(k)} - x_i)^2 + (y^{(k)} - y_i)^2}}{\sum_{i=1}^N 1 \sqrt{(x^{(k)} - x_i)^2 + (y^{(k)} - y_i)^2}}$$

$$(41b) \quad y^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sqrt{(x^{(k)} - x_i)^2 + (y^{(k)} - y_i)^2}}{\sum_{i=1}^N 1 \sqrt{(x^{(k)} - x_i)^2 + (y^{(k)} - y_i)^2}}$$

**exzentrisch:** Bezeichnung für die Anordnung von Kreisen in einer Ebene, wenn sie nicht den gleichen Mittelpunkt haben.

**Exzentrizität** ↗ Ellipse, ↗ Hyperbel.

**Exzeß:** eine Zahl, die als Maß der Abweichung einer Verteilung (↗ Zufallsgröße I.) von der Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und gleicher Streuung in der Umgebung des Erwartungswertes betrachtet werden kann. Der E. berechnet sich nach der Formel (1), in der  $\mu_2$  das zweite und  $\mu_4$  das vierte

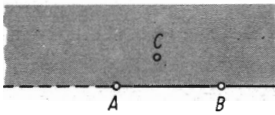
$$(1) \quad \varepsilon = (\mu_4 / \mu_2^2) - 3$$

zentrale Moment darstellen (↗ Momente I.). Für die Normalverteilung ist der E. gleich Null. E., empirischer ↗ Stichprobenmoment.

## F

**Fadenkonstruktion:** Methode, einen Kegelschnitt mit Hilfe eines gespannten Fadens zu zeichnen. Eine F. ist keine Konstruktion im klass. Sinn. Am bekanntesten ist die Gärtnerkonstruktion der ↗ Ellipse I., ↗ Parabel I., ↗ Hyperbel I. S. a. Kurvenzeichner II.

**Fahne:** Vereinigungsmenge  $AB^+ \cup ABC^+$  der Punkte einer Halbgeraden  $AB^+$  und einer Halbebene  $ABC^+$  mit  $g(AB)$  als Randgerade;  $AB^+$  heißt Trägerhalbgerade (Abb.) der F.



Fahne mit der Trägerhalbgeraden  $AB^+$

**fair** ↗ Spieltheorie II.

**Faktor** ↗ Multiplikation I., ↗ Untergraph.

**Faktorenzerlegung** ↗ Teilbarkeit II.

**Faktorgruppe** ↗ Gruppe III.

**Faktorisieren** ↗ Polynomwurzelberechnung I.

**Faktormenge** ↗ Äquivalenzrelation III.

**Faktorregel** ↗ Differentiationsregeln I.

**Faktorstruktur** ↗ algebraische Struktur II.

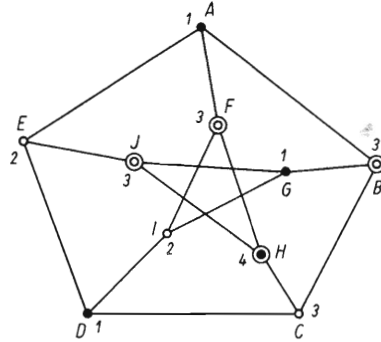
**Fakultät:** von jeder natürl. Zahl  $n$  nach der Rekursionsformel  $n! = n(n-1)!$  bestimmtes Produkt, wenn  $0! = 1$  gesetzt wird. Man erhält z. B.  $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ , allgemein  $n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Die F.en wachsen mit  $n$  sehr stark an. ↗ Gammafunktion.

**Falllinie** ↗ Eintafelprojektion.

**Faltungssatz** ↗ Laplacetransformation II.6.

**Farbenklassen** ↗ Extremalprobleme.

**Färbung von Graphen:** Zuordnung einer Farbe zu jedem Knotenpunkt eines ungerichteten Graphen  $G$ . Sind die Farben so gewählt, daß benachbarte Knotenpunkte verschiedene Farben haben, so heißt die Färbung von  $G$  zulässig. Eine zulässige Färbung von  $G$  mit  $k$  Farben ist demnach eine Zerlegung der Knotenmenge in  $k$  innerlich stabile Mengen, d. h. in  $k$  Klassen paarweise nicht-benachbarter Knotenpunkte.



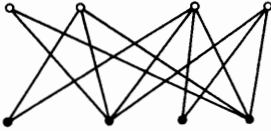
Färbung von Graphen. Abb. 1: Petersenscher Graph

In Abb. 1 liefert die Färbung des Petersenschen Graphen  $P$  mit vier Farben eine Zerlegung der Knotenmenge in die vier innerlich stabilen Mengen  $\{A, D, G\}$ ,  $\{C, E, I\}$ ,  $\{B, F, J\}$  und  $\{H\}$ . Die kleinste Zahl von Farben, mit der  $G$  zulässig gefärbt werden kann, heißt chromatische Zahl von  $G$ . Färbt man den Knotenpunkt  $H$  in Abb. 1 ebenfalls mit der Farbe 1, so erhält man eine zulässige Färbung des Petersenschen Graphen  $P$ , aber mit drei Farben. Da  $P$  Kreise (↗ Durchlaufungen von Graphen) ungerader Länge enthält, und — wie man leicht zeigt — zum zulässigen Färben eines Kreises ungerader Länge drei Farben notwendig sind, hat  $P$  die chromatische Zahl 3.

Hat jeder Knotenpunkt  $X$  eines endlichen Graphen  $G$  eine Valenz  $v(X) \leq v$ , so kann man leicht zeigen, daß er mit  $v + 1$  Farben zulässig färbbar ist. R. L. BROOKS hat alle zusammenhängenden Graphen bestimmt, die mit weniger als  $v + 1$  Farben zulässig gefärbt werden können.

**Satz von Brooks:** Hat jeder Knotenpunkt  $X$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  eine Valenz  $v(X) \leq v$  mit  $v \geq 3$  und ist  $G$  kein vollständiges  $(v + 1)$ -Eck, so ist  $G$  bereits mit  $v$  Farben zulässig färbbar. Hat jeder Knotenpunkt  $X$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  eine Valenz  $v(X) \leq 2$  und ist  $G$  kein Kreis ungerader Länge, so ist  $G$  bereits mit zwei Farben zulässig färbbar.

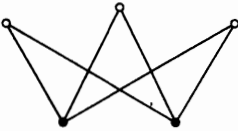
Ein mit zwei Farben zulässig färbbarer Graph heißt paar, auch bichromatisch. Unter einem vollständigen paaren Graphen versteht man einen Graphen, der eine zulässige Färbung mit zwei Farben hat, so daß je zwei Knotenpunkte genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie verschiedene Farbe haben.



Färbung von Graphen. Abb. 2: Bichromatischer, aber nicht vollständiger paarer Graph

Der Graph in Abb. 2 ist z. B. zwar ein bichromatischer, aber kein vollständiger paarer Graph. Hat ein vollständiger paarer Graph  $m + n$  Knotenpunkte, von denen je  $m$  bzw.  $n$  gleiche Farbe haben, so spricht man von einem *vollständigen paaren*  $(m, n)$ -Graphen (Abb. 3). Paare Graphen enthalten offenbar keine Kreise ungerader Länge. D. KÖNIG konnte als erster auch die leicht zu beweisende Umkehrung zeigen:

*Satz von König: Jeder Graph, der nur Kreise gerader Länge enthält, ist bichromatisch.*



Färbung von Graphen. Abb. 3: Vollständiger paarer  $(2, 3)$  - Graph

**Farkas, Julius**, geb. 28. 3. 1847 Sárosd (Ungarn), gest. 27. 12. 1930 Pestszentlőrinc bei Budapest. — F. promovierte 1881 an der Universität Budapest und war dort bis 1887 tätig; dann lehrte er als Professor der mathemat. Physik in Klausenburg (Cluj) und wurde 1915 emeritiert. Beim Studium physikal. Aufgaben beschäftigte er sich auch mit Systemen von linearen Ungleichungen. Diese Untersuchungen spielten dann in der Entwicklung der linearen Optimierung eine Rolle.

**Farkas, Sätze** von [nach J. FARKAS]: für die Optimierungstheorie wichtige Sätze über die Lösbarkeit von linearen  $\nearrow$  Ungleichungssystemen  $Ax \leq o$ ; Verallgemeinerung grundlegender Sätze über Gleichungssysteme, z. B. die Sätze F I und F II.

**F I:**  $Ax \leq o$  und  $q^T x > 0$  mit einem Parametervektor  $q$  und einer Matrix  $A$  hat genau dann keine Lösung, wenn ein  $u \geq o$  mit  $q^T x = u^T Ax$  für alle  $x$  existiert.

**F II:**  $q^T x \leq 0$  gilt für alle Lösungen von  $Ax \leq o$  dann und nur dann, wenn ein  $u \geq o$  mit  $q = A^T u$  existiert.

Die S. v. F. wurden auch auf nichtlineare Ungleichungssysteme ausgedehnt.

**Faßregel** svw. Keplersche Regel ( $\nearrow$  Integration, numerische II.).

**fast überall, fast alle:** bis auf eine  $\nearrow$  Nullmenge, s. a. Lebesguesches Integral II.

**feedback**  $\nearrow$  Regelung I.

**Fehler:** I. Differenz zwischen dem Ist-Wert  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\bar{a}$ , ... und dem Soll-Wert  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $a$ , ... einer Größe. Folgende Bezeichnungen sind üblich:

wahrer F. :=  $\delta(x) = \bar{x} - x$ ,

F.schranke, untere, obere :=  $\delta(x)$ ,  $\bar{\delta}(x)$ , F.schranke,

absolute  $\Delta x = \max(|\delta(x)|, |\bar{\delta}(x)|)$ ,

wahrer relativer F. :=  $\rho(x) = \delta(x)/x$ ,

absolute F.schranke für den relativen F. :=  $R(x) = \Delta x/|x|$ ;

zwischen ihnen bestehen folgende Beziehungen:

$\delta(x) \leq \delta(x) \leq \bar{\delta}(x)$ ,  $|\delta(x)| \leq \Delta x$  und  $|\rho(x)| \leq R(x)$ ;

bei der Berechnung von  $x = e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$  gilt für  $\bar{x} = 2,7183$  z. B.

$\delta(e) = 2,7183 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$

und danach  $\delta(e) = 0,000015$ ,  $\bar{\delta}(e) = 0,00002$ , sowie

$\Delta e = 0,00002$ , d. h.,  $2,71828 \leq e \leq 2,71832$ . Sind keine F.schranken, sondern nur  $\bar{x}$  bekannt, dann

wird nach einer allgemeinen Vereinbarung die absolute F.schranke als die Hälfte der folgenden Zehnerpotenz gewählt, für  $\bar{x} = 0,00234$  z. B. erhält man

$\Delta x := 0,000005$  und für  $\bar{x} = 235600$  die Schranke  $\Delta x := 0,5$ .

Im numer. Rechnen sind nahezu alle vorkommenden Zahlen gerundet, d. h., sie sind mit F. behaftete

Ist-Werte theoretisch gegebener Größen. Für den Gebrauch des Gleichheitszeichens zwischen Zahl und Symbol bzw. zwischen Ist- und Soll-Wert wird folgende Vereinbarung benutzt:  $\pi = 3,1415$  bedeutet

$\pi = (3,1415 \pm 0,00005)$ , d. h.,  $3,14145 \leq \pi \leq 3,14155$ . Im Produkt  $0,028 \cdot 1,14 = 0,03$  gelten die Fehlerschranken  $0,0275 \leq a \leq 0,0285$ ;

$1,135 \leq b \leq 1,145$ ;  $0,025 \leq c \leq 0,035$ , (vgl. III. 6.). Gerundet wird nach festgelegten Normen, die im

wesentlichen folgendes besagen: Soll eine Zahl auf die  $k$ -te geltende Stelle gerundet werden, so wird

abgebrochen oder abgerundet, wenn die folgende Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4 ist, und es wird aufgerundet, d. h. die  $k$ -te Stelle wird um 1 erhöht, wenn die

folgende Ziffer 6, 7, 8 oder 9 ist; ist aber die  $k + 1$ -te Stelle durch eine 5 besetzt, so wird aufgerundet, wenn weitere geltende Stellen folgen. Folgen auf die

5 keine weiteren geltenden Stellen, so rundet man auf oder ab, je nachdem in der  $k$ -ten Stelle eine ungerade

oder eine gerade Zahl steht; wird in den folgenden Beispielen die  $k$ -te Stelle, auf die die gegebene Zahl jeweils gerundet werden soll, durch Unterstreichen gekennzeichnet, so ergeben sich folgende Rundungen:

$$0,002741 \rightarrow 0,0027,$$

$$1341\underline{2}85 \rightarrow 1341300,$$

$$\underline{12},502 \rightarrow 13,$$

$$121,\underline{3}5 \rightarrow 121,4 \text{ und}$$

$$0,\underline{14}5 \rightarrow 0,14.$$

S. a. numerisches Rechnen; zufälliger Fehler.

**II.** Aufgabe der F.rechnung ist es, für das Ergebnis einer Rechnung mit fehlerbehafteten Werten Schranken gegenüber dem Sollwert anzugeben. Diese Schranken werden aber nicht allein dadurch bedingt, daß rationale Werte für reelle Werte eingesetzt werden. Bes. der Einsatz von Rechenanlagen macht deutlich, daß in der Analysis definierte Grenzwerte ersetzt werden durch Ergebnisse eines endl. Algorithmus, der nur algebraische Operationen benutzt, und daß die Angabe von Schranken die Konvergenz dieser Näherungswerte gegen den Grenzwert voraussetzt. Von einer durch das Problem bedingten Funktion  $g(a, b, c, \dots)$  die z. B.



auch transzendent sein kann, ist die durch das Rechenverfahren bedingte, meist algebraische Funktion  $\bar{g}(a, b, c, \dots)$  zu unterscheiden, um den wahren Verfahrens-F.  $\delta_s(x) = \bar{g}(a, b, c, \dots) - g(a, b, c, \dots)$  festzustellen als Maß für die Abweichung des numer. Modells vom exakten. Er kann auch auftreten, wenn die Eingangsdaten  $a, b, c, \dots$  exakt, d. h. Sollwerte sind;  $x := g(a, b, c, \dots)$  wird dabei nach der Vorschrift  $g$  aus  $N$  Eingangsdaten  $a, b, c, \dots$  berechnet. Zusätzl. Unterlagen zur Abschätzung des Verfahrens-F.s ergeben sich, wenn Istwerte  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$  eingesetzt werden. Der eingangsbedingte F.  $\delta_e(x) = \bar{g}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) - \bar{g}(a, b, c, \dots)$  ist ein Maß für die Fortpflanzung der Eingangs-F. bei der Rechnung. Der Zusatz-F.  $\delta_z(x) = \bar{x} - \bar{g}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)$  heißt Rest-F. und ist ein Maß für die während der realen Ausführung der Operation durch Rundung, Stellenverluste oder Störungen hinzukommenden F. Die Angabe oder möglichst genaue Abschätzung des Verfahrens-F. ist Bestandteil jeder numer. Methode und von der Realisierung unabhängig. Treten in Formeln Restglieder auf, dann handelt es sich um solche Angaben. Für einfache Operationen wird der eingangsbedingte F. in der F.rechnung untersucht. Für zusammengesetzte Algorithmen versagen diese einfachen und direkten Methoden vor allem auch deshalb, weil dieser F.anteil nicht von der Realisierung unabhängig ist.

Neben statist. und determinist. Methoden der Abschätzung gibt es in jüngster Zeit den Versuch der Intervallarithmetik: Hier wird das exakte Modell  $x := g(a, b, \dots)$  durch einen Algorithmus ersetzt, der reelle Intervalle als Eingangs- und Ausgangsgrößen verwendet. Eine fehlerbehaftete Zahl geht dann direkt als Intervall in die Rechnung ein, deren Ergebnis wieder ein Intervall ist, in dem der Sollwert garantiert zu finden ist. Eine gesonderte F.untersuchung entfällt hier.

Die Größe des Zusatz-F.s hängt in erster Linie von der rechentechn. Realisierung ab. Hauptursachen für große Werte sind

- 1) das Abbruchs- und Rundungsverfahren der Maschine;
- 2) die Auslöschung führender Stellen bei Subtraktion von Zahlen gleicher Größenordnung; sind z. B. in  $3,1415613 - 3,1415524 = 0,0000089$  die unterstrichenen Ziffern unsicher, so ist das Ergebnis eine reine Zufallszahl;
- 3) Stellenverluste bei Zahlenbereichsüberschreitung etwa bei der Division durch sehr kleine Zahlen. Vor allem diese Zusatz-F. können die Ursache dafür sein, daß sich F. im Verlauf eines aus vielen Einzeloperationen bestehenden Algorithmus aufschaukeln. Numer. Stabilität liegt vor, wenn dieser Fall nicht eintreten kann, wenn das Verhältnis von Eingangs- und Ausgangs-F. unabhängig von der Wahl der Eingangsdaten beschränkt bleibt. Den Grad der Stabilität bezeichnet man als *Kondition*.

III. Ein Hauptproblem der F.rechnung ist die F.fortpflanzung für prinzipiell exakt bekannte Zahlen. Wird eine Größe  $f$  nach einer arithmet. Vorschrift  $f := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  aus Zahlen berechnet, von denen nur Näherungswerte bekannt sind, so sollen

F.schranken für  $f$  aus bekannten F.schranken für  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ermittelt werden. Relativ einfach gewinnt man die absolute F.schranke, wenn  $f(x_1, \dots, x_n)$  stetige partielle Ableitungen hat:

$$\Delta f = \Delta x_1 |f_{x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)| + \Delta x_2 |f_{x_2}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)| + \dots + \Delta x_n |f_{x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)|.$$

Hiernach erhält man, wenn  $f$  die Summe, das Produkt, den Quotienten oder eine Potenz mit  $n \in \mathbf{N}$  darstellt:

- III.1.  $\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y,$
- III.2.  $\Delta(x \cdot y) = \Delta x \cdot \bar{y} + \Delta y \cdot \bar{x},$
- III.3.  $\Delta(x/y) = \Delta x \cdot \bar{y} + \Delta y \cdot \bar{x} / \bar{y}^2,$
- III.4.  $\Delta(x^n) = \Delta x |n \bar{x}^{n-1}|.$

Es würde nun allerdings ein zu großer Aufwand sein, wenn man bei jeder Rechnung die F.schranken in dieser Form mit berechnen wollte. Vielmehr erhält man bereits bei Beachtung der folgenden Faustregeln sinnvolle Ergebnisse:

III.5. Summe und Differenz sind so genau, wie der Summand mit der kleinsten Stellenzahl nach dem Komma.

III.6. Produkt und Quotient haben so viele geltende Stellen, wie der Faktor mit der kleinsten Anzahl von Stellen nach dem Komma. Für das Produkt  $P = (1,41 \pm 2,3311) \cdot 21,3$  erhält man mit den F.schranken

$(1,41 \pm 0,005) + (2,3311 \pm 0,00005) (21,3 \pm 0,05)$  nach genauer F.rechnung  $P = 79,68543 \pm 0,28487$ . Nach den Regeln dagegen ist  $(1,41 + 2,3311) = 3,74$  und  $3,74 \cdot 21,3 = 79,7$ , d. h.,  $P = 79,7 \pm 0,05$ .

IV. Von prakt. Bedeutung ist die Bestimmung des F.s bei Meßreihen. Die Meßwerte  $x_i$  einer Größe  $x$  sind stets fehlerhaft. Die Abweichung setzt sich zusammen aus *systemat. F.n.*, die bei sorgfältiger Beobachtung vermieden oder doch eliminiert werden können, und aus *subjektiven oder zufälligen F.n.*, die prinzipiell unvermeidbar sind. Deshalb kann nur nach dem *wahrscheinlichsten Wert* oder *Mittelwert*  $\bar{x}$  gefragt werden. In den meisten Fällen kann für die F.  $V_i = x - x_i$  *Normalverteilung* angenommen werden. Dann berechnen sich die wichtigsten Größen nach folgenden Formeln:

*Mittelwert:*  $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / N$  ( $\nearrow$  Ausgleichsrechnung, Ausgleichung von Meßreihen), *mittlerer F. (1) der Einzelmessung*

$$(1) \quad m = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N V_i^2 \right] / N} \\ = \sqrt{\left[ \sum_{i=1}^N v_i^2 \right] / (N-1)} \quad \text{mit } v_i = \bar{x} - x_i,$$

*mittlerer F. des Ergebnisses bei direkter Beobachtung*  $m_x = m / \sqrt{N}$ .

Für den mittleren F.  $m_f$  des Ergebnisses bei vermittelter Beobachtung gilt das *Gaußsche F.fortpflanzungsgesetz* (2) wenn zwischen den durch Meß-

$$(2) \quad m_f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} m_x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} m_y \right)^2 + \dots}$$

reihen ermittelten Größen  $x, y, z, \dots$  die Beziehung  $f = f(x, y, z, \dots)$  besteht.

**Fehler, systematischer**  $\nearrow$  Fehler IV.,  $\nearrow$  Punktschätzung,  $\nearrow$  zufälliger Fehler.

**Fehler erster Art bzw. zweiter Art**  $\nearrow$  Signifikanztest II.

**Fehlerfortpflanzung**  $\nearrow$  Fehler III., IV.

**Fehlerintegral, Gaußsches**  $\nearrow$  Normalverteilung I.

**Fehlerrate**  $\nearrow$  Zuverlässigkeitstheorie.

**Fehlerrechnung**  $\nearrow$  Fehler II.

**Fehlerschranke**  $\nearrow$  Fehler I.

**Fehlensignal**  $\nearrow$  Regelung I.

**Fehlmengekosten** swv. Mangelkosten,  $\nearrow$  Lagerhaltungstheorie.

**Fehlstelle**  $\nearrow$  Zahlensystem V.

**Feldachse**  $\nearrow$  skalares Feld I.

**Feldlinie**  $\nearrow$  Vektorfeld.

**Feldmeßkunde**  $\nearrow$  Geodäsie.

**Feldtheorie**  $\nearrow$  Vektoranalysis.

**Femto**  $\nearrow$  Strecke V.

**Fermat, Pierre de**, geb. 17. 8. 1601 in Beaumont de Lomage als Sohn eines Lederhändlers, gest. 12. 1. 1665 Castres. — F. studierte Jura, kaufte 1630 die Stelle eines Rates beim Parlament von Toulouse, siedelte nach Toulouse über und ließ sich dort 1648 an die Strafkammer des Parlaments versetzen. Auf einer Dienstreise verstarb er völlig unerwartet. — Seine Hauptleistungen liegen auf dem Gebiet der *Infinitesimalrechnung* und im Bereich der *Zahlentheorie*; er veröffentlichte aber nur wenig über infinitesimale Mathematik. Auch seine zahlentheoret. Ergebnisse sind fast ausschließlich aus Briefen und Randnotizen zu Büchern bekannt. F. gilt neben DESCARTES als einer der Begründer der *analyt. Geometrie*.

**Fermat, Satz von: Analysis.** Ist die Funktion  $f$  der reellen Variablen  $x$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  in  $[a, b]$  erklärt, nimmt sie für  $x_0 \in ]a, b[$  ihr Maximum bzw. Minimum ( $\nearrow$  Extremwert I.) an, und ist  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  differenzierbar, so ist  $f'(x_0) = 0$ . Anschaulich bedeutet das: Ist  $f(x_0)$  ein bzgl. einer Umgebung von  $x_0$  extremaler Funktionswert der in dieser Umgebung von  $x_0$  differenzierbaren Funktion  $f$ , so verläuft die zu  $x_0$  gehörende Tangente an die Bildkurve von  $f$  parallel zur  $x$ -Achse.

**Fermatsche Primzahl**  $\nearrow$  Primzahl V.

**Fermatscher Satz, kleiner: Zahlentheorie.** Sind  $p$  eine beliebige Primzahl und  $a$  eine ganze Zahl, die nicht durch  $p$  teilbar ist, so ist  $a^{p-1} - 1$  durch  $p$  teilbar, d. h.,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  ( $\nearrow$  Kongruenz von Zahlen). Daraus folgt, daß  $p$  auch Teiler von  $a(a^{p-1} - 1) = a^p - a$  ist. Dieser Satz von Fermat läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ , wenn  $a$  und  $m$  teilerfremde ganze Zahlen sind und  $\varphi(m)$  die Eulersche Funktion bedeutet, d. h. die Anzahl der zu  $m$  teilerfremden Zahlen kleiner als  $m$ . Für  $a = 5$  und  $m = 8$  z. B. ist  $\varphi(m) = 4$  und  $5^4 = 625 \equiv 1 \pmod{8}$ .

Zuweilen wird die Fermatsche Vermutung als *großer Fermatscher Satz* bezeichnet. S. a. Primzahl.

**Fermatsche Vermutung**  $\nearrow$  Zahlentheorie IV.

**Ferrari, Ludovico**, geb. 2. 2. 1522 und gest. Okt. 1565 Bologna. — F., ein Schüler von CARDANO, war von 1549 bis 1556 Professor in Mailand und danach in Bologna. Er löste als erster die Gleichung vierten Grades in Radikalen.

**Ferro, Scipione del**, geb. 1465(?), gest. 1526 Bologna(?). — Von seinem Leben weiß man nur, daß er von 1496 bis 1526 an der Universität Bologna lehrte. Um 1500 entdeckte er die Methode der Auflösung der Gleichung dritten Grades, veröffentlichte sie jedoch nicht. Neu fand die Lösung 1535 TARTAGLIA.

**Festkommadarstellung:** rechnerinterne Formulierung ganzer Zahlen durch eine endl. Folge von Binärzeichen bzw. durch deren techn. Realisierungen, durch die sowohl das Vorzeichen als auch die Ziffern des zugrunde gelegten Zahlensystems kodiert sind. Es ist gebräuchlich, zur Darstellung einer ganzen Zahl 32 Bits zu verwenden. Allgemein leitet sich aus der endl. Stellenzahl der Binärzeichenfolge eine obere Schranke für den Betrag der in digitalen Rechenanlagen formulierbaren ganzen Zahlen ab.

**Festwertregelung**  $\nearrow$  Regelung III.

**Feuerbach, Karl Wilhelm**, geb. 30. 5. 1800 Jena, gest. 12. 3. 1834 Erlangen. — F. war Professor in Erlangen und hat Dreiecke und dreiseitige Pyramiden untersucht. Der Neun-Punkte-Kreis eines Dreiecks trägt seinen Namen.

**Feuerbachscher Kreis**  $\nearrow$  Eulersche Gerade.

**Fibonacci, Leonardo**, geb. 1180(?) Pisa als Sohn eines Kaufmanns, gest. 1250(?). — Er war Autodidakt, gehörte zum Gelehrtenkreis um Kaiser Friedrich II. und hat sich mehrere Jahre in Nordafrika aufgehalten. Seine Bedeutung liegt vor allem in seinem 1202 verfaßten »*Liber Abaci*«, in dem zuerst die sog. *arab. Ziffern* in Europa eingeführt wurden. **Fibonacciische Zahlen:** eine Folge  $(a_n)$  von Zahlen, die rekursiv durch  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  für  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$  bestimmt sind; ihre ersten Glieder sind 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

**fiktiver Bedarfsträger**  $\nearrow$  Transportproblem I.

**First**  $\nearrow$  Dachausmittlung.

**Fisher, Ronald Aylmer**, geb. 17. 12. 1890 The Up-lands, East Finchley, gest. 29. 7. 1966 Adelaide (Australien). — Nach Studium und Promotion in Cambridge war F. seit 1919 Leiter eines statist. Amtes, seit 1933 Professor in London und 1943/57 Professor an der Universität Cambridge. Er arbeitete vorwiegend über Probleme der *Biometrie*.

**Fishersche Verteilung** swv. F-Verteilung.

**Fixebene**  $\nearrow$  Fixelement II.

**Fixelement:** I. Element einer Menge  $M$  geometr. Objekte, z. B. von Punkten, Geraden oder Vektoren, die bei einer Abbildung von  $M$  auf sich oder in sich nicht geändert werden, für die also *Bild* und *Urbild* einander gleich sind. Führt die Abbildung  $\varphi: M \rightarrow M$  das Element  $x \in M$  in  $\varphi x$  über, so gilt für alle F.e  $x_F$  die Beziehung (1). Die Auflösung der Gleichung

$$(1) \quad x_F = \varphi x_F$$

(1) kann i. allg. sehr kompliziert sein. Für den Fall der *affinen Abbildung* eines *affinen Raumes*  $R_n$  auf oder in sich ergibt sich aus (1) die Lösung (2)

bzw. (3) in Matrizen- bzw. Koordinatenform ( $\nearrow$  Abbildung, affine V.).

(2)  $x_F = Cx_F + c$

(3)  $x_i^F = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^F + c_i$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem (2a) bzw. (3a)

(2a)  $(C - E)x_F + c = 0$

(3a)  $\sum_{j=1}^n (c_{ij} - \delta_{ij}) x_j^F + c_i = 0$

mit  $\delta_{ij} = 0$  oder  $1$ , je nachdem, ob  $i \neq j$  oder  $i = j$ , für die *Fixpunkte* mit dem Koordinatenvektor  $x_F$  bzw. den Koordinaten  $x_1^F, \dots, x_n^F$ . Speziell für die *Fixpunkte* einer affinen Abbildung (4) einer Ebene

(4)  $\bar{x} = c_{11}x + c_{12}y + c_1, \bar{y} = c_{21}x + c_{22}y + c_2$

ergibt sich das Gleichungssystem  $(c_{11} - 1)x_F + c_{12}y_F + c_1 = 0, c_{21}x_F + (c_{22} - 1)y_F + c_2 = 0$ . Nach den Abbildungsgleichungen für Vektoren

$\bar{v} = Cv$  oder  $\bar{v}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j$  genügen *Fixvektoren*  $v_F$  dem Gleichungssystem (5) bzw. (6). Im Fall einer

(5)  $(C - E)v_F = 0$

(6)  $\sum_{j=1}^n (c_{ij} - \delta_{ij}) v_j^F = 0$

ebenen Abbildung gilt für sie  $(c_{11} - 1)v_1^F + c_{12}v_2^F = 0, c_{21}v_1^F + (c_{22} - 1)v_2^F = 0$ .

II. Eine *Fixgerade* bzw. *Fixebene* einer Abbildung ist eine Gerade bzw. Ebene, deren Punkte wieder in Punkte der Geraden bzw. Ebene übergehen ( $\nearrow$  Spiegelung I.). Dabei dürfen i. allg. die Punkte innerhalb der *Fixgeraden* bzw. der *Fixebene* ihre *Lage* ändern. Eine Gerade einer Ebene etwa ist *Fixgerade*, wenn allein die Koordinaten aller Geradenpunkte und die ihrer Bildpunkte einer Gleichung dieser Geraden genügen. Zur Berechnung einer solchen *Fixgeraden* einer affinen Abbildung wird in eine *allgemeine Geradengleichung*  $ax + by + c = 0$  mit unbestimmten Koeffizienten  $a, b, c$  die Transformation (4) eingesetzt und gefordert, daß sich in den Bildpunktkoordinaten  $\bar{x}, \bar{y}$  wieder eine Gleichung für diese Gerade ergibt. Es ist dabei zu beachten, daß eine allgemeine Gleichung für eine Gerade nicht eindeutig bestimmt ist. Entsprechend berechnet man *Fixebenen* im Raum, aber auch andere Kurven wie Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln, die bei einer affinen Abbildung in sich übergehen sollen. Eine *Fixgerade*, insbes. auch im Raum, kann man bestimmen, indem man die notwendige Bedingung (5) zur Berechnung eines *Richtungsvektors* der Geraden verwendet. *Beispiel*: Die Umlegung (7) ( $\nearrow$  Abbildung, affine) der Ebene hat keinen *Fixpunkt*, denn für  $\bar{x} = x, \bar{y} = y$  erhält man

(7)  $\bar{x} = 1/2 x + 1/2 y \sqrt{3} + 1,$   
 $\bar{y} = 1/2 x \sqrt{3} - 1/2 y - 2$

das Gleichungssystem  $-1/2 x_F + 1/2 \sqrt{3} y_F + 1 = 0, 1/2 \sqrt{3} x_F - 1/2 y_F - 2 = 0$ , das unlösbar ist. Die Umlegung hat aber *Fixvektoren* der Form  $(3t, \sqrt{3}t)$ , die Lösungen des Gleichungssystems

$-1/2 v_F + 1/2 \sqrt{3} w_F = 0, 1/2 \sqrt{3} v_F - 1/2 w_F = 0$ . Der Nullpunkt wird in den Punkt  $(1, -2)$  abgebildet; demzufolge muß  $(1/2, -1)$  ein Punkt der *Fixgeraden* mit der vektoriellen Gleichung  $x = (1/2, -1) + (3, \sqrt{3})t$  oder der Gleichung  $2x - 2y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 1 = 0$  sein.

**Fixgerade**  $\nearrow$  Fixelement II.,  $\nearrow$  Spiegelung IV.

**Fixpunkt**  $\nearrow$  Fixelement I., s. a. Spiegelung I.

**Fixvektor**: jeder Vektor  $x$  einer linearen Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V'$ , für den  $\varphi x = x$  gilt. F.en von  $\varphi$  lassen sich auch auffassen als *Eigenvektoren* von  $\varphi$  zum Eigenwert  $1$ . S. a. *Fixelement* I.

**Fläche**: eine zusammenhängende Punktmenge  $F$  im dreidimensionalen euklid. Raum  $R_3$ , in der es zu jedem ihrer Punkte  $P$  eine Umgebung  $U$  der Eigenschaft gibt, daß die in  $U$  liegenden Punkte von  $F$  eine Parameterdarstellung als F.nstück haben. In einem kartes. Koordinatensystem wird jeder Punkt des  $R_3$  durch seinen Ortsvektor  $x = (x_1, x_2, x_3)$  festgelegt. Dann ist ein *F.nstück* gegeben durch die reelle Vektorfunktion  $x = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$  von zwei unabhängigen reellen Veränderlichen  $u, v$ , den *Parametern*, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $B$  der  $u, v$ -Ebene definiert ist. Diese Darstellung heißt *Parameterdarstellung eines F.nstücks*. Die Parameter  $u$  und  $v$ , die mitunter auch *Koordinaten auf der F.* gen. werden, bestimmen die *Lage* eines Punktes auf dem betrachteten F.nstück eindeutig; auf der Erdoberfläche z. B. die geograph. Koordinaten Länge und Breite. Man spricht von einem *glatten F.nstück*, wenn die Funktionen  $x_i = x_i(u, v)$  für  $i = 1, 2, 3$  hinreichend oft partiell differenzierbar sind und die Funktionalmatrix  $J$  überall in  $B$  den Rang 2 hat.

(1)  $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix}$

Wie bei einer Kurve sind die Parameter eines F.nstücks in weiten Grenzen willkürlich wählbar, entsprechende Werte aber miteinander verbunden durch eine *Parametertransformation*  $u^* = u^*(u, v), v^* = v^*(u, v)$  mit der Determinante

(2)  $\begin{vmatrix} \frac{\partial u^*}{\partial u} & \frac{\partial v^*}{\partial u} \\ \frac{\partial u^*}{\partial v} & \frac{\partial v^*}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$

In einer *impliziten Darstellung* ist eine F. durch eine Gleichung  $g(x_1, x_2, x_3) = 0$  gegeben.

**Flächendiagonale**  $\nearrow$  Prisma II.

**Flächen eines ebenen Graphen**  $\nearrow$  Landkarte I.

**Flächeneinheit**  $\nearrow$  Flächeninhalt I., III.

**Flächenelement**  $\nearrow$  Flächenintegral III.,  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung II.

**Flächeninhalt:** I. einem ebenen Flächenstück zugeordnetes formales Produkt aus einer reellen Zahl  $a$ , der Maßzahl, und einer festen *Flächeneinheit*  $e^2$  mit den Eigenschaften: 1. Es ist  $a \geq 0$ . 2. Kongruente Flächenstücke haben gleichen Flächeninhalt. 3. Der F. der Flächeneinheit ist  $1 \cdot e^2$ . 4. Haben zwei Flächenstücke mit den F.en  $a \cdot e^2$  und  $a' \cdot e^2$  keine gemeinsamen inneren Punkte, so hat die Vereinigung der Punkte der beiden Flächenstücke den F.  $(a + a') \cdot e^2$ , der Summe der beiden F.e genannt wird. Flächenstücke mit gleichem F. heißen *flächen-gleich*. Jedes Flächenstück, dem ein F. zugeschrieben werden kann, heißt *quadrierbar*, z. B. ist jede ebene Vielecksfläche quadrierbar, da sie sich in endl. viele Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte zerlegen läßt und jedes Dreieck quadrierbar ist, z. B. gilt für ein konvexes Fünfeck  $|P_1P_2P_3P_4P_5| = |P_1P_2P_3| + |P_1P_3P_4| + |P_1P_4P_5|$  (Abb. 1). Qua-

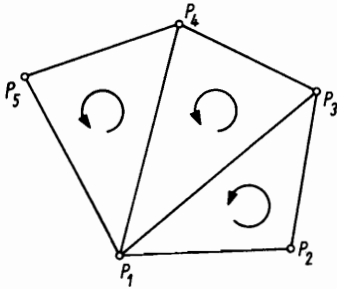


Abb. 1: Flächeninhalt eines Fünfecks als Summe der Flächeninhalte von drei Dreiecken,  $|P_1P_2P_3P_4P_5| = |P_1P_2P_3| + |P_1P_3P_4| + |P_1P_4P_5|$

drierbaren Flächenstücken in einer orientierten Ebene kann ein vorzeichenbehafteter F., auch „orientierter“ F. genannt, zugeordnet werden, indem der F. das Vorzeichen des Drehsinns erhält, der durch die Umlaufung des Flächenstücks bestimmt wird. Danach gilt für den vorzeichenbehaft-

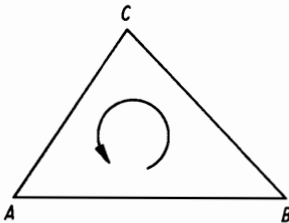


Abb. 2: Orientierter Flächeninhalt  $m(ABC) = -m(ACB)$

teten F. eines Dreiecks  $ABC$ :  $m(ABC) = -m(ACB)$ , wenn es in der angegebenen Reihenfolge seiner Eckpunkte umlaufen wird (Abb. 2). Werden die Ecken eines Parallelogramms in der Reihenfolge  $P_1P_3P_2P_4$  (Abb. 3) durchlaufen, so daß ein *überschlagenes Viereck* entsteht und ist  $S$  der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt z. B.  $m(SP_3P_2)$

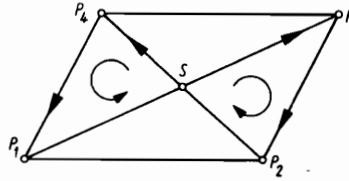


Abb. 3: Das aus dem Parallelogramm entstandene überschlagene Viereck  $P_1P_3P_2P_4$  hat den Flächeninhalt Null

$= -m(SP_4P_1)$ , d. h. die von der Umrandung dieses Vierecks umschlossenen Flächenstücke haben den orientierten F. Null. Der F. eines konkaven Vielecks kann dann als Differenz zweier F.e berechnet werden, z. B. der eines Vierecks  $P_1P_3P_4P_5$  als  $m(P_1P_3P_4P_5) = |P_1P_3P_4| - |P_1P_3P_5|$  (Abb. 4). Es gibt auch krummlinig begrenzte Flächenstücke, die quadrierbar sind, z. B. jede Kreisfläche. Die Berechnung des F. erfordert in vielen Fällen den Begriff des Grenzwertes.

II. *Beispiel:* Durch Verwendung trigonometr. Beziehungen lassen sich die für den Flächeninhalt

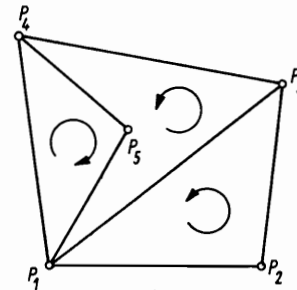


Abb. 4: Flächeninhalt eines konkaven Fünfecks  $P_1P_2P_3P_4P_5$  als Summe der Flächeninhalte eines Dreiecks  $P_1P_3P_4$  und eines konkaven Vierecks  $P_1P_3P_4P_5$

$A = a \cdot h_a/2 = b \cdot h_b/2 = c \cdot h_c/2$  eines Dreiecks bekannten Beziehungen umformen. Aus  $h_a = c \sin \beta$ ,  $h_b = a \sin \gamma$  und  $h_c = b \sin \alpha$  erhält man (1). Bedeutet  $r$  die Länge vom Radius des Umkreises ( $\sphericalangle$  Sinus-

$$(1) \quad A = \frac{1}{2} \cdot ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

satz), so gehen diese Gleichungen durch Einsetzen von (2) über in (3), bzw., wenn darin mittels  $r = a/(2 \sin \alpha) = b/(2 \sin \beta) = c/(2 \sin \gamma)$  der Umkreisradius eliminiert wird, in (4).

$$(2) \quad a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma$$

$$(3) \quad A = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$(4) \quad A = a^2 \cdot \sin \beta \sin \gamma / (2 \sin \alpha) \\ = b^2 \cdot \sin \gamma \sin \alpha / (2 \sin \beta) = c^2 \cdot \sin \alpha \sin \beta / (2 \sin \gamma) \\ = c^2 \sin \alpha \sin \beta / (2 \sin (\alpha + \beta))$$

Die Heron. Dreiecksformel (5) mit  $2s = a + b + c$

$$(5) \quad A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ergibt sich aus dem Wert für den Inkreisradius  $\rho$  ( $\sphericalangle$  Inkreis).

III. Als *Flächeneinheit* wählt man meist ein über einer Einheitsstrecke errichtetes Quadrat, ein *Einheitsquadrat*. Für Messungen gelten die SI-Einheit ( $\sphericalangle$  Strecke V.) *Quadratmeter*  $m^2$  und ihre dezimalen

Vielfachen bzw. Teile, z. B. 1 *Quadratkilometer*, 1 km<sup>2</sup> = 10<sup>6</sup> m<sup>2</sup>, 1 *Hektar*, 1 ha = 10<sup>4</sup> m<sup>2</sup>, 1 *Ar*, 1 a = 10<sup>2</sup> m<sup>2</sup>, 1 *Quadratdezimeter*, 1 dm<sup>2</sup> = 10<sup>-2</sup> m<sup>2</sup>, 1 *Quadratzentimeter*, 1 cm<sup>2</sup> = 10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup>, 1 *Quadratmillimeter*, 1 mm<sup>2</sup> = 10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>. Eine veraltete Flächeneinheit, die in der Landwirtschaft gebräuchlich war, ist der *Morgen*, der mit 25 a angesetzt wird.

**Flächenintegral: I.** Verallgemeinerung des bestimmten Integrals von Funktionen einer Variablen auf Funktionen von zwei unabhängigen Variablen.

Auf dem beschränkten Bereich  $B$  der  $x,y$ -Ebene mit einem stückweise glatten Rand soll eine beschränkte

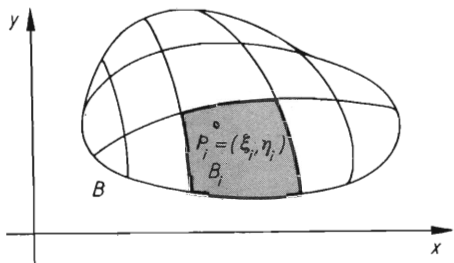


Abb. 1: Bereich  $B$  zur Definition eines Flächenintegrals

Funktion  $f(x, y)$  definiert sein (Abb. 1). Ist dann  $Z$  eine Zerlegung von  $B$  in endl. viele Teilbereiche  $B_i$ , jedes mit dem Flächeninhalt  $\Delta B_i$  für  $1 \leq i \leq n$ , so soll  $\Delta(Z)$  den größten Durchmesser der Teilbereiche  $B_i$  bedeuten, die in der Zerlegung  $Z$  auftreten. Wird schließlich in jedem Teilbereich  $B_i$  ein beliebiger Punkt  $P_i$  mit den Koordinaten  $\xi_i, \eta_i$  gewählt, so kann die zur Zerlegung  $Z$  gehörende *Zwischensumme* (1) gebildet werden.

$$(1) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta B_i$$

Ihr Grenzwert heißt das F. von  $f(x, y)$  über den Bereich  $B$ , und  $f(x, y)$  heißt über  $B$  *integrierbar*. Der Grenzwert ist  $I$ , wenn sich zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  angeben läßt; so daß für *jede* Zerlegung  $Z$  des Bereichs  $B$  mit  $\Delta(B_i) < \delta$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$  gilt. In Analogie zur Bildung der Zwischensummen wird das F.  $I$  durch (2) dargestellt.

$$(2) \quad I = \iint_{(B)} f(x, y) dB \text{ oder } I = \iint_{(B)} f(x, y) dx dy$$

Das F. existiert für jede Funktion, die in  $B$  stetig bzw. in  $B$  mit Ausnahme von Punkten stetig ist, die auf einer endl. Anzahl glatter Kurven liegen; auf solchen Kurven kann  $f(x, y)$  beliebig abgeändert werden, wenn die abgeänderte Funktion beschränkt ist, wobei sich der Wert des Integrals nicht ändert.

**II.1.** Zu den *Eigenschaften des F.* gehört *Additivität bzgl. der Integranden*; d. h., sind  $f(x, y)$  und  $g(x, y)$  zwei über  $B$  integrierbare Funktionen, so ist auch ihre Summe integrierbar, und es gilt (3).

$$(3) \quad \iint_{(B)} [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_{(B)} f(x, y) dx dy + \iint_{(B)} g(x, y) dx dy$$

**II.2.** Eine *Additivität bzgl. der Bereiche* besteht in dem Sinne, daß eine über  $B_1$  und über  $B_2$  integrierbare Funktion auch über der Vereinigungsmenge  $B_1 \cup B_2$  beider Bereiche integrierbar ist, falls  $B_1$  und  $B_2$  keine inneren Punkte gemeinsam haben. Es gilt (4).

$$(4) \quad \iint_{(B_1 \cup B_2)} f(x, y) dx dy = \iint_{(B_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(B_2)} f(x, y) dx dy$$

**II.3.** Für eine *Konstante k* gilt (5).

$$(5) \quad \iint_{(B)} kf(x, y) dx dy = k \iint_{(B)} f(x, y) dx dy$$

**II.4.** Gilt  $f(x, y) \leq g(x, y)$  für jeden Punkt des Bereichs  $B$ , so gilt (6) für ihre F.e.

$$(6) \quad \iint_{(B)} f(x, y) dx dy \leq \iint_{(B)} g(x, y) dx dy$$

**II.5.** Der *Betrag des F.s* ist nach (7) höchstens so groß wie das F. des Betrags  $|f(x, y)|$ .

$$(7) \quad \left| \iint_{(B)} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{(B)} |f(x, y)| dx dy$$

**II.6. Mittelwertsatz für F.e.** Ist  $f(x, y)$  auf  $B$  stetig, dann gibt es auf  $B$  mindestens einen Punkt  $(\xi, \eta)$ , so daß (8) gilt, wenn  $m(B)$  den Flächeninhalt von  $B$  bedeutet.

$$(8) \quad \iint_{(B)} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) m(B)$$

**II.7.** Eine *Gebietsdifferentiation* kann durch (9) definiert werden. Dabei ist  $B_n$  eine Folge von Bereichen mit den Flächeninhalten  $m(B_n)$  und den Durchmessern  $\varrho_n$ , die alle den Punkt  $P = (\xi, \eta)$  enthalten. Der Grenzwert (9) existiert für jede stetige Funktion, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$ .

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(B_n)} \iint_{(B_n)} f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)$$

**III.1.** Das F. kann nach (10) durch das Hintereinanderausführen zweier einfacher Integrationen, durch ein *Doppelintegral*, berechnet werden, wenn die Punkte  $(x, y)$  des Bereichs  $B$  durch die Ungleichungen  $a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$  beschrieben werden (Abb. 2a).

$$(10) \quad \iint_{(B)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

**III.2.** Entsprechendes gilt nach (11) für ein *Doppelintegral*, in dem die Integration nach  $y$  auf die nach  $x$  folgt, falls die Punkte von  $B$  durch die Ungleichung  $x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d$  beschrieben werden (Abb. 2b).

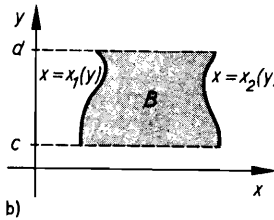
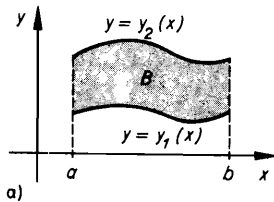
$$(11) \quad \iint_{(B)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

Liegt der Bereich  $B$  z. B. zwischen den Kurven  $y = \sqrt{x}$  und  $y = x^2$ , dann ist  $a = 0, b = 1, y_1(x) = x^2, y_2(x) = \sqrt{x}$ , und für jede integrierbare Funk-

tion gilt (12), speziell folgt (13) für die Funktion  $f(x, y) = x \cdot y$ .

$$(12) \quad \iint_{(B)} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^4}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right\} dx$$

$$(13) \quad \iint_{(B)} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left\{ \int_{x^4}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right\} dx \\ = \int_0^1 [1/2 xy^2]_{x^4}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 1/2 x(x - x^4) dx = 1/12$$



Flächenintegral.  
Abb. 2: Zurückführen des Doppelintegrals auf ein einfaches,  
a) über die Variable  $x$ ,  
b) über die Variable  $y$

IV. *Variablentransformation in F.en.*: Oft läßt sich das F. leichter oder überhaupt erst berechnen, wenn anstelle der rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  geeignete neue Variable  $\xi, \eta$  eingeführt werden. Über diese Variablentransformation gilt der Satz: Wird der Bereich  $\Gamma$  der  $\xi, \eta$ -Ebene durch die Funktionen  $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$  *eindeutig auf den Bereich B der  $x, y$ -Ebene abgebildet*, sind die Funktionen  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$  mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in  $\Gamma$  stetig und verschwindet die Funktionaldeterminante (14) im Inneren von  $\Gamma$  nicht, so gilt (15) für jede stetige Funktion  $f(x, y)$ .

$$(14) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

$$(15) \quad \iint_{(B)} f(x, y) \, dx \, dy \\ = \iint_{(\Gamma)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi \, d\eta$$

Diese Transformationsformel bleibt auch dann noch gültig, wenn die Voraussetzungen längs stückweise glatter Kurven verletzt sind, falls dort die Funktion  $f(x, y)$  und die Funktionaldeterminante beschränkt sind.

Der Ausdruck (16) heißt *Flächenelement* in den Koordinaten  $\xi, \eta$ .

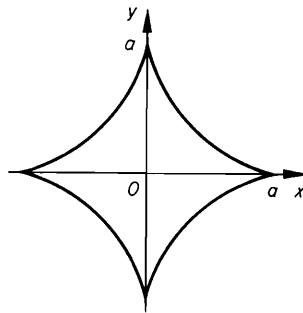
$$(16) \quad \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi \, d\eta$$

Für *Polarkoordinaten*  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  bzw. für *verallgemeinerte Polarkoordinaten*  $x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi$  ist  $\xi = r, \eta = \varphi$  und  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = r$  bzw.  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = abr$ . Ist z. B. das F. der Funktion  $f(x, y) = x \cdot y$  über den Viertelkreis  $x^2 + y^2 \leq R^2$  mit  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  zu berechnen, so ist in Polarkoordinaten dieser Bereich B das eindeutige Bild des Bereichs  $\Gamma$  mit  $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , und nach (17) ergibt sich  $R^4/8$ .

$$(17) \quad \iint_{(B)} xy \, dx \, dy = \iint_{(\Gamma)} r^2 \sin \varphi \cos \varphi r \, dr \, d\varphi \\ = \int_0^{\pi/2} \int_0^R 1/2 r^3 \sin 2\varphi \, d\varphi \, dr \\ = - \int_0^R r^3 \left[ \frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} dr = \frac{1}{2} \int_0^R r^3 \, dr = \frac{R^4}{8}$$

Soll als weiteres Beispiel der Flächeninhalt des Bereichs B bestimmt werden, der von der *Astroide* (Abb. 3)  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$  begrenzt wird, so ergibt sich nach Transformation des F.s auf die krummlinigen Koordinaten mit  $x = \xi \cos^3 \eta, y = \xi \sin^3 \eta$  für  $0 \leq \xi \leq a$  und  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  wegen  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = 3\xi \sin^2 \eta \cos^2 \eta$  das Integral (18).

$$(18) \quad F = \iint_{(B)} dx \, dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} 3\xi \sin^2 \eta \cos^2 \eta \, d\eta \, d\xi \\ = 3/4 \int_0^a \int_0^{2\pi} \xi \sin^2 2\eta \, d\eta \, d\xi = 3/8 \pi a^2$$



Flächenintegral. Abb. 3: Zum Flächeninhalt der Astroide

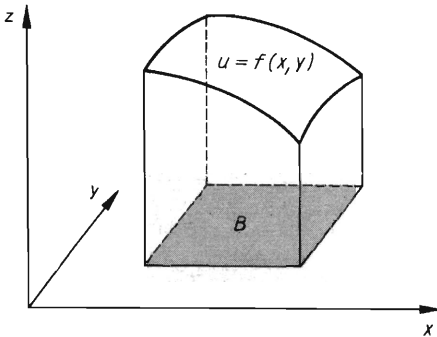
V. Das F. läßt sich *geometrisch deuten*: Nimmt die Funktion  $f(x, y) \geq 0$  in B keine negativen Werte an, so stellt das F.  $\iint_{(B)} f(x, y) \, dx \, dy$  das *Volumen eines*

*Zylinders* über dem Bereich B der  $x, y$ -Ebene mit der Deckfläche  $u = f(x, y)$  dar (Abb. 4). Gilt speziell  $f(x, y) = 1$  in B, so erhält man das Volumen eines Zylinders mit der Deckfläche  $u = 1$  bzw. den *Flächeninhalt*  $m(B) = \iint_{(B)} dx \, dy$  von B.

Der von der Ellipse mit der Gleichung  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  begrenzte Bereich B z. B. wird in verall-

gemeinerten Polarkoordinaten durch die Ungleichungen  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  beschrieben. Nach Transformation des F. folgt daher (19) für den Flächeninhalt von B.

$$(19) \quad m(B) = \iint_{(B)} dx dy = \iint_{(T)} abr dr d\varphi \\ = ab \int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = 2\pi ab \int_0^1 r dr = ab\pi$$



Flächenintegral. Abb. 4: Geometrische Bedeutung des Flächenintegrals

**VI. Eine Verallgemeinerung des F.s auf unbeschränkte Integranden und unbeschränkte Integrationsbereiche führt auf uneigentl. F.e.**

**VI.1.** Das F. mit unbeschränktem Integranden ergibt sich, wenn die Funktion  $f(x, y)$  in der Umgebung des Punktes  $P_0$  des beschränkten Bereichs B der  $x, y$ -Ebene nicht beschränkt ist, aber über jeden Teilbereich von B, der  $P_0$  nicht enthält, integrierbar ist. Wenn dann für jede Folge  $U_n$  von Umgebungen des Punktes  $P_0$ , deren Durchmesser  $\varrho_n$  gegen Null konvergieren, stets der Grenzwert (20) existiert, so heißt I konvergentes uneigentliches F. der Funktion  $f(x, y)$ ;  $B - U_n$  bezeichnet dabei den Bereich, der entsteht, wenn aus B die jeweilige Umgebung  $U_n$  herausgenommen wird.

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(B - U_n)} f(x, y) dx dy = I = \iint_{(B)} f(x, y) dx dy$$

Existiert der Grenzwert (20) nicht für jede Folge  $U_n$ , so heißt das Integral  $I = \iint_{(B)} f(x, y) dx dy$  divergent.

Für nichtnegative Funktionen  $f(x, y)$  kann man sich in der Definition auf kreisförmige Umgebungen  $U_n$  beschränken. Wird z. B. in dem Bereich B, der vom Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  begrenzt wird, die Funktion (21) betrachtet, so ist  $f(x, y)$  für  $\alpha > 0$  in der Umgebung

$$(21) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha/2}$$

von  $P_0 = (0, 0)$  nicht beschränkt und dort nichtnegativ. Sind  $U_n$  Kreise mit den Radien  $\varrho_n$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$ , so ergibt sich nach Einführung von Polarkoordinaten im Bereich  $B - U_n$  für  $0 < \alpha < 2$

der Grenzwert (22),

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(B - U_n)} dx dy / (\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varrho_n}^1 \int_0^{2\pi} r d\varphi dr / r^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{(2 - \alpha)} \right] \cdot [x^2 - \alpha]_{\varrho_n}^1 \\ = \frac{2\pi}{2 - \alpha}$$

während für  $\alpha > 2$  kein Grenzwert existiert. Das Integral (23) ist deshalb für  $0 < \alpha < 2$  konvergent und hat den Wert (24).

$$(23) \quad \iint_{(B)} dx dy / (\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha$$

$$(24) \quad \iint_{(B)} dx dy / (\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha = 2\pi / (2 - \alpha)$$

**VI.2. Konvergenzkriterium:** Das F. (20) konvergiert, falls die Funktion  $f(x, y)/g(x, y)$  in der Umgebung von  $P_0$  beschränkt und  $\iint_{(B)} |g(x, y)| dx dy$  ein konvergentes Integral ist. Als Vergleichsfunktionen kann man die Funktion (25) verwenden, wenn  $P_0$  die Koordinaten

$$(25) \quad g(x) = 1 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}^\alpha$$

$x_0, y_0$  hat. Ist z. B.  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  und wird der Bereich B vom Kreis  $x^2 + y^2 = 1$  begrenzt, so gilt mit (25) für  $\alpha = 1$  und  $x_0 = y_0 = 0$  die Formel (26). Der Quotient  $[f(x, y)/g(x, y)]$  ist beschränkt, und

$$(26) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y)/g(x, y)] \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

wegen  $\alpha = 1$  konvergiert das F.  $\iint_{(B)} \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ .

Analog lassen sich uneigentl. Integrale für Funktionen definieren, die in der Umgebung mehrerer Punkte bzw. in der Umgebung von Kurven unbeschränkt sind.

**VII.** Ein F. über einen unbeschränkten Bereich ergibt sich, wenn eine in B definierte Funktion  $f(x, y)$  über jeden beschränkten Teilbereich von B integrierbar ist. Man konstruiert eine solche Folge  $B_n$  von beschränkten Teilbereichen von B, daß jeder dieser beschränkten Teilbereiche von B in allen  $B_n$  für  $n > n_0$  enthalten ist. Existiert dann der Grenzwert in (27) links, so heißt I konvergentes uneigentl. F. von  $f(x, y)$  über den unbeschränkten Bereich B und stellt es durch (27) rechts dar. Existiert der Grenzwert nicht für jede Folge  $B_n$ , so heißt das uneigentl. Integral  $\iint_{(B)} f(x, y) dx dy$  divergent.

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(B_n)} f(x, y) dx dy = I = \iint_{(B)} f(x, y) dx dy$$

Wenn in B die Funktion  $f(x, y)$  nichtnegativ ist, kann man als Teilbereiche  $B_n$  in B enthaltene Kreise mit den Radien  $\varrho_n$  um den Ursprung verwenden, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \infty$  gilt. Ist z. B. B der erste Quadrant  $x \geq 0, y \geq 0$  und die in ihm definierte Funktion  $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ , so gilt für eine Folge von

Viertelkreisen  $B_n$  mit den Radien  $\varrho_n$  nach Umrechnung auf Polarkoordinaten (28) und deshalb (29). Zusammenfassend erhält man (30).

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\varrho_n^2} = 0$$

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(B_n)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\varrho_n} \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi dr = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi/2) \frac{1}{2} [1 - e^{-\varrho_n^2}] = \pi/4$$

$$(30) \quad \iint_{(B)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi/4$$

Wird dagegen die Funktion  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  gewählt, so existiert der Grenzwert (31) nicht, weil  $\cos \varrho_n^2$  unbestimmt divergiert, das Integral in (31) deshalb divergiert.

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(B_n)} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\varrho_n} \int_0^{\pi/2} \sin r^2 r d\varphi dr = \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi/4) (1 - \cos \varrho_n^2)$$

Die Formel für die Variablentransformation in IV. bleibt auch für uneigentliche Integrale gültig, wenn eines der in ihr auftretenden Integrale konvergent ist. In dem Integral (32) z. B. über den von der Ellipse mit der Gleichung  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  begrenzten Bereich  $B$  ist der Integrand in der Umgebung der Ellipse unbeschränkt. Führt man verallgemeinerte Polarkoordinaten  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$  für  $0 \leq r \leq 1$  und  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ein, so erhält man das konvergente Integral (33).

$$(32) \quad I = \iint_{(B)} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}}$$

$$(33) \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{abr}{\sqrt{1-r^2}} dr d\varphi = 2ab\pi [-\sqrt{1-r^2}]_0^1 = 2ab\pi$$

VIII. Durch Definitionen, die denen beim F. völlig analog sind, kommt man zum Begriff des *uneigentlich. Raumintegrals* über unbeschränkte Integranden bzw. über unbeschränkte Bereiche. Die Funktion (34) z. B. ist in der Umgebung des Koordinaten-

$$(34) \quad f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ursprungs nicht beschränkt. Ist der Raumbereich  $K$  eine Kugel um den Koordinatenursprung mit dem Radius  $R$  und ist  $U_n$  eine Folge von Kugeln mit den Radien  $\varrho_n$ , für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$  gilt, so ergibt sich (35) nach Definition des uneigentlich. Raumintegrals.

$$(35) \quad \iiint_{(K)} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{(K-U_n)} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Werden im Integral über  $(K - U_n)$  Kugelkoordinaten eingeführt, so ergibt sich (36).

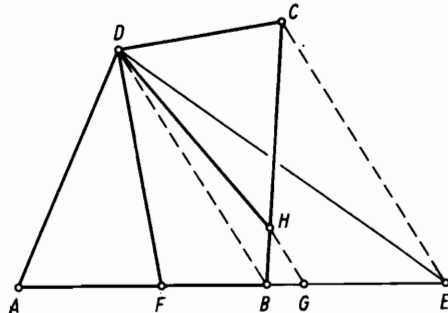
$$(36) \quad \iiint_{(K-U_n)} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^{\alpha-2}} d\vartheta d\varphi dr = \frac{4\pi}{3-\alpha} (R^{3-\alpha} - \varrho_n^{3-\alpha})$$

Für  $0 < \alpha < 3$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n^{3-\alpha} = 0$ , und daher gilt (37).

$$(37) \quad \iiint_{(K)} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{4\pi}{3-\alpha} R^{3-\alpha}$$

**Flächennormale**  $\nearrow$  Normale I.

**Flächenteilung:** Zerlegung einer ebenen  $n$ -Ecksfläche in eine endl. Anzahl  $k$  flächengleicher Teilflächen, so daß die Summe der Flächeninhalte der Teilflächen gleich dem Flächeninhalt der gegebenen  $n$ -Ecksfläche ist. Für  $n = 4$  und  $k = 3$  z. B. wird das Viereck  $ABCD$  flächengleich in das Dreieck  $AED$  verwandelt, wenn  $E$  auf der Geraden  $g(AB)$  und auf der Parallelen zu  $DB$  durch  $C$  liegt



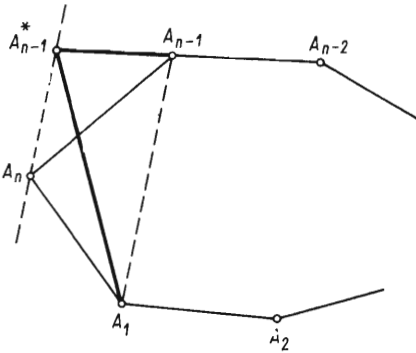
Flächenteilung: Teilung eines Vierecks in drei flächengleiche Teile

( $\nearrow$  Flächenverwandlung). Teilen die Punkte  $F$  und  $G$  die Strecke  $|AE|$  in  $k = 3$  gleiche Teile, so hat jedes der Dreiecke  $AFD$ ,  $FGD$  und  $GED$  ein Drittel des Flächeninhalts  $A_0$  vom gegebenen Viereck. Zieht man durch  $G$  eine Parallele zu  $BD$ , die  $BC$  in  $H$  schneidet, so haben die Dreiecke  $DBG$  und  $DBH$  die gleiche Grundlinie und Höhe, sind mithin flächengleich. Dann ist  $\triangle DFG$  flächengleich dem Viereck  $DFBH$ . Sein Flächeninhalt ist  $A_0/3$  wie der des Dreiecks  $AFD$ . Der Flächeninhalt der Restfigur  $DHC$  ist ebenfalls  $A_0/3$ , weil  $|AFD| + |DFBH| + |DHC| = A_0$  und  $|AFD| + |DFBH| = 2A_0/3$  ist. **Flächentheorie:** Teilgebiet der Differentialgeometrie, das die geometr. Eigenschaften von Flächen zumeist mit Methoden der Differential- und Integralrechnung untersucht.

**Flächenverwandlung:** in der Planimetrie Konstruktion einer Figur, die einer gegebenen Figur flächengleich ist. Wenn man als Konstruktionshilfsmittel nur Zirkel und Lineal zuläßt, so ist nicht jede F.

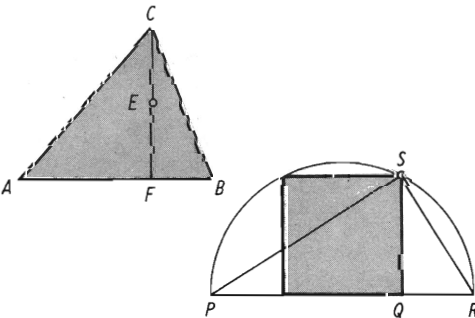


ausführbar, z. B. nicht die Quadratur des Kreises. Es läßt sich aber z. B. jedes konvexe  $n$ -Eck für  $n \geq 3$  in ein flächengleiches Quadrat verwandeln: Man konstruiert zunächst ein flächengleiches Vieleck, indem man z. B. die Diagonale  $A_1A_{n-1}$  zeichnet



Flächenverwandlung. Abb. 1: Verwandlung eines konvexen  $n$ -Ecks in ein flächengleiches  $(n - 1)$ -Eck

(Abb. 1) und durch  $A_n$  die Parallele zu  $A_1A_{n-1}$  legt, so daß sie die Verlängerung von  $A_{n-2}A_{n-1}$  in  $A_{n-1}^*$  schneidet. Die Dreiecke  $A_1A_{n-1}A_n$  und  $A_1A_{n-1}A_{n-1}^*$  sind flächengleich, da sie die Seite  $A_1A_{n-1}$  gemeinsam haben und die zu dieser Seite gehörenden Höhen gleich lang sind. Somit sind das  $n$ -Eck  $A_1A_2 \dots A_n$  und das  $(n - 1)$ -Eck  $A_1A_2 \dots A_{n-1}^*$  flächengleich. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auf das jeweils entstehende  $(n - 1)$ -Eck erhält man schließlich ein der ursprüngl. Figur flächengleiches Dreieck. Dieses läßt sich nun mit Hilfe des Höhensatzes in ein flächengleiches Qua-



Flächenverwandlung. Abb. 2: Verwandlung des Dreiecks  $ABC$  in ein flächengleiches Quadrat mit der Seitenlänge  $|QS|$

drat verwandeln (Abb. 2): Ist  $E$  der Mittelpunkt der Höhe  $FC$  im Dreieck  $ABC$ , so ist der Flächeninhalt  $|ABC| = |AB| \cdot |EF|$ . Wählt man  $|PQ| = |AB|$ ,  $|QR| = |EF|$  und zeichnet über der Strecke  $PR$  den Thaleskreis, so ist das Quadrat nach dem Höhensatz über der Strecke  $SQ$  flächengleich dem Dreieck  $ABC$ . **Flächenwinkel**  $\nearrow$  körperliche Ecke I.

**Fläche zweiter Ordnung: I.** Menge aller Punkte  $P(x, y, z)$  des Raumes, deren Koordinaten  $x, y, z$  in einem *kartes.* oder *Parallelkoordinatensystem* eine Gleichung (1) zweiten Grades mit reellen Koeffi-

$$(1) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$$

zienten erfüllen, in der  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  nicht zugleich Null sind. Wie für  $\nearrow$  *Kurven zweiter Ordnung* gibt es auch für F.n. Matrixdarstellungen (2) oder (3). Dabei gilt  $a_{ik} = a_{ki}$  für die (3,3)-Matrix

$$(2) \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_{00} = 0$$

$$(3) \quad \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} = 0$$

$\mathbf{A} = (a_{ik})$  mit  $i, k = 1, 2, 3$ , und für die (4,4)-Matrix  $\tilde{\mathbf{A}} = (a_{ik})$  mit  $i, k = 0, 1, 2, 3$ , und es bedeuten  $\mathbf{a}^T = (a_{10} a_{20} a_{30})$ ,  $\mathbf{x}^T = (x y z)$  sowie  $\tilde{\mathbf{x}}^T = (1 x y z)$ . Die F.n mit  $\det(\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0$  in (3) sind die *nicht entarteten* F.n, das sind die *Ellipsoide*, speziell die *Kugeln*, die *Hyperboloide*, die *Paraboloide* und die *nullteiligen* F.n. Sie alle sind *nicht zerfallende* F.n. Die F.n mit  $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$  sind die *entarteten* F.n. Hierzu gehören auch *nicht zerfallende* F.n wie *Kegel* und *Zylinder zweiter Ordnung*, sowie die *zerfallenden* F.n, nämlich die *Ebenenpaare* und die *Doppelsebenen*.

Ist die Gleichung der F. in kartes. Koordinaten gegeben, so kann man durch eine *Hauptachsentransformation* das Koordinatensystem so legen, daß die Gleichung der F. *Normalform* erhält. Für *nullteilige* F.n ist eine Normalform  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + 1 = 0$ ; diese F. enthält keine Punkte mit reellen Koordinaten. Die *Ebenenpaare* kann man, wie bei *Kurven zweiter Ordnung* die *Geradenpaare*, in vier Typen mit den Normalformen (4), (5), (6) und (7) einteilen.

$$(4) \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$$

$$(5) \quad x^2 - c^2 = 0 \text{ mit } c \neq 0$$

$$(6) \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$$

$$(7) \quad x^2 + c^2 = 0 \text{ mit } c \neq 0$$

Eine Gleichung (4) stellt *zwei sich schneidende*, (5) *zwei einander parallele Ebenen* dar; der Gleichung (6) entsprechen nur *Punkte der z-Achse* und (7) enthält keine reellen Punkte. Läßt man *komplexe Koordinaten* zu, so beschreibt (6) *zwei imaginäre Ebenen* mit der *z-Achse* als Schnittgerade, (7) dagegen *zwei parallele imaginäre Ebenen*. Die *Doppelsebenen* haben als Normalform  $x^2 = 0$ . Die F. mit dieser Gleichung besteht aus der Ebene  $x = 0$ , die doppelt gezählt wird. F.n mit  $\det(\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0$  in (2) haben einen Mittelpunkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , der aus dem Gleichungssystem (8)

$$(8) \quad \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

bestimmt wird. Es sind die *Mittelpunktsflächen*, d. h. die *Ellipsoide*, speziell *Kugeln*, die *Hyperboloide*, die *nullteiligen* F.n und die *Kegel*. Zu den *Kegeln* gehören auch F.n mit der Normalform  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$ . Eine solche F. enthält nur einen

reellen Punkt, nämlich ihren Mittelpunkt; sie heißt auch *Nullfläche*.

II. Ist  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  Punkt einer nicht zerfallenden F. mit der Gleichung  $\vec{x}^T \vec{A} \vec{x} = 0$ , so ist mit  $\vec{x}_0^T = (1 \ x_0 \ y_0 \ z_0)$  durch  $\vec{x}_0^T \vec{A} \vec{x}_0 = 0$  die Gleichung der *Tangentialebene* in  $P_0$  an die F. gegeben. Dabei muß  $P_0$ , falls die F. ein Kegel ist, von dessen Mittelpunkt, d. h. von der *Kegelspitze*, verschieden sein. Ein *Stellungsvektor* dieser Tangentialebene, d. h. ein Normalenvektor dieser F. in  $P_0$  ist (9).

$$(9) \quad \begin{aligned} &(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{10}) \mathbf{i} + \\ &(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{20}) \mathbf{j} + \\ &(a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{30}) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Betrachtet man die Gleichung zweiten Grades (3)  $\vec{x}^T \vec{A} \vec{x} = 0$  für die Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des *n-dimensionalen Raumes*  $R_n$ , mit der  $(n+1, n+1)$ -Matrix  $\vec{A} = (a_{ik})$  für  $i, k = 0, 1, \dots, n$ , für die gilt  $a_{ik} = a_{ki}$ , sowie mit  $\vec{x}^T = (1 \ x_1 \ \dots \ x_n)$ , so bilden die Punkte, deren Koordinaten (3) erfüllen, eine *Hyperfläche* zweiter Ordnung, die auch *Quadrik* genannt wird. Eine Quadrik des Raumes  $R_3$  ist eine F. und eine Quadrik der Ebene  $R_2$  ist eine Kurve zweiter Ordnung.

- Flachpunkt ↗ Krümmung I.
- Flipflop ↗ Übertragungsglied IV.
- Fluchtlinie ↗ Projektion I., ↗ Nomographie II.
- Fluchtliniertafel ↗ Nomographie II.
- Fluchtpunkt ↗ Projektion I.
- Fluchtpunktmaschine ↗ Lineal III.
- Flußdiagramm ↗ Algorithmus II.
- Flüstergalerie ↗ Ellipse IV.
- FM svw. Frequenzmodulation, ↗ Modulation I.
- Fokus svw. Brennpunkt, ↗ Kegelschnitt II.
- Folge: eine eindeutige Abbildung von einer Menge natürl. Zahlen auf eine gegebene Menge  $M$ . Ist die Menge aus  $\mathbf{N}$  endlich, so heißt die F. endlich, andernfalls unendlich. Ist  $M$  eine Punktmenge, so spricht man von *Punktfolgen*, ist  $M$  eine Zahlenmenge, von *Zahlenfolgen*. Durch die *eindeutige Abbildung*  $1 \rightarrow 5, 2 \rightarrow e, 3 \rightarrow -8, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 27$  der endl. Teilmenge  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  der natürl. Zahlen auf die Menge  $\{-8, e, 5, 27\}$  ist z. B. eine endl. F. gegeben. Eine F. kann man auch auffassen als *Funktion*  $f$ , deren Definitionsbereich eine Menge natürl. Zahlen ist. Die Elemente  $f(n)$  des Wertebereichs heißen *Glieder* der F., und statt  $f(n)$  schreibt man  $a_n$ . Im Beispiel ist demnach  $a_1 = 5, a_2 = e, a_3 = -8, a_4 = 5, a_5 = 27$ .

- Folgenkriterium ↗ Konvergenzkriterien für Funktionen IV.
- Folgerregelung ↗ Regelung III.
- Folgern, logisches: gedankl. Operation, die von anerkannten Aussagen wieder zu anerkannten Aussagen führt. Ist  $A$  eine Menge von Aussagen und  $A$  eine Aussage, so heißt  $A$  eine *log. Folgerung* aus  $A$ , falls  $A$  bei jeder zulässigen Interpretation der in  $A$  vorkommenden Zeichen wahr wird, die auch alle Aussagen von  $A$  wahr macht. Der Begriff der *zulässigen Interpretation* ist genau festzulegen, z. B. werden die log. Symbole nur durch die ihnen entsprechenden Wahrheitswertfunktionen, das Gleich-

heitszeichen nur durch die Identitätsrelation interpretiert. In der elementaren Logik und in elementaren Theorien kann das Folgern durch formales Operieren mit *Ableitungsregeln* ersetzt werden, die sich nur auf die Struktur, nicht aber auf den Inhalt der betrachteten Aussagen beziehen.

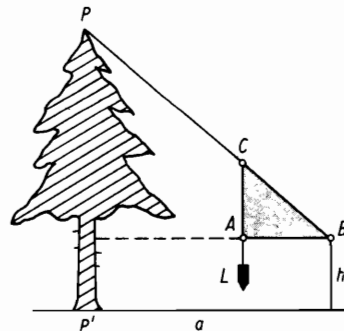
- Folgesteuerung ↗ Schaltsystem, ↗ Steuerung II.2.
- Fontana ↗ Tartaglia.
- Foodserher Algorithmus ↗ Netzplantechnik IV.
- fördernde Redundanz ↗ Redundanz I.
- Forderungsstrom ↗ Bedienungstheorie.
- Ford und Fulkerson, Satz von ↗ Ströme auf Graphen II.

Form, *homogenes Polynom*: ein Polynom in mehreren Unbestimmten (↗ Polynom IV.), dessen Glieder alle denselben Grad haben, z. B. ist  $f(x, y, z) = 2x^3 + 4x^2y - xz^2 + y^3$  eine F. dritten Grades, alle Glieder haben den Grad 3. S. a. *homogene Funktion* II., *Polynom* IV.

Form, *kanonische* ↗ Optimierung, lineare II.

Formalisierung: *mathematische Logik* teilweise oder vollständige Beschreibung einer wissenschaftl. Theorie mit formalen Hilfsmitteln, die erfolgt durch Schaffung einer *formalen Sprache*, deren Objekte, Ausdrücke gen., Zeichenreihen sind, sowie durch die Ersetzung inhaltlich deduktiver Methoden durch *formales Operieren mit Zeichenreihen*. Zunächst werden gewisse Grundzeichen als *Variable*, andere als *Zeichen*, *Konstante* gen. für spezielle Objekte, Relationen bzw. Funktionen der Theorie ausgezeichnet, und schließlich noch *spezielle log. und techn. Zeichen* einbezogen. Die F. dient verschiedenen Zwecken: (1) der *Mathematisierung* einer wissenschaftl. Theorie, (2) der *präzisen Abgrenzung* der *Ausdrucksmöglichkeiten* einer Theorie sowie ihrer deduktiven Mittel, (3) der bewußten *Abtrennung* einer wissenschaftl. Disziplin von ihrer mitunter nicht genügend präzisierten Beziehung zur *objektiven Realität* mit dem Ziel, ihre *Widerspruchsfreiheit* zu beweisen. Die F. ist das Haupt Hilfsmittel der *Metamathematik* und einer exakten Methodologie deduktiver Wissenschaften.

- Formenmatrix ↗ quadratische Form I.
- Försterdreieck: einfaches Gerät zur Höhenbestimmung z. B. von Bäumen oder Gebäuden, bestehend aus einem mit Handgriff versehenen geraden Prisma geringer Höhe, dessen Querschnitt ein rechtwinklig-



Försterdreieck

gleichschenkliges Dreieck ist. Bei der Handhabung wird ein Standpunkt so gewählt, daß der Punkt  $P$ , dessen Höhe bestimmt werden soll, längs der Querschnittshypotenuse vom Beobachter  $B$  anvisiert werden kann. Dabei ist auf die vertikale bzw. horizontale Lage der Querschnittskatheten zu achten, die mit Hilfe eines an dem Gerät befestigten Lotes  $L$  geprüft werden kann (Abb.). Die Höhe  $H$  von  $P$  über der Erdoberfläche ergibt sich als Summe des Abstands  $a$  vom Betrachter zur senkrechten Projektion  $P'$  von  $P$  auf die Erdoberfläche und der Augenhöhe  $h$  des Betrachters. Die Höhenbestimmung wird dabei auf die bequemere Ermittlung einer horizontalen Entfernung zurückgeführt. Unter ungünstigen Bedingungen kann jedoch die Suche nach einem geeigneten Standpunkt Schwierigkeiten bereiten.

**fortlaufende Proportion** ↗ Proportion I.

**FORTTRAN** ↗ Programmierung des Digitalrechners I.

**Fortsetzung** ↗ Funktion VII.

**Fourier, Jean Baptiste Joseph**, geb. 21. 3. 1768 Auxerre als Sohn eines Schneiders, gest. 16. 5. 1830 Paris. — F. besuchte die heimatl. École Militaire; wegen seiner Herkunft wurde ihm aber der Eintritt in eine Offizierslaufbahn verweigert. F. entschloß sich, dem geistl. Stand beizutreten, legte jedoch kein Gelübde ab, da die Revolution von 1789 ausbrach. F. widmete sich erst einer Lehrtätigkeit in Auxerre, griff jedoch bald in die Politik ein und wurde mehrfach verhaftet. 1795 wurde er zum Studium nach Paris an die École Normale geschickt, wurde bald Mitglied des Lehrkörpers der neugegründeten École Polytechnique und 1798 Direktor des Institut d'Égypte in Kairo. Erst 1801 kehrte er nach Paris zurück und wurde von Napoleon zum Präfekten des Departements Isère ernannt. Während seiner Amtstätigkeit von 1802 bis 1815 veranlaßte er die Trockenlegung der malarieverseuchten Sümpfe von Bourgoin. Nach dem Sturz Napoleons wurde F. von den Bourbonen aller seiner Ämter enthoben; 1817 mußte jedoch der König der Wahl F.s in die Akademie der Wissenschaften zustimmen, deren ständiger Sekretär F. 1822 wurde. — F.s bedeutendste mathemat. Leistung ist seine Behandlung des Funktionsbegriffs. Das Problem der schwingenden Saite, das schon D'ALEMBERT, EULER und LAGRANGE bearbeitet hatten, war 1755 durch D. BERNOULLI durch eine *trigonometr. Reihe* gelöst worden. Die sich anschließende Frage, ob eine „beliebige“ Funktion durch eine solche Reihe dargestellt werden kann, wurde 1807/12 von F. bejaht. Die Frage nach den Bedingungen für diese Darstellbarkeit konnte erst sein Freund DIRICHLET beantworten. — Bekannt wurde F. vor allem durch seine *Théorie analytique de la chaleur* (1822), die seine weitgehend der Diskussion der Gleichung der Wärmefortpflanzung mit Hilfe von F.-Reihen gewidmet ist. Das Werk bildet den Ausgangspunkt der Bearbeitung partieller Differentialgleichungen mit Randbedingungen durch trigonometr. Reihen. Bedeutende Beiträge lieferte F. auch zur Theorie der Gleichungsauflösung und zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Fourierkoeffizienten** ↗ Fouriersche Reihe II, ↗ harmonischer Analysator.

**Fourier-Polynom** ↗ Approximation IV.

**Fouriersche Reihe: I.** Funktionenreihe (1), deren Koeffizienten  $a_0, a_k, b_k$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  durch eine Funktion  $f(x)$  über die *Euler-Fourierschen Formeln* (2) bestimmt werden und die deshalb genauer F. R. der Funktion  $f(x)$  heißt.

$$(1) \quad a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

$$(2) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Dabei ist  $f(x)$  eine in  $[0, 2\pi]$  integrierbare, period. Funktion der primitiven Periode  $2\pi$ . Hat  $f(x)$  die primitive Periode  $p$ , so hat  $f_1(x) = f(2\pi x/p)$  die primitive Periode  $2\pi$ ; folglich kann man sich auf Funktionen mit der primitiven Periode  $2\pi$  beschränken.

Derartige period. Funktionen mit der Periode  $2\pi$  treten z. B. als Summenfunktionen konvergenter

*trigonometr. Reihen*  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

auf, in denen  $a_0, a_n$  und  $b_n$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  beliebige Koeffizienten sind. Eine solche trigonometr. Reihe konvergiert sogar gleichmäßig, wenn

die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent sind (↗ Funktionenreihe III.2., Weierstraßsches Konvergenzkriterium).

Eine etwas schärfere Bedingung für die Konvergenz einer trigonometr. Reihe liefert der folgende Satz: Die trigonometr. Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$

und  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx)$  sind für alle  $x$  konvergent, die zweite jedoch möglicherweise mit Ausnahme der ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$ , wenn die Zahlenfolge  $(c_n)$  eine Nullfolge (↗ Grenzwert einer Zahlenfolge)

bildet und  $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k - c_{k+1}|$  konvergent ist. Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)/k$  z. B. ist für alle  $x \neq 2m\pi$  mit

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  konvergent, denn  $(c_n = 1/n)$  bildet eine Nullfolge, und (3) ist konvergent (↗ Konvergenzkriterien für Reihen, Majorantenkriterium).

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Ist  $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  eine für alle  $x$  gleichmäßig konvergente trigonometr. Reihe mit der Summenfunktion  $f(x)$ , so gelten die Euler-Fourierschen Formeln (2).

II. Ist umgekehrt  $f(x)$  eine in  $[0, 2\pi]$  integrierbare und period. Funktion mit der Periode  $2\pi$ , so kann man mit Hilfe der Euler-Fourierschen Formeln die

zu  $f(x)$  gehörige F. R.  $f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  bilden; dabei deutet das Zeichen  $\sim$  an, daß nichts über die Konvergenz der trigonometr. Reihe und deren Summe in bezug auf  $f(x)$  ausgesagt ist. Die  $a_0, a_1, a_2, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots$  heißen *Fourierkoeffizienten* der Funktion  $f(x)$ . Der mit  $\Phi_n(x) = \frac{1}{2} \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^n (\bar{a}_k \cos(kx) + \bar{b}_k \sin(kx))$ , in dem  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots$  und  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots$  beliebige Koeffizienten sind, gebildete Ausdruck (4) hat ein Minimum, wenn man für  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots$  und  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots$  die Fourierkoeffizienten  $a_0, a_1, \dots$  und  $b_1, b_2, \dots$  der Funktion  $f(x)$  einsetzt.

$$(4) \quad A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - \Phi_n(x)]^2 dx$$

Der Ausdruck  $A$  gibt ein Maß für die Güte der Approximation der Funktion  $f(x)$  durch das trigonometr. Polynom  $\Phi_n(x)$ .

Ist  $f(x)$  quadratisch integrierbar in  $[0, 2\pi]$ , d. h., existiert das Integral  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx$ , so ist die aus den Fourierkoeffizienten von  $f(x)$  gebildete Reihe  $\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$  konvergent, und ihre Summe genügt der *Besselschen Ungleichung* (5), speziell bilden

$$(5) \quad \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$$

dann  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Nullfolgen. Ist  $f(x)$  in  $[0, 2\pi]$   $(m-1)$ mal stetig differenzierbar und existiert ferner in  $]0, 2\pi[$  bis auf endlich viele Ausnahmestellen auch die  $m$ -te Ableitung, für die auch das Integral  $\int_0^{2\pi} [f^{(m)}(x)]^2 dx$  noch existiert, so gilt für die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  sogar  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m a_n = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m b_n = 0$ . Unter welchen genaueren Bedingungen die Fouriersche Reihe einer Funktion  $f(x)$  als Summenfunktion wieder  $f(x)$  hat, ist noch nicht völlig bekannt. Jedoch genügt in vielen Fällen und in prakt. Anforderungen der Satz: *Ist die mit der primitiven Periode  $2\pi$  period. Funktion  $f(x)$  in  $]0, 2\pi[$*

*differenzierbar, so gilt  $F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$  mit den aus (2) ermittelten Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ , wobei  $F(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)]$  ist. Die Reihe ist sogar in jedem Intervall  $]a, b[$  in  $]0, 2\pi[$  gleichmäßig konvergent, in dem  $f(x)$  stetig ist, und in jedem Stetigkeitspunkt von  $f(x)$  gilt  $f(x) = F(x)$ . Ist die Funktion  $f(x)$  gerade, d. h. für  $f(-x) = f(x)$ , so gilt  $b_n = 0$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; ist die Funktion ungerade, d. h. für  $f(-x) = -f(x)$ , so gilt  $a_n = 0$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . In dem angeführten Satze würde ausreichen,  $f(x)$  als stückweise differenzierbar in  $]0, 2\pi[$  vorauszusetzen, d. h., das Intervall  $]0, 2\pi[$  kann in endlich viele Intervalle*

zerlegt werden, so daß  $f(x)$  in jedem dieser Intervalle differenzierbar ist.

**III.** Häufig kommt es vor, daß die Funktion  $f(x)$  nur in dem Intervall  $[0, 2\pi]$  definiert, nicht aber periodisch ist. In diesem Fall setzt man die Funktion  $f(x)$  einfach nach links und rechts periodisch fort und bestimmt dann die F. R. zu der fortgesetzten Funktion.

Soll z. B. eine Funktion, die in  $[0, 1]$  für  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  den Wert  $a$  und für  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  den Wert  $-a$  hat, in eine F. R. entwickelt werden, so hat die Funktion  $f_1(x) = f(x/(2\pi))$  dann die Periode  $2\pi$ . Setzt man  $f_1(x)$  jetzt periodisch fort, so erhält man (6).

$$(6) \quad f_2(x) = \begin{cases} a & \text{für } 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \\ -a & \text{für } (2k+1)\pi \leq x < (2k+2)\pi \end{cases} \text{ für } k = 0, \pm 1, \dots$$

Die Funktion  $f_2(x)$  ist aber stückweise differenzierbar, denn  $f_2'(x) = 0$  für  $0 < x < \pi$  und  $\pi < x < 2\pi$ . Die zu  $f_2(x)$  gehörige Funktion  $F(x)$  ist  $F(x) = f_2(x)$  für  $x \neq k\pi$ , aber  $F(x) = 0$  für  $x = k\pi$  mit  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  wegen (7), und an allen anderen Punkten  $x \neq k\pi$  ist die Funktion  $f_2(x)$  stetig.

$$(7) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2} [f_2(k\pi + t) + f_2(k\pi - t)] = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2} (\mp a \pm a) = 0$$

Die Fourierkoeffizienten zu  $f_2(x)$  berechnen sich aus (2) zu  $a_n = 0$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  und  $b_n = 2a (1 - (-1)^n)/(\pi n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Man erhält danach (8) oder (9) in  $[0, 1]$ .

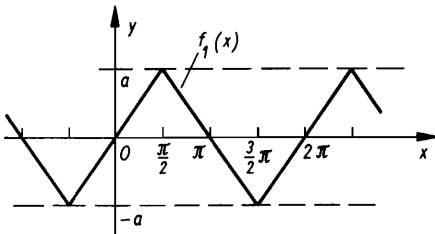
$$(8) \quad F(x) = \frac{4a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \frac{4a}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

$$(9) \quad \frac{4a}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{2k+1} = \frac{4a}{\pi} \left[ \sin(2\pi x) + \frac{\sin(6\pi x)}{3} + \frac{\sin(10\pi x)}{5} + \dots \right] = \begin{cases} a & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } x = 0, \frac{1}{2}, 1 \\ -a & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Für weitere Beispiele der Entwicklung period. Funktionen werden die Ergebnisse und das Kurvenbild angeführt.

**III.1.** Die *Dreieckskurve* (Abb. 1) ist bestimmt durch (10).

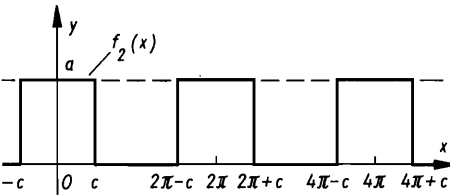
$$(10) \quad f_1(x) = F_1(x) = \begin{cases} 2ax/\pi & \text{für } 0 \leq x < \pi/2 \\ -2ax/\pi + 2a & \text{für } \pi/2 \leq x < 3\pi/2 \\ 2ax/\pi - 4a & \text{für } 3\pi/2 \leq x < 2\pi \end{cases} = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^2} \equiv \frac{8a}{\pi^2} \left[ \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} \mp \dots \right]$$



Fouriersche Reihe. Abb. 1: Dreieckskurve

III.2. Die Kurve des Rechteckimpulses (Abb. 2) ist durch (11) bestimmt.

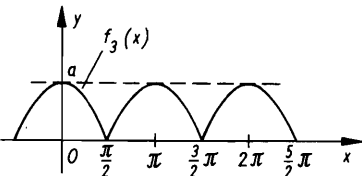
$$\begin{aligned}
 (11) \quad f_2(x) &= F_2(x) \\
 &= \begin{cases} a & \text{für } 0 \leq x < c, 2\pi - c < x \leq 2\pi \\ a/2 & \text{für } x = c, x = 2\pi - c \\ 0 & \text{für } c < x < 2\pi - c \end{cases} \\
 &= \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kc)}{k} \cos(kx) \right] \\
 &= \frac{2a}{\pi} \left[ \frac{c}{2} + \frac{\sin c}{1} \cos x + \frac{\sin(2c)}{2} \cos(2x) + \dots \right]
 \end{aligned}$$



Fouriersche Reihe. Abb. 2: Kurve des Rechteckimpulses

III.3. Die Kurve des gleichgerichteten Wechselstroms (Abb. 3) ist durch (12) bestimmt.

$$\begin{aligned}
 (12) \quad f_3(x) &= F_3(x) \\
 &= \begin{cases} \cos x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos(x - \pi) & \text{für } \pi/2 < x < 3\pi/2 \\ \cos(x - 2\pi) & \text{für } 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi \end{cases} \\
 &= \frac{2a}{\pi} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} \cos(2kx) \right] \\
 &= \frac{2a}{\pi} \left[ 1 + \frac{2}{1 \cdot 3} \cos(2x) - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos(4x) \pm \dots \right]
 \end{aligned}$$



Fouriersche Reihe. Abb. 3: Kurve des gleichgerichteten Wechselstroms

IV. Unter der *harmon. Analyse* versteht man die Auflösung einer gegebenen Wellenlinie, d. h. einer gegebenen period. Funktion  $f(x)$ , in einen kon-

stanten Anteil und in Wellen der Form  $(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  oder in reine Sinuswellen, denn  $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = A_n \sin(nx + c_n)$  mit  $A_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$  und  $\sin c_n = a_n/A_n$ ,  $\cos c_n = b_n/A_n$ . Mit anderen Worten versteht man unter der harmon. Analyse die Bestimmung der Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ , so daß

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\
 &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_n \sin(nx + c_n).
 \end{aligned}$$

$A_1 \sin(x + c_1)$  bezeichnet man als die *Grundschwingung* und  $A_n \sin(nx + c_n)$  mit  $n > 1$  als die *Oberschwingungen*. Die *harmon. Synthese* ist die Umkehrung der harmon. Analyse, d. h., die reinen Sinuswellen  $A_n \sin(nx + c_n)$  werden zu einer Resultierenden addiert.

S. a. Orthogonalsystem III.

**Fraenkel, Abraham (Adolf)**, geb. 17. 2. 1891 München, gest. 15. 10. 1965 Jerusalem. — F. studierte an mehreren Universitäten und lehrte nach seiner Promotion in Marburg, seit 1928 als Professor in Kiel, und nahm 1933 ein Angebot der Universität Jerusalem an. Außer zu einigen Fragen der Algebra publizierte F. meist zu Problemen der *Mengenlehre*. **Fréchet, René Maurice**, geb. 2. 9. 1878 Maligny, gest. 4. 6. 1973. — F. beendete 1906 als Schüler von HADAMARD sein Studium in Paris. Mit seiner Dissertation und weiteren Veröffentlichungen wurde er in gewissem Sinne zum Begründer der *Funktionalanalysis*, durch den versuchten Aufbau einer *allgemeinen Analysis* unter Einführung abstrakter Anschauungen. Mit späteren Arbeiten förderte er die Entwicklung der *abstrakten Topologie*. Er untersuchte verschiedene Funktionalräume und führte z. B. die Begriffe metr. Raum, Kompaktheit, Vollständigkeit und Differenzierbarkeit ein. 1909/27 wirkte er als Professor an der Universität Strasbourg und danach bis 1947 an der Sorbonne. Dort befaßte er sich auch mit Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Fredholm, Erik Ivar**, geb. 7. 4. 1866 Stockholm, gest. 17. 8. 1927 Mörby. — F. trat nach seinem Studium in Uppsala in das statist. Büro des Reichsversicherungsamtes ein und übernahm 1906 eine Professur für mathemat. Physik in Stockholm. Er lieferte grundlegende Beiträge zur *Theorie der Integralgleichungen* und zu partiellen Differentialgleichungen.

**Fredholm'sche Alternative:** Lösbarkeitskriterium für lineare Integralgleichungen zweiter Art: Die beiden zueinander *transponierten* homogenen Integralgleichungen (1) und (2) sind entweder beide nur trivial, d. h. für  $\varphi = \psi = 0$  lösbar, oder sie haben

$$(1) \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

$$(2) \quad \psi(s) - \lambda \int_a^b K(t, s) \psi(t) dt = 0$$

beide die gleiche endl. Anzahl linear unabhängiger ( $\nearrow$  lineare Abhängigkeit), nichttrivialer Lösungen,

die nicht identisch verschwinden und Nulllösung gen. werden. Die inhomogene Gleichung (3) ist im ersten Fall für jede rechte Seite  $h$  lösbar, im zweiten genau

$$(3) \quad y(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt = h(s)$$

dann, wenn  $\int_a^b h(t) \psi(t) dt = 0$  für alle Nulllösungen  $\psi$  von (2) gilt. Die allgemeine Lösung von (3) ist stets darstellbar in der Form  $y = y_0 + \varphi$ , in der  $y_0$  eine beliebig gewählte spezielle Lösung von (3) ist, und  $\varphi$  alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung (1) durchläuft. Insbes. folgt daraus: Falls (3) für jede rechte Seite  $h$  lösbar ist, so ist die Lösung für jedes feste  $h$  eindeutig. — Die F. A. gilt analog auch für lineare Gleichungssysteme mit quadrat. Koeffizientenmatrix.

**Fredholmsche Integralgleichung** ↗ Integralgleichung II.

**Frege**, Gottlob, geb. 8. 11. 1848 Wismar, gest. 26. 7. 1925 Bad Kleinen. — F. studierte in Jena und Göttingen, promovierte 1873 in Göttingen und war später als Professor in Jena tätig. Seine Forschungen wurden erst nach seinem Tode gebührend gewürdigt. Mit einer bis ins kleinste gehenden Exaktheit versuchte F. die Prinzipien der Arithmetik aus denen der *Logik* herzuleiten.

**freie Variable** ↗ Prädikatenlogik II.

**Frenet**, Jean Frédéric, geb. 7. 2. 1816 und gest. 12. 6. 1900 Périgueux (Dordogne). — F. trat 1840 als Schüler in die École Normale in Paris ein, wurde 1848 zum Professor ernannt und lehrte bis 1868 an der Universität Lyon. In seinen Forschungen widmete er sich vor allem Fragen der *Differentialgeometrie* und fand unabhängig von **SERRET** 1847 die F.schen Formeln.

**Frenetsche Formeln, Ableitungsgleichungen**: System (1) linearer Differentialgleichungen, die die erste Ableitung des Tangentenvektors  $\mathbf{t}(s)$ , des Hauptnormalenvektors  $\mathbf{n}(s)$  und des Binormalenvektors  $\mathbf{b}(s)$  nach der Bogenlänge  $s$  jeweils als Linearkombination dieser Vektoren  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  mit der Krümmung  $k(s) > 0$  und der Windung  $\tau(s)$  darstellen. In der

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= k\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau\mathbf{n} \end{aligned}$$

Darstellung (2) der F.F. in Matrixschreibweise ist die Koeffizientenmatrix schiefssymmetrisch.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

**Frequenz** ↗ Winkelfunktion VIII.

**Frequenzgang**: I. komplexe Kennfunktion für lineare Übertragungsglieder bzw. -systeme, die physikalisch die Übertragung von *Frequenzen* beschreibt und definiert wird als Quotient von Funktionen der Ausgangs- und der Eingangssignale;  $G(i\omega) = X_A(i\omega)/X_E(i\omega)$ .

Für den prakt. Gebrauch werden folgende Darstellungsformen benutzt:

I.1. *Kartes. Form*:  $G(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$ .

I.2. *Trigonometr. Form*:

$$G(i\omega) = H(\omega) [\cos \varphi(\omega) + i \sin \varphi(\omega)].$$

I.3. *Exponentielle Form*:  $G(i\omega) = H(\omega) \exp [i\varphi(\omega)]$ .

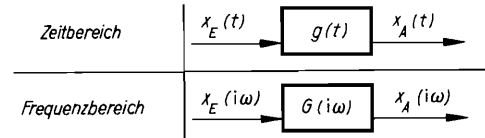
Hierin bedeuten:

$H(\omega) = |G(i\omega)| = \sqrt{u(\omega)^2 + v(\omega)^2}$  die *Amplitude*,  $\varphi(\omega) = \arg G(i\omega) = \arctan [v(\omega)/u(\omega)]$  die *Phase*,  $u(\omega) = \operatorname{Re} \{G(i\omega)\} = H(\omega) \cos \varphi(\omega)$  den *Realteil* und  $v(\omega) = \operatorname{Im} \{G(i\omega)\} = H(\omega) \sin \varphi(\omega)$  den *Imaginärteil* und  $i$  die imaginäre Einheit.

Der F. ist eine der Zeitbeschreibung äquivalente Beschreibungsform von Systemen. Speziell für den Zusammenhang zwischen dem F. und der Gewichtsfunktion (↗ Zeitfunktion II.) gilt die Beziehung (1),

$$(1) \quad G(i\omega) = F\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

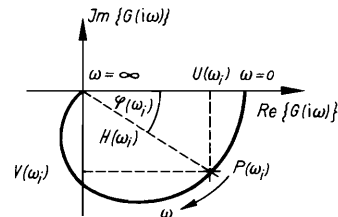
d. h., der F. ist die Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion (Abb. 1).



Frequenzgang. Abb. 1: Symbol. Darstellung der Beziehung zwischen Gewichtsfunktion  $g(t)$  und Frequenzgang  $G(i\omega)$

Der F. kann auch direkt aus der Übertragungsfunktion  $G(p)$  (↗ Übertragungsglied, Abb. 1) gewonnen werden, indem man formal für den Operator  $p$  die Variable  $i\omega$  setzt und  $G(i\omega)$  erhält. Für die graph. Darstellung des F.s werden vor allem die Ortskurve und die logarithm. Frequenzkennlinien benutzt.

II. Die *Ortskurve des Frequenzganges* ist der geometr. Ort aller Punkte  $P(\omega)$ , deren Koordinaten  $u(\omega)$ ,  $v(\omega)$  der Gleichung  $G(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$  in der komplexen Zahlenebene für  $0 \leq \omega \leq \infty$  genügen



Frequenzgang. Abb. 2: Beispiel einer Ortskurve

(Abb. 2). Die prakt. Ermittlung der Ortskurve erfolgt zumeist punktweise entweder durch Messung der Ein- und Ausgangsschwingung bei verschiedenen diskreten Frequenzen  $\omega_i$  und Auswertung der Amplituden- und Phasenbeziehung (↗ Systemidentifikation) oder rechnerisch aus dem komplexen F. Die Ortskurve dient vor allem zur Systembeschreibung, Systemidentifikation sowie zur Stabilitätsbestimmung (↗ Stabilität).

**III.** In den *Frequenzkennlinien*, auch *logarithm. Frequenzgänge* gen., werden der Verlauf der Amplitude  $H(\omega) = |G(i\omega)|$  und der der Phase  $\varphi(\omega)$  über der Frequenz  $\omega$  gesondert dargestellt. Bes. Vereinfachungen für die prakt. Handhabung ergeben sich, wenn die Amplitude und die Frequenz in logarithm., die Phase jedoch in linearem Maßstab aufgetragen werden. Die Darstellung von  $\lg |G(i\omega)|$  über  $\lg \omega$  wird dann *Amplitudenkennlinie* oder *Betragskennlinie* und die Darstellung von  $\varphi(\omega)$  über  $\lg \omega$  *Phasenkennlinie* gen. Für eine gewisse, in der Praxis sehr häufig vorkommende Systemklasse, die *Phasenminimumsysteme*, besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen dem Amplituden- und Phasenfrequenzgang. Das bedeutet, daß jede der beiden Kennlinien bereits die gesamte Information über das System enthält und somit nur eine Kennlinie bestimmt zu werden braucht; wegen der leichteren Darstellbarkeit ist dies meist die logarithm. Amplitudenkennlinie.

**IV.** Die Darstellung durch Amplitudenkennlinien und Phasenkennlinien geht auf H. W. Bode zurück und bildet die Grundlage für das in der Kybernetik bedeutsame *Frequenzkennlinienverfahren*. Infolge der doppelt-logarithm. Darstellung der Amplitudenkennlinie ergeben sich als bes. Vorteile für die asymptot. Behandlung der Grundglieder ( $\nearrow$  Übertragungsglied) und deren Verknüpfungen, insbes. bei Serienschaltung ( $\nearrow$  Struktur). Hierbei können im Falle des Vorliegens von Phasenminimumsystemen die etwas komplizierter zu handhabenden Phasenkennlinien außer Betracht bleiben. Das Frequenzkennlinienverfahren findet seine hauptsächlichsten Anwendungen bei der Analyse der Stabilität, bei der Systemidentifikation und beim Systementwurf.

**Frequenzkennlinie**  $\nearrow$  Frequenzgang II., III.

**Frobenius**, Ferdinand Georg, geb. 26. 9. 1849 und gest. 3. 8. 1917 Berlin. — F. studierte in Berlin und Göttingen. Er war anschließend Lehrer an einer Realschule, dann seit 1875 Professor in Zürich und seit 1902 in Berlin. Er arbeitete vorwiegend über Algebra und lieferte bedeutende Beiträge zur *Gruppentheorie*, *Matrixentheorie* und zur Theorie *hyperkomplexer Systeme*.

**Frontlinie**  $\nearrow$  Zweitafelprojektion I.

**Froschperspektive**  $\nearrow$  Projektion I.

**frühester Termin**  $\nearrow$  Netzplantechnik IV.

**Frühfehler**  $\nearrow$  Zuverlässigkeitstheorie.

**Fubini**, Guido, geb. 19. 1. 1879 Venedig, gest. 6. 6. 1943 New York. — F. studierte in Pisa und wurde dort anschließend Privatdozent. Seit 1903 war er Professor in Catania und in Genua, seit 1910 in Turin. 1938 emigrierte F. in die USA und war bis zu seinem Tode Professor am Institut for Advanced Study in Princeton. — F. lieferte hervorragende Arbeiten zur projektiven Differentialgeometrie (*Geometria proiettiva differenziale* 1926), zur Reihenlehre, zur Integrations- und Maßtheorie ( $\nearrow$  F., Satz von).

**Fubini, Satz von**  $\nearrow$  Lebesguesches Integral III.

**Führungsautonomie**  $\nearrow$  Regelung VIII.

**Führungsgröße**  $\nearrow$  Regelung I.

**Führungsübertragungsfunktion**  $\nearrow$  Regelung III.

**Fundamentalfäche**  $\nearrow$  Polarität.

**Fundamentalfolge**, *Cauchyfolge*: I. Zahlenfolge  $(a_n)$ , für die der Abstand  $|a_k - a_{k'}|$  zweier Glieder  $a_k, a_{k'}$  mit hinreichend großen Indizes  $k$  und  $k'$  beliebig klein wird; d. h., zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N(\varepsilon)$ , so daß  $|a_k - a_{k'}| < \varepsilon$  für beliebige Indizes  $k, k' > N(\varepsilon)$  gilt. Gleichbedeutend damit ist, daß zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon)$  existiert, so daß  $|a_k - a_{k+m}| < \varepsilon$  für alle  $k > N(\varepsilon)$  und beliebige natürl. Zahlen  $m$  gilt.

Die Zahlenfolge  $a_n = n/(n+1)$  z. B. ist eine F., denn zu einem beliebigen  $\varepsilon > 0$  kann man  $N(\varepsilon) > 2/\varepsilon$  wählen und erhält (1) für alle Indizes  $k > N$  und beliebige natürl. Zahlen  $m$ .

$$(1) \quad |a_k - a_{k+m}| = \left| \frac{k}{k+1} - \frac{k+m}{k+m+1} \right| \\ = \left| 1 - \frac{1}{k+1} - 1 + \frac{1}{k+m+1} \right| \\ \leq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+m+1} \leq \frac{2}{k} < \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied  $a_n$

$= \sum_{r=1}^n 1/v$  ist keine F., da es zu  $\varepsilon = 1/2$  und beliebigem Index  $k$  stets eine Zahl  $m$  gibt, so daß  $|a_k - a_{k+m}| > \varepsilon$  ist; denn wählt man  $m > k$ , so gilt (2).

$$(2) \quad |a_k - a_{k+m}| = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+m} \\ \geq \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{2k} \\ = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Jede reelle F. ist konvergent, ihr Grenzwert ist eine reelle Zahl. Hingegen muß der Grenzwert einer rationalen F. keine rationale Zahl sein. Man benutzt F.n zur Einführung irrationaler Zahlen.

**II. F., in sich konvergente Folge**: *Funktionalanalysis* Folge  $\{x_n\}$  von Elementen eines metr. Raumes ( $\nearrow$  Raum, metrischer) mit der Eigenschaft, daß zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon)$  existiert, so daß  $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$  für alle  $m, n \geq N(\varepsilon)$  gilt;  $\varrho$  ist die *Abstandsfunktion* des metr. Raumes. In einem metr. Raum ist jede gegen ein Element des Raumes konvergente Folge auch eine F.; die Bedingung des für Zahlenfolgen gültigen *Cauchyschen Konvergenzkriteriums* ist auch in metr. Räumen notwendig. Es hat aber i. allg. nicht jede F. einen Limes. Ist z. B.  $X$  die Menge der rationalen Zahlen, die mit der Metrik  $\varrho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$  versehen ist, so ist eine Folge  $\{x_n\}$  rationaler Zahlen, die gegen den irrationalen Grenzwert  $\sqrt{2}$  konvergiert, eine F., die im Raume  $X$  nicht konvergiert, denn  $\sqrt{2} \notin X$ . Ein metr. Raum heißt *vollständig*, wenn jede F. gegen ein Element des Raumes konvergiert. Die Bedingung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums ist danach genau dann *hinreichend*, wenn der betrachtete metr. Raum vollständig ist. Für Beispiele vollständiger Räume s. a. Raum, normierter linearer.

III. Da viele funktionalanalyt. Sätze nur in vollständigen Räumen gelten, ist es oft zweckmäßiger, *vollständige metr. Räume* zu betrachten. Deshalb ist es wichtig, daß man jeden metr. Raum durch Hinzunahme weiterer Elemente „vervollständigen“ kann, weil es zu jedem metr. Raum  $X$  mit der Metrik  $\rho$  einen vollständigen metr. Raum  $\bar{X}$  mit der Metrik  $\bar{\rho}$  gibt, von dem  $X$  ein dichter Teilraum ist, d. h., daß der Abschluß von  $X$  im Raume  $\bar{X}$  mit  $\bar{X}$  zusammenfällt und  $\rho(x, y) = \bar{\rho}(x, y)$  für alle  $x, y \in X$  gilt.  $\bar{X}$  ist dabei bis auf eine Isometrie eindeutig bestimmt, d. h., sind  $\bar{X}_1$  und  $\bar{X}_2$  zwei metr. Räume mit den soeben genannten Eigenschaften, so existiert eine isometr. Abbildung von  $\bar{X}_1$  auf  $\bar{X}_2$ .  $\bar{X}$  nennt man *Vervollständigung des metr. Raumes  $X$* . Das einfachste Beispiel für die Vervollständigung eines metr. Raumes ist der Übergang vom unvollständigen Raum der rationalen Zahlen zu seiner Vervollständigung, dem Raum der reellen Zahlen. Wenn der metr. Raum sogar ein normierter linearer Raum oder ein Raum mit Skalarprodukt ( $\nearrow$  Hilbertraum) ist, so kann man stets erreichen, daß auch die Vervollständigung  $\bar{X}$  ein normierter linearer Raum bzw. ein Raum mit Skalarprodukt ist.

**Fundamentalsatz**  $\nearrow$  Polarität.  
**Fundamentalparallelogramm**  $\nearrow$  elliptische Funktion.

**Fundamentalsatz der Algebra:** *Jede algebraische Gleichung  $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ , in der die  $a_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$  reelle oder komplexe Zahlen bedeuten, hat wenigstens eine Lösung in der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen.* Auf Grund dieses Satzes gilt die *Produktdarstellung (1) der algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades:*

$$(1) \quad x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

In ihr sind die  $x_i$  die Lösungen der algebraischen Gleichung. Die  $n$  *Linearfaktoren*  $(x - x_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  müssen nicht notwendig verschieden sein. Tritt z. B. der Faktor  $(x - x_i)$  genau  $\alpha_i$  mal auf, so sagt man, daß die Lösung  $x_i$  die *Vielfachheit*  $\alpha_i$  hat. Zählt man jede Lösung mit ihrer Vielfachheit, so kann man den Fundamentalsatz der Algebra auch folgendermaßen formulieren:

*Jede algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades in einer Gleichungsvariablen hat genau  $n$  Lösungen in der Menge der komplexen Zahlen.*

S. a. ganzrationale Funktion II.  
**Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie**  $\nearrow$  Teilbarkeit I.,  $\nearrow$  Primzahl I.

**Fundamentalsystem**  $\nearrow$  lineare gewöhnliche Differentialgleichung I.2.

**Fundamentaltensor**  $\nearrow$  innere Geometrie II.

**Fundierungsaxiom**  $\nearrow$  Mengenlehre II.

**Fünfeck, regelmäßiges konvexes**  $\nearrow$  Zehneck II.

**Fünffarbensatz**  $\nearrow$  Landkarte I.

**Funktion: I. Mengenlehre** eindeutige Relation  $F$  zwischen einer Menge  $X$  und einer Menge  $Y$ . Die  $F$  ist eine Menge  $F$  von *geordneten Paaren*  $(x, y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$ , für die zusätzlich gilt, daß aus  $(x, y) \in F$  und  $(x, z) \in F$  folgt  $y = z$ . Anschaulich bedeutet  $(x, y) \in F$ , daß dem Element  $x$  durch die  $F$

$F$  das Element  $y$  zugeordnet wird. Eine solche *eindeutige Zuordnung* wird oft *Abbildung* gen.,  $x$  heißt dann *Urbild* von  $y$  und  $y$  *Bild* oder *F.wert* von  $x$  bei der  $F$ .  $F$ . Die Menge aller Elemente  $x$ , zu denen ein  $y$  mit  $(x, y) \in F$  existiert, ist der *Definitionsbereich*  $D(F)$  von  $F$ , seine Elemente nennt man auch *Argumente* von  $F$ , die Menge aller Elemente  $y$ , zu denen ein  $x$  mit  $(x, y) \in F$  existiert, heißt der *Wertebereich* bzw. *Wertevorrat*  $W(F)$  von  $F$ . Es ist  $F \subseteq D(F) \times W(F)$  ( $\nearrow$  Relation II.). Ist  $D(F) = X$  und  $W(F) \subseteq Y$ , so spricht man von einer Abbildung von  $X$  in bzw. nach  $Y$  und schreibt  $F: X \rightarrow Y$ ; ist auch  $W(F) = Y$ , so spricht man von einer Abbildung von  $X$  auf  $Y$ , die auch als *Surjektion* bezeichnet wird. Für die Bezeichnung der Zuordnung von  $y$  zu  $x$  bei einer Funktion  $F$  sind neben der *funktionalen Schreibweise*  $y = F(x)$  die *Operationschreibweise*  $y = xF$  oder  $y = Fx$  oder die *Indexschreibweise*  $y = F_x$  oder die *Exponentialschreibweise*  $y = x^F$  in Gebrauch. Ist die Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  eine *Injektion*, so ist jedem Element  $y \in W(F)$  eindeutig ein Element  $x \in X$  zugeordnet. Man nennt eine  $F$ ,  $F$ , bei der dies zutrifft, *umkehrbar* oder *eindeutig*. Ist eine umkehrbare  $F$ ,  $F$  durch ihre Wertepaare  $(x, y) \in F$  gegeben, so ist die Umkehrfunktion  $F^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in F\}$ . Ist der Definitionsbereich  $D(F)$  Teilmenge einer  $n$ -fachen Produktmenge  $M_1 \times \dots \times M_n$ , so nennt man  $F$  eine  $F$ . von  $n$  Variablen bzw. eine  $n$ -stellige  $F$ . (s. a. kartesisches Produkt).

Zwei  $F$ .en  $g$  und  $f$  sind genau dann gleich, wenn gilt  $D(g) = D(f)$  und  $f(x) = g(x)$  für alle Argumente  $x$ . Eine *Verkettung* zweier  $F$ .en  $f, g$  ist die  $F$ .  $F = g \circ f$ , die die Hintereinanderausführung von  $f, g$  darstellt, d. h., für die für jedes Element  $x \in D(F)$  gilt  $F(x) = g(f(x))$ . Mit anderen Worten ist die Verkettung  $F = g \circ f$  von  $f, g$  die Klasse aller geordneten Paare  $(x, y)$ , zu denen ein Element  $z$  existiert, für das  $(x, z) \in f$  und  $(z, y) \in g$  gelten. Für  $F$ .en  $f, g, h$  gelten  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$  und  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

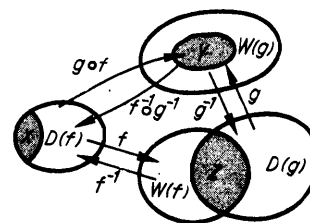


Abb. 1: Verkettung  $F = g \circ f$  zweier Funktionen  $f$  und  $g$ ,  $Z = W(f) \cap D(g)$ ,  $Y = W(g \circ f) \subseteq W(g)$

(Abb. 1). Die Verkettung  $g \circ f$  bedeutet danach, daß die Abbildungen  $f$  und dann  $g$  nacheinander ausgeführt werden. Unter der Voraussetzung, daß diese Abbildungen Injektionen sind, existiert zu  $F = g \circ f$  die inverse  $F$ .  $F^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ , bei der  $g^{-1}$  und dann  $f^{-1}$  nacheinander ausgeführt werden. Im einzelnen bildet  $g^{-1} = \{(y, z) | (z, y) \in g\}$  die Menge  $Y = W(g \circ f)$  auf  $Z = W(f) \cap D(g)$  ab und  $f^{-1} = \{(x, z) | (x, z) \in f\}$  bildet  $Z$  ab auf  $X \subseteq D(f)$ . Für die Verkettung von  $F$ .en gilt das Kommutativgesetz nicht. Für die Verkettung von drei  $F$ .en  $f, g, h$  gilt das Assoziativ-



gesetz  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ . Ist  $F$  eine F. und  $K \subseteq D(F)$ , so ist auch  $G = F \cap (K \times W(F))$  eine F., die für alle  $x \in D(G) = D(F) \cap K$  dieselben F.werte hat wie  $F$ ; man nennt  $G$  die *Einschränkung* von  $F$  auf  $K$  und bezeichnet sie auch mit  $F \upharpoonright K$ . — F.en können anschaul. beschrieben werden durch geometrische Gebilde, F.en einer Variablen z. B. durch Kurven, F.en zweier Variablen durch Flächen. Auch eine Beschreibung durch F.stafeln oder F.s tabellen ist möglich. In ihnen werden die Argumente und die zugehörigen F.werte neben- bzw. übereinander angeordnet. Die Verwendung einer Tabelle ist aber nur günstig, falls  $D(F)$  endlich ist.

II. In der *Analysis* wird die eindeutige Abbildung  $f$  einer Menge  $X$  in eine Menge  $Y$ , die durch eine Menge geordneter Paare  $(x, y) \in f$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$  gekennzeichnet ist, oft mit  $x \rightarrow y$  oder  $x \mapsto y$  und meist mit  $y = f(x)$  gekennzeichnet.

Die F. heißt *reellwertig* bzw. *komplexwertig*, falls  $Y$  eine Teilmenge der reellen bzw. komplexen Zahlen ist. Hier werden für  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}$  bes. reellwertige F.en einer reellen *unabhängigen Variablen*  $x$  betrachtet.

Die Variable  $y$  wird *abhängige Variable* gen. Statt  $x$  wählt man oft die Symbole  $t$  oder auch  $z$  und  $w$ , z. B. bei F.en komplexer Veränderlicher, oder auch griech. Buchstaben, z. B. bei den Winkel-F.en. Man nennt  $f$  eine F. *einer stetigen Veränderlichen*, wenn der Definitionsbereich  $D(f)$  aus einem Intervall besteht. Eine F. ist vollständig durch die Angabe aller ihrer Elemente  $(x, y)$  charakterisiert.

Eine Zusammenstellung aller Argumente mit zugehörigem F.wert, z. B. in einer *Wertetafel*, läßt sich jedoch praktisch nur realisieren, wenn  $D(f)$  eine endl. Menge ist. Oft ist es allerdings bei häufig benutzten F.en, z. B. bei den Winkel-F.en, nützlich, eine gewisse Anzahl von Argumenten und zugehörigen F.swerten in einer Tabelle zusammenzustellen, falls diese Werte einen Überblick über den F.sverlauf geben. Durch  $f = \{(1, 3), (2, 0), (3, -3)\}$  z. B. ist eine F. vollständig bestimmt, die Menge  $g = \{(1, 3), (2, -7), (1, -2)\}$  dagegen stellt keine F. dar, da der reellen Zahl  $x = 1$  zwei Werte zugeordnet wurden.

Eine weitere Möglichkeit, eine F. zu charakterisieren, ist eine *verbale Beschreibung* des Definitionsbereichs und der Vorschrift, nach der sich aus jedem Argument  $x$  der zugehörige F.wert  $y$  ergibt.

*Beispiel II.1.*: In der *Dirichletschen F.* z. B. wird jeder reellen Zahl  $x$  als F.wert 0 oder 1 zugeordnet, je nachdem, ob  $x$  eine rationale oder eine irrationale Zahl ist. *Beispiel II.2.*: Jeder reellen Zahl  $x$  wird als F.wert  $[x]$  zugeordnet, d. h. die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als  $x$  (Abb.  $\nearrow$  Stetigkeit).

III. Die am häufigsten angewandte Art der Darstellung einer F.  $f$  ist die Beschreibung von  $f$  durch einen *F.sggleichung* genannten *analyt. Ausdruck*, durch eine Gleichung zwischen Termen mit der freien Variablen  $x$  und dem F.wert  $y$ . Neben der F.sggleichung muß der Definitionsbereich  $D(f)$  angegeben werden. Der größtmögl. Bereich von reellen Zahlen  $x$ , von denen jeder durch die F.sggleichung eindeutig ein reeller F.wert  $y$  zugeordnet werden

kann, muß oft eingeschränkt werden, wenn ein physikal. Sachverhalt durch eine F. beschrieben werden soll. Eine F.sggleichung ist in *expliziter Form* gegeben, wenn sie nach der abhängigen Variablen aufgelöst ist, d. h., wenn sie in der Form  $y = f(x)$  vorliegt und  $f(x)$  ein Term in der freien Variablen  $x$  ist. Andernfalls liegt die F.sggleichung in *impliziter Form*  $F(x, y) = 0$  vor. Bes. wenn nicht die übl. Symbole für die beiden Variablen gewählt werden, ist es nicht immer möglich, anhand der F.sggleichung zu entscheiden, welche der Variablen die abhängige und welche die unabhängige bezeichnet, so daß eine zusätzl. Festlegung notwendig wird. Nicht immer ist es möglich, eine implizit gegebene F.sggleichung in eine explizite Form überzuführen. *Beispiel III.1.*: Ist die Funktion  $f_1$  mit  $D(f_1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$  gegeben durch die explizite F.sggleichung  $y = f_1(x) = 2x - 1$ , und die Funktion  $f_2$  mit  $D(f_2) = D(f_1)$  durch die implizite F.sggleichung  $(y + 1)^2 = |x|$ , so ist  $f_1 = f_2$ , falls in  $f_2$  die unabhängige Variable mit  $x$  bezeichnet ist.

*Beispiel III.2.*: Durch  $y = f_3(t) = t^2/a - \sqrt{b^2 - t^2}$  ist die F.  $f_3(t)$  mit der unabhängigen Variablen  $t$  gegeben, wenn  $a \neq 0$  und  $b$  beliebige, aber feste reelle Zahlen sind. Der größtmögl. Definitionsbereich für diese F. ist die Menge aller reellen Zahlen  $t \leq b^2$ .

*Beispiel III.3.*: Sind die F.en  $f_4$  gegeben durch  $f_4(x) = a + (x - 1)d$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $f_5$  durch  $f_5(n) = a + (n - 1)d$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit den konstanten reellen Zahlen  $a$  und  $d$ , so stimmen die beiden F.en nicht überein, z. B. gilt  $(-1, a - 2d) \in f_4$ , aber  $(-1, a - 2d) \notin f_5$ . F.en, deren Definitionsbereich eine Menge natürl. Zahlen ist, heißen  $\nearrow$  Zahlenfolgen.

*Beispiel III.4.*: Durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  wird keine F. definiert. Wegen  $|x| = \sqrt{1 - y^2}$  bzw.  $|y| = \sqrt{1 - x^2}$  sind i. allg. einem Wert  $x$  zwei Werte von  $y$  bzw. einem Wert von  $y$  zwei von  $x$  zugeordnet. Mit den zusätzl. Festlegungen  $|x| \leq 1$ ,  $y \geq 0$  wird durch  $x^2 + y^2 = 1$  eine F. definiert, die man auch angeben kann durch zwei explizite F.sggleichungen  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  mit der *Hilfsvariablen* oder dem *Parameter*  $t$  und dem gemeinsamen Definitionsbereich  $0 \leq t \leq \pi$ . Jeder Wert  $t_0$  aus diesem Bereich bestimmt ein zur gegebenen F. gehöriges Wertepaar  $(x_0, y_0)$  und umgekehrt. Allgemein ist  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$  eine *Parameterdarstellung* der F.  $f$ , wenn jeder Wert  $t_0 \in D(g) = D(h)$  ein Wertepaar  $(g(t_0), h(t_0)) = (x_0, y_0) \in f$  bestimmt und umgekehrt jedes zu  $f$  gehörende Wertepaar mittels eines geeigneten Wertes des Parameters gewonnen werden kann.

Der Zusammenhang zwischen den F.en  $g, h$  und  $f$  kann durch ein *Diagramm* verdeutlicht werden, das die Zuordnung der Elemente bzw. die Abbildungen der entsprechenden Mengen darstellt (Abb. 2). Ist in der Parameterdarstellung  $x = g(t)$  und  $y = h(t)$  die F.  $g(t)$  umkehrbar, d. h., existiert zu  $g$  eine F.  $\bar{g}$  mit  $t = \bar{g}(x)$  und  $\bar{g}(g(t)) = t$ , so kann die durch die Parameterdarstellung beschriebene F.  $f$  wegen  $y = h(\bar{g}(x))$  durch eine explizite F.sggleichung

$y = f(x)$  dargestellt werden. Parameterdarstellungen von F.en spielen bei der Beschreibung funktionaler Zusammenhänge in der Physik eine wesentl. Rolle; in ihnen wird der Parameter  $t$  oft als Zeit gedeutet.

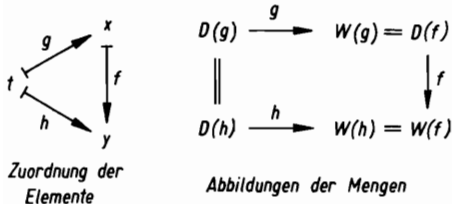


Abb. 2: Parameterdarstellung; Zusammenhang zwischen den Funktionen  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$  und  $y = f(x)$

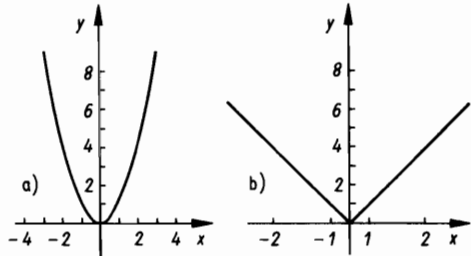
**Beispiel III.5.:** Die beiden F.en  $g$  und  $h$  mit  $x = g(t) = 2t$  und  $y = h(t) = \sin t$  mit der Menge aller reellen Zahlen als gemeinsamer Definitionsbereich sind eine Parameterdarstellung der F.  $f$  mit  $y = f(x) = \sin x/2$ .

**Beispiel III.6.:** Die beiden F.en  $u$  und  $v$  mit  $x = u(t) = a \cdot \cos t$  und  $y = v(t) = b \cdot \sin t$  mit den von 0 verschiedenen Konstanten  $a$  und  $b$  haben den gemeinsamen Definitionsbereich  $0 \leq t < 2\pi$ . Die Elimination des Parameters  $t$  führt auf die als *Ellipsengleichung* bekannte Beziehung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , die z. B. dann eine implizite Form einer F.sgleichung einer F.  $f$  mit der unabhängigen Variablen  $x$  darstellt, wenn für die F.swerte  $0 \leq y \leq |b|$  gefordert wird. In der Parameterdarstellung hat man dann  $0 \leq t \leq \pi$  zu wählen.

IV. Ist in einer Ebene  $E$  ein meist als kartesisch angenommenes Koordinatensystem gegeben, auf dessen Abszissenachse die  $x$ -Werte und auf dessen Ordinatenachse die  $y$ -Werte aufgetragen werden, so entspricht jedem Wertepaar  $(x, y) \in f$  einer F.  $f$  eindeutig ein Punkt der Ebene  $E$  und der F. eine eindeutig bestimmte Punktmenge, die als das *Bild* oder der *Graph* der F.  $f$  bezeichnet wird. Man spricht dann auch von der *graph. Darstellung* der F.  $f$  und nennt die Punktmenge ihre *Kurve*, vor allem dann, wenn der Definitionsbereich von  $f$  ein Intervall reeller Zahlen ist. Es kann jedoch nicht jede Kurve als Bild einer F. aufgefaßt werden, da z. B. wegen der für die F.  $y = f(x)$  geforderten Eindeutigkeit eine Parallele zur  $y$ -Achse die Kurve in nur einem Punkte schneiden darf. Die zeichner. Herstellung des Bildes einer F.  $f$  erfolgt in der Regel punktweise, indem man endlich vielen Wertepaaren  $(x_i, y_i)$  je einen Punkt  $P_i$  der Ebene  $E$  zuordnet und benachbarte Punkte  $P_k$  und  $P_{k+1}$  durch Strecken oder geeignete Kurvenstücke verbindet. Diese näherungsweise Darstellung der F. gibt in vielen Fällen ihre wesentl. Eigenschaften wieder, z. B. ihr Monotonieverhalten, ihre Beschränktheit oder die Existenz von Nullstellen oder Extrema. Diese Informationen sind jedoch i. allg. nur Hinweise, Vermutungen, deren Richtigkeit analytisch bewiesen werden muß. Ist z. B. der Definitionsbereich einer F. nicht beschränkt, so läßt sich nur ein Teil ihres

Bildes darstellen. Entsprechen die Punkte der Kurve den Daten von Meß- und Beobachtungsreihen in Naturwissenschaft und Technik, d. h. den fehlerbehafteten Angaben von Mechanismen, z. B. von Barographen, Oszillographen oder Tachographen, so entsteht die zusätzl. Aufgabe, eine F. zu bestimmen, die die registrierten Meßwerte einheitlich wiedergibt.

**Beispiel IV.1.:** Das Bild der F.  $f$  mit  $y = f(x) = x^2$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist eine Parabel, falls man ein kartes. Koordinatensystem der zeichner. Darstellung zugrundelegt; benutzt man hingegen für die Teilung der Abszissenachse eine quadrat. Leiter, so besteht das Bild der F.  $y = x^2$  aus zwei Halbgeraden (Abb. 3). Schränkt man den Definitionsbereich der F.  $f$  auf die Menge  $\mathbb{N}$  der natürl. Zahlen ein, so besteht das Bild von  $f$  aus einer Folge von diskreten Punkten. Die *Nomographie* eröffnet vielfältige Möglichkeiten einer zweckmäßigen graph. Darstellung funktionaler Zusammenhänge.



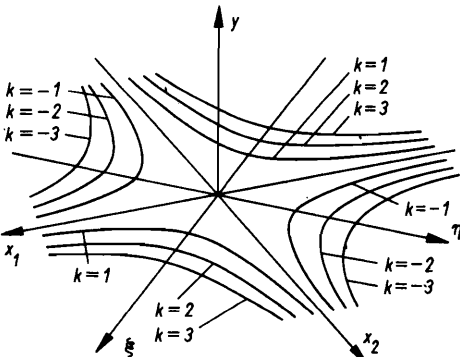
Funktion. Abb. 3: Durch eine für die Teilung der  $x$ -Achse benutzte quadrat. Leiter besteht das Bild a) der Funktion  $y = x^2$  in b) aus zwei Halbgeraden

V. Ist  $X$  die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen, so heißt eine eindeutige Abbildung  $f$  von  $X \times X \times \dots \times X = X^n$  in  $X$  eine *reellwertige F. von  $n$  reellen unabhängigen Variablen*. Jedem geordneten  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reeller Zahlen wird durch  $f$  eindeutig eine reelle Zahl  $y$ , die auch mit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bezeichnet wird, zugeordnet. Für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  läßt sich jedem geordneten Paar bzw. Tripel des Definitionsbereichs von  $f$  eineindeutig ein Punkt  $P$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  bzw. des dreidimensionalen Anschauungsraumes  $\mathbb{R}^3$  zuordnen. Für  $n > 3$  sagt man in Analogie dazu, daß jedes  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  umkehrbar eindeutig einem Punkt  $P$  des  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^n$  entspricht, so daß die Funktion  $f$  auch durch die Zuordnung  $P \rightarrow f(P)$  charakterisiert werden kann, wobei  $f(P)$  eine reelle Zahl aus dem Wertebereich  $W(f)$  ist. Der Definitionsbereich als Punktmenge des  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathbb{R}^n$  kann aus isolierten Punkten bestehen oder eine zusammenhängende Punktmenge des  $\mathbb{R}^n$  sein, die man dann als *Gebiet* oder *Bereich* bezeichnet. Da F.en mit zwei unabhängigen Variablen eine Zuordnung  $(x_1, x_2) \mapsto y$  definieren, kann eine solche F.  $f$  bei Auszeichnung eines Koordinatensystems als Punktmenge  $\{(x_1, x_2, y)\}$  eines dreidimensionalen Raumes dargestellt werden. Ist die F.  $f$  stetig und ihr Defini-

tionsbereich eine zusammenhängende Punktmenge, dann ist ihr Bild eine Fläche im Raum  $\mathbb{R}^3$ , die z. B. mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung auf vorhandene Extremwerte oder Sattelpunkte untersucht werden kann. Wählt man dagegen aus dem Definitionsbereich der F.  $f$  die Paare  $(x_1, x_2)$  aus, in denen etwa  $x_1$  einen konstanten Wert  $c$  annimmt, so geht die F.sgleichung in die einer F. mit einer unabhängigen Variablen über. Ihr Bild ist Schnittkurve der von  $y = f(x_1, x_2)$  bestimmten Fläche mit der durch  $x_1 = c$  festgelegten Ebene. Für verschiedene feste Werte der Variablen  $x_1$  erhält man eine Kurvenschar, die eine gewisse Vorstellung von der betrachteten Fläche vermitteln kann. Entsprechend erhält man eine Schnitkurvenschar mit den Ebenen  $x_2 = d$ , falls man die Variable  $x_2$  vorübergehend durch den konstanten Wert  $d$  ersetzt. Ermittelt man vom Bild der F.  $f$  mit  $y = f(x_1, x_2)$  alle Punkte, für die  $f(x_1, x_2) = k$  mit einer festen reellen Zahl  $k$  gilt, so erhält man eine Punktmenge in der durch  $z = k$  bestimmten Ebene. Diese Punktmenge sind i. allg. Kurven, die man Höhenlinien bzw. Niveaulinien der durch  $f$  bestimmten Fläche nennt. Sieht man davon ab, für diese Flächen ein Modell anzufertigen, so kann man zu ihrer Darstellung eine Karte verwenden, auf der man eine hinreichend große Anzahl Höhenlinien auszeichnet.

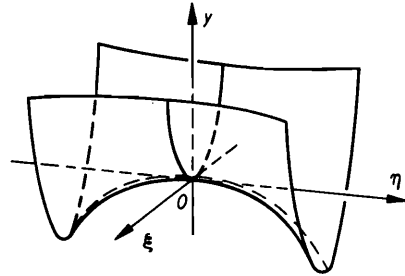
**Beispiel V.1.:** Für eine Funktion  $f$  mit  $y = f(x_1, x_2) = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$  ist der größtmögl. Definitionsbereich die Menge aller Punkte  $P$ , deren Koordinaten die Ungleichung  $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$  erfüllen, d. h., die der Peripherie und dem Inneren eines Kreises mit dem Radius  $r$  und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt angehören. Das Bild der Funktion ist Oberfläche einer Halbkugel mit dem Radius  $r$  und dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt.

**Beispiel V.2.:** Die Funktion  $f$  mit  $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$  ist für alle geordneten Paare  $(x_1, x_2)$  reeller Zahlen definiert, ihr Wertebereich fällt mit der Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen zusammen. Als Höhenlinien treten Hyperbeln mit der Gleichung  $x_1 \cdot x_2 = k$  für  $k \neq 0$  auf (Abb. 4). Für  $k = 0$  ergeben sich die  $x_1$ -Achse und die  $x_2$ -Achse als Höhenlinie. Durch die Gleichungen  $x_1 = a$  bzw.  $x_2 = b$



Funktion. Abb. 4: Projektion der Höhenlinien eines hyperbolischen Paraboloids auf die  $x_1, x_2$ -Ebene

bestimmte Ebenen parallel zur  $y$ -Achse schneiden die Fläche der F. für verschiedene Werte der reellen Konstanten  $a$  und  $b$  in je einer Schar von Geraden, den Erzeugenden dieses hyperbol. Paraboloids. Wählt man die Winkelhalbierenden  $\xi$  und  $\eta$  der Quadranten des  $x_1, x_2$ -Systems als neue Koordinatenachsen, so erhält man nach der Transformation  $x_1 = (\xi - \eta)/\sqrt{2}$ ,  $x_2 = (\xi + \eta)/\sqrt{2}$  die F.sgleichung  $\xi^2 - \eta^2 = 2y$ . Aus ihr liest man ab, daß eine zur  $y$ -Achse parallele Ebene mit der Gleichung  $\eta = 0$  die F.sfläche in einer nach oben geöffneten Parabel mit der Gleichung  $\xi^2 = 2y$ , die durch  $\xi = 0$  bestimmte Ebene aber in einer nach unten geöffneten Parabel mit der Gleichung  $\eta^2 = -2y$  schneidet (Abb. 5). Die Fläche ist eine Schiebefläche, die durch Verschieben der nach oben geöffneten Parabel längs der nach unten geöffneten entsteht.



Funktion. Abb. 5: Hyperbolisches Paraboloid als Schiebefläche, die durch Verschieben der nach oben geöffneten Parabel  $\xi^2 = 2y$  längs der nach unten geöffneten Parabel  $\eta^2 = -2y$  entsteht

**VI. F. einer komplexen Variablen:** eindeutige Abbildung  $f$  von einer Menge  $D$  komplexer Zahlen  $z = x + iy$  auf eine Menge  $W$  komplexer Zahlen  $w = u + iv$ , in Zeichen:  $w = f(z)$ ;  $D$  heißt Definitionsbereich,  $W$  Wertebereich,  $z$  unabhängige,  $w$  abhängige komplexe Variable von  $f$ .

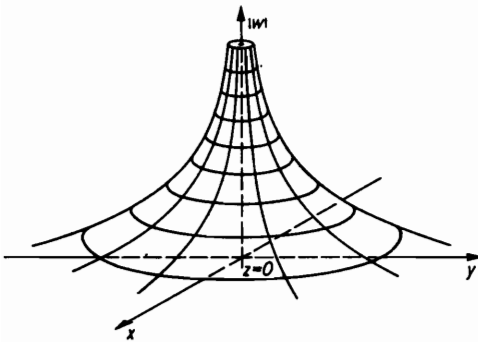
Wegen  $w = u + iv = f(z) = f(x + iy)$  sind mit  $f$  stets zwei reelle Funktionen  $u = u(x, y) = \text{Re } f(z)$ ,  $v = v(x, y) = \text{Im } f(z)$  der reellen Variablen  $x, y$  gegeben, und umgekehrt; die Funktionen  $u(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-1}$ ,  $v(x, y) = y(x^2 + y^2)^{-1}$  definieren z. B. die komplexe Funktion  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x - iy)^{-1} = (\bar{z})^{-1}$ .

Denkt man sich die abgeschlossene Gaußsche Zahlenebene in zwei Exemplaren nebeneinander gegeben — eine zur geometr. Veranschaulichung der Werte des Definitionsbereiches  $D$  der  $z$ -Ebene und eine für die Werte des Wertebereiches  $W$  der  $w$ -Ebene von  $w = f(z)$ , so wird durch  $f$  jedem Urbildpunkt  $z \in D$  ein Bildpunkt  $w \in W$  zugeordnet, entsprechend einer Abbildung des Urbildgebietes  $D$  auf das Bildgebiet  $W$ . Die Funktion  $w = f(z) = (\bar{z})^{-1}$ , die Spiegelung am Einheitskreis ( $\nearrow$  konforme Abbildung), leistet z. B. eine umkehrbar eindeutige Abbildung der  $z$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene, wenn man  $z = 0$  auf  $w = \infty$  und  $z = \infty$  auf  $w = 0$

abbildet. Die Umkehrfunktion einer umkehrbar eindeutigen Funktion bzgl.  $D$  und  $W$  ist durch die Umkehrabbildung von  $W$  auf  $D$  definiert.

Als *Betragsfläche* oder *Relief* von  $w = f(z)$  versteht man die Fläche, die entsteht, wenn man den absoluten Betrag  $|w| = |f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$  von  $f(z)$  als Applikate in jedem Punkte  $z \in D$  errichtet (Abb. 6). Das Relief von  $f$  liegt wegen  $|f(z)| \geq 0$  stets über  $D$ , ausgenommen in den Nullstellen  $z_0$  von  $f$ , für die  $|f(z_0)| = 0$ , also  $f(z_0) = 0$  gilt.

Beschränkt heißt  $f$  im Gebiet  $G \subseteq D$ , wenn ihr Relief ganz unter dem der Funktion  $w = g(z) = K$  liegt, wobei  $K$  eine geeignete Konstante ist. Überschreiten hingegen die Werte von  $|w|$  jedes beliebig große  $K$ , sofern die Argumente in hinreichend kleiner Umgebung der Stelle  $z_p \in D$  liegen, so heißt  $z_p$  *Polstelle* von  $f$ ; z. B. hat  $w = f(z) = (z)^{-1}$  in  $z = 0$  einen Pol (Abb. 6).



Funktion. Abb. 6: Funktion einer komplexen Variablen: Betragsfläche von  $w = 1/z$  in der Nähe der Polstelle  $z_0 = 0$

S. a. komplexwertige Funktion, elementare; Umkehrfunktion IV.

VII. Als *Erweiterung* oder *Fortsetzung* einer F.  $f$  bezeichnet man eine F.  $f^*$ , deren Definitionsbereich  $D(f^*)$  den Definitionsbereich  $D(f)$  von  $f$  umfaßt und die in  $D(f)$  mit  $f$  übereinstimmt. Eine in einem abgeschlossenen Intervall  $I$  definierte und dort stetige F. einer reellen Variablen, die in  $I$  stetige Ableitungen bis zur einschließlich  $n$ -ten Ordnung hat, läßt sich stets erweitern zu einer F.  $f^*$  mit folgenden Eigenschaften: 1.  $f^*$  ist auf der gesamten reellen Zahlengeraden definiert, dort stetig und hat im gesamten Definitionsbereich stetige Ableitungen bis einschließlich zur  $n$ -ten Ordnung. 2. Die F.  $f^*$  stimmt in  $I$  mit der Funktion  $f$  überein. Auf  $f^*$  bezogen, heißt  $f$  die *Einschränkung von  $f^*$  auf  $I$* .

VIII. Eine F. heißt *gerade*, falls für alle Argumente ihres Definitionsbereichs gilt  $f(-x) = f(x)$ , sie heißt *ungerade*, falls gilt  $f(-x) = -f(x)$ . Das Bild einer geraden F. liegt symmetrisch zur Ordinatenachse, das einer ungeraden F. zentralsymmetrisch zum Ursprung. Gerade F.en sind z. B.  $y_1 = f_1(x) = x^2$ ,  $y_2 = f_2(x) = \cos x$  und  $y_3 = f_3(x) = |x|$ ; ungerade F.en sind z. B.  $y_4 = f_4(x) = x^3$ ,  $y_5 = f_5(x) = \sin x$  und  $y_6 = f_6(x) = x/\sqrt{1-x^2}$ . Eine Linearkombina-

tion endlich vieler gerader F.en ist wieder gerade; die von ungeraden F.en ist wieder ungerade. Die Ableitung einer geraden F. ist, falls sie existiert, ungerade, die einer ungeraden F. ist gerade.

IX. Die Frage nach der *Umkehrung* einer eindeutigen Abbildung, nach der Zuordnung der Bilder zu ihren Originalen bei einer F.  $f$  führt zu der *Umkehr-F.*, die Frage nach der Hintereinanderausführung zweier Abbildungen zu *mittelbaren Funktionen*. Spezielle F.stypen und elementare F.en findet man unter den Stichwörtern: *algebraische Funktionen, Area-Funktionen, Arkus-Funktionen, beschränkte Funktion, ganzrationale Funktionen, Exponential-Funktionen, homogene Funktion, hyperbolische Funktionen, lineare Funktionen, Logarithmus-Funktionen, monotone Funktion, Nullstelle einer Funktion, periodische Funktion, Potenz-Funktionen, quadratische Funktionen, rationale Funktionen, Stetigkeit, symmetrische Funktion, Winkel-Funktionen, Wurzel-Funktionen*.

X. Als *elementare F.* bezeichnet man eine reellwertige F. reeller Veränderlicher, die sich als Summe, Produkt oder Quotient bzw. durch Bilden der Umkehr-F. aus rationalen F.en, Winkel-F.en, Exponential- und Hyperbel-F.en gewinnen und durch einen analyt. Ausdruck darstellen lassen. Nichtelementare F.en sind z. B. die Dirichletsche F. II.1., die F.  $d$  mit  $d(x) = [x]$ , in der  $[x]$  die größte ganze Zahl bedeutet, die  $x$  nicht übersteigt. Auch die F.en  $g$  und  $\Gamma$ , die durch die Gleichungen (1) und (2) definiert sind, gehören zu den nichtelementaren F.en.

$$(1) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

$$(2) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Neben den algebraischen F.en, z. B. den Wurzel-F.en, können auch nichtalgebraische F.en, die *transzendent* gen. werden, elementar sein, z. B. die Winkel-F.en, die Exponential-, die Logarithmus-, die zyklometrische und die hyperbol. F.en. Der Definitionsbereich der reellwertigen elementaren F.en läßt sich vollständig oder wenigstens teilweise auf die komplexe Zahlenebene ausdehnen. Einerseits kann man für alle komplexen Zahlen  $z = x + iy$  z. B. die Exponential-F. durch die Reihe (3) oder die Sinus-F. durch die Reihe (4) definieren. Beide Reihen gehen für  $y = 0$  in die aus der reellen Ana-

$$(3) \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$(4) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

lysis bekannten Reihenentwicklungen für die genannten F.en über. Andererseits kann man von einer elementaren reellwertigen F. einer reellen Veränderlichen ausgehen und sie ins Komplexe fortsetzen. Eine solche *analytische Fortsetzung* ist dann auf genau eine Art möglich.

Funktion, absolutstetige  $\nearrow$  Lebesguesches Integral.

**Funktion, äquivalente**  $\nearrow$  Lebesguesches Integral II.  
**Funktion, charakteristische**, einer Menge: die auf einer Grundmenge  $E$  durch  $\chi(x) = 1$  für  $x \in M$  und  $\chi(x) = 0$  für  $x \in E \setminus M$  definierte Funktion  $\chi$  ( $\nearrow$  Lebesguesches Maß, Funktion, meßbare).

**Funktion, integrierbare**  $\nearrow$  Integral I., Flächenintegral I., Raumintegral I.

**Funktion, meßbare**: eine auf einer meßbaren Menge  $E$  ( $\nearrow$  Maß II.) des  $E^n$  definierte reellwertige Funktion  $f$ , für die bei jeder reellen Zahl  $\alpha$  die Menge  $E[f < \alpha] = \{x \mid x \in E \text{ und } f(x) < \alpha\}$  meßbar ist, dabei wird i. allg. stillschweigend das Lebesguesche Maß zugrunde gelegt. Wenn  $f$  meßbar ist, sind auch z. B. die analog definierten Mengen  $E[f \leq \alpha]$ ,  $E[\alpha \leq f < \beta]$ ,  $E[f = \infty]$  meßbar. Die *charakterist. Funktion*  $\chi$  einer Teilmenge  $M$  von  $E$  ist genau dann meßbar, wenn  $M$  meßbar ist. Summe, Differenz, Produkt und Quotient meßbarer Funktionen sind wiederum meßbar, und, falls eine Folge meßbarer Funktionen fast überall ( $\nearrow$  Nullmenge) gegen eine Funktion konvergiert, so ist auch diese meßbar. Jede beschränkte meßbare Funktion ist über einer Menge endlichen Maßes summierbar ( $\nearrow$  Lebesguesches Integral II.).

**Funktion, quadratisch summierbare**: eine auf einer meßbaren Menge  $E$  des  $E^n$  definierte Funktion  $f$ , für die sowohl  $|f|$  als auch  $|f|^2$  summierbar sind ( $\nearrow$  Lebesguesches Integral II.). Für je zwei q. s. F.en  $f, g$  kann man ein verallgemeinertes *Skalarprodukt*  $(f, g) = \int_E f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$  erklären, wenn mit  $\bar{a}$

die konjugiert komplexe Zahl zu  $a$  bezeichnet wird, und es gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g)$ . Mit der Norm  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$  bildet die Menge  $H(E)$  der über  $E$  q. s. F.en einen *Hilbertraum*.

**Funktion, summierbare**  $\nearrow$  Lebesguesches Integral II.

**Funktional**: I. ein Operator, der eine Teilmenge eines abstrakten Raumes  $X$  ( $\nearrow$  Funktionalanalysis II.) in den Raum  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen abbildet.

II. Ein *lineares F.* ist ein linearer Operator eines linearen Raumes  $X$  in den linearen Raum  $\mathbf{C}$ . Da lineare F.e spezielle lineare Operatoren sind, kann man die für Operatoren definierten Begriffe wie Summe und skalares Vielfaches sowie, falls  $X$  ein normierter linearer Raum ist, Beschränktheit, Stetigkeit und Norm auch auf lineare F.e übertragen. Ist  $X$  ein normierter linearer Raum, so heißt der normierte lineare Raum  $L_b(X, \mathbf{C})$  aller beschränkten linearen F.e der zu  $X$  *duale Raum* oder *adjungierte Raum* und wird mit  $X'$  bezeichnet. Der duale Raum eines normierten linearen Raumes ist vollständig ( $\nearrow$  Fundamentalfolge II.), d. h., er ist ein Banachraum. Während es i. allg. nicht möglich ist, den dualen Raum eines beliebigen normierten linearen Raumes anzugeben, gelingt dies bei einer speziellen Klasse normierter linearer Räume, nämlich bei den Hilberträumen. Nach einem Satz von F. Riesz gibt es zu jedem beschränkten linearen F.  $\Phi$  auf dem Hilbertraum  $X$  ein  $\varphi \in X$ , so daß  $\Phi(x) = (x, \varphi)$  gilt. Die Zuordnung  $\Phi \rightarrow \varphi$  ist dabei eindeutig, und es gilt  $\|\Phi\| = \|\varphi\|$ . Umgekehrt folgt aus der Schwarzschen Ungleichung sofort, daß durch  $\Phi(x) = (x, \varphi)$

für jedes  $\varphi \in X$  ein beschränktes lineares F. definiert wird. Identifiziert man das F.  $\Phi$  und das erzeugende Element  $\varphi$ , so sieht man, daß *der duale Raum eines Hilbertraumes  $X$  der Hilbertraum selbst ist*. Die dualen Räume von Banachräumen lassen sich nur in einigen Spezialfällen einfach überschauen, z. B. gehören zu  $L_p(a, b)$  bzw.  $l_p$ ,  $p > 1$  die Dualräume  $L_q(a, b)$  bzw.  $l_q$ , wenn  $p$  und  $q$  über die Gleichung  $1/p + 1/q = 1$  zusammenhängen. Der Begriff des dualen Raumes ermöglicht es, zusätzlich zur „gewöhnlichen“ Konvergenz ( $\nearrow$  Raum, metrischer) in einem normierten linearen Raum, die auch *starke Konvergenz* gen. und mit  $x_n \rightarrow x$  bezeichnet wird, noch eine *schwache Konvergenz* durch die Festlegung zu definieren, daß eine Folge  $x_n \in X$  genau dann schwach gegen  $x \in X$  konvergiert, wenn  $\lim \Phi(x_n) = \Phi(x)$  für alle  $\Phi \in X'$  gilt, und schreibt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow x$ . Auch für schwach konvergente Folgen gilt, daß das Grenzelement  $x$  eindeutig bestimmt ist. Jede stark konvergente Folge  $\{x_n\}$  konvergiert auch in der schwachen Konvergenz gegen das gleiche Grenzelement, denn aus  $x_n \rightarrow x$  folgt  $\lim \Phi(x_n) = \Phi(x)$  wegen der Stetigkeit von  $\Phi \in X'$ , d. h.,  $x_n \rightarrow x$ . Eine schwach konvergente Folge ist i. allg. nicht stark konvergent.

S. a. Operator.

**Funktionalanalysis**: I. Teilgebiet der höheren Mathematik, dem die Erkenntnis zugrunde liegt, daß verschiedenartige mathemat. Operationen und Probleme oft viele gemeinsame Züge tragen, obwohl die dabei auftretenden Objekte aus ganz verschiedenen Bereichen der Mathematik stammen. Für die Addition von Zahlen, von Vektoren und von Funktionen gelten z. B. die gleichen Rechenregeln. Angeregt durch diese Gemeinsamkeiten wurde eine Reihe von neuen Begriffen geprägt, z. B. der des abstrakten Raumes, des Operators und des Funktionals, deren Untersuchung Gegenstand der F. ist. Einer der grundlegenden funktionalanalyt. Begriffe ist der *abstrakte Raum*, oft einfach *Raum* oder auch *Funktionsraum* gen., weil die Elemente der für Anwendungen wichtigen Räume Funktionen sind. Abstrakte Räume sind z. B. die linearen Räume ( $\nearrow$  Vektorraum) und die topolog. Räume ( $\nearrow$  Raum, topologischer), unter denen der metr. Raum ( $\nearrow$  Raum, metrischer), der normierte lineare Raum ( $\nearrow$  Raum, normierter linearer), der Banachraum und der Hilbertraum bes. bedeutsam sind. In Anlehnung an die analyt. Geometrie werden die Elemente eines Raumes *Punkte* gen. Die Begriffe Raum und Punkt haben dabei keine unmittelbaren Beziehungen zur Geometrie oder gar zum Anschauungsraum. Auch andere Begriffe der F. wie Länge eines Vektors, Abstand zweier Punkte, Orthogonalität von Vektoren, Kugel um einen Punkt sind dem Wortschatz der analyt. Geometrie entnommen und stellen Verallgemeinerungen der dort gebräuchl. Begriffe dar, haben aber ihre ursprüngl. anschaulich-geometr. Bedeutung verloren.

II. Das Ziel und die Aufgabe der F. bestehen darin, möglichst allgemeine Sätze und Methoden zu gewinnen, die nur auf den Axiomen der betreffenden

Raumklasse beruhen, die unabhängig von der konkreten Gestalt der mathemat. Objekte sind und sich dann auf spezielle Räume und Probleme anwenden lassen. Man kann z. B. lediglich aus den Axiomen des Hilbertraumes die *Schwarzsche Ungleichung*  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$  ableiten; diese gilt folglich in jedem Hilbertraum. Für den speziellen Hilbertraum  $\mathbf{C}^n$  der  $n$ -Tupel komplexer Zahlen erhält man daraus die bekannte Ungleichung (1), während sich

$$(1) \quad \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |\eta_i|^2}$$

$$(2) \quad \left| \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 dt}$$

für den Hilbertschen Funktionenraum  $L_2(a, b)$  ( $\nearrow$  Raum, normierter linearer) die Form (2) ergibt. — Der Begriff des *Operators* ermöglicht es, mathemat. Operationen und Probleme im Rahmen der F. zu formulieren und zu behandeln. Die Aufgabe, alle reellen Lösungen der Gleichung  $\sin x + x = 2$  anzugeben, läßt sich z. B. durch Definition des Operators  $Ax = \sin x + x - 2$  im Raume  $X = \mathbf{R}$  folgendermaßen ausdrücken: Gesucht sind alle  $x \in X$ , für die  $Ax = 0$  gilt. In der Theorie der *Näherungsverfahren* werden allgemeine funktionalanalyt. Methoden zur Lösung von *Operatorensgleichungen* unmittelbar auf numer. Aufgaben der Praxis angewendet.

III. Ausgehend von den Arbeiten von D. HILBERT, E. SCHMIDT und E. I. FREDHOLM zur Theorie der Integralgleichungen hat sich die F. im 20. Jh. als selbständiges Teilgebiet der Mathematik herausgebildet. Entscheidenden Anteil an der Entwicklung der F. haben S. BANACH, R. RIESZ, J. v. NEUMANN und in jüngster Zeit u. a. das Kollektiv um I. M. GELFAND. In den letzten 30 Jahren wurde die schnelle Entwicklung der F. vor allem durch ihre zunehmende Bedeutung für die theoret. Physik, bes. für die Quantentheorie, begünstigt. Gegenwärtig findet sie nicht nur Anwendungen in der Analysis, z. B. in der Theorie der Differentialgleichungen, der Theorie der Integralgleichungen und der Variationsrechnung, sondern auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik, z. B. in Algebra und Geometrie.

S. a. Funktional, Operator, linearer, Topologie. **Funktionaldeterminante, Jacobische Determinante:** Determinante (1) der ersten partiellen Ableitungen von  $n$  gegebenen Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ( $\nearrow$  Abhängigkeit, funktionale). S. a. Flächenintegral III.; Raumintegral IV.

$$(1) \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

**Funktionalmatrix, Jacobische Matrix:** Matrix (1) der ersten partiellen Ableitungen von  $k$  gegebenen Funktionen  $f_1, \dots, f_k$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ( $\nearrow$  Abhängigkeit, funktionale). S. a. nichtlineare

Gleichungssysteme.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**funktional unabhängig**  $\nearrow$  Abhängigkeit, funktionale.

**Funktionsfolge:** I. Folge, deren Glieder Funktionen  $f_n(x)$  mit einem gemeinsamen Definitionsbereich  $D$  sind, z. B. ist  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{3} \sin 3x, \dots, f_n(x) = (1/n) \sin nx, \dots$  eine F. Als gemeinsamer Definitionsbereich kann das Intervall  $]0, 2\pi[$  oder  $] -\infty, +\infty[$  gewählt werden. Eine andere F. ist etwa  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2, \dots, f_n(x) = x^n, \dots$  mit dem gemeinsamen Definitionsbereich  $D = ]-1, 1[$  oder  $D = ]-\infty, +\infty[$ . Allgemein schreibt man eine F. als  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  oder kurz  $(f_n(x)); f_n(x)$  wird auch als das *allgemeine Glied* der F. bezeichnet. Als *Konvergenzpunkt* bezeichnet man jeden Punkt  $x_0$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich  $D$ , für den die F. *konvergent* ist, d. h., für den  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$  existiert ( $\nearrow$  Grenzwert einer

Zahlenfolge). Für die F.  $(f_n(x))$  mit  $f_n(x) = (\sin nx)/n$  z. B. sind alle Punkte von  $D = ]-\infty, +\infty[$  Konvergenzpunkte, denn für alle  $x_0 \in ]-\infty, +\infty[$  ist wegen  $|(\sin nx_0)/n| \leq 1/n$  für alle  $n$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(\sin nx)/n] = 0$ . Für die F. mit dem allgemeinen Glied  $f_n(x) = x^n$  ist jeder Punkt  $x$  mit  $-1 < x \leq 1$  Konvergenzpunkt, denn für  $n \rightarrow \infty$  ist der Grenzwert von  $x^n$  entweder 0 für  $-1 < x < 1$  oder 1 für  $x = 1$ . Für die Punkte  $x > 1$  oder  $x \leq -1$  ist die F. nicht konvergent, sie ist *divergent*.

Alle Punkte, in denen die F.  $(f_n(x))$  konvergiert, bilden die *Konvergenzmenge* oder den *Konvergenzbereich*. Für jeden seiner Punkte gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ;

dabei heißt die dort definierte Funktion  $f(x)$  die *Grenzfunktion* der F.  $(f_n(x))$ . Ist  $I$  ein Intervall im Konvergenzbereich, so bezeichnet man  $I$  als ein *Konvergenzintervall*. Die F.  $(x^n)$  hat z. B. den Konvergenzbereich  $] -1, 1[$  und die F.  $((\sin nx)/n)$  den Konvergenzbereich  $] -\infty, +\infty[$ . Für  $(x^n)$  ist die Grenzfunktion  $f(x) = 0$  für  $-1 < x < 1$  bzw.  $f(x) = 1$  für  $x = 1$  definiert in  $-1 < x \leq 1$ , und für  $((\sin nx)/n)$  gilt  $f(x) \equiv 0$  in  $] -\infty, +\infty[$ .

Die Grenzfunktion  $f(x) \equiv 0$  für  $((\sin nx)/n)$  ist stetig für  $-\infty < x < +\infty$ , die für  $(x^n)$  ist unstetig.

Offenbar reichen die Konvergenz der F. in einem Intervall  $I$  und die Stetigkeit der Funktionen  $f_n(x)$  nicht aus, um die Stetigkeit der Grenzfunktion zu sichern. Um tiefere Aussagen über F.n und deren Grenzfunktionen zu machen, braucht man einen strengeren Konvergenzbegriff, den der *gleichmäßigen Konvergenz*.

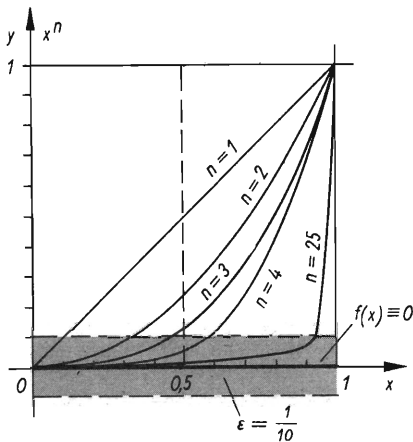
II. Die F.  $(f_n(x))$  konvergiert in einem Konvergenzintervall  $I$  *gleichmäßig* gegen die Grenzfunktion  $f(x)$ , wenn zu *jeder* beliebig kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N(\varepsilon)$  existiert, die nur von  $\varepsilon$  abhängt, so daß für alle Indizes  $n > N(\varepsilon)$  und alle  $x \in I$  die Abschätzung

$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  gilt. Eine F.  $(f_n(x))$  konvergiert nicht gleichmäßig in  $I$  gegen die Grenzfunktion  $f(x)$ , wenn zu einem  $\epsilon > 0$  kein für alle  $x \in I$  gültiger Index  $N(\epsilon)$  existiert, so daß für alle  $n > N(\epsilon)$  stets  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  gilt, d. h., zu jedem Index  $N$  gibt es mindestens ein  $n > N$  und ein  $x_0 \in I$ , so daß  $|f_n(x_0) - f(x_0)| > \epsilon$  ist.

Anschaulich gesprochen ist bei nicht gleichmäßig konvergenten F.n die Güte der Konvergenz noch von der Stelle  $x_0$  des Konvergenzintervalls abhängig, während für gleichmäßig konvergente F.n die „Konvergenzgüte“ für alle Punkte des Konvergenzintervalls gleich ist.

Die F. mit dem allgemeinen Glied  $f_n(x) = x^n$  z. B. konvergiert in  $I = ]0, 1/2[$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f(x) \equiv 0$ , denn wählt man zu irgendeiner beliebig kleinen vorgegebenen Zahl  $\epsilon > 0$  die positive Zahl  $N(\epsilon) > -\log_2 \epsilon$ , dann gilt für alle  $n > N$  und für alle  $x \in ]0, 1/2[$  die Abschätzung  $|f_n(x) - f(x)| = x^n < (1/2)^n < (1/2)^N < \epsilon$ .

Die F.  $(x^n)$  konvergiert in  $I = ]0, 1[$  im gewöhnl. Sinne gegen die Grenzfunktion  $f(x) \equiv 0$ , denn wählt man zu einem beliebigen  $\epsilon > 0$  die positive Zahl  $N > \ln \epsilon / \ln x$ , dann gilt  $|f_n(x) - f(x)| = x^n < x^N < \epsilon$  für alle  $n > N$ , d. h., die F. konvergiert im Punkt  $x$ .  $N$  hängt in diesem Fall von  $\epsilon$  und  $x$  ab. Man kann in der Tat zeigen, daß diese F. in  $I = ]0, 1[$  nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f(x) \equiv 0$  konvergiert, denn zu  $\epsilon = 1/10$  und zu einem beliebigen Index  $N$  gibt es stets einen Index  $n_0 > N$  und ein  $x_0 \in ]0, 1[$ , so daß  $|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| = x_0^{n_0} > 1/10$  ist. Man braucht nur  $n_0 = N + 1$  und sodann  $x_0$  so zu wählen, daß  $x_0^{N+1} > 1/10 < x_0 < 1$  erfüllt ist, so



Geometrisches Bild der Funktionenfolge  $f_n(x) = x^n$

gilt  $|f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| = x_0^{N+1} > \epsilon = 1/10$  (Abb.). Auch an Hand der Abbildung ist zu sehen, daß in dem Intervall  $]0, 1/2[$  alle Funktionen  $f_n(x) = x^n$  mit  $n \geq 4$  in der  $\epsilon = 1/10$ -Umgebung der Grenzfunktion  $f(x) \equiv 0$  liegen. Außerdem überblickt man, daß für  $x$ -Werte nahe an  $x = 1$  die Funktionswerte  $f_n(x)$  für große  $n$  aus der  $\epsilon = 1/10$ -Umgebung von  $f(x) \equiv 0$

herausragen. Danach ist für das Intervall  $]0, 1/2[$  die F.  $(x^n)$  gleichmäßig konvergent, hingegen ist sie für das Intervall  $]0, 1[$  nicht gleichmäßig konvergent.

**III.1.** Das Cauchysche Konvergenzkriterium (Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen) kann auch für die gleichmäßige Konvergenz formuliert werden: Die F.  $(f_n(x))$  konvergiert in einem Intervall  $I$  genau dann gleichmäßig gegen die Grenzfunktion, wenn zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl  $\epsilon > 0$  eine nicht von  $x$  abhängige natürl. Zahl  $N(\epsilon)$  derart existiert, daß  $|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \epsilon$  für alle Indizes  $n > N(\epsilon)$  und jede natürl. Zahl  $m > 1$  gleichzeitig für alle  $x \in I$  gilt.

**III.2.** Dieses Kriterium ist wichtig für theoret. Erwägungen; es ist weniger dazu geeignet, die gleichmäßige Konvergenz einer konkreten F. zu zeigen. Zu diesen Zwecken verwendet man häufig das Weierstraßsche Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz: Eine gegebene F.  $(f_n(x))$  konvergiert in dem Intervall  $I$  gleichmäßig, wenn eine konvergente Zahlenfolge  $(a_n)$  mit positiven Gliedern existiert, so daß  $|f_n(x)| \leq a_n$  für alle  $n \geq N$  und für alle  $x \in I$  gilt. Eine Zahlenfolge  $(a_n)$  mit der Eigenschaft  $|f_n(x)| \leq a_n$  für alle  $x \in I$  und alle  $n \geq N$  heißt Majorantenfolge der F.  $(f_n(x))$ . Man kann das Weierstraßsche Konvergenzkriterium auch so ausdrücken: Die F.  $(f_n(x))$  ist in  $I$  gleichmäßig konvergent, wenn sie eine konvergente Majorantenfolge hat. Für die z. B. im Intervall  $I = [-3, 5]$  betrachtete F.  $(f_n(x))$  mit  $f_n(x)$  aus (1) ist die Folge  $(1/(2n))$  eine Majorantenfolge, wie (2) zeigt. Aus der Konvergenz der Majorantenfolge ergibt sich wegen  $0 \leq (1 - n|x|)^2$  die gleichmäßige Konvergenz von  $(f_n(x))$ .

$$(1) \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

$$(2) \quad |f_n(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{2n} \frac{2n|x|}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einer F. bildet die Grundlage für die folgenden Sätze:

**III.3.** Wenn die F.  $(f_n(x))$  in dem Intervall  $I = ]a, x_0[$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = a_n$  für alle  $n$  gilt, so ist die Zahlenfolge  $(a_n)$  ebenfalls konvergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , und es ist  $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = a$ ; d. h., es gilt  $\lim_{x \uparrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \uparrow x_0} f_n(x)$ .

Entsprechende Behauptungen können für  $x \downarrow x_0$  oder  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$  ausgesprochen werden, wenn die F. in einem Intervall  $I = ]x_0, b[$  oder  $I = ]a, \infty[$  bzw.  $I = ]-\infty, b[$  gleichmäßig konvergent ist.

**III.4.** Unter der Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz ist die Grenzfunktion stetig, d. h. genauer: Ist die F.  $(f_n(x))$  in einem Intervall  $I = ]a, b[$  gleichmäßig konvergent, so ist die Grenzfunktion  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  in jedem Punkt  $x_0 \in F$  stetig, in dem sämil.  $f_n(x)$  für  $n = 1, 2, \dots$  stetig sind.

Die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz ist neben der Stetigkeit der Funktionen  $f_n(x)$  hinreichend für die *Stetigkeit der Grenzfunktion*  $f(x)$ , nicht aber notwendig. Die in  $I = ]-1, 1[$  betrachtete F.  $(nx e^{-nx^2})$  z. B. hat die stetige Grenzfunktion  $f(x) \equiv 0$ , denn für  $x \neq 0$  ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx e^{-nx^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} nxq^n = 0$  mit  $0 < q = e^{-x^2} < 1$ , und für  $x = 0$  ist  $f_n(0) = 0$ , also auch  $f(0) = 0$ . Die betrachtete F. ist aber in  $I$  nicht gleichmäßig konvergent, denn für eine beliebig vorgegebene Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es kein  $N(\varepsilon)$ , so daß  $|nx e^{-nx^2} - 0| = n|x| e^{-nx^2} < \varepsilon$  ausfällt für alle  $n > N$  und alle  $x \in ]-1, 1[$ . Dies ist daraus zu ersehen, daß die Funktion  $f_n(x)$  für  $x = \pm 1/\sqrt{2n}$  Extremwerte  $f_n(\pm 1/\sqrt{2n}) = \pm \sqrt{n/(2e)}$  hat.

**III.5.** Unter der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz darf die F.  $(f_n(x))$  *gliedweise integriert* werden, d. h. genauer: *Falls die F.  $(f_n(x))$  in  $I = [a, b]$  gleichmäßig konvergiert und alle Funktionen  $f_n(x)$  für  $n = 1, 2, \dots$  in  $I$  stetig sind, gilt (3) für die Grenzfunktion  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .*

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Die gleichmäßige Konvergenz ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig für diese Vertauschbarkeit.

**III.6.** Eine F.  $(f_n(x))$  darf *gliedweise differenziert* werden, wenn die F.  $(f_n'(x))$  gleichmäßig konvergent ist, d. h. genauer: *Haben die Glieder  $f_n(x)$  der F.  $(f_n(x))$  im Konvergenzintervall  $I = ]a, b[$  stetige Ableitungen  $f_n'(x)$  und konvergiert die aus den Ableitungen bestehende F.  $(f_n'(x))$  in  $I$  noch gleichmäßig, so hat die Grenzfunktion  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  in  $I$  eine stetige Ableitung, und es gilt (4).*

$$(4) \quad \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

Die F. mit  $f_n(x)$  aus (5) ist z. B. in  $I = [0, 2]$  gleichmäßig konvergent, und alle  $f_n(x)$  sind in  $I$  stetig. Nach Satz III.4. muß die Grenzfunktion  $f(x)$  stetig sein. Dies ist offensichtlich, denn nach (5) ist  $f(x) \equiv 0$ . Ebenso gilt (6) nach III.5.

$$(5) \quad (f_n(x)) = \left( \frac{x}{1 + n^2 x^2} \right) \text{ mit}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} \equiv 0$$

$$(6) \quad 0 = \int_0^2 0 dx = \int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{x dx}{1 + n^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 4n^2)}{2n^2}$$

Die F. ist auch in  $I_1 = ]1, 2[$  konvergent, und die F.  $(f_n'(x))$  ist in  $I_1$  gleichmäßig konvergent, da sie zufolge (7)  $(a_n) = (1/n^2)$  als konvergente Majorantenfolge hat. Die F. darf daher gliedweise differen-

ziert werden, wie in (8) ausgeführt.

$$(7) \quad |f_n'(x)| = \left| \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

für  $x \in I_1 = ]1, 2[$

$$(8) \quad 0 = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1 + n^2 x^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

**Funktionsraum**  $\nearrow$  **Funktionalanalysis I.**  
**Funktionenreihe:** I. Reihe, deren Glieder Funktionen  $f_k(x)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  mit einem gemeinsamen Definitionsbereich  $D$  sind, d. h., das Symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \equiv f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

bedeutet die Funktionenfolge  $(s_n(x))$  der Partialsummen  $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$  der Reihe. Im Falle der Konvergenz der Funktionenfolge  $(s_n(x))$  soll das

Zeichen  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  zugleich die Grenzfunktion ( $\nearrow$  Funktionenfolge I.) von  $(s_n(x))$  bezeichnen. Für die Untersuchung von F.n gelten die Sätze für Reihen mit konstanten Gliedern ( $\nearrow$  Reihe) sowie die der Funktionenfolgen. Weiterhin kann die Summation bei F.n statt mit 1 auch mit 0 oder einer anderen natürl. Zahl beginnen. Beispiele für F.n sind (1), (2) und (3).

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} = \frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(2x)}{2^2} + \dots$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

Als *Konvergenzpunkt* der F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  bezeichnet man jeden Punkt  $x_0$ , für den erstens alle Funktionen  $f_n(x)$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  definiert sind und zweitens die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$  konvergiert ( $\nearrow$  Reihe). Die

Menge aller Konvergenzpunkte nennt man die *Konvergenzmenge* oder den *Konvergenzbereich* der vorgelegten Reihe. Ist  $I$  ein Intervall im Konvergenzbereich, so bezeichnet man  $I$  als ein *Konvergenzintervall*. In ihm ist die Summe der vorgelegten F.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  und damit die Grenzfunktion der Funktionenfolge  $(s_n(x))$  mit  $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$  eine Funktion von  $x$ , die man auch als *Summenfunktion*  $S(x)$  bezeichnet. Es gilt  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  oder

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x).$$

Man sagt, die Funktion  $S(x)$  wird durch die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  dargestellt, und bezeichnet die

Partialsummen  $s_n(x)$  für  $n = 1, 2, \dots$  als *Approximationsfunktionen* der Summenfunktion  $S(x)$ .  $R_n(x) = S(x) - s_n(x)$  heißt der *Rest der F.* Der Konvergenzbereich z. B. der F.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist das Intervall  $I = ]-1, 1[$ , denn die Funktionenfolge mit dem



allgemeinen Glied  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$  konvergiert genau für alle  $x \in ]-1, 1[$ , und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 - x^{n+1})/(1 - x)] = 1/(1 - x)$ .

Die Summenfunktion  $S(x) = 1/(1 - x)$  ist in  $]-1, 1[$  definiert, und die Approximationsfunktionen dieser Summenfunktion sind  $(1 - x^{n+1})/(1 - x)$ . Im Beispiel

$\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^x)$  hat man das Intervall  $]1, \infty[$  als den Konvergenzbereich, denn die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^x$

ist für  $x > 1$  konvergent und für  $x \leq 1$  divergent. Die Summenfunktion ist danach in  $]1, \infty[$  definiert und wird als *Riemannsche Zetafunktion* bezeichnet.

**II. Gleichmäßige Konvergenz.** Der Satz, daß die Summe endlich vieler stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist, ist auf F.n nicht übertragbar. Für die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^2 (1 - x^2)^{k-1}$  ist z. B. das Intervall  $[-1, 1]$  ein Konvergenzintervall, denn in  $[-1, 1]$  gelten (4) und (5).

$$(4) \quad s_n(x) = x^2 + x^2(1 - x^2) + \dots + x^2(1 - x^2)^{n-1} = x^2 [1 - (1 - x^2)^n]/[1 - (1 - x^2)] = 1 - (1 - x^2)^n$$

$$(5) \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x^2 (1 - x^2)^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in [-1, 1] \text{ und } x \neq 0 \end{cases}$$

Obwohl alle Funktionen  $f_n(x) = x^2(1 - x^2)^{n-1}$  stetig in  $[-1, 1]$  sind, ist die Summenfunktion  $S(x)$  in  $[-1, 1]$  nicht stetig, denn offenbar ist  $x = 0$  ein Unstetigkeitspunkt ( $\nearrow$  Stetigkeit). Man definiert deshalb einen etwas stärkeren Konvergenzbegriff für F.n, die *gleichmäßige Konvergenz*: Die F.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  ist in einem Konvergenzintervall  $I$  gleichmäßig konvergent, wenn ihre Partialsummenfolge

$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  gleichmäßig in  $I$  konvergiert, d. h.,

wenn sich zu jeder beliebigen positiven Zahl  $\epsilon$  eine nur von  $\epsilon$ , nicht aber von  $x$  abhängige Zahl  $N(\epsilon)$  angeben

läßt, so daß  $|S(x) - s_n(x)| = |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \epsilon$  für alle  $x \in I$  und alle  $n > N(\epsilon)$  ausfällt ( $\nearrow$  Funktionenfolge).

Geometrisch läßt sich der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz in der Weise deuten, daß die Wertebereiche aller Approximationsfunktionen  $s_n(x)$  mit einem genügend großen Index  $n$  innerhalb eines Streifens der konstanten Breite  $2\epsilon$  liegen, der symmetrisch um das Bild der Summenfunktion  $S(x)$  gelegt worden ist. Nur die Funktionswerte endlich vieler Approximationsfunktionen  $s_1(x), \dots, s_N(x)$  können aus diesen Funktionsstreifen herausfallen

( $\nearrow$  Funktionenfolge II.). Die F.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist z. B. in  $I = [-1/2, 1/2]$  gleichmäßig konvergent gegen die

Summenfunktion  $S(x) = 1/(1 - x)$ , denn wählt man zu einem beliebigen  $\epsilon > 0$  die Zahl  $N > -\ln \epsilon / \ln 2$ , so gilt (6) für alle  $x \in [-1/2, 1/2]$  und für alle  $n > N$ .

$$(6) \quad |S(x) - s_n(x)| = \left| \frac{1}{1 - x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon$$

**III.1.** Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz einer F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  liefert das *Cauchysche Konvergenzkriterium*. Eine

F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  ist dann und nur dann in einem Intervall  $I$  gleichmäßig konvergent, wenn zu jeder beliebig vorgegebenen Zahl  $\epsilon > 0$  eine nur von  $\epsilon$  abhängende Zahl  $N$  existiert, so daß (7) für alle Indizes  $n > N(\epsilon)$  und beliebige natürl. Zahlen  $m > 0$  gleichzeitig für alle  $x \in I$  gilt.

$$(7) \quad |s_{n+m}(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+m}(x)| < \epsilon$$

**III.2.** Zum prakt. Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz einer vorgelegten F. ist dieses Konvergenzkriterium weniger geeignet. Dazu benutzt man häufig das folgende hinreichende *Weierstraßsche*

*Konvergenzkriterium*: Eine F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  ist in einem Intervall  $I$  gleichmäßig konvergent, wenn die F. eine

konvergente Majorante  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  hat, d. h., falls die Ungleichung  $|f_n(x)| \leq a_n$  für alle  $x \in I$  und für alle  $n \geq N$  erfüllt ist und die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert.

Die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k^\alpha$  z. B. ist für  $\alpha > 1$  im Intervall  $I = ]-\infty, +\infty[$  gleichmäßig konvergent, denn die

$\nearrow$  harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$  spielt hier die Rolle einer konvergenten Majorante, wie aus der für alle  $x \in ]-\infty, +\infty[$  und für alle  $n$  geltenden Abschätzung  $|(\sin nx)/k^n| \leq 1/k^n$  hervorgeht. Da eine im Intervall  $I$  gleichmäßig konvergente F. auch in jedem Teilintervall  $I' \subseteq I$  gleichmäßig konvergiert, ist die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin kx)/k^\alpha$  auch in jedem endl. Intervall  $I'$  gleichmäßig konvergent. Als weiteres Beispiel

kann man zeigen, daß die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \cos(x/k))$  in dem Intervall  $]-a, a[$  gleichmäßig konvergiert, denn man erhält (8) durch Anwendung des Taylorschen Satzes ( $\nearrow$  Taylorsche Reihe) auf die Funktion  $\cos(x/k)$  und daraus für alle  $x \in ]-a, a[$  und alle  $k$  die Abschätzung (9), der man schließlich entnimmt,

$$(8) \quad \cos \frac{x}{k} = 1 - \frac{1}{2!} \left( \frac{x}{k} \right)^2 \cos \left( \vartheta \frac{x}{k} \right) \quad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

$$(9) \quad \left| 1 - \cos \frac{x}{k} \right| = \frac{|x|^2}{2k^2} \left| \cos \left( \vartheta \frac{x}{k} \right) \right| \leq \frac{a^2}{2k^2}$$

wegen  $\left| \cos \left( \vartheta \frac{x}{k} \right) \right| \leq 1$

daß die zu untersuchende F. die konvergente Majorante  $(a^2/2) \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  hat und daher gleichmäßig konvergiert. Für *gliedweise Grenzübergänge* in der F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  stellt die gleichmäßige Konvergenz eine hinreichende, jedoch i. allg. nicht notwendige Bedingung dar, wie die folgenden Sätze zeigen.

III.3. Ist die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  in dem Intervall  $I = ]a, x_0[$  gleichmäßig konvergent gegen die Summenfunktion

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ und gilt } \lim_{x \uparrow x_0} f_n(x) = a_n \text{ für alle } n,$$

so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ , und es gilt (10), d. h., die Operationen *Summation* und

$$(10) \quad \lim_{x \uparrow x_0} S(x) = a$$

*Grenzübergang* können vertauscht werden, so daß (10a) gilt. Entsprechende Behauptungen gelten für

$$(10a) \quad \lim_{x \uparrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \uparrow x_0} f_k(x)$$

$x \downarrow x_0$  oder  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ , wenn die F. in Intervallen der Form  $]x_0, b[$  oder  $]a, \infty[$  bzw.  $]-\infty, b[$  gleichmäßig konvergiert.

III.4. Eine in einem Intervall  $I$  gleichmäßig konvergente F. hat eine stetige Summenfunktion; d. h. genauer: Konvergiert die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  in  $I$  gleichmäßig

und sind alle Funktionen  $f_n(x)$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  in  $I$  stetig, so ist auch die Summenfunktion  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  eine in  $I$  stetige Funktion. Daraus folgt insbes., daß eine F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ , deren Glieder  $f_n(x)$  in  $I$  sämtlich stetig sind und deren Summenfunktion in  $I$  unstetig ist, in  $I$  nicht gleichmäßig konvergieren kann.

Die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^k$  mit in  $I = [-1, 1]$  stetigen Gliedern hat z. B. eine in  $I$  unstetige Summenfunktion  $S(x)$ , die 0 ist für  $x = 0$ , aber 1 ist für  $x \in [-1, 1]$  und  $x \neq 0$ , die folglich in  $I = [-1, 1]$  nicht gleichmäßig konvergent sein kann.

III.5. Eine in einem Intervall  $I$  gleichmäßig konvergente F. kann in  $I$  gliedweise integriert werden; präzisier: Ist die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  in einem Intervall  $I = [a, b]$  gleichmäßig konvergent und sind die Funktionen  $f_n(x)$  für alle  $n$  in  $I$  stetig, so ist die Summenfunktion  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  in  $I$  integrierbar, und es gilt (11).

$$(11) \quad \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

Als Beispiel kann der *Umfang der Ellipse* mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  und der Parameterdarstellung  $x = a \sin t, y = b \cos t$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$  berechnet werden. Die Länge  $L(t)$  des Ellipsenbogens vom Punkte  $(0, b)$  mit dem Parameterwert  $t = 0$  bis zum Punkte  $(a \sin t, b \cos t)$  mit dem Parameterwert  $t$  läßt sich aus (12) berechnen. In (13) wird zunächst der Ausdruck unter dem Integralzeichen umgeschrieben und dann mittels der binom. Reihe ( $\nearrow$ Entwicklung von Funktionen) in eine konvergente Reihe entwickelt. Diese konvergiert für  $0 \leq t \leq 2\pi$  wegen (14) sogar gleichmäßig, da sie eine Majorante (14a) hat, die wegen  $0 < \varepsilon^2 < 1$  konvergiert. Folglich kann sie in (15) gliedweise integriert werden. Unter Beachtung von (16) ergibt deshalb (17) die Bogenlänge  $L(2\pi)$  der Ellipse.

$$(12) \quad L(t) = \int_0^t \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt$$

$$= \int_0^t [a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t]^{1/2} dt$$

$$(13) \quad [a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t]^{1/2}$$

$$= a \left[ 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t \right]^{1/2} = a [1 - \varepsilon^2 \sin^2 t]^{1/2}$$

$$= a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \varepsilon^{2k} \sin^{2k} t$$

$$= a \left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 t - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \sin^4 t - \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 t - \dots \right]$$

$$\text{mit } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2$$

$$(14) \quad \left| \binom{1/2}{k} (-1)^k \varepsilon^{2k} \sin^{2k} t \right| \leq \binom{1/2}{k} (-1)^{k+1} \varepsilon^{2k}$$

für  $k = 1, 2, \dots$  und  $t \in [0, 2\pi]$

$$(14a) \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k+1} \varepsilon^{2k}$$

$$(15) \quad L(t) = a \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k \varepsilon^{2k} \int_0^t \sin^{2k} t dt$$

$$= a \left[ t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t \sin^2 t dt - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int_0^t \sin^4 t dt - \dots \right]$$

$$(16) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} t dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

für  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$(17) \quad L(2\pi) = 4L \left( \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi a \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \varepsilon^4 - \frac{1}{5} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \varepsilon^6 - \dots \right]$$

III.6. Eine in  $I = ]a, b[$  konvergente F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  darf gliedweise differenziert werden, wenn die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$  in  $I$  gleichmäßig konvergiert; genauer: Haben die Glieder  $f_n(x)$  der im Intervall  $I = ]a, b[$  konvergenten F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  in  $I$  stetige Ableitungen und konvergiert die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$  in  $I$  gleichmäßig, so ist die Summenfunktion  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  stetig differenzierbar in  $I$ , und es gilt (18).

$$(18) \quad \frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$$

Es genügt übrigens bereits, wenn die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  nur in einem Punkt des Intervalls  $I$  konvergiert; dann folgt aus den übrigen Voraussetzungen ihre gleichmäßige Konvergenz in ganz  $I$ . Satz III.6. kann angewendet werden auf die F.  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  mit den  $f_n(x)$  aus (19), denn die F. ist wegen (20) in einem beliebigen Intervall  $I = ]a, b[$  konvergent, sogar gleichmäßig konvergent, des weiteren haben alle ihre Glieder  $f_n(x)$  nach (19) stetige Ableitungen  $f'_n(x)$ , und schließlich ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$  aus diesen Ableitungen wegen (21) nach dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium in  $I$  gleichmäßig konvergent. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes III.6. erfüllt, und es gilt (22) für die Summenfunktion  $S(x)$ .

$$(19) \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}; \quad f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$(20) \quad \left| \frac{\sin(kx)}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^3} \quad (21) \quad \left| \frac{\cos(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$$

$$(22) \quad S'(x) = \frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{\sin(kx)}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

Zur weiteren Anwendung dieser Sätze vgl. Potenzreihe, Taylorsche Reihe und Entwicklung von Funktionen.

**Funktionentheorie, komplexe Analysis:** Analysis der Funktionen einer oder mehrerer komplexer Variablen. — Da sich das Rechnen mit komplexen Zahlen formal nach denselben Gesetzen vollzieht wie das Rechnen mit reellen Zahlen, ausgenommen die Gesetze der Anordnung, bleiben arithmet. Operationen, Aussagen, Gleichungen in Variablen im wesentlichen gültig, wenn man in den Variablengrundbereichen von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen übergeht. Beschränkt man sich für mehrdeutige komplexe Ausdrücke, wie z. B.  $z^a$  oder  $\ln z$ , auf deren Hauptwerte: (↗ komplexe Funktionen, elementare III.), so lassen sich der binom. Satz, die Theorie der Determinanten und der Matrizen (↗ Matrix), die Auflösungstheorie linearer Gleichungs-

systeme ebenso ins Komplexe übertragen wie viele Begriffe und Methoden der reellen Analysis, z. B. die Lehre von den Grenzwerten, die Differential- und Integralrechnung und die Lehre von den unendl. Reihen. Das Kernstück der F. ist die Theorie der analyt. Funktionen komplexer Veränderlicher.

**Funktionen von Zufallsgrößen: I.** Zufallsgrößen der Art  $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ , in denen  $g$  eine reelle meßbare Funktion und  $(X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor ist. Das Hauptproblem besteht darin, die Verteilung von  $Z$  zu berechnen, wenn die Verteilung  $F(x_1, \dots, x_n)$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  gegeben ist. Ist z. B.  $(X, Y)$  ein stetiger Zufallsvektor mit der Dichte  $f(x, y)$ , so ist die Summe  $Z = X + Y$  eine stetige Zufallsgröße, für deren Dichte  $f(z)$  die Formel (1) gilt.

$$(1) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx$$

Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig (↗ Unabhängigkeit von Zufallsgrößen), so daß die Beziehung  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  besteht, so gilt (2).

$$(2) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx$$

Die Dichte der Summe ist danach die Faltung der Dichten der einzelnen Summanden. Eine interessante Anwendung der Formel (1) ergibt sich, wenn  $(X, Y)$  normalverteilt (↗ Normalverteilung II.) mit den Parametern  $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$  ist. Dann gilt für die Dichte von  $Z = X + Y$  die Formel (3), nach

$$(3) \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(z-a)^2}{\sigma^2} \right]$$

mit  $a = a_1 + a_2$  und  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$

der  $X + Y$  wieder normalverteilt ist mit den Parametern  $a$  und  $\sigma$ .

II. Mit  $(X, Y)$  ist auch das Produkt  $Z = X \cdot Y$  eine stetige Zufallsgröße, für deren Dichte (4) gilt.

$$(4) \quad f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z/x) \cdot (1/|x|) dx$$

III. Mit  $(X, Y)$  ist auch der Quotient  $Z = X/Y$  stetig und hat die Dichte (5).

$$(5) \quad f(z) = \int_0^{\infty} x f(zx, x) dx - \int_{-\infty}^0 x f(zx, x) dx$$

**Funktionselement** ↗ analytische Fortsetzung II.

**Funktionsleiter** ↗ Nomographie I.

**Funktionsplanimeter** ↗ Planimeter III.

**Funktionswandler** ↗ Analogrechner I., V.

**Funktionszweig** ↗ analytische Fortsetzung II.

**Funktor** ↗ Aussagenlogik I.

**Fußpunkt** ↗ Lot.

**F-Verteilung, Fishersche Verteilung:** Verteilungsgesetz für eine stetige Zufallsgröße  $X$ , die  $F$ -verteilt mit  $(m, n)$  Freiheitsgraden mit den natürl. Zahlen  $m, n$  heißt, wenn die Verteilungsdichte  $f(x)$

= 0 für  $x \leq 0$ , für  $x > 0$  aber die Form (1) hat.

$$(1) f(x) = \frac{(m/n)^{m/2} \cdot x^{m/2-1}}{B(m/2, n/2)} \cdot [1 + (m/n)x]^{-(m+n)/2}$$

für  $x > 0$

Dabei ist  $B(p, q)$  die *Betafunktion* (2). Von der

$$(2) B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Zufallsgröße  $X$  existieren für  $n > 2$  der *Erwartungswert* (3), und für  $n > 4$  die *Streuung* (4).

$$(3) EX = n/(n-2)$$

$$(4) \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{2n^2(n+m-2)}{(m(n-2))^2(n-4)}}$$

Sind  $Y$  und  $Z$  unabhängige ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen),  $\chi^2$ -verteilte Zufallsgrößen mit  $m$  bzw.  $n$  Freiheitsgraden, so ist  $X = [(1/m)Y]/[(1/n)Z]$   $F$ -verteilt mit  $(m, n)$  Freiheitsgraden. Da mit  $X$  auch  $(1/X)$   $F$ -verteilt ist mit  $(n, m)$  Freiheitsgraden, kann man sich bei der Tabellierung der für die mathemat. Statistik wichtigen *Quantile* der  $F$ - $V.$  auf den Fall  $n \leq m$  beschränken.

## G

**Galois, Évariste**, geb. 25. 10. 1811 Paris als Sohn des Bürgermeisters von Bourg-la-Reine bei Paris, gest. 31. 5. 1832 Paris. — G. versuchte vergeblich, in die *École Polytechnique* aufgenommen zu werden. Auch von der *École Normale*, die er endlich besuchen durfte, wurde er kurze Zeit später wieder entlassen. Er wurde Privatlehrer in Paris, aber bald darauf in einem Duell getötet. Der letzte Brief von G. an einen Freund enthielt sein mathemat. Vermächtnis, die Vorstellung einer *vollständigen Gruppentheorie*. Dieses Schriftstück bedeutet den Beginn der modernen Algebra und der modernen Geometrie. Erst seit dem Jahre 1846, als *LIUVILLE* begann, die Arbeiten von G. zu veröffentlichen, wurde ihre Bedeutung von den Mathematikern erkannt.

**Galoisfeld**: ein Körper mit endlich vielen Elementen, deren Anzahl stets eine Primzahlpotenz ist. Zu jeder Primzahlpotenz gibt es bis auf Isomorphie genau ein G. ( $\nearrow$  Körper I.).

**Galoissche Gruppe**  $\nearrow$  Galoissche Theorie.

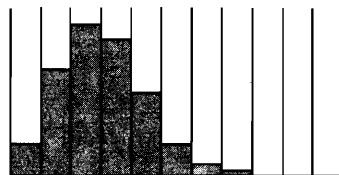
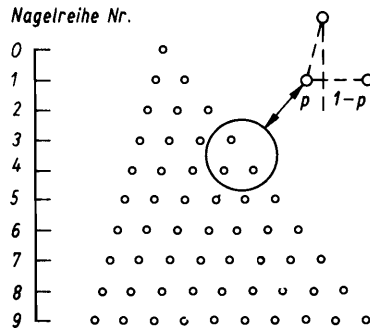
**Galoissche Theorie**: nach É. GALOIS ben. algebraische Theorie, in der gewissen *Körpererweiterungen*  $L$  über  $K$ , und zwar den endl. separablen normalen Erweiterungen ( $\nearrow$  Körper II.), die *Gruppe der Automorphismen* von  $L$ , die  $K$  festlassen, zugeordnet wird. Sie wird *Galoissche Gruppe* gen. Zwischen den Untergruppen der Galoisschen Gruppe und den Zwischenkörpern  $L'$  mit  $K \subseteq L' \subseteq L$  besteht ein eindeutiger Zusammenhang. Analog kann man jeder algebraischen Gleichung  $f(x) = 0$  die Galoissche Gruppe des *Zerfällungskörpers* von  $f(x)$  zuordnen, den man erhält, indem man an den Koeffi-

zientenbereich alle Wurzeln der Gleichung adjungiert. Die G. T. schloß die Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen ab, die jahrhundertlang den Gegenstand der Algebra gebildet hat. Die  $\nearrow$  *Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung in Radikalen* wird allein durch die innere Struktur der Galoisschen Gruppe entschieden. Die Idee von GALOIS war ihrer Zeit weit voraus, sie wurde erst über ein halbes Jahrhundert später einigermaßen verstanden. Die G. T. vereinfachte den Beweis, daß die allgemeine algebraische Gleichung, deren Grad  $\geq 5$  ist, nicht in Radikalen auflösbar ist, den bereits RUFFINI (1799) und ABEL (1826) geführt hatten.

Mit Hilfe der G. T. konnten auch Fragen der  $\nearrow$  *Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal* gelöst werden: So wurden die klass. Probleme der *Würfelverdopplung*, d. h. der Konstruktion der Strecke  $\sqrt[3]{2}$  aus der Strecke 1, der *Rektifikation des Kreises*, d. h. der Konstruktion der Strecke  $\pi$ , und der *Dreiteilung* oder *Trisektion eines beliebigen Winkels* mit Zirkel und Lineal verneint ( $\nearrow$  Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal). Es wurde allgemein gezeigt, daß ein *regelmäßiges n-Eck* für  $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_k$ , wobei  $p_1, \dots, p_k$   $\nearrow$  *Fermatsche Primzahlen* sind, mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

**Galton, Francis**, geb. 16. 2. 1822 Birmingham, gest. 17. 1. 1911 London. — G. studierte Medizin in Birmingham und London. Er wandte sich später jedoch fast ausschließlich Forschungsreisen, 1846 an den Weißen Nil und 1850 nach Südwestafrika, und deren Auswertung zu. Insbes. interessierten G. Probleme der Darstellung und Verwendung biometr. Daten. Das nach ihm ben. Brett gab G. im Jahre 1889 an.

**Galtonbrett**: ein geneigt aufgestelltes Nagelbrett für die Darstellung der *Binomialverteilung*. Die Nägel



Fach Nr. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Schematische Darstellung eines Galtonbretts

sind so eingeschlagen, daß der Abstand je zweier nebeneinanderliegender durch den darüberliegenden Nagel im Verhältnis  $p : (1 - p)$  geteilt wird (Abb.). Aus einem Trichter läßt man die Kugeln durch die Nagelreihen laufen. Dabei trifft jede Kugel von Reihe zu Reihe auf einen Nagel und kann dabei nach rechts oder links abgelenkt werden. Nachdem die Kugeln  $n$  Nagelreihen durchlaufen haben, werden sie in  $n + 1$  Fächern aufgefangen. Die Füllung der Fächer ist dann näherungsweise eine graph. Darstellung der Binomialverteilung mit den Parametern  $n$  und  $p$ , denn wenn  $N$  Kugeln durch ein G. mit  $n$  Nagelreihen rollen, so sind im  $k$ -ten Fach mit  $k = 0, 1, \dots, n$  gerade  $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \cdot N$  Kugeln zu erwarten.

**Gammafunktion:** durch (1) definierte Funktion  $\Gamma(x)$ , die von L. EULER bei der Untersuchung aufgestellt

$$(1) \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } x > 0$$

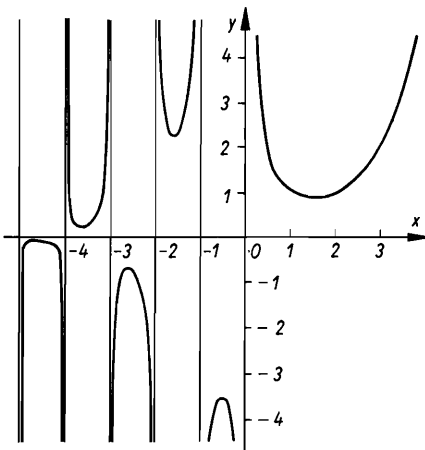
wurde, die Folge der Fakultäten  $k!$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  zu interpolieren, eine stetige Funktion zu finden, deren Funktionswerte für positive ganzzahlige Argumente  $x = k + 1$  die Werte  $k!$  annehmen. Sie wurde von LÉGEN-DRE als *Eulersche G.* bezeichnet. GAUSS gab die Definition (2), die für alle reellen Zahlen verschieden von  $0, -1, -2, \dots$  gilt und für  $x > 0$  mit  $\Gamma(x)$  übereinstimmt. Die G. hat

$$(2) \quad \Gamma^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \\ = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \right]$$

keine endl. Nullstellen und ist im gesamten Definitionsbereich stetig und differenzierbar, d. h., es gilt

(3). An den Stellen  $x = 0, -1, -2, \dots$ , hat die G.

$$(3) \quad \Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt$$



Graphische Darstellung der Gammafunktion

**Pole erster Ordnung** (Abb.). Sie läßt sich nicht mit Hilfe elementarer Funktionen ausdrücken, es gelten aber die Funktionalgleichungen (4), (5), (6) und (7). Aus (4) ergibt sich (4a), d. h. die von EULER angestrebte Beziehung zu den Fakultäten.

$$(4) \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

$$(4a) \quad \Gamma(k + 1) = k! \quad \text{für } k \geq 0 \text{ und ganz}$$

$$(5) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma(1 - x) = \pi / \sin(\pi x)$$

$$(6) \quad \Gamma(1/2 + x) \cdot \Gamma(1/2 - x) = \pi / \cos(\pi x)$$

$$(7) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma(-x) = -\pi / [x \cdot \sin(\pi x)]$$

**Ganghöhe** ↗ Schraubenlinie I.

**Gantt-Diagramm** ↗ Netzplantechnik V.

**ganze algebraische Zahl** ↗ Zahlkörper II.

**ganze lineare Transformation** ↗ Koordinatentransformation II.

**ganze Zahlen Z:** Zahlenbereich, der aus dem der natürl. Zahlen durch die Forderung entsteht, daß die Subtraktion  $a - b = \{a, b\}$  als Umkehroperation der Addition für jedes Paar  $(a, b)$  natürl. Zahlen stets eine eindeutige Lösung hat. Der Bereich **Z** enthält außer den natürl. Zahlen die negativen Zahlen  $-1, -2, -3, \dots$ . In ihm gibt es nicht nur keine größte, sondern auch keine kleinste Zahl. Die Vorzeichenregeln für g. Z. sind unter Subtraktion und Multiplikation aufgeführt. Werden die Zahlen  $a - b$  und  $c - d$  durch die geordneten Zahlenpaare  $\{a, b\}$  bzw.  $\{c, d\}$  dargestellt, so gilt  $\{a, b\} = \{c, d\}$ , falls  $a + d = c + b$ . Die Zahl *Null* ist durch das Zahlenpaar  $\{a, a\}$  gegeben. Die Rechengesetze für g. Z. ergeben sich dann ohne Fallunterscheidung aus den folgenden Definitionen für Zahlenpaare:

$$\{a_1, b_1\} + \{a_2, b_2\} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2\},$$

$$\{a_1, b_1\} - \{a_2, b_2\} = \{a_1 + b_2, b_1 + a_2\},$$

$$\{a_1, b_1\} \cdot \{a_2, b_2\} = \{a_1 a_2 + b_1 b_2, b_1 a_2 + a_1 b_2\}.$$

**Ganzheitsbasis** ↗ Zahlkörper II., IV.

**ganzrationale Funktion:** I. durch (1) darstellbare

$$(1) \quad y = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

mit reellen Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n; a_n \neq 0$

**Funktion** (s. a. Polynom III.). Der größtmögl. Definitionsbereich einer g. F. ist die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen, falls man komplexwertige Funktionen ausschließt. Die  $n + 1$  Zahlen  $a_i$  heißen *Koeffizienten*, die ganze Zahl  $n$  heißt *Grad der g. F.* Die rechte Seite des analyt. Ausdrucks (1) ist ein *Polynom n-ten Grades in der Unbestimmten x*. Summe, Differenz und Produkt endlich vieler g. F.en sind wieder g. F.en. Eine g. F. vom Grade 0 ist eine *konstante Funktion*  $y = f(x) = c$ , bei der jedem Argument der gleiche Funktionswert  $c$  zugeordnet ist und deren Bild eine Parallele im Abstand  $c$  zur Abszissenachse darstellt. Eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen ist konstant, wenn für jedes  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reeller Zahlen aus ihrem Definitionsbereich gilt  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ . Für  $n = 1$  in Gleichung (1) spricht

man von einer *linearen*, für  $n = 2$  von einer *quadrat*. und für  $n \geq 3$  ganz allgemein von einer *Potenzfunktion*. Enthält der Definitionsbereich einer  $g, F$ . unendlich viele Argumente, so kann  $f$  auf genau eine Weise durch einen analyt. Ausdruck (1) dargestellt werden, d. h., zwei  $g, F$ .en  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  und  $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  stimmen genau dann überein, wenn gilt  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Man nennt eine solche Darstellung (1) *Normalform* bzw. *Polyndarstellung* der  $g, F$ .

II. Das Polynom  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  vom Grad  $n$  heißt *reduzibel* genau dann, wenn es sich als Produkt von Polynomen niedrigeren Grades, die von Konstanten verschieden sind, darstellen läßt, andernfalls *irreduzibel*. Konstante sind weder reduzibel noch irreduzibel, Polynome ersten Grades sind stets irreduzibel. Bei Polynomen mit dem Grad  $n \geq 2$  hängt die *Irreduzibilität* von der Wahl des Koeffizientenbereichs ab, der nicht notwendig mit der Menge der reellen Zahlen übereinstimmen muß. Das Polynom  $x^4 - 7$  z. B. ist irreduzibel, wenn man für die Koeffizienten der Produktpolynome ganze oder rationale Zahlen zuläßt; läßt man aber reelle Zahlen zu, so existiert  $x^4 - 7 = (x^2 + \sqrt{7}) \cdot (x^2 - \sqrt{7})$  als Produktdarstellung; läßt man komplexe Zahlen zu, so existiert eine Produktdarstellung (2) nur aus Linearfaktoren. Der *Fundamentalsatz der Algebra* besagt:

$$(2) \quad x^4 - 7 = (x - \sqrt{-\sqrt{7}})(x + \sqrt{-\sqrt{7}})(x - \sqrt{\sqrt{7}})(x + \sqrt{\sqrt{7}})$$

Die Normalform jeder  $g, F$ .  $n$ -ten Grades zerfällt in ein Produkt von  $n$  Linearfaktoren  $(x - \alpha_i)$  im Koeffizientenbereich  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen, d. h., für  $\alpha_i \in \mathbf{C}$  gilt (3).

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i = c \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n)$$

Ist  $c$  reell, so tritt mit jedem Linearfaktor  $(x - \alpha_i)$  auch der Linearfaktor  $(x - \bar{\alpha}_i)$  auf, in dem  $\bar{\alpha}_i$  konjugiert komplex zu  $\alpha_i$  ist. Sind für die Koeffizienten nur reelle Zahlen zugelassen, so zerfällt die Normalform jeder  $g, F$ .  $n$ -ten Grades in ein Produkt (4) von Linearfaktoren und von quadrat. Polynomen.

$$(4) \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i = c \cdot (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_k) \times (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \dots (x^2 + p_l x + q_l)$$

mit  $c, r_1, r_2, \dots, r_k, p_1, p_2, \dots, p_l, q_1, q_2, \dots, q_l \in \mathbf{R}$  und  $2l + k = n$

Man nennt (4) die *Produktdarstellung* der  $g, F$ .  
 III. Eine reelle Zahl  $x_N$  heißt *Nullstelle* einer  $g, F$ .  $f$  mit reellen Koeffizienten  $a_i$ , wenn gilt  $f(x_N) = \sum_{i=0}^n a_i x_N^i = 0$ . Nach (4) ist jede der reellen Zahlen  $r_i$  eine Nullstelle der  $g, F$ . Sind umgekehrt  $x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_l}$  Nullstellen von  $f$ , so existiert eine  $g, F$ .  $f_1$  vom

Grade  $n - l$  mit  $l < n$ , so daß Gleichung (5) für alle Elemente  $x$  des Definitionsbereichs von  $f$  gilt.

$$(5) \quad f(x) = (x - x_{N_1})(x - x_{N_2}) \dots (x - x_{N_l}) \cdot f_1(x)$$

Die reelle Zahl  $x_N$  heißt genau dann  $k$ -fache *Nullstelle* bzw. *Nullstelle der Vielfachheit*  $k$  der  $g, F$ .  $f$ , wenn eine  $g, F$ .  $f_k$  mit  $f_k(x_N) \neq 0$  existiert, so daß  $f(x) = (x - x_N)^k \cdot f_k(x)$  für alle  $x \in D(f)$  gilt. Berücksichtigt man die Vielfachheit der Nullstellen, so läßt sich jede  $g, F$ .  $f$  vom Grade  $n$  durch (6) darstellen, wenn  $\sum_{i=1}^s k_i = r$ .

$$(6) \quad f(x) = (x - x_{N_1})^{k_1} \cdot (x - x_{N_2})^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_{N_s})^{k_s} \cdot g(x)$$

Dabei sind die  $x_{N_i}$  Nullstellen der Vielfachheit  $k_i$ , und  $g$  ist eine  $g, F$ . vom Grade  $n - r$  mit  $g(x_{N_i}) \neq 0$  für  $i = 1, 2, \dots, s$ . Aus der Darstellung (6) folgt, daß die Funktion  $f$  nicht mehr als  $n$  Nullstellen, jede in ihrer Vielfachheit gerechnet, haben kann. Hat  $f$  genau  $n$  Nullstellen, so läßt sie sich, von einem konstanten Faktor  $c$  abgesehen, als ein Produkt von  $n$  Linearfaktoren darstellen. Hat eine  $g, F$ .  $f$  unendlich viele Nullstellen, so ist  $f$  die Funktion mit  $y = f(x) \equiv 0$ . Eine  $g, F$ . mit reellen Koeffizienten hat eine gerade bzw. eine ungerade Anzahl reeller Nullstellen, je nachdem ob der Grad der Funktion gerade oder ungerade ist; dabei werden die Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Eine  $g, F$ . mit  $\alpha_i \in \mathbf{R}$  hat folglich mindestens eine reelle Nullstelle, falls ihr Grad ungerade ist. Die Funktion  $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$  hat z. B. die einfachen Nullstellen  $x_{N_1} = 2$  und  $x_{N_2} = -3$  und keine weiteren reellen. Damit existiert für diese Funktion die Produktdarstellung  $f(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 1)$ .

IV. Jeder Nullstelle einer Funktion  $f$  nach (1) entspricht eindeutig ein Schnittpunkt oder Berührungspunkt des Bildes der Funktion mit der Abszissenachse. In einer einfachen Nullstelle hat das Bild von  $f$  einen von Null verschiedenen Anstieg, in mehrfachen Nullstellen ist der Anstieg Null, d. h., die Tangente an das Bild der Funktion  $f$  in dem einer mehrfachen Nullstelle zugeordneten Punkt fällt mit der Abszissenachse zusammen. Das Berechnen von Nullstellen  $g$ .

$F$ .en bedeutet, die algebraische Gleichung  $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$  zu lösen. Zwischen den drei Problemen, eine algebraische Gleichung zu lösen, Nullstellen einer  $g, F$ .  $f$  zu berechnen und  $f$  in Linearfaktoren zu zerlegen, besteht ein sehr enger Zusammenhang.

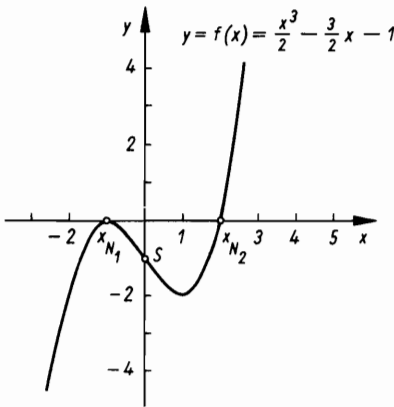
V. Für das Verhalten einer  $g, F$ . vom Grade  $n$  und mit dem höchsten Koeffizienten  $a_n \neq 0$  im Unendlichen erhält man durch Grenzübergang die in (7) zusammengestellten Werte.

(7)	$n$ gerade		$n$ ungerade	
	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Da g. F. er' im gesamten Definitionsbereich stetig sind, ergibt sich: *Jede g. F. geraden Grades ist entweder nach oben oder nach unten beschränkt, eine g. F. ungeraden Grades ist nicht beschränkt.*

*Beispiel:* Die g. F.  $y = f(x) = 0,5x^3 - 1,5x - 1$  kann auch durch  $y = f(x) = 0,5(x + 1)^2(x - 2)$  beschrieben werden. Sie hat eine doppelte Nullstelle  $x_{N_1} = -1$  und eine einfache Nullstelle  $x_{N_2} = 2$ . Wegen (8) wachsen bzw. fallen die Funktionswerte bei wachsenden bzw. fallenden Argumenten über jede Grenze. Die Funktion ist nicht beschränkt.

$$(8) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2(0,5 - 1,5x^{-2} - x^{-3}) = \pm\infty$$



ganzzahlige Funktion: Graphische Darstellung der Funktion  $y = x^3/2 - 3x/2 - 1$

Ihr Bild schneidet die Ordinatenachse bei  $y_s = -1$  (vgl. Abb.).

Jede g. F.  $f$  ist in ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar, ihre Ableitung  $f'$  ist wieder eine g. F. Zur prakt. Berechnung der Funktionswerte von  $f$  benutzt man das Horner-Schema.

VI. Eine g. F.  $f$  mit  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wird durch (9) beschrieben, wenn über alle

$$(9) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_n$  summiert wird.

Die Koeffizienten  $a_{i_1, \dots, i_n}$  sind reelle Zahlen. Der Grad einer solchen Funktion ist gleich dem Maximum der Summe der Exponenten  $\sum_{j=1}^n i_j$  von Potenzen mit nichtverschwindendem Koeffizienten. — S. a. komplexwertige Funktion.

**Gärtnerkonstruktion** ↗ Ellipse I.

**Gauß, Carl Friedrich**, geb. 30. 4. 1777 Braunschweig, gest. 23. 2. 1855 Göttingen. — G. stammte aus ärmlichen Verhältnissen und fiel sehr früh durch eine außerordentlich mathemat. Begabung auf. Der Herzog von Braunschweig übernahm ab 1791 die Kosten seiner Ausbildung. G. studierte 1795/98 in Göttingen und promovierte 1799 in Helmstedt. Seit 1807 war G. Direktor der Sternwarte und Professor an

der Universität in Göttingen. Alle Angebote, z. B. nach Berlin an die Akademie zu kommen, lehnte er ab.

G. begann 1791 seine wissenschaftl. Tätigkeit mit Untersuchungen zum geometrisch-arithmet. Mittel, zur Verteilung der Primzahlen und 1792 zu den Grundlagen der Geometrie. Bereits 1794 fand er die Methode der kleinsten Quadrate, und von 1795 datiert die intensive Beschäftigung mit der Zahlentheorie, z. B. mit dem quadrat. Reziprozitätsgesetz. Im Jahre 1796 veröffentlichte G. seine erste Arbeit. In ihr wurde der Beweis geführt, daß außer in den bekannten Fällen regelmäßige  $n$ -Ecke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, wenn  $n$  eine Fermatsche Primzahl ist. Insbes. trifft das auf das 17-Eck zu. In seiner Dissertation von 1799 gab G. den ersten exakten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, dem er weitere folgen ließ. Aus dem Nachlaß ist bekannt, daß G. im gleichen Jahr bereits die Grundlagen der Theorie der ellipt. und der Modulfunktionen besaß. Das erste umfangreiche Werk, das G. 1801 veröffentlichte, sind seine berühmten »Disquisitiones arithmeticae«, die als Beginn der neueren Zahlentheorie gelten. In ihm finden sich z. B. die Theorie der quadrat. Kongruenzen und der erste Beweis des quadrat. Reziprozitätsgesetzes, des »Theorema aureum«, sowie die Kreisteilungslehre.

Seit etwa 1801 begann sich G. für die Astronomie zu interessieren. Die Ergebnisse dieser Studien waren 1801 die Bahnrechnung des Planeten Ceres, die Untersuchungen 1809 und 1818 zu den säkularen Störungen und 1813 zur Anziehung des allgemeinen Ellipsoids. 1812 erschien die Abhandlung über die hypergeometr. Reihe, die die erste korrekte und systemat. Konvergenzuntersuchung enthält.

Seit 1820 wandte sich G. verstärkt der Geodäsie zu. Die bedeutendste theoret. Leistung ist 1827 die Flächentheorie mit dem »Theorema egregium«. Auch prakt. Geodäsie betrieb G., z. B. führte er sehr umfangreiche Messungen in den Jahren 1821/25 aus. Trotz solcher aufwendigen Arbeiten erschienen 1825 und 1831 seine Schriften über biquadrat. Reste. Die zweite dieser Abhandlungen enthielt die Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene und eine neue Primzahltheorie.

In seinen letzten Jahren fand G. auch an physikal. Fragen Gefallen. Wichtigste Ergebnisse sind 1833/34 die mit W. WEBER gemachte Erfindung des elektr. Telegraphen und 1839/40 die Potentialtheorie, die ein neuer Zweig der Mathematik wurde.

Viele wichtige Resultate von G. sind nur aus dem Tagebuch und den Briefen bekannt; z. B. war G. bereits 1816 im Besitz der nichteuclid. Geometrie. Der Grund für das Verhalten, wichtige Ergebnisse nicht zu veröffentlichen, ist in dem außerordentlich strengen Maßstab, den G. auch an die Form seiner Arbeiten legte, und im Versuch zu sehen, unnötige Auseinandersetzungen zu vermeiden.

**Gauß-Banachiewicz-Verfahren** ↗ lineare Gleichungssysteme VI.3.

**Gauß-Bonnet, Satz von:** Hat ein Flächenstück  $F$  mit der Parameterdarstellung  $x = x(u, v)$  als Rand eine

einfache, geschlossene Kurve  $C$ , die mit der Bogenlänge  $s$  von  $C$  durch  $x = (u(s), v(s))$  dargestellt wird, so hat die Summe aus dem Kurvenintegral längs  $C$  über die geodät. Krümmung  $\kappa_g$  und aus der Integralkrümmung  $K$  des Flächenstücks  $F$  den konstanten Wert  $2\pi$ .

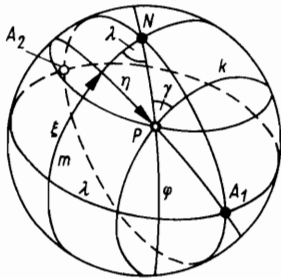
$$(1) \quad \oint_C \kappa_g ds + \iint_F K dO = 2\pi$$

Dabei ist  $C$  so zu durchlaufen, daß  $F$  zur Linken von  $C$  bleibt.

**Gauß-Jordan-Verfahren** ↗ lineares Gleichungssystem VI.2.

**Gauß-Krüger-Projektion** [nach C. F. Gauß und J. H. L. Krüger]: I. für topograph. Karten verwendeter quersichtiger Zylinderentwurf. Dabei werden Kugelzweiecke, die *Meridianstreifen* gen. werden und deren *Grenzmeridiane* an den Polen Winkel von  $6^\circ$  einschließen, auf einen Zylindermantel abgebildet, der das Kugelzweieck in seinem *Mittelmeridian* berührt. Der Zylindermantel wird als abwickelbare Fläche auf die Ebene abgebildet. Die Gesamtabbildung ist *winkeltreu* oder *konform*. Wegen der geringen Breite der Meridianstreifen weichen auch die Längen und Flächen nur wenig von den wahren Werten ab. Sind für die Darstellung eines ganzen Landes mehrere Meridianstreifen erforderlich, so werden für ein  $0,5^\circ$  breites Gebiet um die Grenzmeridiane die Koordinaten beider Meridianstreifen angegeben.

II. Nach der Abwicklung des Zylinders bildet der in wahrer Länge abgewinkelte Mittelmeridian die nach Norden gerichtete  $x$ -Achse eines kartes. Koordinatensystems, dessen  $y$ -Achse nach Osten zeigt. Die Koordinaten  $\xi$  auf ihr werden vom Äquator aus gerechnet und *Hochwerte* gen. Senkrecht dazu wird in  $y$ -Richtung der *Rechtswert* abgetragen. Auf der Kugel entspricht ihm die Bogenlänge  $\eta$  auf einem Großkreis, der senkrecht zum Mittelmeridian  $m$  durch dessen Pol  $A$  verläuft. In jedem Kugelpunkt  $P$  schneidet sich ein solcher Großkreis senkrecht mit einem Breitenkreis in bezug auf  $A$ , der parallel zum



Gauß-Krüger-Projektion: Gauß-Krüger Koordinaten

Mittelmeridian verläuft (Abb.). Im abgewinkelten Bild entsteht ein rechtwinkliges Gitter, in dem die  $x$ -Achse und die Bilder aller zum Mittelmeridian parallelen Kleinkreise nach *Gitternord* zeigen. Die Abweichung zwischen dieser Nordrichtung und der geograph. Nordrichtung heißt *Meridiankonvergenz* und tritt auf der Kugel im Punkte  $P$  als Winkel-

größe  $\gamma$  zwischen dem Breitenkreis  $k$  und dem Meridian durch  $P$  und  $N$  in Erscheinung.

**Gauß-Legendre-Quadratur** ↗ Integration, numerische, III.

**Gauß-Ostrogadskischer Integralsatz** ↗ Integralsätze I., ↗ elliptische Differentialgleichung II.1.

**Gaußsche Differentialgleichung** ↗ hypergeometrische Differentialgleichung.

**Gaußsche Fehlerquadratmethode** ↗ Ausgleichsrechnung II.

**Gaußsche Formeln** svw. Delambresche Formeln.

**Gaußsche Glockenkurve** ↗ Normalverteilung I.

**Gaußsche Krümmung** ↗ Krümmung I.

**Gaußsche Mittelwerteneigenschaft** ↗ elliptische Differentialgleichung II.2.

**Gaußsche Primzahl** ↗ Gaußsche Zahlen II.

**Gaußsche Quadraturverfahren** ↗ Integration, numerische, III.

**Gaußscher Algorithmus** ↗ lineares Gleichungssystem III.3.

**Gaußscher Satz:** Bezeichnung für einen Zusammenhang zwischen einem Kurvenintegral und einem Flächenintegral in der Ebene bzw. einem Oberflächenintegral und einem Raumintegral im Raum. Sind die Funktionen  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  und ihre partiellen Ableitungen  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  in einem Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene mit dem stückweise glatten Rand  $k$  stetig, so gilt (1), wenn  $k$  im mathematisch positiven Drehsinn durchlaufen wird.

$$(1) \quad \iint_{(B)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(k)} (P dx + Q dy)$$

Sind die Funktionen  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  in dem Raumbereich  $K$ , der von einer stückweise glatten Fläche  $S$  begrenzt wird, mit ihren partiellen Ableitungen  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  stetig, so gilt (2),

wenn das Oberflächenintegral zweiter Art über die äußere Seite des Raumbereichs  $K$  genommen wird, bzw. (3), wenn  $\alpha, \beta, \gamma$  die Größen der Winkel bedeuten, die die Normale der äußeren Seite von  $S$  jeweils mit den Koordinatenachsen bildet.

$$(2) \quad \iiint_{(K)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy)$$

$$(3) \quad \iiint_{(K)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

**Gaußsches Eliminationsverfahren** ↗ lineares Gleichungssystem I., III.3., V.1.

**Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz** ↗ Fehler IV.

**Gaußsches Fehlerintegral** ↗ Entwicklung von Funktionen VII., ↗ Normalverteilung I.



**Gaußsche Zahlen:** I. komplexe Zahlen, deren Real- und Imaginärteil rationale Zahlen sind; sind sie ganze Zahlen, so spricht man von *ganzen G.n Z.* Sind  $a + bi$  und  $c + di$  ganze G. Z., mit  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ , so ist der Quotient (1) eine G. Z. Die ganzen G.n Z. bilden einen euklid. Ring, d. h. einen Inte-

$$(1) \quad \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

gritätsbereich. Sie sind deshalb nullteilerfrei, und ihr Quotientenkörper ist der Körper der G. Z.

Jeder ganzen Gaußschen Zahl  $\alpha = a + bi$  wird dabei die Norm  $N(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2$  ( $\nearrow$  komplexe Zahlen) zugeordnet.

Da die Menge der ganzen G. Z. einen euklid. Ring bildet, gilt in ihr der euklid. Algorithmus, d. h., man kann zu zwei ganzen G. Z.  $\alpha \neq 0, \beta$  ganze G. Z.  $\sigma$  und  $\varrho$  finden, so daß gilt  $\beta = \sigma \cdot \alpha + \varrho$  und  $N(\varrho) < N(\alpha)$ . Um eine solche ganze Gaußsche Zahl  $\sigma$  zu finden, dividiert man zunächst  $\beta$  durch  $\alpha$  im Quotientenkörper der ganzen G. Z. Den Quotienten  $\sigma'$  mit  $\beta = \sigma' \cdot \alpha$  ersetzt man durch die nächstgelegene ganze Gaußsche Zahl, d. h., man bestimmt die dem Real- und dem Imaginärteil von  $\sigma' = s' + t'i$  nächstgelegenen ganzen Zahlen  $s$  und  $t$ . Dann ist  $\sigma = s + ti$  und  $\beta = \sigma\alpha + \varrho$  mit  $N(\varrho) < N(\alpha)$ .

Für  $\alpha = 13 + 4i, \beta = 11 + 13i$  gilt z. B.  $N(\alpha) = 185, N(\beta) = 290$  und der *Divisionsalgorithmus* nimmt folgende Gestalt an:

- (2)  $\beta = \sigma \cdot \alpha + \varrho$  mit  $\sigma = 1 + i$  und  $\varrho = 2 - 4i$  sowie  $\sigma' = \beta/\alpha = (39 + 25i)/37,$
- (3)  $\alpha = \sigma_1\varrho + \varrho_1$  mit  $\sigma_1 = 3i$  und  $\varrho_1 = 1 - 2i$  sowie  $\sigma_1' = \alpha/\varrho = 1/2 + 3i,$
- (4)  $\varrho = \sigma_2\varrho_1 + \varrho_2$  mit  $\sigma_2 = 2$  und  $\varrho_2 = 0$  sowie  $\sigma_2' = \varrho/\varrho_1 = 2.$

Dabei ist  $N(\beta) > N(\alpha) > N(\varrho) > N(\varrho_1), \varrho_2 = 0$ , d. h.,  $\varrho_1 = 1 - 2i$  ist ein *größter gemeinsamer Teiler* von  $\alpha = 13 + 4i$  und  $\beta = 11 + 13i$ . Statt  $\sigma_1$  hätte man auch  $\sigma_1^* = 1 + 3i$  wählen können und hätte  $\varrho_1^* = -1 + 2i$  erhalten. Diese beiden größten gemeinsamen Teiler sind assoziiert; man erhält  $\varrho_1^*$  durch Multiplikation mit einer Einheit, hier mit  $-1$ , aus  $\varrho_1$ .

**II.** Da der Ring der ganzen G. Z. ein euklid. Ring ist, ist die *Zerlegung in Primelemente* bis auf die Einheiten  $1, -1, i, -i$  *eindeutig*. Für  $\alpha$  und  $\beta$  z. B. erhält man (5) und (6) als Zerlegung, deren Faktoren Primelemente sind:

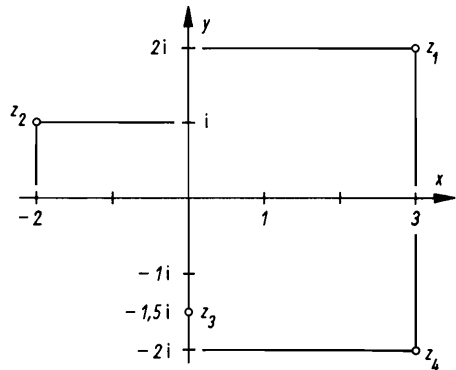
$$(5) \quad \begin{aligned} 13 + 4i &= (1 - 2i) \cdot (1 + 6i) \\ &= (-1 + 2i) \cdot (-1 - 6i) \\ &= (2 + i) \cdot (6 - i) \\ &= (-2 - i) \cdot (-6 + i) \end{aligned}$$

$$(6) \quad 11 + 13i = (1 - 2i) \cdot (1 - i) \cdot (-5 + 2i)$$

Die Norm einer *Gaußschen Primzahl* ist eine rationale Primzahl oder das Quadrat einer rationalen

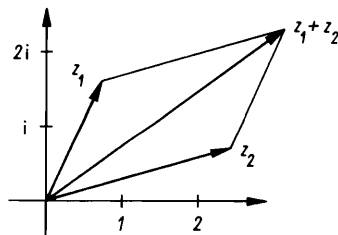
Primzahl; die Norm ist im ersten Fall 2 oder eine Primzahl der Form  $4 \cdot n + 1$ , wenn  $n$  eine ganze rationale Zahl ist; im zweiten Fall ist eine rationale Primzahl der Form  $4 \cdot n + 3$  auch Gaußsche Primzahl.

**Gaußsche Zahlenebene:** I. Ebene  $E$  mit einem kartes. Koordinatensystem, auf dessen Abszissenachse oder  $x$ -Achse die reellen Zahlen und auf dessen Ordinaten- oder  $y$ -Achse die reinimaginären Zahlen abgetragen werden ( $\nearrow$  komplexe Zahlen). Jeder komplexen Zahl  $z = x + iy$  entspricht dann ein-



Gaußsche Zahlenebene. Abb. 1: Bilder der komplexen Zahlen  $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -2 + i, z_3 = -1,5i$  und  $z_4 = 3 - 2i$ .

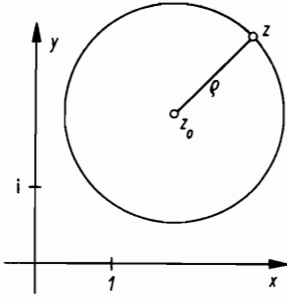
deutig ein Punkt  $z$  der Ebene als Bild (Abb. 1). Die Bilder *konjugiert komplexer Zahlen* liegen symmetrisch zur  $x$ -Achse, z. B.  $z_1 = 3 + 2i$  und  $z_4 = 3 - 2i$ . Jede komplexe Zahl  $z$  kann auch als *Vektor* aufgefaßt werden, der vom Koordinatenanfangspunkt zum Punkte  $z$  zeigt. Die *Addition*  $z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$  kann dann als Addition der Vektoren  $z_1$  und  $z_2$  aufgefaßt werden (Abb. 2). Entsprechendes gilt für die *Subtraktion*.



Gaußsche Zahlenebene. Abb. 2: Addition zweier komplexer Zahlen als Vektoraddition.

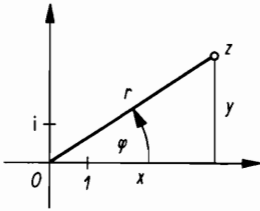
**II.** Der *absolute Betrag*  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$  einer komplexen Zahl ist geometrisch der Abstand des ihr zugeordneten Punktes vom Koordinatenursprung. Der Abstand  $\varrho$  zweier Punkte  $z_1$  und  $z_0$  ist gegeben durch  $\varrho = |z_1 - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$

und für die Punkte  $z$  eines Kreises, der mit dem Radius  $\rho$  um den Punkt  $z_0$  geschlagen worden ist, gilt  $|z - z_0| = \rho$  bzw. für die Punkte  $z$  in seiner Fläche einschließlich des Randes gilt  $|z - z_0| \leq \rho$



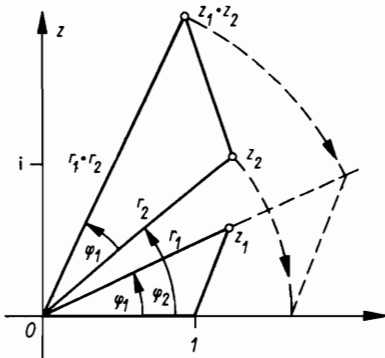
Gaußsche Zahlenebene. Abb. 3: Die Punkte  $z$  liegen auf der Kreislinie um  $z_0$  mit dem Radius  $\rho = |z - z_0|$

(Abb. 3). Mit dem Abstand  $r$  und dem Winkel  $\varphi$ , den der Vektor  $z$  gegen die  $x$ -Achse bildet, läßt sich die Zahl  $z$  in *Polarkoordinaten* darstellen. Aus  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  erhält man  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$ , wenn die *Eulersche Formel* be-



Gaußsche Zahlenebene. Abb. 4: Darstellung des Vektors  $z$  in Polarkoordinaten

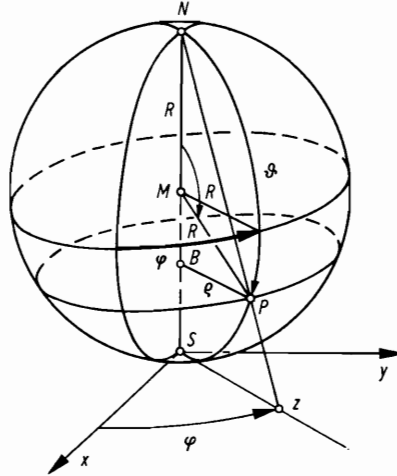
nutzt wird (Abb. 4). Dabei wird der Winkel  $\varphi$  als *Argument* bezeichnet. Nach dieser Darstellung kann auch das *Produkt* zweier komplexer Zahlen  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  und  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  geometrisch konstruiert werden. Nach dem Additionstheorem der Goniometrie ( $\nearrow$  *Winkelfunktionen*) gilt  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ , d. h., für die absoluten Beträge gilt die Proportion  $r : r_2 = r_1 : 1$ , und das Argument des Produkts ist



Gaußsche Zahlenebene. Abb. 5: Geometrische Darstellung des Produkts  $z = z_1 \cdot z_2$

gleich der Summe der Argumente der Faktoren. Legt man deshalb das Dreieck  $O 1 z_1$  durch Drehung um  $\varphi_2$  so an den Vektor  $z_2$ , daß Punkt 1 auf dem Vektor  $z_2$  liegt, so bestimmt der gedrehte Vektor  $z_1$  die Richtung nach  $z$  und  $r = |z|$  ergibt sich nach dem Strahlensatz (Abb. 5).

III. Der G. Z. wird ein Punkt als unendlich ferner Punkt zugefügt. Diese Eigenschaft wird deutlich bei ihrer Abbildung auf die *Riemannsche Zahlenkugel* (Abb. 6). Hat diese den Radius  $R$  und berührt die G. Z. im Koordinatenanfangspunkt  $S$ ,



Gaußsche Zahlenebene. Abb. 6: Riemannsche Zahlenkugel

so steht ihr Radius  $SM$  in diesem Punkte senkrecht zur G. Z. und vom Punkte  $N$  mit  $|MN| = |SM|$  aus werden die Punkte  $z$  der G. Z. durch Zentralprojektion auf Punkte  $P$  der Kugel abgebildet. Die Ebene durch den Durchmesser  $SN$  und  $z$  bildet gegen die Ebene durch  $SN$  und die  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  und schneidet die Kugel in einem Großkreis mit dem Radius  $R$ . Auf seinem Umfang wird der Punkt  $P$  festgelegt durch den Winkel  $\vartheta$ , den der Radius  $MP$  gegen die Richtung  $MN$  bildet.  $P$  liegt auf einem Breitenkreis mit Radius  $\rho = R \sin \vartheta$ . Ist  $B$  der Mittelpunkt dieses Breitenkreises, so gilt  $|NB| = R - R \cos \vartheta = R(1 - \cos \vartheta)$ . Im Dreieck  $SzN$  mit den Parallelen  $BP \parallel Sz$  gilt nach dem Strahlensatz  $r : \rho = 2R : R(1 - \cos \vartheta) = 2 : (1 - \cos \vartheta)$  oder  $r = |Sz| = 2\rho / (1 - \cos \vartheta) = 2R \sin \vartheta / (1 - \cos \vartheta)$ . Für abnehmende Werte von  $\vartheta$  und  $\vartheta \rightarrow 0$  wächst  $r$  über jede Grenze. Zugleich rückt der Punkt  $P$  beliebig nahe an den Punkt  $N$  heran. Der Punkt  $N$  wird deshalb als Bild des *unendlich fernen Punktes* der G. Z. angesehen, der in der Funktionentheorie als Klasse aller bestimmt divergenten komplexen Zahlenfolgen festgelegt wird. Die um diesen Punkt erweiterte G. Z.  $E$  heißt *abgeschlossene* oder *vollständige* G. Z.  $E$  (s. a. stereographische Projektion).

Die geometr. Darstellung der komplexen Zahlen wurde erst durch GAUSS (1831) Allgemeiner der Mathematiker, obwohl schon der Däne CASPAR WESSEL 1797 die Darstellung gefunden hatte.

**Gauß-Seidel-Verfahren** ↗ lineares Gleichungssystem VII.2.

**Gauß-Tschebyschow-Quadratur** ↗ Integration, numerische, III.

**Gaußverteilung** svw. Normalverteilung.

**Gebiet:** offene und zusammenhängende Menge  $M$  von Punkten eines topolog. Raumes. Sie wird *offen* gen., wenn sie nur aus inneren Punkten besteht, und *zusammenhängend*, wenn man je zwei beliebige ihrer Punkte durch einen Polygonzug verbinden kann, der nur aus Punkten der Menge  $M$  besteht. Ein  $G$ . ist z. B. jedes offene Intervall  $I$  eines eindimensionalen Punktraumes oder die Menge  $K$  aller Punkte eines  $n$ -dimensionalen Punktraumes, deren Abstände von einem festen Punkt  $O$  kleiner sind als eine vorgegebene nichtnegative Zahl  $r$ . Die Menge  $K$  bildet das Innere einer Kugel in diesem Raum. Ein *Bereich* ist dagegen eine zusammenhängende, aber abgeschlossene Punktmenge.

**Gebietsdifferentiation** ↗ Flächenintegral II.7., Raumintegral II.7.

**gebrochenrationale Funktion:** Quotient  $f(x) = p(x)/q(x)$  zweier ganzrationaler Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$ . Hat  $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$  den Grad  $m$  und  $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$  den Grad  $n$ , so heißt die Funktion  $f(x)$  für  $m \geq n$  *unecht gebrochenrational*, für  $m < n$  aber *echt gebrochenrational*. Mit einem Divisionsalgorithmus läßt sich von einer unecht g. F. nach (1) eine ganzrationale Funktion  $g(x)$  abspalten, die den

$$(1) \quad f(x) = p(x) : q(x) = g(x) + r(x)$$

Grad  $m - n$  hat und für  $m = n$  die Konstante  $a_m/b_m$  ist. Der Rest  $r(x)$  ist eine echt g. F., d. h., der Grad ihres Zählers ist kleiner als der des Nenners. S. a. rationale Funktion I., komplexwertige Funktion, elementare, I.

**gebundene Variable** ↗ Prädikatenlogik II.

**Geburts- und Todesprozeß:** spezieller Markowscher Zufallsprozeß, der durch eine geordnete Menge von Zuständen  $E_0, E_1, E_2, \dots$  dargestellt wird, von denen jeder in kleinen Zeitintervallen nur in einen ihm benachbarten Zustand übergehen kann. Im stationären Fall kann vereinfacht angenommen werden, daß für jeden Zustand  $E_i$  zwei Wahrscheinlichkeiten gegeben sind,  $\lambda_i$  für den Übergang  $E_i \rightarrow E_{i+1}$  und  $\mu_i$  für  $E_i \rightarrow E_{i-1}$  in der Zeiteinheit. Mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \lambda_i - \mu_i$  bleibt der Zustand  $E_i$  während dieser Zeiteinheit erhalten. Im instationären Fall können die Größen noch veränderlich in der Zeit sein. Die Vorgänge aber, die zum Erreichen von  $E_i$  geführt haben, spielen für die weiteren Übergänge keine Rolle.

In Anlehnung daran, daß bei den ersten Anwendungen  $E_n$  die Anzahl von Lebewesen bestimmter Art bedeutete, wird der Übergang  $E_i \rightarrow E_{i+1}$  als Geburt und der Übergang  $E_i \rightarrow E_{i-1}$  als Tod bezeichnet. Sind alle  $\mu_i = 0$ , so sprach man von einem *Geburtsprozeß*, für alle  $\lambda_i = 0$  von einem *Todesprozeß*. Der  $G$ . wird in der *Bedienungstheorie* beim Länger- und Kürzerwerden der Warteschlange und in der *Zuverlässigkeitstheorie* bei der Vergrößerung und Verringerung der Reserve angewendet.

**Gegenkathete** ↗ Winkelfunktion III.

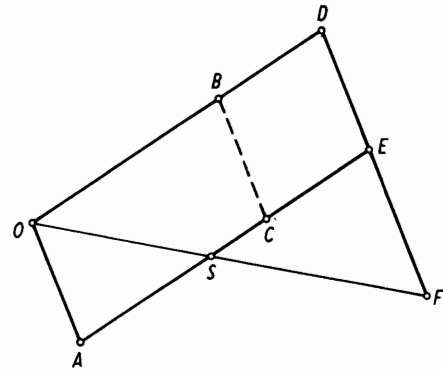
**Gegenkopplung** ↗ Regelung I., ↗ Struktur III.

**Gegenpunkt** ↗ Großkreis III.

**Gegenschaltung** ↗ Struktur III.

**Gelenkmechanismus:** System von starren Stäben, die untereinander und mit festen Punkten gelenkig so verbunden sind, daß die noch mögl. Bewegung des Systems z. B. zur mechan. Erzeugung von Abbildungen verwendet werden kann.

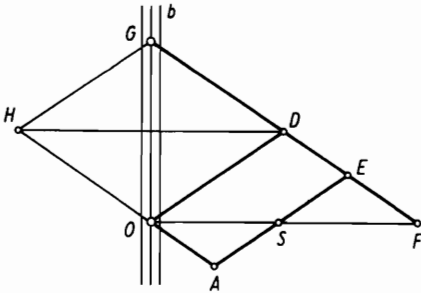
I. Mit dem *Pantographen*, auch *Storchschnabel* gen., lassen sich von ebenen Figuren *ähnl.* und *ähnlich gelegene* Bilder, d. h. Vergrößerungen oder Verkleinerungen, herstellen. Der Pantograph besteht



Gelenkmechanismus. Abb. 1: Schema des Pantographen

aus vier gelenkig verbundenen Stäben (Abb. 1), für deren Teile zwischen den Gelenken folgende Längenbeziehungen gelten:  $|OD| = |AE|$  und  $|OA| = |DE|$ ; bei einigen Ausführungen kann der Stab  $OA$  durch den dazu parallelen Stab  $BC$  ersetzt werden. Die Verbindungsgerade  $OF$  schneidet  $AE$  bei jeder Stellung des Mechanismus in demselben Punkt  $S$ , weil nach dem Strahlensatz stets gilt  $|OS| : |SF| = |AS| : |SE| = |OA| : |EF|$ . In  $S$  ist ein Schreibstift oder eine Punktirnadel angebracht. Der Punkt  $F$  trägt einen Fahrstift, der noch mit einer Lupe versehen sein kann. Hält man den  $G$ . in  $O$  fest und umfährt mit dem Fahrstift  $F$  eine gegebene Figur, so beschreibt  $S$  ein im Verhältnis  $|OS| : |OF|$  verkleinertes Abbild dieser Figur. Durch Vertauschung von Schreib- und Fahrstift erreicht man Vergrößerungen. Der *Abbildungsmaßstab* kann durch Veränderung der Stablängen variiert werden. Bei einfachen Geräten geschieht dies durch Umstecken der Gelenkverbindungen, bei *Präzisionspantographen* sind die Gelenke an Hülsen angebracht, die auf den mit Maßeinteilung versehenen Stäben verschoben und festgestellt werden können. Größere Geräte brauchen eine geeignete Stützung, für die man etwa Drähte verwenden kann, die zu einem in  $O$  aufgestellten Ständer führen.

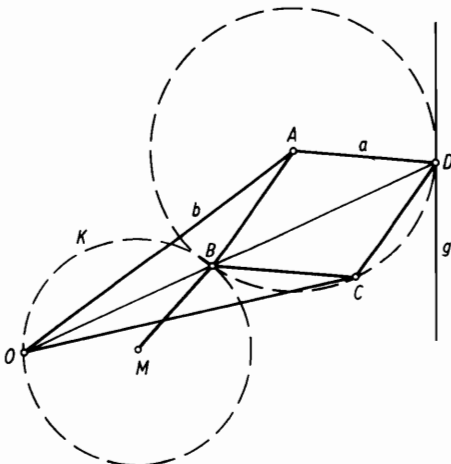
II. *Affinographen*, auch *Affinzeichner* gen., dienen der instrumentellen Erzeugung von affinen Abbildungen. Der Affinograph von ORT (Abb. 2) kann aus einem Pantographen dadurch erhalten werden, daß die Stange  $FD$  über  $D$  hinaus um  $|FD| = |DG|$



Gelenkmechanismus. Abb. 2: Schema eines Affinographen

verlängert wird und der so erhaltene Punkt  $G$  ebenso wie  $O$  als Zapfen ausgebildet wird, der in einer Schiene  $b$  gleiten kann. Durch Verlängerung von  $AO$  über  $O$  hinaus um eine Strecke der gleichen Länge würde man stets einen Punkt  $H$  erhalten, der mit  $O, D, G$  einen Rhombus bildet, d. h., die Strecken  $OG$  und  $HD$  stehen senkrecht zueinander und halbieren einander. Zugleich gilt  $HD \parallel OF$ . Wenn die Punkte  $O$  und  $G$  in einer Schiene  $b$  gleiten, erreicht man deshalb eine Verkleinerung bzw. nach Vertauschung von  $S$  und  $F$  eine Vergrößerung der senkrecht zu  $b$  liegenden Strecken, während die parallel zu  $b$  liegenden Strecken ohne Längenänderung abgebildet werden. Durch Kopplung zweier Geräte mit zueinander senkrechten Führungsschienen ist eine Verkürzung bzw. Streckung in zwei zueinander senkrechten Richtungen möglich. Die Abbildungsmaßstäbe können wie beim Pantographen in gewissen Grenzen verändert werden.

III. Die Abbildung durch reziproke Radien ( $\nearrow$  Inversion) kann mechanisch durch *Inversoren* hergestellt werden. Im Inversor von PEAUCELLIER gehen von einem festen Gelenk  $O$  Stäbe  $OA$  und  $OC$  von der Länge  $b$  aus (Abb. 3), an die sich Stäbe  $AB$  und  $CB$  sowie  $AD$  und  $CD$  der gleichen Länge  $a < b$  gelenkig anlagern, die in den Punkten  $B$  und  $D$  ebenfalls miteinander verbunden sind. Bei der Be-



Gelenkmechanismus. Abb. 3: Schema des Inversors von Peaucellier

wegung des Inversors um Punkt  $O$  beschreiben die Punkte  $B$  und  $D$  in bezug auf den Pol  $O$  inverse Figuren, weil einmal die Punkte  $O, B, D$  auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $AC$ , d. h. wegen  $a < b$  auf der Halbgeraden  $OD$  liegen, zum anderen aber, weil das Produkt  $|OB| \cdot |OD|$  konstant ist, da es die Potenz  $b^2 - a^2$  des Punktes  $O$  in bezug auf den Kreis darstellt, der um Punkt  $A$  mit dem Radius  $a$  geschlagen worden ist. Beschreibt deshalb Punkt  $B$  eine Figur in der Ebene, so durchläuft  $D$  die inverse Figur. Zu einem Kreis durch Punkt  $O$  mit dem Mittelpunkt  $M$  ist die inverse Figur eine Gerade  $g$ , die Punkt  $D$  beschreibt. Der Inversor kann deshalb als *Geradföhrung* verwendet werden.

IV. Die analoge Aufgabe, einen Punkt im Raum so zu führen, daß er sich stets in einer Ebene bewegt, wird durch einen räuml. Mechanismus gelöst, der *Planigraph* gen. wird.

geltende Stelle  $\nearrow$  Fehler I.

gemeine Brüche  $\nearrow$  Brüche I.

gemischte Probleme  $\nearrow$  parabolische Differentialgleichung II.

gemischter Typ  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung III.

gemischte Strategie  $\nearrow$  Spieltheorie II.

gemischte Zahl  $\nearrow$  Brüche I.3.

gemischt-periodischer Dezimalbruch  $\nearrow$  Brüche II.3.  
gemischtquadratische Gleichung  $\nearrow$  quadratische Gleichung III.

Generalisator  $\nearrow$  Prädikatenlogik I.

Generalisierung, hintere, vordere  $\nearrow$  Prädikatenkalkül IV.

Gentzen, Gerhard, geb. 24. 11. 1909 Greifswald, gest. 4. 8. 1945 Prag. — Nach seinem Studium an mehreren Universitäten promovierte G. 1933 bei H. WEYL und arbeitete 1939/44 als Assistent bei D. HILBERT. Im Rahmen des Hilbertschen Programms zur *Formalisierung der Mathematik* bewies er 1936 die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie mit transfiniten Induktion. Weitere Arbeiten veröffentlichte G. über das log. Schließen und zur Stufenlogik.

Geodäsie, *Erdvermessung, Vermessungskunde*: Lehre von der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten auf der Erde und von ihrer Festlegung in Koordinatenverzeichnissen sowie von ihrer Darstellung in Plänen und Karten. In der *höheren G.* werden durch astronom. Messungen Festpunkte auf der Erde und die Richtungen zwischen ihnen bestimmt. Ihre Koordinaten werden bezogen auf die Erde als Kugel oder als Rotationsellipsoid ( $\nearrow$  Erdellipsoid). Die Gestalt dieser Bezugsflächen wird durch Gradmessungen bestimmt, bei denen aus kettenförmigen Dreiecksnetzen ( $\nearrow$  Triangulation) Längen auf der Erde gemessen werden ( $\nearrow$  innere Geometrie). Außer dieser *Erdmessung* gehört die *Landesvermessung* zur höheren G., die als Grundlage für die topograph. Landesaufnahme ein Dreiecksnetz ( $\nearrow$  Triangulation) und ein Höhennetz ( $\nearrow$  Höhenmessung) schafft. In der *niederen G.*, der *Feldmesskunde* oder *Feldvermessung*, werden die zu vermessenden Punkte auf eine Ebene bezogen; wegen der Erdkrümmung kann sie nur in einem Gebiet von etwa 100 km<sup>2</sup> angewendet werden ( $\nearrow$  ebene

Trigonometrie). Zu ihr gehören *Katasteraufnahmen* zur rechtsgültigen Abgrenzung von Gebietsansprüchen und *Ingenieurmessungen*, die für die Planung und für die Durchführung von Verkehrs- und Industrieanlagen sowie für den Städtebau notwendig sind.

**geodätische Krümmung** ↗ Krümmung I.

**geodätische Linie**, *Geodätische*: eine auf einer Fläche  $F$  gelegene Kurve, deren geodät. Krümmung  $\kappa_g$  identisch verschwindet, z. B. ein Großkreis einer Kugel. Gibt es unter allen Kurven, die auf der Fläche  $F$  verlaufen und zwei ihrer Punkte  $P_1$  und  $P_2$  verbinden, eine kleinste Länge, so heißt sie eine *Kürzeste*. Eine Kürzeste ist stets ein Stück einer g. L. In der Ebene z. B. ist die Strecke zwischen je zwei Punkten die einzige Kürzeste, die sie verbindet. Auf einer Fläche kann es jedoch Punkte geben, die nicht durch eine Kürzeste verbunden werden können; auf einer Kugeloberfläche z. B. wird ein Großkreis durch zwei seiner Punkte in zwei Kreisbögen zerlegt, die i. allg. aber verschiedene Längen haben, so daß nur der kleinere eine Kürzeste ist. S. a. Variationsrechnung IV.; Parallelverschiebung.

**geographische Koordinaten** ↗ Koordinatensystem V., ↗ Triangulation.

**geographische Meile** ↗ Strecke V.

**Geoid** [griech.]: Bezeichnung für die Gestalt des Erdkörpers ohne Rücksicht auf das Bodenrelief. Begrenzt wird das G. durch eine Fläche, die überall senkrecht zur Lotrichtung steht und auf den Ozeanen mit der mittleren Wasseroberfläche zusammenfällt (↗ Erdellipsoid).

**Geometrie der Zahlen**: von Hermann MINKOWSKI (1864—1909) aus der Theorie der konvexen Körper entwickelte Methode, Probleme der Zahlentheorie mit geometr. und analyt. Hilfsmitteln zu behandeln. Es bestehen Zusammenhänge zur *Theorie der Lagerungen*. Ein typ. Beispiel dieser Theorie ist die Aufgabe, möglichst viele Pfennigstücke nebeneinander auf einem sehr großen Tisch anzuordnen. Als Lösung ergibt sich, daß jeder Pfennig sechs andere berühren muß. Die analoge Frage nach der *dichtesten Kugelpackung* im Raum ist bis jetzt noch ungelöst.

Ein zentraler Begriff in der G. d. Z. ist der Begriff des *Gitterpunktes*. Im reellen  $n$ -dimensionalen Raum ist dies ein Punkt  $P = (x_1, \dots, x_n)$  mit ganzzahligen Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Die Gesamtheit der Gitterpunkte bildet ein *Punktgitter*, oft auch als *Parallelgitter* bezeichnet. Im Raum von drei Dimensionen erhält man z. B. ein Punktgitter, wenn man drei durch einen Punkt  $O$  gehende, nicht in einer Ebene gelegene Geraden als  $x, y, z$ -Koordinatenachsen mit dem gemeinsamen Nullpunkt  $O$  wählt, auf den Achsen Maßstäbe beliebig annimmt und jedem ganzzahligen Wertesystem  $p, q, r$  den Punkt mit den Koordinaten  $x = p, y = q, z = r$  zuordnet. Ein solches Gitter kann auch festgelegt werden durch vier beliebige, nicht in einer Ebene gelegene Punkte  $O, A, B, C$ , denen man die Koordinaten  $O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1)$  zuschreibt.

Ein fundamentaler Satz der G. d. Z. ist der *Gitterpunktsatz von Minkowski*: Jeder konvexe Körper des

$n$ -dimensionalen euklid. Raumes mit dem Gitterpunkt  $O$  als Mittelpunkt und einem Volumen  $V \geq 2^n$  enthält außer  $O$  noch mindestens einen Gitterpunkt, wegen der Symmetrie sogar mindestens zwei, in seinem Inneren oder auf seinem Rand. Ist  $V > 2^n$ , so gibt es außer  $O$  noch mindestens zwei Gitterpunkte im Inneren des konvexen Körpers.

**geometrische Figur**: jede Punktmenge des dreidimensionalen Raumes; sie heißt *linear*, wenn alle ihre Punkte auf einer Geraden liegen, ihre Punkte werden *kollineare Punkte* gen. Jede g. F. heißt *eben*, wenn alle ihre Punkte in ein und derselben Ebene liegen, ihre Punkte heißen *komplanar*. Geradenbüschel, Dreiecke, Kreise sind Beispiele ebener g. F. Jede nichtlineare und nicht ebene g. F. heißt *räuml.* g. F., z. B. Geradenbündel, Tetraeder, Pyramide, Zylinder. Das Zeichnen einer g. F., ausgehend von gegebenen Punkten und mit Hilfe bestimmter Konstruktionsmittel, nennt man *geometr. Konstruktion*. Diese sind in der Technik und in vielen Bereichen der Volkswirtschaft wichtig. Zu ihrer Ausführung benutzt man neben den übl. Zeichengeräten, wie Lineal, Zeichendreieck, Zirkel, Winkelmesser, auch zahlreiche, z. T. komplizierte Präzisionsinstrumente, z. B. Zeichenmaschinen. Mathematisch interessant sind *Konstruktionen im klass. Sinne*, zu denen nur Zirkel und Lineal als Hilfsmittel zugelassen sind. Die Theorie der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, welche Punkte aus endlich vielen gegebenen Punkten der Ebene mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Um diese Aussagen gewinnen zu können, werden Sätze aus der Algebra, insbes. der Körpertheorie, herangezogen. In diesem Sinne lösbar sind z. B. die als *Grundkonstruktionen* bezeichneten Aufgaben, eine Strecke oder einen Winkel zu halbieren (↗ Winkelkonstruktion), eine Senkrechte zu errichten, ein Lot zu fällen oder eine Parallele zu einer Geraden zu zeichnen. Bekannte Beispiele, die mit Zirkel und Lineal allein nicht lösbar sind, sind die *Dreiteilung* oder *Trisektion* eines beliebigen Winkels, die *Quadratur des Kreises* und die *Verdoppelung eines Würfels*. In der projektiven Geometrie, die den euklid. Abstandsbegriff nicht kennt, ist nur das Lineal als Konstruktionsmittel zugelassen, z. B. sind in dieser Geometrie vier harmon. Punkte konstruierbar (↗ vollständiges Viereck).

**geometrische Reihe**: Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$  aus den Gliedern einer geometr. Zahlenfolge. Die  $n$ -te Partialsumme  $s_n$  der g. R. ergibt sich zu  $s_n = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a(1 - q^n)/(1 - q)$  für  $q \neq 1$ . Bezeichnet  $a$  das *Anfangsglied*,  $q$  den *Quotienten* und  $a_n = aq^{n-1}$  das  $n$ -te Glied einer g. R., so lassen sich von den fünf Größen  $a, q, a_n, s_n$  und  $n$  bei Vorgabe von drei Größen die beiden restl. aus den Formeln  $s_n = a(1 - q^n)/(1 - q)$  und  $a_n = aq^{n-1}$  berechnen. Sind z. B.  $s_n = 20767, a = 19$  und  $a_n = 13851$  bekannt, so folgt aus  $a_n = aq^{n-1}$  der Ausdruck  $q^{n-1} = 729$  oder  $q^n = 729 q$ . Dies in  $s_n = \frac{a(1 - q^n)}{(1 - q)}$

eingesetzt, liefert  $(1 - q) 20767 = 19(1 - 729q)$ , d. h.,  $q = 3$ , und dann  $(n - 1) \ln 3 = \ln 729$ , d. h.,  $n = 7$ .

Die unendl. g. R.  $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$  ist für  $|q| < 1$  konvergent und hat die Summe  $a/(1 - q)$ , wie sich durch Ermittlung des Grenzwertes der Partialsummenfolge  $(s_n)$  nach (1) ergibt.

$$(1) \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n aq^{k-1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \right) \\ = \frac{a}{1 - q}$$

Für  $|q| > 1$ , d. h. für  $q < -1$  und  $q > 1$ , ist die unendl. g. R. divergent, da ihre Partialsummenfolge mit  $s_n \geq aq^{n-1}$  für die betrachteten Werte von  $q$  unbeschränkt und daher divergent ist. Die Reihe  $7 + 7/10 + 7/100 + 7/1000 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} 7/10^{k-1}$  ist z. B. eine unendl. g. R. mit  $0 < q = 1/10 < 1$  und  $a = 7$ . Diese Reihe ist konvergent, und es gilt (2).

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 7/10^{k-1} = \frac{7}{1 - 1/10} = 70/9$$

**geometrischer Ort:** Menge aller Punkte, die einer geometr. Bedingung genügen, z. B. ist der g. O. aller Punkte einer Ebene, die von zweien ihrer Punkte  $A$  und  $B$  den gleichen Abstand haben, die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $AB$ ; im Raume ist es die Ebene, die die Strecke  $AB$  halbiert und auf ihr senkrecht steht. Ist der g. O. eine ebene Kurve, so wird diese auch *Bestimmungslinie* gen. Im Raume wird die Kugel­fläche als g. O. definiert. Als g. O. können auch aufgefaßt werden die Winkelhalbierende ( $\nearrow$  Winkelhalbierende I.), der Kreis ( $\nearrow$  Thaleskreis,  $\nearrow$  Ortskreis), die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel. Für geometr. Konstruktionen sind die g. Örter wichtige Hilfsmittel, die Lage gesuchter Punkte als Schnittpunkt g. Örter festzulegen, die sich aus bekannten Stücken ergeben ( $\nearrow$  Dreiecks­konstruktion II.).

S. a. analytische Geometrie.

**geometrisches Mittel**  $\nearrow$  Mittelwerte IV.

**geometrische Zahlenfolge:** Zahlenfolge  $(a_n)$  mit  $a_1 \neq 0$ , bei der der Quotient  $q = a_{n+1}/a_n$  zweier benachbarter Glieder konstant und verschieden von 0 und 1 ist. Ist  $a_1 = a \neq 0$  das *Anfangsglied* der g. Z. mit  $q \neq 0$  und  $q \neq 1$ , so gilt  $a_2 = aq, a_3 = aq^2, \dots, a_n = aq^{n-1}$ . Für die Zahlenfolge  $3, -3^2/2, 3^3/4, -3^3/8, 3^3/16, \dots$  z. B. gilt  $a = 3, q = -1/2$ , und das allgemeine Glied ist  $a_n = 3 \cdot (-1/2)^{n-1}$ ; für die Folge  $5, 5e, 5e^2, \dots$  gilt  $a = 5, q = e$ , und das allgemeine Glied ist  $a_n = 5e^{n-1}$ . Ist  $q < 0$ , so ist die g. Z. alternierend ( $\nearrow$  Zahlenfolge). Für  $|q| > 1$  erhält man unbeschränkte und für  $|q| < 1$  beschränkte Zahlenfolgen ( $\nearrow$  Zahlenfolge). Die Bezeichnung »geometrisch« für diese Zahlenfolgen deutet die Eigenschaft an, daß bis auf das Vorzeichen jedes Glied  $a_k$  für  $k \geq 2$  das geometr. Mittel seiner beiden Nachbar-

glieder ist:

$$\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}} = \sqrt{aq^{k-2}aq^k} = |aq^{k-1}| = |a_k|.$$

Für die zu einer g. Z. gehörigen Summenfolge  $(s_n)$  mit  $s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$  erhält man aus  $s_n - qs_n = a - aq^n$  das allgemeine Glied  $s_n = a(1 - q^n)/(1 - q)$  der Summenfolge für  $q \neq 1$ . Mit  $a = 3$  und  $q = -1/2$  erhält man z. B. (1).

$$(1) \quad s_n = 3 - 3/2 + 3/4 - 3/8 + 3/16 - \dots + 3(-1/2)^{n-1} \\ = 3 \cdot \frac{1 - (-1/2)^n}{1 + 1/2} = 2(1 - (-1/2)^n)$$

Mit  $a = 5$  und  $q = e$  gilt (2).

$$(2) \quad s_n = 5 + 5e + 5e^2 + \dots + 5e^{n-1} \\ = 5(1 - e^n)/(1 - e)$$

Zwischen zwei Zahlen  $a_k$  und  $a_{k+1} = a_kq$  einer g. Z. lassen sich  $m$  Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_m$  so *interpolieren*, daß  $a_k, b_1, \dots, b_m, a_{k+1}$  eine endl. g. Z. bildet. Ist  $a_k$  das erste,  $a_{k+1}$  das letzte Glied der einzubeschreibenden endl. g. Z. und  $\bar{q}$  deren Quotient, so muß  $a_{k+1} = a_kq = a_k\bar{q}^{m+1}$ , d. h.  $\bar{q}^{m+1} = q$  sein. Es ist  $a_k, a_k\bar{q}, a_k\bar{q}^2, \dots, a_k\bar{q}^m, a_{k+1}$  die durch Interpolation entstandene g. Z. Will man zwischen je zwei Gliedern der g. Z. mit dem allgemeinen Glied  $a_n = 3(-1/2)^{n-1}$  jeweils zwei weitere Glieder einfügen, so daß die entstehende Zahlenfolge wieder eine g. Z. wird, muß als neuer Quotient  $\bar{q}$  mit  $\bar{q}^3 = -1/2$ , also  $\bar{q} = -1/\sqrt[3]{2}$  gewählt werden, und man erhält (3).

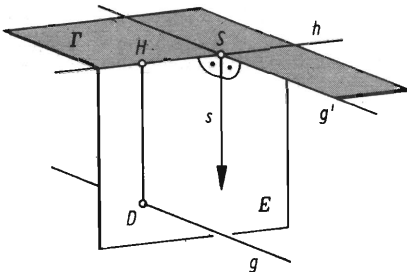
$$(3) \quad 3, \frac{-3}{\sqrt[3]{2}}, \frac{+3}{\sqrt[3]{4}}, \frac{-3}{2}, \frac{+3}{2\sqrt[3]{2}}, \frac{-3}{2\sqrt[3]{4}}, \frac{+3}{4}, \dots$$

Eine g. Z. mit  $|q| < 1$  ist *konvergent* ( $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge) und hat den Grenzwert Null:  $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^{n-1} = 0$ . Ist  $|q| > 1$ , so *divergiert* die g. Z., sie ist für  $q > 1$  bestimmt divergent und für  $q < -1$  unbestimmt divergent ( $\nearrow$  Divergenz einer Zahlenfolge). Die g. Z. mit dem allgemeinen Glied  $a_n = 3(-1/2)^{n-1}$  z. B. konvergiert gegen Null,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3(-1/2)^{n-1} = 0$ , und die g. Z.  $a_n = 5e^{n-1}$  ist für  $e > 1$  bestimmt divergent, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5e^{n-1} = \infty$ .

**geordnetes Paar:** *Mengenlehre* eine aus den Elementen  $a$  und  $b$  gebildete Menge, durch die  $a, b$  und deren Reihenfolge festgelegt sind. Zwei g. P.  $(a, b)$  und  $(c, d)$  sind genau dann einander gleich, wenn sie komponentenweise übereinstimmen, d. h., wenn  $a = c$  und  $b = d$ . Dann sind  $(a, b)$  und  $(b, a)$  verschieden, falls  $a \neq b$ . Im Unterschied dazu gilt für eine Zweiermenge  $\{a, b\}$  stets  $\{a, b\} = \{b, a\}$ . Definiert man nach dem poln. Mathematiker KURATOWSKI das g. P.  $(a, b)$  als die Menge  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ , so läßt sich nachweisen, daß die Bedingung für die Gleichheit zweier geordneter Paare erfüllt ist. Eine Verallgemeinerung stellt der Begriff des *geordneten  $n$ -Tupels*  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  dar. In bezug auf ein dreidimensionales kartes. Koordinatensystem z. B. bedeutet in dem *Tripel*  $(a_1, a_2, a_3)$  das Element  $a_1$

stets die  $x$ -Koordinate,  $a_2$  die  $y$ -Koordinate und  $a_3$  die  $z$ -Koordinate. Für  $n \geq 2$  ist  $(a_1, \dots, a_{n+1})$  mittels des Begriffes des g. P.es rekursiv erklärt durch  $(a_1, \dots, a_{n+1}) = ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1})$ . S. a. kartesisches Produkt; Klammern III.

**Gerade:** Grundelement der Geometrie, das durch zwei voneinander verschiedene Punkte eindeutig bestimmt ist. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte  $A$  und  $B$  liegt auf der Geraden durch  $A$  und  $B$ . Zwei verschiedene G.n in einer Ebene sind einander *parallel* oder haben einen Punkt, ihren *Schnittpunkt*, gemeinsam. Zwei verschiedene G.n im Raum bestimmen eine Ebene, falls sie sich schneiden oder falls sie parallel zueinander sind; trifft keiner dieser Fälle zu, so heißen sie *windschief*. Der *Abstand* zweier Parallelen ist die Länge jeder Strecke, die beide G.n miteinander verbindet und auf ihnen senkrecht steht. Sie kann in der Ebene, die durch die zwei Parallelen bestimmt ist, konstruiert werden als das Lot von einem beliebigen Punkt der einen G.n auf die andere ( $\nearrow$  Mittelsenkrechte, Lot). Der Abstand zweier windschiefer Geraden  $g$  und  $h$  ist die Länge der Strecke, die  $g$  und  $h$  miteinander verbindet und auf beiden senkrecht steht. Es gibt genau eine solche Strecke. Sie läßt sich konstruieren



Abstand  $|DH|$  der windschiefen Geraden  $g$  und  $h$

(Abb.), indem man eine Parallele  $g'$  zu  $g$  so legt, daß sie die G.  $h$  in einem beliebigen Punkte  $S$  schneidet. Eine Senkrechte  $s$  in  $S$  auf der durch  $g'$  und  $h$  bestimmten Ebene  $\Gamma$  steht senkrecht zu  $g'$  und zu  $h$ . Die durch  $h$  und  $s$  bestimmte Ebene  $E$  wird von  $g$  in  $D$  durchstoßen. Die Parallele durch  $D$  zu  $s$  schneidet  $h$  in  $H$ .  $|DH|$  ist der gesuchte Abstand. S. a. Ebene, gerade Funktion  $\nearrow$  Funktion VIII.,  $\nearrow$  Potenzreihe VI.,  $\nearrow$  Winkelfunktion II.

**Geradenbündel**  $\nearrow$  projektive Gebilde.

**Geradenbüschel**  $\nearrow$  duale Gebilde,  $\nearrow$  projektive Gebilde,  $\nearrow$  lineare Funktion I.

**Geradengleichung:** I. Gleichung in den Koordinaten eines Koordinatensystems der Ebene, des drei- oder des  $n$ -dimensionalen Raumes  $R_n$ , die von den Koordinaten aller Punkte erfüllt wird, die auf einer Geraden liegen, und nur von diesen; dabei sind zur vollständigen Beschreibung einer Geraden in der Ebene eine lineare G., im Raume zwei und im  $R_n$  ( $n - 1$ )

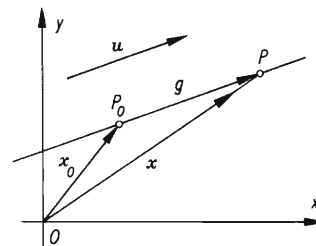
lineare G.en notwendig. Jede Gerade in einer Ebene mit den kartes. Koordinaten  $x, y$  wird durch eine *lineare Gleichung* (1), *allgemeine G.* genannt, mit

$$(1) \quad Ax + By + C = 0$$

reellen Koeffizienten dargestellt, in der  $A$  und  $B$  nicht zugleich Null sind, und jede solche Gleichung stellt eine Gerade dar. Ist  $C = 0$  in Gleichung (1), so geht die Gerade durch den Koordinatenursprung, ist  $A = 0$  bzw.  $B = 0$ , so ist die Gerade parallel zur  $x$ - bzw. zur  $y$ -Achse. Die Gleichungen  $y = 0$  bzw.  $x = 0$  stellen die  $x$ - bzw. die  $y$ -Achse dar. Eine allgemeine Lösung der  $\nearrow$  linearen Gleichung (1) hat die Form (2), die *Parameterdarstellung* oder *Parameterdarstellung* der Geraden heißt. In ihr kann  $u_x = B, u_y = -A$  gewählt werden,  $x_0, y_0$  sind die Koordinaten eines Punktes der Geraden, und  $\lambda$  mit

$$(2) \quad x = x_0 + \lambda u_x, \quad y = y_0 + \lambda u_y$$

die *Parameterdarstellung* der Geraden heißt. In ihr kann  $u_x = B, u_y = -A$  gewählt werden,  $x_0, y_0$  sind die Koordinaten eines Punktes der Geraden, und  $\lambda$  mit



Geradengleichung. Abb. 1:  $x = x_0 + \lambda u$ ; Parameterdarstellung der Geraden durch  $P_0(x_0, y_0)$  mit dem Richtungsvektor  $u$

$-\infty < \lambda < \infty$  ist der Parameter. Die Parameterdarstellung (2) lautet vektoriell (3) (Abb. 1). Dabei sind  $x = x_i + y_j$  bzw.  $x_0 = x_0i + y_0j$  die Orts-

$$(3) \quad x = x_0 + \lambda u$$

vektoren eines beliebigen Punktes  $P$  bzw. des festen Punktes  $P_0$  der Geraden, und  $u = u_x i + u_y j$  ist ein *Richtungsvektor* der Geraden. Er ist parallel zu der Geraden, oder, wie man auch sagt, liegt in der Geraden.

Aus (2) erhält man durch Elimination von  $\lambda$  die *parameterfreie* Gleichung  $u_y x - u_x y + (u_x y_0 - u_y x_0) = 0$ , d. h., wieder eine G. der Form (1).

II. Eine Gleichung für die Gerade durch zwei verschiedene Punkte  $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1)$  ist (4), die

$$(4) \quad (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y + (x_0 y_1 - x_1 y_0) = 0$$

auch in Determinantenform (5) geschrieben wer-

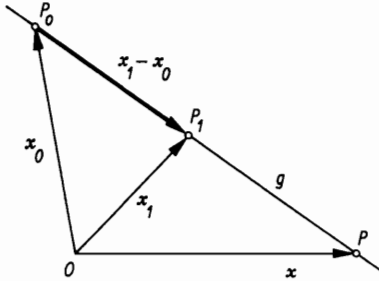
$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

den kann. Man spricht von der *Zweipunktegleichung* der Geraden (Abb. 2). Drei Punkte  $P_i(x_i, y_i)$  mit  $i = 0, 1, 2$ , sind *kollinear*, d. h., sie liegen auf einer Geraden, wenn für  $x = x_2, y = y_2$  die Gleichung (5) erfüllt ist. Mit den Ortsvektoren  $x_i = x_i i + y_i j$  für  $i = 0, 1$  der Punkte  $P_0, P_1$  ist  $x_1 - x_0$  ein *Richtungsvektor* der Geraden durch  $P_0, P_1$ . Danach ergibt sich die Parameterdarstellung  $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$ ,

$y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0)$  als G. oder (6) in vektorieller Schreibweise. Eine spezielle Form der allgemeinen G. ist die Achsenabschnittsgleichung (7) für eine

$$(6) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$

$$(7) \quad x/a + y/b = 1$$



Geradengleichung. Abb. 2: Zur Zwei-Punktgleichung der Geraden  $g$

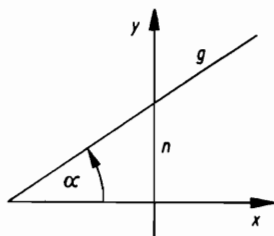
Gerade, die die  $x$ -Achse in  $x = a \neq 0$  und die  $y$ -Achse in  $y = b \neq 0$  schneidet. Geraden, die durch den Ursprung gehen oder parallel zur  $x$ -Achse oder zur  $y$ -Achse sind, können nicht durch eine Achsenabschnittsgleichung dargestellt werden.

III. Zwei G.en  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  und  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  stellen genau dann *parallele Geraden* dar, wenn die Vektoren  $A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j}$  und  $A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j}$  linear abhängig sind, wenn  $A_1B_2 = A_2B_1$  ist. Einander nicht parallele Geraden schneiden sich in genau einem Punkt, und der *Schnittpunkt*  $P_0$  hat die Koordinaten

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y_0 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Sind zwei einander nicht parallele Geraden, die eine durch die allgemeine G. (1) und die andere durch die Parameterdarstellung (2), gegeben, so erhält man durch Einsetzen von (2) in (1)  $A(x_0 + \lambda u_x) + B(y_0 + \lambda u_y) + C = 0$ ; man berechnet daraus die Lösung  $\lambda_0$  und erhält  $P_0$  mit  $\lambda = \lambda_0$  aus (2). Die bisher bzgl. der *kartes. Koordinaten*  $x, y$  gemachten Aussagen bleiben richtig, wenn man beliebige *Parallelkoordinaten* zugrunde legt.

Speziell bei *kartes. Koordinaten* ist es sinnvoll, G.en mit dem *Anstieg* der Geraden sowie mit einem *Stellungsvektor* der Geraden in Verbindung zu bringen.



Geradengleichung. Abb. 3: Zur Punkt-Richtungsgleichung  $y = mx + n$ , Anstieg  $m = \tan \alpha$

gen. Für alle die Geraden, die nicht parallel zur  $y$ -Achse sind, kann man die G. (1) nach  $y$  auflösen zu (8) (Abb. 3). Die durch (8) dargestellte Gerade

$$(8) \quad y = mx + n$$

schneidet die  $y$ -Achse in  $y = n$ , und es ist  $m = \tan \alpha$ . Dabei ist  $\alpha$  die Größe des Winkels mit  $0 < \alpha < \pi$ ,  $\alpha \neq \pi/2$ , um den man die  $x$ -Achse im *positiven Drehsinn* ( $\nearrow$  *kartesische Koordinaten*) der  $x, y$ -Ebene um ihren Schnittpunkt mit der Geraden drehen muß, um sie mit der Geraden zur Dekkung zu bringen, bzw.  $\alpha = 0$ , wenn die Gerade die  $x$ -Achse nicht schneidet oder gleich der  $x$ -Achse ist. Man nennt  $m = \tan \alpha$  den *Anstieg* oder auch die *Steigung* dieser Geraden. Die Gerade, die den Punkt  $P_1(x_1, y_1)$  enthält und die Steigung  $m$  hat, wird dargestellt durch die

$$\text{Punktrichtungsgleichung } y - y_1 = m(x - x_1).$$

IV. Sind  $P_0(x_0, y_0)$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$  ein Punkt und  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$  ein *Stellungsvektor* einer Geraden, d. h. ein Vektor, der *senkrecht* auf der Geraden steht, so gibt (9) mit Hilfe des *Skalarprodukts* eine vektorielle Gleichung der Geraden

$$(9) \quad \mathbf{N}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

den in der Ebene. In Koordinaten geschrieben hat (9) die Form  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ . Setzt man  $Ax_0 + By_0 = -C$ , so erhält man die allgemeine G. (1). Aus dieser G.  $Ax + By + C = 0$  kann man daher wieder einen Stellungsvektor  $A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$  ablesen. Wird der Stellungsvektor durch *Normierung* auf die Länge 1 gebracht, so erhält man die *Hessesche Normalform* (10a) bzw. (10b) oder mit  $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$  die Vektorformen (10c) bzw. (10d) (Abb. 4).

$$(10a) \quad \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (10c) \quad \mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

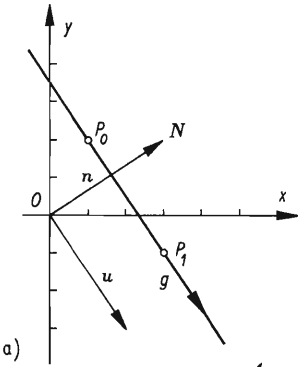
$$(10b) \quad \frac{-Ax - By - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (10d) \quad -\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

*Beispiel:* Die Gerade durch die Punkte  $P_0(1, 2)$  und  $P_1(3, -1)$  der Ebene hat nach (4) eine Gleichung  $3x + 2y - 7 = 0$  oder nach (6) eine Parameterdarstellung  $x = 1 + 2\lambda, y = 2 - 3\lambda$ . Ein Stellungsvektor der Geraden ist  $\mathbf{N} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ , ein Richtungsvektor ist  $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ . Nach  $y$  aufgelöst entsteht  $y = -3x/2 + 7/2$ , die Steigung ist  $\tan \alpha = -3/2$ . Eine allgemeine Lösung von  $3x + 2y - 7 = 0$  ist z. B.  $x = 7/3 - 2\lambda/3, y = \lambda$ ; dies ist auch eine Parameterdarstellung dieser Geraden.

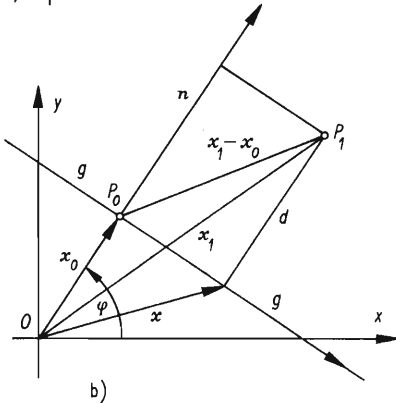
Die geometr. Veranschaulichung der *Hesseschen Normalform* wird ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit besonders einfach, wenn als Punkt  $P_0$  der Fußpunkt des von  $O$  auf die Gerade  $g$  gefällten Lotes gewählt wird. Der Unterschied der G.en (10a) und (10b) bedeutet geometrisch, daß der Stellungsvektor  $\mathbf{n}$  oder  $-\mathbf{n}$  der Geraden zugeordnet wird. Ist dies entschieden, so hat jeder Punkt  $P_1$  der Ebene von der Geraden  $g$  den *Abstand* (11).

$$(11) \quad d = \mathbf{n}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$$





a) Bild der durch  $3x + 2y - 7 = 0$  bestimmten Geraden;



Geradengleichung. Abb. 4: Zur Hesseschen Normalform  $n(x - x_0) = 0$ ;  
b) zur Berechnung des Abstandes  $d$

Diese Gleichung gilt auch, wenn  $P_0$  ein beliebiger Punkt der Geraden ist. Der Abstand  $d$  ist positiv, wenn  $P_1$  in der Halbebene liegt, in die der Stellungsvektor  $n$  zeigt. Für Geraden, die nicht durch den Koordinatenursprung  $O$  gehen, wählt man meist die Richtung von  $n$  so, daß der Abstand  $d$  des Ursprungs  $O$  von  $g$  negativ wird und bezeichnet ihn mit  $-p < 0$ , d. h.  $p > 0$ . Damit hat die Gerade eine Orientierung, sie hat einen Durchlaufsinne durch die Forderung  $|\sphericalangle(g, n)| = +\pi/2$ . Für  $|\sphericalangle(x, n)| = \varphi$  ist  $n = i \cos \varphi + j \sin \varphi$  und die Hessesche Normalform lautet (12).

$$(12) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

*Beispiel:* Von der durch  $6x - 8y + 20 = 0$  gegebenen Geraden ist  $N = 6i - 8j$  ein Stellungsvektor vom Betrag  $|N| = 10$ . Durch Normieren ergibt sich für die Hessesche Normalform  $3x/5 - 4y/5 + 2 = 0$  oder  $-3x/5 + 4y/5 - 2 = 0$ . Man entscheidet sich für  $n = -3i/5 + 4j/5$ , weil sich dann für den Ursprung  $(0, 0)$  der Abstand  $d = -2$ , d. h.  $p = 2$ , ergibt. Der Punkt  $P_1(-2, 6)$  hat den Abstand  $d_1 = -3(-2)/5 + 4 \cdot 6/5 - 2 = +4$ . Er liegt in der Halbebene, die den Ursprung nicht enthält.

Zur Hesseschen Normalform s. a. Ebenengleichung. V. Die vektoriellen Darstellungen (3) und (6) lassen

sich auf den Raum  $R_3$  und auch auf den  $R_n$  übertragen. In den G.en (3)  $x = x_0 + \lambda u$  und (6)  $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$  können die Vektoren  $x, x_0$  und  $x_1$  Ortsvektoren und  $u$  einen Richtungsvektor in einem Raum von 3 oder  $n$  Dimensionen darstellen, und  $\lambda$  mit  $-\infty < \lambda < +\infty$  ist wieder der Parameter. Im  $R_3$  ist z. B. zu setzen  $x = xi + yj + zk$ ,  $x_i = x_i i + y_i j + z_i k$  für  $i = 0, 1$  und  $u = u_x i + u_y j + u_z k$ . In Koordinaten geschrieben ist (13) eine Parameterdarstellung der durch den Punkt  $P_0$  und den

$$(13) \quad x = x_0 + \lambda u_x, y = y_0 + \lambda u_y, z = z_0 + \lambda u_z$$

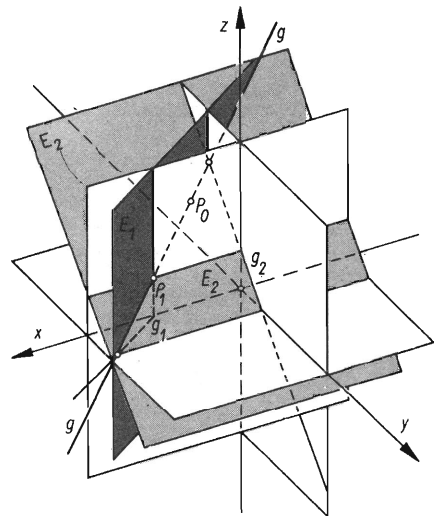
Richtungsvektor  $u$  gegebenen Geraden im Raum, und die durch  $P_0, P_1$  im Raum gegebene Gerade hat die G. (14). Eliminiert man  $\lambda$  aus einer der G.en (13)

$$(14) \quad x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0), y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0), z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)$$

oder (14), so erhält man zwei linear unabhängige Gleichungen  $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$  für  $i = 1, 2$ . Im Raum sind somit zur parameterfreien Beschreibung einer Geraden zwei lineare Gleichungen notwendig. Jede von ihnen stellt eine Ebene dar, und die Gerade ist die Schnittgerade dieser Ebenen ( $\sphericalangle$  Ebenengleichung III.). Eine allgemeine Lösung dieser beiden Gleichungen ist wieder eine Parameterdarstellung der betreffenden Geraden. Für eine durch (3)  $x = x_0 + \lambda u$  im Raum dargestellte Gerade erhält man mit Hilfe des vektoriellen Produkts die Plücker'sche G. (15).

$$(15) \quad (x - x_0) \times u = o$$

Eine Kollinearitätsbedingung, die sowohl für Punkte der Ebene als auch für Punkte des Raums gilt, gibt es in Vektorform: Drei Punkte  $P_i$  mit Ortsvektoren



Geradengleichung. Abb. 5: Gerade durch die Punkte  $P_0(1, -1, 2)$  und  $P_1(3, 0, 1)$  als Schnitt der Ebenen  $E_1: x - 2y - 3 = 0$  und  $E_2: y + z - 1 = 0$

$x_i$  für  $i = 1, 2, 3$  liegen genau dann auf einer Geraden, wenn es drei Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  gibt, die nicht alle Null sind, so daß  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  erfüllt sind. *Beispiel:* Die Gerade durch  $P_0(1, -1, 2), P_1(3, 0, 1)$  im Raum hat nach (14) eine Parameterdarstellung  $x = 1 + 2\lambda, y = -1 + \lambda, z = 2 - \lambda$ . Ein Richtungsvektor der Geraden ist  $u = 2i + j - k$ . Elimination von  $\lambda$  gibt mit  $\lambda = y + 1$  die zwei Gleichungen  $x - 2y - 3 = 0, y + z - 1 = 0$  für die Gerade (Abb. 5). Eine allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems und damit auch eine Parameterdarstellung dieser Geraden ist z. B.  $x = 5 - 2\lambda, y = 1 - \lambda, z = \lambda$ . Hieraus ist auch ein Richtungsvektor  $u' = -2i - j + k$  der Geraden abzulesen.

Ordnet man einen einmal fest gewählten Richtungsvektor  $u$ , wie er in (3) oder (6) auftritt, der durch diese Gleichungen dargestellten Geraden zu, so ist damit eine Orientierung der Geraden gegeben; der Durchlaufsinne von  $u$  bestimmt einen Durchlaufsinne der Geraden, man hat die Gerade orientiert.

**Geradenpaar** ↗ Kurve zweiter Ordnung I.  
**gerader Körper** ↗ Kegel I., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I.

**Gerädführung** ↗ Gelenkmechanismus III.  
**Gerüst** ↗ Baum.

**Gesamtmittel** ↗ Varianzanalyse.  
**Gesamt-Pufferzeit** ↗ Netzplantechnik III.  
**Gesamtschrittverfahren** ↗ lineares Gleichungssystem VII.1.

**Gesamtvarianz** ↗ Varianzanalyse.  
**Geschlecht einer algebraischen Kurve:** ↗ algebraische Geometrie I.

**Geschlecht einer Fläche** ↗ Krümmung I.

**Gesetze der großen Zahl:** I. Aussagen über das Konvergenzverhalten der arithmet. Mittel  $\bar{X}^{(n)} = (X_1 + \dots + X_n)/n$  einer Folge  $X_k$  von Zufallsgrößen. Man sagt, eine Folge  $X_1, X_2, \dots$  von Zufallsgrößen genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahl, wenn für beliebiges  $\epsilon > 0$  die Beziehung (1) erfüllt ist. Das bedeutet, daß die gemäß (2) definierten

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k \right| < \epsilon \right) = 1$$

Zufallsgrößen  $Z_n$  in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergieren (↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III.).

$$(2) Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k$$

Ein Beispiel für ein schwaches Gesetz der großen Zahl ist der Satz von Tschebyschow: Ist  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge paarweise unabhängiger Zufallsgrößen (↗ Unabhängigkeit von Zufallsgrößen), deren Dispersionen (↗ Streuung) für alle  $k$  gleichmäßig beschränkt sind (d. h.  $D^2 X_k \leq C$ ), so genügt diese Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahl.

**II. Folgerungen aus diesem Satz.**

**II.1. Satz von Bernoulli:** Ist  $m$  die Anzahl des Eintretens eines Ereignisses  $A$  in  $n$  unabhängigen Versuchen und hat  $A$  in jedem dieser Versuche die Wahrscheinlichkeit  $p$ , so strebt die relative Häufigkeit

$H_n(A) := m/n$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $p$ , d. h., es gilt für beliebiges  $\epsilon > 0$  die Beziehung (3).

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} P(|H_n(A) - p| < \epsilon) = 1$$

In der Tat ist in  $m = X_1 + \dots + X_n$  jedes  $X_i = 0$ , falls  $A$  im  $i$ -ten Versuch nicht eintritt, aber  $X_i = 1$ , falls  $A$  im  $i$ -ten Versuch eintritt. Danach hat man  $EX_i = p, D^2 X_i = pq \leq 1/4$  und (3) ist eine direkte Folge des Satzes von Tschebyschow.

**II.2.** Ist  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge paarweise unabhängiger Zufallsgrößen mit  $EX_k = EX_1 = \dots = a$  und  $D^2 X_k \leq C$  für alle  $k$ , so gilt für beliebiges  $\epsilon > 0$  die Beziehung (4), die die theoret. Grundlage für die Regel des arithmet. Mittels bei Messungen ist.

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - a \right| < \epsilon \right) = 1$$

*Beispiel:* Soll eine unbekannte Größe  $a$  gemessen werden, so wird wegen der zufälligen Fehler der Meßvorgang  $n$ -mal wiederholt, und die Einzelmessungen sind unabhängig voneinander. Die  $k$ -te Messung kann durch eine Zufallsgröße  $X_k$  beschrieben werden. Wenn in dem Meßprozess kein systemat. Fehler steckt, gilt  $EX_k = a$  für alle  $k$ . Dann wird auf Grund von (4) durch Bildung des arithmet. Mittels der Meßwerte für hinreichend große  $n$  mit einer Wahrscheinlichkeit beliebig nahe an Eins ein Wert erhalten, der der gesuchten Größe  $a$  beliebig nahe kommt.

**III. Definition:** Eine Folge von Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots$  genügt dem starken Gesetz der großen Zahl, wenn (5) gilt, m. a. W., wenn die gemäß (2) definierten Zufallsgrößen  $Z_n$  fast sicher gegen 0 konver-

$$(5) P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n EX_k \right) = 0 \right) = 1$$

gieren (↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III.). Ein Beispiel für ein starkes Gesetz der großen Zahl ist der Satz von Kolmogorow: Genügt die Folge  $\{X_n\}$  voneinander unabhängiger Zufallsgrößen der Bedingung (6), so ist sie dem starken Gesetz der großen Zahl unterworfen.

$$(6) \sum_n (D^2 X_n / n^2) < \infty$$

Es gilt auch ein zum Satz von Bernoulli analoges starkes Gesetz für die relative Häufigkeit, der Satz von Borel, der die exakte Fassung der Erfahrungstatsache darstellt, daß die Wahrscheinlichkeit der Grenzwert der Häufigkeit ist (↗ Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses).

**IV.** Über den Zusammenhang zwischen starken und schwachen Gesetzen gilt: Genügt eine Folge  $\{X_n\}$  von Zufallsgrößen dem starken Gesetz der großen Zahl, so auch dem schwachen, aber nicht umgekehrt. Erkenntnistheoretisch beinhalten die G. d. g. Z. die Tatsache, daß sich bei Massenerscheinungen zufällige Schwankungen ausmitteln. Ihre Bedeutung für die mathemat. Statistik beruht darauf, daß unbekannte Parameter einer Verteilung, z. B. der Erwartungswert oder die Streuung, auf Grund von Stichproben beliebig genau geschätzt werden können

(↗ Schätztheorie). Auf den G. d. g. Z. fußt auch die Monte-Carlo-Methode.

**Gestorbenen, Anzahl der** ↗ Sterbetafel I.

**getrennte Variable** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung II.1.

**Gewichtsfunktion** ↗ Zeitfunktion II.2.

**Gewinnfunktion** ↗ Spieltheorie I.

**gewöhnliche Differentialgleichung**: I. Gleichung (1) zwischen einer unabhängigen Veränderlichen, einer gesuchten Funktion und deren Ableitungen; dabei

$$(1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(r)}) = 0$$

bedeutet  $F$  eine Funktion der angegebenen Argumente. Man sagt, die g. D. hat die *Ordnung*  $r$ , falls die in der g. D. vorkommende höchste Ableitung von der Ordnung  $r$  ist. Die g. D. (2) z. B. hat die Ordnung 2 und (3) die Ordnung 1. Die g. D. heißt eine ↗ *lineare gewöhnliche Differentialgleichung*,

$$(2) \quad F(x, y, y', y'') = 3y'' + 2y' + 7xy^2 - \sin x = 0$$

$$(3) \quad F(x, y, y') = y' - \frac{y}{x} = 0$$

wenn sie in  $y$  und allen vorkommenden Ableitungen  $y', y'', \dots$  linear ist, z. B. ist (3) eine lineare g. D., dagegen (2) nicht. Eine beliebige lineare g. D. der Ordnung  $r$  läßt sich durch (4) darstellen. Dabei

$$(4) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(r)}) = f_r(x) y^{(r)} + f_{r-1}(x) y^{(r-1)} + \dots + f_1(x) y' + f_0(x) y - f(x) = 0$$

können  $f(x), f_0(x), \dots, f_r(x)$  beliebige stetige Funktionen sein. Unter einer *expliziten g. D.* versteht man eine g. D., die nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist, z. B. (5).

$$(5) \quad y^{(r)} = f(x, y, y', \dots, y^{(r-1)})$$

Die g. D. (4) nennt man eine *implizite g. D.* Von der impliziten g. D. (6) z. B. kann man durch Auf-

$$(6) \quad \ln y''' + 3xy' - \sin y = 0$$

lösung zu der expliziten Form (7) dieser g. D. übergehen.

$$(7) \quad y''' = e^{\sin y - 3xy'}$$

Unter der *Integration einer g. D.* versteht man das Auffinden von Funktionen  $y(x)$ , die die g. D. in einem endl. oder unendl. Intervall identisch in  $x$  erfüllen. Jede solche Funktion  $y(x)$  nennt man dann *Lösung* oder *Integral* der g. D. Die *allgemeine Lösung* einer g. D. der Ordnung  $r$  ist eine Lösung  $y = y(x)$ , die noch von  $r$  beliebigen Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_r$  abhängt. Bei jeder Wahl der Konstanten ergeben sich *spezielle* oder *partikuläre Lösungen* der g. D. Es ist möglich, an die Lösung  $y(x)$  der g. D. noch gewisse Bedingungen zu stellen, die die Konstanten  $c_1, \dots, c_r$  eindeutig bestimmen. Je nach der Art dieser Bedingungen unterscheidet man das *Anfangswertproblem* oder das *Cauchysche Problem* und das *Randwertproblem* für g. D.en. Die g. D.  $y' = y/x$  der Ordnung 1 hat z. B. die allgemeine Lösung  $y(x) = cx$ , und  $y_1(x) = x, y_2(x) = -2x$  sind Beispiele

spezieller Lösungen dieser g. D. Die g. D.  $y'' + y = 0$  hat die allgemeine Lösung  $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ . Die g. D. kann auch *singuläre Lösungen* haben, d. h. Lösungen, die sich nicht aus der allgemeinen Lösung durch Einsetzen spezieller Werte für die beliebigen Konstanten ergeben (↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung). Die Lösung  $y_0(x) = -x^2/4$  der g. D.  $(y')^2 + xy' - y = 0$  läßt sich z. B. für keinen Wert von  $c$  aus der allgemeinen Lösung  $y = cx + c^2$  gewinnen;  $y_0$  ist eine *singuläre Lösung*.

Das *graph. Bild* einer speziellen Lösung bezeichnet man als *Integralkurve*. Die allgemeine Lösung einer g. D.  $r$ -ter Ordnung liefert eine *r-parametrische Schar von Integralkurven*:  $y = y(x; c_1, \dots, c_r)$ . Umgekehrt liefert i. allg. jede *r-parametrische Schar* von Kurven  $y = y(x; c_1, \dots, c_r)$  eine g. D.  $r$ -ter Ordnung, indem man die  $r$  Konstanten aus den  $r + 1$  Gleichungen

$$y = y(x; c_1, \dots, c_r), y' = \frac{\partial y}{\partial x}(x; c_1, \dots, c_r), \dots, y^{(r)} = \frac{\partial^r y}{\partial x^r}(x; c_1, \dots, c_r)$$

eliminiert. Die so gewonnene g. D. beschreibt die vorgegebene *r-parametrische Schar* von Kurven; die g. D. 2. Ordnung  $y'' - y'/x = 0$  z. B. ergibt die 2-parametrische Schar von Parabeln  $y = y(x; c_1, c_2) = c_1x^2 + c_2$ . Ist umgekehrt die 2-parametrische Schar von Parabeln  $y = y(x; c_1, c_2) = c_1x^2 + c_2$  gegeben, so erhält man die diese Schar von Kurven beschreibende g. D., indem man  $c_1$  und  $c_2$  aus den drei Gleichungen  $y = c_1x^2 + c_2, y' = 2c_1x$  und  $y'' = 2c_1$  eliminiert. Es ergibt sich die g. D.  $y'' - y'/x = 0$ .

Für g. D.en erster Ordnung  $F(x, y, y') = 0$  und für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es recht wirksame Lösungsmethoden, während sich die Ermittlung exakter Lösungen für andere g. D.en oft als recht schwierig erweist. Dann greift man häufig zu Näherungsmethoden.

II. Betrachtet man  $n$  g. D.en  $F_i(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m', y_1'', \dots, y_m'') = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  zur Bestimmung von  $m$  gesuchten Funktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ , so spricht man von einem *System g. D.en*. Zur Bestimmung der Bewegung eines materiellen Punktes der Masse  $m$  in einem Kraftfeld  $\mathbf{K} = \{P, Q, R\}$  erhält man z. B. das System (8), in

$$(8) \quad m \frac{d^2 X}{dt^2} = P(X, Y, Z), \\ m \frac{d^2 Y}{dt^2} = Q(X, Y, Z), m \frac{d^2 Z}{dt^2} = R(X, Y, Z)$$

dem die gesuchten Funktionen  $X(t), Y(t), Z(t)$  die Ortskoordinaten des Punktes zur Zeit  $t$  sind. — Am häufigsten sind Systeme von  $n$  g. D.en 1. Ordnung für  $n$  gesuchte Funktionen, in denen die Gleichungen nach den Ableitungen aufgelöst sind, d. h., Systeme der Art (9) für  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$(9) \quad \frac{dy_i}{dx} = y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

Als Lösung eines solchen Systems bezeichnet man jedes  $n$ -Tupel von Funktionen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ , die nach ihrem Einsetzen in das System jede seiner

Gleichungen in eine Identität in  $x$  überführen. Die *allgemeine Lösung* eines Systems von  $n$  g. D.en für  $m$  Funktionen  $y_i$  hängt von  $n$  beliebigen Konstanten ab:  $y_i = y_i(x, c_1, \dots, c_n)$  für  $i = 1, 2, \dots, m$ . Ein System von g. D.en kann man i. allg. nicht lösen, indem man eine Differentialgleichung nach der anderen löst, denn die gesuchten Funktionen  $y_i(x)$  sind in den rechten Seiten der anderen Differentialgleichungen auch enthalten. Das System (10) z. B. wird durch (11) gelöst; die allgemeine Lösung des Systems ist aber (12).

$$(10) \quad y_1' = y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 - 3y_2$$

$$(11) \quad y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = 2e^{-x}$$

$$(12) \quad y_1 = y_1(x; c_1, c_2) = c_1(1/4 + x/2)e^{-x} + 1/2c_2e^{-x},$$

$$y_2 = y_2(x; c_1, c_2) = c_1xe^{-x} + c_2e^{-x}$$

Eine Funktion  $u(x, y_1, \dots, y_n)$  heißt ein *erstes Integral* des Systems (9), wenn  $u$  längs der Lösungskurven  $y_i = y_i(x)$  des Systems konstant ist, d. h., wenn  $u(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) = c$  gilt. Ein erstes Integral  $u(x, y_1, \dots, y_n)$  des Systems (9) genügt der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung (13), und umgekehrt liefert jede Lösung  $u = u(x, y_1, \dots, y_n)$

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + f_n(x, y_1, \dots, y_n) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0$$

dieser partiellen Differentialgleichung ein erstes Integral dieses Systems. Hat man  $n$  linear unabhängige erste Integrale  $u_i(x, y_1, \dots, y_n)$  des Systems (9), so ist die Funktionaldeterminante  $\frac{\partial(u_1, \dots, u_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)}$  nicht identisch Null, und man erhält die allgemeine Lösung  $y_i = y_i(x; c_1, \dots, c_n)$  des Systems durch Auflösen der Gleichungen  $u_i(x, y_1, \dots, y_n) = c_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  nach den  $y_1, \dots, y_n$ . Bei Kenntnis eines ersten Integrals  $u(x, y_1, \dots, y_n) = c$  kann man das System von  $n$  Differentialgleichungen mit  $n$  gesuchten Funktionen auf ein System mit  $n - 1$  Differentialgleichungen und  $n - 1$  gesuchten Funktionen reduzieren, indem man das erste Integral etwa nach  $y_n = v(x, y_1, \dots, y_{n-1}, c)$  auflöst und damit  $y_n$  aus dem System eliminiert. Von dem System (14) ist z. B. (15) ein erstes Integral, denn  $u$  ist Lösung von (16). Löst man  $u = c$  nach  $y_2$

$$(14) \quad y_1' = y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 - 3y_2$$

$$(15) \quad u(x, y_1, y_2) = 4e^x y_1 - 2e^x y_2$$

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + (y_1 - y_2) \frac{\partial u}{\partial y_1} + (4y_1 - 3y_2) \frac{\partial u}{\partial y_2} = 0$$

auf, so erhält man  $y_2 = -1/2 ce^{-x} + 2y_1$  und daraus  $y_2' = 1/2 ce^{-x} + 2y_1'$ . Dies in das gegebene System eingesetzt, liefert die eine Differentialgleichung  $y_1' = -y_1 + 1/2 ce^{-x}$  für  $y_1(x)$ , die die allgemeine Lösung  $y_1 = \bar{c}e^{-x} + 1/2 cxe^{-x}$  hat. Daraus folgt  $y_2 = c(x - 1/2)e^{-x} + 2\bar{c}e^{-x}$ , und man hat die allgemeine Lösung des vorgegebenen Systems erhalten.

$$(17) \quad y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

Ein System (17) heißt ein *lineares System g. D.en*, wenn die Funktionen  $f_i$  in  $y_1, \dots, y_n$  linear sind. Man kann ein solches lineares System in der Form (18) schreiben. Sind die  $f_i(x)$  identisch gleich Null, so heißt

$$(18) \quad y_i' = f_{i1}(x) y_1 + \dots + f_{in}(x) y_n + f_i(x)$$

für  $i = 1, 2, \dots, n$

das lineare System *homogen*, andernfalls *inhomogen*. Derartige lineare Systeme gestatten die Anwendung ganz ähnl. Lösungsmethoden wie bei lineare g. D.en, z. B. die der Methode der Variation der Konstanten, um aus der allgemeinen Lösung des homogenen Systems (19) eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (19a) zu gewinnen.

$$(19) \quad y_i' = \sum_{k=1}^n f_{ik}(x) y_k \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

$$(19a) \quad y_i' = \sum_{k=1}^n f_{ik}(x) y_k + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

An einem Beispiel soll die Lösungsmethode für ein lineares System mit konstanten Koeffizienten  $f_{ik}$  erläutert werden. Um die allgemeine Lösung des Systems (20) zu finden, löst man zunächst das dazugehörige homogene System (20a), indem man den

$$(20) \quad y_1' = y_1 - y_2 + x, \quad y_2' = 4y_1 - 3y_2 + 2$$

$$(20a) \quad y_1' = y_1 - y_2, \quad y_2' = 4y_1 - 3y_2$$

Ansatz  $y_1(x) = a_1 e^{sx}, y_2(x) = a_2 e^{sx}$  macht. Aus dem homogenen System folgt dann das lineare Gleichungssystem  $(1 - s)a_1 - a_2 = 0, 4a_1 - (3 + s)a_2 = 0$  für  $a_1, a_2$ , das nur unter der Bedingung  $s^2 + 2s + 1 = 0$  nichttriviale Lösungen  $a_1, a_2$  hat. Der Wert  $s = -1$  ist eine Doppelwurzel der charakterist. Gleichung  $s^2 + 2s + 1 = 0$  dieses Systems, die auf eine von einem Parameter abhängige Lösung (21) führt. Die allgemeine Lösung hängt aber von

$$(21) \quad y_1(x) = \bar{c}_1 e^{-x}, \quad y_2(x) = 2\bar{c}_1 e^{-x}$$

zwei Parametern ab. Hätte die charakterist. Gleichung des Systems zwei verschiedene Wurzeln  $s_1, s_2$ , so würde man für beide eine solche Lösung des Systems erhalten und somit seine allgemeine Lösung. In dem hier vorliegenden Falle einer Doppelwurzel muß man eine weitere Lösung in der Form  $y_1(x) = (d_1 x + e_1) e^{-x}, y_2(x) = (d_2 x + e_2) e^{-x}$  suchen ( $\nearrow$  lineare gewöhnliche Differentialgleichung). Mit diesem Ansatz folgt (22) aus dem homogenen System und dann nach Koeffizientenvergleich

$$(22) \quad -d_1 x + (d_1 - e_1) = (d_1 - d_2) x + (e_1 - e_2),$$

$$-d_2 x + (d_2 - e_2) = (4d_1 - 3d_2) x + (4e_1 - 3e_2)$$

$d_1 = 1/2 d_2, e_1 = 1/2 e_2 + 1/4 d_2$ . Setzt man  $d_2 = c_1$  und  $e_2 = c_2$ , so erhält man die zweiparametrische Schar (23) von Lösungen, die die oben erhaltene Schar für  $c_1 = 0$  und  $c_2 = 2\bar{c}$  enthält.

$$(23) \quad y_1(x) = (1/2 c_1 x + 1/2 c_2 + 1/4 c_1) e^{-x},$$

$$y_2(x) = (c_1 x + c_2) e^{-x}$$

Das System (24) ist die allgemeine Lösung des homo-

$$(24) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= c_1(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4})e^{-x} + \tfrac{1}{2}c_2e^{-x}, \\ y_2(x) &= c_1xe^{-x} + c_2e^{-x} \end{aligned}$$

gen linearen Systems  $y_1' = y_1 - y_2$ ,  $y_2' = 4y_1 - 3y_2$ . Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems erhält man als Summe der allgemeinen Lösung des dazugehörigen homogenen Systems und einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems. Durch *Variation der Konstanten*, d. h. durch den Ansatz (25) erhält man eine spezielle Lösung des

$$(25) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= c_1(x)(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4})e^{-x} + \tfrac{1}{2}c_2(x)e^{-x}, \\ y_2(x) &= c_1(x)xe^{-x} + c_2(x)e^{-x} \end{aligned}$$

inhomogenen Systems. Setzt man den Ansatz in das inhomogene System  $y_1' = y_1 - y_2 + x$ ,  $y_2' = 4y_1 - 3y_2 + 2$  ein, so ergibt sich

$(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4})c_1' + \tfrac{1}{2}c_2' = xe^x$ ,  $xc_1' + c_2' = 2e^x$  und damit  $c_1'(x) = 4(x-1)e^x$ ,  $c_2'(x) = 4(-x^2 + x + \tfrac{1}{2})e^x$  oder  $c_1(x) = (4x-8)e^x$ ,  $c_2(x) = (-4x^2 + 12x - 10)e^x$ . Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist danach (26), und damit ist (27)

$$(26) \quad y_1(x) = 3x - 7, \quad y_2(x) = 4x - 10$$

$$(27) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= c_1(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4})e^{-x} + \tfrac{1}{2}c_2e^{-x} + 3x - 7, \\ y_2(x) &= c_1xe^{-x} + c_2e^{-x} + 4x - 10 \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung dieses inhomogenen Systems. Zu der Aufgabe, eine Lösung eines Systems von g. D. en zu suchen, die die Bedingungen  $y_1(x^0) = y_1^0, \dots, y_n(x^0) = y_n^0$  erfüllt, wenn  $y_1^0, \dots, y_n^0$  beliebig vorgegebene Werte sind, vgl. Anfangswertproblem. Jede explizite g. D.  $y^{(r)} = f(x, y, y', \dots, y^{(r-1)})$  r-ter Ordnung läßt sich durch Einführung der neuen gesuchten Funktionen  $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_r = y^{(r-1)}$  in ein System von g. D. en  $y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{r-1}' = y_r, y_r' = f(x, y_1, \dots, y_r)$  umformen. Jede Lösung  $y_1(x), \dots, y_r(x)$  dieses Systems liefert eine Lösung  $y(x) = y_1(x)$  der expliziten g. D., und umgekehrt liefert jede Lösung  $y(x)$  der expliziten g. D. eine Lösung

$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \dots, y_r(x) = y^{(r-1)}(x)$  des Systems. Die explizite g. D. (28) z. B. ist dem System (28a) äquivalent.

$$(28) \quad y'' = \sin y' + 3y^2 - e^x$$

$$(28a) \quad y_1' = y_2, \quad y_2' = \sin y_2 + 3y_1^2 - e^x$$

**III.** Mit den Mitteln der *numerischen Mathematik* können für viele Differentialgleichungen (29), für die sich ein geschlossenes Integral  $y = y(x)$  nicht angeben läßt, zu gegebenen  $x_i$  reelle Zahlen  $y_i$  gefunden werden, die *Näherungswerte* für die Funktionswerte  $y(x_i)$  sind. Bei den Rechenverfahren ist zu berücksichtigen, ob zusätzl. Anfangswerte (30) oder Randwerte (31) vorgeschrieben sind. Hier kann nur auf *Anfangswertprobleme* einer *Differentialgleichung 1. Ordnung* eingegangen werden, die in der *Normalform* (32) vorliegen soll.

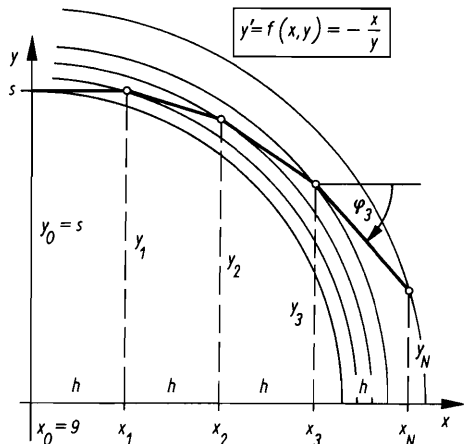
$$(29) \quad F(x; y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$(30) \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

$$(31) \quad \begin{aligned} g_0(x_0, y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) &= 0, \\ g_N(x_N, y(x_N), \dots, y^{(n-1)}(x_N)) &= 0 \end{aligned}$$

$$(32) \quad y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

Das Verfahren des *Euler-Cauchyschen Polygonzugs* ist auch zeichnerisch durchführbar (Abb.) und soll den Grundgedanken erläutern. Sind  $y'(x) = f(x, y(x))$  und  $y(a) = s$  gegeben und wird eine Schrittweite  $h$ , d. h. die Diskretisierung  $x_i = a + ih$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  angenommen, so erhält man schrittweise folgende Werte, wenn man im Punkte  $(a, s)$  beginnt



gewöhnliche Differentialgleichung, Numerik: Polygonzug aus Tangentenstücken an Kreise; Euler-Cauchyscher Polygonzug an einem instabilen Beispiel

und jeweils in Tangentenrichtung fortschreitet: aus  $y'(a) = f(a, s) = \tan \varphi_a$  und  $y_1 := s + h y'(a) = s + h f(x_0, y(x_0))$  die neue Tangentenrichtung  $y_1' := f(x_1, y_1) = \tan \varphi_1$  und  $y_2 := y_1 + h y_1' = y_1 + h f(x_1, y_1)$ , d. h. allgemein  $y_i' := f(x_i, y_i) = \tan \varphi_i, y_{i+1} := y_i + h f(x_i, y_i)$  für  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Als *lokalen Abbruchfehler* bezeichnet man die Differenz zwischen der im jeweiligen Schritt berechnete Ordinate  $y_{i+1}$  und dem Funktionswert  $y(x_{i+1})$ . Der *Abbruchfehler*  $y_j - y(x_j)$  selbst entsteht durch oft komplizierte Kumulation der lokalen Abbruchfehler der vorangehenden Schritte. Bei der tatsächlichen Durchführung der Rechnungen tritt noch der *Rundungsfehler* hinzu. *Numerische Stabilität* liegt vor, wenn der Abbruchfehler für ein geeignetes  $h$  im ganzen Intervall beschränkt bleibt. *Instabilität* kann von der Differentialgleichung herrühren (vgl. Abb.), aber auch durch das Verfahren bedingt sein. Unter den Lösungsmethoden unterscheidet man Ein- und Mehrschrittverfahren.

**IV.** Beim *Einschrittverfahren* wird von der Folge  $\{y_i\}$  mit  $i = 0, 1, \dots, N$  der nächste Näherungswert  $y_{i+1}$  allein aus dem vorangehenden Wert  $y_i$  nach Angaben aus Gleichung (32) berechnet. Die Berechnung für die jeweils folgende *Stützstelle*  $x_i = x_0 + ih$  erfolgt in dem *Verfahren vom Runge-Kutta-Typ* nach Gleichung (33), dabei wird  $f(x_i, y_i)$  als *gewichtetes*

*Mittel* der Werte von  $f(x, y)$  an geeigneten Stellen  $(\xi_k, \eta_k)$  so gebildet, daß der lokale Abbruchfehler für kleine  $h$  von einer Ordnung  $m \geq 2$  klein wird. Tabelle (34) gibt Beispiele für verwendete gewichtete Mittel.

$$(33) \quad y_{i+1} := y_i + h \cdot \hat{f}(x_i, y_i), \quad y_0 = y(x_0) \\ i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

(34) *Tabelle einiger Runge-Kutta-Formeln  $\hat{f}$  mit Ordnung  $[h^l]$  und Hilfsgrößen  $K_i$*

- 1) *verbesselter Polygonzug*:  $\hat{f} = (K_1 + K_2)/2$ ;  $[h^2]$  mit  $K_1 = f(x_i, y_i), K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1)$
- 2) *Formel von HEUN*:  $\hat{f} = (K_1 + 4K_2 + K_3)/6$ ;  $[h^3]$  mit  $K_1 = f(x_i, y_i), K_2 = f(x_i + h/2, y_i + hK_1/2), K_3 = f(x_i + h, y_i + 2hK_2 - hK_1)$
- 3) *Formel von RUNGE-KUTTA*:  $\hat{f} = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ ;  $[h^4]$  mit  $K_1 = f(x_i, y_i), K_2 = f(x_i + h/2, y_i + hK_1/2), K_3 = f(x_i + h/2, y_i + hK_2/2), K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$

Bei jedem stabilen Einschrittverfahren gibt es in jedem Schritt eine *optimale Schrittweite*  $h$  in dem Sinne, daß  $h$  klein genug sein muß, um einen genügend kleinen Abbruchfehler zu erhalten, andererseits aber aus Gründen des Rechenaufwandes und der bei Erhöhung der Schrittzahl zunehmenden Rundungsfehlerkumulation möglichst groß sein sollte. Man arbeitet deshalb auch praktisch häufig mit *Schrittweitensteuerung*, d. h. mit variabler Schrittweite  $h_i$ . Zur Abschätzung der optimalen Schrittweite sind i. allg. keine Schranken genügender Schärfe bekannt, und man wendet häufig das *Prinzip von Runge* an: Bezeichnet man den an der Stelle  $x = x_0 + 2nh$  in Abhängigkeit von der Schrittweite  $h$  berechneten Näherungswert von  $y(x)$  mit  $f(x, h)$  und hat das Verfahren die *Fehlerordnung*  $k$ , so soll nach diesem Prinzip durch  $y(x) - Y(x, h) \sim [Y(x, h) - Y(x, 2h)]/[2^k - 1]$  der Fehler bei Schrittweite  $h$  durch die Näherungswerte bei den Schrittweiten  $h$  bzw.  $2h$  ausgedrückt werden.

V. Beim *Mehrschrittverfahren* wird der nächste Näherungswert  $y_{i+1}$  nicht allein aus der Gleichung (32) und dem vorhergehenden Wert  $y_i$  berechnet, sondern auch aus den  $k$  vorhergehenden Näherungswerten als Lösung der *Differenzgleichung* (35) bestimmt. Die  $k$  *Startwerte*  $y_0 = s, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$  des

$$(35) \quad \sum_{j=0}^k a_j^{(k)} y_{n+j} - h \sum_{j=0}^k b_j^{(k)} \cdot f(x_{n+j}, y_{n+j}) = 0 \\ \text{für } n = 0, 1, \dots, N - k$$

Mehrschrittverfahrens müssen dabei nach einer anderen Methode bestimmt werden. Da jedes Verfahren dieser Art durch zwei Polynome  $\varrho(z)$  und  $\sigma(z)$  nach Gleichung (36) eindeutig bestimmt ist, spricht man vom  $(\varrho, \sigma)$ -Verfahren; es heißt *explizit*, falls der Grad von  $\varrho$  größer als der von  $\sigma$  ist, und *implizit*, falls beide Grade gleich sind. Wichtige  $(\varrho, \sigma)$ -Verfahren sind die *Adams-Verfahren* mit  $\varrho(z)$

=  $z^k - z^{k-1}$ , die sich durch ihre  $\sigma(z)$ -Polynome unterscheiden. Nach ADAMS-BASHFORTH gilt für  $\sigma(z)$  Gleichung (37), und die Koeffizienten in ihm werden der Entwicklung (37a) entnommen. Nach ADAMS-MOULTON gelten entsprechend die Gleichungen (38) und (38a).

$$(36) \quad \varrho(z) = a_k^{(k)} z^k + a_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \dots + a_0^{(k)}, \\ \sigma(z) = b_k^{(k)} z^k + b_{k-1}^{(k)} z^{k-1} + \dots + b_0^{(k)}$$

$$(37) \quad \sigma(z) = z^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} c_j (1 - 1/z)^j$$

$$(37a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j = t / [(1-t) \ln(1-t)]$$

$$(38) \quad \sigma(z) = z^k \sum_{j=0}^k d_j (1 - 1/z)^j$$

$$(38a) \quad \sum_{j=0}^{\infty} d_j t^j = t / [\ln(1-t)]$$

Das *explizite Adams-Bashforth-Verfahren* kann ohne weiteres zur Berechnung von  $y_{n+k}$  benutzt werden, während ein *implizites Verfahren* den zu berechnenden Wert auch noch auf der rechten Seite enthält und nur iterativ oder in einem *Prädiktor-Korrektor-Prozess* verwendet werden kann. Bei diesem wird  $y_{n+k}$  zunächst nach einer expliziten Prädiktor-Formel berechnet und dann verbessert, nachdem es rechts in eine implizite Korrektor-Formel gleicher Fehlerordnung eingesetzt wurde. Ein geeignetes Formelpaar ist etwa (39) nach ADAMS-BASHFORTH für  $k = 4$  und (39a) nach ADAMS-MOULTON für  $k = 3$ , die gleiche Fehlerordnung haben.

$$(39) \quad y_{n+k} = y_{n+k-1} + (h/24) [55 \cdot f(x_{n+k-1}, y_{n+k-1}) \\ - 59f(x_{n+k-2}, y_{n+k-2}) + 37f(x_{n+k-3}, y_{n+k-3}) \\ - 9f(x_{n+k-4}, y_{n+k-4})]$$

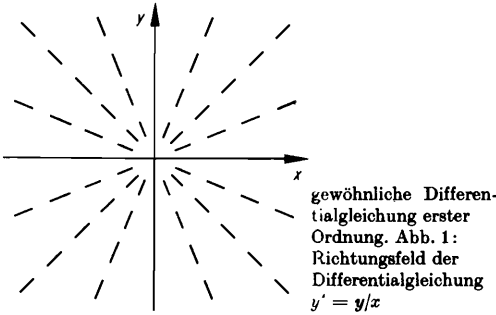
$$(39a) \quad y_{n+k} = y_{n+k-1} + (h/24) [9f(x_{n+k}, y_{n+k}) \\ + 19f(x_{n+k-1}, y_{n+k-1}) - 5f(x_{n+k-2}, y_{n+k-2}) \\ + f(x_{n+k-3}, y_{n+k-3})]$$

VI. *Randwertaufgaben* können numerisch ebenfalls durch Diskretisierung gelöst werden. Dabei werden alle Ableitungen in (29) und (31) durch Differenzenquotienten ersetzt, so daß die gesamte Aufgabe in ein lineares Gleichungssystem übergeführt wird. Es entsteht so das *Differenzenverfahren*. Praktisch sehr wichtig sind aber auch *Ansatzmethoden*, bei denen eine *Näherungsfunktion*  $\bar{y}(x)$  für die Lösung  $y(x)$  als Minimallösung eines geeigneten Approximationsproblems gesichert wird ( $\nearrow$  Approximation).

**gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:**

I. Gleichung  $F(x, y, y') = 0$  zwischen einer unabhängigen Veränderlichen  $x$ , einer gesuchten Funktion  $y(x)$  und deren erster Ableitung  $y'(x)$ . Als *explizite g. D. e. O.* wird sie meist in der Form  $y' = f(x, y)$  dargestellt. Die implizite g. D. e. O.  $F(x, y, y') = 0$  läßt sich nach dem Satz über die Auflösbarkeit impliziter Funktionen in der Umgebung einer Stelle  $(x_0, y_0, y_0')$  mit  $F(x_0, y_0, y_0') = 0$  eindeutig nach  $y'$  auflösen, wenn  $\frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y_0') \neq 0$  ist. Man erhält

die explizite Form  $y' = f(x, y)$ . Geht durch einen Punkt  $P(x, y)$  eine Integralkurve  $y = y(x)$  der expliziten g. D. e. O. hindurch, so läßt sich die Richtung  $\alpha$  der Tangente an die Kurve in  $P(x, y)$  durch  $\tan \alpha = y'(x) = f(x, y)$  unmittelbar aus der g. D. e. O. bestimmen. Die g. D. e. O. definiert mithin in



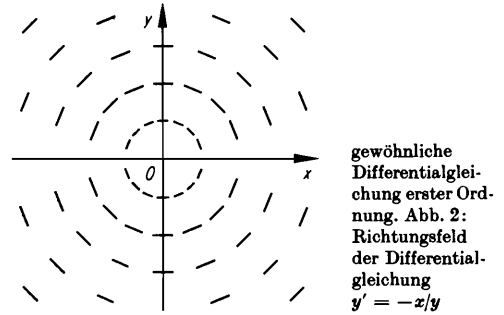
jedem Punkt eines betrachteten Gebietes  $G$  in der  $x, y$ -Ebene, in dem  $f(x, y)$  definiert ist, die Richtung der Tangente an eine Integralkurve. Den Punkt  $P(x, y)$  zusammen mit der in ihm gegebenen Richtung  $\alpha$  bezeichnet man als ein *Linienelement*. Der Punkt  $P(x, y)$  selbst heißt der *Träger* des Linienelementes. Die Gesamtheit aller Linienelemente in  $G$  bildet das *Richtungsfeld* (Abb. 1).

Die Integration einer expliziten g. D. e. O. wird somit, geometrisch gesehen, auf die Verbindung der Linienelemente des Richtungsfeldes zu Integralkurven zurückgeführt, deren Tangenten in jedem Punkt eine Richtung haben, die mit der des Richtungsfeldes in dem betreffenden Punkt übereinstimmt.

Eine Verbindungslinie von Linienelementen mit gleicher Richtung nennt man *Isokline* des Richtungsfeldes der g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$ . Man erhält die Gleichung einer Isokline, indem man  $y' = \text{const} = a$  in  $y' = f(x, y)$  einsetzt. Aus den Isoklinen läßt sich mitunter eine Übersicht über das Richtungsfeld und damit über die Lösungskurven einer g. D. e. O. gewinnen. Alle Punkte  $P(x, y)$  auf der Geraden mit der Gleichung  $y = -x/a$  z. B. haben die Richtung  $\alpha = \arctan a$  bzgl. der g. D. e. O.  $y' = -x/y$ . Speziell wird allen Punkten auf der Geraden mit  $y = x$  die Richtung  $\alpha = 3\pi/4$  durch die g. D. e. O.  $y' = -x/y$  zugeordnet.

In der Geometrie und vor allem in der Physik taucht oft das Problem auf, zu einer Kurvenschar die Schar der *orthogonalen Trajektorien* aufzufinden, d. h. die Kurven, die jede Kurve der ersten Schar senkrecht schneiden. Analytisch gewinnt man die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien aus der zur Kurvenschar  $G(x, y, c) = 0$  gehörigen g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$ , indem man  $y'$  durch  $-1/y'$  ersetzt, weil die Richtungsfaktoren orthogonaler Kurven zueinander negativ reziprok sein müssen. Zur Kurvenschar  $y - cx = 0$  gehört z. B. die g. D. e. O.  $y' = y/x$ . Die Schar der dazugehörigen orthogonalen Trajektorien ist  $x^2 + y^2 = c$ , die sich aus der g. D. e. O.  $y' = -x/y$  ergibt (Abb. 2). Durch

den Punkt  $P(1, 1)$  gehen die Kurve  $y_1(x) = x$  der Schar  $y - cx = 0$  und die Kurve  $y_2(x) = \sqrt{2 - x^2}$  der Schar  $x^2 + y^2 = c$ . Wegen  $y_1'(1) = 1$  und  $y_2'(1) = -1$  stehen diese beiden durch  $P(1, 1)$  gehenden Kurven in der Tat senkrecht aufeinander.



Oft hat man es mit einem Richtungsfeld zu tun, in dem vertikale Richtungen auftreten, die Unendlichkeitsstellen der Funktion  $f(x, y)$  entsprechen. In diesem Fall kann man  $y$  als unabhängige Veränderliche und die dazugehörige g. D. e. O.  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$  betrachten. Die Integralkurven dieser g. D. e. O. sind äquivalent zu denen von  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Die Funktion  $f(x, y) = y/x$  z. B. hat in den Punkten  $P(0, y)$  mit  $y \neq 0$  Pole, so daß es günstiger ist, an Stelle der g. D. e. O.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  in  $G'$  die g. D. e. O.  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$  zu betrachten (vgl. Abb. 1).

Ist die Funktion  $f(x, y)$  in einem Gebiet  $G$  bzgl. beider Veränderlicher stetig, so geht durch jeden Punkt  $P(x, y)$  mindestens eine Integralkurve der g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$ . Diesen Satz bezeichnet man als den *Peanoschen Existenzsatz*. Erfüllt die Funktion  $f(x, y)$  in  $G$  neben der Stetigkeitsforderung eine *Lipschitzbedingung*, d. h., gibt es für alle Punkte  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2)$  aus  $G$  eine Konstante  $L$ , so daß (1) gilt, so geht durch jeden Punkt des Gebietes  $G$

(1)  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$   
genau eine Integralkurve  $y = y(x)$  der g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$ . Diese Aussage liefert den *Existenz- und Eindeutigkeitsatz* für g. D. e. O. (Anfangswertproblem). Die Lipschitzbedingung ist sicher dann erfüllt, wenn die Funktion  $f(x, y)$  in  $G$  eine beschränkte stetige partielle Ableitung nach  $y$  hat. Für die g. D. e. O.  $y' = y/x$  sind z. B. in dem Gebiet  $G$  der Abbildung die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes erfüllt, die Funktion  $f(x, y) = y/x$  ist in  $G$  stetig und die partielle Ableitung  $f_y = 1/x$  ist in  $G$  beschränkt. In einem Gebiet  $G'$ , das z. B. den Nullpunkt  $(0, 0)$  enthält, sind die Voraussetzungen nicht erfüllt, denn dort ist  $f(x, y) = y/x$  nicht stetig. Aber für die g. D. e. O.  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ , in der man  $y$  als unabhängige Variable

auffaßt, sind die Voraussetzungen in  $G'$  erfüllt, d. h., auch durch jeden Punkt von  $G'$  geht genau eine Integralkurve der g. D. e. O.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ .

Das Problem, eine Lösung  $y = y(x)$  einer g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$  zu finden, die durch einen vorgegebenen Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  gehen soll, für die also  $y_0 = y(x_0)$  gilt, bezeichnet man als *Anfangswertproblem* oder *Cauchysches Problem*.

Bei der Berechnung von Lösungen einer g. D. e. O. ist es oft zweckmäßig, *neue Variable einzuführen*. Durch die *Transformation* (2) wird die g. D. e. O.

$$(2) \quad x = h(\bar{x}, \bar{y}), \quad y = k(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\text{mit } \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{\partial k}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial k}{\partial \bar{y}} \neq 0$$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  oder  $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$  in eine g. D. e. O.

bzgl.  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  übergeführt mit dem Differentialquotienten (3). Findet man die Lösung  $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial k}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial k}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\frac{\partial h}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}$$

der transformierten g. D. e. O., so ergibt sich die gesuchte Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung in der Parameterform  $x = h(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$ ,  $y = k(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$ ; erhält man hingegen die Lösung in einer impliziten Form  $u(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen  $x$  und  $y$  durch Elimination von  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  aus den drei Gleichungen  $\bar{x} = h(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{y} = k(\bar{x}, \bar{y})$  und  $u(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ . Die explizite g. D. e. O. (4), betrachtet in einem Gebiet mit  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - y^3}{x + xy^2}$$

geht bei der Transformation  $x = h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}\bar{y}$ ,  $y = k(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}/\bar{y}$  wegen (5) über in (6),

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\bar{y}} - \frac{\bar{x}}{\bar{y}^2} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\bar{y} + \bar{x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}$$

$$(6) \quad \frac{\bar{y} - \bar{x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\bar{y}^3 + \bar{x}\bar{y}^2 \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \frac{\bar{x}\bar{y}^2 - \bar{x}^3}{\bar{x}\bar{y}^4 + \bar{x}^2\bar{y}^2}$$

oder nach Auflösung nach  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$  in  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ . Die allgemeine Lösung dieser g. D. e. O. ist  $u(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}^3 - \bar{x}^2 + c = 0$ . Die allgemeine Lösung  $x - xy^2 + cy = 0$  der Ausgangsdifferentialgleichung folgt durch Elimination von  $\bar{x}, \bar{y}$  aus den drei Gleichungen  $\bar{y}^3 - \bar{x}^2 + c = 0$ ,  $x = \bar{x}\bar{y}$  und  $y = \bar{x}/\bar{y}$ .

**II. Spezielle Typen expliziter g. D. e. O.**

**II.1.** Eine g. D. e. O.  $y' = g(x)h(y)$  mit getrennten Variablen tritt dann auf, wenn man in  $f(x, y)$  die

Variablen  $x$  und  $y$  trennen kann, d. h., wenn man  $f(x, y) = g(x)h(y)$  als Produkt zweier Funktionen  $g(x)$  und  $h(y)$  schreiben kann. Spezialfälle bilden die g. D. e. O.  $y' = g(x)$  und  $y' = h(y)$ . Die allgemeine Lösung der g. D. e. O. mit getrennten Variablen  $y' = g(x)h(y)$  ergibt sich als (7), falls  $h(y) \neq 0$

$$(7) \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + c$$

ist. Die g. D. e. O. (8) z. B. ist eine Differen-

$$(8) \quad y' = \frac{2-x}{x(x-1)} \cdot y$$

tialgleichung mit getrennten Variablen. Dabei ist  $g(x) = (2-x)/[x(x-1)]$  und  $h(y) = y$ , und die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich aus (9) zu  $y(x) = \bar{c}(x-1)/x^2$  in einem

$$(9) \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{(2-x) dx}{x(x-1)}$$

Gebiet, in dem  $y > 0$  und  $x > 1$  ist. Ein anderes Beispiel stellt die g. D. e. O. (10) mit  $g(x) = (1/x)$

$$(10) \quad y' = \frac{y^2}{(1-y)x}$$

und  $h(y) = y^2/(1-y)$  dar. Die Lösungskurven ergeben sich aus (11) in der impliziten Form als

$$(11) \quad \int \frac{1-y}{y^2} dy = \int \frac{dx}{x} + c$$

$xy = \bar{c} e^{-1/y}$  für ein Gebiet mit  $x > 0$  und  $y > 1$ .

**II.2.** In der *homogenen Differentialgleichung*  $y' = g(x, y)/h(x, y)$  sollen  $g$  und  $h$  homogene Funktionen vom gleichen Grad  $r$  sein, d. h., es soll  $g(tx, ty) = t^r g(x, y)$  und  $h(tx, ty) = t^r h(x, y)$  für jeden beliebigen Wert  $t$  gelten. Diese g. D. e. O. geht durch die Transformation  $\bar{y} = y/x$ ,  $\bar{x} = x$  über in die Differentialgleichung (12), d. h. in eine g. D.

$$(12) \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \left( \frac{g(1, \bar{y})}{h(1, \bar{y})} - \bar{y} \right)$$

e. O. mit getrennten Variablen. Die g. D. e. O.  $y' = y/(x-y)$  z. B. mit  $g(x, y) = y$  und  $h(x, y) = x-y$  ist homogen vom Grade 1, denn es gilt etwa  $h(tx, ty) = tx - ty = th(x, y)$ . Nach der Transformation  $\bar{y} = y/x$ ,  $\bar{x} = x$  erhält man mit (13) eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

$$(13) \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \left( \frac{\bar{y}}{1-\bar{y}} - \bar{y} \right) = \frac{1}{\bar{x}} \frac{\bar{y}^2}{1-\bar{y}}$$

Diese hat die allgemeine Lösung (14), aus der man die allgemeine Lösung  $y = c e^{-x/y}$  der homogenen

$$(14) \quad x\bar{y} = c e^{-1/\bar{y}}$$

g. D. e. O.  $y' = y/(x-y)$  erhält.

**II.3.** In der *Differentialgleichung* (15) sind  $a, b, c$ ,

$$(15) \quad y' = f \left( \frac{ax + by + c}{Ax + By + C} \right)$$



$A, B, C$  Konstante. Ist  $aB - bA \neq 0$ , so führt man diese g. D. e. O. mittels der Transformation  $\bar{y} = y - y_0, \bar{x} = x - x_0$  in eine homogene Differentialgleichung über; dabei ist  $(x_0, y_0)$  die Lösung des linearen Gleichungssystems  $ax + by + c = 0, Ax + By + C = 0$ . Ist  $aB - bA = 0$ , so führt man die g. D. e. O. mittels  $\bar{y} = ax + by, \bar{x} = x$  in eine solche mit getrennten Variablen über. In der g. D. e. O. (16) z. B. gilt  $aB - bA = -1 \neq 0$ . Aus  $y - 1 = 0$  und  $x - y + 3 = 0$  folgen  $x_0 = -2$  und

$$(16) \quad y' = \frac{y - 1}{x - y + 3}$$

$y_0 = 1$ . Die Transformation  $\bar{y} = y - 1, \bar{x} = x + 2$  führt wegen  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx}$  auf die homogene g. D. e. O.  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}}$ . Aus der allgemeinen Lösung  $\bar{y} = c e^{-\bar{x}/\bar{y}}$  dieser Differentialgleichung ergibt sich die allgemeine Lösung (17) der vorgelegten g. D. e. O.

$$(17) \quad y - 1 = c e^{-(x+2)/(y-1)}$$

**II.4. Lineare Differentialgleichung  $y' + p(x)y = q(x)$**  mit gegebenen stetigen Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$ . Ist  $q(x) \neq 0$ , so spricht man von einer *inhomogenen linearen Differentialgleichung*, im Falle  $q(x) \equiv 0$  von einer *homogenen linearen Differentialgleichung*. Die allgemeine Lösung  $y_{ai}$  der inhomogenen g. D. e. O.  $y' + py = q$  setzt sich additiv zusammen aus der allgemeinen Lösung  $y_{ah}$  der dazugehörigen homogenen g. D. e. O.  $y' + py = 0$  und einer speziellen Lösung  $y_{si}$  der gegebenen inhomogenen Gleichung:  $y_{ai}(x) = y_{ah}(x) + y_{si}(x)$ . Dabei berechnet sich  $y_{ah}(x)$  nach (18) aus der Differentialgleichung mit ge-

$$(18) \quad y_{ah} = c e^{-\int p(t)dt}$$

trennten Variablen  $y' = -p(x)y$ . Eine spezielle Lösung  $y_{si}$  von  $y' + py = q$  ergibt sich nach der Methode der *Variation der Konstanten*: Für  $y_{si}$  macht man den Ansatz (19), indem man die in  $y_{ah}$

$$(19) \quad y_{si} = c(x) e^{-\int p(t)dt}$$

vorkommende Konstante  $c$  als Funktion  $c(x)$  auffaßt, und bestimmt sie aus  $y'_{si} + p y_{si} = q$ . Man erhält (20), und damit (21).

$$(20) \quad \left[ c'(x) e^{-\int p(t)dt} - c(x) p(x) e^{-\int p(t)dt} \right]$$

$$+ p(x) c(x) e^{-\int p(t)dt} = q(x)$$

$$(21) \quad c(x) = \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds$$

Eine spezielle Lösung  $y_{si}$  ergibt sich dann als (22) und damit erhält man die allgemeine Lösung (23)

$$(22) \quad y_{si} = e^{-\int p(t)dt} \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds$$

$$(23) \quad y_{ai} = e^{-\int p(t)dt} \left( c + \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right)$$

der gegebenen inhomogenen g. D. e. O.  $y' + px = q$ . Es ist zweckmäßig, sich nicht diese Formel zu merken, sondern das Verfahren, denn dieses läßt sich auch auf  $\nearrow$  lineare gewöhnliche Differentialgleichungen  $r$ -ter Ordnung übertragen.

In der linearen g. D. (24) z. B. ist  $p(x) = (x - 2)/[x(x - 1)]$  und  $q(x) = -1/[x^2(x - 1)]$ .

$$(24) \quad y' + \frac{x - 2}{x(x - 1)} y = -\frac{1}{x^2(x - 1)}$$

In einem Gebiet mit  $x > 1$  ist die Forderung der Stetigkeit der Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  erfüllt. Als  $y_{ah}$  ergibt sich  $y_{ah} = c(x - 1)/x^2$ . Der Ansatz  $y_{si} = c(x)(x - 1)/x^2$  in die Differentialgleichung eingesetzt liefert (25), d. h.,  $c(x) = 1/(x - 1)$  und damit  $y_{si} = 1/x^2$ .

$$(25) \quad \frac{c'(x - 1)}{x^2} + \frac{c(2 - x)}{x^3} + \frac{c(x - 2)}{x^3} = \frac{1}{x^2(x - 1)}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen g. D. e. O. ist (26).

$$(26) \quad y(x) = c(x - 1)/x^2 - 1/x^2$$

**II.5. Exakte Differentialgleichung** ist eine g. D. e. O.  $y'h(x, y) + g(x, y) = 0$ , in der die *Integrabilitätsbedingung*  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  erfüllt ist. Jede

explizite g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$  kann in dieser Form geschrieben werden, denn mit  $f(x, y) = \frac{-g(x, y)}{h(x, y)}$

erhält man die gewünschte Form. Die angegebene Bedingung  $h_x = g_y$  ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  der  $x, y$ -Ebene, d. h. in einem Gebiet, in dem jede in  $G$  gelegene geschlossene und stetig differenzierbare Kurve innerhalb von  $G$  stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, notwendig und hinreichend dafür, daß eine Funktion  $F(x, y)$  existiert mit

$$dF(x, y) = g(x, y) dx + h(x, y) dy \text{ oder}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = h(x, y).$$

In diesem Fall ist  $F(x, y) = c$  oder die Auflösung  $y = y(x, c)$  nach  $y$  das allgemeine Integral der exakten g. D. e. O. Die Funktion  $F(x, y)$  läßt sich nach der folgenden Methode bestimmen: Aus

$$\frac{\partial F}{\partial x} = g(x, y) \text{ folgt zunächst } F = \int g(t, y) dt + a(y).$$

Zur Bestimmung der noch beliebigen Funktion  $a(y)$

verwendet man  $\frac{\partial F}{\partial y} = h(x, y)$  und erhält (27) und daraus (27a).

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial y} \int g(t, y) dt + a'(y) = h(x, y)$$

$$(27a) \quad a'(y) = h(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int g(t, y) dt$$

Wegen der Integrabilitätsbedingung hängt die rechte Seite von (27a) nicht von  $x$  ab und es ergibt sich (28). Die Funktion  $F(x, y)$  hat deshalb die

$$(28) \quad a(y) = \int \left( h(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \int g(t, s) dt \right) ds$$

Form (29). Es empfiehlt sich, im konkreten Fall

$$(29) \quad F(x, y) = \int g(t, y) dt + \int \left( h(x, s) - \frac{\partial}{\partial s} \int g(t, s) dt \right) ds$$

diese Methode zu übernehmen und nicht die fertige Formel. Die g. D. (30) z. B. ist eine exakte Differen-

$$(30) \quad y'(x^2y - x^3) + xy^2 - 3x^2y - 2x^3 = 0$$

tialgleichung mit  $h(x, y) = x^2y - x^3$  und  $g(x, y) = xy^2 - 3x^2y - 2x^3$ , denn  $h_x = 2xy - 3x^2 = g_y$ . Aus  $F_x = xy^2 - 3x^2y - 2x^3$  folgt

$F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y - \frac{1}{2}x^4 + a(y)$  und dann aus  $F_y = x^2y - x^3$  die Gleichung  $x^2y - x^3 + a'(y) = x^2y - x^3$ , d. h.,  $a'(y) = 0$ .  $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y - \frac{1}{2}x^4 + c$  ist das allgemeine Integral dieser exakten Differentialgleichung.

**II.6. Methode des integrierenden Faktors.** Erfüllt die g. D. e. O.  $y'h(x, y) + g(x, y) = 0$  nicht die Integrabilitätsbedingung einer exakten Differentialgleichung, so kann man eine Funktion  $M(x, y)$  suchen, so daß die g. D. e. O.

$y'h(x, y)M(x, y) + g(x, y)M(x, y) = 0$  eine exakte Differentialgleichung wird. Eine solche Funktion  $M(x, y)$  heißt *Eulerscher Multiplikator* oder *integrierender Faktor*. Der integrierende Faktor  $M(x, y)$  muß dann der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung (31) genügen. Jede be-

$$(31) \quad M \left( \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = g \frac{\partial M}{\partial y} - h \frac{\partial M}{\partial x}$$

liebige partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist ein integrierender Faktor der Differentialgleichung  $y'h + g = 0$ . Es läßt sich beweisen, daß diese partielle Differentialgleichung stets eine Lösung hat, d. h., es existiert mindestens ein integrierender Faktor zu  $y'h + g = 0$ . Oft erhält man einen solchen integrierenden Faktor recht leicht, wenn man  $M$  als Funktion nur von  $x$  oder  $y$  oder  $xy$  oder  $x/y$  ansetzt und so die partielle Differentialgleichung für  $M$  vereinfacht. Die g. D. (32) ist z. B.

$$(32) \quad y'(xy - x^2) + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$$

keine exakte Differentialgleichung, denn  $\frac{\partial h}{\partial x} =$

$\frac{\partial}{\partial x}(xy - x^2) = y - 2x \neq \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 3xy - 2x^2) = 2y - 3x$ . Sucht man zu dieser g. D. e. O. einen integrierenden Faktor und setzt  $M = M(x)$  an, so wird aus der partiellen Differentialgleichung für  $M$  die gewöhnliche Differentialgleichung  $M =$

$x \frac{dM}{dx}$ , aus der man z. B.  $M = x$  oder  $M = -2x$

als integrierenden Faktor erhält. Multipliziert man nun die gegebene g. D. e. O. mit  $x$ , so ergibt sich die exakte g. D. e. O. (33) mit dem allgemeinen Integral

$$(33) \quad y'(x^2y - x^3) + xy^2 - 3x^2y - 2x^3 = 0$$

$\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y - \frac{1}{2}x^4 + c$ , das auch allgemeines Integral der gegebenen g. D. e. O. ist.

**II.7. Bernoullische Differentialgleichung**  $y' = h(x)y + g(x)y^n$ . Für  $n = 1$  ist diese g. D. e. O. eine durch Trennung der Variablen lösbare Differentialgleichung. Man kann deshalb  $n \neq 1$  voraussetzen. Durch  $\bar{y} = y^{1-n}$ ,  $\bar{x} = x$  läßt sich dann diese g. D. e. O. in die lineare g. D. e. O.

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - (1 - n)h(x)\bar{y} = (1 - n)g(x)$$

überführen. Aus dem allgemeinen Integral  $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$  ergibt sich das allgemeine Integral der vorge-

$$(34) \quad y' = \frac{-x + 2}{x(1-x)}y + \frac{1}{x^2(x-1)}y^2$$

legten Bernoullischen g. D. e. O. als  $y = \bar{y}^{1/(1-n)}$ . Die g. D. (34) z. B. ist eine Bernoullische Differen-

tialgleichung für  $n = 2$  mit  $h(x) = \frac{-x + 2}{x(1-x)}$  und  $g(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$ . Aus  $\bar{y} = y^{1-2} = 1/y$ ,  $\bar{x} = x$  folgt

$$(35) \quad \text{und damit (36).}$$

Aus der allgemeinen Lösung  $\bar{y}(x) = c(x-1)/x^2 + 1/x^2$

$$(35) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\bar{y}^2} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$$

$$(36) \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} + \frac{x-2}{x(x-1)}\bar{y} = -\frac{1}{x^2(x-1)}$$

dieser linearen g. D. e. O. ergibt sich mit (37) die allgemeine Lösung der vorgelegten Bernoullischen Differentialgleichung.

$$(37) \quad y(x) = 1/\bar{y}(x) = x^2/[1 + c(x+1)]$$

**III. Implizite gewöhnliche Differentialgleichung e. Ordnung**  $F(x, y, y') = 0$ .

**III.1. Die implizite g. D. e. O. läßt sich nach  $y' = p$  auflösen.** Falls in einem vorgegebenen Punkt  $(x_0, y_0)$  die Gleichung  $F(x_0, y_0, p) = 0$   $n$  reelle Wurzeln  $p_1, p_2, \dots, p_n$  hat und  $F_p(x_0, y_0, p_k) \neq 0$  für  $k = 1, 2, \dots, n$  ist, so zerfällt die g. D. e. O. in der Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0)$  in die  $n$  Differentialgleichungen  $y' = f_k(x, y)$  mit  $f_k(x_0, y_0) = p_k$ . Die Funktionen  $f_k(x, y)$  erhält man durch Auflösung von  $F(x, y, p) = 0$  nach  $p$ . Durch den Punkt  $(x_0, y_0)$  gehen genau  $n$  Integralkurven. Für  $F(x, y, y') = x^2(y')^2 + 3xyy' + 2y^2$  z. B. ist  $p_1 = -4$  und  $p_2 = -8$  bzgl. des Punktes  $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 2)$ , wie aus  $F(\frac{1}{2}, 2, p) = 0$  folgt. Diese g. D. e. O. zerfällt in  $y' = -y/x$  und  $y' = -2y/x$  in der Umgebung des Punktes  $(\frac{1}{2}, 2)$ , in der dann  $y = c/x$  und  $y = c/x^2$  zwei Lösungsscharen der vorgelegten impliziten g. D. e. O. sind.

**III.2. Die implizite g. D. e. O. läßt sich nach  $y$  auflösen.** Gilt  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$  für ein Wertetripel

$x_0, y_0, p_0$ , und kann  $F(x, y, p) = 0$  in der Umgebung dieses Wertetripels in der Form  $y = G(x, p)$  nach  $y$  aufgelöst werden, d. h., gelten  $y_0 = G(x_0, p_0)$  und  $F(x, G(x, p), p) \equiv 0$ , so erhält man aus  $dy = G_x(x, p) dx + G_p(x, p) dp$  mit (38) eine g. D. e. O.

$$(38) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - G_x(x, p)}{G_p(x, p)}$$

für die Funktion  $p(x)$ , die nach der Ableitung aufgelöst ist. Die Lösung dieser g. D. e. O. in der Form  $p = p(x)$  oder  $x = x(p)$ , in  $y = G(x, p)$  eingesetzt, liefert die Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung in der Gestalt  $y = G(x, p(x)) = y(x)$  oder als Parameterdarstellung  $y = G(x(p), p)$ ,  $x = x(p)$  mit  $p$  als Parameter. Die g. D. e. O.  $F(x, y, y') = y - 2xy' + (y')^2 = 0$  hat z. B. in der Umgebung von  $(x_0, y_0, p_0) = (1, 0, 2)$  die Auflösung  $y = G(x, p) = 2xp - p^2$ . In diesem Beispiel ist  $y = 2xp - p^2$  die Auflösung von  $F = 0$ , die nicht nur in der Umgebung des betrachteten Punktes, sondern überall existiert. Dies muß natürlich i. allg. nicht der Fall sein. Aus der allgemeinen Lösung  $x = 2p/3 + c/(2p^2)$  der

expliziten homogenen g. D. e. O.  $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} \frac{p}{p-x}$

für  $p(x)$  erhält man schließlich die Parameterdarstellung (39) der Lösung der Ausgangsdifferential-

$$(39) \quad x = 2p/3 + c/(2p^2), \quad y = p^2/3 + c/p$$

gleichung mit dem Parameter  $p$ . Aus dieser Schar von Lösungen ergibt sich für  $c = -8/3$  diejenige, die durch den Punkt  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  geht und dort den Anstieg  $p = 2$  hat.

**III.3. Die implizite g. D. e. O. läßt sich nach  $x$  auflösen.** Gilt  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$  für ein Wertetripel  $x_0, y_0, p_0$ , und kann  $F(x, y, p) = 0$  in der Umgebung dieses Wertetripels in der Form  $x = H(y, p)$  nach  $x$  aufgelöst werden, d. h., gelten  $x_0 = H(y_0, p_0)$  und  $F(H(y, p), y, p) \equiv 0$ , so erhält man aus  $dx = H_y(y, p) dy + H_p(y, p) dp$  und

$$(40) \quad \frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} \frac{dy}{dp} \text{ mit}$$

(40) eine g. D. e. O. für die Funktion  $y(p)$ , die

$$(40) \quad \frac{dy}{dp} = \frac{pH_p(y, p)}{1 - pH_y(y, p)}$$

nach der Ableitung aufgelöst ist. Die Lösung dieser g. D. e. O. in der Form  $y = y(p)$  oder  $p = p(y)$  in  $x = H(y, p)$  eingesetzt liefert die Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung in Parameterdarstellung  $x = H(y(p), p) = x(p)$ ,  $y = y(p)$  mit  $p$  als Parameter oder als  $x = H(y, p(y)) = x(y)$ .

Die g. D. e. O.  $F(x, y, y') = y - 2xy' + (y')^2 = 0$  hat z. B. in der Umgebung von  $(x_0, y_0, p_0) = (1, 0, 2)$  die Auflösung  $x = H(y, p) = y/(2p) + p/2$ . Aus der allgemeinen Lösung  $y = c/p + p^2/3$  der expliziten

linearen g. D. e. O.  $\frac{dy}{dp} = -\frac{y}{p} + p$  für  $y(p)$  erhält man schließlich die Parameterdarstellung (41) der Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung mit

$$(41) \quad x = c/(2p^2) + 2p/3, \quad y = c/p + p^2/3$$

dem Parameter  $p$ . Diese Lösungsmethode liefert also dieselbe Lösung, wie die in III.2. ermittelte.

**III.4. Ein Linienelement  $(x_0, y_0, p_0)$  von  $F(x, y, p) = 0$ , d. h. ein Wertetripel mit  $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ , heißt reguläres Linienelement, falls genau eine stetige Funktion  $p = f(x, y)$  in der Umgebung von  $(x_0, y_0)$  mit  $p_0 = f(x_0, y_0)$  und  $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$  existiert und die g. D. e. O.  $y' = f(x, y)$  in der Umgebung von  $x_0$  genau eine Integralkurve  $y = y(x)$  mit  $y_0 = y(x_0)$  und  $y'(x_0) = p_0$  hat. Anderenfalls heißt das Linienelement *singuläres Linienelement*. Ist die Funktion  $F(x, y, p)$  in der Umgebung eines Linienelementes  $(x_0, y_0, p_0)$  stetig und hat stetige partielle Ableitungen  $F_x, F_y$  und  $F_p$ , so ist das Linienelement sicher dann regulär, wenn  $F_p(x_0, y_0, p_0) \neq 0$  ist. Es kann nur dann singulär sein, wenn  $F_p(x_0, y_0, p_0) = 0$  ist. Eine Integralkurve, die nur aus singulären Linienelementen besteht, heißt *singuläres Integral* oder *singuläre Lösung*. Ein singuläres Integral läßt sich i. allg. für keinen Wert der beliebigen Konstanten aus der allgemeinen Lösung gewinnen. Um ein singuläres Integral einer impliziten g. D. e. O.  $F(x, y, y') = 0$  zu erhalten, eliminiert man  $p$  aus den beiden Gleichungen  $F(x, y, p) = 0$  und  $F_p(x, y, p) = 0$ . Ist die gewonnene Beziehung ein Integral der gegebenen g. D. e. O., so ist sie ein singuläres Integral. Ist die allgemeine Lösung  $\Phi(x, y; c) = 0$  bekannt, so bilden die Einhüllenden dieser Kurvenschar singuläre Lösungen der vorgelegten g. D. e. O. Diese Einhüllenden gewinnt man durch Elimination von  $c$  aus  $\Phi(x, y; c) = 0$  und  $\Phi_c(x, y; c) = 0$ .**

Die singulären Lösungen der g. D. e. O.  $F(x, y, p) = [(y')^2 + 1][(x - y)^2 - 1] - 2y' = 0$  gewinnt man z. B. durch Elimination von  $p$  aus  $F(x, y, p) = (p^2 + 1)[(x - y)^2 - 1] - 2p = 0$  und aus  $F_p(x, y, p) = 2p[(x - y)^2 - 1] - 2 = 0$ . Es ergibt sich  $(x - y)^2 [(x - y)^2 - 2] = 0$ , d. h.  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x + \sqrt{2}$  und  $y_3 = x - \sqrt{2}$ . Die Funktion  $y_1 = x$  ist keine Lösung von  $F(x, y, y') = 0$ , also auch keine singuläre Lösung, die Funktionen  $y_2 = x + \sqrt{2}$  und  $y_3 = x - \sqrt{2}$  sind singuläre Lösungen. Die allgemeine Lösung dieser g. D. e. O. ist  $\Phi(x, y; c) = (x - c)^2 + (y - c)^2 - 1 = 0$ , und durch Elimination von  $c$  aus  $\Phi(x, y; c) = 0$  und  $\Phi_c(x, y; c) = -2(x - c) - 2(y - c) = 0$  kann man ebenfalls diese singulären Lösungen ermitteln.

**gewöhnlicher Logarithmus** svw. dekadischer Logarithmus; s. a. Logarithmensystem I.

**g. g. T.:** *größter gemeinsamer Teiler*, ↗ Brüche I.1., ↗ euklidischer Algorithmus, ↗ Gaußsche Zahlen I., ↗ Polynomring, ↗ Teilbarkeit III.

**Giga** ↗ Strecke V.

**Gipfelpunkt** ↗ Böschungsaufgabe.

**Gitternord** ↗ Gauß-Krüger-Projektion II.

**Gitterpunktsatz von Minkowski** ↗ Geometrie der Zahlen.

**glatte Kurve** ↗ regulärer Punkt, s. a. Kurve.

**glattes Kurvenstück** ↗ Kurve.

**Glättung, exponentielle** ↗ Vorhersage.

**Glättung von Funktionswerten** ↗ Extremwert VII.2.

**Gleichmächtigkeit:** *Mengenlehre* Relation, die zwischen zwei Mengen  $M, N$  genau dann besteht, wenn es eine Bijektion  $f: M \rightarrow N$  gibt, d. h. eine

eindeutige Funktion  $f$  von  $M$  auf  $N$ . In Zeichen gibt  $M \sim N$  die G. an. Sie ist eine  $\nearrow$  Äquivalenzrelation, wegen  $M \sim M$  ist sie reflexiv; da aus  $M \sim N$  und  $N \sim P$  stets  $M \sim P$  folgt, ist sie transitiv, und da aus  $M \sim N$  folgt  $N \sim M$ , ist sie symmetrisch. Die Menge der natürl. Zahlen und die Menge der positiven rationalen Zahlen sind z. B. gleichmächtig ( $\nearrow$  rationale Zahlen), und zwar abzählbar. Dagegen ist die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar. Ganz allgemein kann man zeigen, daß nie eine Menge und ihre Potenzmenge gleichmächtig sind.

**gleichmäßige Konvergenz**  $\nearrow$  Funktionenfolge II.,  $\nearrow$  Funktionenreihe II., Potenzreihe IV.

**gleichmäßige Stetigkeit**  $\nearrow$  Stetigkeit.

**gleichnamig**  $\nearrow$  Brüche I.2.

**gleichschenkelig**  $\nearrow$  Dreieck III.,  $\nearrow$  sphärisches Dreieck V.,  $\nearrow$  Trapez.

**gleichseitig**  $\nearrow$  Dreieck III.,  $\nearrow$  Hyperbel I.

**Gleichsetzungsverfahren**  $\nearrow$  lineare Gleichung III.2.

**gleichsinnig kongruent**  $\nearrow$  Spiegelung II.

**Gleichung:** I. mathematisches Objekt  $T_1 = T_2$ , das durch Gleichsetzen zweier Terme  $T_1$  und  $T_2$  entsteht, die auch die *Seiten* der G. heißen,  $T_1$  die *linke* und  $T_2$  die *rechte Seite*. G.en ohne Variable, z. B.  $3 + 5 = 8$  oder  $2 + 3 \cdot 4 = 5$ , sind *Aussagen* über Gleichheit, die entweder wahr oder falsch sind, z. B. ist die Aussage  $3 + 5 = 8$  wahr, die Aussage  $2 + 3 \cdot 4 = 5$  falsch. G.en mit Variablen sind *Aussageformen* der Gleichheit. Erst nach Ersetzen der Variablen durch Zahlen aus dem *Definitionsbereich* der G., d. h. aus dem Durchschnitt der Definitionsbereiche aller in der Gleichung vorkommenden Terme, die Variable enthalten, gehen sie in wahre oder falsche Aussagen über, z. B. liefert  $3x = -12$  für  $x = 1$  eine falsche, für  $x = -4$  eine wahre Aussage. Je nach Art der verwendeten Terme unterscheidet man  $\nearrow$  *algebraische G.en* und nichtalgebraische oder *transzendente G.en*.

Jede Zahl aus dem Variablengrundbereich ( $\nearrow$  Grundbereich), die beim Einsetzen für die Variable eine G. mit genau einer Variablen in eine wahre Aussage über Gleichheit überführt, heißt *Lösung* oder *Wurzel* dieser G. Für eine G. mit 2, 3, ...,  $n$  Variablen ist jedes geordnete Paar, Tripel, ...,  $n$ -Tupel von Zahlen aus dem Variablengrundbereichen eine Lösung, falls durch das Ersetzen der Variablen unter Beachtung der Reihenfolge durch die Elemente des geordneten Zahlenpaares, Zahlentripels, ..., Zahlen- $n$ -Tupels die G. in eine wahre Aussage über Gleichheit übergeht. Für Systeme von G.en  $\nearrow$  lineares Gleichungssystem.

**Beispiel 1:** Die G.  $4x = -8$  wird von der reellen Zahl  $(-2)$  gelöst, denn  $4 \cdot (-2) = -8$  ist eine wahre Gleichheitsaussage. Da es keine weiteren Lösungen dieser G. gibt, ist  $(-2)$  die Lösung der G.  $4x = -8$ .

**Beispiel 2:** Die G.  $4a + 3b = 11$  wird z. B. von dem Zahlenpaar  $(2, 1)$  erfüllt, denn  $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$  ist wahr. Da es jedoch weitere, sogar unendlich viele Lösungen gibt, ist  $(2, 1)$  eine Lösung der G.

Die Menge aller Lösungen einer G. bezüglich gegebener Variablengrundbereiche wird *Lösungsmenge*

der G. genannt. Die G.  $x^2 = 2x + 8$  mit  $x \in \mathbf{R}$  z. B. hat die Lösungsmenge  $L = \{-2, 4\}$ . Die G.  $x^2 = -1$  mit  $x \in \mathbf{R}$  hat keine Lösung, sie hat als Lösungsmenge  $L = \emptyset$ , die leere Menge.

Eine G. mit einer Lösungsmenge  $L \neq \emptyset$  heißt *erfüllbar* oder *lösbar*; falls  $L = \emptyset$ , heißt die G. *nicht erfüllbar* oder *unlösbar*. Ist für eine erfüllbare G. mit einer Variablen die Lösungsmenge gleich dem Variablengrundbereich, so heißt diese G. *Identität* oder *allgemeingültige G.* bezüglich des Variablengrundbereichs; z. B. ist die G.  $x + 3x = 4x$  allgemeingültig bezüglich der Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen. Die G.  $x = (\sqrt{x})^2$  ist allgemeingültig bezüglich der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, nicht jedoch bezüglich der Menge aller reellen Zahlen; sie ist nicht erfüllbar bezüglich der Menge der negativen reellen Zahlen, denn für  $x < 0$  ist die rechte Seite nicht definiert.

Eine erfüllbare G. mit  $n$  Variablen heißt *allgemeingültig*, wenn alle mögl. geordneten  $n$ -Tupel von Zahlen aus den gegebenen Variablengrundbereichen Lösungen der G. sind. Nach dieser Definition ist  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}$  eine allgemeingültige G., denn sie wird durch alle geordneten Paare  $(a, b)$  reeller Zahlen erfüllt. „Ketten“ allgemeingültiger G. treten z. B. bei äquivalenten Termumformungen ( $\nearrow$  Term) auf.

**II.** Zwei G.en mit Variablen heißen *äquivalent* bezüglich der gegebenen Variablengrundbereiche, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind. Sind die Lösungsmengen verschieden, so sind die G.en *nicht äquivalent*. **Beispiele:** 1. Die G.en  $3a + 1 = 10$  und  $6x = 18$  sind bezüglich der Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen äquivalent, denn es ist  $L_1 = \{3\}$  und  $L_2 = \{3\}$ , also  $L_1 = L_2$ . 2. Die G.en  $a^2 = 16$  und  $x^2 = 64$  sind in bezug auf die Menge  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen nicht äquivalent, denn  $L_1 = \{-4, 4\}$  und  $L_2 = \{4\}$ , d. h.,  $L_1 \neq L_2$ . Bezüglich der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen sind diese G.en aber äquivalent, denn dann ist  $L_1 = L_2$ . Allgemeingültige G.en sind bei gleichen Variablengrundbereichen untereinander äquivalent, dasselbe gilt für nicht erfüllbare G.en. Die *Äquivalenz* von G.en erfüllt die Eigenschaften einer *Äquivalenzrelation*.

Formt man eine G. (A) so um, daß die entstehende G. (B) bzgl. derselben Variablengrundbereiche zu (A) äquivalent ist, so heißt die vorgenommene Umformung *äquivalente Umformung*. Eine Umformung einer G. (A) in eine G. (B) ist genau dann äquivalent, wenn für die Lösungsmengen  $L_A, L_B$  von (A) bzw. (B) gilt  $L_A = L_B$ . Falls  $L_A \neq L_B$ , so heißt die Umformung von (A) in (B) *nichtäquivalente Umformung*.

Ist  $L_A \subset L_B$ , so kann man die zu  $L_A$  hinzugekommenen Lösungen durch die Probe aussondern.

Bei nichtäquivalenten Umformungen, z. B. bei Division der Gleichung durch einen Term, der die Variable enthält, oder beim Radizieren der Gleichung, können Lösungen verlorengehen, das heißt  $L_A \supset L_B$ . Bei solchen Umformungen ist es erforderlich, Untersuchungen über möglicherweise verlorengelassene Lösungen anzustellen.

Eine Übersicht über äquivalente Umformungen geben die folgenden Sätze, in denen der Definitions-

bereich der auftretenden Terme, falls keine Einschränkungen gemacht werden, die Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen bzw. die Menge der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen sind.

**II.1.** Die  $G$ .  $T_1 = T_2$  ist äquivalent zur  $G$ .  $T_1' = T_2'$  genau dann, wenn sowohl die Terme  $T_1$  und  $T_1'$  als auch  $T_2$  und  $T_2'$  äquivalente Terme sind.

**II.2.** Die  $G$ .  $T_1 = T_2$  ist äquivalent zur  $G$ .  $T_2 = T_1$ .

**II.3.** Wenn  $T_3$  ein Term ist, der für den gesamten Definitionsbereich der  $G$ .  $T_1 = T_2$  erklärt ist, so sind die  $G$ .en  $T_1 + T_3 = T_2 + T_3$  und  $T_1 - T_3 = T_2 - T_3$  zur Ausgangs- $G$ .  $T_1 = T_2$  äquivalent.

**II.4.** Wenn  $T_3$  ein Term ist, der für den gesamten Definitionsbereich der  $G$ .  $T_1 = T_2$  definiert und dort verschieden von Null ist, so sind die  $G$ .en  $T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_3$  und  $T_1 : T_3 = T_2 : T_3$  zur Ausgangs- $G$ .  $T_1 = T_2$  äquivalent.

Das Lösen einer  $G$ . ist das Angeben aller Lösungen bezüglich vorgegebener Variablengrundbereiche, d. h. die Angabe der Lösungsmenge. Im allgemeinen wird zum Aufsuchen aller Lösungen die gegebene  $G$ . solange schrittweise äquivalent umgeformt, bis eine  $G$ . entsteht, deren Lösungen sofort abgelesen werden können. Es entsteht eine Kette von zueinander äquivalenten  $G$ .en, und wegen der Transitivität der Äquivalenz ( $\nearrow$  Äquivalenzrelation) ist die letzte  $G$ . zur Ausgangs- $G$ . äquivalent, die Lösungsmenge der letzten  $G$ . ist danach gleichzeitig die Lösungsmenge der Ausgangs- $G$ .

S. a. biquadratische Gleichung, Bruchgleichung, diophantische Gleichung, Exponentialgleichung, Gleichung mit Parametern, Gleichung 4. Grades, goniometrische Gleichung, homogene Gleichung, kubische Gleichung, lineare Gleichung, lineares Gleichungssystem, logarithmische Gleichung, Proportion, pythagoreische Gleichung, quadratische Gleichung, Wurzelgleichung.

**Gleichung dritten Grades** svw. kubische Gleichung.

**Gleichung mit Parametern:** Gleichung, in der beim Aufsuchen der Lösungen nur gewisse Variable, gen. *Gleichungsvariable*, interessieren. Die restl. Variablen werden *Parameter* gen. Sind z. B. in der Gleichung  $a + 2b = 3$  sowohl  $a$  als auch  $b$  Gleichungsvariable, so enthält die Lösungsmenge u. a. die geordneten Paare  $(1, 1)$ ,  $(3, 0)$  und  $(-1, 2)$ . Ist aber  $a$  Gleichungsvariable und  $b$  Parameter in der Gleichung  $a + 2b = 3$ , so ist  $3 - 2b$  Lösungsterm, der für jeden Wert des Parameters  $b$  eine Lösung der Gleichung liefert, denn  $(3 - 2b) + 2b = 3$  ist für alle  $b \in \mathbf{R}$  eine wahre Aussage.

Faßt man die Gleichung  $y^2 = 2px$  als Gleichung in den Gleichungsvariablen  $x$  und  $y$  auf — kurz Gleichung in  $x$  und  $y$  gen. — und die Variable  $p$  als Parameter, so beschreibt die Gleichung, falls  $x$  und  $y$  als kartesische Koordinaten gedeutet werden, eine Schar von Parabeln, die den gleichen Scheitel, aber je nach Wahl des Parameters  $p$  verschiedene Brennpunktschnen haben.

Sollen in einer Gleichung mit  $n$  Variablen nur  $m$  Variable mit  $0 < m < n$  Gleichungsvariable sein, die restlichen  $n - m$  Variablen dagegen Parameter, so ist eine Lösung ein geordnetes  $m$ -Tupel von Termen, in denen i. allg. noch  $n - m$  Parameter auftreten.

**Gleichungssystem, lineares**  $\nearrow$  lineares Gleichungssystem.

**Gleichung vierten Grades:** algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten, in der die Summe der Exponenten der Gleichungsvariablen in mindestens einem Glied 4, in keinem Glied aber größer als 4 ist und für die die Grundbereiche der Variablen zum Bereich der komplexen Zahlen gehören. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Gleichung so umgeformt wurde, daß die auftretenden Zahlen und Variablen nur addiert, multipliziert und mit natürl. Exponenten potenziert werden. Beispiele sind  $rstu = 1$ ,  $2x_1x_2^3 + 4x_1 - x_1^2x_2^2 + 3x_2 - 7 = 0$  und  $x^4 - y^4 = 1$ . Für eine Gleichungsvariable hat die  $G$ . die allgemeine Form  $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ ; dabei gilt  $A \neq 0$ , weil die  $G$ . sonst nicht vom 4. Grade wäre. Nach Division durch  $A \neq 0$  erhält man die Normalform  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , die durch die Substitution  $x = y - a/4$  in die reduzierte Form  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  mit neuen Koeffizienten  $p, q, r$  übergeht. Die vier Lösungen  $y_1, y_2, y_3, y_4$  der reduzierten Gleichung ergeben sich aus den Formeln (1), in denen  $z_1, z_2, z_3$  die Lösungen der

$$(1) \quad \begin{aligned} 2y_1 &= \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \\ 2y_2 &= \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ 2y_3 &= -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \\ 2y_4 &= -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \end{aligned}$$

kub. Resolvente  $z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0$  mit der Nebenbedingung  $\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -q$  sind ( $\nearrow$  kubische Gleichung).

Je nachdem, ob die Lösungsmenge der kub. Resolvente aus sämtlich positiven reellen oder aus einer positiven und zwei negativen reellen oder aus einer reellen und zwei konjugiert komplexen Zahlen besteht, erhält man als Lösungen  $y_1, y_2, y_3, y_4$  der reduzierten  $G$ . 4. Grades vier reelle oder vier paarweise konjugiert komplexe Werte oder zwei reelle und zwei konjugiert komplexe Werte.

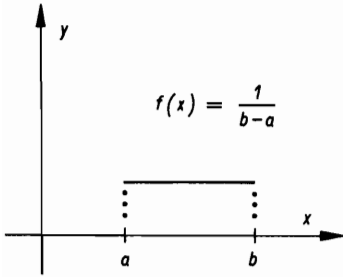
Die angegebenen Formeln führen auf recht umfangreiche Rechnungen, für die in ihnen enthaltenen Wurzeln stehen meist nur Näherungswerte zur Verfügung. Bei der Behandlung praktischer Probleme verwendet man deshalb meist *Näherungsverfahren*. Das Lösen einer  $G$ . vereinfacht sich wesentlich im Falle einer biquadrat. Gleichung.

**Gleichung zweiten Grades** svw. quadratische Gleichung.

**Gleichverteilung: I.** Verteilungsgesetz einer stetigen Zufallsgröße  $X$ , die gleichverteilt im Intervall  $]a, b[$  heißt, wenn ihre Dichte in  $]a, b[$  konstant und sonst 0 ist (Abb.). Wegen (1) muß  $f(x) = 1/(b - a)$  sein. Der Erwartungswert der  $G$ . in  $]a, b[$  ist  $(a + b)/2$ , die Streuung ist  $(b - a)/(2\sqrt{3})$ .

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

**II.** Eine *mehrdimensionale*  $G$ . nennt man das Verteilungsgesetz eines stetigen Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$  in einem beschränkten Gebiet  $G$  des



Gleichverteilung in  $[a, b]$

$R^n$ , wenn er eine Dichte hat, die in  $G$  konstant und außerhalb von  $G$  Null ist. Wegen (2) muß die

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

Konstante  $1/V(G)$  sein, wenn  $V(G)$  das Volumen des Gebiets  $G$  ist.

gleichwertig  $\nearrow$  Term II.

**Gleitkommadarstellung:** rechnerinterne Formulierung rationaler Zahlen durch eine endl. Folge von Binärzeichen bzw. durch deren techn. Realisierungen. Dabei wird jede rationale Zahl  $r$  auf der Grundlage der eindeutigen Darstellung (1) in einem Zahlen-

$$(1) r = m \cdot B^e, B^{-1} \leq m < B^0$$

system mit der Basis  $B$  als Dualität von Mantisse  $m$  und Exponent  $e$  betrachtet. Durch die Binärzeichenfolge sind beide vorzeichenbehafteten Größen kodiert. Häufig werden zur Formulierung rationaler Zahlen 48 Bits verwendet. Ein derartiger Umfang läßt auf Grund der beschriebenen Zweiteilung die Darstellung von rationalen Zahlen sehr großen Betrags zu. Beachtenswert ist, daß die rechner. Verknüpfung von Gleitkomma-Zahlen in digitalen Rechenanlagen wesentlich aufwendiger ist als bei Festkomma-Zahlen ( $\nearrow$  Festkommadarstellung).

**Gleitpiegelung**  $\nearrow$  Abbildung, affine VII.,  $\nearrow$  Spiegelung IV., V.

**gliedweise Addition**  $\nearrow$  Reihe III.3.

**gliedweise Differentiation**  $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen,  $\nearrow$  Funktionenfolge III.6.,  $\nearrow$  Funktionenreihe III.6.,  $\nearrow$  Potenzreihe X.

**gliedweise Integration**  $\nearrow$  Funktionenfolge III.5.,  $\nearrow$  Funktionenreihe III.5.,  $\nearrow$  Integral II.5.,  $\nearrow$  Potenzreihe IX.

**gliedweise Subtraktion**  $\nearrow$  Reihe III.3.

**Gliwenko, Walerij Iwanowitsch**, geb. 2. 1. 1897 Kiew, gest. 15. 2. 1940 Moskau. — G. studierte in Moskau und war von 1928 bis zu seinem Tode als Professor am Liebknecht-Institut in Moskau tätig. Er arbeitete vorwiegend über *Grundlagen der Mathematik* und über *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.

**Gliwenko, Satz von**  $\nearrow$  empirische Verteilungsfunktion.

**globales Extremum**  $\nearrow$  Extremwert I.

**globales Optimum**  $\nearrow$  Optimierung II.

**global stetig**  $\nearrow$  Abbildung, topologische.

**Glockenkurve, Gaußsche**  $\nearrow$  Normalverteilung I.

**Glücksspiel:** Spiel, dessen Ausgang ausschließlich vom Zufall abhängt und durch den Spieler nicht beeinflußt werden kann. Die G.e spielten eine große Rolle bei der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bekannte G.e sind Roulette, »17 und 4«, »Knobeln«, ein gleichzeitiges Würfeln mit mehreren Würfeln mit einem Würfelbecher und alle Arten von Lotterien.

**Gödel, Kurt**, geb. 28. 4. 1906 Brno, gest. 14. 1. 1978 Princeton. — G. beschäftigte sich mit grundlegenden Problemen der mathemat. Logik und der Mengenlehre, insbes. mit Fragen der *Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit einer Theorie*. Er zeigte z. B. 1933, daß mittels finiter Prozesse im Hilbertschen Sinne die Widerspruchsfreiheit einer beliebigen Theorie, die die formalisierte Arithmetik enthält, nicht bewiesen werden kann. 1938 verlor er seine Stelle als Privatdozent an der Wiener Universität und emigrierte 1940 in die USA. Seit 1950 arbeitete er als Professor in Princeton.

**Gödelisierung** svw. Arithmetisierung.

**Gödelkodierung** svw. Arithmetisierung.

**Gödelscher Unvollständigkeitssatz:** *mathematische Logik:* Jede formalisierte und widerspruchsfreie axiomat. Theorie, die die Zahlentheorie umfaßt, ist unvollständig, d. h., es existiert stets eine Aussage  $H$  dieser Theorie, die inhaltlich wahr ist, aber nicht aus den Axiomen der Theorie gefolgert werden kann; z. B. die arithmet. Aussage  $H$ , die durch Arithmetisierung der metatheoret. Aussage der Widerspruchsfreiheit jener Theorie entsteht. Daraus folgt, daß für einen Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht zu einfacher Theorien jedenfalls Hilfsmittel erforderlich sind, die über die von der Theorie gelieferten hinausgehen. Dieses Resultat zeigt Grenzen in der Zielsetzung, die Hilbert mit seiner Beweistheorie verfolgte.

**Gödelscher Vollständigkeitssatz**  $\nearrow$  Prädikatenkalkül V.

**Goldbach, Christian**, geb. 18. 3. 1690 Königsberg (Kaliningrad) als Sohn eines Pastors, gest. 1. 12. 1764 Petersburg (Leningrad). — G. studierte in Königsberg hauptsächlich Jura. Nach ausgedehnten Reisen in viele Länder Europas wurde er 1725 der erste ständige Sekretär der Petersburger Akademie. 1728 ging er als Erzieher des künftigen Zaren nach Moskau, kehrte aber 1732 nach Petersburg zurück. Seit 1742 war G. als hoher Beamter im auswärtigen Dienst tätig. — Seine mathemat. Arbeiten betreffen hauptsächlich die Reihenlehre, insbes. die Interpolation von Folgen und Reihen. Er hatte, bes. in Fragen der Zahlentheorie, bedeutenden Einfluß auf EULER. In einem Brief vom 7. 6. 1742 an ihn ist die *G.sche Vermutung* enthalten.

**Goldbachsche Vermutung**  $\nearrow$  Zahlentheorie III.3.

**Goldener Schnitt**  $\nearrow$  stetige Teilung.

**Goldener-Schnitt-Algorithmus:** ein Verfahren zur Bestimmung des Minimums einer nicht notwendig differenzierbaren Funktion  $f(x)$  einer Variablen, von der angenommen wird, daß ein Intervall  $[a^{(0)}, b^{(0)}]$  bekannt ist, in dem das Minimum liegt und in dem die Funktion links vom Minimum monoton fällt,

rechts von ihm aber monoton wächst. Dann werden berechnet  $u^{(0)} = a^{(0)} + (1 - \tau)(b^{(0)} - a^{(0)})$ ,  $v^{(0)} = a^{(0)} + \tau(b^{(0)} - a^{(0)})$  sowie  $f(u^{(0)})$  und  $f(v^{(0)})$  mit  $\tau = 1/2 (\sqrt{5} - 1) \approx 0,681$ . Die nach der folgenden Vorschrift berechnete Folge  $\{(a^{(i)}, b^{(i)})\}$  bildet dann eine Intervallschachtelung (1) für das Minimum, in der jedes Intervall der größere Abschnitt des nach dem Goldenen Schnitt geteilten vorigen Intervalls ist.

(1)

	falls $f(v^{(i)}) > f(u^{(i)})$	falls $f(v^{(i)}) \leq f(u^{(i)})$
$a^{(i+1)}$	$a^{(i)}$	$u^{(i)}$
$b^{(i+1)}$	$v^{(i)}$	$b^{(i)}$
$u^{(i+1)}$	$a^{(i)}$	$v^{(i)}$
$v^{(i+1)}$	$+ (1 - \tau)(v^{(i)} - a^{(i)})$ $u^{(i)}$	$b^{(i)}$ $-(1 - \tau)(b^{(i)} - u^{(i)})$
neu zu berechnen	$f(u^{(i+1)})$	$f(v^{(i+1)})$

**Gomory, Ralph**, geb. 7. 5. 1929 Brooklyn. — G. promovierte 1954 in Princeton und war längere Zeit in der militär. Forschung tätig. Er untersuchte Fragen der Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen und der Programmierung.

**Gomory, Verfahren von:** Methode zur Behandlung ganzzahliger linearer Optimierungsaufgaben durch Lösung einer Folge gewöhnlicher linearer Optimierungsaufgaben. Ist das zunächst bestimmte stetige Optimum (↗ Optimierung, ganzzahlige) kein Gitterpunkt, so wird eine neue Nebenbedingung derart hinzugefügt, daß alle zulässigen Gitterpunkte sie erfüllen, das stetige Optimum sie aber nicht erfüllt. Man bezeichnet diese Nebenbedingung als *Schnitt*, weil durch sie ein Stück des zulässigen Bereichs der stetigen Aufgabe abgeschnitten wird. Im nächsten Schritt wird über dem neuen Bereich wieder das stetige Optimum ermittelt und ein neuer Schnitt bestimmt. Theoretisch ergibt sich nach endlich vielen Schritten als stetiges Optimum ein optimaler Gitterpunkt. Praktisch treten bei größeren Problemen häufig numerische und andere Schwierigkeiten auf. Dann wird versucht, die Methode durch Angabe günstigerer Schnittkonstruktionen zu verbessern.

**Goniometrie:** Lehre von der Winkelmessung [*gonia* griech. Winkel, *metrein* messen]. Da die Bestimmung der Größe eines Winkels meist zur Planimetrie gerechnet wird und die prakt. Messung von Winkeln im Gelände zum Vermessungswesen bzw. in der Technik bes. Feinmeßgeräte erfordert, versteht man unter G. meist die Lehre von den Winkelfunktionen einschließlich der geometrisch bedingten Beziehungen zwischen ihnen (vgl. Winkelfunktion VII.).

**goniometrische Beziehungen** ↗ Winkelfunktion VII. **goniometrische Funktion** svw. Winkelfunktion.

**goniometrische Gleichung:** Bestimmungsgleichung, in der die zu bestimmende Variable auch als Argument von Winkelfunktionen auftritt; in den g. G.en

$\cos x = 0,5$ ,  $2 \sin^2 x - 0,5 = 0$  z. B. tritt die zu bestimmende Variable  $x$  nur im Argument von Winkelfunktionen auf; sie gehören zu den *rein-g. G.en*. G. G.en wie  $\tan x - 3x = 0$  werden zum Unterschied davon *gemischt-g. G.en* gen. G. G.en sind transzendent; sie lassen sich nur in Sonderfällen rechnerisch exakt lösen, es existieren jedoch stets Näherungsverfahren, mit deren Hilfe sich die Lösungen mit beliebiger Genauigkeit angeben lassen. Auch graph. Lösungen sind stets möglich. Die Probe durch Einsetzen der gefundenen Grad- oder Bogenmaße muß die gesamte Lösungsmenge umfassen, weil beim Lösen auch nichtäquivalente Gleichungsumformungen vorgenommen werden. I. allg. sind g. G.en nicht eindeutig lösbar, wenn als Lösungsgrundbereich die Menge  $\mathbf{R}$  aller reellen Zahlen zugelassen wird. Bei rein-g. G.en gibt es bestimmte Lösungsmethoden für gewisse *Grundtypen* I.

**I.1.** Tritt *nur eine Winkelfunktion* auf, so ergeben die Arkusfunktionen die Lösungswerte. Aus  $\sin^2(2x) = 0,008$  z. B. erhält man  $\sin 2x = 0,2$  und  $1/2 \arcsin 0,2 = x$ . Aus der Tafel entnimmt man wegen  $\sin x = \sin(180^\circ - x)$  die Näherungswerte  $x \approx 5,77^\circ + k \cdot 180^\circ$  und  $x \approx 174,23^\circ + k \cdot 180^\circ$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ .

**I.2.** Die Gleichung  $\sin(x + \pi/6) = 1/2 \sqrt{3}$  geht durch die Substitution  $z = x + \pi/6$  über in  $\sin z = 1/2 \sqrt{3}$ , d. h.,  $z_1 = 60^\circ = \pi/3$ ,  $z_2 = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$ . Wegen der Periode  $2\pi$  ist (1) die gesamte Lösungsmenge mit  $k \in \mathbf{Z}$  oder (1a) nach der Substitutionsgleichung  $x = z - \pi/6$ .

$$(1) \quad L = \{\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi\}$$

$$(1a) \quad L = \{\pi/6 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi\}$$

Tritt *nur eine Winkelfunktion* auf, so kann ihr Wert erst aus einer in ihr algebraischen Gleichung zu bestimmen sein. Die Gleichung  $2 \sin^2 x - 0,5 = 0$  z. B. geht durch  $\sin x = u$  über in  $2u^2 = 0,5$  oder  $u = \pm \sqrt{0,25}$  mit der Lösung  $u_1 = +0,5$  und  $u_2 = -0,5$ . Die Gleichung  $\tan^2 x + p \tan x + q = 0$  geht durch  $\tan x = v$  über in  $v^2 + pv + q = 0$  mit  $v_1 = \tan x = -p/2 + 1/2 \sqrt{p^2 - 4q}$  und  $v_2 = \tan x = -p/2 - 1/2 \sqrt{p^2 - 4q}$ .

**I.3.** Auf den Typ von I.1. versucht man auch g. G.en zurückzuführen, in denen *verschiedene Winkelfunktionen* auftreten, die das *gleiche Argument* haben. Die g. G. (2) z. B. geht wegen  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  über in  $2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$  bzw. in (2a),

$$(2) \quad 4 \cos^2 x - 2 \sin x - 2 = 0$$

$$(2a) \quad \sin^2 x + 0,5 \sin x - 0,5 = 0$$

$$(3) \quad (\sin x)_{1,2} = -1/4 \pm \sqrt{9/16}$$

aus der man (3) findet oder  $(\sin x)_1 = -1$ ,  $(\sin x)_2 = 1/2$  und daraus  $x_{11} = 270^\circ$ ,  $x_{21} = 30^\circ$ ,  $x_{22} = 150^\circ$ . Die gesamte Lösungsmenge ist  $x = 30^\circ + k \cdot 120^\circ$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ .

Die g. G. (4) geht durch die goniometr. Beziehungen

$$(4) \quad \tan^2 x + 4 \sin^2 x = 3$$

$\tan x = \sin x / \cos x$  und  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  über in (4a). Sie ist algebraisch in  $\sin^2 x = z$ , und die qua-

$$(4a) \quad \sin^2 x / (1 - \sin^2 x) + 4 \sin^2 x = 3$$

drat. Gleichung  $z^2 - 2z + 3/4 = 0$  hat die Wurzeln  $z_1 = 3/4$  und  $z_2 = 1/4$ . Wegen  $|\sin x| < 1$  kann  $z_1$  keine Lösung der gegebenen Gleichung sein, sondern nur  $\sin x = \pm 1/2 \sqrt{2}$ . Daraus findet man die Werte  $x_1 = \pi/4 + 2k\pi, x_2 = 3\pi/4 + 2k\pi, x_3 = 5\pi/4 + 2k\pi$  und  $x_4 = 7\pi/4 + 2k\pi$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ .

I.4. Viele prakt. Aufgaben führen auf den Typ (5) einer g. G., der mit der *Methode der Hilfswinkel*

$$(5) \quad a \sin x + b \cos x = c \text{ mit } a \neq 0, b \neq 0$$

gelöst wird, falls  $|c| < \sqrt{a^2 + b^2}$ . Dividiert man (5) durch  $\sqrt{a^2 + b^2}$  und deutet  $b/\sqrt{a^2 + b^2} = \cos h$  sowie  $a/\sqrt{a^2 + b^2} = \sin h$ , so ist der Hilfswinkel  $h$  eindeutig bestimmt durch  $\tan h = a/b$ , und (5) geht über in (5a).

$$(5a) \quad \cos h \cos x + \sin h \sin x = c/\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos(x - h) = c/\sqrt{a^2 + b^2}$$

Aus  $x - h = \arccos [c/\sqrt{a^2 + b^2}]$  und  $h$  ergeben sich die Lösungen von (5). Für  $a = 5, b = 2$  und  $c = 4$  z. B. erhält man mit  $k \in \mathbf{Z}$  die Lösungen  $x_1 = 26,2^\circ + k \cdot 360^\circ$  und  $x_2 = 110,2^\circ + k \cdot 360^\circ$ .

I.5. Treten in der g. G. *Winkelfunktionen mit verschiedenen Argumenten* auf, so versucht man, sie mit Hilfe goniometr. Beziehungen, vor allem der Additionstheoreme, auf eine g. G. mit gleichen Argumenten zurückzuführen. Substituiert man  $3x/7 = \alpha$  und  $\pi/2 - x = \beta$  in der g. G. (6) oder (6a), so gilt  $(\alpha + \beta)/2 = \pi/4 - 2x/7$

$$(6) \quad \cos(3x/7) + \sin x = 0$$

$$(6a) \quad \cos(3x/7) + \cos(\pi/2 - x) = 0$$

und  $(\alpha - \beta)/2 = -\pi/4 + 5x/7$ , und nach der goniometr. Beziehung (6c) geht (6a) über in (6b).

$$(6c) \quad \cos \alpha + \cos \beta$$

$$= 2 \cos[(\alpha + \beta)/2] \cdot \cos(\alpha - \beta)/2]$$

$$(6b) \quad 2 \cos[\pi/4 - 2x/7] \cdot \cos[5x/7 - \pi/4] = 0$$

Der erste Faktor in (6b) ist Null, falls  $\pi/4 - 2x/7 = \pi/2 + k\pi$ , d. h. für  $x = (7/2)[\pi/4 - \pi/2 + k\pi] = -7\pi/8 + 7k\pi/2$ . Für den zweiten Faktor ergibt sich  $5x/7 - \pi/4 = \pi/2 + k\pi$  oder  $x = (7/5)[3\pi/4 + k\pi] = (21/20)\pi + 7k\pi/5$ , wobei  $k \in \mathbf{Z}$ . Die Gleichung (7) geht nach Anwendung des

$$(7) \quad 4 \cdot \sin(x + \pi/6) - 2 \cos x = \sqrt{3}$$

Additionstheorems

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  mit  $\alpha = x$  und  $\beta = \pi/6$  über in (7a) bzw. in

$$(7a) \quad 2\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x - 2 \cos x = \sqrt{3}$$

$\sin x = 1/2$ . Damit ergibt sich  $x_1 = \pi/6 + 2k\pi$  und  $x_2 = 5\pi/6 + 2k\pi$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ .

I.6. Die g. G. (8) geht unter Verwendung des Additionstheorems für den Kosinus über in die Gleichung (9) oder (9a). Beachtet man noch die Identität  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , so geht Gleichung (9a) über in die in  $\sin x$  algebraische Gleichung (9b), die schließlich äquivalent ist zu (10). Substituiert man in (10)  $\sin x = t$ , so erhält man die quadrat.

$$(8) \quad \sin^2 x + 3 \cos 2x + \sin x = 2$$

chung (9) oder (9a). Beachtet man noch die Identität  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , so geht Gleichung (9a) über in die in  $\sin x$  algebraische Gleichung (9b), die schließlich äquivalent ist zu (10). Substituiert man in (10)  $\sin x = t$ , so erhält man die quadrat.

$$(9) \quad \sin^2 x + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x = 2$$

$$(9a) \quad -2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \sin x = 2$$

$$(9b) \quad -2 \sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) + \sin x = 2$$

chung (9) oder (9a). Beachtet man noch die Identität  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , so geht Gleichung (9a) über in die in  $\sin x$  algebraische Gleichung (9b), die schließlich äquivalent ist zu (10). Substituiert man in (10)  $\sin x = t$ , so erhält man die quadrat.

$$(10) \quad -5 \sin^2 x + \sin x = -1$$

Gleichung  $-5t^2 + t = -1$  mit den Lösungen  $t_1 = (1 + \sqrt{21})/10$  und  $t_2 = (1 - \sqrt{21})/10$ . War bis zu dieser Stelle die Lösung exakt, so kann man nun mit Hilfe einer Tafel für die Lösungen der gegebenen Gleichung in  $x$  nur die Näherungswerte

$$x_{11} = 0,592 + 2k\pi, \quad x_{12} = 2,549 + 2k\pi,$$

$$x_{21} = 3,508 + 2k\pi, \quad x_{22} = 5,917 + 2k\pi$$

mit  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$  ablesen.

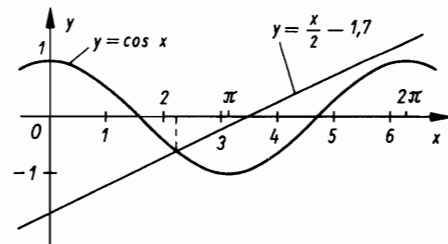
II. Treten mehrere Winkelfunktionen mit dem gleichen Argument  $x$  auf, so führen die Substitutionen (11a) und (11b) die g. G. über in eine Gleichung in

$$(11a) \quad \sin x = 2 \tan(x/2) / [1 + \tan^2(x/2)]$$

$$(11b) \quad \cos x = [1 - \tan^2(x/2)] / [1 + \tan^2(x/2)]$$

$\tan(x/2)$ . Aus dieser Funktion ist aber der Winkel  $x$  im Intervall  $0 \leq x \leq 2\pi$  eindeutig bestimmt.

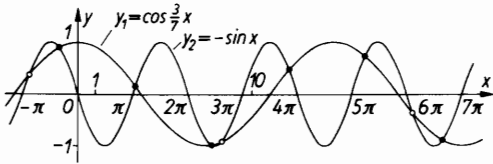
III. Gemischt-g. G.en lassen sich nur graphisch oder durch Iterationsverfahren lösen. Von der g. G.  $\cos x - x/2 + 1,7 = 0$  z. B. werden zur graph. Lösung die Bilder der Funktionen  $f_1(x) = \cos x$  und  $f_2(x) = x/2 - 1,7$  in einem kartes. Koordinatensystem dargestellt (Abb. 1). Als Abszisse des einzigen auftretenden Schnittpunktes  $S$  wird  $x_S \approx 2,21$  abgelesen. Weitere reelle Lösungen existieren, wie die graph. Darstellung zeigt, nicht. Auch für rein-g. G.en lassen sich neben dem Bestimmen der Lösungen durch Rechnung stets Näherungslösungen aus



goniometrische Gleichung. Abb. 1: Graphische Lösung der Gleichung  $\cos x - x/2 + 1,7 = 0$



der graph. Darstellung geeigneter Funktionen finden, zur g. G.  $\cos(3x/7) + \sin x = 0$  z. B. als Schnittpunkte der Kurven von  $f_1(x) = \cos(3x/7)$  und  $f_2(x) = -\sin x$  (Abb. 2).



goniometrische Gleichung. Abb. 2: Schnittpunkte der durch  $f_1(x) = \cos(3x/7)$  und  $f_2(x) = -\sin x$  bestimmten Kurven

Gosset, Student [Pseudonym], William Sealy, geb. 13. 6. 1876 Canterbury, gest. 16. 10. 1937 Beaconsfield. — G. war Sohn eines Offiziers und studierte am New College in Oxford Chemie und Mathematik. Im Jahre 1899 trat er in das Department of Agriculture von Irland in Dublin ein. Dort war er hauptsächlich mit der Auswertung biometr. Daten aus landwirtschaftl. Versuchen beschäftigt. Seit 1935 lebte G. in London. Die nach ihm ben. Student- oder *t-Verteilung* fand er 1907/08. Sie wurde von FISHER wesentlich weiter untersucht.

**grad:** Zeichen für Gradient.

**Grad:** Ordnungsbezeichnung unterschiedl. Bedeutung; in der Geometrie auch Winkeleinheit ( $\nearrow$  Winkel VII.1.).  $\nearrow$  algebraische Gleichung,  $\nearrow$  ganzrationale Funktion I.,  $\nearrow$  Graph III.,  $\nearrow$  Ordnung,  $\nearrow$  Permutationsgruppe,  $\nearrow$  Polynom I.,  $\nearrow$  Zahlkörper II.

**Grad einer algebraischen Zahl**  $\nearrow$  Zahlkörper II.

**Grad einer Körpererweiterung**  $\nearrow$  Körper II.

**Gradient:** I. Vektor  $\text{grad}_P f$  mit den Komponenten  $f_x(P_0)$  und  $f_y(P_0)$ , die sich als Richtungsableitungen einer Funktion  $f$  der zwei reellen Variablen  $x, y$  mit der Gleichung  $z = f(x, y)$  an der Stelle  $P_0 = (x_0, y_0)$  des Definitionsbereichs  $D(f)$  von  $f$  ergeben. Der G. steht senkrecht auf den *Niveaulinien* ( $\nearrow$  Niveauhyperebenen) und zeigt in die Richtung maximaler *Richtungsableitung* (s. a. Differentialquotient, partieller III.).

Der G.  $\text{grad}_P f$  einer Funktion  $f$  in mehr als zwei unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  an der Stelle  $P_0 \equiv (x_1^0, \dots, x_n^0)$  des Definitionsbereichs  $D(f)$  von  $f$  ist analog als  $\text{grad}_P f = (f_x, (P_0), \dots, f_{x_n}(P_0))$  definiert.

II. Eine Funktion  $U(x, y, z)$  von drei unabhängigen Variablen ordnet jedem Punkt  $P_0$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  den Skalar  $U(\mathbf{r}_0)$  zu, man kann sie daher auch auffassen als ein *skalares Feld*  $U(\mathbf{r})$  und ihren G. darstellen durch (1), wobei  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  Einheitsvektoren in Richtung der  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse bezeichnen.

$$(1) \quad \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

Danach ist  $\text{grad } U$  definiert in allen den Punkten  $\mathbf{r}_0$  des Raumes, in denen  $U(\mathbf{r})$  differenzierbar ist. Eine koordinatenfreie Definition des G.en erhält man

durch Angabe von Richtung und Länge des Vektors  $\text{grad } U$  im Punkt  $\mathbf{r}_0$ : Er hat die Richtung der Normalen  $\mathbf{n}$  zu der Niveauläche  $U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) = \text{const}$  und ist nach der Seite zunehmender Werte von  $U(\mathbf{r})$  orientiert. Seine Länge ist gegeben durch (2),

$$(2) \quad \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{r}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(\mathbf{r}_0 + t\mathbf{n}) - U(\mathbf{r}_0))$$

wenn  $|\mathbf{n}| = 1$ . Danach gibt  $|\text{grad } U|$  die Geschwindigkeit an, mit der die skalare Funktion  $U$  in Richtung der Normalen im Punkte  $\mathbf{r}_0$  wächst. Betrachtet man die Änderung (3), die  $U(\mathbf{r})$  in einer belie-

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}}(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(\mathbf{r} + t\mathbf{c}) - U(\mathbf{r})) \\ = \frac{\partial U}{\partial x}(\mathbf{r})c_1 + \frac{\partial U}{\partial y}(\mathbf{r})c_2 + \frac{\partial U}{\partial z}(\mathbf{r})c_3$$

bigen Richtung  $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$  erfährt, so läßt sich diese nach (3) als Skalarprodukt  $\text{grad } U \cdot \mathbf{c}$  auffassen. Ist  $\mathbf{c}^0$  der zu  $\mathbf{c}$  gehörige Einheitsvektor, so gibt (4) die Geschwindigkeit an, mit der die

$$(4) \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}(\mathbf{r}) = \text{grad } U \cdot \mathbf{c}^0 \\ = |\text{grad } U| \cos \varphi (\text{grad } U, \mathbf{c}^0)$$

Funktion  $U$  in Richtung von  $\mathbf{c}^0$  im Punkte  $\mathbf{r}$  wächst. Daher ist  $|\text{grad } U|$  um so größer, je dichter in der Umgebung des Punktes  $\mathbf{r}$  die Niveaulächen  $U = c_0$ ,  $U = c_0 + h$ ,  $U = c_0 + 2h, \dots$  liegen. In den Punkten, in denen  $U$  ein relatives Maximum oder Minimum hat, arten die Niveaulächen zu einem Punkt aus, und es gilt in diesen Punkten  $\text{grad } U = 0$ . Die

Ableitung  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}(\mathbf{r})$  ist die *Richtungsableitung* der

Funktion  $U$  in Richtung von  $\mathbf{c}^0$  im Punkte  $\mathbf{r}$ . Wegen (4) hat die Richtungsableitung im Punkte  $\mathbf{r}$  in Richtung des G.en ein Maximum, in einer zum G.en entgegengesetzten Richtung ein Minimum, und in allen zur G.enrichtung senkrechten Richtungen ist sie Null. Die Richtungsableitung von  $U$  in Richtung  $\mathbf{c}^0$  ist gleich der Projektion des G.en auf die Richtung  $\mathbf{c}^0$ . Nach (5) läßt sich das totale

$$(5) \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ = \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} \text{ mit } d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

Differential des skalaren Feldes  $U(\mathbf{r})$  durch  $\text{grad } U$  ausdrücken.

III. Für den G.en gelten die Rechenregeln (6) bis

$$(6) \quad \text{grad } c = 0 \quad (7) \quad \text{grad}(cU) = c \text{ grad } U$$

$$(8) \quad \text{grad}(U_1 + U_2) = \text{grad } U_1 + \text{grad } U_2$$

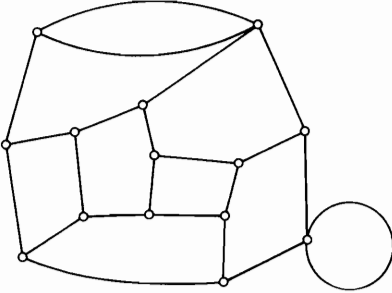
$$(9) \quad \text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{ grad } U_2 + U_2 \text{ grad } U_1$$

$$(10) \quad \text{grad } f(U_1) = \frac{df}{dU_1}(U_1) \text{ grad } U_1$$

(10), wenn  $U(\mathbf{r}), U_1(\mathbf{r}), U_2(\mathbf{r})$  stetig differenzierbare skalare Felder,  $f(t)$  eine stetig differenzierbare Funktion einer Variablen und  $c$  eine Konstante sind.



Will ein Fußgänger von einem bestimmten Platz  $X$  zu einem Platz  $Y$  gehen, so interessieren ihn bei der Festlegung seiner Marschroute nicht die Sehenswürdigkeiten der Stadt oder der genaue Verlauf der einzelnen Straßen. Er sucht sich im Stadtplan einen Weg, der durch eine oder mehrere Straßen vom Platz  $X$  zum Platz  $Y$  führt. Dazu genügt ihm eine Karte, die nur die Straßen und ihre Kreuzungen enthält. Sie ist ein Beispiel für einen ungerichteten Graphen. Die Kreuzungen sind seine Knotenpunkte; eine je zwei benachbarte Kreuzungen verbindende



Graph. Abb. 2: Knoten und Kanten des Stadtplans

Straße ist eine Kante des Graphen (Abb. 2). Für einen Autofahrer genügt dieser Plan nicht, er muß auch wissen, in welcher Richtung die Straßen zu befahren sind. Er braucht einen gerichteten Graphen (Abb. 3), in dem jede Straße mit Richtungspfeilen versehen ist.

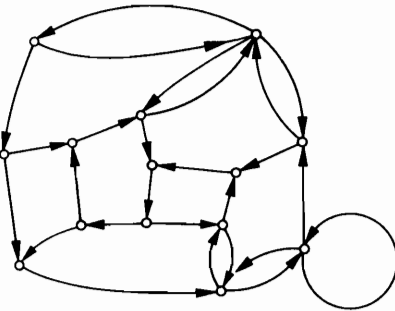


Abb. 3: Gerichteter Graph

II. Der Graph  $G$  heißt *endlich*, wenn  $K$  und  $U$  nur je endlich viele Elemente enthalten, im anderen Falle heißt  $G$  *unendlich*. Sind  $K$  und  $U$  leer, so spricht man von *leeren Graphen*. Eine Kante  $u$  oder ein Bogen  $u$ , dessen Endpunkte zusammenfallen, heißt *Schlinge*. Ist mehreren Kanten oder Bögen dasselbe ungeordnete oder geordnete Paar von Knotenpunkten zugeordnet, so spricht man von einer *Mehrfachkante* oder von *parallelen Bögen*. Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten bzw. Mehrfachbögen heißen *schlicht*. Ein Bogen  $u$  *inzidiert* mit  $X$  *nach außen* und mit  $Y$  *nach innen*, wenn  $X$  Startpunkt und  $Y$  Zielpunkt von  $u$  ist. Dann ist  $X$  der *direkte Vorgänger* von  $Y$ ,

und  $Y$  ist der *direkte Nachfolger* von  $X$ . Eine Kante  $u$  oder ein Bogen  $u$  *inzidiert* mit  $X$ , wenn  $X$  Endpunkt von  $u$  ist.

Zwei Knotenpunkte  $X$  und  $Y$  heißen *adjazent* oder auch *benachbart*, wenn sie Endpunkte derselben Kante bzw. desselben Bogens sind.

III. Ein endlicher  $G$  kann durch ein geometr. Bild veranschaulicht werden (Abb. 4). Ein *geometr. Bild*  $G'$  entsteht durch eine eineindeutige Abbildung der Menge  $K$  auf Punkte der Ebene; dabei verbindet man zwei Bildpunkte  $X'$  und  $Y'$  genau dann durch  $\alpha$  Jordan-Kurvenstücke, wenn die zugehörigen Knotenpunkte  $X$  und  $Y$  von  $G$  durch  $\alpha$  Kanten bzw.  $\alpha$  Bögen mit  $X$  als Startpunkt verbunden sind. Für einen gerichteten  $G$  en werden dabei die Jordan-

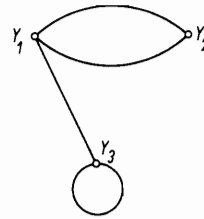


Abb. 4: Geometrisches Bild eines Graphen

Kurvenstücke im Bild von  $X'$  nach  $Y'$  durch einen Pfeil gerichtet. Offenbar ist  $G$  zu seinem geometr. Bild  $G'$  *isomorph*. Als *Valenz*  $v(X)$  eines Knotenpunktes  $X$  bezeichnet man die Anzahl der mit ihm inzidierenden Kanten oder Bögen; Schlingen werden dabei doppelt gezählt. In einem gerichteten  $G$  en unterscheidet man die *Eingangsvalenz*  $v^-(X)$ , für die  $X$  Zielpunkt ist, von der *Ausgangsvalenz*  $v^+(X)$ , für die  $X$  Startpunkt ist; dann gilt  $v^-(X) + v^+(X) = v(X)$ . Ein gerichteter  $G$  heißt *balanziert*, wenn für jeden seiner Knotenpunkte gilt  $v^-(X) = v^+(X)$ . Knotenpunkte der Valenz 0 heißen *isoliert*, Knotenpunkte der Valenz 1 heißen *hängend*. In einem *regulären*  $G$  en vom Grade  $r$  hat jeder Knotenpunkt die gleiche Valenz  $r$ ; für  $r = 1$  spricht man von einem *linearen*  $G$ ., für  $r = 2$  von einem *quadratischen*, für  $r = 3$  von einem *kubischen*  $G$ . Zwei  $G$  en  $G_1 = \{K_1, U_1\}$ ,  $G_2 = \{K_2, U_2\}$  bzw.  $G_1 = (K_1, U_1)$ ,  $G_2 = (K_2, U_2)$  heißen *isomorph*, falls es je eine eineindeutige Abbildung  $\varphi$  von  $K_1$  auf  $K_2$  und  $\psi$  von  $U_1$  auf  $U_2$  derart gibt, daß die Inzidenzfunktion erhalten bleibt, d. h., sind  $X, Y$  die Endpunkte der Kante  $u$  bzw.  $X$  der Start- und  $Y$  der Zielpunkt des Bogens  $u$ , so sind  $\varphi(X)$  und  $\varphi(Y)$  die Endpunkte der Kante  $\psi(u)$  bzw.  $\varphi(X)$  ist Start- und  $\varphi(Y)$  ist Zielpunkt des Bogens  $\psi(u)$  (Abb. 5).

S. a. Graph, ebener, komplementärer, Untergraph, Durchlaufungen von Graphen, Packungs- und

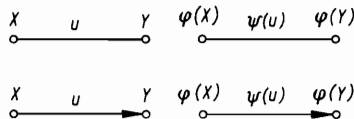


Abb. 5: Abbildung von Knoten und Bögen isomorpher Graphen

Repräsentationsprobleme, Baum, Cozyklus, Färbung von Graphen, Extremalprobleme in der Graphentheorie. — Zur Verwendung des Begriffs Graph in der Analysis vgl. Funktion IV.

**Graph, ebener:** ein Graph, dessen Knotenpunkte und Kanten bzw. Bögen in die Ebene gezeichnet sind und dessen Kanten bzw. Bögen sich höchstens in Knotenpunkten kreuzen. In Abb. 1 ist  $G_1$  eben, während  $G_2$  nicht eben ist.  $G_2$  ist aber isomorph zu dem e. G.  $G_2'$ . Ein zu einem ebenen Graphen isomor-

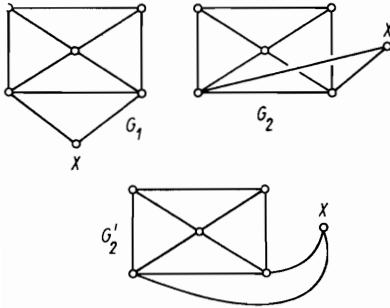
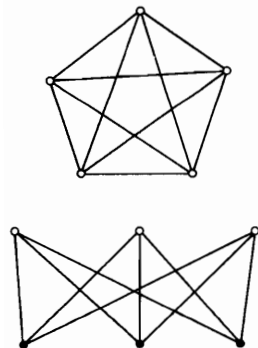


Abb. 1: Graph  $G_1$  ist eben,  $G_2$  ist nicht eben, aber planar, da isomorph zu  $G_2'$

pher Graph heißt *planar*. Jedes geometr. Bild eines nichtplanaren Graphen enthält stets mindestens zwei Kanten bzw. Bögen, die sich in einem Punkt kreuzen, der nicht Knotenpunkt des Graphen ist. Zwei sehr einfache nichtplanare G.en sind der vollständige 5-Graph und der vollständige paare (3,3)-Graph (Abb. 2). (Zur Bezeichnung *paarer* G. und *vollständiger* G. ↗ Färbung von Graphen: zu *vollständiges k-Eck* ↗ Extremalprobleme.)

Fügt man auf einer oder auf mehreren Kanten bzw. Bögen eines Graphen  $G$  Knotenpunkte der Valenz 2 ein, so nennt man einen solchen G.en eine *Unterteilung* von  $G$ ; der Einfachheit halber bezeichnet man auch  $G$  als eine Unterteilung von sich selbst. In Abb. 3 sind Unterteilungen des vollständigen 5-Graphen und des vollständigen paaren (3,3)-Graphen angegeben. Mit dem vollständigen 5-Graphen und dem vollständigen paaren (3,3)-Graphen sind auch deren Unterteilungen nicht-

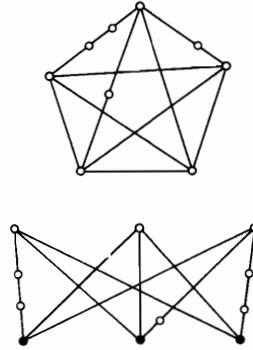


Graph, ebener. Abb. 2: Der vollständige 5-Graph und der vollständige paare (3, 3)-Graph als nicht-planare Graphen

planar. K. KURATOWSKI hat gezeigt, daß das die einfachsten nichtplanaren G.en sind:

**Satz von Kuratowski:** Ein  $G$ . ist genau dann nicht-planar, wenn er eine Unterteilung des vollständigen paaren (3,3)-G.en oder eine Unterteilung des vollständigen 5-G.en enthält.

Damit sind die planaren G.en durch eine Eigenschaft charakterisiert, die nichts mit dem »in-die-Ebene-zeichnen« zu tun hat. Es genügt zu wissen, daß ein  $G$ . keine Unterteilung eines der G.en aus Abb. 2 enthält; es folgt dann, daß  $G$  planar ist.

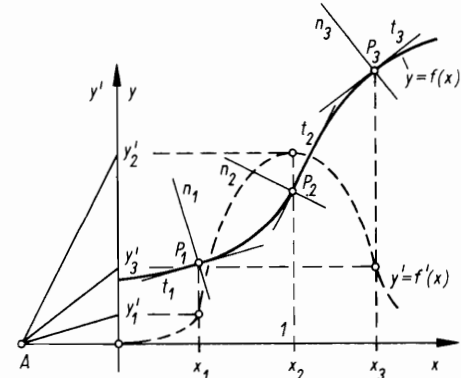


Graph, ebener. Abb. 3: Unterteilungen des vollständigen 5-Graphen und des paaren (3, 3)-Graphen

**Graph, komplementärer:** ein schlichter ungerichteter Graph  $\bar{G}$  in bezug auf einen ebenfalls schlichten ungerichteten Graphen  $G = (K, U)$ , falls er dieselbe Knotenmenge  $K$  hat und falls zwei Knotenpunkte in  $\bar{G}$  genau dann verbunden sind, wenn sie es in  $G$  nicht sind.

**Graph eines Automaten** ↗ Automat, determinierter, abstrakter II.

**graphische Differentiation:** Bestimmung der ersten Ableitung als Anstieg der Tangente an die Kurve zu  $y = f(x)$  (Abb.). Die Tangentenrichtung in einem Punkt  $P$ , läßt sich mit einem *Spiegellineal* ermitteln (↗ Differenziergerät I.). Der sichtbare Teil der Kurve und sein Spiegelbild gehen nur dann ohne Knick ineinander über, wenn das Lineal die Kurve



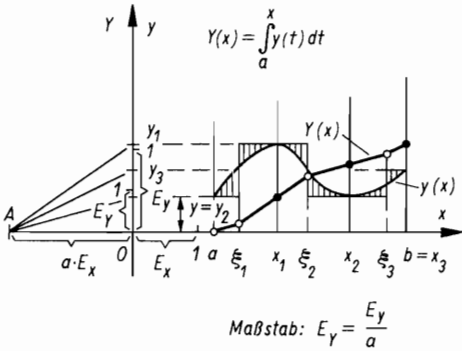
Graphische Differentiation, für die Punkte  $P_1, P_2, P_3$  sind die Normalen  $n_1, n_2, n_3$  und die Tangenten  $t_1, t_2, t_3$  angegeben sowie die Schnittpunkte ihrer Parallelen durch  $A$  und der Ordinatenachse mit  $y'_1, y'_2, y'_3$  markiert

in  $P$  senkrecht schneidet, die Richtung der Normale  $n_i$  hat. Die Tangente  $t_i$  in  $P_i$  steht senkrecht auf der Normalen  $n_i$ . Parallelverschiebung der Tangente durch  $A(-1, 0)$  liefert auf der Ordinatenachse Schnittpunkte  $(0, y_i) = (0, f'(x_i))$  und damit punktweise die Kurve der ersten Ableitung.

**graphische Integration:** Ermittlung eines Polygonzuges als Näherung für die graph. Darstellung der

Flächenfunktion  $Y(x) = \int_a^x y(t) dt$  als einer speziellen

Stammfunktion der durch ihre Kurve gegebenen Funktion  $y = y(x)$ . Nach dem Verfahren der mittleren Abszisse (Abb.) wird das Intervall  $[a, b]$  durch Teilpunkte  $x_i$  in Teilintervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  zerlegt und



Graph. Integration nach dem Verfahren der mittleren Abszisse

in jedem von ihnen eine *mittlere Abszisse*  $\xi_{i+1}$  so bestimmt, daß die in der Abbildung gleich schraffierten „Dreiecksflächen“ gleich sind. Danach wird die so entstandene Treppenfunktion in Umkehrung der graph. Differentiation graphisch integriert, und man erhält einen Polygonzug, der aus Tangentenstücken an die Kurve  $Y(x)$  an den Stellen  $x_i$  für  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  besteht.

**graphisches Lösen von Gleichungen:** I. näherungsweise Bestimmung der reellen Lösungen einer Gleichung aus dem Kurvenbild von Funktionen in einem geeignet gewählten Koordinatensystem. Die reellen Lösungen einer Gleichung in der allgemeinen Form  $f(x) = 0$  z. B. lassen sich als Nullstellen der Funktion  $y = f(x)$  am Bild der Funktion ablesen, das etwa mit Hilfe einer Wertetabelle in einem geeigneten Koordinatensystem gezeichnet wurde. Die erhaltenen Näherungswerte lassen sich etwa mittels der *Regula falsi* (↗ Nullstellenberechnung II.) oder des *Newtonschen Näherungsverfahrens* verbessern (↗ Nullstellenberechnung III.). Man erzielt oft genauere Resultate, wenn man die gegebene Gleichung  $f(x) = 0$  auf die Form  $f_1(x) = f_2(x)$  bringt und dabei versucht, für  $y_1 = f_1(x)$  und  $y_2 = f_2(x)$  Funktionen mit einfach zu zeichnenden Bildern zu erhalten. Für jeden Schnittpunkt der Kurven gilt  $y_1 = y_2$  und deshalb  $f(x_0) = f_1(x_0) - f_2(x_0) = 0$ . Seine Abszisse  $x_0$  ist eine Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$ .

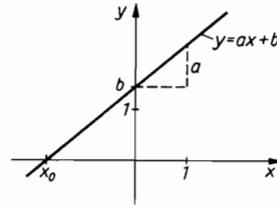
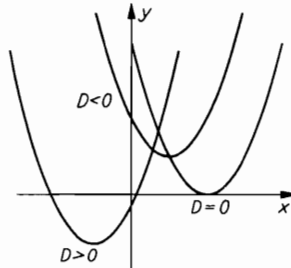


Abb. 1: Graphisches Lösen der Gleichung  $ax + b = 0$

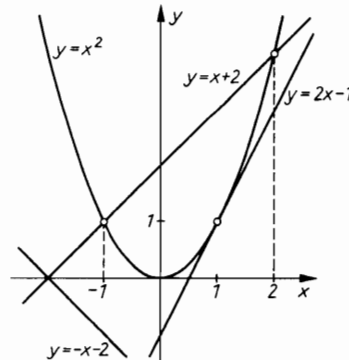
II. Die Lösung einer linearen Gleichung  $ax + b = 0$  mit  $a \neq 0$  und  $a, b, x \in \mathbb{R}$  erhält man als Nullstelle der Funktion  $y = ax + b$ . Ihr Bild in einem kartes. Koordinatensystem ist eine Gerade mit dem Anstieg  $a$ , die die  $y$ -Achse im Punkt  $(0, b)$  schneidet (Abb. 1). Die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der  $x$ -Achse liefert eine Näherungslösung  $x_0$  der gegebenen Gleichung.

III. Die Lösung einer quadrat. Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit reellen Koeffizienten ergibt sich als Nullstelle der Funktion  $y = (x + p/2)^2 - (p^2/4 - q) = (x + p/2)^2 - D$  mit  $D = p^2/4 - q$ . Ihr Bild in



graphisches Lösen von Gleichungen. Abb. 2: Drei Normalparabeln für verschiedene Werte der Diskriminante  $D$  der quadrat. Gleichung  $x^2 + px + q = 0$

einem kartes. Koordinatensystem ist eine *Normalparabel*, die in  $x$ -Richtung um  $-p/2$  und in  $y$ -Richtung um  $-D$  parallel zu den Achsen verschoben wurde. Man findet für  $D > 0$  zwei, für  $D < 0$  keinen Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse (Abb. 2), und der Berührungspunkt der Normalparabel mit dieser Achse für  $D = 0$  ist als reelle Doppellösung aufzufassen (↗ quadratische Gleichung).



graphisches Lösen von Gleichungen. Abb. 3: Graphische Lösung der quadrat. Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  als Abszisse des Schnittpunktes einer Normalparabel und einer Geraden

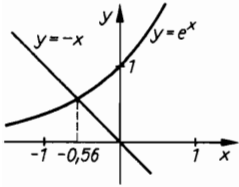


Abb. 4: Graphisches Lösen der Gleichung  $e^x + x = 0$

Wird die Nullstelle von  $x^2 + px + q = 0$  als Abszisse des Schnittpunktes zweier Funktionen  $f_1(x) = f_2(x)$  gesucht, so bringt die Wahl  $y_1 = f_1(x) = x^2$  und  $y_2 = f_2(x) = -px - q$  den Vorteil, daß die Normalparabel mit der Gleichung  $y_1 = x^2$  für alle Gleichungen in der gleichen Lage bleibt und jeweils die eventuellen Schnittpunkte mit der Geraden der Gleichung  $y_2 = -px - q$  zu bestimmen sind. Die Anzahl der reellen Lösungen hängt dann von der Lage der Geraden ab, für  $y_2 = x + 2$  hat sie z. B. zwei, für  $y = -x - 2$  keinen Schnittpunkt und berührt für  $y = 2x - 1$  die Normalparabel im Punkte (1, 1) (Abb. 3).

IV. Zur Lösung der Exponentialgleichung  $e^x + x = 0$ , die äquivalent zur Gleichung  $e^x = -x$  ist, zeichnet man die Bilder der Funktionen mit den Gleichungen  $y_1 = f_1(x) = e^x$  und  $y_2 = f_2(x) = -x$  und liest für deren Schnittpunkt  $x = -0,56$  ab (Abb. 4).

V. Auch Gleichungssysteme mit zwei reellen Variablen lassen sich graphisch lösen, indem man jede Gleichung als Funktionsgleichung in impliziter Form auffaßt. Genau die Koordinaten aller Punkte eines Bildes erfüllen die zugehörige Funktionsgleichung. Jedem Punkt, der zu den Bildern aller gezeichneten Funktionen gehört, d. h. einem Schnittpunkt aller Funktionsbilder, entspricht eine Lösung des Gleichungssystems. Für lineare Gleichungssysteme sind die zu betrachtenden Funktionen linear, ihre Bilder sind Geraden. Die Lösbarkeitsfälle (↗ Gleichung I.) lassen sich aus den Lagebeziehungen dieser Geraden ableiten: Man erhält eine Lösung, falls sich die Geraden in einem Punkt schneiden, z. B. für die Gleichungen  $4x - y = 2$  und  $x - 2y = -3$  die Lösungsmenge  $L = \{(1, 2)\}$ . Sind die Gleichungen widersprüchlich, z. B.

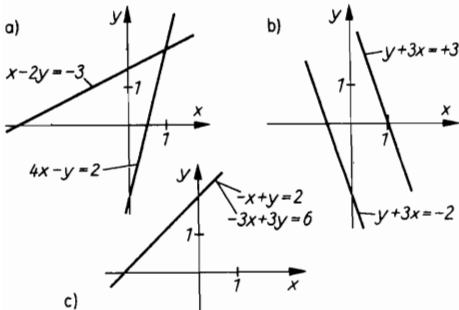
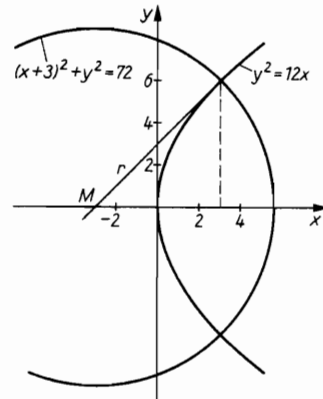


Abb. 5: Graphisches Lösen der Gleichungssysteme  
 a)  $4x - y = 2$  und  $x - 2y = -3$ ,  
 b)  $y + 3x = 3$  und  $y + 3x = -2$  sowie  
 c)  $-x + y = 2$  und  $-3x + 3y = 6$

$y + 3x = +3$  und  $y + 3x = -2$ , so erhält man zwei verschiedene zueinander parallele Geraden, die keinen Schnittpunkt haben. Ist aber die eine Gleichung das  $k$ -fache der anderen, z. B.  $-x + y = 2$  und  $-3x + 3y = 6$ , so fallen die beiden Geraden zu einer zusammen und die Koordinaten von jedem ihrer Punkte machen jede Gleichung zu einer wahren Aussage (Abb. 5).

VI. Das Verfahren ist nicht auf lineare Gleichungen beschränkt. Die Gleichungen (1)  $y^2 = 12x$  bzw. (2)  $(x + 3)^2 + y^2 = 72$  z. B. werden von den Koordinaten aller Punkte erfüllt, die auf einer Parabel bzw. auf einem Kreis liegen (Abb. 6). Die Koordinaten der graphisch bestimmten Schnittpunkte (3, 6) und (3, -6) sind, wie die Probe zeigt, Lösungen der gegebenen Gleichungen. Rechnerisch führt das Einsetzungsverfahren (↗ lineare Gleichung III.1.) zum gleichen Ergebnis, denn durch Eliminieren von  $y^2$



graphisches Lösen von Gleichungen. Abb. 6: Das System (1)  $y^2 = 12x$  und (2)  $(x + 3)^2 + y^2 = 72$  hat die Lösungen (3, 6) und (3, -6)

erhält man  $(x + 3)^2 + 12x = 72$ ,  $x^2 + 6x + 9 + 12x = 72$ ,  $x^2 + 18x = 63$ ,  $x^2 + 18x + 81 = 144$  oder  $(x + 9)^2 = 144$ ,  $x_1, 2 = -9 \pm 12$ , d. h.,  $x_1 = 3$ , da der Wert  $x_2 = -21$  wegen  $y^2 = -252$  keinen reellen  $y$ -Wert ergibt. Aus  $x_1 = 3$  ergibt sich aber  $y^2 = 12 \cdot 3 = 36$  oder  $y_{1,2} = \pm 6$ .

Grat ↗ Dachausmittlung.

Gray-Kode ↗ Kodierung III.3.

Green, George, geb. 14. 7. 1793 Nottingham, gest. 31. 3. 1841 Sneinton bei Nottingham. — Neben seiner Tätigkeit als Nachfolger seines Vaters, der Bäcker und Müller war, verfolgte G. aufmerksam alle Entdeckungen zur Elektrizitätslehre und studierte die Werke von LAPLACE. Nach weiteren Studien in Cambridge war er dort am Caus-College tätig. Sein Hauptwerk »Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism« (1828) stellt den ersten Versuch einer mathemat. Beschreibung von Elektrizitätserscheinungen dar und bedeutet, neben Arbeiten von GAUSS, den Beginn der Potentialtheorie.

Greensche Darstellungsformel ↗ elliptische Differentialgleichung II.2.

Greensche Formeln: in der mathemat. Physik verwendete Integralumformungen.

Sind in einem von einer stückweise glatten Fläche  $S$  begrenzten Raumbereich  $K$  die Funktionen  $P(x, y, z)$

und  $Q(x, y, z)$  mit ihren zweiten partiellen Ableitungen stetig, so gilt die als *erste Greensche Formel*

bezeichnete Umformung (1); in ihr bedeutet  $\frac{\partial Q}{\partial n}$

$$(1) \quad \iiint_{(K)} P \Delta Q \, dK = \iint_{(S)} P \frac{\partial Q}{\partial n} \, dS - \iiint_{(K)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \, dK$$

die Richtungsableitung der Funktion  $Q$  in Richtung der äußeren Normalen  $\mathbf{n}$  der Fläche  $S$ , und  $\Delta$  bedeutet den *Laplaceoperator*, so daß (2) gilt.

$$(2) \quad \Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}$$

$$(3) \quad \Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

Unter denselben Bedingungen heißt die Umformung (4) die *zweite Greensche Formel*, in der  $\Delta P$  in Analogie zu  $\Delta Q$  nach (2) zu bilden ist.

$$(4) \quad \iiint_{(K)} (P \Delta Q - Q \Delta P) \, dK = \iint_{(S)} \left( P \frac{\partial Q}{\partial n} - Q \frac{\partial P}{\partial n} \right) \, dS$$

Für den *ebenen Fall* heißen die Formeln (5) bzw. (6) erste bzw. zweite *Greensche Formel*; in ihnen ist  $B$  ein Bereich der  $x, y$ -Ebene, dessen Rand  $k$  im positiven Sinne durchlaufen wird,  $\frac{\partial Q}{\partial n}$  ist die Ableitung der Funktion  $Q$  in Richtung der äußeren Normalen  $\mathbf{n}$ , und für  $\Delta P$  ist (3) in Analogie zu (2) zu setzen.

$$(5) \quad \iint_{(B)} P \Delta Q \, dx \, dy = \int_{(k)} P \frac{\partial Q}{\partial n} \, ds - \iint_{(B)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

$$(6) \quad \iint_{(B)} (P \Delta Q - Q \Delta P) \, dx \, dy = \int_{(k)} \left( P \frac{\partial Q}{\partial n} - Q \frac{\partial P}{\partial n} \right) \, ds$$

**Greenschers Integralsatz** ↗ Integralsätze III.  
**Gregory, James**, geb. Nov. 1638 Aberdeen (?), gest. Okt. 1675 Edinburgh. — G. war Sohn eines Pfarrers und seit früher Jugend für eine mathemat. Ausbildung vorgesehen. Er studierte in Aberdeen, schrieb 1662 sein erstes Buch über Optik und ging 1664 zu weiteren Studien nach Italien, bis 1668 vorwiegend nach Padua. Nach einem kurzen Besuch in London wurde er Professor in St. Andrews und Ende 1674 in Edinburgh. Seine bedeutendsten Leistungen sind der Versuch, die Transzendenz von

$\pi$  zu beweisen, die selbständige Entdeckung der *Binomialreihe* 1670 und der *Taylorreihe* 1675.

**Gregory-Newton'sche Formel** ↗ Interpolation II.  
**Grenze**, obere —, untere — ↗ beschränkte Funktion II., ↗ Integral I., ↗ obere Schranke, ↗ Punktmenge, ↗ untere Schranke, ↗ Zahlenfolge II.

**Grenzfunktion** ↗ Funktionenfolge I., ↗ Funktionenreihe I.

**Grenzmeridian** ↗ Gauß-Krüger-Projektion I.

**Grenzverteilungssätze** svw. Grenzwertsätze.

**Grenzwert** ↗ divergente Zahlenfolge I., ↗ Grenzwert einer Zahlenfolge II.1., ↗ Konvergenz einer Funktion I.

**Grenzwert einer Zahlenfolge: I.** eine Zahl  $a$  mit der Eigenschaft, daß fast alle Glieder der Zahlenfolge  $(a_n)$  in die  $\varepsilon$ -Umgebung  $|a - \varepsilon, a + \varepsilon|$  von  $a$  fallen, wie klein die positive Zahl  $\varepsilon$  auch gewählt sein mag. Die Zahlenfolge  $(a_n)$  hat den Grenzwert oder *Limes*  $a$  genau dann, wenn man zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl  $\varepsilon$  stets eine Zahl  $N(\varepsilon)$  so angeben kann, daß alle Glieder  $a_n$  der Folge im Intervall  $|a - \varepsilon, a + \varepsilon|$  liegen, sofern nur ihr Index  $n > N(\varepsilon)$  ist, d. h., daß  $|a_n - a| < \varepsilon$  gilt für alle  $n > N(\varepsilon)$ . Für diesen Sachverhalt schreibt man kurz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und liest: Limes von  $a_n$  für  $n$  gegen Unendlich ist gleich  $a$ . Man nennt eine Zahlenfolge *konvergent*, falls sie einen Grenzwert hat, andernfalls *divergent* (↗ divergente Zahlenfolge). Eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert Null heißt *Nullfolge*.

Für die Zahlenfolge  $(a_n)$  aus (1) z. B. gilt (2) als G., denn wählt man zu einem beliebig vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  den Index  $N(\varepsilon)$  so, daß die Bedingung  $N(\varepsilon) > 4/(3\varepsilon)$  erfüllt ist, so gilt (3) für alle Glieder  $a_n$ , deren Index größer als  $N(\varepsilon)$  ist.

$$(1) \quad a_n = \frac{2n - 4/3}{3n + 4}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 4/3}{3n + 4} = \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad |a_n - a| = \left| \frac{2n - 4/3}{3n + 4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{4}{3n + 4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{4}{3n + 4} \right| < \frac{4}{3n} < \frac{4}{3N} < \varepsilon$$

Ist etwa  $\varepsilon = 0,001$  vorgegeben, so gilt  $|a_n - 2/3| < \varepsilon$  für alle Glieder  $a_n$  mit  $n > N = 1334$ , da  $N > 4/(3 \cdot 0,001)$  erfüllt ist. Danach können höchstens 1334 Glieder einen größeren Abstand von  $2/3$  haben als  $\varepsilon = 0,001$ ; alle Glieder  $a_{1335}, a_{1336}, \dots$  liegen in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $2/3$ . Ebenso können nur 11112 Glieder der Zahlenfolge von  $a = 2/3$  einen größeren Abstand als  $\varepsilon = 0,000012$  haben. Alle Glieder  $a_{11113}, a_{11114}, \dots$  liegen für  $\varepsilon = 0,000012$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $2/3$ . In Tabelle (4) werden einige konvergente Zahlenfolgen und deren Grenzwert ange-

geben.

- (4) allgemeines Glied der Folge Grenzwert
- (4.1.)  $a_n = \sqrt[q]{q}$  mit  $q > 0$  1
- (4.2.)  $a_n = \sqrt[n]{n}$  1
- (4.3.)  $a_n = \frac{c_r n^r + \dots + c_0}{d_s n^s + \dots + d_0}$ ,  $\frac{c_r}{d_s}$  für  $r = s$   
 $c_1, \dots, c_0, d_1, \dots, d_0 \in \mathbb{R}$ , 0 für  $r < s$   
 $c_r \neq 0, d_s \neq 0$
- (4.4.)  $a_n = \frac{\log_b n}{n}$ ,  $b > 0, b \neq 1$  0
- (4.5.)  $a_n = q^n, |q| < 1$  0
- (4.6.)  $a_n = nq^n, |q| < 1$  0
- (4.7.)  $a_n = (1 + 1/n)^n$  e
- (4.8.)  $a_n = (1 + 1/(n-1))^n$  e

II. Für konvergente Zahlenfolgen gelten folgende Sätze:

II.1. Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt, aber nicht jede beschränkte Zahlenfolge ist konvergent. Die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied  $a_n = (-1)^n$  z. B. ist wohl beschränkt,  $|a_n| < 2$ , aber diese Zahlenfolge ist nicht konvergent. Die Beschränktheit der Zahlenfolge ist nur eine notwendige Bedingung für ihre Konvergenz.

II.2. Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt. Eine konvergente Zahlenfolge kann nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben.

II.3. Jede unendl. Teilfolge ( $\nearrow$  Zahlenfolge III.) einer konvergenten Zahlenfolge ( $a_n$ ) ist ebenfalls konvergent und hat denselben Grenzwert wie ( $a_n$ ). Die Zahlenfolge ( $b_n = (1/2^n)$ ) ist z. B. eine Teilfolge der konvergenten Zahlenfolge ( $a_n = (1/2^n)$ ). Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

II.4. Gilt die Ungleichung  $A \leq a_n \leq B$  für alle Glieder  $a_n$  mit  $n \geq n_0$  einer konvergenten Zahlenfolge ( $a_n$ ), so ist diese Ungleichung auch für den Grenzwert  $a$  der Zahlenfolge richtig:  $A \leq a \leq B$ .

III. Es gelten folgende Grenzwertsätze für Zahlenfolgen:

III.1. Sind die Zahlenfolgen ( $a_n$ ) und ( $b_n$ ) konvergent mit den Grenzwerten  $a$  und  $b$ , so konvergieren auch die Zahlenfolgen ( $a_n + b_n$ ), ( $a_n - b_n$ ) und ( $a_n b_n$ ) und haben die Grenzwerte  $a + b$ ,  $a - b$  und  $ab$ . Sind  $b_n \neq 0$  und  $b \neq 0$ , so konvergiert auch ( $a_n/b_n$ ) und hat den Grenzwert  $a/b$ . Es gelten (5), (6), (7), (8).

- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

für  $b_n \neq 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

Daraus folgt insbes., daß mit ( $a_n$ ) und ( $b_n$ ) auch ( $a_n + b_n$ ), ( $a_n - b_n$ ) und ( $a_n b_n$ ) Nullfolgen sind. Dagegen braucht ( $a_n/b_n$ ) keine Nullfolge zu sein, wie schon das Beispiel ( $a_n = (1/(3n + 4))$ ), ( $b_n = (1/(2n))$ ), ( $a_n/b_n = (2n/(3n + 4))$ ) mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 2/3$  zeigt.

III.2. Sind  $c, c_1, c_2$  Konstanten und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , so folgen (9) und (10).

- (9)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c a$
- (10)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_1 a + c_2 b$

III.3. Konvergieren die Zahlenfolgen ( $a'_n$ ) und ( $a''_n$ ) gegen denselben Grenzwert  $a$  und gilt die Ungleichung  $a'_n \leq a_n \leq a''_n$  für fast alle Glieder der Zahlenfolge ( $a_n$ ), d. h. für alle Indizes  $n \geq n_0$ , so gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

III.4. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  folgen (11), (12) und (13).

- (11)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^{a_n} = q^a$  für  $q > 0$
- (12)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b a_n = \log_b a$   
für  $a > 0, b > 0, b \neq 1$
- (13)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$  für  $a > 0$  und  $\alpha$  beliebig

IV. Die in II. und III. angegebenen Grenzübergänge treten in Beispielen oft ineinandergeschachtelt auf. Aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$  ergeben sich z. B.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (4/n) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 4 \cdot 0 = 0$  und daraus (14).

$$(14) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2 + 4/n + 1/n^2)}{n^2(4 + 2/n^2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (4/n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} (2/n^2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Entsprechend erhält man  $\lim_{n \rightarrow \infty} [2n/(3n + 2)] = 2/3$ . Nach (11) folgt daraus  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n/(3n+2)} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$ . Da  $-1/n \leq (\sin n)/n \leq 1/n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$ , erhält man  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n)/n = 0$  und somit (15).

$$(15) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin n}{n} + 2^{2n/(3n+2)} \right) = \sqrt[3]{4}$$

Die rekursiv gegebene Zahlenfolge ( $a_n$ ) mit  $a_1 = B > 0$ ,  $a_{n+1} = 1/2(a_n + B/a_n)$  ist monoton fallend ( $\nearrow$  Zahlenfolge II.) und nach unten beschränkt, denn aus der Rekursionsformel folgt  $(a_n - a_{n+1})^2 + B - a_{n+1}^2 = 0$ , d. h.  $a_{n+1} \geq \sqrt{B}$ . Nach dem ersten  $\nearrow$  Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen konvergiert die Zahlenfolge ( $a_n$ ),  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ , da  $a_n \geq \sqrt{B} > 0$ .



Aus der Rekursionsformel  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + B/a_n)$  folgt (16) nach den Grenzwertsätzen.

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + B / \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \right], \\ a = \frac{1}{2}(a + B/a)$$

Daraus errechnet man  $a = \sqrt{B}$ , da aus  $a_n \geq \sqrt{B}$  auch  $a \geq \sqrt{B}$  folgt. Für  $B = 2$  ergibt sich:  $a_1 = 2, a_2 = 1,5, a_3 = 1,416 \dots, \dots$  Schon  $a_3$  gibt den Wert von  $\sqrt{2}$  recht gut an. Diese rekursiv gegebene Zahlenfolge dient oft der Berechnung von Wurzel-ausdrücken. Die Frage der Konvergenz einer Zahlenfolge, ohne den Grenzwert im Falle der Konvergenz zu kennen, kann durch  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen entschieden werden. Grenzwert einer Funktion  $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion I.

**Grenzwertsätze, Grenzverteilungssätze:** I. Aussagen über das Grenzverhalten von Folgen von Zufallsgrößen oder auch von Verteilungsfunktionen. Ihr Inhalt besteht meist in der Angabe hinreichender Bedingungen dafür, daß eine Folge  $\{F_n(x)\}$  von Verteilungsfunktionen gegen eine *Grenzverteilung*  $F(x)$  konvergiert. Für die Praxis von besonderem Interesse sind die Grenzverteilungen von Summen von  $n$  unabhängigen Zufallsgrößen ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) für  $n \rightarrow \infty$ . Hier wiederum spielt der *zentrale Grenzwertsatz* eine dominierende Rolle (vgl. II.). G., die die Konvergenz von Einzelwahrscheinlichkeiten bzw. Verteilungsdichten ( $\nearrow$  Zufallsgröße I., II.) zum Inhalt haben, werden als *lokale G.* bezeichnet, z. B. der lokale Grenzwertsatz von Moivre-Laplace ( $\nearrow$  Moivre-Laplace, Satz von) und der Grenzwertsatz von Poisson ( $\nearrow$  charakteristische Funktion V.). Von Bedeutung sind auch G., die das Grenzverhalten der Verteilung des Maximums von  $n$  unabhängigen Zufallsgrößen für  $n \rightarrow \infty$  betreffen. S. a. charakteristische Funktion V.

II. der *zentrale Grenzwertsatz* ist eine Aussage über das Grenzverhalten von Summen unabhängiger Zufallsgrößen. Die Summen, deren Grenzverhalten betrachtet wird, erhält man in einer gebräuchl. Formulierung aus einer Folge  $\{X_n\}$  unabhängiger Zufallsgrößen ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) durch die Definition (1). Die *Summen*  $Z_n$

$$(1) \quad Z_n = \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) / \sqrt{\sum_{i=1}^n D^2 X_i}$$

sind wegen  $D^2 Z_n = 1$  und wegen  $EZ_n = 0$  *normiert* und *zentriert* ( $\nearrow$  normierte Zufallsgröße,  $\nearrow$  zentrierte Zufallsgröße). Sind dann  $S_n(x)$  die *Verteilungsfunktionen* von  $Z_n, F_k(x)$  die von  $X_k$  und  $C_n^2$  die *Dispersion* ( $\nearrow$  Streuung) von  $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ , so gilt wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit die Formel (2).

$$(2) \quad C_n^2 = \sum_{i=1}^n D^2 X_i$$

*Notwendig und hinreichend dafür, daß die Verteilungen  $S_n(x)$  der normierten und zentrierten Summen gegen die normierte und zentrierte Normalverteilung*

*konvergieren, d. h., daß Formel (3) gilt, ist die Lindebergsche Bedingung (4).*

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp[-t^2/2] dt = \Phi(x)$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_n^2} \sum_{|x - EX_k| > c C_n} \int (x - EX_k)^2 dF_k(x) = 0$$

Die Lindebergsche Bedingung ist insbes. dann erfüllt, wenn alle  $X_k$  für  $k = 1, \dots, n$  dieselbe Verteilungsfunktion  $F_k(x) = F(x)$  haben ( $\nearrow$  identisch verteilt) und  $F(x)$  endl. erste und zweite *Momente* hat. Anschaulich bedeutet die Lindebergsche Bedingung, daß die einzelnen Summanden  $(X_i - EX_i)/C_n^2$ , aus denen  $Z_n$  gemäß (1) gebildet wird, gleichmäßig klein sind. Die Deutung des zentralen Grenzwertsatzes besteht dann in folgendem: Kann eine Zufallsgröße als Summe einer großen Anzahl voneinander unabhängiger Summanden aufgefaßt werden, von denen jeder zur Summe nur einen unbedeutenden Beitrag liefert, so kann diese Zufallsgröße als normalverteilt angenommen werden. Eine solche Situation liegt in Naturwissenschaft und Technik häufig vor. Auf dem zentralen Grenzwertsatz beruht demnach die überragende Bedeutung der *Normalverteilung* für Theorie und Anwendungen. Ein Beispiel für die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes ist die Fehlertheorie. Der zufällige Fehler einer Messung ist eine Zufallsgröße  $X$ , die sich durch Überlagerung vieler kleiner, voneinander unabhängiger Faktoren ergibt. Für  $X$  kann demnach eine Normalverteilung angenommen werden. Diese Annahme wird durch die Praxis bestätigt.

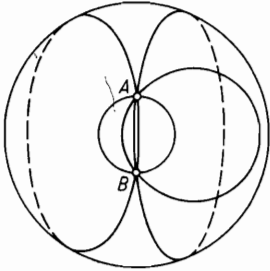
S. a. Grenzwert einer Zahlenfolge III.; Konvergenz einer Funktion IV.; Lebesguesches Integral IV.; erzeugende Funktion II.4.

**Größe des Winkels**  $\nearrow$  Skalarprodukt III.

**Großkreis:** I. Schnitt einer Kugeloberfläche mit einer Ebene, die den Kugelmittelpunkt  $M$  enthält. Zwei Punkte  $A$  und  $B$  auf einer Kugel, die nicht auf einem Durchmesser liegen, bestimmen eindeutig einen G. und zerlegen ihn in zwei *G.bögen*; dabei ist der kleinere Bogen die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten  $A$  und  $B$ . Die G.e spielen auf der Kugel die gleiche Rolle wie die Geraden in der Ebene, alle Entfernungen von Punkten auf der Kugel werden längs G.bögen gemessen. Auf Kugeln mit passend großem Radius gehen die Entfernungen beliebig genau in den euklid. Abstand längs einer Geraden über. Die Länge des G.bogens  $\overline{AB}$  hängt nach den Sätzen der Planimetrie von der Länge des Kugelradius  $R$  und der Größe des zugehörigen Zentriwinkels ab. Hat dieser in *Bogenmaß* die Größe  $a$ , so ist  $R \cdot a$  die Länge des Bogens  $\overline{AB}$ . Angaben in *Gradmaß* lassen sich umrechnen; ist z. B.  $R = 3$  m und der Zentriwinkel  $12^\circ$ , so ist  $a = 2 \cdot \pi \cdot 12^\circ / 360^\circ = \pi/15$  und die Länge des Bogens ist  $\pi/5$  m. In der sphär. Trigonometrie beziehen sich alle Maßzahlen von G.bögen auf die gleiche Kugel, man nimmt deshalb die Einheits-

kugel mit  $R = 1$  und rechnet mit Winkelgrößen. S. a. Kugeldarstellung.

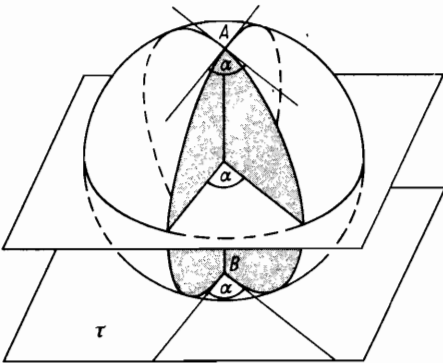
II. Durch die zwei nicht diametral auf der Kugel liegenden Punkte  $A$  und  $B$  läßt sich ein *Ebenenbüschel* legen. Es ergeben sich Kreise als Schnitt-



Großkreis. Abb. 1: Kleinkreise durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  auf der Kugel

figuren mit der Kugeloberfläche; die dabei vom  $G$ . verschiedenen Kreise heißen *Kleinkreise*, unter diesen hat der kleinste die Strecke  $AB$  als Durchmesser und den Bogen  $\widehat{AB}$  als sphär. Durchmesser (Abb. 1).

III. Zwei  $G.e$  schneiden sich in zwei Punkten  $A$  und  $B$ , die die Endpunkte eines Durchmessers sind (Abb. 2). Solche Punkte, in denen eine durch den



Großkreis. Abb. 2: Winkel der Größe  $\alpha$  zwischen zwei Großkreisen und Tangentialebene  $\tau$

Mittelpunkt der Kugel gehende Gerade die Kugeloberfläche durchstößt, heißen *Gegenpunkte* oder im Hinblick auf die Erd- oder Himmelsachse als Gerade, *Pole*. Der  $G.$ , dessen Ebene senkrecht auf dieser Geraden steht, wird *Polare* der Pole gen.

Jede zu dem Durchmesser  $AB$  senkrechte Ebene schneidet die Ebenen zweier  $G.e$  durch  $A$  und  $B$  in je einer Geraden, die die Schenkel des Winkels der Größe  $\alpha$  zwischen den Ebenen sind. Die Tangenten in einem Gegenpunkt an die beiden  $G.e$  stehen senkrecht zum Durchmesser  $AB$ , schließen deshalb einen Winkel derselben Größe  $\alpha$  ein. Diese Größe ist die des Winkels zwischen den beiden  $G.en$  und

wird auf der Fläche als die des Winkels zwischen den Tangenten an die  $G.e$  im Punkt  $A$  oder  $B$ , d. h. in der Tangentialebene  $\tau$ , gemessen.

**größter gemeinsamer Teiler** ↗ Brüche I.1., ↗ euklidischer Algorithmus, ↗ Polynomring, ↗ Teilbarkeit III.

**größtes Element** svw. Maximum.

**Grothendieck**, Alexander, geb. 1928 Berlin. — Bald nach 1933 wurden seine Eltern verhaftet und in Konzentrationslager gebracht, er selbst kam in ein Schweizer Waisenhaus. Nach dem Krieg studierte er in Frankreich und wirkte bisher vorwiegend in Paris. Er veröffentlichte hervorragende Arbeiten zur algebraischen Geometrie und zur Funktionalanalysis. Sein Vortrag »The cohomology theory of abstract algebraic varieties« auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1958 in Edinburgh wurde richtungswesend für die algebraische Geometrie. Durch seine Theorie der Schemata erweiterte er ihre klass. Form grundlegend. Die von ihm und J. DIEUDONNÉ in den folgenden Jahren geschriebene umfassende Enzyklopädie »Éléments de la géométrie algébrique« mit über 1900 Seiten Umfang stellt die algebraische Geometrie in der Sprache dieser Schemata dar. Die Grundlagen wurden 1957 bis 1962 im Bourbaki-Seminar vorgetragen. Das  $G$ .-Seminar 1960/68 (Séminaire de géométrie algébrique) in Paris zusammen mit den »Éléments« beeinflussten die algebraische Geometrie revolutionierend.  $G$ . ist einer der Begründer der  $K$ -Theorie. Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1966 in Moskau erhielt  $G$ . für sein Gesamtwerk in der algebraischen Geometrie die Fields-Médaille, das für Mathematiker bestimmte Äquivalent zum Nobelpreis.

**Grundbereich**: der für eine bestimmte Betrachtung zugrunde gelegte Zahlenbereich, z. B. ist der größtmögl. Zahlenbereich, in dem der Term  $\sqrt{a}$  mit der Variablen  $a$  im Reellen betrachtet werden kann, die Menge  $\{a \mid a \in \mathbf{R} \text{ und } a \geq 0\}$ . Der  $G$ . kann auch eine Teilmenge davon sein. Man nennt ihn oft *Variablengrundbereich*.

**Grundeinheit** ↗ Zahlkörper III.

**Grundfläche** ↗ Kegel II., ↗ Körper V., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I., ↗ Zylinder II.

**Grundformen einer Fläche**: Differentialgleichungen

(1) und (2) für eine in Parameterdarstellung  $\mathbf{x} =$

$$(1) \quad ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2$$

$$(2) \quad -df \cdot dr = L(u, v) du^2 + 2M(u, v) du dv +$$

$$+ N(u, v) dv^2$$

$\mathbf{r}(u, v)$  im dreidimensionalen euklid. Raum  $\mathbf{R}_3$  gegebene Fläche, deren Koeffizienten (3) in (1) durch die ersten partiellen Ableitungen nach den Parametern und (4) in (2) als die Produkte aus der Flächennormalen  $\mathbf{f}$  (↗ Normale I.) und den zweiten partiellen Ableitungen definiert sind.

$$(3) \quad E(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad F(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v},$$

$$G(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

$$(4) \quad L = f \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad M = f \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \\ N = f \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

Wie in der Schreibweise angedeutet, hat die erste *Grundform* die geometrische Bedeutung des Quadrats eines *Bogenelements* ds. Mit ihrer Hilfe lassen sich Längen, Winkel und Flächenstücke einer betrachteten Fläche bestimmen. Durch sie ist auf dieser eine Maßbestimmung oder Metrik gegeben. Deshalb bezeichnet man sie auch als *metrische Grundform* (↗ Riemannsche Geometrie). Die *innere Geometrie* wird völlig durch sie bestimmt. Ist z. B. durch  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  für  $t_0 \leq t \leq t_1$  eine auf der Fläche  $F$  liegende Kurve  $C$  gegeben, so erhält man durch Differentiation nach  $t$  den Tangentenvektor  $\mathbf{x}'(t)$  (5) und die Länge (6) der Kurve  $C$  durch Integration, dabei sind im Integranden die Argumente  $u, v$  von  $E, F, G$  durch  $u = u(t)$  und  $v = v(t)$  von  $C$  zu ersetzen.

$$(5) \quad \mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}/dt = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

$$(6) \quad L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

Für den Flächeninhalt  $O(F')$  eines auf der Fläche  $F$  liegenden Gebietes  $F'$  gilt

$$O(F') = \iint \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Der Integrand  $dO = \sqrt{EG - F^2} du dv$  heißt das *Oberflächenelement* der Fläche und läßt sich anschaulich als der Flächeninhalt einer unendl. kleinen Masche aus Koordinatenlinien deuten.

Die Koeffizienten  $L, M, N$  der zweiten *Grundform* gehen in die Berechnung der Krümmung einer Fläche ein (↗ Krümmung I.).

**Grundfunktion** ↗ Variationsrechnung II.

**Grundgebilde der projektiven Geometrie** ↗ projektive Gebilde.

**Grundgesamtheit** ↗ Stichprobe.

**Grundintegrale** (Tabelle) ↗ Integral III. .

**Grundkante** ↗ Körper V.

**Grundkonstruktionen** ↗ geometrische Figur.

**Grundlagen der Geometrie**: I. Bezeichnung für Untersuchungen, die die Anfangsgründe beim Aufbau spezieller Teilgebiete der Geometrie, d. h. spezielle Geometrien, betreffen, z. B. Fragen der Wahl von *Axiomensystemen* und *Grundbegriffen* für den ↗ axiomat. Aufbau geometr. Theorien, Fragen der *Klassifizierung* geometr. Untersuchungen in geometr. Teildisziplinen, Fragen nach dem Zusammenhang der in der Geometrie abstrakt behandelten Begriffe mit ihren *anschaulichen Korrelaten* oder Fragen nach speziellen Eigenschaften geometr. Axiomensysteme.

II. Untersuchungen über geometr. Axiomensysteme zählen zur *Metamathematik*. Die Wahl der Axiome wird beeinflusst durch die anschaul. räuml. Verhältnisse, die in speziellen Teilgebieten der Geometrie beschrieben werden sollen. Nach Festlegung eines geometr. Axiomensystems werden alle geometr. Sätze des betreffenden Teilgebietes daraus rein formal abgeleitet; die Anschauung kann nur noch

Hilfe für das Finden von Beweisen geben, sie selbst beweist nichts.

III. Die *Klassifizierung* der Geometrie in Teilgebiete kann in verschiedener Weise erfolgen. — III.1. Eine Klassifizierung geht davon aus, daß die Geometrie Eigenschaften von Figuren untersucht, die bei Lageänderungen dieser Figuren erhalten bleiben; dabei führen verschiedene mögl. Präzisierungen dessen, was man unter Lageänderungen zu verstehen hat, zu verschiedenen Geometrien (↗ Erlanger Programm). — III.2. Eine zweite Klassifizierung unterscheidet zwischen *euklid.* und *nichteuklid.* Geometrien, je nachdem, ob das Parallelenaxiom vorausgesetzt wird oder nicht. — III.3. Eine dritte Klassifikation betrifft die *Untersuchungsmittel*. Die *synthet.* Geometrie bedient sich rein geometr., meist unmittelbar anschaul. Begriffe zur Herleitung ihrer Ergebnisse. Die *darstellend.* Geometrie untersucht die geometr. Gebilde an Hand ihrer algebraischen Darstellung durch Gleichungen zwischen Zahlen sowie an Hand des Lösungsverhaltens von Gleichungssystemen. Die *darstellende* Geometrie behandelt die Abbildung geometr. Gebilde mittels verschiedener Projektionsmethoden, z. B. der Axonometrie, der Parallelprojektion oder der Perspektive, auf eine oder mehrere Bild- bzw. Zeichenebenen. — III.4. Weitere Klassifizierungsmöglichkeiten ergeben sich z. B. aus der Betrachtung der *Dimension* des untersuchten Raumes und können zur Geometrie auf der Geraden, zur Planimetrie oder zur Stereometrie führen.

**Grundlagen der Mathematik**: Zusammenfassung der verschiedenartigen Methoden zur einheitl. Grundlegung der Mathematik als Wissenschaft; soweit diese Methoden mathemat. Art sind, gehören sie zur *Metamathematik*.

**Grundrechenarten**: zusammenfassende Bezeichnung für die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Dabei sind Subtraktion bzw. Division als Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation definiert und die Multiplikation mit ihrer Umkehroperation wird als *Operation der zweiten Stufe* gegenüber der Addition als *Operation der ersten Stufe* bezeichnet, weil sie aus einer verkürzten Schreibweise der Addition mehrerer gleicher Summanden abgeleitet werden kann, z. B.  $a + a + a = 3a$ . Entsprechend ergeben sich die *Operationen der dritten Stufe* aus der Darstellung eines Produkts mit gleichen Faktoren als Potenz, z. B.  $a \cdot a \cdot a = a^3$ . Neben den G. erhält man damit als *höhere Rechenarten* das *Potenzieren* mit seinen beiden Umkehrungen, dem *Radizieren* und dem *Logarithmieren*.

**Grundriß** ↗ Zweitafelprojektion I.

**Grundschwingung** ↗ Fouriersche Reihe IV.

**Grundwert** ↗ Prozentrechnung.

**Grundzahl** ↗ dyadisches Zahlensystem I., ↗ Zahlensystem V.

**Gruppe**: I. eine Menge  $G$ , für deren Elemente, z. B.  $a, b, c$ , eine meist Multiplikation gen. binäre Operation erklärt ist und folgende vier *G.naxiome* gelten: 1. zwei Elementen  $a, b$  ist unter Berücksichtigung der Reihenfolge *eindeutig* ein Element  $c = a \cdot b$  als Produkt zugeordnet,

- 2. für die Operation gilt das *Assoziativgesetz*:  
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ,
- 3. in  $G$  existiert ein *Einselement*, *Einheitselement* oder *neutrales Element*  $e$ , für das  $a \cdot e = e \cdot a = a$  für jedes  $a \in G$  gilt,
- 4. zu jedem  $a \in G$  existiert ein *inverses Element*  $a^{-1} \in G$ , für das gilt  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

Eine  $G$ . ist mithin eine  $\mathcal{A}$  algebraische Struktur mit einer algebraischen Operation, die die Axiome 1. bis 4. erfüllt.

In einer *Halb-G.* sind die Axiome 1. und 2. erfüllt. Die Axiome 3. und 4. können abgeschwächt werden, indem man als 3l. nur die Existenz eines *Linkseinselementes*  $e$  mit der Eigenschaft  $e \cdot a = a$  für jedes Element  $a$  der  $G$ . fordert, und als 4l. nur verlangt, daß ein *linksinverses Element*  $a^{-1}$  mit  $a^{-1} \cdot a = e$  existiert. Entsprechendes gilt für ein *Rechtseinselement* bzw. ein *rechtsinverses Element*. Statt der Axiome 3. und 4. hätte man auch fordern können, daß die Gleichungen  $a \cdot x = b$  und  $y \cdot a = b$  für beliebige  $a$  und  $b$  aus  $G$  mindestens eine Lösung  $x \in G$  und mindestens eine Lösung  $y \in G$  haben. Diese Lösungen  $x = a^{-1} \cdot b$ ,  $y = b \cdot a^{-1}$  sind sogar eindeutig. In einer  $G$ . sind danach die  $\mathcal{A}$  Kürzungsregeln für jedes Element erfüllt. Insbes. sind Einselement und das Inverse eindeutig bestimmt.

Erfüllt die  $G$ . zusätzlich das *Kommutativgesetz*, d. h., gilt  $a \cdot b = b \cdot a$  für beliebige  $G$ .-Elemente  $a$  und  $b$ , so nennt man die  $G$ . *kommutativ* oder *abelsch*. Der  $G$ .-Begriff hängt nicht von der Bezeichnung der Operation als Multiplikation  $a \cdot b$  ab; sie kann auch eine Addition  $a + b$  sein. Man spricht dann von einer *additiven G.*, ihr *neutrales Element* pflegt man mit  $o$  zu bezeichnen und nennt es *Nullelement*, es hat die Eigenschaft  $a + o = o + a = a$  für alle  $a \in G$ . Das bzgl. der Addition inverse Element zu  $a$  schreibt man  $-a$  und nennt es das zu  $a$  *negative* oder *entgegengesetzte Element*; es gilt  $a + (-a) = (-a) + a = o$ . Eine additive abelsche  $G$ . heißt auch *Modul*. In einer multiplikativ geschriebenen  $G$ . gelten (1) und (2) für die *Inversen* und für ganzzahlige  $n$ ,  $m \geq 2$  die Definition (3) der *Potenz* mit  $n$  Faktoren sowie die *Potenzgesetze* (4).

- (1)  $(a^{-1})^{-1} = a$ ,  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$
- (2)  $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \cdot a_{k-1}^{-1} \cdots a_2^{-1} \cdot a_1^{-1}$
- (3)  $a^n = a \cdot a \cdots a$ , für  $n \geq 2$  ganz,  
 $a^0 = e$ ,  $a^{-n} = (a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$
- (4)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ,  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

*Beispiele* für  $G$ .n: 1. die *ganzen Zahlen* bzgl. der Addition. 2. a) die *positiven rationalen Zahlen*, 2. b) die *von Null verschiedenen rationalen Zahlen*, 2. c) die *von Null verschiedenen reellen Zahlen*, jeweils bzgl. der Multiplikation, 3. die  $\mathcal{A}$  *Permutationen* von  $n$  Elementen bzgl. der Hintereinanderausführung, 4. die *regulären  $n$ -reihigen quadrat. Matrizen* ( $\mathcal{A}$  Matrix) bzgl. der Multiplikation. 1. und 2. sind Beispiele für abelsche  $G$ .n.

II. Eine  $G$ . heißt *endlich* oder *unendlich*, je nachdem ob sie endlich viele Elemente hat oder nicht. Die

Anzahl der Elemente einer endl.  $G$ . heißt ihre *Ordnung*. Als *Untergruppe* bezeichnet man eine *Untermenge*  $H$  einer  $G$ .  $G$ , die bei derselben Operation selbst den  $G$ .n-Axiomen genügt; dies ist bereits der Fall, wenn mit  $a$  und  $b$  stets auch  $a \cdot b^{-1}$  aus  $H$  ist. Eine Unter- $G$ . enthält danach stets das Einselement. *Triviale* Unter- $G$ .n jeder  $G$ . sind die nur aus dem Einselement bestehende  $G$ . und die ganze  $G$ .; alle davon verschiedenen Unter- $G$ .n heißen *echte* Unter- $G$ .n. Die geraden Permutationen von  $n$  Elementen mit  $n \geq 2$  bilden z. B. eine echte Unter- $G$ . in der  $G$ . der Permutationen von  $n$  Elementen. Die geraden Zahlen, die durch 3, 4, ... teilbaren Zahlen bilden echte Unter- $G$ .n der additiven  $G$ . der ganzen Zahlen. Hat eine  $G$ . nur triviale Unter- $G$ .n, so heißt sie *einfach*. Jede  $G$ . von Primzahlordnung ist einfach.

Eine  $G$ ., die aus den Potenzen eines einzigen Elementes  $a$  besteht, heißt *zyklisch* ( $\mathcal{A}$  zyklische Gruppe). Es gibt zwei Möglichkeiten, entweder sind alle Potenzen  $a^n$  verschieden, dann ist die *zykl. G.*  $\{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, a^3, \dots\}$  unendlich, oder es ist  $a^m = a^n$  für ein  $n > m$ , dann ist  $a^{m-n} = e$ ; ist  $k$  der kleinste positive Exponent mit  $a^k = e$ , so besteht die *zykl. G.* aus den Elementen  $a^0 = e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$ . Eine *zykl. G.* ist stets abelsch. Eine nichtleere *Untermenge* einer  $G$ . heißt auch ein *Komplex*. Sind  $H$  und  $K$  zwei Komplexe der  $G$ .  $G$ , so soll  $H \cdot K$  der *Komplex* sein, der aus allen Produkten  $h \cdot k$  mit  $h \in H$  und  $k \in K$  besteht. Für  $a \in G$  soll  $a \cdot H$  analog aus allen Produkten  $a \cdot h$  mit  $h \in H$  bestehen. Ist  $H$  eine Unter- $G$ . von  $G$ , so nennt man den *Komplex*  $a \cdot H$  eine *linksseitige Nebenklasse*, entsprechend  $H \cdot a$  eine *rechtsseitige Nebenklasse*. Zwei Nebenklassen  $a \cdot H$  und  $b \cdot H$  sind entweder identisch oder sie haben kein Element gemeinsam. Da auch jedes Element  $a$  der  $G$ . einer gewissen Nebenklasse angehört, erhält man eine Einteilung der  $G$ .  $G$  in Nebenklassen. Die Anzahl der linksseitigen Nebenklassen nach der Unter- $G$ .  $H$  ist gleich der Anzahl der rechtsseitigen Nebenklassen. Diese Anzahl heißt *Index* der Unter- $G$ .  $H$  in der  $G$ .  $G$ . Je zwei Nebenklassen sind gleichmächtig, d. h., sie haben gleichviele Elemente. Nach dem *Satz von Lagrange* ist  $n = m \cdot j$ , wenn  $n$  die Ordnung von  $G$ ,  $m$  die von  $H$  ist und  $j$  der Index von  $H$ . Sind alle linksseitigen Nebenklassen einer Unter- $G$ .  $N$  von  $G$  zugleich rechtsseitige Nebenklassen, so heißt  $N$  *Normalteiler*. Die Unter- $G$ .  $N$  von  $G$  ist genau dann *Normalteiler*, wenn für beliebige  $a \in G$  gilt:  $a \cdot N = N \cdot a$ . Für jedes Element  $a$  der  $G$ .  $G$  und jedes Element  $b$  der Unter- $G$ .  $N$  muß dazu  $a \cdot b \cdot a^{-1}$  wieder in  $N$  liegen. In einer abelschen  $G$ . ist jede Unter- $G$ . *Normalteiler*.

III. Sind  $G$  eine  $G$ . und  $H$  eine Menge, in der ebenfalls Produkte definiert sind, so heißt eine eindeutige Abbildung  $\varphi$  von  $G$  in  $H$  *Gruppenhomomorphismus*, wenn stets  $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(a \cdot b)$  ist, d. h., wenn das Produkt der Bilder gleich dem Bild des Produktes ist. Je nachdem, ob die Funktion  $\varphi$  eine Abbildung von  $G$  in oder auf  $H$  ist, spricht man von einem *Homomorphismus* von  $G$  in oder auf  $H$ . Die Menge aller Bilder  $\varphi(a)$  mit  $a \in G$  in  $H$  heißt *homomorphes Bild* von  $G$ , sie ist selbst wieder eine  $G$ . und wird mit

$\varphi(G)$  bezeichnet. Ist die Funktion  $\varphi$  sogar *eindeutig* von  $G$  auf  $H$  oder *bijektiv*, spricht man von einem *Isomorphismus* zwischen den G.n  $G$  und  $H$ .

Ist die Unter-G.  $N$  Normalteiler der G.  $G$ , so ist die Abbildung, die jedem Element  $a$  von  $G$  die Nebenklasse  $a \cdot N$  zuordnet, ein Homomorphismus. Die Multiplikation der Nebenklassen ist dabei die Komplexmultiplikation. Es gilt  $(a \cdot N) \cdot (b \cdot N) = a \cdot b \cdot N \cdot N = (a \cdot b) \cdot N$ , d. h., das Bild des Produktes ist gleich dem Produkt der Bilder. Die Menge der Nebenklassen einer G.  $G$  nach einem Normalteiler  $N$  von  $G$  ist bzgl. der Komplexmultiplikation danach selbst eine G., sie heißt *Faktorgruppe* und wird mit  $G/N$  bezeichnet [sprich:  $G$  nach  $N$ ]. Der *Homomorphiesatz* für G.n ( $\nearrow$  Homomorphismus) besagt, daß die Gruppe  $G$  homomorph auf die Faktorgruppe  $G/N$  bzgl. eines Normalteilers  $N$  abgebildet wird, und daß umgekehrt jedes zur vorgegebenen Gruppe  $G$  homomorphe Bild  $H$  isomorph zur Faktorgruppe  $G/N$  bzgl. eines gewissen Normalteilers  $N$  von  $G$  ist. Der Normalteiler  $N$  wird bei der homomorphen Abbildung  $G \rightarrow G/N$  auf das Einselement der Faktor-G. abgebildet; er ist der *Kern* des Homomorphismus. Die Ordnung von  $G/N$  ist der Index von  $N$ . Triviale Faktor-G.n einer jeden Gruppe  $G$  sind  $G/G$ , die isomorph zur *Einheitsgruppe*  $E$  ist, d. h. zu der Gruppe, die nur aus dem Einselement besteht, und  $G/E$ , die isomorph zur Gruppe  $G$  ist.

*Beispiele* für Faktor-G.n: 1. Die Faktor-G. der additiven G. der *ganzen Zahlen* nach dem Normalteiler der durch 3 teilbaren Zahlen ist isomorph zur zykl. G.  $Z_3$  der Ordnung 3, d. h. zu der Gruppe mit den Elementen  $e = a^0, a, a^2$ . 2. Die Faktor-G.  $S_n/A_n$  der *symmetr. G.*  $S_n$  ( $\nearrow$  Permutationsgruppe) nach der alternierenden G.  $A_n$  ist eine zykl. G. der Ordnung 2, sofern  $n \geq 2$  ist.

Einen Isomorphismus der G.  $G$  auf sich bezeichnet man als *Automorphismus*. Definiert man das Produkt  $\varphi \cdot \psi$  zweier Automorphismen von  $G$  auf sich als *Hintereinanderausführung* ( $\nearrow$  Transformationsgruppe)  $\varphi \cdot \psi(x) = \varphi(\psi(x))$ , so ist dieses Produkt wieder ein Automorphismus. Ebenso ist die inverse Abbildung eines Automorphismus wieder ein Automorphismus. Die Automorphismen einer G.  $G$  bilden danach wieder eine G., die *Automorphismengruppe* von  $G$ . Ebenso bilden die Automorphismen einer beliebigen  $\nearrow$  algebraischen Struktur eine Gruppe. Ist  $a$  ein Element von  $G$ , so ist die Abbildung  $\varphi_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$  ein Automorphismus von  $G$ , *innerer Automorphismus* gen. Es gilt  $\varphi_a \cdot \varphi_b(x) = a \cdot (b \cdot x \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = (a \cdot b) \cdot x \cdot (a \cdot b)^{-1} = \varphi_{ab}(x)$  und  $\varphi_a^{-1}(x) = \varphi_{a^{-1}}(x)$ , denn ist  $a \cdot x \cdot a^{-1} = y$ , so ist  $x = a^{-1} \cdot y \cdot a = a^{-1} \cdot y \cdot (a^{-1})^{-1}$ . Die inneren Automorphismen bilden somit eine Unter-G. der Automorphismen-G. In einer abelschen G. ist der ident. Automorphismus der einzige innere; hingegen ist die Abbildung, die jedem Element sein Inverses zuordnet, kein innerer, sondern ein *äußerer* Automorphismus. Die Normalteiler sind abgeschlossen oder invariant bzgl. den inneren Automorphismen und heißen deshalb auch *invariante Unter-G.n*.

(S. a. Permutationsgruppe, Transformationsgruppe, Erlanger Programm.)

**IV. Geschichtliches.** Gruppentheoret. Denken tritt erstmals gegen Ende des 18. Jh. bei LAGRANGE, VANDERMONDE und RUFFINI auf, die sich mit der Auflöser algebraischer Gleichungen höheren als 4. Grades beschäftigten, bei der Permutationen der Wurzeln der Gleichungen eine Rolle spielten. Zugleich entwickelte sich körpertheoret. Denken, da die durch die Wurzeln der Gleichung erweiterten Koeffizientenbereiche ebenfalls betrachtet wurden. GALOIS (1811–1832) erkannte die Zusammenhänge zwischen den Permutations-G.n und den Körpererweiterungen. Er entwickelte die *Galoissche Theorie* und begründete damit die moderne Algebra. Von ihm stammt die Bezeichnung G., die von ihm betrachteten G.n waren jedoch noch Permutations-G.n. Weiter haben C. JORDAN (1838–1922), F. KLEIN (1849–1925) und S. LIE (1842–1899) große Verdienste bei der Entwicklung der G.ntheorie. Bei der Untersuchung von Permutations-G.n stieß man auf die Isomorphie und untersuchte daraufhin abstrakte G.n und definierte auch den Begriff der G. axiomatisch. Die axiomat. Definition und die Untersuchung abstrakter Strukturen veränderte Methode und Inhalt der Algebra und später eigentlich der ganzen Mathematik völlig. Zunächst wurden jedoch in erster Linie endl. abstrakte G.n untersucht. KLEIN und LIE untersuchten auch unendl. und zwar Transformations-G.n und verbanden die G.ntheorie und damit die Algebra mit der Geometrie und der Analysis ( $\nearrow$  Erlanger Programm, Liesche Gruppe). Die G.ntheorie hat heute vielfältige Anwendungen in vielen mathemat. Disziplinen sowie in der Kristallographie und in der Atomphysik. Es entstanden selbständige Theorien wie die der *topolog.*, der *Lieschen* und der *geordneten* G.n.

**Gruppe, topologische:** Menge von Elementen, die einerseits eine Gruppe, andererseits einen topologischen Raum bilden. Dabei sollen die algebraische und die topolog. Struktur in dem Sinne miteinander verträglich sein, daß die Multiplikation, die je zwei Elementen ein drittes als ihr Produkt zuordnet, eine stetige Funktion ( $\nearrow$  Abbildung, topologische) ist. Die zusätzl. topolog. Struktur läßt neue, nicht notwendig algebraische Methoden zur Untersuchung dieser Gruppen zu.

Neben verschiedenen Matrixgruppen und Transformationsgruppen der verschiedenen Geometrien sind die *Lieschen Gruppen* wichtig geworden.

**Gruppenhomomorphismus**  $\nearrow$  Gruppe III.

**Gruppentafel, Cayleysche Tafel:** für eine endl. Gruppe als quadrat. Schema aufgestellte Multiplikationstabelle, die im Kreuzungspunkt einer Zeile mit einer Spalte das Produkt der jeweiligen Elemente angibt, die in der linken Eingangsspalte untereinander sowie in der oberen Eingangszeile nebeneinander angegeben sind; diese Eingangsspalte und -zeile enthalten jede alle Elemente der gegebenen Gruppe. Die G. wurde 1854 von A. CAYLEY in die Gruppentheorie eingeführt. Sie läßt sich bereits für eine  $\nearrow$  algebraische Struktur mit einer binären Operation aufstellen. Die Tabellen (1) und (2) geben zwei

mögl. Multiplikationstabellen für die Menge  $\{a, b, c, d, e, f\}$  an.

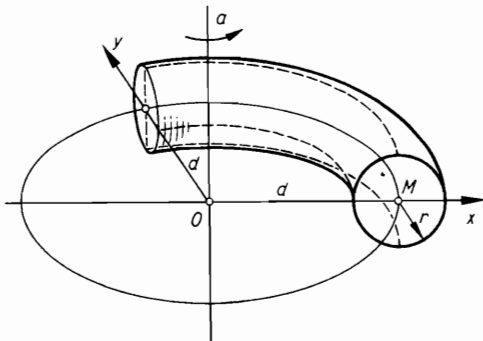
	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$		$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
(1)	$a$	$b$	$e$	$a$	$f$	$d$	$c$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
	$b$	$e$	$d$	$b$	$c$	$f$	$a$	$b$	$c$	$a$	$e$	$f$	$d$
	$c$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$c$	$a$	$b$	$f$	$d$	$e$
	$d$	$f$	$c$	$d$	$b$	$a$	$e$	$d$	$e$	$f$	$c$	$b$	$a$
	$e$	$d$	$f$	$e$	$a$	$c$	$b$	$e$	$f$	$d$	$b$	$a$	$c$
	$f$	$c$	$a$	$f$	$e$	$b$	$d$	$f$	$d$	$e$	$a$	$c$	$b$

Die Operation ist in beiden Fällen kommutativ, da die G.n symmetrisch zu der von links oben nach rechts unten verlaufenden Hauptdiagonalen sind. Ist die Operation nicht kommutativ, so wird verabredungsgemäß der erste Faktor in der linken Spalte, der zweite Faktor in der oberen Zeile aufgesucht. Bzgl. der durch Tafel (1) definierten Operation ist  $c$  das neutrale Element, da die zu  $c$  gehörende Zeile bzw. Spalte mit der Eingangszeile bzw. Eingangsspalte übereinstimmt. In Tafel (2) ist  $a$  das Einselement. Es hat auch jedes Element ein Inverses, da jede Zeile bzw. Spalte genau einmal das neutrale Element enthält. Die Assoziativität kann man der Tafel nicht unmittelbar entnehmen; in Tafel (1) ist sie erfüllt, in Tafel (2) ist z. B.  $(ed)c = bc = a$ , aber  $e(dc) = ef = c$ ; d. h., Tafel (2) beschreibt keine Gruppe, während Tafel (1) G. einer abelschen Gruppe, nämlich der zykl. Gruppe der Ordnung 6, ist. **g-Übertrag** ↗ Addition II.

**Guldin, Paul (Habakuk)**, geb. 12. 6. 1577 St. Gallen, gest. 3. 11. 1643 Graz. — G. trat 1597 als Goldschmied in den Jesuitenorden ein und wurde in Rom ausgebildet. Später war er als Lehrer in Rom, Wien und Graz tätig. Die *G.schen Regeln* finden sich in seinem Werk «Centrobaryca» (1635/41); sie waren aber schon PAPPUS bekannt.

**Guldinsche Regeln:** I. *Erste Guldinsche Regel:* Der Flächeninhalt  $F = 2\pi d \cdot l$  der Rotationsfläche, die durch Drehung einer Kurve um eine sie nicht schneidende Achse entsteht, ist das Produkt aus der Länge  $l$  der Kurve und dem Umfang  $2\pi d$  des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve bei der Drehung beschreibt.

Bei der Drehung eines Kreises mit dem Radius  $r$  um eine ihn nicht schneidende Achse  $a$  entsteht z. B. ein Torus (Abb.). Ist der Kreis homogen mit



Guldinsche Regeln: Torus als Rotationskörper

Masse belegt, so liegt sein Schwerpunkt im Mittelpunkt  $M$ . Ist  $d$  der Abstand des Mittelpunktes von der Achse, so beschreibt der Schwerpunkt einen Kreis mit dem Umfang  $2\pi d$ . Der Flächeninhalt  $F$  des Torus ist danach  $F = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 dr$ .

II. *Zweite Guldinsche Regel:* Das Volumen  $V = 2\pi d \cdot F$  eines Körpers, der durch Rotation eines ebenen Gebietes um eine es nicht schneidende Achse entsteht, ist das Produkt aus dem Flächeninhalt  $F$  dieses Gebietes und dem Umfang  $2\pi d$  des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Gebietes bei der Drehung beschreibt.

*Beispiel:* Das Volumen des Torus errechnet sich hiernach zu  $V = 2\pi d \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 dr^2$ , weil der Flächeninhalt des rotierenden Gebietes  $\pi r^2$  ist.

**gültige Ziffer** ↗ Runden.

**Gütekriterium:** Maß zur Bewertung von kybernet. Systemen oder von Lösungen an ihnen aufgetretener Probleme (s. a. Adaption V.). G.en haben deshalb für den Entwurf und die Optimierung der Arbeitsweise von kybernet. Systemen eine grundlegende Bedeutung. Für die Anwendung systemat. Verfahren ist eine geeignete mathemat. Formulierung des G.s wichtig. Die Eignung bezieht sich auf den vorliegenden Zweck, da es eine Güte an sich nicht gibt. Das G. wird daher auch häufig *Zielfunktion* genannt. Die Vielzahl der für unterschiedl. Zielstellungen mögl. Gütekriterien läßt sich nur relativ grob gliedern.

I. Ein G. für ein vorgegebenes Verhalten ist eine feste Zahl und kennzeichnet z. B. eine bestimmte Dämpfung, eine Überschwingweite oder eine Einschwingzeit bei Regelungen oder eine geforderte Lebensdauer oder Zuverlässigkeit von Systemen.

II. Ein G. für optimales Verhalten hat extremalen Charakter, es bestimmt z. B. eine minimale Regelfläche, Überführungszeit oder Ausfallwahrscheinlichkeit oder einen minimalen Energieaufwand. Entsprechend kann es eine maximale Ausbeute, einen maximalen mittleren Entropiegewinn (↗ Information II.) u. a. bestimmen. Die besondere Bedeutung des G.s bei optimalen Systemen (↗ Optimierung) besteht darin, daß das Ergebnis eines Schritts im Hinblick auf das G. jeweils bewertet wird und hieraus Entscheidungen über den folgenden Schritt getroffen werden.

**Gwalior-Handschrift** ↗ Zahlensystem V.

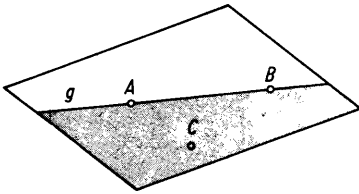
## H

**Hadamard, Jacques Salomon**, geb. 8. 12. 1865 Versailles, gest. 17. 10. 1963 Paris. — H. studierte von 1884/88 an der École Normale in Paris, arbeitete an verschiedenen Gymnasien und Hochschulen in Frankreich, promovierte 1892 in Paris und kehrte 1897 an die Sorbonne zurück. 1909 wurde er Professor am Collège de France und 1912 an der École Polytechnique. Während des zweiten Weltkriegs ging er 1940/47 in die USA und kehrte dann nach Paris zurück. H. erzielte auf den meisten Gebieten

der klass. Mathematik wichtige Resultate, z. B. in der Funktionentheorie und über ellipt. und hyperbol. Differentialgleichungen. Mit seinen Untersuchungen über die allgemeinsten stetigen Funktionale rief er 1953 die moderne *Dualitätstheorie* mit ins Leben. Weitere Publikationen befaßten sich mit der *Variationsrechnung* und der *Differentialgeometrie*. Großen Anteil nahm er an Fragen der Schulbildung und an neuen mathemat. Ideen.

**Halbbaddierer** ↗ digitale Rechenanlage II.2.

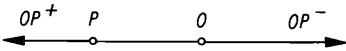
**Halbebene:** Menge aller Punkte einer Ebene, die auf nur einer Seite einer Geraden  $g$  dieser Ebene liegen,  $g$  heißt die *Randgerade*. Jede Gerade einer Ebene bestimmt genau zwei punktfremde H.n. Liegen in einer von ihnen der Punkt  $C$  und auf der



Halbebene  $gC^+$  oder  $ABC^+$  mit Randgerade  $g$

Randgeraden  $g$  die Punkte  $A$  und  $B$ , so wird diese H. mit  $gC^+$  oder  $ABC^+$  bezeichnet, die zu ihr *entgegengesetzte* H. mit  $gC^-$  oder  $ABC^-$ . Die H.  $gC^-$  besteht aus allen Punkten der Ebene, die auf der Seite von  $g$  liegen, die  $C$  nicht enthält, und nur aus diesen (Abb.).

**Halbgerade, Strahl:** Menge aller Punkte einer Geraden  $g$  (↗ Grundelement), die bzgl. eines Punktes  $O$  auf derselben Seite von  $g$  liegen. Jeder Punkt  $O$  der Geraden  $g$  bestimmt genau zwei punktfremde H.n. Ist  $P \neq O$  ein Punkt der Geraden, so bezeichnet  $OP^+$  die H., die den Punkt  $P$  enthält,  $O$  heißt der *Anfangspunkt* der H. und gehört selbst nicht zu ihr. Die *entgegengesetzte* H.  $OP^-$  enthält außer  $O$  alle Punkte von  $g$ , die nicht zu  $OP^+$  gehören (Abb.).



Halbgerade  $OP^+$  und entgegengesetzte Halbgerade  $OP^-$

**Halbgruppe:** eine ↗ algebraische Struktur mit einer binären, meist Multiplikation gen. Operation, für die das Assoziativgesetz gilt. S. a. Gruppe I.

**Halbieren:** Grundkonstruktion, auf einer Strecke  $AB$  einen Punkt  $M$  zu finden, so daß  $|AM| = |MB|$  (↗ Mittelsenkrechte I.) oder durch den Scheitel  $O$  eines Winkels  $\sphericalangle(p, q)$  einen Strahl  $l$  so zu finden, daß  $|\sphericalangle(p, l)| = |\sphericalangle(l, q)|$  (↗ Winkelhalbierende); der Punkt  $M$  heißt *Mittelpunkt* der Strecke  $AB$ , der Strahl  $l$  *Winkelhalbierende* von  $\sphericalangle(p, q)$ .

**halblogarithmisches Papier** ↗ logarithmisches Papier.

**Halbmesser** ↗ Kreis I.

**Halbordnung** ↗ Anordnungsrelationen II.

**Halbparameter:** Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie einer ↗ Parabel I.

**halbbreguläre Polyeder** ↗ regelmäßige Polyeder III.

**Halbseitensatz** ↗ Halbwinkelsatz III.

**Halbwertzeit** ↗ Zuverlässigkeitstheorie.

**Halbwinkelsatz:** I. Beziehung zwischen den Größen der Seiten  $a, b, c$  eines ebenen oder sphär. Dreiecks  $ABC$  und dem Tangens der halben Größe des einer Seite gegenüberliegenden Winkels. Ist  $s$  die Maßzahl des halben Umfangs, d. h.,  $2s = a + b + c$ , so gelten (1) im ebenen und (2) im sphär. Dreieck.

$$(1) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$(2) \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$$

II. Die Beziehungen (1) gewinnt man, indem man in die aus dem Additionstheorem der Kosinusfunktion  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  abgeleiteten Formeln (3) und (3a) die aus dem Kosinussatz gewonnene Be-

$$(3) \quad \cos(\alpha/2) = \sqrt{(1 + \cos \alpha)/2}$$

$$(3a) \quad \sin(\alpha/2) = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2}$$

ziehung  $\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/(2bc)$  einsetzt. Man erhält (4) und (4a) und hat zu beachten, daß  $2s =$

$$(4) \quad \cos(\alpha/2) = \sqrt{(b+c-a)(b+c+a)/(4bc)}$$

$$(4a) \quad \sin(\alpha/2) = \sqrt{(a+c-b)(a+b-c)/(4bc)}$$

$a + b + c$ . Werden nach (1) alle drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  berechnet, so ist  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  eine wertvolle Kontrolle.

III. Aus den polaren Gesetzmäßigkeiten (↗ sphärisches Dreieck III., IV.) ergibt sich der *Halbseitensatz* (5) als Folge der Beziehungen (6) und (6a), wenn  $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$  gesetzt wird. Die Beziehun-

$$(5) \quad \tan \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos(\sigma - \gamma)}{\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta)}}$$

$$(6) \quad \sin \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cdot \cos(\sigma - \gamma)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}$$

$$(6a) \quad \cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma - \alpha) \cdot \cos(\sigma - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}}$$

gen für die anderen Seiten ergeben sich durch zykl. Vertauschen.

Die Bedeutung dieser Sätze liegt darin, aus den Größen von drei gegebenen Seiten die der Winkel

(↗ ebene Trigonometrie II.4.) bzw. aus den Größen von drei gegebenen Winkeln die der Seiten in durchgehend logarithm. Rechnung zu bestimmen.

**Hamilton**, Sir William Rowan, geb. 4. 8. 1805 Dublin, gest. 2. 9. 1865 Dunsik. — H. studierte seit 1824 in Dublin und wurde 1827, noch vor Abschluß seiner Studien, Professor der Astronomie und königl. Astronom von Irland. — H. lieferte wichtige Arbeiten zur Algebra und ist der Entdecker des *Quaternionenkalküls*. Außerordentlich bedeutend sind seine Beiträge zur geometr. Optik und zur klass. Mechanik, z. B. die kanon. Gleichungen und das H.-Prinzip.

**Hamilton-Bahn** ↗ Turnier.

**Hamilton-Kreis** ↗ Turnier.

**Hamilton-Linie** ↗ Durchlaufungen von Graphen I., ↗ Netzwerk I.

**Hamiltonoperator** svw. Nablaoperator.

**Handelsreisenden, Problem eines** ↗ Rundfahrtproblem.

**Hängekuppel** ↗ Durchdringung.

**Hardware**: Gesamtheit der gerätetechn. Ausstattung einer Rechenanlage. S. a. Software.

**harmonische Analyse** ↗ Fouriersche Reihe IV.

**harmonische Funktionen** ↗ elliptische Differentialgleichung I.

**harmonische Punkte** ↗ Doppelverhältnis III., IV., s. a. vollständiges Vierseit.

**harmonischer Analysator**: Gerät zur Durchführung der harmon. Analyse graphisch dargestellter period. Funktionen, d. h. zur Bestimmung der *Fourierkoeffizienten* (1) und (2) für  $n = 0, 1, \dots$ , die in der

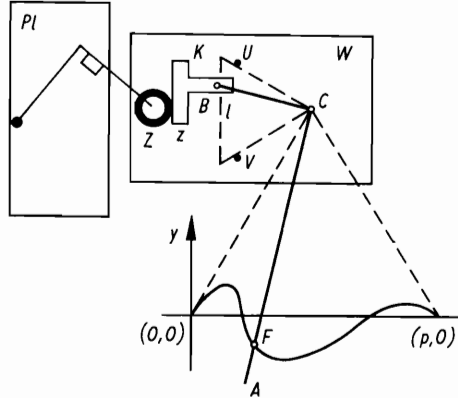
$$(1) \quad a_n = (2/p) \int_0^p f(x) \cos [2\pi nx/p] dx$$

$$(2) \quad b_n = (2/p) \int_0^p f(x) \sin [2\pi nx/p] dx$$

*Fourier-Entwicklung* (3) einer für  $0 \leq x \leq p$  stückweise glatten Funktion  $f(x)$  und ihrer period. Fort-

$$(3) \quad f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos [2\pi nx/p] + b_n \sin [2\pi nx/p]\}$$

setzung über die ganze  $x$ -Achse auftreten (vgl. Fouriersche Reihe I.). — Der Koeffizient  $a_0$  kann leicht mit Hilfe eines *Polarplanimeters* (↗ Planimeter II.) gefunden werden. Für die Ermittlung der übrigen Werte  $a_n$  und  $b_n$  sind neben rechner. auch viele instrumentelle Verfahren entwickelt worden. Weit verbreitet ist z. B. der *Analysator* von **MADER-OTT**, bei dem die Auswertung der betreffenden Integrale mit Hilfe eines Planimeters *Pl* (↗ Planimeter III.) erfolgt, dessen Fahrstift durch ein besonderes Getriebe geführt wird, das *Analysatorenlenker* gen. wird und auf einem Wagen *W* angebracht ist (Abb.), der sich wegen einer Schienenführung nur in einer zur  $y$ -Achse parallelen Richtung bewegen läßt. *C* auf *W* ist der Drehpunkt eines Rechtwinkelhebels, dessen einer Arm *CB* sich nur zwischen den Anschlägen *U* und *V* bewegen kann. Dabei wird die Periode  $p$  auf eine feste Periode  $l$  reduziert. Auf der Stange *CA* ist der Fahrstift *F*



harmonischer Analysator: Schema des Analysators von MADER-OTT

verschiebbar angebracht. Er ist vor jeder Analyse so einzustellen, daß die Stange *CB* ihre Extremal-lagen genau dann einnimmt, wenn sich *F* in den Punkten  $(0, 0)$  bzw.  $(p, 0)$  befindet. Jede Bewegung des Fahrstifts *F* bewirkt einerseits eine Verschiebung des Wagens *W*, andererseits eine Drehung von *CB* um *C*, die über eine Kreuzschleife *K* und die daran befestigte Zahnstange *z* das Zahnrad *Z* antreibt, das mit zwei Bohrungen *A<sub>n</sub>* für die  $a_n$  und *B<sub>n</sub>* für die  $b_n$  versehen ist. In diese Bohrungen wird der Fahrstift eines Polarplanimeters *Pl* eingesetzt, dessen Meßrolle auf einem festen Podium abrollt. — Der Fahrstift *F* wird bei jeder Bestimmung vom Ursprung  $(0, 0)$  ausgehend zunächst auf der  $y$ -Achse zum Punkt  $(0, f(0))$ , dann auf dem graphischen Bild von  $y = f(x)$  zum Punkt  $(p, f(p))$ , von dort parallel zur  $y$ -Achse zum Punkt  $(p, 0)$  und auf der  $x$ -Achse zurück zum Ursprung geführt. Die Differenz der Ablesungen an der Meßrolle liefert dann bis auf einen von dem Gerät abhängigen konstanten Faktor, der meist 100 ist, die gesuchten Fourier-Koeffizienten. Zu jedem Koeffizientenpaar  $a_n, b_n$  gehört ein Zahnrad mit dem Radius  $R_n = l/(2\pi n)$ . Es sind Zahnräder bis  $n = 25$  gebräuchlich, für  $n \geq 7$  werden allerdings die Radien so klein, daß Zwischenräder erforderlich sind, die dann die Bohrungen für den Planimeterfahrstift tragen. Bei Verwendung dieser Zwischenräder sind die Ablesungen noch zu halbieren. Da bei der beschriebenen Ausführung bei jeder Umdrehung nur ein Koeffizient bestimmt werden kann, wurden Analysatoren mit jeweils zwei Zahnrädern auf dem Wagen *W* gebaut, so daß bei Anschluß von zwei Planimetern jedesmal zwei Koeffizienten ermittelt werden können. Durch Kopplung mehrerer Geräte sowie Verwendung von anhängbaren Zusatzwagen und entsprechend vielen Planimetern können bei einer Umdrehung bis zu 14 Koeffizienten gleichzeitig bestimmt werden. In der Normalausführung ist das Gerät für  $2,5 \text{ cm} \leq p \leq 36 \text{ cm}$  verwendbar, die maximale Periodenlänge kann durch Ansetzen eines Gelenkparallelogramms noch auf 72 cm vergrößert werden.



**harmonische Reihe:** i. w. S. Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  mit dem allgemeinen Glied  $a_n = 1/n^\alpha$  für  $\alpha > 0$ , i. e. S. diese Reihe für  $\alpha = 1$ . Die Reihen (1) sind z. B. spezielle h. R.n. Die h. R.  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$  ist für  $\alpha \leq 1$  bestimmt divergent und für  $\alpha > 1$  konvergent (↗ Konvergenzkriterien für Reihen VI.). Einige Summen für spezielle  $\alpha$  lassen sich über Funktionenreihen berechnen (↗ Bernoullische Zahlen). Es ist z. B.  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^4 = \pi^4/90$ . Die h. R. benutzt man für  $\alpha > 1$  oft als Majorante und für  $\alpha \leq 1$  als Minorante im Majorantenkriterium bzw. Minorantenkriterium (↗ Konvergenzkriterien für Reihen), um über Konvergenz bzw. Divergenz von Reihen der Form (2) zu entscheiden.

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/3}}$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_r k^r + c_{r-1} k^{r-1} + \dots + c_0}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_0}$$

**harmonischer Punkt** ↗ Doppelverhältnis III.  
**harmonische Strahlen** ↗ Doppelverhältnis III.  
**harmonische Synthese** ↗ Fouriersche Reihe IV.  
**Hasse, Helmut**, geb. 25. 8. 1898 Kassel, gest. 31. 1. 1980 Hamburg. — Nach seinem Studium 1917/21 in Kiel, Göttingen und Marburg promovierte H. 1921 in Marburg und wurde 1925 zum Professor in Halle berufen; er ging 1930 nach Marburg und übernahm 1934 die Leitung des Göttinger Mathemat. Instituts. Er wirkte 1949 an der Humboldt-Universität in Berlin und seit 1950 in Hamburg. Seine Forschungen befaßten sich ausschließlich mit algebraischen Problemen, dabei arbeitete er mit ARTIN, BRAUER, E. NOETHER u. a. zusammen.  
**Hasse-Diagramm:** Mengenlehre bes. für endliche Mengen  $M$  mit einer Halbordnungrelation  $R$  benutzt bildl. Darstellung, in der man jedem Element von  $M$  einen Punkt einer Ebene zuordnet und je zwei von ihnen, z. B.  $a$  und  $b$ , durch einen Pfeil verbindet, wenn die Relation  $R$  zwischen ihnen besteht, d. h., wenn  $aRb$  gilt, aber kein von  $a, b$  verschiedenes Element  $c$  existiert, für das  $aRc$  und  $cRb$  gelten (Abb. 1). Statt Pfeile zu benutzen, ist es

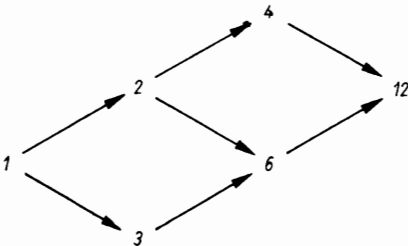


Abb. 1: Hasse-Diagramm in bezug auf die Teilbarkeit der halbgeordneten Menge der Teiler von 12; die Pfeile geben an: 1|2, 1|3, 2|4, 2|6, 3|6, 4|12 und 6|12

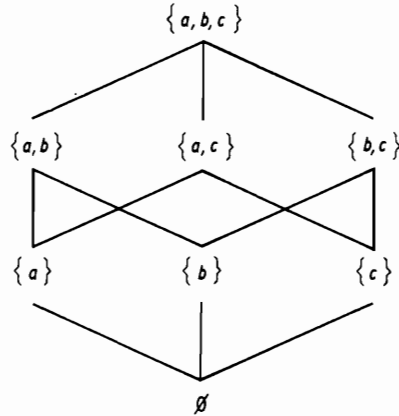


Abb. 2: Hasse-Diagramm der in bezug auf die Inklusion halbgeordneten Potenzmenge von  $a, b, c$ ; die Striche geben an:  $\emptyset \subseteq \{a\}$ ,  $\emptyset \subseteq \{b\}$ ,  $\emptyset \subseteq \{c\}$ ,  $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ ,  $\{a\} \subseteq \{a, c\}$ ,  $\{b\} \subseteq \{a, b\}$ ,  $\{b\} \subseteq \{b, c\}$ ,  $\{c\} \subseteq \{a, c\}$ ,  $\{c\} \subseteq \{b, c\}$ ,  $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$ ,  $\{a, c\} \subseteq \{a, b, c\}$ ,  $\{b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

auch üblich, von unten nach oben gerichtete Striche zu zeichnen (Abb. 2).

**Häufigkeit** ↗ Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses.

**Häufigkeitspolygon** ↗ Histogramm.

**Häufungsgrenze:** untere bzw. obere Grenze der Häufungswerte einer gegebenen Zahlenfolge  $(a_n)$ . Ist  $\lambda$  untere Grenze der Häufungswerte, auch *untere H.*, *unterer Limes* oder *Limes inferior* gen. und symbolisch durch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$  angegeben, so gilt für jedes  $\varepsilon > 0$  die Beziehung  $a_n < \lambda - \varepsilon$  nur für endlich viele Glieder  $a_n$ , dagegen die Beziehung  $\lambda - \varepsilon < a_n < \lambda + \varepsilon$  für unendlich viele Glieder  $a_n$  der Zahlenfolge. Für die obere Grenze  $\lambda'$  der Häufungswerte, auch *obere H.*, *oberer Limes* oder *Limes superior* gen. und symbolisch durch  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda'$  angegeben, gilt

für jedes  $\varepsilon > 0$  die Beziehung  $a_n > \lambda' + \varepsilon$  nur für endlich viele Glieder  $a_n$ , dagegen die Beziehung  $\lambda' - \varepsilon < a_n < \lambda' + \varepsilon$  für unendlich viele Glieder  $a_n$  der Zahlenfolge. Ist die Zahlenfolge nach unten unbeschränkt, so sagt man,  $-\infty$  sei die untere H. Ebenso gilt  $+\infty$  als obere H., wenn die Zahlenfolge nach oben nicht beschränkt ist. Ist die betrachtete Zahlenfolge  $(a_n)$  nach oben beschränkt, nach unten unbeschränkt und hat im Endlichen keinen Häufungswert, so betrachtet man  $-\infty$  als obere und untere H. Entsprechendes gilt für  $+\infty$ , wenn  $(a_n)$  keinen endl. Häufungswert hat und nach unten beschränkt, nach oben aber unbeschränkt ist. Die Zahlenfolge  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n \cdot 2n/(3n + 4)$  z. B. hat die Zahl  $\lambda = -2/3$  als untere und  $\lambda' = 2/3$  als obere H., denn unterhalb  $-2/3 - \varepsilon$  liegen keine Glieder der Zahlenfolge;  $-2/3 - \varepsilon < a_n < -2/3 + \varepsilon$  ist für unendlich viele Glieder der Zahlenfolge erfüllt, nämlich für alle  $a_n$  mit hinreichend großem und ungeradem Index  $n$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -2/3$  gilt.

Ebenso zeigt man, daß  $\lambda' = 2/3$  obere H. ist. Die

Zahlenfolge  $(a_n) = (n^2)$  hat  $+\infty$  als obere und untere H.

Für eine Zahlenfolge  $(a_n)$  gilt stets:  $g \leq \lambda \leq \lambda' \leq G$ , wenn  $g$  die untere und  $G$  die obere Grenze der Zahlenfolge sind. Ist die gegebene Zahlenfolge  $(a_n)$  konvergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , so ist  $a = \lambda = \lambda'$ , d. h.,

$(a_n)$  hat genau einen endl. Häufungswert  $a$ . Da auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, kann man sagen: Eine Zahlenfolge  $(a_n)$  ist konvergent genau dann, wenn sie genau einen Häufungswert hat, der endlich ist.

**Häufungspunkt** ↗ Menge IV., ↗ Punktmenge.

**Häufungswert** ↗ Zahlenfolge III.

**Hauptachse** ↗ Ellipse I., ↗ Hyperbel I.

**Hauptachsentransformation: I. orthogonale Koordinatentransformation**, die ein kartes.  $x_1, \dots, x_n$ -Koordinatensystem des  $n$ -dimensionalen Raumes  $R_n$  in ein kartes.  $x'_1, \dots, x'_n$ -Koordinatensystem überführt, so daß die Gleichung (1) einer gegebenen

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_{i=1}^n a_{i0} x_i + a_{00} = 0$$

Quadrik eine Normalform im  $x'_1, \dots, x'_n$ -System erhält (s. a. quadratische Form II.); das ist eine Gleichungsform der Art (2), (2a) oder (2b) mit

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i'^2 = 1,$$

$$(2a) \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i'^2 = 0, \quad (2b) \quad \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i'^2 = 2x_n'$$

reellen  $a_i$ , von denen einige, aber nicht alle Null sein können. Diese Gleichungsformen der Quadrik zeichnen sich dadurch aus, daß sie kein gemischtquadrat. Glied  $a'_{ik} x'_i x'_k$  mit  $i \neq k$  enthalten und entweder kein lineares Glied oder nur ein lineares Glied, dann aber kein Absolutglied. Das **Hauptachsenproblem** besteht darin, zu einer durch (1) gegebenen Quadrik ein kartes.  $x'_1, \dots, x'_n$ -Koordinatensystem zu finden, in dem eine der Gleichungen (2), (2a) oder (2b) gilt.

II. Für eine ebene Kurve zweiter Ordnung mit der Gleichung (3), auch **Kegelschnitt** gen., ergibt sich

$$(3) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

die H. aus folgenden Schritten: Durch eine **Drehung des Koordinatensystems**

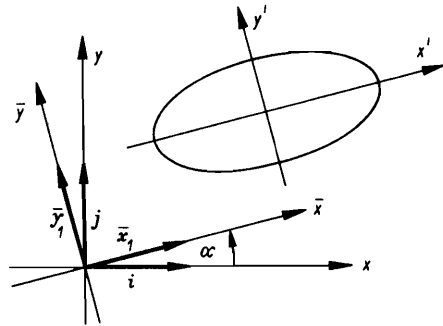
$\bar{x} = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$ ,  $\bar{y} = -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$  wird ein  $\bar{x}, \bar{y}$ -Koordinatensystem eingeführt. Den Winkel  $\alpha$  bestimmt man, indem man  $x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha$ ,  $y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha$  in Gleichung (3) einsetzt und fordert, daß der Koeffizient  $\bar{a}_{12} = -a_{11} \sin 2\alpha + 2a_{12} \cos 2\alpha + a_{22} \sin 2\alpha$  des gemischtquadratischen Gliedes  $\bar{a}_{12} \bar{x} \bar{y}$  den Wert Null annimmt. Das ist der Fall für  $\tan 2\alpha = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22})$  bei  $a_{11} \neq a_{22}$  und für  $\alpha = \pi/4$  bei  $a_{11} = a_{22}$ . Bezeichnet man die Koeffizienten nach dieser Substitution mit  $\lambda_1, \lambda_2, 2\bar{a}_{10}$  und  $2\bar{a}_{20}$  und  $\bar{a}_{00}$ , so nimmt Gleichung (3) die Form (4) an.

$$(4) \quad \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + 2\bar{a}_{10} \bar{x} + 2\bar{a}_{20} \bar{y} + \bar{a}_{00} = 0$$

Bei  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$  führt man durch eine **Verschiebung** (↗ Abbildung, affine)  $x' = \bar{x} + \bar{a}_{10}/\lambda_1$ ,  $y' = \bar{y} + \bar{a}_{20}/\lambda_2$  ein  $x', y'$ -System ein (Abb.). Dabei geht Gleichung (4) über in (5). Ist ein  $\lambda_i$  Null, etwa

$$(5) \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{00} = 0$$

$\lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0$ , so verschiebt man erst nur längs der  $\bar{x}$ -Achse durch  $x' = \bar{x} + \bar{a}_{10}/\lambda_1$  und dann parallel zur  $\bar{y}$ -Achse so, daß das Absolutglied verschwindet.



Hauptachsentransformation

In diesem Fall erhält man Gleichung (6).

$$(6) \quad \lambda_1 x'^2 + 2a'_{20} y' = 0$$

Die Zusammensetzung von **Drehung** und **Verschiebung** ist die H. Mit der Form (5) oder (6) hat man eine **Normalform der Kegelschnitgleichung** bezüglich orthogonaler Transformationen, d. h. eine **metr. Normalform** erhalten. Ist die Kurve eine Ellipse oder Hyperbel bzw. eine Parabel, so hat das gefundene  $x', y'$ -Koordinatensystem die Eigenschaft, daß eine Koordinatenachse in der Hauptachse der Ellipse oder Hyperbel bzw. in der Parabelachse und der Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel bzw. im Scheitel der Parabel liegen. Diese Eigenschaft führte zu der Bezeichnung H. Ist die Kurve ein Mittelpunktskegelschnitt (↗ Kurven zweiter Ordnung), so hat die Normalform die Gestalt (5),  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ , und ist die **Mittelpunktskegelschnitgleichung** des Kegelschnitts.

III. Die Transformation zur Beseitigung der gemischtquadrat. Glieder ist auch auf andere Weise zu finden, wenn man (3) in Matrizenform (7) angibt

$$(7) \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_{00} = 0$$

(↗ Kurve zweiter Ordnung). Dann hat man eine orthogonale Transformation  $\mathbf{x} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}$ , oder umgekehrt  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T \mathbf{x}$ , mit orthogonaler Matrix  $\mathbf{T}$  zu bestimmen, so daß die Matrix  $\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$ , die durch  $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \bar{\mathbf{x}}$  die quadrat. Glieder der Kurvengleichung im  $\bar{x}, \bar{y}$ -Koordinatensystem bestimmt, eine **Diagonalmatrix** (8) ist. Dabei sind  $\lambda_1, \lambda_2$  die **Eigenwerte** von  $\mathbf{A}$ ,

$$(8) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

d. h. die Nullstellen des *charakterist. Polynoms* (9) oder die Wurzeln der *Säkulargleichung*

$$(9) \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$$

$\det(A - \lambda E) = 0$  von  $A$ . Für diese  $\lambda_i$  haben die Gleichungssysteme  $(A - \lambda_i E)\mathbf{y}_i = 0$  bzw.

$(A - \lambda_2 E)\mathbf{y}_2 = 0$  Lösungen (10).

$$(10) \quad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{y}_i \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Lösungen (10) heißen *Eigenvektoren* von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  (s. a. Eigenwert I.). Die Eigenvektoren kann man so wählen, daß  $\mathbf{y}_i^T \cdot \mathbf{y}_2 = 0$  und  $\mathbf{y}_1^T \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2^T \mathbf{y}_2 = 1$  gilt.  $T = (y_{ik})$  für  $i, k = 1, 2$  ist die gesuchte Transformationsmatrix. Die bezüglich der Grundvektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  des  $x, y$ -Systems angegebenen Vektoren  $\mathbf{y}_1 = y_{11}\mathbf{i} + y_{21}\mathbf{j}$  bzw.  $\mathbf{y}_2 = y_{12}\mathbf{i} + y_{22}\mathbf{j}$  liegen in Richtung der  $x'$ - bzw. der  $y'$ -Achse.

IV. Mit  $A$  aus (7), mit  $\tilde{A}$  aus  $\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} = 0$  ( $\nearrow$  Kurve zweiter Ordnung) und den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$  findet man, ohne die H. auszuführen, was für ein Kegelschnitt durch (7) dargestellt wird.

Man erhält folgende Übersicht, in der  $\det \tilde{A}$  mit  $|\tilde{A}|$  bezeichnet ist:

	$ \tilde{A}  \neq 0$	$ \tilde{A}  = 0$
$\lambda_1 \lambda_2 > 0$	Ellipse falls $\lambda_i  \tilde{A}  \leq 0$ nullteiliger Kegelschnitt falls $\lambda_i  \tilde{A}  > 0$	Nullkegelschnitt
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	Hyperbel	sich schneidendes Geradenpaar
$\lambda_1 \lambda_2 = 0$	Parabel	Parallelgeradenpaar falls $\text{Rang } \tilde{A} = 2$ Doppelgerade falls $\text{Rang } \tilde{A} = 1$

*Beispiel:* Durch  $x^2 + 24xy + 8y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$  ist eine Kurve zweiter Ordnung gegeben.

$$\text{Es ist } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -4 & 1 & 12 \\ 3 & 12 & 8 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt  $|\tilde{A}| = -17$ . Die Säkulargleichung ist  $|A - \lambda E| = (1 - \lambda)(8 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 9\lambda - 136 = 0$ ; die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = -8, \lambda_2 = 17$ . Der Kegelschnitt ist wegen  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$  eine Hyperbel. Die Gleichungssysteme  $9y_{11} + 12y_{21} = 0, 12y_{11} + 16y_{21} = 0$  und  $-16y_{12} + 12y_{22} = 0, 12y_{12} - 9y_{22} = 0$  haben als Lösungen die normierten Eigenvektoren (11).

$$(11) \quad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Aus  $x = y_{11}\tilde{x} + y_{12}\tilde{y}, y = y_{21}\tilde{x} + y_{22}\tilde{y}$  ergibt sich die Drehung  $x = 4\tilde{x}/5 + 3\tilde{y}/5, y = 3\tilde{x}/5 + 4\tilde{y}/5$  und durch Einsetzen  $-8\tilde{x}^2 + 17\tilde{y}^2 - 10\tilde{x} - 3 = 0$ .

Mit der Verschiebung  $\tilde{x} = x' - 5/8, \tilde{y} = y'$  entsteht die Normalform  $-8x'^2 + 17y'^2 + 1/8 = 0$  oder  $64x'^2 - 136y'^2 = 1$ .

V. Zwei Kegelschnitte, deren Gleichungen durch H.n auf dieselbe Normalform gebracht werden können, sind *metrisch äquivalent*, das heißt, sie können durch eine *Kongruenzabbildung* zur Deckung gebracht werden. Umgekehrt kann man für kongruente Kegelschnitte durch H. dieselbe Normalform finden. Das führt zur *metr. Klassifikation der Kegelschnitte*, bei der zwei Kegelschnitte genau dann in einer Klasse metrisch äquivalenter Kegelschnitte liegen, wenn ihre Gleichungen auf dieselbe Normalform gebracht werden können. Die Bestimmung der Transformation  $\mathbf{x} = T\tilde{\mathbf{x}}$  ist auch auf den  $R_n$ , insbesondere den Raum  $R_3$  zu übertragen. Die quadrat. Glieder in (1) sind durch  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  mit *symmetr.* Matrix  $A_{(n,n)}$ ,  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$  gegeben. Es gilt: das *charakteristische Polynom*  $\det(A - \lambda E)$  hat  $n$  reelle Nullstellen, die *Eigenwerte*  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $A$ ; die Gleichungssysteme  $(A - \lambda_i E)\mathbf{y}_i = 0$  haben als Lösungen *Eigenvektoren*  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ , die so gewählt werden können, daß  $\mathbf{y}_i^T \cdot \mathbf{y}_j = 1, \mathbf{y}_i^T \cdot \mathbf{y}_j = 0$  für  $i \neq j$ . Die  $n, n$ -Matrix  $T = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  ist *orthogonal* und  $T^T A T$  ist *Diagonalmatrix*. Insbesondere erhält man für  $\nearrow$  *Flächen zweiter Ordnung* im Raum durch eine H. eine *Normalform der Flächengleichung*. Wie bei Kegelschnitten kann man damit auch eine *metr. Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung* vornehmen. S. a. quadratische Form, Eigenwertberechnung I.

**Hauptdiagonale**  $\nearrow$  Matrix I.,  $\nearrow$  Determinante II.  
**Hauptideal:** Ideal eines Ringes  $R$ , das sich von genau einem Ringelement  $a$  erzeugen läßt (s. a. Ring II.). In einem kommutativen Ring besteht das von  $a$  erzeugte H. ( $a$ ) aus allen Elementen der Form  $r \cdot a + n \cdot a$ , wenn  $r$  ein Ringelement und  $n$  eine ganze Zahl ist. Dabei ist  $na = a + a + \dots + a$  eine Summe von  $n$  Summanden für  $n \geq 2$  und es gilt  $1 \cdot a = a, 0 \cdot a = 0$  sowie  $(-n) \cdot a = -(na)$  für  $n \geq 1$ . Hat der Ring ein Einselement, so kommen unter den Elementen  $r \cdot a$  bereits alle ganzzahligen Vielfachen von  $a$  vor; d. h., das H. ( $a$ ) besteht aus allen Elementen der Form  $r \cdot a$ . Im Ring der ganzen Zahlen ist jedes Ideal H., d. h., jedes Ideal besteht aus den Vielfachen einer gewissen Zahl  $m$ . Ein solcher Ring heißt *H.-Ring*.

In einem nichtkommutativen Ring besteht das vom Element  $a$  erzeugte H. aus allen Elementen der Form  $\sum r_i a s_i + r_0 a + a s_0 + na$ , wenn  $r_0, r_i, s_0, s_i$  Ringelemente sind und  $n$  eine ganze Zahl ist; die Summe wird dabei über endlich viele  $i$  erstreckt.

**Hauptidealring**  $\nearrow$  Hauptideal.

**Hauptkriterien für Konvergenz**  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Funktionen II.,  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen II., V.

**Hauptkrümmung**  $\nearrow$  Krümmung I.

**Hauptlinie**  $\nearrow$  Eintafelprojektion,  $\nearrow$  Zweitafelprojektion I.

**Hauptnenner**  $\nearrow$  Brüche I.3., I.4.

**Hauptnormale**  $\nearrow$  Normale II., Normalebene.

**Hauptprogramm**  $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners III.

**Hauptpunkt** ↗ Projektion I.

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:** in Gleichung (1) ausgedrückte Beziehung zwischen der im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktion  $f(x)$  und einer Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$  in  $[a, b]$ . Vgl. Integral II.11.

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Hauptsatz der Integralrechnung** ↗ komplexes Integral III., ↗ Lebesguesches Integral V.

**Hauptsatz der mathematischen Statistik** ↗ empirische Verteilungsfunktion.

**Hauptsatz der projektiven Geometrie** ↗ Doppelverhältnis II.

**Hauptsatz über den größten gemeinsamen Teiler** ↗ Teilbarkeit III.

**Hauptscheitel** ↗ Ellipse I.

**Hauptscheitelkreis** ↗ Ellipse IV., ↗ Ellipsenkonstruktionen II.

**Hauptspeicher** ↗ digitale Rechenanlage II.1.

**Hauptteil** ↗ Laurentreihe.

**Hauptwert** ↗ Arkusfunktion I., ↗ komplexwertige Funktion, elementare, III., ↗ Moivresche Formel I., II.3., II.4., ↗ Potenz VI., ↗ Umkehrfunktion III.

**Hauptwert, Cauchy'scher** ↗ Integral, uneigentliches, I.4., II.2.

**Hausdorff, Felix**, geb. 8. 11. 1868 Breslau (Wrocław), gest. 26. 1. 1942 Bonn. — H. studierte in Leipzig, Freiburg und Berlin und promovierte 1891 in Leipzig. Aus der Leipziger Studienzeit stammen auch Veröffentlichungen von Lustspielen und Aphorismen. Ab 1902 war er in Leipzig und ab 1910 hauptsächlich in Bonn als Professor tätig. — H. begründete die *mengentheoret. Topologie*. Ausgewählte Hilbertsche Axiome über Umgebungen in der Ebene gaben seiner Theorie die gewünschte Genauigkeit und Allgemeinheit. Er gab auch Beiträge zur Theorie reeller Funktionen und faßte viele seiner Forschungsergebnisse in dem Buch »Grundzüge der Mengenlehre« (1914) zusammen. H. befaßte sich mit Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Gruppentheorie. Durch das Naziregime wurde H. 1942 in den Freitod getrieben.

**Hausdorff, Satz von** ↗ Menge V.

**Hausdorffscher Raum** ↗ Raum, topologischer II., ↗ Raum, metrischer, II.

**Hausdorffsches Trennungsaxiom** ↗ Raum, topologischer, II.

**Hausdorffsches Umgebungsaxiom** ↗ Raum, topologischer, I.

**Haussner, Vermutung von** ↗ Primzahl VI.

**hebbare Singularität** ↗ Laurentreihe, s. a. Stetigkeit.

**hebbare Unstetigkeit** ↗ Stetigkeit.

**heiße Redundanz** ↗ Redundanz II.

**Hektar, ha** ↗ Flächeninhalt III.

**Hekto** ↗ Strecke V.

**Hensel, Kurt**, geb. 29. 12. 1861 Königsberg (Kaliningrad), gest. 1. 6. 1941 Marburg. — H. war ein Ver-

wandter von DIRICHLET, studierte in Bonn und Berlin, promovierte dort 1884 bei KRONECKER und wurde 1902 als Professor nach Marburg berufen. Er schuf die Theorie der *p*-adischen Zahlen, gab damit eine neue Begründung der *algebraischen Zahlentheorie* und beeinflusste ihre Entwicklung maßgeblich. Große Bedeutung haben seine Untersuchungen über algebraische Funktionen und Riemannsche Flächen.

**Hermite, Charles**, geb. 24. 12. 1822 Dieuze, gest. 14. 1. 1901 Paris. — H. wuchs als 6. Kind eines Textilkaufmanns in gesicherten bürgerl. Verhältnissen auf. Er beschäftigte sich schon so früh mit Fragen der Forschung, daß er oft Mühe hatte, die obligator. Examen zu bestehen. Er studierte auch nur ein Jahr an der École Polytechnique und erhielt nur mit Hilfe von Freunden 1847 eine Lehrbefähigung. Seine wissenschaftl. Leistungen, die vor allem auf dem Gebiet der *ellipt. Funktionen*, der *Modulfunktionen* und der *Zahlen- und Invariantentheorie* liegen, wurden erst relativ spät öffentlich anerkannt. H. koordinierte die Ideen der Arithmetik von GAUSS, der ellipt. Funktionen von ABEL und JACOBI und der Theorie der algebraischen Invarianten von CAYLEY und SYLVESTER und entwickelte sie weiter. Erst 1870 berief man ihn zum Professor an die Sorbonne. 1873 bewies H. die Transzendenz von *e*. Er korrespondierte mit vielen berühmten Zeitgenossen und bemühte sich um den Abbau nationaler Schranken im wissenschaftl. Meinungsstreit. Er war Lehrer und Förderer von STIELTJES, DARBOUX, BOREL, POINCARÉ u. a.

**hermitisch** ↗ Matrix IV.

**hermitescher Operator** ↗ Operator, linearer, VI.

**herodianisches Zahlensystem** ↗ Zahlensystem IV.

**Heron** von Alexandria, lebte wahrscheinlich um 60 u. Z. vermutlich in Alexandria. — Er war Mechaniker, Mathematiker und Geodät und gab die erste Zusammenfassung des für die Ingenieurpraxis seiner Zeit notwendigen Wissens. In seiner »*Metrica*« befindet sich auch die *Heron. Formel*, die allerdings von ARCHIMEDES herrührt.

**Heronische Flächenformel** ↗ Inkreis I.

**Herzkurve** ↗ Zykloide IV.

**Hesse, Ludwig Otto**, geb. 22. 4. 1811 Königsberg (Kaliningrad), gest. 4. 8. 1874 München. — H., ein Schüler von JACOBI, promovierte in Königsberg und wurde dort 1840 zum Professor berufen; 1856 ging er nach Halle, 1857 nach Heidelberg und 1869 nach München. Er schrieb bedeutende Arbeiten zur *analyt. Geometrie*, über Differentialgeometrie und Invariantentheorie.

**Hessesche Normalform** ↗ Ebenengleichung III., ↗ Geradengleichung IV.

**hexadezimal** ↗ Zahlensystem VIII., ↗ Programmierung des Digitalrechners II.

**Hexaeder** ↗ regelmäßige Polyeder II.

**Hilbert, David**, geb. 23. 1. 1862 Königsberg (Kaliningrad) als Sohn eines Juristen, gest. 14. 2. 1943 Göttingen. — H. studierte in Königsberg und Heidelberg und war 1886 in Königsberg als Privatdozent und Professor tätig. Seit 1895 war er wesentlich mit daran beteiligt, daß die Universität Göttin-

gen zu einem Weltzentrum mathemat. Forschung wurde. Er galt als der bedeutendste lebende Mathematiker. Seine weltweite Autorität beweist sein berühmter Vortrag 1900 in Paris, in dem er 23 mathemat. Probleme anführte, die bis zum heutigen Tag das Interesse der Mathematiker finden.

H. lieferte zu vielen mathemat. Gebieten Beiträge, die die weitere Forschung der modernen Mathematik tief beeinflußt haben, z. B. über Invariantentheorie, Idealtheorie und Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten. Seine zahlentheoret. Untersuchungen fanden ihre Höhepunkte 1897 im Bericht »Die Theorie der algebraischen Zahlkörper« und im Beweis zum Waringschen Problem. In der Geometrie brachte H. durch »Die Grundlagen der Geometrie« wieder eine streng axiomat. Grundlegung zur Geltung (1899). Seine Arbeiten zur Theorie der Integralgleichungen und zur Variationsrechnung haben die moderne Analysis in großem Maße mitgeprägt. H. arbeitete auch erfolgreich an Fragen der theoret. Physik, insbes. über kinet. Gastheorie und Relativitätstheorie. Im Anschluß an die Entwicklung der Mengenlehre und die in den Grundlagen der Mathematik aufgetretenen Schwierigkeiten entwickelte H. seine Beweistheorie und wurde damit zum Hauptvertreter der formalen Richtung der Begründung der Mathematik.

**Hilbertraum:** I. *Funktionalanalysis* vollständiger Raum (↗ Fundamentalfolge) mit Skalarprodukt. Dabei heißt ein linearer Raum  $X$  (↗ Vektorraum) über dem Körper  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen ein *Raum mit Skalarprodukt* oder *unärer Raum*, wenn jedem geordneten Paar von Elementen  $x, y \in X$  eine komplexe Zahl  $(x, y)$ , ihr *Skalarprodukt*, zugeordnet ist, so daß für alle  $x, x_1, x_2, y \in X$  und alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$  (1), (2) und (3) gelten; dabei bezeichnet  $\bar{z}$  die

(1) die *Linearität*:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$$

(2)  $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(3) es gilt stets  $(x, x) \geq 0$  und aus  $(x, x) = 0$  folgt  $x = 0$

zu  $z \in \mathbf{C}$  konjugiert komplexe Zahl. Ist  $X$  in dieser Definition ein linearer Raum über dem Körper  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen und nimmt das Skalarprodukt nur reelle Werte an, so nennt man  $X$  einen *reellen Raum mit Skalarprodukt* oder *euklid. Raum*. Ein *vollständiger reeller Raum* (↗ Fundamentalfolge II.) mit Skalarprodukt heißt *reeller H.*

Die nachstehenden Aussagen beziehen sich, sofern nichts anderes gesagt ist, stets auf komplexe Räume, da man jeden reellen Raum mit Skalarprodukt zu einem komplexen Raum mit Skalarprodukt erweitern kann.

In jedem Raum mit Skalarprodukt kann man durch  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  eine *Norm* einführen, durch die  $X$  zu einem normierten linearen Raum (↗ Raum, normierter linearer) wird. Ein H. ist danach ein vollständiger normierter linearer Raum oder Banachraum.

Das einfachste Beispiel eines H. ist der  $n$ -dimensionale euklid. Raum  $\mathbf{C}^n$ , wenn man das Skalarprodukt der  $n$ -Tupel  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  durch (4) definiert. Auf analoge Weise wird

$$(4) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\eta}_i$$

der  $n$ -dimensionale reelle euklid. Raum  $\mathbf{R}^n$  zu einem reellen H. Von den vollständigen normierten Räumen (↗ Raum, normierter linearer)  $\mathbf{C}(a, b)$ ,  $\mathbf{C}^n(a, b)$ ,  $L_p(a, b)$ ,  $\mathbf{c}$  und  $l_p$  sind lediglich die Räume  $L_2(a, b)$  und  $l_2$  H.e. Die entsprechenden Skalarprodukte werden dabei durch (5) und (6) definiert, d. h., nicht jeder vollständige normierte lineare Raum ist ein H.

$$(5) \quad (x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$$

$$(6) \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$$

J. v. NEUMANN bewies, daß ein normierter linearer Raum  $X$  genau dann ein Raum mit Skalarprodukt ist, wenn für beliebige Elemente  $x, y \in X$  die *Parallelogrammidentität* (7) gilt. Da ein H. ein normierter linearer Raum und damit ein metr.

$$(7) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Raum ist, kann man die Begriffe Abstand zweier Elemente, Länge eines Vektors und Kugel um einen Punkt auch im H. einführen. Mit Hilfe des Skalarprodukts ist es im H. auch möglich, den Begriff der *Größe des Winkels zwischen zwei Elementen*  $x, y \in X$ , die durch das Symbol  $\sphericalangle(x, y)$  bezeichnet wird, durch (8) zu definieren, falls keines der Ele-

$$(8) \quad \cos \sphericalangle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|} \text{ und } 0 \leq \sphericalangle(x, y) \leq \pi$$

mente  $x, y$  das Nullelement ist. Zwei Elemente  $x, y \in X$  heißen genau dann *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, d. h., wenn  $(x, y) = 0$  gilt. Im Falle des  $n$ -dimensionalen euklid. Raumes  $\mathbf{C}^n$  stimmen diese Begriffe mit den aus der analyt. Geometrie bekannten überein. Die Elemente sind dann Vektoren.

II. Der Begriff des H. es kann in vielerlei Hinsicht als eine „natürl.“ Verallgemeinerung des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbf{C}^n$  angesehen werden. Der Satz, daß jeder Vektor des  $\mathbf{C}^n$  eine Linearkombination von orthonormierten Basisvektoren ist, läßt sich z. B. auf Hilberträume sinngemäß erweitern (↗ Orthogonalsystem II.2.). Die Theorie der beschränkten linearen Operatoren (↗ Operator, linearer, IV.) im H. verallgemeinert die Theorie der linearen Abbildung von Vektorräumen. Viele der dort eingeführten Begriffe lassen sich auch innerhalb der beschränkten linearen Operatoren im H. definieren, und eine Reihe wichtiger Eigenschaften und Sätze, z. B. der Satz über die Möglichkeit der Transformation symmetr. Matrizen auf Diagonalgestalt (↗ Hauptachsentransformation) bleiben dabei sinngemäß gültig. Gleichzeitig treten jedoch bei der Untersuchung linearer Operatoren in einem H., der

nicht von endl. Dimension ( $\nearrow$  Vektorraum V., VII., VIII.) ist, z. B. der Raum  $L_2(a, b)$  oder  $l_2$ , eine Reihe neuer Schwierigkeiten und Probleme auf, die es in endlichdimensionen Räumen nicht gibt. Während z. B. jeder lineare Operator im  $\mathbf{C}^n$  beschränkt ist, gilt dies in beliebigen Hilberträumen keinesfalls. Die für die Anwendung auf die Theorie der Differentialgleichungen wichtigen  $\nearrow$  Differentialoperatoren sind i. allg. nicht beschränkte Operatoren im H.  $L_2(a, b)$ . — Der H. wurde nach D. HILBERT ben., der in seinen Arbeiten zur Theorie der Integralgleichungen Räume dieses Typs einführt und untersucht. Die Hilberträume sind eine Klasse abstrakter Räume ( $\nearrow$  Funktionalanalysis), die nicht nur für viele Bereiche der Mathematik grundlegend sind, sondern auch in der modernen Physik eine wesentliche Rolle spielen. In der Quantentheorie entsprechen die physikal. Zustände Vektoren im H. und die physikal. Größen, die *Observablen*, hermit. Operatoren des H.es. S. a. Funktional, lineares.

**Hilbertsches Axiomensystem**  $\nearrow$  axiomatischer Aufbau der Geometrie.

**Hilbertsches Vollständigkeitsaxiom:** Geometrie die Aussage, daß zu den beim Hilbertschen  $\nearrow$  axiomatischen Aufbau der Geometrie betrachteten Mengen der Punkte, Geraden und Ebenen keine weiteren Elemente hinzugefügt werden können, ohne daß ein vom H. V. verschiedenes Axiom des betrachteten Axiomensystems verletzt wird.

**Hildreth und d'Esopo, Verfahren von:** ein Verfahren der quadratischen Optimierung. Die Lösung  $x^{(0)}$  der Aufgabe  $Ax \leq b, p^T x + x^T C x = \text{Min!}$  mit streng positiv definitem  $C$  und einem zulässigen Bereich, der innere Punkte haben muß, wird durch  $x^{(0)} = -\frac{1}{2} C^{-1}(A^T u^{(0)} + p)$  aus der Lösung  $u^{(0)}$  der in gewissem Sinne dualen Aufgabe  $u \geq 0, h^T u + u^T G u = \text{Min!}$  erhalten, dabei ist  $G = \frac{1}{4} AC^{-1}A^T$  und  $h = b + \frac{1}{2} AC^{-1}p$ . Diese neue Aufgabe zeichnet sich dadurch aus, daß sie nur Vorzeichenbedingungen als Restriktionen hat. Sie kann durch ein spezielles Iterationsverfahren gelöst werden. Für die Schreibweise  $Ax \leq b, u \geq 0 \nearrow$  Ungleichungssystem.

**hinreichend**  $\nearrow$  notwendig,  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Funktionen I.,  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen I.

**Hipparchos** von Nikaia, geb. um 190 v. u. Z., gest. 125 v. u. Z. — Er gilt als Begründer der wissenschaftl. Astronomie und als bedeutendster Astronom des Altertums. Zwischen 161 und 126 stellte er in Rhodos und Alexandria umfangreiche astronom. Beobachtungen an. Seine Leistungen sind uns fast ausschließlich durch die Schriften von PTOLEMÄUS bekannt, auch der »Almagest« ( $\nearrow$  Ptolemäus) kann zum großen Teil H. zugeschrieben werden. Unter Verwendung babylon. Vorlagen berechnete H. eine *Sehnenafel* und hatte alle Ansatzpunkte für die Trigonometrisierung der Astronomie. Er soll auch einfache trigonometr. Aufgaben gelöst haben. Für seine Beobachtungen entwickelte er neue und verbesserte herkömml. Instrumente. Er bekennt sich jedoch trotz seiner Beobachtungen, z. B. der starken Unregelmäßigkeiten in der Marsbewegung, zur

Lehre von PLATON und damit zum *geozentr. Weltbild*. Die Araber schreiben H. noch eine größere algebraische Abhandlung zu.

**Hippokrates** von Chios, um 440 v. u. Z. — H. war Grieche und der bedeutendste Geometer des 5. Jh. v. u. Z. Er erteilte vermutlich Privatunterricht und schrieb die erste systemat. Abhandlung über Geometrie, die etwa die ersten 4 Bände der »Elemente« von EUKLID umfaßte und sich durch beachtl. Exaktheit ausgezeichnet haben soll. Er lieferte die Quadratur der *Möndchen des H.* und gab dem Problem der Würfelverdupplung, dem Delischen Problem, eine neue Fassung.

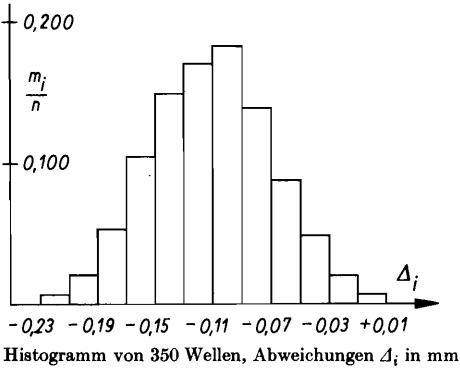
**Histogramm:** Bild einer aus einer Stichprobe berechneten *Treppenfunktion*, das eine Vorstellung von der *Verteilung des betreffenden Merkmals* in der Grundgesamtheit gibt. Enthält die in der beschreibenden Statistik als *Urliste* bezeichnete Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  Werte von einem quantitativen Merkmal  $X$ , dessen Verteilung in der Grundgesamtheit nicht bekannt ist, so zerlegt man das Abszissenintervall, in dem die Werte der Stichprobe liegen, in endlich viele aneinandergrenzende Intervalle  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ , die *Klassen* gen. werden, und zählt ab, wie viele Zahlen der Stichprobe in  $\Delta_i$  für  $1 \leq i \leq k$  liegen. Aus diesen Anzahlen  $m_i$ , den *Klassenhäufigkeiten*, berechnet man die *relativen Klassenhäufigkeiten*  $m_i/n$  und zeichnet über  $\Delta_i$  für jedes  $i = 1, \dots, k$  ein Rechteck der Höhe  $m_i/n$ . Es entsteht das H. oder *Staffelbild* der Stichprobe. Werden z. B. der laufenden Fertigung eines Automaten 350 Wellen entnommen und die Abweichungen des Durchmessers vom Nennmaß gemessen, so ergeben sich die Klassen  $\Delta_i$  von Tabelle (1). Das danach gezeichnete H. (Abb.) läßt eine *Normalverteilung* vermuten.

Tab. (1)

$i$	$\Delta_i$ (in mm)	$m_i$	$m_i/n$
1	von -0,230 bis -0,210	3	0,009
2	von -0,210 bis -0,190	8	0,023
3	von -0,190 bis -0,170	19	0,054
4	von -0,170 bis -0,150	37	0,106
5	von -0,150 bis -0,130	53	0,151
6	von -0,130 bis -0,110	60	0,171
7	von -0,110 bis -0,090	64	0,183
8	von -0,090 bis -0,070	49	0,140
9	von -0,070 bis -0,050	31	0,088
10	von -0,050 bis -0,030	17	0,049
11	von -0,030 bis -0,010	7	0,020
12	von -0,010 bis +0,010	2	0,006
	Insgesamt	350	1,000

Anstatt des H.s werden zur Veranschaulichung oft das *Häufigkeitspolygon* oder die *Treppenkurve der Summenhäufigkeiten* benutzt. Das Häufigkeitspolygon erhält man, indem man über den Klassenmitten Punkte mit den Ordinaten  $m_i/n$  zeichnet und diese durch einen Streckenzug verbindet. Die gemäß (2)

$$(2) \quad s_j = \sum_{i=1}^j (m_i/n)$$



definierten Größen heißen die *Summenhäufigkeiten*. Trägt man für jedes  $j$  über  $\Delta_j$  ein Rechteck der Höhe  $s_j$  auf, so erhält man die Treppenkurve der Summenhäufigkeiten. Sie ist eine Näherung für die empir. Verteilungsfunktion der Stichprobe.

**Hochwert** ↗ Gauß-Krüger-Projektion II.

**Hoene-Wronski**, Jozef Maria, geb. 24. 8. 1778 Posen(?) (Poznan), gest. 9. 8. 1853 Paris. — H. geriet als poln. Artillerieoffizier 1794 in Gefangenschaft. Nach der Freilassung 1798 ging er nach Deutschland und 1810 nach Paris. Er widmete sich der Wissenschaft, lieferte einige Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen und schrieb über philosoph. Probleme. Teilweise gute mathemat. Ideen von H. wurden wegen ihrer unklaren Darlegung kaum beachtet.

**Höhe** ↗ Kegel I., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I.

**Höhe eines Dreiecks:** I. jedes Lot von einer Dreiecks-ecke auf die gegenüberliegende Seite (s. a. Dreieckstransversalen). Die Lotgeraden, auf denen die Höhen liegen, schneiden sich in einem Punkt  $H$ , weil diese Geraden die Mittelsenkrechten in einem Dreieck sind, dessen Seitengeraden sich als Parallelen durch jeden Eckpunkt des gegebenen Dreiecks zur gegenüberliegenden Seitengerade ergeben, z. B. als Mittelsenkrechte im Dreieck  $PQR$  (Abb. 1). Die Mittelsenkrechten eines jeden Dreiecks schneiden sich aber

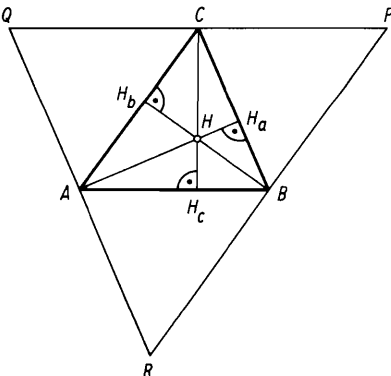


Abb. 1: Die Höhen des Dreiecks  $ABC$  liegen auf den Mittelsenkrechten des Dreiecks  $PQR$

in einem Punkte  $H$ .  $H$  liegt im Innern des Dreiecks, wenn dies spitzwinklig ist; ist es rechtwinklig, so fällt  $H$  mit einer Dreiecksseite zusammen; ist es stumpfwinklig, so liegt  $H$  nicht im Innern und ist kein Punkt des Dreiecks (Abb. 2).

II. Liegt  $H$  im Innern des Dreiecks, so teilt es jede Höhe in zwei Höhenabschnitte. Bezeichnet man die Höhenfußpunkte mit  $D$  auf der Seite  $BC$ , mit  $E$  auf  $AC$  und mit  $F$  auf  $AB$ , so sind in Konstruktionsaufgaben die Höhen als folgende Streckenlängen gegeben:  $h_a = |AD|$ ,  $h_b = |BE|$  und  $h_c = |CF|$ . Im Thaleskreis z. B. über  $AB$  als Durchmesser sind die Höhen  $AD$  und  $BE$  Sehnen mit  $H$  als Schnittpunkt,  $AH$  und  $HD$  sowie  $BH$  und  $HE$  sind die Höhenabschnitte. Nach dem Sehnensatz gilt dann allgemein, daß die aus den jeweils zusammengehörigen Höhenabschnitten gebildeten Rechtecke gleichen Flächeninhalt haben (Abb. 3), es gilt z. B.  $|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE|$ .

III. Ist  $W$  der Mittelpunkt des Inkreises zum Dreieck  $ABC$  und sind  $M_a$ ,  $M_b$  und  $M_c$  die Mittelpunkte der Ankreise (↗ Ankreis), so sind im Dreieck  $M_a M_b M_c$  die Strecken  $AM_a$ ,  $BM_b$  und  $CM_c$  Höhen, weil die Winkelhalbierenden von Nebenwinkeln senkrecht zueinander stehen. Dreieck  $ABC$  ist dem-

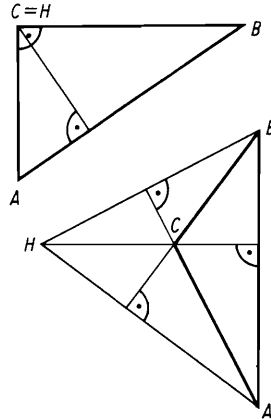
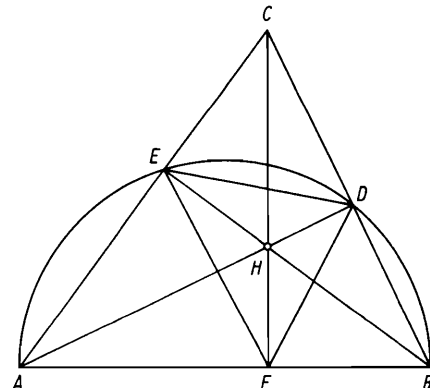


Abb. 2: Schnittpunkt  $H$  der Höhen, wenn das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig oder stumpfwinklig ist



Höhe. Abb. 3: Die aus zusammengehörigen Höhenabschnitten gebildeten Rechtecke haben gleichen Flächeninhalt

nach das Höhenfußpunktdreieck; in ihm halbieren die Höhen des Dreiecks  $M_a M_b M_c$  die Innenwinkel und schneiden sich im Mittelpunkt  $W$  des Inkreises vom Höhenfußpunktdreieck.

**Höhenkreis** ↗ Winkelmeßinstrumente II.  
**Höhenlinie** ↗ Einfeldprojektion, ↗ Zweitafelprojektion I., ↗ Differentialquotient, partieller, III., ↗ Funktion V., ↗ Niveauhyperefläche.

**Höhenmessung, trigonometrische: I.** das Bestimmen von Höhenunterschieden aus gemessenen Winkelgrößen und aus der Länge einer Seite. Liegt diese *Standlinie* der Länge  $s$  horizontal in einer Vertikalebene, die die gesuchte Höhe  $h$  enthält und in der die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  der *Höhenwinkel* an den Endpunkten  $A$  und  $B$  von  $s$  gemessen werden, so erhält man mit  $\gamma = \beta - \alpha$  (Abb. 1) nach dem *Sinussatz*  $u = s \cdot \sin \alpha / \sin \gamma$  und damit  $h = u \cdot \sin \beta$  bzw. (1).

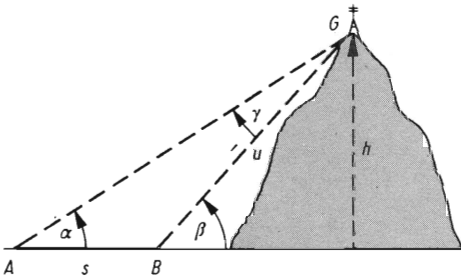
$$(1) \quad h = s \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta / \sin (\beta - \alpha)$$

II. Liegt die *Standlinie* zwar in der Vertikalebene durch  $h$ , ist aber um einen Winkel der Größe  $\beta$  gegen die Horizontale geneigt (Abb. 2), während die in  $A$  und  $B$  gemessenen Höhenwinkel die Größen  $\alpha$  und  $\gamma$  haben, so erhält man mit  $\epsilon = \beta + (180^\circ - \gamma)$  und  $\sigma = \gamma - \alpha$  nach dem Sinussatz (2) und daraus (2a).

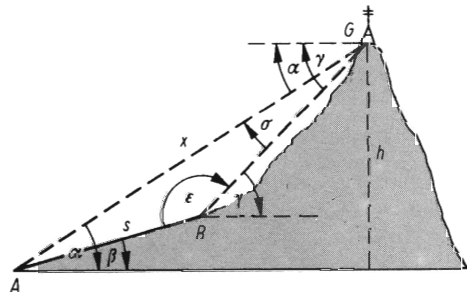
$$(2) \quad |AG| = x = s \cdot \sin \epsilon / \sin \sigma$$

$$(2a) \quad h = x \cdot \sin \alpha = s \cdot \sin \alpha \cdot \sin \epsilon / \sin \sigma$$

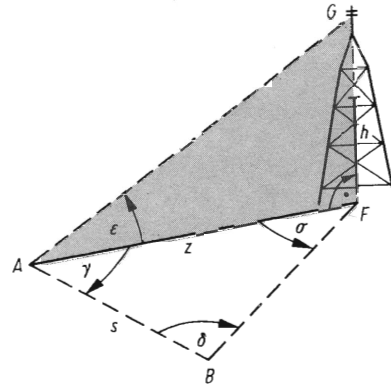
III. Schneidet die Vertikalebene durch  $h$  die Horizontalebene durch  $A$  in einer Strecke der Länge  $z$ , und liegt die *Standlinie* zwar in dieser Horizontal-



Höhenmessung. Abb. 1: Trigonometrische Höhenbestimmung in einer vertikalen Ebene bei horizontaler Standlinie



Höhenmessung. Abb. 2: Trigonometrische Höhenbestimmung in einer vertikalen Ebene bei geneigter Standlinie



Höhenmessung. Abb. 3: Trigonometrische Höhenbestimmung bei horizontaler Standlinie, die nicht in einer Vertikalebene durch die Höhe liegt

ebene, bildet aber einen Winkel der Größe  $\gamma$  gegen  $z = |AF|$  (Abb. 3), so kann  $z$  berechnet werden, wenn im Punkt  $B$  noch die Größe  $\delta$  des Horizontalwinkels  $\sphericalangle ABF$  gemessen wird. Mit  $\sigma = 180^\circ - (\gamma + \delta)$  ergibt der Sinussatz (3) und daraus ergibt sich (3a), wenn  $\epsilon$  die Größe des in  $A$  gemessenen Höhenwinkels ist. Durch Einsetzen von (3) erhält man (3b).

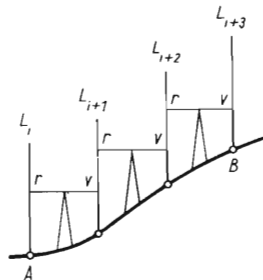
$$(3) \quad z = s \cdot \sin \delta / \sin \sigma$$

$$(3a) \quad h = z \cdot \tan \epsilon$$

$$(3b) \quad h = s \cdot \sin \delta \cdot \tan \epsilon / \sin (\gamma + \delta)$$

IV. Steigt noch die *Standlinie*  $|AB| = s$  von  $A$  aus im Winkel  $\eta$  an, so liegt Punkt  $B$  um die Strecke  $|B'B| = s \cdot \sin \eta$  über der Horizontalebene  $AB'F$ . Mit dem Theodoliten werden aber Horizontalwinkel in  $A$  und  $B$  gemessen, d. h. die Winkelgrößen  $\gamma = \sphericalangle FAB'$  und  $\delta = \sphericalangle AB'F$ . Ersetzt man deshalb  $s$  durch  $s' = s \cos \eta$ , so gilt die gleiche Beziehung wie für eine horizontale *Standlinie*.

**Höhenmessung durch Nivellement:** Bestimmung der Höhendifferenz zweier Punkte  $A$  und  $B$  auf der Erde mit Hilfe eines Nivelliers, dessen Ziellinie, z. B. mittels einer empfindlichen Libelle, horizontal gerichtet ist, und von *Nivellierlatten*  $L_i$ , die senkrecht aufgestellt werden und eine Zentimetereinteilung haben (Abb.). Das *Nivellement* besteht aus einer Kette von Aufstellungen des Nivelliers zwischen je

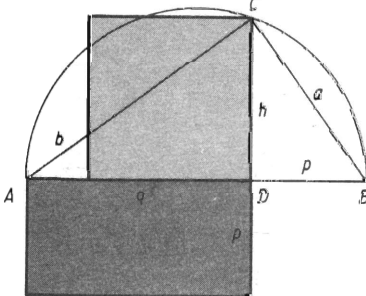


Höhenmessung durch Nivellement



zwei Nivellierlatten  $L_i$  und  $L_{i+1}$ . Der Rückblick  $r_i$  wird an  $L_i$  abgelesen, der Vorblick  $v_i$  an  $L_{i+1}$ ;  $r_i - v_i$  gibt die Höhendifferenz der Aufstellungspunkte der Latten an. Benutzt man für die folgende Beobachtung  $L_{i+1}$  zum Rückblick und eine Nivellierlatte  $L_{i+2}$  zum neuen Vorblick, so ist die Summe der Differenzen ( $r_i - v_i$ ) die Höhendifferenz der Punkte  $A$  und  $B$ , wenn in  $A$  die erste und in  $B$  die letzte Latte aufgestellt wurden.

**Höhensatz:** Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe, die auf der Hypotenuse senkrecht steht, gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, das aus den Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse gebildet wird. Haben in dem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  die Katheten die Längen  $a$  und  $b$ , ihre Projektionen auf die Hypotenuse der Länge  $c$  die Längen  $p$  und  $q$  (Abb.) und die Höhe  $CD$  die Länge  $h$ , so gilt die Beziehung  $h^2 = p \cdot q$  ( $\nearrow$  Kathetensatz).



Höhensatz

Der H. wird oft benutzt, ein Rechteck mit den gegebenen Seitenlängen  $p$  und  $q$  in ein flächengleiches Quadrat mit der Seitenlänge  $h$  zu verwandeln. Verlängert man  $AD$  mit  $|AD| = q$  über  $D$  hinaus um  $|DB| = p$  bis Punkt  $B$ , so liegt der gesuchte Scheitel  $C$  des rechten Winkels einmal auf dem Thaleskreis über  $|AB|$  als Durchmesser, zum anderen auf der in  $D$  auf  $AB$  errichteten Senkrechten.  $|DC| = h$  ist die gesuchte Seite des Quadrats.

**Höhenwinkel**  $\nearrow$  Höhenmessung, trigonometrische,  $L_{\rightarrow}$   $\nearrow$  Winkelmeßinstrumente II.

**höhere Rechenarten:** Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren, die im Anschluß an die Rechenarten der 1. Stufe, Addieren und Subtrahieren, und an die der 2. Stufe, Multiplizieren und Dividieren, auch als *Rechenarten der 3. Stufe* bezeichnet werden im Unterschied zu den  $\nearrow$  Grundrechenarten der 1. und der 2. Stufe. Geht man von der Potenz  $a^l = p$  aus ( $\nearrow$  Potenz I. bis IV.), so können die anderen h. R. als Umkehroperationen in dem Sinne definiert werden, daß durch Radizieren die Basis  $a$  ( $\nearrow$  Wurzel I.) und durch Logarithmieren der Exponent  $l$  ( $\nearrow$  Logarithmus) bestimmt werden. Im Körper  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen sind die h. R. ohne Einschränkungen ausführbar ( $\nearrow$  Potenz VI.) hohl  $\nearrow$  Winkel VI.

**Hölder, Ludwig Otto**, geb. 22. 12. 1859 Stuttgart, gest. 29. 8. 1937 Leipzig. — H. promovierte 1882

bei du Bois-Reymond in Tübingen und ging 1899 als Professor nach Leipzig. Er forschte zu Problemen der Gruppentheorie, der Funktionentheorie, der Fourierschen Reihen und der Zahlentheorie. Die bekannte *H.sche Ungleichung* wurde nach ihm ben. Sein Sohn *Ernst Otto H.* (geb. 2. 4. 1901 Leipzig) folgt in seinem mathemat. Schaffen mehr seinem Lehrer L. LICHTENSTEIN und befaßt sich mit Integralgleichungen, Variationsrechnung und mit Problemen der mathemat. Physik.

**Hollerith, Hermann**, geb. 29. 2. 1860 Buffalo (N. Y.) gest. 17. 1. 1929 Washington, Ingenieur und Erfinder. H. verwendete erstmalig gelochte Karten zur Aufzeichnung statistischer Angaben und zu ihrer Auswertung. Mittels einer von ihm entwickelten Zählmaschine mit elektromechanischer Abföhlung konnte die Auswertungszeit der Volkszählung von 1889 von veranschlagten sieben auf ein Jahr verkürzt werden.

**holomorphe Funktion, analytische Funktion:** komplexwertige Funktion einer komplexen Veränderlichen, die in einem Gebiet  $G$  der komplexen Zahlenebene differenzierbar ist. Sie ist dann in  $G$  beliebig oft differenzierbar und kann um jeden Punkt von  $G$  in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden. Umgekehrt ist jede Summenfunktion einer konvergenten Potenzreihe eine in ihrem Konvergenzkreis h. F.

**homogene Differentialgleichung**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.2.,  $\nearrow$  lineare gewöhnliche Differentialgleichung I.,  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung I.

**homogene Funktion: I.** Funktion  $f$  von  $n$  unabhängigen Variablen mit der Funktionsgleichung  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , die in einem Gebiet  $G$  des  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathbf{R}^n$  definiert ist ( $\nearrow$  Funktion V.) und für alle Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G$  die Beziehung  $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  erfüllt; d. h., multipliziert man jede der  $n$  unabhängigen Variablen  $x_i$  mit einer beliebigen reellen Zahl  $t$ , so vervielfacht sich der Funktionswert mit  $t^m$ . Mit  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  muß auch  $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$  dem Gebiet  $G$  angehören. Die Zahl  $m$  nennt man *Homogenitätsgrad*, auch *Ordnung* der h. F.  $f$ .

*Beispiel 1:* Die Funktionen (1) und (2) sind h. F. en vom Homogenitätsgrad  $m = 2$ .

$$(1) f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - 5x_1x_2 + x_1\sqrt{x_1x_2 + x_2^3/x_1}$$

$$(2) f_2(x_1, x_2) = [x_2/(x_1 - x_2)]\sqrt{x_1^4 + x_2^4} \cdot \ln(x_1/x_2)$$

**II. Ganzrationale h. F. en** vom Grade  $n$  werden auch *homogene Polynome* oder *Formen vom Grade  $n$*  gen.; jedes ihrer Glieder hat den gleichen Grad. Für  $m = 1, 2, 3$  spricht man von *Linearformen*, *quadrat.* bzw. *kub. Formen*. Quadrat. Formen lassen sich all-

gemein durch einen Ausdruck  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k$  mit  $a_{ik} = a_{ki}$

darstellen. Sie werden unter speziellen Gesichtspunkten in der analyt. Geometrie untersucht. Nimmt man das *Nullpolynom* aus, so ist das Produkt homogener Polynome wieder ein homogenes Polynom, dessen Grad sich aus der Summe der Grade der einzelnen Faktoren ergibt. *Beispiel 2:*  $f_1$  mit

$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$  ist eine Linearform,  $f_2$  mit  $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2 - x_3x_2^2$  eine kub. Form. Ihr Produkt  $f = f_1 \cdot f_2$  mit  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 - x_3x_2^3 - x_2^3x_3^2$  ist ein homogenes Polynom vom Grade 4. **Beispiel 3:** Eine Determinante (3), in deren Darstellung  $I(P)$  die Anzahl der Inver-

$$(3) \quad |A| = \sum_P (-1)^{I(P)} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

sionen der Permutation  $P$  bezeichnet und über alle  $n!$  Permutationen  $P$  der Indizes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  zu summieren ist, ist ein homogenes Polynom der  $n^2$  Variablen  $a_{ik}$  mit  $i, k = 1, 2, \dots, n$  vom Homogenitätsgrad  $n$ .

III. Ist  $f$  mit  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine h. F. mit dem Homogenitätsgrad  $m$ , so gilt der *Eulersche Satz* (4),

$$(4) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

und umgekehrt ist jede stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen, die der Gleichung (4) genügt, eine h. F.  $m$ -ten Grades.

**Beispiel 4:** Die Funktion  $f_4$  mit

$$f_4(x_1, x_2) = x_1^\pi \sin(x_2/x_1) + x_2^\pi \cos(x_1/x_2)$$

hat den Homogenitätsgrad  $\pi$ ; für sie gilt (5).

$$(5) \quad x_1 \frac{\partial f_4(x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f_4(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \pi x_1^\pi \sin(x_2/x_1) + \pi x_2^\pi \cos(x_1/x_2) = \pi f_4(x_1, x_2)$$

Ableitungen h. F.en vom Homogenitätsgrad  $m$  sind h. F.en vom Grade  $m - 1$ . Eine Funktion heißt *positiv homogen vom Grade  $m$* , falls  $t^m \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$  für jede reelle Zahl  $t > 0$  gilt.

**Beispiel 5:** Die Funktion  $f_5$  mit  $f_5(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1^2 + x_2^2|}$  ist positiv homogen, aber nicht homogen. Der Begriff der h. F. läßt sich auf den Fall komplexwertiger Parameter verallgemeinern.

**homogene Gleichung:** Gleichung, deren Lösungsmenge sich nicht ändert, wenn jede Gleichungsvariable durch ihr  $k$ -faches ersetzt wird, wobei  $k$  eine von Null verschiedene reelle Zahl ist. **Beispiel:** Die Gleichung  $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$  ist homogen, denn das Ersetzen von  $x$  durch  $kx$  und von  $y$  durch  $ky$  liefert die zur gegebenen Gleichung äquivalente Gleichung

$$(kx)^2 + 3(kx)(ky) + 2(ky)^2 = k^2(x^2 + 3xy + 2y^2) = 0.$$

Eine Gleichung heißt genau dann *inhomogen*, wenn sie nicht homogen ist. S. a. lineares Gleichungssystem I.

**homogenes Polynom** svw. Form, s. a. homogene Funktion II.

**Homogenitätsgrad** ↗ homogene Funktion I.

**Homologietheorie** ↗ Abbildung, topologische

**homomorphes Bild** ↗ Gruppe III., ↗ Homomorphismus.

**Homomorphiesatz** ↗ Gruppe III., ↗ Homomorphismus, ↗ Ring III.

**Homomorphismus:** Beziehung zwischen zwei algebraischen Strukturen oder allgemeiner zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$ , für deren Elemente gewisse

Relationen erklärt sind. Ist  $R$  eine zweistellige Relation in  $A$ ,  $\bar{R}$  eine zweistellige Relation in  $B$ , so heißt die eindeutige Abbildung  $\varphi$  von  $A$  in  $B$  ein *H.* von  $A$  in  $B$  genau dann, wenn aus  $aRb$  stets  $\varphi(a)\bar{R}\varphi(b)$  folgt, d. h., wenn alle Relationen zwischen Elementen von  $A$  in entsprechende Relationen zwischen den jeweiligen Bildelementen übergehen. Die Menge  $\varphi(A)$  der Bilder  $\varphi(a)$  aller Elemente  $a \in A$  heißt dann *homomorphes Bild* von  $A$ . Die Menge der reellen Zahlen mit der Addition als Relation ist z. B. das homomorphe Bild der Menge der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation als Relation, denn die Abbildung  $\varphi(a) = \log a$  ist eindeutig und *relationstreu*, da stets gilt  $\varphi(a \cdot b) = \log(a \cdot b) = \log a + \log b = \varphi(a) + \varphi(b)$ . Ist, wie in diesem Beispiel,  $\varphi$  sogar eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen  $A$  und  $B$ , deren Umkehrung auch relationstreu ist, so spricht man von einem *Isomorphismus* von  $A$  auf  $B$ . Ein *H.* von  $A$  in sich heißt *Endomorphismus*, ein Isomorphismus von  $A$  auf sich heißt *Automorphismus*. Sind in  $A$  mehrere Relationen  $R_1, \dots, R_k$ , in  $B$  ebensoviele Relationen  $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k$  definiert und sind  $R_i$  und  $\bar{R}_i$  jeweils beide  $r_i$ -stellig für  $i = 1, 2, \dots, k$ , so heißt die Funktion  $\varphi$  von  $A$  auf  $B$  ein *H.* von  $A$  auf  $B$  genau dann, wenn (1) gilt; d. h., stehen die Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$  in der Relation  $R_i$ , so stehen ihre Bilder  $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r)$  in der Relation

$$(1) \quad [R_i(a_1, a_2, \dots, a_r)] \rightarrow \bar{R}_i(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_r))$$

$\bar{R}_i$ . Da sich jede  $n$ -stellige algebraische Operation als  $(n + 1)$ -stellige Relation auffassen läßt; z. B. die zweistellige Operation Multiplikation als Menge aller Tripel  $(a, b, a \cdot b)$ , so spielen die Homomorphismen in der Theorie der ↗ algebraischen Strukturen, besonders in der Gruppen- und in der Ringtheorie, eine wichtige Rolle; mit ihrer Hilfe ist es z. B. möglich, die innere Struktur einer Gruppe und Strukturähnlichkeiten zwischen Gruppen aufzudecken. Einen Zusammenhang zwischen den homomorphen Bildern einer Gruppe bzw. eines Ringes und gewissen Unterstrukturen der Gruppe bzw. des Ringes gibt der *Homomorphiesatz* (↗ Gruppe III.). Er besagt für Gruppen, daß das *homomorphe Bild*  $\bar{G}$  einer Gruppe  $G$  isomorph zu einer Faktorgruppe  $G/N$  ist, wobei  $N$  ein *Normalteiler* (↗ Gruppe II.), der *Kern des Homomorphismus*  $G \rightarrow \bar{G}$ , ist; umgekehrt ist für jeden *Normalteiler*  $N$  die Faktorgruppe  $G/N$  *homomorphes Bild* von  $G$ . Analog ist das homomorphe Bild  $\bar{R}$  eines Ringes  $R$  isomorph zu einem *Restklassenring*  $R/\mathfrak{a}$ , wobei das *Ideal*  $\mathfrak{a}$  der Kern des *H.* ist; und umgekehrt ist für jedes *Ideal*  $\mathfrak{a}$  der Restklassenring  $R/\mathfrak{a}$  homomorphes Bild von  $R$ . ↗ algebraische Struktur III.

**homöomorph** ↗ Abbildung, topologische, Bettische Zahlen.

**Homotopietheorie** ↗ Abbildung, topologische.

**Horizont** ↗ Projektion I.

**Horizontalwinkel** ↗ Winkelmeßinstrumente II.

**Horner, William George**, geb. 1786, gest. 1837. — H. gab 1819 das nach ihm ben. Schema an, das allerdings islam. Mathematikern bereits seit dem 11. Jh. bekannt war.

**Horner-Schema:** ein nach W. G. HORNER benanntes Verfahren zur Berechnung von Funktionswerten ganzzahliger Funktionen. Ist z. B.  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  gegeben und der Funktionswert zum Argument  $x_0$  gesucht, so dividiert man das Polynom  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  durch  $(x - x_0)$  und erhält

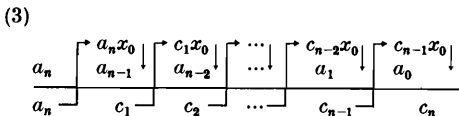
(1). Die Konstanten  $c_i$  in (1) genügen den Bedin-

$$(1) \quad (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) : (x - x_0) = a_n x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x + c_{n-1} + c_n / (x - x_0)$$

gungen  $c_1 = a_n x_0 + a_{n-1}$  und  $c_i = c_{i-1} x_0 + a_{n-i}$  mit  $i = 2, 3, \dots, n$ . Damit kann die Funktion auch durch die Gleichung (2) beschrieben werden. Für

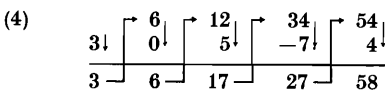
$$(2) \quad f(x) = (a_n x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + c_{n-2} x + c_{n-1}) (x - x_0) + c_n$$

$x = x_0$  ergibt sich  $f(x_0) = c_n$ . Die Berechnung des Funktionswertes  $f(x_0)$  ist auf die Berechnung der Konstanten  $c_n$  zurückgeführt worden, die sukzessiv aus  $c_i = c_{i-1} x_0 + a_{n-i}$  ermittelt wird. Man gewinnt zunächst  $c_1$  aus  $c_1 = a_n x_0 + a_{n-1}$ , dann  $c_2$  aus  $c_2 = c_1 x_0 + a_{n-2}$  und so fort und schließlich  $c_n$  aus  $c_n = c_{n-1} x_0 + a_0$ . Das Verfahren kann nach (3) schematisch dargestellt werden, wenn kurze Pfeile

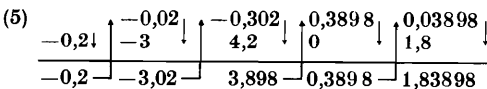


Addition und gebrochene Pfeile Multiplikation mit  $x_0$  bedeuten.

*Beispiel 1:* Der Funktionswert der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3x^4 + 5x^2 - 7x + 4$  an der Stelle  $x_0 = 2$  ergibt sich aus dem Schema (4) zu  $f(2) = 58$ .



*Beispiel 2:* Der Funktionswert der Funktion  $g$  mit  $g(x) = -0,2x^4 - 3x^3 + 4,2x^2 + 1,8$  an der Stelle  $x_0 = 0,1$  ergibt sich aus Schema (5) zu  $g(0,1) = 1,83898$ .



Setzt man  $p(x) = a_n x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + c_2 x^{n-3} + \dots + c_{n-2} x + c_{n-1}$ , so erhält man wegen  $f(x) = (x - x_0) \cdot p(x) + f(x_0)$  die Beziehung (6).

$$(6) \quad p(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ bzw. } \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = p(x_0)$$

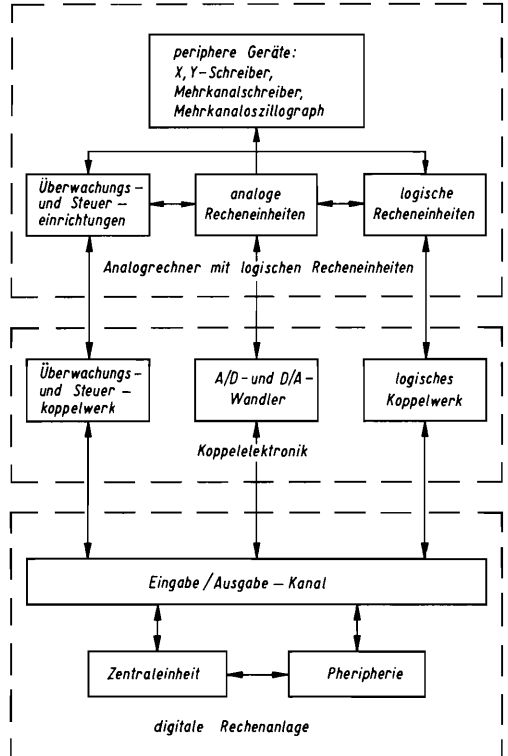
Wendet man das H.-S. auf die durch das Polynom  $p(x)$  beschriebene Funktion an der Stelle  $x = x_0$  an,

so erhält man den Wert  $f'(x_0)$  der Ableitung der Funktion  $f$  mit  $y = f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  an der Stelle  $x = x_0$ . S. a. Polynomwurzelberechnung II.

**Hülle** ↗ Menge IV.

**Hüllfläche** ↗ System I.

**Hybridrechenanlage:** Verbindung von Analogrechner und digitaler Rechenanlage durch eine Koppel-elektronik zur effektiven Lösung spezieller Aufgaben (Abb.). Die *Steuerung* des Rechenablaufs übernimmt das Steuerwerk des Digitalrechners, und die Datenübertragung zwischen beiden Teilen erfolgt



Aufbau einer Hybridrechenanlage

mit Hilfe von A/D- und D/A-Wandlern (↗ Wandler). Über *Steuerleitungen* kann z. B. der Arbeitsablauf des Analogrechners beeinflusst werden oder durch *Überwachungsleitungen* die Übersteuerung der Operationsverstärker kontrolliert werden (↗ Analogrechner II.).

Zum *Einsatzgebiet* von H. zählen Probleme, die sich mit einem Analogrechner gar nicht oder lediglich ungenau lösen lassen, bei denen jedoch seine Möglichkeiten zur Modellierung dynam. Systeme bzw. zur Integration gewöhnl. Differentialgleichungen nutzbringend verwendet werden können, z. B. in statist. Untersuchungen, in deren Verlauf wiederholt gewöhnl. Differentialgleichungen zu lösen sind. **Hyperbel:** I. geometr. Ort aller Punkte einer Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände von

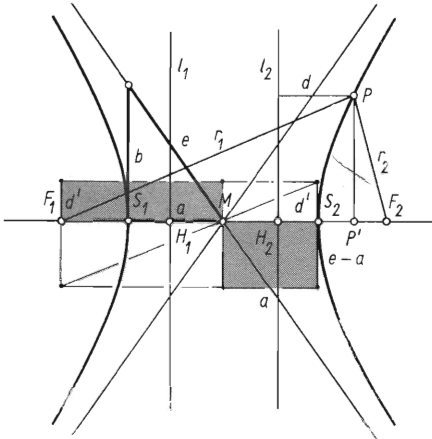


Abb. 1: Brennpunkte  $F_1, F_2$ , Scheitel  $S_1, S_2$  und Leitlinien  $l_1, l_2$  einer Hyperbel

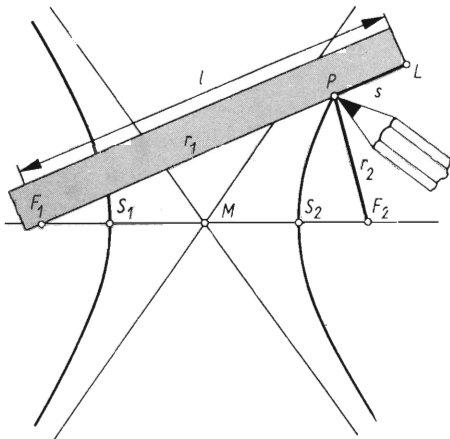


Abb. 2: Fadenkonstruktion einer Hyperbel

zwei festen Punkten dieser Ebene gleich ist. Die beiden festen Punkte sind die *Brennpunkte*  $F_1$  und  $F_2$ , die konstante Differenz der Abstände wird mit  $2a$  bezeichnet. Ist  $2e$  der Abstand der Brennpunkte, so muß  $2a < 2e$  sein;  $e$  heißt *Brennweite* oder *lineare Exzentrizität*. Wählt man zwei Strecken mit den Längen  $r_1$  und  $r_2$  so, daß  $|r_1 - r_2| = 2a$ , so findet man nach dieser Definition Punkte einer Hyperbel als Schnittpunkte zweier Kreise mit den Radien  $r_1$  bzw.  $r_2$  um die gegebenen Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  (Abb. 1). Durch eine *Fadenkonstruktion* kann man einen H.-bogen darstellen. Dabei wird das eine Ende eines Lineals der Länge  $l$  in einem der gegebenen Brennpunkte drehbar gelagert (Abb. 2). Am anderen Ende des Lineals und im anderen Brennpunkt werden die Enden eines Fadens der Länge  $l - 2a$  befestigt. Wird nun das Lineal gedreht, so gelten für die Bleistiftspitze  $P$ , die am Lineal anliegt und dadurch ein Stück der Länge  $s$  des Fadens längs des Lineals spannt, die Beziehungen  $r_1 = l - s$  und

$r_2 = l - 2a - s$ , so daß  $r_1 - r_2 = 2a$ . Nach der Konstruktion (Abb. 1) ist die Gerade, die durch die Brennpunkte einer H. verläuft, eine *Symmetrieachse* der H. Sie schneidet diese in ihren *Scheiteln*  $S_1$  und  $S_2$ . Die Strecke  $S_1S_2$  wird *Hauptachse* genannt. Die Mittelsenkrechte der Strecke  $S_1S_2$  ist auch eine Symmetrieachse. Durch Spiegelung an dieser Achse gehen die beiden im Endlichen getrennt liegenden H.-bögen, die beiden *Äste der H.*, ineinander über. Der Schnittpunkt der Symmetrieachsen ist der *Mittelpunkt M* der H. Analytisch läßt sich zeigen, daß die H. zwei *Asymptoten* hat. Es sind die Geraden, die durch den Mittelpunkt der H. verlaufen, und die auf der Hauptachse in  $S_1$  und  $S_2$  senkrecht stehenden Geraden im Abstand  $b$  von der Hauptachse schneiden. Dabei gilt  $b^2 = e^2 - a^2$ . Jede H. liegt ganz in den Scheitelflächen ihrer Asymptoten, die die Brennpunkte enthalten. Durch zwei der Größen  $a, b, e$  ist die Form einer H. bestimmt. Für  $a = b$  heißt die H. *gleichseitig*, ihre Asymptoten stehen senkrecht aufeinander.

II. Zur Beschreibung einer H. als Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene werden zwei *Leitlinien*  $l_1$  und  $l_2$  eingeführt ( $\nearrow$  Kegelschnitt II.). Diese sind Geraden, die die Hauptachse der H. im Abstand  $d' = a(e - a)/e$  von  $S_1$  bzw.  $S_2$  senkrecht schneiden. Eine Strecke der Länge  $d'$  kann man nach dem Satz von den Ergänzungsparellologrammen konstruieren. Bezeichnet man mit  $d$  den Abstand eines beliebigen Punktes  $P$  einer H. von einer ihrer Leitlinien, und ist  $r$  der Abstand des Punktes  $P$  vom zugehörigen Brennpunkt, so ist  $r/d = e/a = e$  eine von der Wahl des Punktes  $P$  unabhängige Konstante der H. Sie wird *numerische Exzentrizität* der H. genannt, und wegen  $e > a$  ist für jede H.  $e > 1$ . Ist nämlich  $P'$  der Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf die Hauptsymmetrieachse, setzt man  $MP' = x$  und rechnet  $x$  positiv oder negativ je nachdem, ob  $P'$  rechts oder links von  $M$  liegt, so folgt durch Anwenden des Satzes von Pythagoras auf die Dreiecke  $F_2PP'$  und  $PP'F_1$  die Beziehung  $r_1^2 - r_2^2 = 4ex$ . Betrachtet man z. B. die Abstände eines Punktes  $P$  der H. von  $F_2$  und  $l_2$ , so findet man aus  $r_1^2 - r_2^2 = 4ex$  und aus  $|r_2 - r_1| = 2a$  die Beziehungen  $r_2 = ex/a - a$  und  $d = d' + x - a$  bzw.  $r_2 = -(ex/a - a)$  und  $d = -(d' + x - a)$ , je nachdem, auf welchem Ast der Punkt  $P$  liegt. Durch Einsetzen von  $d' = a(e - a)/e$  ergibt sich in jedem Falle  $r_2/d = e/a$ . Aus Symmetriegründen gilt das Entsprechende für  $F_1$  und  $l_1$ . *Eine H. ist der geometr. Ort aller Punkte einer Ebene, für die das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkt und von einer festen Geraden dieser Ebene, die nicht durch diesen Punkt verläuft, einen konstanten Wert  $e > 1$  hat.* —

III. Die Strecke  $S_1S_2$  wird von einem Brennpunkt und dem Schnittpunkt  $H$  der zugehörigen Leitlinie mit der Achse harmonisch geteilt. Betrachtet man z. B. die Punkte  $F_1$  und  $H_1$ , so sind die Verhältnisse  $(e - a) : (e + a)$  und  $d' : (2a - d')$  dem Betrage nach gleich, wie sich durch Einsetzen von  $d' = a(e - a)/e$  ergibt. In bezug auf eine H. ist deshalb jede ihrer Leitlinien *Polare* des zugehörigen Brennpunktes als Pol ( $\nearrow$  Polarität).

IV. Als *Leitkreise* einer H. bezeichnet man die beiden Kreise  $k_1, k_2$  mit dem Radius  $2a$  um je einen Brennpunkt (Abb. 3). Eine H. ist der geometr. Ort der *Mittelpunkte aller Kreise einer Ebene, die einen in dieser Ebene liegenden Kreis  $k$  berühren und durch einen Punkt außerhalb dieses Kreises verlaufen*. Dabei ist  $k$  der Leitkreis und  $F$  der Brennpunkt, der nicht Mittelpunkt dieses Leitkreises ist, z. B. wird der Leitkreis  $k_1$  um  $F_1$  in  $L_1$  berührt vom Kreis um  $P$ , auf dessen Umfang  $F_2$  liegt. — Um die *Tangente* in einem Punkte  $P$  einer H. zu konstruieren, wählt man den von  $P$  entferntestliegenden Brennpunkt, z. B.  $F_1$ , und schneidet die Strecke  $PF_1$  mit dem Leitkreis um  $F_1$  in  $L_1$ . Die Mittelsenkrechte der Strecke  $F_2L_1$  ist die gesuchte Tangente  $t_1$ , denn  $P$  liegt wegen  $|L_1P| = |PF_2| = r_2$  auf dieser Mittelsenkrechten, und für jeden weiteren Punkt  $P'$  auf ihr ist  $|F_1L_1| + |L_1P'| = 2a + |P'F_2| > |F_1P'|$ , so daß  $|P'F_1| - |P'F_2| < 2a$ . Die Gerade  $t_1$  hat deshalb nur einen Punkt mit der H. gemeinsam. Der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $a$  heißt *Scheitelkreis*. Ist  $Q_1$  der Mittelpunkt der Strecke  $F_2L_1$ , so sind die Dreiecke  $F_2L_1F_1$  und  $F_2Q_1M$  ähnlich; daraus folgt  $|MQ_1| = \frac{1}{2}|L_1F_1| = a$ , d. h.  $Q_1$  liegt auf dem Scheitelkreis. Die Tangente  $t_1$  schneidet diesen in einem weiteren Punkt  $Q_1'$ , der Fußpunkt des Lotes von  $F_1$  auf  $t_1$  ist. — Mit Hilfe eines Leitkreises lassen sich auch die Tangenten von einem Punkt  $R$  außerhalb einer H. an diese konstruieren. Wird zur Vereinfachung  $R$  auf  $t_1$  angenommen (↗ Abb. 3) und wählt man für die Konstruktion den Leitkreis  $k_1$ , so schneidet der Kreis um  $R$ , der durch  $F_2$  verläuft, diesen Leitkreis in  $L_1$  und  $L_2$ . Die Mittelsenkrechten der Strecken  $F_2L_1$  und  $F_2L_2$  sind die gesuchten Tangenten.

V. In der analyt. Geometrie kann man die H. auffassen als *nicht zerfallenden Mittelpunktskegelschnitt* (↗ Kurve zweiter Ordnung I.) mit der *Mittelpunktsgleichung* (1) in kartes. Koordinaten. Dabei liegen

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

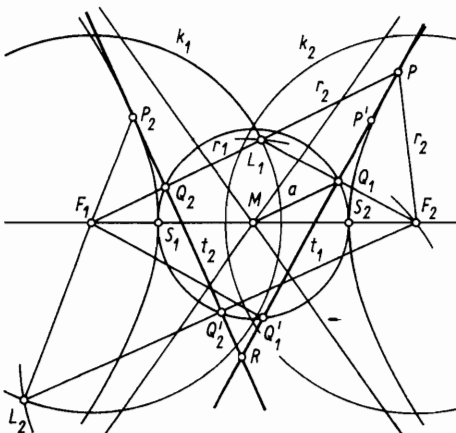


Abb. 3: Leitkreise  $k_1, k_2$  einer Hyperbel und Tangenten  $t_1, t_2$  an die Hyperbel

der *Mittelpunkt* der H. im Koordinatenursprung, die *Achse* oder auch *Hauptachse* in der  $x$ -Achse, die *Scheitel* sind  $(a, 0)$  und  $(-a, 0)$ , die *Brennpunkte*  $(e, 0)$  und  $(-e, 0)$ , und es ist  $b^2 = e^2 - a^2$ . Aus den Grenzwerten  $m = \pm(b/a)$  für  $x \rightarrow +\infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$  der Funktionen  $y/x = \pm(b/a)\sqrt{1 - a^2/x^2}$  und  $n = 0$  der Funktionen

$y - mx = \pm(b/a)(\sqrt{x^2 - a^2} - x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  ergibt sich, daß die Geraden  $y = bx/a$  und  $y = -bx/a$  die *Asymptoten* der H. sind. Einsetzen bestätigt (2) als Parameterdarstellung mit  $-\pi/2 < t < \pi/2$  für den

$$(2) \quad x = a/\cos t, \quad y = b \tan t$$

*H.ast* mit positiven und mit  $\pi/2 < t < 3\pi/2$  für den *Ast* mit negativen  $x$ -Werten. Für den ersten Ast ist auch (3) eine Parameterdarstellung. Ob-

$$(3) \quad x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t \quad \text{mit} \quad -\infty < t < \infty$$

wohl die H. aus zwei Ästen besteht, ist sie kein zerfallender Kegelschnitt, da ein Ast allein keine *algebraische Kurve* darstellt.

VI. Die durch die Gleichung (4) dargestellte Gerade

$$(4) \quad \frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

hat nur den Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  mit der H. gemeinsam. Durch Differenzieren der Parameterdarstellung (2) findet man, daß ihr Richtungsvektor  $a^2y_0i + b^2x_0j$  der der *Tangente* in  $P_0$  an die H. ist. Gleichung (4) stellt danach die *Tangente* und die Gleichung (5) die *Normale* in  $P_0$  an die H. dar.

$$(5) \quad a^2y_0x + b^2x_0y = e^2x_0y_0$$

Liegt  $P_0$  nicht auf der H., so stellt (4) die *Polare* von  $P_0$  in bezug auf die H. (↗ Ellipse) dar.

VII. Zur Untersuchung *konjugierter Durchmesser* (↗ Ellipse III.) betrachtet man die *imaginäre affine Abbildung*  $\xi = x, \eta = iay/b$  der H. auf den Kreis  $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ . Der durch  $\alpha x/u + \beta y/b = 0$  bestimmten Geraden entspricht in der  $\xi, \eta$ -Ebene die durch  $\alpha \xi - i\beta \eta = 0$  bestimmte Gerade. Ihr Stellungenvektor ist  $(\alpha, i\beta)$ , und  $(\beta, -i\alpha)$  ist der eines dazu senkrechten Kreisdurchmessers, weil für ihr Skalarprodukt gilt  $(\alpha, -i\beta)(\beta, -i\alpha) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$ . Der Geraden mit der Gleichung  $\beta\xi - i\alpha\eta = 0$  entspricht die reelle Gerade mit  $\beta x/u + \alpha y/b = 0$ . Auf ihr und auf  $\alpha x/u + \beta y/b = 0$  liegen konjugierte Durchmesser der H.

VIII. Wird die H. (1) parallel so verschoben, daß der *Mittelpunkt*  $(c, d)$  wird, so erhält man Gleichung (6) für achsenparallele Lage. Für  $(c, d) = (-a, 0)$

$$(6) \quad \frac{(x - c)^2}{a^2} - \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1$$

wird (6) die *Scheitelgleichung*. Nach der Parallelverschiebung stellt (7) die Gleichung der *Tangente* oder der *Polaren* der H. dar, (8) die der *Normalen*.

$$(7) \quad (x_0 - c)(x - c)/a^2 - (y_0 - d)(y - d)/b^2 = 1$$

$$(8) \quad a^2(y_0 - d)(x - c) + b^2(x_0 - c)(y - d) = e^2(x_0 - c)(y_0 - d).$$

Für  $a = b$  stellen die Gleichungen (1) bzw. (6) eine *gleichseitige H.* dar. Ihre Asymptoten stehen aufeinander senkrecht. S. a. Potenzfunktion II.

**Hyperbelast** ↗ Hyperbel I.

**Hyperbelfunktion** ↗ hyperbolische Funktion I., ↗ Entwicklung von Funktionen III., ↗ komplexwertige Funktion, elementare, II.

**hyperbolische Differentialgleichung**: I. lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (1), für die

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f$$

man die quadrat. Form  $Q(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}q_i q_j$  durch eine lineare Transformation (2) auf (3) trans-

$$(2) \quad q_i = \sum_{j=1}^n A_{ji} \bar{q}_j \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

formieren kann (↗ partielle Differentialgleichung III.). Ist  $r = 1$  oder  $r = n - 1$ , so heißt die h. D.

$$(3) \quad Q(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) = \bar{q}_1^2 + \dots + \bar{q}_r^2 - \bar{q}_{r+1}^2 - \dots - \bar{q}_n^2$$

mit  $0 < r < n$

*normal-h. D.* Sind die Koeffizienten  $a_{ij}$  Funktionen von  $x_1, \dots, x_n$ , so sagt man, daß die Differentialgleichung in den Punkten  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  hyperbolisch ist, in denen man die angegebene Transformation durchführen kann. Die partielle Differentialgleichung  $u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} = f(x_1, x_2, x_3)$  z. B. ist eine normal-h. D., denn  $Q(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$  hat bereits die für eine h. D. charakterist. Form und es gilt  $r = 1$ .

H. D.en beschreiben physikalisch gesehen *Schwingungsvorgänge*. Die dreidimensionale *Wellengleichung*  $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(t, x, y, z)$  mit  $x_1 = t, x_2 = x, x_3 = y, x_4 = z$  ist eine normal-h. D., die etwa die Schallausbreitung im homogenen Medium und die Ausbreitung der elektromagnet. Wellen in einem homogenen nichtleitenden Medium beschreibt. Ebenso genügen dieser h. D. die Gasdichte, der Gasdruck, das Geschwindigkeitspotential, die Feldstärkekomponenten elektr. und magnet. Felder sowie deren Potentiale.

II. Für h. D.en sind *Anfangswertprobleme* korrekt gestellte Aufgaben (↗ partielle Differentialgleichung IV.). Diese Aufgabenstellung, etwa für die *Differentialgleichung der schwingenden Saite* oder eindimensionale Wellengleichung  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  mit  $x_1 = t$  und  $x_2 = x$  betrachtet, kann man folgendermaßen formulieren: Gesucht ist eine für  $t \geq 0$  einmal stetig differenzierbare Funktion  $u(x, t)$ , die für  $t > 0$  die h. D.  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  erfüllt und für  $t = 0$  den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $u_t(x, 0) = u_1(x)$  genügt. Dabei sind  $u_0$  und  $u_1$  vorgegebene Funktionen. Die Lösung (4) dieses Anfangswertproblems erhält man etwa aus der allgemeinen Lö-

$$(4) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x-at) + u_0(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy$$

sung (↗ partielle Differentialgleichung I.)  $u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$  dieser h. D., in der  $f_1$  und  $f_2$  beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen sein können. Man bezeichnet diese Lösung auch als *d'Alembertsche Lösung* dieses Anfangswertproblems.

Die *charakterist. Linien* der h. D.  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  erhält man aus  $w_1^2 - a^2 w_2^2 = 0$  als  $w_1(x, t) = x + at - c_1 = 0$  und  $w_2(x, t) = x - at - c_2 = 0$ . Die Lösung  $u(x_0, t_0)$  im Punkt  $P_0(x_0, t_0)$  hängt nur von den Anfangswerten auf dem Stück  $C_0$  der  $x$ -Achse ab, das von den beiden charakterist. Linien  $x + at = x_0 + at_0, x - at = x_0 - at_0$  aus der  $x$ -Achse ausgeschnitten wird, also von den Anfangswerten in dem Intervall  $C_0 = [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ . Eine Änderung der Anfangswerte  $u_0$  und  $u_1$  außerhalb  $C_0$  hat keine Wirkung auf die Lösung im Punkte  $P_0(x_0, t_0)$ . Das Intervall  $C_0$  heißt das *Abhängigkeitsgebiet* der Lösung im Punkte  $P_0(x_0, t_0)$ .

Das Anfangswertproblem für die *inhomogene eindimensionale Wellengleichung*  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$  mit den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$  wird gelöst, indem man die Lösung der homogenen h. D.  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$  und die Lösung der inhomogenen h. D.  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$  mit den homogenen Anfangsbedingungen  $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0$  addiert. Die Lösung der inhomogenen h. D. mit den homogenen Anfangsbedingungen erhält man aus dem *Prinzip von Duhamel*: Man löst das Anfangswertproblem  $v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0$  mit  $v(x, 0; s) = 0$  und  $v_t(x, 0; s) = f(x, a)$  für die homogene h. D. mit einem Parameter  $s$ . Dann ist die Funktion (5) die Lösung der

$$(5) \quad u(x, t) = \int_0^t v(x, t-s; s) ds$$

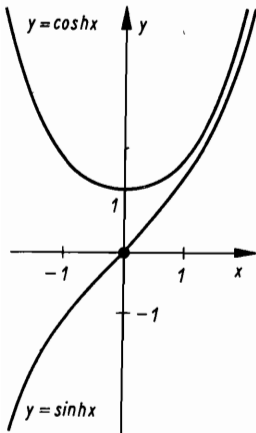
inhomogenen h. D. mit den homogenen Anfangsbedingungen. Damit ergibt sich die Lösung (6) des

$$(6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x-at) + u_0(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y) dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \left( \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y, s) dy \right) ds$$

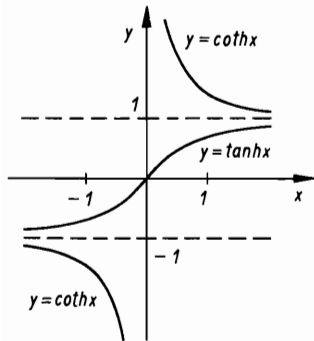
Anfangswertproblems für die inhomogene h. D.  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$  mit  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$ . Zur kanonischen Form der h. D. ↗ partielle Differentialgleichung III.

**hyperbolische Funktion, Hyperbelfunktion**: I. jede durch eine der folgenden Funktionsgleichungen definierte Funktion:

- Hyperbelsinus* [*Sinus hyperbolicus*]:  $y = \sinh x = \text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  (Abb. 1),
- Hyperbelkosinus* [*Cosinus hyperbolicus*]:  $y = \cosh x = \text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  (↗ Abb. 1),
- Hyperbeltangens* [*Tangens hyperbolicus*]:  $y = \tanh x = \text{th } x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$  (Abb. 2),
- Hyperbelkotangens* [*Cotangens hyperbolicus*]:  $y = \coth x = \text{cth } x = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$  (↗ Abb. 2),



hyperbolische Funktion. Abb. 1: Graphische Darstellung der Funktionen  $y = \sinh x$  und  $y = \cosh x$



hyperbolische Funktion. Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktionen  $y = \tanh x$  und  $y = \coth x$

*Hyperbelsekans [Sekans hyperbolicus]:*

$$y = \operatorname{sch} x = 2/(e^x + e^{-x}),$$

*Hyperbelkosekans [Cosekans hyperbolicus]:*

$$y = \operatorname{csch} x = 2/(e^x - e^{-x}).$$

Ihr Name deutet an, daß die Werte von  $\cosh x$  und von  $\sinh x$  nach (1) die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel erfüllen. Die Beziehungen (2) bis (8) sind denen zwischen den Winkelfunktionen weitgehend analog.

- (1)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 -$
- (2)  $\tanh x = \sinh x / \cosh x$
- (3)  $\coth x = \cosh x / \sinh x$
- (4)  $\tanh x \cdot \coth x = 1$
- (5)  $\operatorname{sch} x = \tanh x / \sinh x$
- (6)  $\operatorname{csch} x = \coth x / \cosh x$
- (7)  $\operatorname{sch}^2 x + \tanh^2 x = 1$
- (8)  $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

Tabelle (9) gibt für die wichtigsten h. F.en wesentl. Eigenschaften an, in der letzten Zeile enthält sie Angaben, ob die h. F. gerade oder ungerade ist; falls keine Werte existieren, steht -, z. B. für die Nullstellen.

Das Bild von  $y = \cosh x$  heißt *Kettenlinie* (Abb. 1), da eine gleichmäßige, allseitig biegsame Kette diese Gestalt annimmt, wenn sie an den Enden aufgehängt wird und nur der eigenen Schwere unterliegt.

(9)	$y = \sinh x$	$y = \cosh x$	$y = \tanh x$	$y = \coth x$
größtmögl. Definitionsbereich	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$ $x \neq 0$
Wertebereich	$]-\infty, +\infty[$	$[1, +\infty[$	$]-1, +1[$	$]-\infty, -1[ \cup$ $]1, +\infty[$
Nullstellen	$x_N = 0$	—	$x_N = 0$	—
Asymptoten	—	—	$y = 1, y = -1$	$x = 0, y = \pm 1$
Verhalten im Unendlichen	$y \rightarrow \pm \infty$	$y \rightarrow +\infty$	$y \rightarrow \pm 1$	$y \rightarrow \pm 1$
Monotonieverhalten, $\uparrow$ wachsend, $\downarrow$ fallend	$]-\infty, +\infty[ \uparrow$	$]-\infty, 0[ \downarrow$ $]0, +\infty[ \uparrow$	$]-\infty, +\infty[ \uparrow$	$]-\infty, 0[ \downarrow$ $]0, +\infty[ \downarrow$
Extremwerte	—	$x_{\min} = 0$	—	—
Wendepunkte	$x_W = 0$	—	$x_W = 0$	—
	ungerade	gerade	ungerade	ungerade

II. Die Additionstheoreme der h. F. unterscheiden sich von denen der Winkelfunktionen höchstens durch ein Vorzeichen. Entsprechendes gilt auch für die meisten goniometr. Beziehungen, wenn man die Winkelfunktionen durch die h. F.en ersetzt.

II.1. Additionstheoreme (10) bis (13).

$$(10) \quad \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$(11) \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$(12) \quad \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$(13) \quad \coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

II.2. H. F.en des doppelten und halben Arguments.

$$(14) \quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$(15) \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$(16) \quad \tanh 2x = 2 \tanh x / (1 + \tanh^2 x)$$

$$(17) \quad \coth 2x = (1 + \coth^2 x) / (2 \coth x)$$

Aus der Eulerschen Formel  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ , die für  $z \in \mathbf{C}$  gilt, erhält man (18) bis (21) und

$$(18) \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cosh iz$$

$$(19) \quad \sin z = -i \cdot \frac{1}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) = -i \sinh iz$$

$$(20) \quad \tan z = -i \tanh iz$$

$$(21) \quad \cot z = i \coth iz$$

daraus die Umkehrungen (22) bis (25).

$$(22) \quad \sinh z = -i \sin iz \quad (23) \quad \cosh z = \cos iz$$

$$(24) \quad \tanh z = -i \tan iz \quad (25) \quad \coth z = -i \cot iz$$

Danach können aus Beziehungen zwischen Winkelfunktionen entsprechende Beziehungen zwischen h. F. hergeleitet werden, wenn man die Argumente in  $\mathbf{C}$  mit  $\alpha$  bezeichnet und  $\sin \alpha$  durch  $i \sinh z$  bzw.  $\cos \alpha$  durch  $\cosh z$  ersetzt. Die Beziehung  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  z. B. geht dann über in  $\cosh^2 z + \sinh^2 z = 1$  bzw. in  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$  oder  $\sin^2(\alpha/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$  in  $-\sinh^2(z/2) = \frac{1}{2}(1 - \cosh z)$ . Aus den für Winkelfunktionen bekannten Formeln für die halben Argumente gewinnt man die Formeln (26), (27), (28) und (29) für die h. F.en.

$$(26) \quad \sinh(x/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)} \quad \text{für } x \geq 0$$

$$(26a) \quad \sinh(x/2) = -\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)} \quad \text{für } x < 0$$

$$(27) \quad \cosh(x/2) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$

$$(28) \quad \tanh(x/2) = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1}$$

$$(29) \quad \coth(x/2) = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1} = \frac{\cosh x + 1}{\sinh x}$$

II.3. Für Summen und Differenzen h. F.en gelten die Formeln (30), (31), (32), (33).

$$(30) \quad \sinh x \pm \sinh y = 2 \sinh \left[ \frac{(x \pm y)}{2} \right] \cosh \left[ \frac{(x \mp y)}{2} \right]$$

$$(31) \quad \cosh x + \cosh y = 2 \cosh \left[ \frac{(x + y)}{2} \right] \cosh \left[ \frac{(x - y)}{2} \right]$$

$$(32) \quad \cosh x - \cosh y = 2 \sinh \left[ \frac{(x + y)}{2} \right] \sinh \left[ \frac{(x - y)}{2} \right]$$

$$(33) \quad \tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cdot \cosh y}$$

III. Als algebraische Funktionen der e-Funktion lassen sich die h. F.en in konvergente Reihen (34), (35), (36), (37) entwickeln mit  $r$  als Konvergenzradius.

$$(34) \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad r = \infty$$

$$(35) \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad r = \infty$$

$$(36) \quad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots, \quad r = \pi/2$$

$$(37) \quad x \coth x = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} + \dots, \quad r = \pi$$

Die Reihen für den Hyperbelsinus und -kosinus gelten auch für  $z \in \mathbf{C}$ .

Zu den Ableitungen der h. F. vgl. Differentiationsregeln IV.; zu ihrer Entwicklung in Potenzreihen  $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen III.

S. a. komplexwertige Funktion, elementare, II. hyperbolische Geometrie  $\nearrow$  nichteuklidische Geometrie I.,  $\nearrow$  Parallelenaxiom III.

hyperbolische Optimierung svw. Quotientenoptimierung, lineare.

hyperbolischer Punkt  $\nearrow$  Krümmung I.

hyperbolisches Paraboloid  $\nearrow$  Paraboloid I., II.

hyperbolische Spirale  $\nearrow$  Spirale II.

**Hyperboloid:** I. nicht entartete Fläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt, die sich ins Unendliche erstreckt. Es gibt zwei Typen von H.n, einschalige und zweischalige. Die Gleichung eines einschaligen H.s hat in einem kartes. Koordinatensystem, das durch Hauptachsentransformation geeignet zu finden ist, die Normalform (1). Jede zur  $x,y$ -Ebene parallele

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ebene schneidet die zusammenhängende Fläche in einer Ellipse, die  $x,y$ -Ebene selbst schneidet das H. in der kleinsten dieser Schnittellipsen, der Kehlellipse (Abb. 1). Eine zur  $x,y$ -Ebene senkrechte Ebene schneidet das einschalige H. i. allg. in einer Hyperbel. Berührt die Ebene das H. in einem Punkt  $P_1$  der Kehlellipse, so schneidet sie das H. in einem Paar von Geraden, die sich in  $P_1$  schneiden; handelt es sich z. B. um den Schnitt zwischen dem H. und der durch  $y = b$  bestimmten Ebene senkrecht zur  $x,y$ -Ebene, so beschreiben  $z = +cx/a$  und  $y = b$  bzw.  $z = -cx/a$  und  $y = b$  diese Geraden. Es gibt zwei Scharen von Geraden, die ganz auf dem einschaligen



H. liegen. Die eine Schar wird dargestellt durch (2), dabei erhält man für jedes Verhältnis  $u : v$  reeller

$$(2) \quad \frac{x}{a} = \frac{2uv + (u^2 - v^2)t}{u^2 + v^2}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{u^2 - v^2 - 2uvt}{u^2 + v^2}, \quad \frac{z}{c} = t$$

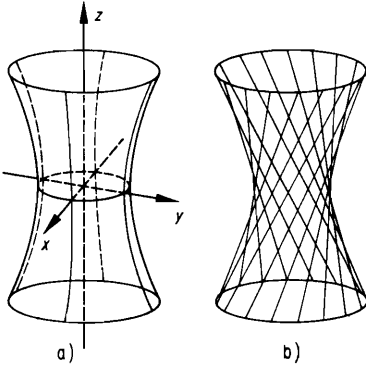


Abb. 1: a) Einschaliges Hyperboloid, b) mit Geraden der auf ihm liegenden Scharen

Zahlen, außer für  $0 : 0$ , die Darstellung einer Geraden mit dem Parameter  $t$ . Die Geraden der anderen Schar erhält man für die verschiedenen Verhältnisse  $r : s$ , außer für  $r : s = 0 : 0$ , durch (3).

$$(3) \quad x/a = [2rs + (r^2 - s^2)t]/[r^2 + s^2],$$

$$y/b = [s^2 - r^2 + 2rst]/[r^2 + s^2], \quad z/c = t$$

Ist  $a = b$ , so ist das einschalige H. eine *Rotationsfläche*; z. B. entsteht das H. mit  $x^2/2 + y^2/2 - z^2/5 = 1$  durch Drehung der in der  $y,z$ -Ebene gelegenen Hyperbel  $y^2/2 - z^2/5 = 1$  um die  $z$ -Achse; seine Kehlellipse ist dann der *Kehlkreis* dieses H.s.

II. Die Gleichung eines *zweischaligen H.s* hat die Normalform (4). Diese Fläche besteht aus zwei ge-

$$(4) \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

trennten, bzgl. des Koordinatenursprungs symmetrisch liegenden Teilen (Abb. 2). Unter den zur  $x,y$ -Ebene parallelen Ebenen  $z = z_0$  schneiden die

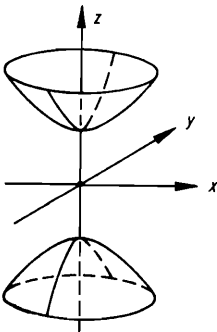


Abb. 2: Zweischaliges Hyperboloid

mit  $|z_0| > c$  das H. in reellen Schnittkurven, und zwar in *Ellipsen*. Die Ebenen  $x = x_0$  und  $y = y_0$  schneiden das H. stets in *Hyperbeln*. Geraden liegen nicht auf dem *zweischaligen* Hyperboloid. Für  $a = b$  stellt (4) eine *Rotationsfläche* dar, die durch Drehung der in der  $x,z$ -Ebene gelegenen Hyperbel  $-x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$  um die  $z$ -Achse entsteht. Ist  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ein Punkt eines H.s, so stellen  $x_0x/a^2 + y_0y/b^2 - z_0z/c^2 = 1$  bzw.  $-x_0x/a^2 - y_0y/b^2 + z_0z/c^2 = 1$  die Gleichungen der *Tangentialebene* in  $P_0$  an das H. (1) bzw. (4) dar.

**Hyperebene** ↗ Ebenengleichung IV.

**Hyperfläche:**  $(n - 1)$ -dimensionale Punktmenge eines  $n$ -dimensionalen Raumes, z. B. eines *affinen Raumes*, die einer Gleichung  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  genügt, wenn  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ein Polynom in  $n$  Unbestimmten ist. Der Grad dieses Polynoms heißt die *Ordnung* der H. Die Ordnung einer H. ist auch die Maximalzahl der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden des Raumes, wenn Schnittpunkte mit komplexen Koordinaten zugelassen werden. Für  $n = 2$  ist eine H. eine *Kurve* in der Ebene (↗ *rationale Kurven*), für  $n = 3$  eine *Fläche* im Raum. Die *Flächen 2. Ordnung* bzw. H.n 2. Ordnung heißen *Quadriken*, die 3. Ordnung *Kubiken*, und die 4. Ordnung *Quartiken*. S. a. Fläche zweiter Ordnung II.

**hypergeometrische Differentialgleichung:** lineare gewöhnl. Differentialgleichung 2. Ordnung

$x(1 - x)y'' + (c - (1 + a + b)x)y' - aby = 0$ , in der  $a, b$  und  $c$  beliebige Parameter mit  $c \neq 0, -1, -2, \dots$  sind. Man bezeichnet die h. D. auch als *Gaußsche Differentialgleichung*. Der Potenzreihenansatz (1) liefert eine Lösung  $y(x)$  der Form (2) für alle  $x$  mit  $|x| < 1$ , denn die erhaltene Potenzreihe (2) kon-

$$(1) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$(2) \quad y(x) = F(a, b; c; x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{a+k-1}{k} \binom{b+k-1}{k}}{\binom{c+k-1}{k}} x^k$$

$$= 1 + \frac{ab}{c} x + \frac{1}{2} \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} x^2 + \dots$$

vergiert nur für  $|x| < 1$ .  $F(a, b; c; x)$  heißt die *hypergeometr. Funktion* und die sie darstellende Reihe *hypergeometr. Reihe*. Durch die Wahl der Parameter  $a, b, c$  erhält man viele bekannte Funktionen der Analysis, z. B. ist  $F(1, b; b; x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $F(-n, b; b; x) = (1-x)^n$  und  $F(1, 1; 2; -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ . Die allgemeine Lösung dieser h. D.

hat für  $c \neq 1$  die Form  $y(x) = c_1 F(a, b; c; x) + c_2 x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; x)$ .

**hypergeometrische Funktion** ↗ hypergeometrische Differentialgleichung.

**hypergeometrische Reihe** ↗ hypergeometrische Differentialgleichung.

**hypergeometrische Verteilung**; Verteilungsgesetz für eine *diskrete Zufallsgröße*  $X$ , die hypergeometrisch verteilt heißt, wenn sie die mögl. Werte  $0, 1, \dots, n$  mit den Wahrscheinlichkeiten (1) annimmt.  $M, N$ ,

$$(1) \quad P(X = k) = p_k(N, M, n) \\ = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ für } k = 0, \dots, n$$

$n$  heißen die Parameter der Verteilung. Folgendes Modell führt auf die h. V.: Werden aus einer Urne, die insgesamt  $N$  Kugeln, davon  $M$  weiße und  $N - M$  schwarze, enthält, *nacheinander ohne Zurücklegen* oder gleichzeitig, was auf dasselbe hinausläuft,  $n$  Kugeln gezogen, so gibt (1) die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß unter diesen  $n$  Kugeln  $k$  weiße sind. Die h. V. beschreibt danach das Auftreten eines qualitativen Merkmals in einer Stichprobe ohne Zurücklegen. Ist  $N$  sehr groß gegen  $n$ , so ist es ohne wesentl. Einfluß, ob man zurücklegt oder nicht, und die h. V. kann in diesem Fall näherungsweise durch die *Binomialverteilung* ersetzt werden.

**hyperkomplexes System** ↗ Algebra III., ↗ Quaternionen.

**Hypotenuse** ↗ Dreieck III.

**Hypothese, statistische**: eine Annahme über die Verteilung oder über gewisse Parameter von ihr, z. B. über den Erwartungswert oder die Streuung eines Merkmals  $X$  in einer Grundgesamtheit (↗ Stichprobe). Solche H.en werden nach der Testtheorie an Hand von Stichproben geprüft. Läßt z. B. das ↗ Histogramm einer Stichprobe von seiner äußeren Form her eine Normalverteilung für das zugrunde liegende Merkmal der Grundgesamtheit vermuten, so kann diese H. mit Hilfe eines Anpassungstests geprüft werden.

**Hypothese des spitzen bzw. des stumpfen Winkels**: *Geometrie* ↗ Parallelenaxiom II.

**Hypotrochoide** ↗ Zykloide VI.

**Hypozykloide** ↗ Zykloide II.

**Hysterese** ↗ Übertragungsglied II.

## I

**Ibn al-Haitham, Alhazen**, geb. etwa 965 Basra(?), gest. 1039 Kairo(?). — I. gilt als der größte muslim. Physiker. Für seine »Optik« stellte er umfangreiche geometr. Betrachtungen an, löste u. a. die Quadratur der Kreismöndchen am rechtwinkligen Dreieck, das Problem des Alhazen, und berechnete mittels Exhaustion die Volumina einiger Rotationskörper. In Ägypten beteiligte er sich an Bewässerungsprojekten.

**Ideal**: eine nichtleere Teilmenge  $A$  eines Ringes  $R$ , für die gilt: 1. die *Moduleigenschaft*, daß aus  $a \in A$  und  $b \in A$  folgt  $a - b \in A$ , 2. die *Linksidealigenschaft*, daß aus  $r \in R$  und  $a \in A$  folgt  $r \cdot a \in A$ ,

3. die *Rechtsidealigenschaft*, daß aus  $r \in R$  und  $a \in A$  folgt  $a \cdot r \in A$  (s. a. Ring II.). In *Links-I.* gelten die Eigenschaften 1. und 2., in einem *Rechts-I.* 1. und 3. In einem kommutativen Ring fällt diese Unterscheidung weg; die Eigenschaften 1. und 2. charakterisieren dort schon ein I.

Statt von einem I. spricht man manchmal auch von einem *zweiseitigen I.* Jedes I.  $A$  des Ringes  $R$  ist ein Unterring von  $R$ . *Triviale I.e* von  $R$  sind der ganze Ring  $R$ , auch *Einheitsideal* gen., und das *Nullideal*, das nur aus dem Nullelement von  $R$  besteht. Im Ring der ganzen Zahlen ist jede Teilmenge, die aus den Vielfachen einer ganzen Zahl besteht, ein I.; z. B. die Menge aller Vielfachen von 3, d. h.  $\{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ . Die I.e eines Ringes stehen in einem engen Zusammenhang mit den homomorphen Bildern dieses Ringes (s. a. Ring II., Homomorphismus).

In einer ↗ Halbgruppe  $R$  heißt eine nichtleere Teilmenge  $A$  I., wenn die Eigenschaften 2. und 3. erfüllt sind. S. a. Primideal.

**idempotent** ↗ Verband I.

**identische Abbildung** ↗ Abbildung, affine, VI.

**identisch verteilt**: Bezeichnung für Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$ , die alle dieselbe Verteilungsfunktion  $F(x)$  haben, d. h., wenn für sie stets  $F_1(x) = F_2(x) = \dots = F_n(x) = F(x)$  gilt, falls  $F_i(x)$  die Verteilungsfunktion von  $X_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  ist.

**Identität** ↗ Gleichung I.

**Identität, aussagenlogische** ↗ Aussagenlogik III., ↗ Prädikatenkalkül I.

**Identitätsaxiom** ↗ Prädikatenkalkül IV.4., ↗ Raum, metrischer, I.

**Identitätssatz** ↗ analytische Funktion III., ↗ Potenzreihe VI.

**identitiv** ↗ Relation II.

**Ikosaeder** ↗ regelmäßige Polyeder I., II.5.

**imaginäre affine Abbildung** ↗ Hyperbel VII.

**imaginäre Einheit** ↗ komplexe Zahlen.

**imaginärer Kegel** ↗ Kegel zweiter Ordnung.

**imaginäre Zahl** ↗ komplexe Zahl.

**imaginär-quadratischer Zahlkörper** ↗ Zahlkörper IV.

**Implikation** ↗ Aussagenlogik II.

**implizite Darstellung** ↗ explizit.

**implizite Definition** ↗ Definition.

**implizite Form** ↗ Funktion III.

**implizite gewöhnliche Differentialgleichung** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung I., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung III.

**Impulsfunktion** ↗ Zeitfunktion I.2.

**indefinit** ↗ quadratische Form III.

**Index**: Zeichen, die an Symbole für Variable, für Funktionen oder Operationen angebracht werden.

Sie sind oft Zahlen, können aber auch selbst Symbole sein, und dienen zur Unterscheidung gleichartiger Größen. Für das Produkt  $a \cdot b \cdot c$  wird  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$  gesetzt, um die Gleichartigkeit der Faktoren zu betonen. Meist steht der I. rechts unten, er kann auch eine andere Stellung haben; rechts oben werden z. B. die Ableitungen  $f', f'', \dots, f^{(v)}, \dots$  einer Funktion  $f(x)$  voneinander durch Striche unterschieden. Zu dieser Kennzeichnung verwendete Zeichen werden in Klammern gesetzt, um sie

von Exponenten zu unterscheiden; z. B. bedeutet  $f^{(k)}(x)$  die  $k$ -te Ableitung von  $f(x)$ . Zur Kennzeichnung der Variablen, nach der partiell differenziert wurde, werden wieder rechte untere Indizes benutzt, zu  $f(x, y) = x^2 + y^2$  erhält man z. B.  $f_x(x, y) = 2x$  bzw.  $f_y(x, y) = 2y$ .

Ein als I. benutzter Buchstabe kann selbst wieder einen I. haben; von einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  der  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  z. B. unterscheidet man die  $n$  partiellen Ableitungen 1. Ordnung  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ . Als *Doppel-I.* bezeichnet man dagegen zwei als I. angegebene Zahlen oder Symbole zur Unterscheidung z. B. der Elemente eines rechteckigen Schemas ( $\nearrow$  Determinante I.,  $\nearrow$  Matrix I.). So bedeutet  $a_{ik}$  für  $i = 1, 2$  und  $k = 1, 2, 3$  die sechs Größen  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$  ( $\nearrow$  Determinante I.,  $\nearrow$  Matrix I.). Man kann auch unendl. Mengen indizieren, z. B. bedeutet  $\{a_i | i \in I\}$  die Menge der Elemente  $a_i$ , die man für alle  $i$  des *Indexbereiches*  $I$  erhält ( $\nearrow$  kartesisches Produkt).

**Index** einer Untergruppe  $\nearrow$  Gruppe II.

**Indexmenge**  $\nearrow$  kartesisches Produkt.

**Indexregister:** Register.

**Indexschreibweise**  $\nearrow$  Funktion I.

**Indexzahl, Indexziffer:** bes. in der Wirtschaftsstatistik angewendete Verhältniszahlen, die sich aus der Beziehung einer Vergleichsgröße zu einer vergleichbaren Basisgröße ergeben, die gleich 1 oder 100% gesetzt wird. Bei einem *zeitl. Vergleich*, z. B. von Preisen, Mengen, Lebenshaltungskosten oder von der Arbeitsproduktivität, dienen sie zur Ermittlung relativer zeitl. Veränderungen, in einem *Plan-Ist-Vergleich* dienen sie zur Feststellung von relativen Planabweichungen, in einem *Objektvergleich* zum Erkennen relativer Unterschiede zwischen verschiedenen Objekten. Man unterscheidet *einfache I.* für den Vergleich von Einzelgrößen und *zusammengesetzte I.* für den Vergleich von Mittelwerten. Die gebräuchlichsten zusammengesetzten I.en sind die von PAASCHE und LASPEYRES.

**Indexziffer** svw. Indexzahl.

**Indikator** eines zufälligen Ereignisses  $A$ : eine diskrete Zufallsgröße  $X$ , die mit  $A$  durch (1) verknüpft

$$(1) \quad X = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ eintritt} \end{cases}$$

ist. Die mögl. Werte von  $X$  sind danach 0 und 1. Ist  $P(A) = p$ , so gilt für die Einzelwahrscheinlichkeiten ( $\nearrow$  Zufallsgröße I)  $p_0 = P(X = 0) = 1 - p$ ;  $p_1 = P(X = 1) = p$ .

**indirekt konform**  $\nearrow$  konforme Abbildung I.

**Individuenvariable**  $\nearrow$  Prädikatenlogik I.

**Induktion, vollständige:** Beweisverfahren zur Herleitung von Aussagen über natürl. Zahlen: Eine Behauptung  $H(n)$  über natürl. Zahlen  $n$  trifft auf alle natürl. Zahlen zu, d. h. ist für  $n = 0, 1, 2, \dots$  wahr, falls als *Induktionsanfang*  $H(0)$  wahr ist und falls aus der *Induktionsannahme*, daß  $H(n)$  für eine Zahl  $n$  wahr ist, folgt, daß  $H(n+1)$  wahr ist; dieser *Induktionsschluß* oder *-schritt* wird auch *Schluß von  $n$  auf  $n+1$*  gen. Die Behauptung  $H(n)$  z. B., daß die Summe der natürl. Zahlen bis  $n$  die Größe  $s_n = n(n+1)/2$  ist, wird dann so bewiesen:

$H(0)$  ist wahr wegen  $s_0 = 0$ ; wird  $H(n)$  für eine beliebige natürl. Zahl  $n$  als wahr angenommen, so folgt für  $n+1$ :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + n + 1 = (n/2)(n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)(n/2 + 1) = (1/2)(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

also die Wahrheit der Behauptung für  $n+1$ . S. a. Peanosches Axiomensystem; Moivresche Formel II.1.

Einen solchen Beweis nennt man einen *induktiven Beweis*. Diese Beweismethode läßt sich zur *transfiniten Induktion* verallgemeinern, zu einer Methode, Behauptungen für Elemente einer beliebigen wohlgeordneten Menge zu beweisen. S. a. Peanosches Axiomensystem.

**induktive Definition**  $\nearrow$  Definition,  $\nearrow$  Prädikatenkalkül II.

**induktiver Beweis**  $\nearrow$  Induktion, vollständige.

**inf:** Zeichen für Infimum.

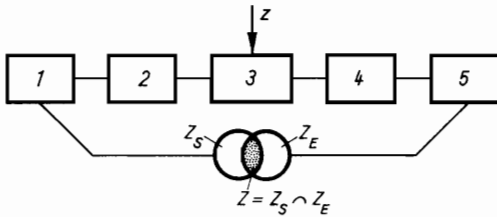
**Infimum**  $\nearrow$  beschränkte Funktion II.; s. a. Extremwert I.; untere Schranke.

**Information:** I. allgemein der Gehalt einer Nachricht, der die Kenntnisse eines Empfängers bereichert bzw. bestehendes Nichtwissen beseitigt. Der Begriff der I. wurde in der Nachrichtentechnik zur Lösung der Aufgabe entwickelt, eine gegebene Menge von Zeichen ( $\nearrow$  Kodierung) über einen vorgegebenen Nachrichtenkanal möglichst wirtschaftlich und fehlerfrei zu übertragen. Heute ist er einer der Zentralbegriffe der  $\nearrow$  Kybernetik, die die Übertragung, Verarbeitung und Speicherung von I.en in Systemen und zwischen Systemen untersucht. Die I. wird neben den Stoffen und Energien heute vielfach als eine dritte Grundgröße angesehen, die an sich immateriellen Charakter aufweist, jedoch in Form von Signalen konkret realisiert wird. Die I. läßt sich daher auch formal über den Signalbegriff als *Klasse äquivalenter Signale* definieren. Zu den I.-systemen, die im techn. Bereich eine außerordentl. Bedeutung erlangt haben, zählen neben den eigentl. nachrichtentechn. Systemen z. B. auch die Systeme der Meßtechnik, der Meßwertverarbeitungstechnik, der Steuerungs- und Regelungstechnik und der maschinellen Rechentechnik. Innerhalb eines Regelungssystems ( $\nearrow$  Regelung) z. B. werden fortlaufend I.en über den vorliegenden Prozeßzustand aufgenommen, zu anderen Elementen übertragen, mit ihnen verarbeitet, gespeichert und zur Nutzung wieder an den Prozeß ausgegeben, so daß eine Zirkulation von I.en stattfindet. Auch in zahlreichen traditionellen Wissenschaften, z. B. in Biologie, Psychologie, Pädagogik, Soziologie und in den Wirtschaftswissenschaften hat die Betrachtung der I. Einzug gehalten und neue Einsichten vermittelt. Die Vorgänge im zentralen Nervensystem können z. B. gedeutet werden als Prozesse der Verarbeitung und Speicherung von I.en. Der I.sbegriff ist danach gleichermaßen anwendbar auf Vorgänge innerhalb von Organismen, zwischen Individuen oder auf solche innerhalb techn. Einrichtungen.

Der I.sbegriff ist überaus komplexer Natur. Gegenwärtig unterscheidet man vor allem zwischen dem statist., syntakt., sigmat., semant. und pragmat. Aspekt der I. Bisher hat nur die quantitative Seite

im Rahmen der von C. E. SHANNON begründeten *I.theorie* eine exakte Behandlung erfahren. Die Erzeugung von I.en wird als Zufallsprozeß ( $\nearrow$  stochastischer Prozeß) aufgefaßt. Damit ist eine enge Verbindung der I.theorie mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben. Die Einbeziehung semant. Fragen, der Bedeutung der I. und pragmat. Fragen ihres Nutzens für den Empfänger ist gegenwärtig noch nicht befriedigend gelungen. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf das Gebiet der klass. I.theorie.

II. Das Grundmodell für die *I.sübermittlung* zwischen zwei Partnern ist die *Kommunikationskette* (Abb.). Ihre Elemente sind die I.squelle, der Sender, der



Information: Kommunikationskette

Kanal, der Empfänger und die I.ssenke. In der *I.squelle* (1) wird die I. erzeugt, im Menschen z. B. oder in einem techn. Prozeß. Im *Sender* (2) wird die I. durch Kodierung oder Modulation in ein übertragbares Signal umgewandelt.

Der *Kanal* oder die Übertragungsstrecke (3) ist das vermittelnde Medium, das das Signal direkt oder mittels eines Trägers überträgt. Dies kann z. B. der Luftraum bei der Sprachübermittlung oder ein Telefoniekanal sein. Längs des Kanals wirken Störungen ein, die das übertragene Signal verfälschen können durch Rauschen und Verzerrung. *Rauschen* bedeutet dabei eine regellose statistisch verteilte Beeinflussung, die nicht immer korrigiert werden kann. Unter *Verzerrung* versteht man eine nach einer festen Operation erfolgende Verformung, die durch eine entsprechende inverse Operation prinzipiell korrigierbar ist.

Im *Empfänger* (4) wird die *Dekodierung*, eine Selektion und Rückwandlung des empfangenen Signals, u. U. mit Befreiung von der Störbeeinflussung vorgenommen.

Die *Informationssenke* (5) schließlich ist der Teil der Informationskette, der die empfangene Information erhält und verwertet. Soll nicht nur die syntakt. Struktur, sondern auch der semant. Inhalt der I. verstanden werden, so muß dem Empfänger einiges über das zu erwartende Signal bekannt sein. Diese bekannten Parameter eines Signals können sich z. B. auf die Modulationsart bei der Übertragung analoger Signale oder auf ein vereinbartes Alphabet bei der diskreten Signalübertragung beziehen. Sind  $Z_S$  und  $Z_E$  die Zeichenvorräte des Senders und des Empfängers aus den vereinbarten Alphabeten, so darf ihr Durchschnitt  $Z_S \cap Z_E$  nicht leer sein und muß eine hinreichende Mächtigkeit

haben. Eine I. übertragen heißt dann, eine Auswahl unter den bestehenden Möglichkeiten vornehmen. Diese Möglichkeiten können mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten. Auf der Grundlage derartiger Betrachtungen läßt sich ein Zugang für die Quantifizierung der I. finden. Das *I.smaß* wird auf *Binärenentscheidungen* zurückgeführt. Die *Einheit der I.* ist das *bit*. Sie entspricht der Elementarentscheidung bei gleicher Wahrscheinlichkeit der beiden mögl. Ereignisse. Bei  $m$  Entscheidungsmöglichkeiten ergibt sich der *Entscheidungsgehalt* einer I. zu  $H_0 = \log_2 m \approx 3,322 \lg m = \lg m$  bit, wenn  $\log_2 m = \lg m$  geschrieben wird. Sind die  $m$  Zustände gleichwahrscheinlich, d. h. gilt  $p_1 = p_2 = \dots = p_i = \dots = p_m$ , so ist  $p_i = 1/m$ .

In diesem Falle ist der Entscheidungsgehalt gleich dem *maximalen I.sgehalt* einer Nachrichtenquelle:

$H_0 = - \sum_{i=1}^m (1/m) \lg (1/m) = \lg m$ . Für den Entscheidungsgehalt einer einstelligen Dezimalzahl erhält man z. B. wegen  $m = 10$  den maximalen I.sgehalt  $H_0 = 3,32$ . Es werden somit 4 bit gebraucht, dabei verbleibt eine Redundanz. Die *Entropie H*, der *mittlere I.sgehalt*, gibt dann die Anzahl von Binärenentscheidungen an, die man zur Kennzeichnung eines Zustandes braucht, wenn den einzelnen mögl. Zuständen verschiedene Wahrscheinlichkeiten zukommen. Es ergibt sich die *Shannonformel* (1).

$$(1) \quad H = - \sum_{i=1}^m p_i \lg (1/p_i) = - \sum_{i=1}^m p_i \lg p_i$$

Da die Auswahl der Zeichen aus einem abgeschlossenen Zeichenvorrat  $z_i \in Z$  erfolgt, gilt  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ .

Den mittleren Entscheidungsgehalt für kontinuierl. I.en berechnet man nach (2).

$$(2) \quad H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \lg p(x) dx$$

Die *I.smenge M* ist ein Maß für die I. bei der Übertragung von  $n$  übermittelten Werten:  $M = nH$ . Im günstigsten Falle, d. h. bei gleichen Wahrscheinlichkeiten, gilt  $M = n \lg m$ .

Der *I.sfluß I* ist ein Maß für die in der Zeiteinheit übertragene I.smenge, gemessen in bit/s:  $I = dM/dt \approx \Delta M/\Delta t \approx \Delta n/\Delta t$ . Bezieht man sich auf die Übertragung von  $n = 1$  bit, so ist  $\Delta t|_{n=1} = t_E$  die *Einschwingzeit* oder die *Taktzeit*, und für den mittleren I.sfluß gilt  $I = (1/t_E) \cdot H$ . Für die Übertragung von kontinuierl. I.en muß das  $\nearrow$  Abtasttheorem erfüllt sein, d. h., für eine Bandbreite  $B$ , soll gelten  $\Delta t < 1/(2B)$ . Somit ergibt sich für den maximal übertragbaren I.sfluß  $I = 2BH$ . Informationsparameter  $\nearrow$  Signal.

**Informationsparameter**  $\nearrow$  Signal II.

**Informationsquelle**  $\nearrow$  Information II.

**Informationsraum**  $\nearrow$  Kodierung I.

**Informationssenke**  $\nearrow$  Information II.

**Informationstheorie:** I. Theorie, die sich mit der mathemat. Beschreibung und Analyse von Nachrichtenübertragungssystemen befaßt (s. a. Infor-

mation I.). Ein solches System besteht aus einer *Quelle*, die Informationen oder Nachrichten sendet, einem *Kanal*, der die Nachrichten überträgt, und einem *Empfänger*. Die Quelle sendet ihre Information in Form einer Folge von Symbolen aus, in der das Auftreten der verschiedenen Symbole einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\{p_i\}$  unterliegt ( $\nearrow$  Zufallsgröße II.). Eine Signalfolge kann somit als *stochast. Prozeß* gedeutet werden; im einfachsten Fall als stationäre zufällige Folge mit endlich vielen Zuständen. Bricht eine Signalfolge ab, so ist ungewiß, welches Symbol als nächstes erscheint. Diese Ungewißheit wird durch die Information über das nächste Symbol beseitigt. Man kann deshalb *Information* als beseitigte Ungewißheit auffassen. Sind  $E_1, \dots, E_m$  die mögl. Symbole und  $p_1, \dots, p_m$  die Wahrscheinlichkeiten, daß sie gesendet werden, so faßt man diesen Sachverhalt in einer Tabelle (1)

$$(1) \quad T: \begin{pmatrix} E_1 & \dots & E_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

zusammen, nach (2) enthält die Tabelle  $T_2$  z. B.

$$(2) \quad T_2: \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ 0,97 & 0,02 & 0,01 \end{pmatrix}$$

die Mitteilung, daß das nächste Signal  $E_1$  ist, gibt aber damit wenig Information, da sowieso fast immer  $E_1$  gesendet wird.  $T_3$  dagegen enthält nach (3)

$$(3) \quad T_3: \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$$

bedeutend mehr Information, da kein Symbol bevorzugt wird.

II. Um diese anschaul. Vorstellungen zu quantifizieren, wird jeder solchen Tabelle  $T$  ihre *Entropie*  $H(T)$  nach (4) als Maß für ihre Information zuge-

$$(4) \quad H(T) = - \sum_{i=1}^m p_i \lg p_i$$

ordnet. Dabei bedeutet  $\lg a$  den Logarithmus von  $a$  zur Basis 2, den man nach (5) aus dem Zehnerlog-

$$(5) \quad \lg a = \lg a / \lg 2 \approx 3,322 \lg a$$

arithmus  $\lg a$  erhält. Die *Informationseinheit* wird der

Tabelle  $T_4: \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$  zugesprochen, weil für sie  $H(T_4)$  nach (6) den Wert 1 hat. Sie wird mit 1 bit

$$(6) \quad H(T_4) = -2 [1/2 \lg 1/2] = (-2) (-1/2) = 1$$

bezeichnet [lies bit, engl. *binary digit*: Binärzeichen]. Die gesendete Information geht in einem Kanal z. T. verloren. Diese Eigenschaft des Kanals bezeichnet man als *Rauschen*. Eine Aufgabe der I. besteht darin, zu untersuchen, wie man trotz ver-rauschter Kanäle möglichst viele Nachrichten mög-lichst fehlerfrei übertragen kann. Ein weiterer umfangreicher Problembereich der I. ist die *Kodierung*; das ist die Umformung ursprünglich vorgelegter Nachrichten in solche nach einem anderen Alphabet, wenn z. B. eine in Form gewöhnl. Ziffern aus  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  vorliegende Information erst in

*Dualzahlen* mit Ziffern aus  $\{0, L\}$  umgeformt werden muß, bevor sie von einem Computer aufgenommen und weiterverarbeitet werden kann.

**Informationsübermittlung**  $\nearrow$  Information II.

**Ingenieurperspektive**  $\nearrow$  Axonometrie.

**Inhalt**  $\nearrow$  Maß I.

**Inhalt, Riemanscher**  $\nearrow$  Peano-Jordanscher Inhalt II.

**inhaltserhaltend**  $\nearrow$  Abbildung, affine, II.

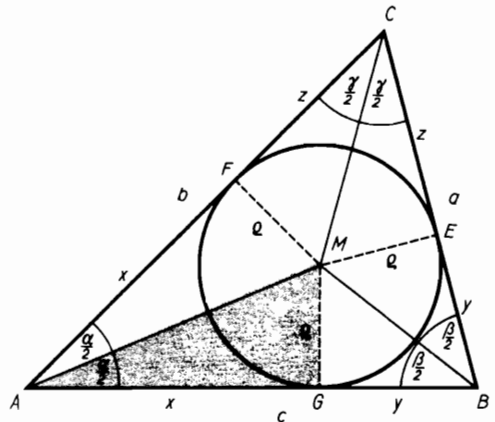
**inhomogen**  $\nearrow$  lineares Gleichungssystem I.,  $\nearrow$  lineare gewöhnliche Differentialgleichung I.,  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung I.

**Injektion**: eindeutige Abbildung einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$ , d. h. Abbildung, bei der nie zwei verschiedene Elemente von  $A$  auf das gleiche Element von  $B$  abgebildet werden. S. a. Abbildung; Funktion I.

**Inklusionsrelation**  $\nearrow$  Relation II.

**inkommensurabel**  $\nearrow$  kommensurabel.

**Inkreis**: I. Kreis, der jede Dreiecksseite in genau einem Punkt berührt. Sein Mittelpunkt  $M$  ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Innenwinkel, weil jeder Punkt dieser Transversalen gleichen Abstand von den anliegenden Seiten hat; sein Radius hat die Länge  $\rho$ . Dieser Radius berührt die Seiten in den Fußpunkten der Lote von  $M$  auf die Seiten. Der Inhalt  $A$  der Dreiecksfläche läßt sich aus  $A = \rho \cdot s$  berechnen, wenn  $s = (a + b + c)/2$  der halbe Umfang des Dreiecks ist (Abb.). (S. a.



Inkreis des Dreiecks ABC mit Radius  $\rho$

Apollonios, Satz von). Da die in der Abbildung mit  $x, y, z$  bezeichneten Abschnitte der Seiten als Tangentenabschnitte in der bezeichneten Weise einander gleichlang sind und sich z. B.  $y + z = a$  ergibt, gilt für  $2s = a + b + c$  die Beziehung  $2x = 2s - 2a$  oder  $x = s - a$ . Entsprechend hat man  $y = s - b$  und  $z = s - c$ . Im Dreieck  $AGM$  gilt  $\tan(\alpha/2) = \rho/(s - a)$  und für das Dreieck  $ABC$  nach dem Halbwinkelsatz (1). Daraus gewinnt man (2). Diese

$$(1) \quad \tan(\alpha/2) = \frac{\rho}{s - a} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}$$

Beziehung stellt geometrisch den Flächeninhalt  $A$

$$(2) \quad \rho s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

des Dreiecks  $ABC$  dar.  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  wird die *Heron. Flächenformel* gen. Für die Länge  $\rho$  des I.radius erhält man (3). Durch Einset-

$$(3) \quad \rho = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$$

zen von  $(s-a) = \rho/\tan(\alpha/2)$ ,  $(s-b) = \rho/\tan(\beta/2)$  und  $(s-c) = \rho/\tan(\gamma/2)$  ergibt sich daraus (4) für diese Länge.

$$(4) \quad \rho = s \tan(\alpha/2) \cdot \tan(\beta/2) \cdot \tan(\gamma/2)$$

II. Ein Zusammenhang (5) zwischen den Längen  $\rho$  vom Radius des I.es und  $r$  von dem des Umkreises kann aus (6) hergeleitet werden. Die Beziehung (6) erhält man aus der Definition  $2s = a + b + c$  mit Hilfe des Sinussatzes und wiederholter Anwendung der Additionstheoreme.

$$(5) \quad \rho = 4r \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2)$$

$$(6) \quad s = 4r \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)$$

III. Auch in einem *sphär. Dreieck* läßt sich zum Winkel zwischen zwei Großkreisen eine Winkelhalbierende angeben, deren Punkte gleichen sphär. Abstand ( $\nearrow$  sphärischer Kreis) von den beiden gegebenen Großkreisen haben. Als gemeinsamer Punkt der drei Winkelhalbierenden existiert danach der Mittelpunkt eines Inkreises. Ist  $\rho$  die sphär. Länge von seinem Radius, so kann man ihn nach (7) und (8) aus den drei Seiten berechnen, wenn man  $2s = a + b + c$  setzt.

$$(7) \quad \tan \rho = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \cdot \sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$(8) \quad \tan \rho = \tan(\alpha/2) \sin(s-a) \\ = \tan(\beta/2) \sin(s-b) = \tan(\gamma/2) \sin(s-c)$$

**Innenglieder**  $\nearrow$  Proportion I.

**Innenwinkel**  $\nearrow$  Dreieck I.,  $\nearrow$  n-Eck II.

**innere Funktion**  $\nearrow$  mittelbare Funktion I.

**innere Geometrie:** I. Teil der Flächentheorie, in der nur Eigenschaften untersucht werden, die von der ersten  $\nearrow$  Grundform der Fläche abhängen. Das sind alle Eigenschaften, die durch Messungen in der Fläche festgestellt werden und die durch isometr. Abbildungen nicht geändert werden. Von den übrigen Eigenschaften, die durch die Einbettung der Fläche in den dreidimensionalen euklid. Raum bedingt sind, wird abgesehen. In diesem Sinne ist die Planimetrie die i. G. der Ebene und die sphär. Trigonometrie die i. G. der Kugeloberfläche.

Historisch gehen die Fragen bzgl. der i.n G. von Flächen auf Carl Friedrich GAUSS zurück. Im Zusammenhang mit prakt. Fragen der Geodäsie stellte er die Frage, wie man, ausgehend von Messungen auf einer Fläche, Schlüsse über ihre räuml. Gestalt ziehen kann. Dieses Problem hatte große Bedeutung für die Bestimmung der Gestalt der Erde.

II. Setzt man für die Flächenkoordinaten die Parameter  $u = u^1$  und  $v = u^2$  ein, so erhält man mit der

symmetr. Koeffizientenmatrix  $(g_{ik}) = (g_{ki})$  für die erste Grundform die *Tensorschreibweise*  $g_{ik} du^i du^k = ds^2$ , wenn nach der Einsteinschen Konvention über alle Indizes  $i$  und  $k$  von 1 bis 2 summiert wird, die gleich auftreten. Ein Vergleich mit der ersten Grundform zeigt, daß  $g_{11} = E$ ,  $g_{12} = g_{21} = F$  und  $g_{22} = G$ . Durch Verallgemeinerung auf einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum bzw. eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $V_n$  hat RIEMANN den Begriff des *Tensors* geschaffen, der bei  $n$ -Veränderlichen  $x^1, x^2, \dots, x^n$  durch  $n^2$  Komponenten  $g_{ik}$  oder  $a_{ik}$  gegeben ist. Je nach ihrem Verhalten bei Transformationen unterscheidet man *kovariante Tensoren* (1) von *kontravarianten Tensoren* (2), dabei ist jeweils über  $k, l$  zu summieren.

$$(1) \quad \bar{a}_{ij} = a_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}$$

$$(2) \quad \bar{a}^{ij} = a^{kl} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l}$$

Gilt für die Tensoren eine Norm oder *Metrik* ( $\nearrow$  Raum, metrischer, I.), so heißt  $g_{ij}(M)$  *metrischer* oder *Fundamentaltensor*. Ein solcher Tensor bestimmt die i. G. der betrachteten  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Dazu dienen, z. B. zur Beschreibung einer Geodätischen die *Christoffelschen Symbole*. Die erster Art sind definiert durch (3) und die zweiter Art durch (4), wenn  $g^{rs}$  die inverse Matrix zu  $g_{rs}$  ist.

$$(3) \quad \Gamma_{jk,i} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \right\} = \left[ \begin{matrix} jk \\ l \end{matrix} \right]$$

$$(4) \quad \Gamma_{jk}^r = g^{rs} \Gamma_{jk,s} = \left\{ \begin{matrix} r \\ jk \end{matrix} \right\}$$

Die betrachteten Tensoren sind Tensoren der zweiten Stufe. Durch Produktbildung kann sich die Stufe erhöhen, z. B. ist  $R_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}$  ein Tensor 4. Stufe. Treten beim Produkt gleiche Indizes auf, so wird über sie summiert, so daß dieser Index im Ergebnis nicht mehr vorhanden ist. Man nennt diese Operation *Verjüngung*, z. B. ergibt  $R_{ijk} \cdot R_{ijl} = T_{kl}$  einen Tensor 2. Stufe,  $R_{iik} = a_k$  einen 1. Stufe, der ein Vektor ist, und  $R_{iikl} \cdot S_{ijkl} = c$  einen Skalar. Für die Krümmung eines  $n$ -dimensionalen Raumes fand RIEMANN einen Tensor 4. Stufe und konnte zeigen, daß der Raum dann und nur dann euklidisch ist, wenn dieser *Riemannsche Krümmungstensor* verschwindet. S. a. Grundformen einer Fläche I.

**innerer Automorphismus**  $\nearrow$  Gruppe III.

**innerer Punkt**  $\nearrow$  Menge IV.,  $\nearrow$   $n$ -dimensionaler reeller Punktraum.

**innerer Zustand**  $\nearrow$  Automat, determinierter, abstrakter, I.

**Inneres**  $\nearrow$  Dreieck I.,  $\nearrow$  Körper V.,  $\nearrow$  körperliche Ecke I.,  $\nearrow$  Kreis IV.,  $\nearrow$  Kugel I.,  $\nearrow$  n-Eck,  $\nearrow$  Pyramide I.,  $\nearrow$  Strecke I.,  $\nearrow$  Winkel I.

**inneres Produkt** svw. Skalarprodukt.

**innere Tangente**  $\nearrow$  Kreistangente III.

**innere Teilung**  $\nearrow$  Teilverhältnis I.

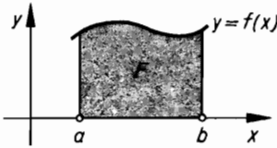
**innere Zustandsgröße**  $\nearrow$  System II.

**Input** sw. Eingabe, s. a. System I.; Verflechtungs-  
bilanz.

in sich konvergente Folge sw. Fundamentalfolge.  
**Instabilität** *Kybernetik* ↗ **Stabilität**.

**Integrabilitätsbedingung** ↗ gewöhnliche Differential-  
gleichung erster Ordnung II.5., ↗ Gradient III.,  
↗ Kurvenintegral III.2.

**Integral: I.** Das *bestimmte* oder *Riemannsche I.* von  
einer Funktion einer Variablen ist ein Grenzwert,  
dessen Bildung ursprünglich bei dem Problem auf-  
trat, ein Maß für den Flächeninhalt eines krumm-  
linig begrenzten ebenen Flächenstücks  $F$  anzugeben  
(Abb. 1). Ist die Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$  auf dem



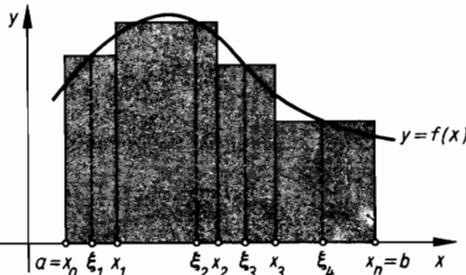
Integral. Abb. 1:  
Flächeninhalt  $F$  unter  
der Kurve der Funk-  
tion  $y = f(x)$

abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  mit  $a < b$  definiert  
und beschränkt, so führen folgende analyt. Über-  
legungen zum bestimmten I. In das Intervall  $[a, b]$   
werden Teilpunkte  $x_i$  mit den Indizes  $i = 0, 1, 2, \dots, n$   
so eingefügt, daß  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .  
In der entstandenen *Zerlegung Z* von  $[a, b]$  ist  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$   
die Länge der Teil-  
intervalle und  $\Delta(Z)$  bezeichnet nach (1) die Länge  
des größten Teilintervalls der Zerlegung  $Z$ . Für belie-  
bige Zwischenwerte  $\xi_i$  mit  $1 \leq i \leq n$  aus jedem Teil-  
intervall  $(x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$  ergibt sich die zur Zerlegung

$$(1) \quad \Delta(Z) = \max_i (x_i - x_{i-1})$$

$$(2) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$Z$  und zur Wahl der  $\xi_i$  gehörende *Zwischensumme*  
(2) (Abb. 2). Das Verhalten der *Zwischensumme* bei  
Verfeinerung der Zerlegung  $Z$  wird betrachtet. Ist  
 $(Z_n)$  eine beliebige Folge von Zerlegungen des Inter-  
valls  $[a, b]$  mit der Eigenschaft  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(Z_n) = 0$  und  
konvergieren die zugehörigen *Zwischensummen*  
 $\sigma(Z_n)$  unabhängig von der Wahl der Zwischenwerte  
 $\xi_i$  und von der Wahl der Zerlegungsfolge  $(Z_n)$  mit  
 $\Delta(Z_n) \rightarrow 0$  gegen einen Grenzwert  $I$ , so heißt  $I$  das



Integral. Abb. 2: Geometrische Bedeutung der Zwischen-  
summe

*bestimmte I.* von  $f(x)$  über  $[a, b]$  und die Funktion  
 $f(x)$  im *Riemannschen Sinne* über das Intervall  $[a, b]$   
*integrierbar*. Die Existenz des Grenzwerts  $I$  ist z. B.  
gesichert für jede stetige Funktion  $f(x)$ . Der Grenzwert  
 $I$  existiert genau dann, wenn es zu jedem  
 $\epsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\epsilon) > 0$  gibt, so daß für jede Zer-  
legung  $Z$  mit  $\Delta(Z) < \delta$  unabhängig von der Wahl  
der Punkte  $\xi_i$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \epsilon$  gilt. In Analogie  
zur Bildung der *Zwischensummen* schreibt man

$$I = \int_a^b f(x) dx \text{ [lies: Integral von } a \text{ bis } b \text{ über } f(x) dx];$$

man nennt  $x$  *Integrationsvariable*,  $a$  bzw.  $b$  die *untere*  
bzw. *obere Grenze* und  $f(x)$  den *Integranden* des I.s.

Betrachtet man für eine Zerlegung  $Z$  des Intervalls  
 $[a, b]$  die *Darbouschen Ober- bzw. Unterschummen*

$$S(Z) = \sum_{i=1}^n G_i \Delta x_i, \text{ bzw. } s(Z) = \sum_{i=1}^n g_i \Delta x_i, \text{ in denen } G_i$$

bzw.  $g_i$  die obere bzw. untere Grenze von  $f(x)$  im  
Teilintervall  $[x_{i-1}, x_i]$  sind, so gilt das *Riemannsche*  
*Integrabilitätskriterium*: Eine im Intervall  $[a, b]$  defi-  
nierte und beschränkte Funktion  $f(x)$  ist genau dann  
über  $[a, b]$  integrierbar, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine  
Zahl  $\delta(\epsilon) > 0$  gibt, so daß für jede Zerlegung  $Z$  mit  
 $\Delta(Z) < \delta$  stets  $S(Z) - s(Z) < \epsilon$  gilt.

Klassen von Funktionen, für die das Riemannsche  
I. existiert:

1. Funktionen, die auf  $[a, b]$  stetig sind,
2. Funktionen, die auf  $[a, b]$  beschränkt sind und  
eine endl. Anzahl von Unstetigkeiten haben,
3. Funktionen, die auf  $[a, b]$  beschränkt und mono-  
ton sind.

Für das ursprüngl. Problem, einem Flächenstück  
 $F$ , das von der Bildkurve zu  $y = f(x)$ , der  $x$ -Achse  
und den durch  $x = a$  und  $x = b$  bestimmten Geraden  
begrenzt wird, eine Maßzahl als Inhalt zuzu-  
ordnen, deutet man die *Zwischensumme*  $\sigma(Z)$  zu  
einer Zerlegung  $Z$  für eine nichtnegative Funktion  
 $f(x)$  als Inhalt einer aus aneinandergefügten Rech-  
t-ecken bestehenden Fläche, d. h. als Näherungswert  
des gesuchten Inhalts von  $F$ . Als Definition für den  
Flächeninhalt des Flächenstücks  $F$  gilt dann das I.

$\int_a^b f(x) dx$ , falls  $f(x)$  eine in  $[a, b]$  integrierbare Funk-  
tion ist.

## II. Integrationsregeln

II.1. Existiert (3), so gelten nach Vertauschen der  
Integrationsgrenzen (4) und (4a) als Definition.

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx \text{ für } a < b$$

$$(4) \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$(4a) \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

II.2. Ist  $f(x)$  im größten der Intervalle  $[a, b]$ ,  $[a, c]$ ,  
 $[c, b]$  integrierbar, so gilt (5) für jede Lage der Punkte  
 $a, b, c$ :

$$(5) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

II.3. Existiert (3), so gilt (6) für jede Konstante  $k$ .

$$(6) \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

II.4. Sind im Intervall  $[a, b]$  die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  integrierbar, so sind auch ihre Summe  $f(x) + g(x)$  und ihr Produkt  $f(x) \cdot g(x)$  in  $[a, b]$  integrierbar, und für die Summe gilt (7).

$$(7) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

II.5. Die Regel über die Integration einer Summe läßt sich durch vollständige Induktion auf beliebig endlich viele Summanden ausdehnen. Für unendl. Reihen von Funktionen  $f_n(x)$  gilt: Sind die Funktionen  $f_n(x)$  für  $n = 1, 2, \dots$  über  $[a, b]$  integrierbar und konvergiert die unendl. Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  in  $[a, b]$  gleichmäßig ( $\nearrow$  Konvergenz unendlicher Reihen) mit der Summe  $f(x)$ , so ist auch  $f(x)$  über  $[a, b]$  integrierbar, und man erhält (8) durch *gliedweises*

$$(8) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$$

*Integrieren.* Diese Beziehung wird oft benutzt, das I. einer Funktion  $f(x)$  zu bestimmen, die sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe integrierbarer Funktionen  $f_n(x)$  entwickeln läßt, z. B. in eine Potenzreihe. Man spricht dann von einer *Integration durch Reihenentwicklung*. Um das I. (9) z. B. zu berechnen, benutzt man die in jedem beschränkten Intervall gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung (10) und erhält (9) durch gliedweises Integrieren.

$$(9) \quad \int_0^t e^{-x^2} dx = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

$$(10) \quad e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

II.6. Ist die Funktion  $f(x)$  in  $[a, b]$  integrierbar, so ist es auch ihr Betrag  $|f(x)|$ ; es gilt (11).

$$(11) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{für } a < b$$

II.7. Gilt auf  $[a, b]$  mit  $a < b$  stets  $f(x) \leq g(x)$  und existieren die I.e. beider Funktionen auf  $[a, b]$ , so gilt (12), und (13), sofern  $m \leq f(x) \leq M$  auf  $[a, b]$ .

$$(12) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(13) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

II.8. *Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung:* Ist  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  integrierbar und gilt  $m \leq f(x) \leq M$ , so existiert mindestens eine Zahl  $\mu$

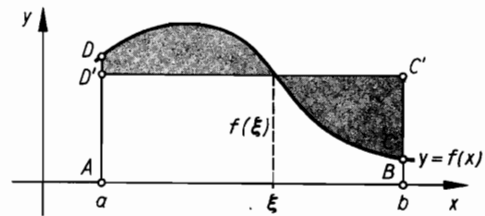
mit  $m \leq \mu \leq M$ , so daß (14) gilt.

$$(14) \quad \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Für eine auf  $[a, b]$  stetige Funktion  $f(x)$  gilt sogar (15) für mindestens ein  $\xi$  mit  $a \leq \xi \leq b$ , da eine in  $[a, b]$  stetige Funktion jeden Zwischenwert  $\mu$  mindestens einmal in  $[a, b]$  annimmt.

$$(15) \quad \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Geometrisch bedeutet der Mittelwertsatz, daß zwischen  $a$  und  $b$  mindestens ein  $\xi$  existiert, so daß der Inhalt der Fläche  $ABCD$  unterhalb der Kurve der Funktion gleich dem Inhalt des Rechtecks  $ABC'D'$  ist (Abb. 3).



Integral. Abb. 3: Geometrische Bedeutung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

II.9. *Verallgemeinerter erster Mittelwertsatz der Integralrechnung:* Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  über  $[a, b]$  integrierbar, gilt  $m \leq f(x) \leq M$  und entweder stets  $g(x) \geq 0$  oder stets  $g(x) \leq 0$ , dann gibt es mindestens eine Zahl  $\mu$  mit  $m \leq \mu \leq M$ , so daß (16) gilt; ist  $f(x)$  eine auf  $[a, b]$  stetige Funktion, so gibt es sogar mindestens einen Zwischenwert  $\xi$  mit  $a \leq \xi \leq b$ , für den (17) gilt.

$$(16) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

$$(17) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

II.10. *Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung:* Ist  $f(x)$  monoton und beschränkt auf dem Intervall  $[a, b]$  und  $g(x)$  über  $[a, b]$  integrierbar, so gibt es in  $[a, b]$  mindestens eine Zahl  $\xi$ , für die (18) gilt.

$$(18) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x) dx$$

II.11. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:* Jede in einem Intervall differenzierbare Funktion  $F(x)$  mit der Eigenschaft  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x$  des Intervalls heißt eine *Stammfunktion* von  $f(x)$  in diesem Intervall. Kennt man eine Stammfunktion von  $f(x)$ , so läßt sich das *bestimmte I.* nach (19) berechnen.

$$(19) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Für die Funktion  $F(x) = \sin x$  z. B. gilt im Intervall  $]-\infty, \infty[$  stets  $F'(x) = \cos x$ , d. h.,  $F(x) = \sin x$  ist eine Stammfunktion von  $f(x) = \cos x$ . Es gilt deshalb (20).

$$(20) \quad \int_a^b \cos x \, dx = [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a$$

Entsprechend erhält man für die in nachstehender Tabelle angeführten Funktionen  $f_i(x)$  in den Intervallen  $I_i$  die Stammfunktionen  $F_i(x)$ .

Funktion $f_i(x)$	Intervall $I_i$	Stammfunktion $F_i(x)$
$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$	$\sin x$
$\sin x$	$]-\infty, +\infty[$	$-\cos x$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$] -1, +1[$	$\arcsin x$
$1/x$	$]0, \infty[$	$\ln x$
$1/x$	$]-\infty, 0[$	$\ln(-x)$

Allerdings kann die Stammfunktion nicht immer durch elementare Funktionen ausgedrückt werden. Ein Mittel, ihre Eigenschaften trotzdem zu analysieren, ist die Integration durch Reihenentwicklung (vgl. II.5.).

Ist die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  stetig, so ist sie über jedes Intervall  $[a, x]$  mit  $a \leq x \leq b$  integrierbar; die nach (21) definierte Stammfunktion ist eine Funktion ihrer oberen Grenze. Nach  $F'(x)$

$$(21) \quad F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

$= f(x)$  existiert ihre Ableitung und ist stetig, d. h., die Stammfunktion ist differenzierbar.

III. Das *unbestimmte I.* ist die Bezeichnung für die Menge aller *Stammfunktionen* der Funktion  $f(x)$  in einem Intervall und wird durch  $\int f(x) \, dx$  bezeichnet. Sind  $F_1(x)$  und  $F_2(x)$  zwei Stammfunktionen von  $f(x)$  im gleichen Intervall, so unterscheiden sie sich höchstens um eine Konstante:  $F_2(x) = F_1(x) + C$ ; z. B. sind  $F_2(x) = \arcsin x$  und  $F_1(x) = -\arccos x$  Stammfunktionen von  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  im Intervall  $] -1, 1[$ ; es gilt  $\arcsin x = -\arccos x + C$  mit  $C = \pi/2$ , wie man etwa durch Einsetzen des speziellen Wertes  $x = 0 \in ] -1, 1[$  erhält. Für die Menge aller Stammfunktionen  $F(x)$ , die aus der gleichen Funktion  $f(x)$  abgeleitet werden, ergibt sich danach (22).

$$(22) \quad \int f(x) \, dx = F(x) + C$$

Das unbestimmte I. ist somit eine *Umkehrung der Differentiation*, und jede Regel der Differentialrechnung führt auf eine entsprechende Regel für das unbestimmte I. Die Differentiationsregeln für die elementaren Funktionen führen z. B. auf die Grund-I.e (23).

(23) Tabelle der *Grundintegrale* mit Angaben über das Intervall, in dem  $F(x)$  Stammfunktion von  $f(x)$  ist, falls es sich nicht um das Intervall  $]-\infty, \infty[$  handelt.

$$(23.1.) \quad \int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

für  $k$  ganz und  $k \neq -1$ , allgemein ist  $F(x)$  für  $k < 0$  nur für  $x \neq 0$  definiert

$$(23.2.) \quad \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

für reelle  $\alpha \neq -1$  und  $x > 0$

$$(23.3.) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$(23.4.) \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$(23.5.) \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{für } a \neq 1$$

$$(23.6.) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(23.7.) \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(23.8.) \quad \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

für  $x \neq (2k+1) \cdot \pi/2$

$$(23.9.) \quad \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C \quad \text{für } x \neq 2k\pi$$

$$(23.10.) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad \text{für } x \neq (2k+1) \cdot \pi/2$$

$$(23.11.) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad \text{für } x \neq 2k\pi$$

$$(23.12.) \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$(23.13.) \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$(23.14.) \quad \int \tanh x \, dx = \ln \cosh x + C$$

$$(23.15.) \quad \int \coth x \, dx = \ln |\sinh x| + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$(23.16.) \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$(23.17.) \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C \quad \text{für } x \neq 0$$

$$(23.18.) \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad \text{für } a \neq 0$$

$$(23.19.) \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \frac{x}{a} + C & \text{für } |x| < a \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x} + C & \end{cases}$$

$$(23.20.) \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{arcoth} \frac{x}{a} + C & \text{für } |x| > a \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C & \end{cases}$$

$$(23.21.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad \text{für } |x| < a$$

$$(23.22.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arsinh} (x/a) + C \\ \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C \end{cases}$$

$$(23.23.) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcosh} (x/a) + C & \text{für } |x| > a \\ \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C \end{cases}$$

**IV. Integrationsregeln zum unbestimmten I.**, mit deren Hilfe man versucht, das I.  $\int f(x) dx$  auf Grund-I.e zurückzuführen und dadurch mit elementaren Funktionen auszudrücken. Obgleich dieses Problem nicht restlos gelöst ist (vgl. II.5.), erreicht man mittels *partieller Integration* bzw. mittels *Integration nach Substitution* häufig, bei gebrochenrationalen Funktionen nach *Partialbruchzerlegung* stets das gewünschte Ziel ( $\nearrow$  Integration spezieller Funktionsklassen).

**IV.1.** Für die Integration einer *Linearkombination* von Funktionen  $f_i(x)$  mit reellen Konstanten  $c_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt (24).

$$(24) \quad \int \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \int f_i(x) dx$$

**IV.2. Partielle Integration.** Haben die Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$  eine stetige Ableitung, so gilt  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$  für die Differentiation ihres Produkts und danach die Beziehung (25).

$$(25) \quad \int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

Um z. B.  $\int x \sin x dx$  zu berechnen, setzt man  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = \sin x$  und erhält (26) wegen  $u'(x) = 1$ ,  $v(x) = -\cos x$ .

$$(26) \quad \int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ = \sin x - x \cos x + C$$

Auch das I.  $\int \ln x dx$  kann mittels partieller Integration behandelt werden, indem man  $u(x) = \ln x$  und  $v'(x) = 1$  setzt. Dann ist  $u'(x) = 1/x$ ,  $v(x) = x$ , und man erhält (27).

$$(27) \quad \int \ln x dx = x \ln x - \int 1/x \cdot x dx \\ = x (\ln x - 1) + C$$

Um das bestimmte I. in (28) auszuwerten, ermittelt man wie oben eine Stammfunktion von  $f(x) = x \sin x$  und erhält das Ergebnis nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$$(28) \quad \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = [\sin x - x \cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

**IV.3. Substitutionsregel:** Ist die innere Funktion  $z = g(x)$  der mittelbaren Funktion  $y = f[g(x)]$  in  $[a, b]$  stetig differenzierbar und ihre äußere Funktion  $y = f(z)$  in  $[\alpha, \beta]$  stetig, wenn  $\alpha$  bzw.  $\beta$  die untere bzw. obere Schranke des zu  $[a, b]$  gehörenden Wertebereichs von  $f(x)$  ist, so gilt (29).

$$(29) \quad \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(z) dz$$

Nach der Integration ist dabei auf der rechten Seite der Gleichung (29)  $z = g(x)$  zu setzen. Für  $f(z) = z^3$  und  $g(x) = \sin x$  erhält man z. B. (30). Wird die Substitutionsregel von rechts nach links benutzt, so

$$(30) \quad \int \sin^3 x \cos x dx = \int z^3 dz = 1/4 z^4 + C \\ = 1/4 \sin^4 x + C$$

bedeutet sie: Um  $\int f(z) dz$  zu berechnen, wählt man eine passende Funktion  $z = g(x)$  und berechnet  $\int f(g(x)) g'(x) dx$ . Nach der Integration muß mit

Hilfe der Umkehrfunktion  $x = g^{-1}(z)$  von  $z = g(x)$  anstelle von  $x$  wieder  $z$  eingesetzt werden. Ist  $g'(x) \neq 0$  in  $[a, b]$ , so folgt daraus mit der vorausgesetzten Stetigkeit von  $g'(x)$  die Monotonie von  $g(x)$  in  $[a, b]$  und daher ihre Umkehrbarkeit. Hat  $g'(x)$  in  $[a, b]$  Nullstellen, so wendet man die Substitutionsregel in jedem der Teilintervalle an, in die  $[a, b]$  durch die Nullstellen zerfällt. Um z. B. das I. (31) zu berechnen, substituiert man  $z = g(x) = \tan x$ ; dann ist  $g'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0$  und die Umkehrfunktion  $x = \arctan z$ . Die Substitutionsregel liefert zunächst

$$(31) \quad \int \frac{dz}{(\sqrt{1+z^2})^3}$$

das unbestimmte I.  $\sin x + C$ ; in ihm ist aber mittels  $\sin x = \tan x \cdot \cos x = \tan x / \sqrt{1 + \tan^2 x} = z / \sqrt{1 + z^2}$  die Variable  $z$  anstelle von  $x$  einzuführen, wie in (32) dargestellt ist.

$$(32) \quad \int \frac{dz}{(\sqrt{1+z^2})^3} = \int \frac{(1 + \tan^2 x)}{(\sqrt{1 + \tan^2 x})^3} dx \\ = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \int \cos x dx \\ = \sin x + C = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + C$$

Bei Verwendung der Substitutionsmethode zur Auswertung eines bestimmten I.s kann man auf die Rückführung von  $z$  anstelle  $x$  mittels der Funktion  $x = g^{-1}(z)$  verzichten, wenn man die *Integrationsgrenzen* entsprechend der Substitutionsfunktion  $z = g(x)$  transformiert. Substituiert man z. B. im I. aus (33) die Funktion  $z = g(x) = \alpha \cos x$ , so sind 0 und  $\pi$  die neuen Integrationsgrenzen wegen  $g(\pi) = -\alpha$  und  $g(0) = \alpha$ , und man erhält unmittelbar (33).

$$(33) \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - z^2} dz \\ = \int_{\pi}^0 \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2 \cos^2 x} (-\alpha \sin x) dx \\ = \alpha^2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx \\ = \frac{\alpha^2}{2} [x - 1/2 \sin 2x]_0^{\pi} = \frac{\pi \alpha^2}{2}$$

**V.** Auf weitere I.begriffe wird man durch andersartige Aufgabenstellungen geführt, zu deren Behandlung man die Definition der *Zwischensummen* bzw. die Definition der *Feinheit* einer Zerlegung geeignet modifiziert. Die Berechnung der *Arbeit*, die eine Kraft längs eines Weges leistet, führt z. B. auf das  $\nearrow$  *Kurvenintegral erster bzw. zweiter Art*. Der Begriff des *Flächen-I.s* tritt auf, wenn das Volumen eines Zylinders bestimmt werden soll, der als Grundfläche einen Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene und die Deckfläche mit der Funktion  $z = f(x, y)$  hat. Ist eine Raumfläche  $S$  bzw. ein Raumbereich  $K$  mit Masse der ortsabhängigen Dichte  $\rho(x, y, z)$  belegt, so entstehen bei der Ermittlung der auf  $S$  bzw.  $K$

liegenden Gesamtmasse Zwischensummen, deren Grenzwerte, falls sie existieren, das *Oberflächen-I.* bzw. das *Raum-I.* sind. Eine weitere Verallgemeinerung des I.s einer Funktion einer reellen Variablen ergibt sich, wenn der Integrand oder das Integrationsintervall nicht mehr beschränkt sind ( $\nearrow$  Integral, uneigentliches).

**Integral, komplexes: I. Kurvenintegral** Grenzwert (1) für die Punkte  $z_1, \dots, z_n$  und  $p_1, \dots, p_n$  einer glatten

$$(1) \quad I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(p_k) (z_k - z_{k-1})$$

Kurve  $C$ , wenn jeder Punkt  $p_k$  stets ein Zwischenpunkt auf  $C$  zwischen  $z_{k-1}$  und  $z_k$  ist für  $n \rightarrow \infty$   $\max_{1 \leq i \leq n} |z_i - z_{i-1}| \rightarrow 0$  gilt und die Kurve  $C$  ganz im Definitionsbereich der komplexen Funktion  $f(z)$  liegt. Existiert der Grenzwert (1), sind  $a$  und  $b$  Anfangs- und Endpunkt der Kurve  $C$ , so nennt man (2) das *komplexe Kurvenintegral* ( $\nearrow$  Kurvenintegral I., II.),  $f(z)$  den *Integranden* und die Kurve  $C$  den *Integrationsweg*.

$$(2) \quad I = \int_a^{(C) b} f(z) dz$$

*Notwendig* für die Existenz des komplexen Kurvenintegrals (2) ( $\nearrow$  Parameterdarstellung II.) ist die *Beschränktheit* von  $f(z)$ , *hinreichend* die *Stetigkeit* von  $f$  auf  $C$ . Wegen  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  und  $z = x + iy$  kann das k. I. (2) auf zwei reelle Kurvenintegrale nach (3) zurückgeführt werden. Damit

$$(3) \quad \int_a^{(C) b} f(z) dz = \int_a^{(C) b} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_a^{(C) b} [v(x, y) dx + u(x, y) dy]$$

übertragen sich die Eigenschaften reeller auf komplexe Kurvenintegrale. Es gelten z. B. (4) für Punkte  $p \in C$  zwischen  $a$  und  $b$ , (5) und (6) für zwei

$$(4) \quad \int_a^{(C) b} f(z) dz = - \int_b^{(C) a} f(z) dz$$

auf der Kurve und in einer Umgebung von ihr definierte stetige Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$ .

$$(5) \quad \int_a^{(C) b} f(z) dz = \int_a^{(C) p} f(z) dz + \int_p^{(C) b} f(z) dz$$

$$(6) \quad \int_a^{(C) b} (f(z) + g(z)) dz = \int_a^{(C) b} f(z) dz + \int_a^{(C) b} g(z) dz$$

**II.** Nach Definition hängt der Grenzwert (1) des komplexen Kurvenintegrals (2) vom speziellen Verlauf der glatten Kurve  $C$  zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  ab. Es gilt der *Cauchysche Integralsatz*: *Ist  $f(z)$  eine innerhalb eines einfach zusammenhängenden Stetigkeitsgebietes  $G$  von  $f$  analyt. Funktion, so gilt (7) für jede geschlossene, in mathematisch positivem Sinne*

$$(7) \quad \oint^{(C)} f(z) dz = 0$$

durchlaufene Kurve  $C$  von  $G$ . Das k. I. (7) von  $f(z)$  über  $C$  wird *Umlaufintegral* gen. Gleichung (7)

zeigt, in welchem Maße das k. I. vom Weg *unabhängig* ist, denn solange zwei verschiedene Punkte  $a, b$  in  $G$  durch eine ganz in  $G$  liegende geschlossene Kurve  $C$  verbunden werden, sind die k. I. längs der Teilkurven, in die  $C$  durch  $a$  und  $b$  zerlegt wird, einander gleich. Da nach dem *Satz von Morera* auch die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes gilt, kann man sagen: Es ist  $\oint f(z) dz = 0$  für jede geschlossene Kurve innerhalb des einfach zusammenhängenden Stetigkeitsgebietes  $G$  von  $f$  genau dann, wenn  $f(z)$  analytisch in  $G$  ist.

Ein in  $G$  wegunabhängiges I. ist demnach bei festem Anfangspunkte  $a$  und variablem Endpunkt  $z$  mit  $a, z \in G$  des Integrationsweges eine Funktion seiner oberen Grenze:  $\int_a^z f(z) dz = F(z)$ , und es gilt  $F'(z)$

$= f(z)$ .  $F(z)$  heißt *Stammfunktion* der analyt. Funktion  $f(z)$  in  $G$ . Die Gesamtheit aller Stammfunktionen, die sich nur durch additive Konstanten unterscheiden, nennt man, im Unterschied zu dem

bisher betrachteten *bestimmten Integral*  $\int_a^b f(z) dz$  mit

festen Integrationsgrenzen, *unbestimmtes Integral* und schreibt  $\int f(z) dz = F(z) + C$ . Es gilt der *Hauptsatz der Integralrechnung* auch im Komplexen und man berechnet das bestimmte Integral nach der Formel (8).

$$(8) \quad \int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$

**III.** Die wichtigste Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz sind die *Cauchyschen Integralformeln* (9), nach denen die Funktionswerte  $f(\zeta)$ ,  $f^{(n)}(\zeta)$  auf

$$(9) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint^{(S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \\ f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint^{(S)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

dem Rand  $S$  eines Gebietes  $G$  schon sämtl. Funktionswerte  $f(z)$  im Inneren von  $G$  bestimmen.

**Integral, uneigentliches:** Verallgemeinerung des bestimmten Integrals auf unbeschränkte Integranden oder unbeschränkte Integrationsintervalle.

**I.** In einem *Integral mit unbeschränktem Integranden* kann die Funktion in einem der beiden Endpunkte des Intervalls  $[a, b]$ , in beiden Endpunkten oder in einer Stelle im Innern von  $[a, b]$  unbeschränkt sein.

**I.1.** Ist die Funktion  $f(x)$  in jedem Intervall  $a \leq x \leq b - \varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < b - a$  beschränkt und integrierbar, aber in dem Intervall  $[b - \varepsilon, b]$  möglicherweise nicht beschränkt, existiert aber der Grenzwert (1), so heißt  $I$  *konvergentes u. I.* von  $f(x)$  über  $[a, b]$  und wird durch (2) dargestellt (Abb. 1).

$$(1) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = I$$

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Existiert dieser Grenzwert nicht, so nennt man das u. I. (1) *divergent*. Ist  $f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  beschränkt und integrierbar, so stimmt das konvergente u. I. mit dem bestimmten Integral überein.

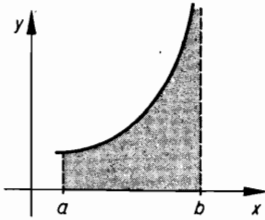


Abb. 1: Geometrische Bedeutung des uneigentlichen Integrals, wenn  $f(x)$  in der Umgebung von  $x = b$  nicht beschränkt ist

**Beispiele:**

**I.1.1.** In (3) z. B. ist der Integrand des Integrals für  $0 \leq x \leq \varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  beschränkt und stetig, d. h. integrierbar. Da der Grenzwert für  $\varepsilon \downarrow 0$  in (3) existiert, gilt (4).

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \arcsin 1 = \pi/2$$

$$(4) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

**I.1.2.** Der Integrand  $f(x) = 1/(1-x)$  ist für  $0 \leq x \leq \varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  beschränkt und stetig. Der Grenzwert (5) existiert nicht, folglich ist das u. I.  $\int_0^1 dx/(1-x)$  divergent.

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} [-\ln(1-x)]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ln(1/\varepsilon)$$

**I.2.** Analog wird durch (6) das u. I. für Funktionen definiert, die für jedes Intervall  $a + \varepsilon \leq x \leq b$  mit  $0 < \varepsilon < b - a$  beschränkt und integrierbar sind.

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

**I.2.1. Beispiel:** Der Integrand  $f(x) = 1/x^\alpha$  mit  $0 < \alpha < 1$  ist für jedes Intervall  $0 < \varepsilon \leq x \leq 1$  beschränkt und integrierbar, der Grenzwert (7) existiert. Das u. I. ist deshalb konvergent.

$$(7) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}$$

Für  $\alpha \geq 1$  ist das u. I. (7) dagegen divergent, weil die Grenzwerte (8) für  $\alpha > 1$  bzw. (9) für  $\alpha = 1$  nicht existieren.

$$(8) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)$$

$$(9) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

**I.3.** Wenn der Integrand  $f(x)$  in der Umgebung beider Endpunkte des Intervalls  $[a, b]$  nicht beschränkt ist und für eine beliebige, aber feste Stelle  $c$  mit  $a < c < b$  die beiden Integrale  $\int_a^c f(x) dx$ ,  $\int_c^b f(x) dx$  konvergieren, so heißt auch das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  *konvergent*, und man setzt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Für die in der Umgebung von 1 bzw. -1 nicht beschränkte Funktion  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  z. B. gilt (10), da die beiden rechtsstehenden Integrale konvergieren.

$$(10) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \pi/2 + \pi/2 = \pi$$

**I.4.** Ist schließlich die Funktion  $f(x)$  in der Umgebung eines inneren Punktes  $c$  des Intervalls  $[a, b]$  nicht beschränkt (Abb. 2), konvergieren aber die I.  $\int_a^c f(x) dx$ ,  $\int_c^b f(x) dx$ , so heißt  $\int_a^b f(x) dx$  *konvergent*, und man definiert nach (11).

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Bildet man dagegen (12), so heißt der Grenzwert,

$$(12) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right\}$$

falls er existiert, *Cauchyscher Hauptwert* oder *v. p.* [valeur principale] des I.  $\int_a^b f(x) dx$ . Der Cauchysche

Hauptwert eines I.s kann existieren, obwohl das I. selbst divergent ist, wie das Beispiel der Funktion

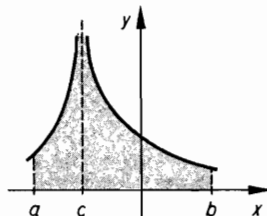


Abb. 2: Geometrische Bedeutung des uneigentlichen Integrals, wenn  $f(x)$  für  $x = c$  mit  $a < c < b$  nicht beschränkt ist

$f(x) = 1/(x - c)$  zeigt, für die das u. I. (13) divergiert, der Cauchysche Hauptwert jedoch nach (14) existiert.

$$(13) \int_a^b \frac{dx}{x-c} \text{ für } a < c < b$$

$$(14) \text{ v. p. } \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} (\ln \epsilon - \ln(a-c) + \ln(b-c) - \ln \epsilon)$$

$$= \ln[(b-c)/(a-c)]$$

II. Zu einem Integral über ein unbeschränktes Intervall gelangt man, indem man den Betrag der oberen Grenze, den der unteren oder den beider Grenzen über jeden Wert wachsen läßt. Je nachdem, ob sich dabei ein Grenzwert ergibt oder nicht, spricht man von einem konvergenten oder einem divergenten u. I.

II.1. Ist die Funktion  $f(x)$  für jedes  $b > a$  über das Intervall  $a \leq x \leq b$  integrierbar (Abb. 3), so definiert man durch (15), falls der rechtsstehende Grenzwert existiert, ein konvergentes u. I. über das Intervall  $[a, \infty[$ .

$$(15) \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Existiert dieser Grenzwert nicht, so heißt das u. I. *divergent*.



Abb. 3: Geometrische Bedeutung des uneigentlichen Integrals, wenn  $f(x)$  im Intervall  $[a, \infty[$  integrierbar ist

Beispiele:

II.1.1. Für die Funktion  $e^{-\alpha x}$  z. B. existiert nach (16) ein konvergentes u. I., weil für  $\alpha > 0$  (16a) gilt. Es hat den Wert  $1/\alpha$ .

$$(16) \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\alpha x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (1/\alpha) (1 - e^{-\alpha b}) = 1/\alpha$$

$$(16a) \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-\alpha b} = 0 \text{ für } \alpha > 0$$

II.1.2. Das u. I. über die Funktion  $f(x) = x^{-\alpha}$  konvergiert nach (17) für  $\alpha > 1$  und ist für  $0 < \alpha \leq 1$  divergent, da die Grenzwerte (18) und (18a) nicht existieren.

$$(17) \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1}, \text{ falls } \alpha > 1$$

$$(18) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) \text{ für } 0 < \alpha < 1$$

$$(18a) \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b \text{ für } \alpha = 1$$

II.2. Das u. I. über das Intervall  $]-\infty, a[$  wird analog durch (19) definiert, und unter dem u. I. mit den Grenzen  $-\infty$  und  $+\infty$  versteht man (20) für eine beliebige, aber feste endl. Stelle  $a$ ; es heißt

$$(19) \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$$

$$(20) \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx$$

konvergent, wenn die beiden u. I.e rechts in (20) konvergieren. Das u. I. (21) z. B. konvergiert. Dabei sind die beiden u. I.e rechts einzeln zu behandeln. Existiert dagegen der

$$(21) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{b \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan b) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0)$$

$$= \pi/2 + \pi/2 = \pi$$

Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^a f(x) dx$ , so heißt er *Cauchyscher Hauptwert* bzw. v. p. [valeur principale] des u. I.s. Er kann existieren, obwohl das u. I. divergiert.

III. *Konvergenzkriterium für u. I.e*: Um festzustellen, ob ein u. I. konvergiert oder divergiert, kann das Vergleichskriterium benutzt werden. Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  positive Funktionen und existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)/g(x)] = K$  mit  $0 \leq K \leq \infty$ , so folgt aus der Konvergenz des u. I.s  $\int_a^\infty g(x) dx$  die Konvergenz des Integrals  $\int_a^\infty f(x) dx$ , falls  $K < \infty$ , und aus der Divergenz von  $\int_a^\infty g(x) dx$  folgt die Divergenz von  $\int_a^\infty f(x) dx$ , falls  $K > 0$  ist. Als Vergleichsfunktion kann man z. B.  $x^{-\alpha} = g(x)$  benutzen.

Das I. (22) z. B. konvergiert nach dem Vergleichskriterium, da das I.  $\int_1^\infty x^{-2} dx$  über die Vergleichsfunktion  $g(x) = x^{-2}$  konvergiert. Handelt es sich um das u. I.  $\int_a^b f(x) dx$  über einen in der Umgebung

$$(22) \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

von  $x = b$  nicht beschränkten Integranden, so ist in dem Vergleichskriterium der Grenzwert  $\lim [f(x)/g(x)]$  zu betrachten. Als Vergleichsfunktion  $x^{10}$  kann man dann die Funktionen  $g(x) = (b - x)^{-\alpha}$  benutzen.

**IV. Absolute Konvergenz eines u. I. s.** Das Integral  $\int_a^\infty f(x) dx$  heißt absolut konvergent, falls das Integral  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  konvergent ist. Das u. I. (23) ist z. B. absolut konvergent, denn mit  $g(x) = x^{-3/2}$  folgt nach dem Vergleichskriterium (24) und damit die Konvergenz des u. I. s des Betrages  $|f(x)|$ .

$$(23) \quad \int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} = 0$$

Es gilt: Wenn das u. I.  $\int_a^\infty f(x) dx$  absolut konvergiert, ist es auch konvergent. (Zur gleichmäßigen Konvergenz u. I. e vgl. Parameterintegral III.)

**V. Integrationsregeln für u. I. e.:** Da das u. I. eine Erweiterung des bestimmten I. s ist, gelten die Rechenregeln für bestimmte I. e nicht ohne weiteres auch für u. I. e. Für u. I. e über ein unbeschränktes Intervall gelten folgende Regeln und lassen sich auf andere u. I. e übertragen.

**V.1.** Sind die u. I. e der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  über das Intervall  $[a, \infty[$  konvergent, so sind auch die u. I. e der Funktionen  $[f(x) + g(x)]$  und  $kf(x)$  mit der Konstante  $k$  konvergent, und es gelten (25) und (26).

$$(25) \quad \int_a^\infty kf(x) dx = k \int_a^\infty f(x) dx$$

$$(26) \quad \int_a^\infty [f(x) + g(x)] dx = \int_a^\infty f(x) dx + \int_a^\infty g(x) dx$$

**V.2.** Ist  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  im Intervall  $[a, \infty[$  und existiert der Grenzwert von  $F(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ , so gilt (27).

$$(27) \quad \int_a^\infty f(x) dx = [F(x)]_a^\infty \\ \text{mit } [F(x)]_a^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} [F(x) - F(a)]$$

Im Falle des u. I. s über dem Intervall  $[a, b]$  einer in der Umgebung von  $x = b$  nicht beschränkten Funktion muß  $F(x)$  bei  $x = b$  stetig sein. Die Stammfunktion  $F(x) = (\frac{3}{2}) x^{2/3}$  z. B. ist für das Intervall  $]0, 1[$  eine Stammfunktion von  $f(x) = x^{-1/3}$ . Diese Stammfunktion  $F(x)$  ist bei  $x = 0$  stetig; es gilt deshalb (28).

$$(28) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = [\frac{3}{2} x^{2/3}]_0^1 = \frac{3}{2}$$

**V.3. Partielle Integration.** Haben  $u(x)$  und  $v(x)$  im Intervall  $[a, \infty[$  stetige Ableitungen, existiert

$\lim_{x \rightarrow \infty} [u(x) v(x)]$  und ist  $\int_a^\infty u'(x) v(x) dx$  konvergent, so ist auch  $\int_a^\infty u(x) v'(x) dx$  konvergent, und es gilt (29).

$$(29) \quad \int_a^\infty u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^\infty - \int_a^\infty u'(x) v(x) dx$$

Für jede natürl. Zahl  $n$  und einen beliebigen Parameter  $\alpha > 1$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ ; daher ist das I.  $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$  konvergent. Um es zu berechnen, setzt man  $u(x) = x^\alpha$ ,  $v(x) = -e^{-x}$  und integriert partiell, wie in (30) gezeigt.

$$(30) \quad \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx = [-x^\alpha e^{-x}]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ = n \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Durch wiederholtes partielles Integrieren findet man (31).

$$(31) \quad \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

**V.4. Substitutionsregel.** Wenn die Funktion  $f(z)$  für  $z \geq \alpha$  stetig ist, die Funktion  $z = g(x)$  im Intervall  $[a, b]$  eine stetige Ableitung mit  $g'(x) \neq 0$  hat und  $g(a) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$  gilt, so folgt (32), wenn eines der beiden I. e konvergiert.

$$(32) \quad \int_a^\infty f(z) dz = \int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$$

Das I. (33) z. B. ist konvergent, da es durch die Substitution  $z = 1/x$  in das I. (34) übergeht, das wegen (35) nach den Vergleichskriterien konvergiert, als Vergleichsfunktion kann  $g(x) = x^{-\alpha}$  mit  $1 < \alpha < 2$  verwendet werden. Es ergibt sich für das zu untersuchende I. (36).

$$(33) \quad \int_0^1 \frac{\ln z}{1+z^2} dz$$

$$(34) \quad \int_0^1 \frac{\ln z}{1+z^2} dz = \int_\infty^1 \frac{\ln(1/x)}{1+(1/x)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= - \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

$$(35) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} = 0$$

$$(36) \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx \\ = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0$$

**VI. Geometr. Bedeutung** eines u. I.s. Wenn die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  stetig, nichtnegativ und in der Umgebung von  $x = b$  nicht beschränkt ist, so ist der in Abb. 1 dargestellte Flächeninhalt durch das konvergente u. I.  $\int_a^b f(x) dx$  gegeben. Ist die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  bis auf  $x = c$  stetig, nicht negativ und in der Umgebung von  $x = c$  unbeschränkt, so ist der in Abb. 2 dargestellte Flächeninhalt durch das konvergente u. I.  $\int_a^b f(x) dx$  gegeben. Ist der Integrand  $f(x)$  für  $x \geq a$  stetig, nicht negativ und konvergiert  $\int_a^\infty f(x) dx$ , so liefert dieses I.

den in Abb. 3 dargestellten Flächeninhalt. S. a. Parameterintegral III.

**Integral, vollständiges**  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung II.  
**Integral einer Differentialgleichung**  $\nearrow$  Differentialgleichung,  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung I.  
**Integralgeometrie:** der Differentialgeometrie verwandter Zweig der höheren Mathematik, die hauptsächlich von Wilhelm BLASCHKE (1885–1962) und seinen Schülern entwickelt wurde. Sie untersucht Maße, die Mengen von geometr. Objekten in einem Raume zugeordnet werden können, z. B. hat die Menge der Geraden einer Ebene, die einen Kreis mit Radius  $r$  treffen, das invariante Maß  $2\pi r$ .

**Integralgleichung:** I. eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion, die im Integranden eines Integrals auftritt. Gleichung (1) z. B. ist

$$(1) \quad y(s) + \int_0^{2\pi} \cos(s+t) \cdot y(t) dt = \sin s, \\ 0 \leq s \leq 2\pi,$$

eine I. für  $y$  mit der Lösung  $y(s) = (\sin s)/(1 - \pi)$ . Dieses Beispiel gehört zur Klasse der *linearen I.en*, deren Theorie vollständig entwickelt ist; wichtige Teile dieser Theorie betreffen Lösbarkeitskriterien ( $\nearrow$  Fredholmsche Alternative), die Entwicklung von Funktionen nach *Eigenfunktionen* und Auflösungsformeln. Ersetzt man im Beispiel unter dem Integral  $y(t)$  etwa durch  $(y(t))^2$  oder  $|y(t)|$ , so entsteht eine *nichtlineare I.*; für diese I.en gibt es noch keine allgemeine Theorie. Die Untersuchungen über I.en gaben wesentl. Anstöße zur Entwicklung der *Funktionalanalysis*.

**II.** Eine *lineare I.* ist vom Typ (2); in ihr sind die Funktionen  $g, h$  und  $K$  vorgegeben, die Funktion  $y$  ist gesucht;  $h$  heißt die rechte Seite,  $K$  der Kern der I.;  $\lambda$  ist ein Parameter. Für  $h = 0$  heißt die I.

$$(2) \quad g(s) y(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) y(t) dt = h(s), \quad a \leq s \leq b$$

*homogen*, für  $h \neq 0$  *inhomogen*. Die homogene lineare I. hat stets die Funktion  $y = 0$  als *triviale Lösung*; eine etwa vorhandene nichttriviale Lösung  $\varphi$  heißt *Nulllösung, Eigenlösung* oder *-funktion* und der Parameterwert  $\lambda$  dann *Eigenwert*. Hat in diesem Falle die inhomogene Gleichung (2) eine Lösung  $y_0$ ,

so ist auch jede Funktion  $y = y_0 + c \cdot \varphi$  mit beliebiger Konstante  $c$  Lösung von (2). Im allg. sind Eigenwerte Ausnahmerecheinungen; sie entsprechen z. B. bei linearen I.en, die mechan. Systeme beschreiben, den Eigenschwingungsfrequenzen des Systems. I.en, die überhaupt keine Eigenwerte haben, sind z. B. die *Voltterraschen I.en* (3), in denen der Integrationsbereich variabel ist.

$$(3) \quad y(s) - \lambda \int_a^s K(s, t) y(t) dt = h(s)$$

**III.** Wenn in (2)  $g = 0$  ist, heißt die lineare I. von *erster Art*, für  $g \neq 0$  von *zweiter Art*, vor allem den Typ  $g = 1$  nennt man auch *Fredholmsche I.* In ihr wird der Kern  $K$  als stetig oder quadratisch summierbar vorausgesetzt ( $\nearrow$  Funktion, quadratisch summierbare).

Dann gelten die Fredholmschen Sätze über die Lösbarkeit ( $\nearrow$  Fredholmsche Alternative). Ist überdies der Kern symmetrisch, d. h. gilt  $K(t, s) = K(s, t)$  bzw. bei komplexem  $K$ :  $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$ , so existiert eine Folge von reellen Eigenwerten  $\lambda$ , mit einem  $\nearrow$  Orthonormalsystem  $\varphi$  von zugehörigen Eigenfunktionen  $\varphi_n$ , mit deren Hilfe sich jede in der

Form  $\psi(s) = \int_a^b K(s, t) \chi(t) dt$  *quellenmäßig* darstellbare Funktion in eine Fourierreihe ( $\nearrow$  Orthonormalsystem) entwickeln läßt. Wenn  $\lambda$  kein Eigenwert ist, kann die dann eindeutig bestimmte Lösung von (2) durch die *Resolvente*  $\Gamma$  nach Gleichung (4)

$$(4) \quad y(s) = h(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s, t; \lambda) h(t) dt$$

dargestellt werden.  $\Gamma$  läßt sich für genügend kleines  $|\lambda|$  durch die *Neumannsche Reihe*  $\Gamma(s, t; \lambda) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \lambda^2 K_3(s, t) + \dots$  berechnen; die *iterierten Kerne*  $K_n$  werden für  $n \geq 2$  rekursiv nach (5) durch Integration gewonnen.

$$(5) \quad K_2(s, t) = \int_a^b K(s, r) K(r, t) dr \\ K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, r) K(r, t) dr$$

**Integralglied**  $\nearrow$  Übertragungsglied I.  
**Integralgrenzwertsatz**  $\nearrow$  Moivre-Laplace, Satz von, II.

**Integralkosinus:** Bezeichnung für eine nichtelementare Funktion, die durch das uneigentliche Integral (1) definiert ist. Das Integral ist für  $x > 0$  konvergent. S. a. Entwicklung von Funktionen VII.

$$(1) \quad \text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

**Integralkriterium**  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen IX.

**Integralkrümmung**  $\nearrow$  Krümmung I.  
**Integrallogarithmus:** Bezeichnung für eine nichtelementare Funktion, die durch das Integral (1) de-

finit ist. Dieses uneigntl. Integral ist für  $0 < x < 1$  konvergent; für  $x > 1$  konvergiert es im Sinne des *Cauchyschen Hauptwerts* (↗ Integral, uneigentliches, I.4.), d. h., es gilt (2).

$$(1) \quad \text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Li}(x) &= \text{v. p.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right\} \end{aligned}$$

S. a. Entwicklung von Funktionen VII.; zahlen-theoretische Funktionen VI.

**Integraloperator:** ein Operator  $A$ , der jeder Funktion  $f(t)$  eines Funktionenraumes  $X$  (↗ Funktional-analysis) eine Funktion  $Af(t)$  eines Funktionen-raumes  $Y$  zuordnet, die durch Integration aus  $f$  und gewissen gegebenen Hilfsfunktionen gebildet wird. Ist  $K(s, t)$  eine quadratisch integrierbare Funktion, d. h., gilt (1) und ist  $g(t) \in L_2(a, b)$  (↗ Raum, normierter linearer), so definiert (2) einen linearen I., der den Hilbertraum  $L_2(a, b)$  stetig in sich abbildet. Len sind wichtige Hilfsmittel bei der Anwendung der Funktionalanalysis in der Theorie der Integralgleichungen. S. a. Operator, linearer, I.3.

$$(1) \quad \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt < \infty$$

$$(2) \quad Af(t) = g(t) - \int_a^b K(s, t) f(s) ds$$

**Integralsätze:** *Vektoranalysis* Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Dimensionen, in die die Operationen grad, div und rot wesentlich eingehen.

**I. Gauß-Ostrogradskischer Integralsatz** (1)

$$(1) \quad \iiint_G \text{div } \mathbf{V} dv = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Dabei ist  $G$  ein endl., einfach zusammenhängendes Gebiet im Raum und  $S$  seine Randfläche;  $\mathbf{n}$  bezeichnet den Einheitsvektor der nach außen gerichteten Normalen von  $S$ , der auf  $S$  stetig ist bis auf eventuell endlich viele Punkte oder Linien. Der Term  $d\sigma$  ist das *Oberflächenelement* von  $S$  und  $dv$  bezeichnet das *Volumenelement* von  $G$ . Schließlich ist  $\mathbf{V}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. In kartes. Koordinaten hat dieser Integralsatz die Form (2).

$$(2) \quad \begin{aligned} &\iiint_G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_S [u \cos(x, \mathbf{n}) + v \cos(y, \mathbf{n}) + w \cos(z, \mathbf{n})] d\sigma; \end{aligned}$$

$$\mathbf{V} = u(x, y, z) \mathbf{i} + v(x, y, z) \mathbf{j} + w(x, y, z) \mathbf{k}$$

Deutet man  $\mathbf{V}$  als das mit der Dichte multiplizierte Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, so wird der gesamte Masseverlust für das endl.

Gebiet  $G$  in der Zeiteinheit durch das Integral  $\iiint_G \text{div } \mathbf{V} dv$  gegeben. Das Integral  $\iint_S \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma$  bezeichnet die Masse, die über die Randfläche  $S$  von  $G$  in der Zeiteinheit abgeflossen ist, denn  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  gibt den Masseabfluß durch die Fläche  $d\sigma$  an. Auf diese Weise erhält der Gauß-Ostrogradskische Integralsatz eine einfache *hydrodynam. Interpretation*. Ist  $\text{div } \mathbf{V} = 0$ , so gilt  $\iint_S \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma = 0$ , d. h., durch

die Oberfläche fließt keine Masse ab. Dies entspricht völlig den Vorstellungen, die man von der Ergiebigkeit  $\text{div } \mathbf{V}$  hat.

Liegt der Punkt  $P_0$  in einem Gebiet  $G$ , das sich auf  $P_0$  zusammenzieht, so folgt (3) aus dem Gauß-

$$(3) \quad \text{div } \mathbf{V}(P_0) = \lim_{|G| \rightarrow 0} \frac{1}{|G|} \iint_S \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma$$

Ostrogradskischen Integralsatz, wenn  $|G| = \iiint_G dv$

bedeutet. Diese Beziehung benutzt man oft zur *koordinatenfreien Definition der Divergenz*. Um z. B.  $\text{div } \mathbf{V}(P_0)$  für  $\mathbf{V} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  und  $P_0(0, 0, 0)$  zu berechnen, wählt man als Gebiet  $G$  etwa eine Kugel  $K_r$  um  $P_0$  mit dem Radius  $r$  und läßt dann  $r$  gegen Null gehen. Es ergibt sich (4), da  $\mathbf{n} = (x/r)\mathbf{i} + (y/r)\mathbf{j} + (z/r)\mathbf{k}$  auf  $S_r$  ist. Folglich ist  $|K_r| = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$(4) \quad \begin{aligned} \iint_{S_r} \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma &= \iint_{S_r} \left( x \frac{x}{r} + y \frac{y}{r} + z \frac{z}{r} \right) d\sigma \\ &= r \iint_{S_r} d\sigma = 4\pi r^3 \end{aligned}$$

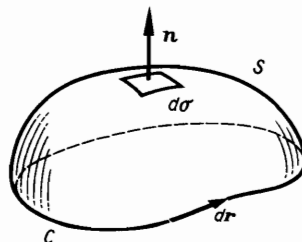
und es ergibt sich  $\text{div } \mathbf{V}(P_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3$ .

**II. Der Stokessche Integralsatz** hat die Form (5),

$$(5) \quad \oint_C \mathbf{V} d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{V} \mathbf{n} d\sigma$$

in kartes. Koordinaten die Gestalt (6) (s. a. Stokescher Satz). Dabei ist  $S$  ein Flächenstück mit der

$$(6) \quad \begin{aligned} &\oint_C u dx + v dy + w dz \\ &= \iint_S \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(x, \mathbf{n}) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(y, \mathbf{n}) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(z, \mathbf{n}) \right] d\sigma \end{aligned}$$



Zum Stokesschen Integralsatz



Randkurve  $C$  (Abb.). Der Normaleinheitsvektor  $\mathbf{n}$  von  $S$  ist auf  $S$ , eventuell mit Ausnahme von endlich vielen Punkten und Linien, stetig; ebenso wird die Tangente von  $C$  als stetig vorausgesetzt. Der positive Umlaufsinn der Randkurve  $C$  wird so eingerichtet, daß das Flächenstück  $S$  zur Linken liegt, wenn man  $S$  von der Seite aus betrachtet, in die  $\mathbf{n}$  hineinzeigt.  $V$  ist ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld. Das Integral  $\iint_S \operatorname{rot} V \mathbf{n} \, d\sigma$  hängt nach (5) nur von der Randkurve  $C$  ab, nicht von der speziellen Gestalt der in die Kurve  $C$  eingespannten Fläche  $S$ . Das Umlaufintegral  $\oint_C V \, d\mathbf{r}$  bezeichnet man als die *Zirkulation* von  $V$  längs  $C$ .

Denkt man sich durch einen Punkt  $P_0$  eine Ebene  $E$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  gelegt und auf dieser Ebene eine Kurve  $C$ , die den Punkt  $P_0$  im Innern enthält und das Flächenstück  $S$  auf  $E$  einschließt, so folgt (7) aus dem Stokesschen Integralsatz,

$$(7) \quad \operatorname{rot} V(P_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{|S| \rightarrow 0} \frac{1}{|S|} \oint_C V \, d\mathbf{r}$$

wenn sich die Kurve  $C$  auf  $P_0$  zusammenzieht und  $|S| = \iint_S d\sigma$  bezeichnet. Diese Beziehung benutzt

man oft zur *koordinateninvarianten Definition der Rotation*. Um z. B. die  $z$ -Komponente von  $\operatorname{rot} V(P_0)$  mit  $V = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  und  $P_0(0, 0, 0)$  zu berechnen, legt man durch  $P_0$  die Ebene  $z = 0$ , die den Vektor  $\mathbf{k}$  zum Normalenvektor  $\mathbf{n}$  hat, und wählt als Kurve  $C$  auf  $E$  den Kreis mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $P_0$ . Es ergibt sich (8). Wegen  $|S| = \pi r^2$  erhält man (9), und wegen  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  stellt  $\operatorname{rot} V(P_0) \cdot \mathbf{n}$  gerade die  $z$ -Komponente von  $\operatorname{rot} V(P_0)$  dar.

$$(8) \quad \oint_C V \, d\mathbf{r} = \oint_C (-y \, dx + x \, dy) \\ = \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi = 2\pi r^2$$

$$(9) \quad \operatorname{rot} V(P_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi r^2}{\pi r^2} = 2$$

III. Der *Greensche Integralsatz* (10) hat in kartesischen Koordinaten die Form (11). Dabei ist  $S$  die Rand-

$$(10) \quad \iint_S (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \cdot \operatorname{grad} U_2) \, dv \\ = \iint_S U_1 \operatorname{grad} U_2 \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

$$(11) \quad \iiint_G \left[ U_1 \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial x} \right. \\ \left. + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial z} \right] \, dv \\ = \iint_S U_1 \left[ \frac{\partial U_2}{\partial x} \cos(x, \mathbf{n}) + \frac{\partial U_2}{\partial y} \cos(y, \mathbf{n}) \right. \\ \left. + \frac{\partial U_2}{\partial z} \cos(z, \mathbf{n}) \right] \, d\sigma$$

fläche des einfach zusammenhängenden Gebietes  $G$  mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  als Normalenvektor,  $U_1, U_2$  sind zweimal stetig differenzierbare skalare Felder und  $\Delta$  bezeichnet den *Laplaceschen Operator* ( $\nabla$  Nablaoperator). Der *Greensche Integralsatz* folgt aus dem Gauß-Ostrogradskischen Integralsatz, wenn man dort  $V = U_1 \operatorname{grad} U_2$  setzt, denn  $\operatorname{div} V = U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \cdot \operatorname{grad} U_2$ . Die Gestalt (12) des *Greenschen Integralsatzes* erhält man, indem

$$(12) \quad \iiint_G (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) \, dv \\ = \iint_S (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

man in (10)  $U_1$  und  $U_2$  vertauscht und die beiden so erhaltenen Beziehungen voneinander subtrahiert. Ein sehr oft verwendeter Spezialfall (13) ergibt sich für  $U_1 = 1$  und  $U_2 = U$ .

$$(13) \quad \iiint_G \Delta U \, dv = \iint_S \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

**Integralsinus:** Bezeichnung für eine nichtelementare Funktion, die durch das eigentl. Integral (1) definiert ist. Das Integral ist für  $x \geq 0$  konvergent ( $\nabla$  Integral, uneigentliches, III., IV.). Es ist z. B.  $\operatorname{Si}(0) = -\pi/2$ . S. a. Entwicklung von Funktionen VII.

$$(1) \quad \operatorname{Si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt$$

**Integrand**  $\nabla$  Integral I.,  $\nabla$  Integral, komplexes, I. **Integraph**  $\nabla$  Integriergerät III.

**Integration, numerische:** I. zahlenmäßige Berechnung ein- oder mehrdimensionaler *bestimmter Integrale*. Die n. I. ist oft das einzige Mittel zur Bestimmung von Integralen, insbes. wenn keine geschlossene Stammfunktion angegeben werden kann, wenn die Funktion nur tabellarisch gegeben ist oder bei fast allen mehrdimensionalen Integralen. Nach Formel (1) für ein eindimensionales Integral erhält man eine *numerische Quadratur*, nach Gleichung (2) für die Berechnung mehrdimensionaler Integrale eine *numer. Kubatur*.

$$(1) \quad \int_a^b f(x) \, dx = J_a^b[f] + R_a^b[f]$$

$$(2) \quad \int \dots \int_{m\text{-fäch}} F(x_1, x_2, \dots, x_m) \, dx_1 \dots dx_m \\ = J_B[F] + R_B[F] \\ \text{für den Integrationsbereich } B$$

Der *Integrationsfehler* läßt sich bei vielen Formeltypen angeben und recht gut abschätzen. Im folgenden werden nur *numer. Quadraturen* betrachtet.

II. *Mittelwertsformeln der Integration.* Sind von einer Funktion  $y = f(x)$  die Funktionswerte  $y_i = f(x_i)$  an den  $n + 1$  Stützstellen  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  gegeben, so nimmt Gleichung (1) die spezielle Gestalt (3) an:

$$(3) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \frac{(b-a)}{p} \sum_{i=0}^n p_i y_i + R_a^b[f],$$

in der die  $p_i > 0$  mit  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = p$  Gewichte der  $y_i$  sind. Spezielle Formeln ergeben sich durch Annahmen über Anzahl und Lage der Stützstellen sowie über die Gewichte. Eine ganze Familie von Mittelwertsformeln mit Restabschätzung entsteht bei Integration des Lagrangeschen Interpolationspolynoms ( $\nearrow$  *Interpolation*) anstelle von  $f(x)$ . Für äquidistante Stützstellen stellt Gleichung (4) die *Newton-Cotes-Formeln*  $n$ -ter Ordnung dar. Sie enthalten für  $n = 1$  die *Trapezformel*, für  $n = 2$  die *Simpsonsche* oder *Keplersche Regel* und für  $n = 3$  die *Newtonsche 3/8-Regel*. Die Tabelle (5) gibt die Koeffizienten für  $n = 1$  bis  $n = 6$  an. Dabei inte-

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \frac{nh}{P_n} \sum_{j=0}^n f(a + jh) p_{jn} + R_n[f] \text{ mit}$$

$$P_n = \sum_{j=0}^n p_{jn}, h = \frac{b-a}{n}, a = x_0, b = x_n$$

Tabelle (5)

$n$	$P_n$	$P_{0n}$	$P_{1n}$	$P_{2n}$	$P_{3n}$	$P_{4n}$	$P_{5n}$	$P_{6n}$
1	2	1	1					
2	6	1	4	1				
3	8	1	3	3	1			
4	90	7	32	12	32	7		
5	288	19	75	50	50	75	19	
6	840	41	216	27	272	27	216	41

griert jede Formel  $n$ -ter Ordnung herleitungsgemäß ein beliebiges Polynom  $n$ -ten Grades *exakt* und heißt *Formel vom Grade  $n$* . Für die näherungsweise Integration beliebiger Funktionen wird man dennoch mit der Ordnung nicht über  $n = 7$  hinausgehen, weil dann die durch die Oszillation der Interpolationspolynome bedingten Zusatzfehler den Gewinn aufheben. Man integriert vielmehr mit Formeln niedriger Ordnung über Teilintervalle. Für die *Simpsonsche Regel* z. B. gilt speziell (6) mit  $y_j = f(a + jh)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2N$ ,  $h = (b-a)/2N$ .

$$(6) \int_a^b f(x) dx = (h/3) (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_{2N}) - h^5 f^{(4)}(\xi)/90;$$

$$a \leq \xi \leq b$$

**III. Gaußsche Quadraturverfahren** gehen zunächst davon aus, nur die Anzahl, aber nicht die Lage der Stützstellen vorzuschreiben. Dann kann man versuchen, die Gewichte und die Stützstellen so zu bestimmen, daß die Formel einen *möglichst hohen Grad* hat. Ist  $w(x)$  eine positive Gewichtsfunktion, so kann man Koeffizienten  $A_{in}$  und Stützstellen  $x_{in}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  stets eindeutig finden, so daß (7) gilt. Die Formel (7) ist vom Grade  $2n - 1$ .

$$(7) \int_a^b f(x) \cdot w(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{in} f(x_{in}) + \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) R_n$$

mit  $R_n = \int_a^b (x - x_{1n})^2 \dots (x - x_{nn})^2 \cdot w(x) dx$

Die *Stützstellen*  $x_{in}$  sind die Nullstellen des Polynoms vom Grade  $n$  aus der Familie der bzgl.  $w(x)$  *orthogonalen Polynome* ( $\nearrow$  *Approximation III.*), d. h.,

$$\int_a^b P_i(x) P_j(x) w(x) dx = 0 \text{ für } i \neq j. \text{ Die Gewichte}$$

$A_{in}$  sind die bewichtet integrierten zugehörigen *Lagrange-Polynome* ( $\nearrow$  *Interpolation*). Durch spezielle Wahl der Gewichtsfunktion ergeben sich die verschiedensten Formeln, deren jede für gewisse Integranden und Intervalle besonders geeignet ist.

In der *Gauß-Legendre-Quadratur* setzt man  $w(x) = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ , und die  $P_n(x)$  sind die *Legendre-Polynome*. Für die Gewichte gilt

$$A_{in} = [2(1 - x_{in}^2)] : [n^2 (P_{n-1}(x_{in}))^2] \text{ und für das Restglied } R_n = [2^{2n+1} (n!)^4] : [(2n+1) ((2n)!)^2].$$

Für  $n = 1, 2, 3$  ist  $x_{11} = 0$ ;  $x_{12} = -x_{22} = 0,5773503$ ;  $x_{13} = -x_{33} = 0,7745967$ ,  $x_{23} = 0$  und  $A_{11} = 2$ ;  $A_{12} = A_{22} = 1$ ;  $A_{13} = A_{33} = 0,5555556$ ,  $A_{23} = 0,8888889$ .

In der *Gauß-Tschebyschow-Quadratur* setzt man  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ , und die  $P_n(x)$  sind die *Tschebyschow-Polynome*  $T_n(x)$ . Für die Gewichte gilt  $A_{in} = \pi/n$  für alle  $i$ ; für die Stützstellen  $x_{in} = \cos [(2i - 1) \pi / (2n)]$  und für das Restglied  $R_n = 2\pi/2^{2n}$ . Die Gauß-Quadratur ist immer dann günstig, wenn die Funktion durch einen berechenbaren Ausdruck definiert ist. In anderen Fällen muß man doch zu den ungenaueren, aber einfacheren Newton-Cotes-Formeln greifen.

(8)

$x_i$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$y_i$	0	0,25882	0,50000	0,70711	0,86603	0,96593	1

*Beispiel 1:* Für  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = A$  gilt  $A = 1$  als exakter Wert.

Nach den *Newton-Cotes-Formeln* ergibt nach der Tabelle (8) die *Trapez-Regel* für  $n = 1$ :

$$A_T = (\pi/24) \cdot K_1 = 0,99429 \text{ mit } K_1 = 0 + 2 \cdot 0,25882 + 2 \cdot 0,50000 + 2 \cdot 0,70711 + 2 \cdot 0,86603 + 2 \cdot 0,96593 + 1;$$

die *Simpson-Formel* für  $n = 2$  dagegen:

$$A_S = (\pi/36) \cdot K_2 = 1,00003 \text{ mit } K_2 = 0 + 4 \cdot 0,25882 + 2 \cdot 0,50000 + 4 \cdot 0,70711 + 2 \cdot 0,86603 + 4 \cdot 0,96593 + 1.$$

Die *Newton-Cotes-Formel* für  $n = 6$  (vgl. Tabelle (5)) ergibt  $A_6 = (\pi/1680) \cdot K_6 = 1,000003$  mit  $K_6 = 0 + 216 \cdot 0,25882 + 27 \cdot 0,50000 + 272 \cdot 0,70711 + 27 \cdot 0,86603 + 216 \cdot 0,96593 + 41 \cdot 1,0$ .

Zur *Gauß-Legendre-Quadratur* mit  $n = 2$  wird das gegebene Integral mit  $t = \pi(x + 1)/4$  auf das Intervall  $[-1, 1]$  transformiert und lautet:

$$A_G = (\pi/4) \int_{-1}^1 \sin [\pi(x + 1)/4] dx. \text{ Man erhält}$$

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = (3xP_1(x) - P_0(x))/2 = 3x^2/2 - 1/2; x_{12} = -\sqrt{1/3}, x_{22} = \sqrt{1/3}; A_{12} = [2(1 - 1/3)] / (4 \cdot 1/3) = A_{22} = 1. \sin [\pi(1 - \sqrt{1/3})/4] = 0,32589, \sin [\pi(1 + \sqrt{1/3})/4] = 0,94541. A_G = \pi(0,32589 + 0,94541)/4 = 0,99848. Dies ist ein für eine Formel mit zwei Stützstellen$$

bemerkenswert gutes Ergebnis — ein Hinweis auf die Bedeutung der Gauß-Quadratur.

Beispiel 2: 
$$\int_{-1}^1 \left( \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = A.$$

Zur Gauß-Tschebyschow-Quadratur wählt man  $n = 3$ , dann ist  $2n - 1 = 5$ , und das Ergebnis muß exakt sein. Das Tschebyschow-Polynom  $T_3(x) = 4x^3 - 3x$  hat die Nullstellen  $x_{13} = 0, x_{23} = \frac{1}{2} \sqrt{3}, x_{33} = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$ , und damit ist  $A_G = \frac{1}{3} \pi (0 + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}) = \frac{3}{8} \pi = A$  das bekannte exakte Ergebnis.

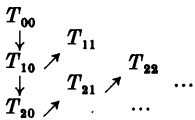
IV. Die Romberg-Integration ist bes. für Rechenautomaten geeignet. Durch Linearkombination einfachster Näherungsformeln wird mit ihr bei fortgesetzter Intervallunterteilung hohe Genauigkeit erzielt. Ist durch (9) eine lineare Integrationsformel  $(n - 1)$ -ten Grades gegeben, dann ist (10) eine Formel vom Grade  $n$ , wenn  $p = -1/(2^n - 1)$  und  $q = 2^n/(2^n - 1)$  ist (Abb.).

(9) 
$$\int_0^1 f(x) dx = J_0^l[f] + R_0^l[f]$$

(10) 
$$\int_0^1 f(x) dx = p J_0^{2^l}[f] + q (J_0^{2^l}[f] + J_1^{2^l}[f]) + R^l[f]$$

Für die prakt. Rechnung operiert man nicht mit den Formeln, sondern berechnet sogleich Zahlenwerte nach einem einprägsamen Schema (11) und (12). Spalten und Schrägreihen konvergieren gegen den Integralwert. Numerisch bricht man ab, wenn sich „ein Nest“ gleicher Werte einstellt.

(11) 
$$k = 0 \quad k = 1 \quad k = 2 \quad \dots$$

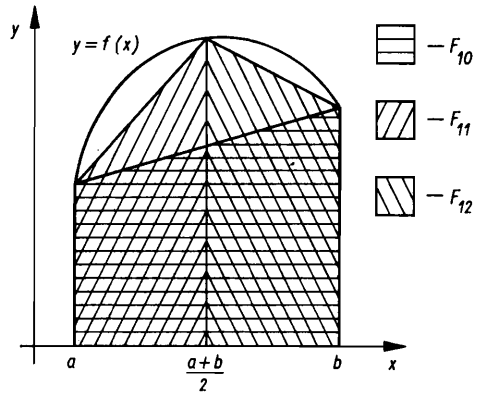


(12) 
$$T_{i0} = \frac{b-a}{2^{i+1}} \left[ f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{2^i-1} f \left( a + j \frac{b-a}{2^i} \right) \right],$$

$$T_{ik} = \frac{2^{2k} T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{2^{2k} - 1} \text{ für } k = 1, 2, \dots, i = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel: 
$$\int_1^2 (e^x/x) dx \approx 3,059116.$$

3,2				
	3,06			
3,09		3,0591		
	3,059		3,05911	
3,07		3,05911		3,059116
	3,0591		3,059116	
3,06		3,059116		



$$\int_a^b f(x) dx = -\frac{1}{3} F_{10} + \frac{4}{3} (F_{11} + F_{12})$$

Integration, numerische: Exakte Integration einer quadrat. Funktion durch Trapezsummen

Integration, partielle ↗ Integral IV.2., ↗ Integral, uneigentliches V.3.

Integration durch Reihenentwicklung ↗ Integral II.5.

Integration einer Differentialgleichung ↗ Differentialgleichung, ↗ gewöhnliche Differentialgleichung I.

Integration eines totalen Differentials ↗ Kurvenintegral III.2.

Integration spezieller Funktionenklassen: I. Das unbestimmte Integral einer rationalen Funktion (1) ist eine Linearkombination aus folgenden Funktionen: aus rationalen Funktionen, aus Logarithmen linearer Funktionen, aus Logarithmen quadrat. Funktionen und aus Arkustangensfunktionen linearer Funktionen. — Ist  $r(x)$  eine unecht gebrochene

(1) 
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

rationale Funktion, d. h., der Grad  $n$  des Zählers  $p(x)$  ist nicht kleiner als der Grad  $m$  des Nenners  $q(x)$ , so läßt sich mittels Polynomdivision zunächst eine ganzrationale Funktion abspalten:  $r(x) = P(x) + p_1(x)/q(x)$ . Das Polynom  $P(x)$  kann als ganzrationale Funktion integriert werden, und die echt gebrochenrationale Funktion  $r_1(x) = p_1(x)/q(x)$ , in der der Grad des Zählers kleiner als der des Nenners ist, wird in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt, die eine der Formen (2) haben.

(2) 
$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ oder } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}$$
 mit  $p^2 - 4q < 0$ ;  $A, B, C, a, p, q$  reell;  $k > 0$  ganz,  $l > 0$  ganz

Da jeder von ihnen eine integrierbare Funktion ist, kann ihre Summe integriert werden. Die Partialbrüche der ersten Art gehören zu reellen Nullstellen, die der zweiten Art zu komplexen Nullstellen des Nennerpolynoms  $q(x)$  der rationalen Funktion  $r_1(x)$ .

Die *Integration der Partialbrüche* zu reellen Nullstellen ist in (3) zusammengefaßt. Das Integral

$$(3) \int \frac{A dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} A \ln |x-a| + C, & \text{falls } k = 1 \\ -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, & \text{falls } k > 1 \end{cases}$$

eines Partialbruchs zu einer komplexen Nullstelle wird durch die Umformung  $Bx + C = \frac{1}{2}B(2x + p) + (C - \frac{1}{2}pB)$  des Zählers in die Summe (4) zerlegt.

$$(4) \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^l} dx = \frac{1}{2}B \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^l} dx + (C - \frac{1}{2}pB) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l}$$

Im ersten Summanden ist der Zähler des Integranden die Ableitung der Potenzbasis des Nenners, durch die Substitution  $z = x^2 + px + q$  kann dieser Summand integriert werden. Man erhält (5).

$$(5) \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^l} dx = \int \frac{dz}{z^l} = \begin{cases} \ln |z| + C, & \text{falls } l = 1 \\ -\frac{1}{l-1} \cdot \frac{1}{z^{l-1}} + C, & \text{falls } l > 1 \end{cases}$$

Für die weitere Behandlung wird der Nenner des Integrals (6) nach (7) umgeformt.

$$(6) I_l = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l}$$

$$(7) x^2 + px + q = \frac{4q - p^2}{4} \left[ 1 + \left( \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right)^2 \right]$$

Für  $l > 1$  gewinnt man aus dem Ansatz (8) die Rekursionsformel (9), indem man die zunächst un-

$$(8) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^l} = \frac{c_1 x + c_2}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + c_3 \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{l-1}}$$

$$(9) I_l = \frac{1}{(l-1)(4q - p^2)} \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q - p^2)} I_{l-1}$$

stimmten Konstanten  $c_1, c_2, c_3$  durch Koeffizientenvergleich bestimmt, nachdem auf beiden Seiten differenziert und mit  $(x^2 + px + q)^l$  durchmultipliziert wurde. Aus (10) findet man (11) für die

$$(10) 1 = -(l-1)(c_1 x + c_2)(2x + p) + (c_1 + c_3)(x^2 + px + q)$$

$$(11) c_1 = \frac{p}{(l-1)(4q - p^2)}, c_2 = \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q - p^2)}$$

$$c_3 = \frac{p}{(l-1)(4q - p^2)}, c_3 = \frac{2(2l-3)}{(l-1)(4q - p^2)}$$

Konstanten  $c_1, c_2, c_3$  und damit (9). Nach dieser *Rekursionsformel* wird die Integration von (6) zurückgeführt auf die von (12). Dieses Integral geht aber mittels der Substitution  $z = \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}$  über in (13) mit Arkustangens als Stammfunktion.

$$(12) I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$(13) I_1 = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan z + C = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

**I.1.** In der gebrochenrationalen Funktion (14) z. B. hat das Nennerpolynom  $q(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)^2$  die reellen, einfachen Nullstellen  $x_1 = 1, x_2 = -1$  und die komplexen zweifachen Nullstellen  $x_3 = i$  und  $x_4 = -i$ . Daraus ergibt sich die Partialbruchzerlegung (14).

$$(14) \frac{x + 2}{x^6 + x^4 - x^2 - 1} = \frac{3/8}{x-1} + \frac{-1/8}{x+1} + \frac{(-1/4)x - 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{(-1/4)x - 1/2}{x^2 + 1}$$

Bei der Integration der ersten beiden Partialbrüche ergeben sich (15) und (16). Die Integration des dritten Partialbruchs liefert (17), die des vierten Partialbruchs (18); nach der Rekursionsformel (9) folgt (19), und nach (13) folgt (20).

$$(15) \int \frac{(3/8) dx}{x-1} = 3/8 \ln |x-1|$$

$$(16) \int \frac{-1/8 dx}{x+1} = -1/8 \ln |x+1|$$

$$(17) \int \frac{(-1/4)x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = -1/4 \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 1/4 \frac{1}{x^2 + 1} - I_2$$

$$(18) \int \frac{(-1/4)x - 1/2}{x^2 + 1} dx = -1/8 \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - 1/2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -1/8 \ln(x^2 + 1) - 1/2 I_1$$

$$(19) I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 1/4 \frac{2x}{x^2 + 1} + 1/2 I_1$$

$$(20) I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x$$

Insgesamt ergibt sich (21).

$$(21) \int \frac{x + 2}{x^6 + x^4 - x^2 - 1} dx = 3/8 \ln |x-1| - 1/8 \ln |x+1| + 1/4 \frac{1}{x^2 + 1} - 1/2 \frac{x}{x^2 + 1} - 1/8 \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C$$

**I.2.** Der Nenner der rationalen Funktion  $1/(x^4 + 1)$  hat keine reellen Nullstellen. Wegen der Zerlegung  $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$  ergibt sich die Partialbruchzerlegung (22).

$$(22) \quad \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man  $B_1 = 1/(2\sqrt{2}), C_1 = 1/2, B_2 = -1/(2\sqrt{2}), C_2 = 1/2$ . Nach den Formeln (4), (5) und (13) erhält man für die einzelnen Partialbrüche (23), (24), insgesamt also (25).

$$(23) \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx = 1/(2\sqrt{2}) \{ \frac{1}{2} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} + 1) \}$$

$$(24) \quad \frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx = -1/(2\sqrt{2}) \{ \frac{1}{2} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \arctan(x\sqrt{2} - 1) \}$$

$$(25) \quad \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\arctan(x\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}} + \frac{\arctan(x\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2}} + C$$

**II. Integration binom. Integrale** von Funktionen  $x^m(a + bx^n)^p$ , in denen  $m, n, p$  rationale Zahlen und  $a, b$  beliebige Konstante sind. Sie lassen sich genau dann durch elementare Funktionen darstellen, wenn eine der Zahlen  $p, (m + 1)/n, [(m + 1)/n + p]$  ganz ist. Ist  $p$  ganz und  $r$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von  $m$  und  $n$ , so führt die Substitution  $t = \sqrt[r]{x}$  auf das Integral einer rationalen Funktion (vgl. I.). Falls  $(m + 1)/n$  ganzzahlig und  $v$  der Nenner des Bruches  $p$  ist, so wird man durch die Substitution  $t = \sqrt[v]{a + bx^r}$  auf das Integral einer rationalen Funktion geführt, und wenn schließlich  $[(m + 1)/n + p]$  ganz ist, so leistet dies die Substitution  $t = \sqrt[(a + bx^r)]{x^n}$ .

**II.1.** Im Integral (26) ist  $m = -1/2, n = 1/4, p = 1/3$ , d. h.,  $(m + 1)/n = 2$  ganz. Durch die Substitution  $t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}, x = (t^3 - 1)^4, dx = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt$  erhält man (26).

$$(26) \quad \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}(1 + x^{1/4})^{1/3} dx = 12 \int (t^6 - t^3) dt = 3/7 t^4 (4t^3 - 7) + C$$

**III. Integration von Funktionen**  $R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})$  mit  $a \neq 0$ , die sich als rationale Funktion von  $x$  und einer Wurzel aus einem Polynom zweiten Grades in  $x$  darstellen lassen. Ihre Integration kann auf zwei Wegen auf die Integration einer rationalen Funktion (vgl. I.) zurückgeführt werden.

**III.1.** Nach der Umformung  $ax^2 + 2bx + c = (1/a)(ax + b)^2 + (ac - b^2)/a$  sind die Fälle  $ac - b^2 > 0, ac - b^2 = 0, ac - b^2 < 0$  zu unterscheiden.

**III.1.a)** Ist  $ac - b^2 > 0$ , so ergibt die Substitution  $t = (ax + b)/\sqrt{ac - b^2}$  zunächst ein Integral der Gestalt  $\int R_1(t, \sqrt{t^2 + 1}) dt$ . Durch die Substitution  $t = \sinh u$  geht ihr Integrand in eine Funktion  $R_2(\sinh u, \cosh u)$  über, die nach VI. integriert werden kann.

**III.1.b)** Ist  $ac - b^2 = 0$ , so läßt sich die Wurzel im Integranden ziehen, und man erhält das Integral einer rationalen Funktion (vgl. I.).

**III.1.c)** Ist  $ac - b^2 < 0$ , so erhält man durch die Substitution  $t = (ax + b)/\sqrt{b^2 - ac}$  wegen (27) Integrale der Gestalt (28). Substituiert man im

$$(27) \quad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \begin{cases} \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a}} \sqrt{t^2 - 1}, & \text{falls } a > 0, \\ \sqrt{\frac{b^2 - ac}{-a}} \sqrt{1 - t^2}, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$$(28) \quad \int R_1(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt \text{ bzw. } \int R_1(t, \sqrt{1 - t^2}) dt$$

ersten Integral  $t = \cosh u$  und im zweiten Integral  $t = \cos u$ , so bleibt die Integration einer in  $\sinh u$  und  $\cosh u$  rationalen Funktion  $R_2(\sinh u, \cosh u)$  bzw. die Integration einer in  $\sin u$  und  $\cos u$  rationalen Funktion  $R_3(\sin u, \cos u)$ , die nach VI. bzw. V. möglich ist.

**III.2.** Im Integral (29) z. B. ergibt sich aus  $a = 1, b = 1, c = 0$  der Wert  $ac - b^2 = -1 < 0$ .

$$(29) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

Die aufeinanderfolgenden Substitutionen  $t = x - 1$  und  $t = \cosh u$  mit  $dt = \sinh u du$  ergeben (30).

$$(30) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int du = u + C$$

Keht man zur ursprüngl. Variablen zurück, so ergibt sich (31) wegen des Zusammenhangs  $\operatorname{arcosh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$  der Areafunktion mit dem Logarithmus.

$$(31) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}} = u + C = \operatorname{arcosh} t + C = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}) + C$$

**III.3.** Die Integration kann auch durch eine der drei Eulerschen Substitutionen (32) sofort auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt werden.

$$(32.a) \quad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = t - \sqrt{a}x, \text{ wenn } a > 0$$

$$(32.b) \quad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = xt + \sqrt{c}, \text{ wenn } c > 0$$

$$(32.c) \quad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = t(x - \alpha), \text{ wenn das Polynom } ax^2 + 2bx + c \text{ die beiden verschiedenen Nullstellen } \alpha \text{ und } \beta \text{ hat.}$$

III.4. Integrale der speziellen Gestalt (33), in denen

$$(33) \int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} dx$$

$p_n(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades bezeichnet, lassen sich auf das einfachere Integral (34) zurückführen,

$$(34) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

indem man mit einem Polynom  $p_{n-1}(x)$  vom Grad  $n - 1$ , dessen Koeffizienten unbestimmt sind, den Ansatz (35) macht; der Ansatz wird differenziert,

$$(35) \int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} dx = p_{n-1} \sqrt{ax^2 + 2bx + c} + A \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

mit  $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$  multipliziert, und die unbestimmten Koeffizienten werden durch einen Koeffizientenvergleich ermittelt.

Für das Integral  $I = \int f(x) dx$  mit der Funktion  $f(x)$  aus (36) geht der Ansatz (37) durch Differenzieren in (36) über. Multiplikation mit  $\sqrt{x^2 - 2x}$  und

$$(36) f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x}} = (2ax + b) \sqrt{x^2 - 2x} + (ax^2 + bx + c) \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} + \frac{A}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$(37) I = (ax^2 + bx + c) \sqrt{x^2 - 2x} + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

Koeffizientenvergleich liefert  $a = 1, b = -3/2, c = -1/2, A = -1/2$ . Wegen (31) ergibt sich schließlich (38).

$$(38) I = (x^2 - 3x/2 - 1/2) \sqrt{x^2 - 2x} - 1/2 \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}) + C$$

Um das Integral  $\int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx$  zu berechnen, kann man es in der Form (35) mit  $p_2(x) = ax^2 + 2bx + c$  schreiben und erhält (39). Für das ver-

$$(39) \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx = \frac{ax + b}{2a} \sqrt{p_2(x)} + \frac{ac - b^2}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{p_2(x)}}$$

bleibende Integral ergeben sich nach den vorangehenden Methoden (40) und (41).

$$(40) \int \frac{dx}{\sqrt{p_2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{ax + b}{\sqrt{a}} + \sqrt{p_2(x)} \right| + C, \text{ falls } a > 0, b^2 - ac \neq 0, p_2(x) > 0$$

$$(41) \int \frac{dx}{\sqrt{p_2(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}} + C, \text{ falls } a < 0, b^2 - ac > 0$$

IV. Integration von Funktionen  $R(x, \sqrt[3]{ax + b})$ :

Durch die Substitution  $t = \sqrt[3]{ax + b}$  geht das Integral  $\int R(x, \sqrt[3]{ax + b})$  über in das Integral einer rationalen Funktion. In (42) ist z. B.  $a = b = 1, n = 2$ , und die Substitution  $t = \sqrt{x + 1}$  liefert ein Integral einer rationalen Funktion.

$$(42) \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt$$

Analog führt man Integrale von Funktionen  $R(x, \sqrt[3]{(ax + b)/(cx + d)})$  mit  $ad - bc \neq 0$  durch die Substitution  $t = \sqrt[3]{(ax + b)/(cx + d)}$  in Integrale rationaler Funktionen über, z. B. in (43) durch  $t = \sqrt{(1-x)/(1+x)}$ .

$$(43) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} = \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt$$

Enthält der Integrand mehrere Wurzeln des Radikanden  $(ax + b)/(cx + d)$  mit verschiedenen Wurzel-exponenten  $n, m, \dots$ , so führt die Substitution  $t = \sqrt[3]{(ax + b)/(cx + d)}$  zum Ziel, wenn man für  $r$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Wurzel-exponenten  $n, m, \dots$  wählt.

V. Integration von Funktionen  $R(\sin x, \cos x)$ : Die Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  lassen sich wegen (44) durch die Variable  $t = \tan(x/2)$  ausdrücken.

$$(44) \cos x = 2 \cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + t^2} - 1 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = 2 \tan(x/2) \cos^2(x/2) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Daher führt die Substitution  $t = \tan(x/2), dt = 1/2 [1 + \tan^2(x/2)] dx = 1/2 (1 + t^2) dx$  das gegebene Integral in ein Integral (45) über, das rational in  $t$

$$(45) \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

ist. In (46) ist ein Beispiel nach dieser Methode durchgerechnet.

$$(46) \int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 + 2t/(1+t^2)}{1 - (1-t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{2dt}{(1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2 dt}{t^2(1+t^2)} = \int \left[ \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2t}{1+t^2} \right] dt = 2 \ln |t| - 1/t - \ln(1+t^2) + C = \ln [t^2/(1+t^2)] - 1/t + C = \ln \sin^2(x/2) - \cot(x/2) + C$$

In bes. Fällen kommt man durch andere Substitutionen schneller zum Ziel:

**V.1.** Gilt für die rationale Funktion  $R(u, v)$  der beiden Variablen  $u$  und  $v$  im Integranden eine der Bedingungen (47a), (47b) oder (47c), so führt die angegebene Substitution auf die Integration einer rationalen Funktion.

(47a)  $R(-u, v) = -R(u, v)$ :  
Substitution  $t = \cos x$

(47b)  $R(u, -v) = -R(u, v)$ :  
Substitution  $t = \sin x$

(47c)  $R(-u, -v) = R(u, v)$ :  
Substitution  $t = \tan x$

Das Integral aus (48) kann z. B. wegen  $R(-u, v) = -R(u, v)$  durch die Substitution  $t = \cos x$ , das Integral aus (49) wegen  $R(-u, -v) = R(u, v)$  durch die Substitution  $\tan x$  in ein Integral einer rationalen Funktion übergeführt werden.

(48) 
$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = - \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2t^2} + C$$

$$= \frac{1}{2 \cos^2 x} + C$$

(49) 
$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{1 + (bt/a)^2} = 1/(ab) \arctan (bt/a) + C$$

$$= 1/(ab) \arctan [(b/a) \tan x] + C$$

**V.2.** Besteht der Integrand nur aus einer Potenz einer der beiden Funktionen  $\sin x, \cos x$ , so gelten für natürl. Zahlen  $n \geq 1$  die Beziehungen aus (50) bis (53).

(50) 
$$\int \cos^{2n+1} x dx = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{\sin^{2\nu+1} x}{2\nu+1} + C$$

(51) 
$$\int \sin^{2n+1} x dx = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} \frac{\cos^{2\nu+1} x}{2\nu+1} + C$$

(52) 
$$\int \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2^n} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{n-\nu} \binom{2n}{\nu} \sin 2(n-\nu)x + \binom{2n}{n} x \right\} + C$$

(53) 
$$\int \sin^{2n} x dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \left\{ (-1)^n \binom{2n}{n} x + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{1}{n-\nu} \binom{2n}{\nu} \sin 2(n-\nu)x \right\} + C$$

**V.3.** Falls im Integral  $\int \sin^n x \cos^m x dx$  die ganzen Zahlen  $n$  bzw.  $m$  ungerade sind, führt die Substitution  $t = \cos x$  bzw.  $t = \sin x$  zum Ziel, dagegen substituiert man  $t = \tan x$ , falls beide Exponenten gerade sind. Sind beide Exponenten positiv und gerade, so kann man die Umformungen (54) be-

(54) 
$$2 \sin x \cos x = \sin 2x, 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x,$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

nutzen, wie z. B. in (55).

(55) 
$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$$

**V.4.** Für Integranden der in (56a), (56b) und (56c) gen. Formen gelten die angegebenen Resultate, falls  $\alpha \neq \beta$ .

(56a) 
$$\int \cos \alpha x \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta} + \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{\alpha - \beta} \right] + C$$

(56b) 
$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta} + \frac{\cos(\alpha - \beta)x}{\alpha - \beta} \right] + C$$

(56c) 
$$\int \sin \alpha x \sin \beta x dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{\alpha + \beta} - \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{\alpha - \beta} \right] + C$$

**VI.** Integration von Funktionen  $R(\sinh x, \cosh x)$ . Drückt man in diesen Integralen die Hyperbelfunktionen mittels (57a), (57b) durch die Exponentialfunktion aus und substituiert  $t = e^x$ , so erhält man das Integral einer rationalen Funktion wie z. B. in (57c).

(57a) 
$$2 \sinh x = (e^x - e^{-x})$$

(57b) 
$$2 \cosh x = (e^x + e^{-x})$$

(57c) 
$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= 2 \int \frac{1}{t + t^{-1}} \frac{dt}{t} = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= 2 \arctan t + C = 2 \arctan e^x + C$$

**VII.** Integration von Funktionen  $R(e^{mx}, e^{nx}, \dots, e^{px})$ , in denen  $m, n, \dots, p$  rationale Zahlen sind. Wird  $t = e^x$  substituiert, geht  $\int R(e^{mx}, e^{nx}, \dots, e^{px}) dx$  über in ein Integral  $\int R(t^m, t^n, \dots, t^p) \frac{dx}{t}$ , das durch die

Substitution  $u = \sqrt[r]{t}$  auf das Integral einer rationalen Funktion führt, wenn  $r$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der rationalen Zahlen  $m, n, \dots, p$  ist.

**VIII.** Integration von Funktionen  $p(x) \sin(\alpha x + \beta), p(x) \cos(\alpha x + \beta), p(x) e^{\alpha x}, p(x) e^{\alpha x} \sin(\alpha x + \beta), p(x) e^{\alpha x} \cos(\alpha x + \beta)$ , wenn  $p(x)$  ein Polynom in  $x$  ist. Die Integrale dieser Funktionen lassen sich durch ein- oder mehrfache partielle Integration berechnen, wie sich aus einigen Beispielen ergibt.

**VIII.1.** In (58) erhält man z. B. für das Integral

(58) 
$$\int p(x) e^{\alpha x} dx = (1/\alpha) p(x) e^{\alpha x} - (1/\alpha) \int p'(x) e^{\alpha x} dx \quad \text{für } \alpha \neq 0$$

links die rechte Seite durch partielle Integration und damit das Integral einer Funktion mit einem Polynom, dessen Grad um eine Einheit kleiner ist. Bei mehrfacher partieller Integration bleibt schließlich  $\int e^{\alpha x} dx$  übrig.

VIII.2. Auch die Beziehung (59) ist durch partielle Integration gewonnen worden. Eine nochmalige

$$(59) \int e^{ax} \sin(ax + \beta) dx = -\frac{1}{a} e^{ax} \cos(ax + \beta) + \frac{1}{a} \int e^{ax} \cos(ax + \beta) dx \text{ für } a \neq 0$$

partielle Integration in dem Integral in (59) ergibt (60), und durch Zusammenfassen des gesuchten Integrals auf beiden Seiten der Gleichung erhält man (61).

$$(60) \int e^{ax} \sin(ax + \beta) dx = -\frac{1}{a} e^{ax} \cos(ax + \beta) + \frac{1}{a^2} e^{ax} \sin(ax + \beta) - \frac{1}{a^2} \int e^{ax} \sin(ax + \beta) dx$$

$$(61) \int e^{ax} \sin(ax + \beta) dx = \frac{a \sin(ax + \beta) - \cos(ax + \beta)}{a^2 + \alpha^2} e^{ax} + C$$

IX. Integration von Funktionen  $r'(x) \ln(x)$ ,  $r'(x) \arctan x$ ,  $r'(x) \arcsin x$ , wenn  $r'(x)$  die Ableitung der bekannten rationalen Funktion  $r(x)$  ist. Durch partielle Integration entstehen die Gleichungen (62), (63), (64), und damit bleibt als Aufgabe die Integration einer rationalen Funktion bzw. die Integration einer Funktion vom Typ  $R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})$ , für die in I. und III. Verfahren angegeben worden sind. Im Integral  $\int x \arctan x dx$  z. B. ist  $r(x) = \frac{1}{2}x^2$ , daher folgt (65), und es gilt (66).

$$(62) \int r'(x) \ln x dx = r(x) \ln x - \int r(x) \frac{dx}{x}$$

$$(63) \int r'(x) \arctan x dx = r(x) \arctan x - \int r(x) \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$(64) \int r'(x) \arcsin x dx = r(x) \arcsin x - \int r(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(65) \int x \arctan x dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$(66) \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \int \frac{(1 + x^2) - 1}{1 + x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1 + x^2} = x - \arctan x + C$$

Integrationsregeln ↗ Integral II., IV., ↗ Integral, uneigentliches, V.

Integrationssatz ↗ Laplacetransformation II.3.

Integrationsweg ↗ Integral, komplexes, I.

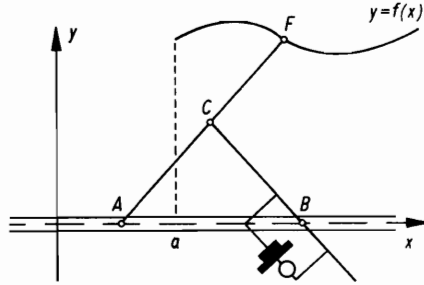
Integrator swv. Integriergerät. — *Rechentchnik* ↗ Analogrechner I., III., ↗ Programmierung des Analogrechners III.

Integratorplatte ↗ Programmierung des Analogrechners I.1.

integrierender Faktor ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.6.

Integriergerät, Integrator: Instrument zur mechan. Auswertung von Integralen. —

I. *Integrimeter* liefern den Wert des Integrals  $\int_a^x f(t) dt$  in Abhängigkeit von der oberen Grenze, wenn das graph. Bild der Funktion  $y = f(x)$  vorliegt. Weit verbreitet ist das Integrimeter von ORT, das aus zwei Stäben  $AF$  und  $BC$  mit  $|AF| = 2|BC|$  besteht, die im Mittelpunkt  $C$  der Strecke  $AF$  gelenkig miteinander verbunden sind (Abb.). Die



Integriergerät: Schematische Darstellung des Integrimeters von Ort

Endpunkte  $A$  und  $B$  sind als Zapfen ausgebildet und gleiten in einer mit der  $x$ -Achse zur Deckung zu bringenden Nut. An dem Stab  $BC$  ist eine Meßrolle mit Nonius und Zählsscheibe so angebracht, daß ihre Achse parallel zu  $BC$  ist und ihre Ebene durch  $B$  geht;  $F$  trägt einen Fahrstift oder eine Fahrleupe mit Markierung. Mit  $F$  wird die Kurve  $y = f(x)$  abgefahren; stellt man vor Beginn der Befahrung die Meßrolle auf Null, dann liefert die Meßrollenablesung nach Multiplikation mit einer Geräte-

konstanten für jedes zulässige  $x$  den Wert  $\int_a^x f(t) dt$ .

Durch zusätzl. Getriebeelemente kann dieses *Grundintegrimeter* zu einem Gerät für die Auswertung von

Integralen der Form  $\int_a^x u(f(t)) dt$ , d. h. zu einem

*Funktionsintegrimeter*, ausgebaut werden. —

II. *Radialplanimeter* (↗ Planimeter III.) sind Integrimeter für Kurven, die in einem Polarkoordinatensystem gezeichnet vorliegen. Beim *Grundradialplanimeter* für Integrale der Form  $\int r(\alpha) d\alpha$

ist ein Fahrarm um den festen Pol  $O$  drehbar und durch diesen Punkt verschiebbar. Das kann entweder dadurch erreicht werden, daß der Fahrarm als Schlitz ausgebildet ist, der einen in  $O$  angebrachten Zapfen aufnimmt, oder dadurch, daß der Fahrarm durch eine Hülse gleitet, die drehbar über  $O$  angebracht ist. Der Fahrarm trägt an einem Ende den Fahrstift  $F$  und eine Meßrolle so, daß deren Achse zum Fahrarm parallel ist und deren Ebene durch  $F$  geht. Ersetzt man den geraden Fahrarm durch eine geeignete durch den Pol gleitende Kurve, dann erhält man *Radial-Funktionsplanimeter* für

Integrale der Form  $\int u(r(\alpha)) d\alpha$ , wobei die Funktion  $u = u(r)$  durch die Gleitkurve festgelegt ist. —



**III. Integrappen** sind Geräte, die mit Hilfe eines Schreibstiftes die Integralkurve  $Y(x) = (1/k) \int_a^x f(t) dt$  aufzeichnen, wenn ein Fahrstift auf einer gezeichnet vorliegenden Kurve  $y = f(x)$  geführt wird;  $k$  ist dabei eine Gerätekonstante, die innerhalb gewisser Grenzen verstellbar ist. Falls  $y = f(x)$  stetig ist, gilt an jeder Stelle  $Y'(x) = (1/k) f(x)$ , d. h., der Anstieg von  $Y(x)$  ist gleich  $(1/k) f(x)$ . Die meisten Integrappen realisieren diesen Zusammenhang mit Hilfe eines scharfkantigen *Schneidenrades*, das sich nur um seinen Auflagepunkt drehen und in der Richtung seiner Ebene fortbewegen kann, sich aber im Unterschied zur Meßrolle nicht seitlich verschieben läßt. Das Schneidenrad wird — etwa durch einen Gelenkmechanismus — von der Bewegung des Fahrstiftes so gesteuert, daß seine Ebene stets den Winkel  $\varphi = \arctan [f(x)/k]$  mit der  $x$ -Achse bildet. Die Bewegung des Schneidenrades wird durch den damit verbundenen Schreibstift aufgezeichnet. Die Vertauschung von Fahr- und Schreibstift ermöglicht die mechan. Aufzeichnung der Kurve für  $Y = kf'(x)$ , wenn  $y = f(x)$  gezeichnet vorliegt, d. h. die Verwendung des Gerätes als *Differentiograph*. Da auch Flächeninhalt und Bogenlänge ihrem Wesen nach Integrale sind, gehören die  $\nearrow$  Planimeter und die  $\nearrow$  Kurvenmesser ebenfalls zu den I.en.

**Integrimeter**  $\nearrow$  Integriergerät I.

**Integritätsbereich:** ein kommutativer nulleteilerfreier Ring. Jeder I. läßt sich als Teilmenge seines Quotientenkörpers auffassen; dieser ist auch der kleinste Körper, der den I. umfaßt. Der Ring **Z** der ganzen Zahlen ist z. B. ein I., sein Quotientenkörper ist der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen. Weitere Beispiele für I.e sind der Ring der ganzen  $\nearrow$  Gaußschen Zahlen, der Ring der Polynome in einer Unbestimmten  $x$  mit reellen Koeffizienten, sowie jeder Körper. S. a. Ring I.

**Internationales Einheitssystem SI**  $\nearrow$  Strecke V. interner Speicher  $\nearrow$  digitale Rechenanlage I.

**Interpolation:** *numerische Mathematik* spezielle Form der *Approximation*, bei der eine Funktion  $y = f(x)$  so durch eine Funktion  $g(x)$  aus einer fest gegebenen Familie **G** angenähert werden soll, daß beide Funktionen in endlich vielen fest vorgegebenen Punkten  $x_j$ , den *Stützstellen*, übereinstimmen.

**I.** Als *Interpolationspolynom* bezeichnet man ein Polynom  $I_n(x)$ , dessen Grad  $n$  nicht übertrifft und das an  $n + 1$  gegebenen Stützstellen  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  eines Intervalls die  $n + 1$  gegebenen reellen Zahlen  $y_j = I_n(x_j)$  als Funktionswerte einer Funktion  $f(x)$  annimmt. Sind alle  $x_j$  paarweise verschieden, dann gibt es immer genau ein solches *I.spolynom*, das verschieden dargestellt werden kann.

**I.1.** Die *Form von Lagrange*, auch *Lagrangesches Interpolationspolynom* gen., ist durch (1) gegeben. Nimmt  $x$  einen der Werte  $x_j$  an, etwa den mit  $j = j'$ , folgt  $L_{j'} = 1$  und  $L_j = 0$  für  $j \neq j'$ , so daß in der Tat die Voraussetzung  $I_n(x_{j'}) = y_{j'}$  erfüllt ist.

$$(1) \quad I_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x) \text{ mit } L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$(2) \quad I_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j N_j(x)$$

$$\text{mit } N_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^{j-1} (x - x_i), N_0(x) = 1$$

Als Produkte von  $n$  Linearfaktoren sind die  $L_j$  Polynome  $n$ -ten Grades, d. h.,  $I_n(x)$  kann höchstens den Grad  $n$  haben.

**I.2.** In der *Form von Newton* (2), auch als *Newtonsches Interpolationspolynom* bezeichnet, sind die Koeffizienten  $c_j$  die *j-ten Steigungen* von  $f(x)$  über  $[x_0, x_j]$ . Die Steigungen sind dabei das diskrete Analogon zu den höheren *Ableitungen* einer Funktion  $f(x)$ . Die Zahlen  $s_{ij} := (s_{i+1j} - s_{ij-1}) / (x_{i+1} - x_i)$  mit  $s_{i0} := f(x_i) = y_i$  heißen *j-te Steigungen* von  $f(x)$  über  $[x_i, x_{i+j}]$ . Diese iterative Vorschrift läßt sich gut in dem Steigungsschema (3) realisieren.

(3) *Steigungsschema*

$i$	$x_i$	$y_i$	$s_{i1}$	$s_{i2}$
0	4	1	$(3 - 1) : (6 - 4) = 1$	
1	6	3	$(8 - 3) : (8 - 6) = 5/2$	$(5/2 - 1) : (8 - 4) = 3/8$
2	8	8	...	...

Die Koeffizienten des Newtonschen I.spolynoms  $c_j = s_{0j}$  finden sich in der oberen Schrägreihe, so daß sich im betrachteten Beispiel ergibt:

$$I_3(x) = 1 + 1(x - 4) + 3/8(x - 4)(x - 6) + 1/12(x - 4)(x - 6)(x - 8) = 1/24(2x^3 - 27x^2 + 142x - 240).$$

**II.** Es gibt zwei wesentl. Richtungen der Anwendung der I. Für die eine Anwendung sucht man eine leicht zu berechnende *Ersatzfunktion* für  $f(x)$ , um Integrale, Differentialgleichungen u. a. näherungsweise zu behandeln. Das Polynom muß dann tatsächlich gebildet werden, und dabei ist die Form von Lagrange häufig besonders günstig. Für die zweite Anwendung soll der Wert von  $f(x)$  an einer Stelle  $\xi$  angenähert betrachtet werden, wenn z. B. eine *Tafel*  $y_i = f(x_i)$  vorliegt. Dann braucht man das Polynom selbst gar nicht explizit zu bilden, sondern kann direkte Formeln für den gesuchten Zahlenwert aufstellen, die man *I.sformeln* nennt. Die theoret. Abweichung des I.spolynoms von  $f(x)$  läßt sich nach (4) abschätzen, wenn die Funktion

$$(4) \quad f(x) - I_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \text{ mit } x_0 < \xi < x_n$$

genügend oft differenzierbar ist. Sehr häufig verwendet man *äquidistante Stützstellen*  $x_i = a + ih$ , mit  $h = (b - a)/n$ ,  $1 \leq i \leq n$ . In diesem Fall vereinfachen sich die Steigungen zu  $s_{ij} = \Delta^j y_i / (j! h^j)$  mit den durch (5) definierten *aufsteigenden Differenzen*. Jetzt braucht man zur Aufstellung des Newtonschen Polynoms nur noch das einfacher zu be-

rechnende Differenzenschema zu bilden. Die Diffe-

$$(5) \quad \Delta^j y_i := \Delta(\Delta^{j-1} y_i), \quad j = 1, 2, \dots, i, \\ \Delta y_i := y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^0 y_i := y_i$$

renzen (5) werden häufig auch anders aufgeschrieben, um z. B. elegantere Formeln zu bekommen. Man muß sich aber immer darüber klar sein, daß es sich dabei um eine reine Bezeichnungsfrage handelt. Neben den Vorwärtsdifferenzen nach (5) sind Rückwärtsdifferenzen (6) und zentrale Differenzen (7) im Gebrauch; dabei gilt (8).

$$(6) \quad \nabla^j y_i := \nabla^{j-1} y_i - \nabla^{j-1} y_{i-1}, \quad \nabla^0 y_i = y_i$$

$$(7) \quad \delta^j y_i := \delta^{j-1} y_{i+1/2} - \delta^{j-1} y_{i-1/2}, \\ \delta^1 y_{i+1/2} := y_{i+1} - y_i, \quad \delta^1 y_{i-1/2} := y_i - y_{i-1}$$

$$(8) \quad \Delta^j y_i = \nabla^j y_{i+j} = \delta^j y_{i+j/2}$$

Einige der viel verwendeten *I.s*formeln mit äquidistanten Stützstellen sind die Formeln (9) und (10) von Gregory-Newton für die *I.* am Anfang und Ende einer Tafel.

Die Formel (11) von Stirling gilt für *I.* im Inneren. Sie wird wie die übrigen Formeln dieser Art zu den Differenzenformeln der *I.* gezählt.

$$(9) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{t}{k} \Delta^k y_0 + \binom{t}{n+1} h^{n+1/(n+1)} (\xi)$$

für  $x = x_0 + th, t$  reell

$$(10) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{s}{k} \nabla^k y_n$$

$$(11) \quad f(x) = y_i + \binom{t}{1} \left( \bar{\mu} \delta^1 y_i + \frac{t}{2} \delta^2 y_i \right)$$

$$+ \binom{t+1}{3} \left( \bar{\mu} \delta^2 y_i + \frac{t}{4} \delta^3 y_i \right) + \dots + \text{Rest}$$

mit  $\bar{\mu} \delta^1 y_i := 1/2 (\delta^1 y_{i-1/2} + \delta^1 y_{i+1/2}), x = x_i + th$

III. Bei *Spline-Interpolation* sind wie zur Aufstellung eines *I.s*polynoms wieder  $n + 1$  Stützstellen gegeben, die interpolierende Funktion von  $f(x)$  in  $[a, b]$  wird aber nicht unter den Polynomen  $P_n(x)$ , sondern unter den *Spline-Funktionen vom Grade k* gesucht. In der Praxis wird meistens  $k = 3$  gewählt.

Sind  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  ein System  $K_n$  von Stützstellen oder *Knoten*, wie man auch sagt, dann heißt  $S_3(x)$  *kub. Spline-Funktion* zu  $K_n$ , wenn  $S_3(x)$  in  $[a, b]$  mindestens 2mal stetig differenzierbar und in jedem Teilintervall  $[x_{i-1}, x_i]$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  ein Polynom von höchstens drittem Grade ist. Die Menge aller *Spline-Funktionen* über  $K_n$  bezeichnet man mit  $S_3(K_n)$ .  $\hat{S}_3(x) \in S_3(K_n)$  wird *interpolierende Spline-Funktion* genannt, wenn außerdem  $\hat{S}_3(x_i) = y_i = f(x_i)$  für  $i = 0, \dots, n$  erfüllt ist. Auch über  $S_3(K_n)$  ist das *I.s*problem stets eindeutig lösbar, und die interpolierende *kub. Spline-Funktion* kann durch Lösen eines linearen Gleichungssystems leicht explizit berechnet werden. *Spline-I.*

hat den entscheidenden Vorteil, daß auch bei *I.* über große Intervalle keine zu großen Schwingungen auftreten und dennoch mit einer anschaulich hinreichend „glatten“ Kurve interpoliert wird. Das ist ein Grund für den Einsatz der *Spline-I.* für *automat. Zeichengeräte*. S. a. arithmetische Zahlenfolge *I.*; geometrische Zahlenfolge; Kettenbruchentwicklung.

**Interpolation, lineare** ↗ arithmetische Zahlenfolge *I.*, ↗ dekadischer Logarithmus *II.*

**Interpolationspolynom** ↗ Interpolation *I.*

**Interpretation, zulässige** ↗ Folgen, logisches.

**Interrupt** ↗ Prozeßrechner *III.*

**Intervall:** Menge aller reellen Zahlen zwischen zwei gegebenen Randpunkten oder *I.*enden  $a \leq b$ , die Anfangspunkt  $a$  und Endpunkt  $b$  des *I.s* heißen. Zum abgeschlossenen *I.*  $[a, b]$  gehören alle  $x$  mit  $x \in \mathbf{R}$  und  $a \leq x \leq b$  also auch die Randpunkte. Zum offenen *I.* (↗ Klammern *III.*)  $(a, b)$  oder  $]a, b[ = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$  gehören die Randpunkte nicht. Ein halboffenes *I.* kann nach rechts offen sein und wird durch  $[a, b[$  bzw.  $a \leq x < b$  dargestellt, das nach links offene *I.* durch  $]a, b]$  bzw.  $a < x \leq b$ . Unter der *I.länge* versteht man die reelle Zahl  $b - a$ . Mit  $]-\infty, +\infty[$  bezeichnet man das *I.*, dem alle reellen Zahlen angehören; mit  $[a, +\infty[$  die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , für die  $x \geq a$  gilt, für die Zahlen  $x$  des *I.s*  $]-\infty, b]$  gilt  $x \leq b$ . Das geometr. Analogon eines *I.s* mit dem Anfangspunkt  $a$  und dem Endpunkt  $b$  ist eine Strecke auf der Zahlengeraden, zu der die Endpunkte gehören, falls das *I.* abgeschlossen ist, oder nicht gehören bei einem offenen *I.*

**Intervallarithmetik** ↗ Fehler *II.*

**Intervallschachtelung** ↗ Potenz *IV.*, ↗ reelle Zahlen *II.*

**Intuitionismus** ↗ Konstruktivismus.

**Invariante:** jede Funktion, Zahl oder Eigenschaft, die bei gewissen Transformationen oder allgemeiner bei Abbildungen unverändert, d. h. invariant, bleibt. Die Quadratsumme  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  z. B. ist invariant gegenüber den mögl. Vertauschungen der drei Variablen  $x_1, x_2, x_3$  untereinander; Längen und Winkelgrößen sind *I.n* in bezug auf *Bewegungen des euklid. Raums*. Die Winkelgrößen sind *I.n* in bezug auf die *Ähnlichkeitstransformationen*, nicht jedoch die Längen. Die *Parallelität* ist eine *I.* der *affinen Transformationen*, die Doppelverhältnisse sind *I.n* der *projektiven Transformationen*.

Das Studium der *I.n* bei vorgegebener Transformationsgruppe ist Gegenstand einer eigenen Theorie, der *Invariantentheorie*, die vor allem am Anfang des 20. Jh. in Blüte stand, sich jedoch später der Theorie der Algebren und der Darstellungstheorie unterordnete.

**Invarianz:** Prinzip der Kybernetik, das auf der Kompensation von Einflußgrößen beruht, die aus der Umgebung auf ein kybernet. ↗ System wirken. Hierdurch wird eine vollständige oder teilweise Unabhängigkeit des Systems gegenüber diesen Einflußgrößen erzielt. Dies erfordert die Einrichtung eines zweiten Wirkungsweges, in dem aus der jeweiligen Einflußgröße ein Korrektursignal gebildet

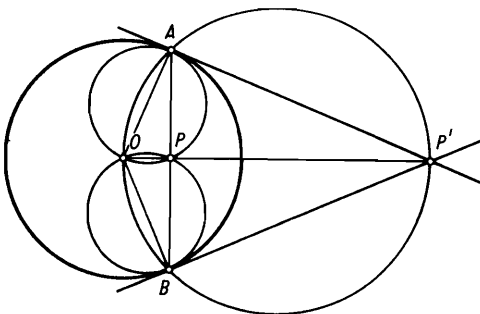
wird, das die Wirkung der Einflußgröße am Systemausgang genau oder näherungsweise kompensiert. Eine notwendige Bedingung für die Realisierbarkeit dieses Prinzips besteht darin, daß die betreffende Einflußgröße meßbar ist. Eine wichtige Anwendung findet dieses Prinzip bei der *Störgrößenaufschaltung* ein- oder mehrschleifiger Regelkreise (↗ *Regelung*). Die Störgrößenaufschaltung ist ihrem Charakter nach eine ↗ *Steuerung* und hat damit deren Eigenschaften.

**invers** ↗ *Abbildung III.*, ↗ *Relation III.*  
**inverse** ↗ *Gruppe I.*, ↗ *Matrix III.*, ↗ *Quaternionen*, ↗ *Ring I.*, ↗ *Vektorraum II.*  
**inverse Funktion** svw. *Umkehrfunktion.*  
**inverser Operator** ↗ *lineare Abbildung VI.*  
**inverses Element** ↗ *Gruppe I.*

**Inversion:** *Spiegelung am Kreis:* Abbildung einer Ebene auf sich selbst, bei der jeder Punkt  $P$  in bezug auf einen gegebenen Kreis  $K$  mit Radius  $R$  um  $O$  auf der Halbgeraden  $OP^+$  ein Bild  $P'$  hat, für das gilt  $|OP| \cdot |OP'| = R^2$ . Ist der gegebene Kreis der Einheitskreis, so gilt  $|OP| = 1/|OP'|$ . In diesem Falle heißt die *I. Transformation durch reziproke Radien*. Die Abbildung ist eine *Involution*, d. h., das Bild des Bildpunkts ist das Original. Sie bildet das Innere des Kreises  $K$  auf sein Äußeres ab, und seine Randpunkte sind *Fixpunkte*. Dem Punkte  $O$  wird der unendlich ferne Punkt  $P_\infty$  der Ebene zugeordnet (↗ *Gaußsche Zahlenebene III.*, ↗ *stereographische Projektion II.*). In einer projektiven Ebene würde dem Punkte  $O$  kein eindeutig bestimmter Bildpunkt auf der unendlich fernen Geraden dieser Ebene entsprechen. Die *I.* ist keine *affine Abbildung*, sondern eine spezielle *rationale algebraische Abbildung*. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Punkt  $O$  als Ursprung wird sie durch (1) beschrieben.

$$(1) \quad \bar{x} = xR^2/(x^2 + y^2); \quad \bar{y} = yR^2/(x^2 + y^2)$$

Geometrisch läßt sich das Bild  $P'$  konstruieren als *Pol der Polaren  $p'$*  (↗ *Kreistangente*), die im Punkt  $P$  auf  $OP$  senkrecht steht. Sind  $A$  und  $B$  die Endpunkte der Sehne von  $K$  auf  $p'$  (Abb.), so schneiden sich die Tangenten in  $A$  und  $B$  an  $K$  im Bildpunkt  $P'$ . Die *I.* ist *kreisverwandelt*, d. h., sie führt Kreise wieder in Kreise über, wenn man Geraden als ausgeartete Kreise durch  $P_\infty$  annimmt, z. B. ist das



**Inversion**

Bild der Sekante durch  $A$  und  $B$  der Kreis durch diese Punkte, durch  $P'$  und durch  $O$ ; das Bild der Tangente durch  $A$  ist der Kreis durch  $A, P, O$ . Geraden durch  $O$  gehen in sich selbst über. Die Winkelgrößen bleiben in *I.* erhalten, sie ist *winkeltreu*. Die *I.* wurde bes. untersucht durch *L. J. MAGNUS 1831, J. PLÜCKER 1836, Lord KELVIN 1845* und *A. F. MÖBRUS 1853*. Sie läßt sich mechanisch herstellen durch geeignete Apparate, die *Inversoren* genannt werden (↗ *Gelenkmechanismus III.*).

**Inversor** ↗ *Gelenkmechanismus III.*  
**Inverter** ↗ *Analogrechner I., II.*  
**invertierbar** ↗ *Ring I.*

**Involution:** eine Abbildung  $f$ , bei der stets das Bild des Bildes wieder das Original ist, d. h., falls  $f \circ f$  die Identität über dem Definitionsbereich von  $f$  ist und  $f \neq f \circ f$  gilt. Ist in einer *I.* der Punkt  $A$  das Bild des Punktes  $B$ , so muß auch  $B$  das Bild von  $A$  sein. Die Punkte  $A$  und  $B$  heißen dann bzgl. der *Involution* *konjugierte Punkte*. Ein Beispiel für eine *I.* in der Ebene ist die Spiegelung an einer Geraden als Spiegelachse. Die konjugierten Punkte liegen auf einer Senkrechten zur Spiegelachse im gleichen Abstand auf verschiedenen Seiten von ihr. S. a. *Inversion*.

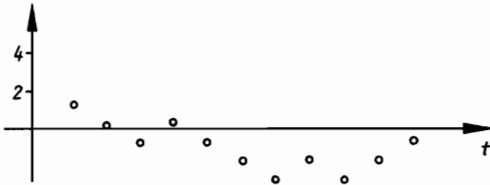
**involute Funktion** ↗ *Umkehrfunktion I*  
**Inzidenz Geometrie:** Eine Relation zwischen Punkten und Geraden bzw. Ebenen, die genau dann auf einen Punkt und eine Gerade bzw. eine Ebene zutrifft, wenn der Punkt auf dieser Geraden bzw. auf dieser Ebene liegt, z. B. in folgenden Aussagen »Zu je zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Gerade durch diese Punkte« und »Zu einer Ebene und einer nicht zu ihr parallelen Geraden existiert genau ein Punkt, der mit beiden inzidiert«. Mitunter wird diese Relation erweitert auf Geraden und Geraden, Geraden und Ebenen bzw. Ebenen und Ebenen, wenn gemeinsame Punkte existieren, z. B. in der Aussage »Zwei Ebenen, die verschieden voneinander und nicht parallel sind und einen Punkt gemeinsam haben, inzidieren in allen Punkten einer Geraden«. Die *I.* ist die einfachste geometr. Beziehung, die zwischen geometr. Elementen bestehen kann. S. a. *duale Gebilde*.

**Inzidenzaxiome** ↗ *axiomatischer Aufbau der Geometrie.*

**Inzidenzfunktion** ↗ *Graph I.*  
**irrationale Zahlen** ↗ *reelle Zahlen I.*, ↗ *Brüche II.3.*  
**irreduzibel:** *unzerlegbar*, ↗ *algebraische Geometrie III.*, ↗ *ganzrationale Funktion II.*, ↗ *Polynom II.*, ↗ *Primelement.*

**irreflexiv:** ↗ *Relation II.*

**Irrfahrt:** Darstellung eines Markowschen Prozesses als Bewegung eines Teilchens im Raum. Im einfachsten Fall einer eindimensionalen *I.* befindet sich ein Teilchen z. B. zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Nullpunkt und erhält für jeden Zeitpunkt  $t \in \mathbf{N}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  einen Impuls  $H$ , der es um eine Einheit nach oben hebt, und mit der Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$  einen Sinkimpuls  $S$ . Sein Weg wird dann z. B. durch *HSSHSSSHSHH ...* angegeben (Abb.). Bei  $p > q$  entsteht eine *Drift* nach



Beispiel einer eindimensionalen Irrfahrt

oben, bei  $p < q$  entfernt sich das Teilchen in der Tendenz immer mehr nach unten.

**Irrtumswahrscheinlichkeit** ↗ Signifikanztest II.

**Isokline** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**isolierter Punkt** ↗ Konchoide II., ↗ Pascalsche Schnecke.

**isolierte Singularität** ↗ Laurentreihe.

**isometrische Abbildung, Isometrie:** I. **Funktionalanalysis** eine Abbildung  $I$  eines metr. Raumes  $X_1$  (↗ Raum, metrischer) in einen metr. Raum  $X_2$ , die den Abstand von zwei beliebigen Elementen  $x, y \in X_1$  invariant läßt, d. h., für die gilt  $\varrho_1(x, y) \in \varrho_2(Ix, Iy)$ . Dabei bezeichnen  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_2$  die Metriken der Räume  $X_1$  und  $X_2$ . Zwei metr. Räume  $X_1$  und  $X_2$ , für die es eine isometr. Abbildung von  $X_1$  auf  $X_2$  gibt, heißen **isometrisch isomorph** und haben als metr. Räume die gleiche Struktur und gleiche Eigenschaften.

II. **Geometrie** umkehrbar eindeutige Zuordnung  $f$  mit  $P' = f(P)$  der Punkte  $P$  einer Fläche  $F$  zu den Punkten  $P'$  einer Fläche  $F'$ , bei der jede Kurve  $C$  in  $F$  die gleiche Länge hat wie ihr Bild  $C'$  in  $F'$ . Ist bei der Abbildung die Längentreue jeder Kurve  $C$  gewahrt, so nennt man die Flächen  $F$  und  $F'$  isometrisch, auch wenn die abbildende Funktion  $f(P)$  nicht stetig ist. Eine stetige Deformation einer Fläche  $F$ , bei der die Länge aller Kurven  $C$  erhalten bleiben, wird **Verbiegung** genannt. Danach ist jede Verbiegung eine i. A., aber nicht jede i. A. notwendig eine Verbiegung. Eine abwickelbare Fläche wird durch eine Verbiegung auf ein Flächenstück der Ebene abgebildet. S. a. innere Geometrie; Axonometrie.

**isomorph** ↗ Graph III.

**Isomorphismus:** eine umkehrbar eindeutige Abbildung  $\varphi$  zwischen zwei Mengen oder algebraischen Strukturen  $A$  und  $B$ , die ebenso wie ihre Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  **relationstreu** ist. Dabei versteht man unter Relationstreu der Abbildung  $\varphi$ , daß Relationen zwischen den Elementen von  $A$  in entsprechende Relationen zwischen den jeweiligen Bildelementen in  $B$  übergehen, die relationstreu Abbildung heißt auch **isomorph** (s. a. Homomorphismus). Dabei läßt sich jede  $n$ -stellige ↗ algebraische Operation als  $(n + 1)$ -stellige Relation auffassen, z. B. die zwei-stellige Operation Addition als Menge aller Tripel  $(a, b, a + b)$ , d. h. als dreistellige Relation.

Betrachtet man z. B. die Menge  $A$  der reellen Zahlen mit der Addition als Relation und die Menge  $B$  der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation als Relation, so liefert die Abbildung  $\varphi$  mit  $\varphi(a) = 2^a$  einen I. zwischen  $A$  und  $B$ , denn  $\varphi$  ist ein-

eindeutig und wegen  $\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  und  $\varphi^{-1}(ab) = \text{ld}(ab) = \text{ld } a + \text{ld } b = \varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b)$  sind  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  relationstreu.

Die Isomorphie zwischen Mengen bzw. algebraischen Strukturen ist eine Äquivalenzrelation, denn mit den Isomorphismen  $\varphi$  von  $A$  auf  $B$  und  $\psi$  von  $B$  auf  $C$  ist sowohl das Produkt  $\psi \cdot \varphi$  ein I. von  $A$  auf  $C$  als auch die inverse Abbildung  $\varphi^{-1}$  ein I. von  $B$  auf  $A$ . Ist  $\varphi$  ein I. von  $A$  auf  $B$ , kann man daher  $A$  und  $B$  **zueinander isomorph** nennen.

Der I. ist ein für die moderne Algebra und darüber hinaus für jede axiomatisch aufgebaute Theorie grundlegender Begriff, da man zwischen isomorphen Strukturen i. allg. nicht zu unterscheiden braucht. Man kann alle Begriffe und Sätze, die bzgl. der betrachteten Relationen und Operationen gelten, unmittelbar auf eine isomorphe Struktur übertragen. Unterscheiden muß man nur zwischen isomorphen Teilstrukturen einer vorgegebenen Struktur.

Ein I. einer Struktur  $A$  auf sich heißt **Automorphismus**. Jeder I. ist auch ↗ Homomorphismus.

S. a. Gruppe III.; Ring III.; algebraische Struktur III.

**isoperimetrisches Variationsproblem** ↗ Variationsrechnung IV.

**Iterationsverfahren** ↗ lineare Gleichungssysteme VII., ↗ Polynom, ↗ Wurzelberechnung III., ↗ Wurzelziehen in  $\mathbf{R}$ , III.

**iterative Methode** ↗ Eigenwertberechnung III.

**iterierter Kern** ↗ Integralgleichung II.

## J

**Jacobi, Carl Gustav Jakob**, geb. 10. 12. 1804 Potsdam als Sohn eines Bankiers, gest. 18. 2. 1851 Berlin. — J. wurde nach dem Studium 1824 Privatdozent in Berlin und war 1827/42 als Professor in Königsberg (Kaliningrad) tätig. Nach einer ausgedehnten Italienreise, die seine angegriffene Gesundheit wieder herstellen sollte, lebte J. als Akademiker in Berlin. — J. ist bekannt geworden durch sein Werk *»Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum«* (1829). Im Jahre 1832 fand J., daß hyperellipt. Funktionen durch Funktionen mehrerer Veränderlicher umgekehrt werden können. Grundlegende Beiträge lieferte J. auch zur Algebra, zur Eliminationstheorie und zur Theorie partieller Differentialgleichungen, z. B. in seinen *»Vorlesungen über Dynamik«* (1842/43), die 1866 veröffentlicht wurden.

**Jacobi-Rotation, elementare** ↗ Eigenwertberechnung II.

**Jacobische Determinante** svw. Funktionaldeterminante.

**Jacobische Matrix** svw. Funktionalmatrix.

**Jacobi-Verfahren** ↗ Eigenwertberechnung II.

**Job:** Aufgabe für eine digitale Rechenanlage, die aus mehreren Schritten bestehen kann, jedoch hinsichtlich der Steuerung durch das Betriebssystem in sich abgeschlossen ist. Zur näheren Beschreibung eines

J. werden spezielle Jobsteueranweisungen benutzt (↗ Betriebssystem II).

**Jochpunkt** ↗ Böschungsaufgabe.

**Jordan**, Camille, geb. 5. 1. 1838 Lyon, gest. 20. oder 21. 1. 1922 Mailand. — J. studierte in Paris und wurde 1860 Ingénieur des mines in Privas. Seit 1876 war er Professor an der École Polytechnique. Er lieferte fundamentale Beiträge zur Gruppentheorie, zur Topologie und zur Analysis.

**Jordan-meßbar** ↗ Peano-Jordanscher Inhalt II.

**Jordansche Normalform** ↗ lineare Abbildung IV.

**Jordanscher Kurvensatz**: Jede einfache geschlossene Kurve zerlegt die Ebene in zwei Teile.

**Junktor** *mathematische Logik* ↗ Aussagenlogik II.

## K

**Kalkül des natürlichen Schließens** ↗ Regellogik II.

**Kalotte** ↗ Kugel III.

**kalte Redundanz** ↗ Redundanz II.

**Kammweg** ↗ Böschungsaufgabe.

**Kanal**: techn. Einrichtung, die in digitalen Rechenanlagen die Datenein- und -ausgabe steuert. (↗ Information II., Informationstheorie I.). Wesentlich ist, daß Kanäle mittels verdrahteter Programme und eigener Steuerwerke weitgehend *unabhängig vom Steuerwerk der Zentraleinheit* arbeiten und somit eine notwendige Voraussetzung für moderne Verarbeitungsformen wie Multiprogramming (↗ Betriebssystem I.) darstellen. Entsprechend den physikal. Eigenschaften werden Selektor- und Multiplex-K. sowie Simplex-, Halbduplex- und Duplex-K. unterschieden.

**kanonische Basis** ↗ Vektorraum V.

**kanonische Form** ↗ Optimierung, lineare II., ↗ partielle Differentialgleichung III.

**kanonische Primzahlzerlegung** ↗ Teilbarkeit II.

**kanonisches Quadrupel** ↗ Aussagenlogik II.

**kanonische Struktur** ↗ Regelung VII.

**Kante**: I. *Mengenlehre* Untermenge  $K$  einer konvexen Menge  $M$ , die Durchschnitt einer Geraden  $g$  mit  $M$  ist;  $K$  enthält dabei mindestens zwei Punkte von  $M$ , und keiner ihrer Punkte läßt sich als Linearkombination zweier nicht auf  $g$  liegender Punkte von  $M$  darstellen.

II. *Stereometrie* ↗ Körper V., ↗ körperliche Ecke I., ↗ Prisma I., ↗ prismatische Fläche, ↗ Pyramide I. — S. a. Graph I.

**Kantenbasis** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.4.

**Kantenfolge** ↗ Durchlaufungen von Graphen I.

**Kantenverfahren** ↗ Durchdringung.

**Kantenwinkel** ↗ körperliche Ecke I.

**Kantenzug** ↗ Durchlaufungen von Graphen I.

**Kantorowitsch**, Leonid Witaljewitsch, geb. 19. 1. 1912 Petersburg (Leningrad). — Nach seinem Studium ist K. seit 1934 als Professor in seiner Heimatstadt und seit 1940 am mathemat. Institut der Akademie tätig. — Er arbeitet vorwiegend über Probleme der *Funktionalanalysis*. Er ist einer der

Begründer der Theorie der *linearen Optimierung* (1932).

**Kapazität** ↗ Ströme auf Graphen II.

**Kapazitätsbeschränkung** ↗ Transportproblem I.

**kapazitiert** ↗ Transportproblem I.

**Kapital** ↗ Zinsrechnung.

**Kardinalzahl**: *Mengenlehre* I. Verallgemeinerung des Begriffs der Elementanzahl einer endl. Menge auf beliebige Mengen (s. a. Zahl). Der Begriff der K. kann auf verschiedene Arten präzisiert werden. Zwei Mengen haben genau dann dieselbe K., wenn sie *gleichmächtig* sind. Der Nullmenge wird die K. 0 zugeschrieben, die Einermengen haben die K. 1, die Zweiermengen die K. 2 usw. Hat eine Menge  $M$  die K.  $m$ , so ist  $M$  ein *Repräsentant* von  $m$ ; je zwei Repräsentanten einer K. sind gleichmächtig. Die endl. Mengen sind Repräsentanten *endl. K.en*. Eine K. heißt *transfinit*, falls einer ihrer Repräsentanten und damit jeder eine unendl. Menge ist. Die K. können dadurch wohlgeordnet werden, daß man für je zwei K.en  $m, n$  setzt  $m \leq n$ , falls es Repräsentanten  $M, N$  von  $m, n$  gibt und eine eindeutige Abbildung von  $M$  in  $N$ , d. h. auf eine Teilmenge von  $N$  existiert. In bezug auf diese Wohlordnung ist jede endl. K. kleiner als jede transfinite K. Die transfiniten K.en können eindeutig mittels der *Ordinalzahlen* derartig durchnummeriert werden, daß jeweils kleinere K.en auch kleinere Ordinalzahlen als Nummern haben. Die transfinite K. mit der Nummer  $\alpha$  wird auch mit  $\aleph_\alpha$  [lies Aleph alpha] bezeichnet. Die kleinste transfinite K. ist  $\aleph_0$ , die K. der Menge der natürl. Zahlen und damit die K. jeder abzählbar unendl. Menge.

K.en kann man addieren, multiplizieren und potenzieren. Sind  $m, n$  K.en mit den Repräsentanten  $M, N$  und ist  $M \cap N = \emptyset$ , so ist die Summe  $m + n$  die K. der Vereinigungsmenge  $M \cup N$ , das Produkt  $m \cdot n$  die K. der Produktmenge  $M \times N$  und die Potenz  $m^n$  die K. der Menge aller Funktionen von  $N$  in  $M$ . Dann läßt sich zeigen, daß für Summe und Produkt die Kommutativ- und Assoziativgesetze und das Distributivgesetz gelten und für Potenzen die bekannten Potenzgesetze. Das Rechnen mit endl. K. stimmt völlig überein mit dem Rechnen mit natürl. Zahlen, daher kann man die natürl. Zahlen als die endl. K. definieren.

II. Das Kontinuum-Problem ist die Frage, ob die K. der Menge der reellen Zahlen  $\aleph_1$  oder eine größere transfinite K. ist. Das *verallgemeinerte Kontinuum-Problem*, auch *Aleph-Problem* gen., ist die Frage, ob für jede Menge  $M$  mit einer K.  $\aleph_\alpha$  die Potenzmenge von  $M$  die K.  $\aleph_{\alpha+1}$  hat oder eine größere K. Beide Probleme sind auf der Basis der bekannten Axiomensysteme der Mengenlehre nicht zu lösen.

**Kardioiden** ↗ Pascalsche Schnecke, ↗ Zykloide IV.

**Karte** ↗ Landkarte.

**kartesische Koordinaten** ↗ Koordinatensystem III.

**kartesisches Blatt** ↗ rationale Kurve III.

**kartesisches Produkt**: *Mengenprodukt*, *Kreuzprodukt*: Verallgemeinerung des Kreuzprodukts zweier Mengen (↗ Abbildung I) auf die Mengen  $M_i$  einer Familie  $(M_i)$ , wobei  $i$  die *Indexmenge*  $I$  durchläuft. Für  $I = \{1, \dots, n\}$  z. B. ist das k. P.

$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  die Menge aller  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$ , deren  $i$ -te Komponente  $x_i$  jeweils zur Menge  $M_i$  gehört. Ist  $I$  eine beliebige Indexmenge, so schreibt man  $\prod_{i \in I} M_i$  für das k. P., es ist die Menge aller Folgen  $(x_i)_{i \in I}$  mit  $x_i \in M_i$ . Für  $I = \{1, 2\}$  erhält man das k. P.  $M_1 \times M_2 = \{(x, y) \mid x \in M_1 \text{ und } y \in M_2\}$ , d. h. die Menge aller geordneten Paare  $(x, y)$  mit  $x \in M_1$  und  $y \in M_2$ .

Sind alle Mengen  $M_i$  der betrachteten Mengenfamilie einer Menge  $M$  gleich, d. h., wenn  $M_i = M$  gilt für alle  $i \in I$ , so ist  $\prod_{i \in I} M_i$  die *Mengenpotenz*  $M^I$ , z. B. für  $n$  Mengen  $M \times M \times \dots \times M = M^n$ ;  $\{0, 1\}^n$  ist die Menge aller  $n$ -Tupel, deren Komponenten 0 oder 1 sind. — S. a. Produktmenge.

**Kartiergerät** svw. Koordinatograph.

**Kaskadenregelung**  $\nearrow$  Regelung IV.

**Katasteraufnahme**  $\nearrow$  Geodäsie.

**Kategorie: I.** eine Gesamtheit von Objekten  $A, B, C, \dots$  und von *Morphismen*  $f, g, h, \dots$  ( $\nearrow$  Morphismus), in der jedem geordneten Paar  $(A, B)$  von Objekten eine Menge  $\text{Mor}(A, B)$  von Morphismen zugeordnet wird, so daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1) Jedem  $f \in \text{Mor}(A, B)$  und  $g \in \text{Mor}(B, C)$  ist ein Morphismus  $f \cdot g \in \text{Mor}(A, C)$  zugeordnet, die *Hinterinanderausführung*  $g$  nach  $f$ , ist noch ein  $h \in \text{Mor}(C, D)$  gegeben, so gilt das *Assoziativgesetz*  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ .

2) Für jedes Objekt  $B$  gibt es in  $\text{Mor}(B, B)$  ein ausgezeichnetes Element  $e_B$ , den *ident. Morphismus* zum Objekt  $B$ , der die Eigenschaften eines *Eins-elementes* hat, d. h., für  $f \in \text{Mor}(A, B)$  und für  $g \in \text{Mor}(B, C)$  gilt  $f \cdot e_B = f$  und  $e_B \cdot g = g$ .

3) Für verschiedene Paare  $A, B$  und  $A', B'$  haben  $\text{Mor}(A, B)$  und  $\text{Mor}(A', B')$  kein Element gemeinsam.

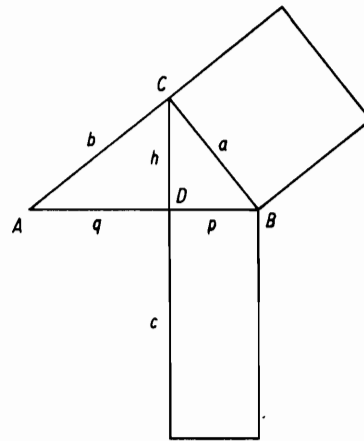
Bei Anwendungen sind die Objekte einer K. gewöhnlich strukturierte Mengen, z. B. algebraische Strukturen oder topolog. Räume, die Morphismen sind dann die *Abbildungen* zwischen diesen Mengen, die die Struktur erhalten, z. B. Homomorphismen oder stetige Abbildungen. Ein Morphismus  $f \in \text{Mor}(A, B)$  heißt *Isomorphismus* von  $A$  in  $B$ , wenn es einen Morphismus  $g \in \text{Mor}(B, A)$  gibt, so daß  $f \cdot g = e_B$  und  $g \cdot f = e_A$  ist. Die Gesamtheit aller Gruppen bildet z. B. zusammen mit den Homomorphismen zwischen den Gruppen eine K.; ebenso bildet die Gesamtheit aller topolog. Räume mit den stetigen Abbildungen zwischen ihnen eine K.; ebenso die Gesamtheit aller Mengen mit den Abbildungen zwischen ihnen. Die aufgeführten Gesamtheiten sind allerdings keine Mengen, sondern *Klassen*. Ist die Gesamtheit der Objekte einer K. eine Menge, so heißt die K. *kleine K.*

II. Die *K.ntheorie* gehört zu den jüngsten Zweigen der Mathematik. Sie entstand aus der *homolog. Algebra*, die eine Brücke zwischen Topologie und Algebra darstellt. Mit Hilfe der K.ntheorie kann die moderne Algebra elegant dargestellt werden als Lehre von den algebraischen Strukturen. Sie findet Anwendung in der Theorie der universellen Algebra, in der allgemeine Eigenschaften der algebraischen Struk-

turen untersucht werden. Mit Hilfe der K.ntheorie konnten viele Begriffe der Algebra verallgemeinert werden. Insgesamt erweisen sich ihre Begriffsbildungen als eine nützl. gemeinsame Sprache in vielen Teilen der Mathematik, die in immer neue Gebiete eindringen.

**kategorisch:** Eigenschaft eines Axiomensystems, daß je zwei seiner Modelle einander isomorph sind. **Kathete**  $\nearrow$  Dreieck III.

**Kathetensatz, Satz des Euklid:** Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck, das aus der Hypotenuse und aus der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse gebildet wird. Haben in dem rechtwinkligen Dreieck



Kathetensatz

$ABC$  die Katheten die Längen  $a$  und  $b$ , ihre Projektionen auf die Hypotenuse der Länge  $c$  die Längen  $p$  und  $q$  und die Höhe  $CD$  die Länge  $h$  (Abb.), so sind die Dreiecke  $ABC$  und  $ADC$  einander ähnlich. Dann gilt sowohl  $q : b = b : c$  als auch  $p : a = a : c$ , d. h.,  $b^2 = q \cdot c$  und  $a^2 = p \cdot c$ , wie der K. aussagt. Da auch die Dreiecke  $ADC$  und  $CDB$  einander ähnlich sind, ergibt sich aus  $p : h = h : q$  zusätzlich  $h^2 = p \cdot q$ , eine Beziehung, die als *Höhensatz* bezeichnet wird.

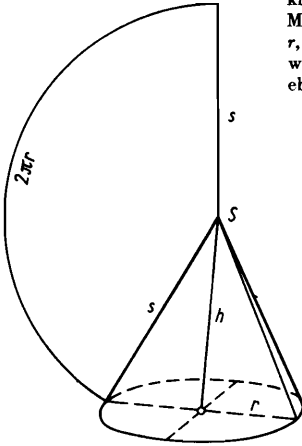
**Kausalität**  $\nearrow$  System II.

**Kavalierverspektive**  $\nearrow$  Axonometrie.

**k-Click**  $\nearrow$  Extremalprobleme.

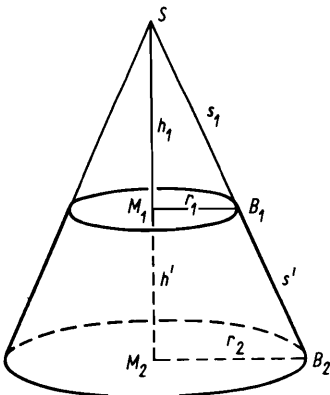
**Kegel: I. K.fläche:** Fläche, die eine durch einen festen Punkt  $S$  verlaufende Gerade beschreibt, wenn sie entlang einer Kurve  $k$  gleitet, die  $S$  nicht enthält. Die Geraden durch  $S$  und einen Punkt der Kurve  $k$  heißen *Erzeugende* des K.s,  $S$  die *K.spitze* und  $k$  *Leitkurve*. Von  $k$  wird angenommen, daß sie nicht entartet, z. B. kein Punkt oder keine Peanokurve ist, die ein ebenes Flächenstück vollständig bedeckt. Wenn  $k$  eben ist, soll  $S$  nicht in dieser Ebene liegen, weil der K. dann mit ihr zusammenfällt. Ist die Leitkurve ein Kreis, so entsteht ein *Kreis-K.* In einem *geraden Kreis-K.* enthält die im Mittelpunkt des Kreises auf seiner Ebene senkrechte Gerade die Spitze  $S$  des K.s, in einem *schiefen Kreis-K.* nicht.

Kegel. Abb. 1: Gerader Kreiskegel mit Grundkreisradius, Höhe und Mantellinie der Längen  $r, h, s$  sowie seine Abwicklung in die Zeichenebene



Ein gerader Kreis-K. ist eine Rotationsfläche. Ein ebener Schnitt längs seiner Rotationsachse ergibt zwei sich schneidende Geraden. Die Scheitelwinkel an diesen Geraden, durch die diese Achse verläuft, nennt man *Öffnungswinkel* des geraden Kreis-K.s. — Jeder Kegel ist in eine Ebene abwickelbar.

II. *K.körper*: ganz im Endlichen liegender Körper, der begrenzt wird von einer Ebene und einer K.fläche mit einer einfach geschlossenen Leitkurve  $k$ . Seine Oberfläche besteht danach aus der ebenen *Grundfläche* und aus dem *K.mantel*, der ein Teil einer K.fläche ist (Abb. 1). Die auf dem *K.mantel* liegenden Abschnitte der Erzeugenden heißen *Mantellinien*. Der Abstand  $h$  der K.spitze  $S$  von der Ebene der Grundfläche ist die *Höhe* des K.s. Ist  $G$  der Inhalt seiner Grundfläche, so gilt für sein Volumen  $V = G h/3$ . — Ist in einem geraden Kreis-K.  $s$  die Länge der gleichlangen Mantellinien und  $r$  der Radius des Randes der Grundfläche, so hat sein Mantel den Flächeninhalt  $A = \pi r s$ , da er nach



Kegel. Abb. 2: Kegelstumpf

Aufschneiden längs einer Mantellinie in eine Ebene abgewickelt werden kann und dort einen Kreis-sektor mit dem Mittelpunkt  $S$ , dem Radius der Länge  $s = \sqrt{h^2 + r^2}$  und der Bogenlänge  $b = 2\pi r$  bedeckt ( $\nearrow$  Kreis). Ist  $s = 2r$ , so heißt dieser Körper *gleichseitiger Kreis-K.*

III. Eine Ebene, die einen Kreis-K. parallel zur Grundfläche schneidet, zerlegt ihn in einen kleineren K., den *Ergänzungs-K.*, und in einen *K.stumpf*. Die zur Grundfläche parallele Fläche der Oberfläche eines K.stumpfes ist seine *Deckfläche*. Sind  $r_2 = |M_2 B_2|$  und  $r_1 = |M_1 B_1|$  die Radien der Ränder von Grund- und Deckfläche eines geraden K.stumpfes (Abb. 2) und entsprechend  $h_2 = |SM_2|$ ,  $h_1 = |SM_1|$  die Höhen und  $s_2 = |SB_2|$ ,  $s_1 = |SB_1|$  die Längen der Mantellinien vom ursprüngl. und vom Ergänzungs-K., so erhält man  $h' = h_2 - h_1$  und  $s' = s_2 - s_1$  als Längen der Höhe und der Mantellinie des K.stumpfes. Für den Flächeninhalt  $A_S$  seines Mantels gilt dann  $A_S = \pi r_2 s_2 - \pi r_1 s_1 = \pi r_2 s_2 - \pi r_2 s_1 + \pi r_2 s_1 - \pi r_1 s_1 = \pi r_2 s' + \pi (r_2 - r_1) s_1$ . Wendet man auf den Achsenschnitt den Strahlensatz an, so erhält man  $s_2 : s_1 = r_2 : r_1$  und durch Subtraktion von  $s_1/s_1$  auf der linken sowie von  $r_1/r_1$  auf der rechten Seite die Beziehung  $(s_2 - s_1) r_1 = (r_2 - r_1) s_1$ . Damit ist  $A_S = \pi r_2 s' + \pi r_1 s' = \pi s' (r_2 + r_1)$ . Für das Volumen  $V_S$  des K.stumpfes ergibt sich wegen  $h_2 = h_1 + h'$  aus  $V_S = \pi h_2 r_2^2/3 - \pi h_1 r_1^2/3 = \pi h' r_2^2/3 + \pi h_1 (r_2^2 - r_1^2)/3$ . Nach dem Strahlensatz gilt aber ebenso  $h_1 (r_2 - r_1) = h' r_1$  und damit  $V_S = \pi h' r_2^2/3 + \pi h' (r_2 + r_1) r_1/3 = \pi h' (r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)/3$ .

**Kegelachse**  $\nearrow$  Kegel II.

**Kegelmantel**  $\nearrow$  Kegel II.

**Kegelschnitt**: I. Menge von Punkten, die einer Ebene  $E$  und einem geraden Kreiskegel zugleich angehören. Von der Beziehung zwischen der Größe  $\alpha$  des *Öffnungswinkels* des Kegels und der Größe  $\beta$  des *Neigungswinkels* der Schnittebene  $E$  gegen dessen Achse  $a$  hängt die Art des K.s ab:

	nichtentartete K.e	entartete K.e
$0 \leq \beta < \alpha/2$	Hyperbel	zwei sich schneidende Geraden
$\beta = \alpha/2$	Parabel	Gerade
$\alpha/2 < \beta \leq 90^\circ$	Ellipse	Punkt
$\beta = 90^\circ$	Kreis	Punkt

Ein *entarteter K.* ergibt sich, wenn die Schnittebene  $E$  die Spitze  $Z$  des Kegels enthält. Der Kreis ist eine spezielle Ellipse. Mit Hilfe von Kugeln, die man sich dem Kegel so einbeschrieben denkt, daß sie ihn und die Schnittebene  $E$  berühren, können Eigenschaften eines nichtentarteten K.s hergeleitet werden. Diese Kugeln nennt man *Dandelin'sche Kugeln*. —

II. Ist der K. eine *Parabel* (Abb. 1), so gibt es eine *Dandelin'sche Kugel*, andernfalls zwei, die im Falle einer Ellipse auf verschiedenen Seiten, im Falle einer

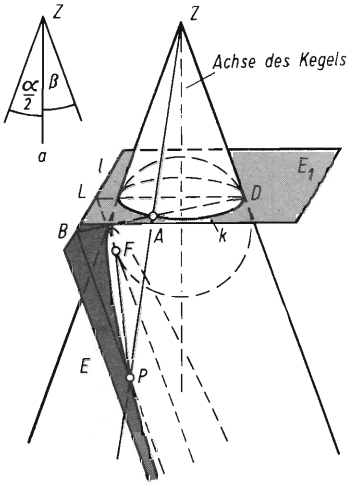


Abb. 1: Parabel als Kegelschnitt mit einer Dandelinischen Kugel und der Leitlinie  $l$

Hyperbel auf der gleichen Seite der Schnittebene liegen. Der Punkt  $F$ , in dem die zu einer Parabel gehörende Dandelinische Kugel die entsprechende Schnittebene berührt, heißt *Brennpunkt* oder *Fokus* der Parabel. Die Gerade  $l$ , in der die Schnittebene  $E$  die Ebene des Kreises  $k$  schneidet, in dem die Kugel den Kegel berührt, heißt *Leitlinie* oder *Direktrix* der Parabel. Entsprechend sind für *Hyperbel* und *Ellipse* je zwei Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  in der Schnittebene und zwei Leitlinien  $l_1$  und  $l_2$  in den Ebenen der Berührungskreise  $k_1$  und  $k_2$  definiert. Für einen Kreis fallen die beiden Brennpunkte mit dem Mittelpunkt zusammen, Leitlinie ist die unendlich ferne Gerade der Schnittebene. Eine Ebene durch die Kegelachse  $a$ , die auf der Leitlinie bzw. auf den Leitlinien  $l_1$  und  $l_2$  senkrecht steht, schneidet die Ebene  $E$  in der *Symmetrieachse* des K.s, die die Brennpunkte enthält.

III. Jeden Punkt  $P$  einer Parabel kann man als das Bild eines Punktes  $A$  des Kreises  $k$  auffassen, das bei der Projektion von der Spitze  $Z$  des Kegels längs einer Erzeugenden entsteht. Für Ellipse bzw. Hyperbel ergibt sich bei einer solchen Projektion für Punkte  $A_1$  bzw.  $A_2$  auf  $k_1$  bzw.  $k_2$ , die auf der gleichen Erzeugenden liegen, der gleiche Bildpunkt  $P$ .

Ist der K. eine *Parabel*, so gibt es eine Erzeugende, die der Symmetrieachse der Parabel parallel ist. Schneidet sie  $k$  z. B. in  $D$ , so enthält eine durch  $Z$ ,  $D$  und einen beliebigen zweiten Punkt  $A$  des Kreises  $k$  gelegte Ebene auch den Bildpunkt  $P$  von  $A$  auf der Parabel und schneidet die Leitlinie  $l$  im Fußpunkt  $B$  des Lotes von  $P$  auf  $l$ . Die durch  $B$  und  $D$  bzw. durch  $P$  und  $Z$  bestimmten Geraden schneiden sich in  $A$ . Da die Strecken  $PB$  und  $ZD$  auf Geraden liegen, die der Parabelachse parallel sind, gilt nach einem Strahlensatz  $|BP| : |PA| = |DZ| : |ZA| = 1$ , d. h.,  $|PA|$  und  $|PF|$  sind als Abschnitte auf Tangenten, die von  $P$  an die Dandelinische Kugel gelegt werden können, gleich groß, es

ist  $|BP| = |PA| = |PF|$ , d. h., für einen beliebigen Parabelpunkt ist der Abstand zur Leitlinie gleich dem Abstand zum Brennpunkt der Parabel.

IV. Durch ähnl. Überlegungen findet man: Für jeden Punkt einer *Ellipse* ist die Summe der Abstände von den Brennpunkten  $|PF_1| + |PF_2| = |PA_1| + |PA_2|$  und damit gleich groß (Abb. 2). Für jeden Punkt einer *Hyperbel* ist der Betrag der Differenz der Abstände von den Brennpunkten (Abb. 3)  $||PF_1| - |PF_2|| = ||PA_1| - |PA_2||$  gleich groß ( $\nearrow$  Ellipse, Hyperbel, Parabel). Die *numer. Exzentrizität*  $\epsilon$  der K.e wurde definiert in den entsprechenden Einzelartikeln. Für eine Parabel gilt  $\epsilon = 1$ , für eine Ellipse  $0 \leq \epsilon < 1$  und für eine Hyperbel  $\epsilon > 1$ . Jede Leitlinie eines K.s ist Polare des benachbarten Brennpunktes in bezug auf diesen K. S. a. Polarität.

V. Als Kurve zweiter Ordnung kann jeder K. durch Geradenbüschel projektiv erzeugt werden. Er läßt sich punktweise als Gesamtheit der Schnittpunkte einander entsprechender Strahlen zweier Strahlenbüschel konstruieren, die projektiv, aber nicht perspektiv aufeinander bezogen sind, z. B. zwei Strahlenbüschel  $S_1$  und  $S_2$ , zwischen deren Strahlen eine projektive Beziehung dadurch hergestellt wurde, daß die Schnittpunkte 1, 2, ... der Strahlen von  $S_1$  mit der Geraden  $g_1$  durch Parallelen auf die ihnen zugeordneten Schnittpunkte der Strahlen von

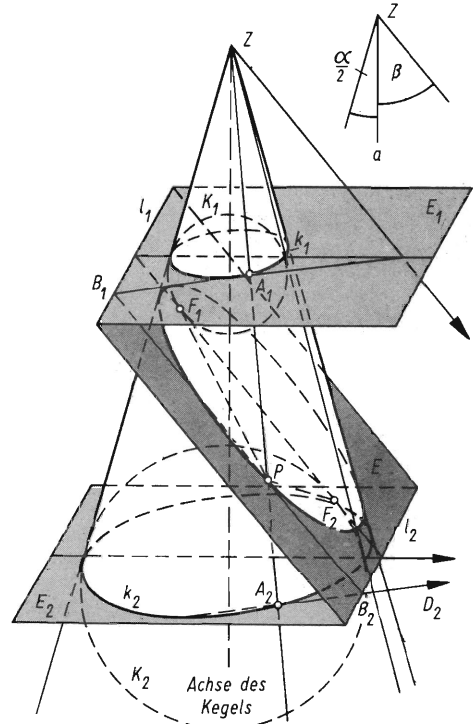


Abb. 2: Ellipse als Kegelschnitt mit zwei Dandelinischen Kugeln auf verschiedenen Seiten der Schnittebene, Leitlinien  $l_1, l_2$



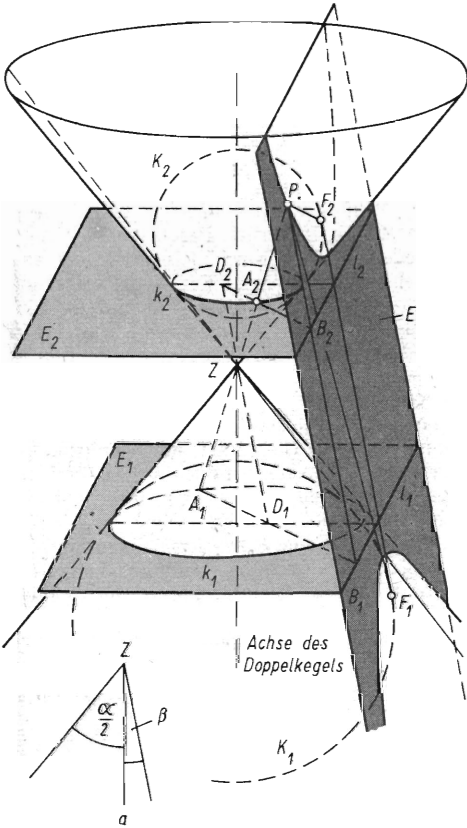
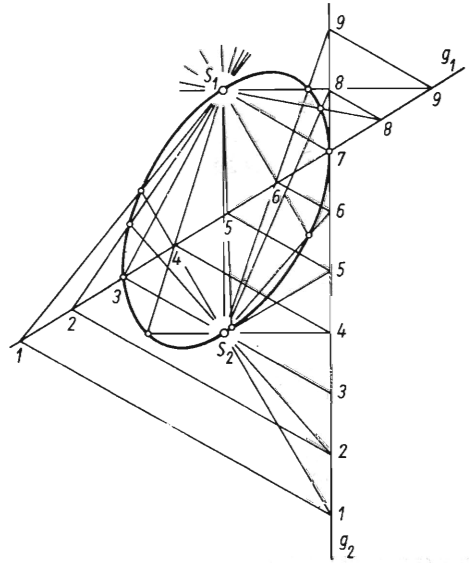
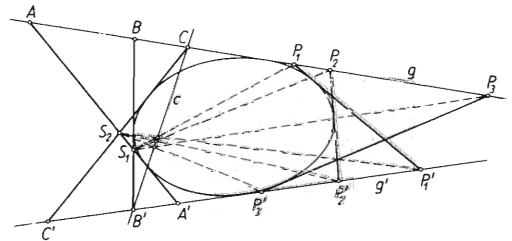


Abb. 3: Hyperbel als Kegelschnitt mit zwei Dandelin'schen Kugeln auf der gleichen Seite der Schnittebene, Leitlinien  $l_1, l_2$

$S_2$  mit der Geraden  $g_2$  abgebildet werden (Abb 4.). Das Geradenbüschel mit dem Träger  $S_1$  ist dann perspektiv auf die Punktreihe  $g_1$  bezogen, das Geradenbüschel in  $S_2$  auf die Punktreihe  $g_2$  und beide Punktreihen  $g_1$  und  $g_2$  werden durch ein Parallelstrahlenbüschel perspektiv aufeinander abgebildet. Die Zusammensetzung der einzelnen Abbildungen gibt eine projektive Abbildung des Strahlenbüschels in  $S_1$  auf das in  $S_2$ . Die Schnittpunkte einander zugeordneter Geraden ergeben die Punkte der Ellipse. Auch mit Hilfe projektiver Punktreihen können K.e erzeugt werden: Die Verbindungsgeraden zweier projektiv aufeinander bezogener Punktreihen umhüllen einen K., wenn die Punktreihen nicht perspektiv liegen (Abb. 5). Einander zugeordnete Punkte, z. B.  $P_1$  auf  $g$  und  $P_1'$  auf  $g'$  erhält man dadurch, daß sich die einander zugeordneten Strahlen der erzeugenden Strahlenbüschel  $S_1$  und  $S_2$  im gleichen Punkt der Zentrale  $c$  der Perspektivität schneiden, z. B.  $S_1P_1$  und  $S_2P_1'$ . Die Träger  $S_1$  und  $S_2$  dieser Strahlenbüschel sowie die Gerade  $c$  werden bestimmt durch drei gegebene Punkte  $A, B, C$  auf  $g$  und ihre Bilder  $A', B', C'$  auf  $g'$ . Von der Wahl dieser



Kegelschnitte. Abb. 4: Projektive Geradenbüschel erzeugen eine Ellipse



Kegelschnitte. Abb. 5: Die Verbindungsgeraden projektiv einander zugeordneter Punkte der Geraden  $g$  und  $g'$  umhüllen einen Kegelschnitt

Punkte hängt die projektive Abbildung, d. h. die Art des K.s, ab.

**Kegelschnitt, nullteiliger**  $\nearrow$  Kurve zweiter Ordnung II.

**Kegelspitze**  $\nearrow$  Kegel I., III.

**Kegelstumpf**  $\nearrow$  Kegel III.

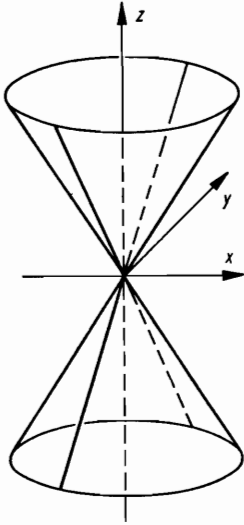
**Kegel zweiter Ordnung:** *entartete, nicht zerfallende Fläche zweiter Ordnung mit Mittelpunkt*, deren Gleichung in einem kartes. Koordinatensystem, das durch *Hauptachsentransformation* geeignet zu finden ist, entweder die Normalform (1) oder (2) hat.

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Gleichung (2) stellt einen *imaginären K.* dar; er enthält neben Punkten mit komplexen Koordinaten als einzigen reellen Punkt die Spitze  $(0, 0, 0)$ .

Gleichung (1) ist die eines *reellen K.s* mit der Spitze  $(0, 0, 0)$  (Abb.). Jede Ebene  $z = z_0$  mit  $z_0 \neq 0$  schneidet diesen K. in einer *Ellipse*, durch deren Mittelpunkt die  $z$ -Achse geht. Eine beliebige Ebene schneidet diesen K. in einer *Kurve zweiter Ordnung*, d. h. in einem *Kegelschnitt*. Irgendein nicht zerfallender unter diesen Kegelschnitten kann als *Leitkurve* des



Kegel zweiter Ordnung

K.s gewählt werden. Auch Kreise gehören zu diesen Kegelschnitten. Die Gerade durch die Spitze  $(0, 0, 0)$  und den Mittelpunkt eines solchen Kreises steht für  $a^2 \neq b^2$  nicht senkrecht auf der Ebene dieses Kreises; der K. ist dann ein *schiefer Kreiskegel*. Für  $a^2 = b^2$  stellt Gleichung (1) einen *geraden Kreiskegel* dar, dessen Gleichung auch in der Form  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$  mit dem halben Öffnungswinkel  $\alpha$  geschrieben wird. Die *Mantellinie* auf dem reellen K. sind gegeben durch die Parameterdarstellung (3) für  $0 \leq u \leq 2\pi$ .

$$(3) \quad x = t a \cos u, \quad y = t b \sin u, \quad z = c t$$

**Kehle** ↗ Dachausmittlung.

**Kehlellipse** ↗ Hyperboloid I.

**Kehrwert** ↗ Brüche I.5.

**Keil** ↗ Prisma III.

**Kelvin-Transformation** ↗ elliptische Differentialgleichung III.3.

**Kennwertermittlung** ↗ Systemidentifikation II.

**Kennziffer** ↗ dekadischer Logarithmus I.

**Kepler**, Johannes, geb. 27. 12. 1571 Weil der Stadt, gest. 15. 11. 1630 Regensburg. — K. war Sohn eines Handelsmannes, der oft auch in Kriegsdienste trat, besuchte erst die Schule in Leonberg und später die Klosterschulen in Adelberg und Maulbronn. Seit 1589 studierte K. in Tübingen, um Theologe zu werden, nahm aber 1599 die ihm angebotene Stellung eines Mathematikprofessors in Graz an. 1600 mußte K. im Zuge der Gegenreformation Graz verlassen und ging nach Prag. Nach dem Tode von Ticho BRAHE am 24. 10. 1601 wurde K. als sein

Nachfolger kaiserl. Mathematiker. Nachdem K.s Gönner, Kaiser Rudolf II., gestorben war, verließ K. Prag und wandte sich 1613 nach Linz als Landvermesser. Seit 1628 lebte K. in den Diensten des mächtigen Wallenstein vorwiegend in Sagan. Bei einem Besuch des Kurfürstentages in Regensburg verstarb K. völlig unerwartet. —

K.s Hauptarbeitsgebiete waren Astronomie und Optik. Er fand nach außerordentlich langwierigen Berechnungen die *Grundgesetze der Planetenbewegung*; das 1. und 2. K.sche Gesetz veröffentlichte er 1609 in »Astronomia Nova«, das 3. K.sche Gesetz 1619 in »Harmonices Mundi«. 1611 erfand er das astronom. Fernrohr. Seine *Rudolphinischen Tafeln* (1627) sind bis in die Neuzeit eines der wichtigsten Hilfsmittel der Astronomie gewesen. Auf mathemat. Gebiet entwickelte er heurist. infinitesimale Betrachtungen. Seine bekannteste mathemat. Schrift ist die »Stereometria Doliorum« (1615), in der sich z. B. die K.sche Faßregel befindet.

**Keplersche Regel** ↗ Integration, numerische II.

**Kern**: *Algebra* Teilmenge einer Gruppe bzw. eines Ringes  $A$ , die bei dem Homomorphismus  $\varphi$  von  $A$  in  $B$  auf das Einselement bzw. das Nullelement von  $B$  abgebildet wird. Der K. eines Gruppenhomomorphismus  $\varphi$  ist ein *Normalteiler* (↗ Gruppe) von  $A$ , der K. eines Ringhomomorphismus  $\varphi$  ist ein ↗ *Ideal* von  $A$ . S. a. Integralgleichung II.; lineare Abbildung II.4.; Normalform II.

**Kernspeicher**: ein aus Ringkernen ferromagnet. Materials aufgebauter Speicher mit kurzer Zugriffszeit. In Abhängigkeit von der zu speichernden binären Information wird der Kern positiv oder negativ magnetisiert. Der remanente Magnetismus stellt die gespeicherte Information dar. Die Hauptspeicher von Digitalrechnern sind meist als K. ausgebildet.

**Kette** ↗ Anordnungsrelationen II.

**Kette, elementare** ↗ Durchlaufungen von Graphen II.

**Kettenbruch**: I. eine Folge ineinandergeschalteter Brüche der Form (1). Die Zahlen  $z_1, z_2, \dots, z_k$  heißen

$$(1) \quad n_0 + \frac{z_1}{n_1 + \frac{z_2}{n_2 + \frac{z_3}{n_3 + \dots + \frac{z_k}{n_k}}}}$$

*Teilzähler*, die Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_k$  *Teilnenner*, die Brüche  $z_1/n_1, z_2/n_2$  usw. auch *Teil- oder Partialbrüche* des K.s. Meist werden *regelmäßige Kettenbrüche* untersucht, deren Teilzähler sämtlich 1 und deren Teilnenner  $n_i$  positive ganze Zahlen sind;  $n_0$  ist eine ganze Zahl. Da zur Beschreibung eines solchen regelmäßigen K.s die Angabe der  $n_i$  für  $i = 0, 1, \dots, k$  ausreicht, pflegt man ihn durch  $[n_0; n_1, n_2, \dots, n_k]$  anzugeben, z. B. für den regelmäßigen K. (2).

$$(2) \quad 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [2; 4, 1, 2] = \frac{31}{14}$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, da man z. B. den regelmäßigen K. aus (2) auch in der Form (3) angeben kann. Die Darstellung wird aber eindeutig

$$(3) \quad 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = [2; 4, 1, 1, 1] = \frac{31}{14}$$

durch die zusätzliche Forderung  $n_k > 1$ , die wegen  $[n_0; n_1, n_2, \dots, n_k, 1] = [n_0; n_1, n_2, \dots, n_k + 1]$  stets zu erreichen ist.

II. Unter dem *Näherungsbruch*  $r$ -ter Ordnung für  $r \leq k$  versteht man den mit dem  $r$ -ten Teilnenner  $n_r$  abbrechenden K. Es sind  $\alpha_r = [n_0; n_r] = A_r/B_r$ ,  $\alpha_2 = [n_0; n_1, n_2] = A_2/B_2, \dots, \alpha_r = [n_0; n_1, \dots, n_r] = A_r/B_r$ , sämtlich rationale Zahlen, deren ganzzahlige Zähler  $A_i$  und Nenner  $B_i$  für  $i = 1, \dots, r$  aus den Rekursionsformeln (4) gewonnen werden können, wenn man noch setzt:  $A_0 = n_0, A_{-1} = 1, A_{-2} = 0, B_0 = 1, B_{-1} = 0, B_{-2} = 1$ .

$$(4) \quad A_k = n_k A_{k-1} + A_{k-2}; B_k = n_k B_{k-1} + B_{k-2}$$

Die Näherungsbrüche approximieren den Endbruch (1) abwechselnd von unten und von oben mit wachsender Genauigkeit.

Ein K. (1) stellt eine rationale Zahl dar, und es gilt auch die Umkehrung, daß man jede rationale Zahl in einen regelmäßigen K. entwickeln kann. Wie man dabei vorzugehen hat, zeigt das Beispiel (5).

$$(5) \quad \frac{31}{14} = 2 + \frac{3}{14} = 2 + \frac{1}{\frac{14}{3}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}}$$

$$= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1}}}$$

$$= [2; 4, 1, 2].$$

III. Entsprechend lassen sich auch nichtabbrechende Kettenbrüche  $[n_0; n_1, n_2, \dots]$  betrachten, auch *unendl. Kettenbrüche* gen., auf die man geführt wird, wenn man eine irrationale Zahl in einen K. entwickelt. In Verallgemeinerung der Schritte in (5) erhält man z. B. für  $\alpha = \sqrt{2}$  unter Benutzung von  $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$  die Beziehungen (6). Aus ihnen ergibt sich für jede natürl. Zahl  $i > 2$  der

$$(6.1) \quad \alpha = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \text{ mit } \alpha_1 = \sqrt{2} + 1,$$

$$(6.2) \quad \alpha_1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 2 + \frac{1}{\alpha_2} \text{ mit } \alpha_2 = \sqrt{2} + 1$$

Wert  $\alpha_i = \sqrt{2} + 1$ , d. h.:  $n_0 = 1, n_1 = 2, \dots, n_i = 2, \dots$  oder der unendl. K.  $\sqrt{2} = [1; 2, 2, \dots]$ . Läßt man auch unendl. Kettenbrüche zu, so kann man jede reelle Zahl in einen K. entwickeln, der genau dann endlich ist, wenn die Zahl rational ist.

Die endl. Näherungsbrüche eines unendl. K.s konvergieren gegen die durch den K. dargestellte Zahl. — S. a. Kettenbruchentwicklung.

**Kettenbruchentwicklung:** wichtiges Hilfsmittel zur *Interpolation* einer Funktion durch rationale Funktionen, die zum Unterschied von Polynomen *Pole* haben und demnach für nicht überall beschränkte Funktionen wesentlich besser zur Interpolation geeignet sind als diese. Sind  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  mit  $N = 2n + 1$  für  $n \geq 1$  Stützstellen und  $y_1, y_2, \dots, y_N$  gewisse, ihnen zugeordnete reelle Zahlen, dann ist die interpolierende rationale Funktion  $R_n(x) = P(x)/Q(x)$ , in der der Grad von  $P(x)$  nicht größer als der von  $Q(x)$  und  $n$  der Grad von  $Q(x)$  ist, durch den endl. Kettenbruch (1) gegeben, in dem die  $\varrho_i$  die *reziproken Differenzen* (2), (3), (4) sind.

*Beispiel:* Für  $y(x) = 1/(1 + x^2)$  gibt Tabelle (5) die reziproken Differenzen an. Aus dem Verschwinden der 4. reziproken Differenzen folgen  $n = 2$  und  $N = 5$ . Zur Entwicklung wird die obere Schrägreihe benutzt, und man bekommt (6).

$$(1) \quad R_n(x) = y_1 + \frac{(x - x_1)}{\varrho_1 + \frac{(x - x_2)}{\varrho_2 - y_1 + \frac{(x - x_3)}{\varrho_3 - \varrho_1 + \frac{(x - x_4)}{\dots \frac{(x - x_{N-1})}{\varrho_{N-1} - \varrho_{N-2}}}}}}$$

$$(2) \quad \varrho_0[x_i] = y_i$$

$$(3) \quad \varrho_1[x_{i+1}x_i] := \frac{x_{i+1} - x_i}{\varrho_0[x_{i+1}] - \varrho_0[x_i]},$$

. . . . .

$$(4) \quad \varrho_n[x_{i+n} \dots x_i] = (x_{i+n} - x_i)/A \text{ mit } A = \varrho_{n-1}[x_{i+n} \dots x_{i+1}] - \varrho_{n-1}[x_{i+n-1} \dots x_i] + \varrho_{n-2}[x_{i+n-2} \dots x_i]$$

(5)

$x$	$y = \varrho_0$	$\varrho_1$	$\varrho_2$	$\varrho_3$	$\varrho_4$	...
0	1					
1	1/2	-2				
2	1/5	-10/3	-1			
3	1/10	-10	-1/10	0	0	
4	1/17	-170/7	-1/25	40	0	
5	1/26	-442/9	-1/46	140		

$$(6) \quad R_2(x) = 1 + \frac{(x - 0)}{-2 + \frac{(x - 1)}{-1 - 1 + \frac{(x - 2)}{0 - (-2) + \frac{(x - 3)}{0 - (-1)}}}}$$

Da fünf Stützstellen verwendet wurden, muß, wie man leicht bestätigt,  $R_5(x) = y(x)$  sein.

**Kettenlinie** ↗ hyperbolische Funktion I.

**Kettenregel** ↗ Differentiationsregeln IV., V., ↗ Logarithmensystem I.

**Kettenregel, verallgemeinerte** ↗ Differentiationsregeln V., ↗ Vektorfeld.

**Kettenschluß, gewöhnlicher:** in der Aussagenlogik eine allgemeingültige Implikation der Form  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ . Diese Implikation »wenn aus  $p$  folgt  $q$  und aus  $q$  folgt  $r$ , so aus  $p$  folgt  $r$ « ist die Grundlage einer Schlußregel, nach der von zwei Implikationen  $p \rightarrow q$  und  $q \rightarrow r$  auf die Implikation  $p \rightarrow r$  geschlossen werden darf. In der traditionellen Logik ist ein K. die Zusammenziehung einer Schlußkette zu einem einzigen Schluß.

**k. g. V.:** *kleinstes gemeinsames Vielfaches* ↗ Brüche I.3., ↗ Teilbarkeit V.

**Khintehine** ↗ Chintschin.

**Kilo** ↗ Strecke V.

**Kirehhooff, George David**, geb. 21. 3. 1884 Overisel (Mich.), gest. 12. 11. 1944 Cambridge (Mass.) — K. studierte in Cambridge und Chicago, war anschließend an verschiedenen amerikanischen Universitäten tätig, seit 1912 als Professor an der Harvard-Universität in Cambridge. Er lieferte bedeutende Beiträge zur statist. und theoret. Mechanik, zur Relativitätstheorie und zur Theorie der Differentialgleichungen.

**Klammern (...), [...], {...}, {...}:** I. techn. Zeichen zur Bezeichnung der Reihenfolge, in der mathemat. Operationen zur Berechnung von Termen anzuwenden sind. Für Grundrechenoperationen werden mit K. bes. Abweichungen von der Regel angegeben, daß Multiplikation und Division zuerst und danach Addition und Subtraktion auszuführen sind; z. B. bedeutet  $3 \cdot 2 + 4 = 6 + 4 = 10$ , dagegen  $3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 6 = 18$ . Werden schräge Bruchstriche verwendet, dienen K. zur eindeutigen Bezeichnung des Nenners; der Term  $1/3\pi r^2 h$  ist z. B. erst eindeutig in der Form  $(1/3)\pi r^2 h$ , für die allerdings mit besonderen Lettern, *Bruchziffern* gen., auch  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  gesetzt wird. Ist dagegen z. B.  $2\pi$  der Nenner, so ist zu schreiben  $1/(2\pi)$ . Danach ist für  $1/a \cdot b$  stets zu setzen  $(1/a) \cdot b$  im Unterschied zu  $1/(ab)$ .

II. Für die Subtraktion geben K. die Möglichkeit, zwischen dem Operationszeichen vor den K. n und dem Vorzeichen von jedem der durch sie zusammengefaßten Glieder zu unterscheiden. Dabei gilt für das Auflösen der K. die Regel, daß das Operationszeichen — die Vorzeichen umkehrt (↗ Subtraktion); z. B.  $c - (b_1 + b_2 + b_3) = c - b_1 - b_2 - b_3$  oder  $c - [a_1 - (a_2 - a_3)] = c - a_1 + (a_2 - a_3) = c - a_1 + a_2 - a_3$ . Dabei erhält man das gleiche Ergebnis, in welcher Reihenfolge auch die K. aufgelöst werden, z. B.  $c - [a_1 - (a_2 - a_3)] = c - [a_1 - a_2 + a_3] = c - a_1 + a_2 - a_3$ . Für das Produkt von K. gilt  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$  (↗ Multiplikation).

III. Wegen der Häufigkeit, mit der K. verwendet werden müssen, kann jeder Art von K. keine eindeutige Bedeutung zugeschrieben werden. Meist

werden *runde K.* (...) benutzt, und Terme, die *runde K.* enthalten, werden in *eckige K.* [...] gesetzt, Terme, die diese K. enthalten, aber in *geschwungene K.* {...}. Der Brauch nimmt aber zu, Terme, die *runde K.* enthalten, wieder durch *runde K.* zusammenzuschließen.

In diesem Buche werden *geordnete Paare, Tripel* oder *n-Tupel* von Zahlen stets in *runde K.* geschlossen, *Intervalle* durch *eckige K.* angegeben und *Mengen* sowie zuweilen auch *Folgen* durch *geschwungene K.* Wegen der vielseitigen Verwendung von K. kann umgekehrt nicht aus ihrer Form auf die Bedeutung der Terme in ihnen geschlossen werden. Zur Erweiterung der Eindeutigkeit der Aussagen sind Abweichungen im Gebrauch mancher Formen üblich. — S. a. Intervall.

**Klarschriftleser** ↗ digitale Rechenanlage I.1.

**Klasse** ↗ Kombination I., ↗ Menge I., ↗ Mengenlehre III.

**Klasseneinteilung:** Zerlegung einer Menge in *Äquivalenzklassen* (↗ Äquivalenzrelation).

**Klassenexistenzaxiome** ↗ Mengenlehre III.

**Klassenhäufigkeit** ↗ Histogramm.

**Klein, Felix**, geb. 25. 4. 1849 Düsseldorf, gest. 22. 6. 1925 Göttingen. — K. studierte 1865/70 in Bonn. Während eines Studienaufenthalts 1870 in Paris wurde er mit der sich stürmisch entwickelnden *Gruppentheorie* bekannt. Seit 1871 war K. als Privatdozent in Göttingen tätig, 1872 als Professor in Erlangen, 1875 in München, 1880 in Leipzig und 1886 in Göttingen. Er lieferte grundlegende Arbeiten zur *Funktionentheorie*, Geometrie und Algebra. Bes. die *Gruppentheorie* und ihre Anwendung fanden dabei sein Interesse. 1872 veröffentlichte er das *Erlanger Programm*. Im höheren Lebensalter wandte sich K. auch pädagog. und histor. Fragen in stärkerem Maße zu.

**kleiner Fermatscher Satz** ↗ Kongruenz von Zahlen III.

**Kleinkreis** ↗ Großkreis II., ↗ Kugel I., ↗ Kugeldarstellung I., ↗ sphärischer Kreis.

**kleinstes Element** svw. Minimum.

**kleinstes gemeinsames Vielfaches**, Abk. *k. g. V.*: die kleinste positive ganze Zahl  $v = n \cdot a = m \cdot b$ , die Vielfaches zweier gegebener positiver Zahlen  $a$  und  $b$  ist. Dabei sind  $n, m$  die kleinsten natürl. Zahlen mit  $n \cdot a = m \cdot b$ . Daher kann man das k. g. V.  $v$  von  $a$  und  $b$  auch definieren durch die zwei Bedingungen (1)  $a \mid v, b \mid v$  und (2) für alle positiven ganzen Zahlen  $w$  mit  $a \mid w$  und  $b \mid w$  gilt  $v \mid w$ . Die Vielfachen von 4 sind z. B. 4, 8, 12, 16, 20, 24, und die von 6 sind 6, 12, 18, 24, ..., dann ist ihr k. g. V.  $12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ . Aus der Zerlegung von  $a$  und von  $b$  in Primfaktoren ergibt sich das k. g. V. als das Produkt dieser Primfaktoren, das jeden dieser Primfaktoren in seiner höchsten Potenz enthält; für  $a = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  und  $b = 72 = 2^3 \cdot 3^2$  ergibt sich z. B. das k. g. V. zu  $v = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ . Durch Vergleich der Faktorenzerlegungen von  $a, b$  und  $v$  erhält man  $n = 2 \cdot 3 = 6$  und  $m = 5$ . Bei der Bestimmung des Hauptnenners (↗ Brüche I.3.) sind  $n$  und  $m$  die Erweiterungsfaktoren. Für Polynome entsprechen den Primfaktoren irreduzible Polynome, z. B. für

$a = 4r - 6v = 2(2r - 3v)$  und  $b = 6r + 9v = 3(2r + 3v)$  erhält man das k. g. V.  $v = 6(4r^2 - 9v^2)$  mit  $n = 3(2r + 3v)$  und  $m = 2(2r - 3v)$ . Das k. g. V. von drei oder mehr Zahlen erhält man stufenweise als das k. g. V. von zwei Zahlen und der Dritten. — S. a. Teilbarkeit V.

**Knapsackproblem** [knapsack, engl., *Rucksack*]: ein Standardproblem der Operationsforschung, das aus folgender Aufgabe entstand: Von Gegenständen  $G_i$  mit Gewicht  $a_i$  und Wert  $p_i$  ist eine Auswahl mit größtem Gesamtwert in einen Rucksack mit der Tragfähigkeit  $a$  zu packen. Das K. führt auf die 0-1-Optimierungsaufgabe: für welche  $i$  aus  $1, \dots, n$  ist  $x_i = 0$  bzw.  $x_i = 1$  zu wählen, damit  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq a$  und  $p_1x_1 + \dots + p_nx_n = \text{Max}$ ! Sind die Gegenstände jeweils in mehreren Exemplaren vorhanden, können die  $x_i$  weitere ganzzahlige Werte annehmen. Werden gleichzeitig mehrere Eigenschaften betrachtet, z. B. noch das Volumen, so entsteht ein *mehrdimensionales K.* Das K. hat vielfältige Anwendungen bei der Optimierung von Ausrüstungen, z. B. von Rettungswagen, Unterseebooten, Weltraumschiffen. Die  $p_i$  bewerten dann den Nutzen.

**Knickschaltung** ↗ Analogrechner V.

**Knoten** ↗ Interpolation III.

**Knotenbasis** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.1.

**knotenfremd** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.

**Knotenpunkt** ↗ Graph I.

**Knüppelwalmdach** ↗ Dachausmittlung.

**Koalition** ↗ Spieltheorie I.

**Kode, Code**: Vorschrift zur eindeutigen Abbildung einer Menge  $M_1$  von Zeichen in eine Menge  $M_2$  von Wörtern. In der *Rechentchnik* bestehen die Wörter der Bildmenge  $M_2$  aus Folgen der Binärzeichen 0 und 1. Dadurch lassen sich einem K. durch Vereinbarungen der Form (1) z. B. Lochkombina-

(1)  $L \leftrightarrow$  Lochung,  $0 \leftrightarrow$  keine Lochung

tionen zuordnen, die von Lochkarten oder Lochstreifen genutzt werden können. S. a. Kodierung III.

**Kodeumsetzer** ↗ Kodierung III.

**Kodewort** ↗ Kodierung I.

**Kodierung, Verschlüsselung**: I. i. w. S. jeder Vorgang zur Umwandlung einer Information in ein Signal nach einer festgelegten Vorschrift (s. a. Informationstheorie II.; Signal II.). Zur Darstellung eines Signals werden Wörter aus einem Alphabet von  $k$  Zeichen gebildet, die man *Kodewörter* nennt. Enthält das Alphabet  $k$  Zeichen und sind für ein Kodewort  $n$  Stellen vorgesehen, so sind durch Kombination der Zeichen genau  $k^n$  unterschiedl. Kodewörter möglich. Dabei muß nicht jedes mögl. Kodewort mit einer Bedeutung belegt sein. Bei Verwendung des Binäralphabets  $\{0, 1\}$  ergeben sich z. B. für den *Binärkode* 8 verschiedene 3stellige Kodewörter 000, 001, 010, 011, ..., 111. Die natürl. Zahlen  $k$  und  $n$  bestimmen einen *Signalraum*. Der dazu gehörige *Informationsraum* umfaßt

die Gesamtheit der zu übertragenden Informationen.

II. *Analoge Informationen* sind im Informationsraum kontinuierlich verteilt. Ihre K. erfolgt dadurch, daß den Informationen aus einem bestimmten Unterraum des Informationsraumes in festgelegter Weise jeweils ein bestimmtes Kodewort aus dem Signalraum eindeutig zugeordnet wird. Die entsprechende Einrichtung heißt *Analog-Digital-Umsetzer* oder *A/D-Wandler*.

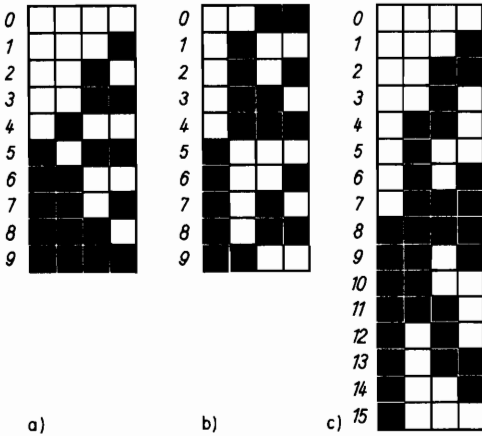
III. *K. diskreter Informationen*: Den *diskreten Elementen* des Informationsraumes werden durch eine eindeutige Transformation Kodewörter des Signalraumes zugeordnet. Diese Zuordnung wird durch einen *Kodeumsetzer* realisiert. Die eindeutige Zuordnung bzw. ihre Darstellung durch eine Transformationsvorschrift wird als *Kode* [*Code*] bezeichnet. Aus der Vielzahl entwickelter Kodes wird hier nur eine kleine Auswahl aufgeführt. Bei den sog. *redundanzfreien Kodes* wird jedem mögl. Kodewort ein Signal zugeordnet. Bei den *redundanten Kodes* können die ungenutzten Kodewörter zur systemat. *Fehlererkennung* verwendet werden. *Binärkodes* über dem Alphabet  $\{0, 1\}$  sind sehr verbreitet, da sich den Zeichen 1 und 0 technisch leicht realisierbare Signale zuordnen lassen, dem Zeichen 1 z. B. ein gestanztes Loch, ein fließender Strom oder eine vorhandene Magnetisierung. Die wichtigsten Binärkodes sind:

III.1. Der *Dualkode*. Seine Zuordnungsvorschrift beruht auf dem Dualsystem (↗ dyadisches Zahlensystem). Nach  $x = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$  mit  $a_i = 0$  oder 1 ergibt

sich das jeweilige Kodewort für den zu signalisierenden vorzeichenlosen ganzen Zahlenwert  $x$  als Zusammenfügung der den Koeffizienten  $a_i$  entsprechenden Zeichen 0 oder 1, deren Reihenfolge durch den dualen Stellenwert  $2^i$  festgelegt ist; z. B. ist  $6 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \triangleq$  LLO.

III.2. Bei einem *dezimal-binären Kode* wird jede einzelne Dezimalziffer für sich allein binär verschlüsselt. Das Kodewort ergibt sich dann aus der Zusammenfügung der Teilkodewörter für jede Dezimalziffer in der durch die dezimale Stellenwertigkeit bestimmten Reihenfolge. Da zur Verschlüsselung der Dezimalziffern 0, ..., 9 mindestens 4 bit erforderlich sind, müssen für eine solche *Tetrade* 4 Stellen im Alphabet  $\{0, 1\}$  vorgesehen werden. Von den hieraus bildbaren 16 Kodewörtern werden nur 10 gebraucht; die überschüssigen werden *Pseudotetraden* gen. Die dezimal-binären Kodes sind somit redundant. Die wichtigsten dezimal-binären Kodes sind der *dezimal-duale Kode*, der *Dreizeß-Kode* und der *Aiken-Kode* (Abb.). Diese unterscheiden sich in der Art der Zuordnung von Dezimalziffern und Teilkodewörtern; der Dreizeß- und der Aiken-Kode sind außerdem symmetrisch aufgebaut.

III.3. *Zyklisch permutierte Kodes* weisen die Eigenschaft auf, daß in den Kodewörtern benachbarter signalisierter Größen an genau einer Stelle ein Zeichenwechsel auftritt, z. B. im *Gray-Kode* (Abb. c). Dies gilt ebenso beim Übergang vom höchsten vor-



a) b) c)  
 Kodierung: Aiken Kode a), Dreiezzesskode b) und zyklisch permutierter Gray-Kode c)

kommenden Zahlenwert zum niedrigsten. Diese zykl. Eigenschaft ist bes. bei Verwendung für umlaufende Kodescheiben von Bedeutung.

**Koeffizient:** Zahl, mit der in einem Term eine Variable multipliziert wird. In der Gleichung  $3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$  z. B. sind die Zahlen 3 und  $-2$  die Koeffizienten der Variablen  $x_1$  bzw.  $x_2$ .

**Koeffizient des Aufwands** ↗ Verflechtungsbilanz.  
**Koeffizientenmatrix** ↗ lineares Gleichungssystem II.  
**Koeffizientenvergleich** ↗ Anfangswertproblem II., ↗ Entwicklung von Funktionen II., ↗ lineare Abhängigkeit II.4., ↗ Partialbruchzerlegung I., III., ↗ Potenzreihe VI., XIII.

**Kofunktion** ↗ Winkelfunktion II., III.  
**Koinzidenz** ↗ Zweitafelprojektion I.  
**kollinear:** Bezeichnung dafür, daß drei oder mehr Punkte auf derselben Geraden liegen.

S. a. geometrische Figur; Geradengleichung II.  
**Kollinearitätsbedingung** ↗ Geradengleichung V.

**Kollineation:** Geometrie eine Abbildung einer Punktmenge, die kollineare Punkte wieder in kollineare Punkte überführt. S. a. projektive Abbildung.

**Kolmogorow, Andrej Nikolajewitsch**, geb. 25. 4. 1903 Tambow. — K. studierte in Moskau und arbeitete seit 1929 an der Moskauer Universität, seit 1939 am Mathemat. Institut der Akademie der Wissenschaften. Er befaßte sich mit Analysis, z. B. Fourierreihen, Funktionalanalysis, mit der Theorie zufälliger Größen und bes. mit *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, für die er erstmals eine axiomat. Grundlage schuf.

**Kolmogorow, Satz von** ↗ Gesetze der großen Zahl, III., ↗ stochastischer Prozeß II.

**Kolmogorowsches Axiomensystem** ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.

**Kolmogorowsche Verteilung** ↗ Kolmogorow-Smirnow-Test.

**Kolmogorow-Smirnow-Test:** ein parameterfreier (↗ Parametertest) Signifikanztest zur Prüfung der Hypothese, daß die Verteilungsfunktionen  $F(x)$  und  $G(x)$  zweier unabhängiger stetiger Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  übereinstimmen. Die Nullhypothese  $H_0$

lautet deshalb:  $F(x) = G(x)$  (↗ Zweistichprobenproblem). Wird für  $X$  eine Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Umfang  $n$ , für  $Y$  eine Stichprobe  $(Y_1, \dots, Y_m)$  vom Umfang  $m$  durchgeführt und sind  $F_n(x)$  und  $G_m(x)$  die aus diesen Stichproben ermittelten empir. Verteilungsfunktionen, so benutzt man (1) als

$$(1) \quad D_{n,m}^* = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_{x \in \mathbb{R}'} |F_n(x) - G_m(x)|$$

Testgröße. Unter der Voraussetzung, daß  $H_0$  wahr ist, gilt (2), wenn  $Q(\lambda)$  die gemäß (3) definierte *Kolmogorowsche Verteilung* ist.

$$(2) \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} P(D_{n,m}^* < \lambda) = Q(\lambda)$$

$$(3) \quad Q(\lambda) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp[-2k^2\lambda^2] & \text{für } \lambda > 0 \\ 0 & \text{für } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Die Testgröße ist danach asymptotisch *kolmogorowverteilt*. Ist  $\lambda_a$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Kolmogorow-Verteilung, das aus Tafeln entnommen werden kann, so ist  $\mathbf{B} = \{\lambda \mid \lambda > \lambda_a\}$  der krit. Bereich. Liegt deshalb für konkrete Stichproben die Realisierung  $d_{n,m}^*$  von  $D_{n,m}^*$  in  $\mathbf{B}$ , d. h., ist  $d_{n,m}^* > \lambda_a$ , so muß die Hypothese  $F = G$  verworfen werden.

**Kombination: I.** Zusammenstellung von  $k$  Elementen aus einer Gesamtheit von  $n$  Elementen, die genauer  $K$ .  $k$ -ter Klasse gen. wird, z. B. sind  $aa, ab, bc, \dots$   $K$ .en zweiter Klasse der Elemente  $a, b, c$ . Werden nur verschiedene Elemente zur Zusammenstellung ausgewählt, so spricht man von  $K$ . ohne *Wiederholung*, ansonsten von  $K$ . mit *Wiederholung*. Werden zwei  $K$ .en, die gleiche Elemente, diese aber in verschiedener Anordnung enthalten, als verschieden betrachtet, so spricht man von  $K$ .en mit *Berücksichtigung der Anordnung* bzw. *Variationen*, im Unterschied zu  $K$ .en ohne *Berücksichtigung der Anordnung* bzw. von  $K$ .en schlechthin.

**II. Anzahl der Variationen:** Die Anzahl der Variationen  $k$ -ter Klasse von  $n$  Elementen ohne Wiederholung wird mit  $V_n^k$  bezeichnet und nach (1) berechnet, von den  $n = 4$  Elementen  $a, b, c, d$  gibt es

$$(1) \quad V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\text{z. B. } V_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! / 1! = 4! = 24 \text{ Variationen zur dritten Klasse. Sie lauten: } abc, abd, acb,$$

$acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb$ .

Die Anzahl der Variationen  $k$ -ter Klasse von  $n$  Elementen mit *Wiederholung* wird mit  ${}^wV_n^k$  bezeichnet und nach (2) berechnet. Wird z. B. mit zwei Würfeln

$$(2) \quad {}^wV_n^k = n^k$$

kurz hintereinander gewürfelt und die Reihenfolge der beiden Augenzahlen berücksichtigt, so sind  ${}^wV_6^2 = 6^2 = 36$  Ergebnisse möglich. Aus den Ziffern  $0, 1, 2, \dots, 9$  lassen sich  ${}^wV_{10}^3 = 10^3 = 1000$  Variationen zur dritten Klasse mit *Wiederholung* bilden; es sind gerade die Zahlen  $000, 001, 002, \dots, 999$ .

III. Anzahl von K.en: Die Anzahl der K.en zur  $k$ -ten Klasse von  $n$  Elementen ohne Wiederholung wird mit  $C_n^k$  bezeichnet und nach (3) berechnet.

$$(3) \quad C_n^k = \binom{n}{k}$$

Dabei werden K.en, die sich nur durch die Anordnung unterscheiden, als nicht verschieden angesehen. Diese Anzahlen sind die *Binomialkoeffizienten*. Im Tele-Lotto gibt es z. B.  $\binom{35}{5} = 324\,632$  mögl. Tips.

Die Anzahl der K.en von  $n$  Elementen zur  $k$ -ten Klasse mit Wiederholung wird mit  ${}^w C_n^k$  bezeichnet und nach (4) berechnet.

$$(4) \quad {}^w C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

#### Kombinationssteuerung $\nearrow$ Steuerung II.

**Kombinatorik:** Zweig der Mathematik, der die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen oder Zahlen untersucht. Typ. kombinator. Probleme sind z. B. die folgenden Fragestellungen: „Auf wieviel verschiedene Arten kann man in einem quadrat. Netz von Straßen von einer bestimmten Straßenecke zu einer gewissen anderen gelangen, ohne seinen eigenen Weg zu kreuzen?“ oder „Auf wieviel verschiedene Arten kann man aus 35 Zahlen 5 Zahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auswählen?“ oder „Auf wieviel verschiedene Arten kann man  $s$  Dinge in  $t$  Fächer verteilen?“. Viele Aufgaben der klass. Wahrscheinlichkeitsrechnung ( $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit, klassische) führen auf kombinator. Probleme.  $\nearrow$  Kombination,  $\nearrow$  Permutation.

**kombinatorische Optimierung** svw. Optimierung, ganzzahlige.

**kommensurabel:** mit gemeinsamem Maß meßbar, vergleichbar; z. B. heißen zwei Zahlen  $k$ ., wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten Zahl sind, und zwei Strecken heißen  $k$ ., wenn die Länge jeder Strecke ein ganzzahliges Vielfaches der Länge einer als Einheitsstrecke aufgefaßten dritten Strecke ist. Zwei beliebige rationale Brüche sind  $k$ . *Inkommensurabel* oder nicht  $k$ . sind eine rationale und eine irrationale Zahl; z. B. sind die Längen der Seite und der Diagonale eines Quadrats inkommensurabel, da ihr Quotient  $\sqrt{2}$  ist. S.a. Strecke I.

**Kommunikationskette**  $\nearrow$  Information II.

**kommutativ:** vertauschbar; eine (binäre) Operation ( $\nearrow$  algebraische Struktur) heißt  $k$ ., wenn das Resultat der Operation in keinem Falle von der Reihenfolge der Operanden abhängt, d. h., wenn man sie vertauschen kann. Addition und Multiplikation von natürl., ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen sind z. B.  $k$ .e Operationen und es gilt  $a + b = b + a$  als *Kommutativgesetz der Addition* und  $a \cdot b = b \cdot a$  als *Kommutativgesetz der Multiplikation*. Nicht  $k$ . ist das Potenzieren, da z. B.  $2^3 = 8$ , aber  $3^2 = 9$ . Auch für das Produkt von Permutationen, Matrizen und das Kreuzprodukt zweier Vektoren gilt das Kommutativgesetz nicht. Eine Gruppe, ein Ring, allgemein eine algebraische Struk-

tur heißt  $k$ ., wenn die in ihr erklärte Multiplikation, allgemein die binäre Operation,  $k$ . ist. Eine  $k$ .e Gruppe heißt auch *abelsche Gruppe*. — S. a. Addition I.; Funktion I.; Matrix II.; Vektorraum I.; Verband I., zufälliges Ereignis II.

**kompakte Menge**  $\nearrow$  Menge IV.

**Komparator**  $\nearrow$  Analogrechner I., VI.

**Kompiler**  $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners I., III.,  $\nearrow$  Betriebssystem II.

**komplanar Geometrie:** Bezeichnung für Punkte bzw. Geraden, die auf einer gemeinsamen Ebene liegen. S. a. Ebenengleichung I.; geometrische Figur.

**Komplanon:** Berechnung des Flächeninhalts krummer Oberflächen. Sie geht von der ersten  $\nearrow$  Grundform einer Fläche aus, deren Koeffizienten  $E, F, G$  durch die Gleichungen (1) bestimmt sind, wenn die glatte Fläche  $S$  durch die Parameterdarstellung  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ ,  $z = \chi(u, v)$  gegeben ist, in der die Parameter  $u$  und  $v$  einen Bereich

$$(1) \quad \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

$\Gamma$  der  $u, v$ -Ebene durchlaufen. Das *Oberflächenelement*  $dS$  ist dann gegeben durch den Ausdruck  $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$  und der Flächeninhalt  $\Delta S$  als Flächenintegral (2).

$$(2) \quad \Delta S = \iint_{(\Gamma)} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Falls  $S$  eindeutig über der  $x, y$ -Ebene liegt und durch die Gleichung  $z = \varphi(x, y)$  gegeben ist, in der die Variablen  $x$  und  $y$  den Bereich  $B$  durchlaufen, so

$$(3) \quad \Delta S = \iint_{(B)} \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} dx dy$$

wird der Flächeninhalt  $\Delta S$  von  $S$  durch (3) berechnet. Das über der Kreisfläche  $x^2 + y^2 \leq R^2$  liegende Stück der Fläche  $S$  mit der Gleichung  $z = xy$  hat z. B. danach den Flächeninhalt (4). Wird dieses Flächenintegral mittels Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,

$$(4) \quad \Delta S = \iint_{(B)} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

$y = r \sin \varphi$  für  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  transformiert, so ergibt sich (5), und nach der Substitution  $u = \sqrt{1 + r^2}$  folgt (6).

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta S &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^R r \sqrt{1 + r^2} dr \end{aligned}$$

$$(6) \quad \Delta S = 2\pi \int_1^{\sqrt{1+R^2}} u^2 du = (2\pi/3) (\sqrt{1+R^2})^3 - 1)$$

Die Oberfläche eines *Rotationskörpers*, der durch Rotation der Bildkurve einer für  $a \leq x \leq b$  nicht-negativen Funktion  $f(x)$  um die  $x$ -Achse entsteht,

berechnet sich durch das Integral (7). Die Kugel entsteht z. B. durch Rotation des Kreises mit der Gleichung  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  für  $-r \leq x \leq r$ , und ihre Oberfläche ergibt nach (8) die bekannte Größe.

$$(7) \quad \Delta S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$(8) \quad \Delta S = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} (r/\sqrt{r^2 - x^2}) dx \\ = 2\pi r \int_{-r}^r dx = 4\pi r^2$$

**Komplement** ↗ Differenz I., ↗ Menge IV., ↗ Verband II.

**Komplement, algebraisches** ↗ Determinante IV.

**Komplement, orthogonales** ↗ Vektorraum VII.

**komplementär** ↗ Graph, komplementärer, ↗ Teilbarkeit I., ↗ Verband II.

**komplementären Schlupf, Satz vom** ↗ Optimierung VII.

**komplementäres Ereignis** ↗ zufälliges Ereignis I.

**Komplementärmenge** ↗ Menge IV.

**Komplementwinkel:** Winkel, der einen gegebenen Winkel zu einem rechten Winkel ergänzt, z. B. ist in jedem rechtwinkligen Dreieck jeder der beiden spitzen Winkel ein K. des anderen.

**Komplex:** nichtleere Teilmenge einer Gruppe oder allgemein einer ↗ algebraischen Struktur; s. a. Gruppe II.

**komplexe Analysis** svw. Funktionentheorie.

**komplexe Koordinaten** ↗ Hyperbel VII., ↗ Koordinatensystem I., ↗ Kurve zweiter Ordnung II.

**komplexe Zahl:** Zahl der Form  $a + bi$ , in der  $a$  und  $b$  reelle Zahlen und  $i^2 = -1$  bedeuten. K.Z.en werden eingeführt als geordnete Paare  $(a, b)$  reeller Zahlen  $a, b$ , für die die Grundrechenarten nach (1) definiert sind.

$$(1) \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ (a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2), \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2), \\ (a_1, b_1) : (a_2, b_2) = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \\ \text{für } (a_2, b_2) \neq (0, 0)$$

Mit den Paaren der Form  $(a, 0)$  wird dabei wie mit reellen Zahlen  $a$  gerechnet, daher setzt man zur Abkürzung  $(a, 0) = a$ . Dann wird  $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1$ , d. h.  $x = (0, 1)$  ist eine Lösung der in reellen Zahlen nicht lösaren Gleichung  $x^2 = -1$ . Setzt man noch für  $(0, 1)$  das Zeichen  $i$  als *imaginäre Einheit*, so ergibt sich die übliche Form

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) (0, 1) = a + bi.$$

In dieser Darstellung sind (2) die Definitionsgleichungen für die Grundrechenarten, falls  $a_2 + ib_2 \neq 0$ .

$$(2) \quad (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \\ (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2), \\ (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2), \\ \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

Während im Bereich  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen eine Gleichung  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$  nicht stets lösbar ist, gilt im Bereich  $\mathbf{C}$  der k. Z. der *Fundamentalsatz der Algebra*, nach dem diese Gleichung stets eine Lösung hat.

Als Vektoren mit zwei reellen Komponenten lassen sich die komplexen Zahlen als Punkte einer Ebene darstellen (↗ Gaußsche Zahlenebene).

Für  $a = 0$  bezeichnet man die k. Z.  $bi$  als *rein imaginär*. Diese Bezeichnung ist historisch zu verstehen und rührt daher, daß man bis zum 17. Jh. nicht an die Existenz dieser Zahlen glaubte und sie als eingebildete, nur vorgestellte Zahlen ansah. Auch in Ingenieurwissenschaften, wie Elektrotechnik und Flugzeugbau, werden k. Z. verwendet; oft wird dort als Zeichen für die imaginäre Einheit, der Buchstabe  $j$  verwendet. Zur Definition der höheren Rechenarten für k. Z. s. a. Potenzen in  $\mathbf{C}$ .

**komplexwertige Funktion, elementare:** Funktion  $w = f(z)$ , deren Argumente  $z = x + iy$  und damit i. allg. auch deren Funktionswerte  $w = u + iv$  komplexe Zahlen sind. Eine k. F. beschreibt mithin eine eindeutige Abbildung aus  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}$ . Viele k. F.  $f(z)$  kann man sich entstanden denken durch ↗ analytische Fortsetzung einer elementaren Funktion  $f(x)$  der reellen Analysis ins Komplexe. Geometrisch kann diese Erweiterung als eine Fortsetzung der Funktion von der Achse des Reellen in ein Gebiet  $G$  der Gaußschen Zahlenebene aufgefaßt werden (↗ analytische Fortsetzung), so daß beim Grenzübergang  $y \rightarrow 0$  die komplexwertige Funktion  $f(z)$  wieder in die reelle Funktion  $f(x)$  übergehen muß (↗ Funktion VI, ↗ Stetigkeit).

I. Jede *ganzrationale Funktion*  $w = p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  mit komplexen Koeffizienten  $a$ , hat einen unmittelbaren Sinn für komplexe Argumente. Nach dem *Fundamentalsatz der Algebra* zerfällt  $p_n(z)$  im Körper  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen vollständig in Linearfaktoren (1) und hat deshalb dort genau  $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$  Nullstellen  $z_1, \dots, z_r$  mit den Vielfachheiten  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . Die Funktion  $p_1(z) = (z - i)^2 (z + i)^2 = z^4 + 2z^2 + 1$  hat z. B. die Nullstellen  $z_1 = i$  und  $z_2 = -i$  mit den Vielfachheiten  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ .

$$(1) \quad p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \\ = a_n (z - z_1)^{\alpha_1} \cdot (z - z_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (z - z_r)^{\alpha_r}$$

$$(2) \quad w = \frac{q_m(z)}{p_n(z)} = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{c_{kl}}{(z - z_k)^l}$$

Mit Hilfe der ganzrationalen Funktionen  $q_m(z)$  und  $p_n(z)$  definiert man die *gebrochenrationale Funktion*  $w(z) = q_m(z)/p_n(z)$  als Quotient von  $q_m(z)$  und  $p_n(z)$  für alle komplexen Argumente  $z$  mit  $p_n(z) \neq 0$ . Eine *echt* gebrochenrationale Funktion liegt vor, falls  $n > m$ ; für sie gibt es eine *Partialbruchzerlegung* (2), in der  $z_k$  für  $k = 1, 2, \dots, r$  eine  $\alpha_k$ -fache Nullstelle des Nennerpolynoms  $p_n(z)$  sein soll und die Koeffizienten  $(c_{kl})$  jeweils etwa mittels Koeffizientenvergleichs zu ermitteln sind. Im Beispiel (3) ergibt sich auf diese Weise  $c_{11} = -4$ ,  $c_{12} = -2i$ ,



$c_{21} = 5 + 2i$ . Eine wichtige gebrochenrationale Funktion ist die *gebroschen-lineare* Funktion  $w(z) = (az + b)/(cz + d)$ .

$$(3) \quad \frac{5z^2 - (8 - 10i)z - 5}{z^3 + iz^2 + z + i} = \frac{c_{11}}{(z + i)^2} + \frac{c_{12}}{z + i} + \frac{c_{21}}{z - i}$$

II. Auch eine Funktion  $f(x)$ , die für  $|x| < r$  Summenfunktion einer *Potenzreihe*  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  mit positivem Konvergenzradius  $r > 0$  und zunächst reellen Koeffizienten  $a_n$  ist, läßt sich ins Komplexe fortsetzen, denn die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  der Reihe sind als Polynome auch für komplexe Werte der Variablen nach I. definiert, und wie im Reellen folgt aus der Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \zeta^k$  für jedes positive  $\zeta < r$  die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  für jedes komplexe  $z$  mit  $|z| < r$ . Dann ist  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  die für alle  $z$  mit  $|z| < r$ , d. h. für alle  $z$  im Inneren des *Konvergenzkreises*, ins Komplexe fortgesetzte Funktion  $f(x)$  ( $\nearrow$  analytische Fortsetzung). Damit erhält man für die *Exponentialfunktion* und die *Winkelfunktionen* unmittelbar (4), (5), (6) für komplexes Argument  $z$ , und daraus die für alle  $z$  geltenden Beziehungen (7), (7a) und (8) durch Multiplikation absolut konvergenter Reihen. Ist  $z = x + iy$ , so gilt  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ , d. h.  $|e^z| = e^x$ . Es ergibt sich, daß die *Exponentialfunktion*  $e^z = e^{z+2\pi ki}$  mit  $k \in \mathbf{Z}$  eine mit  $2\pi i$  period.

$$(4) \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$(5) \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \dots$$

$$(6) \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \dots$$

$$(7) \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$(7a) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$(8) \quad e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i}$$

Funktion ist. Formeln, die für die *trigonometr. Funktionen* einer reellen Variablen gelten, bleiben auch für die entsprechenden komplexen Funktionen richtig, z. B.

$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$  oder die Definitionsgleichungen (9), (10) für die Funktionen

$$(9) \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{1}{i} \frac{(e^{2iz} - 1)}{(e^{2iz} + 1)}$$

$$(10) \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{(e^{iz} - e^{-iz})} = i \frac{(e^{2iz} + 1)}{(e^{2iz} - 1)}$$

$$(11) \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z});$$

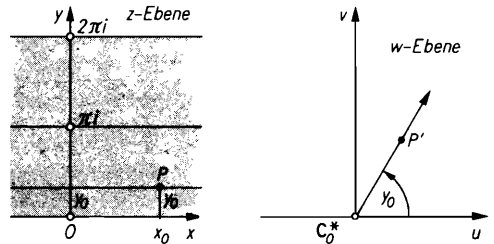
$$(12) \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

$$(13) \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

$$(14) \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}$$

$\tan z$  bzw.  $\cot z$ . Ebenso führt man mit (11), (12), (13) und (14) die *Hyperbelfunktionen* für komplexes Argument ein.

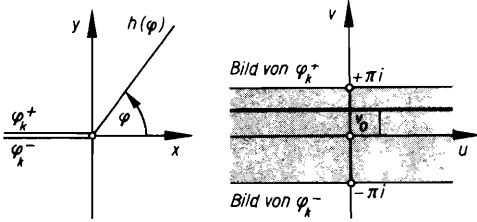
III. Die Definition der *Logarithmusfunktion* geht aus von der ihrer Umkehrfunktion, der *Exponentialfunktion*  $w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$  (s. a. Logarithmus III.). Durch sie wird eine Parallele  $x + iy_0$  im Abstand  $y_0$  zur  $x$ -Achse abgebildet auf eine Halbgerade der  $w$ -Ebene, die mit der  $u$ -Achse den Winkel der Größe  $y_0$  einschließt (Abb. 1). Punkt  $P'$  auf ihr als Bild von  $P(x_0, y_0)$  nähert sich für  $x \rightarrow -\infty$  beliebig dem Punkte (0, 0) der  $w$ -Ebene, der selbst nicht Bildpunkt sein kann, und für  $x \rightarrow +\infty$  ihrem unendlich fernen Punkt. Für verschiedene Werte von  $y_0$  ergeben sich verschiedene Halbgeraden, die



komplexe Funktionen, elementare. Abb. 1: Streifen der  $z$ -Ebene der Breite  $2\pi$ , der durch  $w = e^z$  auf ein punktiertes Blatt  $\mathbf{C}^*$  der Riemannschen Fläche abgebildet wird

für  $0 \leq y_0 < 2\pi$  die punktierte  $w$ -Ebene  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus (0, 0)$  bedecken, d. h., ein Parallelstreifen der  $z$ -Ebene der Breite  $2\pi$  wird durch  $w = e^z$  auf  $\mathbf{C}^*$  abgebildet. Umgekehrt ist für  $w = \ln z$  ein Parallelstreifen der Breite  $2\pi$  das Bild von  $\mathbf{C}^*$  (Abb. 2). Das Bild der Halbgeraden  $h(\varphi)$  ist für  $\varphi = v_0$  die Parallele  $u + iv_0$  zur  $u$ -Achse der  $w$ -Ebene. Als *Hauptwert*  $\ln^* z$  bezeichnet man die Werte von  $w = \ln z$ , für die  $-\pi < \varphi < +\pi$  gilt. Er ist ein *Zweig* der Logarithmusfunktion, aus dem sich die unendlich vielen übrigen Zweige nach  $\ln z = \ln^* z + 2\pi ik$  ergeben, wenn  $k$  eine ganze Zahl ist. Ihre Bilder sind in Streifen parallel zur  $u$ -Achse von der Breite  $2\pi$  enthalten.

Die *Riemannsche Fläche*  $L$  der Funktion  $w = \ln z$  hat dementsprechend unendlich viele Blätter, die man sich als  $\mathbf{C}^*$ -Ebenen übereinandergelegt und längs der negativen reellen Achse zwischen den *Verzweigungspunkten*  $z = 0$  und  $z = \infty$  aufgeschnitten denkt ( $\nearrow$  analytische Fortsetzung II.,  $\nearrow$  Umkehrfunktion IV.). Vom  $k$ -ten Blatt  $S_k$  wird  $\varphi_k^- = (2k - 1)\pi$  als unterer und  $\varphi_k^+ = (2k + 1)\pi$  als oberer Rand bezeichnet (Abb.). Wegen  $w = \ln z = \ln |z| + i\varphi$  wird der obere Rand  $\varphi_k^+$  auf die gleiche Parallele zur  $u$ -Achse der  $w$ -Ebene abgebildet, die



komplexe Funktionen, elementare. Abb. 2: Abbildung des Blattes  $S_k$  durch  $w = \ln z$  auf einen Streifen der Breite  $2\pi$  der  $w$ -Ebene

Bild vom unteren Rand  $\varphi_{k+1}^- = [2(k+1) - 1]\pi$  des folgenden Blattes  $S_{k+1}$  ist. Beide Ränder sind danach zu identifizieren, d. h., der obere Rand jedes Blattes ist mit dem unteren Rand des folgenden zu verheften. Auf dieser Riemannschen Fläche ist die Funktion  $w = \ln z$  eindeutig bestimmt; die Riemannsche Fläche wird durch  $w = \ln z$  eindeutig auf die  $w$ -Ebene abgebildet.

IV. Mit Hilfe der Logarithmusfunktion lassen sich aus den Gleichungen (7) und (9) bis (14) die Umkehrfunktionen der trigonometr. und der Hyperbelfunktionen über der Riemannschen Fläche definieren. Um z. B.  $\arcsin z$  festzulegen, setzt man  $z = \sin \zeta$  und gewinnt aus (7a) und (7) das System (15), aus dem sich  $e^{i\zeta} = iz + \sqrt{1 - z^2}$  oder  $\zeta = \arcsin z$

$$(15) \quad \begin{cases} 2iz = 2i \sin \zeta = e^{i\zeta} - e^{-i\zeta} \\ 2\sqrt{1 - z^2} = 2 \cos \zeta = e^{i\zeta} + e^{-i\zeta} \end{cases}$$

$= -i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2})$  ergibt. Um z. B.  $\arctan z$  zu definieren, geht man von (9) in der Form (9a) aus, gewinnt daraus  $e^{2i\zeta} = (1 + iz)/(1 - iz)$  bzw.  $2i\zeta = 2i \arctan z = \ln [(1 + iz)/(1 - iz)]$ .

$$(9a) \quad z = \tan \zeta = \frac{1}{i} \cdot \frac{(e^{2i\zeta} - 1)}{(e^{2i\zeta} + 1)}$$

Aus diesen und entsprechenden Umformungen für die Hyperbelfunktionen ergeben sich die folgenden Gleichungen (16) bis (23) für jeweils  $z \in \mathbf{C}_k^*$ , d. h. für ein punktiertes Blatt der Riemannschen Fläche  $L$ .

$$(16) \quad \arcsin z = -i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$$(17) \quad \arccos z = -i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$(18) \quad \arctan z = \frac{1}{2i} \ln \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

$$(19) \quad \operatorname{arccot} z = -\frac{1}{2i} \ln \left( \frac{iz + 1}{iz - 1} \right)$$

$$(20) \quad \operatorname{arsinh} z = \ln (z + \sqrt{1 + z^2})$$

$$(21) \quad \operatorname{arcosh} z = \ln (z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$(22) \quad \operatorname{artan} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right)$$

$$(23) \quad \operatorname{arcoth} z = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right)$$

Die allgemeine Potenz  $z^a$  läßt sich für komplexe  $a$  und  $z \neq 0$  ebenfalls mittels des Logarithmus als Funktion über  $L$  definieren:  $z^a = e^{a \ln z}$  (↗ Potenz VI.). Wegen  $\ln z = \ln^* z + 2\pi i k$  gehören zu Argumenten, die in verschiedenen Blättern von  $L$  über demselben  $z \in \mathbf{C}^*$  liegen, Funktionswerte  $z^a$ , die sich um Potenzen von  $e^{2\pi i a}$  als Faktoren unterscheiden. Für die Gültigkeit des Potenzgesetzes  $z^{a_1+a_2} = z^{a_1} \cdot z^{a_2}$  ist demnach die Bedingung  $a_1 \in \mathbf{C}_k^*$ ,  $a_2 \in \mathbf{C}_k^*$  und  $a_1 + a_2 \in \mathbf{C}_k^*$  erforderlich. Ist  $a$  eine rationale Zahl,  $a = p/q$  mit  $p, q$  ganz, so ist  $(z^a)^q = e^{p \ln z} = z^p$ , und die gegebene Definition stimmt mit der übl. Definition für  $z^{p/q}$  überein. In diesem Falle besteht die Riemannsche Fläche  $L$  lediglich aus  $q$  Blättern, und der freie Rand des ersten Blattes wird mit dem des letzten Blattes verheftet, so daß sich eine geschlossene Fläche ergibt.

**Komponente** ↗ Durchlaufungen von Graphen I., ↗ Regelung II., ↗ Vektor II.

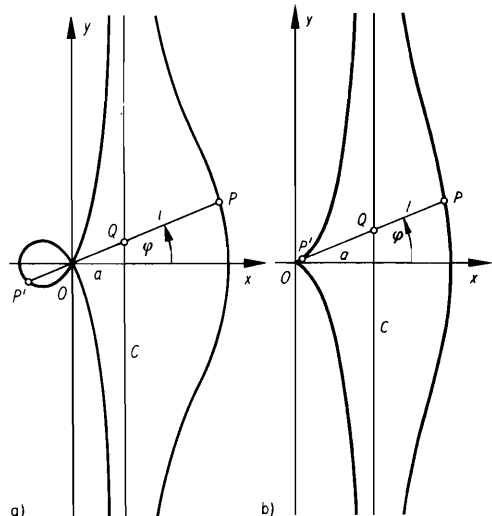
**Kompositum** ↗ Vektorraum IV.

**Konchoide:** I. ebene Kurve, die aus einer vorgegebenen Kurve  $C$  dadurch entsteht, daß der Radiusvektor von einem festen Punkt  $O$  zu jedem Punkt  $Q$  von  $C$  um eine Strecke fester Länge  $l$  verlängert bzw. verkürzt wird. Lautet die Gleichung von  $C$  in Polarkoordinaten  $r = f(\varphi)$ , so lautet die Gleichung ihrer K.  $r = f(\varphi) \pm l$ , wenn für  $f(\varphi) \pm l < 0$  der Begriff der Polarkoordinaten geeignet modifiziert wird.

II. Für die K. des Nikomedes ist die Kurve  $C$  eine Gerade. Hat diese den Abstand  $a$  von  $O$ , so lautet die Gleichung der K. in Polarkoordinaten  $r = a/\cos \varphi \pm l$ . In einem kartes. Koordinatensystem, dessen Ursprung  $O$  ist und dessen  $y$ -Achse eine Parallele zu  $C$  ist, erhält man die Gleichung (1) und eine Parameterdarstellung (2). Die K. des Niko-

$$(1) \quad (x - a)^2 (x^2 + y^2) - l^2 x^2 = 0$$

$$(2) \quad x = a \pm l \cos \varphi, \quad y = a \tan \varphi \pm l \sin \varphi$$



Konchoide des Nikomedes, die a) für  $l > a$  einen Doppelpunkt  $O$  und für b)  $l = a$  eine Spitze im  $O$  hat

medes besteht aus zwei Zweigen, für die die Gerade  $x = a$  *Asymptote* ist. Der Punkt  $O$  ist ein *singulärer Punkt*; für  $l > a$  ist  $O$  ein *Doppelpunkt* (Abb.), für  $l = a$  eine Spitze und für  $l < a$  gehört Punkt  $O$  nach Definition nicht zur Kurve. Er ist aber Nullstelle der Gleichung (1);  $O$  ist *isolierter Punkt* der durch (1) dargestellten Kurve.

III. Ist  $C$  ein Kreis und  $O$  ein Punkt dieses Kreises, so erhält man als  $K.$  des Kreises die *Pascalsche Schnecke*. Ihre Gleichung in Polarkoordinaten ist  $r = a \cos \varphi + l$ , wenn  $a$  der Durchmesser von  $C$  ist.

**Kondition** ↗ Fehler II.

**Konfidenzintervall** ↗ Konfidenzschätzung.

**Konfidenzschätzung, Bereichsschätzung:** Angabe eines zufälligen Intervalls, das den unbekanntem Parameter mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, die nahe bei 1 liegt, überdeckt. Neben einer *Punktschätzung*, die aus jeder vorgelegten *Stichprobe* einen Schätzwert des betreffenden Parameters liefert, gibt die  $K.$  Angaben über die Genauigkeit und die Sicherheit der Schätzung. Ist  $(X_1, \dots, X_n)$  eine mathem. Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit dem Merkmal  $X$ , dessen Verteilung von einem unbekanntem Parameter abhängt, und sind  $\Gamma(X_1, \dots, X_n)$  und  $\bar{\Gamma}(X_1, \dots, X_n)$  zwei *Stichprobenfunktionen*, für die (1) bei vorgegebenen  $\alpha \ll 1$  gilt,

$$(1) P(\Gamma(X_1, \dots, X_n) < \gamma < \bar{\Gamma}(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

so heißt das zufällige Intervall  $(\Gamma, \bar{\Gamma})$  eine  $K.$  des unbekanntem Parameters  $\gamma$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ . Liegt eine Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  vor, d. h., wurde eine Stichprobe entnommen, so liefert die Realisierung der  $K.$  ein Intervall  $(\gamma, \bar{\gamma})$ , das *Konfidenzintervall* oder *Vertrauensintervall* gen. wird; in einer langen Reihe von Stichproben liegt dann der wahre Wert in etwa  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$  der Fälle innerhalb der berechneten *Vertrauensgrenzen*  $(\gamma, \bar{\gamma})$ . Für die  $K.$  beispielsweise von  $a$  bei unbekanntem  $\sigma$  aus einer nach  $N(a, \sigma)$  normalverteilten Grundgesamtheit beruht die Schätzung darauf, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Größe  $[(\bar{X} - a)/S] \cdot \sqrt{n}$  einer *t-Verteilung* mit  $n - 1$  Freiheitsgraden genügt;  $\bar{X}$  ist dabei das Stichprobenmittel,  $S^2$  die Stichprobenvarianz. Aus Tafeln der *Quantile* der *t-Verteilung* kann man zu vorgegebenem  $\alpha$  eine Zahl  $t_{\alpha, n-1}$  finden, so daß (2) bzw. (3) gilt.

$$(2) P(-t_{\alpha, n-1} < [(\bar{X} - a)/S] \cdot \sqrt{n} < t_{\alpha, n-1}) = 1 - \alpha$$

$$(3)$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha, n-1} < a < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

Danach ist das zufällige Intervall (4) eine  $K.$  von  $a$

$$(4) \left] \bar{X} - (S/\sqrt{n}) \cdot t_{\alpha, n-1}, \bar{X} + (S/\sqrt{n}) \cdot t_{\alpha, n-1} [$$

zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$ . Ist z. B.  $\alpha = 0,1$  und  $m = n - 1 = 10$ , so folgt  $t_{0,1;10} = 1,81$  aus der Tabelle.

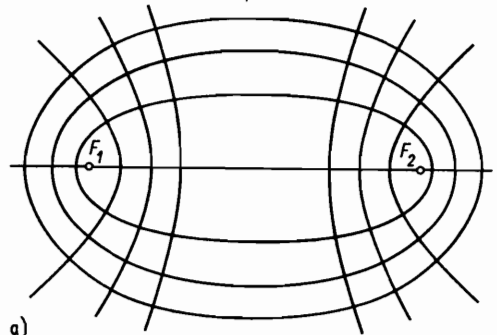
Tabelle: Quantile  $t_{\alpha, m}$  der *t-Verteilung* (Auszug)

m	$\alpha$		...
	0,1	0,05	
1	6,31	12,7	...
2	2,92	4,30	...
3	2,35	3,18	...
4	2,13	2,78	...
5	2,02	2,57	...
6	1,94	2,45	...
7	1,89	2,36	...
8	1,86	2,31	...
9	1,83	2,26	...
10	1,81	2,23	...
...	...	...	...

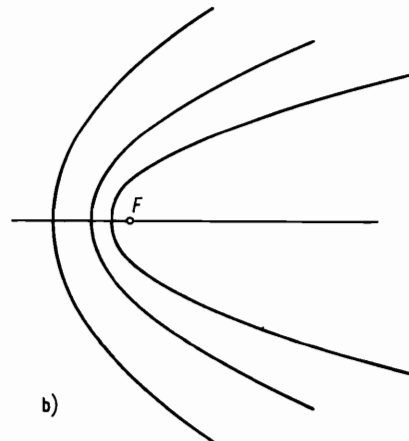
**Konfiguration** ↗ Signal II.

**Konfliktsituation** ↗ Spieltheorie I.

**konfokal:** Bezeichnung für die Anordnung von Kegelschnitten in einer Ebene, wenn sie die gleichen Punkte als Brennpunkte haben. Sie sind aus  $|F_1 F_2| = 2e$  noch nicht bestimmt und können deshalb verschiedene *Ellipsen* mit  $2a > 2e$  oder *Hyperbeln* mit  $2a < 2e$  sein (Abb.). In übertragenem Sinne heißen



a) konfokale Ellipsen und Hyperbeln,



b) konfokale Parabeln mit der gleichen Achse

**Parabeln** konfokal, wenn sie gleichen Brennpunkt und gleiche Achse, aber verschiedene Parameter  $2p$  haben. Für einen Kreis fallen die beiden Brennpunkte im Mittelpunkt zusammen. Man nennt *k. Kreise* auch konzent. Kreise.

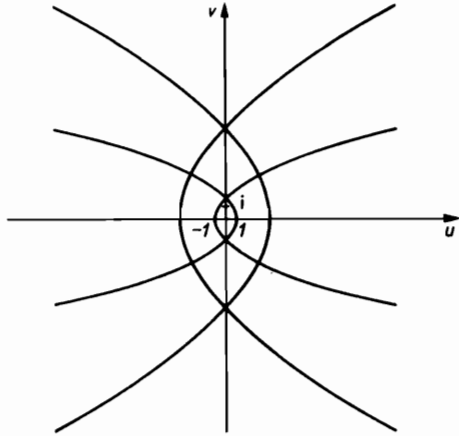
**konform** ↗ Gauß-Krüger-Projektion I.

**konforme Abbildung, winkeltreue Abbildung:** I. Abbildung eines Gebietes der komplexen  $z$ -Ebene auf ein Gebiet der  $w$ -Ebene vermöge einer Funktion  $w = f(z)$ , bei der die Schnittwinkel zweier beliebiger Kurven der Größe nach erhalten bleiben und bei direkter *k. A.* den gleichen, bei indirekter *k. A.* den entgegengesetzten Drehsinn haben. Die durch eine analyt. Funktion  $w = f(z)$  vermittelte Abbildung ist konform für alle regulären Punkte  $z$ , in denen  $f'(z) \neq 0$  ist. Die stereograph. Projektion der komplexen Zahlenebene auf die Riemannsche Zahlenkugel (↗ Gaußsche Zahlenebene III.) ist z. B. eine direkte *k. A.* (s. a. stereographische Projektion II.). Jede *k. A.* bildet ein hinreichend kleines Dreieck aus der Umgebung des Punktes  $z$  mit  $f'(z) \neq 0$  in ein ähnliches Dreieck der  $w$ -Ebene ab. Jede Seite wird dabei im Verhältnis  $|f'(z)| : 1$  gestreckt oder gestaucht und um den Winkel  $\arg(f'(z))$  gedreht.

Für  $w = f(z) = (1+i)z + (1-i)z$ . z. B. ergibt die Abbildung neben einer Parallelverschiebung um  $-i$  eine Drehung um  $\arg(1+i) = \pi/4$  und eine Streckung um  $|1+i| : 1 = \sqrt{2}$  (Abb. 1).

Insbes. bildet jede *k. A.* die orthogonalen Koordinatenlinien  $x = \text{const}$  bzw.  $y = \text{const}$  der  $z$ -Ebene auf zwei orthogonale Kurvenscharen der  $w$ -Ebene ab. Umgekehrt entsprechen die orthogonalen Koordinatenlinien der  $w$ -Ebene  $u = \text{const}$  bzw.  $v = \text{const}$  orthogonalen Kurvenscharen der  $z$ -Ebene. Mit Hilfe analyt. Funktionen kann man eine Vielzahl orthogonaler Systeme krummliniger Koordinaten gewinnen; z. B. bildet  $w = z^2$  die Parallelen  $x = x_0$  bzw.  $y = y_0$  zum Koordinatenkreuz der  $z$ -Ebene auf konfokale Parabeln mit den Gleichungen  $x^2 = y_0^2 - 2ixy_0$  bzw.  $y^2 = x_0^2 + 2iyx_0$  und dem Brennpunkt  $w = 0$  der  $w$ -Ebene konform ab (Abb. 2). S. a. Gauß-Krügerprojektion I.

II. Große Bedeutung hat der **Riemannsche Abbildungssatz**: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet  $G$ , das mehr als nur einen Randpunkt hat, d. h., das nicht die abgeschlossene oder punktierte komplexe Zahlenebene ist, läßt sich durch eine analyt. Funktion  $w = f(z)$  umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises so abbilden, daß ein be-



konforme Abbildung. Abb. 2: Konfokale Parabeln in der  $w$ -Ebene als Bilder von Parallelen zu den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems der  $z$ -Ebene

liebig vorgegebener Punkt  $z \in G$  in den Nullpunkt und eine beliebig vorgegebene Richtung in  $z$  in die Richtung der positiven reellen Achse der  $w$ -Ebene abgebildet werden.

Die Abbildungsfunktionen vieler Gebiete auf den Einheitskreis bzw. auf die obere Halbebene sind bekannt. Sucht man die Abbildung der einfach zusammenhängenden Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  aufeinander, so sucht man zunächst die analyt. Funktionen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$ , die  $G_1$  bzw.  $G_2$  umkehrbar eindeutig auf den Einheitskreis abbilden. Die zu  $f_2(z)$  inverse Funktion  $f_2^{-1}(z)$  bildet dann den Einheitskreis umkehrbar eindeutig auf  $G_2$  ab, so daß die aus  $f_1(z)$  und  $f_2^{-1}(z)$  zusammengesetzte Funktion das Gebiet  $G_1$  auf  $G_2$  abbildet.

III. *K. A.* en werden z. B. in der Elektrotechnik, in der Hydro- und Aerodynamik angewendet. Die Funktion  $w = \bar{z}^{-1}$  z. B., in der  $\bar{z}$  die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl ist, vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der abgeschlossenen  $z$ -Ebene auf

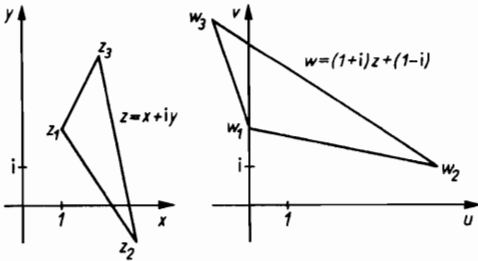
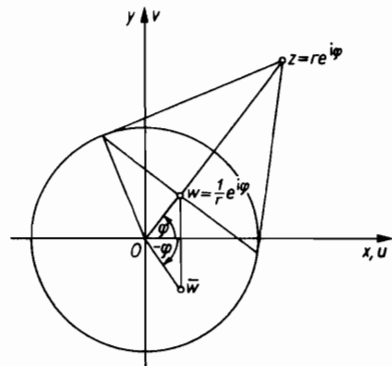


Abb. 1: Konforme Abbildung eines Dreiecks  $Z_1Z_2Z_3$  durch  $w = f(z) = (1+i)z + (1-i)z$



konforme Abbildung. Abb. 3: Transformation  $w = 1/\bar{z} = (1/r)e^{i\phi}$  durch reziproke Radien sowie der Punkt  $\bar{w} = 1/z = (1/r)e^{-i\phi}$

sich, dabei werden die Punkte  $z = 0$  und  $w = \infty$  bzw. die Punkte  $z = \infty$  und  $w = 0$  aufeinander abgebildet (Abb. 3). Die  $w$ - und  $z$ -Ebene werden dabei identifiziert gedacht. Allgemein geht der Punkt  $z = re^{i\varphi}$  über in den Punkt  $w = r^{-1}e^{i\varphi}$ , d. h., es findet eine *Spiegelung am Einheitskreis* statt, die auch *Transformation durch reziproke Radien* gen. wird. Für die Punkte des Einheitskreises  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = 1$  gilt  $\bar{z}^{-1} = z$ , d. h., sie bilden die Fixpunkte der Spiegelung; jeder Punkt  $|z| = 1$  wird auf sich abgebildet.

**kongruent** ↗ algebraische Struktur III., ↗ Kongruenzabbildung, ↗ Kongruenzsätze, ↗ Kongruenz von Zahlen I., ↗ Teilbarkeit III.

**Kongruenz** ↗ Ring II.

**Kongruenzabbildung:** I. Abbildung einer Ebene  $E$  auf sich, die Geraden in Geraden überführt, die Inzidenzen, Streckenlängen und Winkelgrößen erhält. Original und Bild heißen einander *kongruent*. Die K. können entstanden gedacht werden durch Drehungen und Verschiebungen. Bei einer *Drehung* hat die Ebene  $E$  einen Fixpunkt  $F$  und der auf einer Halbgeraden  $l$  durch  $F$  gemessene Abstand jedes Punktes von  $F$  ist der gleiche wie der seines Bildpunktes auf dem Bild  $l'$  von  $l$ . Dabei ist der orientierte Winkel  $\sphericalangle(l, l')$  der Größe  $\alpha$  eine für die K. typ. Konstante. In bezug auf sie bilden die Drehungen eine *additive Gruppe*, d. h., eine Drehung um  $F$  der Größe  $\alpha$  und eine folgende der Größe  $\beta$  können ersetzt werden durch eine Drehung der Größe  $\alpha + \beta$ .

Bei einer *Verschiebung*, auch *Parallelverschiebung* bzw. *Schiebung* gen. (↗ Spiegelung I.), geht jeder Punkt  $P$  durch Verschiebung um einen konstanten Vektor  $v$  in seinen Bildpunkt  $P'$  über. Auch diese K. bilden eine additive Gruppe im Sinne der Vektoraddition nach  $v = v_1 + v_2$ .

Eine *ungleichsinnige K.* ist die *Spiegelung* an einer Geraden (↗ Spiegelung I.), d. h., wenn der Rand einer konvexen Figur etwa so durchlaufen wird, daß das Innere dabei links liegt, hat das Bild den entgegengesetzten Durchlaufssinn, das Dreieck  $A-B-C$  z. B. hat das Bilddreieck  $C'-B'-A'$ . Auch die *Gleitspiegelung* (↗ Spiegelung IV.) ist eine Bewegung. Keine K. ist die Schrägspiegelung, eine Verallgemeinerung der Spiegelung.

II. Längentreue affine Abbildung eines  $n$ -dimensionalen euklid. Raumes  $E^n$  auf sich (↗ Abbildung, affine, IV.). Dabei läßt sich zeigen, daß jede längentreue affine Abbildung auch winkeltreu ist. Beschreibt man eine K. durch die Abbildungsgleichung  $\bar{x} = Ax + c$ , in der  $x$  bzw.  $\bar{x}$  den Ortsvektor des Original- bzw. des Bildpunktes,  $A$  die Abbildungsmatrix und  $c$  einen festen Vektor bezeichnen, so ist  $A$  eine orthogonale Matrix; umgekehrt erhält man für orthogonales  $A$  stets die Gleichung einer K. Falls  $\det A = +1$ , handelt es sich um eine *gleichsinnige* oder *orientierungserhaltende K.*, für  $\det A = -1$  liegt eine *ungleichsinnige* oder *orientierungsändernde K.* vor. — S. a. Symmetrie.

**Kongruenzgeometrie** ↗ Erlanger Programm I.

**Kongruenzklasse** ↗ algebraische Struktur III.

**Kongruenzrechnung** ↗ Kongruenz von Zahlen II.

**Kongruenzsätze:** Aussagen, unter welchen Bedingungen zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent sind (↗ Kongruenzabbildung). Die vier K. für Dreiecke lauten:

1. *Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen dreier Seiten übereinstimmen.*
2. *Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in der Größe des zwischen ihnen gelegenen Winkels übereinstimmen.*
3. *Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in der Größe des Innenwinkels übereinstimmen, der der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegt.*
4. *Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und in der Größe der beiden dieser anliegenden Innenwinkel übereinstimmen.*

**Kongruenz von Zahlen:** I. Beziehung zwischen zwei ganzen Zahlen  $a, b$ , in der diese genau dann stehen, wenn ihre Differenz  $a - b$  durch eine *Modul* gen. ganze Zahl  $m$  teilbar ist. Genauer sagt man, daß  $a, b$  kongruent modulo  $m$  sind, und schreibt  $a \equiv b \pmod{m}$ , z. B. gilt  $3 \equiv 5 \pmod{2}$ ,  $18 \equiv 0 \pmod{6}$ ,  $26 \equiv -9 \pmod{5}$ . Die K. ist eine *Äquivalenzrelation* über der Menge der ganzen Zahlen, d. h., sie ist *reflexiv* wegen  $a \equiv a \pmod{m}$  für alle  $a \in \mathbf{Z}$ , sie ist *symmetrisch*, weil aus  $a \equiv b \pmod{m}$  folgt  $b \equiv a \pmod{m}$ , und sie ist *transitiv*, weil aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $b \equiv c \pmod{m}$  folgt  $a \equiv c \pmod{m}$ . Die K. führt deshalb zu einer Einteilung aller ganzen Zahlen in *Restklassen modulo  $m$*  (s. a. Ring II.). Zwei ganze Zahlen  $a, b$  gehören genau dann zur selben Restklasse modulo  $m$ , wenn sie bei Division durch  $m$  denselben Rest  $r$  lassen. Entsprechend den  $m$  mögl. Resten  $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$  bei der Division einer ganzen Zahl durch  $m$  gibt es  $m$  solche Restklassen modulo  $m$ . Die dem Rest  $r$  entsprechende Restklasse besteht aus allen Zahlen  $a = q \cdot m + r$ , wenn  $r$  fest ist und  $q$  alle ganzen Zahlen durchläuft. Jede solche Zahl  $a$  heißt ein *Repräsentant* dieser Restklasse, und es ist  $a \equiv r \pmod{m}$ . Die Restklasse, in der der Repräsentant  $a$  liegt, wird mit  $[a]$  bezeichnet. Ist z. B.  $m = 7$ , so ist die zum Rest  $r = 5$  gehörige Restklasse die Menge  $[5] = \{\dots, -16, -9, -2, 5, 12, 19, \dots\}$ . Alle Zahlen  $a$  einer Restklasse mod  $m$  haben mit  $m$  ein und denselben größten gemeinsamen Teiler  $d = (a, m)$  (↗ Teilbarkeit III.). Auf der Zahlengeraden bilden die Zahlen einer Restklasse modulo  $m$  eine beiderseits unbegrenzte Folge äquidistanter Punkte im Abstand  $m$ .

Ein System von  $m$  ganzen Zahlen, das aus jeder der  $m$  Restklassen modulo  $m$  genau einen Repräsentanten enthält, nennt man ein *volles Restesystem modulo  $m$* . Das volle Restesystem  $S = \{0, 1, \dots, m-1\}$  modulo  $m$  heißt *kleinstes Restesystem modulo  $m$*  oder *kleinstes nichtnegatives Restesystem modulo  $m$* ; das *absolut kleinste Restesystem modulo  $m$*  ist  $S = \{0, \pm 1, \dots, \pm(m-1)/2\}$ , falls  $m$  ungerade ist, bzw.  $S = \{0, \pm 1, \dots, \pm(m/2 - 1), m/2\}$ , falls  $m$  gerade ist; z. B. ist  $S_1 = \{12, 37, 50, -9, -2, 5\}$

ein volles Restesystem modulo 6,  $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  das kleinste Restesystem modulo 6,  $S_3 = \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}$  das absolut kleinste Restesystem modulo 6,  $S_4 = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$  das absolut kleinste Restesystem modulo 7.

II. Für die  $K. a \equiv b \pmod{m}$  zu einem festen Modul  $m$  gelten folgende *Rechenregeln*:

II.1. Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c$  ganzzahlig folgt  $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ ; z. B. aus  $23 \equiv 8 \pmod{5}$  folgt  $23 + 9 \equiv 8 + 9 \pmod{5}$  bzw.  $32 \equiv 17 \pmod{5}$ .

II.2. Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m}$  folgt  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ , z. B. aus  $26 \equiv -4 \pmod{6}$  und  $15 \equiv 9 \pmod{6}$  folgt  $41 \equiv 5 \pmod{6}$ .

II.3. Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c$  ganzzahlig folgt  $ac \equiv bc \pmod{m}$ .

II.4. Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  und  $c \equiv d \pmod{m}$  folgt  $ac \equiv bd \pmod{m}$ , z. B. aus  $26 \equiv -4 \pmod{6}$  und  $15 \equiv 9 \pmod{6}$  folgt  $390 \equiv -36 \pmod{6}$ .

II.5. Aus  $a \equiv b \pmod{m}$  folgt  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$  für beliebige natürliche Zahlen  $n$ .

II.6. Sind die ganzen Zahlen  $c$  und  $m$  teilerfremd ( $\mathcal{A}$  Teilbarkeit III.) sowie  $c/a$  und  $c/b$ , so folgt aus  $a \equiv b \pmod{m}$  die Kongruenz  $a/c \equiv b/c \pmod{m}$ .

II.7. Wenn  $a \equiv b \pmod{m}$ ,  $c \equiv d \pmod{m}$ ,  $c$  und  $d$  zu  $m$  teilerfremd sowie  $c/a$  und  $d/b$  sind, darf man die Kongruenzen dividieren und erhält  $a/c \equiv b/d \pmod{m}$ ; z. B. aus  $32 \equiv 14 \pmod{3}$  und  $4 \equiv 7 \pmod{3}$  folgt  $8 \equiv 2 \pmod{3}$ . Es besteht offensichtlich eine Analogie zu den Rechenregeln für Gleichungen.

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Zweckmäßigkeit des Rechnens mit Kongruenzen. Fermat hat vermutet, daß alle Zahlen der Form  $2^{2^n} + 1$  Primzahlen sind ( $\mathcal{A}$  Primzahl V.). Nach der folgenden Rechnung ist aber  $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$  durch 641 teilbar: Es ist  $641 = 640 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1$ , d. h.,  $5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$ . Durch Potenzieren mit 4 folgt hieraus  $5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ . Wegen  $5^4 + 2^4 = 625 + 16 = 641$  gilt  $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$ . Multipliziert man  $-2^4 \equiv 5^4 \pmod{641}$  mit  $2^{28}$ , erhält man  $-2^{32} \equiv 5^4 \cdot 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ , d. h. tatsächlich  $2^{32} + 1 \equiv 0 \pmod{641}$ .

III. In der Menge der Restklassen modulo  $m$  werden durch (1) eine Addition und eine Multiplikation

$$(1) \quad [a] + [b] = [a + b] \\ [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

definiert, d. h., diese Rechenoperationen der Restklassen werden auf die ihrer Repräsentanten zurückgeführt; man sagt, die Restklassen werden *repräsentantenweise* addiert bzw. multipliziert. Die Rechenregeln II.2. und II.4. sichern, daß Summe bzw. Produkt zweier Restklassen mod  $m$  eindeutig bestimmt und unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten sind. Modulo 6 gilt z. B.

$$\begin{aligned} [2] + [5] &= [7] = [1] & [5] + [0] &= [5] \\ [2] \cdot [5] &= [10] = [4] & [3] + [3] &= [0] \\ [5] \cdot [0] &= [0] & [3] \cdot [3] &= [3] \\ [3] \cdot [2] &= [0] \end{aligned}$$

Mit der so definierten Addition und Multiplikation bilden die Restklassen modulo  $m$  einen kommutativen

Ring ( $\mathcal{A}$  Ring), den *Restklassenring* modulo  $m$ . Wenn  $m$  eine Primzahl ist, aber auch nur dann, ist der Restklassenring modulo  $m$  ein  $\mathcal{A}$  Körper.

Wählt man unter den  $m$  verschiedenen Restklassen  $[0], [1], \dots, [m - 1]$  modulo  $m$  diejenigen aus, deren Zahlen sämtlich zu  $m$  relativ prim sind, so erhält man die *primen Restklassen* modulo  $m$ . Für  $m = 6$  gibt es genau die primen Restklassen  $[1]$  und  $[5]$ ; für eine Primzahl  $p$  gibt es stets  $(p - 1)$  prime Restklassen  $[1], [2], \dots, [p - 1]$ . Die Anzahl der modulo  $m$  primen Restklassen gibt die *Eulersche Funktion*  $\varphi(m)$  ( $\mathcal{A}$  zahlentheoretische Funktion V.) an. Es ist z. B.  $\varphi(6) = 2$ ,  $\varphi(15) = 8$ ,  $\varphi(p) = p - 1$ , falls  $p$  Primzahl. Allgemein gilt

$$\varphi(m) = m(1 - 1/p_1) \dots (1 - 1/p_k),$$

falls  $p_1, p_2, \dots, p_k$  alle verschiedenen Primteiler von  $m$  sind, für  $m = 15 = 3 \cdot 5$  z. B. erhält man  $\varphi(15) = 15(1 - 1/3)(1 - 1/5) = 15 \cdot 2/3 \cdot 4/5 = 8$ . Mit der repräsentantenweisen Multiplikation als Verknüpfung bilden die primen Restklassen modulo  $m$  eine Gruppe  $G_m$ , die *prime Restklassengruppe*, die genau  $\varphi(m)$  Elemente enthält. Im Falle einer Primzahl  $p$  ist  $G_p$  eine *zykl. Gruppe*, d. h., jede prime Restklasse modulo  $p$  läßt sich als Potenz einer festen primen Restklasse  $[g]$  schreiben. Für  $p = 11$  wird die prime Restklassengruppe  $G_{11}$  z. B. durch die Restklasse  $[g] = [2]$  erzeugt, denn die Potenzen  $2^0 \equiv 1, 2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 5, 2^5 \equiv 10, 2^6 \equiv 9, 2^7 \equiv 7, 2^8 \equiv 3, 2^9 \equiv 6 \pmod{11}$  liefern alle 10 primen Restklassen  $[1], [2], \dots, [10]$ . Da jedes Element  $a$  einer endl. Gruppe  $G$  der Ordnung  $l$  ( $\mathcal{A}$  Gruppe II.) der Gleichung  $a^l = e$  mit dem Einselement  $e$  von  $G$  genügt, ergibt sich für  $G = G_m$  der *kleine Fermatsche Satz*  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  für alle  $a$  mit  $(a, m) = 1$ . Im Restklassenring modulo  $m$  kann ohne Einschränkung addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Die Subtraktion von Restklassen ist dabei dadurch definiert, daß  $[c] = [a] - [b]$  genau dann gilt, wenn  $[c] + [b] = [a]$  ist.

IV. Interessant ist die Frage, ob im Restklassenring auch eine Division möglich ist, d. h., ob es zu zwei Restklassen  $R_1$  und  $R_2$  modulo  $m$  stets eine Restklasse  $[x]$  gibt, so daß  $R_1 \cdot [x] = R_2$  gilt. Äquivalent dazu ist die Frage nach der Lösbarkeit der *linearen Kongruenz*  $ax \equiv b \pmod{m}$ , in der  $a$  ein Element aus  $R_1$  und  $b$  eines aus  $R_2$  ist. Ist  $x_0$  eine Lösung dieser Kongruenz, so erhält man sämtl. Lösungen, indem man alle zu  $x_0$  modulo  $m$  kongruenten Zahlen aufsucht; d. h., alle Zahlen der Restklasse  $[x_0]$  modulo  $m$  sind Lösungen. Nicht jede lineare Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  ist aber lösbar. Vielmehr gelten folgende Sätze, von denen der erste ein Spezialfall des zweiten ist:

IV.1. Die lineare Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  ist genau dann modulo  $m$  eindeutig lösbar, wenn  $a$  und  $m$  teilerfremd sind, d. h., wenn  $(a, m) = 1$  ( $\mathcal{A}$  Teilbarkeit). Alle Lösungen bilden genau eine Restklasse modulo  $m$ .

IV.2. Die lineare Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  ist genau dann lösbar, wenn der größte gemeinsame Teiler  $d = (a, m)$  von  $a$  und  $m$  auch Teiler von  $b$  ist. Ist dies der Fall, so bilden alle Lösungen der Kon-

gruenz genau  $d$  Restklassen modulo  $m$ , die eine Restklasse modulo  $(m/d)$  zusammensetzen. Die folgenden Beispiele illustrieren zwei Lösungsverfahren für lineare Kongruenzen  $ax \equiv b \pmod{m}$ .

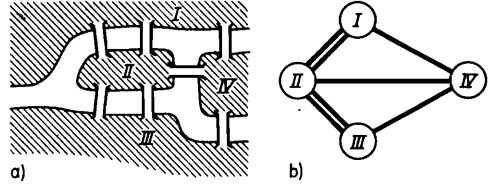
**Beispiel 1:** Die Kongruenz  $7x \equiv 5 \pmod{4}$  ist wegen  $(7, 4) = 1$  eindeutig lösbar. Mit Hilfe des euklid. Algorithmus läßt sich die lineare Darstellung  $1 = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4$  des größten gemeinsamen Teilers 1 aus den Zahlen 7 und 4 gewinnen. Nach Multiplikation dieser Gleichung mit  $b = 5$  folgt  $5 = (5 \cdot 3) \cdot 7 - (5 \cdot 5) \cdot 4$ , oder  $7 \cdot (3 \cdot 5) \equiv 5 \pmod{4}$ . Daraus folgt, daß  $x = 15 \equiv 3 \pmod{4}$  eine Lösung ist. Die modulo 4 eindeutig bestimmte Lösung der Kongruenz  $7x \equiv 5 \pmod{4}$  ist danach die Restklasse  $[3] = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$ . Eine andere Lösungsmöglichkeit liefert der kleine Fermatsche Satz. Multipliziert man nämlich die Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$ , falls  $(a, m) = 1$ , mit  $a^{\varphi(m)-1}$ , so erhält man wegen  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  die Kongruenz  $a^{\varphi(m)}x \equiv x \equiv ba^{\varphi(m)-1}$ . Im Beispiel  $7x \equiv 5 \pmod{4}$  ist  $a = 7$ ,  $b = 5$ ,  $m = 4$ ,  $\varphi(m) = 2$ , d. h.,  $x \equiv 5 \cdot 7^1 \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Beispiel 2:** In der Kongruenz  $10x \equiv 15 \pmod{25}$  ist  $a = 10$ ,  $b = 15$ ,  $m = 25$ . Da der größte gemeinsame Teiler  $d = (10, 25) = 5$  Teiler von  $b = 15$  ist, ist die vorgelegte Kongruenz lösbar. Da  $10x \equiv 15 \pmod{25}$  zu  $10x = 15 + 25 \cdot k$ ,  $k$  ganzzahlig, äquivalent ist, erhält man nach Division dieser Gleichung durch  $d = (10, 25) = 5$  die Gleichung  $2x = 3 + 5 \cdot k$  und daraus die zu  $10x \equiv 15 \pmod{25}$  äquivalente Kongruenz  $2x \equiv 3 \pmod{5}$ . Diese Kongruenz läßt sich analog Beispiel 1 lösen. Als eindeutige Lösung modulo 5 ergibt sich die Restklasse  $[4]$ , die natürlich auch Lösung der ursprüngl. Kongruenz  $10x \equiv 15 \pmod{25}$  ist. Die Restklasse  $[4] = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$  modulo 5 zerfällt in die  $d = 5$  Restklassen  $[4]$ ,  $[4 + 5] = [9]$ ,  $[4 + 2 \cdot 5] = [14]$ ,  $[4 + 3 \cdot 5] = [19]$ ,  $[4 + 4 \cdot 5] = [24]$  modulo 25. Somit hat man die  $d = 5$  Lösungen modulo 25 der Kongruenz  $10x \equiv 15 \pmod{25}$  gefunden.

**König, Dénes**, geb. 21. 9. 1884 und gest. 19. 10. 1944 Budapest (durch Freitod). — K. studierte in Budapest und war 1911/44 als Dozent und Professor an der Techn. Hochschule Budapest tätig. Er arbeitete vorwiegend auf den Gebieten der Mengenlehre und der *Graphentheorie*, als deren eigentl. Begründer er anzusehen ist.

**König, Satz von** ↗ Färbung von Graphen.

**Königsberger Brückenproblem:** von L. EULER als unlösbar erkannte Aufgabe, auf einem Spaziergang durch die Stadt Königsberg (Kaliningrad) jede der 7 Brücken, die die Ufer des Flusses mit zwei Inseln verbinden (Abb.), genau einmal zu passieren. Jedes der Gebiete I, II, III, IV ist durch eine ungerade Zahl von Brücken mit den anderen verbunden. Der Spaziergang kann deshalb nicht im gleichen Gebiet enden, in dem er angefangen hat. Sieht man deshalb von der Forderung ab, daß der Spaziergang eine geschlossene Kurve sein soll, so muß er in einem zweiten Gebiet enden, während drei Endgebiete vorhanden sind. Nach dem Satz von Euler (↗ Durchlaufungen von Graphen) ist der geforderte



Königsberger Brückenproblem a) und topologisch äquivalente Situation b) mit vier Gebieten

Spaziergang nicht möglich, weil mehr als zwei Knotenpunkte des Graphen eine ungerade Valenz haben. Das Wesentliche des Problems bleibt unverändert, wenn die Karte durch eine topolog. Abbildung unter Erhaltung der Zusammenhänge verzerrt wird (↗ Abb. b). Auch ein Verkehrsnetz, z. B. das der Straßenbahn- oder der S-Bahn-Linien, gibt jede Umsteigemöglichkeit richtig an, ist aber sonst aus prakt. Gründen verzerrt.

- konjugierte Durchmesser ↗ Ellipse III., VIII., ↗ Ellipsenkonstruktionen I., IV., ↗ Hyperbel VII., ↗ Sehne, ↗ Symmetrie, schiefe.
- konjugierte Punkte ↗ Involution.
- konjugierter Körper ↗ Zahlkörper III.
- konjugierte Zahlen ↗ Zahlkörper III.
- konjugiert komplex ↗ Gaußsche Zahlenebene I.
- Konjunktion ↗ Aussagenlogik II.
- konjunktive Normalform ↗ Normalform I.
- konkav ↗ Konvexität, ↗ Kurvendiskussion II.5., ↗ n-Eck I., ↗ Winkel VI.
- Konklusion ↗ Regellogik II.
- Konkurrenzmodell ↗ Spieltheorie I.
- konnex ↗ Relation II.
- Konsequenzzeichen ↗ Regellogik II.
- konservativ ↗ Gradient III.
- konsistent ↗ Punktschätzung.
- konstante Funktion ↗ ganzrationale Funktion I.
- Konstantsummenspiel ↗ Spieltheorie I.
- Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal: klass. Fragsstellung der Geometrie, z. B. eine Strecke aus vorgegebenen Strecken allein mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten zu konstruieren. Analytisch entspricht dem die Aufgabe, die Länge der gesuchten Strecke mittels rationaler Operationen und Quadratwurzeln, d. h. als ineinandergeschachtelte Quadratwurzelausdrücke, aus den Längen der vorgegebenen Strecken darzustellen. Die *Galoissche Theorie* zeigte, daß drei berühmte klass. Probleme unlösbar sind:
  1. Das *Delische Problem der Würfelverdoppelung* verlangt die Konstruktion der Seite eines Würfels, der den doppelten Rauminhalt eines gegebenen Würfels hat, d. h., die Konstruktion der Strecke  $\sqrt[3]{2}$  aus der Strecke 1.
  2. Die *Rektifikation des Kreises* verlangt die Konstruktion eines Quadrates vom gleichen Flächeninhalt wie ein Kreis vom gegebenen Radius 1. Die zu konstruierende Länge ist  $\pi \cdot 1$ , und  $\pi$  ist eine transzendente Zahl.
  3. Die *Trisektion* verlangt die Dreiteilung eines Winkels der beliebigen Größe  $\alpha$ , d. h. die Konstruktion

tion von  $\cos(\alpha/3)$  aus  $\cos \alpha$ . Die Lösung der Gleichung  $4[\cos(\alpha/3)]^3 - 3\cos(\alpha/3) - \cos \alpha = 0$  kann aber algebraisch nicht in Quadratwurzelausdrücken dargestellt werden.

Andererseits konnte allgemein die K. eines regelmäßigen  $n$ -Ecks gezeigt werden für  $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ , wenn die Zahlen  $p_1, \dots, p_k$  Fermatsche Primzahlen sind.

**Konstruktionen im klassischen Sinne**  $\nearrow$  geometrische Figur.

**konstruktive Mathematik**  $\nearrow$  Konstruktivismus.

**Konstruktivismus:** *mathematische Logik* Grundhaltung, gemäß derer nur konstruierbare mathemat. Objekte untersucht werden und ein mathemat. Beweis als Angabe einer Konstruktionsvorschrift verstanden wird. In Abhängigkeit von den zugelassenen Konstruktions- und Beweisprinzipien tritt der K. in verschiedenen Ausprägungen auf. Die konsequenteste Form des K. ist der von dem niederländ. Mathematiker L. E. J. BROUWER (1881–1964) begründete *Intuitionismus*. In ihm wird angenommen, daß die natürl. Zahlen und deren Theorie intuitiv gegeben und als Anfang aller Mathematik zu betrachten sind. Die auf der Grundlage des K. basierende *konstruktive Mathematik* ist komplizierter als die klass. axiomat. Mathematik, aber für metamathemat. Untersuchungen, z. B. über Widerspruchsfreiheit axiomat. Theorien, wichtig.

**Kontaktwahrscheinlichkeit**  $\nearrow$  Suchtheorie.

**kontinuierlich**  $\nearrow$  Modulation I.,  $\nearrow$  Signal,  $\nearrow$  System II.

**Kontinuum-Problem:**  $\nearrow$  Kardinalzahl II.

**Kontradiktion**  $\nearrow$  Aussagenlogik III.

**kontragredient**  $\nearrow$  Matrix IV.,  $\nearrow$  Koordinatentransformation III.

**Kontraosition:** *mathematische Logik* eine nur für Implikationen erklärte Aussageverknüpfung ( $\nearrow$  Aussagenlogik), die die Implikation  $(A \rightarrow B)$   $\Leftrightarrow$  wenn  $A$ , so  $B$  überführt in die Implikation  $(\neg B \rightarrow \neg A)$   $\Leftrightarrow$  wenn nicht  $B$ , so nicht  $A$ . Eine Implikation und ihre K. haben stets denselben Wahrheitswert, d. h. sie sind entweder beide wahr oder beide falsch.

**konträres Ereignis**  $\nearrow$  zufälliges Ereignis I.

**kontravarianter Tensor**  $\nearrow$  innere Geometrie II,  $\nearrow$  Tensor II.

**kontravarianter Vektor**  $\nearrow$  Linearform II.

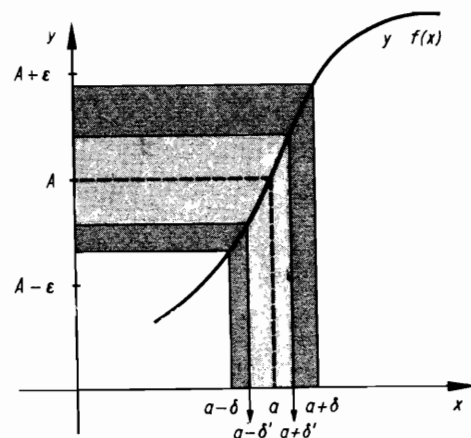
**Konvergenz:** ein Grundbegriff der Analysis;  $\nearrow$  absolute Konvergenz,  $\nearrow$  charakteristische Funktion V.,  $\nearrow$  Funktionenfolge I., II.,  $\nearrow$  Funktionenreihe I., II.,  $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge I.,  $\nearrow$  Integral, uneigentliches, IV.,  $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion,  $\nearrow$  Konvergenz im Mittel,  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Funktionen,  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen,  $\nearrow$  Nullstellenberechnung III.,  $\nearrow$  Parameterintegral II.,  $\nearrow$  Potenzreihe III., IV.,  $\nearrow$  Punktfolge,  $\nearrow$  Reihe I.,  $\nearrow$  Reihendarstellung I.,  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III. — S. a. Raum, metrischer, II.

**Konvergenz einer Funktion:** I.1. bestimmtes Verhalten der Funktionswerte einer gegebenen Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$ , wenn die unabhängige Variable  $x$  gegen einen bestimmten Wert  $a$  bzw. gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$  strebt. Kommen die

Funktionswerte  $f(x)$  einer Zahl  $A$  um so näher, je näher das Argument  $x$  dem Wert  $a$  rückt, d. h., wird der Unterschied  $|f(x) - A|$  beliebig klein für alle  $x$  einer genügend kleinen Umgebung von  $a$ , so sagt man, die Funktion  $y = f(x)$  konvergiert gegen den Grenzwert  $A$  der Funktion, wenn  $x$  gegen  $a$  strebt. Für diesen Sachverhalt schreibt man:  $f(x) \rightarrow A$  für  $x \rightarrow a$  oder  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

Genauer definiert man: Die in der Umgebung von  $x = a$ , nicht notwendig für  $x = a$  selbst, definierte Funktion  $y = f(x)$  hat für  $x$  gegen  $a$  den Grenzwert  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , wenn für jedes beliebig kleine  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so daß (1) für alle  $x$  gilt, die die Bedingung (2) erfüllen (Abb. 1).

- (1)  $|f(x) - A| < \varepsilon$
- (2)  $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$



Konvergenz einer Funktion. Abb. 1: Grenzwert einer Funktion

Die Vorgabe einer Zahl  $\varepsilon > 0$  ist äquivalent zur Vorgabe des Intervalls  $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$  (vgl. Abb. 1). Nun soll eine Zahl  $\delta > 0$  existieren, so daß für alle  $x \neq a$  mit  $a - \delta < x < a + \delta$  gilt  $f(x) \in ]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ . Mit  $\delta$  erfüllt auch jedes positive  $\delta' < \delta$  die geforderte Bedingung. Gleichbedeutend mit dieser Definition ist: Es gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  genau dann, wenn es zu jedem beliebig kleinen  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so daß  $|f(a+h) - A| < \varepsilon$  erfüllt ist für alle  $h$  mit  $0 < |h| < \delta(\varepsilon)$ . Man kann den Grenzwert einer Funktion auch auf den Grenzwert von Zahlenfolgen zurückführen, denn  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

gilt genau dann, wenn für jede Argumentfolge  $(x_n)$  mit  $x_n \neq a$  und  $x_n \rightarrow a$  die dazugehörige Folge  $(f(x_n))$  der Funktionswerte gegen  $A$  konvergiert ( $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge).

**Beispiel 1:** Es ist  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ , denn zunächst ist die

Funktion  $y = x^2$  in der Umgebung von  $a = 2$  definiert. Wählt man zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  die positive Zahl  $\delta(\varepsilon)$  passend, etwa  $\delta(\varepsilon) \leq \min(1, \varepsilon/5)$ , so ergibt



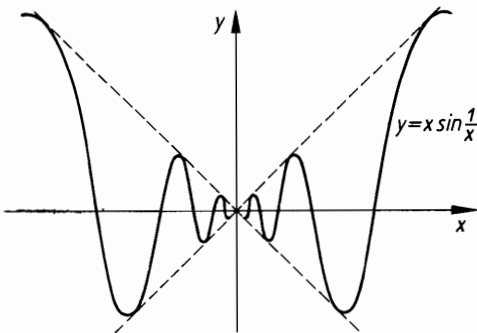
sich für alle  $h$  mit  $|h| < \delta(\varepsilon)$  die Abschätzung  $|x^2 - 4| = |(2+h)^2 - 4| = |4h + h^2| \leq 4|h| + h^2 < 4\delta + \delta^2 < 5\delta \leq \varepsilon$ .

**Beispiel 2:** Es ist  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ , denn die Funktion  $y = x \sin(1/x)$  ist in der Umgebung von  $a = 0$  definiert, nicht aber für  $a = 0$  selbst. Wählt man zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  die Zahl  $\delta(\varepsilon)$  aus dem Intervall  $0 < \delta < \varepsilon$ , dann gilt (3) für alle  $x$  mit  $0 < |x| < \delta$ , da  $|\sin(1/x)| \leq 1$  für alle  $x \neq 0$  (Abb. 2).

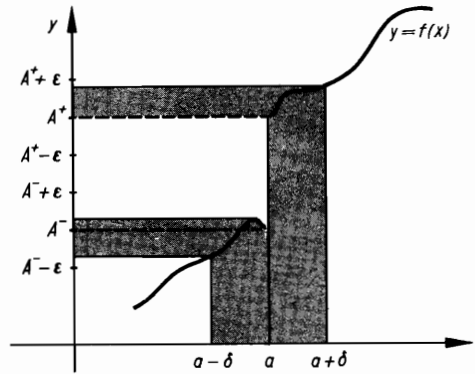
$$(3) \quad \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0 \right| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| < \delta < \varepsilon$$

**I.2.** In vielen Fällen läßt man die unabhängige Variable  $x$  nur im Sinne wachsender Werte, d. h. von links, oder im Sinne fallender Werte, d. h. von rechts, gegen  $a$  streben und untersucht, wie sich dabei die Funktionswerte  $y = f(x)$  verhalten. Man spricht dann vom *linksseitigen Grenzwert*  $A^-$  bzw. vom *rechtsseitigen Grenzwert*  $A^+$  der Funktion  $f(x)$  und schreibt  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = A^-$  bzw.  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = A^+$ ; dabei bedeuten  $x \uparrow a$  bzw.  $x \downarrow a$ , daß  $x$  von links bzw. von rechts gegen  $a$  konvergiert. Die Aussage  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = A^-$  bzw.  $\lim_{x \downarrow a} f(x) = A^+$  bedeutet, daß zu jedem

beliebig kleinen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon)$  existiert, so daß die Ungleichung  $|f(x) - A^-| < \varepsilon$  bzw.  $|f(x) - A^+| < \varepsilon$  gilt für alle  $x$  mit  $a - \delta < x < a$  bzw.  $a < x < a + \delta$ . Hat z. B. die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$  eine *Sprungstelle* ( $\nearrow$  Stetigkeit), so existieren sowohl der rechtsseitige Grenzwert  $A^+$  als auch der davon verschiedene linksseitige Grenzwert  $A^-$ . Den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  bezeichnet man auch als *beiderseitigen Grenzwert*. Existiert der beiderseitige Grenzwert  $A$  einer Funktion  $f(x)$  für  $x \rightarrow a$ , so existieren auch die beiden einseitigen Grenzwerte  $A^-$  und  $A^+$ , und beide haben den gleichen Wert  $A = A^- = A^+$ . Existieren umgekehrt die beiden einseitigen Grenzwerte  $A^+$  und  $A^-$  für  $x \downarrow a$  bzw.  $x \uparrow a$  und sind diese einander gleich,  $A^+ = A^-$ , so existiert auch der beiderseitige Grenzwert für  $x \rightarrow a$  und hat den Wert  $A = A^+ = A^-$ . Falls aber die beiden einseitigen Grenzwerte  $A^+$  und  $A^-$  verschie-



Konvergenz einer Funktion. Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktion  $f(x) = x \sin(1/x)$



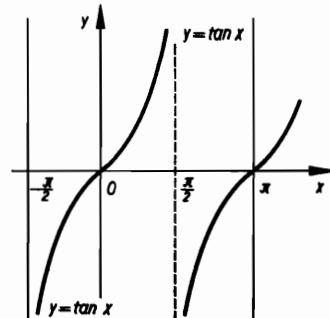
Konvergenz einer Funktion. Abb. 3: Linksseitiger Grenzwert  $A^-$  und rechtsseitiger Grenzwert  $A^+$  sind für  $x \rightarrow a$  verschieden

den sind, d. h.  $A^+ \neq A^-$ , existiert der beiderseitige Grenzwert für  $x \rightarrow a$  nicht. Für die Funktion  $f(x) = [x]$ , in der  $[x]$  die größte ganze Zahl bedeutet, die nicht größer ist als  $x$ , gilt z. B.  $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 1$  und  $\lim_{x \downarrow 2} f(x) = 2$ ; denn wählt man zu einer beliebig kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  die positive Zahl  $\delta < 1$ , so gilt für alle  $x$  mit  $2 - \delta < x < 2$  die Ungleichung  $|[x] - 1| = 0 < \varepsilon$  und für alle  $x$  mit  $2 < x < 2 + \delta$  die Ungleichung  $|[x] - 2| = 0 < \varepsilon$ .

**II.** Die Funktion  $f(x)$  hat für  $x \rightarrow a$  einen *uneigentl. Grenzwert*  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ , in Zeichen  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , falls zu jeder beliebig großen

Zahl  $C > 0$  eine Zahl  $\delta(C) > 0$  existiert, so daß für alle  $x$  mit  $0 < |x - a| < \delta$  die Ungleichung  $f(x) > C$  bzw.  $f(x) < -C$  richtig ist. Anschaulich bedeutet dies, daß die Funktionswerte von  $f(x)$  unbeschränkt wachsen bzw. unbeschränkt fallen, wenn  $x$  sich  $a$  nähert. Ähnlich wie bei einem endl. Grenzwert betrachtet man auch hier links- und rechtsseitige uneigentl. Grenzwerte, z. B. bedeutet  $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty$ , daß die

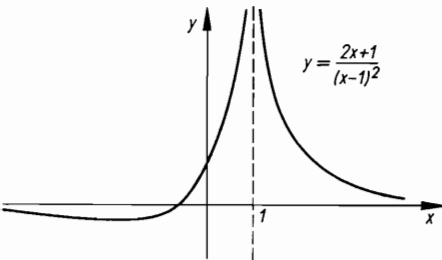
Funktionswerte unbeschränkt wachsen, wenn  $x$  von unten gegen  $a$  strebt. Die in I.2. angeführten Beziehungen zwischen den einseitigen Grenzwerten und



Konvergenz einer Funktion. Abb. 4: Bild der Funktion  $f(x) = \tan x$

dem beiderseitigen Grenzwert gelten auch im übertragenen Sinne für die einseitigen uneigentl. Grenzwerte und den beiderseitigen uneigentl. Grenzwert. Für die Funktion  $f(x) = \tan x$  z. B. existieren für  $x \rightarrow \pi/2$  die einseitigen uneigentl. Grenzwerte  $\lim_{x \uparrow \pi/2} \tan x = \infty$  und  $\lim_{x \downarrow \pi/2} \tan x = -\infty$ , sind aber voneinander verschieden, d. h., der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x$  existiert nicht (Abb. 4). Für die Funktion (4) gilt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ , denn wählt man zu einer beliebigen großen Zahl  $C > 0$  die Zahl  $\delta(C) < \sqrt{3/C}$ , so gilt für alle  $x$  mit  $1 < x < 1 + \delta$  die Abschätzung (5). Analog zeigt man  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ , und aus der Existenz und Gleichheit beider einseitigen Grenzwerte folgt  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$  (Abb. 5).

(4)  $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)^2$   
 (5)  $(2x + 1)/(x - 1)^2 > 3/\delta^2 > C$



Konvergenz einer Funktion. Abb. 5: Bild der Funktion  $f(x) = (2x + 1)/(x - 1)^2$

III. Das Verhalten einer Funktion  $f(x)$  für sehr große positive bzw. für sehr kleine negative Argumente  $x$  kann durch die folgenden Definitionen charakterisiert werden: Es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ , wenn es zu jedem beliebig vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein hinreichend großes  $x_0 > 0$  gibt, so daß  $|f(x) - A| < \varepsilon$  ausfällt für alle  $x > x_0$  bzw. für alle  $x < -x_0$ . Es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  bzw.  $-\infty$ , wenn es zu einem beliebig vorgegebenen  $C > 0$  ein hinreichend großes  $x_0 > 0$  gibt, so daß  $f(x) > C$  bzw.  $f(x) < -C$  ausfällt für alle  $x > x_0$ . Analog definiert man  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  bzw.  $-\infty$ . Die Grenzwerte bzw. uneigentl. Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  der Funktion  $f(x)$  beschreiben, falls sie existieren, den Verlauf der Funktion im Unendlichen. Für die Funktion (4) gilt z. B.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , denn zu beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wählt man  $x_0 > \max(2, 12/\varepsilon)$  und schätzt für  $x > x_0$  ab, wie in (6) gezeigt wird. Analog erhält man  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Für die Funktion (7) gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ , da man zum Beweis des zweiten Grenzwertes zu einer beliebigen Zahl  $C > 0$  ein  $x_0 > 2C$

wählen und  $g(x)$  für  $x < -x_0$  nach (8) abschätzen kann.

(6)  $\left| \frac{2x + 1}{(x - 1)^2} - 0 \right| \leq \frac{3x}{(x - x/2)^2} = \frac{12}{x} < \frac{12}{x_0} < \varepsilon$   
 (7)  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$   
 (8)  $\frac{x^2 + 1}{2x + 1} < \frac{x^2}{2x + 1} < \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} < -\frac{x_0}{2} < -C$

Die Funktion  $f(x) = \cos x$  hat für  $x \rightarrow \infty$  keinen eigentl. oder uneigentl. Grenzwert, denn wie groß man auch  $x_0$  wählt, es lassen sich stets noch unendlich viele  $x$ -Werte größer als  $x_0$  angeben, für die die Funktion einen beliebig vorgegebenen Wert zwischen  $-1$  und  $+1$  annimmt.

IV. Wie für Zahlenfolgen ( $\nearrow$  Grenzwert von Zahlenfolgen) gelten auch bei Funktionen Grenzwertsätze.

IV.1. Aus der Existenz der Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  folgen die Grenzwerte (9), (10), (11) und (12).

(9)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$   
 (10)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$   
 (11)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$  für  $B \neq 0$   
 (12)  $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot A$   
 für eine beliebige reelle Zahl  $c$

IV.2. Aus  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  folgt für  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$  der uneigentl. Grenzwert  $+\infty$  oder  $-\infty$ , je nachdem, ob  $B > 0$  oder  $B < 0$  gilt. Für  $B = 0$  kann keine Aussage getroffen werden. Entsprechende Behauptungen gelten auch für  $x \uparrow a$ ,  $x \downarrow a$ ,  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .

IV.3. Weitere oft benutzte Grenzwerte.

(13)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_r}{d_0 x^s + d_1 x^{s-1} + \dots + d_s} = \begin{cases} 0 & \text{für } s > r \\ (c_0/d_0) & \text{für } s = r \\ +\infty & \text{für } s < r \text{ und } (c_0/d_0) > 0 \\ -\infty & \text{für } s < r \text{ und } (c_0/d_0) < 0 \end{cases}$   
 (14)  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$  für  $a > 0$   
 (15)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$   
 (16)  $\lim_{x \downarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$   
 (17)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + p/x)^x = e^p$  für  $p \in \mathbf{R}$   
 (18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p^x - 1}{x} = \ln p \text{ für } p > 0$$

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(21) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Ist die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = a$  stetig ( $\nearrow$  Stetigkeit), so gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Als Beispiel

betrachtet man etwa  $f(x) = \cos x$ . Die Funktion ist für  $x = 0$  stetig, und folglich ist  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ .

Weitere Methoden zur Berechnung von Grenzwerten unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Funktion liefern die Regel von Bernoulli und L'Hospital und die Entwicklung von Funktionen.

Zur Untersuchung der K. dienen die Konvergenzkriterien für Funktionen.

**Konvergenz einer Reihe**  $\nearrow$  Reihe I.

**Konvergenz einer Zahlenfolge**  $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge I.

**Konvergenz im Mittel:** Konvergenz im Hilbertraum  $L_2(a, b)$  ( $\nearrow$  Raum, normierter linearer), nach der eine Folge von Funktionen  $f_n \in L_2(a, b)$  genau dann im Mittel gegen eine Funktion  $f \in L_2(a, b)$  konvergiert, wenn (1) gilt;  $\|f_n - f\|$  bezeichnet dabei die Norm im Hilbertraum  $L_2(a, b)$ . — Ist  $\{f_n(t)\}$  eine gleichmäßig beschränkte Folge stetiger Funktionen auf  $[a, b]$ , d. h., existiert eine von  $t$  und  $n$  unabhängige Konstante  $M$  mit  $|f_n(t)| \leq M$  und gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ , so folgt nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue, daß die Folge  $\{f_n\}$  auch im Mittel gegen  $f$  konvergiert.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0$$

**Konvergenz im wesentlichen**  $\nearrow$  charakteristische Funktion V.

**Konvergenzintervall**  $\nearrow$  Funktionenfolge I.,  $\nearrow$  Funktionenreihe I.,  $\nearrow$  Potenzreihe III.

**Konvergenzkreis**  $\nearrow$  komplexwertige Funktion, elementare II.,  $\nearrow$  Potenzreihe XV.

**Konvergenzkriterien für Funktionen:** I. Sätze, mit deren Hilfe über das Konvergenzverhalten einer Funktion  $f(x)$  entschieden werden kann ( $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion I.). *Notwendige Kriterien* geben notwendige Voraussetzungen für die Existenz eines Grenzwertes an, *hinreichende Kriterien* geben Bedingungen dafür an, unter denen die Funktion tatsächlich einen Grenzwert hat. Am wertvollsten sind demnach Kriterien, die sowohl notwendig als auch hinreichend sind. Im folgenden werden K. für stets einen der fünf Fälle  $x \rightarrow a$ ,  $x \downarrow a$ ,  $x \uparrow a$ ,  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  formuliert; sie sind jeweils auch für die übrigen vier Fälle im entsprechenden Sinne richtig. Eine *notwendige Bedingung* für die Konvergenz der Funktion  $f(x) \rightarrow a$  ist die *Beschränktheit der Funktion* in einer Umgebung des Punktes  $x = a$ .

Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 1} [(2x + 1)/(x - 1)^2]$  z. B. kann nicht existieren, da die Funktion  $f(x) = \frac{2x + 1}{(x - 1)^2}$

in keiner Umgebung von  $x = 1$  beschränkt ist. Zu einer beliebigen Umgebung  $U = ]1 - \delta, 1 + \delta[$  und einer beliebig großen Zahl  $C$  gibt es stets einen Punkt  $x_n = 1 + 1/n$ , so daß  $x_n \in U$  und  $f(x_n) = 3n^2 + 2n > C$ , d. h., die Funktion  $f(x)$  ist in keiner  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x = 1$  beschränkt.

Aus der Beschränktheit der Funktion in einer Umgebung des Punktes  $x = a$  muß aber nicht die Konvergenz folgen. Die Funktionen  $f(x) = \sin(1/x)$  und  $g(x) = x \sin(1/x)$  sind beide in  $U = ]-1, 1[$  als Umgebung von  $x = 0$  beschränkt,  $|f(x)| = |\sin(1/x)| \leq 1$  und  $|g(x)| = |x \sin(1/x)| \leq 1$ . Die Funktion  $g(x)$  konvergiert für  $x \rightarrow 0$  gegen den Grenzwert 0, die Funktion  $f(x)$  aber ist nicht konvergent für  $x \rightarrow 0$ .

Eine *hinreichende Bedingung* für die Konvergenz einer Funktion liefert der folgende Satz: Ist  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$

$$= A \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A \text{ und } f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

für alle  $x$  aus einer Umgebung von  $a$ , so konvergiert  $f(x)$  für  $x \rightarrow a$ , und es ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Mit

$$-x < x \sin(1/x) \leq x \text{ und } \lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

folgt sofort  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ .

**II. Erstes Hauptkriterium für monotone Funktionen:** Ist die Funktion  $f(x)$  in einem Intervall  $]x_0, \infty[$  erklärt und dort beschränkt und monoton wachsend bzw. fallend, so ist  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  konvergent. Ist die Funktion  $f(x)$  monoton wachsend bzw. fallend, aber nicht beschränkt, so strebt  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $+\infty$  oder  $-\infty$ .

Mit Hilfe des ersten Hauptkriteriums ergibt sich z. B. die Existenz des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  für die Funktion (1), denn diese ist für  $x > 2$  zufolge (2) beschränkt und gemäß (3) monoton fallend.

$$(1) \quad f(x) = (2x + 1)/(x - 1)^2$$

$$(2) \quad 0 < f(x) = \frac{2(x - 1) + 3}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2} < 5 \text{ für alle } x > 2$$

$$(3) \quad 2 < x_1 < x_2$$

$$(x_1 x_2 - 1)(x_2 - x_1) > 0$$

$$x_1(x_2 - 1)^2 > x_2(x_1 - 1)^2$$

$$(2x_1 + 1)(x_2 - 1)^2 > (2x_2 + 1)(x_1 - 1)^2$$

$$\frac{2x_1 + 1}{(x_1 - 1)^2} > \frac{2x_2 + 1}{(x_2 - 1)^2}$$

Die Funktion  $g(x) = \sqrt{x}$  ist für  $x > 1$  zwar monoton wachsend, aber nicht nach oben beschränkt, denn wählt man zu einer beliebigen Zahl  $C > 0$  etwa  $x_0 > C^2$ , so ist  $f(x) > f(x_0) = \sqrt{x_0} > C$  für alle  $x > x_0$ . Demzufolge ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$ .

**III. Zweites Hauptkriterium oder Cauchysches Konvergenzkriterium:** Ist  $f(x)$  für  $a < x < a + l$ ,  $l > 0$ ,

erklärt, so konvergiert die Funktion  $f(x)$  für  $x \downarrow a$  dann und nur dann, wenn zu jeder beliebigen Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß für alle  $x_1, x_2$  mit  $0 < x_1 - a < \delta, 0 < x_2 - a < \delta$  die Beziehung  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$  besteht.

Die Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$  erfüllt für  $x \downarrow 0$  dieses K. nicht, denn zu  $\varepsilon = 1/2$  existiert kein  $\delta > 0$ , für das die angegebene Bedingung erfüllt wird. Gäbe es zu  $\varepsilon = 1/2$  ein  $\delta > 0$ , so wähle man in  $\pi/2 + 2\pi n = 1/x_1$  bzw.  $2\pi n = 1/x_2$  die natürl. Zahl  $n$  genügend groß, so daß  $x_1 < \delta$  und  $x_2 < \delta$ . Dann gilt

$$|\sin(1/x_1) - \sin(1/x_2)| = |\sin(\pi/2 + 2\pi n) - \sin(2\pi n)| = 1 > \varepsilon = 1/2.$$

Also konvergiert die Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$  für  $x \downarrow 0$  nicht. Die Funktion  $g(x) = x \sin(1/x)$  ist dagegen für  $x \downarrow 0$  konvergent, denn zu einem beliebigen  $\varepsilon > 0$  kann man  $0 < \delta < \varepsilon/2$  wählen, und dann gilt für  $x_1, x_2$  mit  $0 < x_1 < \delta$  und  $0 < x_2 < \delta$  die Abschätzung

$$|x_1 \sin(1/x_1) - x_2 \sin(1/x_2)| \leq x_1 |\sin(1/x_1)| + x_2 |\sin(1/x_2)| \leq x_1 + x_2 < 2\delta < \varepsilon.$$

IV. **Folgenkriterium:** Für eine Funktion  $f(x)$ , die in einer Umgebung von  $x = a$  erklärt ist, eventuell mit Ausnahme des Punktes  $x = a$ , gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

dann und nur dann, wenn für jede gegen  $a$  konvergierende Zahlenfolge  $(x_n)$ , deren Glieder sämtlich dieser Umgebung angehören und alle ungleich  $a$  sind, die Zahlenfolge  $y_n$  der zugehörigen Funktionswerte  $y_n = f(x_n)$  gegen ein und denselben Grenzwert  $A$  konvergiert.

Den Grenzwert (4) ermittelt man z. B., indem man für irgendeine gegen 2 konvergierende Folge  $(x_n)$  mit  $1/2 < x_n$  den Grenzwert (5) nach den Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen behandelt. Damit erhält man  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5/2$ . Mit dem Folgenkriterium kann man erneut zeigen, daß  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  nicht existiert,

denn die zu den beiden Nullfolgen aus (6) gehörenden Folgen der Funktionswerte haben verschiedene Grenzwerte (7).

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 1}{x_n^2 - 2} = \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 + 1}{(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)^2 - 2} = \frac{4 + 1}{4 - 2} = \frac{5}{2}$$

$$(6) \quad (x_n) = \left(\frac{1}{2\pi n}\right); \quad (x'_n) = \left(\frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}\right)$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1/x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1/x'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1 \end{aligned}$$

**Konvergenzkriterien für Reihen: I. Sätze,** mit deren Hilfe über das Konvergenzverhalten einer vorgelegten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  entschieden werden kann. Ein notwendiges Kriterium gibt Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, wenn die Reihe konvergieren soll, ist es nicht erfüllt, so divergiert die Reihe. Ist ein notwendiges Kriterium erfüllt, so kann die Reihe konvergieren, muß aber nicht konvergieren. Ist ein hinreichendes Kriterium erfüllt, so konvergiert die

Reihe. Ist es nicht erfüllt, so kann die Reihe trotzdem konvergieren. K., die notwendig und hinreichend sind, sind deshalb die wertvollsten Kriterien.

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist nach Definition konvergent, wenn ihre Partialsummenfolge  $(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$  konvergiert ( $\nearrow$  Reihe I.). Nach dem II. Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen konvergiert die Folge  $(s_n)$  dann und nur dann, wenn  $(s_n)$  eine Cauchyfolge ist. Damit ist ein hinreichendes und notwendiges Kriterium gefunden.

II. **Cauchysches Konvergenzkriterium oder zweites**

**Hauptkriterium:** Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist dann und nur dann konvergent, wenn sich zu jedem beliebig vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon)$  angeben läßt, so daß (1) für alle Indizes  $n > N(\varepsilon)$  und beliebige natürl. Zahlen  $p \geq 0$  gilt, d. h., wenn  $(s_n)$  eine Cauchyfolge ist.

$$(1) \quad |s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Dieses Kriterium ist zur Entscheidung über die Konvergenz und Divergenz einer konkreten Reihe i. allg. schwierig zu handhaben, doch lassen sich sehr viele theoret. Folgerungen daraus ableiten. Für  $p = 1$  z. B. ergibt sich aus (1) die notwendige Bedingung  $|a_{n+1}| < \varepsilon$  für alle Glieder  $a_n$  der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $n > N$ , sie besagt, daß die Glieder  $a_n$  der Reihe eine Nullfolge bilden müssen.

III. **Ein notwendiges Konvergenzkriterium ist:** Damit

die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert, ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß ihre Glieder eine Nullfolge bilden:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Damit läßt sich z. B. sofort sagen, daß die Reihe (2) wegen (3) divergiert. Daß dieses Kriterium aber nicht hinreichend ist, zeigt z. B. die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 1/k)$ , die wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + 1/n) = 0$  das Kriterium erfüllt, aber nicht konvergiert, da ihre Partialsummenfolge  $(s_n)$  nach (4) unbeschränkt ist.

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

$$(4) \quad \begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \ln(1 + 1/k) = \sum_{k=1}^n \ln[(k+1)/k] \\ &= \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) \end{aligned}$$

Eine weitere Folgerung aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium ist der folgende Satz: Aus der absoluten Konvergenz einer Reihe folgt die gewönl. Konvergenz.

IV. Für alternierende Reihen gibt das Konvergenzkriterium von Leibniz eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz an.

*Leibnizsches Konvergenzkriterium:* Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k$  mit  $c_k \geq 0$  ist konvergent, wenn die Zahlenfolge  $(c_n)$  monoton fällt und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  gilt.

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k$  z. B. ist wegen  $c_n = 1/n > 1/(n+1) = c_{n+1}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$  konvergent. Auch die Reihen (5), (6) und (7) konvergieren.

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/(2k-1)$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k^2$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k^4$$

V. Für Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit nichtnegativen Gliedern,  $a_k \geq 0$ , hat man eine notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz, die oft als *erstes Hauptkriterium* bezeichnet wird: Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit nichtnegativen Gliedern,  $a_n \geq 0$  für  $n = 1, 2, \dots$ , ist dann und nur dann konvergent, wenn ihre Partialsummenfolge ( $\nearrow$  Reihe) nach oben beschränkt ist.

V.1. Die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  z. B. divergiert, weil ihre Partialsummenfolge unbeschränkt ist. Dazu wird die Teilfolge  $(t_n) = (s_{2^n})$  der Partialsummenfolge  $(s_n)$  untersucht; sie hat die Eigenschaft (8a), aus der nach (8b) folgt, daß die Partialsummenfolgen  $(t_n)$  und damit auch  $(s_n)$  unbeschränkt sind.

$$(8a) \quad t_p - t_{p-1} = s_{2^p} - s_{2^{p-1}} = \frac{1}{2^{p-1} + 1} + \frac{1}{2^{p-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^p} > \frac{2^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{2}$$

$$(8b) \quad t_n = t_1 + \sum_{p=2}^n (t_p - t_{p-1}) > t_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = (n+2)/2$$

V.2. Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  konvergiert, denn für das allgemeine Glied  $s_n$  ihrer Partialsummenfolge gilt die Abschätzung (9). Aus ihr ergibt sich  $s_n < 2$ , d. h., daß die Folge  $(s_n)$  beschränkt ist.

$$(9) \quad s_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

VI. *Vergleichskriterien* geben hinreichende Bedingungen für das Konvergenzverhalten einer Reihe an, die durch Vergleich ihrer Glieder mit denen einer Reihe von bekanntem Konvergenzverhalten gewonnen werden.

*Majorantenkriterium:* Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  eine konvergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und erfüllen die Glieder einer zu untersuchenden Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  für alle  $n \geq N$  die Ungleichung  $|a_n| \leq b_n$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent. Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , für deren Glieder die Ungleichung  $b_n \geq |a_n|$  für alle  $n \geq N$  gilt, heißt *Majorante* oder *Oberreihe* der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Das Majorantenkriterium läßt sich demnach kurz so formulieren: Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert, wenn es zu ihr eine konvergente Majorante gibt.

*Minorantenkriterium:* Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  eine divergente Reihe mit nichtnegativen Gliedern und erfüllen die Glieder einer zu untersuchenden Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  für alle  $n \geq N$  die Ungleichung  $a_n \geq c_n$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bestimmt divergent. Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , deren nichtnegative Glieder die Ungleichung  $c_n \leq a_n$  für alle  $n \geq N$  erfüllen, heißt *Minorante* oder *Unterreihe* der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Nach dem Minorantenkriterium divergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , wenn es zu ihr eine divergente Minorante gibt.

Die Vergleichskriterien setzen voraus, daß man das Konvergenzverhalten von möglichst vielen Reihen kennt, um sie als Majorante bzw. Minorante verwenden zu können. Oft wird die  $\nearrow$  harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$  als Majorante bzw. Minorante benutzt.

Die harmon. Reihe divergiert nach V.1. für  $\alpha = 1$  und konvergiert nach V.2. für  $\alpha = 2$ . Aus den Vergleichskriterien folgt dann sofort die Divergenz der harmon. Reihe für alle  $\alpha \leq 1$  und ihre Konvergenz für alle  $\alpha \geq 2$ . Man kann zeigen, daß sie auch für  $1 < \alpha < 2$  konvergiert. Zunächst haben (10) und (11) dasselbe Konvergenzverhalten, und (11) hat die geometr. Reihe (12) zur Majorante, wie die Abschätzung (13) zeigt. Wegen  $\alpha > 1$  ist der Quotient  $q = 1/2^{\alpha-1} < 1$  und (12) folglich konvergent. Dann konvergieren nach dem Majorantenkriterium auch (11) und somit (10).

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha = 1 + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + 1/4^\alpha + \dots$$

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right] + \dots + \left[\frac{1}{(2^k-1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right] + \dots$$

mit  $a_k = \left[\frac{1}{(2^k-1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right]$  für  $k \geq 2$

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \\ = 1 + q + q^2 + \dots \text{ mit } q = \frac{1}{2^{a-1}}$$

$$(13) \quad a_k = \frac{1}{\underbrace{(2^{k-1})^a + \dots + (2^k - 1)^a}_{2^{k-1} \text{ Summanden}}} \\ \leq \frac{1}{\underbrace{(2^{k-1})^a + \dots + (2^{k-1})^a}_{2^{k-1} \text{ Summanden}}} = \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^a} \\ = \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{k-1} = q^{k-1} = b_k \text{ für } k \geq 2$$

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k!/k^k$  hat wegen (14) die Majorante  $\sum_{k=1}^{\infty} 2/k^2$  und konvergiert, da ihre Majorante konvergent ist. Die Reihe (15) hat wegen (16) die harmon. Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k}$  zur Minorante; da diese wegen  $\alpha = 1/2 < 1$  divergiert, ist auch (15) divergent.

$$(14) \quad \frac{k!}{k^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdot \dots \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k}{k} \\ \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdot 1 \dots 1 = \frac{2}{k^2} \text{ für } k \geq 2$$

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{\sqrt{k^3+k-1}}$$

$$(16) \quad \frac{2k+1}{\sqrt{k^3+k-1}} > \frac{2k}{\sqrt{k^3+k}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Allgemein kann man zeigen, daß Reihen der Gestalt (17), in denen  $c_r, c_{r-1}, \dots, c_0$  und  $d_s, d_{s-1}, \dots, d_0$  reelle Zahlen,  $r$  und  $s$  natürl. Zahlen sind und  $c_r \neq 0, d_s \neq 0$  gilt, für  $s - r > 1$  konvergieren und für  $s - r \leq 1$  divergieren.

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_r k^r + c_{r-1} k^{r-1} + \dots + c_0}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_0}$$

Zum Beweis des folgenden Kriteriums wird das Majorantenkriterium mit der geometr. Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  als Majorante benutzt.

**VII. Quotientenkriterium oder d'Alembertsches Kriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut, wenn von

einer gewissen Stelle  $N$  ab die Ungleichung  $|a_{n+1}/a_n| = q_n \leq q < 1$  mit einer von  $n$  unabhängigen Zahl  $q$  gilt. Gilt  $q_n \geq 1$  für alle  $n \geq N$ , so ist die Reihe divergent. Zur Begründung ist zu beachten, daß aus  $q_n \leq q < 1$  für  $n \geq N$  die Ungleichung  $|a_{n+k}| \leq q^k |a_n|$  folgt und aus ihr  $|a_k| \leq q^{k-N} |a_N|$ . Danach ist aber die geometr. Reihe (18) eine konvergente Majorante für  $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ . Falls aber  $q_n \geq 1$  für  $n \geq N$ , verletzt  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  das notwendige Konvergenzkriterium und ist daher divergent.

$$(18) \quad \sum_{k=N}^{\infty} |a_N| q^{k-N} = |a_N| \sum_{k=N}^{\infty} q^{k-N}$$

Hat die aus der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gebildete Zahlenfolge  $(q_n)$  mit  $q_n = |a_{n+1}/a_n|$  einen Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  für  $a < 1$  absolut konvergent.

Im Falle  $a = 1$  kann mit dieser Folgerung aus dem Quotientenkriterium nichts über die Konvergenz bzw. Divergenz ausgesagt werden, wie das Beispiel der Reihen  $\sum 1/k$  und  $\sum 1/k^2$  zeigt. Für beide Reihen gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ , aber die erste ist divergent,

die zweite konvergent. Ist  $a > 1$ , so divergiert die Reihe  $\sum a_k$ . Als Beispiele für das Quotientenkriterium werden die Reihen (19), (20) und (21) betrachtet. Die Reihe (19) konvergiert wegen (22). Das Konvergenzverhalten von (20) hängt von  $x$  ab; wie (23) zeigt, konvergiert diese Reihe absolut für  $|x| < e$ , für  $|x| > e$  ist sie divergent, und für  $x = e$  und  $x = -e$  kann nach dem Quotientenkriterium keine Aussage über Konvergenz bzw. Divergenz gemacht werden. Für  $x = e$  geht die Reihe (20) gerade in (21) über, und nach (24) erhält man die Divergenz von (21). Analog kann man zeigen, daß die Reihe (20) auch für  $x = -e$  divergiert.

$$(19) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} \quad (20) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k! \left(\frac{x}{k}\right)^k$$

$$(21) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k! \left(\frac{e}{k}\right)^k$$

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$$

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1)! x^{n+1} n^n|}{n! x^n (n+1)^{n+1}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(1+1/n)^n} = \frac{x}{e}$$

$$(24) \quad q_n = \frac{e}{(1+1/n)^n} \geq 1 \text{ für alle } n, \text{ da } (1+1/n)^n \text{ monoton wachsend mit dem Grenzwerte } e$$

Hat  $q_n$  für eine gegebene Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  die Form (25)

mit natürl.  $r > 0$ , so ist die Reihe für  $d_1 - c_1 > 1$  absolut konvergent, für  $d_1 - c_1 \leq 1$  divergent. Damit folgt erneut die Divergenz der harmon. Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  wegen  $q_n = n/(n+1)$ , also  $d_1 - c_1 = 1$ . Da gegen ist die Reihe (26) wegen (27) konvergent.

$$(25) \quad q_n = \frac{n^r + c_1 n^{r-1} + \dots + c_r}{n^r + d_1 n^{r-1} + \dots + d_r}$$

$$(26) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \cdot \frac{1}{k}$$

$$(27) \quad q_n = \frac{n^2 + n/2}{n^2 + 2n + 1}$$

$$\text{d. h. } d_1 - c_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$$

**VIII. Wurzelkriterium:** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut, wenn für alle  $n \geq N$  die Ungleichung  $\sqrt[n]{|a_n|} = w_n \leq q < 1$  mit einer von  $n$  unabhängigen Zahl  $q$  erfüllt ist. Gilt hingegen  $w_n \geq 1$  für  $n \geq N$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent. Zur Begründung ist zu beachten, daß aus  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$  für  $n \geq N$  die Ungleichung  $|a_n| \leq q^n$  folgt und daß wegen  $q < 1$  die geometr. Reihe  $\sum_{k=N}^{\infty} q^k$  eine konvergente Majorante für  $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$  ist. Falls  $w_n \geq 1$ , so ist auch  $|a_n| \geq 1$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent, weil sie das notwendige Konvergenzkriterium verletzt.

Hat die aus der Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gebildete Zahlenfolge  $w_n = \sqrt[n]{|a_n|}$  einen Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ , so ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  für  $a < 1$  absolut konvergent und für  $a > 1$  divergent. Für  $a = 1$  kann nichts über das Konvergenzverhalten der Reihe ausgesagt werden, wie die Reihen  $\sum 1/k$  und  $\sum 1/k^2$  zeigen, von denen die erste divergiert und die letzte konvergiert, obwohl für beide lim  $w_n = 1$  gilt.

Als Beispiel für das Wurzelkriterium werden die Reihen (28) und (29) betrachtet. Wegen (30) ist die Reihe (28) konvergent, und mit Hilfe von (31) erkennt man die absolute Konvergenz von (29) für  $|x| < 1/e$  und ihre Divergenz für  $|x| > 1/e$ .

$$(28) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k} \quad (29) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} x^k$$

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/\ln n) = 0 < 1$$

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)/n|^{n^2} x^n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| (1 + 1/n)^n = e \cdot |x|$$

**IX. Integralkriterium.** Hat eine gegebene Reihe die Form  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ , wenn  $f(k)$  der Wert einer für  $x \geq 1$  definierten Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = k$  ist, fällt  $f(x)$  monoton und gilt im Definitionsbereich  $f(x) \geq 0$ , so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  dann und nur dann, wenn das uneigentliche Integral  $\int_c^{\infty} f(x) dx$  existiert, falls  $c$  so gewählt wird, daß  $f(x)$  für  $c < x < \infty$  frei von Unstetigkeitsstellen ist. Mit Hilfe des Integralkriteriums zeigt man z. B. die Konvergenz der Reihe (32), denn  $f(x) = 1/[x(\ln x)^{1+\sigma}] > 0$  für  $x \geq 2$  und  $f(x)$  fällt monoton, und es gilt (33). Nach dem gleichen Kriterium ergibt sich die Divergenz der harmon. Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ , denn  $f(x) = 1/x > 0$  für  $x \geq 1$ ,  $f(x)$  fällt monoton, und es gilt (34).

$$(32) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{1+\sigma}} \quad \text{mit } \sigma > 0$$

$$(33) \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{1+\sigma}} = \lim_{D \rightarrow \infty} \left[ \frac{-1}{\sigma(\ln D)^{\sigma}} + \frac{1}{\sigma(\ln 2)^{\sigma}} \right] \\ = \frac{1}{\sigma(\ln 2)^{\sigma}}$$

$$(34) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{D \rightarrow \infty} \int_1^D \frac{dx}{x} = \lim_{D \rightarrow \infty} \ln D = \infty$$

**Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen:** Bedingungen, die erlauben, aus der Aufeinanderfolge der Glieder  $a_n$  einer gegebenen Zahlenfolge auf die Konvergenz ( $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge) bzw. Divergenz der Zahlenfolge zu schließen.

**I. Erstes Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen:** Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent. Dagegen ist eine monotone und unbeschränkte Zahlenfolge bestimmt divergent nach  $+\infty$ , wenn die Zahlenfolge monoton wächst, und bestimmt divergent nach  $-\infty$ , wenn die Zahlenfolge monoton fällt. *Beispiel:* Die Zahlenfolge mit dem allgemeinen Glied  $a_n = (1 + 1/n)^n$  wächst eigentlich monoton für  $n \geq 2$ , weil sich aus (1) ergibt

$[1 + 1/n]^n = a_n > a_{n-1} = [1 + 1/(n-1)]^{n-1}$ , dagegen fällt die Zahlenfolge  $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$  eigentlich monoton für  $n \geq 2$ , weil nach (2) gilt  $[1 + 1/(n-1)]^n = b_{n-1} > b_n = [1 + 1/n]^{n+1}$ .

$$(1) \quad \frac{(1 + 1/n)^n}{[1 + 1/(n-1)]^n} = [(n^2 - 1)/n^2]^n \\ = (1 - 1/n^2)^n > 1 - 1/n = [1 + 1/(n-1)]^{-1}$$

$$(2) \quad \frac{[1 + 1/(n-1)]^n}{(1 + 1/n)^n} = [n^2/(n^2 - 1)]^n \\ = [1 + 1/(n^2 - 1)]^n > 1 + n/(n^2 - 1) > 1 + 1/n$$

Bei den Abschätzungen wurde die Bernoullische Ungleichung  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  für  $a > -1$  verwendet. Da für alle  $n \geq 2$  gilt  $a_n < b_n$  und  $(b_n)$  monoton fallend ist, folgt  $a_n < b_n = (1 + 1/2)^3$ , d. h.,  $(a_n)$  ist nach oben beschränkt. Analog zeigt man, daß  $(b_n)$  nach unten beschränkt ist. Daher sind die beiden Zahlenfolgen nach dem ersten K. konvergent:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e_1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e_2$ . Außerdem gilt wegen (3) und (3a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n + b_n) = 0$ .

$$(3) \quad (3/2)^2 \cdot 1/(n+1) < b_n - a_n < (3/2)^3 \cdot (1/n)$$

$$(3a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1/(n+1)] = 0$$

Danach ist  $e_1 = e_2$ , und durch (4) ist die Eulersche Zahl  $e$  definiert, die die Ungleichung (5) für alle natürl. Zahlen  $n \geq 1$  erfüllt.

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^{n+1} \\ = e = 2,71828182845904523536 \dots$$

$$(5) \quad (1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$$

Die monoton wachsende Zahlenfolge  $(a_n)$  mit  $a_n = n^2$  ist nach oben nicht beschränkt, deshalb ist  $(a_n)$  bestimmt divergent nach  $+\infty$ .

**II. Zweites oder Cauchysches Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen:** Eine Zahlenfolge  $(a_n)$  ist dann und nur dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d. h., wenn es zu jeder beliebigen Zahl  $\varepsilon > 0$  stets eine Zahl  $N(\varepsilon)$  gibt, so daß  $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$  gilt für alle  $n > N(\varepsilon)$  und alle natürl. Zahlen  $k$ . Das Cauchysche K. drückt zwei Sachverhalte aus: 1. wenn die Zahlenfolge  $(a_n)$  eine Cauchyfolge ist, so konvergiert sie auch, und 2. ist die Zahlenfolge  $(a_n)$  konvergent, so ist sie eine Cauchyfolge.

Die Zahlenfolge  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$  für  $n = 2, 3, \dots$  ist z. B. eine Cauchyfolge: Es gilt  $|a_n - a_{n+1}| = 1/2^n$ , wie sich leicht durch Induktion beweisen läßt, denn  $|a_0 - a_1| = 1$  und aus  $|a_k - a_{k+1}| = 1/2^k$  für  $k \leq n$  folgt  $|a_{n+1} - a_{n+2}| = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}) = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 1/2^{n+1}$ . Nach Definition ist jedes Glied  $a_n$  der Folge mit  $n \geq 2$  arithmet. Mittel seiner beiden unmittelbaren Vorgänger; deshalb liegen alle Glieder  $a_{n+k}$  der Folge mit  $k \geq 2$  zwischen  $a_n$  und  $a_{n+1}$ . Ist ein  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben, so wählt man  $N > -\ln \varepsilon / \ln 2$  und erhält  $|a_n - a_{n+k}| \leq |a_n - a_{n+1}| = 1/2^n < 1/2^N < \varepsilon$ . Nach dem Cauchyschen K. ist diese Zahlenfolge konvergent.

**Konvergenzkriterium für Integrale** ↗ Flächenintegral V.2., VI. 6., ↗ Integral, uneigentliches, III.

**Konvergenzradius** ↗ Potenzreihe III.

**Konvergenzverbesserung** ↗ Reihendarstellung II. konvers ↗ Relation III.

**Konvertierung:** Umwandlung der Zahlendarstellung von einem Zahlensystem in ein anderes. In *Rechenanlagen* erfolgt die K. fast ausschließlich mit fest verdrahtetem Programm und bezieht sich überwiegend auf das dezimale, duale und oktale Zahlensystem. S. a. dyadisches Zahlensystem II.; Zahlensystem VI.

**konvex** ↗ Konvexität, ↗ Körper V., ↗ körperliche Ecke I., ↗ Kurvendiskussion II.5., ↗ n-Eck I., ↗ Winkel VI.

**konvexer Körper, Eikörper:** Körper eines euklid. Raumes, in dem mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke zum Körper gehört; z. B. Kugel, Ellipsoid, Zylinder, Würfel, Tetraeder und Quader.

**Konvexität:** auf die Richtung der  $+y$ -Achse eines kartes. Koordinatensystems bezogene Aussage über die Krümmung der Kurve einer Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$  in diesem Koordinatensystem; die Kurve heißt von unten *konvex*, wenn sie im betrachteten Intervall  $[a, b]$  negative Krümmung hat; sie heißt von unten *konkav* bei positiver Krümmung. Von der Funktion  $y = f(x)$  wird dabei nicht nur vorausgesetzt, daß sie in  $[a, b]$  definiert und stetig ist, sondern auch, daß sie im Intervall  $]a, b[$  eine stetige erste Ableitung  $f'(x)$  hat. Ist die Kurve konvex, so wächst  $f'(x)$  in  $]a, b[$  monoton und fällt monoton bei einer konkaven Kurve. Existiert in  $]a, b[$  auch die zweite Ableitung  $f''(x)$ , so ist die Kurve konvex, wenn  $f''(x) \geq 0$ ; sie ist konkav, wenn  $f''(x) \leq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$  gilt und wenn  $f''(x)$  in keinem Teilintervall von  $]a, b[$  identisch Null ist. Man nennt auch die Funktion  $f(x)$  *streng* oder *eigenlich konvex* bzw. *konkav*, falls  $f''(x) > 0$  bzw.  $f''(x) < 0$  für alle  $x \in ]a, b[$  gilt.

Die Funktion  $y = f(x) = x^2$  ist z. B. für alle  $x$  streng konvex von unten, denn  $y' = 2x > 0$  gilt für alle  $x$ . Die Funktion  $y = f(x) = \cos x$  ist streng konvex von unten für alle  $x$  im Intervall  $\pi/2 < x < 3\pi/2$ , weil für diese  $x$ -Werte  $y' = -\cos x > 0$ . S. a. Kurvendiskussion II.5.

**konzentrisch:** Bezeichnung für die Lage von Kreisen in einer Ebene, falls sie den gleichen Mittelpunkt haben.

**Koordinaten** ↗ Koordinatensystem, ↗  $n$ -dimensionaler reeller Punkttraum, ↗ Vektor II., ↗ Vektorraum VI. S. a. projektive Koordinaten.

**Koordinatenachse** ↗ Koordinatensystem I.

**Koordinatenebene** ↗ Koordinatensystem I., II.

**Koordinateneinheitspunkt** svw. Einheitspunkt; ↗ Koordinatensystem I., II., III., ↗ Zahlengerade.

**Koordinateneinheitsstrecke** ↗ Koordinatensystem I.

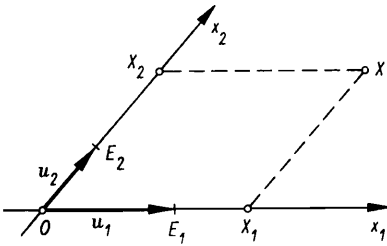
**Koordinatenfunktion** ↗ direkte Methode.

**Koordinatenlinie** ↗ Tangentialebene.

**Koordinatensystem:** I. ein System geometr. Objekte, *Bezugsobjekte* gen., mit deren Hilfe die Lage anderer geometr. Objekte durch geordnete Zahlentupel, *Koordinaten* gen., im wesentlichen umkehrbar eindeutig beschrieben werden kann. Die Art der eindeutigen Zuordnung zwischen den Koordinaten und den geometr. Objekten hängt von der jeweiligen Problemstellung ab. Je nachdem, ob man Punkte, Geraden, Ebenen oder lineare Unterräume einer festen Dimension eines vorgegebenen Raums durch Zahlentupel beschreibt, spricht man von *Punkt-, Linien-, Ebenenkoordinaten* oder *Plücker'schen Koordinaten*. In der Ebene wählt man als Bezugsobjekte z. B. oft einen festen Punkt, den *Nullpunkt* des K.s, und zwei zueinander senkrechte Geraden, die *Achsen* des K.s, auf denen noch *Einheitsstrecken* vorgegeben werden, und kann dann die Lage eines beliebigen Ebenenpunkts eindeutig durch seine lotrechten Abstände von den Achsen beschreiben. Ist als weiteres Beispiel in der Ebene eine Gerade durch die drei Koeffizienten  $a, b, c$  in ihrer *allgemeinen Gleichung*  $ax + by + c = 0$  gegeben, so sind diese *Linienkoordinaten* nicht alle gleichzeitig Null und nur bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor eindeutig bestimmt. Man nennt sie daher auch *homogene Koordinaten*. Die den geometr. Objekten zugeordneten Zahlentupel können auch komplexe Komponenten haben; man spricht dann von *komplexen Koordinaten*.

II. *Parallelkoordinaten* oder *affine Koordinaten* sind  $n$ -elementige geordnete Zahlenmengen, *n-Tupel*, die den Punkten eines  $n$ -dimensionalen *affinen Raumes* zugeordnet sind. Für die Ebene sind das Paare von Zahlen, für den Raum Tripel. Die Zuordnung erfolgt für die Punkte einer Ebene in folgender Weise: Es werden in der Ebene ein Punkt  $O$  und zwei zueinander nicht parallele durch  $O$  gehende Geraden ausgezeichnet (Abb. 1). Der Punkt  $O$  heißt der *Koordinatensprung* oder *Nullpunkt*, und die Geraden heißen die *Koordinatenachsen*  $x_1, x_2$ . Auf jeder Koordinatenachse wird ein von  $O$  verschiedener *Koordinateneinheitspunkt*  $E_1$  bzw.  $E_2$  festgelegt.

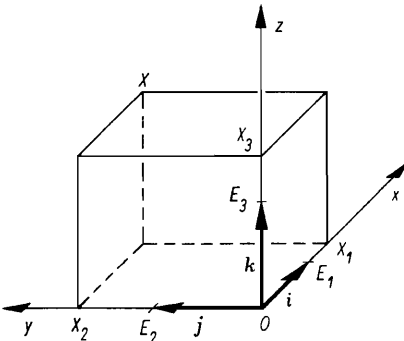




**Koordinatensystem. Abb. 1:** Parallelkoordinatensystem in der Ebene

Die Projektionen eines Punktes  $X$  der Ebene *parallel* zu den Koordinatenachsen auf die Koordinatenachsen ergeben Punkte  $X_i$  für  $i = 1, 2$ . Da  $O, E_i, X_i$  für festes  $i$  auf einer Geraden liegen, gibt es eine reelle Zahl  $x_i$ , so daß  $m(OX_i) = x_i |OE_i|$ ;  $x_i$  ist positiv, wenn  $E_i$  und  $X_i$  auf derselben Seite ihrer Koordinatenachse bzgl.  $O$  liegen;  $x_i$  ist negativ, wenn  $E_i$  und  $X_i$  durch  $O$  getrennt werden ( $\nearrow$  Durchlaufsinn). Man faßt  $x_i$  als Maßzahl der orientierten Strecke  $OX_i$  auf der jeweiligen Achse mit der Streckeneinheit  $|OE_i|$  auf. Die Zahlen  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  heißen die *Koordinaten* des Punktes  $X$  der Ebene im *Parallel-K.*  $\{O, OE_1, OE_2\}$ ; in Zeichen  $X(x_1, x_2)$ . Der Punkt  $O$  hat die Koordinaten  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ . Für Punkte auf der einen Koordinatenachse ist jeweils die andere Koordinate Null. Die Achse heißt deswegen auch  *$x_1$ -Achse* oder *Abzissenachse* gen. und die  *$x_2$ -Achse*  *$y$ -Achse* oder *Ordinatenachse*. Die Koordinatenachsen zerlegen die Ebene in vier *Quadranten*. Durch die Auszeichnung eines Parallelkoordinatensystems kann man die Ebene *orientieren*. Man bezeichnet i. allg. den *Drehsinn* als *positiv*, in dem man die positive  $x_1$ -Achse um den kleineren Winkel in die positive  $x_2$ -Achse drehen kann.

Für die Punkte eines *dreidimensionalen Raumes* erfolgt die Festlegung eines Parallel-K. entsprechend: Hierbei werden *drei* Koordinatenachsen ausgewählt, die nicht in einer Ebene liegen und sämtlich durch den Koordinatenursprung  $O$  gehen. Die drei von je zwei Koordinatenachsen aufgespannten



**Abb. 2:** Kartesisches Koordinatensystem im Raume

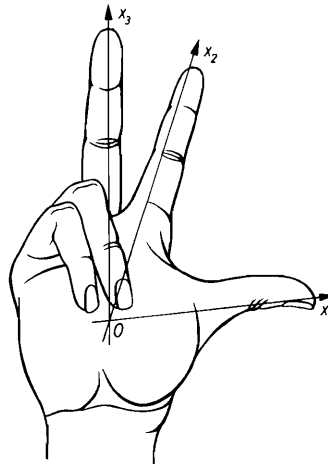
Ebenen heißen die *Koordinatenebenen*. Die Projektionen eines Punktes  $X$  des Raumes parallel zu den Koordinatenachsen auf die Koordinatenachsen ergeben Punkte  $X_i$  für  $i = 1, 2, 3$  ( $\nearrow$  Abb. 2). Diesen entsprechen analog zum Fall in der Ebene Koordinaten  $x_i$  für  $i = 1, 2, 3$ . Man schreibt  $X(x_1, x_2, x_3)$ . Der Punkt  $O$  hat die Koordinaten  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ . Für Punkte auf einer Koordinatenachse sind jeweils die anderen beiden Koordinaten Null. Für Punkte auf einer Koordinatenebene ist die dritte Koordinate, deren Achse nicht in der Ebene liegt, Null. Die Koordinatenebenen zerlegen den Raum in acht *Oktanten*. Durch die Auszeichnung eines Parallel-K.s kann man den Raum orientieren. Man bezeichnet ein solches räuml. K. als ein *Rechtssystem*, wenn die drei Koordinatenachsen in der durch ihre Numerierung gegebenen Reihenfolge und mit den durch die Lage von  $E_i$  gegebenen Richtungen so angeordnet sind, wie die gespreizten Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand (Abb. 3). Andernfalls heißt es *Linkssystem*.

Im *affinen Raum* ist jedem Punktepaar ein Vektor zugeordnet. Sind  $OX = x$  und  $OE_i = u_i$ , erhält man die vektorielle Darstellung (1); dabei

$$(1) \quad x = \sum x_i u_i$$

wird in der Ebene über  $i = 1, 2$  und im Raum über  $i = 1, 2, 3$  summiert. Allgemein legen in einem  $n$ -dimensionalen affinen Raum ein Punkt  $O$  und  $n$  linear unabhängige Vektoren  $u_i$  ein K.  $\{O; u_1, u_2, \dots, u_n\}$  fest. Die Darstellung eines Punktes  $X$  erfolgt dann durch (1) mit  $i = 1, \dots, n$ . Die Zahlen  $x_i$  heißen die Koordinaten von  $X$ . Dabei ist  $x$  der *Ortsvektor* des Punktes  $X$  in diesem Koordinatensystem. Da die  $u_i$  eine *Basis* des zugehörigen *Vektorraumes* ( $\nearrow$  affiner Raum) bilden, sind im Parallel-K.

auch jedem Vektor  $v$  durch  $v = \sum_{i=1}^n v_i u_i$  Koordinaten  $v_i$  zugeordnet.



**Koordinatensystem. Abb. 3:** Rechtssystem, die  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse sind gerichtet wie der gespreizte Daumen, der Zeigefinger und der Mittelfinger der rechten Hand

III. Ein Parallel-K. ist i. allg. *schiefwinklig*, weil die Winkel zwischen den Koordinatenachsen bzw. den Vektoren  $u_i$  nicht vorgeschrieben sind. Auch sind die Längen von  $OE_i$ ; i. allg. nicht gleich. In einem affinen Raum kann durch die Einführung eines *Skalarprodukts*  $a \cdot b$  zweier Vektoren  $a$  und  $b$  ein *Maß für Strecken* durch  $|a| = \sqrt{a \cdot a}$  und ein *Maß für Winkel* durch  $\cos \varphi = (a \cdot b) / (|a| \cdot |b|)$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$  definiert werden. Dann sind Strecken auf verschiedenen Geraden miteinander vergleichbar und rechte Winkel erklärt. Damit kann man ein *kartes. K.* als ein solches Parallel-K. einführen, dessen *Basisvektoren* ein *orthonormiertes System* bilden. Für  $n = 3$  werden sie oft mit  $i, j, k$  bezeichnet (Abb. 2). *Kartes. Koordinaten sind danach rechtwinklige Parallelkoordinaten mit gleichlangen Koordinateneinheitsstrecken.* Man gewinnt sie, indem man einen *Ursprung*  $O$  und  $n$  *Koordinatenachsen* durch diesen festlegt, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wie für Parallelkoordinaten wählt man auf jeder Achse einen *Einheitspunkt*  $E_i$  so, daß die  $OE_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gleichlang sind. Die senkrechten Projektionen eines Punktes  $X$  auf die Koordinatenachsen ergeben Punkte  $X_i$ , und die Verhältniszahlen  $x_i$  der *gerichteten Strecken*  $OX_i$  und  $OE_i$  heißen die *kartes. Koordinaten* von  $X$  im System  $\{O, OE_i\}$ . Man bezeichnet sie für die Ebene bzw. den Raum auch mit  $(x, y)$  bzw.  $(x, y, z)$ . Durch die Auszeichnung eines kartes. K.s können die Ebene bzw. der Raum *orientiert* werden. Man bezeichnet i. allg. in der Ebene den *Drehsinn* als *positiv*, in dem man die positive  $x$ -Achse um einen rechten Winkel in die positive  $y$ -Achse drehen kann. Ein kartes. K. wird in der *metr. affinen Geometrie* verwendet. *Metr. Abbildungen und Ähnlichkeitsabbildungen* lassen sich in solchen K.en durch Koordinatenbeziehungen charakterisieren.

IV. Werden in einer Ebene ein Punkt  $O$  als *Pol* des K.s und eine *Nullrichtung* durch das Festlegen eines durch  $O$  gehenden Strahls  $o$  ausgezeichnet (Abb. 4), und wird außerdem ein *positiver Drehsinn* festgelegt, etwa der, in dem man  $o$  bei der Betrachtung der Ebene von einer bestimmten Seite aus entgegen dem Uhrzeigersinn zu drehen hat, so werden jedem Punkt  $P \neq O$  der Ebene *Polarkoordinaten*  $r, \varphi$  folgendermaßen zugeordnet: Die Polarkoordinate  $r$  eines beliebigen Punktes  $P$  der Ebene ist der *Abstand* dieses Punktes von  $O$ , die Polarkoordinate  $\varphi$  von  $P \neq O$  ist die in *Bogenmaß* gemessene Größe des Winkels, um den man  $o$  in den Strahl  $OP$  in positivem Sinn zu drehen hat und wird oft *Amplitude* gen. Es gilt  $r \geq 0$  und üblicherweise  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Die Zuordnung von  $r$  und  $\varphi$  zu den Punkten  $P$  ist umkehrbar eindeutig mit Ausnahme des Punktes  $O$ ,

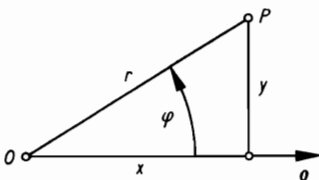
dem man keinen bestimmten Winkel sinnvoll zuordnen kann. Ist ein *kartes. K.* mit dem Ursprung  $O$  und der positiven  $x$ -Achse in Richtung von  $o$  zum Vergleich gegeben, so gelten (2) und (3) als Umrechnungsformeln (vgl. Abb. 4). Es ist zu beachten, daß

$$(2) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

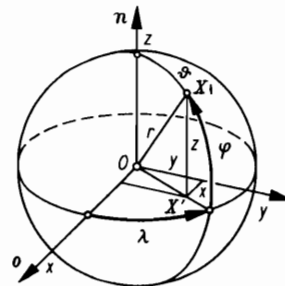
$$(3) \quad \tan \varphi = y/x, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\varphi$  durch (3) noch nicht eindeutig bestimmt ist. Man hat dazu auch (2) bzw. die Lage von  $P$  in den Quadranten zu beachten. Gewisse Kurven lassen sich durch Polarkoordinaten einfacher beschreiben als durch kartes. Koordinaten. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $a$  hat z. B. die Gleichung  $r = a$  ( $\nearrow$  Kreis,  $\nearrow$  Spiralen).

V. *Kugelkoordinaten*, auch *sphär. Koordinaten*, *rüuml. Polarkoordinaten* oder *geograph. Koordinaten*, sind Koordinaten eines K. des Raumes, durch das jedem Punkt mit Ausnahme der Punkte einer Geraden drei Zahlen  $r, \lambda$  und  $\varphi$  auf folgende Weise zugeordnet werden: Es wird ein Punkt  $O$  als Pol des K.s festgelegt und durch zwei aufeinander senkrecht stehende durch  $O$  gehende Strahlen  $n$  bzw.  $o$  werden eine *Nordrichtung* und eine *Nullrichtung* ausgezeichnet (Abb. 5). Außerdem wird ein positiver, *östl. Drehsinn* um  $n$  bestimmt, etwa der einer Rechtsschraube mit der Spitze in Richtung von  $n$ . Die Gerade von  $n$  heißt die *Achse*. Die auf  $n$  senkrecht stehende durch  $O$  bzw.  $o$  gehende Ebene heißt die *Äquatorebene*. Sie ist durch  $n$  orientiert. Als den *positiven* oder *nördl. Halbraum* wählt man den, nach dem  $n$  zeigt. Die Kugelkoordinate  $r$  eines beliebigen Punktes  $X$  des Raumes ist der Abstand dieses Punktes von  $O$ . Denkt man sich den Strahl  $OX$  auf die Äquatorebene senkrecht projiziert, so ist die *Längenkoordinate*  $\lambda$  mit  $-\pi < \lambda \leq \pi$  die Größe des in der Regel in Bogenmaß gemessenen Winkels zwischen  $o$  und dieser Projektion. Sie ist genau dann positiv, wenn  $o$  im positiven Sinn um einen Winkel, der kleiner oder gleich  $\pi$  ist, in diese Projektion zu drehen ist. Die *Breitenkoordinate*  $\varphi$  mit  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  ist die Größe des Winkels zwischen der Äquatorebene und  $OX$ . Sie ist genau dann positiv, wenn  $X$  im positiven Halbraum liegt. Die Zuordnung der Kugelkoordinaten zu den Punkten  $X$  des Raumes ist umkehrbar eindeutig mit Ausnahme der Punkte der Achse. Dort ist  $\lambda$  unbestimmt. In  $O$  ist außerdem  $\varphi$  nicht festgelegt. Ist



Koordinatensystem. Abb. 4: Polarkoordinaten  $r, \varphi$  eines Punktes  $P$  der Ebene und ihre Beziehungen zu kartesischen Koordinaten



Koordinatensystem. Abb. 5: Kugelkoordinaten  $r, \lambda, \varphi$  eines Raumpunktes  $X$ , und ihre Beziehungen zu den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$

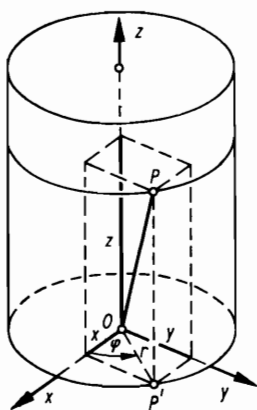
ein kartes. K. mit dem Ursprung  $O$  und den positiven  $x$ - und  $z$ -Achsen in Richtung von  $\mathbf{o}$  bzw.  $\mathbf{n}$  als Rechtssystem gegeben, so gelten die Umrechnungsformeln (4) und (5).

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda &= \arctan(y/x) \\ \varphi &= \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

Durch die Formeln (5) ist  $\lambda$  nicht eindeutig bestimmt. Die Linien, für die  $r$  und  $\lambda$  beide konstant sind, heißen *Meridiane*, die, für die  $r$  und  $\varphi$  konstant sind, *Breitenkreise*. Diese Kugelkoordinaten entsprechen der Gradnetzenteilung auf der Erdoberfläche. Gelegentlich werden andere Kugelkoordinaten verwendet, bei denen die Koordinate  $\varphi$  durch eine Koordinate  $\vartheta = -\varphi + \pi/2$  für  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  ersetzt wird, die den kleineren Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $OX$  angibt. Die Umrechnungsformeln (4) und (5) sind dann entsprechend zu ändern. In Kugelkoordinaten läßt sich eine Kugelfläche mit dem Radius  $a$  bes. einfach beschreiben. Sie hat die Gleichung  $r = a$ .

**VI. Zylinderkoordinaten** sind geordnete Zahlenmengen  $(r, \varphi, z)$ , die in folgender Weise fast allen Punkten des dreidimensionalen Raumes zugeordnet werden. Einer der beiden Halbräume, in die eine Ebene  $E$  den Raum teilt, wird als positiv bezeichnet und in der Ebene  $E$  ein Polar-K. ( $\nearrow$  Koordinatensystem IV.) angenommen. Dann sind die Zylinderkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  eines beliebigen Punktes  $P$  des Raumes die ebenen *Polarkoordinaten* der Projektion  $OP'$  dieses Punktes auf  $E$ . Die Zylinderkoordinate  $z$  ist dem Betrage nach der Abstand des Punktes  $P$  von der Ebene  $E$  (Abb. 6). Sie ist genau dann positiv,



Koordinatensystem. Abb. 6: Zylinderkoordinaten eines Raumpunktes  $P$  und seine kartesischen Koordinaten

wenn  $P$  im positiven Halbraum liegt. Die Umrechnung auf ein geeignet gewähltes kartes. K. ergibt sich aus der ebenen *Polarkoordinaten*. In Zylinderkoordinaten läßt sich eine *Zylinderfläche* mit dem Radius  $a$  bes. einfach beschreiben. Sie hat die Gleichung  $r = a$ . Eine *Kegelfläche* mit dem Öffnungswinkel  $\pi/2$  hat die Gleichung  $|z| = r$ .

**VII. Bipolarkoordinaten** oder *bianguläre Koordinaten* eines Punktes  $P$  einer Ebene sind die beiden Abstände von  $P$  zu zwei festen Punkten bzw. die Winkelgrößen des Strahls  $OP$  zu zwei gegebenen Strahlen, die sich in  $O$  schneiden.

**Koordinatentransformation: I.** Übergang von einem *Koordinatensystem*  $K$  zu einem anderen  $K'$ . Dabei fragt man nach der Vorschrift, nach der sich aus den Koordinaten eines Punktes  $P$  bzgl.  $K$  seine Koordinaten bzgl.  $K'$  ermitteln lassen, d. h. nach den *Transformationsgleichungen*. Von besonderem Interesse sind K.en zwischen gleichartigen Koordinatensystemen.

**II.** Eine  $K.$  zwischen zwei *Parallelkoordinatensystemen* einer *affinen Ebene*  $K = \{O; OE_1, OE_2\}$  und  $K' = \{O'; O'E_1', O'E_2'\}$  heißt eine *affine K.* Beachtet man, daß nach der Definition des  $\nearrow$  affinen Raumes zu Punktepaaren Vektoren gehören, so lassen sich die Vektoren  $OO', O'E_1' = \mathbf{u}_1', O'E_2' = \mathbf{u}_2'$  eindeutig als Linearkombinationen der *Basisvektoren*  $OE_1 = \mathbf{u}_1$  und  $OE_2 = \mathbf{u}_2$  von  $K$  ausdrücken:  $OO' = c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{21}\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_1' = c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{12}\mathbf{u}_2$  und  $\mathbf{u}_2' = c_{21}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2$ , d. h.  $(c_{11}, c_{12}), (c_{11}, c_{12})$  und  $(c_{21}, c_{22})$  sind die *Koordinaten* vom *Ursprung*  $O'$  und der *Basisvektoren*  $\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'$  des zweiten Systems im ersten. Aus der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren folgt  $c_{11}c_{12} - c_{12}c_{21} \neq 0$ . Sind  $(x, y)$  die *Koordinaten* eines Punktes  $P$  in  $K$  und  $(x', y')$  die desselben Punktes in  $K'$ , so gelten (1) und (2).

$$(1) \quad OP = x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2$$

$$(2) \quad O'P = x'\mathbf{u}_1' + y'\mathbf{u}_2' = x'(c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{12}\mathbf{u}_2) + y'(c_{21}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2) = (x'c_{11} + y'c_{21})\mathbf{u}_1 + (x'c_{12} + y'c_{22})\mathbf{u}_2$$

Aus  $OP = OO' + O'P$  erhält man die *Transformationsgleichung* (3).

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{21}y' + c_1 \\ y &= c_{12}x' + c_{22}y' + c_2 \end{aligned}$$

Eine solche Beziehung wird *ganze lineare Transformation* genannt.

**III.** Für eine affine Koordinatentransformation im  $n$ -dimensionalen affinen Raum gilt entsprechend: Sind  $K = \{O; \mathbf{u}_i\}$  und  $K' = \{O'; \mathbf{u}_i'\}$  zwei affine Koordinatensysteme, und sind  $OO' = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j$  und  $\mathbf{u}_j' = \sum_{i=1}^n c_{ji} \mathbf{u}_i$  für  $j = 1, \dots, n$ , so transformieren sich die *Koordinaten* eines beliebigen Punktes  $X$  nach (4).

$$(4) \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} x_j' + c_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Die *Koordinaten* eines beliebigen Vektors  $\mathbf{v}$  transformieren sich nach (5).

$$(5) \quad v_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} v_j'$$

Werden die Koordinaten  $c_i$  von  $OO'$  zu einem *Translationsvektor*  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$  und die Koordinaten  $c_{ji}$  der  $\mathbf{u}_j'$  zu einer *Transformationsmatrix*  $\mathbf{C} = (c_{ji})$  zusammengefaßt, so lassen sich (4) und (5) auch als *Matrizengleichungen* (6) bis (9) darstellen mit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ ,  $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_n)^T$  und  $\mathbf{c}^* = -\mathbf{C}^* \mathbf{c}$ ; dabei ist  $\mathbf{C}^T$

$$(6) \quad \mathbf{x} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}' + \mathbf{c} \quad (7) \quad \mathbf{v} = \overset{\vee}{\mathbf{C}}^T \mathbf{v}'$$

$$(8) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{C}^* \mathbf{x} + \mathbf{c}^* \quad (9) \quad \mathbf{v}' = \mathbf{C}^* \mathbf{v}$$

die *transponierte Matrix* und  $\mathbf{C}^*$  die *kontragrediente Matrix* zu  $\mathbf{C}$ .  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{C}^*$  sind in jedem Fall *regulär*, d. h.  $|\mathbf{C}| \neq 0$ . K.en zwischen kartes. Koordinatensystemen heißen auch *orthogonale K.en*. Für diese ist  $\mathbf{C}$  eine *orthogonale Matrix* und  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$ . Das bedeutet für  $n = 2$  im Falle der Ebene, daß (9) gilt. Aus (9) folgt  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = \pm 1$  bzw. allgemein

$$(9) \quad c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1, \quad c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1,$$

$$c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0$$

$|\mathbf{C}| = \pm 1$ . Bei orthogonalen K.en haben Ausdrücke für Längen, Beträge von Winkelgrößen, von Flächeninhalten u. a. in den transformierten Koordinaten dieselbe Gestalt wie in den ursprüngl., so z. B. die Formel zur Berechnung des *Skalarprodukts* aus den Koordinaten der Faktoren. Unter den orthogonalen K.en gebührt den Spezialfällen *Verschiebung des Koordinatensystems*, *Drehung des Koordinatensystems* um den Ursprung und *Spiegelung des Koordinatensystems* bes. Aufmerksamkeit, da sie häufig gebraucht werden.

**III.1.** Ist die K. eine *Verschiebung*, so ist  $\mathbf{C}$  die Einheitsmatrix, und umgekehrt. Damit erhalten die Transformationsgleichungen für eine Verschiebung die einfache Gestalt (8/1) bzw. (4/1) für  $i = 1, \dots, n$  bzw. speziell für die Ebene  $x = x' + c_1$ ,  $y = y' + c_2$ .

$$(8/1) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{c}, \quad (4/1) \quad x_i = x'_i + c_i$$

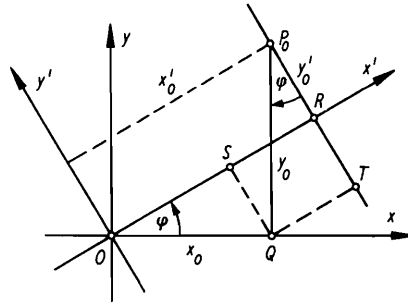
**III.2.** Eine orthogonale K. mit  $|\mathbf{C}| = +1$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{o}$  ist eine *Drehung* um den Ursprung. Ist  $\varphi$  der Winkel, um den das ebene System  $K'$  gegen das ebene System  $K$  im positiven Sinn gedreht ist, so hat  $\mathbf{C}$  die Form (10) und die Transformationsgleichungen (8) haben die Gestalt (11).

$$(10) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (\text{Abb. 1}) \end{aligned}$$

*Beispiel:* Bei einer Drehung um  $\varphi = \pi/4$  ist  $\cos \varphi = \sin \varphi = 1/\sqrt{2}$ , und es gilt  $x' = (x + y)/\sqrt{2}$ ,  $y' = (-x + y)/\sqrt{2}$ . Der Punkt  $E$  mit den Koordinaten  $(x, y) = (1, 1)$  in  $K$  hat in  $K'$  die Koordinaten  $(x', y') = (\sqrt{2}, 0)$ .

**III.3.** Drehungen und Verschiebungen von Koordinatensystemen werden bei der *Hauptachsentransformation* und in der Mechanik beim Vergleich von ruhenden und mitbewegten Koordinatensystemen gebraucht. Eine orthogonale K. mit  $|\mathbf{C}| = -1$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{o}$  ist eine *Spiegelung*, die den Ursprung fest



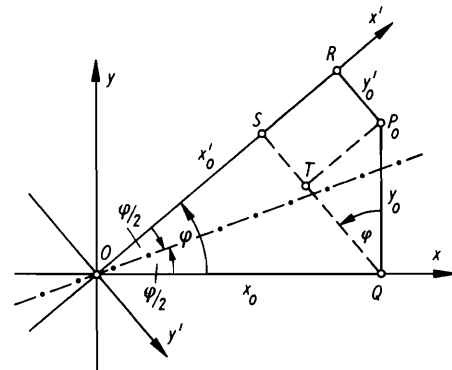
Koordinatentransformation. Abb. 1: Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel der Größe  $\varphi$

läßt. Für den ebenen Fall gilt dann (12), wenn  $\varphi$  der Winkel zwischen der  $x$ - und der  $x'$ -Achse ist. Das

$$(12) \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

Koordinatensystem wird dabei an einer Geraden durch den Ursprung gespiegelt, die sowohl im System  $K$  als auch im System  $K'$  den Anstieg  $\tan(\varphi/2)$  hat; (13) sind dann die Transformationsgleichungen (Abb. 2).

$$(13) \quad \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= x \sin \varphi - y \cos \varphi \end{aligned}$$



Koordinatentransformation. Abb. 2: Spiegelung des Koordinatensystems

*Beispiel:* Für  $\varphi = \pi/2$  ergibt sich  $x' = y$ ,  $y' = x$ , d. h., die  $x$ - und  $y$ -Achse werden vertauscht.

**Koordinatograph, Koordinator, Auftragegerät, Kartiergerät:** Gerät zur Markierung von Punkten mit gegebenen Koordinaten bzw. zur Bestimmung der Koordinaten gegebener Punkte in einem ebenen Koordinatensystem. Der K. wird bes. im Vermessungswesen eingesetzt, aber auch bei anderen Aufgabenstellungen, z. B. beim Zeichnen von Nomogrammen oder bei der punktweisen Konstruktion von Kurven.

**I. Orthogonal-K.en** bestehen im Prinzip aus zwei Metall-Linealen, die sich wegen der notwendigen Stabilität in einem Metallrahmen oder auf einer

massiven Grundplatte nur senkrecht zueinander verschoben lassen. Die Verschiebung des *Ordinatenlineals*  $b$  wird auf dem *Abszissenlineal*  $a$  abgelesen und auf  $b$  die Ordinate eines Punktes  $P$ . Die Ableseung erfolgt durch Nonien, die Beobachtungslupe am Ordinatenlineal kann durch eine Punktier-nadel ersetzt werden, falls ein Punkt nach seinen Koordinaten abgetragen werden soll. — Bei Zeichnungen, die längere Zeit aufbewahrt wurden, kann es durch Papieränderungen infolge Aufnahme von Feuchtigkeit zu Verzerrungen kommen. Diese können bei *Reduzier-K.en* durch eine drehbare Anordnung der Lineale berücksichtigt werden. Die achsenparallele Führung der Punktiereinrichtung wird dabei durch ein Kreuzschieberpaar erreicht.

**II. Polar-K.en** bestehen etwa aus einem um den Pol drehbaren Lineal mit Nonius, Lupe und Punktier-nadel für die *Längenmessung* und aus einer mit Zähl-scheibe versehenen Meßrolle für die *Winkelmessung*, deren Drehachse durch den Pol geht. Die Meßrolle ist aus Zweckmäßigkeitsgründen meistens nicht an dem Lineal, sondern an einem mit diesem fest verbundenen Rahmen angebracht. — Andere Modelle bestehen aus einem festen kreisförmigen, mit einer Kreisteilung versehenen Rahmen und einem um den Mittelpunkt drehbaren Lineal, das für die Entfernungsmessung zum Pol einen Nonius mit Lupe und Punktiereinrichtung trägt. Mit diesem Lineal fest verbunden ist ein weiterer Nonius für die Ableseung der Winkel an der Kreisteilung.

**III. Neuerdings** sind auch motorgetriebene K.en entwickelt worden, bei denen die Eingabe der Punkt-koordinaten mittels Lochkarten oder Lochstreifen erfolgen kann.

Bei sorgfältiger Ausführung und Handhabung von K.en kann eine Genauigkeit bis zu etwa 0,05 mm bei der Längenmessung und 1,5' bei der Winkelmessung erreicht werden.

**Koordinator** svw. Koordinatograph.

**Körper:** *Algebra* I. ein kommutativer Ring, in dem die von  $o$  verschiedenen Elemente bzgl. der Multiplikation eine Gruppe bilden. Danach hat ein K. ein *Einselement*  $e$ , das vom *Nullelement*  $o$  verschieden ist, und zu jedem Element  $a \neq o$  existiert ein inverses Element  $a^{-1}$ . In einem K. kann man deshalb addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren wie mit den rationalen oder mit den reellen Zahlen. Verzichtet man auf die Kommutativität der Multiplikation, spricht man von einem *Schief-K.*; jeder K. ist somit *Schief-K.*

*Ein K. ist ein nullteilerfreier Ring.* Umgekehrt kann man jeden nullteilerfreien kommutativen Ring, d. h. jeden Integritätsbereich, in einen K. einbetten ( $\nearrow$  Quotientenkörper).

Eine Teilmenge  $L$  des K.s  $K$  heißt *Unterkörper* von  $K$ , wenn sie bzgl. der Addition und der Multiplikation von  $K$  wieder einen K. bildet. Die reellen Zahlen bilden z. B. einen Unter-K. des K.s der komplexen Zahlen. Der Durchschnitt beliebig vieler Unter-K. des K.s  $K$  ist wieder ein Unter-K. von  $K$ . Der Durchschnitt  $P$  aller Unter-K. von  $K$  enthält keinen echten Unter-K. mehr; ein solcher K. heißt *Prim-K.* Der Prim-K.  $P$  von  $K$  enthält die Null und

das Einselement sowie dessen ganzzahlige Vielfachen  $n \cdot e$ . Ist  $p \cdot e = o$  für ein kleinstes positives  $p$ , so ist  $p$  wegen der Nullteilerfreiheit von  $P$  Primzahl und  $P$  ist isomorph zum Restklassenring  $\mathbf{Z}/(p)$  des Ringes der ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$  modulo der Primzahl  $p$ . Es gilt  $p \cdot a = o$  für ein beliebiges  $a \in K$ ; man sagt,  $K$  hat die *Charakteristik*  $p$  und  $P$  ist der Prim-K. der Charakteristik  $p$ . Gilt  $n \cdot e = o$  für keine natürl. Zahl  $n$ , so hat der K.  $K$  die *Charakteristik*  $0$  und der Prim-K.  $P$  ist isomorph zum K.  $\mathbf{Q}$  der rationalen Zahlen. Die Prim-K. der Charakteristik  $p$  bestehen aus  $p$  Elementen. Ein K. mit endlich vielen Elementen heißt auch *Galoisfeld*. Die Anzahl der Elemente eines Galoisfeldes der Charakteristik  $p$  ist stets eine Potenz  $p^m$  von  $p$ . Zu jeder Potenz  $p^m$  gibt es bis auf Isomorphie genau ein Galoisfeld.

**II.** Ist  $K$  ein Unter-K. des K.s  $L$ , so heißt  $L$  auch *Erweiterungs-K.* oder Ober-K. von  $K$ . Insbes. ist jeder K. Erweiterungs-K. seines Prim-K.s. Sind  $L$  ein Erweiterungs-K. von  $K$  und  $T$  eine beliebige Teilmenge von  $L$ , so ist der Durchschnitt aller  $K.$ , die  $K$  und  $T$  umfassen, der kleinste K. mit dieser Eigenschaft; man bezeichnet ihn mit  $K(T)$ . Alle Elemente von  $K(T)$  erhält man durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aus den Elementen von  $K \cup T$ . Jedes Element von  $K(T)$  läßt sich als Quotient ganzrationaler Funktionen der Elemente von  $T$  mit Koeffizienten aus  $K$  schreiben. Der Erweiterungs-K.  $K(T)$  entsteht aus  $K$  durch  $\nearrow$  Adjunktion, genauer  $K$ -Adjunktion, der Menge  $T$ . Es gilt:  $K \subseteq K(T) \subseteq L$ .

Enthält  $T$  nur ein Element  $\vartheta$ , spricht man von einer *einfachen K.erweiterung*. Der einfache Erweiterungs-K.  $K(\vartheta)$  umfaßt alle ganzrationalen Funktionen  $\sum a_i \vartheta^i$  mit  $a_i \in K$ . Wird eine solche Funktion Null, so heißt  $\vartheta$  *algebraisch in bezug auf*  $K$  und  $K(\vartheta)$  eine *einfache algebraische Erweiterung* von  $K$ . Die Polynome  $f(x)$  des Polynomrings  $K[x]$ , für die  $f(\vartheta) = 0$  gilt, bilden dabei ein Primideal, das von einem Polynom  $\varphi(x)$  vom niedrigsten Grad mit der Eigenschaft  $\varphi(\vartheta) = 0$  erzeugt wird. Das Polynom  $\varphi(x)$  ist irreduzibel und heißt *Minimalpolynom* von  $\vartheta$ , und  $\varphi(\vartheta) = 0$  heißt *definierende Gleichung* von  $K(\vartheta)$ .  $K(\vartheta)$  ist isomorph zum Restklassenring  $K[x]/(\varphi(x))$ . *Beispiel:* Sind  $K = \mathbf{Q}$  der K. der rationalen Zahlen,  $L = \mathbf{R}$  der K. der reellen Zahlen und  $\vartheta = \sqrt{2}$ , so ist  $K(\sqrt{2})$  eine einfache algebraische Erweiterung von  $K$ ;  $x^2 - 2$  ist Minimalpolynom von  $\sqrt{2}$ . Jedes Element von  $K(\sqrt{2})$  läßt sich eindeutig durch  $a + b\sqrt{2}$  darstellen, wenn  $a$  und  $b$  rationale Zahlen sind. Die Addition wird definiert durch  $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$ , und die Multiplikation durch  $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ . Es läßt sich zeigen, daß  $K(\sqrt{2})$  nullteilerfrei ist. Auch die Division führt nach (1) wieder auf ein Element der Form  $a + b\sqrt{2}$ .

$$(1) \quad \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2}$$

Gibt es bei der einfachen K-erweiterung  $K(\vartheta)$  keine ganzrationale Funktion  $\sum a_i \vartheta^i$ , die Null wird, so heißt  $\vartheta$  *transzendent in bezug auf K* und  $K(\vartheta)$  eine *einfache transzendente Erweiterung* von K.  $K(\vartheta)$  ist isomorph zum K.  $K(x)$  aller rationalen Funktionen einer Unbestimmten  $x$ . Mit  $\vartheta$  wird wie mit einer Unbestimmten gerechnet.

*Beispiel:* Sind  $K$  wieder der K. der rationalen Zahlen,  $L$  der K. der reellen Zahlen und  $\vartheta$  die transzendente Zahl  $\pi$ , so besteht  $K(\pi)$  aus allen Quotienten der Gestalt (2), in denen aber der Nenner nicht Null sein darf.

$$(2) \quad \frac{a_0 + a_1\pi + \dots + a_m\pi^m}{b_2 + b_1\pi + \dots + b_n\pi^n},$$

mit  $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in K$

Bei der Adjunktion von  $\vartheta$  kann man auf den Ober-K.  $L$  verzichten. Man bildet den Polynomring  $K[\vartheta]$  und anschließend den Restklassenring  $K[\vartheta]/(\varphi(\vartheta))$  bzgl. des beliebig vorgegebenen irreduziblen Polynoms  $\varphi(\vartheta)$ , falls  $\vartheta$  algebraisch über  $K$ , andernfalls den Quotienten-K.  $K(\vartheta)$ . In beiden Fällen erhält man einen Ober-K. von  $K$ , der  $\vartheta$  enthält und in dem  $\vartheta$  eine vorgegebene Eigenschaft hat, einer algebraischen Gleichung  $\varphi(\vartheta) = 0$  zu genügen oder transzendent zu sein.

Zwei Erweiterungen  $L$  und  $L'$  des K.s  $K$  heißen *äquivalent* in bezug auf  $K$ , wenn es zwischen  $L$  und  $L'$  einen Isomorphismus gibt, der  $K$  fest läßt. Zwei einfache transzendente Erweiterungen des K.s  $K$  sind äquivalent. Zwei einfache algebraische Erweiterungen  $K(\vartheta_1)$  und  $K(\vartheta_2)$  sind genau dann äquivalent, wenn  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  Nullstellen desselben in  $K[x]$  irreduziblen Polynoms sind.

*Beispiele:* 1. Ist  $\mathbb{Q}$  der K. der rationalen Zahlen und  $\sqrt{2}$  Nullstelle des in  $\mathbb{Q}$  irreduziblen Polynoms  $x^2 - 2$ , dann ist  $-\sqrt{2}$  die zweite Nullstelle und wegen  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(-\sqrt{2})$  sind  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  und  $\mathbb{Q}(-\sqrt{2})$  äquivalent. Der Isomorphismus zwischen beiden K.n., der  $\mathbb{Q}$  festläßt, ist ein Automorphismus von  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .

2. Die Zahl  $\vartheta_1 = \sqrt[3]{2}$  ist Nullstelle des bzgl.  $\mathbb{Q}$  irreduziblen Polynoms  $x^3 - 2$ . Die weiteren Nullstellen sind  $\vartheta_2 = \varrho\vartheta_1$  und  $\vartheta_3 = \varrho^2\vartheta_1$ , wenn  $\varrho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$  dritte Einheitswurzel ist. Die drei K.  $\mathbb{Q}(\vartheta_1)$ ,  $\mathbb{Q}(\vartheta_2)$ ,  $\mathbb{Q}(\vartheta_3)$  sind verschiedene Erweiterungen von  $\mathbb{Q}$ ; sie sind jedoch äquivalent, d. h., in ihnen wird nach denselben Gesetzen gerechnet. Alle drei Erweiterungen liegen im gemeinsamen Ober-K.  $\mathbb{Q}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \mathbb{Q}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \mathbb{Q}(\vartheta_1, \vartheta_3) = \mathbb{Q}(\vartheta_2, \vartheta_3) = \mathbb{Q}(\vartheta_1, \varrho) = \mathbb{Q}(\vartheta_1, i\sqrt{3})$ . Liegen alle Nullstellen des bzgl.  $K$  irreduziblen Polynoms  $\varphi(x)$  in der einfachen Erweiterung  $K(\vartheta)$ , wenn  $\vartheta$  eine Nullstelle von  $\varphi(x)$  ist, so heißt  $\varphi(x)$  *Normalpolynom*. Die K.-Erweiterung  $K(\vartheta)$  ist *normal*,  $x^2 - 2$  ist in  $\mathbb{Q}$  Normalpolynom. Allgemein ist jedes irreduzible Polynom 2. Grades Normalpolynom. Hingegen ist  $x^3 - 2$  kein Normalpolynom. Ein Erweiterungs-K.  $L$  von  $K$  heißt *endl. Erweiterung* von  $K$ , wenn sich jedes Element von  $L$  auf eindeutige Weise als Linearkombination  $a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$  endlich vieler K.elemente  $\omega_1, \dots, \omega_n \in L$

mit Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$  darstellen läßt.  $L$  ist dann  $\mathcal{A}$  Vektorraum über  $K$ ; eine Basis heißt *K.basis*; die Dimension  $n$  heißt *K.grad* ( $L:K$ ). *Beispiel:* Die einfache algebraische K-erweiterung  $K(\vartheta)$  mit der definierenden Gleichung  $\varphi(\vartheta) = 0$  vom Grad  $n$  ist endlich und hat den K.grad  $n$ . Die Elemente  $1, \vartheta, \vartheta^2, \dots, \vartheta^{n-1}$  bilden eine K.basis. Ist  $M$  ein Erweiterungs-K. von  $L$ , so gilt:  $(M:L) : (L:K) = (M:K)$ . Ist z. B.  $\mathbb{Q}$  der K. der rationalen Zahlen, so gilt  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}) = 2$  und  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})) = 2$  und somit  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}) = 4$ . Ein Erweiterungs-K.  $L$  von  $K$  heißt *algebraisch*, wenn jedes Element von  $L$  algebraisch über  $K$  ist, d. h., wenn es zu jedem  $a \in L$  ein Polynom  $f(x) \in K[x]$  gibt, so daß  $f(a) = 0$  ist. Insbes. ist jede endl. Erweiterung algebraisch und wird durch Adjunktion endlich vieler algebraischer Elemente erhalten. Umgekehrt erhält man durch Adjunktion endlich vieler algebraischer Elemente eine endl. Erweiterung. Der *Zerfallungs-K.* eines Polynoms  $f(x) \in K[x]$  entsteht durch Adjunktion aller Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  der Gleichung  $f(x) = 0$  an  $K$ . In  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  zerfällt dann  $f(x)$  vollständig in Linearfaktoren:  $f(x) = \gamma(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ . Jeder Zerfallungs-K. ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Ist die Zahl  $\vartheta$  algebraisch über  $K$ , so heißt  $\vartheta$  *separabel* über  $K$ , wenn  $\vartheta$  Nullstelle eines irreduziblen Polynoms  $\varphi(x)$  ist, das nur einfache Nullstellen hat. Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  separable Elemente über  $K$ , so ist die Erweiterung  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  eine einfache Erweiterung  $K(\vartheta)$ . Ist  $\mathbb{Q}$  der K. der rationalen Zahlen, so läßt sich z. B.  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  als einfache Erweiterung  $\mathbb{Q}(\vartheta)$  mit  $\vartheta = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  darstellen. Es gilt  $\sqrt{2} = (\vartheta^2 - 1)/(2\vartheta)$ ,  $\sqrt{3} = (\vartheta^2 + 1)/(2\vartheta)$  und  $\vartheta$  genügt der irreduziblen Gleichung  $\varphi(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ . Für einen K.  $K$  der Charakteristik 0 hat jedes in  $K$  irreduzible Polynom  $\varphi(x)$  nur einfache Nullstellen; ein solcher K. heißt *vollkommen*. Für einen K. der Charakteristik  $p$  hat  $\varphi(x)$  genau dann mehrfache Nullstellen, wenn  $\varphi(x)$  sich als Funktion von  $x^p$  schreiben läßt.

III. Ein K.  $K$  heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn in  $K[x]$  jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Jedes irreduzible Polynom ist dort linear.  $K$  läßt sich nicht algebraisch erweitern. Der K. der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen. Zu jedem K.  $K$  gibt es bis auf Äquivalenz genau einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungs-K.  $L$ , der eine algebraische Erweiterung von  $K$  ist. Dafür, daß der algebraische Erweiterungs-K.  $L$  von  $K$  algebraisch abgeschlossen ist, reicht hin, daß alle Polynome von  $K[x]$  in  $L[x]$  in Linearfaktoren zerfallen. Man muß deshalb alle Nullstellen aller Polynome von  $K[x]$  an  $K$  adjungieren, um  $L$  zu erhalten. Der K. aller algebraischen Zahlen ist eine algebraische Erweiterung des K.s der rationalen Zahlen, die algebraisch abgeschlossen ist. Der K. der komplexen Zahlen ist eine endl. algebraisch abgeschlossene Erweiterung des K.s der reellen Zahlen; die definierende Gleichung ist  $x^2 + 1 = 0$ .

Ist  $L$  Erweiterungs-K. des K.s  $K$ , so heißt ein Element  $b$  von  $L$  *algebraisch abhängig* von  $a_1, \dots, a_n$ ,

über  $K$ , wenn  $b$  algebraisch in bezug auf den Körper  $K(a_1, \dots, a_n)$  ist, d. h., wenn  $b$  einer algebraischen Gleichung  $f_0 + f_1 b + \dots + f_m b^m = 0$  genügt, deren Koeffizienten  $f_0, \dots, f_m$  Polynome in  $a_1, \dots, a_n$  mit Koeffizienten aus  $K$  sind. Die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  heißen *algebraisch unabhängig*, wenn kein  $a_i$  von den übrigen abhängt; das trifft genau dann zu, wenn aus  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  für ein Polynom  $f$  mit Koeffizienten aus  $K$  das Verschwinden aller Koeffizienten folgt. Die Maximalzahl algebraisch unabhängiger Elemente von  $L$  heißt *Transzendenzgrad* von  $L$  über  $K$ . Der K.  $K(x)$ , in dem die Unbestimmte  $x$  an  $K$  adjungiert ist, hat z. B. den Transzendenzgrad 1. Jeden Erweiterungs-K.  $L$  von  $K$  kann man bis auf Äquivalenz durch transzendente Adjunktion einer Menge von Unbestimmten, deren Mächtigkeiten gleich dem Transzendenzgrad ist, und anschließende algebraische Adjunktion erhalten.

Die Auflösungstheorie für algebraische Gleichungen mit Koeffizienten aus einem K. liefert die *Galvoische Theorie*. Über einem K. stimmt die Auflösungstheorie linearer Gleichungssysteme mit der bekannten *linearen Algebra* überein, weil die Division, außer durch 0, unbeschränkt ausführbar ist. Auch der Begriff des reellen oder komplexen *Vektorraums* kann in der Weise verallgemeinert werden, daß jeder  $\mathcal{A}$  Modul über einem K. Vektorraum heißt.

IV. *Geschichtliches*. Körpertheoret. Denken trat zunächst im Zusammenhang mit der Entwicklung der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen insbes. bei É. GALOIS (1811—1832) auf. R. DEDEKIND und L. KRONECKER untersuchten Zahl- und Funktionen-K. 1893 definierte H. WEBER den Begriff des K.s abstrakt. E. STEINITZ entwickelte bis 1910 die allgemeine Theorie der K.

V. *Stereometrie* beschränkte dreidimensionale Punktmenge des dreidimensionalen Raumes, die allseitig von endlich vielen ebenen oder gekrümmten Flächenstücken begrenzt wird, einschließlich dieser begrenzenden Flächenstücke. Die Vereinigung nur der Punkte aller begrenzenden Flächenstücke heißt *Oberfläche* des K.s. Ein *ebenflächiger K.*, auch *Viel-flächner* oder *Polyeder* gen., wird nur von ebenen Flächenstücken begrenzt, ein *krümmflächig begrenzter* auch oder nur von gekrümmten. Die Oberfläche jedes K.s zerlegt den Raum in zwei getrennte, offene Untermengeten, von denen die das *Innere* des K.s heißt, die keine Geraden enthält. Jeder K. heißt *konvex*, wenn er mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. Ein *Rotations-K.* kann durch Drehung eines ebenen Flächenstücks um eine Gerade dieser Ebene erzeugt werden, die *Dreh-* oder *Rotationsachse* heißt. Seine Oberfläche wird *Drehfläche* gen., z. B. ist die Kugel ein Rotations-K. und jede Gerade durch den Kugelmittelpunkt eine Rotationsachse. Bei bestimmten K.n wird eine Begrenzungsfläche als *Grundfläche* ausgezeichnet, z. B. kann bei Tetraedern und bei Parallelepipedern jede Seitenfläche, bei Pyramiden- und Kegelstümpfen jede der beiden parallelen Seitenflächen als Grundfläche gewählt werden. Eine zur Grundfläche parallele Begrenzungsfläche wird oft

*Deckfläche* gen., z. B. beim Zylinder oder bei einem Pyramiden- oder Kegelstumpf. Die Vereinigung der von Grund- und Deckfläche verschiedenen Begrenzungsflächen heißt *Mantel*. An ebenflächig begrenzten K.n heißen Strecken, die Seiten von genau zwei Begrenzungsflächen sind, *Kanten*, und zwar *Grundkanten*, wenn sie in der Grund- oder Deckfläche liegen, oder *Seitenkanten*, wenn sie weder in der Grund- noch in der Deckfläche liegen. —

Schneidet man die Oberfläche eines ebenflächig begrenzten Körpers entlang genügend vieler Kanten auf und breitet sie in eine Ebene aus, so entsteht ein *Netz* des K.s als zusammenhängendes ebenes System der den Körper begrenzenden Polygonflächen. Es gibt durch jeden Punkt eines K.s drei nicht in einer Ebene liegende Geraden, von denen jede eine Strecke enthält, die nur aus Punkten des K.s besteht. Stehen insbes. diese Geraden paarweise aufeinander senkrecht, so stellen die Strecken auf ihnen die Ausdehnung des K.s in *Breite*, *Tiefe* und *Höhe* dar. Beim Quader z. B. können dafür die von einer Ecke ausgehenden Kanten gewählt werden. Ein *ebener Schnitt* ist ein ebenes Flächenstück, das von der Linie begrenzt wird, die eine Ebene aus der Oberfläche eines K.s ausschneidet, manchmal wird auch nur diese Linie als ebener Schnitt bezeichnet. Hat ein K. eine als *Achse* ausgezeichnete Gerade, z. B. eine Rotations- oder Symmetrieachse, so heißt jeder ebene Schnitt durch diese ein *Achsenschnitt*, jeder zur Achse senkrechte Schnitt ein *Querschnitt*. Ist die Ausdehnung eines K.s in einer Achsenrichtung größer als in jeder anderen Richtung, bezeichnet man jeden Achsenschnitt und jeden zu ihm parallelen Schnitt gelegentlich als *Längsschnitt*.

**körperliche Ecke**, *Polyederecke*: I. räuml. Figur, die dadurch entsteht, daß ein Strahl, der von einem festen Punkt  $P$  außerhalb der Ebene  $E$  eines ebenen Polygons mit den Ecken  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} = A_1$  ausgeht, entlang der Polygonseiten gleitet.  $P$  heißt *Ecke*, *Eckpunkt* oder *Scheitel*, die Strahlen  $PA_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  heißen *Kanten*, die Winkel  $\sphericalangle(A_i P A_{i+1})$  zwischen zwei benachbarten Kanten *Kantenwinkel*, deren Innengebiete *Seitenflächen* der k. E. Jede k. E. zerlegt den Raum in zwei getrennte, offene Untermengeten, von denen diejenige das *Innere* der k. E. heißt, die keine Geraden enthält. Der Neigungswinkel zweier benachbarter Seitenflächen, dessen Inneres innere Punkte der k. E. enthält, heißt *Flächenwinkel*. Sein Scheitel liegt auf einer Kante, seine Schenkel stehen senkrecht auf dieser Kante und liegen je in einer Seitenfläche. Jede k. E. mit genau drei Kanten heißt *Triederecke*, mit genau vier Kanten *Tetraederecke*. Jede k. E. heißt *konvex*, wenn sie ganz auf einer Seite jeder Seitenflächenebene liegt. Abb. 1. zeigt eine konvexe Tetraederecke. In jeder  $n$ -kantigen k. E. ist die Summe der Winkelgrößen aller Kantenwinkel kleiner als  $360^\circ$ , die aller Flächenwinkel größer als  $n \cdot 180^\circ - 360^\circ$ , aber kleiner als  $n \cdot 180^\circ$ . —

II. Fällt man von einem inneren Punkt  $Q$  einer k. E. die Lote auf die Seitenflächen, so entsteht wieder eine k. E.  $Q$  ist ihr Scheitel, die Lote sind die Kanten. Diese k. E. heißt *Polarecke* der ursprünglichen. Sind

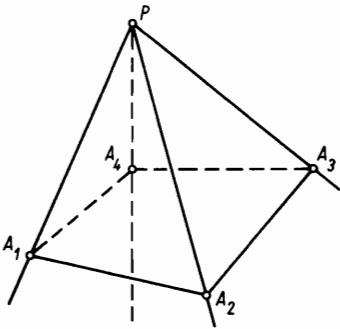


Abb. 1: Konvexe vierkantige körperliche Ecke

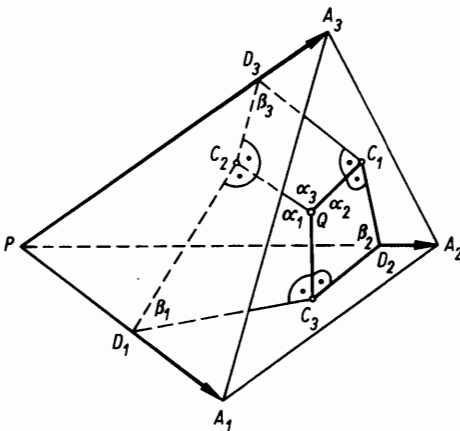


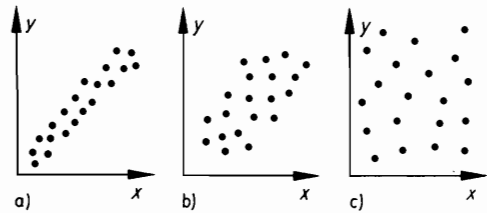
Abb. 2: Polarecke mit dem Scheitel Q von einer dreikantigen körperlichen Ecke mit dem Scheitel P

z. B. in einer dreikantigen k. E. mit dem Scheitel P und den Kanten  $PA_1^+$ ,  $PA_2^+$ ,  $PA_3^+$  die Fußpunkte der Lote  $C_1, C_2, C_3$ , so sind  $QC_1^+$ ,  $QC_2^+$ ,  $QC_3^+$  die Kanten der Polarecke (Abb. 2). Sind noch  $D_1, D_2, D_3$  die Fußpunkte der von den Fußpunkten  $C_1, C_2, C_3$  auf die Kanten der ursprüngl. Ecke gefällten Lote, so findet man, daß die Vierecke  $QC_1D_2C_3$ ,  $QC_2D_1C_3$  und  $QC_1D_3C_2$  eben sind, in den Punkten  $C_1, C_2$  und  $C_3$  Innenwinkel der Größe  $90^\circ$  haben und daß von den restl. zwei Winkeln in jedem Viereck der eine ein Kantenwinkel der Polarecke, der andere ein Flächenwinkel der ursprüngl. k. E. ist. Mit den Bezeichnungen  $|\sphericalangle(C_1QC_3; D_1^+)| = \alpha_1$ ,  $|\sphericalangle(C_1QC_3; D_2^+)| = \alpha_2$ ,  $|\sphericalangle(C_1QC_3; D_3^+)| = \alpha_3$  und  $|\sphericalangle(C_2D_1C_3; Q)| = \beta_1$ ,  $|\sphericalangle(C_3D_2C_1; Q)| = \beta_2$ ,  $|\sphericalangle(C_1D_3C_2; Q)| = \beta_3$  für die Größen dieser Winkel ergibt sich aus der Summe der Winkelgrößen der Innenwinkel in den drei Vierecken  $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$ ,  $\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$ ,  $\alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$ . In Worten besagt dies, daß die Kantenwinkel der Polarecke die Supplementwinkel der Flächenwinkel der ursprüngl. k. E. sind. Daß auch Flächenwinkel der Polar- und Kantenwinkel der ursprüngl. Supplementwinkel sind, ergibt sich daraus, daß nach der geschilderten Kon-

struktion die ursprüngl. k. E. die Polarecke ihrer Polarecke ist.

**Korrelation**  $\nearrow$  Korrelationsanalyse,  $\nearrow$  projektive Abbildung.

**Korrelationsanalyse:** Untersuchungen über den Grad der Korrelation, der *stochast. Abhängigkeit*, zwischen Zufallsgrößen an Hand einer *Stichprobe*. Die K. steht in engem Zusammenhang mit der *Regressionsanalyse*, die sich mit der Art der stochast. Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsgrößen befaßt. K. liegt i. allg. dann vor, wenn es einige zufällige Faktoren gibt, die beide Zufallsgrößen beeinflussen, und einige, die nur auf die eine oder die andere wirken. Die Größen  $X$ : = Körperhöhe und  $Y$ : = Körpergewicht sind z. B. *korrelierte* Zufallsgrößen, die stochastisch voneinander abhängen. Die Abb. zeigt verschiedene Grade stochast. Abhängigkeit: bei (a) liegt eine recht enge, bei (b) eine schwache stochast. Abhängigkeit vor; (c) zeigt schließlich den Fall, in dem überhaupt kein Zusammenhang zwischen den Werten von  $X$  und  $Y$  besteht. Weichen die Regressionslinien nicht zu stark von Geraden ab, so ist der *Korrelationskoeffizient*  $\rho$  ( $\nearrow$  Regressionsanalyse) ein Maß für die Stärke des stochast. Zusammenhangs von  $X$  und  $Y$ . Ist  $|\rho| = 1$ , so liegt mit  $Y = aX + b$



Korrelationsanalyse: Graph. Darstellung je einer Stichprobe vom Umfang 20 bei verschieden starken stochast. Abhängigkeiten

streng linearer Zusammenhang vor, ist  $\rho$  nahe 0, so ist der Zusammenhang sehr schwach. Zur Prüfung des Zusammenhangs berechnet man aus einer Stichprobe den empir. Korrelationskoeffizienten  $r$  ( $\nearrow$  Stichprobenkorrelationskoeffizient). Es ist dann zu testen, ob der beobachtete Wert  $r$  signifikant oder rein zufällig von 0 verschieden ist, d. h., man hat die Hypothese  $\rho = 0$  zu prüfen ( $\nearrow$  Signifikanztest II.). Aus dem zugehörigen Stichprobenkorrelationskoeffizienten  $R$  bildet man die Größe  $R \cdot \sqrt{n - 2} / \sqrt{1 - R^2}$ , die unter der Voraussetzung, daß  $X$  und  $Y$  normalverteilt sind, einer  $t$ -Verteilung mit  $n - 2$  Freiheitsgraden genügt. Daraus läßt sich zu vorgegebenem Signifikanzniveau  $\alpha$  der kritische Wert  $r_\alpha$ , der *Zufallshöchstwert* des *Korrelationskoeffizienten*, berechnen, wenn man ihn nicht einer Tafel dieser Zufallshöchstwerte in Abhängigkeit von  $\alpha$  und dem Stichprobenumfang  $n$  entnimmt. Ist das aus der Stichprobe berechnete  $|r| > r_\alpha$ , so muß die Hypothese  $\rho = 0$  verworfen werden; es liegt dann tatsächlich eine Korrelation vor.

**Korrelationsfunktion**  $\nearrow$  stochastischer Prozeß IV. **Korrelationskoeffizient:** ein Maß  $\rho$  für die lineare Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsgrößen  $X$  und



$Y$ , das durch (1) definiert wird, wenn  $\text{cov}(X, Y)$

$$(1) \quad \rho = \text{cov}(X, Y) / \sqrt{D^2 X \cdot D^2 Y}$$

die Kovarianz der Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  angibt ( $\nearrow$  Momente III.). Nach der Bedeutung von Kovarianz und Streuung gilt (2) für (1). Für den K. gilt stets  $-1 \leq \rho \leq 1$ . Ist  $\rho = 0$ , d. h.,  $\text{cov}(X, Y) = 0$ ,

$$(2) \quad \rho = \frac{E[(X - EX)(Y - EY)]}{\sqrt{(E(X^2) - (EX)^2)(E(Y^2) - (EY)^2)}}$$

so heißen die Zufallsgrößen  $X, Y$  *unkorreliert*. Unabhängige Zufallsgrößen sind stets unkorreliert ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen), aber nicht umgekehrt. Die Umkehrung gilt nur für die Normalverteilung: Ist  $(X, Y)$  normalverteilt ( $\nearrow$  Normalverteilung II.) und sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert, so sind sie auch unabhängig. Ist  $|\rho| = 1$ , so besteht zwischen  $X$  und  $Y$  eine lineare Beziehung  $X = aY + b$  mit reellen Konstanten  $a, b$ . Deshalb ist es berechtigt,  $\rho$  als Maß für die lineare Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$  anzusehen. Vgl. auch Korrelationsanalyse, Stichprobenkorrelationskoeffizient.

**Korrelationsmatrix**  $\nearrow$  Momente III.

**korrelierte Zufallsgröße**  $\nearrow$  Korrelationsanalyse.

**korrespondierende Addition und Subtraktion**  $\nearrow$  Proportion II.

**Kosekans**  $\nearrow$  Winkelfunktion III.

**Kosinus**  $\nearrow$  Winkelfunktion II.

**Kosinusformel, Projektionssatz:** In jedem ebenen Dreieck  $ABC$  ist die Länge jeder Seite gleich der Summe der Längen der Projektionen der anderen Seiten auf sie:  $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$ ,  $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$ ,  $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ .

**Kosinussatz: I.** Im ebenen Dreieck ist das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen, vermindert um das dop-

pelte Produkt aus diesen Seitenlängen und dem Kosinus des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels, im Dreieck  $ABC$  (Abb.) gelten z. B. die Formeln (1).

$$(1) \quad \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

Im rechtwinkligen Dreieck geht der K. in den pythagoreischen Lehrsatz über; für  $\gamma = 90^\circ$  z. B. erhält man  $a^2 = c^2 - b^2$ ,  $b^2 = c^2 - a^2$  und  $c^2 = a^2 + b^2$ . Mit dem K. kann aus den Längen von zwei Seiten und der Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels die Länge der dritten Seite berechnet werden oder aus den Längen von drei Seiten die Größe jedes Winkels ( $\nearrow$  ebene Trigonometrie II.3., II.4.).

**II.** Die entsprechende Aufgabe im sphär. Dreieck löst der *Seiten-K.* (2).

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

**III.** Durch die polaren Gesetzmäßigkeiten im sphär. Dreieck ( $\nearrow$  sphärisches Dreieck III.) geht der *Seiten-K.* über in den *Winkel-K.* (3). Aus ihm läßt sich aus

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \gamma \cdot \cos \alpha + \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c \end{aligned}$$

den Größen von zwei Winkeln eines sphär. Dreiecks und aus der einer Seite zwischen ihren Scheiteln die Größe des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels berechnen bzw. aus der von drei Winkeln die von drei Seiten.

**Kotangens**  $\nearrow$  Winkelfunktion III.

**Kote**  $\nearrow$  Eintafelprojektion.

**kovariant**  $\nearrow$  Tensor II.

**kovarianter Vektor**  $\nearrow$  Linearform II.

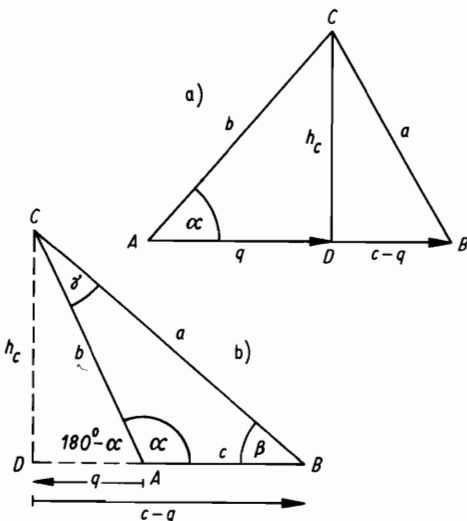
**Kovarianz**  $\nearrow$  Momente III.

**Kovarianzmatrix**  $\nearrow$  Momente III.

**Krassowski, Feodosi Nikolajewitsch**, geb. 26. 9. 1878 Galitsch (Gebiet Kastroma), gest. 1. 10. 1948 Moskau. — K. studierte in Moskau und war dort seit 1912 Professor. Auf seine Initiative wurde 1928 das zentrale Institut für Geodäsie und Kartographie der UdSSR gegründet, dessen Direktor K. bis 1937 war. Er verfaßte geodät., kartograph., geophysikal. und gravimetr. Arbeiten. Das von ihm 1940 berechnete Erdellipsoid ersetzt in sozialist. Staaten das von HAYFORD.

**Krassowski-Ellipsoid**  $\nearrow$  Erdellipsoid.

**Kreis, Kreislinie, Kreisperipherie:** I. geometr. Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt  $M$  dieser Ebene, dem *Mittelpunkt* oder *Zentrum* des K.es, die gleiche Entfernung  $r$  haben; die Länge  $r$  heißt *Radius* oder *Halbmesser*. Abweichend davon wird auch eine Strecke, die einen Punkt eines K.es mit dessen Mittelpunkt verbindet, *Radius* gen. *K.e* mit gleichem Radius sind einander kongruent, alle K.e sind einander ähnlich.



**Kosinussatz, a)** im spitzwinkligen, **b)** im stumpfwinkligen ebenen Dreieck  $ABC$ ;  $a^2 = h_c^2 + (c - q)^2$  mit  $h_c = b \sin \alpha$  und  $q = b \cos \alpha$

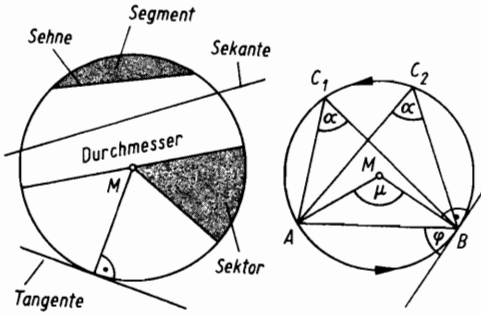


Abb. 1: Bezeichnungen am Kreis

Mit *K.fläche* oder *K.scheibe*, kurz auch mit *K.*, bezeichnet man ein konvexes ebenes Flächenstück, dessen Rand eine *K.linie* ist. Aus den Umfängen und Flächeninhalten einer Folge von regelmäßigen *n*-Ecken, die einem *K.* mit dem Radius *r* einbeschrieben oder umgeschrieben sind, erhält man als Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  für den Umfang *u* des *K.s*  $u = 2\pi r$  und für den *K.flächeninhalt*  $A = \pi r^2$  ( $\nearrow \pi$ ). Daraus ergibt sich für den *Flächeninhalt*  $A_R$  eines *K.ringes*  $A_R = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ , wenn unter *K.ring* ein zusammenhängendes ebenes Flächenstück verstanden wird, dessen Rand aus zwei konzentrischen *K.* mit den Radien  $r_2$  und  $r_1$  besteht.

Eine Gerade, die einen *K.* in zwei Punkten *A* und *B* schneidet, ist eine *Sekante*. Sie zerlegt die *K.fläche* in zwei *K.segments* oder *K.abschnitte* und die *K.linie* in zwei *K.bögen*  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{BA}$  (Abb. 1). Mit  $\widehat{AB}$  wird der *Bogen* bezeichnet, den ein Punkt beschreibt, wenn er im mathematisch positivem Sinn auf der *K.linie* von *A* nach *B* gleitet. Eine *Sekante* durch den Mittelpunkt eines *K.s* nennt man *Zentrale*. Die von einem *K.* aus einer *Sekante* ausgeschnittene Strecke ist eine *K.sehne*. *Tangente* an einen *K.* ist eine Gerade, die mit diesem genau einen Punkt gemeinsam hat ( $\nearrow$  *Kreistangente*). Einen Winkel, dessen Schenkel im Mittelpunkt eines *K.s* liegt, nennt man *Zentri- oder Mittelpunktswinkel*. Radien durch die Punkte *A* und *B* einer *K.linie* bestimmen zwei *Zentriwinkel*, deren Größen sich zu  $360^\circ$  ergänzen, und zerlegen die *K.fläche* in zwei *K.sektoren* oder *K.ausschnitte*.

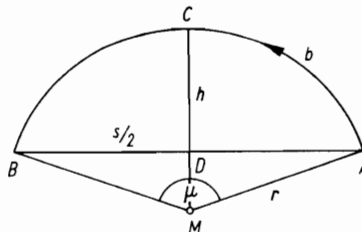
Als *Zentriwinkel* über dem *Bogen*  $\widehat{AB}$  bezeichnet man den *Zentriwinkel*, in dessen Winkelfläche der *Bogen*  $\widehat{AB}$  liegt. Der *Flächeninhalt*  $A(\text{Sk})$  des durch  $\widehat{AB}$  bestimmten *K.sektors* verhält sich zum Inhalt der zugehörigen *K.fläche* wie  $\mu^\circ$  zu  $360^\circ$ , wenn  $\mu^\circ$  die Größe des *Zentriwinkels* über  $\widehat{AB}$  ist. Daraus ergibt sich  $A(\text{Sk}) = \pi r^2 (\mu^\circ/360^\circ)$ , bzw.  $A(\text{Sk}) = r^2 \cdot \bar{\mu}/2$  für  $\bar{\mu}$  im *Bogenmaß*. Entsprechend erhält man für die Länge *b* des *Bogens*  $\widehat{AB}$  aus  $b : 2\pi r = \mu^\circ : 360^\circ$  den Wert  $b = \pi r \mu^\circ/180^\circ$ , bzw.  $b = \bar{\mu} r$  für  $\bar{\mu}$  im *Bogenmaß*. Durch Einsetzen folgt für  $A(\text{Sk})$  auch  $A(\text{Sk}) = br/2$ .

II. Eine *Sehne* zerlegt die *K.fläche* in zwei *Segments*. Wird ein *K.segment* mit der Höhe *h* von einer *Sehne* der Länge  $s = |AB|$  (Abb. 2) und einem *Bogen*  $\widehat{AB}$

der Länge *b* begrenzt, so ist  $\pi = b + s$  sein Umfang, und sein *Flächeninhalt*  $A(\text{Sg})$  ergibt sich für  $h \leq s/2$  als Differenz der Inhalte des durch  $\widehat{AB}$  bestimmten *Sektors* und der *Dreiecksfläche*  $ABM$ , für  $h \geq s/2$  aus der Summe dieser *Flächeninhalte*. Man findet in beiden Fällen  $A(\text{Sg}) = \frac{1}{2}r(b - s) + sh$ . Ist *h* nicht vorgegeben, so kann man die Größe  $\mu$  des *Zentriwinkels* über  $\widehat{AB}$  aus der Gleichung  $\mu s - 2b \sin(\mu/2) = 0$  bestimmen, die sich aus  $s = 2r \sin(\mu/2)$  und  $b = r \cdot \mu$  ergibt, und findet *h* aus  $h = r(1 - \cos(\mu/2))$ .

Die *Mittelsenkrechte* jeder *Sehne* enthält den *Mittelpunkt* des *K.s*, da sie der *geometr. Ort* für alle Punkte einer Ebene ist, die von den Endpunkten einer Strecke den gleichen Abstand haben. Sind drei nicht in einer Geraden liegende Punkte *A, B, C* gegeben, so findet man danach den *Mittelpunkt* des durch die Punkte verlaufenden *K.es* als *Schnittpunkt* der *Mittelsenkrechten* zweier durch sie bestimmter *Sehnen*. Ist *D* der *Halbierungspunkt* der *Sehne*  $AB$ , so ergibt sich aus dem rechtwinkligen *Dreieck*  $ADM$  für den *Abstand* der *Sehne* vom *K.mittelpunkt*  $|MD| = \sqrt{r^2 - s^2/4}$ . *Sehnen* gleicher Länge haben danach gleichen *Abstand* vom *Mittelpunkt*. Die größten *Sehnen* sind die *Durchmesser* mit  $|MD| = 0$ . Alle *Durchmesser* eines *K.s* sind *zueinander konjugiert*, d. h., sie halbieren einander. Vor allem in der *Technik* versteht man unter *Durchmesser* auch die Länge eines *K.durchmessers*.

III. Liegt *C* auf der *K.linie* außerhalb des *Bogens*  $\widehat{AB}$ , so bezeichnet man den Winkel  $\sphericalangle ACB$ , in dessen *Winkelfläche* der *Bogen*  $\widehat{AB}$  liegt, als *Peripherie- oder Umfangswinkel* über dem *Bogen*  $\widehat{AB}$ . Es gilt: *Jeder Peripheriewinkel eines K.s ist halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen K.bogen*. Für den Beweis dieses Satzes werden die folgenden mögl. Fälle untersucht (Abb. 3): Der zweite *Schnittpunkt* *D* der durch *M* und *C* bestimmten *Sekante* mit dem *K.* liegt a) in *A* oder *B*, b) im Inneren von  $\widehat{AB}$ , c) außerhalb von  $\widehat{AB}$ . Ist  $\alpha$  die Größe des *Zentriwinkels*,  $\beta$  die des *Peripheriewinkels*, so ist, wenn z. B. *D* in *B* liegt, der *Zentriwinkel*  $\sphericalangle AMB$  als *Außenwinkel* des gleichschenkligen *Dreiecks*  $AMC$  gleich groß wie die Summe der Größen der *Innenwinkel*  $\sphericalangle ACM$  und  $\sphericalangle MAC$ , d. h.  $\alpha = \beta + \beta = 2\beta$ . Im Falle b) gilt für die Winkel über den *Bögen*  $\widehat{AD}$  und  $\widehat{DB}$  nach a)  $\alpha_1 = 2\beta_1$  und  $\alpha_2 = 2\beta_2$ ,



Kreis. Abb. 2: Kreissektor, Kreisbogen und Kreissegment

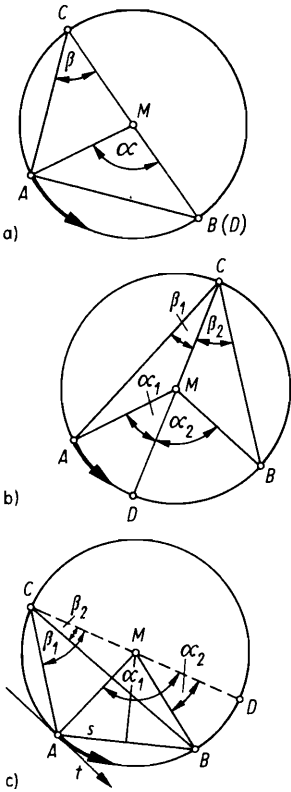


Abb. 3: Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Kreisbogen;  $\sphericalangle(s, t)$  Sehnentangentenwinkel

daraus folgt  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$ . Liegt im Falle c)  $D$  z. B. auf  $\widehat{BC}$ , so gilt für die Winkel über den Bögen  $\widehat{AD}$  und  $\widehat{BD}$  nach a)  $\alpha_1 = 2\beta_1$  und  $\alpha_2 = 2\beta_2$ . Wegen  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  und  $\beta = \beta_1 - \beta_2$  ergibt sich  $\alpha = 2\beta$ . - Aus dem bewiesenen Satz folgt weiter: Alle Peripheriewinkel über demselben K.bogen sind gleich groß. Ein Spezialfall ist der Satz des Thales: Alle Peripheriewinkel über einem Halbkreis sind rechte Winkel. - Als Sehnentangentenwinkel über dem Bogen  $\widehat{AB}$  bezeichnet man die beiden Winkel  $\sphericalangle(s, t)$  zwischen der Sehne  $AB$  und den K.tangenten  $t$  in  $A$  bzw.  $B$ , in deren Winkelfläche der Bogen  $\widehat{AB}$  liegt. Da die Schenkel eines Sehnentangentenwinkels paarweise auf den Schenkeln des halben Zentriwinkels über  $\widehat{AB}$  senkrecht stehen, ist der Sehnentangentenwinkel jedem Peripheriewinkel über  $\widehat{AB}$  gleich.

Zu Potenz eines Punktes in bezug auf einen K.  $\sphericalangle$  Sekantensatz; zu Polare eines K.es  $\sphericalangle$  Kreistangente.

IV. Die Mittelpunksgleichung des K.es mit dem Radius  $R$  und dem Mittelpunkt  $M(0, 0)$  lautet  $x^2 + y^2 = R^2$  bzw. (1), wenn  $M(a, b)$  sein Mittelpunkt ist. Punkte mit  $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$  liegen außerhalb, mit  $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$  innerhalb des K.es. In vektorieller Form gilt (2), wenn  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  und  $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  die Ortsvek-

toren eines beliebigen K.punktes und des

- (1)  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
- (2)  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 = R^2$
- (3)  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{b})^2 = 0$

Mittelpunktes sind. Einen K. mit  $R = 1$  bezeichnet man als Einheits-K. Aus  $M(a, b) = M(R, 0)$  ergibt sich die Scheiteltgleichung  $y^2 = 2Rx - x^2$  des K.es. Für  $R = 0$  geht Gleichung (1) in (3) über, die nur von den Koordinaten des Punktes  $(a, b)$  erfüllt wird. Man sagt, daß (3) einen Nullkreis darstellt. Die Gleichung  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = -R^2$  wird von keinem reellen Punkt erfüllt; sie stellt einen speziellen nullteiligen Kegelschnitt ( $\sphericalangle$  Kurve zweiter Ordnung) dar, der nullteiliger K. gen. wird.

Ist  $P_0(x_0, y_0)$  ein Punkt des K.es, so ist  $MP_0 = (x_0 - a)\mathbf{i} + (y_0 - b)\mathbf{j}$  ein Richtungsvektor der Normalen und ein Stellungsvektor der Tangente in  $P_0$  an den K. Die Gleichung  $(y_0 - b)(x - x_0) - (x_0 - a)(y - y_0) = 0$  stellt deshalb die Normale in  $P_0$  und (4) die Tangente in  $P_0$  an den K. dar. Liegt  $P_0$  nicht auf dem K., so ist (4) die Gleichung der Polare  $p_0$  von  $P_0$  in bezug auf den K.

$$(4) \quad (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$$

Ist  $P_0$  außerhalb des K.es gelegen, so erfüllen die Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Tangenten von  $P_0$  an den K. die Polarengleichung;  $p_0$  ist mithin die Gerade durch diese Berührungspunkte. Liegt  $P_0$  innerhalb des K.es, so schneidet jede Gerade  $p_1$  durch  $P_0$  den K. in zwei Punkten, und der Schnittpunkt  $P_1$  der Tangenten in diesen

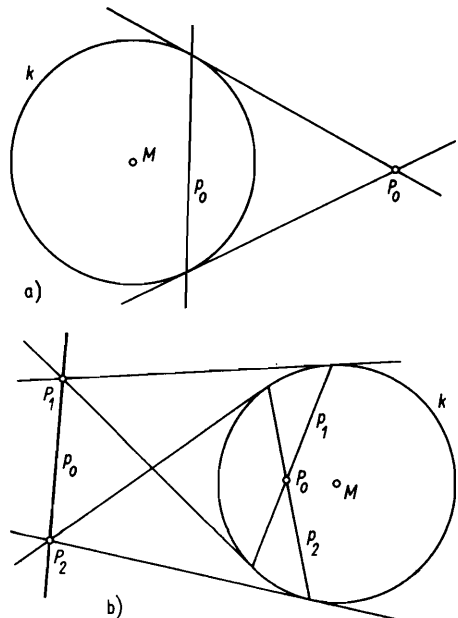


Abb. 4: Polare  $p_0$  eines Punktes  $P_0$  in bezug auf einen Kreis  $k$ , in a) liegt  $P_0$  außerhalb, in b) innerhalb des Kreises

Punkten liegt auf der Polaren  $p_0$  von  $P_0$  in bezug auf den K. (Abb. 4).

*Beispiel.* In bezug auf den K. mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = 25$  und den Pol  $P_0(7, 1)$  ist  $7x + y = 25$  die Gleichung der Polaren, die ihn in den Berührungspunkten  $(3, 4)$  und  $(4, -3)$  der Tangenten  $3x + 4y = 25$  und  $4x - 3y = 25$  von  $P_0$  an den K. schneidet. Im Punkte  $Q_0(5, 5)$  schneiden die Tangenten in  $(5, 0)$  und  $(0, 5)$  einander, er ist Pol der Polaren  $q_0$  mit der Gleichung  $y = -x + 5$ . Beide Polaren  $p_0$  und  $q_0$  schneiden einander im Punkt  $S(3\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3})$ , der bzgl. des K.es Pol der Geraden durch  $P_0$  und  $Q_0$  mit der Gleichung  $y = -2x + 15$  ist. Der K. mit  $M(0, 0)$  hat die Parameterdarstellung (5), seine Gleichung in Polarkoordinaten  $r, \varphi$

$$(5) \quad x = R \cdot \cos \varphi, y = R \sin \varphi \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

lautet  $r = R$ . Eine rationale Parameterdarstellung für diesen K. ist (6).

$$(6) \quad x = R(1 - t^2)/(1 + t^2), y = 2Rt/(1 + t^2) \\ \text{für } -\infty < t < \infty$$

K.e  $(x - a)^2 = R_1^2$  und  $(x - a)^2 = R_2^2$  haben denselben Mittelpunkt; es sind *konzentr.* K.e. Schneiden sich zwei K.e  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  und  $(x - \bar{a})^2 + (y - \bar{b})^2 = \bar{R}^2$  im Punkt  $P$  senkrecht, so daß im Schnittpunkt  $P$  die Tangente an den einen K. Normale des anderen ist, so schneiden sich diese K.e in einem weiteren Punkt, und dort auch senkrecht. Man sagt, beide sind zueinander *orthogonale* K.e. Bedingung hierfür ist  $(a - \bar{a})^2 + (b - \bar{b})^2 = R^2 + \bar{R}^2$ . - S. a. Durchlaufungen von Graphen I.; Hamilton-Kreis ↗ Turnier.

**Kreisaxiome:** *Geometrie* eine in manchen axiomat. Begründungen der Geometrie auftretende Gruppe von Axiomen, die Aussagen über das Schnittverhalten von Kreisen und Geraden sowie von Kreisen und Kreisen bei vorgegebener Lage enthalten (vgl. Parallelenaxiom I.8.).

**Kreisen** ↗ Simplexalgorithmus II.

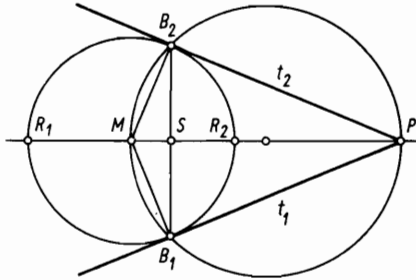
**Kreisfrequenz** ↗ Modulation I.

**Kreiskegel** ↗ Kegel II.

**Kreiskettenverfahren** ↗ analytische Fortsetzung II.

**Kreisrechenchieber** ↗ Rechenstab IV.

**Kreistangente:** I. Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt, den *Berührungspunkt*  $B$ , gemeinsam hat. Die Strecke, die den Berührungspunkt mit dem Mittelpunkt  $M$  des Kreises verbindet, steht senkrecht auf dieser K. und heißt *Berührungsradius*. Die Tangente im Punkt  $B$  eines Kreises ist danach die in  $B$  auf  $MB$  errichtete Senkrechte. Sollen von einem Punkte  $P$  außerhalb des Kreises die Tangenten an ihn gelegt werden, so konstruiert man einen Kreis über dem Durchmesser  $MP$ . Schneidet dieser den vorgegebenen Kreis in den Punkten  $B_1$  und  $B_2$ , so sind die durch  $P$  und  $B_1$  bzw. durch  $P$  und  $B_2$  bestimmten Geraden die gesuchten Tangenten (Abb. 1), denn nach dem Satz des Thales stehen diese Geraden senkrecht auf den Berührungsradien  $MB_1$  bzw.  $MB_2$ . Die Strecke  $B_1B_2$  heißt *Berührungsehne*. Die *Zentrale* des Kreises durch den Punkt  $P$  ist die Symmetrieachse dieser Figur. -



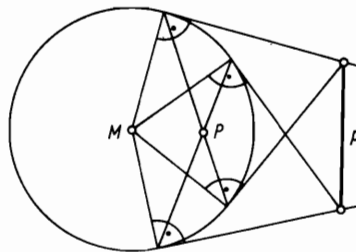
Kreistangente. Abb. 1: Tangenten von einem Punkt  $P$  außerhalb eines Kreises um  $M$  an den Kreis

II. Mit Hilfe der Tangenten an einen Kreis lassen sich die *Polaren* in bezug auf ihn konstruieren. Da der Kreis für die projektive Geometrie ein Kegelschnitt ist, bestehen folgende Beziehungen (↗ Polarität):

II.1. Die Polare  $p$  eines Punktes  $P$  in bezug auf einen Kreis ist die Gerade, die durch die Berührungspunkte  $B_1$  und  $B_2$  der von  $P$  an diesen Kreis gelegten Tangenten verläuft, z. B. ist  $B_1B_2$  Polare des Punktes  $P$ . Die Polare  $p$  steht senkrecht auf der Strecke  $MP$ .

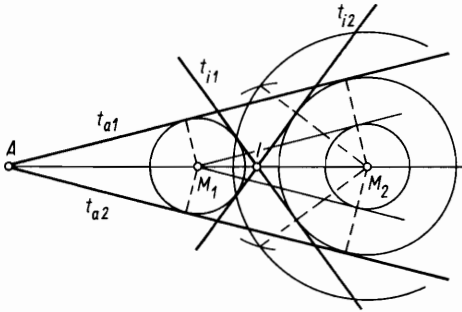
II.2. Der Schnittpunkt  $S$  der Polaren  $p$  mit der Strecke  $MP$  und der Pol  $P$  teilen den Durchmesser  $R_1R_2$  harmonisch, d. h.  $|R_2S| : |SR_1| = |R_2P| : |PR_1|$ .

II.3. Auf der Polaren zu einem innerhalb eines Kreises liegenden Punkt  $P$  schneiden sich alle Paare von Tangenten, die in den Endpunkten jeder durch  $P$  verlaufenden Sehne an den Kreis gelegt werden können (Abb. 2). Danach kann zu einem Punkt  $P$  im Innern des Kreises die Polare  $p$  konstruiert werden.



Kreistangente. Abb. 2: Polare  $p$  eines Punktes  $P$  im Innern eines Kreises

III. Eine Gerade, die mit jedem von zwei Kreisen um  $M_1$  und  $M_2$  genau einen Punkt gemeinsam hat, ist eine *gemeinsame Tangente* dieser Kreise. Schneidet sie die gemeinsame Zentrale dieser Kreise in einem Punkte  $I$  der Strecke  $M_1M_2$ , dem inneren Ähnlichkeitspunkt, so heißt sie *innere Tangente*, schneidet sie diese Zentrale in einem Punkte  $A$  außerhalb dieser Strecke, dem äußeren Ähnlichkeitspunkt, oder verläuft sie parallel zur Zentralen, so heißt sie *äußere Tangente*. Zwei Kreise haben zwei innere Tangenten, wenn sie getrennt liegen, genau



Kreistangente. Abb. 3: Tangenten an zwei Kreise

eine, wenn sie sich von außen berühren; andernfalls keine. Äußere Tangenten gibt es nur dann nicht, wenn der eine der beiden Kreise ganz im Innern des anderen liegt. Berühren sich zwei Kreise von innen, so haben sie eine äußere Tangente; in den übrigen Fällen gibt es zwei. Falls es gemeinsame Tangenten für zwei gegebene Kreise gibt, so findet man sie, indem man z. B. die Ähnlichkeitspunkte konstruiert und von diesen die Tangenten an die Kreise legt. Eine weitere Konstruktionsmöglichkeit, die inneren Tangenten an die Kreise um  $M_1$  und  $M_2$  mit den Radien  $r_2 \geq r_1$  zu finden, besteht darin, um  $M_2$  einen Hilfskreis mit dem Radius  $r_1 + r_2$  zu zeichnen und an diesen die Tangenten durch den Punkt  $M_1$  zu legen. Die gesuchten Tangenten sind Parallele im Abstand  $r_1$  zu den konstruierten Tangenten. Parallele im Abstand  $r_1$  zu den äußeren Tangenten findet man, indem man um  $M_2$  einen Hilfskreis mit dem Radius  $r_2 - r_1$  legt und die Tangenten von  $M_1$  an diesen legt.

**Kreisteilungsgleichung:** eine Gleichung  $z^n - 1 = 0$ , in der  $n$  eine natürl. Zahl ist. Ihre  $n$  verschiedenen Lösungen  $\varepsilon_k = \exp [2\pi i k/n]$  für  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  heißen  $n$ -te Einheitswurzeln. Sie zerlegen, wenn man sie in der komplexen Zahlenebene darstellt, den Umfang des Einheitskreises um den Nullpunkt in  $n$  gleiche Teile. Die  $n$ -ten Einheitswurzeln bilden bzgl. Multiplikation eine zykl. Gruppe der Ordnung  $n$  ( $\nearrow$  Gruppe). Ist  $(k, n) = 1$ , so heißt  $\varepsilon_k$  primitive  $n$ -te Einheitswurzel, d. h., jede  $n$ -te Einheitswurzel ist eine Potenz von  $\varepsilon_k$ . Es gibt genau  $\varphi(n)$  ( $\nearrow$  zahlentheoretische Funktionen) verschiedene primitive  $n$ -te Einheitswurzeln.

Das Polynom

$$\Phi_n(x) = (x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \dots (x - \zeta_{\varphi(n)}),$$

in dem  $\zeta_1, \dots, \zeta_{\varphi(n)}$  die primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln bedeuten, heißt  $n$ -tes Kreisteilungspolynom.  $\Phi_n(x)$  ist irreduzibel über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen und hat den Grad  $\varphi(n)$ . Der Erweiterungskörper  $\mathbb{Q}(\zeta)$ , in dem  $\zeta$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel ist, heißt  $n$ -ter Kreisteilungskörper. Er ist der kleinste Körper, der alle  $n$ -ten Einheitswurzeln enthält, und hat über  $\mathbb{Q}$  den Grad  $\varphi(n)$ . Ferner fällt  $\mathbb{Q}(\zeta)$  mit seinen sämtl. konjugierten Körpern ( $\nearrow$  Zahlkörper) zusammen, d. h., es gilt  $\mathbb{Q}(\zeta_1) = \dots = \mathbb{Q}(\zeta_{\varphi(n)})$ . Die K.en wurden eingehend von Ernst Eduard KUMMER (1810–1893)

untersucht. Die erzielten Ergebnisse waren bahnbrechend für den Aufbau der algebraischen Zahlentheorie. Schon vorher hatte GAUSS eine Methode zur Auflösung der K. angegeben. Nach seiner Theorie lassen sich alle regelmäßigen  $n$ -Ecke angeben, die sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Insbes. folgt aus der Theorie von GALOIS, die die Verbindung zwischen Körpertheorie, Gruppentheorie und Theorie über Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen herstellt, daß ein regelmäßiges  $n$ -Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn  $\varphi(n)$  eine Potenz von 2 ist. S. a. Potenz V.2.

**Kreisteilungskörper,  $n$ -ter  $\nearrow$  Kreisteilungsgleichung.**

**Kreisteilungspolynom  $\nearrow$  Kreisteilungsgleichung.**

**kreisverwandt  $\nearrow$  stereographische Projektion II.,  $\nearrow$  Inversion I.**

**Kreisviereck** swv. Sehnenviereck.

**Kreiszyylinder  $\nearrow$  Zylinder II.**

**Kreuzgewölbe  $\nearrow$  Durchdringung.**

**Kreuzprodukt, auch Kreuzmenge  $\nearrow$  Abbildung I.,  $\nearrow$  kartesisches Produkt,  $\nearrow$  Multiplikation I.,  $\nearrow$  Produktmenge II.,  $\nearrow$  Vektorprodukt.**

**Kreuzriß  $\nearrow$  Dreitafelprojektion.**

**kritische Dauer  $\nearrow$  Netzplantechnik IV.**

**kritische Gerade  $\nearrow$  Zetafunktion, Riemannsche.**

**kritischer Bereich  $\nearrow$  Signifikanztest I., II.**

**kritischer Streifen  $\nearrow$  Zetafunktion, Riemannsche.**

**kritischer Weg  $\nearrow$  Netzplantechnik III., IV.**

**Kronecker, Leopold,** geb. 7. 12. 1823 Liegnitz (Legnica), gest. 29. 12. 1891 Berlin. — K. war ein reicher Privatmann, der 1855 nach Berlin übersiedelte. Er lehrte, ohne einen Lehrstuhl zu haben, viele Jahre an der dortigen Universität. Erst 1883, nach Ausscheiden seines Lehrers und Freundes KUMMER, nahm er eine Professur an. Seine wichtigsten Veröffentlichungen betreffen Arithmetik, Idealtheorie, Zahlentheorie und ellipt. Funktionen. K. war der führende Vertreter der Berliner Schule, die die Notwendigkeit der Arithmetisierung der gesamten Mathematik behauptete.

**Kroneckersymbol:** Funktion  $\delta_{ik}$  aller Paare  $(i, k)$  natürl. Zahlen, die für  $i = k$  den Wert  $\delta_{ik} = 1$ , für  $i \neq k$  aber den Wert  $\delta_{ik} = 0$  hat.

**Krümmung: I., K. einer Fläche:** skalare Größe  $k(s)$ , die für eine in der Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  gegebene Fläche  $F$  in der Umgebung eines Punktes  $P_0$  die Abweichung der Fläche von der Ebene kennzeichnet. Die genauere Untersuchung der K.sverhältnisse im Punkte  $P_0$  geht aus von den K.svektoren  $\tilde{\mathbf{x}}(s)$  von Kurven  $\mathbf{x}(s)$  in der Fläche durch den Punkt  $P_0$  ( $\nearrow$  Krümmung II.). Die Bogenlänge  $s$  als natürl. Parameter ist nach der ersten Grundform für die Fläche gegeben. Projiziert man den K.svektor  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  einer dieser Kurven  $C$  auf den Einheitsvektor  $\mathbf{f}$  in Richtung der Flächennormalen in  $P_0$  so gilt  $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \kappa_n \mathbf{f} + \mathbf{k}_0$  (Abb. 1). Dabei geben die Komponente  $\mathbf{k}_0$  die K. der Kurve  $C$  in der Tangentialebene und die Komponente  $\kappa_n \mathbf{f}$  die K. der Kurve  $C$  in einer Normalebene an, bei der  $\kappa_n$  auch negative Werte haben kann. Die Beträge dieser Vektoren werden  $|\mathbf{k}_0| = \kappa_g$  die geodät. K. und  $\kappa_n$  die Normal-K. der Kurve  $C$  in  $P_0$  gen. Zwischen ihnen und der K.

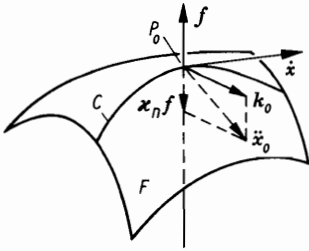


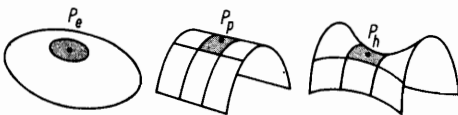
Abb. 1: Normalkrümmung  $\kappa_n f$  und geodätische Krümmung  $k_0$

$k(s) = |\ddot{x}_0|$  gilt die Beziehung  $k^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ . Für verschiedene Kurven  $C$  durch  $P_0$  haben diese K.en verschiedene Werte. Die Extremwerte der Normal-K.  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  werden *Haupt-K.en* gen. Durch Wahl einer geeigneten orthonormierten Basis in der Tangentialebene ergeben sie sich als Koeffizienten der zweiten Grundform  $k_n = \lambda_1(du/ds)^2 + \lambda_2(dv/ds)^2$  der Fläche. Sie sind Invarianten der Fläche, die deren Verlauf kennzeichnen. Kurven in der Fläche, die in jedem Punkte eine Haupt-K. als Normal-K. haben, werden *K.sinien* gen. Auf einer Rotationsfläche z. B. sind die Meridiane und die Breitenkreise *K.sinien*. Als elementarsymmtr. Funktionen der Haupt-K.en  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , aber auch aus den Koeffizienten  $E, F, G$  und  $L, M, N$  der beiden Grundformen der Fläche bestimmt man die *Gaußsche K.* (1) und die *mittlere K.* (2).

$$(1) \quad K(P_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$(2) \quad H(P_0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

Bes. die Gaußsche K.  $K(P_0)$  ist geeignet, in die K.sverhältnisse der Fläche in der Umgebung von  $P_0$  Einblick zu geben. Für *Flachpunkte*



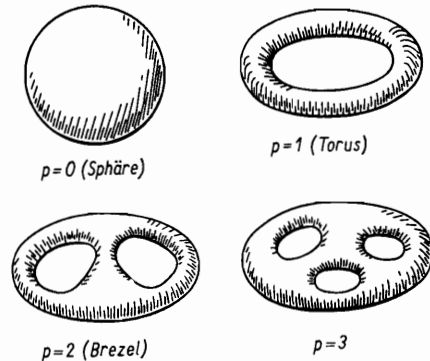
Krümmung. Abb. 2: Elliptischer ( $P_e$ ), parabolischer ( $P_p$ ), hyperbolischer ( $P_h$ ) Punkt

$P_0$  gilt  $K(P_0) = 0$  oder  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , wie das für jeden Punkt einer Ebene der Fall ist. Für *ellipt. Punkte*  $P_0$  ist  $K(P_0) > 0$ , d. h., die beiden Haupt-K.en sind beide positiv, wie es z. B. für die Punkte der Lauffläche eines Fahrradreifens der Fall ist (Abb. 2). In *parabol. Punkten*  $P_0$  hat wegen  $K(P_0) = 0$  eine der Haupt-K.en den Wert Null, z. B. für die seilt. Punkte des Fahrradreifens. In *hyperbol. oder Sattelpunkten*  $P_0$  ist  $K(P_0) < 0$ , d. h., die beiden Haupt-K.en haben entgegengesetzte Vorzeichen, z. B. für die Punkte des Reifens, die an den Felgen liegen. Schließlich spricht man von *Nabelpunkten*, wenn entsprechende Koeffizienten der zwei Grundformen einander proportional sind,

wenn mit  $\varrho$  als Proportionalitätsfaktor gilt  $L(u, v) = \varrho E(u, v)$ ,  $M(u, v) = \varrho F(u, v)$  und  $N(u, v) = \varrho G(u, v)$ . Jeder Punkt einer Kugelfläche ist z. B. ein ellipt. Nabelpunkt. Wie GAUSS nachgewiesen hat, ist die nach ihm ben. K. biegungsinvariant und gehört mithin zur *inneren Geometrie* der Fläche. Durch sie und das Oberflächenelement  $dO = \sqrt{EG - F^2} du dv$  läßt sich dann auch ein biegungsinvariantes Maß für die K. eines Flächenstücks  $F$  angeben, die *Integral-K.*  $K(F)$ :

$$K(F) = \iint_F K dO = \iint_F K \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

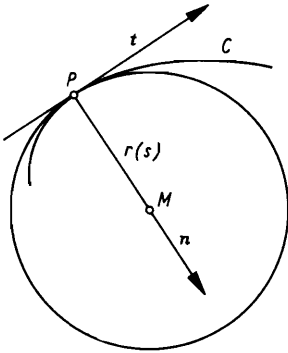
Eine bes. anschaul. Vorstellung von der Integral-K. gibt das *sphär. Bild* des Flächenstücks  $F$ , das man als Teil der Einheitskugel erhält, wenn der Normalenvektor  $f$  von jedem Punkt  $P$  von  $F$  parallel in den Koordinatenanfangspunkt übertragen wird. Das sphär. Bild bedeckt einen um so größeren Teil der Oberfläche der Einheitskugel, je stärker  $F$  gekrümmt ist. Für eine allseitig geschlossene gekrümmte Fläche, z. B. die Oberfläche einer Kugel, hat danach die Integral-K. den Wert  $4\pi$ . Nach dem Satz von Gauß-Bonnet läßt sich diese Vorstellung in verallgemeinerter Form begründen. Es gilt der Satz, daß die Integral-K. einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht  $p$  nicht von der Gestalt der Fläche abhängt und den Wert  $4\pi(1 - p)$  hat. Das *Geschlecht*  $p$  gibt dabei den topolog. Zusammenhang der Körper bzw. die durchgehenden Löcher in ihn an. Für die Kugel z. B. ist  $p = 0$ , für den



Krümmung. Abb. 3: Geschlecht  $p$  einer Fläche

Torus  $p = 1$  und für eine Brezel  $p = 2$  (Abb. 3). Diese *topolog. Eigenschaft* einer Fläche, die bei beliebigen stetigen Deformationen invariant bleibt, kann danach aus Beziehungen der Differentialgeometrie berechnet werden.

II. *K. einer Kurve*: skalare Größe  $k(s)$ , die die Abweichung der Form der Kurve  $C$  von einer Geraden charakterisiert. Benutzt man die Bogenlänge  $s$  als natürl. Parameter zur Darstellung  $x = x(s)$  der Kurve  $C$  und bezeichnet Ableitungen nach diesem Parameter durch einen Punkt, so gilt  $k(s) = |\dot{t}(s)| = |\ddot{x}(s)|$ . Dabei ist  $t(s)$  der Tangentenvektor. Nach den Frenetschen Formeln ergibt sich die Vektorgleichung  $\dot{t}(s) = \ddot{x}(s) = k(s) n(s)$ , nach



Krümmung. Abb. 4: Krümmungskreis mit Mittelpunkt  $M$  auf der Hauptnormalen  $n$  im Punkte  $P$  der Kurve  $C$ ,  $r(s)$  Krümmungsradius

der der  $K$ -vektor  $\tilde{x}(s)$  die Richtung der Hauptnormalen  $n$  hat ( $\nearrow$  begleitendes Dreibein). Der reziproke Wert der  $K$ ,  $r(s) = 1/k(s)$  heißt  $K$ -radius der Kurve  $C$  im Punkte  $\tilde{x}(s)$ . Trägt man diesen Wert von einem Kurvenpunkt  $P$ :  $\tilde{x}(s)$ , für den  $k > 0$  ist, aus in Richtung des Hauptnormalenvektors  $n(s)$  ab, so erhält man den  $K$ -mittelpunkt  $M$  der Kurve  $C$  im Punkt  $P$ . Der Kreis um  $M$  mit dem Radius  $r(s)$ , der in der zu  $P$  gehörenden Schmiegeebene liegt, heißt  $K$ -skreis oder Schmiegekreis der Kurve  $C$  im Punkte  $P$  ( $\nearrow$  Torsion). S. a. Schraubelinie.

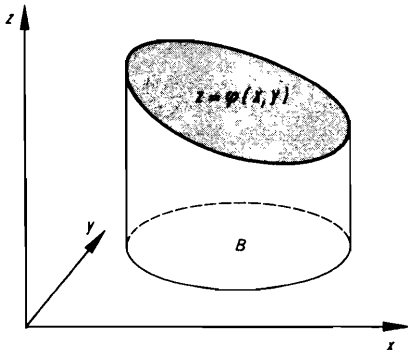
**Krümmungskreisconstruction**  $\nearrow$  Ellipsenkonstruktionen II.

**$k$ -stellige Abbildung**  $\nearrow$  Abbildung IV.

**$k$ -Stichprobenproblem**  $\nearrow$  Zweistichprobenproblem.  
**Kubatur:** Berechnung des Volumens krummflächig begrenzter Körper. Bedeutet  $K$  den Raumbereich, in dem der Körper in einem  $x,y,z$ -Koordinatensystem liegt, so berechnet sich sein Volumen  $\Delta K$  durch das Raumintegral (1). Um z. B. das Volumen

$$(1) \quad \Delta K = \iiint_{(K)} dx dy dz$$

des vom Ellipsoid mit der Gleichung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  begrenzten Raumbereichs zu berechnen ( $\nearrow$  Raumintegral, Abb. 2), werden im Raumintegral verallgemeinerte Polarkoordinaten  $x = ar \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $y = br \sin \varphi \sin \vartheta$ ,  $z = cr \cos \vartheta$  mit  $0 \leq r \leq 1$ ,



Kubatur: Volumen eines Zylinders unter der Fläche  $z = \varphi(x, y)$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  eingeführt ( $\nearrow$  Raumintegral (14)). Als Lösung erhält man (2).

$$(2) \quad \Delta K = \iiint_{(K)} dx dy dz = abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = \frac{4}{3} abc\pi.$$

Ist  $K$  ein Zylinder über dem Bereich  $B$  der  $x,y$ -Ebene mit der Deckfläche (Abb. 1), die durch die Gleichung  $z = \varphi(x, y)$  gegeben ist, so ist das Volumen  $\Delta K$  gegeben durch das Flächenintegral (3).

$$(3) \quad \Delta K = \iint_{(B)} \varphi(x, y) dx dy$$

Ist z. B. der Bereich  $B$  der im 1. Quadranten liegende Teil der Fläche der Ellipse mit der Gleichung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  und ist die Deckfläche durch  $z = xy$  gegeben, so führt man im Flächenintegral verallgemeinerte Polarkoordinaten  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$  ein und erhält nach (4) das Volumen.

$$(4) \quad \Delta K = \iint_{(B)} xy dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 abr^2 \cos \varphi \sin \varphi abr dr d\varphi = \frac{1}{8} a^2 b^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{1}{8} a^2 b^2$$

Liegt ein Körper zwischen den durch  $x = a$  und  $x = b$  bestimmten Ebenen und wird er von jeder Ebene  $x = \text{const}$  mit  $a \leq x \leq b$  in einem Bereich geschnitten, der den Flächeninhalt  $f(x)$  hat, so gilt

$$\Delta K = \int_a^b f(x) dx \quad (\nearrow \text{Raumintegral III.2. Abb. 3}).$$

Für einen Rotationskörper, der durch Rotation einer für  $a \leq x \leq b$  nichtnegativen Funktion  $f(x)$  um die  $x$ -Achse entsteht, folgt hieraus (5).

$$(5) \quad \Delta K = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Für das Volumen des bei Rotation der Ellipse mit  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  für  $-a \leq x \leq a$  entstehenden Rotationsellipsoids erhält man (6).

$$(6) \quad \Delta K = \pi \int_{-a}^a (b^2 - (b^2/a^2)x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

**Kubatur, numerische**  $\nearrow$  Integration, numerische I.  
**Kubikdezimeter**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**Kubike**  $\nearrow$  Hyperfläche.

**Kubikmeter**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**Kubikmillimeter**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**Kubikwurzel**  $\nearrow$  Wurzel I.

**Kubikzahlen**  $\nearrow$  Potenz I.

**Kubikzentimeter**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**kubisch**  $\nearrow$  Graph III.

**kubische Form**  $\nearrow$  homogene Funktion II.<sup>1</sup>

**kubische Gleichung, Gleichung dritten Grades:** I. algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten, in

der die Summe der Exponenten der Gleichungsvariablen in mindestens einem Glied 3, in keinem Glied aber größer als 3 ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Gleichung so umgeformt wurde, daß die auftretenden Zahlen und Variablen nur addiert, multipliziert und mit natürl. Exponenten potenziert werden. Beispiele für k. G.en sind  $uvw = 1$ ;

$3x_1x_2^2 - 2x_1 + 2x_1x_2 - x_1x_2x_3 = 2$ ;  $x^3 - y^3 = 1$ . Tritt nur eine Variable auf, z. B.  $x$ , so hat nach dem Zusammenfassen von Termen mit der gleichen Potenz von  $x$  die k. G. die

*allgemeine Form*  $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ , mit  $A, B, C, D$  reell,  $A \neq 0$  und  $x \in \mathbf{C}$ . Man nennt  $Ax^3$  das *kub.*,  $Bx^2$  das *quadrat.*,  $Cx$  das *lineare* und  $D$  das *absolute Glied*. Durch die wegen  $A \neq 0$  mögl. Division der k. G. durch  $A$  geht die allgemeine in die

*Normalform*  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$

über, in der  $r = B/A, s = C/A, t = D/A$  reelle Zahlen sind und  $x \in \mathbf{C}$  ist. Die

*reduzierte Form*  $y^3 + py + q = 0$  der k. G., die kein quadr. Glied mehr enthält, ergibt sich durch die Substitution  $x = y - r/3$ , wenn zur Vereinfachung gesetzt wird  $p = s - r^2/3, q = 2r^3/27 - sr/3 + t$ . Die k. G.  $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$  mit  $r = -9, s = 33$  und  $t = -65$  hat z. B. die reduzierte Form  $y^3 + 6y - 110 = 0$ .

Der Ansatz  $y = u + v$  ergibt die k. G.  $u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p) = 0$

in den beiden Gleichungsvariablen  $u$  und  $v$ . Als Nebenbedingung, die noch angenommen werden darf, wählt man  $3uv + p = 0$  und erhält ein Gleichungssystem (1) in  $u$  und  $v$ , das sich durch Subtraktion des Vierfachen der 3. Potenz der zweiten Gleichung von der quadrierten ersten Gleichung in das System (2) umformen läßt, aus dem  $u^3$  und  $v^3$  nach (3) und (4) berechnet werden können. Durch Ziehen der dritten Wurzeln, die

$$(1) \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} u^3 - v^3 = \pm \sqrt{q^2 + 4p^3/27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

$$(3) \quad u^3 = -q/2 \pm \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$$

$$(4) \quad v^3 = -q/2 \mp \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}$$

in  $\mathbf{C}$  stets existieren, erhält man  $y_1 = u_1 + v_1$  als erste Wurzel. Für die anderen Wurzeln  $y_2 = u_2 + v_2$  und  $y_3 = u_3 + v_3$  ergeben sich aus den dritten Einheitswurzeln, d. h. aus den Wurzeln

$\varepsilon_2 = -1/2(1 - i\sqrt{3})$  und  $\varepsilon_3 = -1/2(1 + i\sqrt{3})$

der Gleichung  $x^3 - 1 = 0$  die konjugiert komplexen Werte  $y_2 = -[1/3(u_1 + v_1)] + [1/3(u_1 - v_1)] \cdot i\sqrt{3}$  und  $y_3 = -[1/3(u_1 + v_1)] - [1/3(u_1 - v_1)] \cdot i\sqrt{3}$ . Aus jeder Wurzel  $y_j$  der reduzierten k. G. ergibt sich eine Wurzel  $x_j = y_j - r/3$  der Normalform. Oft werden mit  $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$  als der *Diskriminante* der k. G. die Werte  $u_1, v_1$  in der Form

$$u_1 = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{D}} \quad \text{und} \quad v_1 = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{D}}$$

vereinfacht dargestellt.

II. Diese schon 1545 von GERONIMUS CARDANO veröffentlichten und nach ihm als *Cardanische Formeln* bekannten Beziehungen befruchteten die Entwicklung der Algebra durch den scheinbaren Widerspruch, daß eine Gleichung 3. Grades stets mindestens eine reelle Wurzel haben muß, daß es aber Koeffizienten  $p < 0$  und  $q$  gibt, so daß  $D < 0$  und deshalb  $\sqrt{D}$  eine komplexe Zahl ist. Dieser *Casus irreducibilis* [nicht zurückführbarer Fall] konnte von VIETA durch Darstellung komplexer Zahlen in trigonometr. Form gelöst werden. Es zeigt sich sogar, daß für solche  $p$ - und  $q$ -Werte die k. G. drei reelle Lösungen hat. Mit  $-D = (-p/3)^3 - (q/2)^2 > 0$  erhält man aus

$$u^3 = -(q/2) + i\sqrt{-D} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{und}$$

$$v^3 = -(q/2) - i\sqrt{-D} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

die Beziehungen

$$\rho = \sqrt[3]{(q/2)^2 + (-p/3)^3 - (q/2)^2} = \sqrt[3]{(-p/3)^3}$$

$\cos \varphi = -(q/2)/\rho$  und  $\sin \varphi = \sqrt{-D}/\rho$ . Danach sind  $\rho$  und  $\varphi$  eindeutig bestimmt und damit nach dem Moivre'schen Lehrsatz auch

$$u_1 = \sqrt[3]{\rho} [\cos(\varphi/3) + i \sin(\varphi/3)] \quad \text{sowie}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{\rho} [\cos(\varphi/3) - i \sin(\varphi/3)].$$

Wegen  $y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\varphi/3)$  ergibt sich tatsächlich ein reeller Wert. Aus der Periodizität der Kosinusfunktion erhält man die beiden anderen reellen Wurzeln  $y_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\varphi/3 + 120^\circ)$  und  $y_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos(\varphi/3 + 240^\circ)$ .

- kubische Kurve ↗ rationale Kurve I.
- kubische Normkurve svw. Raumkurve, kubische.
- kubische Parabel ↗ rationale Kurve I., ↗ Potenzfunktion I.
- kubische Resolvente ↗ Gleichung 4. Grades.
- kubisches Glied ↗ kubische Gleichung I.

**Kugel:** I. jede Fläche im Raum, die durch Drehung einer Kreislinie um einen Kreisdurchmesser entsteht. Der Mittelpunkt des gedrehten Kreises heißt *K.mittelpunkt* oder *Zentrum*. Ist  $r$  eine feste Länge, so kann die K.fläche auch als Menge aller Punkte des Raumes beschrieben werden, die von einem festen Punkt den Abstand  $r$  haben,  $r$  heißt der *Radius* der K. Oft wird auch jede Strecke, die den K.mittelpunkt mit einem beliebigen Punkt der K.fläche verbindet, als ein Radius bezeichnet.

Die K.fläche teilt den Raum in zwei getrennte offene Untermengen, von denen genau eine konvex ist. Diese heißt das *Innere* der K. Die Vereinigungsmenge der Punkte jeder K.fläche und ihres Inneren heißt *K.körper*. Sowohl K.körper als auch K.fläche werden oft kurz als K. bezeichnet. Dann muß aus dem Zusammenhang klar sein, welcher der beiden Begriffe gemeint ist. Die K. ist eine spezielle Fläche zweiter Ordnung, sie ist eine Rotationsfläche. Die K.fläche wird auch *K.oberfläche* gen.

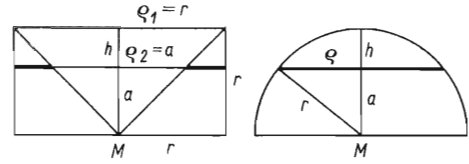
II. *Gerade, Ebene und K.:* Jede Gerade hat mit einer K.fläche entweder genau zwei Punkte oder genau einen Punkt oder keinen Punkt gemeinsam. Jede Gerade, die die K.fläche in zwei Punkten schneidet, heißt *Sekante*, die Strecke, deren Endpunkte die beiden Schnittpunkte sind, heißt *Sehne*. Ist  $a$  der



Abstand der Sehne vom Mittelpunkt  $M$ , so ist  $s = 2\sqrt{r^2 - a^2}$  die Länge der Sehne. Jede Sehne durch den K.mittelpunkt heißt *K.durchmesser*. Sie sind die größten Sehnen. Ihre Länge ist  $2r$ .

Jede Gerade, die mit der K.fläche genau einen Punkt gemeinsam hat, heißt *Tangente*, der gemeinsame Punkt *Berührungspunkt*. Die Strecke, deren Endpunkte der Berührungspunkt und der K.mittelpunkt sind, heißt *Berührungsradius*. Jede Tangente steht auf ihrem Berührungsradius senkrecht, und jede Gerade, die auf diesem Berührungsradius im Schnittpunkt mit der Kugelfläche senkrecht steht, ist eine Tangente an die K. In jedem Punkt der K.fläche gibt es beliebig viele Tangenten. Alle Tangenten durch einen festen K.punkt liegen in einer Ebene, diese heißt *Tangentialebene*  $\tau$ . Jede Ebene, die nicht Tangentialebene ist, hat mit der K.fläche entweder keinen Punkt gemeinsam, oder sie schneidet die K.fläche in einer Kreislinie. Diese heißt *Großkreis*, wenn die schneidende Ebene den K.mittelpunkt enthält, *Kleinkreis*, wenn sie den Mittelpunkt nicht enthält. Ist  $\rho$  der Radius des Schnittkreises, so ist  $\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$ , wenn  $a$  der Abstand der Schnittebene von  $M$  ist.

III. *K.teile* (Abb. 1): Jede eine K. schneidende Ebene zerlegt die K.fläche in zwei *K.kappen* oder *Kalotten*, den K.körper in zwei *K.abschnitte* oder *K.segments*. Als *Höhe* dieser K.teile bezeichnet man die Strecke, die von dem K.durchmesser durch den Mittelpunkt des Schnittkreises durch die schneidende Ebene abgeschnitten wird. Die Höhe steht auf der Ebene des Schnittkreises senkrecht. Hat die schneidende Ebene den Abstand  $a$  vom K.mittelpunkt, so haben die Höhen der beiden K.segments die Längen  $h = r - a$  bzw.  $h' = r + a$ . Geht die Ebene durch den K.mittelpunkt, entstehen *Halbkugelflächen* bzw. *Halbkugelkörper*. Deren Höhe ist der K.radius. Schneiden zwei parallele Ebenen eine K., so schneiden sie aus der K.fläche eine



Kugel. Abb. 2: Herleitung des Rauminhalts der Halbkugel und des Kugelsegments nach dem Cavalierischen Prinzip

*K.zone* und aus dem K.körper eine *K.schicht* aus. Als *Höhe* dieser Teile bezeichnet man den Abstand der parallelen Ebenen. Gleitet ein K.radius entlang eines Klein- oder Großkreises, so wird der K.körper in zwei *K.ausschnitte* oder *K.sektoren* zerlegt. Zwei durch den K.mittelpunkt gehende Ebenen zerlegen die K.fläche in vier *K.zweiecke*, den K.körper in vier *K.keile*. Durch Drehung einer Kreisringfläche um einen Durchmesser entsteht ein *Hohlkugelkörper*.

IV. Der Rauminhalt  $V/2$  des halben K.körpers ergibt sich nach dem Cavalierischen Prinzip als gleich groß mit dem Rauminhalt des Restkörpers, der sich ergibt, wenn aus einem geraden Kreiszyylinder vom Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $r$  ein gerader Kreiskegel mit den gleichen Längen für Grundkreisradius und Höhe ausgebohrt wird (Abb. 2), weil jeder ebene Schnitt im Abstand  $a$  vom Mittelpunkt der K. sowohl die Halb-K. als auch den Restkörper in flächengleichen Figuren schneidet, die Halb-K. in einem Kleinkreis mit dem Radius  $\rho = \sqrt{r^2 - a^2}$  und dem Flächeninhalt  $A_1 = \pi\rho^2 = \pi(r^2 - a^2)$ , den Restkörper aber in einem Kreisring mit den Radien  $r$  und  $a$  und deshalb mit dem gleichen Flächeninhalt  $A_2 = \pi r^2 - \pi a^2$ . Daraus ergibt sich  $V/2 = \pi r^2 \cdot r - \pi r^2 \cdot r/3 = 2/3\pi r^3$  bzw. für den Rauminhalt der K.  $V = 4/3\pi r^3$ . Nach dem gleichen Prinzip erhält man den Rauminhalt  $V(\text{Seg})$  eines K.segments der Höhe  $h$ , wenn man das Kreissegment vergleicht mit einem geraden Kreiszyylinder vom Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $h$ , aus dem ein gerader Kegelstumpf mit den gleichen Längen für Grundkreisradius und Höhe ausgebohrt wird. Man erhält (1), wenn man noch die Beziehung  $a = r - h$

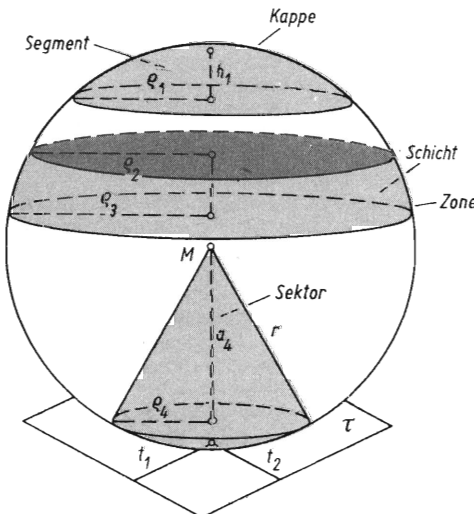
$$(1) \quad V(\text{Seg}) = \pi r^2 h - 1/3\pi h (r^2 + ra + a^2) = 1/3\pi h^2 (3r - h)$$

beachtet. Wird das Segment durch die Länge  $\rho = \sqrt{r^2 - (r - h)^2}$  seines Grundkreises und die seiner Höhe  $h$  charakterisiert, so ergibt sich (2).

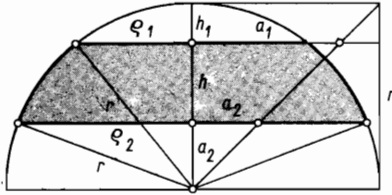
$$(2) \quad V(\text{Seg}) = 1/6\pi h (3\rho^2 + h^2)$$

Werden zwei Segmente durch  $h_1, \rho_1$  bzw.  $h_2, \rho_2$  gekennzeichnet, so ist unter der Annahme  $h_1 < h_2$  und  $\rho_1 < \rho_2$  die Differenz ihrer Rauminhalte der Rauminhalt einer *K.schicht* von der Höhe  $h = h_2 - h_1 = a_1 - a_2$ , wenn  $a_1 = \sqrt{r^2 - \rho_1^2}$  und  $a_2 = \sqrt{r^2 - \rho_2^2}$  beachtet wird (Abb. 3). — Für den Rauminhalt  $V(\text{Sch})$  der K.schicht erhält man (3).

$$(3) \quad V(\text{Sch}) = (\pi h/6) [6r^2 - 3a_1^2 - 3a_2^2 + h^2] = (\pi h/6) [3\rho_2^2 + 3\rho_1^2 + h^2].$$



Kugel. Abb. 1: Kugelteile

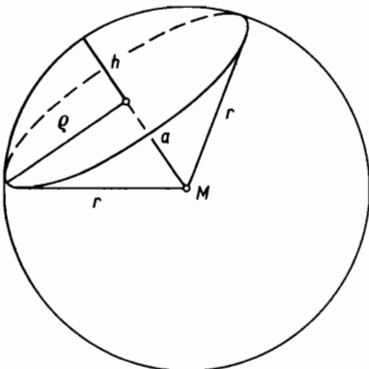


Kugel. Abb. 3: Bestimmung des Rauminhalts einer Kugelschicht nach dem Cavalierischen Prinzip

V. Durch eine Grenzbetrachtung läßt sich eine Beziehung zwischen dem *Flächeninhalt*  $O$  der K.oberfläche und dem Rauminhalt  $V$  des K.körpers angeben. Man denkt sich den K.körper lückenlos in eine große Anzahl  $n$  von pyramidenförmigen Teilkörpern aufgeteilt mit ebenen Grundflächen  $G_i$ , deren Ecken Punkte der K.fläche sind und deren Abstand  $a_i$  vom Mittelpunkt  $M$  wenig von  $r$  verschieden ist. Wird die Anzahl  $n$  der Pyramiden in der Weise durch Hinzunahme neuer Punkte der K.fläche als Ecken neuer Grundflächen vergrößert, daß die Abstände  $a_i$  stets wachsen und sich von der Länge  $r$  immer weniger unterscheiden, die Flächeninhalte  $\Delta G_i$  jeder Grundfläche  $G_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  aber stets abnehmen, so nähern sich für  $n \rightarrow \infty$  die Summe  $\frac{1}{3} \sum \Delta G_i a_i$  der Teilkörper dem Rauminhalt  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  des K.körpers und die Summe  $\sum \Delta G_i$  der Flächeninhalte der Grundflächen dem der Oberfläche  $O$  der K., d. h., im Grenzfall gilt auch  $\frac{1}{3} \sum \Delta G_i a_i \rightarrow \frac{1}{3} r \cdot O$ . Aus (4) ergibt sich aber  $O = 4\pi r^2$  für die Oberfläche der K.

$$(4) \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} r \cdot O$$

VI. Nach diesem Grenzübergang läßt sich der Flächeninhalt einer durch ihre Höhe  $h = r - a$  gekennzeichneten *K.kappe* als Teil der Oberfläche der K. berechnen, wenn der Rauminhalt des *K.sektors* bekannt ist, der von dieser *K.kappe* mit begrenzt wird (Abb. 4). Der *K.sektor* setzt sich zusammen aus dem *K.segment*, das durch  $r, h$  oder  $h, \varrho = \sqrt{r^2 - a^2}$  gekennzeichnet ist, und einem geraden *Kreiskegel* mit den Längen  $\varrho$  für den Grund-



Kugel. Abb. 4: Zusammenhang zwischen Kugelkappe, Kugelsegment und Kugelsektor

kreisradius und  $a = r - h$  für seine Höhe. Für seinen Rauminhalt gilt deshalb (5) oder (6), wenn  $\varrho^2 = h(2r - h)$  beachtet wird.

$$(5) \quad V(\text{Sek}) = \frac{1}{3} \pi h^2 [3r - h] + \frac{1}{3} \pi \varrho^2 [r - h]$$

$$(6) \quad V(\text{Sek}) = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

Für den Flächeninhalt  $O(\text{Kappe})$  der *K.kappe* folgen dann (7) oder (7a).

$$(7) \quad \frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} r \cdot O(\text{Kappe})$$

$$(7a) \quad O(\text{Kappe}) = 2\pi r h$$

Als Differenz der Flächeninhalte zweier *K.kappen*, die die Höhen  $h_2 = h + h_1$  und  $h_1$  haben ( $\nearrow$  Abb. 3) ergibt sich daraus (8) als der einer *K.zone*.

$$(8) \quad O(\text{Zone}) = 2\pi r h_2 - 2\pi r h_1 = 2\pi r h$$

VII. Hat eine K. den Radius  $R$ , so lautet ihre *Mittelpunktsgleichung*  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  für  $M(0, 0, 0)$  bzw. ihre Gleichung (9) für  $M(a, b, c)$ . Mit den Orts-

$$(9) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

vektoren  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  und  $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  erhält man (9a) als *Kugelmgleichung*. Die

$$(9a) \quad (\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 = R^2$$

Gleichung (10) wird nur von den Koordinaten des Punktes  $M(a, b, c)$  erfüllt.

$$(10) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0 \text{ mit } R = 0$$

Man sagt, sie stellt eine *Null-K.* dar. Die Gleichung (11) wird von keinem reellen Punkt erfüllt; sie stellt eine spezielle *nullteilige Fläche zweiter Ordnung* dar,

$$(11) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = -R^2$$

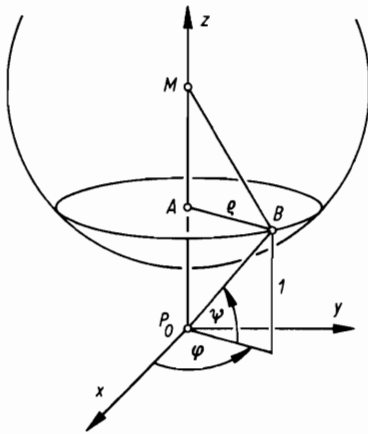
die *nullteilige K.* gen. wird.

VIII. Ist  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  Punkt der K. nach (9), so ist (12) die Gleichung der *Tangentialebene* der K. in

$$(12) \quad (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = R^2$$

$P_0$ . Liegt  $P_0$  nicht auf der K., so stellt (12) die *Polarebene* von  $P_0$  bzgl. der K. dar. Sie schneidet die K., wenn  $P_0$  außerhalb liegt, und zwar in einem Kreis, dessen Punkte die *Berührungspunkte* aller *Tangenten* von  $P_0$  an die K. sind. Diese Tangenten bilden den *Tangentenkegel* mit der Spitze  $P_0$  an die K.

*Beispiel:* Für  $P_0(0, 0, 0)$  und die K.  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$  stellt  $z = 1$  die Polarebene dar, die die K. in dem Kreis mit  $x^2 + y^2 = 1$  mit dem Radius  $\varrho = 1$  und der Parameterdarstellung  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ ,  $z = 1$  mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  schneidet (Abb. 5). Da das rechtwinklige Dreieck  $MBP_0$  zwischen dem Berührungsradius  $|MB|$  und dem Tangentenabschnitt  $|P_0B|$  wegen  $\varrho = 1$  und  $|MA| = |AP_0| = 1$  gleichschenkelig ist, hat Winkel  $\psi$  die Größe  $\pi/4$ . Mit hin ist  $x = t \cos \varphi$ ,  $y = t \sin \varphi$ ,  $z = t$  für jedes  $\varphi$  die Parameterdarstellung einer Tangente von  $P_0$  an die K. Der Tangentenkegel ist der *gerade Kreiskegel*  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  ( $\nearrow$  Kegel zweiter Ordnung).



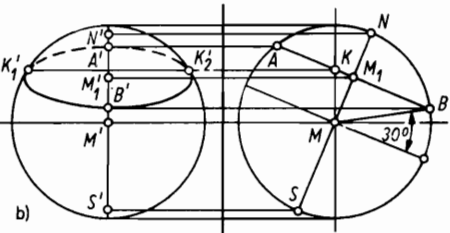
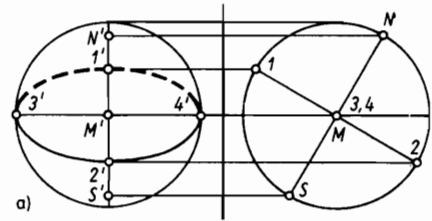
Kugel. Abb. 5: Polarebene  $z = 1$  zum Pol  $P_0(0, 0, 0)$  in bezug auf die Kugel mit der Gleichung  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$

Die K. mit  $M(0, 0, 0)$  und dem Radius der Länge  $R$  hat die Parameterdarstellung (13); ihre Gleichung in *K.koordinaten*  $r, \lambda, \varphi$  bzw. in *Zylinderkoordinaten*  $r, \lambda, z$  lautet  $r = R \cos \lambda$  bzw.  $r^2 + z^2 = R^2$  mit  $|OP| = R$  ( $\nearrow$  Koordinatensystem, Abb. 6). — S. a. Raum, metrischer.

$$(13) \quad x = R \cdot \cos \lambda \cdot \cos \varphi, \quad y = R \cdot \sin \lambda \cdot \cos \varphi, \\ z = R \cdot \sin \varphi; \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

**Kugeldarstellung: I.** Wird eine Kugel mit einer Ebene zum Schnitt gebracht, erhält man als Schnittfigur einen *Großkreis*, wenn die Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt geht, sonst einen *Kleinkreis*. Entsprechend den geograph. Begriffen bezeichnet man einen Großkreis als *Äquator*, die Senkrechte auf dem Äquator durch den Kugelmittelpunkt als *Achse*, deren Schnittpunkte mit der Kugel als *Nord- und Südpol*: Die Großkreise durch die Pole heißen *Längenkreise* oder *Meridiane*, die Kleinkreise parallel zum Äquator heißen *Breitenkreise*. Um ein möglichst wenig verzerrtes Bild der Kugel zu erhalten, wählt man zur Darstellung die senkrechte Parallelprojektion. Es ist zweckmäßig, zur Konstruktion des Kugelbildes Aufriß und Kreuzriß zu verwenden. Dabei neigt man die Kugelachse etwas nach vorn, damit der Äquator als Ellipse abgebildet wird. Die Pole der Kugel und die Nebenseitel der Äquatorellipse im Aufriß gewinnt man durch Parallelverschiebung aus dem Kreuzriß (Abb. 1).

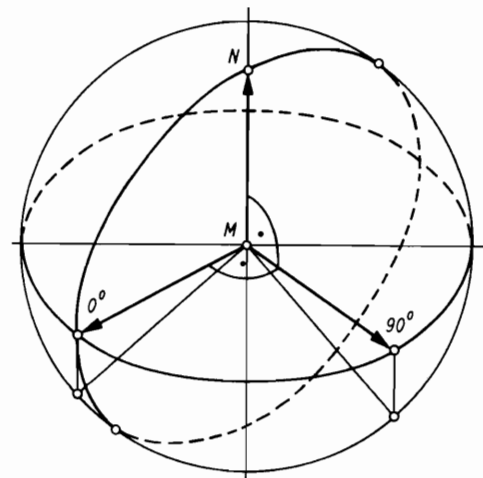
**II.1. Die Konstruktion des Aufrisses eines Breitenkreises von  $30^\circ$ :** Der Kreuzriß des Breitenkreises ist die Strecke  $AB$  mit dem Mittelpunkt  $M_1$ . Durch Parallelverschiebung erhält man aus  $M_1$  den Mittelpunkt  $M_1'$  und aus  $A$  bzw.  $B$  die Nebenseitel  $A'$  bzw.  $B'$  der Aufrißellipse, deren Hauptachse die Länge  $|AB|$  des Breitenkreisdurchmessers hat. Somit kann die Ellipse mit Hilfe der Krümmungskreis-konstruktion gezeichnet werden. Bzgl. der Sichtbarkeit können je nach Lage des Breitenkreises drei Fälle unterschieden werden: 1) Die gesamte Ellipse



Kugeldarstellung. Abb. 1: a) Pole und Äquatorellipse, b) Breitenkreis von  $30^\circ$

ist sichtbar, 2) ein Teil der Ellipse ist sichtbar, 3) die gesamte Ellipse ist unsichtbar. Liegt ein Teil der Ellipse auf der hinteren Halbkugel, so ist dieser Teil nicht sichtbar. Die rechte Halbkugel im Kreuzriß ist der im Aufriß sichtbare Teil der Kugel, das heißt, die Lotrechte durch  $M$  bildet im Kreuzriß die *Sichtbarkeits- oder Schattengrenze*. Der Schnittpunkt  $K$  der Strecke  $AB$  mit der Sichtbarkeitsgrenze im Kreuzriß liefert nach Parallelverschiebung die Berührungspunkte der Ellipse mit dem Kugelumriß im Aufriß. Die beiden Berührungspunkte teilen die Ellipse in den sichtbaren und den unsichtbaren Teil (Abb. 1b).

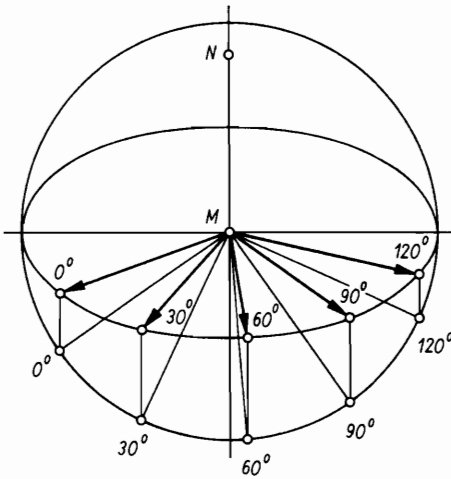
**II.2. Die Konstruktion des Aufrisses eines Längenkreises:** Ein Längenkreis ist ein Großkreis durch



Kugeldarstellung. Abb. 2: Längenkreis-konstruktion

Nord- und Südpol; sein Bild ist somit i. allg. eine Ellipse durch Nord- und Südpol, deren Hauptachse gleich dem Kugeldurchmesser ist. Der Schnittpunkt des Längenkreis mit dem Äquator liefert das Bild eines Radius, der senkrecht zur Kugelachse liegt. Damit kennt man zwei zueinander konjugierte Halbmesser der Ellipse, einen zum Pol und einen zweiten zu einem Äquatorpunkt, und kann mit Hilfe der Rytz'schen Achsenkonstruktion die Achsen der Ellipse finden und mit Hilfe der Krümmungskreisconstruction die Ellipse zeichnen (Abb. 2).

III. Die Konstruktion kann vereinfacht werden, wenn man die Tatsache ausnutzt, daß das Bild der Längenkreisachse mit der Nebenachse der Ellipse zusammenfällt. Dadurch ist die Richtung der Nebenachse bekannt, und man kann die Hauptachse mit den Hauptscheitelpunkten und mit Hilfe der Papierstreifenkonstruktion auch die Nebenscheitelpunkte bestimmen. Um die Teilung des Äquators vornehmen zu können, klappt man ihn um die Hauptachse der Äquatorellipse in die Aufrißebene, so daß er mit dem Kugelumriß zusammenfällt. Von einem beliebigen Punkt  $0^\circ$  aus wird der Kreis in die gewünschte Anzahl gleicher Teile geteilt und werden die Teilpunkte durch Zurückdrehen



Kugeldarstellung. Abb. 3: Äquarterteilung

auf die Äquatorellipse übertragen (Abb. 3). Dieses Verfahren ermöglicht die Konstruktion eines Achsenkreuzes in senkrechter Parallelprojektion. Nordpol, Äquatorpunkte  $0^\circ$  und  $90^\circ$  sind Bilder von Einheitspunkten dreier Radien, die senkrecht aufeinander stehen. Die Konstruktion der Achsenkreuzes bildet die Grundlage für die Axonometrie. **Kugeldreieck** swv. sphärisches Dreieck.

**Kugelfeld**  $\nearrow$  skalares Feld.

**Kugelkeil**  $\nearrow$  Kugel III.,  $\nearrow$  sphärisches Zweieck.

**Kugelkoordinaten**  $\nearrow$  Koordinatensystem V.,

$\nearrow$  Raumintegral IV.

**Kugelumgebung**  $\nearrow$  Menge IV.

**Kugelverfahren**  $\nearrow$  Durchdringung.

**Kugelzweieck** swv. sphärisches Zweieck,

$\nearrow$  Kugel III.

**Kuhn**, Harold William, geb. 29. 7. 1925 bei Santa Monica (Kalif.). — K. promovierte 1950 und war längere Zeit in Princeton tätig. Dort trug er zusammen mit TUCKER wesentlich zur Ausarbeitung der *nichtlinearen Optimierung* bei und veröffentlichte außerdem zu Problemen der Spieltheorie. Er beteiligte sich längere Zeit an militär. Forschungen. **Kuhn-Tucker-Theorem** [nach H. W. KUHN, A. W. TUCKER]: grundlegende Sätze über die Existenz von Lösungen konvexer Optimierungsaufgaben. Mit einer Einschränkung, die z. B. erfüllt ist, wenn allen nichtlinearen Nebenbedingungen ein gewisser Punkt mit dem Kleinerzeichen genügt, gilt: Die konvexe Optimierungsaufgabe  $f_i(x) \leq 0$  für  $i = 1, \dots, m$ ,  $F(x) = \text{Min!}$  hat genau dann die Lösung  $x^{(0)}$ , wenn für ein  $u^{(0)} \geq 0$  der Punkt  $(x^{(0)}, u^{(0)})$  Sattelpunkt der zugehörigen Lagrangefunktion für  $u \geq 0$  ist, die in  $x$  konvex und in  $u$  konkav ist. Kommen zu den Nebenbedingungen noch Nichtnegativbedingungen  $x \geq 0$  hinzu, so gilt der Satz, wenn auch der Sattelpunkt nur für  $u \geq 0, x \geq 0$  betrachtet wird. Für stetig differenzierbare Lagrangefunktionen  $\Phi(x, u)$  besagen die *lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen*, daß  $(x^{(0)}, u^{(0)})$  Sattelpunkt für  $u \geq 0$  genau dann ist, wenn

$\text{grad}_x \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) \leq 0, \text{grad}_x \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) = 0, u^{(0)T} \text{grad}_x \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) = 0, u^{(0)} \geq 0$  ist, und Sattelpunkt für  $u \geq 0, x \geq 0$  genau dann ist, wenn in den Bedingungen nur  $\text{grad}_x \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) \geq 0$ , aber dafür auch noch  $x^{(0)T} \text{grad}_x \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) = 0$  und  $x \geq 0$  gilt.

**Kummer**, Ernst Eduard, geb. 29. 1. 1810 Sorau (Żary), gest. 14. 5. 1893 Berlin. — K. war 1832/42 Lehrer am Gymnasium von Liegnitz (Legnica), dann bis 1856 an der Universität von Breslau (Wrocław); danach war K. bis 1883 Professor an der Universität Berlin. Seine hauptsächl. mathemat. Leistungen sind die *Differentialgeometrie* der Kongruenzen und die Einführung der *idealen Zahlen* in die Theorie der algebraischen Zahlkörper.

**Kundenstrom**  $\nearrow$  Bedienungstheorie.

**künstliche Variable**  $\nearrow$  Ecke II.

**Kuppelproduktion**  $\nearrow$  Verflechtungsbilanz.

**Kuratowski**, Kazimierz, geb. 2. 2. 1896 Warschau, gest. 18. 6. 1980 Warschau. — K. studierte 1913/20 in Glasgow und Warschau bei W. SIERPINSKI und S. MAZURKIEWICZ. Nach der Promotion war er 1921/27 in Warschau und 1927/34 in Lwow Professor. K. arbeitete auf vielen Gebieten der Mathematik, insbes. der Mengenlehre und der Topologie, und erzielte wichtige Resultate. Er leistete einen großen Beitrag beim Aufbau der Mathematik in Volkspolen. **Kuratowski, Satz von**  $\nearrow$  Graph, ebener.

**Kurve**: eine zusammenhängende Punktmenge  $C$  im dreidimensionalen euklid. Raum  $\mathbb{R}_3$ , in der es zu jedem Punkt  $P$  aus  $C$  eine Umgebung  $U$  der Eigenschaft gibt, daß die in  $U$  liegenden Punkte von  $C$  sich als Kurvenstücke darstellen lassen. Bzgl. eines kartes. Koordinatensystems wird jeder Punkt im  $\mathbb{R}_3$  durch seinen Ortsvektor  $x = (x_1, x_2, x_3)$  festgelegt.

Sind die Koordinaten  $x_i = x_i(t)$  für  $i = 1, 2, 3$  Funktionen eines reellen Parameters  $t$  aus dem Intervall  $t_1 \leq t \leq t_2$ , so nennt man  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  die *Parameterdarstellung eines Kurvenstücks*, die für jeden Parameterwert einen Kurvenpunkt durch seine Koordinaten bestimmt. Die K.enstücke und die K. sind danach einparametr. geometr. Gebilde. Die Funktionen  $x_i(t)$  sollen genügend oft stetig differenzierbar sein; meist genügt es, die Existenz und Stetigkeit der ersten drei Ableitungen zu fordern. Gilt außerdem für alle  $t$  aus dem Intervall  $x_i' = dx_i(t)/dt \neq 0$  für mindestens ein  $i$ , so spricht man von einem *glatten Kurvenstück*.

Den Parameter eines Kurvenstücks kann man willkürlich wählen. Zwei Parameter  $t$  und  $t^*$  sind durch die *Parametertransformation*  $t = t(t^*)$  verknüpft; dabei wird gefordert, daß im Intervall  $t_1^* \leq t^* \leq t_2^*$  überall  $dt/dt^* \neq 0$  ist. Die Differentialgeometrie untersucht nur geometr. Eigenschaften der K., die nicht von der zufälligen analyt. Form der Darstellung, z. B. von der Wahl des Parameters abhängen. Eine K. kann auch durch eine *implizite Darstellung*, durch zwei unabhängige Gleichungen der Gestalt  $g(x_1, x_2, x_3) = 0, h(x_1, x_2, x_3) = 0$  gegeben werden, d. h. geometrisch als Schnitt zweier Flächen  $g = 0, h = 0$ . S. a. Funktion IV.; Kurve zweiter Ordnung.

**Kurve des gleichgerichteten Wechselstroms**

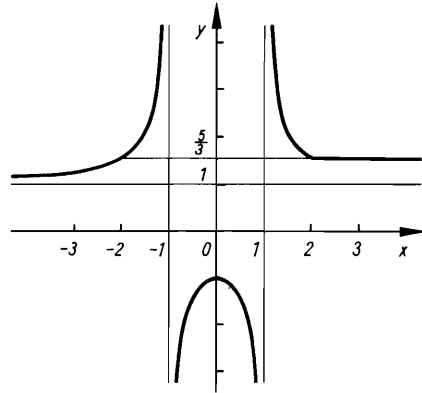
Fouriersche Reihe III.3.

**Kurvendiskussion:** I. Untersuchung des Verlaufs der Bildkurve bzw. des Graphen einer reellen Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$ . Die K. beginnt mit der Angabe der Bereiche, in denen die Funktion definiert, stetig und differenzierbar ist, und mit der Angabe von Unstetigkeitsstellen. Wichtig für den Kurvenverlauf sind *Nullstellen, Unendlichkeitsstellen* wie *Polstellen*, relative und absolute *Extrema* und *Wendepunkte, Monotonie- und Konvexitätsbereiche*. Über ihren Verlauf außerhalb des Zeichenfeldes gibt das *Verhalten der Funktion  $f$  im Unendlichen* Aufschluß. Bei experimentell gewonnenen Kurven, z. B. in Naturwissenschaften kann der Gang der K. umgekehrt verlaufen: Die Punkte, die sich als Bilder der gemessenen zugeordneten Wertepaare ergeben, sind zu einer Kurve zu ergänzen, deren Monotonie- und Konvexitätsbereiche, Nullstellen, Extrema und Unstetigkeitsstellen Hinweise geben, welche Funktion sie zum Bilde haben, und damit den untersuchten Ablauf in der Natur am besten approximieren (vgl. Extremwert VII.2.).

Hier wird stets von einer gegebenen Funktion  $f$  ausgegangen. Aus ihrer speziellen Gestalt ergeben sich meist die Bereiche unmittelbar, in denen sie definiert, in denen sie stetig und in denen sie differenzierbar ist. Unstetigkeitsstellen können z. B. Sprungstellen, Unendlichkeitsstellen, Lücken oder Stellen mit nur einseitiger Ableitung sein. Aus der Untersuchung der ersten bzw. zweiten Ableitung ergeben sich Extrema, Wendepunkte und Monotonie- bzw. Konvexitätsbereiche. Sind allerdings die Voraussetzungen für die Anwendung der entsprechenden Sätze der Differentialrechnung nicht erfüllt, so müssen, i. allg. nach der Definition der zu unter-

suchenden Eigenschaften, spezielle Wege gefunden werden. Die einzelnen Schritte einer K. werden an zwei Beispielen geschildert.

II. Die zu diskutierende Funktion  $f$  hat für  $x > 2$  den Wert  $f(x) = 5/3$  und ist für  $x \leq 2$  bestimmt durch  $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$  (Abb. 1).



Kurvendiskussion. Abb. 1: Graphische Darstellung der Funktion  $f(x) = 5/3$  für  $x > 2$  und  $(x^2 + 1)/(x^2 - 1)$  für  $x \leq 2$

II.1. *Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereich.* Die Funktion  $f$  ist für  $x > 2$  stetig und differenzierbar; für  $x_1 = 2$  ist sie stetig, da  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5/3 = f(2)$  gilt, jedoch nicht differenzierbar, denn die einseitigen Ableitungen (1) und (2) existieren und sind voneinander verschieden.

$$(1) \quad \lim_{x \downarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \downarrow 2} \frac{0}{x - 2} = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{x \uparrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \uparrow 2} \frac{1 + 2/(x^2 - 1) - 5/3}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \uparrow 2} \frac{-2(x^2 - 1) + 6}{3(x^2 - 1)(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \uparrow 2} \frac{-2(x^2 - 4)}{3(x^2 - 1)(x - 2)} = -\frac{8}{9}$$

Für  $x < 2$  ist  $f$  außer an den Stellen  $x_2 = 1, x_3 = -1$  stetig und differenzierbar; nach (3) sind die Unstetigkeitsstellen  $x_2$  und  $x_3$  Pole erster Ordnung.

$$(3) \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{(x - 1)(x + 1)}$$

II.2. *Nullstellen, Unendlichkeitsstellen.* Die Funktion  $f(x)$  hat keine Nullstellen, denn es existiert kein  $x$  mit  $f(x) = 0$ . Das Verhalten von  $f$  in der Nähe der Polstellen erster Ordnung,  $x_2 = 1$  und  $x_3 = -1$ , wird durch die einseitigen Grenzwerte (4) beschrieben.

$$(4) \quad \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

**II.3. Extrema und Wendepunkte.** In den Differenzierbarkeitsbereichen  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 1[$ ,  $]1, 2[$  und  $]2, +\infty[$  werden die Nullstellen der ersten Ableitung (5) untersucht ( $\nearrow$  Extremwert I.). Nach (6) können relative Extrema nur für die Abszissen  $x_0 = 0$  oder  $x \in ]2, +\infty[$  vorliegen. Für  $x_0 = 0$  ergibt sich ein relatives Maximum wegen (8); es ist  $f(0) = -1$ . Im Intervall  $2 < x < +\infty$  ist die Kurve von  $f(x)$  ein Geradenstück parallel zur  $x$ -Achse, in diesem Intervall gilt  $f'(x) \equiv 0$ . Wegen (4) existieren keine absoluten Extrema und wegen (7) keine Wendepunkte.

$$(5) \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(x^2-1)^2} & \text{für } x < 2, x \neq 1, \\ & x \neq -1 \\ 0 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$(6) \quad f'(x) \begin{cases} \neq 0 & \text{für alle } x < 2, x \neq 1, x \neq 0, \\ & x \neq -1 \\ = 0 & \text{für } x_0 = 0 \text{ und für alle } x > 2 \end{cases}$$

$$(7) \quad f''(x) = \frac{4(x^2-1)(3x^2+1)}{(x^2-1)^4} \neq 0$$

für alle  $x < 2, x \neq 1, -1$

$$(8) \quad f''(0) = -4 < 0$$

**II.4. Monotoniebereich.** Es gilt  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 0[$ , d. h., die Funktion  $f$  ist in diesen Intervallen streng monoton wachsend. Für alle  $x \in ]0, 1[ \cup ]1, 2[$  gilt  $f'(x) < 0$ , dort fällt  $f$  streng monoton; für  $x \in ]2, +\infty[$  ist sie nach Definition konstant:  $f(x) = 5/3$ .

**II.5. Konvexitätsbereiche:** Das Vorzeichen von  $f''$  ist nach (7) bestimmt durch das Vorzeichen des Ausdrucks  $4(x^2-1)(3x^2+1)$ , d. h.,  $f''(x) > 0$  für  $|x| > 1$  und  $f''(x) < 0$  für  $|x| < 1$ . Danach ist die Funktion  $f$  für alle  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, 2[$  konvex, für alle  $x \in ]-1, 1[$  streng konkav von unten.

**II.6. Das Verhalten im Unendlichen** wird durch (9)

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5/3 = 5/3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2-1} \right) = 1$$

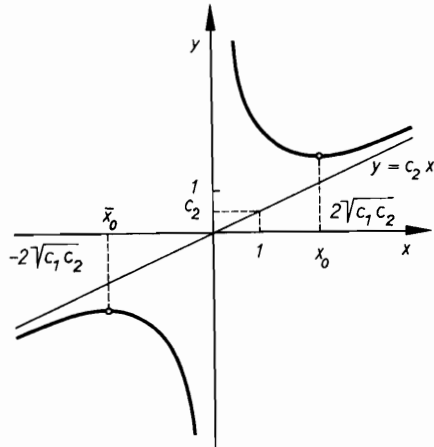
bestimmt. Für  $x \geq 2$  hat  $f$  den konstanten Wert  $y = 5/3$ , für  $x \rightarrow -\infty$  nähert sich ihr Bild asymptotisch der durch  $y = 1$  bestimmten Parallelen zur  $x$ -Achse.

**III. Unter Voraussetzung optimaler Lagerpolitik,** bei linearem Vorratsabbau und einem Ausstoß von  $Q$  Stück Produkten zur Zeit  $t = 0$  berechnen sich die Gesamtkosten  $C = C(Q)$  eines einfachen Lagerhaltungsmodells mit konstanter Lieferrate nach (10). Dabei bezeichnen  $B > 0$  das Planstücksoll,  $K$  die Kosten für die Vorbereitung und den Abschluß einer Serie,  $T > 0$  den Planzeitraum und  $k > 0$  die Kosten für die Lagerung eines Stücks. Die Kostenfunktion  $C$  mit der Gleichung (10) ist zu diskutieren. — In

der übl. Funktionsschreibweise hat (10) die Gestalt (11), wenn  $C$  mit  $y$  und  $Q$  mit  $x$  bezeichnet werden und  $c_1$  und  $c_2$  positive Konstanten sind (Abb. 2).

$$(10) \quad C(Q) = BK/Q + 1/2 kTQ$$

$$(11) \quad y = f(x) = c_1/x + c_2x$$



Kurvendiskussion. Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktion zum Lagerhaltungsmodell

**III.1. Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbereiche.**

Die Funktion  $f$  ist differenzierbar und stetig für alle  $x \neq 0$ . Für  $x_1 = 0$  existieren auch keine einseitigen Ableitungen;  $x_1 = 0$  ist Polstelle.

**III.2. Nullstellen, Unendlichkeitsstellen.** Wegen  $c_1, c_2 > 0$  hat  $c_1/x + c_2x = 0$  keine reelle Lösung, d. h.,  $f$  hat keine Nullstellen;  $x_1 = 0$  ist Polstelle, und es gilt (12).

$$(12) \quad \lim_{x \downarrow 0} (c_1/x + c_2x) = +\infty, \\ \lim_{x \uparrow 0} (c_1/x + c_2x) = -\infty.$$

**III.3. Extrema und Wendepunkte.** Die Differenzierbarkeitsbereiche sind  $]-\infty, 0[$  und  $]0, +\infty[$ . Die Gleichung  $f'(x_0) = -c_1/x_0^2 + c_2 = 0$  hat die zwei Lösungen  $x_0 = \sqrt{c_1/c_2}$  und  $\bar{x}_0 = -\sqrt{c_1/c_2}$ .

Wegen  $f''(x_0) = 2c_1/(x_0^3) > 0$  führt  $x_0 = \sqrt{c_1/c_2}$  zu einem relativen Minimum, wegen  $f''(\bar{x}_0) = 2c_1/(\bar{x}_0^3) < 0$  führt  $\bar{x}_0 = -\sqrt{c_1/c_2}$  zu einem relativen Maximum für  $f$ . Die extremalen Funktionswerte betragen  $f(x_0) = 2\sqrt{c_1c_2}$ ,  $f(\bar{x}_0) = -2\sqrt{c_1c_2}$ .

Wegen des Verhaltens von  $f$  in der Umgebung von  $x_1 = 0$  existieren keine absoluten Extrema. Wird der Definitionsbereich von  $f$  allerdings auf  $x > 0$  eingeschränkt, wie es auch der ökonom. Sachverhalt sinnvoll fordert, dann führt  $x_0$  zu einem absoluten Minimum der Kostenfunktion.

**III.4. Monotonie.** Es gilt  $f'(x) = -c_1/x^2 + c_2 > 0$  für alle  $|x| > \sqrt{c_1/c_2}$ ,  $f'(x) < 0$  für alle  $x$  mit  $0 < |x| < \sqrt{c_1/c_2}$ , d. h., die Funktion  $f$  ist streng monoton wachsend für alle  $x \in ]-\infty, \bar{x}_0[ \cup ]x_0, +\infty[$ ;

die Funktion  $f$  ist streng monoton fallend für alle  $x \in ]\bar{x}_0, 0[ \cup ]0, x_0[$ .

**III.5. Konvexität.** Für die zweite Ableitung gilt  $f''(x) = 2c_1/(x^3) > 0$  für  $x > 0$  und  $f''(x) < 0$  für  $x < 0$ . Danach ist die Funktion  $f$  von unten konvex für positive  $x$  und von unten konkav für negative  $x$ .

**III.6. Das Verhalten im Unendlichen** wird durch (13) und (14) bestimmt, da  $c_2 > 0$ .

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (c_1/x + c_2x) = +\infty,$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (c_1/x + c_2x) = -\infty,$$

**Kurvenintegral: I.** Das  $K$ . erster Art ist eine Verallgemeinerung des bestimmten Integrals ( $\nearrow$  Integral I.), bei der die Integration nicht über die  $x$ -Achse, sondern über eine ebene oder räuml. Kurve erfolgt.

**I.1.** Zu einem  $K$ . erster Art über eine ebene Kurve gelangt man, wenn etwa auf der glatten Kurve  $k$  (Abb. 1) mit dem Anfangspunkt  $A$  und dem End-

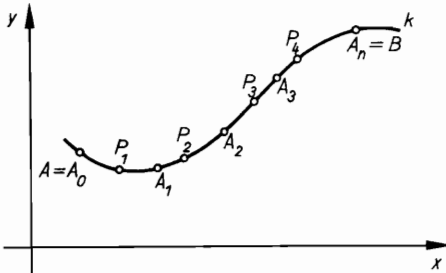


Abb. 1: Definition des Kurvenintegrals erster Art

punkt  $B$  eine beschränkte Funktion  $u = f(x, y)$  definiert ist. Werden dann auf  $k$  die Punkte  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$  beliebig gewählt, so entsteht eine Zerlegung  $Z$  der Kurve in Teilstücke. Man bezeichnet für  $i = 1, 2, \dots, n$  mit  $\Delta s_i$  die Länge des Teilstücks zwischen  $A_{i-1}$  und  $A_i$ , mit  $\Delta(Z)$  die Länge (1) des größten Teilstücks in der Zerlegung  $Z$  und wählt zwischen  $A_{i-1}$  und  $A_i$  einen beliebigen Punkt  $P_i$  mit den Koordinaten  $\xi_i, \eta_i$ . Dann ergibt sich die *Zwischensumme* (2). Ihr Grenzwert  $I$  heißt  $K$ . erster

$$(1) \quad \Delta(Z) = \max_i \Delta s_i;$$

$$(2) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

Art von  $f(x, y)$  über die Kurve  $k$ . Er existiert und wird durch (3) dargestellt, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\epsilon) > 0$  gibt, so daß für jede Zerlegung  $Z$  mit  $\Delta(Z) < \delta$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \epsilon$  gilt.

$$(3) \quad I = \int_{(k)} f(x, y) ds \quad \text{oder} \quad I = \int_{AB} f(x, y) ds$$

Wird die Kurve  $k$  der Länge  $l$  in Parameterdarstellung  $x = x(s), y = y(s)$  für  $0 \leq s \leq l$  mit der *Bogenlänge*  $s$  als Parameter dargestellt, so wird durch die Gleichung (4) das  $K$ . auf ein bestimmtes Integral

$$(4) \quad \int_{(k)} f(x, y) ds = \int_0^l f(x(s), y(s)) ds$$

zurückgeführt. Ist  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  mit  $\alpha \leq t \leq \beta$  eine Parameterdarstellung der Kurve mit einem beliebigen Parameter  $t$ , so gilt (5) für das  $K$ . Dabei

$$(5) \quad \int_{(k)} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt$$

bedeutet ein übergesetzter Punkt die Ableitung nach dem Parameter  $t$ .

Ist z. B. die Kurve  $k$  der Halbkreis um den Ursprung mit der Parameterdarstellung  $x = r \cos t, y = r \sin t$  für  $0 \leq t \leq \pi$ , so ist  $\sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} = r$ . Das  $K$ . über die Funktion  $f(x, y) = y$  ergibt dann (6).

$$(6) \quad \int_{(k)} y ds = \int_0^{\pi} r^2 \sin t dt = 2r^2$$

**I.2.** Zu dem  $K$ . erster Art über eine Raumkurve gelangt man auf analoge Weise, wenn etwa auf der Raumkurve eine Funktion  $u = f(x, y, z)$  definiert ist, z. B. durch die Parameterdarstellung  $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$  für  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Durch die Umrechnung (7) geht das  $K$ . in ein bestimmtes Integral über.

$$(7) \quad \int_{(k)} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)} dt$$

**I.3.** Ein  $K$ . erster Art hängt nicht von der Durchlaufrichtung der Kurve  $k$  ab, d. h., werden Anfangspunkt  $A$  und Endpunkt  $B$  vertauscht, so gilt (8).

$$(8) \quad \int_{BA} f(x, y) ds = \int_{AB} f(x, y) ds$$

Setzt sich für ein  $K$ . erster Art die Kurve  $k$  aus den beiden Kurven  $k_1$  und  $k_2$  zusammen, ist das  $K$ . über  $k$  die Summe der  $K$ .e über  $k_1$  und  $k_2$ ; es gilt (9).

$$(9) \quad \int_{(k)} f(x, y) ds = \int_{(k_1)} f(x, y) ds + \int_{(k_2)} f(x, y) ds$$

Eine Anwendung für dieses  $K$ . ist die Berechnung der *Arbeit*, die eine Kraft längs eines Weges leistet.

**II.1.** Zum  $K$ . zweiter Art gelangt man durch analoge Überlegungen wie zum  $K$ . erster Art. Auf der glatten Kurve mit dem Anfangspunkt  $A = A_0$  und dem Endpunkt  $B = A_n$  soll eine beschränkte Funktion  $u = f(x, y)$  definiert sein. Durch die Wahl von Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  auf  $k$  entsteht (Abb. 2)

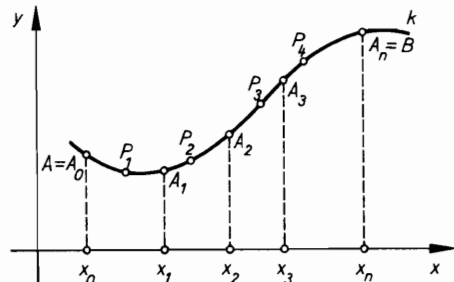


Abb. 2: Definition des Kurvenintegrals zweiter Art

wieder eine Zerlegung  $Z$  der Kurve in Teilstücke, und  $\Delta(Z)$  bezeichnet für die Zerlegung  $Z$  den größten der Abstände der Punkte  $A_{i-1}$  und  $A_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Auf jedem Teilstück wird zwischen  $A_{i-1}$  und  $A_i$  beliebig ein Punkt  $P_i$  gewählt. Sind dann  $x_i, y_i$  die Koordinaten von  $A_i$  und  $\xi_i, \eta_i$  die Koordinaten von  $P_i$ , so heißt die Summe (10) mit

$$(10) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  die zur Zerlegung  $Z$  und zur Wahl der  $P_i$  gehörende *Zwischensumme*. Im Unterschied zu den *Zwischensummen* (2) des K. erster Art, in denen der Funktionswert  $f(\xi_i, \eta_i)$  mit der Länge  $\Delta s_i$  des Bogens zwischen  $A_{i-1}$  und  $A_i$  multipliziert wird, steht hier als Faktor des Funktionswertes  $f(\xi_i, \eta_i)$  die Länge  $\Delta x_i$  der Projektion dieses Bogens auf die  $x$ -Achse. Der Grenzwert  $I$  der *Zwischensumme* (10) heißt das K. zweiter Art der Funktion  $f(x, y)$  über die Kurve  $k$ . Er existiert, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  so angegeben werden kann, daß für jede Zerlegung  $Z$  der Kurve mit  $\Delta(Z) < \delta$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$  gilt. Gleichung (11) ist die symbol. Darstellung für das K. zweiter Art.

$$(11) \quad I = \int_{(k)} f(x, y) dx \text{ oder } I = \int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

Analog wird das K. zweiter Art (12) definiert, falls

$$(12) \quad I = \int_{(k)} f(x, y) dy \text{ oder } I = \int_{\overline{AB}} f(x, y) dy$$

man in den *Zwischensummen* den Funktionswert  $f(\xi_i, \eta_i)$  mit der Länge  $\Delta y_i$  der Projektion des Bogens zwischen  $A_{i-1}$  und  $A_i$  auf die  $y$ -Achse multipliziert.

Für eine *Raumkurve*  $k$  und eine auf ihr definierte Funktion  $f(x, y, z)$  lassen sich analog die drei Zahlen  $\int_{(k)} f(x, y, z) dx, \int_{(k)} f(x, y, z) dy$  und  $\int_{(k)} f(x, y, z) dz$  definieren. Sind auf einer ebenen Kurve zwei Funktionen  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$  gegeben, so kann man ein *allgemeines K. zweiter Art* durch (13) und analog für eine *Raumkurve* bei drei gegebenen Funktionen durch (14) definieren.

$$(13) \quad \int_{(k)} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \\ = \int_{(k)} P(x, y) dx + \int_{(k)} Q(x, y) dy$$

$$(14) \quad \int_{(k)} [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz] = \\ \int_{(k)} P(x, y, z) dx + \int_{(k)} Q(x, y, z) dy + \\ \int_{(k)} R(x, y, z) dz$$

**II.2.** Das K. zweiter Art hängt von der *Durchlaufrichtung* der Kurve  $k$  ab. Wählt man  $B$  als Anfangspunkt und  $A$  als Endpunkt, so gilt (15). Setzt sich

$$(15) \quad \int_{\overline{BA}} f(x, y) dx = - \int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

die Kurve  $k$  aus den beiden Kurven  $k_1$  und  $k_2$  zusammen, so ist das K. über  $k$  die Summe der K.e

über  $k_1$  und  $k_2$ , wie (16) angibt.

$$(16) \quad \int_{(k)} f(x, y) dx = \int_{(k_1)} f(x, y) dx + \int_{(k_2)} f(x, y) dx$$

**II.3.** Das K. zweiter Art läßt sich auf verschiedene Art als *bestimmtes Integral* auswerten. Lautet die Parameterdarstellung der Kurve  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  für  $\alpha \leq t \leq \beta$  mit stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi(t), \psi(t)$  und ist  $f(x, y)$  auf  $k$  stetig, so existieren die K.e  $\int_{(k)} f(x, y) dx$  und  $\int_{(k)} f(x, y) dy$ , und es gelten die Umrechnungen (17a) und (17b) auf bestimmte Integrale.

$$(17a) \quad \int_{(k)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\varphi}(t) dt,$$

$$(17b) \quad \int_{(k)} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\psi}(t) dt$$

Analog hat man für eine *Raumkurve* mit der Parameterdarstellung  $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$  mit  $\alpha \leq t \leq \beta$  die Formeln (18a), (18b) und (18c).

$$(18a) \quad \int_{(k)} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \dot{\varphi}(t) dt$$

$$(18b) \quad \int_{(k)} f(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \dot{\psi}(t) dt,$$

$$(18c) \quad \int_{(k)} f(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \dot{\chi}(t) dt$$

Ist z. B. die Kurve  $k$  das Stück einer Parabel mit der Gleichung  $y = x^2$  zwischen den Punkten (0, 0) und (1, 1), so ist  $x = t, y = t^2$  mit  $0 \leq t \leq 1$  eine Parameterdarstellung, und für das K. folgt (19).

$$(19) \quad \int_{(k)} [xy dx + (y - x) dy] \\ = \int_0^1 [t^3 + (t^2 - t) 2t] dt \\ = \int_0^1 [3t^3 - 2t^2] dt = 1/12$$

**III.1.** Zwischen dem K. erster und dem K. zweiter Art bestehen Beziehungen. Ist z. B.  $k$  eine glatte Kurve der Ebene bzw. eine glatte *Raumkurve* und schließt ihre dem Durchlauf von  $k$  entsprechende Tangente mit den Koordinatenachsen Winkel der Größen  $\alpha, \beta$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  ein, so gelten (20) und (21).

$$(20) \quad \int_{(k)} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \\ = \int_{(k)} [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds$$

$$(21) \quad \int_{(k)} [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz] \\ = \int_{(k)} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta \\ + R(x, y, z) \cos \gamma] ds$$

**III.2.** Das K. zweiter Art ist vom Integrationsweg abhängig. Im allg. hängt  $\int_{(k)} [P dx + Q dy]$  bei festem



Anfangspunkt  $A = (x_A, y_A)$  und festem Endpunkt  $B = (x_B, y_B)$  noch vom Weg  $k$  ab, der beide Punkte verbindet. Es ist genau dann unabhängig von der Kurve  $k$ , die die beiden Punkte  $A$  und  $B$  verbindet, wenn  $k$  ganz in einem *einfach zusammenhängenden Gebiet*  $G$  liegt, in dem die Funktionen  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$  mit ihren partiellen Ableitungen  $\frac{\partial P}{\partial y}$  und  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  stetig sind und es eine Funktion  $U(x, y)$  gibt, für die  $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$  gilt. Der Integrand  $[P dx + Q dy]$  des K.s ist dann das *totale Differential* einer Funktion  $U(x, y)$ . In diesem Falle kann das K. durch die Beziehung (22) berechnet werden. Man spricht dann von der *Integration eines totalen Differentials*.

$$(22) \int_{(k)} [P dx + Q dy] = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A)$$

Die Funktionen  $P(x, y) = x + y, Q(x, y) = x - y$  sind z. B. mit ihren partiellen Ableitungen überall stetig, und für die Funktion  $U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + xy$  gilt  $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q$ , d. h.,  $[P dx + Q dy]$  ist das totale Differential der Funktion  $U(x, y)$ . Dann hängt das Integral  $\int_{(k)} [(x + y) dx + (x - y) dy]$  nicht von dem Weg  $k$  ab, der die beiden Punkte  $(1, 1)$  und  $(3, 1)$  als glatte Kurve verbindet, und es gilt (23).

$$(23) \int_{(k)} [(x + y) dx + (x - y) dy] = U(3, 1) - U(1, 1) = 6$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz einer solchen Funktion  $U(x, y)$  und damit für die *Wegunabhängigkeit* des K.s ist die Gültigkeit der *Integrabilitätsbedingung*  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  für alle Punkte des einfach zusammenhängenden Gebiets  $G$ .

In einem Beispiel wird gezeigt, wie die Funktion  $U(x, y)$  berechnet werden kann. Ist z. B.  $P(x, y) = (-y)/(x^2 + y^2), Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ , dann sind in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$ , das den Koordinatenursprung nicht enthält, die Funktionen  $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  stetig, und die Integrabilitätsbedingung ist nach (24) erfüllt.

$$(24) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ für } x \neq 0, y \neq 0$$

Es gibt deshalb eine Funktion  $U(x, y)$ , deren totales Differential  $P dx + Q dy$  ist. Wegen (25) folgt (26)

$$(25) \frac{\partial U}{\partial x} = P = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$(26) U(x, y) = -\arctan(x/y) + C(y)$$

durch Integration nach  $x$ . In (26) kann dabei die Integrationskonstante noch von  $y$  abhängen. Durch Differenzieren dieses Ergebnisses nach  $y$  folgt (27),

und weil  $\frac{\partial U}{\partial y} = Q = x/(x^2 + y^2)$  gelten muß, ist

$$(27) \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{1 + (x/y)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} + C' = x/(x^2 + y^2) + C'(y)$$

$C'(y) = 0$ , d. h.,  $C(y) = \text{const.}$  Demnach ist  $U(x, y) = -\arctan(x/y) + C$  die gesuchte Funktion. In einem Gebiet, das den Koordinatenursprung enthält, ist dieses K. nicht wegunabhängig. Es müßte sonst etwa über den Kreis um den Ursprung verschwinden. Aber mit der Parameterdarstellung  $x = \cos t, y = \sin t$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$  folgt (28).

$$(28) \int_{(k)} [P dx + Q dy] = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

Das K. zweiter Art  $\int_{(k)} [P dx + Q dy + R dz]$  über eine Raumkurve  $k$  hängt genau dann nicht von der die Punkte  $A$  und  $B$  verbindenden Kurve  $k$  ab, wenn die Funktionen  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$  in einem flächenhaft einfach zusammenhängenden Gebiet stetig sind und es eine Funktion  $U(x, y, z)$  gibt, für die  $\frac{\partial U}{\partial x} = P, \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \frac{\partial U}{\partial z} = R$  gilt. Einfach zusammenhängend heißt dabei ein räuml. Gebiet  $G$ , das mit jeder geschlossenen Fläche auch das von dieser Fläche eingeschlossene Gebiet enthält. Notwendig und hinreichend für die Existenz der Funktion  $U(x, y, z)$  und damit für die Wegunabhängigkeit des K.s ist die Gültigkeit der *Integrabilitätsbedingungen* (29).

$$(29) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Das K. (30) ist z. B. wegunabhängig, denn die

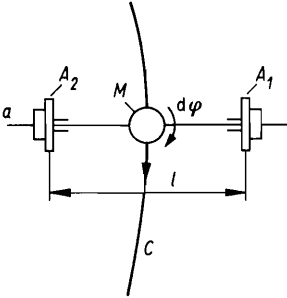
$$(30) \int_{(k)} [(x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz]$$

Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt. Das totale Differential der Funktion  $U(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - xyz + C$  ist der Integrand des K.

**Kurvenintegral, komplexes**  $\nearrow$  Integral, komplexes, I. **Kurvenlineal**  $\nearrow$  Kurvenzeichner III.

**Kurvenmesser, Kurvimeter:** Instrument zur Bestimmung der *Bogenlänge* von ebenen Kurvenstücken. Meist wird im K. mit einer Meßrolle das betreffende Kurvenstück abgefahren. Zur Entfernungsbestimmung auf Landkarten z. B. werden die Umdrehungen der Meßrolle auf einen Zeiger übertragen, der auf einer kreisförmigen Skala, die in den am häufigsten vorkommenden Maßstäben geeicht ist, unmittelbar die Entfernung anzeigt. Präzisions-K. verwenden Meßrollen mit Nonius und Zählscheibe, wie sie z. B. vom Planimeter her bekannt sind. Im *Einrollengerät* muß die Ebene der einzigen Meßrolle beim Entlangführen auf der Kurve

stets die Tangente an die Kurve enthalten und senkrecht zur Zeichenebene stehen. Beim *Zweirollengerät* bewegen sich die zwei Meßrollen  $A_1, A_2$  gleichen Durchmessers so in einem Rahmen, daß ihre Achsen auf einer Geraden  $a$  liegen. Der Mittelpunkt  $M$  der Verbindungsstrecke der beiden Rollenauflagepunkte wird längs der Kurve  $C$  bewegt



Kurvenmesser: Montierung der Rollen  $A_1, A_2$  beim Zweirollengerät

(Abb.). Bei Drehung der Achse  $a$  um den Kontingenzwinkel  $d\varphi$  weichen die Zählwerke beider Rollen um gleiche Beträge verschiedenen Vorzeichens voneinander ab. Die Länge der Kurve  $C$  ergibt sich deshalb aus der halben Summe der Ablesungen an  $A_1$  und  $A_2$ . Durch geeignete Wahl der Rollendurchmesser kann erreicht werden, daß die Summe der Ablesungen sofort die Bogenlänge liefert, wenn die Rollen vor Beginn der Messung auf Null eingestellt wurden.

**Kurvennormale** ↗ Normale II.

**Kurventheorie:** Teilgebiet der Differentialgeometrie, das die inneren geometr. Eigenschaften von Raumkurven untersucht, z. B. das *Umkehrproblem*, aus der Krümmung  $k(s)$  und der Torsion  $\tau(s)$  den Kurvenverlauf durch Integration zu bestimmen (↗ natürliche Gleichungen).

**Kurvenzeichner:** Instrument, mit dem eine spezielle ebene Kurve wenigstens stückweise gezeichnet werden kann; in vielen Fällen mittels einer mechan. Realisierung der jeweiligen Kurvendefinition bzw. von Folgerungen aus dieser Definition. Man kann zeigen, daß sich zu jeder algebraischen ebenen Kurve ein geeigneter Mechanismus konstruieren läßt.

**I.** Zum Zeichnen von Geraden dient das ↗ *Lineal* oder die *Geradführung* (↗ Gelenkmechanismus III.). Der Kreis kann mit Hilfe eines *Zirkels* konstruiert werden, der im Prinzip aus zwei an einem Ende durch ein feststellbares Gelenk verbundenen Stangen besteht. Das zweite Ende ist bei einer Stange mit einer Spitze versehen, die im Mittelpunkt  $M$  des Kreises fixiert wird. Der am anderen Ende der zweiten Stange angebrachte Schreibstift  $S$  beschreibt die Menge aller Punkte, die von  $M$  einen festen Abstand haben, der vom Schnittwinkel der Stangen und von ihrer Länge abhängt.

**II.** Zum Zeichnen von Ellipsen kann man Affinzeichner (↗ Gelenkmechanismus II.) verwenden,

da Ellipsen affine Bilder von Kreisen sind, einfacher ist jedoch ein *Ellipsenzirkel* oder *Ellipsograph* (↗ Ellipsenkonstruktion III.). Bei der bekanntesten Ausführung dieses Geräts gleiten die Punkte  $Q$  und  $R$  einer Stange mit Hilfe von Zapfen in zwei zueinander senkrechten Führungsschienen, an der Stange ist außerdem in einem Punkt  $P$  ein Schreibstift befestigt, der dann eine Ellipse mit den Halbachsen  $|QP|$  und  $|RP|$  beschreibt. Die Punkte  $Q, R$  und  $P$  sind mit Hilfe von festklembaren Hülsen auf der Stange verschiebbar, dadurch ist die Einstellung unterschiedl. Halbachsen möglich. Die beiden Führungsschienen geben die Richtung der Halbachsen an, ihr Schnittpunkt liefert den Mittelpunkt der Ellipse.

Auch aus den Eigenschaften von Parabeln und Hyperbeln sind Gelenkmechanismen entwickelt worden, die als *Parabelzeichner* bzw. *Hyperbelzeichner* Verwendung finden. Neben diesen Stangenmechanismen werden auch Geräte verwendet, bei denen ein Zahnrad, das an geeigneter Stelle einen Schreibstift trägt, längs eines festen Zahnrades oder einer festen Zahnstange abrollt; auf diese Weise lassen sich z. B. Zykloiden zeichnen, allerdings kann dabei das Übersetzungsverhältnis, von dem die Gestalt der Kurve abhängt, nur durch Auswechseln mindestens eines Zahnrades geändert werden.

**III.** Liegen nur einzelne Punkte vor, so kann ein *Kurvenlineal* zum Zeichnen einer durch diese Punkte gehenden Kurve verwendet werden. Es besteht entweder aus einer *Schablone*, deren Berandung aus Kurvenstücken unterschiedl. Krümmung zusammengesetzt ist, oder aus einer *biegsamen Leiste* aus Metall oder Plast, die auf dem Zeichenblatt nach Anpassung an die vorhandenen Punkte in der gewünschten Form fixiert werden kann.

**Kurve zweiter Ordnung:** I. Menge aller Punkte  $P(x, y)$  einer Ebene, deren Koordinaten  $x, y$  in einem *kartes.* oder *Parallelkoordinatensystem* eine Gleichung (1) zweiten Grades erfüllen, in der  $A, B, C, D, E, F$  reelle Zahlen und  $A, B, C$  nicht zugleich

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Null sind. Mit der in (2) gewählten Bezeichnung für

$$(2) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

die Koeffizienten aus (1) ergibt sich für die Gleichung der K. die Matrixdarstellung (3) oder (4),

$$(3) \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} + a_{00} = 0 \quad (4) \quad \tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} = 0$$

wenn für die (2, 2)-Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  mit  $i, k = 1, 2$  bzw. für die (3, 3)-Matrix  $\tilde{\mathbf{A}} = (a_{ik})$  mit  $i, k = 0, 1, 2$  gilt  $a_{ik} = a_{ki}$ , wenn  $\mathbf{a}^T = (a_{10} a_{20})$ ,  $\mathbf{x}^T = (x y)$  und  $\tilde{\mathbf{x}}^T = (1 x y)$ . Die K.n mit  $\det(\tilde{\mathbf{A}}) \neq 0$  sind die *nicht entarteten* K.n, die mit  $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$  sind die *entarteten* K.n. Die *nicht entarteten* sind zugleich die *nicht zerfallenden* K.n, d. h. die *Ellipsen*, speziell *Kreise*, die *Hyperbeln*, *Parabeln* und die *nullteiligen* K.n; die *entarteten* sind die *zerfallenden* K.n, z. B. *Geradenpaare* und *Doppelgeraden*. Ist Gleichung (2) in kartes. Koordinaten gegeben, so kann man durch eine

*Hauptachsentransformation* das Koordinatensystem so legen, daß die Gleichung der K. *Normalform* erhält. Für *nullteilige* K.n ist (5) eine Normalform; eine solche Kurve enthält keine Punkte mit reellen

$$(5) \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = 0$$

Koordinaten. Bei *Geradenpaaren* gibt es vier verschiedene Typen mit den Normalformen (6) und (8) bzw. (7) und (9) mit  $c \neq 0$ . Gleichung (6) stellt

$$(6) \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0 \quad (8) \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$$

$$(7) \quad x^2 - c^2 = 0 \quad (9) \quad x^2 + c^2 = 0$$

zwei sich schneidende Geraden  $y/b = x/a$  und  $y/b = -x/a$  dar, Gleichung (7) zwei parallele Geraden  $x = c$  und  $x = -c$ . Der Gleichung (8) genügt nur ein Punkt  $P(0, 0)$ , und die durch (9) dargestellte K. enthält keine reellen Punkte. Läßt man Punkte mit *komplexen Koordinaten* zu, so genügen der Gleichung (8) die beiden imaginären Geraden  $y/b = ix/a$  und  $y/b = -ix/a$  mit dem reellen Schnittpunkt  $P$ ; der Gleichung (9) genügen parallele imaginäre Geraden  $x = ic$  und  $x = -ic$ , und nach (5) enthält die nullteilige K. nur Punkte mit komplexen Koordinaten.

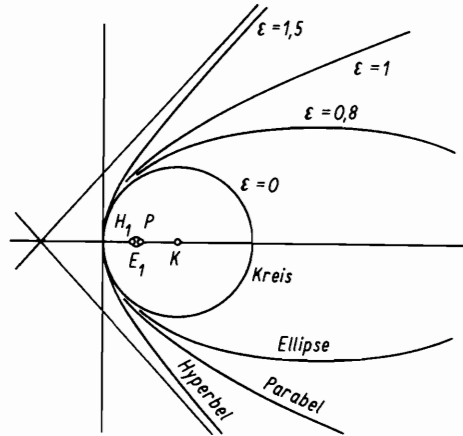
Die *Doppelgeraden* haben als Normalform  $x^2 = 0$ . Die K. mit dieser Gleichung besteht aus der Geraden  $x = 0$ , die doppelt gezählt wird, da sie z. B. als Grenzfall einer K. mit Gleichung (7) für gegen Null strebendes  $c$  auftritt.

II. Die K.n mit reellen Punkten, außer den Paaren paralleler Geraden, sind *Kegelschnitte*, und jeder Kegelschnitt ist eine K. Man verwendet daher die Bezeichnung *Kegelschnitt* in Erweiterung des Begriffs auch für alle K.n, insbes. heißt eine *nullteilige* K. auch *nullteiliger Kegelschnitt*, eine K. mit Gleichung (8), die nur einen reellen Punkt enthält, heißt *Nullkegelschnitt*. Für K.n mit  $\det(A) \neq 0$  in der Matrizenform (3) kann man einen *Mittelpunkt*  $P_0(x_0, y_0)$  aus dem Gleichungssystem  $Ax_0 = -a$  zu  $x_0 = -A^{-1}a = (x_0, y_0)^T$  bestimmen. Diese K.n sind die *Mittelpunktskegelschnitte*, d. h. die Ellipsen, speziell Kreise, die Hyperbeln, die nullteiligen K.n, die Paare sich schneidender Geraden und die Nullkegelschnitte. Mittelpunktskegelschnitte, die nicht ausgeartete K.n sind, sind dadurch ausgezeichnet, daß bei Benutzung homogener Koordinaten der auf sie bezogene Pol der unendlich fernen Geraden ein eigentl. Punkt, eben der Mittelpunkt ist.

III. Für Ellipsen, Kreise, Hyperbeln und Parabeln kann man eine gemeinsame Gleichungsform, die *Scheitelgleichung* erhalten, wenn man die *Hauptachse* von *Ellipse* oder *Hyperbel* bzw. die *Parabelachse* in die  $x$ -Achse eines kartes. Koordinatensystems legt, so daß bei Ellipsen der linke *Hauptscheitel*, bei Hyperbeln der rechte *Scheitel* bzw. der *Parabelscheitel* im Koordinatenursprung liegt. In der Scheitelgleichung (10) bedeuten  $p = b^2/a$  bei

$$(10) \quad y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2) x^2$$

Ellipsen und Hyperbeln, bei Parabeln ist  $p$  der *Parameter*, und  $\varepsilon$  ist die *numer. Exzentrizität*. Durch (10) werden für  $\varepsilon > 1$  Hyperbeln, für  $\varepsilon = 1$  Para-



Kurve zweiter Ordnung. Abb. 1: Abhängigkeit eines Kegelschnitts von der numerischen Exzentrizität

beln, für  $0 \leq \varepsilon < 1$  Ellipsen, für  $\varepsilon = 0$  Kreise dargestellt (Abb. 1). Ebenso erhält man diese Kegelschnitte aus der Brennpunktsgleichung (11) in

$$(11) \quad r = p/(1 - \varepsilon \cos \varphi)$$

*Polarkoordinaten*  $r, \varphi$  mit der Besonderheit, daß für  $\varepsilon > 1$  nur ein Ast einer Hyperbel dargestellt wird. Gleichung (11) gilt, wenn der Ursprung des Polarkoordinatensystems in einem Brennpunkt liegt und der Strahl  $\varphi = \pi$  durch den nächstgelegenen Scheitel geht. Für die durch (10) dargestellten K.n erhält man aus der Scheitelgleichung eine *rationale Parameterdarstellung* (12).

$$(12) \quad \begin{aligned} x &= 2p/(t^2 + 1 - \varepsilon^2), \\ y &= 2pt/(t^2 + 1 - \varepsilon^2) \end{aligned}$$

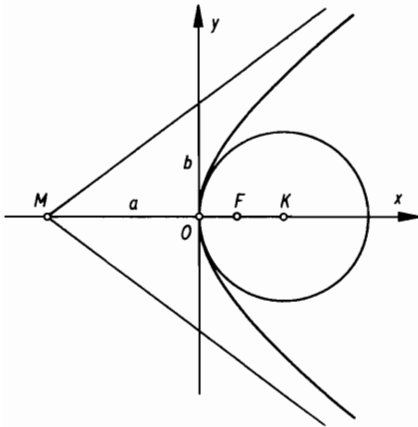
Ist  $P_0(x_0, y_0)$  ein Punkt einer nicht entarteten K.  $\tilde{x}^T \tilde{A} \tilde{x} = 0$ , so ist mit  $\tilde{x}_0^T = (1 \ x_0 \ y_0)$  durch (13) bzw. (13a) die Gleichung der *Tangente* in  $P_0$  an den Kegel-

$$(13) \quad \tilde{x}_0^T \tilde{A} \tilde{x} = 0,$$

$$(13a) \quad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) y + (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0$$

schnitt gegeben; liegt  $P_0$  nicht auf der K., so stellt (13) die *Polare* von  $P_0$  in bezug auf den Kegelschnitt dar.

IV. Zwei K.n schneiden sich i. allg. in vier Punkten. Haben zwei nicht entartete K.n in einem gemeinsamen Punkt  $P_0$  dieselbe Tangente, so berühren sie sich in  $P_0$  und können nur noch zwei weitere Schnittpunkte haben. Falls sie in  $P_0$  denselben Krümmungskreis haben, liegt dort *Oskulation* dieser Kegelschnitte vor, und sie haben noch einen weiteren Schnittpunkt. Haben zwei K.n in ihrer Scheitelgleichung dasselbe  $p$ , so liegt im Scheitel  $P_0(0, 0)$  *Superoskulation* vor, und diese K.n haben keinen weiteren Schnittpunkt. Der superoskulierende Kreis  $y^2 = 2px - x^2$  ist *Scheitelkreis* des Kegelschnitts



Kurve zweiter Ordnung. Abb. 2: Superoskulation des Kreises  $(x - 9a/16)^2 + y^2 = (9a/16)^2$  mit der Hyperbel  $(x + a)^2/a^2 - y^2/(3a/4)^2 = 1$

$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$  im Scheitel  $P_0(0, 0)$  (Abb. 2). Sind fünf Punkte der Ebene gegeben, so ist eine K., die diese fünf Punkte enthält, eindeutig bestimmt und nicht entartet, wenn keine drei der fünf Punkte auf einer Geraden liegen; die K. ist eindeutig bestimmt und ein Geradenpaar, wenn genau drei der Punkte auf einer Geraden liegen. Liegen mehr als drei der fünf Punkte auf einer Geraden, so gibt es unendlich viele zerfallende K.n durch die fünf Punkte. S. a. rationale Kurve I.

**Kurvimeter** svw. Kurvenmesser.

**Kürzen** ↗ Brüche I. 1.

**Kürzeste** ↗ geodätische Linie.

**Kürzungsregel:** Schluß, daß aus  $ax = ay$  die Identität  $x = y$  folgt, genauer K. für  $a$  gen., der Schluß setzt das Kommutativgesetz voraus. Ist  $a$  ein Element einer Halbgruppe, so erlaubt die linksseitige K. für  $a$  den Schluß von  $ax = ay$  auf  $x = y$ , die rechtsseitige K. für  $a$  den von  $xa = ya$  auf  $x = y$ . Gleichbedeutend mit der linksseitigen K. für  $a$  ist, daß jede Gleichung  $ax = b$  höchstens eine Lösung hat. So gilt die K. etwa für alle natürl. Zahlen  $a > 0$ . — S. a. Ring I.

**Kutta**, Wilhelm, geb. 3. 11. 1867 Pitschen (Schlesien), gest. 25. 12. 1944 Fürstfeldbruck. — K. studierte 1885/90 in Breslau (Wrocław) und bis 1894 in München; 1898/99 folgte ein Studienaufenthalt in Cambridge. Seit 1902 war K. Privatdozent an der TH München und dort seit 1907 Professor für angewandte Mathematik. 1909 wurde er nach Jena berufen, 1910 nach Aachen und 1911 an die TH Stuttgart. Dort blieb K. bis 1935 tätig. Er arbeitete über angewandte Mathematik, über Strömungslehre sowie seltener über Geschichte der Mathematik; bekannt sind die *Formeln von Runge-K.* (1901), die K.sche Abflußbedingung (1902) und der Satz von K.-Joukowski.

**Kybernetik:** Wissenschaft von der Informationsverarbeitung und der Steuerung abstrahierter Systeme, die bestimmte wesentl. allgemeine Eigen-

schaften und Verhaltensweisen realer Systeme der verschiedensten Bereiche der Wirklichkeit widerspiegeln. Eine allgemein anerkannte abgrenzende Definition für die K. fehlt bisher, obwohl viele Vorschläge vorliegen. Wie viele andere Wissenschaften kann die K. nur durch das von ihr entwickelte Begriffssystem charakterisiert werden.

I. Die wichtigsten dieser Begriffe sind System, Information und Steuerung.

I.1. Eine solch verallgemeinerte Kategorie des Gegenstandsbereiches der K. ist das *abstrakte kybernet. System* (↗ System II.). Es wird durch Abstraktion und Erweiterung gleichartiger oder ähnl. Erscheinungen in ganz unterschiedl. Bereichen, z. B. aus der Biologie, der Psychologie, der Ökonomie oder der Technik gewonnen und existiert nur im menschl. Bewußtsein. In Zusammenhang damit stehen die Begriffe Element (↗ Übertragungsglied), Struktur, Funktion und Umwelt (↗ System).

I.2. Die in den kybernet. Systemen ablaufenden Prozesse werden vorzugsweise unter dem Gesichtspunkt der Aufnahme, Übertragung und Nutzung von *Informationen* betrachtet, während von den zugleich beteiligten Vorgängen materieller und energet. Art abstrahiert wird. Damit zusammenhängende Begriffe sind die des *Signals*, der *Kodierung* und der *Modulation*.

I.3. Die Zielstrebigkeit kybernet. Prozesse erfordert einen bestimmten festgelegten oder optimalen Ablauf, eine *Steuerung* der Teilprozesse in seinem Innern. Dieses Verhalten kann entweder durch eine geschlossene mathemat. *Funktion* oder durch einen *Algorithmus* (↗ Algorithmus II.) beschrieben werden. Zahlreiche kybernet. Systeme erfordern einen zielgerichteten Eingriff in den Prozeß. Dieser ist an den fortwährenden Austausch von Informationen gebunden. Wichtige Prinzipien der Prozeßführung sind die offene *Steuerung*, die *Regelung* und die *Optimierung*. Damit hängen die Begriffe *Rückführung* (↗ Regelung I.), *Gleichgewicht* und *Stabilität* zusammen. Höherentwickelten kybernet. Systemen kommt außerdem die Fähigkeit der Weiterentwicklung durch Adaption bzw. Lernen zu. Der Begriffssystem der Kybernetik ist keinesfalls abgeschlossen, sondern befindet sich in ständiger Fortentwicklung.

II. In der *allgemeinen* oder *theoret. K.* werden die Gesetzmäßigkeiten der Bewegungsprozesse abstrakter kybernet. Systeme untersucht sowie entsprechende Behandlungsmethoden ausgearbeitet. Wesentl. Teildisziplinen sind Systemtheorie, Informationstheorie, Regelungstheorie, Optimierungstheorie, Automatentheorie, Spieltheorie und Algorithmentheorie.

III. Die *angewandte K.* befaßt sich mit den konkreten Erscheinungsformen kybernet. Systeme in den verschiedensten Anwendungsgebieten von Technik, Ökonomie, Biologie, Medizin, Pädagogik, Psychologie u. a. Für die Zusammenführung und wechselseitige Durchdringung beider Ebenen sind Übersetzungsprozesse wesentlich. Dies bezieht sich sowohl auf die Begriffssysteme der K. und der verschiedenen Einzelwissenschaften als auch auf die

Überführung der Erkenntnisse zwischen den verschiedenen Formen von *Modell* und *Original* ( $\nearrow$  Modell V.); charakteristisch für die Arbeitsweise der K. ist daher die Zusammenarbeit in interdisziplinär zusammengesetzten Kollektiven.

Die K. ist in ihrem Kern eine abstrakte Grundlagenwissenschaft auf mathemat. Grundlage mit Querschnittscharakter. Gleichwohl stellt sie sehr reale Fortschritte in Aussicht, indem sie durch theoret. Betrachtung zum Verständnis der Prozesse in natürl. Systemen beiträgt sowie wesentl. Hinweise für die Gestaltung künstl., vor allem techn. Systeme gibt, z. B. von Rechenmaschinen, von automat. Regelungssystemen oder von Informationssystemen. Die K. ist eine vergleichsweise junge Wissenschaft. Am Anfang ihrer Begründung durch N. WIENER stand sein Buch: »Cybernetics — or Control and Communication in the animal and the machine.«  
**kybernetisches System**  $\nearrow$  System II.

## L

**Lagerhaltungsmodell**  $\nearrow$  Extremwert VII.1.,  
 $\nearrow$  Kurvendiskussion III.

**Lagerhaltungstheorie:** Teilgebiet der *Operationsforschung*, in dem die Effektivität des Bestellens, Lagerns und Ausliefern gewisser Güter untersucht wird. Gut ausgearbeitet ist die L. für die Fälle, daß nur ein Gut betrachtet wird oder die Lagerung mehrerer Güter sich gegenseitig nicht beeinflußt. Güter können Rohstoffe, Halb- oder Fertigprodukte sein, sowohl im Groß- oder Einzelhandel bzw. im Ersatzteil- oder Auslieferungslager eines Betriebs. Die Anforderungen an das Lager, die *Nachfrage*, bilden den *Bedarf*. Er heißt *deterministisch*, wenn er genau bekannt ist, sonst *stochastisch*. Man unterscheidet Lagerhaltung mit und ohne *Vormerkung*. Unter *Vormerkung* versteht man das Umwandeln einer momentan nicht zu befriedigenden Bedarfsanforderung in eine Vorbestellung, die sofort nach entsprechender Auffüllung des Lagers gedeckt wird. In Lagerhaltungssystemen ohne *Vormerkung* geht unbefriedigter Bedarf verloren, indem er nicht oder außerhalb des Lagerhaltungssystems befriedigt wird.

Die Bestellung des Lagers kann periodisch oder laufend erfolgen. Der Zeitraum zwischen Bestellung durch das Lager und Eintreffen der Güter im Lager heißt *Beschaffungszeit*. Ziel der L. ist das Ausarbeiten kostenoptimaler Bestellentscheidungen für das Lager. Im wesentl. sind Beschaffungs-, Lager- und Mangelkosten zu berücksichtigen. Die *fixen Beschaffungskosten* sind unabhängig von der Menge und entstehen etwa durch Buchhaltung und mengenunabhängige Transportkosten; zusätzlich entstehen die den *Bestellmengen proportionalen Beschaffungskosten*. Die *Lagerkosten* werden für die Unterhaltung des Lagers und für die Bestandsfinanzierung aufgebracht, etwa in Form der Produktionsfondsabgabe. *Mangelkosten* sind Kosten für zunächst

unbefriedigten Bedarf, wenn dieser durch Sondermaßnahmen gedeckt oder die verzögerte Bedarfsdeckung durch Preisnachlaß ausgeglichen werden muß. Diese Kosten bedingen sich gegenseitig, z. B. führt ein kleines Lager zu häufigen Bestellungen, d. h. zu hohen fixen Beschaffungskosten, sowie zu höheren Mangelkosten, führt aber zu geringeren Lagerkosten als ein großes Lager.

Quantitative Aussagen über die Bedarfsdeckung werden als *Servicegrad* bezeichnet. Der  $\alpha$ -Servicegrad z. B. ist die Wahrscheinlichkeit für die Bedarfsdeckung in einer Periode.

Ist der Bedarf  $\mu$  je Zeiteinheit konstant und unbefriedigter Bedarf nicht zulässig, so ist es nach einer einfachen Bestellstrategie günstig, in regelmäßigen Abständen  $T$  die jeweils gleiche Menge  $Q$  zu bestellen. Die optimale Bestellmenge ist dann durch die *Losgrößenformel*  $Q^* = \sqrt{2K\mu/h}$  bestimmt, wenn  $K$  die fixen Beschaffungskosten je Bestellung und  $h$  die Lagerkosten je Mengeneinheit und Zeiteinheit sind.  $T^* = Q^*/\mu$  ist dann der *optimale Bestellabstand*.

Bei stochast. Bedarf ist unter praktisch oft erfüllten schwachen Voraussetzungen eine  $(s, S)$ -Strategie optimal, nach ihr wird der Lagerbestand auf  $S$  aufgefüllt, sobald er  $s$  unterschreitet. Zur Berechnung von  $s$  und  $S$  werden meist Näherungsverfahren verwendet, um einen zu hohen Rechenaufwand zu vermeiden. S. a. Vorhersage.

**Lagrange, Joseph Louis**, geb. 25. 1. 1736 Turin, gest. 10. 4. 1813 Paris. — L. stammt aus einer französisch-italien. Familie und wurde schon 1755 Professor in Turin. Im Jahre 1766 ging er als Direktor der mathematisch-physikal. Klasse der Akademie nach Berlin. 1786, nach dem Tode von Friedrich II., wandte er sich nach Paris, unterstützte dort die Reform des Maßsystems wesentlich und war Professor an verschiedenen Hochschulen. — Sein sehr umfangreiches Werk enthält eine neue Begründung der *Variationsrechnung* (1760) und ihre Anwendung auf die Dynamik, Beiträge zum *Dreikörperproblem* (1772), die Anwendung der Theorie der *Kettenbrüche* auf die Auflösung von Gleichungen (1767), *zahlen-theoret. Probleme* und eine nicht gelungene Reduzierung der Infinitesimalrechnung auf die Algebra. Mit seiner »*Mécanique analytique*« (1788) wurde L. zum Begründer der analyt. Mechanik.

**Lagrange, Satz von**  $\nearrow$  Gruppe II.,  $\nearrow$  Zahlentheorie III.1.

**Lagrangefunktion:** bei der Extremwertbestimmung einer Funktion  $F(\mathbf{x})$  unter Nebenbedingungen  $f_i(\mathbf{x}) = 0$  bzw.  $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$  mit  $i = 1, \dots, m$  gebildete Hilfsfunktion  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(\mathbf{x})$ . Sie wird für alle  $\mathbf{x}$  und alle  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$  bzw. für  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$  mit nichtnegativen Komponenten betrachtet. S. a. Extremwert VI.

**Lagrangesche Identität**  $\nearrow$  Vektorprodukt II.

**Lagrangesche Multiplikatorenmethode:** Methode zur Lösung von Variationsproblemen mit Nebenbedingungen ( $\nearrow$  Variationsrechnung IV.), z. B. des Variationsproblems (1) mit der Nebenbedingung

$$G(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

$$(1) \quad I(y_1, y_2) = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) dx = \text{Extremum!}$$

Man betrachtet zunächst das Variationsproblem (2) ohne Nebenbedingung, in dem die Funktion  $\lambda(x)$

$$(2) \quad I(y_1, y_2) + \int_a^b \lambda(x) G(x, y_1(x), y_2(x)) dx = \text{Extremum!}$$

ebenfalls unbekannt ist. Sie heißt *Lagrangescher Multiplikator* (s. a. Extremwert VI.). Die  $\nearrow$  Eulerschen Differentialgleichungen zu (2) sind die Gleichungen (3).

$$(3) \quad F_{y_1} + \lambda(x) G_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = 0$$

$$F_{y_2} + \lambda(x) G_{y_2} - \frac{d}{dx} F_{y_2'} = 0$$

Liegt ein isoperimetr. Variationsproblem (4) vor, so betrachtet man das Variationsproblem (5) ohne Nebenbedingung mit dem Lagrangeschen Multiplikator  $\lambda$  und der Eulerschen Differentialgleichung (6).

$$(4) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{Extremum!}$$

$$\int_a^b G(x, y, y') dx = K$$

$$(5) \quad I(y) + \lambda \int_a^b G(x, y, y') dx = \text{Extremum!}$$

$$(6) \quad F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} + \lambda G_{y'} - \frac{d}{dx} \lambda G_{y''} = 0$$

Soll man z. B. unter allen Kurven  $y(x)$  von fester Bogenlänge  $L$ , die vom Punkt  $P_1 = (0, 0)$  der  $x$ -Achse zu einem Punkt  $P_2 = (a, 0)$  der  $x$ -Achse verlaufen, diejenige finden, die mit der  $x$ -Achse eine Fläche größten Inhaltes einschließt, so ist das Variationsproblem (7) unter der Nebenbedingung (8) zu lösen. Das zugeordnete Variationsproblem ohne Nebenbedingung ist durch (9) gegeben. (10) ist die Eulersche Gleichung zu (9). Die Lösung dieses Variationsproblems ist ein Kreis, der durch  $x = 0$  und  $x = a$  geht und dessen Radius von  $a$  und  $L$  abhängt.

$$(7) \quad \int_0^a y(x) dx = \text{Maximum!}$$

$$(8) \quad \int_0^a \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L, \quad L \geq a > 0$$

$$(9) \quad \int_0^a (y(x) + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2}) dx = \text{Extremum!}$$

$$(10) \quad 1 - \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0$$

**Lagrangesche Restform**  $\nearrow$  Taylorsche Reihe I.  
**Lagrangesches Interpolationspolynom**  $\nearrow$  Interpolation I.1.

**Lambert, Johann Heinrich**, geb. 26. 8. 1728 Mülhausen (Elsaß) als Sohn eines Schneiders, gest. 25. 9. 1777 Berlin. — L. war als Buchhalter, wissenschaftl. Schreiber und später als Hauslehrer tätig. Nach ausführl. Reisen mit seinen Zöglingen durch Westeuropa lebte er in verschiedenen Städten Deutschlands und der Schweiz, seit 1764 in Berlin. Dort wurde der 1765 Mitglied der Akademie. — L. hat sich verdient gemacht durch seine Versuche einer strengen Darstellung der Analysis, seine Arbeiten zur Perspektive (1759) und als Begründer der mathemat. Photometrie. Seine bekanntesten Leistungen sind der Beweis der *Irrationalität* von  $\pi$  und  $e$  (1767) und seine Erkenntnisse zur *nichteuklid. Geometrie* (1768).

**Landesvermessung**  $\nearrow$  Geodäsie.

**Landkarte**, auch *Karte*: I. *Graphentheorie* endlicher, ebener, schlingenloser zweifach zusammenhängender Graph ( $\nearrow$  Graph). Danach schließt man folgende ebenen Graphen von den L.n aus: Graphen, die nicht zusammenhängend sind (Abb. 1), Graphen, die einen *Zerfällungsknotenpunkt* ( $\nearrow$  Packungs- und Repräsentationsprobleme II.) oder eine Schlinge ( $\nearrow$  Graph II.) enthalten (Abb. 2), sowie den *Ein-kantengraphen*, der aus zwei Knotenpunkten und genau einer Kante zwischen ihnen besteht.

Entfernt man aus der Ebene alle Punkte, die zu Kanten und Knotenpunkten eines endl. ebenen Graphen  $G$  gehören, so zerfällt die Ebene in mehrere zusammenhängende offene Bereiche, die Flächen des ebenen Graphen gen. werden. Dabei besteht der Rand jeder Fläche nur aus Kanten und Knotenpunkten. Von den L.n schließt man die ebenen Graphen aus, die Flächen ohne zusammenhängenden Rand haben, z. B. Fläche II in  $G_1$ , oder in denen Länder entlang einer Kante oder in einem Knotenpunkt an sich selber grenzen, so daß die Länder

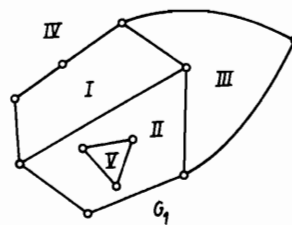


Abb. 1: Ebener Graph, der nicht zusammenhängend und deshalb keine Landkarte ist

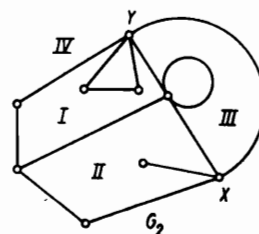


Abb. 2: Ebener Graph, der nicht als Landkarte angesehen wird

↗ Zerfällungsknotenpunkte oder ↗ Schlingen enthalten, z. B. die Flächen I, II und III von  $G_3$ . Die Flächen von  $L$  heißen *Länder*. Enthält die  $L$   $f$  Länder,  $e$  Kanten und  $n$  Knotenpunkte, so gilt nach der Eulerschen Polyederformel  $n + f = e + 2$ . Länder, die eine Kante gemeinsam haben, heißen *benachbart*. Eine  $L$  heißt *normal*, wenn an einem Knotenpunkt genau drei Länder zusammenstoßen, d. h., wenn jeder Knotenpunkt die Valenz 3 hat (↗ Graph). Jede  $L$  läßt sich bzgl. vieler Probleme auf eine kubische zurückführen. Die Länder einer  $L$  heißen mit  $l$  Farben *zulässig gefärbt*, wenn je zwei benachbarte Länder verschiedene Farbe haben. Es gibt  $L$  n., die sich mit drei Farben nicht zulässig färben lassen (Abb. 3). Es gilt der *Fünffarbensatz*: Die Länder jeder  $L$  lassen sich mit 5 Farben zulässig färben. 1852 hat der Londoner Student Francis GUTHRIE seinem Lehrer A. DE MORGAN das *Vierfarbenproblem* unterbreitet, das vielleicht schon früher Kartographen und Geometern bekannt war. In seiner eigentl. mathemat. Bedeutung wurde es jedoch erst 1878 von A. CAYLEY erkannt. Gelöst ist das Vierfarbenproblem erst seit 1977, als K. APPEL und W. HAKEN durch umfangreiche Computerrechnungen fanden, daß die Länder jeder  $L$  bereits mit 4 Farben zulässig färbbar sind.

II. Das Problem der Färbung der Länder einer  $L$ .  $L$  kann man auch auf das Problem der Knotenfärbung einer zu  $L$  dualen  $L'$  zurückführen. Zu der zu  $L$  dualen  $L'$  gelangt man mittels folgender Konstruktionsvorschrift: Man zeichnet sowohl im Innern jedes Landes von  $L$  einen Punkt  $X = \bullet$  als auch auf jeder Randkante einen von den beiden End-

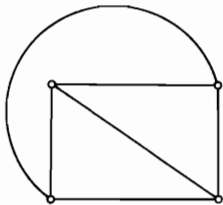


Abb. 3: Landkarte, die nicht mit drei Farben zulässig färbbar ist

punkten verschiedenen Punkt  $K \times$  aus. In jedem Lande verbindet man den in seinem Innern liegenden ausgezeichneten Punkt  $X$  mit allen ausgezeichneten Punkten  $K$ , die auf Randkanten von  $L$  liegen, durch Jordankurvenstücke in der Weise, daß diese Jordankurvenstücke außer  $X$  keinen Punkt gemeinsam haben (↗ Graph  $G_1$  in Abb. 4).

Die ausgezeichneten Punkte  $X$ , die im Innern der Länder liegen, sind die Knotenpunkte, ihre Verbindungslinien sind die Kanten eines ebenen Graphen  $L'$ , die ausgezeichneten Punkte auf den Kanten von  $L$  fungieren nur als Hilfspunkte bei der Konstruktion. Man kann zeigen:  $L'$  ist wieder eine  $L$ , man nennt sie eine zu  $L$  *dual*  $L$ .

Aus der Konstruktion ist ersichtlich: Den Knotenpunkten von  $L$  entsprechen die Länder in  $L'$  und umgekehrt den Ländern von  $L$  die Knotenpunkte von  $L'$ . Wie die Hilfspunkte  $K$  zeigen, entspricht jeder Kante von  $L$  auch eine Kante von  $L'$ .

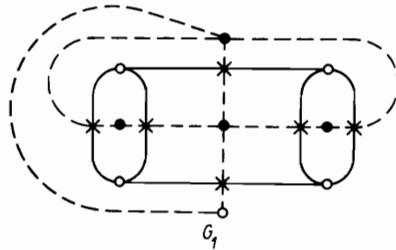
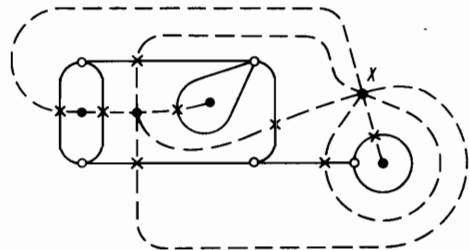


Abb. 4: Zur Konstruktion der zu  $L$  dualen Landkarte  $L'$ :  $\bullet$  im Innern jeder Fläche von  $L$  ausgezeichneter Punkt,  $\times$  im Innern jeder Kante von  $L$  ausgezeichneter Punkt

Einer zulässigen Färbung der Länder von  $L$  entspricht daher eine zulässige Färbung der Knotenpunkte von  $L'$ . Das *Vierfarbenproblem* kann auch so formuliert werden: Lassen sich die Knotenpunkte jeder  $L$  mit vier Farben zulässig färben, oder gibt es eine  $L$ , deren Knotenpunkte nicht mit vier Farben zulässig gefärbt werden können? — In entsprechender Weise läßt sich jedem ebenen Graphen  $G$  ein *dualer Graph* zuordnen (Abb. 5); dabei ist zu beachten: Eine Randkante, die nur an eine Fläche  $F$  grenzt, wird in  $F$  als zweifache Randkante gezählt, und der ausgezeichnete Punkt dieser Kante wird durch zwei Jordankurvenstücke mit dem ausgezeichneten Punkt  $X$  aus dem Innern



Landkarte. Abb. 5: Konstruktion des dualen Graphen mit den Knotenpunkten  $\bullet$  und den Kanten - - - -

von  $F$  so verbunden (↗ Abb. 5), daß die entstehende geschlossene Jordankurve  $C$  die betreffende Randkante überkreuzt, d. h. ein Teil von  $G$  liegt innerhalb, der andere Teil liegt außerhalb von  $C$ .

**Länge** ↗ Betrag, ↗ Bogenlänge, ↗ Raum, normierter linearer, ↗ Rektifikation einer Kurve, ↗ Strecke I., IV., V., ↗ Vektor I., ↗ Vektorraum VII., ↗ Wort I.

**Längenkoordinate** ↗ Koordinatensystem V.

**Längenkreis** ↗ Kugeldarstellung.

**Längsschnitt** ↗ Körper V.

**Laplace**, Pierre Simon, geb. 28(?) . 3. 1749 Beaumont-en-Auge, gest. 5. 3. 1827 Paris. — Nach seinem Schulbesuch wurde L. Lehrer in Beaumont und durch Vermittlung von D'ALEMBERT Professor an der Militärschule von Paris. Da L. seine polit. Überzeugungen sehr schnell zu ändern pflegte, wurde er ebenso von Napoleon wie von Ludwig XVIII. mit Ehren überhäuft. — Von seinen Arbeiten sind seine

»Analytische Theorie der Wahrscheinlichkeit« (1812) und die »Himmelsmechanik« (1799–1825) bedeutungsvoll geworden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält z. B. die Methode der erzeugenden Funktionen, die *L-Transformation* und die endgültige Formulierung des mechan. Materialismus. In der Himmelsmechanik finden sich z. B. die kosmolog. Hypothese von L., die Theorien von der Gestalt der Erde und von der Mondbewegung, die Störungstheorie der Planeten und die Potentialtheorie mit der L.schen Gleichung.

**Laplacesche Differentialgleichung** ↗ elliptische Differentialgleichung I., IV.  
**Laplacescher Entwicklungssatz** ↗ Determinante IV.  
**Laplacescher Operator** ↗ Integralsätze III.,  
 ↗ Nablaoperator III.  
**Laplace-Transformation: I.** eine durch die Formel (1)

$$(1) \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

beschriebene Transformation, die jeder Funktion  $f(t)$  einer reellen Veränderlichen  $t$ , für die das uneigntl. Integral in (1) existiert, die Funktion  $F(p)$  zuordnet. Dabei kann  $p = x + iy$  auch als komplexe Variable betrachtet werden.  $F(p)$  heißt die *Laplace-transformierte* der Funktion  $f(t)$ ; man bezeichnet sie als  $F(p) = L\{f(t)\}(p)$ . Unter der Voraussetzung  $f(t) \equiv 0$  für  $t < 0$  und  $|f(t)| \leq c_1 e^{ct}$  gelten für (1) folgende Aussagen:

**I.1.** Für  $\text{Re } p = x > c$  konvergiert (2), so daß (3) absolut konvergent ist.

$$(2) \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t)| e^{-pt} dt$$

$$(3) \quad F(p) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t) e^{-pt} dt$$

**I.2.** (3) ist in jedem abgeschlossenen Gebiet der  $p$ -Ebene mit  $\text{Re } p = x > c$  gleichmäßig konvergent.

**I.3.** Es gilt  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ , wenn mit  $p \rightarrow \infty$  auch  $\text{Re } p = x \rightarrow \infty$  strebt.

**I.4.**  $F(p)$  ist für  $\text{Re } p = x > c$  eine analyt. Funktion, und für diese gilt  $F^{(n)}(p) = (-1)^n L\{t^n f(t)\}(p)$ . Für (4) z. B. gilt (5) für alle  $p$  mit  $x > 0$ . Für

$$(4) \quad f(t) = \{0 \text{ für } t < 0, \text{ aber } 1 \text{ für } t \geq 0\}$$

$$(5) \quad L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^A = \frac{1}{p}$$

$g(t) = e^{ct}$  mit  $g(t) \equiv 0$  für  $t < 0$  und einer beliebigen reellen Zahl  $c$  gilt  $|g(t)| \leq e^{ct}$ , so daß die Laplace-transformierte für alle  $p$  mit  $\text{Re } p = x > c$  existiert. Man berechnet (6) für alle  $p = x + iy$

$$(6) \quad \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{(c-p)t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{(c-p)t} dt = \frac{1}{p-c}$$

mit  $x > c$ . Ist  $F(p) = L\{f(t)\}(p)$  für alle  $p$  mit  $x > c$ , so gilt in jedem  $t$ -Intervall, in dem die Funktion  $f(t)$  stetig ist, die *Umkehrformel* (7) der L. Man

$$(7) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\xi-1R}^{\xi+1R} F(p) e^{pt} dp \quad \text{für } \xi > c$$

kann deshalb mit funktionentheoret. Mitteln die Funktion  $f(t)$  bestimmen, wenn die Laplace-transformierte  $F(p) = L\{f(t)\}(p)$  bekannt ist. In den Anwendungen der L. wird man sich jedoch oft auf Tabellen stützen, die jeweils  $f(t)$  und  $L\{f(t)\}(p)$  enthalten. Bei der *Rücktransformation* wendet man auch häufig die Partialbruchzerlegung an. In den folgenden Anwendungen der L. wird diese Methode erläutert.

**II.** Setzt man stets voraus, daß die aufgeschriebenen Laplace-transformierten existieren, so kann man folgende Eigenschaften zusammenstellen:

**II.1. Additionssatz:**  $L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}(p) = c_1 L\{f_1(t)\}(p) + c_2 L\{f_2(t)\}(p)$ , wenn  $c_1, c_2$  Konstanten sind.

**II.2. Differentiationssatz:**  $L\{f^{(k)}(t)\}(p) = p^k L\{f(t)\}(p) - p^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$  für  $k = 1, 2, \dots$ , falls die Laplace-transformierten von  $f, f', \dots, f^{(k)}$  existieren;  $g(0) = \lim_{s \rightarrow 0} g(s)$  definiert.

**II.3. Integrationssatz:**  $L\left\{\int_0^t f(s) ds\right\}(p) = \frac{L\{f(t)\}(p)}{p}$ .

**II.4. Dämpfungssatz:**  $L\{e^{-at} f(t)\}(p) = L\{f(t)\}(p + a)$ .

**II.5. Verschiebungs- und Ähnlichkeitssatz:**  $L\{f(at - b)\}(p) = (1/a) e^{-bp/a} L\{f(t)\}(p/a)$  für  $a > 0, b \geq 0$ .

**II.6. Faltungssatz:**  $L\left\{\int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds\right\}(p) = L\{f_1(t)\}(p) L\{f_2(t)\}(p)$ .

In der folgenden Tabelle sind einige Funktionen und deren Laplace-transformierte angeführt. In ihnen ist  $a$  eine beliebige Konstante ungleich Null.

$f(t)$ für $t \geq 0$ , für $t < 0$ wird die Funktion durch $f(t) = 0$ fortgesetzt	$F(p) = L\{f(t)\}(p)$
(8) $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}; n = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p^n}$
(9) $\frac{1}{a} \sin(at)$	$\frac{1}{p^2 + a^2}$
(10) $\cos(at)$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
(11) $\frac{1}{a} \sinh(at)$	$\frac{1}{p^2 - a^2}$
(12) $\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

**III.** Die L. läßt sich mit Erfolg auf *lineare gewöhnl. Differentialgleichungen* mit konstanten Koeffizienten anwenden, z. B. wenn zu einer linearen gewöhnl.



Differentialgleichung zweiter Ordnung (13) das

$$(13) \quad a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

Anfangswertproblem mit den Anfangswerten  $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$  gelöst werden soll. Darüber hinaus läßt sich diese Methode ohne Schwierigkeiten auf lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten übertragen. Bezeichnet man mit  $Y(p)$  die Laplacetransformierte der gesuchten Funktion  $y(t)$ , so folgt aus

$L\{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y - f\} = 0$  unter Berücksichtigung der Anfangswerte die Hilfgleichung  $a_2(p^2 Y - p y_0 - y_1) + a_1(p Y - y_0) + a_0 Y = F$ , wenn  $L\{f(t)\}(p) = F(p)$  ist. Diese *transformierte Differentialgleichung* ist keine Differentialgleichung mehr, und man kann  $Y(p)$  durch leichte Umformung nach (14) berechnen:

$$(14) \quad Y(p) = \frac{a_2(p y_0 + y_1) + a_1 y_0 + F(p)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

Die *Rücktransformation* dieses Ausdrucks liefert dann die Lösung des gestellten Anfangswertproblems. In vielen Fällen läßt sich  $Y(p)$  in Partialbrüche zerlegen, und dann ist  $y(t)$  mit Hilfe einer Tabelle der Laplacetransformierten verhältnismäßig leicht zu berechnen. Auf diese Weise findet man auch die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, indem man einfach die Anfangswerte als beliebige Konstanten ansetzt. Die Schwierigkeit, eine Differentialgleichung zu lösen, ist bei der Anwendung der L. nicht „wegtransformiert“, sondern liegt i. allg. in der Rücktransformation.

Soll z. B. die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'' + 4y' + 4y = -\sin t$  bestimmt werden, so setzt man  $y(0) = c_0$  und  $y'(0) = c_1$  mit beliebigen Konstanten  $c_0, c_1$  und beachtet  $L\{\sin t\} = 1/(p^2 + 1)$ . Dann folgt aus der Differentialgleichung die Hilfgleichung  $p^2 Y - p c_0 - c_1 + 4(p Y - c_0) + 4 Y = -1/(p^2 + 1)$  und daraus (15). Zur Rück-

$$(15) \quad Y(p) = \frac{c_0 p^3 + (c_1 + 4c_0) p^2 + c_0 p + (c_1 + 4c_0 - 1)}{(p^2 + 1)(p^2 + 4p + 4)}$$

transformation zerlegt man zunächst den Ausdruck (15) für  $Y(p)$  in Partialbrüche und erhält (16). Mit

$$(16) \quad Y(p) = \frac{1}{25} \frac{4p - 3}{p^2 + 1} + \frac{1}{5} \frac{10c_0 + 5c_1 - 1}{(p + 2)^2} + \frac{1}{25} \frac{25c_0 - 4}{p + 2}$$

Hilfe der angegebenen Tabelle und der Eigenschaften der L. findet man (17), (18) und (19).

$$(17) \quad \frac{4p - 3}{p^2 + 1} = 4 \frac{p}{p^2 + 1} - 3 \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$= 4L\{\cos t\} - 3L\{\sin t\} = L\{4 \cos t - 3 \sin t\}$$

$$(18) \quad \frac{1}{(p + 2)^2} = L\{t\}(p + 2) = L\{e^{-2t} t\}(p)$$

$$(19) \quad \frac{1}{p + 2} = L\{1\}(p + 2) = L\{e^{-2t}\}(p)$$

Die allgemeine Lösung ist dann  $y(t) = \frac{4}{25} \cos t - \frac{3}{25} \sin t + (2c_0 + c_1 - \frac{1}{5}) e^{-2t} + (c_0 - \frac{4}{25}) e^{-2t}$  oder  $y(t) = \bar{c}_0 t e^{-2t} + \bar{c}_1 e^{-2t} + \frac{4}{25} \cos t - \frac{3}{25} \sin t$ , wenn man für  $2c_0 + c_1 - \frac{1}{5} = \bar{c}_0$  und für  $c_0 - \frac{4}{25} = \bar{c}_1$  schreibt.

IV. Ganz analog wendet man die L. auf lineare Systeme gewöhnl. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten an. Als Beispiel soll das  $\nearrow$  Anfangswertproblem für das System (20) mit den

$$(20) \quad \frac{dy_1}{dt} = y_1 - y_2 + t, \quad \frac{dy_2}{dt} = 4y_1 - 3y_2 + 2$$

Anfangswerten  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 2$  gelöst werden. Bezeichnet man mit  $Y_1(p)$  bzw.  $Y_2(p)$  die Laplacetransformierten von  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$ , so folgen aus  $L\{y_1' - y_1 + y_2 - t\} = 0$  und  $L\{y_2' - 4y_1 + 3y_2 - 2\} = 0$  unter Berücksichtigung der Anfangswerte und des Differentiationssatzes II.2. die Hilfgleichungen  $p Y_1 - Y_1 + Y_2(-1/p^2) = 0$  und  $p Y_2 - 2 - 4 Y_1 + 3 Y_2 - (2/p) = 0$ . Aus diesen Hilfgleichungen berechnet man (21).

$$(21) \quad Y_1(p) = \frac{-2p^2 - p + 3}{p^2(p + 1)^2}$$

$$Y_2(p) = \frac{2p^3 - 2p + 4}{p^2(p + 1)^2}$$

Die Lösung des gestellten Anfangswertproblems ergibt sich aus der Rücktransformation der Funktionen  $Y_1(p)$  und  $Y_2(p)$ . Dazu zerlegt man diese Funktionen nach (22) in Partialbrüche. Beachtet man

$$(22) \quad Y_1(p) = -\frac{7}{p} + \frac{3}{p^2} + \frac{7}{p + 1} + \frac{2}{(p + 1)^2},$$

$$Y_2(p) = -\frac{10}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{12}{p + 1} + \frac{4}{(p + 1)^2}$$

nun  $L\{cf(t)\} = cL\{f(t)\}, L\{1\} = 1/p, L\{t\} = 1/p^2, L\{1\}(p + 1) = L\{e^{-t}\}(p) = 1/(p + 1)$  und  $L\{t\}(p + 1) = L\{te^{-t}\}(p) = 1/(p + 1)^2$ , so erhält man als Lösung des Anfangswertproblems  $y_1(t) = -7 + 3t + (2t + 7)e^{-t}, y_2(t) = -10 + 4t + (4t + 12)e^{-t}$ .

V. Ebenso wie bei gewöhnl. Differentialgleichungen läßt sich zur Lösung partieller Differentialgleichungen die L. einsetzen. Hierbei faßt man die gesuchte Funktion von  $n$  unabhängigen Veränderlichen als Funktion einer der unabhängigen Veränderlichen auf und betrachtet die anderen  $n - 1$  unabhängigen Veränderlichen als Parameter. Zur Bestimmung der Laplacetransformierten der gesuchten Funktion erhält man somit eine Differentialgleichung als Hilfgleichung, die nur noch Ableitungen nach  $n - 1$  Veränderlichen enthält. Hatte insbes. die ursprüngl. Differentialgleichung zwei unabhängige Veränderliche, so erhält man als Hilfgleichung eine gewöhnl. Differentialgleichung. Gelingt es, aus der gewonnenen Hilfgleichung die Laplacetransformierte der gesuchten Funktion zu finden, so ergibt sich die gesuchte Funktion selbst nach der Rücktransformation.

Als Beispiel soll die Lösung  $u(t, x)$  der *eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung*  $u_{xx} - u_t = 0$  für

$0 < x < 1, t > 0$  bestimmt werden, die die Anfangsbedingung  $u(0, x) = 0$  und die Randbedingung  $u(t, 0) = 0, u(t, 1) = A$  befriedigt ( $\nearrow$  parabolische Differentialgleichung I.). Die Hilfsgleichung  $L\{u_{xx} - u_t\}(p, x) = 0$  für die Laplacetransformierte (23) der Funktion  $u(t, x)$  hat die Form (24), falls (25) beachtet wird. Die Koeffizienten  $c_1(p)$  und

$$(23) \quad U(p, x) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t, x) dt$$

$$(24) \quad \frac{d^2 U}{dx^2}(p, x) - pU(p, x) = 0$$

$$(25) \quad L\{u_{xx}\}(p, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} L\{u\}(p, x)$$

$c_2(p)$  in der allgemeinen Lösung der Hilfsgleichung  $U(p, x) = c_1(p) e^{x\sqrt{p}} + c_2(p) e^{-x\sqrt{p}}$  werden durch die transformierten Randbedingungen  $U(p, 0) = 0$  und  $U(p, 1) = A/p$  berechnet. Die Anfangsbedingung ist bereits in die Hilfsgleichung einbezogen. Man erhält somit (26) wegen (27) und  $c_2(p) = -c_1(p)$ .

$$(26) \quad U(p, x) = \frac{A \sinh(x\sqrt{p})}{p \sinh\sqrt{p}}$$

$$(27) \quad c_1(p) = \frac{A}{2p} \frac{1}{\sinh\sqrt{p}}$$

Die Lösung des gestellten Problems ergibt sich aus der Rücktransformation der Funktion  $U(p, x)$ .

**Lasker-Noetherscher Satz**  $\nearrow$  algebraische Geometrie III.

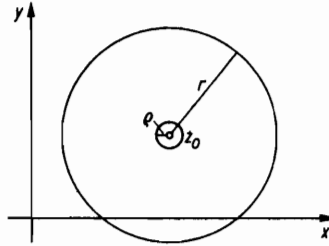
**Läufer**  $\nearrow$  Rechenstab II.

**Laurent, Pierre**, geb. 1813, gest. 1854 Paris. — L. war Schüler der École Polytechnique, dann Offizier im französischen Géniecorps, zuletzt Bataillonschef in Paris. Seine bedeutendste Leistung ist die 1843 angegebene und nach ihm ben. Entwicklung einer in einem Kreisring eindeutigen holomorphen Funktion.

**Laurentreihe:** Reihe (1), die durch Entwicklung einer analyt. Funktion  $f(z)$  in der Umgebung einer isolierten Singularität  $z_0$  entsteht; dabei heißt der singuläre Punkt  $z_0$  isoliert, wenn es eine von weiteren Singularitäten von  $f(z)$  freie Umgebung von  $z_0$  gibt. Diese Reihe enthält im Unterschied zu einer

$$(1) \quad f(z) = \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

gewöhnlich. Potenzreihe auch negative Potenzen von  $z - z_0$ . Sie konvergiert in einem Kreisringgebiet um  $z_0$  (Abb.). Den Teil mit den negativen Potenzen von  $z - z_0$  nennt man *Hauptteil*, den der nichtnegativen Potenzen von  $z - z_0$  den *regulären Teil* der L. Aus der L. einer in der Umgebung von  $z_0$ , außer vielleicht in  $z_0$  selbst, analyt. Funktion ergeben sich wichtige Eigenschaften dieser Funktion. Enthält die L. keine negativen Potenzen von  $z - z_0$ , so wird die L. zur *Taylorreihe*, und  $z_0$  ist ein *regulärer Punkt* von  $f(z)$ , wenn  $f(z_0) = c_0$



Um die isolierte Singularität  $z_0$  beschriebenes Kreisringgebiet, in dem die Laurentreihe einer analytischen Funktion definiert ist

gilt. Andernfalls hat  $f(z)$  in  $z_0$  eine *hebbare Singularität*, die man durch das Setzen von  $f(z_0) = c_0$  beheben kann.

Enthält die L. nur endl. viele negative Potenzen von  $z - z_0$  und ist  $(z - z_0)^{-m}$  die höchste auftretende negative Potenz, so ist  $z_0$  ein *Pol der Ordnung m*.

Enthält die L. unendlich viele negative Potenzen von  $z - z_0$ , so heißt  $z_0$  eine *wesentlich singuläre Stelle* von  $f(z)$ . Man sagt auch,  $f(z)$  hat in  $z_0$  eine *wesentl. Singularität*.

Die Funktion  $f(z) = z^{-2}$  hat z. B. in  $z = 0$  einen Pol 2. Ordnung. Die Funktion (2) hat in  $z = 0$  einen Pol 1. Ordnung und die Funktion (3) hat in  $z = 0$  eine wesentliche Singularität.

$$(2) \quad f(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$$

$$(3) \quad f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

**I-chromatischer Graph**  $\nearrow$  Extremalproblem.

**Lebensdauer**  $\nearrow$  Erneuerungstheorie.

**Lebenserwartung**  $\nearrow$  Sterbetafel I.

**Lebensversicherung: I.** Vertrag, nach dem der Versicherungsteilnehmer von einer Versicherungsanstalt im Falle des Erlebens, des Todes, eingetretener Invalidität oder des Rentenalters eine einmalige Auszahlung oder regelmäßig gezahlte Raten erhält. Die Grundlage des Versicherungsvertrags ist die Äquivalenz der beiderseitigen Leistungen. Dabei wird die den Einzahlungen der Versicherten äquivalente Leistung der Versicherungsanstalt nicht für den Einzelnen berechnet, sondern für die Gesamtheit der Versicherten; d. h., nach den Sterbetafeln wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, wie viele Versicherten ein bestimmtes Alter erreichen bzw. dafür, wie viele von ihnen in einem bestimmten Zeitraum sterben. In der Versicherung auf den Erlebensfall z. B. wird nur dem Teil der Versicherten der vereinbarte Betrag ausgezahlt, der den gestellten Termin erlebt. Die Einzahlungen der Versicherten, die den Termin nicht erleben, verfallen zugunsten der anderen. Eine andere Grundlage ist die Zinseszins- und Rentenrechnung. Aber auch die anfallenden Verwaltungskosten, die der Versicherungsanstalt erwachsen, müssen berücksichtigt werden.

II. Die Berechnung der Äquivalenz zwischen Einzahlung des Versicherten und Leistung der Versicherungsanstalt geht von der Frage aus: Welche Prämie  $P$  muß eine  $x$ -jährige Person zum Versicherungsabschluß entrichten, wenn sie beim Erleben des  $(x + n)$ -ten Lebensjahres die Summe  $S$  erhalten will? — Nimmt man an, daß alle Lebenden  $l_x$  ( $\nearrow$  Sterbetafel I.) dieselbe Versicherung eingehen, so leisten sie an Prämien eine Zahlung von  $l_x \cdot P$ , deren Wert in  $n$  Jahren durch Zinseszins anwächst auf  $l_x \cdot P \cdot r^n$ . Von diesem Betrag erhalten die  $l_{x+n}$  am Ende des  $n$ -ten Jahres Lebenden jeder die Versicherungssumme  $S$  ausgezahlt. Vernachlässigt man die Verwaltungskosten, so muß nach dem Äquivalenzprinzip (1) gelten. Für den Zeitpunkt der

$$(1) \quad l_x \cdot P \cdot r^n = l_{x+n} \cdot S$$

Prämienzahlung, d. h. für den Beginn des 1. Versicherungsjahres erhält man durch Diskontierung der Gesamtauszahlung  $l_{x+n} \cdot S$  mit  $v = 1/r$  die Beziehung (2).

$$(2) \quad l_x \cdot P = v^n \cdot l_{x+n} \cdot S$$

Aus beiden Gleichungen kann die Prämie  $P$  nach (3)

$$(3) \quad P = S \cdot l_{x+n} / (l_x \cdot r^n) = S \cdot l_{x+n} \cdot v^n / l_x$$

berechnet werden. Diese Beziehungen gelten nur, wenn in den  $n$  Jahren weder eine Ein- noch eine Auszahlung erfolgt.

III. In den bislang behandelten *Erlebnisfallversicherungen* ist der Betrag  $S$  an den Versicherten zu zahlen, in einer *Todesfallversicherung* an die Hinterbliebenen des Versicherten. In beiden Fällen handelt es sich um eine einmalige Zahlung. Bei einer *sofort beginnenden Todesfallversicherung* beginnt der Versicherungsschutz sofort mit Abschluß des Vertrages und ist schon im ersten Jahr voll wirksam. In einer *aufgeschobenen Todesfallversicherung* tritt der Versicherungsschutz erst zu einem späteren Zeitpunkt ein. Durch eine *gemischte Versicherung* auf den Todes- und auf den Erlebensfall sind einerseits die Hinterbliebenen versorgt, andererseits aber besteht auch für den Versicherten eine gewisse Aussicht, in den Genuß der Versicherungssumme zu kommen. Die Versicherungssumme wird entweder beim Todesfall innerhalb der ausgemachten Frist durch die Todesfallversicherung oder am Ende der Frist durch die Erlebnisfallversicherung fällig. Die hier angenehme einmalige Zahlung einer Prämie  $P$  vereinfacht die Rechnung, ist aber für den Versicherten eine kaum zumutbare Belastung. Mit den Mitteln der Rentenrechnung kann die Zahlung des Versicherten auch durch Raten geleistet werden.

**Lebesgue**, Henri Léon, geb. 28. 6. 1875 Beauvais (Oise), gest. 26. 7. 1941 Paris. — L. war einer der wenigen Gelehrten seiner Zeit von proletar. Herkunft. Durch den frühen Tod seines Vaters hatte er eine sehr schwere Schulzeit. 1897 diplomierte er an der École Normale und wurde Lehrer. In seiner Dissertation begründete er die nach ihm ben. Maß- und Integrationstheorie. Daran schlossen sich um-

fangreiche Untersuchungen über analytisch darstellbare Funktionen an. Dabei leitete er auch geometr. bzw. topolog. Ergebnisse her. Seit 1910 lehrte er als Professor an Hochschulen in Paris. In den letzten 20 Jahren seines Lebens widmete er sich vor allem pädagog. Fragen und der Wissenschaftsgeschichte.

**Lebesgue, Satz von**  $\nearrow$  Lebesguesches Integral IV. **Lebesgue - meßbar**  $\nearrow$  Lebesguesches Maß I.

**Lebesguesches Integral,  $L$ -Integral:** I. ein auf alle im Lebesgueschen Maß meßbaren Funktionen ausgedehnter Integralbegriff; für eine beschränkte  $L$ -meßbare reelle Funktion  $f$  die obere Grenze der allen mögl. Zerlegungen des gegebenen Intervalls zugeordneten *Lebesgueschen Untersummen* (1). Gilt

$$(1) \quad \sum_{\rho=0}^{r-1} \alpha_{\rho} \mu(E_{\rho})$$

$\alpha < f(x) < \beta$  wegen der Beschränktheit von  $f(x)$  auf einer  $L$ -meßbaren Menge  $E$  des  $n$ -dimensionalen euklid. Raumes  $E^n$  mit dem endl. Lebesgueschen Maß  $\mu(E)$ , so kann das Intervall  $[\alpha, \beta]$  beliebig zerlegt werden, z. B. in  $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_r = \beta$ , und man bildet die Lebesgueschen Untersummen mit den  $L$ -meßbaren Mengen  $E_{\rho} = E[\alpha_{\rho} \leq f < \alpha_{\rho+1}] = \{x \in E \mid \alpha_{\rho} \leq f(x) < \alpha_{\rho+1}\}$ . Das L. I. von  $f$  über  $E$  wird mit (2), im eindimensionalen Fall eines Intervalls  $E = [a, b]$  mit (3) bezeichnet. Im Unterschied zu der Definition des Riemanschen Integrals stimmt hier die obere Grenze der Lebesgueschen

$$(2) \quad \int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3) \quad \int_a^b f(x) dx$$

Untersummen stets mit der unteren Grenze der entsprechend gebildeten Lebesgueschen Obersummen überein.

II. Die Ausdehnung auf nicht nach oben beschränkte Funktionen  $f$  geschieht dadurch, daß man  $f$  als Limes der monotonen Folge von *abgeschnittenen Funktionen*  $f_n(x) = \min \{f(x), n\}$  darstellt und das L. I. nach (4) erklärt. Nach beiden Seiten nicht

$$(4) \quad \int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

beschränkte Funktionen  $f$  zerlegt man in den positiven  $f_+(x) = \max \{f(x), 0\}$  und den negativen Teil  $f_-(x) = \max \{-f(x), 0\}$  und definiert das L. I. nach (5), falls mindestens eins der beiden letzten Integrale endlich ist. Ist  $\mu(E) = \infty$ , z. B. bei einer Inte-

$$(5) \quad \int_E f(x) dx = \int_E (f_+(x) - f_-(x)) dx \\ = \int_E f_+(x) dx - \int_E f_-(x) dx$$

gration über den ganzen Raum  $E = E^n$ , so erklärt man das L. I. als Limes der Integrale über die Mengen  $E_m$  endl. Maßes einer geeigneten Folge  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  mit  $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = E$

Ist das L. I. von  $f$  (über  $E$ ) endlich, so heißt  $f$  über  $E$  *summierbar*; mit  $f$  ist auch der Betrag  $|f|$

summierbar und umgekehrt. Jede Riemann-integrierbare Funktion ist auch Lebesgue-summierbar mit dem gleichen Integralwert. Andererseits ist eine Funktion genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesguesche Nullmenge bildet; da z. B. bei der charakterist. Funktion  $\chi$  der rationalen Zahlen eines Intervalls  $I$  jeder Punkt von  $I$  Unstetigkeitsstelle ist, existiert das Riemannsche Integral nicht, obwohl im Lebesgueschen Sinne  $\int_I \chi(x) dx = 0$  ist, weil  $\chi$

und die Funktion 0 fast überall die gleichen Funktionswerte Null haben, d. h. bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maß 0 ( $\nearrow$  Nullmenge); solche als äquivalent bezeichnete Funktionen haben aber dasselbe  $L$ -Integral.

**III.** Für das L. I. gelten die vom Riemannschen her geläufigen elementaren Integrationsregeln. Darüber hinaus gilt der Satz von Fubini über mehrfache Integrale, der hier für den Fall der Ebene angegeben wird: Wenn  $f$  über die Ebene  $E^2$  summierbar ist, so ist  $g(x) = f(x, y_0)$  für fast alle festen  $y = y_0$  eine summierbare Funktion von  $x$ , und das Integral (6) ist auf der Menge dieser  $y = y_0$  ebenfalls eine summierbare

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = h(y)$$

Funktion. Ergänzt man  $h$  beliebig zu einer für alle  $y$  erklärten Funktion, so gilt (7), d. h., das Gebietsintegral ist einem mehrfachen Integral gleich, das

$$(7) \quad \int_{E^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$$

man auch in der Form (8) schreiben kann. Ist das Integrationsgebiet  $E$  nicht die ganze Ebene, so setzt

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

man  $f$  durch  $f(x) = 0$  für  $x \in E^2 \setminus E$  auf ganz  $E^2$  fort und kann dann den Satz anwenden. Entsprechend läßt sich ein  $n$ -dimensionales L. I. auf ein  $n$ -faches Integral, d. h., auf  $n$  sukzessive einfache, d. h. eindimensionale Integrationen zurückführen.

**IV.** Ein wichtiger Grenzwertsatz für L. I. e ist der Satz von Lebesgue; Konvergieren auf der meßbaren Menge  $E$  die  $L$ -meßbaren Funktionen  $f_n$  fast überall gegen die Funktion  $f$  und existiert eine über  $E$  summierbare Funktion  $g$  mit  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für alle  $n$  und fast alle  $x$ , so sind die  $f_n$  wie  $f$  ebenfalls summierbar, und es gilt (9).

$$(9) \quad \int_E f(x) dx = \int_E \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx$$

**V.** Ist  $f$  über  $E$  summierbar, so wird durch  $\Phi(A) = \int_A f(x) dx$  für alle  $L$ -meßbaren Teilmengen  $A$  von  $E$  eine endl. reelle  $\sigma$ -additive ( $\nearrow$  Maß I.) Mengenfunktion  $\Phi$  definiert, die außerdem absolutstetig ist, d. h., für die es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

gibt, so daß aus  $\mu(A) < \delta$  stets  $|\Phi(A)| < \varepsilon$  folgt. Wichtig ist nun, daß auch umgekehrt jede endl.  $\sigma$ -additive absolutstetige Mengenfunktion auf den meßbaren Teilmengen  $A_i$  einer meßbaren Menge  $E$  das unbestimmte Integral  $\int_A f(x) dx$  einer summierbaren Funktion  $f$  auf  $E$  ist. Für  $n = 1$  gilt entsprechend dem Hauptsatz der Integralrechnung: Ist  $A = [a, x]$  und  $\Phi(A) = \int_a^x f(x) dx = \varphi(x)$ , so ist  $\varphi$  fast überall differenzierbar mit der Ableitung  $\varphi'(x) = f(x)$ .

**Lebesguesches Maß,  $n$ -dimensionales Maß:** I. Erweiterung des Peano-Jordanschen Inhalts  $m$  und damit auch des elementargeometr. Inhalts auf den  $n$ -dimensionalen euklid. Raum  $E^n$  (s. a. Maß III.). Das für ein System  $K$  von Teilmengen  $A_i$  definierte Maß  $\mu$  ist endlich-additiv für den Peano-Jordanschen Inhalt; genügt es außer den Bedingungen (1), (2), (3) ( $\nearrow$  Maß I.) noch (4) für paarweise disjunkte Teilmengen  $A_i$ , so kennzeichnet es die Lebesgue-meßbaren oder  $L$ -meßbaren Mengen des  $E^n$ .

- (1)  $\mu(A_i) \geq 0$
- (2)  $\mu(A_k \cup A_l) = \mu(A_k) + \mu(A_l)$  bei  $A_k \cap A_l = \emptyset$
- (3)  $\mu(\emptyset) = 0$       (4)  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Das System  $L$  dieser Mengen ist weit umfassender als die Gesamtheit  $K$  aller quadrierbaren, d. h. Jordan-meßbaren Mengen. Jede Jordan-meßbare Menge  $A$  ist auch  $L$ -meßbar mit dem gleichen Maß  $\mu(A) = m(A)$ . Gegenüber  $K$  hat  $L$  die wesentlich allgemeinere Eigenschaft, eine  $\sigma$ -Algebra ( $\nearrow$  Maß I.) zu sein, in der die Vereinigung bzw. der Durchschnitt auch abzählbar unendlich vieler  $L$ -meßbarer Mengen stets wieder  $L$ -meßbar ist. Im  $E^1$  ist z. B. die Menge  $A$  der Punkte eines Intervalls, deren Koordinaten rationale Zahlen sind, nicht quadrierbar, wohl aber  $L$ -meßbar mit dem Maß 0. Eine einpunktige Menge hat das Maß und den Inhalt 0;  $A$  ist die Vereinigung abzählbar unendlich vieler solcher Mengen und deshalb  $L$ -meßbar. Wegen der  $\sigma$ -Additivität nach Eigenschaft (4) des Maßes darf man die einzelnen Maße zum Maß der Vereinigung  $A$  summieren. Mit dem L. M. erfaßt man u. a. alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen sowie deren abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte. Nicht jede Menge ist aber  $L$ -meßbar.

**II.** Das L. M. kann auch direkt durch einen dem Vorgehen beim Peano-Jordanschen Inhalt ähnl. Prozeß über ein äußeres Maß  $\mu^*$  konstruiert werden, jedoch mit dem Unterschied, daß als Ausgangsmannigfaltigkeit nicht nur die endl., sondern auch die abzählbar unendl. Vereinigungen von Rechtecken im Fall  $n = 2$  als Intervallbereiche zugelassen sind. Die Vollständigkeit des Maßes entspricht genau der des Inhalts ( $\nearrow$  Peano-Jordanscher Inhalt II.). Da es im  $E^n$  kein vollständiges Maß gibt, durch das alle Jordan-meßbaren Mengen, aber nicht alle  $L$ -meßbaren Mengen erfaßt werden, ist in diesem Sinne das L. M. die kleinste vollständige Erweiterung

des Peano-Jordanschen Inhalts im  $E^n$ . Schließlich gilt wie beim Inhalt der Zusammenhang: *Eine Menge  $M \subseteq E^n$  ist genau dann L-meßbar, wenn ihre charakterist. Funktion  $\chi$  über  $E^n$  im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist und wenn  $\mu(M) = \int_{E^n} \chi(x) dx$*

*gilt.* Bes. beim Integral spielen die Mengen vom Maß 0 ( $\nearrow$  Nullmenge) eine wichtige Rolle.

leere Menge  $\nearrow$  Menge I.

leere Redundanz  $\nearrow$  Redundanz I.

Leerstelle  $\nearrow$  Prädikat,  $\nearrow$  Zahlensystem V.

**Legendre, Adrien Marie**, geb. 18. 9. 1752 und gest. 10. 1. 1833 Paris. — L. hat einen großen Anteil an der Begründung und Entwicklung der Zahlentheorie und der Geodäsie. Wesentl. Ergebnisse fand er auch zu ellipt. Integralen, über Grundlagen und Methoden der euklid. Geometrie, über Variationsrechnung und theoret. Astronomie; z. B. wendete er als erster die *Methode der kleinsten Quadrate* an und berechnete umfangreiche Tafelwerke. L. befaßte sich mit vielen Problemen, die auch GAUSS interessierten, erreichte jedoch nie dessen Vollkommenheit. Seit 1775 war L. als Professor an verschiedenen Pariser Hochschulen tätig und veröffentlichte ausgezeichnete Lehrbücher, die einen lang anhaltenden Einfluß ausübten.

**Legendre, Satz von:** *Ein sphär. Dreieck mit Seiten von kleiner Winkelgröße und sphär. Exzeß hat einen nahezu gleichen Flächeninhalt wie ein ebenes Dreieck, das die den Winkelgrößen entsprechenden Seitenlängen hat; jede Winkelgröße des ebenen Dreiecks ist um ein Drittel des Exzesses kleiner als die entsprechende des sphär. Dreiecks.* Auf der Erde z. B. hat ein Dreieck mit den Bogenlängen 50 km, 60 km und 70 km den sphär. Exzeß  $\varepsilon = 7,6''$  und kann mit guter Näherung als eben angesehen werden.

**Legendre-Polynome:** eine wichtige Klasse von Polynomen, die für die Approximation und die Gauß-Quadratur ( $\nearrow$  Integration, numerische III.) angewendet werden. Die L.-P. werden definiert durch (1) und für sie gilt die *Rekursionsformel* (2).

$$(1) \quad P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m, \quad P_0(x) = 1$$

$$(2) \quad (m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x)$$

Ein L.-P.  $P_m$  hat in  $[-1, 1]$  genau  $m$  verschiedene reelle Nullstellen. Die *Orthogonalität* der L.-P. ergibt

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = 0 \quad \text{für } n \neq m, \\ \int_{-1}^1 (P_m(x))^2 dx = 2/(2m+1).$$

**Legendresches Normalform**  $\nearrow$  elliptisches Integral. **Legendresches Symbol**  $\nearrow$  Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

**Leibniz, Gottfried Wilhelm**, geb. 1. 7. 1646 Leipzig als Sohn eines Professors, gest. 14. 11. 1716 Hannover. — L. studierte in Leipzig seit 1661 Philosophie, seit 1664 die Rechte und promovierte 1667 in Altdorf bei Nürnberg. Eine ihm dort angebotene Professur lehnte er ab. In Nürnberg lernte L. wenig später einen ehemaligen Minister des Kurfürsten

von Mainz kennen, folgte diesem nach Hessen und wurde mit vielerlei literar. Arbeiten betraut. Im Auftrage des Fürsten reiste L. 1672 in polit. Mission nach Paris. Hier beschäftigte er sich neben seinen polit. Aufgaben vorwiegend mit Mathematik. 1673 besuchte er zum ersten Male London und wurde wenig später Mitglied der Royal Society. Im Jahre 1676 siedelte L. als Vorstand der herzogl. Bibliothek nach Hannover über. Von 1687/90 befand sich L. auf Reisen in Deutschland und Italien, um in Archiven nach Material für die ihm auftragene Arbeit über die Geschichte der Welten zu suchen. Seit 1700 hielt sich L. sehr oft in Berlin und Wien auf. — L. war von erstaunl. Vielseitigkeit. Er verfaßte die Monadenlehre zur Philosophie, schrieb über Theologie, Sprachphilosophie, Auswertung von Archivmaterialien, Geschichte, Mechanik, Logik und Mathematik sowie eine Vielzahl von Gutachten zu wissenschaftsorganisator., polit. und finanztechn. Fragen. — Seine mathemat. Leistungen liegen vor allem auf dem Gebiet der *Infinitesimalrechnung* und der *Formalisierung der Mathematik*. Seinen 1673 entwickelten *«Calculus»* veröffentlichte er 1682. Er enthält Differentiationszeichen, Regeln zum Differenzieren, Aussagen über Extremwerte und Wendepunkte. 1686 folgte eine Arbeit, die das Integralzeichen enthielt. Daneben behandelt L. noch viele Spezialprobleme der Analysis, z. B. die L.-Reihe (1673). — Die mehr formalen Bestrebungen führten L. zur Kombinatorik, zur *symbol. Logik* und zu den Determinanten. Auf L. gehen die Ausdrücke *Differential- und Integralrechnung, Funktion und Koordinaten* zurück. Er setzte auch das Gleichheitszeichen und den Multiplikationspunkt sowie die Bezeichnung durch Indizes durch. L. entwickelte schon vor 1673 eine Rechenmaschine. Er war 1700 der Begründer und 1703 der erste Präsident der *Akademie der Wissenschaften zu Berlin*.

**Leibnizsche Formel**  $\nearrow$  Differentiationsregeln VII. **Leibnizsches Konvergenzkriterium**  $\nearrow$  Konvergenzkriterium für Reihen, IV.

**Leitgleichung**  $\nearrow$  Leitveränderlichen, Methode der **Leitkreis**  $\nearrow$  Ellipse IV.,  $\nearrow$  Hyperbel IV.,  $\nearrow$  Zykloide I.

**Leitkurve**  $\nearrow$  Kegel I.,  $\nearrow$  Kegel zweiter Ordnung,  $\nearrow$  Zykloide I.,  $\nearrow$  Zylinder I.

**Leitlinie, Direktrix**  $\nearrow$  Ellipse III.,  $\nearrow$  Hyperbel II.,  $\nearrow$  Kegelschnitt II.,  $\nearrow$  Parabel I.,  $\nearrow$  Traktrix.

**Leitveränderlichen, Methode der:** eine mit dem primal-dual-Algorithmus verwandte Methode zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben ( $\nearrow$  Optimierung VI.), die davon ausgeht, daß für alle Variablen eine Nichtnegativbedingung gilt und daß sich *Leitveränderliche* auswählen lassen, von denen alle anderen Variablen abhängen. Weiter wird vorausgesetzt, daß alle Leitveränderlichen in einer *Leitgleichung*  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = b$  auftreten, die vorhanden ist oder sich doch erzeugen läßt. Ist dann  $p_1x_1 + \dots + p_kx_k$  die zu minimierende Zielfunktion, so bestimmt ein Index  $\alpha$ , für den  $p_j/a_j$  den kleinsten Wert annimmt, die *Hauptvariable*  $x_\alpha$ . Bei einer durch das Verfahren letztlich erzeugten geeigneten Auswahl der Leitveränderlichen erhält man das

Optimum, indem man  $x_n = b/a_n$ , die übrigen Leitveränderlichen gleich 0 setzt und daraus die Werte der anderen Variablen bestimmt.

**Lemma der farbigen Bögen** ↗ Cozyklus.

**Lemniskate** ↗ Cassinische Kurve III.

**Leonardo da Vinci**, geb. 15. 4. 1452 Vinci (bei Florenz), gest. 2. 5. 1519 Cloux (bei Amboise). — Der geniale Gelehrte, Ingenieur und Künstler wurde in Florenz zum Maler ausgebildet. Im Jahre 1481 trat er in die Dienste des Herzogs von Mailand, 1498 wandte er sich nach Mantua, und 1500 lebte er bei Luca PACIOLI wieder in Florenz. Wenig später wurde er Generalingenieur bei Cesare BORGIA (gest. 1507). Nach verschiedenen Reisen in Italien trat er 1507 als Hofmaler in den Dienst von Ludwig XII. von Frankreich und siedelte 1516 auf Schloß Cloux über. — L. behandelte in seinen Schriften viele geometr. Probleme, z. B. Konstruktionen mit fester Zirkelöffnung, die Perspektive und Inhaltsberechnungen.

**Lernen:** Fähigkeit einer Teilklassse kybernet. Systeme, im Verlauf eines Prozesses auf Grund wiederholter Einwirkungen aus der Umgebung bestimmte Reaktionen zu erwerben. Wegen der damit erreichten Verbesserung des Verhaltens kann das L. als ein Spezialfall der *Adaption* (↗ Adaption I.) aufgefaßt werden. Dies gilt in der Weise, daß zwar jedes L. eine Adaption bewirkt, nicht aber jede Adaption auf dem L. beruht.

In der kybernet. *Lerntheorie* sind verschiedene Formen des L.s klassifiziert worden. Eine der wichtigsten Grundformen ist das L. *durch Erfolg*. Diese Methode basiert auf einem mehr oder weniger systemat. Probieren nach dem Prinzip von trial-and-error. Aus der Klasse der erfolgreichen Versuche werden dann die Reaktionen in gleichen oder ähnl. Situationen abgeleitet. Hierbei ist zu unterscheiden, ob das L. mit oder ohne Belehrung erfolgt. Bei *Systemen mit Lehrer* erfolgt eine äußere Korrektur des Verhaltens durch Zustimmung oder Bestrafung, d. h., dem System wird eine zusätzl. Information darüber vermittelt, ob die Reaktion richtig oder falsch war. *Systeme ohne Lehrer* heißen *selbstlernende Systeme*. In diesem Falle fehlt die äußere Korrektur, d. h. das System erhält keine Information über die Richtigkeit einer Reaktion.

Verschiedene Lernformen lassen sich mit Hilfe kybernet. Maschinen, den *lernenden Automaten*, imitieren. Diese haben je nach Programm in unterschiedl. Grade die Fähigkeit, ihr Verhalten und damit die Anpassung an die Umgebung durch L. zu verbessern. Lernende Automaten werden gegenwärtig vor allem für die *Zeichenerkennung* sowie für die *optimale Steuerung* praktisch eingesetzt.

**Lerntheorie** ↗ Lernen.

**lexikographische Ordnung:** Ordnung von Vektoren, deren Komponenten aus einer geordneten Menge stammen; nach ihr heißt  $(x_1, \dots, x_n)^T$  lexikographisch kleiner als  $(y_1, \dots, y_n)^T$ , wenn für das kleinste  $i$ , für das  $x_i \neq y_i$  gilt,  $x_i < y_i$  gilt. Die Analogie der l. O. zur alphabet. Ordnung von Wörtern erkennt man, wenn man die Komponenten wie die Buchstaben eines Alphabets ordnet.

Zu lexikographische Anordnung s. a. Permutation I. **L'Hospital**, Guillaume François Antoine de, geb. 1661 und gest. 2. 2. 1704 Paris. — H. stammte aus dem Hochadel und diente wenige Jahre in der Armee. Danach zog er sich wegen seiner schlechten Augen ins Privatleben zurück. Er war einer der ersten, der den Leibnizschen »Calculus« verstanden hatte. Er beteiligte sich erfolgreich an der Lösung vieler aktueller Probleme und veröffentlichte 1696 das erste Lehrbuch der Infinitesimalrechnung.

**L'Huilier**, Simon, geb. 24. 4. 1750 und gest. 28. 3. 1840(?) Genf. — L'H. war erst als Hauslehrer in Warschau tätig. Nach einem mehrjährigen Studienaufenthalt in Tübingen war er 1795–1823 Professor der Mathematik in Genf und zog sich dann in den Ruhestand zurück. — Als seine bedeutendste Leistung gilt der geglückte Versuch, die *Grundlegung der Analysis* durch konsequente Verwendung des Grenzübergangs neu zu gestalten. L'H. arbeitete auch über trigonometr. Funktionen und analyt. Geometrie.

**L'Huiliersche Formel:** Beziehung (1) der sphär. Trigonometrie, mit der sich der sphär. Exzeß eines Kugeldreiecks aus den Größen der Seiten  $a, b, c$  berechnen läßt, wenn  $2s = a + b + c$  gesetzt wird.

$$(1) \quad \tan\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\tan\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{s-a}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{s-b}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{s-c}{2}\right)}$$

**Lichtenstein**, Leon, geb. 16. 5. 1878 Warschau, gest. 21. 8. 1933 Zakopane. — L. war zuletzt Professor in Leipzig, lieferte zahlreiche Beiträge zur höheren Analysis und über Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, einschließlich rotierender Himmelskörper.

**Lichtjahr** l. y. ↗ Strecke V.

**Lie**, Sophus, geb. 17. 12. 1842 Nordfjordeid am Nordfjord als Sohn eines Pfarrers, gest. 18. 2. 1899 Kristiana (Oslo). — L. legte 1865 das Lehrereexamen in Kristiana ab, besuchte 1869/70 Berlin und 1870 zusammen mit KLEIN Paris. Seit 1872 war L. Professor in Kristiana, 1886/98 in Leipzig, ehe er als Professor für die Theorie der Transformationsgruppen nach Kristiana zurückkehrte. — In Paris hatte L. die grundlegende Bedeutung der *Gruppentheorie* für die mathemat. Forschung erkannt, die Berührungstransformationen entdeckt und damit gezeigt, daß die Dynamik als Teil der Gruppentheorie aufgefaßt werden kann. Seine weiteren Studien betrafen fast ausschließlich die Theorie der *stetigen Transformationsgruppen* und deren Anwendungen.

**Liesche Gruppe:** spezielle topolog. Gruppe, die nicht nur die Struktur eines topolog. Raumes, sondern die schärfere Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat. Dabei versteht man unter einer *differenzierbaren Mannigfaltigkeit* eine Menge von Elementen, auf der sich differenzierbare Funktionen definieren lassen. Die Untersuchung der L. G.n ist in vieler Hinsicht einfacher als die einer allgemeinen topolog. Gruppe, da sich die Hilfsmittel der Diffe-

rentialrechnung für die Untersuchung nutzbar machen lassen. — Die Gruppe der Drehungen der Ebene um einen festen Punkt z. B., die sich durch die zweireihigen Matrizen (1) beschreiben lassen, ist

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

eine L. G.,  $\varphi$  ist dabei der Drehwinkel. Die Elemente der Matrizen sind stetig differenzierbare Funktionen des Parameters  $\varphi$ .

**Likelihood-Funktion** ↗ Maximum-Likelihood-Methode I.

**Likelihood-Prinzip** ↗ Ausgleichsrechnung I.

**Limes** ↗ Grenzwert einer Zahlenfolge I., ↗ Häufigkeitsgrenze.

**Lindeberg, Jarl**, geb. 4. 9. 1876 und gest. 24. 12. 1932 Helsinki. — L. studierte in seiner Heimatstadt und war dort seit 1905 Professor. Er arbeitete vorwiegend zur Statistik, Korrelationstheorie und zur Variationsrechnung.

**Lindebergsche Bedingung** ↗ Grenzwertsätze II.

**Lindemann, Ferdinand**, geb. 12. 4. 1852 Hannover, gest. 1. 4. 1939 München. — L. studierte in Göttingen, Erlangen, München, London und Paris. Er war seit 1877 als Privatdozent in Würzburg, danach als Professor an den Universitäten Freiburg, seit 1883 Königsberg (Kaliningrad) und seit 1893 München tätig. — L. arbeitete über Differentialgeometrie und algebraische Geometrie, aber auch über mathemat. Physik. Im Jahre 1882 gelang ihm in seiner Arbeit »Die Zahl  $\pi$ « der Nachweis der Transzendenz von  $\pi$  und damit der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal.

**Lineal**: I. aus Holz, Metall oder Plast gefertigte Leiste mit einer geraden Kante zur Konstruktion gerader Linien. Das Vorhandensein einer Maßstabteilung wird dabei nicht vorausgesetzt. Die Verwendung des L.s erfolgt durch Anlegen der L.kante an zwei gegebene oder beliebige Punkte und durch Zeichnen eines Geradenstücks längs dieser Kante. Die Anwendungsmöglichkeiten werden erweitert, wenn auf der L.kante noch zwei Punkte  $A$  und  $B$  markiert sind. Läßt man das Abtragen der Strecke  $AB$  auf einer vorhandenen Geraden von einem festen Punkt aus nach beiden Richtungen zu, dann liegt ein  $L.$  mit *Eichmaß* vor. Das Gerät wird zum *normierten L.*, wenn es zur Bestimmung der Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit einem Kreis vom Radius  $|AB|$  um einen gegebenen Punkt  $M$  verwendet werden darf, und zum *Einschiebe-L.*, wenn als weitere Operation das Einschieben der Strecke  $AB$  zwischen zwei gegebene Geraden auf einer durch einen gegebenen Punkt gehenden Geraden zugelassen wird. II. Durch Kombination mehrerer L.e erhält man weitere Konstruktionshilfsmittel, durch starre Verbindung zweier zueinander senkrechter L.e z. B. das *Rechtwinkel-L.*, das zum Zeichnen der Senkrechten zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt verwendet wird und vom Zeichendreieck her bekannt ist, oder das *Parallel-L.*, das aus zwei parallelen L.en besteht, die durch zwei Gelenkstäbe zu einem Parallelogramm ergänzt werden. Dadurch

wird die Konstruktion von Geraden erleichtert, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind und durch einen gegebenen Punkt gehen.

III. Verbindet man drei L.e so, daß ihre Kanten um einen gemeinsamen Punkt drehbar sind, dann erhält man eine *Fluchtpunktschiene*, die bei der Konstruktion zentralperspektiv. Bilder nützlich ist. Wenn etwa ein Fluchtpunkt durch zwei Geraden festgelegt ist, bringt man zwei L.kanten mit diesen Geraden zur Deckung und kann mittels der dritten Kante weitere durch diesen Fluchtpunkt gehende Geraden zeichnen.

**linear** ↗ Graph III., ↗ Relation II.

**lineare Abbildung**: I. eindeutige Abbildung  $\varphi: V \rightarrow V'$  eines reellen Vektorraumes  $V$  in einen reellen Vektorraum  $V'$ , die für alle  $x, y \in V$  und für alle reellen  $\lambda$  die Eigenschaften (1) und (2) hat.

$$(1) \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$(2) \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$$

Die Linearität ist danach nur eine andere Bezeichnung für einen Homomorphismus von  $V$  in  $V'$ . — Die Verknüpfungen in  $V'$  können durchaus anders definiert sein als in  $V$ , sie werden nur der Einfachheit halber mit demselben Symbol bezeichnet. Sind  $V$  und  $V'$  Vektorräume über dem Körper  $K$ , so ist in (2)  $\lambda \in K$  zu nehmen. Im Falle  $V = V'$  bezeichnet man die l. A.  $\varphi$  als *linearen Operator* von  $V$  oder *lineare Transformation* von  $V$ . — Das *Bild* des Vektors  $x \in V$  bzgl.  $\varphi$  bezeichnet man mit  $x' = \varphi(x) = \varphi x$ ;  $x$  ist dann ein *Urbild* oder *Original* von  $x'$  bzgl.  $\varphi$ . Alle Elemente aus  $V$ , die in  $V'$  dasselbe Bild  $x'$  haben, bilden das *vollständige Urbild* bzw. *vollständige Original* von  $x'$  bzgl.  $\varphi$ :  $\{x \mid x \in V \text{ und } \varphi(x) = x'\}$ . Ist  $S$  eine Teilmenge von  $V$ , so ist  $\varphi S$  die Menge der Bilder aller Elemente von  $S$ ; ist  $S'$  eine Teilmenge von  $V'$ , so ist die Menge  $\{x \in V \mid \varphi x \in S'\}$  das vollständige Urbild von  $S'$  bzgl.  $\varphi$ .

**Beispiele**: I.1. Die Abbildung  $\varphi_1$  des Vektorraumes  $V^3$  der geordneten Tripel reeller Zahlen in den Vektorraum  $V^2$  der geordneten Paare reeller Zahlen mit  $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$  ist linear. Anschaulich interpretiert, wird durch  $\varphi_1$  jeder Vektor des dreidimensionalen Raumes in die  $(x_1, x_2)$ -Ebene projiziert (Abb.).

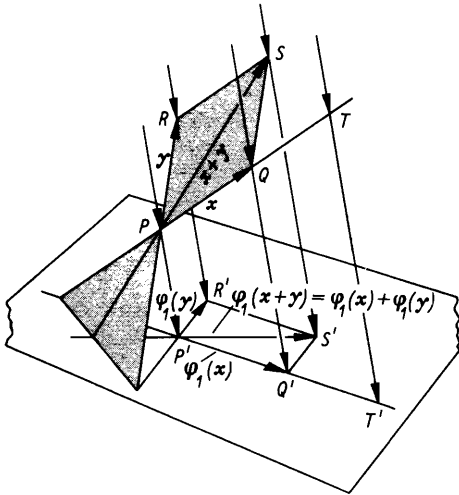
I.2. Die Abbildung  $\varphi_2$  des Vektorraumes  $D$  der beliebig oft differenzierbaren Funktionen in sich mit  $\varphi_2 f = f'$  ist linear;  $\varphi_2$  ist ein Operator von  $D$ .

I.3. Die *Nullabbildung*  $\varphi_3 = \omega: V \rightarrow V'$ , die jeden Vektor  $x \in V$  auf den Nullvektor  $o'$  von  $V'$  abbildet,  $\omega x = o'$ , ist linear.

I.4. Der *ident. Operator*  $\varphi_4 = \varepsilon: V \rightarrow V$  mit  $\varepsilon x = x$  für alle  $x \in V$  ist linear.

I.5. Die Abbildung  $\varphi_5: V \rightarrow V$  mit  $\varphi_5 x = x + a$ ,  $a \neq 0$  ist nicht linear, denn es ist einerseits  $\varphi_5(x + y) = (x + y) + a$ , andererseits  $\varphi_5 x + \varphi_5 y = (x + a) + (y + a) = (x + y) + 2a$ .

I.6. Ist  $V$  ein zweidimensionaler Vektorraum,  $B = \{a_1, a_2\}$  eine Basis von  $V$ ,  $\varphi$  ein Operator von  $V$  mit  $\varphi a_1 = \mu_1 a_1 + \varepsilon a_2$ ,  $\varphi a_2 = \mu_2 a_2$ , wobei  $\mu_1, \mu_2$  reell sind und  $\varepsilon = 0$  oder  $1$  ist, so ist  $\varphi$  unter der Voraussetzung der Linearität durch diese Angaben



Lineare Abbildung  $\varphi_1$ , die jeden Vektor des dreidimensionalen Raums in die  $x_1, x_2$ -Ebene projiziert

bereits eindeutig bestimmt, denn für einen beliebigen Vektor  $x \in V$  gilt (3).

$$(3) \quad \varphi x = \varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1 \varphi a_1 + \lambda_2 \varphi a_2 = \lambda_1 \mu_1 a_1 + (\lambda_2 \mu_2 + \lambda_1 \varepsilon) a_2$$

Falls  $\varepsilon = 0$ , so ist  $\varphi$  eine Ähnlichkeitsabbildung, die sich geometrisch als Verzerrung in Richtung von  $a_1$  bzw.  $a_2$  mit dem Verzerrungsfaktor  $|\lambda_1|$  bzw.  $|\lambda_2|$  und gegebenenfalls noch einer Richtungsumkehr interpretieren läßt; ist  $\varepsilon = 1$ , so tritt noch eine Scherung hinzu.

II. Eigenschaften l. A.en.  $\varphi: V \rightarrow V'$ .

II.1. Eine Linearkombination zwischen Elementen aus  $V$  wird nach (4) stets abgebildet auf dieselbe Linearkombination zwischen den entsprechenden Bildelementen aus  $V'$ . Daraus folgt: Das Bild der

$$(4) \quad \varphi(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i \varphi a_i$$

linearen Hülle ( $\nearrow$  Linearkombination)  $L(S)$  einer Teilmenge  $S \subseteq V$  ist gleich der linearen Hülle der Bildmenge  $\varphi S$  von  $S$ :  $\varphi[L(S)] = L[\varphi S]$ .

Ist insbes.  $B$  eine Basis von  $V$ , so gilt  $\varphi V = \varphi[L(B)] = L[\varphi B]$ , d. h., die l. A.  $\varphi$  ist durch die Bildmenge  $\varphi B$  einer Basis  $B$  von  $V$  bereits eindeutig bestimmt (vgl. I.6).

II.2. Ist  $S$  eine linear abhängige Menge von  $V$ , so ist  $\varphi S$  eine linear abhängige Menge von  $V'$ . Hingegen können linear unabhängige Mengen von  $V$  durchaus linear abhängige Bildmengen von  $V'$  liefern. Wegen II.1. und II.2. ist die Bildmenge  $\varphi B$  einer Basis  $B$  von  $V$  deshalb i. allg. nur ein Erzeugendensystem von  $\varphi V \subset V'$ .

II.3. Das Bild eines Untervektorraumes von  $V$  bzgl.  $\varphi$  ist ein Untervektorraum von  $V'$ . Insbes. ist demnach  $\varphi V$  ein Untervektorraum von  $V'$ . Falls  $V$  endlichdimensional ist, so bezeichnet man die Dimension  $\dim \varphi V$  des Bildraumes  $\varphi V$  als Rang der l.A.  $\varphi$ .

II.4. Die Umkehrung von II.3. ist auch richtig: Das vollständige Urbild eines Untervektorraumes von  $V'$  ist ein Untervektorraum von  $V$ . Bezeichnet  $\mathfrak{o}'$  den Nullvektor von  $V'$ , so ist  $\{\mathfrak{o}'\}$  ein Untervektorraum von  $V'$ , und sein vollständiges Urbild, d. h., die Menge aller Vektoren von  $V$ , deren Bild der Nullvektor  $\mathfrak{o}'$  ist, bildet mithin einen Untervektorraum (5) von  $V$ , den man den Kern der linearen Abbildung  $\varphi$  nennt.

$$(5) \quad \text{Kern } \varphi = \{x \in V \mid \varphi x = \mathfrak{o}'\}$$

Der Kern bewirkt eine Klasseneinteilung von  $V$  in Klassen bildgleicher Elemente; zwei Elemente  $x, y \in V$  haben dasselbe Bild bzgl.  $\varphi$  genau dann, wenn  $x - y \in \text{Kern } \varphi$ . Ist  $V$  von endl. Dimension, so heißt die Dimension des Kernes von  $\varphi$  der Defekt der l. A.  $\varphi$ , und es gilt die Gleichung (6).

$$(6) \quad \text{Rang } \varphi + \text{Defekt } \varphi = \dim V.$$

Die Kerne der l. A.en in den Beispielen I.1. bis I.4 sind:

- Kern  $\varphi_1 = \{(0, 0, x_3); x_3 \text{ beliebig reell}\}$ ;
- Kern  $\varphi_2 = \{f; f = \text{const}\}$ ; Kern  $\varphi_3 = \text{Kern } \omega = V$ ;
- Kern  $\varphi_4 = \text{Kern } \varepsilon = \{\mathfrak{o}\}$ .

III. Umkehrbare l. A.en. Eine l. A.  $\varphi: V \rightarrow V'$  heißt umkehrbar eindeutig oder ein Isomorphismus von  $V$  in  $V'$  genau dann, wenn aus  $\varphi x = \varphi y$  stets  $x = y$  folgt, d. h., wenn jedes Bildelement genau ein Urbildelement hat. Ein umkehrbar eindeutiger linearer Operator von  $V$  wird regulärer Operator von  $V$  gen.; nicht reguläre Operatoren heißen singular. Die l. A.  $\varphi$  des Vektorraumes der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen in den Vektorraum der Polynome höchstens  $(n - 1)$ -ten Grades mit  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 t + \dots + x_n t^{n-1} z$ . B. ist umkehrbar eindeutig; der in Beispiel I.2. genannte Operator  $\varphi_2$  hingegen ist singular. Ist  $\varphi$  eine umkehrbar eindeutige l. A., so ist Kern  $\varphi = \{\mathfrak{o}\}$ , und umgekehrt. Eine umkehrbar eindeutige l. A.  $\varphi: V \rightarrow V'$  führt linear unabhängige Mengen von  $V$  stets in ebensolche von  $V'$  über; insbes. ist also das Bild einer Basis von  $V$  bzgl. einer solchen Abbildung wieder eine Basis von  $\varphi V$ . Ist  $V$  endlich-dimensional,  $\varphi$  umkehrbar eindeutig, so gilt  $\dim \varphi V = \dim V$ .

IV. Darstellung l. A.en durch Matrizen. Hat der Vektorraum  $V$  die Dimension  $n$  und  $V'$  die Dimension  $m$ , so ist die l. A.  $\varphi: V \rightarrow V'$  bereits eindeutig bestimmt durch das Bild  $\varphi B = \{\varphi a_1, \varphi a_2, \dots, \varphi a_n\}$  einer Basis  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  von  $V$  (vgl. II.1.). Beschreibt man die Bildvektoren  $\varphi a_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  durch ihre Koordinaten bzgl. einer festen Basis  $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  von  $V'$ , so ist die l. A.  $\varphi$  mithin völlig bekannt, wenn man die  $m \cdot n$  Koordinaten der  $n$  Vektoren  $\varphi a_i$  bzgl.  $B'$  kennt. Diese Koordinaten pflegt man in einer Matrix  $A$  vom Typ  $(m, n)$  so anzuordnen, daß die  $k$ -te Spalte von  $A$  die Koordinaten des Vektors  $\varphi a_k$  bzgl.  $B'$  enthält. Da man auch umgekehrt jeder  $(m, n)$ -Matrix bzgl. fester Basen  $B$  in  $V$ ,  $B'$  in  $V'$  eine l. A. zuordnen kann, indem man die Spalten der Matrix als Koordinaten der Bilder der Vektoren von  $B$  bzgl.  $B'$  deutet, besteht folglich bzgl. fester Basen in  $V$  und  $V'$  eine um-



kehrbar eindeutige Zuordnung zwischen der Menge der l. A.en von  $V$  in  $V'$  und der Menge der  $(m, n)$ -Matrizen.

*Beispiel:* Die der l. A.  $\varphi_1$  (vgl. I.1.) bzgl. der Basen  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  in  $V^3$  und  $\{(1, 0), (1, 1)\}$  in  $V^2$  zugeordnete Matrix ist (7), denn es gilt (8).

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(8) \begin{aligned} \varphi_1(1, 0, 0) &= (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1) \\ \varphi_1(0, 1, 0) &= (0, 1) = (-1) \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1) \\ \varphi_1(0, 0, 1) &= (0, 0) = 0 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1) \end{aligned}$$

Wird die l. A.  $\varphi: V \rightarrow V'$  bzgl. des Basenpaares  $(B, B')$  durch die Matrix  $A$  beschrieben, so erhält man das Bild  $\varphi x$  eines beliebigen Vektors  $x \in V$  mittels  $\varphi x = Ax$ ; dabei hat man rechts für  $x$  sein Koordinaten- $n$ -tupel bzgl.  $B$  einzusetzen und erhält links das Koordinaten- $m$ -tupel von  $\varphi x$  bzgl.  $B'$ . Mit dieser Formel lassen sich auch die vollständigen Urbilder bestimmen; es ist dann  $\varphi x$  gegeben,  $x$  gesucht, d. h., man hat ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Des weiteren ist  $\text{Rang } \varphi = \text{Rang } A$  ( $\nearrow$  Matrix I., V.). — Wählt man andere Basen in  $V$  bzw.  $V'$ , so wird dieselbe l. A.  $\varphi$  durch eine andere Matrix beschrieben. Geht man in  $V$  von der Basis  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  über zu  $\bar{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  mittels  $\bar{a}_k = \sum_{i=1}^n s_{ik} a_i$ , in  $V'$  von der Basis  $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  zu  $\bar{B}' = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m\}$  mittels  $\bar{b}_k = \sum_{i=1}^m t_{ik} b_i$ , so ist  $\bar{A} = T^{-1}AS$ , wobei die Matrizen  $A$  bzw.  $\bar{A}$  dieselbe l. A.  $\varphi$  bzgl. des Basenpaares  $(B, B')$  bzw.  $(\bar{B}, \bar{B}')$  beschreiben und  $S = (s_{ik}), T = (t_{ik})$  ist. Demzufolge sind zwei dieselbe l. A.  $\varphi$  bzgl. verschiedener Basenpaare beschreibende Matrizen zueinander äquivalent ( $\nearrow$  Matrix), und der l. A.  $\varphi$  entspricht eineindeutig eine Klasse äquivalenter Matrizen.

Ist speziell  $\varphi$  ein linearer Operator von  $V$ , so geht die Transformationsformel  $\bar{A} = T^{-1}AS$  für die Matrizen  $A$  bzw.  $\bar{A}$ , die  $\varphi$  bzgl. verschiedener Basen  $B$  bzw.  $\bar{B}$  beschreiben, wegen  $B = B', \bar{B} = \bar{B}'$  über in:  $\bar{A} = S^{-1}AS$ . Matrizen, die denselben linearen Operator  $\varphi$  bzgl. verschiedener Basen beschreiben, sind folglich zueinander ähnlich ( $\nearrow$  Matrix V.), und dem linearen Operator  $\varphi$  entspricht eineindeutig eine Klasse ähnl. Matrizen. — Das *Normalformenproblem* für l. A.en  $\varphi$  besteht darin, in den Vektorräumen  $V, V'$  Basen  $B, B'$  geeignet so zu wählen, daß die  $\varphi$  beschreibende Matrix eine möglichst einfache Gestalt erhält. Im Falle  $V \cong V'$  gibt es stets eine Basis  $B$  in  $V$  und eine Basis  $B'$  in  $V'$  so, daß die  $\varphi$  beschreibende Matrix die Gestalt (9) hat, in der die

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Anzahl der in der Hauptdiagonalen stehenden Einsen gleich  $\text{Rang } \varphi$  ist, und alle anderen Elemente Null sind. Ist hingegen  $V = V'$ , so kann man, um eine solche Normalform zu gewinnen, nicht mehr zwei Basen, sondern nur noch eine Basis variieren, und es gelingt nicht stets,  $\varphi$  durch eine Diagonalmatrix zu beschreiben. Man kann jedoch immer den Vektorraum als direkte Summe endlich vieler  $\varphi$ -invarianter Untervektorräume minimaler Dimension darstellen; dabei heißt ein Untervektorraum  $U$   $\varphi$ -invariant genau dann, wenn  $\varphi U \subseteq U$ . Infolgedessen kann man eine Basis von  $V$  durch Vereini-

$$(10) \begin{pmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_r \end{pmatrix} \quad (11) A_i = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

gung von Basen dieser  $\varphi$ -invarianten Untervektorräume gewinnen, und die  $\varphi$  bzgl. dieser Basis zugeordnete Matrix hat die Gestalt (10), deren Elemente Null sind mit Ausnahme höchstens der Elemente gewisser quadrat. Untermatrizen, die sich entlang der Hauptdiagonalen der Matrix aufreihen und deren Zeilenzahlen gleich den Dimensionen der  $\varphi$ -invarianten Unterräume sind. Die Basen in den  $\varphi$ -invarianten Untervektorräumen können nun noch so gewählt werden, daß die Teilmatrizen  $A_i$  die Gestalt (11) haben, in der  $\lambda_k$  ein Eigenwert von  $\varphi$  ist. Die Gestalt (10), in der die  $A_i$  die Form (11) haben, heißt die *Jordansche Normalform* der zu  $\varphi$  gehörenden *Ähnlichkeitsklasse*; sie ist eindeutig bestimmt bis auf die Reihenfolge der  $A_i$ .

Ist  $\varphi$  ein *symmetr. Operator* eines euklid. Vektorraumes  $V$ , d. h., hat er die Eigenschaft  $(\varphi x) \cdot y = x \cdot (\varphi y)$ , so kann man in  $V$  eine passende *Orthonormalbasis* wählen, auf die bezogen  $\varphi$  durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird; diese Orthonormalbasis besteht aus einem Orthonormalsystem von Eigenvektoren von  $\varphi$ , und die Hauptdiagonalelemente der Diagonalmatrix sind die Eigenwerte von  $\varphi$ , von denen jeder so oft auftritt, wie seine Vielfachheit angibt.

V. *Verknüpfungen l. A.en.* Sind  $\varphi_1: V \rightarrow V', \varphi_2: V \rightarrow V'$  und  $\psi: V' \rightarrow V''$  l. A.en, so definiert man die *Summe*  $\varphi_1 + \varphi_2: V \rightarrow V'$  durch  $(\varphi_1 + \varphi_2)x = \varphi_1 x + \varphi_2 x$  für alle  $x \in V$ , das  $\alpha$ -*fache*  $\alpha\varphi_1: V \rightarrow V'$  durch  $(\alpha\varphi_1)x = \alpha(\varphi_1 x)$  für alle  $x \in V$ , und schließlich das *Produkt*  $\psi\varphi_1: V \rightarrow V''$  durch Hintereinanderausführung der l. A.en, also  $(\psi\varphi_1)x = \psi[\varphi_1 x]$  für alle  $x \in V$ . Mit  $\varphi_1, \varphi_2, \psi$  sind auch  $\varphi_1 + \varphi_2, \alpha\varphi_1$  und  $\psi\varphi_1$  wieder linear, und die Menge der l. A.en von  $V$  in  $V'$  bildet bzgl. der ersten beiden Verknüpfungen einen Vektorraum, bzgl. der Addition und Multiplikation einen Ring. Sind  $V, V'$  und  $V''$  endlich-dimensional, und beschreibt man  $\varphi_1, \varphi_2, \psi$  bzgl. fester Basen in  $V, V', V''$  durch die Matrizen  $A_1, A_2, B$ , so entspricht der Summe  $\varphi_1 + \varphi_2$  der l. A.en auch die Summe  $A_1 + A_2$  der zugeordneten Matrizen, dem  $\alpha$ -fachen  $\alpha\varphi_1$  das  $\alpha$ -fache  $\alpha A_1$  der  $\varphi_1$  zugeordneten Matrix, und dem Produkt  $\psi\varphi_1$  das Produkt  $BA_1$  der zugehörigen Matrizen.

**IV. Inverser Operator.** Ist  $\varphi: V \rightarrow V$  ein regulärer Operator von  $V$  mit  $\varphi V = V$ , so gibt es einen eindeutig bestimmten linearen regulären Operator  $\varphi^{-1}$  von  $V$  mit der Eigenschaft  $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  der ident. Operator ist. Man nennt  $\varphi^{-1}$  dann den zu  $\varphi$  inversen Operator; wegen  $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$  sind  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  zueinander invers. Gehört im Falle eines endlich-dimensionalen Vektorraumes  $V$  zu  $\varphi$  die Matrix  $A$ , so gehört zu  $\varphi^{-1}$  bzgl. der gleichen Basis die Matrix  $A^{-1}$ . Die Menge der regulären Operatoren von  $V$  bildet bzgl. der Multiplikation eine Gruppe.

**lineare Abhängigkeit: I.** Eigenschaft eines  $k$ -Tupels  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  von Vektoren eines Vektorraumes, die genau dann besteht, wenn die Gleichung

$$(1) \quad \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

durch *nicht sämtlich verschwindende* Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  befriedigt werden kann. In diesem Falle heißt das  $k$ -Tupel  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  *linear abhängig*. Wird Gleichung (1) jedoch *nur* durch  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$  erfüllt, so heißt das  $k$ -Tupel  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  *linear unabhängig*. Mit anderen Worten ist ein  $k$ -Tupel von Vektoren linear unabhängig bzw. linear abhängig je nachdem, ob sich der Nullvektor  $0$  nur auf triviale Weise bzw. auch auf nichttriviale Art als Linearkombination der Vektoren des  $k$ -Tupels darstellen läßt. Eine unendl. Menge  $S$  von Vektoren eines Vektorraumes heißt linear abhängig, wenn mindestens eine endl. Teilmenge von  $S$  im gekennzeichneten Sinne linear abhängig ist; gibt es keine solche Teilmenge, heißt die Menge  $S$  linear unabhängig.

**Beispiele: I.1.** Im Vektorraum der geordneten Paare reeller Zahlen ist  $\{(2, -1), (0, 3), (1, 7)\}$  ein linear abhängiges 3-Tupel von Vektoren, denn es ist z. B.  $1 \cdot (2, -1) + 5 \cdot (0, 3) - 2 \cdot (1, 7) = (0, 0)$ .

**I.2.** Im Vektorraum der komplexen Zahlen ist  $\{1+i, 1-i\}$  ein linear unabhängiges 2-Tupel, denn die Gleichung  $0 = \lambda_1(1+i) + \lambda_2(1-i) = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)i$  ist nur für  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  erfüllbar.

**I.3.** Im Vektorraum der in  $[a, b]$  stetigen Funktionen ist die Menge  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  linear unabhängig, denn jede endl. Teilmenge (2) ist linear unabhängig, da aus dem Ansatz (3) folgt, daß alle Koeffizienten  $\lambda_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, k$  verschwinden müssen.

$$(2) \quad \{\lambda_1 x^{n_1} + \lambda_2 x^{n_2} + \dots + \lambda_k x^{n_k} = 0 \text{ für alle } x$$

mit  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  und  $n_i \in \mathbf{N}$

$$(3) \quad \lambda_1 x^{n_1} + \lambda_2 x^{n_2} + \dots + \lambda_k x^{n_k} = 0 \text{ für alle } x$$

**I.4.** Im Vektorraum der Polynome höchstens dritten Grades ist das 3-Tupel  $\{x^2 + 2x - 1, x^3 - 2x^2 + x, x^3 + 5x - 2\}$  linear abhängig, denn es gilt z. B.  $2(x^2 + 2x - 1) + (x^3 - 2x^2 + x) - (x^3 + 5x - 2) = 0$ .

**II. Sätze über lineare Abhängigkeit.** Bezeichnet  $S$  eine nichtleere, endl. oder unendl. Menge von Vektoren eines Vektorraumes, so gilt:

**II.1. Enthält  $S$  eine linear abhängige Teilmenge, so ist  $S$  selbst linear abhängig.** — Gleichbedeutend damit ist die Aussage, daß sämtl. Teilmengen einer linear unabhängigen Menge selbst linear unabhängig

sind. Insbes. ist demnach eine Menge  $S$  linear abhängig, wenn sie den Nullvektor oder zwei proportionale Vektoren enthält.

**II.2.  $S$  ist linear abhängig genau dann, wenn sich mindestens ein Vektor  $x \in S$  als Linearkombination der „übrigen“ Vektoren, d. h., der Vektoren von  $S \setminus \{x\}$ , darstellen läßt.** Falls  $S$  linear unabhängig ist, läßt sich demnach kein Vektor von  $S$  als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellen, d. h. anschaulich, daß linear unabhängige Mengen gewissermaßen keine „überflüssigen“ Vektoren enthalten in dem Sinne, daß ihre lineare Hülle  $L(S)$  ( $\nearrow$  Linearkombination) umfassender ist als diejenige irgendeiner ihrer echten Teilmengen:  $S$  linear unabhängig,  $S' \subset S(S' \neq S) \rightarrow L(S') \neq L(S)$ .

**II.3. Ist  $S$  linear abhängig, so weiß man nach Satz II.2. daß mindestens ein Vektor von  $S$  Linearkombination der übrigen Vektoren ist.** I. allg. kann man jedoch nicht sagen, welcher Vektor diese Eigenschaft hat. Ist hingegen bekannt, daß  $S$  linear abhängig, aber  $S \setminus \{x\}$  linear unabhängig ist, so ist  $x$  Linearkombination von Vektoren aus  $S \setminus \{x\}$ . Gleichbedeutend damit ist die Aussage: *Falls  $S$  linear unabhängig und  $S \cup \{x\}$  linear abhängig sind, so ist  $x$  Linearkombination von Vektoren aus  $S$ .* Daraus folgt: Ist  $S$  linear unabhängig und  $x$  nicht Linearkombination von  $S$ , so ist  $S \cup \{x\}$  ebenfalls linear unabhängig. Diese Aussage gibt eine Möglichkeit zur Konstruktion maximaler linear unabhängiger Systeme, sofern solche existieren ( $\nearrow$  Vektorraum VII.).

**II.4. Auf linear unabhängige Vektormengen  $S$  kann das Prinzip des Koeffizientenvergleiches angewandt werden, nach dem für  $a_i \in S$  aus**

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_k a_k$  stets folgt  $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_k = \mu_k$ . Wenn  $S$  linear abhängig ist, so kann dieser Schluß nicht gezogen werden, für  $\{a_1 = (2, -1), a_2 = (0, 3), a_3 = (1, 7)\}$  ist z. B.  $3a_1 - 7a_2 + a_3 = 4a_1 - 2a_2 - a_3$ . **lineare Differentialgleichung**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.4.

**lineare Exzentrizität**  $\nearrow$  Ellipse I.,  $\nearrow$  Hyperbel I.  
**lineare Funktion: I.** Funktion  $f$ , die dargestellt werden kann durch eine Funktionsgleichung  $y = f(x) = mx + n$ , in der  $n$  und  $m \neq 0$  beliebige reelle Zahlen sind. Ist die Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen ihr Definitionsbereich, so ist ihr Bild eine Gerade in einem  $x, y$ -Koordinatensystem, das kartesisch ist oder in dem die Koordinatenachsen linear unterteilt sind. Eine l. F. ist ganzrational vom Grade 1. Für  $n = 0$  verlaufen die Bilder der l. F.  $y = g(x) = mx$  wegen  $(0, 0) \in g$  durch den Koordinatenursprung. Für die Koordinaten jedes Punktes  $(x_i, g(x_i))$  gilt  $g(x_i) : x_i = mx_i : x_i = m$ , falls  $x_i \neq 0$ . Ist  $\alpha$  die Größe des Winkels, den die Gerade gegen die  $+x$ -Achse bildet, so gilt  $m = \tan \alpha$  (Abb. 1). Dieser für jede l. F. charakterist. Parameter  $m$  heißt *Anstieg*. Für  $m > 0$  verläuft das Bild von  $f$  im I. und III. Quadranten, für  $m < 0$  im II. und IV. Quadranten. Ist  $P_{i,x}$  die Projektion des Bildpunktes  $P_i(x_i, g(x_i))$  auf die Abszissenachse eines kartes. Koordinatensystems mit dem Ursprung  $O$ , so sind die rechtwinkligen *Steigungsdreiecke*  $OP_{i,x}P_i$  für jede l. F. einander ähnl-

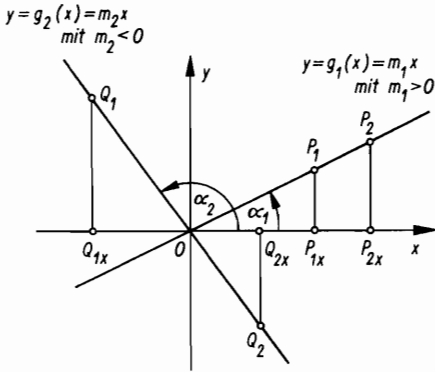
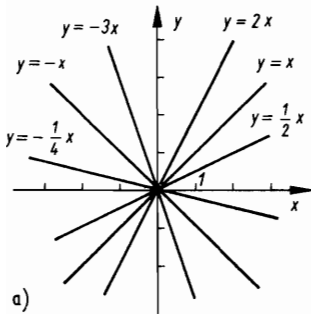


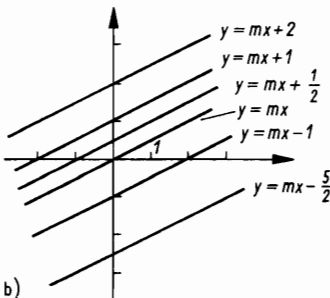
Abb. 1: Graphische Darstellung der linearen Funktion  $y = mx$

lich. Die Menge der Bilder aller linearen Funktionen  $g$  mit  $g(x) = mx$  bildet ein Geradenbündel mit dem Träger  $O$ , das die  $x, y$ -Ebene mit Ausnahme der Achsen vollkommen überdeckt.

II. Geht man von einer l. F.  $g = mx$  zu einer l. F.  $f(x) = mx + n$  über, so vergrößern bzw. verkleinern sich alle Funktionswerte um  $|n|$ , je nachdem, ob  $n > 0$  oder  $n < 0$  gilt. Das Bild von  $f$  erhält man durch eine Parallelverschiebung des Bildes von  $g$  um  $|n|$  Einheiten in Richtung der positiven bzw. negativen Ordinatenachse, je nachdem, ob  $n > 0$  oder  $n < 0$  (Abb. 2). Wegen  $f(0) = n$  schneidet das Bild der Funktion die Ordinatenachse im Punkt  $P(0, n)$ . Für  $m = \text{const}$  und  $n \in \mathbb{R}$  bilden alle Bilder der l. F.  $f(x) = mx + n$  ein Parallelgeraden-



a)



b)

Abb. 2: Graphische Darstellung der linearen Funktion  $y = mx + n$ ; verschiedene Werte a) von  $m$ , b) von  $n$

bündel, das die  $x, y$ -Ebene lückenlos überdeckt. Für  $x_1 > x_2$  gilt entweder stets  $mx_1 + n > mx_2 + n$  oder stets  $mx_1 + n < mx_2 + n$ , je nachdem, ob  $m > 0$  oder  $m < 0$  ist, d. h., daß jede l. F. eine streng monotone Funktion ist. Jede l. F.  $f(x) = mx + n$  hat genau eine Nullstelle  $x_0 = -n/m$ . Die Umkehrfunktion einer l. F.  $f$  ist wieder eine l. F.  $g$ , deren Anstieg reziprok zu dem von  $f$  ist. Ihr Bild entsteht aus dem von  $f(x)$  durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten. Das Spiegelbild des Bildes der l. F.  $f(x) = mx + n$  an der Abszissenachse hat die Gleichung  $y = -mx - n$ , das Spiegelbild an der Ordinatenachse die Gleichung  $y = -mx + n$ . Implizit wird eine l. F. durch eine Gleichung  $Ax + By + C = 0$  mit  $A \neq 0$  und  $B \neq 0$  definiert. Diese Funktionsgleichung läßt sich in die expliziten Formen  $y = f(x) = -Ax/B - C/B$  bzw.  $x = g(y) = -By/A - C/A$  überführen, je nachdem, ob man  $x$  oder  $y$  als unabhängige Variable auffaßt. Im ersten Fall ist  $m = -A/B$  und  $n = -C/B$ , im zweiten Fall  $m = -B/A$  und  $n = -C/A$ . S. a. ganzrationale Funktion I.

**lineare gewöhnliche Differentialgleichung:** gewöhnl. Differentialgleichung (1), die in der gesuchten Funk-

$$(1) \quad y^{(r)} + f_{r-1}(x)y^{(r-1)} + f_{r-2}y^{(r-2)} + \dots + f_0(x)y = f(x)$$

tion  $y(x)$  und deren Ableitungen linear ist. Diese Differentialgleichungen sind bei Schwingungsproblemen von großer Bedeutung. Die Funktion  $f(x)$  bezeichnet man in den Anwendungen häufig als *Störglied*. Ist  $f(x) \equiv 0$ , so heißt die l. g. D. *homogen*, anderenfalls *inhomogen*. Die Koeffizienten  $f_k(x)$  für  $k = 0, 1, \dots, r - 1$  sollen in einem betrachteten Intervall  $a \leq x \leq b$  stetige Funktionen sein. Die l. g. D. 2. Ordnung  $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x)$  soll für die folgenden Eigenschaften als Muster für eine l. g. D. der Ordnung  $r$  dienen.

I. Für die *homogene* l. g. D.  $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$  gelten die Eigenschaften I.1. bis I.4.

I.1. Sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  Lösungen der homogenen l. g. D., so ist auch  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  Lösung dieser Differentialgleichung, dabei sind  $c_1$  und  $c_2$  beliebige Konstanten.

I.2. Jede homogene l. g. D. 2. Ordnung hat zwei linear unabhängige Lösungen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$ . Ein solches Paar von linear unabhängigen Lösungen bezeichnet man als *Fundamentalsystem* von Lösungen. Bilden  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen, so ist  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  die *allgemeine Lösung* (≠ gewöhnliche Differentialgleichung) der homogenen l. g. D. 2. Ordnung. Dabei heißen die Funktionen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  in  $]a, b[$  *linear abhängig*, wenn es zwei Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  mit  $|a_1| + |a_2| > 0$  gibt, so daß  $a_1y_1(x) + a_2y_2(x) = 0$  für alle  $x \in ]a, b[$  gilt, andernfalls heißen die Funktionen *linear unabhängig*. Zwei Lösungen der homogenen l. g. D. sind in  $]a, b[$  *linear abhängig* bzw. *linear unabhängig*, wenn die Wronski-Determinante (2) in einem Punkte  $x^0 \in ]a, b[$  Null bzw. von Null ver-

$$(2) \quad W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

schieden ist. Die Funktionen  $y_1(x) = \sin x$  und  $y_2(x) = \cos x$  z. B. sind in  $]0, 2\pi[$  linear unabhängig, denn aus der Relation  $a_1 \sin x + a_2 \cos x = 0$  für alle  $x \in ]0, 2\pi[$  folgt  $a_1 = 0$  etwa für  $x = \pi/2$  und  $a_2 = 0$  für  $x = \pi$ . Die Relation  $a_1 \sin x + a_2 \cos x = 0$  kann nur bestehen, wenn  $a_1 = a_2 = 0$  ist. Hingegen sind die Funktionen  $y_1(x) = \cos 2x$  und  $y_2(x) = \sin^2 x - 1/2$  in  $]0, 2\pi[$  linear abhängig, denn  $y_1(x) + 2y_2(x) = \cos 2x - 1 + 2 \sin^2 x = 0$ . Die beiden Lösungen  $y_1(x) = (2 + x)e^{-x}$  und  $y_2(x) = -e^{-x}$  der l. g. D.  $y'' + 2y' + y = 0$  sind nach (3) linear unabhängig in  $] -\infty, \infty[$ .

$$(3) \quad W(x) = \begin{vmatrix} (2+x)e^{-x} & -e^{-x} \\ -(1+x)e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$$

$$W(0) = e^0 = 1 \neq 0$$

**1.3.** Ist eine spezielle Lösung  $u(x)$  der homogenen l. g. D. mit  $u(x) \neq 0$  in  $]a, b[$  bekannt, so läßt sich die Ordnung der l. g. D. durch die Einführung der neuen gesuchten Funktion  $\bar{y}(x)$  mittels  $y = u \int \bar{y}(t) dt$  erniedrigen. Für  $\bar{y}(x)$  erhält man die l. g. D. 1. Ordnung (4). Ist  $\bar{y}(x) = v(x)$  eine Lösung dieser

$$(4) \quad \bar{y}' + \frac{1}{u(x)}(2u'(x) + f_1(x)u(x))\bar{y} = 0$$

l. g. D. erster Ordnung, so sind  $y_1(x) = u(x)$  und  $y_2(x) = u(x) \int v(t) dt$  ein Fundamentalsystem von Lösungen für  $y'' + f_1y' + f_0y = 0$ .

Die homogene l. g. D. 2. Ordnung (5) z. B. hat für

$$(5) \quad y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$0 < x < \infty$  stetige Koeffizienten, und  $u(x) = 1 + x$  ist eine spezielle Lösung. Führt man die neue gesuchte Funktion  $\bar{y}(x)$  durch  $y(x) = (1+x) \int \bar{y}(t) dt$  ein, so ergibt sich für  $\bar{y}$  die l. g. D. 1. Ordnung (6), für die (7) eine Lösung ist. Dann liefert (8) ein

$$(6) \quad \bar{y}' - \frac{x^2 + 1}{x(1+x)}\bar{y} = 0$$

$$(7) \quad \bar{y}(x) = v(x) = x e^x / (x + 1)^2$$

$$(8) \quad y_1(x) = 1 + x;$$

$$y_2(x) = (1+x) \int \frac{te^t}{(t+1)^2} dt = e^x$$

**Fundamentalsystem von Lösungen für**

$y'' - [(1+x)/x]y' + (1/x)y = 0$ , und  $y(x) = c_1(1+x) + c_2 e^x$  ist die allgemeine Lösung dieser l. g. D.

**1.4.** Sind die Koeffizienten  $f_1(x), f_0(x)$  in der homogenen l. g. D. 2. Ordnung Konstanten  $a_1, a_0$ , so geht die l. g. D.  $y'' + a_1y' + a_0y = 0$  durch den Ansatz  $y(x) = e^{sx}$  über in  $(s^2 + a_1s + a_0)e^{sx} = 0$ . Da  $e^{sx} \neq 0$  ist, kann die Größe  $s$  aus der quadratischen Gleichung  $P(s) = s^2 + a_1s + a_0 = 0$  bestimmt werden. Diese quadrat. Gleichung wird als *charakterist. Gleichung* der homogenen l. g. D. 2. Ordnung

$y'' + a_1y' + a_0y = 0$  bezeichnet. Ist  $s_0$  eine Wurzel der charakterist. Gleichung, so ist  $y(x) = e^{s_0x}$  eine Lösung der l. g. D.  $y'' + a_1y' + a_0y = 0$ . Die allgemeine Lösung  $y(x)$  dieser l. g. D. ergibt sich als (9a), wenn die Wurzeln  $s_1$  und  $s_2$  der charakterist. Gleichung reell und verschieden sind, als (9b), wenn die charakterist. Gleichung  $s_1$  zur Doppelwurzel hat, und schließlich als (9c), wenn  $s_1 = \alpha + i\beta$  und  $s_2 = \alpha - i\beta$  konjugiert komplexe Wurzeln der charakterist. Gleichung sind.

$$(9a) \quad y(x) = c_1 e^{s_1x} + c_2 e^{s_2x}$$

$$(9b) \quad y(x) = c_1 e^{s_1x} + c_2 x e^{s_1x}$$

$$(9c) \quad y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Die l. g. D.  $y'' + y' - 2y = 0$  z. B. hat konstante Koeffizienten und ihre charakterist. Gleichung  $P(s) = s^2 + s - 2 = 0$  hat die reellen Wurzeln  $s_1 = 1, s_2 = -2$ . Damit stellt  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$  die allgemeine Lösung dieser l. g. D. dar.

Für  $y'' - 4y' + 4y = 0$  erhält man die charakterist. Gleichung  $P(s) = s^2 - 4s + 4 = 0$  mit der Doppelwurzel  $s_1 = 2$ , und daraus ergibt sich  $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$  als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung. Schließlich hat die l. g. D.  $y'' - 2y' + 2y = 0$  die charakterist. Gleichung  $P(s) = s^2 - 2s + 2 = 0$  mit den konjugiert komplexen Wurzeln  $s_1 = 1 - i, s_2 = 1 + i$ . Die allgemeine Lösung ist deshalb  $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$ .

**II.1.** Die allgemeine Lösung  $y_{ai}$  der inhomogenen l. g. D.  $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = f(x)$  wird als Summe der allgemeinen Lösung  $y_{ah}$  der der inhomogenen l. g. D. zugeordneten homogenen l. g. D.  $y'' + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$  und einer speziellen Lösung  $y_{si}$  der inhomogenen l. g. D. berechnet:  $y_{ai} = y_{ah} + y_{si}$ . Hat man die allgemeine Lösung der zugeordneten homogenen l. g. D.  $y_{ah}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ , so kann man mit Hilfe der *Variation der Konstanten* eine spezielle Lösung der inhomogenen Lösung l. g. D. erhalten: Man setzt für die gesuchte spezielle Lösung der inhomogenen l. g. D.  $y_{si}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$  an, d. h., man betrachtet die beiden beliebigen Konstanten in der allgemeinen Lösung der homogenen l. g. D. als von  $x$  abhängig. Mit diesem Ansatz geht man in die inhomogene l. g. D. ein und erhält (10). Diese Gleichung ist für solche  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  erfüllt, für die  $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$

$$(10) \quad c_1(y_1'' + f_1y_1' + f_0y_1) + c_2(y_2'' + f_1y_2' + f_0y_2) + (c_1'y_1 + c_2'y_2)' + (c_1'y_1 + c_2'y_2)f_1 + (c_1'y_1' + c_2'y_2') = f(x)$$

und  $c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$  gilt, wenn man noch berücksichtigt, daß  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen der homogenen l. g. D. sind. Man hat also mit (11) eine spezielle Lösung der inhomogenen l. g. D.

$$(11) \quad y_{si}(x) = -y_1(x) \int \frac{f y_2}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt + y_2(x) \int \frac{f y_1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dt$$

Die z. B. zu der inhomogenen l. g. D. (12) gehörende

$$(12) \quad y'' - \frac{1+x}{x} y' + \frac{1}{x} y = x e^x$$

homogene l. g. D. hat die allgemeine Lösung  $y_{ah} = c_1(1+x) + c_2 e^x$ . Die Funktionen  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  in dem Ansatz  $y_{si}(x) = c_1(x)(1+x) + c_2(x)e^x$  für eine spezielle Lösung der inhomogenen l. g. D. bestimmen sich aus  $c_1'(1+x) + c_2' e^x = 0$  und  $c_1' + c_2' e^x = x e^x$  zu (13a) und (13b).

$$(13a) \quad c_1(x) = - \int e^t dt = -e^x$$

$$(13b) \quad c_2(x) = \int (1+t) dt = x + \frac{x^2}{2}$$

Damit erhält man (14). Als allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen l. g. D. ergibt sich  $y_{ai} = y_{ah} + y_{si} = c_1(1+x) + c_2 e^x + (x^2/2 - 1) e^x$ .

$$(14) \quad y_{ai}(x) = -(1+x)e^x + (x + x^2/2)e^x = (x^2/2 - 1)e^x$$

II.2. Oft ist die Variation der Konstanten mit sehr viel rechner. Arbeit verbunden, oder die auftretenden Integrale sind nicht geschlossen auswertbar. Deshalb macht man, um spezielle Lösungen von inhomogenen l. g. D. mit konstanten Koeffizienten  $f_1 = a_1$ , und  $f_0 = a_0$  bei bestimmten Typen von Störfunktionen  $f(x)$  zu ermitteln, gewisse *Ansätze für eine spezielle Lösung*. Diese Methode führt oft viel schneller zum Ziel als die Methode der Variation der Konstanten. Die Ansätze enthalten gewisse beliebige Konstanten  $c_i, \bar{c}_i$ , die durch Einsetzen in die Differentialgleichung und anschließenden Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Hat  $f(x)$  in der inhomogenen l. g. D.  $y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$  eine der speziellen Formen (15), (16), (17), so führt der jeweilige Ansatz (15a), (16a), (17a) für  $y_{si}(x)$  zum Ziel.

$$(15) \quad p_k(x) e^{mx}$$

$$(15a) \quad R_k(x) e^{mx} \text{ für } P(m) \neq 0, \\ x R_k(x) e^{mx} \text{ für } P(m) = 0, P'(m) \neq 0$$

$$(16) \quad p_k(x) e^{mx} \sin(wx) \text{ bzw. } p_k(x) e^{mx} \cos(wx)$$

$$(16a) \quad (R_k(x) \cos(wx) + S_k(x) \sin(wx)) e^{mx} \\ \text{für } P(m) \neq 0, \\ x(R_k(x) \cos(wx) + S_k(x) \sin(wx)) e^{mx} \\ \text{für } P(m) = 0, P'(m) \neq 0$$

$$(17) \quad p_k(x) e^{mx} \sinh(wx) \text{ bzw. } p_k(x) e^{mx} \cosh(wx)$$

$$(17a) \quad (R_k(x) \cosh(wx) + S_k(x) \sinh(wx)) e^{mx} \\ \text{für } P(m) \neq 0, \\ x(R_k(x) \cosh(wx) + S_k(x) \sinh(wx)) e^{mx} \\ \text{für } P(m) = 0, P'(m) \neq 0$$

Dabei ist  $p_k(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$  ein durch das Störglied gegebenes Polynom,  $R_k(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k, S_k(x) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 x + \dots + \bar{c}_k x^k$  sind Polynome mit unbestimmten Koeffizienten  $c_i, \bar{c}_i$ , und  $m, w$  sind Konstanten, die durch das Störglied be-

stimmt werden. Für die l. g. D.  $y'' + y' - 2y = (4 + 6x) e^{-2x}$  z. B. macht man den Ansatz  $y_{si} = x(c_0 + c_1 x) e^{-2x}$ , da  $m = -2$  und  $P(-2) = 0$  ist. Den Ansatz in die Differentialgleichung eingesetzt ergibt  $(-3c_0 + 2c_1 - 6c_1 x) e^{-2x} = (4 + 6x) e^{-2x}$ , und es folgt nach Koeffizientenvergleich  $c_0 = -2, c_1 = -1$ . Die allgemeine Lösung dieser l. g. D. ist  $y_{ai} = y_{ah} + y_{si} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - (2x + x^2) e^{-2x}$ . Ist die Störfunktion  $f(x)$  eine Linearkombination der angegebenen Funktionen, so baut sich der gesamte Lösungsansatz aus den entsprechenden einzelnen Lösungsansätzen auf. Für die l. g. D.  $y'' + y' - 2y = 4x + 3e^x - 10 \sin x + 5 \cosh(3x)$  hat man demzufolge den Ansatz

$y_{si} = c_0 + c_1 x + c_2 x e^x + c_3 \sin x + c_4 \cos x + c_5 \sinh(3x) + c_6 \cosh(3x)$  zu wählen. Dieser in die l. g. D. eingesetzt liefert  $(c_1 - 2c_0 - 2c_1 x) + 3c_2 e^x + (c_3 - 3c_4) \cos x + (-c_4 - 3c_3) \sin x + (3c_6 + 7c_5) \sinh(3x) + (3c_5 + 7c_6) \cosh(3x) = 4x + 3e^x - 10 \sin x + 5 \cosh(3x)$ . Wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $1, x, e^x, \cos x, \sin x, \sinh(3x)$  und  $\cosh(3x)$  ergibt sich durch Koeffizientenvergleich  $c_1 - 2c_0 = 0, -2c_1 = 4, 3c_2 = 3, c_3 - 3c_4 = 0, c_4 + 3c_3 = 10, 3c_6 + 7c_5 = 0$  und  $3c_5 + 7c_6 = 5$ . Aus den daraus berechneten  $c_i$  erhält man die spezielle Lösung  $y_{si}$  der inhomogenen l. g. D., und  $y_{ai} = y_{ah} + y_{si} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - (2x + 1) + x e^x + 3 \sin x + \cos x - \frac{2}{8} \sinh(3x) + \frac{7}{8} \cosh(3x)$  ist dann die allgemeine Lösung der inhomogenen l. g. D.  $y'' + y' - 2y = 4x + 3e^x - 10 \sin x + 5 \cosh(3x)$ .

S. a. gewöhnliche Differentialgleichung I.; Laplace-Transformation III.

**lineare Gleichung, Gleichung ersten Grades:** I. Gleichung, in der alle Gleichungsvariablen nur in der ersten Potenz auftreten und nicht miteinander multipliziert werden, z. B.  $4x - 3 = 7, 2a + 3b = 5, 4u + 5v - 7w = 0$ . Auch jede Gleichung, die zu einer l. G. äquivalent ist ( $\nearrow$  Gleichung II.), kann zu den l. G. en gezählt werden; z. B. die Gleichung  $(x + 2)(x + 5) = (x + 1)(x + 3)$ , die äquivalent ist zu der l. G.  $3x + 7 = 0$  ( $\nearrow$  Bruchgleichung, Wurzelgleichung). Jede l. G. mit einer Variablen läßt sich durch äquivalente Umformung auf die *allgemeine Form*  $ax + b = 0$  bringen, in der der Koeffizient  $a$  des *linearen Gliedes*  $ax$  und das *Absolutglied*  $b$  reelle Zahlen sind und der Variablengrundbereich die Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen sein soll. In Abhängigkeit von den Parametern  $a$  und  $b$  ergeben sich drei Lösbarkeitsfälle: I.1. für  $a \neq 0$  und  $b$  beliebig erhält man aus  $ax = -b$  genau eine Lösung  $x = -b/a$  und damit die Lösungsmenge  $L = \{-b/a\}$ . I.2. Im Falle  $a = 0, b \neq 0$  gibt es wegen  $0 \cdot x = -b$  keine Lösung, die Lösungsmenge ist  $L = \emptyset$ . I.3. Im Falle  $a = 0, b = 0$  gibt es wegen  $0x + 0 = 0$  unendlich viele Lösungen, da  $0 \cdot x = 0$  für jede reelle Zahl  $x$  eine wahre Aussage ist. Die Lösungsmenge ist  $L = \mathbf{R}$ .

Bei Änderung des Variablengrundbereichs können sich die Lösbarkeitsverhältnisse ändern: Die Gleichung  $2x + 4 = 0$  ist für  $x \in \mathbf{N}$  nicht lösbar; ist hingegen  $\{-2\}$  der Variablengrundbereich, so ist diese Gleichung allgemeingültig.









bei diesen Verfahren die Lösung in endlich vielen Schritten auch theoretisch erreicht wird, gibt es keinen *Verfahrensfehler* ( $\nearrow$  Fehler).

**VI.1.** Das *einfache Gaußsche Eliminationsverfahren* (vgl. III.) besteht in seiner algorithm. Form aus zwei zyklisch gestalteten *Teilprozeduren*, der Transformation auf Dreiecksgestalt und der Lösungsberechnung.

Die *Transformation von A auf Dreiecksgestalt* erfordert 5 Schritte.

Erster Schritt: Setze  $k = 1$ . Zweiter Schritt: Prüfe, ob  $a_{kk} \neq 0$  ist. Dritter Schritt: Gilt  $a_{kk} \neq 0$ , so wird die  $k$ -te Zeile zur *Arbeitszeile*, und  $a_{kk}$  heißt *Pivotelement* ( $\nearrow$  Pivot). Gilt  $a_{kk} = 0$ , so vertausche man die  $k$ -te mit einer  $l$ -ten Zeile mit  $l > k$  und  $a_{ll} \neq 0$  und setze  $k := l$ .

Vierter Schritt: Für  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$  berechne neue Matrixelemente, die wie die alten bezeichnet werden sollen, nach der Vorschrift:  $q_i := -a_{ik}/a_{kk}$ ;  $a_{ij} := 0$  für  $j = k$ ;  $a_{ij} := a_{ij} + q_i a_{kj}$  für  $j \geq k + 1$ , und analog bilde neue rechte Seiten nach  $b_i := b_i + q_i b_k$ .

Fünfter Schritt:  $k := k + 1$ , Erhöhung von  $k$  um eins und Rücksprung zum zweiten Schritt, sofern noch  $k < n - 1$ . Ist  $k = n - 1$ , so hat man eine obere Dreiecksmatrix  $A'$  erhalten.

Die *Berechnung des Lösungsvektors*  $x^T = (x_1, \dots, x_n)$  erfolgt danach in zwei Schritten:

Berechne  $x_n := b_n/a_{nn}$ ,  
 berechne für  $i = (n - 1), (n - 2), \dots, 1$

$$x_i := \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{n-i} a_{i+1,j} x_{i+j} \right).$$

**VI.2.** Beim *Verfahren von Gauß-Jordan* werden die Eliminationen stets auf die *ganze Spalte* angewendet, indem im vierten Schritt der Transformation der Zeilenindex  $i$  von 1 bis  $k - 1$  und von  $k + 1$  bis  $n$  läuft. Das hat zur Folge, daß nunmehr alle Elemente der  $k$ -ten Spalte mit Ausnahme des Pivotelements zu Null werden und im Ergebnis eine Diagonalmatrix  $A' = (a_{ii} \cdot \delta_{ij})$  entsteht, durch die sich die Berechnung des Lösungsvektors wesentlich vereinfacht:  $x := (b_1/a_{11}, \dots, b_n/a_{nn})^T$ . Von entscheidendem Einfluß auf die Genauigkeit der Transformation sind die bei der Berechnung der  $q_i$  notwendigen Divisionen durch  $a_{kk}$ . Vom numer. Standpunkt aus ist die Bedingung » $a_{kk} \neq 0$ « des zweiten Schrittes zu schwach, und man arbeitet mit *Pivotisierung*: Durch Zeilen- und Spaltenvertauschung wird immer das unter allen zugelassenen Matrixelementen betragsgrößte zum *Pivotelement* gemacht. Dann sind alle  $|q_i| < 1$ , die Stabilität wird erhöht, und es wird stets durch die größtmögl. Zahl dividiert. Hierbei ist zu beachten, daß die Spaltenvertauschung einer Umnummerierung der Unbekannten entspricht und entsprechend berücksichtigt werden muß.

**VI.3.** Ein sehr übersichtl. und kompaktes Rechenschema ergibt sich, wenn man die einzelnen Schritte des Gaußschen Verfahrens so anordnet, daß immer mit genau den Zahlen gerechnet wird, die danach nicht mehr verändert werden. Dies geschieht im *Gauß-Banachiewicz-Verfahren*, dem *verketteten Algorithmus*. Die Größen des Rechenschemas (18) werden

nach den Formeln (19), die Lösung  $x$  unter Verwendung der oberen Dreiecksmatrix  $(d_{ij})$  in (18) nach dem einfachen Gauß-Verfahren berechnet. Das Beispiel (20) wird die Arbeitsweise hinreichend verdeutlichen.

Schema (18):

$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$	$b_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_{n1}$	$a_{n2}$	$\dots$	$a_{nn}$	$b_n$
$d_{11}$	$d_{12}$	$\dots$	$d_{1n}$	$b_1'$
$c_{21}$	$d_{22}$	$\dots$	$d_{2n}$	$b_2'$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$c_{n1}$	$c_{n2}$	$\dots$	$d_{nn}$	$b_n'$

Beispiel (20):

2	3	-1	0	20
-6	-5	0	2	-45
2	-5	6	-6	-3
4	6	2	-3	58
2	3	-1	0	20
-3	4	-3	2	15
1	-2	1	-2	7
2	0	4	5	-10

$x \mid x_1 x_2 \dots x_n$                        $x \mid 1 \ 7 \ 3 \ -2$

(19)  $d_{ik} := a_{ik}, b_i' := b_i - \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij} b_j'$ ;

$d_{ik} := a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij} d_{jk}, k = i, \dots, n;$

$c_{ik} := (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{ij} d_{jk})/d_{kk}, i = k + 1, \dots, n;$

$c_{i1} := a_{i1}/d_{11}, i = 1, 2, \dots, n$

**VI.4.** Die Eliminationsverfahren eignen sich auch zur *Determinantenberechnung*, da die Elementaroperationen (i), (ii) und (iii) höchstens das Vorzeichen der Determinante ändern, so daß  $\det A = (-1)^N \det A'$  gilt, wenn  $N$  die Anzahl der Vertauschungen im Verlauf der Transformation angibt. Für Dreiecks- oder Diagonalmatrizen ist aber  $\det A' = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \dots \cdot a'_{nn}$  und damit leicht zu berechnen.

**VII.** Eine zweite Gruppe von numer. Verfahren zur Lösung l. G.e sind die *iterativen Verfahren*, zu denen auch *Relaxationsverfahren* gehören. Sie erzeugen nach (21) schrittweise eine Folge von Vektoren  $\{x^{(m)}\}_{m=0,1,\dots}$ , die sich für  $m \rightarrow \infty$  dem gesuchten Lösungsvektor  $x$  beliebig genau nähern; dabei bedeuten  $M_m$  eine Matrix und  $c_m$  einen Vektor, und (22) drückt die Konvergenz aus. Bei der numer. Durchführung wird nach endlich vielen Schritten, d. h. bei  $m = N$ , abgebrochen und  $x := x^{(N)}$  gesetzt. Der *Verfahrensfehler* ist dem Abbruchsfehler der Folge gleich. Der Abbruch erfolgt, wenn zwei aufeinanderfolgende Vektoren um weniger als eine vorher festgelegte Zahl verschieden sind, d. h., etwa für  $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k^{(N)} - x_k^{(N-1)}| < \epsilon$ .

(21)  $x^{(m+1)} := M_m x^{(m)} + c_m; x^{(0)}$  gegeben

(22)  $\lim_{m \rightarrow \infty} |x_k^{(m)} - x_k| = 0$  für  $k = 1, 2, \dots, n$

(23)  $\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i=1}^n |m_{ki}| = p < 1$

(24)  $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k^{(m)} - x_k| \leq \frac{p^m}{1-p} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k^{(1)} - x_k^{(0)}|$

Die einfachsten Verfahren verwenden eine feste Iterationsmatrix  $M$  und einen ebenfalls nicht von  $m$  abhängenden Vektor  $c$ . Für solche Iterationsverfahren gilt (22) z. B. immer dann, wenn  $M = (m_{ij})$  regulär ist und (23) gilt. Gleichung (24) liefert dann eine wichtige Fehlerabschätzung. Je nach Wahl der Iterationsmatrix  $M$  ergeben sich spezielle Verfahren.

$$(25) \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**VII.1.** Im Gesamtschrittverfahren soll sich die Gleichungsmatrix  $A = L + D + R$  nach (25) in Teilmatrizen zerlegen lassen. Für die Iterationsmatrix  $M$  und den Vektor  $c$  wählt man dann  $M = M_J = -D^{-1}(L + R)$  und  $c = D^{-1}b$ . Die Iterationsvorschrift (21) geht dann in (26) über.

$$(26) \quad D\mathbf{x}^{(m+1)} := -(L + R)\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(0)} \text{ gegeben}$$

Das Verfahren konvergiert bei Diagonaldominanz immer, d. h. für (27):

$$(27) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{ki}| < |a_{kk}|, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

**VII.2.** Das Gauß-Seidel-Verfahren, auch Einzelschrittverfahren gen., verläuft mit  $M = -(L + D)^{-1}R$

$$(28) \quad (L + D)\mathbf{x}^{(m+1)} = -R\mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{b}, \mathbf{x}^{(0)} \text{ gegeben}$$

$$(29) \quad x_i^{(m+1)} := -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - b_i \right)$$

nach der Iterationsvorschrift (28), die ausführlich geschrieben und für  $i = 1, 2, \dots, n$  nach  $x_i^{(m+1)}$  aufgelöst die Form (29) annimmt. Auch dieses Verfahren liefert bei Diagonaldominanz von  $A$  eine konvergente Folge, konvergiert aber auch stets, wenn  $A$  symmetrisch und definit ist, und zwar oft schneller, als das Gesamtschrittverfahren. In der Tabelle (30) sind die Ergebnisse der beiden Verfahren für ein Beispiel einander gegenübergestellt.

Der Prozeß wird beendet, wenn sich die Werte innerhalb der Stellenzahl nicht mehr ändern, denn die Lösung ist ja nicht bekannt.

(30)				
Einzelschrittverfahren				
$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0	0
1	2,25	-2,80	1,12	-2,00
2	2,01	-3,01	1,00	-2,00
3	2,00	-3,00	1,00	-2,00
4	beendet			
5	—			
Gesamtschrittverfahren				
$n$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
0	0	0	0	0
1	2,25	-2,90	1,00	-2,25
2	2,19	-3,00	0,97	-2,01
3	2,00	-2,94	0,99	-2,00
4	2,01	-3,00	1,00	-2,00
5	beendet			

lineares Glied ↗ kubische Gleichung I., ↗ lineare Gleichung I., ↗ quadratische Gleichung I.

lineares Interpolieren ↗ dedekischer Logarithmus II.

lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen ↗ gewöhnliche Differentialgleichung II.

lineare Transformation ↗ lineare Abbildung I.

lineare Unabhängigkeit ↗ lineare Abhängigkeit, ↗ Spannungen auf Graphen III., ↗ Ströme auf Graphen IV.

Linearfaktoren ↗ Fundamentalsatz der Algebra, ↗ ganzrationale Funktion II.

Linearform, lineares Funktional: I. auf einem Vektorraum  $V$  über dem Körper  $K$  definierte eindeutige Abbildung  $\gamma: V \rightarrow K$  mit den Eigenschaften:

- (1)  $\gamma(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{y})$  für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ,
- (2)  $\gamma(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\gamma(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{x} \in V$  und  $\lambda \in K$ .

*Beispiele:* I.1. Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eine feste Basis von  $V$ , so ist die Abbildung  $\gamma$ , die jedem Vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$  die reelle Zahl  $\gamma(\mathbf{x}) = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \dots + \lambda_nx_n$  mit beliebigen festen reellen Zahlen  $\lambda_i$  zuordnet, eine L. auf  $V$ .

Unter den L.en sind bes. jene wichtig, deren Werte auf einem Basisvektor  $\mathbf{b}_k$  gleich 1 und auf allen anderen  $\mathbf{b}_i$  mit  $i \neq k$  gleich Null sind. Ist  $\gamma_k$  eine solche L., für die  $\gamma_k(\mathbf{b}_i) = \delta_{ik}$  ( $\nearrow$  Kroneckersymbol) gilt, so erhält man (3) für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$  wegen der Linearitäts-

$$(3) \quad \gamma_k(\mathbf{x}) = \gamma_k \left( \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ik} = x_k$$

eigenschaften (1) und (2), d. h.,  $\gamma_k$  ordnet jedem Vektor seine  $k$ -te Koordinate bzgl.  $B$  zu. Überdies folgt aus den Linearitätsbedingungen, daß eine L.

auf  $V$  bereits durch ihre Werte auf einer Basis von  $V$  eindeutig bestimmt ist.

**I.2.** Auf jedem Vektorraum  $V$  über  $K$  gibt es eine triviale L., die Nullform  $\omega$ , die jedem Vektor  $\mathbf{x} \in V$  das Element  $0 \in K$  zuordnet:  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  für alle  $\mathbf{x} \in V$ .

**I.3.** Ist  $P$  der Vektorraum der Polynome über dem Körper der reellen Zahlen, so sind  $\gamma_1(p), \gamma_2(p), \gamma_3(p)$  L.en:  $\gamma_1(p) = p(0)$  ordnet jedem Polynom  $p$  seinen Wert an der Stelle Null zu;  $\gamma_2(p) = p'(1)$ ;

$$\gamma_3(p) = \int_0^1 p(x) \cos x \, dx.$$

S. a. homogene Funktion II.

**II.** Definiert man die Summe  $\gamma_1 + \gamma_2$  zweier L.en über  $V$  und das Produkt  $\gamma \lambda$  einer L.  $\gamma$  mit einem Element  $\lambda \in K$  auf natürl. Weise durch:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \mathbf{x} = \gamma_1(\mathbf{x}) + \gamma_2(\mathbf{x}) \text{ für alle } \mathbf{x} \in V \text{ und}$$

$$(\gamma \lambda) \mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x}) \lambda \text{ für alle } \mathbf{x} \in V \text{ und alle } \lambda \in K, \text{ so bildet}$$

die Menge der L. über  $V$  mit diesen Verknüpfungen wieder einen Vektorraum  $V^*$ , den zu  $V$  dualen Vektorraum. Ist  $V$   $n$ -dimensional, so ist  $V^*$  ebenfalls  $n$ -dimensional. Der zu  $V^*$  duale Vektorraum  $V^{**}$ , den man auch den zu  $V$  bidualen Vektorraum nennt, enthält einen zu  $V$  isomorphen Untervektorraum. Ist  $V$  endlich-dimensional, so sind  $V^{**}$  und  $V$  zueinander isomorph, und man kann deshalb  $V^{**}$  mit  $V$  identifizieren.

Ist  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  eine Basis von  $V$ , so gibt es (vgl. I.1.) genau  $n$  L.en  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  mit der Eigenschaft  $\gamma_i(\mathbf{b}_k) = \delta_{ik}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ ; die wegen  $\dim V^* = \dim V$  eine Basis des zu  $V$  dualen Vektorraumes  $V^*$  bilden. Man nennt  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  die zu  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  duale Basis. Eine Basistransformation

in  $V$  mittels  $\bar{\mathbf{b}}_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \mathbf{b}_k$  bewirkt eine solche der dualen Basis in  $V^*$ :  $\bar{\gamma}_i = \sum_{k=1}^n C_{ki} \gamma_k$ , wobei die Übergangsmatrizen  $(c_{ik})$  und  $(C_{ik})$  zueinander kontragredient sind ( $\nearrow$  Matrix IV.).

Geht man in  $V$  von der Basis  $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  zu  $\bar{\mathbf{B}} = \{\bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{b}}_2, \dots, \bar{\mathbf{b}}_n\}$  über, in  $V^*$  von der Basis  $\mathbf{B}^* = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  zu  $\bar{\mathbf{B}}^* = \{\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_n\}$ , so transformieren sich die Koordinaten eines Vektors  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathbf{B}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)_{\bar{\mathbf{B}}}$  bzw.  $\gamma = (g_1, g_2, \dots, g_n)_{\mathbf{B}^*} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n)_{\bar{\mathbf{B}}^*}$  nach (4).

$$(4) \quad \bar{x}_i = \sum_{k=1}^n C_{ki} x_k; \quad \bar{g}_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} g_k$$

Ist  $C = (c_{ik})$  die Übergangsmatrix zwischen den Basen  $\mathbf{B}$  und  $\bar{\mathbf{B}}$  in  $V$ , so transformieren sich die Koordinaten der Vektoren aus  $V^*$  mit ebendieser Matrix, während die Koordinaten der Vektoren aus  $V$  sich mit der dazu kontragredienten Matrix transformieren. Deshalb nennt man die Vektoren von  $V^*$  kovariante, diejenigen aus  $V$  kontravariante Vektoren oder auch Tensoren 1. Stufe. Gelegentlich schreibt man die Indizes der Koordinaten der kontravarianten Vektoren als obere Indizes, schreibt also  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  statt  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Analog dazu bezeichnet man dann auch die Vektoren der dualen Basis  $\mathbf{B}^*$  mit  $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ , da sich  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}^*$  kontragredient transformieren. S. a. Bilinearform, Tensor.

**Linearisierung**  $\nearrow$  nichtlineare Gleichungssysteme.

**Linearität**  $\nearrow$  System II.

**Linearkombination:** jeder Ausdruck der Gestalt (1),

$$(1) \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{a}_i = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r$$

in dem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  reelle Zahlen und  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  Elemente einer nichtleeren Menge  $S$  von Vektoren eines reellen Vektorraumes  $V$  sind. Gibt es für einen Vektor  $\mathbf{x} \in V$  reelle Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  und Elemente

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r \in S$ , so daß  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{a}_i$ , so sagt

man,  $\mathbf{x}$  läßt sich linear kombinieren aus Vektoren von  $S$ . Ist  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ , so sind die  $\lambda_i$  aus  $K$  zu nehmen.

**Beispiele:** 1. Ist  $V$  der Vektorraum der geordneten Tripel reeller Zahlen und  $S = \{(0, -1, 2), (4, 1, -3)\}$ , so ist der Vektor  $\mathbf{x} = (-4, -3, 7)$  eine L. von  $S$ , denn es ist  $\mathbf{x} = 2 \cdot (0, -1, 2) - 1 \cdot (4, 1, -3)$ .

2. Ist  $P$  der Vektorraum der Polynome und  $S$  die Menge aller Polynome der Gestalt  $x^{2n}$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ , so ist das Polynom  $5x^2 - 2x + 1$  keine L. von  $S$ , denn jede L. von geradzahligem Potenzen von  $x$  enthält selbst nur geradzahlige Potenzen von  $x$ .

3. Ist  $V$  der Vektorraum der geordneten Tripel reeller Zahlen und  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ , so besteht die Menge aller L.en von  $S$ :  $\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$  aus genau den Tripeln, deren letzte Koordinate Null ist.

Die Menge aller L.en von  $S$  bildet bzgl. der im Vektorraum definierten Verknüpfungen einen Untervektorraum, den man die lineare Hülle von  $S$  oder das Erzeugnis von  $S$  nennt und mit  $L(S)$  oder  $Erz S$  bezeichnet. Es ist  $L(S)$  der kleinste Untervektorraum, der die Menge  $S$  enthält. Weiter gilt für Vektormengen  $S, T: S \subseteq L(S) = L(L(S))$ , und aus  $S \subseteq T$  folgt  $L(S) \subseteq L(T)$ . Läßt sich ein Untervektorraum  $U$  von  $V$  als lineare Hülle einer Menge  $S$  von Vektoren darstellen,  $U = L(S)$ , so heißt  $S$  ein Erzeugendensystem von  $U$ ; man sagt,  $U$  wird durch  $S$  erzeugt oder aufgespannt.

**Linearplanimeter**  $\nearrow$  Planimeter II.

**linear unabhängig**  $\nearrow$  lineare Abhängigkeit I.

**Linienelement**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**Linienkoordinaten**  $\nearrow$  Koordinatensystem I.

**Linksdivision**  $\nearrow$  Schiefkörper.

**Linkselement**  $\nearrow$  Gruppe I.

**Linksideal**  $\nearrow$  Ideal.

**linksneutrales Element**  $\nearrow$  neutrales Element.

**Linksnulleiler**  $\nearrow$  Ring I.

**Linksschraube**  $\nearrow$  Schraubenlinie I.

**linksseitig**  $\nearrow$  Differentialquotient II.1.,  $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion I.1.,  $\nearrow$  Kürzungsregel,  $\nearrow$  Stetigkeit.

**linksseitige Nebenklasse**  $\nearrow$  Gruppe II.

**Linkssystem**  $\nearrow$  Koordinatensystem II.

**L-Integral** svw. Lebesguesches Integral.

Liouville, Joseph, geb. 24. 3. 1809 St. Omer, gest. 8. 9. 1882 Paris. — L. war Professor der Mathematik und Mechanik in Paris, an der École Polytechnique, am Collège de France und an der Sorbonne. Er war Mitglied des Längenbüros und vieler gelehr-

ter Gesellschaften und galt von 1840 bis 1870 als der führende Mathematiker Frankreichs. — Er arbeitete über statist. Mechanik, Randwertprobleme, Differentialgeometrie und spezielle Funktionen. Große Bedeutung hatte sein konstruktiver Beweis für die Existenz *transzendenter Zahlen* und 1844 der Beweis, daß  $e$  und  $e^e$  nicht Wurzeln einer quadrat. Gleichung mit rationalen Koeffizienten sein können.

**Liouville, Satz von**  $\nearrow$  analytische Funktion IV.  
**Lipschitz, Rudolf**, geb. 14. 5. 1832 Königsberg (Kaliningrad), gest. 7. 10. 1903 Bonn. — L. studierte seit 1847 in Königsberg und Berlin. 1857 habilitierte er sich in Bonn, wurde 1862 a. o. Professor in Breslau (Wroclaw) und 1864 o. Professor in Bonn. — In der Theorie der Differentialgleichungen stellte er die *L.-Bedingung* für gewöhnl. Differentialgleichungen auf, arbeitete über Potential- und Elastizitätstheorie, über die Theorie von Reihen, bes. von Fourier-Reihen, in der er das L.-Dini-Kriterium und das L.-Kriterium aufstellte, und über Zahlentheorie, hauptsächlich über quadrat. Formen, Summen von Quadraten.

**Lipschitzbedingung**  $\nearrow$  Anfangswertproblem I., II.,  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**Liter**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**Ljapunow, Alexander Michajlowitsch**, geb. 6. 6. 1857 Jaroslawl als Sohn eines Astronomen, gest. 16. 11. 1918 Petrograd (Leningrad). — L. studierte in Petersburg und war seit 1893 als Professor in Charkow und seit 1901 als Akademiemitglied in Petersburg tätig. Er lieferte grundlegende Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen, zum Problem der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten und zur Potentialtheorie.

**Ljapunow-Verfahren**  $\nearrow$  Stabilität.

**L-meißbar**  $\nearrow$  Lebesguesches Maß I.

**Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch**, geb. 1. 12. (?) 1792 Nishni-Nowgorod als zweites Kind eines kleinen Beamten, gest. 24. 2. 1856 Kasan. — Nach dem frühen Tod des Vaters siedelte die Familie nach Kasan über. Wegen seiner Begabung wurde er, wie seine beiden Brüder, als Stipendiat ins Kasaner Gymnasium aufgenommen, wechselte 1807 zur neu-

gegründeten Universität über und war dort als Student, Dozent, seit 1816 als Professor und 1827/46 als Rektor tätig. Er bemühte sich stets darum, Kasan zu einem anerkannten wissenschaftl. Zentrum zu machen. 1826 berichtete er erstmals öffentlich über sein neues geometr. System, die nach ihm ben. hyperbol. Geometrie, und arbeitete bis zu seinem Tode an ihrer Vervollkommnung und für ihre Anerkennung. Wegen rasch abnehmender Sehkraft diktierte er das zusammenfassende Werk »Pangeometrie« (1855). Auch in seinen Arbeiten zur Analysis, Algebra und über das Verhältnis von Geometrie und Physik nahm er Ideen vorweg, die später weiter ausgebaut wurden.

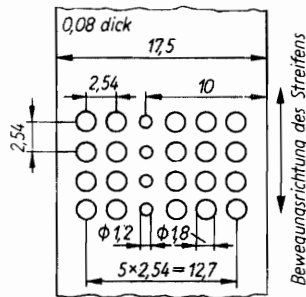
**Lobatschewskische Geometrie**  $\nearrow$  nichteuklidische Geometrie I.,  $\nearrow$  Parallelenaxiom III.

**Lochkarte**: weitverbreiteter maschinenlesbarer Datenträger aus hochwertigem Karton. Eine L. ist in Zeilen und Spalten gegliedert. Meist werden L.n mit 12 Zeilen und 80 Spalten verwendet (Abb.). Jede *Spalte* dient zur Darstellung eines Zeichens mit Hilfe von Lochkombinationen eines Kodes. L.n sind relativ teuer und haben einen erhebl. Platzbedarf. Beachtl. Vorteile gegenüber dem *Lochstreifen* bestehen in einfachen Möglichkeiten, die L. zu sortieren und Daten auf ihnen zu korrigieren.

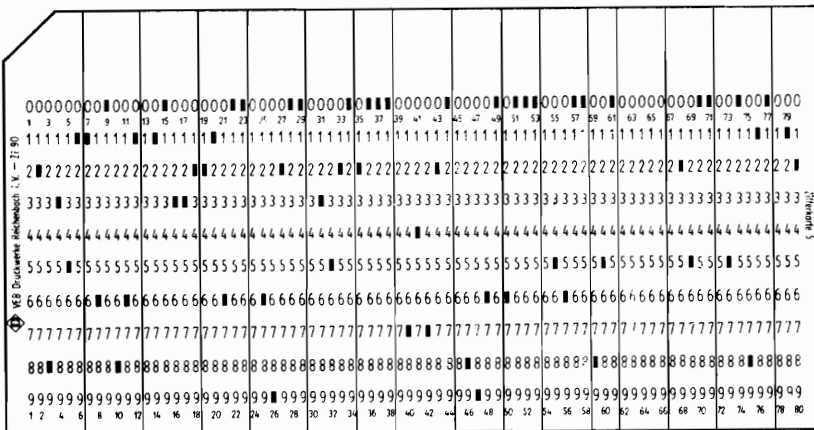
**Lochkartenleser**  $\nearrow$  digitale Rechenanlage I.1.

**Lochkartenstanzer**  $\nearrow$  digitale Rechenanlage I.2.

**Lochstreifen**: häufig verwendeter maschinenlesbarer Datenträger aus hochwertigem Papierband (Abb.).



Lochstreifen: Ausschnitt aus einem 5-Kanal-Lochstreifen



Lochkarte mit 12 Zeilen und 80 Spalten

Die Zeichen werden quer zur Bewegungsrichtung des L.s durch Lochkombinationen eines vereinbarten Kodes dargestellt. Starke Verbreitung haben 5-Kanal- und 8-Kanal-Kodes gefunden. L. sind verhältnismäßig billig und ermöglichen eine hohe Informationsdichte. Nachteile gegenüber der Lochkarte ergeben sich bes. bei der Korrektur von Daten.

**Lochstreifenleser** ↗ digitale Rechenanlage I.1.

**Lochstreifenstanzer** ↗ digitale Rechenanlage I.2.

**Logarithmengesetze** ↗ Logarithmus II.

**Logarithmensystem: I.** auf die gleiche Basis  $a > 1$  bezogene Logarithmen  $l = \log_a p$  (↗ Logarithmus I.); für  $a = 2$  spricht man von *dualen Logarithmen* und bezeichnet sie mit  $\log_2 p = \text{ld } p$ , für  $a = e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 2,71828 \dots$  von *natürl. Logarithmen*.

$\log_e p = \ln p$  und für  $a = 10$  von *dekad., gewöhnl. oder Zehnerlogarithmen*  $\log_{10} p = \lg p$ , die nach Henry BRIGGS (1561–1630), der sie zuerst berechnete, auch *Briggssche Logarithmen* heißen. Im Reellen sind die Logarithmen i. allg. irrationale Zahlen, die mittels Funktionenreihen als natürl. Logarithmen berechnet werden. Für das Rechnen stehen aber meist die daraus berechneten dekad. Logarithmen in Tafeln zur Verfügung. Es ist deshalb notwendig, die Logarithmen eines Systems aus denen eines anderen berechnen zu können; etwa  $l_a = \log_a p$  aus  $l_b = \log_b p$ . Die zweite Gleichung ist gleichbedeutend mit  $b^{l_a} = p$ . Durch Logarithmieren nach der Basis  $a$  ergibt sich daraus  $l_b \log_a b = \log_a p = l_a$  oder  $l_b = l_a : \log_a b$  bzw.  $\log_b p = \log_a p / \log_a b$ . Die Beziehung  $\log_a b \cdot \log_b p = \log_a p$  wird auch *Kettenregel* gen.

Zur Berechnung des gesuchten  $b$ -Logarithmus von  $p$  ist danach der bekannte  $a$ -Logarithmus von  $p$  zu dividieren durch den  $a$ -Logarithmus der neuen Basis  $b$ . Für  $p = a$  erhält man wegen  $\log_a a = 1$  die Beziehung  $\log_b a = [\log_a b]^{-1}$  oder  $\log_a a \cdot \log_a b = 1$ . II. Zur Berechnung der dekad. aus den natürl. Logarithmen gelten  $b = 10$ ,  $a = e$  und die Beziehung  $\lg p = [\ln p / \ln 10] = [1 / \ln 10] \cdot \ln p$ . Die Konstante  $[1 / \ln 10] = M_{10} = 0,434\ 294\ 5 \dots$  heißt *Modul* des L.s zur Basis 10. Will man aber nach einer Tafel dekad. Logarithmen natürliche berechnen, so gelten  $b = e$ ,  $a = 10$  und die Beziehung  $\ln p = [\lg p / \lg e] = [1 / \lg e] \cdot \lg p$ . Für den Modul  $[1 / \lg e]$  der natürl. Logarithmen gilt wegen  $\log_b a \cdot \log_a b = 1$  die Beziehung  $\ln 10 \cdot \lg e = 1$ , d. h.  $[1 / \lg e] = \ln 10 = 1 / M_{10} = 2,302585\ 1 \dots$

Unter Logarithmusfunktion wird gezeigt, daß der Logarithmus im Reellen i. w. S. definiert ist, wenn die Basis eine von 1 verschiedene positive Zahl ist. Neben  $\log_a p$  mit  $a > 1$  existiert auch  $\log_{1/a} p$ . Für die Werte dieser Logarithmen gilt, wenn man  $b = 1/a$  setzt:  $\log_{1/a} p = \log_a p / \log_a (1/a) = -\log_a p$ . Dieser auf Basen  $0 < a < 1$  erweiterte Logarithmenbegriff liefert danach nur Werte, die mit dem übl. Begriff i. e. S. erfaßt werden.

**Logarithmentafel** ↗ dekadischer Logarithmus II.

**Logarithmieren** ↗ Grundrechenarten, s. a. Logarithmus I.

**logarithmische Ableitung** ↗ Differentiationsregeln VIII.

**logarithmische Gleichung:** transzendente Gleichung, in der eine Gleichungsvariable im Argument eines Logarithmus auftritt. In speziellen Fällen kann man diese durch Anwenden der Logarithmen- und Potenzgesetze lösen, ist aber i. allg. auf *Näherungsverfahren* angewiesen. *Beispiel:* Die l. G.  $\lg x = 3 \lg 2x$  mit  $x \in \mathbf{R}$  und  $x > 0$  läßt sich umformen zu  $\lg x = \lg (2x)^3$ ; daraus folgt  $x = 8x^3$  und wegen  $x > 0$  erhält man als einzige Lösung  $x = \sqrt[3]{2}/4$ .

**logarithmischer Frequenzgang** ↗ Frequenzgang III.

**logarithmischer Rechenstab** ↗ Rechenstab II.

**logarithmisches Papier:** mathematisches Papier (↗ Nomographie I.) in dem eine bzw. beide der zueinander senkrechten Achsen des Koordinatensystems Funktionsleitern einer Logarithmusfunktion sind. Man spricht von *halblogarithm. Papier*, wenn  $f(u) = \log_a u$  und  $g(v) = v$  mit  $a > 0$  und  $a \neq 1$  die Funktionsleitern bestimmen. Die Exponentialfunktionen  $u = k \cdot a^{bv}$  mit den Konstanten  $b$  und  $k$  werden dann als Geraden abgebildet. Beim *doppeltlogarithm. Papier* werden die Funktionsleitern durch  $f(u) = k \log_a u$  und  $g(v) = \log_a v$  bestimmt. Auf ihm werden die Potenzfunktionen  $u^{km} \cdot v^n = \varphi$  als Geraden abgebildet.

**logarithmische Spirale** ↗ Spirale III.

**logarithmisches Potential** ↗ elliptische Differentialgleichung IV.

**Logarithmus** [*logos*, griech. Verhältnis; *arithmos*, griech. Zahl]: I. i. e. S. die reelle Zahl  $l$ , mit der eine gegebene reelle Basis  $a > 1$  potenziert einen vorgegebenen reellen Potenzwert  $p > 0$  ergibt; d. h., in  $a^l = p$  ist der Exponent  $l$  der L. von  $p$  zur Basis  $a$  (↗ Logarithmusfunktion I., Logarithmensystem). In Zeichen schreibt man dafür  $l = \log_a p$ . Alle L. zur gleichen Basis bilden ein *L.system*, und die Zahl  $p$ , von der der L. in einem L.system gebildet wird, wird oft *Numerus* [lat. Zahl, Plural *Numeri*] gen. Das Bilden des L. nennt man *Logarithmieren*. Die Definitionsgleichung ist gleichbedeutend mit  $a^{l \cdot \log_a p} = p$ .

*Beispiele:* 1.  $\log_{10} 100 = 2$ , weil  $10^2 = 100$ . 2.  $\log_3 81 = 4$ , weil  $3^4 = 81$ . 3.  $\log_2 (1/16) = -4$ , weil  $2^{-4} = 1/2^4 = 1/16$ . 4.  $\log_a 1 = 0$ , weil  $a^0 = 1$ . 5.  $\log_a a = 1$ , weil  $a^1 = a$ . Da für den L. i. e. S. eine Basis  $a > 1$  im Reellen vorausgesetzt wird, ist stets  $p > 0$ , d. h., der L. ist nur für positive Numeri definiert. Der Wert des L. für Numeri  $p > 1$  positiv, für Numeri  $0 < p < 1$  negativ. Da  $a^l = p$ , gilt für  $l < 0$  in der Tat  $a^{-|l|} = 1/a^{|l|} = p$  und hat für  $|l| \rightarrow \infty$  bzw.  $l \rightarrow -\infty$  den Grenzwert  $p = 0$  (↗ Logarithmusfunktion). Aus den Beziehungen  $a^m \leq a^n$ , falls  $m \leq n$ , und  $a^m = a^n$ , falls  $m = n$  (↗ Potenz), folgen für  $m = \log_a p$  und  $n = \log_a q$  die Beziehungen  $\log_a p < \log_a q$ , falls  $p < q$ ,  $\log_a p = \log_a q$ , falls  $p = q$ , und  $\log_a p > \log_a q$ , falls  $p > q$ . In den prakt. Anwendungen werden drei Basen bevorzugt und die Logarithmen dieser Systeme bes. gekennzeichnet: 1. die Basis 10 beim *dekad. L.*  $\log_{10} p = \lg p$  für Rechnungen mit Zahlen des dekad. Zahlensystems, 2. die Basis 2 beim *dualen L.*  $\log_2 p = \text{ld } p$  für Rechnungen mit Wahrscheinlichkeiten und 3. die Basis  $e = 2,71828 \dots$  beim *natürl. L.*  $\log_e p = \ln p$  [*logarithmus naturalis*, lat.], der in der

höheren Mathematik fast ausschließlich verwendet wird ( $\nearrow$  Logarithmensystem).

II. Die *Logarithmengesetze* ergeben sich aus den Potenzgesetzen, da  $p = a^m$  bzw.  $q = a^n$  äquivalent sind mit  $m = \log_a p$  bzw.  $n = \log_a q$ .

II.1. Der L. eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren, denn aus  $p \cdot q = a^{m+n}$  folgt für die Exponenten:  $\log_a (p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$ .

II.2. Der L. eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem L. des Dividenden und dem L. des Divisors, denn aus  $p/q = a^{m-n}$  folgt für die Exponenten  $\log_a (p/q) = \log_a p - \log_a q$ .

II.3. Der L. einer Potenz ist gleich dem Produkt aus ihrem Exponenten und dem L. der Potenzbasis, denn aus  $p^r = a^{m \cdot r}$  folgt  $\log_a p^r = r \cdot \log_a p$ .

II.4. Der L. aus einer Wurzel ist gleich dem Quotienten aus dem L. des Radikanden und dem Wurzel-exponenten, denn aus  $\sqrt[r]{p} = a^{m/r}$  folgt für ganze  $r \geq 2$  die Beziehung  $\log_a \sqrt[r]{p} = (1/r) \log_a p$ . — S. a. dekadischer Logarithmus.

III. Bildet man zu der komplexen Zahl (1) der Gaußschen Zahlenebene mit der reellen Zahl  $\varrho = |z|$  die

$$(1) \quad z = x + iy = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Zahl (2), so wird durch die Exponentialfunktion  $e^l$  jeder Zahl  $l$  nach (3) der Wert  $z$  zugeordnet ( $\nearrow$  Eulersche Formel).

$$(2) \quad l = \ln \varrho + i(\varphi + 2k\pi) \text{ mit } k \in \mathbf{Z}$$

$$(3) \quad e^{\ln \varrho + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\ln \varrho} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{2k\pi i} = \varrho e^{i\varphi} = z$$

Die Zuordnung ist bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi i$  eindeutig und definiert eine Funktion  $l = \ln z = u + vi = w$ , die als L. der komplexen Zahl  $z$  bezeichnet wird;  $2\pi i$  ist ihre Periode. Wegen  $u = \ln \varrho$  und  $v = \varphi + 2k\pi$  werden alle Punkte der  $z$ -Ebene, die auf einer durch  $\varphi_0 = \text{const}$  bestimmten Halbgeraden liegen, abgebildet auf eine Parallele zur  $u$ -Achse der  $w$ -Ebene im Abstand  $\varphi_0$ , falls man  $k = 0$  setzt. Für  $k \neq 0$  erhält man weitere Parallelen im Abstand  $\varphi_0 + 2k\pi$ , d. h., die gesamte  $z$ -Ebene wird auf einen Streifen der  $w$ -Ebene abgebildet, der von zwei Parallelen im Abstand  $\Delta v = 2\pi$  begrenzt wird. Der Wert von  $\ln z$ , für den  $-\pi < v \leq +\pi$  gilt, wird *Hauptwert des L.* gen. Bezeichnet man ihn mit  $\ln^* z$ , so gilt  $w = \ln^* z + 2k\pi i$  mit  $k \in \mathbf{Z}$  ( $\nearrow$  komplexwertige Funktionen, elementare, III.). Für den L.  $w = \ln z$  gelten die bekannten Logarithmengesetze, z. B.  $\ln (z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ . Da nach der Moivre'schen Formel (4) gilt, erhält man (5), da eine Zerlegung  $k = k_1 + k_2$  für  $k, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$  stets möglich ist.

$$(4) \quad z_1 \cdot z_2 = \varrho_1 \varrho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

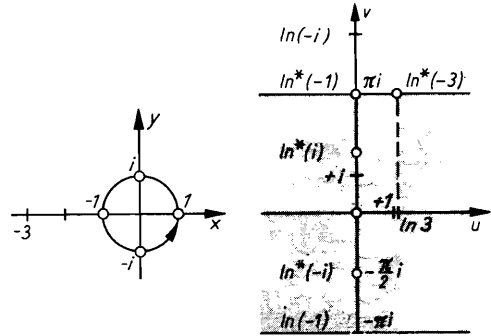
$$(5) \quad \begin{aligned} \ln (z_1 \cdot z_2) &= \ln (\varrho_1 \cdot \varrho_2) + (\varphi_1 + \varphi_2 + 2k\pi) i \\ &= \ln \varrho_1 + (\varphi_1 + 2k_1\pi) i \\ &\quad + \ln \varrho_2 + (\varphi_2 + 2k_2\pi) i \\ &= \ln z_1 + \ln z_2 \end{aligned}$$

Da der L. einer komplexen Zahl auch zur Definition der allgemeinen Potenz ( $\nearrow$  Potenz VI.) benutzt

wird, wird  $w = \ln z$  für einige Argumente angegeben.

III.1. Für  $z = i = 1 \cdot [\cos \pi/2 + i \sin \pi/2]$  ergibt sich  $\ln i = \ln 1 + (\pi/2 + 2k\pi) i = \pi i/2 + 2k\pi i$  und  $\ln^* i = \pi i/2$ .

III.2. Für  $z = -i = 1 \cdot [\cos (3\pi/2) + i \sin (3\pi/2)]$  ergibt sich  $\ln (-i) = \ln 1 + (3\pi/2 + 2k\pi) i = (3\pi/2) i + 2k\pi i$  und für  $k = -1$  der Hauptwert  $\ln^* (-i) = -(\pi/2) i$  (Abb.).



Logarithmus: Darstellung einiger Beispiele für  $w = u + iv = \ln z$ , der Streifen  $-\pi < v \leq +\pi$  der Hauptwerte  $\ln^* z$  ist gerastert

III.3. Für  $z = -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$  ergibt sich  $\ln (-1) = \ln 1 + (\pi + 2k\pi) i = \pi i + 2k\pi i$  und  $\ln^* (-1) = \pi i$ .

III.4. Für  $z = -3 = 3 (\cos \pi + i \sin \pi)$  ergibt sich  $\ln (-3) = \ln 3 + (\pi + 2k\pi) i$  und  $\ln^* (-3) = \ln 3 + \pi i$ .

III.5. Für  $z = 10 = 10 (\cos 0 + i \sin 0)$  ergibt sich  $\ln 10 = \ln 10 + 2k\pi i$  und  $\ln^* 10 = \ln 10$ .

**Logarithmusfunktion: I.** Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $g(x) = a^x$  für  $a > 0$  und  $a \neq 1$ , dargestellt durch die Funktionsgleichung  $y = f(x) = \log_a x$  und *Logarithmus zur Basis a* gen. Die Umkehrfunktion  $y = \ln x$  der e-Funktion wird *natürl.* *Logarithmus* gen. Für  $a > 1$  wächst die L. streng monoton, für  $0 < a < 1$  fällt sie streng monoton. Der größtmögl. Definitionsbereich jeder L. ist die Menge der positiven reellen Zahlen, ihr zugehöriger Wertebereich ist die Menge  $\mathbf{R}$  aller reellen Zahlen. Jede L. ist in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig und differenzierbar ( $\nearrow$  Differentiationsregeln IV.); sie ist für  $a > 1$  von unten konvex und für  $0 < a < 1$  von unten konkav, d. h., keine L. hat Extremwerte oder Wendepunkte. Wegen  $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$  erfüllt jede L. die Funktionalgleichung  $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ; bis auf die Funktion  $h \equiv 0$  sind die L. die einzigen Funktionen, die im Intervall  $]0, +\infty[$  definiert und dort stetig sind und obiger Funktionalgleichung genügen. Für jede L. ist  $x_N = 1$  eine Nullstelle.

II. Die Kurven der Funktionen  $y = a^x$  und  $y = \log_a x$  liegen achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden der Quadranten I und III mit der Gleichung  $y = x$  (Abb. 1). Die Kurven der Funktionen

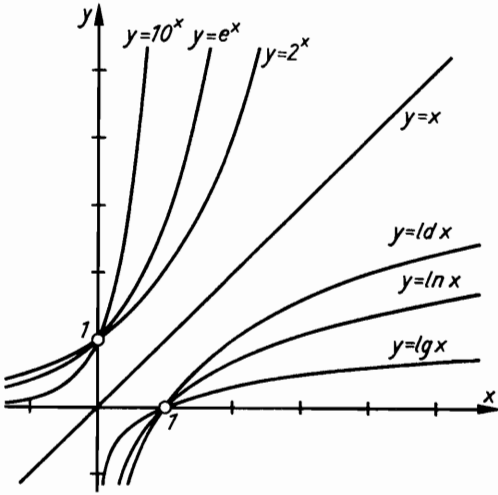
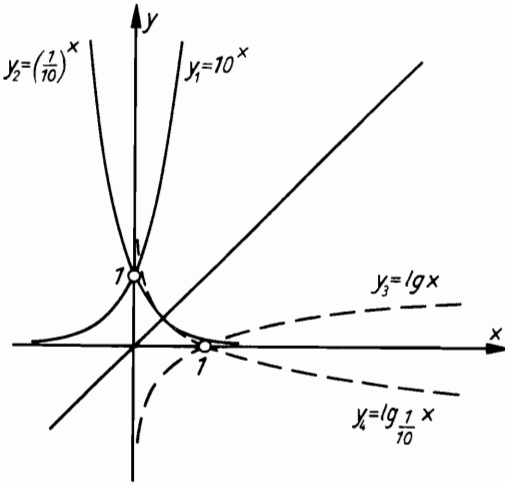


Abb. 1: Kurvenverlauf der Logarithmenfunktionen im Vergleich zu den zugehörigen Exponentialfunktionen



Logarithmusfunktion. Abb. 2: Kurvenbilder der Funktionen  $y_1 = 10^x$  und  $y_2 = (1/10)^x$  sowie ihrer Umkehrfunktionen  $y_3 = \lg x$  und  $y_4 = \log_{1/10} x$

$y = a^x$  und  $y = (1/a)^x = a^{-x}$  sind achsensymmetrisch zur Ordinatenachse. Nach der Spiegelung an der Geraden  $y = x$  sind ihre Bilder, die Kurven der Funktionen  $y = \log_a x$  und  $y = \log_{1/a} x$  achsensymmetrisch zur Abszissenachse (Abb. 2). Die Kurven dieser Funktionen haben Asymptoten,  $y = a^x$  mit  $0 < a < 1$  die positive  $x$ -Achse für  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y = a^x$  mit  $a > 1$  die negative  $x$ -Achse für  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y = \log_a x$  mit  $a > 1$  die negative  $y$ -Achse für  $x \downarrow 0$  und  $y = \log_a x$  mit  $0 < a < 1$  die positive  $y$ -Achse für  $x \downarrow 0$ . Der Verlauf der Kurven für  $y = \log_a x$  zeigt, wie berechtigt beim Tafelrechnen das lineare Interpolieren ist,  $y = \lg x$  z. B. wächst nur um eine Koordinateneinheit, wenn die Abszissen

um eine Zehnerpotenz wachsen, etwa von 1000 auf 10000.

Ist  $k$  eine positive Konstante, so gilt  $\log_a(kx) = \log_a k + \log_a x$ , d. h., das Bild der Funktion  $h(x) = \log_a(kx)$  geht aus dem der Funktion  $f(x) = \log_a x$  durch Verschiebung um  $|\log_a k|$  Einheiten in Richtung der positiven Ordinate hervor, falls  $\log_a k > 0$ . Zur Entwicklung der L. in Potenzreihen  $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen IV. Zur Definition in  $\mathbf{C}$   $\nearrow$  komplexwertige Funktion, elementare, III.

- logische Antinomie  $\nearrow$  Antinomie.
- logische Matrix  $\nearrow$  Aussagenlogik II.
- logisch wahr  $\nearrow$  Prädikatenlogik III.
- lokale Grenzwertsätze  $\nearrow$  Grenzwertsätze I.
- lokales Optimum  $\nearrow$  Optimierung II.
- lokal stetig  $\nearrow$  Abbildung, topologische.

**Losgröße:** in der Produktionsplanung die Produktmenge, die bis zur u. U. vorübergehenden Umstellung der Fertigung auf das nächste Produkt hergestellt wird; in der Lagerhaltungstheorie die je Bestellung bestellte Menge.

**Losgrößenformel**  $\nearrow$  Lagerhaltungstheorie.

**Lösungsmenge**  $\nearrow$  Gleichung I.,  $\nearrow$  lineares Gleichungssystem II.,  $\nearrow$  Ungleichung I.

**Lot**  $\nearrow$  Lotgerade.

**Lotgerade, Lot:** Gerade  $l$ , die durch einen Punkt  $P_0$  geht und senkrecht steht auf einer Ebene bzw. auf einer anderen Geraden  $g'$  des Raumes oder die zu jeder von zwei windschiefen Geraden  $g_1$  und  $g_2$  senkrecht steht.

I. Ist in der durch  $P_0$  und  $g'$  bestimmten Ebene ein kartes. Koordinatensystem festgelegt und sind in ihm Punkt  $P_0$  durch  $(x_0, y_0)$  und die Gerade  $g'$  gegeben durch  $y = mx + n$  mit  $m = \tan \alpha$  ( $\nearrow$  Geradengleichung), so gilt (1) für das Lot zu ihr.

$$(1) \quad m' = \tan(\pi/2 + \alpha) = -1/\tan \alpha = -1/m$$

Ist die Gerade  $g'$  gegeben durch eine allgemeine Geradengleichung  $Ax + By + C = 0$ , so stellt (2)

$$(2) \quad B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$$

die L. dar, da die Stellungsvektoren  $Ai + Bj$  und  $Bi - Aj$  aufeinander senkrecht stehen.

II. Stellt  $x = x_1 + \lambda u + \mu v$  eine Ebene  $E$  im  $R_3$  dar, so gibt  $w = u \times v$  die Richtung der L.n  $l$  an (Abb. 1). Wenn  $x_0$  der Ortsvektor des Punktes  $P_0$  ist, stellt  $x = x_0 + \lambda u + \mu v$  eine Parameterdarstellung der L.n durch  $P_0$  zur Ebene dar. Ist die Ebene  $E$  durch  $Ax + By + Cz + D = 0$  gegeben, so hat die L. eine Parameterdarstellung  $x = x_0 + \lambda A, y = y_0 + \lambda B, z = z_0 + \lambda C$ .

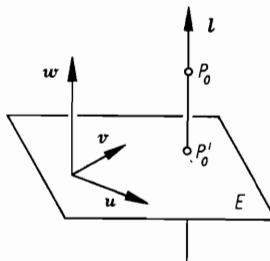


Abb. 1: Lotgerade  $l$  zur Ebene  $E$  mit den Richtungsvektoren  $u$  und  $v$ , Fußpunkt  $P'_0$

III. Ist im  $R_3$  die Gerade  $g'$  durch  $x = x_1 + \lambda u$  gegeben, so existiert eine Ebene  $II$  durch den Punkt  $P_0$ , die senkrecht steht zu  $g'$  und  $g'$  in einem Punkte  $P$  schneidet. Sie kann dargestellt werden durch  $u(x - x_0) = 0$  (Abb. 2). Die Punkte  $P_0, P$  bestimmen die L.  $l$ . Die *Lotlänge* ist der Abstand zwischen

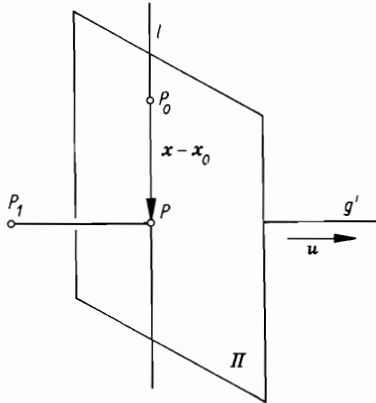
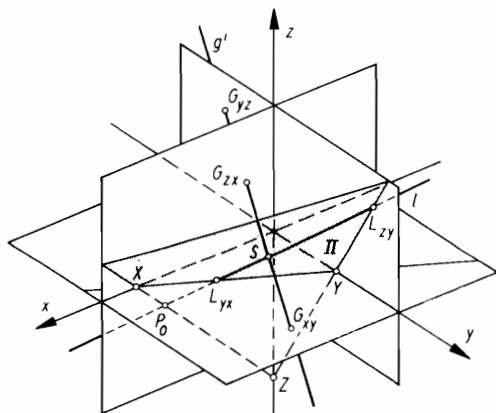


Abb. 2: Lotgerade  $l = PP_0$ , bestimmt durch Punkt  $P_0$  und eine Ebene  $II$ , die senkrecht auf der gegebenen Geraden steht und  $P_0$  enthält

dem Punkt  $P_0$  und der Geraden  $g'$  bzw. der Ebene  $E$ . Dieser Abstand kann für die ersten beiden Fälle, aber nicht für den dritten, auch mit Hilfe der *Hesseschen Normalform* ( $\nearrow$  Geradengleichung) bestimmt werden.

*Beispiel:* Die L. durch  $P_0(4, 0, -1)$  auf die durch  $x = 1 + \lambda, y = 2\lambda, z = 2 - \lambda$  dargestellte Gerade  $g'$  ist gesucht. — Die zu  $g'$  senkrechte Ebene  $II$  durch  $P_0$  hat die Gleichung  $x + 2y - z - 5 = 0$ . Sie schneidet  $g'$  ( $\nearrow$  Schnittpunkt von Ebene und Gerade) im Fußpunkt  $S(2, 2, 1)$  des Lotes. Die L.  $l$  ist die Gerade durch  $(4, 0, -1)$  und  $(2, 2, 1)$  und hat die Parameterdarstellung  $x =$



Lotgerade. Abb. 3: Lot  $l$  vom Punkte  $P_0$  auf die Gerade  $g'$ , Fußpunkt  $S$ , die zu  $g'$  senkrechte Ebene  $II$  ist im I. Quadranten gerastert

$4 - 2\lambda, y = 2\lambda, z = -1 + 2\lambda$  (Abb. 3). Die Lotlänge ist als Abstand zweier Punkte gegeben durch  $\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{3}$ .

IV. Sind  $g_1$  und  $g_2$  zwei *windschiefe Geraden* mit den *Richtungsvektoren*  $u_1$  und  $u_2$  im Raum, so gibt es genau eine Gerade mit dem Richtungsvektor  $v = u_1 \times u_2$ , die  $g_1$  und  $g_2$  schneidet. Sie steht senkrecht auf  $g_1$  und auf  $g_2$  und heißt *gemeinsame L.* von  $g_1$  und  $g_2$ . Der *Abstand* zwischen ihren Schrittspunkten mit  $g_1$  und mit  $g_2$  ist der *Abstand der beiden wind-*

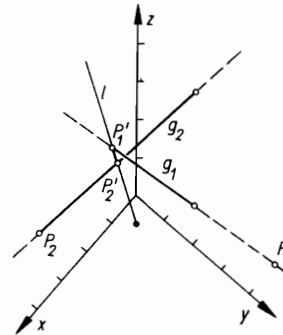


Abb. 4: Die Lotgerade  $l$  steht senkrecht zu jeder der windschiefen Geraden  $g_1$  und  $g_2$ .  $|P_1'P_2'|$  ist ihr kürzester Abstand

*schiefen Geraden*; d. h. der kleinste Abstand eines Punktes auf  $g_1$  von einem auf  $g_2$ .

*Beispiel:* Sind die windschiefen Geraden  $g_1, g_2$  gegeben durch  $x_1 = -i + 4j, x_2 = 4i + 2k$  und  $u_1 = i - 2j + k, u_2 = 2i - j - k$ , so ist  $v = u_1 \times u_2 = 3i + 3j + 3k$ . Schneidet die gemeinsame L. die Gerade  $g_1$  in  $P_1'$  und  $g_2$  in  $P_2'$ , und bestimmen die Ortsvektoren  $x_1$  den Punkt  $P_1$  und  $x_2$  den Punkt  $P_2$ , so gilt im Sinne der Vektoraddition  $OP_1 + P_1P_1' + P_1'P_2' = OP_2 + P_2P_2'$ , d. h. die Gleichung  $x_1 + \lambda_1 u_1 + \mu_0(u_1 \times u_2) = x_2 + \lambda_2 u_2$ . Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich nach dem Einsetzen das System

$+5 = \lambda_1 + 3\mu_0 - 2\lambda_2, -4 = -2\lambda_1 + 3\mu_0 + \lambda_2,$   
 $+2 = \lambda_1 + 3\mu_0 + \lambda_2$ , das erfüllt ist für  $\lambda_1 = 2,$   
 $\mu_0 = 1/3, \lambda_2 = -1$ . Aus  $x_1 + \lambda_1 u_1 = x_1', x_2 + \lambda_2 u_2 = x_2'$  und  $\mu_0(u_1 \times u_2) = P_1'P_2'$  erhält man  $P_1'(1, 0, 2), P_2'(2, 1, 3)$ , d. h. die Lotlänge  $|P_1'P_2'| = |1/3(u_1 \times u_2)| = |i + j + k| = \sqrt{3}$  und die Parameterdarstellung der L.en  $x = 1 + \mu, y = \mu, z = 2 + \mu$  (Abb. 4). S. a. Mittelsenkrechte II., Vektorraum VII., Zweitafelprojektion I.5.

Löwenheim-Skolemscher Satz  $\nearrow$  Prädikatenlogik.  
 Lücke  $\nearrow$  rationale Funktion III.

Ludolf van Ceulen, geb. 28. 1. 1540 Hildesheim, gest. 31. 12. 1610 Leiden. — L. war als Lehrer der Mathematik in Breda, Amsterdam und Leiden tätig und hatte seit 1600 die Professur für Kriegsbaukunst in Leiden inne. — Seine Schriften behandeln die möglichst genaue Berechnung von  $\pi$ , etwa im Hauptwerk »Van den Circkels« (1596). Nach dem Verfahren der ein- und umbeschriebenen Vielecke berechnete L. die Zahl  $\pi$  auf 35 Stellen.

Ludolfische Zahl  $\nearrow \pi$ .



## M

**MacLaurin**, Colin, geb. Februar 1698 Kilmoddan bei Inverary, gest. 14. 6. 1746 York. — M. war mit 19 Jahren Professor in Aberdeen, ab 1726 in Edinburgh und gilt als ein Schüler von NEWTON, dessen Fluxionslehre er in einer Streitschrift verteidigte. Darin findet man die nach ihm ben. *Reihenentwicklung* von Funktionen und ein *Integralkriterium* für die Konvergenz unendl. Reihen, das meist CAUCHY zugeschrieben wird.

**MacLaurinscher Satz** ↗ Taylorsche Reihe I.

**Mainardi**, Gaspare, geb. 1800 Abbiategrosso, gest. 9. 3. 1879 Lecco. — M. studierte in Mailand und Pavia. In Pavia stieg er vom Assistenten 1840 zum Professor auf. Er arbeitete über Differenzen- und Differentialgleichungen, über mathemat. Physik und Differentialgeometrie, stellte z. B. mit CODAZZI die *M.-Codazzischen Gleichungen* auf.

**Mainardi-Codazzische Gleichungen**: zwei Integrabilitätsbedingungen für das *Umkehrproblem* der Flächentheorie, zu zwei vorgegebenen Quadrat. Formen  $q_1 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2$ ,  $q_2 = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2$  die Parameterdarstellung einer Fläche  $F$  zu finden, aus der man durch Differenzieren die Koeffizienten der beiden Grundformen erhält. Diese Koeffizienten müssen zugleich den im *Theorema egregium* enthaltenen Bedingungen genügen.

**Majorante** ↗ Funktionenreihe III.2., ↗ Konvergenzkriterien für Reihen, VI.

**Makroanweisung** ↗ Programmierung des Digitalrechners II.

**Mangelkosten** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**Manhattan-Problem** ↗ Netzwerk III.

**Mannigfaltigkeit**: eine Punktmenge, deren Punkte auf  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reeller Zahlen als die Koordinaten der Punkte umkehrbar eindeutig abgebildet sind. Die Koordinaten können, wie die Parameter einer Kurve oder Fläche, umkehrbaren, genügend oft differenzierbaren Koordinatentransformationen unterworfen werden (↗ Kurve, ↗ Fläche). Nur jene Beziehungen zwischen den Koordinaten einer M. haben geometr. Bedeutung, die von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen. Differenzierbare M. ↗ Liesche Gruppen.

**Mantel** ↗ Kegel II., ↗ Körper V., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I., ↗ Zylinder II.

**Mantisse** ↗ dekadischer Logarithmus I.

**Markierungsfunktion** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.

**Markow**, Andrei Andrejewitsch, geb. 14. 6. 1856 Gouvernement Rjasan, gest. 20. 7. 1922 Petrograd (Leningrad). — M. stammte aus einer Beamtenfamilie. Er schloß 1878 sein Studium in Petersburg (Leningrad) mit seiner ersten größeren Arbeit ab. Seine Dissertation 1880 über *biquadrat*. Formen beeinflusste wesentlich zahlentheoret. Forschungen. 1886 wurde er zum Professor ernannt. Trotz wertvoller Arbeiten zur Analysis, z. B. zum Momentenproblem, sind seine größten Verdienste mit der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* verbunden. Er verall-

gemeinerte die Ergebnisse seines Lehrers TSCHEBYSCHOW, verbesserte dessen Beweise, begründete die Theorie der *M.schen Zufallsprozesse* und gab eine wahrscheinlichkeitstheoret. Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. M. beteiligte sich progressiv am polit. Geschehen. Er war ein Gegner des Zarismus und bekämpfte reaktionäre Richtungen in der Mathematik.

**Markow**, Andrei Andrejewitsch der Jüngere, geb. 22. 9. 1903 Petersburg (Leningrad). — M., der Sohn von A. MARKOW, beendete 1924 die Leningrader Universität und erhielt 1936 eine Professur. Mathematisch folgte er nicht dem Vater, sein Interesse gilt der *Topologie*, den topolog. Algebren sowie der Theorie der *dynam. Systeme* und der *Algorithmen-theorie*.

**Markowsche Kette** ↗ stochastischer Prozeß III.

**Markowscher Prozeß** ↗ stochastischer Prozeß III.

**Mascheronische Konstante** ↗ Entwicklung von Funktionen VII.

**Maschinenbelegungsproblem** ↗ Reihenfolgeproblem.

**Maschinenkode** ↗ Programmierung des Digitalrechners II.

**maschinenorientierte Programmiersprache** ↗ Programmierung des Digitalrechners II.

**Maschinenprogramm** ↗ Programmierung des Digitalrechners I.

**Maschinenwort**: Folge von Binärzeichen.

**Masonformel** ↗ Blockschalbild II.

**Maß**: I. Verallgemeinerung des elementargeometr. Inhaltsbegriffs; auf einem System  $\mathbf{K}$  von Teilmengen  $A_i$  einer Grundmenge  $E$  definierte Mengenfunktion  $\mu$ , die die Eigenschaften (1) und (3) sowie die Eigenschaften (2) und (4) für alle paarweise disjunkten Teilmengensysteme hat:

$$(1) \quad \mu(A_i) \geq 0$$

$$(2) \quad \mu(A_k \cup A_l) = \mu(A_k) + \mu(A_l)$$

$$(3) \quad \mu(\emptyset) = 0$$

$$(4) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Die nichtnegative Mengenfunktion  $\mu$  heißt *Inhalt* oder *endlich-additives M.* auf  $\mathbf{K}$ , falls (1), (2), (3) gelten. Durch die Bedingung (4) wird  $\mathbf{K}$  zum *Mengenkörper*, *Borelkörper*,  $\mu$  ist dann  $\sigma$ -*additiv* und heißt *M.* auf  $\mathbf{K}$ ; die Teilmengen  $A_i$  sind die bzgl.  $\mu$  *meßbaren Teilmengen* von  $\mathbf{K}$ .  $\mathbf{K}$  wird eine *Boolesche Algebra* oder  $\sigma$ -*Algebra*, falls die Grundmenge  $E$  selbst Element von  $\mathbf{K}$  ist und falls  $\mathbf{K}$  deshalb mit jeder Menge  $A_i$  auch deren Komplementärmenge  $E \setminus A_i$  enthält. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung z. B. sind die Elemente von  $E$  die Elementarereignisse. Aus ihnen setzen sich die Ereignisse  $A_i \in \mathbf{K}$  zusammen, denen eine Wahrscheinlichkeit  $P(A_i) = \mu(A_i)$  zugeordnet wird. Das M.  $\mu$  wird dabei dort durch  $\mu(E) = 1$  normiert, weil  $E$  das »sichere Ereignis« entspricht.

II. Das im Punkt  $p \in E$  konzentrierte *Diracsche M.*  $\mu_p$  auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathbf{K}$  aller Teilmengen  $A_i$  von  $E$  ist definiert durch  $\mu_p(A_i) = 1$ , falls  $p \in A_i$ , und  $\mu_p(A_i) = 0$ , falls  $p \in E \setminus A_i$  für alle  $i$ .

**III.** Der *Peano-Jordansche Inhalt* ist ein nur endlich-additives  $M$ . Das *Lebesguesche  $M$* . ist eine Erweiterung des Peano-Jordanschen Inhalts zu einem  $M$ . Jedes  $M$ . gibt Anlaß zu einem Integralbegriff auf der Menge  $E$ ; dem Peano-Jordanschen Inhalt entspricht z. B. das Riemannsche, dem Lebesgueschen  $M$ . das Lebesguesche Integral auf dem  $n$ -dimensionalen euklid. Raum  $E^n$ .

S. a. Flächeninhalt I., III.; Rauminhalt I., II.; Strecke IV.; Winkel VII.

**Maß, äußeres**  $\nearrow$  Nullmenge.

**Massenmittelpunkt** swv. Schwerpunkt von Massebelegungen.

**Maß für Winkel**  $\nearrow$  Koordinatensystem III.

**Maßstabtransformation**  $\nearrow$  Programmierung des Analogrechners III.

**Maßzahl**  $\nearrow$  Rauminhalt I.,  $\nearrow$  Strecke II.

**mathematische Geräte:** vorwiegend mechanisch arbeitende Vorrichtungen und Hilfsmittel zur Lösung geometr. oder rechner. Aufgabenstellungen. Sehr oft treten Gelenkmechanismen oder Getriebe als Konstruktionselemente auf, dabei wird an einer Stelle von Hand eine Bewegung eingeleitet und an einer anderen Stelle das Ergebnis abgenommen, z. B. in Form von Verschiebungen, Drehungen oder als gezeichnete Kurve. — Es sind sehr viele solcher Konstruktionen erdacht und ausgeführt worden; soweit es sich nicht um Sonderkonstruktionen für spezielle Aufgaben handelt, können die folgenden Hauptgruppen unterschieden werden: *Zeichengeräte, Rechengeräte, Differenziergeräte, Integriergeräte* und *harmon. Analytoren*. Digital arbeitende Rechenmaschinen und programmgesteuerte Rechenautomaten ( $\nearrow$  Digitalrechner) werden nicht zu den  $m$ . G.n in diesem Sinne gezählt.

Der Einsatz solcher Geräte, z. B. des logarithm. Rechenstabs, empfiehlt sich, wenn gleichartige Aufgaben oft zu bearbeiten sind und wenn die Ergebnisse keine große Genauigkeit haben müssen oder als Ausgangsnäherung für die schrittweise Verbesserung mittels iterativer Verfahren dienen sollen. Die erreichbare Genauigkeit hängt von der Qualität des verwendeten Geräts und der Sorgfalt des Bearbeiters ab, häufig sind die Mechanismen jedoch so durchkonstruiert, daß die Genauigkeit der Ergebnisse für viele Zwecke ausreicht.

**mathematische Logik:** I. moderne Gestalt der formalen Logik. Sie hat alle wertvollen Ergebnisse der traditionellen Logik, angefangen von der Syllogistik des ARISTOTELIS, in sich aufgenommen und in den ihnen gebührenden Rahmen gestellt, geht aber weit über die Erkenntnisse der traditionellen Logik hinaus. Grundlegender Bestandteil der  $m$ . L. ist die *Aussagenlogik*. Darauf baut sich die *Prädikatenlogik* auf. Ein wesentl. Fortschritt der  $m$ . L. gegenüber der traditionellen Logik ist z. B. die Betrachtung mehrstelliger Prädikate. Die *Stufenlogik* untersucht neben den auf Dinge zutreffenden Prädikaten erster Stufe auch Prädikaten-Prädikate (Prädikate höherer Stufen) und deren Beziehungen untereinander. Die  $m$ . L. ist die Theorie der log. Konstanten und der Prädikate beliebiger Stufe und der Beziehungen zwischen ihnen.

**II.** In der  $m$ . L. wird eine *konsequente Symbolisierung* durchgeführt, d. h., die  $m$ . L. hat sich eine der Mathematik ähnl. künstl. Sprache geschaffen, in der sich die log. Zusammenhänge erheblich präziser und übersichtlicher darstellen lassen. Neben der Symbolisierung führt die  $m$ . L. auch die *Formalisierung* streng und konsequent durch. Aus gegebenen Formeln werden andere durch formales Operieren gewonnen. Dadurch wird das log. Schließen präzisiert und kann in die Form eines Kalküls gebracht werden. Diese Formalisierung des log. Schließens ist für die mathemat. *Grundlagenforschung* und die *Metamathematik*; in denen die  $m$ . L. zunächst angewendet wurde, unerlässlich. Heute wird die  $m$ . L. in vielen mathemat. Disziplinen und auch in manchen Bereichen der theoret. Physik angewendet; sie ist eine der Grunddisziplinen der *Kybernetik* und findet techn. Anwendung in der *Schallalgebra*.

**III.** Der eigentl. Schöpfer der  $m$ . L. ist LEIBNIZ. Seine Schriften zur  $m$ . L. blieben jedoch nahezu zwei Jahrhunderte unbekannt. Ursache für den großen Aufschwung in der Entwicklung der  $m$ . L. seit der Mitte des 19. Jh. war das Auftreten grundlegender Schwierigkeiten log. Natur in der Mathematik, die mit den Mitteln der traditionellen Logik nicht zu überwinden waren. Die ersten bedeutenden Schriften über  $m$ . L. nach LEIBNIZ stammen von B. BOLZANO, G. BOOLE, A. DE MORGAN, CH. PEIRCE, E. SCHRÖDER und insbes. von G. FREGE. Bedeutende Beiträge zur  $m$ . L. lieferten im 20. Jh. B. RUSSELL, D. HILBERT, K. GÖDEL, A. TARSKI u. a.

**mathematische Papiere**  $\nearrow$  Nomographie I.

**mathematische Statistik:** ein anwendungsorientiertes Teilgebiet der Mathematik, das in der Hauptsache auf der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* fußt. Der zentrale Begriff der  $m$ . S. ist der der *Stichprobe*. Die  $m$ . S. hat die Aufgabe, auf Grund von Stichproben unbekannte Parameter der Grundgesamtheit zu schätzen ( $\nearrow$  Schätztheorie), Hypothesen über die Grundgesamtheit zu prüfen ( $\nearrow$  Testtheorie), den Grad und die Art des Zusammenhangs von Zufallserscheinungen zu ermitteln, z. B. durch Korrelationsanalyse oder Regressionsanalyse. Zum Hauptsatz der  $m$ . S. vgl. empirische Verteilungsfunktion.

**mathematische Stichprobe**  $\nearrow$  Stichprobe.

**mathematische Tafeln:** Sammlung oft gebrauchter Konstanten und *Wertetafeln von Funktionen*. Während die Tafeln der elementaren Funktionen nur noch in der Schule und bei grober Handrechnung benutzt werden, weil ihre Werte in Rechenautomaten durch *Unterprogramme* dargestellt sind ( $\nearrow$  Rechnen mit EDVA), haben Tafeln höherer Funktionen mit 8- bis 20stelligem Ausgang auch beim Rechnen mit EDVA große Bedeutung, weil häufig nur wenige Funktionswerte benutzt werden, so daß der Programmier- und Rechenaufwand unökonomisch hoch wäre. Außerdem haben Tafelwerte den Vorteil einer bekannten Genauigkeit.

**Matrix** [Pl. Matrizen]: I. System von  $m \cdot n$  Größen, die in einem rechteckigen Schema von  $m$  (waagerechten) *Zeilen* und  $n$  (senkrechten) *Spalten* angeordnet sind. Die  $m \cdot n$  Größen nennt man die *Elemente* der  $M$ ., es sind in der Regel reelle oder kom-

plexe Zahlen, zuweilen aber auch andere mathemat. Objekte, z. B. Vektoren, Polynome, Differentiale oder selbst wieder Matrizen. Die Stellung eines Elementes, z. B.  $a_{ik}$ , im Schema wird durch einen Doppelindex gekennzeichnet; dabei gibt der erste Index  $i$  die Zeile, der zweite  $k$  die Spalte an, in der das Element steht. Das Element  $a_{ik}$  befindet sich demnach im Kreuzungspunkt der  $i$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte, wenn die Numerierung der Zeilen von oben nach unten, die der Spalten von links nach rechts verläuft. Die Elemente, für die  $i = k$  gilt, bilden die *Hauptdiagonale* der  $M$ .

Eine  $M$ . von  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten nennt man eine  $M$ . vom Typ  $(m, n)$  oder kurz eine  $(m, n)$ - $M$ . und schreibt sie in der Form (1), abgekürzt  $A = (a_{ik})$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

oder  $\|a_{ik}\|$ ; geht der Typ  $(m, n)$  der  $M$ . nicht aus dem betrachteten Zusammenhang hervor, so schreibt man genauer  $A = (a_{ik})_{m,n}$ . Eine  $M$ . vom Typ  $(n, n)$  heißt *n-reihige quadrat. M.* oder *quadrat. M. der Ordnung n*. In einer quadrat.  $M$ .  $(a_{ik})_{n,n}$  bezeichnet man die Summe  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$  der Elemente der Hauptdiagonalen als *Spur* der  $M$ . Eine quadrat.  $M$ ., deren außerhalb der Hauptdiagonalen stehende Elemente sämtlich Null sind, d. h. für die  $a_{ik} = 0$  gilt für alle  $i \neq k$ , nennt man eine *Diagonal-M.* Sind darüber hinaus alle Hauptdiagonalelemente einer Diagonal- $M$ . gleich 1, so erhält man die *n-reihige Einheits-M.*  $E_{n,n} = (\delta_{ik})_{n,n}$ , wobei  $\delta_{ik}$  das Kroneckersymbol ist. Ist  $A$  eine  $(m, n)$ - $M$ ., so gilt  $E_{m,m}A = AE_{n,n} = A$  (zur Multiplikation von Matrizen vgl. II.). Eine quadrat.  $M$ . wird als *obere bzw. untere Dreiecks-M.* bezeichnet, wenn alle oberhalb bzw. alle unterhalb der Hauptdiagonalen stehenden Elemente Null sind, d. h., wenn  $a_{ik} = 0$  für alle  $i < k$  bzw.  $a_{ik} = 0$  für alle  $i > k$ . Eine  $M$ . vom Typ  $(1, n)$ , die nur aus einer Zeile besteht, nennt man eine *Zeilen-M.*; analog dazu heißt eine  $M$ . vom Typ  $(m, 1)$  eine *Spalten-M.* Jede  $(m, 1)$ -Spalten- $M$ . kann als Element des Vektorraums der geordneten  $m$ -Tupel von Zahlen aufgefaßt werden, und umgekehrt kann jedes  $m$ -Tupel als  $(m, 1)$ -Spalten- $M$ . gedeutet werden. Diese eindeutige Zuordnung ist relationstreu bzgl. Addition und skalarer Multiplikation. Eine entsprechende Isomorphie besteht zwischen den  $(1, n)$  Zeilenmatrizen und den geordneten  $n$ -Tupeln von Zahlen. Oft werden diese  $m$ -Tupel bzw.  $n$ -Tupel als *Spaltenvektoren* bzw. *Zeilenvektoren* bezeichnet.

Jedes Teilschema (2), das aus der  $M$ .  $(a_{ik})_{m,n}$  durch

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \dots & a_{i_1k_r} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \dots & a_{i_2k_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & \dots & a_{i_rk_r} \end{pmatrix} = (a_{i_0k_0})_{r,s}$$

mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$   
und mit  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq n$

Streichen irgendwelcher Zeilen und irgendwelcher Spalten hervorgeht, heißt eine *Unter-M.* von  $(a_{ik})$ . Die  $M$ .  $(a_{ik})$  selbst rechnet man auch noch zu ihren Untermatrizen.

II. Matrizen spielen eine wichtige Rolle in vielen Zweigen der Mathematik, der Physik (z. B. in der Elektrotechnik und der Quantenphysik), der Chemie, der Ökonomie und in anderen Gebieten, überall dort, wo lineare Beziehungen zwischen zwei Systemen von Objekten auftreten. Ihre volle Bedeutung erhalten die Matrizen erst durch den Aufbau eines *Matrizenkalküls*, der zwischen den Matrizen Verknüpfungen erklärt, die genau diejenigen Operationen widerspiegeln, die man mit den durch die Matrizen beschriebenen Objekten ausführen will. Zwei Matrizen  $A = (a_{ik})$  und  $B = (b_{ik})$  heißen *gleich* genau dann, wenn sie vom selben Typ sind und in allen an gleichen Stellen stehenden Elementen übereinstimmen, d. h., wenn  $a_{ik} = b_{ik}$  für alle  $i$  und alle  $k$ . Unter der *Summe*  $A + B$  zweier typengleicher Matrizen  $A = (a_{ik})$  und  $B = (b_{ik})$  versteht man die  $M$ .  $C = (a_{ik} + b_{ik})$ , und durch  $\alpha A = \alpha(a_{ik}) = (\alpha a_{ik})$  wird die *skalare Multiplikation* von  $A$  mit einer reellen Zahl  $\alpha$  definiert. Addition und skalare Multiplikation von Matrizen erfolgen demnach *elementweise* wie z. B. (3) zeigt.

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Bzgl. dieser beiden Verknüpfungen gelten in der Menge der  $(m, n)$ -Matrizen die gleichen Rechenregeln wie für Zahlen; die  $(m, n)$ -Matrizen bilden bzgl. Addition und Skalarmultiplikation einen  $\nearrow$  Vektorraum der Dimension  $m \cdot n$ . Insofern kann man mittels  $A + (-1)B = A - B$  die *Differenz* zweier Matrizen definieren, und das neutrale Element bzgl. der Addition ist die  $(m, n)$ -*Null-M.*  $O$ , deren Elemente sämtlich Null sind.

Die *Multiplikation* einer  $(m, n)$ - $M$ .  $A = (a_{ik})$  und einer  $(r, s)$ - $M$ .  $B = (b_{ik})$  ist genau dann definiert, wenn diese *verkettet* sind, d. h., wenn die Spaltenzahl des ersten Faktors gleich der Zeilenzahl des zweiten Faktors ist, d. h., falls  $n = r$ ; das *Produkt*  $AB$  ist dann die  $(m, s)$ -Matrix  $C = (c_{ik})$ , deren Elemente  $c_{ik}$  sich nach (4) berechnen.

$$(4) \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

Das in der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte der Produkt- $M$ . stehende Element  $c_{ik}$  läßt sich demnach auch auffassen als Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit der  $k$ -ten Spalte von  $B$ . In (5) ist ein Beispiel für die Multiplikation zweier Matrizen gegeben.

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -3 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Die *Multiplikation verketteter Matrizen* ist *assoziativ* und mit der Addition durch *Distributivgesetze* verbunden, d. h., unter Voraussetzung der Bildbarkeit

aller Summen und Produkte gelten (6), (7) und (8).

- (6)  $A(BC) = (AB)C$
- (7)  $A(B + C) = AB + AC$
- (8)  $(A + B)C = AC + BC$

Das *Kommutativgesetz* hingegen gilt nicht, es ist i. allg.  $AB \neq BA$ . Wie das Beispiel (9) zeigt, folgt

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aus  $AB = O$  und  $A \neq O$  nicht notwendig  $B = O$  ( $\nearrow$  Nullteiler). Das zieht nach sich, daß man aus  $AB = AC$  nicht auf  $B = C$  schließen darf; z. B. gilt mit den Matrizen (10) die Gleichung  $AB = AC$ , obwohl  $B \neq C$ .

$$(10) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -9 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

In der Menge der quadrat.  $n$ -reihigen Matrizen ist sowohl die Addition als auch die Multiplikation unbeschränkt ausführbar; bzgl. dieser Operationen bildet die Menge der  $(n, n)$ -Matrizen einen Ring; den *vollen Matrizenring*, der ein bzgl. der Multiplikation neutrales Element hat, die  $(n, n)$ -Einheits-M.  $E_n = (\delta_{ik})$ .

III. Jeder quadrat. M.  $A = (a_{ik})$  kann man die aus ihren Elementen in der gegebenen Anordnung gebildete Determinante  $\det A = |A| = |a_{ik}|$  zuordnen; man nennt det  $A$  die *Determinante der M. A*. Über die Determinante eines Produkts  $n$ -reihiger quadrat. Matrizen  $A, B$  gilt der *Produktsatz* (11).

$$(11) \quad \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Ist  $\det A \neq 0$ , so heißt die quadrat. M.  $A$  *regulär*, ist det  $A = 0$ , so heißt sie *singulär*. Gleichbedeutend damit sind die Aussagen, daß eine quadrat. M.  $A$  regulär bzw. singular ist je nachdem, ob das System ihrer Zeilenvektoren und das System ihrer Spaltenvektoren linear unabhängig bzw. linear abhängig ist. Die Regularität von  $A$  ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es zu  $A$  genau eine bzgl. der Multiplikation *inverse M.*  $A^{-1}$  mit der Eigenschaft  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$  gibt. Ist  $A = (a_{ik})$ , so erhält man  $A^{-1} = (A_{ki})/\det A$  als Inverse, wobei  $A_{ki}$  die Adjunkte ( $\nearrow$  Determinante IV.) des Elementes  $a_{ki}$  ist; in (12) ist für die M.  $A$  die Inverse  $A^{-1}$  angegeben. Die prakt. Berechnung der Inversen einer  $n$ -reihigen regulären M.  $A$  erfolgt, insbes. für großes  $n$ , zweckmäßigerweise mittels linearer Gleichungssysteme aus dem Ansatz  $AX = E$ .

$$(12) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 19 \\ -14 & 4 & 2 \\ -11 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

In der Menge der regulären  $(n, n)$ -Matrizen ist demnach die Multiplikation umkehrbar, und es gelten die Regeln  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . Die Menge der regulären  $(n, n)$ -Matrizen ist bzgl. der Multiplikation eine Gruppe.

IV. Eine M.  $A = (a_{ik})$  geht durch „Spiegeln an der Hauptdiagonalen“ über in die zu  $A$  *transponierte M.*  $A^T = (a_{ki})$ , deren Zeilen die Spalten von  $A$  und deren Spalten die Zeilen von  $A$  sind. Ist  $A$  vom Typ  $(m, n)$ , so hat  $A^T$  den Typ  $(n, m)$ , und es gelten die Regeln (13).

$$(13) \quad (A^T)^T = A; \quad (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Für reguläre Matrizen  $A$  ist weiter  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ ; diese M. nennt man die zu  $A$  *kontragrediente M.* — Eine quadrat. M., die mit ihrer Transponierten übereinstimmt,  $A = A^T$ , heißt *symmetr. M.*; bei einer solchen sind spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen stehende Elemente gleich, d. h.,  $a_{ik} = a_{ki}$ . Jede reelle symmetr.  $(n, n)$ -M. hat  $n$  reelle Eigenwerte. Eine *schiefsymmetr. M.* ist eine quadrat. M. mit der Eigenschaft  $A = -A^T$ , d. h.  $a_{ik} = -a_{ki}$ ; ihre Hauptdiagonalelemente sind sämtlich Null. Jede reelle schiefsymmetr.  $(n, n)$ -M. hat  $n$  imaginäre Eigenwerte. Gilt für eine quadrat. M.  $A$  die Gleichung  $A^T = A^{-1}$ , d. h.  $AA^T = E$ , so nennt man sie eine *orthogonale M.*; die Zeilenvektoren sowie die Spaltenvektoren einer orthogonalen M. bilden je ein *Orthonormalsystem* ( $\nearrow$  Orthogonalsystem), und umgekehrt ist jede M., deren Zeilen bzw. deren Spalten ein Orthonormalsystem bilden, eine orthogonale M. Die Menge der orthogonalen  $(n, n)$ -Matrizen bildet bzgl. der Multiplikation eine Gruppe, d. h. insbes., daß mit  $A$  und  $B$  auch  $AB$  und  $A^{-1}$  orthogonale Matrizen sind. Ist  $A$  orthogonal, so ist  $\det A = \pm 1$ , jedoch nicht umgekehrt. Jede zweireihige orthogonale M. hat die Gestalt (14) für  $\varepsilon = \pm 1$  und einen Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi[$ .

$$(14) \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\varepsilon \sin \varphi & \varepsilon \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Eine quadrat. M.  $A$  mit komplexen Elementen nennt man *hermitesch* bzw. *schiefhermitesch* genau dann, wenn  $A = \bar{A}^T$  bzw.  $A = -\bar{A}^T$ ; sie heißt *unitäre M.*, falls  $\bar{A}^T = A^{-1}$ ; dabei ist  $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$  und  $\bar{a}_{ik}$  die Konjugiert-Komplexe zu  $a_{ik}$ . Für quadrat. Matrizen mit reellen Elementen fallen die Begriffe hermitesch, schiefhermitesch, unitär mit den Begriffen symmetrisch, schiefsymmetrisch, orthogonal zusammen.

V. Die M.  $A \neq O$  hat den *Rang  $\varrho$*  genau dann, wenn  $A$  mindestens eine reguläre  $\varrho$ -reihige Unter-M. enthält und alle  $\sigma$ -reihigen Untermatrizen von  $A$  singular sind, falls  $\sigma > \varrho$ . Der Null-M. wird der Rang Null zugeordnet. In (15) z. B. hat  $A_1$  den Rang 2,

$$(15) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

da sie die zweireihige reguläre Unter-M.  $A_2$  enthält, aber alle vier möglichen dreireihigen Unter-

matrizen singular sind. Der Rang  $r(A)$  einer M.  $A$  ist gleich der Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren von  $A$  ( $\nearrow$  lineare Abhängigkeit). Der Rang der M. ändert sich nicht, wenn die M. folgenden *elementaren Umformungen* unterworfen wird:

1. Vertauschen zweier Zeilen bzw. zweier Spalten miteinander,
2. Multiplizieren einer Zeile bzw. einer Spalte mit einer Zahl  $c \neq 0$ ,
3. Addieren eines beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, bzw. des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen.

Danach kann man insbes. den *Gaußschen Algorithmus* ( $\nearrow$  lineares Gleichungssystem III.) auf eine M. anwenden, ohne dadurch ihren Rang zu ändern. Mittels dieser elementaren Umformungen kann man jede  $(m, n)$ -M.  $(a_{ik}) \neq O$  überführen in eine zu ihr ranggleiche von der Gestalt (16), die gekennzeichnet ist dadurch, daß alle Elemente der letzten  $(m - \varrho)$

$$(16) \quad \left( \begin{array}{cccc} b_{11}b_{12} \dots b_{1\varrho}b_{1,\varrho+1} \dots b_{1n} \\ 0 \ b_{22} \dots b_{2\varrho}b_{2,\varrho+1} \dots b_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ b_{\varrho\varrho}b_{\varrho,\varrho+1} \dots b_{\varrho n} \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \varrho \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ (m - \varrho) \text{ Zeilen} \end{array}$$

$\varrho$  Spalten       $(n - \varrho)$  Spalten

Zeilen verschwinden oder  $\varrho = m$  ist, daß die Hauptdiagonalelemente  $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{\varrho\varrho}$  sämtlich von Null verschieden sind und alle unterhalb der Hauptdiagonalen stehenden Elemente verschwinden. Der Rang dieser M. und damit der Rang von  $A = (a_{ik})$  ist dann gleich der Anzahl  $\varrho$  der in der Hauptdiagonalen stehenden von Null verschiedenen Elemente.

— Über den Rang eines Matrizenproduktes gilt der Satz  $r(ABC) \leq r(B)$ ; dabei gilt das Gleichheitszeichen sicher dann, wenn  $A$  und  $C$  regulär sind. Umgekehrt kann man zu zwei typen- und ranggleichen Matrizen  $B_1$  und  $B_2$  stets reguläre Matrizen  $A$  und  $C$  angeben, so daß  $B_2 = AB_1C$ . Man nennt zwei Matrizen mit dieser Eigenschaft *äquivalent*; folglich sind äquivalente Matrizen ranggleich, und ranggleiche Matrizen vom selben Typ sind äquivalent. Die *Äquivalenz von Matrizen* ist eine Äquivalenzrelation. Fordert man noch zusätzlich, daß diese Matrizen  $A$  und  $C$  zueinander invers sind, dann heißen die quadrat. Matrizen  $B_1$  und  $B_2 = C^{-1}B_1C$  zueinander *ähnl.* Matrizen. Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation. Ähnl. Matrizen haben dasselbe charakterist. Polynom und damit auch dieselben Eigenwerte. Äquivalente und ähnl. Matrizen treten z. B. bei der Beschreibung  $\nearrow$  linearer Abbildungen von Vektorräumen durch Matrizen auf.

**Matrix, logische**  $\nearrow$  Aussagenlogik II.

**Matrixspiel**  $\nearrow$  Spieltheorie II.

**Matrizenring, voller**  $\nearrow$  Matrix III.

**maximales Element:** *Mengenlehre* ein Element  $x$  einer halbgeordneten Menge  $(M, R)$ , für das es in bezug

auf die Halbordnung  $R$  in der Menge  $M$  kein von  $x$  verschiedenes Element  $y$  von  $M$  gibt, für das  $x \leq y(R)$  gilt; z. B. ist 7 ein m. E. der durch die Relation «ist Teiler von» halbgeordneten Menge  $\{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$ .

**Maximalkettensatz**  $\nearrow$  Mengenlehre II.

**Maximalspannungsproblem**  $\nearrow$  Spannungen auf Graphen II.

**Maximalstromproblem**  $\nearrow$  Strom auf Graphen II.

**Maximum, größtes Element:** *Mengenlehre* ein Element  $x$  einer halbgeordneten Menge  $(M, R)$ , für das in bezug auf die Halbordnung  $R$  in  $M$  für alle Elemente  $y$  von  $M$  gilt  $y \leq x(R)$ ; Bezeichnung:  $\max M$ ; z. B. ist  $-1$  M. der Menge aller negativen ganzen Zahlen bzgl. der natürl. Größenordnungsbeziehung. — In einer halbgeordneten Menge ist das M. auch  $\nearrow$  maximales Element, die Umkehrung gilt jedoch nur für total geordnete Mengen.

S. a. Extremwert I.

**Maximum-Likelihood-Methode:** I. Methode zur Gewinnung von *Punktschätzungen*. Ist  $(x_1, \dots, x_n)$  eine Stichprobe vom Umfang  $n$  aus einer Grundgesamtheit mit stetig verteiltem Merkmal  $X$  und enthält die Dichte von  $X$  einen unbekanntem Parameter  $\gamma$ , der aus der Stichprobe geschätzt werden soll, so kann die Dichte in der Gestalt  $f(x, \gamma)$  angenommen werden. Als *Likelihood-Funktion* gilt dann die Funktion (1) von  $\gamma$ . Ist  $x_i$  im Falle einer *diskreten Zufalls-*

$$(1) \quad L(x_1, \dots, x_n; \gamma) = f(x_1, \gamma) \cdot f(x_2, \gamma) \cdot \dots \cdot f(x_n, \gamma)$$

*größe*  $X$  mit den mögl. Werten  $x_1, x_2, \dots$  und den Wahrscheinlichkeiten  $P(X = x_i) = p_i(\gamma)$  der größte der mögl. Werte, der in der Stichprobe vorkommt, und sind  $f_1, f_2, \dots, f_r$  mit  $f_1 + f_2 + \dots + f_r = n$  die absoluten Häufigkeiten, mit denen die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_r$  in der Stichprobe auftreten, so wird (2) als *Likelihood-Funktion* bezeichnet. Die M.-L.-M. be-

$$(2) \quad L(x_1, \dots, x_n; \gamma) = p_1^{f_1}(\gamma) \cdot p_2^{f_2}(\gamma) \cdot \dots \cdot p_r^{f_r}(\gamma)$$

steht darin, den Schätzwert  $\hat{\gamma}$  des Parameters  $\gamma$  dadurch zu bestimmen, daß für ihn die *Likelihood-Funktion* ihr Maximum erreicht. Der Schätzwert  $\hat{\gamma}$  ist danach die Funktion (3) von  $x_1, \dots, x_n$ . Die zuge-

$$(3) \quad \hat{\gamma} = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$$

hörige *Stichprobenfunktion*  $\Gamma(X_1, \dots, X_n)$  heißt eine *Maximum-Likelihood-Schätzung* von  $\gamma$ . Man findet  $\hat{\gamma}$  und damit auch  $\Gamma(X_1, \dots, X_n)$ , indem man von der Funktion  $L$  die partielle oder, weil es sich um Potenzfunktionen handelt, die partielle logarithm. Ableitung nach  $\gamma$  Null setzt und die erhaltene Gleichung (4) bzw. (5) nach  $\gamma$  auflöst.

$$(4) \quad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = 0$$

$$(5) \quad \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = 0$$

II. Hängt die Dichte  $f(x; \gamma_1, \dots, \gamma_l)$  bzw. die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(X = x_k) = p_k(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$  von  $l$  Parametern  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  ab, so gewinnt man eine Maximum-Likelihood-Schätzung des *Parameter-*

systems  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  durch Auflösung eines der Gleichungssysteme (6) bzw. (7).

$$(6) \quad \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, l$$

$$(7) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, l$$

Die Gleichungen (4) bis (7) werden als *Maximum-Likelihood-Gleichungen* bezeichnet.

**III. Maximum-Likelihood-Schätzungen** haben einige günstige *Eigenschaften*: Sie sind unter ziemlich allgemeinen Bedingungen *konsistent* und *asymptotisch normalverteilt*, jedoch *nicht immer erwartungstreu* ( $\nearrow$  Punktschätzung). Sie haben unter allen asymptotisch normalverteilten Schätzungen die größte Wirksamkeit. Sollen z. B. für die normalverteilte Zufallsgröße  $X$  die unbekannt Parameter  $a$  und  $\sigma^2$  aus einer Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  vom Umfang  $n$  geschätzt werden, so erhält man die Likelihood-Funktion (8) und die entsprechenden Likelihood-Gleichungen (9) und (10).

$$(8) \quad L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[ -1/(2\sigma^2) \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 \right]$$

$$(9) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - a) = 0$$

$$(10) \quad \frac{\partial \ln L}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 = 0$$

Durch Auflösen von (9) und (10) nach  $a$  und  $\sigma^2$  erhält man die Schätzwerte  $\hat{a}$ ,  $\hat{\sigma}^2$  gemäß (11) und (12), d. h.  $(\bar{x}, s^{*2})$  ist eine Maximum-Likelihood-Schätzung des Parameterpaares  $(a, \sigma^2)$  der Normalverteilung ( $\nearrow$  Punktschätzung).

$$(11) \quad \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$$

$$(12) \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = s^{*2}$$

**Maximum-Minimum-Prinzip**  $\nearrow$  elliptische Differentialgleichung II.3.

**Maxwell**, James Clerk, geb. 13. 6. 1831 Middlebie bei Edinburgh, gest. 5. 11. 1879 Cambridge. — M. studierte in Cambridge und war nacheinander Professor der Naturphilosophie 1856 in Aberdeen, der Naturphilosophie und der Astronomie 1860 in London und schließlich der Physik 1871 in Cambridge. Die Lehrtätigkeit von M. war jedoch oft unterbrochen durch jahrelange Aufenthalte in Schottland auf seinen Gütern. — M. lieferte fundamentale Beiträge zur Elektrodynamik, begründete die *elektromagnet. Lichttheorie*, arbeitete an der Grundlegung der kinet. Gastheorie mit und gab wichtige Untersuchungen zur Himmelsmechanik und zur Potentialtheorie heraus.

**Maxwell-Verteilung**: die Verteilung der Zufallsgröße  $\sigma \sqrt{Y}$ , wenn  $Y$  eine  $\chi^2$ -Verteilung mit drei Freiheitsgraden hat. Die Dichte der M.-V. wird durch

Gleichung (1) gegeben, in der  $\sigma$  der Parameter der Verteilung ist. Die M.-V. spielt in der Physik eine wichtige Rolle.

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 / (\sigma^3 \sqrt{2\pi}) \exp[-x^2/(2\sigma^2)] & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

**Mealy-Automat**  $\nearrow$  Automat, determinierter, abstrakter, I.

**Median**  $\nearrow$  Quantile.

**Mega**  $\nearrow$  Strecke V.

**mehrdimensionale Parameterintegrale**  $\nearrow$  Parameterintegral IV.

**mehrdimensionale Zufallsgröße** svw. Zufallsvektor.

**mehrfache Regression**  $\nearrow$  Regression I.2., II.2.

**Mehrgrößenregelung**  $\nearrow$  Regelung VII.

**Mehrkomponentenregler**  $\nearrow$  Regelung II.

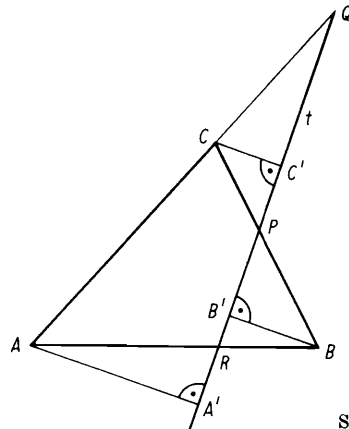
**Mehrpunktsignal**  $\nearrow$  Signal II.

**Mehrschrittverfahren**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichungen V.

**Menelaos von Alexandria**, lebte um 100 u. Z. in Rom.

— Er stellte Regeln zur Berechnung des sphär. Dreiecks auf und war ein Vorbild für PROLEMÄUS; bekannt ist sein Satz über Dreieckstransversalen.

**Menelaos, Satz von**: *Schneidet eine Dreieckstransversale die Geraden durch die Ecken eines Dreiecks in drei von den Ecken verschiedenen Punkten, so hat das Produkt der Teilverhältnisse, das jeder dieser Punkte mit den auf seiner Geraden liegenden Eckpunkten bildet, den Wert  $-1$ . Liegen z. B. von den Schnitt-*



Satz von Menelaos

punkten der Transversalen  $t$  Punkt  $P$  auf  $g_{BC}$ ,  $Q$  auf  $g_{CA}$  und  $R$  auf  $g_{AB}$  (Abb.), so gilt für das Produkt der absoluten Beträge der Teilverhältnisse

$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1,$$

wie sich nach dem Strahlensatz ergibt, wenn man von den Ecken  $A$ ,  $B$  und  $C$  je ein Lot  $AA'$ ,  $BB'$  bzw.  $CC'$  auf die Transversale fällt und die Geradenbüschel mit den Trägern  $P$ ,  $Q$  bzw.  $R$  betrachtet. Da aber von den drei Teilpunkten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  stets entweder alle drei oder einer ein äußerer und zwei

innere Teilpunkte sind, ist das Produkt der drei Teilverhältnisse negativ. Teilen umgekehrt drei Punkte die Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse den Wert  $-1$  hat, so liegen die Teilpunkte auf einer Geraden, denn verbindet man zwei dieser Punkte, etwa  $R$  und  $Q$ , durch eine Gerade, so schneidet diese die dritte Seite in einem Punkte  $P'$ , der nach dem Satz von Menelaos mit den Eckpunkten  $B$  und  $C$  der dritten Seite das gleiche Teilverhältnis hat, wie  $P$  nach Voraussetzung und deshalb mit  $P$  zusammenfallen muß.

**Menge I.** ein streng mathematisch nicht eindeutig definierbarer Grundbegriff der Mathematik; nach G. CANTOR „jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ der  $M$ . genannt werden) zu einem Ganzen“. Systematisch kann man von gewissen Dingen ausgehen, die *Ur-elemente* gen. werden und z. B. real existierende Dinge sein können, und ihre Zusammenfassungen als  $M.n$  bezeichnen sowie die weiteren Zusammenfassungen von solchen  $M.n$  und Urelementen. Eine andere Art von Zusammenfassungen liefert die *Klassen*, die mittels einstelliger Prädikate beschrieben werden können, d. h. durch eine für ihre Elemente charakterist. Eigenschaft, so daß die Elemente einer so beschriebenen *Klasse* gerade alle die  $M.n$  und Urelemente sind, auf die das entsprechende Prädikat zutrifft. Manche dieser Klassen können selbst Elemente anderer Klassen sein, andere Klassen dagegen nicht, wie z. B. die Klasse aller  $M.n$  und die Klasse aller Ordinalzahlen. Diese *echten Klassen* oder *Umnengen* sind keine  $M.n$ . Die  $M.n$  sind diejenigen Klassen, die selbst Element sein können. Danach ist jede  $M$ . eine Klasse. Zwei Klassen sind gleich, falls sie dieselben Elemente enthalten.

Ist  $H(x)$  ein einstelliges Prädikat, so wird die dadurch beschriebene Klasse mit  $\{x \mid H(x)\}$  bezeichnet. Besteht eine Klasse  $A$  nur aus endlich vielen Elementen, etwa den Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , so bezeichnet man sie mit  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . In diesem Falle kann man ihre Elemente mit Hilfe der natürl. Zahlen durchnummerieren. Sind ihre Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  paarweise verschieden, so heißt sie eine  $n$ -er  $M$ . Speziell sind die  $M.n$  der Form  $\{a_1\}$  die *Einer-M.n* und die Mengen der Form  $\{a_1, a_2\}$  für verschiedene Elemente  $a_1, a_2$  die *Zweier-M.n*. — Daß  $a$  Element einer Klasse  $M$  ist, wird durch  $a \in M$  angegeben; daß  $a$  ein *Element* sei, bedeutet, daß  $a$  ein Urelement oder eine  $M$ . ist, d. h., daß es eine Klasse  $A$  mit der Eigenschaft  $a \in A$  gibt. Die Klasse aller Elemente heißt *Allklasse*; die *leere M.* ist die  $M. \emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ , d. h., für alle  $y$  gilt  $y \notin \emptyset$ . — Eine  $M. M$ , deren Elemente selbst  $M.n$  sind, heißt ein  *$M$ .system*. Eine  *$M$ .familie* über einer Index- $M. I$  ist eine Funktion, deren Definitionsbereich  $I$  und deren Werte  $M.n$  sind.

**II.** In bezug auf eine  $M. B$  bezeichnet  $A \subseteq B$ , daß  $A$  eine *Teil-M.* von  $B$  ist, d. h., daß jedes Element von  $A$  auch ein Element von  $B$  ist. Insbes. ist die *leere M.* eine *Teil-M.* jeder  $M.$ , und jede  $M.$  ist *Teil-M.* von sich selbst. Die von der leeren  $M.$  und einer betrach-

teten  $M. B$  verschiedenen *Teil-M.n*  $A$  werden auch *echte Teil-M.n* dieser  $M. B$  gen.; in Zeichen  $A \subset B$ . Alle *Teil-M.n* einer  $M. A$  bilden deren *Potenz-M.*  $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ ; z. B. ist von  $M = \{a, b, c\}$   $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$  die *Potenz-M.* Die Kardinalzahl der *Potenz-M.* einer  $M. M$  ist stets größer als die Kardinalzahl von  $M$ ; hat  $M n$  Elemente, so hat  $P(M) 2^n$  Elemente. — Die Enthaltenseinsrelation oder Inklusion  $\subseteq$  ( $\nearrow$  Relation) ist eine Halbordnungsrelation in der *Potenz-M. P(A)* ( $\nearrow$  Ordnungsrelationen).

**III.** Eine *unendl. M.* ist eine nichtleere  $M.$ , für die die Anzahl der Elemente größer ist als jede natürl. Zahl. Eine den Zahlbegriff nicht benutzende Definition stammt von R. DEDEKIND (1831—1916): Eine  $M. M$  ist genau dann unendlich, wenn es eine echte *Teil-M. X* von  $M$  gibt, so daß  $M$  und  $X$  gleichmächtig sind, d. h., daß es eine Bijektion von  $M$  auf  $X$  gibt. —

Jede  $M.$ , die keine unendl.  $M.$  ist, ist eine *endl. M.* Für jede endl.  $M.$  gibt es eine natürl. Zahl  $n$ , so daß man mit Hilfe der natürl. Zahlen  $0, 1, \dots, n-1$  ihre Elemente durchnummerieren kann. Hat eine  $M.$  eine unendl.  $M.$  als *Teil-M.*, so ist sie selbst unendlich. Die  $M. \mathbf{N}$  der natürl. Zahlen ist eine unendl.  $M.$ ; denn die echte *Teil-M. X* aller geraden natürl. Zahlen ist gleichmächtig mit  $\mathbf{N}$ , die Zuordnung  $n \rightarrow 2n$  für jede natürl. Zahl  $n$  liefert eine eindeutige Funktion von  $\mathbf{N}$  auf  $X$ . —

Jede mit einer unendl.  $M.$  gleichmächtige  $M.$  ist unendlich. Speziell heißt jede mit der  $M.$  der natürl. Zahlen gleichmächtige  $M.$  *abzählbar unendlich*. Jede unendl.  $M.$ , die nicht abzählbar unendlich ist, heißt *überabzählbar*. Jede unendl.  $M.$  enthält eine abzählbar unendl. *Teil-M.* Abzählbar unendlich sind z. B. die  $M.$  der ganzen Zahlen und die  $M.$  der rationalen Zahlen, überabzählbar ist die  $M.$  der reellen Zahlen.

Auch die endl.  $M.n$  können ohne den Zahlbegriff definiert werden. Nach TARSKI ist eine  $M.$  genau dann endlich, wenn jede nichtleere *Teil-M.* ihrer *Potenz-M.* ein bzgl. Inklusion minimales Element hat. Nach ZERMELO ist eine  $M.$  genau dann endlich, wenn für jede Wohlordnung  $R$  in  $M$  ( $\nearrow$  Ordnungsrelation) auch die inverse Relation  $R^{-1}$  eine Wohlordnung in  $M$  ist. In jeder endl.  $M.$  ist jede lineare Ordnung eine Wohlordnung. S. a. Gleichmächtigkeit, Produktmenge, Mengenalgebra, Mengenlehre.

**IV.** In der *Topologie* werden die Elemente der  $M.$  meist als *Punkte* bezeichnet. In einem metr. Raum  $R$  existiert zu jedem Punkt  $p$  und jeder positiven reellen Zahl  $\varepsilon$  stets die *Kugelumgebung* oder  $\varepsilon$ -*Umgebung*  $U_\varepsilon(p) = \{x \mid d(x, p) < \varepsilon\}$ , d. h., die Menge aller Punkte  $x$ , deren Abstand  $d$  ( $\nearrow$  Raum, metrischer) von  $p$  kleiner als  $\varepsilon$  ist. Diese Punkte bilden eine *Teil-M. U* von  $R$ . Im dreidimensionalen euklid. Raum  $R^3$  z. B. sind das die Punkte  $x = (x_1, x_2, x_3)$  mit

$$d(x, p) = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2} < \varepsilon.$$

Allgemein nennt man eine *Teil-M. U* Umgebung, falls es eine offene  $M. O$  gibt, so daß  $p \in O \subseteq U$ .

Ein *innerer Punkt*  $p$  einer  $M$ .  $M \subseteq N$  liegt vor, wenn es eine Umgebung von  $p$  gibt, deren Punkte alle zu  $M$  gehören, als *äußeren Punkt*  $p \in M$  bezeichnet man einen inneren Punkt der Komplementär- $M$ .  $CM$  von  $M$ , für den es z. B. eine Umgebung gibt, deren Punkte alle zu  $CM$  gehören. Die *Komplementär- $M$* . umfaßt dabei alle Punkte von  $N$ , die nicht zu  $M$  gehören. Ein *Randpunkt*  $p \in M$  ist weder innerer noch äußerer Punkt, in jeder Umgebung von ihm gibt es sowohl Punkte von  $M$  als auch Punkte von  $CM$ . Die  $M$ . aller Randpunkte heißt *Rand* der  $M$ .  $M$ . Ist  $N$  z. B. die  $M$ . der Punkte der Zahlengeraden  $R^1$  und  $M$  die  $M$ . der Punkte, für die  $x \geq 0$  gilt, so sind alle Punkte mit  $x > 0$  innere, alle mit  $x < 0$  sind äußere Punkte von  $M$ , und  $x = 0$  ist der Randpunkt von  $M$ . Eine  $M$ . aus nur endlich vielen Punkten von  $R^1$  besteht nur aus Randpunkten. Als *Berührungspunkt*  $M$  wird ein Punkt  $p \in N$  bezeichnet, wenn in jeder Umgebung von  $p$  Punkte der Teil- $M$ .  $M \subseteq N$  vorkommen, d. h., ein Berührungspunkt kann innerer oder Randpunkt sein. Ihre Gesamtheit wird als *Abschluß*  $\bar{M}$  von  $M$  oder als *Hülle* dieser  $M$ . bezeichnet. Da der in der Analysis definierte *Häufungspunkt*  $p$  einer  $M$ .  $M$  kein Punkt von  $M$  zu sein braucht, ist er in der hier aufgestellten Terminologie als Berührungspunkt der  $M$ .  $M \setminus \{p\}$  zu bezeichnen.

Eine  $M$ .  $M$  heißt *offen*, wenn es zu jedem ihrer Punkte  $P$  eine Umgebung gibt, die ganz zu  $M$  gehört. Eine  $M$ .  $M \subseteq N$ , die Teil- $M$ . einer  $M$ .  $N$  ist, heißt *abgeschlossen*, wenn ihre Komplementär- $M$ .  $CM$  offen ist, das bedeutet, daß  $M$  alle ihre Berührungspunkte enthält. Dabei gibt es  $M$ .n, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z. B. die Null- $M$ .  $\emptyset$ . In einem metr. Raum heißt eine  $M$ . *beschränkt*, wenn es eine Zahl  $r$  gibt, so daß für jeden Punkt  $p \in M$  und einen beliebigen Punkt  $q \in M$  stets  $d(p, q) < r$  gilt. Im dreidimensionalen euklid. Raum  $R^3$  z. B. ist das Innere einer Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$  eine offene  $M$ .,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$  ist eine abgeschlossene  $M$ ., und beide  $M$ .n sind beschränkt.

Eine  $M$ .  $M$  heißt in einer  $M$ .  $N$  *dicht*, wenn jeder Punkt von  $N$  Berührungspunkt von  $M$  ist, d. h., wenn  $M \subseteq N \subseteq \bar{M}$ . In einer *relativ kompakten*  $M$ .  $M \subseteq R$  eines metr. Raumes  $R$  enthält jede unendl. Folge  $x_1, x_2, \dots$  mit  $x_n \in M$  eine konvergente Teilfolge ( $\nearrow$  konvergent). Ist diese  $M$ .  $M \subseteq R$  außerdem abgeschlossen, so heißt sie *kompakte*  $M$ . Ist  $M$  relativ kompakt, so ist  $M$  beschränkt. Im  $n$ -dimensionalen euklid. Raum  $R^n$  entsprechen den relativ kompakten  $M$ .  $M$  die beschränkten  $M$ . und den kompakten  $M$ . die beschränkten abgeschlossenen  $M$ . Ist  $R$  ein vollständiger Raum, so gibt der folgende *Satz von Hausdorff* ein Kriterium dafür, ob eine  $M$ .  $M \subseteq R$  kompakt oder relativ kompakt ist: 1.  $M \subseteq R$  ist relativ kompakt dann und nur dann, wenn sich  $M$  bei beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  durch endlich viele  $\varepsilon$ -Umgebungen überdecken läßt. 2.  $M \subseteq R$  ist kompakt genau dann, wenn sich aus jeder Überdeckung von  $M$  durch offene  $M$ .n endlich viele derartige offene  $M$ .n auswählen lassen, die bereits  $M$  überdecken.

**Menge, meßbare**  $\nearrow$  Maß I.,  $\nearrow$  Lebesguesches Maß.

**Menge, quadrierbare**  $\nearrow$  Peano-Jordanscher Inhalt II.

**Menge, wohlgeordnete**  $\nearrow$  Anordnungsrelation IV.

**Mengenalgebra:** Teil der Mengenlehre, in dem z. B. die Mengenverknüpfungen  $\nearrow$  Durchschnitt,  $\nearrow$  Differenz,  $\nearrow$  Vereinigung und *Produktmengenbildung* (Produktmenge) und deren wechselseitige Zusammenhänge untersucht werden. In bezug auf die Verknüpfungen Durchschnitt und Vereinigung gelten zwei Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ und}$$

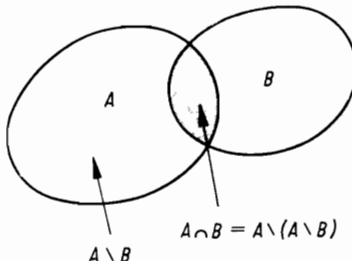
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Weiter gelten z. B. folgende Beziehungen

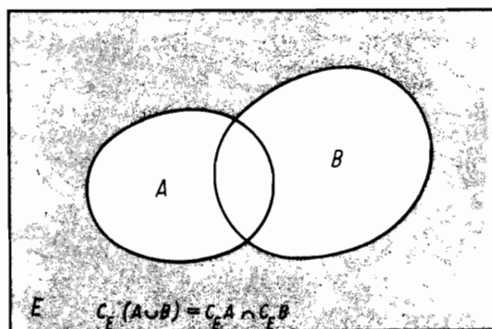
$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset, A \setminus B = (A \setminus B) \cap A.$$

Diese und viele weitere Beziehungen kann man sich mittels *Euler-Venn-Diagrammen* veranschaulichen, in denen jede zu betrachtende Menge als ein Gebiet in der Zeichenebene dargestellt wird, dessen Punkte die Elemente der betrachteten Menge repräsentieren. Eine behauptete Gleichheit von Mengen drückt sich in Diagrammen durch die Identität von Flächenstücken aus (Abb. 1). Sind noch  $A, B \subseteq E$  und bezeichnet  $C_E A$  das in bezug auf  $E$  gebildete Komplement der Menge  $A$ , so gilt  $C_E(C_E A) = A$ . Für die Komplementbildung ( $\nearrow$  Differenz) gelten die *de Morganschen Formeln*  $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$  und  $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$  (Abb. 2).



Mengenalgebra. Abb. 1: Euler-Venn-Diagramm für die Beziehung  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$



Mengenalgebra. Abb. 2: Euler-Venn-Diagramm für die de Morganschen Formeln

**Mengenfamilie**  $\nearrow$  Menge I.

**Mengenfunktion:** eine reelle oder komplexe Funktion  $\Phi$ , deren Definitionsbereich ein System  $K$  von Teilmengen einer Menge  $E$ , der *Grundmenge*, ist und



durch die jeder Menge  $A \in \mathbf{K}$  eine reelle bzw. komplexe Zahl  $\Phi(A)$  zugeordnet wird. Die Funktion  $\Phi$  heißt *additiv*, wenn  $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$  für je zwei disjunkte Mengen  $A, B$  aus  $\mathbf{K}$  gilt, für die auch  $A \cup B$  zu  $\mathbf{K}$  gehört. Meist wird  $\mathbf{K}$  als Mengenkörper ( $\nearrow$  Maß I.) vorausgesetzt, d. h., neben  $A \cup B$  sollen auch  $A \setminus B$  und damit  $A \cap B$  zu  $\mathbf{K}$  gehören.

$\nearrow$  Lebesguesches Integral V.

**Mengenkörper**  $\nearrow$  Maß I.

**Mengenlehre:** Theorie des Begriffs der Menge.

**I.** Die M. wurde ab 1872 durch Arbeiten von Georg CANTOR (1845–1918) begründet. Ihre abstrakten Begriffsbildungen stießen anfangs auf Ablehnung und Widerstand bei vielen Mathematikern, sind heute jedoch die Grundlage der gesamten Mathematik. Die M. wurde von CANTOR als eine nicht-axiomatische Theorie, *naive M. gen.*, entwickelt, jedoch ergaben sich dabei Widersprüche, die *log. Antinomien*, die aus einem zu unkrit. Gebrauch des Mengenbegriffs und der fehlenden Unterscheidung zwischen Mengen und Klassen resultieren.

**II.** In den axiomatisierten Mengentheorien treten die *log. Antinomien* der *naiven M.* nicht mehr auf. Die erste Axiomatisierung der M. stammt von Ernst ZERMELO (1871–1953) aus dem Jahre 1908; sie wurde von A. A. FRAENKEL (1891–1965) und Th. A. SKOLEM (1887–1963) in den Jahren 1921/22 in ihre heutige Form gebracht. Der Grundbegriff dieser M. ist die *Element-Beziehung*; meist wird die Existenz von Urelementen ausgeschlossen, und die Mengen werden allein ausgehend von der leeren Menge gebildet.

In der M. nach ZERMELO/FRAENKEL/SKOLEM gelten folgende Axiome: **II.1.** Das *Extensionalitätsaxiom*: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. **II.2.** Das *Zweiermengenaxiom*: Zu je zwei Elementen  $a, b$  existiert die Menge  $\{a, b\}$ . **II.3.** Das *Vereinigungsmengenaxiom*: Zu jeder Menge  $M$ , die bei Abwesenheit von Urelementen automatisch ein Mengensystem ist, existiert die Vereinigungsmenge  $\cup M$ . **II.4.** Das *Potenzmengenaxiom*: Zu jeder Menge existiert ihre Potenzmenge. **II.5.** Das *Ersetzungsaxiom*: Ist der Definitionsbereich einer Funktion eine Menge, so auch ihr Wertebereich. **II.6.** Das *Fundierungsaxiom* bzw. *Regularitätsaxiom*: Es gibt keine unendl. Folge  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  mit der Eigenschaft  $a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \dots$ . **II.7.** Das *Unendlichkeitsaxiom*: Es gibt eine unendl. Menge. **II.8.1.** Das *Auswahlaxiom*: Zu jedem Mengensystem  $\mathbf{M}$ , dessen Elemente paarweise elementfremd sind und für das  $\emptyset \notin \mathbf{M}$  gilt, gibt es eine *Auswahlmenge*  $A$ , die von jeder zu  $\mathbf{M}$  gehörenden Menge genau ein Element enthält. Dieses Axiom wurde erstmals 1904 von Ernst ZERMELO formuliert, nachdem es zuvor schon unausgesprochen von vielen Mathematikern in der M., in der Analysis und der Algebra benutzt worden war. Es wurde anfänglich von verschiedenen Mathematikern angefochten, weil es keine Möglichkeit liefert, die Auswahlmenge von  $\mathbf{M}$  zu konstruieren. Es ist jedoch für den Beweis vieler wichtiger Sätze unentbehrlich. —

Eine große Anzahl von Aussagen sind dem Auswahlaxiom äquivalent, z. B. die folgenden: **II.8.2.** *Existenz*

*einer Auswahlfunktion*: Zu jedem Mengensystem  $\mathbf{M}$ , das die leere Menge nicht als Element hat, gibt es eine Auswahlfunktion  $f$ , d. h. eine Funktion mit  $D(f) = \mathbf{M}$  und mit  $f(X) \in X$  für alle  $X \in \mathbf{M}$ . **II.8.3.** Zu jeder binären Relation  $G$  gibt es eine daraus ausgewählte Funktion  $F \subseteq G$  mit  $D(F) = D(G)$ . **II.8.4.** *Wohlordnungssatz*: Zu jeder Menge gibt es eine Wohlordnungrelation in dieser Menge. **II.8.5.** *Zornsches Lemma*: Hat jede wohlgeordnete Kette einer halbgeordneten Menge  $A$  eine obere Schranke, so hat  $A$  ein maximales Element. **II.8.6.** *Maximalkettensatz*: In jeder halbgeordneten Menge  $A$  gibt es zu jeder Kette  $K$  von  $A$  eine  $K$  umfassende maximale Kette  $X$  von  $A$ , d. h., es ist  $K \subseteq X$ , und es gibt keine Kette  $Y$  von  $A$  mit  $X \subset Y$ .

**III.** Auch andere Axiomatisierungen sind entwickelt worden. Es hat sich aber gezeigt, daß keines dieser Axiomensysteme für die M. wesentlich vorteilhafter ist als die anderen. Einige seien gekennzeichnet. Das 1925 von J. v. NEUMANN (1903–1957) erarbeitete System wurde in den Jahren 1937 bis 1941 von P. BERNAYS (1888–1977) und K. GÖDEL (1906–1978) wesentlich vereinfacht; seine Grundbegriffe sind die *Element-Beziehung* und der Begriff der *Klasse* ( $\nearrow$  Menge). Die *Axiomatisierung nach Bernays/Gödel* enthält die Axiome 1., 2., 3., 4., 5., 6. und 8. und führt zusätzlich *Klassensexistenzaxiome* 9. ein, durch die die Existenz der Klasse aller geordneten Paare  $(x, y)$  von Mengen  $x, y$  mit  $x \in y$  und die Existenz von gewissen Klassen in Abhängigkeit von vorgegebenen Klassen gefordert werden.

Die *Axiomatisierung nach MORSE-KELLEY* verwendet als Grundbegriffe die  $\in$ -Beziehung und den Begriff Klasse. Sie enthält die Axiome 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. und 8., das Schema der *Klassensexistenzaxiome* 9. lautet: Zu jedem einstelligem Prädikat existiert die Klasse aller der Mengen und Urelemente, für die dieses Prädikat erfüllt ist.

Eine technisch weniger elegante Axiomatisierung ist die von A. N. WHITEHEAD (1861–1947) und B. RUSSELL (1872–1970) geschaffene *Typentheorie*, die zugleich einen formalisierten Aufbau der Logik darstellt und erstmals in dem Buch »Principia mathematica« dieser beiden Autoren veröffentlicht wurde (1910/13). Die betrachteten Mengen werden in Typen eingeteilt. Die Urelemente und die leere Menge sind vom niedrigsten Typ; der Typ jeder anderen Menge ist größer als die Typen aller ihrer Elemente. Die ursprüngl. Formulierung von RUSSELL war schwierig zu handhaben, da es für jeden mögl. Mengentyp eigene Variable gab. Das Axiomensystem entsprach demjenigen von ZERMELO/FRAENKEL bzw. von BERNAYS/GÖDEL, mußte aber z. B. für jeden Typ ein eigenes Extensionalitätsaxiom und eigene Mengensexistenzaxiome haben. Wesentlich einfachere und zur Axiomatisierung nach MORSE/KELLEY analoge Systeme erhält man, indem man einmal zur Typenunterscheidung ein neues binäres Prädikat »stufenkleinergleich« mit einfachen Grundeigenschaften einführt oder indem man zum anderen im Schema der Klassensexistenzaxiome nur Prädikate zuläßt, die im Prinzip auch in der ursprüngl. Form der Typentheorie eine Menge definiert hätten.

IV. Die *Allgemeine M.* untersucht 1.) *Verknüpfungen* von Mengen, z. B. die Bildung von Vereinigung und Durchschnitt von Mengen, 2.) *unendl. Mengen* und verschiedene Definitionen für Unendlichkeit bzw. Endlichkeit, 3.) *Relationen und Abbildungen*, 4.) halbgeordnete, geordnete, wohlgeordnete und noch anders *strukturierte Mengen*, und 5.) *Kardinal- und Ordinalzahlen* und deren Arithmetik. — Speziellere Untersuchungen der *M.* haben wesentl. Bedeutung für viele Zweige der Mathematik, z. B. entstand aus der Untersuchung von Punktmengen — etwa des dreidimensionalen Raumes unserer Anschauung — die *mengentheoret. Topologie*. — Die Begriffsbildungen der *M.* sind so allgemein, daß sich jeder heute in der Mathematik betrachtete Begriff innerhalb der *M.* definieren läßt. In diesem Sinne ist die gesamte Mathematik *M.*

**Mengenpotenz** ↗ kartesisches Produkt, ↗ Produktmenge.

**Mengenprodukt** svw. kartesisches Produkt.

**Mengensystem:** ↗ Menge I.

**Menger, Karl**, geb. 13. 1. 1902 Wien als Sohn eines Nationalökonom. — *M.* studierte in Wien und war seit 1925 in Amsterdam, seit 1928 in Wien tätig. Seit 1946 ist er Professor in Chicago. Er arbeitet vorwiegend über die Grundlagen der Mathematik und über Maß- und Dimensionstheorie.

**Menger, Satz von** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.

**Meridian** ↗ Koordinatensystem V., ↗ Kugeldarstellung.

**Meridiankonvergenz** ↗ Gauß-Krüger-Projektion II.

**Meridianstreifen** ↗ Gauß-Krüger-Projektion I.

**Mersennesche Primzahlen** ↗ Primzahl IV.

**Meßreihen, Fehlerbestimmung** ↗ Fehler IV.

**Metamathematik:** *mathematische Logik* Bezeichnung für die Untersuchungen über mathemat. Theorien, in denen die Mathematik selbst zum Gegenstand der Betrachtung wird. S. a. Metasprache; Metatheorie; Grundlagen der Geometrie II.; Grundlagen der Mathematik.

**Metasprache:** Sprache, in der über Aussagen einer anderen Sprache, der *Objektsprache*, gesprochen wird, z. B. Deutsch als Arbeitssprache einer engl. Grammatik in deutscher Sprache oder die Umgangssprache bzw. eine formalisierte Sprache bei metamathemat. Untersuchungen über axiomat. Theorien.

**Metatheorie:** *mathematische Logik* eine Theorie, in der Aussagen über eine oder mehrere andere — meist formalisierte — Theorien gemacht werden. Untersuchungen in *M.n* mathemat. Theorien werden als *Metamathematik* bezeichnet.

**Meter** ↗ Strecke V.

**Methode der Hilfswinkel** ↗ goniometrische Gleichung I.4.

**Methode der kleinsten Quadrate** ↗ Ausgleichsrechnung II., ↗ Extremwert VII.2.

**Methode der Knotenspaltung** ↗ Blockschaltbild II.

**Methode der stochastischen Iteration** ↗ Adaption V.

**Methode des integrierenden Faktors** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.6.

**Metra-Potential-Methode** svw. MPM, ↗ Netzplantechnik VI.

**Metrik** ↗ Raum, metrischer I.

**metrisch äquivalent** ↗ Hauptachsentransformation V.

**metrische Abbildung** ↗ Abbildung, affine, IV., V.

**metrische Grundform** ↗ Grundformen einer Fläche I.

**metrische Klassifikation** ↗ Hauptachsentransformation V.

**metrische Normalform** ↗ quadratische Form II.

**Mikro** ↗ Strecke V.

**Milesisches Zahlensystem** ↗ Zahlensystem IV.

**Militärperspektive** ↗ Axonometrie.

**Milli** ↗ Strecke V.

**Milliarde** ↗ Zehnerpotenzen.

**Milliliter** ↗ Rauminhalt II.

**Millimeterpapier** ↗ Nomographie I.

**Million** ↗ Zehnerpotenzen.

**minimales Element:** *Mengenlehre* ein Element  $x$  einer halbgeordneten Menge  $(M, R)$ , für das es in bezug auf die Halbordnung  $R$  in  $M$  kein von  $x$  verschiedenes Element  $y$  von  $M$  gibt, für das  $y \leq x(R)$  gilt; ist z. B.  $X$  eine nichtleere Menge, so ist jede Eimenge  $\{z\}$  für  $z \in X$  ein m. E. der Menge aller nichtleeren Teilmengen von  $X$  bzgl. der Inklusionsrelation.

**Minimalfläche:** Fläche, die unter allen Flächen mit gleicher Randkurve die kleinste Oberfläche hat. *M.n* sind dadurch charakterisiert, daß in jedem ihrer Punkte ihre Hauptkrümmungen (↗ Krümmung I.) gleich Null sind. *M.n* werden mit den Mitteln der Variationsrechnung bestimmt. Experimentell läßt sich eine *M.* als Flüssigkeitslamelle erzeugen, die von der Begrenzung aufgespannt wird. S. a. Variationsrechnung III.

**Minimalfolge** ↗ direkte Methode.

**Minimalgerüst** ↗ Netzwerk II.

**Minimalitätstest** ↗ Simplexalgorithmus II.

**Minimalpolynom** ↗ Körper II.

**Minimax-Satz** ↗ Sattelpunkt I.

**Minimum, kleinstes Element:** *Mengenlehre* ein Element  $x$  einer halbgeordneten Menge  $(M, R)$ , für das in bezug auf die Halbordnung  $R$  in  $M$  für alle Elemente  $y \in M$  gilt  $x \leq y(R)$ ; Bezeichnung:  $\min M$ , z. B. ist 1 *M.* der Menge  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$  bzgl. der Relation »ist Teiler von«. Das *M.* einer halbgeordneten Menge ist auch ↗ minimales Element, die Umkehrung gilt allgemein jedoch nur für total geordnete Mengen.

*M. Analysis* — S. a. Extremwert I.

**Minkowski, Hermann**, geb. 22. 6. 1864 Aleksotas (bei Kaunas), gest. 12. 1. 1909 Göttingen. — *M.* erwarb in Königsberg (Kaliningrad) mit 15 Jahren das Reifezeugnis. Noch während seiner Studienzeit in Königsberg und Berlin gewann er 1883 den Großen Preis der mathemat. Wissenschaften der Akademie zu Paris mit einer Arbeit über quadrat. Formen. Im Jahre 1885 promovierte *M.* in Königsberg, habilitierte sich 1887 in Bonn und war seit 1892 als Professor in Bonn, Königsberg und Zürich, seit 1902 in Göttingen tätig. Als seine bedeutendste Leistung gilt die von ihm entwickelte »*Geometrie*

der Zahlen, die es ermöglicht, zahlentheoret. Ergebnisse mit geometr. Verfahren zu ermitteln. Diese Untersuchungen führten ihn naturgemäß auch zu Forschungen über die Grundlagen der Geometrie. Wichtig sind auch seine Arbeiten zur theoret. Physik, bes. zur Elektrodynamik. Sie haben die Entwicklung der speziellen Relativitätstheorie tief beeinflusst.

**Minkowski, Gitterpunktsatz von** ↗ Geometrie der Zahlen.

**Minor** ↗ Determinante IV.

**Minorante** ↗ Konvergenzkriterien für Reihen, VI.

**Minuend** ↗ Subtraktion I.

**Minute** ↗ Winkel VII.1.

**Mischungsproblem:** ein Standardproblem der Operationsforschung, in dem eine kostenminimale Mischung von Grundstoffen zu einem Gemisch mit geforderten Eigenschaften gesucht wird. Falls die Eigenschaften des Gemisches durch Bildung des gewogenen Mittels aus denen der Grundstoffe hervorgehen, führt das M. auf lineare Optimierung, wenn z. B. aus drei Futtermitteln  $A, B, C$  mit den in der Tabelle (1) angegebenen Eigenschaften ein Gemisch hergestellt wird, das den in der rechten Spalte angegebenen Bedingungen genügt. Bezeichnet  $x_1$  den Anteil von  $A$ ,  $x_2$  den von  $B$  und  $x_3$  den von  $C$  im Gemisch, so ist das Linearprogramm (2) zu lösen mit den Bedingungsungleichungen (3) und der Forderung (4).

(1)	$A$	$B$	$C$	Gemisch
Nährwert	1,7	2,1	1,9	$\geq 1,75$
Verunreinigung in %	12	15	8	$\leq 10$
Preis/dt in Mark	2	3	4	Min!

(2)  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  mit  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

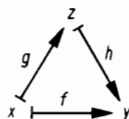
(3)  $1,7x_1 + 2,1x_2 + 1,9x_3 \geq 1,75$  und  
 $12x_1 + 15x_2 + 8x_3 \leq 10$

(4)  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = \text{Min!}$

**Mitkopplung** ↗ Struktur III.

**mittelbare Funktion, zusammengesetzte Funktion:**

**I.** Funktion  $f$ , die sich durch Hintereinanderausführung oder Verkettung zweier Funktionen  $g$  und  $h$  auf folgende Weise ergibt: Ein geordnetes Paar  $(x, y)$  gehört zur m. F.  $f = h \circ g$  genau dann, wenn es ein Element  $z$  gibt, so daß  $(x, z) \in g$  und  $(z, y) \in h$ . Das bedeutet insbesondere, daß  $W(g) \cap D(h) \neq \emptyset$  eine notwendige Bedingung für die Bildbarkeit der m. F.  $f$  ist und  $D(f) \subseteq D(g), W(f) \subseteq W(h)$  gilt, wenn  $D$  bzw.  $W$  Definitionsbereich bzw. Wertebereich der betreffenden Funktion bedeuten. Da es bei der Hintereinanderausführung von Funktionen auf die Reihenfolge ankommt, sind  $h \circ g$  und  $g \circ h$  zu unterscheiden. Sprachlich drückt man dies dadurch aus, daß man  $g$  die *innere*,  $h$  die *äußere Funktion* in  $f = h \circ g$  nennt (Abb.). Werden die gegebenen Funktionen durch Funktionsgleichungen  $z = g(x)$  und  $y = h(z)$  bestimmt, so erhält man für die m. F.  $f = h \circ g$  die Gleichung  $y = f(x) = h(g(x))$ . In den



mittelbare Funktion: Verkettung  
 $f = h \circ g$  der Funktionen  $g$  und  $h$

folgenden Beispielen (1), (2), (3), (4) ist  $f = h \circ g$  dargestellt. Zu (1) würde sich ergeben  $g \circ h = (\sin x)^2 \neq h \circ g$ . Die Funktionen  $g$  mit  $z = g(x) = -\sqrt{x}$  und  $h$  mit  $y = h(z) = \log_a z$  lassen sich dagegen nicht zusammensetzen, da keine reelle Zahl  $x$  existiert, für die der Ausdruck  $\log_a(-\sqrt{x})$  definiert ist, d. h., da  $W(g) \cap D(h) = \emptyset$ .

$z = g(x)$	$y = h(z)$	$y = f(x) = h(g(x))$
(1) $z = x^2$	$y = \sin z$	$y = \sin x^2$
(2) $z = 1 + 1/x$	$y = \sqrt{z}$	$y = \sqrt{1 + 1/x}$
(3) $z = \cos x$	$y = \log_a z$	$y = \log_a \cos x$
(4) $z = 5x$	$y = z + 3$	$y = 5x + 3$

**II.** Die gegebene Konstruktion einer m. F. kann auch auf den Fall von *mehr als zwei Hilfsfunktionen* angewendet werden. Sind etwa  $x = v(t), z = u(x), y = w(z)$  drei Funktionen derart, daß der Wertebereich der einen stets im Definitionsbereich der folgenden ganz oder teilweise enthalten ist, so kann die m. F.  $f = w \circ u \circ v$  mit  $y = f(t) = w(u(v(t)))$  konstruiert werden. Sind  $v, u$  und  $w$  stetige Funktionen, so gilt dies auch für die Funktion  $f$ . M. F. werden mit Hilfe der ↗ Kettenregel differenziert. Die Verkettung elementarer Funktionen führt nicht aus der Klasse der elementaren Funktionen (↗ Funktion X.) heraus.

**III.** Die Verkettung von Funktionen kann auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen ausgedehnt werden. Ist  $h$  mit  $y = h(P) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Funktion der unabhängigen Variablen  $x_i$  und sind die  $g_i$  mit  $x_i = g_i(t_1, \dots, t_m)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  Funktionen der  $m$  unabhängigen Variablen  $t_j$  für  $j = 1, 2, \dots, m$ , die alle im gleichen Gebiet  $G$  definiert sind, existieren außerdem geordnete  $n$ -Tupel von Funktionswerten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  der Funktionen  $g_i$ , die dem Definitionsbereich der Funktion  $h$  angehören, so existiert eine zusammengesetzte Funktion  $f$  der  $m$  unabhängigen Variablen  $t_i$  mit  $y = h(g_1(t_1, \dots, t_m), \dots, g_n(t_1, \dots, t_m)) = f(t_1, \dots, t_m)$ . *Beispiel:* Sind drei Funktionen  $g_1, g_2, g_3$  gegeben durch ihre Funktionsgleichungen  $x_1 = g_1(t_1, t_2) = t_1 + \sin^2 t_2, x_2 = g_2(t_1, t_2) = t_1 + \cos^2 t_2$  und  $x_3 = g_3(t_1, t_2) = t_1 - t_2$ , ist weiter  $h$  eine Funktion mit  $y = h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)/(1 + x_3^2)$ , so kann eine durch Verkettung entstandene Funktion  $f$  durch  $y = h(g_1(t_1, t_2), \dots, g_3(t_1, t_2)) = f(t_1, t_2) = (1 + 2t_1)/[1 + (t_1 - t_2)^2]$  definiert werden. — S. a. analytische Funktion II.; Potenzreihe XII.; Stetigkeit einer Funktion III.

**Mittellinie:** im Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten, im Trapez die der Seitenmitte zweier nicht benachbarter Seiten.

**Mittellmeridian** ↗ Gauß-Krüger-Projektion I.

**Mittelpunkt** ↗ Ellipse I., ↗ Ellipsoid, ↗ Halbieren, ↗ Hyperbel I., ↗ Hyperboloid I., ↗ Paraboloid, ↗ Strecke VI.

**Mittelpunkt**, sphärischer ↗ sphärischer Kreis.

**Mittelpunktfläche** ↗ Fläche zweiter Ordnung I.

**Mittelpunktgleichung** ↗ Ellipse, ↗ Hauptachsen-  
transformation II., ↗ Hyperbel I., ↗ Kugel VII.

**Mittelpunktkegelschnitt** ↗ Kurve zweiter Ordnung II.

**Mittelpunktswinkel** ↗ n-Eck III., ↗ Kreis I., II.

**Mittelsenkrechte**: I. Gerade, die im Mittelpunkt einer Strecke senkrecht auf ihr steht (↗ Strecke X., ↗ Dreieckstransversalen). Sie ist *Symmetrieachse* dieser Strecke, d. h. jeder ihrer Punkte hat von dem einen Endpunkt der Strecke den gleichen Abstand wie vom andern. Sind  $A$  und  $B$  diese End-

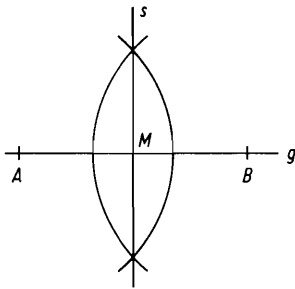
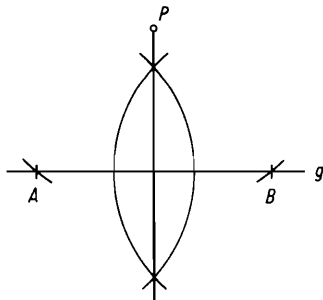


Abb. 1: Konstruktion der Mittelsenkrechten  $s$  zur Strecke  $AB$  auf der Geraden  $g$

punkte, so schneiden sich zwei Kreise um  $A$  und um  $B$ , deren Radius größer ist als  $|AB|/2$ , in zwei Punkten der  $M.s$   $s$ . Ihre Verbindungsgerade ist die  $M.$  und ihr Schnittpunkt  $M$  mit  $AB$  halbiert diese Strecke (Abb. 1).

II. Diese Konstruktion liefert in  $M$  den *Mittelpunkt* der Strecke  $AB$ . Soll im Punkte  $M$  einer Geraden  $g$  die *Senkrechte* zu  $g$  *errichtet* werden, so lassen sich zwei gleichlange Strecken  $|AM| = |MB|$  auf  $g$  von  $M$  aus abtragen, und die gesuchte Senkrechte ergibt sich als  $M.$  der Strecke  $AB$ . Soll von einem Punkte  $P$  außerhalb der Geraden  $g$  das *Lot* auf sie *gefällt* werden, so wird  $P$  als Punkt einer gesuchten  $M.s$  angesehen. Ein Kreis um  $P$  mit genügend großem Radius schneidet die Gerade  $g$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$ , die symmetrisch zur gesuchten  $M.n$  liegen, deren  $M.$  deshalb das gesuchte Lot ist (Abb. 2). S. a. Strecke VI.



Mittelsenkrechte. Abb. 2: Das Lot von  $P$  auf  $g$  fallen

III. In einem Dreieck  $ABC$  kann zu jeder Seite die  $M.$  als *Symmetrieachse* konstruiert werden. Da jeder Punkt einer  $M.n$  von den Endpunkten dieser Seite gleichen Abstand hat, hat der Schnittpunkt zweier  $M.n$  gleichen Abstand von  $A, B$  und  $C$ , d. h. er ist auch ein Punkt der dritten  $M.n$ . Dieser Schnittpunkt der drei  $M.n$  ist der *Mittelpunkt des Umkreises*. S. a. Dreieckstransversalen.

**Mittelwerte**: in der statist. Praxis benutzte Maßzahlen zur Beschreibung der Lage des Zentrums einer *Stichprobe*.

I. Der *Mittelwert* ist das *arithmet. Mittel*  $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$  (↗ Stichprobenmittel).

II. Der *Zentralwert* ist für ungerades  $n$  der mittelste Wert der Stichprobe, wenn man sich die Stichprobenwerte der Größe nach geordnet aufschreibt. Für gerades  $n$  ist der Zentralwert das arithmet. Mittel der beiden in der Mitte der geordneten Stichprobe liegenden Werte.

III. Der *empir. Modalwert* ist der Wert  $x_i$ , der in der Stichprobe mit größter Häufigkeit auftritt.

IV. Das *geometr. Mittel*  $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$  wird vorwiegend in der Wirtschaftsstatistik verwendet.

V. Das *harmon. Mittel*  $h = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n}$  ist der reziproke Wert des arithmet. Mittels aus den reziproken Werten  $1/x_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Für nicht-negative reelle Zahlen  $x_i$  gilt zwischen dem arithmet. Mittel  $\bar{x}$ , dem geometr. Mittel  $g$  und dem harmon. Mittel  $h$  die Größenbeziehung  $\bar{x} \geq g \geq h$ .

**Mittelwertsatz der Differentialrechnung**: I. *Erster oder einfacher M.*: Ist die Funktion  $f$  der reellen Variablen  $x$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und im offenen Intervall  $]a, b[$  differenzierbar, so existiert eine Stelle  $x_0 \in ]a, b[$  mit der Eigenschaft (1), die mit einer reellen Zahl  $\vartheta, 0 < \vartheta < 1$ , in der Form (2) oder (3) dargestellt werden kann.

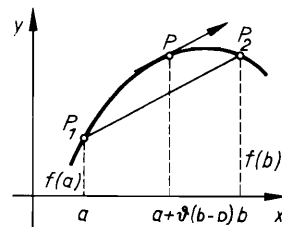
$$(1) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

$$(2) \quad \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a + \vartheta h)$$

$$(3) \quad f(a + h) = f(a) + hf'(a + \vartheta h)$$

Geometrisch bedeutet dies, daß die Bildkurve der Funktion  $f(x)$  über  $[a, b]$  für einen Punkt aus  $]a, b[$  eine Tangente parallel zur Sekante aus durch die Punkte  $P_1(a, f(a))$  und  $P_2(b, f(b))$  hat (Abb.).

Eine einfache Folgerung aus diesem Satz ist, daß eine Funktion, deren Ableitung überall in  $]a, b[$  ver-



Zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung

schwindet, in  $[a, b]$  eine Konstante sein muß. — S. a. Taylorsche Reihe I., III.

**II.** Auch für Funktionen mit mehreren, z. B. zwei Variablen gilt ein entsprechender M. Den Gleichungen (1) bis (3) entspricht Gleichung (4) mit den partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  an der Stelle  $(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$ ,  $0 < \vartheta < 1$ . Voraussetzung für die Gültigkeit von (4) ist die Stetigkeit von  $f$  längs der geradlinigen Verbindungsstrecke von  $(a, b)$  nach  $(a + h, b + k)$  und in einer Umgebung von ihr sowie die Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Innern dieses Gebiets.

$$(4) \quad f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf_x(a + \vartheta h, b + \vartheta k) + kf_y(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$$

Analog wie in I. folgt hieraus, daß eine Funktion, deren partielle Ableitungen in einem Bereiche überall existieren und den Wert Null haben, dort eine Konstante ist.

**III. Verallgemeinerter M. oder Quotienten-M.:** Sind  $f$  und  $g$  zwei in  $[a, b]$  stetige und in  $]a, b[$  differenzierbare reelle Funktionen mit den Gleichungen  $y = f(x)$  bzw.  $y = g(x)$  und ist  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , dann existiert ein  $x_0 \in ]a, b[$  mit der Eigenschaft (5). Für  $g(x) = x$  folgt daraus der erste M.

$$(5) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

für  $x_0 = a + \vartheta(b - a)$  mit  $0 < \vartheta < 1$

**Mittelwertsatz der Integralrechnung** ↗ Flächenintegral II.6., ↗ Integral II.8., II.9., II.10., ↗ Raumintegral II.6.

**Mittelwertsformeln der Integration** ↗ Integration, numerische, II.

**mittlere Abszissen** ↗ graphische Integration.

**mittlere Lebenserwartung** ↗ Sterbetafel II.

**mittlere Krümmung** ↗ Krümmung I.

**mittlere Proportionale:**  $x$  ist m. P. von  $a$  und  $b$ , wenn  $a : x = x : b$ . ↗ Proportion I.

**mittlere quadratische Abweichung** ↗ Streuung.

**mittlerer Fehler** ↗ Fehler III.

**Möbius, August Ferdinand**, geb. 17. 11. 1790 Schulpforta als Sohn eines Tanzlehrers, gest. 26. 9. 1868 Leipzig. — M. besuchte die Schule in Schulpforta und anschließend die Universität in Leipzig. Eine Stiftung ermöglichte ihm eine Studienreise, die ihn u. a. zu GAUSS führte. Seit 1816 war M. in Leipzig als Direktor der Sternwarte und später auch als Professor an der Universität tätig. — M. förderte die Entwicklung der Geometrie durch seine Beiträge zur Erweiterung des traditionellen Koordinatenbegriffs und zur unbewußt gruppentheoret. Klassifizierung der Geometrie.

**Möbiussche Funktion** ↗ zahlentheoretische Funktion III.

**Möbiussches Band** ↗ Normale I.

**Möbiussche Umkehrformel** ↗ zahlentheoretische Funktion IV.

**mod** Abk. für *modulo* ↗ Teilbarkeit III.

**Modalwert, Modus, Mode:** die Zahl  $x$ , für die die Einzelwahrscheinlichkeit bei einer *diskreten Zufalls-*

*größe* bzw. die Dichte bei einer *stetigen Zufallsgröße* ein relatives Maximum hat. Existiert nur ein M., so heißt die Verteilung *unimodal*. Die *Normalverteilung* z. B. ist unimodal.

**Modalwert, empirischer** ↗ Mittelwert III.

**Mode** svw. Modalwert.

**Modell: I. mathematische Logik** eine konkrete Interpretation der Grundbegriffe einer formalen Sprache durch irgendwelche Dinge, Relationen oder Operationen, die eine Menge  $A$  von Aussagen dieser Sprache wahr macht.

Ein M. einer axiomat. Theorie ist ein M. der Axiomenmenge dieser Theorie. Nach seiner exakten mathemat. Definition ist jedes M. eine *abstrakte Algebra*. Eine systemat. Untersuchung der M.e formalisierter Theorien wird als M.theorie bezeichnet und ist ein Teilgebiet der Metamathematik. Durch Vergleich verschiedener M.e einer formalisierten Theorie gewinnt man z. B. Auskunft darüber, daß gewisse Aussagen in dieser Theorie nicht hergeleitet werden können; z. B. zeigte P. COHEN 1963, daß in den axiomat. Mengentheorien von ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEM und v. NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL weder das spezielle noch das allgemeine Kontinuumproblem gelöst werden können. Die M.theorie bedient sich bei ihren Untersuchungen vielfach algebraischer Methoden.

**II. M., mathematisches: angewandte Mathematik** mit mathemat. Mitteln durch Symbole und Relationen zwischen ihnen dargestellter Komplex, der eine gewisse Gesamtheit von Gegenständen, Eigenschaften und Zusammenhängen aus einem anderen Bereich, z. B. der materiellen Welt oder einer Wissenschaft, so widerspiegelt, daß aus Ergebnissen des M.s auf Erscheinungen oder Gesetzmäßigkeiten im abgebildeten Bereich geschlossen werden kann. Da das M. nur bestimmte Seiten des betrachteten Bereichs erfassen kann und von anderen abstrahiert, müssen die so gewonnenen Ergebnisse noch in der Wirklichkeit oder mit Mitteln der jeweiligen Wissenschaft überprüft werden. Nicht alle Eigenschaften des M.s und dort auftretende Größen müssen eine direkte Entsprechung im betrachteten Bereich haben.

**Dynam. M.e** enthalten die Zeit mit als Einflußgröße und dienen z. B. zur Untersuchung von Schwingungsvorgängen, Alterungserscheinungen an Geräten, Reaktionen bei der Inbetriebnahme oder beim Abstellen chem. Anlagen. Ein M., das nicht dynamisch ist, heißt *statisch*. Stat. M.e dienen zur Beschreibung zeitlich relativ unveränderl. Gegebenheiten, eines Gleichgewichts oder des stationären Zustands von einem Prozeß. Unabhängig davon unterteilt man die M.e in determinist., stochast. und strateg. In einem *determinist. M.* sind die zu berechnenden Größen und die zu treffenden Entscheidungen durch die Zusammenhänge im M. eindeutig bestimmt. Insbes. müssen dann alle in das M. neben den Variablen eingehenden Hilfsgrößen bekannt sein. Enthält dagegen das M. mindestens eine Zufallsgröße, so heißt es *stochastisch*. Gelegentlich unterscheidet man dabei *wahrscheinlichkeitstheoret.* oder *probabilist. M.e*, in denen die Verteilungsfunktionen aller Zufallsgrößen bekannt sind, von den

statist. M.en, in denen das nicht der Fall ist. Geht in das M. mindestens eine Größe ein, deren Verhalten weder eindeutig noch durch ein Zufallsgesetz, sondern durch einen „Gegner“ festgelegt wird, heißt das M. *strategisch* ( $\nearrow$  Spieltheorie).

III. In der *Operationsforschung* werden *M.systeme* als Mengen von M.en untersucht, die miteinander verknüpft sind und in ihrer Gesamtheit das reale System vollständiger widerspiegeln als die einzelnen Teile, die jeder für sich einen Aspekt oder einen Teil des Ganzen darstellen. Die Planung eines sozialist. Staates z. B. kann nicht auf nur einem M. beruhen, da sie sowohl die Relationen zwischen ganzen Industriezweigen wie auch die Aufgaben an jedem Arbeitsplatz ausweist, Aussagen über den Prognosezeitraum und über jede Arbeitsstunde macht. Somit entsteht eine Vielfalt von lang-, mittel- und kurzfristigen Plänen auf zentraler, mittlerer und unterer Ebene, die nach entsprechender gegenseitiger Verknüpfung ein M.system ergibt. Die Verknüpfung geschieht durch Verwendung einheitl. Bezeichnungen und Symbole und dadurch, daß Ausgangsgrößen eines M. gleichzeitig Eingangsgrößen eines anderen sind, eventuell auch iterativ. Im einfachsten Fall tritt das speziell interessierende M. als *Zentral-M.* auf, ein *Vor-M.* erfaßt näherungsweise Herkunft und gegenseitige Beeinflussung seiner Eingangsgrößen, ein *Nach-M.* die wichtigsten Aus- und Wechselwirkungen seiner Ausgangsgrößen.

IV. Als *Standard-M.* bezeichnet man ein M., das sich in verschiedenen Bereichen anwenden läßt, für das deshalb in Rechenzentren Programme vorliegen, die sich vielseitig konkret anwenden lassen, z. B. auf Transport- oder Rundreiseprobleme.

V. *Kybernetik* Darstellung bestimmter Eigenschaften von Objekten, von einem als Original bezeichneten Teil der Wirklichkeit, wenn die Beziehungen zwischen der Darstellung der Eigenschaften im M. die gleichen sind wie sie zwischen den entsprechenden Eigenschaften des Originals bestehen (s. a. System II.). Die Objekte können hierbei der belebten oder unbelebten Natur angehören, künstl. Gebilde oder auch Symbole und Abbildungen sein. Bezüglich der für ein M. als wesentlich angesehenen Eigenschaften werden Objekte als *ähnlich* bezeichnet, auch wenn sie sich durch andre, hier nicht betrachtete Eigenschaften unterscheiden. Einen besonderen Fall der Ähnlichkeit stellt die *Analogie* dar, von der man bei einer gewissen Übereinstimmung in funktioneller und struktureller Hinsicht spricht. Der Begriff des M.s entwickelte sich in den Naturwissenschaften und wurde von der Kybernetik übernommen und verallgemeinert, indem er auf beliebige Objekte angewendet wird, zwischen denen informationelle Beziehungen bestehen.

Bei der Klassifikation der M.e kann nach verschiedenen Gesichtspunkten vorgegangen werden, man unterscheidet, 1) nach den *Merkmale* des M.s selbst materielle, ideale bzw. formale M.e,

2) nach der *Art der Analogien* Form-, Funktions- bzw. Struktur-M.e,

3) nach der *Art der Gesetzmäßigkeiten* determinist., stochast. bzw. strateg. M.e,

4) nach dem *Zeicharakter* stat. bzw. dynam. M.e. Kybernet. M.e finden z. B. für folgende Zwecke Verwendung: 1. Vorstellungshilfsmittel zur Objektivierung des Denkprozesses; 2. Demonstrationshilfsmittel; 3. Beschreibungshilfsmittel für die mathemat. oder graph. Beschreibung funktioneller Zusammenhänge; 4. Prüfungshilfsmittel für die Überprüfung von Hypothesen; 5. Mittel zum Erkenntnisgewinn, indem aus einer Analyse des M.s Rückschlüsse auf das Original gezogen werden; 6. Mittel zur Beherrschung des Originals durch Einbeziehung von Bezugs-M.n oder zeitverkürzt arbeitenden M.en in das automat. Regelungssystem ( $\nearrow$  Regelung,  $\nearrow$  Adaption).

Die Ermittlung formaler mathemat. M.e erfolgt durch  $\nearrow$  Systemidentifikation und ist die Grundlage für den Systementwurf. In den Fällen, in denen eine rechner. Lösung nicht erhalten werden kann bzw. ihre Ermittlung ineffektiv ist, wird die Methode der  $\nearrow$  Simulation in Verbindung mit geeigneten Suchstrategien benutzt.

**Modellsystem**  $\nearrow$  Modell III.

**Modifikationsteil**  $\nearrow$  Befehl.

**Modul m:** I. additiv geschriebene abelsche Gruppe ( $\nearrow$  Gruppe I.). —

II. auch *M. über einem*  $\nearrow$  Ring *R* oder *R-Modul*: Operatorstruktur ( $\nearrow$  algebraische Struktur) über dem Ring *R*. Im *R-M.* *M* ist eine Addition erklärt, bezüglich der *M* eine abelsche Gruppe bildet: weiter soll für  $\lambda \in R$  und  $a \in M$  stets  $\lambda a \in M$  sein, und schließlich müssen für beliebige  $\lambda, \mu \in R$  und  $a, b \in M$  die Formeln gelten:  $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ ,  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ ,  $(\mu\lambda)a = \lambda(\mu a)$ .

Hat der Ring *R* ein Einselement *e* und gilt stets  $e \cdot a = a$ , so heißt der *M. unitär*. Ein unitärer *M.* über einem Körper heißt auch *Vektorraum*.

S. a. Betriebssystem II.; Kongruenz von Zahlen I.; Logarithmensystem II.

**modularer Verband**  $\nearrow$  Verband.

**Modulation:** i. w. S. das Aufprägen einer Information mit genau einem Informationsparameter auf einen Signalträger ( $\nearrow$  Signal II.); i. e. S. in der Nachrichtentechnik die Beeinflussung irgendeines Parameters einer Trägerschwingung durch das Primärsignal. Als Träger sind *Sinusschwingungen* und *Pulsfolgen* bes. ausgezeichnet. Dementsprechend unterscheidet man zwischen kontinuierl. und Pulsmodulation.

I. Bei der *kontinuierl.* oder *analogen M.* ist der Träger eine Sinusschwingung  $u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  hoher Frequenz. Ihre Parameter sind die *Amplitude*  $U_0$ , die *Kreisfrequenz*  $\omega_0$  und die *Phase*  $\varphi_0$ . Nach dem Parameter des Primärsignals  $x(t)$ , der geändert wird, unterscheidet man Amplituden-, Frequenz- und Phasen-M.

Bei *Amplituden-M.* (AM) ändert sich die Schwingungsamplitude  $U = U_0 + \Delta U x(t)$  in Abhängigkeit von  $x(t)$ , bei *Frequenz-M.* (FM) gilt  $\omega = \omega_0 + \Delta \omega x(t)$ , und bei *Phasen-M.* (PM) gilt  $\varphi = \varphi_0 + \Delta \varphi x(t)$ .

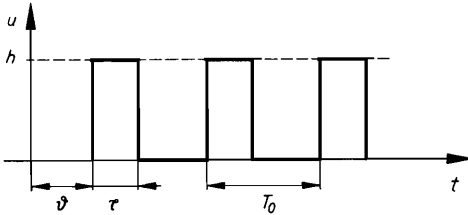
II. Die *Puls-M.* verwendet eine Pulsfolge von Rechteckform als Träger und hat die Parameter  $h = \text{Amplitude}$ ;  $\tau = \text{Dauer}$  oder *Breite*;  $\omega = \text{Folgefrequenz}$

und  $\vartheta = \text{Phase}$ . Die Pulsfolge (Abb. 1) kann dargestellt werden durch die Reihe (1), falls  $\delta_k(t)$  für  $0 \leq t \leq \tau$  den Wert 1, sonst aber den Wert 0 an-

$$(1) \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} h \delta_k \left( t - k \frac{2\pi}{\omega} - \vartheta \right)$$

nimmt. Wird jeweils einer der Parameter geändert, so sind folgende Modulationsarten möglich:

Bei *Pulsamplituden-M.* (PAM) wird die Impulsamplitude  $h$  in bezug auf einen Mittelwert  $h_0$  in Abhängigkeit von  $x(t)$  geändert:  $h = h_0 + \Delta h x(t)$ . Bei *Pulsdauer-M.* bzw. *Pulsweiten-M.* (PDM, PLM) wird die Impulsbreite  $\tau$  bzgl. ihres Mittelwertes  $\tau_0$  in Abhängigkeit von  $x(t)$  geändert:  $\tau = \tau_0 + \Delta \tau x(t)$ . Bei *Pulsfrequenz-M.* (PFM) wird die Pulsfrequenz in Abhängigkeit vom Signal  $x(t)$  geändert:  $\omega = \omega_0 + \Delta \omega x(t)$ .



Modulation: Pulsfolge,  $\vartheta$  Phase,  $\tau$  Dauer oder Breite,  $h$  Amplitude (weitere Erläuterungen im Text)

Bei *Pulsphasen-M.* bzw. *Pulszeit-M.* (PPM, PZM) wird die Verteilung der Impulse in bezug auf die Anfangsphase geändert in Abhängigkeit vom Signal  $x(t)$ :  $\vartheta = \vartheta_0 + \Delta \vartheta \cdot x(t)$ .

**Modus** svw. Modalwert.

**modus ponens**  $\nearrow$  Aussagenkalkül II.,  $\nearrow$  Regellogik II.

**Moivre**, Abraham de, geb. 26. 5. 1667 Vitry-le-François, gest. 27. 11. 1754 London. — M. wurde als Protestant nach der Aufhebung des Edikts von Nantes verhaftet und emigrierte nach seiner Freilassung nach England. In London verdiente er sich als Privatlehrer seinen Lebensunterhalt, sein Studium konnte er nicht fortsetzen. In seinen Veröffentlichungen befaßte er sich vor allem mit Fragen der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Die *M.sche Formel* in der heutigen Fassung stammt von EULER.

**Moivre-Laplace, Satz von:** ein Grenzwertsatz, der das Grenzverhalten einer Folge von *Binomialverteilungen* zum Inhalt hat. Es gibt eine lokale Fassung dieses Satzes und den *Integralgrenzwertsatz* von Moivre-Laplace, der eine unmittelbare Folgerung aus dem *zentralen Grenzwertsatz* ist ( $\nearrow$  Grenzwertsätze II.).

**I.** Die lokale Fassung lautet: *Ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A in n unabhängigen Versuchen konstant und gleich p mit  $0 < p < 1$ , so genügt die Wahrscheinlichkeit  $p_k^{(n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  dafür, daß in diesen n Versuchen das Er-*

*eignis A genau k-mal eintritt, der Beziehung (1) mit  $x = (k - np)/\sqrt{npq}$ .*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_k^{(n)}}{(1/\sqrt{2\pi \cdot npq}) \cdot \exp[-x^2/2]} = 1$$

Mit anderen Worten: eine binomialverteilte Zufallsgröße ist asymptotisch normalverteilt ( $\nearrow$  Normalverteilung) mit den Parametern  $a = np$  und  $\sigma = \sqrt{npq}$ . Ist z. B. die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerhaften Teils in einer Produktion 0,005, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, unter 10000 Teilen 40 fehlerhafte zu haben, d. h., es läßt sich  $p_k^{(n)}$  für  $n = 10000$ ,  $k = 40$  und  $p = 0,005$  bestimmen. Auf Grund von Formel (1) gilt (2). Daraus findet man mit  $k - np = -10$ ,  $\sqrt{npq} = 7,05$ ,  $[(k - np)/\sqrt{npq}] = -1,42$  (2a).

$$(2) \quad p_k^{(n)} \approx \frac{\exp[-(1/2) \cdot (k - np)^2/(npq)]}{\sqrt{2\pi \cdot npq}}$$

$$(2a) \quad p_k^{(n)} \approx 1/(7,05 \cdot \sqrt{2\pi}) \cdot \exp[-1,42^2/2]$$

Die Funktion  $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp[-x^2/2]$  ist tabelliert ( $\nearrow$  Normalverteilung). Man ersieht aus der Tabelle (Tabelle 1.)  $\varphi(1,42) = 0,14556$ , d. h.  $p_k^{(n)} \approx 0,14556/7,05 \approx 0,2026$ . Der exakte Wert, der aus dem Binomialgesetz ermittelt wurde, ist 0,0214.

**II. Integralgrenzwertsatz:** Ist  $X_n$  eine Folge von binomialverteilten Zufallsgrößen mit den Parametern  $n$  und  $p$ , so kann  $X_n$  nach I. gedeutet werden als Anzahl des Eintretens eines Ereignisses A in  $n$  unabhängigen Versuchen mit  $P(A) = p$  in jedem Einzelversuch. Dann gilt (3) gleichmäßig bzgl.  $a$  und  $b$  mit  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

Tabelle 1: Normalverteilung, Dichte  $\varphi(x)$  (Auszug)

x	... 0	1	2	3	...
1,0	,241 97	,239 55	,237 13	,234 71	...
1,1	,217 85	,215 46	,213 07	,210 69	...
1,2	,194 19	,191 86	,189 54	,187 24	...
1,3	,171 37	,169 15	,166 94	,164 74	...
1,4	,149 73	,147 64	,145 56	,143 50	...
...	...	...	...	...	...
3, ...	,004 43	,003 27	,002 38	,001 72	...

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left( a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp[-x^2/2] dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Liegt z. B. dieselbe Situation vor wie in I., so kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß in einer Kiste mit 10000 Teilen nicht mehr als 70 fehlerhafte sind. Für (4) ergibt sich nach Formel (3) näherungsweise der in (5) angegebene Ausdruck.

Aus Tabellen für  $\Phi$  ( $\nearrow$  Normalverteilung) entnimmt

$$(4) \quad P(X \leq 70) = P\left(\frac{-50}{7,05} \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{20}{7,05}\right) \\ = P\left(-7,09 \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq 2,84\right).$$

$$(5) \quad P(X \leq 70) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7,05}^{2,84} \exp[-x^2/2] dx \\ = \Phi(2,84) - \Phi(-7,09)$$

man für diese Differenz  $\Phi(2,84) - \Phi(-7,09) = \Phi(2,84) - (1 - \Phi(7,09)) \approx \Phi(2,84) = 0,997744$ , da  $1 - \Phi(7,09)$  näherungsweise Null ist ( $\nearrow$  Tabelle 2.).

Tabelle 2: Normalverteilung, Verteilungsfunktion  $\Phi(x)$  (Auszug)

x	... 0	1	2	3	...
2,80	,997445	,997453	,997461	,997469	...
2,81	,997523	,997531	,997538	,997546	...
2,82	,997599	,997606	,997614	,997621	...
2,83	,997673	,997680	,997687	,997694	...
2,84	,997744	,997751	,997758	,997765	...
...	...	...	...	...	...
3,9	,999952	,999954	,999956	,999958	...

**Moivresche Formel: I.** Formel (1) für die Potenz  $z^n$  einer komplexen Zahl  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  mit  $|z| = 1$ . Diese Formel gilt zunächst für alle  $n \in \mathbf{N}$ , wie

$$(1) \quad z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

in II.1. durch *vollständige Induktion* gezeigt wird. Ihre Gültigkeit läßt sich jedoch schrittweise auf  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \in \mathbf{Q}$ ,  $n \in \mathbf{R}$  ausdehnen (vgl. II.2., II.3. und II.4.).

Für die trigonometrische Form einer komplexen Zahl  $z$  mit  $|z| = 1$  gilt wegen der Periodizität der Sinus- und der Kosinusfunktion  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ . Die  $\varphi$ -Werte mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$  werden als *Hauptwerte* bezeichnet.

**II.** Für das Produkt  $z$  zweier dieser Zahlen,  $z_1 = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1$  und  $z_2 = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2$ , erhält man nach den Additionstheoremen für die Winkelfunktionen  $z_1 \cdot z_2 = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ , d. h., speziell für  $\varphi_1 = \varphi_2$  ergibt sich  $z^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ .

**II.1.** Die M. F. ist zunächst richtig für  $n = 1$  und  $n = 2$ . Unter der Voraussetzung, daß  $z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$  eine wahre Aussage ist, wird  $z^{k+1} = z^k \cdot z$  nach (2) berechnet. Die Rechnung zeigt, daß die

$$(2) \quad (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ = \cos k\varphi \cos \varphi - \sin k\varphi \sin \varphi \\ + i(\sin k\varphi \cos \varphi + \cos k\varphi \sin \varphi) \\ = \cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi$$

M. F. dann für  $n = k + 1$  gilt. Daraus folgt nach dem 5. Peanoschen Axiom, daß die M. F. für alle natürl. Zahlen  $n$  richtig ist.

**II.2.** Die M. F. gilt im Bereich  $\mathbf{Z}$ . Für  $n = 0$  wird für  $z \neq 0$  wie im Bereich  $\mathbf{N}$  definiert  $z^0 = 1$ . Ist aber  $n$  eine negative ganze Zahl, so gilt die M. F., wie die Rechnung (3) für  $n = -m$ ,  $m > 0$  und  $m \in \mathbf{N}$  zeigt.

$$(3) \quad z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\cos m\varphi + i \sin m\varphi} \\ = \frac{\cos m\varphi - i \sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi} = \cos m\varphi - i \sin m\varphi \\ = \cos(-m\varphi) + i \sin(-m\varphi)$$

**II.3.** Erweiterung auf den Bereich  $\mathbf{Q}$ . Für  $n = 1/m$  gilt die M. F., wenn eine Zahl  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  bestimmt werden kann, deren  $m$ -te Potenz die gegebene Zahl  $z_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$  ist. Das ergibt die Bestimmungsgleichung  $m\psi = \varphi$ , aus der man wegen der Periode  $2\pi$  für Kosinus und Sinus die  $m$  Werte  $\psi_1 = \varphi/m$ ,  $\psi_2 = (\varphi + 2\pi)/m$ , ...,  $\psi_m = [\varphi + (m-1)2\pi]/m$  erhält. Die M. F. nimmt für  $k = 1, 2, \dots, m$  die Form (4) an.

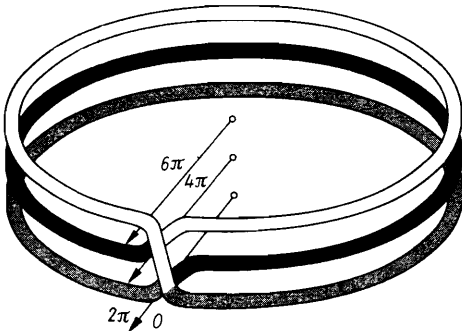
$$(4) \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{1/m} \\ = \cos \frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{m} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{m}$$

Da die Gültigkeit für  $n \in \mathbf{Z}$  schon gezeigt wurde, gilt die M. F. für  $n \in \mathbf{Q}$ . Den Wert für  $k = 1$  bezeichnet man als *Hauptwert*.

**II.4.**  $n \in \mathbf{R}$ . Ist durch eine Intervallschachtelung ( $\nearrow$  Potenz IV.) rationaler Zahlen  $r = n/m$  eine reelle Zahl  $\nu$  bestimmt, so ergibt sich wegen der Stetigkeit der Kosinus- und der Sinusfunktion eine Intervallschachtelung, die zum *Hauptwert*  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^\nu = \cos \nu\varphi + i \sin \nu\varphi$  führt. Ist  $\nu$  eine ganze Zahl oder der reziproke Wert einer positiven ganzen Zahl, so stimmt das Ergebnis mit dem früher gefundenen überein. Ist  $\nu$  nicht rational, so ist die Potenz  $z^\nu = [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)]^\nu = \cos \nu(\varphi + 2k\pi) + i \sin \nu(\varphi + 2k\pi)$  mit  $k \in \mathbf{Z}$  unendlich vieldeutig.

**III.** In der Gaußschen Zahlenebene kann die M. F. *geometrisch gedeutet* werden. Alle komplexen Zahlen  $z$ , auf die sie sich bezieht, liegen auf dem Einheitskreis  $|z| = 1$ , unterscheiden sich nur durch ihr Argument  $\varphi$ . Nach der *Eulerschen Formel* schreibt man kurz  $z = e^{i\varphi}$ . Für das Produkt  $z = z_1 \cdot z_2$  ist das Argument  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  die Summe der Argumente der Faktoren, für die  $n$ -te Potenz  $z^n = e^{in\varphi}$ ,  $n$  positiv ganz, ist das Argument  $n\varphi$  das  $n$ -fache des Arguments der Basis. Durchläuft  $\varphi$  monoton wachsend das Intervall  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , so durchläuft das Argument  $\psi$  von  $z^n = e^{in\varphi} = w = e^{i\psi}$  den Einheitskreis im gleichen Sinne  $n$ -mal. Um zu erreichen, daß jedem  $z$ -Wert genau ein  $w$ -Wert zugeordnet ist, denkt man sich den  $n$ -fach durchlaufenden Einheitskreis der  $w$ -Ebene als  $n$  Bänder, die beliebig nahe voneinander so übereinander liegen, daß  $w = e^{i\psi}$  stets in das folgende höhere Band gelangt, wenn  $\psi$  ein neues Vielfaches von  $2\pi$  erreicht (Abb.). Vom Ende des letzten Bandes, für  $\psi = n \cdot 2\pi$  gelangt der Bildpunkt wieder in das erste Band. (S. a. analytische Fortsetzung II.). Für die  $n$ -te Wurzel





Moiivreche Formel: Zur eindeutigen Zuordnung der Punkte  $z = e^{i\varphi}$  mit  $0 \leq \varphi < 2\pi$  einer  $z$ -Ebene zu den Punkten  $w = e^{3i\psi} = e^{i\psi}$  einer  $w$ -Ebene mit  $0 \leq \psi < 6\pi$

$z^{1/n} = e^{i\varphi/n} = w = e^{i\psi}$  wird der Einheitskreis  $0 \leq \varphi < 2\pi$  der  $z$ -Ebene abgebildet auf den durch den Hauptwert  $0 \leq \psi < 2\pi/n$  bestimmten Bogen des Einheitskreises der  $w$ -Ebene. Erst nach  $n$ -maligem Durchlaufen des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene ist der der  $w$ -Ebene einmal durchlaufen. Einem der Punkte  $z_i$  entsprechen  $n$  Bildpunkte. Wieder kann Eindeutigkeit der Zuordnung erreicht werden, wenn der Einheitskreis der  $z$ -Ebene aus  $n$  übereinander angeordneten Bändern besteht. Jeder Punkt dieses Bandes hat dann genau ein Bild auf dem Einheitskreis der  $w$ -Ebene.

**Mollweide**, Karl Brandan, geb. 3. 2. 1774 Wolfenbüttel, gest. 10. 3. 1825 Leipzig. — M. wurde nach dem Studium 1800 Lehrer der Mathematik in Halle, wurde 1811 nach Leipzig berufen und dort o. Professor der Astronomie und 1814 Professor der Mathematik. Er arbeitete über physikal., astronom. und mathemat. Fragen. Die nach M. ben. Formeln finden sich in seinen Aufsätzen »Zusätze zur ebenen und sphärischen Trigonometrie« (1808, 1812, 1816). **Mollweidesche Formeln**: Beziehungen (1), (2) zwischen Seitenlängen und Winkelgrößen eines ebenen Dreiecks, die 1707 schon NEWTON anführte, MOLLWEIDE aber 1808 neu entdeckte, sowie die durch cykl. Vertauschen daraus erhaltenen. Aus ihnen ergibt sich der Tangenssatz. Zu den M. F. im sphär. Dreieck  $\nearrow$  Delambresche Formeln.

$$(1) \quad (a + b) \cdot \sin(\gamma/2) = c \cdot \cos[(\alpha - \beta)/2]$$

$$(2) \quad (a - b) \cdot \cos(\gamma/2) = c \cdot \sin[(\alpha - \beta)/2]$$

**Moment, statisches**: Bezeichnung für das Produkt aus der Masse eines materiellen Punktes und dem Abstand des Punktes von der Achse bzw. Produkt aus Masse und Abstand von einer Ebene; beide werden als s. M. bzgl. einer Achse bzw. bzgl. einer Ebene unterschieden.

Die s. M.e eines Systems von  $n$  Punkten mit den Koordinaten  $x_i, y_i$  und der jeweiligen Masse  $m_i$  bzgl. der  $x$ - bzw. der  $y$ -Achse sind durch (1) bzw. (2) bestimmt.

$$(1) \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (2) \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Die s. M.e einer mit Masse der Dichte  $\rho(x, y)$  belegten ebenen Kurve  $k$  bzgl. der Koordinatenachsen sind die Kurvenintegrale (3) bzw. (3a) erster Art.

$$(3) \quad M_x = \int_{(k)} y \rho(x, y) ds \quad (3a) \quad M_y = \int_{(k)} x \rho(x, y) ds$$

Die s. M.e eines mit Masse der Dichte  $\rho(x, y)$  belegten ebenen Bereichs  $B$  bzgl. der Koordinatenachsen sind die Flächenintegrale (4) bzw. (4a).

$$(4) \quad M_x = \iint_{(B)} y \rho(x, y) dx dy$$

$$(4a) \quad M_y = \iint_{(B)} x \rho(x, y) dx dy$$

Die s. M.e eines mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z)$  belegten Raumbereichs  $K$  bzgl. der  $x, y$ -, der  $y, z$ - bzw. der  $z, x$ -Ebene sind die Raumintegrale (5), (5a) bzw. (5b), die entsprechenden s. M.e für eine mit

$$(5) \quad M_{xy} = \iiint_{(K)} z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(5a) \quad M_{yz} = \iiint_{(K)} x \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(5b) \quad M_{zx} = \iiint_{(K)} y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Masse belegte Fläche  $S$  sind die Oberflächenintegrale erster Art (6), (6a) bzw. (6b), und die s. M.e für eine

$$(6) \quad M_{xy} = \iint_{(S)} z \rho(x, y, z) dS$$

$$(6a) \quad M_{yz} = \iint_{(S)} x \rho(x, y, z) dS$$

$$(6b) \quad M_{zx} = \iint_{(S)} y \rho(x, y, z) dS$$

Raumkurve  $k$  sind die Kurvenintegrale erster Art (7), (7a) bzw. (7b).

$$(7) \quad M_{xy} = \int_{(k)} z \rho(x, y, z) ds$$

$$(7a) \quad M_{yz} = \int_{(k)} x \rho(x, y, z) ds$$

$$(7b) \quad M_{zx} = \int_{(k)} y \rho(x, y, z) ds$$

Aus den s. M.en ergeben sich die Koordinaten des  $\nearrow$  Schwerpunkts einer Masseverteilung. Für eine ebene Masseverteilung mit der Gesamtmasse  $M$  gilt für die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Schwerpunkts  $\xi = M_y/M, \eta = M_x/M$ , und für eine räuml. Masseverteilung gelten die Formeln (8).

$$(8) \quad \xi = M_{yz}/M, \quad \eta = M_{zx}/M, \quad \zeta = M_{xy}/M$$

**Momente**: I. Zahlen, die zur Charakterisierung gewisser Eigenschaften von Zufallsgrößen dienen. Ist  $X$  eine Zufallsgröße,  $F(x)$  ihre Verteilungsfunktion, so heißt die Größe (1) das  $k$ -te Moment bzw. das Moment  $k$ -ter Ordnung bzgl. der beliebigen reellen Zahl  $c$ , entsprechend heißt (2) das  $k$ -te absolute Moment bzgl.  $c$ .

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^k dF(x) \quad (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x - c|^k dF(x)$$

Für eine diskrete Zufallsgröße mit  $P(X = x_i) = p_i$  spezialisiert sich (1) zu (3), im Falle einer stetigen Zufallsgröße mit der Dichte  $f(x)$  zu (4).

$$(3) \sum_i (x_i - c)^k p_i \quad (4) \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^k f(x) dx$$

Für  $c = 0$  erhält man die *Anfangs-M.*  $m_k$ . Im diskreten Fall gilt für  $m_k$  die Formel (5), im stetigen Fall die Formel (6).

$$(5) m_k = \sum_i x_i^k p_i \quad (6) m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Das Anfangsmoment erster Ordnung  $m_1$  heißt der *Erwartungswert*  $EX$  von  $X$ . Für  $c = EX$  erhält man aus (1) die *zentralen k-ten M.*  $\mu_k$ . Von bes. Bedeutung ist die *Varianz* ( $\nearrow$  Streuung)  $\mu_2$ . Zwischen den zentralen M.n  $\mu_k$  und den Anfangs-M.n  $m_k$  besteht die Beziehung (7) für  $n = 2, 3, \dots$

$$(7) \mu_n = \sum_{k=2}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} m_k m_1^{n-k} + (-1)^{n-1} (n-1) m_1^n$$

Insbes. gilt  $\mu_2 = m_2 - m_1^2$ . Mit Hilfe der M. definiert man weitere für die Beschreibung der Verteilung geeignete Maßzahlen, wie *Variationskoeffizient, Schiefe, Exzeß* u. a. Ist die *charakterist. Funktion*  $\psi(t)$  von  $X$  bekannt, so lassen sich die Anfangs-M. und wegen (7) auch die zentralen M. leicht nach (8) berechnen.

$$(8) m_k = \frac{1}{i^k} \left. \frac{d^k \psi(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

II. Für *Zufallsvektoren* betrachtet man hauptsächlich die M. erster und zweiter Ordnung. Sie sind Maßzahlen zur Charakterisierung der *Verteilung eines Zufallsvektors*. Ist  $(X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor,  $F(x_1, \dots, x_n)$  seine Verteilungsfunktion, so

$$(9) \alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j dF(x_1, \dots, x_n)$$

heißten die durch (9) für  $j = 1, \dots, n$  definierten Größen  $\alpha_j$  die *Anfangs-M. erster Ordnung*, die gemäß (10) für  $j, k = 1, \dots, n$  definierten Größen  $\alpha_{jk}$  die *Anfangs-M. zweiter Ordnung*.

$$(10) \alpha_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k dF(x_1, \dots, x_n)$$

Entsprechend heißen die gemäß (11) definierten Größen die *zentralen M. zweiter Ordnung*.

$$(11) \mu_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \alpha_j) (x_k - \alpha_k) dF(x_1, \dots, x_n)$$

Man sagt, die entsprechenden M. existieren, wenn die rechten Seiten in (9), (10), (11) absolut konvergieren. Im *diskreten Fall* ergeben sich aus (9), (10), (11) entsprechend die Definitionen (12), (13), (14) und im *stetigen Falle* (15), (16), (17).

$$(12) \alpha_j = \sum_{i_1, \dots, i_n} x_j^{(i_j)} p_{i_1, \dots, i_n}$$

$$(13) \alpha_{jk} = \sum_{i_1, \dots, i_n} x_j^{(i_j)} x_k^{(i_k)} p_{i_1, \dots, i_n}$$

$$(14) \mu_{jk} = \sum_{i_1, \dots, i_n} (x_j^{(i_j)} - \alpha_j) (x_k^{(i_k)} - \alpha_k) p_{i_1, \dots, i_n}$$

$$(15) \alpha_j = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$(16) \alpha_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$(17) \mu_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \alpha_j) (x_k - \alpha_k) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

III. Das gemischte zweite zentrale Moment (17) wird als *Kovarianz* bezeichnet. Für eine Verteilungsfunktion  $F(x, y)$  von  $(X, Y)$  ist sie durch (18) definiert, bzw. durch (18a). Ist  $(X_1, \dots, X_n)$  ein

$$(18) \text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX) (y - EY) dF(x, y)$$

$$(18a) \text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

$n$ -dimensionaler Zufallsvektor mit der Verteilungsfunktion  $F(x_1, \dots, x_n)$ , so gelten für  $j \neq k$  (19) und (19a) bzw. (20).

$$(19) \text{cov}(X_j, X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - EX_j) (x_k - EX_k) dF(x_1, \dots, x_n)$$

$$(19a) \text{cov}(X_j, X_k) = E[(X_j - EX_j)(X_k - EX_k)]$$

$$(20) \begin{aligned} \mu_{jk} &= E[(X_j - EX_j)(X_k - EX_k)] \\ &= E(X_j X_k) - EX_j EX_k \\ &= \alpha_{jk} - \alpha_j \alpha_k \end{aligned}$$

In diesen Formeln sind die  $\alpha_j$  die Erwartungswerte der  $X_j$ , die  $\mu_{jj}$  die Dispersionen  $D^2 X_j$ . Vgl. auch Stichprobenkovarianz. Die *Matrix*  $(\mu_{jk})$  heißt die *Kovarianzmatrix* des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$ . Die Größe  $\rho_{jk} = \text{cov}(X_j, X_k) / \sqrt{D^2 X_j \cdot D^2 X_k}$  heißt der *Korrelationskoeffizient* von  $X_j$  und  $X_k$ . Die Matrix  $(\rho_{jk})$  heißt die *Korrelationsmatrix* des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**Momentenmethode:** eine Methode, um *Punktschätzungen* zu gewinnen. Sie kann für die Schätzung von Parametern angewendet werden, die sich in bekannter Weise aus den *Momenten* zusammensetzen, indem man diese durch die *Stichprobenmomente* ersetzt. Der *Erwartungswert*  $EX$  z. B. ist das Anfangsmoment erster Ordnung. Danach liefert die M. als *Punktschätzung* von  $EX$  das *Stichprobenmittel*  $\bar{X}$ . Da weiter die *Varianz* ( $\nearrow$  Streuung)  $D^2 X$  das zweite zentrale Moment ist, liefert die M. als Schätzung die Größe  $S^2$  ( $\nearrow$  Stichprobenvarianz). S. a. *Stichprobenmomente*.

**Momentenproblem:** Problem, ob zu einer vorgegebenen reellen Zahlenfolge  $\{c_n\}$  eine Verteilungsfunktion ( $\nearrow$  Zufallsgröße)  $F(x)$  existiert, deren  $k$ -tes Anfangsmoment  $m_k$  der Zahl  $c_k$  für alle  $k$  gleich ist. Eine weitere Frage ist dann die, ob  $F(x)$  durch  $\{c_n\}$  eindeutig bestimmt ist. Zum M. gibt es ausführlich

Untersuchungen, die vor allem die Angabe hinreichender Bedingungen für die Eindeutigkeit von  $F(x)$  zum Ziel haben.

**Mönchchen des Hippokrates** ↗ Quadratur des Kreises II.

**Monge**, Gaspard, geb. 10. 5. 1746 Beaune als Sohn eines Kaufmanns, gest. 28(?) . 7. 1818 Paris. — M. war mit 16 Jahren Lehrer in Lyon. Später ging er auf die Militärschule von Mézières, wurde dort aber, da bürgerl. Herkunft, erst mit untergeordneten Arbeiten betraut. Die glänzende Lösung einer geometr. Aufgabe machte auf seine ungewöhl. Begabung aufmerksam, und seit 1768 war er Professor in Mézières. Später war M., ein begeisterter Verehrer und Freund Napoleons I., vorwiegend in Paris tätig, 1892/93 als Marineminister, als Direktor des ägypt. Instituts und als Direktor der École Polytechnique. Nach der Restauration im Jahre 1815 verlor M. alle seine Ämter. — Im Verlauf seiner Vorlesungen über Festungsbau in Mézières entwickelte M. die *darstellende Geometrie*. Hauptsächlich sein Zweitafelverfahren wurde lange Zeit als Staatsgeheimnis behandelt. Grundlegend sind auch seine Arbeiten seit 1771 zur Theorie der Raumkurven und zur Differentialgeometrie durch das erste Lehrbuch über dieses Gebiet (1809) geworden.

**Mongescher Kegel** ↗ partielle Differentialgleichung II.

**monostabiles Glied** ↗ Übertragungsglied IV.

**monotone Funktion:** Funktion  $f$ , für die für alle  $x_1, x_2$  mit  $x_1 < x_2$  aus einem Intervall  $I = ]a, b[$  stets  $f(x_1) \leq f(x_2)$  bzw. stets  $f(x_1) \geq f(x_2)$  gilt; genauer nennt man sie im ersten Fall *monoton wachsend*, im zweiten *monoton fallend* (s. a. Zahlenfolge II.). Zieht  $x_1 < x_2$  für alle  $x_1, x_2$  des *Monotonieintervalls*  $I$  sogar stets  $f(x_1) < f(x_2)$  bzw.  $f(x_1) > f(x_2)$  nach sich, so nennt man  $f$  eine im Intervall  $I$  *echt monoton*, *eigentlich monoton* oder *streng monoton wachsende* bzw. *fallende* Funktion. Eine streng monoton wachsende Funktion heißt auch *ordnungs-treu*. Ist eine Funktion  $f$  in einem Intervall  $I$  *ordnungs-treu*, so hat die Differenz  $x_2 - x_1$  zweier Argumente aus  $I$  das gleiche Vorzeichen wie die Differenz  $f(x_2) - f(x_1)$  der zugehörigen Funktionswerte; ist  $f$  in  $I$  streng monoton fallend, so haben die gen. Differenzen entgegengesetztes Vorzeichen.

**Beispiel 1:** Die lineare Funktion  $f_1$  mit  $f_1(x) = mx + n$  ist in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton wachsend für  $m > 0$  und streng monoton fallend für  $m < 0$ .

**Beispiel 2:** Die Funktion  $f_2$  mit  $f_2(x) = \sin x$  hat für  $x \in \mathbf{R}$  unendlich viele *Monotonieintervalle*. Sie ist streng monoton wachsend für alle  $x \in ]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$  und streng monoton fallend für alle  $x \in ]\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi[$ , wenn  $k \in \mathbf{Z}$ . Die Funktion ist in ihrem gesamten Definitionsbereich nicht monoton.

In jedem ihrer Monotonieintervalle ist jede Funktion eine eindeutige Abbildung, sie hat dort eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion. Ist eine Funktion  $f$  in einem Intervall  $I = ]a, b[$  monoton und ist  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  auch in jeder Umgebung von  $x_0$ , die ganz in  $I$  liegt, monoton. Man nennt eine

in einer Umgebung von  $x_0$  definierte Funktion  $f$  genau dann *an der Stelle  $x_0$  lokal monoton wachsend*  $f(x_0) \uparrow$  bzw. *lokal monoton fallend*  $f(x_0) \downarrow$  genau dann, wenn eine positive Zahl  $\varepsilon$  existiert, so daß (1) gilt.

(1)

Intervall	$f(x_0) \uparrow$	$f(x_0) \downarrow$
$x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0[$	$f(x) < f(x_0)$	$f(x) > f(x_0)$
$x \in ]x_0, x_0 + \varepsilon[$	$f(x_0) < f(x)$	$f(x_0) > f(x)$

Ist  $f$  lokal monoton an jeder Stelle  $x_0$  eines Intervalls  $I$ , so ist  $f$  im Intervall  $I$  streng monoton. Für  $f(x_0) \uparrow$  gibt es eine positive Zahl  $\varepsilon$  für jedes  $x \neq x_0$  aus dem Intervall  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ , so daß die Differenzen  $x - x_0$  und  $f(x) - f(x_0)$  gleiches, für  $f(x_0) \downarrow$  dagegen entgegengesetztes Vorzeichen haben; d. h., wenn für jedes  $x \neq x_0$  aus dem gen. Intervall (2) gilt.

$$(2) \quad d(x) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0) > 0 \quad \text{bzw.} \\ d(x) = [f(x) - f(x_0)]/(x - x_0) < 0$$

Ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  lokal monoton wachsend und differenzierbar, dann existiert der Grenzwert (3), der nicht negativ sein kann, da alle Funktionswerte von  $d$  im Intervall  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  positiv sind.

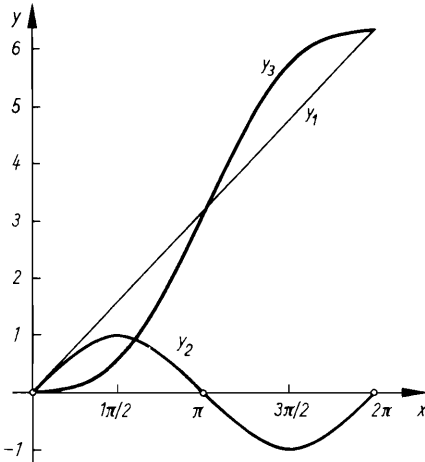
$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0)$$

Sind aber alle Funktionswerte von  $d(x)$  negativ, so kann der Grenzwert nicht positiv sein. Deshalb gilt für eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion  $f$ , die in  $x_0$  lokal monoton wachsend ist,  $f'(x_0) \geq 0$ ; bzw.  $f'(x_0) \leq 0$ , falls  $f(x_0) \downarrow$ . Andererseits folgt aus der Differenzierbarkeit von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und aus  $f'(x_0) > 0$ , daß  $f(x_0) \uparrow$ , bzw. aus  $f'(x_0) < 0$ , daß  $f(x_0) \downarrow$ . Geometrisch bedeutet das: Ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und gilt  $f(x_0) \uparrow$ , so haben alle Sekanten durch die Punkte  $P_0(x_0, f(x_0))$  und  $P(x, f(x))$  mit  $x \in ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  einen positiven Anstieg, im Falle  $f(x_0) \downarrow$  aber einen negativen Anstieg. Entsprechend haben die Tangenten an das Bild von  $f$  im Punkt  $P_0(x_0, f(x_0))$  einen nichtnegativen bzw. einen nichtpositiven Anstieg.

Ist die Funktion  $f$  mit  $y = f(x)$  im Intervall  $\bar{I} = [a, b]$  stetig und in  $I = ]a, b[$  differenzierbar, so ist sie in  $\bar{I}$  genau dann monoton wachsend, wenn  $f'(x) \geq 0$ , bzw. monoton fallend, wenn  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in I$  gilt, und es liegt sogar strenge Monotonie vor, wenn es kein Teilintervall von  $I$  gibt, in dem  $f'$  identisch Null ist. Insbes. ist daher  $f$  in  $I$  streng oder eigentlich monoton wachsend, wenn  $f'(x) > 0$ , bzw. eigentlich monoton fallend, wenn  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in I$  gilt. Die Bildkurve einer in  $I$  streng monotonen Funktion enthält demnach kein zur  $x$ -Achse paralleles Geradenstück und hat in jedem Punkte von  $I$  eine Tangente mit nichtnegativem Anstieg, falls sie streng monoton wächst, bzw. mit nichtpositivem Anstieg, falls sie streng monoton fällt.

**Beispiel 1:** Die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x) = x - \sin x$  ist in  $]0, 2\pi[$  streng oder

eigentlich monoton wachsend, denn es ist  $f'(x) = 1 - \cos x > 0$  für alle  $x \in ]0, 2\pi[$ . Mit  $f(0) = 0$  folgt daraus  $f(x) = x - \sin x > 0$  für alle  $x > 0$ , d. h.,  $\sin x < x$  für alle  $x > 0$  (Abb. 1). Für kleine positive  $x$  bedeutet diese Aussage, daß das Kurvenbild der Sinus-Funktion stets unterhalb der Geraden mit der Gleichung  $y = x$  verläuft; für große positive  $x$  ist diese Aussage trivial.



Monotonie: Kurvenbilder der Funktionen  $y_1 = x$ ,  $y_2 = \sin x$  und  $y_3 = x - \sin x$  im Intervall  $]0, 2\pi[$

**Beispiel 2:** Für  $f(x) = e^{-x} + x - 1$  gilt im Intervall  $[0, +\infty[$ :  $f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - 1/e^x > 0$  für  $x > 0$ . Danach ist die Funktion streng monoton wachsend, und wegen  $f(0) = 0$  folgt  $f(x) = e^{-x} + x - 1 > 0$  für alle positiven  $x$ , d. h.,  $1/e^x > 1 - x$  für alle  $x > 0$ .

S. a. Zahlenfolge II.; Kurvendiskussion II.4.

**Monte-Carlo-Methode:** I. Simulation, d. h. rechnerisch-experimentelles Nachspielen realer Vorgänge durch Zufallsprozesse. Für die dazu notwendigen *Zufallszahlen* existieren Tafeln, die z. B. als Ergebnisse des Ziehens von Losen aus einer Urne gewonnen werden. Bei der Berechnung mit Hilfe elektron. Rechenanlagen werden meist *Pseudozufallszahlen* benutzt, deren Ziffernfolge zwar determiniert ist, aber keinen einfachen arithmet. Gesetzen folgt, z. B. die 7stellige Mantissen von  $\lg n$  für  $n = 11, 12, \dots, 99$ . Die Ziffern 8 0 3 1 7 7 5 1 2 0 4 5 9 0 4 7 5 6 0 1 7 0 4 9 2 1 0 2 7 4 ... bilden z. B. eine Folge, in der jede Ziffer gleich wahrscheinlich ist. Erreicht z. B. eine Person A täglich einmal zu einem zufälligen Zeitpunkt eine Haltestelle, an der die von ihr benutzte Linie im 10-Minuten-Abstand abfährt, so können die 30 gen. Zufallsziffern als die von A an jedem von 30 Tagen erwarteten Zeiten angesehen werden. Ihre Summe 111 ergibt die in 30 Tagen erwartete Zeit nach der M.-C.-M. Der durch Wahrscheinlichkeitstheoret. Berechnung gewonnene Wert für die mittlere Wartezeit ist 135. Die M.-C.-M. wird dann verwendet, wenn theoret. Berechnungen sehr aufwendig sind, z. B. bei Untersuchungen in der Bedienungstheorie. Auch bestimmte

nichtstochast. Berechnungen können durch die M.-C.-M. ersetzt werden, etwa das Ermitteln mehrdimensionaler Integrale.

**II.** Zur Berechnung von  $F = \int_a^b f(x) dx$  z. B. wird in der Ebene, in der die Kurve der Funktion  $y = f(x)$  in einem kartes. Koordinatensystem dargestellt wird, durch eine passende durch  $y = h$  bestimmte Gerade und zwei Parallelen zur  $y$ -Achse in den Abständen  $x = a$  und  $x = b$  ein Rechteck herausgegriffen, von dessen Fläche  $G = h \cdot (b - a)$  die Kurve die gesuchte Fläche  $F$  abschneidet. Wird das Rechteck gleichmäßig mit  $n$  Punkten belegt, deren Koordinaten *Zufallszahlen* oder *Pseudozufallszahlen* sind, und liegen  $m$  dieser Punkte innerhalb von  $F$ , so gilt  $F : G = m : n$  oder  $F = h(b - a) \cdot m/n$  um so genauer, je größer  $n$  ist. Bezogen auf einen Modul  $\mu = 10^8 + 1$  werden z. B. die folgenden Pseudozufallszahlen verwendet:

- (1) Reduzierte Fibonacci-Zahlen  
 $F_k = [F_{k-1} + F_{k-2}] \text{ mod } \mu$
- (2)  $y_{k+1} = [(2^r + 1) y_k + c] \text{ mod } 2\mu$   
mit  $r > 2$  und  $c$  gerade
- (3)  $y_k = s \cdot y_{k-1} \text{ mod } \mu$ , etwa mit  $s = 23$
- (4)  $y_k = \sum_{j=1}^r c_j y_{k-j} \text{ mod } \mu$ ,

wenn die  $y_0, y_1, \dots, y_{r-1}$  geeignete Zahlenwerte zwischen 0 und  $\mu - 1$  und die  $c_j$  für  $j = 1, 2, \dots, r$  geeignete Konstanten sind.

**Moore-Automat** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.

**Morera, Satz von** ↗ Integral, komplexes, II.

**Morgan, Augustus de**, geb. 27. 6. 1806 Madura (Indien), gest. 18. 3. 1871 London. — M. lehrte erst in Cambridge und war später Professor in London. Er arbeitete auf sehr vielen Gebieten, vorwiegend über Infinitesimalrechnung, Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Morgansche Formeln** ↗ Mengenalgebra.

**Morgansche Gesetze** ↗ Normalform I.

**Morphismus:** Abbildung zwischen strukturierten Mengen, die die Struktur erhält; z. B. ein Homomorphismus zwischen algebraischen Strukturen oder eine stetige Abbildung zwischen topolog. Räumen. Das Wort M. ist eine Verallgemeinerung des Wortes Homomorphismus. S. a. Kategorie I.

**MPM, Metra-Potential-Methode:** Planungsverfahren der ↗ Netzplantechnik, bei dem berücksichtigt wird, daß für den zeitl. Abstand zwischen den Anfangsterminen zweier Vorgänge im Netzplan untere und obere Schranken gegeben sein können. (↗ Netzplantechnik VI.).

**Muldenpunkt** ↗ Böschungsaufgabe.

**Multilinearform** ↗ Tensor. S. a. Bilinearform.

**Multiplikation:** I. aus der Addition gleicher Summanden ableitbare Operation, für die  $\lambda a = p$  zunächst für natürl. Zahlen  $\lambda$  und  $a$  erklärt ist. Die

Definition kann aber erweitert werden auf die Bereiche  $\mathbf{Z}$  der ganzen,  $\mathbf{Q}$  der rationalen,  $\mathbf{R}$  der reellen und  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen. Man nennt  $\lambda$  den *Multiplikator*,  $a$  den *Multiplikand* und das Ergebnis  $p$  oder auch  $\lambda \cdot a$  das *Produkt*. Um in der Form  $ab = p$  die gleiche Bedeutung der multiplizierten Zahlen zu betonen, nennt man sie *Faktoren*. In den angegebenen Zahlenbereichen gelten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz. Wird die M. für andere mathemat. Größen definiert, so ist die Gültigkeit dieser Gesetze jeweils nachzuweisen. Für Permutationen und Matrizen z. B. gilt i. allg. das Kommutativgesetz nicht. Für Vektoren werden zwei Produkte definiert, das *innere* oder *Punktprodukt* und das *äußere* oder *Kreuzprodukt*. Für das innere Produkt gilt das Assoziativgesetz nicht, für das Kreuzprodukt gilt z. B.  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ , d. h., das Kommutativgesetz gilt nicht.

II. In den gen. Bereichen  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{C}$  ist neben der M. die Addition definiert. Für die Verbindung beider Operationen gilt das *Distributivgesetz*  $e(c + d) = ec + ed$ . Gilt das Kommutativgesetz und setzt man ein  $e = a + b$ , so erhält man  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ . Diese Regel, nach der jeder Summand des einen Klammersausdrucks mit jedem Summanden der anderen Klammersausdrücke zu multiplizieren ist, läßt sich erweitern auf Klammersausdrücke aus endlich vielen Summanden. Aus der ursprüngl. Definition der M. als  $\lambda a = p$  mit  $\lambda \in \mathbf{N}$  folgt nach den für die Subtraktion gefundenen Vorzeichenregeln  $\lambda(-a) = -(\lambda a)$  und daraus durch Verallgemeinerung auf die Zahlenbereiche  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{C}$ , daß das Produkt zweier Faktoren mit verschiedenen Vorzeichen negativ ist. Danach ist aber wegen  $(-a)(-b) = [-a \cdot (-b)] = -[a \cdot (-b)] = -[-(ab)] = +ab$  das Produkt zweier negativer Faktoren positiv.

*Beispiel 1:*  $(2b - 3c)(5a - 7b + 2c) = 10ab - 14b^2 + 4bc - 15ac + 21bc - 6c^2 = 10ab - 15ac - 14b^2 + 25bc - 6c^2$ .

*Beispiel 2:*  $(x + 7y)(3x + y)(9x - 6y)(2x - y) = (3x^2 + 22xy + 7y^2)(18x^2 - 21xy + 6y^2) = 54x^4 + 333x^2y^2 - 318xy^3 - 15xy^4 + 42y^4$ .

III. Für die schriftl. M. zweier in einem Positionssystem dargestellter Zahlen

$$a = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_0 g^0 + a_{-1} g^{-1} + \dots \text{ und } b = b_m g^m + b_{m-1} g^{m-1} + \dots + b_0 g^0 + b_{-1} g^{-1} + \dots$$

lassen sich, sofern ihre Darstellung nur endlich viele Summanden hat, die aus dem Distributivgesetz abgeleiteten Regeln anwenden. Danach wird einer der beiden Faktoren der Reihe nach mit den Summanden des anderen multipliziert, und die dabei erhaltenen Teilprodukte werden unter Beachtung des *Zehner-, Zweier- oder g-Übertrags* ( $\nearrow$  Addition II.) so untereinander geschrieben, daß das folgende Teilprodukt stets um eine Stelle nach rechts ausgerückt wird. Die Summe dieser Teilprodukte ist das Produkt der Zahlen  $a$  und  $b$ . Werden  $a$  und  $b$  durch unendlich viele Summanden dargestellt, insbes. wenn sie irrationale Zahlen sind, so existiert für jede eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen, die durch Abbrechen ihrer Darstellung mit dem Glied  $a_{-\nu} g^{-\nu}$  bzw.  $b_{-\mu} g^{-\mu}$  entstehen. Nach dem Satze, daß der Grenzwert eines

Produkts zweier Faktoren gleich dem Produkt der Grenzwerte der Faktoren ist, bilden auch die Produkte der rationalen Zahlen mit dem letzten Glied  $a_{-\nu} g^{-\nu}$  bzw.  $b_{-\mu} g^{-\mu}$  für  $\mu, \nu \rightarrow \infty$  eine Cauchy-Folge, die  $ab$  zum Grenzwert hat.

*Beispiel 3:*

27,8673	· 49,23
1114692	
2508057	
557346	
836019	
1371,907179	

*Beispiel 4:*

27,867	· 49,23
111468	
25080	
557	
83	
1371,88	~ 1372

IV. Bei gemessenen Werten ist es dringender als bei der Addition notwendig, keine Stellen mitzuführen, die eine gar nicht vorhandene Genauigkeit vortäuschen. Ergibt es sich als hinreichend, das Produkt aus Beispiel 3 auf Ganze zu berechnen, so genügt es zur Rundung in den Teilprodukten Hundertstel zu berücksichtigen, da aber  $0,0003 \cdot 50 = 0,015$ , kann die letzte Ziffer 3 des ersten Faktors außer acht gelassen werden, und bei dem Teilprodukt mit der Ziffer 9 vom zweiten Faktor interessiert von  $9 \cdot 7 = 63$  nur der Übertrag 6, die Ziffer 7 wird mit einem Punkt gekennzeichnet, und die Berechnung des zweiten Teilprodukts beginnt mit  $\ast 9 \cdot 6 = 54$  plus 6 ist 60, merke 6. Die Berechnung des dritten Teilprodukts beginnt, da die Ziffer 6 jetzt auch punktiert wurde, mit  $\ast 2 \cdot 6 = 12$ , merke 1,  $2 \cdot 8 = 16$  plus 1 ist 17, merke 1.

S. a. absolute Konvergenz von Reihen III.; Boolesche Algebra; Gaußsche Zahlenebene II.; Matrix II.; Permutation II.;  $\nearrow$  Brüche I.5.,  $\nearrow$  Polynom I.,  $\nearrow$  Potenzreihe XI.

**Multiplikation, skalare**  $\nearrow$  Matrix II.,  $\nearrow$  Vektorraum II.

**Multiplikationsoperator**  $\nearrow$  Operator, linearer, I.1. **Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung**  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit, bedingte, III.

**Multiplikation von Potenzreihen**  $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen II.

**Multiplikator**  $\nearrow$  Analogrechner I., IV.,  $\nearrow$  Multiplikation I.

**Multiplikator, Lagrangescher**  $\nearrow$  Lagrangesche Multiplikatorenmethode,  $\nearrow$  Extremwert VI.

**Multiplizität, Vielfachheit**  $\nearrow$  algebraische Geometrie III.

**Multiprogramming**  $\nearrow$  Betriebssystem I.

**Muster**  $\nearrow$  Signal II.

## N

**Nabelpunkt**  $\nearrow$  Krümmung I.

**Nablaoperator**, auch *Hamiltonoperator*, Zeichen  $\nabla$ : I. durch (1) definierter *symbol. Vektor*. Rechnet

$$(1) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

man mit  $\nabla$  wie mit einem Vektor, so kann man den Gradienten eines skalaren Feldes  $U$  sowie die Divergenz und die Rotation eines Vektorfeldes  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  nach (2), (3), (4) mittels des N.s ausdrücken.

$$(2) \quad \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \text{grad } U$$

$$(3) \quad \nabla \mathbf{V} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\ = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} = \text{div } \mathbf{V}$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{V} \\ = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) \\ = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

**II. Rechenregeln für den N.:**

**II.1.** Es gelten die Regeln (5) und (6), wenn  $c_k$  konstante Größen,  $\mathbf{V}_k$  Vektorfelder und  $U_k$  skalare Felder für  $k = 1, 2, \dots, n$  sind.

$$(5) \quad \nabla \left( \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{V}_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k \nabla \mathbf{V}_k$$

$$(6) \quad \nabla \left( \sum_{k=1}^n c_k U_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k \nabla U_k$$

**II.2.** Steht der N. vor einem Produkt, so ist nach (7) der N. auf jeden einzelnen Faktor anzuwenden,

$$(7) \quad \nabla(XYZ) = \nabla(\underline{X}YZ) + \nabla(X\underline{Y}Z) + \nabla(XY\underline{Z})$$

der in (7) unterstrichen ist, und die Ergebnisse sind zu addieren. Danach formt man die einzelnen Summanden mit Hilfe der Regeln der Vektoralgebra um, indem man  $\nabla$  als Vektor behandelt, so daß im Ergebnis hinter dem N. nur noch die unterstrichene Größe steht. In dem Produkt  $XYZ$  können  $X, Y, Z$  sowohl vektorielle als auch skalare Größen sein, und das Produkt zwischen ihnen kann sowohl als Skalarprodukt als auch als Vektorprodukt betrachtet werden, etwa  $XYZ = U(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)$ . Gleichung (8) ergibt sich z. B. nach Anwendung dieser Produktregel:

$$(8) \quad \text{div}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \\ = \nabla(\underline{\mathbf{V}}_1 \times \mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1 \times \underline{\mathbf{V}}_2)$$

$\nabla(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)$  ist ein Spatprodukt und es gilt  $\nabla(\underline{\mathbf{V}}_1 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2(\nabla \times \underline{\mathbf{V}}_1)$ , ebenso  $\nabla(\mathbf{V}_1 \times \underline{\mathbf{V}}_2) = -\mathbf{V}_1(\nabla \times \underline{\mathbf{V}}_2)$ . Daraus folgt  $\text{div}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2(\nabla \times \underline{\mathbf{V}}_1) - \mathbf{V}_1(\nabla \times \underline{\mathbf{V}}_2) = \mathbf{V}_2 \text{rot } \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1 \text{rot } \mathbf{V}_2$ . Nach (9) ist  $(\mathbf{c} \cdot \nabla) U$

$$(9) \quad (\mathbf{c} \cdot \nabla) U = c_1 \frac{\partial U}{\partial x} + c_2 \frac{\partial U}{\partial y} + c_3 \frac{\partial U}{\partial z} \\ = \mathbf{c} \text{ grad } U$$

=  $\mathbf{c} \cdot \text{grad } U$ , d. h. die Richtungsableitung von  $U$  in Richtung von  $\mathbf{c}$ . Bildet man  $(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  für ein Vektorfeld  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ , so erhält man (10) und bezeichnet  $(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  analog als den Gradienten

$(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{V} = (\mathbf{c} \text{ grad}) \mathbf{V}$  des Vektorfeldes  $\mathbf{V}$  nach dem Vektor  $\mathbf{c}$ .

$$(10) \quad (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{V} = c_1 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{V} + c_2 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{V} + c_3 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V} \\ = (\mathbf{c} \cdot \text{grad } u) \mathbf{i} + (\mathbf{c} \cdot \text{grad } v) \mathbf{j} + (\mathbf{c} \cdot \text{grad } w) \mathbf{k}$$

**III.** Bei der zweifachen Anwendung des N. erhält man (11) bis (15) für ein beliebiges zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld  $\mathbf{V}$  oder ein skalares Feld  $U$ . Man findet, daß  $\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2$  der Laplacesche Operator ist, der meist in kartes. Koordinaten nach (16) eingeführt wird (vgl. elliptische Differentialgleichung I., III.). Es gilt (17) und deshalb (18).

$$(11) \quad \text{grad div } \mathbf{V} = \nabla(\nabla \mathbf{V})$$

$$(12) \quad \text{div grad } U = \nabla(\nabla U) = \Delta U$$

$$(13) \quad \text{div rot } \mathbf{V} = \nabla(\nabla \times \mathbf{V}) = 0$$

$$(14) \quad \text{rot grad } U = \nabla \times (\nabla U) = 0$$

$$(15) \quad \text{rot rot } \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

$$(16) \quad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$(17) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$$

$$(18) \quad \text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V} \\ \text{mit } \Delta \mathbf{V} = \Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j} + \Delta w \mathbf{k}$$

**Nahbereich** ↗ Abbildung I., ↗ Operator, ↗ Relation II.

**nacheindeutig:** ↗ Relation II.

**Nachfolger** ↗ Peanosches Axiomensystem, ↗ Graph II.

**Nachfrage** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**Nachlaufregelung** ↗ Regelung III.1.

**nachschüssig** ↗ Rentenrechnung II.

**Näherungsformel: I.** zur näherungsweise Berechnung von Funktionswerten geeigneter Ausdruck mit Angabe des Gültigkeitsbereichs und der in ihm erreichten Genauigkeit. Sind die Funktionswerte einer Funktion  $f(x)$  zu berechnen in der Umgebung  $x_0 - a < x < x_0 + a$  von  $x_0$  und soll die Abweichung von den Funktionswerten  $f(x)$  kleiner als  $\epsilon$  sein, so sucht man oft eine einfache Funktion  $g(x)$ , etwa ein Polynom in  $x$ , so zu bestimmen, daß für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < a$  stets  $|f(x) - g(x)| < \epsilon$  ausfällt. Man nennt  $g(x)$  eine *N.* oder *Näherungsfunktion* von  $f(x)$  in dem Intervall  $x_0 - a < x < x_0 + a$  bei einer Genauigkeit von  $\epsilon$ .

**II.** Zu ihrer Berechnung dient oft der *Taylor'sche Satz* (↗ Taylor'sche Reihe). Ist die Funktion  $f(x)$ , genügend oft differenzierbar, so gilt (1).

$$(1) \quad f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

Mit  $g(x) = g_n(x)$  aus (2) hat man eine *N.* für die Funktion  $f(x)$  gewonnen, deren Fehler durch das

Restglied  $R_n(x) = |f(x) - g(x)|$  abgeschätzt werden kann. In den meisten Fällen ist  $f(x)$  eine analyt.

$$(2) \quad g_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Funktion, die sich in eine Taylorsche Reihe entwickeln läßt; dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ . Aus dem

Restglied kann dann entschieden werden, wie viele Glieder der Entwicklung berücksichtigt werden müssen, um eine vorgeschriebene Genauigkeit zu erreichen bzw. wie groß der Fehler bei fester Gliederzahl  $n$  für einen bestimmten Bereich der Variablen ist. Das Polynom  $g_n(x)$  der ersten  $n$  Glieder der Entwicklung von  $f(x)$  heißt dann auch die  $n$ -te Näherung der Funktion  $f(x)$ . In einigen Fällen ist eine Angabe des Restgliedes  $R_n$  nicht ohne weiteres möglich, z. B. bei der Funktion  $\arctan x$ , weil in das Restglied die  $(n + 1)$ -te Ableitung der Funktion eingeht, die oft nur schwierig zu bilden und abzuschätzen ist. Ist

z. B.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k x^k$  mit  $c_k > 0$  und setzt man

$$g(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^k, \text{ so gilt } |f(x) - g(x)| < c_{n+1} a^{n+1}$$

für alle  $x$  mit  $0 < x < a$  ( $\nearrow$  Reihe).

Soll für die Funktion  $f(x) = \cos x$  in dem Intervall  $|x| < 1/10$  eine N.  $g(x)$  gefunden werden, so daß  $|\cos x - g(x)| < 1/100$  gilt, so entwickelt man  $\cos x$  in (3) nach dem Taylorschen Satz mit  $n = 1$  und  $x_0 = 0$  und setzt  $g_1(x) = 1$ . Die Abschätzung (4) zeigt, daß bereits die erste Näherung  $g_1(x)$  die gewünschte Genauigkeit hat. Soll für  $|x| < 1/10$  die Genauigkeit erhöht werden, so daß etwa  $|\cos x - g(x)| < 10^{-5}$  gilt, so muß man höhere Näherungen von  $\cos x$  berechnen, nach (5) erreicht man mit der 3. Näherung  $g_3(x) = 1 - x^2/2$  die geforderte Genauigkeit. Erweitert man das Gültigkeits-

$$(3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} \cos(\vartheta x) \text{ mit } 0 < \vartheta < 1$$

$$(4) \quad |f(x) - g_1(x)| = |\cos x - 1| \leq |x|^2/2! < 1/2 \cdot 10^{-2} < 10^{-2}$$

$$(5) \quad |f(x) - g_3(x)| = |\cos x - (1 - x^2/2)| = |x^4/24 \cos(\vartheta x)| \leq |x|^4/24 < 10^{-4}/24 < 10^{-5}$$

intervall für die  $x$ -Werte auf  $|x| < 2/3$  bei einer Genauigkeit von  $\varepsilon = 10^{-3}$ , so reicht die erste Näherung  $g_1(x) = 1$  ebenfalls nicht aus. Die Abschätzung (6) zeigt, daß die dritte Näherung  $g_3 = 1 - x^2/2$  für  $|x| < 2/3$  die Genauigkeitsforderung erfüllt.

$$(6) \quad |\cos x - (1 - x^2/2)| = (|x|^4/24) \cdot |\cos(\vartheta x)| \leq |x|^4/24 < 2^4/(3^4 \cdot 24) < 10^{-3}$$

Braucht man die Funktionswerte von  $f(x) = \cos x$  in der Umgebung von  $x_0 = \pi/4$ , etwa für  $|x - \pi/4| < 1/10$  mit einer Genauigkeit von  $1/3 \cdot 10^{-3}$ , so entwickelt man in (7)  $\cos x$  an der Stelle  $x_0 = \pi/4$ . Die Abschätzung (8) zeigt, daß die zweite Näherung

$g_2 = 1/2 \sqrt{2} [1 - (x - \pi/4) - 1/2 (x - \pi/4)^2]$  gerade die geforderte Genauigkeit hat.

$$(7) \quad \begin{aligned} \cos x &= \cos(\pi/4) - (x - \pi/4) \sin(\pi/4) \\ &\quad - (1/2!) (x - \pi/4)^2 \cos(\pi/4) \\ &\quad + (1/3!) (x - \pi/4)^3 \sin[\pi/4 + \vartheta(x - \pi/4)] \\ &= 1/2 \sqrt{2} [1 - (x - \pi/4) - 1/2 (x - \pi/4)^2] \\ &\quad + (1/3!) (x - \pi/4)^3 \sin[\pi/4 + \vartheta(x - \pi/4)] \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} |f(x) - g_2(x)| &= 1/6 |x - \pi/4|^3 \cdot |\sin[\pi/4 + \vartheta(x - \pi/4)]| \\ &\leq 1/6 \cdot 10^{-3} < 1/5 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

III. Die Tabelle (S.371) enthält eine Übersicht über häufig verwendete N.n und ihren Anwendungsbereich. Die angegebenen Werte für  $|x|$  dürfen nicht überschritten werden, wenn der Fehler bei Benutzung der N.n nicht größer als  $10^{-3}$  werden soll.

Man erkennt, daß es in vielen Fällen für die Bedürfnisse der Praxis gar nicht erforderlich ist, mit tabellierten Funktionen zu arbeiten. Vor allem in der Technik genügt häufig eine N., wenn der Fehler kleiner als  $10^{-3}$  bleiben soll.

IV. Berechnung der Zahl  $e$ : Aus dem Taylorschen Satz gewinnt man für  $e^x$  die N.

$$g_n(x) = 1 + x/1! + x^2/2! + \dots + x^n/n!,$$

dabei gilt für  $0 \leq x \leq 1$  wegen  $1 < e^{\vartheta x} < 3$  die Abschätzung (9).

$$(9) \quad \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} < |e^x - g_n(x)| = \frac{e^{\vartheta x} x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Für  $x = 1$  ist folglich

$$1/(n+1)! < |e - g_n(1)| < 3/(n+1)!$$

Um gewisse Rundungsfehler zu vermeiden, soll  $e$  auf 7 Dezimalstellen genau berechnet werden, d. h., es soll  $|e - g(1)| < 10^{-8}$  sein. Man muß  $n = 11$  wählen, denn  $3/11! > 10^{-8}$  und  $3/12! < 10^{-8}$ . Man erhält  $g_{11}(1) = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/11! = 2,718281826 \dots$  Aus der Abschätzung (9) für  $x = 1$  und für  $n = 11$  folgt dann  $2,718281828 \dots < e < 2,718281832 \dots$  Die Zahl  $e$  ist danach auf 7 Dezimalstellen genau  $e = 2,7182818 \dots$  Ebenso verfährt man bei der Berechnung anderer Funktionswerte der Funktion  $f(x) = e^x$ . Der Wert für 20 Dezimalen ist  $e = 2,71828182845904523536 \dots$

V. Berechnung der Zahl  $\pi$ : Die Reihe (10) für  $\arctan x$  ist für  $|x| < 1$  und nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium auch noch für  $x = 1$  konvergent, so daß sich aus dem Abelschen Stetigkeitssatz ( $\nearrow$  Po-

$$(10) \quad \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$(11) \quad g_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

tenzreihe VIII.) die Reihe

$$\arctan 1 = \pi/4 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / (2k+1)$$

ergibt, nach der  $\pi$  berechnet werden kann. Mit (11)

Häufig verwendete Näherungsformeln

Funktion	1. Näherung	zusätzlicher Summand bei 2. Näherung	Fehler < 10 <sup>-3</sup> für  x  ≤	
			bei 1. N.	bei 2. N.
1/(1 + x)	1 - x	+x <sup>2</sup>	0,031	0,096
1/(1 + x) <sup>2</sup>	1 - 2x	+3x <sup>2</sup>	0,018	0,063
1/(1 + x) <sup>3</sup>	1 - 3x	+6x <sup>2</sup>	0,012	0,046
$\sqrt[3]{1+x}$	1 + x/2	-x <sup>2</sup> /8	0,087	0,25
$\sqrt[3]{1+x}$	1 + x/3	-x <sup>2</sup> /9	0,095	0,25
$\sqrt[4]{1+x}$	1 + x/4	-3x <sup>2</sup> /32	0,10	0,24
1/ $\sqrt{1+x}$	1 - x/2	+3x <sup>2</sup> /8	0,052	0,14
1/ $\sqrt[3]{1+x}$	1 - x/3	+2x <sup>2</sup> /9	0,065	0,17
(1 + x)/(1 - x)	1 + 2x	+2x <sup>2</sup>	0,022	0,077
[(1 + x)/(1 - x)] <sup>2</sup>	1 + 4x	+8x <sup>2</sup>	0,011	0,043
$\sqrt{(1+x)/(1-x)}$	1 + x	+x <sup>2</sup> /2	0,043	0,12
sin x	x	-x <sup>3</sup> /6 *	0,18	0,63
sin <sup>2</sup> x	0	+x <sup>2</sup>	0,031	0,23
cos x	1	-x <sup>2</sup> /2	0,044	0,39
cos <sup>2</sup> x	1	-x <sup>2</sup>	0,031	0,23
tan x	x	+x <sup>3</sup> /3 *	0,14	0,38
arcsin x	x	+x <sup>3</sup> /6 *	0,18	0,42
arccos x	π/2 - x	-x <sup>3</sup> /6 *	0,18	0,42
arctan x	x	-x <sup>3</sup> /3 *	0,14	0,35
arccot x	π/2 - x	+x <sup>3</sup> /3 *	0,14	0,35
e <sup>x</sup>	1 + x	+x <sup>2</sup> /2	0,044	0,17
ln(1 + x)	x	-x <sup>2</sup> /2	0,044	0,14
lg(1 + x)	0,434 29 x	-0,217 15 x <sup>2</sup>	0,069	0,20
sinh x	x	+x <sup>3</sup> /6 *	0,18	0,65
cosh x	1	+x <sup>2</sup> /2	0,044	0,39
tanh x	x	-x <sup>3</sup> /3 *	0,14	0,38
arsinh x	x	-x <sup>3</sup> /6 *	0,18	0,43
artanh x	x	+x <sup>3</sup> /3 *	0,14	0,37

Die mit \*) gekennzeichneten Formeln geben bereits die dritte Näherung an.

als N. in dem Intervall 1/2 < x ≤ 1 läßt sich durch |arctan x - g<sub>2n+1</sub>(x)| < 1/(2n + 3) der Fehler abschätzen. Soll π auf 7 Stellen genau berechnet werden, so muß man n so wählen, daß |π/4 - g<sub>2n+1</sub>(1)| < 10<sup>-8</sup> ausfällt. Für n = 49 999 999 wird diese Genauigkeit erreicht. Der Rechenaufwand, um g<sub>49 999 999</sub>(1) zu berechnen, ist aber viel zu hoch. Die Ausgangsreihe für x = 1/√3 liefert nach (12) schon eine rascher konvergierende

$$(12) \quad \pi/6 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)(\sqrt{3})^{2k+1}}$$

Reihe zur Berechnung von π. Noch bessere Reihen zur Berechnung von π erhält man z. B. aus der Formel (13), indem man alle arctan-Werte in Reihen

$$(13) \quad \pi = 48 \arctan(1/18) + 32 \arctan(1/57) - 20 \arctan(1/239)$$

entwickelt. Mit dieser Formel gab C. F. GAUSS π = 3,141 5926 ... auf 7 Stellen genau an. Nach der Gaußschen Formel (13) und einer entsprechenden anderen wurde 1961 die Zahl π auf 100 265 Dezimal-

stellen auf zwei elektron. Rechenmaschinen zur gegenseitigen Kontrolle berechnet.

VI. Zur Berechnung von Wurzelausdrücken benutzt man die binom. Reihe (14) (↗ Entwicklung von

$$(14) \quad (1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$$

Funktionen, s. a. Wurzelziehen in R II.), die für |x| < 1 konvergent ist. Aus der N. (14a) ergibt sich die Fehlerabschätzung (15).

$$(14a) \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \dots + \binom{a}{n} x^n$$

$$(15) \quad |(1+x)^a - g_n(x)| = \left| \binom{a}{n+1} \cdot |x|^{n+1} (1+\vartheta x)^{a-n} \right|$$

Soll z. B.  $\sqrt[3]{220}$  auf 4 Dezimalen genau berechnet werden, so formt man zunächst laut (16) um. Benutzt man dann die zweite Näherung g<sub>2</sub>(1/54)



$= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{54} - \frac{1}{9} \cdot (\frac{1}{54})^2$ , so zeigt die Abschätzung (17), daß die gewünschte Genauigkeit erreicht wird. Man erhält  $g_2(\frac{1}{54}) = 1,006134 \dots$  und damit  $\sqrt[3]{220} = 6,036804 \dots$

$$(16) \quad \sqrt[3]{220} = 6 \sqrt[3]{220/6^3} = 6 \sqrt[3]{1 + 1/54}$$

$$(17) \quad \left| \sqrt[3]{1 + 1/54} - g_2(1/54) \right| \\ = \left| \binom{3}{3} \cdot (\frac{1}{54})^3 \cdot (1 + \vartheta/54)^{1/3-2} \right| \\ < (10/3^4) \cdot (1/54)^3 < 10^{-5}$$

Zur Berechnung von  $\sqrt[3]{98}$  nimmt man von den mögl. Umformungen die Beziehung (18a), da  $\frac{1}{50} < \frac{1}{61}$  und die N.  $g_2(x)$  um so genauer ist, je kleiner  $|x|$  ist. Man erhält den Näherungswert  $\sqrt[3]{98} = 9,8995 \dots$

$$(18) \quad \sqrt[3]{98} = 9 \sqrt[3]{1 + 17/81}$$

$$(18a) \quad \sqrt[3]{98} = 10 \sqrt[3]{1 - 1/50}$$

Um für  $\sqrt[3]{A}$  eine geeignete Umformung zu finden, die auf eine möglichst rasch konvergierende Reihe führt, erweitert man den Radikanden mit  $(s/t)^p$ , wobei  $s/t \approx \sqrt[3]{A}$  ist. Dann ist der Radikand  $A(t/s)^p$  in (19) annähernd gleich 1, und folglich  $|B| \ll 1$ , z. B. ist  $\sqrt{2} \approx 1,4 = \frac{7}{5}$ , demnach  $\sqrt{2} = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{25}{49}} \cdot 2 = \frac{7}{5} \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$  und bereits mit  $g_1(\frac{1}{49})$  erhält man die recht gute Näherung  $\sqrt{2} = 1,414 \dots$

$$(19) \quad \sqrt[3]{A} = (s/t) \sqrt[3]{(t/s)^p \cdot A} = (s/t) \sqrt[3]{1 + B}$$

NAND-Glied  $\nearrow$  Übertragungsglied III.

Nano  $\nearrow$  Strecke V.

Napier  $\nearrow$  Neper.

n-är  $\nearrow$  Relation III.

**natürliche Gleichungen:** Gleichungen  $k = k(s) \geq 0$ , und  $\tau = \tau(s)$  einer Kurve  $x = x(s)$ , die die drei Größen Krümmung  $k$ , Torsion  $\tau$ , Bogenlänge  $s$  in Beziehung zueinander setzen. Für jede Kurve  $C$  sind diese drei Größen  $k$ ,  $\tau$ ,  $s$  invariant gegenüber euklid. Bewegungen im Raum und gegenüber Parametertransformationen der Kurve  $x = x(t)$ . Die Krümmung  $k(s)$  und die Torsion  $\tau(s)$  sind in dem Sinne ein *vollständiges Invariantensystem*, als sich zu beliebig vorgegebenen stetigen Funktionen  $k = k(s) \geq 0$  und  $\tau = \tau(s)$  die Parameterdarstellung einer bis auf euklid. Bewegungen eindeutig bestimmten Kurve  $C$  durch Integration so bestimmen läßt, daß  $k(s)$  ihre Krümmung und  $\tau(s)$  ihre Torsion sind.

**natürliche Größenordnung**  $\nearrow$  Relation II.

**natürlicher Logarithmus**  $\nearrow$  Logarithmus I.,  $\nearrow$  Logarithmensystem I.

**natürlicher Parameter**  $\nearrow$  Bogenlänge.

**natürliche Zahlen  $\mathbf{N}$ :** I. Bereich der Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., der axiomatisch charakterisiert werden kann durch das *Peanosche Axiomensystem*. — Die n. Z. lassen sich auch mengentheoretisch begründen: Führt man im System  $E$  aller endl. Mengen über

einem gegebenen unendlichen Grundbereich  $E$  die Äquivalenzrelation  $\sim$  der Gleichmächtigkeit ein, so erhält man die natürl. *Kardinalzahlen* als Äquivalenzklassen von  $E$  nach  $\sim$ , die ein Modell für das Peanosche Axiomensystem bilden.

II. Die *Addition* n. Z. läßt sich auf der Grundlage der Peanoschen Axiome induktiv definieren durch  $n + 0 = n$  und  $n + m' = (n + m)'$  für beliebige  $n, m \in \mathbf{N}$ , denn es gibt genau eine Operation in  $\mathbf{N}$ , die diesen rekursiven Gleichungen genügt. Die Addition n. Z. ist assoziativ und kommutativ und hat die Zahl 0 als neutrales Element. Folglich ist  $(\mathbf{N}, +)$  eine kommutative *Halbgruppe*. Beim mengentheoret. Aufbau von  $\mathbf{N}$  pflegt man die Addition natürl. Kardinalzahlen  $m, n$  durch die Vereinigung disjunkter Repräsentanten von  $m$  und  $n$  zu erklären.

III. Als *Multiplikation* n. Z. führt man die eindeutig bestimmte zweistellige Operation in  $\mathbf{N}$  ein, die den Rekursionsgleichungen  $n \cdot 0 = 0$  und  $n \cdot m' = n \cdot m + n$  genügt. Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ und hat die natürl. Zahl  $0' = 1$  als neutrales Element. Folglich bildet auch  $(\mathbf{N}, \cdot)$  eine kommutative *Halbgruppe*. Da Addition und Multiplikation über das Distributivgesetz  $k(m + n) = km + kn$  zusammenhängen, ist  $(\mathbf{N}, +, \cdot)$  ein kommutativer *Halbring*. Bei der mengentheoret. Begründung der n. Z. führt man die Multiplikation durch das kartes. Produkt von Mengen ein, die natürl. Kardinalzahlen repräsentieren.

IV. Mit Hilfe der Definition  $m \leq n$  genau dann, wenn  $m + k = n$  für ein  $k \in \mathbf{N}$  und  $m, n \in \mathbf{N}$  gilt, kann man in  $\mathbf{N}$  eine *Ordnungsrelation* einführen, bzgl. der  $\mathbf{N}$  eine vollständig geordnete Menge ist. Diese Ordnungsrelation ist mit der Addition und der Multiplikation verträglich, denn es gelten die *Monotoniegesetze* für alle  $n, m, k \in \mathbf{N}$ :

Aus  $m \leq n$  folgen  $m + k \leq n + k$  und  $mk \leq nk$ . In bezug auf diese Ordnungsrelation gibt es in jeder nichtleeren Teilmenge von  $\mathbf{N}$  eine eindeutig bestimmte kleinste Zahl, und jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbf{N}$  hat eine eindeutig bestimmte größte Zahl. Bei der mengentheoret. Begründung von  $\mathbf{N}$  führt man die Ordnungsrelation über die Inklusionsrelation von Mengen ein.

Zur Darstellung der n. Z. s. a. Zahlensystem.

**n-dimensionaler reeller Punktraum:** die Produktmenge  $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$ , wenn  $\mathbf{R}$  die Menge aller reellen Zahlen ist. Jedes Element  $P$  von  $\mathbf{R}^n$  ist demnach ein *n-Tupel* reeller Zahlen,  $P = (x_1, \dots, x_n)$ , und wird *Punkt* des  $\mathbf{R}^n$  gen. Die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  heißen seine *Koordinaten*. Zwei Punkte  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sind genau dann identisch, wenn  $x_i = y_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt. Für  $n = 2$  bzw.  $n = 3$  erhält man Punkträume, deren Elemente den Punkten einer Ebene bzw. den Punkten des Anschauungsraumes eineindeutig zugeordnet werden können, falls man dort ein Koordinatensystem einführt. Jedem Punktepaar  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  kann durch  $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$  eine reelle Zahl als *euklid. Abstand* zuge-

ordnet werden, der folgende Bedingungen erfüllt:

- (1)  $d(P, Q) \geq 0$  für jedes Paar  $P, Q \in \mathbb{R}^n$
- (2)  $d(P, Q) = 0$  genau dann, wenn  $P = Q$
- (3)  $d(P, Q) = d(Q, P)$
- (4)  $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$   
für je drei Elemente  $P, Q, R$  des  $\mathbb{R}^n$

Die Dreiecksungleichung (4) kann durch vollständige Induktion auf mehr als 3 Elemente  $P_i$  mit  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  erweitert werden; man erhält (4a).

$$(4a) \quad d(P_1, P_n) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + \dots + d(P_{n-1}, P_n)$$

Zusammen mit dieser Abstandsfunktion  $d(P, Q)$  bildet der  $n$ -dimensionale Punktraum einen metr. Raum ( $\nearrow$  Raum, metrischer II.).

Unter einer  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(P_0)$  eines Punktes  $P_0$  versteht man die Menge aller Punkte  $P \in \mathbb{R}^n$ , für die gilt  $d(P_0, P) < \varepsilon$ . Für  $n = 1$  ist eine  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $P_0$  ein offenes Intervall, für  $n = 2$  das Innere eines Kreises mit dem Radius der Länge  $\varepsilon$ , für  $n = 3$  das Innere einer Kugel mit dem gleichen Radius. — Ist  $M$  eine Punktmenge des  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $P$  ein innerer Punkt von  $M$ , wenn eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  existiert, so daß  $U_\varepsilon(P) \subseteq M$  gilt. Die Menge aller inneren Punkte von  $M$  wird mit  $I(M)$  bezeichnet und heißt das Innere der Menge  $M$ . Gilt  $I(M) = M$ , so nennt man  $M$  eine offene Menge. Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder eine offene Menge. Auf der reellen Zahlengeraden ist jedes offene Intervall eine offene Menge. Die Komplemente offener Mengen heißen abgeschlossene Mengen. Zu ihnen gehören alle abgeschlossenen Intervalle der reellen Zahlengeraden. Halboffene Intervalle sind weder offen noch abgeschlossen. Die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder eine abgeschlossene Menge.

**n-dimensionales Maß** swv. Lebesguesches Maß.

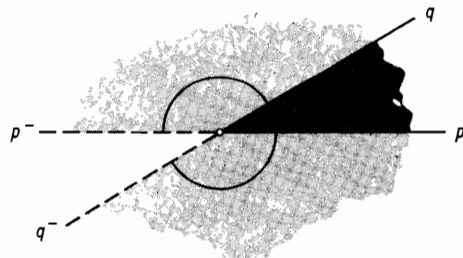
**Nebenachse**  $\nearrow$  Ellipse I.

**Nebenbedingung:** einschränkende Voraussetzung für eine oder mehrere Variable,  $\nearrow$  Optimierung I. S. a. Variationsrechnung IV.

**Nebenklasse**  $\nearrow$  Gruppe II.

**Nebenseitel**  $\nearrow$  Ellipse I.

**Nebenseitelkreis**  $\nearrow$  Ellipse IV.,  $\nearrow$  Ellipsenkonstruktionen II.



Die Nebenwinkel  $\sphericalangle(p, q^-)$  und  $\sphericalangle(p^-, q)$  zum Winkel  $\sphericalangle(p, q)$

**Nebenwinkel:** jeder der beiden Winkel  $\sphericalangle(p^-, q)$  und  $\sphericalangle(p, q^-)$  bzgl. des Winkels  $\sphericalangle(p, q)$ . Zu jedem Winkel, der nicht überstumpf und nicht Vollwinkel ist, gibt es genau zwei N. Jeder der beiden N. ist Supplementwinkel zum gegebenen (Abb.).

**n-Eck Vieleck, Polygon:** geschlossener Streckenzug  $A_1A_2\dots A_n$ , der *windschief* heißt, falls die  $n$  Eckpunkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nicht in einer Ebene liegen. Ein *ebenes n-Eck*, das *nicht einfach* ist, heißt *überschlagen*, wenn zwei nicht aufeinander folgende Strecken einen Punkt gemeinsam haben, es heißt *nicht überschlagen*, wenn eine Ecke auf einer ihr nicht unmittelbar vorangehenden Strecke liegt

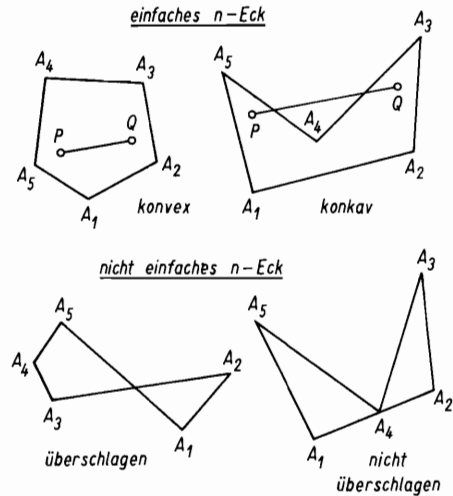


Abb. 1: Einteilung der  $n$ -Ecke

(Abb. 1). Im folgenden werden nur *einfache, ebene n-Ecke* betrachtet. Ein solches  $n$ -Eck teilt die Ebene in zwei Gebiete, die durch die Strecken zwischen den Eckpunkten, die *Seiten* des  $n$ -Ecks heißen, getrennt werden. Das eine Gebiet wird das *Innere*, das andere das *Außere* des  $n$ -Ecks gen. In einem *konvexen n-Eck* enthält die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte des Inneren nur Punkte dieses Gebietes. Ist das  $n$ -Eck nicht konvex, heißt es *konkav*.

**II.** Das System aus dem Inneren des  $n$ -Ecks und dem geschlossenen Streckenzug heißt *Fläche* des  $n$ -Ecks. Zuweilen wird auch dieses System selbst als  $n$ -Eck bezeichnet. Die Länge des einfachen geschlossenen Streckenzugs nennt man *Umfang* des  $n$ -Ecks, eine Verbindungsstrecke zweier seiner Ecken, die keine Seite ist, *Diagonale*. Danach kann jede Ecke mit  $(n - 3)$  anderen durch eine Diagonale verbunden werden, es gibt deshalb  $d_n = n(n - 3)/2$  Diagonalen, die im konvexen  $n$ -Eck im Innern liegen. Im konvexen  $n$ -Eck ist auch der *Innenwinkel*, dessen Scheitel mit dem Eckpunkt zusammenfällt, als Winkel der von ihm ausgehenden Seiten eindeutig mit einer Größe kleiner als  $180^\circ$  bestimmt. In seiner offenen Winkelfläche liegt das  $n$ -Eck. Jeder seiner beiden Nebenwinkel heißt *Außenwinkel* des

$n$ -Ecks bzgl. dieser Ecke. Jedes  $n$ -Eck hat genau  $n$  Innenwinkel;  $(n - 2) \cdot 180$  ist die Größe ihrer Summe, wie man sieht, wenn man das Innere des  $n$ -Ecks durch  $n$  Verbindungsstrecken jeder Ecke mit einem Punkt  $S$  aus dem Inneren des  $n$ -Ecks in  $n$  Dreiecke zerlegt.

III. In einem *regelmäßigen konvexen* einfachen ebenen  $n$ -Eck haben die  $n$  Seiten gleiche Länge  $s_n$  und die  $n$  Innenwinkel, auch *Eckenwinkel* gen., gleiche Größe  $\alpha$ . Aus  $n \cdot \alpha = (n - 2) \cdot 180^\circ$  erhält man  $\alpha = (n - 2) \cdot 180^\circ / n$ . Jedem regelmäßigen konvexen  $n$ -Eck läßt sich ein Kreis umschreiben, in dem die  $n$  Seiten Sehnen sind ( $\nearrow$  Galoissche Theorie,  $\nearrow$  Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal). Verbindet man den Mittelpunkt  $M$  dieses Kreises mit

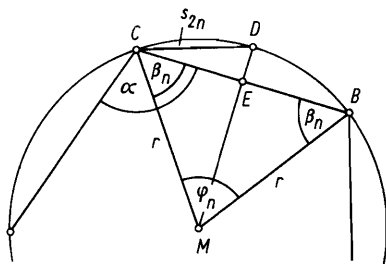


Abb. 2: Bestimmungsdreieck des regelmäßigen  $n$ -Ecks mit Innen- und Mittelpunktswinkel sowie Bestimmungsdreieck des regelmäßigen  $2n$ -Ecks

jeder der Ecken, so wird das  $n$ -Eck in  $n$  kongruente gleichschenklige Dreiecke, die *Bestimmungsdreiecke*, zerlegt, deren Basiswinkel die Hälfte der Größe  $\alpha$  des Eckenwinkels des  $n$ -Ecks und deren Schenkel die Länge  $r$  des Umkreisradius haben (Abb. 2). Der *Mittelpunktswinkel* jedes Bestimmungsdreiecks hat die Größe  $\varphi_n = 360^\circ / n$ . Nach  $s_n = 2r \sin(\varphi_n / 2)$  ist die Länge  $s_n$  der Seite aus  $r$  und  $\varphi_n$  eindeutig bestimmt. Aus der Seitenlänge  $s_n$  eines regelmäßigen konvexen  $n$ -Ecks läßt sich die Länge  $s_{2n}$  des regelmäßigen konvexen  $2n$ -Ecks konstruieren. Verlängert man das von  $M$  auf die Seite  $BC$  gefällte Lot  $ME$  bis zum Schnittpunkt  $D$  mit dem Umkreis, so ist  $|DC| = s_{2n}$  die Länge der gesuchten Seite des  $2n$ -Ecks. Sie läßt sich in den Schritten (1), (2) und (3) berechnen.

$$(1) |ME|^2 = r^2 - (s_n/2)^2 = 1/4 [4r^2 - s_n^2]$$

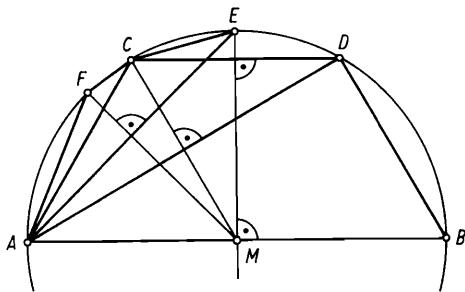
$$(2) |DE| = r - |ME| = r - 1/2 \sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

$$(3) (s_{2n})^2 = (s_n/2)^2 + |DE|^2 = 2r^2 - r \sqrt{4r^2 - s_n^2}$$

IV. Durch fortgesetztes Halbieren der Mittelpunktswinkel der Bestimmungsdreiecke durch Lote von  $M$  auf ihre Basis erhält man Folgen von  $n$ -Ecken mit jeweils doppelter Anzahl der Ecken, z. B. die *Dreiecksfolge*: Dreieck, Sechseck, 12-Eck, allgemein das  $3 \cdot 2^i$ -Eck für  $i = 1, 2, 3, \dots$  ( $\nearrow$  Sechseck); die *Vierecksfolge*: Viereck, Achteck, 16-Eck, allgemein das  $4 \cdot 2^i$ -Eck. Zur *Fünfecksfolge*  $\nearrow$  Zehneck. Mit dem Zehneck ist  $\varphi_{10} = 36^\circ$  bestimmt und damit

sind Winkel der Größen  $36^\circ - 30^\circ = 6^\circ$  und  $4 \cdot 6^\circ = 24^\circ$  konstruierbar, d. h. wegen  $360^\circ / 24^\circ = 15$  ein regelmäßiges 15-Eck.

V. Nach einer Konstruktion, die schon Leonardo DA VINCI gekannt haben soll, läßt sich aus dem regelmäßigen 6-Eck und dem 4-Eck das regelmäßige 24-Eck konstruieren, d. h. ein Mittelpunktswinkel der Größe  $360^\circ / 24 = 15^\circ$ . Man erhält durch Füllen von Loten (Abb. 3):  $s_6 = |AC| = |CD| = |DB|$ ,  $s_3 = |AD|$ ,  $s_{12} = |CE|$ ,  $s_4 = |AE|$ ,  $s_8 = |AF|$  und  $s_{24} = |FC|$ , da  $|\sphericalangle FMC| = |\sphericalangle AMC| - |\sphericalangle AMF| = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ . Mit noch nicht 19 Jahren fand GAUSS die Konstruierbarkeit des regelmäßigen 17-Ecks mit Zirkel und Lineal. Er fand die Kreisteilungsgleichung  $x^{17} - 1 = 0$ , aus deren Diskussion



$n$ -Eck. Abb. 3: Konstruktion des regelmäßigen 24-Ecks nach Leonardo DA VINCI

sich ergibt, daß die Kreislinie sich sicher dann, aber nicht nur dann, in  $n$  Bogen gleicher Länge teilen läßt, wenn der Exponent  $n$  in ihr eine Primzahl der Gestalt  $2^{2^k} + 1$  ist, mit  $k = 0, 1, 2, \dots$ . In der Tat erhält man  $n = 3$  für  $k = 0$ ,  $n = 5$  für  $k = 1$  und  $n = 17$  für  $k = 2$ . S. a. Viereck; Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.

Negation  $\nearrow$  Aussagenlogik II.

negative Rückführung  $\nearrow$  Regelung I.

Negator  $\nearrow$  Übertragungsglied III.

Neigungswinkel  $\nearrow$  Ebene IV.,  $\nearrow$  Eintafelprojektion,

$\nearrow$  Schraubenlinie I.,  $\nearrow$  Zweitafelprojektion II.

Neilsche Parabel  $\nearrow$  rationale Kurve I.

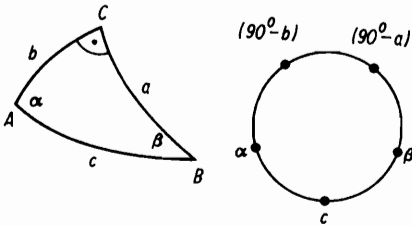
Nenner  $\nearrow$  Brüche I.

Neper, latinisierte Namensform von Napier, John, Lord of Merchiston, geb. 1550 und gest. 4. 4. 1617 Merchiston Castle (Edinburgh). — Der schott. Edelmann und Gutsbesitzer N. beschäftigte sich eingehend mit der Erleichterung numer. Rechnungen. Von ihm stammen die N.schen Rechenstäbe und die Einführung des Dezimalpunktes. Aus dem Versuch, die Multiplikation auf die Addition zu reduzieren, resultieren die *hyperbol.* und später mit BRIGGS die *dekad. Logarithmen.*

Neperische Analogien  $\nearrow$  sphärische Trigonometrie I.,  $\nearrow$  Tangenssatz II.

Neperische Regel: *Im rechtwinkligen sphär. Dreieck ist der Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Kotangens der anliegenden oder gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke, wenn man den rechten Winkel nicht mitzählt und die Katheten durch*

ihre Komplemente ersetzt bzw. für die Katheten die Kofunktionen wählt. Ist z. B.  $\gamma$  im Dreieck  $ABC$  der rechte Winkel (Abb.), so ergeben sich wegen  $\sin 90^\circ = 1$  und  $\cos 90^\circ = 0$  folgende Beziehungen:



Lage der Stücke zur Neperschen Regel

I. Aus dem Sinussatz  $\sin a = \sin \alpha \sin c / \sin \gamma$  und  $\sin b = \sin \beta \cdot \sin c / \sin \gamma$  folgen (1) und (2).

(1)  $\cos(90^\circ - a) = \sin \alpha \sin c$

(2)  $\cos(90^\circ - b) = \sin \beta \sin c$

II. Aus dem Seitenkosinussatz  $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$  folgt (3).

(3)  $\cos c = \sin(90^\circ - a) \sin(90^\circ - b)$

III. Aus dem Winkelkosinussatz  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$  oder  $\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b$  bzw.  $\cos \alpha = \sin \beta \cos a$  und  $\cos \beta = \sin \alpha \cos b$  folgen (4) und (5).

(4)  $\cos \alpha = \sin \beta \sin(90^\circ - a)$

(5)  $\cos \beta = \sin \alpha \sin(90^\circ - b)$

Durch Kombination aus diesen ergeben sich die weiteren Beziehungen (6), (7), (8), (9) und (10). Die N. R. ist die Zusammenfassung von (1) bis (10). Für ihre Anwendung vgl. sphärische Trigonometrie.

(6)  $\cos c = \cot \alpha \cot \beta$

(7)  $\cos \beta = \cot(90^\circ - a) \cot c$

(8)  $\cos \alpha = \cot(90^\circ - b) \cot c$

(9)  $\cos(90^\circ - a) = \cot(90^\circ - b) \cot \beta$

(10)  $\cos(90^\circ - b) = \cot(90^\circ - a) \cot \alpha$

S. a. sphärisches Dreieck V.

Nephroide ↗ Zykloide IV.

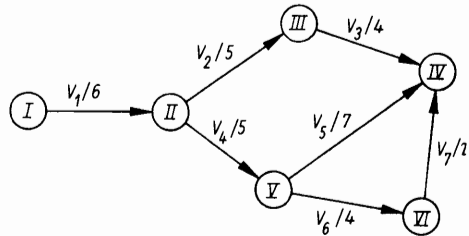
Netz ↗ Abwicklung, ↗ Körper V.

Netzplan ↗ Netzplantechnik I.

Netzplantechnik: I. Anwendungsgebiet einer Klasse von Methoden und Modellen zur Planung, Leitung und Kontrolle von Produktionsprozessen, die auf einem »Netzplan« basieren; die N. bedient sich dabei der Graphentheorie. Beim Bau einer Werkhalle sind z. B. folgende Arbeitsgänge oder Vorgänge zu unterscheiden, in denen die Zahlen hinter den Arbeitsgängen deren Zeitdauer als Anzahl einer geeigneten

$V_1$ — Errichtung der Fundamente und Montage der Stützen,	6
$V_2$ — Montage der Wandelemente,	5
$V_3$ — Außenputz,	4
$V_4$ — Montage der Dachkonstruktion,	5
$V_5$ — Innenausbau,	7
$V_6$ — Montage der Ausrüstung,	4
$V_7$ — Probelauf der Ausrüstung.	2

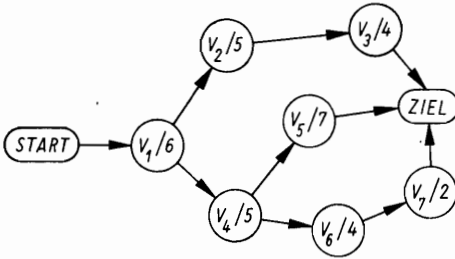
Zeiteinheit angeben. Der Ablauf ist in Abb. 1 an Hand eines gerichteten Graphen, eines Netzplans, dargestellt. Jedem Bogen ist ein Vorgang zugeordnet. Die Knotenpunkte heißen Ereignisse, die Bögen Pfeile. Aus dem Netzplan kann man die Beziehungen zwischen den Vorgängen ablesen: Daß II Zielpunkt von  $V_1$  und Startpunkt von  $V_2$  und  $V_4$  ist, bedeutet: Erst nach Beendigung von  $V_1$ , dem Errichten der Fundamente und der Stützen, können  $V_2$ , die Montage der Wandelemente, und  $V_4$ , die Montage der Dachkonstruktion, begonnen werden, und zwar können  $V_2$  und  $V_4$  parallel ablaufen. Daß VI Startpunkt von  $V_7$  ist, bedeutet: Erst nach Abschluß der Vorgangskette  $V_1, V_4, V_6$ , d. h. nach frühestens 15 Zeiteinheiten, kann der Vorgang  $V_7$  begonnen werden.



Netzplantechnik. Abb. 1: Netzplan, in dem jedem Bogen ein Vorgang zugeordnet ist

II. Ein gerichteter Graph, in dem jeder Pfeil einem Vorgang entspricht, heißt Vorgangspfeil-Netz.

Sind zwei Ereignisse  $i$  und  $j$  durch einen Pfeil ( $i, j$ ) verbunden, so findet das Ereignis  $j$  nach dem Ereignis  $i$  statt. Aus diesem Grunde kann ein Vorgangspfeil-Netz keine gerichteten Kreise enthalten. Um log. Zusammenhänge in Vorgangspfeil-Netzen richtig zu erfassen, sind zusätzl. Pfeile, die dann gestrichelt gezeichnet werden, einzuführen. Da ihnen die Zeitdauer 0 zugeordnet werden kann, heißen die ihnen entsprechenden Vorgänge Scheinvorgänge. Will man an Hand eines Vorgangspfeil-Netzes den Verbrauch gewisser Ressourcen, etwa von Material, untersuchen, so heißen Arbeitsgänge, in denen diese Ressourcen betrachtet werden, Aktivitäten. In Abb. 2 wurde der Ablauf beim Werkhallenbau dadurch dargestellt, daß den Vorgängen jetzt die Knotenpunkte zugeordnet sind. Ein gerichteter Graph, in dem jeder Knotenpunkt einem Vorgang zugeordnet ist, heißt Vorgangsknoten-Netz. Das Vorgangspfeil-Netz und das Vorgangsknoten-Netz werden unter dem Oberbegriff Netzplan zusammengefaßt. Einem Netzplan liegt ein kantenbewerteter bzw.

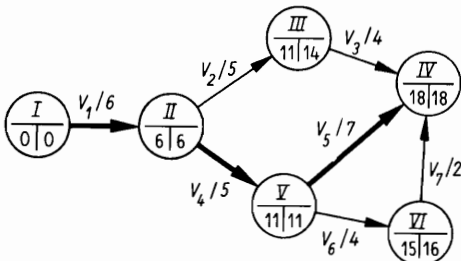


Netzplantechnik. Abb. 2: Vorgangs-Knoten-Netz für den Ablauf beim Werkhallenbau

knotenbewerteter gerichteter Graph ohne gerichtete Kreise zugrunde. Ein solcher Graph hat mindestens eine *Quelle* und eine *Senke*. Es läßt sich stets ein ihm entsprechender Graph konstruieren, der genau eine Quelle und genau eine Senke hat. Dazu geht man so vor, daß beim Auftreten von mehreren Quellen eine fiktive Quelle eingeführt und diese durch je einen Pfeil mit allen anderen Quellen verbunden wird, diesen Pfeilen wird die Dauer 0 zugeordnet. Im Vorgangs-Pfeil-Netz entsprechen diesen Pfeilen die *Scheinvorgänge*. Entsprechend wird bei mehreren Senken verfahren. Auf Grund des Vorangehenden bezeichnen auch manche Autoren jeden gerichteten kreisfreien Graphen mit genau einer Quelle und genau einer Senke schon als *Netzplan*.

III. In Abb. 3 wurde jede *frühestmögliche Anfangszeit* eines Ereignisses als erste Zahl unter der Knotennummer eingetragen. Sie wird an Hand des Vorgangs-Pfeil-Netzes berechnet und als Zeit für den Startpunkt wird 0 eingetragen. Der *frühestmögliche Anfangstermin* der Senke ist zugleich der *frühestmögliche Endtermin* des gesamten Projektes.

Von dem Endpunkt aus rückwärts gehend, sind die *spätestmögliche Anfangszeiten* berechnet und als zweite Zahl unter der Knotennummer eingetragen worden. Die *spätestmögliche Anfangszeit* eines Ereignisses *E* ist der Termin, an dem die Ausführung der in *E* entspringenden Vorgänge begonnen werden muß, wenn der Endtermin eingehalten werden soll. Die Differenz zwischen spätestem und frühestem Anfangstermin bezeichnet man als *Gesamt-Pufferzeit*. Ein Vorgang, dessen beide Endpunkte die Pufferzeit 0 haben, heißt *kritisch*, andernfalls heißt er



Netzplantechnik. Abb. 3: Vorgangs-Pfeil-Netz zur Berechnung der frühestmöglichen Anfangszeiten der Ereignisse

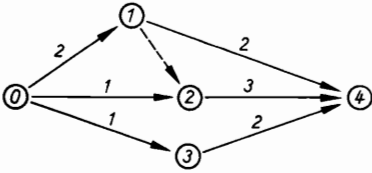
*nichtkritisch*. Vergrößert man die Dauer eines krit. Vorganges, etwa die von  $V_1$ , so wird die Gesamtdauer des Projektes größer; dagegen kann man die Dauer eines nichtkrit. Vorganges um eine gewisse Zeitspanne vergrößern, die von  $V_2$  etwa um drei Zeiteinheiten, ohne daß sich der Endtermin des gesamten Projektes verschiebt. Eine in der Quelle beginnende und in der Senke endende Bahn, die nur aus Pfeilen besteht, die krit. Vorgängen entsprechen, heißt *krit. Weg* des Netzplans. Die Kenntnis der krit. Wege in einem Netzplan ist wichtig, da die Vergrößerung der Dauer auch nur eines Vorganges auf diesem Weg sofort zu einem späteren Endtermin des Gesamtvorhabens führt.

IV. Zwischen dem Startereignis, der *Quelle*, und dem Zielergebnis, der *Senke*, läßt sich jeder Knoten *K* von der Quelle aus auf mindestens einem Weg erreichen. Die maximale Anzahl von Bögen, die von der Quelle bis *K* dabei durchlaufen werden müssen, wird als *Rang k* des Knotens bezeichnet. Der Rang kann nach einem Iterationsverfahren, nach dem *Fordschen Algorithmus*, bestimmt werden. Numeriert man die Knoten nach dem wachsenden Rang, so ist für jeden Bogen die Nummer des Anfangsknotens niedriger als die des Endknotens.

Jedem Knoten wird außerdem die Dauer des jeweiligen Vorganges als *Bewertung* zugeordnet. Die Dauer eines Weges ist die Summe der Dauer aller zu ihm gehörender Bögen. Alle *Wege maximaler Dauer* von der Quelle zur Senke heißen *krit. Wege*, ihre Dauer *krit. Dauer*, die auf ihnen liegenden Bögen und Knoten bzw. die zugehörigen Vorgänge und Ereignisse *kritisch*. Die *krit. Dauer* des Netzplans bestimmt die kürzestmögliche Zeitspanne für die Realisierung des Gesamtvorhabens. Wird der *Anfangstermin* des Gesamtvorhabens 0 gesetzt, gibt sie den frühestmöglichen *Endtermin* an. Zur richtigen Darstellung der Abhängigkeit der Vorgänge untereinander müssen gelegentlich *Scheinvorgänge* eingeführt werden, die zugehörigen Bögen erhalten die Bewertung Null. Alle Knoten werden numeriert, 0 sei die Nummer der Quelle, *n* die der Senke. Für jeden Knoten werden die Werte der zwei Funktionen, der *früheste Termin FT* und der *späteste Termin ST* berechnet. Es gilt (1), wenn *R* die Menge der Bögen und  $D_{ij}$  die Dauer des Bogens (*i, j*) bezeichnen. *FT* für den Knoten *j* ergibt sich danach als der größte *FT*-Wert, wenn zu allen seinen unmittelbaren Vorgängern *i* jeweils  $D_{ij}$  addiert wird. Durch diese

$$(1) \quad FT_0 = 0, \quad FT_j = \text{Maximum}_{(i,j) \in R} (FT_i + D_{ij})$$

Funktionalgleichung (1) für  $j = 1, \dots, n$  ist *FT* eindeutig bestimmt und somit auch  $FT_n$  als *krit. Dauer*. Anschließend berechnet man *ST* als ebenfalls eindeutig bestimmte Lösung von (2). Praktisch werden beide Funktionen durch Iterationsverfahren bestimmt. Ein Knoten *K* ist genau bei  $FT_k = ST_k$  *kritisch*. Eine starke Vereinfachung tritt ein, wenn die Knoten des Netzplans nach ihrem Rang so numeriert werden, daß der Anfangsknoten jedes Bogens eine niedrigere Num-



Netzplantechnik. Abb. 4: Beispiel zur Berechnung des kritischen Weges für die Netzplanmatrix (3)

$$(2) \quad ST_n = FT_n, \\ ST_i = \text{Minimum}_{(i,j) \in E} (ST_j - D_{ij}) \quad \text{für } i \neq n.$$

mer als der Endknoten desselben Bogens hat. Dann kann  $FT$  erhalten werden, indem man (1) der Reihe nach für  $j = 1, 2, \dots, n$  und (2) für  $i = n - 1, n - 2, \dots, 0$  anwendet (Abb. 4).

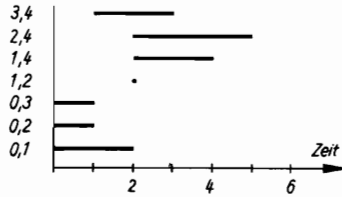
V. Die Berechnung, die bei prakt. Anwendungen meist mittels EDV-Anlagen durchgeführt wird, kann im Beispiel unmittelbar an der Netzplanmatrix (3) verfolgt werden, in der das Vorhandensein eines Bogens von  $i$  nach  $j$  durch Eintragen von  $D_{ij}$  am Kreuzungspunkt der  $i$ -ten Zeile mit der  $j$ -ten Spalte

		$j$					$FT_i$
(3)		0	1	2	3	4	
$i$	0		2	1	1		0
	1			0		2	2
	2					3	2
	3					2	1
	4						5
$ST_i$		0	2	2	3	5	

markiert wird. Die Werte  $D_{ij}$  werden oft übersichtlich in einem Gantt-Diagramm, auch Balkendiagramm gen., dargestellt durch die Länge von Strecken oder Balken parallel über dem betreffenden Intervall der Zeitachse (Abb. 5). Die Vorgänge im zeitl. Ablaufplan, auf die sich die  $D_{ij}$  beziehen, werden links in geordneter Folge angegeben. Für die Vorgänge  $(i, j)$  können berechnet werden:

- frühester Anfangstermin  $FAT_{ij} = FT_i$
- frühester Endtermin  $FET_{ij} = FT_i + D_{ij}$ ,
- spätester Anfangstermin  $SAT_{ij} = ST_j - D_{ij}$ ,
- spätester Endtermin  $SET_{ij} = ST_j$ ,
- gesamte Pufferzeit  $GP_{ij} = ST_j - FT_i - D_{ij}$ ,
- freie Pufferzeit  $FP_{ij} = FT_j - FT_i - D_{ij}$ ,
- unabhängige Pufferzeit  $UP_{ij} = \text{Max}(0; FT_j - ST_i - D_{ij})$ .

Die Pufferzeiten geben die ohne Gefährdung des Endtermins mögl. Verzögerung des Vorgangs  $(i, j)$  an, wenn die vorhergehenden bzw. die nachfolgenden Vorgänge zu den in Schema (4) angegebenen Terminen beginnen. Es gilt  $UP_{ij} \leq FP_{ij} \leq GP_{ij}$ .



Netzplantechnik. Abb. 5: Gantt-Diagramm zur graph. Darstellung eines zeitl. Ablaufplans

Die Vorgänge mit  $GP_{ij} = 0$  sind genau die kritischen. S. a. die Verallgemeinerungen PERT und MPM.

(4)	vorhergehende	nachfolgende
GP	FAT	SAT
FP	FAT	FAT
UP	SAT	FAT

VI. In den Jahren 1957—1960 wurden die ersten Verfahren zur Aufstellung und Berechnung von Netzplänen entwickelt. Diese Methoden tragen die Bezeichnungen »Critical Path Methods«, abgekürzt CPM [Methode des kritischen Weges], »Program Evaluation and Review Techniques«, abgekürzt PERT, [Technik der Programmbewertung und Programmprüfung oder Programmplanungs- und -überwachungstechnik] und die »Metra-Potential-Methoden«, 1960, abgekürzt MPM. Heute ist eine Vielzahl von Methoden bekannt, die teilweise durch Variation der drei eben gen. Methoden entstanden sind.

Netztafel ↗ Nomographie III.

Netzwerk: I. ein ungerichteter bzw. gerichteter Graph, der dadurch bewertet wird, daß jeder Kante bzw. jedem Bogen eine meist reelle Zahl zugeordnet wird, die aber, z. B. in der Elektrotechnik, auch komplex sein kann. Als Beispiel diene das folgende Problem. Ordnet man  $n$  gegebene Städte den  $n$  Knotenpunkten eines vollständigen  $n$ -Ecks zu, so kann die Bewertung in der Angabe der Entfernung zwischen den Städten bestehen. In einem solchen  $N$ . kann das Rundreiseproblem oder das der Bestimmung eines Minimalgerüsts untersucht werden. Im Beispiel besteht das Rundreiseproblem darin, die kürzeste Reise eines Handlungsreisenden oder eines Lieferwagens zu bestimmen, die im gleichen Ort endet, in dem sie begann, und keinen Ort ausläßt. Allgemein ist in dem bewerteten ungerichteten Graphen eine Hamilton-Linie  $H$  kleinster Länge (↗ Durchlaufung eines Graphen I.) zu finden, dabei bedeutet hier die Länge der Hamilton-Linie  $H$  die Summe über diejenigen reellen Zahlen, die den Kanten von  $H$  zugeordnet sind. Zur Lösung dieses Problems wurden verschiedene Algorithmen entwickelt, z. B. der Branch-and-Bound-Algorithmus (↗ Verzweungsverfahren) oder das Erweiterungsprinzip von M. SCHOCH.

II. Beim zweiten Problem sollen im Beispiel die  $n$  gegebenen Städte durch ein Kanalsystem kürzester Gesamtlänge verbunden werden. Bei Fernsprechanlagen etwa sind die Verbindungsstellen mehrerer Kanäle wichtige Punkte, die nur in Städten untergebracht werden können. Diese Städte sind dann die Knotenpunkte des gesuchten Kanalnetzes. Das Kanalnetz muß zusammenhängend sein, und da es eine minimale Länge haben soll, dürfen keine Kreise auftreten: Es ist ein *Baum*. Hier geht es mithin darum, ein Gerüst kleinster Länge, d. h. ein *Minimalgerüst*, in einem bewerteten zusammenhängenden Graphen zu finden, im vorliegenden Falle in einem bewerteten vollständigen Graphen. J. B. KRUSKAL hat einen *Algorithmus für das Problem des Minimalgerüsts* angegeben. Man geht zu seiner Bestimmung in der Art schrittweise vor, daß bei jedem Schritt eine kürzeste Kante ausgewählt wird, die mit den schon ausgesuchten Kanten keine Zyklen bildet. Die Menge  $V = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  erhält man danach dadurch, daß man für  $v_1$  eine kürzeste Kante des Graphen nimmt, für  $v_2$  eine kürzeste Kante derart, daß  $v_2 \neq v_1$  ist und daß  $\{v_1, v_2\}$  keinen Kreis enthält, für  $v_3$  eine kürzeste Kante derart, daß  $v_3 \neq v_1, v_3 \neq v_2$  ist und daß  $\{v_1, v_2, v_3\}$  keinen Kreis enthält, usw. Stehen bei einem Schritt mehrere gleichlange kürzeste Kanten zur Verfügung, so wähle man eine davon beliebig aus. Es läßt sich leicht zeigen, daß alle so gewonnenen Gerüste Minimalgerüste sind.

Wird — etwa aus Gründen der Betriebssicherheit — ein Kanalnetz gewünscht, in dem zwischen je zwei Städten zwei verschiedene Kanalwege verlaufen, die beide nur die Endpunkte gemeinsam haben, so besteht die Aufgabe jetzt — allgemein gesprochen — darin, in einem vorgegebenen bewerteten zweifach-zusammenhängenden Graphen, — hier in einem vollständigen Graphen — einen zweifach-zusammenhängenden Untergraphen minimaler Länge zu finden. Während für das Problem des Minimalgerüsts mehrere einfache effektive Algorithmen bekannt sind, konnte ein solcher für das letzte Problem noch nicht gefunden werden.

III. Betrachtet man die Aufgabe,  $n$  vorgegebene Städte durch ein möglichst kurzes, billiges oder kostengünstiges Straßennetz zu verbinden, so dürfen Straßenkreuzungen naturgemäß auch außerhalb der Städte liegen. Dem gesuchten Straßennetz entspricht ein Baum, der zwei Arten von Knotenpunkten enthält, einmal die als *Festpunkte* bezeichneten Knotenpunkte, die den  $n$  Städten entsprechen und deren Lage fest vorgegeben ist, und zum anderen die Knotenpunkte, die den Kreuzungen außerhalb der Städte entsprechen. Ihre Lage ist bei der Lösung der Aufgabe zu ermitteln. Nach STEINER werden sie *Steiner-Punkte* gen. Die oben formulierte Aufgabe stellt ein sog. *Steiner-Weber-Problem* dar. Für die Lösung dieses Problems wurde ein effektiver Algorithmus bisher nicht gefunden, aber es gibt bereits Teillösungen.

Eng verwandt mit dem *Steiner-Weber-Problem* ist das *Manhattan-Problem*. Es fordert in einem bewerteten ungerichteten zusammenhängenden Graphen

$G$ , in dem  $s$  Knotenpunkte ausgezeichnet sind, unter allen kreisfreien zusammenhängenden Untergraphen von  $G$ , d. h. unter den Bäumen, die diese  $s$  Knotenpunkte enthalten, einen Untergraphen zu finden, der die kleinste Länge hat. Dieser minimale Baum enthält neben den  $s$  ausgezeichneten Knotenpunkten weitere Knotenpunkte, i. allg. aber nicht alle Knotenpunkte von  $G$ . Auch für dieses Problem ist bisher kein effektiver Algorithmus bekannt. Es ist sogar möglich, daß ein effektiver Algorithmus gar nicht existiert.

Neumann, Carl Gottfried, geb. 7. 5. 1832 Königsberg (Kaliningrad), gest. 27. 3. 1925 Leipzig. — N. studierte 1850/55 und promovierte 1856 in Königsberg. Er lehrte als Professor an den Universitäten Halle, Basel, Tübingen und Leipzig (seit 1868). N. lieferte wesentl. Beiträge zur *Potentialtheorie*, z. B. die N.sche Potentialfunktion als Lösung der Randwertaufgaben. Auch die N.sche Reihe wurde nach ihm ben.

Neumann, Johann von, geb. 28. 12. 1903 Budapest, gest. 8. 2. 1957 Princeton (USA). — Baron v. N. entstammt der österreich-ungar. Finanzaristokratie. Bei FEJÉR, der ihn für Mathematik interessiert hatte, promovierte er 1926 in Budapest und legte in Zürich die Diplomprüfungen für Physik und Chemie ab; 1931 wanderte er nach den USA aus und wurde Professor in Princeton. Er beteiligte sich aktiv an militär. Forschungen und an der Schaffung der Atombombe. N. verband stets die reine Mathematik mit prakt. Anwendungen, insbes. in der Physik und der Ökonomie. Sehr bedeutend sind seine Beiträge auf dem Gebiet der *Mengenlehre*, der *Topologie*, der *stetigen Gruppen*, der *Verbands-*, der *Maß-* und der *Operatorentheorie* einschließlich der Betrachtungen über *Algebren von Operatoren*, der *theoret. Physik*, der *Ökonomie* und der *Spieltheorie* und bei der Schaffung elektron. Rechenmaschinen.

Neumannsche Reihe  $\nearrow$  Integralgleichung II.

v. Neumannscher Minimax-Satz  $\nearrow$  Sattelpunkt I.

Neumannsches Problem  $\nearrow$  elliptische Differentialgleichung I.

Neunerprobe: Überprüfung der Richtigkeit einer Rechnung im Zehnersystem mittels der Reste einer Division durch 9. Die N. beruht darauf, daß aus  $a \equiv r_1 \pmod{9}$  und  $b \equiv r_2 \pmod{9}$  folgt  $a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{9}$ ,  $a - b \equiv r_1 - r_2 \pmod{9}$  und  $a \cdot b \equiv r_1 \cdot r_2 \pmod{9}$ . Die Reste  $r_1$  und  $r_2$  werden aus den *Quersummen* ( $\nearrow$  Teilbarkeit) bestimmt. Die N. für die Multiplikation  $13433 \cdot 53702 = 721\,378\,966$  ergibt für  $a = 13433$ ,  $b = 53702$  und  $ab = 721\,378\,966$  die Quersummen 14, 17 und 49 und damit  $a \equiv 5 \pmod{9}$ ,  $b \equiv 8 \pmod{9}$  und  $ab \equiv 4 \pmod{9}$ . Da auch  $5 \cdot 8 = 40 \equiv 4 \pmod{9}$ , ist das Ergebnis richtig bis auf Vielfache von 9. Ganz analog kann man eine *Elferprobe* machen, da man die Reste bei Division durch 11 mittels der *Querdifferenzen* findet. Im Beispiel haben  $a, b, ab$  die Querdifferenzen 2, 11, 11, d. h., es gilt  $a \equiv 2 \pmod{11}$ ,  $b \equiv 0 \pmod{11}$ ,  $ab \equiv 0 \pmod{11}$ , und  $2 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{11}$ . Folglich ist das angegebene Resultat für  $ab$  auch richtig bis auf Vielfache von 11 und daher wegen  $\text{ggT}(9, 11) = 1$  auch richtig bis auf Vielfache von 99.

**neutrales Element:** jedes Element  $n$  einer algebraischen Struktur  $A$ , in der die binäre Operation  $\circ$  erklärt ist, mit der Eigenschaft  $a \circ n = n \circ a = a$  für jedes Element  $a \in A$ . Sind in  $A$  mehrere binäre Operationen definiert, so spricht man genauer von einem n. E. bzgl. einer gewissen Operation. Ein n. E. bzgl. der Multiplikation wird häufig *Einheits-element* oder *Einelement*, ein n. E. bzgl. der Addition häufig *Nullelement* gen. Ist die betrachtete Operation nicht kommutativ, so unterscheidet man noch zwischen *linksneutralen Elementen*  $n_l$  mit  $n_l \cdot a = a$  und *rechtsneutralen Elementen*  $n_r$  mit  $a \cdot n_r = a$  für alle  $a \in A$ . S. a. Gruppe; Ring; Gruppentafel.

**Neutralität**  $\nearrow$  Aussagenlogik III.

**Newton, Isaac**, geb. 4. 1. 1643 Woolsthorpe (Lincolnshire), gest. 31. 3. 1727 London. — N. studierte seit 1660 am Trinity-College in Cambridge, bes. bei dem bedeutenden Mathematiker und Theologen I. BARROW. Nach Erwerb verschiedener akadem. Grade und einer Reihe wesentl. Entdeckungen wurde N. 1669 Nachfolger seines Lehrers in Cambridge, war seit 1672 Mitglied der Royal Society und seit 1703 ihr Präsident. 1688/1705 war er auch Parlamentsmitglied, seit 1696 Aufseher und seit 1701 Münzmeister der königl. Münze. — N.s Lebenswerk umfaßt neben theolog., alchemist. und chronologisch-histor. Schriften vor allem Arbeiten zur Optik und zur reinen und angewandten Mathematik. In seinen opt. Untersuchungen stellt er das Licht als Strom von Korpuskeln dar und deutet damit das Spektrum und die Zusammensetzung des Lichtes sowie die N.schen Farbenringe, Beugungserscheinungen und die Doppelbrechung. Sein Hauptwerk »*Philosophiae naturalis principia mathematica*« (Druck 1687) ist grundlegend für die Entwicklung der exakten Wissenschaften. Es enthält z. B. die Definitionen der wichtigsten Grundbegriffe der Physik, die drei *Axiome der Mechanik* makroskop. Körper, z. B. das Prinzip der „*actio est reactio*“, das *Gravitationsgesetz*, die Ableitung der Keplerschen Gesetze und die erste Veröffentlichung über Fluxionsrechnung. Auch Überlegungen zur *Potentialtheorie* und über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten stellte N. an. Die Ideen für das große Werk stammen vorwiegend aus den Jahren 1665/66, als N. vor der Pest aus Cambridge geflohen war.

In der Mathematik befaßte sich N. mit der Reihenlehre, z. B. 1669 mit der binom. Reihe, mit der Interpolationstheorie, mit Näherungsverfahren und mit der Klassifizierung kub. Kurven und der Kegelschnitte. Log. Schwierigkeiten konnte N. allerdings auch mit seiner 1704 ausführlich dargestellten Fluxionsrechnung nicht überwinden. — Sein Einfluß auf die Weiterentwicklung der mathemat. Wissenschaften ist schwer zu beurteilen, da N. außerordentlich ungern publizierte. Als N. z. B. seine Fluxionsrechnung allgemein bekannt machte, war seine Art der Behandlung von Problemen der Analysis gegenüber dem Kalkül von LEIBNIZ bereits veraltet. Bis ins 20. Jh. zog sich der Streit hin, ob ihm oder LEIBNIZ die Priorität für die Entwicklung der Infinitesimalrechnung gebühre. Detailunter-

suchungen haben gezeigt, daß jeder auf diesem Gebiet unabhängig vom anderen zu seinen Ergebnissen kam.

**Newton, Methode von**  $\nearrow$  nichtlineare Gleichungssysteme.

**Newton-Cotes-Formeln**  $\nearrow$  Integration, numerische, II., III.

**Newtonsche 3/8-Regel**  $\nearrow$  Integration, numerische, II.

**Newtonsche Relationen:** Zusammenhang zwischen den Potenzsummen und den elementarsymmetr. Funktionen,  $\nearrow$  Polynom IV.

**Newtonsches Gravitationsfeld**  $\nearrow$  Vektorfeld.

**Newtonsches Interpolationspolynom**  $\nearrow$  Interpolation I.2.

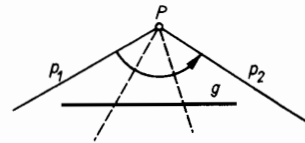
**Newtonsches Näherungsverfahren**  $\nearrow$  graphisches Lösen von Gleichungen I.

**Newtonsches Potential**  $\nearrow$  elliptische Differentialgleichung III.1.

**Newtonsches Verfahren**  $\nearrow$  Nullstellenberechnung III.

**Nichtbasisvariable**  $\nearrow$  Simplexalgorithmus I.

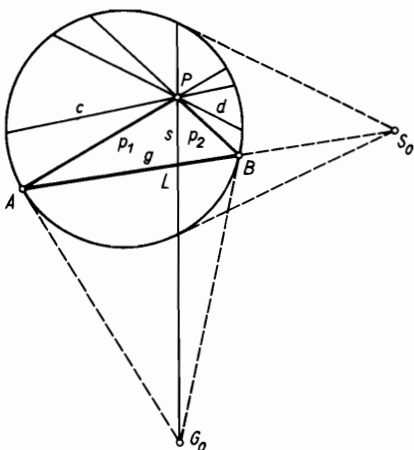
**nichteuklidische Geometrie:** I. eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt. — Die historisch erste n. G., die zwischen 1816 und 1832 unabhängig voneinander C. F. GAUSS, N. I. LOBATSCHEWSKI und J. BÓLYAI entwickelten, war die *hyperbol.* oder *Lobatschewskische Geometrie*. In ihr wird das Parallelenaxiom ersetzt durch die Aussage: *Ist  $g$  eine Gerade und  $P$  ein nicht auf  $g$  liegender Punkt, so gibt es in der durch  $P, g$  bestimmten Ebene zwei von  $P$  ausgehende Halbgeraden  $p_1, p_2$ , für die der Winkel  $\sphericalangle(p_1, p_2)$  kleiner als ein gestreckter Winkel ist, die beide  $g$  nicht schneiden, während jede von  $P$  innerhalb des Winkels  $\sphericalangle(p_1, p_2)$  ausgehende Halbgerade die Gerade  $g$  schneidet (Abb. 1).*



Nichteuklidische Geometrie. Abb. 1: Zur Aussage, die in der hyperbolischen Geometrie das Parallelenpostulat ersetzt

II. Beweise dafür, daß die hyperbol. Geometrie widerspruchsfrei ist, falls es die euklid. Geometrie ist, wurden durch euklid. Modelle der hyperbol. Geometrie erbracht, da in ihnen ein Widerspruch der hyperbol. Geometrie als Widerspruch der euklid. Geometrie auftreten würde. 1868 erkannte E. BELTRAMI, daß die ebene hyperbol. Geometrie auf der *Pseudosphäre* realisiert gedacht werden kann ( $\nearrow$  Traktrix), und 1870 fand F. KLEIN bei seinen Untersuchungen zur projektiven Geometrie ein *ebenes Modell* dieser Geometrie (Abb. 2). Er betrachtete die Punkte im Inneren eines Kreises als Punkte der hyperbol. Ebene und Sehnen des Kreises als Geraden dieser Ebene. Kennzeichnet man mit  $h$  die Namen der geometr. Gebilde dieser Ebene, so hat die  $h$ -Gerade  $g$  die uneigentl. Punkte  $A$  und  $B$ , d. h.

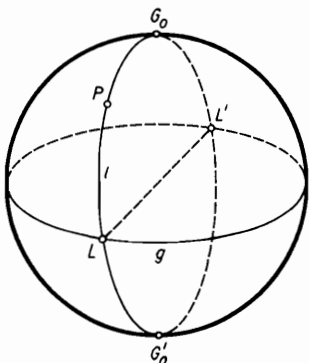




Nichteuklidische Geometrie. Abb. 2: Modell für eine hyperbol. Geometrie in einer projektiven Ebene nach F. KLEIN

aber in der projektiven Geometrie, daß die h-Geraden  $p_1$  oder  $PA$  und  $p_2$  oder  $PB$  Parallele zu  $g$  sind. Die h-Geraden  $c$  und  $d$  schneiden  $g$  nicht. Die h-Orthogonalität wird in der Weise auf die Polarität zurückgeführt, daß zwei h-Geraden, z. B.  $g$  und  $s$ , dann zueinander senkrecht stehen, falls jede durch den Pol der anderen geht. Sind  $G_0$  der Pol von  $g$  und  $S_0$  der von  $PG_0$  oder  $s$ , so ist  $L = g \cap s$  der Fußpunkt des von  $P$  auf  $g$  gefällten h-Lotes.

III. Ein Modell für die ebene ellipt. Geometrie erhält man aus der Betrachtung der sphär. Geometrie auf einer Kugeloberfläche. Als el-Punkt gilt jeweils ein Paar sich diametral gegenüberliegender Punkte der Kugeloberfläche, als el-Gerade der Großkreis, der durch zwei sich nicht diametral gegenüberliegender Punkte der Kugeloberfläche eindeutig bestimmt ist. Der Pol  $G_0$  von  $g$  ist das Paar einander diametral gegenüberliegender Kugelpunkte, die vom Großkreis  $g$  den sphär. Abstand  $\pi/2$  haben. Das von einem el-Punkte  $P$  auf eine el-Gerade  $g$  gefällte Lot  $l$  ist der Großkreis, der  $P$  und den Pol  $G_0$  von  $g$  enthält (Abb. 3). Sein Fußpunkt  $L$  ist der Schnittpunkt der Großkreise  $g$  und  $l$ . Die Summe der Größen der Innenwinkel eines sphär. Dreiecks ist



Nichteuklidische Geometrie. Abb. 3: Modell einer ellipt. Geometrie auf der Kugeloberfläche

größer als  $\pi$  und der Überschuß, der sphär. Exzess, ist dem Flächeninhalt des Dreiecks proportional.

IV. Die Entwicklung der hyperbol. und der ellipt. Geometrie schlossen die jahrtausendelangen Untersuchungen zum Parallelenaxiom ab und leiteten moderne Untersuchungen zum axiomat. Aufbau der Geometrie ein. Dabei ergab sich, daß genau dann in allen drei Arten von Geometrie, in der euklid., der hyperbol. oder der ellipt. Geometrie, Widersprüche auftreten, wenn dies in einer von ihnen der Fall ist. Daher sind alle diese Geometrien mathematisch gleichwertig; die Frage, welche geometr. Verhältnisse in der uns umgebenden Realität vorliegen, ist eine physikal. Frage geworden.

**NICHT-Glied**  $\nearrow$  Übertragungsglied III.  
**nichthebbare Unstetigkeit**  $\nearrow$  Stetigkeit II.4.,  $\nearrow$  Stetigkeit einer Funktion I.

**nichtklassisches Variationsproblem**  $\nearrow$  Variationsrechnung IV.

**Nichtkreativität**  $\nearrow$  Definition.

**nichtlineare Gleichungssysteme:** Gleichungssysteme der Form (1) mit Funktionen  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$

$$(1) \left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} f(x) = 0$$

von  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  über einem gemeinsamen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , zur Abkürzung wurde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  gesetzt. Spezialfälle sind für  $n = 1$  nichtlineare Gleichungen ( $\nearrow$  Nullstellenberechnung) und für lineares  $f(x) = Ax + b$  lineare Gleichungssysteme. Vektoren  $x_N \in D$  mit  $f(x_N) = 0$  heißen Lösungsvektoren von (1). Sie sind nur in Ausnahmefällen exakt zu bestimmen.

Wichtigste Methode der numer. Behandlung von (1) ist die Linearisierung, bei der die nichtlineare Abbildung  $f(x)$  durch eine geeignete lineare Abbildung  $L(x) = A_N x + b$  mit einer Matrix  $A_N$  ersetzt wird, die von  $f(x)$  abhängt. Unter gewissen Bedingungen ist dann eine Lösung  $x_L$  von  $L(x) = 0$  eine gute Näherung für  $x_N$ . Weit verbreitet ist die Methode von Newton für Systeme mit einer Linearisierung durch eine Taylorentwicklung. Ist  $x^{(0)}$  eine Näherung für  $x_N$  und sind die  $f_j(x)$  wenigstens einmal

$$(2) f(x) = f(x^{(0)}) + \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{x=x^{(0)}} \right) (x - x^{(0)}) + R(x)$$

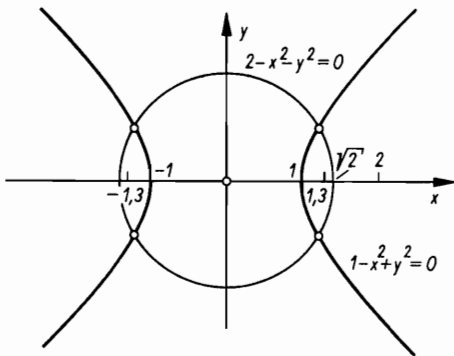
$$(3) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{x=x^{(0)}} = 0$$

stetig differenzierbar in  $D$ , dann gilt bekanntlich Gleichung (2) ( $\nearrow$  Funktionen mehrerer Veränderlicher, Auflösungsatz). Wird in (2) das Fehlerglied vernachlässigt, so ergibt sich die Linearisierung  $L(x) = A^{(0)}(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})$ . In ihr ist  $A^{(0)}$  die an der Stelle  $x = x^{(0)}$  gebildete Funktionalmatrix (3), die regulär ist, wenn  $y = f(x)$  in einer Umgebung

von  $x^{(0)}$  eindeutig nach  $x$  auflösbar ist. Nun verläuft das Verfahren nach den Schritten  $S_1$  bis  $S_4$ :

- $S_1$  Auswahl einer Näherung  $x^{(0)}$  für  $x_N$ .
- $S_2$  Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  wird die Matrix  $A^{(k)}$  gebildet.
- $S_3$   $z^{(k+1)}$  wird als Lösung des linearen Systems  $A^{(k)}z + f(x^{(k)}) = O$  bestimmt.
- $S_4$   $x^{(k+1)} := x^{(k)} + z^{(k+1)}$  ist eine neue Näherung. Diese Schrittfolge wird so lange wiederholt, bis sich  $x^{(k)}$  innerhalb der Fehlergrenzen nicht mehr ändert.

Die Konvergenz der Folge  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty$  gegen  $x_N$  hängt wesentlich von der Anfangsnäherung ab, und es ist ein schwieriges Problem, in jedem Falle ein geeignetes  $x^{(0)}$  zu bestimmen. Für das Beispiel  $f_1(x, y) = 2 - x^2 - y^2$  und  $f_2(x, y) = 1 - x^2 + y^2$  mit



Graphische Bestimmung eines Startvektors bei einem nicht-linearen Gleichungssystem mit  $n = 2$  als Schnitt eines Kreises mit einer Hyperbel

$n = 2$  ist ein graph. Verfahren möglich (Abb.). Die numer. Lösung nach Newton enthält die folgende Tabelle (4); die exakte Lösung ist  $x_N = (\sqrt{3}/2, \sqrt{1/2})$ .

- Nichtlinearität** ↗ Übertragungsglied II.
- Nichtnegativbedingung** ↗ Optimierung I.
- nichtparametrischer Test** ↗ Parametertest.
- Nichtrest, quadratischer** ↗ Reziprozitätsgesetz, quadratisches.
- Nicadsche Funktion** ↗ Aussagenlogik II.
- Nikomedes**, griech. Geometer, um 180 v. u. Z. — Er führte erstmals die Konchoide (↗ Konchoide II.) ein und baute ein Gerät zu ihrer Konstruktion. Er

benutzte sie in seinen Betrachtungen zur Würfelverdopplung, zur Dreiteilung des Winkels und um das geometr. Mittel zwischen zwei Geraden zu finden.

- nilpotent** ↗ Primideal.
- nirgends konvergent** ↗ Potenzreihe I.
- Niveaufläche** ↗ skalares Feld II.; s. a. Niveauhypersfläche.
- Niveauhypersfläche**:  $(n - 1)$ -dimensionale Punkt-mannigfaltigkeit, die in bezug zu einer gegebenen Funktion  $f$  der  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit der Gleichung  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  durch die Gleichung  $f(x_1, \dots, x_n) = c = \text{const}$  mit der beliebigen reellen Zahl  $c$  charakterisiert wird. Für  $n = 2$  heißen die entsprechenden eindimensionalen Punkt-mannigfaltigkeiten auch **Niveaulinien** oder **Höhenlinien**, für  $n = 3$  **Niveauflächen**.

Niveaulinien sind anschaulich die Projektionen von Linien gleichen Niveaus bzw. gleicher Höhe auf dem zur Funktion  $f$  gehörigen Funktionsgebirge und finden in diesem Sinne Anwendung in der Kartographie. Für die Funktion  $f$  der zwei Variablen  $x, y$  mit der Gleichung  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  sind z. B. sämtl. Niveaulinien nach der Gleichung  $x^2 + y^2 = c$  für  $c > 0$  durch Kreise um  $(0, 0)$  mit dem Radius  $\sqrt{c}$  gegeben.

**Niveaulinie** ↗ Differentialquotient, partieller, III., ↗ Funktion V., ↗ skalares Feld II.; s. a. Niveauhypersfläche.

**Niveaumenge**: Punktmenge, für die eine Funktion einen konstanten Wert annimmt; geometrisch kann sie eine Fläche oder eine Linie darstellen.

**Nivellement** ↗ Höhenmessung durch Nivellement.

**Nivellierlatte** ↗ Höhenmessung durch Nivellement.

**Noether**, Emmy, geb. 23. 3. 1882 Erlangen, gest. 14. 4. 1935 Bryn Mawr, Tochter von Max N. — N. studierte in Göttingen und Erlangen. In Göttingen wurde sie 1922 a. o. Professor. Nach ihrer Emigration 1933 in die USA erhielt sie dort eine Gastprofessur am kleinen College von Bryn Mawr. — N. hat durch ihre Arbeiten die verschiedenen Gebiete der Algebra zutiefst beeinflusst. Ihr ist es zuzuschreiben, daß das *strukturtheoret. Denken* zu einem beherrschenden Zug der modernen Mathematik geworden ist.

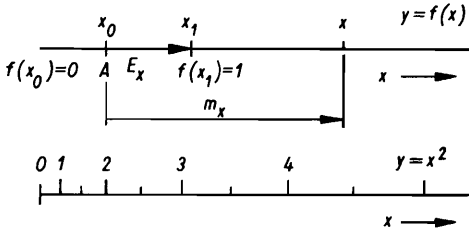
**Noether, Max**, geb. 24. 9. 1844 Mannheim, gest. 13. 12. 1921 Erlangen, Vater von Emmy N. — N. studierte in Heidelberg, Gießen und Göttingen. Seit 1871 war er in Heidelberg, seit 1875 in Erlangen

(4)	$f_1(x, y)$ $f_2(x, y)$	$-f_{1x} = 2x$ $-f_{2x} = 2x$	$-f_{1y} = 2y$ $-f_{2y} = -2y$	$z_1^{(k+1)}$ $z_2^{(k+1)}$	$x^{(k)}$ $y^{(k)}$
$k = 0$	0	2	2	0,25	1
	1	2	-2	-0,25	1
$k = 1$	-0,125	2,5	1,5	-0,025	1,25
	0	2,5	-1,5	-0,04167	0,75
$k = 2$	-0,0024	2,45	1,4167	-0,0003	1,2247
	0,0011	2,45	-1,4167	-0,0012	0,7071

tätig und wurde dort 1888 Professor. — N. lieferte bedeutende Beiträge zur Eliminationstheorie, zur Formentheorie und bes. zur Theorie der algebraischen Funktionen.

**Nomographie:** Darstellung funktionaler Beziehungen zwischen mehreren Variablen mit zeichnerischen Mitteln, z. B. durch *Diagramme*, *Funktionsskalen*, *Fluchlinien* und *Netztafeln*. Diese nomographischen Hilfsmittel werden ebenso wie  $\nearrow$  Rechenstäbe häufig angewendet, wenn aus den Zahlenwerten einiger Größen eine andere schnell bestimmt werden soll, ohne daß zu große Genauigkeit verlangt wird, z. B. wenn physikalisch-techn. Parameter in vielfältigen Verknüpfungen und Abhängigkeiten auftreten.

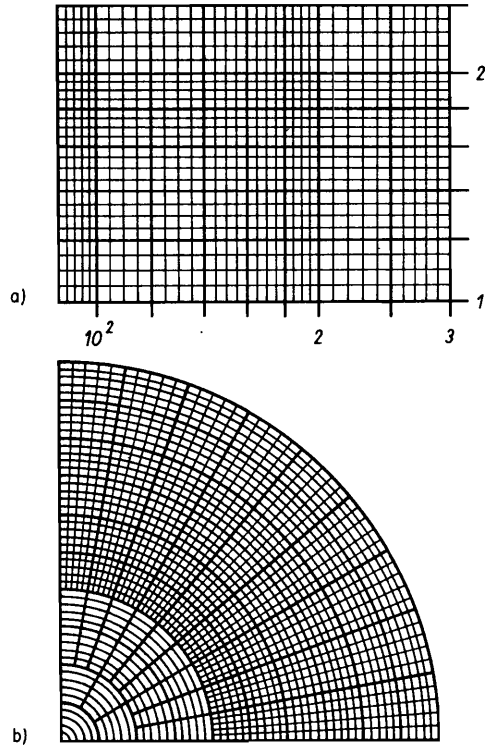
I. Für die Beziehung  $y = f(x)$  zwischen zwei Variablen sind graph. Darstellungen in Form von Diagrammen allgemein bekannt. Eine noch einfachere Möglichkeit ist die *Funktionsleiter* (Abb. 1). Eine meist geradlinige Trägerkurve wird zur Funktions-



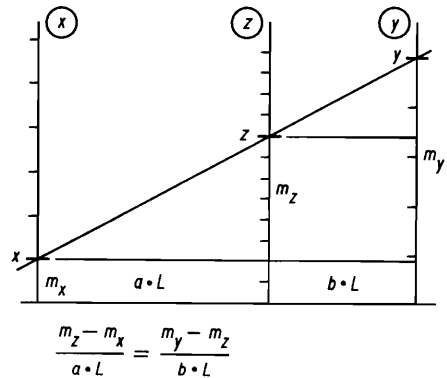
Nomographie. Abb. 1: Zur Funktionsleiter

leiter einer bestimmten *monotonen* Funktion  $y = f(x)$ , indem man von einem festen Anfangspunkt A aus die Strecken  $m_{x_i} = E_x \cdot f(x_i)$  für eine geeignete äquidistante Folge  $x_i = a + ih$  von Argumenten abträgt und die Endpunkte jeweils mit  $x_i$  bezeichnet.  $E_x$  ist dabei die *Einheitsstrecke*. Für die Abbildung ist das Beispiel  $f(x) = x^2$  gewählt worden. Häufig wird die Schrittweite  $h$  aus techn. Gründen stückweise verschieden gewählt ( $\nearrow$  Rechenstäbe). Anwendungsbeispiele sind das Lineal, Skalen von Meßinstrumenten, Rechenstäbe und *mathemat. Papiere*, das sind Blätter mit aufgedruckten Netzen, die im Handel erhältlich sind. Ihre Maschenverteilung ergibt sich dadurch, daß die Achsen oder bei *Polarpapier* (Abb. 2) die radiale Achse als Funktionsleiter ausgebildet sind. Die einfachste Form mit zwei linear unterteilten senkrechten Achsen ist das *Millimeterpapier*. Weit verbreitet sind logarithm., reziproke, gebrochen-lineare oder quadrat. Unterteilungen.

II. Zur nomograph. Darstellung der Beziehung  $z = F(x, y)$  zwischen *drei Variablen* gibt es zwei zueinander „duale“ Möglichkeiten. In *Fluchlinientafeln* (Abb. 3) werden drei Funktionsleitern für Funktionen  $f(x)$ ,  $g(y)$  und  $h(z)$  so angeordnet, daß jeweils die den vermöge  $z = F(x, y)$  zusammenhängenden Werten entsprechenden Punkte auf einer Geraden, der *Fluchlinie*, liegen. Jeder speziellen Trägerform und -anordnung entspricht eine bestimmte Funktionsklasse für  $F(x, y)$ , die durch eine



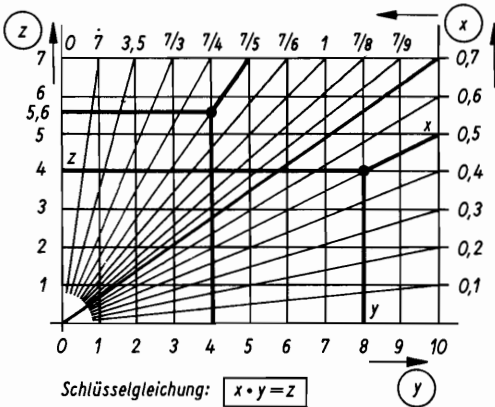
Nomographie. Abb. 2: mathemat. Papiere: a) doppelt-logarithmisches und b) Polarpapier



Nomographie. Abb. 3: Fluchlinientafel, Schlüsselgleichung  $(a + b) h(z) = b f(x) + a g(y)$

*Schlüsselgleichung* gegeben wird, die man in Abb. 3 aus  $(a + b) m_z = b m_x + a m_y$  erhält.

III. In *Netztafeln* (Abb. 4) werden den Kurven dreier Kurvenscharen in einem kartes.  $u, v$ -Koordinatensystem die jeweiligen *Scharparameter*  $x, y$  bzw.  $z$  zugeordnet. Drei vermöge  $z = F(x, y)$  zusammenhängende Werte sind dadurch ausgezeichnet, daß die zugehörigen Kurven  $K_x, K_y, K_z$  sich in einem Punkt schneiden. Auch hier entspricht danach jeder speziellen Netzform und -anordnung eine bestimmte



Nomographie. Abb. 4: Netztafel: Schlüsselgleichung  $x \cdot y = z$ , Beispiele:  $7/5 \cdot 4 = 5,6$  und  $0,5 \cdot 8 = 4$

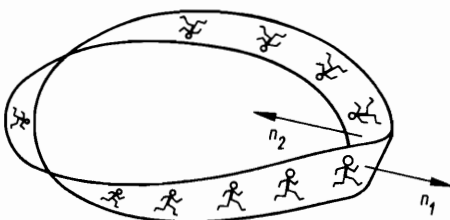
Funktionenklasse, die durch eine Schlüsselgleichung gegeben wird.

- non-Funktion ↗ Aussagenlogik II.
- Nordrichtung ↗ Koordinatensystem V.
- Nordwest-Ecken-Regel ↗ Transportproblem I.
- NOR-Glied ↗ Übertragungsglied III.
- Norm ↗ Betrag, ↗ Gaußsche Zahlen I., ↗ Hilbert-Raum I., ↗ Operator, linearer, IV., ↗ Raum, normierter linearer, ↗ Vektorraum VII.

**Normale I. Flächennormale:** die im Berührungspunkt  $P_0$  einer Tangentialebene zu dieser senkrechte Gerade. Ist die Fläche in Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$  gegeben, so ist  $\partial \mathbf{x}_0 / \partial u \times \partial \mathbf{x}_0 / \partial v$  ein Vektor in Richtung der N. Daraus ergibt sich der **Flächennormalenvektor**  $\mathbf{f}$  der Fläche  $F$  im Punkte  $P_0$  als Einheitsvektor in der Form (1).

$$(1) \quad \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{x}_0 / \partial u \times \partial \mathbf{x}_0 / \partial v}{|\partial \mathbf{x}_0 / \partial u \times \partial \mathbf{x}_0 / \partial v|}$$

Indem man eine der durch die Gerade der N. festgelegten Richtungen als positiv bezeichnet, wird in der Fläche ein Drehsinn festgelegt, die Fläche wird **orientiert**. Diese Orientierung läßt sich stets auf eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes  $P_0$  eindeutig und stetig übertragen. Ist diese Übertragung auf die Gesamtfläche möglich, so heißt diese **orientiert**. Wegen der mögl. Wahl zwischen positiver und negativer Richtung wird eine orientierbare Fläche auch zweiseitig gen. Eine nichtorientierbare und



Möbiussches Band mit zwei einander entgegen gerichteten Normalen in benachbarten Punkten

einseitige Fläche ist das **Möbiussche Band**, weil bei ihm die stetige Fortsetzung der N.n längs einer geschlossenen Kurve auf der Fläche bei Rückkehr zum Ausgangspunkt die entgegengesetzte Orientierung im Widerspruch zur Eindeutigkeit ergibt (Abb.).

**II. Kurvennormale:** Gerade, die im Punkt  $P_0$  einer Kurve senkrecht zur Tangente verläuft und deshalb in der Normalebene  $N$  liegt. Die N., die zugleich in der Schmiegebene liegt, wird **Haupt-N. gen.**, die in der Schnittgeraden mit der rektifizierenden Ebene **Binormale**. S. a. begleitendes Dreibein; Ellipse VI.; Hyperbel II.; Kreis IV.; Parabel III.

**Normalebene:** Ebene  $N$ , die in einem Punkte  $P_0$  einer Kurve  $C$  senkrecht steht zur Tangente in diesem Punkte an die Kurve. Ist  $\mathbf{z}$  der Ortsvektor eines Punktes der N. und  $\mathbf{x}'_0 = d\mathbf{x}(t_0)/dt$  der Tangentenvektor in  $P_0$ , so lautet die Gleichung der N.  $\mathbf{x}_0'(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$  (Abb. 1). Hat die Kurve im Punkte  $P_0$  eine Schmiegebene  $S$ , so existieren für  $P_0$  die linear unabhängigen Vektoren  $\mathbf{x}'_0$  und  $\mathbf{x}''_0$  und bestimmen durch  $\mathbf{x}'_0 \times \mathbf{x}''_0$  eine Gerade, die senkrecht zum Tangentenvektor  $\mathbf{x}'_0$  und deshalb in der N. verläuft. Diese Gerade wird **Binormale** gen., ihr Einheitsvektor **Binormalenvektor**  $\mathbf{b}$ . Die Schmiegebene schneidet die N. in einer Geraden, die senkrecht zur Richtung der Binormalen und zur Tangente verläuft und deshalb bestimmt ist durch  $(\mathbf{x}'_0 \times \mathbf{x}''_0) \times \mathbf{x}'_0$ . Der zugehörige Einheitsvektor heißt **Hauptnormale**  $\mathbf{n}$  der Kurve  $C$  in  $P_0$  (Abb. 2).

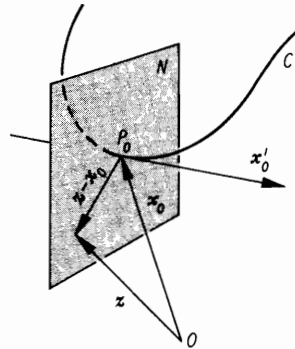


Abb. 1: Normalebene  $N$  im Punkte  $P_0$  einer Kurve  $C$

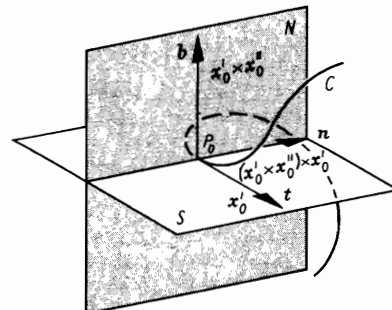


Abb. 2: Normalebene  $N$  und Schmiegebene  $S$  im Kurvenpunkt  $P_0$  sowie die Einheitsvektoren Tangente  $\mathbf{t}$ , Binormale  $\mathbf{b}$  und Hauptnormale  $\mathbf{n}$

**Normalebene zu einer Geraden** ↗ Zweitafelprojektion II.6.

**Normalform:** *mathematische Logik* Ausdruck des Aussagen- bzw. Prädikatenkalküls von spezieller Gestalt; die wichtigsten N.en I. im Aussagenkalkül sind die verneinungstechn. N., die konjunktive N. und die alternative N., II. im Prädikatenkalkül sind die wichtigsten die pränexen N., die allgemeingültigkeitstheoret. N. sowie die erfüllbarkeits-theoret. Skolemsche N. —

**I.1.** Ein Ausdruck *N* des Aussagenkalküls hat *verneinungstechn. N.*, falls die Funktionen  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  in ihm nicht vorkommen und alle Negationszeichen  $\neg$  sich auf Aussagenvariable beziehen.

**I.2.** Ein Ausdruck *K* des Aussagenkalküls hat *konjunktive N.*, falls er eine Konjunktion endlich vieler Elementaralternativen ist; dabei ist eine *Elementaralternative* eine Alternative von endlich vielen unnegierten oder negierten Aussagenvariablen.

**I.3.** Ein Ausdruck *A* des Aussagenkalküls hat *alternative N.*, falls er eine Alternative endlich vieler Elementarkonjunktionen ist; dabei ist eine *Elementarkonjunktion* eine Konjunktion von endlich vielen unnegierten oder negierten Aussagenvariablen. Zu jedem Ausdruck *H* des Aussagenkalküls gibt es Ausdrücke dieser N.en, die zu *H* äquivalent sind, d. h.,  $N \leftrightarrow H, K \leftrightarrow H, A \leftrightarrow H$  sind Tautologien, die Ausdrücke *H, N, K* und *A* beschreiben dieselbe Wahrheitswertfunktion. Die entsprechenden Umformungen von *H* in *N* bzw. *K* bzw. *A* sind möglich unter Verwendung des Ersetzbarkeitstheorems (↗ Aussagenkalkül II.), wenn man beachtet, daß für Ausdrücke *H*<sub>1</sub>, *H*<sub>2</sub>, *H*<sub>3</sub> die folgenden Ausdrücke (1) bis (5) Tautologien sind sowie die *Distributivgesetze* (6) und (7) der Funktionen et und vel gelten.

- (1)  $(H_1 \leftrightarrow H_2) \leftrightarrow ((H_1 \rightarrow H_2) \wedge (H_2 \rightarrow H_1))$
- (2)  $(H_1 \rightarrow H_2) \leftrightarrow (\neg H_1 \vee H_2)$
- (3)  $\neg(H_1 \vee H_2) \leftrightarrow (\neg H_1 \wedge \neg H_2)$
- (4)  $\neg(H_1 \wedge H_2) \leftrightarrow (\neg H_1 \vee \neg H_2)$
- (5)  $\neg \neg H_1 \leftrightarrow H_1$
- (6)  $(H_1 \vee (H_2 \wedge H_3)) \leftrightarrow ((H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3))$
- (7)  $(H_1 \wedge (H_2 \vee H_3)) \leftrightarrow ((H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3))$

Die Tautologien (3) und (4) heißen auch *Gesetze von de Morgan*. Die verneinungstechn. N.en beschreiben genau die Reihen-Parallelschaltungen aus Kontakten, die in der Schaltalgebra betrachtet werden.

**II.1.** Ein Ausdruck des Prädikatenkalküls der 1. Stufe hat *pränexen N.*, falls er bei einer geeigneten Indizierung der Variablen die Gestalt  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n K$  hat, in der  $Q_1, \dots, Q_n$  Quantifikatoren sind und *K* ein quantifikatorenfreier Ausdruck mit genau den vollfreien Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist. Die Folge  $Q_1x_1 \dots Q_nx_n$  heißt dann das *Präfix* und *K* der *Kern* dieses Ausdrucks.

**II.2.** Eine pränexen N. ist eine *allgemeingültigkeitstheoret. Skolemsche N.*, falls ihr Präfix die Gestalt  $\exists x_1 \dots \exists x_k \forall x_{k+1} \dots \forall x_n$  hat, d. h., wenn alle Par-

tikularisatoren vor allen Generalisatoren stehen. **II.3.** Eine pränexen N. ist eine *erfüllbarkeits-theoret. Skolemsche N.*, falls ihr Präfix eine Gestalt  $\forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \dots \exists x_n$  hat, d. h., wenn alle Generalisatoren vor allen Partikularisatoren stehen. Es läßt sich zeigen, daß zu jedem Ausdruck *H* des Prädikatenkalküls der 1. Stufe je eine ihm äquivalente N. der Gestalten II.1., II.2. und II.3. existiert.

Zur Verwendung des Begriffes N. in *Algebra* und *Geometrie* s. a. algebraische Gleichung; biquadratische Gleichung; Ellipsoid; Fläche zweiter Ordnung; ganzrationale Funktion I.; Gleichung vierten Grades; Hauptachsentransformation I., II.; Hyperboloid I.; kubische Gleichung I.; Kurve zweiter Ordnung I.; Paraboloid I.; quadratische Gleichung I.; rationale Funktion I.

**Normalform, Hessesche** ↗ Ebenengleichung III., ↗ Geradengleichung IV.

**Normalform, kartesische** ↗ Geradengleichung IV.

**Normalform, metrische** ↗ quadratische Form II.

**Normalformproblem** ↗ Eigenwert II., ↗ lineare Abbildung IV.

**Normalgleichung** ↗ Ausgleichsrechnung I., II.

**Normalkrümmung** ↗ Krümmung I.

**Normalparabel** ↗ graphisches Lösen von Gleichungen III., ↗ quadratische Funktion I.

**Normalpolynom** ↗ Körper II.

**Normalprojektion** ↗ Projektion II.

**Normalriß** ↗ Projektion II.

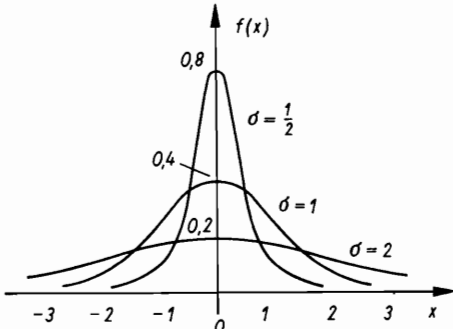
**Normalteiler:** Untergruppe *N* einer Gruppe *G* mit der Eigenschaft  $aba^{-1} \in N$  für jedes  $b \in N$  und jedes  $a \in G$ . Für einen *N, N* gilt dann  $a \cdot N = N \cdot a$ , d. h., jede linksseitige Nebenklasse ist auch rechtsseitige Nebenklasse. Die *N*. einer Gruppe stehen in einem engen Zusammenhang mit deren homomorphen Bildern (s. a. Homomorphie). S. a. Gruppe II.

**Normalverteilung, Gaußverteilung:** I. Verteilungsgesetz für eine *stetige Zufallsgröße X*, die normalverteilt mit den Parametern *a* und  $\sigma$  heißt, wenn sie eine *Dichte* der Gestalt (1) hat. Das Bild der Funktion (1) ist eine glockenförmige Kurve, die *Gaußsche Glockenkurve*. Der Parameter *a* gibt die Stelle des

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp [-(x - a)^2/(2\sigma^2)]$$

Maximums und gleichzeitig des Symmetrie-zentrums an. Wahrscheinlichkeitstheoretisch ist *a* der *Erwartungswert* von *X*,  $\sigma$  ist die *Streuung* von *X*. Als Abszisse gibt  $\sigma$  den Abstand vom Zentrum der Kurve zu den Wendepunkten an (Abb. 1). Ist  $\sigma$  klein, so ist die Kurve hoch und spitz und die Streuung der Werte ist klein, ist  $\sigma$  groß, so ist die Kurve breit und flach und die Streuung der Werte ist groß. Ist *X* normalverteilt mit den Parametern *a* und  $\sigma$ , so sagt man, *X* ist nach  $N(a, \sigma)$  normalverteilt, man schreibt dafür  $X \in N(a, \sigma)$ . Für  $a = 0$  und  $\sigma = 1$  nimmt (1) die Gestalt (2) an, und die *N.* heißt *normiert* und *zentriert* (↗ normierte Zufallsgröße,

$$(2) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp [-x^2/2]$$



Normalverteilung. Abb. 1: Normalverteilungsdichten für  $a = 0$  und verschiedene  $\sigma$

↗ zentrierte Zufallsgröße). Die zugehörige, durch (3) bestimmte Verteilungsfunktion  $\Phi(x)$  ist tabelliert,  $\Phi(x)$  wird auch oft als *Gaußsches Fehlerintegral*

$$(3) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

bezeichnet, da der zufällige Fehler einer Messung als normalverteilt angenommen werden kann. Die überragende Bedeutung der N. in Theorie und Anwendungen beruht in starkem Maße auf dem zentralen Grenzwertsatz.

II. Als *mehrdimensionale N.* bezeichnet man das Verteilungsgesetz eines Zufallsvektors  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , der normalverteilt heißt, wenn (4) gilt.

$$(4) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} (x_i - a_i) (x_j - a_j) \right]$$

Dabei sind die  $b_{ij}$  so beschaffen, daß die Form *positiv definit* ist, und  $C$  kann aus (5) berechnet werden.

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

Die Parameter  $a_i$  und  $b_{ij}$  haben folgende Bedeutung:  $a_i = EX_i$ ,  $b_{ij} = \Delta_{ij}/\Delta$  mit  $\Delta = \text{Det}(\Delta_{ij})$ , wenn  $(\Delta_{ij})$  die Matrix der algebraischen Komplemente der Kovarianzmatrix ist (↗ Momente III.). Eine  $n$ -dimensionale N. ist genauso wie im eindimensionalen Fall durch Vorgabe der ersten und zweiten Momente (↗ Momente II.) vollständig be-

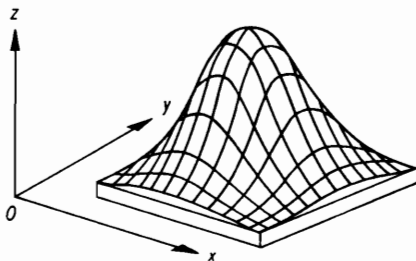


Abb. 2: Dichte einer zweidimensionalen Normalverteilung

stimmt. Die *Dichte* eines zweidimensionalen normalverteilten Zufallsvektors (Abb. 2), kann man auf

$$(6) \quad f(x_1, x_2) = \frac{\exp \left[ -K/(2(1 - \rho^2)) \right]}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}}$$

die Form (6) mit

$$K = \frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2}$$

bringen. Dabei ist  $a_1 = EX_1, a_2 = EX_2, \sigma_1 = \sqrt{D^2 X_1}, \sigma_2 = \sqrt{D^2 X_2}$ , und  $\rho$  ist der *Korrelationskoeffizient* von  $X_1$  und  $X_2$  (↗ Momente III.). Die *charakterist. Funktion* einer  $n$ -dimensionalen N. hat die Form (7). Da die charakterist. Funktion die Verteilung eindeutig bestimmt, wird die N. auch oft folgender-

$$(7) \quad \psi(t_1, \dots, t_n) = \exp \left[ i \sum_{j=1}^n t_j a_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu_{ij} t_i t_j \right]$$

maßen definiert:  $(X_1, \dots, X_n)$  heißt *normalverteilt*, wenn seine *charakterist. Funktion* die Form (7) hat. Dabei ist  $a_i = EX_i$  und die  $\mu_{ij}$  sind die Elemente der Kovarianzmatrix (↗ Momente II.).

**normiert** ↗ Normalverteilung I.  
**normierte Zufallsgröße**: eine Zufallsgröße mit Streuung 1; zu der beliebigen Zufallsgröße  $X$  z. B. die n. Z.  $X/\sqrt{D^2 X}$ .

**notwendig**: Eigenschaft einer Aussage  $p$  in bezug auf eine Aussage  $q$ , die zutrifft, falls die Implikation  $q \rightarrow p$  eine wahre Aussage ist. Meist wird die zu dieser Aussagenverknüpfung äquivalente Kontraposition  $(\neg p \rightarrow \neg q)$  »wenn nicht  $p$ , so nicht  $q$ « verwendet, z. B. bei notwendigen Konvergenzkriterien. Entsprechend heißt  $p$  *hinreichend* für  $q$ , falls  $p \rightarrow q$  eine wahre Aussage ist. S. a. Konvergenzkriterien für Funktionen I.; Konvergenzkriterien für Reihen I., III.; Extremwert II.

**Nowikow**, Pjotr Sergejewitsch, geb. 28. 9. 1901 Moskau, gest. 9. 1. 1975. — N. beendete 1925 sein Studium an der Moskauer Universität, promovierte dort und wurde 1935 zum Professor berufen. Er schloß sich der von N. Lusin gebildeten Schule an und untersuchte Fragen der Funktionentheorie und der mathemat. Physik. Seine bedeutendsten Arbeiten gehören jedoch ins Gebiet der *mathemat. Logik* und der *Mengenlehre*.

**$n$ -stellig** ↗ Funktion I., ↗ Relation III.  
 **$n$ -ter Kreisteilungskörper** ↗ Kreisteilungsgleichung.  
 **$n$ -Tupel** ↗ Funktion V., ↗ Klammern III., ↗ Koordinatensystem II., ↗ Vektorraum III.1.  
**Null** ↗ ganze Zahlen, ↗ Subtraktion I.  
**Nullabbildung** ↗ lineare Abbildung I.3.  
**nullär** ↗ algebraische Operation.  
**Null-Eins-Optimierung** svw. 0-1-Optimierung ↗ Optimierung, ganzzahlige.  
**Null-Eins-Verteilung** ↗ Zweipunktverteilung.  
**Nullelement**: neutrales Element bzgl. der Addition. Ein Element  $o$  heißt *multiplikatives N.*, wenn stets

$o \cdot a = a \cdot o = o$  ist. Gelten die *Distributivgesetze*, so ist das neutrale Element der Addition multiplikativer N. S. a. Gruppe I.; Körper I.; Polynom I.; Ring I.; Verband II.; Vektorraum II.

**Nullfläche**  $\nearrow$  Fläche zweiter Ordnung I.

**Nullfolge**  $\nearrow$  Grenzwert einer Zahlenfolge I.

**Nullform**  $\nearrow$  Linearform I.

**Nullhypothese**  $\nearrow$  Signifikanztest I., II.

**Nullideal**  $\nearrow$  Ring II.,  $\nearrow$  Ideal.

**Nullkegelschnitt**  $\nearrow$  Hauptachsentransformation IV. 2.,  $\nearrow$  Kurve zweiter Ordnung II.

**Nullkreis**  $\nearrow$  Kreis IV.

**Nullkugel**  $\nearrow$  Kugel VII.

**Nullmatrix**  $\nearrow$  Matrix II.

**Nullmenge:** Menge vom  $\nearrow$  Maß Null; da nicht jede Teilmenge  $A$  einer Grundmenge  $E$  bzgl. des betrachteten Maßes  $\mu$  meßbar sein muß, definiert man ihr *äußeres Maß*  $\bar{\mu}(A)$  als die untere Grenze der Maße aller  $A$  umfassenden meßbaren Mengen. Eine Menge  $A$  heißt genau dann eine N., wenn  $\bar{\mu}(A) = 0$ . Im Falle des Lebesgueschen Maßes bzw. des Peano-Jordanschen Inhalts stimmen die N.n des  $E^n$  mit den Mengen vom Maß bzw. vom Inhalt 0 überein. Diese können daher als Mengen charakterisiert werden, die sich mit abzählbar vielen bzw. mit endlich vielen  $n$ -dimensionalen Intervallen  $Q_i$  von beliebig klein vorgebarem Gesamthalt überdecken lassen; die  $Q_i$  sind z. B. für  $n = 2$  Rechtecke, für  $n = 3$  Quader in achsenparalleler Lage bzgl. eines kartes. Koordinatensystems.

Wenn eine Eigenschaft für alle Punkte einer Menge  $E$  zutrifft mit Ausnahme höchstens einer Lebesgueschen N.  $A$ , sagt man, diese Eigenschaft gelte *fast überall* auf  $E$  und  $E \setminus A$  bestehe aus *fast allen* Punkten von  $E$ . Zwei fast überall übereinstimmende Funktionen z. B. haben dasselbe Lebesguesche Integral.

**Nulllösung**  $\nearrow$  Integralgleichung II.

**Nullpolynom**  $\nearrow$  Polynom I.

**Nullpunkt**  $\nearrow$  Koordinatensystem I., II.,  $\nearrow$  Zahlengerade.

**Nullrelation**  $\nearrow$  Relation II.

**Nullrichtung**  $\nearrow$  Koordinatensystem IV., V.

**Nullring:** Ring, der allein aus dem Nullelement besteht,  $\nearrow$  Ring I.

**Nullstelle einer Funktion:** I. Argument  $x_0$  einer reellen Funktion  $f$ , dem als Funktionswert die reelle Zahl 0 zugeordnet ist, so daß gilt  $y_0 = f(x_0) = 0$ . Die Funktion  $y = f(x) = 3x - 2$  z. B. hat die N.  $x_0 = 2/3$ . Es gibt Funktionen ohne N.en, z. B.  $y = f(x) = e^x$ , und solche mit unendlich vielen N.en, z. B. die Winkelfunktionen. Die N.en einer durch den analyt. Ausdruck  $y = f(x)$  gegebenen Funktion erhält man als Lösungsmenge der zugehörigen Gleichung  $f(x) = 0$ . Eine reelle Zahl heißt  $k$ -fache N. einer ganzrationalen Funktion  $f$ , wenn  $x_0$  eine  $k$ -fache Lösung der Gleichung  $f(x_0) = 0$  ist ( $\nearrow$  ganzrationale Funktion III.).

Jeder N. einer Funktion einer unabhängigen Variablen entspricht eindeutig ein Schnitt- oder Berührungspunkt des Bildes dieser Funktion mit der Abszissenachse.

**Beispiel:** Die Funktion  $f_1$  mit  $y = f_1(x) = x^2 - 4x^2 + 4x$  z. B. hat die zweifache N.  $x_{01} = 2$  und die einfache N.  $x_{02} = 0$ .

Die Funktion  $f_2$  mit  $f_2(x) = 5 \sin 2x$  hat die N.en  $x_{0k} = k \cdot \pi/2$  für  $k$  ganz; dagegen hat die Funktion  $f_3$  mit  $f_3(x) = \cos x - 2$  keine N.en, da  $|\cos x| < 2$  für alle reellen Zahlen  $x$  gilt.

II. Ein  $n$ -Tupel  $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  reeller Zahlen heißt N. einer Funktion  $f$  in den  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit dem analyt. Ausdruck  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , wenn  $f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = 0$  gilt. Die Funktion  $f_4$  mit  $y = f_4(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 3x_2^2$  z. B. hat genau eine N. (1, 0). Das Bild der Funktion  $f_4$  ist in einem kartes.  $x_1, x_2, y$ -Koordinatensystem ein Paraboloid, das die  $x_1, x_2$ -Ebene im Punkt  $P_0(1, 0)$  berührt.

Ist  $w = f(z)$  eine komplexwertige Funktion eines komplexen Arguments  $z$ , so heißt jede komplexe Zahl  $z_0$  mit  $f(z_0) = 0$  eine N. der Funktion  $w = f(z)$ . S. a. ganzrationale Funktion III.; Kurvendiskussion II.2.; Nullstellenberechnung; Polynom III.; Polynomwurzelberechnung; rationale Funktion III. **Nullstellenberechnung:** Berechnung einer Zahl  $x_N$  oder einer genügend genauen Näherung  $\bar{x}_N$ , für die eine Funktion  $y = f(x)$  den Wert  $y = 0$  annimmt. Eine *Nullstelle* genügt demnach einer i. allg. *nicht-linearen Gleichung*  $f(x_N) = 0$  und läßt sich nur in Ausnahmefällen explizit angeben, z. B. ist  $x_N = -A/B$  die einzige Lösung der *linearen Gleichung*  $Bx + A = 0$ . In allen anderen Fällen erhält man nach einem *Näherungsverfahren* stets einen Näherungswert  $\bar{x}_N = x_N + \delta(x_N)$ . Ist speziell  $f(x)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mit reellen Koeffizienten, so gibt es nach dem Hauptsatz der Algebra höchstens  $n$  reelle Nullstellen, deren Wert sich durch Polynomwurzelberechnung ergibt. Ein bes. einfacher und wichtiger Fall ist die Quadratwurzelberechnung.

I. **Bisektionsverfahren.** Ist  $y = f(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  definiert und stetig und sind  $x_1, x_2$  zwei Zahlen aus diesem Intervall, für die  $f(x)$  entgegengesetztes Vorzeichen hat, so gibt es stets mindestens eine Nullstelle  $x_N$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$ . Nach diesem einfachen Kriterium lassen sich geeignete Startwerte für Näherungsverfahren bestimmen. Das einfache *Bisektionsverfahren* erfolgt dann in den Schritten  $S_1, S_2$  und  $S_3$ .

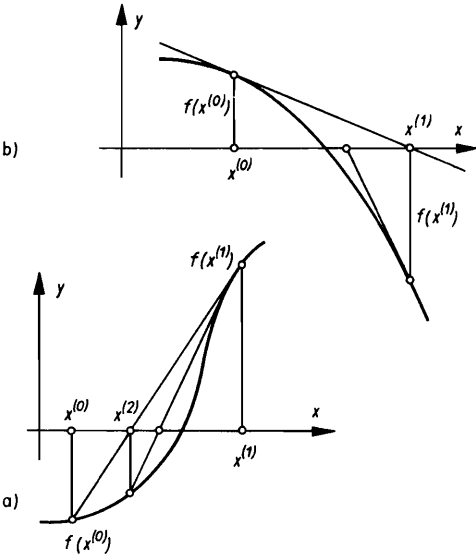
$S_1$ : Bestimme zwei Zahlen  $x_1^{(0)} < x_2^{(0)}$  mit  $f(x_1^{(0)}) \cdot f(x_2^{(0)}) < 0$ .

$S_2$ : Halbiere für  $k = 0, 1, 2, \dots$  das Intervall  $[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}]$  und wähle  $x_1^{(k+1)} := p, x_2^{(k+1)} := q$ , falls  $f(p)f(q) < 0$ , aber  $x_N := q$ , falls  $f(p)f(q) = 0$ , sonst aber  $x_1^{(k+1)} := q, x_2^{(k+1)} := x_2^{(k)}$ . Dabei ist  $p = x_1^{(k)}$  und  $q = (x_1^{(k)} + x_2^{(k)})/2$ .

$S_3$ : Ist  $x_2^{(M)} - x_1^{(M)} = \varepsilon > 0$ , dann ist  $\bar{x}_N := x_1^{(M)} + \varepsilon/2$  eine Näherung für die kleinste Nullstelle  $x_N$  aus dem Intervall  $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}]$  mit  $\bar{x}_N - \varepsilon/2 \leq x_N \leq \bar{x}_N + \varepsilon/2$ .

II. Das *Sekantennäherungsverfahren*, auch als *Regula falsi* bekannt, geht ebenfalls von zwei Startwerten aus und berechnet eine Folge  $\{x^{(m)}\}$  von Näherungswerten für  $x_N$  nach der Vorschrift

$x^{(m+1)} := x^{(m)} - f(x^{(m)})/s_m$  für  $m = 1, 2, \dots, M$ , mit  $s_m := [f(x^{(m)}) - f(x^{(m-1)})]/[x^{(m)} - x^{(m-1)}]$ . Ist  $m = M$  mit  $|f(x^{(M+1)})| < \varepsilon$  erreicht für eine genügend kleine Zahl  $\varepsilon$ , so wird  $x^{(M+1)} = \bar{x}_N$  gesetzt und als Näherung einer Nullstelle von  $f(x)$  betrachtet, denn man kann beweisen, daß die konstruierte Folge stets gegen eine Nullstelle von  $f(x)$  im Startintervall  $[x^{(0)}, x^{(1)}]$  konvergiert (Abb.).



Nullstellenberechnung: Geometrische Veranschaulichung a) des Sekantennäherungsverfahrens und b) des Newtonschen Verfahrens

**III.** Nach dem *Newtonschen Verfahren*, auch *Tangentenverfahren* genannt (vgl. Abb.), wird eine Folge  $\{x^{(m)}\}$  nach (1) konstruiert, die unter der angegebenen Bedingung gegen eine Nullstelle konvergiert. Es gilt die Beziehung (2), die zeigt, daß der Fehler in jedem Schritt quadratisch abnimmt. Man spricht deshalb von *quadrat. Konvergenz*: die Anzahl der richtigen Stellen verdoppelt sich annähernd in jedem Schritt.

$$(1) \quad x^{(m+1)} := x^{(m)} - [f(x^{(m)})]/[f'(x^{(m)})],$$

falls  $f'(x^{(m)}) \neq 0$  mit dem Startwert  $x^{(0)}$  für  $m = 0, 1, 2, \dots$

*Bedingung:*  $|f''(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)})| < (f'(x^{(0)}))^2$

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|x^{(m+1)} - x_N|}{(x^{(m)} - x_N)^2} = \frac{1}{2} \frac{|f''(x_N)|}{|f'(x_N)|}$$

Für die Funktion  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$  z. B. mit  $\bar{x}_N = 1,368808$  werden die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren zusammengestellt. Nach I. *Bisektion* erhält man:

- $x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 2, f_1 = -7, f_2 = 16;$
- $x_1^{(1)} = 1, x_2^{(1)} = 1,5, f(x_1^{(1)}) = -7, f(x_2^{(1)}) = 2,88;$
- $x_1^{(2)} = 1,25, x_2^{(2)} = 1,5, f(x_1^{(2)}) = -2,42;$
- $x_1^{(3)} = 1,25, x_2^{(3)} = 1,375$  mit  $f(x_2^{(3)}) = 0,131.$

Nach II. *Regula falsi* dagegen mit den Startwerten  $x^{(0)} = 1, x^{(1)} = 1,5$  die Näherungen:  
 $x^{(2)} = 1,5 - 2,875 \cdot 0,5/9,875 = 1,35,$   
 $x^{(3)} = 1,35 - (-0,15) \cdot (-0,3946)/(-3,2696) = 1,368$  usw.

Nach III., dem *Newtonschen Verfahren*, ergibt sich  $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$  und

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \frac{(x^{(m)})^3 + 2(x^{(m)})^2 + 10x^{(m)} - 20}{3(x^{(m)})^2 + 4x^{(m)} + 10}$$

Mit  $x^{(0)} = 1$  als Startnäherung erhält man:  
 $x^{(0)} = 1$  mit einer richtigen Dezimale,  
 $x^{(1)} = 1,4118$  mit 2 richtigen Dezimalen,  
 $x^{(2)} = 1,36934$  mit 4 und  
 $x^{(3)} = 1,368808$  mit 7 richtigen Dezimalen. Man erkennt deutlich die quadrat. Konvergenz. S. a. Polynomwurzelberechnung I.

**Nullstellengebilde** ↗ algebraische Geometrie II.,  
 ↗ analytische Geometrie.  
**Nullsummenspiel** ↗ Spieltheorie I.  
**Nullteiler:** jedes Element  $a \neq 0$  eines Ringes, zu dem es ein Element  $b \neq 0$  des Ringes mit  $a \cdot b = 0$  gibt. Ist die Multiplikation nicht kommutativ, heißt  $a$  *Links-N.* und  $b$  *Rechts-N.* Gelegentlich wird das Nullelement  $0$  des Ringes zu den N.n gezählt, dann heißen die N.  $a \neq 0$  *eigentliche* oder *nichttriviale N.* Hat ein Ring nur den trivialen N.  $0$ , heißt er *nullteilerfrei*.

S. a. Matrix; Ring I.  
**nullteilige Fläche** ↗ Fläche zweiter Ordnung I.,  
 ↗ Kugel I., VII., ↗ Zylinder zweiter Ordnung.  
**nullteilige Kurve** ↗ Kurve zweiter Ordnung I.,  
 ↗ Kreis IV.

**nullteiliger Kegelschnitt** ↗ Hauptachsentransformation IV.1., ↗ Kreis IV., ↗ Kurve zweiter Ordnung II.

**nullteiliger Kreis** ↗ Kreis X.  
**nullteiliger Zylinder** ↗ Zylinder zweiter Ordnung.  
**Nullvektor** ↗ Vektorraum II.

**Numerik** svw. numerisches Rechnen.  
**numerische Exzentrizität** ↗ Ellipse II., ↗ Hyperbel II., ↗ Kegelschnitt IV., ↗ Kurve zweiter Ordnung III., ↗ Parabel I.  
**numerische Konvergenz** ↗ Reihendarstellung I.

**numerische Mathematik:** Bezeichnung für alle Zweige der Mathematik, in denen mathemat. Größen aus gegebenen Zahlen auch zahlenmäßig berechnet werden. Die Hauptaufgabe der n. M. ist dabei die Aufstellung von Rechenvorschriften, nach denen aus Eingangsdaten, die mit bekannten Fehlern behaftet sind, die gewünschten Ausgangsdaten mit abschätzbarer Genauigkeit berechnet werden. Benutzte Hilfsmittel sind dabei mathemat. Tafeln, Tischrechenmaschinen oder EDVA.

**numerische Quadratur** ↗ Integration, numerische, I.  
**numerisches Rechnen, Numerik:** das zahlenmäßige Rechnen im Unterschied zum Rechnen mit Symbolen. Das n. R. ist eine spezielle Form der *Datenverarbeitung*, denn es wird eine Menge von Eingangsdaten nach einem bestimmten *Algorithmus*, unter Verwendung verschiedener Rechenhilfsmittel, in eine gewisse Menge von Ausgangsdaten umgewandelt. Ein- und Ausgangsdaten werden dabei durch



endl. Dezimalbrüche fester Stellenzahl dargestellt und sind i. allg. Näherungswerte für die reellen Zahlen aus dem Definitionsbereich der in mathemat. Ausdrücken enthaltenen Variablen. Abweichungen von den theoret. Werten werden *Fehler* gen. Fehler können auf verschiedene Weise auftreten, einmal in den Eingangsdaten, z. B. wenn diese durch Messung gewonnen wurden, zum anderen als *Verfahrensfehler*, wenn der gewählte Algorithmus die im mathemat. Ausdruck enthaltenen Beziehungen, z. B. eine transzendente Funktion, nur angenähert darstellt, schließlich entstehen aber auch beim Rechnen nach dem Algorithmus durch Runden zusätzl. Fehler. Trotz dieser Fehler soll das n. R. Ausgangsdaten ermitteln, die innerhalb *bekannter Fehlergrenzen* den theoret. Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsdaten widerspiegeln. Als Rechenhilfsmittel werden *mathemat. Tafeln, Rechenstäbe, Nomogramme, Tischrechenmaschinen* und vor allem *elektron. Digitalrechner* verwendet. Ausgangspunkte der verwendeten Algorithmen sind *numer. Verfahren*, die die Berechnung von anderweitig definierten mathemat. Größen in *endlich vielen Schritten* prinzipiell möglich machen.

**numerische Stabilität** ↗ Fehler II., ↗ gewöhnliche Differentialgleichung III.

**numerische Verfahren:** konstruktive Vorschrift, nach der eine abstrakt definierte mathemat. Größe berechnet oder ein Näherungswert mit abschätzbarer Genauigkeit bestimmt werden kann. Jedes n. V. muß endlich sein und Angaben über den Verfahrensfehler (↗ Fehler II.) enthalten. Die transzendente Zahl  $e$  z. B. ist definiert als  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ . Eine berechenbare Näherung ist  $e = 2 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/N! + R_N$  mit dem Verfahrensfehler  $R_N$ , der durch die Beziehung (1) abgeschätzt wird.

$$(1) \quad 1/(N + 1)! \leq R_N$$

$$R_N \leq (1/(N - 1)! - 1) \cdot (2 + 1/2! + \dots + 1/N!)$$

**Numerus** ↗ Logarithmus I., ↗ dekadischer Logarithmus II.

**Nutationswinkel** ↗ Abbildung, affine, V.

**Nyquist-Kriterium** ↗ Stabilität.

## O

**Obelisk** ↗ Prisma III.

**obere Grenze** ↗ beschränkte Funktion II., ↗ Extremwert I., ↗ obere Schranke, ↗ Punktmenge, ↗ Zahlenfolge II.

**obere Schranke:** *Mengenlehre* Ist  $R$  eine Halbordnung in der Menge  $M$  und  $X \subseteq M$ , so ist ein Element  $a$  von  $M$  eine o. S. von  $X$  bzgl.  $R$ , falls  $x \leq a(R)$  für alle  $x \in X$  gilt. Ist a Minimum der Menge der o. S.n von  $X$  bzgl.  $R$ , so heißt  $a$  *obere Grenze* oder *Supremum* von  $X$  bzgl.  $R$ ; Bezeichnung:  $\sup X$ . S: a. Punktmenge; Zahlenfolge II.; beschränkte Funktion I.

**Oberflächenelement** ↗ elliptische Differentialgleichung II.1., ↗ Grundform einer Fläche I., ↗ Integralsätze I., ↗ Komplanation.

**Oberflächenintegral:** I. Das O. *erster Art* ist eine Verallgemeinerung des Integrals auf Funktionen, die auf Flächen definiert sind. Ist  $S$  eine zweiseitige glatte Fläche, auf der eine beschränkte Funktion  $f(x, y, z)$  definiert ist, so soll  $Z$  eine Zerlegung von  $S$  in endlich viele Teilflächen  $S_i$  mit den Flächeninhalten  $\Delta S_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  bezeichnen und  $\Delta(Z)$  der größte Durchmesser der Teilflächen  $S_i$

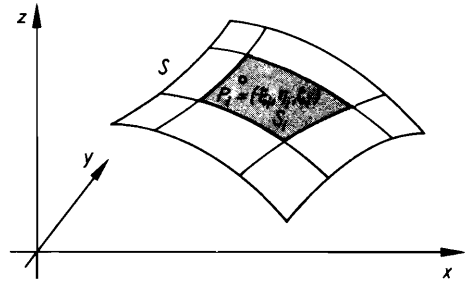


Abb. 1: Definition des Oberflächenintegrals erster Art

sein. Wird auf jeder Teilfläche  $S_i$  ein beliebiger Punkt  $P_i$  mit den Koordinaten  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  gewählt (Abb. 1), so kann zu jeder Zerlegung  $Z$  die Zwischen-summe (1) gebildet werden. Hat sie einen Grenzwert

$$(1) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

$$(2) \quad I = \iint_{(S)} f(x, y, z) dS$$

wert (2), so heißt diese Zahl  $I$  das O. *erster Art* der Funktion  $f(x, y, z)$  über die Fläche  $S$ , und  $f(x, y, z)$  heißt über  $S$  integrierbar. Der Grenzwert  $I$  existiert, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so daß für jede Zerlegung  $Z$  mit  $\Delta(Z) < \delta$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$  gilt.

Hat die Fläche  $S$  eine Parameterdarstellung  $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$ , bei der  $u$  und  $v$  den Bereich  $\Gamma$  der  $u, v$ -Ebene durchlaufen (↗ Komplanation), so kann das O. mittels Gleichung (3)

$$(3) \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) dS =$$

$$\iint_{(\Gamma)} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} du dv$$

auf ein Flächenintegral über den Bereich  $\Gamma$  zurückgeführt werden. Die Koeffizienten  $E, F, G$  der ersten Grundform der Fläche sind nach (4) zu berechnen.

$$(4) \quad E = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2$$

Ist die Fläche  $S$  durch eine Gleichung  $z = \varphi(x, y)$  gegeben, in der  $x$  und  $y$  den Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene durchlaufen, so wird durch die Gleichung (5) das O. auf ein Flächenintegral über  $B$  zurückgeführt.

$$(5) \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) \, dS = \iint_{(B)} f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} \, dx \, dy$$

Ist die Fläche  $S$  z. B. die obere Hälfte einer Kugel um den Ursprung des Koordinatensystems, dann hat sie in Kugelkoordinaten  $r, \varphi, \vartheta$  die Parameterdarstellung  $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$ ;  $\Gamma$  ist das Rechteck  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$  und  $\sqrt{EG - F^2} = r^2 \sin \vartheta$ . Gleichung (3) nimmt dann die Gestalt (6) für jede Funktion  $f(x, y, z)$  an, für die spezielle Funktion  $f(x, y, z) = z$  etwa erhält man (7).

$$(6) \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) \, dS = \iint_{(\Gamma)} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$(7) \quad \iint_{(S)} z \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r \cos \vartheta \, r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = r^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = r^3 \int_0^{2\pi} [-\frac{1}{4} \cos 2\vartheta]_0^{\pi/2} \, d\varphi = \frac{1}{4} r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi r^3$$

II. Zu einem O. zweiter Art gelangt man unter entsprechenden Voraussetzungen wie in I.: Ist  $S$  eine zweiseitige nichtgeschlossene Fläche, die eindeutig über der  $x, y$ -Ebene liegt, und ist  $f(x, y, z)$  eine auf  $S$  definierte und beschränkte Funktion, so bezeichnen  $Z$  wieder eine Zerlegung von  $S$  in endlich viele Teilflächen  $S_i, \Delta(Z)$  den größten Durchmesser der  $S_i$  und  $P_i$  mit den Koordinaten  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  einen beliebigen Punkt auf der Teilfläche  $S_i$ . Man kann nun eine

Seite der zweiseitigen Fläche  $S$  auswählen und jeder geschlossenen Kurve auf  $S$  den Durchlaufsin zuordnen, der mit der Normalen der gewählten Seite eine Rechtsschraube bildet. Wählt man die andere Seite, so erhält die gleiche geschlossene Kurve gerade den entgegengesetzten Durchlaufsin. Der danach bestimmte Durchlauf des Randes jeder Teilfläche  $S_i$  in der Zerlegung  $Z$  von  $S$  liefert einen Durchlauf des Randes der Projektion  $B_i$  von  $S_i$  auf die  $x, y$ -Ebene (Abb. 2). Nach diesem Durchlaufsin hat die Maßzahl  $m(B_i)$  des Flächeninhalts der Projektion  $B_i$  das positive oder negative Vorzeichen. Zu jeder Zerlegung  $Z$  gehört danach eine eindeutig bestimmte *Zwischensumme* (8). Hat (8)

$$(8) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) m(B_i)$$

einen Grenzwert  $I$ , so heißt  $I$  das O. zweiter Art der Funktion  $f(x, y, z)$  über die gewählte Seite der Fläche  $S$  und  $f(x, y, z)$  über  $S$  integrierbar. Der Grenzwert  $I$  existiert, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  gibt, so daß für jede Zerlegung  $Z$  mit  $\Delta(Z) < \delta$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \varepsilon$  gilt. Man schreibt  $I = \iint_{(S)} f(x, y, z) \, dx \, dy$ .

Hat die Fläche  $S$  auch eindeutige Projektionen auf die  $y, z$ - bzw. die  $x, z$ -Ebene, so lassen sich analog die O.e zweiter Art  $\iint_{(S)} f(x, y, z) \, dy \, dz, \iint_{(S)} f(x, y, z) \, dz \, dx$  definieren. Sind auf  $S$  die Funktionen  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  gegeben, so gelangt man durch die Definition (9) zu dem *allgemeinen O. zweiter Art*.

$$(9) \quad \iint_{(S)} [P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy] = \iint_{(S)} P \, dy \, dz + \iint_{(S)} Q \, dz \, dx + \iint_{(S)} R \, dx \, dy$$

Ist die eindeutig über der  $x, y$ -Ebene liegende Fläche  $S$  durch die Gleichung  $z = \varphi(x, y)$  gegeben und durchlaufen  $x$  und  $y$  den Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene, so kann das O. in ein *Flächenintegral* übergeführt werden. Für die Integration über die obere Seite von  $S$ , d. h. über die Seite, deren Normale mit der  $z$ -Achse einen spitzen Winkel bildet, gilt dann Formel (10), bei Integration über die untere Seite dagegen Formel (11).

$$(10) \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{(B)} f(x, y, \varphi(x, y)) \, dx \, dy$$

$$(11) \quad \iint_{(S)} f(x, y, z) \, dx \, dy = - \iint_{(B)} f(x, y, \varphi(x, y)) \, dx \, dy$$

Das O.  $\iint_{(S)} [P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy]$  hat für zwei verschiedene nichtgeschlossene Flächen  $S_1$  und  $S_2$  mit der gleichen Randkurve  $k$  (Abb. 3) i. allg.

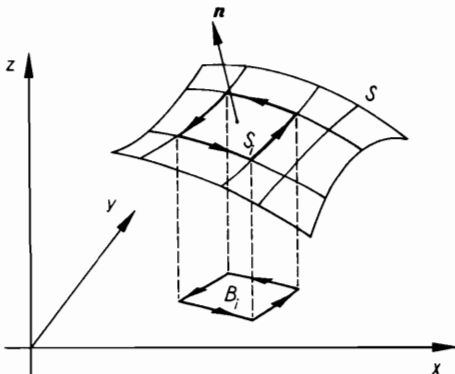
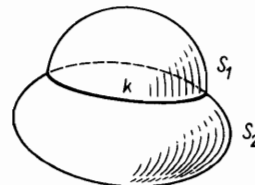


Abb. 2: Definition des Oberflächenintegrals zweiter Art



Oberflächenintegral. Abb. 3: Zwei verschiedene Flächen  $S_1$  und  $S_2$  mit gleicher Randkurve  $k$

verschiedene Werte, d. h., das O. über jede geschlossene Fläche hat i. allg. nicht den Wert Null. Falls aber die Funktionen  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  in einem einfach zusammenhängenden räuml. Bereich  $K$ , der mit jeder geschlossenen Fläche in  $K$  auch den von dieser Fläche begrenzten Bereich enthält, stetig sind, so verschwindet das O. über jede geschlossene Fläche  $S$  in  $K$  genau dann, wenn (12) gilt.

$$(12) \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Zwischen dem O. erster und dem zweiter Art besteht folgender Zusammenhang: Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Größen der Winkel, die die Normalen der ausgewählten Seite der Fläche  $S$  mit der  $x$ - bzw. der  $z$ -Achse bilden, so kann durch die Beziehung (13) das O. zweiter Art in ein O. erster Art übergeführt werden.

$$(13) \quad \iint_{(S)} [P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy] \\ = \iint_{(S)} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] \, dS$$

**Oberreihe** ↗ Konvergenzkriterien für Reihen, VI.  
**Oberschwingung** ↗ Fouriersche Reihe IV.  
**Objektprogramm** ↗ Betriebssystem II.  
**Objektsprache** ↗ Metasprache.  
**ODER-Glied** ↗ Übertragungsglied III.  
**OF** svw. Operationsforschung.  
**offene Menge** ↗ Menge  $V$ ., ↗  $n$ -dimensionaler reeller Punkttraum.  
**off-line** ↗ Prozeßkopplung.  
**Öffnungswinkel** ↗ Kegel I., ↗ Kegelschnitt I.  
**Okttaeder** ↗ regelmäßige Polyeder I., II.3.  
**Oktalzahl** ↗ Zahlensystem VII.  
**Oktant** ↗ Koordinatensystem II.  
**on-line** ↗ Prozeßkopplung, ↗ Prozeßrechner V.  
**open-loop** ↗ Prozeßkopplung.  
**Operatingsystem** svw. Betriebssystem.  
**Operation** ↗ algebraische Operation, ↗ Grundrechenarten, ↗ Relation III.  
**Operational:** ↗ Struktur IV.  
**Operationsforschung** [*Operations Research*], Abk. *OF* bzw. *OR*: zweckmäßiges Vorbereiten, Durchführen, Kontrollieren und Einschätzen von Entscheidungen mit Hilfe von mathemat. Methoden. Die gesellschaftl. Interessen der Anwender kommen in Zielstellung und Methodik der Untersuchung zum Ausdruck. Meist werden folgende Arbeitsstufen durchlaufen: Aufgabenstellung, Problemanalyse, Modellierung (↗ Modell III.), Algorithmierung, d. h. Auswahl bzw. Entwicklung von Lösungsverfahren, Programmierung, Testrechnung, prakt. Anwendung, Überwachen der Gültigkeit bzw. Anpassen des Modells bei Veränderung der Umstände. Die Untersuchungen verkürzen sich, wenn sie auf ↗ Standardmodelle (↗ Modell IV.) der O. führen.  
**Mathemat. Grundlagen der O.** sind vor allem: Optimierung, Statistik einschließlich Informationstheorie, Theorie der stochast. Modelle, z. B. Lagerhaltungstheorie, Bedienungstheorie, Erneuerungstheorie oder Zuverlässigkeitstheorie, Theorie der mathe-

mathematisch-ökonom. Modelle, z. B. Verflechtungsbilanzierung oder ökonom. Kybernetik, allgemeine Entscheidungs- und Spieltheorie, Graphentheorie einschließlich Netzplantechnik.

**Operations Research** svw. Operationsforschung.  
**Operationsschreibweise** ↗ Funktion I.  
**Operationssystem** svw. Betriebssystem.  
**Operationsteil** ↗ Befehl, ↗ digitale Rechenanlage II.3.  
**Operationsverstärker** ↗ Analogrechner I., II.  
**Operationszeichen** ↗ Klammern II., ↗ Subtraktion I.

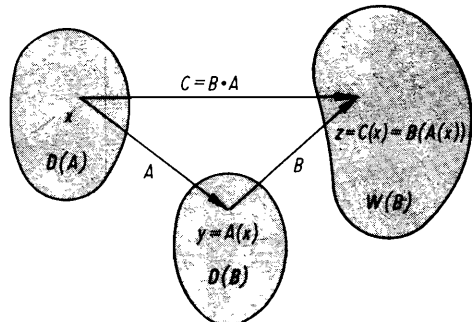
**Operator:** Abbildung  $A : X \rightarrow Y$ , die jedem Element  $x$  einer Teilmenge  $D$  eines abstrakten Raumes  $X$  (↗ Funktionalanalysis) eindeutig ein Element  $y$  eines möglicherweise anderen abstrakten Raumes  $Y$  zuordnet. Symbolisch schreibt man  $y = A(x)$  oder  $y = Ax$  und nennt  $y$  das *Bild* von  $x$  bzgl.  $A$ ,  $x$  ein *Urbild* oder *Original* von  $y$  bzgl.  $A$ .  $D = D(A)$  heißt der *Definitionsbereich* oder *Vorbereich* des O.s  $A$ , und die Menge  $W = W(A)$  aller  $y \in Y$ , für die es ein  $x \in D(A)$  mit  $Ax = y$  gibt, nennt man den *Wertebereich* oder *Nachbereich* von  $A$ . Ist  $Y$  der Raum  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen, so heißt der O.  $A$  ein *Funktional*. Gilt neben  $Y = \mathbf{R}$  auch  $X = \mathbf{R}$ , so ist der O. eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen. Die für die Funktionalanalysis grundlegenden Begriffe O. und Funktional sind deshalb Verallgemeinerungen des *Funktionsbegriffes*.

Wird z. B. jedem Polynom  $x(t)$  des Vektorraums  $X$  der Polynome höchstens  $m$ -ten Grades das Polynom  $y = Ax(t) = x''(t) - 3x'(t) - 7x(t)^2$  zugeordnet, so ist  $A$  ein O. von  $X$  in dem linearen Raum der Polynome, deren Grad nicht größer als  $2m$  ist. Ein Funktional über dem Raum  $\mathbf{C}^1(a, b)$  (↗ Raum, normierter linearer) wird z. B. durch (1) definiert. Funktionale dieses Typs spielen beim isoperimetr.

$$(1) \quad y = Ax = \int_a^b \sqrt{1 + |x'(t)|^2} \, dt$$

Problem in der Variationsrechnung eine Rolle. Besonders wichtig sind lineare O.en (↗ Operator, linearer).

Ist ein O.  $A$  eineindeutig, d. h., folgt aus  $Ax_1 = Ax_2$  stets  $x_1 = x_2$ , so kann man zu  $y = Ax$  durch  $x = A^{-1}y$



Operator: Produktoperator  $C = BA$  ordnet jedem  $x \in D(A)$  das Element  $Cx = B(A(x))$  zu

den *inversen*  $O$ .  $A^{-1}$  definieren.  $A^{-1}$  bildet dann den Wertebereich  $W(A)$  auf den Definitionsbereich  $D(A)$  ab, d. h., es gilt  $D(A^{-1}) = W(A)$  und  $W(A^{-1}) = D(A)$ . Sind  $A : X \rightarrow Y$  und  $B : X \rightarrow Z$  zwei l. O.en mit  $W(A) \subset D(B)$ , so ordnet der *Produkt-O.*  $C = BA$  jedem  $x \in D(A)$  das Element  $Cx = B(Ax)$  zu (vgl. Abb.).

S. a. Funktional II.; Funktionalanalysis II.; lineare Abbildung III.

**Operator, linearer:** I. ein Operator  $A$ , dessen Definitionsbereich  $D(A)$  und Wertebereich  $W(A)$  lineare Räume ( $\nearrow$  Vektorraum) sind und für den aus  $x_1, x_2 \in D(A)$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$  stets folgt

$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$  (s. a. lineare Abbildung I., III.).

**I.1.** Der *Multiplikationsoperator*  $y = Ax = a(t)x(t)$  mit  $a(t) \in \mathbf{C}(a, b)$  ist ein l. O., der den Banachraum  $\mathbf{C}(a, b)$  ( $\nearrow$  Raum, normierter linearer) in sich abbildet.

**I.2.** Sind  $a_i(t)$  gegebene stetige Funktionen auf dem endl. Intervall  $[a, b]$ , so ist der durch (1) definierte *Differentialoperator* ein l. O. des Banachraums  $\mathbf{C}^n(a, b)$  in den Raum  $\mathbf{C}(a, b)$ . Durch die Zuordnungs-

$$(1) \quad y = Ax = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} x(t)$$

vorschrift (1) läßt sich ebenso ein l. O. im Raume  $L_p(a, b)$  definieren, dessen Definitionsbereich  $D(A)$  aus allen  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  besteht.

**I.3.** Für die Anwendung der Funktionalanalysis spielt der *Integraloperator* (2), der von der *Kernfunktion*  $K(s, t)$  abhängt, eine wesentl. Rolle.

$$(2) \quad y = Ax(t) = \int_a^b K(s, t) x(s) ds$$

Für die speziellen Kernfunktionen  $K(s, t) = e^{-st}$  bzw.  $K(s, t) = e^{ist}$  und für  $a = b = \infty$  beschreibt  $A$  den Übergang zur *Laplace-Transformierten* ( $\nearrow$  Laplacetransformation I.) bzw. zur *Fourier-Transformierten* der Funktion  $x(t)$ . Beides sind Integraltransformationen, die in der Technik und der Theorie der Differentialgleichungen eine große Bedeutung haben.

**I.4.** Ist  $A$  eine  $(n, m)$ -Matrix, deren Elemente komplexe Zahlen sind, so wird durch  $y = Ax = Ax$  ein l. O. erklärt, der den Raum  $\mathbf{C}^m$  in den Raum  $\mathbf{C}^n$  abbildet.  $Ax$  bezeichnet dabei das Produkt der Matrix  $A$  mit dem Vektor  $x$ . Man kann leicht beweisen, daß alle l. O.en des  $\mathbf{C}^m$  in den  $\mathbf{C}^n$  diese Gestalt haben.

**I.5.** Der *Verschiebungsoperator*  $y = Ax = x(t - t_0)$  mit reellem  $t_0$  ist ein l. O. mit  $D(A) = L_p(a, b)$  und  $W(A) = L_p(a + t_0, b + t_0)$ .

**II.** Während der Begriff des abstrakten Raumes ( $\nearrow$  Funktionalanalysis) vor allem zur Typisierung der mathemat. Objekte dient, gelingt es mit Hilfe des Begriffs Operator, *mathemat. Operationen*, denen die Elemente des Raumes unterworfen werden, abstrakt zu formulieren. Die Beispiele I.1. bis I.5. zeigen auch, daß sich viele der in der Mathematik gebräuchl. Operationen, z. B. die Differentiation,

die Integration, wichtige Integraltransformationen, die Multiplikation von Matrizen und Vektoren sowie die Verschiebung des Arguments bei Funktionen, durch l. O.en beschreiben lassen. Ebenso wird es mit Hilfe des Operatorbegriffs möglich, Probleme aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik im Rahmen der Funktionalanalysis zu formulieren und zu lösen. Die Aufgabe z. B., alle  $n$ -mal stetig differenzierbaren Lösungen der Differentialgleichung

$$Ax = \sum_{i=0}^n a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} x(t) = g(t) \quad \text{mit } g(t) \in \mathbf{C}(a, b)$$

anzugeben, ist äquivalent zu dem Problem, alle Lösungen  $x(t) \in \mathbf{C}^n(a, b)$  der Operatorengleichung  $Ax = g$  zu bestimmen. Zahlreiche Verfahren und Sätze aus verschiedenen Bereichen der Analysis, z. B. die Methode der sukzessiven Approximation bei gewöhnl. Differentialgleichungen oder die Fredholmsche Alternative für Integralgleichungen, die dort zur Lösung konkreter Probleme dienten, wurden auf abstrakte Räume und Operatoren verallgemeinert und sind damit zu Spezialfällen allgemeinerer funktionalanalyt. Methoden geworden ( $\nearrow$  Fixpunktsatz von Banach), deren Anwendung in anderen mathemat. Disziplinen eine Reihe neuer Ergebnisse lieferte.

**III.** Zum Aufbau eines gewissen *Operatorenkalküls* ist es zweckmäßig, die *Summe* und das *skalare Vielfache* von l. O.en zu definieren. Sind  $A$  und  $B$  l. O.en, deren Definitionsbereiche  $D(A)$  und  $D(B)$  in einem linearen Raum  $X$  und deren Wertebereiche  $W(A)$  und  $W(B)$  in einem linearen Raum  $Y$  liegen und ist  $\lambda$  eine komplexe Zahl, so versteht man unter dem *skalaren Vielfachen*  $\lambda A$  den Operator, der jedes Element  $x \in D(A)$  in das Element  $\lambda Ax$  überführt. Die *Summe*  $A + B$  soll  $x \in D(A) \cap D(B)$  in  $Ax + Bx$  abbilden. Nach diesen Definitionen gelten dann  $D(\lambda A) = D(A)$ ,  $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$  für  $x \in D(\lambda A)$  und  $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ ,  $(A + B)x = Ax + Bx$  für  $x \in D(A + B)$ . Die Summe, das skalare Vielfache und das Produkt ( $\nearrow$  Operator) l. O.en sind wieder l. O.en. Diese Begriffsbildungen sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Verknüpfungen von linearen Abbildungen. Die Menge  $L(X, Y)$  aller l. O.en, die den linearen Raum  $X$  in den linearen Raum  $Y$  abbilden, wird mit den soeben definierten Verknüpfungen ein *linearer Raum* und im Falle  $X = Y$  unter Hinzunahme des Produkts sogar eine  $\nearrow$  Algebra.

**IV.** Zur Untersuchung von l. O.en in normierten linearen Räumen erweisen sich die Begriffe *Beschränktheit* und *Stetigkeit* eines l. O.s als notwendig. Ein l. O., der den normierten linearen Raum  $X$  in den normierten linearen Raum  $Y$  abbildet, heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $K > 0$  gibt, so daß  $\|y\| = \|Ax\| \leq K\|x\|$  für alle  $x \in X$  gilt. Die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft heißt die *Norm* des l. O.s  $A$  und wird mit  $\|A\|$  bezeichnet. Äquivalent zur Beschränktheit des l. O.s  $A$  ist seine *Stetigkeit*, d. h. die Eigenschaft, daß aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  stets

$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$  folgt. Die in den Beispielen I.1., I.4. und I.5. betrachteten l. O.en sind beschränkt; dabei

wird  $\|A\|$  in I.1. gegeben durch (3), und in I.5. gilt  $\|A\| = 1$ .

$$(3) \quad \|A\| = \text{Max}_{t \in [a,b]} |a(t)|$$

Der Differentialoperator in I.2. ist als Operator des Raumes  $\mathbf{C}^n(a, b)$  in den  $\mathbf{C}(a, b)$  beschränkt, als Operator im Raum  $L_p(a, b)$  dagegen i. allg. nicht beschränkt. Ist die Kernfunktion  $K(s, t)$  des Integraloperators aus I.4. quadratisch integrierbar, d. h., gilt (4), dann wird  $A$  ein beschränkter l. O. des  $L_2(a, b)$  in sich.

$$(4) \quad \iint_a^b K(s, t) \, ds \, dt < \infty$$

Die Summe, das skalare Vielfache und das Produkt beschränkter l. O.en sind wieder beschränkte l. O.en auf den entsprechenden Definitionsbereichen. Die Menge  $L_n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  aller beschränkten l. O.en eines normierten linearen Raumes  $\mathbf{X}$  in den normierten linearen Raum  $\mathbf{Y}$  bildet daher mit den Verknüpfungen Summe und skalares Vielfaches und der Norm der Operatoren selbst *einen normierten linearen Raum*.

**V.** Der Operator  $B$  des Hilbertraumes  $\mathbf{X}$  heißt *adjungierter* oder auch *transponierter Operator* des beschränkten l. O.s  $A$ , wenn die Beziehung  $(Ax, y) = (x, By)$  für alle  $x, y \in \mathbf{X}$  gilt; dabei bezeichnet  $(x, y)$  das Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  in  $\mathbf{X}$ . Zu jedem beschränkten l. O.  $A$  existiert ein eindeutig bestimmter adjungierter Operator, der mit  $A^*$  bezeichnet wird.  $A^*$  ist wieder ein beschränkter l. O. des Hilbertraumes, und es gilt  $\|A\| = \|A^*\|$ . Die Existenz des adjungierten Operators folgt unmittelbar aus dem Satz von Riesz (↗ Funktional II.): Bei festgehaltenem  $y \in \mathbf{X}$  ist  $F(x) = (Ax, y)$  ein beschränktes lineares Funktional auf  $\mathbf{X}$ . Nach dem Satz von Riesz existiert dann ein eindeutig bestimmtes Element  $y^* \in \mathbf{X}$ , so daß  $F(x) = (Ax, y) = (x, y^*)$  gilt. Der durch  $A^*x = y^*$  erklärte Operator genügt den Bedingungen der Definition des adjungierten Operators. — Den Begriff adjungierter Operator kann man als eine Verallgemeinerung des Begriffs der *transponierten Matrix* auf l. O.en im Hilbertraum auffassen. Ist  $A$  der durch die  $(n, n)$ -Matrix  $A = (a_{ik})$  definierte Operator  $y = Ax = Az$  des  $n$ -dimensionalen Raumes  $\mathbf{C}^n$ , so entspricht der adjungierte Operator  $A^*$  der Matrix  $\bar{A}^T = (\bar{a}_{ki})$ , d. h., es gilt  $y = A^*x = \bar{A}^T x$ .

**VI.** Als *hermitesch* oder *selbstadjungiert* bezeichnet man einen beschränkten l. O.  $A$  im Hilbertraum  $\mathbf{X}$ , für den bei beliebigem  $x, y \in \mathbf{X}$  gilt  $(Ax, y) = (x, Ay)$ . Ein beschränkter l. O.  $A$  ist demnach genau dann hermitesch, wenn er gleich seinem adjungierten Operator  $A^*$  ist, d. h., wenn  $A = A^*$  gilt. Den Begriff des hermiteschen Operators kann man als eine Verallgemeinerung des Begriffs einer hermiteschen bzw. symmetr. linearen Transformation eines Vektorraums auf beschränkte l. O.en im Hilbertraum ansehen. Definiert man zu der  $(n, n)$ -Matrix  $A$  im  $n$ -dimensionalen euklid. Raum  $\mathbf{C}^n$  durch  $y = Ax = \bar{A}x$  einen l. O.  $A$ , so ist die Matrix  $A$  genau dann

hermitesch, wenn für alle  $\alpha x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbf{C}^n$  die Gleichung (5) gilt,

$$(5) \quad \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \bar{\eta}_k = (Ax, y) = (x, Ay) = \sum_{i,k=1}^n \bar{a}_{ki} \xi_i \bar{\eta}_k$$

d. h., wenn der Operator  $A$  hermitesch ist. Die Relation  $(Ax, y) = (x, Ay)$  zieht man in der Funktionalanalysis zur Definition des hermiteschen Operators heran. Viele Sätze über hermitesche Matrizen, z. B. über die Eigenwerte oder über die Möglichkeit einer Hauptachsentransformation, lassen sich sinngemäß auf hermitesche Operatoren verallgemeinern. Deshalb spielt dieser Begriff eine grundlegende Rolle in der Theorie der l. O.en im Hilbertraum.

**VII.** Als *unitär* bezeichnet man einen beschränkten l. O.  $U$  im Hilbertraum  $\mathbf{X}$ , für den  $U^*U = UU^* = I$  gilt. Dabei ist  $U^*$  der zu  $U$  adjungierte Operator und  $I$  die ident. Abbildung des Hilbertraumes. Ein beschränkter l. O. ist danach genau dann unitär, wenn  $U^* = U^{-1}$  gilt. Ein unitärer Operator  $U$  hat stets die Norm  $\|U\| = 1$ . Sein Begriff verallgemeinert den der unitären linearen Transformation eines Vektorraumes, das ist eine Transformation, die das Skalarprodukt invariant läßt. Der durch eine  $(n, n)$ -Matrix  $U$  erklärte l. O.  $y = Ux = Ux$  des euklid. Raumes  $\mathbf{C}^n$  ist genau dann unitär, wenn die Matrix unitär ist. — Alle ↗ Eigenwerte  $\lambda$  eines unitären Operators haben den Betrag  $|\lambda| = 1$ . Ein unitärer Operator  $U$  läßt das Skalarprodukt und die Norm des Hilbertraumes invariant, d. h., es gilt  $(x, y) = (Ux, Uy)$  und  $\|x\| = \|Ux\|$  für alle  $x, y \in \mathbf{X}$ . Die durch einen unitären Operator vermittelte Abbildung des Hilbertraumes erhält demnach die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren und die Länge eines Vektors. Alle unitären Operatoren eines Hilbertraumes  $\mathbf{X}$  bilden bzgl. der Multiplikation, d. h. der Hintereinanderausführung, eine Gruppe. Die eben gen. Sätze sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Resultate für unitäre Matrizen.

**Operatorenbereich** ↗ algebraische Struktur I., ↗ Operatorstruktur.

**Operatorenkalkül** ↗ Operator, linearer, III.

**Operatorstruktur:** algebraische Struktur  $A$ , bei der eine Menge  $B$ , die selbst algebraische Struktur sein kann, den *Operatorbereich*  $B$  bildet; jedem  $x \in A$  und jedem  $\alpha \in B$  wird dabei eindeutig ein  $\alpha x \in A$  zugeordnet. Vgl. Modul II.; Algebra III.

**optimaler Bestellabstand** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**optimale Schrittweite** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung IV.

**optimale Standortverteilung** ↗ Extremwert VII.3.

**optimales Verhalten** ↗ Adaption IV.

**Optimalitätsprinzip, Bellmannsches** ↗ Optimierung, dynamische, III.

**Optimalitätstest** ↗ Simplexalgorithmus II.

**Optimalpunkt** ↗ Optimierung II.

**Optimierung:** I. Teilgebiet der Mathematik zur Untersuchung von Theorien und Verfahren, um das Minimum oder Maximum einer Funktion, meist vieler Variabler, unter Nebenbedingungen zu ermitteln. Die *Nebenbedingungen*, auch *Restriktionen*

gen., sind meist als Gleichungen oder Ungleichungen gegeben, können aber z. B. auch die Ganzzahligkeit der Lösungswerte fordern. Bei freier  $O$ . fehlen Nebenbedingungen ( $\nearrow$  Optimierung, freie). Durch die Nebenbedingungen wird der Bereich, in dem der  $n$ -komponentige Variablenvektor  $\mathbf{x}$  der Zielfunktion  $Q(\mathbf{x})$  zulässige Werte annimmt, beschränkt auf den zulässigen Bereich  $B \subset \mathbb{R}^n$ . Im erweiterten Sinne spricht man von einer  $O$ . in allgemeinen Räumen, wenn in ihnen die gesuchte Größe z. B. eine Funktion ist,  $Q(\mathbf{x})$  ein Funktional und  $B$  ein Teil des Funktionenraums (zum Bereich  $B$  s. a. Ecke).

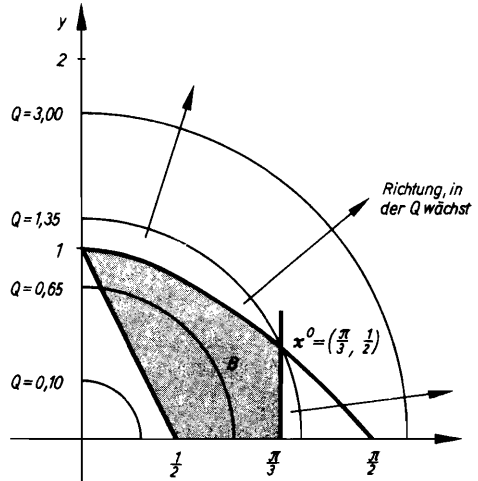
Eine Aufgabe mit  $G(\mathbf{x}) = \text{Max!}$  läßt sich mittels  $Q(\mathbf{x}) = -G(\mathbf{x})$  äquivalent in eine mit  $Q(\mathbf{x}) = \text{Min!}$  umformen. Eine Gleichung  $f(\mathbf{x}) = a$  läßt sich als Paar von Ungleichungen  $f(\mathbf{x}) \leq a$  und  $f(\mathbf{x}) \geq a$  auffassen. Entsprechend kann von einer Ungleichung  $f(\mathbf{x}) \leq b$  bzw.  $f(\mathbf{x}) \geq c$  durch Einführung einer nichtnegativen Schlupfvariablen  $s$  bzw.  $t$  zu einer Gleichung  $f(\mathbf{x}) + s = b$  bzw.  $f(\mathbf{x}) - t = c$  übergegangen werden. Speziell kann eine Restriktion eine Vorzeichenbedingung  $x_i \leq 0$  bzw.  $x_i \geq 0$  sein. Will man erreichen, daß für alle auftretenden Variablen eine Nichtnegativbedingung  $x_i \geq 0$  gilt, kann man für jede nicht vorzeichenbeschränkte Variable die Differenz zweier nichtnegativer Hilfsvariablen substituieren. Eine Restriktion, die den zulässigen Bereich nicht ändert, heißt überflüssig. Widersprechen sich die Nebenbedingungen, so ist  $B$  leer.

II. Ein globales Optimum ist ein Optimalwert  $Q(\mathbf{x}^{(0)})$  der Zielfunktion über dem Bereich  $B$ ,  $\mathbf{x}^{(0)}$  heißt Optimalpunkt oder optimale Lösung. Je nach der Zielfunktion kann ein globales Maximum oder ein globales Minimum gefordert sein. Ist  $\mathbf{x}^0$  ein lokaler Optimalpunkt, so ist  $Q(\mathbf{x}^{(0)})$  nur für die Punkte  $\mathbf{x} \in B$  mit  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \varepsilon$  optimaler Wert und heißt lokales Optimum. Jedes globale Optimum ist

III.  $O$ .aufgaben im  $\mathbb{R}^2$  können graphisch veranschaulicht und gelöst werden. Außer dem zulässigen Bereich werden einige Niveaulinien der Zielfunktion eingezeichnet, so daß man die Tendenz des Verlaufs von  $Q(\mathbf{x})$  erkennen kann. Für  $2x + y \geq 1$  mit  $y \leq \cos x$ ,  $x \leq \pi/3$  und  $y \geq 0$  als Nebenbedingungen und der Zielfunktion  $Q(x, y) = x^2 + y^2 = \text{Max!}$  sind z. B. die Niveaulinien  $Q(x, y) = \text{const}$ , Kreise um  $(0, 0)$ . Der optimale Wert  $\mathbf{x}^{(0)}$  ist eine Ecke des zulässigen Bereichs  $B$  und liegt auf der Niveaulinie mit  $Q = 1,35$  (Abb.). Bei linearem  $Q(\mathbf{x})$  sind die Niveaulinien parallele Geraden, das Optimum kann dann durch Parallelverschiebung gefunden werden.

IV. Eine geschlossene Theorie mit allgemein anwendbaren Algorithmen existiert nur für gewisse Klassen von  $O$ .aufgaben, für lineare, quadrat., konvexe, Quotienten- $O$ ., ganzzahlige und geometr.  $O$ . lokales Optimum, aber nicht umgekehrt. Ein Punkt  $\mathbf{x}^{(1)}$  mit der Eigenschaft, daß  $Q(\mathbf{x}^{(1)})$  dem Optimum für prakt. Anforderungen hinreichend nahe kommt, heißt suboptimal.

Keine solche Theorie, sondern eine Lösungs idee für verschiedenartige Probleme ist die dynam.  $O$ .



Optimierung: Graph. Lösung einer Optimierungsaufgabe in  $\mathbb{R}^2$

V. Die in  $Q(\mathbf{x})$  und den Nebenbedingungen neben den Variablen auftretenden Größen, in der Regel Konstanten, können noch von Parametern abhängen.

Bei einer solchen parametr.  $O$ . hängt meist auch die Lösung von diesen Parametern ab. Gut ausgearbeitet ist dieser Fall im Rahmen der linearen  $O$ . und der linearen Quotienten- $O$ . Treten in Nebenbedingungen oder in der Zielfunktion Zufallsgrößen auf, spricht man von stochast.  $O$ . Die Entwicklung der stochast.  $O$ . befindet sich noch am Beginn, vgl. aber Optimierung, dynamische.

VI. Bei der Vektor- $O$ . oder  $O$ . mit mehreren Zielfunktionen wird versucht, Entscheidungen zu finden, so daß mehrere Zielfunktionen gleichzeitig günstig ausfallen. Meist wird zu einer Gesamtziel-funktion in Form einer gewichteten Summe der Einzelzielfunktionen übergegangen, darüber hinaus gibt es spieltheoret. Ansätze zur Behandlung des Problems.

VII. Wie z. B. in der projektiven Geometrie gibt es auch in der  $O$ . zu dem dann primal gen. Begriffssystem ein duales. Wie auch dort bleiben durch diese Dualität Gesetzmäßigkeiten erhalten, d. h., bestehende Gesetzmäßigkeiten in einem System gehen durch Dualisieren in gültige Gesetze im anderen System über. Zu manchen Aufgaben der  $O$ . läßt sich eine duale Aufgabe finden, aus deren Lösung, die u. U. leichter zu bestimmen ist, die der ursprüngl. Aufgabe erhalten werden kann. In der linearen  $O$ . sind mit Matrizen  $A, B, C, D$  und Vektoren passender Dimension  $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}$  folgende beiden Aufgaben (1) und (2) dual (für die Schreibweise  $\nearrow$  Ungleichungssystem).

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & A\mathbf{x}^{(1)} + B\mathbf{x}^{(2)} \geq \mathbf{b}^{(1)} \\
 & C\mathbf{x}^{(1)} + D\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}^{(2)} \\
 & \mathbf{x}^{(1)} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^{(2)} \text{ beliebig} \\
 & Q(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{(1)T}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)T}\mathbf{x}^{(2)} = \text{Min!}
 \end{aligned}$$

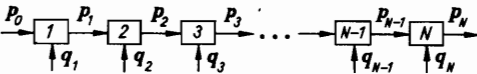
$$\begin{aligned}
 (2) \quad & A^T \mathbf{y}^{(1)} + C^T \mathbf{y}^{(2)} \leq \mathbf{p}^{(1)} \\
 & B^T \mathbf{y}^{(1)} + D^T \mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{p}^{(2)} \\
 & \mathbf{y}^{(1)} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^{(2)} \text{ beliebig} \\
 & G(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^{(1)T} \mathbf{y}^{(1)} + \mathbf{b}^{(2)T} \mathbf{y}^{(2)} = \text{Max!}
 \end{aligned}$$

In der linearen O. gelten dabei folgende *Dualitätssätze*: Hat eine Aufgabe kein endliches Optimum, so ist bei der dualen der zulässige Bereich leer. Ist eine Aufgabe lösbar, so ist es auch die duale, und für die Optimalwerte gilt  $Q^* = G^*$ . Falls die beiden Aufgaben je einen zulässigen Punkt  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{y}$  haben, sind beide Aufgaben lösbar, und es gilt der *Einschließungssatz*  $G(\mathbf{y}) \leq G^* = Q^* \leq Q(\mathbf{x})$ .

*Satz vom komplementären Schlupf*: Für jedes  $i$  gilt mindestens eine von den beiden  $i$ -ten Ungleichungen in  $A\mathbf{x}^{(1)} + B\mathbf{x}^{(2)} \geq \mathbf{b}^{(1)}$  und in  $\mathbf{y}^{(1)} \geq \mathbf{0}$  mit dem Gleichheitszeichen und analog für  $A^T \mathbf{y}^{(1)} + C^T \mathbf{y}^{(2)} \leq \mathbf{p}$  und  $\mathbf{x}^{(1)} \geq \mathbf{0}$ , falls optimale Lösungen der beiden Aufgaben eingesetzt werden.

**Optimierung, diskrete** svw. **Optimierung, ganzzahlige**.

**Optimierung, dynamische**: I. allgemeine Idee, die Optimierung eines stufenförmigen Systems auf die Lösung parametr. Optimierungsaufgaben an den einzelnen Stufen zurückzuführen. Die *Stufen* können z. B. aufeinanderfolgende Zeitintervalle oder aufeinanderfolgende Anlagen bei der Bearbeitung eines Rohstoffes sein. Die Grundbegriffe der d. O. werden im folgenden am Beispiel einer Kette chem. Reak-



Optimierung, dynamische: Kette chemischer Reaktionen als Beispiel eines stufenförmigen Systems parametr. Optimierungsaufgaben

tionen erläutert (Abb.). Die Maßzahlen für die betrachteten Eigenschaften des Rohstoffes werden zum *Zustandsvektor*  $\mathbf{p}_0$  zusammengefaßt, entsprechend sei  $\mathbf{p}_j$  der Zustandsvektor nach dem Reaktor  $j$ . An jedem Reaktor  $j$  können bestimmte Einstellungen, z. B. für Druck oder Temperatur, vorgenommen werden, die zu einem *Entscheidungsvektor*  $\mathbf{q}_j$  zusammengefaßt werden. Dabei soll  $\mathbf{p}_j$  nur von  $\mathbf{q}_j$  und  $\mathbf{p}_{j-1}$  abhängen, der Zusammenhang  $\mathbf{p}_j = T_j(\mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{q}_j)$  heißt *Übergangstransformation*. Falls die Vektoren nur aus einer Komponente bestehen, werden sie auch *Zustandsvariable* bzw. *Entscheidungsvariable* gen. Ist  $G_N(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$  der Gewinn des Gesamtprozesses, so ist  $G_N$  letztlich eine Funktion der  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$ , weil  $\mathbf{p}_0$  fest ist und die übrigen  $\mathbf{p}_j$  durch die *Übergangstransformationen* eliminiert werden können. Gesucht wird eine optimale Entscheidung  $\mathbf{q}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{q}_N^{(0)}$ . Die  $\mathbf{q}_j$  und  $\mathbf{p}_j$  können aber noch Nebenbedingungen unterworfen sein.

II. Für die Anwendung der d. O. ist die *Trennbarkeit* von  $G_N$  nach den Stufen notwendig, im einfachsten Fall die *additive Trennbarkeit*  $G_N = g_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1) + g_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2) + \dots + g_N(\mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{q}_N)$ . Die  $g_j$  heißen dann *Stufengewinne*. Im folgenden sollen die  $\mathbf{p}_i$  in

den  $g_j$  stets durch *Übergangstransformationen* eliminiert sein.

Neben dem maximalen Gewinn (1), der sich bei gegebenem  $\mathbf{p}_0$  in den  $N$  Stufen erzielen läßt, werden auch der maximale Gewinn (2), der sich bei gegebenem  $\mathbf{p}_1$  in den letzten  $N - 1$  Stufen erreichen läßt, und analoge Größen bis  $f_2(\mathbf{p}_{N-2})$  und  $f_1(\mathbf{p}_{N-1})$  durch

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f_N(\mathbf{p}_0) = \text{Maximum}_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N} [g_1 + \dots + g_N] \\
 (2) \quad & f_{N-1}(\mathbf{p}_1) = \text{Maximum}_{\mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N} [g_2 + \dots + g_N] \\
 (3) \quad & f_2(\mathbf{p}_{N-2}) = \text{Maximum}_{\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{q}_N} [g_{N-1} + g_N] \\
 (4) \quad & f_1(\mathbf{p}_{N-1}) = \text{Maximum}_{\mathbf{q}_N} g_N
 \end{aligned}$$

(3) und (4) eingeführt. Diese sog. *Zustandsfunktionen*  $f_i$  werden mit  $i = 1$  beginnend nacheinander bestimmt. Die Funktion  $f_1(\mathbf{p}_{N-1})$  ergibt sich, indem  $g_N = g_N(\mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{q}_N)$  bzgl.  $\mathbf{q}_N$  für allgemeines  $\mathbf{p}_{N-1}$  maximiert wird, das ist eine parametr. Optimierungsaufgabe mit dem Parameter  $\mathbf{p}_{N-1}$ . Der Wert, für den das Maximum angenommen wird, heißt *Entscheidungsfunktion*  $\hat{\mathbf{q}}_N(\mathbf{p}_{N-1})$ . Diese gibt die beste Weiterverarbeitung eines Zwischenprodukts vor der Stufe  $N$  mit beliebigem Zustand  $\mathbf{p}_{N-1}$  an. Bei der Berechnung der übrigen  $f_i$  sind ebenfalls jeweils nur für ein  $\mathbf{q}_i$  parametr. Optimierungsaufgaben zu lösen, da die schon berechneten  $f_i$  mit eingesetzt werden. Für  $f_2$  gilt z. B. (5). Die Stelle, an der das Maximum angenommen wird, heißt *Entscheidungsfunktion*  $\hat{\mathbf{q}}_{N-1}(\mathbf{p}_{N-2})$ . Schließlich erhält man die *Entscheidungsfunktion*  $\hat{\mathbf{q}}_1(\mathbf{p}_0)$ . Das  $N$ -Tupel  $\hat{\mathbf{q}}_1(\mathbf{p}_0), \dots, \hat{\mathbf{q}}_N(\mathbf{p}_{N-1})$  heißt *optimale Politik* für den Gesamtprozeß. Bei festem  $\mathbf{p}_0 = \bar{\mathbf{p}}_0$  ist  $\hat{\mathbf{q}}_1(\mathbf{p}_0)$  ein fester Wert  $\bar{\mathbf{q}}_1$ . Durch die *Übergangstransformation* kann

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \text{Max}_{\mathbf{q}_{N-1}, \mathbf{q}_N} [g_{N-1}(\mathbf{p}_{N-2}, \mathbf{q}_{N-1}) + g_N(\mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{q}_N)] \\
 & = \text{Max}_{\mathbf{q}_{N-1}} [g_{N-1}(\mathbf{p}_{N-2}, \mathbf{q}_{N-1}) + \text{Max}_{\mathbf{q}_N} g_N(\mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{q}_N)] \\
 & = \text{Max}_{\mathbf{q}_{N-1}} [g_{N-1}(\mathbf{p}_{N-2}, \mathbf{q}_{N-1}) + f_1(\mathbf{p}_{N-1})]
 \end{aligned}$$

nun  $\bar{\mathbf{p}}_1$  berechnet werden. Einsetzen in die Entscheidungsfunktion  $\hat{\mathbf{q}}_2(\mathbf{p}_1)$  liefert  $\bar{\mathbf{q}}_2$ , aus der *Übergangstransformation* folgt  $\bar{\mathbf{p}}_2$  usw. Dieser Prozeß heißt *Rückrechnung*. Die  $\bar{\mathbf{q}}_1, \dots, \bar{\mathbf{q}}_N$  sind die gesuchten  $\mathbf{q}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{q}_N^{(0)}$ .

III. Tritt etwa im 1. Reaktor eine *Störung* auf, so daß sich nicht  $\bar{\mathbf{p}}_1$  ergibt, so werden die dann günstigsten weiteren Entscheidungen aus dem sich real einstellenden  $\mathbf{p}_1$  berechnet, indem die *Rückrechnung* mit diesem Wert beginnend neu durchgeführt wird. Allgemein gilt das *Bellmannsche Optimalitätsprinzip*: Eine optimale Politik hat die Eigenschaft, daß für einen beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{p}_0$  und für eine beliebige, u. U. sogar nichtoptimale Entscheidung  $\mathbf{q}_1$  die übrigen Entscheidungsfunktionen wieder eine optimale Politik bilden bzgl. des Zustands  $\mathbf{p}_1$ , der sich aus der Entscheidung  $\mathbf{q}_1$  ergibt.

IV. Dieser Satz führt zu einer Ausdehnung der d. O. auf Stufenprozesse mit *stochast. Übergangstransformationen*, er dient dort als Prinzip, mit dem bestimmt wird, was unter Optimierung des Gesamt-

prozesses überhaupt verstanden werden soll. Der *stochast. Stufenprozeß* wird durch Bildung von Erwartungswerten auf einen deterministischen zurückgeführt, der wie oben behandelt wird. Nach der 1. Stufe stellt sich in der Regel ein vom Erwartungswert  $\bar{p}_1$  abweichendes  $p_1$  ein, das dann in  $\hat{q}_2(p_1)$  eingesetzt wird usw.

Der Stufenprozeß heißt *stationär*, wenn die Übergangstransformationen  $T_i = T$  und die Stufengewinne  $g_i = g$  in allen Stufen gleich sind. Dann hat die zu lösende parametr. Optimierungsaufgabe für alle Stufen  $i$  die gleiche Gestalt (6). Die durch Rekursionsgleichungen gegebene Folge  $f_i$ , deren Berechnung den Hauptaufwand der d. O. ausmacht, wird danach durch nur eine Rekursionsgleichung bestimmt. Für unbeschränktes  $N$  erhofft man für  $i \rightarrow \infty$  eine Konvergenz  $f_i \rightarrow f$ , die Untersuchung dieser Konvergenz und der entstehenden  $\nearrow$  Bell-

$$(6) \quad f_i(\mathbf{p}) = \underset{q}{\text{Max}} \{g(\mathbf{p}, q) + f_{i-1}(\mathbf{p}')\}$$

mit  $\mathbf{p}' = T(\mathbf{p}, q)$

$$(7) \quad f(\mathbf{p}) = \underset{q}{\text{Max}} \{g(\mathbf{p}, q) + f(\mathbf{p}')\}$$

mannschen Funktionalgleichung (7) bildet einen Hauptgegenstand der Theorie der d. O.

V. Gelegentlich bezeichnet man als *dynam. Programmierung* das Reduzieren eines Stufenmodells auf eine Folge von Problemen für jeweils eine Stufe und als d. O. die Berechnung der Zustands- und Entscheidungsfunktionen mit anschließender Rückrechnung. Meist werden die Begriffe aber synonym verwendet.

**Optimierung, freie:** Suche des absoluten Minimums oder Maximums einer Funktion — meist vieler Variabler — ohne Nebenbedingungen. Neben der Stetigkeit der Funktion setzen die meisten Verfahren noch deren *Unimodalität* voraus, d. h. eine Funktion, die nur einen stationären Punkt, das gesuchte Extremum, hat und insbes. keine weiteren relativen Extrema. Für die Lösung kommen Abstiegsverfahren wie in der konvexen Optimierung in Frage, die durch das Fehlen der Nebenbedingungen einfacher werden. Andere, vor allem für nichtdifferenzierbare Funktionen angewendete Verfahren schachteln das Extremum durch direkte Suche ein. Für Funktionen einer Variablen können die neuen Punkte mit Hilfe Fibonacci'scher Zahlen bestimmt werden, durch quadrat. Interpolation in der Nähe des Minimums oder nach dem Goldenen-Schnitt-Algorithmus.

**Optimierung, ganzzahlige, Optimierung, diskrete:** Optimierung mit der Einschränkung, daß einige vorkommende Größen nur ganzzahlige Werte annehmen können, in *gemischt-g. O.* sollen einige Variable, in *rein-g. O.* alle Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen. Von *diskreter O.* spricht man, weil es kein wesentl. Unterschied ist, ob die Variablen nur Werte aus der Menge der ganzen Zahlen oder aus irgendeiner diskreten Menge annehmen können. Sind die Variablen auf die zwei Werte 0 und 1 eingeschränkt, spricht man von *Boolescher* oder *0-1-Optimierung*. Eine lineare rein-g. O.saufgabe ist z. B.

$3x + 4y \leq 20, 2x + y \geq 1$  für  $x$  und  $y$  nicht-negativ und ganz mit  $4x - y = \text{Max!}$  Der zulässige Bereich besteht hier nur aus den zulässigen *Gitterpunkten*.

Häufig wird zuerst die *Lösung* ohne Beachtung der Ganzzahligkeitsforderung ermittelt. Man sucht das *stetige Optimum* und dann in seiner Nähe den *optimalen Gitterpunkt*. Der Abstand zwischen dem stetigen Optimum und dem optimalen Gitterpunkt kann jedoch beliebig groß sein ( $\nearrow$  Gomory, Verfahren von,  $\nearrow$  Verzweungsverfahren). Wichtige Anwendungen sind das Zuordnungsproblem, Rundfahrtpproblem, Reihenfolgeproblem, Knapsackproblem und das Überdeckungsproblem.

**Optimierung, geometrische:** Klasse von Optimierungsaufgaben und zugehörigen Lösungsverfahren, in denen Zielfunktion und Nebenbedingungen durch *Posinome* dargestellt werden, wenn man unter einem Posinom von  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)^T$  eine Funktion

$g(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n c_i t_i^{a_i} \dots t_m^{a_m}$  versteht, die für  $t_j > 0$  mit reellen  $a_{ij}$  und  $c_i > 0$  erklärt ist. Die Lösung wird meist durch Betrachtung einer dualen Aufgabe ( $\nearrow$  Optimierung VII.) erhalten, welche nur lineare Nebenbedingungen enthält.

**Optimierung, hyperbolische** svw. Quotientenoptimierung, lineare.

**Optimierung, kombinatorische:** Optimierung über einer abzählbaren Menge, insbes. dann, wenn die Elemente der Menge qualitativ unterschiedl. Entscheidungen widerspiegeln und zur Ermittlung der günstigsten Entscheidung kombinator. Methoden verwendet werden; oft synonym für *ganzzahlige Optimierung*.

**Optimierung, konvexe:** Klasse von Optimierungsaufgaben  $f_i(\mathbf{x}) \leq 0$  für  $i = 1, \dots, m, F(\mathbf{x}) = \text{Min!}$  mit konvexen  $f_i(\mathbf{x})$  und  $F(\mathbf{x})$  sowie ihrer Lösung. Maximumaufgaben mit konkavem  $G(\mathbf{x})$  lassen sich durch Betrachtung des konvexen  $F(\mathbf{x}) = -G(\mathbf{x})$  ebenfalls lösen. Der zulässige Bereich ist stets eine konvexe Menge.

Die bes. Rolle der k. O. ergibt sich daraus, daß ein lokales Minimum einer konvexen Funktion über einer konvexen Menge stets ein globales Minimum ist. Zur Suche und zum Nachweis des globalen Minimums reichen deshalb *lokale Methoden* aus, d. h. Methoden, die nur Informationen über eine kleine Umgebung der betrachteten Stelle voraussetzen. Für die Lösung stehen zur Verfügung Abstiegsverfahren, Schnittebenenverfahren, Penalty-Funktion und Barriere-Funktion. Lineare und quadrat. Optimierung sind Spezialfälle der k. O., sie werden meist mit speziellen Algorithmen behandelt.

Eine grundlegende Rolle in der Theorie der k. O. spielen die zu diesen Aufgaben gebildeten *Lagrange-funktionen*  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = F(\mathbf{x}) + \sum u_i f_i(\mathbf{x})$  mit einem Parametervektor  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbf{R}^m$ , deren Sattelpunkte und die *Kuhn-Tucker-Theoreme*.

**Optimierung, lineare:** I. Klasse von Optimierungsaufgaben mit linearen Nebenbedingungen und linearer Zielfunktion, auch Bezeichnung für das Lösen solcher Aufgaben. Die Grundlagen stammen von L. W. KANTOROWITSCH und G. B. DANTZIG. Im e. S.



bezeichnet man das Ableiten der Aufgabenstellung als *lineare Programmierung*, die Aufgabe auch als *Linearprogramm*, meist werden beide Bezeichnungen jedoch synonym für den Gesamtprozeß verwendet. Die l. O. ist der heute in der Operationsforschung am häufigsten auftretende Problemtyp. Wichtige Standardmodelle sind das Mischungsproblem und das Aufteilungsproblem, die meist mit dem Simplexalgorithmus gelöst werden, sowie das Transportproblem. Ferner tritt die l. O. als Hilfsmittel auf bei der Lösung von Aufgaben der ganzzahligen Optimierung, z. B. beim Zuschnitt-, beim Überdeckungs- und beim Knapsackproblem, bei dem Verfahren von Gomory und zur Lösung innermathemat. Probleme, z. B. bei der Tschebyschow-Approximation. Für die Lösungsverfahren wird die allgemeine Aufgabe der l. O. meist auf die Form (1) gebracht:

$$(1) \quad \begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad \text{für } x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \\ Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T \mathbf{x} = \text{Min!} \end{aligned}$$

Dabei sind die  $(m, n)$ -Matrix  $A$  und die Vektoren  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$  und  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$  mit  $b_1 \geq 0, \dots, b_m \geq 0$  gegeben, und gesucht ist ein  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , das allen Nebenbedingungen genügt und für das die Zielfunktion  $Q(\mathbf{x})$  minimal wird ( $\nearrow$  Optimierung I.). Aufgaben mit zu maximierender Zielfunktion, mit einem linearen Ungleichungssystem als Nebenbedingung oder mit nicht vorzeichenbeschränkten Variablen lassen sich auf diesen Typ zurückführen. Ist ein  $b_i < 0$ , kann durch Multiplikation der entsprechenden Gleichung mit  $(-1)$  zum Typ (1) übergegangen werden.

II. Das Linearprogramm heißt von zulässiger *kanon. Form*, falls es  $m$  Variable  $x_1, \dots, x_m$  gibt, die in jeweils genau einer Gleichung mit dem Koeffizienten 1 und in allen übrigen mit dem Koeffizienten 0 vorkommen, und falls jede Gleichung eine solche Variable mit dem Koeffizienten 1 enthält ( $\nearrow$  Simplexalgorithmus).  $A$  läßt sich dann durch Vertauschen von Zeilen und Spalten so umordnen, daß die  $(m, m)$ -Einheitsmatrix als Untermatrix auftritt.

Der *zulässige Bereich* in der l. O. ist leer oder ein polyedr. Bereich. Ist er ein Polyeder, so existiert stets mindestens eine optimale Lösung. Die *Menge aller Optimalpunkte* ist eine konvexe Menge, die mindestens eine Ecke des zulässigen Bereichs enthält. Falls die Zielfunktion keine Konstante ist, sind alle Optimalpunkte Randpunkte des zulässigen Bereichs, sie können somit nicht mit Mitteln der Differentialrechnung ( $\nearrow$  Extremwert) ermittelt werden.

III. In der *parametr. l. O.* hängen die Koeffizienten der Zielfunktion, die Absolutglieder oder die Koeffizienten in den Nebenbedingungen von Parametern ab ( $\nearrow$  Optimierung V.). Im allg. hängt dann auch die Lösung von den Parametern ab. Falls nur die Koeffizienten der Zielfunktion parameterabhängig sind, kann bei festgehaltenem Parameterwert der Simplexalgorithmus angewendet werden. Der Optimalitätstest ist dann sogar für einen ganzen Bereich um den festgehaltenen Wert erfüllt. Für einen daran angrenzenden Bereich kann wieder ein

Optimalpunkt bestimmt werden. Auf diese Weise kann das Optimum in endlich vielen Schritten für alle Werte des Parameters erhalten werden. Falls nur die Absolutglieder der Nebenbedingungen parameterabhängig sind, kann die Lösung durch Dualisierung der Aufgabe ( $\nearrow$  Optimierung VII.) auf den vorigen Fall zurückgeführt werden. S. a. Quotientenoptimierung, lineare.

**Optimierung, parametrische**  $\nearrow$  Optimierung V.,  $\nearrow$  Optimierung, lineare, III.

**Optimierung, quadratische:** Bestimmung des Minimums einer konvexen quadrat. oder des Maximums einer konkaven quadrat. Zielfunktion unter linearen Nebenbedingungen. Für einen Vektorenvektor  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , einen Parametervektor  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  und eine  $(n, n)$ -Matrix  $C$  ist die quadrat. Funktion  $\mathbf{x}^T C \mathbf{x} + \mathbf{p}^T \mathbf{x}$  genau dann konvex, streng konvex, konkav bzw. streng konkav, wenn die quadrat. Form  $\mathbf{x}^T C \mathbf{x}$  positiv semidefinit, streng positiv definit, negativ semidefinit bzw. streng negativ definit ist. Bei nicht-leerem zulässigem Bereich und streng definitem  $\mathbf{x}^T C \mathbf{x}$  existiert stets genau eine Lösung. — S. a. Beale, Verfahren von; Hildreth und d'Esopo, Verfahren von; Wolfe, Verfahren von.

**Optimierung, stochastische**  $\nearrow$  Optimierung IV.

**Optimierungsproblem**  $\nearrow$  Adaption IV.

**optimistische Dauer**  $\nearrow$  PERT.

**OR** svw. Operationsforschung.

**Ordinalzahl:** I. Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge. Während man mit der Kardinalzahl die „Anzahl“ der Elemente einer Menge erfaßt, benutzt man die O. en zum „elementweisen Durchnumerieren“ einer Menge, setzt mithin in dieser eine *Ordnungsstruktur* voraus, d. h., daß ihre Elemente in einer bestimmten Reihenfolge gegeben sind. Während Repräsentanten einer Kardinalzahl unstrukturierte Mengen sind, die man mit Hilfe *bijektiver Abbildungen* vergleicht ( $\nearrow$  Gleichmächtigkeit), zieht man für den Vergleich geordneter Mengen *ähnliche Abbildungen* heran, die *bijektiv* und *isoton*, d. h. *ordnungserhaltend* sind. Zwei geordnete Mengen, zwischen denen eine ähnl. Abbildung existiert, heißen *ähnlich*.

Die Ähnlichkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation; jedes Element einer Klasse ähnl. Mengen hat denselben *Ordnungstypus*. Geordnete Mengen vom gleichen Ordnungstypus sind gleichmächtig; die Umkehrung gilt jedoch nicht: die Menge (1) und (2) z. B. sind gleichmächtig, aber nicht ähnlich, weil (2) ein größtes Element hat. (1) aber nicht.

$$(1) \quad \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$(2) \quad \{0, 1, 2, \dots, -1\}$$

$$(3) \quad \{\dots 6, 4, 2, 0, 1, 3, 5, \dots\}$$

In der geordneten Menge (3) kann anschaulich gesprochen mit dem „Durchzählen“ gar nicht begonnen werden, da sie kein kleinstes Element hat.

Man betrachtet deshalb nur *wohlgeordnete Mengen*, d. h. Mengen, in denen jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element hat. Unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms läßt sich zeigen, daß jede Menge wohl-

geordnet werden kann. Der Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge  $M$  heißt  $O.$ , in Zeichen  $\text{ord } M$ .  
**II.** Zwei endl. geordnete Mengen  $M, N$  sind genau dann gleichmächtig, wenn  $\text{ord } M = \text{ord } N$ ; für endl. Mengen tritt der für die Mengen (1) und (2) geschilderte Fall gleichmächtiger, aber nicht ähnl. Mengen nicht ein, weil die für eine Menge von  $n$  Elementen mögl.  $n!$  Wohlordnungen untereinander ähnlich sind, d. h. zur selben  $O.$  führen. Die endl.  $O.$  können folglich mit den endl. Kardinalzahlen identifiziert und ebenfalls mit  $0, 1, 2, \dots$  bezeichnet werden.  
 Bei unendl. Mengen können dagegen verschiedene mögl. Wohlordnungen auf verschiedene  $O.$ en führen, für die Menge  $\mathbf{N}$  z. B. die Wohlordnungen

$$\{0, 1, 2, \dots\} \text{ und } \{1, 2, \dots, 0\}.$$

Man wird dadurch auf *transfinite*  $O.$ en geführt. Die kleinste transfinite  $O.$   $\omega$  ist der Ordnungstyp von  $\mathbf{N}$  in der natürl. Anordnung; weitere transfinite  $O.$ en ergeben sich auf folgende Weise: Fügt man einer die  $O.$   $\alpha$  repräsentierenden Menge ein weiteres Element als größtes Element hinzu, so repräsentiert diese erweiterte Menge die auf  $\alpha$  unmittelbar folgende  $O.$   $\alpha + 1$ . Die Menge (2) z. B. hat danach die  $O.$   $\alpha + 1$ ; so fortschreitend erhält man:

$$\begin{aligned} \omega + 2, \dots, \omega + \omega &= \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots \\ \omega \cdot 2 + \omega &= \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \dots \\ \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot 3, \dots, \omega^3, \dots, \omega^4, \dots \\ \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^2}, \dots, \omega^{(\omega^\omega)}, \dots \end{aligned}$$

**III.** Für  $O.$ en kann man eine Ordnungsrelation  $\leq$  definieren durch  $\text{ord } M \leq \text{ord } N$  genau dann, wenn es ein zu  $M$  ähnliches *Anfangsstück*  $L$  von  $N$  gibt. Dabei heißt  $L$  ein Anfangsstück von  $N$ , wenn  $L \subseteq N$  und  $L$  mit jedem Element von  $N$  auch alle bzgl. der Wohlordnung von  $N$  kleineren Elemente von  $N$  enthält. Die Ordnung ist sogar eine Wohlordnung in jeder Menge von  $O.$ en.

Zur Erklärung einer *Addition* von  $O.$ en  $\alpha, \beta$  geht man von zwei disjunkten Repräsentanten  $A$  bzw.  $B$  von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  aus und setzt  $\alpha + \beta = \text{ord}(A \cup B)$ , wobei in  $A \cup B$  folgende Wohlordnung zu wählen ist: Die Elemente von  $A$  bzw. die von  $B$  stehen in der durch die Wohlordnung von  $A$  bzw. von  $B$  gegebenen Reihenfolge, und alle Elemente von  $A$  stehen vor allen Elementen von  $B$ .

Ist  $\alpha, \beta = \text{ord}\{a_0, a_1, \dots\}, \beta = \text{ord}\{b_0, b_1, \dots\}$ , so gilt  $\alpha + \beta = \text{ord}\{a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots\}$ . Diese Summendefinition ist unabhängig von der speziellen Wahl der disjunkten Repräsentanten. Die Addition ist assoziativ und für endl.  $O.$ en auch kommutativ, jedoch für transfinite  $O.$ en i. allg. nicht kommutativ; z. B. ist  $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$ .

Die *Multiplikation* von  $O.$ en  $\alpha, \beta$  wird definiert durch  $\alpha \cdot \beta = \text{ord}(B \times A)$ , wobei als Wohlordnung in  $B \times A$  die *lexikograph.* Ordnung zu wählen ist. Nach dieser steht in  $B \times A$  das geordnete Paar  $(y, x)$  genau dann vor  $(\bar{y}, \bar{x})$ , wenn  $y$  in  $B$  vor  $\bar{y}$  steht oder, falls  $y = \bar{y}$ , wenn  $x$  in  $A$  vor  $\bar{x}$  steht.

Das mit der lexikograph. Ordnung versehene Kreuz-

produkt  $B \times A$  wird oft als *lexikograph. Produkt* bezeichnet. Die Multiplikation ist unabhängig von der Repräsentantenwahl und assoziativ; kommutativ ist sie i. allg. nur für endl.  $O.$ en; z. B. gilt  $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega = \omega \cdot 2$ .

Addition und Multiplikation hängen über das *Links-distributivgesetz*  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  zusammen; ferner gelten die *Monotoniegesetze*, d. h. aus  $\beta < \gamma$  folgen  $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$  und  $\alpha\beta < \alpha\gamma$ , aber  $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$  und  $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$ . Die Potenz  $\alpha^\beta$  von  $O.$ en  $\alpha, \beta$  in Analogie zur Definition von Multiplikation und Addition über die Menge aller Abbildungen von  $B$  in  $A$  einzuführen, in der man wieder die lexikograph. Anordnung wählt, gelingt nur für natürl. Potenzexponenten, da die lexikograph. Ordnung in der betrachteten Menge sonst i. allg. keine Wohlordnung liefert. Für die allgemeine Definition der Potenz  $\alpha^\beta$  kann man sich des Prinzips der *transfiniten Rekursion* bedienen:  $\alpha^\beta = 1$ , falls  $\beta = 0$ ;  $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \cdot \alpha \mid \gamma < \beta\}$  sonst. Auch Addition und Multiplikation von  $O.$ en kann man in analoger Weise rekursiv definieren.

Die  $O.$ en kann man in *Zahlklassen* einteilen; die endl.  $O.$ en bilden die *erste Zahlklasse*, von den transfinite  $O.$ en bilden alle diejenigen jeweils eine Zahlklasse, die gleichmächtige Mengen zu Repräsentanten haben. Diese Zahlklassen nennt man auch die Zahlklassen zu den jeweiligen Kardinalzahlen; z. B. ist die Zahlklasse von  $\aleph_0$  die *zweite Zahlklasse*, die Menge aller  $O.$ en abzählbarer Mengen. Die kleinste  $O.$  in einer Zahlklasse heißt die *ordinale Anfangszahl* dieser Zahlklasse; die transfinite ordinalen Anfangszahlen und die transfinite Kardinalzahlen entsprechen sich eindeutig.

**Ordinatenachse**  $\nearrow$  Koordinatensystem II.

**Ordner**  $\nearrow$  Zweitafelprojektion I.

**Ordnung:** I. natürl. Zahl zur Kennzeichnung der Stufe innerhalb einer Klassifikation; zur Klassifikation der *ebenen algebraischen Kurven* kann z. B. die Höchstzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden als  $O.$  angesehen werden. Danach sind Geraden Kurven 1.  $O.$ , die Kegelschnitte haben die  $O.$  2 und das kartes. Blatt ist eine Kurve 3.  $O.$

II. Wie man verschiedenen mathemat. Objekten eine  $O.$ , die manchmal auch als *Grad* bezeichnet wird, zuschreibt, findet man in den entsprechenden Stichwörtern:  $O.$  einer *Ableitung*  $\nearrow$  Differentialquotient III.,  $\nearrow$  Differentialquotient, partiell, II.,  $\nearrow$  Variationsrechnung III.;  $O.$  einer *arithmet. Zahlenfolge*  $\nearrow$  arithmetische Zahlenfolge II.;  $O.$  einer *Differentialgleichung*  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung I.,  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung I.;  $O.$  einer *Gruppe*  $\nearrow$  Gruppe II.,  $\nearrow$  Determinante I.;  $O.$  eines *kybernet. Systems*  $\nearrow$  System II.;  $O.$  einer *Menge*  $\nearrow$  Ordnungsrelation;  $O.$  eines *Pols*  $\nearrow$  Stetigkeit II.2.

**Ordnungslinie**  $\nearrow$  Zweitafelprojektion I.

**Ordnungsrelation** svw. Anordnungsrelation.

**Ordnungstreue Funktion**  $\nearrow$  monotone Funktion I. **orientierte Ebene**  $\nearrow$  Koordinatensystem II., III.,  $\nearrow$  Winkel VIII.

**Orientierung:** Auszeichnung einer von zwei Richtungen auf einer Geraden, eines Drehsinns von zwei möglichen in der Ebene, einer von zwei Seiten einer

Fläche, einer von zwei Klassen affiner bzw. kartes. Koordinatensysteme. Man erhält dann z. B. orientierte Geraden, Strecken, Winkel, Ebenen, Flächen. — S. a. Durchlaufsinn einer Geraden; Flächeninhalt I.; Geradengleichung IV., V.; Koordinatensystem II., III.; Normale I.; Strecke III.; Winkel III., IV., VII.

**Original** ↗ Abbildung, affine, ↗ Operator.

**Original, vollständiges** ↗ lineare Abbildung I.

**Originalraum** ↗ Abbildung, affine.

**orthogonal:** *Geometrie* Bezeichnung für senkrecht.

**orthogonale Matrix** ↗ Matrix IV.

**orthogonale Projektion** ↗ Vektorraum VII., ↗ Zweifaltprojektion I.

**orthogonales Komplement** ↗ Vektorraum VII.

**orthogonale Trajektorien** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**orthogonale Transformation** ↗ Koordinatentransformation III.

**orthogonale Vektoren** ↗ Skalarprodukt.

**Orthogonalisierungsverfahren** ↗ Vektorraum VII.

**Orthogonalsystem:** I. eine Folge  $\Phi$  von Elementen eines Raumes  $X$  mit Skalarprodukt, z. B. eines euklid. Vektorraums (↗ Vektorraum X.), die das Nullelement nicht enthält und deren Elemente paarweise orthogonal sind, d. h., für die das Skalarprodukt  $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ , falls  $x_\alpha, x_\beta \in \Phi$  und  $\alpha \neq \beta$ , aber  $(x_\alpha, x_\beta) \neq 0$ , falls  $\alpha = \beta$ . Ist im Raum  $X$  auch eine Norm (↗ Betrag) definiert, und sind die Elemente der Menge  $\Phi$  sämtlich von der Norm 1, so nennt man  $\Phi$  ein *normiertes O.* oder *Orthonormalsystem* (↗ Koordinatensystem III.). Durch *Normieren* der Elemente von  $\Phi$ , d. h. durch Übergehen von  $x_\alpha$  zu  $x'_\alpha = x_\alpha / \|x_\alpha\|$ , erhält man aus jedem O. ein *Orthonormalsystem*. Ist die Norm durch ein Skalarprodukt gegeben wie z. B. im Hilbertraum, so ist  $\Phi$  mithin ein Orthonormalsystem genau dann, wenn aus  $x_\alpha, x_\beta \in \Phi$  folgt  $(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$  (↗ Kroneckersymbol).

II. *Beispiel 1:* Im  $n$ -dimensionalen euklid. Vektorraum der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen mit dem übli. Skalarprodukt bildet z. B. die Menge  $\{(a_1, 0, \dots, 0), (0, a_2, \dots, 0), (0, 0, \dots, a_n)\}$  oder jede ihrer Teilmengen ein O.; dieses ist sogar ein Orthonormalsystem, falls  $a_i = 1$  für alle  $i$ . — Mittels des *Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens* (↗ Vektorraum X.) ist es stets möglich, eine beliebige linear unabhängige Menge in ein Orthonormalsystem überzuführen.

*Beispiel 2:* Im Hilbertraum  $L_2(-\pi, \pi)$  (↗ Raum, normierter linearer) mit dem Skalarprodukt  $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$  ist die Folge  $\Phi = \{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\} = \{x_n \mid x_{2n} = \cos nt, x_{2n+1} = \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem.

III. Für viele Probleme der Analysis, etwa bei der Untersuchung von Differentialgleichungen und Integralgleichungen, ist es nützlich, ein beliebiges Element  $y$  eines Hilbertraumes nach einem Orthonormalsystem  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zu „entwickeln“, d. h. in der Form (1) mit gewissen komplexen Zahlen  $a_k$  darzustellen. Die Reihe (1) ist dabei durch (2) definiert.

Aus (1) folgt dann (3), d. h., wenn sich  $y$  nach dem

$$(1) \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i$$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i x_i$$

$$(3) \quad (y, x_k) = \left( \sum a_i x_i, x_k \right) = \sum a_i (x_i, x_k) = \sum a_i \delta_{ik} = a_k$$

$$(4) \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} (y, x_i) x_i$$

Orthonormalsystem  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  entwickeln läßt, sind die Koeffizienten  $a_k$  eindeutig bestimmt durch  $a_k = (y, x_k)$ ; diese heißen die *Fourierkoeffizienten* und (4) die *Fourierreihe* von  $y$  bzgl.  $\{x_n\}$ . Für Beispiel 2 erhält man die Fourierreihe (5) von  $y(t)$  bzgl.

$$(5) \quad f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x_i(t) \quad \text{mit} \quad c_i = \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \overline{x_i(t)} dt$$

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit den Fourierkoeffizienten  $c_i$ . Wählt man das im Beispiel betrachtete spezielle Orthonormalsystem  $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ , so fallen die hier definierten Begriffe Fourierkoeffizient und Fourierreihe mit den aus der klass. Fourieranalyse bekannten zusammen. — Die Fourierreihen aller Elemente  $y$  eines Hilbertraumes konvergieren stets, i. allg. sind jedoch das Element  $y$  und der Limes seiner Fourierreihe (4) voneinander verschieden. Sind jedoch  $y$  und der Limes seiner Fourierreihe bzgl.  $\{x_n\}$  für beliebiges  $y$  stets einander gleich, d. h., stellt die Fourierreihe von  $y$  das Element  $y$  stets dar, so nennt man das Orthonormalsystem  $\{x_n\}$  *vollständig* oder eine *Orthonormalbasis*. Äquivalent dazu sind die folgenden *Vollständigkeitskriterien* III.1. bis III.4. für ein Orthonormalsystem  $\Phi = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

III.1. Jedes Element  $y \in X$  läßt sich nach dem Orthonormalsystem entwickeln.

III.2. Aus  $(y, x_n) = 0$  für alle  $x_n$  folgt stets  $y = 0$ .

III.3. Verschiedene Elemente haben verschiedene Fourierkoeffizienten und damit verschiedene Fourierreihen.

III.4. Es gilt für alle  $y \in X$  die *Parsevalsche Vollständigkeitsrelation* (6).

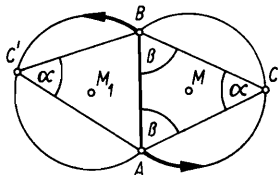
$$(6) \quad \|y\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |(y, x_i)|^2$$

Die in den Beispielen 1 und 2 erwähnten Orthonormalsysteme sind vollständig. In jedem Hilbertraum gibt es vollständige Orthonormalsysteme; diese sind jedoch nicht stets abzählbar. Dagegen ist es in Banachräumen nicht stets möglich, eine Basis zu finden, nach der man jedes Element des Raumes entwickeln kann.

**Orthonormalbasis:** jede Basis  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eines euklid. Vektorraumes, deren Basisvektoren paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind; d. h., es gilt  $(x_i, x_k) = \delta_{ik}$ , wenn  $\delta_{ik}$  das Kroneckersymbol ist. S. a. Orthonormalsystem III.

**Orthonormalsystem** ↗ Orthonormalsystem I., ↗ Vektorraum VII.

**Ortskreis:** Kreis mit einer Strecke  $AB$  als Sehne, die von allen inneren Punkten *eines* der durch sie bestimmten Kreisbögen unter einem Sehwinkel der vorgegebenen Größe  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , erscheint. Die Winkel der Größe  $\alpha$  sind entweder Peripheriewinkel des O.es über dem Bogen  $\widehat{AB}$  oder über  $\widehat{BA}$  (Abb.). Den Scheitelpunkt  $C$  eines solchen Peripheriewinkels findet man z. B., indem man in  $A$  und in  $B$  an  $AB$  nach der gleichen Seite Winkel der Größe  $\beta = 90^\circ - \alpha/2$  anträgt und ihre freien Schenkel schneidet. Durch  $A, B$  und  $C$  ist ein O. be-



Ortskreise, von deren Punkten aus die Sehne  $AB$  unter einem Winkel der Größe  $\alpha$  erscheint

stimmt. Ein zweiter ergibt sich durch Spiegelung des O.es an der Sehne  $AB$ . Da es keine weiteren Punkte gibt, die die gen. Bedingung erfüllen, gilt: *Der geometr. Ort aller Punkte, von denen aus eine Strecke  $AB$  unter einem Winkel gegebener Größe erscheint, besteht aus zwei symmetrisch zur Strecke liegenden Kreisbögen, ausgenommen deren Endpunkte  $A$  und  $B$ .* ↗ Kreis.

**Ortskurve** ↗ Frequenzgang II.

**Ortsvektor** ↗ Koordinatensystem II.

**Ortungswahrscheinlichkeit** ↗ Suchtheorie.

**Oskulation** ↗ Kurve zweiter Ordnung IV.

**östlicher Drehsinn** ↗ Koordinatensystem V.

**Ostogradski**, Michail Wassiljewitsch, geb. 24. 9. 1801 Paschennaja (Gouvernement Poltawa), gest. 1. 1. 1862 Poltawa. — O. wirkte in Petersburg (Leningrad) hauptsächlich auf den Gebieten der Integralrechnung, der Variationsrechnung und der Theorie der Wärmeleitung.

**Output** swv. Ausgabe. S. a. System I.; Verflechtungsbilanz.

**Oval** swv. Eikurve.

## P

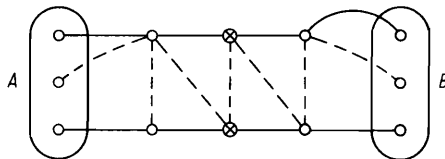
**paarer Graph** ↗ Färbung von Graphen.

**paarweise Unabhängigkeit** ↗ Wahrscheinlichkeit, bedingte, III.

**Packungs- und Repräsentationsprobleme:** I. Es seien  $A$  und  $B$  zwei Knotenmengen eines ungerichteten Graphen  $G$ , die keinen Knotenpunkt gemeinsam haben und die nicht alle Knotenpunkte von  $G$  enthalten müssen. Ein Weg heißt  $(A, B)$ -Weg, wenn einer seiner Endpunkte zu  $A$ , der andere zu  $B$  gehört. Eine Menge von  $(A, B)$ -Wegen heißt *knotenfremd*, wenn keine zwei  $(A, B)$ -Wegen einen Knotenpunkt gemeinsam haben (Abb. 1). Man sagt, daß eine Knotenmenge  $M$  von  $G$  *alle  $(A, B)$ -Wegen repräsentiert* oder  *$A$  und  $B$  trennt*, wenn der Graph  $G$

nach Löschen der Knotenpunkte von  $M$  und aller Kanten, die zu Knotenpunkten aus  $M$  adjazent sind, keinen  $(A, B)$ -Weg mehr enthält (↗ Abb. 1). K. MENGER bewies nun den folgenden Satz:

*Satz von Menger: Sind  $A$  und  $B$  zwei Knotenmengen eines Graphen  $G$ , die keinen Knotenpunkt gemeinsam haben, so ist die Maximalzahl knotenfremder  $(A, B)$ -Wegen gleich der Minimalzahl von Knotenpunkten, die alle  $(A, B)$ -Wegen repräsentieren.* Die allgemeine



Packungs- und Repräsentationsproblem. Abb. 1: Zum Satz von Menger: — Element der Menge knotenfremder  $(A, B)$ -Wegen,  $\otimes$  Knoten der Knotenmenge  $M$ , die  $A$  und  $B$  trennt

Formulierung *veine Knotenmenge  $M$  eines Graphen  $G$  repräsentiert alle Untergraphen einer gewissen Struktur von  $G$ , falls  $G$  nach Löschen aller Knotenpunkte von  $M$  und aller mit  $M$  inzidenten Kanten keinen Untergraphen dieser Struktur mehr enthält* führt u. a. auf folgende vier Probleme:

I.1. Beim *Repräsentationsproblem* geht es darum, die Minimalzahl von Knotenpunkten zu finden, die alle Untergraphen einer gewissen Struktur repräsentieren; d. h., die *Repräsentationszahl* ist zu finden. Als Spezialfall kann man die Kanten des Graphen als Untergraphen einer gewissen Struktur betrachten. Dann wird eine *Knotenbasis* gesucht, d. h. eine kleinste Menge von Knotenpunkten, die alle Kanten repräsentiert.

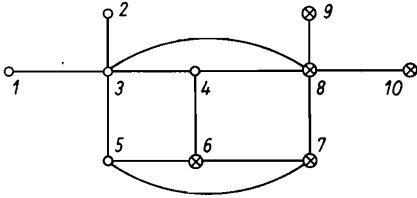
I.2. Beim *Packungsproblem* wird die Maximalzahl knotenfremder Untergraphen einer gewissen Struktur in  $G$  gesucht, sie wird *Packungszahl* gen.

I.3. Bei *Aufgaben vom Mengerschen Typ* geht es darum, festzustellen, ob Beziehungen bestehen zwischen Packungszahl und Repräsentationszahl bzgl. Untergraphen gewisser Struktur. Man kann z. B. fragen: Gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $k$  eine natürliche Zahl  $f(k)$ , so daß jeder Graph, der keine  $k + 1$  knotenfremden Kreise enthält, eine Knotenmenge von höchstens  $f(k)$  Elementen enthält, die alle Kreise repräsentieren? — P. ERDÖS und L. PÓSA zeigten, daß  $f(k)$  existiert, und konnten dafür folgende Abschätzung angeben:

*Satz von Erdős/Pósa: Es existieren zwei Zahlen  $c_1$  und  $c_2$ , so daß gilt  $c_1 k \ln k \leq f(k) \leq c_2 k \ln k$ .*

I.4. Neben der Frage, wie viele knotenfremde Kreise sich in einen bestimmten ungerichteten Graphen  $G$  hineinpacken lassen, kann man sich auch dafür interessieren, wie viele Kreise genügen, um alle Knotenpunkte oder alle Kanten von  $G$  zu überdecken. — Beim *Überdeckungsproblem* wird die als *Überdeckungszahl* bezeichnete Minimalzahl von Untergraphen gewisser Struktur in  $G$  gesucht, die alle Knotenpunkte oder alle Kanten überdecken, d. h., jeder Knotenpunkt bzw. jede Kante von  $G$  ist in mindestens einem der überdeckenden Untergraphen ent-

halten. Ein Spezialfall ist die *Kantenbasis*, d. h. eine kleinste Menge von Kanten, die alle Knotenpunkte von  $G$  überdeckt. Die kleinste Anzahl  $\alpha$  von planaren Graphen, die alle Kanten eines ungerichteten Graphen  $G$  überdecken, heißt z. B. *Dicke* von  $G$ . Ein vollständiger paarer Graph, der in einer der beiden Farbenklassen genau einen Knotenpunkt enthält, heißt *Stern*. Die kleinste Anzahl  $\beta$  von Sternen, die alle Knotenpunkte eines ungerichteten Graphen  $G$  überdeckt, heißt *äußere Stabilitätszahl*. Mit anderen Worten:  $\beta$  ist die kleinste Anzahl von Knotenpunkten mit der Eigenschaft, daß jeder Knotenpunkt von  $G$  entweder zu diesen Knotenpunkten gehört oder mit einem von ihnen durch eine Kante verbunden ist.



Packungs- und Repräsentationsproblem. Abb. 2: Zum Überdeckungsproblem:  $\otimes$  Knoten der Menge  $A$ ,  $\circ$  Knoten der Menge  $B$

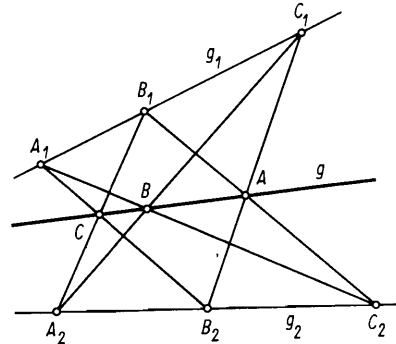
II. Der äußeren Stabilitätszahl kann eine *Packungszahl* zugeordnet werden, die *innere Stabilitätszahl* eines ungerichteten Graphen  $G$  als die größte Anzahl  $\gamma$  von kantenfremden Sternen, die sich in  $G$  hineinpacken lassen. Mit anderen Worten:  $\gamma$  ist die größte Anzahl von paarweise nichtadjazenten Knotenpunkten. In Abb. 2 ist 3 die Maximalzahl der knotenfremden  $(A, B)$ -Wege, eine *Knotenbasis* ist  $\{3, 8, 5, 6\}$ , eine *Kantenbasis* ist  $\{(5, 7), (1, 3), (2, 3), (4, 6), (8, 9), (8, 10)\}$ , die *Dicke* ist  $\alpha = 1$ , die äußere Stabilitätszahl  $\beta = 3$ , die innere ist  $\gamma = 6$ .

Abschließend soll der Satz von K. MENGER noch in einer anderen Hinsicht ausgewertet werden. Ein Graph  $G$  mit mindestens  $n + 2$  Knotenpunkten heißt *n-fach* zusammenhängend, falls je zwei Knotenpunkte von  $G$  durch  $n$  Wege verbunden sind, die paarweise nur ihre Endpunkte gemeinsam haben. Aus dem Satz von Menger kann gefolgert werden, daß ein Graph  $G$  genau dann *n-fach* zusammenhängend ist, falls es keine  $n - 1$  oder weniger Knotenpunkte gibt, nach deren Löschung  $G$  nicht mehr zusammenhängend ist. Ein Knotenpunkt  $P$  eines zusammenhängenden Graphen  $G$  heißt *Zerfallungsknotenpunkt*, falls nach Löschen von  $P$  der Graph  $G$  nicht mehr zusammenhängend ist. Ein zusammenhängender Graph, der nicht zweifach zusammenhängend ist, enthält danach einen Zerfallungsknotenpunkt.

- p-adische Zahl  $\nearrow$  Zahlensystem V.
- PAM svw. Pulsamplitudenmodulation,  $\nearrow$  Modulation II.
- Pantograph  $\nearrow$  Gelenkmechanismus I.
- Papierstreifenkonstruktion  $\nearrow$  Ellipsenkonstruktionen III.

**Pappos** von Alexandria, um 320. — Er schrieb über Mathematik, Astronomie und Geographie. Sein Hauptwerk, die «*Collectiones*» enthalten Kommentare zu sonst verschollenen mathemat. Werken sowie viele eigene Ergebnisse, z. B. die affine Erweiterung des pythagoreischen Satzes.

**Pappos, Satz von:** Sind auf zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  je drei Punkte  $A_1, B_1, C_1$  und  $A_2, B_2, C_2$  gegeben, die vom Schnittpunkt  $G$  der beiden Geraden verschieden sind, so liegen die Schnittpunkte  $A = (B_1C_2 \cap B_2C_1)$ ,  $B = (A_1C_2 \cap A_2C_1)$  und  $C = (A_1B_2 \cap A_2B_1)$  der



Zum Satz von Pappos

*kreuzweisen Verbindungen auf einer Geraden g* (Abb.). Dieser Satz kann als Sonderfall des Satzes von Pascal ( $\nearrow$  Dualität) aufgefaßt werden, wenn die Geraden  $g_1, g_2$  als entartete Kegelschnitte gelten.

**Parabel:** I. geometr. Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt  $F$  und einer festen Geraden  $l$  dieser Ebene den gleichen Abstand haben.  $F$  ist der *Brennpunkt* der P.,  $l$  ihre *Leitlinie*. Eine Parabel ist ein Kegelschnitt. Die für die Kegelschnitte, Ellipse und Hyperbel definierte *numer. Exzentrizität*  $\epsilon$ , d. h. das Verhältnis zwischen den Abständen eines Kegelschnittpunktes von einem seiner Brennpunkte und von der zugehörigen Leitlinie, hat für die P. nach ihrer Definition den Wert 1. Danach kann man P.punkte konstruieren, indem

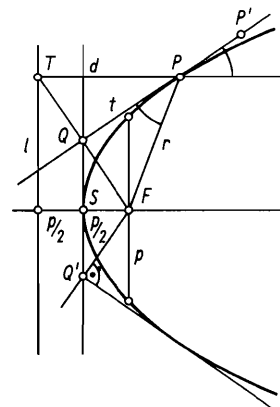


Abb. 1: Parabel aus Leitlinie  $l$  und Brennpunkt  $F$ ,  $S$  Scheitel,  $t$  Tangente,  $2p$  Parameter

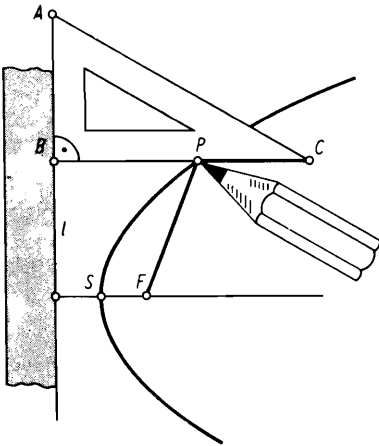


Abb. 2: Fadenkonstruktion einer Parabel

man im Abstand  $a$  eine Parallele zu  $l$  zeichnet und diese mit dem Kreis um  $F$ , der den Radius  $a$  hat, schneidet (Abb. 1). Durch eine *Fadenkonstruktion* kann man einen P.bogen darstellen (Abb. 2), indem man ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$ , dessen rechter Winkel z. B. in  $B$  liegt, mit einer Kathete, z. B.  $AB$ , längs der Leitlinie  $l$  gleiten läßt und einen in  $C$  und  $F$  befestigten Faden der Länge  $|BC|$  mit dem Zeichenstift längs  $BC$  spannt. Jeder Punkt  $P$  des Bogens ist wegen  $|PF| = |PB|$  ein P.punkt. — Die Gerade senkrecht zur Leitlinie einer P. durch den Brennpunkt ist die *Symmetrieachse* der P., sie wird *P.achse* genannt und schneidet die P. in ihrem *Scheitel*  $S$  (↗ Kegelschnitt II., III.). Dieser halbiert den Abstand  $p$  des Brennpunktes  $F$  von der Leitlinie. Die Sehne, die in  $F$  senkrecht auf der Achse der P. steht, hat die Länge  $2p$ . Die Größe  $2p$  bezeichnet man als *Parameter* und  $p$  als *Halbparameter* der P. Durch die Angabe von  $p$  ist die Form einer P. bestimmt. Für  $p = 0$  entartet sie zur doppelt durchlaufenen Halbgeraden.

II. Ist  $T$  der Fußpunkt des Lotes von dem beliebigen P.punkt  $P$  auf  $l$  (Abb. 1), so ist die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $FT$  Tangente  $t$  in  $P$ , weil für jeden von  $P$  verschiedenen Punkt  $P'$  der Abstand zu  $F$  größer ist als der Abstand zu  $l$ . Der Mittelpunkt  $Q$  der Strecke  $TF$  liegt auf der Tangente, die die P. in ihrem Scheitel berührt, auf der *Scheiteltangente*. Da jede im Schnittpunkt eines von  $F$  ausgehenden Strahls mit der Scheiteltangente errichtete Senkrechte *Tangente* an die P. ist, z. B. die von  $Q'$  ausgehende, kann man eine P. auch definieren als *Einhiüllende* aller Geraden einer Ebene, die durch die freien Schenkel aller rechten Winkel bestimmt sind, deren Scheitel auf einer festen Geraden, der Scheiteltangente, liegen und deren andere Schenkel durch einen festen Punkt, den Brennpunkt, verlaufen. Wegen  $|PT| = |PF|$  ist eine P. auch der geometr. Ort der Mittelpunkte aller Kreise einer Ebene, die eine gegebene Gerade, die Leitlinie, berühren und durch einen festen Punkt  $F$  außerhalb der Leitlinie gehen. Die Parallele durch  $P$  zur Achse und die durch  $P$  und  $F$  bestimmte Gerade schließen mit der

Tangente  $t$  Winkel gleicher Größe ein. Daraus folgt, daß Strahlen, die parallel zur Achse auf einen durch Rotation einer P. um ihre Achse entstandenen Spiegel fallen, von diesem zu ihrem Brennpunkt reflektiert werden.

III. Um von einem Punkte  $R$  außerhalb einer P., der auf ihrer konvexen Seite liegen muß, die *Tangenten* an die P. zu konstruieren, schneidet man den Kreis um  $R$  durch  $F$  mit der Leitlinie  $l$  (Abb. 3). Auf den in den Schnittpunkten  $T_1$  und  $T_2$  errichteten Senkrechten liegen die Berührungspunkte  $P_1$  und  $P_2$  der gesuchten Tangenten  $t_1$  und  $t_2$ , die die Mittelsenkrechten zu den Strecken  $FT_1$  bzw.  $FT_2$  sind. Wählt man für diese Aufgabe einen Punkt  $R'$  auf  $l$  und sind  $T_1'$  und  $T_2'$  die Schnittpunkte des Kreises um  $R'$  durch  $F$ , so stehen nach dem Satz des Thales die Strecken  $FT_1'$  und  $FT_2'$  und damit auch ihre Mittelsenkrechten, die Tangenten  $t_1'$  und  $t_2'$ , senkrecht aufeinander. Die Strecke  $P_1'P_2'$  ist die Polare  $r'$  des Punktes  $R'$  in bezug auf die P. — Die Leitlinie einer P. ist die Polare des Brennpunktes in bezug auf diese P. (↗ Polarität).

IV. Eine P. ist ein *nicht zerfallender Kegelschnitt* ohne Mittelpunkt (↗ *Kurve zweiter Ordnung*) mit der *Scheiteltangente* (1) in einem kartes. Koordinaten

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

system. In ihm hat der *Scheitel* die Koordinaten  $(0, 0)$ , der Brennpunkt  $(p/2, 0)$  und die Leitlinie  $l$  die Gleichung  $x = -p/2$ . Die  $x$ -Achse ist die *P.achse*. Eine Parameterdarstellung der P. ist  $x = (p/2)t^2$ ,  $y = p \cdot t$ . Durch Differenzieren erhält man  $y_0 t + p$  als Richtungsvektor der Tangente und Stellungsvektor der Normalen im Punkte  $P_0(x_0, y_0)$  an die P.; danach ist (2)

$$(2) \quad y_0 y = p(x + x_0)$$

eine Gleichung der *Tangente*  $t$  und (3) eine Gleichung

$$(3) \quad y_0(x - x_0) + p(y - y_0) = 0$$

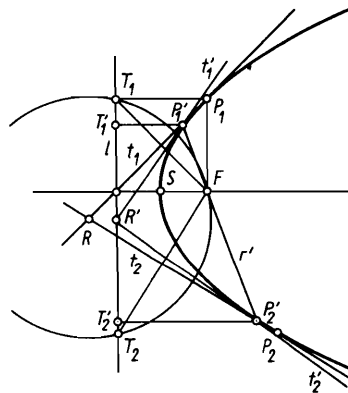


Abb. 3: Konstruktion der Tangenten  $t_1, t_2$  vom Punkte  $R$  an die Parabel, sowie der Tangenten  $t_1', t_2'$  vom Punkte  $R'$  der Leitlinie aus

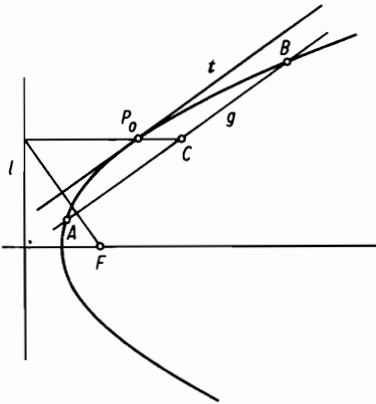


Abb. 4: Parabel mit Tangente  $t$  im Punkte  $P_0$ , die Parallele  $g$  zu  $t$  schneidet die Parabel in  $A$  und  $B$  und die Parallele durch  $P_0$  zur Achse in  $C$  mit  $|AC| = |CB|$

der Normalen  $n$  in  $P_0$  an die  $P$ . Liegt  $P_0$  nicht auf der  $P$ ., so gibt (2) die Polare von  $P_0$  in bezug auf die  $P$ . an ( $\nearrow$  Kreis X., Ellipse II.). Eine zur Tangente parallele Gerade hat die Gleichung  $yy_0 = p(x + x_0) - c$ . Wenn  $c$  positiv ist, erhält man für die Schnittpunkte mit der durch  $y^2 = 2px$  gegebenen  $P$ .  $y = y_0 \pm \sqrt{2c}$ ; d. h., alle zur Tangente parallelen Sehnen der  $P$ . werden von der Geraden  $y = y_0$  halbiert, z. B. gilt  $|AC| = |CB|$  (Abb. 4). Wird die  $P$ . so parallel verschoben, daß der Scheitel  $(c, d)$  wird, so erhält sie die Gleichung (4)

$$(4) \quad (y - d)^2 = 2p(x - c)$$

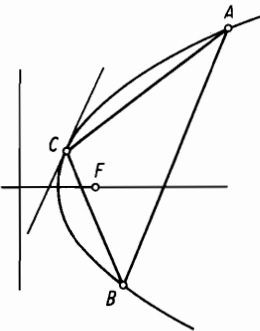
für achsenparallele Lage. Die Gleichung einer Tangente oder Polaren lautet dann (5)

$$(5) \quad (y_0 - d)(y - d) = p(x - c + x_0 - c)$$

und die Normalengleichung (6).

$$(6) \quad (y_0 - d)(x - x_0) + p(y - y_0) = 0$$

**Parabel n-ten Grades**  $\nearrow$  Potenzfunktion I.  
**Parabelsegment:** ebenes Flächenstück, das von einem Parabelbogen  $AB$  und der Sehne  $AB$  begrenzt wird. Ist  $C$  der Berührungspunkt der Parabeltangente, die zu  $AB$  parallel ist (Abb.), so besteht zwischen dem Flächeninhalt  $A_p$  des  $P$ .s und dem



Parabelsegment mit Tangente in  $C$ , die parallel zur Sehne  $AB$  verläuft

Flächeninhalt  $A_D$  der Dreiecksfläche  $ABC$  die Beziehung  $3A_p = 4A_D$ .

**parabolische Differentialgleichung:** I. lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (1), für die

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f$$

man die quadrat. Form  $Q(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}q_i q_j$  durch eine lineare Transformation (2) auf (3) trans-

$$(2) \quad q_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \bar{q}_j \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

formieren kann (s. a. partielle Differentialgleichung III.). Ist  $m = n - 1$  und  $r = 0$  oder  $m = n - 1$

$$(3) \quad Q(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) = \bar{q}_1^2 + \dots + \bar{q}_r^2 - \bar{q}_{r+1}^2 - \dots - \bar{q}_m^2$$

mit  $0 \leq r \leq m < n$

und  $r = m$ , so heißt die p. D. *normal p. D.* Sind die Koeffizienten  $a_{ij}$  Funktionen von  $x_1, \dots, x_n$ , so sagt man, daß die Differentialgleichung in den Punkten  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  parabolisch ist, in denen man die angegebene Transformation durchführen kann. Die Differentialgleichung  $-u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} = f(x_1, x_2, x_3)$  z. B. ist eine normal p. D., denn  $Q(q_1, q_2, q_3) = -q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$  hat bereits die geforderte Form mit  $m = n - 1 = 3$  und  $r = 0$ .

Die Differentialgleichung der *Wärmeausbreitung* oder der *Diffusion* in einem Medium  $u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(t, x, y, z)$  mit  $x_1 = t, x_2 = x, x_3 = y, x_4 = z$  ist ein wichtiges Beispiel einer für alle Punkte  $(t, x, y, z)$  p. D. Die *charakterist. Flächen*  $w(t, x, y, z) = 0$  ( $\nearrow$  partielle Differentialgleichung III.) dieser p. D. sind Lösungen der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung  $w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 0$ ; sie haben die Form  $w = t - \zeta = 0$ . P. D.en haben danach eine einparametrische Schar von charakterist. Flächen.

II. Für p. D.en sind *Anfangs-Randwertprobleme* oder, wie sie auch bezeichnet werden, *gemischte Probleme* korrekt gestellte Aufgaben. Diese Aufgabenstellung, etwa für die p. D.  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$  betrachtet, kann man folgendermaßen formulieren: Gesucht ist eine in dem Gebiet  $G = \{(t, x) \mid 0 < t < T, a < x < b\}$  und auf dem Rand von  $G$  stetige Funktion  $u(t, x)$ , die der p. D.  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$  in  $G$  genügt, sowie der Anfangsbedingung  $u(0, x) = u_0(x)$  und den Randbedingungen  $u(t, a) = f_1(t), u(t, b) = f_2(t)$ . Dabei müssen die *Verträglichkeitsbedingungen*  $u_0(a) = f_1(0)$  und  $u_0(b) = f_2(0)$  erfüllt sein. Es ist wichtig, daß eine Lösung für  $t > 0$  gesucht wird, wenn für  $t = 0$  Anfangswerte vorgegeben sind. Das Problem ist für  $t < 0$  nicht korrekt gestellt, wenn sich die Anfangsbedingung auf  $t = 0$  bezieht. Diese Eigenschaft hat ihre Ursache darin, daß die p. D.  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$  irreversible Vorgänge beschreibt. Die Lösung des gestellten gemischten Problems kann etwa mit Hilfe der *Laplace-Transformation* gelöst werden.

Neben den gemischten Problemen stellt man für p. D.en auch häufig das Anfangswertproblem: Ge-

sucht ist eine für  $t \geq 0$  stetige und beschränkte Funktion  $u(t, x)$ , die für  $t > 0$  der p. D.  $u_t - a^2 u_{xx} = 0$  genügt und für  $t = 0$  der Anfangsbedingung  $u(0, x) = u_0(x)$ , in der  $u_0(x)$  für alle  $x$  erklärt, stetig und beschränkt sein soll. Die Lösung dieses Problems ist eindeutig bestimmt und hängt stetig von der Funktion  $u_0(x)$  ab. Das Anfangswertproblem in dieser Form ist danach korrekt gestellt. Das *Poissonsche Integral* (4) liefert die Lösung dieses Anfangswertproblems. Zur kanonischen Form der p. D.  $\nearrow$  partielle Differentialgleichung III.

$$(4) \quad u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(s)}{\sqrt{t}} e^{-(x-s)^2/4at^2} ds$$

**parabolische Regression**  $\nearrow$  Regression II.1.  
**parabolischer Punkt**  $\nearrow$  Krümmung I.

**Paraboloid:** nicht entartete Fläche zweiter Ordnung ohne *Mittelpunkt*, die sich ins Unendliche erstreckt. I. Es gibt zwei Typen von P.en, ellipt. und hyperbol. P.e. Die Gleichung eines *ellipt. P.s* hat in einem kartes. Koordinatensystem, das durch *Hauptachsentransformation* geeignet zu finden ist, die *Normalform* (1) (Abb. 1). Jede zur  $x,y$ -Ebene paral-

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

lele Ebene  $z = z_0$  mit  $z_0 > 0$  schneidet diese Fläche in einer *Ellipse*, jede zur  $x,y$ -Ebene senkrechte Ebene schneidet sie in einer *Parabel*. Für  $a = b$  stellt (1) eine *Rotationsfläche* dar, z. B. entsteht das P. mit

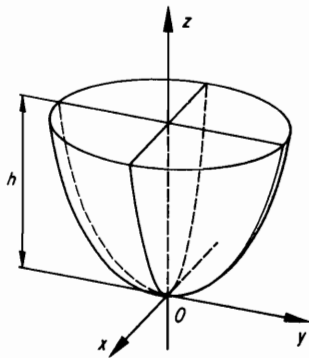


Abb. 1: Ellipt. Paraboloid

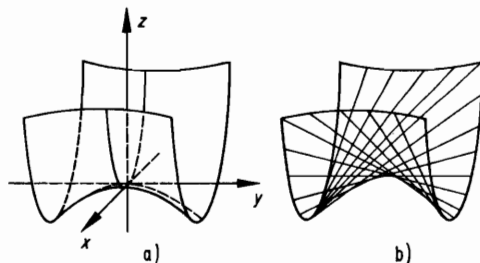


Abb. 2: Hyperbol. Paraboloid, in b) sind die zwei Geraden-scharen in dieser Fläche angegeben

der Gleichung  $x^2/2 + y^2/2 = 2z$  durch Drehung der in der  $y,z$ -Ebene gelegenen Parabel  $y^2/2 = 2z$  um die  $z$ -Achse.

II. Die Gleichung eines *hyperbol. P.s* hat die Normalform (2) (Abb. 2). Die zur  $x,y$ -Ebene parallelen

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Ebenen  $z = z_0$  schneiden diese Fläche in *Hyperbeln*, die Ebene  $z = 0$  schneidet sie in einem Paar sich in  $P(0, 0, 0)$  schneidender Geraden, die Ebenen  $x = x_0$  und  $y = y_0$  schneiden sie in Parabeln. Das hyperbol. P. ist eine *Sattelfläche*,  $P(0, 0, 0)$  ist *Sattelpunkt* der Fläche. Auf dem hyperbol. P. liegen zwei *Scharen von Geraden*. Die eine Schar hat die Parameterdarstellung (3), für die andere Schar gilt (4). Dabei

$$(3) \quad x/a = u + t, \quad y/b = -u + t, \quad z = 2ut$$

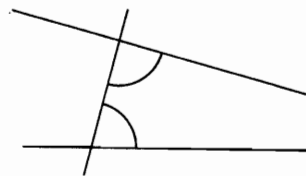
$$(4) \quad x/a = v + t, \quad y/b = v - t, \quad z = 2vt$$

erhält man für jedes reelle  $u$  bzw.  $v$  eine Gerade jeder Schar mit dem Geradenparameter  $t$ . Auf dem *ellipt. P.* liegen keine Geraden. Ist  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ein Punkt des P.s, so ist  $x_0/a^2 + y_0/b^2 = z + z_0$  bzw.  $x_0/a^2 - y_0/b^2 = z + z_0$  die Gleichung der *Tangentialebene* in  $P_0$  an das ellipt. bzw. hyperbol. P. **Parallaxensekunde**  $\nearrow$  Strecke V.

**parallel**, Zeichen ||: gleichlaufend. Zwei Geraden  $g$  und  $h$  heißen p. oder *Parallelen*, in Zeichen  $g \parallel h$ , wenn  $g = h$  ist oder wenn beide in einer Ebene  $E$  liegen und keinen Punkt gemeinsam haben. Zu einer Geraden  $g$  in  $E$  kann eine Parallele  $h$  konstruiert werden entweder durch Parallelverschiebung mit Zeichendreiecken oder mit Zirkel und Lineal, indem in zwei getrennten Punkten von  $g$  je eine Senkrechte errichtet und auf jeder auf derselben Seite von  $g$  die gleiche Strecke abgetragen wird. Die Punkte der Verbindungsgeraden der Streckenendpunkte haben den gleichen Abstand von  $g$ , mithin keinen Punkt mit  $g$  gemeinsam. Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  heißen parallel, wenn  $E_1 = E_2$  ist oder wenn beide Ebenen keinen Punkt gemeinsam haben. Die Parallelität von Geraden bzw. Ebenen ist eine *Äquivalenzrelation*. — S. a. Winkel I.

**Parallelebenenbüschel**  $\nearrow$  Ebene II.

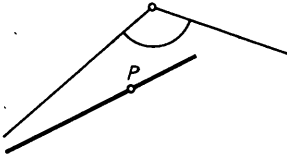
**Parallelenaxiom:** *Geometrie I.* die Aussage, daß es zu jeder Geraden  $g$  und jedem nicht auf  $g$  liegenden Punkt  $P$  in der durch  $g$  und  $P$  eindeutig bestimmten Ebene  $E$ , die  $g$  und  $P$  enthält, genau eine Gerade  $h$  gibt, auf der  $P$  liegt und die zu  $g$  parallel ist, d. h. die  $g$  nicht schneidet. — Diese Aussage wurde erstmals explizit von EUKLID in seinen *»Elementen«* als *Parallelenpostulat* formuliert (Abb. 1): „Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien



Parallelenaxiom. Abb. 1: Parallelenpostulat nach EUKLID



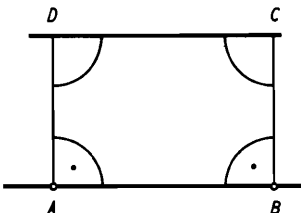
bewirkt, daß die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann sollen die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“ Schon in der Antike wurde die Frage diskutiert, ob das P. sich aus den anderen Axiomen Euklids beweisen läßt. Diese Frage blieb trotz vieler Lösungsversuche fast zwei Jahrtausende offen. Es gelang lediglich, eine Reihe von Aussagen zu finden, die zum P. gleichwertig sind, keine konnte aber ohne Benutzung des P.s hergeleitet werden. — I.1. POSIDONTOS (um 135—51 v. u. Z.): Die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben und alle auf der gleichen Seite dieser Geraden liegen, bildet eine Gerade. — I.2. Der Abstand zweier zu einer Geraden senkrechten Geraden ist beschränkt. — I.3. LEGENDRE: Durch einen Punkt innerhalb eines Winkels, der kleiner als ein gestreckter ist, kann man stets eine Gerade ziehen, die beide Schenkel des Winkels schneidet (Abb. 2). — I.4. Zwei sich unbegrenzt nähernde Geraden schnei-



Parallelenaxiom.  
Abb. 2: Axiom von  
LEGENDBRE

den sich. — I.5. WALLIS: Zu jedem Dreieck gibt es ein ähnliches Dreieck beliebiger Größe. — I.6. Es gibt ein Rechteck. — I.7. SACCHERI: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte. — I.8. W. BÓLYAI: Durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte gibt es einen Kreis.

II. Ein Teil der Versuche, das P. zu beweisen, strebte einen indirekten Beweis an, d. h. die Herleitung eines Widerspruchs aus einer Voraussetzung, die dem P. widerspricht. Als besonders günstig erwies sich, statt des P.s die zu ihm äquivalente Aussage I.7. zu betrachten und als ihr widersprechend auszugehen entweder von der Hypothese des spitzen oder von der des stumpfen Winkels: »Sind in einem Viereck ABCD die Winkel  $\sphericalangle DAB$ ,  $\sphericalangle ABC$  Rechte und die Seiten AD, BC gleich lang, so sind  $\sphericalangle ADC$  und  $\sphericalangle BCD$  spitz bzw. nach der Hypothese des stumpfen Winkels stumpf« (Abb. 3). Die betrachteten Winkel  $\sphericalangle ADC$  und  $\sphericalangle BCD$  sind stets gleich groß. Dem P. entspricht die Hypothese des rechten Winkels. — Besonders weitgehende Untersuchungen dieser Art stammen von G. SACCHERI (1667—1733) und J. H. LAMBERT (1728—1777). Ihnen „gelang“ die



Parallelenaxiom.  
Abb. 3: Hypothese  
des spitzen bzw.  
des stumpfen Win-  
kels,  $\sphericalangle ADC$  und  
 $\sphericalangle BCD$  sind beide  
spitz bzw. beide  
stumpf

Widerlegung der Hypothese des stumpfen Winkels unter der Voraussetzung, daß jede Gerade unendlich lang ist. Eine Widerlegung der Hypothese des spitzen Winkels gelang nicht. Ergebnis dieser Untersuchungen war eine Reihe von Sätzen, die zur  $\nearrow$  absoluten Geometrie oder zu  $\nearrow$  nichteuklid. Geometrien gehören, z. B. entdeckte LAMBERT, daß die Abweichung der Winkelsumme im Dreieck von zwei Rechten dem Flächeninhalt proportional ist.

III. Die Überzeugung, daß das P. aus den übrigen Axiomen Euklids weder zu beweisen noch zu widerlegen, sondern von ihnen unabhängig ist, gewann zuerst C. F. GAUSS (1777—1855) und unabhängig von ihm und voneinander J. BÓLYAI (1802—1860) und N. I. LOBATSCHESKI (1793—1856). Alle drei entwickelten die aus der Hypothese des spitzen Winkels entspringende nichteuklid. Geometrie, die hyperbol. oder Lobatschewskische Geometrie gen. wird, zu einem beträchtl. Teil. Während jedoch GAUSS nichts darüber publizierte, veröffentlichten BÓLYAI und LOBATSCHESKI ihre Resultate, stießen jedoch auf wenig Verständnis bei ihren Zeitgenossen. Endgültig gesichert wurde die Existenz nichteuklid. Geometrien erst durch F. KLEIN (1849—1925), der im Rahmen der euklid. Geometrie Modelle für die nichteuklid. Geometrien konstruierte.

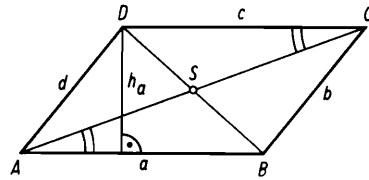
Parallelepiped, Parallelepipedon  $\nearrow$  Prisma II.

Parallelfeld  $\nearrow$  Prisma II.

Parallelgitter  $\nearrow$  Geometrie der Zahlen.

Parallelkoordinaten  $\nearrow$  Koordinatensystem II.

Parallelogramm: ein Viereck ABCD, in dem jeweils gegenüberliegende Seiten auf zueinanderparallelen Geraden liegen. Die Summe der Größen der Innenwinkel, die einer Seite anliegen, ist  $180^\circ$ . Die Größen je zweier gegenüberliegender Innen-



Parallelogramm

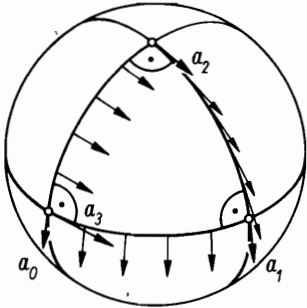
winkel sind gleich (Abb.). Jede Diagonale zerlegt das P. in zwei kongruente Dreiecke. Die Diagonalen halbieren einander; bezeichnet man mit S ihren Schnittpunkt, so gilt z. B.  $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ , weil  $a = c$  und weil die diesen Seiten anliegenden Winkel als Wechselwinkel gleiche Größe haben. Die Fläche des P.s hat den Inhalt  $A_P = g \cdot h$ , wenn g die Länge einer Seite und h der Abstand dieser Seite von der zu ihr parallelen Seite ist. — S. a. Rechteck, Quadrat, Rhomboid, Ergänzungsparallelogramm.

Parallelogrammidentität  $\nearrow$  Hilbertraum I.

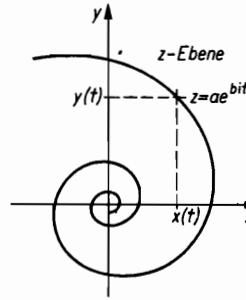
Parallelprojektion  $\nearrow$  Projektion II.

Parallelschaltung  $\nearrow$  Struktur II.

Parallelverschiebung: auf einer krummen Fläche F definierte Operation, nach der zwei in den Tangentialebenen zweier getrennter Punkte  $P_0$  und P der



Parallelverschiebung längs eines sphärischen Dreiecks



Parameterdarstellung: Logarithmische Spirale in komplexen Parametern

Fläche  $F$  gelegene Vektoren  $\mathbf{a}(P_0)$  und  $\mathbf{a}(P)$  parallel gen. werden, falls sie mit der *geodät. Linie* durch die Punkte  $P_0$  und  $P$  den gleichen Winkel einschließen und falls ihre Beträge  $|\mathbf{a}(P_0)|$  und  $|\mathbf{a}(P)|$  einander gleich sind. Da die *geodät. Linien* in der Ebene Geraden sind, entspricht diese Definition der im euklid. Raum. Im Unterschied zur  $P.$  in einer Ebene muß aber bei einer  $P.$  längs eines geschlossenen Weges auf einer Fläche der Vektor  $\mathbf{a}(P)$  i. allg. nicht in seine Ausgangslage zurückkehren (Abb.). S. a. Kongruenzabbildung.

**Parameter:** I. eine bei Funktionen neben den eigentl. Variablen auftretende *Hilfsvariable*, durch die sich eine Schar zusammengehöriger Funktionen unter einem analyt. Ausdruck zusammenfassen läßt. Jedem speziellen Wert des  $P.$ s entspricht eine spezielle Funktion der Schar. Alle linearen Funktionen lassen sich z. B. durch den analyt. Ausdruck  $y = mx + n$  mit den  $P.$ n  $m, n$  beschreiben. Jedes Wertepaar  $(m, n)$  mit  $m \neq 0$  charakterisiert genau eine lineare Funktion, und umgekehrt kann jeder linearen Funktion eindeutig ein solches Paar reeller Zahlen zugeordnet werden. — S. a. Gleichung mit Parametern.

II. Länge  $2p$  einer Kegelschnittsehne, die parallel zur Leitlinie durch einen Brennpunkt des Kegelschnitts verläuft. ↗ Parabel I.

**Parameter, natürlicher** ↗ Bogenlänge.

**Parameterdarstellung:** I. Darstellung der Koordinaten der Punkte einer Kurve oder Fläche durch Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Variabler, die Parameter gen. werden, z. B. ist  $x(t) = r \cos t, y(t) = r \sin t$  die  $P.$  eines Kreises in einem kartes. Koordinatensystem. Allgemein ist  $x = g(t), y = h(t)$  eine  $P.$  einer Kurve der Ebene, wenn die Funktionen  $g(t)$  und  $h(t)$  jedem Wert  $t_0$  des Parameters  $t$  eindeutig ein Wertepaar  $(x_0, y_0)$  zuordnen. Zur Darstellung räumlicher Gebilde sind drei eindeutige Funktionen notwendig; sie enthalten einen Parameter, wenn das darzustellende Gebilde eindimensional ist, z. B. eine Kurve, sie enthalten zwei Parameter zur Darstellung einer Fläche. S. a. Ebenengleichung I.; Fläche; Funktion III.; Geradengleichung I.; Kurve I.; Kurve zweiter Ordnung III.

II.  $P.,$  komplexe: Darstellung  $z = f(t) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t) = x(t) + iy(t)$  einer Kurve der komplexen  $z$ -Ebene mit reellem Parameter  $t$ , z. B. ist  $z = a \cos t + ib \sin t$  die komplexe  $P.$  einer Ellipse

mit  $a, b$  als Halbachsen, und  $z = f(t) = a e^{i\varphi t}$  mit den komplexen Konstanten  $a$  und  $b$  stellt eine logarithm. Spirale dar (Abb.), sie hat in einem Polarkoordinatensystem die Gleichung  $z = \varrho(t) \cdot e^{i\varphi(t)}$ . Die  $P.$   $z = ae^{i\varphi t}$  nimmt für  $a = r e^{i\varphi k}$  und  $b = \beta_1 + i\beta_2$  die Form  $z = r e^{-\beta_1 t} \cdot e^{i(\beta_1 t + k)}$  mit  $\varrho(t) = r \cdot e^{-\beta_1 t}$  und  $\varphi(t) = \beta_1 t - k$  an. Sind  $x(t), y(t)$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen von  $t$ , so heißt die Kurve *glatt*.

**parameterfreier Test** ↗ Parametertest.

**Parametergleichung** ↗ Geradengleichung I., ↗ Ebenengleichung I.

**Parameterintegral:** Integral, bei dem sowohl die Grenzen des Integrals als auch der Integrand noch von einer Veränderlichen abhängen.

I. Von einem *eindimensionalen*  $P.$  mit konstanten Grenzen spricht man z. B. wenn die Funktion  $f(x, y)$  in dem Rechteck  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  definiert und für festes  $y$  nach  $x$  integrierbar ist; durch  $F(y)$

$$= \int_a^b f(x, y) dx$$
 wird dann eine von der im Integranden auftretenden Variablen  $y$  abhängige Funktion  $F(y)$  definiert, in der  $y$  Parameter des Integrals heißt, von dem das Integral  $F(y)$  abhängt.

**Eigenschaften:** Falls die Funktion  $f(x, y)$  im Rechteck  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  stetig ist, so ist auch die Funktion  $F(y)$  in  $c \leq y \leq d$  stetig und kann daher integriert werden, d. h., es gilt (1).

$$(1) \int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Des weiteren darf nach (2) die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden.

$$(2) \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Wenn auch die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$  im Rechteck stetig ist, so darf man die Funktion  $F(y)$  differenzieren, und es gilt (3).

$$(3) F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

**Beispiel:** Die für  $(x, y) \neq (0, 0)$  durch (4) und für

$$(4) f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

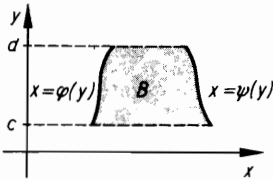
$(x, y) = (0, 0)$  durch irgendeinen Wert definierte Funktion ist im Koordinatenursprung unstetig. Wegen (5) und (6) folgen (7) und (8), die Reihenfolge der Integration darf danach hier nicht vertauscht werden.

$$(5) \quad \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{für } y > 0$$

$$(6) \quad \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \text{für } x > 0$$

$$(7) \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = [\arctan y]_0^1 = \pi/4$$

$$(8) \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = -\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = -[\arctan x]_0^1 = -\pi/4$$



Integrationsbereich  $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  eines Parameterintegrals

II. Von einem eindimensionalen P. mit veränderl. Grenzen spricht man z. B., wenn  $\varphi(y)$  und  $\psi(y)$  im Intervall  $c \leq y \leq d$  stetige Funktionen mit  $\varphi(y) < \psi(y)$  sind und wenn  $f(x, y)$  stetig ist in dem Bereich  $B$  (Abb. 1), der durch  $\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  beschrieben wird. Durch

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

ist dann eine stetige Funktion definiert. Sind die Funktionen  $\varphi(y)$  und  $\psi(y)$  differenzierbar und hat  $f(x, y)$  in einem  $B$  umfassenden Bereich eine stetige Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , so ist auch  $F(y)$  differenzierbar mit der Ableitung (9):

$$(9) \quad F'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx + f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y)$$

Beispiel: Ist  $g(x)$  eine stetige Funktion, so folgt (11) für die Ableitung der Funktion (10), denn der Integrand verschwindet an der oberen Grenze. Diffe-

renziert man  $(n + 1)$ mal, so erhält man  $F^{(n+1)}(y) = g(y)$ .

$$(10) \quad F(y) = \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!} g(x) dx$$

$$(11) \quad F'(y) = \int_0^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} g(x) dx$$

III. Von einem uneigentl. P. spricht man z. B., wenn ein uneigentl. Integral ( $\nearrow$  Integral, uneigentliches) von einem Parameter abhängt. Dabei kann es sich um ein uneigentl. Integral mit unbeschränktem Integranden oder um ein uneigentl. Integral mit unbeschränktem Integrationsintervall handeln, z. B. um die Funktionen (12) oder (13). Beide Typen haben die gleichen Eigenschaften; es genügt, sie für einen Fall anzuführen.

$$(12) \quad F(y) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-y^2x^2)}}$$

$$(13) \quad F(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x} dx$$

Neben der absoluten Konvergenz untersucht man bei P.en die gleichmäßige Konvergenz uneigentl. Integrale ( $\nearrow$  Integral, uneigentliches, III., IV.). Ein P.  $\int_a^\infty f(x, y) dx$ , das für alle  $y$  aus einem Intervall  $I$  konvergiert, heißt in  $I$  gleichmäßig konvergent, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine von  $y \in I$  unabhängige Stelle  $X(\varepsilon)$  existiert, so daß für jedes  $b > X(\varepsilon)$  stets

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ gilt. Hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz von } \int_a^\infty f(x, y) dx \text{ in einem Intervall } I \text{ ist die Existenz einer Funktion } \varphi(x), \text{ so daß}$$

$|f(x, y)| \leq \varphi(x)$  für alle  $y$  aus  $I$  und für  $x \geq x_0 > a$  gilt und daß  $\int_a^\infty \varphi(x) dx$  konvergiert.

Das P. (14) ist z. B. im Intervall  $y \geq y_0 > 0$  gleichmäßig konvergent, weil für  $x \geq 0, y \geq y_0 > 0$  die Bedingungen (15) und (15a) erfüllt sind.

$$(14) \quad \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx$$

$$(15) \quad |e^{-xy} \sin x| \leq e^{-xy}$$

$$(15a) \quad \int_0^\infty e^{-xy} dx \text{ ist konvergent}$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  für eine Funktion  $f(x, y)$ , die für  $x \geq a$  und  $y \in I$  stetig ist, ergibt sich die Stetigkeit der Funktion  $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$  im Intervall  $I$ . Insbesondere darf man sie integrieren. Sind  $c$  und  $d$  zwei Werte aus  $I$ , so gilt die Gleichung (16), d. h., die Integrations-

reihenfolge kann vertauscht werden.

$$(16) \quad \int_c^d \left( \int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Existiert ferner noch eine stetige partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial y}$  für  $x \geq a$  und  $y \in I$  und ist das Integral  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y} dx$  in  $I$  gleichmäßig konvergent, dann ist die Funktion  $F(y)$  in  $I$  differenzierbar, und es gilt (17).

$$(17) \quad F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

**IV. Mehrdimensionale P.e** treten auf, wenn in Kurven-, Flächen-, Oberflächen- oder Raumintegralen der Integrand von einem oder mehreren Parametern abhängt. Es genügt, etwa den Fall der Flächenintegrale näher zu betrachten. Ist  $B$  ein beschränkter Bereich der  $x, y$ -Ebene,  $I$  ein Intervall der  $\xi$ -Achse und  $f(x, y, \xi)$  eine für jedes  $\xi$  aus  $I$  über  $B$  integrierbare Funktion, so wird für jedes  $\xi$  aus  $I$  durch  $F(\xi) = \iint_{(B)} f(x, y, \xi) dx dy$  eine Funktion definiert, die in  $I$  stetig ist, falls  $f(x, y, \xi)$  in dem dreidimensionalen Bereich stetig ist, für dessen Punkte  $x, y$  in  $B$  und  $\xi$  in  $I$  liegt. Hat  $f(x, y, \xi)$  in diesem Bereich eine stetige Ableitung nach  $\xi$ , dann ist  $F(\xi)$  in  $I$  differenzierbar, und es gilt (18).

$$(18) \quad F'(\xi) = \iint_{(B)} \frac{\partial f(x, y, \xi)}{\partial \xi} dx dy$$

Ist z. B.  $\varrho(x, y, z)$  eine in dem Raumbereich  $K$  stetige Funktion und  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ , so stellt (19) ein von drei Parametern abhängiges Raumintegral

$$(19) \quad F(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_{(K)} \frac{\varrho(x, y, z)}{r} dK$$

dar. Liegt der Punkt mit den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  nicht in  $K$ , dann ist der Integrand stetig und hat stetige partielle Ableitungen, für die (20) und (21) gelten.

$$(20) \quad \frac{\partial F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \iiint_{(K)} \varrho(x, y, z) \frac{\partial(1/r)}{\partial \xi} dK = \iiint_{(K)} \varrho(x, y, z) [(x - \xi)/r^3] dK$$

$$(21) \quad \frac{\partial^2 F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi^2} = \iiint_{(K)} \varrho(x, y, z) \frac{\partial^2(1/r)}{\partial \xi^2} dK = \iiint_{(K)} \varrho(x, y, z) [-1/r^3 + 3(x - \xi)^2/r^5] dK$$

Berechnet man analog die Ableitungen nach den anderen Parametern und addiert sie, so findet man (22).

$$(22) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 0$$

**Parametertest:** ein Testverfahren zur Prüfung einer Hypothese über unbekannt Parameter einer vorliegenden, dem Typ nach bekannten Verteilungsfunktion, das diese Kenntnis über den Verteilungstyp wesentlich benutzt, z. B. der  $t$ -Test. Im Unterschied dazu heißt ein Test *parameterfrei*, *nichtparametrisch* oder *verteilungsfrei*, wenn er keinerlei Kenntnis über den Verteilungstyp in der Grundgesamtheit voraussetzt, z. B. der  $\chi^2$ -Anpassungstest oder der Kolmogorow-Smirnow-Test.

**Parsec, pc**  $\nearrow$  Strecke V.

**Parsevalse Vollständigkeitsrelation**  $\nearrow$  Orthogonalsystem III.

**Partialbruch**  $\nearrow$  Integration spezieller Funktionsklassen I.,  $\nearrow$  Kettenbruch,  $\nearrow$  Partialbruchzerlegung.

**Partialbruchzerlegung: I.** Zerlegung einer gebrochenrationalen Funktion  $f(x) = g(x)/h(x)$  in eine Summe von Brüchen, die *Partialbrüche* gen. werden. Die Nenner der Partialbrüche sind Potenzen der irreduziblen Polynome, die in der Produktdarstellung der ganzrationalen Funktion  $h(x)$  auftreten ( $\nearrow$  ganzrationale Funktion II.). Im Bereich  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen sind die irreduziblen Polynome Linearfaktoren oder quadrat. Polynome mit reellen Koeffizienten. Die Zähler der Partialbrüche sind entsprechend reelle Konstante oder lineare Polynome mit reellen Koeffizienten. Jede rationale Funktion

$$(1) \quad f(x) = g(x)/h(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i / \prod_{j=0}^m b_j x^j$$

(1), in deren Darstellung die beiden ganzrationalen Funktionen  $g$  und  $h$  keine gemeinsamen Nullstellen haben,  $n \leq m$  und  $b_m = 1$  gilt, läßt sich eindeutig in eine Summe (2) von Partialbrüchen zerlegen.

$$(2) \quad f(x) = \frac{A_{11}}{x - x_{N_1}} + \frac{A_{12}}{(x - x_{N_1})^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_{N_1})^{k_1}} + \frac{A_{21}}{x - x_{N_2}} + \frac{A_{22}}{(x - x_{N_2})^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_{N_2})^{k_2}} + \dots + \frac{A_{l1}}{x - x_{N_l}} + \frac{A_{l2}}{(x - x_{N_l})^2} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(x - x_{N_l})^{k_l}} + \frac{B_{11} + C_{11}x}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{B_{1s_1} + C_{1s_1}x}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \frac{B_{21} + C_{21}x}{x^2 + p_2x + q_2} + \dots + \frac{B_{2s_2} + C_{2s_2}x}{(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2}} + \dots + \frac{B_{r1} + C_{r1}x}{x^2 + p_rx + q_r} + \dots + \frac{B_{rs_r} + C_{rs_r}x}{(x^2 + p_rx + q_r)^{s_r}}$$

Dabei sind die  $x_{N_i}$  Nullstellen der ganzrationalen Funktion  $h$ ;  $k, l, r, s$  sind natürl.,  $A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, p_i, q_i$  reelle Zahlen, und außerdem gilt  $p_i^2/4 - q_i < 0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ , weil sonst die quadrat. Polynome im Nenner reduzibel wären. Die größten Exponenten  $k_1, \dots, k_l$  und  $s_1, \dots, s_r$  in den Nennern sind die Exponenten der Nennerpolynome in der Produktdarstellung von  $h(x)$ , d. h., die Vielfachheiten der

Nullstellen  $x_{N_i}$  bzw. der komplexen Nullstellen der quadrat. Polynome. Praktisch wird diese Beziehung benutzt, um durch *Koeffizientenvergleich* gleicher Potenzen von  $x$  in  $f(x) \cdot h(x)$  und in  $g(x)$  die Koeffizienten  $A_{ik}$ ,  $B_{ik}$  und  $C_{ik}$  der P. schrittweise zu bestimmen.

*Beispiel:* Von der mit (3) gegebenen unecht gebrochenen rationalen Funktion spaltet man den ganz-

$$(3) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{6x^3 - 12x^2 + 8x}{2x^3 - 4x + 2}$$

rationalen Teil ab und erhält für die echt gebrochene rationale Funktion  $\bar{f}(x)$  den Ansatz (4).

$$(4) \quad \bar{f}(x) = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

Multiplikation mit  $\bar{h}(x) = (x-1)^2$  führt zu  $x = A_1(x-1) + A_2 = A_1x + (A_2 - A_1)$  und durch Koeffizientenvergleich zu  $A_1 = 1$ ,  $A_2 - A_1 = 0$  und damit zu der P. (5).

$$(5) \quad \bar{f}(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

**II.1.** Enthält die Produktdarstellung von  $h(x)$  nur Linearfaktoren in erster Potenz, d. h., hat die Gleichung  $h(x) = 0$  nur einfache reelle Lösungen, etwa  $x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_i}$ , dann geht der allgemeine Ansatz in (6) über.

$$(6) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{x-x_{N_1}} + \frac{A_2}{x-x_{N_2}} + \dots + \frac{A_l}{x-x_{N_l}}$$

**II.2.** Hat die Gleichung  $h(x) = 0$  nur reelle, jedoch nicht notwendig einfache Lösungen, so gilt die P. (7) unter der Annahme, daß  $x_{N_i}$  eine  $k_i$ -fache Nullstelle ist.

$$(7) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{A_{1i}}{(x-x_{N_1})^i} + \sum_{i=1}^{k_2} \frac{A_{2i}}{(x-x_{N_2})^i} + \dots + \sum_{i=1}^{k_l} \frac{A_{li}}{(x-x_{N_l})^i}$$

**II.3.** Hat die Gleichung  $h(x) = 0$  auch nichtreelle, aber nur einfache Lösungen, dann ergibt sich die P. (8).

$$(8) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \sum_{i=1}^l \frac{A_i}{x-x_{N_i}} + \sum_{j=1}^r \frac{B_j + C_jx}{x^2 + p_jx + q_j}$$

S. a. komplexwertige Funktion, elementare, I.

**III.** Zur Berechnung einer P. bringt man zunächst die gegebene rationale Funktion  $f(x) = g(x)/h(x)$  auf die Normalform, indem man die in der Produktdarstellung von  $g$  und  $h$  auftretenden übereinstimmenden Linearfaktoren kürzt, falls  $g$  und  $h$  gemeinsame Nullstellen haben. Liegt eine unecht gebrochene rationale Funktion vor, so spaltet man den ganzrationalen Anteil ab. Schließlich bringt man den Koeffizienten der höchsten Potenz des Nenner-

polynoms der verbleibenden echt gebrochenen rationalen Funktion  $\bar{g}(x)/\bar{h}(x)$  auf den Wert 1. Aus der Lösungsmenge der Gleichung  $\bar{h}(x) = 0$  bzw. durch schrittweises Abspalten von linearen bzw. von quadrat. Faktoren erhält man die Darstellung der ganzrationalen Funktion  $\bar{h}(x)$  als Produkt irreduzibler Faktoren. Nicht nur durch Koeffizientenvergleich wie im Beispiel lassen sich aus dem gefundenen Ansatz die Koeffizienten der Partialbrüche bestimmen, sondern auch durch Einsetzen bestimmter Werte für das Argument  $x$ . Ist z. B.  $f(x)$  durch (9) gegeben,

$$(9) \quad f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \frac{x^3 + 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$(10) \quad f(x) = \frac{B_1 + C_1x}{x^2 + x + 1} + \frac{B_2 + C_2x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

so erhält man den Ansatz (10). Setzt man für  $x$  die Zahlen  $0, -1, 1, -1/2$  ein, so erhält man aus (9) die  $(x, y)$ -Paare  $(0, 2), (-1, 3), (+1, 1/3)$  und  $(-1/2, 4)$ . Damit ergeben sich aus (10) vier Gleichungen für  $B_1, C_1, B_2, C_2$ , aus denen man  $B_1 = 1, C_1 = 0, B_2 = 1, C_2 = -1$  erhält und damit die P. (11).

$$(11) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1-x}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Für eine durch (12) gegebene rationale Funktion

$$(12) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{11x^3 + 6x - 17}{(x+2)(x^2+1)}$$

$f(x)$  sind die Nenner der Partialbrüche gegeben, und man kann zunächst unter dem Ansatz (13) mit  $\bar{h}(x) = x^3 + 1$  machen. Unter Berücksichtigung von (12) erhält man (14).

$$(13) \quad f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{\bar{g}(x)}{\bar{h}(x)}$$

$$(14) \quad A = \frac{g(x)}{\bar{h}(x)} - \frac{\bar{g}(x)(x+2)}{\bar{h}(x)}$$

Setzt man  $x = -2$  ein, so ergibt sich  $A = \frac{g(-2)}{\bar{h}(-2)} = 3$

und damit  $\bar{g}(x)/\bar{h}(x) = [g(x) - A\bar{h}(x)]/\bar{h}(x) = (8x - 10)/(x^3 + 1)$ . Danach ist (15) die gesuchte P.

$$(15) \quad f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{8x-10}{x^3+1}$$

Zur Integration der Partialbrüche  $\nearrow$  Integration spezieller Funktionen I.

**Partiellsomme**  $\nearrow$  Reihe I.

**partiell**  $\nearrow$  algebraische Operation.

**partiell differenzierbar**  $\nearrow$  Differentialquotient, partieller, I.

**partielle Ableitung**  $\nearrow$  Differentialquotient, partieller.

**partielle Differentialgleichung:** I. Gleichung zwischen unabhängigen Variablen, einer gesuchten Funktion und deren partiellen Ableitungen. Allgemein kann man eine p. D. für die gesuchte Funktion

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  der  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in der Form (1) schreiben, wenn (2) gesetzt wird. Die Gleichungen (3), (4), (5) und

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n, u, u_x, \dots, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}, \dots) = 0$$

$$(2) \quad u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots \text{ für } i, j = 1, 2, \dots, n$$

(6) sind z. B. p. D. für die gesuchte Funktion  $u(x_1, x_2)$ . Die p. D. hat die Ordnung  $r$ , falls die in der

$$(3) \quad au_{x_1} + bu_{x_2} = 0 \quad (4) \quad u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$$

$$(5) \quad u_{x_1 x_1} - a^2 u_{x_2 x_2} = 0 \quad (6) \quad u_{x_1 x_1} - a^2 u_{x_2} = 0$$

p. D. vorkommende höchste Ableitung von der Ordnung  $r$  ist. Die p. D. in (3) hat die Ordnung 1 und die in (4), (5), (6) haben die Ordnung 2. Die p. D. heißt eine *lineare p. D.*, wenn sie in  $u$  und allen Ableitungen von  $u$  linear ist. Eine lineare p. D. der Ordnung 1 läßt sich in der Form (7), eine lineare p. D. der Ordnung 2 in der Form (8) schreiben.

$$(7) \quad L[u] = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x_1, \dots, x_n) u = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$(8) \quad L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n) u = f(x_1, \dots, x_n)$$

Ist  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , so heißt die p. D.  $L[u] = f$  *inhomogene lineare p. D.*, für  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$  *homogene lineare p. D.* Mit  $u_1$  und  $u_2$  ist auch  $c_1 u_1 + c_2 u_2$  Lösung der homogenen linearen p. D., wobei  $c_1$  und  $c_2$  beliebige Konstanten sind. Jede Lösung  $u$  der inhomogenen linearen p. D.  $L[u] = f$  läßt sich als Summe einer speziellen Lösung  $u_s$ ; dieser p. D. und der allgemeinen Lösung  $u_{ah}$  der entsprechenden homogenen linearen p. D.  $L[u] = 0$  darstellen. Die *allgemeine Lösung* einer beliebigen p. D. ist eine Lösung mit *willkürlichen Elementen*, aus der man durch Spezialisierung dieser willkürlichen Elemente alle speziellen Lösungen, eventuell mit Ausnahme gewisser *singulärer Lösungen*, erhalten kann. Diese willkürlichen Elemente sind keine beliebigen Konstanten wie im Fall gewöhnl. Differentialgleichungen, sondern beliebige Funktionen. Die Anzahl der willkürlichen Funktionen wird i. allg. gleich der Ordnung der p. D. sein. Bei p. D. mit  $n$  unabhängigen Veränderlichen werden die willkürlichen Funktionen i. allg. Funktionen von  $n - 1$  Veränderlichen sein. Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen p. D.  $u_{x_1 x_2} = f(x_1, x_2)$  für die gesuchte Funktion  $u(x_1, x_2)$  z. B. ist (9); in ihr sind  $w(t)$  und  $v(t)$

$$(9) \quad u(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \int_b^{x_2} f(t, s) dt ds + w(x_1) + v(x_2)$$

willkürliche Funktionen. Für die homogene lineare p. D.  $au_{x_1} + bu_{x_2} = 0$  ist  $u(x_1, x_2) = w(bx_1 - ax_2)$  mit der willkürlichen Funktion  $w(t)$  die allgemeine Lösung.

Es liegt ein *System partieller Differentialgleichungen* vor, wenn  $k$  p. D.en  $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_k = 0$  zur Bestimmung von  $h$  Funktionen  $u^{(1)}(x_1, \dots, x_n), \dots, u^{(h)}(x_1, \dots, x_n)$  vorliegen. Jede dieser p. D.en hat etwa die Form (10). Hat man ebensovielle p. D.en

$$(10) \quad F_i(x_1, \dots, x_n, u^{(1)}, \dots, u^{(h)}, u_{x_1}^{(1)}, \dots, u_{x_n}^{(1)}, u_{x_1 x_1}^{(1)}, \dots) = 0$$

wie unbekannte Funktionen, so heißt das System ein *bestimmtes System p. D.*, ist  $k < h$ , so heißt das System *unterbestimmt* und für  $k > h$  *überbestimmt*. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  bilden z. B. ein bestimmtes System p. D.en für die Funktionen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$ .

In den meisten Fällen kann man die allgemeine Lösung einer p. D. nicht bestimmen, jedoch gelingt es für einige p. D.en, etwa durch die *Separation der Variablen*, spezielle Lösungen zu ermitteln. Diese Methode beruht auf der Möglichkeit, eine p. D. nach dem Ansatz  $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1) w(x_2, \dots, x_n)$  bzw.  $u(x_1, \dots, x_n) = v(x_1) + w(x_2, \dots, x_n)$  in der Form (11) schreiben zu können. Ist dies möglich,

$$(11) \quad G\left(x_1, v, \frac{dv}{dx_1}, \dots\right) = H\left(x_2, \dots, x_n, w, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n}, \dots\right)$$

$$(12) \quad G\left(x_1, v, \frac{dv}{dx_1}, \dots\right) = c \text{ bzw. } H\left(x_2, \dots, x_n, w, \frac{\partial w}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n}, \dots\right) = c$$

so müssen  $v$  und  $w$  den Differentialgleichungen (12) genügen, in denen  $c$  eine beliebige Konstante bezeichnet. Für  $v$  erhält man dann eine gewöhnl. Differentialgleichung, und für  $w$  kann dieser Prozeß eventuell nochmals wiederholt werden. Der Ansatz  $u(x_1, x_2) = v(x_1) + w(x_2)$  führt z. B. für die p. D.  $(u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2 = 1$  auf die beiden gewöhnl. Differentialgleichungen (13) und (14). Durch Lösung

$$(13) \quad \left(\frac{dv}{dx_1}\right)^2 = c \quad (14) \quad 1 - \left(\frac{dw}{dx_2}\right)^2 = c$$

dieser beiden gewöhnl. Differentialgleichungen erhält man  $v(x_1) = ax_1 + b_1$  und  $w(x_2) = x_2 \sqrt{1 - a^2} + b_2$  mit  $a^2 = c$ , und damit für die vorgelegte p. D. die zweiparametrische Lösungsschar (15).

$$(15) \quad u(x_1, x_2) = ax_1 + x_2 \sqrt{1 - a^2} + b$$

Hat man für p. D.en 1. Ordnung eine geschlossene Integrationstheorie, so gibt es diese bereits für p. D.en 2. Ordnung nicht mehr. Die p. D.en 2. Ordnung unterteilt man in ellipt., hyperbol. und parabol. Differentialgleichungen. Diese beschreiben physikalisch gesehen ganz verschiedenartige Vorgänge.

Zur Lösung von p. D.en vgl. auch Laplacetransformation.

II. P. D. 1. Ordnung. Eine p. D. 1. Ordnung, für die Funktion  $u(x_1, \dots, x_n)$  kann man schreiben als  $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0$ , wenn zur Abkürzung

für  $u_x, \dots, u_{x_n}$  entsprechend  $p_1, \dots, p_n$  gesetzt wird; z. B. bilden (16), (17), (18) und (19) p. D.en

$$(16) \quad ap_1 + bp_2 = u$$

$$(17) \quad p_1 p_2 - u = 0$$

$$(18) \quad up_1 + p_2 = 1$$

$$(19) \quad u^2(p_1^2 + p_2^2 + 1) - 1 = 0$$

1. Ordnung für die Funktion  $u(x_1, x_2)$  zweier unabhängiger Veränderlicher. (16) ist homogen und linear, (17), (18) und (19) sind nichtlineare p. D.en. Das wichtigste Resultat der Theorie der p. D.en 1. Ordnung ist die Äquivalenz einer p. D. 1. Ordnung mit einem System gewöhnl. Differentialgleichungen.

Jede Lösung  $u = u(x_1, x_2)$  einer p. D. 1. Ordnung  $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$  in zwei unabhängigen Veränderlichen kann als Fläche in dem dreidimensionalen  $(x_1, x_2, u)$ -Raum dargestellt werden. Dabei hat die Tangentialebene in einem festen Punkt  $(x_1^0, x_2^0, u^0)$  der Fläche die Gleichung (20).  $U, X_1$  und  $X_2$  sind

$$(20) \quad U - u^0 = p_1(X_1 - x_1^0) + p_2(X_2 - x_2^0)$$

die Koordinaten auf der Tangentialebene und  $p_1$  und  $p_2$  müssen Lösungen von  $F(x_1^0, x_2^0, u^0, p_1, p_2) = 0$  sein. Die Einhüllende aller mögl. Tangentialebenen zu Lösungen der p. D. 1. Ordnung durch den Punkt  $(x_1^0, x_2^0, u^0)$  bezeichnet man als den Mongeschen Kegel im Punkt  $(x_1^0, x_2^0, u^0)$ . Die Tangentialebene einer Lösungsfläche durch den Punkt  $(x_1^0, x_2^0, u^0)$  muß danach den in diesem Punkt gebildeten Mongeschen Kegel längs einer Erzeugenden berühren. Eine Kurve auf einer Lösungsfläche  $u = u(x_1, x_2)$  von  $F = 0$  heißt charakterist. Kurve oder kurz Charakteristik, wenn der Tangentialvektor dieser Kurve in jedem Punkt in Richtung einer Erzeugenden des in diesem Punkt gebildeten Mongeschen Kegels zeigt. Längs einer Charakteristik gilt

$$(21) \quad \frac{dx_1}{ds} = F_{p_1}, \quad \frac{dx_2}{ds} = F_{p_2}, \quad \frac{du}{ds} = p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2}$$

(21). Ein System von Werten  $(x_1, x_2, u, p_1, p_2)$  heißt Flächenelement. Dabei bestimmt  $(x_1, x_2, u)$  den Raumpunkt und  $(p_1, p_2)$  eine Tangentialebene in ihm. Die Funktionen  $x_1(t), x_2(t), u(t), p_1(t), p_2(t)$  bilden für alle  $t$  aus einem gewissen Intervall Flächenelemente einer Fläche  $u = u(x_1, x_2)$  im Raum, wenn die Funktionen der Streifenrelation (22) genügen.

$$(22) \quad \frac{du}{dt} = p_1 \frac{dx_1}{dt} + p_2 \frac{dx_2}{dt}$$

Man bezeichnet dann dieses System von Funktionen als einen Streifen längs der Fläche  $u = u(x_1, x_2)$ . Das System (23) aus den fünf gewöhnl. Differential-

$$(23) \quad \frac{dx_1}{ds} = F_{p_1}, \quad \frac{dx_2}{ds} = F_{p_2}, \quad \frac{du}{ds} = p_1 F_{p_1} + p_2 F_{p_2},$$

$$\frac{dp_1}{ds} = -(p_1 F_u + F_{x_1}),$$

$$\frac{dp_2}{ds} = -(p_2 F_u + F_{x_2})$$

gleichungen wird als charakterist. Differentialgleichungssystem bzgl. der p. D. 1. Ordnung  $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$  bezeichnet. Die Funktion  $F$  ist ein Integral dieses Systems, d. h., es ist  $F = \text{const}$  längs jeder Lösungskurve. Jede Lösung  $x_1(s), x_2(s), u(s), p_1(s), p_2(s)$  dieses charakterist. Differentialgleichungssystems mit  $F = 0$ , wobei  $F = 0$  nur für einen Punkt der Lösung zu gelten braucht, heißt charakterist. Streifen, und die dazugehörige Raumkurve  $x_1(s), x_2(s), u(s)$  ist eine charakterist. Kurve. Auf jeder Lösungsfläche der p. D. 1. Ordnung  $F = 0$  gibt es eine einparametrische Schar von charakterist. Kurven und dazugehörige charakterist. Streifen. Hat ein charakterist. Streifen ein Flächenelement mit der Lösungsfläche gemeinsam, dann gehört er ganz zur Lösungsfläche.

Das Anfangswertproblem oder Cauchysche Problem fordert, eine Lösung der p. D. 1. Ordnung zu finden, die den Anfangsstreifen  $C = (x_1 = x_1^0(t), x_2 = x_2^0(t), u = u^0(t), p_1 = p_1^0(t), p_2 = p_2^0(t))$ , mit  $F(x_1^0(t), x_2^0(t), u^0(t), p_1^0(t), p_2^0(t)) \equiv 0$  enthält, d. h., es ist eine Lösung  $u = u(x_1, x_2)$  der p. D. 1. Ordnung gesucht, für die (24a), (24b) und (24c) gelten. .

$$(24a) \quad u^0 = u(x_1^0, x_2^0)$$

$$(24b) \quad p_1^0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

$$(24c) \quad p_2^0 = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0)$$

Dazu löst man das charakterist. Differentialgleichungssystem zu dieser p. D. 1. Ordnung mit den Anfangswerten (25) und erhält:

$$(25) \quad x_1|_{s=0} = x_1^0, \quad x_2|_{s=0} = x_2^0, \quad u|_{s=0} = u^0, \\ p_1|_{s=0} = p_1^0, \quad p_2|_{s=0} = p_2^0$$

$x_1 = x_1(s, t), x_2 = x_2(s, t), u = u(s, t), p_1 = p_1(s, t), p_2 = p_2(s, t)$ . Ist (26) erfüllt, so kann man

$$(26) \quad D(0, t) = \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial x_2}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial x_2}{\partial t} \neq 0$$

$x_1 = x_1(s, t), x_2 = x_2(s, t)$  nach  $s, t$  auflösen. Setzt man diese Auflösungen in  $u = u(s, t)$  ein, erhält man die gesuchte Lösung  $u = u(s(x_1, x_2), t(x_1, x_2)) = u(x_1, x_2)$ . Für  $D(0, t) = 0$  ist das Anfangswertproblem nur dann lösbar, wenn der Anfangsstreifen  $C$  ein charakterist. Streifen ist. In diesem Fall gibt es dann unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems, die man erhält, indem man irgendeinen nichtcharakterist. Streifen  $C_1$ , der  $C$  schneidet, konstruiert und nun für  $C_1$  das Anfangswertproblem wie im Falle  $D \neq 0$  löst.  $C$  ist dann in dieser Lösung enthalten.

Von der p. D.  $F = p_1 p_2 - u = 0$  ist z. B. (27)

$$(27) \quad \frac{dx_1}{ds} = p_2, \quad \frac{dx_2}{ds} = p_1, \quad \frac{du}{ds} = 2u,$$

$$\frac{dp_1}{ds} = p_1, \quad \frac{dp_2}{ds} = p_2$$

das charakterist. System. Die charakterist. Streifen berechnet man daraus als  $x_1 = p_{20}(e^s - 1) + x_{10}$ ,  $x_2 = p_{10}(e^s - 1) + x_{20}$ ,  $u = u_0 e^{2s}$ ,  $p_1 = p_{10} e^s$ ,  $p_2 = p_{20} e^s$ . Es ist eine Lösung der p. D. 1. Ordnung durch  $C = (x_1^0 = 1, x_2^0 = t, u^0 = t^2, p_1^0 = 1/2 t, p_2^0 = 2t)$  gesucht.  $C$  erfüllt  $F(1, t, t^2, 1/2 t, 2t) = 0$  und die Streifenrelation (22). Die Lösung des charakterist. Systems mit den Anfangswerten von  $C$  ist:  $x_1(s, t) = 2t(e^s - 1) + 1$ ,  $x_2(s, t) = 1/2 t(e^s - 1) + t$ ,  $u(s, t) = t^2 e^{2s}$ ,  $p_1(s, t) = 1/2 t e^s$ ,  $p_2(s, t) = 2t e^s$ . Wegen  $D(0, t) = 2t \neq 0$  kann man  $x_1(s, t)$  und  $x_2(s, t)$  nach  $s$  und  $t$  auflösen und erhält (28).

$$(28) \quad t = 1/4(4x_2 - x_1 + 1), e^s = \frac{4x_2 + x_1 - 1}{4x_2 - x_1 + 1}$$

In  $u = t^2 e^{2s}$  eingesetzt liefert dies die Lösung  $u(x_1, x_2) = 1/16(4x_2 + x_1 - 1)$ .

Eine von zwei Parametern  $a_1, a_2$  abhängige Lösung  $u = f(x_1, x_2; a_1, a_2)$  einer p. D. 1. Ordnung  $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$  mit der Bedingung (29) heißt

$$(29) \quad f_{a_1} f_{a_1 x_1} - f_{a_1 x_2} f_{a_1 a_2} \neq 0$$

*vollständiges Integral.* Sehr oft kann man mit der Separation der Variablen vollständige Integrale erhalten. Die Funktion

$f(x_1, x_2; a_1, a_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_1 x_2 + a_1 a_2$  z. B. ist ein vollständiges Integral der p. D.  $F = p_1 p_2 - u = 0$ . Löst man  $f_{a_1}(x_1, x_2; a_1, a_2) = \lambda b_1$ ,  $f_{a_2}(x_1, x_2; a_1, a_2) = \lambda b_2$  nach  $x_1, x_2$  auf,  $x_1 = x_1(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$ , und setzt diese Funktionen in  $u = f(x_1, x_2; a_1, a_2)$ ,  $p_1 = f_{x_1}(x_1, x_2; a_1, a_2)$ ,  $p_2 = f_{x_2}(x_1, x_2; a_1, a_2)$  ein, so erhält man mit  $x_1 = x_1(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,  $x_2 = x_2(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,  $u = u(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,  $p_1 = p_1(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,  $p_2 = p_2(\lambda, a_1, a_2, b_1, b_2)$  charakterist. Streifen. Aus dem vollständigen Integral  $f = x_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_1 a_2$  von  $p_1 p_2 - u = 0$  folgt z. B. durch Auflösen nach  $x_1, x_2$  aus  $f_{a_1} = x_1 + a_2 = \lambda b_1$ ,  $f_{a_2} = x_2 + a_1 = \lambda b_2$  dann  $x_1 = \lambda b_1 - a_2$  und  $x_2 = \lambda b_2 - a_1$  und damit  $u = \lambda^2 b_1 b_2$ ,  $p_1 = \lambda b_2$ ,  $p_2 = \lambda b_1$ . Damit erhält man eine vierparametrische Schar von charakterist. Streifen für die p. D. 1. Ordnung  $p_1 p_2 - u = 0$ . Eine *singuläre Lösung* einer p. D. 1. Ordnung  $F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0$  ist eine Lösung der Differentialgleichung, die sich durch Elimination von  $p_1, p_2$  aus  $F = 0, F_{p_1} = 0$  und  $F_{p_2} = 0$  ergibt. Man erhält ebenso singuläre Lösungen aus einem vollständigen Integral, wenn man die beiden Parameter  $a_1, a_2$  aus den drei Gleichungen  $u = f(x_1, x_2; a_1, a_2)$ ,  $f_{a_1}(x_1, x_2; a_1, a_2) = 0$  und  $f_{a_2}(x_1, x_2; a_1, a_2) = 0$  eliminiert. Man erhält z. B. eine singuläre Lösung der p. D. 1. Ordnung  $p_1 p_2 - u = 0$ , indem man  $p_1, p_2$  aus  $p_1 p_2 - u = 0, p_2 = 0$  und  $p_1 = 0$  eliminiert. Es ergibt sich  $u = 0$ , und dies ist wirklich eine Lösung der vorgegebenen p. D. 1. Ordnung, d. h. eine singuläre Lösung. Dieselbe singuläre Lösung hätte man aus dem vollständigen Integral  $f = x_1 x_2 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_1 a_2$  dieser p. D. 1. Ordnung erhalten.

**III. Eine p. D. 2. Ordnung** für die gesuchte Funktion  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  kann man in der Form (30) schreiben

$$(30) \quad F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0$$

ben. Sehr wichtige Anwendungen finden die *linearen* p. D. 2. Ordnung (31). Dabei sind  $a_{ij}, b_i, c$  und  $f$  ge-

$$(31) \quad L[u] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f$$

gebene Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , und es ist  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Für  $n = 2$  setzt man  $x_1 = x$  und  $x_2 = y$  und erhält (32).

$$(32) \quad L[u] = a_{11}(x, y) u_{xx} + 2a_{12}(x, y) u_{xy} + a_{22}(x, y) u_{yy} + b_1(x, y) u_x + b_2(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y)$$

Man unterscheidet verschiedene Typen von p. D. 2. Ordnung je nach dem Vorzeichen, das der Ausdruck (33) in jedem Punkte  $(x_0, y_0)$  eines Gebietes  $G$

$$(33) \quad D(x_0, y_0) = a_{11}(x_0, y_0) a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0)$$

der  $x, y$ -Ebene annimmt. Man spricht von einer  $\nearrow$  *ellipt. Differentialgleichung*, falls  $D > 0$ ,  $\nearrow$  *hyperbol. Differentialgleichung*, falls  $D < 0$ ,  $\nearrow$  *parabol. Differentialgleichung*, falls  $D = 0$ , und von einer p. D. vom *gemischten Typ*, falls  $D$  in  $G$  sein Vorzeichen wechselt. Diese Einteilung hängt nicht von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen  $x, y$  ab, d. h., bei einer Koordinatentransformation ändert sich der Typ der Differentialgleichung nicht. Die p. D.  $u_{xx} + u_{yy} + ux - uy + 2u = e^x$  ist z. B. in der ganzen  $x, y$ -Ebene wegen  $D \equiv 1$  eine ellipt. Differentialgleichung,

$u_{xx} - u_{yy} + e^{x+y} u_x + xu = 0$  ist wegen  $D \equiv -1$  in der ganzen  $x, y$ -Ebene eine hyperbol. Differentialgleichung,  $u_{xx} + xy u_x - 2xu = \sin(xy)$  ist wegen  $D \equiv 0$  in der ganzen  $x, y$ -Ebene eine parabol. Differentialgleichung, und  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$  ist wegen  $D = y$  eine lineare p. D. 2. Ordnung vom gemischten Typ in der  $x, y$ -Ebene, denn für  $y > 0$  ist diese Differentialgleichung elliptisch, für  $y < 0$  hyperbolisch und für  $y = 0$  parabolisch.

Eine Kurve  $w(x, y) = 0$  heißt *charakterist. Linie* der p. D. 2. Ordnung  $L[u] = f$ , wenn für  $w$  die p. D. 1. Ordnung  $a_{11} w_x^2 + 2a_{12} w_x w_y + a_{22} w_y^2 = 0$ , die *charakterist. Differentialgleichung* zu  $L[u] = f$ , erfüllt ist. Für  $D < 0$  bestimmen die beiden allgemeinen Integrale  $h_1(x, y) = c_1$  und  $h_2(x, y) = c_2$  der gewöhnl. Differentialgleichungen (34) und (35) zwei

Scharen von charakterist. Linien der p. D. 2. Ordnung  $L[u] = f$ . Führt man die neuen unabhängigen Veränderlichen  $\bar{x} = h_1(x, y)$ ,  $\bar{y} = h_2(x, y)$  ein, so geht die p. D. 1. Ordnung  $L[u] = f$  in die *kanonische Form einer hyperbol. p. D. 2. Ordnung*  $\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{b}_1 \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{b}_2 \bar{u}_{\bar{y}} = \bar{f}$

$$(34) \quad \frac{dy}{dx} = l_1(x, y) = \frac{1}{a_{11}} (a_{12} + \sqrt{-D})$$

$$(35) \quad \frac{dy}{dx} = l_2(x, y) = \frac{1}{a_{11}} (a_{12} - \sqrt{-D})$$

Scharen von charakterist. Linien der p. D. 2. Ordnung  $L[u] = f$ . Führt man die neuen unabhängigen Veränderlichen  $\bar{x} = h_1(x, y)$ ,  $\bar{y} = h_2(x, y)$  ein, so geht die p. D. 1. Ordnung  $L[u] = f$  in die *kanonische Form einer hyperbol. p. D. 2. Ordnung*  $\bar{u}_{\bar{x}\bar{y}} + \bar{b}_1 \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{b}_2 \bar{u}_{\bar{y}} = \bar{f}$



+  $b_2 \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{c}u = \bar{f}$  über. Die *Variablentransformation*  $\bar{x} = \bar{y} + x, \bar{y} = \bar{y} - x$  erzeugt die äquivalente kanonische Form  $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{b}_1 \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{b}_2 \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{c}\bar{u} = \bar{f}$ . Für  $D = 0$  gibt es nur eine Schar von charakterist.

Linien, die aus  $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$  durch ein allgemeines

Integral  $h(x, y) = c$  bestimmt wird. Durch die Variablentransformation  $\bar{x} = h(x, y), \bar{y} = x$  geht die p. D. 2. Ordnung  $L[u] = f$  über in die *kanonische Form einer parabol. Differentialgleichung*

$$\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{b}_1 \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{b}_2 \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{c}\bar{u} = \bar{f}.$$

Für  $D > 0$  sind  $l_1$  und  $l_2$  aus (34), (35) konjugiert komplex. Die Variablentransformation  $\bar{x} = 1/2 (h_1(x, y) + h_2(x, y)), \bar{y} = 1/(2i) (h_1(x, y) - h_2(x, y))$ , in der  $h_1(x, y) = c_1$  und  $h_2(x, y) = c_2$  die allgemeinen Integrale der gewöhnl. Differentialgleichungen  $\frac{dy}{dx} = l_1(x, y)$  und  $\frac{dy}{dx} = l_2(x, y)$

sind, führt die ellipt. Differentialgleichung  $L[u] = f$  über in die *kanonische Form einer ellipt. Differentialgleichung*  $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} + \bar{b}_1 \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{b}_2 \bar{u}_{\bar{y}} + \bar{c}\bar{u} = \bar{f}$ . In diesem Fall existieren keine reellen charakterist. Linien.

Die p. D. 2. Ordnung  $y u_{xx} + u_{yy} = 0$  ist z. B. in  $G = \{(x, y) | x^2 + (y - 4)^2 = 9\}$  elliptisch, denn in  $G$  gilt  $D = y > 0$ . Aus (36a) bzw. (36b) folgen

$$(36a) \quad \frac{dy}{dx} = l_1(x, y) = iy^{-1/2}$$

$$(36b) \quad \frac{dy}{dx} = l_2(x, y) = -iy^{-1/2}$$

$h_1(x, y) = y^{3/2} - 3ix/2 = c_1$  und  $h_2(x, y) = y^{3/2} + 3ix/2 = c_2$ . Die Variablentransformation  $\bar{x} = 1/2 (h_1 + h_2) = y^{3/2}, \bar{y} = [1/(2i)] (h_1 - h_2) = -3x/2$  liefert die Normalform für die in  $G$  ellipt. Differentialgleichung als  $\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} + \frac{1}{3\bar{x}} \bar{u}_{\bar{x}} = 0$ .

Die Einteilung der linearen p. D. 2. Ordnung mit  $n$  unabhängigen Veränderlichen kann für  $n > 2$  ähnlich wie im Falle  $n = 2$  vorgenommen werden. Nur ist es für  $n > 2$  nicht möglich, kanon. Formen anzugeben. Für eine lineare p. D. 2. Ordnung (31) mit konstanten Koeffizienten  $a_{ij}, b_i, c$  untersucht man zur Typeneinteilung die quadrat. Form (37),

$$(37) \quad Q(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q_i q_j$$

die mittels einer linearen Transformation  $q_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \bar{q}_j$  auf die Gestalt  $Q(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n) = \bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 + \dots + \bar{q}_r^2 - \bar{q}_{r+1}^2 - \dots - \bar{q}_m^2$  mit  $m \leq n$  gebracht werden kann. Die Differentialgleichung  $L[u] = f$  ist nun von *ellipt. Typ*, wenn  $m = n$  und  $r = 0$  oder  $m = n$  und  $r = n$  ist, vom *hyperbol. Typ*, wenn  $m = n$  und  $1 \leq r \leq n - 1$  ist, und vom *parabol. Typ*, wenn  $m < n$  ist. Bei der Variablentransformation  $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$  geht die Differentialgleichung  $L[u] = f$  dann über in (38). Setzt man (39)

für  $n = m$ , so ergibt sich die p. D. 2. Ordnung (40).

$$(38) \quad \sum_{i=1}^r \bar{u}_{\bar{x}_i \bar{x}_i} - \sum_{i=r+1}^m \bar{u}_{\bar{x}_i \bar{x}_i} + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \bar{u}_{\bar{x}_i} + \bar{c}\bar{u} = \bar{f}$$

$$(39) \quad \bar{u} = v \exp \left( -1/2 \sum_{i=1}^r \bar{b}_i \bar{x}_i + 1/2 \sum_{i=r+1}^n \bar{b}_i \bar{x}_i \right)$$

$$(40) \quad \sum_{i=1}^r v_{\bar{x}_i \bar{x}_i} - \sum_{i=r+1}^n v_{\bar{x}_i \bar{x}_i} + \bar{c}v = \bar{f}$$

Eine Fläche  $w(x_1, \dots, x_n) = 0$  heißt *charakterist. Fläche* bzgl.  $L[u] = f$ , wenn für die Funktion  $w$  die *charakterist. Differentialgleichung*  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} = 0$  erfüllt ist. Ellipt. Differentialgleichungen haben keine reellen charakterist. Flächen.

Zu der p. D. 2. Ordnung (41) z. B. gehört die qua-

$$(41) \quad 2u_{x_1 x_1} + 4u_{x_1 x_2} + 4u_{x_2 x_2} + 2u_{x_1 x_3} + u_{x_1} - 2u_{x_2} + 4u = 0$$

drat. Form  $Q(q_1, q_2, q_3) = 2q_1^2 + 4q_1 q_2 + 4q_2^2 + 2q_1 q_3$ , die durch die lineare Transformation  $q_1 = \bar{q}_1 + \bar{q}_3, q_2 = -1/2 \bar{q}_1 + 1/2 \bar{q}_2 - 1/2 \bar{q}_3, q_3 = -\bar{q}_3$  in  $Q(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3) = \bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2 - \bar{q}_3^2$  übergeht. Diese Differentialgleichung ist deshalb vom hyperbol. Typ. Mittels der Variablentransformation  $\bar{x}_1 = x_1 - 1/2 x_2, \bar{x}_2 = 1/2 x_2, \bar{x}_3 = x_1 - 1/2 x_2 - x_3$  geht die gegebene p. D. 2. Ordnung über in (42) für

$$(42) \quad \bar{u}_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + \bar{u}_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} - \bar{u}_{\bar{x}_3 \bar{x}_3} + 2\bar{u}_{\bar{x}_1} - \bar{u}_{\bar{x}_2} + 2\bar{u}_{\bar{x}_3} + 4\bar{u} = 0$$

$\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ . Setzt man

$\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = v(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \exp(1/2 (-2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3))$ , so ergibt sich für  $v(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  die Differentialgleichung  $v_{\bar{x}_1 \bar{x}_1} + v_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} - v_{\bar{x}_3 \bar{x}_3} + 15v/4 = 0$ . Die Ebenen  $w(x_1, x_2, x_3) = (a + c)x_1 + 1/2 (b - a - c)x_2 - cx_3 = 0$  sind für beliebige Konstanten  $a, b, c$  mit  $a^2 + b^2 - c^2 = 0$  charakterist. Flächen der vorgegebenen Differentialgleichung, denn  $v$  erfüllt die charakterist. Differentialgleichung (43).

$$(43) \quad 2w_{x_1}^2 + 4w_{x_1} w_{x_2} + 4w_{x_2}^2 + 2w_{x_1} w_{x_3} = 0$$

Zur Lösung eines physikal. Problems, das auf eine p. D. 2. Ordnung führt, wird i. allg. eine Funktion gesucht, die der p. D. 2. Ordnung genügt und zusätzlich *Randbedingungen* ( $\nearrow$  Randwertproblem) bzw. *Anfangsbedingungen* ( $\nearrow$  Anfangswertproblem) erfüllt. Welcher Art diese zusätzl. Bedingungen für die einzelnen Typen von p. D. 2. Ordnung sein können, wird in den Artikeln über ellipt., hyperbol. Differentialgleichung bzw. parabol. Differentialgleichung erörtert. Ein für eine p. D. 2. Ordnung gestelltes Problem heißt *korrekt gestelltes Problem*, wenn die Lösung des Problems existiert, wenn die Lösung eindeutig bestimmt ist und wenn die Lösung stetig von den Anfangs- bzw. Randwerten abhängt.

**partielle Integration**  $\nearrow$  Integral IV.2.,  $\nearrow$  Integral, uneigentliches, V.3.

**partielles Radizieren**  $\nearrow$  Wurzel II.

**partikuläre Lösung**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung I.

**Partikularisator** ↗ Prädikatenlogik I.

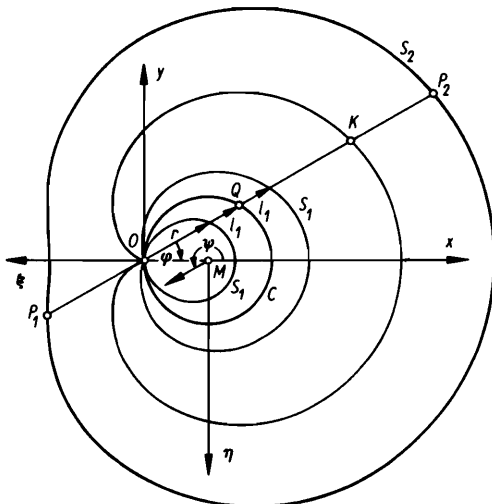
**Partikularisierung**, hintere, vordere ↗ Prädikatenkalkül IV.

**Partition** ↗ Zahlentheorie III.4.

**Pascal**, Blaise, geb. 19. 6. 1623 Clermont-Ferrand, gest. 19. 8. 1662 Paris. — Sein Vater Étienne P. war Verwaltungsbeamter und mathematisch gut gebildet; nach ihm ist die P.sche Schnecke ben., und er korrespondierte z. B. mit dem Mathematiker MÉRSENNE. Blaise wurde zunächst vom Vater unterrichtet und bildete sich später autodidaktisch weiter. Mit 16 Jahren entdeckte er bereits den P.schen Satz über das einem Kegelschnitt umbeschriebene Sechseck, 1641 konstruierte er die erste bekannte Rechenmaschine. Nach seinem Anschluß 1646 an die Jansenisten wurde sein Leben zunehmend von einem fanat. religiösen Glauben bestimmt; 1655 ging er nach Port-Royal und beschäftigte sich bis auf eine Abhandlung über Zykloiden nicht mehr mit Mathematik. P. gilt zusammen mit FERMAT als Begründer der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Obwohl beide zu diesen Problemen miteinander korrespondierten, fanden sie ihre Lösungen unabhängig voneinander. Das *P.sche Dreieck* war schon früher bekannt, wurde jedoch von P. sehr geschickt in den Untersuchungen über Binomialkoeffizienten angewendet. P. beschäftigte sich auch mit der Integrationstheorie und erzielte in der Hydrostatik und in Fortführung der Versuche von TORRICELLI wesentl. Ergebnisse. In seinen philosoph. Schriften schwankte er in seiner religiösen Befangenheit zwischen Rationalismus und Skeptizismus.

**Pascal, Satz von** ↗ Dualität I.

**Pascalsche Schnecke**: ebene algebraische Kurve 4. Ordnung, die als Konchoide eines Kreises  $C$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $|MO| = a$  entsteht, wenn jeder Radiusvektor  $OQ$  von einem festen



Pascalsche Schnecke als Konchoide mit  $|OM| = a$  als Radius des Kreises  $C$ ; für  $l_1 < 2a$  hat die P.S.  $S_1$  in  $O$  einen Doppelpunkt, für  $l > 2a$  ist  $O$  ein isolierter Punkt, z. B. für  $S_2$

Punkte  $O$  auf  $C$  nach einem zweiten Punkte  $Q$  auf  $C$  um eine feste Strecke der Länge  $l$  verlängert oder verkürzt wird (Abb.). Schließt  $OQ$  gegen  $OM$  als Nullrichtung einen Winkel der Größe  $\varphi$  ein, so wird wegen  $|OQ| = 2a \cos \varphi$  die P. S. durch (1) in Polarkoordinaten beschrieben. In einem kartes. Koordi-

$$(1) \quad r = 2a \cos \varphi \pm l$$

natensystem, für das  $O$  der Ursprung und die Tangente an  $C$  in  $O$  die  $y$ -Achse sind, erhält man die Parameterdarstellung (2) bzw. die algebraische Gleichung (3). Für  $l < 2a$  hat die P. S. in  $O$  einen

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= 2a \cos^3 \varphi \pm l \cos \varphi, \\ y &= 2a \cos \varphi \sin \varphi \pm l \sin \varphi \end{aligned}$$

$$(3) \quad (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = l^2(x^2 + y^2)$$

**Doppelpunkt**; für  $l > 2a$  gehört  $O$  nach Definition nicht zur Kurve, kann aber als Nullstelle der algebraischen Gleichung als *isolierter Punkt* der Kurve aufgefaßt werden. In der Abbildung gilt z. B.  $|QP_1| = |QP_2| = l > 2a$ . Im Falle  $2a < l < 4a$  hat die Kurve zwei Wendepunkte. Für  $l = 2a$  ergibt sich als Spezialfall die *Kardioide* (↗ Zykloide) mit der Parameterdarstellung (4).

$$(4) \quad \begin{aligned} \xi &= 2a \cos \psi - b \cos 2\psi, \\ \eta &= 2a \sin \psi - b \sin 2\psi. \end{aligned}$$

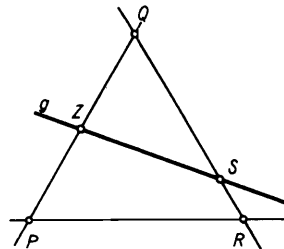
Die Darstellungen (2) und (4) hängen zusammen durch  $x = -\xi + b$ ,  $y = -\eta$ ,  $\psi = \pi + \varphi$ ,  $a = b$  und  $l = 2a$ . — S. a. Konchoide III.

**Pascalsches Dreieck** ↗ Binomialkoeffizient.

**Pasch**, Moritz, geb. 8. 11. 1843 Breslau (Wroclaw), gest. 29. 9. 1930 Homburg v. d. H. — P. studierte in seiner Heimatstadt und in Berlin. Seit 1870 war er in Gießen tätig, von 1873 bis 1911 als Professor. Seine Arbeiten haben große Bedeutung für die neuere axiomat. Methode, insbes. in der Geometrie, gewonnen. Sein Hauptwerk sind die *»Vorlesungen über neuere Geometrie«* (1882). Ein weiteres wichtiges Arbeitsgebiet von P. war die algebraische Geometrie.

**Pasch, Axiom von**: Liegen Punkte  $P, Q, R$  nicht auf einer gemeinsamen Geraden und schneidet eine Gerade  $g$  die Gerade  $PQ$  in einem Punkte  $Z$  zwischen  $P$  und  $Q$ , so liegt  $R$  auf  $g$  oder  $g$  verläuft durch einen Punkt  $S$ , der zwischen  $P$  und  $R$  oder zwischen  $Q$  und  $R$  liegt (Abb.).

**Pausenzeit** svw. Zwischenankunftszeit, ↗ Bedienungstheorie.

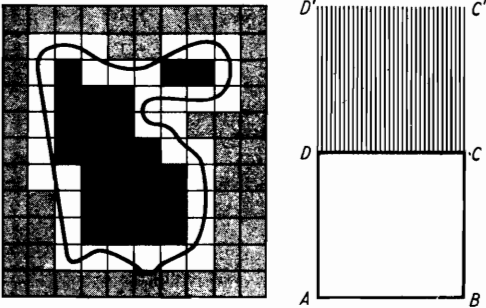


Zum Axiom von Pasch

**PDM** svw. Pulsdauermodulation,  $\nearrow$  Modulation II.  
**Peano**, Guisepe, geb. 27. 8. 1858 Cuneo, gest. 20. 4. 1932 Turin. — P. studierte in Turin, promovierte 1880 dort und war später dort als Professor für Infinitesimalrechnung tätig. Er lieferte bedeutende Beiträge zur *mathemat. Logik* und zu den *Grundlagen der Mathematik*, z. B. durch das P.sche Axiomensystem. Er schuf die Begriffe P.sche Kurve, P.sche Menge i. e. S. (1890) und arbeitete über die Theorie der Differentialgleichungen.

**Peano-Jordanscher Inhalt**, *Riemannscher Inhalt*: I. Erweiterung des elementargeometr. Flächeninhalts bzw. des Volumens zu einem Inhalt ( $\nearrow$  Maß III.) von Punkt Mengen im  $n$ -dimensionalen euklid. Raum  $E^n$ , um z. B. im Falle  $n = 2$  auch krummlinig begrenzten ebenen Figuren einen Flächeninhalt z. ordnen zu können.

II. Für den Fall  $n = 2$  der Ebene  $E^2$  möge der Mengenkörper  $K_0$  ( $\nearrow$  Mengenfunktion) aus allen Rechtecken bestehen, deren Seiten parallel zu den Achsen eines kartes. Koordinatensystems sind, sowie aus sämtl. endl. Vereinigungen solcher Rechtecke, die höchstens gemeinsame Randpunkte haben dürfen. Die Elemente von  $K_0$  heißen *Intervallbereiche*. Auf  $K_0$  ist der *elementare Inhalt*  $m_0$  durch die übliche elementargeometr. Flächenmessung er-



Zum Peano-Jordanschen Inhalt, linke Figur mit, rechte ohne Inhalt

klärt (Abb.). Für eine beliebige beschränkte Punktmenge, eine »Figur«  $A$ , definiert man ihren *äußeren Inhalt*  $m_0^*(A)$  als untere Grenze der elementaren Inhalte  $m_0(Q)$  derjenigen Intervallbereiche  $Q \in K_0$ , die  $A$  umfassen, für die gilt  $A \subseteq Q$ .  $A$  heißt nun *Jordan- oder Riemann-messbar* oder *-quadrierbar*, wenn es zu jeder reellen Zahl  $\varepsilon > 0$  einen  $A$  umfassenden Intervallbereich  $Q$  mit  $m_0^*(Q \setminus A) < \varepsilon$  gibt: der Überschub  $Q \setminus A$  muß sich durch einen Intervallbereich  $Q'$  mit  $m_0(Q') < \varepsilon$  überdecken lassen. Als P.-J. I. von  $A$  wird dann  $m(A) = m_0^*(A)$  definiert. Das System  $K$  der quadrierbaren Mengen enthält  $K_0$ , und für die Intervallbereiche  $Q \in K_0$  ist  $m(Q) = m_0(Q)$ , d. h.,  $m$  ist eine Fortsetzung oder Erweiterung von  $m_0$ .  $K$  ist wieder ein Mengenkörper, so daß mit zwei quadrierbaren Mengen auch ihre Vereinigung, ihr Durchschnitt und ihre Differenz quadrierbar sind. Das Maß  $m$  hat gegenüber  $m_0$  noch die zusätzl. Eigenschaft, in folgendem Sinne

*vollständig* zu sein: Läßt sich eine ebene Punktmenge  $M$  bei beliebig vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  so zwischen zwei quadrierbare Mengen  $A, B$  einschließen, in Zeichen  $A \subseteq M \subseteq B$ , daß der inhaltmäßige Unterschied  $m(B \setminus A) < \varepsilon$  ist, so muß  $M$  selbst quadrierbar sein. Quadrierbare ebene Mengen  $B$  lassen sich auch in der folgenden Weise charakterisieren: Man legt über die Ebene ein quadrat. Raster und bildet zu  $B$  ein inneres und ein äußeres Näherungsgebiet  $B_i$  bzw.  $B_a$ , indem man alle Rasterquadrate vereinigt, die vollständig in  $B$  enthalten sind bzw. mindestens einen Punkt von  $B$  enthalten. Offenbar ist  $B_i \subseteq B_a$ , und bei Verfeinerung des Rasters, z. B. durch Halbieren der Seiten, nehmen der elementare Inhalt von  $B_i$  zu und der von  $B_a$  ab. Genau dann, wenn die obere Grenze der  $m_0(B_i)$  der *inneren Inhalte* mit der unteren Grenze der  $m_0(B_a)$  der *äußeren Inhalte* übereinstimmt, ist  $B$  quadrierbar und der gemeinsame Wert der Inhalt  $m(B)$ .

III. Der Zusammenhang mit der *Integration* ergibt sich durch die charakterist. Funktion  $\chi(x)$ , die bzgl. der beschränkten Teilmenge  $B \subseteq E$  definiert ist durch  $\chi(x) = 1$  für  $x \in B$  und  $\chi(x) = 0$  für  $x \in E \setminus B$ . Man erhält, daß die beschränkte Punktmenge  $B$  genau dann quadrierbar ist, wenn ihre charakterist. Funktion  $\chi$  im Riemannschen Sinn über der Ebene integrierbar ist;  $m(B) = \int_E \chi(x) dx$  gilt in diesem Falle.

**Peanoscher Existenzsatz**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**Peanosches Axiomensystem**: von Guisepe PEANO 1891 aufgestellte fünf Axiome, aus denen sich die Eigenschaften der natürl. Zahlen ableiten lassen:

1. 0 ist eine natürl. Zahl.
2. Jede natürl. Zahl  $n$  hat einen bestimmten Nachfolger  $n'$ .
3. Aus  $n' = m'$  folgt  $n = m$ .
4. 0 ist nie Nachfolger.
5. Jede Menge natürl. Zahlen, die 0 und mit jedem  $n$  auch dessen Nachfolger  $n'$  enthält, umfaßt alle natürl. Zahlen.

Das 5. Axiom wird auch *Axiom der vollständigen Induktion* genannt, weil es die Grundlage eines wichtigen Schlußverfahrens ist, nach dem eine Behauptung  $H(n)$  über natürl. Zahlen auf alle natürl. Zahlen zutrifft, falls als *Induktionsanfang*  $H(n)$  für  $n = 0$  wahr ist, falls weiter aus der *Induktionsvoraussetzung*,  $H(n)$  gelte für  $n$ , im *Induktionsschluß* hergeleitet werden kann, daß  $H(n + 1)$  wahr ist. Ist z. B.  $H(n)$  die Behauptung  $0 + 1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ , so ergibt  $H(n)$  für  $n = 0$  die wahre Aussage  $0 = 0 \cdot 1 = 0$ . Aus  $H(n)$  folgt aber durch Rechnung  $0 + 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + n + 1 = (n + 1)(n + 2)/2$ , d. h. die Wahrheit der Aussage  $H(n + 1)$ . Nach dem 5. Axiom gilt die Behauptung für alle natürl. Zahlen. Der Induktionsschluß wird auch als *Schluß von  $n$  auf  $n + 1$*  bezeichnet. S. a. Moivre'sche Formel II.1.  
**Peirce**, Charles Sanders, geb. 10. 9. 1839 Cambridge (Mass.), gest. 19. 4. 1914 bei Milford (Pennsylv.) — P. studierte in Cambridge und war später Pro-

fessor für Mathematik und Logik in Baltimore, Cambridge und Boston. Seine mathemat. Arbeiten betreffen *Algebra der Logik und Grundlagen der Mathematik*. P. ist der Begründer des amerikan. Pragmatismus (um 1878).

**Pelekoide** ↗ Quadratur des Kreises II.

**Pellsche Gleichung** ↗ Zahlkörper IV.

**Penalty-Funktion, Methode der** [penalty, engl., Strafe]: Zurückführen einer konvexen Optimierungsaufgabe mit Zielfunktion  $F(x)$  und zulässigem Bereich  $B$  auf freie Optimierung einer Funktion  $P_r(x)$ . Diese Funktion entsteht aus  $F(x)$  durch Addition einer geeigneten Funktion  $p_r(x)$ , die in  $B$  den Wert Null hat und außerhalb  $B$  für großes  $r$  stark anwächst. Die Funktion  $p_r(x)$  heißt P.-F.

**Pendelebenenverfahren** ↗ Durchdringung.

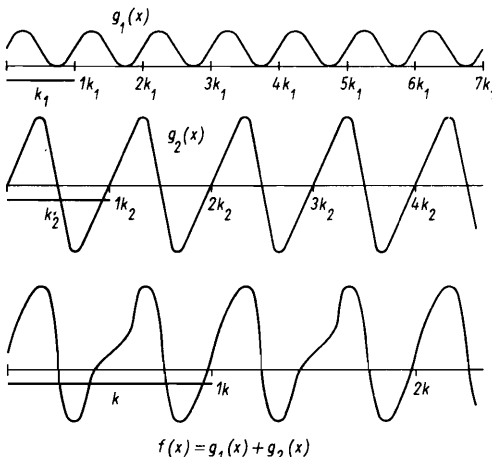
**Pentagondodekaeder** ↗ regelmäßige Polyeder I.

**Pentagramm** ↗ Zehneck II.

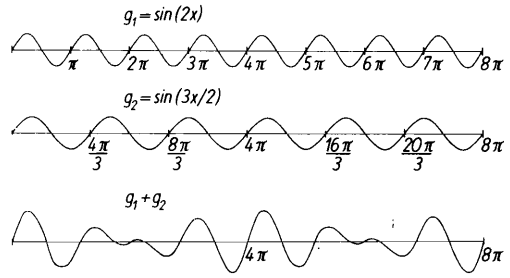
**Periode** ↗ Winkelfunktion II., III., VIII., s. a. elliptische Funktion; Logarithmus III.; periodische Funktion.

**Periodenparallelogramm** ↗ elliptische Funktion.

**periodische Funktion:** Funktion  $y = f(x)$  mit der Eigenschaft  $f(x) = f(x + a)$  für eine feste positive Zahl  $a \neq 0$  und alle  $x$  aus dem Definitionsbereich von  $f$ . Die Zahl  $a$  heißt eine *Periode der Funktion*  $f$ . Gehört mit  $x$  auch  $x + na$  für eine ganze Zahl  $n$  dem Definitionsbereich von  $f$  an, so gilt die Gleichung  $f(x) = f(x + na)$ . Unter der *primitiven Periode* einer p. F.  $f$  versteht man die *kleinste* Zahl  $k > 0$ , mit der  $f(x) = f(x + k)$  für alle  $x \in D(f)$  gilt. Die graph. Darstellung einer p. F., die die Periode  $a$  hat und für alle reellen Zahlen  $x$  definiert ist, geht bei einer Verschiebung um  $n \cdot a$  Einheiten mit  $n \in \mathbf{Z}$  in Richtung der Abszissenachse in sich über. Ist die Funktion  $f$  Summe zweier p. F.en  $g_1$  und  $g_2$  mit den primitiven Perioden  $k_1$  und  $k_2$ , so ist  $f$  eine p. F., falls zwei ganze Zahlen  $n$  und  $m$  existieren, so daß  $n \cdot k_1 = m \cdot k_2$  gilt (Abb. 1); die primitive Periode



periodische Funktion. Abb. 1: Die Summenfunktion  $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$  hat die primitive Periode  $k = 3k_1 = 2k_2$ , wenn  $k_1$  bzw.  $k_2$  die primitiven Perioden von  $g_1(x)$  bzw. von  $g_2(x)$  sind



periodische Funktion. Abb. 2: Kurven der Funktionen  $g_1 = \sin 2x$ ,  $g_2 = \sin(3x/2)$  und  $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$  mit den Perioden  $k_1 = \pi$ ,  $k_2 = 4\pi/3$  und  $k = 4\pi$

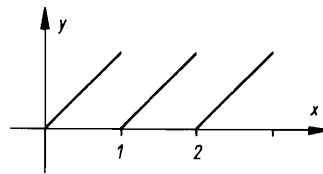


Abb. 3: Kurve der periodischen Funktion  $f(x) = x - [x]$

von  $f$  ist dann  $k = n \cdot k_1 = m \cdot k_2$ , wenn  $n$  und  $m$  teilerfremd sind.

**Beispiel 1:** Die Winkelfunktionen sind periodisch, die Sinus- und Kosinusfunktion haben die primitive Periode  $2\pi$ , die Tangens- und Kotangensfunktion die primitive Periode  $\pi$ .

**Beispiel 2:** Die primitiven Perioden der Funktionen  $g_1$  und  $g_2$  mit  $g_1(x) = \sin 2x$  und  $g_2(x) = \sin(3x/2)$  sind  $k_1 = \pi$  und  $k_2 = 4\pi/3$ . Die primitive Periode der Funktion  $f$  mit  $f(x) = g_1(x) + g_2(x) = \sin 2x + \sin(3x/2)$  beträgt  $k = 4\pi$  (Abb. 2).

**Beispiel 3:** Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x - [x]$  hat die primitive Periode 1 (Abb. 3). Dabei bedeutet  $[x]$  die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als  $x$ .

Zur Untersuchung period. Vorgänge in Naturwissenschaft und Technik werden p. F.en durch Reihen trigonometr. Funktionen (↗ Fourierreihen)

der Form  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  dargestellt. **Doppelperiodische Funktionen** sind die elliptischen Funktionen. — S. a. Winkelfunktion II.

**periodischer Dezimalbruch** ↗ Brüche II.3.

**Peripherie: I. Rechentechnik** Gesamtheit der nicht zum eigentl. Rechner gehörenden Geräte einer Rechenanlage (↗ digitale Rechenanlage I., ↗ Prozeßrechenanlage, ↗ Rechner). Zur P. zählen z. B. Einrichtungen zur Eingabe und Ausgabe von Informationen und zur externen Speicherung umfangreicher Daten.

**II. Geometrie** auch für Kreisperipherie (↗ Kreis).

**Peripheriewinkel** ↗ Kreis III.

**Permanenzprinzip** ↗ Potenz II., III.

**Permutation: I.** eine eindeutige Abbildung einer endl. Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  auf sich selbst. Daß durch die P.  $p$  von  $\{a_1, \dots, a_n\}$  jedes  $a_i$  für  $i = 1, \dots, n$  abgebildet wird auf  $p(a_i)$ , stellt man durch die

Schreibweise (1) dar, in der unter jedem Element

$$(1) \quad p = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_n) \end{pmatrix}$$

sein Bild bei der P.  $p$  steht. Da es bei der Betrachtung von P.en auf die konkrete Gestalt der Elemente der betrachteten Menge nicht ankommt, kann man sich auf Mengen natürlicher Zahlen beschränken, z. B. ist  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  eine P. von vier Elementen.

Die verschiedenen P.en von  $n$  Zahlen unterscheiden sich, wenn man in der ersten Zeile immer die natürl. Reihenfolge wählt, nur in der zweiten Zeile, und sie sind jeweils durch Angabe der zweiten Zeile eindeutig bestimmt. Die verschiedenen P.en einer Menge können deshalb auch aufgefaßt werden als die verschiedenen *Anordnungen* dieser Menge oder, wenn man den Vorgang im Auge hat, wie man zu diesen verschiedenen Anordnungen kommt, als die verschiedenen mögl. *Vertauschungen* der Elemente der Menge, z. B. sind  $1\ 2\ 3$ ,  $1\ 3\ 2$ ,  $2\ 1\ 3$ ,  $2\ 3\ 1$ ,  $3\ 1\ 2$ ,  $3\ 2\ 1$  die sechs mögl. P.en der Zahlen  $1, 2, 3$ . Hat die Menge  $n$  Elemente, so kann an erster Stelle jedes der  $n$  Elemente stehen. Man bekommt alle P.en von  $n$  Elementen, wenn bei jeder Wahl der ersten Stelle, für die es  $n$  Möglichkeiten gibt, jeweils die übrigen  $n - 1$  Elemente allen mögl. P.en unterworfen werden. Ist  $\pi(n)$  die Anzahl aller möglichen P.en von  $n$  Elementen, so gilt die Rekursionsformel  $\pi(n) = n \cdot \pi(n - 1)$ ; mit  $\pi(1) = 1!$  folgt daraus  $\pi(n) = n!$  (Fakultät). Zum systemat. Aufsuchen aller  $n!$  P.en von  $n$  Elementen dient ihre *lexikograph. Anordnung*. Die Menge  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  wird in ihrer natürl. Anordnung notiert. Eine P.  $p_1$  von  $M$  heißt lexikographisch früher als eine andere  $p_2$ , wenn das erste Bildelement von  $p_1$  in der natürl. Anordnung vor dem ersten Bildelement von  $p_2$  liegt. Bei gleichem ersten Bildelement werden auf dieselbe Weise die zweiten Bildelemente verglichen, bei gleichen ersten und zweiten die dritten usw. Zum Beispiel sind die oben notierten sechs P.en von  $M = \{1, 2, 3\}$  lexikographisch angeordnet.

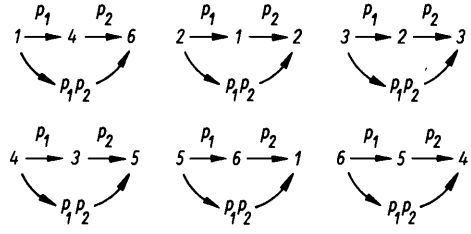
II. In der Menge der P.en von  $n$  Zahlen für beliebigen, aber festes  $n$  läßt sich eine *algebraische Operation* definieren, die als *Multiplikation* geschrieben wird. Sie ist, wie bei Abbildungen üblich, als Hintereinanderausführung der Faktoren definiert. Nach (2) ergibt sich z. B. aus den P.en  $p_1$  und  $p_2$  das Produkt  $p_1 p_2$ , indem  $1$  durch  $p_1$  in  $4, 4$  aber durch  $p_2$  in  $6$  übergeht, d. h., im Produkt  $p_1 p_2$  geht  $1$  in  $6$  über. Die Zuordnung für die übrigen Spalten des Produkts zeigt die Abb. 1. Diese Multiplikation ist nicht kom-

$$(2) \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2 p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mutativ, nach (2) z. B. ist  $p_1 p_2 \neq p_2 p_1$ , sie hat ein Einselement, die *ident. P.e*  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ .

Die P.en von  $n$  Elementen bilden bzgl. der Multiplikation eine *Gruppe*, die *P.sgruppe*.



Permutation. Abb. 1: Beispiele für die Abbildung der Elemente

im Produkt  $p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  aus

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

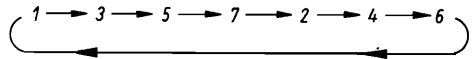


Abb. 2: Die Permutation  $p_3$  und der ihr zugeordnete Zyklus

III. Eine P. heißt *zyklisch* oder ein *Zyklus*, wenn die durch sie vermittelte Zuordnung in der Art eines geschlossenen Kreislaufs darstellbar ist. In Abb. 2 z. B. lassen sich die Elemente der P.  $p_3$  nach ihrer Zuordnung zu dem angegebenen Zyklus vereinigen. Für diesen Zyklus, und entsprechend allgemein, führt man die Schreibweise  $p = (1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6)$  ein. Es gilt der Satz, daß sich jede P. als *Produkt elementarerender Zyklen* darstellen läßt. Man findet diese Zykeldarstellung wie folgt: In (3) bzw. in (4) sucht man z. B. zu  $1$  das Bild  $p_4(1) = 2$  bzw.  $p_5(1) = 2$ , dann das Bild von  $p_4(2)$  bzw. von  $p_5(2)$  usw., bis man wieder zu  $1$  kommt; man erhält in (3) den Zyklus  $(1\ 2)$  und in (4) den Zyklus  $(1\ 2\ 4\ 10\ 3)$ . Mit

$$(3) \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)(4\ 5\ 6)$$

$$(4) \quad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 7 & 6 & 5 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 10\ 3)(5\ 7)(8\ 9)$$

einer der im ersten Zyklus nicht enthaltenen Zahlen aus der ersten Zeile von  $p_4$  bzw.  $p_5$  beginnt der zweite Zyklus. Stimmen bei Beginn eines Zyklus die Elemente von  $p_4$  bzw.  $p_5$ , die übereinander stehen, überein, so entsteht ein einelementiger Zyklus, z. B. (3) von  $p_4$ , der nicht geschrieben wird. Nach endlich vielen Zyklen bricht diese Zyklenbildung ab.

IV. Ist  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$  eine P., so sagt man, die Spalten  $\begin{matrix} i & j \\ p(i) & p(j) \end{matrix}$  stehen in *Inversion*, wenn  $i < j$ , aber  $p(i) > p(j)$  ist. In (5) z. B. sind aus  $p_5$  drei Spaltenpaare angegeben, die je eine Inversion

bilden; man sagt,  $p_6$  hat drei Inversionen. Ist die

$$(5) \quad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{matrix}$$

Anzahl der Inversionen einer P. eine gerade Zahl, so heißt die P. *gerade*, andernfalls ist sie eine *ungerade* P., z. B.  $p_6$ . Es gibt  $n!/2$  gerade und  $n!/2$  ungerade P.en von  $n$  Elementen. Das Produkt zweier P.en ist genau dann ungerade, wenn ein Faktor gerade ist, der andere ungerade. — S. a. Determinante II.

**Permutationsgruppe:** Gruppe, deren Elemente Permutationen sind; als Gruppenoperation wird das Hintereinanderausführen zweier Permutationen als Multiplikation bezeichnet. Hat die Menge, deren Elemente permutiert werden,  $n$  Elemente, so bezeichnet man die volle P. als *symmetr. Gruppe*  $S_n$ . Die *geraden* Permutationen von  $n$  Elementen bilden eine Untergruppe der symmetr. Gruppe  $S_n$ , die *alternierende Gruppe*  $A_n$ , die Normalteiler ( $\nearrow$  Gruppe II.) von  $S_n$  ist. Die alternierende Gruppe ist für  $n \geq 5$  einfach ( $\nearrow$  Gruppe II.). Die Ordnung der symmetr. Gruppe  $S_n$  ist  $n!$ , die der alternierenden Gruppe  $A_n$  ist  $n!/2$ . Ist  $n > k$ , so kann man die P.  $S_k$  als Untergruppe der P.  $S_n$  auffassen, indem man in den Permutationen (1) beliebige  $n - k$  Ziffern

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

festläßt, etwa die letzten  $n - k$ . Die P.n sind deshalb bes. wichtig, weil sich jede endl. Gruppe, unabhängig von der Bedeutung ihrer Elemente, als P. ihrer Elemente darstellen läßt. Jede endl. Gruppe ist somit zu einer Untergruppe einer symmetr. Gruppe isomorph. Die durch (2) gegebene Vierergruppe  $V_4$  z. B. kann man als Untergruppe der  $S_4$

$$(2) \quad V_4 = \{(1), (12) (34), (34), (12)\}$$

auffassen ( $\nearrow$  Permutation, Zykelschreibweise). Als *Grad* einer P. bezeichnet man die Anzahl der wirklich geänderten Ziffern; z. B. haben die Gruppen  $S_4$ ,  $A_4$  und  $V_4$  alle den Grad 4.

**Perspektive**  $\nearrow$  Projektion I.

**Perspektivität** svw. projektive Abbildung.

**PERT** [Programm Evaluation and Review Technique, engl.]: Methode zur Planung des zeitlichen Ablaufs von aus Einzelvorgängen bestehenden Gesamtvorhaben, wenn die Dauer der Einzelvorgänge nicht genau bekannt ist ( $\nearrow$  Netzplantechnik VI.). Bei dieser stochastischen Verallgemeinerung der Netzplantechnik treten an die Stelle der Dauer  $D_{ij}$  für jeden Vorgang drei Zeitschätzungen, eine *optimistische*, eine *wahrscheinlichste* und eine *pessimistische Dauer*. Aus diesen Daten werden die Termine im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt.

**pessimistische Dauer**  $\nearrow$  PERT.

**Petersen**, Julius P. Christian, geb. 16. 6. 1839 Soro (Seeland), gest. 5. 8. 1910 Kopenhagen. — P. promovierte 1871 in Kopenhagen und war seit 1886 an der dortigen Universität als Professor tätig. Er publizierte, außer mehreren Lehrbüchern, zur Gra-

phentheorie und zu geometr. und differentialgeometr. Problemen.

**Petersen**, Satz von  $\nearrow$  Untergraph.

**Petersenscher Graph**  $\nearrow$  Färbung von Graphen.

**Pfeil**  $\nearrow$  Netzplantechnik I.,  $\nearrow$  Strecke III.

**PFM** svw. Pulsfrequenzmodulation,  $\nearrow$  Modulation II.

**Phase**  $\nearrow$  Modulation I.

**Phasenebene**  $\nearrow$  Regelung V.

**Phasenkennlinie**  $\nearrow$  Frequenzgang III.

**Phasenminimumsystem**  $\nearrow$  Frequenzgang III.

**Phasenraum**  $\nearrow$  System II.2.

**Phasenverschiebung**  $\nearrow$  Winkelfunktion VIII.

$\pi$ : *transzendente irrationale Konstante*,  $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 46 \dots$ , die geometrisch als Verhältnis des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser bestimmt ist ( $\nearrow$  Kreis). Für das numer. Rechnen genügen meist Näherungswerte wie  $22/7$ ,  $3,14$  oder  $3,1416$ . ARCHIMEDES (287—212) bestimmte Näherungswerte für  $\pi$  durch Berechnung des Umfangs von  $n$ -Eckslinien, die einem Kreis ein- bzw. umschrieben sind. Für  $n = 96$  gab er an  $3 + 10/71 < \pi < 22/7$ . VIETA (1540—1603) führte dieses Verfahren bis zum  $6 \cdot 2^{16}$ -Eck fort und bestimmte  $\pi$  auf neun Dezimalstellen genau. Er gab auch die erste Darstellung (1) durch ein unendliches Produkt an.

$$(1) \quad \frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Nach LUDOLF VAN CEULEN (1540—1610), der die Bezeichnung  $\pi$  einführte, heißt die Konstante auch *Ludolfsche Zahl*. WALLIS gab 1659 ein unendl. Produkt (2) für  $\pi/2$  an. Andere Mathematiker, dar-

$$(2) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k \cdot 4^{2k} \dots (2k)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2k-1)^2 (2k+1)} \approx \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \dots$$

unter LEIBNIZ, LAGRANGE und NEWTON berechneten  $\pi$  aus Potenzreihen für  $\arctan x$  und  $\arcsin x$  ( $\nearrow$  Näherungsformel V.). Nach Beziehungen von GAUSS und STÖRMER ist  $\pi$  mit Rechenmaschinen auf 100 265 Stellen berechnet worden. 1882 wies LINDEMANN nach, daß  $\pi$  *transzendent* ist. Damit war gezeigt, daß die Quadratur des Kreises unmöglich ist. — S. a. Buffonsches Nadelproblem.

**Picard**, Émile, geb. 24. 7. 1856 und gest. 11. 12. 1941 Paris. — P. war seit 1874 Schüler der École Normale supérieure in Paris. Dort war er seit 1877 tätig, seit 1879 in Toulouse und später wieder in Paris als Professor für Analysis an verschiedenen Hochschulen. — Die Hauptergebnisse der Arbeiten von P. betreffen die Wertverteilungslehre der analyt. Funktionen und Differentialgleichungen.

**Piko**  $\nearrow$  Strecke V.

**Pivot** [lat., franz., engl.: Drähpunkt], *Pivotelement*: aus der Koeffizientenmatrix  $(a_{ij})$  eines linearen Gleichungssystems mit der Absicht ausgewähltes

Element  $a_{i,j} \neq 0$ , die Gleichung  $i^*$  des Systems nach der bei  $a_{i,j}$  stehenden Variablen aufzulösen und damit diese Variable in allen anderen Gleichungen zu eliminieren; die Zeile  $i^*$  heißt *Pivotzeile*, die Spalte  $j^*$  *Pivotspalte* (↗ lineares Gleichungssystem V., ↗ Simplexalgorithmus II.2.). Die Ermittlung eines geeigneten P.s heißt *Pivotsuche*. Beim Lösen linearer Gleichungssysteme (↗ Gaußscher Algorithmus) kommt es z. B. aus numerischen Gründen auf betragsmäßig große P.s an. Beim Simplexalgorithmus sichert die P.suche das Erreichen einer neuen Ecke mit günstigerem Wert der Zielfunktion. — S. a. Eigenwertberechnung II.

**Pivotelement** svw. Pivot, s. a. lineare Gleichungssysteme I.2., ↗ Simplexalgorithmus II.2.

**Pivotalisierung** ↗ lineare Gleichungssysteme I.2.

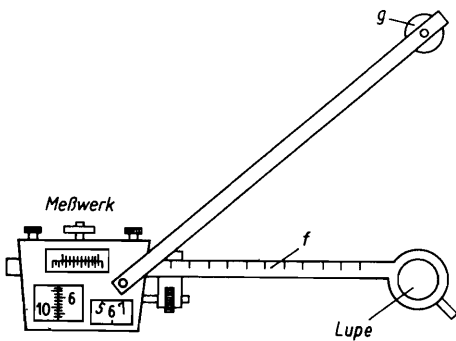
**planar**: Bezeichnung für Punkte bzw. Geraden, die in einer Ebene liegen.

S. a. Graph, ebener.

**Planigraph** ↗ Gelenkmechanismus IV.

**Planimeter**: I. Instrument zur Bestimmung des Inhalts von ebenen Flächenstücken, deren Berandung eine geschlossene Kurve ist. Falls das graph. Bild einer Funktion  $y = f(x)$  für  $a \leq x \leq b$  vorliegt,

kann auf diese Weise auch  $\int_a^b f(x) dx$  ermittelt werden, a. h., ein P. ist ein *Integriergerät*. Zur Ermittlung des Flächeninhalts (Abb. 1) umfährt man mit



Planimeter. Abb. 1: Polarimeter mit Polgewicht  $g$ , Fahrarm  $f$  und Meßwerk, der Fahrstift ist als Lupe ausgebildet

dem Fahrstift, der an einem Ende des Fahrarms  $f$  angebracht ist, einmal die betreffende Fläche längs der Berandungskurve. Das andere Ende des Fahrarms wird dabei zwangsläufig auf einer Leitkurve  $C$  geführt. Zur Erhöhung der Genauigkeit kann der Fahrstift durch eine Lupe mit Kreis- oder Kreuzmarkierung ersetzt werden. Mit  $f$  ist weiter eine Meßrolle  $m$  so verbunden, daß deren Ebene senkrecht zu  $f$  steht. Bei Bewegungen in Richtung des Fahrarms gleitet diese Rolle, bei anderen Bewegungen wird eine Drehung ausgeführt, die durch ein Schneckengetriebe auf eine Zählsscheibe übertragen wird. Auf der Zählsscheibe kann die Anzahl der vollen Meßrollenumdrehungen abgelesen werden,

die Meßrolle trägt eine Einteilung, an der mit Hilfe eines Nonius eine Feinablesung bis auf 1/1 000 einer Umdrehung möglich ist. Die Differenz der Ablesungen am Ende und am Beginn der Umfahrung ergibt nach Multiplikation mit einer Gerätekonstanten den gesuchten Flächeninhalt.

II. Je nach der Gestalt der Leitkurve  $C$  ergeben sich verschiedene Typen von P.n. Beim *Linear-P.* ist  $C$  eine Gerade, die Geradföhrung kann durch einen Spurwagenlenker, einen Schienenlenker oder einen Walzenlenker erreicht werden. Beim Spurwagenlenker ist der Fahrarm gelenkig mit einem in einer Nut laufenden Wagen verbunden, beim Schienenlenker wird der als Zapfen ausgebildete Endpunkt des Fahrarms in einer Schiene geführt. Der Walzenlenker ist ein Wagen, der auf schweren, angerauten Walzen ruht und sich deshalb nur in einer Richtung bewegen kann. Mit diesem Wagen ist der Fahrarm gelenkig verbunden. Der Einsatz von Linear-P.n empfiehlt sich bei langgestreckten Flächenstücken, z. B. bei der Auswertung von Registrierstreifen.

Am weitesten verbreitet sind *Polar-P.*, bei denen die Leitkurve  $C$  ein Kreis ist. Die Kreisführung wird durch den Polararm  $p$  bewirkt, der an einem Ende mit dem Fahrarm und an dem anderen Ende mit einem Polgewicht  $g$  gelenkig verbunden ist (↗ Abb. 1). Durch  $g$  wird das Ende des Polarms im Mittelpunkt des Leitkreises  $C$  festgehalten.

Eine Vergrößerung der Meßgenauigkeit wird erreicht, wenn durch Zusatzvorrichtungen die Anzahl der Meßrollenumdrehungen in einem bestimmten Verhältnis vergrößert wird. Zu diesem Zweck kann man etwa das Polar-P. mit einem Pantographen (↗ Gelenkmechanismus I.) koppeln. Häufiger wird jedoch bei Präzisions-P.n die Anzahl der Rollenumdrehungen dadurch vergrößert, daß man die Meßrolle auf einer bewegten Unterlage abrollen läßt. Beim *Scheibenroll-P.* verwendet man z. B. eine drehbare Scheibe, deren Drehung von der Bewegung des Fahrarms über ein Zahnradgetriebe gesteuert wird.

III. Neben den bisher beschriebenen Geräten, die auch *Grund-P.* gen. werden, sind noch weitere P. gebräuchlich, bei denen die Meßrolle durch zusätzliche Getriebeelemente gesteuert wird. So liefert

das *Funktions-P.* das Integral  $\int_a^b u(f(x)) dx$  mit einer

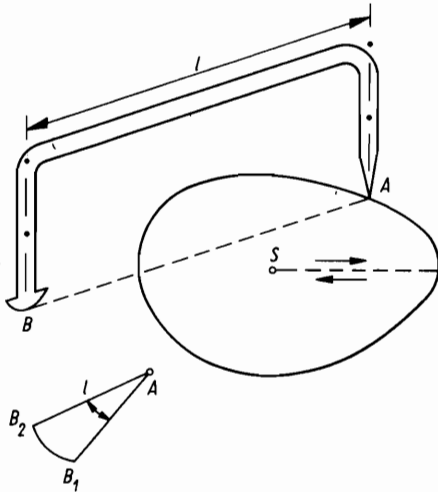
durch die Konstruktion des Gerätes festgelegten Funktion  $u = u(y)$ , wenn das Flächenstück umfahren wird, das von einem Teil der Kurve  $y = f(x)$ , der  $x$ -Achse und den Parallelen zur  $y$ -Achse im Abstand  $a$  bzw.  $b$  begrenzt wird. Insbes. erhält man *Potenz-P.*, wenn  $u(y) = y^n$  ist. *Produkt-P.* dienen

der Bestimmung von  $\int_a^b f(x) g(x) dx$ . Dabei kann die

Funktion  $g(x)$  durch die Konstruktion des Gerätes vorgegeben sein,  $y = f(x)$  wird dann mit dem Fahrstift abgefahren. Dieses Prinzip wird z. B. beim harmon. Analysator von MADER-OTT verwendet. Andere Geräte haben zwei Fahrstifte, mit denen die Kurven  $y = f(x)$  bzw.  $y = g(x)$  gleichzeitig befahren werden. *Radial-P.*, die ebenfalls als Grund- oder Funktions-P. gebaut werden, dienen der Aus-

wertung von Kurven in Polarkoordinaten; da diese Instrumente aber i. allg. keinen Flächeninhalt liefern, gehören sie eigentlich nicht zu den P.n., sondern zu den *Integrimetern*.

IV. Ein sehr einfaches Hilfsmittel zur näherungsweise Bestimmung von Flächeninhalten ist das *Schneiden-* oder *Beil-P.* Es besteht aus einem gebogenen Stab, dessen eines Ende als Spitze *A* und dessen anderes Ende als senkrecht zur Zeichenebene stehende Schneide ausgebildet ist, die das Zeichen-



Planimeter. Abb. 2: Beilplanimeter

blatt in einem Punkt *B* berührt (Abb. 2); behelfsmäßig kann ein aufgeklapptes Taschenmesser verwendet werden. Durch die Schneide wird bewirkt, daß sich das Instrument nur in ihrer Richtung verschieben oder um *B* drehen läßt. Bei der Anwendung umfährt man mit *A* einmal das Flächenstück vollständig auf der Berandungskurve. Es kann gezeigt werden, daß dann der Flächeninhalt näherungsweise gleich  $l \cdot |B_1B_2|$  ist, wenn  $l$  der Abstand der Punkte *A* und *B*,  $B_1$  bzw.  $B_2$  die Anfangs- bzw. Endlage des Berührungspunktes *B* ist, zwischen denen ein Kreissektor liegt, dessen Flächeninhalt vom Bogen zwischen  $B_1$ ,  $B_2$  und angenähert von  $|B_1B_2|$  abhängt.  $B_1$  und  $B_2$  sind durch die Eindruckstellen der Schneide auf dem Zeichenblatt markiert. Die Annäherung wird besser, wenn man zunächst *A* auf den geschätzten Schwerpunkt *S* des Flächenstücks setzt, dann längs eines Geradenstücks zur Randkurve geht und nach der einmaligen Umfahrung der Randkurve auf diesem Geradenstück zu *S* zurückkehrt. Da die Größenordnung des Fehlers im günstigsten Fall etwa bei 1% liegt und bei kleinen Flächenstücken die Ergebnisse noch ungenauer werden, ist dieses Gerät nur für erste Näherungen brauchbar.

**Planimetrie:** Teilgebiet der euklid. Geometrie, in dem ebene geomet. Figuren betrachtet werden, z. B. Geraden,  $n$ -Ecke oder Kegelschnitte. Dabei beschränkt man sich auf Eigenschaften der Figuren, die bei Bewegungen oder bei Ähnlichkeitstransformationen erhalten bleiben. Die Aussagen und Lehr-

sätze werden durch geometr. Betrachtungen und Konstruktionen an den Figuren aus vorangestellten Sätzen durch log. Schlüsse hergeleitet. Man nennt diese Art der Herleitung die *synthet.* im Unterschied zur *analyt.*, bei der geometr. Gebilde durch Gleichungen beschrieben und mit algebraischen Methoden untersucht werden. — S. a. Differentialgeometrie.

**Platon**, geb. 427(?) v. u. Z. Athen, gest. 347(?) v. u. Z. Athen. — P. stammte aus einer der vornehmsten Familien Athens. Er wurde als Zwanzigjähriger Schüler des **SOKRATES**. Als dieser 399 v. u. Z. gezwungen wurde, sich zu vergiften, verließ P. Athen und besuchte u. a. Ägypten und um 390 v. u. Z. Sizilien. In Syrakus dürfte P. seine mathemat. Kenntnisse erworben haben. Etwa 386 v. u. Z. gründete P. seine philosoph. Schule in Athen. Reisen nach Sizilien, um dortige Tyrannen für seine Staatsutopie zu gewinnen, hatten keinen Erfolg. Seit 361 v. u. Z. lehrte P. in Athen Philosophie. — Über die Astronomie schuf P. eine enge Verbindung zwischen Philosophie und Mathematik, stellte schärfere Forderungen an das mathemat. Denken, schloß aber auch die Mechanik und Grenzprozesse aus der Mathematik aus. Mathematik hat P. selbst wohl kaum getrieben. Möglicherweise stammt die Herleitung der Formeln für die rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen von ihm. Der Begriff der platon. Körper geht auf seine Schrift *»Timaios«* zurück, in der er den Grundbestandteilen der Welt die fünf regelmäßigen Polyeder zuordnet. — In seiner Philosophie ist P. der repräsentative Vertreter der Sklavenhalteraristokratie und der Begründer des objektiven Idealismus.

**platonischer Körper** swv. regelmäßiges Polyeder.

**plattenresident** ↗ Betriebssystem I.

**PL/1** ↗ Programmierung des Digitalrechners I.

**PLM** swv. Pulsweitenmodulation, ↗ Modulation II.

**Plotter** ↗ digitale Rechenanlage I.2.

**Plücker, Julius**, geb. 16. 7. 1801 Elberfeld als Sohn eines Kaufmanns, gest. 22. 5. 1868 Bonn. — P. studierte in Bonn, Berlin und Heidelberg Physik und Mathematik und vervollständigte seine Studien in Paris. P. war anschließend an den Universitäten Bonn, Berlin und Halle tätig. Im Jahr 1836 übernahm er eine Professur für Mathematik und Physik in Bonn. — Auf P. geht der Neuaufbau der analyt. Geometrie zurück. Er führte die projektiven Koordinaten ein, in denen neben den Koordinaten eines Punktes z. B. die einer Geraden formal gleichberechtigt auftreten. Ebenfalls auf P. geht die Liniengeometrie und die Theorie der Inversion zurück. Grundlegend wurden seine Experimentaluntersuchungen zur Gasentladung und zum Magnetismus von Kristallen.

**Plückerse Geradengleichung** ↗ Geradengleichung V.

**Plückerse Koordinaten** ↗ Koordinatensystem I., ↗ Geradengleichung V.

**PM** swv. Phasenmodulation, ↗ Modulation I.

**Pohlke, Karl Wilhelm**, geb. 28. 1. 1810 und gest. 27. 11. 1876 Berlin. — Als Landschaftsmaler und



Privatlehrer lebte P. bis 1845 in Paris und lehrte dann an mehreren Berliner Schulen, z. B. an der Bauakademie. Bekannt sind seine Untersuchungen zur Axonometrie.

**Pohlke, Satz von** ↗ Axonometrie.

**Poisson, Siméon Denis**, geb. 21. 6. 1781 Pithiviers, gest. 25. 4. 1840 Paris. — P. war Schüler der École Polytechnique und nach Beendigung seines Studiums dort angestellt, seit 1802 als Professor. P. war Mitglied des Längenbüros und der Académie des Sciences. Seit 1837 war P. Pair von Frankreich. — P. arbeitete auf sehr vielen Gebieten, z. B. über allgemeine Mechanik, Wärmeleitung, über Potentialtheorie, Differentialgleichungen und über Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Poisson, Grenzwertsatz von** ↗ charakteristische Funktion V.

**Poissonsche Differentialgleichung** ↗ elliptische Differentialgleichung I., III.1.

**Poissonscher Strom** ↗ Bedienungstheorie.

**Poissonsches Integral** ↗ elliptische Differentialgleichung I., ↗ parabolische Differentialgleichung II.

**Poisson-Verteilung:** Verteilungsgesetz einer *diskreten Zufallsgröße*, das bes. für die Beschreibung seltener Ereignisse geeignet ist. Eine Zufallsgröße heißt *poissonverteilt* mit dem Parameter  $\lambda$ , wenn sie die abzählbar unendlich vielen mögl. Werte 0, 1, 2, ... mit den Wahrscheinlichkeiten (1) annimmt.

$$(1) P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Der Erwartungswert der P. mit dem Parameter  $\lambda$  ist  $\lambda$ , die Streuung ist  $\sqrt{\lambda}$ . Die P. dient z. B. zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls. Die P. kann als gute Näherung für die Binomialverteilung benutzt werden, wenn  $n$  groß und  $p$  klein ist. Nach dem Grenzwertsatz von Poisson (↗ charakteristische Funktion V.) hat  $\lambda$  dann den Wert  $np$ . Es gibt umfangreiche Tabellen für die Wahrscheinlichkeiten  $p_k$  in Abhängigkeit von  $\lambda$ .

**Pol** ↗ Funktion VI., ↗ Großkreis III., komplexwertige Funktion, elementare, II., ↗ Koordinatensystem IV., V., ↗ Kreistangente II., ↗ Laurentreihe, ↗ Polare I., ↗ Polarität I., ↗ rationale Funktion III., ↗ Stetigkeit, ↗ Trägheitsmoment.

**Polardreieck** ↗ sphärisches Dreieck III., IV.

**Polare:** Großkreis, der senkrecht steht auf der Geraden durch zwei Gegenpunkte auf einer Kugel, die auch *Pole* gen. werden; genauer sagt man P. eines Pols. — S. a. Großkreis III.; Polarität.

**Polarebene** ↗ Kugel VIII.

**Polarecke** ↗ körperliche Ecke II., ↗ sphärisches Dreieck III.

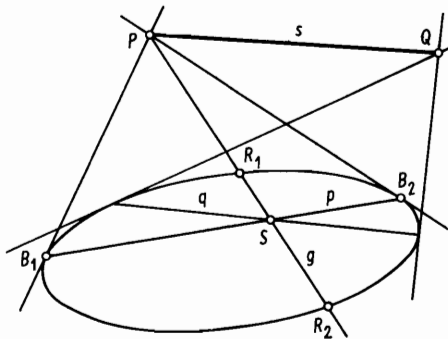
**polare Gesetzmäßigkeiten** ↗ sphärisches Dreieck IV.

**polares Trägheitsmoment** ↗ Trägheitsmoment.

**Polarität, Polarsystem:** Zuordnung zwischen Punkten und Geraden in der projektiven Ebene bzw. zwischen Punkten und Ebenen im projektiven Raum; eine besondere Art der Korrelation (↗ projektive Abbildung). In der Ebene wird dabei jedem Punkt  $P_i$  als Pol eine Gerade  $p_i$  als *Polare*, und der

Geraden  $p_i$  derselbe Punkt  $P_i$  zugeordnet, z. B. beim Kreis (↗ Kreistangente II.). Es gibt P.en, in denen es Pole gibt, die auf ihren Polaren liegen. Solche Elemente werden *selbstkonjugierte Elemente* gen. Sind bei einer Polarität selbstkonjugierte Punkte vorhanden, so bilden diese in der Ebene einen Kegelschnitt, im Raum eine Fläche zweiter Ordnung. Diese Kurve wird auch *Fundamentalkurve*, die Fläche *Fundamentalfäche* der P. gen.

Die Polare eines Punktes  $T$  eines Kegelschnitts ist die Tangente in  $T$  an den Kegelschnitt. Punkt  $T$  ist konjugiert zu jedem Punkte der Tangente. Der Schnittpunkt  $P$  zweier Tangenten zu  $B_1$  und  $B_2$  ist dann konjugiert sowohl zu  $B_1$  als auch zu  $B_2$ . Da einem Punkt aber eine Gerade zugeordnet ist, gehört zum Pol  $P$  die Polare  $p = B_1B_2$ . Zu einem zweiten Punkt  $Q$  gehört als Polare  $q$  die Sehne durch die Berührungspunkte der von  $Q$  an den Kegelschnitt gelegten Tangenten (Abb.). Der Schnittpunkt  $S$



Polarität mit selbstkonjugierten Elementen;  $P$  ist Pol der Sehne  $p = B_1B_2$ ,  $Q$  ist Pol zu  $q$  und  $s$  ist Polare des Schnittpunktes  $S = (p \cap q)$

der Polaren  $p$  und  $q$  ist dann Pol der Geraden  $s = PQ$ . Schneidet eine Gerade  $g$  durch den Pol  $P$  einer Sehne den Kegelschnitt in den Punkten  $R_1$  und  $R_2$  und die Polare  $p$  im Punkte  $S$ , so wird die Strecke  $R_1R_2$  durch den Pol  $P$  und die Polare  $p$  im Schnittpunkt  $S$  harmonisch geteilt, d. h., es gilt  $DV(R_1, R_2; P, S) = -1$  (↗ Doppelverhältnis).

S. a. Ellipse III., VII.; Hyperbel III., VI.; Kegelschnitt IV.; Kreis IV.; Kreistangente; Kurve zweiter Ordnung III.; nichteuklidische Geometrie II.; Parabel III.

**Polarkoordinate** ↗ Koordinatensystem IV., V., ↗ Flächenintegral III.

**Polarpapier** ↗ Nomographie I.

**Polarplanimeter** ↗ Planimeter II.

**Polarsystem** swv. Polarität.

**Politik, optimale** ↗ Optimierung, dynamische II.

**Politikfunktion** swv. Entscheidungsfunktion (↗ Optimierung, dynamische, II.).

**Pol-Nullstellen-Diagramm** ↗ Übertragungsfunktion.

**Polstelle** swv. Pol.

**Pólya, Georg**, geb. 13. 12. 1887 Budapest. — P. studierte an mehreren europäischen Universitäten, promovierte 1912 in Budapest und lehrte seit 1914 an der Techn. Hochschule Zürich, seit 1928 als Professor, 1946/53 als Professor an der Universität in Stanford. Viele seiner Veröffentlichungen sind Problemen der Zahlentheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet, er arbeitete auch über Funktionentheorie.

**Pólya-Verteilung:** Verteilungsgesetz für eine diskrete Zufallsgröße, die *polyverteilt* mit den Parametern  $b, c, n, s$  heißt, wenn  $b, c, n$  und  $N = b + c$  natürliche Zahlen sind und  $s \geq -1$  ganz ist und wenn die diskrete Zufallsgröße die mögl. Werte  $k = 0, 1, \dots, n$  mit den Wahrscheinlichkeiten (1) annimmt. Auf die

$$(1) \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{B_{ks} \cdot C_{ks}}{N(N+s) \dots [N+(n-1)s]}$$

mit  $B_{ks} = b(b+s) \dots [b+(k-1)s]$ ,  
 $C_{ks} = c(c+s) \dots [c+(n-k-1)s]$

P. führt folgendes *Urnenmodell*: Aus einer Urne, die  $b$  schwarze und  $c$  weiße Kugeln enthält, wird eine Kugel zufällig gezogen; ist sie weiß, so legt man sie zusammen mit  $s$  weiteren weißen in die Urne zurück, ist sie schwarz, so wird sie mit  $s$  weiteren schwarzen zurückgelegt. Wird dieser Vorgang  $n$  mal wiederholt, so gibt (1) die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß unter den  $n$  gezogenen Kugeln genau  $k$  mal eine schwarze registriert wurde.  $X$  ist dabei die Zufallsgröße »Anzahl der schwarzen Kugeln bei  $n$  Ziehungen«. Die P. kann bei Erscheinungen, die sich wie Infektionskrankheiten verhalten, angewendet werden, da diese Erscheinungen dadurch charakterisiert werden, daß das Erkrankten einer Person die Wahrscheinlichkeit des Erkrankens anderer Personen erhöht. Die Größe  $s$  ist ein Maß für die Erhöhung dieser Wahrscheinlichkeit. Die P. wird deshalb auch als *Ansteckungsverteilung* bezeichnet. Die P. geht für  $s = 0$  in die *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n$  und  $p = b/N$  über, für  $s = 1$  in die *hypergeometr. Verteilung* mit den Parametern  $M = b, N = b + c$  und  $n$ .

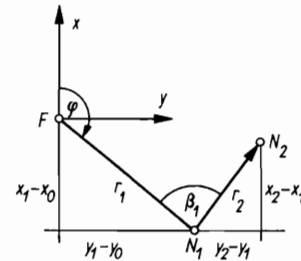
**Polyeder**  $\nearrow$  Körper V.,  $\nearrow$  polyedrischer Bereich.  
**Polyederecke** swv. körperliche Ecke.

**polyedrischer Bereich:** nichtleerer Durchschnitt endlich vieler Halbräume des  $\mathbb{R}^n$ , Erfüllungsmenge eines lösbaren linearen Ungleichungssystems  $a_i^T x \leq b_i, \dots, a_m^T x \leq b_m$  mit gewissen  $a_i, b_i \in \mathbb{R}^n$ . Die Hyperebenen  $a_i^T x = b_i$  sind die Randhyperebenen des p. B.s, der eine konvexe abgeschlossene Menge ist. Ein beschränkter p. B. heißt *Polyeder*. Jedes Polyeder hat endlich viele Ecken  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  und ist nach (1) der konvexen Hülle seiner Ecken gleich.

$$(1) \quad \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)}, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

**Polygon** swv.  $n$ -Eck.

**Polygonzug:** Verfahren der Geodäsie, die Koordinaten eines Neupunktes  $N_1$  aus seinem Abstand  $r_1$  von einem Festpunkt  $F$  und aus der Größe  $\beta$  des *Brechungswinkels* zu berechnen (Abb.). In der Geodäsie wird ein *Linkssystem* verwendet, dessen  $x$ -Achse nach Gitternord ( $\nearrow$  Gauß-Krüger-Projektion II.) und dessen  $y$ -Achse nach Osten zeigt. Der positive Drehsinn ist in ihm der des Uhrzeigers. Die Größe  $\varphi$  des *Richtungswinkels* ( $FN_1$ ) einer Strecke wird in diesem Sinne von der Nordrichtung bis zur Strecke  $FN_1$  gemessen. Hat sie die Länge  $|FN_1| = r_1$ , so erhält man aus den Koordinaten  $x_0, y_0$  von  $F$  die



Zur Koordinatenberechnung im Polygonzug

Koordinaten  $x_1, y_1$  von  $N_1$  mittels der Differenzen  $x_1 - x_0 = r_1 \cos \varphi$  und  $y_1 - y_0 = r_1 \sin \varphi$  zu  $x_1 = x_0 + r_1 \cos \varphi$  und  $y_1 = y_0 + r_1 \sin \varphi$ . In der Abbildung z. B. ist  $x_1 < x_0$  und  $y_1 > y_0$ . Wird in  $N_1$  zwischen  $(N_1 F) = (FN_1) \pm 180^\circ$  und der Richtung  $N_1 N_2$  nach einen weiteren Neupunkt  $N_2$  die Größe  $\beta_1$  des Brechungswinkels beobachtet und der Abstand  $|N_1 N_2| = r_2$  gemessen, so gilt  $(N_1 N_2) = (N_1 F) + \beta_1$  und  $x_2 = x_1 + r_2 \cos(N_1 N_2)$ ,  $y_2 = y_1 + r_2 \sin(N_1 N_2)$ . Nach dem gleichen Verfahren lassen sich weitere Neupunkte anschließen, die mit ihren Abständen  $r_i$  zum P. gehören.

**Polynom Algebra:** I. ein Ausdruck der Form  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , in dem die *Koeffizienten*  $a_i$  einem kommutativen Ring  $R$  mit Einselement angehören, insbes. können sie Zahlen sein. Das Symbol  $x$  heißt *Unbestimmte*,  $n$  ist der *formale Grad* des P.s  $f(x)$ ; falls  $a_n \neq 0$ , heißt  $n$  *Grad*. Jedes P. vom Grad  $n$  kann auch als P. vom formalen Grad  $m \geq n$  aufgefaßt werden, da man Glieder  $a_i x^i$  mit dem Koeffizienten Null beliebig hinzufügen oder weglassen kann. Das P., in dem alle Koeffizienten Null sind, heißt *Null-P.*; ihm wird kein Grad zugeordnet.

Zwei P.e sind gleich, wenn sie genau dieselben Glieder mit von Null verschiedenen Koeffizienten haben. Die *Addition* bzw. *Subtraktion* zweier P.e  $f(x) = \sum a_i x^i$  und  $g(x) = \sum b_i x^i$  vom formalen Grad  $n$  liefert wieder ein P.  $s(x) = \sum c_i x^i$  vom formalen Grad  $n$ , dabei gilt  $c_i = a_i + b_i$  bzw.  $c_i = a_i - b_i$ . Die *Multiplikation* zweier P.e  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  und  $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$  vom formalen Grad  $n$  bzw.  $m$  liefert ebenfalls wieder ein P.  $p(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1}) x^{n+m-1} + \dots + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0 = \sum d_i x^i$  vom formalen Grad  $n + m$ . Allgemein gilt:  $d_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \dots + a_i b_0$ ; für

$j > n$  und  $k > m$  muß dabei  $a_j$  bzw.  $b_k$  Null gesetzt werden. Ist der Ring  $R$  nullteilerfrei, d. h. ein Integritätsbereich, so ist der Grad des Produktes zweier P.e gleich der Summe der Grade der Faktoren. Addition und Multiplikation von P.en sind assoziativ und kommutativ, außerdem gilt das Distributivgesetz. Die P.e in der Unbestimmten  $x$  mit Koeffizienten aus dem Ring  $R$  bilden wieder einen Ring, den *Polynomring*  $R[x]$ . Das Null-P. ist das *Null-element* dieses Ringes. Die P.e  $a_0$  vom formalen Grad Null identifiziert man mit den Elementen des Ringes  $R$ . Das Einselement  $e$  von  $R$  ist auch *Einselement* von  $R[x]$ .

II. Für *Koeffizienten aus einem Integritätsbereich*  $R$  gelten die folgenden Aussagen. Ein P. des Ringes  $R[x]$  ist genau dann *Einheit*, wenn es Einheit im Ring  $R$  ist. Das P.  $g(x)$  ist *Teiler* des P.s  $f(x)$ , wenn es ein P.  $h(x)$  gibt, so daß  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  ist. Man schreibt  $g(x) \mid f(x)$ . Das P.  $f(x)$  heißt *unzerlegbar* oder *irreduzibel*, wenn  $f(x)$  nicht Einheit ist und in jeder Zerlegung  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  einer der Faktoren Einheit ist.

Ob ein P. irreduzibel ist, hängt davon ab, welcher Ring als Koeffizientenbereich zugelassen ist. Das P.  $x^2 - 2$  z. B. ist irreduzibel über den rationalen Zahlen, über den reellen Zahlen aber gibt es die Zerlegung  $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ . Das P.  $x^2 + 1$  ist irreduzibel über den reellen Zahlen, doch zerfällt es über den komplexen Zahlen in  $(x - i)(x + i)$ . Ein P. 1. Grades ist stets irreduzibel.

Ist  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  ein beliebiges P. vom Grad  $n$  und  $g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$  ein P. vom Grad  $m \leq n$  mit dem Höchstkoeffizienten  $b_m = 1$ , so gibt es ein P.  $q(x)$ , so daß die Differenz  $r(x) = f(x) - q(x)g(x)$  entweder das Null-P. ist oder einen kleineren Grad als  $g(x)$  hat. Dazu bildet man  $f_1(x) = f(x) - a_m x^{n-m} g(x)$ , dessen Grad  $m_1 < m$  ist. Ist noch  $m_1 \geq n$ , setzt man das Verfahren mit  $f_1(x)$  usw. solange fort, bis ein P. vom Grad kleiner als  $n$  oder das Null-P. entsteht. Man erhält einen *Divisionsalgorithmus*. Sind die Koeffizienten der P.e Elemente eines Körpers, braucht der Höchstkoeffizient  $b_m$  nicht 1 zu sein; man bildet  $f_1(x) = f(x) - b^{-1} \cdot a_m x^{n-m} g(x)$ . Insgesamt erhält man dann einen *Divisionsalgorithmus* analog dem *euklid. Algorithmus*.

*Beispiel:* Für die P.e  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 10x + 3$  und  $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$ , mit rationalen Koeffizienten ergibt der Divisionsalgorithmus:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) - 2xg(x) = 9x^2 - 12x + 3, \\ r(x) &= f_2(x) = f_1(x) - \frac{3}{2}g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(x - 1), \\ g_1(x) &= g(x) - \frac{4}{3}xr(x) = -x + 1 \\ r_1(x) &= g_2(x) = g_1(x) + \frac{2}{3}r(x) = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt:  $f(x) = (2x + \frac{3}{2})g(x) + r(x)$   
 $g(x) = (\frac{4}{3}x - \frac{3}{2})r(x) + 0$

Der größte gemeinsame Teiler von  $f(x)$  und  $g(x)$  ist dann das P.  $x - 1$  und seine Assoziierten  $c(x - 1)$  mit  $c \neq 0$ .

Sind die Koeffizienten des P.s  $f(x)$  von einem Grade größer als 1 aus dem Körper  $K$ , so läßt es sich bis

auf die Reihenfolge eindeutig in der Form  $f(x) = a \cdot p_1(x)^{n_1} \dots p_r(x)^{n_r}$  darstellen, wenn  $a$  der Höchstkoeffizient von  $f(x)$  ist und die  $p_i(x)$  für  $i = 1, 2, \dots, r$  verschiedene irreduzible P.e mit dem Höchstkoeffizienten 1 sind, z. B. zerfällt  $4x^2 - 1$  in  $4 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + \frac{1}{2})$ .

III. Faßt man im P.  $f(x) = \sum a_i x^i$  die Unbestimmte  $x$  als Variable auf, so ist  $f(x)$  eine *ganzrationale Funktion* in  $x$ ; d. h., ersetzt man  $x$  durch ein Ringelement  $\alpha$  aus  $R$  oder auch aus einem kommutativen Oberring  $S$ , so ist auch  $f(\alpha) = \sum a_i \alpha^i$  aus diesem Ring. Die ganzrationalen Funktionen werden deshalb auch als P.e bezeichnet. Ist  $s(x) = f(x) + g(x)$  und  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ , so gilt  $s(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$  und  $p(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha)$ .

Ist  $S$  ein Integritätsbereich, der  $R$  umfaßt, und ist  $\alpha \in S$ , so heißt  $\alpha$  Nullstelle des P.s  $f(x) \in R[x]$ , wenn  $f(\alpha) = 0$  ist. Das P.  $f(x)$  ist dann über  $S$  durch  $x - \alpha$  teilbar. Ein P.  $n$ -ten Grades hat höchstens  $n$  Nullstellen. Findet man eine Zerlegung  $f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$  mit  $g(\alpha) \neq 0$ , so ist  $\alpha$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $f(x)$ . Hat der Koeffizientenbereich  $R$  die Charakteristik 0 und ist  $\alpha$  eine  $k$ -fache Nullstelle des P.s  $f(x) = \sum a_i x^i = (x - \alpha)^k g(x)$ , so ist  $\alpha$  eine  $(k - 1)$ -fache Nullstelle der *Ableitung*  $f'(x) = \sum i a_i x^{i-1} = k \cdot (x - \alpha)^{k-1} \cdot g(x) + (x - \alpha)^k \cdot g'(x)$ . Hat  $f(x)$  in irgendeinem Oberring  $S$  von  $R$  eine mehrfache Nullstelle, so sind  $f(x)$  und  $f'(x)$  bereits über  $R$  nicht teilerfremd, d. h., der größte gemeinsame Teiler ist keine Einheit, also keine Konstante. Die P.e  $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 8$  und  $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 8x$  z. B. haben den größten gemeinsamen Teiler  $x^2 - 2$ ;  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$  sind zweifache Nullstellen von  $f(x)$ . Ein über einem Körper  $K$  der Charakteristik 0 irreduzibles P. hat keine mehrfachen Nullstellen (s. a. Körper).

IV. Ein Ausdruck der Form (1), in dem über end-

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

$$(2) \quad a_{i_1, \dots, i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

lich viele Systeme von nichtnegativen ganzzahligen Exponenten  $i_1, \dots, i_k$  summiert wird und die Koeffizienten aus einem kommutativen Ring  $R$  mit Einselement sind, heißt *P. in den Unbestimmten*  $x_1, \dots, x_k$ . Ist der Koeffizient von Null verschieden, so heißt die Exponentensumme  $i_1 + i_2 + \dots + i_k$  *Grad* des Gliedes (2).

Der größte bei den Gliedern des P.s  $f(x_1, \dots, x_k)$  auftretende Grad heißt *Grad* des P.s. Haben sämtl. Glieder des P.s denselben Grad, so heißt das P. *homogenes P.* oder eine *Form*. Jedes P. läßt sich auf eindeutige Weise als Summe von homogenen P.en schreiben. Das P.  $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2z + y^3 + 2xz - y^2 + 3z - 1$  z. B. zerfällt in die homogenen Bestandteile  $x^3 + 3x^2z + y^3$ ,  $2xz - y^2$ ,  $3z$  und  $-1$ .

Bleibt das P.  $f(x_1, \dots, x_k)$  bei jeder Permutation der Unbestimmten  $x_1, \dots, x_k$  unverändert, so heißt es *symmetr. P.* Beispiele symmetr. P.e sind die Potenzsummen  $S_n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n$  für  $n = 0, 1, \dots$ , die *Wronskischen Funktionen* und die *elemen-*

*elementarsymmetr. Funktionen* oder P.e.:

$$C_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_k,$$

$$C_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_k + \dots + x_{k-1}x_k,$$

.....,

$$C_k = x_1x_2 \dots x_k.$$

Nach dem *Hauptsatz über symmetr. Funktionen* läßt sich jedes symmetr. P.  $f(x_1, \dots, x_k)$  auf genau eine Weise als P.  $g(C_1, \dots, C_k)$  in den elementarsymmetr. P.en  $C_1, \dots, C_k$  darstellen, z. B. ist  $(x - y)^2 = C_1^2 - 4C_2$  mit  $C_1 = x + y$  und  $C_2 = xy$ . Den Zusammenhang zwischen den Potenzsummen und den elementarsymmetr. P.en geben die *Newtonschen Relationen* (3) für  $i \leq k$  und (4) für  $j > k$ . Nach

$$(3) \quad S_i - C_1S_{i-1} + \dots + (-1)^{i-1} C_{i-1}S_1 + (-1)^i C_i = 0$$

$$(4) \quad S_j - C_1S_{j-1} + \dots + (-1)^k C_kS_{j-k} = 0$$

ihnen kann man die Potenzsumme  $S_i$  als P.e in den elementarsymmetr. P.en  $C_j$  der Reihe nach berechnen:

$$S_1 = C_1, S_2 = C_1^2 - 2C_2, S_3 = C_1^3 - 3C_1C_2 + 3C_3,$$

usw. — S. a. Polynomring.

**Polynomialverteilung:** Verteilungsgesetz für einen diskreten Zufallsvektor  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , dessen Komponenten  $X_i$  für  $i = 1, 2, \dots, k$  angeben, wie oft in einer Serie von  $n$  Versuchen jeweils ein Ereignis  $A_i$  eintritt, d. h., jede der Zufallsgrößen  $X_i$  hat einen der Werte  $0, 1, \dots, n$ . Die zufälligen Ereignisse  $A_i$  mit  $i = 1, \dots, k$ , deren gezählte Häufigkeit, mit der sie in der jeweiligen Serie von  $n$  Versuchen auftreten, die diskrete Zufallsgröße  $X_i$  bestimmt, sollen dabei jede mit der Wahrscheinlichkeit  $P(A_i) = p_i$  eintreten und paarweise unvereinbare Ereignisse sein, d. h., es sollen (1), (2) und (3) für sie gelten.

$$(1) \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = S$$

$$(2) \quad A_i A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $(X_1, \dots, X_n)$  gilt (4). Ein Zufallsvektor mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion (4) heißt *polynomialverteilt*.

$$(4) \quad p_{i_1 i_2 \dots i_k} = P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_k = i_k)$$

$$= \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$$

**Polynomring:** Ring, dessen Elemente Polynome sind ( $\nearrow$  Polynom I., II.). Der P.  $R[x]$  besteht aus allen Polynomen  $f(x)$  mit Koeffizienten aus dem kommutativen Ring  $R$  mit Einselement; man erhält ihn durch *Ringadjunktion* der Unbestimmten  $x$ , die nicht zu  $R$  gehört, an den Ring  $R$ . Der P.  $R[x_1, \dots, x_k]$  besteht aus allen Polynomen  $f(x_1, \dots, x_k)$  mit Koeffizienten aus  $R$ . Man erhält ihn durch *successive Adjunktion* der Unbestimmten  $x_1, \dots, x_k$ , d. h., man adjungiert  $x_1$  an  $R$ ,  $x_2$  an  $R[x_1], \dots, x_k$  an  $R[x_1, \dots, x_{k-1}]$ . Der erhaltene Ring ist von der

Reihenfolge der Adjunktion unabhängig. Das Polynom  $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x + 1$  kann man als Polynom in  $x$  bzw. in  $y$  auffassen,  $f(x, y) = x^2 - 3(y + 1)x + (2y^2 + 1) = 2y^2 - 3xy + (x^2 - 3x + 1)$ , die Koeffizienten sind dabei aus  $R[y]$  bzw.  $R[x]$ , wenn  $R$  etwa der Ring der ganzen Zahlen ist.

Der P.  $K[x]$  über dem Körper  $K$  ist ein *euklid. Ring*, d. h., in ihm gilt ein dem euklid. Algorithmus analoger Divisionsalgorithmus ( $\nearrow$  Polynom II.). Zu je zwei Polynomen  $f(x)$  und  $g(x)$  aus  $K[x]$  findet man deshalb einen *größten gemeinsamen Teiler*, und jedes Polynom  $f(x)$  läßt sich bis auf Einheiten eindeutig in ein Produkt von *Primelementen* zerlegen. Die Primelemente des P.es  $R[x]$  über dem Integritätsbereich  $R$  sind die über  $R$  irreduziblen Polynome. Ist  $R$  ein Ring mit eindeutiger Zerlegung in Primelemente, so ist auch  $R[x]$  ein solcher. Somit ist der P.  $K[x_1, \dots, x_k]$  über dem Körper  $K$  ein Ring mit eindeutiger Zerlegung in Primelemente, denn man erhält ihn durch *successive Adjunktion*. Das Polynom  $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$  im P.  $R[x, y]$  zerfällt z. B. im Ring  $R$  der ganzen Zahlen in die irreduziblen Faktoren  $x^2 + xy + y^2$  und  $x^2 - xy + y^2$ .  $K[x_1, \dots, x_k]$  ist jedoch nicht euklid. und Hauptidealring, denn das von  $x_1, \dots, x_k$  erzeugte Ideal läßt sich nicht bereits von einem Element erzeugen ( $k \geq 2$ ).

**Polynomwurzelberechnung:** I. spezielle Verfahren zur *Nullstellenberechnung* von Funktionen, die durch ein *Polynom  $n$ -ten Grades* definiert werden, d. h. zur numer. Lösung der *grazrationalen Gleichung*  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ . Wie in der Algebra bewiesen wird, hat diese Gleichung in  $\mathbf{C}$  genau  $n$  Nullstellen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , und das Polynom kann als Produkt  $P_n(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$  von Linearfaktoren dargestellt werden. Die *Nullstellen* können reell oder komplex sein; für reelle Koeffizienten  $a_i$  ist mit  $z = a + ib$  stets auch  $\bar{z} = a - ib$  *Nullstelle* des Polynoms. Ein Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat folglich immer mindestens eine reelle Nullstelle. Ist eine Nullstelle  $\alpha_i$  bekannt, so kann man  $P_n(x)$  ohne Rest durch  $(x - \alpha_i)$  dividieren ( $\nearrow$  euklidischer Algorithmus) und damit den Grad des Polynoms zur Berechnung der weiteren Nullstellen vermindern. Diesen Vorgang nennt man *Faktorisieren des Polynoms*, er setzt die Bestimmung *aller* reellen Wurzeln durch Ermittlung immer *einer* Polynomwurzel voraus.

II. Das wichtigste *Rechenschema* beim Umgang mit Polynomen ist das *Horner-Schema*. Durch Division des Polynoms  $P_n(x)$  durch den Linearfaktor  $(x - x_0)$  erhält man (1).

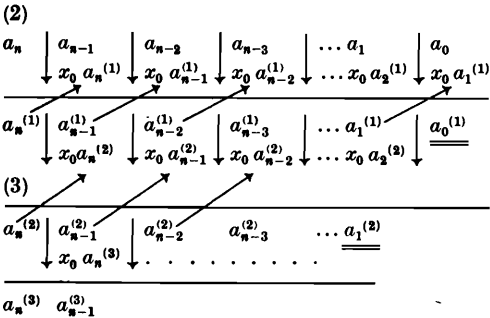
$$\text{Aus } P_n(x) = (x - x_0) p_1(x) + a_0^{(1)} \text{ ergibt sich } P_n(x_0) = a_0^{(1)}.$$

Bezeichnet man  $a_k^{(0)} := a_k$ , so läßt sich nach der Vorschrift  $a_k^{(1)} := a_k^{(0)} + x_0 a_{k+1}^{(0)}$  dieses einfache Horner-Schema zu (2) zusammenfassen; dabei geben senkrechte Pfeile Addition und schräge Pfeile Multiplikation mit  $x_0$  an.

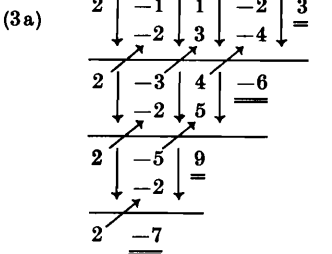
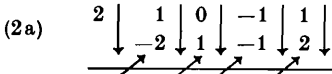
An Schema (2) ist Schema (3) angeschlossen worden. Seine Koeffizienten ergeben sich aus der erwei-

terten Vorschrift  $a_k^{(j)} = a_k^{(j-1)} + x_0 a_{k+1}^{(j-1)}$  für  $j = 1, 2, \dots, n - 1, k = n, n - 1, \dots, n - j + 1$ . Dabei werden jene  $a_k^{(j)}$ , für die  $k - j < 0$ , im nächsten Schritt Null gesetzt. Ein Zahlenbeispiel (2a) und (3a) demonstriert dies.

(1)  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   
 $= (a_n^{(1)} x^{n-1} + a_{n-1}^{(1)} x^{n-2} + \dots + a_1^{(1)}) (x - x_0) + a_0^{(1)}$



Beispiel:  $P_4(x) = 2x^4 + x^3 - x + 1; x_0 = -1$ .



Mit diesem vollständigen Horner-Schema lassen sich alle für Polynome wesentl. Operationen ausführen.

Nach (1) läßt sich ein Linearfaktor  $(x - x_0)$  abspalten, und es ist  $P_n(x_0) = a_0^{(1)}$ ; für das Zahlenbeispiel gilt nach (4)  $P_4(x_0) = 3$ .

(4)  $P_4(x) = (2x^4 + x^3 - x + 1) =$   
 $[2x^3 - x^2 + x - 2](x + 1) + 3$ .

Beachtet man, daß in (1) die  $k$ -te Ableitung des Gliedes  $a_k x^k$  den Wert  $k! a_k$  hat, so ergibt ein Vergleich mit (3), daß für die  $k$ -te Ableitung von  $P_n^{(k)}$  an der Stelle  $x_0$  gilt  $P_n^{(k)}(x_0) = k! a_k^{(k+1)}$ . Die entsprechenden Koeffizienten  $a_k^{(k+1)}$  sind in (3) und (3a) durch doppelte Unterstreichung hervorgehoben. Als Folge davon ergibt sich die Entwicklung (5) des Polynoms an der Stelle  $x = x_0$ ; für  $P_4(x)$  z. B. erhält man  $2x^4 + x^3 - x + 1 = 3 - 6(x + 1) + 9(x + 1)^2 - 7(x + 1)^3 + 2(x + 1)^4$ .

(5)  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(k+1)} (x - x_0)^k$

III. Zur P. existiert eine Vielzahl von Verfahren, unter denen man direkte und iterative Verfahren unterscheidet, je nachdem alle oder gezielt einzelne

Wurzeln berechnet werden. Zur ersten Gruppe gehören die Verfahren von GRÄFFE, BAIRSTOW und BRODETSKY-SMEAL, während das Bernoulli-Verfahren und der QD-Algorithmus Beispiele für die zweite Art sind. Außerdem lassen sich natürlich alle Methoden der Nullstellenberechnung auch zur P. verwenden. Durch Kopplung mit dem Horner-Schema ergibt sich dabei eine bes. günstige Variante des Newton-Verfahrens (↗ Nullstellenberechnung III). Mit der gewählten Anfangsnäherung  $x^{(0)}$  wird das Polynom  $P_n(x)$  nach dem vollständigen Horner-Schema an der Stelle  $x = x^{(0)}$  entwickelt:  $P_n(x) = P_{n1}(x - x^{(0)})$ . Nach  $x - x^{(0)} := x_1$  führt man eine neue Variable  $x_1$  ein und bildet die Newton-Korrektur  $x_1^{(1)} = -P_{n1}(x^{(0)})/P_{n1}'(x^{(0)}) = a_0^{(1)}/a_1^{(2)}$  nach dem Horner-Schema. Durch Entwicklung von  $P_{n1}(x_1)$  an  $x_1 = x_1^{(1)}$  erhält man  $P_{n2}(x_1 - x_1^{(1)})$ . Fährt man in gleicher Weise fort, bis die Korrekturen genügend klein geworden sind, so ergibt sich mit  $\bar{x}_N = x^{(0)} + x_1^{(1)} + \dots + x_M^{(M)}$  eine Näherung der betrachteten Nullstelle  $x_N$ .

Poncelet, Jean Victor, geb. 1. 7. 1788 Metz, gest. 22. 12. 1867 Paris. — P. war bis 1810 Schüler der École Polytechnique, wurde dann Unterleutnant an der École d'application in Metz und machte den napoleon. Rußlandfeldzug mit. In Rußland geriet er in Gefangenschaft, aus der er erst 1814 entlassen wurde. Von 1815 bis 1835 wirkte er wieder in Metz, seit 1835 in Paris. P. war dort Professor, wurde aber auch mit militär. Aufgaben betraut. — P. ist der Begründer der projektiven Geometrie. Sein »Traité des propriétés projectives des figures« von 1822 enthält bereits alle wichtigen Begriffe. Wesentlich wurden auch seine Arbeiten zur theoret. Mechanik. Ponton ↗ Prisma III.

Pontrjagin, Lew Semjonowitsch, geb. 3. 9. 1908 Moskau. — P. verlor mit 14 Jahren durch einen Unfall das Augenlicht. Trotzdem beendete er 1929 sein Studium an der Moskauer Universität und wurde 1935 zum Professor berufen. 1932 bewies er den allgemeinen Dualitätssatz. In diesem Zusammenhang schuf er eine Theorie der Charaktere kommutativer Gruppen. Er veröffentlichte weitere wichtige Arbeiten zur kombinator. Topologie (1954) und zur Theorie topolog. Gruppen (1938).

Position ↗ Optimierung, geometrische. Positionssystem ↗ Zahlensystem V.

Post, Emil Leon, geb. 1897, gest. 1954. — P. promovierte 1921 an der Columbia Universität. Er gilt als einer der führenden Logiker und bewies in seiner Dissertation erstmals die Widerspruchsfreiheit des in den »Principia Mathematica« beschriebenen Aussagenkalküls und seine Vollständigkeit bzgl. der zweielementigen Booleschen Algebra. Er betrachtete auch mehrwertige Verallgemeinerungen der Algebra der Logik, die P.-Algebra gen. wird.

post numerando ↗ Rentenrechnung II. Potential: in einem euklid. Vektorraum definierte Funktion  $U(x, y, z)$ , die der Laplaceschen Differentialgleichung  $\Delta U = 0$  genügt (↗ elliptische Differentialgleichung I., III., ↗ Gradient III.).

In der Physik geben die partiellen Differentialquotienten des P.s nach den Koordinaten die Kom-

ponenten der Kraft an, mit der ein Massepunkt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz bzw. eine elektr. Ladung nach dem Coulombschen Gesetz von einer Masse bzw. von einer Ladung angezogen werden (s. a. Arbeit einer Kraft).

Der Begriff des P.s ist auf viele Arten erweitert worden (↗ Spannungen auf Graphen I.).

**Potentialfunktion** ↗ elliptische Differentialgleichung I.

**Potentialgleichung** ↗ elliptische Differentialgleichung I.

**Potentialproblem** ↗ Spannungen auf Graphen III.

**Potentialtheorie** ↗ elliptische Differentialgleichung II.

**Potentialvektor** ↗ Gradient II., III.

**Potentiometer** ↗ Analogrechner I.

**Potenz** [*potentia*, lat. Macht]: I. i. e. S. die abkürzende Schreibweise  $a^l = a \cdot a \cdots a = p$  für ein Produkt aus  $l$  gleichen Faktoren  $a$ . Dabei ist  $l \geq 2$  eine natürl. Zahl und heißt *Potenzexponent* [*exponere*, lat. heraussetzen];  $a$  heißt *Basis* [*basis*, griech. Grundlage] und  $p$  die  $l$ -te Potenz von  $a$ ; sie wird auch gelesen  $a$  hoch  $l$  oder  $a$  zur  $l$ -ten Potenz. Dabei sind  $a$  und  $p$  beliebige reelle Zahlen. Speziell gilt  $1^l = 1$  und  $0^l = 0$ , und nach den zusätzl. Definitionen  $a^1 = a$  und  $a^0 = 1$  ist die P.  $a^l$  für alle natürl. Exponenten erklärt.

P.en  $a^2$  mit dem Exponenten  $l = 2$  und ganzem  $a$  heißen *Quadratzahlen*, z. B.  $2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25$ , P.en  $a^3$  mit  $l = 3$  und ganzem  $a$  heißen *Kubikzahlen*, z. B.  $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64, 5^3 = 125$ . Ihr Name deutet ihre geometr. Bedeutung an. Häufig gebrauchte P.en  $a^2$  und  $a^3$  sind für bestimmte Intervalle der Basis  $a$  in Zahlentafeln tabelliert.

Von bes. Bedeutung sind in jedem Zahlensystem die P.en seiner Basis, weil sie in jedem Positionssystem den Stellenwert jeder Ziffer angeben (↗ Zehnerpotenzen).

Ist die Basis  $a \in \mathbf{R}$  negativ, so ist auch die P. negativ; falls die Anzahl  $l$  der Faktoren ungerade ist, d. h. falls  $l = 2m + 1$  für  $m \in \mathbf{N}$ ; dagegen ist die P. positiv für  $a < 0$  und  $l = 2m$ . Für eine positive Basis ist die P. stets positiv. P.en  $a^{2m}$  heißen *gerade*,  $a^{2m-1}$  aber *ungerade* P.

Im Bereich  $l \in \mathbf{N}$  gelten folgende P.gesetze für  $a, b \in \mathbf{R}$ .

**I.1.** P.en mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert:  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ .

**I.2.** P.en mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert:  $a^n/b^n = (a/b)^n$  mit  $b \neq 0$ .

**I.3.** P.en mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

**I.4.** Eine P. wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$ .

**I.5.** Für den Quotienten zweier P.en  $a^m$  und  $a^n$  mit gleicher Basis  $a \neq 0$  gilt  $a^m/a^n = a^{m-n}$ , falls  $m > n$

bzw.  $a^m/a^n = 1$ , falls  $m = n$  bzw.  $a^m/a^n = 1/a^{n-m}$ , falls  $n > m$ .

Beispiele: 1.  $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$ .

2.  $\frac{21^4}{7^4} = \left(\frac{21}{7}\right)^4 = 3^4 = 81$ .

3.  $5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2} = 5^4 = 625$ .

4.  $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^{3 \cdot 2} = (2^3)^2 = 2^6 = 64$

5.  $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$ ;

$\frac{4^3}{4^3} = 1$ ;  $\frac{4^3}{4^6} = \frac{1}{4^{6-3}} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ .

**II.**  $l \in \mathbf{Z}$ . Das *Permanenzprinzip* ist ein von HANKEL formuliertes heurist. Prinzip, die Gültigkeit eines aus Analogie vermuteten Gesetzes dadurch zu erreichen, daß man den Begriff, auf den es angewendet wird, passend erweitert. Will man in Analogie zum P.gesetz I.3. die in I.5. erforderlichen Fallunterscheidungen vermeiden und stets  $a^m/a^n = a^{m-n}$  rechnen, so hat man für  $a \neq 0$  und  $l = 1, 2, \dots$  zu definieren:  $a^0 = 1$  und  $a^{-l} = 1/a^l$ . Mit diesen Definitionen gelten auch die anderen P.gesetze für beliebige ganze Exponenten.

**III.**  $l \in \mathbf{Q}$ . Für  $x \geq 0, p > 0$  und  $l \geq 2, l, m$  ganz, hat die Gleichung  $x^l = p^m$  bekanntlich  $x = \sqrt[l]{p^m}$  als Lösung (↗ Wurzel), denn  $(\sqrt[l]{p^m})^l = p^m$ . Ist  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $l, m = t \cdot l$ , so ist  $\sqrt[l]{p^m} = \sqrt[l]{p^{t \cdot l}} = p^t = p^{m/l}$ . Auf die danach naheliegende Erweiterung des P.begriffs auf beliebige rationale Exponenten durch die Definition  $p^{m/l} = \sqrt[l]{p^m}$  für  $p > 0, l \geq 2, l, m \in \mathbf{Z}$  wird man geführt, wenn man nach dem Permanenzprinzip die Gültigkeit des P.gesetzes I.4. auch für rationale Exponenten fordert, denn dann ist  $(p^{m/l})^l = p^m = (\sqrt[l]{p^m})^l$ . Setzt man für  $m/l > 0$  noch  $0^{m/l} = 0$ , so gelten mit diesen Definitionen die P.gesetze für beliebige rationale Exponenten und nichtnegative Basen.

Beispiele:

1.  $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{5} = 3^{1/4} \cdot 5^{1/4} = (3 \cdot 5)^{1/4} = \sqrt[4]{15}$ .

2.  $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[7]{2} = 2^{1/4} \cdot 2^{1/7} = 2^{1/4+1/7} = 2^{11/28} = \sqrt[28]{2^{11}}$ .

3.  $(\sqrt[9]{5})^4 = (5^{1/9})^4 = 5^{4 \cdot 1/9} = 5^{4/9} = \sqrt[9]{5^4}$ .

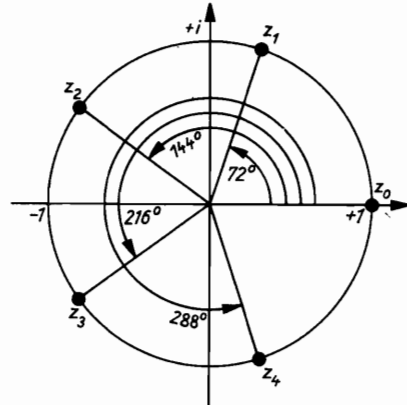
4.  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = a^{1/2-1/3} = a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$ .

Für negative Basen  $a < 0$  ergibt sich eine einheitl. Darstellung der P. im Körper  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen (↗ Potenz VI.).

Sind  $r_1$  und  $r_2$  beliebige rationale Zahlen, so gelten die P.gesetze  $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = (a^{r_1})^{r_2} = (a/b)^{r_1} = a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ ;  $a^{r_1}/a^{r_2} = a^{r_1-r_2}$ ;  $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$ . Weiter gelten

folgende Ungleichungen:

- (1) Für  $a > 0, b > 0, r > 0$  gilt  
 $a^r > b^r$ , falls  $a > b$ ,  $a^r = b^r$ , falls  $a = b$ ,  
 $a^r < b^r$ , falls  $a < b$ .
- (2) Für  $a > 1$  gilt  $a^r > 1$ , falls  $r > 0$ ,  
 $a^r = 1$ , falls  $r = 0$ ,  $a^r < 1$ , falls  $r < 0$ .
- (3) Für  $0 < a < 1$  gilt  $a^r < 1$ , falls  $r > 0$ ,  
 $a^r = 1$ , falls  $r = 0$ ,  $a^r > 1$ , falls  $r < 0$ .
- (4) Für  $a > 0$  und  $r_1 < r_2$  gilt  
 $a^{r_1} < a^{r_2}$ , falls  $a > 1, a^{r_1} > a^{r_2}$ , falls  $0 < a < 1$ .



Potenz: Lösungen  $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4$  der Kreisteilungsgleichung  $z^5 = 1$

IV.  $l \in \mathbf{R}$ . Die Ungleichung (4) dient dazu, den P.begriff auf Exponenten  $l$  zu erweitern, die beliebige reelle Zahlen sind. Eine reelle Zahl  $\lambda$  kann durch eine Intervallschachtelung  $(r_i | \bar{r}_i)$  rationaler Zahlen  $r_i$  und  $\bar{r}_i$  definiert werden (s. a. reelle Zahlen II.), wenn die unteren Intervallenden  $r_i$  monoton wachsen, wenn die oberen Intervallenden  $\bar{r}_i$  monoton abnehmen, und wenn die Intervalllänge  $|\bar{r}_i - r_i|$  für genügend große Indizes  $i$  kleiner als jede beliebige vorgegebene positive Zahl  $\varepsilon$  ist.

Für  $\lambda = \sqrt{2}$  gilt die Bedingung  $r_i^3 < 2$  oder  $\bar{r}_i^3 > 2$  und wird z. B. von den Folgen  $r_1 = 1, r_2 = 1,4, r_3 = 1,41, r_4 = 1,414, \dots$  und  $\bar{r}_1 = 2, \bar{r}_2 = 1,5, \bar{r}_3 = 1,42, \bar{r}_4 = 1,415, \dots$  erfüllt. Für eine Basis  $a > 1$  wächst dann auch die Folge  $a^{r_i} = a^1, a^{r_2} = a^{1,4}, a^{r_3} = a^{1,41}, a^{r_4} = a^{1,414}, \dots$  monoton und die Folge  $a^{\bar{r}_i} = a^2, a^{\bar{r}_2} = a^{1,5}, a^{\bar{r}_3} = a^{1,42}, a^{\bar{r}_4} = a^{1,415}, \dots$  nimmt monoton ab. Erfasst die Intervallschachtelung  $(r_i | \bar{r}_i)$  die reelle Zahl  $\lambda$ , so konvergiert in  $|a^{r_i} - a^{\bar{r}_i}| = |a^{r_i} (a^{\bar{r}_i - r_i} - 1)|$  der zweite Faktor wegen  $|\bar{r}_i - r_i| < \varepsilon$  gegen Null, d. h.,  $(a^{r_i} | a^{\bar{r}_i})$  ist ebenfalls eine Intervallschachtelung, und die durch sie erfaßte reelle Zahl wird als  $P. a^{\lambda}$  eingeführt. Ist  $a = 1$ , so setzt man  $a^{\lambda} = 1$ ; für  $0 < a < 1$  gilt die Überlegung für  $a^{\lambda} = (1/a)^{-\lambda}$ . Für  $a = 0$  schließlich muß  $\lambda > 0$  vorausgesetzt werden für die Definition  $a^{\lambda} = 0$ .

V. Ist die Basis  $a$  der P. eine komplexe Zahl  $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , in der  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist und  $\varphi$  bestimmt wird aus  $x = \rho \cos \varphi$  und  $y = \rho \sin \varphi$ , so wird für  $l \in \mathbf{R}$  die P.  $w = z^l$  nach der Moivre'schen Formel berechnet. Man erhält (5). Bes. für  $l \in \mathbf{Z}$  werden diese

$$(5) \quad w = z^l = \rho^l [\cos (l\varphi + 2lk\pi) + i \sin (l\varphi + 2lk\pi)]^l$$

Beziehungen benutzt, um Wurzeln aus komplexen Zahlen zu berechnen.

V.1. Zu  $w = z^3 = (3 + 4i)^3$  ergibt sich aus  $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$  und  $3 = 5 \cos \varphi$  sowie  $4 = 5 \sin \varphi$  das Argument  $\varphi = 53,1^\circ$ , d. h.,  $z = 5 (\cos 53,1^\circ + i \sin 53,1^\circ)$  und damit  $z^3 = 125 (\cos 159,3^\circ + i \sin 159,3^\circ)$ .

V.2. Die Kreisteilungsgleichung  $z^5 = 1$  ergibt für  $n = 5$  die 5 fünften Einheitswurzeln:  $z = \sqrt[5]{1} = \cos (2k\pi/5) + i \sin (2k\pi/5)$  für  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Man erhält für  $z_k$  die Werte  $z_0 = 1, z_1 = \cos 72^\circ$

+  $i \sin 72^\circ, z_2 = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ, z_3 = \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ$  und  $z_4 = \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ$  (Abb.). V.3. Für  $w = (-8)^{1/3}$  gilt wegen  $z = 8e^{i\pi}$  Gleichung (6) für  $k = 0, 1, 2$ . Durch Einsetzen dieser Werte für  $k$  erhält man

$$(6) \quad w_k = \sqrt[3]{8} (\cos \pi + i \sin \pi)^{1/3} = 2 \left[ \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right]$$

$$w_0 = 2 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$w_2 = 2 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -2,$$

$$w_3 = 2 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 1 - i\sqrt{3}.$$

V.4. Für  $z = -8 + 8i\sqrt{3} = 16[\cos (2\pi/3) + i \sin (2\pi/3)]$

erhält man für  $k = 0, 1, 2, 3$   $w_k = \sqrt[4]{z} = 2 [\cos (\pi/6 + k\pi/2) + i \sin (\pi/6 + k\pi/2)]$ . Im einzelnen ergibt sich:

$$w_0 = 2[\cos \pi/6 + i \sin \pi/6] = \sqrt{3} + i;$$

$$w_1 = 2[\cos (2\pi/3) + i \sin (2\pi/3)] = -1 + i\sqrt{3};$$

$$w_2 = 2[\cos (7\pi/6) + i \sin (7\pi/6)] = -\sqrt{3} - i \text{ und}$$

$$w_3 = 2[\cos (5\pi/3) + i \sin (5\pi/3)] = 1 - i\sqrt{3}.$$

VI. Die allgemeine P.  $w = z^l$ , in der sowohl  $z$  als auch  $l$  komplexe Zahlen sind, läßt sich mit Hilfe von  $\ln z$  ( $\nearrow$  Logarithmus III., s. a. komplexwertige Funktion, elementare, IV.) durch die Gleichung (7) definieren, indem man sie auf eine Exponential-

$$(7) \quad w = z^l = e^{l \ln z} = e^{l(\ln r + i 2k\pi)}$$
 mit  $k \in \mathbf{Z}$

funktion mit komplexem Argument zurückführt ( $\nearrow$  Eulersche Formel). Wählt man in (7) den Hauptwert  $\ln^* z$  von  $\ln z$ , so erhält man den Hauptwert der allgemeinen P. Wegen des Faktors  $e^{i 2k\pi}$  ist jedem  $z$ -Wert für jedes  $k \in \mathbf{Z}$  ein anderer  $w$ -Wert zugeordnet. Bei genauerer Untersuchung findet man, daß sich dann und nur dann endlich viele und zwar  $q$  verschiedene Werte ergeben, wenn die Zahl  $l = p/q$  rational ist mit  $q > 0$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$ .

Aus der Gültigkeit der Logarithmengesetze ( $\nearrow$  Logarithmus III.) ergibt sich die Gültigkeit der bekannten P.gesetze auch für die allgemeine P.

*Beispiel:* Nach  $\ln i = \pi i/2 + 2k\pi i$  ( $\nearrow$  Logarithmus III.) kann die  $P. i^k$  berechnet werden. Man erhält (8), d. h. einen reellen Wert für jedes  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$(8) \quad i^k = e^{i \ln i} = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}$$

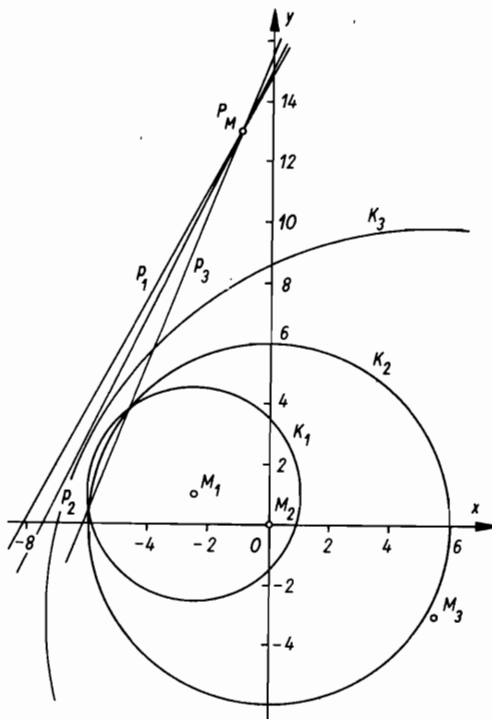
**Potenz an Kreis und Kugel: I.** reelle Zahl, die einem Punkt der Ebene bzw. des Raumes in bezug auf einen Kreis bzw. eine Kugel zugeordnet wird (s. a. Sekantensatz II.). Sind in der Ebene *kartes. Koordinaten* eingeführt und hat der gegebene Kreis  $K$  die Gleichung  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$ , so hat der Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  der Ebene die  $P. (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2$  in bezug auf  $K$ . Ist  $\mathbf{a}$  der Ortsvektor des Kreismittelpunkts und  $\mathbf{x}_0$  der von  $P_0$ , so ist die  $P.$  von  $P_0$  in bezug auf  $K$  gleich  $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a})^2 - R^2$  oder  $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}|^2 - R^2$ . Daraus erkennt man, daß die  $P.$  eines äußeren Punktes  $P_0$  positiv, die eines inneren Punktes  $P_0$  negativ ist. Ist  $P_0$  ein Punkt von  $K$ , so hat die  $P.$  den Wert Null. Wegen  $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}|^2 - R^2 = (|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}| + R) \cdot (|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}| - R)$  folgt aus dem Sekantentangentensatz, daß die  $P.$  gleich dem Produkt der Abstände zwischen  $P_0$  und den Schnittpunkten des Kreises mit jeder Geraden durch  $P_0$  ist, die den Kreis schneidet.

**II.** In bezug auf zwei Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , die durch  $\mathbf{a}_1, R_1$  und  $\mathbf{a}_2, R_2$  mit  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$  bestimmt sind, ist  $\mathbf{x}_0^2 - 2\mathbf{a}_1\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_1^2 - R_1^2$  und  $\mathbf{x}_0^2 - 2\mathbf{a}_2\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_2^2 - R_2^2$  die  $P.$  von  $P_0$ . Für Punkte  $P_0$  mit gleicher  $P.$  in bezug auf beide Kreise erhält man durch Subtraktion  $2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + R_1^2 - R_2^2 = 0$ . Diese Gleichung stellt eine Gerade dar, die *P.gerade*, auf der alle Punkte  $P_0$  liegen, die gleiche  $P.$  in bezug auf beide Kreise  $K_1$  und  $K_2$  haben. Da  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$  Stellungsvektor dieser Geraden ist, steht die  $P.gerade$  senkrecht auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte. Sind die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  gegeben durch  $x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y - d_1 = 0$  und  $x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y - d_2 = 0$ , so ist  $2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (d_1 - d_2) = 0$  die Gleichung der  $P.geraden$ . Schneiden sich die zwei Kreise, so geht die  $P.gerade$  durch die zwei Schnittpunkte. Berühren sich  $K_1$  und  $K_2$ , so ist die  $P.gerade$  ihre gemeinsame Tangente. Zur Potenzlinie zweier Kreise  $\nearrow$  Sekantensatz Abb. 4.

**III.** Drei Kreise der Ebene, deren Mittelpunkte nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen drei  $P.geraden$ , die sich in einem Punkt, dem *P.mittelpunkt* der drei Kreise schneiden (Abb.).

*Beispiel:* Sind drei Kreise  $K_1, K_2, K_3$  gegeben durch  $x^2 + y^2 + 5x - 2y - 5 = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 36 = 0$  und  $x^2 + y^2 - 11x + 6y - 125 = 0$ , so erhält man die  $P.gerade p_3$  von  $K_1$  und  $K_2$  durch  $5x - 2y + 31 = 0$ ,  $p_1$  von  $K_2$  und  $K_3$  durch  $11x - 6y + 89 = 0$  und  $p_2$  von  $K_3$  und  $K_1$  durch  $16x - 8y + 120 = 0$ . Ihr Schnittpunkt, der *P.mittelpunkt*, ist  $P_M(-1, 13)$ , seine  $P.$  in bezug auf alle drei Kreise ist 134.

**IV.** Die  $P.$  eines Punktes  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  in bezug auf eine Kugel mit der Gleichung  $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 - R^2 = 0$  definiert man entsprechend durch  $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a})^2 - R^2$ . Zu zwei Kugeln mit verschiedenen Mittelpunkten gibt es eine *P.ebene*, in der alle Punkte gleicher  $P.$  in bezug auf beide Kugeln liegen. Sie



Potenz an Kreis und Kugel: Potenzmittelpunkt  $P_M$  dreier Kreise in einer Ebene, deren Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  nicht auf einer Geraden liegen

steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte. Zu drei Kugeln mit nicht kollinearen Mittelpunkten gibt es drei durch eine Gerade gehende  $P.ebenen$ , zu vier Kugeln mit nicht komplanaren Mittelpunkten gibt es sechs durch den *P.mittelpunkt* der Kugeln gehende  $P.ebenen$ .

**Potenzfunktion: I.** Funktion, die dargestellt werden kann durch eine Funktionsgleichung  $y = f(x) = x^n$  mit ganzzahligem Exponenten  $n$ . Der größtmögl. Definitionsbereich einer  $P.$  ist die Menge  $\mathbf{R}$  aller reellen Zahlen mit Ausnahme von  $x = 0$ , falls der Exponent  $n \leq 0$  ist. Die  $P.$  ist *gerade* oder *ungerade*, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist, da für  $n = 2\nu$  gilt  $f(-x) = (-x)^{2\nu} = x^{2\nu} = f(x)$ , aber für  $n = 2\nu + 1$  ist  $f(-x) = (-x)^{2\nu+1} = -x^{2\nu+1} = -f(x)$ . Daraus folgt, daß die Bilder der  $P. f(x) = x^{2\nu}$  axial-symmetrisch zur Ordinatenachse, die Bilder der  $P. f(x) = x^{2\nu+1}$  zentralsymmetrisch zum Koordinatenursprung liegen (Abb. 1).

Ist  $n > 0$ , so sind die  $P.en f(x) = x^n$  spezielle ganzrationale Funktionen. Gilt  $n \geq 2$ , so heißen die Bilder von  $f(x) = x^n$  bzgl. eines kartes. Koordinatensystems *Parabeln*, für  $n = 2$  *quadrat.*, für  $n = 3$  *kub. Parabel*, allgemein *Parabel n-ten Grades* (Abb. 1). Für  $n = 1$  ist das Bild einer  $P.$  eine Gerade, für  $n = 0$  besteht es aus zwei Halbgeraden, da  $x^0$  an der Stelle  $x = 0$  nicht definiert ist. Da jedoch die Funktion  $g^* = |x^0| = 1$  für  $x \neq 0$  und 1 für



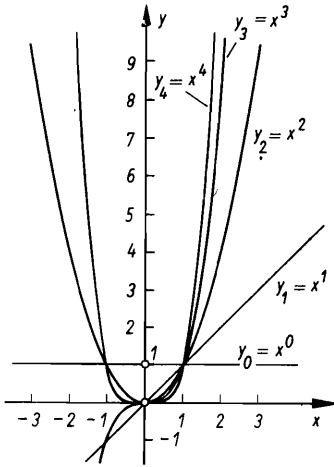


Abb. 1: Graphische Darstellung der Potenzfunktionen  $y_0 = x^0, y_1 = x^1, y_2 = x^2, y_3 = x^3, y_4 = x^4$

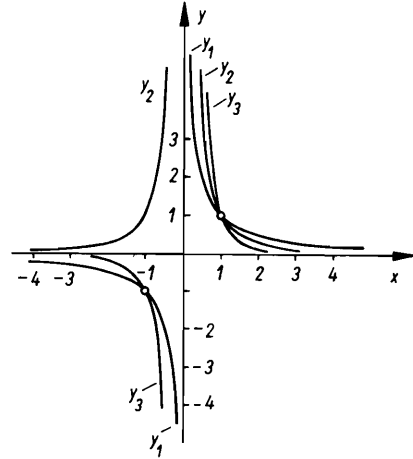


Abb. 2: Graphische Darstellung der Potenzfunktionen  $y_1 = x^{-1}, y_2 = x^{-2}, y_3 = x^{-3}$

$x = 0$ ) überall stetig ist, hat die P.  $f(x) = x^0$  an der Stelle  $x_0 = 0$  eine *hebbare Unstetigkeitsstelle* (↗ Stetigkeit).

II. P.en mit *negativem Exponenten* sind spezielle gebrochenrationale Funktionen. Da sie sämtlich an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht definiert sind und  $x_0 = 0$  eine Polstelle ist, bestehen ihre Bilder, die *Hyperbeln* gen. werden, aus zwei *Hyperbelnisten* (Abb. 2). Wesentl. Eigenschaften der P. sind in der Tabelle zusammengestellt. Für den Exponenten  $n = 0$  erhält man die P.  $y = x^0$ , die für  $x \neq 0$  definiert und überall konstant gleich 1 ist.

Geht man von einer P.  $y = x^n$  zu einer solchen mit der Funktionsgleichung  $y = ax^n$  über, so wird das Bild von  $f$  im Verhältnis 1 :  $|a|$  gestaucht oder gestreckt, je nachdem, ob  $|a| < 1$  oder  $|a| > 1$  gilt. Ist  $a < 0$ , so wird das Bild von  $f$  zusätzlich an der Abs-

zissenachse gespiegelt, s. a. ganzrationale Funktion I.

**Potenzgerade** ↗ Potenz an Kreis und Kugel III., ↗ Sekantensatz II.

**Potenzgesetze** ↗ Gruppe I., ↗ Potenz I.

**Potenzieren** ↗ Grundrechenarten.

**Potenzmenge** ↗ Menge II.

**Potenzmethode** ↗ Eigenwertberechnung III.

**Potenzmittelpunkt** ↗ Potenz an Kreis und Kugel III., IV.

**Potenznichtreste** ↗ Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

**Potenzregel** ↗ Differentiationsregeln II.

**Potenzreihe:** I. spezielle Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ , deren Glieder  $f_n(x)$  die Gestalt  $f_n(x) = a_n x^n$  haben. Eine P. hat deshalb die Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , und ihre

Potenzfunktion  $y = f(x) = x^n, n \in \mathbf{Z}$

	$y = x^n, n \neq 0, n$ gerade	$y = x^n, n$ ungerade	$y = x^0$
größtmögl. Definitionsbereich	$] -\infty, +\infty[$ $x \neq 0$ , falls $n < 0$	$] -\infty, +\infty[$ $x \neq 0$ , falls $n < 0$	$] -\infty, +\infty[$ $x \neq 0$
Wertebereich	$[0, +\infty[$ $y \neq 0$ , falls $n < 0$	$] -\infty, +\infty[$ $y \neq 0$ , falls $n < 0$	$y = 1$
charakterist. Punkte	$P_1(1, 1), P_2(-1, 1)$	$P_1(1, 1), P_3(-1, -1)$	$P_1(1, 1)$ $P_2(-1, 1)$
Extrema	$x_E = 0$ , falls $n > 0$	—	—
Wendepunkte	—	$x_W = 0$ , falls $n > 0$	—
Grenzwert für $x \rightarrow +\infty$	$+\infty$ , falls $n > 0$ $0$ , falls $n < 0$	$+\infty$ , falls $n > 0$ $0$ , falls $n < 0$	1
Grenzwert für $x \rightarrow -\infty$	$+\infty$ , falls $n > 0$ $0$ , falls $n < 0$	$-\infty$ , falls $n > 0$ $0$ , falls $n < 0$	1

Partialsommen sind Polynome  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ . Es gibt P.n, die für alle  $x$  konvergieren und *beständig konvergent* gen. werden. Die P. (1) z. B. konvergiert für alle  $x$ , denn das Quotientenkriterium ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen) liefert (2).

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

P.n, die nur für  $x = 0$  konvergieren, heißen *nirgends konvergent*, z. B. die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k = x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \dots$ , für die (3) nach dem Quotientenkriterium gilt.

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}{n^n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (1+n) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Schließlich gibt es P.n, die für gewisse  $x \neq 0$  konvergieren und für gewisse  $x \neq 0$  divergieren. Die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  z. B. konvergiert für alle  $x$  mit  $|x| < 1$  und divergiert für alle  $x$  mit  $|x| > 1$ , wie man wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x|^n} = |x|$  mit Hilfe des Wurzelkriteriums ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen) sofort bestätigt.

II. Konvergiert die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  für  $x_1 \neq 0$ , so auch für alle  $x$  mit  $|x| < |x_1|$ ; ist die P. für  $x_2$  divergent, so auch für alle  $x$  mit  $|x| > |x_2|$ .

Die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  z. B. ist für  $x_1 = 1/2$  konvergent und für  $x_2 = -2$  divergent, sie konvergiert dann auch für alle  $x$  mit  $|x| < 1/2$  und divergiert für alle  $x$  mit  $|x| > |-2| = 2$ .

III. Ist die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  nicht für alle  $x$  konvergent und nicht für alle  $x \neq 0$  divergent, so gibt es genau eine positive Zahl  $r$ , so daß die P. für alle  $x$  mit  $|x| < r$  konvergiert und für alle  $x$  mit  $|x| > r$  divergiert. Für  $x = r$  bzw.  $x = -r$  kann keine allgemeine Aussage gemacht werden. Die Zahl  $r$  heißt der *Konvergenzradius* der P. und das Intervall  $]-r, r[$  das *Konvergenzintervall* (Abb. 1). Für eine beständig konvergente P. setzt man  $r = \infty$  und für eine nirgends konvergente P.  $r = 0$ . Der Konvergenzradius

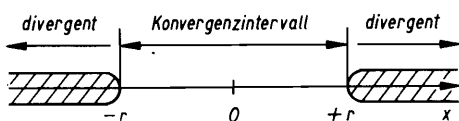


Abb. 1: Konvergenzintervall einer Potenzreihe

einer gegebenen P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  kann mit Hilfe der *Cauchy-Hadamardschen Formel* (4) berechnet werden.

$$(4) \quad r = 1/\mu \text{ mit } \mu = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Die Zahl  $\mu$  ist dabei die obere  $\nearrow$  Häufungsgrenze der Zahlenfolge  $(\sqrt[n]{|a_n|})$ .

Der oberen Häufungsgrenze  $\mu = \infty$  entspricht der Konvergenzradius  $r = 0$ , und  $\mu = 0$  entspricht  $r = \infty$ . Existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , so ist

dieser gleich der oberen Häufungsgrenze der Zahlenfolge  $(\sqrt[n]{|a_n|})$ , d. h., dann gilt  $1/r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Der Konvergenzradius der P.  $\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$  z. B. hat wegen (5) den Wert 1.

$$(5) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$$

Der Konvergenzradius kann auch mit Hilfe des *Quotientenkriteriums* berechnet werden: *Existiert*

für die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ ,

so ist  $r = 1/q$  der Konvergenzradius der P. Dem Wert  $q = 0$  entspricht  $r = \infty$  und im Fall der Divergenz  $q = \infty$  dem Wert  $r = 0$ . Für die P. (6)

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$$

z. B. ergibt sich aus (7) der Konvergenzradius  $r = 4$ .

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

Die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k!$  hat den Konvergenzradius  $r = \infty$  wegen (8), und die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} k! x^k$  hat den Konvergenz-

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

radius  $r = 0$ , denn  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$ . Die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^p$  mit  $p \geq 0$  hat wegen (9) den Konvergenzradius  $r = 1$ .

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = 1$$

Im Spezialfall  $p = 0$  divergiert die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$  in den

Randpunkten des Konvergenzintervalls  $x = 1$  und  $x = -1$ , wie man aus den Partialsommen der Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} 1$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  sieht. Im Spezialfall

$p = 1$  konvergiert die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$  in dem einen Randpunkt  $x = -1$  des Konvergenzintervalls, denn  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$  ist nach dem Leibnizschen Konvergenz-

kriterium ( $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen) konvergent; im anderen Randpunkt  $x = 1$  ist  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$  die divergente harmon. Reihe. Für  $p = 2$  ist die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$  in beiden Randpunkten  $x = -1$  und  $x = 1$  des Konvergenzintervalls konvergent, denn die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$  sind beide konvergent ( $\nearrow$  harmonische Reihe).

Die bisher gemachten Aussagen über P.n der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  gelten auch für P.n  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  mit dem Mittelpunkt  $x_0$ ; man hat nur stets die Variable  $x$  durch  $x - x_0$  zu ersetzen. Der Konvergenzradius ist die positive Zahl  $r$ , für die gilt, daß die P. für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < r$  konvergent und für alle  $x$  mit  $|x - x_0| > r$  divergent ist. Berechnen läßt sich der Konvergenzradius ebenfalls mit einer der oben angegebenen Formeln.

Ist  $f(x)$  die Summenfunktion der P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  mit einem von Null verschiedenen Konvergenzradius, so sagt man auch, die Funktion  $f(x)$  wird in der Umgebung von  $x = x_0$  durch eine P. dargestellt.

IV. In jedem inneren Punkt des Konvergenzintervalls konvergiert die P. absolut ( $\nearrow$  absolute Konvergenz von Reihen). Für jedes abgeschlossene Intervall, das ganz im Konvergenzintervall liegt, konvergiert die P. gleichmäßig ( $\nearrow$  Funktionenreihe II.). Konvergiert die P. für  $x = r$ , so konvergiert die P. sogar in  $[0, r]$  gleichmäßig.

Man kann von einer P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  i. allg. nicht behaupten, daß sie in  $]-r, r[$  gleichmäßig konvergiert. Die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  mit dem Konvergenzradius  $r = 1$  z. B. ist etwa in  $[-3/4, 5/6]$ , jedoch nicht im gesamten Konvergenzintervall  $]-1, 1[$  gleichmäßig konvergent. Für die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$  ist  $r = 1$ , aber da diese P. für  $x = 1$  noch konvergiert, ist sie in  $[0, 1]$  gleichmäßig konvergent.

V. Die P.n (10), also speziell die beiden P.n

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$  haben denselben Konvergenzradius.

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+s}{s} a_{k+s} x^k, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

In den Randpunkten des Konvergenzintervalls kann jedoch verschiedenes Verhalten vorliegen.

Die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  z. B. hat den Konvergenzradius  $r = 1$ , folglich auch die P.n  $\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$ ,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \text{ usw.}$$

VI. Identitätssatz für Potenzreihen: Wenn die beiden

P.n  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  im Intervall  $|x| < \rho$  gegen die Summenfunktionen  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

konvergieren und  $f(x) = g(x)$  für alle  $x$  mit  $|x| < \rho$  gilt, so sind die beiden P.n identisch, d. h., es ist  $a_n = b_n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  Dieselbe Folgerung kann man schon ziehen, wenn  $f(x_i) = g(x_i)$  nur für eine Zahlenfolge  $(x_i)$  mit  $x = 0$  als Häufungspunkt gilt. Dieser Satz bildet die Grundlage für die Methode des Koeffizientenvergleichs. Die P.n  $(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$  und  $(1+x)^b = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} x^k$  z. B. sind für beliebige reelle  $a, b$  beide für  $|x| < 1$  absolut konvergent ( $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen, binomische Reihe). Einerseits gilt (11) nach der Cauchyschen Produktformel ( $\nearrow$  absolute Konvergenz von

Reihen) andererseits ist  $(1+x)^{a+b} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+b}{k} x^k$ .

Aus  $f(x) = (1+x)^{a+b} = g(x)$  für  $|x| < 1$  folgt dann (12) nach dem Identitätssatz für P.n. Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  stellt (12) das Additionstheorem der Binomialkoeffizienten dar.

$$(11) \quad (1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b \\ = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} x^k \right) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k \binom{a}{s} \binom{b}{k-s} \right) x^k$$

$$(12) \quad \binom{a+b}{k} = \sum_{s=0}^k \binom{a}{s} \binom{b}{k-s} \\ = \binom{a}{0} \binom{b}{k} + \binom{a}{1} \binom{b}{k-1} + \dots + \binom{a}{k} \binom{b}{0}$$

Hat die P.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  einen Konvergenzradius  $r \neq 0$  und ist die Summenfunktion  $f(x)$  gerade, d. h.  $f(x) = f(-x)$ , so erhält man mit dem Identitätssatz aus  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k = f(-x)$  für alle  $n$  die Beziehung  $a_n = (-1)^n a_n$ , aus der  $a_{2s+1} = 0$  für alle  $s$  folgt. Läßt sich danach eine gerade Funktion  $f(x)$  in eine P. entwickeln, so treten in dieser nur gerade Potenzen von  $x$  auf:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots$$

Entsprechend gilt für eine ungerade Funktion  $h(x)$ ,  $h(x) = -h(-x)$ , die durch eine P. dargestellt wird:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

Der Identitätssatz kann auch auf P.n der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  angewendet werden. Ist eine Funktion  $f(x)$  in der Umgebung  $U$  eines Punktes  $x_0$  Summenfunktion einer P. der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ , so ist die

P. durch  $f(x)$  eindeutig bestimmt. Sollten sich über  $U$  auf verschiedenen Wegen zwei P.n für dieselbe Funktion  $f(x)$  ergeben, so müssen die Koeffizienten entsprechender Potenzen einander gleich sein.

**VII. Transformation auf einen neuen Mittelpunkt.**

Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  eine P. mit dem Konvergenzradius  $r \neq 0$  und  $x_1$  irgendein Punkt aus dem Innern des Konvergenzintervalls, so läßt sich die durch diese P. gegebene Funktion  $f(x)$  auch um  $x_1$  als Mittelpunkt in eine P. entwickeln, d. h., es gilt auch  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$ . Die Koeffizienten  $b_k$  der durch *Umordnung* gewonnenen Reihe berechnen sich für  $k = 0, 1, 2, \dots$  als unendl. Reihen (13), die wegen der unter V. gen. Eigenschaft konvergieren. Für den Konvergenzradius  $r_1$  der neuen P. (13a) gilt  $r_1 \geq r - |x_1 - x_0|$ . Der in der Abbildung stark gezeichnete Teil des Intervalls  $|x_0 - r, x_0 + r|$  gehört sicher zum Konvergenzintervall der neuen P. (Abb. 2).

$$(13) \quad b_k = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{k+s}{k} a_{k+s}(x_1 - x_0)^s$$

$$(13a) \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$$

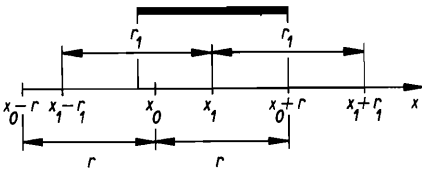


Abb. 2: Transformation einer Potenzreihe auf einen neuen Mittelpunkt

**VIII.** Die Summenfunktion  $f(x)$  der P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist für alle Werte von  $x$  aus dem Konvergenzintervall  $]-r, r[$  eine stetige Funktion. Eine Verschärfung dieser Aussage bildet der *Abelsche Stetigkeitssatz*: Ist die P. für  $x = r$  noch konvergent, so ist die Funktion  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in  $]-r, r[$  stetig, d. h., die Funktion  $f(x)$  ist in jedem Punkt des Intervalls  $]-r, r[$  stetig, in  $x = r$  linksseitig stetig, und es gilt  $\lim_{x \uparrow r} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ .

**IX.** Die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  kann im Intervall  $[0, \bar{x}]$  mit  $|\bar{x}| < r$  stets *gliedweise integriert* werden, d. h., für die Summenfunktion  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  gilt (14), und die durch gliedweise Integration entstandene P. hat denselben Konvergenzradius wie die gegebene P.

$$(14) \quad \int_0^{\bar{x}} f(x) dx = \int_0^{\bar{x}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\bar{x}} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\bar{x}^{k+1}}{k+1}$$

Der Punkt  $\bar{x}$  kann dabei auch mit einem Randpunkt  $x = -r$  oder  $x = r$  des Konvergenzintervalls zusammenfallen, wenn die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  in diesem noch konvergent ist.

**X.** Die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  kann innerhalb des Konvergenzintervalls  $]-r, r[$  *gliedweise differenziert* werden, d. h., die Summenfunktion  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ist differenzierbar, und es gilt (15), und die P.  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  hat denselben Konvergenzradius wie die vorgegebene P.

$$(15) \quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} (a_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Ausführlicher geschrieben, folgt aus  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$  dann  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$  Diese Behauptung gilt auch in den Randpunkten  $x = -r$  und  $x = r$  des Konvergenzintervalls, wenn die P.  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  in diesen Randpunkten noch konvergiert. Verallgemeinernd gilt, daß eine durch eine P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  dargestellte Funktion  $f(x)$  im Innern des Konvergenzintervalls  $]-r, r[$  beliebig oft differenzierbar ist und daß die  $p$ -te Ableitung  $f^{(p)}(x)$  für  $p = 1, 2, \dots$  durch (16) gegeben wird.

$$(16) \quad f^{(p)}(x) = p! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{p} a_{k+p} x^k = \sum_{k=p}^{\infty} k(k-1)(k-2) \dots (k-p+1) a_k x^{k-p}$$

Die P.  $1/(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  z. B. hat den Konvergenzradius  $r = 1$  und kann folglich gliedweise in dem Intervall  $[0, \bar{x}]$  mit  $|\bar{x}| < 1$  integriert werden. Nach (17) gilt (18). Diese P. hat wiederum den Konvergenzradius  $r = 1$  und ist für  $\bar{x} = -1$  noch konvergent, denn  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$  konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium (↗ Konvergenzkriterien für Reihen IV.). Nach dem Abelschen Stetigkeitssatz gilt dann (19).

$$(17) \quad \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{1-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\bar{x}} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^{k+1}}{k+1}$$

$$(18) \quad \ln(1-\bar{x}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}^k/k$$

genzradius  $r = 1$  und ist für  $\bar{x} = -1$  noch konvergent, denn  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$  konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium (↗ Konvergenzkriterien für Reihen IV.). Nach dem Abelschen Stetigkeitssatz gilt dann (19).

$$(19) \quad \lim_{\bar{x} \downarrow -1} \ln(1-\bar{x}) = \ln 2 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Differenziert man die P.  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  im Konvergenzintervall  $]-1, 1[$  gliedweise, so erhält man (20) für alle  $x \in ]-1, 1[$ .

$$(20) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \\ = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

Um die Summe der nach dem Leibnizschen Kriterium konvergenten Reihe (21) zu bestimmen, wendet man zunächst in (22) den Abelschen Stetigkeitssatz an und erhält nach gliedweiser Integration in (23) das Ergebnis (24).

$$(21) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+5}$$

$$(22) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+5} = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+5} x^{2k+5} \\ = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k+4} dt$$

$$(23) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k+4} dt = \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k+4} \right) dt \\ = \int_0^x t^4 \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k dt = \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt \\ = \frac{1}{3} x^3 - x + \arctan x$$

$$(24) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+5} = \lim_{x \uparrow 1} \left( \frac{1}{3} x^3 - x + \arctan x \right) \\ = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

**XI. Addition, Subtraktion und Multiplikation von P.n.:**

Haben die P.n.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  die Konvergenzradien  $r$  bzw.  $r'$  und die Summenfunktionen  $f(x)$  bzw.  $g(x)$ , so konvergieren die P.n.  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) x^k$  für jedes  $x$  aus dem gemeinsamen Konvergenzintervall der beiden P.n. und haben die Summenfunktionen  $f(x) + g(x)$  bzw.  $f(x) - g(x)$ .

Es gilt  $f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) x^k$  für alle  $x$  mit  $|x| < \text{Min} \{r, r'\}$ .

Nach Eigenschaft IV. ist jede P. für alle Punkte im Innern des Konvergenzintervalls absolut konvergent, so daß (25) für jedes  $x$  mit  $|x| < \text{Min} \{r, r'\}$  gilt ( $\nearrow$  absolute Konvergenz).

$$(25) \quad f(x) g(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k a_s b_{k-s} \right) x^k$$

**XII. Einsetzen einer P. in eine andere:** Man betrachtet die mittelbare Funktion  $F(x) = f(z) = f(g(x))$ , in der  $z = g(x)$  für  $|x| < r$  die Summenfunktion einer

P.  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  ist, deren Funktionswerte  $z = g(x)$  für alle  $x$  mit  $|x| < r$  dem Konvergenzbereich der P.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  angehören.

Diese Funktion  $F(x)$  kann mindestens für diejenigen  $x$ , für die die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k x^k|$  konvergiert und eine Summe hat, die kleiner als der Konvergenzradius  $r'$  der P.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  ist, in eine P.  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  entwickelt werden. Die Koeffizienten  $c_n$  dieser P. erhält man, indem man  $z^k = \left( \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s \right)^k = \sum_{s=0}^{\infty} b_k x^s$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  ausrechnet und in  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  einsetzt.

Man erhält (26) oder (27) nach Zusammenfassen der Glieder mit gleichen Potenzen von  $x$  mit  $c_0 = a_0 + a_1 b_{10} + a_2 b_{20} + \dots, c_1 = a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \dots$  usw., allgemein  $c_n = a_1 b_{1n} + a_2 b_{2n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{kn}$  für  $n = 1, 2, \dots$

$$(26) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s \right)^k \\ = a_0 + a_1 (b_{10} + b_{11}x + \dots) + a_2 (b_{20} + b_{21}x + \dots) + \dots$$

$$(27) \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

**XIII. Division durch eine P.:** Sind die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  die Summenfunktionen der P.n.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  und ist  $g(0) = b_0 \neq 0$ , so läßt sich auch  $F(x) = f(x)/g(x)$  in einer Umgebung von  $x = 0$  in eine P. entwickeln. Offenbar genügt es,  $1/g(x)$  in eine P. zu entwickeln. Setzt man  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = b_0 + (b_1 x + b_2 x^2 + \dots) = b_0 + z$ , so gilt (28) für alle  $x$ , die dem Konvergenzintervall der P.  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  angehören und noch die Bedingung  $|z| = |b_1 x + b_2 x^2 + \dots| < |b_0|$  erfüllen.

$$(28) \quad \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0 + z} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + z/b_0} \\ = \frac{1}{b_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{z}{b_0} \right)^k = \frac{1}{b_0} - \frac{z}{b_0^2} + \frac{z^2}{b_0^3} - \dots$$

Durch Einsetzen von  $z = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  gemäß XII. erhält man die gewünschte P. für  $1/g(x)$  und dann für  $f(x)/g(x)$ .

Weiß man, daß  $1/g(x)$  sich unter den angegebenen Bedingungen in eine P. entwickeln läßt, so setzt man  $1/g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  als eine P. mit unbestimmten Koeffizienten  $c_k$  an und bestimmt die Koeffizienten  $c_k$  durch Koeffizientenvergleich aus (29).

$$(29) \quad 1 = g(x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k b_s c_{k-s} \right) x^k$$

Für die unbestimmten Koeffizienten ergeben sich nach dem Identitätssatz für P. die Gleichungen:  $1 = b_0 c_0$  und

$$0 = \sum_{s=0}^k b_s c_{k-s} = b_0 c_k + b_1 c_{k-1} + \dots + b_k c_0 \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Daraus lassen sich  $c_0, c_1, c_2, \dots$  bestimmen.

Auch für  $f(x)/g(x)$  mit  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  macht man den Ansatz  $f(x)/g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  und ermittelt die unbestimmten Koeffizienten  $c_0, c_1, c_2, \dots$  aus (30), d. h. aus den Gleichungen  $a_k = \sum_{s=0}^k c_s b_{k-s}$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$(30) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{s=0}^k c_s b_{k-s} \right) x^k$$

Soll z. B.  $F(x) = 1/(1 - \sin x)$  in der Umgebung von  $x = 0$  in eine P. entwickelt werden, so kann man (31) (Entwicklung von Funktionen) in  $f(z) = 1/(1 - z)$  mit  $z = \sin x$  einsetzen. Dazu berechnet man die Potenzen von  $z$  nach (32) und erhält aus  $1/(1 - z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + \dots$  schließlich (33).

$$(31) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$(32) \quad z = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots,$$

$$z^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} - + \dots,$$

$$z^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} - + \dots,$$

$$z^4 = x^4 - \frac{2x^6}{3} + - \dots,$$

$$z^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} + - \dots, \quad z^6 = x^6 - + \dots$$

$$(33) \quad F(x) = 1/(1 - \sin x) = 1 + x + x^2 + (1 - 1/6) x^3 + (1 - 1/3) x^4 + (1 - 1/2 + 1/120) x^5 + (1 - 2/3 + 2/45) x^6 + \dots = 1 + x + x^2 + 5/6 x^3 + 2/3 x^4 + 61/120 x^5 + 17/45 x^6 + \dots$$

Diese Entwicklung konvergiert sicher für die  $x$ , für die (34) gilt. Da die Reihe in (34) die Summenfunktion  $\sinh |x|$  hat, konvergiert die Entwicklung sicher für  $|x| < 0,88$ , denn  $\sinh 0,88 < 1$ .

$$(34) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} < |b_0| = 1$$

Eine P. für  $F(x) = 1/(1 - \sin x)$  kann man auch durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten ermitteln. Dazu wird  $1/(1 - \sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  gesetzt, denn für  $g(x) = 1 - \sin x$  gilt  $g(0) = 1 \neq 0$ ,

und man erhält aus  $1 = (1 - \sin x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_k - \sum_{s=0}^k b_s c_{k-s} \right) x^k$  mit  $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  die Koeffizienten  $b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -1/6, b_4 = 0, b_5 = 1/120, b_6 = 0, \dots$  Aus den Gleichungen  $1 = c_0 - b_0 c_0$  und  $c_k = \sum_{s=0}^k b_s c_{k-s}$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$

erhält man:  $c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 5/6, c_4 = 2/3, c_5 = 61/120, c_6 = 17/45, \dots$  Berücksichtigt wurde stets  $b_{2k} = 0$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  Es ergibt sich auch hier die Entwicklung (33).

Die Funktion  $\tan x = \sin x / \cos x$  kann in eine P. um  $x = 0$  entwickelt werden, da  $g(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$  ist.  $F(x) = \tan x$  ist wegen  $\tan(-x) = -\tan x$  eine ungerade Funktion, so daß eine P. für  $\tan x$  nur ungerade Potenzen von  $x$  enthält. Berücksichtigt man dies gleich im Ansatz (35), so erhält man (36).

$$(35) \quad \tan x = \sin x / \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$(36) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = (c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots) \times (1 - 1/2 x^2 + 1/24 x^4 - 1/720 x^6 \pm \dots)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man  $c_1 = 1, c_3 = 1/3, c_5 = 2/15, c_7 = 17/315, \dots$  und damit (37) mindestens für die  $x$ , für die  $\cosh |x| - 1 < \cos 0 = 1$  gilt, d. h. für  $|x| < 1,3$ .

$$(37) \quad \tan x = x + 1/3 x^3 + 2/15 x^5 + 17/315 x^7 + \dots$$

**XIV. Umkehrfunktion einer P.:** Ist die Funktion  $y = f(x)$  mit  $f(x_0) = y_0$  in der Umgebung von  $x = x_0$  in eine P.  $y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  entwickelbar und ist  $a_1 \neq 0$ , so existiert die Umkehrfunktion  $x = \varphi(y)$  in der Umgebung von  $y = y_0$  und ist in eine P.  $x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (y - y_0)^k$  entwickelbar. Die Existenz der Umkehrfunktion folgt aus der Voraussetzung  $f'(x_0) = a_1 \neq 0$ , denn wegen der Stetigkeit folgt  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x$  einer Umgebung von  $x_0$ , und deshalb ist die Funktion  $f(x)$  in einer Umgebung von  $x = x_0$  eigentlich monoton wachsend oder fallend. Die P.

für die Umkehrfunktion  $\varphi(y) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (y - y_0)^k$  ergibt sich, wenn man  $\varphi(y)$  mit den unbestimmten Koeffizienten  $b_n$  in die Relation  $y = f(\varphi(y))$  einsetzt. Die Koeffizienten  $b_n$  lassen sich daraus eindeutig durch Koeffizientenvergleich bestimmen.

Die Umkehrfunktion zur Funktion  $y = f(x) = \sin x$  z. B. kann in der Umgebung von  $y = 0$  in eine P. entwickelt werden, denn  $f'(0) = 1 \neq 0$ . Dazu setzt man  $\varphi(y) = \arcsin y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k$  in die Relation  $y = \sin(\arcsin y)$  ein und erhält wegen  $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - + \dots$  zunächst (38) und dar-

aus durch Koeffizientenvergleich  $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 1/6, b_4 = 0, b_5 = 3/40, \dots$  Danach hat  $\varphi(y) = \arcsin y$  die Entwicklung (39) in eine P.

$$(38) \quad y = (b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \dots) - 1/6 [b_1^3 y^3 + 3b_1^2 b_2 y^4 + (3b_1^2 b_3 + 3b_1 b_2^2) y^5 + \dots] + 1/120 (b_1^5 y^5 + \dots) - + \dots$$

$$(39) \quad \arcsin y = y + 1/6 y^3 + 3/40 y^5 + \dots$$

Die *Taylor'sche Reihe* schafft unter gewissen Voraussetzungen die Möglichkeit, eine gegebene Funktion in eine P. zu entwickeln.

Eine Funktion, die sich in der Umgebung eines Punktes  $x = x_0$  in eine P. entwickeln läßt, heißt *analyt. Funktion* in  $x = x_0$ . Die aufgezählten Eigenschaften der P. werden sehr wesentlich bei der Entwicklung von Funktionen eingesetzt.

**XV.** Man kann die Theorie der P.n auch im *Komplexen* entwickeln. Eine P.  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  bzw.  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ ,

in der  $z, z_0$  und die Koeffizienten  $c_k$  komplexe Zahlen sind, konvergiert beständig oder nirgends, oder es gibt eine reelle Zahl  $r > 0$ , so daß die Reihe für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r$  konvergiert und für alle  $z$  mit  $|z - z_0| > r$  divergiert. In der komplexen  $z$ -Ebene liegen alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r$  im Inneren eines Kreises mit dem Radius  $r$  und dem Mittelpunkt  $z_0$ ; daher heißt der Konvergenzbereich hier *Konvergenzkreis*. Die Größe seines Radius kann man wie im Reellen mit dem Cauchy-Hadamardschen Satz ermitteln. Über das Konvergenzverhalten der P. auf dem Rand des Konvergenzkreises läßt sich wiederum nichts Allgemeines aussagen. Es gelten alle für P.n im Reellen gemachten Aussagen auch für die P.n mit komplexen Gliedern, mit Ausnahme von IX. S. a. komplexwertige Funktion, elementare, II.; analytische Fortsetzung.

**Potenzrest** ↗ Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

**Potenzsummen:** symmetr. Polynome in den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_k$  von der Form  $S_n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$  S. a. Polynom IV.

**PPM** svw. Pulsphasenmodulation ↗ Modulation II.

**Prädikat:** *mathematische Logik* inhaltlich eine Widerspiegelung einer *Eigenschaft* oder einer *Beziehung*; im philosoph. Sinne die *Intension eines Begriffes*; in der P.enlogik ein unanalysierter Grundbegriff. P. sind z. B.: »... ist eine gerade Zahl«, »... ist Vater von ...«, »... liegt zwischen ... und ...«, »... sind Geschwister«. Jedes P. hat eine Anzahl von *Leerstellen*, in die Variable oder Bezeichnungen für bestimmte Dinge eingetragen werden können; z. B. entstehen auf diese Art aus den angegebenen P.en » $x$  ist eine gerade Zahl«, »5 ist eine gerade Zahl«, »A liegt zwischen B und C«, »Klaus, Gisela sind Geschwister«. Trägt man in gewisse oder alle Leerstellen eines P.s Variable ein, entsteht eine *Aussageform* (s. a. Prädikatenlogik II.), trägt man in alle Leerstellen Bezeichnungen für bestimmte Dinge ein, entsteht eine *Aussage*; z. B. ist »25 ist die Summe von  $x$  und  $7$ « eine Aussageform, »25 ist die Summe von 18 und  $7$ « eine Aussage. Die Anzahl der Leerstellen eines P.s nennt man dessen *Stellenzahl*

bzw. *Arität*. Die *einstelligen* bzw. *unären* P.e spiegeln Eigenschaften wider, die mehrstelligen P.e dagegen Beziehungen. Je nach der Anzahl der Leerstellen werden mehrstellige P.e unterteilt in 2stellige oder *binäre*, 3stellige oder *ternäre*, 4stellige oder *quaternäre* usw. Das P. »... ist eine Primzahl z. B. ist einstellig, das P. »... ist die Summe von ... und ...« ist 3stellig. — Eine andere Unterscheidung der P.e ist die nach Stufen. In die Leerstellen eines P.s der *ersten Stufe* können nur Variable oder Bezeichnungen für Dinge eingesetzt werden, in einem P. der *zweiten Stufe* ist wenigstens eine Leerstelle mit Variablen oder Bezeichnungen für P.e der ersten Stufe zu belegen, in einem P. der *dritten Stufe* ist wenigstens eine Leerstelle mit Variablen oder Bezeichnungen für P.e der zweiten Stufe zu belegen, usw. P.e der zweiten und höherer Stufen werden zusammenfassend als *P.e höherer Stufen* bezeichnet. Die gewönl. Größenordnungsbeziehung »...  $\leq$  ...« zwischen natürl. Zahlen z. B. ist ein P. der ersten Stufe und »... ist ein 3stelliges P. der ersten Stufe« ist ein P. der zweiten Stufe. *P.e der ersten Stufe spiegeln Eigenschaften von Dingen und Beziehungen zwischen Dingen* wider, *P.e der zweiten Stufe spiegeln Eigenschaften von Ding-Eigenschaften, Beziehungen zwischen Ding-Eigenschaften, Eigenschaften von Ding-Beziehungen* usw. wider. P.e höherer Stufen nennt man auch *Prädikaten-Prädikate*. Der unpräzise Gebrauch von P.en höherer Stufen kann zu Antinomien führen. Zur Theorie von P.en s. a. Prädikatenlogik.

**Prädikatenkalkül:** *mathematische Logik I.* Kalkül zur Herleitung der prädikatenlog. Gesetze und der allgemeingültigen Aussageformen der Prädikatenlogik aus vorgegebenen Axiomen mittels gewisser Ableitungsregeln. Analog zur Stufeneinteilung der Prädikatenlogik unterscheidet man *P.e verschiedener Stufen*, die sich in ihren Ausdrucksmitteln, ihrer Ausdrucksfähigkeit und insbes. in den erlaubten Quantifizierungen unterscheiden. Der Kalkül zur Erfassung der vollen Prädikatenlogik wird *Stufenkalkül* oder *Typentheorie* gen.

Beim P. der ersten Stufe hat man zwei Versionen zu unterscheiden: im *engeren P. der ersten Stufe* kommt unter den Prädikatenkonstanten das Prädikat » = « nicht vor, im *P. der ersten Stufe mit Identität* ist aber » = « eine Prädikatenkonstante. Im P. der zweiten und in den P.en höherer Stufen ist eine derartige Unterscheidung nicht mehr erforderlich, da schon im P. der zweiten Stufe die *Identität*  $x = y$  von Individuen definierbar ist durch  $\forall P(P(x) \leftrightarrow P(y))$  für jedes Prädikat  $P, P(x)$  genau dann, wenn  $P(y)$ . Dabei sind  $x, y$  Individuenvariablen und  $P$  eine Variable für einstellige Prädikate der ersten Stufe, d. h., man erklärt inhaltlich die Identität von Dingen dadurch, daß man Dinge als *gleich* ansieht, wenn sie *dieselben Eigenschaften* haben. Diese Erklärung geht auf **LEIBNIZ** zurück. Die Gleichheit von Prädikaten, die in den P.en der höheren Stufen ebenfalls zu betrachten ist, wird dadurch erklärt, daß man zwei Prädikate  $n$ -ter Stufe genau dann gleich nennt, wenn sie auf dieselben Dinge und Prädikate niederer Stufen zutreffen.

II. Die für die Bildung von *Ausdrücken* des P.s zur Verfügung stehenden Ausdrucksmittel sind *Individuenvariablen*, *Variablen* und *Konstanten für Prädikate* der jeweils zugelassenen Stufen, mitunter Individuenkonstanten und Variable für *Funktionen*, jedenfalls aber die *log. Konstanten*, die *Junktoren*  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  ( $\nearrow$  Aussagenlogik II.) und die *Quantifikatoren*  $\forall$ ,  $\exists$  ( $\nearrow$  Prädikatenlogik I.) sowie unter Umständen  $\varepsilon$  und als techn. Zeichen *Klammern*. Die als Ausdrücke des P.s fungierenden Zeichenreihen werden *induktiv definiert*, nachdem man vorher erklärt hat, welche Zeichenreihen *Terme*, d. h. Bezeichnungen für Dinge, sein sollen: (a) jede Individuenvariable und jede Individuenkonstante ist ein Term; (b) ist  $f$  ein Symbol für eine  $n$ -stellige Funktion und sind  $t_1, \dots, t_n$  Terme, so ist  $f(t_1, \dots, t_n)$  ein Term; (c) jeder Term läßt sich sukzessiv mittels (a), (b) erzeugen (s. a. Aussagenkalkül, induktive Definition des Ausdrucks).

*Ausdruckdefinition für den P. der ersten Stufe mit Identität:* (a) für jede  $n$ -stellige Prädikatenvariable  $P$  und je  $n$  Terme  $t_1, \dots, t_n$  ist  $P(t_1, \dots, t_n)$  ein Ausdruck; (b) für Terme  $t_1, t_2$  ist  $t_1 = t_2$  ein Ausdruck; (c) für jeden Ausdruck  $H$  ist  $\neg H$  ein Ausdruck; (d) für alle Ausdrücke  $H_1, H_2$  sind  $(H_1 \wedge H_2)$ ,  $(H_1 \vee H_2)$ ,  $(H_1 \rightarrow H_2)$ ,  $(H_1 \leftrightarrow H_2)$  Ausdrücke; (e) für jeden Ausdruck  $H$  und jede in  $H$  vollaufreie Variable  $x$  sind  $\forall xH$  und  $\exists xH$  Ausdrücke; (f) jeder Ausdruck läßt sich sukzessiv mittels (a), ..., (e) herstellen. Dabei heißt eine Variable  $x$  eine *vollfreie Variable* eines Ausdrucks  $H$ , falls  $x$  in dem Ausdruck  $H$  vorkommt, jedoch keine Teilzeichenreihe der Form  $\forall x$  oder  $\exists x$ , in der die Variable durch Quantifizierung gebunden ist ( $\nearrow$  Prädikatenlogik).

III. *Der Wirkungsbereich* eines in einem Ausdruck  $H$  vorkommenden Quantifikators  $\forall$  bzw.  $\exists$ , der die Variable  $x$  quantifiziert, ist der kürzeste auf die Zeichen  $\forall x$  bzw.  $\exists x$  innerhalb  $H$  folgende Teil von  $H$ , der selbst Ausdruck ist; z. B. ist im Ausdruck  $\forall x(\exists y \neg G(x, y) \vee H(x))$  für jedes  $x$  gilt: es gibt ein  $y$ , so daß  $G(x, y)$  nicht gilt oder es gilt  $H(x)$  der Ausdruck  $\neg G(x, y)$  der Wirkungsbereich des Quantifikators  $\exists$ . Eine Variable  $x$  eines Ausdrucks  $H$  ist an einer Stelle in  $H$  *gebunden*, falls diese Stelle im Wirkungsbereich eines  $x$  *bindenden* Quantifikators  $\forall x$  bzw.  $\exists x$  liegt, sie ist an einer Stelle in  $H$  *frei*, falls sie an dieser Stelle nicht gebunden ist und nicht unmittelbar hinter einem Quantifikator  $\forall$  bzw.  $\exists$  steht.

IV. Ein mögl. System von Axiomen und Ableitungsregeln für den P. der ersten Stufe erhält man, wenn man als Axiome alle die Ausdrücke nimmt, die aus den Axiomen eines Axiomensystems für den Aussagenkalkül dadurch entstehen, daß man für die Aussagevariablen Ausdrücke des P.s einsetzt, und wenn man folgende vier Ableitungsregeln benutzt.

IV.1. Die *Abtrennungsregel*: aus Ausdrücken  $H_1$  und  $H_1 \rightarrow H_2$  kann der Ausdruck  $H_2$  abgeleitet werden.

IV.2a. Die *vordere Generalisierung*: ist  $H_1 \rightarrow H_2$  ein Ausdruck, in dem  $x$  vollaufreie Variable von  $H_1$  ist, so darf  $\forall xH_1 \rightarrow H_2$  abgeleitet werden.

IV.2b. Die *hintere Generalisierung*: ist  $H_1 \rightarrow H_2$  ein Ausdruck und kommt die Variable  $x$  nicht in  $H_1$ , jedoch vollfrei in  $H_2$  vor, so darf  $H_1 \rightarrow \forall xH_2$  abgeleitet werden.

IV.3a. Die *vordere Partikularisierung*: ist  $H_1 \rightarrow H_2$  ein Ausdruck und kommt die Variable  $x$  vollfrei in  $H_1$  und nicht in  $H_2$  vor, so darf  $\exists xH_1 \rightarrow H_2$  abgeleitet werden.

IV.3b. Die *hintere Partikularisierung*: ist  $H_1 \rightarrow H_2$  ein Ausdruck und kommt die Variable  $x$  vollfrei in  $H_2$  vor, so darf  $H_1 \rightarrow \exists xH_2$  abgeleitet werden.

IV.4a. Die *freie Termeinsetzung*: ist  $H$  ein Ausdruck mit der freien Variablen  $x$ , steht  $x$  in  $H$  im Wirkungsbereich von Quantifikatoren, die  $x_1, \dots, x_{i_1}$  binden, und im Wirkungsbereich keiner weiteren Quantifikatoren und ist  $t$  ein Term, in dem die Variablen  $x_1, \dots, x_{i_1}$  nicht frei vorkommen, so darf aus  $H$  derjenige Ausdruck  $H[x/t]$  abgeleitet werden, den man erhält, wenn man überall in  $H$  die freie Variable  $x$  durch den Term  $t$  ersetzt. Im Falle des P. der ersten Stufe mit Identität kommen noch folgende *Identitätsaxiome* hinzu:

IV.4b. alle Ausdrücke  $t = t$  für Terme  $t$  und  
IV.4c. alle Ausdrücke  $t_1 = t_2 \rightarrow (H[x/t_1] \rightarrow H[x/t_2])$  für Terme  $t_1, t_2$  und Ausdrücke  $H$  mit der freien Variablen  $x$ , bei denen sowohl  $t_1$  als auch  $t_2$  gemäß der Regel für die freie Termeinsetzung für  $x$  eingesetzt werden dürfen.

V. Jeder im P. ableitbare Ausdruck ist *allgemeingültig* ( $\nearrow$  Prädikatenlogik), falls er eine Aussage ist, d. h. ein Ausdruck ohne freie Variable; er ist mithin logisch wahr. Der *Gödelsche Vollständigkeitssatz* besagt, daß umgekehrt auch jeder allgemeingültige Ausdruck und damit *jede logisch wahre Aussage im P. der ersten Stufe abgeleitet* werden kann. Dieses letzte Resultat gilt jedoch nur für die Prädikatenlogik der ersten Stufe mit und ohne Identität, denn aus dem *Gödelschen Unvollständigkeitssatz* folgt, daß die Prädikatenlogik zweiter und höherer Stufe nicht in dem Sinne adäquat durch einen Kalkül erfaßt werden kann, daß im Kalkül genau die allgemeingültigen Ausdrücke dieser Prädikatenlogik ableitbar sind.

Es gilt die *Unentscheidbarkeit des P.s* sowohl der ersten Stufe als auch der höheren Stufen, d. h., es gibt kein Verfahren, keinen Algorithmus, mit dem für jeden mit den Ausdrucksmitteln jenes P.s bildbaren Ausdruck festgestellt werden kann, ob er allgemeingültig ist oder nicht; ebenso gibt es kein Verfahren, mit dem für jeden Ausdruck des P.s festgestellt werden kann, ob er erfüllbar ist oder nicht. Daraus resultieren die *Entscheidungsprobleme* bzgl. der Allgemeingültigkeit bzw. bzgl. der Erfüllbarkeit für den P.: V.1. Möglichst günstige Lösungen des Entscheidungsproblems bestehen darin, für möglichst umfassende Klassen von Ausdrücken des P.s Verfahren anzugeben, die für alle Elemente dieser Klassen die Entscheidung über deren Allgemeingültigkeit bzw. über deren Erfüllbarkeit liefern. V.2. Eine *Reduktion dieser Entscheidungsprobleme* besteht darin, eine möglichst kleine Klasse von Ausdrücken anzugeben, aus deren Entscheidbarkeit bzgl. der Allgemein-



gültigkeit bzw. bzgl. der Erfüllbarkeit ein Entscheidungsverfahren für den gesamten P. folgen würde. Ein Resultat der ersten Art ist z. B. das Ergebnis, daß es ein Entscheidungsverfahren gibt für die Klasse aller Ausdrücke des P. der ersten Stufe, in denen höchstens einstellige Prädikate der ersten Stufe auftreten.

**Prädikatenlogik:** *mathematische Logik* Theorie der Prädikate beliebiger Stellenzahl und Stufe; zugleich Erweiterung der Aussagenlogik, die dadurch entsteht, daß man den *inneren Aufbau* einfachster Aussagen berücksichtigt, die von der Form »das Prädikat  $P$  trifft auf die Dinge  $a_1, \dots, a_n$  zu« sind, und daß man Quantifizierungen in die Betrachtung einbezieht.

I. Als Ausdrucksmittel verwendet man *Individuenvariable* und *-konstanten*, das sind Variable und Konstanten für Dinge, *Prädikatenkonstante*, *Prädikatenvariablen*, die *Junktoren* der Aussagenlogik sowie *Quantifikatoren*. Dabei muß eine nichtleere Menge  $I$  als Individuenbereich gegeben sein, deren Elemente die mögl. Bedeutungen der Individuenvariablen sind und die durch die Individuenkonstanten bezeichneten Elemente enthält. Als Prädikatenkonstanten hat man oft das Gleichheitszeichen  $=$  und mitunter auch das Zeichen  $\in$  für die Element-Beziehung. Die wichtigsten Quantifikatoren sind der *All-Operator* bzw. *Generalisator*  $\forall$  »für alle« und der *Existential-Operator* bzw. *Partikularisator*  $\exists$  »es gibt ein ...«. Mitunter betrachtet man auch *weitere Quantifikatoren*, z. B.  $\exists!$  »es gibt höchstens ein ...«,  $\exists!!$  »es gibt genau ein ...« und die *Anzahlquantifikatoren*  $\exists_n$  »es gibt mindestens  $n$  ...«,  $\exists_n!$  »es gibt höchstens  $n$  ...« und  $\exists_n!!$  »es gibt genau  $n$  ...«. Alle diese zusätzl. Quantifikatoren sind jedoch mittels  $\forall$ ,  $\exists$  und  $=$  definierbar. — In der Literatur findet man für die Quantifikatoren  $\forall$  bzw.  $\exists$  auch die Zeichen  $\wedge$  bzw.  $\vee$ .

II. Variablen in einem Ausdruck, auf die sich ein Quantifikator bezieht, heißen *gebunden*, Variable eines Ausdrucks, auf die sich kein Quantifikator bezieht, heißen *frei* (s. a. Prädikatenkalkül). Ausdrücke, in denen freie Variable vorkommen, heißen *Aussageformen*. Diese erhalten erst dann eine Bedeutung und damit einen Wahrheitswert, wenn alle in ihnen vorkommenden freien Variablen als spezielle Individuen *interpretiert* oder durch Quantifizierung *gebunden* werden. Jede Aussageform mit  $n$  freien Variablen beschreibt eine  $n$ -stellige *Relation* im Individuenbereich. Ist z. B.  $I$  die Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen, sind  $x, y$  Individuenvariablen, 1, 2 Individuenkonstanten und  $<$  das zweistellige Prädikat »kleiner als«, so sind  $x < y$  und  $x^2 = 2$  Aussageformen, die durch Quantifizierungen in Aussagen übergehen, z. B.  $\forall x \exists y (x < y)$  »zu jedem reellen  $x$  gibt es ein reelles  $y$ , für das  $x$  kleiner als  $y$  ist« oder  $\exists x (x^2 = 2)$  »es gibt ein reelles  $x$  mit  $x^2 = 2$ « oder  $\exists_2 x (x^2 = 2)$  »es gibt höchstens zwei reelle  $x$  mit  $x^2 = 2$ «. Interpretiert man  $x$  als die reelle Zahl 1, so entstehen aus  $x < y$ ,  $x^2 = 2$  die Aussageform  $1 < y$  und die Aussage  $1^2 = 2$ . Die Aussageform  $1 < y$  wiederum kann durch Interpretation von  $y$  als die reelle Zahl 1 zur

Aussage  $1 < 1$  führen oder durch Quantifizierung z. B. zur Aussage  $\forall y (1 < y)$  »für jede reelle Zahl  $y$  gilt  $1 < y$ « werden. Dabei ist leicht zu entscheiden, welche dieser Aussagen den Wahrheitswert  $W$  und welche den Wahrheitswert  $F$  haben.

III. Die Aussage  $\exists x (x^2 = 2)$  ist wahr bzgl. des Individuenbereichs  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen, jedoch falsch bzgl. des Individuenbereichs  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen. Die Aussagen, die bzgl. aller nichtleeren Individuenbereiche wahr sind, heißen *logisch wahr* bzw. *prädikatenlog. Gesetze*. Eine Aussageform, die bei allen Interpretationen ihrer freien Variablen als Dinge eines Individuenbereichs  $I$  bzw. als Prädikate über  $I$  wahr wird, heißt *bzgl. I allgemeingültig*, eine bzgl. jedes nichtleeren Individuenbereichs allgemeingültige Aussageform heißt *schlechthin allgemeingültig*. Prädikatenlog. Gesetze sind z. B. die Aussagen  $\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$  »wenn  $F(x)$  für alle  $x$  gilt, so gibt es ein  $x$ , für das  $F(x)$  gilt«,  $\neg \forall x H(x) \leftrightarrow \exists x \neg H(x)$  »genau dann, wenn  $H(x)$  nicht für alle  $x$  gilt, gibt es ein  $x$ , für das  $H(x)$  nicht gilt« und  $\exists x \forall y G(x, y) \rightarrow \forall y \exists x G(x, y)$  »wenn es ein  $x$  gibt, so daß für alle  $y$  gilt  $G(x, y)$ , so gibt es zu jedem  $y$  ein  $x$ , für das  $G(x, y)$  gilt«. Allgemeingültig sind z. B. 1)  $(F(x) \rightarrow H(x)) \leftrightarrow (\neg H(x) \rightarrow \neg F(x))$  »genau dann, wenn aus  $F(x)$  folgt  $H(x)$ , folgt aus nicht- $H(x)$  nicht- $F(x)$ «, 2)  $F(x) \wedge G(x, y) \rightarrow F(x)$  und 3)  $\forall y H(y) \rightarrow H(x)$  »wenn  $H(y)$  für alle Variablen  $y$ , so  $H(x)$ «, wenn  $F, H$  einstellige und  $G$  zweistellige Prädikatenvariable sind. Aussagen bzw. Aussageformen, für die es einen nichtleeren Individuenbereich und eine Interpretation der Variablen über diesem Individuenbereich gibt, bzgl. dessen sie wahr sind, heißen *erfüllbar*. Man kann den *Satz von Löwenheim-Skolem* beweisen, nach dem eine Aussage bzw. eine Aussageform, die erfüllbar ist, schon von einer geeigneten Interpretation bzgl. eines abzählbar unendl. Individuenbereichs erfüllbar ist — anders formuliert: *Ein Ausdruck, eine Aussage bzw. eine Aussageform ist allgemeingültig, falls Allgemeingültigkeit bzgl. aller abzählbar unendl. Individuenbereiche vorliegt*.

IV. Je nach Art der erlaubten Quantifizierungen unterscheidet man verschiedene P.en: in der *P. der ersten Stufe* dürfen nur Individuenvariablen quantifiziert werden, in der *P. der zweiten Stufe* dürfen Individuenvariablen und Prädikate der ersten Stufe quantifiziert werden; allgemein dürfen in der *P. der* ( $n + 1$ )-*ten Stufe* Individuenvariablen und Prädikate bis  $n$ -ter Stufe quantifiziert werden. — Die P., auch schon die P. der ersten Stufe, ist *nicht entscheidbar*, d. h. es gibt keinen Algorithmus, der für einen beliebigen mit den Ausdrucksmitteln der P. formulierten Ausdruck  $A$  festzustellen gestattet, ob  $A$  eine logisch wahre bzw. eine allgemeingültige Aussage oder Aussageform ist. — Die P. liefert die Begründungen für die in der *Regellogik* betrachteten log. Schlüsse, denen allen prädikatenlog. Gesetze zugrunde liegen. Sie ist außerdem der geeignete Rahmen zur *Formalisierung* mathemat. Theorien und Schlußweisen. Die P. stellt eine wesentl. Ver-

allgemeinerung gewisser Gedankengänge dar, die in der klass. Logik in der Lehre von den *Syllogismen* dargestellt wurden. —

Die P. fand ihre gegenwärtige Ausprägung erst im letzten Jahrhundert, beginnend mit entscheidenden Arbeiten des Jenenser Logikers Gottlob FREGE (1848—1925); wesentl. Ideen wurden allerdings schon von LEIBNIZ (1646—1716) geäußert, fanden jedoch lange Zeit keine Beachtung.

**Prädikatenvariable** ↗ Prädikatenlogik I.

**Prädiktor-Korrektor-Prozeß** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung V.

**Präfix** ↗ Normalform I.

**Prämisse** ↗ Regellogik II.

**pränexte Normalform** ↗ Normalform II.

**pränumerando** ↗ Rentenrechnung III.

**Präordnung** ↗ Anordnungsrelationen I.

**Präzessionswinkel** ↗ Abbildung, affine, V.

**prim** ↗ Teilbarkeit III.

**primal** ↗ Optimierung VII.

**primal-dual-Algorithmus**: ein Verfahren zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben, bei dem, ausgehend von einem Schnittpunkt, der Ecke in der dualen Aufgabe ist, ein Simplexalgorithmus unter Benutzung einer Hilfsziel Funktion so gesteuert wird, daß die erste gefundene Ecke der primalen Aufgabe das Optimum ist (vgl. Optimierung VI.). Die Hilfsziel Funktion spielt etwa die Rolle einer Leitgleichung (↗ Leitveränderliche).

**Primärideal** ↗ Primideal.

**Primelement**: ein Element  $p \neq 0$  eines Integritätsbereiches mit Einselement, das keine Einheit ist und nur triviale Teiler hat. Dabei ist ein Element genau dann eine Einheit, wenn es Teiler des Einselements ist. — Im Ring der ganzen Zahlen sind  $\pm 1$  die einzigen Einheiten und  $\pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \dots$  P.e. Die positiven P.e heißen *Primzahlen*. Die P.e im Ring aller Polynome sind die irreduziblen Polynome.

**prime Restklasse** ↗ Kongruenz von Zahlen II.

**Primfaktorenzerlegung** ↗ Teilbarkeit II.

**Primideal**: ein Ideal  $\mathfrak{p}$  in einem kommutativen Ring  $R$ , mit der Eigenschaft, daß aus  $a \cdot b \in \mathfrak{p}$  und  $a \notin \mathfrak{p}$  stets  $b \in \mathfrak{p}$  folgt. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß der Restklassenring  $R/\mathfrak{p}$  (↗ Ring II.) nullteilerfrei ist. Ein Ideal  $\mathfrak{q}$  von  $R$  heißt *Primärideal*, wenn aus  $a \cdot b \in \mathfrak{q}$  und  $a \notin \mathfrak{q}$  folgt, daß  $b^m \in \mathfrak{q}$  für eine geeignete natürl. Zahl  $m$  ist. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß im Restklassenring  $R/\mathfrak{q}$  jeder Nullteiler nilpotent ist, d. h., zu einem  $\bar{b} \in R/\mathfrak{q}$  mit  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$  und  $\bar{a} \neq 0$  gibt es eine natürl. Zahl  $m$ , so daß  $\bar{b}^m = 0$  ist. Im Ring der ganzen Zahlen sind die P.e die von den Primzahlen erzeugten Hauptideale sowie das Einheits- und das Nullideal, bei den Primärideal en kommen noch die von den Primzahlpotenzen erzeugten Hauptideale hinzu.

**primitive Einheitswurzel** ↗ Kreisteilungsgleichung.

**primitive Periode** ↗ Fouriersche Reihe I., ↗ periodische Funktion, ↗ Winkelfunktion II., VIII.

**Primitivwurzel** ↗ Kongruenz von Zahlen.

**Primkörper**: kleinster Unterkörper, der in einem Körper bzw. Schiefkörper enthalten ist. S. a. Körper I.

**Primteiler** ↗ Teilbarkeit.

**Primzahl**: I. eine natürl. Zahl  $p \neq 1$  und  $p \neq 0$ , die nur die trivialen Teiler 1 und  $p$  hat (↗ Teilbarkeit). Die ersten Zahlen der Primzahlfolge sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Die größte bis 1979 ermittelte P. ist  $2^{21701} - 1$ ; sie hat in dezimaler Schreibweise 6533 Stellen. Aber schon EUKLID hat bewiesen, daß es keine größte P. gibt. Jede natürl. Zahl  $> 1$  ist entweder selbst eine P. oder läßt sich als Produkt von P.en schreiben, z. B. ist  $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ .

Es gilt der *Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie*, auch *Satz von der eindeutigen Primzahlzerlegung* gen. (↗ Teilbarkeit).

II. Die Verteilung der P.en unter den natürl. Zahlen ist äußerst unregelmäßig. Einerseits gibt es in der P.folge beliebig große Lücken, z. B. ist keine der aufeinanderfolgenden Zahlen  $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$  eine P., andererseits treten häufig *P.zwillinge* auf, das sind P.paare  $p, q$  mit der Eigenschaft  $q = p + 2$ ; z. B. 3, 5; 5, 7; 17, 19; 641, 643; 1451, 1453; 299477, 299479. Es ist bis heute unbekannt, ob es unendlich viele P.zwillinge gibt.

EULER zeigte, daß die unendl. Reihe  $\sum (1/p)$  der Reziproken aller P.en divergiert (↗ Reihe, unendliche). Da  $\sum (1/n^2)$  konvergiert, müssen die P.en dichter liegen als die Quadratzahlen. Bezeichnet man mit  $\pi(n)$  die Anzahl der P.en kleiner, gleich  $n$ , so gilt das asymptot. Gesetz der *P.verteilung* (1), nach dem  $[n/\ln n]$  ein asymptot. Ausdruck für  $\pi(n)$  ist. Der Beweis dieses bereits von GAUSS vermuteten Gesetzes gelang 1896 HADAMARD und DE LA VALLÉE-POUSSIN.

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \cdot \ln n}{n} = 1$$

III. Ein Verfahren zur Ermittlung sämtl. P.en in einem Abschnitt der natürl. Zahlen ist das *Sieb des Eratosthenes*. Nach einem anderen Verfahren zur Ermittlung von P.en teilt man die ersten  $n$  P.en beliebig in zwei Gruppen und bildet in jeder Gruppe das Produkt aller in ihr enthaltenen P.en. Ist die Summe oder die Differenz dieser Produkte eine Zahl  $Z$ , die kleiner ist als das Quadrat der  $(n+1)$ -ten P., so ist  $Z = 1$  oder eine P.; ist  $Z$  größer als das Quadrat der  $(n+1)$ -ten P., so ist keine Aussage möglich. Teilt man z. B. die P.en 2, 3, 5, 7, 11 in die Gruppen  $\{2, 5, 11\}$  und  $\{3, 7\}$ , so wäre die folgende P. 13; d. h., man könnte P.en kleiner als  $13^2 = 169$  finden. Man erhält  $Z_{1,2} = 2 \cdot 5 \cdot 11 \pm 3 \cdot 7$ , d. h.,  $Z_1 = 131$  und  $Z_2 = 89$ . Wegen  $131 < 169$  und  $89 < 169$  sind  $Z_1$  und  $Z_2$  P.en.

IV. Eine natürl. Zahl  $n$  heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe ihrer natürl. Teiler einschließlich 1, aber außer  $n$  ist. Die Definition der vollkommenen Zahlen findet sich bereits in den *Elementen von Euklid*. Die ersten vollkommenen Zahlen sind 6, 28, 496, 8128, 33 550 336. Die geraden vollkommenen Zahlen sind genau die Zahlen der Form  $2^k(2^{k+1} - 1)$ , in der  $2^{k+1} - 1$  eine P. ist. Ob es ungerade vollkommenen Zahlen gibt, ist nicht bekannt; alle bekannten vollkommenen Zahlen  $< 10^{18}$

sind gerade. Um eine Übersicht über die geraden vollkommenen Zahlen zu bekommen, ist zu entscheiden, für welche natürl. Zahlen  $v$  die Zahl  $p = 2^{v-1} - 1$  eine P. ist. Eine Einschränkung besteht darin, daß die Zahl  $p = 2^\mu - 1$  höchstens dann P. ist, wenn der Exponent  $\mu$  selbst P. ist. Die P.en der Form  $p = 2^\mu - 1$ , für die  $\mu$  P. ist, heißen *Mersennesche P.en*.

Für die ersten vier P.en  $\mu = 2, 3, 5, 7$  ergeben sich die vier Mersenneschen P.en  $p = 3, 7, 31, 127$ .

Nicht alle P.en  $\mu$  führen zu einer Mersenneschen P.  $p = 2^\mu - 1$ , z. B. ist  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ . Ob die Folge der Mersenneschen P.en abbricht oder unendlich ist, ist noch nicht bekannt.

V. P.en der Form  $p = 2^{2^k} + 1$  heißen *Fermatsche P.en*. Sie spielen eine Rolle in der Kreisteilung. GAUSS hat bewiesen, daß ein reguläres  $p$ -Eck für eine P.  $p$  genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn  $p$  eine Fermatsche P. ist. Die ersten Fermatschen P.en sind  $p = 3, 5, 17, 257, 65537$ . Nicht alle Zahlen der Form  $2^{2^k} + 1$  sind P.en; z. B. ist  $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$  durch 641 teilbar. Ob die Folge der Fermatschen P.en abbricht, ist noch unbekannt.

VI. Einige Sätze über P.en:

VI.1. *Dirichletscher Primzahlsatz: Jede arithmet. Folge  $\{a + k \cdot b \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N}, k = 0, 1, \dots\}$ , in der das Anfangsglied  $a$  und die Differenz  $b$  zueinander teilerfremd ( $\nearrow$  Teilbarkeit) sind, enthält unendlich viele P.en.*

VI.2. *Jede P.  $p > 3$  läßt sich darstellen in der Form  $p = 6k \pm 1$ , in der  $k$  eine natürl. Zahl ist, z. B.  $29 = 6 \cdot 5 - 1$ .*

VI.3. *Eine Zahl der Form  $4k + 1$  ist genau dann P., wenn sie sich bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig als Summe der Quadrate zweier teilerfremder natürl. Zahlen darstellen läßt, z. B.  $4 \cdot 13 + 1 = 53 = 7^2 + 2^2$ .*

VI.4. *Eine Zahl der Form  $8k + 1$  oder  $8k + 3$  ist genau dann P., wenn sie sich eindeutig in der Form  $x^2 + 2y^2$  mit teilerfremden natürl. Zahlen  $x, y$  darstellen läßt; z. B.  $8 \cdot 5 + 1 = 41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2$  oder  $8 \cdot 7 + 3 = 59 = 3^2 + 2 \cdot 5^2$ .*

VI.5. *Jede P. der Form  $p = 3k + 1$  ist Summe einer Quadratzahl und einer dreifachen Quadratzahl, z. B.  $3 \cdot 12 + 1 = 37 = 5^2 + 3 \cdot 2^2$ .*

VI.6. *Sind  $p, q$  zwei verschiedene P.en, so läßt die Summe  $p^{q-1} + q^{p-1}$  bei Division durch  $p \cdot q$  den Rest 1, für  $p = 2$  und  $q = 3$  z. B. ist  $2^3 + 3^2 = 7 \equiv 1 \pmod{6}$ .*

VI.7. *Jede P.  $p$  ist als Summe von höchstens vier Quadraten natürl. Zahlen darstellbar, z. B.  $19 = 4^2 + 1 + 1 + 1$ .*

VI.8. *Für alle P.en  $p > 3$  läßt  $p^2$  bei Division durch 24 den Rest 1, z. B.  $11^2 = 121 \equiv 1 \pmod{24}$ .*

VI.9. *Vermutung von Hausner: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Vielfachen der  $k$ -ten P.  $p_k$ , die beide kleiner sind als  $p_{k+1}^2$ , gibt es mindestens eine P.*

VI.10. *Satz von Wilson: Ist  $a > 1$ , so ist  $(a - 1)! + 1$  durch  $a$  genau dann teilbar, wenn  $a$  eine P. ist, für  $a = 7$  z. B. gilt  $6! + 1 = 721 \equiv 0 \pmod{7}$ . Der Wilsonsche Satz liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß eine natürl. Zahl größer als Eins eine P. ist.*

VI.11. *Bertrandsches Postulat: In jedem Abschnitt  $n < x \leq 2n$  der natürl. Zahlenreihe tritt wenigstens eine P. auf, z. B.  $2 < 3 \leq 4$ .*

*Gaußsche Primzahl  $\nearrow$  Gaußsche Zahlen.*

*Primzahlverteilung  $\nearrow$  Primzahl II.,  $\nearrow$  Zahlentheoretische Funktion VI.,  $\nearrow$  Zetafunktion, Riemannsches.*

*Primzahlwillinge  $\nearrow$  Primzahl II.*

*Prinzip der vollständigen Induktion  $\nearrow$  Peanosches Axiomensystem.*

*Prinzip von Duhamel  $\nearrow$  hyperbolische Differentialgleichung II.*

*Priorität  $\nearrow$  Bedienungstheorie.*

**Prisma:** I. ebenflächiger Körper, der begrenzt wird von zwei einfachen geschlossenen parallelkongruenten  $n$ -Ecken  $A_1A_2 \dots A_n$  und  $B_1B_2 \dots B_n$ , die in parallelen Ebenen liegen, und von den  $n$  Parallelogrammflächen  $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots$ , die die beiden  $n$ -Ecke verbinden (Abb. 1). Die  $n$ -Ecke werden *Grund- und Deckfläche* gen., jede Parallelogrammfläche zwischen ihnen *Seitenfläche* und die

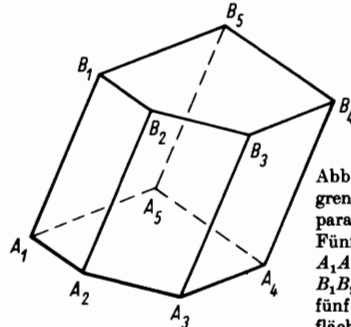
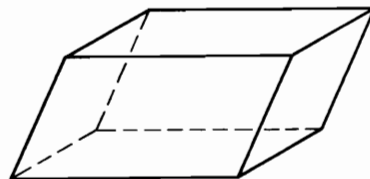
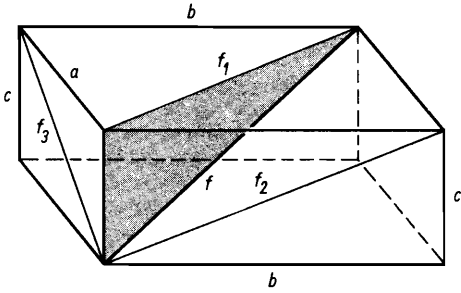


Abb. 1: Prisma, begrenzt von den parallelkongruenten Fünfecken  $A_1A_2A_3A_4A_5$  und  $B_1B_2B_3B_4B_5$  und den fünf Parallelogrammflächen zwischen ihnen

Vereinigung der Seitenflächen *Mantel* des P.s. Die Strecken  $A_iB_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  heißen *Seitenkanten*, jede  $n$ -Eckseite *Grundkante*. Jede zu den Seitenkanten parallele Strecke, deren Endpunkte auf zwei Grundkanten liegen, wird *Mantellinie* gen. Stehen die Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche, so heißt das P. *gerade*, andernfalls *schief*. Ist  $G$  der Flächeninhalt der Grundfläche und  $M$  der des Mantels, so ist  $O = 2G + M$  der *Flächeninhalt der Oberfläche*. Ist  $h$  der Abstand der parallelen Ebenen, so hat das P. nach dem Cavalierischen Prinzip den *Rauminhalt*  $V = G \cdot h$ . Sind Grund- und Deckfläche regelmäßige  $n$ -Ecke, so heißt das P. *regelmäßig*. Regelmäßige Prismen haben eine Symmetrieachse, die die Mittelpunkte der Grund- und Deckfläche verbindet. Ein *Achsenschnitt* ist ein ebener Schnitt, der diese Achse enthält.

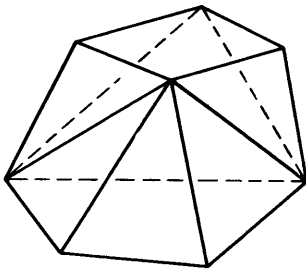


Prisma. Abb. 2: Parallelepiped



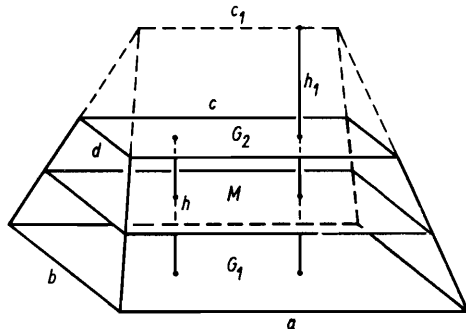
Prisma. Abb. 3: Quader mit Kanten der Längen  $a, b, c$ , den Flächendiagonalen der Längen  $f_1, f_2, f_3$  und der Raumdiagonale der Länge  $f$

II. Jedes P., dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, heißt *Parallelepipäed*, *Parallelepipedon*, *Parallelfach* oder *Spat* (Abb. 2). In einem Quader sind diese Parallelepipäede Rechtecke (Abb. 3). Sind  $a, b, c$  die Längen der Kanten des Quaders, so hat er den Rauminhalt  $V = abc$  und die Oberfläche  $O = 2(ab + bc + ca)$ . Für die Längen  $f_1, f_2, f_3$  der Flächen- und  $f$  der Raumdiagonalen ergibt sich nach dem pythagoreischen Lehrsatz  $f_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $f_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$ ,  $f_3 = \sqrt{c^2 + a^2}$ ,  $f = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .



Prisma. Abb. 4: Prismoid mit paralleler Grund- und Deckfläche, aber nicht-parallel Kanten

III. Von einem *Prismoid* oder *Prismatoid* spricht man, wenn Grund- und Deckfläche zwar noch einander parallel liegen, aber nicht mehr notwendig einander kongruent sind und nicht notwendig die gleiche Anzahl von Ecken haben. Als Seitenflächen tre-



Prisma. Abb. 5: Ponton

ten Dreiecks- oder Trapezflächen auf (Abb. 4). Ein Prismatoid mit gleicher Anzahl der Ecken in der Grund- und Deckfläche heißt *Obelisk*. Ein Prismatoid mit rechteckiger Grund- und Deckfläche und mit genau vier Trapezen als Seitenflächen heißt *Ponton* (Abb. 5). Sind  $G_1 = a \cdot b$  und  $G_2 = c \cdot d$  die Flächeninhalte der Grund- und Deckfläche, so ist  $M = (b + d)(a + c)/4$  der Flächeninhalt eines Mittelschnitts, und der Rauminhalt des Pontons ergibt sich aus  $V = (h/6)[G_1 + 4M + G_2] = (h/6)[2(ab + dc) + ad + bc]$ , wenn  $h$  der Abstand der parallelen Ebenen ist. Ein Prismatoid heißt *Keil*, wenn die Deckfläche zu einer Geraden, der *Schneide*, ausartet. Die Schneide muß nicht parallel zu einer Grundkante sein. Der Rauminhalt eines Keils mit rechteckiger Grundfläche und einer zu einer Grundkante parallelen Schneide ist  $V = (h_1 b/6)(2a + c_1)$ ; wenn  $h_1$  der Abstand der Schneide von der Grundfläche  $G_1$  ist. Zur Berechnung einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfs, die auch Prismatoide sind, vgl. Pyramide.

**prismatische Fläche:** räuml. Punktmenge, die aus den Punkten aller Geraden besteht, die zu einer festen Geraden parallel sind und von denen jede eine ebene  $n$ -Eckslinie  $A_1 A_2 \dots A_n$  in genau einem Punkt schneidet. Die Geraden durch die Ecken  $A_1, A_2, \dots, A_n$  heißen *Kanten*.

**Prismatoid** ↗ Prisma III.

**Prismenderivator** ↗ Differenziergerät III.

**Prismoid** ↗ Prisma III.

**probabilistisch** ↗ Modell II.

**Probe:** Rechenkontrolle zur Überprüfung, ob das ermittelte Resultat alle gestellten Bedingungen erfüllt. Die P. ist besonders wichtig, wenn der zur Lösung benutzte Algorithmus eine Obermenge der Lösungsmenge liefern kann. — S. a. Gleichung; lineares Gleichungssystem.

**Problem des kürzesten Weges** ↗ Spannungen auf Graphen II.

**problemorientierte Programmiersprache** ↗ Programmierung des Digitalrechners I.

**Produkt:** Resultat einer meist als *Multiplikation* bezeichneten binären Operation, die auf ein Elementepaar aus dem Definitionsbereich der Operation angewendet wird. Im P.  $a \cdot b$  heißen  $a$  *Multiplikator*,  $b$  *Multiplikand*, beide oft auch *Faktoren*. Ist die Multiplikation assoziativ, kann man das P. von drei Faktoren definieren als  $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  und das P. von  $n$  Faktoren analog auf ein solches von  $(n - 1)$  Faktoren zurückführen. —

**Produkt, mehrfaches** ↗ Vektorprodukt II.

**Produktarstellung** ↗ ganzrationale Funktion II., ↗ Fundamentalsatz der Algebra.

**Produktform der inversen Matrix** ↗ Simplexalgorithmus III.

**Produktgleichung** ↗ Proportion I.

**Produktmenge:** *Mengenlehre* I. Menge aller geordneten Paare  $(x_1, x_2)$ , bei denen  $x_1$  Element einer Menge  $M_1$  und  $x_2$  Element einer nicht notwendig von  $M_1$  verschiedenen Menge  $M_2$  ist. Die P. von  $M_1, M_2$  ist  $M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2\}$  [lies:  $M_1$  Kreuz  $M_2$ ]. Bei  $M_1 = \{a, b\}$  und

$M_2 = \{1, 2, 3\}$  z. B. ist  $M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ . (s. Tabelle).

	$M_2$	1	2	3
$M_1$				
a		(a, 1)	(a, 2)	(a, 3)
b		(b, 1)	(b, 2)	(b, 3)

**II.** Analog erklärt man die P.  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  von  $n$  Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  mit  $n \geq 1$  als die Menge aller geordneten  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von Elementen  $x_1$  aus  $M_1, x_2$  aus  $M_2, \dots, x_n$  aus  $M_n$ ; für  $n = 1$  ist diese P. die Menge  $M_1$ . Ist  $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ , so schreibt man für  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  auch  $M^n$  und nennt  $M^n$  eine *Mengenpotenz*. — Die P. eines Mengensystems  $M$  ist die Menge aller Auswahlfunktionen ( $\nearrow$  Mengenlehre II.) von  $M$ ; Bezeichnung  $\times M$  [lies: Kreuzprodukt von  $M$ ]. Für  $M = \emptyset$  ist  $\times M = \{\emptyset\}$ ; es ist  $\times M = \emptyset$  genau dann, wenn  $\emptyset \in M$ . S. a. Mengenalgebra.

- Produktplanimeter**  $\nearrow$  Planimeter III.
- Produktregel**  $\nearrow$  Differentiationsregeln I.
- Produkt von Ereignissen**  $\nearrow$  zufälliges Ereignis.
- Produkt von Operatoren**  $\nearrow$  Operator.
- Produkt von Reihen**  $\nearrow$  absolute Konvergenz von Reihen III.,  $\nearrow$  Potenzreihe XI.

**Programm:** Formulierung eines Algorithmus in einer für Rechenanlagen geeigneten Form ( $\nearrow$  Algorithmus II.). Bei *Analogrechnern* stellt das P. einen *Koppelplan* dar, der die Vereinigung bestimmter Recheneinheiten zu einem elektr. System beschreibt, dessen Ausgangsgrößen die Lösung einer vorgegebenen Aufgabe bestimmen ( $\nearrow$  Programmierung des Analogrechners). Bei *digitalen Rechenanlagen* hingegen besteht ein P. aus *sprachl. Instruktionen*, die in kodierter Form vom Steuerwerk der Zentraleinheit entweder direkt oder nach einem Übersetzungsvorgang entschlüsselt werden können ( $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners).

**Programmablaufplan**  $\nearrow$  Algorithmus II.  
**Programmbeschreibung:** verbale und graph. Darstellung, die gewöhnlich neben Angaben über die Aufgabenstellung den grundsätzl. Lösungsweg und den verwendeten Algorithmus, das Quellenprogramm, Rechenbeispiele und detaillierte Anleitungen für den Rechenbetrieb enthält.  
**Programmbibliothek:** *Rechentechnik*

**I. Sammlung von Programmbeschreibungen** und den dazu gehörenden Datenträgern zum Zweck der inner- und überbetriebl. Mehrfachnutzung von Programmen und Unterprogrammen.

**II. Anordnung von Quellen- bzw. Objektprogrammen auf einem externen Speicher**, zu denen mit Hilfe des Betriebssystems der Rechenanlage zugegriffen werden kann.

**Programmiersprachen**  $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners I.

**Programmierung, lineare**  $\nearrow$  Optimierung, lineare I.

**Programmierung des Analogrechners: I.** Aufstellung eines Kopplungsplanes für die Recheneinheiten des Analogrechners zur Lösung einer vorgegebenen Aufgabe. Die typ. Verfahrensweise wird im folgenden bei der Integration gewöhnl. Differentialgleichungen gezeigt.

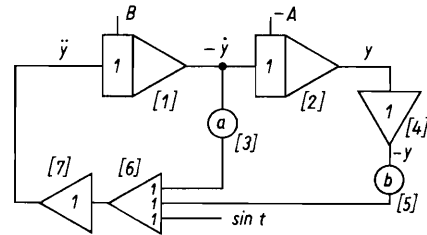
**I.1.** Als Beispiel für die *qualitative Programmierung* dient das Anfangswertproblem (1) mit  $y(0) = A$ ,

$$(1) \quad \ddot{y} + a\dot{y} + by = \sin t$$

$\dot{y}(0) = B$ . Durch Auflösen nach der höchsten Ableitung geht die Differentialgleichung in (2) über. Unter der Annahme,  $\dot{y}$  sei gegeben, kann eine *Inte-*

$$(2) \quad \dot{y} = \sin t - a\dot{y} - by \text{ mit } y(0) = A, \dot{y}(0) = B$$

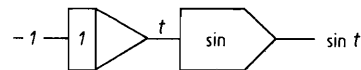
*gratorkette* aufgebaut werden, die alle niederen Ableitungen bis zur Funktion selbst erzeugt (Abb. 1). Die Kette besteht aus den Integratoren [1] und [2].



Programmierung des Analogrechners. Abb. 1: Programm-entwurf zur Lösung der Differentialgleichung (1)

Mit Hilfe weiterer Recheneinheiten [3] bis [7] wird die rechte Seite der Differentialgleichung (2) realisiert. Am Ausgang des Inverters ( $\nearrow$  Analogrechner II.2.) [7] liegt das Signal  $\sin t - a\dot{y} - by$ , das gemäß Differentialgleichung (2) gleich  $\dot{y}$  ist. Wenn zwischen dem Ausgang von [7] und dem Eingang von [1] eine Verbindung hergestellt wird, verhält sich das elektr. System so, wie es die Differentialgleichungen (2) bzw. (1) vorschreiben. Die Lösung steht am Ausgang des Integrators [2] zur Verfügung und kann mit einem Ausgabegerät, z. B. einem Oszillographen, aufgezeichnet werden.

**I.2.** Zur Erzeugung der *Störfunktion*  $\sin t$  gibt es zwei prinzipiell verschiedene Wege. Der erste verwendet einen *Funktionswandler* ( $\nearrow$  Abb. 2), durch



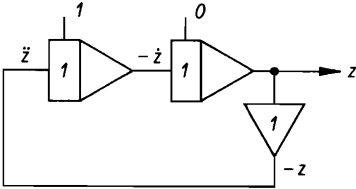
Programmierung des Analogrechners. Abb. 2: Erzeugung von  $\sin t$  mit dem Funktionswandler

den das Signal  $t$  in  $\sin t$  transformiert wird. Die Variable  $t$  läßt sich durch Integration der Konstanten  $-1$  gewinnen. Am Funktionswandler muß vor Rechenbeginn die Sinusfunktion eingestellt werden; das gelingt nur ungenau und ist zudem zeit-aufwendig. Einen besseren Weg bietet die Darstel-

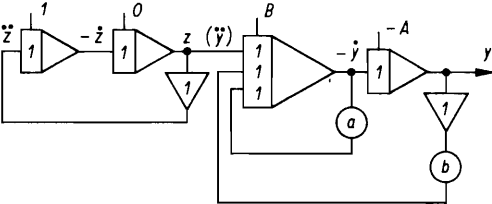
lung von  $\sin t$  als Lösung einer erzeugenden Differentialgleichung (3), die sich aus der Substitution  $z = \sin t$  und den daraus folgenden Ableitungen  $\dot{z} = \cos t$ ,  $\ddot{z} = -\sin t$  ergibt (Abb. 3).

$$(3) \quad \ddot{z} = -z \text{ mit } z(0) = 0 \text{ und } \dot{z}(0) = 1$$

Das vollständige qualitative Programm zur Lösung der Differentialgleichung (1) enthält Abb. 4. Der Summator [6] und der Inverter [7] aus Abb. 1 ent-



Programmierung des Analogrechners. Abb. 3: Erzeugung von  $\sin t$  durch Lösung der erzeugenden Differentialgleichung  $\ddot{z} = -z$  mit  $z(0) = 0$  und  $\dot{z}(0) = 1$



Programmierung des Analogrechners. Abb. 4: Vollständiges qualitatives Programm zur Lösung der Differentialgleichung (1)

fallen hier durch Ausnutzung der summierenden Eigenschaften des Integrators. Weiter ist zu beachten, daß in Abb. 4 die höchste Ableitung  $\ddot{y}$  als selbständiges Signal nicht mehr auftritt. Diese Ableitung  $\ddot{y}$  ist die Summe der drei am Integrator liegenden Eingangsgrößen; diese Tatsache ist im Programm durch Einklammerung von  $\ddot{y}$  kenntlich gemacht.

II. Das Beispiel in I. lehrt, daß ein qualitatives Programm die mathemat. Aufgabenstellung exakt abbildet, spezif. techn. Eigenheiten des Analogrechners aber nicht berücksichtigt. Dieser Umstand hat zur Folge, daß qualitative Programme in der Regel erst nach weiterer Modifizierung, der *Variablentransformation*, am Rechner auszuführen sind.

II.1. Transformation der unabhängigen Variablen. Im Analogrechner ist die Maschinenzeit  $\tau$  die unabhängige Variable. Sie ist die in Sekunden gemessene Zeit, in der alle Vorgänge im Rechner ablaufen. Von den zu lösenden Aufgaben muß daher zwangsläufig gefordert werden, daß die zugeordneten mathemat. Formulierungen nur eine unabhängige Variable  $t$  enthalten. Durch die *Zeittransformation*  $\tau = \lambda \cdot t$  wird der zeitl. Ablauf der Rechnung an die Möglichkeiten des Analogrechners angepaßt. Bedeutet z. B.  $t$  die in Sekunden gemessene Zeit, so rechnet der Analogrechner bei  $\lambda < 1$  mit *Zeitraffung*, bei  $\lambda > 1$  mit *Zeitdehnung* und bei  $\lambda = 1$  in *Echtzeit*. Hinsicht-

lich der Ableitungen ergeben sich die Beziehungen (4). Aus ihnen folgt als Vorschritt für die Zeittrans-

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda \frac{dy}{d\tau}, \dots, \frac{d^i y}{dt^i} = \lambda^i \frac{d^i y}{d\tau^i}$$

formation, daß in der betrachteten Differentialgleichung alle Ableitungen der Form  $\frac{d^i y}{dt^i}$  einschließlich der Anfangswerte  $\frac{d^i y(0)}{dt^i}$  durch  $\lambda^i \frac{d^i y}{d\tau^i}$  bzw.  $\lambda^i \frac{d^i y(0)}{d\tau^i}$ , und die Variable  $t$ , falls enthalten, durch  $\tau/\lambda$  ersetzt werden müssen. Dieselbe Wirkung hat die *direkte Zeittransformation*, die darin besteht, daß im Programmbild alle Integrationskoeffizienten mit  $1/\lambda$  multipliziert werden.

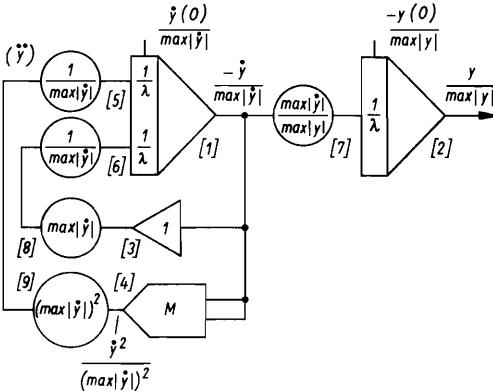
II.2. Transformation der abhängigen Variablen. Die Größen im Analogrechner, die *Maschinenvariablen*, sind als dimensionslos vereinbart. Ihr maximaler Variationsbereich ist das Intervall  $[-1, +1]$ .

Mit Rücksicht auf die optimale Ausnutzung der Rechnergenaugkeit sollen die *Maschinenvariablen* den Arbeitsbereich des Rechners voll ausschöpfen, d. h., für jede Maschinenvariable  $X$  muß die Bedingung  $|X| \leq 1$  erfüllt sein. Gilt darüber hinaus  $\max |X| = 1$ , so heißt die Programmierung *optimal*. Um die Beziehung  $|X| \leq 1$  gewährleisten zu können, müssen *obere Schranken* für die Maximalbeträge der Problemvariablen bekannt sein. Optimale Programme hingegen fordern sogar die Kenntnis der Maximalbeträge selbst. Der Illustration dieser Zusammenhänge dient die Aufstellung eines optimalen Programmes für die Differentialgleichung (5). Die Lösung  $y$  interessiert im Intervall  $0 \leq t \leq 1$ , in

$$(5) \quad \ddot{y} = \dot{y} + \dot{y}^2 \text{ mit } y(0) = -0,693, \quad \dot{y}(0) = -0,5$$

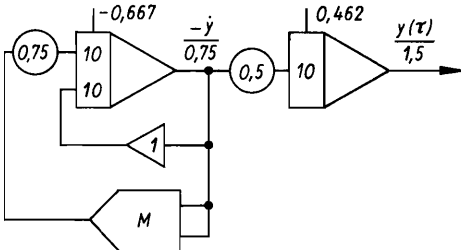
dem stark aufgerundet  $\max |y| = 1,5$  und  $\max |\dot{y}| = 0,75$  gilt. Die Rechenzeit soll 0,1 s betragen.

Aus den Beziehungen  $t_{\max} = 1$ ,  $\tau_{\max} = 0,1$  und  $\tau = \lambda \cdot t$  folgt unmittelbar  $\lambda = 0,1$ . Die Zeittransformation wird zunächst zurückgestellt, vorsorglich jedoch jeder Integratorkoeffizient auf den Wert 1 gesetzt. Abb. 5 zeigt einen ersten Entwurf für ein optimales Programm. Wie im Beispiel zu I. wird von der höchsten Ableitung  $\ddot{y}$  ausgegangen. Da  $\dot{y}$  wegen  $\max |\dot{y}| = 0,75$  die an eine optimale Maschinenvariable gestellten Forderungen nicht erfüllt, muß am Ausgang des Integrators [1] die Größe  $(-\dot{y}/\max |\dot{y}|)$  erzeugt werden. Dieses Vorhaben wird durch Vorschalten der Konstantenmultiplikatoren [5] und [6] erreicht, denn in der augenblickl. Bearbeitungsphase haben im Unterschied zu Abb. 5 alle Integratorkoeffizienten den Wert 1. Bei der Anfangswerteingabe am Integrator [1] ist zu beachten, daß der Anfangswert für die Ausgangsgröße  $(-\dot{y}/\max |\dot{y}|)$  gebraucht wird. Qualitativ ist am Ausgang des Integrators [2] das Signal  $y$  zu erwarten. Die optimale Ausgangsgröße  $y/\max |y|$  wird mit Hilfe des Konstantenmultiplikators [7] gewonnen. Dieser sorgt dafür, daß  $(-\dot{y}/\max |\dot{y}|)$  die Eingangsvariable des Integrators [2] ist. Dabei bleibt



Programmierung des Analogrechners. Abb. 5: Entwurf eines optimalen Programms zur Lösung der Differentialgleichung (5)

zunächst völlig außer acht, ob die Konstantenmultiplikatoren durch Potentiometer verwirklicht werden können. Als nächstes folgt die Erzeugung und Rückführung der Terme der rechten Seite der Differentialgleichung (5). Inverter [3] und Konstantenmultiplikator [8] formen die Ausgangsgröße von [1] in  $\dot{y}$  um. Da die Ausgangsgröße von [3] ebenfalls optimal sein muß, ist die gewählte Operationsreihenfolge zwingend. Zur Gewinnung von  $\dot{y}^2$  wird zunächst  $(-\dot{y}/\max|\dot{y}|)$  quadriert. Am Ausgang des Multiplikators [4] ist  $\dot{y}^2/(\max|\dot{y}|)^2$  verfügbar. Das geforderte  $\dot{y}^2$  liefert die Multiplikation [9] mit der Konstanten  $(\max|\dot{y}|)^2$ . Nach dem Schließen des Kreises ist die notwendige Maßstabtransformation ausgeführt, und die anstehende Aufgabe ist im



Programmierung des Analogrechners. Abb. 6: Optimales Programm zur Lösung der Differentialgleichung (5)

*Echtzeitmaßstab programmiert.* Die Zeittransformation wird ausgeführt, indem alle Integratoreingänge mit  $1/\lambda$  bewertet werden. Damit ist die gesuchte Lösung  $y$  Funktion der Maschinenzeit  $\tau$ . In Abb. 5 sind *Kürzungsmöglichkeiten* erkennbar. Werden die konkreten Werte für Anfangsbedingungen und Maximalbeträge eingesetzt und die Bewertungsprodukte in Eingangs- und Potentiometerfaktor geeignet zerlegt, so entsteht das endgültige optimale Programm (Abb. 6).

Programmierung des Digitalrechners: I. mit Hilfe synthet. Sprachen formulierte Instruktionen zur

Beschreibung von Algorithmen (Algorithmus II.), die im wesentl. auf numer. Verfahren aufbauen. Dabei finden problem- wie auch maschinenorientierte *Programmiersprachen* Verwendung. Beide ermöglichen die Abfassung von Programmen, die nach Umformung durch *Übersetzer* in *Maschinenprogramme* vom Rechner ausgeführt werden können.

II. Die international verbreitetsten *problemorientierten Programmiersprachen* sind ALGOL 60, FORTRAN, PL/1 und COBOL. Sie sind durch umfangreiche syntakt. Regeln und semant. Festlegungen definiert. Eine genaue Darstellung ihres Aufbaues kann hier aus Aufwandsgründen nicht gegeben werden. Wesentlich ist, daß diese Sprachen weitgehend *anlagenunabhängig* sind und deshalb den Austausch entsprechender Programme begünstigen. Um einen ungefähren Eindruck vom Wesen problem- und maschinenorientierter Programmiersprachen sowie vom Aufbau von Maschinenprogrammen zu geben, wird im folgenden die Berech-

nung des *skalaren Produktes*  $S = \sum_{i=1}^N X_i Y_i$  zweier Vektoren  $(X_1, \dots, X_N)$  und  $(Y_1, \dots, Y_N)$  in verschiedenen Sprachen ausschnittsweise programmiert.

II.1. Die Anwendung von ALGOL 60 ergibt:

```
S := 0;
FOR I := 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
  S := S + X '⟨I'⟩' * Y '⟨I'⟩'.
```

II.2. In FORTRAN lauten entsprechende *Anweisungen*

```
S = 0
DO 5 I = 1,N
  5 S = S + X(I)*Y(I)
```

In beiden Fällen wird der Variablen  $S$  zunächst der Wert Null zugewiesen. Danach erfolgt in einem Zyklus, bei dem der Index  $I$  von 1 bis  $N$  läuft, die Summation vermöge der Anweisung  $S := S + X \langle I \rangle * Y \langle I \rangle$  bzw.  $S = S + X(I) * Y(I)$ . Abgesehen von den ersichtl. Formulierungsunterschieden ist erkennbar, daß bei problemorientierten Sprachen Ausdrucksweisen Verwendung finden, die in ähnl. Form in naturwissenschaftl. Disziplinen zur Beschreibung mathemat. Zusammenhänge gebräuchlich sind. Die Übersetzung des ALGOL 60- oder FORTRAN-Textes wird von speziellen Programmen, den *Kompilem*, ausgeführt, die Bestandteil der Betriebssysteme von Rechanlagen sind. Während die Sprachen ALGOL 60 und FORTRAN bes. zur Formulierung von Algorithmen aus wissenschaftlich-techn. Bereichen geeignet sind, lassen sich mit COBOL in günstiger Weise kommerzielle Datenverarbeitungsaufgaben programmieren. Die Sprache PL/1 ist dagegen universell einsetzbar. Wegen ihres Umfangs kann jedoch häufig nur eine Untergruppe, ein *Subset*, vom Rechner realisiert werden.

III. Die *maschinenorientierten Sprachen* sind *anlagenspezifisch*. Die mit ihnen aufgestellten Programme haben eine ähnl. Struktur wie die entsprechenden Maschinenprogramme. Sie bestehen im wesentl. aus *Befehlen*, in denen im Unterschied zum Maschinenprogramm einfach festzulegende *symbol. Adressen* und z. B. für den Operationsteil instruk-

tive *alphanumer. Bezeichnungen* verwendet werden. Ein weiterer Wesenszug maschinenorientierter Sprachen besteht in der Möglichkeit der Formulierung von *Makroanweisungen*. Die Übersetzung derartiger Programme wird von *Assemblern* vorgenommen, die ebenso wie Compiler zu den Arbeitsprogrammen des Betriebssystems gehören. Während die Befehle der erwähnten Art im Verhältnis 1 : 1 in Befehle des Maschinenprogrammes übersetzt werden, wird bei *Makroanweisungen* vor dem Übersetzungsvorgang das gesamte *Makro* eingesetzt, d. h. mehr als ein Befehl. Dabei werden die Makros einer speziellen Bibliothek entnommen ( $\nearrow$  Betriebssystem II.). Die bereits verfolgte Aufgabe kann mit Hilfe einer derzeitig bewährten und mit kleinen Nuancierungen sehr verbreiteten maschinenorientierten Programmiersprache nach Tabelle (1) programmiert werden.

Tab. (1)

Nr.	NAME	OT	MOT/ADT
1		SLR	R6, R6
2		L	R0, N
3		LA	R1, X
4		LA	R2, Y
5	MO5	L	R5, O(R1)
6		M	R4, O(R2)
7		AR	R6, R5
8		LA	R1, 4(R1)
9		LA	R2, 4(R2)
10		BCT	R0, MO5

Die Übersetzung in den *Maschinenkode* ergibt im Anwendungsfall Tab. (2)

Tab. (2)

Nr.	OT	MOT	ADT
1	1F	66	
2	58	00	3 1DC
3	41	10	3 1E0
4	41	20	3 208
5	58	51	0 000
6	5C	42	0 000
7	1A	65	
8	41	11	0 004
9	41	22	0 004
10	46	00	3 0B6

Abgesehen von der Wirkungsweise der einzelnen Befehle ist erkennbar, daß das Maschinenprogramm rein numerisch aufgebaut ist, dabei sind der *Operationsteil* OT, der *Modifikationsteil* MOT und der *Adreßteil* ADT *hexadezimal* verschlüsselt ( $\nearrow$  Zahlensystem VIII.) und damit als Folge von Binärzeichen interpretierbar.

Das dieser Übersetzung entsprechende Programm weist dagegen, wie bereits oben ausgeführt, keine konkreten Adressen und alphanumer. Bezeichnungen auf. Die Erläuterung der einzelnen Befehle gelingt am besten, wenn die Darstellungen (3) ver-

einbart werden.

- (3)  $\langle Ri \rangle \leftrightarrow$  Inhalt des *i*-ten Registers
- $\langle a \rangle \leftrightarrow$  Inhalt des Speicherplatzes *a*
- $\rangle a \langle \leftrightarrow$  Adresse des Speicherplatzes *a*
- $a := b \leftrightarrow$  der Größe *a* wird der Wert der Größe *b* zugewiesen.

Unter Berücksichtigung dieser Festlegung (3) bewirken die Befehle in Tab. (1) der Reihe nach:

1.  $\langle R6 \rangle := \langle R6 \rangle - \langle R6 \rangle$ , d. h.,  $\langle R6 \rangle := 0$  und entspricht  $S := 0$  bei ALGOL 60;
2.  $\langle R0 \rangle := N$ ; der Adreßteil 3 1DC ist so zu interpretieren, daß  $\rangle N \langle = \langle R3 \rangle + 1DC$  gilt;
3.  $\langle R1 \rangle := \rangle X_1 \langle$ ;
4.  $\langle R2 \rangle := \rangle Y_1 \langle$ ;
5.  $\langle R5 \rangle := \langle a \rangle$ , wobei  $\rangle a \langle = \langle R1 \rangle$  ist, d. h.,  $\langle R5 \rangle := X_1$ , i. allg.  $\langle R5 \rangle := X_i$ ;
6.  $\langle R5 \rangle := \langle R5 \rangle \cdot \langle b \rangle$ , wobei  $\rangle b \langle = \langle R2 \rangle$  ist, d. h.,  $\langle R5 \rangle := X_1 \cdot Y_1$ , i. allg.  $\langle R5 \rangle := X_i \cdot Y_i$ ;
7.  $\langle R6 \rangle := \langle R6 \rangle + \langle R5 \rangle$ , d. h.,  $S := S + X_1 \cdot Y_1$ , i. allg.  $S := S + X_i \cdot Y_i$ ;
8.  $\langle R1 \rangle := \langle R1 \rangle + 4$ , d. h., Weiterstellung der Adresse im Register 1 um 4 Byte, also auf die Adresse von  $X_2$  oder i. allg. von  $X_{i+1}$ ;
9.  $\langle R2 \rangle := \langle R2 \rangle + 4$ ;
10.  $\langle R0 \rangle := \langle R0 \rangle \rightarrow 1$  und Sprung zum Befehl 5, wenn  $\langle R0 \rangle \neq 0$  ist.

IV. Die Betrachtung der maschinenorientierten und der Maschinsprache lehren, daß das Steuerwerk des Digitalrechners lediglich Instruktionen entschlüsseln kann, die eine festgelegte Struktur aufweisen und die den Algorithmus in sehr detaillierte Schritte zerlegen. Trotz des daraus resultierenden Aufwandes ist es nicht immer sinnvoll, problemorientierte Programmiersprachen einzusetzen, denn deren Übersetzung liefert wesentlich umfangreichere und uneffektivere Maschinenprogramme, als wenn der betreffende Algorithmus mit Hilfe einer maschinenorientierten Programmiersprache formuliert wurde. Abschließend soll erwähnt werden, daß Programme aller Arten in der Regel in *Hauptprogramm* und eventuell ineinandergeschachtelte *Unterprogramme* gegliedert sind. Dabei besteht der Vorteil, neben der Strukturierbarkeit des Programmes in der Möglichkeit, Unterprogramme im Rahmen übergeordneter mehrfach ausführen zu können.

**Programmierung des Prozeßrechners:** Aufstellung von Programmen für Prozeßrechenanlagen. Besonderen Einfluß hat die Notwendigkeit der Echtzeitdatenverarbeitung im Falle der on-line-Kopplung ( $\nearrow$  Prozeßkopplung). Eine derartige Verarbeitungsform bedingt geringe Zugriffszeiten zu vielen für die Führung des Prozesses notwendigen Programmen und kann deshalb nur realisiert werden, wenn diese gleichzeitig im Hauptspeicher des Rechners zur Verfügung stehen. Optimal wird dieser Forderung entsprochen, wenn *maschinenorientierte Programme* verwendet werden, die einen wesentlich geringeren Speicherbedarf haben als entsprechende leichter aufzustellende problemorientierte Programme ( $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners I., II.).



Der daraus resultierende Arbeitsmehraufwand kann i. allg. in Kauf genommen werden, da Prozeßrechner meist während eines längeren Zeitraumes mit unveränderten Programmen betrieben werden. Weiter müssen den einzelnen Programmen gewisse *Prioritäten* zugeordnet werden, die im Falle von Programmunterbrechungen (→ Prozeßrechner II.) festlegen, mit welchem Programm die Prozeßführung fortgesetzt wird. Diese Arbeitsweise heißt *Zeitmultiplexbetrieb* (s. a. Betriebssystem I.) und wird von speziellen Betriebssystemen organisiert.

**Programmregelung** → Regelung III.1.

**Programmsteuerung** → Steuerung II.

**Programmunterbrechung** → Betriebssystem I., → Prozeßrechner III.

**Projektion:** *darstellende Geometrie I.* Abbildung der Punkte eines projektiven Raumes auf eine Bildebene  $\Pi$  durch die Geraden  $g_i$  eines Geradenbündels, dessen Träger, das *P.szentrum*  $Z$ , nicht in  $\Pi$  liegt

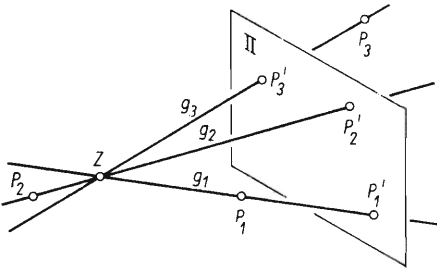
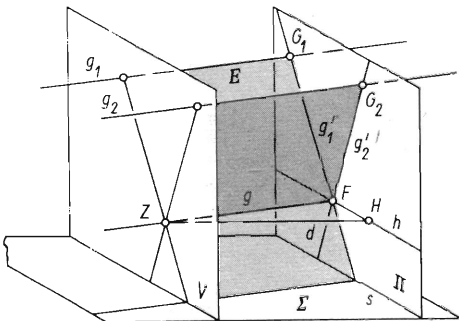


Abb. 1: Projektion

(Abb. 1). Man nennt  $\Pi$  auch *P.sebene*, *Bild-, Zeichen- oder Reißebene* oder *Bild-, Zeichen- oder Reißtafel* und die Geraden  $g_i$  *P.sgeraden* bzw. die von  $Z$  ausgehenden Halbgeraden *P.sstrahlen*. Auch das Bild eines Punktes wird als seine *P.* bezeichnet. Sie ist der Durchstoßpunkt  $P'$  der durch  $Z$  und  $P$  bestimmten *P.sgeraden*  $ZP$  durch die Bildebene  $\Pi$ . Alle Punkte einer *P.sgeraden* haben dasselbe Bild.

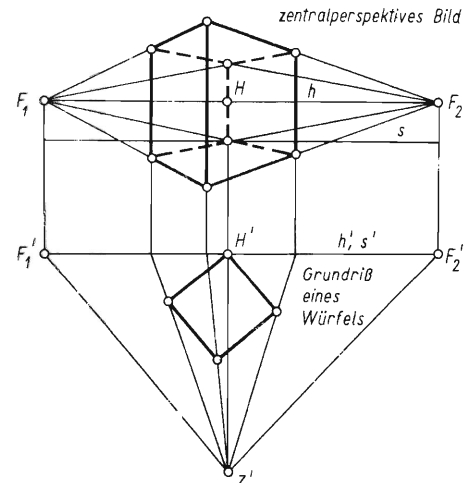
**I.1.** Ist  $Z$  ein eigentl. Punkt des Raumes, so spricht man von *Zentral-P.* Die Bilder aller Punkte einer



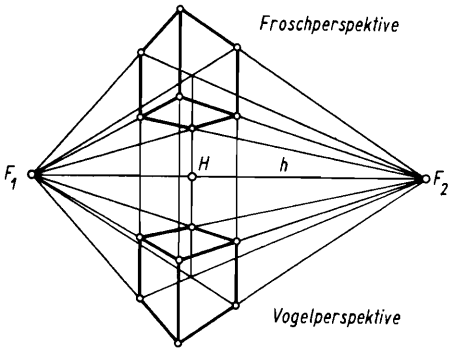
Projektion. Abb. 2: Fluchtpunkt  $F$  und Verschwindungsebene  $V$

Ebene  $V$ , die durch  $Z$  parallel zu  $\Pi$  verläuft (Abb. 2), liegen dann auf der uneigentl. Geraden dieser Ebene, die mit der von  $\Pi$  zusammenfällt. Sie sind uneigentl. Punkte, und die Ebene  $V$  heißt deshalb *Verschwindungsebene*, weil ihre Punkte im affinen Raum keine Bildpunkte haben. Das Bild einer Geraden  $g_i$  durch  $Z$  ist ihr Durchstoßpunkt  $G_i$  mit der Bildebene  $\Pi$ . Für alle Punkte einer Geraden  $g_1$ , die nicht durch  $Z$  geht, bilden die *P.sgeraden* eine Ebene, die die Bildebene  $\Pi$  in einer Geraden  $g_1'$  schneidet. Dieses Bild  $g_1'$  von  $g_1$  ist bestimmt durch den Durchstoßpunkt  $G_1$  von  $g_1$  mit  $\Pi$  und durch den Durchstoßpunkt  $F$  zwischen  $\Pi$  und einer zu  $g_1$  parallelen Geraden  $g$  durch  $Z$ .  $F$  ist das Bild des uneigentl. Punktes aller zu  $g_1$  parallelen Geraden, d. h., die Bilder dieser Parallelen schneiden sich im *Fluchtpunkt*  $F$ . Die durch die Punkte  $Z, F, G_1$  bestimmte Ebene  $E$ , die weder mit  $\Pi$  noch mit  $V$  zusammenfällt, bleibt erhalten, wenn die Punkte  $G_1$  und  $F$  bei gleichem Abstand voneinander eine andere Lage auf der Schnittgeraden  $g_1'$  haben.  $E$  entsteht dann durch zwei andere parallele Geraden  $g_1^{(i)}$  und  $g^{(i)} = ZF^{(i)}$ , die in der gleichen Ebene liegen. Das bedeutet, daß für alle in dieser Ebene liegenden Geraden  $g_1^{(i)}$  der Fluchtpunkt  $F^{(i)}$  auf  $g_1'$  liegt. Als Ort der Fluchtpunkte aller Geraden dieser Ebene  $E$  wird  $g_1'$  *Fluchtgerade* oder *Fluchtlinie* genannt. Zueinander parallele Ebenen haben die gleiche Fluchtgerade. —

**I.2.** Die *Zentral-P.* liefert durch Nachahmung des natürl. Sehvorgangs relativ anschaul. Bilder, wenn das Auge eines Beobachters im *P.szentrum* angenommen wird. Man nennt  $Z$  auch *Augenpunkt* und die *P. Zentralperspektive* oder *Perspektive*. Die *P.sstrahlen* werden auch *Sehstrahlen* gen. Durch die *Augenhöhe* des Beobachters wird eine *Standebene*  $\Sigma$  senkrecht zur Bildebene  $\Pi$  festgelegt, die  $\Pi$  in der *Standlinie*  $s$  schneidet. Geraden, die senkrecht auf der Standebene  $\Sigma$  stehen, haben Bilder senkrecht zur Standlinie  $s$ . Eine Ebene parallel zu  $\Sigma$  durch den Augenpunkt  $Z$  schneidet die Bildebene  $\Pi$  im *Horizont*  $h$ , der parallel zur Standlinie  $s$  verläuft. Der



Projektion. Abb. 3: Zentralperspektives Bild eines Würfels

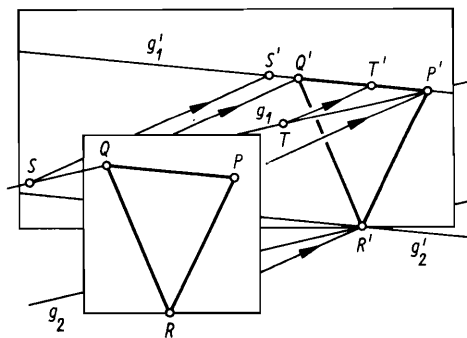


Projektion. Abb. 4: Würfel in Frosch- und Vogelperspektive

Fußpunkt  $H$  des Lotes von  $Z$  auf  $h$  ist der *Distanz- oder Hauptpunkt*, die Länge  $|ZH|$  dieser Strecke ist die Distanz  $d = |ZH|$ . Der Hauptpunkt ist der Fluchtpunkt aller Geraden parallel zu  $ZH$ , und der Horizont ist die Fluchtgerade aller zur Standebene  $\Sigma$  parallelen Geraden (Abb. 3). Je nach der Höhe des P.sentrums  $Z$  über der Standebene  $\Sigma$  unterscheidet man *Vogel- und Froschperspektive* (Abb. 4). Zur Herstellung zentralperspektiver Bilder bedient man sich verschiedener Konstruktionsverfahren, z. B. der Stockwerk-, der Büro-, der Front-, der Schablonenperspektive und der freien Perspektive.

II. Ist das P.szentrum  $Z$  ein uneigentl. Punkt, so spricht man von *Parallel-P.* In ihr bilden die P.sgeraden das durch  $Z$  bestimmte *Parallelgeradenbündel*. Bei senkrechter Parallel-P. treffen die P.sstrahlen die Bildebene  $\Pi$  unter einem rechten Winkel; das Bild heißt *Normal-P., Riß* oder *Normalriß*. Je nach der Anzahl der Bildtafeln unterscheidet man *Ein-, Zwei-, Drei- und Mehrtafel-P.*

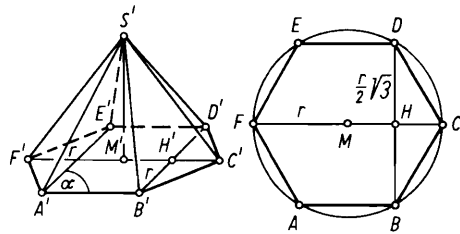
II.1. Ein *Schrägbild* entsteht, wenn die untereinander parallelen P.sstrahlen die Bildebene  $\Pi$  nicht rechtwinklig schneiden. Wieder haben alle Punkte eines P.sstrahls seinen Durchstoßpunkt mit  $\Pi$  zum Bild. Er ist das Bild dieses P.sstrahls. Mit jeder Geraden  $g_1$ , deren Richtung von der der P.sstrahlen verschieden ist, bilden diese bei der P. der Punkte von  $g_1$  eine Ebene, die die Bildebene im Bild  $g_1'$  von  $g_1$  schneidet (Abb. 5). Zwei zueinander parallele



Projektion. Abb. 5: Eigenschaft der Parallelprojektion

Geraden  $g_1 \parallel g_2$  haben zueinander parallele Bilder  $g_1' \parallel g_2'$ . Dabei ist das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden dem der Bildpunkte gleich, z. B.  $|SQ| : |QT| = |S'Q'| : |Q'T'|$ . Ebene Figuren, die parallel, zur Bildebene  $\Pi$  liegen, sind ihren Bildern kongruent, z. B.  $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$ . Die Parallel-P. ist eine affine Abbildung ( $\nearrow$  Ellipsenkonstruktionen I). Sie bildet die Grundlage für die Axonometrie, für Schattenkonstruktionen und für Ellipsenkonstruktionen.

II.2. Mit dem *Einschneideverfahren* lassen sich aus Grund- und Aufriß ( $\nearrow$  Zweitafelprojektion) leicht Schrägbilder herstellen. Eine einfache Konstruktion für das Schrägbild eines Körpers ergibt sich, wenn eine Ebene  $E$  in ihm parallel zur Bildebene  $\Pi$  vorhanden ist und die anderen Punkte durch ihren Abstand von dieser Ebene bestimmt sind. Der rechte Winkel zwischen jedem Abstand und einer horizontalen Geraden durch seinen Fußpunkt tritt dann als konstanter *Verzerrungswinkel*  $\alpha$  auf, und die Länge  $z$  des Abstands wird in einem konstanten, meist rational angenommenen Verhältnis  $v$  auf  $z'$  *verkürzt*, so daß  $z' = v \cdot z$  (Abb. 6). — S. a. Abbildung II.5.

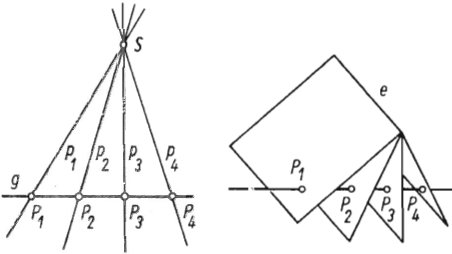


Projektion. Abb. 6: Schrägbild einer geraden regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit dem Verzerrungswinkel  $\alpha = 60^\circ$  und der Verkürzung  $v = |B'H'| : |BH| = 1/2$

**Projektionsachse**  $\nearrow$  Zweitafelprojektion I. **Projektionssatz** svw. Kosinusformel.

**projektive Abbildung, Projektivität:** Abbildung projektiver Gebilde aufeinander, bei der Inzidenzen und das Doppelverhältnis von je vier Original- und Bildelementen erhalten bleiben. Bei einer *Kollineation* werden Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden und Ebenen auf Ebenen abgebildet. Bei einer *Korrelation* gehen duale Gebilde ineinander über, in der projektiven Ebene z. B. Punkte in Geraden und im projektiven Raum Punkte in Ebenen und umgekehrt. Die Zuordnung eines Pols zu seiner Polaren bei einem Kegelschnitt ist z. B. eine Korrelation. Geometrisch läßt sich jede p. A. realisieren durch eine endl. Folge von *Perspektivitäten*.

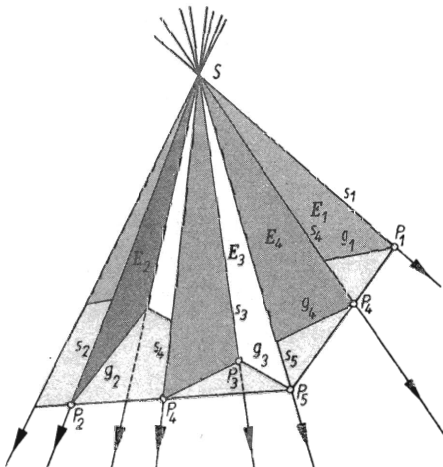
**projektive Gebilde:** geometr. Räume, die aus den euklid. Gebilden gleicher Dimension durch Hinzunahme ihrer  $\nearrow$  uneigentl. Elemente hervorgehen. Die *projektive Gerade* wird durch ihren *uneigentl. Punkt* ein geschlossenes Gebilde, das von einem seiner Punkte aus in einer festen Richtung ganz durchlaufen werden kann, und das durch zwei Punkte in zwei Strecken zerlegt wird. Die projektive Ebene wird durch die *uneigentl. Gerade* geschlossen, auf der sich



projektive Gebilde. Abb. 1: Eindimensionale Grundgebilde der projektiven Geometrie: Punktreihe  $P_1, P_2, \dots$ , Geradenbündel  $p_1, p_2, \dots$  und Ebenenbündel mit dem Träger  $e$

alle im euklid. Sinne parallelen Geraden schneiden. Die uneigentl. Elemente des projektiven Raums liegen auf der *uneigentl. Ebene*, die z. B. die uneigentl. Geraden aller Parallelebenenbündel des Raums enthält.

Im Hinblick auf Projektionen als Untersuchungsmittel der projektiven Geometrie werden die p. G. oder Teile von ihnen als *Grundgebilde* aufgefaßt. Dabei spricht man den Gebilden, die durch Projizieren und Schneiden umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden, die gleiche Dimension zu. Die projektive Gerade ist als Träger einer *Punktreihe* eindimensional. Das gleiche gilt für ein *Geradenbündel*, dessen Träger  $S$  außerhalb der Punktreihe liegt, da beide aufeinander abgebildet werden ( $\nearrow$  Doppelverhältnis). Dem uneigentl. Punkt der Geraden entspricht die Gerade des Bündels, die zum Träger der Punktreihe im euklid. Sinne parallel ist. *Eindimensional* ist ebenfalls ein *Ebenenbündel*, das alle Ebenen enthält, die durch eine Gerade  $e$ , den Träger des Ebenenbündels, gehen (Abb. 1). Hat der Träger  $e$  projektiv keinen Punkt mit der Punktreihe gemeinsam, so kann jedem Punkt der Punktreihe



projektive Gebilde. Abb. 2: Zweidimensionale Grundgebilde der projektiven Geometrie: Punktfeld  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , Geradenfeld  $g_1, g_2, g_3, \dots$ , Geradenbündel  $s_1, s_2, s_3, \dots$  und Ebenenbündel  $E_1, E_2, E_3, \dots$

eine Ebene des Bündels zugeordnet werden. *Zweidimensional* ist das *Punktfeld*, das die Punkte einer projektiven Ebene enthält. Sie wird projiziert durch ein *Geradenbündel*, dessen Träger  $S$  nicht zum Punktfeld gehört (Abb. 2). Unendlich viele Geraden des Bündels, die jeweils dieselbe nicht durch  $S$  gehende Gerade schneiden, liegen in einer Ebene, aber unendlich viele solcher Ebenen enthalten erst alle Geraden des Geradenbündels. Diese Ebenen bilden ein *Ebenenbündel* mit dem Träger  $S$ . Das Ebenenbündel schneidet ein Punktfeld, zu dem der Träger  $S$  des Bündels nicht gehört, in einem Geradenfeld.

**projektive Geometrie:** Gebiet der Geometrie, in dem die Eigenschaften und Bestimmungsstücke geometr. Grundgebilde und Figuren untersucht werden, die sich beim Projizieren nicht ändern. Die Gleichheit von Winkeln und Strecken, die Parallelität und Orthogonalität von Geraden sind keine projektiven Eigenschaften. Dagegen ist die Zugehörigkeit zur Klasse der Kurven 2. Ordnung eine projektive Eigenschaft einer Figur, d. h., bei einer projektiven Abbildung geht eine Kurve 2. Ordnung wieder in eine solche über. S. a. Erlanger Programm IV.

Das Studium der Perspektive in Malerei und Architektur gab den Anstoß zu solchen Untersuchungen, z. B. von Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer. Den ersten Grundriß der p. G. gab Victor PONCELET (1788 bis 1867). Später entwickelten vor allem August Ferdinand MÖBIUS (1790–1868), Julius PLÜCKER (1801 bis 1868), Jakob STEINER (1796–1863) und Christian von STAUDT (1797–1868) die p. G. weiter. Die Zusammenhänge zwischen der p. G. und der euklid. Geometrie wurden vor allem von Felix KLEIN (1849–1925) geklärt.

**projektive Koordinaten:** Koordinaten in einem projektiven Raum, die in einem Gebilde der nächsthöheren Dimension, das diesen Raum enthält, durch ein Strahlenbündel bestimmt werden, dessen Träger  $S$  nicht zum gegebenen Raum gehört. Für eine *Gerade*  $g$  oder *projektive Punktreihe* liegt  $S$  in einer Ebene  $E$  durch  $g$ , aber nicht auf  $g$  (Abb. 1). In  $S$  ist ein Basissystem  $e_0, e_1$  von Vektoren gegeben, in dem jeder Vektor  $p = p_0e_0 + p_1e_1$  durch seine Koordinaten  $p_0, p_1$  eindeutig bestimmt ist. Für jeden Vektor  $p$  läßt sich ein Faktor  $q$  finden, so daß

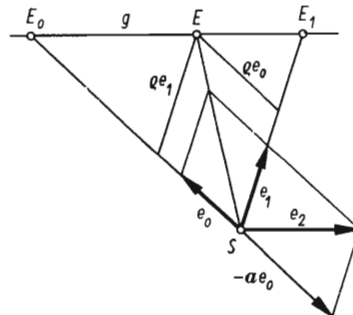


Abb. 1: Grundpunkte  $E_0, E_1$  und  $E$  homogener projektiver Koordinaten auf der Geraden  $g$ ; der Vektor  $e_2 = -ae_0 + e_1$  bestimmt den uneigentlichen Punkt der Geraden  $g$

$gp$  in einem Punkt  $P$  der Geraden  $g$  endet. Man nennt  $p_0, p_1$  die homogenen p. K. von  $P$ . Als homogene Koordinaten sind sie nur bis auf diesen Faktor  $q$  bestimmt. Die Vektoren  $e_0, e_1$  und  $e = e_0 + e_1$  legen die Grundpunkte  $E_0, E_1$  und  $E$  des projektiven Koordinatensystems mit den Koordinaten  $E_0(1, 0), E_1(0, 1)$  und  $E(1, 1)$  eindeutig fest.

Für eine projektive Ebene liegt Punkt  $S$  außerhalb der Ebene, und das Basissystem in ihm hat die Vektoren  $e_0, e_1, e_2$ , der Vektor zu dem Einheitspunkt  $E$  ist  $e = e_0 + e_1 + e_2$ , und die vier Grundpunkte  $E_0, E_1, E_2, E$  haben die homogenen p. K.  $E_0(1, 0, 0), E_1(0, 1, 0), E_2(0, 0, 1), E(1, 1, 1)$  (Abb. 2). Die p. K.

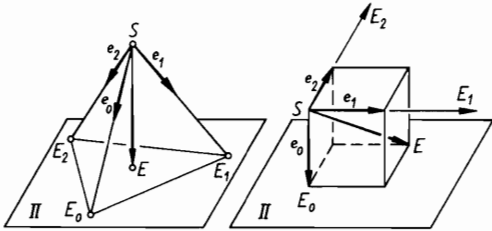


Abb. 2: Grundpunkte  $E_0, E_1, E_2$  und  $E$  homogener projektiver Koordinaten in der Ebene  $\Pi$  sowie ihre Lage beim Übergang zu kartesischen Koordinaten

gehen in kartes. über, wenn die Basisvektoren Lage und Größe der Kanten eines Einheitswürfels haben, der mit einer Ecke im Koordinatenursprung der Ebene liegt.  $E_1$  ist dann der uneigentl. Punkt der  $x$ -Achse,  $E_2$  der der  $y$ -Achse, deren Lage durch die Richtung zweier zueinander senkrechter Kanten bestimmt ist. Allgemein lassen sich aus inhomogenen Koordinaten  $(\xi, \eta)$  der Ebene homogene Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  durch  $\xi = x_1/x_0$  und  $\eta = x_2/x_0$  mit  $x_0 \neq 0$  gewinnen, die allen eigentl. Punkten zugeordnet sind. Die homogenen Koordinaten für uneigentl. Punkte sind dann durch  $x_0 = 0$  und  $\eta/\xi = x_2/x_1$  gegeben.

**Projektivität** svw. projektive Abbildung. **projizierende Ebene** ↗ Ebene IV., ↗ Eintafelprojektion.

**Proportion, Verhältnisgleichung**: I. Gleichung der Gestalt  $a : b = c : d$ , [lies  $a$  verhält sich zu  $b$  wie  $c$  zu  $d$ ], in der  $a, b, c$  und  $d$  Terme sind. Eine P. kann auch als Bruchgleichung  $a/b = c/d$  aufgefaßt werden. Die Terme  $a, b, c$  und  $d$  werden auch **Proportionale** gen.; in der angegebenen Schreibweise sind  $a$  und  $d$  die **Außenglieder**,  $b$  und  $c$  die **Innenglieder** der P. Eine P. heißt **stetig**, falls in ihr gleiche Innenglieder oder gleiche Außenglieder auftreten. In diesem Falle wird das gleiche Glied auch als **mittlere Proportionale** bezeichnet. Das Geometr. Mittel  $z = \sqrt{xy}$  aus zwei

positiven reellen Zahlen  $x$  und  $y$  kann man danach als absoluten Betrag der mittleren Proportionalen in der P.  $x : z = z : y$  auffassen. Eine **fortlaufende P.**  $a : c : e = b : d : f$  ist eine Kurzdarstellung der P.en  $a : c = b : d$  und  $c : e = d : f$  bzw.  $a : b = c : d$  und  $c : d = e : f$ . Zu jeder P.  $a : b = c : d$  ist die **Produktgleichung**  $ad = bc$  äquivalent, d. h., das Produkt der Außenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder.

**II.** Da sich umgekehrt aus der Produktgleichung P.en durch Division z. B. mit  $a \cdot b$  gewinnen lassen, gelten die **Vertauschungssätze**, die besagen, daß aus einer wahren P. durch Vertauschen der beiden Außenglieder, der beiden Innenglieder oder der Innen- mit den Außengliedern wieder wahre P.en entstehen, aus  $a : b = c : d$  z. B. die P.en  $a : c = b : d, d : b = c : a$  und  $b : a = d : c$ . Nach dem Gesetz der **korrespondierenden Addition und Subtraktion** folgt aus  $a : b = c : d$  für alle reellen Zahlen  $p, q, r, s$  mit  $ra + sb \neq 0$  und  $rc + sd \neq 0$  die P.

$$(pa + qb) : (ra + sb) = (pc + qd) : (rc + sd),$$

denn aus der wahren Aussage

$$(pk + q) : (rk + s) = (pk + q) : (rk + s) \text{ folgt}$$

$$b(pk + q) : b(rk + s) = d(pk + q) : d(rk + s), \text{ d. h.,}$$

$$(pbk + qb) : (rbk + sb) = (pdk + qd) : (rdk + sd),$$

daraus aber erhält man mit Hilfe der aus  $a/b = c/d = k$  folgenden Beziehungen  $a = bk$  und  $c = dk$  die Behauptung. Viele prakt. Probleme, bei denen proportionale Größen auftreten, führen bei ihrer rechner. Behandlung auf P.en.

**Beispiel**: In der Bedienungsanleitung für ein Motorrad ist angegeben, daß für eine Fahrt über 100 km mit konstanter Geschwindigkeit auf ebener Strecke 3 l Kraftstoff gebraucht werden. Die Länge der gefahrenen Strecke und das Volumen des verbrauchten Kraftstoffs sind unter den gegebenen Bedingungen proportionale Größen. Plant man eine Fahrt über 350 km, so wird die Maßzahl  $x$  des gebrauchten Kraftstoffs mit Hilfe der P.  $100 : 350 = 3 : x$  berechnet, die sich aus dem Ansatz

$$100 \text{ km} = 3 \text{ l}$$

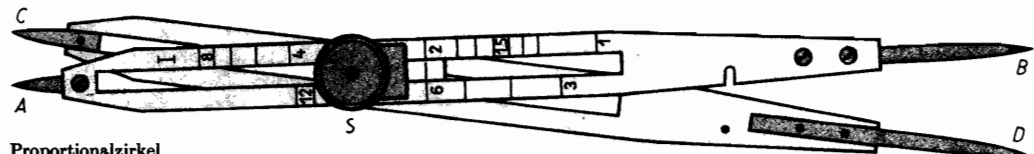
$$350 \text{ km} = x \text{ l}$$

ergibt. Man erhält als äquivalente Produktgleichung  $100x = 350 \cdot 3$  und daraus  $x = 10,5$ . Dieses Verfahren nennt man auch **Dreisatzrechnung**.

**Proportionalglied** ↗ Übertragungsglied I.

**Proportionaltafeln** ↗ dekadischer Logarithmus II.

**Proportionalzirkel**: Gerät zur Verkleinerung bzw. Vergrößerung von Strecken in einem in gewissen Grenzen wählbaren Maßstab. Der P. besteht aus zwei an den Enden mit Spitzen versehenen Stäben  $AB$  und  $CD$  gleicher Länge, die durch eine verschiebbare Stellschraube  $S$  so miteinander verbunden sind, daß  $|AS| = |CS|$  und  $|BS| = |SD|$  gilt.



Proportionalzirkel

$S$  ist so einzustellen, daß  $|AS| : |BS|$  mit dem gewünschten Maßstab  $q$  übereinstimmt; zur bequemen Einstellung tragen die Stäbe eine Skaleneinteilung. Bei jedem Schnittwinkel der Stäbe stimmt dann das Verhältnis  $|AC| : |BD|$  der Spitzenabstände mit  $q$  überein, so daß die Länge der Bildstrecke  $AC$  sofort durch Abgreifen der Strecke  $BD$  erhalten wird (Abb.).

**Proximum**  $\nearrow$  Approximation I.

**Prozentrechnung** [*pro centum*, lat., vom Hundert]: Rechenverfahren, mit dem die Änderungen  $\Delta a_1$  und  $\Delta a_2$  zweier Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  dadurch verglichen werden können, daß sie auf die gleiche Grundzahl 100 bezogen werden; aus  $a_1 : 100 = \Delta a_1 : p_1$  bzw.  $a_2 : 100 = \Delta a_2 : p_2$  erhält man  $p_1 = \Delta a_1 \cdot 100/a_1$  bzw.  $p_2 = \Delta a_2 \cdot 100/a_2$  und kann die relativen Änderungen  $p_1$  und  $p_2$  vergleichen. Man nennt  $a_i$  den Grundwert,  $\Delta a_i$  den Prozentwert und  $p_i$  den Prozentsatz. Man spricht das Ergebnis auch in der Form aus, daß  $p_1\%$  vom Grundwert  $a_1$  den Betrag  $\Delta a_1$  haben. Ein Behälter von  $a_1 = 5 \text{ m}^3$  Rauminhalt ist z. B. mit  $\Delta a_1 = 3 \text{ m}^3$  Inhalt zu  $p_1 = 3 \cdot 100/5 = 60\%$  gefüllt. Ergibt sich für einen zweiten Behälter aus  $a_2 = 10 \text{ m}^3$  und  $\Delta a_2 = 4 \text{ m}^3$  dagegen  $p_2 = 4 \cdot 100/10 = 40\%$ , so enthält dieser zwar eine größere Füllung wegen  $4 \text{ m}^3 > 3 \text{ m}^3$ , ist aber schlechter ausgenutzt wegen  $p_1 = 60\% > 40\% = p_2$ . Aus  $p_i = \Delta a_i \cdot 100/a_i$  erhält man als Lösungen der Umkehrungsaufgaben: für den Grundwert  $a_i = \Delta a_i \cdot 100/p_i$ , für den Prozentwert  $\Delta a_i = p_i \cdot a_i/100$ .

Größen, die mit Hilfe des Prozentsatzes verglichen werden können, sind z. B. die Leistungen auf verschiedenen Gebieten eines Volkswirtschaftsplanes, die Steigerung der Produktion, die Rentabilität oder die Senkung der Selbstkosten verschiedener Betriebe, die Anteile von Fett, Eiweiß und Kohlehydraten in verschiedenen Lebensmitteln oder der Blutzuckergehalt verschiedener Menschen. Es gibt kaum ein Gebiet, in dem diese auf 100 bezogenen Verhältniszahlen nicht zur quantitativen Analyse herangezogen werden.

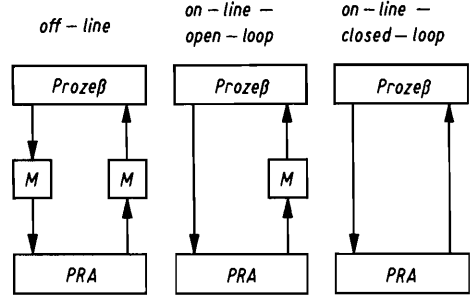
**Beispiel 1:** In der DDR wuchs das durchschnittl. Monatseinkommen der Arbeiter und Angestellten von 693 M im Jahre 1968 auf 780 M im Jahre 1971. Das ist ein Zuwachs des monatl. Einkommens in vier Jahren um  $p = 100 \cdot 87/693 = 12,6\%$ .

**Beispiel 2:** Ein Arbeiter konnte durch einen Neuerer-vorschlag seine Tagesleistung auf 130% erhöhen und stellt damit 1040 Werkstücke her. Aus  $100 : x = 130 : 1040$  erhält man  $x = 1040 \cdot 100/130 = 800$ , d. h., vor der Erhöhung stellte der Arbeiter täglich 800 Werkstücke her.

**Beispiel 3:** Die Sowjetunion produzierte 1958 rund 235,4 Mrd. kWh Elektroenergie und steigerte bis 1966 die Produktion auf 231,5%. Aus  $100 : 235,4 = 231,5 : x$  erhält man  $x = 235,4 \cdot 231,5/100 = 544,951$ , d. h., die Sowjetunion hat 1966 rund 545 Mrd. kWh Elektroenergie produziert.

**Prozeßkopplung:** Art der Verbindung eines Prozesses mit einer Prozeßrechenanlage bzgl. der zu übertragenden Daten.

Die elementarste Form ist die *off-line-Kopplung*, bei der die Datenübertragung in beiden Richtungen



PRA - Prozeßrechenanlage

M - Mensch

Arten der Prozeßkopplung

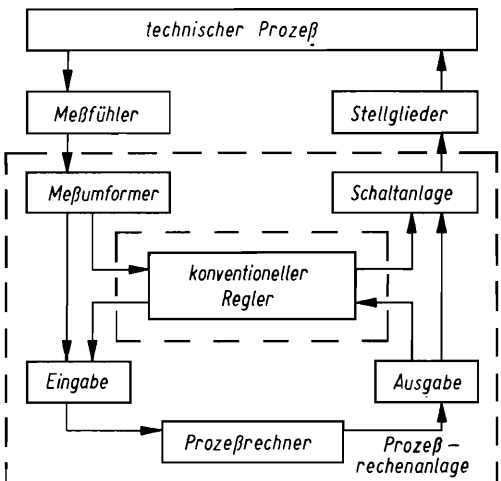
durch menschl. Eingriff vorgenommen wird. Erfolgt dagegen die Übertragung allein in einer Richtung automatisch, wird die Kopplung *on-line-open-loop* genannt. Verbreitet ist in diesem Fall der Einsatz des Menschen auf der Ausgabeseite der Prozeßrechenanlage; sie hat zur Folge, daß Stellinformationen erst nach Sinnfälligkeitsbeurteilungen zur Prozeßführung verwendet werden. Die progressivste Art ist die *on-line-closed-loop-Kopplung*, bei der der Mensch an der Datenübertragung keinerlei Anteil hat. Voraussetzung für diese erstrebenswerte Arbeitsweise ist eine fundierte theoret. Beherrschung des Prozesses. On-line-Kopplungen bedingen die Realisierbarkeit von Echtzeitdatenverarbeitung ( $\nearrow$  Prozeßrechner I.).

**Prozeß ohne Gedächtnis**  $\nearrow$  stochastischer Prozeß III.

**Prozeß ohne Nachwirkung**  $\nearrow$  stochastischer Prozeß III.

**Prozeßperipherie**  $\nearrow$  Prozeßrechenanlage.

**Prozeßrechenanlage:** Funktionseinheit zur Verarbeitung von Daten, die bei der Überwachung, Steuerung und Regelung bzw. der Führung und



Verbindung zwischen Prozeß und Prozeßrechenanlage

Optimierung eines Prozesses zwischen diesem und der P. ausgetauscht werden (Abb.). Die Abb. zeigt den *Informationsfluß* zwischen Prozeß und P. Über Meßfühler werden Informationen, z. B. Temperaturen und Dricke, vom Prozeß gewonnen und nach einer geeigneten Umformung, i. allg. in elektr. Größen, über ein Eingabegerät dem Prozeßrechner bereitgestellt. Dieser verarbeitet die Meßwerte mit Hilfe von Programmen und wirkt über Stellglieder auf den Prozeß zurück (↗ Programmierung des Prozeßrechners). Häufig wird aus Gründen der Betriebssicherheit eine konventionelle Steuereinrichtung parallel betrieben, die bei Störung des Prozeßrechners die Führung des Prozesses übernimmt. Zur P. gehören neben dem *Prozeßrechner* das *Bedienpult*, *periphere Ein- und Ausgabegeräte*, *Datenübertragungseinrichtungen*, *externe Speicher* (↗ digitale Rechenanlage I.3.) sowie die *Prozeßperipherie*. Diese verbindet den Prozeßrechner mit dem Prozeß durch Übertragung von Meß- und Stellinformationen, Unterbrechungssignalen u. a. Wesentl. Bestandteile der Prozeßperipherie sind Meßstellenumschalter, A/D-Wandler und D/A-Wandler (↗ Wandler). **Prozeßrechner:** zu einer Prozeßrechenanlage gehörender Digitalrechner mit folgenden Eigenschaften:

**I.** Der Rechner macht *Echtzeitdatenverarbeitung* möglich, d. h., er kann wegen seiner hohen Rechengeschwindigkeit mit dem Prozeßablauf Schritt halten und in Echtzeit Prozeßdaten erfassen, auswerten und notwendige Stellinformationen abgeben.

**II.** Durch eine *Vorrangsteuerung* kann der P. die Abarbeitung von Programmen unterbrechen, um periphere Geräte oder andere Programme, deren Ausführung sich aus der Sicht des Prozesses plötzlich als wichtiger erweist, zu aktivieren.

**III.** Der P. enthält spezielle Eingänge für die Übertragung von Signalen zur Auslösung von *Programmunterbrechungen*, *Interrupts* gen., bei bes. Prozeßsituationen, z. B. bei Netzausfall. Daneben wird eine *Echtzeituhr*, die i. allg. als elektron. Taktimpuls-generator ausgebildet ist, gebraucht, damit Programmunterbrechungen zeitabhängig programmierbar sind.

**IV.** P. müssen sehr zuverlässig sein, um Ausfälle auf ein Minimum zu beschränken. Häufig werden zur Vermeidung von Gefahrensituationen *Ersatzrechner*, *Parallelrechner* oder *konventionelle Steuereinrichtungen* bereitgestellt.

**V.** Wegen der ununterbrochenen Führung des Prozesses muß der Rechner weitgehend *on-line*, d. h. während des Rechenablaufs, gewartet werden können.

**Prüfbit:** zusätzl. Bit zum Informationsschutz gegen Übertragungsfehler bei der Kodierung einzelner oder mehrerer Zeichen. Häufig wird das P. so festgelegt, daß die Anzahl aller Binärzeichen L gerade ist. In diesem Falle können immer dann Übertragungsfehler erkannt werden, wenn sich bei rechnerinternen Kontrollen die eben gen. Anzahl als ungerade erweist. Mitunter finden mehrere P.s Verwendung (↗ Kodierung III.).

**Pseudosphäre** ↗ Traktrix.

**Pseudotetraden** ↗ Kodierung III.

**Pseudozufallszahlen** ↗ Monte-Carlo-Methode II.

**Ptolemäus**, Claudius, geb. nach 83 u. Z. in Ptolemais (Mittelägypten), gest. nach 161 u. Z. — Von seinem Leben ist nur bekannt, daß er in Alexandria tätig war. Er gilt als der bedeutendste Astronom der Antike. Er ist der Hauptvertreter des geozent. Weltbildes. Sein »Großes astronom. System« ist in der arab. Übersetzung Kitab al-magisti als »*Almagest*« bis KOPERNIKUS grundlegend für die Astronomie gewesen.

Zur Darstellung benutzte P. die Epizyklentheorie des APOLLONIOS sowie eine Sehentrigonometrie und die stereograph. Projektion. — Von P. stammen noch eine »Optik«, das sehr einflußreiche astrolog. Werk »Tetrabiblos« sowie die sehr wertvolle »Einführung in die Geographie«, die ebenso wie die Astrologie die mittelalterl. Wissenschaft außerordentlich beeinflußt hat.

**Pufferzeiten** ↗ Netzplantechnik V.

**Pulsamplitudenmodulation** ↗ Modulation II.

**Pulsdauermodulation** ↗ Modulation II.

**Pulsfrequenzmodulation** ↗ Modulation II.

**Pulsweitenmodulation** ↗ Modulation II.

**Pulsphasenmodulation** ↗ Modulation II.

**Pulszeitmodulation** ↗ Modulation II.

**Pultdach** ↗ Dachausmittlung.

**Punktfeld** ↗ duale Gebilde, ↗ projektive Gebilde.

**Punktfolge:** eine eindeutige Abbildung von einer Menge natürl. Zahlen auf eine gegebene *Punktmenge*  $M$ . Ist die Menge der natürl. Zahlen endlich, so heißt die P. endlich, andernfalls unendlich. Durch die Zuordnung  $0 \rightarrow P_0 = (1)$ ,  $1 \rightarrow P_1 = (1/2)$ ,  $2 \rightarrow P_2 = (1/3)$ , ... wird z. B. eine unendl. P. gegeben;  $M$  ist dabei die Menge aller Punkte auf einer Geraden mit den Koordinaten  $1/n$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Man schreibt die P. in diesem Beispiel auch in der Form  $P_0 = (1)$ ,  $P_1 = (1/2)$ ,  $P_2 = (1/3)$ , ... Ein weiteres Beispiel einer P. bilden die Schnittpunkte  $P_0 = (0)$ ,  $P_1 = (\pi)$ ,  $P_2 = (2\pi)$ , ... der Sinuskurve mit der positiven  $x$ -Achse. Dabei besteht die zugehörige Punktmenge  $M$  aus den Punkten mit den Koordinaten  $n\pi$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Die Begriffe Beschränktheit, Schranke, Grenze und Häufungspunkt übertragen sich von der Punktmenge  $M$  (↗ Punktmenge) auf die P. Die P.  $(1/n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$  z. B. hat eine eindeutig bestimmte obere und untere Grenze sowie mindestens einen Häufungspunkt, dagegen ist die P.  $(n\pi)$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  nicht beschränkt.

Hat die zur P. gehörige Punktmenge  $M$  genau einen Häufungspunkt, so spricht man von der *Konvergenz* der P. gegen den Häufungspunkt. Die P.  $(1/n)$  z. B. konvergiert gegen  $P = (0)$ , weil  $P = (0)$  ihr einziger Häufungspunkt ist. Die P.  $(n\pi)$  ist nicht konvergent, da sie keinen Häufungspunkt hat. Auch die P.  $P_0 = \{-1 + 1/3\}$ ,  $P_1 = \{1 + 2/3\}$ , ...,  $P_{n-1} = \{(-1)^n + n/(2n + 1)\}$ , ... ist nicht konvergent, denn  $P = \{-1/2\}$  und  $P' = \{3/2\}$  sind zwei Häufungspunkte der P. Vgl. auch Folge.

**Punktgitter** ↗ Geometrie der Zahlen.

**punktierte Zahlenebene** ↗ komplexwertige Funktion, elementare, III.

**Punktmenge:** Menge von Punkten eines Raumes, die definiert ist, wenn man von jedem Raumpunkte aussagen kann, ob er zur Menge gehört oder nicht; z. B. bilden alle Punkte auf dem Umfang eines Quadrats eine P.  $M_1$ , alle Punkte auf einer Kugel des dreidimensionalen Raumes eine P.  $M_2$  und ebenso alle Punkte außerhalb dieser Kugel eine P.  $M_3$ .  $M_1$  ist eindimensional,  $M_2$  zweidimensional und  $M_3$  dreidimensional; auch höherdimensionale P.n lassen sich bilden. Es genügt aber oft, eindimensionale P.n auf einer Geraden  $g$  zu betrachten, da für höherdimensionale P.n durch die mögl. Koordinatendarstellung entsprechende Überlegungen gelten. Führt man auf der Geraden  $g$  ein kartes. Koordinatensystem ein, so wird der Abstand zweier Punkte  $P = (x)$  und  $P' = (x')$  durch  $|PP'| = |x - x'|$  gegeben. Eine eindimensionale P.  $M$  auf einer Geraden heißt *nach oben beschränkt*, wenn sich eine Zahl  $K$  angeben läßt, so daß  $x \leq K$  für alle Punkte  $P = (x)$  aus  $M$  gilt.  $M$  heißt *nach unten beschränkt*, wenn sich eine Zahl  $k$  angeben läßt, so daß  $k \leq x$  für alle Punkte  $P = (x)$  aus  $M$  gilt.  $K$  heißt *obere* und  $k$  *untere Schranke* von  $M$ . Mit  $K$  ist auch  $K' \geq K$  obere Schranke, und mit  $k$  ist auch  $k' \leq k$  untere Schranke. Ist  $M$  nach oben und nach unten beschränkt, so wird sie *beschränkte P. gen.* Die kleinste obere Schranke heißt *obere Grenze G* von  $M$ , die größte untere Schranke heißt *untere Grenze g* von  $M$ . Danach ist  $G$  dann und nur dann obere Grenze von  $M$ , wenn  $G$  obere Schranke von  $M$  ist und wenn zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl  $\epsilon$  mindestens ein Punkt  $P_0 = (x_0)$  aus  $M$  mit  $G - \epsilon < x_0 \leq G$  existiert. Entsprechend ist  $g$  untere Grenze genau dann, wenn  $g$  untere Schranke ist und wenn es mindestens einen Punkt  $x_0$  gibt, der geringeren Abstand von  $g$  hat als  $g + \epsilon$ . In einem Raum, in dem jeder Dedekindsche Schnitt genau ein Element erfaßt, hat jede nach oben bzw. nach unten beschränkte P. eine eindeutig bestimmte obere bzw. untere Grenze.

Eine endl. P. ist stets beschränkt. Unendl. P.n können unbeschränkt sein, z. B. die Menge aller Punkte einer Geraden. Die Menge aller Punkte  $P = (x)$ , für die  $x = 1/n$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt, hat  $K = 1$ ,  $K = 7$  oder  $K = e^2$  zu oberen und  $k = -5$ ,  $k = -2615$  oder  $k = -\sqrt{2}$  zu unteren Schranken und ist folglich nach oben und nach unten beschränkt. Für diese Menge ist  $G = 1$  und  $g = 0$ , denn  $G$  ist obere und  $g$  ist untere Schranke; ist  $\epsilon$  eine beliebige positive Zahl, wird einerseits  $G - \epsilon = 1 - \epsilon$  stets durch den Punkt  $P = (1)$  der P. überschritten, andererseits  $g + \epsilon = \epsilon$  stets unterschritten, etwa durch den Punkt  $P = (1/n)$  der P. mit einer natürl. Zahl  $n > 1/\epsilon$ . In diesem Beispiel gehört die obere Grenze zur P., die untere Grenze hingegen nicht.

Unter der  $\epsilon$ -Umgebung eines Punktes  $P_0$  versteht man die Menge aller Punkte  $P$ , deren Abstand zu  $P_0$  kleiner als  $\epsilon$  ist, d. h. alle Punkte  $P$  mit  $|PP_0| < \epsilon$ . Ein Punkt  $P_0$  heißt *Häufungspunkt* einer gegebenen P., wenn in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $P_0$  unendlich viele Punkte der P. liegen. Ein Häufungspunkt  $P_0$  muß nicht notwendig selbst zur P. gehören. Die

Menge der Punkte  $P_n = \{(-1)^n + 1/n\}$ , für die  $n$  alle natürl. Zahlen größer Null durchläuft, hat die beiden Häufungspunkte  $P = \{-1\}$  und  $P' = \{1\}$ , denn für alle ihre Punkte  $P_n$  mit  $n$  gerade und  $n > 2/\epsilon$  gilt  $|P_n P'| < \epsilon$ , d. h., in jede beliebige  $\epsilon$ -Umgebung von  $P'$  fallen unendlich viele Punkte der gegebenen P. Entsprechendes läßt sich für  $P = \{-1\}$  zeigen. Für P.n in kompakten Räumen mit unendlich vielen Elementen sichert der Satz von Bolzano-Weierstraß die Existenz von Häufungspunkten: *Jede beschränkte unendl. P. hat mindestens einen Häufungspunkt*, z. B. weiß man sofort, daß die Menge der Punkte  $P_n = \{(-1)^n + 1/n\}$  mindestens einen Häufungspunkt hat, denn die P. ist beschränkt wegen  $-1 < (-1)^n + 1/n < 2$ .

**Punktprodukt** svw. Skalarprodukt, s. a. Multiplikation I.

**Punktreihe** ↗ duale Gebilde, ↗ projektive Gebilde.

**Punktgleichung** ↗ Geradengleichung III.

**Punktschätzung:** eine Stichprobenfunktion  $\Gamma(X)$ , deren Realisierungen bei konkreten Stichproben als *Näherungswerte* für einen unbekannt Parameter  $\gamma$  der Grundgesamtheit aufgefaßt werden können.  $\Gamma(X)$  wird auch als *Schätzfunktion* bezeichnet. Das Stichprobenmittel  $\Gamma_1(X) = \bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$  ist z. B. eine P. für den *Erwartungswert*  $\gamma = EX$ . Liegt eine konkrete Stichprobe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  vor, so heißt die Zahl  $\Gamma(x)$  ein *Schätzwert* für den Parameter  $\gamma$ . Das empir. Mittel  $\bar{x}$  ist z. B. ein Schätzwert für den Erwartungswert des Merkmals  $X$  in der Grundgesamtheit. Eine P.  $\Gamma(X)$  heißt *konsistent*, wenn  $\Gamma(X)$  in Wahrscheinlichkeit gegen den zu schätzenden Parameter konvergiert, falls der Stichprobenumfang  $n \rightarrow \infty$  geht (↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III.). Das Stichprobenmittel  $\bar{X}$  ist z. B. eine konsistente P. für den Erwartungswert  $EX$ , und die Stichprobenvarianz  $S^2$  ist eine konsistente P. für  $\sigma^2 = D^2X$  (↗ Streuung). Eine P. heißt *erwartungstreu* oder *unbiased*, wenn ihr Erwartungswert gleich dem zu schätzenden Parameter ist; z. B. sind das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz auch erwartungstreu. Ist eine P. nicht erwartungstreu, so sagt man, sie hat einen *Bias* oder *systemat. Fehler*. Die oft als Schätzung für  $D^2X$  verwendete Größe (1) ist z. B. wegen (2) keine erwartungstreu P. von

$$(1) \quad S^{*2} = (1/n)[(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2]$$

$$(2) \quad ES^{*2} = [(n-1)/n] \cdot D^2X$$

$\sigma^2 = D^2X$ . Eine P.  $\Gamma_1$  von  $\gamma$  heißt *wirksamer* als eine weitere P.  $\Gamma_2$  von  $\gamma$ , wenn  $E(\Gamma_1 - \gamma)^2 \leq E(\Gamma_2 - \gamma)^2$  ist. Sind beide P.en erwartungstreu, so bedeutet das  $D^2\Gamma_1 \leq D^2\Gamma_2$ . Methoden zur Gewinnung von P.en sind die Momentenmethode und die Maximum-Likelihood-Methode. Vgl. auch Konfidenzschätzung.

**Pyramide: I. Pyramidenfläche:** die Vereinigung aller Punkte einer ebenen  $n$ -Ecksfläche mit den Punkten aller Verbindungsstrecken eines Punktes  $S$  außerhalb der Ebene des  $n$ -Ecks mit jedem Punkt des einfachen geschlossenen Streckenzugs  $A_1A_2 \dots A_n$ , der das  $n$ -Eck begrenzt. Man bezeichnet die Ver-

bindungsstrecken  $SA_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  als *Seitenkanten*, die Seiten des  $n$ -Ecks als *Grundkanten*, die  $n$ -Ecksfläche als *Grundfläche* und den Punkt  $S$  als *Spitze* der P. sowie die  $n$  Dreiecksflächen  $A_1A_2S, A_2A_3S, \dots, A_nA_1S$  als *Seitenflächen*, ihre Vereinigung als *Mantel* der P. Entsprechend heißen die Verbindungsstrecken von  $S$  mit einem Punkt des  $n$ -Ecks *Mantellinien* und die auf einer Grundkante senkrecht stehende Mantellinie *Höhe einer Seitenfläche*. Die P.nfläche zerlegt den Raum in zwei getrennte offene Untermengen, eine von ihnen, das *Innere* der P., enthält keine Geraden. Die Vereinigung der Punkte des Inneren mit denen der P.nfläche heißt *P.nkörper*. Der Abstand der Spitze  $S$  von der Ebene der Grundfläche heißt *Höhe* der P. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt und ist dieser der Fußpunkt des von der Spitze auf die Grundfläche gefällten Lotes, so wird die P. *gerade* gen., alle anderen P. aber *schief*. Ist die Grundfläche ein regelmäßiges  $n$ -Eck, und jede Seitenfläche ein gleichschenkeliges Dreieck, dann heißt die P. *regelmäßig* und ist eine *gerade P.* In jeder *geraden P.* ist die Gerade durch die Spitze und den Mittelpunkt der Grundfläche *Symmetrieachse*. *Achsenschnitte* sind ebene Schnitte, die die Symmetrieachse enthalten. Aus einem *Netz* der P., das man nach dem Aufschneiden der P.nfläche längs der Seitenkanten durch Umlegen der Seitenflächen in die Ebene der Grundfläche erhält, ergibt sich der *Oberflächeninhalt* als die Summe der Inhalte dieser Flächen.

**II.** Zur Bestimmung des *Rauminhalts* einer P. genügt es, den Rauminhalt einer dreiseitigen P. anzugeben, denn jede P. läßt sich in der Weise in endlich viele dreiseitige P.n zerlegen, daß die Summe ihrer Rauminhalte gleich dem Rauminhalt der ursprüngl. P. ist. Der Rauminhalt einer dreiseitigen P. ergibt sich aus dem eines dreiseitigen Prismas, das mit der P. die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe hat (Abb. 1). Durch die Ebenen  $A_1SA_2$  und  $A_1SB_2$  wird das Prisma in die drei dreiseitigen P.n  $A_1A_2A_3S, B_1B_2SA_1$  und  $A_1A_2B_2S$  zerlegt. Diese drei P.n sind nach dem Cavalierischen Prinzip raumgleich, denn in den beiden ersten sind die Grundflächen  $A_1A_2A_3$  und  $B_1B_2S$  kongruent und die Höhen gleich. Aus demselben Grunde sind auch die beiden letzten P.n

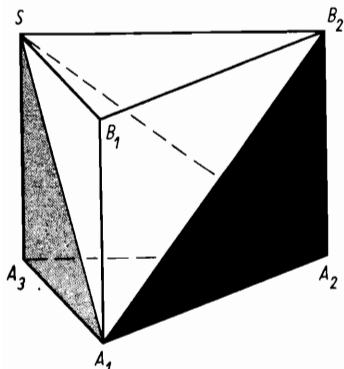
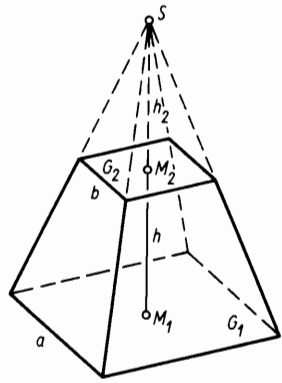


Abb. 1: Zerlegung eines dreiseitigen Prismas in drei dreiseitige Pyramiden mit gleichem Rauminhalt



Pyramide. Abb. 2: Quadrat. Pyramidenstumpf,  $|M_1S| = h_1$ ,  $|M_2S| = h_2$

raumgleich, wenn man die kongruenten Dreiecke  $A_1B_1B_2$  und  $A_1A_2B_2$  als Grundflächen und  $S$  als Spitze auffaßt. Ist  $G$  der Flächeninhalt von  $\triangle A_1A_2A_3$  und  $h$  die Höhe des dreiseitigen Prismas, so hat dieses den Rauminhalt  $G \cdot h$  und jede der drei dreiseitigen P.n den Rauminhalt  $V = G \cdot h/3$ .

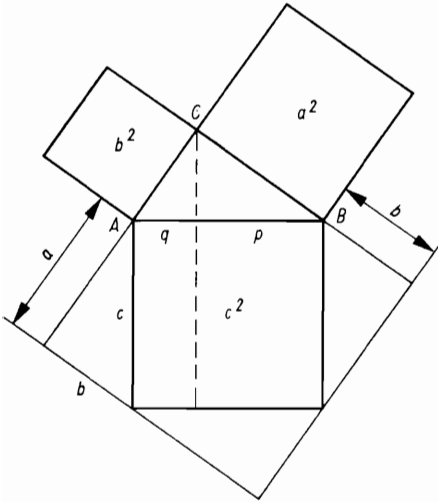
**III.** Eine zur Grundflächenebene der P. parallele Ebene  $E$  durch die P. schneidet von dieser eine P. kleinerer Höhe ab. Der Restkörper heißt *P.nstumpf*, die abgeschnittene P. *Ergänzungs-P.* (Abb. 2). Die von  $E$  erzeugte Schnittfigur ist zur Grundfläche der ursprüngl. P. ähnlich, und ihre Flächeninhalte  $G_1$  und  $G_2$  stehen zueinander im Verhältnis der Quadrate ihrer Abstände  $h_1$  und  $h_2$  von der Spitze:  $G_1 : G_2 = h_1^2 : h_2^2$ . Die Seitenflächen eines P.nstumpfes sind Trapeze. Den *Rauminhalt* eines P.nstumpfes erhält man als Differenz der Rauminhalte der ganzen P. und der Ergänzungs-P.:  $V = (G_1h_1 - G_2h_2)/3$ . Bezeichnet man mit  $h = h_1 - h_2$  die Länge der Höhe des P.nstumpfes, so lassen sich daraus und aus  $\sqrt{G_1} : \sqrt{G_2} = h_1 : h_2$  die Höhen  $h_1$  und  $h_2$  berechnen. Man erhält  $V = (h/3)(G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2)$ . Danach hat ein quadrat. P.nstumpf, dessen Grundkanten die Längen  $a$  bzw.  $b$  haben, das Volumen  $V = (h/3)(a^2 + ab + b^2)$ . Der Inhalt der Oberfläche eines P.nstumpfes ist die Summe der Inhalte der Grundflächen und der  $n$  Trapezflächen.

**Pyramidenstumpf**  $\nearrow$  Pyramide III.

**Pythagoras, Satz von:** *Im rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.* Wegen seiner Bedeutung sind über 100 Beweise dieses Satzes bekannt. Einer ergibt sich aus dem Kathetensatz. Haben in dem rechtwinkligen Dreieck  $ABC$  (Abb.) die Katheten bzw. die Hypotenuse die Längen  $a, b$  bzw.  $c$  sowie die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse die Längen  $p$  und  $q$ , so gilt  $a^2 = p \cdot c$  und  $b^2 = q \cdot c$  oder  $a^2 + b^2 = (p + q) c = c^2$ . Ein unmittelbarer Beweis ergibt sich aus  $c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot (ab/2) = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$ .

Nach der Umkehrung dieses Satzes ist ein Dreieck rechtwinklig, wenn für die Längen  $a, b, c$  seiner Seiten die Relation  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt. Danach kann ein rechter Winkel mit einem Seil abgesteckt wer-





Satz des Pythagoras

den, auf dem z. B. die Längen  $a = 3\text{ m}$ ,  $b = 4\text{ m}$  und  $c = 5\text{ m}$  durch Knoten markiert sind, wenn diese Seiten in Form eines Dreiecks gespannt werden. Verwendet man eine andere Streckeneinheit  $e$ , so genügen auch die Längen  $3e$ ,  $4e$ ,  $5e$  den gen. Bedingungen. Allgemein bezeichnet man  $a, b, c$  als *pythagoreisches Zahlentripel*, falls  $a^2 + b^2 = c^2$ . Ein anderes Beispiel ist  $a = 5$ ,  $b = 12$ ,  $c = 13$ , da  $25 + 144 = 169$ .

**Pythagoras von Samos**, geb. 580 v. u. Z., gest. 496 v. u. Z. — Über sein Leben ist wenig Sicheres bekannt. Er verließ wegen eines Tyrannen seine Heimat und siedelte sich in Kroton in Unteritalien an. Dort gründete er eine religiös-eth. Schule, in der vorwiegend Zahlenmystik betrieben wurde. Der nach ihm ben. Satz war schon lange vorher in Babylon bekannt.

**pythagoreische Gleichung: I.** spezielle diophant. Gleichung zweiten Grades  $x^2 + y^2 = z^2$  mit  $x, y, z \in \mathbf{Z}$ . Die Lösungen  $(x, y, z)$  dieser Gleichung heißen *pythagoreische Tripel*. Mit  $(x, y, z)$  ist für jede ganze Zahl  $k$  auch  $(kx, ky, kz)$  ein pythagoreisches Tripel. Beim Aufsuchen aller Lösungen der p. G.  $x^2 + y^2 = z^2$  kann man sich deshalb auf Tripel  $(x, y, z)$  mit dem größten gemeinsamen Teiler  $\text{ggT}(x, y, z) = 1$  beschränken. Da die Variablen nur in der zweiten Potenz auftreten, braucht man zunächst nur nicht-negative Werte für sie zu suchen. Aus  $\text{ggT}(x, y, z) = 1$  folgt  $\text{ggT}(x, y) = 1$ , denn wäre  $\text{ggT}(x, y) = t \neq 1$ , so könnte man  $x = x_1 t$ ,  $y = y_1 t$  schreiben und man erhielte  $x^2 + y^2 = t^2(x_1^2 + y_1^2) = z^2$ , d. h., auch  $z$  hätte den Teiler  $t$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $\text{ggT}(x, y, z) = 1$ . Das bedeutet, daß  $x$  und  $y$  nicht beide gerade sein können. Sie können auch nicht beide ungerade sein, denn wäre  $x = 2x_2 + 1$ ,  $y = 2y_2 + 1$ , dann wären  $x^2$  und  $y^2$  ungerade, folglich  $z^2$  und damit  $z$  gerade, etwa  $z = 2z_2$ . Daraus ergäbe sich aber

$x^2 + y^2 = 4(x_2^2 + x_2 + y_2^2 + y_2) + 2 = 4z_2^2 = z^2$  im Widerspruch zur gegebenen p. G., denn in ihr

läßt der Term  $4(x_2^2 + x_2 + y_2^2 + y_2) + 2$  bei Division durch 4 stets den Rest 2, während der Term  $4z_2^2$  durch 4 teilbar ist. Diese Gleichung ist demnach falsch. Danach ist  $x$  ungerade und  $y$  gerade oder  $x$  gerade und  $y$  ungerade, aber stets  $x$  ungerade. Da  $x$  und  $y$  in der p. G. symmetrisch auftreten, kann man für die weitere Untersuchung annehmen, daß  $y$  gerade und  $x$  ungerade ist.

**II.** Zur Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  ist die Gleichung  $y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x)$  äquivalent. Da  $y$  als gerade vorausgesetzt wurde, müssen  $z + x$  und  $z - x$  beide gerade sein, etwa  $z + x = 2u$  und  $z - x = 2v$ . Sei  $\text{ggT}(u, v) = r$ , dann ist  $z + x = 2ru'$  und  $z - x = 2rv'$  mit  $\text{ggT}(u', v') = 1$ . Durch Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man  $z = r(u' + v')$  und  $x = r(u' - v')$ , d. h.,  $r$  ist ein Teiler von  $\text{ggT}(x, z) = 1$ , d. h. aber,  $r = 1$ . Wegen  $y^2 = 4uv$  müssen dann  $u$  und  $v$  Quadratzahlen sein:  $z + x = 2m^2$ ,  $z - x = 2n^2$  mit natürl. Zahlen  $m$  und  $n$ . Wenn  $(x, y, z)$  ein pythagoreisches Zahlentripel mit  $x, y, z \geq 0$ ,  $x$  ungerade und  $\text{ggT}(x, y, z) = 1$  sein soll, so müssen sich  $x, y$  und  $z$  in der Form  $x = m^2 - n^2$ ,  $y = 2mn$ ,  $z = m^2 + n^2$  mit  $m, n \in \mathbf{N}$ ,  $\text{ggT}(m, n) = 1$ ,  $m \not\equiv n \pmod 2$  und  $m > n$  schreiben lassen. Umgekehrt liefern, wie man durch Einsetzen in die p. G. leicht bestätigt, diese Formeln für beliebige  $m, n \in \mathbf{Z}$  Lösungen dieser Gleichung. Es ergibt sich danach die Lösungsmenge  $L = \{[k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2)], [2kmn, k(m^2 - n^2), k(m^2 + n^2)]\}$  mit  $k, m, n \in \mathbf{Z}$ , z. B. erhält man für  $k = +1$  und  $m = 2, n = 1$  die Tripel  $(3, 4, 5)$ ,  $(4, 3, 5)$ , für  $m = 3, n = 1$  die Tripel  $(8, 6, 10)$ ,  $(6, 8, 10)$  und für  $m = 3, n = 2$   $(5, 12, 13)$  und  $(12, 5, 13)$ .

**pythagoreisches Tripel** ↗ pythagoreische Gleichung I.  
**PZM** svw. Pulszeitmodulation, ↗ Modulation II.

## Q

**Quader** ↗ Prisma II.

**Quadrant** ↗ Koordinatensystem II., Zweitafelprojektion I.

**Quadrantenrelation** ↗ Winkelfunktion IV.

**Quadrat:** Viereck  $ABCD$ , dessen vier Seiten und dessen vier Innenwinkel kongruent sind. *Das Q. ist ein Rechteck mit Seiten gleicher Länge bzw. ein Rhombus, dessen Seiten senkrecht zueinander stehen.* Die beiden Diagonalen gleicher Größe halbieren einander und die Innenwinkel. Bezeichnet  $a$  die Länge der Seite, so ist  $A_Q = a^2$  die Größe des *Flächeninhalts* vom Q. Betrachtet man das Q. als regelmäßiges  $n$ -Eck mit dem Mittelpunktswinkel der Größe  $\varphi_4 = 360^\circ/4 = 90^\circ$ , so ist  $a = s_4 = r\sqrt{2}$ , da die Länge des Umkreisradius  $r$  die Hälfte von der Diagonalen ist.

**quadratisch** ↗ Graph III.

**quadratische Approximation** ↗ Approximation.

**quadratische Ergänzung** ↗ quadratische Gleichung III.2.

**quadratische Form:** I. Abbildung  $\Phi$ , die jedem Vektor  $\mathbf{x}$  eines reellen Vektorraumes eine reelle Zahl vermöge  $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  zuordnet, dabei ist  $\mathbf{A}$  eine symmetr. Matrix mit reellen Elementen, die *Formenmatrix* heißt. Sind  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\mathbf{A} = (a_{ik})$  eine symmetr.  $(n, n)$ -Matrix, so läßt sich die q. F.  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  nach (1) auch als Doppelsumme schreiben.

$$(1) \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad \text{mit} \quad a_{ik} = a_{ki}$$

Demnach kann man eine q. F. auch erklären als einen Ausdruck der Gestalt (1) mit  $a_{ik} = a_{ki}$ ; man spricht dann genauer von einer q. F. in den Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ist  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  der Charakteristik Null, so verallgemeinert man auf naheliegende Weise und bezeichnet als q. F. eine durch (2) dargestellte Abbildung  $\Phi: V \rightarrow K$ , in der  $a_{ik} = a_{ki}$  gilt und  $a_{ik} \in K$  für alle  $i$

$$(2) \quad \Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

und alle  $k$ . Eine q. F. ist z. B.  $\Phi = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2$ , denn es gilt (3).

$$(3) \quad \Phi = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

II. Führt man in der q. F.  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  durch die Substitutionsgleichung  $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$  mit orthogonaler Matrix  $\mathbf{C}$  neue Variable  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ein, so erhält man wieder eine q. F.  $\mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$  mit der Formenmatrix  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ . Es ist stets möglich, die orthogonale Matrix  $\mathbf{C}$  so zu wählen, daß in der q. F. (4) nach der Variablentransformation  $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$  nur noch reinquadrat. Glieder auftreten.

$$(4) \quad \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Diese Gestalt (4) nennt man die *metr. Normalform* der q. F., die Transformation der vorgegebenen q. F. in ihre metr. Normalform heißt *Hauptachsentransformation*. Die metr. Normalform ist eindeutig bestimmt bis auf die Numerierung der Variablen  $y_i$ . Soll  $\mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$  die metr. Normalform sein, d. h. nur reinquadrat. Glieder enthalten, so muß  $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$  eine Diagonalmatrix sein. Dies wird erreicht, wenn man als Spalten der Transformationsmatrix  $\mathbf{C}$  ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren der Formenmatrix  $\mathbf{A}$  wählt ( $\nearrow$  Eigenwert); die Symmetrie von  $\mathbf{A}$  sichert, daß es ein solches Orthonormalsystem von  $n$  Eigenvektoren gibt. Die Koeffizienten  $\lambda_i$  in der metr. Normalform  $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$  sind die Eigenwerte der Formenmatrix, von denen jeder so oft auftritt, wie seine Vielfachheit angibt. Ist Null ein  $(n - r)$ -facher Eigenwert der Formenmatrix, dann enthält die metr. Normalform nur  $r$  nicht identisch verschwindende Summanden; es liegt dann eine q. F. vom Rang  $r$  vor.

*Beispiel:* Um die q. F.  $7x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3$  in ihre metr. Normalform überzuführen, berechnet man die Eigenwerte und die dazugehörigen

Eigenräume der Formenmatrix (5). Aus (6) erhält man  $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$ , d. h. die metr.

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} (7 - \lambda) & 2 & 3 \\ 2 & (1 - \lambda) & 0 \\ 3 & 0 & (3 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Normalform  $9y_1^2 + 2y_2^2$ . Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, erhält man paarweise orthogonale Eigenräume  $L_1 = \{\mu_1(4, 1, 2)\}$ ,  $L_2 = \{\mu_2(1, 2, -3)\}$ ,  $L_3 = \{\mu_3(-1, 2, 1)\}$ , und hat nur noch zu normieren, um eine orthogonale Matrix zu erhalten. Setzt man  $\mu_1 = 1/\sqrt{21}, \mu_2 = 1/\sqrt{14}, \mu_3 = 1/\sqrt{6}$ , so führt die Transformation mittels (7) die gegebene q. F. in ihre metr. Normalform  $9y_1^2 + 2y_2^2$  über.

$$(7) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4\mu_1 & 1\mu_2 & -1\mu_3 \\ 1\mu_1 & 2\mu_2 & 2\mu_3 \\ 2\mu_1 & -3\mu_2 & 1\mu_3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

III. Läßt man Variablentransformationen  $\mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{y}$  mit regulärer, aber nicht notwendig orthogonaler Matrix  $\mathbf{S}$  zu, so kann man die q. F.  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  i. allg. auf verschiedene Weisen in eine Normalform überführen, die nur reinquadrat. Glieder enthält. Stets jedoch wird die Anzahl der nicht identisch verschwindenden Summanden gleich dem Rang  $r$  der q. F. sein, und auch die Anzahl  $p$  der positiven Summanden — und damit auch die der negativen Summanden — ist stets die gleiche. Dies ist der Inhalt des *Sylvesterschen Trägheitssatzes*.

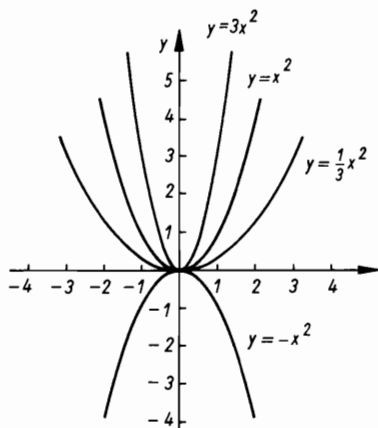
Bezeichnet man die Anzahl  $p$  der positiven Summanden in einer Normalform der q. F.  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  als *Trägheitsindex* der q. F. und die Zahl  $s = 2p - r$ , d. h. die Differenz zwischen der Anzahl der positiven und der negativen Summanden in einer ihrer Normalformen, als *Signatur* der q. F., so erhält der *Sylvestersche Trägheitssatz* die Gestalt: *Rang, Trägheitsindex und Signatur sind durch die q. F. eindeutig bestimmt*, d. h. invariant bzgl. regulärer Variablentransformation.

Die q. F.  $\Phi$  heißt *positiv definit* genau dann, wenn für alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$  gilt  $\Phi(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\Phi$  heißt *negativ definit*, falls  $\Phi(\mathbf{x}) < 0$ . Ist das Gleichheitszeichen noch zugelassen, so nennt man  $\Phi$  *positiv semidefinit* bzw. *negativ semidefinit*. Eine nichtdefinite q. F. heißt *indefinit*. Unterwirft man  $\Phi$  einer Hauptachsentransformation, so erkennt man: Die q. F.  $\Phi$  ist positiv definit bzw. negativ definit bzw. positiv semidefinit bzw. negativ semidefinit genau dann, wenn die Eigenwerte ihrer Formenmatrix sämtlich positiv bzw. sämtlich negativ bzw. sämtlich nicht negativ bzw. sämtlich nicht positiv sind.

*Beispiel:* Für alle reellen Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  mit  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$  gilt die Ungleichung  $4x_1^2 + 9x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 > 3x_2^2 - x_1^2 - 8x_3^2 - 4x_2x_3$ , denn die q. F.  $5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$  ist positiv definit, da ihre Formenmatrix nur posi-

tive Eigenwerte hat, nämlich  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 6$  und  $\lambda_3 = 9$ . S. a. homogene Funktion II.

**quadratische Funktion: I.** Funktion, die dargestellt werden kann durch eine Funktionsgleichung der Form  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ , in der  $a_0$ ,  $a_1$  und  $a_2 \neq 0$  beliebige reelle Zahlen sind. Die q. F. ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades, deren Bild in einem kartes. Koordinatensystem eine Parabel ist, falls die Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen der Definitionsbereich von  $f(x)$  ist. Für  $a_2 = 1$  und  $a_1 = a_0 = 0$  erhält man eine Potenzfunktion, deren Bild *Normalparabel* gen. wird, ihr Scheitel fällt mit dem Ursprung zusammen, sie verläuft symmetrisch zur Ordinatenachse und ist in deren positiver Richtung geöffnet. Ist  $a_2 \neq 1$ , so wird das Bild der Funktion  $f(x) = a_2x^2$  gegenüber der Normalparabel gestreckt oder gestaucht, je nachdem, ob  $|a_2| > 1$  oder  $|a_2| < 1$  gilt. Ist  $a_2$  negativ, so wird das Bild zusätzlich an



quadratische Funktion. Abb. 1: Bilder der Funktionen  $y = ax^2$  in Abhängigkeit vom Parameter  $a$

der Abszissenachse gespiegelt (Abb. 1). Das Bild der Funktion  $f(x) = x^2 + a_0$  geht aus dem der Normalparabel hervor durch Verschiebung in Richtung der positiven bzw. negativen Ordinatenachse um  $|a_0|$  Einheiten.

**II.** Aus (1) liest man ab, daß die q. F.  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  genau zwei reelle Nullstellen hat, wenn

$$(1) \quad y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ = a_2[x + a_1/(2a_2)]^2 - [a_1^2 - 4a_0a_2]/(4a_2)$$

(2) gilt, und daß die Nullstellen zusammenfallen, wenn in (2) das Gleichheitszeichen gilt. In diesen

$$(2) \quad a_1^2 \geq 4a_0a_2$$

Fällen berührt die Parabel als Bild der q. F. die Abszissenachse, oder sie schneidet sie zweimal. Jede q. F. hat genau ein *Extremum* für  $x_E = -a_1/(2a_2)$  mit  $y_E = a_0 - a_1^2/(4a_2)$ , wie man aus (1) erkennt. Es ist ein Minimum, falls  $a_2 > 0$ , und ein Maximum, falls  $a_2 < 0$ . Der Punkt  $(x_E, y_E)$  ist der Scheitelpunkt der Bildparabel von  $f$ . Der Definitionsbereich einer q. F.  $y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  zerfällt in die bei-

den *Monotonieintervalle*  $]-\infty, -a_1/(2a_2)]$  und  $[-a_1/(2a_2), +\infty[$ . Für jedes dieser Intervalle hat  $f$  eine Umkehrfunktion. Die Funktion  $y = f(x) = -0,5x^2 + 4x - 6,5$  z. B. kann auch durch  $f(x) = -0,5(x - 4)^2 + 1,5$  beschrieben werden. Der größte Funktionswert ergibt sich, wenn das Quadrat den Wert 0 hat, d. h., wenn  $x = 4$ . Die Scheitelkoordinaten der zugehörigen Parabel sind deshalb  $x_s = 4$  und  $y_s = 1,5$ . Wegen  $a_2 = -0,5$  ist sie gegenüber der Normalparabel im Verhältnis 1 : 2 gestaucht und in der Richtung der negativen Ordinatenachse geöffnet (Abb. 2). Die Berechnung der Nullstellen  $x_N$  ist gleichbedeutend mit dem Lösen der quadr. Gleichung  $-0,5x_N^2 + 4x_N - 6,5 = 0$ ; man erhält  $x_{N_1} = 4 + \sqrt{3}$  und  $x_{N_2} = 4 - \sqrt{3}$ . Die Umkehrfunktion

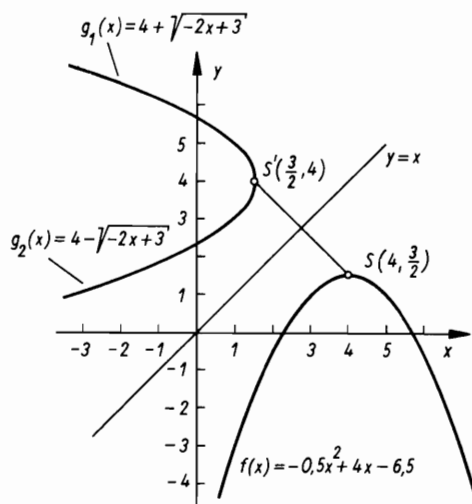


Abb. 2: Graphische Darstellung der quadrat. Funktion  $f(x) = -0,5x^2 + 4x - 6,5$  und ihrer Umkehrfunktionen

von  $f$  bzgl. des Intervalls  $]-\infty, 4]$  kann durch  $y = g_2(x) = 4 - \sqrt{-2x + 3}$ , diejenige bzgl. des Intervalls  $[4, +\infty[$  durch  $y = g_1(x) = 4 + \sqrt{-2x + 3}$  beschrieben werden. Beide sind im Intervall  $]-\infty, 3/2[$  definiert. S. a. ganzrationale Funktion I. **quadratische Gleichung, Gleichung zweiten Grades: I.** Gleichung, in der die Summe der Exponenten der Gleichungsvariablen in mindestens einem Glied 2, aber niemals größer ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Gleichung so umgeformt wurde, daß die auftretenden Zahlen und Variablen nur addiert, multipliziert und mit natürl. Exponenten potenziert werden. Beispiele für q. G. en sind  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $xy = 1$ ;  $3x^2 + 2xy + 7y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ ;  $xz + 4xy + 3yz + 7 = 0$ .

In einer q. G. in einer Gleichungsvariablen tritt diese mindestens einmal in der zweiten Potenz, aber nie in einer höheren Potenz auf. *Beispiele:* 1.  $3x^2 - 2x = 4 + 3x$  ist eine q. G. in  $x$ ; 2.  $c^2 = 3c + c^2/5$  ist eine q. G. in  $c$ .

Q. G. en können beim Lösen von Bruchgleichungen und Wurzelgleichungen auftreten. Die *allgemeine*

Form einer q. G. lautet  $Ax^2 + Bx + C = 0$ , dabei sind  $A, B$  und  $C$  reelle Parameter,  $A$  soll von Null verschieden sein, damit wirklich eine q. G. vorliegt, und der Variablengrundbereich sei die Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen sein; in Zeichen faßt man diese Voraussetzung zusammen in:  $x \in \mathbf{R}, A, B, C \in \mathbf{R}, A \neq 0$ .  $Ax^2$  wird *quadrat.*,  $Bx$  *lineares* und  $C$  *absolutes Glied* genannt. Man gelangt von der allgemeinen Form der quadrat. Gleichung  $Ax^2 + Bx + C = 0$  zu ihrer *Normalform*  $x^2 + px + q = 0$ ;  $x \in \mathbf{R}; p, q \in \mathbf{R}$ , indem man beide Seiten der allgemeinen Gleichung durch den von Null verschiedenen Koeffizienten  $A$  dividiert und zur Abkürzung  $B/A = p$  und  $C/A = q$  setzt.

Von der Gleichung  $3x^2 - 2x = 4 + 3x$  z. B. ist  $3x^2 - 5x - 4 = 0$  die allgemeine Form und  $x^2 - 5x/3 - 4/3 = 0$  die Normalform. In ihr ist der Koeffizient des quadratischen Gliedes 1.

**II.** Um einen Überblick über die möglichen Lösungsmengen der q. G. zu gewinnen, betrachtet man als Sonderfall die reinquadr. Gleichung  $x^2 + q = 0$ , die kein lineares Glied hat.

**II.1.** Ist zusätzlich ihr Absolutglied  $q$  Null, so kann  $x^2 = 0$  für reelle  $x$  keine Lösung außer  $x = 0$  haben, d. h., die Lösungsmenge ist  $L = \{0\}$ .

**II.2.** Ist  $q > 0$ , so ist  $L = \emptyset$ , weil das Quadrat jeder reellen Zahl  $x$  nicht negativ ist und deshalb stets gilt  $x^2 + q > 0$ .

**II.3.** Für  $q < 0$  ist  $\sqrt{-q}$  eine reelle Zahl und nach der Beziehung  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  läßt sich der Term  $x^2 + q$  in das Produkt zweier linearer Terme  $(x + \sqrt{-q})(x - \sqrt{-q})$  umformen, so daß die Gleichung  $x^2 + q = 0$  äquivalent ist zur Gleichung  $(x + \sqrt{-q})(x - \sqrt{-q}) = 0$ . Da das Produkt  $T_1 \cdot T_2$  zweier Terme  $T_1$  und  $T_2$  genau dann Null ist, wenn  $T_1 = 0$  oder  $T_2 = 0$  ist, folgt daraus  $x + \sqrt{-q} = 0$  oder  $x - \sqrt{-q} = 0$ . Die Lösungen dieser beiden linearen Gleichungen sind aber  $x_1 = -\sqrt{-q}$  und  $x_2 = \sqrt{-q}$ . Dies sind auch alle Lösungen der betrachteten Gleichungen. Die *Lösungsmenge* der Ausgangsgleichung ergibt sich durch Vereinigung der Lösungsmengen der beiden linearen Gleichungen zu  $L = L_1 \cup L_2 = \{-\sqrt{-q}, \sqrt{-q}\}$ . Die Probe bestätigt  $L$  als Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 + q = 0$ ;  $x \in \mathbf{R}; q \in \mathbf{R}, q < 0$ .

**II.4.** Die gezogenen Schlüsse, nach denen sich  $L = \emptyset$  für  $q > 0$  ergibt, gelten nicht, falls für  $x$  als Variablengrundbereich die Menge  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen gewählt wird. Dann erhält man für  $q > 0$  zwei imaginäre Lösungen  $x_{1,2} = \pm i\sqrt{q}$  mit  $i^2 = -1$ , die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. *Beispiele:* 1. Die Gleichung  $x^2 - 16 = 0$  hat für  $x \in \mathbf{R}$  die Lösungsmenge  $L = \{4, -4\}$ . 2. Die Gleichung  $x^2 + 9 = 0$  hat für  $x \in \mathbf{R}$  die Lösungsmenge  $L = \emptyset$ , während man  $L = \{3i, -3i\}$  für  $x \in \mathbf{C}$  erhält.

**III.** In einer *gemischtquadrat. Gleichung* ist der Koeffizient des linearen Gliedes von Null verschieden.

**III.1.** Ist das Absolutglied Null, so lautet die q. G. dann  $x^2 + px = 0$ . Sie ist äquivalent zur Gleichung

$x(x + p) = 0$ . Da das Produkt  $T_1 \cdot T_2$  zweier Terme  $T_1, T_2$  genau dann Null ist, wenn  $T_1 = 0$  oder  $T_2 = 0$ , folgt, daß die Gleichungen  $x = 0$  oder  $x + p = 0$  gelten. Ihre Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = -p$  sind auch alle Lösungen der betrachteten Gleichung  $x^2 + px = 0$ , deren Lösungsmenge sich durch Vereinigung der Lösungsmengen  $L_1 = \{0\}, L_2 = \{-p\}$  der beiden linearen Gleichungen ergibt. Man erhält  $L = L_1 \cup L_2 = \{0, -p\}$  als Lösungsmenge der Gleichung  $x^2 + px = 0$ ;  $x \in \mathbf{R}; p \in \mathbf{R}$ . *Beispiel:*  $x^2 + 3x = 0$  mit  $x \in \mathbf{R}$  ist äquivalent zu  $x(x + 3) = 0$ , aus  $x = 0$  oder  $x + 3 = 0$  ergibt sich  $L = \{0, -3\}$ .

**III.2.** Das Lösen einer *gemischtquadrat. Gleichung*  $x^2 + px + q = 0$  mit *Absolutglied*, für die gilt  $p, q \in \mathbf{R}, p \neq 0, q \neq 0$  und  $x \in \mathbf{R}$  kann auf das Lösen zweier linearer Gleichungen zurückgeführt werden, wenn man beachtet, daß der Term  $x^2 + px$  durch Addition des Quadrats vom halben Koeffizienten des linearen Glieds  $px$  zu einem vollständigen Quadrat wird, da  $x^2 + px + p^2/4 = (x + p/2)^2$ . Man nennt den addierten Term  $(p/2)^2 = p^2/4$  die *quadrat. Ergänzung* und erhält folgende Kette äquivalenter Umformungen

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0, \\ x^2 + px + p^2/4 - p^2/4 + q &= 0, \\ (x + p/2)^2 - (p^2/4 - q) &= 0, \\ (x + p/2)^2 - D &= 0, \text{ wenn zur Vereinfachung der} \end{aligned}$$

Darstellung die *Diskriminante*  $D = p^2/4 - q$  eingeführt wird. Wie in II.3. läßt sich in dieser Gleichung der Term der linken Seite als Produkt  $T_1 \cdot T_2$  zweier Terme äquivalent darstellen, falls  $D \geq 0$ . Man erhält

$$[(x + p/2) + \sqrt{D}] \cdot [(x + p/2) - \sqrt{D}] = 0$$

und schließt wie dort, daß  $T_1 \cdot T_2 = 0$  genau dann, wenn  $T_1 = 0$  oder  $T_2 = 0$ , d. h., man erhält die linearen Gleichungen  $x + p/2 + \sqrt{D} = 0$  oder  $x + p/2 - \sqrt{D} = 0$ , woraus sich  $L_1 = \{-p/2 + \sqrt{D}\}$  und  $L_2 = \{-p/2 - \sqrt{D}\}$  und nach  $L = L_1 \cup L_2$  die vollständige *Lösungsmenge*  $L = \{-p/2 + \sqrt{D}, -p/2 - \sqrt{D}\}$  ergibt. Unter der Voraussetzung  $D > 0$  sind beide Lösungen reell und voneinander verschieden, für  $D = 0$  spricht man von einer *Doppellösung*, da dann  $x_1 = x_2 = -p/2$ . Für  $D < 0$  ist  $L = \emptyset$ . Wie man sich leicht überzeugt, enthält die Lösung  $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$  der gemischtquadratischen Gleichung für  $p = 0$  oder  $q = 0$  oder für  $p = 0$  und  $q = 0$  alle vorher für spezielle Fälle gefundenen Lösungen. Wegen seiner entscheidenden Bedeutung für die Lösungsmenge wird der Term  $D = p^2/4 - q$  *Diskriminante* der q. G. genannt.

**III.3.** Wenn als Variablengrundbereich der Bereich  $\mathbf{C}$  der komplexen Zahlen zugelassen wird, läßt sich jede q. G. in der Form  $T_1 \cdot T_2 = 0$  darstellen, in der  $T_1$  und  $T_2$  lineare Terme in  $x$  sind. Im Bereich  $\mathbf{C}$  erhält man für  $D > 0$  zwei verschiedene reelle Lösungen, für  $D = 0$  eine reelle *Doppellösung* und für  $D < 0$  zwei konjugiert komplexe Lösungen  $x_1 = -p/2 + i\sqrt{-D}$  und  $x_2 = -p/2 - i\sqrt{-D}$ , dabei sind die Wurzeln in der Menge der reellen Zahlen zu ziehen und  $i$  ist die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$ .

*Beispiele:* 1. Die q. G.  $2x^2 - 6x + 12 = 4x$  hat die Normalform  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , ihre Diskriminante  $D = 25/4 - 6 = 1/4 > 0$  sagt aus, daß die Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen hat; diese ergeben sich aus der Lösungsformel zu  $x_{1,2} = 5/2 \pm \sqrt{1/4}$  oder  $x_1 = 3, x_2 = 2; L = \{3, 2\}$ .

2. Die q. G.  $x^2 - 2x + 2 = 0$  hat die Diskriminante  $D = 4/4 - 2 = -1 < 0$ , sie ist für  $x \in \mathbb{R}$  nicht lösbar. Für  $x \in \mathbb{C}$  erhält man aus der Lösungsformel  $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{1}, x_1 = 1 + i, x_2 = 1 - i; L = \{1 + i, 1 - i\}$ .

**quadratische Konvergenz** ↗ Nullstellenberechnung III., ↗ Quadratwurzelberechnung.

**quadratische Matrix** ↗ Matrix I.

**quadratische Parabel** ↗ Potenzfunktion I.

**quadratischer Rest** ↗ Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

**quadratischer Zahlkörper** ↗ Zahlkörper IV.

**quadratisches Glied** ↗ quadratische Gleichung I., ↗ kubische Gleichung I.

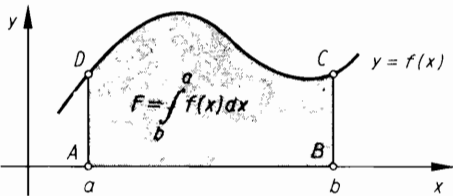
**Quadratur:** Berechnung des Flächeninhalts krummlinig begrenzter ebener Flächen. Als *Flächeninhalt unter einer Kurve* bezeichnet man die Maßzahl  $F$  des krummlinig begrenzten Flächenstücks  $ABCD$  (Abb. 1) unter der Kurve der stetigen, nichtnegativen Funktion  $y = f(x)$  zwischen den Grenzen  $a \leq x \leq b$ ; sie ist bestimmt durch (1). Wechselt  $f(x)$

$$(1) \quad F = \int_a^b f(x) dx$$

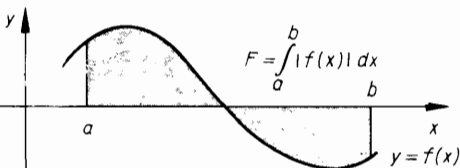
im Intervall  $[a, b]$  sein Vorzeichen (Abb. 2), so wird der Flächeninhalt der zwischen  $x$ -Achse und Funktionskurve gelegenen Fläche durch (2) bestimmt.

$$(2) \quad F = \int_a^b |f(x)| dx$$

Ist die Kurve durch die Parameterdarstellung  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  für  $t_1 \leq t \leq t_2$  gegeben, in der die



Quadratur. Abb. 1: Zur Berechnung des Flächeninhalts unter der Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$ , falls  $y > 0$  im Intervall  $[a, b]$



Quadratur. Abb. 2: Zur Berechnung des Flächeninhalts unter der Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$ , falls  $f(x)$  in  $[a, b]$  das Vorzeichen wechselt

Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  stetig sind und  $\varphi(t)$  monoton wächst und stetig differenzierbar ist, so ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen Kurve und  $x$ -Achse durch das Integral (3) bestimmt. Der Flächeninhalt z. B. unter der Zykloide (Abb. 3) mit

$$(3) \quad \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \dot{\varphi}(t) dt$$

der Parameterdarstellung  $x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t)$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$  ergibt sich aus (4).

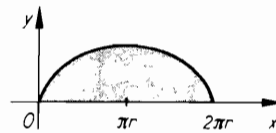
$$(4) \quad \begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} |r(1 - \cos t)| \cdot r(1 - \cos t) dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

Ist die Kurve in Polarkoordinaten  $r = g(\varphi)$  für  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  gegeben (Abb. 4), so wird der Inhalt der Fläche, die von der Kurve und den Radien  $r_1 = g(\alpha_1)$  und  $r_2 = g(\alpha_1 + \beta)$  begrenzt ist, durch das Integral (5) berechnet.

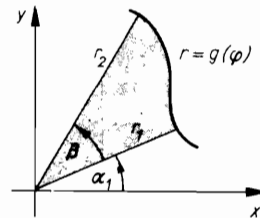
$$(5) \quad F = 1/2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_1 + \beta} r^2 d\varphi$$

Der Inhalt z. B. der Fläche, die die logarithm. Spirale (Abb. 5) mit der Gleichung  $r = ae^{m\varphi}$  mit  $a > 0$  und  $m > 0$  für  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  begrenzt, ist durch (6) bestimmt.

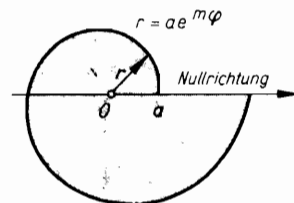
$$(6) \quad \begin{aligned} F &= 1/2 \int_0^\alpha r^2 d\varphi = 1/2 \cdot a^2 \int_0^\alpha e^{2m\varphi} d\varphi \\ &= a^2 (e^{2m\alpha} - 1)/(4m) \end{aligned}$$



Quadratur. Abb. 3: Zum Flächeninhalt unter der Zykloide



Quadratur. Abb. 4: Flächeninhalt eines Sektors, wenn die Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist

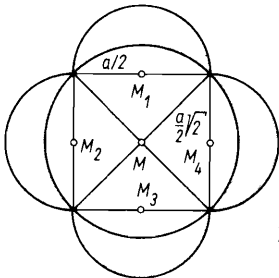


Quadratur. Abb. 5: Zum Flächeninhalt der logarithmischen Spirale

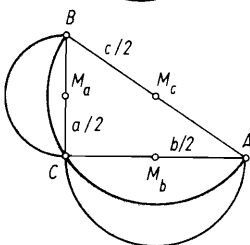
Der Flächeninhalt des ebenen Bereichs  $B$  läßt sich auch durch das  $\nearrow$  Flächenintegral  $F = \iint_{(B)} dx dy$  berechnen. — S. a. **Quadratur des Kreises**; **Integration**, numerische.

**Quadratur des Kreises: I.** Aufgabe, mit Zirkel und Lineal ein Quadrat zu konstruieren, das Rand einer Fläche ist, deren Inhalt dem Inhalt einer vorgegebenen Kreisfläche gleich ist. Die Q. d. K. ist nicht ausführbar ( $\nearrow$  geometrische Figur,  $\nearrow$  Galoissche Theorie), da sie darauf führt, aus einer Einheitsstrecke eine Strecke der Maßzahl  $\pi$  zu konstruieren. LINDEMANN wies aber 1882 nach, daß  $\pi$  transzendent ist.

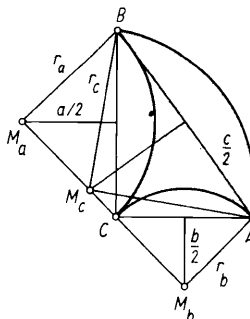
**II.** Die Quadratur mancher Figuren, die aus Kreisbögen zusammengesetzt sind, ist dagegen möglich, wie Beispiele zeigen. Als *Möndchen des Hippokrates* bezeichnet man Kreisziwecksflächen, deren Flächeninhalt dem einer quadrierbaren Fläche gleich ist. Umschreibt man z. B. einem Quadrat einen Kreis und errichtet über den Quadratseiten Halbkreise nach außen (Abb. 1), so ist die Summe der Inhalte der 4 Möndchen dem des Quadrats gleich. Konstruiert man den Umkreis eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  und Halbkreise (Abb. 2) über seinen Katheten, so ist die Summe der Inhalte der beiden Kreisziwecke dem Flächeninhalt des Dreiecks



Quadratur des Kreises. Abb. 1: Möndchen des Hippokrates



Quadratur des Kreises. Abb. 2: Die Summe der Inhalte der beiden Kreisziwecke ist dem Flächeninhalt des Dreiecks gleich



Quadratur des Kreises. Abb. 3: Pelekoide, die den gleichen Flächeninhalt hat wie das Dreieck  $ABC$

gleich. Die Umrandung einer *Pelekoide* genannten Fläche erhält man, wenn man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks  $ABC$  (Abb. 3) Viertelskreisbögen beschreibt und zwar über der Hypotenuse nach außen, über den Katheten nach innen. Der Flächeninhalt der Pelekoide ist dem des Dreiecks gleich.

**Quadraturverfahren, Gaußsche**  $\nearrow$  **Integration**, numerische III.

**Quadratwurzel**  $\nearrow$  **Wurzel I.**,  $\nearrow$  **Wurzelziehen in R.**  
**Quadratwurzelberechnung:** *Näherungsverfahren* zur Berechnung von  $\sqrt{a}$  für  $a > 0$  mit vorgeschriebener Genauigkeit. Nach der Vorschrift (1) wird eine Folge  $\{x^{(m)}\}$  konstruiert, die gegen  $\sqrt{a}$  konvergiert, für die (2) gilt.

Die *quadrat. Konvergenz* ermöglicht auch bei Handrechnung in wenigen Schritten eine hinreichend genaue Bestimmung der Wurzel ( $\nearrow$  **Nullstellenberechnung**).

$$(1) \quad x^{(m+1)} := \frac{1}{2} (x^{(m)} + a/x^{(m)}), \quad x^{(0)} > 0$$

$$(2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |x^{(m+1)} - \sqrt{a}| / (x^{(m)} - \sqrt{a})^2 = \frac{1}{2} \sqrt{a}$$

*Beispiel:* Ist  $a = 2$ , so nimmt  $x^{(m)}$  für  $m = 1, 2, 3, 4$  die folgenden Werte an:  $x^{(0)} = 2, x^{(1)} = 1,5, x^{(2)} = 1,4167, x^{(3)} = 1,4142157, x^{(4)} = 1,414213562$ . Die *quadrat. Konvergenz* zeigt sich in der mit  $m = 1, 2, 3, 4$  wachsenden Anzahl  $z = 1, 3, 5, 10$  der exakten Stellen.

**Quadratzahlen**  $\nearrow$  **Potenz I.**

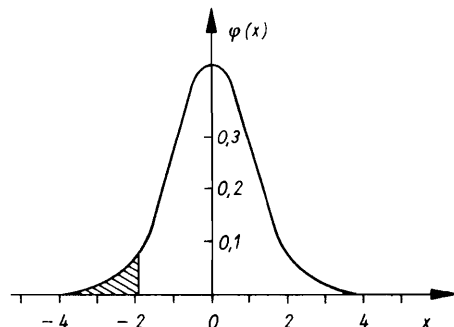
**quadrierbar**  $\nearrow$  **Flächeninhalt I.**,  $\nearrow$  **Peano-Jordanscher Inhalt II.**,  $\nearrow$  **Rauminhalt I.**

**Quadrik**  $\nearrow$  **Hyperfläche**,  $\nearrow$  **Hauptachsentransformation I.**,  $\nearrow$  **Fläche zweiter Ordnung II.**

**Quadrillion**  $\nearrow$  **Zehnerpotenzen.**

**Quantifikator**  $\nearrow$  **Prädikatenlogik I.**

**Quantile:** mit der Verteilung einer Zufallsgröße  $X$  zusammenhängende Maßzahlen. Ist  $X$  eine Zufallsgröße,  $F(x)$  ihre Verteilungsfunktion und  $p$  eine vorgegebene Zahl mit  $0 < p < 1$ , so heißt jede Zahl  $Q_p$  mit  $F(Q_p) \leq p \leq F(Q_p + 0)$  ein *p-Quantil* (Abb.). Bei streng monoton wachsendem  $F(x)$  ist  $Q_p$  durch  $p$  eindeutig bestimmt.  $Q_{1/2}$  wird als *Median* bezeichnet,



0,05-Quantil der normierten und zentrierten Normalverteilung

$Q_{1/4}$  und  $Q_{3/4}$  heißen die *Quartile*. In der Literatur wird statt  $Q_p$  auch oft  $Q_{1-p}$  geschrieben. Die  $Q$ . vieler Verteilungen sind für geeignete  $p$  tabelliert. Man verwendet sie vor allem in der *Testtheorie* zur Berechnung von *crit.* Bereichen und in der *Schätztheorie* zur Berechnung von *Konfidenzschätzungen*.

**Quartik** ↗ Hyperfläche.

**Quartile** ↗ Quantile.

**Quasiordnung** ↗ Ordnungsrelationen I.

**quaternär** ↗ Prädikat.

**Quaternionen** [lat. *quaterni, je vier*]: ein von HAMILTON (1843) aufgestelltes Zahlensystem, dessen Entstehung auf den Versuch zurückzuführen ist, den Begriff der komplexen Zahl zu verallgemeinern. Dies gelang jedoch nur unter Preisgabe eines der Grundgesetze der Arithmetik, des Kommutativgesetzes der Multiplikation. Die  $Q$ . sind Linearkombinationen von vier *Basiselementen*  $1, i, j, k$  mit reellen Koeffizienten, d. h. Ausdrücke der Form  $a \cdot 1 + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$  mit reellen Zahlen  $a, b, c, d$ . Diese Basiselemente multiplizieren sich nach folgenden Regeln:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 & 1 \cdot i &= i & 1 \cdot j &= j & 1 \cdot k &= k \\ i \cdot 1 &= i & i \cdot i &= -1 & i \cdot j &= k & i \cdot k &= -j \\ j \cdot 1 &= j & j \cdot i &= -k & j \cdot j &= -1 & j \cdot k &= i \\ k \cdot 1 &= k & k \cdot i &= j & k \cdot j &= -i & k \cdot k &= -1. \end{aligned}$$

Danach ergibt sich eine Multiplikation, die assoziativ ist. Die  $Q$ . bilden deshalb eine *Algebra* (↗ Algebra III.), auch *hyperkomplexes System* gen., über den reellen Zahlen. Wegen  $(a + b \cdot i)j = a \cdot j + b \cdot k$  bilden die  $Q$ . auch eine Algebra mit der Basis  $1, j$  über den komplexen Zahlen  $a + b \cdot i$ . Jeder Quaternion  $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$  kann man eine *konjugierte*  $Q$ .  $\bar{q} = a - b \cdot i - c \cdot j - d \cdot k$  zuordnen. Für die *Norm*  $N(q) = q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  gilt  $N(q_1 \cdot q_2) = N(q_1) \cdot N(q_2)$ . Die Norm wird nur Null, wenn  $a = b = c = d = 0$  ist. Zu jedem  $q \neq 0$  gibt es ein *Inverses*  $q^{-1} = N(q)^{-1} \bar{q}$  (↗ komplexe Zahlen). Die  $Q$ . bilden einen Schiefkörper. In der Quaternion  $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$  heißt  $a_0$  *Skalarteil* und  $a_1 i + a_2 j + a_3 k$  *Vektorteil*. Die Vektorteile kann man mit den Vektoren des dreidimensionalen Vektorraumes identifizieren. Die Multiplikation zweier Vektorteile ergibt eine Quaternion, deren Skalarteil gleich dem negativen Skalarprodukt und deren Vektorteil gleich dem Vektorprodukt der entsprechenden Vektoren ist. Infolgedessen eignen sich die  $Q$ ., Drehungen im dreidimensionalen Raum zu beschreiben; sie wurden auch in der Mechanik angewandt. Weiter finden die  $Q$ . in der Zahlentheorie Verwendung.

**Quelle** ↗ Divergenz I., ↗ Netzplantechnik IV., ↗ Relation II., ↗ Ströme auf Graphen I., ↗ Turnier.

**Quellenprogramm** ↗ Betriebssystem II.

**Querdifferenz** ↗ Teilbarkeit VI., ↗ Elferprobe.

**Querschnitt** ↗ Körper V.

**Quersumme** ↗ Teilbarkeit VI., ↗ Neunerprobe.

**Quintillion** ↗ Zehnerpotenzen.

**Quotient**: Resultat einer meist als *Division* bezeichneten binären Operation, die auf ein geordnetes

Elementepaar aus dem Definitionsbereich der Operation angewendet wird. Im  $Q$ .  $a/b$  heißen  $a$  *Dividend* und  $b$  *Divisor*; sind  $a$  und  $b$  Zahlen, so muß  $b \neq 0$  vorausgesetzt werden. Die Division wird oft als Umkehroperation zur Multiplikation eingeführt; sie ist *i. allg.* nicht kommutativ, d. h., *i. allg.* gilt  $a/b \neq b/a$ .

**quotientengleich** ↗ rationale Zahlen I.

**Quotientenkörper**: Körper, der sich zu jedem Integritätsbereich konstruieren läßt. Der  $Q$ .  $K$  des Integritätsbereiches  $I$  besteht aus allen formalen Quotienten  $a/b$ , wenn  $a, b \in I$  und  $b \neq 0$ . Dabei werden  $a/b$  und  $a'/b'$  identifiziert, wenn  $a b' = a' b$  ist; weiter werden Summe und Produkt nach (1) definiert:

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Man rechnet mit den Quotienten, wie man es von der Bruchrechnung her kennt. Das Element  $a \in I$  kann man mit einem Quotienten  $ab/b \in K$ , falls  $b \neq 0$ , identifizieren, so daß man  $I$  isomorph in seinen  $Q$ .  $K$  einbetten kann. Hat  $I$  ein *Einselement*  $1$ , so repräsentiert  $a/1$  das Element  $a \in I$ . In  $K$  stellen die Quotienten  $a/a$  für  $a \neq 0$  das Einselement dar, die Quotienten  $0/a$  für  $a \neq 0$  das *Nullelement*. Der Quotient  $a/b$  mit  $a, b \neq 0$  hat das *Inverse*  $b/a$ . Der  $Q$ . ist bis auf Isomorphie der kleinste Körper, als dessen Teilmenge man den Integritätsbereich auffassen kann. Der  $Q$ . des Integritätsbereiches der ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$  ist der Körper  $\mathbf{Q}$  der rationalen Zahlen. Die Gaußschen Zahlen bilden den  $Q$ . der ganzen Gaußschen Zahlen. Der  $Q$ . eines Körpers ist der Körper selbst.

**Quotientenkriterium** ↗ Konvergenzkriterien für Reihen VII., ↗ Potenzreihe III.

**Quotientenmenge** ↗ Äquivalenzrelation III.

**Quotientenmittelwertsatz** oder **verallgemeinerter Mittelwertsatz** ↗ Mittelwertsatz III.

**Quotientenoptimierung, lineare, hyperbolische Optimierung**: Optimierung des Quotienten zweier linearer Funktionen unter linearen Nebenbedingungen. Die Zählerfunktion  $Z(x) = z_0 + z_1 x_1 + \dots + z_k x_k$  kann dabei z. B. die Selbstkosten, die Nennerfunktion  $N(x) = n_0 + n_1 x_1 + \dots + n_k x_k$  den Gewinn bedeuten,  $Z(x)/N(x) = \text{Min!}$  bedeutet dann, die Selbstkosten je Werteneinheit Gewinn zu minimieren. Das Optimum wird stets an einer Ecke des zulässigen Bereichs angenommen. Unter der Voraussetzung  $0 < N(x) < \text{const}$  für alle zulässigen  $x$ , die noch abgeschwächt werden kann, läßt sich das Minimum mit einem *erweiterten Simplexverfahren* ermitteln. Lineare Nebenbedingungen,  $Z(x)$  und  $N(x)$  werden wie beim Simplexverfahren von Basislösung zu Basislösung umgerechnet, in jedem Tableau werden die Koeffizienten einer zusätzlichen *Steuerzeile*  $p_j = n_0 z_j - z_0 n_j$  neu berechnet. Diese  $p_j$  dienen zur Pivotspaltenauswahl wie beim gewöhnlichen Simplexverfahren.

**Quotientenregel** ↗ Differentiationsregeln I.

**Quotient von Potenzreihen** ↗ Potenzreihe XIII., ↗ Entwicklung von Funktionen II.

# R

**rad:** Zeichen für Radiant, ↗ Winkel VII.2.  
**Radialplanimeter** ↗ Integriergerät II.  
**radialsymmetrisch** ↗ Symmetrie III.  
**Radiant** ↗ Winkel VII.2.  
**Radikand** ↗ Wurzel I.  
**Radius** ↗ Kreis I., ↗ Kugel I, ↗ sphärischer Kreis.  
**Radizieren** ↗ Grundrechenarten; s. a. Wurzel I., ↗ Wurzelziehen VI.  
**Rampenfunktion** ↗ Zeitfunktion I.3.  
**Randbedingungen** ↗ elliptische Differentialgleichung I., ↗ Randwertproblem, ↗ Variationsrechnung IV.  
**Randgerade** ↗ Halbebene.  
**Randpunkt** ↗ Menge IV.  
**Randverteilung:** die gemeinsame Verteilung von  $k \leq n$  Komponenten  $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$  des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$ ; dabei sind  $k \leq n$  aus den  $n$  Indizes von  $(X_1, \dots, X_n)$  so herausgegriffen worden, daß  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Ist dann  $F(x_1, \dots, x_n)$  die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors  $(X_1, \dots, X_n)$ , so heißt  $P(X_{i_1} < x_{i_1}, \dots, X_{i_k} < x_{i_k}) = F(c_1, \dots, c_n)$  mit  $c_i = x_{i_1}, \dots, c_{i_k} = x_{i_k}$ , alle übrigen  $c_j = +\infty$  eine  $k$ -dimensionale  $R$ . von  $F(x_1, \dots, x_n)$ . Sie ist gerade die Verteilungsfunktion des  $k$ -dimensionalen Zufallsvektors  $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ . Speziell erhält man für  $k = 1$  die Verteilungen der einzelnen Komponenten:  $F(+\infty, \dots, +\infty, x_i, +\infty, \dots, +\infty) = P(X_i < x_i) := F_i(x_i)$ . Im diskreten Fall bekommt man die Wahrscheinlichkeitsfunktion der  $k$ -dimensionalen  $R$ .en durch Wegsummieren über die Indizes, deren Nummern von  $i_1, \dots, i_k$  verschieden sind; im stetigen Fall erhält man die  $R$ .sdichte durch Integration über die Variablen, deren Nummern von  $i_1, \dots, i_k$  verschieden sind. Ist z. B.  $(X_1, X_2)$  eine zweidimensionale diskrete Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $p_{ik} = P(X_1 = x_1^{(i)}, X_2 = x_2^{(k)})$ , so erhält man (1) für die Wahrscheinlichkeitsfunktion der einzelnen Komponenten als  $R$ .en. Für eine dreidimensionale stetige Zufallsgröße mit

$$(1) \quad P(X_1 = x_1^{(i)}) = \sum_k p_{ik},$$

$$P(X_2 = x_2^{(k)}) = \sum_i p_{ik}$$

der Dichte  $f(x_1, x_2, x_3)$  erhält man etwa die Dichte des Vektors  $(X_1, X_2)$  als zweidimensionale  $R$ . gemäß Formel (2). Ebenso erhält man die Dichte der

$$(2) \quad g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_3$$

dritten Komponente als  $R$ . nach Formel (3). Insgesamt gibt es  $\binom{n}{k}$   $k$ -dimensionale  $R$ .en.

$$(3) \quad h(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

**Randwertaufgaben** svw. Randwertproblem, s. a. gewöhnliche Differentialgleichung VI.

**Randwertproblem:** Bestimmen der Lösung einer Differentialgleichung in einem bestimmten Gebiet, falls die gesuchte Lösung am Rand des Gebietes noch gewissen Bedingungen, den *Randbedingungen*, unterliegt (↗ gewöhnliche Differentialgleichung I.). Für eine gewöhnl. Differentialgleichung erster Ordnung gibt es kein sinnvoll gestelltes  $R$ . Dagegen kann man für eine gewöhnl. lineare Differentialgleichung 2. Ordnung das  $R$ . folgendermaßen formulieren: Gesucht ist eine Lösung  $y(x)$  der Differentialgleichung (1) mit stetigen Koeffizienten und  $f_0(x) \neq 0$  in

$$(1) \quad f_0(x) y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = g(x)$$

$a \leq x \leq b$ , die die Randbedingungen (2a) und (2b) erfüllt. Die Parameter  $a_{ij}, b_i$  und  $h_i$  für  $i, j = 1, 2$

$$(2a) \quad a_{11}y(a) + a_{12}y'(a) + b_{11}y(b) + b_{12}y'(b) = h_1$$

$$(2b) \quad a_{21}y(a) + a_{22}y'(a) + b_{21}y(b) + b_{22}y'(b) = h_2$$

sind reelle Zahlen. Im Falle von  $g(x) \equiv 0$  und  $h_1 = h_2 = 0$  spricht man von einem *homogenen R*. Es hat stets die triviale Lösung  $y(x) \equiv 0$ . Sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  Lösungen des homogenen  $R$ ., so auch  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ . Ist  $g(x) \not\equiv 0, h_1 \neq 0$  oder  $h_2 \neq 0$ , so spricht man vom *inhomogenen R*.

Das homogene  $R$ .  $y'' + y' = 0$  mit  $y(0) = 0, y(\pi) = 0$  z. B. hat in dem Intervall  $0 \leq x \leq \pi$  die Lösung  $y(x) = c \sin x$ , hingegen hat das homogene  $R$ .  $y'' - 4y = 0$  mit  $y(0) = 0, y(1) = 0$  in  $0 \leq x \leq 1$  keine Lösung außer der trivialen  $y(x) \equiv 0$ , denn um die Randbedingungen zu befriedigen, müssen  $c_1$  und  $c_2$  in der allgemeinen Lösung  $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$  der Differentialgleichung so bestimmt werden, daß  $y(0) = c_1 + c_2 = 0$  und  $y(1) = c_1e^2 + c_2e^{-2} = 0$  erfüllt sind. Nur  $c_1 = c_2 = 0$  aber erfüllen diese Gleichungen.

Hat das zum inhomogenen  $R$ . für eine gewöhnl. Differentialgleichung 2. Ordnung gehörende homogene  $R$ ., das man erhält, indem man  $g(x), h_1$  und  $h_2$  Null setzt, nur die triviale Lösung, so ist das gestellte inhomogene  $R$ . eindeutig lösbar. Das inhomogene  $R$ .  $y'' - 4y = -8x$  mit  $y(0) = 1, y(1) = 0$  z. B. ist eindeutig lösbar, denn das dazugehörige homogene  $R$ .  $y'' - 4y = 0$  mit  $y(0) = 0, y(1) = 0$  hat nur die triviale Lösung. Hat man die allgemeine Lösung  $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + 2x$  der inhomogenen Differentialgleichung  $y'' - 4y = -8x$  bestimmt, so bestimmt man  $c_1$  und  $c_2$  aus  $y(0) = c_1 + c_2 = 1$  und  $y(1) = c_1e^2 + c_2e^{-2} + 2 = 0$ . Man erhält (3) als Lösung des inhomogenen  $R$ .

$$(3) \quad y(x) = \left(1 - \frac{2 + e^2}{2 \sinh 2}\right)e^{2x} + \frac{2 + e^2}{2 \sinh 2}e^{-2x} + 2x$$

Über  $R$ .e für partielle Differentialgleichungen s. a. elliptische Differentialgleichungen I. und parabolische Differentialgleichungen II.

**Rang** ↗ lineare Abbildung II.3.; IV., ↗ Matrix V., ↗ quadratische Form II.

**Rang eines Knotens** ↗ Netzplantechnik IV.

**rationale Funktion:** I. Funktion  $f$ , die sich als Quotient  $f(x) = g(x)/h(x)$  zweier ganzrationaler Funktionen  $g$  und  $h$  angeben und daher in der Form (1)



mit  $b_m \neq 0$  darstellen läßt. Haben  $g$  und  $h$  keine gemeinsamen Nullstellen, so spricht man von einer in

$$(1) \quad y = f(x) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j}$$

der Normalform gegebenen  $r$ . F. Für  $m = 0$  ist  $f$  eine ganzrationale Funktion, gilt  $m > 0$ , so heißt  $f$  gebrochenrationale Funktion und insbes. echt gebrochen, wenn der Grad der ganzrationalen Funktion  $h$  größer ist als der ganzrationalen Funktion  $g$ . Eine unecht gebrochene  $r$ . F. läßt sich stets in eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenen  $r$ . F. zerlegen, indem man das Polynom  $g(x)$  durch das Polynom  $h(x)$  partiell dividiert.

II. Haben zwei ganzrationale Funktionen  $g$  und  $h$  die gemeinsamen einfachen Nullstellen  $x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_k}$  und nur diese, dann ist die Darstellung (2) keine Normalform der  $r$ . F.  $f(x)$ , da aber  $\bar{g}(x)$  und  $\bar{h}(x)$  keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist  $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)/\bar{h}(x)$  Normalform der  $r$ . F.  $\bar{f}$ . Die Funk-

$$(2) \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{(x - x_{N_1}) \cdots (x - x_{N_k}) \cdot \bar{g}(x)}{(x - x_{N_1}) \cdots (x - x_{N_k}) \cdot \bar{h}(x)}$$

tion  $f$  stimmt mit der Funktion  $\bar{f}$  überein für alle Argumente bis auf  $x_{N_i}$  mit  $i = 1, 2, \dots, k$ , für die  $f$  nicht definiert ist. Die durch Erweiterung des Definitionsbereichs von  $f$  entstehende Funktion

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_{N_i} \\ \lim_{x \rightarrow x_{N_i}} f(x) & \text{für } x = x_{N_i} \end{cases}$$

stimmt mit der Funktion  $\bar{f}$  überein. In (3) z. B.

$$(3) \quad f_1(x) = x/(1 - x^2)$$

ist  $f_1(x)$  Normalform einer echt gebrochenen  $r$ . F.,  $f_2(x)$  in (4) ist Normalform einer unecht gebrochenen  $r$ . F.,  $f_3(x)$  in (5) ist eine unecht gebrochene  $r$ . F., ebenso  $f_4(x)$  in (6);  $f_5(x)$  in (7) ist eine ganzrationale Funktion.

$$(4) \quad f_2(x) = \frac{3x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 3x - 1 + \frac{2}{x - 1}$$

$$(5) \quad f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)}$$

$$(6) \quad f_4(x) = \frac{x^2(x + 2)}{x^2}$$

$$(7) \quad f_5(x) = \frac{2x - 7}{16}$$

Weitere einfache Beispiele für  $r$ . F.en sind die Potenzfunktionen mit  $f(x) = x^n$ , falls  $n$  ganzzahlig ist, sowie die linearen gebrochenrationalen Funktionen (8), wobei  $b_1 \neq 0$  und  $a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0$  gilt. Diese Funktion hat eine Nullstelle  $x_N = -a_0/a_1$ , falls

$$(8) \quad f(x) = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1^2(x + b_0/b_1)}$$

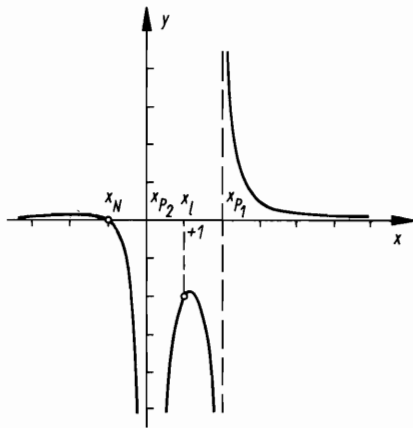
mit  $b_1 \neq 0$  und  $a_1 b_0 - a_0 b_1 \neq 0$

$a_1 \neq 0$ . An der Stelle  $x_p = -b_0/b_1$  ist die Funktion nicht definiert. Das Bild der Funktion  $f$  ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Äste symmetrisch zum Punkt  $M = (-b_0/b_1, a_1/b_1)$  liegen.

III. Eine reelle Zahl  $x_N$  ist genau dann Nullstelle einer  $r$ . F.  $f$  mit  $f(x) = g(x)/h(x)$ , wenn  $g(x_N) = 0$  und  $h(x_N) \neq 0$  gilt; danach wird die Berechnung der Nullstellen  $r$ . F.en auf die von ganzrationalen Funktionen zurückgeführt. — Eine reelle Zahl  $x_p$  heißt genau dann Pol bzw. Polstelle der gebrochenrationalen Funktion  $f$ , wenn  $h(x_p) = 0$  und  $g(x_p) \neq 0$  gilt. Ist  $x_p$  dabei Nullstelle der Vielfachheit  $r$  von  $h$  ( $\nearrow$  ganzrationale Funktion III.), so heißt  $x_p$  ein Pol  $r$ -ter Ordnung. Existiert für eine gebrochenrationale Funktion  $f$  mit  $f(x) = g(x)/h(x)$  eine reelle Zahl  $x_i$ , für die sowohl  $g(x_i) = 0$  als auch  $h(x_i) = 0$  gilt, so hat das Bild der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_i$  eine Lücke. Diese Stellen  $x_i$  und die Pole gebrochenrationaler Funktionen sind spezielle Unstetigkeitsstellen ( $\nearrow$  Stetigkeit), in denen die Funktion nicht definiert ist. Die Funktion (9) z. B. hat für  $x_N = -1$  eine Nullstelle, für  $x_p = 2$  einen Pol erster Ordnung und

$$(9) \quad y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 - 3x^3 + 2x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2(x - 1)(x - 2)}$$

für  $x_p = 0$  einen Pol zweiter Ordnung. Ihr Bild hat bei  $x_i = 1$  eine Lücke.



rationale Funktion: graphische Darstellung der gebrochenrationalen Funktion

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^4 - 3x^3 + 2x^2}$$

Da eine ganzrationale Funktion nur endlich viele Nullstellen haben kann, hat eine gebrochenrationale Funktion nur endlich viele Pole. In ihrer Umgebung wächst der Betrag der Funktionswerte über alle Grenzen, d. h., es gilt  $\lim_{x \rightarrow x_p} |f(x)| = +\infty$  ( $\nearrow$  Grenzwerte von Funktionen), die Gerade  $x = x_p$  ist Asymptote des Bildes der Funktion. Das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion  $f$  in der Umgebung einer ihrer Polstellen  $x_p$  kann man dem Vorzeichen der Funktionswerte  $f(x_p + \epsilon)$  und  $f(x_p - \epsilon)$

entnehmen, wenn  $\varepsilon$  eine hinreichend kleine positive reelle Zahl ist.

IV. Für eine r. F.  $f$ , die durch (1) mit  $a_n \neq 0$  und  $b_m \neq 0$  gegeben ist, gilt für alle  $x \neq 0$  auch die Funktionsgleichung (10) mit  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = a_n$  und

$$(10) \quad f(x) = \frac{x^n \left( \sum_{i=0}^n a_i/x^{n-i} \right)}{x^m \left( \sum_{j=0}^m b_j/x^{m-j} \right)} = \frac{x^n \cdot u(x)}{x^m \cdot v(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x) = b_m$ . Damit ergeben sich für das Verhalten der Funktion  $f$  im Unendlichen folgende Fälle: Ist  $n > m$ , so strebt  $|f(x)|$  mit  $x$  gegen Unendlich, das Vorzeichen von  $f(x)$  hängt dabei ab vom Vorzeichen des Quotienten  $a_n/b_m$ , falls  $x \rightarrow +\infty$  untersucht wird. Beim Grenzübergang  $x \rightarrow -\infty$  ist zusätzlich das Vorzeichen von  $x^{n-m}$  zu beachten; es ist positiv, falls  $n - m$  eine gerade Zahl ist, und negativ für ungerades  $n - m$ , und man erhält das Vorzeichen von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  aus  $\text{sgn}(a_n/b_m) \cdot \text{sgn}(x^{n-m})$ . Ist  $n = m$ , so gilt  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a_n/b_m$ , ist  $n < m$ , so gilt  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ .

V. R. F.en sind in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig und differenzierbar. Ihre Ableitungen sind wieder r. F.en. Zur Integration einer gebrochenrationalen Funktion benutzt man i. allg. ihre eindeutige Darstellung als Summe von  $r$  Partialbrüchen, falls  $f$  in Normalform vorliegt und der Koeffizient der höchsten Potenz des Nennerpolynoms gleich Eins ist.

Betrachtet man reellwertige Funktionen mit  $n$  reellen Variablen, so heißt eine Funktion  $f$  rational, wenn sie sich in der Form (11) darstellen läßt.

$$(11) \quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \frac{\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \dots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}}{\sum_{j_1=0}^{l_1} \sum_{j_2=0}^{l_2} \dots \sum_{j_n=0}^{l_n} b_{j_1, j_2, \dots, j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}}$$

Dehnt man den Definitionsbereich einer r. F.  $f$  einer Veränderlichen auf die komplexe Zahlenebene aus, d. h., betrachtet man Funktionen (12), in der die

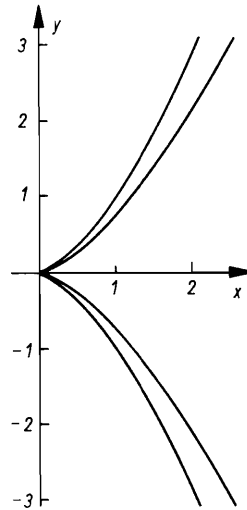
$$(12) \quad w = f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i + \sum_{j=0}^m b_j z^j$$

Koeffizienten  $a_i$  und  $b_j$  sowie die Variablen  $z$  und  $w$  komplexe Zahlen sind, so lassen sich fast alle oben gen. Beziehungen formal übertragen, insbes. der Satz von der Möglichkeit der eindeutigen Zerlegung einer gebrochenrationalen Funktion in eine Summe von Partialbrüchen.

S. a. Integration spezieller Funktionenklassen I.

**rationale Kurve:** I. algebraische Kurve, deren Punkte  $P$  in einem Parallelkoordinatensystem Koordinaten haben, die rationale Funktionen eines Parameters  $t$  sind. Ist  $t$  Parameter einer Geradengleichung, so ist die r. K. das Bild der Geraden oder eines Stückes von ihr. Wie jede ebene algebraische Kurve, genügt

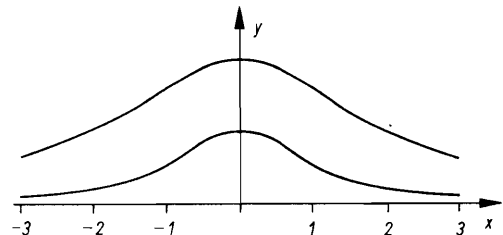
die ebene r. K. in einem Parallelkoordinatensystem einer Gleichung  $P(x, y) = 0$ , in der  $P(x, y)$  ein Polynom in  $x$  und  $y$  ist. Die Ordnung einer ebenen algebraischen Kurve ist der Grad dieses Polynoms. Sie ist die Maximalzahl der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden, wenn Schnittpunkte mit komplexen Koordinaten mitgezählt werden. Kurven 2. Ordnung sind die Kegelschnitte. Sie sind rational, sofern sie nicht zerfallen. Kubische Kurven sind algebraische Kurven 3. Ordnung. Sie sind nicht alle rational; die doppelpunktfreie kubische Kurve mit der Gleichung  $y^2 = x^3 - x$  z. B. ist nicht rational. Die kubische Parabel mit der Gleichung  $y = x^3$  ist rational. Auch die semikubische Parabel oder Neil-



rationale Kurve. Abb. 1: Neilsche Parabel  $y^2 = a^2 x^2$  für zwei Werte des Parameters  $a$

sche Parabel ist rational (Abb. 1). Sie genügt einer Gleichung  $y^2 = a^2 x^3$  und einer Parameterdarstellung  $x = t^2, y = at^3$  mit  $a \neq 0$ . Der Koordinatenursprung ist ein Rückkehrpunkt der Kurve. Sie hat keine Asymptoten. Weitere ebene r. K.n 3. Ordnung sind die Versiera der Agnesi, das kartes. Blatt, die Strophoide und die Zissoide.

II. Die Versiera der Agnesi genügt der Gleichung  $y(a^2 + x^2) = a^3$  mit  $a \neq 0$  (Abb. 2). Die  $x$ -Achse ist Asymptote. Die durch die Versiera der Agnesi dargestellte Funktion  $y = y(x)$  hat im Punkt  $(0, a)$



rationale Kurve. Abb. 2: Versiera der Agnesi mit der Gleichung  $y(a^2 + x^2) = a^3$  für  $a_1 = 1$  und  $a_2 = 2$

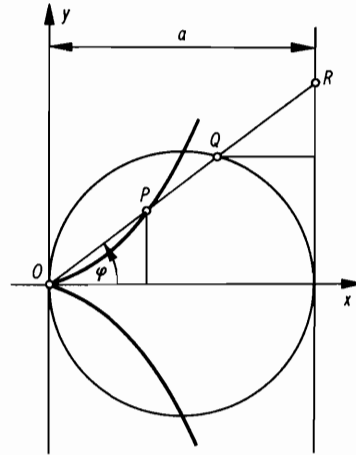
ein Maximum. Die Fläche zwischen Kurve und Asymptote hat den endlichen Inhalt  $\pi a^2$ .

III. Das *kartes. Blatt* genügt der Gleichung  $x^3 + y^3 = 3axy$  mit  $a \neq 0$  und der Parameterdarstellung  $x = 3at/(1+t^3)$ ,  $y = 3at^2/(1+t^3)$ . Der Ursprung ist ein *Doppelpunkt* (Abb. 3) mit den Koordinatenachsen als Tangenten. Die Gerade mit der Gleichung  $x + y + a = 0$  ist *Asymptote*.

Sowohl der Flächeninhalt der Schleife als auch der Flächeninhalt zwischen Kurve und Asymptote betragen  $3a^2/2$ .

IV. Die *Strophoide* genügt der Gleichung  $y^2(a-x) = x^2(a+x)$  mit  $a \neq 0$  oder der Parameterdarstellung  $x = a(t^2-1)/(t^2+1)$ ,  $y = at(t^2-1)/(t^2+1)$ . Die Strophoide besteht aus allen Punkten  $P$  und  $P'$ , die auf einer beliebigen Geraden durch  $A(-a, 0)$  liegen und deren Abstände vom Schnittpunkt  $B$  mit der  $y$ -Achse gleich  $|OB|$  sind (Abb. 4). Für sie ist  $O$  ein *Doppelpunkt* mit den Tangenten  $y = \pm x$ . Die Gerade  $x = a$  ist *Asymptote*. Der Flächeninhalt der Schleife ist  $2a^2 - \pi a^2/2$  und der der Fläche zwischen Kurve und Asymptote ist  $2a^2 + \pi a^2/2$ .

V. Die *Zissoide* genügt der Gleichung  $y^2(a-x) = x^3$ , mit  $a > 0$  bzw. der Parameterdarstellung  $x = at^2/(1+t^2)$ ,  $y = at^3/(1+t^2)$  und in Polarkoordinaten der Gleichung  $r = a \sin^2 \varphi / \cos \varphi$  mit  $t = \tan \varphi$  (Abb. 5). Für einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $(a/2, 0)$  und dem Durchmesser  $a$  ist die Gerade mit der Gleichung  $x = a$  Tangente und die Zissoide besteht aus allen Punkten  $P$ , für die der Abstand  $|OP|$  gleich der



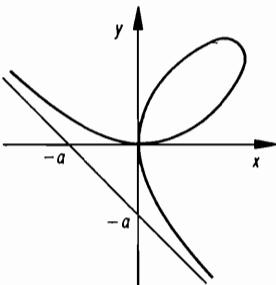
rationale Kurve. Abb. 5: Zissoide

Länge der Strecke  $QR$  ist, die auf den Geraden durch  $O$  vom Kreis und der Tangente ausgeschnitten wird. Punkt  $Q$  ist eine *Spitze*, auch *Rückkehrpunkt* gen. Die Tangente ist *Asymptote* der Zissoide, und die Fläche zwischen dieser und der Asymptote hat den Inhalt  $3\pi(a/2)^2$ .

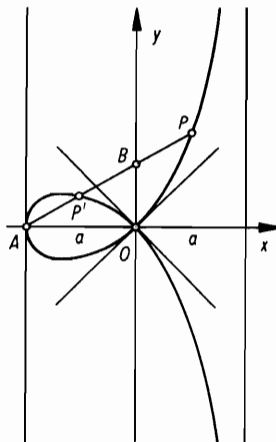
rationale Parameterdarstellung ↗ Kreis IV., ↗ Kurve zweiter Ordnung III.

rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$ : I. als Klassen *quotientengleicher* gemeiner Brüche definierte Zahlen, wenn zwei Brüche, z. B.  $r_1 = m_1/n_1$  und  $r_2 = m_2/n_2$ , als *quotientengleich* zur gleichen Klasse gehören, falls  $m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$ . Dabei wird vorausgesetzt, daß die Nenner  $n_1$  und  $n_2$  von Null verschieden sind und daß zunächst die ganzen Zahlen  $m_1, n_1, m_2, n_2$  positiv sind; d. h., man definiert zunächst *absolute r. Z.* Die Klassen  $r_1 = \{2/1, 4/2, 6/3, \dots, 100/50, \dots\}$  und  $r_2 = \{2/3, 4/6, 6/9, 8/12, 18/27, 30/45, \dots\}$  sind Beispiele absoluter r. Z. Dabei kann jeder der quotientengleichen Brüche einer Klasse als ihr *Repräsentant* oder *Vertreter* verwendet werden, meist entscheidet man sich für den in den kleinsten Zahlen  $m$  und  $n$  ausgedrückten Bruch  $s = m/n$ , im Falle  $r_2$  z. B. für  $m = 2$  und  $n = 3$ , d. h.,  $s = 2/3$ . Nach den Vorzeichenregeln etwa für  $m = s \cdot n$  (↗ Multiplikation) ist der Bereich der absoluten r. Z. zu erweitern, um die *negativen* r. Z. zum Bereich  $\mathbb{Q}$  der r. Z. Dies geschieht, indem man  $r_1 - r_2$  durch ein geordnetes Paar  $\{r_1, r_2\}$  von absoluten r. Z. darstellt und diese r. Z. der Zahl  $\{s_1, s_2\}$  gleich nennt, falls  $r_1 + s_2 = r_2 + s_1$  (↗ ganze Zahlen). Die Null wird dann repräsentiert durch das geordnete Paar  $\{r_1, r_1\}$ . Die Rechenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation werden dann wie für ganze Zahlen erklärt, die Division aber als Umkehrung der Multiplikation, indem man zeigt, daß zu jeder rationalen Zahl  $\alpha$  und zu jeder von 0 verschiedenen rationalen Zahl  $\beta$  genau eine rationale Zahl  $\gamma = \alpha : \beta$  existiert, für die gilt  $\alpha = \beta \cdot \gamma$ .

CANTOR zeigte, daß die Menge der r. Z. die gleiche Mächtigkeit hat wie die der natürl. Zahlen. Der Beweis darf sich auf die Menge der absoluten r. Z. beschränken. Man geht von einem Quadrat.

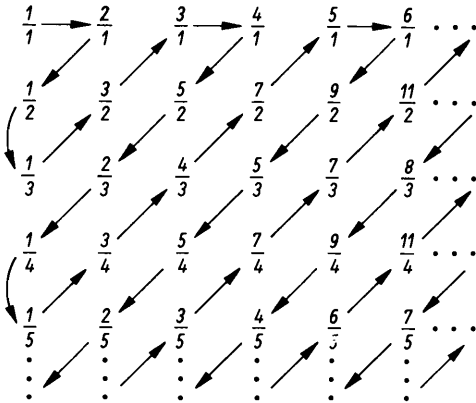


rationale Kurve. Abb. 3: Kartesisches Blatt



rationale Kurve. Abb. 4: Strophoide

Schema aus, in dem in jeder Zeile die r. Z.  $m/n$  mit dem gleichen Nenner  $n$  stehen, z. B.  $1/5, 2/5, 3/5, \dots$ , in jeder Spalte aber alle r. Z. mit dem gleichen Zähler  $m$ , z. B. in der ersten Spalte  $1/1, 1/2, 1/3, \dots$ . Streicht man dann alle r. Z., die zur selben Klasse gehören, und behält nur die erste dieser r. Z. als Repräsentanten bei, z. B.  $1/1$  für  $2/2 = 3/3 = \dots$ , oder  $1/2$  für  $2/4 = 3/6 = 4/8 = \dots$ , dann lassen sich die beibehaltenen r. Z. und damit alle r. Z. nach dem Cantorschen Diagonalverfahren durch Diagonalen (Abb.) eindeutig anordnen und in dieser Anordnung den natürl. Zahlen zuordnen.



Die Menge der absoluten rationalen Zahlen hat die gleiche Mächtigkeit wie die der natürlichen Zahlen

II. Zwischen zwei r. Z.  $r_1, r_2$ , für die etwa gilt  $r_2 > r_1$ , liegen stets unendlich viele weitere r. Z., z. B.  $r = r_1 + (r_2 - r_1)/n$  für  $n = 2, 3, \dots$ . Trägt man deshalb die r. Z. als Punkte auf einer Zahlengeraden auf, so liegen diese überall dicht, weil es in jeder Nähe eines solchen Punktes weitere Punkte als Bilder von r. Z. gibt.

Raum, abstrakter  $\nearrow$  Funktionalanalysis I.

Raum, adjungierter  $\nearrow$  Funktional II.

Raum, dualer  $\nearrow$  Funktional II.

Raum, metrischer: I. Funktionalanalysis eine Menge  $X$ , in der jedem Paar von Elementen  $x, y \in X$  eine nichtnegative reelle Zahl  $\varrho(x, y)$  zugeordnet ist, die als Abstand der Elemente bezeichnet wird und für die für alle  $x, y, z \in X$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) das Axiom der Identität, nach dem  $\varrho(x, y) = 0$  genau dann gilt, wenn  $x = y$ ,
- (2) das Axiom der Symmetrie, nach dem  $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$  gilt, und
- (3) die Dreiecksungleichung  $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ . Daraus lassen sich für die Abstandsfunktion die Beziehungen (4) und (5) herleiten.
- (4)  $|\varrho(x, y) - \varrho(y, z)| \leq \varrho(x, z)$
- (5)  $|\varrho(x, y) - \varrho(x', y')| \leq \varrho(x, x') + \varrho(y, y')$

Aus (5) ergibt sich, daß  $\varrho(x, y)$  eine stetige Funktion der beiden Variablen  $x$  und  $y$  ist. Wie im topolog.

Raum werden die Elemente oft Punkte gen. Jede solche Funktion  $\varrho(x, y)$  heißt eine Metrik des Raumes  $X$ . Welche konkrete analyt. Gestalt diese Funktion hat, wird dabei offen gelassen; entscheidend ist nur, daß die drei genannten Axiome erfüllt sind. Das Axiom (2) fordert z. B., daß der Abstand der Punkte  $x$  und  $y$  gleich dem Abstand der Punkte  $y$  und  $x$  sein soll.

Ein und dieselbe Menge kann man oft auf verschiedene Weise mit einer Metrik versehen, z. B. sind folgende Funktionen  $\varrho_1, \varrho_2$  und  $\varrho_3$  Metriken im  $n$ -dimensionalen komplexen euklid. Raum  $\mathbf{C}^n$ , der aus allen  $n$ -Tupeln  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  bzw.  $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  komplexer Zahlen besteht:

$$(6) \quad \varrho_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2}$$

$$(7) \quad \varrho_2(x, y) = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|$$

$$(8) \quad \varrho_3(x, y) = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|$$

Der Einheitskreis der komplexen Zahlenebene wird z. B. ein m. R. mit der Abstandsfunktion  $\varrho(x, y) = |\arg x - \arg y|$  (s. a. Raum, normierter linearer). Ebenso wie man  $\varrho(x, y)$  in Anlehnung an Begriffsbildungen der analyt. Geometrie als Abstand von  $x, y \in X$  bezeichnet, heißt die Menge  $K_r(a) = \{y \in X | \varrho(a, y) \leq r\}$ , mit  $r \in \mathbf{R}$  und  $r \geq 0$ , Kugel um  $a$  mit dem Radius  $r$ . Für den Fall des euklid. Raumes  $\mathbf{C}^n$  stimmen die Begriffe Abstand und Kugel mit den aus der analyt. Geometrie bekannten überein.

II. In einem m. R. kann man eine Topologie ( $\nearrow$  Raum, topologischer) einführen, indem man als Umgebungsbasis eines Elements  $x$  alle Mengen  $K_\varepsilon(x)$  nimmt, wenn  $\varepsilon$  alle positiven reellen Zahlen durchläuft. Auf diese Weise wird der m. R.  $X$  zu einem topolog. Hausdorffraum. Dabei kann es vorkommen, daß verschiedene Metriken ein und dieselbe Topologie ergeben. Die oben gen. drei Metriken  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  z. B. definieren im  $\mathbf{C}^n$  die gleiche Topologie. Da sich jeder m. R. topologisieren läßt, kann man die für topolog. Räume bereits definierten Begriffe wie Häufungspunkt, offene und abgeschlossene Menge, Konvergenz, Grenzelement auch auf m. R. übertragen. Eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in X$  nennt man z. B. genau dann konvergent gegen ein Grenzelement  $x \in X$ , wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$  gilt. Wegen der Dreiecks-

ungleichung der Metrik hat eine konvergente Folge genau ein Grenzelement. Die umgekehrte Fragestellung nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die einen topolog. Raum zu einem m. R. machen, falls sie erfüllt sind, bildet das Metrisationsproblem, das NAGATA und SMIRNOW mit dem Metrisationssatz gelöst haben.

Raum, normaler  $\nearrow$  Raum, topologischer, II.

Raum, normierter linearer: Funktionalanalysis ein linearer Raum  $X$  über  $\mathbf{C}$ , d. h. ein Vektorraum, in dem jedem Element  $x \in X$  eine nichtnegative reelle Zahl  $\|x\|$  zugeordnet ist, die Norm von  $x$  heißt und für beliebige Elemente  $x, y \in X$  und  $\lambda \in \mathbf{C}$  folgende Eigenschaften haben soll:

- (1)  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , *Dreiecksungleichung*

Die Norm  $\|x\|$  bezeichnet man auch als *Länge* eines Vektors  $x$ .

Die Eigenschaften (1), (2), (3) einer Norm sind z. B. für den absoluten Betrag einer komplexen Zahl erfüllt. Im  $n$ -dimensionalen komplexen euklid. Raum  $\mathbb{C}^n$ , dessen Elemente alle  $n$ -Tupel  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  komplexer Zahlen sind, kann man z. B. folgende Normen definieren:

$$(4) \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \quad (5) \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$$

$$(6) \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$$

Zu jedem n. l. R. der folgenden *Beispiele 1* bis *5* ist eine Norm angegeben.

1: Der Raum  $C(a, b)$  der stetigen Funktionen auf dem endlichen Intervall  $[a, b]$  mit der Norm (7).

2: Der Raum  $C^n(a, b)$  der  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  mit der Norm (8).

3: Der Funktionenraum  $L_p(a, b)$ , in dem  $p$  eine reelle Zahl mit  $1 \leq p < \infty$  ist, und dessen Elemente die komplexwertigen Funktionen  $x(t)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  sind, für die das Lebesgue-Integral in (9) endlich ist. Dabei werden Funktionen, deren Werte höchstens auf einer Menge vom Maße Null ( $\nearrow$  Nullmenge) voneinander abweichen, als gleich angesehen. Die Beziehung (9) definiert die Norm dieses Raumes.

4: Der Raum  $C$  aller komplexen Nullfolgen  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$  mit der Norm  $\|x\| = \max |\xi_n|$ .

5: Der Folgenraum  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , der aus allen komplexen Zahlenfolgen  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$  besteht, für die die Summe in (10) endlich ist.

$$(7) \quad \|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \quad (8) \quad \|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t)|$$

$$(9) \quad \|x\| = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (10) \quad \|x\| = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}$$

Welchen Raum und welche Norm man bei einem bestimmten Problem verwendet, hängt von der Zielstellung der Untersuchung, d. h. von der Art des Problems, ab. — In einem n. l. R.  $X$  kann man eine Metrik ( $\nearrow$  Raum metrischer) definieren, indem man als Abstand zweier Elemente  $x, y \in X$  die Norm ihrer Differenz nimmt:  $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ . Jeder n. l. R. ist folglich auch ein metr. Raum. Die umgekehrte Aussage gilt schon deshalb nicht, weil in einem n. l. R. eine Addition und Vervielfachung seiner Elemente erklärt sein müssen, während dies in einem metr. Raum nicht der Fall zu sein braucht. Ein *vollständiger* n. l. R. ( $\nearrow$  Fundamentalfolge) heißt nach S. BANACH, einem der Begründer der Funktionalanalysis, *Banachraum*. Alle oben gen. Beispiele sind Banachräume.

**Raum, regulärer**  $\nearrow$  Raum, topologischer, II.

**Raum, topologischer**: I. eine Menge  $R$  von Elementen

$p, q, \dots$  mit einer *topolog. Struktur* oder *Topologie*. Die der Menge  $R$  aufgeprägte Topologie  $\tau$  wird dadurch definiert, daß jedem Element  $p \in R$  ein nicht-leeres System  $U(p)$  von Teilmengen  $U \subseteq R$ , *Umgebungen* von  $p$  gen., zugeordnet wird, und daß die folgenden *Hausdorffschen Umgebungsaxiome* gelten: **I.1.** Es ist  $p$  ein Element von  $U$ , in Zeichen  $p \in U$  für jede Umgebung  $U \in U(p)$ . — **I.2.** Wenn die Umgebung  $V$  die Umgebung  $U$  umfaßt, in Zeichen: wenn  $U \in U(p)$  und  $V \supseteq U$ , so ist  $V \in U(p)$ . — **I.3.** Für jedes Element  $p \in R$  gehört mit zwei Umgebungen  $U_1, U_2$  auch ihr Durchschnitt zu  $U$ , in Zeichen: wenn  $U_1, U_2 \in U(p)$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in U(p)$ . — **I.4.** Zu  $U \in U(p)$  gibt es ein  $V \in U(p)$  so, daß  $U \in U(y)$  für alle  $y \in V$ .

Die Elemente  $p, q, \dots$  werden meist *Punkte* des t. R.s genannt. Für jeden Punkt  $p \in R$  gilt  $R \in U(p)$ . Nach Axiom I.1. gehört die leere Menge  $\emptyset$  zu keinem System  $U(p)$ .

Ein t. R. heißt *zusammenhängend*, wenn er sich nicht darstellen läßt als Vereinigung zweier disjunkter offener Teilmengen, von denen keine leer ist.

**II.** Ein *Hausdorffscher Raum* ist ein t. R., in dem zusätzl. das *Hausdorffsche Trennungsaxiom* gilt: *Sind  $p \neq q$  zwei Punkte von  $R$ , so gibt es Umgebungen  $U \in U(p)$  und  $V \in U(q)$  mit  $U \cap V = \emptyset$ , d. h. zu verschiedenen Punkten gibt es disjunkte Umgebungen.* Von einem Hausdorffschen Raum läßt sich zeigen, daß jeder Teilraum wieder hausdorffsch ist und daß jede nur aus einem Punkt bestehende Menge in ihm abgeschlossen ist ( $\nearrow$  Menge, offene). Durch zusätzl. Bedingungen werden aus dem Hausdorffschen Raum der *reguläre Raum* und der *normale Raum* gewonnen.

**III.** Jeder metr. Raum ist ein t. R., eine metr. Struktur über einer Menge  $R$  hat eine topologische Struktur über  $R$  zur Folge. Als Umgebung  $U$  eines Punktes  $p$  wird im metr. Raum jede Teilmenge festgelegt, die eine Kugelumgebung von  $p$  enthält. S. Raum, metrischer; Fundamentalfolge II.

**Raum, vollständiger**: ein metr. Raum, in dem jede Fundamentalfolge konvergiert; nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium z. B. ist die reelle Zahlengerade  $\mathbb{R}^1$  ein v. R. Die rationale Gerade dagegen, d. h. die Zahlengerade, die nur die rationalen Zahlen enthält, ist ein *nichtvollständiger Raum*. S. a. Fundamentalfolge II.

**Raumdiagonale**  $\nearrow$  Prisma II.

**Räume, isometrische**: zwei metr. Räume  $R$  und  $R'$ , die durch eine umkehrbar eindeutige Funktion  $f$  derart aufeinander abgebildet werden, daß zwei Punkte aus  $R$  den gleichen Abstand haben wie die ihnen entsprechenden Bildpunkte in  $R'$ . Die Funktion  $f$  heißt eine *isometr. Abbildung* von  $R$  auf  $R'$ .

**Raumeinheit**  $\nearrow$  Rauminhalt I.

**Raumelement**  $\nearrow$  Raumintegral IV.

**Rauminhalt, Volumen**: I. ein formales Produkt  $a \cdot e^3$  aus einer reellen Zahl  $a$  und einer festen *Raumeinheit*  $e^3$  mit den Eigenschaften: 1. Es ist  $a \geq 0$ . — 2. *Kongruente* Körper haben gleichen  $R$ . — 3. Der  $R$ . der *Raumeinheit* ist  $1 \cdot e^3$ . — 4. Haben zwei Körper mit den  $R$ .en  $a \cdot e^3$  und  $a' \cdot e^3$  keine gemeinsamen inneren

Punkte, so hat die Vereinigung der Punkte der beiden Körper den R.  $(a + a') \cdot e^3$ , der die *Summe* der beiden R.e gen. wird. Die Zahl  $a$  heißt *Maßzahl* des R.s bzgl. der verwendeten Raumeinheit.

Jeder Körper, der einen R. hat, heißt *quadrierbar*, z. B. sind alle Polyeder quadrierbar. Ein krummflächig begrenzter quadrierbarer Körper ist z. B. eine Kugel. Die Berechnung des R. erfordert in vielen Fällen den Begriff des Grenzwertes. In der Stereometrie wird oft das Cavalierische Prinzip zur Berechnung des R.s verwendet.

II. Als Raumeinheit wählt man meist einen Würfel mit einer Einheitsstrecke als Kante, einen *Einheitswürfel*. Die SI-Einheit ist der *Kubikmeter*, abgekürzt  $1 \text{ m}^3$ , der R. eines Würfels mit der Kantenlänge  $1 \text{ m}$ . Davon abgeleitete Raumeinheiten sind das *Kubikkilometer*,  $1 \text{ km}^3 = 10^9 \text{ m}^3$ , das *Kubikdezimeter*,  $1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ , das *Kubikzentimeter*,  $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$ , das *Kubikmillimeter*,  $1 \text{ mm}^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$ . In der Praxis wird noch der *Liter* verwendet,  $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$ , der eingeteilt wird in *Zentiliter*,  $100 \text{ cl} = 1 \text{ l}$ , und in *Milliliter*,  $1000 \text{ ml} = 1 \text{ l}$ . In der Schifffahrt dient zur Vermessung des Schiffsraums die *Registertonne*,  $1 \text{ RT} = 2,83 \text{ m}^3$ .

**Raumintegral:** I. Verallgemeinerung des bestimmten Integrals von Funktionen von einer auf Funktionen von drei unabhängigen Variablen. Im beschränkten Raumbereich  $K$ , in dem die beschränkte Funktion  $u = f(x, y, z)$  definiert ist, soll  $Z$  eine Zerlegung von  $K$  in endlich viele Teilbereiche  $K_i$  mit dem Volumen  $\Delta K_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  sein, und  $\Delta(Z)$  soll den größten Durchmesser der Teilbereiche  $K_i$  bedeuten. Wird in jedem Teilbereich  $K_i$  ein beliebiger Punkt  $P_i$  mit den Koordinaten  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  gewählt, so kann die *Zwischensumme* (1) gebildet werden. Ihr Grenz-

$$(1) \quad \sigma(Z) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta K_i$$

wert  $I$  heißt das *R.* (2) *der Funktion*  $f(x, y, z)$  *über den Raumbereich*  $K$ , und  $f(x, y, z)$  heißt über  $K$  *integrierbar*. Der Grenzwert  $I$  existiert, wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $\delta(\epsilon) > 0$  so angegeben werden kann, daß für jede Zerlegung  $Z$  von  $K$  mit  $\Delta(Z) < \delta$  stets  $|\sigma(Z) - I| < \epsilon$  gilt.

Für jede auf  $K$  stetige Funktion bzw. für jede Funktion, die auf  $K$  mit Ausnahme von Punkten stetig ist, die auf einer endl. Zahl von glatten Flächen liegen, existiert das R. Auf solchen Flächen kann die Funktion beliebig abgeändert werden, wenn die abgeänderte Funktion beschränkt ist, ohne daß sich der Wert des Integrals ändert.

II.1. Zu den *Eigenschaften des R.* gehört die *Additivität bzgl. des Integranden*, d. h., sind  $f(x, y, z)$  und  $g(x, y, z)$  zwei über  $K$  integrierbare Funktionen, so ist auch ihre Summe integrierbar, und es gilt (3).

$$(3) \quad \iiint_{(K)} [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dK = \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK + \iiint_{(K)} g(x, y, z) dK$$

II.2. Eine *Additivität bzgl. des Bereichs* besteht in dem Sinne, daß eine über  $K_1$  und über  $K_2$  integrierbare Funktion auch über der Vereinigungsmenge  $K_1 \cup K_2$  integrierbar ist; falls  $K_1$  und  $K_2$  keine inneren Punkte gemeinsam haben, gilt (4).

$$(4) \quad \iiint_{(K_1 \cup K_2)} f(x, y, z) dK = \iiint_{(K_1)} f(x, y, z) dK + \iiint_{(K_2)} f(x, y, z) dK$$

II.3. Für jede *Konstante*  $k$  gilt (5).

$$(5) \quad \iiint_{(K)} kf(x, y, z) dK = k \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK$$

II.4. Gilt  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  für jeden Punkt von  $K$ , so gilt (6) für ihre R.e.

$$(6) \quad \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK \leq \iiint_{(K)} g(x, y, z) dK$$

II.5. Der Betrag des R.s ist nach (7) höchstens so groß wie das R. des Betrags.

$$(7) \quad \left| \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK \right| \leq \iiint_{(K)} |f(x, y, z)| dK$$

II.6. *Mittelwertsatz für R.e.* Ist  $f(x, y, z)$  auf  $K$  stetig, dann gibt es auf  $K$  mindestens einen Punkt  $\xi, \eta, \zeta$ , so daß (8) gilt, wenn  $\Delta K$  das Volumen des Raumbereichs  $K$  bezeichnet.

$$(8) \quad \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK = f(\xi, \eta, \zeta) \Delta K$$

II.7. Eine *Gebietsdifferenziation* kann durch (9)

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta K_n} \iiint_{(K_n)} f(x, y, z) dK = f(\xi, \eta, \zeta)$$

definiert werden. Dabei ist  $K_n$  eine Folge von Raumbereichen mit den Volumina  $\Delta K_n$  und den Durchmessern  $\varrho_n$ , die alle den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  enthalten. Der Grenzwert (9) existiert für jede stetige Funktion, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$ .

III. Die *Berechnung des R.s* kann auf verschiedenen Wegen erfolgen, etwa, indem sie auf drei einfache Integrationen zurückgeführt wird.

III.1. Ist  $K$  ein Zylinder über dem Bereich  $B$  der  $x, y$ -Ebene, dessen Grund- bzw. Deckfläche durch

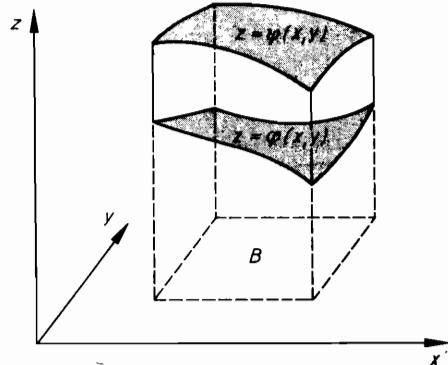
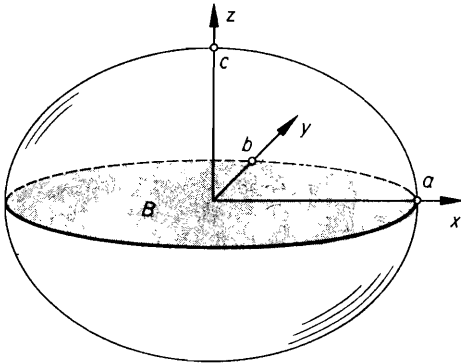


Abb. 1: Berechnung des Raumintegrals



Raumintegral. Abb.2: Integration, wenn der Raumbereich ein Ellipsoid ist

die Gleichungen  $z = \varphi(x, y)$  bzw.  $z = \psi(x, y)$  gegeben sind (Abb. 1), so kann das R. mittels (10) in ein Flächenintegral über  $B$  umgeformt werden. Kön-

$$(10) \quad \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK \\ = \iint_{(B)} \left\{ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy$$

nen die Punkte von  $B$  durch die Ungleichungen  $a \leq x \leq b$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$  beschrieben werden, so erhält man das R. nach (11) durch drei einfache Integrationen. Ist z. B. der Raumbereich  $K$  von

$$(11) \quad \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK \\ = \int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx$$

dem Ellipsoid (Abb. 2) mit der Gleichung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  begrenzt, so sind  $B$  die Punkte im Innern der Ellipse mit der Gleichung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , und die Grund- bzw. Deckfläche des Zylinders ist durch die Gleichungen (12) und (13) gegeben.

$$(12) \quad z = \psi(x, y) = c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$$

$$(13) \quad z = \varphi(x, y) = -c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$$

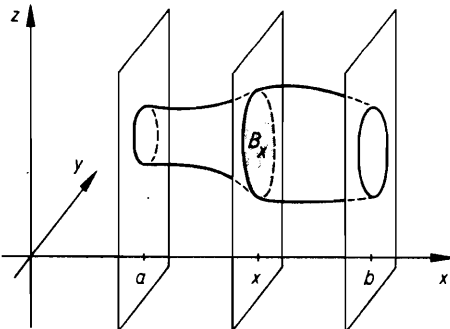


Abb. 3: Zur Berechnung des Raumintegrals mittels der Inhalte von Schnittflächen  $B_x$  paralleler Ebenen

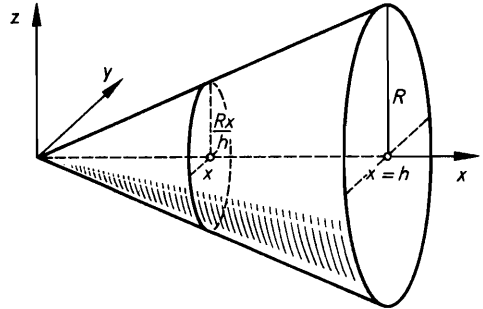
Die Punkte von  $B$  werden durch die Ungleichungen  $-a \leq x \leq a$ ,  $-(b/a)\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$  beschrieben. Daher gilt (14) für das R. über den Bereich  $K$ .

$$(14) \quad \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK \\ = \int_{-a}^a \left\{ \int_{-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{(b/a)\sqrt{a^2-x^2}} \left[ \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx$$

III.2. Ist  $K$  ein Raumbereich, der zwischen den durch  $x = a$  und  $x = b$  bestimmten Ebenen liegt und von jeder Ebene  $x = \text{const}$  mit  $a \leq x \leq b$  in einem Bereich  $B_x$  geschnitten wird (Abb. 3), so gilt (15).

$$(15) \quad \iiint_{(K)} f(x, y, z) dK = \int_a^b \left\{ \iint_{(B_x)} f(x, y, z) dy dz \right\} dx$$

Wird z. B. der Raumbereich  $K$  von der Kegelfläche  $R^2 x^2 = h^2(y^2 + z^2)$  begrenzt (Abb. 4), so liegt er



Raumintegral. Abb. 4: Integration über einen Kegel

zwischen den durch  $x = 0$  und  $x = h$  bestimmten Ebenen. Der Schnitt  $B_x$  mit einer Ebene  $x = \text{const}$  ist die Kreisfläche  $y^2 + z^2 \leq (Rx/h)^2$ . Für den speziellen Integranden (16) läßt sich das Integral  $I(x)$

$$(16) \quad f(x, y, z) = x / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3$$

über  $B_x$  durch Einführung von Polarkoordinaten  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$  berechnen: Nach der Formel für eine Variablentransformation ( $\nearrow$  Flächenintegral III.) wird zunächst Formel (17) erhalten, die nach der Substitution  $u = \sqrt{r^2 + x^2}$  in (18) übergeht. Für das R. erhält man schließlich (19).

$$(17) \quad I(x) = \iint_{(B_x)} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dx dz \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{(Rx/h)} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + r^2})^3} r dr d\varphi$$

$$(18) \quad I(x) = x \int_0^{2\pi} \int_x^{x\sqrt{1+(R/h)^2}} \frac{du}{u^3} d\varphi \\ = \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + h^2}} (\sqrt{R^2 + h^2} - h)$$

$$(19) \quad \iint\limits_{(K)} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} dK = \int_0^h I(x) dx$$

$$= \frac{2\pi h}{\sqrt{R^2 + h^2}} (\sqrt{R^2 + h^2} - h)$$

IV. *Variablentransformationen.* Das R. läßt sich leichter bzw. überhaupt erst berechnen, wenn anstelle der rechtwinkligen Koordinaten  $x, y, z$  geeignete neue Variable  $\xi, \eta, \zeta$  eingeführt werden ( $\nearrow$  Flächenintegral III.). Über die *Variablensubstitution* gilt der Satz: Wird durch die Funktionen  $x = x(\xi, \eta, \zeta), y = y(\xi, \eta, \zeta), z = z(\xi, \eta, \zeta)$  der Raumbereich  $\Gamma$  *eindeutig* auf den Raumbereich  $K$  abgebildet, sind diese Funktionen mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in  $\Gamma$  stetig und verschwindet in  $\Gamma$  die Funktionaldeterminante (20) nicht, dann gilt (21) für jede stetige Funktion  $f(x, y, z)$ .

$$(20) \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

$$(21) \quad \iiint\limits_{(K)} f(x, y, z) dK = \iiint\limits_{(\Gamma)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\Gamma$$

Diese Transformationsformel bleibt auch dann noch gültig, wenn auf stückweise glatten Flächen diese Voraussetzungen verletzt sind, wenn nur  $f(x, y, z)$  und die Funktionaldeterminante beschränkt bleiben. Der Ausdruck (22) heißt *Raumelement* in den Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ .

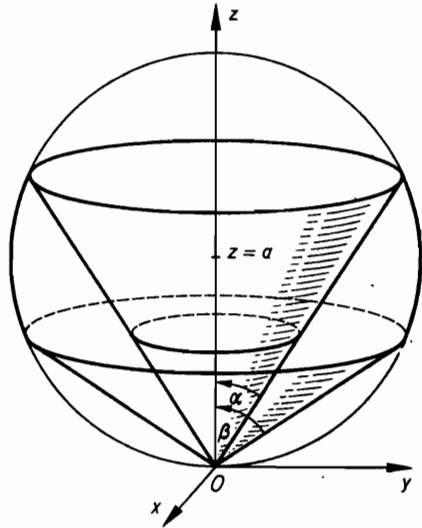
$$(22) \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta$$

Für *Kugelkoordinaten*  $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$  wird  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = r^2 \sin \vartheta$ ,  
für *verallgemeinerte Kugelkoordinaten*  
 $x = ar \cos \varphi \sin \vartheta, y = br \sin \varphi \sin \vartheta, z = cr \cos \vartheta$   
wird  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = abc r^2 \sin \vartheta$ ,  
für *Zylinderkoordinaten*  
 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = \zeta$  wird  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = r$ .

V. Das R. läßt sich geometrisch deuten: Für den speziellen Integranden  $f(x, y, z) = 1$  stellt das R. (23) über  $K$  das Volumen  $\Delta K$  von  $K$  dar.

$$(23) \quad \Delta K = \iiint\limits_{(K)} dK$$

Wird z. B. der Raumbereich  $K$  von der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$  und von den beiden Kegel-  
flächen  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha, x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \beta$  mit  $\alpha < \beta$  begrenzt (Abb. 5), so wird er in Kugelkoordinaten  $r, \varphi, \vartheta$  durch die Ungleichungen  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, \alpha \leq \vartheta \leq \beta, 0 \leq r \leq 2a \cos \vartheta$  beschrieben. Nach



Raumintegral. Abb. 5: Raumstück zwischen zwei Kegeln in einer Kugel

Transformation des R. auf Kugelkoordinaten folgt daher (24).

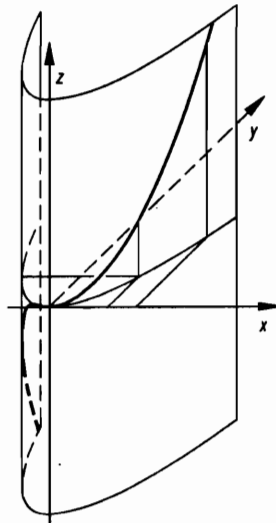
$$(24) \quad \Delta K = \iiint\limits_{(K)} dK = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{2a \cos \vartheta} \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta d\varphi dr d\vartheta$$

$$= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{2a \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta$$

$$= \frac{2}{3} \pi \int_{\alpha}^{\beta} \sin \vartheta (2a \cos \vartheta)^3 d\vartheta =$$

$$\frac{16}{3} \pi \cdot a^3 \left[ -\frac{1}{4} \cos^4 \vartheta \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\cos^4 \alpha - \cos^4 \beta)$$

Raumintegral, uneigentliches,  $\nearrow$  Flächenintegral VIII.



Kubische Raumkurve ( $\nearrow$  S. 468)



**Raumkurve, kubische, kubische Normkurve:** eine rationale Kurve des dreidimensionalen Raumes, die in einem geeigneten Koordinatensystem die Parameterdarstellung  $x = t, y = t^2, z = t^3$  hat (Abb.). Sie ist die Kurve, die vom Kegel  $zx = y^2$  aus dem Zylinder  $y = x^2$  außer der Geraden  $x = 0, y = 0, z = t$  ausgeschnitten wird. Sie kann auch als Menge aller gemeinsamen Schnittpunkte von drei Flächen 2. Ordnung  $xz = y^2, y = x^2$  und  $z = xy$  angesehen werden. Die Projektion der R. auf die  $x,y$ -Ebene ergibt die Parabel mit  $y = x^2$ , die auf die  $x,z$ -Ebene die kub. Parabel mit  $z = x^3$ , die auf die  $y,z$ -Ebene die semikub. Parabel mit  $y^2 = z^2$ . Die R. ist eine algebraische Raumkurve (↗ Schraubenlinie).

**räumliche Polarkoordinaten** ↗ Koordinatensystem V.

**Raum mit Skalarprodukt** ↗ Hilbertraum I.

**Rauschen** ↗ Information II., ↗ Informationstheorie II.

**Raute** svw. Rhombus.

**Realisierung** ↗ Zufallsgröße I., ↗ stochastischer Prozeß I.

**Rechenanlage, Computer, Rechenautomat:** Gerät bzw. Gerätegruppe zur Behandlung umfangreicher Aufgaben der Datenverarbeitung mit hoher Arbeitsgeschwindigkeit. R. haben einen elektron. Aufbau und führen Algorithmen nach eingespeicherten Programmen aus. Hinsichtlich ihrer Funktionsweise sind grundsätzlich Analogrechner und digitale Rechenanlagen zu unterscheiden. Während bei einem Analogrechner bestimmte Probleme durch Messung der kontinuierl. Ausgangsgröße geeignet aufgebauter elektr. Systeme gelöst werden, arbeiten digitale Rechenanlagen auf der Grundlage numer. Verfahren, die im wesentlichen auf den vier Grundrechenarten basieren. Dabei werden Daten durch endl. Folgen von Binärzeichen bzw. durch deren techn. Realisierungen, z. B. durch Impulsfolgen, dargestellt und mit Hilfe digitaler Schaltungen verknüpft. Weiter werden in der Rechentechnik Hybridrechenanlagen verwendet, das sind Kombinationen von Analogrechnern und digitalen Rechenanlagen. Automatisierungszwecken dienen Prozeßrechenanlagen, die digitale Rechenanlagen sind und wegen besonderer Eigenschaften und ihrer Zusatzeinrichtungen mit Prozessen gekoppelt werden, deren teilweise oder vollständige Führung sie übernehmen können (↗ Prozeßkopplung). R. werden häufig auch als Rechenmaschinen oder elektron. Datenverarbeitungsanlagen, abgekürzt EDVA, bezeichnet.

**Rechenautomat** svw. Rechenanlage.:

**Rechenbrett** svw. Abakus.

**Rechenrad** ↗ Rechenstab IV.

**Rechenscheibe** ↗ Rechenstab IV.

**Rechenschieber** svw. Rechenstab.

**Rechenstab, Rechenschieber:** I. mechanisches Rechenhilfsmittel in handlicher Stabform (↗ Nomographie), auf dem drei Funktionsleiter so nebeneinander angeordnet sind, daß eine von ihnen relativ zu den beiden anderen verschoben werden kann (Abb. 1).

Durch Streckenaddition lassen sich dann bestimmte Beziehungen  $z = F(x, y)$  zwischen drei Variablen darstellen. Enthält die Funktionsleiter  $x$  die Werte

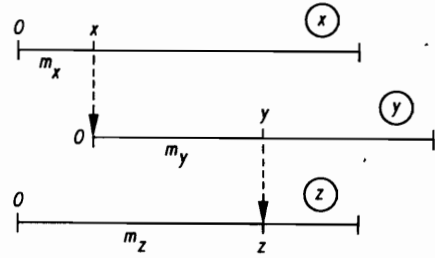


Abb. 1: Prinzip des Rechenstabes

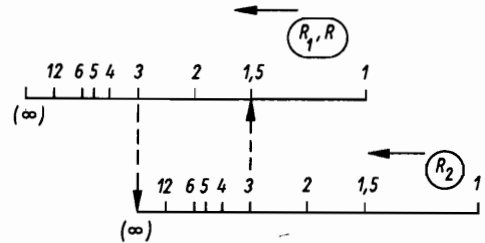


Abb. 2: Rechenstab für den Gesamtwiderstand zweier paralleler Widerstände

von  $f(x), y$  die von  $g(y)$  und  $z$  die von  $h(z)$ , so bedeutet  $m_z = m_x + m_y$ , z. B.  $E_z h(z) = E_x f(x) + E_y g(y)$ , d. h., die Schlüsselgleichung (↗ Nomographie II.) ist  $h(z) = f(x) E_x / E_z + g(y) E_y / E_z$ . Allgemein ist jede Beziehung zwischen  $x, y$  und  $z$ , die sich auf die Form einer Schlüsselgleichung bringen läßt, auf einem solchen R. darstellbar. Die Schlüsselgleichung des R.s ist  $h(z) = a \cdot f(x) + b \cdot g(y)$  mit reellen Zahlen  $a, b$ , wenn  $h(z), f(x), g(y)$  arithmetische Ausdrücke in  $z, x$  und  $y$  sind. Im R. für den Gesamtwiderstand zweier paralleler Widerstände stellen die Funktionsleiter die reziproken Werte der Widerstände dar, in Abb. 2 z. B. liest man nach  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$  für  $R_1 = R_2 = 3$  als Ergebnis ab  $R = 1,5$ .

II. Im logarithmischen R. sind drei Skalen  $B, R$  und  $C$  auf einer Zunge angebracht und damit gemeinsam gegen alle anderen Skalen  $A, D, K$  und  $L$  des Stabkörpers verschiebbar (Abb. 3). Die Zuordnung der Teilpunkte auf den verschiedensten Skalen wird durch den über allen Skalen verschiebbaren Läufer möglich. Wie der Name des R.s sagt, sind die Skalen Zunge Läufer Stabkörper

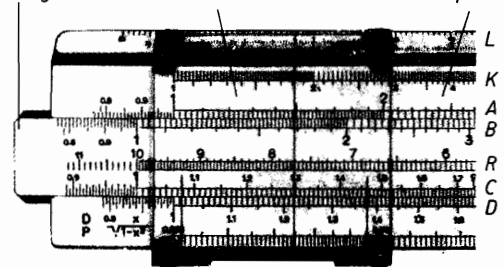


Abb. 3: Der logarithmische Rechenstab

Funktionsleitern der Logarithmusfunktion  $\lg x$ . Hat der R. die Länge  $l$ , so geben die Skalen  $C$  und  $D$  das  $x$ -Intervall  $[1, 10]$  wider, d. h.,  $E_C = E_D = l$ . Auf den Skalen  $A$  und  $B$  nimmt das Intervall  $[1, 10]$  die Länge  $l/2$  ein. Aus  $E_A = E_B = l/2$  folgt, z. B. aus dem Vergleich der Skalen  $A$  und  $D$ ,  $\lg z = \lg x \cdot E_C/E_A = 2 \lg x = \lg x^2$ , d. h., die  $z$ -Werte der Skalen  $A$  bzw.  $B$  geben die Quadrate der  $x$ -Werte der Skalen  $D$  bzw.  $C$  an. Da auf der Skale  $K$  das Intervall  $[1, 10]$  die Länge  $l/3$  beansprucht, geben ihre  $z$ -Werte entsprechend die Kuben der  $x$ -Werte der Skale  $D$  an. Die Skale  $R$  enthält wieder auf der Länge  $l$  das Intervall  $[1, 10]$ , aber von rechts nach links. Die Funktionsleiter stellt deshalb  $-\lg x = \lg(1/x)$  dar; es ist die Skale der reziproken Werte zu den auf  $D$  dargestellten Zahlen.

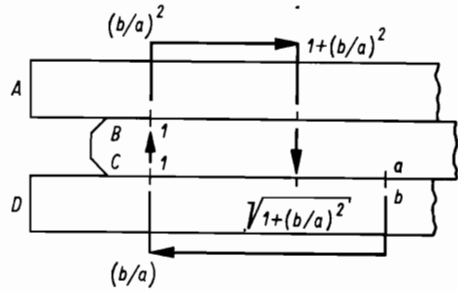
Durch das Verschieben der Zunge können Summen und Differenzen von Logarithmen hergestellt und nach den Gesetzen der Logarithmusfunktion auf den Funktionsleitern Produkte und Quotienten abgelesen werden. Durch Vergleich der Skalen  $A$ ,  $B$  einerseits und  $C$ ,  $D$  andererseits mit Hilfe des Läufers lassen sich auch Quadrate bzw. Quadratwurzeln ablesen. Die Skale  $L$  schließlich, auf die Länge  $l$  als Einheit bezogen, zeigt die Werte der *Logarithmusfunktion* an, so daß auch Zahlenwerte aus Exponentialgleichungen berechnet werden können, aus  $a^n = r$  z. B.  $n = \lg r / \lg a$ .

Beim Verschieben der Zunge, besonders wenn mehrere Faktoren im Zähler oder Nenner auftreten, kann diese nach links oder rechts über den Stabkörper hinausragen, so daß auf den Skalen des Stabkörpers kein Ergebnis abgelesen werden kann. Anstatt einen Quotienten bei 1 abzulesen, liest man ihn dann bei 10 bzw. 100 ab, oder beim Hinausragen nach rechts subtrahiert man zuvor die volle Zungenlänge  $l$ , ehe man abliest. Das dadurch bedingte Auftreten eines der Faktoren  $10$ ,  $10^{-1}$  bzw.  $100$  oder  $100^{-1}$  ist zu beachten. Überhaupt sollte durch eine Übersichtsrechnung die Stellung des Kommas in jedem Fall gesichert und nur die genauere Ziffernfolge abgelesen werden. Bei sorgfältigem Ablesen ist für  $l = 12,5$  cm mit einem Ablesefehler von  $0,15\%$  zu rechnen.

III. In den folgenden Beispielen wird der einfachen Ausdrucksweise zuliebe die jeweils benutzte Skale in Klammern angegeben:

- $x(D) + y(C) \rightarrow x \cdot y(D) \rightarrow x^2 \cdot y^2(A)$ ,
- $x(C) + y(L) \rightarrow x \cdot 10^y(D) \rightarrow 1/(x \cdot 10^y)(R)$ ,
- $y(D) - x(C) \rightarrow (y/x)(D) \rightarrow (y/x)^2(A)$ .

Durch Addieren von 1 im Kopf erhält man  $[1 + (b/a)^2](A)$  und daraus  $\sqrt{1 + (b/a)^2}$  auf  $D$ . In Abb. 4 ist der Schritt mittels Kopfrechnens durch einen Pfeil angegeben. Die große Vielfalt der Möglichkeiten wird noch beträchtlich erhöht, wenn Mehrfacheinstellungen berücksichtigt werden. Daraus und aus der einfachen Handhabung erklärt sich die große Verbreitung dieses bei aller Einfachheit zuverlässigen und genauen Rechenhilfsmittels.



Rechenstab. Abb. 4: Zungeneinstellung und Gang der Ablesung für  $\sqrt{1 + (b/a)^2}$

IV. Eine *Genauigkeitserhöhung* durch Vergrößerung des Maßstabfaktors führt schnell zu unhandl. Stäben. Es werden deshalb R. hergestellt, bei denen die logarithm. Teilungen auf einem Kreis untergebracht sind. Dadurch wird auch das sonst bei Überschreitung der Teilungen notwendige Durchschieben der Zunge um eine Skalenlänge vermieden. Dieser *Kreis-R.*, auch *Rechenscheibe* oder *Rechenrad* gen., besteht aus zwei konzent. Kreisscheiben unterschiedl. Durchmessers und einem um den gemeinsamen Mittelpunkt drehbaren Ablesezeiger. Eine Kreisscheibe ist relativ zu der anderen um den gemeinsamen Mittelpunkt drehbar, die kongruenten Teilungen sind auf beiden Scheiben auf dem Kreis untergebracht, der durch den Rand der kleineren Scheibe bestimmt ist. Rechenscheiben werden in unterschiedl. Größen hergestellt, sie bieten aber nur wenig Möglichkeiten zur Unterbringung von zusätzl. Teilungen. — Bei der *Rechenwalze* sind Stabteilung und die Zungenteilung in mehrere Abschnitte zerlegt auf den Mantellinien zweier koaxialer Zylinder untergebracht. Der die Zungenteilung tragende Zylinder ist relativ zu dem die Stabteilung tragenden Zylinder drehbar und verschiebbar. Je nach den Abmessungen der Zylinder kann eine Genauigkeit erreicht werden, für die beim Rechenstab eine Länge von bis zu  $12,50$  m notwendig wäre. Diese Walzen sind aber schon etwas unhandlich und haben mit der Entwicklung der Tischrechenmaschinen an Bedeutung verloren.

**Rechenwalze** ↗ Rechenstab IV.

**Rechenwerk** ↗ digitale Rechenanlage II.2.

**Rechner:** Kern einer Rechenanlage, der die rechner. Ausführung und die Programmbearbeitung realisiert. Die Ergänzung des R. bildet die *Peripherie*. In der analogen Rechentechnik spricht man nicht von einer Anlage, obwohl Geräte wie Oszillographen oder Kurvenschreiber, die zur Resultatausgabe unentbehrlich sind, in der Regel nicht zum Analogrechner gehören.

**Rechteck:** Viereck  $ABCD$ , dessen vier Innenwinkel kongruent sind, so daß jeder ein rechter Winkel ist, weil die Summe ihrer Größen  $360^\circ$  ist. Das R. ist ein Parallelogramm, dessen Seiten senkrecht aufeinander stehen und dessen Diagonalen deshalb gleiche Länge haben. Bezeichnet man  $|AB| = a$  und  $|BC| = b$ , so hat die Fläche des R.s die Größe  $A_R = a \cdot b$ . S. a. Quadrat.

**Rechteckimpulskurve** ↗ Fouriersche Reihe III.2.  
**rechter Winkel:** Winkel, der jedem seiner beiden Nebenwinkel kongruent ist; seine Größe ist  $90^\circ \triangleq \pi/2$  (↗ Winkel VI.).

**Rechtsdivision** ↗ Schiefkörper.

**Rechtseit** ↗ axiomatischer Aufbau der Geometrie V.

**Rechtsideal** ↗ Ideal.

**rechtsneutrales Element** ↗ neutrales Element.

**Rechtsnullteiler** ↗ Ring I.

**Rechtsschraube** ↗ Schraubenlinie I.

**Rechtssystem** ↗ Koordinatensystem II.

**Rechtswert** ↗ Gauß-Krüger-Projektion II.

**rechtwinkliges Dreieck** ↗ Dreieck III; ↗ sphärische Trigonometrie V.

**Reorde, Robert**, geb. 1510 Tenby (Wales), gest. 1558 London. — R. studierte in Oxford und Cambridge Medizin und hielt später in Oxford Mathematikvorlesungen. Er veröffentlichte über die Prinzipien der Geometrie und Arithmetik und führte das Gleichheitszeichen ein. Später lebte er als prakt. Arzt in London und starb im Schuldgefängnis.  
**Rédei, Satz von** ↗ Turnier.

**Reduktion des Entscheidungsproblems** ↗ Prädikatenkalkül V.

**redundanter Kode** ↗ Kodierung III.

**Redundanz, Weitschweifigkeit:** Kenngröße für den Ausnutzungsgrad eines techn. Systems, die vor allem in der Informationstheorie und in der Zuverlässigkeitstheorie verwendet wird.

**I.** In der **Informationstheorie** ist die **absolute R.** einer Nachrichtenquelle definiert als Unterschied  $\Delta H = H_0 - H$  zwischen dem Entscheidungsgehalt, der maximalen Entropie  $H_0$  und dem mittleren Informationsgehalt  $H$  (↗ Information). Die **relative R.**  $\Delta h$  ist die auf den Entscheidungsgehalt  $H_0$  bezogene absolute R.:  $\Delta h = \Delta H/H_0 = (H_0 - H)/H_0$ . In der Nachrichtentechnik wird R. bzw. Redundanzfreiheit vor allem für die Gütebewertung eines Kodes herangezogen. Hierdurch wird ausgedrückt, inwieweit der Signallvorrat eines Kodes den mögl. Informationsvorrat bei optimaler Kodierung ausnutzt. Je nach Nutzenwendung der R. unterscheidet man zwischen **fördernder** und **leerer R.**

**II.** In der **Zuverlässigkeitstheorie** benutzt man den Begriff der R. im Zusammenhang mit dem Einbau zusätzl. Elemente zwecks Erhöhung der Zuverlässigkeit eines techn. Systems. Man spricht von **kalter R.**, wenn die Reserveelemente im normalen Betrieb keinerlei Beanspruchungen ausgesetzt sind, dagegen von **heißer R.**, wenn die Reserveelemente den gleichen Beanspruchungen wie die Arbeitselemente unterworfen sind. Kalte und heiße R. bilden die beiden Grenzfälle der **warmen R.**, bei der die Reserveelemente geringer beansprucht werden als die Arbeitselemente.

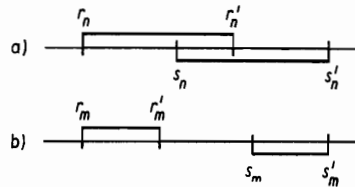
**redundanzfreier Kode** ↗ Kodierung III.

**reduzibel** ↗ algebraische Geometrie III., ↗ ganzrationale Funktion II., ↗ Polynom II.,

**reduzierte Form** ↗ Gleichung vierten Grades, ↗ kubische Gleichung I.

**reelle Zahlen R:** I. Zahlenbereich, der aus dem Bereich  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen durch **Vervollständigung** hervorgeht. Obwohl die rationalen Zahlen überall **dicht** liegen, füllen sie die Zahlengerade nicht vollständig aus; z. B. entspricht der Länge  $\sqrt{2}$  der Diagonalen im Einheitsquadrat genau ein Punkt auf der Zahlengeraden, aber die Zahl  $\sqrt{2}$  ist nicht rational, denn wäre  $\sqrt{2}$  ein Repräsentant einer rationalen Zahl  $r = m/n$ , deren Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler haben, so müßte wegen  $2n^2 = m^2$  gelten  $m = 2m'$ , wegen  $n^2 = 2m'^2$  aber, daß  $n = 2n'$ , entgegen der Annahme über  $m$  und  $n$ . R. Z. und die Rechenoperationen mit ihnen lassen sich streng begründen mittels Intervallschachtelungen, Dedekindscher Schnitte oder Cauchy-Folgen.

**II.** Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge  $\{[r_n, r_n']\}$  abgeschlossener Intervalle, deren linke Intervallenden eine monoton wachsende Folge  $\{r_n\}: r_1 < r_2 < r_3 < \dots$  rationaler Zahlen, deren rechte Intervallenden eine monoton fallende Folge  $\{r_n'\}: r_1' > r_2' > r_3' > \dots$  rationaler Zahlen bilden, für die  $r_n < r_n'$  für alle  $n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n' - r_n) = 0$  gilt. Jedes Intervall ist danach im vorhergehenden enthalten, und die Intervalllänge schrumpft auf Null zusammen. Es ist anschaulich evident, daß durch diese Intervallschachtelung genau ein Punkt der Zahlengeraden erfaßt wird. Für die monoton wachsende bzw. fallende Folge  $\{r_n\} = \{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$  bzw.  $\{r_n'\} = \{1,1; 1,01; 1,001; \dots\}$  z. B. ist  $\{r_n' - r_n\} = \{0,2; 0,02; 0,002; \dots\}$  eine Nullfolge, d. h.  $\{I_n\} = \{[r_n, r_n']\}$  ist eine Intervallschachtelung, die die Zahl 1 erfaßt, da  $r_n < 1$  und  $r_n' > 1$  gilt für jedes  $n$ . Konstruiert man die Intervallschachtelung  $\{[r_n, r_n']\}$  mit einer monoton wachsenden Folge  $\{r_n\}$ , für deren Glieder stets  $r_n^2 < 2$  ist, und mit einer monoton fallenden Folge  $\{r_n'\}$  mit  $r_n'^2 > 2$ , z. B.  $\{r_n\} = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots\}$  und  $\{r_n'\} = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; \dots\}$ , so greift die Intervallschachtelung  $\{[r_n, r_n']\}$  im Bereich der rationalen Zahlen ins Leere. Man definiert dann mit Hilfe dieser Intervallschachtelung eine neue, irrationale Zahl, im Beispiel die Zahl  $\sqrt{2}$ . Die Intervallschachtelung schreibt man kurz als  $(r_n|r_n')$ , und  $(r_n|r_n') = \alpha$  bedeutet, daß durch sie die Zahl  $\alpha$  erfaßt wird. Existiert neben der Intervallschachtelung  $(r_n|r_n') = \alpha$  eine zweite  $(s_n|s_n') = \beta$ , so ist  $\alpha = \beta$ , falls für jeden Index  $n$  gilt  $r_n < s_n'$  und  $s_n \leq r_n'$ , dagegen ist  $\beta > \alpha$ ; falls ein Index  $m$  existiert, für den  $s_m > r_m'$ , wie daraus folgt, daß die Folge der Intervalllängen Nullfolgen sind (Abb.). Da mit  $(r_n|r_n') = \alpha$  und



reelle Zahlen: Beispiele für Intervallendenpunkte der Intervallschachtelungen, a) wenn  $\alpha = \beta$  für  $(r_n|r_n') = \alpha$  und  $(s_n|s_n') = \beta$ , b) wenn  $\beta > \alpha$  für  $(r_m|r_m') = \alpha$  und  $(s_m|s_m') = \beta$

$(s_n | s_n') = \beta$  auch  $(s_n \pm r_n | s_n' \pm r_n')$  und, falls zunächst nur absolute rationale Zahlen auftreten, auch  $(r_n s_n | r_n' s_n')$  und, falls weder  $\{r_n\}$  noch  $\{r_n'\}$  Nullfolgen sind, auch  $(s_n/r_n' | s_n'/r_n)$  Intervallschachtelungen sind, kann man folgende Verknüpfungen r. Z. definieren:

die Summe  $\sigma = \alpha + \beta$  durch  $(r_n + s_n | r_n' + s_n') = \sigma$ ,  
 die Differenz  $\delta = \alpha - \beta$  durch  $(s_n - r_n | s_n' - r_n') = \delta$ ,  
 das Produkt  $\mu = \alpha \cdot \beta$  durch  $(r_n s_n | r_n' s_n') = \mu$ ,  
 den Quotienten  $\kappa$  mit  $\alpha \kappa = \beta$  durch  $\left(\frac{s_n}{r_n} \mid \frac{s_n'}{r_n'}\right) = \kappa$ .

**III. Ein Dedekindscher Schnitt** geht aus von einer Einteilung aller rationalen Zahlen in zwei disjunkte Klassen  $A$  und  $B$ , dabei soll jede Zahl der Klasse  $A$  kleiner sein als jede Zahl der Klasse  $B$ , die Klasse  $B$  soll keine kleinste Zahl enthalten, und es soll stets möglich sein, ein Element  $a$  aus  $A$  und ein Element  $b$  aus  $B$  so anzugeben, daß  $b - a < \epsilon$ , wenn  $\epsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl ist. Der Dedekindsche Schnitt bestimmt dann genau eine reelle Zahl  $\alpha$ , für die gilt  $a \leq \alpha \leq b$  für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$ . Für eine rationale Zahl  $\alpha$  ist die Klasse  $A$  die Gesamtheit aller rationalen Zahlen  $a$  mit  $a \leq \alpha$ , und  $B$  ist die Gesamtheit aller rationalen Zahlen  $b$  mit  $\alpha < b$ . Für eine irrationale Zahl hat die Klasse  $A$  kein größtes Element.

**IV. Eine Cauchy-Folge** ( $\nearrow$  Fundamentalfolge) ist eine Folge  $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$  von rationalen Zahlen mit der Eigenschaft, daß jenseits genügend großer Indizes  $n$  und  $m$  die Differenz  $r_n - r_m$  dem Absolutbetrag nach stets kleiner als eine beliebig vorgegebene positive rationale Zahl  $\epsilon$  ist, d. h. genauer, daß zu beliebig vorgegebenem  $\epsilon > 0$  stets eine Zahl  $N(\epsilon)$  angegeben werden kann, so daß  $|r_n - r_m| < \epsilon$  für alle  $n, m > N(\epsilon)$  gilt.

Die Folge  $\{1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots\}$  z. B. ist eine Cauchy-Folge, da die Differenz  $1/n - 1/m = (m - n)/(n \cdot m) < m/(n \cdot m) = 1/n$  für genügend große  $n, m$  kleiner als ein vorgegebenes  $\epsilon > 0$  ist. Jede im Bereich  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge, jedoch nicht umgekehrt. Man erreicht die gewünschte Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$ , indem man jede Cauchy-Folge als Repräsentant einer reellen Zahl ansieht. Zwei Cauchy-Folgen repräsentieren die gleiche Zahl, wenn ihre Differenzenfolge eine Nullfolge ist. Für zwei durch Cauchy-Folgen bestimmte r. Z.  $\alpha = \{r_1, r_2, \dots\}$  und  $\beta = \{s_1, s_2, \dots\}$  definiert man:

$$\begin{aligned} (\alpha \pm \beta) &= \{r_1, r_2, \dots\} \pm \{s_1, s_2, \dots\} \\ &= \{r_1 \pm s_1, r_2 \pm s_2, \dots\}, \\ \alpha \cdot \beta &= \{r_1, r_2, \dots\} \cdot \{s_1, s_2, \dots\} \\ &= \{r_1 s_1, r_2 s_2, \dots\} \end{aligned}$$

Ist  $\{s_1, s_2, \dots\}$  keine Nullfolge, so kann ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit angenommen werden, daß jede der Zahlen  $s_1, s_2, \dots$  von 0 verschieden ist, und die Division kann definiert werden durch  $\{r_1, r_2, \dots\} / \{s_1, s_2, \dots\} = \{r_1/s_1, r_2/s_2, \dots\}$ . In jedem Fall hat man dabei zu zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Folgen ist, durch die die r. Z. repräsentiert werden, sowie,

daß man durch die angegebenen Bildungen nicht aus dem Bereich der Cauchy-Folgen herauskommt. Man kann zeigen, daß Intervallschachtelungen, Dedekindsche Schnitte und Cauchy-Folgen im wesentlichen zu den gleichen r. Z. führen.

**V. Als Grenzwert einer Folge** rationaler Zahlen hat jede reelle Zahl ein Vorzeichen, und die Vorzeichenregeln übertragen sich von den rationalen auf die r. Z. Die Relation  $\alpha < \beta$  gilt dann, falls es eine positive reelle Zahl  $\gamma > 0$  gibt, für die gilt  $\alpha + \gamma = \beta$ . Daraus läßt sich die Gültigkeit des Monotoniegesetzes herleiten. Für die Addition und Multiplikation gelten auch das Kommutativ- und das Assoziativgesetz sowie für beide Operationen das Distributivgesetz.

Wendet man eine Intervallschachtelung, den Dedekindschen Schnitt oder eine Cauchy-Folge auf r. Z. an, so erhält man wieder eine reelle Zahl, d. h., man kommt über den Bereich  $\mathbb{R}$  der r. Z. nicht hinaus.

**VI. Die Tatsache**, daß es durch die Hinzunahme der irrationalen Zahlen zu den rationalen „mehr“ reelle als rationale Zahlen gibt, läßt sich präzisieren durch die Aussage, daß die Mächtigkeit der r. Z. größer ist als die der rationalen Zahlen. Nach dem Cantorschen Diagonalverfahren beschränkt man sich auf die r. Z.  $x$  zwischen 0 und 1 und nimmt an, daß jede als unendlicher Dezimalbruch dargestellt ist. Hätten die r. Z. die Mächtigkeit der natürl. Zahlen, so würde man sie alle in eine Reihenfolge

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

bringen können, wenn die  $a_{ik}$  jeweils eine der Ziffern 0, 1, 2, ... oder 9 bedeuten und jedes  $x_i$  sich in mindestens einer Ziffer von einem  $x_j$  mit  $j \neq i$  unterscheidet. Daß diese Annahme falsch ist, wird durch Angabe einer reellen Zahl  $\varrho$  gezeigt, die von jedem  $x_n$  verschieden ist. Diese reelle Zahl  $\varrho = 0, \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \dots$  wird so gewählt, daß stets ihre  $n$ -te Ziffer  $\varrho_n$  sowohl von  $a_{nn}$  als auch von 0 und von 9 verschieden ist und deshalb  $\varrho$  keinem  $r_n$  gleich sein kann. Für jede Ziffer  $\varrho_n$  besteht danach die Auswahl zwischen  $10 - 3 = 7$  Ziffern.

**reell-quadratischer Zahlkörper**  $\nearrow$  Zahlkörper IV.  
**reellwertige Funktion**  $\nearrow$  Funktion II.  
**reflexiv**  $\nearrow$  Relation II.

**Regelabweichung**  $\nearrow$  Regelung I., II.

**Regelfläche:** Fläche, die durch eine Schar von Geraden erzeugt werden kann. Die R. besteht genau aus allen Punkten aller Geraden der Schar. Analytisch erfaßt man eine R. dadurch, daß man zu jedem Punkt einer vorzugebenden Leitkurve die Gerade angibt. Unter den Flächen 2. Ordnung sind der Zylinder, der Kegel, das hyperbol. Paraboloid und das einschalige Hyperboloid R.n. Die Tatsache, daß auf solchen Flächen Geradenscharen liegen, wird bei Baukonstruktionen verwendet.

**Regelgröße**  $\nearrow$  Regelung I.

**Regelkreis**  $\nearrow$  Regelung I.

**Regellogik mathematische Logik:** I. Teil der Logik, der sich mit Schlußregeln und der Ausführung von Schlußfolgerungen durch fortgesetzte Anwendung von Schlußregeln befaßt, und der bes. wichtig für Anwendungen der Logik in mathemat. Theorien und in anderen Wissenschaften ist. Die Ausdrucksmittel sind im wesentlichen die der *Prädikatenlogik*, mit der überhaupt ein enger Zusammenhang besteht, da die Begründungen für Schlußregeln durch prädikatenlog. Gesetze geliefert werden und umgekehrt jedes prädikatenlog. Gesetz, das eine Implikation ist, Anlaß zu einer Schlußregel gibt.

II. Eine *Schlußregel* ist eine unter gewissen Bedingungen gültige Erlaubnis für den Übergang von endlich vielen Ausdrücken  $A_1, \dots, A_n$  zu einem Ausdruck  $A$ . Die Bedingungen werden i. allg. in Form einer  $(n + 1)$ -stellig Relation  $R$  formuliert, die auf  $A_1, \dots, A_n, A$  zutreffen muß, damit die Schlußregel angewendet werden darf. Diese Relation nennt man die zur Schlußregel gehörende *Schlußrelation*; die Ausdrücke  $A_1, \dots, A_n$ , von denen man bei der Anwendung der Schlußregel ausgeht, heißen deren *Prämissen*, das Ergebnis  $A$  der Anwendung der Schlußregel auf die Prämissen heißt die *Konklusion* der Schlußregel ( $\nearrow$  Schluß); z. B. gehört zur Schlußregel *modus ponens* von Ausdrücken  $H$  und  $H \rightarrow G$  darf zu  $G$  übergegangen werden als Schlußrelation eine 3stellige Relation, die auf Ausdrücke  $A_1, A_2, A$  genau dann zutrifft, wenn  $A_1$  der Ausdruck  $A_1 \rightarrow A$  ist. — Für eine erfolgreiche kalkülmäßige Darstellung der  $R$ . muß man die Schlußregeln formal aufschreiben können. Dies ist z. B. möglich in Form einer *Sequenz*  $A \Rightarrow H$ , die mittels des *Konsequenzzeichens*  $\Rightarrow$  symbolisch darstellt, daß sich aus einer endlichen Folge  $A$  von Ausdrücken als den Prämissen durch die Anwendung einer Schlußregel ein Ausdruck  $H$  als Konklusion ergibt. Mittels derartiger Sequenzen kann man die  $R$ . formalisieren als *Kalkül des natürl. Schließens*, in dem sich das prakt. Schlußfolgern innerhalb der Mathematik widerspiegelt als Operieren mit Sequenzen. Dabei entspricht der Bildung von Sequenzen aus gegebenen Sequenzen der Übergang von weniger komplexen zu komplexeren Schlußweisen.

III. Grundlegende *Regeln für das Operieren mit Sequenzen* im Kalkül des natürl. Schließens sind:

(1a) Die  $\wedge$ -Einführung: aus  $A \Rightarrow A$  und  $B \Rightarrow B$  ergibt sich  $A, B \Rightarrow A \wedge B$ . (1b) Die  $\wedge$ -Beseitigung: aus  $A \Rightarrow A \wedge B$  ergibt sich  $A \Rightarrow A$  und ergibt sich  $A \Rightarrow B$ ;

(2a) Die  $\vee$ -Einführung: aus  $A \Rightarrow A$  ergibt sich  $A \Rightarrow A \vee B$  und ergibt sich  $A \Rightarrow B \vee A$ ; (2b) Die  $\vee$ -Beseitigung: aus  $A \Rightarrow A \vee B$  und aus  $A, B \Rightarrow H$  und aus  $B, C \Rightarrow H$  ergibt sich  $A, B, C \Rightarrow H$ ;

(3a) Die  $\forall$ -Einführung: aus  $A \Rightarrow H(a)$  ergibt sich  $A \Rightarrow \forall x H(x)$ , falls die freie Variable  $a$  weder in  $A$  noch in  $\forall x H(x)$  vorkommt; (3b) Die  $\forall$ -Beseitigung: aus  $A \Rightarrow \forall x H(x)$  ergibt sich  $A \Rightarrow H(a)$ .

(4a) Die  $\exists$ -Einführung: aus  $A \Rightarrow H(a)$  ergibt sich  $A \Rightarrow \exists x H(x)$ . (4b) Die  $\exists$ -Beseitigung: aus  $A \Rightarrow \exists x H(x)$  und aus  $H(a), B \Rightarrow A$  ergibt sich  $A, B \Rightarrow A$ , falls die freie Variable  $a$  in  $A, B, A$  und  $\exists x H(x)$  nicht vorkommt.

(5a) Die  $\rightarrow$ -Einführung: aus  $A, A \Rightarrow B$  ergibt sich  $A \Rightarrow A \rightarrow B$ . (5b) Die  $\rightarrow$ -Beseitigung: aus  $A \Rightarrow A$  und  $B \Rightarrow A \rightarrow B$  ergibt sich  $A, B \Rightarrow B$ .

(6a) Die  $\neg$ -Einführung: aus  $A, A \Rightarrow B$  und  $B, A \Rightarrow \neg B$  ergibt sich  $A, B \Rightarrow \neg A$ . (6b) Die  $\neg$ -Beseitigung: aus  $A \Rightarrow \neg \neg A$  ergibt sich  $A \Rightarrow A$ ; statt letzterem manchmal auch: aus  $A \Rightarrow A$  und  $B \Rightarrow \neg A$  ergibt sich  $A, B \Rightarrow B$ . — Die  $R$ . wurde als Kalkül des natürl. Schließens zuerst von G. GENTZEN 1934 ausgearbeitet. Seither wurden auch weitere Kalkülisierungen angegeben ebenso wie  $R$ .en, die auf der intuitionistischen Logik beruhen.

**regelmäßiges Polyeder, reguläres Polyeder, platonischer Körper:** I. konvexes Polyeder ( $\nearrow$  Körper) mit kongruenten regelmäßigen  $n$ -Ecksflächen als Seitenflächen. Da in einer  $n$ -kantigen körperl. Ecke die Summe der Größen der Kantenwinkel kleiner als  $360^\circ$  sein muß, kommen als Innenwinkel der regelmäßigen  $n$ -Ecke nur Winkel der Größe  $108^\circ, 90^\circ$  und  $60^\circ$  in Betracht, d. h., in einer Ecke des r. P. können 3 Fünfecke, 3 Vierecke, 5, 4 oder 3 Dreiecke zusammenstoßen. Demnach gibt es fünf

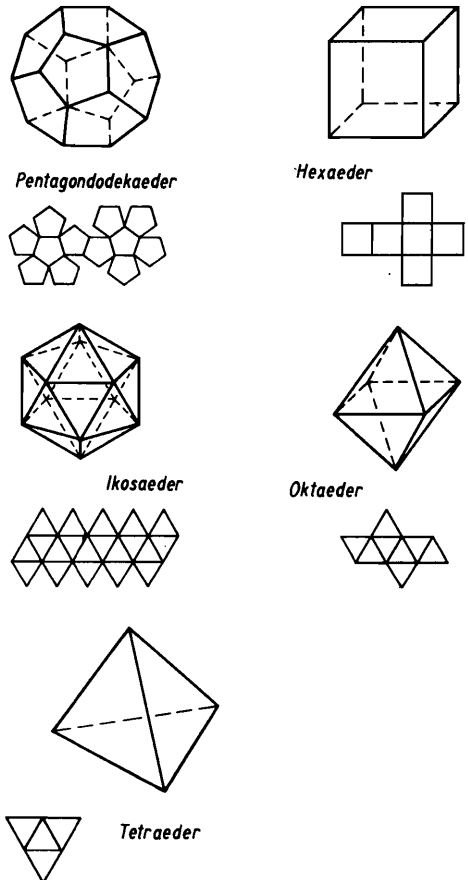
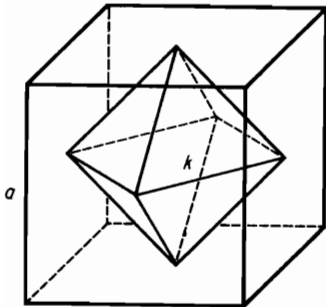


Abb. 1: Die fünf regelmäßigen Polyeder und ihre Netze

r. P. Sie werden in dieser Reihenfolge bezeichnet als *Pentagondodekaeder* oder *Zwölfflächner*, als *Hexaeder* oder *Würfel*, als *Iksaeder* oder *Zwanzigflächner*, als *Oktaeder* oder *Achtflächner* und als *Tetraeder* oder *Vierflächner* (Abb. 1). In der Tabelle sind für jedes r. P. angegeben die Anzahl  $S/E$  der Seitenflächen je Ecke, d. h. die Anzahl der Seitenflächen, die in einer Ecke zusammenstoßen, die Anzahl  $E/S$  der Ecken je Seitenfläche, d. h. die Anzahl der Ecken, die auf einer Seitenfläche liegen, sowie die Anzahl  $e$  aller Ecken,  $f$  aller Flächen und  $k$  aller Kanten. Die Tabelle zeigt, daß Hexaeder und Okta-

	$S/E$	$E/S$	$e$	$f$	$k$
Tetraeder	3	3	4	4	6
Hexaeder	3	4	8	6	12
Oktaeder	4	3	6	8	12
Pentagondodekaeder	3	5	20	12	30
Iksaeder	5	3	12	20	30

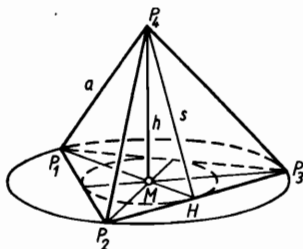
eder sowie Pentagondodekaeder und Iksaeder ineinander übergehen durch Vertauschen der Zahlen  $e$  und  $f$  bzw. von  $S/E$  mit  $E/S$ . Solche Paare von r. P. nennt man *duale Polyeder* ( $\nearrow$  Dualität). Das Tetraeder ist zu sich selbst dual. Geometrisch kann diese paarweise Beziehung realisiert werden, indem man die Mittelpunkte der Seitenflächen eines vorliegenden r. P. durch Kanten verbindet (Abb. 2).



regelmäßige Polyeder. Abb. 2: Würfel der Kantenlänge  $a$  und Oktaeder der Kantenlänge  $k = (a/2) \sqrt{2}$  als duale Körper

II. Wird die Kantenlänge der r. P. mit  $a$  bezeichnet, so ergeben sich folgende Größenbeziehungen.

II.1. Im *Tetraeder* ist ein ebener Schnitt durch eine Kante und durch den Mittelpunkt  $H$  der zu ihr windschiefen Kante ein gleichschenkliges Dreieck, in dem  $a$  die Länge der Basis ist und  $s = (a/2) \cdot \sqrt{3}$



regelmäßige Polyeder. Abb. 3: Tetraeder

die Länge eines Schenkels  $|P_1H| = |P_4H|$  (Abb. 3) (s. a. Tetraeder). Der Fußpunkt  $M$  der Raumhöhe teilt den Schenkel im Verhältnis 1 : 2, weil dieser Seitenlinie im gleichseitigen Dreieck ist. Für die Längen  $\rho = |MH|$  bzw.  $r = |MP_1|$  der Radien des einer Seitenfläche ein- bzw. umschriebenen Kreises sowie für die Länge  $h$  der Raumhöhe ergeben sich daraus  $\rho = s/3 = (a/6) \sqrt{3}$ ,  $r = 2s/3 = (a/3) \sqrt{3}$  und  $h^2 = a^2 - r^2$  oder  $h = (a/3) \sqrt{6}$ . Das Volumen des Tetraeders ist  $V = (a^3/12) \sqrt{2}$ , seine Oberfläche  $O = a^2 \sqrt{3}$ . S. a. Tetraeder.

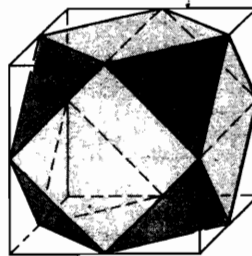
II.2. Das *Hexaeder* oder der *Würfel* hat vier Raumdiagonalen der Länge  $d = a \sqrt{3}$ . Die ihm umbeschriebene Kugel hat den Radius der Länge  $r = (a/2) \sqrt{3}$ . Das Volumen des Würfels ist  $V = a^3$  und seine Oberfläche  $O = 6a^2$ .

II.3. Das *Oktaeder* kann aufgefaßt werden als quadrat. Doppelpyramide mit  $a^2$  als Flächeninhalt der Grundfläche. Ein ebener Schnitt, der die Spitzen dieser Pyramiden und eine Diagonale der Grundfläche enthält, ist ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ . Der Abstand der Spitzen voneinander ist danach  $d = a \sqrt{2}$ , das Volumen  $V = (a^3/3) \sqrt{2}$  und die Oberfläche  $O = 2a^2 \sqrt{3}$ .

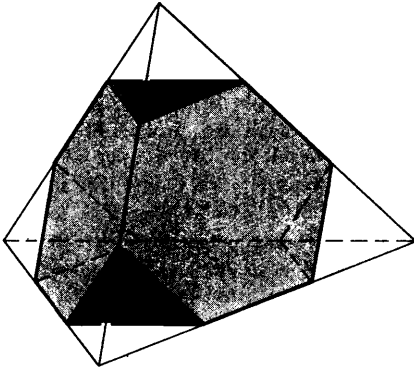
II.4. Das *Pentagondodekaeder* hat das Volumen  $V = (a^3/4) (15 + 7 \sqrt{5})$  und die Oberfläche  $O = 3a^2 \sqrt{5(5 + 2 \sqrt{5})}$ .

II.5. Im *Iksaeder* bilden je 5 einer Ecke benachbarte Ecken die Eckpunkte eines ebenen regelmäßigen Fünfecks. Der ihm umbeschriebene Kreis hat einen Radius der Länge  $r = a \sqrt{(5 + \sqrt{5})}/10$ . Das Volumen des Iksaeders ist  $V = (5a^3/12) \cdot (3 + \sqrt{5})$ , und seine Oberfläche  $O = 5a^2 \sqrt{3}$ .

III. *Halbreguläre Polyeder* oder *archimed. Körper* sind konvexe Polyeder, deren Polyederecken kongruent und deren Seitenflächen regelmäßige  $n$ -Ecke sind, aber solche verschiedener Art, z. B. Flächen regelmäßiger Fünfecke und gleichseitiger Dreiecke. Archimedes fand 10 verschiedene halbreguläre Polyeder, wenn  $n$ -Ecke von zweierlei Art zugelassen sind, und 3 Polyeder mit drei Arten von  $n$ -Ecken als Seitenflächen. Man erhält z. B. einen archimedischen Körper aus einem Würfel, dessen Ecken durch ebene Schnitte verstümmelt sind, die die Mittelpunkte je dreier benachbarter Kanten enthalten (Abb. 4), oder aus einem Tetraeder durch ebene Schnitte, die die Kanten in drei Teile gleicher Länge teilen (Abb. 5). Hier stoßen in einer Ecke



regelmäßige Polyeder. Abb. 4: Archimedisches Körper, begrenzt von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken



regelmäßige Polyeder. Abb. 5: Archimedischer Körper, begrenzt von 4 gleichseitigen Dreiecken und 4 regelmäßigen Sechsecken

gleichseitige Dreiecke mit Quadraten bzw. mit regelmäßigen Sechsecken zusammen.

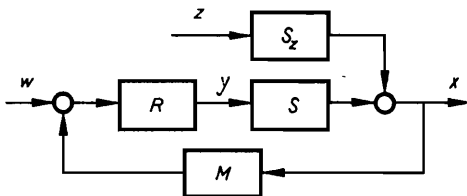
**Regelstrecke** ↗ **Regelung II.**

**Regelung:** I. Vorgang in einem kybernet. System, bei dem die Steuerung der Ausgangsgröße nach dem *Prinzip der negativen Rückführung*, auch *Gegenkopplung* oder *feedback* gen., ständig überwacht wird. Diese Kontrolle wird dadurch gesichert, daß die Ausgangsgröße, *Regelgröße* gen., durch Messung ständig erfaßt und mit einer vorgegebenen Größe, der *Führungsgröße*, verglichen wird. Aus den festgestellten Abweichungen wird ein Steuereingriff abgeleitet, der eine fortlaufende Angleichung der Regelgröße an die Führungsgröße bewirkt.

Damit verfügen derartige R.systeme über die Eigenschaften der Zielsuche und Zielhaltung. Die Gesetzmäßigkeiten der R. werden im Rahmen der *Regelungstheorie*, einem Teilgebiet der Kybernetik, untersucht. Ihre Gültigkeit ist nicht an bestimmte stoffl. oder energet. Realisierungen gebunden, sondern ist auf beliebige dynam. kybernet. Systeme anwendbar, in denen Regelungsvorgänge stattfinden.

Die charakterist. Grundstruktur der R. ist der in sich geschlossene Wirkungsablauf, der *Regelkreis* (Abb. 1). Die wichtigsten Größen des Regelkreises sind die Führungs-, Regel-, Stell- und Störgröße. Sie sind Träger von Informationen und als solche Signale.

I.1. Die *Führungsgröße* ist die Größe, der die Regelgröße ständig angeglichen werden soll. Sie wird



Regelung. Abb. 1: Einschleifiger Regelkreis: R Regler; S, S<sub>z</sub> Regelstrecken; M Meßeinrichtung; w Führungsgröße; z Regelgröße; Stellgröße R → S; z Störgröße

vom Menschen oder durch eine übergeordnete Einrichtung vorgegeben und durch die Steuerung oder R. nicht beeinflusst. Werte konstanter Führungsgrößen werden *Sollwerte* gen.

I.2. Die *Regelgröße* ist die physikal. Größe im Regelkreis, die geregelt wird, d. h. die Ausgangsgröße des Regelkreises. Sie wird durch die Stell- und durch die Störgrößen beeinflusst. Die Differenz zwischen der Führungs- und Regelgröße heißt *Regelabweichung* bzw. *Fehlersignal*.

I.3. Über die *Stellgröße* erfolgt die aufgabengemäße Beeinflussung des zu regelnden Prozesses. Hierbei wirkt die Stellgröße über das Stellglied auf einen Massen- oder Energiestrom ein.

I.4. Als *Störgröße* bzw. *Störung* bezeichnet man jede Art von ungewollter Einwirkung aus der Umgebung auf ein kybernet. System. Die Störgrößen sind oft durch Messungen nicht direkt erfaßbar. Es kann dann nur über die Wirkungen auf ihr Vorhandensein geschlossen werden. Wegen des meist unbekannt. zeitl. Verlaufs wird den Störgrößen der Charakter von Zufallsvariablen zugeschrieben.

II. Die wichtigsten *Komponenten des Regelkreises* sind Meßeinrichtung, Regler, Stelleinrichtung und Regelstrecke. Unter funktionellen Gesichtspunkten ist es ausreichend, zwischen zwei wesentl. Abschnitten des Wirkungsweges zu unterscheiden: der *Regelstrecke* als dem Repräsentanten aller vorgegebenen Systemkomponenten und dem *Regler* als dem in gewisser Weise beeinflussbaren Teilsystem. Eine *Handregelung* liegt vor, wenn die Reglerfunktion vom Menschen wahrgenommen wird, z. B. durch den Piloten im Flugzeug. Bei der *selbsttätigen* oder *automat. R.* wird der Regler durch eine techn. Einrichtung, z. B. durch einen Kursregler bzw. Autopilot, verkörpert.

II.1. Die *Regelstrecke* stellt den Abschnitt des Wirkungsweges innerhalb eines Regelkreises dar, in dem die aufgabengemäße Beeinflussung der *Regelgröße* erfolgt. Die *Stellgröße* sowie die aus der Umgebung einwirkenden *Störgrößen* bilden die *Eingangsstrecken*. Im techn. Bereich wird die Regelstrecke durch den zu regelnden Teil der Anlage verkörpert. Unter funktionellen Gesichtspunkten unterscheidet man vor allem zwischen *Regelstrecken mit* und *ohne Ausgleich* bzw. entsprechend zwischen P- und I-Strecken (↗ Übertragungsglied). Von wesentl. Bedeutung ist ebenfalls der relative *Totzeitanteil*. Ein praktisch bedeutsamer, jedoch mathematisch schwieriger beschreibbarer Streckentyp sind die *Regelstrecken mit verteilten Parametern*.

II.2. *Regler* oder *Regelvorrichtung* ist der Abschnitt des Wirkungsweges innerhalb eines Regelkreises, in dem die zur aufgabengemäßen Beeinflussung dienende *Stellgröße* erzeugt wird. Die Aufgabe des Reglers besteht darin, zwischen den beiden Eingangsgrößen, der Führungsgröße und der Regelgröße, die *Regelabweichung* zu bilden und der Stellgröße zuzuordnen. Die Regler techn. Systeme sind gerätetechn. Einrichtungen, die mit elektr., pneumat. oder hydraul. Hilfsenergie, in einfachen Fällen auch ohne Zufuhr von Hilfsenergie, arbeiten. Unter funktionellen Gesichtspunkten ist vor allem zwi-

schen analogen und diskreten Reglern zu unterscheiden.

**II.2a. Analoge Regler** haben analoge Eingangs- und Ausgangssignale und ein meist lineares Übertragungsverhalten. Neben Reglern mit proportionalem Verhalten und integrelem Verhalten werden auch *Mehrkomponentenregler* wie PI-, PD- und PID-Regler verwendet, die zusätzlich Differentialglieder enthalten (↗ Übertragungsglied). Sie verfügen meist über Einstellmöglichkeiten zur Anpassung ihrer Parameter an die jeweilige Strecke.

**II.2b. Diskrete Regler** sind dadurch gekennzeichnet, daß mindestens das Ausgangssignal in diskreter Form vorliegt. Eine wichtige Gruppe der diskreten Regler bilden die Regler mit *Zwei-, Drei- und Mehrpunktverhalten* (↗ Übertragungsglied). Zu den diskreten Reglern gehören ebenfalls die *digitalen Regler*, die kodierte Signale (↗ Kodierung) verarbeiten. Eine Realisierungsmöglichkeit für digitale Regler bildet der *Prozessrechner* (↗ Prozessrechenanlage).

Eine gewisse Sonderstellung nehmen die *Abtastregler* ein. Hierunter sind analoge oder diskrete Regler zu verstehen, die ein *Tastglied* enthalten.

**III.** Nach dem jeweils hervortretenden Verwendungszweck unterscheidet man zwischen der *Folge-* und der *Festwert-R.*

**III.1.** Die wesentl. Aufgabe der *Folge-R.* besteht darin, die Regelgröße einer *veränderl. Führungsgröße* möglichst gut anzugleichen. Demgegenüber spielt der Ausgleich von Störungen meist eine untergeordnete Rolle.

Erfolgt die Änderung der Führungsgröße nach einem festen, i. allg. zeitgesteuerten Programm, so spricht man von einer *Programm-R.*

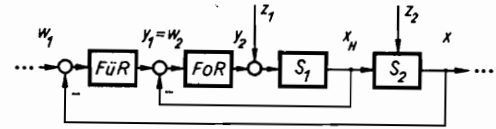
Für das Verhalten der *Folge-R.* ist die *Führungsübertragungsfunktion*  $G_w(p) = \frac{S(p)R(p)}{1 + S(p)R(p)}$  des

Regelkreises maßgebend, in der  $S(p)$  die Übertragungsfunktionen von Strecke und Regler bedeuten (↗ Übertragungsfunktion).

**III.2.** Die *Festwert-R.* hat vorrangig die Aufgabe, *Störgrößen unwirksam zu machen*, d. h., die Regelgröße mit der im wesentlichen unveränderten Führungsgröße, dem Sollwert, trotz vorhandener Störgrößen möglichst gut in Übereinstimmung zu bringen. Für das Verhalten der *Festwert-R.* ist die jeweilige *Störübertragungsfunktion*  $G_z(p) = S_z(p)/[1 + R(p)S(p)]$  des Regelkreises maßgebend (↗ Übertragungsfunktion), in der  $R(p)$  und  $S(p)$  die Übertragungsfunktionen von Regler und Regelstrecke und  $S_z(p)$  die Störübertragungsfunktion der Strecke bedeuten.

**III.3.** Die Besonderheit der *Verhältnis-R.* besteht darin, daß die Regelgröße nicht das Signal irgend einer physikal. Größe, sondern das Verhältnis zweier oder mehrerer physikal. Größen, z. B. zweier Durchflüsse, ist. In der Praxis wird anstelle des Quotienten meist die Differenz der ins Verhältnis zu setzenden Größen geregelt; dabei bildet das Signal der unabhängigen Größe die *Führungsgröße* und das Signal der abhängigen die *Regelgröße*. Verhältnis-R.en mit mehr als zwei Komponenten werden oft nach dem Prinzip der *harmon. Regelung* geregelt.

**IV.** Nach ihrer Struktur unterscheidet man *einschleifige* und *mehrschleifige* bzw. *vermaschte R.en*. Eine in der Praxis sehr bedeutsame Variante der mehrschleifigen R. ist die *Kaskaden-R.* Charakteristisch ist eine *hierarch. Struktur* (Abb. 2), deren



Regelung. Abb. 2: Kaskadenregelung: FÜR Führungsregler; FoR Folgeregler;  $S_1, S_2$  Streckenabschnitte;  $x$  Regelgröße;  $x_H$  Hilfsregelgröße;  $y_1, y_2$  Stellgrößen;  $w_1, w_2$  Führungsgrößen;  $z_1, z_2$  Störgrößen

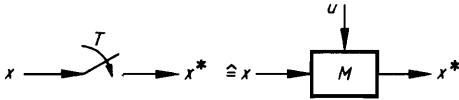
oberste Ebene durch den Führungsregelkreis gebildet wird, dem ein Folgeregelkreis unterlagert ist. Dieses Prinzip läßt sich nach oben bzw. unten immer weiter fortsetzen. Dabei ist jeder beliebig herausgegriffene Regelkreis stets zugleich Folge- und Führungsregelkreis eines überlagerten und Führungsregelkreis eines unterlagerten Kreises. Die Kaskaden-R. wird häufig benutzt, um hohe Güteforderungen bei vergleichsweise ungünstigem Verhalten der Regelstrecke zu erfüllen. Voraussetzung für die Anwendung dieses R.verfahrens ist jedoch, daß der Strecke eine geeignete *Hilfsregelgröße* entnommen werden kann.

**V.** R.en lassen sich auch einteilen nach der *Art des Übertragungsverhaltens* der Regelkreisglieder. Eine Unterscheidung zwischen *linearen* und *nichtlinearen* R.en hat z. B. weitreichende Konsequenzen für die mathemat. Behandelbarkeit. Eine *nichtlineare R.* enthält dabei in ihrem Regelkreis an mindestens einer Stelle ein nichtlineares ↗ Übertragungsglied. Hieraus resultiert die Notwendigkeit, derartige R.en mathematisch als nichtlineares Problem zu behandeln. Geeignete Verfahren sind die Methode der *Beschreibungsfunktion* sowie die der *Phasenebene*. Die Schwierigkeiten der theoret. Behandlung nichtlinearer R.en stehen im Gegensatz zu der häufig recht einfachen Realisierbarkeit der nichtlinearen Übertragungsglieder. Besondere prakt. Bedeutung haben nichtlineare R.en, die Zwei- bzw. Dreipunktregler enthalten.

**VI.** Betrachtet man weiterhin die *zeitl. Verfügbarkeit der Signale* als Merkmal, so läßt sich weiter zwischen der *kontinuierl.* und der *diskontinuierl. R.*, der sog. *Abtast-R.*, unterscheiden. Eine *Abtast-R.* liegt vor, wenn an mindestens einer Stelle innerhalb des Regelkreises ein abgetastetes Signal auftritt. Das Abtasten geschieht dadurch, daß Informationen von natürl. oder künstl. Informationsträgern zu diskreten, meist äquidistanten Zeitpunkten abgenommen werden.

Die Besonderheit der *Tast-R.* besteht in dem Vorhandensein eines oder u. U. mehrerer miteinander synchronisierter *Tastglieder* zusätzlich zu den auch in kontinuierl. Regelkreisen übl. Einrichtungen. Unter einem *Tastglied* versteht man eine gedachte oder real vorhandene Einrichtung im Sinne eines





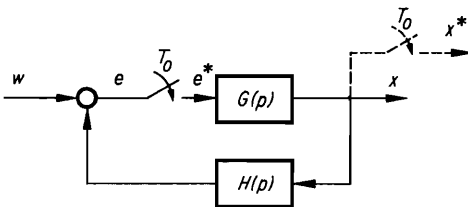
Regelung. Abb. 3: Tastglied als Modulator

periodisch betätigten Schalters, dessen Eingangssignal durch eine stetige Zeitfunktion  $x(t)$  und dessen Ausgangssignal durch die getastete Impulsfunktion  $x^*(t)$  beschrieben wird. Auf den Schalter wird eine Folge von Impulsen  $u(t)$  gegeben, deren Dauer  $\tau$  kleiner als die Tastperiode  $T_0$  ist, und die eine konstante Amplitude haben. Der Schalter kann somit ebensogut als Modulator ( $\nearrow$  Modulation) verstanden werden; dabei gilt:  $x^*(t) = u(t) \cdot x(t)$  (Abb. 3). Ein ideales Tastglied liegt vor, wenn  $\tau \ll T_0$  ist. In diesem Falle ist  $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0)$ , wenn  $\delta(t - kT_0)$  die  $\delta$ -Funktion ( $\nearrow$  Zeitfunktion I.2.) bedeutet, und für die getastete Funktion ergibt sich  $x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) \delta(t - kT_0)$ .

Die Signale innerhalb des Abtastregelkreises können aus den abgetasteten Werten nur dann ohne Informationsverlust reproduziert werden, wenn das  $\nearrow$  Abtasttheorem erfüllt ist. Der Abtastregelkreis (Abb. 4) ist jeweils nur in den Tastzeitpunkten  $t = kT_0$  mit  $k = 1, 2, \dots$  geschlossen, sonst offen. Abtast-R.en entstehen z. B., wenn der Meßwert der Regelgröße nur zu diskreten Zeitpunkten zur Verfügung steht, ein Abtastregler, z. B. ein Fallbügelregler, verwendet wird, der Regelkreis digitale  $\nearrow$  Übertragungsglieder enthält oder ein Übertragungsglied, i. allg. der Regler, in zykl. Folge in mehreren unabhängigen Regelkreisen arbeitet. Die wichtigste prakt. Anwendung der Abtast-R. bildet derzeit die direkte digitale R. durch  $\nearrow$  Prozeßrechner.

Die Theorie der Abtast-R. befaßt sich zusätzlich zu den bei kontinuierl. Erregung auftretenden Problemen mit Fragen der Abtastung und Glättung. Die Anwendung der  $\nearrow$  z-Transformation ermöglicht hierbei eine verhältnismäßig einfache Behandlung, beschreibt jedoch nur das Verhalten zu den Tastzeitpunkten.

VII. Auch nach der Anzahl der vorkommenden Regelgrößen lassen sich die R.en einteilen. Eine Mehrgrößen-R. enthält dabei mehr als eine Ein- und Ausgangsgröße; dabei sind die einzelnen Größen teilweise oder vollständig miteinander gekoppelt. Mehr-



Regelung. Abb. 4: Abtastregelkreis:  $G(p)$ ,  $H(p)$  kontinuierliche Übertragungsglieder;  $w$  Führungsgröße;  $e$  Regelabweichung;  $x$  Regelgröße

größen-R.en ergeben sich, wenn das zu regelnde Objekt eine Mehrgrößenregelstrecke ist. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß eine Stellgröße  $y_i$  nicht nur die ihr zugeordnete Regelgröße  $x_i$ , sondern auch andere Regelgrößen  $x_j$  beeinflusst. Bei vollzählig vorhandenen Kopplungen gilt somit  $x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Ebenso können Kopplungen über die Störgrößen  $z_k$  vorliegen. Damit ergeben sich für jede Regelgröße  $x_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, n$  Abhängigkeiten der Form  $x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots, z_m)$ . Mehrgrößenregelungssysteme können nicht im Sinne einer Black-box behandelt werden. Vielmehr ist es notwendig, die interne Kopplungsstruktur zu kennen oder zumindest eine solche anzunehmen. Hierbei ist es zweckmäßig, eine Umformung in kanon. Strukturen vorzunehmen. Besondere Bedeutung haben die P-kanon. und die V-kanon. Struktur erlangt. Bezeichnet man die  $\nearrow$  Übertragungsfunktionen der Einzelwirkungen in P-kanon. Struktur mit  $P_{ij}(p)$  und in V-harmon. Struktur mit  $V_{ij}(p)$ , so gilt:

VII.1. In einer P-kanon. Struktur ergibt sich jedes Ausgangssignal  $x_{Ai}$  als Überlagerung der Wirkungen sämtl. Eingangssignale  $x_{Ej}$ ,  $x_{Ej}$ ,  $\dots$ ,  $x_{En}$ :

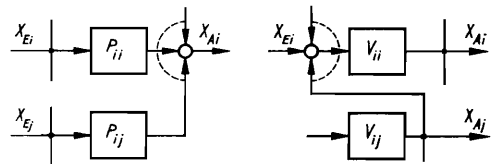
$x_{Ai}(p) = \sum_{j=1}^n P_{ij}(p) \cdot x_{Ej}(p)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Die Mischstelle für die Einzelwirkungen befindet sich auf der Ausgangsseite.

VII.2. In V-kanon. Struktur ergibt sich jedes Ausgangssignal  $x_{Ai}$  aus der Wirkung des ihm zugeordneten Eingangssignals  $x_{Ei}$  und den ebenfalls als Eingangssignale wirkenden Ausgangssignalen zu

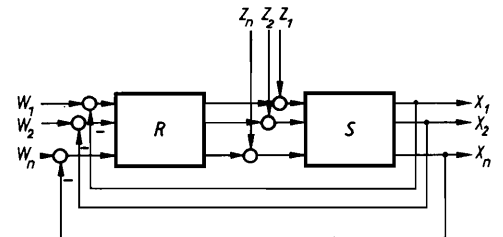
$$x_{Ai}(p) = V_{ii}(p) \left[ x_{Ei}(p) + \sum_{j=1}^n V_{ij}(p) \cdot x_{Aj}(p) \right]$$

Die Mischstelle für die Eingangssignale  $x_{Ej}$  und die Ausgangssignale  $x_{Aj}$  für  $j \neq i$  befindet sich auf der Eingangsseite (Abb. 5).

VIII. Für die R. von Mehrgrößensystemen sind verschiedene Verfahren ausgearbeitet worden. Sehr verbreitet ist die Autonomisierung (Abb. 6). Der Grund-



Regelung. Abb. 5: P-kanonische Struktur (links) und V-kanonische Struktur (rechts)



Regelung. Abb. 6: Mehrgrößenregelkreis:  $R$  Regelmatrix;  $S$  Streckenmatrix

gedanke besteht darin, die vorhandenen strecken-  
seitigen Kopplungen durch künstlich eingeführte  
Kopplungen der Regler zu kompensieren. Hierdurch  
zerfällt das gekoppelte Mehrgrößensystem der Di-  
mension  $n \cdot n$  in  $n$  autonome Einzelregelkreise, die  
unabhängig voneinander arbeiten und einzeln be-  
messen werden können. Man unterscheidet Füh-  
rungs-, Stör- und Eigenautonomie.

**VIII.1.** Die *Führungsautonomie* sichert, daß Ände-  
rungen einer Führungsgröße  $w_i$  nur die zugeordnete  
Regelgröße  $x_i$  beeinflussen.

**VIII.2.** Bei *Stör-Autonomie* besteht eine Entkopp-  
lung bzgl. der Störgrößen. Meist wird jedoch das  
umfassendere *Invarianzprinzip* angewendet.

**VIII.3.** *Eigen-Autonomie* bewirkt eine Entkopplung  
der Regelgrößen untereinander und gewährleistet  
zugleich eine Führungs-Autonomie bei gutem Stör-  
verhalten.

Die Entkopplungsbedingungen können mit Hilfe  
des Matrizenkalküls angegeben werden. Es ist je-  
doch zu beachten, daß diese nicht immer reali-  
sierbar sind. Oft können aber bereits mit einer  
näherungsweise Entkopplung gute Erfolge erreicht  
werden.

Neben der autonomen R. von Mehrgrößensystemen  
werden auch Verfahren angewendet, bei denen be-  
stimmte „günstige“ Kopplungen zur Verbesserung  
des R.sverhaltens bewußt ausgenutzt werden.

**IX.** Mit der Einführung der *Zustandsbeschreibung*  
von Systemen ( $\nearrow$  Zustandsgleichung) haben sich  
neue Möglichkeiten für die mathemat. Behandlung  
von Mehrgrößen-R.en eröffnet. Besondere Bedeu-  
tung kommt gegenwärtig dem Verfahren der *moda-  
len R.* zu, das auf einer gezielten Linksverschiebung  
gewisser Pole beruht. Mehrgrößen-R.en erlangen mit  
fortschreitender Automatisierung eine immer größe-  
re prakt. Bedeutung. Sie ergeben sich insbesondere  
bei der Automatisierung komplexer industrieller An-  
lagen, z. B. in der Chemie, der Energietechnik oder  
in der Metallurgie, sowie bei der Regelung von  
Fahrzeugen.

**Regel von Bernoulli und L'Hospital:** I. von Johann  
BERNOULLI gefundene und von L'HOSPITAL veröf-  
fentlichte Regel zur Behandlung von unbestimmten  
Ausdrücken: Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  mit  
den Gleichungen  $y = f(x)$  bzw.  $y = g(x)$  und mit  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  in einer Umgebung von  
 $x = a$  stetig und differenzierbar, ist  $g'(x) \neq 0$  für  
alle  $x \neq a$  dieser Umgebung und existiert der Grenz-  
wert  $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$ , so existiert auch der Grenzwert  
 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ , und beide Grenzwerte sind einander  
gleich. Ergibt sich beim Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$  er-  
neut ein unbestimmter Ausdruck der Form  $\infty/0$   
und erfüllen die Funktionen  $f'(x)$  und  $g'(x)$  die Vor-  
aussetzungen des Satzes, so kann die Regel nochmals  
auf den Quotienten  $f'(x)/g'(x)$  angewendet werden,  
man erhält (1).

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

Die Regel kann auch auf einseitige Grenzwerte  
 $\lim_{x \uparrow a} [f(x)/g(x)]$  und  $\lim_{x \downarrow a} [f(x)/g(x)]$  angewendet werden;  
in diesem Falle genügt es, die Differenzierbar-  
keit der Funktionen  $f$  und  $g$  in einer links- bzw.  
rechtsseitigen Umgebung von  $x = a$  vorauszusetzen.  
Sie gilt auch für  $x \rightarrow +\infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ , falls  $f$   
differenzierbar ist für alle  $x > M$  bzw. für alle  
 $x < -M$  mit einer positiven Konstanten  $M$ .  
*Beispiele:* 1. Für die Funktion  $f(x) = \sin x$  und  
 $g(x) = x$  gilt  $f(0) = g(0) = 0$ , ferner sind  $f$  und  $g$   
in jeder Umgebung von  $a = 0$  differenzierbar,  $f'(x)$   
 $= \cos x$ ,  $g'(x) = 1 \neq 0$ ; deshalb existiert der Grenz-  
wert des Quotienten  $f'(x)/g'(x)$  für  $x \rightarrow 0$ , und die  
Regel darf angewendet werden; es gilt (2).

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2. Bei der Berechnung von  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)/g(x)]$  für  $f(x)$   
 $= \cos x - 1$ ,  $g(x) = x^2$  erhält man einen unbe-  
stimmten Ausdruck der Form  $\infty/0$ . Nach Anwen-  
dung der R. ergibt (3) den Grenzwert  $-1/2$ .

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

3. In (4) wird ein rechtsseitiger Grenzwert bestimmt.

$$(4) \quad \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} = \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{2 \cos 2x}{-2 \sin x \cos x} = +\infty$$

4. Die R. ist auch anwendbar für  $x \rightarrow +\infty$  und  
 $x \rightarrow -\infty$ . In (5) ergeben sich  $f(x) \rightarrow 0$  und  $g(x) \rightarrow 0$   
für den Grenzübergang  $x \rightarrow \infty$ .

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln [(x+1)/(x-1)]}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

5. Zur Bestimmung des Grenzwerts in (6) versagt  
die R. Benutzt man dagegen  $\lim_{x \rightarrow 0} [(\sin x)/x] = 1$ ,  
erhält man den Grenzwert  $\sqrt{2}$ .

$$(6) \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + \sin^2 x}}{x} = \\ \lim_{x \downarrow 0} \frac{x \sqrt{1 + [(\sin x)/x]^2}}{x} = \sqrt{2}$$

**II.** Andere Formen eines unbestimmten Ausdrucks  
versucht man so umzuformen, daß sie die Form  
 $\infty/0$  annehmen und die R. angewendet werden  
kann. Sind  $f, g, h, k, l$  Funktionen mit folgenden  
Grenzwerten, jeweils für  $x \rightarrow a$  bzw. für  $x \uparrow a$  bzw.  
für  $x \downarrow a$ :

$\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = \infty, \lim h(x) = 0, \lim k(x)$   
 $= 0, \lim l(x) = 1$ , so können die unbestimmten Aus-  
drücke in II.1. bis II.6. nach den dort angegebenen  
Umformungen behandelt werden:

**II.1.** Der unbestimmte Ausdruck  $\infty/\infty$  bedeutet  
das Auftreten des Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$  und

kann nach der Umformung  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$  mittels der R. behandelt werden.

II.2. Der unbestimmte Ausdruck  $\infty - \infty$  bedeutet das Auftreten des Grenzwertes  $\lim [f(x) - g(x)]$

und wird mittels  $f(x) - g(x) = \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/f(x) \cdot g(x)}$  auf  $\infty/0$  zurückgeführt.

II.3. Der Grenzwert  $\lim [f(x) \cdot h(x)]$  zeigt das Auftreten von  $\infty \cdot 0$  an; nach der Umformung

$\lim [f(x) \cdot h(x)] = \lim \frac{h(x)}{1/f(x)}$  kann der rechtsstehende

Grenzwert nach der R. behandelt werden.

II.4. Der unbestimmte Ausdruck  $\infty^0$ , der sich unter den gemachten Annahmen als Grenzwert von  $f(x)^{h(x)}$  ergibt, wird durch die Umformung  $f(x)^{h(x)} = e^{h(x) \ln f(x)}$ , die für  $f(x) > 0$  gilt, zurückgeführt auf den Grenzwert einer e-Funktion. Unter Benutzung von deren Stetigkeit wird dieser bestimmt über den Grenzwert ihres Exponenten, der sich nach II.3. ergibt.

II.5. Der bei  $\lim l(x)^{f(x)}$  auftretende Ausdruck  $\infty^{\infty}$  wird nach II.4. übergeführt in den Grenzwert einer e-Funktion mit dem Exponenten  $\lim [f(x) \cdot \ln l(x)]$ , der von der Form  $\infty \cdot 0$  ist und nach II.3. behandelt wird.

II.6. Auch beim Auftreten des unbestimmten Ausdrucks  $\infty^0$ , d. h. des Grenzwerts  $\lim h(x)^{k(x)}$ , verfährt man wie in II.4. bzw. II.5., dabei ist  $h(x) > 0$  vorauszusetzen.

Behandelt man den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)/x]$  direkt

nach der R., so erhält man (8) und kann das Resultat verallgemeinern zu (9) für positive ganze Zahlen  $n$ . Dies bedeutet, daß der *Logarithmus schwächer gegen Unendlich wächst als x*. Aus (10) aber folgt, daß die *Exponentialfunktion stärker als jede Potenzfunktion gegen Unendlich wächst*.

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ mit } n \text{ positiv ganz}$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \text{ mit } n \text{ positiv ganz}$$

In (11) wird ein unbestimmter Ausdruck der Form  $\infty - \infty$  zurückgeführt auf die Form  $\infty/0$ ; sodann liefert zweimaliges Anwenden der R. das Ergebnis  $-1/2$ . In (12) hat der unbestimmte Ausdruck die Form  $\infty \cdot \infty$  und wird nach II.3. bestimmt. In (13) und (14) wird nach der in II.4. angegebenen Umformung der Grenzwert des Exponenten der betreffenden e-Funktion bestimmt.

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 2} \\ = -1/2$$

$$(12) \quad \lim_{x \uparrow \pi/2} (x - \pi/2) \tan x = \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{x - \pi/2}{\cot x} \\ = \lim_{x \uparrow \pi/2} \frac{1}{-1/\sin^2 x} = -1$$

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)/x}{1}} = 1, \\ \text{da } \lim_{x \rightarrow \infty} [(\ln x)/x] = 0 \text{ nach (8)}$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x \\ = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1+1/x)} = e, \\ \text{da } \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1+1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/x^2}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

**Regiomontanus**, Johannes MÜLLER, geb. 6. 6. 1436 Königsberg/Franken, gest. 6. 7. 1476 Rom. — R. begann bereits mit 12 Jahren sein Studium in Leipzig und war etwa seit 1452 Schüler von PEURBACH in Wien. Er hielt dort selbst seit 1458 Vorlesungen. Später wandte sich R. nach Italien, hielt dort in verschiedenen Städten Vorlesungen, z. B. 1464 in Padua die erste in Westeuropa gehaltene Vorlesung zur Geschichte der Mathematik und Astronomie. Im selben Jahr kehrte R. nach Wien zurück, folgte aber bald einem Ruf des ungar. Königs nach Ofen (Buda). Im Jahr 1471 ließ sich R. in Nürnberg nieder, wurde jedoch 1475 vom Papst zur Durchführung der notwendigen *Kalenderreform* nach Rom berufen. Dort starb er unter mysteriösen Umständen. — R. gilt als der bedeutendste Mathematiker und Astronom des 15. Jh. Bes. bedeutungsvoll ist seine Tätigkeit für die Entwicklung der Trigonometrie geworden, z. B. mit seinem Werk *«De triangulis omnimodis libri quinque»* (1462/64, 1533 gedruckt). Auf arab. Quellen basierend, hat R. das gesamte, sehr umfangreiche Material erstmals streng und systematisch dargestellt. Wichtig sind auch die Tabellenberechnungen des R. sowie seine verleger. Tätigkeit geworden, z. B. durch Ausgaben griech. Klassiker.

**Register:** Einwortspeicher mit kurzer Zugriffszeit. Im Unterschied zum Hauptspeicher, in dem beliebige Informationen gespeichert werden, haben die R.inhalte eine feststehende Bedeutung. Ein *Index-R.* dient z. B. zur Modifikation von Programmbefehlen ( $\nearrow$  Programmierung des Digitalrechners II.). Eine Reihe von R.n stellt interne Speicher einzelner Funktionseinheiten des Rechners dar. Zu diesen zählen die Operanden-R. des Rechenwerkes ( $\nearrow$  digitale Rechenanlage II.2.). R. sind häufig als Flipflop-Schiebekette ausgeführt.

**Registertonne**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**Regler**  $\nearrow$  Regelung II.

**Regression:** ein von F. GALTON ursprünglich in der Vererbungslehre eingeführter Begriff, der heute zur Beschreibung der bei stochast. Abhängigkeit von Zufallsgrößen ( $\nearrow$  Korrelationsanalyse) auftretenden Sachverhalte dient.

II.1. Eine *einfache R. erster Art* liegt vor, wenn  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsgrößen mit endl. Streuung sind und wenn unter allen meßbaren Funktionen  $u(x)$  ( $\nearrow$  Maß) mit  $E(u(X))^2 < \infty$  ( $\nearrow$  Erwartungswert)  $m_Y(x)$  die Größe  $E(Y - u(X))^2$  zum Minimum

macht;  $m_Y(x)$  ist dann die meßbare Funktion der Zufallsgröße  $X$ , die  $Y$  im Sinne des quadrat. Mittels am besten approximiert;  $m_Y$  ist der bedingte Erwartungswert  $E(Y | X = x)$  ( $\nearrow$  bedingte Verteilung). Man nennt  $m_Y(x)$  *R.s.funktion erster Art* von  $Y$  bzgl.  $X$ . Entsprechend wird  $m_X(y)$  definiert. Die durch die R.s.funktion beschriebenen Kurven heißen *R.slinien* bzw. *R.skurven*. Ist wenigstens eine R.slinie eine Gerade, so spricht man von *linearer R.* Ist  $(X, Y)$  normalverteilt ( $\nearrow$  Normalverteilung II.), so sind beide R.slinien Geraden.

I.2. Eine *mehrfache R. erster Art* liegt vor, wenn  $n$  Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$  gegeben sind und entsprechend wie in I.1. R.s.funktionen erster Art nach (1) definiert werden, in denen  $i_1, \dots, i_k$  von  $i$  ver-

$$(1) \quad m_X(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = E(X_i | X_{i_1} = x_{i_1}, \dots, X_{i_k} = x_{i_k})$$

schiedene Indizes zwischen 1 und  $n$  sind. Die entsprechenden Flächen im  $\mathbf{R}^n$  heißen *R.sflächen* bzw. *R.shyperflächen*.

II.1. Eine *einfache R. zweiter Art* erhält man, wenn man für zwei Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  mit endl. Streuungen wie unter I.1. eine Funktion  $h_Y(x)$  sucht, so daß  $h_Y(X)$  die Zufallsgröße  $Y$  bestmöglich im quadrat. Mittel approximiert. Der Unterschied zur R. erster Art besteht darin, daß die Klasse der Funktionen eingeschränkt wird; sucht man z. B.  $h_Y(x)$  in der Klasse aller linearen Funktionen, so spricht man von *linearer R. zweiter Art*, sucht man  $h_Y(x)$  in der Klasse der Polynome  $n$ -ten Grades, so spricht man von *parabol. R.* vom Grade  $n$ . Die Funktion  $h_Y(x)$  heißt *R.sfunktion zweiter Art*. Analog kann  $h_X(y)$  definiert werden. Im linearen Fall stellen (2a) und (2b) die linearen R.sfunktionen zweiter Art dar. Die Parameter  $\beta_{X|Y}$  und  $\beta_{Y|X}$  in

$$(2a) \quad h_Y(x) = EY + \beta_{Y|X}(x - EX)$$

$$(2b) \quad h_X(y) = EX + \beta_{X|Y}(y - EY)$$

ihnen heißen die *R.skoeffizienten*. Sie werden nach (3a) und (3b) aus dem *Korrelationskoeffizienten*  $\rho$

$$(3a) \quad \beta_{Y|X} = \rho \cdot \sigma_Y / \sigma_X$$

$$(3b) \quad \beta_{X|Y} = \rho \cdot \sigma_X / \sigma_Y$$

von  $(X, Y)$  und aus den *Streuungen*  $\sigma_X, \sigma_Y$  von  $X$  bzw.  $Y$  berechnet. Die durch (2a), (2b) dargestellten Geraden heißen *R.sgeraden*. Sind die R.sfunktionen erster Art linear, so fallen sie mit den linearen R.sfunktionen zweiter Art zusammen. Dies ist insbes. der Fall, wenn  $(X, Y)$  normalverteilt ist.

II.2. Eine *mehrfache R. zweiter Art* erhält man, wenn man die Betrachtungen auf den Fall von  $n$  Zufallsgrößen ausdehnt. Man spricht dann von *mehrfacher* oder *multipler R. zweiter Art*. S. a. *Regressionsanalyse*.

**Regressionsanalyse: I.** Untersuchungen über stochast. Abhängigkeiten an Hand von Stichproben ( $\nearrow$  Korrelationsanalyse,  $\nearrow$  Regression). Ein bes. wichtiges Problem der R. besteht darin, *Punktschätzungen* für die Regressionsfunktionen zu finden. Im Fall linearer Regression erster oder zweiter Art

läuft das auf die Angabe von Punktschätzungen für die Regressionskoeffizienten hinaus. Solche Schätzungen sind die *Stichprobenregressionskoeffizienten*  $\hat{\beta}_{Y|X}$  und  $\hat{\beta}_{X|Y}$ , die sich nach (1a) und (1b) aus dem *Stichprobenkorrelationskoeffizienten*  $R$  und aus den

$$(1a) \quad \hat{\beta}_{Y|X} = R \cdot S_Y / S_X$$

$$(1b) \quad \hat{\beta}_{X|Y} = R \cdot S_X / S_Y$$

*Stichprobenstreuungen*  $S_X$  und  $S_Y$  ( $\nearrow$  Stichprobenvarianz) berechnen lassen. Hat man eine konkrete Stichprobe, so ergeben die Realisierungen von  $\hat{\beta}_{Y|X}$ ,  $\hat{\beta}_{X|Y}$  die *empir. Regressionskoeffizienten*  $b_{Y|X}$  und  $b_{X|Y}$ . Sie ergeben sich nach (2a) und (2b) aus dem empir. Korrelationskoeffizienten  $r$  und den empir.

$$(2a) \quad b_{Y|X} = r \cdot s_Y / s_X$$

$$(2b) \quad b_{X|Y} = r \cdot s_X / s_Y$$

Streuungen  $s_X$  und  $s_Y$ . Die durch (3a) und (3b) dargestellten Geraden heißen *Regressionsgeraden*.

$$(3a) \quad y = \bar{y} + b_{Y|X}(x - \bar{x})$$

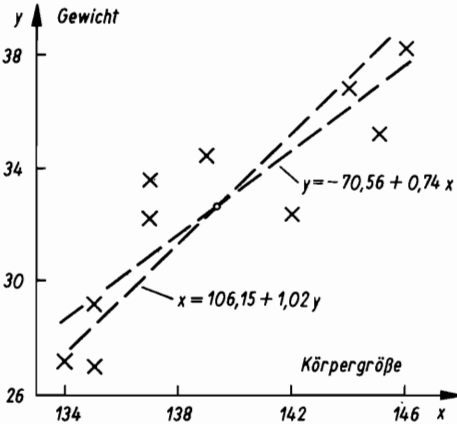
$$(3b) \quad x = \bar{x} + b_{X|Y}(y - \bar{y})$$

II. Werden z. B. die Körpergröße  $X$  und das Körpergewicht  $Y$  von Schülern einer gewissen Altersklasse gemessen, so erhält man eine Stichprobe vom Umfang 10 nach Tabelle (4), die die konkreten Werte

(4)	$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$
	135	29,30	-4,4	-3,31
	145	35,20	5,6	2,59
	139	34,50	-0,4	1,89
	142	32,10	2,6	-0,51
	137	33,60	-2,4	0,99
	137	32,30	-2,4	-0,31
	134	27,20	-5,4	-5,41
	144	36,70	4,6	4,09
	135	26,90	-4,4	-5,71
	146	38,30	6,6	5,69
	1394	326,10		

$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
19,36	10,9561	14,5640
31,36	6,7061	14,5040
0,16	3,5721	-0,7560
6,76	0,2601	-1,3260
5,76	0,9801	-2,3760
5,76	0,0961	0,7440
29,16	29,2681	29,2140
21,16	16,7281	18,8140
19,36	32,6040	25,1240
43,56	32,3761	37,5540
182,40	133,549	136,0600

der Stichprobe und alle für die Berechnung der Regressionsgeraden erforderl. Größen angibt. Die graph. Darstellung dieser Stichprobe liefert eine Punktwolke. Die Abbildung zeigt diese mit den ein-



Regressionsanalyse: Punktwolke und Regressionsgerade des betrachteten Beispiels

gezeichneten empir. Regressionsgeraden. Für ihre Gleichungen berechnet man nach (5a) und (5b) die

$$(5a) \quad b_{Y|X} = r \frac{s_Y}{s_X}$$

$$= \frac{[1/(10-1)] \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_X s_Y} \cdot \frac{s_Y}{s_X}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}$$

$$(5b) \quad b_{X|Y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}$$

empir. Regressionskoeffizienten. Mit den Zahlenwerten aus Tabelle (4) ergeben sich die Geradengleichungen (6a) und (6b). Die Regressionsgerade von

$$(6a) \quad y = -70,56 + 0,74x$$

$$(6b) \quad x = 106,15 + 1,02y$$

Y bzw. von X z. B. hat folgende Bedeutung: y gibt jeweils bei gegebener Körpergröße x die bestmög. lineare Voraussage für die Zufallsgröße Y an. Die bestmög. Voraussage für das Gewicht bei 142 cm Körperlänge ist z. B. = -70,56 + 0,74 · 142 = 34,52.

- Regressionsfläche ↗ Regression I.2.
- Regressionsfunktion ↗ Regression I.1., II.1.
- Regressionsgerade ↗ Regression II.1., ↗ Regressionsanalyse I.
- Regressionskoeffizient ↗ Regression II.1.
- Regressionskurven ↗ Regression I.1.
- Regressionslinie ↗ Regression I.1.
- Regula falsi ↗ graphisches Lösen von Gleichungen I., ↗ Nullstellenberechnung II.
- reguläre Funktion swv. analytische Funktion.

reguläre Matrix: quadrat. Matrix mit nicht verschwindender Determinante, s. a. Matrix III.

regulärer Graph ↗ Graph III.

regulärer Operator ↗ lineare Abbildung III.

regulärer Punkt: Punkt P<sub>0</sub> einer Kurve C mit der Parameterdarstellung  $\vec{x} = \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , in dem mindestens eine der drei Ableitungen  $dx_i(t_0)/dt$  von Null verschieden ist. Ein Kurvenstück mit nur regulären Punkten heißt *glatt* (↗ Kurve). Nicht reguläre Punkte heißen *singuläre Punkte*. S. a. Tangentialebene.

reguläres Element ↗ Ring I.

reguläres Linienelement ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung III.4.

reguläres Polyeder swv. regelmäßiges Polyeder. Regularitätsaxiom ↗ Mengenlehre II.

Reihe: I. eine aus den Gliedern a<sub>n</sub> einer Zahlenfolge (a<sub>n</sub>) gebildete Folge (s<sub>n</sub>) der *Teilsummen* oder *Partialsommen* (1) der gegebenen Folge (a<sub>n</sub>) für n = 1, 2, 3, ...

$$(1) \quad s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Diese Folge (s<sub>n</sub>) der Partialsommen von (a<sub>n</sub>) wird durch die symbol. Schreibweise (2) bezeichnet und R. mit dem *allgemeinen Glied* a<sub>n</sub> genannt.

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Oft ist es zweckmäßig, die Numerierung mit Null oder einer anderen natürl. Zahl > 1 zu beginnen, z. B.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  oder  $\sum_{k=10}^{\infty} a_k = a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots$ . Beispiele von R.n sind die ↗ arithmetischen Reihen und die ↗ geometrischen Reihen und die R.n (3), (4) und (5).

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

$$(4) \quad \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt genau dann *konvergent*, wenn die Folge (s<sub>n</sub>) der Partialsommen konvergiert. Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ , so heißt S die *Summe der R.*

Bei konvergenten R.n bedeutet das Symbol (2) also nicht nur die Folge (s<sub>n</sub>) der Partialsommen (1), sondern auch deren Grenzwert, die Summe der R. Hat diese Folge der Partialsommen keinen Grenzwert, so heißt die R. im Fall  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$  *bestimmt divergent* nach +∞ bzw. im Fall  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$  *bestimmt divergent* nach -∞. Ist die Folge der Partialsommen nicht bestimmt divergent und hat z. B. die voneinander verschiedenen Häufungsgrenzen λ und λ', so sagt man, die R. *oszilliert* zwischen diesen Häufungsgrenzen. Damit ist die Konvergenz einer

R. auf die Konvergenz einer Zahlenfolge zurückgeführt.

Umgekehrt kann für eine beliebig gewählte Zahlenfolge  $(b_n)$  die Frage nach der Konvergenz dieser Zahlenfolge auf die Frage nach der Konvergenz der

R.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_1 = b_1$  und  $a_n = b_n - b_{n-1}$  für  $n = 2, 3, \dots$  zurückgeführt werden, denn die  $n$ -te Partialsumme  $s_n$  dieser R. berechnet sich als  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n$ . Die Summe der R. ist der Grenzwert der gegebenen Zahlenfolge. Die Betrachtung von R.n ist nur eine neue Art der Untersuchung von Zahlenfolgen.

II.1. Die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_n = c_n - c_{n+1}$  ist genau dann konvergent, wenn die Zahlenfolge  $(c_n)$  konvergent ist, und hat die Summe  $c_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c_1 - c$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$  gesetzt wird. Zum Beweis bildet man die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen mit dem allgemeinen Glied  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + \dots + (c_n - c_{n+1}) = c_1 - c_{n+1}$ , woraus die Behauptung folgt. Gilt z. B. (6) für das allgemeine Glied  $a_n$  einer R., so erhält man  $c_n = 1/n$ , und wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$  hat sie die Summe  $S = c_1 = 1$ , d. h., es gilt (7) für die Summe der R. (3).

$$(6) \quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = c_n - c_{n+1}$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

II.2. Die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} 1$  ist bestimmt divergent nach  $+\infty$ , denn die Folge der Partialsummen  $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3, \dots$  mit dem allgemeinen Glied  $s_n = n$  ist eigentlich monoton wachsend und unbeschränkt. Es ist  $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ .

II.3. Die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  ist divergent, weil die Folge der Partialsummen  $s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = -1, s_4 = 0, \dots$  für ungerades  $n$  das allgemeine Glied  $s_n = -1$  hat, für gerades  $n$  aber  $s_n = 0$  gilt. Die gegebene R. *oszilliert* deshalb zwischen den Häufungsgrenzen  $\lambda = -1$  und  $\lambda' = 0$  der Partialsummenfolge. Es folgen einige konvergente R.n und ihre Summen.

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2$$

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$(9a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1$$

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$(11) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots = \frac{3}{4}$$

$$(12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$(15) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} \pm \dots = \frac{7\pi^4}{720}$$

III. Entfernt man in einer R.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  die ersten  $m$  Glieder, so ergibt sich die R.  $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$ , der sog. *Rest einer R.* nach dem  $m$ -ten Glied.

Eine R.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 \pm \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots$  mit  $c_i > 0$  heißt *alternierend*, wenn ihre Glieder abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben. Bei einer konvergenten alternierenden R. kann man den Rest nach dem  $m$ -ten Glied leicht abschätzen. Konvergiert eine alternierende R.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k$  und hat die Summe  $S$ , so bilden nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die Beträge  $c_i$  ihrer Glieder eine monotone Nullfolge, und infolgedessen hat der Rest  $R_n = S - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_k$  das Vorzeichen  $(-1)^n$ , und es ist  $|R_n| < c_{n+1}$ . Die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/(2k-1)$  z. B. ist konvergent und hat die Summe  $\pi/4$ . Es gilt dann (17), und (18) liefert einen Wert, der sich von  $\pi/4$  um höchstens  $1/9 = 0,111 \dots$  unterscheidet.

$$(17) \quad \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} \right| < \frac{1}{2n+1}$$

$$(18) \quad \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} = 0,7238 \dots$$

Über Entscheidungskriterien, die auf die Konvergenz bzw. Divergenz einer R. zu schließen erlauben, s. a. Konvergenzkriterien für R.n.

Die Regeln für das *Rechnen mit konvergenten R.n.* sind in den folgenden *Konvergenzsätzen für R.n.* zusammengefaßt.

III.1. Es hat keinen Einfluß auf das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten einer R., wenn man *endlich viele Anfangsglieder* der R. entfernt oder endlich viele Glieder am Anfang hinzufügt. Die beiden R.n

(19) und (20) sind z. B. beide konvergent, sobald eine von ihnen konvergent ist.

$$(19) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

$$(20) \quad \sum_{k=10^7}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{10^{14}} + \frac{1}{(10^7 + 1)^2} + \frac{1}{(10^7 + 2)^2} + \dots$$

III.2. Mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert auch die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$  mit dem konstanten Faktor  $c$ , und über die Summen beider R.n gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Betrachtet man z. B. die Reihe (21), so erkennt man nach der vorgenom-

$$(21) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(1+r^2)^{k-1}} &= \sum_{k=1}^{\infty} r^2 \cdot \frac{r^{2(k-1)}}{(1+r^2)^{k-1}} \\ &= r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^{k-1} \\ &= r^2 \left[ 1 + \frac{r^2}{1+r^2} + \left( \frac{r^2}{1+r^2} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

menen Umformung, daß die in der eckigen Klammer stehende R. eine geometr. R. ist, die wegen  $q = r^2/(r^2 + 1) < 1$  konvergiert und die Summe  $1 + r^2$  hat. Die Ausgangsreihe ist deshalb konvergent und hat die Summe  $S = r^2(1 + r^2)$ .

III.3. Zwei konvergente R.n  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$  mit den Summen  $S$  und  $S'$  lassen sich *gliedweise addieren oder subtrahieren*. Die R.n  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a'_k)$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a'_k)$  sind dann ebenfalls konvergent und haben nach (22) die Summen  $S + S'$  bzw.  $S - S'$ .

$$(22) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm a'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} a'_k$$

*Beispiele:* Für die in (23) betrachtete R. gilt die dort vorgenommene Umformung, da beide Einzel-R.n konvergieren. Dann läßt sich die Summe der R. leicht aus den Summen der Einzel-R.n ermitteln (↗ geometrische Reihen). Hingegen kann die Regel III.3. auf (24) nicht angewendet werden, da beide Einzel-R.n nicht konvergieren (↗ harmonische Reihe).

$$(23) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k(k+1)} + \frac{7}{10^k} \right) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{10^k} = 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

$$(24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \neq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

III.4. Die aus einer konvergenten R.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gebildete R.  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  mit  $b_k = a_{n_{k-1}} + a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k-1}$ , in der die Indizes  $n_0 = 1, n_1, n_2, \dots$  eine eigentlich monoton wachsende Folge natürl. Zahlen sind, konvergiert und hat dieselbe Summe wie die R.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Die

R.  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  hat die Form  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1-1}) + (a_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2-1}) + \dots$ , d. h., diese Regel drückt aus, daß man in einer konvergenten R. *beliebig Klammern setzen* kann, ohne daß sich an der Konvergenz und der Summe der R. etwas ändert. Erhält man durch Weglassen der Klammern einer konvergenten R. der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  wieder eine konvergente Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , so sind die Summen der R.n gleich. Man hat in dieser Regel gewissermaßen das *Analogon zum Assoziationsgesetz* für endl. Summen zu sehen. Aus der Konvergenz der R. (25) (↗ Konvergenzkriterien für Reihen) folgt z. B. durch Anwendung dieser Regel sofort die Konvergenz der R.n (26) und (27).

$$(25) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$(26) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \end{aligned}$$

$$(27) \quad \begin{aligned} 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 1 - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \dots \end{aligned}$$

Dagegen können bei der konvergenten R.  $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1) = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$  die Klammern nicht weggelassen werden, da die durch das Weglassen der Klammern entstehende R.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  divergent ist.

Fragen, die mit der Vertauschung der Glieder einer R. oder der Multiplikation von R.n zusammenhängen, werden durch den Begriff der ↗ absoluten Konvergenz geklärt.

**Reihendarstellung: numerisches Rechnen I.** Berechnung von Konstanten oder Funktionen aus Polynomen, die Partialsummen unendl. Reihen sind. Numerisch brauchbar ist eine R., wenn der Abbruchfehler nach möglichst wenigen Schritten so klein ist, daß das Ergebnis in der Stellenzahl der Maschine genau ist. Bedeutet  $\epsilon_0$  die kleinste Maschinenzahl, so liegt *numer. Konvergenz* dann vor, wenn es für jedes  $\epsilon > \epsilon_0 > 0$  ein  $N(\epsilon)$  gibt, so daß  $\left| \sum_{n=1}^N a_n - a \right| < \epsilon$  gilt. Im klass. Sinn *divergente Reihen* können danach durchaus numerisch konvergent sein. Man studiert deshalb auch solche Reihen und untersucht z. B. für das kleinste  $\epsilon_0$  den expliziten Zusammenhang zwischen  $\epsilon$  und  $N(\epsilon)$ . R. dienen in der Rechentechnik vielfach der *universellen Darstellung* viel benutzter Funktionen, d. h. zur Berechnung der Funktionswerte für alle Zahlen des Definitionsbereichs mit Maschinengenauigkeit. Das erreicht man praktisch *nie* durch eine Entwicklung. Selbst bei den überall konvergenten Reihen für  $e^x$ ,

sin  $x$ , cos  $x$ , ... hängt die Konvergenzgeschwindigkeit noch stark von der Stelle  $x$  ab.

II. Einige Beispiele sollen Möglichkeiten der Konvergenzverbesserung von Reihen zeigen:

II.1. Um  $\pi/4$  aus der Reihe  $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$  auf vier Stellen zu berechnen, brauchte man theoretisch rund 10000 Glieder, praktisch würden dann die Rundungsfehler das Ergebnis längst überdecken. Die Euler-Transformation (1)

$$(1) \quad y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + \dots = 1/2 y_0 - 1/4 \Delta y_0 + 1/8 \Delta^2 y_0 - \dots$$

führt nach Abspalten der führenden Glieder  $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots - 1/19 = 0,76046$  rasch auf ein brauchbares Resultat:  $1/21 - 1/23 + 1/25 - 1/27 + 1/29 = 0,02381 + 0,00104 + 0,00008 + 0,00001 = 0,02494$ , so daß gilt:  $\pi/4 = 0,76046 + 0,02494 = 0,7854$ . Es wurde Schema (2) benutzt. Höhere Glieder liefern keinen Beitrag zur 5. Dezimale.

(2) Differenzenschema

$y_k$	$\Delta^1 y_k$	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
$1/21 = 0,04762$				
	-0,00414			
$1/23 = 0,04348$		0,00066		
	-0,00348		-0,00014	
$1/25 = 0,04000$		0,00052		0,00003
	-0,00296		-0,00011	
$1/27 = 0,03704$		0,00041		
	-0,00255			
$1/29 = 0,03448$				

II.2. Eine spezielle Formel (3) erhält man z. B. mit Hilfe der Additionstheoreme.

$$(3) \quad \pi/4 = 2 \arctan(1/3) + \arctan(1/7) + 2 \arctan(1/8)$$

II.3. Nach der Abspalte-Methode sucht man eine gegebene, langsam konvergierende Reihe in die Summe einer Reihe mit bekannter Summe und in eine schnell konvergierende Reihe zu zerlegen, z. B. nach (4).

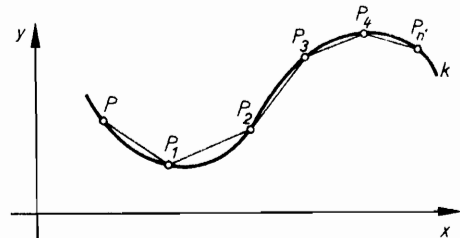
$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 + 1)} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 + 1)}$$

**Reihenfolgeproblem:** Aufgabe, die günstigste Reihenfolge für Arbeitsgänge zu finden, die vorgeschriebenen Nebenbedingungen genügen. Zur Lösung dient meist das Verzweungsverfahren. In einem Maschinenbelegungsproblem z. B. muß jedes von  $n$  Werkstücken  $W_1, \dots, W_n$  die Maschinen  $M_1, \dots, M_m$  einer Taktstraße der Reihe nach passieren; ist dann die Bearbeitungszeit des  $i$ -ten Werk-

stücks auf der  $k$ -ten Maschine bekannt, so soll die Reihenfolge bestimmt werden, in der die Werkstücke in die Taktstraße eingegeben werden müssen, damit die Zeit bis zur Fertigstellung aller Werkstücke minimal wird. Durch weitere Anforderungen kann die Aufgabe kompliziert werden, wenn z. B. der Lagerplatz zwischen den Maschinen begrenzt ist oder wenn sich die Werkstücke auf der Taktstraße überholen können oder wenn Umrüstzeiten für jedes Werkstück zu berücksichtigen sind. Die einfachsten R.e sind mathematisch mit dem Rundfahrtproblem gleichwertig.

**Reihenschaltung** ↗ Struktur I.  
**reinperiodischer Dezimalbruch** ↗ Brüche II.3.  
**rein-quadratische Gleichung** ↗ quadratische Gleichung II.

**Rektifikation einer Kurve:** Bestimmung der Länge einer Kurve. Ist die ebene Kurve  $k$  durch die Parameterdarstellung  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  mit  $\alpha \leq t \leq \beta$  gegeben, so erhält man eine Zerlegung des Intervalls  $[\alpha, \beta]$  durch Einfügen der Teilpunkte  $t_i$  mit  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ . Werden die zu den Teilpunkten  $t_i$  einer Zerlegung  $Z$  gehörenden Kurvenpunkte  $P_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$  geradlinig verbunden, so entsteht ein zur Zerlegung  $Z$  gehörender Polygon-



Rektifikation einer Kurve  $k$

zug (Abb.). Die Kurve nennt man rektifizierbar, wenn die Längen der Polygonzüge, die zu allen mögl. Zerlegungen  $Z$  des Intervalls  $[\alpha, \beta]$  gehören, nach oben beschränkt sind; die obere Grenze dieser Längen heißt Länge  $l$  der Kurve.

Sind die Funktionen  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  der Parameterdarstellung der Kurve stetig differenzierbar, so berechnet sich die Länge  $l$  der Kurve nach der Formel (1). Ist die Kurve durch die Funktion  $y = f(x)$  mit  $a \leq x \leq b$  gegeben, so wird ihre Länge

$$(1) \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt$$

nach (2) bestimmt; ist schließlich die Kurve in

$$(2) \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Polarkoordinaten  $r = g(\varphi)$  mit  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$  gegeben, so erhält man (3) als Länge.

$$(3) \quad l = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$$



Die Länge  $l$  der logarithm. Spirale  $r = ae^{m\varphi}$  mit  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  ergibt sich z. B. aus (4).

$$(4) \quad l = \int_0^\alpha \sqrt{r^2 + m^2 r^2} d\varphi = a\sqrt{1 + m^2} \int_0^\alpha e^{m\varphi} d\varphi = (a/m) \sqrt{1 + m^2} (e^{m\alpha} - 1)$$

Die Länge  $l$  einer Raumkurve mit der Parameterdarstellung  $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$  für  $\alpha \leq t \leq \beta$  ergibt sich aus (5).

$$(5) \quad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)} dt$$

Ist  $P_0$  mit dem Parameterwert  $t_0$  ein fester und  $P$  mit dem Parameterwert  $t$  ein beliebiger Punkt auf der rektifizierbaren Kurve, dann heißt die mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehene Länge des Bogens von  $P_0$  nach  $P$  *Bogenlänge*  $s$ , je nachdem, ob  $t_0 < t$  oder  $t_0 > t$  ist. Für die Bogenlänge gilt (6); der Ausdruck (7) heißt *Bogenelement* der Kurve.

$$(6) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)} dt$$

$$(7) \quad ds = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\chi}^2(t)} dt$$

**rektifizierbar**  $\nearrow$  *Bogenlänge*.

**rektifizierende Ebene**  $\nearrow$  *Schmiegebene*.

**rekursive Funktion:** zahlentheoretische Funktion  $f(n)$ , die berechenbar in dem Sinne ist, daß zu jeder natürl. Zahl  $n$  als Argument der Funktionswert  $f(n)$  nach einem Algorithmus berechnet werden kann. Aus Ausgangsfunktionen werden r. F. nach Erzeugungsregeln gebildet. *Ausgangsfunktionen* sind die *Nachfolgerfunktion*, die durch  $f(x) = x + 1$  definiert ist, die *Identitätsfunktion*  $I_n^m$  für  $1 \leq m \leq n$ , die durch  $I_n^m(x_1, \dots, x_n) = x_m$  definiert ist, und die *konstante Funktion*  $F_c^m$ , die für eine fixierte natürl. Zahl  $c$  definiert wird durch  $F_c^m(x_1, \dots, x_m) = c$ . Die *Erzeugungsregeln* sind die Substitution von Funktionen, die primitive Rekursion und die Minimumbildung. Sind eine  $k$ -stellige Funktion  $f$  und die  $n$ -stelligen Funktionen  $g_1, \dots, g_k$  gegeben, so erhält man durch *Substitution* dieser Funktionen die  $n$ -stellige Funktion (1).

$$(1) \quad g(x_1, \dots, x_n) = f[g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)]$$

Von *primitiver Rekursion* spricht man, wenn nach (2a) und (2b) aus einer  $(k - 1)$ -stelligen Funktion  $g$  und aus der  $(k + 1)$ -stelligen Funktion  $h$  genau eine  $k$ -stellige Funktion  $f$  festgelegt wird.

$$(2a) \quad f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{k-1})$$

$$(2b) \quad f(x_1, \dots, x_{k-1}, y + 1) = h[x_1, \dots, x_{k-1}, y, f(x_1, \dots, x_{k-1}, y)]$$

Die *Minimalbildung* setzt voraus, daß es von einer  $(k + 1)$ -stelligen Funktion  $f$  zu jedem  $k$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_k)$  natürl. Zahlen eine Zahl  $y$  gibt mit  $f(x_1, \dots, x_k, y) = 0$ . Die neue Funktion  $g$  wird durch

die Forderung festgelegt, daß  $g(x_1, \dots, x_k)$  das kleinste  $y$  mit  $f(x_1, \dots, x_k, y) = 0$  bedeutet.

Die *Fibonacci'schen Zahlen* sind z. B. die Funktionswerte einer primitiven r. F.

**Relation I. mathematische Logik:** Widerspiegelung von Beziehungen zwischen Dingen, Sachverhalten u. a.; R.en werden durch Aussageformen bzw. Prädikate beschrieben; enthalten solche Aussageformen bzw. Prädikate  $n$  verschiedene freie Variable, so spricht man von  $n$ -stelligen R.en.

**II. Mengenlehre:** Eine R. i. e. S. ist eine zweistellige oder *binäre R.* zwischen Elementen  $x_1$  einer Menge  $M_1$  und Elementen  $x_2$  einer Menge  $M_2$ ; eine solche binäre R. ist die Teilmenge der Produktmenge  $M_1 \times M_2$ , die die geordneten Paare  $(x_1, x_2)$  mit  $x_1 \in M_1$  und  $x_2 \in M_2$  enthält, für die die R.  $R$  besteht, für die in Zeichen  $x_1 R x_2$  gilt. Sind z. B. die Menge  $M_1 = \{a, b\}$  und die Menge  $M_2 = \{1, 2\}$ , gegeben, so ist  $M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$  und folgende Mengen  $R \subseteq M_1 \times M_2$  definieren verschiedene R.en:  $R_1 = M_1 \times M_2$ ,  $R_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2)\}$ ,  $R_3 = \{(a, 1), (b, 2)\}$ ,  $R_4 = \{(a, 1), (a, 2)\}$ ,  $R_5 = \emptyset$ . In  $R_3$  z. B. gilt  $aR_3 1$  und  $bR_3 2$ , bei  $R_4$  gilt  $aR_4 1$  und  $aR_4 2$  in bezug auf die gegebenen Mengen  $M_1$  und  $M_2$ . Man spricht von einer *All-R.*, wenn jedes Element  $x_1 \in M_1$  zu jedem Element  $x_2 \in M_2$  in dieser R. steht, z. B. ist  $R_1$  eine *All-R.* Als *Null-R.* bezeichnet man eine R. in bezug auf die gegebenen Mengen, die für kein Elementenpaar  $(x_1, x_2)$  erfüllt ist, z. B.  $R_5 = \emptyset$ . Ist  $R$  eine R. zwischen einer Menge  $M_1$  und einer Menge  $M_2$ , so heißt  $M_1$  der *Vorbereich* oder die *Quelle* von  $R$ ,  $M_2$  der *Nachbereich* oder das *Ziel* von  $R$ ; die Menge aller Elemente  $x_1$  von  $M_1$ , für die ein Element  $x_2$  von  $M_2$  mit der Eigenschaft  $x_1 R x_2$  existiert, heißt der *Definitionsbereich* von  $R$ , die Menge aller Elemente  $x_2$  von  $M_2$ , für die ein Element  $x_1$  von  $M_1$  mit der Eigenschaft  $x_1 R x_2$  existiert, der *Wertebereich* bzw. *Vorrat* von  $R$ . In bezug auf  $M_1 = \{a, b\}$  und  $M_2 = \{1, 2\}$  hat  $R_4 = \{(a, 1), (a, 2)\}$  z. B. den Definitionsbereich  $\{a\}$ , bei  $R_2 = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2)\}$  und  $R_3 = \{(a, 1), (b, 2)\}$  stimmen *Vorbereich* und *Definitionsbereich* überein, bei  $R_2$  stimmen auch *Nachbereich* und *Wertebereich* überein ( $\nearrow$  Funktion I.). Eine R.  $R$  zwischen einer Menge  $M_1$  und einer Menge  $M_2$  heißt *voreindeutig*, falls zu jedem Element  $x_2$  von  $M_2$  höchstens ein Element  $x_1$  von  $M_1$  in der R.  $R$  steht; sie heißt *nacheindeutig* bzw. *eindeutig*, falls jedes Element  $x_1$  von  $M_1$  höchstens mit einem Element  $x_2$  von  $M_2$  in der R.  $R$  steht ( $\nearrow$  Funktion I.). Eine *eineindeutige R.* ist sowohl vor- als auch nacheindeutig. In bezug auf  $M_1 = \{a, b\}$  und  $M_2 = \{1, 2\}$  sind  $R_3, R_4$  voreindeutig,  $R_2$  dagegen nicht;  $R_3$  und  $R_5 = \emptyset$  sind nacheindeutig,  $R_1 = M_1 \times M_2$  und  $R_4$  dagegen nicht;  $R_3$  ist eineindeutig,  $R_2$  dagegen nicht.

**III.** Ist  $R$  speziell eine R. zwischen einer Menge  $M_1$  und einer Menge  $M_2$  und gilt  $M_1 = M_2 = M$ , so nennt man  $R$  eine R. in der Menge  $M$ . **Beispiel 1:** Zwei natürl. Zahlen  $a, b$  stehen in der *Teilbarkeits-R.* in der Menge  $\mathbf{N}$  genau dann, wenn  $a \mid b$  gilt, d. h., wenn die Zahl  $a$  die Zahl  $b$  teilt. **Beispiel 2:** Zwei ganze Zahlen  $x, y$  stehen in der *natürlichen Größen-*

ordnungs- $R. \leq$  in der Menge  $\mathbf{Z}$  genau dann, wenn  $x \leq y$  gilt, d. h., wenn  $x$  kleiner oder gleich  $y$  ist. *Beispiel 3:* Zwei Teilmengen  $M_1, M_2$  einer Menge  $M$  stehen in der *Enthaltenseins- $R.$*  oder *Inklusions- $R.$*  in der Potenzmenge  $P(M)$  genau dann, wenn  $N_1 \subseteq N_2$  ist, d. h., wenn  $N_1$  eine Teilmenge von  $N_2$  ist. — Jede  $R.$  zwischen einer Menge  $M_1$  und einer Menge  $M_2$  ist eine  $R.$  in der Vereinigungsmenge  $M_1 \cup M_2$ . — In vielen Gebieten der Mathematik verwendete  $R.$ en, z. B. die Anordnungs- und die Ähnlichkeits- $R.$ en, in Mengen  $M$  werden durch gewisse der folgenden Eigenschaften gekennzeichnet:

- $R$  ist reflexiv, falls  $xRx$  für jedes  $x \in M$ ;
- $R$  ist irreflexiv, falls  $xRx$  für kein  $x \in M$ ;
- $R$  ist symmetrisch, falls aus  $xRy$  folgt  $yRx$  für alle  $x, y \in M$ ;
- $R$  ist antisymmetrisch oder identitiv, falls aus  $xRy$  und  $yRx$  folgt  $x = y$  für alle  $x, y \in M$ ;
- $R$  ist asymmetrisch, falls aus  $xRy$  nie folgt  $yRx$  für alle  $x, y \in M$ ;
- $R$  ist transitiv, falls aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$  für alle  $x, y, z \in M$ ;
- $R$  ist linear, falls  $xRy$  oder  $yRx$  gilt für beliebige  $x, y \in M$ ;
- $R$  ist konnex, falls stets  $xRy$  oder  $yRx$  oder  $x = y$  gilt für beliebige  $x, y \in M$ .

Die Teilbarkeits- $R.$  in  $\mathbf{N}$  z. B. ist reflexiv, weil für jedes  $a \in \mathbf{N}$  gilt  $a|a$ , sie ist antisymmetrisch, weil z. B. aus  $a|b$  und  $b|a$  folgt  $a = b$ , und sie ist transitiv, weil z. B. aus  $a|b$  und  $b|c$  folgt  $a|c$ . Die natürl. Größenordnungs- $R. \leq$  ist ebenfalls reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, zusätzlich aber linear, weil  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt für  $x \in \mathbf{Z}$  und  $y \in \mathbf{Z}$ . —  $R.$ en in bzw. zwischen endl. Mengen kann man auch durch Matrizen ( $\nearrow$  Relationsmatrix) oder Graphen ( $\nearrow$  Relationsgraph) beschreiben.

Eine eindeutige  $R. R$  zwischen einer Menge  $M_1$  und einer Menge  $M_2$  heißt funktionale  $R. (\nearrow$  Funktion I.).

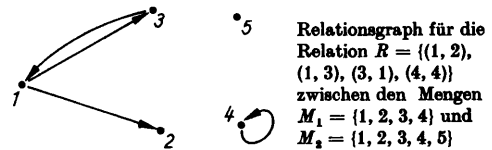
IV. Betrachtet man nicht nur  $R.$ en zwischen festen Mengen  $M_1$  und  $M_2$ , sondern  $R.$ en zwischen verschiedenen vorgegebenen Mengen, so ist es zweckmäßig, statt von einer  $R. R$  zwischen  $M_1$  und  $M_2$  von einer  $R. r = (M_1, R, M_2)$  zu sprechen oder statt von einer  $R. S$  zwischen  $N_1$  und  $N_2$  von einer  $R. s = (N_1, S, N_2)$ . Die Menge  $R$  heißt in diesem Zusammenhang auch das *Diagramm der  $R.r$* . Die  $R.$ en  $r, s$  sind genau dann gleich, wenn  $R = S, M_1 = N_1$  und  $M_2 = N_2$  ist;  $r$  ist eine Teil- $R.$  von  $s$ , falls  $R \subseteq S, M_1 \subseteq N_1$  und  $M_2 \subseteq N_2$  ist; z. B. ist die Teilbarkeits- $R.$  in der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen eine Teil- $R.$  der natürl. Größenordnungs- $R.$  in der Menge  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen und diese wiederum eine Teil- $R.$  der natürl. Größenordnungs- $R.$  in der Menge  $R$  der reellen Zahlen. — Durch die  $R.$ en  $r, s$  ist eindeutig eine  $R. r \circ s = (M_1, R \circ S, N_2)$  bestimmt, das *Produkt* der  $R.$ en  $r, s$ , deren Diagramm  $R \circ S$  die Teilmenge aller derjenigen Elemente  $(x, y)$  von  $M_1 \times M_2$  ist, zu denen es ein Element  $z$  gibt, für das  $xRz$  und  $zSy$  gilt. Dem Produkt von Abbildungen entspricht anschaulich deren Hintereinanderausführung ( $\nearrow$  Funktion). Jeder  $r = (M, R, N)$  entspricht eindeutig ihre *inverse*, auch

konverse oder duale  $R. r^{-1} = (N, R^{-1}, M)$ , deren Diagramm  $R^{-1}$  die Menge  $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$  ist; d. h., es gilt für Elemente  $x$  aus  $M$  und  $y$  aus  $N$  genau dann  $yR^{-1}x$ , wenn  $xRy$  gilt. —

V. Der Begriff einer binären  $R.$  zwischen einer Menge  $M_1$  und einer Menge  $M_2$  läßt sich verallgemeinern zum Begriff der  *$n$ -stelligen* oder  *$n$ -ären  $R.$*  zwischen  $n$  Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  mit  $n \geq 1$ . Eine  $n$ -stellige  $R. R$  zwischen den Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  ist eine Teilmenge der Produktmenge  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ . Ist  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ , so sagt man, daß die Elemente  $x_1$  von  $M_1, x_2$  von  $M_2, \dots, x_n$  von  $M_n$  zueinander in der  $R. R$  stehen und schreibt dafür auch  $Rx_1x_2 \dots x_n$ . Ist speziell  $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ , so spricht man von einer  *$n$ -stelligen  $R.$  in der Menge  $M$* . Eine  $(n + 1)$ -stellige  $R. R$  in  $M$  heißt eine *funktionale  $R.$* , falls  $R$  eine funktionale  $R.$  zwischen dem  $n$ -fachen Produkt  $M^n = M \times M \times \dots \times M$  und  $M$  ist. Ist  $R$  eine Funktion von dem  $n$ -fachen Produkt  $M^n$  in  $M$ , so nennt man  $R$  eine  *$n$ -stellige Funktion* bzw. eine  *$n$ -stellige Operation* in der Menge  $M$ . Die einstelligen  $R.$ en heißen auch *Eigenschaften*. Eine 2stellige  $R.$  ist eine *binäre  $R.$*  Eine 3stellige oder *ternäre  $R.$*  ist z. B. die *Zwischen- $R.$*   $Z$  in der Menge der Punkte einer festen orientierten Geraden  $g$ , dabei bedeutet  $ZABC$ , daß der Punkt  $B$  auf der Geraden  $g$  zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  liegt. S. a. Äquivalenzrelation, Anordnungsrelationen, Funktion.

**Relational  $\nearrow$  Struktur I.**

**Relationsgraph:** Darstellung einer Relation  $R$  zwischen endlichen Mengen  $M_1, M_2$  durch einen Graphen, indem man den Elementen der Vereinigungsmenge  $M_1 \cup M_2$  der gegebenen endl. Mengen eindeutig Punkte in einer Zahlenebene zuordnet, diese gewöhnlich ebenso bezeichnet wie die entsprechenden Elemente von  $M_1$  bzw.  $M_2$  und einen Punkt  $x$  mit einem Punkt  $y$  genau dann durch einen von  $x$  nach  $y$  weisenden Pfeil verbindet, wenn  $xRy$ , d. h., wenn  $x \in M_1$  mit  $y \in M_2$  in der Relation  $R$  steht. Ist dabei speziell  $x = y$ , so spricht man von einer *Schlinge* um Punkt  $x$  (Abb.) ( $\nearrow$  Graph II.).



**Relationsmatrix:** Matrix  $R = (r_{ik})$  von  $m$  Zeilen  $i = 1, 2, \dots, m$  und  $n$  Spalten  $k = 1, 2, \dots, n$ , die eine bestehende Relation  $R$  zwischen den endl. Mengen  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  und  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , deren Elemente paarweise verschieden sind, in der Weise ausdrückt, daß  $r_{ik} = 1$ , falls  $a_iRb_k$ , d. h., falls  $a_i \in A$  in der Relation  $R$  zu  $b_k \in B$  steht, und daß  $r_{ik} = 0$ , falls  $a_iRb_k$  nicht gilt. Betrachtet man zwischen  $A = \{a_1, a_2\}$  und  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  z. B. die Relation  $R = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$ , so lautet die  $R. R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

relationstreu ↗ Homomorphismus, ↗ Isomorphismus.

relative Häufigkeit ↗ Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses, ↗ Gesetz der großen Zahl III.

relative Redundanz ↗ Redundanz I.

relativer Fehler ↗ Fehler I.

relatives Extremum ↗ Extremwert I., ↗ Variationsrechnung II.

relativ kompakte Menge ↗ Menge.

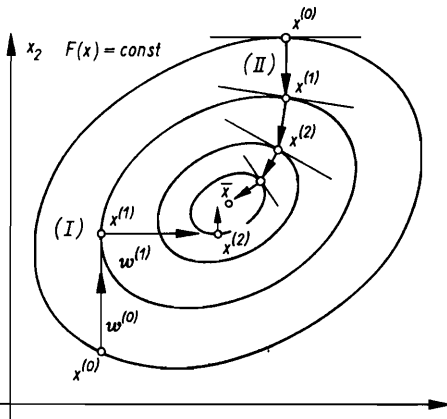
relativ prim ↗ Teilbarkeit III.

Relaxationsverfahren: numer. Verfahren zur Bestimmung der Lösung  $x$  von  $Ax = b$  (↗ lineare Gleichungssysteme) als Lösung eines quadrat. Extremalproblems durch schrittweise Näherung. Solche Extremalprobleme lauten für beliebige  $(n, n)$ -Matrizen

$$F(x) = x^T A^T A x - b^T A x - x^T A^T b + b^T b \rightarrow \text{Min!}$$

Für symmetr. und definite Matrizen  $A$  lauten sie  $Q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T b \rightarrow \text{Minimum!}$

Beide Probleme sind eindeutig lösbar, die Niveauflächen  $F(x) = \text{const}$  bzw.  $Q(x) = \text{const}$  sind konzentrische Hyperellipsoidflächen im  $n$ -dimensionalen Raum, deren gemeinsames Zentrum der gesuchte Minimalpunkt ist (Abb.).



Relaxationsverfahren: konfokale Ellipsen als Beispiel mit  $n = 2$  für das Gauß-Seidel-Verfahren (I) und für das Gradientenverfahren (II)

Die einzelnen R. unterscheiden sich in Relaxationsrichtung  $w^{(m)}$  und -faktor  $\alpha^{(m)}$  in  $x^{(m+1)} := x^{(m)} + \alpha^{(m)} w^{(m)}$ ,  $x^{(0)}$ -Startpunkt.

Beim Gradientenverfahren wird der negative Gradient von  $F(x)$  im Punkte  $x^{(m)}$  als Relaxationsrichtung gewählt:  $w^{(m)} = -\text{grad } F(x^{(m)})$ . Er zeigt bekanntlich stets in Richtung des stärksten Gefälles. S. a. lineares Gleichungssystem VII.

Relief ↗ Funktion VI.

Rentenrechnung: I. Berechnung des Gesamtwertes, der sich aus der regelmäßigen Zahlung einer Rate für einen bestimmten Zeitpunkt durch Zinseszins ergibt. Nach den gleichen Beziehungen wird die Summe berechnet, die zu einem angenommenen Zeitpunkt vorhanden sein muß, um für kommende

Zeiten regelmäßig eine Rate  $b$  zahlen zu können. Meist sind beide Berechnungen in der Weise verknüpft, daß ein Teil des Betrages, den ein Werk-tätiger monatlich an die Sozialversicherung zahlt, als eingezahlte Rate zählt, und daß von dem Gesamtwert, den diese Raten bei seinem Erreichen des Rentenalters ausmacht, die regelmäßige Rentenzahlung als Rate beglichen wird. Dieses mathemat. Prinzip, bei dessen Schilderung zur Vereinfachung noch angenommen wird, daß in jedem Jahre nur eine Rate eingenommen oder gezahlt wird, kann nur durch Rechtsnormen realisiert werden, indem festgelegt wird, welcher Teil des Betrages der Sozialversicherung für den Aufbau des Gesundheitswesens und welcher Teil für die spätere Rentenzahlung zu verwenden ist. Die Tatsache der Rentenerhöhung für nicht zahlende Rentempfänger zeigt außerdem, daß der Staat Mittel dafür zur Verfügung stellt, die er aus anderen Einnahmen bestreitet. Eine weitere Vereinfachung der hier geschilderten Modelle besteht darin, daß jeder Vorgang in ihnen als abgeschlossen angesehen wird, während in Wirklichkeit nur für mittlere Erlebnishäufigkeiten gerechnet werden kann (↗ Sterbetafel I., ↗ Lebensversicherung I.). Die hier behandelte Zeitrente wird nachschüssig oder postnumerando gen., wenn die Ratenzahlung am Ende der abgesprochenen Zeitabschnitte fällig wird, sie heißt vorschüssig oder pränumerando, wenn die Zahlungstermine am Anfang liegen.

II. Nachschüssige Zeitrente. Die am Ende des 1. Jahres gezahlte Rate  $b$  wächst bei  $p$  % und dem Verzinsungsfaktor  $r = (1 + p/100)$  bis zum Ende des  $n$ -ten Jahres, d. h. in  $(n - 1)$  Jahren, an auf  $b \cdot r^{n-1}$ . Die letzte am Ende des  $n$ -ten Jahres gezahlte Rate wächst an auf  $b \cdot r^0 = b$ . Am Ende des  $n$ -ten Jahres ist danach (1) der Gesamtwert, da es sich um eine

$$(1) \quad s_n = b \cdot r^0 + b \cdot r^1 + \dots + b \cdot r^{n-1} = b(r^n - 1)/(r - 1)$$

endl. geometr. Reihe von  $n$  Gliedern mit dem Quotienten  $r$  handelt. Diskontiert man diese Summe  $s_n$  auf den Beginn des ersten Jahres, so erhält man nach (2) den Barwert  $a$ , d. h. den Betrag, der zu Beginn der Laufzeit zu zahlen ist, um den Endwert  $s_n$  der Rente durch eine einmalige Zahlung zu erfüllen, wenn  $v = 1/r$  gesetzt wird.

$$(2) \quad a = s_n/r^n = s_n v^n = (b/r^n) \cdot (r^n - 1)/(r - 1)$$

II.1. Beispiel: Eine nachschüssige Rente von 300,- M, die 15 Jahre gezahlt werden soll, hat bei einem Zinssatz von 3,25% nach (3) einen Endwert von 5683,40 M.

$$(3) \quad s_n = b(r^n - 1)/(r - 1) = 300(1,0325^{15} - 1)/(1,0325 - 1) = 300 \cdot 0,6157/0,0325 = 5683,38$$

II.2. Beispiel: Eine nachschüssige Rente von 200,- M kann rund 9 Jahre gezahlt werden, damit sie bei einer Verzinsung von 3,25% den Endwert 2000,- M hat. Aus der Beziehung (1) erhält man

(4) und daraus (5) bzw. in Zahlen (6).

$$(4) \quad r^n = [s_n(r - 1)/b] + 1$$

$$(5) \quad n = \lg \{ [s_n \cdot (r - 1)/b] + 1 \} / \lg r$$

$$(6) \quad n = \lg \{ [10(1,0325 - 1)] + 1 \} / \lg 1,0325 \\ = \lg 1,325 / \lg 1,0325 = 0,12222/0,01389 \\ = 8,7992$$

**II.3. Beispiel:** Der Barwert der in II.1. berechneten Summe  $s_{15} = 5683,40$  M ergibt sich durch Diskontierung auf den Zeitpunkt 0; man erhält  $a = s_n/r^n = 5683,40/1,6157 = 3517,70$ . Die Ablösungssumme der Rente beträgt 3518,— M.

**II.4. Beispiel:** Aus einem Endwert der Rente von 10000,— M kann 20 Jahre lang bei einem Zinssatz von 3,25% eine nachschüssige Rente von 363,— M gezahlt werden. Diese Rate  $b$  ergibt sich aus (7) zu 362,80 M.

$$(7) \quad b = s_n(r - 1)/(r^n - 1) \\ = 10000(1,0325 - 1)/(1,0325^{20} - 1) \\ = 325/(1,8958 - 1) = 362,80$$

**III. In einer vorschüssigen Zeitrente** werden die Raten  $b$  am Anfang jedes Jahres gezahlt, die erste Rate  $b$  wächst deshalb bis zum Ende des  $n$ -ten Jahres an auf  $b \cdot r^n$ , die 2. Rate auf  $b \cdot r^{n-1}$ , ..., die letzte Rate, die am Anfang des  $n$ -ten Jahres gezahlt wird, wächst an auf  $b \cdot r^1$ . Danach gibt (8) den Endwert  $\bar{s}_n$  der vorschüssigen Zeitrente an. Ihr Barwert  $a$

$$(8) \quad \bar{s}_n = b \cdot r + b \cdot r^2 + \dots + b \cdot r^n \\ = br(r^n - 1)/(r - 1)$$

wird durch Diskontierung des Endwertes  $\bar{s}_n$  nach (9) ermittelt.

$$(9) \quad \bar{a} = \bar{s}_n \cdot v^n = br \cdot (r^n - 1)/(r - 1) \\ = (b/r^{n-1})(r^n - 1)/(r - 1)$$

Mit den Ausgangswerten von II.1. bis II.4. erhält man die folgenden Zahlenwerte.

**III.1.** Eine vorschüssige Rente entsprechend II.1. hat laut (10) nach 15 Jahren den Endwert 5868,10 M.

$$(10) \quad \bar{s}_n = b \cdot r(r^n - 1)/(r - 1) \\ = 300 \cdot 1,0325 \cdot (1,0325^{15} - 1)/(1,0325 - 1) \\ = 12,39 \cdot 6157/13 = 5868,10$$

**III.2.** Eine vorschüssige Rente entsprechend II.2. erreicht ebenfalls nach rund 9 Jahren den Endwert, denn aus der Formel für  $\bar{s}_n$  erhält man (11).

$$(11) \quad n = \lg \{ [\bar{s}_n(r - 1)/(b \cdot r)] + 1 \} / \lg r \\ = \lg \{ [10 \cdot 0,0325/1,0325] + 1 \} / \lg 1,0325 \\ = \lg 1,31477 / \lg 1,0325 \\ = 0,11885/0,01389 = 8,5565$$

**III.3.** Entsprechend zu II.3. ergibt sich bei vorschüssiger Zahlung der Barwert  $\bar{a}$  aus (12); d. h., die Rente kann durch 3632,— M abgelöst werden.

$$(12) \quad \bar{a} = \bar{s}_n/r^n = 5868,10/1,6157 = 3632,00$$

**III.4.** Die II.4. entsprechende vorschüssige Rente beträgt rund 351,— M, denn aus der Beziehung  $\bar{s}_n = br(r^n - 1)/(r - 1)$  gewinnt man (13).

$$(13) \quad b = \bar{s}_n(r - 1)/[r(r^n - 1)] \\ = 10000 \cdot (1,0325 - 1)/[1,0325 \cdot (1,0325^{20} - 1)] \\ = 10000 \cdot 0,0325/[1,0325 \cdot 0,8958] = 351,38$$

**Repräsentant** ↗ Kardinalzahl, ↗ Kongruenz von Zahlen III., ↗ rationale Zahlen I., ↗ Vektor I. **Repräsentationsprobleme** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme I.1.

**Residuum:** Koeffizient  $c_{-1}$  in der Laurentreihe einer in der Umgebung des Entwicklungspunktes  $z_0$  außer in  $z_0$  selbst analyt. Funktion  $f(z)$ . Hat die Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$ , das von einer Kurve  $C$  berandet wird, nur endlich viele isolierte Singularitäten, so gilt der *Residuensatz*: Ist eine Funktion  $f(z)$  im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes, das von einer Kurve  $C$  berandet wird, analytisch mit Ausnahme von endlich vielen Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , so ist das Kurvenintegral (1) längs der geschlossenen Kurve  $C$  gleich der Summe der Residuen von  $f(z)$  in  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

Dabei liegt das Gebiet im Sinne der Orientierung von  $C$  zur Linken. Dieser Satz kann zur Berechnung von komplexen bzw. reellen uneigentlich. Integralen verwendet werden.

**Resolvente** ↗ Gleichung vierten Grades, ↗ Integralgleichung II., ↗ Resolventenmenge I.

**Resolventenmenge:** I. die in bezug auf einen linearen Operator  $A$ , der einen normierten linearen Raum  $X$  in sich abbildet, gebildete Menge  $\rho(A)$  aller komplexen Zahlen  $\lambda$ , für die zu dem Operator  $A_\lambda \equiv A - \lambda I$  ein beschränkter, auf dem ganzen Raum definierter inverser Operator  $A_\lambda^{-1}$  existiert; genauer wird  $\rho(A)$  die R. des Operators  $A$  gen. Der Operator  $A_\lambda^{-1}$  wird mit  $R_\lambda$  bezeichnet und heißt *Resolvente*. Die Komplementärmenge der R. in der komplexen Zahlenebene nennt man das *Spektrum*  $\sigma(A)$  des Operators  $A$ . Jeder ↗ Eigenwert  $\lambda$  des Operators  $A$  gehört zum Spektrum, denn die Gleichung  $Ax - \lambda x = 0$  hat in diesem Fall eine Lösung  $x \neq 0$ , d. h., der Operator  $A_\lambda$  hat keinen inversen Operator.  $A_\lambda^{-1}$  existiert genau dann, wenn  $\lambda$  kein Eigenwert ist. Im allg. ist das Spektrum jedoch größer als die Menge der Eigenwerte, denn in der gegebenen Definition wird z. B. noch die Beschränktheit des inversen Operators  $A_\lambda^{-1}$  gefordert. Der Multiplikationsoperator  $y = Ax \rightsquigarrow tx(t)$  auf dem Hilbertraum  $L_2(0, 1)$  (↗ Raum. normierter linearer) z. B. hat keinen einzigen Eigenwert, während sein Spektrum aus dem gesamten Intervall  $[0, 1]$  besteht. Für den durch eine  $(n, n)$ -Matrix  $A$  definierten Operator  $y = Ax$  im Raume  $\mathbb{C}^n$  ist das Spektrum des Operators mit der Menge seiner Eigenwerte identisch, denn im  $\mathbb{C}^n$  ist jeder lineare Operator beschränkt.

**II.** Die Frage nach dem Spektrum bzw. nach der R. eines Operators ergibt sich unmittelbar aus folgen-

der Problemstellung, die z. B. in der Theorie der Integralgleichungen ( $\nearrow$  Fredholmsche Alternative) auftritt: Bei gegebenem Element  $y$  ist die Operatorgleichung  $A_1 x \equiv Ax - \lambda x = y$  zu lösen. Für  $\lambda \in \rho(A)$  hat diese Gleichung eine eindeutige Lösung  $x = R_\lambda y$ , die stetig von  $y$  abhängt. — In der Funktionalanalysis ist es oft notwendig, aus bestimmten Eigenschaften eines Operators Rückschlüsse auf sein Spektrum bzw. seine  $R$ . zu ziehen. Das Spektrum eines hermiteschen Operators ( $\nearrow$  Operator, linearer, VI.) im Hilbertraum z. B. ist immer eine Teilmenge der reellen Achse und das eines unitären Operators ( $\nearrow$  Operator, linearer VII.) stets eine Teilmenge des Einheitskreises der komplexen Zahlenebene. Spezialfälle dieser Resultate sind die aus der Matrizenlehre bekannten Sätze, die besagen, daß eine hermitesche Matrix nur reelle Eigenwerte und eine unitäre Matrix nur Eigenwerte vom Betrag 1 hat. — In der Quantenphysik entspricht jede physikal. Größe einem linearen Operator im Hilbertraum und die Menge ihrer möglichen Meßwerte dem Spektrum dieses Operators.

response  $\nearrow$  System I.

**Ressourcenbeschränkung:** Nebenbedingung in einem Problem der Operationsforschung, die meist in der Form  $R(x) \leq b$  eine Schranke  $b$  für die verfügbaren Hilfsmittel angibt, z. B. für Arbeitskräfte, Material oder Arbeitsstunden.

Rest  $\nearrow$  Funktionenreihe I.,  $\nearrow$  Kongruenz von Zahlen I.,  $\nearrow$  Reihe III.,  $\nearrow$  Teilbarkeit IV.

Rest, quadratischer  $\nearrow$  Reziprozitätsgesetz, quadratisches.

Restesystem  $\nearrow$  Kongruenz von Zahlen I.

Restfehler  $\nearrow$  Fehler II.

Restform  $\nearrow$  Taylorsche Reihe I.

Restglieder  $\nearrow$  Fehler II.

Restklasse  $\nearrow$  Äquivalenzrelation II.,  $\nearrow$  Kongruenz von Zahlen I.,  $\nearrow$  Ring II.

Restklassenring  $\nearrow$  Kongruenz von Zahlen III.,  $\nearrow$  Ring II.

Restriktion  $\nearrow$  Optimierung I.

reziproke Differenzen  $\nearrow$  Kettenbruchentwicklung.

reziproker Wert  $\nearrow$  Brüche I.5.

Reziprozität svw. Dualität.

Reziprozitätsgesetz, quadratisches: sind  $p$  und  $q$  ungerade Primzahlen, so gilt (1), wenn das Legendresche Symbol  $\left(\frac{a}{p}\right)$  definiert ist durch  $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ , falls  $a$  durch  $p$  teilbar ist, durch  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ , falls es eine ganze Zahl  $x$  gibt, deren Quadrat bei Division durch  $p$  denselben Rest läßt wie  $a$ , und durch  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ , falls es eine solche Zahl  $x$  nicht gibt. Äquivalent dazu ist die Aussage  $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$  bzw.  $-1$  je nachdem, ob die Kongruenz  $x^2 \equiv a \pmod{p}$

(mod  $p$ ). Zum Beispiel ist 13 quadratischer Rest modulo 17, denn  $x^2 \equiv 13 \pmod{17}$  hat die Lösung 8; hingegen ist  $x^2 \equiv 5 \pmod{17}$  unlösbar, also 5 quadratischer Nichtrest modulo 17. Die Frage, welche Zahlen  $a$  quadratische Reste nach einer gegebenen Primzahl  $p \neq 2$  sind, beantwortet das *Eulersche Kriterium*: Genau diejenigen  $a$  mit  $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$  sind quadratische Reste mod  $p$ . Daher gibt es für ungerade Primzahlen  $p$  genau  $(p-1)/2$  quadratische Reste und  $(p-1)/2$  quadratische Nichtreste; z. B. sind 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 alle quadratische Reste mod 17; 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14 alle quadratische Nichtreste mod 17. Die umgekehrte Frage, für welche Primzahlen  $p$  eine gegebene Zahl  $a$  quadratischer Rest mod  $p$  ist, wird durch das q. R. (1) beantwortet. Insbesondere gilt (2).

$$(2) \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \text{ und } \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}.$$

Danach ist die Kongruenz  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  unlösbar für  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , weil dann  $(p-1)/2$  ungerade ist, die Kongruenz ist lösbar für  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , denn dann ist  $(p-1)/2$  gerade.

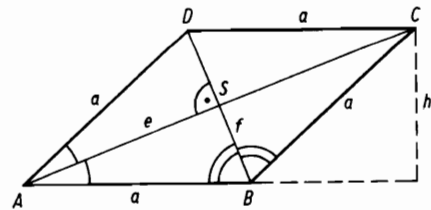
Das Legendresche Symbol genügt für ungerade Primzahlen  $p$  und zu  $p$  teilerfremden Zahlen  $a, b$

der Rechenregel  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$ , die man zur Untersuchung des quadratischen Restcharakters von Zahlen oft heranzieht.

In Verallgemeinerung des quadratischen Restes bezeichnet man diejenigen Zahlen  $a$ , für die die *binomische Kongruenz*  $x^n \equiv a \pmod{p}$ ,  $(a, p) = 1$ , lösbar ist, als *n-te Potenzreste*; andernfalls heißen sie *n-te Potenznichtreste*. Das Eulersche Kriterium lautet in diesem Fall: Die Zahl  $a$  ist  $n$ -ter Potenzrest mod  $p$  genau dann, wenn  $a^{(p-1)/n} \equiv 1 \pmod{p}$ , wobei  $t = (p-1)/n$ . Zur Beantwortung der Frage nach denjenigen Primzahlen  $p$ , für die eine gegebene Zahl  $a$   $n$ -ter Potenzrest ist, hat man allgemeinere Reziprozitätsgesetze entwickelt.

**Rhomboid:** ein Parallelogramm, das kein Rhombus ist.

**Rhombus, Raute:** Viereck  $ABCD$ , dessen vier Seiten kongruent sind. Jede Diagonale zerlegt den R. in zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke und hal-



Rhombus

biert die Innenwinkel. Die zwei Diagonalen halbieren einander und stehen senkrecht aufeinander (Abb.). Der R. ist ein Parallelogramm. Die Fläche des R. hat den Inhalt  $A_{Rh} = g \cdot h$ , wenn  $g$  die Länge der Seite und  $h$  der Abstand zweier paralleler

$$(1) \quad \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{[(p-1)/2] \cdot [(q-1)/2]}$$

mit  $\text{ggT}(a, p) = 1$  lösbar ist oder nicht. Ist  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  lösbar, heißt  $a$  ein *quadratischer Rest* (mod  $p$ ), andernfalls *quadratischer Nichtrest*

Seiten ist, bzw.  $A_{RH} = (e \cdot f)/2$ , wenn  $e$  bzw.  $f$  die Längen der Diagonalen  $AC$  bzw.  $BD$  sind.

**Riccati**, Jacopo Francesco, geb. 28. 5. 1676 Venedig, gest. 15. 4. 1754 Treviso. — Der Grafensohn R. wurde seit 1686 am Jesuitenkollegium in Brescia erzogen und studierte 1693/96 in Padua. Er kehrte danach in seine Heimatstadt zurück, lebte dort als reicher Privatmann und lehnte alle Berufungen, auch die ehrenvollsten, ab. 1747 zog er sich nach Treviso zurück. — Für die Mathematik bedeutungsvoll wurde sein außerordentlich umfangreicher Briefwechsel, der die Theorie der *Differentialgleichungen* behandelte. Im Jahre 1723 veröffentlichte R. die nach ihm ben. Gleichung, die bes. das Interesse der **BERNOULLIS** weckte.

**Richtung, brauchbare, zulässige**  $\nearrow$  Abstiegsverfahren.

**Richtungsableitung**  $\nearrow$  Differentialquotient, partieller, III.,  $\nearrow$  elliptische Differentialgleichung II.1.,  $\nearrow$  Gradient II.,  $\nearrow$  Nablaoperator II.2.

**Richtungsfeld**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.

**Richtungskosinus**: Kosinuswerte der Größen der *Richtungswinkel* einer orientierten Geraden  $g$ , d. h. der Winkel, die eine Parallele zur Geraden durch den Ursprung eines kartes. Koordinatensystems mit dessen positiven Achsen bilden. Diese drei Winkel sind je nach dem Drehsinn der Winkelmessung zweideutig, ihre Kosinuswerte aber sind eindeutig bestimmt, da  $\cos \alpha = \cos (2\pi - \alpha)$ . Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Größen dieser Richtungswinkel und liegen die Punkte  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und  $P = (x, y, z)$  auf der Parallelen zu  $g$  durch  $O$ , so gilt (1) bzw. (2). Aus  $|P_1P|^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$  ergibt sich die grundlegende Beziehung (3) für die R.

$$(1) \quad x = x_1 + |P_1P| \cos \alpha, \quad y = y_1 + |P_1P| \cos \beta, \\ z = z_1 + |P_1P| \cos \gamma$$

$$(2) \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ = |P_1P|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

$$(3) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Auch umgekehrt können drei beliebige Zahlen  $a, b, c$ , für die  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  gilt, als R. einer orientierten Geraden im Raum aufgefaßt werden. Verläuft die orientierte Gerade vom Punkte  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  zum Punkte  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , so lassen sich ihre R. nach (4) berechnen, wobei  $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . Sind z. B. gegeben  $P_1 = (5, 2, 1)$  und  $P_2 = (-3, -2, 0)$ , so gilt  $D = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9$  und damit  $\cos \alpha = (-3 - 5)/9 = -8/9$ ,  $\cos \beta = (-2 - 2)/9 = -4/9$  und  $\cos \gamma = (0 - 1)/9 = -1/9$ .

$$(4) \quad \cos \alpha = (x_2 - x_1)/D, \\ \cos \beta = (y_2 - y_1)/D, \\ \cos \gamma = (z_2 - z_1)/D$$

**Richtungsvektor**  $\nearrow$  Geradengleichung I.,  $\nearrow$  Tangente.

**Richtungswinkel**  $\nearrow$  Polygonzug,  $\nearrow$  Richtungskosinus.

**Riemann**, Bernhard, geb. 17. 9. 1826 in Breselenz als Sohn eines Predigers, gest. 20. 7. 1866 Selsaca am Lago Maggiore. — R. studierte seit 1846 in Göttingen erst Philologie und Theologie, ehe er ganz zur Mathematik überging. Nach einem Studienaufenthalt 1847/49 in Berlin promovierte R. 1851 in Göttingen. Es folgten verschiedene Stellungen, bevor er 1859 o. Professor wurde. Durch ein schweres Lungenleiden gequält, verbrachte R. seit 1862 seine letzten Jahre fast ausschließlich in Italien. — Seine Theorie der *quadrat. Differentialformen* ist für die Relativitätstheorie ebenso grundlegend geworden wie die *R.sche Geometrie*. Die Idee der *R.schen Fläche* verliert die Funktionentheorie ihren geometr. Zug. R. lieferte auch fundamentale Arbeiten zur Theorie der Abelschen Funktionen, zum R.schen Integral, zur Theorie der Differentialgleichungen und zur *analyt. Zahlentheorie*.

**Riemann-meßbar**  $\nearrow$  Peano-Jordanscher Inhalt II.

**Riemannsche Fläche**  $\nearrow$  analytische Fortsetzung II.,  $\nearrow$  komplexwertige Funktion, elementare, III.

**Riemannsche Geometrie**: Geometrie eines Riemannschen Raumes, einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, in der das Bogenelement durch die quadratische Differentialform (1) gegeben ist.

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_k$$

S. a. Grundformen einer Fläche I.; innere Geometrie II.

**Riemannscher Abbildungssatz**  $\nearrow$  konforme Abbildung II.

**Riemannscher Inhalt** svw. Peano-Jordanscher Inhalt I.

**Riemannsche Vermutung**  $\nearrow$  Zetafunktion, Riemannsche.

**Riemannsche Zahlenkugel**  $\nearrow$  Gaußsche Zahlenebene III.

**Ries**, Adam, geb. um 1492 Staffelstein (Franken), gest. 30. 3. 1559 Annaberg; Rechenmeister und Verfasser von Rechenbüchern in deutscher Sprache, die wegen des method. Geschicks von R. lange in Gebrauch blieben.

**Riesz**, Friedrich, geb. 22. 1. 1880 Győr, gest. 28. 2. 1956 Budapest (?). — R. studierte in Zürich und Budapest, wo er 1902 promovierte. Über Göttingen und Kolozsvár [Cluj] kam er 1919 als Professor nach Szeged. Hier schuf er mit HAAK ein anerkanntes mathemat. Zentrum. Seine hervorragenden Arbeiten zur Theorie der Funktionenräume und der linearen Operatoren stempeln ihn zu einem Begründer der *Funktionalanalysis*. Weitere bedeutende Veröffentlichungen, z. B. über subharmon. Funktionen, beeinflussten die Funktionen- und die Potentialtheorie, die *Ergodentheorie* und die Theorie der *topolog. Räume*. 1946 ging R. nach Budapest. Sein Buch zur Funktionalanalysis (mit Sz. NAGY, 1952) gilt noch heute als eines der Standardbücher.

**Ring**: I. Eine Menge  $R$  mit zwei binären Operationen, der *Addition* und der *Multiplikation*, wenn  $R$  bzgl. der Addition eine *abelsche Gruppe*, bzgl. der Multiplikation eine *Halbgruppe* ist und beide Opera-

tionen über die *Distributivgesetze*  $(a + b)c = ac + bc$ ,  $c(a + b) = ca + cb$  zusammenhängen. In einem R. ist daher die Multiplikation assoziativ; die Addition ist assoziativ und kommutativ; es existiert ein *Nullelement*  $o$  mit der Eigenschaft  $a + o = o + a = a$  für alle  $a \in R$ , und zu jedem Element  $a \in R$  existiert ein *entgegengesetztes Element*  $-a$  mit  $a + (-a) = o$ .

Gilt auch bzgl. der Multiplikation das Kommutativgesetz, nennt man den R. *kommutativ*. Existiert bzgl. der Multiplikation ein Einselement  $e$ , so daß  $e \cdot a = a \cdot e = a$  für jedes R. element  $a$  gilt, spricht man von einem R. mit *Einselement*. Ein Linkseinselement mit  $e \cdot a = a$  für beliebige  $a$  muß nicht notwendig Einselement sein.

Wegen der Gültigkeit der Distributivgesetze gilt in einem R. stets  $o \cdot a = a \cdot o = o$ . Gibt es zum Element  $a \in R$  ein Element  $b \neq o$  des R.s, so daß  $a \cdot b = o$ , so heißt  $a$  *Linksnulleiter*, analog definiert man *Rechtsnulleiter*. Für kommutative R.e ist es sinnvoll, nur von Nullteilern zu sprechen. Das Nullelement  $o$  ist stets Nullteiler; hat ein R. nur  $o$  als Nullteiler, so heißt er *nulleiterfrei*. Ein kommutativer nulleiterfreier R. heißt *Integritätsbereich*. Dagegen ist in einem Ring  $R$ , in dem für beliebige Elemente  $a, b$  stets  $a \cdot b = o$  ist, jedes Element ein Nullteiler; solche R. heißen *Zeroringe*.

Für ein Element  $a$  gilt genau dann die linksseitige  $\nearrow$  Kürzungsregel, wenn es kein Linksnulleiter ist;  $a$  heißt dann *linksregulär*. Die *regulären* Elemente eines R.es sind weder Links- noch Rechtsnulleiter; ist  $a$  regulär, so haben die Gleichungen  $a \cdot x = b$  und  $y \cdot a = b$  höchstens eine Lösung  $x$  bzw.  $y$ . Haben die Gleichungen  $a \cdot x = b$  und  $y \cdot a = b$  für alle Elemente  $b$  stets eine Lösung, so heißt  $a$  *invertierbar*; zu  $a$  existiert dann eindeutig ein *Inverses*  $a^{-1}$ , und die Lösungen der Gleichungen sind  $x = a^{-1} \cdot b$  und  $y = b \cdot a^{-1}$ . Die invertierbaren Elemente eines R.es heißen *Einheiten*: sie bilden bzgl. der Multiplikation eine Gruppe, deren Einselement das Einselement des R.es ist. Das Nullelement ist nicht Einheit, es sei denn, der R. ist der *Nullring*, d. h. der R., der nur aus dem Nullelement besteht. Ist ein R. nicht der Null-R. und sind alle vom Nullelement verschiedenen Elemente invertierbar, so heißt er *Schiefkörper*. Ein kommutativer Schiefkörper heißt *Körper*.

*Beispiele* für R.e: 1. a) Die ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$ , 1. b) die ganzen  $\nearrow$  *Gaußschen Zahlen*, 2. a) Die *geraden Zahlen*, 2. b) die *ganzen Gaußschen Zahlen*  $a + b \cdot i$ , in denen  $a + b$  durch 2 teilbar ist. 3. a) Die *rationalen Zahlen*  $\mathbf{Q}$ , 3. b) die *reellen Zahlen*  $\mathbf{R}$ , 3. c) die *komplexen Zahlen*  $\mathbf{C}$ , 4. a) Die *Polynome*  $f(x)$  in der Unbestimmten  $x$  mit reellen Koeffizienten; 4. b) die *Polynome*  $f(x_1, \dots, x_k)$  in den endlich vielen Unbestimmten  $x_1, \dots, x_k$  mit reellen Koeffizienten ( $\nearrow$  *Polynomring*). 5. Die *n-reihigen quadrat. Matrizen* ( $\nearrow$  *Matrix*) mit reellen Elementen. Die Beispiele 1. bis 4. sind *kommutative Ringe*, 1. und 3., 4., 5. haben ein *Einselement*, 1., 2., 3., 4. sind *nulleiterfrei* und deshalb *Integritätsbereiche*. In 1. a) sind 1 und  $-1$  die *Einheiten*, in 1. b) 1,  $i$ ,  $-1$  und  $-i$ , in 4. sind die Polynome nullten Grades *Einheiten*, die mit

einer reellen Zahl  $\neq 0$  identifiziert werden können, in 5. die *regulären Matrizen*. Die Beispiele 3. a) bis 3. c) sind *Körper*. In 5. sind die *nichtregulären Matrizen* sowohl *Links-* als *Rechtsnulleiter*.

II. Ist eine nichtleere Untermenge eines R.es  $R$  bzgl. der bisherigen Operationen wieder ein R., heißt sie *Unterring* von  $R$ ; dies ist bereits der Fall, wenn sie mit je zwei Elementen  $a$  und  $b$  stets auch  $a - b$  und  $a \cdot b$  enthält.

Eine den Normalteilern von Gruppen analoge Rolle spielen spezielle *Unterringe*, die *Ideale*. Eine nichtleere Teilmenge  $A$  des R.es  $R$  heißt *Ideal*, wenn mit  $a$  und  $b$  auch die Differenz  $a - b$  Element von  $A$  ist und wenn die Produkte  $r \cdot a$  und  $a \cdot r$  eines Elements  $a \in A$  und eines beliebigen Ringelements  $r$  wieder Elemente von  $A$  sind. *Triviale Ideale* und auch *Unterringe* sind der ganze R.  $R$  und das *Nullideal*, das nur aus dem Nullelement besteht. Alle anderen Ideale heißen *nichttriviale Ideale*. Hat ein R. nur die trivialen Ideale, so heißt er *einfach*. Jeder Schiefkörper ist einfach, erst recht jeder Körper. Umgekehrt ist ein einfacher kommutativer R., der nicht *Zeroring* ist, ein Körper.

Im R. der ganzen Zahlen bilden die durch eine natürl. Zahl  $m$  teilbaren Zahlen ein Ideal, das mit  $(m)$  bezeichnet wird, da es aus allen ganzzahligen Vielfachen von  $m$  besteht. Ein solches Ideal, das von einem Element des R.es, hier  $m$ , erzeugt wird, heißt *Hauptideal*. In einem kommutativen R. mit Einselement besteht das vom Element  $a$  erzeugte Hauptideal  $(a)$  aus allen Elementen der Form  $r \cdot a$ , wenn  $r$  ein R.-Element ist. Ist in einem kommutativen R.  $R$  jedes Ideal Hauptideal, so heißt  $R$  *Hauptideal-R.* Der R. der ganzen Zahlen  $\mathbf{Z}$  ist ein Hauptideal-R. In einem Hauptideal-R. mit Einselement kann man jedes Element eindeutig bis auf die Reihenfolge und bis auf Einheiten in ein Produkt von Primfaktoren ( $\nearrow$  *Primelement*) zerlegen. Der wichtigste Fall eines Hauptideal-R.s ist ein  $\nearrow$  *euklid. R.*, in dem ein Divisionsalgorithmus analog dem euklid. Algorithmus der ganzen Zahlen gilt ( $\nearrow$  *Polynom II.*).

Ein Ideal  $A$  im R.  $R$  liefert eine Einteilung des R.es in Neben- oder *Restklassen* nach  $A$ , da  $A$  eine Untergruppe der additiven Gruppe des R.es ist. Zwei Elemente  $a$  und  $b$  des R.s heißen *kongruent modulo*  $A$ , wenn sie zur selben Restklasse nach  $A$  gehören, d. h. wenn  $a - b \in A$  ist. Man schreibt  $a \equiv b \pmod{A}$  oder kurz:  $a \equiv b(A)$ . Bei Hauptidealen  $(m)$ , insbes. im Hauptideal-R. der ganzen Zahlen, schreibt man  $a \equiv b(m)$  und spricht von einer *Kongruenz*. Mit Kongruenzen darf man rechnen wie mit Gleichungen, nur darf man i. allg. nicht kürzen. Gelten die Kongruenzen  $a \equiv a' \pmod{A}$  und  $b \equiv b' \pmod{A}$ , so folgen  $a \pm b \equiv a \pm b' \equiv a' \pm b' \pmod{A}$  und  $a \cdot b \equiv a \cdot b' \equiv a' \cdot b' \pmod{A}$  ( $\nearrow$  *Kongruenz von Zahlen II.*).

Ordnet man jedem R. element  $a \in R$  seine Restklasse  $\bar{a}$  zu, d. h.  $\bar{a} = a + A$  in additiver Schreibweise ( $\nearrow$  *Gruppe I.*), so kann man durch (1) für die Restklassen eine Addition und eine Multiplikation de-

$$(1) \quad \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{und} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

finieren. Wie die Kongruenzrechnung zeigt, hängt diese Definition nicht von der Wahl der Vertreter der Restklassen ab; die Restklassen bilden daher wieder einen R., den *Restklassen-R.*  $R/A$  [gesprochen:  $R$  nach  $A$ ].

III. Ist  $R$  ein R. und  $S$  eine Menge, in der eine Addition und eine Multiplikation erklärt sind, und ist  $\varphi$  eine Funktion von  $R$  in  $S$ , so daß stets die Gleichungen (2) gelten, so heißt  $\varphi$  *R-homomorphismus* von  $R$  in  $S$ . Die Summe bzw. das Produkt der Bilder ist gleich dem Bild der Summe bzw. des Produktes. Die Menge aller Bilder  $\varphi(a)$  in  $S$  heißt *homomorphes Bild* von  $R$  und ist selbst wieder ein R.; er wird mit  $\varphi(R)$  bezeichnet. Ist die Funktion  $\varphi$  sogar eindeutig von  $R$  auf  $S$ , spricht man von einem *Isomorphismus* zwischen  $R$  und  $S$ .

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(b) &= \varphi(a + b), \\ \varphi(a) \cdot \varphi(b) &= \varphi(a \cdot b) \end{aligned}$$

Der *Homomorphiesatz* für R.e besagt, daß der R.  $R$  homomorph auf den Restklassen-R.  $R/A$  bzgl. eines Ideals  $A$  abgebildet wird, indem jedem Element  $a \in R$  seine Restklasse  $a + A$  zugeordnet wird, und daß umgekehrt jedes von vorgegebenen R.  $R$  homomorphe Bild  $S$  isomorph zum Restklassen-R.  $R/A$  bzgl. eines gewissen Ideals  $A$  von  $R$  ist. Das Ideal  $A$  wird bei der homomorphen Abbildung  $R \rightarrow R/A$  auf das Nullelement des Restklassen-R.s abgebildet; es ist der *Kern* des Homomorphismus. Triviale Restklassen-R.e eines jeden R.es  $R$  sind  $R/R$ , der isomorph zum Null-R.  $o$ , und  $R/o$ , der isomorph zum R.  $R$  ist.

**Ring, Boolescher** ↗ Boolesche Algebra.  
**Ring der ganzen algebraischen Zahlen** ↗ Zahlkörper II.  
**Ringhomomorphismus** ↗ Ring III.  
**Riß** ↗ Projektion II.  
**Rißachse** ↗ Zweitafelprojektion I.  
**Rißebene** ↗ Projektion I.  
**Rißtafel** ↗ Projektion I.  
**Ritz, Walther**, geb. 22. 2. 1878 Sion, Valais (Schweiz), gest. 7. 7. 1909 Göttingen. — R. beendete 1900 das Studium an der Universität Zürich und promovierte 1902 in Göttingen. Er forschte vor allem auf physikal. Gebiet. Seine Habilitationsschrift enthält eine „*neue Methode zur Lösung von Variationsproblemen*“, das R.sche Verfahren (↗ direkte Methode).  
**R-Modul** ↗ Modul II.  
**Rolle, Michel**, geb. 1652 in der Auvergne, gest. 1719. — R. war seit 1685 besoldetes Mitglied der Académie des Sciences, sein Hauptwerk »*Traité d'Algèbre*« erschien 1690; er setzte sich aber auch mit dem Leibnizschen »*Calculus*« (1700/07) auseinander und bewies 1691 den nach ihm ben. Mittelwertsatz.

**Rolle, Satz von:** Ist die Funktion  $f$  der reellen Variablen  $x$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig, im offenen Intervall  $]a, b[$  differenzierbar und gilt in den Endstellen  $a, b$  des Intervalls  $f(a) = f(b) = 0$ , so gibt es mindestens eine Stelle  $x_0$  im offenen Intervall  $]a, b[$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

Geometrisch bedeutet dies: wenn die Kurve der Funktion in den Eckpunkten  $a, b$  die  $x$ -Achse schneidet und in jedem inneren Punkte von  $]a, b[$  eine Tangente hat, dann ist für mindestens eine Stelle  $x_0$  die Kurventangente zur  $x$ -Achse parallel (Abb. 1).

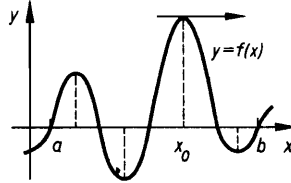


Abb. 1: Zum Satz von Rolle

Danach liegt zwischen zwei Nullstellen eines Polynoms  $P(x)$  mindestens eine *Nullstelle der Ableitung*  $P'(x)$ . Es lassen sich leicht Gegenbeispiele dafür finden, daß der Satz von Rolle nicht gilt, wenn die Funktion  $f$  in  $[a, b]$  nicht stetig (Abb. 2) oder nicht in jedem Punkte von  $]a, b[$  differenzierbar ist (Abb. 3). Die Voraussetzung  $f(a) = f(b) = 0$  ist dagegen nicht wesentlich, für  $f(a) \neq f(b)$  gilt dieser Satz ebenfalls. Eine weitere Verallgemeinerung ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

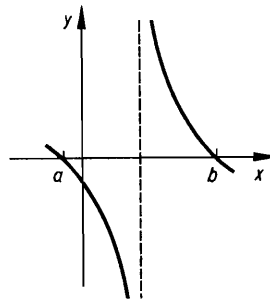


Abb. 2: Der Satz von Rolle gilt nicht, falls die Funktion nicht stetig ist

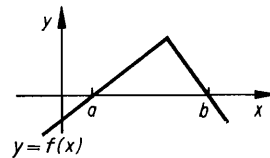


Abb. 3: Der Satz von Rolle gilt nicht, falls die Funktion nicht in jedem Punkte differenzierbar ist

**Rollkurve** swv. **Zykloide**.

**Romberg-Integration** ↗ Integration, numerische IV.

**römisches Zahlensystem** ↗ Zahlensystem II.

**Rosen, Verfahren von** ↗ Abstiegsverfahren.

**rot** ↗ Rotation.

**Rotation**, Zeichen rot: I. Vektorfeld  $R(x, y, z) = r(x, y, z) \mathbf{i} + s(x, y, z) \mathbf{j} + t(x, y, z) \mathbf{k}$ , das aus einem in kartes. Koordinaten gegebenen Vektorfeld  $V(x, y, z) = u(x, y, z) \mathbf{i} + v(x, y, z) \mathbf{j} + w(x, y, z) \mathbf{k}$  durch (1) berechnet wird. Man schreibt dann (2).

$$(1) \quad r = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad s = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



$$(2) \quad \mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{V} \\ = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Für  $\mathbf{V} = 2xy \mathbf{i} + (e^x + z) \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  berechnet man z. B. die R. nach (3).

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{V} = (0 - 1) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (e^x - 2x) \mathbf{k} \\ = -\mathbf{i} + (e^x - 2x) \mathbf{k}$$

Vektorfelder  $\mathbf{V}$  mit der Eigenschaft  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$  heißen *wirbelfrei*. Wirbelfreie Vektorfelder sind stets konservativ, d. h., es existiert ein skalares Feld  $U$ , dessen Gradient  $\mathbf{V}$  ist ( $\nearrow$  Gradient I.). Die Bedingung  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$  ist für ein konservatives Vektorfeld auch notwendig, es gilt  $\text{rot grad } U = 0$ . Voraussetzung ist stets, daß alle aufgeschriebenen Ableitungen existieren und stetig sind. Das Vektorfeld  $\mathbf{V} = \mathbf{r}/r^3$  z. B. ist wirbelfrei, denn  $\text{rot } \mathbf{V} = \text{rot } (\mathbf{r}/r^3) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0$ . Dieses Vektorfeld ist in der Tat konservativ, denn mit  $U = -1/r$  gilt  $\text{grad } U = \mathbf{V}$ .

Zu einem vorgegebenen Vektorfeld  $\mathbf{V}$  gibt es in einem *sternförmigen Gebiet*  $G$  des Raumes dann und nur dann ein Vektorfeld  $\mathbf{W}$  mit  $\text{rot } \mathbf{W} = \mathbf{V}$ , wenn  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  ist ( $\nearrow$  Divergenz).  $\mathbf{W}$  heißt ein *Vektorpotential* von  $\mathbf{V}$ . Das Vektorpotential  $\mathbf{W}$  ist nur bis auf ein konservatives Vektorfeld  $\text{grad } U$  eindeutig bestimmt, d. h. mit  $\mathbf{W}$  ist auch  $\mathbf{W} + \text{grad } U$  ein Vektorpotential zu  $\mathbf{V}$ . Das Gebiet  $G$  heißt *sternförmig*, falls ein Punkt  $P_0 \in G$  existiert, so daß alle von  $P_0$  ausgehenden Strahlen den Rand von  $G$  nur einmal schneiden.

II. Sind  $\mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_2$  stetig differenzierbare Vektorfelder, ist  $U$  ein stetig differenzierbares skalares Feld und  $c$  eine beliebige Konstante, so gelten für die R. die Rechenregeln (4), (5), (6). ( $\nearrow$  Gradient).

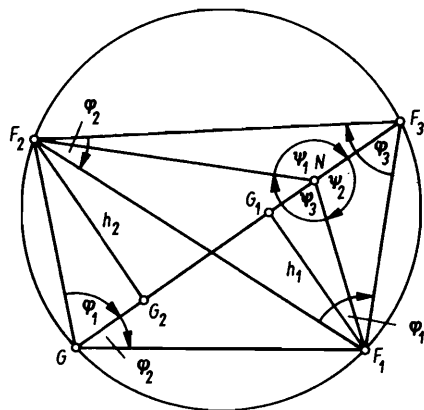
$$(4) \quad \text{rot } (c\mathbf{V}_1) = c \text{rot } \mathbf{V}_1 \\ (5) \quad \text{rot } (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \text{rot } \mathbf{V}_1 + \text{rot } \mathbf{V}_2 \\ (6) \quad \text{rot } (U\mathbf{V}_1) = U \text{rot } \mathbf{V}_1 + \text{grad } U \times \mathbf{V}_1$$

Zu weiteren Rechenregeln, insbes. in Verbindung mit dem Gradienten und der Divergenz, vgl. Nablaoperator.

Die gegebene Definition der R. hängt von dem in kartes. Koordinaten gegebenen Vektorfeld ab. Es ist möglich, eine von der Koordinatendarstellung unabhängige Definition der R. zu geben ( $\nearrow$  Integralsätze III.).

- Rotationsachse  $\nearrow$  Körper V.
- Rotationskolbenmaschine  $\nearrow$  Zykloide VI.
- Rotationskörper  $\nearrow$  Kubatur,  $\nearrow$  Körper V.
- Routh-Hurwitz-Kriterium  $\nearrow$  Stabilität.
- Rückführung, negative  $\nearrow$  Regelung I.
- Rückkehrpunkt  $\nearrow$  rationale Kurve I., V.,  $\nearrow$  Traktrix,  $\nearrow$  Zykloide I.
- Rückkonvertierung  $\nearrow$  dyadisches Zahlensystem II.
- Rückkopplungsschaltung  $\nearrow$  Struktur III.
- Rücktransformation  $\nearrow$  Laplacetransformation.
- Rückwärtsdifferenzen  $\nearrow$  Interpolation II.

**Rückwärtseinschnitt:** Verfahren der Geodäsie, die Koordinaten eines Neupunkts  $N$  aus denen von drei Festpunkten  $F_1, F_2, F_3$  dadurch zu bestimmen, daß vom Neupunkt aus die Größen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  der Winkel in  $N$  zwischen den Richtungen nach den Festpunkten beobachtet werden. Die Aufgabe ist lösbar, wenn  $N$  nicht auf dem Umkreis des Dreiecks  $F_1F_2F_3$  liegt. Faßt man  $N$  als Schnittpunkt der drei Ecktransversalen  $F_1N, F_2N, F_3N$  auf, so ergeben  $x = (g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3)/(g_1 + g_2 + g_3)$  und  $y = (g_1y_1 + g_2y_2 + g_3y_3)/(g_1 + g_2 + g_3)$  seine Koordinaten, wenn  $g_1, g_2, g_3$  geeignet bestimmte Gewichte sind. Zu ihrer Bestimmung dient die mechan. Vorstellung, daß jeweils die Momente zweier Fixpunkte in bezug auf die Transversale durch den dritten einander gleich sind, z. B.



Rückwärtseinschnitt

$g_1h_1 = g_2h_2$  (Abb.). Daraus folgt (1) nach einigen Umformungen, wenn  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  die Größen der Innenwinkel im Dreieck  $F_1F_2F_3$  sind.

$$(1) \quad g_1 = 1/(\cot \varphi_1 - \cot \varphi_1), \\ g_2 = 1/(\cot \varphi_2 - \cot \varphi_2), \\ g_3 = 1/(\cot \varphi_3 - \cot \varphi_3)$$

**Rudloff, Christoff**, geb. etwa 1500 Jauer (Jawor), gest. vor 1552. — R. war Schüler des bekannten Rechenmeisters Heinrich SCHREIBER, gen. GRAMMATEUS. R. scheint den größten Teil seines Lebens in Wien verbracht zu haben, war aber nicht Mitglied des Lehrkörpers der dortigen Universität. — Von R. sind drei Werke bekannt, eine »Coß« (1525), ein Rechenbuch (1526) und eine Beispielsammlung (1530). Eine stark verbesserte Auflage der »Coß« wurde im Jahre 1552 von Michael STIFEL herausgegeben.

**Ruffini, Paolo**, geb. 23. 9. 1765 Valentano (?), gest. 10(?) 5. 1822 Modena. — R. war von Beruf Mediziner, 1788/96 aber Lehrer der Mathematik am Archivgymnasium in Modena, seit 1796 an der dortigen Kriegsschule. — R. erkannte nach seinem Werke »Teoria generale delle equazioni...« (1798) als einer der ersten die grundlegende Bedeutung

der *Gruppentheorie* für die Theorie der Gleichungsauflösung. Er arbeitete über numer. Gleichungen und algebraische Kurven. Sein Beweis der Unmöglichkeit der Auflösung der Gleichungen 5. Grades in Radikalen (1799) ist nicht völlig einwandfrei.

**Runden:** Angabe eines Näherungswerts für eine im Zehnersystem dargestellte Zahl nach einer Regel, aus der die Fehlergrenze für die letzte angegebene Ziffer bekannt ist ( $\nearrow$  Fehler I.). Bei der Angabe von Zahlen wie  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\lg 3$  mit unendlich vielen Stellen deuten drei Punkte, z. B. für  $\pi = 3,14159\dots$ , an, daß jede Ziffer *gültig* ist, d. h., ebenso in der unendl. Folge der Ziffern steht. Über die auf die letzte geschriebene Ziffer folgende ist deshalb nichts bekannt. Beim Abbruch mit dieser Stelle, z. B.  $\pi \approx 3,14159$ , kann der absolute Fehler deshalb eine Einheit dieser Stelle betragen, d. h. hier  $10^{-5}$ . Dieser absolute Fehler ist nur halb so groß, wenn man nach der folgenden Rundungsvorschrift verfährt: 1) Es wird *abgerundet*, d. h., die letzte Ziffer bleibt unverändert, wenn auf sie eine der Ziffern 1, 2, 3 oder 4 folgt; 2) es wird *aufgerundet*, d. h., die letzte Ziffer wird um 1 erhöht, wenn auf sie eine der Ziffern 6, 7, 8 oder 9 folgt; 3) folgen eine 5 und weitere von 0 verschiedene Ziffern, so wird aufgerundet; 4) folgen eine 5 und nach dieser nur Nullen, so wird nur aufgerundet, wenn die letzte beibehaltene Ziffer dadurch gerade wird; z. B.  $0,17500 \rightarrow 0,18$ , aber  $0,12500 \rightarrow 0,12$ . Falls aufgerundet wurde, sind nicht mehr alle Ziffern gültig, sie werden aber als *zuverlässig* bezeichnet, weil ihre Fehlergrenze bekannt ist. Rundet man z. B. 1778 auf Hundertter zu 1800, so erhält man auch nicht zuverlässige Ziffern, wohl aber, wenn 1799,7 gerundet wird zu 1800. Schreibt man diese beiden gerundeten Zahlen als  $1,800 \cdot 10^3$ , so sind im ersten Falle  $1778 \rightarrow 1,800 \cdot 10^3$  die beiden Nullen keine *wesentlichen* Ziffern, wohl aber im zweiten Fall, so daß beide durch die Schreibweisen  $1,8 \cdot 10^3$  und  $1,800 \cdot 10^3$  zu unterscheiden sind.

**Rundfahrtproblem:** *Operationsforschung* Ermittlung von Lieferrouen und Reihenfolgen, oft als Problem eines Handelsreisenden [Travelling salesman problem] bezeichnet, der von einem Ort  $S_1$  aus in irgendeiner Reihenfolge die Orte  $S_2, S_3, \dots, S_n, S_{n+1} = S_1$  mit geringsten Reisekosten besuchen soll, wenn die Fahrtkosten für jede Strecke  $S_i S_j$  bekannt sind. An die Stelle der Kosten können auch die Zeit oder die Entfernung treten.

Obwohl es nur endlich viele, genau  $(n-1)!$  Rundfahrten gibt, läßt sich die optimale bei größeren  $n$  praktisch nicht durch Probieren finden. Die Aufgabe läßt sich als Problem der ganzzahligen Optimierung formulieren. Eine vom Aufwand her vertretbare Lösung unter Benutzung von Großrechenanlagen läßt sich heute bis etwa  $n = 60$  mittels *Verzweigungsverfahren* erreichen. — S. a. Reihenfolgeproblem; Netzwerk I.

**Runge**, Carl, geb. 30. 8. 1856 Bremen, gest. 3. 1. 1927 Göttingen. — R. studierte 1877/80 in Berlin und wurde dort 1883 Privatdozent. Seit 1886 war er Professor an der TH Hannover, 1904/24 an der Universität Göttingen. — R. leistete mathematisch bes. viel zur nußr. Behandlung technisch schwie-

riger Fragen, z. B. durch die *Formeln von R.-Kutta* (1895, 1901), zur *Approximationstheorie* sowie zur *Funktionentheorie*. Später wandte er sich auch stärker der Physik zu, insbes. der Optik, z. B. mit seinen Untersuchungen von Spektrallinien.

**Runge, Prinzip von**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung IV.

**Runge-Kutta-Verfahren**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichungen IV.

**Russell**, Bertrand Arthur W., geb. 18. 5. 1872 Treleck (Monmouthshire), gest. 2. 2. 1970 Penrhyn-dendraeth (Wales). — Privatlehrer vermittelten R., dem Sohn einer Aristokratenfamilie, eine gute Schulbildung. 1894 beendete er sein Studium in Cambridge und widmete seine Aufmerksamkeit den *Grundlagen der Mathematik* und der Logik. Er schrieb zusammen mit WHITEHEAD das Buch »*Principia Mathematica*« und legte darin eine *Axiomatik der Mengenlehre* dar, die die Paradoxien der naiven Mengenlehre behebt. In philosop. Schriften entwickelte er sich vom objektiven zum subjektiven Idealisten. R. ist als aktiver Kriegsgegner bekannt, veröffentlichte 1953 mit EINSTEIN den Friedensappell und erhielt 1954 den Nobelpreis.

**Rytz von Brugg**, David, geb. 1. 4. 1801 in Bucheggberg als Sohn eines Pfarrers, gest. 25. 3. 1868 Aarau. — R. studierte Mathematik in Göttingen und Leipzig und war anschließend als Lehrer in verschiedenen Stellen tätig. 1835 wurde er an die Kantonschule, die frühere Gewerbeschule in Aarau berufen und trat 1862 in den Ruhestand. — Das Problem, die Achsen eines Zentralkegelschnitts aus den konjugierten Durchmessern zu bestimmen, ist schon durch APOLLONIOS (um 250—170 v. u. Z.), jedoch sehr kompliziert, gelöst worden. Zu den einfacheren Verfahren der neueren Geometrie gehört das von R. Es wurde 1845 erstmals in einer Arbeit von Leopold MOSSBRUGGER (1796—1865) veröffentlicht. ( $\nearrow$  Ellipsenkonstruktionen IV).

## S

**Saccheri**, Girolamo, geb. 5. 9. 1667 San Remo, gest. 25. 10. 1733 Mailand. — S. wurde von den Jesuiten erzogen und war später Lehrer der Theologie, Logik und Mathematik an verschiedenen ihrer Kollegien. Er ist von Bedeutung durch seine Arbeiten zum Parallelenpostulat des EUKLID (»Euclides ab omni aevo vindicatus«, 1733).

**Saisonschwankungen**  $\nearrow$  Zeitreihenanalyse.

**Säkulargleichung**  $\nearrow$  Hauptachsentransformation III.

**Sarrus**, Pierre Frédéric, geb. 1798 und gest. 1861 Saint Affriques. — S. war von 1826 bis 1856 Professor der Mathematik in Strasbourg. Er befaßte sich hauptsächlich mit der numer. Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten (1832), mit mehrfachen Integralen (1842) sowie mit der Bahnbestimmung von Kometen (1843). Nach ihm ist die Regel zur Berechnung dreireihiger Determinanten ben. ( $\nearrow$  Determinante V.)

**Satteldach** ↗ Dachausmittlung.

**Sattelfläche** ↗ Paraboloid II.

**Sattelpunkt:** analyt. Beschreibung und Verallgemeinerung eines Sattelpunktes im geometrischen Sinne auf eine Funktion  $\Phi(x, u)$ ;  $(x^{(0)}, u^{(0)})$  heißt S., falls für alle betrachteten  $(x, u)$  gilt:

$$\Phi(x^{(0)}, u) \leq \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) \leq \Phi(x, u^{(0)}).$$

Eine bzgl.  $x$  konvexe und bzgl.  $u$  konkave stetige Funktion  $\Phi(x, u)$  über  $X \times U$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $X$  und  $U$  konvex und kompakt, hat im S. ein Minimum bezüglich  $x$ , ein Maximum bezüglich  $u$  und im S.  $(x^{(0)}, u^{(0)})$  gilt (1).

$$(1) \quad \begin{aligned} \text{Max}_{u \in U} \text{Min}_{x \in X} \Phi(x, u) &= \text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{u \in U} \Phi(x, u) \\ &= \Phi(x^{(0)}, u^{(0)}) \end{aligned}$$

Dieser *Minimax-Satz* von v. NEUMANN ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Spieltheorie. Zum S. einer Matrix vgl. Spieltheorie. S. a. Kuhn-Tucker-Theorem; Krümmung I.; Paraboloid II. Satz vom ausgeschlossenen Dritten ↗ Aussagenlogik I.

Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch ↗ Aussagenlogik I.

**Schaltalgebra:** Regeln der Algebra zur Aufstellung von Strukturmustern kybernetischer Systeme (↗ Struktur II.).

**Schalt sprung** ↗ Zeitfunktion I.

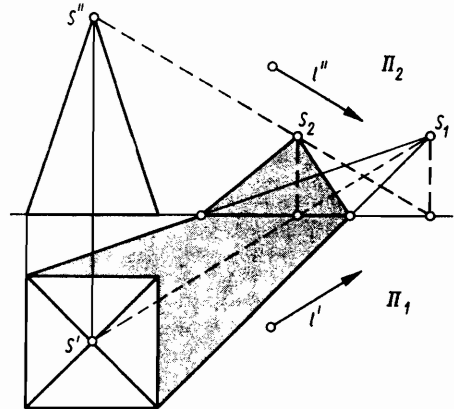
**Schalt system:** ein kybernet. System, bei dem die zu verarbeitenden Informationen durch diskrete, zumeist binäre Signale dargestellt werden (s. a. Steuerung I.). Die diskreten Eingangssignale oder Folgen von ihnen werden in diskrete Ausgangssignale oder Folgen von ihnen abgebildet. S.e werden auch als *digitale Automaten* bezeichnet, da diese selbsttätig programmierte Funktionen mit diskreten Signalen ausführen. Eine andere Betrachtungsweise ergibt sich aus informationstheoret. Sicht (↗ Kodierung). Werden die Zustände der  $n$  Eingangs-,  $m$  Ausgangs- und u. U.  $q$  Speichersignale als Zeichen aus einem endl. Alphabet gedeutet, deren jeweilige Kombinationen Kodewörter bilden, so besteht die Funktion eines S.s darin, den Eingangswörtern  $P_i$  oder den Folgen von Eingangswörtern eindeutig Ausgangswörter  $Q_j$  bzw. Folgen von Ausgangswörtern zuzuordnen.

S.e, die Speicherfunktionen enthalten, bezeichnet man als *Folgesteuerungen* oder *sequentielle Steuerungen*. S.e ohne Speicherfunktion bezeichnet man als *Kombinationssteuerungen* (↗ Steuerung II.1.). In Folgesteuerungen kann weiterhin die Zeitkoordinate quantisiert oder kontinuierlich auftreten, so daß man *synchrone* Folgesteuerungen (Taktsteuerungen) und *asynchrone* Folgesteuerungen unterscheidet.

**Scharparameter** ↗ Nomographie III.

**Schattengrenze** ↗ Kugeldarstellung.

**Schattenkonstruktion:** zeichnerische Bestimmung der Schattengrenzen, die entstehen, wenn ein Körper von einer Lichtquelle beleuchtet wird. Sie erfolgt durch Zentralprojektion oder Parallelprojektion, je nach dem Abstand der Lichtquelle vom Körper. Dabei ist zu unterscheiden zwischen dem



Schattenkonstruktion: Schlagschatten einer Pyramide auf den Projektionsebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$

*Eigenschaften* von nicht beleuchteten Körperteilen und dem *Schlagschatten*, der auf den Projektionsebenen entsteht (Abb.).

**Schattenpreise:** *lineare Optimierung* die Zielfunktionskoeffizienten bei den *Schlupfvariablen* im optimalen Simplextableau der primalen Aufgabe, falls die Nebenbedingungen in Ungleichungsform gegeben sind. In der dualen Aufgabe (↗ Optimierung V.) sind die S. die Optimalwerte der Variablen. Die S. machen eine ökonomische Deutung der Dualität in der linearen Optimierung möglich.

**Schätzfunktion** ↗ Punktschätzung.

**Schätztheorie:** Teilgebiet der mathemat. Statistik, dessen Aufgabe darin besteht, *Wahrscheinlichkeiten zufälliger Ereignisse*, Verteilungsfunktionen (↗ Zufallsgröße) oder deren Parameter (↗ Momente, Median u. a.) auf Grund von Stichproben zu schätzen. Solche Schätzungen bestehen entweder in der Angabe einer *Stichprobenfunktion*, deren Realisierung bei einer konkreten Stichprobe als Näherung für die zu schätzende Größe betrachtet werden kann (↗ Punktschätzung), oder in der Angabe eines zufälligen Intervalls, das die zu schätzende Größe mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nahe 1 überdeckt (↗ Konfidenzschätzung).

**Schätzung** ↗ Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses.

**Schätzwert** ↗ Punktschätzung, ↗ Ausgleichsrechnung I., ↗ Maximum-Likelihood-Methode I.

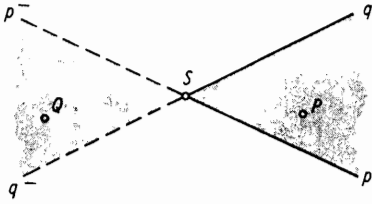
**Scheibenroll-Planimeter** ↗ Planimeter II.

**Scheinvorgang** ↗ Netzplantechnik II.

**Scheitelgleichung** ↗ Ellipse VIII., ↗ Hyperbel VIII., ↗ Kreis IV., ↗ Kurve zweiter Ordnung III., ↗ Parabel III.

**Scheitelkreis** ↗ Ellipse III., ↗ Hyperbel IV.

**Scheitelwinkel:** Winkel, dessen Scheitel mit dem eines gegebenen Winkels zusammenfällt und dessen Schenkel mit denen des gegebenen Winkels je eine Gerade bilden. Zu jedem Winkel, der nicht überstumpf und nicht Vollwinkel ist, gibt es genau einen S., der dem gegebenen Winkel kongruent ist (Abb.).



Scheitelwinkel  $\sphericalangle(p^-, q^-; Q)$  des gegebenen Winkels  $\sphericalangle(p, q; P^+)$

**Schenkel**  $\nearrow$  Dreieck III.,  $\nearrow$  sphärisches Dreieck V.,  $\nearrow$  Winkel I.

**Scherung**  $\nearrow$  lineare Abbildung I.5.

**Schiebung**  $\nearrow$  Kongruenzabbildung,  $\nearrow$  Spiegelung I.  
**Schiefe**: eine Maßzahl, die die Asymmetrie einer Verteilung charakterisiert. Ist  $X$  eine Zufallsgröße,  $\mu_3$  ihr drittes zentrales Moment ( $\nearrow$  Momente I.) und  $\sigma$  ihre Streuung, so bezeichnet man als  $S$  die Größe  $\mu_3/\sigma^3$ . Für symmetr. Verteilungen, z. B. die Normalverteilung, ist die  $S$  Null.

$S_1$ , empirische,  $\nearrow$  Stichprobenmoment.

**schiefer Körper**  $\nearrow$  Kegel I.,  $\nearrow$  Prisma I.,  $\nearrow$  Pyramide I.

**schiefermitesches**  $\nearrow$  Matrix IV.

**Schiefkörper**: ein Ring, in dem die von  $o$  verschiedenen Elemente bzgl. der Multiplikation eine Gruppe bilden. Der  $S$ . hat danach ein Einselement  $e$ , das vom Nullelement  $o$  verschieden ist. Die Gleichungen  $a \cdot x = b$  und  $y \cdot a = b$  haben für beliebige  $a$  und  $b$  aus dem  $S$ . mit  $a \neq o$  eindeutige Lösungen  $x = a^{-1} \cdot b$  und  $y = b \cdot a^{-1}$ . Im  $S$ . kann man deshalb addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, doch ist die Multiplikation nicht notwendig kommutativ, auch muß man im nichtkommutativen Fall zwischen **Linksdivision**  $a^{-1} \cdot b$  und **Rechtsdivision**  $b \cdot a^{-1}$  unterscheiden (vgl. Ring I., Kürzungsregel). Ein  $S$ . hat keine Nullteiler. Im kommutativen Fall spricht man von einem Körper. Die Quaternionen bilden einen  $S$ ., der nicht Körper ist.

**Schiefsymmetrieachse**  $\nearrow$  Spiegelung II.,  $\nearrow$  Symmetrie IV.

**schiefsymmetrisch**  $\nearrow$  Matrix IV.,  $\nearrow$  Symmetrie IV.

**schiefwinklig**  $\nearrow$  Dreieck III.,  $\nearrow$  Koordinatensystem III.

**Schlagschatten**  $\nearrow$  Schattenkonstruktion.

**Schlangendisziplin**  $\nearrow$  Bedienungstheorie.

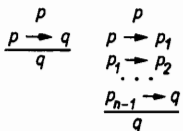
**Schleppkurve** svw. Traktrix.

**Schließen, natürliches**  $\nearrow$  Regellogik II.

**Schlinge**  $\nearrow$  Graph II.,  $\nearrow$  Relationsgraph.

**Schlupfvariable**  $\nearrow$  Optimierung I.

**Schluß**: **mathematische Logik** Übergang von gewissen Aussagen bzw. Ausdrücken einer Theorie, den **Prämissen**, zu einer weiteren Aussage bzw. einem weiteren Ausdruck, der **Konklusion** ( $\nearrow$  Regellogik II.). Jeder  $S$ . beruht auf einer  $S$ .regel, die man



Schluß: Abtrennungsregel für  $n = 1$  und für  $n > 1$

aufschreiben kann, indem man erst die Prämissen, dann den *S.strich* und die Konklusion untereinander schreibt (Abb.). Die Begründung jeder korrekten  $S$ .regel ist eine Implikation der Aussagen- bzw. Prädikatenlogik.

**Schlüsselgleichung**  $\nearrow$  Nomographie II.,  $\nearrow$  Rechenstab I.

**Schlußrelation**  $\nearrow$  Regellogik II.

**Schluß von  $n$  auf  $n + 1$**   $\nearrow$  Peanosches Axiomensystem,  $\nearrow$  Induktion, vollständige.

**Schmidt**, Erhard, geb. 13. 1. 1876 Dorpat (Tartu), gest. 6. 12. 1959 Berlin. —  $S$ . studierte in Berlin und Göttingen, promovierte 1905 und war 1908 Professor in Zürich, 1910 in Erlangen, 1911 in Breslau (Wroclaw) und seit 1917 in Berlin. Er arbeitete vorwiegend über Integralgleichungen und über isoperimetrische Probleme.

**Schmidtsches Orthonormierungsverfahren**  $\nearrow$  Vektorraum VII.

**Schmiegebene**: Ebene  $S$ , die in einem Punkte  $P_0$  einer Kurve  $C$  bestimmt ist als Grenzlage einer Ebene durch drei Nachbarpunkte  $P_1, P_2, P_3$  von  $P_0$ , wenn diese drei Punkte sich  $P_0$  beliebig nähern. Ihre Existenz ist gesichert, wenn die ersten beiden Ableitungen  $x_0'(t)$  und  $x_0''(t)$  des Ortsvektors  $x(t)$  für  $t = t_0$  linear unabhängig sind, d. h., wenn  $x_0' \times x_0'' \neq 0$  ist. Dabei ist  $x_0'' = d^2x(t_0)/dt^2$ . Die  $S$ . wird dann von den Vektoren  $x_0'(t_0)$  und  $x_0''(t_0)$  aufgespannt, d. h., wenn  $z$  der Ortsvektor eines beliebigen ihrer Punkte ist, stehen die Vektoren  $(z - x_0)$  und  $x_0' \times x_0''$  stets senkrecht aufeinander und  $(x_0' \times x_0'')(z - x_0) = 0$  ist die Gleichung der  $S$ . Anders ausgedrückt bilden die Vektoren  $x_0', x_0''$  und  $(z - x_0)$ , weil sie in  $S$  liegen, einen Spat mit dem Volumen Null, d. h.,  $(x_0', x_0'', z - x_0) = 0$  ( $\nearrow$  Spatprodukt). Sind  $x'$  und  $x''$  für jeden Wert von  $t$  linear abhängig, so ist die Kurve  $C$  eine Gerade, und es existiert keine  $S$ .

Die  $S$ . ist eine Ebene, die mit der Kurve im Punkte  $P_0$  eine Berührung 2. Ordnung hat, da die ersten beiden Ableitungen  $x_0', x_0''$  in ihr liegen. Im Falle  $x_0' \times x_0'' \neq 0$  ist die  $S$ . eindeutig bestimmt. Sie wird im Punkte  $P_0$  von  $x'(t_0)$  und  $x''(t_0)$  aufgespannt. Die auf der  $S$ . senkrechte Ebene, die die **Binormale**  $x_0' \times x_0''$  enthält ( $\nearrow$  Normalebene), heißt **rektifizierende Ebene** im Punkt  $P_0$  ( $\nearrow$  begleitendes Dreibein). In ihr liegen die Tangente  $x_0'$ , die Binormale  $x_0' \times x_0''$  und der Vektor  $(z - x_0)$ , wenn  $z$  der Ortsvektor ihrer Punkte ist; ihre Gleichung lautet deshalb  $(x_0', x_0' \times x_0'', z - x_0) = 0$ .

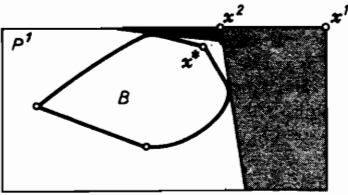
**Schmiegekreis**  $\nearrow$  Krümmung II.

**Schneidenplanimeter**  $\nearrow$  Planimeter IV.

**Schneidenrad**  $\nearrow$  Integriergerät III.

**Schnitt**  $\nearrow$  Gomory, Verfahren von.

**Schnittebenenverfahren**: Methoden zur Lösung von Optimierungsaufgaben, bei denen vom betrachteten Bereich mit Hilfe von Schnittebenen fortlaufend Teile abgeschnitten werden, die das Optimum nicht enthalten.  $S$ . wurden bes. zur Lösung ganzzahliger ( $\nearrow$  Gomory, Verfahren von) und konvexer Optimierungsaufgaben ausgearbeitet. In der konvexen Optimierung wird der gegebene zulässige Bereich  $B$



Schnittebenenverfahren: Zulässiger Bereich  $B$  und Polyeder  $P^1, P^2, \dots$ , die ihn zunehmend besser einschließen und durch Schnitte gewonnen werden

in ein Polyeder  $P^1$ , z. B. ein Rechteck, eingeschlossen (Abb.). Das Optimum  $x^1$  über  $P^1$  und eine Umgebung werden, da  $x^1$  nicht in  $B$  liegt, von  $P^1$  abgeschnitten. Auf diese Weise entsteht ein Polyeder  $P^2$ , das  $B$  besser als  $P^1$  einschließt; dort wird ein neues Optimum  $x^2$  gesucht. Unter bestimmten Voraussetzungen konvergiert die Folge  $\{x^i\}$  gegen das ursprünglich gesuchte Optimum  $x^*$  über  $B$ .

**Schnittgerade** ↗ Ebene I., ↗ Ebenengleichung II., ↗ Zweitafelprojektion II.4.

**Schnitt in einem Netzwerk** ↗ Ströme auf Graphen II.

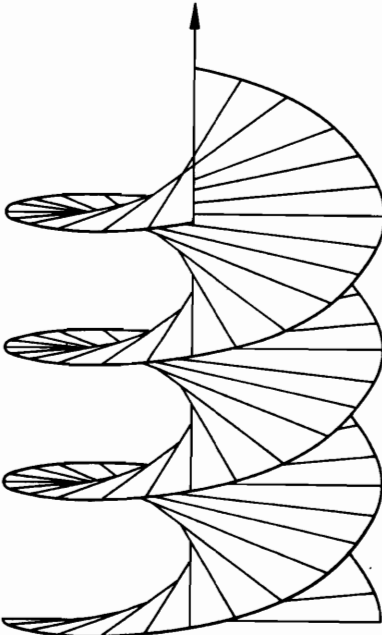
**Schnittwinkel** ↗ Ebene III.

**Schrägbild** ↗ Projektion II.

**Schrägspiegelung** ↗ Spiegelung III.

**Schranke** ↗ beschränkte Funktion I., ↗ Punktmenge, ↗ obere Schranke, ↗ untere Schranke, ↗ Zahlenfolge II.

**Schraubenfläche**: Fläche im Raum, die aus allen Punkten der Strahlen besteht, die senkrecht von der Achse eines Zylinders ausgehen und eine Schrauben-



Schraubenfläche

linie treffen, die auf dem Mantel des Zylinders aufgetragen ist (Abb.). S. a. Schraubenlinie II.

**Schraubenlinie**: I. auf einem Zylinder mit dem Radius  $a$  liegende nicht begrenzte Kurve, die in einem kartes. Koordinatensystem durch die Parameterdarstellung (1) mit  $a > 0$  und  $b \neq 0$  beschrieben werden kann, in der der Parameter  $t$  mit

$$(1) \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

$-\infty < t < \infty$  als Winkel gedeutet wird (Abb. 1). Vergrößert man den Parameterwert um einen Vollwinkel  $2\pi$ , so ändert sich die  $z$ -Koordinate um  $2\pi b$  unabhängig vom Ausgangswert  $t$ . Diese Größe  $2\pi b$  heißt die *Ganghöhe* der S. Der Winkel zwischen einer Tangente an die S. und der  $x, y$ -Ebene heißt der *Neigungswinkel* der S. Er hat den von  $t$  unabhängigen Wert  $\arctan(b/a)$ . Man erhält eine *Rechts-* oder *Links-schraube*, je nachdem ob  $b > 0$  oder  $b < 0$  ist. Die *Bogenlänge* der S. zwischen den Parameterwerten 0 und  $t$  hat den Wert  $s = t \sqrt{a^2 + b^2}$ , die *Krümmung* den Betrag  $a/(a^2 + b^2)$ , die *Windung*

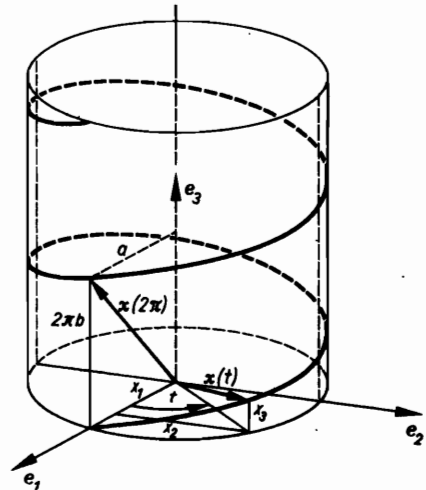


Abb. 1: Schraubenlinie

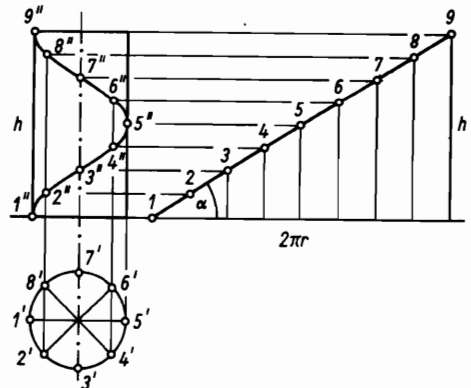


Abb. 2: Grund-, Aufriß und Verebnung einer Schraubenlinie

den Wert  $b/(a^2 + b^2)$ . Die S. ist eine *nicht algebraische Raumkurve* (↗ Raumkurve, kubische).

**II.** Zur Darstellung der S. in Zweitafelprojektion benutzt man, daß die S. bei der Abwicklung des Zylindermantels in eine Gerade mit dem Anstiegswinkel  $\alpha$  übergeht. Ist der Grundriß der S. ein Kreis, so stellt ihr Aufriß eine Sinuskurve dar (Abb. 2). Fällt man von jedem Punkt der S. das Lot zur Zylinderachse, bilden die Lote eine *Schraubenfläche*. Ein Beispiel dafür ist die Wendeltreppe. Bei der axonometrischen Darstellung einer S. unterscheidet man drei Formen: Wellen-, Spitzen- und Schleifenform (Abb. 3).

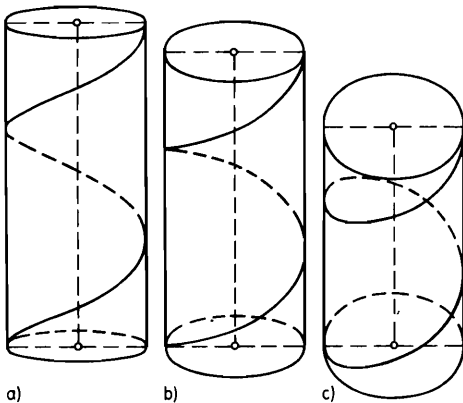


Abb. 3: Axonometr. Darstellung einer Schraubenlinie a) Wellen-, b) Spitzen-, c) Schleifenform

**Schraubung** ↗ Abbildung, affine V.  
**Schrittweitensteuerung** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung IV.

**Schröder, Ernst**, geb. 25. 11. 1841 Pforzheim als Sohn eines Schuldirektors, gest. 16. 6. 1902 Karlsruhe. — S. studierte in Heidelberg und Königsberg (Kaliningrad). Er wirkte vor allem in Karlsruhe am Polytechnikum. Seine bedeutendste Arbeit, die »*Algebra der Logik*«, baut auf den Untersuchungen von BOOLE auf.

**Schur, Issai**, geb. 10. 1. 1875 Mohilew, gest. 10. 1. 1941 Tel Aviv. — S. promovierte 1901 in Berlin bei FROBENIUS, erhielt jedoch erst 1921 eine ordentl. Professur. 1935 mußte er emigrieren. — S. arbeitete vorwiegend über Zahlentheorie, Gruppentheorie und über die Theorie der Potenzreihen. Er ist der Begründer der *Darstellungstheorie von Gruppen* durch gebrochenlineare Substitutionen.

**schwache Konvergenz** ↗ Funktional II.  
**schwaches Extremum** ↗ Variationsrechnung II.  
**schwaches Gesetz der großen Zahl** ↗ Gesetze der großen Zahl I.

**Schwartz, Laurent**, geb. 5. 3. 1915 Paris. — S. studierte und promovierte an der Universität Strasbourg und war später u. a. Professor an der École Polytechnique in Paris. — Die von ihm geschaffene *Theorie der Distributionen*, die er 1950/51 in Buchform veröffentlichte, hat die Entwicklung der

Differentialgleichungstheorie und die mathemat. Physik entscheidend beeinflusst. Hier fand die moderne Theorie der lokalkonvexen Räume ein Anwendungsgebiet, das noch nicht ausgeschöpft zu sein scheint.

**Schwarz, Hermann Amandus**, geb. 25. 1. 1843 Hermsdorf unterm Kynast, gest. 30. 11. 1921 Berlin. — S. studierte 1860/66 in Berlin und promovierte bei KUMMER. Anschließend war er kurze Zeit in Berlin als Privatdozent und Lehrer tätig. Im Jahre 1867 wurde er Professor in Halle. Es folgten Berufungen 1869 nach Zürich, 1875 nach Göttingen und 1892 an die Universität Berlin. — S. arbeitete über *konforme Abbildungen* und über die *Uniformisierung*, über S.sche Minimalflächen und das S.sche Problem, über gewöhl. und partielle *Differentialgleichungen* und über die Begründung der *Variationsrechnung*.

**Schwarz, Satz von:** Existieren von einer Funktion  $f$  von zwei unabhängigen Variablen  $x, y$ , die im Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)$  und in einer Umgebung von  $P_0$  definiert ist, die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  und  $f_{xy}$  in diesem Definitionsbereich und sind dort stetige Funktionen, so existiert in  $P_0 = (x_0, y_0)$  auch die gemischte zweite Ableitung  $f_{yx}$ , und es gilt darüber hinaus  $f_{yx}(P_0) = f_{xy}(P_0)$ . Dieser Satz läßt sich auf Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Variablen mit höheren gemischten Ableitungen übertragen.

**schwarzer Kasten** svw. Black-box.

**Schwarzsche Ungleichung:** auch *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* oder *Bunjakowskische Ungleichung*: die Ungleichung (1), wenn  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $b_1, b_2, \dots, b_n$  reelle Zahlen sind. Da die Menge der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen mit dem gewöhl.

$$(1) \quad (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Skalarprodukt einen euklid. Vektorraum bildet, kann mit den Bezeichnungen  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  die S. U. auch in der Form (2) oder (2a) geschrieben werden und besagt in Worten, daß der Betrag des Skalarproduktes zweier

$$(2) \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2$$

$$(2a) \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$$

Vektoren nie größer ist als das Produkt der Beträge der einzelnen Vektoren. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  ein linear abhängiges Vektorsystem ist. Die S. U. kann man kurz in der Form (3) schreiben, die unter Voraussetzung der

$$(3) \quad \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Konvergenz der beteiligten Reihen auch noch für unendl. Reihen gilt und die Form (4) annimmt.

$$(4) \quad \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \right)$$

Im Vektorraum der im Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt  $f \cdot g = \int_a^b f(t) g(t) dt$  erhält man die *Integralform* (5) der

$$(5) \quad \left[ \int_a^b f(t) g(t) dt \right]^2 \leq \int_a^b f^2(t) dt \cdot \int_a^b g^2(t) dt$$

S. U. Betrachtet man den Vektorraum der geordneten  $n$ -Tupel komplexer Zahlen bzw. den Vektorraum der im Intervall  $[a, b]$  quadratisch-integrierbaren komplexwertigen Funktionen, so gehen die Formeln (3) bzw. (5) über in die modifizierten Formen (3a) bzw. (5a).

$$(3a) \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)$$

$$(5a) \quad \left| \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

Die S. U. hat in Hilberträumen die Form (6), in

$$(6) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

der  $\|x\|$  die Norm des Elementes  $x$  und  $(x, y)$  das Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  bezeichnen. Aus der S. U. folgt nach (7) die Dreiecksungleichung (7a).

$$(7) \quad \begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + |(x, y)| + |(y, x)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

$$(7a) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

S. a. Vektorraum VII.; Funktion, quadratisch summierbar; Funktionalanalysis II.

Schwerelinien svw. Seitenhalbierende I.

Schwerpunkt ↗ Seitenhalbierende I.

Schwerpunkt von Massebelegungen, *Massemittelpunkt*: ausgezeichnete Punkt in einem System von  $n$  Massepunkten bzw. Punkt auf einer mit Masse belegten Kurve, auf einer ebenen oder krummen Fläche oder in einem Raumbereich. Liegen die  $n$  Massen  $m_i$  in den Punkten mit den Koordinaten  $x_i, y_i, z_i$ , so hat der S. die Koordinaten (1), wenn  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  die Gesamtmasse angibt. Wenn die

$$(1) \quad \xi = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad \eta = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

$$\zeta = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Raumkurve  $k$  mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z)$  belegt ist, so sind die Koordinaten des S.es durch die *Kurvenintegrale 1. Art* (2) mit der Gesamtmasse (3) bestimmt.

$$(2) \quad \xi = \frac{1}{M} \int_{(k)} x \rho(x, y, z) ds,$$

$$\eta = \frac{1}{M} \int_{(k)} y \rho(x, y, z) ds,$$

$$\zeta = \frac{1}{M} \int_{(k)} z \rho(x, y, z) ds$$

$$(3) \quad M = \int_{(k)} \rho(x, y, z) ds$$

Analoge Formeln gelten für eine mit Masse der Dichte  $\rho(x, y)$  belegte ebene Kurve. Ist die Zyklode mit der Parameterdarstellung  $x = r(t - \sin t)$ ,  $y = r(1 - \cos t)$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$  z. B. mit Masse der konstanten Dichte  $\rho$  belegt, so erhält man zur Berechnung vom S. ( $\xi, \eta$ ) die Kurvenintegrale 1. Art (4), (5) und (6).

$$(4) \quad M = \int_{(k)} \rho ds = \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$= \rho r \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

$$= 2\rho r \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8\rho r$$

$$(5) \quad \xi = \frac{1}{M} \int_{(k)} x \rho ds$$

$$= \frac{1}{8r} \int_0^{2\pi} r^2(t - \sin t) \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt = \pi r$$

$$(6) \quad \eta = \frac{1}{M} \int_{(k)} y \rho ds$$

$$= \frac{1}{8r} \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t) \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos t} dt = \frac{4}{3} r$$

Ist der ebene Bereich  $B$  mit Masse der Dichte  $\rho(x, y)$  belegt, so berechnen sich die Koordinaten des S.es durch die Flächenintegrale (7). Für den mit kon-

$$(7) \quad \xi = \frac{1}{M} \iint_{(B)} x \rho(x, y) dx dy,$$

$$\eta = \frac{1}{M} \iint_{(B)} y \rho(x, y) dx dy,$$

$$M = \iint_{(B)} \rho(x, y) dx dy$$

stanter Dichte  $\rho$  belegten Halbkreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 \leq R^2$  für  $y \geq 0$  z. B. ist  $M = \frac{1}{2} \pi R^2 \rho$ , und aus Symmetriegründen gilt  $\xi = 0$ . Nach Transformation des Flächenintegrals auf Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  für  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$  folgt (8).

$$(8) \quad \eta = \frac{1}{M} \iint_{(B)} y \rho dx dy$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \frac{4R}{3\pi}.$$

Ist die krumme Fläche  $S$  mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z)$  belegt, so sind die Koordinaten des S.es durch die *Oberflächenintegrale 1. Art* (9) gegeben.

$$(9) \quad \xi = \frac{1}{M} \iint_{(S)} x \rho(x, y, z) dS,$$

$$\eta = \frac{1}{M} \iint_{(S)} y \rho(x, y, z) dS,$$

$$\zeta = \frac{1}{M} \iint_{(S)} z \rho(x, y, z) dS,$$

$$M = \iint_{(S)} \rho(x, y, z) dS$$

Für die mit konstanter Dichte  $\rho$  belegte *Halbkugel*  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  mit  $z \geq 0$  z. B. ist  $M = 2\pi R^2 \rho$ , und aus Symmetriegründen gilt  $\xi = \eta = 0$ . Mit der Parameterdarstellung  $x = R \cos \varphi \sin \theta$ ,

$y = R \sin \varphi \sin \vartheta, z = R \cos \vartheta$  für  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$  ergibt sich das *Oberflächenintegral* (10).

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \zeta &= \frac{1}{M} \iint_{(S)} z \rho(x, y, z) \, dS \\
 &= \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
 &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\
 &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-1/4 \cos 2\vartheta]_0^{\pi/2} \, d\varphi = 1/2 R
 \end{aligned}$$

Ist der Raumbereich  $K$  mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z)$  belegt, so sind die Koordinaten des S.es durch die Raumintegrale (11) bestimmt. Für die

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \xi &= \frac{1}{M} \iiint_{(K)} x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 \eta &= \frac{1}{M} \iiint_{(K)} y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 \zeta &= \frac{1}{M} \iiint_{(K)} z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\
 M &= \iiint_{(K)} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz
 \end{aligned}$$

mit konstanter Dichte belegte Halbkugel der Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  für  $z \geq 0$  z. B. ist  $M = 2/3 \pi R^3$  und  $\xi = \eta = 0$ . Die dritte Koordinate  $\zeta$  des S.es ergibt sich nach Einführung der Kugelkoordinaten  $x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$  für  $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$  nach (12).

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \zeta &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\
 &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^3 \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{3}{8} R
 \end{aligned}$$

**schwingende Saite** ↗ hyperbolische Differentialgleichung I.

**Schwingungsdauer** ↗ Winkelfunktion VIII.

**Secans hyperbolicus** ↗ hyperbolische Funktion I.

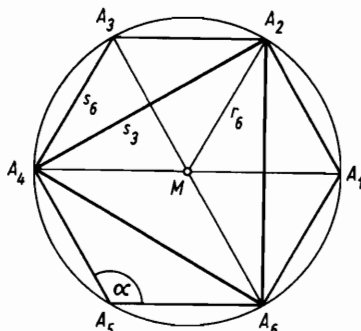
**Sechseck, regelmäßiges konvexes**: regelmäßiges konvexes  $n$ -Eck, dessen Seitenlänge  $s_6$  der des Radius  $r_6$  des Umkreises gleich ist. Die Größe  $\alpha$  eines jeden Innenwinkels des S.s  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  beträgt  $120^\circ$ . Die Dreiecke  $A_2A_4A_6$  bzw.  $A_1A_3A_5$  sind *regelmäßige konvexe Dreiecke* mit der Seitenlänge  $s_3 = r_6 \sqrt{3}$ . (Abb.)

**Seemeile** ↗ Strecke V.

**Segment I.** ein zusammenhängender Teil einer ebenen zusammenhängenden Fläche, der entsteht, wenn man diese durch eine Gerade zerlegt (↗ Kreis II.).

**II.** ein zusammenhängender Teil eines zusammenhängenden Körpers, der entsteht, wenn man diesen durch eine Ebene zerlegt.

**Segre, Corrado**, geb. 20. 8. 1863 Saluzzo (Italien), gest. 18. 5. 1924 Turin. — S. studierte und promovierte 1883 in Turin. Seit 1888 lehrte er an der Turiner Universität. Seine Hauptforschungsgebiete waren die *algebraische Geometrie* und vor allem die *projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume*. Mehrere Begriffe sind heute mit seinem Namen ver-



Regelmäßiges konvexes Sechseck

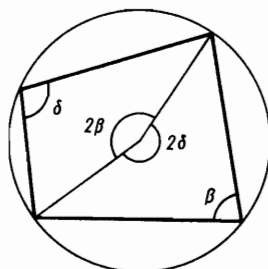
bunden. Der Mathematiker Beniamino S., geb. 16. 2. 1903 in Turin, ist ein Schüler und Verwandter von S. und arbeitet auf ähnlichen Gebieten.

**Sehne**: Verbindungsstrecke zweier Punkte einer stetigen Kurve oder Fläche, die auch Punkte enthält, die nicht zur Kurve bzw. Fläche gehören. Liegen die Halbierungspunkte aller Sehnen einer stetigen Kurve, die parallel zueinander sind, auf einer Geraden, so nennt man den Teil der Geraden, der die Halbierungspunkte enthält, einen *Durchmesser* dieser Kurve. Durchmesser einer Kurve, die sich gegenseitig halbieren, heißen *konjugierte Durchmesser*. Im Kreis ist z. B. jede Sehne durch den Mittelpunkt ein Durchmesser, und alle Durchmesser sind zueinander konjugiert. [Abb. vgl. Symmetrie]. S. a. Kreis I., Kugel II.

**Sehnensatz** ↗ Sekantensatz I.

**Sehntangentenwinkel** ↗ Kreis III.

**Sehnenviereck, Kreisviereck**: konvexes Viereck (Abb.), dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind. In ihm sind gegenüberliegende Innenwinkel *Supple-*



Sehnenviereck

*mentwinkel*, weil sich ihre Mittelpunktswinkel, die jeweils zu demselben Bogen gehören, zu einem Vollwinkel ergänzen. S. a. Viereck.

**Sehstrahl** ↗ Projektion I.

**Seitenfläche** ↗ körperliche Ecke I., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I.

**Seitenhalbierende, Schwerelinie**: I. Ecktransversale (↗ Dreieckstransversalen) eines Dreiecks, die die einer Ecke gegenüberliegende Seite halbiert. Die S.n eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte  $S$  (↗ Ceva, Satz von). Dieser heißt aus mechani-



schen Gründen auch *Schwerpunkt S*, die S.n auch *Schwerelinien*. Der Schwerpunkt teilt jede S. so, daß der der Ecke anliegende Abschnitt doppelt so lang ist wie der der Seite anliegende. Bezeichnet man im Dreieck *ABC* die Seitenmitten mit *M<sub>a</sub>*, *M<sub>b</sub>*, *M<sub>c</sub>*

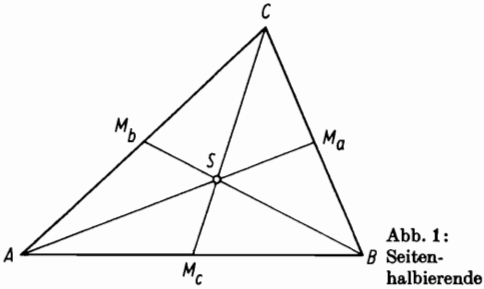
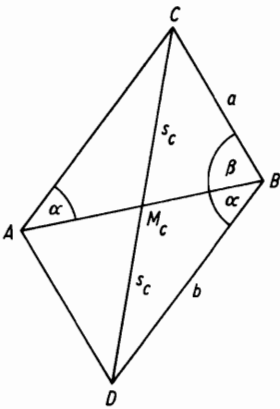


Abb. 1: Seitenhalbierende

(Abb.) und wendet auf das Dreieck *AM<sub>c</sub>C* den Satz von Menelaos an, so erhält man wegen  $m(AB : BM_c) = -2$  und  $m(CM_b : M_bA) = 1$  die Beziehung  $|M_cS| : |SC| = 1 : 2$ .

II. Ergänzt man das Dreieck *ABC* zu einem Parallelogramm *ADBC* etwa so, daß die Strecken der



Seitenhalbierende. Abb. 2: Parallelogramm, dessen Diagonalen die Längen *c* und  $2s_c$  haben

Längen  $2s_c$  und *c* seine Diagonalen sind (Abb.), so hat das Dreieck *DBC* Seiten der Längen *b*, *a* und  $2s_c$ , und der Winkel  $\sphericalangle DBC$  hat die Größe  $(\alpha + \beta)$ . Da  $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$ , ergibt der Kosinussatz (1), und durch zykl. Vertauschen folgen (2) und (3).

$$(1) \quad 2s_c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma}$$

$$(2) \quad 2s_a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha}$$

$$(3) \quad 2s_b = \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta}$$

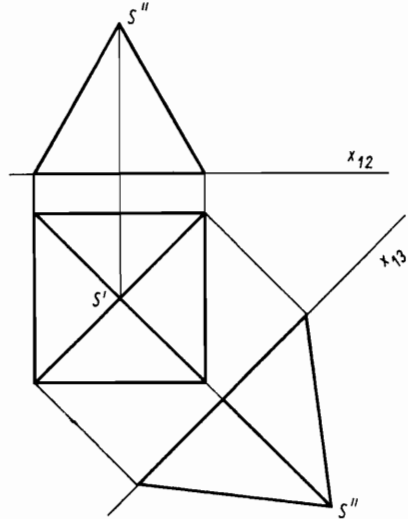
**Seitenkante** ↗ Körper V., ↗ Prisma I., ↗ Pyramide I.

**Seitenkosinussatz** ↗ Kosinussatz II.

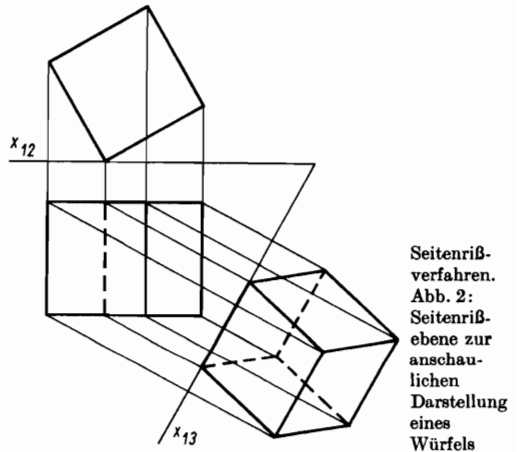
**Seitenrißebenen** ↗ Seitenrißverfahren.

**Seitenrißverfahren:** Verfahren der Zweitafelprojektion, durch Einführung neuer Rißebenen, *Seitenriß-*

*ebenen* gen., wichtige Zusammenhänge eines in Grund- und Aufriß gezeichneten Körpers darzustellen; z. B. die wahre Länge einer Strecke (Abb. 1) oder das Bild eines Körpers in allgemeiner Lage (Abb. 2, 3). Einen neuen Grundriß erhält man durch Umklappen einer neuen Grundrißebene  $\Pi_3$  senkrecht zu  $\Pi_2$  um ihre Spur mit dieser Ebene als neue Rißachse  $x_{23}$  (Abb. 4). Dabei stehen die Ordnungs-

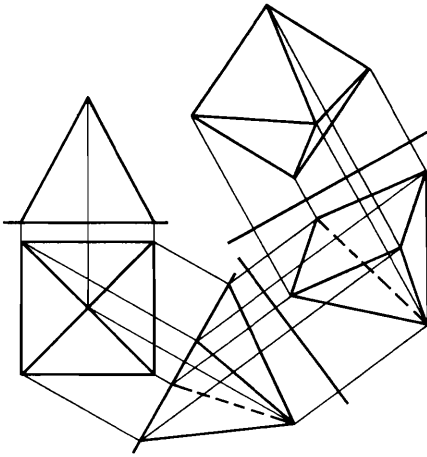


Seitenrißverfahren. Abb. 1: Seitenrißebene zur Bestimmung der wahren Länge einer Pyramidenkante

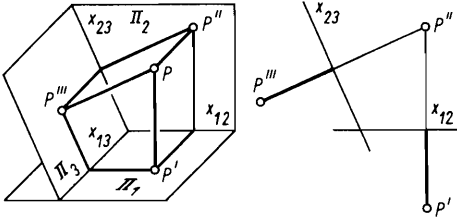


Seitenrißverfahren. Abb. 2: Seitenrißebene zur anschaulichen Darstellung eines Würfels

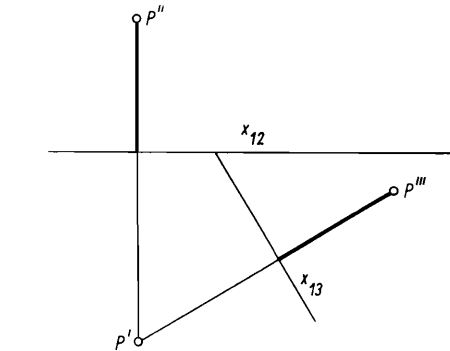
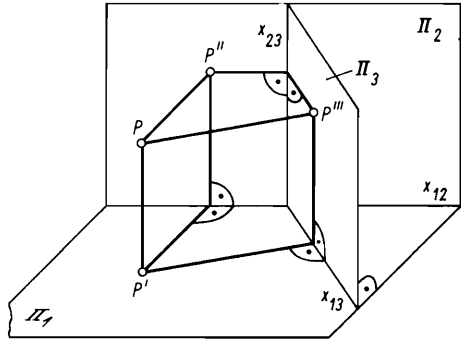
linien wieder senkrecht zur neuen Rißachse  $x_{23}$  und der Abstand des neuen Grundrisses eines Punktes von  $x_{23}$  ist dem von der alten Rißachse  $x_{12}$  gleich. Entsprechendes gilt für einen neuen Aufriß, der sich durch Umklappen der senkrechten Projektion auf eine Seitenrißebene ergibt, die senkrecht zur Grundrißebene  $\Pi_1$  steht (Abb. 5). Abb. 1 zeigt die Konstruktion der wahren Länge einer Pyramidenkante, die im neuen Aufriß sichtbar wird. Durch wieder-



Seitenrißverfahren. Abb. 3: Kette von Normalrissen einer Pyramide



Seitenrißverfahren. Abb. 4: Neue Grundrißebene



Seitenrißverfahren. Abb. 5: Neue Aufrißebene

holtes Anhängen neuer Grund- und Aufrisse entsteht eine Kette von Normalrissen (↗ Abb. 2, 3).

**Sekans** ↗ Winkelfunktion III.

**Sekante** ↗ Kreis I., ↗ Kugel II.

**Sekantennäherungsverfahren** ↗ Nullstellenberechnung II.

**Sekantensatz: I.** Wird ein Kreis von einer Sekante in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  und von einer anderen Sekante in den Punkten  $Q_1$  und  $Q_2$  geschnitten, und haben die Sekanten außerhalb des Kreises den Punkt  $S$  gemeinsam, so ist das Produkt aus den Maßzahlen der Strecken  $SP_1$  und  $SP_2$  gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Strecken  $SQ_1$  und  $SQ_2$  (Abb. 1). Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes: Werden Geraden eines Büschels von einem Kreis geschnitten, so ist auf jeder geschnittenen Gera-

den das Produkt der Maßzahlen der beiden Strecken zwischen dem Träger  $S$  des Geradenbüschels und je einem Schnittpunkt zwischen Gerade und Kreis gleich. Weitere Spezialfälle dieses Satzes sind der Sehnensatz und der Sekantentangentensatz.

**Sehnensatz:** Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist das Produkt der Maßzahlen der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkt der Maßzahlen der Abschnitte der anderen (Abb. 2).

**Sekantentangentensatz:** Werden von einem Punkt  $S$  außerhalb eines Kreises eine Sekante und eine Tangente an den Kreis gelegt, so ist die Maßzahl des Tangentenabschnittes zwischen  $S$  und dem Berührungspunkt mittlere Proportionale für die Maßzahlen der Sekantenabschnitte (Abb. 3).

**II.** Danach ist jedem Punkt  $S$  einer Ebene in bezug auf einen Kreis  $k_0$  dieser Ebene ein konstantes Produkt zugeordnet, das man die Potenz dieses Punktes

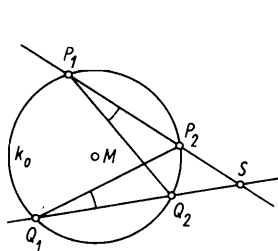
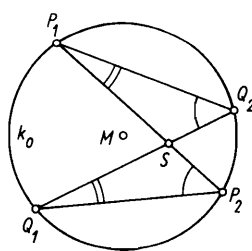
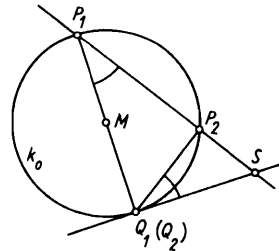


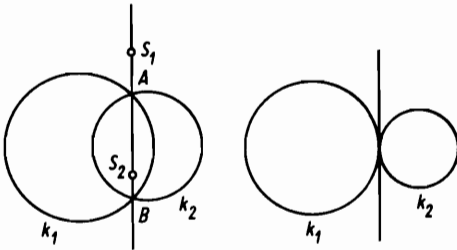
Abb. 1: Sekantensatz,  $|SP_1| \cdot |SP_2| = |SQ_1| \cdot |SQ_2|$



Sekantensatz. Abb. 2: Sehnensatz,  $|SP_1| \cdot |SP_2| = |SQ_1| \cdot |SQ_2|$



Sekantensatz. Abb. 3: Sekantentangentensatz,  $|SP_1| \cdot |SP_2| = |SQ_1|^2$



Sekantensatz. Abb. 4: Potenzlinien zweier Kreise  $k_1$  und  $k_2$

in bezug auf  $k_0$  nennt. Versieht man die Maßzahlen von Strecken, die in verschiedener Richtung durchlaufen werden, mit verschiedenen Vorzeichen, so ergibt sich für einen Punkt außerhalb von  $k_0$  eine positive, für einen Punkt innerhalb von  $k_0$  eine negative Potenz. Liegt der Punkt  $S$  auf  $k_0$ , so hat seine Potenz den Wert 0. Die Punkte auf einem zu  $k_0$  konzentrischen Kreis haben die gleiche Potenz in bezug auf  $k_0$ . Schneiden sich zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  in den Punkten  $A$  und  $B$ , so enthält die durch  $A$  und  $B$  bestimmte Gerade alle Punkte, deren Potenz in bezug auf  $k_1$  gleich der Potenz in bezug auf  $k_2$  ist. Man nennt diese Gerade *Potenzlinie*. Berühren sich die Kreise  $k_1, k_2$ , so wird die Potenzlinie zur gemeinsamen Tangente der Kreise.

**Sekantentangentensatz** ↗ Sekantensatz I.

**Sektor: I.** jeder zusammenhängende Teil einer ebenen Fläche, der aus ihr von zwei Strahlen ausgeschnitten wird, deren gemeinsamer Anfangspunkt im Innern dieser Fläche liegt; der Anfangspunkt der Strahlen gehört zum Rande des S.s. (vgl. Kreis-sektor, ↗ Kreis I.)

**II.** Jeder zusammenhängende Teil eines Körpers, der aus ihm von einem Kegel ausgeschnitten wird, dessen Spitze im Inneren des Körpers liegt; die Spitze des Kegels gehört zur Oberfläche des S.s. (vgl. Kugelsektor, ↗ Kugel III., IV.)

**Sekunde** ↗ Winkel VII.1.

**selbstadjungierter Operator** ↗ Operator, linearer, VI.

**Selbstanpassung** svw. Adaption.

**selbstkonjugierte Elemente** ↗ Polarität.

**selbstlernende Systeme** ↗ Lernen.

**Semantik: mathematische Logik** derjenige Teil der Metatheorie einer betrachteten formalisierten mathematischen Theorie, in dem die Gültigkeit von Aussagen dieser Theorie bei zulässigen Interpretationen, d. h. in Modellen, untersucht wird. Die S. beschäftigt sich danach nicht wie die *Syntax* mit Beziehungen zwischen den Zeichen einer Theorie, sondern mit den Beziehungen zwischen den Zeichen und dem durch diese möglicherweise Bezeichneten. Ein wesentl. semantischer Begriff ist der der *Wahrheit* einer Aussage bzw. allgemeiner der der *Erfüllung* eines Ausdrucks.

**semantische Antinomie** ↗ Antinomie.

**semantisch vollständig** ↗ Vollständigkeit.

**semantisch widerspruchsfrei** ↗ Widerspruchsfreiheit.

**semidefinit** ↗ quadratische Form III.

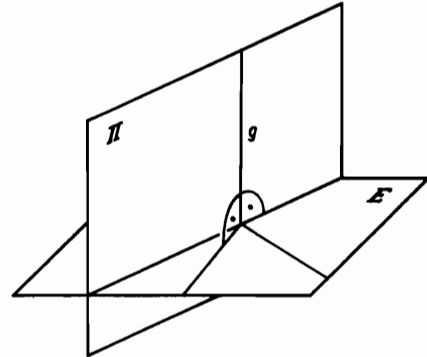
**semikubische Parabel** ↗ rationale Kurve I.

**Semiotik: mathematische Logik** mathematische Theorie der *Zeichenreihen*, auch *Wörter* gen., die man aus den Grundzeichen eines Alphabets durch Hintereinanderreihung je endlich vieler mit Wiederholungen bilden kann. Die S. bedient sich konstruktiver und algebraischer Methoden, z. B. ist die Menge aller Wörter über einem Alphabet eine freie Halbgruppe. Die S. umfaßt speziell die *Syntax* jeder formalisierten mathematischen Theorie. Wichtige semiotische Operationen mit Wörtern sind deren *Verkettung* durch Hintereinanderschreiben, die *Substitution* und die *Ersetzung*, d. h. die Einsetzung eines Wortes für einen Teil eines gegebenen Wortes an gewissen Stellen von dessen Vorkommen.

**Sender** ↗ Information II.

**Senke** ↗ Divergenz I., ↗ Netzplantechnik II., IV., ↗ Ströme auf Graphen I., ↗ Turnier.

**Senkrechte:** Gerade, die mit einer anderen Geraden oder mit einer Ebene in einem ihrer Punkte einen rechten Winkel bildet. Mit Zirkel und Lineal läßt sich in einem Punkt  $M$  einer Geraden  $g$  die S. errichten (↗ Mittelsenkrechte II.). Die S. in einem Punkte einer Ebene  $E$  bildet einen rechten Winkel mit jeder Geraden in  $E$  durch diesen Punkt (↗ Ebene IV.). Jede Ebene  $\Pi$ , die diese S.  $g$  enthält, steht senkrecht zu  $E$ , in Zeichen  $E \perp \Pi$  (Abb.).



**Senkrechte:** Zwei Ebenen sind zueinander senkrecht,  $E \perp \Pi$ , wenn es in einer der Ebenen, z. B. in  $\Pi$ , eine Gerade  $g$  gibt, die auf der Ebene  $E$  senkrecht steht

**separabel** ↗ Körper II.

**Separation der Variablen** ↗ elliptische Differentialgleichung III.2., ↗ partielle Differentialgleichung I.

**Septillion** ↗ Zehnerpotenzen.

**seq-Funktion** ↗ Aussagenlogik II.

**sequentielle Steuerung** ↗ Steuerung II., ↗ Schalt-system.

**Sequenz** ↗ Regellogik II., III.

**Serienschaltung** ↗ Struktur I.

**Serre, Jean Pierre**, geb. 1926. — S. ist ehemaliger Schüler der École Normale Supérieure und wirkt in Paris. Er gehört zu der Gruppe französischer Mathe-

matiker, die unter dem Pseudonym „Nicolas Bourbaki“ in den seit 1940 erscheinenden »Éléments de mathématique« eine neue Grundlegung der Mathematik versuchen. Das Bourbaki-Seminar, in dem alljährlich viele Mathematiker aus aller Welt vortragen, ist richtungsweisend für die mathemat. Forschung.

Unter dem Einfluß von H. CARTAN veröffentlichte S. Arbeiten über Homotopiegruppen und zur komplexen Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher; 1954 erhielt er auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Amsterdam die Fields-Medaille für Arbeiten auf dem Gebiet der algebraischen Topologie. Durch seine fundamentale Arbeit »Faisceaux algébriques cohérents« (1955) wurden Methoden der homolog. Algebra in die algebraische Geometrie eingeführt. Seine Vorträge auf den Internationalen Mathematikerkongressen 1954 in Amsterdam und 1962 in Stockholm wurden richtungsweisend für die algebraische Geometrie. Seine 1962/63 am Collège de France gehaltenen Vorlesungen über Galoiskohomologie wurden eine Basis für die algebraisch-zahlentheoret. Forschung der folgenden Jahre. S.s Arbeitsgebiete sind gegenwärtig vor allem die algebraische Zahlentheorie und die algebraische Geometrie.

**Servicegrad** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**Severi, Francesco**, geb. 13. 4. 1879 Arezzo, gest. 18. 12. 1961 Rom. — Nach dem Studium in Turin promovierte S. als Schüler von C. SEGRE. Er erhielt 1904 eine Professur in Parma und war seit 1909 in Padua und seit 1922 in Rom tätig. Wie sein Lehrer widmete er sich geometr. Forschungen und erzielte bedeutende Erfolge. 1940 faßte er seine Resultate über abzählende Geometrie und über die Theorie der stetigen Kurvensysteme auf algebraischen Flächen in zwei großen Abhandlungen zusammen.

**sexagesimales Positionssystem** ↗ Zahlensystem III.  
**Sextillion** ↗ Zehnerpotenzen.

**Shannon, Claude Elwood**, geb. 1916, amerikan. Mathematiker. — Er begründete mit seinem Werk »The Mathematical Theory of Communications« die Theorie der Nachrichtenübertragung.

**Shannonformel** ↗ Information II.

**Sheffersche Funktion** ↗ Aussagenlogik II.

**Sieb des Eratosthenes** ↗ Primzahl III.

**sicheres Ereignis** ↗ zufälliges Ereignis I.

**Sicherheitswahrscheinlichkeit** ↗ Signifikanztest II.

**Sichtbarkeitsgrenze** ↗ Kugeldarstellung.

**Sichtgerät** ↗ digitale Rechenanlage I.2.

**Siebzehneck, regelmäßiges konvexes** ↗  $n$ -Eck V.

**$\sigma$ -additiv** ↗ Maß I.

**$\sigma$ -Algebra** ↗ Maß I., ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.

**Signal**: Zustand oder Prozeß in einem materiellen System, der eine Information verkörpert. Ein S. enthält somit die potentielle Fähigkeit, einem Empfänger Informationen zuzuführen. Die informellen Kopplungen in kybernet. Systemen werden in Form von S.en realisiert, die mittels Leitungen — im allgemeinsten Sinne verstanden — übermittelt

werden. Die wesentl. Komponenten eines S.s sind der S.träger und die Informationsparameter.

**I. S.träger** heißt die materielle oder energet. Größe, von der das Signal getragen wird (vgl. Information); *materielle Träger* z. B. sind Papier, Magnetband oder chem. Bindungen; *energet. Träger* sind z. B. elektr. oder pneumat. Größen wie Strom, Spannung, Druck.  
**II. Informationsparameter** sind Parameter eines S.trägers, deren Verlauf die Information abbildet, z. B. eine Amplitude oder Intensität, die Frequenz oder die Phase. Dabei kann die Information durch einen räuml., durch einen zeitl. oder durch beide Parameter des Trägers ausgedrückt werden. Die S.e lassen sich somit als *S.funktionen* der Form  $F(x, y, z, t)$  mathematisch beschreiben.

Meist werden jedoch nicht alle vier Koordinaten ausgenutzt. S.e, deren Informationsparameter nur Ortskoordinaten sind, heißen *Konfigurationen* bzw. *Muster*; wird die Zeitkoordinate allein oder zusammen mit Ortskoordinaten ausgenutzt, so spricht man von *Vorgängen* bzw. *dynam. S.en*.

Die Aufprägung einer Information als raumzeitl. Muster auf einen S.träger erfolgt durch *Kodierung* bzw. *Modulation*. Für die Klassifikation der S.e unterscheidet man:

*analoge S.e*, deren Informationsparameter in gewissen, meist technisch bedingten Grenzen jeden beliebigen Wert annehmen können, und

*diskrete S.e*, deren Informationsparameter nur endlich viele diskrete Werte annehmen können, in einem *binären S.* können sie genau zwei diskrete Werte annehmen, in einem *digitalen S.* nur die diskreten Werte, die Kodewörtern eines vereinbarten Alphabets entsprechen (↗ Zeichen). Ein diskretes S., das nicht digital ist, heißt *Mehrpunkt-S.*

Kann die Information in jedem beliebigen Zeitpunkt eines Intervalls durch den Informationsparameter abgebildet werden, so spricht man von einem *kontinuierl. S.*; ist dies nicht möglich, von einem *diskontinuierl. S.* — S. a. System; Triangulation.

**Signalflußbild** ↗ Blockschaltbild I.

**Signalflußgraph** ↗ Blockschaltbild II.

**Signalraum** ↗ Kodierung I.

**Signalträger** ↗ Signal I.

**Signatur** ↗ quadratische Form III.

**Signifikanzniveau** ↗ Signifikanztest I., II.

**Signifikanztest**: I. ein Prüfverfahren zur Prüfung statist. *Hypothesen*, dessen Problematik zunächst an einem Beispiel erläutert wird. Von zwei Betrieben soll der Schadstoffgehalt im Abwasser unter den Annahmen verglichen werden, daß Betrieb I in 1 cm<sup>3</sup> Abwasser  $X$  mg Schadstoff abgibt, Betrieb II dagegen  $Y$  mg, daß weiter  $X$  und  $Y$  normalverteilt sind und als voneinander unabhängig angesehen werden können. Durch Beobachtungen über einen längeren Zeitraum werden die Streuungen  $\sigma_X = 2,5$  mg/cm<sup>3</sup> von  $X$  und  $\sigma_Y = 2,0$  mg/cm<sup>3</sup> von  $Y$  bestimmt. Dazu wurden je 10 Proben entnommen, aus denen sich der Mittelwert  $\bar{x} = 10,3$  mg/cm<sup>3</sup> für den Schadstoffgehalt im Werk I und im Werk II der Mittelwert  $\bar{y} = 13,9$  mg/cm<sup>3</sup> ergab (↗ Stichprobenmittel). Um zu prüfen, ob diese Abweichung noch als zufällig anzusehen ist oder ob sie wesentlich,

*signifikant*, ist, stellt man die *Hypothese* auf, daß die Abweichung aus der Zufälligkeit der Stichprobenauswahl resultiert, daß die wahren mittleren Schadstoffgehalte jedoch übereinstimmen. Diese Hypothese  $H_0$  wird als *Nullhypothese* bezeichnet, ihre mathemat. Formulierung lautet in diesem Falle  $EX = EY$  bzw.  $E(X - Y) = 0$ . Unter der Annahme, daß diese Hypothese wahr ist, ist die Testgröße (1) nach  $N(0, 1)$  verteilt ( $\nearrow$  Normalverteilung).

$$(1) \quad Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{D^2(\bar{X} - \bar{Y})}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)/n}}$$

Man findet deshalb aus Tabellen zu vorgegebenem, kleinen *Signifikanzniveau*  $\alpha$  ein  $z_\alpha$ , so daß  $P(|Z| > z_\alpha) \leq \alpha$  ist;  $z_\alpha$  ist das  $\alpha/2$ -Quantil der normierten und zentrierten Normalverteilung. Die konkreten Stichproben für  $X$  und  $Y$  ergeben für die *Testgröße*  $Z$  einen Wert  $z$ . Ist  $|z| > z_\alpha$ , so sagt man,  $z$  liegt im *kritischen Bereich*. Es ist dann bei einmaligem Durchführen des Versuchs ein Ereignis eingetreten, das die sehr kleine Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  hat. Auf Grund der Erfahrung (1) wird man deshalb die Hypothese  $H_0$  verwerfen. Man sagt, der beobachtete Unterschied ist *signifikant*. Liegt das berechnete  $z$  nicht im kritischen Bereich, d. h., ist  $|z| \leq z_\alpha$ , so kann man nur aussagen, daß die aufgestellte Hypothese dem Beobachtungsmaterial nicht widerspricht. Im betrachteten konkreten Bei-

	$1 - \alpha/2$	$z_\alpha$
Tabelle der Quantile $z_\alpha$ einer Normalverteilung (Auszug)	0,9	1,281 552
	0,95	1,644 854
	0,975	1,959 964
	0,99	2,326 348
	0,995	2,575 829
	0,999	3,090 232

spiel ergibt sich  $\sqrt{D^2(\bar{X} - \bar{Y})} = \sqrt{2,5^2/10 + 2,0^2/10} \approx 1,012$ . Wählt man als *Signifikanzniveau*  $\alpha = 0,05$ , so ergibt sich mit der Beziehung  $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha/2$  nach der Tabelle der Wert  $z_\alpha = 1,959964$  sowie  $z = (\bar{x} - \bar{y})/1,012 = -3,6/1,012 = -3,55$ . Wegen  $|z| > z_\alpha$  liegt das berechnete  $z$  im krit. Bereich. Die Hypothese  $EX = EY$  muß deshalb verworfen werden, d. h., der Unterschied im Schadstoffgehalt des Abwassers zwischen den Betrieben I und II ist wesentlich, er kann nicht mehr aus der Zufälligkeit der Stichproben heraus erklärt werden.

**II.** Nach der *allgemeinen Theorie* soll an Hand von Stichprobenmaterial eine Hypothese  $H_0$ , die *Nullhypothese*, getestet werden.  $H_0$  kann z. B. eine Vermutung über die Gleichheit gewisser Verteilungsparameter, über die Gleichheit von Verteilungsgesetzen ( $\nearrow$  Anpassungstest) oder über die Unkorreliertheit zweier Zufallsgrößen sein. Die log. Alternative zu  $H_0$  wird als *Alternativhypothese* bezeichnet. Man braucht für den Test einer solchen Hypothese eine *Testgröße*  $T$ , die eine geeignete, dem Problem angemessene *Stichprobenfunktion* ist. Für das vorgegebene *Signifikanzniveau*  $\alpha$  wählt man meist

$\alpha = 0,05$  bzw.  $0,01$ ; diese Wahl von  $\alpha$  ist kein mathemat. Problem, sie ergibt sich aus der prakt. Fragestellung. Zu diesem  $\alpha$  wird ein Bereich  $B$ , der *kritische Bereich* oder *Ablehnungsbereich*, so ermittelt, daß nach (2) für  $T \in B$  die Wahrscheinlichkeit, daß  $H_0$  wahr ist,  $\alpha$  nicht übertrifft.  $B$  läßt

$$(2) \quad P(T \in B | H_0 \text{ wahr}) \leq \alpha$$

sich praktisch ermitteln, wenn die Verteilung der Testgröße  $T$  oder wenigstens die asymptot. Verteilung unter der Bedingung  $H_0$  wahr bekannt ist. Das Testverfahren besteht in folgendem: Es wird eine Stichprobe durchgeführt. Diese ergibt einen speziellen Wert  $t$  der Testgröße  $T$ . Ist  $t \in B$ , d. h., ist ein Ereignis eingetreten, das eine Wahrscheinlichkeit hat, die die sehr kleine Zahl  $\alpha$  nicht übertrifft, wird die Hypothese  $H_0$  abgelehnt. Liegt  $t$  nicht in  $B$ , so kann man nur schließen, daß die Beobachtungsergebnisse der gemachten Hypothese nicht widersprechen.  $P(T \in B | H_0 \text{ wahr})$  heißt die *Irrtumswahrscheinlichkeit*, sie ist höchstens so groß wie  $\alpha$ . Die *Irrtumswahrscheinlichkeit* ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie wahr ist, oder wie man auch sagt, einen *Fehler erster Art* zu begehen; (3) heißt entsprechend die *Sicherheitswahrscheinlichkeit*. Die

$$(3) \quad 1 - P(T \in B | H_0 \text{ wahr}) \geq (1 - \alpha)$$

Fehlentscheidung, daß die Hypothese  $H_0$  auf Grund des Stichprobenmaterials nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist, bezeichnet man als *Fehler zweiter Art*. Bei vorgegebenem  $\alpha$  läßt sich der *krit. Bereich* gemäß (2) i. allg. auf unendlich viele verschiedene Weisen wählen. Man wählt ihn so, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Fehler zweiter Art zu begehen, möglichst klein wird. Vgl. *t-Test*,  $\chi^2$ -Anpassungstest, Kolmogorow-Smirnow-Test.

**Simplexalgorithmus: I.** Grundalgorithmus zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben, zugleich Kernstück anderer Verfahren, z. B. der von  $\nearrow$  Wolfe, von  $\nearrow$  Beale, von  $\nearrow$  Gomory und des Abstiegsverfahrens, zur Lösung von Transportproblemen formuliert als *Transportalgorithmus*.

Der S. beginnt an einer Ecke des zulässigen Bereichs; falls keine bekannt ist, kann durch Lösung einer Hilfsaufgabe eine gefunden werden ( $\nearrow$  Ecke I.). Das bedeutet, daß die Aufgabe in zulässiger kanonischer Form ( $\nearrow$  lineare Optimierung) bzgl. gewisser Variabler  $x_1, \dots, x_{l_m}$  vorliegt. Sind z. B.  $x_1, \dots, x_m$  diese Variablen, so liegt die Form (1) mit  $x_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$  vor, in der die in der Zielfunktion  $Q(x)$  vorhandenen Variablen  $x_1, \dots, x_m$  mit Hilfe der  $m$  Gleichungen leicht eliminiert werden können.

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ Q(x) = p_{m+1}x_{m+1} + \dots + p_n x_n + Q_0 &= \text{Min!} \end{aligned}$$

Als *zulässige Basislösung* wird jeder Punkt bezeichnet, für den  $n - m$  Variable  $x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_n}$  den Wert 0 haben und die zu den übrigen  $m$  Variablen  $x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_m}$

gehörenden Koeffizientenspalten im System der Restriktionsgleichungen linear unabhängig sind,  $x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_m}$  heißen dann *Basisvariable* und  $x_{\mu_{m+1}}, \dots, x_{\mu_n}$  *Nichtbasisvariable*. Die *Basispalten*, die Koeffizientenspalten, die zu den Basisvariablen gehören, sind eine Basis des  $\mathbf{R}^m$ ; sie werden zur *Basismatrix* zusammengefaßt. Kurz heißt auch  $x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_m}$  eine Basis. Geometrisch stellt jede zulässige Basislösung eine bestimmte Ecke des zulässigen Bereichs  $B$  dar. Zu jeder kanonischen Form erhält man genau eine Basislösung und somit eine Ecke, indem man die  $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$  als Basis nimmt. Mit den Bezeichnungen in (1) ergibt sich  $x_1 = b_1, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0$  als Ecke. Umgekehrt gehört zu jeder Ecke des zulässigen Bereichs, falls von deren Koordinaten  $m$  positiv sind, genau eine Basislösung. Sind weniger als  $m$  Koordinaten positiv, kann es zu einer Ecke mehrere Basislösungen geben; eine solche Ecke heißt *entartet*, ihr Auftreten *Degeneration*. Die Ecke  $x_1 = b_1, \dots, x_m = b_m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0$  ist genau dann entartet, wenn mindestens ein  $b_i = 0$  ist. Für das folgende wird zunächst vorausgesetzt, daß keine entarteten Ecken auftreten.  $Q_0$  ist dann der Wert der Zielfunktion in der zur kanonischen Form gehörenden Ecke. Die kanonische Form wird im *Simplextableau* (2) dargestellt.

(2)	$x_{m+1} \dots x_n$	
$x_1$	$a_{1,m+1} \dots a_{1n}$	$b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	$a_{m,m+1} \dots a_{mn}$	$b_m$
	$p_{m+1} \dots p_n$	$(-Q_0)$

II. Nach dem *Optimalitätstest* oder *Minimalitätstest* ist die zugehörige Ecke ein Optimalpunkt, falls alle  $p_{m+1}, \dots, p_n$  nichtnegativ sind. Ist dieser Test nicht erfüllt, wird ein *Austauschschritt* oder *Basiswechsel* vorgenommen, der geometrisch ein *Eckenübergang* ist, d. h. ein Übergang zu einer benachbarten Ecke. Er läßt sich in folgende Einzelschritte aufgliedern:

II.1. Eine *Pivotspalte* ( $\nearrow$  Pivot)  $j^* \in \{m+1, \dots, n\}$  mit  $p_j < 0$ , häufig mit  $p_{j^*} = \text{Min } p_j$  wird ausgewählt.

II.2. Eine *Pivotzeile*  $i^* \in \{1, \dots, m\}$  wird so bestimmt, daß in ihr das Minimum der für alle  $a_{ij^*} > 0$  gebildeten Quotienten  $b_i/a_{ij^*}$  angenommen wird. Falls für alle  $i$  gilt  $a_{ij^*} \leq 0$ , existiert kein Minimum, da die Zielfunktion über dem zulässigen Bereich nach unten nicht beschränkt ist.

Als neue Basisvariable an Stelle von  $x_{i^*}$  wird  $x_{j^*}$  genommen, und das Simplextableau wird nach II.3. umgerechnet. Bei dieser Umrechnung spielt das *Pivotelement*  $a_{i^*j^*}$  eine bes. Rolle. Die Schritte II.1. und II.2. zur Ermittlung des Pivotelements heißen auch *Pivotsuche*.

Im allg. tritt an Stelle von  $\{1, \dots, m\}$  die Indexmenge der Basisvariablen und an Stelle von  $\{m+1, \dots, n\}$  die der Nichtbasisvariablen. Die Vorschrift II.2. sichert, daß alle neuen Absolutglieder nichtnegativ

sind und deshalb zum neuen Tableau wieder eine Ecke gehört.

II.3. Bei der Umrechnung in die neue kanonische Form werden  $b_i, p_j$  und  $-Q_0$  formal ebenso wie gewöhnliche Koeffizienten der gleichen Zeile bzw. Spalte umgerechnet. Am Tableau ergeben sich folgende formale Änderungen:

II.3.1. Die Bezeichnungen  $x_i$  und  $x_{j^*}$  werden vertauscht.

II.3.2. Dort, wo bisher  $a_{i^*j^*}$  stand, steht  $(a_{i^*j^*})^{-1}$ .

II.3.3. Die übrigen Elemente  $a_{i^*j}$  der Pivotzeile werden durch  $a_{i^*j}/a_{i^*j^*}$  ersetzt,  $b_{i^*}$  durch  $b_{i^*}/a_{i^*j^*}$ . Die übrigen Elemente der Pivotspalte  $a_{ij^*}$  werden durch  $-a_{ij^*}/a_{i^*j^*}$  ersetzt,  $p_{j^*}$  durch  $-p_{j^*}/a_{i^*j^*}$ .

II.3.4. Alle anderen Elemente  $a_{ij}$  werden durch  $a_{ij} - (a_{i^*j}a_{ij^*})/a_{i^*j^*}$ ,  $b_i$  durch  $b_i - (b_{i^*}a_{ij^*})/a_{i^*j^*}$ ,  $p_j$  durch  $p_j - (a_{i^*j}p_{j^*})/a_{i^*j^*}$ ,  $(-Q_0)$  durch  $(-Q_0) - (b_{i^*}p_{j^*})/a_{i^*j^*}$  ersetzt.

Der neue Wert an Stelle von  $(-Q_0)$  ist größer als  $(-Q_0)$ , der Zielfunktionswert an der neuen Ecke deshalb kleiner als an der alten.

Nach endlich vielen solchen Schritten erreicht man das Optimum, sofern keine *Degeneration* oder *Entartung* eingetreten ist. Der Austauschschritt II. führt dann zu einer anderen Basislösung an der gleichen Ecke, der Zielfunktionswert bleibt gleich. Theoretisch, bei der Praxis entnommenen Aufgaben aber kaum, besteht somit die Gefahr, daß der S. in einen *Zyklus* einläuft, d. h., daß er periodisch eine Folge von zur gleichen Ecke gehörenden Basislösungen erzeugt. Man nennt diesen Vorgang *Kreisen*. Durch Übergang von den Absolutgliedern  $b_i = b_{i0}$  zu Absolutgliedvektoren  $\{b_{i0}, \dots, b_{im}\}^T$  und lexikographische Ordnung der entstehenden  $(b_{i0}/a_{ij^*}, \dots, b_{im}/a_{ij^*})$  beim S. kann das Kreisen aber verhindert werden.

III. Eine rechnerisch modifizierte Form des S. ist der *revidierte S. mit abgewandelter Organisation des Eckenübergangs*. Es werden nicht die Nichtbasispalten der kanonischen Form, sondern es wird die Inverse der Basismatrix der ursprünglichen Form betrachtet und schrittweise umgerechnet. Das kann durch Bildung des Produkts mit einer geeigneten Matrix erreicht werden und wird als *Produktform der inversen Matrix* bezeichnet. Oft ist z. B. Einsparung von Rechenaufwand und durch Zurückgreifen auf die Ausgangsdaten größere numerische Stabilität als beim gewöhnlichen S. zu erreichen.

IV. Um ohne Dualisierung der Aufgabe gelegentlich Rechenvorteile zu haben, wurde ein *dualer S.* entwickelt, bei dem die Lösung einer dualen linearen Optimierungsaufgabe mit dem S. an der ursprünglichen Aufgabe durchgeführt wird. Dieser S. läuft über Schnittpunkte außerhalb des zulässigen Bereichs auf einen Optimalpunkt zu. Während der Rechnung können neue Restriktionen hinzugenommen werden, in manchen Fällen ist auch ein erstes Tableau schneller zu finden. S. a. Quotientenoptimierung, lineare.

**Simplexmultiplikatoren:** Komponenten des einer Basislösung im Simplexalgorithmus zugeordneten Vektors  $\pi$  mit der Eigenschaft, daß  $(\pi^T - \pi^T A) x + \pi^T b$  die auf die Nichtbasisvariablen umgerechnete Form

der Zielfunktion des linearen Optimierungsproblems  $Ax = b, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, p^T x = \text{Min!}$  ist. Es gilt mit allen zu Basisvariablen  $x_{i_j}$  gehörigen Spalten  $A_{i_j}$  von  $A$  die Gleichung  $A_{i_j}^T \pi = p_{i_j}$ , das daraus für alle Basisindizes  $i_j$  entstehende System bestimmt  $\pi$  eindeutig. — S. a. Transportalgorithmus.

**Simplextableau** ↗ Simplexalgorithmus I.

**Simpson**, Thomas, geb. 20. 8. 1710 und gest. 14. 5. 1761 Market-Bosworth. — S. stammte aus einfachen Verhältnissen, war von Beruf Weber, dann Schulmeister. Durch eifriges Selbststudium brachte er es 1743 bis zur Professur der Mathematik an der Militärschule in Woolwich. Er ist bekannt geworden als Verfasser weitverbreiteter Lehrbücher. Die nach ihm ben. Formel ist schon lange vorher bekannt gewesen (↗ Integration, numerische II).

**Simulation**: Nachbildung bestimmter Verhaltensweisen kybernet. Systeme durch andere kybernet. Systeme, insbesondere durch maschinelle Rechenanlagen (↗ Modell). Das zu simulierende System oder Original und der Simulator oder das Modell sind bzgl. des betrachteten Verhaltens zueinander homomorphe Systeme. Bedeutsam ist vor allem die S. auf Analog- oder Digitalrechnern. Besonderer Komfort wird erreicht, wenn der Simulator über solche Funktionseinheiten bzw. über Programmpakete, verfügt, die eine problemnahe Programmierung ermöglichen.

Die S. dient vornehmlich als Mittel zum Erkenntnisgewinn über das Original, indem man die im Modell erhaltenen Ergebnisse durch eine Transformation auf das Original rücküberträgt. Der besondere Vorteil derartiger Modellexperimente liegt dabei in der Vereinfachung, leichten Modifikation und Störfreiheit sowie in der Zeit- und Kostenersparnis. Simulatoren werden ebenfalls für Trainingszwecke des menschl. Bedieners in Mensch-Maschine-Systemen eingesetzt (z. B. Flug-, Kraftwerkssimulator). S. a. Monte-Carlo-Methode.

**singuläre Lösung** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung I., ↗ partielle Differentialgleichung I., II.

**singuläre Matrix**: quadrat. Matrix, deren Determinante Null ist; s. a. Matrix III.

**singulärer Operator** ↗ lineare Abbildung III.

**singulärer Punkt** ↗ regulärer Punkt. — S. a. Laurentreihe; Konchoide II.; Tangentialebene.

**singuläres Integral** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung III.4.

**singuläres Linienelement** ↗ gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung III.4.

**Singularität** ↗ Laurentreihe, ↗ analytische Funktion II.

**Sinus** ↗ Winkelfunktion II.

**Sinus hyperbolicus** ↗ hyperbolische Funktion I.

**Sinusreihe** ↗ Taylorsche Reihe II.3.

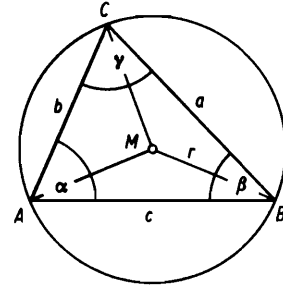
**Sinussatz**: I. In einem ebenen Dreieck  $ABC$  verhalten sich die Längen  $a, b, c$  der Seiten wie die Sinus der Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  der gegenüberliegenden Winkel. Im Umkreis des Dreiecks  $ABC$  sind seine Seiten Sehnen und seine Innenwinkel (die den Sehnen gegenüberliegende Umfangswinkel (Abb.)). Hat der Umkreis-

radius die Länge  $r$ , so gelten die Beziehungen (1) und danach (2) als Darstellung für den S.

$$(1) \quad a = 2r \sin \alpha, \quad b = 2r \sin \beta, \quad c = 2r \sin \gamma$$

$$(2) \quad a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

S. a. ebene Trigonometrie-II.



Zum Sinussatz

II. In einem sphär. Dreieck  $ABC$  verhalten sich die Sinus der Seitengrößen  $a, b, c$  wie die Sinus der Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  der gegenüberliegenden Winkel, d. h., es gilt (3).

$$(3) \quad \sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Der S. im sphär. Dreieck ist zu sich selbst polar (↗ sphärisches Dreieck III.). In beiden Fällen verbindet der S. gegenüberliegende Stücke. Sind die Stücke eines Paares und ein Stück eines zweiten Paares gegeben, läßt sich das zweite Stück dieses Paares berechnen, aus  $a, \alpha, \beta$ , z. B.  $\sin b = (\sin a / \sin \alpha) \cdot \sin \beta$  oder in der Ebene aus  $a, \alpha, b$  z. B.  $\sin \beta = (b/a) \cdot \sin \alpha$  (↗ ebene Trigonometrie II.1., II.2.). Dabei ist zu beachten, daß sich aus dem Wert für  $\sin \beta$  zwei Werte  $\beta_1$  und  $\beta_2$  für das Argument ergeben, deren Summe je nach dem Vorzeichen von  $\sin \beta$  den Wert  $\pi$  oder  $3\pi$  hat.

**skalare Multiplikation** ↗ Matrix II., ↗ Vektorraum II.

**skalares Feld**: I. auf einem Teilbereich  $G$  des Raumes definierte Funktion  $U(P)$ , die jedem Punkt  $P \in G$  eine skalare Größe, d. h. eine Zahl, zuordnet. Beispiele sind das Temperaturfeld oder das Dichtefeld in einem inhomogenen Medium. Ist ein s. F. nur für die Punkte einer Ebene definiert, so heißt es auch *ebenes s. F.* Das s. F. bezeichnet man als *zentrales Feld* oder *Kugelfeld* bzgl.  $P_0$ , wenn der Wert der skalaren Größe  $U$  im Punkte  $P$  nur vom Abstand der Punkte  $P$  und  $P_0$  abhängt. Das s. F.  $U(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$  der Beleuchtungsstärke bei einer punktförmigen Lichtquelle in  $P_0(0, 0, 0)$  ist z. B. ein zentrales Feld.

Das s. F. heißt *axiales* oder *zylindr. Feld*, wenn  $U$  für alle Punkte gleiche Werte annimmt, die von einer Geraden, die man als *Feldachse* bezeichnet, gleiche Abstände haben.

Ein s. F. kann in kartes. Koordinaten  $(x, y, z)$  als  $U = f_1(x, y, z)$ , in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  als  $U = f_2(r, \varphi, z)$  und in Kugelkoordinaten als  $U = f_3(r, \varphi, \lambda)$  dargestellt werden. Für ein ebenes Feld gilt  $U = g_1(x, y)$  in kartes. Koordinaten oder  $U = g_2(r, \varphi)$  in Polarkoordinaten, wenn die Ebene,

in der das s. F. definiert ist, die  $x, y$ -Ebene ist. Es erweisen sich die Kugelkoordinaten bzw. die Polarkoordinaten für die Untersuchung von zentralen Feldern und die Zylinderkoordinaten für die Untersuchung von axialen Feldern als am günstigsten.

II. Alle Punkte  $P$  von  $G$ , für die  $U$  stets den gleichen Wert  $c$  hat, bilden für das s. F.  $U$  eine Niveaufläche und für ein ebenes Feld eine Niveaulinie. Die Gleichung der Niveaufläche hat die Form  $f_1(x, y, z) = c$ ,  $f_2(r, \varphi, z) = c$  oder  $f_3(r, \varphi, \lambda) = c$ . Für verschiedene Werte von  $c$  ergeben sich verschiedene Niveauflächen. Durch jeden Punkt von  $G$  geht genau eine Niveaufläche hindurch. Zeichnet man sich die Niveauflächen oder Niveaulinien für  $c_0, c_0 + h, c_0 + 2h, \dots$ , so ändert sich das s. F. um so schneller, je dichter die Niveauflächen oder Niveaulinien liegen.

In geograph. Karten sind z. B. die Linien gleicher Höhe über den Meeresspiegel oder die Linien gleicher Temperatur Niveaulinien. Die Niveauflächen eines Zentralfeldes bzgl.  $P_0$  sind konzent. Kugeln um  $P_0$  und die Niveauflächen eines axialen Feldes sind Zylinder mit der Feldachse als Zylinderachse. Das ebene Feld  $U = y/x^2$  hat die Parabeln  $y = cx^2$  als Niveaulinien, und das s. F.  $U = 6x^2 + 3y^2 + 2z^2$  hat die Ellipsoide  $x^2/(2c) + y^2/(4c) + z^2/(6c) = 1$  für  $c > 0$  als Niveauflächen, für  $c = 0$  schrumpft die Niveaufläche auf einen Punkt  $P(0, 0, 0)$  zusammen, und für  $c < 0$  gibt es keine Niveauflächen. S. a. Vektorfeld; Gradient II.; Divergenz I.; Nablaoperator I.

**Skalarprodukt, inneres Produkt, Punktprodukt:**

I. Funktion  $\varphi$ , die jedem geordneten Paar  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  von Vektoren eines reellen Vektorraumes  $V$  eine reelle Zahl  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  in der Weise zuordnet, daß für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) *Linearität:*  
 $\varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}),$
- (2) *Homogenität:*  $\varphi(\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$
- (3) *Symmetrie:*  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$
- (4) *Positive Definitheit:*  
 $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$  für alle  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}.$

Ein reeller Vektorraum mit S. heißt *euklid. Vektorraum*; statt  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  schreibt man  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  oder  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , letzteres besonders zur Vermeidung von Verwechslungen dann, wenn neben dem S. auch noch die gewöhnl. Produktbildung definiert ist, z. B. in Funktionenräumen.

*Beispiele:* I. Im Vektorraum  $V^n$  der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen ist (5) ein S.

$$(5) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) (y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. Im Vektorraum aller in  $[a, b]$  stetigen Funktionen ist (6) ein S.

$$(6) \quad (f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt$$

3. Im Vektorraum der Verschiebungen einer Ebene wird ein S. definiert, wenn man setzt  $\mathbf{ab} = 0$ , falls  $\mathbf{a} = \mathbf{o}$  oder  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ , und  $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , falls  $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$  und  $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ . Dabei ist  $|\mathbf{a}|$  die Länge des Vektors  $\mathbf{a}$  und  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  die Größe des Winkels zwischen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  im elementargeometr. Sinne.

Das S. läßt sich auch auffassen als *Bilinearform*; nach Definition des S.s in einem reellen Vektorraum ist die Bilinearform symmetrisch und positiv definit. In einem komplexen Vektorraum stellt jede positiv definite *hermitesche Form* ein S. dar; d. h. eine komplexwertige Bilinearform  $\psi$  mit der Eigenschaft  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ . Ein komplexer Vektorraum, in dem ein S. definiert ist, wird *unitärer Raum* gen.

Mittels des S.es läßt sich der Begriff des *Betrages* bzw. der *Länge* bzw. der *Norm*  $|\mathbf{x}|$  eines Vektors  $\mathbf{x}$  einführen durch die Definition  $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ . Unter der *Größe des Winkels* zwischen den zwei Vektoren  $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}, \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$  versteht man diejenige reelle Zahl  $\alpha$ , für die gilt:  $\cos \alpha = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} / (|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|)$  und  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Ist  $\alpha = \pi/2$ , so wird  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ . Man nennt  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  zueinander *orthogonal* genau dann, wenn  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  ist; dabei ist jedoch  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  bzw.  $\mathbf{y} = \mathbf{o}$  zugelassen, d. h., der Nullvektor ist orthogonal zu jedem Vektor. Im Vektorraum der Translationen der Ebene bzw. des dreidimensionalen Raumes, in dem die Begriffe Länge und Winkel einen elementargeometr. Sinn haben, ergeben sich durch die neue Betrachtungsweise über das S. keine Widersprüche. S. a. Hilbertraum.

**Skalarprodukt, verallgemeinertes**  $\nearrow$  Funktion, quadratisch summierbare.

**Skalaranteil**  $\nearrow$  Quaternionen.

**Skolem, Thoralf M. A.**, geb. 23. 5. 1887 Sandsvär (Norw.), gest. 23. 3. 1963 Oslo. — S. studierte in Kristiana (Oslo) und Göttingen, promovierte 1926 in Oslo. 1930 ging er als Professor an ein Forschungsinstitut in Bergen und kehrte 1938 nach Oslo zurück. Er ist der Autor wichtiger Arbeiten zur *mathemat. Logik* und Mengenlehre. Er untersuchte auch diophant. Gleichungen kombinator. Probleme und führte komplizierte Prozesse auf den Vorgang des Zählens zurück. Dabei leistete er einen großen Beitrag zur *Theorie der rekursiven Funktionen*.

**Skolemsche Normalform**  $\nearrow$  Normalform II.

**Skolemsches Paradoxon:** *mathematische Logik* Bezeichnung für den Satz der mathemat. Logik, der besagt, daß jedes mengentheoret. Axiomensystem mehrere wesentl. verschiedene Modelle hat und daß die innerhalb der axiomatischen Mengenlehre durch die transfiniten Kardinalzahlen gegebene Unterscheidung zwischen verschiedenen Graden der Unendlichkeit einer Menge nur relativ sind.

**Smirnow, Wladimir Iwanowitsch**, geb. 10. 6. 1887 Petersburg (Leningrad), gest. 11. 2. 1974 Leningrad. — S., ein Schüler von STEKLOW, beendete 1910 die Petersburger Universität und wurde dort 1926 zum Professor berufen. Er arbeitete auf vielen Gebieten der Mathematik, insbes. über Fragen der mathemat. Physik und der angewandten Mathematik. Als sein Hauptwerk wird oft sein fünfbän-



diges Lehrbuch »Einführung in die höhere Mathematik« bezeichnet.

**Snell, Snellius**, Willebrord van Royen, geb. 1591 und gest. 30. 10. 1626 Leiden. — S. war Sohn eines Professors für Mathematik und lehrte selbst seit 1613 an der Universität seiner Heimatstadt. — Die wichtigsten Ergebnisse der wissenschaftl. Tätigkeit von S. sind: Abschätzungen zur Verbesserung der Kreismessung (1621), eine Navigationstheorie (1624), in der das Wort *Loxodrome* erstmals vorkommt, sowie die zum ersten Male ausgeführte Gradmessung durch Triangulation (1617). In seinem Nachlaß wurde die Formulierung des Brechungsgesetzes der Optik vorgefunden.

**Software:** Gesamtheit der zu einer Rechenanlage gehörenden getesteten Programme. S. a. Hardware.

**Sollwert** ↗ Regelung I.

**Spaltenmatrix** ↗ Matrix I.

**Spaltenvektor** ↗ Matrix I.

**Spannungen auf Graphen:** I. eine Bogenbewertung  $\vartheta$  eines gerichteten Graphen  $G$ , die eine reelle Zahl  $\vartheta(b)$  jedem Bogen  $b$  zuordnet, hat die folgende Eigenschaft: Ist  $\mu$  ein Zyklus in  $G$ , in dem eine bestimmte Durchlaufungsrichtung festgelegt wurde, und bezeichnen  $\mu^+$  die Menge der in dieser Richtung,  $\mu^-$  die Menge der in entgegengesetzter Richtung orientierten Bögen von  $\mu$ , dann ist für jeden Zyklus von  $G$  die Summe der Bewertungen von  $\mu^+$  gleich der Summe der Bewertungen aller Bögen von  $\mu^-$ , d. h., es gilt (1).

$$(1) \quad \sum_{b \in \mu^+} \vartheta(b) = \sum_{b \in \mu^-} \vartheta(b)$$

Ist der Graph das Schaltschema einer elektrischen Anlage, dann definieren die elektrischen Spannungen in den verschiedenen Zweigen eine Spannung  $\vartheta$  des Graphen.

Jeder Spannung entsprechen Knotenpunktbewertungen nach dem folgenden Satz: Eine Kantenbewertung  $\vartheta$  ist genau dann eine Spannung, wenn es eine Knotenpunktbewertung  $t$ , durch die jedem Knotenpunkt  $P$  von  $G$  eine reelle Zahl  $t(P)$  zugeordnet wird, so gibt, daß für jeden Bogen  $b$  die Beziehung (2) besteht, nach der  $t$  durch  $\vartheta$  bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

$$(2) \quad \vartheta(b) = t(\text{Zielpunkt von } b) - t(\text{Startpunkt von } b)$$

Die Funktion  $t$  heißt auch das zur Spannung  $\vartheta$  gehörende Potential. Im Netz der Autostraßen eines Landes, etwa der DDR, stellen die Städte und Ortschaften die Knotenpunkte dar, und jede Autostraße wird durch je zwei Bögen mit entgegengesetztem Richtungssinn ersetzt. Wird das Potential  $t(X)$  für eine beliebige Stadt  $X$  als kürzeste Entfernung im Straßennetz von einer ausgewählten Stadt  $A$  mit  $t(A) = 0$  festgelegt, so definiert (2) eine zu  $t$  gehörige Spannung. Für jeden Bogen  $b$  gilt dann die Ungleichung  $\vartheta(b) \leq l(b)$ , in der  $l(b)$  die Länge der Straße  $b$  bedeutet. Entsprechend kann  $t$  die schnellste oder die billigste Verkehrsverbindung sein.

II. Wird in einem gerichteten Graphen  $G$  jedem Bogen  $b$  eine Zahl  $l(b) \geq 0$  zugeordnet und Länge des Bogens  $b$  genannt, so kann eine Bahn  $w$  gesucht werden, die von einem Knotenpunkt  $A$  zu einem Knotenpunkt  $B$  führt und für die die Gesamtlänge  $\sum_{b \in w} l(b)$  aller durchlaufenen Bögen möglichst klein ausfällt. Diese Aufgabe wird *Problem des kürzesten Weges* genannt. Sieht man von der Deutung der Potentialfunktion  $t(X)$  als der kürzesten Entfernung ab und läßt zu, daß  $\vartheta(b)$  für einige Bögen keiner Beschränkung unterliegt, d. h., daß  $l(b) \leq +\infty$  ist, so ergibt sich das *Maximalspannungsproblem*, wenn zu dem Weg  $w$  von  $A$  nach  $B$  ein Rückkehrbogen  $b^*$  mit  $l(b^*) = +\infty$  eingeführt wird, für den  $B$  Startpunkt und  $A$  Zielpunkt ist. Es ist dann unter allen Spannungen  $\vartheta$ , die für jeden Bogen  $b$  der Bedingung  $-\infty \leq \vartheta(b) \leq l(b)$  genügen, eine so zu bestimmen, daß für sie  $\vartheta(b^*)$  am größten ist. Allerdings muß eine solche Spannung nicht in jedem Falle existieren.

III. Zum *Potentialproblem* gelangt man, wenn jedem Bogen  $b$  eines gerichteten Graphen  $G = (K, U)$  ein reelles Intervall  $[k(b), l(b)]$  und eine in diesem Intervall definierte stetige Funktion  $h_b$  zugeordnet werden und eine Spannung  $\vartheta$  mit den Eigenschaften (3) und (4) gesucht wird:

$$(3) \quad \text{für jeden Bogen } b \text{ gilt } k(b) \leq \vartheta(b) \leq l(b)$$

$$(4) \quad \text{der Wert } H(\vartheta) = \sum_{b \in U} h_b(\vartheta(b)) \text{ ist minimal}$$

Werden im folgenden die Bögen  $b$  von  $G$  mit  $1, \dots, i, \dots, m$  bezeichnet, dann kann den Spannungen  $\vartheta(b)$  ein Vektor  $\vec{\vartheta} = (\vartheta(1), \dots, \vartheta(i), \dots, \vartheta(m))$  mit  $\vec{\vartheta} \in \mathbf{R}^m$  zugeordnet werden. In bezug auf einen Cozyklus  $\omega$  von  $G$  kann eine Spannung  $\vec{\vartheta}$  auf folgende Weise festgelegt werden: Durch eine in  $\omega$  willkürlich gewählte Richtung werden wie oben für einen Zyklus  $\mu$  die Mengen  $\omega^+$  und  $\omega^-$  der Bögen von  $\omega$  danach unterschieden, ob ihre Orientierung der gewählten entspricht oder nicht. Mit (5) wird durch den Vektor  $\vec{\vartheta} = (\vartheta(1), \dots, \vartheta(m)) = \omega$  eine Spannung definiert, die den Cozyklus  $\omega$  eindeutig be-

$$(5) \quad \vartheta(b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } b \in \omega^+ \\ -1, & \text{falls } b \in \omega^- \\ 0, & \text{falls } b \notin \omega \end{cases}$$

schreibt. Wie bei den Strömen (↗ Ströme auf Graphen) spricht man von der *linearen Unabhängigkeit von Cozyklen*. Die Spannungen bilden einen Unterraum  $\Theta$  des  $\mathbf{R}^m$ , der alle Cozyklen enthält. Wieder gibt es eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_c$  von  $\Theta$ , die nur aus Cozyklen besteht. Für jede Spannung gilt daher (6).

$$(6) \quad \vec{\vartheta} = \vartheta_1 \omega_1 + \vartheta_2 \omega_2 + \dots + \vartheta_c \omega_c$$

Die Dimension  $c$  von  $\Theta$  heißt *cozyklotomat. Zahl*; für einen zusammenhängenden Graphen  $G$  mit  $n$  Knotenpunkten gilt  $c = n - 1$ . Für einen zusammenhängenden Graphen  $G$  läßt sich eine Cozyklenbasis gewinnen, indem man von einem Gerüst  $G$  von  $G$  ausgeht.  $G$  zerfällt durch Entfernen eines beliebigen

seiner Bögen in zwei Komponenten; alle Bögen, die in  $G$  diese Komponenten verbinden, bilden dann einen *elementaren Cozyklus*. Alle aus  $G$  so gewonnenen elementaren Cozyklen bilden eine *Cozyklenbasis*. Aus (6) folgt dann unmittelbar, daß eine Spannung  $\vec{\theta}$  bereits durch die Spannungen auf  $G$  eindeutig bestimmt ist. Nach Definition genügt jede Spannung  $\vec{\theta}$  für einen Zyklus  $\mu$  der Gleichung (1). Damit gilt aber auch für das *Skalarprodukt*  $\vec{\theta} \vec{\mu} = 0$  ( $\nearrow$  Ströme auf Graphen). Da sich jeder Strom als eine Linearkombination von Zyklen schreiben läßt, ist das Skalarprodukt jeder Spannung  $\vec{\theta}$  mit jedem Strom  $\vec{\varphi}$  gleich Null, d. h., die Spannungen und die Ströme sind orthogonal zueinander ( $\nearrow$  Ströme auf Graphen IV.).

**Spannweite**  $\nearrow$  Streuungsmaße.

**Spat**  $\nearrow$  Prisma II.

**spätester Termin**  $\nearrow$  Netzplantechnik IV.

**Spatprodukt**  $\nearrow$  Vektorprodukt II.

**Speicher**  $\nearrow$  digitale Rechenanlage I., II.1.

**Speicherkapazität:** Anzahl der Speicherplätze eines Speichers ( $\nearrow$  digitale Rechenanlage II.1.). Die S. wird in Bits, Bytes bzw. in Zeichen oder Wörtern gemessen.

**Speicherplatz:** kleinste adressierbare Einheit eines Speichers ( $\nearrow$  digitale Rechenanlage II.). Das Volumen eines S. hängt von der Art des Speichers und der Konstruktion der Rechenanlage ab. Bei Kernspeichern ist die Aufnahmemöglichkeit eines Zeichens oder eines Wortes gebräuchlich. Jedem S. ist ein Kennzeichen, die *Adresse*, zugeordnet, mit deren Hilfe Daten im Speicher eindeutig positioniert bzw. identifiziert werden können.

**Spektrum**  $\nearrow$  Resolventenmenge I.

**spezielle Lösung**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung I.

**sphärische Koordinaten**  $\nearrow$  Koordinatensystem V.

**sphärischer Exzeß**  $\nearrow$  sphärisches Dreieck I.

**sphärischer Kreis:** Kreis auf einer Kugel; Menge der Punkte auf ihrer Oberfläche, die von einem festen Punkt  $P$ , dem *sphär. Mittelpunkt*, einen konstanten sphär. Abstand  $r$  haben, der *sphär. Radius* genannt wird. Für  $r = \pi/2$  ist der s. K. ein Großkreis, die *Polare*  $p$  zum Pol  $P$ . Für alle anderen Werte von  $r$  zwischen 0 und  $2\pi$  ist der s. K. ein *Kleinkreis*. Hat die Kugel den Radius  $R$ , so wird dieser Kleinkreis

von einer Ebene ausgeschnitten, die auf dem Radius durch den Pol  $P$  im Punkte  $B$  senkrecht steht (Abb.). Für die Maßzahl der Strecke  $PB$  gilt  $R - R \cos r$  und für den Radius  $\rho$  des Schnittkreises  $\rho = R \sin r = R \cos(\pi/2 - r) = R \cos \varphi$  mit  $\varphi = \pi/2 - r$  bzw.  $\varphi = 90^\circ - r$ . Der Umfang des Schnittkreises ist  $2\pi\rho = 2\pi R \cos \varphi$ .

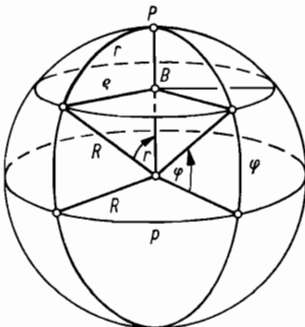
**sphärischer Mittelpunkt**  $\nearrow$  sphärischer Kreis.

**sphärischer Radius**  $\nearrow$  sphärischer Kreis.

**sphärisches Bild**  $\nearrow$  Krümmung I.

**sphärisches Dreieck, Kugeldreieck:** I. Gebiet der Kugeloberfläche, das von drei Großkreisbögen, *Seiten* gen., begrenzt wird. Zu drei Punkten  $A, B, C$  auf der Kugeloberfläche, die nicht auf einem Großkreisbogen liegen, gibt es vier s. D.e, die  $A, B$  und  $C$  als *Eckpunkte* haben. Bei der Messung der Großkreisbögen bezieht man sich meist auf die Einheitskugel mit dem Radius  $R = 1$ . Die Bögen bekommen dadurch Winkelmaß in Grad- oder in Bogenmaß; z. B. läßt sich die Seite  $c$  zwischen den Eckpunkten  $A$  und  $B$  als Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a} = \overrightarrow{MA}$  und  $\mathbf{b} = \overrightarrow{MB}$  auffassen, wenn  $M$  der Kugelmittelpunkt ist. Zu den drei Kugelpunkten  $A, B, C$ , die nicht auf einem Großkreisbogen liegen und von denen keine zwei Gegenpunkte ( $\nearrow$  Großkreis III.) sind, gibt es dann genau ein s. D. mit diesen als Eckpunkten, dessen Seiten sämtlich kleiner als  $\pi$ , als ein Halbkreis sind. Solche s. D.e heißen *Eulersche Dreiecke*. Ein nichteulersches Dreieck unterscheidet sich nur um ein Eulersches Dreieck von einer Halbkugel; es reicht deshalb i. allg. aus, nur Eulersche Dreiecke zu betrachten. Die *Dreieckswinkel*  $\alpha, \beta, \gamma$  sind die Winkel zwischen beiden Tangenten, die im jeweiligen Scheitelpunkt an die beiden Großkreise gelegt werden können, bzw. die Neigungswinkel der entsprechenden Großkreisebenen. In Eulerschen Dreiecken sind alle Winkel kleiner als  $\pi$ . In jedem s. D. ist die Winkelsumme größer als  $\pi$  im Unterschied zum ebenen Dreieck. Der Überschuß über  $\pi$  heißt *sphär. Exzeß*  $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ . Er ist proportional zum *Flächeninhalt*  $A = \varepsilon \cdot R^2$  des s. D.s, wenn  $R$  die Länge des Kugelradius ist.

II. Je zwei der vom Eulerschen Dreieck  $ABC$  bestimmten Großkreise schneiden sich außer in den Eckpunkten noch in deren Gegenpunkten  $A', B', C'$  (Abb. 1). Die Kugeloberfläche wird dabei in acht Eulersche Dreiecke zerlegt, von denen je zwei zentralsymmetrisch zum Kugelmittelpunkt sind und deshalb auch in der Fläche übereinstimmen,



sphärischer Kreis:  
Breitenkreis als  
sphärischer Kreis

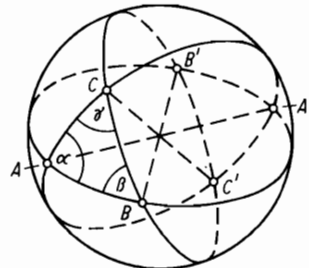
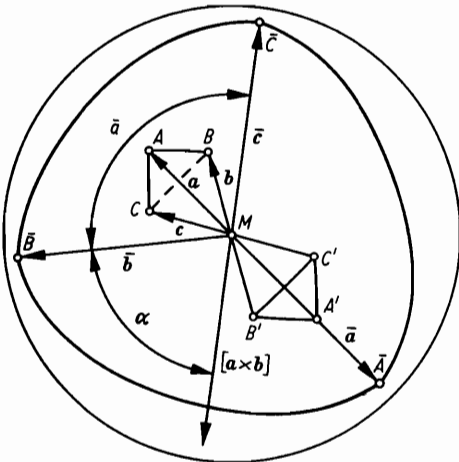


Abb. 1:  
Sphär. Dreieck ABC  
und Gegenpunkte  
A', B', C'

z. B.  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ,  $\triangle ABC' \cong \triangle A'B'C$ . Jedes Dreieck, das mit dem Dreieck  $ABC$  eine Seite gemeinsam hat, ergänzt es zu einem sphär. Zweieck, z. B. erhält man aus dem  $\triangle ABC$  mit dem Dreieck  $BCA'$  ein Zweieck mit dem Winkel  $\alpha$ , das die Fläche  $|\triangle ABC| + |\triangle BCA'| = 2 \cdot R^2 \cdot \alpha$  hat. Man erhält:  $2 \cdot R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 3|\triangle ABC| + |\triangle BCA'| + |\triangle CAB'| + |\triangle ABC'| = 2|\triangle ABC| + |\triangle ABC| + |\triangle BCA'| + |\triangle CAB'| + |\triangle A'B'C|$ . Die letzten vier Dreiecke bilden zusammen eine Halbkugel mit der Fläche  $2\pi R^2$ . Es folgt:  $|\triangle ABC| = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ . Ein s. D. z. B. mit dem Nordpol und zwei Punkten auf dem Äquator mit der Längendifferenz  $\pi/2 = 90^\circ$  als Eckpunkte hat den Flächeninhalt  $A = (3\pi/2 - \pi) R^2 = \pi R^2/2$ , dies ist der achte Teil der Kugeloberfläche.

III. Wie es zu jeder dreiseitigen körperl. Ecke eine Polarecke gibt, deren Kanten senkrecht auf den Seitenflächen der gegebenen körperl. Ecke stehen, gibt es zu jedem s. D. ein Polardreieck  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , dessen Eckpunkte gekennzeichnet werden durch die Einheitsvektoren

$\bar{a} = -\mathbf{b} \times \mathbf{c} / |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ ,  $\bar{b} = -\mathbf{c} \times \mathbf{a} / |\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$  und  $\bar{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} / |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  (Abb. 2). Die Größen der Seiten



sphärisches Dreieck. Abb. 2: Polardreieck  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  zu dem durch die Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bestimmten Kugeldreieck

sind gegeben durch  $\bar{a} = \sphericalangle(\bar{b}\bar{c})$ ,  $\bar{b} = \sphericalangle(\bar{c}\bar{a})$  und  $\bar{c} = \sphericalangle(\bar{a}\bar{b})$ . Zwischen ihnen und den Größen  $\alpha, \beta, \gamma$  der Winkel des ursprüngl. Dreiecks  $ABC$  gelten die Beziehungen (1). In Abb. 2 z. B. liegen die drei Einheitsvektoren  $\bar{c}, \bar{b}$  und  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  in einer Ebene,

$$(1) \quad \bar{a} + \alpha = \bar{b} + \beta = \bar{c} + \gamma = \pi$$

und die Summe der Winkelgrößen zwischen ihnen ergibt einen gestreckten Winkel. Da man zeigen kann, daß das ursprüngl. Dreieck  $ABC$  das Polardreieck des Polardreiecks  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  ist, gelten entsprechend die Beziehungen (2), d. h., die Größen der

$$(2) \quad \bar{\alpha} + a = \bar{\beta} + b = \bar{\gamma} + c = \pi$$

Seiten eines s. D.s sind die Supplemente der Winkelgrößen des Polardreiecks und die Winkelgrößen die Supplemente der Größen der Seiten des Polardreiecks.

Dem Polardreieck kommt große prinzipielle Bedeutung zu. Hat man eine allgemeine Gesetzmäßigkeit für s. D.e gefunden, so gilt sie auch für das Polardreieck. Ersetzt man nun die Seiten des Polardreiecks durch die Supplemente der Winkel des Dreiecks und die Winkel durch die Supplemente der Seiten, so erhält man eine neue Gesetzmäßigkeit für s. D.e, die polare Gesetzmäßigkeit.

IV. Nach diesen polaren Gesetzmäßigkeiten ist in einem Eulerschen Dreieck die Summe der Größen zweier Winkel kleiner als die Größe des um  $\pi$  bzw.  $180^\circ$  vermehrten dritten, z. B.  $\alpha + \beta < \pi + \gamma$ . Die Herleitung dieser Beziehung geht davon aus, daß in jedem Eulerschen Dreieck die Summe der Größen zweier Seiten größer ist als die der dritten, und daß das Polardreieck eines Eulerschen Dreiecks wieder ein Eulersches Dreieck ist, in dem dann z. B. gilt  $\bar{a} + \bar{b} > \bar{c}$ . Nach den polaren Beziehungen ist dies mit  $(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) > (\pi - \gamma)$  oder  $\pi + \gamma > \alpha + \beta$  gleichwertig. Allgemeine Beziehungen im s. n. D.

IV.1. Im Eulerschen Kugeldreieck liegt die Summe der Winkelgrößen zwischen  $\pi$  und  $3\pi$ , die der Seitengrößen zwischen 0 und  $2\pi$ , wie (3) und (3a) angeben.

$$(3) \quad \pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$

$$(3a) \quad 0 < a + b + c < 2\pi$$

IV.2. Der größeren Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

IV.3. Die Summe der Größen zweier Seiten ist größer als die Größe der dritten. Die Differenz der Größen zweier Seiten ist kleiner als die Größe der dritten. Als Dreiecksungleichung lauten diese Beziehungen (4) und (4a).

$$(4) \quad a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b$$

$$(4a) \quad |a - b| < c, \quad |b - c| < a, \quad |c - a| < b$$

IV.4. Die Summe der Größen zweier Winkel ist kleiner als die Größe des um  $\pi$  vermehrten dritten, z. B. gilt (5).

$$(5) \quad \alpha + \beta < \gamma + \pi.$$

IV.5. Ist die Summe der Größen zweier Seiten größer oder kleiner als zwei Rechte, so ist auch die Summe der Größen der beiden gegenüberliegenden Winkel größer oder kleiner als zwei Rechte.

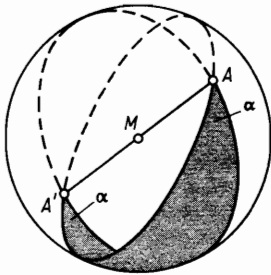
Von diesen Beziehungen sind (3) und (3a) zueinander polar und ebenso (4) und (5); die Sätze IV.2. und IV.5. dagegen sind zu sich selbst polar.

V. Die Lehre von der Berechnung s. D.e ist die sphär. Trigonometrie. Im rechtwinkligen s. D. hat ein Winkel die Größe  $\pi/2$ . In diesem s. D. gelten die Neperschen Regeln.

In einem gleichschenkligen s. D. haben zwei Seiten gleiche Größe, z. B.  $a = b$ . Es gelten die von der Planimetrie bekannten Beziehungen: Im gleich-

schenkligen s. D. halbiert die Höhe auf die Grundseite diese und den Winkel an die Spitze; sie ist Mittelsenkrechte und Symmetrielinie des gleichschenkligen Dreiecks; die Basiswinkel in ihm sind einander gleich. Ein entsprechender Satz gilt für das gleichwinklige s. D., das auch gleichschenkelig ist.

**sphärisches Zweieck, Kugelzweieck:** Gebiet der Kugeloberfläche, das von zwei Großkreisbögen, Seiten gen., begrenzt wird. Die zwei Eckpunkte  $A$  und  $A'$  sind Gegenpunkte auf der Kugel, d. h., beide

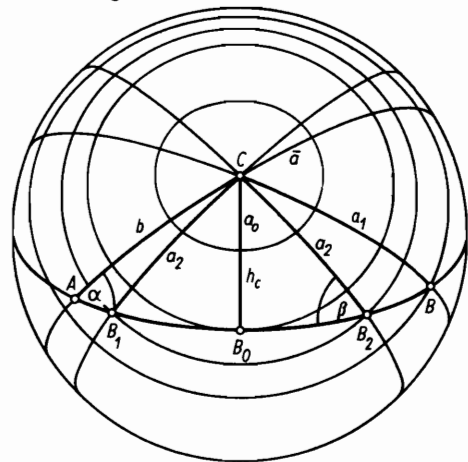


Kugelkeil und sphärisches Zweieck

sind Endpunkte eines Kugeldurchmessers (Abb.). Die Seiten haben daher die Länge  $\pi R$ , wenn  $R$  die Länge des Kugelradius ist. Die beiden Seiten schneiden sich in  $A$  und  $A'$  unter Winkeln der gleichen Größe  $\alpha$ . Dieser Größe ist die Fläche  $A$  des s. Z. proportional:  $A = 2R^2\alpha$ , wenn  $\alpha$  in Bogenmaß gemessen wird. Der durch das s. Z. und die Großkreisebenen abgegrenzte (räuml.) Teil der Vollkugel heißt *Kugelkeil*.

**sphärische Trigonometrie: I.** Lehre von der Berechnung sphärischer Dreiecke mit Hilfe von Winkelfunktionen. Die s. T. wird angewendet in der Astronomie sowie in der Geodäsie und in der Navigation, wenn die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigt werden muß. Die für die ebene Trigonometrie übliche Zurückführung der Berechenbarkeit der Stücke eines Dreiecks auf ihre Konstruierbarkeit gibt auch in der s. T. einen Überblick, wenn man beachtet, daß in der *Geometrie auf der Kugel* die Großkreise die Geraden darstellen, daß es parallele „Geraden“ nicht gibt, und daß die *Winkelsumme* größer als  $\pi$  ist. Zu den allgemeinen Beziehungen im sphärischen Dreieck treten die *polaren Gesetzmäßigkeiten* (→ sphärisches Dreieck III., IV.), nach denen zu jeder Aussage eine polare Aussage existiert. Die in der Ebene mit dem Sinussatz lösbare Aufgabe, die Stücke eines Dreiecks zu berechnen, von dem die Größe einer Seite und die Größen der beiden anliegenden Winkel gegeben sind, erweist sich als polare Aufgabe zu der, bei der die Größen zweier Seiten und die des eingeschlossenen Winkels gegeben sind. Es gibt deshalb nur drei *Grundaufgaben*, zu jeder aber eine polare. Wie im ebenen Falle ist wieder jede Aufgabe mit den dem Sinussatz und dem Kosinussatz entsprechenden Sätzen, dem Seiten- und dem Winkelkosinussatz lösbar (→ Kosinussatz II., III.); für durchgehend logarithmische Rechnung gibt es aber dem Tangensatz in der Ebene entsprechend die *Neperschen Analogien* (→ Tangensatz II.) und außer einem *Halbwinkelsatz* den dazu polaren *Halb-*

*seitensatz* (→ Halbwinkelsatz II., III.). Schließlich ist stets, wenn sich aus einem berechneten Sinuswert zwei Werte für das Argument ergeben, zu prüfen, ob die Aufgabe zwei Lösungen hat oder ob eines der Argumente den geometrischen Bedingungen widerspricht. Wie in der Ebene läßt sich auch diese Entscheidung *geometrisch veranschaulichen*, z. B. wenn  $\alpha$ ,  $b$  und  $a$  gegeben sind (Abb. 1). Wie dort kann der um Punkt  $C$  mit dem Radius  $a$  geschlagene Kreis den freien Schenkel des im Punkte  $A$  an die Seite  $AC$  angetragenen Winkels  $\alpha$  entweder nicht treffen, falls  $a = \bar{a} < h_c$ ; im Punkte  $B_0$  berühren, falls  $a = a_0 = h_c$ , oder in zwei Punkten  $B_1$  und  $B_2$  bzw. in einem Punkt  $B$  schneiden, falls  $a = a_2 > h_c$ , aber  $< b$ , bzw.  $a = a_1 > b$ . Die Kreise um  $C$  sind auf der Kugel durch *sphärische Kreise* zu ersetzen. Dabei erhält man eine eindeutige Lösung nur für  $a_1 > b$ , abgesehen von dem Sonderfall, daß  $a = h_c$  der Abstand des Punktes  $C$  vom Großkreis  $AB$  und das Dreieck  $AB_0C$  rechtwinklig ist. Zwei Lösungen dagegen ergeben sich für  $a_2 < b$ . Es sind die Dreiecke  $AB_1C$  und  $AB_2C$ . Während aber in der Ebene sich die Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks nach den Definitionen der Winkelfunktionen berechnen lassen, ergibt sich in der s. T. die *Nepersche Regel* als spezielle Anwendung des Sinus-, des Seitenkosinus- und des Winkelkosinussatzes. Sie wird mit Erfolg benutzt zur Vereinfachung der Berechnung.



sphärische Trigonometrie. Abb. 1: Anzahl der Lösungen bei verschiedener Größe der Seite  $a$  und gegebener Größe  $b$  einer anderen Seite und  $\alpha$  des gegenüberliegenden Winkels

Zu den sechs Grundaufgaben werden einige Bemerkungen und Beispiele angeführt.

II. 1. Sind die drei Seitengrößen  $a, b, c$  gegeben, so muß die Summe von je zwei Seiten größer als die dritte sein und die Summe von allen drei muß kleiner sein als  $2\pi$  oder  $360^\circ$  (→ sphärisches Dreieck IV.). Die Größen der Winkel ergeben sich aus dem *Seitenkosinussatz*, indem man nach dem Kosinus der jeweiligen Winkelgröße auflöst, oder aus dem *Halbwinkelsatz*.

**II. 2.** Sind die drei Winkelgrößen  $\alpha, \beta, \gamma$  gegeben, so muß die Summe von zwei Winkelgrößen kleiner als die um  $\pi$  vermehrte dritte sein und die Summe aller drei muß zwischen  $\pi$  und  $3\pi$  liegen. Die Seitengrößen ergeben sich aus dem *Winkelkosinussatz* oder nach dem *Halbseitensatz*.

**III. 1.** Sind die Größen zweier Seiten und die des eingeschlossenen Winkels gegeben, z. B.  $a, b$  und  $\gamma$ , so ergibt sich die der dritten Seite  $c$  aus dem *Seitenkosinussatz* nach (1), und die Größen der fehlenden Winkel ergeben sich aus (2) und (2a) nach dem *Sinussatz*. Nach den *Neperschen Analogien* dagegen geht man aus von (3) und (3a).

$$(1) \quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

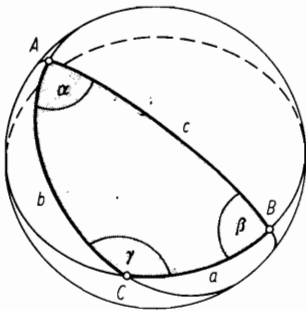
$$(2) \quad \sin \alpha = \sin a \cdot \sin \gamma / \sin c$$

$$(2a) \quad \sin \beta = \sin b \cdot \sin \gamma / \sin c$$

$$(3) \quad \tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cot(\gamma/2) \cos[(a - b)/2]}{\cos[(a + b)/2]}$$

$$(3a) \quad \tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\cot(\gamma/2) \sin[(a - b)/2]}{\sin[(a + b)/2]}$$

Sind z. B. die Zahlenwerte  $a = 52,5^\circ, b = 107,8^\circ$  und  $\gamma = 141,5^\circ$  gegeben (Abb. 2), so erhält man  $\gamma/2 = 70,75^\circ, (a - b)/2 = -27,65^\circ$  und  $(a + b)/2 = 80,15^\circ$  und daraus  $(\alpha + \beta)/2 = 61,06^\circ$  und



sphärische Trigonometrie. Abb. 2: Sphärisches Dreieck aus  $a = 52,5^\circ, b = 107,8^\circ$  und  $\gamma = 141,5^\circ$

$(\alpha - \beta)/2 = -9,34^\circ$ , d. h.  $\alpha = 51,72^\circ, \beta = 70,40^\circ$ . Nebenbei folgt aus  $\alpha + \beta + \gamma = 263,62^\circ$ , daß der sphär. Exzeß  $\epsilon = 83,62^\circ$  beträgt und das Dreieck somit rund den achten Teil der Kugeloberfläche bedeckt. Nach dem Sinussatz  $\sin c = \sin \gamma \sin a / \sin \alpha$  erhält man zwei Werte  $c_1 = 38,99^\circ$  und  $c_2 = 141,01^\circ$ . Da aber  $\alpha < \gamma$ , muß auch  $a < c$  gelten, d. h., nur  $c_2 = 141,01^\circ$  entspricht den geometr. Gegebenheiten.

**III. 2.** Sind die Größen einer Seite und der anliegenden Winkel, z. B.  $c, \alpha$  und  $\beta$ , gegeben, so liefern die polaren Sätze zu den in III. 1. angegebenen die Lösung.

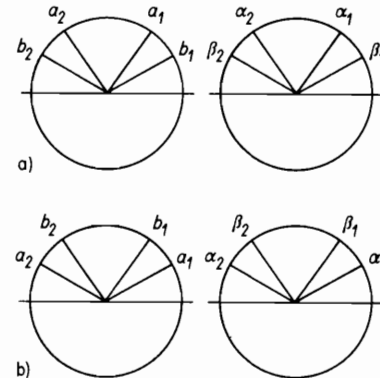
**IV. 1.** Sind die Größen zweier Seiten und eines Gegenwinkels gegeben, z. B.  $a, b$  und  $\alpha$ , so sind geometrisch zwei Lösungen möglich, falls  $a < b$  (Abb. 1). Rechnerisch erhält man die Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit den Scheitelpunkten  $B_1$  und  $B_2$  nach

dem *Sinussatz* aus  $\sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha / \sin a$ . Für jeden Wert  $\beta_1$  und  $\beta_2$  des Winkels  $\beta$  berechnet man dann aus den *Neperschen Analogien* (4) und (4a) die Seitengröße  $c$  und die Winkelgröße  $\gamma$  eindeutig.

$$(4) \quad \tan \frac{c}{2} = \frac{\tan[(a - b)/2] \sin[(\alpha + \beta)/2]}{\sin[(\alpha - \beta)/2]}$$

$$(4a) \quad \cot \frac{\gamma}{2} = \frac{\tan[(\alpha - \beta)/2] \sin[(a + b)/2]}{\sin[(a - b)/2]}$$

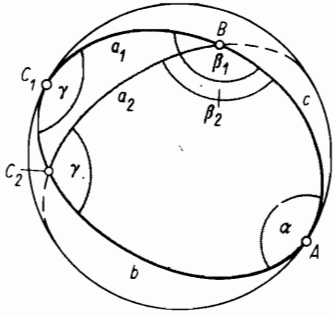
Nach diesem Rechengang ergeben sich die in Abb. 1 dargestellten Fälle analytisch wie folgt: Der sphär. Radius  $a_0$  kann so klein sein, daß sich nach dem Sinussatz  $\sin \beta > 1$  ergibt und keine Lösung möglich ist. Für  $a = h_c$  dagegen erhält man  $\sin \beta = 1$  oder  $\beta = 90^\circ$  im Dreieck  $AB_0C$ . Aus der *Neperschen Regel* folgt  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \cdot \sin b$  oder  $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin b$  für dieses Dreieck, in dem  $AB_0$  und  $B_0C$  Katheten sind. Der Wert  $\sin \beta = 1$  ist noch möglich für  $\sin a = \sin b$  und  $\sin \beta = \sin \alpha$ . In der Abb. 1 sind diese Voraussetzungen für das Dreieck  $B_1B_2C$  erfüllt. Dieses Dreieck ist gleichschenkelig, in ihm sind die fehlenden Stücke z. B. nach der *Neperschen Regel* eindeutig bestimmt. Ein Wert  $\sin \beta < 1$  ist gesichert, falls  $\sin b < \sin a$  und



sphärische Trigonometrie. Abb. 3: Zur Grundaufgabe IV. 1. existieren im Falle a) eine, im Falle b) zwei Lösungen

$\sin \beta < \sin \alpha$ . Das bedeutet geometrisch (Abb. 3), daß die durch die Arkussinusfunktion erhaltenen Argumente  $b_1$  und  $b_2 = 180^\circ - b_1$  das Intervall zwischen den Argumenten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$  einschließen und daß das Intervall von  $\beta_1$  bis  $\beta_2 = (180^\circ - \beta_1)$  das Intervall von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2 = (180^\circ - \alpha_1)$  einschließt. Aus der Forderung  $\beta \geq \alpha$  je nachdem, ob  $b \geq a$  ergibt sich für jede Annahme über die Größe der Seiten nur eine Größe für  $\beta$ , entweder  $\beta_1$  oder  $\beta_2$ . Ist dagegen  $\sin \beta < 1$ , aber  $\sin b > \sin a$  und  $\sin \beta > \sin \alpha$ , so liegen das Intervall  $b_1$  bis  $b_2$  zwischen dem von  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$  und das Intervall  $\beta_1$  bis  $\beta_2$  zwischen  $\alpha_1$  bis  $\alpha_2$ . Sowohl im Falle  $a_1 < b$  als auch im Falle  $a_2 > b$  erfüllen beide Lösungen  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die Bedingungen  $\alpha_1 < \beta_1$  und  $\alpha_2 > \beta_1, \beta_2$ , d. h., es gibt zwei Lösungen.

**IV. 2.** Sind die Größen zweier Winkel und einer Gegenseite gegeben, z. B.  $\alpha, \gamma$  und  $c$ , so erfolgt die



sphärische Trigonometrie. Abb. 4: Sphärisches Dreieck aus  $c = 96,5^\circ$ ,  $\alpha = 101,2^\circ$  und  $\gamma = 102,1^\circ$

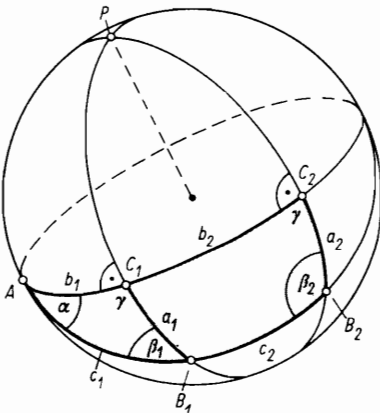
Lösung mit Hilfe der *polaren Sätze* zu den in IV. 1. angegeben. Aus  $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c / \sin \gamma$  ergeben sich mit den Zahlenwerten  $\alpha = 101,2^\circ$ ,  $\gamma = 102,1^\circ$  und  $c = 96,5^\circ$  die beiden Werte  $a_1 = 85,40^\circ$  und  $a_2 = 94,60^\circ$  (Abb. 4). Da  $\sin \alpha > \sin \gamma$  und  $\alpha < \gamma$ , treten hier zwei Lösungen auf. Nach den *Neperschen Analogien* sind in (5) und (5a) folgende Werte ein-

$$(5) \quad \tan \frac{b}{2} = \frac{\tan [(c - a)/2] \sin [(\gamma + \alpha)/2]}{\sin [(\gamma - \alpha)/2]}$$

$$(5a) \quad \cot \frac{\beta}{2} = \frac{\tan [(\gamma - \alpha)/2] \sin [(c + a)/2]}{\sin [(c - a)/2]}$$

zusetzen  $(c + a_1)/2 = 90,95^\circ$ ,  $(c + a_2)/2 = 95,55^\circ$ ,  $(c - a_1)/2 = 5,55^\circ$ ,  $(c - a_2)/2 = 0,95^\circ$ ,  $(\gamma + \alpha)/2 = 101,65^\circ$  und  $(\gamma - \alpha)/2 = 0,45^\circ$ . Damit ergeben sich zwei Lösungen:  $a_1 = 85,40^\circ$ ,  $b_1 = 170,56^\circ$ ,  $\beta_1 = 170,68^\circ$  und  $a_2 = 94,60^\circ$ ,  $b_2 = 128,38^\circ$ ,  $\beta_2 = 129,50^\circ$ .

V. Bei der Berechnung Eulerscher *rechtwinklig-sphär. Dreiecke* mit Hilfe der *Neperschen Regel* können sich nur aus der Sinusfunktion zwei Argumente ergeben. Nach den allgemeinen Beziehungen im Eulerschen Dreieck läßt sich dann entscheiden, ob eine oder zwei Lösungen vorhanden sind. *Beispiel:* Sind  $a = 38,4^\circ$  als Größe einer Kathete und  $\alpha = 42,9^\circ$  als Größe ihres Gegenwinkels ge-



sphärische Trigonometrie. Abb. 5: Rechtwinkliges sphärisches Dreieck aus den Größen  $a$  einer Kathete und  $\alpha$  des Gegenwinkels

geben, so findet man zwei Lösungen; aus (6) zwei Werte  $b_1$  und  $b_2 = 180^\circ - b_1$ , und aus (6a) zu jedem  $b$ -Wert das zugehörige Argument  $\beta$ . Aus (6 b)

$$(6) \quad \sin b = \cot \alpha \cdot \tan a$$

$$(6a) \quad \cos \beta = \sin \alpha \cdot \cos b$$

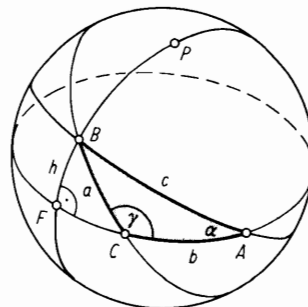
$$(6b) \quad \cos \alpha = \cot c \tan b$$

ergeben sich die beiden zugehörigen Werte für die Hypotenuse  $c$ . In Zahlenwerten erhält man  $b_1 = 58,52^\circ$ ,  $\beta_1 = 69,2^\circ$ ,  $c_1 = 65,85^\circ$ ;  $b_2 = 121,48^\circ$ ,  $\beta_2 = 110,8^\circ$ ,  $c_2 = 114,15^\circ$  (Abb. 5).

VI. Als *Höhen* in einem sphär. Dreieck bezeichnet man den sphär. Abstand einer Ecke von der gegenüberliegenden Seite ( $\sphericalangle$  sphärischer Kreis). Dieser Großkreisbogen kann nach der *Neperschen Regel* berechnet werden. Die Höhe kann nicht nur die Berechnung vereinfachen, z. B. die *Neperschen Analogien* ersetzen, sie hat oft eine unmittelbare Bedeutung. Im folgenden Beispiel kann der Großkreis durch  $A, C$  und  $F$  den Erdäquator darstellen,  $B$  aber den Ort eines Schiffes. Dann ist  $h$  die geograph. Breite dieses Ortes. Wenn z. B.  $B$  den Nordpol der Erde darstellt, und  $AC$  den Weg eines Flugzeugs angibt, das sich auf einem Großkreis bewegt, bedeutet die Höhe  $h = BF$  den kürzesten Abstand vom Pol.

*Beispiel:* Im Dreieck aus den Seiten der Größen  $c = 84^\circ$ ,  $a = 42,7^\circ$  und dem Winkel der Größe  $\gamma = 135^\circ$  (Abb. 6) liegt die Höhe  $h = FB$  außerhalb des Dreiecks. Nach dem *Sinussatz* ergeben sich für  $\alpha$  zunächst zwei Werte  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Da der kleineren Seite der kleinere Winkel gegenüberliegt, kann nur  $\alpha_1 = 28,83^\circ$  Lösung sein. In den rechtwinkligen Dreiecken  $ABF$  und  $CBF$  sind die Hypotenuse und ein Winkel gegeben; nach der *Neperschen Regel* erhält man aus  $\cos \alpha = \cot c \cdot \cot AF$  und aus  $\cos (180^\circ - \gamma) = \cot a \cdot \tan CF$  die Größen  $AF = 83,16^\circ$  und  $CF = 33,12^\circ$ , d. h. für die Seitengröße  $b = AF - CF = 50,04^\circ$ . Im Dreieck  $ABC$  ergeben sich die Winkelgrößen  $\beta_1 = 33,02^\circ$  und  $\beta_2 = 146,98^\circ$  aus dem *Sinussatz*. Da  $\beta$  kleiner als  $\gamma$  sein muß, ist nur  $\beta_1 = 33,02^\circ$  Lösung.

VII. *Übergang von der s.n.T. zur ebenen Trigonometrie:* Drei Punkte  $A, B, C$  im Raum, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen eine Ebene und in ihr ein ebenes Dreieck. Zugleich lassen sich unend-



sphärische Trigonometrie. Abb. 6: Sphärisches Dreieck  $ABC$  aus den Größen  $a = 42,7^\circ$  und  $c = 84^\circ$  zweier Seiten und der Größe  $\gamma = 135^\circ$  eines Gegenwinkels

lich viele Kugeln angeben, auf deren Oberfläche diese Punkte liegen. Ordnet man sie nach wachsenden Kugelradien  $R$ , so nimmt die Krümmung der Kugeln beständig ab und das sphär. Dreieck geht in das ebene über; insbes. gehen die sphär. Winkel mit  $R \rightarrow \infty$  stetig in die ebenen über, und der sphär. Exzeß wird für passend große  $R$  beliebig klein ( $\nearrow$  Legendre, Satz von). Die Formeln der s.n.T. gehen dabei in die der ebenen Trigonometrie über, wenn man in erster Näherung  $\sin a$  durch  $a$  und  $\cos a$  durch  $1 - a^2/2$  ersetzt.

**Spiegelachse**  $\nearrow$  Spiegelung I.

**Spiegellineal**  $\nearrow$  Differenziergerät I., s. a. graphische Differentiation.

**Spiegelung:** spezielle Kongruenzabbildung ( $\nearrow$  Abbildung, affine, VII.) einer Ebene  $E$ , für die entweder die Punkte einer Geraden oder ein Punkt der Ebene Fixpunkte sind.

**I. S. an einer Geraden:** Ist  $s$  diese Gerade, so liegen jeder Punkt  $A$  und sein Bild  $A'$  auf einer Senkrechten zu  $s$ , so daß die Strecke  $AA'$  durch  $s$  halbiert wird. Jeder Punkt  $A$  hat deshalb den gleichen Abstand von  $s$  wie sein Bild  $A'$ ,  $s$  ist die Mittelsenkrechte der Strecke  $AA'$  und heißt **Spiegelachse** oder **Symmetrieachse** (Abb. 1). Ihre Punkte sind **Fixpunkte**, sie selbst ist **Fixgerade** der S. Die beiden Halbebenen, in die  $E$  durch  $s$  zerlegt wird, werden bei der S. an  $s$  miteinander vertauscht. Man kann sich eine S. auch so erzeugt denken, daß man die Ebene  $E$  um die in ihr gelegene Gerade  $s$  um  $180^\circ$  dreht. Man nennt diese Abbildung auch **Umklappung**. Durch die S. werden Punkte auf Punkte und Geraden wieder auf Geraden abgebildet; liegt ein Punkt auf einer Geraden, so liegt der Bildpunkt auf der Bildgeraden; der Abstand zweier Punkte ist gleich dem Abstand ihrer Bildpunkte; jeder Winkel und sein Bild sind gleich groß; eine Figur  $F$  und ihr Spiegelbild  $F'$  sind **ungleichsinnig-kongruent** ( $\nearrow$  Kongruenzabbildung). Ist  $F'$  das Spiegelbild einer Figur  $F$  bei der S. an  $s$  und  $F''$  das Spiegelbild von  $F'$  bei der S. an einer nicht notwendig von  $s$  verschiedenen Geraden  $t$ , so sind  $F$  und  $F''$  gleichsinnig-kongruente Figuren. Zwei hintereinander ausgeführte Spiegelungen an Geraden können daher nicht durch eine einzige Spiegelung an einer Geraden ersetzt werden, wohl aber durch eine einzige **Schiebung**, wenn die beiden Spiegelachsen  $s$  und  $t$  parallel sind, oder durch eine einzige **Drehung**, wenn

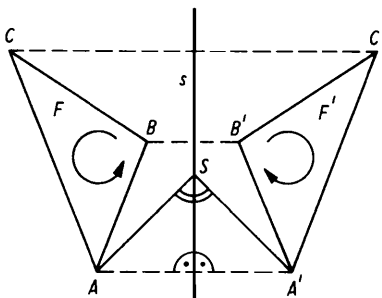


Abb. 1: Spiegelung in der Ebene an einer Geraden

sich  $s$  und  $t$  schneiden (Abb. 2). Generell ist jede Bewegung das Produkt von drei S.en. Der **Dreispiegelungssatz** besagt: *Das Produkt dreier S.en an*

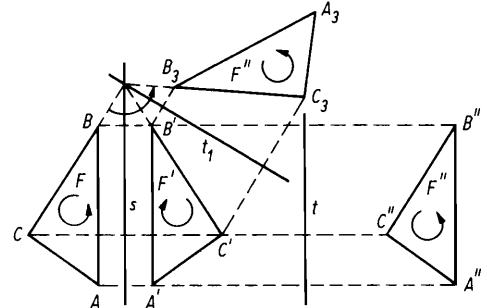
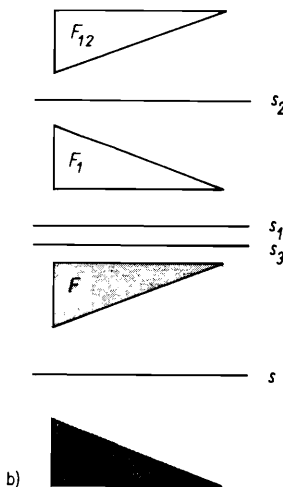
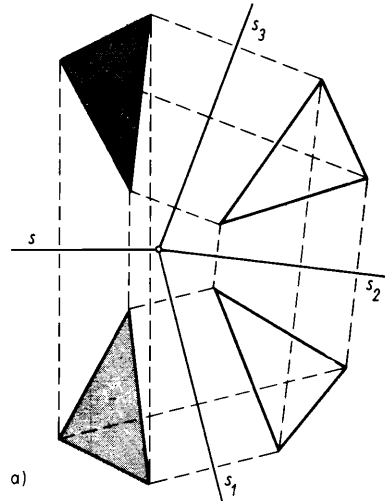


Abb. 2: Zwei hintereinander ausgeführte Spiegelungen in der Ebene an Geraden können durch eine Schiebung oder eine Drehung ersetzt werden



Spiegelung. Abb. 3: Dreispiegelungssatz in der Ebene, wenn die Spiegelungsachsen  $s_1, s_2, s_3$  a) einen Punkt, b) ein Lot gemeinsam haben

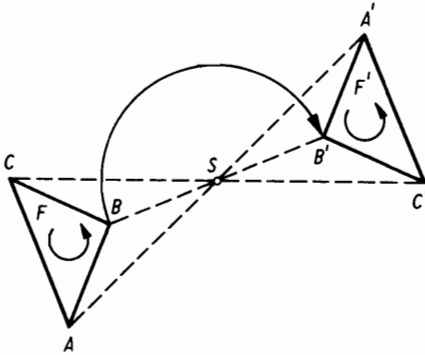
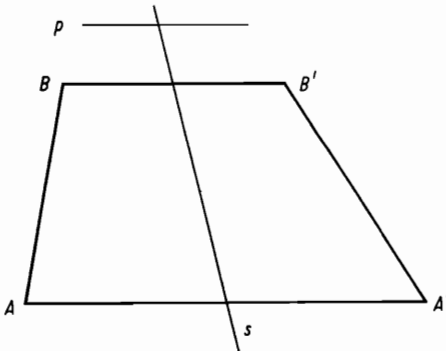


Abb. 4: Spiegelung eines Dreiecks an einem Punkt  $S$  seiner Ebene

Geraden, die entweder einen gemeinsamen Schnittpunkt haben oder parallel sind, ist wieder eine  $S$ . an einer Geraden (Abb. 3).

II.  $S$ . an einem Punkt: Ist  $S$  dieser Punkt, so liegen jeder Punkt  $A$  und sein Bild  $A'$  auf einer Geraden durch  $S$ , so daß die Strecke  $AA'$  durch  $S$  halbiert wird (Abb. 4). Jeder Punkt  $A$  und sein Bild  $A'$  haben deshalb gleichen Abstand von  $S$ , d. h.,  $|SA| = |SA'|$ .  $S$  heißt *Zentralpunkt* oder *Symmetriezentrum*. Man kann sich die  $S$ . an dem Punkt  $S$  auch so erzeugt denken, daß man die Ebene  $E$  in sich um den Punkt  $S$  um  $180^\circ$  dreht, so daß jeder Punkt von  $E$  einen Halbkreis um  $S$  in  $E$  beschreibt. Eine  $S$ . an  $S$  ist danach eine spezielle ebene Drehung. Dabei bleiben Größe und Gestalt von Figuren erhalten. Sie sind sogar *gleichsinnig-kongruent*. Führt man zwei Spiegelungen an demselben Punkt  $S$  hintereinander aus, so ist das zweite Bild mit dem Original identisch. Die  $S$ . an einem Punkt ist eine *involutor. Bewegung* mit dem Spiegelzentrum als Fixpunkt. — S. a. Symmetrie.

III. Die *Schrägspiegelung* ist eine Verallgemeinerung der  $S$ . an einer Geraden in dem Sinne, daß die Strecke zwischen den Punkten und ihren Bildpunkten zwar von der der Symmetrieachse entsprechenden Geraden  $s$  halbiert werden, aber nicht notwendig senkrecht auf  $s$  stehen, sondern parallel



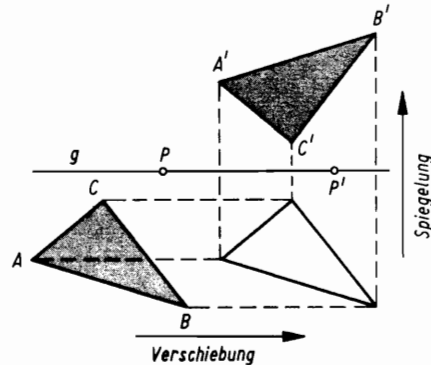
Spiegelung. Abb. 5: Schrägspiegelung einer Strecke  $AB$

zu einer zweiten gegebenen Geraden  $p$  laufen, die  $s$  schneidet (Abb. 5). Diese Gerade  $s$  heißt *Schrägspiegelachse* oder *Schiefsymmetrieachse*. Die Schrägspiegelung ist i. allg. keine Bewegung; nur wenn  $s$  und  $p$  aufeinander senkrecht stehen, wird sie zur Spiegelung an der Geraden  $s$ . — S. a. Symmetrie.

IV. Eine *Gleit-S.* ist eine ebene Bewegung, die sich zusammensetzt aus einer *Verschiebung* längs einer Geraden  $g$  mit anschließender  $S$ . an  $g$  (Abb. 6). Diese Gerade  $g$  ist *Fixgerade*, ihre Punkte sind aber keine Fixpunkte. Punkt  $P'$  z. B. ist das durch Verschiebung erhaltene Bild von  $P$ , das auf  $g$  liegt, aber von  $P$  verschieden ist.

V. Auch in der *räuml. Geometrie* ist eine  $S$ . als involutor. Bewegung definiert, bei der die Punkte des Fixelements Fixpunkte sind. Je nach der Art des Fixelements unterscheidet man  $S$ . an einer Ebene  $E$  (Abb. 7),  $S$ . an einer Geraden  $g$  (Abb. 8, S. 516) und  $S$ . an einem Punkte  $P$  (Abb. 9, S. 516). Entsprechend läßt sich im Raum die *Gleit-S.* festlegen als Produkt bzw. Hintereinanderausführung einer  $S$ . und einer Schiebung parallel zum betreffenden Fixelement. Danach sind eine *Gleit-S.* an einer Ebene  $E$  (Abb. 7) und an einer Geraden  $g$  (Abb. 8) möglich.

Als *Dreh-S.* bezeichnet man die Hintereinanderausführung der  $S$ . an einer Ebene  $E$  und einer



Spiegelung. Abb. 6: Gleitspiegelung in der Ebene

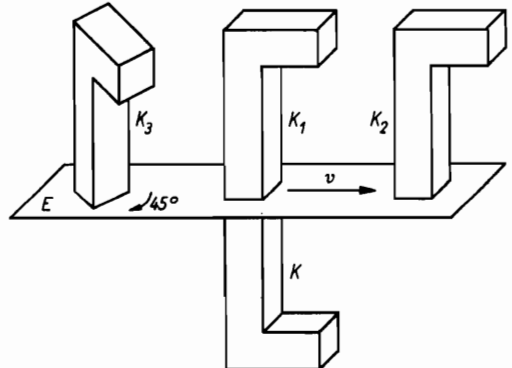


Abb. 7: Spiegelung  $K_1$  des Körpers  $K$  an der Ebene  $E$  und seine Gleitspiegelung  $K_2$  mit einer Verschiebung in Richtung  $v$  sowie Drehspiegelung  $K_3$  bei einer Drehung um  $45^\circ$



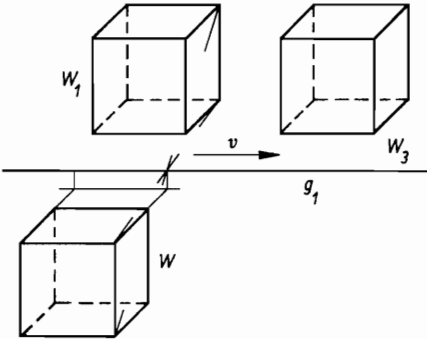


Abb. 8: Spiegelung  $W_1$  eines Würfels  $W$  an einer zu einer Kante parallelen Geraden  $g_1$ ,  $W_3$  seine Gleitspiegelung mit einer Verschiebung in Richtung  $v$

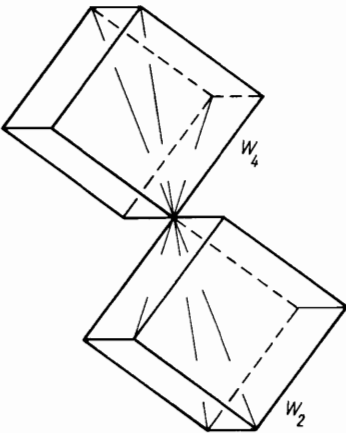


Abb. 9: Spiegelung  $W_4$  eines Würfels  $W_2$  an einer seiner Ecken

Drehung des gespiegelten Körpers um eine zu  $E$  senkrechte Achse (↗ Abb. 7).

**Spiegelung am Einheitskreis** ↗ Funktion VI., ↗ Inversion, ↗ konforme Abbildung III.

**Spielmatrix** ↗ Spieltheorie II.

**Spieltheorie: I.** Teilgebiet der Operationsforschung, in dem die Eigenschaften strategischer mathematischer Modelle und das Verhalten in *Konfliktsituationen* untersucht werden. Die mathematischen Modelle sind aus Spielen entstanden; die einzelnen Seiten, deren Entscheidungen Einfluß auf die Gestaltung des Konflikts haben, heißen *Spieler*. Dabei hängt die Effektivität der Entscheidungen jedes Spielers von den noch unbekanntem Entscheidungen der Gegner oder von anderen ungewissen Umständen ab. Nach der Anzahl der Spieler unterscheidet man *2-Personen-Spiele*, *3-Personen-Spiele* usw. Anstelle eines Spielers kann die Natur mathematisch wie ein bewußter Gegenspieler aufgefaßt werden, um auch die ungünstigsten natürl. Umstände berücksichtigen zu können.

Bei Spielen mit mehr als zwei Spielern sind *Koalitionen* möglich, die einheitlich wie ein Spieler handeln. Die S. untersucht dann die Bildung solcher Koalitionen und die Verteilung eines gemeinsamen Erlöses an die Mitglieder einer Koalition. Je nach der Anzahl der verschiedenen *Aktionen*, aus der alle Spieler jeweils wählen können, heißt das Spiel *endlich* oder *unendlich*.

Ein Spiel ist gegeben, wenn bei jeder Festlegung aller Spieler auf eine ihrer Aktionen der Wert einer *Auszahlungsfunktion* gegeben ist. Diese *Gewinnfunktion* gibt den Erlös jedes Spielers an, ein negativer Erlös bedeutet Verlust. Ist die Summe aller Auszahlungen immer konstant bzw. immer Null, so heißt das Spiel *Konstantsummenspiel* bzw. *Nullsummenspiel*; *n*-Personen-Konstantsummenspiele und *n*-Personen-Nullsummenspiele sind mathematisch äquivalent. Ein Konstantsummenspiel charakterisiert ein Konkurrenzmodell, da Erhöhung des Erlöses eines Spielers nur durch Verringerung des Erlöses der anderen Spieler möglich ist. Mathematisch gesehen sind *n*-Personen-*Nichtkonstantsummenspiele* und  $(n + 1)$ -Personen-Konstantsummenspiele äquivalent.

Das vom Spieler angestrebte Ergebnis und insbes. die entsprechend von ihm gewählte Handlungsweise bezeichnet man als seine *Strategie*. Gegenstand der S. ist das Aufstellen von Bewertungsprinzipien für sie, das Nachweisen der Existenz optimaler Verfahren und die Angabe, sie zu finden. Geschlossen ausgearbeitet ist die Theorie des Matrixspiels. Für Spiele mit mehr als zwei Spielern gibt es verschiedenartige Lösungskonzeptionen.

**II.** Das *Matrixspiel* ist ein endliches Nullsummenspiel mit zwei Spielern, dessen Auszahlungsfunktion in Form einer Spielmatrix  $A = (a_{ij})$  gegeben ist. Jedes Element  $a_{ij}$  von  $A$  gibt den Erlös an, den  $Z$  von  $S$  bekommt, wenn der Zeilenspieler  $Z$  sich für eine Zeile  $i$  und unabhängig davon der Spaltenspieler  $S$  sich für eine Spalte  $j$  entscheidet. Das Schema (1) z. B. enthält eine (2,3)-Matrix  $A_1$ . Die zusätzliche Spalte  $S$  enthält für jede Zeile den Mindesterlös  $\text{Min } a_{ij}$ , den  $Z$  bei Wahl der entsprechenden Zeile erhält. Die größte dieser Zahlen,  $\text{Max } \text{Min } a_{ij}$ , im

(1)

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S$
$Z_1$	2	3	1	1
$Z_2$	0	9	-2	-2
$Z$	2	9	1	

Beispiel 1, heißt *unterer Wert*  $\underline{v}$  des Spiels. Diesen Erlös kann sich  $Z$  auf jeden Fall sichern, indem er ständig  $Z_1$  wählt. Jede andere Strategie birgt das Risiko in sich, weniger zu gewinnen. Die zusätzliche Zeile  $Z$  enthält die Spaltenmaxima  $\text{Max } a_{ij}$ , d. h. den Höchstbetrag, den  $S$  an  $Z$  zu zahlen hat, wenn er die entsprechende Spalte wählt. Die kleinste dieser Zahlen,  $\text{Min } \text{Max } a_{ij}$ , im Beispiel 1, heißt *oberer Wert*  $\bar{v}$  des Spiels. Mehr als  $\bar{v}$  braucht  $S$  bei klugem Spiel niemals zu zahlen. Es gilt stets  $\underline{v} \leq \bar{v}$ .

Ist wie in (1)  $v = \bar{v} = \nu$ , so heißt dieses  $\nu$  Wert des Spiels. Man sagt dann, die Matrix bzw. das Spiel hat einen *Sattelpunkt*. Im e. S. ist der Sattelpunkt die Stelle der Matrix, in der sich die zu  $\nu$  gehörende Zeile mit der zu  $\bar{v}$  gehörenden Spalte kreuzt. Bei Spielen mit Sattelpunkt wird jeder Spieler konstant eine solche Aktion wählen, daß  $\nu$  realisiert wird.

Meist gilt aber  $\nu < \bar{v}$ . Die Spieler werden dann bei häufiger Wiederholung des Spiels ohne bestimmte Reihenfolge unter ihren Aktionen wählen. Ein Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  mit  $x_1 + \dots + x_n = 1$ ,  $x_i \geq 0$  für alle  $i$ , aus den relativen Häufigkeiten, mit denen  $Z$  die  $Z_1, \dots, Z_n$  wählt, heißt *gemischte Strategie* von  $Z$ . Ein analoger Vektor  $y = (y_1, \dots, y_m)^T$  heißt *gemischte Strategie* von  $S$ . Spielen  $Z$  nach  $x$  und  $S$  nach  $y$ , so ergibt sich  $x^T A y$  als mittlere Auszahlung. Jedes  $x^{(0)}$  mit  $\text{Min } x^{(0)T} A y = \text{Max } \text{Min } x^T A y$  heißt *optimale Strategie* von  $Z$ , jedes  $y^{(0)}$  mit  $\text{Max } x^T A y^{(0)} = \text{Min } \text{Max } x^T A y$  optimale Strategie von  $S$ . Als Spezialfall des  $\nabla$  Minimax-Satzes gilt für Matrixspiele stets  $\text{Max } \text{Min } x^T A y = \text{Min } \text{Max } x^T A y$ .

Dieser *Hauptsatz der Spieltheorie* besagt in Worten: In jedem Matrixspiel gibt es optimale Strategien  $x^{(0)}$  und  $y^{(0)}$  sowie einen Wert  $\nu$ ; spielt  $Z$  nach  $x^{(0)}$ , erreicht er unabhängig vom Verhalten von  $S$  mindestens die mittlere Auszahlung  $\nu$ ; spielt  $S$  nach  $y^{(0)}$ , so erreicht  $Z$  mit keinem Verhalten eine mittlere Auszahlung größer als  $\nu$ .

Ein Spiel mit  $\nu = 0$  heißt *fair*, z. B. sind alle Spiele mit  $A = -A^T$  fair. Bei Spielen mit Sattelpunkt gibt es optimale Strategien, bei denen eine Komponente 1 ist, solche Strategien heißen *reine Strategien*. Nach dem *Satz über die Verschiebung des Spielwertes* bleiben optimale Strategien optimal, wenn zu jedem  $a_{ij}$  dieselbe Konstante  $c$  addiert wird, und der Wert des so abgeänderten Spieles ist  $\nu + c$ . Durch eine solche Verschiebung kann man stets zu einem fairen Spiel sonst gleicher Struktur übergehen.

Es gilt der Satz, daß jede optimale Strategie  $x^{(0)}$  von  $Z$  und der Wert  $\nu$  eine Lösung der linearen Optimierungsaufgabe (2) sind. Damit ist es möglich, für jedes Matrixspiel tatsächlich optimale Strategien zu berechnen;  $y^{(0)}$  und  $\nu$  ergeben sich als Lösung der dualen Aufgabe. Der Hauptsatz der S.

(2) 
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n &\geq \nu \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n &\geq \nu \\ x_1 + \dots + x_n &= 1 \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$
 zu bestimmen:  $\nu = \text{Max!}$

und der Dualitätssatz der linearen Optimierung haben die gleiche Aussage. Es läßt sich auch jede lineare Optimierungsaufgabe als Matrixspiel formulieren.

*Beispiel:* Das bekannte Spiel „Stein – Schere – Papier“ hat die Auszahlungsmatrix (3), ihm entspricht die Optimierungsaufgabe (4). Man erhält als

Lösung:  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = y_3^{(0)} = 1/3$  und  $\nu = 0$ .

(3)	$S_1$ : Stein	$S_2$ : Schere	$S_3$ : Papier
$Z_1$ : Stein	0	1	-1
$Z_2$ : Schere	-1	0	1
$Z_3$ : Papier	1	-1	0

(4)

$$\begin{aligned} 0x_1 - 1x_2 + 1x_3 &\geq \nu \\ 1x_1 + 0x_2 - 1x_3 &\geq \nu \\ -1x_1 + 1x_2 + 0x_3 &\geq \nu \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_i &\geq 0 \text{ für } i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

zu bestimmen:  $\nu = \text{Max!}$

Außer mit der linearen Optimierung lassen sich optimale Strategien auch durch ein Iterationsverfahren bestimmen, das einen Lernprozeß der Spieler nachbildet.

*Spirale: I.* ebene Kurve, für die die *Polarkoordinate*  $r$  eine eindeutige Funktion  $r = f(\varphi)$  der Winkelgröße  $\varphi$  ist. Für die *archimed. Spirale* gilt  $r = f(\varphi) = a \cdot \varphi$  mit  $a \neq 0$ , wenn  $0 \leq \varphi < \infty$  für  $a > 0$  und  $-\infty < \varphi \leq 0$  für  $a < 0$  ist. Diese S. wird durch einen Punkt beschrieben, der mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  längs eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  den Koordinatenpol  $O$  umkreisenden Strahls

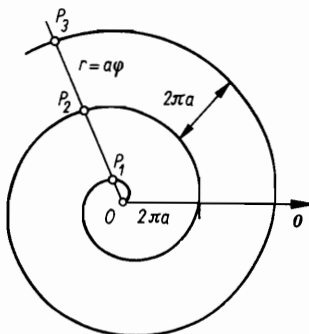


Abb. 1: Archimedische Spirale  $r = a\varphi$

gleitet (Abb. 1). Punkte  $P_1, P_2, \dots$  auf demselben Strahl haben den Abstand  $2\pi a = 2\pi v/\omega$  voneinander. Die Bogenlänge beträgt

$$s = (a/2) [\varphi_1 \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \text{arsinh } \varphi_1].$$

Der Flächeninhalt eines Sektors zwischen zwei Strahlen durch  $O$  ist  $(a^2/6) (\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$ .

*II.* Eine *hyperbol. S.* genügt einer Gleichung  $r = a/\varphi$  mit  $a > 0$ , dabei gilt  $0 < \varphi < \infty$  für  $a < 0$  und  $-\infty < \varphi < \pi$  für  $a < 0$ . Die Gerade  $y = a$  ist *Asymptote*. Für große Werte von  $|\varphi|$  schlingt sich die Kurve immer enger um den Punkt  $O$ .  $O$  heißt ein *asymptot. Punkt* der Spirale (Abb. 2).

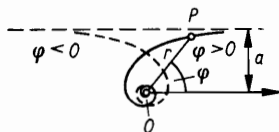


Abb. 2: Hyperbolische Spirale  $r = a/\varphi$

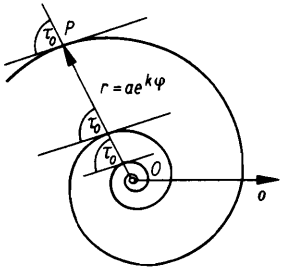
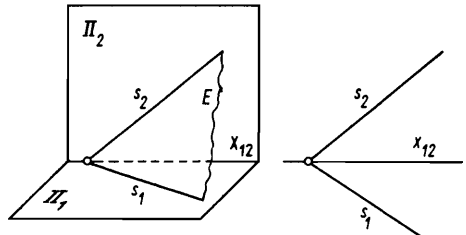


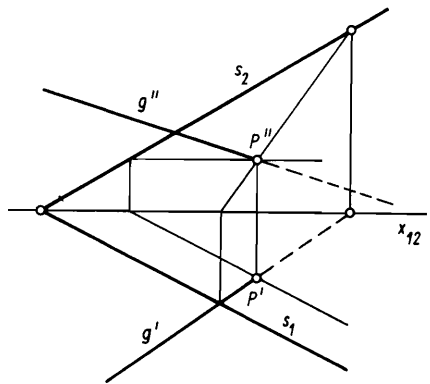
Abb. 3: Logarithmische Spirale  $r = a \exp(k\varphi)$

III. Eine *logarithm. Spirale* genügt einer Gleichung  $r = a \exp(k\varphi)$  mit  $a > 0$  und  $k \neq 0$ . Sie ist dadurch charakterisiert, daß sie jede Gerade durch  $O$  unter demselben Winkel  $\tau_0 = \operatorname{arccot} k$  schneidet (Abb. 3). Der Ursprung ist ein *asymptotischer Punkt*. Die Länge eines Bogens beträgt  $(1/k)(r_2 - r_1) \sqrt{1 + k^2}$ . **spitzwinklig** ↗ Dreieck III.

**Spline-Interpolation** ↗ Interpolation III.  
**Sprache:** *mathematische Logik* formaler Rahmen für den Aufbau formalisierter Theorien bzw. für die Angabe von Algorithmen; zu einer S. gehören ein *Alphabet* und eine *Syntax*, d. h. eine Menge von Grundzeichen und eine Menge von Vorschriften über die Konstruktion von Ausdrücken der S., durch die aus der Menge aller über dem Alphabet bildbarer Wörter gewisse als zulässig ausgedeutert werden. — S. a. Metasprache; Formalisierung; Zeichen.  
**Sprache der Theorie** ↗ Axiomatik.  
**Sprungbefehl** ↗ Befehl, ↗ digitale Rechenanlage II.3.  
**Sprungfunktion** ↗ Zeitfunktion I.  
**Sprungstelle** ↗ Konvergenz einer Funktion I., ↗ Stetigkeit II.3., ↗ Winkelfunktion III.  
**Spur:** Summe der Hauptdiagonalelemente einer quadrat. Matrix (↗ Matrix I.).  
**Spurdreieck** ↗ Axonometrie.  
**Spurendarstellung:** Darstellung von Punkten oder Ebenen in der Zweitafelprojektion durch ihre *Spuren*, das sind ihre Durchstoßpunkte (Abb. 1) oder Schnittgeraden (Abb. 2) mit den Projektionsebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$ .  
 Mit Hilfe der Spurgeraden  $s_1$  und  $s_2$  einer Ebene  $E$  kann z. B. der Durchstoßpunkt  $P$  einer Geraden  $g$  durch die Ebene leicht konstruiert werden (Abb. 3).



Spurendarstellung. Abb. 2: Spurgeraden einer Ebene



Spurendarstellung. Abb. 3: Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

Wegen ihrer Unanschaulichkeit und der Beschränktheit in ihrer prakt. Anwendung wird in der modernen darstellenden Geometrie auf die S. und auf die Verwendung einer Ribachse verzichtet.  
**Stabilität:** Eigenschaft kybernet. Systeme, auf beliebige, begrenzte Eingangssignale  $x_E(t)$  stets mit einem begrenzten Ausgangssignal  $x_A(t)$  zu antworten. Ist deshalb  $x_E(t) \leq N < \infty$  für  $t \geq t_0$ , so gilt stets auch  $|x_A(t)| \leq M < \infty$ . Die S. stellt bei rückgeführten Systemen (↗ Regelung) ein Kernproblem dar. Die S.sbedingung läßt sich an Hand der Übertragungsfunktion in der  $p$ -Ebene definieren. Aus der allgemeinen Form (1) der Übertragungs-

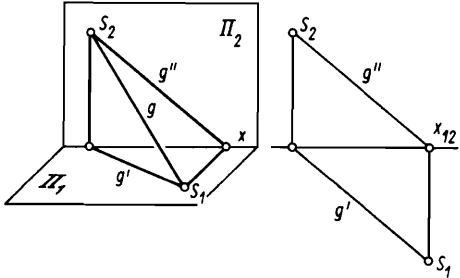
$$(1) \quad F(p) = \frac{Z(p)}{N(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}$$

funktion für  $m \leq n$  ergibt sich im Falle einfacher Wurzeln bei einer Entwicklung nach HEAVISIDE die Beziehung (2), dabei sind die  $p_i$  die Wurzeln

$$(2) \quad G(p) = \sum_{k=1}^n C_k / (p - p_k)$$

(Pole) der *charakterist. Gleichung*  $N(p) = 0$ , die reell oder konjugiert komplex sein können. Durch Anwendung der inversen Laplace-Transformation folgt hieraus für die Beschreibung des Einschwingvorganges

$$f(t) = \sum_{k=1}^n C_k \exp [p_k t]. \text{ Asymptot. S. liegt vor, wenn}$$



Spurendarstellung. Abb. 1: Spurpunkte einer Geraden

für  $t \rightarrow 0$  alle Terme  $C_k \exp [p_k t]$  von  $f(t)$  gegen Null streben, d. h. wenn für alle  $1 \leq k \leq n$  gilt:  $p_k < 0$  bzw.  $\delta = \operatorname{Re} \{p_k\} < 0$ . Diese Aussage gilt auch beim Vorliegen mehrfacher reeller oder konjugiert komplexer Pole. *Instabilität* liegt vor, falls die Bedingung auch nur für einen Pol verletzt ist.

In linearen Systemen ist die asymptot. S. unabhängig von den Anfangswerten und somit einzig durch die Wurzeln der charakterist. Gleichung bestimmt. Dies gilt i. allg. nicht für nichtlineare Systeme.

Es sind eine Reihe von Verfahren zur *S.sprüfung* entwickelt worden, die die Lösung der charakterist. Gleichung oder überhaupt deren Aufstellung umgehen. Das *Kriterium nach Routh-Hurwitz* liefert eine S.saussage auf der Basis der ungelösten charakterist. Gleichung des geschlossenen Systems. Das *Nyquist-Kriterium* beruht auf der Auswertung der u. U. gemessenen Ortskurve bzw. den logarithm. Frequenzkennlinien ( $\nearrow$  Frequenzgang). Das *Wurzelortskurven-Kriterium* gibt Auskunft über den Einfluß der Systemparameter auf die S. Das *Ljapunow-Verfahren* ermöglicht S.saussagen auf der Basis der Zustandsgleichungen. Ebenso wurden besondere S.sverfahren z. B. für die Analyse von nichtlinearen Systemen, von Abtastregelsystemen oder von Mehrgrößenregelsystemen ( $\nearrow$  Regelung VII.) entwickelt. *Stabilität, numerische*  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichungen III.

*Stabilitätszahl*  $\nearrow$  Packungs- und Repräsentationsprobleme I.4., II.

*Stabkörper*  $\nearrow$  Rechenstab II.

*Staffelbild*  $\nearrow$  Histogramm.

*Stammbruch*  $\nearrow$  Brüche I.1.

*Stammfunktion*: der Funktion  $f(x)$  im Intervall  $I$  zugeordnete differenzierbare Funktion  $F(x)$  mit der Eigenschaft, daß ihre erste Ableitung  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in I$  ist. — Vgl. Integral II.11., III. S. a. Integral, komplexes, II.

*Standardabweichung*  $\nearrow$  Streuung.

*Standard-Eingangssignal*  $\nearrow$  Zeitfunktion I.

*Standardmodell*  $\nearrow$  Modell IV.

*Standebene*  $\nearrow$  Projektion I.

*Standlinie*  $\nearrow$  Projektion I.

*Standortoptimierung*  $\nearrow$  Extremwert VII.3.

*Standortproblem*: ein Standardproblem der Operationsforschung, bei dem zu  $n$  gegebenen Punkten  $P_i$  ein Punkt  $P$  so bestimmt werden soll, daß die Größe  $\sum G_i l_i$  ein Minimum  $m$  wird, dabei sind für  $i = 1, 2, \dots, n$  die  $l_i = |PP_i|$  die Abstände und  $G_i$  die Gewichte. Punkt  $P$  kann z. B. eine Baustelle sein,  $P_i$  Zulieferbetriebe und die  $G_i$  ihre Kapazitäten, oder  $P$  ist eine Zentralschule, die  $P_i$  sind umliegende Orte und  $G_i$  die jeweilige Anzahl schulpflichtiger Kinder; in beiden Fällen bedeuten die  $l_i$  die entsprechenden Entfernungen. Die Lösung führt auf eine nichtlineare Optimierungsaufgabe, sie kann näherungsweise auch mit mechanischen oder elektrischen Analogiemodellen gefunden werden.

*starke Konvergenz*  $\nearrow$  Funktional II.

*starkes Extremum*  $\nearrow$  Variationsrechnung II.

*starkes Gesetz der großen Zahl*  $\nearrow$  Gesetz der großen Zahl III.

*Startpunkt eines Bogens*  $\nearrow$  Graph I.

*stationär*: Bezeichnung eines Gleichgewichtszustands einer veränderlichen Größe oder eines veränderlichen Systems. Bei dynamischer Optimierung, bei stochastischen Prozessen und bei der Lösung von Differentialgleichungen erhält man eine s.e Lösung häufig für  $t \rightarrow \infty$ , wenn das System von der Zeit  $t$  abhängt, bzw. für  $n \rightarrow \infty$ , wenn das System aufeinanderfolgende Stufen  $n = 1, 2, 3, \dots$  durchläuft. Die Periode, in der das System noch relativ weit vom s.en Zustand entfernt ist, wird dann Anlauf-, Anfangs- oder, bes. bei physikalischen Systemen, Einschwingphase gen.

*stationärer Prozeß*  $\nearrow$  stochastischer Prozeß IV.

*statisch*  $\nearrow$  Modell II.

*statisches Moment*  $\nearrow$  Moment, statisches.

*Statistik*: I. Zusammenstellung von Daten, z. B. Einwohnerzahlen, Lebensdauer u. ä.

II. Wissenschaft, die als *beschreibende S.* einen empir. Aspekt eng mit einem theoret. Aspekt, der *mathemat. Statistik*, verbindet. Die beschreibende S. entwickelt Methoden zur Erfassung, Zusammenstellung und Wiedergabe empir. Zahlenmaterials, der *statist. Daten*. Sie wird angewendet im staatl. und wirtschaftl. Leben, in Natur- und Gesellschaftswissenschaft, Technik und Medizin. Zur weiteren wissenschaftl. Auswertung des von der beschreibenden S. erfaßten und aufbereiteten Zahlenmaterials dient die *mathemat. S.* Als Instrument zur Leitung der sozialist. Volkswirtschaft dient die S. der Bereitstellung der für die Planung, Leitung und Kontrolle der volkswirtschaftl. Entwicklung notwendigen statist. Informationen und Analysen sowie der Erfassung, maschinellen Aufbereitung und wissenschaftl. Auswertung der dazu erforderl. Daten in den Betrieben und Institutionen. S. a. Bevölkerungsstatistik.

*statistische Definition der Wahrscheinlichkeit*  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses.

*Stauchung*  $\nearrow$  Abbildung, affine, III.

*Staudt*, Christian von, geb. 24. 1. 1798 Rothenburg ob d. Tauber, gest. 1. 6. 1867 Erlangen. — S. war von 1822 bis 1827 Lehrer am Gymnasium in Würzburg und Privatdozent an der dortigen Universität. Bis 1835 war S. in ähnlicher Stellung in Nürnberg tätig und wurde bald Professor an der Universität Erlangen. — S.s vielbewunderte Hauptleistung, die er in der »*Geometrie der Lage*« (1847) und in »*Beiträge zur Geometrie der Lage*« (1856, 1857, 1860) darstellte, ist die von metr. Betrachtungen freie Begründung der projektiven Geometrie. Wichtig war auch seine Deutung des Imaginären in der Geometrie (1857).

*Staudt-Clausenscher Satz*  $\nearrow$  Bernoullische Zahlen.

*Steigung* svw. Anstieg, s. a. Geradengleichung III.; Differentialquotient I.; Interpolation I.2.; lineare Funktion I.

*Steigungsdreieck*  $\nearrow$  lineare Funktion I.

*Steigungsschema*  $\nearrow$  Interpolation II.

*steilsten Abstiegs, Methode des*  $\nearrow$  Abstiegsverfahren.

*Steiner*, Jakob, geb. 18. 3. 1796 Utzenstorf, gest. 1. 4. 1863 Bern. — S. war Sohn eines Bauern und wuchs ohne Schulbildung auf. Erst durch PESTA-

Lozzi in Yverdon wurde ihm erstes Wissen vermittelt. S. studierte anschließend in Heidelberg, war dann als Lehrer der Mathematik in Berlin tätig, ehe er 1834 außerordentl. Professor an der dortigen Universität wurde. — S. gilt als der Neubegründer der synthet. Geometrie, die er systematisch aufbaute. Er befaßte sich mit geometr. Konstruktionen und isoperimetr. Problemen. Eine Eigentümlichkeit seines Werkes ist das fast vollständige Vermeiden von analyt. und algebraischen Methoden bei geometr. Untersuchungen.

**Steinersche Kurve** ↗ Zykloide V.  
**Steinerscher Satz** ↗ Trägheitsmoment.  
**Steiner-Weber-Problem** ↗ Netzwerk III.  
**Steinitz, Ernst**, geb. 13. 6. 1871 Laurahütte, gest. 29. 9. 1928 Kiel. — S. studierte in Breslau (Wrocław) und Berlin. Er war 1901 Professor in Berlin, 1910 in Breslau und 1920 in Kiel. Berühmt ist S. durch seine algebraischen Arbeiten, insbes. zur Körpertheorie (1910).  
**Steinitzischer Austauschsatz** ↗ Vektorraum V.  
**Stellenwertsystem** ↗ Zahlensystem V.  
**Stellenzahl** ↗ Prädikat.  
**Stellgröße** ↗ Regelung I.  
**Stellungsvektor** ↗ Ebenengleichung III., ↗ Fläche zweiter Ordnung II., ↗ Geradengleichung III., IV., ↗ Winkel VIII., IX.  
**Sterbenswahrscheinlichkeit** ↗ Sterbetafel I., II.  
**Sterbetafel: I.** wichtiges bevölkerungsstatist. Hilfsmittel. das für je 100000 gleichzeitig lebendgeborene männl. und weibl. Personen für jedes Alter  $x$  angibt:  $l_x$  die Anzahl der Überlebenden,  $d_x$  die Anzahl der Gestorbenen,  $q_x$  die Sterbenswahrscheinlichkeit,  $e_x l_x$  die Lebenserwartung aller Überlebenden und  $e_x$  die jedes Überlebenden in Jahren. Die S. ist ein wichtiges demograph. Hilfsmittel zur Berechnung einer Lebensversicherung. Der allgemeinen S. 1969 bis 1970 der DDR (Abb.) entnimmt man z. B., daß von

den willkürlich angenommenen je  $l_0 = 100000$  gleichzeitig geborenen männl. oder weibl. Personen  $l_{50} = 89179$  Männer und  $l_{50} = 92939$  Frauen das 50. Lebensjahr erreicht haben und daß  $e_x = 23,85$  Jahre bzw. 27,77 Jahre die Lebenserwartung eines dieser Männer bzw. einer dieser Frauen ist.

II. Zwischen den aus der Bevölkerungsstatistik gewonnenen Zahlen bestehen einfache Beziehungen. Die Zahl  $d_x = l_x - l_{x+1}$  gibt die Anzahl der im  $x$ -ten Lebensjahr gestorbenen an. Theoretisch muß von einem beliebigen Alter  $x_0$  ab, d. h. für  $x > x_0$  die Summe aller  $d_x$  den Wert  $l_{x_0}$  ergeben, weil jeder noch Lebende einmal sterben muß; praktisch ist diese Regel schwer zu prüfen, weil die S. mit  $x = 100$  abbricht und  $e_{100}$  für den überlebenden Mann den Wert 2,14 Jahre, für eine Frau 2,39 Jahre ausweist. Die Sterbenswahrscheinlichkeit im Alter  $x$  ist definiert durch  $q_x = d_x/l_x$ ; die Erlebenswahrscheinlichkeit  $p_x$  dagegen durch (1). Diese Zahl  $p_x$  gibt die Wahr-

$$(1) \quad p_x = l_{x+1}/l_x = [l_x - (l_x - l_{x+1})]/l_x = (l_x - d_x)/l_x = 1 - q_x$$

scheinlichkeit an, daß ein  $x$ -Jähriger noch ein Jahr lebt. Entsprechend gibt  $n p_x = l_{x+n}/l_x$  die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß jede dieser  $l_x$  Personen noch  $n$  Jahre lebt. Die  $n$ -jährige Sterbenswahrscheinlichkeit jeder dieser  $l_x$  Personen ergibt sich aus (2).

$$(2) \quad n q_x = (l_x - l_{x+n})/l_x = 1 - n p_x$$

Aus statistischen Gesetzen gibt (3) die mittlere Lebenserwartung an.

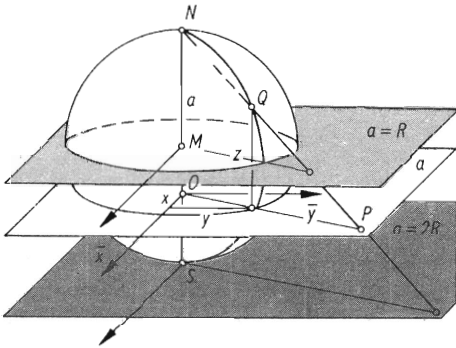
$$(3) \quad e_x = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} l_{x+k} \right] / l_x - 1/2$$

**stereographische Projektion: I.** spezielle, umkehrbar eindeutige, winkeltreue Abbildung einer Kugel- fläche auf eine Ebene  $E$ , die senkrecht steht zu dem

22. Allgemeine Sterbetafel 1969/70

Voll- endetes Alter  $x$	Männliche Personen					Weibliche Personen				
	Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen		Sterbens- wahrschein- lichkeit  $q_x$	Lebenserwartung Jahre		Von 100 000 gleichzeitig Lebendgeborenen		Sterbens- wahrschein- lichkeit  $q_x$	Lebenserwartung Jahre	
	Über- lebende  $l_x$	Ge- storbene  $d_x$		aller Über- lebenden  $e_x l_x$	je Über- lebender  $e_x$	Über- lebende  $l_x$	Ge- storbene  $d_x$		aller Über- lebenden  $e_x l_x$	je Über- lebender  $e_x$
46	91 148	435	0,004 776 216	2 487 332	27,29	94 360	293	0,003 103 759	2 956 116	31,33
47	90 713	487	0,005 369 372	2 396 402	26,42	94 067	347	0,003 688 880	2 861 902	30,42
48	90 226	527	0,005 839 191	2 305 933	25,56	93 720	391	0,004 171 387	2 768 008	29,53
49	89 699	519	0,005 791 489	2 215 971	24,70	93 320	390	0,004 176 734	2 674 484	28,66
50	89 179	497	0,005 668 176	2 126 532	23,85	92 939	349	0,003 758 652	2 581 349	27,77
51	88 683	553	0,006 237 720	2 037 601	22,98	92 590	343	0,003 690 221	2 488 585	26,88
52	88 129	734	0,008 362 068	1 949 195	22,12	92 248	434	0,004 706 125	2 396 166	25,98
53	87 395	961	0,011 000 083	1 861 432	21,30	91 813	587	0,006 394 891	2 304 135	25,10
54	86 434	1 109	0,012 824 782	1 774 518	20,53	91 226	693	0,007 594 217	2 212 615	24,25
55	85 325	1 142	0,013 379 521	1 688 638	19,79	90 534	699	0,007 722 441	2 121 735	23,44
56	84 184	1 140	0,013 539 147	1 603 884	19,05	89 834	668	0,007 437 822	2 031 551	22,61
57	83 044	1 182	0,014 237 151	1 520 270	18,31	89 166	683	0,007 660 703	1 942 051	21,78
58	81 862	1 278	0,015 608 926	1 437 817	17,56	88 483	748	0,008 459 063	1 853 226	20,94
59	80 584	1 401	0,017 381 768	1 356 594	16,83	87 785	822	0,009 363 722	1 765 118	20,12
60	79 183	1 537	0,019 410 724	1 276 711	16,12	86 913	893	0,010 269 416	1 677 794	19,30

Durchmesser  $NS$  der Kugel, der das Projektionszentrum  $N$  enthält. Es sind zwei Lagen der Projektionsebene  $E$  üblich, daß sie entweder den Mittelpunkt  $M$  der Kugel oder den zu  $N$  diametral gelegenen Punkt  $S$  enthält. Allgemein soll angenommen werden, daß  $E$  von  $N$  den Abstand  $a$  hat. Wählt man im Raum ein kartes. Koordinatensystem, in dem  $MN$  die Richtung der  $z$ -Achse hat,  $E$  die  $x, y$ -Ebene und der Schnittpunkt von  $NS$  mit  $E$  der



Stereographische Projektion

Ursprung  $O$  ist, so gilt  $|ON| = a$  (Abb.). Die Abbildung erfolgt dann so, daß einem Punkt  $Q$  der Kugelfläche der Schnittpunkt  $P$  der Geraden  $NQ$  mit der Ebene  $E$  entspricht. Umgekehrt entspricht einem Punkte  $P$  von  $E$  der von  $N$  verschidene zweite Schnittpunkt von  $NP$  mit der Kugel. Nur dem Punkte  $N$  ist bei dieser Abbildung kein Bildpunkt im Endlichen zugeordnet (vgl. Gaußsche Zahlenebene III. — Riemannsche Zahlenkugel). Wird der Radius der Kugelfläche mit  $R$  bezeichnet und sind  $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$  die Koordinaten von  $P$  sowie  $(x, y, z)$  die von  $Q$ , so ergeben sich die Beziehungen zwischen ihnen auf folgende Weise. Die Projektionsgerade  $NQ$  hat eine Parameterdarstellung (1)

$$(1) \quad \bar{x} = \lambda x, \quad \bar{y} = \lambda y, \quad \bar{z} = a + \lambda(z - a)$$

( $\nearrow$  Geradengleichung I.). Für den Schnittpunkt  $P$  mit der Ebene  $E$  gilt  $\bar{z} = 0$ , d. h.,  $\lambda = a/(a - z)$ . Daraus ergeben sich die Abbildungsgleichungen (2).

$$(2) \quad \bar{x} = ax/(a - z), \quad \bar{y} = ay/(a - z)$$

Für einen Punkt  $P$  der Projektionsebene  $E$  ergibt sich der Schnittpunkt  $Q$  mit der Kugel, indem man die Parameterdarstellung  $x = \mu \bar{x}, y = \mu \bar{y}, z = a - \mu a$  der Geraden  $NP$  in die Kugelgleichung  $x^2 + y^2 + (z + R - a)^2 = R^2$  einsetzt. Die Lösung  $\mu = 0$  beschreibt den Punkt  $N$ , die Lösung  $\mu = 2aR/(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + a^2)$  ergibt die Abbildungsgleichungen (3).

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= 2aR\bar{x}/(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + a^2), \\ y &= 2aR\bar{y}/(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + a^2), \\ z &= a - 2a^2R/(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + a^2) \end{aligned}$$

Enthält die Ebene  $E$  den Mittelpunkt  $M$  der Kugel, so ist  $a = R$ , enthält  $E$  den Punkt  $S$ , so ist  $a = 2R$  zu setzen.

II. Die s. P. ist *konform* bzw. *winkeltreu*, d. h., der Winkel, unter dem sich zwei Kurven auf der Kugelfläche schneiden, hat die gleiche Größe wie der Winkel zwischen den Bildern dieser Kurven in  $E$ . Die Größe dieses Winkels wird dabei als die des Winkels zwischen den Tangenten an die beiden Kurven im Schnittpunkt bestimmt. Die s. P. ist *kreisverwandt*, d. h., Kreise auf der Kugel werden auf Kreise in  $E$  abgebildet. Großkreise, die den Punkt  $N$  enthalten, haben dabei Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt  $O$  als Bilder. Enthält die Bildebene  $E$  den Kugelmittelpunkt, d. h. für  $O = M$ , bleiben die Punkte des Schnittkreises von Kugel und Ebene unverändert. Stellt die Kugel die Erdoberfläche dar, so ist dieser Schnittkreis der Äquator und die in Geraden abgebildeten Großkreise durch  $N$  sind Meridiane. Die s. P. wird zur Herstellung winkeltreuer Kartenprojektionen der Erdoberfläche, insbesondere von Polkarten verwendet.

**Stereometrie:** Teilgebiet der euklid. Geometrie, in dem vorwiegend geometr. Figuren untersucht werden, die nicht in einer einzigen Ebene liegen, z. B. Körper und Flächen, aber auch Geraden und Ebenen im Raum sowie deren Lage zueinander. Es werden Eigenschaften der Figuren festgestellt, die bei räuml. Bewegungen erhalten bleiben. In der S. herrscht wie in der Planimetrie und in der darstellenden Geometrie die synthet. Betrachtungsweise vor, im Unterschied zur analyt. Geometrie, zur Differentialgeometrie und zur algebraischen Geometrie.

**Stern**  $\nearrow$  Packungs- und Repräsentationsprobleme I.4.

**sternförmiges Gebiet**  $\nearrow$  Rotation I.

**Sternfünfeck**  $\nearrow$  Zehneck II.

**Sternkurve**  $\nearrow$  Zykloide III.

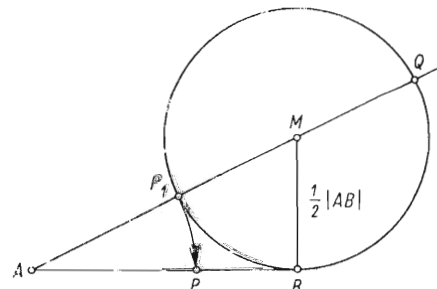
**stetig differenzierbar**  $\nearrow$  Differentialquotient III.

**stetige Abbildung**  $\nearrow$  Abbildung, topologische.

**stetige Proportion**  $\nearrow$  Proportion I.

**stetige Summenfunktionen**  $\nearrow$  Funktionenreihe III.4.

**stetige Teilung:** innere Teilung einer Strecke  $AB$  durch einen Punkt  $P$ , bei der die Länge  $|AP|$  der größeren Teilstrecke die mittlere Proportionale zwischen den Längen der kleineren Teilstrecke und der gegebenen Strecke ist (Abb.), in Zeichen  $|AB| : |AP|$



Stetige Teilung einer Strecke  $AB$

=  $|AP| : |PB|$ . Da aus dieser Proportion durch korrespondierende Addition folgt:

$|AB| : |AP + AB| = |AP| : |AB|$  oder  $|AB|^2 = |AP| \cdot |AP + AB|$ , erhält man  $|AP|$  nach dem Sekantentangentensatz ( $\nearrow$  Sehensatz), falls  $|AB|$  Abschnitt der Tangente mit dem Berührungspunkt  $B$  an einen Kreis mit dem Durchmesser  $|AB| = |PQ|$  ist ( $\nearrow$  Abb.). — Die s. T. wird auch *Goldener Schnitt* genannt, weil die griech. Mathematiker ein Rechteck, dessen Seiten in diesem Verhältnis stehen, ästhetisch für besonders gefällig hielten. Aus  $|AB| = a$  erhält man  $|AM|^2 = a^2 + (a/2)^2 = 5a^2/4$  und daraus  $|AP| = (a/2)(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618a$ .

**Stetigkeit: I.** Eigenschaft einer Funktion  $f(x)$  für die Abszisse  $x = x_0$ , falls folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

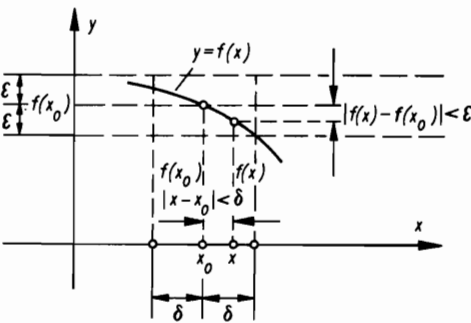
**I.1.** die Funktion ist für  $x_0$  und eine Umgebung von  $x_0$  definiert, insbesondere existiert  $f(x_0)$ ;

**I.2.** der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert ( $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion);

**I.3.** es gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , d. h., zu jeder beliebig

kleinen Zahl  $\varepsilon > 0$  kann eine Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  so angegeben werden, daß  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  ausfällt für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ .

Am Funktionsbild gesehen, gibt man sich mit  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U_1 = ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$  von  $f(x_0)$  vor und muß eine Umgebung  $U_2 = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  von  $x_0$  so bestimmen, daß  $f(x) \in U_1$  für alle  $x \in U_2$  gilt (Abb. 1).



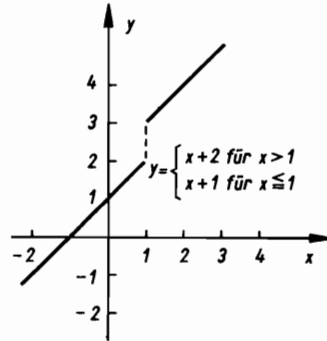
Stetigkeit. Abb. 1: Geometrische Veranschaulichung der Stetigkeit einer Funktion

Die S. einer Funktion ist eine *Punkteigenschaft*, d. h. eine Eigenschaft der Funktion, die sich auf einen bestimmten Punkt, auf eine bestimmte Abszisse  $x_0$  bezieht. Abszissen  $x_0$ , für die die Funktion nicht stetig ist, heißen *Unstetigkeitsstellen*, und die Funktion heißt an diesen Stellen *unstetig*.

**Beispiele:** 1. Die Funktion  $f_1$  mit  $y = f_1(x) = x^2$  ist an der Stelle  $x_0 = 3$  stetig, denn es ist  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = f_1(3)$ .

2. Die Funktion  $f_2$  mit  $y = f_2(x) = 1/x$  ist für  $x_0 = 0$  unstetig, da  $f_2(0)$  nicht definiert ist.

3. Die Funktion  $f_3$  mit  $y = f_3(x) = \{x + 2 \text{ für } x > 1, x + 1 \text{ für } x \leq 1\}$  ist an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht



Stetigkeit. Abb. 2: Sprungstelle einer Funktion

stetig, denn  $\lim_{x \rightarrow 1} f_3(x)$  existiert nicht, da  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = 2 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x)$  (Abb. 2).

Man spricht von *rechtsseitiger S.* der Funktion  $f(x)$  in  $x = x_0$ , wenn die Funktion in einer rechtsseitigen Umgebung von  $x = x_0$  und in  $x = x_0$  selbst definiert ist und der rechtsseitigen Grenzwert von  $f(x)$  existiert und gleich dem Funktionswert ist:  $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Entsprechend definiert man die *linksseitige S.* Aus den Definitionen des rechtsseitigen und des linksseitigen Grenzwertes folgt: *Die Funktion  $f(x)$  ist in  $x = x_0$  stetig, wenn sie sowohl rechtsseitig als auch linksseitig stetig ist.* Die S. läßt sich damit auch als *beiderseitige S.* auffassen.

Die in Beispiel 3 betrachtete Funktion  $f_3$  z. B. ist in  $x_0 = 1$  linksseitig stetig, da  $f_3(x_0) = 2 = \lim_{x \uparrow 1} f_3(x)$ . Die Funktion  $f_4$  mit  $f_4(x) = \sqrt{x - 3}$  ist für  $x_0 = 3$  rechtsseitig stetig; es gilt  $f_4(3) = 0 = \lim_{x \downarrow 3} \sqrt{x - 3}$ .

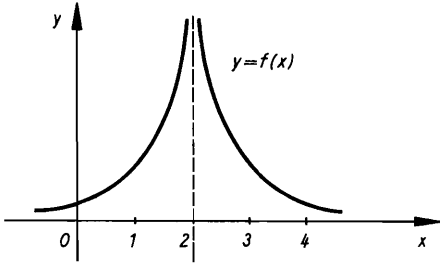
**II. Charakterist. Unstetigkeitsstellen.**  $z^{13}$

**II.1.** Eine Stelle  $x = x_0$  heißt eine *Unbestimmtheitsstelle* der Funktion  $f(x)$ , falls  $f(x_0)$  nicht existiert, aber  $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$  und  $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$  existieren und einander gleich sind. Die Funktion  $f(x) = (\cos x - 1)/x^2$  z. B. ist für alle Werte außer  $x_0 = 0$  definiert und hat nach der Regel von Bernoulli und L' Hospital für  $x \rightarrow 0$  den Grenzwert  $-1/2$ . Definiert man eine *Ersatzfunktion*  $f^*(x)$  mit  $f^*(x) = f(x)$  für  $x \neq 0$  und mit  $f^*(0) = -1/2$ , so ist diese Funktion an der Stelle  $x = 0$  nach (1) stetig.

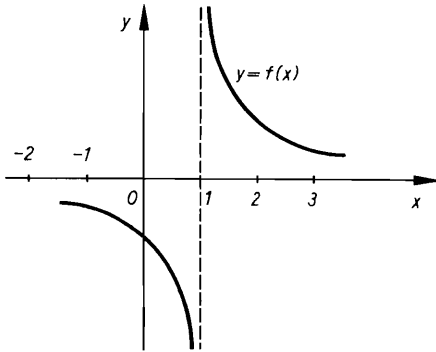
(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} = f^*(0)$

Da die Unstetigkeit der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$  behoben worden ist, spricht man von *hebbarer Unstetigkeit* der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$ . Eben solche hebbare Unstetigkeiten haben die Funktionen  $(\sin x)/x$  für  $x_0 = 0$ ,  $\sin(ax)/\sin(bx)$  für  $x_0 = 0$ ,  $x^{l/(1-x)}$  für  $x_0 = 1$ ,  $(1/x) - 1/(e^x - 1)$  für  $x_0 = 0$ .

**II.2. Pole oder Unendlichkeitsstellen:** Die Stelle  $x = x_0$  heißt *Pol der Ordnung k* der Funktion  $f(x)$ , falls der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^k f(x)$  existiert und endlich ist, während  $(x - x_0)^l f(x)$  für  $0 \leq l < k$



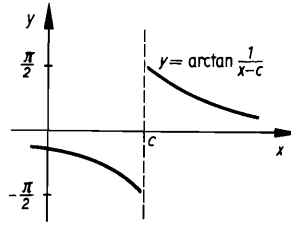
Stetigkeit. Abb. 3: Kurvenverlauf in der Umgebung eines Pols gerader Ordnung, z. B. von  $f(x) = 1/(x - 2)^2$



Stetigkeit. Abb. 4: Kurvenverlauf in der Umgebung eines Pols ungerader Ordnung, z. B. von  $f(x) = 1/(x - 1)$

und  $x \rightarrow x_0$  divergiert, wobei  $k$  und  $l$  natürl. Zahlen sind. Ist  $x = x_0$  eine Polstelle der Funktion  $f(x)$ , gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$ ; die einseitigen uneigentl. Grenzwerte sind vom gleichen bzw. von verschiedenem Vorzeichen, wenn die Ordnung des Poles gerade bzw. ungerade ist (Abb. 3, Abb. 4). Die Funktion  $f(x) = (\tan x)/x^2$  z. B. hat für  $x_0 = 0$  einen Pol der Ordnung 1, denn nach der Regel von Bernoulli und L' Hospital ist  $\lim_{x \rightarrow 0} x[(\tan x)/x^2] = 1$  und  $(\tan x)/x^2$  ist für  $x \rightarrow 0$  divergent. Haben in einer gebrochenrationalen Funktion  $f(x) = p(x)/q(x)$  das Zählerpolynom  $p(x)$  und das Nennerpolynom  $q(x)$  den gemeinsamen Faktor  $(x - x_0)$ , d. h., gilt  $p(x) = (x - x_0)^r p_0(x)$ ,  $q(x) = (x - x_0)^s q_0(x)$  mit  $p_0(x_0) \neq 0$  und  $q_0(x_0) \neq 0$ , so ist  $x = x_0$  für  $r = s$  eine Unbestimmtheitsstelle, die durch den Übergang zur Ersatzfunktion  $f^*(x)$  mit  $f^*(x) = f(x)$  für  $x \neq x_0$  und  $f^*(x_0) = p_0(x_0)/q_0(x_0)$  wegen  $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x)/q(x) = p_0(x_0)/q_0(x_0)$  behoben werden kann. Für  $s > r$  liegt ein Pol der Ordnung  $s - r$  vor, da

$\lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)^{s-r} \cdot p(x)/q(x)] = p_0(x_0)/q_0(x_0)$  und  $(x - x_0)^l p(x)/q(x)$  für  $0 \leq l < s - r$  und  $x \rightarrow x_0$  divergent ist. Für  $r > s$  ist die Funktion  $f(x)$  für  $x = x_0$  stetig. Die Funktion  $f(x) = p(x)/q(x)$  mit  $p(x) = x^2 - 1$  und  $q(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$  z. B. hat für  $x_0 = 1$  eine Unbestimmtheitsstelle, da  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1/4$ ,

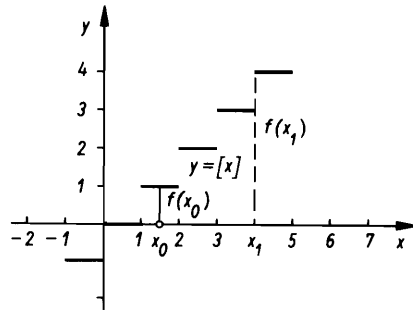


Stetigkeit. Abb. 5: Kurve der Funktion  $f(x) = \arctan [1/(x - c)]$  in der Umgebung der Sprungstelle  $x = c$

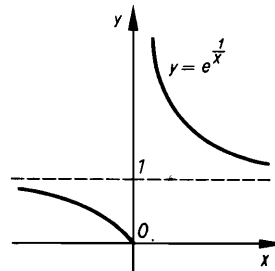
und für  $x = -1$  einen Pol der Ordnung 2, da  $p(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$  und  $q(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x + 1)^3(x - 1)$  mit  $p_0(x) = q_0(x) = x - 1$  und  $s - r = 3 - 1 = 2$  ist.

**II.3. Sprungstellen:** Eine Stelle  $x = x_0$  heißt Sprungstelle der Funktion  $f(x)$ , wenn die beiden einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = A^+$  und  $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = A^-$  existieren und voneinander verschieden sind;  $|A^+ - A^-|$  heißt die *Sprunghöhe*. Man spricht auch von einer Sprungstelle, wenn  $A^+$  oder  $A^-$  oder beides uneigentl. Grenzwerte sind. Die Funktion  $f(x) = \arctan [1/(x - c)]$  z. B. hat für  $x_0 = c$  eine Sprungstelle mit der Sprunghöhe  $\pi$  (Abb. 5), da  $\lim_{x \rightarrow c^-} \arctan [1/(x - c)] = -\pi/2$  und  $\lim_{x \rightarrow c^+} \arctan [1/(x - c)] = \pi/2$  ist.

Ist der reellen Zahl  $x$  als Funktionswert  $y$  die größte ganze Zahl  $[x]$  zugeordnet, die nicht größer als  $x$  ist, so hat die Funktion  $y = f(x) = [x]$  an den Stellen  $x = k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  Sprungstellen (Abb. 6). Die Funktion  $f(x) = e^{1/x}$  hat für  $x_0 = 0$  eine Sprungstelle mit der Sprunghöhe  $\infty$ , denn  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ . Wegen  $\lim_{x \rightarrow 0} x^k e^{1/x} = \infty$  für allen natürl.  $x \neq 0$

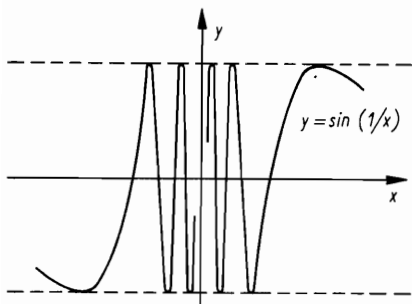


Stetigkeit. Abb. 6: Graphische Darstellung der Funktion  $y = [x]$



Stetigkeit. Abb. 7: Kurve der Funktion  $f(x) = e^{1/x}$  in der Umgebung der Sprungstelle  $x = 0$





Stetigkeit. Abb. 8: Graphische Darstellung der Funktion  $y = \sin(1/x)$

Zahlen  $k$  ist  $x_0 = 0$  für  $f(x) = e^{1/x}$  keine Polstelle (Abb. 7).

Eine Polstelle ungerader Ordnung ist auch eine Sprungstelle mit der Sprunghöhe  $\infty$ .

**II.4. Oszillierende Funktionen mit Unstetigkeiten:**

Die Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$  ist an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht definiert, d. h. unstetig. Diese Funktion pendelt zwischen  $-1$  und  $+1$  um so rascher, je näher  $x$  an Null heranrückt, d. h., in jeder noch so kleinen Umgebung von  $x_0 = 0$  nehmen die Funktionswerte jeden Wert aus dem Intervall  $[-1, +1]$  beliebig oft an (Abb. 8). Die Funktion  $f(x)$  ist in der Umgebung von  $x_0 = 0$  beschränkt,  $|f(x)| \leq 1$ , eine Polstelle liegt deshalb nicht vor. Die beiden einseitigen Grenzwerte für  $x \uparrow 0$  und  $x \downarrow 0$  existieren nicht, es liegt deshalb auch keine Sprungstelle vor. Folglich ist  $x_0 = 0$  für die Funktion  $f(x) = \sin(1/x)$  eine Unstetigkeitsstelle neuer Art, die bei oszillierenden Funktionen auftreten kann.

Die oszillierende Funktion  $f(x) = x \sin(1/x)$  hat jedoch für  $x_0 = 0$  eine Unbestimmtheitsstelle, die behoben werden kann durch Übergang zu der Ersatzfunktion  $f^*(x)$  mit  $f^*(0) = 0$  und  $f^*(x) = f(x)$  für  $x \neq 0$  ( $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion, Abb. 2).

**III. S. im Intervall:** Eine Funktion  $f(x)$  heißt in dem offenen Intervall  $]a, b[$  stetig, wenn sie für alle Abszissen  $x \in ]a, b[$  stetig ist,  $f(x)$  heißt in dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig, wenn sie in  $]a, b[$  stetig, in  $x = a$  rechtsseitig und in  $x = b$  linksseitig stetig ist. Die Funktionen  $f(x) = \text{const}$ ,  $x^n$  mit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  sind Beispiele für im Intervall  $] -\infty, +\infty[$  stetige Funktionen, sie werden auch **überall stetige Funktionen** gen. Zum Nachweis z. B. der S. der Funktion  $f(x) = \sin x$  betrachtet man irgendeinen Wert  $x_0 \in ] -\infty, +\infty[$  und eine beliebig kleine Zahl  $\varepsilon > 0$ . Wählt man dann die positive Zahl  $\delta < \varepsilon$ , so erbringt die für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  gültige Abschätzung (2) den Stetigkeitsnachweis.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & |\sin x - \sin x_0| \\
 &= 2 \cos \left[ \frac{(x + x_0)}{2} \right] \cdot \sin \left[ \frac{(x - x_0)}{2} \right] \\
 &= 2 \left| \cos \left[ \frac{(x + x_0)}{2} \right] \cdot \frac{\sin \left[ \frac{(x - x_0)}{2} \right]}{\left[ \frac{(x - x_0)}{2} \right]} \right| \cdot \frac{|(x - x_0)|}{2} \\
 &\leq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{|(x - x_0)|}{2} = |x - x_0| < \delta < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Die anschaul. Vorstellung des Bildes einer stetigen Funktion als einer „durchgängigen“ Kurve wird durch die gegebene Definition der S. sowohl präzisiert wie auch erweitert. Die Funktion (3) z. B. ist für  $x_0 = 0$  stetig, denn aus  $0 \leq f(x) \leq |x|$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  folgt  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ .

$$(3) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{k+1} & \text{falls } \frac{1}{k+1} < |x| \leq \frac{1}{k} \\ & \text{für ein } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Diese Funktion entzieht sich aber der anschaul. Vorstellung, weil ihr Bild aus lauter getrennt liegenden, zur  $x$ -Achse parallelen Strecken besteht, die gegen 0 hin immer kürzer werden und immer kleinere Ordinate haben.

**IV.** Die folgenden Sätze erweitern den Kreis der bekannten stetigen Funktionen erheblich.

**IV.1. Summe, Differenz und Produkt zweier für  $x = x_0$  stetigen Funktionen sind für  $x = x_0$  wiederum stetig.** Da z. B.  $f(x) = x^n$  für alle natürl. Zahlen  $n$  und  $g(x) = c$  stetige Funktionen für alle  $x$  sind, so ist jede ganzrationale Funktion  $h(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$  eine für alle  $x$  stetige Funktion. Aus der S. von  $e^x$  für alle  $x \in ] -\infty, +\infty[$  folgt die S. der Funktionen  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  und  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  für alle  $x$ .

**IV.2. Der Quotient zweier für  $x = x_0$  stetiger Funktionen ist stetig, wenn der Nenner an der Stelle  $x = x_0$  ungleich Null ist.**

Weil die Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  z. B. für alle  $x \in ] -\infty, +\infty[$  stetig sind, ist  $\tan x = \sin x / \cos x$  stetig für alle  $x \neq (2k + 1)\pi/2$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ , und  $\cot x = \cos x / \sin x$  ist stetig für alle  $x \neq k\pi$  mit  $k \in \mathbf{Z}$ . Mit  $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$  und  $g(x) = d_m x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \dots + d_1 x + d_0$  ist dann auch  $f(x)/g(x)$  für alle  $x$  stetig, die nicht Nullstellen von  $g(x)$  sind. Danach ist jede gebrochenrationale Funktion stetig für alle  $x$  mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners.

**IV.3. Wenn  $y = f(x)$  eine für alle  $x \in ]a, b[$  stetige und streng monotone Funktion ist, so ist auch die unter den gemachten Voraussetzungen existierende Umkehrfunktion  $y = \varphi(x)$  für alle  $x \in ]c, d[$  stetig, wobei  $c = f(a)$  und  $d = f(b)$  ist.** Aus der S. der Funktion  $y = e^x$  für alle  $x \in ] -\infty, +\infty[$  folgt z. B. die S. der Funktion  $y = \ln x$  für alle  $x \in ]0, \infty[$ . Wegen  $\log_a x = \ln x / \ln a$  folgt dann auch die S. von  $y = \log_a x$  für alle  $x \in ]0, \infty[$ . Mit Hilfe dieses Satzes erhält man weiter die S. von  $y = \arcsin x$  für  $x \in ]-1, 1[$ ,  $y = \arccos x$  für  $x \in ]-1, 1[$ ,  $y = \arctan x$  für  $x \in ] -\infty, +\infty[$ ,  $y = \text{arccot } x$  für  $x \in ] -\infty, +\infty[$ ,  $y = \sqrt[n]{x}$  für  $x \in ]0, \infty[$ ,  $y = \text{Arsinh } x$  für  $x \in ] -\infty, +\infty[$  u. a.

**IV.4. S. der mittelbaren Funktion:** Ist die Funktion  $f(x)$  stetig für  $x = x_0$  und die Funktion  $g(y)$  stetig für  $y = y_0 = f(x_0)$ , dann ist auch die Funktion  $F(x) = g(f(x))$  für  $x = x_0$  stetig. Aus der S. von  $f(x) = x \ln a$  mit  $a > 0$  für alle  $x$  und von  $g(y) = e^y$  für alle  $y$  folgt z. B. die S. der Funktion  $e^{x \ln a} = a^x$  für

alle  $x$ . Ebenso folgt aus der S. von  $f(x) = a \ln x$  für  $x > 0$  und von  $g(y) = e^y$  für alle  $y$  die S. von  $e^{\ln x} = x^e$  für alle  $x > 0$ . Gleichfalls als stetig erweisen sich z. B. die Funktionen  $e^{\sin(2x+3)}$ ,  $\sin(x-1-2e^{2x})$  für alle  $x$ , die Funktion  $\sin(1/x)$  für alle  $x \neq 0$  u. a.

V. Die S. wurde mit Hilfe des Grenzwertes definiert. Umgekehrt lassen sich mit Hilfe der S. leicht Grenzwerte von Funktionen berechnen, da man jetzt einen Überblick über die Menge der stetigen Funktionen hat. Ist die Funktion  $f(x)$  für  $x = x_0$  stetig, so gilt nach Definition der S.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , d. h.,

man ermittelt den Grenzwert einer für  $x = x_0$  stetigen Funktion, indem man einfach ihren Funktionswert  $f(x_0)$  bildet. Da z. B. die Funktion  $f(x) = x^2/(1-x)^{1-x}$  stetig ist für alle  $x$  mit  $0 < x < 1$ , gilt  $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x) = f(1/2) = 1$ .

Der folgende Satz wird oft verwendet:

Ist die Funktion  $f(x)$  in einem Intervall  $I = ]a, b[$  stetig und gilt  $f(x_0) > 0$  bzw.  $f(x_0) < 0$  für eine Stelle  $x_0 \in ]a, b[$ , so ist die Funktion auch in einer Umgebung von  $x_0$  noch positiv bzw. negativ.

Über in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetige Funktionen gelten folgende Aussagen:

V.1. Satz von Bolzano: Ist eine Funktion  $f(x)$  in einem abgeschlossenen Intervall stetig und ist  $f(a) f(b) < 0$ , d. h., haben die Funktionswerte an den Intervallenden verschiedenes Vorzeichen, so gibt es mindestens einen Wert  $x_0 \in ]a, b[$ , für den  $f(x_0) = 0$  ist. Aus diesem Satz folgt: Eine stetige Funktion, die in dem Intervall  $a \leq x \leq b$  nicht verschwindet, muß dort überall dasselbe Vorzeichen haben.

Die Funktion  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$  z. B. ist im Intervall  $[-3, 0]$  stetig, und es gilt  $f(-3) = -11 < 0$  und  $f(0) = 1 > 0$ . Daher hat  $f(x)$  mindestens eine Nullstelle  $x_0 \in ]-3, 0[$ , d. h.,  $f(x_0) = x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0$ .

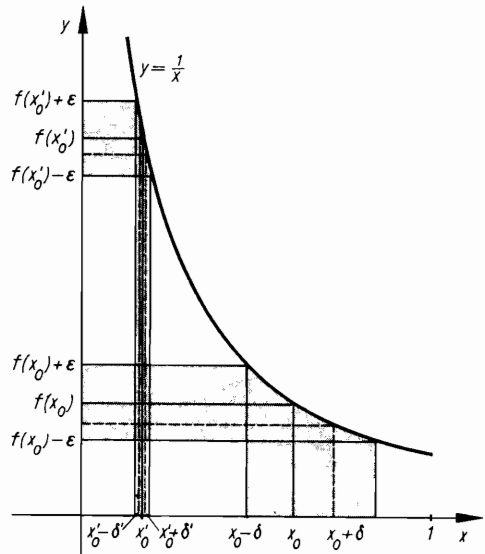
V.2. Zwischenwertsatz: Ist die Funktion  $f(x)$  in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  stetig und ist  $f(a) \neq f(b)$ , etwa  $f(a) < f(b)$ , so gibt es zu jeder Zahl  $c$  mit  $f(a) < c < f(b)$  mindestens ein Argument  $x_0 \in ]a, b[$ , für das  $f(x_0) = c$  ist, d. h., eine in  $[a, b]$  stetige Funktion  $f(x)$  nimmt jeden zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  gelegenen Wert mindestens einmal in  $]a, b[$  an.

V.3. Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt und hat infolgedessen eine wohlbestimmte obere und untere Grenze.

V.4. Ist  $f(x)$  eine in dem abgeschlossenen Intervall  $a \leq x \leq b$  stetige Funktion und ist  $G$  die obere und  $g$  die untere Grenze der Funktion  $f(x)$  in  $[a, b]$ , so gibt es mindestens je eine Stelle  $x_0$  bzw.  $x_0'$  mit  $a \leq x_0, x_0' \leq b$ , für die  $f(x_0) = G$  bzw.  $f(x_0') = g$  ist. Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion hat danach dort ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum.

In diesen Sätzen kann man auf die Abgeschlossenheit des Intervalls nicht verzichten, denn z. B. für die in  $]0, 1[$  stetige Funktion  $f(x) = 1/(1-x)$  gelten die Behauptungen V.3. und V.4. nicht mehr.

VI. Gleichmäßige S.: Ist die Funktion  $f(x)$  im Intervall  $]a, b[$  stetig, so gibt es zu jedem  $x_0 \in ]a, b[$  und zu jedem beliebigen kleinen  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$ , so daß die Ungleichung  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$  erfüllt ist. I. allg. wird diese Zahl  $\delta$  sowohl von  $\varepsilon$  als auch von der betrachteten Stelle  $x_0$  abhängen; deshalb schreibt man genauer  $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ . Die Funktion  $f(x) = 1/x$  z. B. ist für alle  $x$  mit  $0 < x < 1$  stetig. Je näher man mit der Stelle  $x_0$ , für die die S. untersucht werden soll, aber an Null herankommt, um so kleiner muß das  $\delta(\varepsilon, x_0)$  gewählt werden bei gleichbleibendem  $\varepsilon$ ; die Werte  $\delta(\varepsilon, x_0)$  unterschreiten schließlich für  $x_0 \rightarrow 0$  jede



Stetigkeit. Abb. 9: Beispiel einer nicht gleichmäßig stetigen Funktion in dem offenen Intervall  $]0, 1[$

positive Zahl (Abb. 9). Kann man jedoch zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine „ortsunabhängige“ Zahl  $\delta(\varepsilon) > 0$  so finden, daß sich für beliebige Argumente  $x, x'$  aus dem Intervall  $]a, b[$ , deren Abstand kleiner ist als  $\delta$ , die dazugehörigen Funktionswerte um weniger als  $\varepsilon$  unterscheiden, so nennt man die Funktion in  $]a, b[$  gleichmäßig stetig: Eine Funktion  $f(x)$  heißt auf dem Intervall  $]a, b[$  oder  $[a, b]$  gleichmäßig stetig, wenn zu jedem beliebigen  $\varepsilon > 0$  ein für das ganze Intervall gültiges  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so daß für zwei beliebige Punkte  $x, x'$  aus dem Intervall mit  $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$  stets  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$  gilt.

Danach ist die Funktion  $f(x) = 1/x$  in  $]0, 1[$  nicht gleichmäßig stetig. Beispiele für gleichmäßig stetige Funktionen liefert der folgende Satz von Cantor: Jede in einem abgeschlossenen Intervall  $a \leq x \leq b$  stetige Funktion  $f(x)$  ist dort auch gleichmäßig stetig.

Die Funktion  $f(x) = 1/x$  ist z. B. in  $]0, 1[$  nicht gleichmäßig stetig, wohl aber etwa in  $[1/10, 1]$ .

VII. S. von Funktionen mit mehreren Variablen. Die Funktion  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist in einem Punkt  $P_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  ihres Definitionsbereichs ge-

nau dann stetig, wenn der Grenzwert  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  existiert und mit dem Funktionswert  $f(P_0)$  übereinstimmt. Dabei ist der angegebene Grenzwert so zu verstehen, daß gleichzeitig  $x_1 \rightarrow x_{10}, x_2 \rightarrow x_{20}, \dots, x_n \rightarrow x_{n0}$  konvergieren. Andererseits kann man für die S. einer Funktion  $f$  mit mehreren unabhängigen Variablen in einem Punkt  $P_0$  auch die notwendige und hinreichende Bedingung fordern, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so daß  $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})| < \varepsilon$  gilt, falls nur

$$|x_i - x_{i0}| < \delta \text{ für } i = 1, 2, \dots, n \text{ gilt.}$$

Als nützl. Kriterium für die Untersuchung der S. einer Funktion  $f$  kann die Tatsache benutzt werden, daß  $f$  genau dann in einem Punkt  $P_0$  ihres Definitionsbereichs stetig ist, wenn Grenzwertbildung und Funktionswertbildung vertauschbar sind, d. h., wenn gilt  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(\lim_{P \rightarrow P_0} P)$ . Die Funktion  $f$  heißt

in einem Gebiet stetig, wenn sie in jedem Punkt des Gebiets stetig ist; sie heißt überall stetig, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist. Die Funktion  $f$  mit  $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$  z. B. ist in der gesamten  $x_1, x_2$ -Ebene mit Ausnahme des Koordinatenursprungs definiert und stetig. Da aber für jedes  $a \neq 0$

$$f(a, a) = 1/2 \text{ und } f(a, 2a) = 2/5$$

gilt, stellt man fest, daß  $f$  an der Stelle  $P_0 = (0, 0)$  keine hebbare Unstetigkeitsstelle hat, da der Grenzwert der Funktion für  $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0$  nicht existiert. Faßt man dagegen  $x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$  als analyt. Ausdruck einer Funktion einer unabhängigen Variablen  $x_1$  bzw.  $x_2$  auf und betrachtet  $x_2$  bzw.  $x_1$  als Konstante, so existiert der jeweilige Grenzwert, d. h., die Funktionen  $u$  bzw.  $v$  mit  $u(x_1) = x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$  bzw.  $v(x_2) = x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$  sind an der Stelle  $x_1 = 0$  bzw.  $x_2 = 0$  stetig. Die Forderung nach S. einer Funktion mit  $n$  unabhängigen Variablen in einem Punkt  $P_0$  kann danach also nicht ersetzt werden durch die Forderung nach S. der Funktion für jedes einzelne Argument. Auch für stetige Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen gilt, daß ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt und ihr Quotient, falls die Nennerfunktion an der betrachteten Stelle von 0 verschieden ist, wieder stetige Funktionen sind. Entsprechend können auch die übrigen der oben gen. Sätze über stetige Funktionen auf solche mit mehreren Variablen übertragen werden. Dasselbe gilt für die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

**VIII. S. einer komplexwertigen Funktion einer komplexen Veränderlichen:** Eine in einem Gebiet  $G$  erklärte komplexwertige Funktion  $f$  einer komplexen Veränderlichen mit  $w = f(z)$  wird an einer Stelle  $z_0$  stetig gen., wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt, die zueinander äquivalent und formal dieselben sind wie im Reellen.

1. **Formulierung:**  $f$  ist an der Stelle  $z_0$  genau dann stetig, wenn  $f$  in  $z_0$  definiert ist,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existiert und mit  $f(z_0)$  übereinstimmt.

2. **Formulierung:**  $f$  ist an der Stelle  $z_0$  genau dann stetig, wenn zu jeder beliebigen positiven reellen Zahl  $\varepsilon$  eine von  $\varepsilon$  und i. allg. auch von  $z_0$  abhängende reelle Zahl  $\delta > 0$  existiert, so daß  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  für alle Argumente  $z$  gilt, die der Bedingung  $|z - z_0| < \delta$  genügen.

Jede komplexe Funktion  $f$  kann durch zwei reellwertige Funktionen  $u$  und  $v$  mit den beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$  ersetzt werden. Dann zieht die S. von  $f$  an der Stelle  $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$  die S. von  $u$  und  $v$  an der Stelle  $P_0 = (x_0, y_0)$  nach sich und umgekehrt.

**Stetigkeit einer Funktion** ↗ Stetigkeit.

**Stetigkeitsaxiom** ↗ axiomatischer Aufbau der Geometrie.

**Steuereinrichtung** ↗ Steuerung I.

**Steuerprogramm** ↗ Betriebssystem II.

**Steuerstrecke** ↗ Steuerung I.

**Steuerung:** allgemein jeder Vorgang in einem kybernet. System, bei dem eine Ausgangsgröße  $x_A$  oder ein Satz  $x_A$  von Ausgangsgrößen in vorgeschriebener Weise durch eine bzw. mehrere Eingangsgrößen  $x_E$  bzw.  $x_E$  beeinflusst werden:  $x_A = F(x_E)$  bzw.  $x_A = F(x_E)$ .

Der Begriff der S. ist außerordentlich umfassend und damit prinzipiell auf jede Art einer zielgerichteten Beeinflussung von Prozessen anwendbar. Von wesentl. Bedeutung ist hierbei, ob die S. in einem offenen oder geschlossenen Wirkungsablauf erfolgt. Unter Steuerung i. e. S. versteht man im deutschen Sprachgebiet eine S. im *offenen Wirkungsablauf* (TGL 14591). Als Struktur einer derartigen S. ergibt sich die *Steuerkette*. Im Unterschied dazu hat die ↗ *Regelung* einen durch Rückführung geschlossenen Wirkungsablauf.

**I. Offene S.en.** Das Objekt der offenen S. ist die *Steuerstrecke*, mit den Steuergrößen im Eingang und den gesteuerten Größen im Ausgang. Bei der *Hand-S.* werden die Steuergrößen vom Menschen vorgegeben. *Automat. S.en* verfügen zusätzlich über eine *Steuereinrichtung*, die die Steuergrößen bzw. eine Folge von Steuergrößen bildet. Diese können je nach Art der S. nur von den äußeren Eingangsgrößen oder auch zusätzlich von inneren Zustandsgrößen abhängen. Die Steuereinrichtungen diskreter S.en werden *Schaltssysteme* gen.

Nach dem Charakter der verwendeten Signale unterscheidet man analoge und diskrete S.en.

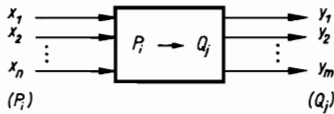
**I.1.** Die physikal. Größen einer *analogen S.* sind analoge Signale.

**I.2.** In *diskreten S.en* sind die physikal. Größen diskrete Signale. Wegen der einfachen techn. Realisierbarkeit werden überwiegend binäre Signale benutzt. Die O,L-Belegungen der Ein- und Ausgangssignale können dabei als Kodewörter über dem Alphabet {O, L} aufgefaßt werden (↗ Zeichen) oder als Digitalzahlen; deshalb wird häufig von *digitalen S.en* gesprochen. Diese bilden gegenüber den analogen S.en die bedeutendere Gruppe.

**II. Digitale S.en.** Die wichtigsten digitalen S.en sind die *Kombinations- und Folge-S.en*.

**II.1.** Eine *Kombinations-S.* liegt vor, wenn die S. keine binären Speicherelemente (↗ Übertragungs-

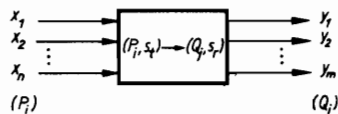
glied II.) enthält. Die  $n$  unabhängigen Eingangssignale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilden hierbei Eingangswörter  $P_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, k^n$ , wenn  $k$  die Mächtigkeit des Alphabets ist ( $\nearrow$  Zeichen), und die  $m$  Ausgangssignale  $y_1, y_2, \dots, y_m$  bilden Ausgangswörter  $Q_j$  mit  $j = 1, 2, \dots, k^m$ , zwischen denen eine eindeutige Zuordnung  $P_i \rightarrow Q_j$  besteht (Abb. 1).



Steuerung. Abb. 1: Kombinationssteuerung, Zuordnung der Eingangswörter  $P_i$  zu den Ausgangswörtern  $Q_j$

Die Behandlung von Kombinations-S.en erfolgt vorzugsweise mit Hilfe der *Booleschen Funktionen*. Reine kombinator. S.en sind in der Praxis verhältnismäßig selten anzutreffen, bilden jedoch wesentl. Teile innerhalb von Folge-S.en.

**II.2. Eine Folge-S. oder sequentielle S.** enthält binäre Speicherelemente ( $\nearrow$  Übertragungsglied) zur Bildung der inneren Schaltzustände. Die inneren Zustände ergeben sich aus vorangegangenen Werten der Eingangssignale. Hat eine Folge-S.  $n$  unabhängige diskrete Eingangssignale  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $q$  innere Speichersignale  $z_1, z_2, \dots, z_q$  und  $m$  Ausgangssignale  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , so wird der Zustand der Folge-S. im jeweils nächsten Schalttakt durch den Zustand  $s_i$  der Folge-S. im vorhergehenden Schalttakt und durch den jeweiligen Eingangswert  $P_i$  bestimmt. Ebenso legt das Paar  $(P_i, s_i)$  eindeutig das Ausgangswort  $Q_j$  im nächsten Schalttakt fest (Abb. 2).



Steuerung. Abb. 2: Folgesteuerung, das Paar  $(P_i, s_i)$  aus Eingangswort  $P_i$  und Zustand  $s_i$  legt eindeutig das Paar  $(Q_j, s_r)$  aus Ausgangswort  $Q_j$  und neuem Zustand  $s_r$  fest

*Folge-S.en* können zeitweilige Rückkopplungen enthalten; dabei werden bestimmte Zustandsgrößen der Steuerstrecke von der Steuereinrichtung als Eingangssignale verarbeitet. Als Folge-S.en werden auch endl. Automaten bezeichnet ( $\nearrow$  Automat, determinierter, abstrakter). Bzgl. der Zeitkoordinate unterscheidet man weiter zwischen synchronen und asynchronen Folge-S.en.

**II.2.1. In der synchronen S. oder Takt-S.** können die diskreten Signale ihre Werte nur zu bestimmten, für das ganze Schaltsystem einheitl. Zeitpunkten ändern. Kennzeichen der synchronen S. ist das Vorhandensein einer gemeinsamen *Taktgebereinrichtung*, die die Zeitpunkte für die gemeinsame Umschaltung aller Signale festlegt. Der Hauptvorteil der Takt-S. besteht in der Vermeidung von *Schaltungleichzeitigkeiten*. Außerdem reduziert sich in vielen Fällen der Aufwand zur techn. Realisierung,

da binäre Speicherglieder eingespart werden. Ein wesentl. Nachteil ist die geringere *Arbeitsgeschwindigkeit* gegenüber einer vergleichbaren asynchronen S., da bei der Festlegung der Taktzeit von der längsten vorkommenden Laufzeit der Einzelsignale ausgegangen werden muß. Trotzdem wird der taktgesteuerte Betrieb bei größeren Automaten allgemein bevorzugt, da sich der Entwurf einfacher gestaltet und diese Schaltungen übersichtlicher sind.

Hat die Takt-S.  $n$  unabhängige Eingangssignale  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $q$  diskrete innere Zeitzustände  $t_1, t_2, \dots, t_q$  und  $m$  Ausgangssignale  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , so wird das Ausgangswort  $Q_j$  im jeweils nächsten Schalttakt eindeutig durch das Eingangswort  $P_i$  und die Zeit  $t_k$  bestimmt:  $(P_i, t_k) \rightarrow Q_j$ .

Sind mehrere verschiedene Programme alternativ verfügbar, wird in solchen Fällen auch die Bezeichnung *Programmsteuerung* benutzt.

Eine reine *Zeit-S.* liegt vor, wenn das jeweilige Ausgangswort  $Q_j$  nur von der Zeit  $t_k$  bestimmt wird:  $t_k \rightarrow Q_j$ .

Die Behandlung von Takt-S.en ist mit Hilfe der zeitabhängigen Booleschen Funktionen möglich.

**II.2.2. Die asynchrone S.** ist eine Folge-S., bei der die diskreten Signale ihre Werte zu beliebigen, für das Schaltsystem uneinheitl. Zeitpunkten ändern können. Asynchrone S.en haben gegenüber vergleichbaren Takt-S.en eine größere Arbeitsgeschwindigkeit. Schwierigkeiten können jedoch durch das Problem der Speicherschalt-Ungleichzeitigkeiten auftreten. Dieses entsteht, wenn Signaländerungen zu Zustandsänderungen in zwei oder mehreren parallelen Speichergliedern führen. Da aus techn. Gründen ein völlig gleichzeitiger Zustandswechsel nicht realisierbar ist, kann es hierbei zu Fehlschaltungen kommen, die nur durch zusätzl. Maßnahmen verhindert werden können.

Außerdem stehen für die Synthese umfangreicherer asynchroner S.en gegenwärtig noch keine befriedigenden Entwurfsverfahren zur Verfügung. Aus diesen Gründen beschränkt sich die Anwendung dieser Betriebsart auf S. nicht zu großer Komplexität.

**Steuerungsfunktion**  $\nearrow$  Variationsrechnung IV.

**Steuerwerk**  $\nearrow$  digitale Rechenanlage II.3.

Stevin, Simon, geb. 1548(?) Brügge, gest. vor dem 8. 4. 1620 s'Gravenhage. — S. war Kassierer und Buchhalter in Antwerpen und dann in der Finanzverwaltung tätig. 1581 zog er nach Leiden und wurde als Student an der Universität eingeschrieben. Seit etwa 1593 stand S. als Ingenieur(?) im Dienste des Prinzen von Oranien. Seine bedeutendste mathemat. Leistung ist die erstmalige klare Definition und systemat. Behandlung der *Dezimalbrüche* und der Rechenoperationen in »De Thiende« (1585). Er schrieb auch über die Auflösung von Gleichungen und über Zinstafeln und verfaßte wertvolle Schriften zur Statik, über das hydrostat. Paradoxon (1586), über Festungsbau und zu Fragen der Technik.

**Stichprobe:** Grundbegriff der mathemat. Statistik; mit einer S. will man aus den Kenntnissen über be-

stimmte Eigenschaften einer Teilmenge von Elementen, die einer Gesamtmenge entnommen sind, etwas über die entsprechenden Eigenschaften der Gesamtmenge aussagen. Diese Gesamtmenge heißt die *Grundgesamtheit*. Von Interesse an der Grundgesamtheit ist ein bestimmtes Merkmal, das zufallsbedingt ist und quantitativer oder qualitativer Natur sein kann. In der Menge aller erwachsenen männl. Personen der DDR als Grundgesamtheit kann z. B. als interessierendes Merkmal die Körpergröße in cm untersucht werden. Dieses Merkmal ist quantitativer Natur. Produziert ein Automat Glühlampen, so kann die Menge aller unter gleichbleibenden Bedingungen produzierten Glühlampen die Grundgesamtheit bilden und als interessierendes Merkmal etwa die Eigenschaft einer Glühlampe untersucht werden, zu funktionieren oder nicht. Dieses Merkmal ist qualitativer Natur. Das interessierende Merkmal kann mathematisch durch eine Zufallsgröße  $X$  beschrieben werden. Im quantitativen Fall ist  $X$  das Merkmal selbst, bei einem qualitativen Merkmal etwa vom Typ »gut – schlecht« kann man z. B. definieren:  $X = 0$ , falls »gut«, aber  $X = 1$ , falls »schlecht«. Unter einer *S.nentnahme vom Umfang  $n$*  versteht man eine zufällige Auswahl von  $n$  Objekten aus der Grundgesamtheit mit anschließender Messung bzw. Beobachtung des interessierenden Merkmals. Dabei muß gewährleistet sein, daß die Auswahl der einzelnen Objekte *unabhängig voneinander* geschieht. Das Ergebnis der Stichprobenentnahme, die *S. vom Umfang  $n$* , ist dann ein  $n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  von Merkmalswerten, z. B. ist  $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$  eine S. vom Umfang 10 aus einem Posten Glühlampen, für die sich bei der Prüfung ergab, daß 8 gut und 2 schlecht waren. Entsprechend kann etwa  $(176, 182, 180, 185, 164, 172, 191, 179)$  eine S. vom Umfang 8 sein für das Merkmal »Körpergröße einer Gruppe der erwachsenen männl. Bevölkerung«. Die Tatsache, daß man viele Stichprobenentnahmen vom Umfang  $n$  vornehmen kann und in *Abhängigkeit vom Zufall verschiedene  $n$ -Tupel von Merkmalswerten* bekommt, führt zu folgender, für das theoret. Verständnis der gesamten mathemat. Statistik grundlegenden abstrakt-mathemat. *Definition: Aus einer Grundgesamtheit, in der das interessierende Merkmal  $X$  die Verteilung  $F(x)$  hat, ist ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor  $(X_1, \dots, X_n)$  eine mathemat. S. vom Umfang  $n$ , falls die  $X_i$  unabhängig voneinander sind* (↗ Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) *und falls alle  $X_i$  die gleiche Verteilung  $F(x)$  haben.* Jede Realisierung  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  ist eine S. Ist keine Verwechslung zu befürchten, so läßt man den Zusatz „mathematisch“ weg.

**Stichprobenfunktion:** Funktion  $Z_n = Z(X_1, \dots, X_n)$ , in der die Argumente  $X_i$  eine mathemat. Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  bilden. Eine S. ist danach eine *Zufallsgröße*. Die Ermittlung der Verteilung einer S. ist eine Grundaufgabe der mathemat. Statistik. Im Falle einer kleinen Stichprobe mit kleinem Umfang  $n$  interessiert man sich für die Verteilung der S.  $Z_n$ , während für große Stichproben die Kenntnis der *asymptot. Verteilung*, d. h. der Grenzverteilung von  $Z_n$  für  $n \rightarrow \infty$ , genügt. Vgl. Stichproben-

mittel, Stichprobenvarianz, Stichprobenmomente, Maximum-Likelihood-Methode I.

**Stichprobenkorrelationskoeffizient:** eine *Punktschätzung* für den *Korrelationskoeffizienten*, die man nach der *Momentenmethode* folgendermaßen erhält: Die *Kovarianz* (↗ Momente III.) wird durch die *Stichprobenkovarianz*, die *Varianzen* (↗ Streuung) werden durch die *Stichprobenvarianzen* ersetzt. Dann ergibt sich der S.  $R$  nach der Formel (1).

$$(1) \quad R = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Liegt eine konkrete Stichprobe  $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$  des Merkmalspaares  $(X, Y)$  vor, so heißt die Realisierung  $r$  von  $R$  der *empir. Korrelationskoeffizient* (2). Er spielt eine wichtige Rolle in der *Korrelationsanalyse*.

$$(2) \quad r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

**Stichprobenkovarianz:** eine *Punktschätzung* für die *Kovarianz* (↗ Momente III.), im Falle zweier Zufallsgrößen  $X, Y$ , die ein Paar von Merkmalen beschreiben, z. B. die Stichprobenfunktion (2). Eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$  besteht in diesem Fall aus  $n$  Paaren  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$  von Merkmalswerten. Wenn z. B.  $X$  die Körpergröße,  $Y$  das Körpergewicht eines Menschen beschreibt, erhält man eine Stichprobe vom Umfang  $n$  durch zufällige Auswahl von  $n$  Menschen aus der Bevölkerung und durch Messen der beiden Größen bei jedem der ausgewählten Individuen. Ist in diesem Sinne  $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$  eine Stichprobe vom Umfang  $n$  für das Paar  $(X, Y)$ , so heißt die gemäß (1) definierte Größe die *empir. Kovarianz* der vorliegenden Stichprobe, und die zugehörige Stichprobenfunktion (2)

$$(1) \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$(2) \quad \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

heißt S. Sind  $m$  Zufallsgrößen  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$  gegeben, für die die Größen  $C_{ij}$  gemäß (3) definiert werden, so heißt die Matrix  $(C_{ij})$  *S.matrix*. Für  $i = j$  ist jeweils  $C_{ij}$

$$(3) \quad C_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k^{(i)} - \bar{X}^{(i)})(X_k^{(j)} - \bar{X}^{(j)})$$

die S. des Paares  $(X^{(i)}, X^{(j)})$ , für  $i = j$  ist  $C_{ii}$  die *Stichprobenvarianz* von  $X^{(i)}$ . Die S.matrix ist eine erwartungstreue Punktschätzung der *Kovarianzmatrix* (↗ Momente III.). Die S. verwendet man für die Bildung des *Stichprobenkorrelationskoeffizienten* (↗ Momente III.) und entsprechend die empir. Kovarianz zur Berechnung des empir. Korrelationskoeffizienten.

**Stichprobenmittel:** die *Stichprobenfunktion*  $Z(X) = \bar{X} = (1/n)(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$  (s. a. Momentenmethode). Wird die mathemat. Stichprobe  $X = (X_1, \dots, X_n)$  realisiert, d. h., liegt eine konkrete Stichprobe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  vor, so ergibt sich als Realisierung von  $\bar{X}$  die Zahl  $\bar{x} = (1/n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ , die das *empir. Mittel* oder der *Mittelwert* der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  gen. wird. Ist das der Stichprobe  $X$  zugrunde liegende Merkmal nach  $N(a, \sigma)$  verteilt, so ist  $\bar{X}$  nach  $N(a, \sigma/\sqrt{n})$  verteilt ( $\nearrow$  Normalverteilung). Ist lediglich  $D^2X < \infty$  bekannt, so kann man immer noch die Aussage treffen, daß  $\bar{X}$  asymptotisch nach  $N(EX, \sqrt{D^2X}/n)$  verteilt ist.  $\bar{X}$  ist eine erwartungstreue  $\nearrow$  Punktschätzung von  $EX$ .

**Stichprobenmoment:** *Stichprobenfunktion* vom Typ (1), die genauer das  $k$ -te S. oder das S.  $k$ -ter Ord-

$$(1) \quad Z(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - c)^k$$

nung bzgl. der reellen Größe  $c$  gen. wird. Für  $c = 0$  erhält man die *Stichprobenanfangsmomente*, für  $c = \bar{X}$  ( $\nearrow$  Stichprobenmittel) die *zentralen S.e.*, wenn man noch den Faktor  $(1/n)$  durch  $1/(n-1)$  ersetzt. Wird die Stichprobe realisiert, d. h., liegt eine konkrete Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  vor, so heißen die durch (2), (3) definierten Größen entsprechend *empir. Anfangsmomente* bzw. *empir. zentrale Momente* von  $x$ . Sie sind Schätzwerte ( $\nearrow$  Punktschätzung)

$$(2) \quad \hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

$$(3) \quad \hat{\mu}_k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$$

für die entsprechenden theoret. Momente  $m_k$  und  $\mu_k$  ( $\nearrow$  Momentenmethode). Mittels der empir. Momente definiert man z. B. den *empir. Variationskoeffizienten*  $s/\bar{x}$ , in dem  $s$  die Streuung bedeutet ( $\nearrow$  Stichprobenvarianz), die *empir. Schiefe*  $\beta_3/\sqrt{\beta_2^3}$  und den *empir. Exzeß*  $\xi = (\beta_4/\beta_2^2) - 3$ . Sie sind auf Grund einer vorliegenden Stichprobe gewonnene Schätzwerte für die theoret. Größen *Variationskoeffizient*, *Schiefe* und *Exzeß* ( $\nearrow$  Momentenmethode).

**Stichprobenregressionskoeffizient**  $\nearrow$  Regressionsanalyse I.

**Stichprobenstreuung**  $\nearrow$  Stichprobenvarianz.

**Stichprobenvarianz:** die *Stichprobenfunktion* (1),

in der  $\bar{X}$  das *Stichprobenmittel* ist. Die positive Quadratwurzel aus der S. heißt *Stichprobenstreuung*. Wird die mathemat. Stichprobe  $(X_1, \dots, X_n)$  realisiert, d. h., liegt eine konkrete Stichprobe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  vor, so ergibt sich nach (2) als Realisierung von  $S^2(X)$  die Zahl  $s^2(x)$ , die *empir. Varianz*, deren positive Quadratwurzel die *empir. Streuung*  $s$

$$(2) \quad s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

der Stichprobe gen. wird. Ist das der Stichprobe  $X$

zugrunde liegende Merkmal normalverteilt mit der Streuung  $\sigma$  ( $\nearrow$  Normalverteilung), so hat die Größe  $(n-1) \cdot S^2/\sigma^2$  eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n-1$  Freiheitsgraden. Die S.  $S^2$  ist eine erwartungstreue *Punktschätzung* für die Varianz  $D^2X$ .

**Stimulus**  $\nearrow$  System I.

**Stirling**, James, geb. 1692 St. Ninians, gest. 5. 12. 1770 Leadhills. — S. stammte aus altem schott. Adel, mußte als Anhänger der Stuarts seine Heimat verlassen und lebte 1714/25 in Venedig. Später war er im schott. Bergwerkswesen tätig. Er gab Beiträge zur Theorie der Kubiken, zur Newtonschen Interpolationstheorie und zu verschiedenen Reihenentwicklungen.

**Stirlingsche Formel**  $\nearrow$  Interpolation II.

**Stochastik:** in letzter Zeit eingebürgerter Sammelbegriff für die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und ihre Anwendungen. Im Unterschied zu den determinist. Erscheinungen nennt man Erscheinungen stochastisch, wenn in ihnen der Zufall eine Rolle spielt [*ó stóchos*, griech., das Vermutete].

**stochastisch**  $\nearrow$  Lagerhaltungstheorie,  $\nearrow$  Modell II.,  $\nearrow$  Operationsforschung.

**stochastische Abhängigkeit**  $\nearrow$  Korrelationsanalyse.

**stochastische Modelle:** mathemat. Modelle solcher Vorgänge in Natur und Gesellschaft, die den Charakter von Massenerscheinungen haben oder in anderer Weise als zufallsabhängig aufgefaßt werden können und somit einer mathemat. Behandlung mittels *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *mathemat. Statistik* zugänglich sind.

**stochastischer Prozeß, zufällige Funktion, zufälliger Prozeß:** I. eine Schar  $X(\vartheta)$  von *Zufallsgrößen* mit dem Parameter  $\vartheta$ , der eine Parametermenge  $\Theta$  durchläuft. Vom Standpunkt der axiomat. Wahrscheinlichkeitsrechnung aus wird ein s. P. folgendermaßen definiert: Sind  $\{S, \mathcal{B}, P\}$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\Theta$  eine Menge, so heißt eine auf  $S \times \Theta$  definierte Funktion  $f(s, \vartheta) := X(\vartheta)$  ein s. P., wenn  $f(s, \vartheta_0)$  für jedes feste  $\vartheta_0$  eine meßbare Funktion in  $s$  ist. Wird ein Elementarereignis  $s_0$  realisiert, so ist  $f(s_0, \vartheta)$  eine gewöhnliche reelle Funktion von  $\vartheta$ , die man als *eine Realisierung des s. Prozesses*  $X(\vartheta)$  bezeichnet.

Die Geschwindigkeit  $v$  von Gasmolekülen ist z. B. eine Zufallsgröße, denn je nach Auswahl eines konkreten Gasmoleküls erhält man andere Werte für die Geschwindigkeit. Ferner hängt sie von der Zeit ab, so daß ein s. P.  $V(t)$  vorliegt. Wird die Messung an einem konkreten Molekül vorgenommen, so ergibt sich eine Realisierung  $v(t)$  dieses Prozesses.

II. Ist  $\Theta$  die Menge der natürl. oder der ganzen Zahlen, so spricht man von einer *zufälligen Folge*, im Falle  $\Theta = \mathbb{R}^3$  von einem *Zufallsfeld*. Oft wird  $\vartheta$  als die Zeit interpretiert, man schreibt dann meist  $t$  statt  $\vartheta$  und  $\Theta = T$  ist dann die Menge der reellen Zahlen. Für beliebige  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m$  und natürl.  $m$  betrachtet man die Funktionen  $F_{\vartheta_1, \dots, \vartheta_m}(x_1, \dots, x_m) = P(X(\vartheta_1) < x_1, \dots, X(\vartheta_m) < x_m)$ . Sie heißen die *endlichdimensionalen Verteilungen* des s. P. es  $X(\vartheta)$ . Sie genügen den *Verträglichkeitsbedingungen* (1) und (2),

in denen  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$  eine beliebige Permutation

der Menge  $M = \{1, \dots, m\}$  ist.

$$(1) F_{\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta_{m+k}}(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty) = F_{\theta_1, \dots, \theta_m}(x_1, \dots, x_m)$$

$$(2) F_{\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_m}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = F_{\theta_1, \dots, \theta_m}(x_1, \dots, x_m)$$

Von größter Bedeutung für die Theorie der s.P.e ist der *Hauptsatz von Kolmogorow*, der besagt, daß zu jeder Schar von Verteilungsfunktionen, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, ein s. P. existiert, dessen endlichdimensionale Verteilungen mit der vorgegebenen Schar von Verteilungen zusammenfallen.

III. Wichtige spezielle Klassen von s. P.en sind die *Markowschen Prozesse* und die *stationären Prozesse*.  $X(t)$  heißt ein *Markowscher Prozeß*, wenn (3) für beliebige  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  und beliebige  $x_i$  gilt

$$(3) P\{X(t) \in A \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1\} = P\{X(t) \in A \mid X(t_n) = x_n\}$$

(↗ Wahrscheinlichkeit, bedingte, III.). Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß  $X(t)$  in  $A$  fällt, genügt danach die Kenntnis von  $X(t)$  an einem früheren Zeitpunkt  $t_n$ , während die Werte von  $X(t)$  in der „ferneren Vergangenheit“ ( $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1$ ) keinen Einfluß mehr haben. Man spricht deshalb bei einem Markowschen Prozeß auch von einem *Prozeß ohne Nachwirkung* bzw. von einem *Prozeß ohne Gedächtnis*.  $P\{X(t) \in A \mid X(s) = x\}$  wird für  $s < t$  mit  $P(s, x, t, A)$  bezeichnet und heißt die *Übergangswahrscheinlichkeit* des entsprechenden Markowschen Prozesses.  $P(s, x, t, A)$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $X(t)$  in  $A$  fällt, wenn  $X(s)$  den Wert  $x$  hatte für  $s < t$ . Kann  $X(t)$  nur abzählbar viele Zustände  $x_1, x_2, \dots$  annehmen und durchläuft  $t$  nur die diskreten Werte  $1, 2, \dots$ , so spricht man von einer *Markowschen Kette*. Hat man insbes. nur endlich viele Zustände und hängt die Übergangswahrscheinlichkeit nicht mehr von  $t$  ab, so wird das Verhalten der Kette nach (4) vollständig durch die *Übergangsmatrix*  $(p_{ij})$  beschrieben. Die Markow-

$$(4) p_{ij} = P\{X_{m+1} = x_i \mid X_m = x_j\}$$

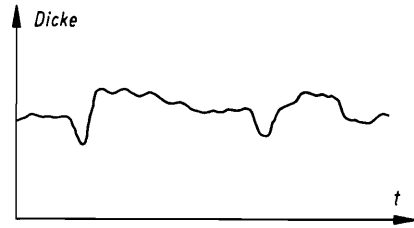
schen Prozesse spielen eine große Rolle bei vielen Fragen der Physik und Technik, z. B. bei der Diffusion, dem radioaktiven Zerfall, in der *Bedienungstheorie*, bei der Beschreibung biolog. Vorgänge und in vielen anderen Anwendungen.

IV. Der s. P.  $X(t)$  heißt *stationär*, wenn die *endlichdimensionalen Verteilungen gegen Zeitverschiebung unempfindlich* sind, d. h., wenn (5) für beliebiges  $t$

$$(5) F_{\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\theta_1, \dots, \theta_n}(x_1, \dots, x_n)$$

gilt. Sämtliche wahrscheinlichkeitstheoret. Charakteristiken ändern sich danach bei Zeitverschiebung nicht. Insbesondere ist  $E\{X(t)\} = m = \text{const}$  und  $D^2\{X(t)\} = \sigma^2 = \text{const}$ . Die *Korrelationsfunktion* (6) hängt nur von der Differenz  $t - s$  ab. Die Dicke des

$$(6) B(t, s) = E\{X(t) - m\} \{X(s) - m\}$$



stochastischer Prozeß: Die Dicke eines Fadens an einem Spinnaggregat zu verschiedenen Zeiten

Fadens an einem Spinnaggregat z. B. ist zufälligen Schwankungen unterworfen (Abb.). Wenn sich die äußeren Produktionsbedingungen mit der Zeit nicht ändern, so können diese Schwankungen auf von der Zeit unabhängige Ursachen zurückgeführt werden. Es handelt sich dann um einen stationären Prozeß. Die Abb. zeigt eine Realisierung dieses Prozesses. Die stationären Prozesse haben ein breites Anwendungsfeld in der Elektro- und Nachrichtentechnik, in der Turbulenztheorie, in der Ökonomie, Biologie und Medizin. — S. a. Optimierung, dynamische, IV. **stochastische Signalbeschreibung** ↗ System II. **stochastische Unabhängigkeit** ↗ Unabhängigkeit von Ereignissen.

Stokes, Sir George Gabriel, geb. 13. 8. 1819 Skreen (Irland), gest. 1. 2. 1903 Cambridge. — S. war seit 1849 Professor der Mathematik in Cambridge. Neben seinen Beiträgen zur Analysis, z. B. der S.schen Integralformel, gab er wichtige Beiträge zur Physik, z. B. über Fluoreszenz und über die Bewegung zäher Flüssigkeiten, und arbeitete über Geodäsie.

**Stokesscher Satz:** Bezeichnung für den Zusammenhang zwischen einem Oberflächenintegral und einem Kurvenintegral.

Sind die Funktionen  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  in einem Raumgebiet  $K$  mit ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig, dann gilt für jede zweiseitige, stückweise glatte, nichtgeschlossene Fläche  $S$  im Innern von  $K$  mit dem Rand  $k$  die Beziehung (1). Dabei ist der Durchlaufsinne von  $k$  so zu wählen, daß er mit der Normalen der im Flächenintegral zweiter Art gewählten Seite von  $S$  eine Rechtsschraube bildet.

$$(1) \int_{(S)} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \right] = \int_{(k)} (P dx + Q dy + R dz)$$

S. a. Integralsätze II.

**Störrautionomie** ↗ Regelung VIII.

**Storchschnabel** ↗ Gelenkmechanismus I.

**Störfunktion** ↗ lineare gewöhnliche Differentialgleichung II.2.

**Störglied** ↗ lineare gewöhnliche Differentialgleichung.

**Störgröße** ↗ **Regelung I.**  
**Störübertragungsfunktion** ↗ **Regelung III.**  
**Störung** ↗ **Regelung I.,** ↗ **Systemidentifikation II.**  
**Strahl** swv. **Halbgerade.**  
**Strahlensätze:** I. Aussagen über Proportionalitäten von Streckenlängen, die beim Schnitt eines Geradenbüschels durch Parallelen entstehen. Sind  $g_1$  und  $g_2$  zwei Geraden eines Büschels mit dem Träger  $S$ , zu dem die Parallelen  $p$  und  $q$  nicht gehören, so stehen die Längen der auf den Parallelen abgeschrittenen Strecken  $P_1P_2$  und  $Q_1Q_2$  im gleichen Verhältnis wie

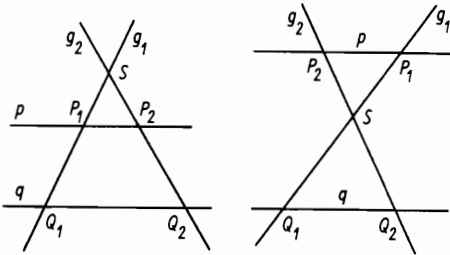


Abb. 1: Strahlensatz für zwei Geraden eines Büschels

die Längen der auf den Geraden abgeschrittenen Strecken  $SP_1, SQ_1$  und  $SP_2, SQ_2$ , ganz gleich, ob diese auf der gleichen oder auf entgegengesetzten Halbgeraden abgeschritten werden (Abb. 1); es gilt (1).

$$(1) \quad |SP_1| : |SQ_1| = |P_1P_2| : |Q_1Q_2| = |SP_2| : |SQ_2|$$

Umgekehrt darf aus den Proportionalitäten (1) auf die Parallelität  $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$  geschlossen werden, falls noch bekannt ist, daß die Punkte  $P_1, Q_1$  und  $P_2, Q_2$  auf  $g_1$  bzw.  $g_2$  liegen. Liegen  $P_1$  und  $Q_1$  auf  $g_1, P_2$  auf  $g_2$ , so folgt aus (1), daß auch  $Q_2$  auf  $g_2$  liegt.

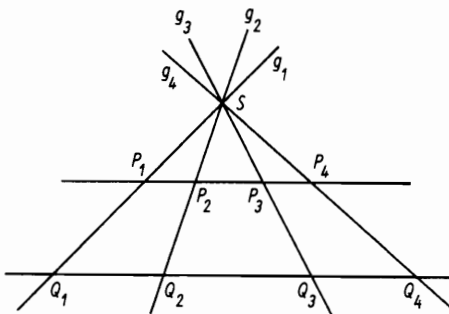


Abb. 2: Strahlensatz für vier Geraden eines Büschels

II. Diese Sätze lassen sich durch wiederholte Anwendung erweitern auf endlich viele Geraden  $g_i$  eines Geradenbüschels, für  $i = 1, 2, 3, 4$  gilt z. B. (2) (Abb. 2).

$$(2) \quad \begin{aligned} |SP_1| : |SQ_1| &= |SP_2| : |SQ_2| = |SP_3| : |SQ_3| \\ &= |SP_4| : |SQ_4| = |P_1P_2| : |Q_1Q_2| \\ &= |P_2P_3| : |Q_2Q_3| = |P_3P_4| : |Q_3Q_4| \end{aligned}$$

Die S. werden bei vielen geometrischen Beweisen, Konstruktionen und Berechnungen angewendet. **Strategie** ↗ **Spieltheorie II.**

**strategisch** ↗ **Modell, mathematisches, I.**

**Strecke: I.** eine durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  in der Ebene oder im Raum bestimmte Punktmenge, zu der außer  $A$  und  $B$  jeder Punkt gehört, der auf der Geraden  $g(AB)$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt. Die Punkte  $A$  und  $B$  heißen die *Endpunkte* der S.  $AB$ , ein von ihnen verschiedener Punkt von  $AB$  heißt *innerer Punkt*, die Menge aller inneren Punkte das *Innere* der S.  $AB$ . Die *Länge* der S. wird mit  $|AB|$  oder durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet. Ist  $P$  ein Punkt einer Geraden  $g$  und  $AB$  eine gegebene S., so läßt sich stets ein weiterer Punkt  $Q$  auf  $g$  so bestimmen, daß  $|PQ| = |AB|$ ; man sagt dann, daß die S.  $AB$  auf  $g$  vom Punkte  $P$  aus *abgetragen* oder *angetragen* worden ist. Es gibt auf  $g$  noch einen von  $Q$  verschiedenen Punkt  $Q'$ , so daß  $|PQ'| = |AB|$ .  $Q$  und  $Q'$  sind die Schnittpunkte des Kreises mit dem Radius  $|AB|$  um  $P$  mit der Geraden  $g$ . Die Konstruktion (Abb. 1) ist daher nur eindeutig ausführbar, wenn zusätzlich angegeben wird, auf welcher Seite der Geraden bzgl.  $P$  der gesuchte Punkt liegen soll.

II. Sind  $a$  und  $b$  die Maßzahlen zweier Strecken, so lassen sich daraus mit Zirkel und Lineal die und nur die Strecken konstruieren, deren Maßzahlen sich durch endlich viele rationale Rechenoperationen und endlich viele Quadratwurzeloperationen aus  $a$  und  $b$  ergeben.

II.1. *Strecken mit den Maßzahlen  $a + b$  und  $a - b$* , falls  $a > b$  ist, erhält man durch geeignetes Antragen der kleineren S. in einem Endpunkte der größeren Strecke (↗ Abb. 1).

II.2. *Strecken mit den Maßzahlen  $a \cdot b$  und  $a/b$*  erhält man nach einem Strahlensatz: Sind  $e = 1, a, b, c$  die Maßzahlen der Strecken  $OE, OA, OB, OC$  und ist

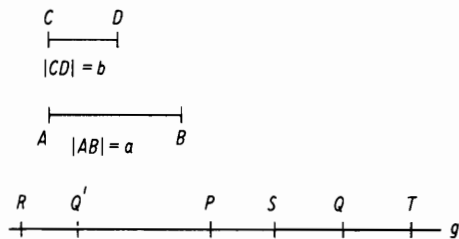


Abb. 1: a) Antragen der Strecke der Länge  $|AB| = |PQ| = a$  in Richtung  $R \rightarrow P$  und der Länge  $|PQ'| = a$  in Richtung  $P \rightarrow R$ ; b) für  $|QS| = |QT| = |CD| = b$  gilt  $|PS| = a - b$  und  $|PT| = a + b$

$EA \parallel BC$  (Abb. 2a), so hat wegen  $1 : b = a : c$  die Strecke  $OC$  die Maßzahl  $c = a \cdot b$ . Ist  $EC \parallel AB$  (Abb. 2b), so hat wegen  $1 : b = c : a$  die Strecke  $OC$  die Maßzahl  $c = a/b$ .

II.3. *eine Strecke mit der Maßzahl  $a \cdot r$* , in der  $r = p/q$  mit den positiven ganzen Zahlen  $p$  und  $q$  eine rationale Zahl ist, läßt sich z. B. nach Abb. 2b konstruieren, indem man dort  $b = q$  setzt. Die S.



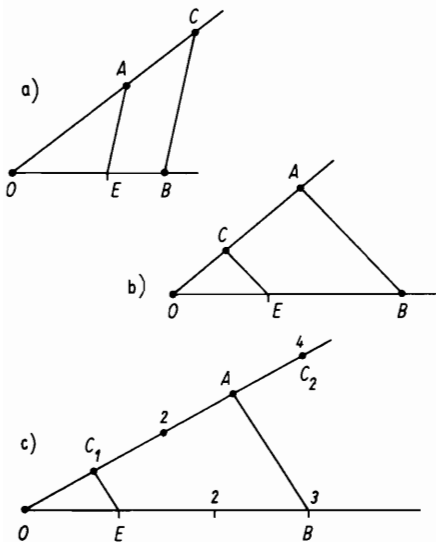


Abb. 2: Konstruktion einer Strecke, deren Maßzahl  $c$  ein rationales Vielfaches der Maßzahl einer gegebenen Strecke ist; für  $|OE| = e = 1$ ,  $|OA| = a$ ,  $|OB| = b$ ,  $|OC| = c$  gilt z. B. a)  $c = a \cdot b$ , b)  $c = a/b$ , und c) für  $|OB| = 3e$  gilt  $c_1 = |OC_1| = 1/3a$  und  $c_2 = |OC_2| = 4/3a$ , d. h.,  $c = a \cdot p/q$

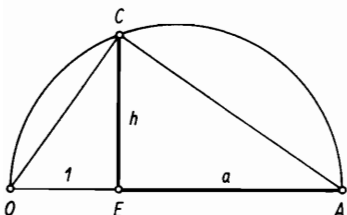


Abb. 3: Konstruktion einer Strecke  $EC$  mit der Maßzahl  $h = \sqrt{a}$

$OC$  hat dann die Maßzahl  $a/q$ . Durch  $p$ -maliges Abtragen dieser Strecke ergibt sich eine Strecke mit der Maßzahl  $p \cdot (a/q) = a \cdot r$  (Abb. 2c mit  $r = 4/3$ ).

**II.4. Inkommensurable S.n** sind S.n, deren Längen kein rationales Vielfaches voneinander sind. Haben die S.n  $OE$  und  $EA$  z. B. die Maßzahlen 1 und  $a$ , so erhält man eine S. mit der Maßzahl  $\sqrt{a}$  mit Hilfe des Thaleskreises über der Strecke  $OA$  als Durchmesser (Abb. 3). Dieser Kreis schneidet die in  $E$  auf  $OA$  errichtete Senkrechte im Punkt  $C$ . Die Strecke  $EC$  hat nach dem Höhensatz die Maßzahl  $h = \sqrt{a}$ , denn es gilt  $h^2 = a$ .

**III.** Wird von den Endpunkten einer S. der eine als *Anfangspunkt*, der andere als *Endpunkt* angesehen, so spricht man von einer *gerichteten* oder *orientierten* S. oder von einem *Pfeil*  $AB$  oder  $\overrightarrow{AB}$ . Dann gilt  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ . Die *Länge* von  $\overrightarrow{AB}$  wird mit  $m(\overrightarrow{AB})$  bezeichnet und ist mit Vorzeichen versehen. Es ist

z. B.  $m(\overrightarrow{AB}) = -m(\overrightarrow{BA})$ , weil die gerichteten Strecken  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{BA}$  entgegengesetzt gerichtet sind. Auf einer orientierten Geraden ist  $m(\overrightarrow{AB}) > 0$ , falls die Richtung von  $A$  nach  $B$  mit der Orientierung der Geraden übereinstimmt. Für das Abtragen orientierter Längen auf einer orientierten Geraden, z. B. auf der Zahlengeraden, gelten die für diese abgeleiteten Vorzeichenregeln ( $\nearrow$  Subtraktion).

**IV.** Zum *Messen* der Länge  $|AB|$  einer S. wird sie als formales Produkt  $|AB| = a \cdot e$  dargestellt, in dem  $e$  die *Längeneinheit* und die reelle Zahl  $a \geq 0$  die *Maßzahl* in bezug auf  $e$  heißen. Dabei soll gelten:

**IV.1.** Kongruente S.n haben gleiche Länge.

**IV.2.** Die Länge der Längeneinheit ist  $1 \cdot e$ .

**IV.3.** Sind  $AB$  und  $CD$  zwei S.n der Längen  $a \cdot e$  und  $a' \cdot e$ , dann hat die S.  $A'D'$  mit dem Zwischenpunkt  $B'$ , für die gilt  $A'B' \cong AB$ ,  $B'D' \cong CD$  die Länge  $(a + a') \cdot e$ , die die *Summe* der beiden Längen gen. wird. Geometrisch entspricht dem das Hintereinanderabtragen der Strecken  $AB$  und  $CD$  auf einer Geraden.

Für gerichtete S.n kann nach  $m(\overrightarrow{AB}) = a \cdot e$  die Maßzahl auch negative Werte annehmen.

**V.** Als *Längeneinheit* kann man die Länge jeder beliebigen S. wählen, sie wird dann *Einheits-S.* genannt. Die Längeneinheit im *Internationalen Einheitensystem* SI [Système Internationale des Unités] ist das *Meter*, abgekürzt 1 m. Das Meter ist gleich  $1650763,73$  Vakuum-Wellenlängen der Strahlung, die dem Übergang zwischen den Niveaus  $2p_{10}$  und  $5d_5$  des Atoms Krypton 86 entspricht. Durch die folgenden Vorsätze **V** bzw. durch ihre Kurzzeichen **Z** vor dem Zeichen m für Meter erhält man Einheiten, die sich um den Faktor **F** vom Meter unterscheiden:

V	Z	F	V	Z	F
Tera	T	$10^{12}$	Zenti	c	$10^{-2}$
Giga	G	$10^9$	Milli	m	$10^{-3}$
Mega	M	$10^6$	Mikro	$\mu$	$10^{-6}$
Kilo	k	$10^3$	Nano	n	$10^{-9}$
Hekto	h	$10^2$	Piko	p	$10^{-12}$
Deka	da	10	Femto	f	$10^{-15}$
Dezi	d	$10^{-1}$	Atto	a	$10^{-18}$

In der Astronomie werden als Längeneinheiten das *Lichtjahr*, abgekürzt l. y. [light year], die *Parallaxensekunde* oder das *Parsec*, abgekürzt pc, die *astronomische Einheit*, abgekürzt AE, verwendet. Es ist

$1 \text{ l. y.} = 9,4605 \cdot 10^{15} \text{ m}$ ,  $1 \text{ pc} = 30,8572 \cdot 10^{15} \text{ m}$ ,  $1 \text{ AE} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ . Andere Längeneinheiten sind die *geographische Meile* =  $7421,5 \text{ m}$  und die *Seemeile* =  $1852 \text{ m}$ .

**VI.** Die *Darstellung* einer S.  $P_1P_2$  durch *Koordinaten* erhält man aus einer *Parameterdarstellung* der Geraden, die die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  enthält, durch Beschränkung des Parameters auf ein Intervall. Sind  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  in der Ebene bzw.  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  und  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  im Raum in *kartes.* Koordinaten gegeben, so erfüllen die Koordinaten aller Punkte der Strecke  $P_1P_2$  in der Ebene die Darstellung (1) bzw. im Raum die Darstellung (2), jeweils für

$0 \leq \lambda \leq 1$ ; und umgekehrt erhält man für jedes  $\lambda$  dieses Intervalls aus (1) bzw. (2) stets die Koordinaten eines Punkts der Strecke  $P_1P_2$ .

(1)  $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$

(2)  $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$

In beiden Darstellungen ergibt sich für  $\lambda = 0$  der Punkt  $P_1$  und für  $\lambda = 1$  der Punkt  $P_2$ . Die Länge  $|P_1P_2|$  der Strecke ist der Abstand der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ ; man erhält  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  in der Ebene und  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  im Raum. Der *Mittelpunkt M der Strecke  $P_1P_2$*  ergibt sich für  $\lambda = 1/2$  zu  $M = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$  in der Ebene bzw.  $M = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, (z_1 + z_2)/2)$  im Raum. Eine Gleichung der *Mittelsenkrechten* der Strecke (1) in der Ebene ist (3).

(3)  $(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + [x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2]/2 = 0$

Sind in der Ebene oder im Raum  $x$  bzw.  $x_1, x_2$  die Ortsvektoren eines beliebigen Punktes  $P$  der Strecke bzw. der Punkte  $P_1, P_2$ , so ist (4) die *Parameterdarstellung* der S. in Vektoren, die auch in der

(4)  $x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$

Form  $x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$  mit  $0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  geschrieben werden kann.

**Streckenhalbierung**  $\nearrow$  *Mittelsenkrechte I.*

**Streckenanzug:** Vereinigungsmenge  $A_1A_2 \dots A_{n+1}$  von  $n$  Strecken  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}$ , in der je zwei aufeinanderfolgende Strecken genau einen Endpunkt gemeinsam haben. Ist  $A_1 \neq A_{n+1}$ , so heißen diese Punkte *Endpunkte* des S.s. Der S. heißt *geschlossen*, wenn  $A_1 = A_{n+1}$  und  $n \geq 3$  ist. Jeder S. heißt *einfach*, wenn je zwei nicht aufeinanderfolgende Strecken keinen Punkt gemeinsam haben.

**Streckung**  $\nearrow$  *Abbildung, affine, III.*

**Streifenrelation**  $\nearrow$  *partielle Differentialgleichung II.*

**Streuung:** eine Maßzahl zur Charakterisierung der Ausbreitung der Verteilung einer *Zufallsgröße* um den *Erwartungswert*. Ist  $X$  eine Zufallsgröße,  $F(x)$  ihre Verteilungsfunktion, so heißt die Größe (1) die *Dispersion, Varianz* oder *mittlere quadrat. Abwei-*

(1)  $D^2X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 dF(x)$

chung von  $X$ .  $D^2X$  ist das zentrale Moment 2. Ordnung ( $\nearrow$  *Momente I.*). Es gilt folglich  $D^2X = E(X^2) - (EX)^2$ . Die Wurzel aus  $D^2X$  heißt *S.* oder *Standardabweichung* und wird mit  $\sigma$  bezeichnet. Für eine *diskrete Zufallsgröße* mit  $P(X = x_i) = p_i$  gilt (2), für eine *stetige Zufallsgröße* mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  gilt (3).

(2)  $D^2X = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$

(3)  $D^2X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$

Genügt z. B.  $X$  einer *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n$  und  $p$ , so folgt (4) aus (2) bzw.  $\sigma = \sqrt{npq}$ .

(4)  $D^2X = \sum_{k=0}^n (k - np)^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = npq$

Genügt  $X$  einer *Normalverteilung* mit den Parametern  $a$  und  $\sigma$ , so folgt (5) aus (3).

(5)  $D^2X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx$

Für die Dispersion gilt folgender wichtige Satz: *Sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert* ( $\nearrow$  *Korrelationskoeffizient*), *so ist  $D^2(X + Y) = D^2X + D^2Y$* . Das gilt insbes. für unabhängige Zufallsgrößen ( $\nearrow$  *Unabhängigkeit von Zufallsgrößen*).

S. a. *Streuung, empirische; Streuungsmaße; Stichprobenvarianz.*

**Streuungsmaße:** in der statist. Praxis benutzte Maßzahlen zur Beschreibung der Variabilität oder Verstreutheit der Stichprobenwerte. Gebräuchlich sind die gemäß (1) für eine Stichprobe  $(x_1, \dots, x_n)$  mit dem Mittel  $\bar{x}$  definierte *empir. Varianz* ( $\nearrow$  *Stich-*

(1)  $s^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

*probenvarianz*) bzw. die positive Quadratwurzel daraus, die *empir. Streuung s* ( $\nearrow$  *Stichprobenvarianz*), sowie die *Spannweite*, eine bes. für kleinen Stichprobenumfang benutzte Maßzahl, die definiert ist als Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert der Stichprobe.

**Streuungszerlegung**  $\nearrow$  *Varianzanalyse.*

**Ströme auf Graphen:** I. eine Bogenbewertung  $\varphi$  eines gerichteten Graphen  $G$ , die jedem Bogen  $b$  eine reelle Zahl  $\varphi(b)$  zuordnet, die *Fluß durch den Bogen  $b$*  gen. wird und folgende Eigenschaften hat: Bezeichnet  $\omega^+(X)$  für jeden Knotenpunkt  $X$  von  $G$  die Menge der Bögen mit  $X$  als Startpunkt und  $\omega^-(X)$  die Menge der Bögen mit  $X$  als Zielpunkt, so gilt Gleichung (1) für jedes  $X$ . Nach ihr ist die

(1)  $\sum_{b \in \omega^-(X)} \varphi(b) = \sum_{b \in \omega^+(X)} \varphi(b)$

Summe der Bewertungen aller einlaufenden Bögen gleich der aller auslaufenden. Ist der Graph das Schaltschema einer elektr. Anlage, dann definieren die elektr. Ströme in den verschiedenen Zweigen einen Strom  $\varphi$ . Die folgenden Beispiele zeigen, wie Graphen, auf denen Ströme mit Quellen und Senken definiert sind, so erweitert werden können, daß im erweiterten Netzwerk die Gleichung (1) in jedem Punkte gilt. Einem Röhrensystem, in dem Wasser fließt, entspricht ein Graph, der durch eine beliebige Orientierung jeder Kante gerichtet werden kann. Entspricht diese Orientierung eines Bogens der Flußrichtung, so stellt  $|\varphi(b)| \geq 0$  die in  $b$  je Zeiteinheit fließende Wassermenge dar. Wird an keinem Knotenpunkt  $X$  Wasser zugeführt oder entnommen, so gilt Gleichung (1) für jedes  $X$ . Ist das Wasser Träger etwa von Wärme, so stellt  $\varphi(b)$  die im Bogen  $b$  fließende Energie dar. Dabei soll von Ver-

lusten längs jeden Bogens abgesehen werden. Einen Knoten bezeichnet man als *Senke* oder als *Quelle*, je nachdem, ob die Differenz (2) positiv oder negativ ist. Die Energie für den Betrag der Diffe-

$$(2) \quad \sum_{b \in \omega^-(X)} \varphi^*(b) - \sum_{b \in \omega^+(X)} \varphi^*(b)$$

renz wird in einer Quelle  $Q_i$  dem Röhrensystem zugeführt, in einer Senke  $S_j$  entnommen.

Führt man eine *fiktive Quelle*  $Q$  ein, die mit jeder Teilquelle  $Q_i$  durch einen zusätzl. von  $Q$  nach  $Q_i$  gerichteten Bogen  $b_i^*$  verbunden ist, und nimmt man an, daß die in jeder Teilquelle  $Q_i$  dem System zugeführte Energie von  $Q$  aus über  $b_i^* = [Q, Q_i]$  zufließt, so gilt die Gleichung (1) für jede Teilquelle. Entsprechendes läßt sich für jede Teilsenke  $S_j$  erreichen, wenn sie über einen fiktiven Bogen  $b_j^* = [S_j, S]$  mit einer einzigen fiktiven Senke  $S$  verbunden wird.

Nimmt man entsprechend an, daß in jeder Teilsenke  $S_j$  die dem Röhrensystem entnommene Energie über diesen Bogen  $b_j^*$  nach  $S$  fließt, so gilt Gleichung (1) wieder für jede Teilsenke  $S_j$ . Wird schließlich die Senke  $S$  über einen Rückkehrbogen  $b^*$  mit der Quelle  $Q$  verbunden und angenommen, daß über diesen Bogen alle von den Teilsenken  $S_j$  zu  $S$  geleiteten Energiebeträge abgeleitet werden, so gilt die Beziehung (1) auch für  $S$  und  $Q$ , so daß  $\varphi^*$  auf dem erweiterten Netz ein Strom ist.

II. Jedem Bogen  $b$  eines gerichteten Graphen  $G$  wird eine positive reelle Zahl  $c(b)$  zugeordnet und als *Kapazität* des Bogens bezeichnet. Dabei gibt es Bögen  $b$  ohne Kapazitätsbeschränkung, d. h., auch  $c(b) = +\infty$  ist zugelassen. Beim *Maximalstromproblem* ist dann unter allen Strömen  $\varphi$ , die für jeden Bogen  $b$  der Bedingung (3) genügen, ein Strom zu

$$(3) \quad 0 \leq \varphi(b) \leq c(b)$$

bestimmen, für den auf einem ausgezeichneten Bogen  $b^*$  mit  $c(b^*) = +\infty$  der Fluß  $\varphi(b^*)$  am größten ist. Ein solcher Strom  $\varphi$  muß aber nicht in jedem Falle existieren.

Ein mit Kapazitäten versehenes Netzwerk heißt *Transportnetz*, falls von dem Startpunkt von  $b^*$  keine weiteren Bögen ausgehen und in den Zielpunkt von  $b^*$  keine weiteren Bögen einmünden. In dem diskutierten Rohrleitungsnetz  $N$  kann durch eine Rohrleitung  $b$  nur eine beschränkte Energiemenge  $c^*(b)$  transportiert werden; in jedem fiktiven Bogen und in dem Rückkehrbogen gibt es keine Kapazitätsbeschränkung, d. h., es ist  $c(b) = +\infty$  für diese Bögen. Für solche auf  $N$  fließenden Ströme  $\varphi$  gilt (4). Ersetzt man  $b$  durch zwei ent-

$$(4) \quad -c^*(b) \leq \varphi(b) \leq c^*(b)$$

gegengesetzt gerichtete Bögen, so kann (4) durch (3) ersetzt werden. Dann ist beim *Maximalproblem* unter allen Strömen  $\varphi$ , die (3) genügen, einer zu bestimmen, für den  $\varphi(b^*)$  maximal wird. Für den Rückkehrbogen  $b^*$  sind  $S$  der Startpunkt und  $Q$  der Zielpunkt. Löscht man in  $N$  den Bogen  $b^*$ , so bedeutet das Lösen des Maximalproblems im neuen

Netzwerk das Aufsuchen eines größten von  $Q$  nach  $S$  fließenden Stromes, der mit den Kapazitäten verträglich ist.

Unter einem *Schnitt*  $\gamma$  in einem Netzwerk  $N$  mit der Knotenmenge  $K$  versteht man die Menge aller Bögen, deren Startpunkte zu  $K_Q$  und deren Zielpunkte zu  $K_S$  gehören, dabei sind  $K_Q$  und  $K_S$  zwei disjunkte Knotenmengen von  $K$  mit  $K_Q \cup K_S = K$ ,  $Q \in K_Q$  und  $S \in K_S$ . Unter der *Kapazität* eines Schnittes  $\gamma$  versteht man die Summe der Kapazitäten der Bögen von  $\gamma$ . Offenbar ist jeder von  $Q$  nach  $S$  fließende Strom kleiner als die Kapazität eines beliebigen Schnittes. L. R. FORD und D. R. FULKERSON konnten sogar zeigen: *In einem Netzwerk mit den Kapazitäten  $c(b)$  ist der Maximalwert der von  $Q$  nach  $S$  fließenden Ströme gleich der Minimalkapazität aller möglichen Schnitte.*

III. *Transportproblem*: Ist jedem Bogen  $b$  eines gerichteten Graphen  $G(K, U)$  ein reelles Intervall  $[d(b), e(b)]$  und eine auf diesem Intervall definierte stetige Funktion  $f_b$  zugeordnet, so soll ein Strom  $\varphi$  mit folgenden Eigenschaften bestimmten werden:

(A) für jeden Bogen  $b$  der Bogenmenge  $U$  von  $G$  ist  $d(b) \leq \varphi(b) \leq e(b)$ ;

(B)  $F(\varphi) = \sum_{b \in U} f_b(\varphi(b))$  ist minimal.

Nimmt man z. B. an, das betrachtete Wärmenetz sei noch nicht vorhanden, sondern nur ein Plan  $G$  von Wegen, Kanälen u. a., längs denen Rohrleitungen verlegt werden dürfen, und der auch die Lage des Heizwerkes  $Q$ , der Quelle, sowie die der Verbraucher  $S_j$ , der Teilsenken, enthält, so ist ein Wärmeversorgungsnetz gesucht, dessen Errichtung die geringsten Kosten verursacht. Beträgt die von jedem Verbraucher  $S_j$  in der Zeiteinheit verbrauchte maximale Energiemenge  $s_j$ , dann hat das Heizwerk, d. h. die Quelle  $Q$ , bei maximaler Auslastung die Energiemenge (5) zu liefern. Diesen Forderungen

$$(5) \quad t = \sum_{j=1}^n s_j$$

stehen die Aufwendungen gegenüber, z. B. an Kosten für die Montage und für Material. Für eine Rohrleitung längs eines Bogens  $b$ , der maximal einen Energiefluß der Stärke  $\varphi^*$  leiten kann, werden die Kosten mit  $f_b(\varphi^*)$  bezeichnet. Für die Bögen zur fiktiven Senke  $S$  und für den Rückkehrbogen werden keine Kosten angesetzt. Die Forderung (A) gilt dann, wenn jeder Verbraucher  $S_j$  mit  $S$  durch einen fiktiven Bogen  $b_j$  verbunden und ihm das Intervall  $[s_j, s_j]$  zugeordnet wird, so daß sich die Forderung  $\varphi(b_j) = s_j$  ergibt. Aus den Aufwendungen ergibt sich die zusätzliche Forderung, daß die Gesamtkosten  $\sum_{b \in G} f_b(\varphi(b))$  minimal werden. Ist  $\varphi$  eine Lösung des

Problems, so besteht das Wärmeversorgungsnetz aus allen Bögen  $b$  von  $G$ , für die  $\varphi(b) > 0$  ist.

IV. Entsprechend wie jeder  $\nearrow$  Spannung im Graphen ein Vektor  $\vec{v}$  zugeordnet werden kann, wird auch jedem Strom ein Vektor  $\vec{\varphi}$  in folgender Weise zugeordnet: Werden die  $m$  Bögen des Graphen

$G = (K, U)$  mit  $1, \dots, i, \dots, m$  bezeichnet, so soll gelten  $\vec{\varphi} = (\varphi(1), \dots, \varphi(i), \dots, \varphi(m))$  mit  $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^m$ . Ist in einem Zyklus  $\mu$  willkürlich eine Durchlaufungsrichtung festgelegt, so bezeichnet  $\mu^+$  die Menge aller Bögen von  $\mu$ , die in Durchlaufungsrichtung von  $\mu$  orientiert sind, und  $\mu^-$  die Menge aller Bögen von  $\mu$ , die entgegen der Durchlaufungsrichtung von  $\mu$  orientiert sind. Außerdem gibt es natürlich Bögen, die zum Graphen, aber nicht zum Zyklus gehören. Durch (6) wird zum Zyklus  $\mu$  ein Strom definiert.

$$(6) \quad \varphi(i) := \begin{cases} 1, & \text{falls } i \in \mu^+ \\ -1, & \text{falls } i \in \mu^- \\ 0, & \text{falls } i \notin \mu \end{cases}$$

Der Zyklus  $\mu$  wird dann nach (6) durch  $\varphi$  eindeutig beschrieben, und daher bezeichnet  $\mu$  sowohl den Zyklus als auch den Vektor  $\vec{\varphi} = (\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ . Man nennt *Zyklen linear unabhängig*, falls die zugehörigen Vektoren linear unabhängig sind. Mit der Definition (6) kann jeder Zyklus als Strom aufgefaßt werden. Unmittelbar ist klar, daß die Summe zweier Ströme bzw. zweier Zyklen einen Strom bildet, daß das Produkt eines Stromes bzw. eines Zyklus mit einer reellen Zahl  $\alpha$  wieder einen Strom bildet, wenn darunter verstanden wird, daß jeder Fluß mit dieser reellen Zahl  $\alpha$  multipliziert wird. Somit bilden die Ströme einen Unterraum  $\Phi$  des  $\mathbb{R}^m$ , der alle Zyklen enthält. Dabei spannen die Zyklen bereits  $\Phi$  auf, damit gibt es eine Basis  $\mu_1, \dots, \mu_s$  von  $\Phi$ , die nur aus Zyklen besteht. Eine solche Basis wird *Zyklusbasis* genannt. Für jeden Strom  $\vec{\varphi}$  gilt dann:

$$(7) \quad \vec{\varphi} = \varphi_1 \mu_1 + \varphi_2 \mu_2 + \dots + \varphi_s \mu_s$$

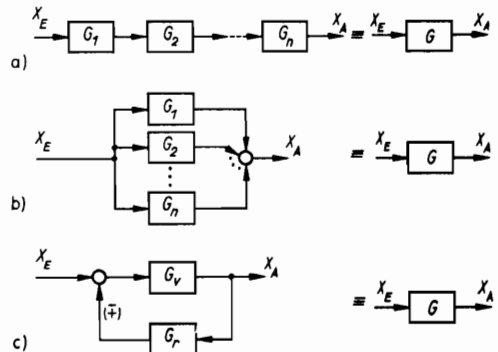
Die Dimension  $s$  von  $\Phi$  heißt *zyklomat. Zahl*. Ist  $G$  zusammenhängend, so ist  $s = m - (n - 1)$ , wenn  $n$  die Knotenzahl von  $G$  bezeichnet. Eine Zyklusbasis eines zusammenhängenden Graphen  $G$  kann wie folgt gefunden werden: Ein zusammenhängender zyklusfreier Untergraph von  $G$ , der alle Knotenpunkte von  $G$  enthält, ist ein Gerüst  $G$  von  $G$ . Fügt man einen Bogen von  $G$ , der nicht zu  $G$  gehört, zu  $G$  hinzu, so entsteht genau ein Elementar-Zyklus. Die Menge der so gewonnenen Elementar-Zyklen bildet eine Zyklusbasis. Es folgt nun unmittelbar aus (7): Ein Strom ist bereits durch die Flüsse  $\varphi_i$  auf den Bögen außerhalb des Gerüsts  $G$  eindeutig bestimmt.

**Strophoide**  $\nearrow$  rationale Kurve IV.

**Struktur: I. Mengenlehre** eine Klasse zusammen mit einem System von *endlichstelligen Relationen* und einem System von *endlichstelligen partiellen Operationen* in dieser Klasse. Ist das System der Operationen leer, d. h., gibt es in der betrachteten S. nur Relationen, so heißt diese S. auch ein *Relational*; ist das System der Relationen leer, d. h., gibt es in der betrachteten S. nur partielle Operationen, so heißt diese S. auch eine *partielle Algebra* bzw. ein *Operational*; ist sogar jede Operation vollständig, so heißt diese S. eine *universelle Algebra*. Alle in der Algebra untersuchten Bildungen, z. B. Gruppen, Ringe, Körper und Verbände, lassen sich als universelle oder partielle Algebren definieren. Jede Menge mit

einer in ihr erklärten Anordnungsrelation ist ein Relational. S. a. algebraische Struktur.

**II. Kybernetik** eine unter einem gewissen Gesichtspunkt gebildete Menge von zulässigen Anordnungen oder Beziehungen der Elemente bzw. der Teilsysteme innerhalb eines Systems. Durch eine vorliegende Auswahl aus dieser Menge ergibt sich jeweils ein bestimmtes *S.muster* bzw. *Pattern*. Die zulässigen S.muster werden durch *S.regeln* festgelegt, z. B. durch die Regeln der Algebra, der formalen Logik oder der Linguistik. Bei den kybernet. Systemen handelt es sich bzgl. der Elemente um  $\nearrow$  Übertragungsglieder bzw. kybernet. Teilsysteme und bei den Relationen um Informationsbeziehungen ( $\nearrow$  Information), die über Signale hergestellt werden. Dementsprechend ergeben sich die S.muster als Muster der Signalleitungen zusammen mit den Informationsübertragungsgliedern. Grundstrukturen sind die Reihen-, Parallel- und Gegenschaltung (Abb.).



Struktur: Grundstrukturen: a) Reihenschaltung, b) Parallelschaltung, c) Gegenschaltung

**III.1. In Reihen- bzw. Serien-Schaltung** sind die Übertragungsglieder in der Weise zusammengeschaltet, daß das Ausgangssignal eines Gliedes zugleich Eingangssignal des nachfolgenden Gliedes ist. Sind  $G_i(p)$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  die Übertragungsfunktionen der seriengeschalteten Glieder, so gilt für die Gesamtschaltung  $G(p) = \prod_{i=1}^n G_i(p)$ .

**III.2. In einer Parallelschaltung** erhält jedes Übertragungsglied  $G_i(p)$  das gleiche Eingangssignal, während sich die Einzelausgangssignale additiv überlagern. Für die Gesamtschaltung gilt

$$G(p) = \sum_{i=1}^n G_i(p)$$

**III.3. In einer Gegen- oder Rückkopplung-Schaltung** ist das Ausgangssignal des Vorwärtsgliedes  $G_v(p)$  zugleich Systemausgangssignal und Eingangsgröße des Rückkopplungsgliedes  $G_r(p)$ , dessen Ausgangssignal zusammen mit dem Systemeingangssignal auf den Eingang des Vorwärtsgliedes wirkt. Das Vorwärts- und Rückkopplungsglied können hierbei selbst Zusammenfassungen mehrerer elementarer Glieder sein. Je nach Wirkungsrichtung des rückgeführten Signals unterscheidet man noch zwischen

*Gegenkopplung* bzw. *negativer Rückkopplung* und *Mikrokopplung* bzw. *positiver Rückkopplung*. Das Gesamtverhalten ergibt sich dann zu:

$G(p) = [G_v(p) G_r(p)]/[1 + G_v(p) G_r(p)]$  bei *Gegenkopplung* und

$G(p) = [G_v(p) G_r(p)]/[1 - G_v(p) G_r(p)]$  bei *Mikrokopplung*.

Die Gegenkopplung ist die Grundstruktur jedes Regelkreises. — S. a. System II.

**Struktur, algebraische** ↗ algebraische Struktur.

**Struktur, topologische** ↗ Raum, topologischer, I.

**Strukturbild** svw. Blockschaltbild.

**Student:** Pseudonym für Gosset.

**Student-Verteilung** svw. *t*-Verteilung.

**Stufe** ↗ Prädikatenlogik IV.

**Stufengewinn** ↗ Optimierung, dynamische, II.

**Stufenkalkül** ↗ Prädikatenkalkül I.

**Stufenlogik** ↗ mathematische Logik I.

**Stufenwinkel** ↗ Winkelpaare.

**stumpfwinklig** ↗ Dreieck III.

**Sturm, Charles**, geb. 1803 Genf, gest. 1858 Paris. — Als Lehrer in der Familie BROGLIE kam er nach Paris und lernte dort die führenden Gelehrten seiner Zeit kennen. Im Jahre 1827 errang er den Preis für Mathematik mit einer Arbeit über die Kompressibilität von Flüssigkeiten. Seit 1836 gehörte er der Académie des Sciences an und wirkte als Professor 1838 für Analysis an der École Polytechnique sowie 1840 für Mechanik an der Fakultät für Wissenschaften. Mittels des nach ihm ben. Satzes läßt sich die Anzahl der Wurzeln eines Polynoms in einem Intervall berechnen.

**Sturmscher Satz:** I. Satz über die Anzahl der reellen Nullstellen eines Polynoms  $\varphi(x)$  in einem Intervall  $[a, b]$ , dessen Grenzen keine Nullstellen sind und in dem  $\varphi(x)$  nur einfache Nullstellen hat: diese Anzahl ist  $W(a) - W(b)$ , dabei geben die Zahlen  $W(a)$  und  $W(b)$  die Anzahl der *Vorzeichenwechsel* für  $x = a$  bzw.  $x = b$  in einer *Sturmschen Kette* an. Diese Kette erhält man aus dem euklid. Algorithmus für das Polynom  $\varphi(x)$  und seine Ableitung  $\varphi'(x)$  nach (1) als die Folge  $\{\varphi(x), \varphi'(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)\}$ , in der der Grad eines Polynoms stets kleiner ist als der des

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= q_1(x) \varphi'(x) - \varphi_2(x) \\ \varphi'(x) &= q_2(x) \varphi_2(x) - \varphi_3(x) \\ \varphi_2(x) &= q_3(x) \varphi_3(x) - \varphi_4(x) \\ &\vdots \\ \varphi_{r-2}(x) &= q_{r-1}(x) \varphi_{r-1}(x) - \varphi_r(x) \\ \varphi_{r-1}(x) &= q_r(x) \varphi_r(x) \end{aligned}$$

vorhergegangenen, so daß sie mit dem Rest Null abbricht; dabei ist  $-\varphi_r(x)$  das letzte von Null verschiedene Restpolynom. Dieses muß eine Konstante sein, da  $\varphi(x)$  und  $\varphi'(x)$  wegen der vorausgesetzten Einfachheit aller Nullstellen von  $\varphi(x)$  teilerfremde Polynome sind. Um für das Polynom  $\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$  im Intervall  $[-6, 6]$  die Anzahl der Nullstellen zu bestimmen, berechnet man die

Sturmsche Kette bis auf positive Faktoren mit  $\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2, \varphi'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 1,$   
 $\varphi_2(x) = 16x^3/5 + 4x - 48/5,$   
 $\varphi_3(x) = 25x^2 - 100x + 100,$   
 $\varphi_4(x) = -53x + 76, \varphi_5(x) = -16 - 52/153.$

Durch Einsetzen von  $a = -6$  und  $b = +6$  findet man  $W(a) = 4$  und  $W(b) = 1$ , d. h., im Intervall  $[-6, 6]$  hat die untersuchte Funktion  $4 - 1 = 3$  einfache Nullstellen.

**II.1.** Die Anzahl der Vorzeichenwechsel  $W(a)$  und  $W(b)$  hängt nicht vom Betrag der Werte  $\varphi_i(a)$  bzw.  $\varphi_i(b)$ , sondern nur von deren Vorzeichen ab. Zur Vereinfachung der Rechnung bei der notwendigen Polynomdivision zur Ermittlung der Sturmschen Kette können deshalb Dividend oder Divisor mit einer geeigneten positiven Zahl multipliziert werden.

**II.2.** Will man unter Benutzung des S. S.es die Anzahl *aller reellen Nullstellen* eines Polynoms berechnen, muß man das zu untersuchende Intervall hinreichend groß wählen. Sind  $x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_l}$  die

reellen Nullstellen des Polynoms  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ , so

gilt die Abschätzung  $\max(|x_{N_1}|, |x_{N_2}|, \dots, |x_{N_l}|) < |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$ . Normiert man  $f(x)$  durch  $f(x)/a_n = \varphi(x)$ , so stimmen die Nullstellen von  $f(x)$  und  $\varphi(x)$  überein, und man kann  $[-M, M]$  mit  $M = 1 + |a_{n-1}|/|a_n| + |a_{n-2}|/|a_n| + \dots + |a_0|/|a_n|$  als Intervall wählen, um die Anzahl aller Nullstellen von  $f(x)$  bzw. von  $\varphi(x)$  berechnen zu können.

**II.3.** Hat das zu untersuchende Polynom  $f(x)$  *mehrfache Nullstellen*, tritt etwa  $x_{N_k}$  als Nullstelle  $k$ -mal auf, so ist  $c \cdot (x - x_{N_k})^{k-1}$  der größte gemeinsame Teiler von  $f(x)$  und  $f'(x)$ , wobei  $c$  eine von Null verschiedene reelle Konstante ist. Dividiert man  $f(x)$  durch diesen größten gemeinsamen Teiler  $d(x) = (f(x), f'(x))$ , so hat das Polynom  $\varphi(x) = f(x)/d(x)$  die gleichen Nullstellen wie  $f(x)$ , jedoch jede Nullstelle genau einmal;  $\varphi(x)$  erfüllt folglich die Voraussetzungen des S. S.es. Entsprechend verfährt man, wenn mehr als eine mehrfache Nullstelle vorliegt.

**II.4.** Gibt man Intervalle an, in denen jeweils nur eine Nullstelle eines Polynoms liegt, so spricht man von einer *Trennung der Nullstellen*. Dies wird erreicht, indem man das Intervall  $[a, b]$  geeignet unterteilt, z. B. durch den Wert  $t_1$  halbiert, und mit Hilfe der Sturmschen Kette über  $W(a) - W(t_1)$  und  $W(t_1) - W(b)$  die Anzahl der Nullstellen in den Teilintervallen  $[a, t_1]$  und  $[t_1, b]$  berechnet. Durch weiteres Unterteilen der Intervalle, die mehr als eine Nullstelle enthalten, erreicht man nach endlich vielen Schritten die gewünschte Trennung der Nullstellen.

**Stützdreieck** ↗ Eintafelprojektion.

**Stützstelle** ↗ Interpolation.

**subjektiver Fehler** ↗ Fehler IV.

**suboptimal** ↗ Optimierung II.

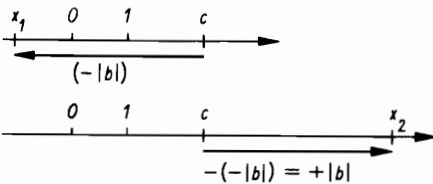
**Subset** [engl. *Unter-, Teilmenge*] ↗ Programmierung des Digitalrechners I.

**Substitutionsregeln** ↗ Integral IV. 3., ↗ Integral, uneigentliches, V. 4.

**Substitutionsverfahren** ↗ lineare Gleichung III.1.  
**Subtrahend** ↗ Subtraktion I.

**Subtraktion: I.** Umkehroperation der Addition, durch die zu zwei gegebenen Zahlen  $b$  und  $c$  eines Zahlenbereichs die Zahl  $x$  als Lösung der Gleichung  $x + b = c$  eindeutig bestimmt wird. Man schreibt  $x = c - b$  und nennt  $c$  *Minuend*,  $b$  *Subtrahend* und  $x$  bzw.  $(c - b)$  *Differenz*. Diese Aufgabe führt für positive ganze Zahlen  $b$  und  $c$  algebraisch zur Definition der *Null* für  $b = c$  und der negativen ganzen Zahlen für  $c < b$ . Entsprechend werden negative rationale und reelle Zahlen eingeführt, damit die S. in diesen Zahlenbereichen stets eine eindeutig bestimmte Lösung hat. Für positive  $b$  folgt aus  $x + b = c$ , daß  $x < c$ , während  $x > c$  für negative  $b = -|b|$  gilt.

Dieser Tatbestand wird auch als *Vorzeichenregel* formuliert:  $c + (+|b|) = c + |b|$ ,  $c - (+|b|) = c - |b|$ ,  $c + (-|b|) = c - |b|$  und  $c - (-|b|) = c + |b|$ , indem man zwischen dem ersten Zeichen als *Operationszeichen* und dem zweiten als *Vorzeichen* unterscheidet. Für die geometrische Veranschaulichung auf der Zahlengeraden wird angenommen, daß die  $(+|b|)$  entsprechenden Strecken die gleiche Richtung wie die Zahlengerade vom Null- zum Einheitspunkt haben, die  $(-|b|)$  entsprechenden die entgegengesetzte, und daß das Vorzeichen  $-$  die Streckenrichtung vor der Streckenaddition umkehrt (Abb.).



Subtraktion: Streckenaddition zur Veranschaulichung der Vorzeichenregeln

Anstatt in mehreren Schritten mehrere Subtrahenden abzuziehen, kann ihre Summe subtrahiert werden, z. B.  $c - b_1 - b_2 - b_3 = c - (b_1 + b_2 + b_3)$ .  
**II.** Für das schriftliche Rechnen mit Zahlen, die in einem *Positionssystem* dargestellt sind (↗ Addition), werden die Ziffern erteinander angeordnet, die der gleichen Potenz der Grundzahl  $g$  entsprechen, so daß die Differenz  $c_i g^i - b_i g^i$  für alle  $i$  zu bilden ist. Man kennt zwei Verfahren, die sich für  $b_i > c_i$  wie folgt unterscheiden: **II.1.** Beim *Abziehen* wird die vorhergehende Ziffer  $c_{i+1}$  um 1 vermindert, anstelle von  $c_i$  steht dann  $(g + c_i)$ , so daß  $b_i < g$  stets abgezogen werden kann. **II.2.** Beim *Ergänzen* werden die Einheiten gezählt, die von  $b_i$  bis  $(g + c_i)$  zugezählt werden müssen, und zu der Ziffer  $b_{i+1}$  wird eine Einheit zugezählt, d. h., die Ergänzung von  $(b_{i+1} + 1)$  bis  $c_{i+1}$  wird gesucht. Dieses zweite Verfahren eignet sich besonders, wenn mehrere Subtrahenden auftreten, wenn man beachtet, daß dann ein ganzzahliges Vielfaches von  $g$  beim nächsten Schritt zu  $b_{i+1}$  zuzuzählen ist.

**Beispiel 1:** 
$$\begin{array}{r} 82328 \\ - 7163 \\ \hline 75165 \end{array}$$

**Beispiel 2:** 
$$\begin{array}{r} 6311 \\ - 768 \\ - 229 \\ - 1046 \\ \hline 4268 \end{array}$$

Wird die Ergebnisziffer von rechts nach links jeweils halbfett geschrieben, so ergeben sich nach II.2. folgende Schritte zur Berechnung:

**Beispiel 1:** »3 und 5 ist 8«, »6 und 6 ist 12, merke 1«, »1 + 1 = 2 und 1 ist 3«, »7 und 5 ist 12, merke 1«, »1 und 7 ist 8«.

**Beispiel 2:** »6 + 9 + 8 = 23 und 8 ist 31, merke 3«, »3 + 4 + 2 + 6 = 15 und 6 ist 21, merke 2«, »2 + 0 + 2 + 7 = 11 und 2 ist 13, merke 1«, »1 + 1 = 2 und 4 ist 6«.

**Subtraktionsverfahren** ↗ lineare Gleichung III.3.

**Suchtheorie:** Teilgebiet der Operationsforschung, in dem Kriterien für die Einschätzung von Suchverfahren bzw. zur Herleitung bestmöglicher Suchverfahren entwickelt werden. Im *Suchverfahren* soll ein *Suchobjekt*, z. B. ein Rettungsboot, von *Sucheinheiten*, z. B. von Flugzeugen, geortet werden nach einem ihnen vorgeschriebenem Programm. Die Effektivität des Verfahrens hängt von der Situation ab, in der die Suche stattfindet, z. B. von der witterungsbedingten Sichtweite.

Wenn die Sucheinheiten unbeweglich warten, z. B. an Kontrollpunkten einer Straße, spricht man von *passiver Suche*, dagegen von *aktiver Suche*, wenn sich die Sucheinheiten bewegen.

Eine Grundgröße beim Aufbau der S. ist die *Kontaktwahrscheinlichkeit*  $P_K$ , die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Suchobjekt geortet wird, wenn es sich am Ort  $x$  und die  $n$  Sucheinheiten sich an den Orten  $y_1, \dots, y_n$  befindet.  $P_K$  kann auch von der Zeit abhängen, falls sich die Suchsituation mit der Zeit verändert, z. B. bei allmählich abnehmender Sichtweite. Durch  $P_K$  und die Bewegung der Sucheinheiten ist die *Ortungswahrscheinlichkeit*  $P_O(t)$  bestimmt, die Wahrscheinlichkeit, das Suchobjekt bis zum Zeitpunkt  $t$  zu orten. Die Zeit bis zur Ortung heißt *Suchdauer*. Die Zielstellung in der S. besteht in der Minimierung der Suchdauer — genauer: ihres Erwartungswertes — oder in der Maximierung von  $P_O(T)$  für ein gewisses  $T$ , d. h. in der Erhöhung der Wahrscheinlichkeit, das Suchobjekt in  $t < T$  zu orten, falls etwa die Suche nach der Dauer  $T$  abgebrochen werden muß.

**Summand** ↗ Addition I.

**Summationsindex** ↗ Summenzeichen.

**Summator** ↗ Analogrechner I., II.

**Summe:** Resultat einer meist als *Addition* bezeichneten binären Operation, die auf ein Elementepaar  $(a, b)$  aus dem Definitionsbereich der Operation angewendet wird. In der S.  $a + b$  heißen  $a$  und  $b$  *Summanden*. Im allg. gelten für die S. das *Kommutativgesetz*  $a + b = b + a$  sowie das *Assoziativgesetz*  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .

**Summenfolge** ↗ Zahlenfolge I.

**Summenfunktion** ↗ Funktionenreihe I.

**Summenhäufigkeit** ↗ Histogramm.

**Summenregel** ↗ Differentiationsregeln I.

**Summenzeichen:** Symbol  $\sum$ , das aus dem griech. Buchstaben für *S* entstanden ist und zur abgekürzten Schreibweise für eine Summe nach (1)

$$(1) \sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

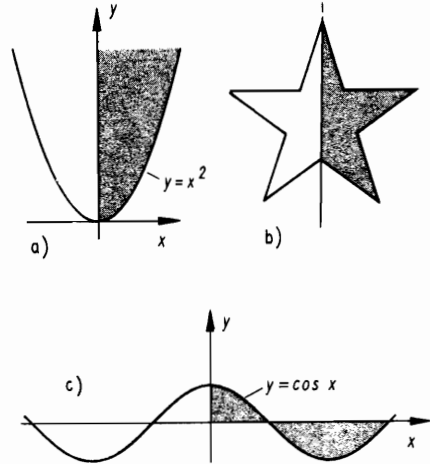
dient [lies: Summe über  $a_i$  von  $i = 1$  bis  $i = n$ ]. Im Ausdruck (1) erhält man alle Summanden der Summe, wenn man in  $a_i$  für den Index  $i = 1$ , dann  $i = 2$  usw. bis  $i = n$  setzt, z. B. ist  $\sum_{i=1}^8 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$  und  $\sum_{i=1}^9 \sin(3i) = \sin 3 + \sin 6 + \dots + \sin 9$ . Der Buchstabe  $i$  heißt *Summationsindex* und kann durch jeden anderen Buchstaben ersetzt werden, z. B. ist  $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{a=1}^n a_a$ . Außerdem gilt  $\sum_{k=1}^n a_i = \sum_{i=m+1}^{m+n} a_{i-m}$  für jede natürl. Zahl  $m$ , wie man durch Einsetzen bestätigt. Ebenso gilt  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^r a_i + \sum_{i=r+1}^n a_i$  mit  $1 \leq r < n$ . Durch Induktion lassen sich weitere Beziehungen beweisen:

$$\sum_{i=1}^n a = na \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^n a_i \quad \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ki} \right) = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} \right)$$

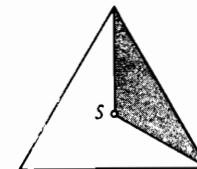
- Summe von Ereignissen** ↗ zufälliges Ereignis I.
- Summe von Potenzreihen** ↗ Potenzreihen XI.
- summierbar** ↗ Lebesguesches Integral II.
- sup:** Zeichen für Supremum.
- Superoskulation** ↗ Kurve zweiter Ordnung IV.
- Superpositionsprinzip** ↗ System II., ↗ Übertragungsglied II.
- Supervisor** ↗ Betriebssystem II.
- Supplementwinkel:** jeder Winkel, der einen gegebenen Winkel zu einem gestreckten Winkel ergänzt; z. B. ist jeder der beiden Nebenwinkel eines Winkels Supplementwinkel dieses Winkels.
- Supremum** ↗ beschränkte Funktion II., ↗ obere Schranke.
- Surjektion:** eindeutige Abbildung einer Menge  $A$  auf eine Menge  $B$ , bei der jedes Element von  $B$  Bild eines Elements von  $A$  ist. S. a. Abbildung I.; Funktion I.
- Syllogismus** ↗ Prädikatenlogik IV.
- Sylvester, James Joseph,** geb. 3. 9. 1814 London, gest. 15. 3. 1897 Oxford. — S. wirkte in England und den USA und lieferte Beiträge zur Theorie der Formen, zur Theorie der Elementarteiler und zur Mechanik; er gründete das »American Journal of Mathematics«.
- Sylvesterscher Trägheitssatz** ↗ quadratische Form II.
- Symbolisierung** ↗ mathematische Logik II.
- Symmetrie:** auf dem Spiegelungsbegriff beruhende Eigenschaft einer geometrischen Figur.
  - I. Eine ebene Figur  $F$  heißt *axialsymmetrisch*, wenn sich in ihrer Ebene eine Gerade  $s$  angeben läßt, so

daß  $F$  durch eine Spiegelung an  $s$  in sich übergeführt wird;  $s$  heißt *S.achse* (↗ Spiegelung I.). Beispiele axialsymmetr. Figuren und ihrer S.achsen sind: ein gleichseitiges Dreieck mit einer der Winkelhalbierenden; ein Rechteck mit einer Mittellinie; ein Kreis mit einer beliebigen Geraden durch den Mittelpunkt (Abb. 1).



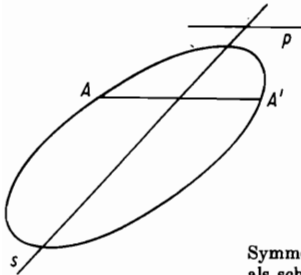
Symmetrie. Abb. 1: Axialsymmetrische Figuren mit Symmetrieachse, a) Parabel, b) regelmäßiger Fünfstern, c) Kurve der Kosinusfunktion

- II. Eine Figur  $F$  heißt *zentralsymmetrisch*, wenn sich in ihrer Ebene ein Punkt  $S$  angeben läßt, so daß  $F$  durch Spiegelung an  $S$  in sich übergeführt wird (↗ Spiegelung II.).  $S$  heißt *S.zentrum* oder *Zentralpunkt*. Beispiele zentralsymmetrischer Figuren und ihres S.zentrums sind: eine Strecke mit ihrem Mittelpunkt; ein Rechteck mit seinem Mittelpunkt; eine Ellipse mit ihrem Mittelpunkt. —
- III. *Radiale S.* hat eine ebene Figur  $F$  und heißt *radialsymmetrisch der Ordnung  $k$*  für  $k = 2, 3, 4, \dots$ , wenn es in der Ebene von  $F$  einen Punkt  $S$  gibt, so daß die Figur bei einer Drehung um  $S$  um den Winkel der Größe  $360^\circ/k$  in sich übergeht. Da bei einer zentralen  $S$ .  $k = 2$  ist, ist diese ein Spezialfall der radialen  $S$ . Beispiele radialsymmetrischer Figuren sind die regelmäßigen  $n$ -Ecke. Sie sind radialsymmetrisch der Ordnung  $n$  mit ihrem Mittelpunkt als Zentrum (Abb. 2). —
- IV. Eine ebene Figur  $F$  heißt *schiefsymmetrisch*, wenn es in der Ebene von  $F$  zwei nicht parallele Geraden  $s$  und  $p$  gibt, so daß die Schrägspiegelung an  $s$  in der Richtung von  $p$  die Figur  $F$  in sich über-



Symmetrie. Abb. 2: Radialsymmetrische Figur der Ordnung  $k = 3$

führt. Die Gerade  $s$  ist dann *Schiefsymmetrieachse*. Da bei der axialen S.  $s$  und  $p$  aufeinander senkrecht stehen, ist diese ein Spezialfall der schiefen S. Beispiele schiefsymmetrischer Figuren sind: ein Trapez mit der Richtung paralleler Gegenseiten als  $p$  und der Verbindungsgeraden der Mitten dieser Seiten als  $s$ ; eine Ellipse mit einem Paar konjugierter Durchmesser als  $s$  und  $p$  (Abb. 3).



Symmetrie. Abb. 3: Ellipse als schiefsymmetrische Figur

Symmetrieachse ↗ Dreieck III., ↗ Ellipse I., ↗ Hyperbel I., ↗ Kegelschnitt II., ↗ Spiegelung I., ↗ Symmetrie I.

Symmetrieaxiom ↗ Raum, metrischer, I. Symmetriezentrum ↗ Spiegelung II., ↗ Symmetrie II.

symmetrisch ↗ lineare Abbildung IV., ↗ Matrix IV., ↗ Relation II., ↗ Symmetrie.

symmetrische Differenz ↗ Differenz I.

symmetrische Funktion: I. Funktion  $f$  von  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (↗ Funktion V.), die bei jeder Permutation  $\pi$  dieser Variablen in sich übergeht. Die Funktionen  $g_1, g_2$  und  $g_3$  mit  $g_1(x_1, x_2, x_3) = a_0 \cdot x_1 x_2 x_3 + a_1^{x_1+x_2+x_3}, g_2(x_1, x_2) = [1/(x_1 x_2)] \cdot \ln(x_1 + x_2)$  und  $g_3(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2 + x_2 \sin x_1$  sind Beispiele für s. F.en. Von bes. Bedeutung sind die *ganzzahligen s. F.*, die auch *symmetr. Polynome* gen. und oft als s. F. i. e. S. verstanden werden (↗ Polynom IV.).

Beispiele:

- (1)  $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3$
- (2)  $f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x_1^i x_2^{n-i}$
- (3)  $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 x_3 + 6x_1 x_2 x_3$

Summe, Differenz und Produkt symmetr. Polynome sind wieder symmetr. Polynome, die Menge der symmetr. Polynome bildet einen ↗ Ring.

II. Die *elementarsymmetr. Funktionen*  $s_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bestehen aus den Summen aller Produkte  $x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_i}$  zu je  $i$  Faktoren, wobei  $k_1 < k_2 < \dots < k_i$  ist.

$$s_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$s_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i < j} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$s_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

$$s_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 x_2 \dots x_n$$

Nach dem Vietaschen Wurzelsatz sind sie betragsgleich mit den Koeffizienten des Polynoms, das  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als Nullstellen hat. Sind z. B.  $x_1, x_2, x_3$

und  $x_4$  die Nullstellen des Polynoms  $\sum_{i=0}^4 a_i x^i$  mit  $a_4 = 1$ , so gilt:

$$a_3 = -s_1(x_1, x_2, x_3, x_4), a_2 = s_2(x_1, x_2, x_3, x_4), a_1 = -s_3(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ und } a_0 = s_4(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

III. Der Hauptsatz über s. F. besagt, daß jedes symmetr. Polynom darstellbar ist als Polynom der elementarsymmetr. Funktionen  $s_i$ . Für das symmetr. Polynom (3) gilt z. B.  $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 x_3 + 6x_1 x_2 x_3 = s_1^2(x_1, x_2, x_3) + 6s_3(x_1, x_2, x_3)$ .

symmetrische Gruppe ↗ Permutationsgruppe.

synchrone Steuerung ↗ Steuerung II.

syntaktisch vollständig ↗ Vollständigkeit.

syntaktisch widerspruchsfrei ↗ Widerspruchsfreiheit.

Syntax ↗ Semantik, ↗ Semiotik, ↗ Sprache.

System: I. ein nach bestimmten Gesichtspunkten abgegrenzter Bereich der objektiven Realität sowie jedes seiner Abbilder. Der nicht zum System gehörende Teil heißt *Umwelt*. S. und Umwelt werden durch eine endlose Hüllfläche, den *Systemrand*, voneinander getrennt. Ein S. ist aus kleineren Einheiten, den *Elementen*, zusammengesetzt. Die Elemente stehen innerhalb des S.s untereinander in einem beschreibbaren Zusammenhang (↗ Übertragungsglied). Ebenso bestehen gewisse Beziehungen zwischen S. und Umwelt. Die Beziehungen bestimmen zusammen mit den Elementen die *Struktur* des S.s. Das S. als Ganzes wie auch die Elemente erfüllen eine bestimmte Funktion.

Als *Eingangsgröße*, *Input* oder *Stimulus* bezeichnet man jede Art von Einwirkung auf das S. oder auf eines seiner Elemente. Diese Einwirkungen können aus der Umgebung stammen oder aus einem anderen Element bzw. einem anderen S., das mit dem betrachteten gekoppelt ist. Als *Ausgangsgröße*, *Output* oder *Response* bezeichnet man jede Art von Wirkung eines S.s oder eines seiner Elemente auf andere S.e bzw. Elemente oder auf die Umgebung nach dem Kausalitätsprinzip. Ausgangsgrößen können durch innere Quellen erzeugt werden oder Wirkungen von Eingangsgrößen sein. Alle Ein- und Ausgangsgrößen haben den Charakter von Signalen. Der Funktion der Übertragung von Signalen kommt besondere Bedeutung zu (↗ Übertragungsglied).

II. Der S.begriff ist einer der Fundamentalbegriffe der Kybernetik. Unter einem *kybernet. S.* versteht man ein durch Abstraktion gewonnenes mathemat. Modell, das in sehr allgemeiner Weise zur Beschreibung und Untersuchung des Verhaltens realer, techn. oder natürl. S.e verwendet werden kann und



geeignet ist, empfangene Informationen gemäß seiner Funktion umzuwandeln und gegebenenfalls mit anderen, auch gespeicherten Informationen zu neuen Informationen zu verknüpfen. Die die Verknüpfung der Elemente bestimmende *Struktur* erstreckt sich hier auf die Signale, durch die die Information übertragen wird. Bei der kybernet. Betrachtungsweise werden die dabei auftretenden konkreten Größen wie Spannungen, Drücke, Mikropotentiale u. a. ihrer konkreten physikal. Natur entkleidet, und ihr Verlauf wird meist durch *determinist. Funktionen* beschrieben. Hierbei ergeben sich Zeitfunktionen, durch die jedem Zeitpunkt  $t$  eindeutig ein Zahlenwert zugewiesen wird. Kann eine determinist. Beschreibung nicht angewendet werden, so verbleibt nur die Möglichkeit einer *stochast. Beschreibung*.

Man unterscheidet weiterhin zwischen kontinuierl. und diskontinuierl. kybernet. S.en. In *kontinuierl. S.en* können Änderungen zu jedem beliebigen Zeitpunkt erfolgen, in *diskontinuierl. S.en* können sich die Signale nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten ändern.

Unter den in S.en auftretenden, durch Zeitfunktionen beschriebenen Signalen kann man zwischen *Eingangsgroßen*  $x(t)$ , *Ausgangsgroßen*  $y(t)$  und *inneren Zustandsgrößen*  $z(t)$  unterscheiden. Hängt der Wert der Ausgangsgroße  $y(t)$  zum Zeitpunkt  $t = t_1$  nur vom Wert des als zulässig vorausgesetzten Eingangssignals  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t = t_1$  ab, aber nicht von vorangegangenen oder künftigen Werten, so bezeichnet man das betreffende S. als *speicherfrei* oder *gedächtnislos*. Andernfalls handelt es sich um ein *dynam. S.* Die allgemeinen Methoden zur Behandlung kybernet. S.e werden von der *Systemtheorie* bereitgestellt. Hierbei sind verschiedene Beschreibungsarten in Gebrauch, die sich in die Eingangs-Ausgangsbeschreibung und die Zustandsbeschreibung gruppieren lassen.

**II.1. Eingangs-Ausgangsbeschreibung.** Diese Art der Behandlung basiert auf der Betrachtung des äußeren Verhaltens an den Klemmen der S.e. Faßt man die Eingangsgroßen  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  zum Eingangsvektor  $\mathbf{x}(t)$  und die Ausgangsgroßen  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  zum Ausgangsvektor  $\mathbf{y}(t)$  zusammen, so können die zwischen S.eingang und -ausgang bestehenden Beziehungen durch eine Operatoren-gleichung der Form  $\mathbf{y}(t) = T[\mathbf{x}(t)]$  beschrieben werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß  $\mathbf{x}(t)$  einer Funktionenmenge angehört, für die der reelle Operator  $T$  definiert ist. Zur vollständigen S.beschreibung gehört ferner die Angabe des Anfangszustandes  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ . Eine beträchtl. Vereinfachung der Beschreibung ergibt sich, wenn die Forderungen nach Kausalität, Linearität und Zeitinvarianz hinreichend erfüllt sind.

*Kausalität* ist genau dann gegeben, wenn die Ausgangszeitfunktion  $\mathbf{y}(t)$  bis zu irgend einem Zeitpunkt  $t_1$  stets nur vom Verlauf der entsprechenden Eingangszeitfunktion  $\mathbf{x}(t)$  bis zu diesem Zeitpunkt abhängt. Gilt dann für willkürl. herausgegriffene Eingangsfunktionen  ${}^{(i)}\mathbf{x}(t) \equiv {}^{(j)}\mathbf{x}(t)$  für  $t \leq t_1$ , so ist auch stets  $T[{}^{(i)}\mathbf{x}(t)] \equiv T[{}^{(j)}\mathbf{x}(t)]$ .

*Linearität* liegt vor, wenn zwischen einer willkürlich herausgegriffenen Eingangsfunktion  ${}^{(i)}\mathbf{x}(t)$  und der zugehörigen Ausgangsfunktionen  ${}^{(i)}\mathbf{y}(t)$  für alle  $i = 1, 2, \dots, N$  gilt:  ${}^{(i)}\mathbf{y}(t) = T[{}^{(i)}\mathbf{x}(t)]$ . Daraus folgt das *Superpositionsprinzip*, das nach (1) auch jeder willkürl. Linearkombination der  ${}^{(i)}\mathbf{x}(t)$  die entsprechende Linearkombination der  ${}^{(i)}\mathbf{y}(t)$  zuordnet.

$$(1) \quad T \left[ \sum_{i=1}^N k_i {}^{(i)}\mathbf{x}(t) \right] = \sum_{i=1}^N k_i T[{}^{(i)}\mathbf{x}(t)]$$

*Zeitinvarianz* besteht, wenn die folgende Transformationsoperation zwischen der Eingangs- und der Ausgangsfunktion für eine reelle Zeitverschiebung  $t_0$ , d. h., für beliebiges reelles  $t_0$  gilt:

$$T[\mathbf{x}(t - t_0)] = \mathbf{y}(t - t_0).$$

Zu den genannten einschränkenden Voraussetzungen kommen häufig noch weitere Annahmen hinzu, z. B. die der *Konzentration der Parameter*, die einen Aufbau des S.s aus Elementen mit konzentrierten Widerstands- und Speichereigenschaften fordert, oder die, daß nur je eine Ein- und eine Ausgangsgroße vorhanden sind ( $\nearrow$  Übertragungsglied).

Es sind verschiedenartige Eingangs-Ausgangs-Beschreibungen in Gebrauch. Hierzu zählen im Falle kontinuierl. S.e vor allem die Beschreibung im *Zeitbereich* ( $\nearrow$  Zeitfunktionen), im *Frequenzbereich* ( $\nearrow$  Frequenzgang) sowie im *Bildbereich* ( $\nearrow$  Übertragungsfunktion). Diskontinuierl. S.e werden vor allem unter Verwendung der Methode der  $z$ -Transformation beschrieben.

**II.2. Zustandsbeschreibung:** Neben den Eingangs- und Ausgangsgroßen des S.s werden noch gewisse *innere S.größen* berücksichtigt, die die *Zustandsgrößen* gen. werden. Die Zustandsgrößen beschreiben den Speicherzustand des S.s und müssen im Unterschied zu den äußeren S.größen nicht notwendig meß- und beobachtbar sein. Die Anzahl der Energiespeichermöglichkeiten im S. legt die Anzahl der unabhängigen Zustandsgrößen fest. Damit ist durch die Anzahl der Zustandsgrößen  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$  die *Ordnung* bzw. *Dimension* eines S.s festgelegt, unabhängig davon, wie viele Eingangs- und Ausgangsgroßen existieren.

Sind nur S.e mit konzentrierten Parametern zugelassen, so gibt (2) die allgemeine Beschreibung in Zustandsform.

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), t)$$

Darin bedeuten  $\mathbf{z}(t)$  den  $r$ -dimensionalen Zustandsvektor,  $\mathbf{x}(t)$  den  $n$ -dimensionalen Vektor der Eingangsgroßen und  $\mathbf{y}(t)$  den  $m$ -dimensionalen Vektor der Ausgangsgroßen. Der euklid. Raum, in dem sich die Vektoren bewegen, heißt *Zustandsraum* oder *Phasenraum*.

Für den in der klass. Theorie vorwiegend behandelten Fall der linearen, zeitinvarianten S.e gibt (3) das Vektor-Gleichungssystem in Normalform an.

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

Die erste Gleichung stellt ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung dar, die zweite Gleichung erzeugt den Ausgangsvektor als Linearkombination von Zustands- und Eingangsvektor.  $A, B, C$  und  $D$  sind Matrizen. Die Vorteile der Zustandsbeschreibung bestehen vor allem in der bequemerem und anschaulicheren Berücksichtigung beliebiger Anfangswerte, der kompakteren Schreibweise unter Verwendung von Matrizen, der besonderen Eignung zur Simulation auf Analogrechnern sowie in der vorteilhaften Auswertbarkeit mittels digitaler Rechenmaschinen.

Die Zustandsbeschreibung ist auch für diskontinuierl. S.e nach (4) angebar.

$$(4) \quad \begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + Bx(k) \\ y(k) &= Cz(k) + Dx(k) \end{aligned}$$

Die Zustandsbeschreibung ist der Theorie der Differentialgleichungen angepaßt, so daß die entsprechenden Lösungsmethoden angewendet werden können.

Die vollständige Eingangs-Ausgangs-Beschreibung und die Zustandsbeschreibung von S.en sind ineinander überführbar.

Wesentl. Anwendungsgebiete der genannten Beschreibungsarten für kontinuierl. Systeme liegen vor allem auf dem Gebiet der Regelungssysteme (Simulation) und der elektr. Netzwerke. Die diskontinuierl. Beschreibung eignet sich besonders für die Behandlung von Automaten. — S. a. Lernen, systematischer Fehler Simulation Fehler IV., Simulation Punktschätzung, Simulation zufälliger Fehler.

**System gewöhnlicher Differentialgleichungen** Simulation gewöhnliche Differentialgleichung II.

**Systemidentifikation:** Vorgang zur Gewinnung eines mathemat. Modells zu einem vorliegenden dynam. realen System auf Grund von Experimenten. Wesentl. Phasen der S. sind das Experiment und die Kennwertermittlung.

**I.** Im Experiment werden Informationen über das zu identifizierende System dadurch gewonnen, daß Einwirkungen und Systemreaktionen meßtechnisch erfaßt und gegebenenfalls auch erzeugt werden, die in hinreichender Menge und geeigneter Form aufgezeichnet oder auf andere Art gespeichert werden. Dabei können die Eingangssignale einzeln, als Folge oder als Verlauf einer variablen Größe auftreten. Je nachdem, ob die Einwirkungen künstlich erzeugt werden oder ob vorhandene, gegebenenfalls zufällige Einwirkungen zur Erregung des Systems ausgenutzt werden, unterscheidet man zwischen *aktiven* und *passiven Experimenten*.

**II.** Die *Kennwertermittlung* hat die Aufstellung und Spezialisierung eines geeigneten mathemat. Modells auf Grund vorliegender Meßergebnisse zur Aufgabe. Da über das zu identifizierende System meist keine Strukturinformationen vorliegen und dieses daher als *Black-box* betrachtet werden muß, ist zunächst eine geeignete Strukturhypothese aufzustellen. Die zugehörigen Parameter werden dann aus den vorliegenden Messungen bestimmt. Die Kennwertermittlung hat damit approximativen Charakter. Dieses Vorgehen erfordert stets eine Kontrolle, in

deren Ergebnis die Strukturhypothese bestätigt oder verworfen wird. Die Kennwertermittlung wird ebenfalls zur experimentellen Gütebestimmung von Regelungen benutzt. Die Verfahren der Kennwertermittlung basieren auf der Eingangs-Ausgangsbeschreibung von Systemen (Simulation System II.1.). Im Falle kontinuierl. Systeme kann man zwischen den Verfahren des Zeitbereichs und des Frequenzbereichs unterscheiden. Bei der *Kennwertermittlung im Zeitbereich* werden Systemantworten auf bestimmte, meist aperiod. Testsignalverläufe, z. B. durch eine Sprungfunktion, erzeugt. Aus dem gemessenen Übergangsverlauf werden mittels geeigneter Hilfskonstruktionen geeignete graph. Kennwerte bestimmt, aus denen für die gewählte Struktur die Parameter bestimmt werden. Zur Zeitersparnis sind für den prakt. Gebrauch vielfach entsprechende Diagramme oder Tabellen ausgearbeitet worden.

Bekanntere Verfahren für die Auswertung von Übergangsfunktionen (Simulation Zeitfunktionen) sind das Wendetangenten- und das Zeitprozent-Kennwertverfahren. Die *Kennwertermittlung im Frequenzbereich* gründet sich auf die Darstellung der für eine hinreichende Anzahl diskreter Frequenzen  $\omega_i$  im Bereich  $0 \leq \omega_i < \infty$  gemessenen Schwingungsparameter in Form einer Ortskurve oder der logarithm. Frequenzkennlinien (Simulation Frequenzgang).

Aus der Form dieser Frequenzcharakteristiken werden eine geeignete Strukturhypothese abgeleitet und durch graphisch-numer. Auswertung der Kurven die zugehörigen Parameter bestimmt.

Eine wesentl. Schwierigkeit bei der S. ergibt sich aus dem Vorhandensein der prinzipiell unvermeidbaren *Störungen*. Diese bewirken, daß die gemessenen Systemantworten  $x_A$  nicht nur die Reaktionen  $x_{A_0}$  auf das Testsignal, sondern auch die Störantworten  $x_{A_s}$  enthalten. Bei vorausgesetzter Linearität gilt  $x_A = x_{A_0} + x_{A_s}$ . Um unter diesen Umständen eine hinreichend genaue S. durchführen zu können, bedient man sich bestimmter *Filter-* oder *Korrelationsverfahren*.

Neben der *einmaligen S.* als Voraussetzung für den Systementwurf unterscheidet man ferner die *wiederholte S.* oder *on-line-S.*, die erforderlich ist, wenn das System zeitvariablen Charakter hat und das Modell somit fortlaufend angepaßt werden muß (Simulation Adaption).

**System linearer Gleichungen** Simulation lineares Gleichungssystem.

**Systemtheorie** Simulation System II.

**System von Differentialgleichungen** Simulation gewöhnliche Differentialgleichung II., Simulation partielle Differentialgleichung I.

## T

**Tafeln** für Quadrat- und Kubikwurzeln Simulation Wurzelziehen IV.

**Tailenkreis** Simulation Durchlaufungen von Graphen I.

**Tailenweite** Simulation Durchlaufungen von Graphen I.

**Tait**, Peter Guthrie, geb. 28. 4. 1831 in Dalkeith (Schottland) als Sohn eines Privatsekretärs, gest. 4. 7. 1901 Edinburgh. — T. studierte in Cambridge und war dann dort, später in Belfast als Professor der Mathematik und seit 1860 als Professor der Physik in Edinburgh tätig. Neben physikal. Themen, z. B. über kinet. Gastheorie, arbeitete T. vor allem über *Vektorrechnung* und über den *Quaternionenkalkül*.

**Tait**, Satz von ↗ Untergraph.

**Takt** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.

**Taktgebereinrichtung** ↗ Steuerung II.

**Taktimpuls** ↗ digitale Rechenanlage II.2.

**Taktsteuerung** ↗ Steuerung II.

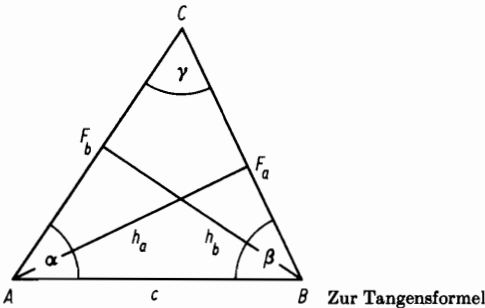
**Talweg** ↗ Böschungsaufgabe.

**Tangens** ↗ Winkelfunktion III.

**Tangensformel**: Beziehung (1), die sich in einem

$$(1) \quad \tan \gamma = \frac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha} = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta}$$

ebenen Dreieck  $ABC$  ergibt, wenn man die durch die Fußpunkte  $F_a$  der Höhe  $h_a$  und  $F_b$  der Höhe  $h_b$  entstandenen Teilstrecken nach der Kosinusformel



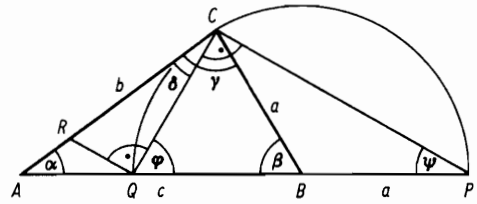
berechnet (Abb.). Man erhält  $|AF_b| = c \cos \alpha$  und  $|BF_a| = c \cos \beta$ , d. h.,  $|CF_b| = b - c \cos \alpha$  und  $|CF_a| = a - c \cos \beta$ . Wegen  $h_a = c \sin \beta$  und  $h_b = c \sin \alpha$  ergibt sich die T. in den durch die Höhen entstandenen rechtwinkligen Dreiecken  $AF_aC$  und  $BF_bC$ . Durch zykl. Vertauschung ergeben sich weitere Beziehungen.

**Tangens hyperbolicus** ↗ hyperbolische Funktion I.

**Tangenssatz**: I. Beziehungen (1), die sich leicht geometrisch gewinnen lassen (Abb.). Wird z. B. im

$$(1) \quad \begin{aligned} \tan \frac{\alpha - \beta}{2} &= \frac{a - b}{a + b} \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \tan \frac{\beta - \gamma}{2} &= \frac{b - c}{b + c} \cdot \tan \frac{\beta + \gamma}{2} \\ \tan \frac{\gamma - \alpha}{2} &= \frac{c - a}{c + a} \cdot \tan \frac{\gamma + \alpha}{2} \end{aligned}$$

ebenen Dreieck  $ABC$  mit  $c > a$  die Seitenlänge  $a$  von  $B$  aus auf  $c$  abgetragen, so daß die Dreiecke  $BCQ$  und  $BQP$  gleichschenkelig sind, so gilt  $|AQ| = (c - a)$  und  $|AP| = (c + a)$  und ihre Basiswinkel haben die Größen  $\varphi = (\gamma + \alpha)/2$  und  $\psi = \beta/2$ . Daraus folgt, daß das Dreieck  $QPC$  rechtwinklig ist.



Tangensatz im ebenen Dreieck

Zieht man durch  $Q$  die Parallele  $QR$  zu  $PC$ , so ist auch das Dreieck  $CQR$  rechtwinklig und hat bei  $C$  einen Winkel der Größe  $\delta = (\gamma - \alpha)/2$ . Dann gelten  $\tan [(\gamma - \alpha)/2] = |QR|/|QC|$  und  $\tan [(\gamma + \alpha)/2] = |PC|/|QC|$ , wegen  $|QR|/|PC| = (c - a)/(c + a)$  mithin durch zykl. Vertauschen die Gleichungen (1). Sie werden benutzt, um in einem ebenen Dreieck aus den Längen zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels die übrigen Stücke in durchgehend logarithm. Rechnung zu bestimmen. Sind z. B.  $a, b$  und  $\gamma$  gegeben, so ist nach  $\alpha + \beta = 360^\circ - \gamma$  auch  $(\alpha + \beta)/2 = \tau_1$  bekannt. Ergibt sich nach der ersten Gleichung von (1)  $(\alpha - \beta)/2 = \tau_2$ , so folgt  $\alpha = \tau_1 + \tau_2$  und  $\beta = \tau_1 - \tau_2$ . Aus  $a, \alpha, b, \beta$  und  $\gamma$  liefert aber der Sinussatz die Länge  $c$  der dritten Seite (↗ ebene Trigonometrie II.3.).

II. Das Analogon zum T. für *sphär. Dreiecke* sind die *Neperschen Analogien* (2), deren 12 einzelne Fälle nach Eigenschaften der Argumente der Tangensfunktionen bezeichnet werden. Die Beziehungen  $(2_a^+), (2_a^-), (2_b^+), (2_b^-), (2_\alpha^+), (2_\alpha^-), (2_\beta^+)$  und  $(2_\beta^-)$  für die übrigen Stücke ergeben sich durch zykl.

$$(2_c^+) \tan \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \tan \frac{a + b}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$(2_c^-) \tan \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \tan \frac{a - b}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$(2_\gamma^+) \cot \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a - b}{2} = \tan \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{a + b}{2}$$

$$(2_\gamma^-) \cot \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{a - b}{2} = \tan \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{a + b}{2}$$

Vertauschen. Im Unterschied zum ebenen Dreieck gilt die Beziehung  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  bzw.  $180^\circ$  nicht mehr. In den Neperschen Analogien stehen dafür zwei Gleichungen zur Verfügung. Sind z. B.  $a, b$  die Größen zweier Seiten und die Größe  $\gamma$  des eingeschlossenen Winkels gegeben, so errechnet man aus den Gleichungen  $(2_\gamma^+)$  und  $(2_\gamma^-)$  die Größen  $(\alpha + \beta)/2 = \tau_1$  und  $(\alpha - \beta)/2 = \tau_2$ . Die Gleichungen  $(2_c^+)$  und  $(2_c^-)$  ergeben dann ohne Sinussatz unmittelbar die Größe  $c$ . Sind dagegen die Größen zweier Winkel und die der Seite zwischen ihren Scheitelpunkten gegeben, z. B.  $\alpha, \beta$  und  $c$ , so erhält man entsprechend zunächst  $(a + b)/2$  und  $(a - b)/2$  und daraus  $\gamma/2$ .

**Tangente**: Gerade, die eine Kurve oder eine Fläche in einem ihrer Punkte berührt. Ist z. B.  $P_0$  dieser Berührungspunkt auf einer Kurve  $C$ , so wird die T.

in  $P_0$  analytisch bestimmt als Grenzlage einer Sekante durch zwei benachbarte Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , die sich  $P_0$  beliebig nähern. Ist die Kurve in Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  für  $t_1 \leq t \leq t_2$  gegeben durch Funktionen  $x_i(t)$ , die genügend oft differenzierbar sind, so heißt der Kurvenpunkt  $P_0$  *regulär*, falls für mindestens einen Index  $i$  gilt  $dx_i(t_0)/dt \neq 0$ . Dann ist in Vektorschreibweise

$$\mathbf{x}_0' = \frac{d\mathbf{x}(t_0)}{dt} = \left( \frac{dx_1(t_0)}{dt}, \frac{dx_2(t_0)}{dt}, \frac{dx_3(t_0)}{dt} \right)$$

der *Richtungsvektor* der T. in dem regulären Punkt  $P_0$ . Die Gleichung der Tangente in Vektorschreibweise ist dann  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0' \tau$  mit dem Parameter  $\tau, -\infty < \tau < \infty$ .

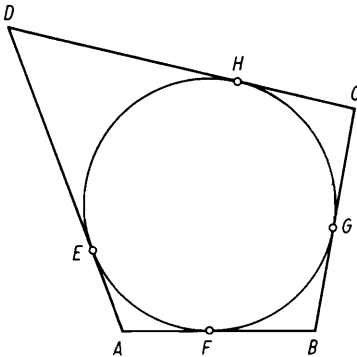
Wählt man als Kurvenparameter den natürl. Parameter  $s$ , so ergibt  $\dot{\mathbf{x}}_0 = d\mathbf{x}(s)/ds$  den *Tangentenvektor* der Kurve im Punkte  $P_0$ ; er ist ein Einheitsvektor. Die Geraden sind die einzigen Kurven mit konstantem Tangentenvektor. S. a. Ellipse IV.; Hyperbel IV., VI.; Kreis I., IV.; Kugel II.; Kurve zweiter Ordnung III.; Parabel II., III.

**Tangentenfläche** ↗ abwickelbare Fläche.

**Tangentenkegel** ↗ Kugel VIII.

**Tangentenverfahren** ↗ Nullstellenberechnung III.

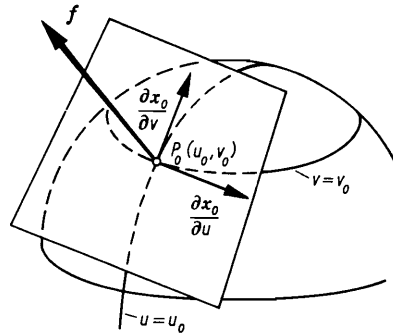
**Tangentenviereck**: konvexes Viereck  $ABCD$ , dessen Seiten einen Kreis berühren (Abb.). Da auf den



Tangentenviereck

beiden von einem Punkte an einen Kreis gelegten Tangenten die Tangentenabschnitte gleich lang sind und jede Seite des T.s als Summe zweier Tangentenabschnitte darstellbar ist, sind im T. die Summen der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten einander gleich; aus  $|AE| = |AF|, |BF| = |BG|, |CG| = |CH|, |DH| = |DE|$  folgt z. B.  $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$ . — S. a. Viereck.

**Tangentialebene**: Ebene im Punkte  $P_0$  der Fläche  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ , die durch die Vektoren  $\partial\mathbf{x}_0/\partial u$  und  $\partial\mathbf{x}_0/\partial v$  aufgespannt wird, wenn die beiden Vektoren linear unabhängig sind (Abb.). Die Gleichung der T. lautet  $(\partial\mathbf{x}_0/\partial u \times \partial\mathbf{x}_0/\partial v) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$ , wenn  $\mathbf{z}$  der Ortsvektor ihrer Punkte ist und  $(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0)$  deshalb senkrecht auf der Flächennormale steht. In der Form  $\mathbf{z} = \mathbf{x}_0 + a \partial\mathbf{x}_0/\partial u + b \partial\mathbf{x}_0/\partial v$  lassen sich die Punkte  $\mathbf{z}$  der T. auch durch die beiden Parameter  $a$  und  $b$  darstellen. Eine Kurve durch  $P_0$  in der



Tangentialebene, aufgespannt von den Vektoren  $\partial\mathbf{x}_0/\partial u$  und  $\partial\mathbf{x}_0/\partial v$ , sowie Flächennormale  $\mathbf{f}$

gegebenen Fläche kann man in der Gestalt  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u_0 + u(t), v_0 + v(t))$  vorgeben, wenn  $u(0) = v(0) = 0$  gilt. Für  $u = u_0 + t$  und  $v(t) = 0$ , d. h.,  $v = v_0$  für alle  $t$ , erhält man die *Koordinatenlinie* durch  $P_0$ , längs der  $v = v_0$  konstant ist. Entsprechend ergibt  $u = u_0, v = v_0 + t$  die andere Koordinatenlinie. Der Punkt  $P_0$  ist der Schnittpunkt dieser Koordinatenlinien und die Vektoren  $\partial\mathbf{x}_0/\partial u$  bzw.  $\partial\mathbf{x}_0/\partial v$  sind Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien.

Ein Punkt, in dem  $\partial\mathbf{x}_0/\partial u$  und  $\partial\mathbf{x}_0/\partial v$  linear unabhängig sind, heißt *regulärer Punkt*, bei linearer Abhängigkeit *singulärer Punkt*. — Werden z. B. auf der Erdoberfläche die Meridiane und die Breitenkreise als Koordinatenlinien benutzt, so sind die Pole singuläre Punkte. Die Spitze eines Kreiskegels dagegen ist bei jeder Parameterdarstellung singulär, da durch sie keine Tangentialebene an den Kegel existiert. — S. a. Fläche zweiter Ordnung II., Kugel II., VIII.

**Tarski**, Alfred, geb. 14. 1. 1901 Warschau. — T. promovierte 1924 in Warschau, forschte auf dem Gebiet der *Grundlagen der Mathematik*, insbes. der Mengenlehre, und arbeitete zeitweise mit KURATOWSKI zusammen. Etwa um das Jahr 1939 siedelte er in die USA über und ist an der Universität Berkeley tätig.

**Tartaglia**, Fontana, Nicolò, geb. 1500(?) Brescia, gest. 14. 12. 1557 Venedig. — Fontana erhielt wegen eines Sprachfehlers den Beinamen T., der Stotterer. Als bittelarmer Junge mußte er sich Bücher stehlen, um das Lesen lernen zu können, und arbeitete sich dann bis zum Privatlehrer, Rechenmeister und Professor in Venedig empor. Er fand ein Verfahren zur Auflösung der kubischen Gleichung  $x^3 + ax = ab$ , das CARDANO veröffentlichte.

**Tastglied** ↗ Regelung VI.

**Tate**, John T., geb. 1925, ist ein Schüler von E. ARTIN. Er wirkt an der Harvard-University in Cambridge (Mass.). Er gehört zu den seltenen Mathematikern, die schon durch ihre Doktorarbeit Aufsehen erregten. Er promovierte 1950 bei E. ARTIN in Princeton mit der zahlentheoret. Arbeit »Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta Functions«. Die in dieser Arbeit enthaltenen Ergebnisse bilden eine der Grundlagen für die gegenwärtige zahlentheoret. Forschung, bei der sich zahlreiche

Mathematiker, z. B. P. DELIGNE (geb. 1944), um eine Verallgemeinerung der Klassenkörpertheorie bemühen.

Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1962 in Stockholm hielt er einen bedeutenden Vortrag über Dualitätssätze (»Duality theorems in galois cohomology over number fields«). Durch T. setzte sich die Verwendung kohomolog. Methoden bei gewissen grundlegenden arithmet. Fragestellungen durch.

**Tautologie** ↗ Aussagenlogik III.

**Taylor, Brook**, geb. 18. (?) 1685 Edmonton, gest. 29. 12. (?) 1731 London. — T. war ein vermög. Jurist, hatte in Cambridge studiert und war seit 1712, ohne eine aml. Stellung zu bekleiden, Mitglied der Royal Society, später auch deren Sekretär. Er arbeitete vorwiegend auf Gebieten, die man heute zur Analysis rechnet. Die *T.sche Reihe* tritt erstmals 1712 auf und wurde 1715 hergeleitet.

**Taylorische Reihe: I.** Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  zu einer gegebenen Funktion  $f(x)$  mit den Koeffizienten  $a_n = (1/n!) f^{(n)}(x_0)$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Eine entsprechende Definition gilt für Funktionen mehrerer Variabler.

Zunächst muß eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  mit einem von Null verschiedenen Konvergenzradius (↗ Potenzreihe III.), deren Summenfunktion  $f(x)$  ist, notwendigerweise Koeffizienten der Form  $a_n = (1/n!) f^{(n)}(x_0)$  haben, denn aus  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$  folgt  $f(x_0) = a_0$ , aus  $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$  folgt  $f'(x_0) = 1! a_1$  usw., und allgemein aus  $f^{(n)}(x) = n! a_n + (n + 1) \cdot n(n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \dots$  folgt  $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$ . Dabei wird lediglich von der Möglichkeit der gliedweisen Differenzierbarkeit einer Potenzreihe innerhalb des Konvergenzintervalls (↗ Potenzreihe X.) Gebrauch gemacht. Hingegen muß nicht notwendig die T. R. (1) die Funktion  $f(x)$  zur Summenfunktion haben.

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

Schreibt man zu einer gegebenen Funktion  $f(x)$ , die beliebig oft differenzierbar sein muß, die T. R. (1) auf, so braucht diese keinen Konvergenzradius ungleich Null zu haben. Es ist auch möglich, daß diese Potenzreihe wohl einen Konvergenzradius ungleich Null hat, daß ihre Summenfunktion aber nicht  $f(x)$  darstellt. Die Funktion  $f(x)$ , die für  $x \neq 0$  die Werte  $e^{-1/x}$  hat, für  $x = 0$  aber 0 ist, ist z. B. beliebig oft differenzierbar, und es gilt  $f^{(n)}(0) = 0$  für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Stellt man für diese Funktion  $f(x)$  die T. R. (1) auf, so erhält man  $\sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) f^{(k)}(0) x^k = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$ . Auf jeden Fall ist diese Potenzreihe verschieden von  $f(x)$  in der Umgebung von  $x_0 = 0$ . Um diesen Fall auszuschließen, müssen zusätzliche Bedingungen erfüllt sein.

Die T. R. (1) zu einer beliebig oft differenzierbaren Funktion  $f(x)$  konvergiert in einer Umgebung von

$x = x_0$ , etwa für  $|x - x_0| < r$ , und hat  $f(x)$  zur Summenfunktion, wenn in (2) der Rest  $R_n(x)$  für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < r$  bei  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt.

$$(2) \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n (1/k!) f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

Der Rest  $R_n(x)$  kann mit Hilfe des Taylorschen Satzes durch die  $(n + 1)$ -te Ableitung der Funktion  $f(x)$  ausgedrückt werden. Setzt man  $x = x_0 + h$ , so läßt sich das Restglied in der Form (3) schreiben.

$$(3) \quad R_n(h) = f(x_0 + h) - (f(x_0) + (1/1!) f^{(1)}(x_0) h + \dots + (1/n!) f^{(n)}(x_0) h^n)$$

*Taylorischer Satz:* Hat die Funktion  $f(x)$  in dem abgeschlossenen Intervall  $[x_0, x_0 + h]$  eine stetige  $n$ -te Ableitung und existiert die  $(n + 1)$ -te Ableitung  $f^{(n+1)}(x)$  wenigstens im Innern dieses Intervalls, so gilt in (4) für das Restglied  $R_n$  entweder (5), die Restform von Lagrange, oder (6), die von Cauchy.

$$(4) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + (1/1!) f^{(1)}(x_0) h + \dots + (1/n!) f^{(n)}(x_0) h^n + R_n$$

*Restform von Lagrange:* Es gibt stets eine Zahl  $\theta$  mit  $0 < \theta < 1$ , für die (5) gilt.

$$(5) \quad R_n = \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

*Restform von Cauchy:* Es gibt stets mindestens eine Zahl  $\theta'$  mit  $0 < \theta' < 1$ , für die (6) gilt.

$$(6) \quad R_n = \frac{h^{n+1}}{n!} (1 - \theta')^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)$$

In den Anwendungen wird der Taylorische Satz häufig für  $x_0 = 0$  gebraucht; dieser Spezialfall des Taylorschen Satzes trägt oft die Bezeichnung *MacLaurinscher Satz* oder *MacLaurinsche Form des Taylorischen Satzes*.

Der Taylorische Satz für  $n = 0$ ,  $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h) h$ , ist der *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung, denn für  $x_0 = a$  und für  $x_0 + h = b$  ergibt sich  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$  mit einer zwischen  $a$  und  $b$  gelegenen Stelle  $\xi$ ,  $a < \xi < b$ .

**II. Anwendungen und Beispiele.**

**II.1.** In dem Intervall  $] -1/10, 1/10[$  ist für die Funktion  $f(x) = \cos x$  ein Polynom  $g(x)$  zu finden, so daß  $\cos x \approx g(x)$ , genauer daß  $|\cos x - g(x)| < 1/10^5$  gilt. — Dazu wird in (7) die Funktion  $\cos x$  nach dem Taylorschen Satz für  $x_0 = 0$  entwickelt und  $h = x$  gesetzt.

$$(7) \quad \begin{aligned} \cos x &= \cos 0 - (1/1!) \sin 0 \cdot x \\ &\quad - (1/2!) \cos 0 \cdot x^2 \\ &\quad + (1/3!) \sin 0 \cdot x^3 \\ &\quad + (1/4!) \cos(\theta x) x^4 \\ &= 1 - (1/2!) x^2 + (1/4!) \cos(\theta x) x^4 \end{aligned}$$

Das Restglied  $R_n$  wurde für  $n = 3$  in der Lagrange'schen Form aufgeschrieben. Mit  $g(x) = 1 - x^2/2$  liefert die Abschätzung (8), daß die vorgeschriebene Fehlerschranke von  $10^{-5}$  eingehalten wurde. Ändern-

falls müßte man weitere Glieder der T. R. von  $\cos x$  berücksichtigen.

$$(8) \quad |\cos x - g(x)| = |(1/4!) \cos(\vartheta x) x^4| < x^4/24 < 1/(24 \cdot 10^4) < 1/10^5$$

**II.2.** Zur Berechnung von Grenzwerten benutzt man häufig den Taylorschen Satz. Ist z. B. der Grenzwert (9) zu berechnen, so entwickelt man Zähler- und Nennerfunktion nach dem Taylorschen Satz für  $x_0 = 0$  und  $h = x$  und erhält (10) und damit  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)/g(x)] = 1/3$ .

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3 \cos x}$$

$$(10) \quad \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3 \cos x} = \frac{(1/3)x^3 + (1/4!)x^4(e^{\vartheta x} - \sin(\vartheta x) + \cos(\vartheta x))}{x^3 - (1/2!)x^5 \cos(\vartheta x)} = \frac{(1/3) + (1/4!)x(e^{\vartheta x} - \sin(\vartheta x) + \cos(\vartheta x))}{1 - (1/2!)x^2 \cos(\vartheta x)}$$

Oft genügt es, für die vorkommenden Funktionen deren Entwicklungen (↗ Entwicklung von Funktionen) einzusetzen und nur die Potenzen von  $x$  aufzuschreiben, die notwendig sind. Berechnet man (9) nach dieser Methode, so erhält man aus (11 a) und (11 b) die Beziehung (11) und daraus wieder  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)/g(x)] = 1/3$ .

$$(11 a) \quad f(x) = (1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots) - (x - x^3/6 + \dots) + (1 - x^2/2 + \dots) - 2 = x^3/3 + \dots$$

$$(11 b) \quad g(x) = x^3(1 - x^2/2 + \dots) = x^3 + \dots$$

$$(11) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/3 x^3 + \dots}{x^3 + \dots}$$

**II.3.** Es ist die T. R. der Funktion  $f(x) = \sin x$  für  $x_0 = 0$  gesucht. — Die Funktion  $f(x) = \sin x$  ist für alle  $x$  beliebig oft differenzierbar, und es gilt für  $p = 1, 2, 3, \dots$ :

$$f(x) = f^{(4p)}(x) = \sin x, \quad f'(x) = f^{(4p+1)}(x) = \cos x, \\ f''(x) = f^{(4p+2)}(x) = -\sin x, \\ f'''(x) = f^{(4p+3)}(x) = -\cos x$$

und damit  $f(0) = f^{(2p)}(0) = 0$ ,  $f^{(2p-1)}(0) = (-1)^{p+1}$ . Das Restglied  $R_n$  ergibt sich zu (12) in der Lagrange'schen Gestalt und wegen  $|\sin x| \leq 1$ ,  $|\cos x| \leq 1$  für alle  $x$  gilt  $|R_n| \leq |x|^{n+1}/(n+1)!$

$$(12) \quad R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos(\vartheta x); & n \text{ gerade} \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin(\vartheta x); & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Da die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (|x|^k/k!)$  nach dem Quotientenkriterium (↗ Konvergenzkriterien für Reihen) für alle  $x$  konvergiert, gilt als notwendige Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x|^n/n!) = 0$ , d. h.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  für alle

$x$ . Damit ist (13) die T. R. für die *Sinusfunktion*.

$$(13) \quad \sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

**II.4.** Die Funktion  $f(x) = e^x$  ist für alle  $x$  beliebig oft differenzierbar. Der Taylorsche Satz für  $x_0 = 0$  und  $h = x$  angewendet, liefert wegen  $f^{(k)}(0) = 1$  den für alle  $x$  gültigen Ausdruck (14) für die *Exponentialfunktion*.

$$(14) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\vartheta x}$$

Das in der Lagrange'schen Form geschriebene Restglied geht für alle  $x$  bei  $n \rightarrow \infty$  wegen (15) gegen Null. Es gilt deshalb (16) für alle  $x$ .

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| \leq e^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$(16) \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Wendet man den Taylorschen Satz für irgendein  $x_0$  an, so erhält man wegen  $f^{(k)}(x_0) = e^{x_0}$  und mit ähnlichen Überlegungen wie oben die T. R. (17) für die Funktion  $e^x$  entwickelt an  $x = x_0$ .

$$(17) \quad e^{x_0+h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} h^k = e^{x_0} \left( 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots \right)$$

Berücksichtigt man die Entwicklung von  $e^h$  an  $h = 0$ , so liefert diese Entwicklung gleichzeitig das *Additionstheorem der Exponentialfunktion*  $e^{x_0+h} = e^{x_0} e^h$ .

**III.** Den Taylorschen Satz kann man auch für *Funktionen mehrerer Veränderlicher* formulieren. Hat eine Funktion  $f(x, y)$  von zwei Veränderlichen für alle  $x \in [x_0, x_0 + h]$ ,  $y \in [y_0, y_0 + k]$  sämtliche partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $n + 1$  nach  $x$  und  $y$  und sind diese alle stetig, so erfüllt die Funktion  $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$  als Funktion einer Veränderlichen alle Voraussetzungen des Taylorschen Satzes mit  $t_0 = 0$  und für alle  $t \in [0, 1]$ , und es ergibt sich (18).

$$(18) \quad F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n + R_n \\ \text{mit } R_n = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\vartheta t)$$

Verwendet man die in (19) erklärte symbolische Schreibweise, so lassen sich die Summanden in (18) ersetzen durch (20) für  $t = 0$ .

$$(19) \quad \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^0 f(x_1, y_1) = f(x_1, y_1),$$

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_1, y_1) = hf_x(x_1, y_1) + kf_y(x_1, y_1),$$

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_1, y_1) =$$

$$h^2 f_{xx}(x_1, y_1) + 2hk f_{xy}(x_1, y_1) + k^2 f_{yy}(x_1, y_1), \text{ usw.}$$

$$(20) \quad F^{(p)}(t) = \frac{d^p F(t)}{dt^p} \\ = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

Aus (18) folgt dann der *Taylorsche Satz für Funktionen mit zwei Veränderlichen*: Erfüllt die Funktion  $f(x, y)$  die oben aufgeschriebenen Voraussetzungen, so gilt in (21) für das Restglied  $R_n$ : es gibt mindestens eine Zahl  $\vartheta = \vartheta(n, x_0, y_0, h, k)$  mit  $0 < \vartheta < 1$ , die von  $n, x_0, y_0, h$  und  $k$  abhängt, für die (22) gilt.

$$(21) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) \\ + \frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \dots \\ + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n \\ = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0, y_0) + R_n$$

$$(22) \quad R_n \\ = \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$$

Dies ist die Restform von Lagrange. Ebenso läßt sich die Restform von Cauchy aufschreiben.

Für  $n = 0$  ergibt sich der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*:  $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + kf_y(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)$  mit  $0 < \vartheta < 1$ . Ganz entsprechend lautet der Taylorsche Satz für drei und mehr Veränderliche.

Für die Funktion  $f(x, y) = y e^x - \sin(xy) + 1$  gilt z. B.:  $f(0, 0) = 1, f_x(0, 0) = f_{xx}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 1$  und dann nach dem Taylorschen Satz für  $x_0 = y_0 = 0$  und  $h = x, k = y: y e^x - \sin(xy) + 1 = 1 + y + o_3(x, y)$ , wobei  $o_3(x, y)$  andeutet, daß nur noch Glieder dritter und höherer Ordnung in  $x$  und  $y$  auftreten.

IV. Man kann auch *Potenzreihen von mehreren Veränderlichen* betrachten:  $\sum_{k,h=0}^{\infty} a_{kh}(x - x_0)^k (y - y_0)^h$ .

Ein Punkt  $(x, y)$  gehört zum Konvergenzbereich, wenn die Potenzreihe für diesen Punkt konvergiert. Für Potenzreihen mehrerer Veränderlicher gelten ähnliche Sätze wie für Potenzreihen einer Veränderlichen. Ist  $f(x, y)$  die Summenfunktion der Potenzreihe  $\sum_{k,h=0}^{\infty} a_{kh}(x - x_0)^k (y - y_0)^h$ , deren Konvergenzbereich nicht nur aus dem Punkt  $(x_0, y_0)$  besteht, so ist  $f(x, y)$  dann beliebig oft differenzierbar, und es gilt (23).

$$(23) \quad n! m! a_{nm} = \left. \frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m} \right|_{(x_0, y_0)}$$

Wird umgekehrt für eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $f(x, y)$  nach einer Potenzreihe gefragt, deren Summenfunktion diese vorgegebene Funktion  $f(x, y)$  ist, so wird diese durch die T. R. (24) gegeben, falls das Restglied (22) im Taylorschen Satz für die Funktion  $f(x, y)$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $|h| < h_0, |k| < k_0$  gegen Null geht. Diese Reihe bezeichnet man auch

als Entwicklung der Funktion  $f(x, y)$ .

$$(24) \quad \sum_{l,p=0}^{\infty} \frac{1}{l! p!} \left. \frac{\partial^{l+p} f}{\partial x^l \partial y^p} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^l (y - y_0)^p$$

Anwendungen der T. R. findet man bei der Entwicklung von Funktionen. Die T. R. ist eng mit dem Begriff der analyt. Funktion verbunden.

**Taylorscher Satz**  $\nearrow$  Taylorsche Reihe I.

**Technik der Programmbewertung und -prüfung**  $\nearrow$  Netzplantechnik VI.

**Teilbarkeit**: I. Relation im Bereich  $\mathbf{Z}$  der ganzen Zahlen, die auf das geordnete Paar  $(a, b)$  ganzer Zahlen genau dann zutrifft, wenn es eine ganze Zahl  $c$  gibt, so daß  $a = b \cdot c$  gilt. Die Zahl  $b$  heißt ein *Teiler* von  $a$ , und  $c$  heißt der zu  $b$  *komplementäre Teiler* von  $a$ . Man sagt auch,  $a$  ist durch  $b$  teilbar,  $b$  teilt  $a$ ,  $b$  ist enthalten in  $a$ ,  $b$  geht in  $a$  auf,  $a$  enthält  $b$ ,  $a$  ist *Vielfaches* von  $b$  und bezeichnet diesen Sachverhalt mit dem Symbol  $b|a$  [lies  $b$  teilt  $a$ ]; z. B. gilt  $3|15, -7|21$ . Jede ganze Zahl  $a \neq 0$  hat die *trivialen Teiler*  $+1, -1$  und  $+a, -a$ . Alle von  $\pm a$  verschiedenen Teiler heißen *echte Teiler* von  $a$ . Es gelten folgende Grundregeln der Teilbarkeit:

- (1) Aus  $c|b$  und  $b|a$  folgt  $c|a$ .
- (2) Aus  $b|a$  folgt  $b|ca$  für jedes  $c \in \mathbf{Z}$ .
- (3) Aus  $b|a$  folgt  $cb|ca$  und umgekehrt, falls  $c \neq 0$ .
- (4) Aus  $b_1|a_1$  und  $b_2|a_2$  folgt  $b_1 b_2 | a_1 a_2$ .
- (5) Aus  $b|a_1$  und  $b|a_2$  folgt  $b|(c_1 a_1 + c_2 a_2)$  für beliebige Zahlen  $c_1, c_2 \in \mathbf{Z}$ , also insbes.  $b|(a_1 \pm a_2)$ .
- (6) Aus  $b|a$  und  $a|b$  folgt  $b = +a$  oder  $b = -a$  und umgekehrt.

Jede T.saussage  $a|b$  bleibt richtig, wenn man  $a$  bzw.  $b$  durch  $(-a)$  bzw.  $(-b)$  ersetzt; daher genügt es, T.saussagen im Bereich  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen zu betrachten.

II. Jede natürl. Zahl  $a > 1$  hat mindestens einen *Primteiler*, das ist ein Teiler von  $a$ , der eine Primzahl ist. Ist  $p_1$  ein Primteiler von  $a$ , so gilt  $a = p_1 \cdot b$ ; falls  $b > 1$ , hat auch  $b$  mindestens einen Primteiler  $p_2$ , und es gilt  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot c$  usw. Die bei diesem schrittweisen Abspalten von Primfaktoren entstehende Frage, ob jede natürl. Zahl  $a > 1$  eine vollständige Zerlegung in Primfaktoren gestattet und ob diese *Primfaktorzerlegung* eindeutig ist, beantwortet der *Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie*: *Jede natürliche Zahl  $a > 1$  läßt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig in ein Produkt von Primzahlpotenzen  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$  zerlegen, in dem  $p_1, \dots, p_m$  paarweise verschiedene Primzahlen und  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  natürliche, von 0 verschiedene Zahlen sind*. Legt man die Reihenfolge der Faktoren durch die Forderung  $p_1 < p_2 < \dots < p_m$  fest, spricht man von der *kanonischen Primzahlzerlegung* von  $a$ . Die Existenz einer solchen Primfaktorzerlegung zeigt man induktiv: Für  $a = 2$  gilt die Behauptung, da 2 eine Primzahl ist. Ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen kleiner als  $n$  bereits bewiesen und ist  $n = p$  eine Primzahl, gilt die Behauptung. Ist aber  $n$  keine Primzahl, so gibt

es eine Zerlegung  $n = r \cdot s$  mit  $1 < r, s < n$ . Nach Induktionsvoraussetzung existieren Primfaktorzerlegungen für  $r$  und  $s$  und somit auch für  $n$ .

Der Nachweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung macht wesentlich von folgendem Satz Gebrauch: *Ist ein Produkt natürlicher Zahlen durch eine Primzahl  $p$  teilbar, so ist mindestens einer der Faktoren durch  $p$  teilbar.* Sind  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m} = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_n^{\beta_n}$  zwei Primfaktorzerlegungen von  $a$ , dann muß nach diesem Satz jeder Primfaktor  $p_i$  mit  $i = 1, \dots, m$  einem der Primfaktoren  $q_j$  mit  $j = 1, \dots, n$  gleich sein und als Faktor in derselben Anzahl vorkommen. Für eine kanonische Zerlegung folgt daraus  $p_1 = q_1, \alpha_1 = \beta_1, \dots, p_m = q_n, \alpha_m = \beta_n, m = n$ , d. h. die Eindeutigkeit der Zerlegung.

**III.** Ist  $t$  Teiler der natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , so heißt  $t$  ein *gemeinsamer Teiler* dieser Zahlen. Ein gemeinsamer Teiler  $d$  der Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ , der durch jeden gemeinsamen Teiler dieser Zahlen teilbar ist, heißt ihr *größter gemeinsamer Teiler* (ggT) und wird mit  $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  bezeichnet; z. B. gilt  $(6, 14) = 2, (12, 18, 30) = 6$ . Es gilt der Hauptsatz über den größten gemeinsamen Teiler: *Zu je  $n$  natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gibt es genau einen größten gemeinsamen Teiler  $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , und  $d$  läßt sich aus den  $a_1, a_2, \dots, a_n$  linear kombinieren*; d. h., es gibt ganze Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , so daß  $d = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ . Für die oben genannten Beispiele ist etwa  $2 = (-2) \cdot 6 + 1 \cdot 14$ ;  $6 = (-3) \cdot 12 + (-1) \cdot 18 + 2 \cdot 30$ . Es ist  $d$  die kleinste natürliche Zahl  $\neq 0$ , die in dieser Form darstellbar ist; alle anderen aus  $a_1, \dots, a_n$  linear kombinierten Zahlen sind Vielfache von  $d$ . Überdies gilt  $d \geq t$  für jeden gemeinsamen Teiler  $t$  der Zahlen  $a_1, \dots, a_n$ ; d. h.,  $d$  ist auch im Sinne der Anordnung der natürlichen Zahlen der größte unter allen gemeinsamen Teilern von  $a_1, \dots, a_n$ . Ist  $(a_1, \dots, a_n) = 1$ , so heißen die Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  *teilerfremd, relativ prim* oder *prim*. Läßt man in den Primfaktorzerlegungen der natürl. Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  für die Exponenten  $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj} \in \mathbf{N}$  für  $j = 1, 2, \dots, m$  auch die Werte 0 zu, so lassen sich alle Primfaktorzerlegungen mit den gleichen Primfaktoren  $p_1, p_2, \dots, p_m$  darstellen:

$a_1 = p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \dots p_m^{\alpha_{1m}}, a_2 = p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \dots p_m^{\alpha_{2m}}, \dots, a_n = p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \dots p_m^{\alpha_{nm}}$ . Bezeichnet  $\mu_j = \min(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$  für  $j = 1, 2, \dots, m$ , so ist  $d = (a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \dots p_m^{\mu_m}$ .

Die Primfaktorzerlegungen  $357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$  und  $196 = 2^2 \cdot 7^2$  z. B. lassen sich in der Form  $357 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 17^1; 196 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 7^2 \cdot 17^0$  darstellen, und man erhält  $d = (357, 196) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 7^1 \cdot 17^0 = 7$ .

**IV.** Im Bereich der ganzen Zahlen gilt der Satz von der *Division mit Rest*: Sind eine ganze Zahl  $a$  und eine natürliche Zahl  $b \neq 0$  gegeben, so gibt es genau ein Paar ganzer Zahlen  $q, r$  derart, daß  $a = qb + r$  mit  $0 \leq r < b$ . Die Zahl  $q$  heißt der *Quotient*,  $r$  der *Rest* bei der Division von  $a$  durch  $b$ . Ist  $a = qb + r$ , so haben  $a$  und  $b$  denselben größten gemeinsamen Teiler wie  $b$  und  $r$ ; der von  $b$  und  $r$  läßt sich i. allg. leichter berechnen, da diese Zahlen kleiner sind als die Ausgangszahlen. Falls  $r = 0$ , so ist  $(a, b) = b$ ;

falls  $r \neq 0$ , wendet man die Division mit Rest auf die Zahlen  $b$  und  $r$  an. Wie im Schema (7) angedeutet ist, läßt sich dieser Schluß wiederholen. Da die Reste  $r_i$  eine streng monoton fallende Folge natürl. Zahlen bilden, bricht das Verfahren ab. Ist  $r_{n-1} = 0$ , so ist der letzte von Null verschiedene Rest  $r_n$  der ggT  $d$  von  $a$  und  $b, d = (a, b) = r_n$ , wie man sieht, wenn man in  $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$  sukzessiv die Reste  $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_1$  unter Verwendung der vorangehenden Gleichungen aus (7) einsetzt. Man erhält eine lineare Darstellung des größten gemeinsamen Teilers:  $r_n = x_1 a + x_2 b$ . Dieses stets zum Ziel führende Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen mittels fortgesetzter Division mit Rest heißt *euklidischer Algorithmus*.

$$\begin{aligned} (7) \quad &a = q_1 \cdot b + r_1 \quad \text{mit } 0 < r_1 < b \\ &b = q_2 \cdot r_1 + r_2 \quad \text{mit } 0 < r_2 < r_1 \\ &r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 \quad \text{mit } 0 < r_3 < r_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ &r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \quad \text{mit } 0 < r_n < r_{n-1} \\ &r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0 \end{aligned}$$

Für  $a = 357$  und  $b = 196$  z. B. erhält man:

$$\begin{aligned} 357 &= 1 \cdot 196 + 161 & 35 &= 1 \cdot 21 + 14 \\ 196 &= 1 \cdot 161 + 35 & 21 &= 1 \cdot 14 + 7 \\ 161 &= 4 \cdot 35 + 21 & 14 &= 2 \cdot 7 + 0 \end{aligned}$$

Durch sukzessives Rückwärtseinsetzen erhält man eine lineare Darstellung für den ggT.

$$\begin{aligned} 7 &= 21 - 1 \cdot 14 = 21 - 1 \cdot (35 - 1 \cdot 21) \\ &= 2 \cdot 21 - 35 = 2 \cdot (161 - 4 \cdot 35) - 35 \\ &= 2 \cdot 161 - 9 \cdot 35 = 2 \cdot 161 - 9(196 - 1 \cdot 161) \\ &= 11 \cdot 161 - 9 \cdot 196 = 11 \cdot (357 - 196) - 9 \cdot 196 \\ &= 11 \cdot 357 - 20 \cdot 196. \end{aligned}$$

**V.** Zu je  $n$  natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gibt es genau eine natürliche Zahl  $v$  mit den Eigenschaften: a)  $v$  ist gemeinsames Vielfaches der  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , d. h.,  $a_1 | v, a_2 | v, \dots, a_n | v$ ; b) ist  $v'$  irgendein gemeinsames Vielfaches der  $a_1, \dots, a_n$ , so ist  $v$  Teiler von  $v'$ .

Man nennt  $v$  das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) und bezeichnet es mit  $v = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Schreibt man wiederum die Primfaktorzerlegungen der  $a_i$  alle mit denselben Primfaktoren  $p_1, p_2, \dots, p_m$  und mit Exponenten  $\alpha_{ij} \geq 0$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$ , so ist  $v = [a_1, a_2, \dots, a_n] = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_m^{\nu_m}$ , wenn  $\nu_j = \max(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{nj})$  für  $j = 1, 2, \dots, m$ . Für  $a = 36$  und  $b = 75$  z. B. erhält man  $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0, b = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^2; \nu_1 = \max(2, 0) = 2, \nu_2 = \max(2, 1) = 2, \nu_3 = \max(0, 2) = 2$ , d. h.,  $v = [36, 75] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$ .

Für zwei beliebige ganze Zahlen  $a, b$  gilt die Beziehung  $(a, b) \cdot [a, b] = |a \cdot b|$ , die man für die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen verwenden kann.

**VI.** Aus den Eigenschaften des Dezimalsystems ( $\nearrow$  Zahlensystem) lassen sich *Regeln zum Bestimmen der Teiler* einer Zahl  $m$  ableiten. Jede gerade Zahl ist *durch 2 teilbar*, sie endet mit einer der Ziffern 0, 2, 4, 6 oder 8. Da  $100 \equiv 0 \pmod{4}$ ,



ist eine Zahl  $m$  durch 4 teilbar genau dann, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern bestehende Zahl durch 4 teilbar ist. Da  $1000 \equiv 0 \pmod 8$ , ist eine Zahl  $m$  durch 8 teilbar genau dann, wenn die aus ihren letzten drei Ziffern bestehende Zahl durch 8 teilbar ist. Da  $10 \equiv 0 \pmod 5$ , ist eine Zahl  $m$  durch 5 teilbar genau dann, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Da jede Zehnerpotenz  $10^n$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  bei Division durch 3 den Rest 1 hat, gibt die Summe der Ziffern einer Zahl  $m$  den Gesamtrest modulo 3 an. Diese Summe wird *Quersumme* gen. Danach hat die Zahl den *Teiler* 3 genau dann, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Da auch jede Zehnerpotenz  $10^n$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  modulo 9 den Rest 1 hat, gilt: Eine Zahl  $m$  hat den *Teiler* 9 genau dann, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Die Zahl 576324 z. B. hat die Quersumme  $5 + 7 + 6 + 3 + 2 + 4 = 27$  und hat deshalb die Teiler 3 und 9, für die Zahl 853203 ist die Quersumme 21; sie ist nur durch 3, nicht durch 9 teilbar. Bei *Division* durch 11 haben alle Zehnerpotenzen  $10^n$  mit geradem  $n$  den Rest  $+1$ , z. B.  $10^2 = 100 \equiv +1 \pmod{11}$  oder  $10^4 = 10000 \equiv +1 \pmod{11}$ ; die Zehnerpotenzen  $10^n$  mit ungeradem  $n$  aber den Rest  $-1$ , z. B.  $10 \equiv -1 \pmod{11}$  oder  $10^3 = 1000 \equiv -1 \pmod{11}$ . Der gesamte Rest modulo 11 einer Zahl  $m$  ist deshalb der Differenz aus der Summe der Ziffern an ungeraden Stellen und der Summe der Ziffern an geraden Stellen kongruent. Diese Zahl wird *Querdifferenz* genannt und es gilt der Satz, daß eine Zahl  $m$  den *Teiler* 11 genau dann hat, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar ist. Die Zahl 576324 hat die Querdifferenz  $(4 + 3 + 7) - (2 + 6 + 5) = 14 - 13 = 1$  und ist nicht durch 11 teilbar, wohl aber 855283, weil  $(3 + 2 + 5) - (8 + 5 + 8) = 10 - 21 = -11 \equiv 0 \pmod{11}$ . Eine große Zahl  $m = a \cdot 1000 + b$  hat den *Teiler* 7, wenn  $|a - b|$  durch 7 teilbar ist, z. B. 832783 mit  $a = 832$  und  $b = 783$ ; für sie gilt  $832 - 783 = 49$ . Der Grund ist leicht einzusehen. Hat modulo 7 die Zahl  $a$  den Rest  $r_1$  und  $b$  den Rest  $r_2$ , so soll gelten  $r_1 - r_2 \equiv 0 \pmod 7$ , wenn  $|a - b| \equiv 0 \pmod 7$ . Da  $r_1, r_2 < 7$ , muß gelten  $|r_1 - r_2| = 0$  bzw.  $r_1 = r_2$ . Da aber  $1000 \equiv 6 \pmod 7$ , ist  $6 \cdot r_1 + r_2 = 7r_1$  der Gesamtrest von  $m$ , d. h.,  $m$  hat den Teiler 7. Für die Zahl 114345 ist  $a = 114 \equiv 2 \pmod 7$  und  $b = 345 \equiv 2 \pmod 7$ , weiter gilt  $|a - b| = 231 \equiv 0 \pmod 7$ , d. h., 114345 hat den Teiler 7. Wegen der Quersumme 18 hat sie den Teiler 9, wegen der Querdifferenz 0 den Teiler 11. Da je zwei Teiler 7, 9 und 11 relativ prim sind, sind auch ihre Produkte  $7 \cdot 9 = 63$ ,  $7 \cdot 11 = 77$  und  $9 \cdot 11 = 99$  Teiler von ihr. In der Tat ist  $114345 = 99 \cdot 1155 = 99 \cdot 77 \cdot 15 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11$ .

- Teilbarkeitsregeln ↗ Teilbarkeit VI.
- Teilbrüche ↗ Kettenbruch.
- Teiler ↗ Teilbarkeit I., ↗ Polynom II.
- teilerfremd ↗ Teilbarkeit III.
- Teilersumme ↗ zahlentheoretische Funktion II.
- Teilfolge ↗ Zahlenfolge III.
- Teilmenge ↗ Menge II.
- Teilnehmerbetrieb ↗ Betriebssystem I.
- Teilnenner ↗ Kettenbruch.

**Teilraum:** Teilmenge eines abstrakten Raumes (↗ Funktionalanalysis), die selbst den Axiomen der betreffenden Raumklasse genügt, z. B. ist jede Teilmenge eines metr. Raumes (↗ Raum, metrischer) ein T. dieses Raumes. Dagegen ist nur jeder abgeschlossene lineare T. (↗ Vektorraum IV.) ein T. eines Hilbertraumes.

**Teilstruktur** ↗ algebraische Struktur II.

**Teilsumme** ↗ Reihe I.

**Teilverhältnis: I.** Verhältnis  $\lambda_C$  der Längen der gerichteten Teilstrecken, die ein Punkt  $C$  einer Geraden  $g$  mit den Endpunkten  $A$  und  $B$  einer gerichteten Strecke  $AB$  auf  $g$  bildet, in Zeichen  $\lambda_C = (A, B; C) = m(AC) : m(CB)$ . Der Teilpunkt  $C$  soll nicht mit  $A$  oder  $B$  zusammenfallen. Liegt  $C$  zwischen  $A$  und  $B$ , so spricht man von *innerer Teilung* der Strecke  $AB$ . In diesem Falle sind  $AC$  und  $CB$  gleichgerichtete Strecken, es ist also  $\lambda_C > 0$ . Umgekehrt folgt aus  $\lambda_C > 0$ , daß  $C$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt. Für den Mittelpunkt  $M$  von  $AB$  gilt  $\lambda_M = m(AM) : m(MB) = +1$ .  $C$  liegt genau dann nicht zwischen  $A$  und  $B$ , wenn  $\lambda_C < 0$  ist. In diesem Fall spricht man von *äußerer Teilung* der Strecke  $AB$ . Man definiert zusätzlich  $\lambda_C = 0$ , wenn  $C = A$  ist,  $\lambda_C = \infty$ , wenn  $C$  mit  $B$  zusammenfällt, und  $\lambda_C = -1$ , wenn  $C$  der Fernpunkt von  $g$  ist (↗ projektive Gerade). Durch die Angabe des Teilverhältnisses  $\lambda_C$  eines Punktes  $C$  in bezug auf zwei Grundpunkte  $A$  und  $B$  ist die Lage von  $C$  eindeutig bestimmt (Abb. 1).

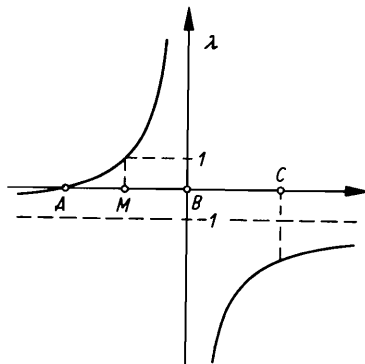
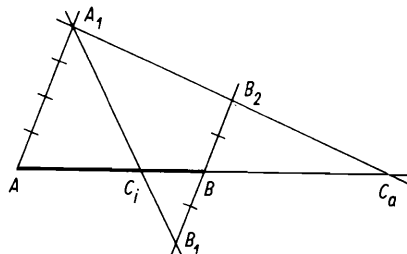
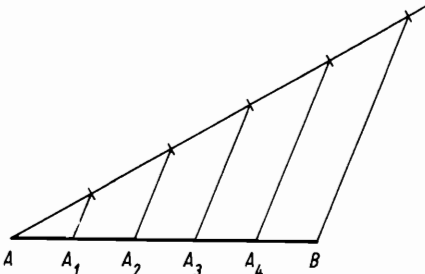


Abb. 1: Abhängigkeit des Teilverhältnisses  $\lambda_C$  von der Lage des Punktes  $C$



Teilverhältnis. Abb. 2: Konstruktion des Teilpunktes  $C$ , wenn  $\lambda = m/n$  mit ganzen Zahlen  $m, n$  ist, z. B.  $|AC_i| : |C_iB| = 4 : 2$  und  $|AC_a| : |C_aB| = -4 : 2$



Teilverhältnis. Abb. 3: Teilung einer Strecke in 5 kongruente Teilstrecken

II. Der zu vorgegebenem  $\lambda_C$  gehörige Punkt  $C$  läßt sich in manchen Fällen mit Zirkel und Lineal konstruieren, z. B. wenn  $\lambda_C = m/n$  ist, wobei  $m$  und  $n$  ganze Zahlen sind. Auf zwei Parallelen durch  $A$  und  $B$  wird von  $A$  aus bis  $A_1$  das  $|m|$ -fache einer beliebigen Einheitsstrecke und von  $B$  aus bis  $B_1$  bzw.  $B_2$  nach beiden Seiten das  $|n|$ -fache derselben Einheitsstrecke abgetragen (Abb. 2). Dann schneiden die Geraden  $A_1B_1$  und  $A_1B_2$  die Gerade  $g$  in inneren Teilpunkt  $C_i$  bzw. im äußeren Teilpunkt  $C_a$  der Strecke  $AB$ . Nach dem Strahlensatz gilt  $m(AC_i) : m(C_iB) = |m : n|$  und  $m(AC_a) : m(C_aB) = -|m : n|$ . Diese Konstruktion wird benutzt, eine Strecke gegebener Länge in  $n$  kongruente Teilstrecken zu teilen, wenn  $n$  eine positive ganze Zahl ist, z. B. in 5 Stücke (Abb. 3).

Teilzähler  $\nearrow$  Kettenbruch.

Tensor, Multilinearform:

I. Abbildung  $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbf{R}$  bzw.  $\mathbf{C}$ , die jedem  $r$ -Tupel von Vektoren aus den endlich-dimensionalen Vektorräumen  $V_1, V_2, \dots, V_r$ , die sämtlich reell bzw. sämtlich komplex sind, eine reelle bzw. eine komplexe Zahl zuordnet, und die linear ist in jedem Argument; genauer bezeichnet als  $T$ - $r$ -ter Stufe. Ist jedem Punkt eines  $n$ -dimensionalen Raumes ein  $T$ . zugeordnet, so spricht man von einem  $T$ -feld.  $T$ .n treten vor allem in der Differentialgeometrie und in der theoret. Physik auf, z. B. in der Relativitätstheorie und in der Elastizitätstheorie.

Beispiele: I.1. Faßt man die Zeilen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  einer  $(n, n)$ -Matrix  $A$  als Elemente des Vektorraumes der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen auf, so läßt sich die Determinantenfunktion  $f(A) = \det A$  als Multilinearform  $V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbf{R}$  bzw. als  $T$ .  $n$ -ter Stufe auffassen, da die Determinantenfunktion bekanntlich linear in allen Argumenten ist ( $\nearrow$  Determinante): Für alle  $i$  ist  $\det(z_1, \dots, z_i + z'_i, \dots, z_n) = \det(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) + \det(z_1, \dots, z'_i, \dots, z_n)$ .

I.2. Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler reeller bzw. komplexer Vektorraum und  $V^*$  der zu  $V$  duale Vektorraum ( $\nearrow$  Linearform), der aus allen Linearformen auf  $V$  besteht, so ist die natürl. Bilinearform  $V \times V^* \rightarrow \mathbf{R}$  bzw.  $\mathbf{C}$  mit  $\langle x, f \rangle \rightarrow c$  genau dann, wenn  $f(x) = c$ , ein  $T$ . 2. Stufe, da sie linear bzgl. jedes Argumentes ist:

$$\langle x + y, f \rangle = \langle x, f \rangle + \langle y, f \rangle \text{ und } \langle x, f + g \rangle = \langle x, f \rangle + \langle x, g \rangle.$$

I.3.  $T$ .en 1. Stufe sind nach der Definition genau die Linearformen auf  $V$ .

II. Da die  $T$ .en  $r$ -ter Stufe auf  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$ , reell- bzw. komplexwertige Funktionen sind, kann man sie auf natürl. Weise addieren und mit reellen bzw. komplexen Skalaren multiplizieren, indem man diese Operationen mit ihren Werten ausführt:

$$(f + g)(x_1, x_2, \dots, x_r) = f(x_1, x_2, \dots, x_r) + g(x_1, x_2, \dots, x_r) \text{ sowie } (\alpha f)(x_1, x_2, \dots, x_r) = \alpha f(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

Addition und Skalarmultiplikation  $r$ -stufiger  $T$ .en liefern wieder solche, und die Menge aller  $r$ -stufigen  $T$ .en auf  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  bildet einen Vektorraum der Dimension  $n_1 n_2 \dots n_r$ , falls  $n_i = \dim V_i$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ . Dieser Vektorraum wird  $T$ -produkt der Räume  $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$  genannt und mit  $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$  bezeichnet; dabei ist  $V_i^*$  der zu  $V_i$  duale Vektorraum ( $\nearrow$  Linearform). Man kann jedoch auch umgekehrt zunächst das Tensorprodukt von endlich-dimensionalen Vektorräumen definieren und die Elemente dieses  $T$ -produktes dann als  $T$ .en bezeichnen.

Bes. wichtige  $T$ .räume sind solche, bei deren Bildung nur ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum  $V$  und sein Dualraum  $V^*$  beteiligt sind.  $T$ .en auf  $V^p \times V^q$  mit  $p, q \in \mathbf{N}$  heißen  $p$ -stufig kovariant und  $q$ -stufig kontravariant. Ist  $q = 0$  bzw.  $p = 0$ , so spricht man von einem rein kovarianten bzw. einem rein kontravarianten  $T$ . der Stufe  $p$  bzw.  $q$ ; im Falle  $p \neq 0, q \neq 0$  heißt der  $T$ . gemischt. Ein rein kovarianter  $T$ . heißt alternierend, wenn er beim Vertauschen von zwei Argumenten nur sein Vorzeichen ändert. Für die in den Beispielen I.1. bis I.3. aufgetretenen  $T$ .en gilt: Die Determinantenfunktion ist ein alternierender  $n$ -stufig kovarianter  $T$ .; die natürl. Bilinearform ist ein gemischter  $T$ . 2. Stufe, und die Linearformen sind einfach kovariante  $T$ .n. Ist  $f$  ein  $T$ . auf  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r$  und  $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in_i}\}$  eine Basis von  $V_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, r$ , so ist  $f$  wegen der Multilinearität völlig bekannt, wenn man seine Werte für die  $n_1 n_2 \dots n_r$ - $r$ -Tupel  $(b_{1k_1}, b_{2k_2}, \dots, b_{rk_r})$  mit  $1 \leq k_i \leq n_i$  kennt, denn es gilt (1) mit

$$x_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_i^k b_{ik} \in V_i. \quad (1) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{\substack{k_i=1 \\ 1 \leq i \leq r}}^{n_i} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_r^{k_r} f(b_{1k_1}, b_{2k_2}, \dots, b_{rk_r})$$

Folglich erhält man bei festen Basen  $B_i$  in  $V_i$  durch Vorgabe der  $n_1 n_2 \dots n_r$  Werte  $f(b_{1k_1}, b_{2k_2}, \dots, b_{rk_r}) = a_{k_1 k_2 \dots k_r}$  jeden  $r$ -stufigen  $T$ . auf genau eine Weise. Die  $a_{k_1 k_2 \dots k_r}$  heißen die Koordinaten des  $T$ .s  $f$  bzgl. der festen Basen  $B_i$  in  $V_i$ .

Tera  $\nearrow$  Strecke  $V$ .

Term: I. in induktiver Definition zunächst jede Zahl oder Variable eines Grundbereichs. Davon ausgehend jede Summe oder Differenz und jedes Produkt zweier  $T$ .e sowie der Quotient zweier  $T$ .e, falls der Divisor von Null verschieden ist. Weitere  $T$ .e ergeben sich durch Potenzieren und Radizieren, dabei wird vorausgesetzt, daß der Potenz- und Wurzelexponent positiv ganz und der Radikand

nichtnegativ sind. Damit sind *algebraische T.e* definiert, z. B.  $5, 4/7, a, 4x, b + 7, 5(a + b), (4x + 3)/7, x^4/2$  oder  $\sqrt[3]{a}$ . Diese Definition läßt sich erweitern auf *nichtalgebraische oder transzendente T.e*, z. B.  $e^x, \sin x, \log_a y$ . Die Menge aller Zahlen des Variablengrundbereichs ( $\nearrow$  Grundbereich), für die ein T. mit einer Variablen in eine Zahl aus diesem Bereich übergeht, heißt *Definitionsbereich des T.s*; z. B. besteht der Definitionsbereich des Terms  $(4a - 5)/3$  über dem Grundbereich  $\mathbf{R}$  aus allen reellen Zahlen, während der Definitionsbereich von  $x/(x - 3)$  alle reellen Zahlen außer der Zahl 3 enthält.

Der Definitionsbereich eines T.s mit  $n$  Variablen  $a_i$  und den zugehörigen Variablengrundbereichen  $A_i$  ist die Menge aller geordneten  $n$ -Tupel  $(a_1', a_2', \dots, a_n')$ ,  $a_i' \in A_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ , für die der T. in Werte aus einer gegebenen Teilmenge des Grundbereichs übergeht.

**II.** T.e, die bei jeder Ersetzung der Variablen durch gleiche Zahlen aus den gegebenen Variablengrundbereichen gleiche Werte annehmen, werden *äquivalent* oder *gleichwertig* genannt; z. B. sind  $(4a + 5a)$  und  $(9a)$  bezüglich der Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen äquivalente T.e,  $(x^2 + x)/x$  und  $x + 1$  dagegen nicht, da  $(x^2 + x)/x$  für  $x = 0$  nicht erklärt ist,  $x + 1$  aber für  $x = 0$  den Wert 1 annimmt; sie sind aber äquivalent für die Menge aller von Null verschiedenen reellen Zahlen.

Umformungen, die einen T. in einen zu ihm äquivalenten T. überführen, heißen *äquivalente T.umformungen*. Die Eigenschaft einer T.umformung, äquivalent zu sein, hängt vom gegebenen Variablengrundbereich ab: Die Umformung  $(4a + 7a) \cdot 2 = 11a \cdot 2 = 22a$  ist äquivalent bezüglich der Menge aller reellen Zahlen. Hingegen ist die Umformung (1)

$$(1) \quad \frac{a^2 - 16a + 64}{5a - 5} \cdot \frac{a - 1}{a^2 - 64} = \frac{(a - 8)^2}{5(a - 1)} \cdot \frac{a - 1}{(a + 8)(a - 8)} = \frac{a - 8}{5(a + 8)}$$

nur äquivalent in bezug auf Mengen reeller Zahlen, die keine der Zahlen  $-8, 1$  und  $8$  enthalten, denn diese Zahlen gehören nicht zu allen Definitionsbereichen der auftretenden T.e. Die auftretenden Gleichungen sind allgemeingültig ( $\nearrow$  Gleichung) für alle reellen Zahlen, die verschiedene von  $-8, 1$  und  $8$  sind. — S. a. arithmetischer Term; Definition; Prädikatenkalkül II.

**Termeinsetzung, freie**  $\nearrow$  Prädikatenlogik.

**Termin**  $\nearrow$  Netzplantechnik.

**Terminal:** ein an eine Rechenanlage angeschlossenes Gerät zur Eingabe, Ausgabe oder Datenübertragung, bzw. für alle Operationen zugleich.

**ternär**  $\nearrow$  Prädikat,  $\nearrow$  algebraische Operation.

**tertium non datur**  $\nearrow$  Aussagenlogik I.

**Testen:** *Rechentechnik I.* method. Suchen und Korrigieren von Fehlern, die bei der Aufstellung eines Programmes entstanden sind.

**II.** Abarbeitung spezieller Programme zur Kontrolle der Funktionstüchtigkeit einzelner Baugruppen einer Rechenanlage.

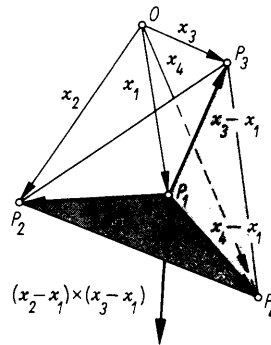
**Testgröße**  $\nearrow$  Signifikanztest I., II.

**Testtheorie:** ein Teilgebiet der mathemat. Statistik, in dem Verfahren zur Prüfung statist. *Hypothesen*, sog. *Tests*, entwickelt und theoretisch untersucht werden. Von bes. Bedeutung sind die *Signifikanztests*.

**Tetrade**  $\nearrow$  Kodierung III.

**Tetraeder:** regelmäßiges Polyeder mit vier Ecken. Sind die Ortsvektoren  $\mathbf{x}_i$  der vier Eckpunkte  $P_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  gegeben, so stellt der Ortsvektor

$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \mathbf{x}_i$  alle Punkte des T.körpers einschließlich seiner Flächen, Kanten und Ecken dar, wenn für die Parameter  $\lambda_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  die Einschränkungen gelten  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  und  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ . In Koordinaten lauten diese Gleichungen  $x = \sum_{i=1}^4 \lambda_i x_i, y = \sum_{i=1}^4 \lambda_i y_i, z = \sum_{i=1}^4 \lambda_i z_i$  ( $\nearrow$  Dreieck, Darstellung durch Koordinaten). Ist ein  $\lambda_i$  Null, so werden die Punkte der Seitenfläche erfaßt, die  $P_i$  nicht enthält. Sind zwei der  $\lambda_i$  Null, so werden die Punkte auf der Kante erfaßt, die die zwei entsprechenden Punkte  $P_i$  nicht



Zur Berechnung des Rauminhalts des Tetraeders  $P_1P_2P_3P_4$

enthält ( $\nearrow$  Strecke VI.). Der Rauminhalt  $V$  des T.s ist durch (1) bestimmt (Abb.) und kann als Betrag einer Determinante (2) dargestellt werden.

$$(1) \quad V = |(\frac{1}{6}) \cdot [(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)] \cdot (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1)|$$

$$(2) \quad V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Ist  $E_i$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  die Ebene, die die Seitenfläche enthält, auf der  $P_i$  nicht liegt, und hat man für jede der Ebenen  $E_i$  mit der Gleichung  $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$  die *Orientierung* so gewählt, daß der *Stellungsvektor*  $A_i \mathbf{i} + B_i \mathbf{j} + C_i \mathbf{k}$  ins Innere des T.s gerichtet ist, so ist  $P(x, y, z)$  genau dann ein Punkt des Tetraeders, wenn  $x, y, z$  die vier *Ungleichungen*  $A_i x + B_i y + C_i z + D_i \geq 0$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  erfüllen.

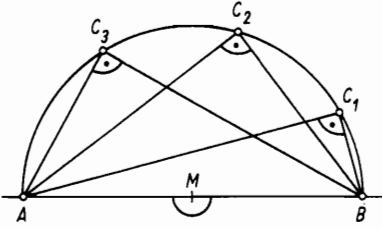
**Tetraederecke**  $\nearrow$  körperliche Ecke I.

**Thales** von Milet, geb. um 624 v. u. Z., gest. 546 v. u. Z. — Er ist der erste Vertreter der ion. Schule. Er soll der Überlieferung nach weite Reisen, z. B.

nach Ägypten, unternommen haben und auch als Politiker sehr aktiv gewesen sein. Der nach ihm ben. Satz ist von ihm erstmals streng formuliert worden.

**Thales, Satz des ↗ Kreis III.**

**Thaleskreis:** geometr. Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen. Sind  $A$  und  $B$  die gegebenen Punkte, so ist der T. der Kreis über der Strecke  $AB$  als Durch-



**Thaleskreis:** Alle Peripheriewinkel in einem Halbkreis sind rechte Winkel

messer (Abb.). In ihm haben die Zentriwinkel über  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{BA}$  die Größe  $180^\circ$ , die Peripheriewinkel mit den Scheiteln  $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$  haben die halbe Größe. — S. a. Kreis III.

**Theodolit ↗ Winkelmeßinstrumente II.**

**Theorema egregium:** ein von C. F. GAUSS 1827 angegebener Satz der Flächentheorie, der besagt, daß die Gaußsche Krümmung  $K$  einer Fläche  $F$  (↗ Krümmung I.) bei isometrischen Abbildungen invariant bleibt und durch Messungen der inneren Geometrie bestimmt werden kann. Zum Beweis stellte GAUSS die Krümmung  $K$  in den Koeffizienten  $E, F, G$  der ersten Grundform und durch ihre ersten und zweiten partiellen Ableitungen dar:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right] \right].$$

**Theorie der Lagerungen ↗ Geometrie der Zahlen.**

**Thue, Satz von ↗ diophantische Gleichung IV.3.**

**time-sharing ↗ Betriebssystem I.**

**Todesfallversicherung ↗ Lebensversicherung II.**

**Todesprozeß ↗ Geburts- und Todesprozeß.**

**Topologie [topos, griech. Ort, Stelle, Raum]:** Wissenschaft, die aus der Analyse des Raumbegriffs Eigenschaften allgemeiner Räume herleitet. Der Raumbegriff wird dabei so allgemein wie möglich gefaßt; er umfaßt den gewöhnl. euklid. Raum  $\mathbb{R}^3$ , den  $n$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^n$  und alle Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sowie den unendlichdimensionalen Hilbertraum  $H$ , die Riemannschen Räume, aber auch allgemeinere Bildungen (↗ Raum, topologischer I.; Raum, metrischer II.). Entsprechend dem Vorgehen in anderen Gebieten der Geometrie werden Eigenschaften untersucht, die bei topolog. Abbildungen erhalten bleiben. Nach den zur Untersuchung benutzten Methoden unterscheidet man von der *allgemeinen* oder *analyt. T.* die *algebraische T.* In enger Verbindung mit der Analysis hat sich z. B. die

*Funktionalanalysis* als selbständiges Gebiet entwickelt. In der algebraischen T. werden Begriffe wie Gruppe und Homomorphismus herangezogen. Den ältesten und am weitesten entwickelten Zweig der algebraischen T. stellt die *Homologietheorie* dar. S. a. Raum, topologischer.

**topologisch äquivalent ↗ Abbildung, topologische. topologische Struktur ↗ Raum, topologischer.**

**Torse ↗ abwickelbare Fläche.**

**Torsion, Windung:** Größe  $\tau(s)$ , die ein Maß dafür ist, wie stark und in welchem Sinne sich die Kurve in der Umgebung eines Punktes  $\alpha(s)$ , in dem  $k(s) > 0$  ist, aus der zugehörigen Schmiegeebene herauswindet. Da die Binormale  $\mathbf{b}(s)$  auf der Schmiegeebene senkrecht steht, ist ihre Ableitung nach der Bogenlänge  $s$  ein Maß für die T.  $\tau$ . Nach der dritten Frenetschen Formel gilt  $\dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n}$  oder, da  $\mathbf{b}$  ein Einheitsvektor ist,  $1 = -\tau \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{b}}$  bzw.  $1/\tau(s) = -\mathbf{n}(s) \cdot \dot{\mathbf{b}}(s)$ . Die Größe  $\chi = 1/|\tau|$  für  $\tau \neq 0$  wird als *Torsionsradius* bezeichnet. Eine Kurve, deren Krümmung nirgends verschwindet, ist genau dann eben, wenn ihre T. identisch verschwindet. — S. a. Schraubelinie.

**Torus, auch Wulst gen.:** I. ein ringförmiger Körper, der durch Rotation einer Kreisscheibe  $K$  um eine außerhalb von  $K$  verlaufende Achse, die in der



Abb. 1: Torus

Ebene von  $K$  liegt, entsteht (Abb. 1). Ein Ring z. B. ist ein T. Volumen und Oberfläche des T. werden nach den Guldinschen Regeln berechnet; ist  $r$  der Radius des Kreises  $K$  und  $R$  der Abstand des Mittelpunktes von  $K$  zur Drehachse, so sind das Volumen  $V = 2\pi r^2 R$  und die Oberfläche  $O = 4\pi^2 r R$  (↗ Guldinsche Regeln). — Man spricht auch von einem T., wenn die Kurve kein Kreis ist, sondern eine beliebige geschlossene ebene Kurve.

II. Entsteht der T. durch Rotation des in der  $x, z$ -Ebene liegenden Kreises  $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ ,  $r < a$ , um die  $y$ -Achse, so lautet seine Gleichung  $(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2)^2 = 4a^2(r^2 - z^2)$ . Man erhält sie mit Hilfe des Kosinussatzes im Dreieck  $OMP$  in der Form

$$|OP|^2 - |PM|^2 - |OM|^2 = -2 |OM| \cdot |PM| \cos \varphi,$$

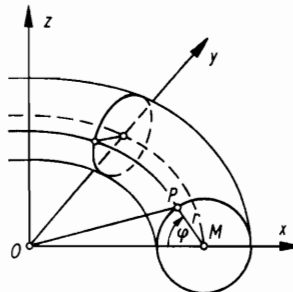


Abb. 2: Schnitt durch den Torus, der entsteht durch Rotation des Kreises mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$  um die  $z$ -Achse im Abstand  $|OM| = a$

wenn  $M$  der Mittelpunkt des rotierenden Kreises,  $P$  der Punkt auf dem  $T$ , und  $\varphi$  die Größe des Winkels  $\sphericalangle OMP$  bedeuten (Abb. 2).

**totalen Wahrscheinlichkeit, Satz der**  $\nearrow$  Bayessche Formel,  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit, totale.

**totales Differential**  $\nearrow$  Differential III.,  $\nearrow$  Differentialquotient, partieller, IV.,  $\nearrow$  Differentiationsregeln V.

**Totalordnung**  $\nearrow$  Anordnungsrelationen III.

**Totzeitglied**  $\nearrow$  Übertragungsglied I.

**TP** svw. trigonometrischer Punkt,  $\nearrow$  Triangulation.

**Träger**  $\nearrow$  duale Gebilde,  $\nearrow$  Ebene II.,  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung I.,  $\nearrow$  projektive Gebilde.

**Trägerhalbgerade**  $\nearrow$  Fahne.

**Trägerkurve**  $\nearrow$  Nomographie I.

**Trägheitsindex**  $\nearrow$  quadratische Form III.

**Trägheitsmoment:** Bezeichnung für das Produkt aus der Masse eines materiellen Punktes und dem Quadrat seines Abstands von einer Achse beim *axialen*  $T$ . bzw. dem Quadrat seines Abstands von einem festen Bezugspunkt, dem *Pol*, beim *polaren*  $T$ . Ein System von  $n$  Punkten  $P_i$  jeweils mit der Masse  $m_i$  und den Koordinaten  $x_i, y_i$  hat die *axialen*  $T.e$  (1) bzw. (2) bzgl. der  $x$ - bzw. der  $y$ -Achse und das *polare*  $T$ . (3) bzgl. des Ursprungs.

$$(1) \quad T_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \quad (2) \quad T_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$$

$$(3) \quad T_0 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Für eine mit Masse der Dichte  $\rho(x, y, z)$  belegte *Raumkurve*  $k$  sind die *axialen*  $T.e$  bzgl. der  $x$ - bzw. der  $y$ -Achse durch die *Kurvenintegrale* (4) und (5) und das *polare*  $T$ . bzgl. des Ursprungs durch (6) gegeben.

$$(4) \quad T_x = \int_{(k)} y^2 \rho(x, y, z) ds$$

$$(5) \quad T_y = \int_{(k)} x^2 \rho(x, y, z) ds$$

$$(6) \quad T_0 = \int_{(k)} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$$

Ist der *Bereich*  $B$  der  $x, y$ -Ebene mit Masse der Dichte  $\rho(x, y)$  belegt, so sind die entsprechenden  $T.e$  die *Flächenintegrale* (7), (8), (9).

$$(7) \quad T_x = \iint_{(B)} y^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$(8) \quad T_y = \iint_{(B)} x^2 \rho(x, y) dx dy$$

$$(9) \quad T_0 = \iint_{(B)} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$$

Für eine mit Masse belegte *krumme Fläche*  $S$  sind die *axialen*  $T.e$  bzgl. der  $x$ -, der  $y$ - und der  $z$ -Achse die *Oberflächenintegrale* (10), (11), (12), und das *polare*  $T$ . bzgl. des Ursprungs ist (13).

$$(10) \quad T_x = \iiint_{(S)} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$$

$$(11) \quad T_y = \iiint_{(S)} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$$

$$(12) \quad T_z = \iiint_{(S)} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$$

$$(13) \quad T_0 = \iiint_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$$

Für einen *Raubereich*  $K$  mit  $\rho(x, y, z)$  als Dichte seiner Massebelegung ergeben sich für die *axialen*  $T.e$  bzw. für das *polare*  $T$ . die *Raumintegrale* (14), (15), (16), (17).

$$(14) \quad T_x = \iiint_{(K)} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(15) \quad T_y = \iiint_{(K)} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(16) \quad T_z = \iiint_{(K)} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$(17) \quad T_0 = \iiint_{(K)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Ist der von dem *Kreiszyylinder* mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = R^2$  für  $0 \leq z \leq h$  begrenzte *Raubereich*  $K$  mit Masse der konstanten Dichte  $\rho$  belegt, so erhält man für sein  $T$ . bzgl. der  $z$ -Achse nach Einführung von *Zylinderkoordinaten*  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$  mit  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq h$  das *Raumintegral* (18), in dem  $V = \pi R^2 h$  das Volumen des Zylinders ist.

$$(18) \quad I_z = \iiint_{(K)} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

$$= \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\varphi dz$$

$$= \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R^4 d\varphi dz$$

$$= \frac{1}{4} \rho R^4 2\pi h = R^2 V / 2$$

*Steinerscher Satz:* Das  $T$ .  $T$  eines mit Masse belegten *Raubereichs* um eine beliebige *Drehachse* ist gleich dem  $T$ .  $T_0$  bzgl. der zu ihr parallelen *Drehachse* durch den *Schwerpunkt*, vermehrt um das Produkt aus *Gesamtmasse*  $M$  und dem *Quadrat* des Abstands  $a$  beider *Achsen*:  $T = T_0 + a^2 M$ .

**Traktrix, Schleppkurve:** ebene Kurve, die von einem an einem Faden konstanter Länge  $a$  gezogenen schweren Massepunkt  $P$  beschrieben wird, wenn der Fadenanfang  $K$  auf einer Geraden, der *Leitlinie*, entlang geführt wird (Abb. 1). Ist die *Leitlinie* die

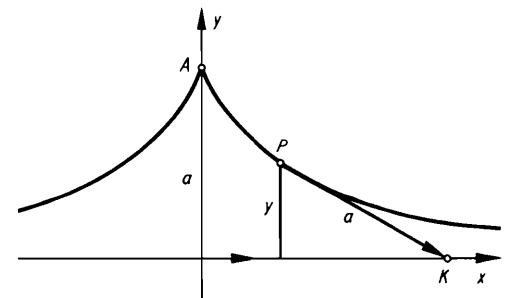
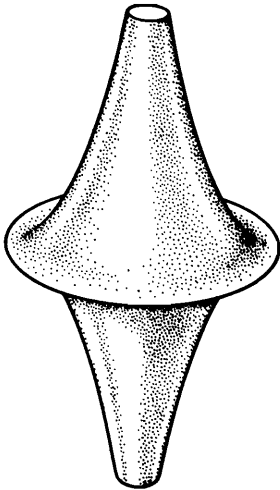


Abb. 1: Traktrix mit der  $x$ -Achse als Leitlinie

$x$ -Achse eines kartesischen Koordinatensystems und beginnt die Bewegung, wenn Punkt  $P$  auf der  $y$ -Achse den Abstand  $a$  vom Ursprung hat, so ist die T. symmetrisch zur  $y$ -Achse und hat die  $x$ -Achse zur Asymptote. Punkt  $A$  ist ein *Rückkehrpunkt*. In jeder Lage des Punktes  $P$  ist die Gerade durch  $P$  und  $K$  Tangente an die T. Es gilt  $|PK| = a$  und  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ . Durch Integration erhält man daraus die Gleichung (1) der T. Die von  $A$  gezählte Länge des Bogens ist  $l = a \ln(a/y)$ .

$$(1) \quad x = a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right| - \sqrt{a^2 - y^2}$$

Durch Rotation der T. um die Leitlinie entsteht die *Pseudosphäre* (Abb. 2), eine Drehfläche konstanter negativer Gaußscher Krümmung, auf der die hyperbolische nichteuklidische Geometrie gilt, wenn man ihre geodätischen Linien den Geraden der hyperbolischen Ebene entsprechen läßt.



Traktrix. Abb. 2:  
Pseudosphäre

- transfinit** ↗ Kardinalzahl I., ↗ Ordinalzahl.
- transfinite Induktion** ↗ Induktion, vollständige.
- Transformation, birationale** ↗ birationale Transformation.
- Transformation auf einen neuen Mittelpunkt** ↗ Potenzreihe VII.
- Transformation durch reziproke Radien** ↗ Inversion I., ↗ konforme Abbildung III.
- Transformationsgruppe:** Gruppe, deren Elemente *Transformationen* sind, d. h. *eindeutige* Abbildungen eines Raumes bzw. einer Menge *auf* sich. Die Menge aller Transformationen eines Raumes bildet mit der Hintereinanderausführung als Multiplikation eine Gruppe, die *volle T.* Die T.n spielen für die Unterscheidung der einzelnen *Geometrien* eine wichtige Rolle (↗ Erlanger Programm).
- Transformationsmatrix** ↗ Koordinatentransformation II.
- transitiv** ↗ Relation II.

**Translation** ↗ Abbildung, affine VI., ↗ Vektor I.  
**Translationsvektor** ↗ Abbildung, affine VI., ↗ Koordinatentransformation III.

**Transportierte** ↗ Matrix IV., ↗ Koordinatentransformation III.

**transportierter Operator** ↗ Operator, linearer, V.

**Transporteur** ↗ Winkelmeßinstrumente I.

**Transportproblem:** I. ein Standardproblem der Operationsforschung, das sich als Spezialfall der linearen Optimierung, meist mit dem Transportalgorithmus, lösen läßt. Beim *klassischen T.* soll ein einheitliches Transportgut aus  $m$  Lagern  $A_i$ , die jedes  $a_i$  Einheiten enthalten, auf  $n$  Bedarfsträger  $B_j$ , von denen jeder  $b_j$  Einheiten braucht, so verteilt werden, daß die Gesamtkosten so klein wie möglich sind, wenn  $p_{ij}$  die Kosten für den Transport einer Einheit von  $A_i$  nach  $B_j$  sind. Es wird vorausgesetzt, daß  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , d. h., daß der gesamte Vorrat dem gesamten Bedarf entspricht; bei  $\sum a_i < \sum b_j$  wäre die Versorgung nicht möglich, bei  $\sum a_i > \sum b_j$  müßte ein *fiktiver Bedarfsträger*  $B_{n+1}$  mit dem Bedarf  $\sum a_i - \sum b_j$  eingeführt und  $p_{i,n+1} = 0$  gesetzt werden; dabei würden die im Modell an  $B_{n+1}$  gelieferten Mengen praktisch in den Lagern verbleiben. Bezeichnet  $x_{ij} \geq 0$  die von  $A_i$  nach  $B_j$  gelieferte Menge, dann gilt  $a_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$  für  $i = 1, \dots, m$  und  $b_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$  für  $j = 1, \dots, n$ , und gefordert wird  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} = \text{Min!}$   
 Die Tabelle (1) enthält für jeden zulässigen Transportplan Werte  $\bar{x}_{ij}$ , deren Zeilensummen die  $a_i$  und deren Spaltensummen die  $b_j$  sind.  
 Die Optimierung von (1) und damit eine Basislösung im Sinne der linearen Optimierung erhält man durch wiederholte Anwendung der folgenden

(1)	$b_1 \dots b_n$
$a_1$	$\bar{x}_{11} \dots \bar{x}_{1n}$
$\vdots$	$\vdots \quad \quad \quad \vdots$
$a_m$	$\bar{x}_{m1} \dots \bar{x}_{mn}$

Regel auf (1) bzw. auf die nach der Regel modifizierten Tabellen. In ein beliebiges Feld  $\bar{x}_{ij}$  wird  $\text{Min}(a_i, b_j)$  eingetragen; in der Zeile bzw. in der Spalte dieses Elements  $\bar{x}_{ij}$  werden alle Elemente gestrichen, für die  $\bar{x}_{ij} = a_i$  bzw.  $\bar{x}_{ij} = b_j$ . Für die übrigen Elemente werden  $a_i - \bar{x}_{ij}$  als neues  $a_i$  bzw.  $b_j - \bar{x}_{ij}$  als neues  $b_j$  eingesetzt. Wird dabei stets das linke obere Feld der jeweiligen Tabelle gewählt, heißt die Regel *Nordwest-Ecken-Regel*. Meist wird jedoch jeweils ein Feld gewählt, zu dem ein minimales  $p_{ij}$  gehört. In jedem Falle bilden die eingetragenen  $\bar{x}_{ij} \geq 0$  die Werte von Basisvariablen und die zu gestrichelten Feldern gehörenden Variablen die Nichtbasisvariablen einer zulässigen Basislösung (↗ Simplexalgorithmus). Sind die  $a_i, b_j$  alle ganzzahlig, so sind auch alle Basislösungen ganzzahlig.

Ein T. heißt *kapazitiert* oder mit *Kapazitätsbeschränkung*, wenn zu den Bedingungen des klassischen T.s noch Bedingungen  $x_{ij} \leq r_{ij}$  mit gegebenen  $r_{ij} \geq 0$  kommen. Kapazitierte T.e können mit einer Verallgemeinerung des Transportalgorithmus gelöst werden.

II. Der *Transportalgorithmus* ist ein auf die Lösung des T.s spezialisierter Simplexalgorithmus. Liegt eine Basislösung vor, so werden Simplexmultiplikatoren  $u_i$  und  $v_j$  derart bestimmt, daß  $u_i + v_j = p_{ij}$  für die zur Basis gehörenden  $x_{ij}$  gilt. Das geschieht, indem eine dieser Größen Null gesetzt wird und die übrigen dann nacheinander aus den Basis- $p_{ij}$  berechnet werden. Sind z. B. (2) eine Basislösung und (3) ein Schema der Basis- $p_{ij}$ , so setzt man  $v_4 = 0$ ; aus  $u_3 + v_4 = p_{34} = 9$  erhält man dann  $u_3 = 9$ , aus  $v_3 + u_3 = p_{33} = 3$  durch Einsetzen  $v_3 = -12$  usw. Anschließend werden Größen  $p'_{ij} = p_{ij} - u_i - v_j$  für alle Nichtbasis- $p_{ij}$  berechnet, das sind die Zielfunktionskoeffizienten in der kanonischen Form. Sind alle  $p'_{ij} \geq 0$ , ist das Optimum erreicht, andernfalls wird eine Variable mit  $p'_{ij} < 0$

(2)

2			
1	2	3	
		2	0

(2a)

2 - $\theta$			$\theta$
1 + $\theta$	2	3 - $\theta$	
		2	0

(2b)

		2	
3	2	1	
		2	0

(3)

8				$u_1$
4	2	7		$u_2$
		3	9	$u_3$
$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	

in die Basis transformiert: An die entsprechende Stelle der Transporttabelle wird  $\theta$  geschrieben und diese Eintragung durch Korrekturen an den Werten der bisherigen Basisvariablen ausgeglichen. Ist im Beispiel etwa  $x_{13}$  die fragliche Nichtbasisvariable, so erhält man (2a) und aus ihm (2b), wenn  $\theta$  so groß wie möglich, d. h., so groß gewählt wird, bis eine der nichtnegativen Variablen gerade Null wird, im Beispiel  $\theta = 2$  wegen 2 -  $\theta$  im Feld  $x_{11}$ . Eine zu 0 gewordene Basisvariable wird im nächsten Schritt Nichtbasisvariable, im Beispiel  $x_{11}$ . Das Feld bleibt frei, denn eine geschriebene 0 bezeichnet eine Basisvariable mit Wert 0 bei Entartung. Nun werden wieder Simplexmultiplikatoren berechnet, bis nach endlich vielen Schritten ein Optimum erreicht ist. Allerdings besteht bei Entartung wieder die Gefahr

des Kreisens ( $\nearrow$  Optimierung). Bei Bedarf kann die Entartung beim Transportalgorithmus durch Addition von  $\epsilon$  zu allen  $a_i$  und von  $-\epsilon$  zu  $b_n$  umgangen werden;  $\epsilon$  wird während der Rechnung als sehr kleine positive Zahl behandelt und am Schluß 0 gesetzt.

Der Transportalgorithmus liefert bei ganzzahligen  $a_i, b_i$  eine ganzzahlige Lösung, er kann deshalb auch zur Lösung gewisser ganzzahliger Optimierungsaufgaben benutzt werden, z. B. beim Zuordnungsproblem. Zur Ungarischen Methode vgl. Zuordnungsproblem. S. a. Ströme auf Graphen II., III.

**Transversalen eines Dreiecks** svw. Dreieckstransversalen.

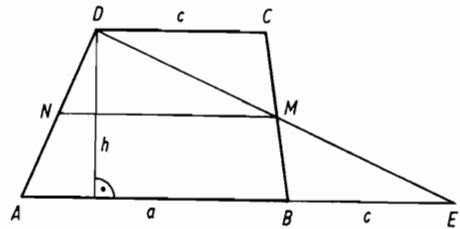
**transzendent**  $\nearrow$  Körper II.,  $\nearrow$  algebraische Funktion,  $\nearrow$  Zahlkörper II.

**transzendente Funktion**  $\nearrow$  Funktion X.

**transzendente Gleichung**  $\nearrow$  algebraische Gleichung.

**Transzendenzgrad**  $\nearrow$  Körper III.,  $\nearrow$  algebraisch abhängig.

**Trapez:** Viereck ABCD, in dem zwei Seiten parallel sind. Es heißt *rechtwinklig*, wenn ein Innenwinkel ein rechter Winkel ist, und *gleichschenkelig*, wenn es zwei kongruente Innenwinkel hat, die keine rechten



Trapez

Winkel sind. Die Summe der Größen der zwei Innenwinkel, die an jeder der beiden nichtparallelen Seiten anliegen, beträgt  $180^\circ$ . Die Fläche des T.es hat den Inhalt  $A_T = (a + c) \cdot h/2$ , wenn  $a = |AB|$  und  $c = |CD|$  die Längen der parallelen Seiten sind und  $h$  ihr Abstand ist. Für  $|BE| = c$  halbiert  $DE$  die Strecke  $BC$  in  $M$  und mit  $MN \parallel AB$  gilt  $|MN| = (a + c)/2$ .

**Trapezformel**  $\nearrow$  Integration, numerische II.

**Travelling salesman problem**  $\nearrow$  Rundfahrtproblem.

**Trend**  $\nearrow$  Vorhersage,  $\nearrow$  Zeitreihenanalyse.

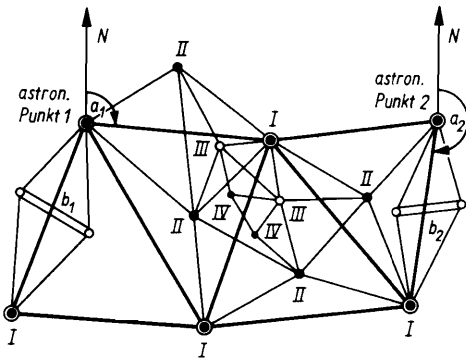
**Trennbarkeit:** Eigenschaft einer Funktion mehrerer Variabler, in Bestandteile zerlegbar zu sein, die nur gewisse der Variablen enthalten. Im Sinne der dynamischen Optimierung heißt eine Funktion von  $n$  Variablen  $G_N(g_1, \dots, g_N)$  trennbar, wenn sie als Funktion von  $g_1$  und einer nicht von  $g_1$  abhängenden Größe  $G_{N-1}$  darstellbar ist, die entsprechend als Funktion von  $g_2$  und  $G_{N-2}$  dargestellt werden kann usw. Der einfachste Fall ist der der *additiven T.*  $G_N = g_1 + g_2 + \dots + g_N$ . Eine *Trennung der Variablen* spielt auch bei der Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen eine Rolle ( $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung). — S. a. Optimierung, 'y namische, II.

**Trennung der Nullstellen** ↗ Sturmscher Satz II.4.

**Treppenkurve** ↗ Histogramm.

**treu** ↗ Darstellung I.

**Triangulation:** Bestimmung der gegenseitigen Lage von Punkten der Erdoberfläche als die der Ecken in einem Netz von Dreiecken, von denen nur Winkel und einmal eine Seite gemessen werden (Abb.). Die T. bildet die Grundlage für die *Landesvermessung*, die genaue Vermessung und Kartierung eines



Triangulation: Triangulationsnetz mit Punkten I erster, II zweiter, III dritter und IV vierter Ordnung;  $a_1, a_2$  Azimute und  $b_1, b_2$  Basisnetze zur Bestimmung der Länge je einer Seite

Landes. Das *Dreiecksnetz* I. Ordnung hat Seiten mit Längen von 40 bis 70 km, eine seiner Seiten ist mit Hilfe der mit großer Genauigkeit gemessenen Basis der Länge nach bekannt und für einige ihrer Punkte sind durch astronom. Messungen die *geograph. Koordinaten* der Länge  $\lambda$  und der Breite  $\varphi$  sowie das *Azimat* von ihnen ausgehender Seiten bestimmt, d. h. der Winkel, den diese Seiten gegen die *geograph. Nordrichtung* bilden. In dieses Netz werden nacheinander die *Dreiecksnetze* II., III. und erforderlichenfalls IV. Ordnung eingehängt, deren Seiten jeweils die des Netzes höherer Ordnung enthalten, im Mittel aber eine kleinere Länge von 20 km, 7 km oder 3 km haben und dadurch das Netz der vermessenen Punkte verdichten. Diese Ecken vermessener Dreiecke werden als *Dreiecks- oder trigonometr. Punkte* (Abk. TP) bezeichnet. Sie können Spitzen von Türmen sein oder werden durch behauene Granitsteine vermarkt.

Zur *Winkelmessung* ist es oft notwendig, über dem TP ein den Punkt weithin sichtbar machendes *Signal* zu errichten, das zur erhöhten Aufstellung des *Theodolits* dient. Die *Koordinaten* der TP werden in der DDR auf das *Ellipsoid* von F. N. KRASSOWSKI bezogen (↗ *Erdellipsoid*). Die T. wurde von W. SNELLIUS 1617 bei einer *Gradmessung* zuerst angewandt.

Durch die Entwicklung des *Radars* und anderer Verfahren, mit Hilfe *elektromagnet. Wellen* Entfernungen mit großer Genauigkeit zu messen, ist als Gegenstück zur T. die *Trilateration* möglich geworden, die die *Vermessungsarbeiten* wesentlich be-

schleunigt (↗ *ebene Trigonometrie* I.). Die *Trilateration* wird in unerschlossenen Gebieten angewandt, wo mit ihrer Hilfe rasch ein *Dreiecksnetz* aufgebaut werden kann.

**Triederecke** ↗ körperliche Ecke I.

**Trigonometrie** [griech., *Dreiwinkelmessung*]: Lehre von der *Dreiecksberechnung* mit Hilfe von *Winkelfunktionen*, die deshalb oft *trigonometr. Funktionen* heißen. Die *ebene T.* stützt sich auf die *Sätze* der *Planimetrie*, die *sphär. T.* gehört zur *Geometrie* der *Kugeloberfläche*, die als *Modell* einer *ellipt. nicht-euklid. Geometrie* aufgefaßt werden kann.

Die Anfänge der T. gehen in das *Altertum* zurück. ARISTARCH von Samos (um 280 v. u. Z.) verwandte die *Eigenschaften* *rechtwinkliger Dreiecke*, um das *Verhältnis* der *Entfernungen* der *Sonne* bzw. des *Mondes* von der *Erde* zu berechnen. HIPPARCH von Nizäa (um 150 v. u. Z.) verfaßte eine *Schrift* über „*Kreissehnen*“ und stellte eine *Sehnentabelle* auf; auch PROLEMÄUS (um 150 v. u. Z.) berechnete eine „*Sehnentafel*“; man rechnete statt mit dem *Sinus* mit der *Sehne* [chorda],  $crd \alpha$  ist die *Länge* der *Sehne* zum *Zentriwinkel*  $\alpha$  im *Kreis* mit dem *Radius* 1. Araber und Inder bauten die T. weiter aus. In der *Renaissance* erzwangen die *Probleme* des sich rasch entwickelnden *Geschützwesens* und der *Hochseeschifffahrt* eine *zunehmende Verbesserung* der *trigonometr. Tafeln* und eine *Durchbildung* der T. Der *Mathematiker* und *Astronom* J. REGIOMONTANUS (1436–1476) faßte *Lehrsätze* und *Methoden* der *ebenen* und der *sphär. T.* in dem *fünfbändigen Werk* »De triangulis omnimodis« [Über alle *Arten* von *Dreiecken*] zusammen. Im wesentlichen verdankt man L. EULER (1707–1783) die *heutige Schreibweise* und die *analyt. Darstellung* der *trigonometr. Funktionen*.

**trigonometrische Approximation** ↗ *Approximation. trigonometrische Funktion* svw. *Winkelfunktion*; s. a. *Entwicklung* von *Funktionen* II; *komplexwertige Funktion*, *elementare*, II.

**trigonometrische Reihe** ↗ *Fouriersche Reihe* I.

**trigonometrischer Punkt** ↗ *Triangulation*.

**Trilateration** ↗ *Triangulation*, ↗ *ebene Trigonometrie* I.

**Trilliarde** ↗ *Zehnerpotenzen*.

**Trillion** ↗ *Zehnerpotenzen*

**Trimetrie** ↗ *Axonometrie*.

**Tripel** ↗ *Funktion* V., ↗ *geordnetes Paar*, ↗ *Klammer* III.

**Trisektion** ↗ *geometrische Figur*, ↗ *Galoissche Theorie*, ↗ *Konstruierbarkeit* mit *Zirkel* und *Lineal*.

**Trochoide** ↗ *Zykloide* VI.

**Tschebyschow**, Pafnuti Lwowitsch, geb. 16. 5. 1821 Okatowo (Gouvernement Kaluga), gest. 8. 12. 1894 Petersburg (Leningrad). — T. war *Sohn* einer *Adelsfamilie*, studierte in *Moskau* und *Petersburg*, promovierte dort 1849 und wurde 1850 zum *Professor* ernannt. In *35jähriger Lehrtätigkeit* scharte er viele *Schüler* um sich, die seine *Ideen* weiterentwickelten. Er lenkte seine *Schüler* auf *fruchtbare Themen* für *selbständige Forschungen* und richtete ihre *Aufmerksamkeit* auf *Fragen*, deren *Beantwortung* meist zu *wertvollen Resultaten* führte. Durch seine *Arbei-*



ten entwickelte er die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* zu einer streng mathemat. Disziplin. Auch auf den Gebieten der *Zahlentheorie*, der Integrations- und *Approximationstheorie* genoß T. den Ruf eines erstklassigen Mathematikers. Seine Theorie der besten Approximation mündete im 20. Jh. in die moderne konstruktive Funktionentheorie ein.

**Tschebyschow, Satz von**  $\nearrow$  Gesetze der großen Zahl I.

**Tschebyschow-Polynom:** eine für die *Approximation* und die *Gauß-Quadratur* ( $\nearrow$  Integration, numerische III.) wichtige Polynomklasse, die definiert ist durch  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  für  $-1 \leq x \leq 1$  und den Rekursionsformeln (1) genügt. Das T.-P.  $T_n(x)$  hat in  $[-1, 1]$  genau  $n$  reelle Nullstellen  $x_k = \cos((2k + 1)\pi/2)$  für  $k = 0, \dots, n - 1$ . Die *Orthogonalität* der T.-P.e ergibt sich daraus, daß (2) folgende Werte annimmt: 0 für  $m \neq n$ ,  $\pi/2$  für  $m = n \neq 0$  und  $\pi$  für  $m = n = 0$ .

$$(1) \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1$$

$$(2) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**Tschebyschowsche Ungleichung:** Abschätzung (1) für die Wahrscheinlichkeit der Abweichung einer Zufallsgröße  $X$  von ihrem Erwartungswert  $EX$ .  $D^2X$  ist dabei die Dispersion von  $X$  ( $\nearrow$  Streuung).

$$(1) \quad P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq D^2X/\epsilon^2$$

Sie spielt in vielen theoret. Untersuchungen eine Rolle, z. B. bei der Herleitung von *Gesetzen der großen Zahl*.

**t-Test, Student-Test:** ein Signifikanztest zum Vergleich zweier Mittelwerte aus normalverteilten Grundgesamtheiten, wenn die Streuungen  $\sigma_X$  und  $\sigma_Y$  zwar nicht bekannt sind, man aber begründet annehmen kann, daß sie gleich sind. Die zu prüfende Hypothese  $H_0$  lautet deshalb  $EX = EY$ . Zwei unabhängige mathemat. Stichproben  $X = (X_1, \dots, X_{n_1})$  und  $Y = (Y_1, \dots, Y_{n_2})$  aus den beiden Grundgesamtheiten können durchaus verschiedenen Umfang haben. Als Testgröße benutzt man die gemäß (1) definierte Größe  $T(X, Y)$  aus den Stichprobenmitteln  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  und aus den Stichprobenvarianzen  $S_X^2$  und  $S_Y^2$ .

$$(1) \quad T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}} \cdot W, \\ W = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

Unter den angegebenen Voraussetzungen, daß  $X$  und  $Y$  normalverteilt sind, daß ihre Streuungen gleich sind, und unter der Annahme, daß  $H_0$  wahr ist, genügt  $T$  einer  $t$ -Verteilung mit  $k = n_1 + n_2 - 2$  Freiheitsgraden. Ist  $t_{\alpha, k}$  das  $\alpha/2$ -Quantil der  $t$ -Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden, das aus Tabellen entnommen werden kann, so ist der kritische Bereich  $B = \{t, |t| > t_{\alpha, k}\}$ . Erfüllt dann die gemäß (1) aus den konkreten Stichproben sich ergebende Reali-

sierung  $t$  der Zufallsgröße  $T$  die Ungleichung  $|t| > t_{\alpha, k}$ , so wird die Hypothese  $H_0$  verworfen.

**Tucker, Albert Wilhelm,** geb. 28. 11. 1905 Oshawa (Kanada). — Er ist zur Zeit als Professor an der Universität in Princeton beschäftigt und trug zusammen mit H. W. KUHN wesentlich zur Ausarbeitung der *nichtlinearen Optimierung* bei. Er veröffentlichte außerdem zu Problemen der Topologie und Differentialgeometrie.

**Tupel**  $\nearrow$   $n$ -Tupel.

**Turán, Satz von**  $\nearrow$  Extremalprobleme.

**Turing, Alan Mathison,** geb. 23. 6. 1912, gest. 7. 6. 1954. — T. zeigte schon während des Studiums in Cambridge und Princeton (USA) Interesse an Problemen der *Logik* und der *Grundlagenforschung*. Die von ihm angegebene *T.-Maschine* klärte den Begriff des Algorithmus. Weiter befaßte sich T. mit der äquivalenten Uniformung von Algorithmen und Programmen. Andere Wissenschaftler auf diesen Gebieten waren GÖDEL, E. POST, C. PICARD mit seiner Theorie der Fragebögen, MARKOW u. a.

**Turing-Maschine:** *mathematische Logik* sehr einfache, idealisierte Rechenmaschine; zuerst betrachtet 1936—37 von E. L. POST und A. M. TURING im Zusammenhang mit der Klärung des Begriffs der Berechenbarkeit einer Funktion bzw. des Algorithmusbegriffs. — Eine T. besteht a) aus einem *Operationswerk*, das endlich vieler Zustände  $c_1, \dots, c_m$  fähig ist; b) aus einem ein- oder beidseitig unendl. *Rechenband*, das in einzelne *Zellen* unterteilt ist, die leer sind oder einen Buchstaben eines vorgegebenen endl. Alphabets  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  enthalten; c) aus einem *Lese- und Schreibkopf*, der jeweils über einer Zelle — dem *Arbeitsfeld* — des Rechenbandes steht und deren Inhalt liest, ihn löscht und einen neuen Inhalt einträgt; d) aus einer *Bewegungseinrichtung* für das Rechenband, die dieses um je eine Zelle nach rechts oder nach links verschieben kann. — Jede T. läßt sich durch eine  $m(n + 1)$ -reihige vierspaltige Matrix, *Turing-Tafel* gen., beschreiben, deren Zeilen die Form  $c_j a_k v_{jk} c'_k$  haben. Diese Form gibt an, daß sich die T. im Zustand  $c_j$  mit  $j = 1, 2, \dots, m$  befindet und daß im Arbeitsfeld der Buchstabe  $a_k \in A$  oder der Hilfsbuchstabe  $a_k = a_0$  steht, der angibt, daß die Zelle leer ist. Ist  $v_{jk} \in A$  oder  $v_{jk} = a_0$ , so wird  $v_{jk}$  an Stelle von  $a_k$  in das Arbeitsfeld eingetragen; ist  $v_{jk}$  einer der weiteren Hilfsbuchstaben  $r, l$  bzw.  $s$ , so bleibt der Inhalt des Arbeitsfeldes ungeändert, und das Rechenband rückt bei  $v_{jk} = r$  bzw.  $v_{jk} = l$  eine Zelle nach rechts bzw. nach links; bei  $v_{jk} = s$  stoppt die T. Schließlich gibt  $c'_k$  den *Folgezustand* der T. an.

Jede T. stellt einen speziellen *Algorithmus* dar, dessen Anwendung auf eine gewisse Inschrift auf dem Rechenband dort eine neue Inschrift produziert, falls die T. nach endlichen vielen Schritten stoppt, oder aber kein Ergebnis liefert, falls die T. nicht stoppt. Mittels T.n kann man auch präzise formulieren, wann eine *Funktion berechenbar* ist: Eine Wortfunktion  $f$ , die für gewisse Wörter über einem endl. Alphabet  $A$  erklärt ist, ist berechenbar, falls es eine T. gibt, die auf Wörter über  $A$  anwend-

bar ist, für solche Wörter  $W$  auf dem Rechenband  $f(W)$  produziert, falls  $f(W)$  erklärt ist, und andernfalls nicht stoppt.

**Turingtafel** ↗ Turing-Maschine.

**Turnier:** *Graphentheorie* ungerichtetes vollständiges  $n$ -Eck, dessen Kanten irgendwie mit einer Orientierung versehen werden. Die Bezeichnung T. erklärt sich daraus, daß das „vollständig orientierte“ vollständige  $n$ -Eck alle Spiele je zweier von  $n$  Sportteams  $x_1, x_2, \dots, x_n$  repräsentiert, wenn den Teams  $x_i$  eindeutig durch  $x_i \rightarrow X_i$  die Knotenpunkte  $X_i$  des  $n$ -Ecks zugeordnet werden. Dabei soll kein Spiel unentschieden ausgehen, eine Annahme, die etwa für Volleyball erfüllt ist. Die Kante  $(X_i, X_j)$  soll dann für je zwei voneinander verschiedene Knotenpunkte  $X_i, X_j$  durch einen von  $X_i$  nach  $X_j$  gerichteten Bogen ersetzt werden, wenn das Team  $x_i$  das Team  $x_j$  besiegt hat. Am Ende des Turniers verdeutlicht dann der „vollständig orientierte“ vollständige Graph, wie die einzelnen Spiele ausgefallen sind. Unter der *Quelle eines Turniers* versteht man einen Knotenpunkt mit der Eingangsvalenz 0, unter einer *Senke* einen mit der Ausgangsvalenz 0 (↗ Graph III.).

Eine elementare Bahn in einem gerichteten Graphen  $G$ , die alle Knotenpunkte von  $G$  enthält, heißt *Hamilton-Bahn*: ein Kreis in  $G$ , der alle Knotenpunkte von  $G$  enthält, wird als *Hamilton-Kreis* bezeichnet. Man kann zeigen, daß jedes Turnier eine Hamilton-Bahn hat. Darüber hinaus bewies L. RÉDEI 1934 den Satz: *Die Anzahl der in einem beliebigen Turnier enthaltenen Hamilton-Bahnen ist ungerade.*

**t-Verteilung, Student-Verteilung:** Verteilungsgesetz einer stetigen Zufallsgröße  $X$ , die  $t$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden für  $n \in \mathbf{N}$  heißt, wenn sie eine Dichte der Form (1) hat. Dabei ist  $\Gamma(x)$  die Gammafunktion.

$$(1) \quad f(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \cdot (1+x^2/n)^{-(n+1)/2}$$

Für  $n \geq 2$  existiert der Erwartungswert mit dem Wert Null und für  $n \geq 3$  die Streuung mit dem Wert  $\sqrt{n/(n-2)}$ . Sind  $Y$  und  $Z$  unabhängige Zufallsgrößen (↗ Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) und ist  $Y \in N(0, 1)$  (↗ Normalverteilung I.),  $Z$  aber  $\chi^2$ -verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden, so hat  $X = Y/\sqrt{Z/n}$  eine  $t$ -V. mit  $n$  Freiheitsgraden. Die  $t$ -V. spielt in der mathemat. Statistik, z. B. beim  $t$ -Test, eine wesentl. Rolle. Die dabei verwendeten Quantile sind tabelliert.

**Typentheorie** ↗ Mengenlehre III., ↗ Prädikatenkalkül I.

## U

**überabzählbar** ↗ Menge III.

**überall dicht** ↗ Zahlengerade, ↗ rationale Zahlen II.

**Überdeckungsproblem:** ein Standardproblem in der 0-1-Optimierung (↗ Optimierung, ganzzahlige), auf

das verschiedenartige Modelle der Operationsforschung führen, z. B. für den Entwurf günstiger Schaltungen oder zur Einteilung von Versorgungsgebieten. Formal lautet die Aufgabe, aus einer Matrix mit Elementen 0 oder 1 möglichst wenige Spalten auszuwählen, so daß für alle Zeilenindizes  $i$  an der  $i$ -ten Stelle mindestens einer Spalte eine 1 steht. Bei unterschiedlicher Bewertung der Spalten entsteht daraus das *gewichtete Ü.* — S. a. Packungs- und Repräsentationsprobleme I.4.

**Überföhrungsfunktion** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.

**Übergangsfunktion** ↗ Zeitfunktion II.

**Übergangsmatrix** ↗ stochastischer Prozeß III.

**Übergangstransformation** ↗ Optimierung, dynamische I.

**Übergangswahrscheinlichkeit** ↗ stochastischer Prozeß III.

**Überlebenswahrscheinlichkeit** ↗ Zuverlässigkeitstheorie.

**überschlagenes Viereck** ↗ Flächeninhalt I., ↗  $n$ -Eck I.

**Übersetzer** ↗ Programmierung des Digitalrechners I., ↗ Betriebssystem II.

**Übertrag** ↗ Addition II.

**Übertragungsfunktion:** Kennfunktion zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens von linearen Übertragungsgliedern bzw. von Systemen. Sie stellt eine mathemat. Verallgemeinerung des Frequenzganges dar und ist nur für Systeme mit konzentrierten Parametern erklärt. Die  $\dot{U}$ . ist als Quotient der Laplace-Transformierten (↗ Laplace-Transformation) der Ein- und Ausgangssignale für den Fall verschwindender Anfangsbedingungen durch (1) definiert.

$$(1) \quad G(p) = \mathbf{L}\{x_A(t)\}/\mathbf{L}\{x_B(t)\} = X_A(p)/X_B(p) \\ \text{mit } x_A(0+) = \dot{x}_A(0+) = \dots = x_A^{(n-1)}(t) = 0$$

Bei der Ermittlung der  $\dot{U}$ . aus der Differentialgleichung ergibt sich die  $\dot{U}$ . meist in *Polynomform* (2) mit  $n \leq m$  als Realisierbarkeitsbedingung.

$$(2) \quad G(p) = \left[ \sum_{i=0}^n b_i p^i \right] / \left[ \sum_{i=0}^m a_i p^i \right]$$

Die Übertragungseigenschaften des jeweiligen Systems sind hierbei in den Werten der Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  enthalten. Die Produktzerlegungen der Polynome in Zähler und Nenner liefern die Produktform (3) der  $\dot{U}$ .; dabei bedeuten  $p_i$  die *Pole* und  $p_j$  die *Nullstellen* des Systems, und es ist  $n \leq m$ .

$$(3) \quad G(p) = \left[ \prod_{i=0}^n (p - p_i) \right] / \left[ \prod_{i=0}^m (p - \hat{p}_i) \right]$$

Die Lage der Pole und Nullstellen im *Pol-Nullstellen-Diagramm* kann somit als graph. Äquivalent der  $\dot{U}$ . betrachtet werden.

Die große Bedeutung der  $\dot{U}$ . ergibt sich vornehmlich aus der damit in Zusammenhang stehenden besonders einfachen Verknüpfung von Signal- und

Systemkennfunktionen, die z. B. eine einfache Berechnung von  $\nearrow$  Einschwingvorgängen gestattet. Hierbei wird vor allem die Lösung des Faltungsintegrals ( $\nearrow$  Laplace-Transformation II.6.) umgangen (Lösung im Zeitbereich).

Die Äquivalenz der Ü. zu anderen Beschreibungsformen wird einerseits zum *Zeitbereich* vermittelt durch die Beziehung (4), d. h., die Ü. ist die Laplace-

$$(4) \quad G(p) = L\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-pt} dt$$

Transformierte der Gewichtsfunktion; zum andern kann unter praktisch stets erfüllten Bedingungen auf den *Spektralbereich* übergegangen werden, indem  $i\omega$  für den komplexen Operator  $p$  gesetzt wird ( $\nearrow$  Frequenzgang), so daß  $G(i\omega) = G(p)$  ist.

**Übertragungsglied:** Element eines kybernet. Systems und damit Abschnitt eines Wirkungsweges, dessen Funktion unabhängig von seiner konkreten Realisierung betrachtet wird. Das Ü. hat ein oder mehrere Eingangs- und Ausgangsgrößen, zwischen denen eine rückwirkungsfreie Übertragung angenommen wird.

Aus der Sicht der Informationstheorie ( $\nearrow$  Information) werden Ü.er als *informationsverarbeitende* Glieder betrachtet, in denen eine bestimmte Signalwandlung oder Signalverknüpfung stattfindet.

Bezeichnung Übertragungsfunktion	Symbol	DGL
Proportionalglied $K_p$		$x_A = K_p x_E$
Verzögerungsglied 1. Ordnung $\frac{1}{T + T_D}$		$T \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E$
Verzögerungsglied 2. Ordnung (schwingend) $\frac{1}{1 + 2DT + T^2 p^2}$		$T^2 \frac{d^2 x_A}{dt^2} + 2DT \frac{dx_A}{dt} + x_A = x_E$
Integralglied $\frac{K_I}{p} = \frac{1}{T_I p}$		$\frac{dx_A}{dt} = K_I x_E$ $= \frac{1}{T_I} x_E$
Differentialglied (nicht exakt realisierbar) $K_D p = T_D p$		$x_A = K_D \frac{dx_E}{dt}$ $= T_D \frac{dx_E}{dt}$
Totzeitglied $e^{-T_t p}$		$x_A(t) = x_E(t - T_t)$

Übertragungsglied. Abb. 1: Grundtypen linearer Elementarglieder und ihre Differentialgleichung DGL

Bei der Klassifikation der Ü.er ist es zweckmäßig, von der Art der zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten der Signalverarbeitung auszugehen. Man unterscheidet üblicherweise zwischen linearen, nichtlinearen, binären speicherfreien und binären speichernden Übertragungsgliedern.

I. Bei *linearen* Ü.ern sind die Eingangsgrößen  $x_E$  und die Ausgangsgrößen  $x_A$  *analoge Signale*. Hierbei werden das stat. Übertragungsverhalten als linear und das dynam. Verhalten als zeitinvariant betrachtet. In Abb. 1 sind die für prakt. Zwecke definierten *Grundtypen* linearer Elementarglieder zusammengestellt. Dabei bedeuten  $T, T_I, T_D, T_t, D, K_p, K_I$  und  $K_D$  Konstante.

Kompliziertere lineare Ü.er können durch Kombination der Elementarglieder gebildet werden, wie z. B. durch  $PT, T_t, IT, DT$ .

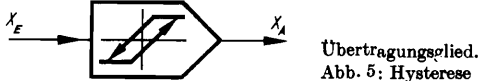
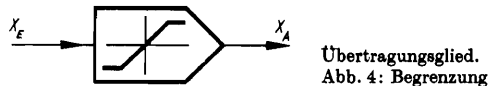
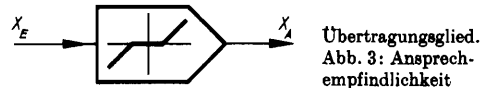
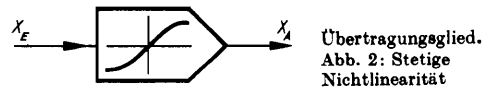
Zur mathemat. Beschreibung von linearen Ü.ern können anstelle der Differentialgleichung und der Übertragungsfunktion auch andere Kennfunktionen benutzt werden, z. B. die Gewichtsfunktion, die Übergangsfunktion ( $\nearrow$  Zeitfunktion) oder der komplexe Frequenzgang.

II. Im *nichtlinearen* Ü. ist das stat. Übertragungsverhalten  $x_A|_{t \rightarrow \infty} = f(x_E)|_{t \rightarrow \infty}$  nicht linear. Das *Superpositionsprinzip*, d. h., die störfreie Überlagerung der Wirkungen der Einzelsignale gilt nicht. Alle realen Ü. sind praktisch nichtlinear. Lineares Verhalten stellt somit stets eine Approximation nichtlinearen Verhaltens dar, die u. U. vom Arbeitspunkt abhängt. Je nach Art der stat. Gesetzmäßigkeit des nichtlinearen U.es unterscheidet man zwischen *stetiger* und *unstetiger* Nichtlinearität (Abb. 2).

Die wichtigsten elementaren *unstetigen Nichtlinearitäten* sind Ansprechempfindlichkeit, Begrenzung und Hysterese.

II.1. Bei der *Ansprechempfindlichkeit* wird nur dann ein von Null verschiedenes Ausgangssignal abgegeben, wenn das Eingangssignal einen bestimmten Grenzwert, den *Ansprechwert*, überschritten hat (Abb. 3).

II.2. Die *Begrenzung* ist dadurch gekennzeichnet, daß oberhalb eines gewissen Wertes, des *Begrenzungswertes*, keine weitere Vergrößerung des Ausgangssignals stattfindet (Abb. 4).

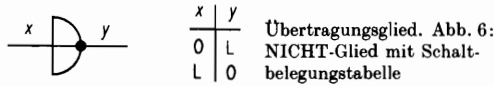


III.3. Bei der *Hysterese* hat das Ausgangssignal für steigendes Eingangssignal einen anderen Verlauf als für fallendes Eingangssignal (Abb. 5).

Durch Kombination dieser Grundtypen, u. U. auch mit stetigen Nichtlinearitäten, ergibt sich die Vielfalt der zusammengesetzten Nichtlinearitäten. Praktisch bedeutsam sind vor allem das Zwei-, Drei- und Mehrpunktglied ohne und mit Hysterese.

III. Das *binäre speicherfreie Ü.* ist diskret, seine Eingangssignale  $x_B$  und Ausgangssignale  $x_A$  können nur die beiden Zustände O oder L annehmen und das Ausgangssignal ist eine log. Funktion allein der Eingangssignale:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Binäre Ü.er können als techn. Realisierung aussagenlog. Funktionen interpretiert werden ( $\nearrow$  Aussagenlogik). Sie dienen zum Aufbau speicherfreier binärer Schalt-systeme.

Binäre Ü.er können nach der Anzahl der Eingangssignale unterschieden werden.



Übertragungsglied. Abb. 6: NICHT-Glied mit Schaltbelegungstabelle

III.1. Unter den binären Ü.ern mit einem Eingangssignal  $x$  und einem Ausgangssignal  $y$  ist das *NICHT-Glied*, auch *Negator* gen., praktisch bedeutsam (Abb. 6).

III.2. Binäre Ü.er mit zwei und mehr Eingangssignalen und einem Ausgangssignal heißen auch *Ver-*

Bezeichnung und Schaltgleichung	Symbol	Schaltbelegungs-tabelle		
		$x_1$	$x_2$	$y$
<b>UND-Glied</b> (Konjunktion) $y = x_1 \wedge x_2$		0 0 L L	0 L 0 L	0 0 0 L
<b>ODER-Glied</b> (Alternative) $y = x_1 \vee x_2$		0 0 L L	0 L 0 L	0 L L L
<b>NOR-Glied</b> $y = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$		0 0 L L	0 L 0 L	L L L 0
<b>NAND-Glied</b> $y = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$		0 0 L L	0 L 0 L	L 0 0 0

Übertragungsglied. Abb. 7: Symbole, Schaltbelegungstabelle und Schaltgleichungen der Glieder UND, ODER, NOR und NAND

*knüpfungsglieder*. Abb. 7 zeigt die Schaltbelegungstabelle der entsprechenden Glieder. In den Schaltgleichungen bedeutet  $\bar{x}$  das zu  $x$  in bezug auf Addition inverse Element.

Für die Realisierung sämtlicher log. Funktionen ist die Verwendung zweier Typen binärer Ü.er der

Übertragungsglied:

$t+1x_1$	$t+1x_2$	$t_y$	$t+1y$
0	0	0	0
0	0	L	L
0	L	0	0
0	L	L	0
L	0	0	L
L	0	L	L
L	L	0	L
L	L	L	L

Übertragungsglied. Abb. 8: Symbol und Übertragungstabelle des RS-Flipflop; für die letzten beiden Zeilen ist die Belegung verboten

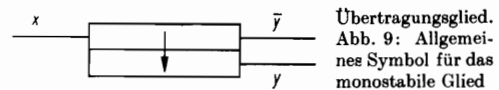
Art ODER und NICHT bzw. UND und NICHT oder die alleinige Verwendung der Grundtypen NOR bzw. NAND hinreichend ( $\nearrow$  Normalform der Aussagenlogik).

IV. Das *binäre Speicherglied* ist ein diskretes Ü., dessen Ein- und Ausgangssignale nur die beiden Zustände O oder L annehmen können und dessen Ausgangssignale von den Eingangssignalen und vom inneren Zustand sowie u. U. von der Zeit abhängen.

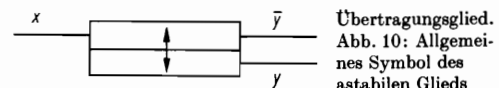
Die wichtigsten Grundtypen binärer Speicherglieder sind das bistabile, das monostabile und das astabile Glied.

IV.1. Das *bistabile Glied*, auch *Elementarspeicher* oder *Flipflop* genannt, verfügt über zwei Eingangssignale  $x_1$  und  $x_2$  sowie über das Ausgangssignal  $y$  und dessen Invertierte  $\bar{y}$ . Die Abb. 8 zeigt das *RS-Flipflop*, in dessen Übergangstabelle  $t_y$  den früheren und  $t+1y$  den neuen Wert des Ausgangs- bzw. Speichersignals bezeichnen und  $t+1x_1$  sowie  $t+1x_2$  die neuen Werte des Setz- und Löschgangs.

IV.2. Das *monostabile Glied* verwirklicht eine zeitlich begrenzte Speicherung. Je nach Ausführung können verschiedene Formen von Anzugs- und Abfallverzögerung realisiert werden. Im Falle einer einfachen Anzugsverzögerung ist das Ausgangssignal  $y$  gegenüber dem Eingangssignal  $x$  um die Zeit  $T$  verzögert (Abb. 9). Die Gleichung für die



Übertragungsglied. Abb. 9: Allgemeines Symbol für das monostabile Glied



Übertragungsglied. Abb. 10: Allgemeines Symbol des astabilen Glieds

Anzugsverzögerung um die Zeit  $T$  lautet in der dafür übl. Schreibweise  $y = e^{-T}x$ .

**IV.3.** Das *astabile U.* erzeugt eine period. Rechteckschwingung (Abb. 10). Es besteht die Möglichkeit, ein gleiches oder ungleiches Tastverhältnis  $\tau = T_{\text{ein}}/(T_{\text{ein}} + T_{\text{aus}})$  zu verwirklichen. Das astabile Glied wird in Schaltsystemen vorzugsweise als Taktgenerator eingesetzt.

**Übertragungsverhalten**  $\nearrow$  Regelung II.

**Umfang der Ellipse**  $\nearrow$  Funktionenreihe III.5.

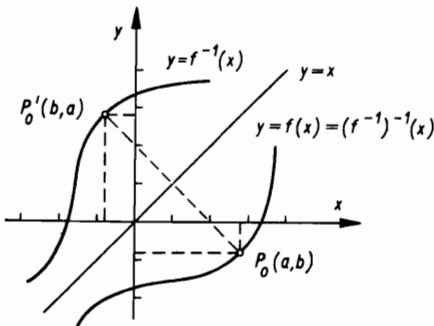
**Umfangswinkel**  $\nearrow$  Kreis I., III.

**Umgebung**  $\nearrow$  Menge IV.

**Umgebungsbasis**  $\nearrow$  Raum, metrischer II.

**Umkehrfunktion, inverse Funktion:** I. zu einer gegebenen Funktion  $f$  die Menge  $M$  aller geordneten Paare  $(f(x), x)$ , für die  $(x, f(x)) \in f$  gilt; sie existiert, falls die Zuordnung  $f(x) \rightarrow x$  eindeutig ist. Da die Menge  $M$  durch die Funktion  $f$  eindeutig bestimmt ist, gibt es zu  $f$  höchstens eine U., die genau dann existiert, falls  $f$  eineindeutig ist ( $\nearrow$  Funktion I.). Mit  $f$  ist aber auch ihre U. eineindeutig, so daß auch deren U. existiert. Bezeichnet man die U. von  $f$  mit  $f^{-1}$ , so gilt  $(f^{-1})^{-1} = f$ , und man kann  $f$  und  $f^{-1}$  *zueinander inverse Funktionen* nennen. Eine Funktion, die mit ihrer inversen übereinstimmt, heißt *involutiv*; z. B.  $f(x) = x$ . Eine Funktion, zu der eine Inverse existiert, nennt man *umkehrbar*. Geht man von einer umkehrbaren Funktion  $f$  zu ihrer U.  $f^{-1}$  über, so wird der Wertebereich von  $f$  zum Definitionsbereich von  $f^{-1}$ .

II. Ist die Funktion  $f$  durch die Zuordnung  $x \xrightarrow{f} y$ , die zu ihr inverse Funktion  $f^{-1}$  durch  $y \xrightarrow{f^{-1}} x$  charakterisiert, so stimmt das *Bild von  $f$*  mit dem von  $f^{-1}$  bzgl. eines festen Koordinatensystems überein. Bezeichnet man jedoch nach dem Bilden der inversen Funktion  $f^{-1}$  die unabhängige Variable wie üblich wieder mit  $x$  und die abhängige Variable mit  $y$ , so verläuft das Bild der Funktion  $f^{-1}$  symmetrisch zum Bild der Funktion  $f$  bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten eines festen kartes.  $x, y$ -Koordinatensystems (Abb. 1). Ist eine eineindeutige Funktion  $f$  explizit durch eine Funktionsgleichung  $y = f(x)$  gegeben, so kann man die Gleichung ihrer U.  $f^{-1}$  wieder in expliziter Form angeben, falls  $y = f(x)$  nach der unabhängigen Variablen  $x$  auflösbar ist. Man erhält  $x = f^{-1}(y)$  und



Umkehrfunktion: Graphische Darstellung der zueinander inversen Funktionen  $f$  und  $f^{-1}$

nach formalem Vertauschen der Variablen die Funktionsgleichung  $y = f^{-1}(x)$ .

**II.1.** Ist die Funktion  $f_1$  gegeben durch die Menge  $\{(0, 0), (3, -1), (2, -2), (1, -3)\}$ , so ist die U.  $f_1^{-1}$  festgelegt durch die Wertepaare  $(0, 0), (-1, 3), (-2, 2), (-3, 1)$ .

**II.2.** Für die lineare Funktion  $f_2$  mit  $y = f_2(x) = mx + n$  und  $m \neq 0$  erhält man die U.  $f_2^{-1}$  mit  $x = f_2^{-1}(y) = y/m - n/m$  bzw. nach formalem Vertauschen der Variablen  $x$  und  $y$  die Funktionsgleichung  $y = f_2^{-1}(x) = x/m - n/m$ .

**II.3.** Die Funktion  $f_3$  mit  $y = f_3(x) = x^3$  ist für alle reellen Zahlen  $x$  definiert und eine eineindeutige Funktion. Da die  $n$ -te Wurzel nur für nichtnegative Radikanden definiert ist, muß ihre U.  $f_3^{-1}$  beschrieben werden durch die beiden Funktionsgleichungen  $y = \sqrt[3]{x}$  für  $0 \leq x < +\infty$  und  $y = -\sqrt[3]{-x}$  für  $-\infty < x < 0$ .

**II.4.** Der Wertebereich der für alle reellen Zahlen  $x \geq 2$  definierten Funktion  $f_4$  mit  $y = f_4(x) = x/2 + \sqrt{x^2/4 - 1}$  ist das Intervall  $[1, +\infty[$ . Ihre U.  $f_4^{-1}$  kann durch den analyt. Ausdruck  $y = f_4^{-1}(x) = x + 1/x$  beschrieben werden, ihr Definitionsbereich ist das Intervall  $[1, +\infty[$ , ihr Wertebereich das Intervall  $[2, +\infty[$ .

**III.** Da streng *monotone Funktionen* eineindeutig sind, existiert für sie stets eine U.  $f^{-1}$ . Ist  $f$  streng monoton und stetig, so gilt dies auch für  $f^{-1}$ . Da aus der strengen Monotonie von  $f$  ihre Umkehrbarkeit folgt, aber, wie Beispiel II.1. zeigt, nicht umgekehrt aus der Invertierbarkeit die Monotonie, ist die Klasse der streng monotonen Funktionen in der Klasse der umkehrbaren Funktionen enthalten. Zerfällt der Definitionsbereich einer Funktion  $f$  in mehrere Monotonieintervalle, so existiert zu  $f$  für jedes dieser Intervalle eine eindeutig bestimmte U.

**III.1.** Die Funktion  $f_1$  mit  $y = f_1(x) = x^3$  hat die beiden Monotonieintervalle  $]-\infty, 0]$  und  $[0, +\infty[$ . Die U. von  $f_1$  in  $]-\infty, 0]$  ist  $g_1(x) = -\sqrt{x}$ , und in  $[0, +\infty[$  sind  $h_1(x) = \sqrt{x}$  und  $f_1$  zueinander invers.

**III.2.** Der Definitionsbereich der Funktion  $f_2$  mit  $y = f_2(x) = \sin x$  kann in die Monotonieintervalle  $]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$ ,  $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi[$  mit  $k \in \mathbf{Z}$  zerlegt werden. Alle U.en von  $f_2$  werden durch die Funktionsgleichung  $y = \arcsin x$  symbolisiert, sie haben alle den Definitionsbereich  $-1 \leq x \leq +1$  und unterscheiden sich durch den Wertebereich, der dem Monotonieintervall entspricht, in dem die jeweilige U. gebildet wurde. Wurde  $y = \sin x$  z. B. im Intervall  $3\pi/2 \leq x \leq 5\pi/2$  invertiert, so muß korrekterweise die inverse Funktion bezeichnet werden mit

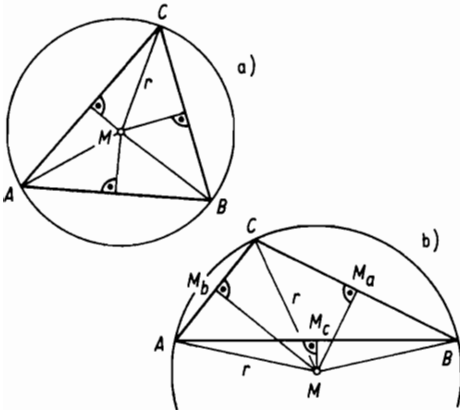
$$y = \arcsin x \text{ für } 3\pi/2 \leq y \leq 5\pi/2.$$

Fehlt diese zusätzl. Angabe, so wird unter  $\arcsin x$  i. allg. der *Hauptwert* verstanden, für den  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Für ihn schreibt man gelegentlich auch  $y = \text{Arcsin } x$ .

**IV.** Ist  $f$  mit  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  eine *komplexwertige Funktion* einer komplexen Variablen, die in einem Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene analytisch ist,

so heißt die Funktion  $f$  *einblättrig* im Gebiet  $G$ , wenn aus  $z_1 \neq z_2$  stets  $f(z_1) \neq f(z_2)$  folgt. Die Menge aller Funktionswerte einer analyt. einblättrigen Funktion ist offen und einfach zusammenhängend, d. h., sie ist ein Gebiet  $E$  in der  $w$ -Ebene. Wegen der *Einblättrigkeit* von  $f$  entspricht jedem Punkt  $w$  des Gebietes  $E$  eindeutig ein Punkt  $z$  des Gebietes  $G$ . Dadurch wird eine Funktion  $f^{-1}$  mit  $f^{-1}(w) = z$  definiert, die stetig und im Gebiet  $E$  auch analytisch ist,  $f^{-1}$  ist die *inverse Funktion der komplexwertigen Funktion  $f$  mit komplexem Argument*. Zur Ableitung der U. vgl. Differentiationsregeln IV. — S. a. Funktion einer komplexen Variablen; Potenzreihe XIV. **Umkehrproblem**  $\nearrow$  Kurventheorie,  $\nearrow$  Mainardi-Codazzische-Gleichungen.

**Umkehrregel**  $\nearrow$  Differentiationsregeln IV. **Umkehrverstärker**  $\nearrow$  Analogrechner II.2. **Umklassung**  $\nearrow$  Abbildung, affine VII.,  $\nearrow$  Spiegelung I.,  $\nearrow$  Zweitafelprojektion II. **Umkreis**: I. Kreis, auf dem die Ecken eines Dreiecks  $ABC$  liegen. Sein Mittelpunkt  $M$  ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten ( $\nearrow$  Mittelsenkrechte III.), weil für ihn gilt  $|MA| = |MB| = |MC| = r$ , wenn  $r$  die Länge des Radius



Umkreis, a) für ein spitz- und b) für ein stumpfwinkliges Dreieck

von U. ist (Abb.). In einem rechtwinkligen Dreieck fällt der Umkreismittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Hypotenuse zusammen, in einem stumpfwinkligen Dreieck liegt er außerhalb des Dreiecks. — S. a. Thaleskreis.

II. **Umkreis, Sphärischer**: Auch auf der Kugel gibt es zu einem Großkreisbogen eine Mittelsenkrechte, deren Punkte von den Endpunkten des Bogens gleichen sphär. Abstand haben ( $\nearrow$  sphärischer Kreis). Mithin existiert auch zu einem sphär. Dreieck ein Umkreis. Ist  $r$  sein Radius, so gelten (1) und (2), wenn gesetzt wird  $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ .

- (1)  $\cot r = \sqrt{1 - [\cos(\sigma - \alpha) \cos(\sigma - \beta) \cos(\sigma - \gamma)] / \cos \sigma}$
- (2)  $\cot r = \cot(a/2) \cos(\sigma - \alpha) = \cot(b/2) \cos(\sigma - \beta) = \cot(c/2) \cos(\sigma - \gamma)$

**Umlaufintegral**  $\nearrow$  Integral, komplexes II. **Umlegung**  $\nearrow$  Abbildung, affine VII. **Umordnung einer Reihe**  $\nearrow$  absolute Konvergenz von Reihen, II.1.,  $\nearrow$  Potenzreihe VII. **Umwandler**  $\nearrow$  Umzeichner.

**Umwelt**  $\nearrow$  System I. **Umzeichner**: Sammelbezeichnung für Instrumente, die zu einer gegebenen ebenen Figur ein nach einer Vorschrift verändertes Bild zeichnen, z. B. mit Hilfe eines Gelenkmechanismus. Während aber etwa ein Affinograph ein Bild mit linearer Verzerrung liefert, erhält man durch *Umwandler* i. allg. eine nichtlineare Verzerrung in einer vorgeschriebenen Richtung, z. B. wenn aus dem Bild der Funktion  $y = f(x)$  mit einer vorgegebenen Funktion  $h = g(y)$  das Bild der Funktion  $z = g(f(x))$  zu zeichnen ist. Der *Aperiodograph* von CORADI verwendet zwei senkrecht zur  $x$ -Achse verschiebbare Wagen mit je einem Fahr- bzw. Schreibstift. Wird das Bild der Funktion  $y = f(x)$  in der Richtung der  $x$ -Achse an dem ersten Wagen vorbeigeführt, so wird dieser mit Hilfe eines Handrades so bewegt, daß sein Fahrstift die Kurve  $y = f(x)$  abfährt. An diesem Handrad ist eine auswechselbare Kurvenscheibe angebracht, die die Bewegung des zweiten Wagens nach der auf der Kurvenscheibe dargestellten Funktion  $h = g(y)$  steuert. Auf einem an diesem Wagen vorbeigeführten Papierstreifen wird dann das Bild der Funktion  $z = g(f(x))$  durch den Schreibstift an dem zweiten Wagen gezeichnet.

**unabhängiges Ereignis**  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit, bedingte.

**unabhängige Variable**  $\nearrow$  Funktion II. **Unabhängigkeit**: *mathematische Logik* Eigenschaft von Mengen  $X$  von Ausdrücken einer Theorie, die zutrifft, falls kein Ausdruck von  $X$  aus den anderen Ausdrücken von  $X$  logisch folgt. — Mit einer Menge  $X$  sind auch alle ihre Teilmengen unabhängig. Sind umgekehrt lediglich alle endl. Teilmengen einer Menge  $X$  unabhängig, so ist auch  $X$  unabhängig. Eine Menge  $X$  ist genau dann unabhängig, wenn es zu jedem Ausdruck  $H$  von  $X$  ein Modell für  $X \setminus \{H\}$  gibt, das nicht zugleich Modell für  $X$  ist, d. h., das auch Modell für  $\neg H$  ist. Ein Ausdruck heißt *von einer Menge  $X$  von Ausdrücken unabhängig*, falls sowohl  $X \cup \{H\}$  als auch  $X \cup \{\neg H\}$  widerspruchsfrei sind, d. h., falls es Modelle sowohl für  $X \cup \{H\}$  als auch für  $X \cup \{\neg H\}$  gibt; z. B. ist die Kontinuumhypothese unabhängig von den bekannten Axiomensystemen der Mengenlehre und das Parallelenaxiom unabhängig von den anderen Axiomen der euklid. Geometrie. — S. a. Axiomatik; axiomatischer Aufbau der Geometrie.

**Unabhängigkeit, lineare**  $\nearrow$  lineare Abhängigkeit.

**Unabhängigkeit von Zufallsgrößen**: Eigenschaft von  $n$  Zufallsgrößen  $X_1, \dots, X_n$ , daß für die gemeinsame Verteilungsfunktion ( $\nearrow$  Zufallsvektor)  $F(x_1, \dots, x_n)$  die Formel (1) gilt. Dabei ist  $F_i(x_i)$  die Verteilungs-

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$$

funktion der  $i$ -ten Komponente  $X_i$  von  $(X_1, \dots, X_n)$  (s. a. Randverteilung,  $k$ -dimensionale). Während man i. allg. über die gemeinsame Verteilung nichts

aussagen kann, wenn man die Verteilungen der einzelnen Komponenten kennt, ist  $F(x_1, \dots, x_n)$  im Fall der Unabhängigkeit durch die Verteilung der einzelnen Komponenten vollständig bestimmt. Wird z. B. auf eine Zielscheibe geschossen, so können die vertikale Abweichung  $X$  und die horizontale Abweichung  $Y$  vom Zentrum der Scheibe als voneinander unabhängig und jede als normalverteilt angenommen werden ( $\nearrow$  Normalverteilung):  $X \in N(0, \sigma_1)$ ,  $Y \in N(0, \sigma_2)$ . Dann gilt (2) für die Dichte des Vektors  $(X, Y)$ , der den Einschußpunkt markiert. Man erkennt, daß  $(X, Y)$  normalverteilt

$$(2) \quad f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \\ = \frac{\exp[-(1/2)(x/\sigma_1)^2]}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\exp[-(1/2)(y/\sigma_2)^2]}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \\ = \frac{\exp[-(1/2)((x/\sigma_1)^2 + (y/\sigma_2)^2)]}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

ist, mit den Parametern  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \rho = 0$  ( $\nearrow$  Normalverteilung). Die U. v. Z. wird in prakt. Anwendungen nicht durch Nachprüfen von (1) begründet, sondern durch inhaltl. Überlegungen, (1) wird dann als Folgerung angesehen, wie auch das Beispiel zeigt. Wichtige Sätze über den Erwartungswert und die Dispersion ( $\nearrow$  Streuung) haben die Unabhängigkeit zur Voraussetzung. Unabhängige Zufallsgrößen sind stets unkorreliert ( $\nearrow$  Korrelationskoeffizient). — S. a. Wahrscheinlichkeit, bedingte, III.

**unär**  $\nearrow$  Prädikat,  $\nearrow$  algebraische Operation.  
**unbedingte Konvergenz**  $\nearrow$  absolute Konvergenz von Reihen, III.

**Unbestimmte**  $\nearrow$  Polynom I.  
**unbestimmter Ausdruck**: unkorrekte Bezeichnung für gewisse Grenzwertaufgaben. Sind z. B.  $f(x)$  und  $g(x)$  zwei Funktionen mit  $f(a) = g(a) = 0$ , so ist ihr Quotient  $f(x)/g(x)$  an der Stelle  $x = a$  nicht definiert; formales Einsetzen von  $x = a$  führt auf den sogen. u. A.  $0/0$ ; damit will man ausdrücken, daß der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$  zu ermitteln ist, der das Verhalten des Quotienten in der Nähe der krit. Stelle  $a$  beschreibt, falls er existiert. Die Funktion  $\frac{\sin x}{x}$

z. B. hat an der Stelle  $x = 0$  den u. A.  $0/0$ , und es ist  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Analog spricht man von den u. Ausdrücken  $\infty/\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $0^0$  und  $1^\infty$ . Im Falle  $\infty \cdot 0$  z. B. handelt es sich um die Ermittlung des Grenzwerts  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ , falls  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

Anstelle von  $x \rightarrow a$  kann es auch  $x \uparrow a$  oder  $x \downarrow a$  oder  $x \rightarrow \infty$  oder  $x \rightarrow -\infty$  heißen.

U. Ausdrücke kann man nach den übl. Grenzwertsätzen behandeln, in vielen — aber nicht in allen — Fällen führt die speziell zu ihrer Behandlung entwickelte Regel von Bernoulli und L'Hospital zum Ziel.

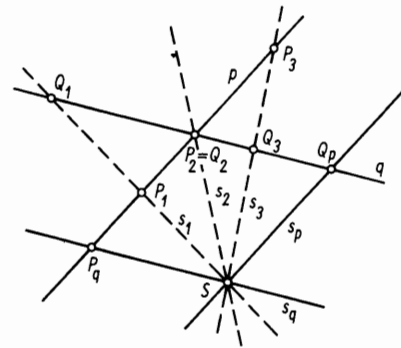
**unbestimmtes Integral**  $\nearrow$  Integral III.,  $\nearrow$  Integral, komplexes, II.

**Unbestimmtheitsstelle**  $\nearrow$  Stetigkeit II.1.

**unbiased**  $\nearrow$  Punktschätzung.

**UND-Glied**  $\nearrow$  Übertragungsglied III.

**uneigentliche Elemente**, *unendlich ferne Elemente*: in der projektiven Geometrie eingeführte Elemente wie uneigentl. Punkt bzw. Gerade bzw. Ebene. Durch Hinzunahme dieser u.E. zum affinen Raum werden die Aussagen »zwei Geraden schneiden sich in einem Punkte«, »zwei Punkte bestimmen eine Gerade« und »zwei sich schneidende Geraden bestimmen eine Ebene« ohne Ausnahme wahr. I. In einer Ebene lassen sich die Punkte  $P$  einer Geraden  $p$  auf die Punkte  $Q$  einer anderen Geraden  $q$  projizieren, wenn man einen Punkt  $S$ , der auf keiner dieser Geraden liegt, annimmt und festsetzt, daß der Bildpunkt  $Q$  mit dem Original  $P$  stets auf einer Geraden  $s$  durch den Punkt  $S$  liegt (Abb.).



uneigentliche Elemente: Einführung uneigentlicher Punkte in der projektiven Ebene

Alle projizierenden Geraden  $s$  bilden ein Strahlenbündel, und der Punkt  $S$  heißt sein Träger. Die Zuordnung ist umkehrbar eindeutig bis auf zwei Ausnahmen: der durch die Gerade  $s_q \parallel q$  bestimmte Punkt  $P_q$  von  $p$  hat kein Bild auf  $q$  und der durch  $s_p \parallel p$  bestimmte Punkt  $Q_p$  von  $q$  hat keinen ihm zugeordneten Originalpunkt. Um die Eineindeutigkeit der Zuordnung von Original- und Bildpunkt für jede Gerade des Bündels zu sichern, ordnet man  $P_q$  die Richtung  $SP_q$  als Bildpunkt und  $Q_p$  die Richtung  $SQ_p$  als Original zu. Diese durch eine Richtung festgelegten Punkte von  $p$  bzw. von  $q$  heißen *uneigentliche Punkte*, auch *unendlich ferne Punkte*, weil z. B. die Bildpunkte  $Q_i$  für Geraden  $s_i$  des Geradenbündels, die zwischen  $s_1$  und  $s_q$  liegen, um so weiter von  $Q_1$  in der Richtung  $Q_2 \rightarrow Q_1$  entfernt liegen, je näher  $s_i$  an  $s_q$  liegt. Geraden  $s_{i+1}$ , die in der Abbildung zwischen  $s_p$  und  $s_q$  liegen, ergeben aber einen Bildpunkt  $Q_{i+1}$ , der „unendlich fern“ auf  $q$  in der Richtung  $Q_2 \rightarrow Q_p$  liegt. Diese Lage der Bildpunkte, die durch Geraden in der Umgebung von  $s_q$  erzeugt werden, führt zu der Vorstellung, daß die projektive Gerade  $q$  durch ihren einen uneigentl. Punkt  $Q^*$  geschlossen wird. Ebenso ergeben die Richtung  $S \rightarrow Q_p$  und die Richtung  $Q_p \rightarrow S$  den gleichen uneigentl. Punkt  $P^*$  der Geraden  $p$ . Nach der getroffenen Festlegung schneiden sich in  $Q^*$  alle Parallelen

zu  $q$  in der Ebene,  $Q^u$  ist Träger dieses Parallelstrahlenbüschels. Entsprechend ist  $P^u$  Träger des Büschels aller Parallelen zu  $p$ .

Auch die Aussage »Zwei Punkte bestimmen stets eine Gerade« soll uneingeschränkt gelten. Die Gerade durch einen eigentl. Punkt  $P$  und den uneigentl. Punkt einer gegebenen Geraden  $g$  heißt in der euklid. Geometrie Parallele zu  $g$  durch  $P$ . In der projektiven Geometrie gibt es keine Parallelen, da sich zwei Geraden stets schneiden. Die durch zwei uneigentl. Punkte, z. B.  $Q^u$  und  $P^u$  von  $q$  und  $p$ , festgelegte Gerade heißt die *uneigentl. Gerade*, auch *unendlich ferne Gerade*, der Ebene. Auf ihr liegen die uneigentl. Punkte aller Geraden der Ebene.

**II.** Parallele Ebenen haben analog die gleiche uneigentl. Gerade gemeinsam, die der Träger dieses Parallelebenenbüschels ist. Zwei sich schneidende Ebenen haben dagegen je eine uneigentl. Gerade, die sich in dem uneigentl. Punkt der Schnittgeraden der gegebenen Ebenen schneiden. Diese beiden uneigentl. Geraden legen die *uneigentl. Ebene* des projektiven Raums fest. Auf ihr liegen alle uneigentl. Punkte dieses Raumes. Als Schnitt zwischen ihr und den Ebenen eines Ebenenbündels ergibt sich ein Geradenfeld auf der uneigentl. Ebene bzw. ein Punktfeld als Schnitt mit den Elementen eines Geradenbündels (↗ projektive Gebilde). Damit ist die projektive Geometrie durch die Aufnahme u. E. abgeschlossen, d. h., an keiner Stelle ist die Aufnahme neuer projektiver Gebilde notwendig.

**uneigentlicher Grenzwert** ↗ divergente Zahlenfolge I.

**uneigentliches Integral** svw. Integral, uneigentliches, s. a. Flächenintegral V.2., VI.; Integral III., IV.; Parameterintegral III.

**unendlich ferne Elemente** svw. uneigentliche Elemente.

**Unendlichkeitsaxiom** ↗ Mengenlehre II.

**Unendlichkeitsstelle** ↗ Kurvendiskussion II.2., ↗ Stetigkeit II.2.

**Unentscheidbarkeit** ↗ Prädikatenkalkül V.

**Ungarische Methode** ↗ Zuordnungsproblem.

**ungerade Funktion** ↗ Funktion VIII., ↗ Potenzreihe VI., ↗ Winkelfunktion II.

**ungleichnamige Brüche** ↗ Brüche II.2.

**Ungleichung:** I. mathematisches Objekt, das durch Verbinden zweier Terme  $T_1$  und  $T_2$  durch eines der Zeichen  $<$  »kleiner als«,  $\leq$  »kleiner oder gleich«,  $>$  »größer als«,  $\geq$  »größer oder gleich« oder  $\neq$  »ungleich« entsteht:  $T_1 < T_2$ ,  $T_1 \leq T_2$ ,  $T_1 > T_2$ ,  $T_1 \geq T_2$ ,  $T_1 \neq T_2$ . Die beiden Terme  $T_1$ ,  $T_2$  nennt man *Seiten* der U.,  $T_1$  heißt auch *linke Seite*,  $T_2$  *rechte Seite* der U. U. en ohne Variable, z. B.  $5 < 7$ ,  $3 \geq 4$ ,  $2 + 1 \neq 5$  sind *Aussagen*, die entweder wahr oder falsch sind, z. B. ist die Aussage  $5 < 7$  wahr, die Aussage  $3 \geq 4$  ist falsch. Ungleichungen mit Variablen, z. B.  $2x > 3$  oder  $2a + b \leq 1$ , sind *Aussageformen*. Erst nach Ersetzen der Variablen durch Zahlen aus dem *Definitionsbereich* der U., das heißt aus dem Durchschnitt der Definitionsbereiche aller in der U. vorkommenden Terme mit Variablen, gehen sie in wahre oder falsche Aussagen

über;  $2x > 3$  z. B. liefert für  $x = 1$  eine falsche, für  $x = 2$  eine wahre Aussage. Legt man für die U.  $2a + b \leq 1$  für  $a$  und  $b$  als Variablengrundbereich die Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen fest, so erhält man für  $a = 0$ ,  $b = 0$  eine wahre Aussage, ebenso für  $a = 0$ ,  $b = 1$ , für alle anderen Werte von  $a$  und  $b$  jedoch eine falsche Aussage.

Je nach Art der verwendeten Terme unterscheidet man *algebraische* und *transzendente U. en*. Jede Zahl aus dem Variablengrundbereich, die eine U. mit einer Variablen in eine wahre Aussage überführt, wenn sie für die Variable eingesetzt wird, heißt *Lösung* dieser U.

Für eine U. mit 2, 3, ...,  $n$  Variablen ist jedes geordnete Paar, Tripel, ... oder  $n$ -Tupel von Zahlen aus den Variablengrundbereichen eine Lösung, für das sich durch Ersetzen der Variablen durch die Elemente des geordneten Zahlenpaares, Zahlentripels, ..., Zahlen- $n$ -Tupels unter Beachtung der Reihenfolge eine wahre Aussage ergibt.

Für die U.  $2x > 3$  mit  $x \in \mathbf{R}$  ist z. B. jede reelle Zahl, die größer als  $3/2$  ist, eine Lösung; für die U.  $2a + b \leq 1$  mit  $a, b \in \mathbf{N}$  sind nur die geordneten Paare  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$  Lösungen.

Die Menge *aller* Lösungen einer Ungleichung bezüglich gegebener Variablengrundbereiche wird *Lösungsmenge* der U. genannt.

Die U.  $2x > 3$  mit  $x \in \mathbf{R}$  hat die Lösungsmenge  $L = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 2/3\}$ , für die U.  $2a + b \leq 1$  mit  $a, b \in \mathbf{N}$  ist  $L = \{(0, 0), (0, 1)\}$  die Lösungsmenge. Die U.  $x^2 < 0$  mit  $x \in \mathbf{R}$  hat keine Lösung, ihre Lösungsmenge ist  $L = \emptyset$ .

Eine U. mit einer Lösungsmenge  $L \neq \emptyset$  heißt *erfüllbar* oder *lösbar*; falls  $L = \emptyset$ , heißt die U. *nicht erfüllbar* oder *unlösbar*. Ist für eine erfüllbare U. mit einer Variablen die Lösungsmenge gleich dem Variablengrundbereich, so ist diese U. *allgemeingültig*; z. B. ist die U.  $3x > 2x$  allgemeingültig bezüglich der Menge der positiven reellen Zahlen, nicht jedoch bezüglich der Menge der nichtpositiven reellen Zahlen, denn bzgl. dieser Menge ist sie unlösbar. Eine erfüllbare U. mit  $n$  Variablen heißt *allgemeingültig*, wenn *alle* möglichen geordneten  $n$ -Tupel von Zahlen aus den gegebenen Variablengrundbereichen Lösungen der Ungleichung sind. Nach dieser Definition ist  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$  für  $x, y, z \in \mathbf{R}$  eine allgemeingültige U., denn sie wird durch alle geordneten Tripel  $(x, y, z)$  reeller Zahlen erfüllt.

**II.** Zwei U. en mit Variablen heißen *äquivalent bzgl. der gegebenen Variablengrundbereiche*, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind. Sind diese aber verschieden, so sind die U. en *nicht äquivalent*.

*Beispiel 1:* Die U. en  $x \geq 0$  und  $a^2 \geq 0$  sind äquivalent bzgl. der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen, denn es ist  $L_1 = \mathbf{N}$  und  $L_2 = \mathbf{N}$ , d. h.,  $L_1 = L_2$ . Sie sind nicht äquivalent bezüglich der Menge  $\mathbf{R}$  der reellen Zahlen, denn für diese ist  $L_1$  die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, während  $L_2$  die Menge aller reellen Zahlen ist, d. h.  $L_1 \neq L_2$ .

*Beispiel 2:* Die U. en  $x + 3 \leq 5$  und  $2y < 5$  sind äquivalent bzgl. der Menge  $\mathbf{N}$  der natürl. Zahlen, denn es ist  $L_1 = \{0, 1, 2\}$  und  $L_2 = \{0, 1, 2\}$ . Bezüglich der Menge  $\mathbf{Q}$  der rationalen Zahlen sind sie nicht



äquivalent, denn für diese ist  $L_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$  und  $L_2 = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < 5/2\}$ , d. h.,  $L_1 \neq L_2$ .

Allgemeingültige U.en sind bei gleichen Variablengrundbereichen untereinander äquivalent, dasselbe gilt für nicht erfüllbare U.en. Die Äquivalenz von U.en hat die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation. Eine Umformung heißt äquivalent, wenn sie eine U. (A) in eine bzgl. derselben Variablengrundbereiche äquivalente U. (B) überführt. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß ihre Lösungsmengen  $L_A$  und  $L_B$  einander gleich sind, daß gilt  $L_A = L_B$ . Falls  $L_A \neq L_B$ , heißt die Umformung von (A) in (B) nicht-äquivalent.

III. Eine Übersicht über äquivalente Umformungen geben die folgenden Sätze, in denen der Definitionsbereich der auftretenden Terme, falls keine Einschränkungen gemacht werden, die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen bzw. die Menge der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen ist.

III.1. Die U.en  $T_1 < T_2$  und  $T_1' < T_2'$  sind äquivalent, falls  $T_1'$  und  $T_1$  sowie  $T_2'$  und  $T_2$  äquivalente Terme sind.

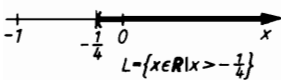
III.2. Die U.en  $T_1 < T_2$  und  $T_2 > T_1$  sind äquivalent.

III.3. Die U.en  $T_1 < T_2$  und  $T_1 \pm T_3 < T_2 \pm T_3$  sind äquivalent, falls der Term  $T_3$  im gesamten Variablengrundbereich definiert ist.

III.4. Die U.  $T_1 < T_2$  ist äquivalent mit den U.en  $T_1 \cdot T_3 < T_2 \cdot T_3$  bzw.  $T_1/T_3 < T_2/T_3$ , falls der Term  $T_3$  im gesamten Variablengrundbereich definiert und positiv ist.

III.5. Die U.  $T_1 < T_2$  ist äquivalent mit den U.en  $T_1 \cdot T_3 > T_2 \cdot T_3$  bzw.  $T_1/T_3 > T_2/T_3$ , falls der Term  $T_3$  im gesamten Variablengrundbereich definiert und negativ ist.

IV. Um eine U. zu lösen, formt man sie mit Hilfe der Sätze III.1. bis III.5. so lange äquivalent um, bis man eine U. erhält, deren Lösungsmenge leicht abgelesen werden kann. Diese Lösungsmenge ist zugleich die Lösungsmenge der gegebenen U.

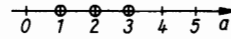


Ungleichung. Abb. 1: Lösungsmenge der Ungleichung  $8x + 2 > 4x + 1, x \in \mathbb{R}$

IV.1. Die U.  $8x + 2 > 4x + 1$  für  $x \in \mathbb{R}$  ergibt nach III.2.:  $4x + 1 < 8x + 2$ . Daraus folgt nach III.3.:  $4x + 1 - 4x - 2 < 8x + 2 - 4x - 2$  und daraus nach III.1.:  $-1 < 4x$ . Nach III.4. erhält man  $-1/4 < x$  und liest  $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1/4\}$  aus dieser U. ab (Abb. 1). Bei einer Probe hat man hier unendlich viele Elemente auf ihre Zugehörigkeit zur Lösungsmenge zu überprüfen: Wenn  $x > -1/4$ , so gibt es eine positive reelle Zahl  $p$ , so daß  $x = -1/4 + p$ . Für jede positive reelle Zahl  $p$  gilt  $8(-1/4 + p) + 2 = 8p > 4(-1/4 + p) + 1 = 4p$ , d. h., jede reelle Zahl  $x > -1/4$  ist eine Lösung der gegebenen U.

IV.2. Die U.  $a/2 - 1 < 5 - a$  für positives ganzes  $a$  ergibt nach III.4.  $a - 2 < 10 - 2a$  und geht nach III.3. über in  $a - 2 + 2a < 10 - 2a + 2 + 2a$ ; dies ist äquivalent zu  $3a < 12$  und nach III.4.

zu  $a < 4$ , so daß  $L = \{1, 2, 3\}$  die Lösungsmenge ist (Abb. 2). Eine Probe kann man durchführen, indem man für jedes der endlich vielen Elemente der Lösungsmenge überprüft, ob es die gegebene U. erfüllt.



Ungleichung. Abb. 2: Lösungsmenge  $L = \{1, 2, 3\}$  der Ungleichung  $a - 2 < 10 - 2a, a \in \mathbb{N}$

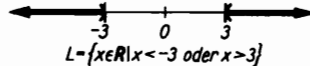
IV.3. Die U.  $x^2 - 9 > 0$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist äquivalent zu  $(x + 3)(x - 3) > 0$ . Ein Produkt zweier reeller Zahlen ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren gleiche Vorzeichen haben. Demnach sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1:  $x + 3 > 0$  und  $x - 3 > 0$ , d. h.,  
 $x > -3$  und  $x > 3$ .

Daraus folgt  $L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ .

Fall 2:  $x + 3 < 0$  und  $x - 3 < 0$ , d. h.,  
 $x < -3$  und  $x < 3$ .

Daraus folgt  $L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$ .



Ungleichung. Abb. 3: Die Vereinigung der Intervalle  $]-\infty, -3[$  und  $]3, +\infty[$  der Zahlengeraden ist die Lösungsmenge der Ungleichung  $x^2 - 9 > 0, x \in \mathbb{R}$

Die Lösungsmenge  $L$  der gegebenen U. besteht aus allen reellen Zahlen  $x$ , für die die U.  $x > 3$  oder die U.  $x < -3$  erfüllt ist (Abb. 3).  $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ oder } x > 3\}$ .

IV.4. Die U.  $x^2 - 9 < 0$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist äquivalent zu  $(x + 3)(x - 3) < 0$ . Ein Produkt zweier reeller Zahlen ist genau dann negativ, wenn die Faktoren entgegengesetzte Vorzeichen haben. Demnach sind zwei Fälle zu unterscheiden:

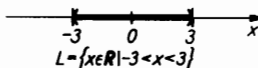
Fall 1:  $x + 3 > 0$  und  $x - 3 < 0$ , d. h.,  
 $x > -3$  und  $x < 3$ .

Daraus folgt:  $L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ .

Fall 2:  $x + 3 < 0$  und  $x - 3 > 0$ , d. h.,  
 $x < -3$  und  $x > 3$ .

Es gibt keine reelle Zahl  $x$ , die die U.en  $x < -3$  und  $x > 3$  gleichzeitig erfüllt, folglich ist  $L_2 = \emptyset$ .

Man erhält  $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$  (Abb. 4).



Ungleichung. Abb. 4: Das offene Intervall  $]-3, 3[$  der Zahlengeraden ist die Lösungsmenge der Ungleichung  $x^2 - 9 < 0, x \in \mathbb{R}$

IV.5. Will man in der U.  $3 < (x + 1)/(x - 1)$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $x \neq 1$  beide Seiten mit dem Nenner  $(x - 1)$  des Bruches multiplizieren, so hat man III.4. anzuwenden, falls  $x - 1 > 0$  ist, dagegen

III.5., falls  $x - 1 < 0$ . Im ersten Fall gilt:

$$3(x - 1) < x + 1 \text{ und } x - 1 > 0,$$

$$3x - 3 < x + 1 \text{ und } x - 1 > 0,$$

$$2x < 4 \text{ und } x - 1 > 0,$$

$$x < 2 \text{ und } x > 1,$$

d. h.,  $L_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\}$ .

Im zweiten Falle gilt:

$$3(x - 1) > x + 1 \text{ und } x - 1 < 0,$$

$$3x - 3 > x + 1 \text{ und } x - 1 < 0,$$

$$2x > 4 \text{ und } x - 1 < 0,$$

$$x > 2 \text{ und } x < 1.$$

Es gibt keine reelle Zahl  $x$ , die gleichzeitig beide U.en erfüllt, d. h.  $L_2 = \emptyset$ . Es ist  $L = L_1 \cup L_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 2\}$ .

IV.6. Beim Lösen der U.  $|x - 3| < 4$  für  $x \in \mathbf{R}$  sind drei Fälle zu untersuchen:

Fall 1:  $x - 3 > 0$ ; daraus folgt  $x > 3$ , aus  $x - 3 < 4$  aber folgt  $x < 7$ ,

$$\text{d. h., } L_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x < 7\}.$$

Fall 2:  $x - 3 < 0$  ergibt

$$-(x - 3) < 4 \text{ und } x - 3 < 0,$$

$$x - 3 > -4 \text{ und } x - 3 < 0,$$

$$x > -1 \text{ und } x < 3,$$

$$\text{d. h., } L_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 3\}.$$

Fall 3:  $x - 3 = 0$  ergibt  $x = 3$ ,

$$\text{d. h., } L_3 = \{3\}.$$

Zusammenfassend gilt

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 7\}.$$

IV.7. Gesucht ist die Menge aller  $x \in \mathbf{R}$ , die die beiden U.en (1) und (2) gleichzeitig erfüllen. Zu-

$$(1) \frac{1}{3} + \frac{x}{2} \leq x - \frac{7}{6}$$

$$(2) \frac{5(x - 3)}{2} \leq x - 3$$

nächst werden die Lösungsmengen der beiden U.en einzeln bestimmt.

Die U. (1) ist äquivalent zu:

$$2 + 3x \leq 6x - 7 \leftrightarrow 9 \leq 3x \leftrightarrow 3 \leq x,$$

$$\text{d. h., } L_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\}.$$

Die U. (2) ist äquivalent zu:

$$5x - 15 \leq 2x - 6 \leftrightarrow 3x \leq 9, \quad x \leq 3;$$

$$\text{d. h., } L_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 3\}.$$

Die Menge  $L$  aller gemeinsamen Lösungen der U.en (1) und (2) ist der Durchschnitt von  $L_1$  und  $L_2$ :  $L = L_1 \cap L_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3 \text{ und } x \leq 3\} = \{3\}$ .

**Ungleichungssystem:** Menge mehrerer Ungleichungen für dieselben Variablen, deren gemeinsamer Gültigkeitsbereich die Lösungsmenge, in der Optimierung den zulässigen Bereich, darstellt. Bes. im Falle linearer Ungleichungen ist es üblich, zur Abk. der Schreibweise eine *Halbordnung zwischen Vektoren* einzuführen, nach der  $(x_1, \dots, x_n)^T \leq (y_1, \dots, y_n)^T$  bedeutet, daß  $x_i \leq y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Für

$z = (z_1, z_2)^T$  und  $b = (6, 4)^T$  z. B. bedeutet (1) für  $z \geq 0$ , daß das System (2) von Ungleichungen für  $z_1 \geq 0$  und  $z_2 \geq 0$  gilt.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} z \leq b$$

$$(2) \quad 2z_1 + 4z_2 \leq 6$$

$$3z_1 - z_2 \leq 4$$

unimodale Verteilung  $\nearrow$  Modalwert.

Unimodalität  $\nearrow$  Optimierung, freie.

unitär  $\nearrow$  Matrix IV.,  $\nearrow$  Modul II.

unitärer Operator  $\nearrow$  Operator, linearer, VII.

unitärer Raum  $\nearrow$  Hilbertraum I.

universelle Algebra swv. algebraische Struktur, s. a. Struktur I.

unkorrelierte Zufallsgrößen  $\nearrow$  Korrelationskoeffizient.

Umenge  $\nearrow$  Menge I.

unmögliches Ereignis  $\nearrow$  zufälliges Ereignis I.

Unstetigkeitsstelle  $\nearrow$  Stetigkeit.

Untätigkeitszeit  $\nearrow$  Bedienungstheorie.

untere Grenze  $\nearrow$  beschränkte Funktion II., Extremwert I.,  $\nearrow$  Punktmenge,  $\nearrow$  Zahlenfolge II.

**untere Schranke Mengenlehre:** Ist  $R$  eine Halbordnung in der Menge  $M$  und  $X \subseteq M$ , so ist ein Element  $a$  von  $M$  eine *untere Schranke* von  $X$  bzgl.  $R$ , falls  $a \leq x(R)$  für alle  $x \in X$  gilt. Ist  $a$  Maximum der Menge der unteren Schranken von  $X$  bzgl.  $R$ , so heißt  $a$  *untere Grenze* bzw. *Infimum* von  $X$  bzgl.  $R$ ; Bezeichnung:  $\inf X$ . — S. a. beschränkte Funktion I.; Punktmenge; Zahlenfolge II.

**Untergraph:** ein ungerichteter Graph  $G' = (K', U')$  oder gerichteter Graph  $G' = (K', U')$ , in dem die Mengen  $K' \subseteq K$  und  $U' \subseteq U$  Teilmengen der Mengen eines Graphen  $G = (K, U)$  bzw.  $G = (K, U)$  sind. Der von einer Untermenge  $K^*$  von  $K$  aufgespannte  $U$ .  $G^*$  von  $G$  ist derjenige Graph mit der Knotenpunktmenge  $K^*$ , dessen Kanten- bzw. Bogenmenge  $U^*$  genau diejenigen Elemente von  $U$  enthält, deren Endpunkte zu  $K^*$  gehören (Abb. 1).

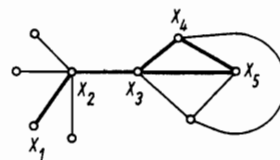


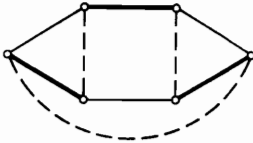
Abb. 1: Der von  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  aufgespannte Untergraph ist fett gezeichnet

Unter einem *Faktor*  $F$  eines Graphen  $G$  versteht man einen regulären Untergraphen von  $G$ , der alle Knotenpunkte von  $G$  enthält. Ist  $F$  regulär vom Grade 1 oder 2 ( $\nearrow$  Graph III.), so nennt man  $F$  einen *linearen* bzw. *quadratischen Faktor*. Eine Kante  $b$  eines ungerichteten zusammenhängenden Graphen  $G$  ( $\nearrow$  Durchlaufungen von Graphen) heißt *Brücke*, falls nach Löschen von  $b$  der Graph  $G$  in zwei Komponenten zerfällt, die beide mindestens zwei Knotenpunkte enthalten.

J. PETERSEN bewies 1891 den nach ihm benannten Satz: *Jeder kubische Graph ohne Brücken hat einen linearen Faktor.*

Einen interessanten Zusammenhang zwischen der Existenz linearer Faktoren in kubischen Graphen und dem Vierfarbenproblem zeigte 1880 G. TAIT in dem nach ihm benannten Satz:

*Die Länder einer normalen Landkarte K lassen sich genau dann mit vier Farben zulässig färben (↗ Färbung von Graphen), wenn K in drei Linearfaktoren zerlegt werden kann (Abb. 2).*



Untergraph. Abb. 2:  
Beispiel für die  
Zerlegung in drei  
Linearfaktoren

Mit diesem Satz lautet die äquivalente Formulierung des Vierfarbenproblems: Läßt sich jede normale Landkarte in drei Linearfaktoren zerlegen, oder gibt es eine normale Landkarte, die nicht in drei Linearfaktoren zerlegt werden kann?

S. a. Packungs- und Repräsentationsprobleme.

**Untergruppe** ↗ Gruppe I.

**Unterkörper** ↗ Körper I.

**Unterprogramm** ↗ Programmierung des Digitalrechners III.

**Unterreihe** ↗ Konvergenzkriterien für Reihen VI.

**Unterstruktur** ↗ algebraische Struktur II.

**Unterteilung** ↗ Graph, ebener.

**unvereinbare Ereignisse** ↗ zufälliges Ereignis I.

**unzerlegbar** ↗ Polynom II.

**Urbild** ↗ Abbildung I., ↗ Abbildung, affine, ↗ Abbildung, topologische, ↗ Funktion I., ↗ lineare Abbildung I., ↗ Operator.

**Urelement** ↗ Menge I.

**Urnenmodell:** Modell zur Interpretation vieler Aufgaben der klass. Wahrscheinlichkeitsrechnung (↗ Wahrscheinlichkeit, klassische), z. B. kann man U. für die Binomialverteilung, die hypergeometr. Verteilung und die Pólya-Verteilung angeben. Auch die Theorie der homogenen Markowschen Ketten mit  $n$  Zuständen läßt sich an einem Urnenmodell demonstrieren (↗ stochastischer Prozeß III., ↗ Pólya-Verteilung).

**Ursprung, Nullpunkt** ↗ Koordinatensystem I., II., III., ↗ Koordinatentransformation II.

## V

**Valenz** ↗ Graph III.

**valeur principale** ↗ Integral, uneigentliches, I.4.

**Vandermonde, Alexandre Théophile**, geb. 1735, gest. 1796. — V. arbeitete hauptsächlich über Beziehungen zwischen den Wurzeln von Gleichungen  $n$ -ten Grades und über die Auflösung linearer Gleichungen durch Determinanten. Seine Lösung der Kreisteilungsaufgabe war der Ausgangspunkt der Untersuchungen von GAUSS.

**Vandermondeseche Determinante:** Determinante der Gestalt (1), für die (2) gilt.

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad D = \prod_{\substack{i,j=1 \\ (i>j)}}^n (x_i - x_j) = \prod_{i=2}^n \prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)$$

**van der Waerden, Bartel L.**, geb. 2. 2. 1903 Amsterdam. — W. studierte in Göttingen und Amsterdam. Nach seiner Promotion 1926 bei DE VRIES in Amsterdam gehörte er in Göttingen einige Zeit zum Noether-Kreis. Die erhaltenen Impulse entwickelte er in den Arbeiten über Ideale weiter. Auch die Beiträge zur Begründung der algebraischen Geometrie und zur abstrakten Algebra verrieten den Einfluß von E. NOETHER. In seinem Buch »Moderne Algebra« (1930) stellte W. erstmals die vielen Publikationen zur Axiomatisierung der Algebra dar. Dieses Buch ebnete den Weg für weitere Untersuchungen und gilt noch heute als das klass. Algebralehrbuch. Als Professor in Leipzig (1931/45) schrieb W. Beiträge über die Anwendung der Gruppentheorie in der Physik. Seit 1951 ist er Professor an der Universität Zürich.

**Variable: I.** Zeichen für ein Element einer Menge (↗ Grundbereich). I. allg. verwendet man als V. latein. Buchstaben, in der Geometrie werden kleine latein. Buchstaben für Geraden, Strecken und Längen, große latein. Buchstaben für Punkte, Flächeninhalte und Volumina bevorzugt, für Winkelgrößen kleine griech. und für Ebenen große griech. Buchstaben. Vektoren, Matrizen und Mengenfamilien werden mit halbfetten latein. Buchstaben bezeichnet. Zur Unterscheidung verschiedener Größen der gleichen Art dienen einfache oder doppelte Indizes oder zusätzl. Zeichen wie Strich in  $a'$ , Querstrich in  $\bar{M}$ , Stern in  $x^*$ , Dach in  $\hat{z}$  oder Tilde in  $\tilde{y}$ . Abweichungen von dieser generellen Regelung werden bei Einführung der betreffenden V.n angegeben.

S. a. Formalisierung.

**II.** In der Analysis wird die V. als Größe angesehen, die im Verlauf der Betrachtung verschiedene Werte annehmen kann; sie wird auch als *Veränderliche* bezeichnet (↗ Funktion II.). Dabei kann auch der Sonderfall eintreten, daß die V. bestimmte Werte annimmt, z. B. für eine Nullstelle oder eine Polstelle. Eine V.  $x$ , die alle zwischen zwei Zahlen  $a$  und  $b$  gelegenen Werte annimmt, heißt eine im Intervall  $]a, b[$  stetige V.

**Variablengrundbereich** ↗ Grundbereich.

**Variablentransformation:** ein meist im Interesse einfacherer Darstellung bzw. Berechnung vorgenommener Übergang von einem System  $\{x, y, z, \dots\}$  von Variablen zu einem anderen System  $\{u, v, w, \dots\}$  neuer Variabler. Die Gleichungen zwischen den  $x, y, z, \dots$  und den  $u, v, w, \dots$  sind die *Transformationsgleichungen*.

**Varianz** ↗ Momente I., ↗ Stichprobenvarianz, ↗ Streuung.

**Varianzanalyse:** Analyseverfahren der mathemat. Statistik zur quantitativen Untersuchung der Einflüsse eines oder mehrerer Faktoren auf Versuchsergebnisse. Der Einfluß eines Faktors zeigt sich z. B., wenn mit  $m$  verschiedenen Geräten ein Objekt gemessen wird, und zwar mit jedem Gerät  $n$ -mal. Diese  $n$  Messungen sind dann jeweils eine Stichprobe vom Umfang  $n$  aus der Grundgesamtheit aller Anzeigen des betreffenden Geräts. Es soll nun geprüft werden, ob alle Meßgeräte den gleichen systemat. Fehler haben, d. h., man will den Einfluß eines Faktors, des Meßgeräts, auf den Fehler der Anzeige untersuchen. Die Nullhypothese ( $\nearrow$  Signifikanztest I.) lautet in diesem Falle: Der Anzeigefehler ist von Meßgerät zu Meßgerät derselbe, d. h.,  $EX_1 = EX_2 = \dots = EX_m$ , falls  $X_i$  die Zufallsgröße ist, die die Anzeige des  $i$ -ten Meßgeräts beschreibt. Man setzt voraus, daß die  $X_i$  normalverteilt ( $\nearrow$  Normalverteilung I.) und unabhängig sind ( $\nearrow$  Unabhängigkeit von Zufallsgrößen) und alle die gleiche Streuung haben. Ist  $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$  für  $i = 1, \dots, m$  die zu  $X_i$  gehörige mathemat. Stichprobe, so ist  $\bar{X}_i$  nach (1) ihr Stichprobenmittel für die einzelnen Geräte, während die nach (2) berechnete Größe das Gesamtmittel aller Meßwerte ist.

$$(1) \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

$$(2) \quad \bar{X} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$$

Die nach (3) festgelegte Größe  $Q$  ist die vollständige Quadratsumme der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom Gesamtmittel  $\bar{X}$ , die als Gesamt-

$$(3) \quad Q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2$$

varianz angesehen werden kann. Sie läßt sich nach  $Q = Q_1 + Q_2$  zerlegen. Bei dieser Streuungszерlegung ist  $Q_1$  nach (4) die Summe der quadrat. Abweichun-

$$(4) \quad Q_1 = n \sum_{i=1}^m (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

$$(5) \quad Q_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

gen der Gruppenmittel  $\bar{X}_i$  vom Gesamtmittel  $\bar{X}$  und wird als Quadratsumme der Abweichungen zwischen den Gruppen bezeichnet;  $Q_1$  charakterisiert den Unterschied der systemat. Fehler der Geräte.  $Q_2$  ist nach (5) die Summe der quadrat. Abweichungen der Beobachtungswerte  $X_{ij}$  von den Gruppenmitteln  $\bar{X}_i$  und wird als Quadratsumme der Abweichungen innerhalb der Gruppen bezeichnet;  $Q_2$  wird verursacht durch die zufälligen Abweichungen der Werte jeder Meßreihe vom Gruppenmittelwert. Unter den angegebenen Voraussetzungen und unter der Annahme, daß die Nullhypothese zutrifft, genügt die Verteilungsfunktion (6) einer  $F$ -Verteilung mit  $(m - 1, m(n - 1))$  Freiheitsgraden. Ist  $F_\alpha$  das

$$(6) \quad F = \frac{Q_1 m(n - 1)}{Q_2 (m - 1)}$$

$(1 - \alpha)$ -Quantil dieser Verteilung, so wird man die Hypothese ablehnen und damit den Einflußfaktor als wesentlich erkennen, wenn das aus konkreten Messungen  $x_{ij}$  berechnete  $F$  der Ungleichung  $F > F_\alpha$  genügt ( $\nearrow$  Signifikanztest).

**Variation:** die erste  $V$ .  $V(y, \eta)$  des eindimensionalen V.sproblems (1) ist das Integral (2).

$$(1) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx = \text{Extremum!}$$

$$(2) \quad V(y, \eta) = \int_a^b (F_y(x, y, y') \eta + F_{y'}(x, y, y') \eta') dx$$

Dabei ist  $y(x)$  eine zulässige Funktion, und  $\eta(x)$  ist eine beliebige Funktion, für die  $y(x) + \eta(x)$  zulässig ist ( $\nearrow$  Variationsrechnung II.). Die erste  $V$ . für das zweidimensionale V.sproblem (3) ist durch (4) gegeben.

$$(3) \quad \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x, u_y) dx dy = \text{Extremum!}$$

$$(4) \quad V(u, y) = \iint_D (F_{u'} \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y) dx dy$$

Das Integral (5) ist die zweite  $V$ . für das Problem (1). — S. a. Kombination II.

$$(5) \quad \int_a^b (F_{yy} \eta^2 + 2F_{yy'} \eta \eta' + F_{y'y'} \eta'^2) dx$$

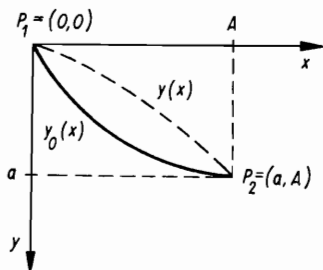
**Variation der Konstanten**  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung II.,  $\nearrow$  gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung II.4.,  $\nearrow$  lineare gewöhnliche Differentialgleichung II.1.

**Variationskoeffizient:** eine zum Vergleich der Variabilität von Verteilungen benutzte Maßzahl. Ist  $X$  eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion  $F(x)$ , so heißt  $\sigma/EX$  der  $V$ . von  $X$ . Dabei ist  $EX$  der Erwartungswert,  $\sigma$  die Streuung von  $X$ .  $\nearrow$  Stichprobenmoment.

**Variationsrechnung: I.** Teilgebiet der höheren Analysis, dessen Methoden zur Lösung vieler Probleme der Geometrie, der theoret. Physik und der Technik eingesetzt werden. Die  $V$ . untersucht die Extrema von Funktionalen, das sind Abbildungen aus einer Menge von Funktionen in die Menge der reellen Zahlen; z. B. ist (1) ein Funktional. Jeder stetig differenzierbaren Funktion  $y(x)$  kann nach (1) eine

$$(1) \quad I(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

reelle Zahl  $I(y)$  zugeordnet werden, die die Zeit angibt, in der sich ein Massepunkt  $m$  unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungslos längs der durch  $y(x)$  beschriebenen Kurve vom Punkt  $P_1 = (0, 0)$  nach dem Punkt  $P_2 = (a, A)$  bewegt (Abb. 1). Die Aufgabe besteht darin, eine Funktion  $y_0(x)$  zu finden, für die diese Durchlaufzeit  $I(y_0)$  ein Minimum wird, d. h., für die  $I(y_0) \leq I(y)$  gilt für alle zulässigen Vergleichsfunktionen  $y(x)$ , d. h. für jede stetig differenzierbare Funktion, deren Bild  $P_1$  und  $P_2$  miteinander verbindet. Die gesuchte Funktion  $y_0(x)$  heißt Extremale, der dazugehörige Wert



Variationsrechnung. Abb. 1: Zulässige Vergleichsfunktion für den Weg eines Punktes

$I_0 = I(y_0)$  des Funktionals *Extremum*; die Aufgabenstellung wird durch » $I(y) = \text{Minimum!}$ « beschrieben. Geschichtlich ist dieses Variationsproblem als *Brachistochronen-Problem* bekannt. Seine Extremale ist eine Zykloide mit der Parameterdarstellung  $y_0(t) = C_1(1 - \cos t)$ ,  $x_0(t) = C_1(t - \sin t) + C_2$ , in der  $C_1, C_2$  von  $P_2 = (a, A)$  abhängige Konstanten sind. II. Allgemeiner hat das Funktional die Gestalt (2), in der  $F$  eine in den Variablen  $x, y, y'$  zweimal stetig differenzierbare Funktion ist; auch die Funktion  $y(x)$  soll auf dem Intervall  $a \leq x \leq b$  zweimal stetig differenzierbar sein.

$$(2) \quad I(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx$$

Der Integrand  $F$ , auch Grundfunktion gen., kann anstatt von einer Funktion  $y(x)$  auch von mehreren Funktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  und deren Ableitungen abhängen, auch können höhere Ableitungen dieser Funktionen auftreten, und schließlich muß das Integrationsgebiet kein Intervall, sondern kann auch ein Gebiet des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes mit  $n > 1$  sein. Zum Unterschied von *eindimensionalen* spricht man dann von einem *mehrdimensionalen Variationsproblem*. — Durch » $I(y) = \text{Minimum!}$ « bzw. » $I(y) = \text{Maximum!}$ « wird die Forderung bezeichnet, aus der durch die Aufgabe festgelegten Teilmenge zulässiger Vergleichsfunktionen  $y(x)$  die Funktion  $y_0(x)$  zu finden, für die  $I(y) \geq I(y_0)$  bzw.  $I(y) \leq I(y_0)$  gilt. Bezeichnet  $I_0$  den bezüglich aller zulässigen Vergleichsfunktionen gebildeten Minimal- bzw. Maximalwert des Variationsintegrals  $I(y)$ , so ist die *Lösung des Variationsproblems* eine zulässige Vergleichsfunktion  $y_0(x)$ , für die  $I(y_0) = I_0$  gilt. Man sagt dann auch, daß  $I(y)$  in  $y_0$  ein *absolutes Extremum* annimmt. Es gilt  $I(y_0) \leq I(y)$  bzw.  $I(y_0) \geq I(y)$  für alle zulässigen Vergleichsfunktionen. Gelten diese Ungleichungen nur für zulässige Vergleichsfunktionen  $y(x)$ , die sich nur wenig von  $y_0(x)$  unterscheiden, d. h. für Funktionen  $y = y_0 + h(x)$  mit kleinem  $|h(x)|$ , spricht man von einem *relativen Extremum*; es heißt *starkes Extremum*, wenn  $h'(x)$  beliebige Werte annehmen kann, und *schwaches Extremum*, falls zusätzlich verlangt wird, daß  $h'(x)$  klein ist.

III. Der Charakter des Variationsproblems wird weitgehend bestimmt von der Gestalt der *Grundfunktion*. Im *n-dimensionalen Variationsproblem* haben die Vergleichsfunktionen z. B.  $n$  unabhängige

Variable. — Das Variationsproblem heißt von *erster* bzw. von *höherer Ordnung* je nachdem, ob die Grundfunktion  $F$  nur die erste Ableitung  $y'$  oder auch höhere Ableitungen  $y^{(n)}$  mit  $n > 1$  der Funktion  $y$  enthält, über die variiert wird. Bei dieser Klassifikation spielt es keine Rolle, von wieviel Funktionen das Funktional  $I$  abhängt. Die Gleichungen (3) und (4) z. B. sind eindimensionale Variationsprobleme erster Ordnung, (5) ist eindimensional  $n$ -ter Ordnung, (6) ist zweidimensional erster Ordnung und (7) ein dreidimensionales Variationsproblem erster Ordnung.

$$(3) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx = \text{Extremum!}$$

$$(4) \quad I(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx = \text{Extremum!}$$

$$(5) \quad I(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx = \text{Extremum!}$$

$$(6) \quad I(u) = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy = \text{Extremum! mit } u = u(x, y)$$

$$(7) \quad I(u) = \iiint_D F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz = \text{Extremum! mit } u = u(x, y, z)$$

$$(8) \quad I(u) = \iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy = \text{Minimum!}$$

Ein konkretes Beispiel eines zweidimensionalen Variationsproblems erster Ordnung ist durch (8) gegeben, es bestimmt die *Minimalfläche*, d. h. die Fläche, die zwischen einer geschlossenen räumlichen Kurve den kleinsten Flächeninhalt einnimmt.

Das eindimensionale Variationsproblem  $n$ -ter Ordnung mit  $n \geq 1$  heißt *regulär*, wenn für alle  $x$  des Integrationsgebietes und für alle zulässigen Vergleichsfunktionen  $y(x)$  die Ungleichung (9) gilt, andernfalls heißt es *singulär* oder *ausgeartet*. Analog heißt das zweidimensionale Variationsproblem erster Ordnung (6) *regulär*, wenn für alle Punkte  $(x, y)$  des Integrationsgebietes  $D$  und alle Vergleichsfunktionen  $u(x, y)$  die Ungleichung (10) gilt, andernfalls heißt es *singulär*.

$$(9) \quad F_{y^{(n)}}(x, y, \dots, y^{(n)}) \neq 0$$

$$(10) \quad F_{u_x u_x} F_{u_y u_y} - (F_{u_x u_y})^2 \neq 0$$

$$(11) \quad I(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt = \text{Extremum!}$$

Das Variationsproblem kann auch in *Parameterdarstellung* vorliegen, wenn die Vergleichsfunktionen in Parameterform gegeben sind, z. B. (11) mit  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Dabei darf das Variationsproblem nicht von der gewählten Parameterdarstellung

der Vergleichsfunktionen abhängen, d. h., die Forderung  $F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y')$  muß für  $k > 0$  erfüllt sein.

Notwendig dafür, daß das Variationsproblem für die zulässige Funktion  $y_0(x)$  einen Extremwert annimmt, ist das Verschwinden der ersten  $\nearrow$  Variation  $V(y_0, \eta)$  für alle Funktionen  $\eta(x)$ , für die  $y_0(x) + \eta(x)$  zulässig ist. Aus dieser Bedingung folgt die  $\nearrow$  Eulersche Differentialgleichung für die Funktion  $y_0(x)$ . Gilt für das eindimensionale Variationsproblem (3) weiterhin noch  $F_{y'y'}(x, y_0, y_0') > 0$  bzw.  $F_{y'y'}(x, y_0, y_0') < 0$ , so hat (3) in  $y_0(x)$  ein schwaches Minimum bzw. ein schwaches Maximum. Dagegen liegt ein starkes Minimum bzw. Maximum vor, wenn sogar  $F_{y'y'}(x, y_0, p) > 0$  bzw.  $< 0$  für beliebiges reelles  $p$  gilt. Zur Lösung des Variationsproblems bedient man sich der *Eulerschen Differentialgleichung* oder einer auf dem Ritzschen Verfahren beruhenden approximativen  $\nearrow$  *direkten Methode*; Variationsprobleme mit Nebenbedingungen kann man mittels der *Lagrangeschen Multiplikatorenmethode* lösen.

IV. Die Vergleichsfunktionen eines Variationsproblems können zusätzl. *Randbedingungen* unterworfen sein, die an den Intervallenden  $a, b$  bzw. auf dem Rand des Integrationsgebietes  $D$  gelten sollen. Für das eindimensionale Variationsproblem (3) ist z. B.  $y(a) = A, y(b) = B$ , für das zweidimensionale Variationsproblem (6) die Forderung  $u(x, y) = 0$  auf dem Rand von  $D$  eine Randbedingung. Des weiteren kann die gesuchte Extremale verschiedenen Arten von *Nebenbedingungen* unterliegen. Beim *isoperimetrischen Variationsproblem* ist die Nebenbedingung ein Integral, das einen vorgegebenen Wert annehmen soll. Sucht man z. B. unter allen Kurven  $y(x)$  fester Bogenlänge  $L$ , die von einem Punkt  $P_1 = (a, 0)$  der  $x$ -Achse zu einem zweiten Punkt  $P_2 = (b, 0)$  der  $x$ -Achse verlaufen, diejenige, die mit der  $x$ -Achse eine Fläche  $I(y)$  größten Inhalts einschließt (Abb. 2), so ist das Variationsproblem gegeben durch (12) mit der Nebenbedingung (13). Die gesuchte Kurve  $y_0(x)$  ist ein Kreisbogen durch  $P_1$  und  $P_2$ .

$$(12) \quad I(y) = \int_a^b y(x) dx = \text{Max!}$$

$$(13) \quad \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = L, \quad L \geq b - a$$

Das Problem der *geodät. Linie* besteht darin, auf einer Fläche mit der Gleichung  $G(x, y, z) = 0$  die *kürzeste Linie* zu finden, die zwei Punkte  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  und  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  dieser Fläche miteinander verbind-

et. Ist die Fläche eine Ebene,  $G(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ , dann ist die kürzeste Linie eine Gerade. Auf der Kugel  $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$  fällt die geodät. Linie mit einem Stück eines Großkreises zusammen. Allgemein ergibt sich die geodät. Linie zwischen  $P_1$  und  $P_2$  als Lösung des Variationsproblems (14) unter der Nebenbedin-

$$(14) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \text{Min!}$$

gung  $G(x, y, z) = 0$ . Dabei ist  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  eine Parameterdarstellung der  $P_1$  mit  $P_2$  verbindenden Kurve. Exist  $x(t_1) = x_1, y(t_1) = y_1, z(t_1) = z_1, x(t_2) = x_2, y(t_2) = y_2, z(t_2) = z_2$ .

Ist, wie z. B. im Variationsproblem (15), die Nebenbedingung (16) durch eine Differentialgleichung gegeben, spricht man von einem *Lagrangeschen Variationsproblem*.

$$(15) \quad \int_{t_1}^{t_2} F(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) dt = \text{Extremum!}$$

$$(16) \quad f(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)) = 0.$$

$$(17) \quad \int_a^b F(x, y(x); u(x)) dx = \text{Extremum!}$$

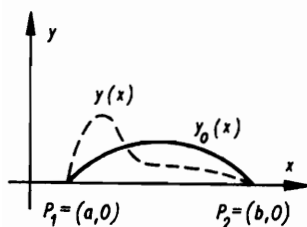
$$(18) \quad y' = f(x, y(x); u(x))$$

Ein Variationsproblem mit zusätzlichen Funktionen, z. B. (17) mit der Nebenbedingung (18), ist ein *nichtklassisches Variationsproblem*; man nennt sie *Steuerungsprobleme*. Die willkür. Funktion  $u(x)$ , die i. allg. noch einer Bedingung wie z. B.  $|u(x)| \leq 1$  unterworfen ist, heißt *Steuerungsfunktion*,  $y(x)$  ist der *Zustand*;  $u_0(x)$  heißt *optimale Steuerung*, wenn das Variationsintegral (17) für diese Steuerung und den dazugehörigen Zustand einen Extremwert annimmt und die Nebenbedingung (18) erfüllt ist.

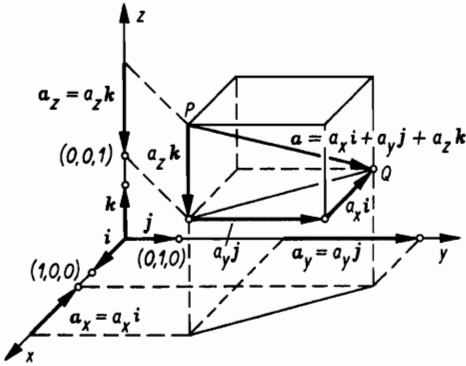
**Vektor:** I. Element eines Vektorraums. Im dreidimensionalen euklid. Raum kann er geometrisch als eine *Verschiebung* oder *Translation* des Raumes aufgefaßt werden. Zu jedem Raumpunkt  $P$  gehört dann als *Repräsentant* des V.s eine mit Durchlaufsinne versehene gerichtete Strecke  $\overline{PQ}$ ,  $P$  heißt der *Anfangspunkt* und  $Q$  der *Endpunkt* des Repräsentanten ( $\nearrow$  Vektorraum III.5.). Der absolute Betrag  $|a|$  des V.s  $a$  wird anschaulich auch seine *Länge* genannt. Sein inverses Element ( $\nearrow$  Vektorraum II.3.), der *entgegengesetzte* V.  $-a$ , hat z. B. die gerichtete Strecke  $\overline{QP}$  zum Repräsentanten, wenn  $\overline{PQ}$  ein Repräsentant von  $a$  ist. Alle gleichlangen und gleichgerichteten Strecken sind Repräsentanten ein und desselben V.s, und zwei V.en im Raum sind genau dann gleich, wenn je zwei ihrer Repräsentanten in Betrag und Richtung übereinstimmen.

Die für Elemente eines V.raumes geforderten Eigenschaften der V.addition, Kommutativität, Assoziativität, sowie Umkehrbarkeit, gelten auch für die Repräsentanten der V.en ( $\nearrow$  Vektorraum III.5.). Entsprechendes gilt für die Multiplikation von V.en mit reellen Zahlen.

II. In einem kartes. Koordinatensystem werden die senkrechten Projektionen  $a_x, a_y, a_z$  eines V.s  $a$



Variationsrechnung. Abb. 2: Eine Kurve fester Bogenlänge  $L$  soll eine Fläche größten Inhalts umschließen



Vektor. Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten

auf die Koordinatenachsen als *Komponenten* des  $V$ s bezeichnet (Abb.). Für sie gilt  $a_x + a_y + a_z = a$ . Sind  $i, j, k$  die Grund-V.en des Koordinatensystems, d. h. die Einheitsvektoren in Richtung der positiven  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse, so werden die *Koordinaten*  $a_x, a_y$  und  $a_z$  des  $V$ s  $a$  als die Skalare festgelegt, für die  $a_x = a_x i, a_y = a_y j$  und  $a_z = a_z k$  gilt, so daß die Koordinatendarstellung  $a = a_x i + a_y j + a_z k$  gilt ( $\nearrow$  Vektorraum VI.). — S. a. Betrag; Eigenvektor; Eigenwert; Fixvektor; kovarianter und kontravarianter Vektor; Linearform; orthogonale Vektoren; Skalarprodukt.

**Vektoranalysis:** mathemat. Disziplin, in der Vektoren als Funktionen von Veränderlichen betrachtet und mit den Begriffsbildungen und Methoden der Differential- und Integralrechnung untersucht werden. Die V. wird bes. angewendet in der mathemat. Physik und in der Differentialgeometrie. Sie wird auch oft als *Feldtheorie* bezeichnet. Grundlegende Begriffe der V. sind skalares Feld, Vektorfeld, Gradient, Divergenz, Rotation und Nablaoperator.

**Vektorfeld:** auf einem Teilbereich  $G$  des Raumes definierte Funktion  $V(P)$ , die jedem Punkt  $P \in G$  einen Vektor zuordnet, z. B. das Geschwindigkeitsfeld der Teilchen einer strömenden Flüssigkeit oder ein Kraftfeld. Ist das V. nur für die Punkte  $P$  einer Ebene definiert und liegen die vektoriellen Größen  $V(P)$  auch in dieser Ebene, so heißt das V. auch *ebenes Vektorfeld*. Ein V. bezeichnet man als *zentrales Vektorfeld*, wenn alle Vektoren  $V(P)$  auf Geraden liegen, die durch einen festen Punkt  $P_0$ , das Zentrum, gehen. Ein zentrales V. kann man als  $V = f(r) \cdot (r/r)$  darstellen, wenn  $r = \vec{P_0P}$  und  $r = |r|$  ist. Hängt  $f(r)$  nur von  $r$  ab, so spricht man von einem sphär. V.:  $V = f(r) \cdot (r/r)$ ; z. B. ist (1) ein

$$(1) \quad V = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \frac{r}{r}$$

zentrales V. und das *Newtonsche Gravitationsfeld* oder das *Coulombfeld*  $V = (c/r^2) \cdot (r/r)$  sind sphär. V.er.

Das V. kann außer vom Raumpunkt  $P$  noch von der Zeit  $t$  abhängen:  $V(P, t)$ . Jedes V.  $V(P, t)$  läßt sich durch drei skalare Felder  $u(P, t), v(P, t)$  und  $w(P, t)$

angeben. Diese skalaren Felder sind die Koeffizienten von  $V$  in der Zerlegung nach den drei orthonormierten Vektoren  $i, j$  und  $k$ , den Einheitsvektoren der Koordinatenachsen  $x, y, z$ :

$$V(P, t) = u(P, t) i + v(P, t) j + w(P, t) k$$

$$V(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) i + v(x, y, z, t) j + w(x, y, z, t) k.$$

Die partielle Ableitung eines  $V$ . nach  $x$  wird durch (2) definiert. Daraus ergibt sich (3).

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (V(x + \Delta x, y, z, t) - V(x, y, z, t))$$

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial v}{\partial x} j + \frac{\partial w}{\partial x} k$$

Analog verfährt man für die partiellen Ableitungen von  $V$  nach  $y, z, t$ . Bildet man mit  $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$  und  $t = t(s)$  das nur noch von  $s$  abhängige V.  $V(s) = V(x(s), y(s), z(s), t(s))$ , so gilt die *verallgemeinerte Kettenregel* (4), dabei sind die

$$(4) \quad \frac{dV}{ds}(s) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{du}{ds} i + \frac{dv}{ds} j + \frac{dw}{ds} k$$

partiellen Ableitungen  $\frac{\partial V}{\partial x}, \dots$  an der Stelle  $(x(s), y(s), z(s), t(s))$  zu bilden. Das *vollständige Differential*  $dV$  des V.  $V$  wird definiert durch  $dV = du i + dv j + dw k$ .

Sind  $V_1(x, y, z, t), V_2(x, y, z, t)$  differenzierbare V.er und ist  $U(x, y, z, t)$  ein differenzierbares skalares Feld, so gelten die *Differentiationsregeln* (5) bis (8).

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x} (V_1 + V_2) = \frac{\partial}{\partial x} V_1 + \frac{\partial}{\partial x} V_2$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial x} (UV_1) = U \frac{\partial}{\partial x} V_1 + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot V_1$$

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x} (V_1 \cdot V_2) = \frac{\partial V_1}{\partial x} \cdot V_2 + V_1 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x} (V_1 \times V_2) = \frac{\partial V_1}{\partial x} \times V_2 + V_1 \times \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

Entsprechende Rechenregeln gelten für  $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  und  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Für V.er gilt auch der Satz, daß die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht werden kann, wenn die entsprechenden Ableitungen stetig sind. Für das V.  $V(r) = (c/r^3) r$  gilt z. B. (9);  $\frac{\partial V}{\partial x}$

kann man auch nach (10) berechnen. Man beachtet dabei  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ .

$$(9) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c}{r^3} \right) r + \frac{c}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} r$$

$$= - \frac{3cx}{r^5} (xi + yj + zk) + \frac{c}{r^3} i$$

$$= - \left( \frac{3cx^2}{r^5} - \frac{c}{r^3} \right) i - \frac{3cxy}{r^5} j - \frac{3cxz}{r^5} k$$

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{cx}{r^3} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{cy}{r^3} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{cz}{r^3} \right) \mathbf{k}$$

Das  $V$ . heißt *zeitlich konstant*, wenn es nicht explizit von der Zeit abhängt:  $V(P) = u(P) \mathbf{i} + v(P) \mathbf{j} + w(P) \mathbf{k}$ .

Ein  $V$ ., das nur auf einer Geraden definiert ist, hat die Form  $V(s) = x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k}$ . Dabei ist  $s$  die Koordinate auf der Geraden.  $V(s)$  kann man auch als *Ortsvektor*  $\mathbf{r}(s)$  im Raum deuten, so daß sich durch  $\mathbf{r}(s) = x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k}$  eine Kurve im Raum ergibt. Ist  $s = t$  die Zeit, so kann  $\mathbf{r}(t)$  den Ort eines Teilchens zur Zeit  $t$  beschreiben. Die Ableitung (11) stellt dann die *Geschwindigkeit*

$$(11) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \mathbf{i} + \frac{dy}{dt}(t) \mathbf{j} + \frac{dz}{dt}(t) \mathbf{k} \\ = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

$$(12) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} + \ddot{z}(t) \mathbf{k}$$

des Teilchens dar und (12) seine *Beschleunigung* zum Zeitpunkt  $t$ . Der Vektor  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$  ist stets tangential zur Kurve  $\mathbf{r}(t)$ , stellt also einen *Tangentenvektor* dar. Gilt z. B.  $|\mathbf{r}(t)| = c$  oder  $\mathbf{r}(t)^2 = c^2$  für alle  $t$ , so folgt daraus  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t)^2) = 2\mathbf{r}(t) \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = 0$ . Folglich stehen dann  $\mathbf{r}(t)$  und  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$  senkrecht aufeinander.

Hat eine Kurve  $C$  in jedem Punkt  $P$  den dort definierten Vektor eines zeitlich konstanten  $V$ .es  $V(P)$  zum Tangentialvektor, so heißt die Kurve  $C$  eine *Feldlinie* des  $V$ .es. Wird die Feldlinie  $C$  durch  $\mathbf{r}(s) = x(s) \mathbf{i} + y(s) \mathbf{j} + z(s) \mathbf{k}$  und das  $V$ . durch  $V(x, y, z) = u(x, y, z) \mathbf{i} + v(x, y, z) \mathbf{j} + w(x, y, z) \mathbf{k}$  gegeben, so muß  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) = \lambda(s) V(x(s), y(s), z(s))$  für alle  $s$  gelten, dabei ist  $\lambda(s)$  ein Proportionalitätsfaktor.

Zum Begriff des *konservativen V*.es vgl. Gradient III. und zu dem des *wirbelfreien V*.es vgl. Rotation I. — S. a. Divergenz; Nablaoperator; Integralsätze II.

**Vektoriteration** ↗ Eigenwertberechnung III.

**Vektoroptimierung** ↗ Optimierung VI.

**Vektorpotential** ↗ Rotation I.

**Vektorprodukt, äußeres Produkt, Kreuzprodukt:**

I. Funktion, die jedem geordneten Paar von Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  eines dreidimensionalen euklid. Vektorraumes  $V$  einen dritten Vektor, das  $V$ .  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  [lies:  $\mathbf{a}$  Kreuz  $\mathbf{b}$ ] bzw.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  auf folgende Weise zuordnet: Ist  $\mathbf{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)_{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)_{\mathbf{B}}$ , so ist  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)_{\mathbf{B}}$ . In Determinantenform geschrieben gilt (1), mit der Maßgabe, daß die dreireihige Determinante nach der ersten Zeile zu entwickeln ist. An der Deter-

$$(1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

minantenschreibweise erkennt man leicht folgende *Eigenschaften des V*.es:

**I.1.**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$  genau dann, wenn  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  linear abhängig sind, d. h., wenn  $\mathbf{a} = \mathbf{o}$  oder  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$  oder  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ; speziell:  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{o}$ ;

**I.2.**  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ ;

**I.3.** *Antikommutativität:*  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ , speziell:  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ ;

**I.4.**  $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ ;

**I.5.**  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ;

**I.6.**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ist orthogonal zu  $\mathbf{a}$  und zu  $\mathbf{b}$ ;

**I.7.**  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ;

**I.8.** Falls  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  linear unabhängig, so hat das geordnete Tripel  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  dieselbe Orientierung wie  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Algebraisch ausgedrückt ist das Produkt aus der Determinante  $D(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ , in deren Zeilen die Koordinaten von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  und  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  bzgl. irgendeiner Orthonormalbasis  $\mathbf{B}$  stehen, mit der Determinante  $D(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , deren Zeilen die Koordinaten von  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  bzgl.  $\mathbf{B}$  enthalten, positiv.

Die Eigenschaften I.6., I.7. und I.8. benutzt man gelegentlich auch zur Definition des  $V$ .es:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ist derjenige Vektor, der orthogonal zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ist, dessen Betrag gleich der Maßzahl des Flächeninhaltes des durch  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms ist, und der in die Richtung weist, in die eine Rechtsschraube vorrückt, wenn man ihr die Drehung erteilt, die  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  überführt, und zwar mit dem kleineren der beiden Drehwinkel (Abb. 1).

**II. Mehrfache Produkte:** Zwischen drei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  eines dreidimensionalen euklid. Vektorraumes lassen sich formal die folgenden Produkte bilden:  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c}, (\mathbf{a}\mathbf{b}) \mathbf{c}$  und  $(\mathbf{a}\mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ , von denen das letzte sinnlos ist, weil  $(\mathbf{a}\mathbf{b})$  kein Vektor ist. Das vorletzte Produkt ist nach der Definition des Skalarproduktes das Produkt einer reellen Zahl mit einem Vektor. Das Produkt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c}$  ist bis auf das Vorzeichen gleich der Maßzahl des Volumens des durch die drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds oder Spates (Abb. 2), man nennt es deshalb das *Spatprodukt* (2) von  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ .

$$(2) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

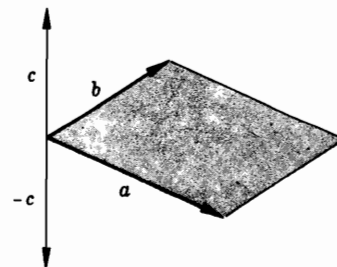
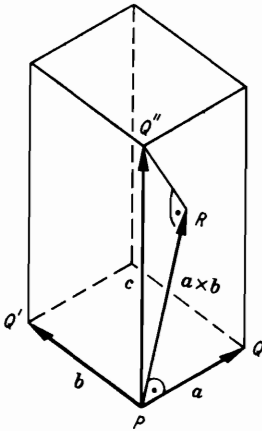


Abb. 1: Das Vektorprodukt  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ist orthogonal zu  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  und sein Betrag ist gleich der Maßzahl des Flächeninhaltes des durch  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannten Parallelogramms





Vektorprodukt.  
Abb. 2: Zum Spat-  
produkt

Es verschwindet genau dann, wenn  $\{a, b, c\}$  linear abhängig ist; außerdem gilt (3) ( $\nearrow$  Determinante).

$$(3) \quad abc = bca = cab \\ = -acb = -bac = -cba$$

Das Spatprodukt ist linear in allen Faktoren, d. h., es gilt z. B. (4).

$$(4) \quad a(b_1 + b_2)c = ab_1c + ab_2c; \\ (\lambda a)bc = \lambda(abc)$$

Das Produkt  $a \times (b \times c)$  behandelt man mittels des *Entwicklungssatzes* nach (5), (6). Als Merkmregel kann gelten: Mittlerer Vektor mal Skalarprodukt der übrigen.

$$(5) \quad a \times (b \times c) = (ac)b - (ab)c \\ (6) \quad (a \times b) \times c = (ac)b - (bc)a.$$

übrigen minus anderer Vektor der Klammer mal Skalarprodukt der übrigen. Aus dem Entwicklungssatz folgt sofort die *Lagrangesche Identität* (7).

$$(7) \quad a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

Produkte mit vier und mehr Faktoren lassen sich mit der Entwicklungsregel vereinfachen, es gelten z. B. die Beziehungen (8) und (9).

$$(8) \quad (a \times b)(c \times d) = \begin{vmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{vmatrix} \\ (9) \quad (a \times b) \times (c \times d) = c(abd) - d(abc) \\ = b(acd) - a(bcd).$$

**Vektorraum, linearer Raum:** I. eine nichtleere Menge  $V$ , für deren Elemente eine Addition (Zeichen  $+$ ) und eine Multiplikation mit reellen oder komplexen Zahlen (Zeichen  $\cdot$ ) so erklärt sind, daß folgende Axiome erfüllt sind:

**I.1. Axiome der Addition:**

*Ausführbarkeit und Eindeutigkeit:* Zu je zwei Elementen  $a, b \in V$  gibt es genau ein Element  $a + b \in V$ , die *Summe* von  $a$  und  $b$ .

*Assoziativität:* Für alle  $a, b, c \in V$  gilt:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .

*Kommutativität:* Für alle  $a, b \in V$  gilt:  $a + b = b + a$ .

*Umkehrbarkeit:* Zu je zwei Elementen  $a, b \in V$  gibt es stets ein Element  $x \in V$ , so daß  $a + x = b$  ist.

**I.2. Axiome der Multiplikation mit Zahlen, der skalaren Multiplikation:**

*Ausführbarkeit und Eindeutigkeit:* Zu jedem Element  $a \in V$  und jeder reellen bzw. komplexen Zahl  $\alpha$  gibt es genau ein Element  $\alpha a \in V$ , das  $\alpha$ -fache von  $a$ .

*Assoziativität:* Für alle  $a \in V$  und alle reellen bzw. komplexen Zahlen  $\alpha, \beta$  gilt:  $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ .

Für alle  $a \in V$  gilt  $1 \cdot a = a$ .

**I.3. Axiome der Distributivität:** Addition und skalare Multiplikation hängen über Distributivgesetze zusammen; für alle  $a, b \in V$  und alle reellen bzw. komplexen Zahlen  $\alpha, \beta$  gelten (1) und (2).

$$(1) \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \\ (2) \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a.$$

Die Elemente eines  $V_s$  heißen *Vektoren*. — Bei der Definition der Multiplikation kann man statt des Körpers der reellen bzw. der komplexen Zahlen auch andere Körper  $K$  zugrunde legen. Man spricht dann von einem  $V$ , über dem Körper  $K$ ; insbes. von einem reellen  $V$ . bzw. einem komplexen  $V$ ., wenn  $K$  der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen bzw. der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen ist. — Weiter ist zu beachten, daß dasselbe Zeichen für eine Rechenoperation verschiedene Bedeutung haben kann; z. B. steht das Zeichen  $+$  in  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$  links für die Addition von Zahlen, rechts für die Addition von Elementen des  $V_s$ . — S. a. Modul II.

II. Aus den Axiomen ergeben sich unmittelbar folgende fünf *Eigenschaften*:

II.1. In jedem  $V$ .  $V$  gibt es genau ein bzgl. der Addition neutrales Element  $o$  mit der Eigenschaft  $a + o = a$  für alle  $a \in V$ ;  $o$  heißt das *Nullelement* oder der *Nullvektor*.

II.2. Zu jedem Element  $a \in V$  gibt es genau ein bzgl. der Addition *inverses Element*  $(-a)$  mit der Eigenschaft  $a + (-a) = o$ ;  $(-a)$  heißt der zu  $a$  *entgegengesetzte Vektor*. Man kann einen  $V$ . auch definieren, indem man anstelle der Umkehrbarkeit der Addition die Eigenschaften II.1. und II.2. fordert; dann ist die Umkehrbarkeit der Addition eine Folgerung aus dem abgeänderten Axiomensystem.

II.3. Jede Gleichung  $a + x = b$  mit  $a, b \in V$  ist *eindeutig* lösbar; die eindeutig bestimmte Lösung heißt die *Differenz* von  $b$  und  $a$ , man schreibt  $x = b - a$ . Insbes. ist  $o - a = -a$ .

II.4. Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition sowie die Distributivgesetze lassen sich mittels vollständiger Induktion auf endlich viele Summanden verallgemeinern.

II.5. Für Vektoren  $a, b \in V$  und reelle bzw. komplexe Zahlen  $\alpha, \beta$  gelten (3) bis (10).

$$(3) \quad a + (-b) = a - b \\ (4) \quad -(-a) = a \\ (5) \quad -(a + b) = -a - b \\ (6) \quad -(a - b) = -a + b$$

- (7)  $0 \mathbf{a} = \mathbf{0}; \quad \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- (8)  $(-\alpha) \mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a})$
- (9)  $\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} - \alpha \mathbf{b}$
- (10)  $(\alpha - \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} - \beta \mathbf{a}$

III. Beispiele für Vektorräume:

III.1. Der  $V$ .  $V^n$  der geordneten  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reeller Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit den Verknüpfungen (11) und (12).

- (11)  $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$   
 $= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- (12)  $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

III.2. Der  $V$ . aller konvergenten Folgen reeller Zahlen mit den Verknüpfungen (13) und (14).

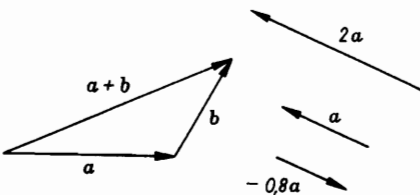
- (13)  $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
- (14)  $\alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}$ .

III.3. Der  $V$ . der Polynome  $\sum a_i x^i$  mit reellen Koeffizienten  $a_i$ , wenn Addition und skalare Multiplikation für die Polynome wie üblich definiert sind.

III.4. Der  $V$ . der im Intervall  $[a, b]$  stetigen reellwertigen Funktionen mit den Verknüpfungen (15) und (16).

- (15)  $[f + g](x) = f(x) + g(x)$
- (16)  $[\alpha f](x) = \alpha f(x)$

III.5. Der  $V$ . der Translationen einer Ebene oder eines Raumes, in dem Addition und skalare Multiplikation in der bekannten Weise definiert sind (Abb.). Auf diesem Beispiel beruht die Möglichkeit, einerseits die analyt. Geometrie mit den Mitteln der Theorie der  $V$ .e aufzubauen, und andererseits von Tatbeständen dieser Theorie ein anschaul. geometr. Bild zu gewinnen.



Vektorraum. Beispiele zur elementaren Vektoralgebra

IV. Untervektorräume. Eine nichtleere Untermenge  $U$  eines  $V$ .s  $V$ , die in bezug auf die in  $V$  definierten Verknüpfungen selbst ein  $V$ . ist, heißt ein Unter- $V$ . von  $V$ . Eine von der leeren Menge verschiedene Teilmenge  $U \subseteq V$  ist ein Unter- $V$ . von  $V$  genau dann, wenn  $U$  abgeschlossen ist bzgl. der in  $V$  definierten Verknüpfungen, d. h., wenn aus  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$  und  $\alpha$  reell bzw. komplex stets folgt:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$  und  $\alpha \mathbf{a} \in U$ . — Jeder  $V$ . enthält zwei triviale Unter- $V$ .e, nämlich sich selbst sowie jenen, dessen einziges Element der Nullvektor ist. Im  $V$ . der geordneten

$n$ -Tupel reeller Zahlen bilden z. B. diejenigen  $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mit der Eigenschaft  $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$ , in denen die  $c_i$  feste reelle Zahlen sind, einen Unter- $V$ .; weiter sind im  $V$ . der konvergenten Zahlenfolgen die Menge der Nullfolgen, im  $V$ . der Polynome die Menge der Polynome höchstens  $n$ -ten Grades Beispiele für Unter- $V$ .e. —

Ist  $S$  eine nichtleere Menge von Vektoren eines  $V$ .s  $V$ , so bildet die Menge aller Linearkombinationen von  $S$  bzgl. der in  $V$  definierten Verknüpfungen einen Unter- $V$ ., den man das Erzeugnis von  $S$  oder die lineare Hülle von  $S$  nennt und mit  $\text{Erz } S$  oder  $L(S)$  bezeichnet. Es ist  $L(S)$  der kleinste Unter- $V$ . von  $V$ , der die Menge  $S$  enthält. Läßt sich ein Unter- $V$ .  $U$  von  $V$  als lineare Hülle  $U = L(S)$  einer Menge  $S$  von Vektoren darstellen, so heißt  $S$  ein Erzeugendensystem des Unterraumes  $U$ . Mit zwei Untervektorräumen  $U_1, U_2$  von  $V$  ist auch  $U_1 \cap U_2$  ein Unter- $V$ . von  $V$ ; hingegen ist  $U_1 \cup U_2$  i. allg. kein Unter- $V$ . Der kleinste Unter- $V$ ., der sowohl  $U_1$  als auch  $U_2$  enthält, ist die lineare Hülle  $L(U_1 \cup U_2)$ ; man bezeichnet ihn als die Summe  $U_1 + U_2 = L(U_1 \cup U_2)$ , oder das Kompositum von  $U_1$  und  $U_2$ , er besteht aus genau den Vektoren der Gestalt  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  mit  $\mathbf{x}_1 \in U_1$  und  $\mathbf{x}_2 \in U_2$ .

V. Basis und Dimension. Ist  $V$  ein  $V$ . und  $S$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , d. h.  $V = L(S)$ , so läßt sich jeder Vektor von  $V$  als Linearkombination von Vektoren aus  $S$  darstellen. Diese Darstellung muß jedoch nicht eindeutig sein, denn es ist möglich, daß bereits eine Teilmenge  $S'$  von  $S$  den  $V$ .  $V$  erzeugt; z. B. ist mit  $S$  auch  $S' = S \setminus \{\mathbf{x}\}$  ein Erzeugendensystem, wenn  $\mathbf{x}$  Linearkombination von  $S'$  ist. Deshalb ist es nützlich, unter allen Erzeugendensystemen eines  $V$ .s die minimalen zu suchen, die kein Element mehr enthalten, das Linearkombination der übrigen ist. Jedes solche minimale Erzeugendensystem heißt eine Basis des  $V$ .s; ein Erzeugendensystem ist minimal genau dann, wenn es linear unabhängig ist ( $\nearrow$  lineare Abhängigkeit). Daher läßt sich eine Basis von  $V$  auch definieren als eine Vektormenge  $B$  mit den Eigenschaften  $L(B) = V$  und  $B$  linear unabhängig. — Bzgl. einer Basis  $B$  läßt sich jeder Vektor eindeutig als Linearkombination von  $S$  darstellen. Die Eigenschaft, minimales Erzeugendensystem zu sein, ist äquivalent zur Eigenschaft, maximale linear unabhängige Vektormenge von  $V$  zu sein.

V.1. Im  $V$ .  $V^n$  der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen ist  $\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)\}$  z. B. eine Basis, sie heißt die kanon. Basis von  $V^n$ .  
 V.2. Im  $V$ . der Polynome ist  $B = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  eine Basis, denn  $B$  ist linear unabhängig und jedes

Polynom  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  läßt sich als Linearkombination von Elementen aus  $B$  schreiben.

Jeder  $V$ .  $V \neq \{\mathbf{0}\}$  hat mindestens eine Basis, denn jedes seiner Erzeugendensysteme enthält eine solche: Daraus folgt: Ist  $V$  endlich erzeugbar, d. h., gibt es eine endl. Menge  $S$  mit  $L(S) = V$ , so hat  $V$  auch eine endl. Basis. Diese läßt sich konstruktiv gewinnen durch „Verkürzung“ eines endl. Erzeugendensystems  $S$ , indem man sukzessive die Vek-

toren wegläßt, die Linearkombinationen der übrigen Vektoren von  $S$  sind, so lange bis das „verkürzte“ Erzeugendensystem minimal, d. h. linear unabhängig ist. Es ist auch möglich, eine linear unabhängige Vektormenge zu einer Basis zu ergänzen durch sukzessives Hinzufügen passender Vektoren, bis die so „erweiterte“ linear unabhängige Menge maximal, d. h. Erzeugendensystem ist.

Ist  $B$  eine Basis des V.s  $V$  und  $S$  eine linear unabhängige Teilmenge von  $m$  Vektoren aus  $V$ , dann läßt sich in  $B$  stets eine Teilmenge  $B^*$  von ebenfalls  $m$  Vektoren so finden, daß die Menge  $(B \setminus B^*) \cup S$  auch eine Basis von  $V$  ist. Mit anderen Worten heißt das, daß man eine geeignete Teilmenge einer Basis durch eine vorgegebene linear unabhängige Menge gleicher Vektorenanzahl austauschen kann, ohne daß dadurch die Basis-eigenschaft verlorengeht. Mithin kann man stets Basen konstruieren, die vorgegebene linear unabhängige Vektoren enthalten. Die wichtigste Folgerung aus diesem *Steinitz'schen Austauschatz* ist, daß alle Basen eines endlich erzeugbaren V.s  $V$  aus gleichviel Vektoren bestehen; die allen Basen von  $V$  gemeinsame Anzahl der Basisvektoren nennt man die *Dimension*  $\dim V$  des V.s  $V$ . Dem V.  $V = \{o\}$  ordnet man die Dimension Null zu. Ist der V. nicht endlich erzeugbar, so heißt er *unendlich-dimensional*. — Der V.  $V^n$  geordneter  $n$ -Tupel reeller Zahlen  $z, B$ . hat die Dimension  $n$ , da seine kanon. Basis — und mithin jede seiner Basen — aus  $n$  Vektoren besteht. Der V. der Translationen der Ebene ist zweidimensional, denn je zwei nicht parallele Vektoren bilden eine Basis dieses Vektorraumes. Der V. aller Polynome hingegen ist unendlich-dimensional.

Hat ein V. die Dimension  $n$ , so ist jede Basis von  $V$  ein linear unabhängiges  $n$ -Tupel von Vektoren; und umgekehrt ist jedes linear unabhängige  $n$ -Tupel von Vektoren aus  $V$  eine Basis von  $V$ . Letzteres liefert ein für prakt. Untersuchungen bequemes Basis-kriterium, sofern die Dimension von  $V$  bekannt ist. Ist  $\dim V = n$ , so gibt es in  $V$  mindestens ein linear unabhängiges  $n$ -Tupel von Vektoren, während alle  $(n + 1)$ -Tupel von Vektoren linear abhängig sind, und umgekehrt. Sind  $U, U_1, U_2$  Untervektorräume von  $V$ , so gelten  $\dim U \leq \dim V$ ;  $\dim U = \dim V$  genau dann, wenn  $U = V$ , und der *Dimensionssatz* (17).

$$(17) \quad \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

**VI. Koordinaten.** Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler V. und  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  eine Basis von  $V$ , deren Basisvektoren  $a_i$  in fester Reihenfolge stehen, so ist jeder Vektor  $x \in V$  eindeutig als Linearkombination

$x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$  von Elementen aus  $B$  darstellbar, und die eindeutig bestimmten Koeffizienten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  heißen die *Koordinaten* von  $x$  bzgl.  $B$ ; man schreibt  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$ . Die dadurch bzgl. einer festen Basis von  $V$  definierte umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Vektoren von  $V$  und den geordneten  $n$ -Tupeln reeller Zahlen, ihren Koordi-

natentupeln, ist sogar ein *Isomorphismus*, denn der Summe zweier Vektoren  $x, y$  von  $V$  entspricht als Koordinaten- $n$ -Tupel die Summe der Koordinaten- $n$ -Tupel von  $x$  und  $y$ , und das Koordinaten- $n$ -Tupel von  $\alpha x$  ergibt sich durch Multiplikation des Koordinaten- $n$ -Tupels von  $x$  mit  $\alpha$ . Daher gilt: Jeder reelle  $n$ -dimensionale V. ist *isomorph* zum V. der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen. Geht man von der Basis  $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  mittels der Gleichungen  $\bar{a}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_k$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  zu einer anderen

Basis  $\bar{B} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  von  $V$  über, so gilt (18) für die Koordinaten- $n$ -Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)_B$  bzw.  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)_{\bar{B}}$  desselben Vektors  $x$ .

$$(18) \quad x_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \bar{x}_i \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n$$

**VII. Euklid. Vektorräume.** Ein V.  $V$ , der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt euklid. V. Über das Skalarprodukt läßt sich durch die Definition  $|x| = \sqrt{x \cdot x}$  der *Betrag* eines Vektors  $x \in V$  einführen, auch *Länge* oder *Norm* gen. Ein Vektor mit dem Betrage 1 heißt *Einheitsvektor* oder *normierter Vektor*; für jeden Vektor  $x \neq o$  ist  $x/|x|$  ein Einheitsvektor. — Aus den Eigenschaften des Skalarproduktes ergeben sich folgende *Eigenschaften des Betrages*: Für alle  $x, y \in V$  und alle reellen Zahlen  $\alpha$  gelten (19), (20), (21) und (22).

$$(19) \quad |x| \geq 0, |x| = 0 \text{ genau dann, wenn } x = o$$

$$(20) \quad |\alpha x| = |\alpha| |x|$$

$$(21) \quad \text{Dreiecksungleichung: } |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(22) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Ersetzt man in (21)  $x$  durch  $x - y$  und  $y$  durch  $y - x$ , so erhält man (22). Das Gleichheitszeichen gilt in (22) genau dann, wenn  $y = o$  oder  $x = \lambda y$  mit reellem  $\lambda$ ; für (21) ist noch zusätzlich  $\lambda \geq 0$  zu fordern. Des weiteren gilt die *Schwarz'sche Ungleichung* (23), in der das Gleichheitszeichen genau dann

$$(23) \quad |xy| \leq |x| |y|$$

gilt, wenn  $\{x, y\}$  linear abhängig ist. — Wegen (23) gilt (24); und man kann die *Größe des Winkels* zwi-

$$(24) \quad -1 \leq (xy)/(|x| |y|) \leq +1$$

schen den Vektoren  $x \neq o, y \neq o$  einführen als die reelle Zahl  $\alpha$ , für die (24a) gilt.

$$(24a) \quad \cos \alpha = \frac{xy}{|x| \cdot |y|} \quad \text{und } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Zwei Vektoren  $x, y$  eines euklid. V.s heißen *zueinander orthogonal* genau dann, wenn  $xy = 0$ . Inbes. ist demnach der Nullvektor orthogonal zu jedem Vektor aus  $V$ . Das  $r$ -Tupel  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  von mindestens zwei Vektoren eines euklid. V.s heißt ein *Orthogonalsystem* genau dann, wenn es den Nullvektor nicht enthält und die Vektoren paarweise orthogonal sind, d. h., wenn für  $i, k = 1, 2, \dots, r$

(25) gilt. Jedes Orthogonalsystem ist linear unab-

$$(25) \quad \mathbf{x}_i \mathbf{x}_k \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq k \\ \neq 0 & \text{für } i = k \end{cases}$$

hängig. — Ein Orthogonalsystem  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$  heißt insbes. *Orthonormalsystem*, wenn die  $\mathbf{x}_i$  darüber hinaus sämtlich Einheitsvektoren sind, d. h., wenn für  $i, k = 1, 2, \dots, r$  (26) gilt. Ein Orthonormalsystem, das gleichzeitig Basis des Vektorraumes  $V$  ist, heißt eine *Orthonormalbasis* von  $V$ .

$$(26) \quad \mathbf{x}_i \mathbf{x}_k \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq k \\ = 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Sind die Koordinaten zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  gegeben bzgl. einer Orthonormalbasis  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)_{\mathbf{B}}$ ;  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)_{\mathbf{B}}$ , so ist (27) ihr Skalarprodukt.

$$(27) \quad \mathbf{a} \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Im  $V$  der geordneten  $n$ -Tupel reeller Zahlen mit dem übl. Skalarprodukt ist z. B. die kanon. Basis eine Orthonormalbasis. Daß jeder euklid.  $V$  endl. Dimension eine Orthonormalbasis hat, lehrt das *Schmidtsche Orthonormierungsverfahren*; es gestattet, aus jeder Basis von  $V$  durch „schrittweise Orthogonalisierung“ eine Orthonormalbasis zu konstruieren. Ist  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  eine Basis von  $V$ , so erhält man hieraus zunächst ein Orthogonalsystem  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$  (28), und (29) ist eine Orthonormalbasis von  $V$ .

$$(28) \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_i}{\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i} \cdot \mathbf{y}_i \text{ für } k = 2, 3, \dots, n$$

$$(29) \quad \left\{ \frac{\mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}_1|}, \frac{\mathbf{y}_2}{|\mathbf{y}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{y}_n}{|\mathbf{y}_n|} \right\}$$

Ist z. B.  $\mathbf{U} = \mathbf{L}\{(4, 2, -2, 1), (2, 2, -4, -5), (0, 8, -2, -5)\}$  ein dreidimensionaler Unterraum des  $V$ es der geordneten 4-Tupel reeller Zahlen, in dem das Skalarprodukt wie üblich definiert ist, so erhält man (30), (31) und (32) mittels des Schmidtschen Verfahrens:

$$(30) \quad \mathbf{y}_1 = (4, 2, -2, 1)$$

$$(31) \quad \mathbf{y}_2 = (2, 2, -4, -5) - \frac{3}{5} (4, 2, -2, 1) \\ = -\frac{2}{5} (1, -2, 7, 14)$$

$$(32) \quad \mathbf{y}_3 = (0, 8, -2, -5) + \frac{2}{5} (1, -2, 7, 14) \\ - \frac{3}{5} (4, 2, -2, 1) \\ = 2(-1, 3, 1, 0)$$

Geht man schließlich von den  $\mathbf{y}_i$  noch zu den entsprechenden Einheitsvektoren über, so erhält man mit (33) eine Orthonormalbasis von  $\mathbf{U}$ .

$$(33) \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} (4, 2, -2, 1); \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{10} (1, -2, 7, 14); \frac{1}{\sqrt{11}} (-1, 3, 1, 0) \right\}$$

Zwei Untervektorräume  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  eines euklid.  $V$ es  $V$  heißen *zueinander orthogonal* genau dann, wenn  $\mathbf{x} \mathbf{y} = 0$  ist für alle  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}_1$  und für alle  $\mathbf{y} \in \mathbf{U}_2$ ; man

schreibt  $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{U}_2$ . Notwendig und hinreichend für  $\mathbf{U}_1 \perp \mathbf{U}_2$  ist bereits, daß  $\mathbf{x}_i \mathbf{y}_k = 0$  für alle Vektoren  $\mathbf{x}_i$  einer Basis von  $\mathbf{U}_1$  und alle Vektoren  $\mathbf{y}_k$  einer Basis von  $\mathbf{U}_2$  gilt. — Ist  $\mathbf{U}$  ein Unter- $V$ . von  $V$ , so heißt die Menge aller zu allen Vektoren von  $\mathbf{U}$  orthogonalen Vektoren aus  $V$  das *orthogonale Komplement*  $\mathbf{U}^\perp$  von  $\mathbf{U}$  bzgl.  $V$ , für das (34) gilt.

$$(34) \quad \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V \text{ und } \mathbf{x} \mathbf{u} = 0 \text{ für alle } \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$$

Ist z. B.  $V$  der  $V$ . der geordneten Tripel reeller Zahlen mit

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3) (y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

als Skalarprodukt und ist  $\mathbf{U} = \mathbf{L}\{(3, 2, -2), (0, 1, 5)\}$ , so ist  $\mathbf{U}^\perp = \mathbf{L}\{(4, -5, 1)\}$ .

Das orthogonale Komplement bildet mit den  $V$ -Verknüpfungen wieder einen Unter- $V$ . von  $V$ . Der Durchschnitt  $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{o}\}$  besteht nur aus dem Nullvektor.

Ist  $V$  endlich-dimensional, so ist weiter  $(\mathbf{U}^\perp)^\perp = \mathbf{U}$  und  $\mathbf{U} + \mathbf{U}^\perp = V$ , woraus mit  $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{o}\}$  folgt (35).

$$(35) \quad \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{U}^\perp = \dim V.$$

Wegen  $\mathbf{U} + \mathbf{U}^\perp = V$  läßt sich jeder Vektor  $\mathbf{x} \in V$  zerlegen in  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  mit  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbf{U}^\perp$ , und wegen  $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{o}\}$  ist diese Zerlegung eindeutig. Den Vektor  $\mathbf{u}$  nennt man die *orthogonale Projektion* von  $\mathbf{x}$  in  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{w}$  das *Lot* von  $\mathbf{x}$  auf  $\mathbf{U}$ . Für alle Vektoren  $\mathbf{a} \in \mathbf{U}$  gilt dann  $|\mathbf{w}| = |\mathbf{x} - \mathbf{u}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ , d. h., das Lot hat die aus der Anschauung bekannte Eigenschaft des „kürzesten Abstandes“.

Über komplexe Vektorräume s. a. Skalarprodukt. Dualer Vektorraum, bidualer Vektorraum  $\nearrow$  Linearform.

**Vektorteil**  $\nearrow$  Quaternionen.

**vel-Funktion**  $\nearrow$  Aussagenlogik II.

Venn, John, geb. 4. 8. 1834 Hull, gest. 4. 4. 1923 Cambridge. —  $V$ . war seit 1859 Priester und wirkte als Professor der Logik und Naturphilosophie in Cambridge. Er entwickelte eine *induktive* und *methodolog.* Logik und versuchte, diese mit der deduktiven und formalist. Logik von HAMILTON zu verbinden.

**verallgemeinerte Kennfunktion**  $\nearrow$  Zeitfunktion II. **verallgemeinerte Kugelkoordinaten**  $\nearrow$  Raumintegral IV.

**verallgemeinerter Mittelwertsatz**  $\nearrow$  Mittelwertsatz III.

**Veränderliche**  $\nearrow$  Variable II.

**Verband: I.** eine Menge  $V$  mit zwei binären Operationen, dem Durchschnitt  $\cap$  und der Vereinigung  $\cup$ , wenn bzgl. beider Operationen das *Assoziativgesetz* (1) und das *Kommutativgesetz* (2) gelten sowie die beiden *Verschmelzungsgesetze* (3) für beliebige Elemente  $a, b, c$  aus  $V$  erfüllt sind:

$$(1) \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c); \\ (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

$$(2) \quad a \cap b = b \cap a; a \cup b = b \cup a$$

$$(3) \quad a \cap (a \cup b) = a; a \cup (a \cap b) = a$$

Aus den Axiomen (1), (2), (3) folgt, daß beide Operationen *idempotent* sind, d. h., für ein beliebiges Element  $a$  aus dem  $V$ . gilt  $a \cap a = a$  und  $a \cup a = a$ . Für zwei Elemente  $a$  und  $b$  aus dem  $V$ . gilt  $a \cap b = a$  genau dann, wenn  $a \cup b = b$  gilt.

*Beispiele:* 1. Die natürl. Zahlen größer als 0 bilden einen  $V$ ., wenn man als Durchschnitt die Bildung des größten gemeinsamen Teilers und als Vereinigung die Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen erklärt. — 2. Die Potenzmenge  $P(M)$  einer Menge  $M$  bildet einen  $V$ ., wenn man als Vereinigung bzw. Durchschnitt die entsprechende mengentheoret. Operation nimmt. — 3. In der Menge aller auf dem Intervall  $[0, 1]$  der reellen Zahlen definierten reellen Funktionen soll  $f \cap g$  die Funktion sein, die für jedes  $x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  den kleineren Wert von  $f(x)$  und  $g(x)$  annimmt, während  $f \cup g$  die Funktion sein soll, die dort den größeren Wert von  $f(x)$  und  $g(x)$  annimmt. Beide Operationen erfüllen die  $V$ .saxiome.

In jedem  $V$ . läßt sich eine *Ordnungsrelation* definieren;  $a \leq b$  soll genau dann gelten, wenn  $a \cap b = a$  ist. Umgekehrt ist eine bzgl. der Relation  $\leq$  *halbgeordnete Menge* ein  $V$ ., wenn je zwei Elemente  $a$  und  $b$  stets ein Infimum  $\inf(a, b)$  und Supremum  $\sup(a, b)$  haben. Es gilt:  $a \cap b = \inf(a, b)$ ,  $a \cup b = \sup(a, b)$ .

Ersetzt man im  $V$ .  $V$  das Operationszeichen  $\cap$  durch  $\cup$  und umgekehrt, sowie die Halbordnungsrelation „ $\leq$ “ durch die Relation „ $\geq$ “, so erfüllt die dem  $V$ . zugrundeliegende Menge zusammen mit den neuen Operationen die  $V$ .s-Axiome. Dieser neue  $V$ . heißt der zum  $V$ .  $V$  *duale*  $V$ .

II. Ein  $V$ .  $V$  heißt *distributiv*, wenn für beliebige  $a, b, c \in V$  die beiden *Distributivgesetze*  $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$  und  $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$  erfüllt sind.

Ein  $V$ .  $V$  heißt *modular*, wenn für beliebige  $a, b, c \in V$  mit  $a \leq c$  gilt  $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$ . Jeder distributive  $V$ . ist modular. Ein kleinstes Element von  $V$ ., d. h. ein Element  $o$  mit der Eigenschaft  $a \cap o = o$  und  $a \cup o = a$  für alle  $a \in V$ , heißt *Null-element*; und ein größtes Element von  $V$ ., d. h. ein Element  $e$ , mit der Eigenschaft  $a \cap e = a$  und  $a \cup e = e$  für alle  $a \in V$ , heißt *Einselement*. Der  $V$ .  $V$  heißt *komplementär*, wenn er ein Null- und ein Einselement hat und wenn es zu jedem  $a \in V$  ein *Komplement*  $\bar{a} \in V$  gibt, so daß  $a \cap \bar{a} = o$  und  $a \cup \bar{a} = e$  ist.

Ein komplementärer distributiver Verband heißt *Boolesche Algebra*. Die Komplementbildung ist in ihm eindeutig. Ein Beispiel für eine Boolesche Algebra ist der Potenzmengen- $V$ .  $P(M)$  zu einer Menge  $M$  mit den mengentheoret. Operationen der Durchschnitts- und Vereinigungsbildung. Die leere Menge  $\emptyset$  ist das Nullelement dieses  $V$ .s, die Menge  $M$  das Einselement; das Komplement der Menge  $N \subseteq M$  ist das mengentheoret. Komplement  $\bar{N} = M \setminus N$ .

Die *verbandstheoret.* Begriffe und Methoden werden in verschiedenen anderen Gebieten der Mathematik angewandt, insbes. in der Algebra, in der mathemat. Logik, in der projektiven und affinen

Geometrie, in der Mengenlehre, der Maßtheorie und der Topologie. Die *Teilstrukturen* einer *algebraischen Struktur* bilden einen  $V$ ., wenn man als Halbordnung das Enthaltensein der zugrundeliegten Mengen nimmt; z. B. bilden die *Untergruppen* und die *Normalteiler* einer Gruppe, die *Unterringe* und die *Ideale* eines Ringes, die *Unterräume* eines *Vektorraums* jeweils einen  $V$ . Der von den Normalteilern einer Gruppe bzw. von den Idealen eines Ringes gebildete  $V$ . ist *modular*; liegt demnach eine abelsche Gruppe vor, d. h. ein *Modul*, so ist der  $V$ . der Untergruppen modular — daher rührt der Name modularer  $V$ .

III. *Geschichtliches.* Im Verlaufe seiner Untersuchungen auf dem Gebiete der mathemat. Logik wurde G. BOOLE (1815—1864) auf den Begriff der heutigen Booleschen Algebra geführt. Um die Jahrhundertwende definierte R. DEDEKIND im Zusammenhang mit seinen gruppen- und idealtheoret. Studien den Begriff des modularen und des distributiven  $V$ .es; von ihm stammt der Name  $V$ . In den 30er Jahren dieses Jahrhunderts begann sich dann die abstrakte Verbandstheorie zu entwickeln, besondere Verdienste hat dabei G. BIRKHOFF (geb. 1911).

**Verbiegen** ↗ isometrische Abbildung II.

**Verdoppelung eines Würfels** ↗ geometrische Figur, ↗ Konstruktion mit Zirkel und Lineal.

**Vereinigung: Mengentheorie** Verknüpfung zweier Mengen  $M$  und  $N$  zur *Vsmenge*  $M \cup N$ , zur Menge der sämtlichen Elemente von  $M$  und der sämtlichen Elemente von  $N$ , d. h. zur Menge aller der Dinge, die Element von  $M$  oder Element von  $N$  sind; in Zeichen  $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ .  $M \cup N$  liest man » $M$  vereinigt mit  $N$ «. Bei  $M = \{a, b, c\}$  und  $N = \{b, c, d\}$  ist z. B.  $M \cup N = \{a, b, c, d\}$ . Für Mengen  $M, N, P$  gilt in bezug auf diese Verknüpfung das Kommutativgesetz  $M \cup N = N \cup M$  und das Assoziativgesetz  $M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$  sowie die Beziehung  $M \subseteq M \cup N$ .

Die  $V$ . eines Mengensystems  $M$  ist die Menge aller der Dinge, die Element einer Menge von  $M$  sind; Bezeichnung  $\cup M$ , lies: »Vereinigung von  $M$ «. Es ist also  $\cup M = \{x \mid \text{es gibt ein } Y \in M: x \in Y\}$ . Bei  $M = \{\{a, b\}, \{b, c, d\}, \{c\}, \{e\}\}$  ist z. B.  $\cup M = \{a, b, c, d, e\}$ . S. a. Mengenalgebra.

**Vereinigungsmengenaxiom** ↗ Mengenlehre II.

**Verfahrensfehler** ↗ Fehler II., ↗ lineares Gleichungssystem VII., ↗ numerisches Rechnen.

**Verfallung** ↗ Dachausmittlung.

**Verflechtungsbilanz:** Darstellung der Beziehungen in einem System zwischen dem *Input*, dem *Output* und den Flüssen zwischen seinen  $n$  Teilsystemen oder Sektoren durch ein lineares mathematisches Modell. Ist das Modell nicht statisch, sondern dynamisch, so wird es meist in diskrete Perioden eingeteilt. Ist das System die Volkswirtschaft, so sind die Sektoren der Wirtschaftszweige, ist das System ein Betrieb, so stellen die Sektoren die Produktion der einzelnen Produkte dar. Die benutzte Vergleichsgröße kann in einer materialmäßigen  $V$ . die Stückzahl sein, im größeren Rahmen einer wertmäßigen  $V$ . sind es Geldbeträge.

Ausgangspunkt sind die Bilanzgleichungen der einzelnen Sektoren. Für das  $i$ -te Hauptprodukt hat die Bilanzgleichung die Gestalt

$$x_i = m_{i1}x_1 + \dots + m_{in}x_n + y_i,$$

dabei ist  $x_i$  die Gesamtproduktion des Produktes  $i$ ,  $m_{ij}$  der zur Produktion einer Einheit des Produktes  $j$  nötige Materialeinsatz an Produkt  $i$ ,  $y_i$  der Ausstoß von Produkt  $i$  aus dem Gesamtsystem. Mit der Matrix  $M = (m_{ij})$  der *Koeffizienten des direkten Aufwands*, dem Produktionsvektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  und dem Vektor  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  ergibt sich  $\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , daraus folgt  $\mathbf{x} = (E - M)^{-1}\mathbf{y}$ , die Elemente von  $(E - M)^{-1}$  heißen *Koeffizienten des vollen Aufwands*. Negative  $m_{ij}$  modellieren *Kuppelproduktion*, d. h., bei der Erzeugung einer Einheit des Produkts  $j$  fallen  $-m_{ij}$  Einheiten des Produkts  $i$  mit an, ein negatives  $y_i$  bedeutet, daß  $-y_i$  Einheiten in das Gesamtsystem einzubringen sind. Dieses Kernstück der  $V$ . wird durch weitere Beziehungen ergänzt, die z. B. die Bilanzierung der nicht als Hauptprodukte erfaßten Hilfsstoffe in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  darstellen, die außerhalb des Gesamtsystems bereitgestellt werden müssen.

**Vergleichsfunktion**  $\nearrow$  Flächenintegral VI.2.,  $\nearrow$  Variationsrechnung I.

**Vergleichskriterium**  $\nearrow$  Konvergenzkriterien für Reihen VI.

**Verhalten im Unendlichen**  $\nearrow$  rationale Funktion V.,  $\nearrow$  Kurvendiskussion II.6.

**Verhältnisleichung** swv. Proportion.

**Verhältnisleichung**  $\nearrow$  Regel III.

**Verjüngung**  $\nearrow$  innere Geometrie.

**verkettete Matrizen**  $\nearrow$  Matrix II.

**verketteter Algorithmus**  $\nearrow$  lineare Gleichungssysteme I.3.

**Verkettung**  $\nearrow$  Funktion I.,  $\nearrow$  mittelbare Funktion I.

**Verknüpfung** swv. algebraische Operation.

**Verkürzung**  $\nearrow$  Projektion II.

**Verkürzungsverhältnis**  $\nearrow$  Axonometrie.

**Verlauf im Unendlichen**  $\nearrow$  Konvergenz einer Funktion III.

**Verlustsystem**  $\nearrow$  Bedienungstheorie.

**Vermessungskunde** swv. Geodäsie.

**vermittelnde Beobachtungen**  $\nearrow$  Ausgleichsrechnung I.

**verneinungstechnische Normalform**  $\nearrow$  Normalform I.

**Verschiebung**  $\nearrow$  Abbildung, affine, V., VI.,  $\nearrow$  Koordinatentransformation III.1.,  $\nearrow$  Kongruenzabbildung,  $\nearrow$  Spiegelung IV.,  $\nearrow$  Vektor I.

**Verschiebungsoperator**  $\nearrow$  Operator, linearer, I.5.

**Verschiebungssatz**  $\nearrow$  Laplacetransformation II.5.

**Verschlüsselung** swv. Kodierung.

**Verschmelzungsgesetz**  $\nearrow$  Verband I.

**Verschwindungsebene**  $\nearrow$  Projektion I.

**Versiera der Agnesi**  $\nearrow$  rationale Kurve II.

**Versuch** swv. zufälliger Versuch.

**Versuchsplanung: Operationsforschung und Statistik** Konstruktion gut auswertbarer Versuchsanordnungen, die mit möglichst wenigen Versuchen möglichst viel Information liefern und Schätzungen für die

Parameter einer Funktion der Meßpunkte ermöglichen sollen. Zunächst wird ein *stetiger Versuchsplan* bestimmt und für eine Menge von Meßpunkten als Prozentsatz angegeben, wie viele Messungen in jedem dieser Punkte erfolgen sollen. Danach wird die Kovarianzmatrix der Schätzfunktionen nach einer Optimalitätskonzeption verkleinert, z. B. ist die Matrix im Sinne der D-Optimalität am kleinsten, wenn sie eine minimale Determinante hat. Von diesem optimalen stetigen Versuchsplan aus werden dann *exakte Versuchspläne* angegeben, die nur ganzzahlige Anzahlen von Messungen vorsehen. Sind z. B. die Parameter der Funktion

$$z = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$$

über dem Quadrat  $-1 \leq x \leq 1$  und  $-1 \leq y \leq 1$  zu schätzen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergibt sich als D-optimaler Plan, daß 58,32% der Messungen in den Ecken, 32,06% in den Seitenmitten und 9,62% im Mittelpunkt des Quadrats zu erfolgen haben. Dieser stetige Plan wird durch folgenden exakten Plan mit 13 Messungen gut angenähert: In jeder Ecke erfolgen 2 Messungen, das sind 8 von 13 Messungen oder 61,54%, in jeder Seitenmitte erfolgt je 1 Messung, das sind 400/13 = 30,77%, und im Mittelpunkt erfolgt 1 Messung oder 7,69%. Diese 13 Meßwerte gehen dann in die Methode der kleinsten Quadrate ein.

**Vertauschungssätze**  $\nearrow$  Proportion II.

**Verteilung**  $\nearrow$  Zufallsgröße I.

**Verteilung, unimodale**  $\nearrow$  Modalwert.

**Verteilungsdichte**  $\nearrow$  Zufallsgröße III.,  $\nearrow$  Zufallsvektor III.4.

**verteilungsfreier Test**  $\nearrow$  Parameterstest.

**Verteilungsfunktion**  $\nearrow$  Zufallsgröße I.,  $\nearrow$  Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III.,  $\nearrow$  Zufallsvektor II., III.

**Verteilungsgesetz**  $\nearrow$  Zufallsgröße I.

**Verträglichkeitsbedingung**  $\nearrow$  stochastischer Prozeß II.

**Vertrauensintervall**  $\nearrow$  Konfidenzschätzung.

**verwandte Zahlen** swv. befreundete Zahlen.

**Verweilzeit**  $\nearrow$  Bedienungstheorie.

**Verzerrung**  $\nearrow$  Information II.

**Verzerrungswinkel**  $\nearrow$  Axonometrie,  $\nearrow$  Projektion II.

**Verzögerungsglied**  $\nearrow$  Übertragungsglied I.

**Verzweigungspunkt**  $\nearrow$  analytische Fortsetzung II.,  $\nearrow$  komplexwertige Funktion, elementare, III.

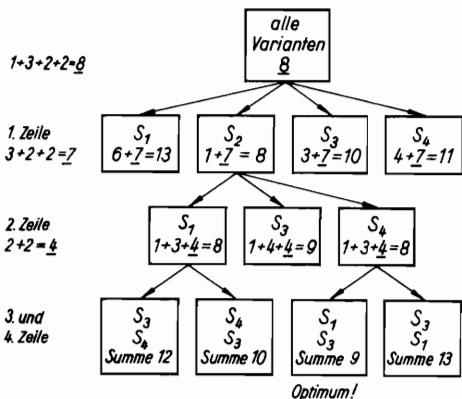
**Verzweungsverfahren:** Menge von Verfahren zur Lösung verschiedenartiger ganzzahliger Optimierungsaufgaben, die auf dem folgenden *Verzweigungsprinzip* [*Branch-and-Bound-Prinzip*] beruhen: Im ersten Schritt, dem Branch-Schritt, werden aus der Menge aller zulässigen Varianten die *günstigen von den übrigen*, möglichst nach heuristischen Gesichtspunkten, *abgezweigt* [to branch, engl., verzweigen]. Dann wird für jede Teilmenge eine Schranke [engl. bound] für die Zielfunktion abgeschätzt und ein Maß für die Güte dieser Varianten erhalten. Danach wird nach einer *Auswahlvorschrift* bestimmt, welche Teilmenge zuerst weiter untersucht werden soll. Meist wird die mit der günstigsten Schranke gewählt.

Das Verfahren ist beendet, wenn eine einelementige Teilmenge erhalten wurde, deren Güteschranke besser ist als für jede andere Teilmenge. Im ungünstigsten Fall werden dabei alle Varianten durchgemustert, praktisch aber meist wesentlich weniger. Die Aufspaltung wird graphisch durch einen Baum veranschaulicht. In einem *Zuordnungsproblem* z. B. soll aus jeder Zeile bzw. Spalte der Tabelle (1) genau ein Element so ausgewählt werden, daß die Summe der vier ausgewählten Elemente minimal wird. Zunächst werden alle Varianten verzweigt nach den aus der ersten Zeile gewählten Elementen, dann nach denen aus der zweiten, dann nach den Elementen der dritten Zeile; die Auswahl in der vierten Zeile ist dann zwangsläufig. Die Schranke [bound] ergibt sich als Summe aus den schon ge-

(1)

$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$ZM$
6	1	3	4	1
3	3	4	3	3
2	5	6	3	2
3	2	3	2	2

wählten Elementen und der der Zeilenminima der noch nicht betrachteten Zeilen. Diese Zeilenminima  $ZM$  stehen in der rechten Hilfsspalte. Zu jedem gewählten Element der 1. Spalte z. B. ist  $\sum ZM = 3 + 2 + 2 = 7$ . Die kleinste Schranke steht in Spalte  $S_2$  mit  $1 + 7 = 8$ . Diese Teilmenge wird gewählt zur Prüfung der Elemente der Spalten  $S_1, S_3, S_4$  in der 2. Zeile. Für sie ist  $\sum ZM = 2 + 2 = 4$ , und das Element 4 dieser Zeile scheidet aus, weil  $1 + 4 + 4 = 9 > 1 + 3 + 4 = 8$ . Diese Schranke



Verzweigungsverfahren: Übersicht über das Zuordnungsproblem zur Matrix (1)

gilt für die Prüfung der 3. und 4. Zeile (Abb.). Das Optimum ergibt sich zu  $1 + 3 + 2 + 3 = 9$ , in der üblichen Matrizenschreibweise  $(a_{ik})$  mit  $i, k = 1, 2, 3, 4$  aus  $a_{12} + a_{24} + a_{31} + a_{43} = 9$ . Keine der übrigen Summen ist kleiner als 9, und zur Lösung mußten nur 4 der insgesamt 24 Auswahlvarianten bis zu Ende untersucht werden.

**Vieleck** swv.  $n$ -Eck.

**Vielfaches** ↗ Teilbarkeit I.

**Vielfachheit** ↗ algebraische Geometrie III., ↗ ganzzahlige Funktion III., ↗ Multiplizität.

**Vielflächner** ↗ Körper V.

**Viereck**: ein geschlossener Streckenzug  $ABCD$ , der meist als eben und einfach vorausgesetzt wird (↗  $n$ -Eck, ↗ Flächeninhalt). Das System aus dem Inneren und dem Streckenzug  $ABCD$  selbst heißt *Fläche* des V.s. Zuweilen versteht man unter dem V. auch nur die Fläche. In einem konvexen V. werden die Längen der Seiten häufig mit  $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c$  und  $|DA| = d$  benannt; die Länge des Streckenzuges  $ABCD$  heißt *Umfang*. Die Strecken  $AC$  und  $BD$ , die nicht Seiten des V.s sind, heißen *Diagonalen* des V.s. Die Größen der Innenwinkel werden meist nach ihrem Scheitel mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  bezeichnet. Ihre Summe ist  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$ , denn jede Diagonale zerlegt das V. in zwei Dreiecke. Von der Menge aller V.e spaltet man die der *Sehnen-V.e* und die der *Tangenten-V.e* ab. Spezielle Sehnen-V.e sind die gleichschenkligen *Trapeze*, die *Rechtecke* und die *Quadrate*, spezielle Tangenten-V.e, die *Drachen-V.e*, die *Rhomben* und die *Quadrate*. Nichtgleichschenklige Trapeze und Parallelogramme sind weder Tangenten- noch Sehnen-V.e (Abb., S. 579).

**Vierergruppe**: abstrakte Gruppe mit vier Elementen  $e, a, b$  und  $c$ , in der  $e$  das Einselement ist und eine Operation durch (1) definiert ist.

$$(1) \quad \begin{aligned} a^2 &= b^2 = c^2 = e, & a \cdot b &= b \cdot a = c, \\ a \cdot c &= c \cdot a = b, & b \cdot c &= c \cdot b = a. \end{aligned}$$

Die V. ist danach abelsch. Die Mengen  $\{e, a\}, \{e, b\}$  und  $\{e, c\}$  bilden nichttriviale Untergruppen. Um die V. als Untergruppe der alternierenden Gruppe  $A_n$  (↗ Permutationsgruppe) aufzufassen, hat man folgende Möglichkeiten:

- $\{(1), (12), (34), (12) \cdot (34)\}$ ,
- $\{(1), (13), (24), (13) \cdot (24)\}$ ,
- $\{(1), (14), (23), (14) \cdot (23)\}$ ,
- $\{(1), (12) \cdot (34), (13) \cdot (24), (14) \cdot (23)\}$ .

**Vierfarbenproblem** ↗ Landkarte.

**Vierflächner** ↗ regelmäßige Polyeder I.

**Vieta** ↗ Viète.

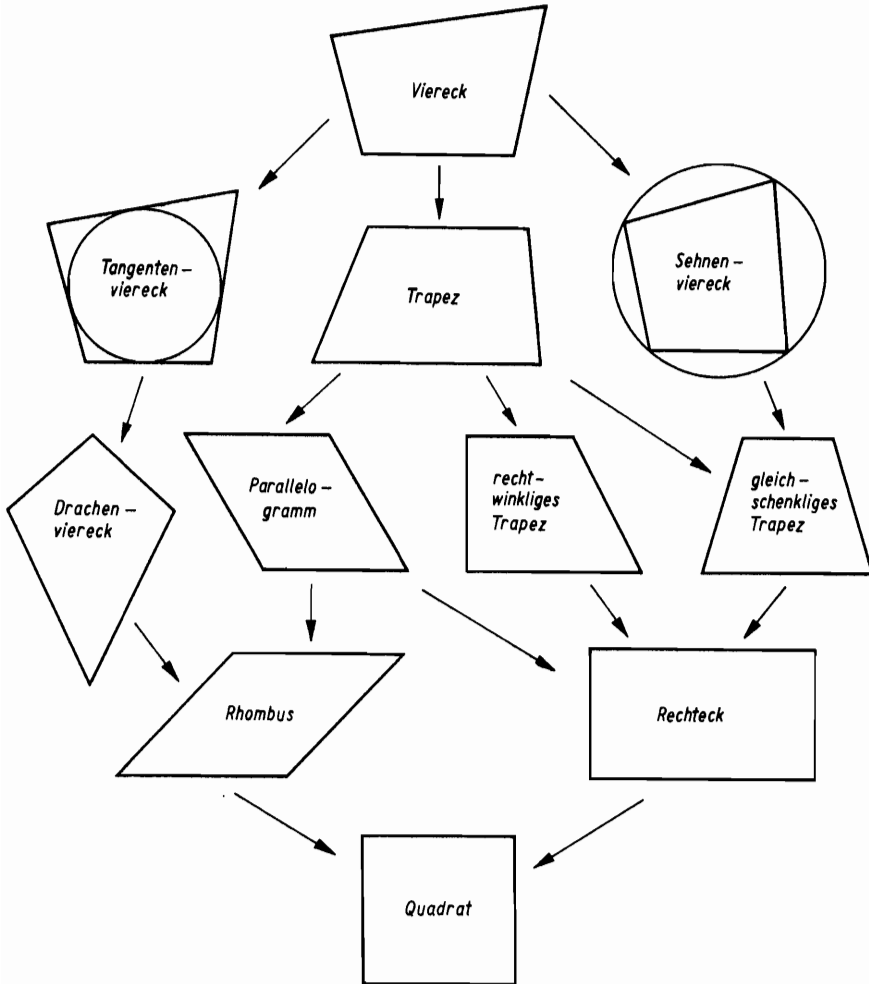
**Vietscher Satz**: I. Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Lösungen der algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \text{ so gilt:}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= a_2 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -a_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n = (-1)^n a_n$ . Dieser Satz läßt sich aus der Produktdarstellung der algebraischen Gleichung (↗ Fundamentalsatz der Algebra) herleiten.

Für quadrat. Gleichungen  $x^2 + px + q = 0$  ergibt sich speziell:  $x_1 + x_2 = -p; x_1x_2 = q$ ; für die kub. Gleichung  $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$  gilt  $x_1 + x_2 + x_3 = -r, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = s, x_1x_2x_3 = -t$ .



Übersicht über die Arten von Vierecken

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann man zu gegebenen reellen Zahlen immer eine Gleichung konstruieren, die genau diese Zahlen als Lösungen hat. Sollen z. B.  $x_1 = 5$  und  $x_2 = 3$  die Lösungen einer quadrat. Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  sein, so muß  $p = -(5 + 3) = -8$  und  $q = 5 \cdot 3 = 15$  sein. Die Gleichung  $x^2 - 8x + 15 = 0$  hat tatsächlich die Lösungsmenge  $L = \{5, 3\}$ .

II. Für das prakt. Rechnen ist die Folgerung wichtig, daß eine ganzzahlige Lösung einer algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades in Normalform mit ganzzahligen Koeffizienten ein Teiler des Absolutgliedes  $a_n$  ist. Sucht man von einer solchen Gleichung eine Lösung, so wird man zunächst die Teiler des Absolutgliedes auf ihre Zugehörigkeit zur Lösungsmenge überprüfen.

*Beispiel.* In der Gleichung  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$  sind  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$  und  $\pm 12$  die Teiler des Absolutgliedes 12. Die Zahl  $x_0 = 1$  ist keine Lösung

der gegebenen Gleichung, für  $x_1 = 2$  erhält man eine wahre Aussage über Gleichheit, d. h.,  $x_1 = 2$  ist eine Lösung. Die Gleichung  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$  läßt sich dann in der Form  $(x - 2)(x^2 - x - 6) = 0$  darstellen ( $\nearrow$  Fundamentalsatz der Algebra). Es bleibt die Gleichung  $x^2 - x - 6 = 0$  zu lösen, und man erhält  $x_2 = 3$  und  $x_3 = -2$  als Lösungen und insgesamt die Lösungsmenge  $L = \{-2, 2, 3\}$ .

Viète, *Vieta*, François, geb. 1540 Fontenay-le-Comte, gest. 13. 12. 1603 Paris. — V. wurde von den Franziskanern in seinem Heimatort erzogen, ehe er 1558 ein Jurastudium in Poitiers aufnahm. Danach ließ er sich als Advokat in Fontenay nieder, wurde 1564 Sekretär eines französ. Adligen und ging 1568 nach La Rochelle. Dort wurde er mit Heinrich von Navarra bekannt, wurde 1571 in Paris Advokat au Parliament, 1573 Rat beim Parliament der Bretagne und war seit dieser Zeit einer der Ratgeber von Heinrich III. bzw. nach der Thronbesteigung von



Heinrich IV. Mitglied von dessen persönl. Rat. 1602 nahm V. aus gesundheitl. Gründen seinen Abschied. — V.s Hauptleistungen liegen auf dem Gebiet der Gleichungslösung. Er verwendete als einer der ersten *Buchstaben* an Stelle der bis dahin üblichen Zahlenkoeffizienten, hielt aber noch an der Homogenitätsforderung fest. V. führte die *trigonometr. Form der Cardanischen Formeln* ein, löste 1593 eine Gleichung 45. Grades in Beantwortung einer öffentl. Herausforderung, berechnete  $\pi$  auf neun Dezimalen und stellte  $\pi$  in Form eines unendl. Produkts dar.

**Vogelperspektive** ↗ Projektion I.

**Volladdierer** ↗ digitale Rechenanlage II.2.

**voll. Restsystem** ↗ Kongruenz von Zahlen I.

**vollfreie Variable** ↗ Prädikatenkalkül II.

**vollkommene Zahlen** ↗ Primzahl IV.

**vollständige Induktion** ↗ Induktion, vollständige, ↗ Peanosches Axiomensystem.

**vollständiger Graph** ↗ Färbung von Graphen.

**vollständiger l-chromatischer Graph** ↗ Extremalprobleme.

**vollständiger metrischer Raum** ↗ Fundamentalfolge II., III.

**vollständiger paarer Graph** ↗ Färbung von Graphen.

**vollständiges Differential** ↗ Differential III., ↗ Differentialquotient, partieller, III.

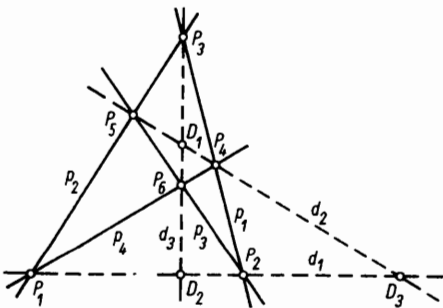
**vollständiges Integral** ↗ partielle Differentialgleichung II.

**vollständiges Invariantensystem** ↗ natürliche Gleichungen.

**vollständiges k-Eck** ↗ Extremalprobleme.

**vollständiges Viereck** ↗ vollständiges Vierseit.

**vollständiges Vierseit**: eine Figur der projektiven Ebene aus vier Geraden  $p_1, p_2, p_3, p_4$  in allgemeiner Lage, d. h., von denen jeweils nur zwei den gleichen Schnittpunkt haben (Abb.). Die danach



Vollständiges Vierseit

vorhandenen 6 Schnittpunkte  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  sind die *Ecken* des v. V.s. Verbindet man je zwei Ecken durch eine Gerade, so erhält man zusätzlich drei *Diagonalen*  $d_1, d_2, d_3$ , die sich in den Ecken  $D_1, D_2, D_3$  des Diagonalendreiecks schneiden. Auf jeder Diagonale bilden dann die zwei Ecken und die zwei Diagonalschnittpunkte eine harmon. Punktreihe, z. B. gilt  $DV(P_1, P_2; D_2, D_3) = -1$  (↗ Doppelverhältnis). Sind drei dieser Punkte, z. B.  $P_1, P_2$  und  $D_2$  gegeben, so kann der vierte harmon. Punkt

nur mit dem Lineal konstruiert werden, indem man die Figur aus ihnen zu einem v. V. ergänzt. Werden im gewählten Beispiel die Geraden  $p_2$  durch  $P_1$  und  $p_1$  durch  $P_2$  gezogen, so ist  $P_3 = (p_1 \cap p_2)$  bestimmt und  $d_3 = P_3 D_3$  festgelegt. Wählt man noch die Gerade  $p_3$  durch  $P_4$ , so ergeben sich die Punkte  $P_5 = (p_3 \cap d_3)$  und  $P_6 = (p_2 \cap p_3)$  sowie durch  $p_4 = P_1 P_6$  der Punkt  $P_4 = (p_1 \cap p_4)$ . Dann liefert  $d_2 = P_5 P_4$  als Schnittpunkt mit  $d_1 = P_1 P_2$  den gesuchten vierten harmon. Punkt  $D_3$ . Die duale Figur zum v. V. ist das *vollständige Viereck*, das sechs Seiten hat. Anstelle harmon. Punktfolgen entstehen in ihm harmon. Strahlenbüschel.

**Vollständigkeit**: *mathematische Logik* Bezeichnung einer Menge  $X$  von Ausdrücken des Prädikatenkalküls der ersten Stufe als *semantisch vollständig*, falls alle allgemeingültigen Ausdrücke aus  $X$  logisch folgen, und als *syntaktisch vollständig*, falls für jede Aussage gilt, daß sie oder ihre Negation aus  $X$  folgt. Da beide Begriffe gleichwertig sind, spricht man oft nur von V. — S. a. Axiomatik; axiomatischer Aufbau der Geometrie.

**Vollständigkeitsatz** ↗ Aussagenkalkül II.

**vollständig paarer Graph** ↗ Färbung von Graphen.

**Vollwinkel** ↗ Winkel VI.

**Volterra, Vito**, geb. 3. 5. 1860 Ancona, gest. 11. 10. 1940 Rom. — V. wirkte hauptsächlich in Rom und arbeitete über Differential- und Integralrechnung, über Integralgleichungen, Variationsrechnung und Potentialtheorie sowie über Probleme der theoret. Physik. Er zählt zu den Begründern der Funktionalanalysis.

**Volterrasche Integralgleichung** ↗ Integralgleichung I.

**Volumen** swv. Rauminhalt.

**Volumenelement** swv. Raumelement, ↗ elliptische Differentialgleichung III.1., ↗ Integralsätze I., ↗ Raumintegral.

**Volumenpotential** ↗ elliptische Differentialgleichung III.1.

**Vorbereich** ↗ Abbildung I., ↗ Operator, ↗ Relation II.

**voreindeutig** ↗ Relation II.

**Vorgang** ↗ Netzplantechnik I.

**Vorgänger, direkter** ↗ Graph II.

**Vorgangs-Knoten-Netz** ↗ Netzplantechnik II.

**Vorgangs-Pfeil-Netz** ↗ Netzplantechnik II.

**Vorhersage**: Schätzung eines Wertes  $x_{k+1}$  für  $k \geq 1$ , ganz, auf Grundlage der Werte  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , eventuell auch unter Benutzung weiterer Informationen über Eigenschaften der Folge der  $x_i$ . In der Lagerhaltungstheorie z. B. ist eine *Bedarfs-V.* notwendig, um rechtzeitig Bestellungen aufgeben zu können. Zufällige Schwankungen des Bedarfs, die voneinander unabhängig sind, lassen sich durch Korrelationsrechnung prüfen. Als *Trend* bezeichnet man eine fallende oder steigende Tendenz des mittleren Bedarfs, und *Saisonschwankungen* lassen sich unter Umständen durch harmonische Analyse feststellen.

In vielen Fällen wird die Methode der *exponentiellen Glättung* benutzt, bei der der neue V.wert  $\bar{x}_{k+1}$  aus dem V.wert  $\bar{x}_k$ , dem tatsächlich eingetrete-

nen Wert  $x_k$  und der Glättungskonstante  $\beta$  nach der Formel  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \beta(x_k - \bar{x}_k)$  berechnet wird. Für  $\beta = 0$  und  $\beta = 1$  entstehen die Grenzfälle  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k$  und  $\bar{x}_{k+1} = x_k$ ; praktisch ergeben sich durch Anpassung an die bisherigen  $x_i$  meist kleine positive Werte, etwa  $\beta = 0,1$ . Die Methode bewirkt, daß die eingetretenen Werte exponentiell schwächer in die V. eingehen, je weiter sie zeitlich zurückliegen.

**Vormerkung** ↗ Lagerhaltungstheorie.

**Vormodell** ↗ Modell, mathematisches II.

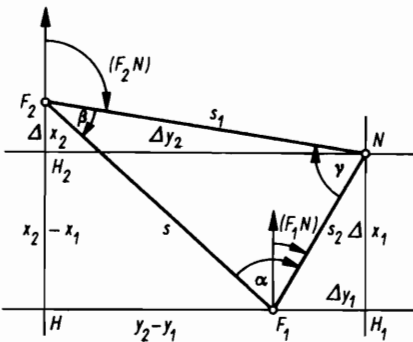
**Vorperiode** ↗ Brüche II.3.

**Vorrangsteuerung** ↗ Betriebssystem I., ↗ Prozeßrechner II.

**vorschüssig** ↗ Rentenrechnung III.

**Vorwärtsdifferenzen** ↗ Interpolation II.

**Vorwärtseinscheiden:** Verfahren der Geodäsie, die Koordinaten eines Neupunktes  $N$  aus denen zweier Festpunkte  $F_1$  und  $F_2$  dadurch zu bestimmen, daß die Größen der Richtungswinkel von der Strecke  $F_1F_2$  zum Neupunkt gemessen werden (↗ Polygonzug). Der hier mit  $(F_1F_2)$  bezeichnete Richtungswinkel, den diese Strecke gegen Gitternord (↗ Gauß-Krüger-Projektion II.) bildet, wird aus den Koordinaten  $x_1, y_1$  von  $F_1$  und  $x_2, y_2$  von  $F_2$  berechnet (Abb.). Werden dann die Winkelgrößen  $\alpha$  in  $F_1$  und  $\beta$  in  $F_2$  gemessen, so gilt  $(F_1N) = (F_1F_2) + \alpha$  und  $(F_2F_1) = (F_1F_2) \pm 180^\circ$ ,  $(F_2N) = (F_2F_1) - \beta$ . Da sich die Längen  $s_2 = |F_1N|$  und  $s_1 = |F_2N|$  im Dreieck nach dem Sinussatz berechnen lassen, ergeben sich die Koordinaten von  $N$  zur Kontrolle doppelt, von  $F_1$  aus und von  $F_2$  aus (↗ Polygonzug).



Vorwärtseinscheiden

**Vorzeichen** ↗ Klammern, ↗ Subtraktion I.

**Vorzeichenbedingung** ↗ Optimierung I.

**Vorziffer** ↗ Brüche II.3.

**v. p.:** *valeur principale*, *Cauchyscher Hauptwert* ↗ Integral, uneigentliches, I.4.

## W

**wahre Größe** ↗ Zweitafelprojektion II.1., II.2., ↗ Eintafelprojektion.

**wahrer Fehler** ↗ Fehler I.

**Wahrheitstafel** ↗ Aussagenlogik II.

**Wahrheitswert** ↗ Aussagenlogik I.

**Wahrheitswertfunktion** ↗ Aussagenlogik II.

**Wahrscheinlichkeit, bedingte:** I. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  unter der Bedingung, daß ein anderes Ereignis  $B$  mit  $P(B) \neq 0$  bereits eingetreten ist. Sie wird mit  $P(A|B)$  bezeichnet und heißt *W. von  $A$  unter der Bedingung  $B$* . Da die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  sich i. allg. ändert, wenn bereits bekannt ist, daß ein anderes Ereignis  $B$  eingetreten ist, so ist  $P(A|B)$  i. allg. verschieden von  $P(A)$ . Wird z. B. mit zwei Würfeln gleichzeitig gewürfelt, ist  $B$  das Ereignis »Augensumme gerade« und  $A$  das Ereignis »Augensumme mindestens 10«, so gibt es, nachdem  $B$  eingetreten ist, noch 18 mögliche Ausgänge, z. B. ist (1, 1) möglich, (1, 2) aber nicht. Günstig für  $A$  sind dann (4, 6), (6, 4), (5, 5), (6, 6). Also ist  $P(A|B) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ .

II. Sind zwei Urnen vorhanden, von denen die erste 5 weiße und 5 schwarze Kugeln, die zweite 1 weiße und 9 schwarze Kugeln enthält, so soll der Versuch darin bestehen, blindlings eine Urne zu wählen, daraus blindlings eine Kugel zu ziehen. Ist dann  $B$  das Ereignis »die gezogene Kugel ist weiß« und sind  $A_i$  die Ereignisse »die Kugel wurde der  $i$ -ten Urne mit  $i = 1, 2$  entnommen«, so ist  $P(B|A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$  und  $P(B|A_2) = \frac{1}{10}$ . Im klass. Fall (↗ Wahrscheinlichkeit, klassische) lassen sich die Formeln (1) und (2) leicht herleiten.

$$(1) P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2) P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

III. In der axiomat. Theorie (↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.) benutzt man (1) direkt zur Definition von  $P(A|B)$ . Durch Auflösen von (1) und (2) erhält man den *Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, der in Worten lautet: *Die Wahrscheinlichkeit des Produkts zweier Ereignisse ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten des einen Ereignisses mit der bedingten Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses unter der Bedingung, daß das erste eingetreten ist.* Zwei Ereignisse  $A, B$  heißen *unabhängig*, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen in keiner Weise beeinflusst, d. h., wenn  $P(A|B) = P(A)$  ist. Der Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse lautet dann:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ , d. h.: *Die Wahrscheinlichkeit für das Produkt zweier unabhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten.*

In der axiomatischen Theorie (↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.) wird die Gleichung  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$  zur Definition des Begriffs *unabhängig* benutzt. In der Praxis begründet man die Unabhängigkeit zweier Ereignisse nicht durch Nachprüfen der Gleichung  $P(A|B) = P(A)$ , sondern durch inhaltl. Überlegungen. Man kann z. B. annehmen, daß die Geburt eines Knaben bei einer Mutter nicht die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt bei einer anderen Mutter beeinflusst, und diese Ereignisse deshalb als unabhängig ansehen,  $n$  Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  heißen *insgesamt unabhängig*, wenn für jedes  $A_j$  und beliebige  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$

mit  $1 \leq i, j \leq n$  und  $i, j$  die Ereignisse  $A_j$  und  $A_1, \dots, A_k$  unabhängig sind. Die  $n$  Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  heißen *paarweise unabhängig*, wenn  $A_i$  und  $A_j$  für  $i, j$  beliebig mit  $i \neq j$  unabhängig sind. Aus der *Unabhängigkeit insgesamt* folgt die *paarweise Unabhängigkeit*, aber nicht umgekehrt.

**Wahrscheinlichkeit, geometrische:** ein im 18. Jh. eingeführter Wahrscheinlichkeitsbegriff, der in Analogie zur *klass. Definition der Wahrscheinlichkeit* gebildet wurde. In dem Versuch, zufällig einen Punkt auf ein beschränktes Gebiet  $E$  der Ebene zu werfen bzw. aus  $E$  auszuwählen, soll jeder Punkt von  $E$  gleich möglich sein. Stellen weiter  $F(E)$  den Flächeninhalt von  $E$  und  $F(G)$  den eines Teilgebiets  $G$  von  $E$  dar, so ist der Quotient  $F(G)/F(E)$  die g. W. dafür, daß der geworfene Punkt auf  $G$ , aber nicht auf  $E \setminus G$  fällt. Nach dieser Definition haben alle Gebiete gleichen Flächeninhalts die gleiche Wahrscheinlichkeit, unabhängig von ihrer Lage und Gestalt. Der Unterschied zur *klass. Definition der Wahrscheinlichkeit* besteht darin, daß der Versuch »Werfen eines Punktes auf  $E$ « unendlich viele Ausgänge hat. — S. a. Buffonsches Nadelproblem.

**Wahrscheinlichkeit, klassische:** eine auf LAPLACE zurückgehende Definition der Wahrscheinlichkeit bei speziell gearteten *zufälligen Versuchen*. Ist der Versuch so beschaffen, daß er nur *endlich viele gleichmögl. Ausgänge* hat, so gilt (1) für die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$ .

$$(1) \quad P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl aller mögl. Ausgänge des Versuchs}}$$

Dabei bezeichnet man als die für  $A$  günstigen Ausgänge des Versuchs diejenigen, deren Eintreten zum Eintreten von  $A$  führt. LAPLACE benutzte die angegebene Formel direkt zur *Definition* des Begriffs Wahrscheinlichkeit. Er erfaßte damit nur den *klass. Fall* endlich vieler gleichmögl. Versuchsausgänge. Bei einem gefältschten Spielwürfel z. B. sind die einzelnen Ausgänge »Augenzahl 1, 2, ... oder 6« nicht mehr gleichmöglich. Um hier z. B. die Wahrscheinlichkeit einer Augenzahl 6 zu ermitteln, müßte man sehr oft würfeln und die *relative Häufigkeit* der 6 betrachten ( $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses). Wird z. B. mit einem echten Würfel einmal gewürfelt und soll  $A$  das Ereignis »es fällt eine gerade Zahl sein, so sind die Ausgänge 2, 4, 6 für  $A$  günstig. Insgesamt sind 6 Ausgänge möglich. Man erhält deshalb  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . Wird mit zwei Spielwürfeln gleichzeitig gewürfelt und soll ein Gewinn ausgezahlt werden, wenn die geworfene Augensumme  $\geq 10$  ist, so berechnet man die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns wie folgt: Ist  $x$  die Augenzahl des ersten und  $y$  die des zweiten Würfels, so kennzeichnet  $(x, y)$  jeden Ausgang eines Wurfes, wenn  $x, y$  ganze positive Zahlen 1, 2, ..., 6 sind. Es gibt danach die 36 Ausgänge (1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (5, 6), (6, 6). Günstig für  $A$  sind: (4, 6), (6, 4), (5, 5), (6, 5), (5, 6) und (6, 6), d. h. 6 Ausgänge. Daraus erhält man  $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ . Im *Tele-Lotto*

gibt es  $\binom{35}{5} = 324632$  Kombinationen zu je 5 verschiedenen Zahlen. Beim Spielen eines Scheines ist einer dieser Fälle günstig ( $\nearrow$  Kombination). Danach ist  $P(A) = 1/324632$ . Die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit im *klass. Fall* läuft oft auf ein kombinatorisches Problem hinaus.

**Wahrscheinlichkeit, totale:** Formel (2) der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  eines Ereignisses  $B$ , das stets mit genau einem der  $n$  paarweise unvereinbaren Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  eintritt. Unter der Voraussetzung  $B = BA_1 \cup BA_2 \cup \dots \cup BA_n$  mit  $A_i A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  ( $\nearrow$  zufälliges Ereignis), gilt nach dem  $\nearrow$  Additionssatz die Beziehung (1). Verwendet man für  $P(BA_i)$  den *Multiplikationssatz* ( $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit, bedingte), so folgt (2), eine Beziehung, die auch *Satz der t. n. W.* gen. wird.

$$(1) \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i)$$

$$(2) \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)$$

*Beispiel:* Sind drei Urnen gegeben, die jede den Inhalt I von 2 weißen und 6 schwarzen Kugeln haben, und eine Urne mit dem Inhalt II von 1 weißen und 8 schwarzen Kugeln und sollen auf gut Glück eine Urne und hieraus eine Kugel gezogen werden, so kann man die Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  für das Ereignis  $B$  »die gezogene Kugel ist weiß« berechnen. Ist  $A_1$  das Ereignis »eine Urne vom Inhalt I wird gewählt« und  $A_2$  das Ereignis »eine Urne vom Inhalt II wird gewählt«, so ist  $B = BA_1 \cup BA_2$  mit  $A_1 A_2 = \emptyset$ . Also gilt (2a).

$$(2a) \quad P(B) = P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2)$$

Es ist  $P(A_1) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A_2) = \frac{1}{4}$ , da vier Urnen möglich sind, von denen drei für  $A_1$  und eine für  $A_2$  günstig sind. Daraus folgt  $P(B|A_1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A_2) = \frac{1}{9}$ ;  $P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \approx 0,215$ .

**Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses:** eine reelle Zahl  $P(A)$ , die jedem *zufälligen Ereignis*  $A$  als quantitative Abschätzung für die Möglichkeit seines Eintretens zugeordnet wird. Es ist  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Dabei entspricht dem *unmögl. Ereignis*  $\emptyset$  die W.  $P(\emptyset) = 0$ , dem *sicheren Ereignis*  $S$  die W.  $P(S) = 1$ . In der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff axiomatisch gefaßt ( $\nearrow$  Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.). Nur bei sehr speziell gearteten *zufälligen Versuchen* kann man eine Formel angeben, nach der die Wahrscheinlichkeit für alle zufälligen Ereignisse des zugehörigen Ereignisfeldes berechnet werden kann ( $\nearrow$  Wahrscheinlichkeit, klassische). Um i. allg. Fall die Wahrscheinlichkeit eines interessierenden Ereignisses  $A$  zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor: Der Versuch, zu dessen Ereignisfeld  $A$  gehört, wird  $n$ -mal wiederholt. Tritt dabei  $A$  nach Abzählung  $m$ -mal auf, so wird  $m$  die *absolute Häufigkeit* des Eintretens von  $A$  in diesen  $n$  Versuchen gen. und der Quotient  $m/n$  die *relative Häufigkeit* oder kurz die *Häufigkeit* des Ereignisses  $A$  in diesen

$n$  Versuchen. Es ist eine durch tausendfache Erfahrung gesicherte Tatsache, daß sich die relative Häufigkeit von  $A$  der Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  immer mehr nähert, je größer  $n$  ist, d. h., je mehr Versuche man macht (vgl. Gesetze der großen Zahl III.). Man kann deshalb, ohne einen wesentl. Fehler zu begehen, die relative Häufigkeit von  $A$  als die Wahrscheinlichkeit von  $A$  ansehen, wenn der Berechnung der relativen Häufigkeit hinreichend viele Versuche zugrunde liegen. Da es z. B. weder eine mathemat. noch eine biolog. Theorie gibt, aus der a priori die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  des Ereignisses einer *Knabengeburt* berechnet werden kann, muß zur Bestimmung von  $P(A)$  eine große Anzahl von Geburten, etwa 10000, statistisch ausgewertet werden, indem man zählt, wie oft dies Ereignis eintritt. Die entsprechende relative Häufigkeit ist dann ein Näherungswert für die unbekannte Wahrscheinlichkeit  $P(A)$ . Die Bestimmung von  $P(A)$  über die relative Häufigkeit wird als *statist. Definition der Wahrscheinlichkeit* bezeichnet. Die Auffassung dieses Vorgehens als Definition der Wahrscheinlichkeit enthält erkenntnistheoret. und mathemat. Schwierigkeiten, die nicht überwunden werden konnten. Mathematisch gesehen handelt es sich bei der statist. Bestimmung der Wahrscheinlichkeit um eine *Schätzung* (↗ Schätztheorie, ↗ Konfidenzschätzungen), die auf dem *Gesetz der großen Zahl* beruht. **Wahrscheinlichkeitsdichte** ↗ Zufallsgröße III., ↗ Zufallsvektor III.4.

**Wahrscheinlichkeitsfeld** ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.

**Wahrscheinlichkeitsfunktion** ↗ Zufallsgröße II., ↗ Zufallsvektor III.

**Wahrscheinlichkeitspapier**: ein orthogonales Koordinatennetz, bei dem die Abszissenachse linear, die Ordinatenachse gemäß der Umkehrfunktion  $\Phi^{-1}(y)$  der Verteilungsfunktion  $\Phi(x)$  der normierten und zentrierten Normalverteilung unterteilt ist. In diesem  $W.$  erscheint das Bild von  $\Phi$  als Gerade, jede weitere Gerade mit positivem Anstieg entspricht einer Verteilung vom Typ  $N(a, \sigma)$  (↗ Normalverteilung I.). Das  $W.$  wird bes. zur Auswertung konkreter Stichproben im Rahmen der mathemat. Statistik benutzt. Es gibt auch anders unterteilte  $W.$ e für spezielle Zwecke.

**Wahrscheinlichkeitsraum** ↗ Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, II.

**Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische**: I. ein auf A. N. KOLMOGOROW zurückgehender axiomat. Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der sich auf Mengenlehre und Maßtheorie stützt. Der Ausgangspunkt ist eine Menge  $S$ , die Menge der *elementaren Ereignisse*. Die Elementarereignisse werden gedeutet als die *einander ausschließenden mögl. Ausgänge* eines zufälligen Versuchs. Beim Versuch »einmaliges Würfeln« z. B. ist  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$  die Menge der Ereignisse  $e_i$  mit  $e_i$ : »es fällt die Zahl  $i$ «. In dem Versuch »Messung einer reellen Größe« ist  $S$  die Menge der reellen Zahlen. Allgemein definiert man: Die Teilmengen von  $S$  heißen *Ereignisse*. Man sagt, ein Ereignis  $A \subseteq S$  tritt ein, wenn eines der Elementarereignisse eintritt, die in  $A$  enthalten

sind. Ist z. B. beim Versuch »einmaliges Würfeln«  $A = \{e_2, e_4, e_6\} \subseteq S$ , so kann  $A$  als das Ereignis »es fällt eine gerade Zahl« interpretiert werden. Es tritt genau dann ein, wenn der Versuch mit einem der in  $A$  enthaltenen Elementarereignisse endet. Die mengentheoret. Operationen der Vereinigung  $A \cup B$ , des Durchschnitts  $A \cap B$  und der Komplementbildung  $\bar{A} = S \setminus A$  lassen sich in diesem Modell interpretieren als Summe, Produkt und Komplement der entsprechenden Ereignisse (↗ zufälliges Ereignis). Aus innermathemat. Gründen kann i. allg. nicht für alle Ereignisse der Begriff der Wahrscheinlichkeit sinnvoll definiert werden. Man muß deshalb aus der Menge aller Teilmengen von  $S$  eine gewisse Klasse  $\mathcal{B}$  von Teilmengen auswählen, von der man voraussetzen muß, daß sie eine  $\sigma$ -Algebra bildet (↗ Maß).  $\mathcal{B}$  heißt die  $\sigma$ -Algebra der *zufälligen Ereignisse* oder kurz *Ereignisalgebra*.  $\mathcal{B}$  kann immer so gewählt werden, daß einerseits keine mathemat. Schwierigkeiten bei der Definition der Wahrscheinlichkeit auftreten und daß andererseits alle in der Praxis interessierenden Ereignisse in  $\mathcal{B}$  enthalten sind.  $\mathcal{B}$  ist das exakte mathemat. Modell für den anschaul. Begriff des *Ereignisfeldes* eines *zufälligen Versuchs*. Ist z. B.  $S$  endlich, so nimmt man als  $\mathcal{B}$  die Menge aller Teilmengen von  $S$ ; ist aber  $S = \mathbb{R}^1$ , so ist  $\mathcal{B}$  die  $\sigma$ -Algebra der Borelschen Mengen.

II. **Kolmogorowsches Axiomensystem**: Die Kolmogorowschen Axiome legen den Grundbegriff *Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses* fest, falls  $S$  eine Menge und  $\mathcal{B}$  eine  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $S$  ist.  $S$  heißt die Menge der Elementarereignisse, und  $\mathcal{B}$  heißt die  $\sigma$ -Algebra der zufälligen Ereignisse.

**Axiom 1**: Jedem  $A \in \mathcal{B}$  ist eine reelle Zahl  $P(A)$  mit  $0 \leq P(A) \leq 1$  zugeordnet, die die Wahrscheinlichkeit des zufälligen Ereignisses  $A$  heißt.

**Axiom 2**: Es ist  $P(S) = 1$ .

**Axiom 3**: (**Additionsaxiom**): Sind  $A_1, A_2, \dots$  paarweise unvereinbare zufällige Ereignisse, für die (1) zutrifft, so gilt (2).

$$(1) \quad A_i \in \mathcal{B} \text{ mit } A_i A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

$$(2) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Die Axiome 1 bis 3 definieren gerade ein *normiertes Maß*  $P$  auf  $\mathcal{B}$ . Das Tripel  $\{S, \mathcal{B}, P\}$  heißt *Wahrscheinlichkeitsfeld* oder *Wahrscheinlichkeitsraum*. Ein Wahrscheinlichkeitsfeld ist somit ein Maßraum mit einem normierten Maß  $P$ . Der Begriff der *Unabhängigkeit* sichert die Eigenständigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegenüber der allgemeinen Maßtheorie. Zwei zufällige Ereignisse  $A, B$  heißen unabhängig, falls  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$  ist.

III. **Zufallsgrößen**: Eine reellwertige Funktion  $f(s)$  auf  $S$ , die meßbar ist, d. h., für die  $\{s; f(s) < x\} \in \mathcal{B}$  für beliebiges reelles  $x$  gilt, heißt eine *Zufallsgröße* über dem Wahrscheinlichkeitsfeld  $\{S, \mathcal{B}, P\}$ .  $F(x) = P(\{s; f(s) < x\})$  heißt ihre *Verteilungsfunktion*. Der Begriff des *Erwartungswertes* wird mittels des Lebesgue-Integrals definiert: Ist  $f(s)$  summierbar, so heißt die gemäß (3) definierte Größe  $EX$  der Er-

wartungswert von  $X = f(s)$ .

$$(3) \quad EX = \int_s f(s) P(ds)$$

*Definition:* Eine Folge  $\{X_n\}$  von Zufallsgrößen heißt konvergent in Wahrscheinlichkeit gegen die Zufallsgröße  $X$ , wenn für beliebiges  $\varepsilon > 0$  der Grenzwert (4) für  $X_n = f_n(s)$  und  $X = f(s)$  gilt. Dieser Begriff

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{s: |f_n(s) - f(s)| < \varepsilon\}) = 1$$

entspricht dem Begriff *Konvergenz dem Maß nach* in der Theorie der reellen Funktionen.

*Definition:* Eine Folge  $\{X_n\}$  von Zufallsgrößen heißt konvergent fast sicher gegen die Zufallsgröße  $X$ , falls (5) gilt.

$$(5) \quad P(\{s: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = f(s)\}) = 1$$

Dieser Begriff entspricht dem Begriff *Konvergenz fast überall* in der Theorie der reellen Funktionen.

**wahrscheinlichkeitstheoretisch** ↗ Modell II.

**Wahrscheinlichkeitsverteilung** ↗ Zufallsgröße I.

**wahrscheinlichste Dauer** ↗ PERT.

**Wald** ↗ Baum.

**Wallis, John**, geb. 23. 11. 1616 Ashford, gest. 28. 10. 1703 Oxford. — W. studierte in Cambridge Philosophie und Theologie, bekleidete verschiedene Predigerstellen in London und wurde 1649 Professor der Mathematik in Oxford. Seit 1660 war W. Kaplan Karls II. W. ist eines der Gründungsmitglieder der *Royal Society* (1663). W. arbeitete vorwiegend auf analyt. Gebiet mit Untersuchungen zur Zissoide und zu den Zykloiden, über logarithm. Reihen, über die Gammafunktion u. a. Seine berühmte *Produkt-darstellung für  $\pi/2$*  (↗  $\pi$ ) findet sich in der *Arithmetica infinitorum* (1656). Die von W. verwendeten Verfahren sind nur selten streng.

**Walmdach** ↗ Dachausmittlung.

**Wandler:** technische Einrichtung zur Umsetzung von Signalen in eine andere Darstellungsform. In der *Rechentechnik* haben *Analog/Digital-W.* (A/D-W.) und *Digital/Analog-W.* (D/A-W.) für Prozeß-rechenanlagen und Hybridrechenanlagen bes. Bedeutung (s. a. Kodierung II.). Ein D/A-W. nimmt an seinem Eingang digitale Signale auf und gibt am Ausgang analoge Signale zur Weiterverarbeitung ab. A/D-W. setzen Signale in entgegengesetzter Richtung um.

**Waring, Edward**, geb. 1734 bei Shrewsbury, gest. 15. 8. 1798 Plealey bei Shrewsbury. — W. besuchte seit 1753 ein College in Cambridge, an dem er auch 1757 promovierte. Seit dem Jahre 1760 war W. Professor der Mathematik in Cambridge, soll aber keine Vorlesungen gehalten haben. Im Jahre 1763 wurde W. Mitglied der Royal Society. — W. arbeitete auf algebraischem Gebiet vorwiegend über die Theorie der Gleichungsauflösung, z. B. über gute Näherungsverfahren und die Abschätzung der Anzahl der komplexen Lösungen, auf dem Gebiet der algebraischen Kurven; er gab Konvergenzuntersuchungen an sowie viele zahlentheoret. Sätze, z. B. zum Goldbachschen Problem und über den Satz von

WILSON. Bekannt ist das W.sche Problem (↗ Zahlentheorie III.2.).

**Wärmeausbreitung** ↗ parabolische Differentialgleichung I.

**Wärmeleitungsgleichung, eindimensionale** ↗ Laplacetransformation V.

**Warteschlangentheorie** svw. Bedienungstheorie.

**Weber, Heinrich**, geb. 5. 3. 1842 Heidelberg, gest. 17. 5. 1913 Strasbourg. — W. studierte in Heidelberg, Leipzig und Königsberg (Kaliningrad). Seit 1873 war er Professor in Berlin, 1884 in Marburg, 1892 in Göttingen und seit 1895 in Strasbourg. — W. lieferte bedeutende Beiträge zur mathemat. Physik, zur Zahlentheorie und zur Algebra. W. ist auch Mitverfasser hervorragender Lehrbücher.

**Wechselwinkel** ↗ Winkelpaare.

**Weg** ↗ Durchlaufungen von Graphen I.

**Wegunabhängigkeit** ↗ Kurvenintegral III.2.

**Weierstraß, Karl**, geb. 31. 10. 1815 in Ostenfelde als Sohn eines Beamten, gest. 19. 2. 1897 Berlin. — W. studierte in Münster, 1842/48 war er Gymnasiallehrer in Deutsch-Krone und 1848/56 in Braunsberg. In dieser Zeit arbeitete er über Jacobische und Abelsche Funktionen. Für seine Arbeit 1854 über Abelsche Funktionen, die in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik veröffentlicht wurde, erhielt W. die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg (Kaliningrad) und wurde für wissenschaftl. Arbeiten für ein Jahr beurlaubt. Seit 1856 war W. Professor in Berlin. Seine berühmten Vorlesungen, in denen meist neueste Forschungsergebnisse vorgetragen wurden, zogen Studenten aus vielen Ländern an. — W.s Bedeutung für die moderne Mathematik liegt vor allem in seiner äußerst sorgfältigen Behandlung infinitesimaler Fragen. Er klärte die grundsätzl. Begriffe der Funktionentheorie und der Variationsrechnung völlig auf, kritisierte unklare Begriffe und Prinzipien, z. B. das Dirichletsche Prinzip, oft heftig. Er führte auf dem von GAUSS zuerst beschrittenen Weg die strenge Begründung der Analysis zum Abschluß.

**Weierstraß, Satz von** ↗ Stetigkeit.

**Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion** ↗ elliptische Funktion.

**Weierstraßsches Konvergenzkriterium** ↗ Funktionenfolge III.2., ↗ Funktionenreihe III.2.

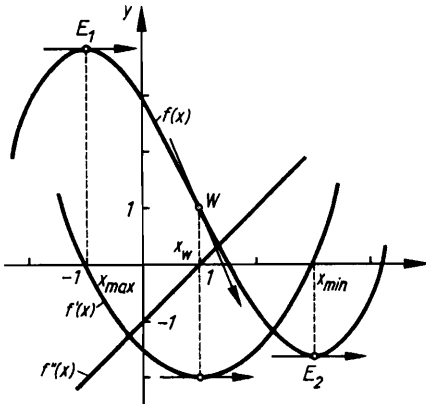
**Weil, André**, geb. 6. 5. 1906 Paris. — W. promovierte 1928 an der Pariser Universität. Er schrieb bedeutende Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Theorie topolog. Gruppen. In seinen fundamentalen Beiträgen zur *algebraischen Topologie* entwickelte er z. B. die Theorie der Faseräume und regte SERRE zur Schaffung der Theorie kohärenter Garben an.

**Weitschweifigkeit** svw. Redundanz.

**Wellengleichung** ↗ hyperbolische Differentialgleichung I., II.

**Wendepunkt:** Punkt einer Kurve, der zwei Teile verschiedener Krümmung trennt. Denkt man sich die Kurve in einem bestimmten Durchlaufsinne durchfahren, z. B. das Bild einer reellen Funktion  $f$  einer Variablen im Sinne wachsender Abszissen, so muß der Einschlag der gesteuerten Räder im W. umgekehrt werden, der Wagen geht in  $W$  von einer Rechts- in eine Linkskurve über oder umgekehrt von einer

Links- in eine Rechtskurve. Geometrisch bedeutet dies, daß die in der jeweiligen Lage des Punktes an die Kurve gelegten Tangenten vor und nach dem  $W$ .  $W$  auf verschiedenen Seiten der Kurve liegen, d. h., die Tangente in  $W$ , die *Wendetangente*, wird von der Kurve durchsetzt. In dem Augenblick, in dem der Wagen den  $W$ . durchfährt, bewegt er sich ohne Einschlag der gesteuerten Räder in Richtung der Kurve, während vor und nach dem  $W$ . der Unterschied der Tangentenrichtung in benachbarten Punkten der Kurve durch eine fortlaufende Änderung des Einschlags korrigiert werden muß. Analytisch muß deshalb die Funktion  $f(x)$ , die den Vorgang beschreibt, nicht nur differenzierbar sein, sondern auch eine stetige zweite Ableitung  $f''(x)$  haben, die die stetige Änderung von  $f'(x)$  angibt und im  $W$ . den Wert Null hat (vgl. Konvexität). Die Funktion  $y = f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 - 9x + 17)$  z. B. hat die Ableitungen  $f'(x) = x^2/2 - x - \frac{3}{2}$  und  $f''(x) = x - 1$  (Abb.). An der Stelle  $x_w = 1$



Extrema und Wendepunkt der Kurve der Funktion  $y = f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 - 9x + 17)$

hat ihr Bild den  $W$ .  $W = (1, 1)$ . Vor dem  $W$ ., für Abszissen  $x$  mit  $-1 < x < +1$ , ist  $f'(x) < 0$  und  $f''(x) < 0$ , für Abszissen  $x$  mit  $1 < x < 3$  ist  $f'(x) < 0$ , aber  $f''(x) > 0$ .

Für eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $y = f(x)$  ist  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$  und  $f^{(k)}(x_0) \neq 0$  bei ungeradem ganzen  $k$  hinreichend dafür, daß für  $x = x_0$  ein  $W$ . vorliegt.

S. a. Kurvendiskussion II.3.

**Wendetangente** ↗ Wendepunkt.

**Wertebereich** ↗ Abbildung I., Funktion I., VI., ↗ Operator, ↗ Relation II.

**Wertetafel** ↗ Funktion II.

**Wertevorrat** svw. Wertebereich

**wesentliche Singularität** ↗ Laurentreihe.

**wesentliche Ziffer** ↗ Runden.

**Wessel**, Caspar, geb. 8. 6. 1745 in Jonsrud (Norwegen) als Sohn eines Geistlichen, gest. 25. 3. 1818 Kopenhagen. —  $W$ . studierte 1763 nur kurze Zeit in Kopenhagen und ging dann zu Feldmesser. Arbeiten über. Ihm verdankt man gute Karten Däne-

marks und verschiedener Herzogtümer. —  $W$ . gab 1797 die erste Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene. Seine Schrift hat jedoch den weiteren Entwicklungsgang der Mathematik nicht beeinflusst.

**Weyl**, Hermann, geb. 9. 11. 1885 Elmshorn, gest. 9. 12. 1955 Zürich. —  $W$ . studierte und promovierte 1908 bei D. HILBERT in Göttingen und erhielt 1913 eine Berufung als Professor nach Zürich, wo er ein Jahr mit EINSTEIN zusammenarbeitete. Die Probleme von EINSTEIN führten  $W$ . zur *Differentialgeometrie* und regten die fundamentalen Arbeiten zum Zusammenhang zwischen Relativitätstheorie und Quantenmechanik an. Auch seine sehr bedeutenden Veröffentlichungen zur *Invarianten-* und zur *Gruppentheorie* wurden von  $W$ .s physikal. Konzeptionen angeregt. Seine Beiträge zur Differentialgeometrie veranlaßten u. a. VEBLEN zum Ausbau einer projektiven Differentialgeometrie. Nach einem kurzen Aufenthalt in Göttingen 1930/33 emigrierte  $W$ . in die USA, setzte in Princeton seine Studien fort und kehrte 1951 nach Zürich zurück.  $W$ . leistete auch auf anderen Gebieten der Mathematik Hervorragendes, z. B. in der Theorie der Integral- und Differentialgleichungen, der Funktionalanalysis, der Topologie und der Zahlentheorie. In seinen philosoph. Beiträgen schwankte er zwischen dem Intuitionismus und dem Formalismus von HILBERT.

**Whitehead**, Alfred North, geb. 15. 2. 1861 Ramsgate als Sohn eines Theologen, gest. 30. 12. 1947 Cambridge (Mass.). —  $W$ . studierte Mathematik in Cambridge, wurde 1910 Professor in London und 1924 Professor der Philosophie in Cambridge (Mass.). Seine Untersuchungen zur *mathemat. Logik* erschienen in Zusammenarbeit mit B. RUSSELL als »*Principia Mathematica*«. Seit etwa 1918 wandte sich  $W$ . vorwiegend philosoph. Fragen zu.

**Widerspruchsfreiheit**: *mathematische Logik* Eigenschaft einer Menge  $X$  von Ausdrücken des Prädikatenkalküls der ersten Stufe;  $X$  heißt *semantisch widerspruchsfrei*, falls  $X$  ein Modell hat, bzw. *syntaktisch widerspruchsfrei*, falls aus  $X$  nicht alle bildbaren Ausdrücke abgeleitet werden können. Beide Erklärungen sind gleichwertig, daher spricht man meist nur von  $W$ .

Es ist  $X$  genau dann widerspruchsfrei, wenn es keinen Ausdruck  $H$  gibt, der zusammen mit seiner Negation aus  $X$  folgt. Jede Teilmenge einer widerspruchsfreien Menge  $X$  ist selbst widerspruchsfrei; umgekehrt ist  $X$  schon dann widerspruchsfrei, wenn alle endl. Teilmengen von  $X$  widerspruchsfrei sind. Mittels der semantischen  $W$ . läßt sich dies auch als *Endlichkeitssatz für Modelle* formulieren: Hat jede endl. Teilmenge von  $X$  ein Modell, so auch  $X$ . Dieses Resultat hat viele Anwendungen auch außerhalb der mathematischen Logik.

Für metamathematische Untersuchungen über Theorien ist der Begriff der *relativen W*. wesentlich: Eine Theorie  $T_1$  heißt relativ widerspruchsfrei bzgl. einer Theorie  $T_2$ , falls aus der  $W$ . von  $T_2$  die  $W$ . von  $T_1$  folgt. Man kann z. B. zeigen, daß die Arithmetik der reellen Zahlen relativ widerspruchsfrei ist bzgl. der analytischen Geometrie und umge-

kehrt, und analog, daß die Axiomatisierung der Mengenlehre nach ZERMELO-FRAENKEL-SKOLEM relativ widerspruchsfrei ist bzgl. der Axiomatisierung nach BERNAYS-GÖDEL und umgekehrt. — S. a. Axiomatik; axiomatischer Aufbau der Geometrie.

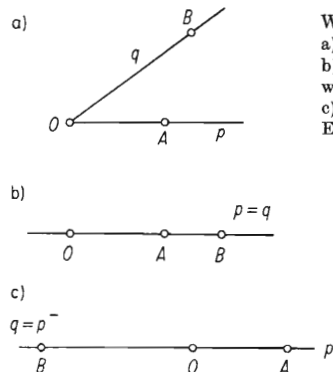
**Wiener**, Norbert, geb. 26. 11. 1894 Columbia (Missouri), gest. 19. 3. 1964 Stockholm. — W. begann als Wunderkind mit 14 Jahren Mathematik zu studieren und promovierte 1913 an der Harvard-Universität Cambridge. Er reiste mehrmals nach Europa und lernte dort RUSSELL, HARDY, HILBERT, LANDAU u. a. kennen. W. beschäftigte sich mit *mathemat. Logik* und theoret. Physik. Im engen Zusammenhang mit der Physik stehen die Arbeiten über harmon. Analyse, die Tauberschen Theoreme und die Theorie der Zufallsprozesse mit dem W-schen Maß im Raum der stetigen Funktionen. Seit 1919 lehrte W. am Institut für Technologie in Massachusetts, seit 1932 als Professor. Während des 2. Weltkriegs forschte er zu Problemen der Rechentechnik und schuf unabhängig von KOLMOGOROW eine *Interpolations- und Extrapolationstheorie stationärer Zufallsprozesse*. Während eines Mexiko-Aufenthalts (1945/47) entstand die Idee einer Einheitswissenschaft der Informationsverarbeitung, der Lenkung und Kontrolle von Prozessen. W. prägte dafür den Namen *Kybernetik*. Seine philosoph. und soziolog. Anschauungen sind eklektizistisch, er betonte jedoch die moral. Verantwortung des Wissenschaftlers für den Frieden.

**Wilson**, Sir John, geb. 1741 Westmoreland, gest. 1793. — W. trat 1759 in das Peterhouse in Cambridge ein, dort erwarb er 1761 den Grad des BA [Bachelor of Arts], 1764 den des MA [Master of Arts], und des Fellow. 1766 wandte er sich als Anwalt der Medizin zu und wurde 1782 Mitglied der Royal Society. In der Zahlentheorie ist ein Satz nach ihm ben. ( $\nearrow$  Primzahl VI.10.).

**windschiefe Geraden**  $\nearrow$  Gerade,  $\nearrow$  Lotgerade IV., s. a. *n*-Eck.

**Windung** swv. Torsion, s. a. Schraubenlinie.

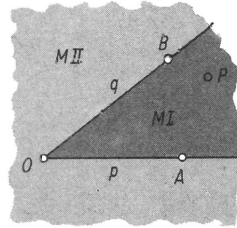
**Winkel**: gemeinsame Bezeichnung für verschiedenartige geometr. Objekte. **I.** Der *Elementar-W.* als einfachster Begriff eines W.s ist gegeben durch einen Punkt *O* und zwei von ihm ausgehende Strahlen  $p = OA^+$  und  $q = OB^+$ , in Zeichen  $\sphericalangle(p, q)$ ,



Winkel. Abb. 1:  
a) Elementarwinkel,  
b) Null-Elementarwinkel und  
c) gestreckter  
Elementarwinkel

$\sphericalangle(q, p)$ ,  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOA$ ,  $\sphericalangle(OA^+, OB^+)$  oder  $\sphericalangle(OB^+, OA^+)$ . *O* heißt der *Scheitel*, *p* und *q* heißen die *Schenkel*;  $\sphericalangle(p, q)$  heißt *Null-Elementar-W.*, wenn  $p = q$  ist, und *gestreckter Elementar-W.*, wenn *p* und *q* entgegengesetzt gerichtet sind (Abb. 1). Dem Null-Elementar-W. ordnet man die W.größe  $|\sphericalangle(p, q)| = 0^\circ = 0$  rad, dem gestreckten Elementar-W. die Winkelgröße  $|\sphericalangle(p, q)| = 180^\circ = \pi$  rad zu. Die mit  $|\sphericalangle(p, q)|$  bezeichnete Winkelgröße liegt je nach der benutzten Einheit im Intervall  $[0^\circ, 180^\circ]$  oder  $[0, \pi]$ .

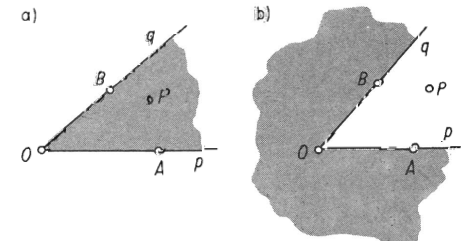
**II.** Jeder Elementar-W. zerlegt die Ebene, in der er liegt, in zwei offene Untermengen, die in Abb. 2



Winkel. Abb. 2: Zwei offene Untermengen *M I* und *M II*, in die die Ebene durch einen Elementarwinkel zerlegt wird

durch Raster hervorgehoben sind. Wird eine dieser Untermengen vor der anderen ausgezeichnet, etwa durch einen Punkt *P*, der zu ihr gehört, so entsteht ein geometrisches Objekt, das ebenfalls W. genannt wird; die ausgezeichnete Untermenge heißt das *Innere des W.s*, manchmal auch *W.fläche* oder sogar *W.raum*. Das Innere des Null-W.s ist die leere Menge. In der symbolischen Bezeichnung  $\sphericalangle(p, q; P^+)$ ,  $\sphericalangle(AOB; P^+)$  oder  $\sphericalangle(OA^+, OB^+; P^+)$  weist  $P^+$  darauf hin, daß *P* ein Punkt des Inneren ist (Abb. 3). Die Halbgeraden *p* und *q* heißen die *Schenkel*, *O* der *Scheitel* des W.s. Die mit  $|\sphericalangle(p, q; P^+)|$ ,  $|\sphericalangle(AOB; P^+)|$  usw. bezeichneten W.größen liegen im Intervall  $[0^\circ, 360^\circ]$  bzw.  $[0, 2\pi]$ .

**III.** Betrachtet man die Schenkel eines W.s als ein *geordnetes Paar*, so daß ein Schenkel als der erste oder *Anfangsschenkel* vor dem anderen als dem zweiten oder *Endschenkel* ausgezeichnet ist, so erhält man einen *orientierten W.*, in Zeichen  $\sphericalangle(p, q; P^+)$ , wenn *P* wieder ein Punkt des W.innere ist. Falls  $p \neq q$ , sind  $\sphericalangle(p, q; P^+)$  und  $\sphericalangle(q, p; P^+)$  voneinander verschiedene orientierte W. In einer orientierten Ebene, in der ein Drehsinn als positiv, der entgegengesetzte als negativ vorgegeben ist,



Winkel. Abb. 3: a) Punkt *P* liegt im Innern des Winkels  $\sphericalangle(p, q; P^+)$ , b) Punkt *P* liegt nicht im Innern des Winkels  $\sphericalangle(p, q; P^-)$



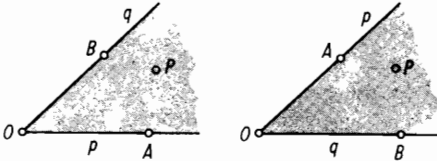
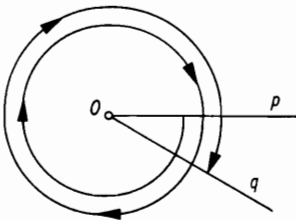


Abb. 4: Orientierte Winkel mit entgegengesetzt gleichen Maßzahlen

kann die W.größe eines orientierten W.s auch negative Werte annehmen. Man bezeichnet sie durch  $m(\sphericalangle(p, q; P^+))$ ; dabei gilt  $-360^\circ < m(\sphericalangle(p, q; P^+)) \leq 360^\circ$  sowie  $m(\sphericalangle(p, q; P^+)) = -m(\sphericalangle(q, p; P^+))$  (Abb. 4).

IV. Man erhält einen orientierten Elementar-W., in Zeichen  $\sphericalangle(p, q)$ , wenn eine Reihenfolge der Schenkel eines Elementar-W.s festgelegt wird. Ein Inneres wird für orientierte Elementar-W. nicht definiert. In einer orientierten Ebene ist die W.größe  $m(\sphericalangle(p, q))$  eines orientierten Elementar-W.s eine additive Restklasse mod  $360^\circ$  bzw. mod  $2\pi$ .

V. Bei Anwendungen, z. B. zur Beschreibung von Drehvorgängen, wird der Begriff des Drehprozesses oder des Dreh-W.s  $\delta$  gebraucht. Einen solchen Drehprozess kann man sich veranschaulichen durch eine Drehung des Schenkels  $q$  um den Scheitel  $O$ , während der erste Schenkel  $p$  fest bleibt. Die Größe eines Dreh-W.s, in Zeichen  $m(\delta)$ , kann jede reelle Zahl sein. Um  $\delta$  vollständig zu beschreiben, hat man außer einem orientierten Elementar-W., der die Schenkel festlegt, den Drehsinn anzugeben und hinzuzufügen, wieviele volle Umdrehungen der zweite Schenkel ausgeführt hat, bevor er seine End-



Winkel. Abb. 5: Veranschaulichung des Drehwinkels  $\delta$  der Größe  $m(\delta) = -750^\circ$

lage erreichte. Abb. 5 veranschaulicht einen Drehwinkel  $\delta$  mit  $m(\delta) = -750^\circ$ , d. h., bei dem  $q$  mehr als zwei volle Umdrehungen im mathematisch negativen Drehsinn ausgeführt hat.

Die folgenden Begriffe sind zunächst nur für W.II erklärt. Einige von ihnen lassen sich auch auf andere W.arten übertragen.

VI. Einteilung der W. nach ihrer Größe: Jeder W., der einem seiner beiden Neben-W. kongruent ist, heißt rechter W. Jeder W. heißt spitz, wenn seine Größe kleiner als die eines rechten W.s ist, stumpf, wenn seine Größe größer als die eines rechten, aber kleiner als die eines gestreckten W.s ist, überstumpf, wenn seine Größe größer als die eines gestreckten W.s ist (Abb. 6). Ein W. heißt Vollwinkel, wenn seine beiden Schenkel zusammenfallen und sein Inneres nicht die leere Menge ist. W. mit konvexem Inneren

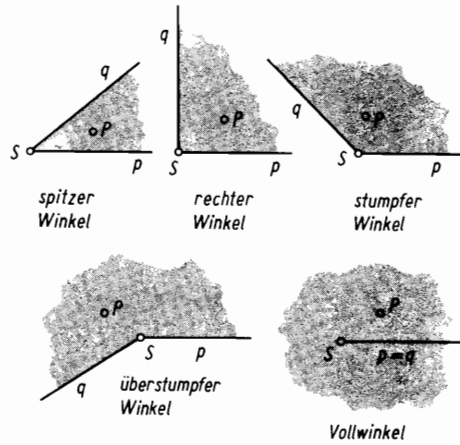


Abb. 6: Einteilung der Winkel nach ihrer Größe

werden manchmal als konkave oder hohle W. bezeichnet im Unterschied zu konvexen oder erhabenen W.n, deren Inneres nicht konvex ist.

Maßzahl der W.größe. Man setzt  $|\sphericalangle(p, q; P^+)| = a \cdot w$  und nennt  $w$  die W.einheit und die reelle Zahl  $a$  die auf diese Maßeinheit bezogene Maßzahl der W.größe. Auf die Beschränkung der Maßzahl  $a$  auf bestimmte Intervalle ist bei den einzelnen W.arten hingewiesen worden. Es gilt:

- VI.1. Kongruente W. haben gleiche W.größe.
- VI.2. Die W.größe der Winkeleinheit ist  $1 \cdot w$ .
- VI.3. Verläuft ein Strahl  $l$  im Inneren eines W.s  $\sphericalangle(p, q)$  durch dessen Scheitel, ist  $Q$  ein Punkt in

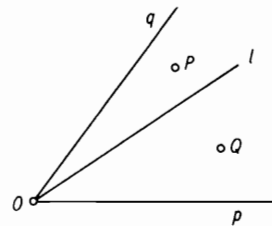


Abb. 7: Zur Summe  $a + a'$  der Maßzahlen  $a$  und  $a'$  zweier Winkel

seinem Inneren und gilt  $|\sphericalangle(p, l; Q^+)| = a \cdot w$  sowie  $|\sphericalangle(l, q; P^+)| = a' \cdot w$ , so hat der W.  $\sphericalangle(p, q; P^+)$  die Größe  $\sphericalangle(p, q; P^+) = (a + a') \cdot w$ , die die Summe der beiden W.größen genannt wird (Abb. 7). Die Summe kann nicht in jedem Falle gebildet werden; z. B. dann nicht, wenn die Gesamtgröße der Summanden  $360^\circ$  übertrifft.

VI.4. Für die Summe und die Differenz orientierter W. gelten die entsprechenden Regeln wie für Summe und Differenz gerichteter Strecken ( $\nearrow$  Subtraktion).

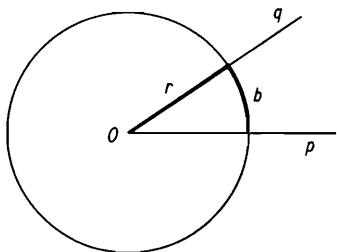
VII. Während bei der Streckenmessung die Maßeinheit beliebig gewählt werden kann, bezieht man die Maßeinheit  $w$  für die W.messung auf geometrisch hervorgehobene W., z. B. auf den gestreckten oder auf den rechten W.

VII.1. Durch Teilung des gestreckten W.s in 180 oder in 200 gleiche Teile erhält man das Gradmaß mit

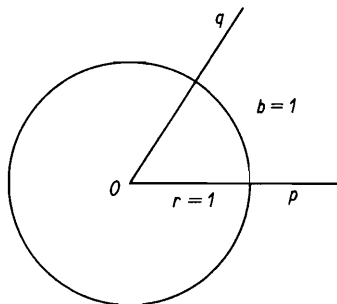


den Maßeinheiten  $w_1 = |\sphericalangle(p, p^-)|/180 = 1^\circ$ , gen. Grad, und  $w_2 = |\sphericalangle(p, p^-)|/200 = 1$  gon, auch Neugrad. Grad wird sexagesimal unterteilt in Minuten und diese in Sekunden, in Zeichen  $1^\circ = 60'$ ,  $1' = 60''$ , gon wird dagegen dezimal unterteilt. Nach der Gleichung  $180w_1 = 200w_2$  können diese beiden Gradmaße ineinander umgerechnet werden, da  $1^\circ = w_1 = (10/9) \cdot w_2$  oder  $1$  gon  $= w_2 = (9/10) \cdot w_1$ ; für  $60^\circ = 60w_1$  z. B. erhält man  $(600/9)w_2 = 66,6667$  gon oder für  $25$  gon  $= 25w_2 = (225/10)w_1 = 22,5^\circ = 22^\circ 30'$ . Bezeichnet man, wie üblich, die W.größe mit griechischen Buchstaben, z. B.  $|\sphericalangle(p, q)| = \alpha$ , so wird die verwendete Maßeinheit oft in der Form  $\alpha^\circ$  gekennzeichnet.

VII.2. Bes. in der Analysis ist es üblich, die W.größen in Bogenmaß anzugeben. Dabei betrachtet man den zu messenden W. als Mittelpunkts-W. in einem Kreis mit dem Radius  $r$  und bezeichnet das Verhältnis  $b/r$  der Länge  $b$  des von diesem Mittelpunkts-W. vom Kreisumfang ausgeschnittenen Bogens zur Länge  $r$  des Radius als das Bogenmaß des Mittelpunkts-W.s (Abb. 8). Wird seine W.größe mit  $\varphi$  bezeichnet, so gilt nach Definition  $b = r \cdot \varphi$ . Für den Einheitskreis mit  $r = 1$  entspricht die Maßzahl der Bogenlänge  $b$  der des Bogenmaßes von  $\varphi$ . Seine Einheit  $w_3$  wird mithin dargestellt durch einen Bogen, dessen Länge gleich der des Radius, d. h. 1 ist (Abb. 9);  $w_3$  läßt sich berechnen, da für  $\varphi = |\sphericalangle(p, p^-)|$  die Bogenlänge  $b = \pi r = \pi \cdot 1$  die des Halbkreises ist. Aus  $\varphi = 180^\circ \cdot w_1 = \pi w_3$  folgt  $w_3 = 180^\circ \cdot w_1/\pi = 57,29578^\circ = 1$  rad  $\approx 57^\circ 17' 44,8''$ . Diese Einheit heißt Radiant, Zeichen rad. Anstelle von  $\varphi$  rad treten auch die Zeichen  $\varphi$  oder arc  $\varphi$  noch auf. In der höheren Mathematik wird die Einheit



Winkel. Abb. 8: Zur Definition des Bogenmaßes  $|\sphericalangle(p, q)| = b:r$

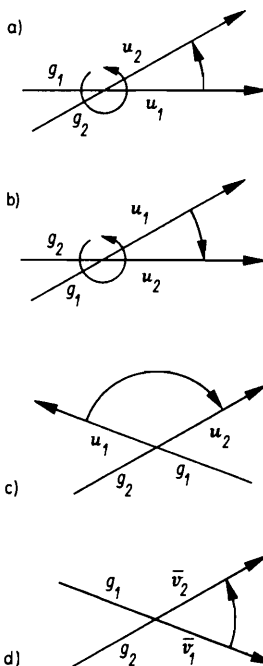


Winkel. Abb. 9: Einheit des Bogenmaßes 1 rad

rad meist weggelassen, dann bedeutet z. B.  $\pi = 180^\circ$ ,  $\pi/2 = 90^\circ$ ,  $\pi/3 = 60^\circ$ . — S. a. Nebenwinkel; Scheitelwinkel; Stufenwinkel; Wechselwinkel; Winkelpaare. VIII. Die Größe des W.s zwischen zwei sich schneidenden Geraden wird im wesentlichen berechnet mit Hilfe des Skalarprodukts von Richtungsvektoren der Geraden. Zwei sich schneidende Geraden liegen stets in einer Ebene. Sind die Geraden  $g_1$  durch den Richtungsvektor  $u_1$  und  $g_2$  durch  $u_2$  orientiert ( $\nearrow$  Geradengleichungen), so ist die Größe  $\alpha$  von  $\sphericalangle(g_1, g_2)$  der Größe  $\beta$  von  $\sphericalangle(u_1, u_2)$  gleich und wird berechnet aus (1). Liegen dabei  $g_1, g_2$  in einer orientierten

$$(1) \quad \cos \alpha = \cos \beta = u_1 \cdot u_2 / (|u_1| \cdot |u_2|)$$

Ebene, in der ein positiver Drehsinn ( $\nearrow$  Koordinatensystem) eingeführt worden ist, so wählt man  $\alpha$  aus dem Intervall  $-\pi < \alpha \leq \pi$  (Abb. 10); das Vorzeichen ergibt sich danach, ob die Drehung von  $u_1$  in  $u_2$  im positiven oder im negativen Sinn erfolgt. Ist die Ebene nicht orientiert, so legt man  $0 \leq \alpha \leq \pi$  fest. Sind die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  nicht orientiert, so wählt man auf jeder einen Richtungsvektor, etwa  $\bar{v}_1$  und  $\bar{v}_2$ , so daß mit  $\gamma = \sphericalangle(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  gilt  $0 \leq \gamma \leq \pi$  in einer orientierten Ebene und  $0 \leq \gamma \leq \pi/2$  in einer nicht orientierten Ebene. Mit dieser Forderung ist der W.  $\alpha = \gamma$  durch (1) bestimmt. Im letzten Falle von nicht orientierten Geraden in einer nicht orientierten Ebene kann man auch irgend zwei Richtungsvektoren  $v_1, v_2$  für  $g_1, g_2$  wählen und mit  $\sphericalangle(v_1, v_2) = \delta$  dann  $\cos \alpha$  berechnen als  $|\cos \delta| = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|}$ . Mit diesem nicht negativen Wert für  $\cos \alpha$  und der zusätzlichen Bedingung  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  ist dann die Größe des gesuchten Winkels bestimmt.

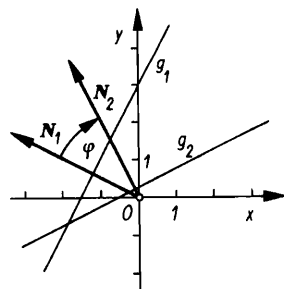


Winkel. Abb. 10: Zur Intervallbestimmung berechneter Winkelgrößen a) und b) in orientierter, c) und d) in nicht orientierter Ebene

Ist für zwei sich schneidende Geraden  $\cos \alpha = 0$ , dann ist ohne Rücksicht auf eine Orientierung  $\cos \delta = 0$  für irgend zwei Richtungsvektoren  $v_1, v_2$  von  $g_1, g_2$ , d. h. aber, daß die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  aufeinander *senkrecht* stehen, man nennt sie zwei zueinander *orthogonale Geraden*. Die eine Gerade ist dabei eine *Lotgerade* auf der anderen. Ist  $|\cos \alpha| = 1$  für zwei Geraden mit einem gemeinsamen Punkt, so fallen diese Geraden zusammen. Fallen  $g_1$  und  $g_2$  nicht zusammen und ist, ohne auf eine Orientierung zu achten,  $\cos \delta = 1$  für irgend zwei Richtungsvektoren dieser Geraden, so sind  $g_1$  und  $g_2$  zueinander *parallele Geraden*. Liegen die Geraden  $g_1, g_2$  in der Ebene mit einem kartesischen  $x, y$ -Koordinatensystem, so ist die Richtung von  $g_1$  bzw.  $g_2$  auch durch einen *Stellungsvektor* ( $\nearrow$  *Geradengleichung* III., IV.)  $N_1$  bzw.  $N_2$  von  $g_1$  bzw.  $g_2$  bestimmt. In diesem Fall kann man die Winkelgröße  $|\sphericalangle(g_1, g_2)|$  aus  $N_1$  und  $N_2$  berechnen.

*Beispiel:* Durch  $2x - y + 3 = 0$  und  $-2x + 4y - 1 = 0$  sollen zwei nicht orientierte Geraden  $g_1$  und  $g_2$  in der nicht orientierten  $x, y$ -Ebene dargestellt sein (Abb. 11). Wählt man  $N_1 = 2i - j$ ,  $N_2 = -2i + 4j$  und  $v = |\sphericalangle(N_1, N_2)|$ , so erhält man  $\cos \alpha = \cos v = |N_1 N_2| / (|N_1| \cdot |N_2|) = |-8 / (\sqrt{5} \cdot \sqrt{20})| = 8/10$ . Sind  $g_1$  und  $g_2$  in der nicht orientierten  $x, y$ -Ebene durch  $y = m_1 x + n_1$  und  $y = m_2 x + n_2$  gegeben mit  $m_1 = \tan \varphi_1$  und  $m_2 = \tan \varphi_2$ , falls  $\varphi_1 = |\sphericalangle(x, g_1)|$  und  $\varphi_2 = |\sphericalangle(x, g_2)|$ , so gilt  $|\tan \alpha| = |\tan(\varphi_2 - \varphi_1)| = |(m_2 - m_1) / (1 + m_1 \cdot m_2)|$  für  $m_2 \neq -1/m_1$  nach dem Additionstheorem der Tangensfunktion. Als Intervall wird  $0 \leq \alpha < \pi/2$  festgelegt. Ist  $m_2 = -1/m_1$  mit  $m_1 \neq 0$ , so stehen  $g_1$  und  $g_2$  zueinander senkrecht. Für  $m_1 = m_2$  sind  $g_1$  und  $g_2$  einander parallel, falls  $n_1 \neq n_2$ , oder fallen zusammen, falls  $n_1 = n_2$ .

IX. Die Größe des Winkels zwischen zwei sich schneidenden Ebenen im Raum wird im wesentlichen mit Hilfe des *Skalarprodukts* von *Stellungsvektoren* dieser Ebenen berechnet. Sind  $N_1$  und  $N_2$  die Stellungsvektoren der damit *orientierten Ebenen* ( $\nearrow$  Ebenengleichungen)  $E_1$  und  $E_2$  und werden die Größen des Winkels zwischen ihnen mit  $\varepsilon = |\sphericalangle(E_1, E_2)|$  und  $v = |\sphericalangle(N_1, N_2)|$  bezeichnet, so gilt  $\varepsilon = v$ . Die Berechnung erfolgt nach (1) mit Winkelgrößen aus  $0 \leq v \leq \pi$ . Sind die Ebenen  $E_1, E_2$  *nicht orientiert*, so wählt man Stellungsvektoren  $N_1', N_2'$  von  $E_1, E_2$  ( $\nearrow$  Ebenengleichungen), bestimmt  $\cos \varepsilon = |\cos v'|$  und legt  $0 \leq \varepsilon \leq \pi/2$



Winkel. Abb. 11:  
Die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  schneiden sich unter einem Winkel der Größe  $|\sphericalangle(g_1, g_2)| = |\sphericalangle(N_1, N_2)| = \varphi \approx 36,9^\circ$

fest. Ist  $\cos \varepsilon = 0$ , so sind  $E_1$  und  $E_2$  zwei zueinander *senkrechte* oder *orthogonale Ebenen*. Ist  $|\cos \varepsilon| = 1$  für zwei Ebenen mit gemeinsamen Punkten, so fallen diese Ebenen zusammen. Fallen  $E_1$  und  $E_2$  nicht zusammen und ist  $|\cos v'| = 1$  für zwei Stellungsvektoren  $N_1', N_2'$  von  $E_1, E_2$ , so sind diese zueinander *parallel*. *Beispiel:* Die Ebene  $E_1$  bzw.  $E_2$  sei durch die Gleichung  $4x - 8y + z - 3 = 0$  bzw.  $2x + 2y - z + 4 = 0$  gegeben. Ein Stellungsvektor von  $E_1$  bzw.  $E_2$  ist  $N_1' = 4i - 8j + k$  bzw.  $N_2' = 2i + 2j - k$ . Es ist  $\cos \varepsilon = |-9 / (9 \cdot 3)| = 1/3$ .

**Winkelfunktion, trigonometrische, goniometrische Funktion:** I. Funktion, deren Werte die Koordinaten bzw. Koordinatenverhältnisse eines sich auf einem Einheitskreis mit dem Mittelpunkt  $O$  bewegenden Punktes  $P$  sind in Abhängigkeit von der Größe des Winkels, den die Halbgerade  $OP$  gegen eine Nullrichtung  $v$  bildet. Eine Richtung  $u$  mit  $m(\sphericalangle(v, u)) = +90^\circ$  bzw.  $\pi/2$  rad bildet mit  $v$  ein kartes. Koordinatensystem (Abb. 1), dessen Achsen die Schnittpunkte  $S(1, 0)$  und  $S'(0, 1)$  mit dem Einheitskreis haben. Die Größe des Winkels  $\sphericalangle SOP$ , der die Lage der Halbgeraden  $OP$  bestimmt, wird mit  $x$  bezeichnet und im Grad- oder Bogenmaß gemessen. Ist  $L$  der Fußpunkt des von  $P$  auf  $v$  gefällten Lots, so sind  $v = m(OL)$  und  $u = m(LP)$  die Koordinaten von  $P$  mit  $|OP| = \sqrt{v^2 + u^2} = 1$ . Die Halbgerade durch  $O$  und  $P$  schneidet die Tangenten in  $S$  und in  $S'$  an den Einheitskreis in den Punkten  $T$  bzw.  $T'$ . Da es zu jedem Punkt  $P$  zwei Koordinaten und mehrere Verhältnisse zwischen ihnen gibt, lassen sich mehrere W.en definieren.

II. Die Maßzahl der  $v$ -Koordinate wird als *Kosinusfunktion*  $f(x) = \cos x$ , die der  $u$ -Koordinate als *Sinusfunktion*  $f(x) = \sin x$  für alle Größen  $x$  festgelegt. Die Abb. 1 zeigt mit  $P_1, P_2, P_3, P_4, S, S', S_2$

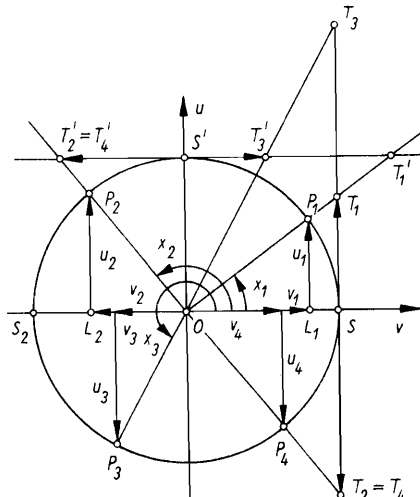
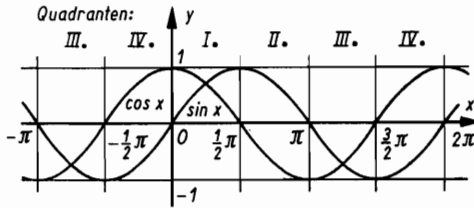


Abb. 1: Definition der Winkelfunktionen am Kreis mit dem Radius  $r = 1$



Winkelfunktion. Abb. 2: Graphische Darstellung der Funktionen  $y = \sin x$  und  $y = \cos x$

verschiedene Lagen von Punkt  $P$ . Man ersieht, daß  $\cos x > 0$ , wenn  $P$  im I. und IV. Quadranten liegt, und  $\cos x < 0$  für  $P$  im II. und III. Quadranten; entsprechend gilt  $\sin x > 0$  für  $0 < x < \pi$  und  $\sin x < 0$  für  $\pi < x < 2\pi$ . Spezielle Werte sind in (1) und (2) gegeben (Abb. 2).

$$(1) \quad \cos 0 = +1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \pi = -1, \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$(2) \quad \sin 0 = 0, \sin \frac{\pi}{2} = +1, \sin \pi = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

Nimmt  $P$  nach einem vollen Umlauf längs des Einheitskreises die gleiche Lage ein, wiederholen sich für jede  $W$ . die Funktionswerte. Diese  $W$ .en sind *periodisch*, ihre *primitive Periode* ist  $2\pi$  bzw.  $360^\circ$ , d. h., es gelten (3) und (3a) für  $k \in \mathbf{Z}$ . Zwei Punkte

$$(3) \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$(3a) \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$P$  und  $\bar{P}$ , die durch eine Drehung der Halbgeraden  $OP$  bzw.  $O\bar{P}$  um  $x$  bzw.  $\bar{x} = -x$  entstehen, liegen symmetrisch zur  $v$ -Achse; daraus folgt  $\sin \bar{x} = \sin(-x) = -\sin x$  und  $\cos \bar{x} = \cos(-x) = \cos x$ , d. h., Sinus ist eine *ungerade*, Kosinus eine *gerade Funktion*.

Im I. Quadranten werden diese  $W$ .en auch als Verhältnis der Längen je zweier Strecken definiert. Im rechtwinkligen Dreieck  $OL_1P_1$  ist  $OP_1$  Hypotenuse, und von den Katheten liegt  $OL_1$  am Winkel  $\sphericalangle SOP_1$  und  $L_1P_1$  ihm gegenüber. Wegen  $|OP_1| = 1$  gibt das Verhältnis der Längen von Gegenkathete  $L_1P_1$  und Hypotenuse  $OP_1$  den Wert von  $\sin x$  an und das von Ankathete  $OL_1$  und Hypotenuse  $OP_1$  den Wert von  $\cos x$ . Im gleichen Dreieck ist  $\sphericalangle(OP_1L_1)$  der Komplementwinkel zu  $\sphericalangle(SOP_1)$ , seine Größe ist deshalb  $|\sphericalangle(OP_1L_1)| = \pi/2 - x$ . Für ihn ist  $P_1L_1$  Ankathete und  $OL_1$  Gegenkathete und deshalb  $\sin(\pi/2 - x) = |OL_1|/|OP_1| = \cos x$  sowie  $\cos(\pi/2 - x) = |L_1P_1|/|OP_1| = \sin x$ .

$$(4) \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos x$$

$$(4a) \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

In Worten ist der Wert des Kosinus der Wert vom Sinus des Komplementwinkels. Diese Beziehungen (4), (4a) erläutern den Namen Kosinus als Sinus

des Komplementwinkels. Zugleich zeigt (4b), daß auch Sinus die *Kofunktion* des Kosinus ist.

Nach diesen Definitionen am rechtwinkligen Dreieck lassen sich die Funktionswerte spezieller Winkelgrößen berechnen. Da die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 die Länge  $\sqrt{2}$  hat und Winkel von  $45^\circ$  gegen die Seiten bildet, gilt  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Im gleichseitigen Dreieck von der Seitenlänge 1 hat die Höhe die Länge  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ , und man erhält  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

III. Man definiert als *Tangensfunktion*  $f(x) = \tan x = u/v = \sin x/\cos x$  und als *Kotangensfunktion*  $f(x) = \cot x = v/u = \cos x/\sin x$ ; wenig gebräuchlich sind die *Sekansfunktion*  $f(x) = \sec x = 1/v = 1/\cos x$  und die *Kosekansfunktion*  $f(x) = \operatorname{cosec} x = 1/u = 1/\sin x$ . Daß sie nach ihrer Definition Paare von Kofunktionen ( $\nearrow$  II.) sind, d. h., daß (5),

$$(5) \quad \tan(\pi/2 - x) = \cot x$$

$$(5a) \quad \cot(\pi/2 - x) = \tan x$$

$$(5b) \quad \sec(\pi/2 - x) = \operatorname{cosec} x$$

(5a), (5b) gelten, ergibt sich aus  $\tan(\pi/2 - x) = \sin(\pi/2 - x)/\cos(\pi/2 - x) = \cos x/\sin x = \cot x$  und  $\sec(\pi/2 - x) = 1/\cos(\pi/2 - x) = 1/\sin x = \operatorname{cosec} x$ .

Für den Verlauf der *Tangensfunktion* ergibt sich für jede Lage  $P_i$  des Punktes  $P$  auf dem Einheitskreis ( $\nearrow$  Abb. 1), daß  $u_i/v_i = m(ST_i)/m(OS)$  nach dem Strahlensatz gilt und auch das Vorzeichen richtig wiedergibt. Daraus folgt, daß zwei Punkte, z. B.  $P_2$  und  $P_4$ , die die Enden eines Durchmessers sind, den gleichen Tangenswert  $m(ST_2) = m(ST_4)$  bestimmen. Die  $W$ .  $\tan x$  ist danach periodisch mit der *primitiven Periode*  $\pi$ . Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $OL_1P_1$  und  $OT_1'S'$  gilt die entsprechende Aussage für  $\cot x$ , d. h.,  $\cot x_2 = \cot x_4$ , weil  $m(S'T_1') = m(S'T_1')$ . Auch  $\cot x$  ist periodisch mit der *primitiven Periode*  $\pi$ ; es gelten (6) und (6a) für  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$(6) \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$$

$$(6a) \quad \cot(x + k\pi) = \cot x$$

Als Quotient sind diese  $W$ .en an Stellen, an denen ihr Nenner eine Nullstelle hat, nicht definiert. Für  $\tan x$  z. B. ist  $x = \pi/2$  eine *Sprungstelle*, man hat  $\tan x \rightarrow +\infty$  für  $x \uparrow \pi/2$  und  $\tan x \rightarrow -\infty$  für  $x \downarrow \pi/2$ ; für  $\cot x$  an der Stelle  $x = \pi$  gilt z. B.  $\cot x \rightarrow -\infty$  für  $x \uparrow \pi$  und  $\cot x \rightarrow +\infty$  für  $x \downarrow \pi$  (Abb. 3). Entsprechendes gilt auch für  $\sec x$  und  $\operatorname{cosec} x$ . Mit  $\cos x$  ist auch  $\sec x$  eine gerade  $W$ ., alle übrigen sind ungerade.

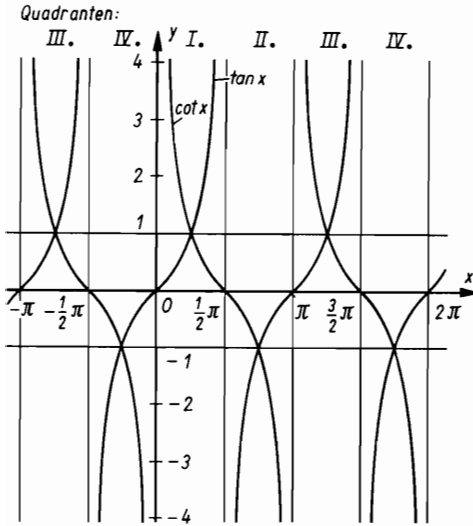
Im I. Quadranten lassen sich auch diese  $W$ .en durch Verhältnisse von Streckenlängen im rechtwinkligen Dreieck definieren; man erhält

$$\tan x = \text{Gegenkathete} : \text{Ankathete},$$

$$\cot x = \text{Ankathete} : \text{Gegenkathete},$$

$$\sec x = \text{Hypotenuse} : \text{Ankathete},$$

$$\operatorname{cosec} x = \text{Hypotenuse} : \text{Gegenkathete}.$$

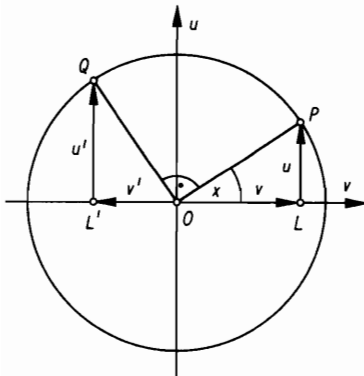


Winkelfunktion. Abb. 3: Graphische Darstellung der Funktionen  $y = \tan x$  und  $y = \cot x$

Danach können für spezielle Winkelgrößen Funktionswerte berechnet werden im Quadrat oder im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge 1. Man erhält  $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$ ,  $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ ;  $\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$ ,  $\sec 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$ .

IV. Die Eigenschaft der W.en, Paare von Kofunktionen zu bilden, macht es möglich, die Funktionswerte von je zwei Kofunktionen in einer *Tabelle* zusammenzufassen, die dann einen *doppelten Eingang* hat.

Ihre Zeilen und Spalten enthalten z. B. von links oben aufgeschlagen die Werte für  $\sin x$  und von rechts unten aufgeschlagen die von  $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ . Mittels der *Quadrantenrelation* können Werte der W.en für Winkelgrößen im II. Quadranten berechnet werden. Für  $0 \leq x < \pi/2$  gelten



Winkelfunktion. Abb. 4: Zur Quadrantenrelation

(7) und (7a), wie sich bis auf das Vorzeichen aus

$$(7) \quad \sin(x + \pi/2) = \cos x$$

$$(7a) \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

der Kongruenz der Dreiecke  $OLP$  und  $QL'O$  ergibt (Abb. 4);  $u = -v'$  ergibt sich aber, weil  $\cos(x + \pi/2) < 0$ . Daraus folgen (8) und (8a).

$$(8) \quad \tan(x + \pi/2) = -\cot x$$

$$(8a) \quad \cot(x + \pi/2) = -\tan x.$$

Setzt man  $x_2 = x + \pi/2$ ,  $x_3 = x_2 + \pi/2 = x + \pi$  bzw.  $x_4 = x_3 + \pi/2 = x + 3\pi/2$ , so gilt weiter, wie auch unmittelbar am Einheitskreis ( $\nearrow$  Abb. 1) bestätigt werden kann:

$$\begin{aligned} \sin x_3 &= \cos x_2 = -\sin x \quad \text{und} \quad \cos x_3 = -\sin x_2 \\ &= -\cos x \quad \text{bzw.} \quad \sin x_4 = \cos x_3 = -\cos x \quad \text{und} \\ \cos x_4 &= -\sin x_3 = +\sin x. \end{aligned}$$

Erweitert man diese Beziehungen auf die W.en  $\tan x$  und  $\cot x$ , so gilt Tabelle (9) zur Berechnung der W. für die Argumente  $x_i = x + i\pi/2$  mit  $i = 1, 2, 3, 4$ .

(9)

$x_i =$	$x + \frac{\pi}{2}$	$x + \pi$	$x + \frac{3\pi}{2}$	$x + 2\pi$
$\sin x_i$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$\cos x_i$	$-\sin x$	$-\cos x$	$+\sin x$	$\cos x$
$\tan x_i$	$-\cot x$	$+\tan x$	$-\cot x$	$\tan x$
$\cot x_i$	$-\tan x$	$+\cot x$	$-\tan x$	$\cot x$

Geometrisch bedeutet z. B. die Beziehung  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ , daß die Sinuskurve durch Verschiebung um  $-\pi/2$  in die Kosinuskurve übergeht ( $\nearrow$  Abb. 2). Diese Beziehungen gelten auch für Winkelgrößen im Gradmaß. Folgende Beispiele sind einer vierstelligen Tafel entnommen:

$$\begin{aligned} \sin 35^\circ &= 0,5736, \\ \sin 124,5^\circ &= \sin(90^\circ + 34,5^\circ) = \cos 34,5^\circ = 0,8241, \\ \cos 241,9^\circ &= \cos(180^\circ + 61,9^\circ) = -\cos 61,9^\circ \\ &= -0,4710, \\ \tan 301,1^\circ &= \tan(270^\circ + 31,1^\circ) = -\cot 31,1^\circ \\ &= -1,658, \\ \cot(-744^\circ) &= -\cot 744^\circ = -\cot(720^\circ + 24^\circ) \\ &= -\cot 24^\circ = -2,246. \end{aligned}$$

V. Die W.en sind an allen Stellen ihres Definitionsbereichs stetige und differenzierbare Funktionen; ihre *Ableitungen* sind (10a), (10b), (10c), (10d) ( $\nearrow$  Differentiationsregeln III.).

$$(10a) \quad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

$$(10b) \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$(10c) \quad \frac{d \tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(10d) \quad \frac{d \cot x}{dx} = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Ihre wichtigsten Eigenschaften enthält Tabelle (11), in ihr bedeuten: Wb. Wertebereich, N. Nullstellen, P. Polstellen, Ex. Extrema, Wp. Wendepunkte. Ihr größter Definitionsbereich ist stets  $]-\infty, +\infty[$ , wenn die Polstellen von  $\tan x$  und  $\cot x$  ausgenommen werden.

(11)	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
Wb.	$[-1, +1]$	$[-1, +1]$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$
N.	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$
P.	—	—	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$
Ex.	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	—	—
Wp.	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$	$k\pi$	$\pi/2 + k\pi$

VI. Die *Additionstheoreme* (12) für  $\sin x$  und (13) für  $\cos x$  ergeben sich daraus, daß nach Definition

(12)  $\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$

(13)  $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$

in I. die Werte der W. sich vorzeichenrichtig als senkrechte Projektionen des Radiusvektors  $r = \vec{OP}$  auf die  $v$ - bzw.  $u$ -Achse ergeben, wenn  $\sphericalangle(v, r) = x$  die Größe des Arguments im positiven Drehsinn des

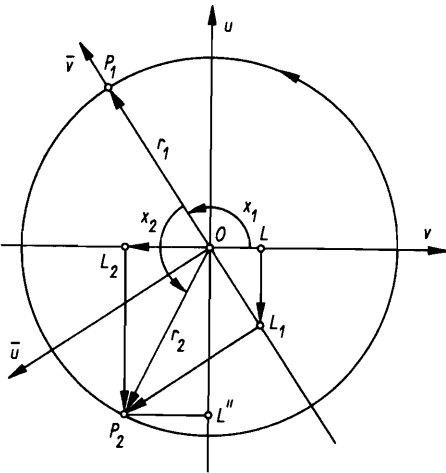


Abb. 5: Zum Additionstheorem der Winkelfunktionen  $\sin x$  und  $\cos x$

kartes.  $v, u$ -Systems angibt. Bezeichnet der Index  $v$  bzw.  $u$  die Achse, auf die projiziert wird, so gilt  $\sin x = m_u(r)$ ,  $\cos x = m_v(r)$ . Sind zwei Winkelgrößen  $x_1$  und  $x_2$  gegeben, so liegt ein zweites  $\bar{v}, \bar{u}$ -System vor, dessen  $\bar{v}$ -Richtung mit der von  $r_1$  zusammenfällt (Abb. 5). Dann bestehen die Winkelbeziehungen (14a) bis (14f).

(14a)  $\sphericalangle(v, r_1) = \sphericalangle(v, \bar{v}) = x_1$

(14b)  $\sphericalangle(\bar{v}, r_2) = x_2$

(14c)  $\sphericalangle(v, r_2) = x_1 + x_2$

(14d)  $\sphericalangle(u, \bar{v}) = -\pi/2 + x_1$

(14e)  $\sphericalangle(u, \bar{u}) = -\pi/2 + x_1 + \pi/2 = x_1$

(14f)  $\sphericalangle(v, \bar{u}) = x_1 + \pi/2$

Bezeichnet man die Fußpunkte der Lote von  $P_2$  auf  $v$  mit  $L_2$ , von  $P_2$  auf  $\bar{v}$  mit  $L_1$  und von  $L_1$  auf  $v$  mit  $L$ , so gelten die Vektorgleichungen (15) und (16), die für die Projektionen in der gleichen Rich-

(15)  $\vec{OL}_2 + \vec{L_2P_2} = \vec{OP_2} = \vec{OL_1} + \vec{L_1P_2}$

(16)  $\vec{OL} + \vec{LL_1} = \vec{OL_1}$

tung ebenfalls gelten. Aus den Berechnungen (17a) bis (17e) der Projektionen ergibt sich (13) sowie aus den Berechnungen (18a) bis (18c) die Beziehung (12).

(17a)  $m_v(\vec{OP_2}) = \vec{OL_2} = \cos(x_1 + x_2)$

(17b)  $m_v(\vec{OP_2}) = \vec{OL_1} = \cos x_2$

(17c)  $m_u(\vec{OP_2}) = \vec{L_1P_2} = \sin x_2$

(17d)  $m_u(\vec{OL_1}) = \cos x_1 \cdot \cos x_2$

(17e)  $m_u(\vec{L_1P_2}) = \cos(x_1 + \pi/2) \cdot \sin x_2 = -\sin x_1 \sin x_2$

(18a)  $m_u(\vec{OP_2}) = \vec{L_2P_2} = \sin(x_1 + x_2)$

(18b)  $m_u(\vec{OL_1}) = \cos(-\pi/2 + x_1) \cos x_2 = \sin x_1 \cos x_2$

(18c)  $m_u(\vec{L_1P_2}) = \cos x_1 \cdot \sin x_2$

Eine Beschränkung auf positive Werte von  $x_2$  ist in der Ableitung nicht enthalten. Man pflegt diese Tatsache in den Gleichungen (19) und (20) auszudrücken.

(19)  $\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2$

(20)  $\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$

Nach ihrer Definition in III. ergeben sich danach für die W.en  $\tan x$  und  $\cot x$  die Additionstheoreme (21) und (22).

(21)  $\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2}$

(22)  $\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$

Für  $\tan(x_1 + x_2) = \sin(x_1 + x_2)/\cos(x_1 + x_2)$  z. B. erhält man (23), indem man im ersten Bruch Zähler und Nenner durch  $\cos x_1 \cos x_2$  dividiert.

(23)  $\tan(x_1 + x_2) = \frac{\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2}{\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2} = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \cdot \tan x_2}$

VII. Zwischen den W.en bestehen eine Fülle *goniometr. Beziehungen*, die sich unmittelbar aus ihrer Definition etwa am Einheitskreis (↗ Abb. 1) ergeben, aus den Additionstheoremen oder mittels zusätzl. Beziehungen gewonnen werden.

VII.1. Aus den Definitionen und einfachen Umformungen gewinnt man die Formeln (24), (25), (26), (27) und (28).

- (24)  $\tan x \cot x = 1$
- (25)  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- (26)  $\sin^2 x = \tan^2 x / (1 + \tan^2 x)$
- (27)  $\cos^2 x = 1 / (1 + \tan^2 x)$
- (28)  $\tan^2 x = \sin^2 x / (1 - \sin^2 x) = (1 - \cos^2 x) / \cos^2 x$

VII.2. Setzt man in den Additionstheoremen  $x_1 = x_2 = x$  und nimmt die Formeln von VII.1. zu Hilfe, ergeben sich die Formeln (29), (30), (31) und (32) für die *W.en der doppelten Argumente*.

- (29)  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$
- (30)  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- (31)  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$
- (32)  $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x} = \frac{\cot x - \tan x}{2}$

VII.3. Nach den Moivreschen Formeln erhält man für  $n \in \mathbf{N}$  (33) und daraus (34) und (35) durch Vergleich der Real- und der Imaginärteile.

- (33)  $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{\lambda=0}^n i^\lambda \binom{n}{\lambda} \cos^{n-\lambda} x \sin^\lambda x$
- (34)  $\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \binom{n}{6} \cos^{n-6} x \sin^6 x + \dots$
- (35)  $\sin nx = n \cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$

VII.4. Aus (30) und (25) erhält man (36) und (37) sowie daraus und aus  $(1 - \cos 2x) = 2 \sin^2 x$  (38) bzw. mit Hilfe von (29) die Beziehung (39).

- (36)  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$
- (37)  $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- (38)  $\tan^2 x = (1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x)$
- (39)  $\tan x = (1 - \cos 2x) / \sin 2x$

Aus Beziehungen zwischen W.en der doppelten Argumente lassen sich solche für die *halben Argumente* gewinnen, indem man  $2x = \xi$  setzt, für  $\xi$  aber wieder  $x$  schreibt. Um auf diese Herleitung hinzuweisen, werden ihre Nummern mit h gekennzeichnet.

- (36h)  $\sin(x/2) = \pm \sqrt{1/2 (1 - \cos x)}$
- (37h)  $\cos(x/2) = \pm \sqrt{1/2 (1 + \cos x)}$
- (38h)  $\tan(x/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos x) / (1 + \cos x)} = \sin x / (1 + \cos x) = (1 - \cos x) / \sin x$
- (39h)  $\cot(x/2) = \pm \sqrt{(1 + \cos x) / (1 - \cos x)} = \sin x / (1 - \cos x) = (1 + \cos x) / \sin x$

Dabei bestimmt die Größe von  $x/2$  das Vorzeichen der Wurzel entweder geometrisch am Einheitskreis (↗ Abb. 1) oder nach dem Funktionsverlauf (↗ Abb. 2, Abb. 3).

VII.5. Häufig werden Beziehungen zwischen *Summen, Differenzen, Produkten und Potenzen* von W.en verwendet. Man erhält sie, indem man die halbe Summe  $(x + y)/2 = \varphi$  und die halbe Differenz  $(x - y)/2 = \psi$  einführt und die Additionstheoreme auf die Argumente  $x = \varphi + \psi$  und  $y = \varphi - \psi$  anwendet;  $\sin x + \sin y = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi = 2 \sin \varphi \cos \psi$  z. B. ergibt (40).

- (40)  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
- (41)  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

Auch die folgenden Beziehungen ergeben sich unmittelbar aus den Additionstheoremen.

- (42)  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
- (43)  $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
- (44)  $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \sin(45^\circ \pm x) = \sqrt{2} \cos(45^\circ \mp x)$
- (45)  $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$
- (46)  $\cot x \pm \cot y = \frac{\pm \sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$
- (47)  $\tan x + \cot y = \frac{\cos(x - y)}{\cos x \sin y}$
- (48)  $\cot x - \tan y = \frac{\cos(x + y)}{\sin x \cos y}$
- (49)  $\sin(x + y) \sin(x - y) = \cos^2 y - \cos^2 x$
- (50)  $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$
- (51)  $\sin x \sin y = 1/2 [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

(52)  $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

(53)  $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$

(54)  $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$

(55) 
$$\begin{aligned} \tan x \tan y &= \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} \\ &= -\frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y} \end{aligned}$$

(56) 
$$\begin{aligned} \cot x \cot y &= \frac{\cot x + \cot y}{\tan x + \tan y} \\ &= -\frac{\cot x - \cot y}{\tan x - \tan y} \end{aligned}$$

(57) 
$$\begin{aligned} \tan x \cot y &= \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y} \\ &= -\frac{\tan x - \cot y}{\cot x - \tan y} \end{aligned}$$

(58)  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

(59)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

(60)  $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$

(61)  $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x)$

**VIII.** Viele Vorgänge in Natur und Technik sind Schwingungen und werden mathematisch mit einem analyt. Ausdruck  $f(x) = a \sin(bx + c)$  beschrieben, in dem die Konstanten  $a, c$  und  $b \neq 0$  reelle Zahlen sind. Verglichen mit der Sinuskurve von  $y = \sin x$  bewirkt der Faktor  $a$  eine Stauchung in Richtung der Ordinatenachse, falls  $|a| < 1$ , bzw. eine Streckung, falls  $|a| > 1$ . Ist  $a < 0$ , so wird die Kurve von  $y = |a| \sin x$  zusätzlich an der Abszissenachse gespiegelt. Der Faktor  $b$  in  $y = a \sin bx$  erzeugt eine Veränderung der primitiven Periode von  $2\pi$  auf  $2\pi/|b|$ . Der Summand  $c$  in  $y = a \sin[b(x + c/b)]$  ruft eine Verschiebung des Bildes in Richtung der  $x$ -Achse um  $-c/b$  Einheiten hervor.

*Beispiel:* Das Bild der Funktion  $f(x) = -2 \sin(2x + \pi/4)$  ist gegenüber dem der Funktion  $g(x) = \sin x$  an der Abszissenachse gespiegelt, in Richtung der Ordinatenachse gestreckt, und die Nullstelle  $x_0$  der Funktion liegt bei  $x_0 = -\pi/8$  (Abb. 6).

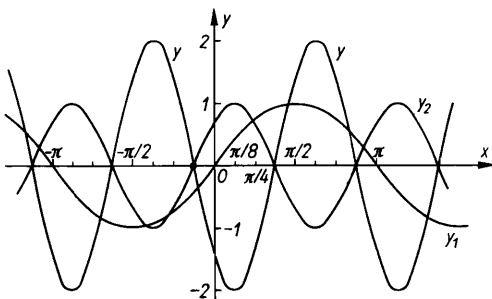


Abb. 6: Kurve der Winkelfunktion  $y = -2 \sin(2x + \pi/4)$  im Vergleich zu den Kurven von  $y_1 = \sin x$  und  $y_2 = \sin(2x + \pi/4)$

Die primitive Periode der Funktion  $f$  beträgt  $\pi$ . Bei Schwingungsvorgängen deutet man meist die unabhängige Variable als Zeit  $t$  und ersetzt  $a$  durch  $A, b$  durch  $\omega$  und  $c$  durch die *Phasenverschiebung*  $\varphi$ , auch *Anfangsphase* gen., so erhält man (62). Die

(62)  $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Periode  $T = 2\pi/\omega$  ist die *Schwingungsdauer*,  $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$  die *Frequenz*,  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$  gibt die Kreisfrequenz an, d. h. die Anzahl der Schwingungen in  $2\pi$  Sekunden, und  $A$  die Amplitude der Schwingung.  $A$  kann eine Funktion  $h$  der Zeit  $t$  sein, ist z. B.  $A = h(t) = e^{-Rt}$  mit  $R > 0$ , so nimmt die Amplitude ständig ab, die dargestellte Schwingung ist gedämpft. Überlagern sich Schwingungen, so addieren sich ihre Wirkungen; haben die einzelnen Schwingungen gleiche Frequenz, so hat dies wegen  $A \sin(\omega t + \varphi) = \sum A_i \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$  auch ihre Summe. Für  $n = 2$  gelten die Beziehungen (63).

(63) 
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  mit  $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  läßt sich auch in der Form  $f(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$  mit  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  und  $\tan \varphi = b/a$  darstellen.

**IX.** Trigonometr. Funktionen lassen sich in *Potenzreihen* entwickeln ( $\nearrow$  Entwicklung von Funktionen II.). Nach Taylor erhält man die Reihen (64) für  $\sin x$  und (65) für  $\cos x$ , die beständig, d. h. für alle  $x \in \mathbf{R}$  konvergieren, ihr Konvergenzradius ist

(64) 
$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + - \dots \end{aligned}$$

(65) 
$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + - \dots \end{aligned}$$

$r = \infty$ . Durch Division dieser Reihen lassen sich die folgenden Reihen für andere W. en gewinnen ( $\nearrow$  Funktionenreihen).

(66) 
$$\begin{aligned} \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ &+ \frac{17x^7}{315} + \dots, \quad r = \pi/2 \end{aligned}$$

(67) 
$$\begin{aligned} x \cot x &= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} \\ &- \frac{x^8}{4725} - \dots, \quad r = \pi \end{aligned}$$

(68) 
$$\begin{aligned} \sec x = 1/\cos x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} \\ &+ \frac{61x^6}{720} + \dots, \quad r = \pi/2 \end{aligned}$$

(69) 
$$\begin{aligned} x \operatorname{cosec} x = x/\sin x &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} \\ &+ \frac{31x^6}{15120} + \dots, \quad r = \pi \end{aligned}$$

Setzt man die Exponentialfunktion  $y = e^z$  in der Gaußschen Zahlenebene für komplexe Argumente  $z$  fort und entwickelt die komplexwertige Funktion

$w = e^z$  für Argumente  $iz$  in eine Potenzreihe, so erhält man die *Eulersche Formel* (70), die nach ihrer

$$(70) \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Herleitung auch für Werte auf der  $x$ -Achse, d. h. für  $x \in \mathbf{R}$ , gilt. Zugleich zeigt sich, daß  $\sin z$  bzw.  $\cos z$  auch für  $z \in \mathbf{C}$  definiert sind und in diesem Zahlenbereich ebenfalls eine ungerade bzw. gerade Funktion darstellen. Die Gleichungen (71), (72) zeigen, daß die W.en im Komplexen mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert werden können ähnlich wie die hyperbol. Funktionen im Reellen.

$$(71) \quad \cos z = (1/2) (e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$(72) \quad \sin z = 1/(2i) (e^{iz} - e^{-iz})$$

Zu den Ableitungen der W., vgl. Differentiationsregeln III.; zu den trigonometrischen Funktionen komplexer Argumente vgl. komplexwertige Funktion, elementare, II.

**Winkelhaken:** zur Ausführung geometr. Konstruktionen verwendetes Hilfsmittel aus zwei Linealen, die einen festen Winkel der Größe  $\alpha$  einschließen. Ist  $\alpha = 90^\circ$ , so spricht man von einem *Recht-W.* In einem *normierten* Recht-W. mit dem Scheitel  $S$  sind auf einem Schenkel des rechten Winkels noch ein Punkt  $P$  und der Mittelpunkt der Strecke  $PS$  markiert. Die Linealkanten werden zum Zeichnen von Geraden benutzt, dabei kann eine Kante durch zwei gegebene Punkte und die andere Kante durch einen dritten gegebenen Punkt gelegt werden. Es ist aber auch zulässig, die Kanten durch je einen gegebenen Punkt so zu legen, daß  $S$  auf einer gegebenen Geraden liegt. — Es gibt Konstruktionsaufgaben, deren Lösung bei Zulassung des W.s bequemer ist als bei der alleinigen Verwendung von Zirkel und Lineal. Die Tragweite solcher Konstruktionshilfsmittel wird in der Theorie der geometr. Konstruktionen untersucht.

**Winkelhalbierende:** I. die Halbgerade  $l$ , die den Scheitel eines Winkels  $\sphericalangle(p, q)$  zum Anfangspunkt hat und im Innern dieses Winkels so liegt, daß die Winkel  $\sphericalangle(p, l)$  und  $\sphericalangle(l, q)$  kongruent sind (s. a. Dreieckstransversale). Die W. eines Winkels kann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden ( $\nearrow$  Winkelkonstruktion). Zwei sich schneidende Geraden  $g$  und  $h$  bilden vier Winkel, deren Inneres die Gebiete  $G_1, G_2, G_3$  und  $G_4$  sind (Abb. 1). Da je zwei benachbarte Winkel Supplementwinkel sind, bilden die vier W.n senkrecht aufeinander stehende Geraden, die *winkelhalbierende Geraden* gen. werden. Sie sind der geometr. Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstand von den Geraden  $g$  und  $h$  dieser Ebene gleich ist.

II. Als W. eines Dreieckswinkels wird oft diejenige Strecke auf der winkelhalbierenden Geraden bezeichnet, deren Endpunkte der Scheitel des halbierten Winkels und der Schnittpunkt mit der diesem Scheitel gegenüberliegenden Dreiecksseite sind, manchmal auch die Länge dieser Strecke ( $\nearrow$  Dreieckstransversalen).

Bezeichnet man die Längen der Winkelhalbierenden mit  $w_a = |AW_a|$ ,  $w_b = |BW_b|$  und  $w_c = |CW_c|$ ,

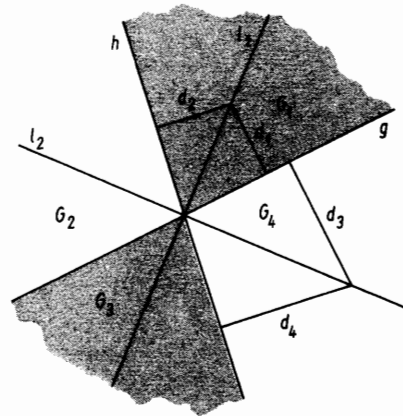


Abb. 1: Winkelhalbierende als geometr. Ort aller Punkte der Ebene, deren Abstand von den Geraden  $g$  und  $h$  dieser Ebene gleich ist, z. B.  $d_1 = d_2, d_3 = d_4$

so gelten die trigonometr. Beziehungen (1). Die Richtung der Winkelhalbierenden  $w_a = \overline{AW_a}$  erhält

$$(1) \quad \begin{aligned} w_a(b + c) &= 2bc \cos(\alpha/2), \\ w_b(c + a) &= 2ca \cos(\beta/2), \\ w_c(a + b) &= 2ab \cos(\gamma/2) \end{aligned}$$

man aus der Summe der Einheitsvektoren  $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$  und  $\mathbf{c}/|\mathbf{c}|$ , die die Richtungen von  $\mathbf{b} = \overline{AC}$  bzw.  $\mathbf{c} = \overline{AB}$

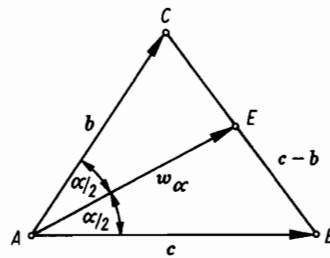


Abb. 2: Zur Berechnung der Länge der Winkelhalbierenden  $w_a$

anzeigen (Abb. 2). Die W.  $w_a$  ist ein Vielfaches dieser Summe;  $w_a = \lambda(\mathbf{b}/|\mathbf{b}| + \mathbf{c}/|\mathbf{c}|)$ . Andererseits ist  $\overline{EB}$  ein Vielfaches von  $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ , d. h.,  $\overline{EB} = \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b})$ . Aus  $\lambda(\mathbf{b}/|\mathbf{b}| + \mathbf{c}/|\mathbf{c}|) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}$  ergibt sich durch Koeffizientenvergleich  $\lambda = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| / (|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|)$  und  $\mu = \lambda/|\mathbf{b}|$  und damit (1a).

$$(1a) \quad w_a = \frac{|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}|}{|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|} \left( \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} + \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} \right) = \frac{|\mathbf{c}| \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|}$$

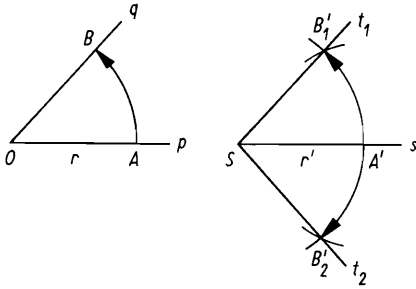
Nach (1a) ist  $w_a(b + c)$  die Länge von  $|\mathbf{c}| \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}| \cdot \mathbf{c}$ ; diese ergibt sich als Summe der Längen der Projektionen von  $|\mathbf{c}| \cdot \mathbf{b}$  bzw.  $|\mathbf{b}| \cdot \mathbf{c}$  auf  $w_a$ . Beide Projektionen haben die Länge  $|\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cos(\alpha/2) = bc \cos(\alpha/2)$

**Winkelhalbierer**  $\nearrow$  Winkelteiler.



**Winkelkonstruktion:** Konstruktion eines Winkels vorgegebener Größe.

**I.1.** Im Punkte  $S$  an eine Halbgerade  $s$  den Winkel der Größe  $|\sphericalangle(p, q)| = \alpha$  antragen. Diese Aufgabe ist für jeden Winkel allein mit Zirkel und Lineal lösbar. Ist  $O$  der Scheitel des gegebenen Winkels (Abb. 1), so ergeben zwei Kreise um  $O$  und  $S$  mit den Radien  $r = r'$  die Schnittpunkte  $A$  auf  $p$ ,  $B$  auf  $q$  und  $A'$  auf  $s$ . Der Kreis um  $A'$  mit dem Radius



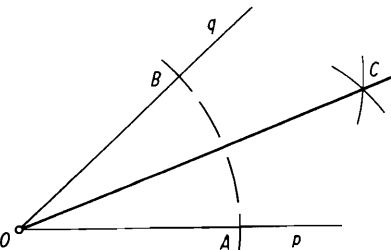
Winkelkonstruktion. Abb. 1: Antragen eines Winkels

$|AB|$  schneidet den Kreis um  $S$  in  $B_1'$  und  $B_2'$ . Da die Dreiecke  $SA'B_1'$  und  $OAB$  kongruent sind, gilt  $|\sphericalangle(p, q)| = |\sphericalangle(s, t_1)|$ . Aus demselben Grunde ist auch  $|\sphericalangle(s, t_2)| = |\sphericalangle(p, q)|$ . Die gestellte Aufgabe hat zwei Lösungen.

**I.2.** Nach dem gleichen Verfahren lassen sich aus zwei Winkeln der Größen  $\alpha$  und  $\beta$  Winkel mit den Größen  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  und  $k\alpha + l\beta$  ( $k, l = 0, 1, 2, \dots$ ) konstruieren, falls Winkel dieser Größe existieren.

**II.** Einen gegebenen Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  halbieren. Auch diese Aufgabe ist für jeden Winkel allein mit Zirkel und Lineal lösbar. Ist  $O$  der Scheitel des gegebenen Winkels (Abb. 2), so ergibt ein Kreis um  $O$  mit beliebigem Radius wieder die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  mit den Schenkeln  $p$  und  $q$ . Ist  $C$  ein Schnittpunkt zweier Kreise um  $A$  und  $B$  mit einem Radius  $r > |AB|/2$ , so sind die Dreiecke  $OCA$  und  $OCB$  kongruent. Die Gerade  $OC$  ist deshalb die winkelhalbierende Gerade des Winkels  $\sphericalangle(p, q)$ .

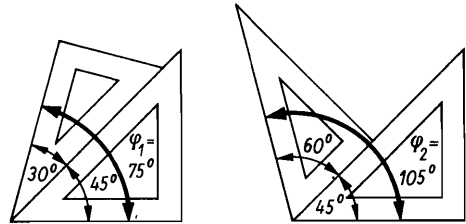
**III.** Nicht jeder Winkel vorgegebener Größe ist allein mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Es lassen sich aber z. B. Winkel folgender Größe konstruieren.



Winkelkonstruktion. Abb. 2: Einen gegebenen Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  halbieren

**III.1.** Ein Winkel der Größe  $60^\circ$  als Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks. Durch fortgesetztes Halbieren gewinnt man damit nach II. Winkel der Größen  $30^\circ, 15^\circ, 7,5^\circ, \dots$  sowie nach I.2. ihre Vielfachen und Summen der Form  $k\alpha + l\beta$ .

**III.2.** Ein Winkel der Größe  $90^\circ$  als Winkel zwischen einer Geraden und einer Senkrechten zu ihr. Durch Halbieren erhält man Winkel der Größen  $45^\circ, 22,5^\circ, \dots$  sowie ihre Vielfachen und Summen der Form  $k\alpha + l\beta$ .



Winkelkonstruktion. Abb. 3: Mit Hilfe von Zeichendreiecken konstruierte Winkel a) von  $75^\circ$  und b) von  $105^\circ$

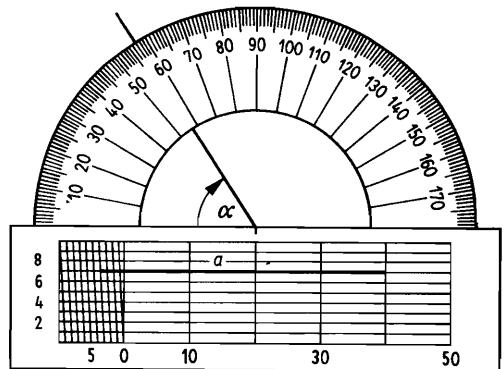
**III.3.** Ein Winkel der Größe  $36^\circ$  bei der Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks.

**IV.** Da die gebräuchl. Zeichendreiecke Winkel der Größe  $90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  und  $30^\circ$  enthalten, lassen sich mit einer durch ihre Herstellung bedingten Genauigkeit durch Aneinanderlegen dieser Dreiecke Winkel bestimmter Größen leicht zeichnen, z. B. der Größen  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$  oder  $105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$  (Abb. 3).

**Winkelsinussatz**  $\nearrow$  Kosinussatz III.

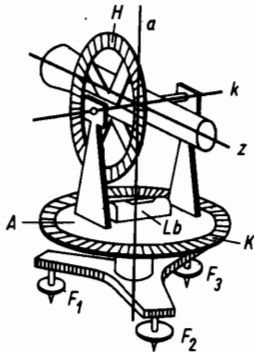
**Winkelmaß**  $\nearrow$  Koordinatensystem III.,  $\nearrow$  Winkel VII.

**Winkelmeßinstrumente:** I. Geräte unterschiedl. Genauigkeit zur Messung gegebener Winkel oder zur Konstruktion von Geraden, die mit einer gegebenen Geraden einen Winkel vorgeschriebener Größe einschließen. Der einfache *Winkelmesser*, für den manchmal noch die veraltete Bezeichnung *Transporteur* verwendet wird, ist ein zweckmäßigerweise aus durchsichtigem Material angefertigter Voll- oder Halbkreis (Abb. 1), auf dem der Mittelpunkt und



Winkelmeßinstrument. Abb. 1: Winkelmesser

ein Durchmesser markiert sind und der auf dem Rand eine Gradeinteilung trägt. Der Mittelpunkt wird so auf den Scheitel des Winkels gelegt, daß der markierte Durchmesser mit einem Schenkel des Winkels zur Deckung kommt. An der Gradteilung kann dann die Winkelgröße abgelesen werden bzw. ein Punkt des zu konstruierenden Schenkels markiert werden. Bei höheren Genauigkeitsansprüchen kann ein Polarkoordinator (↗ Koordinatograph II.) verwendet werden.



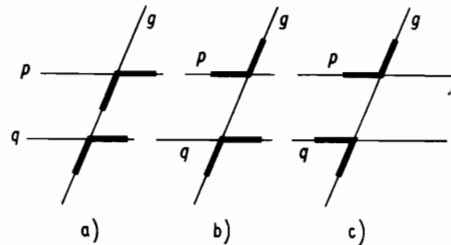
Winkelmeßinstrument. Abb. 2: Schema eines Theodoliten

II. Bei Vermessungsarbeiten dient der *Theodolit* als W. für Horizontal- und Vertikalwinkel. Bei diesem Instrument (Abb. 2) ist für die Ablesung ein Nonius auf einer Scheibe, der *Alhidade A*, angebracht, die sich konzentrisch zu dem Kreis *K* bewegt, der die Gradteilung trägt. Die Ebene der Alhidade wird, etwa durch drei Fußschrauben  $F_1, F_2, F_3$  mittels einer Libelle *Lb*, horizontal gerichtet. Dann steht die Achse *a*, um die der Theodolit gedreht wird, vertikal. Als Zielvorrichtung dient ein Fernrohr, das um die zur Drehachse *a* senkrechte Kippachse *k* gekippt wird und dessen Zielrichtung stets senkrecht zur Kippachse *k* zeigt.

Alle Punkte, die bei einer bestimmten Stellung der Alhidade anvisiert werden können, liegen deshalb in einer vertikalen Ebene durch *a*, d. h., die Differenz zweier Alhidadenablesungen gibt die Größe eines *Horizontalwinkels* an, der in der Ebene der Alhidade von zwei vertikalen Ebenen durch *a* ausgeschnitten wird. Um in einer dieser Vertikalebene *Höhenwinkel* bestimmen zu können, ist senkrecht zur Kippachse *k* ein *Höhenkreis H* angebracht. Die Winkelgröße ergibt sich wieder aus den Ablesungen für zwei Zielrichtungen des Fernrohrs durch Differenzbildung.

**Winkelpaare:** Paare von Winkeln, die entstehen, wenn zwei nicht notwendig parallele Geraden *p* und *q* einer Ebene von einer dritten Geraden *g* geschnitten werden, von der vorausgesetzt wird, daß sie weder parallel zu *p* noch zu *q* ist und nicht durch den möglicherweise vorhandenen Schnittpunkt von *p* und *q* geht. Man unterscheidet *Stufen-*, *Wechsel-* und *entgegengesetzt liegende Winkel*. Die Scheitel des *W.s* sind die Schnittpunkte von *g* mit *p* und *q*. Ihre Schenkel sind von diesen Punkten ausgehende Strahlen auf *g* und *p* bzw. auf *g* und *q*. Nach der Geraden, auf der die Strahlen liegen, werden sie kurz als

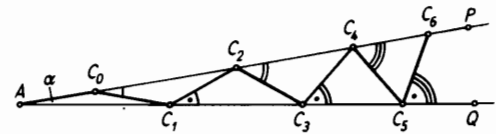
*g*-, *p*- oder *q*-Schenkel bezeichnet. Zwei solche Winkel heißen 1. *Stufenwinkelpaar*, wenn ihre *p*- und *q*-Schenkel auf derselben Seite von *g* liegen und ihre *g*-Schenkel gleichgerichtet sind; 2. sie heißen *Wechselwinkelpaar*, wenn ihre *p*- und *q*-Schenkel auf verschiedenen Seiten von *g* liegen und ihre *g*-Schenkel entgegengesetzt gerichtet sind; 3. sie heißen *ein Paar entgegengesetzt liegender Winkel*, wenn ihre *p*- und *q*-Schenkel auf derselben Seite von *g* liegen und wenn ihre *g*-Schenkel entgegengesetzt gerichtet sind (Abb.). Sind die geschnittenen Geraden *p* und *q* parallel, so gelten die Sätze: An geschnittenen Parallelen



Winkelpaare an geschnittenen Parallelen: a) Stufenwinkel, b) Wechselwinkel und c) entgegengesetzt liegende Winkel

sind zwei *Stufenwinkel eines Paares kongruent*, zwei *Wechselwinkel eines Paares kongruent* und zwei *entgegengesetzt liegende Winkel eines Paares ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel*. — Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, und gilt einer dieser drei Sätze, so folgt daraus, daß die geschnittenen Geraden parallel sind.

**Winkelteiler:** Gerät zur Teilung eines gegebenen Winkels in *n* gleiche Teile. Eine solche Vorrichtung kann etwa aus *m* Stäben  $C_{i-1}C_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, m$  gleicher Länge *l* bestehen, die sich gelenkig zu gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzen



Winkelteiler

(Abb.). Die Punkte  $C_1, C_2, \dots, C_m$  gleiten auf den Strecken *AP* bzw. *AQ*, die als Schienen ausgeführt sind, die Punkte *A* und  $C_0$  sind dagegen auf diesen Schienen nicht verschiebbar. Bringt man  $\beta = \sphericalangle C_{m-2}C_mC_{m-1}$ , für  $m = 6$  z. B.  $\beta = \sphericalangle C_4C_6C_5$ , mit dem gegebenen Winkel zur Deckung, dann ist  $\alpha = \beta/m$ , z. B.  $\alpha = \beta/6$ . Die Beziehung  $\beta_i = i \cdot \alpha$  ergibt sich für  $i = 1, 2, \dots$  dabei daraus, daß in den Dreiecken  $AC_0C_1, AC_1C_2, AC_2C_3, \dots$  diese Größen als die eines Außenwinkels gleich der Summe der Größen der nichtbenachbarten Innenwinkel sind. Sollen gegebene Winkel nur halbiert werden, kann das Gerät, das dann auch *Winkelhalbierer* gen. wird, als Gelenkrhombus *ABCD* ausgeführt werden, dessen Diagonale *AC* verlängert und als Schiene aus-

gebildet ist. Der Winkel  $BAC$  ist halb so groß wie der Winkel  $BAD$ .

Die beschriebenen Mechanismen können sinngemäß auch für die Vervielfachung bzw. Verdopplung von Winkeln verwendet werden.

Für  $m = 3$  liefert der W. keine Lösung der klass. Aufgabe, einen beliebigen Winkel bei alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen.

**winkeltreu** ↗ Gauß-Krüger-Projektion I., ↗ Inversion I.; s. a. konforme Abbildung; stereographische Projektion II.

**Winkel zwischen zwei Vektoren** ↗ Hilbertraum I., ↗ Vektorraum VII.

**Winogradov**, Iwan Matwejewitsch, geb. 14. 9. 1891 Miroljub. — W. stammt aus der Familie eines Priesters. Er beendete 1914 die Universität in Petersburg (Leningrad), lehrte zwei Jahre in Perm und kehrte 1920 als Professor nach Leningrad zurück. W. leistete einen wesentl. Beitrag zur Entwicklung der *analyt. Zahlentheorie*. Mit seiner Methode der *trigonometr. Summen* löste er viele klass. Probleme, z. B. das Goldbachsche Problem (↗ Zahlentheorie III.3.).

**wirbelfrei** ↗ Gradient III., ↗ Rotation I.

**Wohlordnung** ↗ Anordnungsrelationen IV.

**Wohlordnungssatz** ↗ Mengenlehre II.

**Wolfe**, Verfahren von: eine Methode zur quadratischen Optimierung, die von der Aufgabe  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ ,  $p^T x + x^T Cx = \text{Min!}$  ausgeht, in der  $C$  eine streng positiv definite  $(n,n)$ -Matrix und  $A$  eine  $(m,n)$ -Matrix vom Rang  $m$  darstellen und die Vektoren eine passende Dimension haben. Ist eine Ecke  $\bar{x}$  des zulässigen Bereichs bekannt, so berechnet man daraus  $\bar{q} = 2C\bar{x} + p$ . Die optimale Lösung  $x^{(0)}$  wird dann als Bestandteil der Optimallösung  $(x^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}, t^{(0)})$  der Aufgabe (1) erhalten.

$$(1) \quad \begin{aligned} Ax &= b, \\ -2Cx + v - A^T u + A^T w + \bar{q}t &= p \\ \text{mit } x \geq 0, v \geq 0, u \geq 0, w \geq 0, t \geq 0 \\ \text{und } x^T v = 0 \text{ für } t = \text{Min!} \end{aligned}$$

Diese Aufgabe mit der nichtlinearen Nebenbedingung  $x^T v = 0$  und ansonsten linearer Struktur wird mit einem abgewandelten Simplexalgorithmus gelöst: Es wird für den linearen Anteil das Simplexverfahren durchgeführt mit der Zusatzvorschrift, daß an der Anfangsecke und jeder weiteren Ecke  $x^T v = 0$  gelten muß, also  $x_i$  und  $v_i$  nicht gleichzeitig Basisvariable sein dürfen für  $i = 1, \dots, n$ . Das Verfahren läßt sich auf positiv semidefinite  $C$  erweitern. **Wort:** I. Folge von Zeichen, die als Einheit betrachtet wird. In digitalen Rechenanlagen werden *Maschinenwörter*, d. h. Folgen von Binärzeichen, verarbeitet. Durch ein Maschinenwort können z. B. ein Befehl oder eine Zahl dargestellt werden. Die *W.länge* (↗ Zeichen) ist sehr unterschiedlich. Sie schwankt zwischen 12 und 60 Bit. Die meisten Anlagen arbeiten mit variabler, vom Programmierer wählbarer W.länge. Im Falle fester W.länge entspricht einem Maschinenwort der Inhalt eines Speicherplatzes. S. a. Zeichen.

**II. mathematische Logik** jede endl. Zeichenreihe aus Buchstaben eines Alphabets  $A$ ; genauer sagt man W. über  $A$ ; z. B. ist  $\ast||| \ast$  ein W. über dem Alphabet  $\{\ast, |, \ast\}$  und  $\ast(x < y : z) \ast$  ein W. über dem Alphabet  $\{x, y, z, a, b, <, :, (, )\}$ .

**Wortlänge** ↗ Zeichen.

**Wortproblem:** *mathematische Logik* das Problem, zu einem Alphabet  $A$  und einem System von Umformungsregeln für Zeichenreihen über  $A$  einen Algorithmus anzugeben, der für je zwei Wörter über  $A$  feststellt, ob das eine in das andere Wort mit Hilfe der Umformungsregeln umgeformt werden kann oder nicht. Dieses Problem ist schon in einfachen Fällen nicht lösbar, z. B. für Regelsysteme, die das Rechnen in Gruppen beschreiben (Nowikow 1955).

**Wronski** ↗ Hoene-Wronski.

**Wronski-Determinante** ↗ lineare gewöhnliche Differentialgleichung I.2.

**Wronskische Funktionen:** symmetr. Polynome in den Unbestimmten  $x_1, x_2, \dots, x_k$  von der Form (1)

$$(1) \quad P_n = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Die Summation erstreckt sich über alle Systeme nichtnegativer ganzzahliger Exponenten  $i_1, \dots, i_k$ , deren Summe  $n$  ist.

**Wulst** svw. Torus.

**Würfel** ↗ regelmäßiges Polyeder II.2.

**Würfelverdopplung** ↗ Galoissche Theorie, ↗ geometrische Figur, ↗ Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal.

**Wurzel:** Zahl, die mit einem gegebenen Exponenten potenziert einen gegebenen Potenzwert ergibt. I. Damit diese Umkehrung des Potenzierens (↗ Potenz III.) im Bereich  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen stets ausführbar und eindeutig ist, beschränkt man sich auf nichtnegative Potenzwerte  $p$ , natürl. Exponenten  $n > 1$  und definiert als die  $n$ -te  $W.$  aus  $p \geq 0$  die nichtnegative reelle Zahl  $a$ , für die gilt  $a^n = p$ . Diese Gleichung ist dann gleichbedeutend mit der Schreibweise  $a = \sqrt[n]{p}$ , in der  $n$  als *W.exponent* und  $p$  als *Radikand* bezeichnet werden. Die Operation, zu gegebenen  $p$  und  $n$  den Wert  $a$  zu bestimmen, heißt *Radizieren*. W.n mit dem W.exponenten  $n = 2$  schreibt man kurz  $\sqrt{p}$  und nennt sie *Quadrat-W.n*; für  $n = 3$  ergeben sich die *Kubik-W.n*  $\sqrt[3]{p}$ . Es ist z. B.  $\sqrt{16} = 4$ , da  $4^2 = 16$ , und  $\sqrt[3]{8} = 2$  wegen  $2^3 = 8$ . Des weiteren ist  $\sqrt[n]{0} = 0$  und  $\sqrt[n]{1} = 1$  für  $n > 1$ . Hingegen ist  $\sqrt[n]{16} \neq -4$ , obwohl  $(-4)^2 = 16$ , da die  $W.$  als nichtnegative Zahl definiert ist, und  $\sqrt[n]{-8}$  ist nicht definiert, obwohl  $(-2)^3 = -8$ , da das Symbol  $\sqrt[n]{p}$  nur für  $p \geq 0$  erklärt wurde.

**II.** Nur unter diesen Beschränkungen gelten die folgenden *W.gesetze*.

**II.1.**  $W.n$  mit gleichem *W.exponenten* werden multipliziert, indem man das *Produkt der Radikanden* mit diesem *Exponenten* radiziert, z. B. gilt (1).

$$(1) \quad \sqrt[n]{p} \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{pq}$$

Umgekehrt kann danach die W. aus einem Produkt faktorenweise gezogen werden, man spricht von *teilweisem oder partiellem Radizieren*, z. B. (2) oder (3).

$$(2) \quad \sqrt[n]{p^{m+n}} = \sqrt[n]{p^m} \cdot \sqrt[n]{p^n} = p \cdot \sqrt[n]{p^m}$$

$$(3) \quad \sqrt[3]{16a^3b^4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{b} = 2ab \sqrt[3]{2b}$$

**II.2. W.n mit gleichem W.exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Radikanden mit diesem Exponenten radiziert**; es gelten (4) und (5).

$$(4) \quad \sqrt[n]{p} / \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{(p/q)}$$

$$(5) \quad 1 / \sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{(1/p)}$$

Auch die Beziehungen (4) und (5) kann man wie die unter II.1. angeführten umgekehrt »von rechts nach links« lesen.

**II.3. Eine W. wird potenziert, indem man ihren Radikanden potenziert**; es gilt (6).

$$(6) \quad (\sqrt[n]{p})^r = \sqrt[n]{p^r}$$

**II.4. Eine W. wird radiziert, indem man den Radikanden mit dem Produkt der Exponenten radiziert**, z. B. in (7).

$$(7) \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[m \cdot n]{p}$$

**III. Die formale Analogie der W.gesetze mit den Potenzgesetzen** ( $\nearrow$  Potenz) legt es nahe, W.n nach der Definition  $\sqrt[n]{p} = p^{1/n}$  als Potenzen aufzufassen. Dann ordnen sich die W.gesetze völlig den entsprechenden Potenzgesetzen unter, deren Gültigkeit für rationale Exponenten sich aus dieser Definition und den W.gesetzen ergibt; z. B. gelten (8) und (9).

$$(8) \quad \sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[n]{q} = p^{1/n} \cdot q^{1/n} = (p \cdot q)^{1/n} = \sqrt[n]{p \cdot q}$$

$$(9) \quad \sqrt[n]{p} \cdot \sqrt[m]{p} = p^{1/n} \cdot p^{1/m} = p^{1/n+1/m} = p^{(m+n)/(mn)} = \sqrt[p^{m+n}]{p^{m \cdot n}}$$

**IV. Rationalmachen des Nenners.** W. aus positiven rationalen Zahlen sind i. allg. irrationale Zahlen. Stehen sie im Nenner eines Bruches, so versucht man durch Erweitern etwa nach (10) das Dividieren durch irrationale Zahlen zu vermeiden und

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{q}} = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[3]{q} \cdot \sqrt[3]{q^2}} = \frac{\sqrt[3]{q^2}}{q}$$

einen Bruch mit rationalem Nenner zu erhalten. In (11) z. B. ergibt sich der Erweiterungsfaktor aus  $\sqrt[n]{q^m} \cdot \sqrt[n]{q^{m-n}} = q^{m/n} \cdot q^{m-n/n} = q^m$ .

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt[n]{q^m}} = \frac{\sqrt[n]{q^{m(n-1)}}}{\sqrt[n]{q^m} \cdot \sqrt[n]{q^{m(n-1)}}} = \frac{\sqrt[n]{q^{m(n-1)}}}{\sqrt[n]{q^{m+mn-m}}} = \frac{\sqrt[n]{q^{m(n-1)}}}{\sqrt[n]{q^{mn}}} = \frac{\sqrt[n]{q^{m(n-1)}}}{q^m}$$

Ein Nenner der Form  $(\sqrt[p]{p} \pm \sqrt[r]{r})$  wird durch Erweitern mit  $(\sqrt[p]{p} \mp \sqrt[r]{r})$  nach (12) rational gemacht; notfalls wendet man dieses Verfahren mehrfach an.

$$(12) \quad \frac{c}{\sqrt[p]{p} + \sqrt[r]{r}} = \frac{c(\sqrt[p]{p} - \sqrt[r]{r})}{(\sqrt[p]{p} + \sqrt[r]{r})(\sqrt[p]{p} - \sqrt[r]{r})} = \frac{c(\sqrt[p]{p} - \sqrt[r]{r})}{(p - r)}$$

V. In der Definition  $\sqrt[n]{p} = a$  wurden  $a \geq 0, p \geq 0$  vorausgesetzt. Ist in der Potenzgleichung  $a^n = p$  nun  $a$  beliebig reell, so folgt für geradzahliges  $n = 2v$  zunächst  $p \geq 0$  und die W.gleichung (13), während für ungeradzahliges  $n = 2v + 1$  entweder  $a \geq 0$  und  $p \geq 0$  oder  $a \leq 0$  und  $p \leq 0$  ist und die W.gleichung (14) äquivalent zu  $a^n = p$  ist.

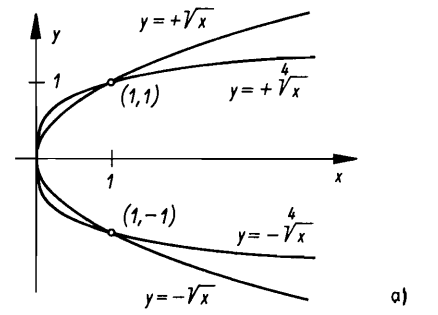
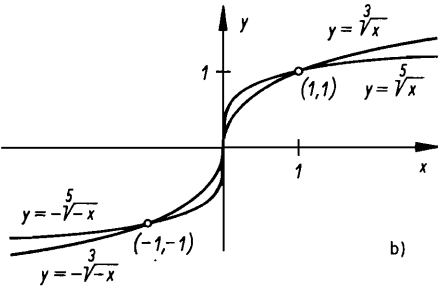
$$(13) \quad \sqrt[2v]{p} = |a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

$$(14) \quad a = \begin{cases} \sqrt[2v+1]{p} & \text{für } a \geq 0, p \geq 0 \\ \sqrt[2v+1]{-p} & \text{für } a \leq 0, p \leq 0 \end{cases}$$

Danach ist z. B.  $(-4)^2 = 16$  äquivalent zu  $-4 = -\sqrt{16}$  bzw.  $|-4| = \sqrt{16}$ , und  $(-2)^3 = -8$  ist äquivalent zu  $-2 = -\sqrt[3]{8}$ .

**VI. So wie man den Potenzbegriff auf reelle Exponenten und schließlich auf komplexe Basen und Exponenten erweitern kann** ( $\nearrow$  Potenz V., VI.), kann man prinzipiell auch mit W.n verfahren. Wichtig sind W.n  $\sqrt[n]{z}$  mit  $z \in \mathbf{C}$ , bei deren Definition  $(\sqrt[n]{z})^n = z$  man auf die Eindeutigkeit von  $\sqrt[n]{z}$  verzichtet und deren  $n$  Werte man mittels der *Moirereschen Formel* ermittelt.

**Wurzelfunktionen:** Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen mit der Funktionsgleichung  $y = x^n$ . Beim Übergang von den Potenzfunktionen zu den W.en ist aber zu beachten, daß einerseits nicht alle Potenzfunktionen in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton verlaufen, andererseits aber, daß Wurzeln nur für nichtnegative Radikanden definiert sind. Für *geradzahliges*  $n$ , z. B. für  $y = x^2$  ( $\nearrow$  quadratische Funktion), existiert für jedes der beiden Monotonieintervalle  $]-\infty, 0]$  und  $[0, +\infty[$  der Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  je eine W. als Umkehrfunktion, die durch  $u(x) = \sqrt[n]{x}$  und  $v(x) = -\sqrt[n]{x}$  beschrieben werden und beide im Intervall  $[0, +\infty[$  definiert sind. Es gilt aber in diesem Intervall  $u \geq 0$  und  $v \leq 0$ . Ihre Bilder sind Parabeläste, die symmetrisch zur positiven Abszissenachse liegen (Abb.). Für *ungeradzahliges*  $n$  sind die entsprechenden Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$ , z. B.  $y = x^3$ , im gesamten Definitionsbereich streng monoton. Die eindeutig bestimmte Umkehrfunktion kann jedoch nicht in einem geschlossenen analyt. Ausdruck dargestellt werden; für  $x \geq 0$  wird sie durch  $y = \sqrt[n]{x}$ , für  $x < 0$  durch  $y = -\sqrt[n]{-x}$  beschrieben. Alle W.en sind in ihrem gesamten Definitionsbereich streng



Graphische Darstellung von Wurzelfunktionen a) mit geradzahligem, b) mit ungeradzahligem Exponenten

monoton wachsende Funktionen. Ihre Bilder haben alle den Koordinatenursprung gemeinsam. S. a. Entwicklung von Funktionen V.

**Wurzelgesetze** ↗ Wurzel II.

**Wurzelgleichung:** Gleichung, bei der mindestens eine der Gleichungsvariablen einmal im Radikand einer Wurzel auftritt. Durch eventuell mehrfaches Potenzieren wird eine W. mit einer Gleichungsvariablen in eine algebraische Gleichung in allgemeiner Form mit eventuell eingeschränktem Definitionsbereich übergeführt; dabei können als Folge einer nichtäquivalenten Umformung möglicherweise zusätzl. Lösungen auftreten.

**Beispiele:** 1. Die W.  $2 = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$ , in der  $x \in \mathbf{R}$  und  $x \geq 1$  sein sollen, wird in der Form  $\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x+2}$  mit dem Exponenten 2 potenziert und liefert  $x-1 = 4 - 4\sqrt{x+2} + x+2$  oder  $7 = 4\sqrt{x+2}$  und nach nochmaligem Potenzieren  $49 = 16x + 32$  oder  $16x = 17$ , und damit  $x = 17/16$ . Die Probe bestätigt, daß  $17/16$  eine Lösung der Ausgangsgleichung ist, d. h.,  $L = \{17/16\}$ .

2. Die W.  $x - \sqrt{x+5} - 1 = 0$ , in der  $x \in \mathbf{R}$  und  $x \geq -5$  sein soll, ist äquivalent zur W.  $x - 1 = \sqrt{x+5}$ , die durch Quadrieren beider Seiten in  $x^2 - 2x + 1 = x + 5$  übergeht. Die dazu äquivalente Gleichung  $x^2 - 3x - 4 = 0$  hat die Lösungen  $x_1 = 4$  und  $x_2 = -1$ . Die Probe bestätigt  $x_1 = 4$  als Lösung der Ausgangsgleichung;  $x_2 = -1$  liefert jedoch die falsche Aussage  $-1 - \sqrt{-1+5} - 1 = -2 - \sqrt{4} = -4 = 0$ ,  $x_2$  ist deshalb keine Lösung der gegebenen W.; es ist  $L = \{4\}$ .

**Wurzelkriterium** ↗ Konvergenzkriterien für Reihen, VIII.

**Wurzelortskurven-Kriterium** ↗ Stabilität.

**Wurzelziehen in R:** Radizieren oder Berechnen von Wurzeln, hauptsächlich der Quadratwurzel. Wurzeln mit Exponenten  $n \in \mathbf{N}$  und  $n > 2$ , oft auch schon die mit  $n = 2$ , werden logarithmisch berechnet (↗ dekadischer Logarithmus III.).

**I. Quadratwurzel.** Da das Quadrat einer  $n$ -stelligen Zahl  $(2n - 1)$  oder  $2n$  Stellen hat, wird der Radikand vom Komma ab nach wachsenden und fallenden Stellenwerten in Gruppen zu je 2 Stellen eingeteilt. Die Anzahl der Gruppen ist die Anzahl der Stellen der Quadratwurzel; z. B.  $\sqrt{44|44|48,88} \mid 89 = 666,67$ . Die Gruppe mit dem höchsten Stellenwert bestimmt die erste Ziffer des Resultats eindeutig,  $\sqrt{44|44}$  hat 6 Zehner;  $\sqrt{4|41}$  hat 2 Zehner, genauer  $\sqrt{441} = 20 + b = a + b$ . In  $a^2 + (2a + b)b = 441$  ist  $a^2 = 400$  bekannt und  $(2a + b)b = (40 + b)b = 41$  erlaubt den Schluß  $b = 1$ . Im Algorithmus wird der Rest 41 geteilt durch  $2a = 40$ , in der Probe  $(2a + b)b$  aber  $b = 1$  berücksichtigt. In  $\sqrt{57|45|64}$  führt der gleiche Algorithmus stufenweise zum Ziel. Aus  $\sqrt{57|45|64}$  ergibt sich  $a = 700$ , für die gesuchte Lösung (1) sind  $b$  und  $c$  aus (2) zu bestimmen; d. h., man erhält (3).

$$\begin{aligned} (1) \quad & (a + b + c)^2 \\ &= a^2 + [2a + (b + c)](b + c) \\ &= a^2 + [2a(b + c) + (b + c)^2] \\ &= a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c \\ (2) \quad & (700 + b + c)^2 \\ &= 49|00|00 + (14|00 + b)b + (14|00 + 2b + c)c \\ &= 57|45|64 \\ (3) \quad & (14|00 + b)b + (14|00 + 2b + c)c \\ &= 8|45|64 \end{aligned}$$

Division durch  $(14|00 + b)$  gibt unter Berücksichtigung, daß  $b$  Zehner sind,  $84 : 14 = 5$ , d. h.,  $b = 50$  und damit (4). Der nächste Schritt des Algo-

$$\begin{aligned} (4) \quad & \text{wegen } (14|00 + 50)50 = 7|25|00 \text{ ist} \\ & 8|45|64 - 7|25|00 = 1|20|64 \\ &= (14|00 + 2b + c)c \\ &= (14|00 + 1|00 + c)c \\ &= (15|00 + c)c \end{aligned}$$

rithmus  $120 : 15 = 8 = c$  führt zur Probe (5).

$$(5) \quad (15|00 + c)c = 15|08 \cdot 8 = 1|20|64$$

Es zeigt sich, daß der gegebene Radikand  $57|45|64$  eine Quadratzahl ist. Wäre das nicht der Fall, so würde der Algorithmus mit der ersten Gruppe 00 nach dem Komma, die erste Stelle nach dem Komma im Resultat liefern. Wichtig für den Algorithmus ist, daß die Divisoren der Reihe nach sind:

$$(2a + b), (2a + 2b + c), (2a + 2b + 2c + d), \dots$$

Damit ist die gekürzte Schreibweise der folgenden Beispiele verständlich.

Beispiele: 1.  $\sqrt[4]{41} = 21$

$$\begin{array}{r} \sqrt[4]{41} \\ -4|00 \\ \hline 41 : 41 \\ -41 \\ \hline 0 \end{array}$$

2.  $\sqrt[5]{57|45|64} = 758$

$$\begin{array}{r} \sqrt[5]{57|45|64} \\ -49|00 \\ \hline 8|45 : 145 \\ -7|25 \\ \hline 120|64 : 1508 \\ 120|64 \\ \hline 0 \end{array}$$

3.  $\sqrt[3]{53,00|00|00} = 7,2801 \dots$  bei geforderten 4 Stellen nach dem Komma.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{53,00|00|00} \\ -49 \\ \hline 4|00 : 142 \\ -2|84 \\ \hline 1|16|00 : 1448 \\ -1|15|84 \\ \hline 16|00 : 14560 \\ -0 \\ \hline 16|00|00 : 145601 \\ -14|56|01 \\ \hline 1|43|99 \end{array}$$

II. *Näherungsformeln.* Ist  $a$  groß gegen  $b$ , in Zeichen  $a \gg b$ , so sind in den Ausdrücken  $(a + b/2a)^2 = a^2 + b + b^2/4a^2$  und  $(a + b/(3a^2))^3 = a^3 + b + b^2/(3a^3) + b^3/(27a^6)$  die Glieder mit Potenzen von  $a$  im Nenner vernachlässigbar klein und man erhält die Näherungsformeln  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + b/(2a)$  und  $\sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + b/(3a^2)$ .

Beispiele: 1.  $\sqrt{35} = \sqrt{36 - 1} \approx 6 - 1/12 \approx 5,917$ ; der genaue Wert lautet  $5,91608 \dots$  2.  $\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27 + 1} \approx 3 + 1/27 \approx 3,037$ .

Weitere Näherungsformeln  $\nearrow$  Funktionenreihen.

III. *Iterationsverfahren.* Ist  $x = \sqrt[n]{x_0}$  zu berechnen und ist  $x_1$  ein Näherungswert, so ergibt sich aus dem  $\nearrow$  Newtonschen Näherungsverfahren die Iterationsvorschrift (6) für  $i = 1, 2, 3, \dots$

$$(6) \quad x_{i+1} = \frac{n-1}{n} x_i + \frac{x_0}{n \cdot x_i^{n-1}}$$

Beispiel: Zur Berechnung von  $x = \sqrt{2}$  mit  $x_0 = 2$  und  $n = 2$  erhält man (7).

$$(7) \quad x_{i+1} = \frac{1}{2} (x_i + x_0/x_i)$$

Mit dem Näherungswert  $x_1 = 1$  erhält man nacheinander (8), (9) und (10). Der letzte Wert entspricht

$$(8) \quad x_2 = \frac{1}{2} (1 + 2/1) = 1,5$$

$$(9) \quad x_3 = \frac{1}{2} (1,5 + 4/3) = 1,4167$$

$$(10) \quad x_4 = \frac{1}{2} (1,4167 + 2/1,4167) = 1,4142$$

dem einer vierstelligen Tafel. Größere Genauigkeit ergibt sich mit elektromechan. oder elektron. Rechenmaschinen.

IV. *Tafeln für Quadrat- und Kubikwurzeln* sind enthalten in den meisten Zahlentafeln. Auch die Tafeln der Quadrat- oder Kubikzahlen ( $\nearrow$  Potenz I.) liefern mit linearer Interpolation für die meisten Fälle genügend genaue Ergebnisse.

V. *Logarithmisch* können  $\sqrt{x}$  und  $\sqrt[3]{x}$  mit Hilfe des Rechenstabes oder einer Logarithmentafel ( $\nearrow$  de-

kadischer Logarithmus III.) mit einer diesen Mitteln entsprechenden Genauigkeit bestimmt werden.

VI. Zum *graph. Radizieren* geht man von der Kurve der Funktion  $y^n = x$  für ganze Zahlen  $n \geq 2$  aus und bestimmt mit einer Genauigkeit, die der Zeichnung entspricht, zum Ordinatenwert  $x$  den zugehörigen Abszissenwert  $y = \sqrt[n]{x}$ . Auch geeignete Nomogramme ( $\nearrow$  Nomographie) werden benutzt.

VII. Durch einen unendl. period. regelmäßigen Kettenbruch läßt sich jede Quadratwurzel darstellen und danach, wenn auch zeitaufwendig, berechnen.

## Z

**Zahl:** grundlegender Begriff der Mathematik. Der abstrakte Zahlenbegriff in seiner heutigen Fassung ist das Ergebnis eines jahrtausendelangen Entwicklungsprozesses.

Die natürl. Z.en 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... entstanden aus dem praktischen Bedürfnis, Gegenstände zu zählen. Sie bedeuteten Anzahlen von Gegenständen, die zum Zählen in geeigneter Weise angeordnet und mit den Elementen einer bekannten anderen Menge verglichen wurden, z. B. die Menge der durch eine Tür getriebenen Schafe mit der Menge der Finger von einer oder von mehreren Personen. Auf diese Weise kann das Zehnersystem entstanden gedacht werden, in dem drei Personen schon 999 Schafe zählen können. Der Abstraktionsprozeß, z. B. das 7 Äpfeln und 7 Steinen Gemeinsame als die Z. 7 zu begreifen, wurde unterstützt durch die Entwicklung der Sprache und durch die schriftl. Wiedergabe der Anzahlen durch Wörter und durch spezielle Z.zeichen oder Ziffern.

Mengentheoretisch gibt die Anzahl der Elemente einer endl. Menge ihre *Kardinal-Z.*  $a$ , während die Bezeichnung der Stelle, die ein Element in einer geordneten Menge einnimmt durch eine *Ordinal-Z.* bezeichnet wird. Mit der Erweiterung des Tätigkeitsbereichs des Menschen ergab sich die Notwendigkeit, die *Grundrechenarten* zu entwickeln und abstrakt zu fassen. Die *Arithmetik*, die Lehre von den Zahlen, führte als Erweiterungen des Bereichs **N** der natürl. Z.en zu den Bereichen **Z** der ganzen, **Q** der rationalen, **R** der reellen und **C** der komplexen Z.en. Auch die höheren Rechenarten, das Potenzieren und seine Umkehrungen, das Radizieren und Logarithmieren erfordern zu ihrer Realisierung in jedem Falle keinen komplizierteren Begriff der Z. als den der komplexen Z.en. Zur Darstellung der Z.en dienen gesetzmäßig aufgebaute *Z.en-systeme*. S. a. Kardinalzahl; Ordinalzahl.

**Zahlenfolge:** I. eine eindeutige Abbildung von einer Menge natürl. Zahlen auf eine gegebene Menge  $M$  reeller Zahlen. Ist die Menge natürl. Zahlen endlich, so heißt die Z. endlich, andernfalls unendlich. Die Abbildung mit  $0 \rightarrow 3, 1 \rightarrow -27, 2 \rightarrow \sqrt[3]{2}$  beschreibt z. B. eine endl. Z. mit drei *Gliedern*. Man schreibt auch  $a_0 = 3, a_1 = -27, a_2 = \sqrt[3]{2}$ . Die unendl. Z.

$1 \rightarrow \frac{1}{3}, 2 \rightarrow \frac{2}{5}, 3 \rightarrow \frac{3}{7}, \dots, n \rightarrow \frac{n}{2n+1}, \dots$   
 schreibt man auch als  $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{3}{7}, \dots$   
 Für die Beschreibung einer unendl. Z. versucht man,  
 die eindeutige Zuordnung zwischen der Gliednummer  $n$  und dem zugehörigen Glied  $a_n$  der Z. durch ein *Bildungsgesetz* darzustellen, das in vielen Fällen als *analyt.* Ausdruck  $a_n = f(n)$  angegeben werden kann, z. B.  $a_n = n/(2n+1)$ . Dann kann man die Z.  $a_1, a_2, a_3, \dots$  kurz mit  $(a_n) = (f(n))$  bezeichnen und jedes Glied der Z. sofort angeben, z. B. für  $(a_n) = (n/(2n+1))$  das 102-te Glied  $a_{102} = 102/205$ . Beginnt die Numerierung nicht, wie i. allg. üblich, mit  $n = 1$ , so deutet man das im Index an, z. B.  $(a_n)_{n \geq 4} = (a_4, a_5, a_6, \dots)$ .

Das Bildungsgesetz einer Z. kann auch durch eine *Rekursionsformel* angegeben werden, nach der sich ein Glied  $a_n$  aber erst berechnen läßt, wenn die vorhergehenden Glieder  $a_i$  mit  $i < n$  bereits bekannt sind, z. B.  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + B/a_n), a_1 = B > 0$ ; daraus erhält man der Reihe nach die Werte in (1).

$$(1) \quad a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + B/a_1) = \frac{1}{2}(B + 1),$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + B/a_2) = \frac{B^2 + 6B + 1}{4(B + 1)}$$

Es gibt jedoch auch Z.n, deren Bildungsgesetz weder durch einen analyt. Ausdruck noch durch eine Rekursionsformel gegeben werden kann, z. B. die Folge der Primzahlen  $a_1 = 2, a_2 = 3, \dots$ . Aus einer gegebenen Z.  $(a_n)$  kann man weitere Z.n bilden, etwa die Z.  $(s_n)$  mit dem allgemeinen Glied  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , die *Summenfolge* zu  $(a_k)$ .

Das Hauptinteresse gilt unendl. Z.n und den Eigenschaften, die sich aus der Aufeinanderfolge ihrer Glieder ergeben. Wichtige Beispiele solcher Z.n sind *arithmet.* Z.n  $(a_n)$  mit  $a_n = a + (n-1)d$  und *geomet.* Z.n  $(a_n)$  mit  $a_n = aq^{n-1}$ .

II. Eine Z.  $(a_n)$  heißt *monoton wachsend*,  $a_n \leq a_{n+1}$ , wenn keines ihrer Glieder kleiner als das vorhergehende ist; sie heißt *monoton fallend*,  $a_n \geq a_{n+1}$ , wenn keines ihrer Glieder größer als das vorhergehende ist. Die Z. heißt *eigentlich, streng oder echt monoton wachsend*, wenn für  $n = 1, 2, \dots$  sogar  $a_n < a_{n+1}$  gilt, bzw. *eigentlich, streng oder echt monoton fallend*, wenn für  $n = 1, 2, \dots$  sogar  $a_n > a_{n+1}$  gilt. Die Z.  $(a_n)$  mit dem allgemeinen Glied  $a_n = (n-1)/n$  z. B. ist *eigentlich monoton wachsend*, da  $a_n = (n-1)/n < n/(n+1) = a_{n+1}$ . Die rekursiv gegebene Z.  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + B/a_n), a_1 = B > 0$  ist *monoton fallend*, denn aus  $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + B/a_{n-1})$  folgt  $(a_{n-1} - a_n)^2 = a_n^2 - B \geq 0$ , und daraus ergibt sich mit  $a_n > 0$  zunächst  $a_n \geq B/a_n$  und damit  $a_n = \frac{1}{2}(a_n + a_n) \geq \frac{1}{2}(a_n + B/a_n) = a_{n+1}$ .

Eine Z.  $(a_n)$  heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl  $K$  gibt, die von keinem Glied der Z. übertroffen wird, d. h., für die  $a_n \leq K$  für alle Indizes  $n$  gilt. Die Z. heißt *nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl  $k$  gibt, so daß  $k \leq a_n$  für alle Indizes gilt.  $K$  heißt *obere Schranke* und  $k$  *untere Schranke* der Z.  $(a_n)$ . Eine Z. heißt *beschränkt*, wenn sie eine obere und eine untere Schranke hat. Die kleinste obere Schranke wird *obere Grenze* der Z. gen. und die größte untere Schranke *untere Grenze*. Die Zahl  $G$  ist mithin

obere Grenze, falls  $a_n \leq G$  für alle Indizes  $n$  gilt und falls für eine beliebig vorgegebene Zahl  $\epsilon > 0$  mindestens ein Index  $n_0$  existiert mit  $G - \epsilon < a_{n_0} \leq G$ . Die Zahl  $g$  ist untere Grenze, falls  $g \leq a_n$  für alle Indizes  $n$  gilt und falls für beliebiges  $\epsilon > 0$  mindestens ein Index  $n_1$  existiert mit  $g \leq a_{n_1} < g + \epsilon$ . Obere und untere Grenze einer Z. müssen nicht Glieder der Z. sein. Für die Z. mit dem allgemeinen Glied  $a_n = 1/n$  ist  $G = 1$  die obere und  $g = 0$  die untere Grenze; hier ist die obere Grenze ein Glied der Z., die untere Grenze nicht. Jede nach oben beschränkte Z. hat eine eindeutig bestimmte obere Grenze und jede nach unten beschränkte Z. eine eindeutig bestimmte untere Grenze.

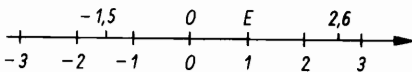
III. Eine Zahl  $A$  heißt *Häufungswert* der Z.  $(a_n)$ , wenn für jede beliebig kleine Zahl  $\epsilon > 0$  die Ungleichung  $|a_n - A| < \epsilon$  für unendlich viele Indizes der Z. erfüllt ist. Nach dem *Satz von Bolzano-Weierstraß* hat jede unendl. und beschränkte Z. mindestens einen Häufungswert.

Die rekursiv gegebene Z.  $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + B/a_{n-1})$  mit  $a_1 = B > 0$  ist beschränkt: Aus  $(a_{n-1} - a_n)^2 = a_n^2 - B \geq 0$  folgt  $a_n \geq \sqrt{B}$ , d. h. die Beschränktheit nach unten. Die bereits gezeigte Monotonie  $a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_1 = B$  liefert die Beschränktheit nach oben. Diese Z. hat deshalb mindestens einen Häufungswert. Die Z. mit dem allgemeinen Glied  $a_n = (-1)^n \frac{2n}{3n+1}$  ist beschränkt, denn  $-\frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{2}{3}$  gilt für alle Indizes  $n$ . Die untere Grenze ist  $g = -\frac{2}{3}$ , und die obere Grenze ist  $G = \frac{2}{3}$ ; diese Zahlen sind auch ihre Häufungswerte. Die Glieder der Z. haben abwechselnd positives und negatives Vorzeichen, eine solche Z.  $(a_n)$  heißt *alternierend*, z. B. auch die Z.  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^{n+1} \sqrt{n}$ .

Ist  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  irgendeine eigentlich monoton wachsende Z. von natürl. Zahlen, so heißt  $(p_n)$  eine *Teilfolge* der Z. der natürl. Zahlen, z. B. ist 1, 17, 22, 23, 24, 52, ... eine solche Teilfolge. Wählt man eine solche Z.  $(p_n)$  als Indizes, so ergibt sich aus jeder Z.  $(a_n)$  eine *Teilfolge*  $(a_{p_n})$ . Die Z.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots$  ist z. B. eine Teilfolge der Z.  $(a_n) = (1/n)$ .

S. a. Grenzwert einer Zahlenfolge.

**Zahlengerade:** Gerade, zwischen deren Punkten und den reellen Zahlen eine eindeutige Zuordnung besteht. Nach Angabe eines Nullpunkts  $O$  und eines Einheitspunkts  $E$  ist die Gerade orientiert, die Halbgerade  $OE$  wird als positiv festgesetzt, die andere Halbgerade als negativ. Durch Abtragen der Einheitsstrecke  $OE$  nach beiden Seiten ergeben sich die Bilder der ganzen Zahlen, durch Teilung der Strecken zwischen diesen Punkten etwa nach den

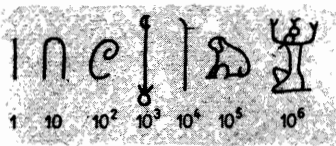


Zahlengerade

Strahlensätzen die Bilder rationaler Zahlen (Abb.). Sie liegen *überall dicht*, d. h. geometrisch, durch Teilung lassen sich stets Zwischenpunkte als Bilder rationaler Zahlen finden. Trotzdem gibt es auf der Z. noch unendlich viele *Lücken*, d. h. Punkte, die

keiner rationalen Zahl zugeordnet sind. Sie sind die Bildpunkte irrationaler Zahlen; in beliebiger Nähe von jedem liegen Punkte rationaler Zahlen, durch die die betreffende reelle Zahl angenähert werden kann. Die Beziehung  $z_1 < z_2$  zwischen zwei reellen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  wird auf der Z. dadurch gekennzeichnet, daß der Bildpunkt von  $z_1$  links von dem Bildpunkt von  $z_2$  liegt. Die Darstellung der reellen Zahlen auf der Z. wurde von R. DESCARTES (1637) eingeführt. Sie ist die Grundlage für die analyt. Geometrie.

**Zahlensystem:** I. System von *Zahlzeichen* oder *Ziffern*, durch die sich nach gewissen Regeln alle natürl. Zahlen eindeutig darstellen lassen. Die einfachste Darstellung durch *Zählstriche*, die hintereinander gesetzt werden, wird für größere Zahlen bald unübersichtlich, zu der *Reihung* tritt deshalb eine *Bündelung*, wenn z. B. je 5 Einheiten durch einen Querstrich zu einem Bündel zusammengefaßt werden. Durch Zusammenzählen der Bündel und der überschüssigen Einer ergibt sich die dargestellte Zahl. Daß in einem solchen *Additionssystem* meist Bündel zu 5 oder zu 10 Einheiten gebildet werden, hängt sicher damit zusammen, daß die Finger einer Hand oder beider Hände zum Zählen und Rechnen benutzt wurden. Beim Ausbau eines Additionssystems muß für jede Bündelung ein neues Zahlzeichen geschaffen werden. Im *ägypt.* Z. z. B. gab es bei einer Bündelung zu je 10 Ziffern für jede Zehnerpotenz bis zur Million eine Hiero-



Zahlensystem. Abb. 1: Zahlzeichen für Zehnerpotenzen im ägyptischen Zahlensystem

glyphe (Abb. 1). Die für 100 versinnbildlichte eine Meßleine, die für 1000 eine Lotosblume, die für 10 000 einen Schilfkolben, die für 100 000 einen Frosch und die für  $10^6$  den ägypt. Gott des Luft-raums. Es sind offensichtlich die Bilder von Gegenständen benutzt worden, die im Nildelta in großen Anzahlen vorkommen und die Bedeutung von »sehr groß«, »unendlich« hatten. Größere Zahlen hätten, soweit sie gebraucht wurden, wie die übrigen Zahlen durch Reihung dargestellt werden müssen. Die Zahl 1026 z. B. wurde in diesem Z. dargestellt als die Summe  $1000 + 2 \cdot 20 + 6 \cdot 1$  (Abb. 2).



Zahlensystem. Abb. 2: Schreibweise der Zahl 1026 in Hieroglyphen

II. Ein typ. Additionssystem war das *römische Z.* mit den Ziffern (1) und der Regel, daß diese Zeichen in der Reihenfolge abnehmender Zahlenwerte ge-

(1) römische Zahlzeichen und ihr Wert im Dezimalsystem

M	D	C	L	X	V	I
1000	500	100	50	10	5	1

schrieben und ihre Werte addiert werden, mit Ausnahme des Falles, in dem ein geringwertiges vor einem höherwertigen Zahlzeichen steht und dann subtrahiert wird. Nach dieser Ausnahme bedeuten z. B.  $IV = 5 - 1 = 4$ ,  $IX = 10 - 1 = 9$ ,  $XCIX = (100 - 10) + (10 - 1) = 90 + 9 = 99$  oder  $MCM = 1000 + (1000 - 100) = 1900$ , für 1977 schreibt man z. B. *MCMLXXVII*.

III. Das *babylon.* Z. enthielt ursprünglich nur Ziffern für Einer, Zehner und Hunderter, die auf unterschiedliche Weise mit Griffeln in Tontafeln fixiert wurden. Später entwickelte sich im Anschluß an die Teilung der Winkelgrößen aus diesem dezimalen Additionssystem ein *sexagesimales Positionssystem*, in dem der Wert, den ein Zahlzeichen darstellt, von seiner Stellung in der Zahl abhängt. Mit nur zwei Ziffern für 1 und 10 konnten sehr große Zahlen nach der Regel dargestellt werden, daß von rechts nach links der Reihe nach die Vielfachen von 1, 10,  $60^1$ ,  $10 \cdot 60^1$ ,  $60^2$ ,  $10 \cdot 60^2$ ,  $60^3$  usw. zu schreiben sind. Die Zahl 800000 z. B. wird dann nach (2) zerlegt (Abb. 3).

$$(2) \quad 800000 = 3 \cdot 60^3 + 4 \cdot (10 \cdot 60^2) + 2 \cdot 60^2 + 1 \cdot (10 \cdot 60) + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 10$$

IV. In der griechisch-hellenist. Welt waren neben dem röm. Z. und dem babylon. Z. vorwiegend das *attische* oder *herodian.* Z. und das *miles.* Z. im Gebrauch. Das *attische Z.*, das vorwiegend für prakt. Aufgaben verwendet wurde, war ein Dezimalsystem



Zahlensystem. Abb. 3: Darstellung der Zahl 800000 in Keilschrift

mit Fünferbündelung. Die Stufen wurden durch die Anfangsbuchstaben der entsprechenden griech. Wörter bezeichnet, z. B. stand  $\Lambda$  für 10 von  $\Lambda EKA$ ,  $H$  für 100 von  $HEKATON$ ,  $X$  für 1000 von  $XIAIOI$  und  $M$  für 10000 von  $MYPIOI$ , die Einer wurden durch Striche angegeben und eine Fünferbündelung durch ein vorgesetztes  $\Gamma$ , z. B. nach:

$$\Gamma \Lambda = 50, \quad \Gamma H = 500, \quad \Gamma X = 5000, \quad \Gamma M = 50000.$$

Das *miles.* Z. wurde für wissenschaftl. Rechnungen eingesetzt und verwendete zur Bezeichnung der Ziffern 24 griech. und 3 semit. Buchstaben (Abb. 4, S. 604). Für die Tausender wurden wieder die gleichen Buchstaben wie für Einer verwendet, jedoch mit einem Strich versehen, » $\gamma$ « z. B. bedeutet 3000; für die Zehntausender wurde ein  $M$  vorgesetzt,  $M \lambda \epsilon$  z. B. bedeutete  $(30 + 5) \cdot 10^3 = 35000$ , konnte aber auch  $\lambda \epsilon$  geschrieben werden. Trotzdem diese Vorsatzzeichen wie  $\Gamma$ ,  $M$  und  $\gamma$ , Vorteile des Positionssystems andeuten, ist das *miles.* Z. ein Additionssystem



Einer									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ	
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	
Zehner									
I	K	Λ	M	N	Ξ	Ο	Π	Q	
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ	
Hundertner									
P	Σ	T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω	α	
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	α	
Tausender									
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	

Zahlensystem. Abb. 4: Milesische Zahlzeichen

ϳ ϳ ξ η

Abb. 5: Darstellung der Zahl 3968 im milesischen Zahlensystem

system, die Zahl 3968 z. B. wird dargestellt durch 3000 + 900 + 60 + 8 (Abb. 5).

V. Ein Stellenwert- oder Positionssystem braucht im Unterschied zu den Additionssystemen nur so viele Ziffern, wie die ihm zugrunde gelegte Grundzahl oder Basis  $g$  beträgt, das jetzt allgemein verwendete Dezimal- oder Zehnersystem mit der Basis  $g = 10$  z. B. die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die auf die größte Ziffer folgende Zahl wird dadurch dargestellt, daß die Einheit nach links in die nächsthöhere Stelle rückt, daß man z. B. für 9 + 1 schreibt 10. Die Ziffer 0 gibt dabei an, daß kein Einer auftritt. Ohne eine Ziffer für eine solche Leer- oder Fehlstelle ist ein Positionssystem nicht möglich. Die Indier waren die ersten, die die Null für eine Leerstelle verwendeten, wie durch die Gualiori-Inschrift von 876 belegt wird. Über die Araber gelangte dieses Z. nach Europa, ihre Ziffern wurden deshalb als arabisch bezeichnet. Aus ihnen sind im Laufe der Jahrhunderte die jetzt international benutzten Ziffern des Dezimalsystems entstanden (Abb. 6).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a	—	=	≡	ƒ	ε	ϛ	η	ξ	ζ	
b	॑	॒	॒	॒	॒	॒	॒	॒	॒	ॐ
c	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०
d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Zahlensystem. Abb. 6: Entwicklung unserer Ziffern

- a) indische Brahmi-Ziffern ohne Stellenwert
- b) indische Ziffern mit Stellenwert nach der Gualiori-Inschrift
- c) mitteleuropäische Ziffern um 1300
- d) geschriebene Ziffern von A. DÜBER

In diesem Z. bedeutet z. B. die Ziffernfolge 20822 die Zahl  $2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ . Jede Stelle links von einer gegebenen hat in ihm den 10fachen Stellenwert, so daß mit den gleichen Ziffern beliebig große natürl. Zahlen dargestellt werden können. Beachtet man, daß dann jede Stelle rechts von einer gegebenen den 10-ten Teil von deren Stellenwert hat und markiert die Einer durch ein Komma hinter ihnen, so lassen sich auch Bruchteile eines Einers mit beliebiger Genauigkeit darstellen (ϳ Brüche II.1.). Die Vorteile dieses Z.s für das schriftl. Rechnen, das Rechnen mit der Feder, wie man im Mittelalter sagte, werden in den Artikeln über Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erläutert. Allgemein kann nach (3) jede von 0 und 1 verschiedene natürl. Zahl  $g$  als Grundzahl eines Positionssystems dienen, denn durch die Zahl  $Z$  sind ihre Ziffern  $z_i$  eindeutig bestimmt und umgekehrt.

$$(3) \quad Z = z_n \cdot g^n + z_{n-1}g^{n-1} + \dots + z_1 \cdot g^1 + z_0g^0 + z_{-1}g^{-1} + z_{-2}g^{-2} + \dots$$

Ist die Grundzahl  $g$  oder Basis des Z.s bekannt, so genügt es nach (4), nur die Ziffern  $z_i$  zu schreiben,

$$(4) \quad Z(g) = z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0 z_{-1} z_{-2} \dots$$

dabei gilt  $0 \leq z_i < g$  für alle  $i$ . In der Zahlentheorie werden die Eigenschaften der  $p$ -adischen Zahlen mit der Grundzahl  $p$  untersucht.

VI. Für Rechenmaschinen ist das Zweier- oder Dualsystem (ϳ dyadisches Zahlensystem) von besonderer Bedeutung, weil seine zwei Ziffern 0 für 0 und L für 1 sich technisch leicht unterscheiden lassen, z. B. als Nichtfließen bzw. Fließen eines Stromes, und weil sie sich logisch als Zeichen für falsche und wahre Aussagen leicht deuten lassen.

Hier soll die Regel für die Konvertierung von Zahlen an einigen Beispielen belegt werden (ϳ dyadisches Zahlensystem). Konvertierung bedeutet, die Darstellung  $Z(g)$  einer Zahl im Z. mit der Basis  $g$  umzurechnen in eine Darstellung  $Z(p)$  mit der Basis  $p$ . Die Regel besagt, daß  $Z(g)$  durch  $p(g)$ , d. h. durch die im Z.  $g$  dargestellte Grundzahl des neuen Z.s, zu dividieren ist und daß die Reste die gesuchten Koeffizienten ergeben. Setzt man die Zahl  $Z(g)$  in eckige Klammern und gibt die Grundzahl  $g$  als Index an, so ist z. B. aus  $Z(10) = [520]_{10}$  zu berechnen  $Z(3)$ . Die Division durch 3 ergibt:

$$\begin{aligned} 520 &= 173 \cdot 3 + 1, & 173 &= 57 \cdot 3 + 2, \\ 57 &= 19 \cdot 3 + 0, & 19 &= 6 \cdot 3 + 1, \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0, & 2 &= 0 \cdot 3 + 2. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man (5) oder, wie sich auch aus den Resten der Division ergibt  $[520]_{10} = [201021]_3$ .

$$(5) \quad \begin{aligned} 520 &= [(57 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 1] = [(19 \cdot 3^2 + 2) \cdot 3 + 1] \\ &= [(6 \cdot 3 + 1) \cdot 3^2 + 2] \cdot 3 + 1 \\ &= [(2 \cdot 3^2 + 1) \cdot 3^2 + 2] \cdot 3 + 1 \\ &= 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3 + 1 \end{aligned}$$

VII. Für das Maschinenrechnen werden *Oktalzahlen* mit der Basis 8 benutzt. Für  $Z(10) = [537]_{10}$  erhält man z. B.:  $573 = 71 \cdot 8 + 5$ ;  $71 = 8 \cdot 8 + 7$  und  $8 = 1 \cdot 8 + 0$  oder  $[573]_{10} = [1075]_8 = 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0$ . Oktalzahlen ergeben durch Aneinanderreihen ihrer Oktalziffern die Dualzahl der gegebenen Zahl, z. B. von 573. Man erhält  $[573]_2 = \text{L OOO LLL LOL}$ , weil  $[1]_2 = \text{L}$ ,  $[0]_2 = \text{OOO}$ ,  $[7]_2 = \text{LLL}$  und  $[5]_2 = \text{LOL}$ . Zur Bestätigung wird nach (6) und (6a) die Zahl  $[573]_2$  konvertiert durch Division mit  $[10]_2 = \text{LOLO}$ . Da  $[\text{LL}]_{10} = 3$ ,  $[\text{LLL}]_{10} = 7$  und  $[\text{LOL}]_{10} = 5$ , ergibt sich in der Tat  $[\text{LOOOLLLOL}]_{10} = 573$ .

$$(6) \quad \begin{array}{r} \text{LOOOLLLOL} : \text{LOLO} = \text{LLLOOL} \\ \underline{\text{LOLO}} \\ \text{LLLL} \\ \underline{\text{LOLO}} \\ \text{LOLL} \\ \underline{\text{LOLO}} \\ \text{LLOL} \\ \underline{\text{LOLO}} \\ \text{LL} \end{array}$$

$$(6a) \quad \begin{array}{r} \text{LLLOOL} : \text{LOLO} = \text{LOL} \\ \underline{\text{LOLO}} \\ \text{LOOOL} \\ \underline{\text{LOLO}} \\ \text{LLL} \end{array}$$

VIII. In der Rechentechnik wird auch ein *hexadezimals* Z. benutzt. In ihm ist die Basis  $g = 16$ , und als Ziffern verwendet man 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Nach der in VI. zur Konvertierung eingeführten Bezeichnungweise gelten z. B. folgende Äquivalenzen:  
 $[20]_{10} \Leftrightarrow [14]_{16}$ ,  $[32]_{10} \Leftrightarrow [20]_{16}$ ,  $[50]_{10} \Leftrightarrow [32]_{16}$ ,  
 $[90]_{10} \Leftrightarrow [5A]_{16}$ ,  $[95]_{10} \Leftrightarrow [5F]_{16}$ .

IX. In der *Rechentechnik* wird die Darstellung (3) einer reellen Zahl  $a$  im Positionssystem meist in der Form (7) oder (8) angegeben, wenn  $B$  die Basis

$$(7) \quad a = \pm \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Z_{B_i} B^i$$

$$(8) \quad a = \pm \dots Z_{B_n} Z_{B_{n-1}} Z_{B_{n-2}} Z_{B_{n-3}} \dots$$

und die Ziffern  $Z_{B_i}$ , natürl. Zahlen sind, die den Einschränkungen  $0 \leq Z_{B_i} < B$  unterliegen. Da sich die Ziffern 0 und L von den in digitalen Rechenanlagen verwendeten *Dualzahlen* technisch einfach realisieren und in elementarer Weise arithmetisch verknüpfen lassen, ist das *duale Z.* ( $\nearrow$  dyadisches Zahlensystem) hinsichtlich der rechnerinternen Verarbeitung besonders ausgezeichnet ( $\nearrow$  digitale Rechenanlage). Auf Grund der Möglichkeit der Konvertierung können Zahlen im dezimalen Z. ein- und ausgegeben werden.

**zahlentheoretische Funktion: I.** eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge  $\mathbf{N}$  der natürlichen Zahlen ist. Bekannte z. F.en sind z. B.  $d(n)$ , die Anzahl der positiven Teiler von  $n$ ,  $\sigma(n)$ , die Summe der positiven Teiler von  $n$ ,  $r(n)$ , die Anzahl der ganzzahligen Lösungspaare  $x, y$  der Gleichung  $x^2 + y^2$

$= n$ ,  $\varepsilon(n)$ , die *triviale z. F.* mit  $\varepsilon(n) = 1$  für  $n = 1$  und  $\varepsilon(n) = 0$  für  $n \neq 1$ ,  $\varphi(n)$ , die *Eulersche Funktion*, die die Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Zahlen kleiner als  $n$  angibt (vgl. Kongruenz der Zahlen) sowie  $\pi(x)$ , die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich  $x$ .

Manche dieser Funktionen zeigen einen sprunghaften Verlauf, z. B. ist  $d(1) = 1, d(2) = 2, d(3) = 2, d(4) = 3, d(5) = 2, d(6) = 4, d(7) = 2, d(8) = 4$  usw. Trotzdem läßt sich oft für das Mittel der ersten  $n$  Funktionswerte einer z. F.  $f$  eine Gesetzmäßigkeit finden. Die Funktion  $[f(1) + f(2) + \dots + f(n)]/n$  verhält sich in vielen Fällen bei wachsendem  $n$  asymptotisch wie eine analytische Funktion von  $n$ ;  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(k)$  z. B. wächst wie der natürliche Logarithmus von  $n$ , d. h., setzt man  $[d(1) + d(2) + \dots + d(n)]/n = \ln n + R(n)$ , so ist  $R(n)$  von geringerer Größenordnung in  $n$  als  $\ln n$ . Die Untersuchung von Mittelwerten z. F.en und vor allem ihrer Reste  $R(n)$  erfordert die feinsten Hilfsmittel der Analysis. Sie ist gegenwärtig noch nicht abgeschlossen.

II. Die *Teilersumme*  $\sigma(n) = \sum d$  ist definiert als die Summe über alle natürlichen Teiler  $d$  von  $n$ . Ist speziell  $n = p^m$  eine Primzahlpotenz, so ist  $\sigma(p^m) = 1 + p + \dots + p^{m-1} + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}$ .

Allgemein läßt sich für die Teilersumme  $\sigma(n)$  aus ihrer Definition eine *multiplikative Darstellung* herleiten. Ist (1) die Primfaktorzerlegung von  $n$ , so gilt (2) für  $\sigma(n)$ . Aus der Produktformel

$$(1) \quad n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r} = \prod_{i=1}^r p_i^{r_i}$$

ergibt sich leicht die Aussage: Wenn  $n_1, n_2$  teilerfremd sind, so gilt  $\sigma(n_1 \cdot n_2) = \sigma(n_1) \cdot \sigma(n_2)$ .

$$(2) \quad \sigma(n) = \frac{(p_1^{r_1+1} - 1)}{(p_1 - 1)} \cdot \frac{(p_2^{r_2+1} - 1)}{(p_2 - 1)} \dots \frac{(p_r^{r_r+1} - 1)}{(p_r - 1)} \\ = \prod_{i=1}^r \frac{(p_i^{r_i+1} - 1)}{(p_i - 1)} = \prod_{i=1}^r \sigma(p_i^{r_i})$$

III. Die *Möbiussche Funktion*  $\mu(n)$  hat den Wert  $\mu(n) = (-1)^r$ , falls in der Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}$  gilt  $r_i = 1$  für  $i = 1, \dots, r$ , dagegen hat  $\mu(n)$  den Wert 0, falls einer der Exponenten  $r_i$  größer als 1 ist. Für  $n = 1$  wird  $\mu(1) = 1$  gesetzt. Äquivalent dazu ist folgende Definition:  $\mu(n) = (-1)^r$ , falls  $n$  quadratfrei ist und genau  $r$  verschiedene Primteiler hat, dagegen  $\mu(n) = 0$ , falls  $n$  nicht quadratfrei ist, z. B. ist  $\mu(2) = -1, \mu(4) = 0$  und  $\mu(6) = 1$ . Quadratfrei heißt eine Zahl, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung sämtliche  $r_i = 1$  sind, d. h., wenn sie nicht durch das Quadrat einer von Eins verschiedenen Zahl teilbar ist. Sind  $n_1, n_2$  teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt  $\mu(n_1 \cdot n_2) = \mu(n_1) \cdot \mu(n_2)$ . Verwendet man die triviale z. F.  $\varepsilon(n)$ , so gilt die Identität (3).

$$(3) \quad \sum_{d|n} \mu(d) = \varepsilon(n)$$

IV. Diese Identität und die Möbiussche Funktion genügen zur Herleitung der wichtigen *Möbiusschen Umkehrformeln*: Besteht für zwei z. F.en  $f(n)$  und  $g(n)$  eine der beiden Funktionalgleichungen (4), so besteht auch die andere.

$$(4) \quad \sum_{d|n} f(d) = g(n), \quad \sum_{d|n} \mu(n/d) \cdot g(d) = f(n)$$

V. Die *Eulersche Funktion*  $\varphi(n)$  gibt die Anzahl der primen Restklassen modulo  $n$  an ( $\nearrow$  Kongruenz von Zahlen). Für sie besteht die Funktionalgleichung (5).

$$(5) \quad \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Nach Anwendung der Möbiusschen Umkehrformeln erhält man danach die Beziehung (6) und nach kurzer Umrechnung unter Zugrundelegung der Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}$  die Produktformel (7); hieraus folgt  $\varphi(p^r) = p^{r-1} (p - 1)$  und  $\varphi(p) = p - 1$  für Primzahlen  $p$ .

$$(6) \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot (n/d)$$

$$(7) \quad \varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_r) \\ = n \prod_{p|n} (1 - 1/p)$$

$$(8) \quad \varphi(n) = \prod_{p|n} \varphi(p^{r_p}), \quad \varphi(n)/n = \prod_{p|n} [\varphi(p)/p]$$

Ferner folgen aus der Produktformel die Gleichungen (8) und hieraus für teilerfremde Zahlen  $n_1, n_2$  die Beziehung  $\varphi(n_1 \cdot n_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2)$ .

VI. Besonderes Interesse wandten die Mathematiker der Funktion  $\pi(x)$  zu, die die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich  $x$  angibt. Carl Friedrich GAUSS vermutete, daß  $\pi(x)$  in erster Annäherung durch den *Integrallogarithmus*  $\text{Li } x = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$  bestimmt wird. Die Abschätzung des Restes  $\pi(x) - \text{Li } x$ , der positiv oder negativ sein kann, bereitet große Schwierigkeiten. Sie steht in Verbindung mit der nach Bernhard RIEMANN (1826–1866) ben. Vermutung, die sich auf die Lage der komplexen Nullstellen der Riemannschen  $\nearrow$  Zetafunktion bezieht.

**Zahlentheorie:** Teilgebiet der Mathematik, das die Eigenschaften natürlicher Zahlen untersucht.

I. In der *elementaren Z.* stehen Fragen der Teilbarkeit im Vordergrund und damit der Begriff der Primzahl. Die Betrachtungsweise und die Beweismethoden der elementaren *Z.* haben rein arithmetischen Charakter. Sie beruhen im wesentlichen auf den Begriffen der Anordnung und der Teilbarkeit. Obzwar viele zahlentheoretische Probleme einfach und für jeden verständlich formuliert werden können, erweist sich ihre Lösung oft als außerordentlich schwierig, und einige sind bis zum heutigen Tage noch nicht vollständig entschieden, z. B. die Fermatsche Vermutung und das Goldbachsche Problem. Deshalb werden in der *höheren Z.* auch Begriffsbildungen der Algebra und der Analysis zum Beweis grundlegender zahlentheoretischer Sätze herangezogen. Die höhere *Z.* läßt sich unterteilen

in analytische, additive und algebraische *Z.*, zwischen denen aber fließende Übergänge bestehen.

II. Die *analytische Z.* bedient sich der Hilfsmittel der reellen Analysis und der komplexen Funktionentheorie. Wichtige Probleme sind z. B. der *Dirichletsche Primzahlsatz* ( $\nearrow$  Primzahl VI.1.), das Problem der *Primzahlverteilung*, asymptotische Untersuchungen zahlentheoretischer Funktionen und *Gitterpunktprobleme* ( $\nearrow$  Geometrie der Zahlen).

III. Die Fragestellungen der *additiven Z.* werden durch einige spezielle Sätze und Probleme charakterisiert:

III.1. *Satz von Lagrange:* Jede natürliche Zahl  $n$  läßt sich als Summe von höchstens vier ganzzahligen Quadraten darstellen; z. B. kann 11 als Summe von drei Quadraten  $3^2 + 1^2 + 1^2$  geschrieben werden, 7 erfordert jedoch vier Summanden,  $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ .

III.2. *Waringproblem*, 1770 von Edward WARING gestellt und 1909 von David HILBERT gelöst: Jede natürliche Zahl  $n$  ist Summe von höchstens  $g(k)$   $k$ -ten Potenzen natürlicher Zahlen; dabei bedeutet  $g(k)$  eine natürliche Zahl, die nicht von  $n$  abhängt. Nach dem Satz von Lagrange ist  $g(2) = 4$  und  $g(3) = 9$ . Es ist interessant, daß man bei hinreichend großem  $n$  für  $k \geq 3$  weniger als  $g(k)$  Summanden braucht.  $239 = 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3 + 1^3$  ist die größte Zahl  $n$ , deren Zerlegung in eine Summe von Kuben 9 Summanden erfordert. Für alle größeren natürlichen Zahlen erfordert die Zerlegung in eine Summe von Kuben weniger Summanden als 9. Es ist bewiesen, daß es eine natürliche Zahl  $n$  geben muß, von der an eine Summe von 7 Kuben genügt.

III.3. *Goldbachsche Vermutung:* Ch. GOLDBACH (1690–1764) stellte 1742 in einem Brief an L. EULER die Vermutung auf, daß jede gerade Zahl  $n \geq 6$  die Summe von zwei ungeraden Primzahlen ist. Diese Vermutung konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden.

J. W. WINOGRADOW (geb. 1891) gelang der Beweis des *Dreiprimzahlsatzes*: Jede hinreichend große ungerade Zahl  $n$  ist Summe von drei ungeraden Primzahlen.

III.4. Unter einer *Partition einer natürlichen Zahl n* versteht man eine Darstellung von  $n$  als Summe von natürlichen Zahlen. Beschränkt man die Anzahl der Summanden nicht, läßt gleiche Summanden zu und sieht von der Anordnung der Summanden ab, so bezeichnet  $p(n)$  die Anzahl dieser Partitionen von  $n$ , z. B. sind  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 4 = 2 + 3 = 5$  die 7 Partitionen von 5, d. h.,  $p(5) = 7$ . Für große  $n$  gilt (1).

$$(1) \quad p(n) \approx \exp \left[ \pi \sqrt{2n/3} \right] / [4n \sqrt{3}]$$

Allgemeiner lautet eine Grundfrage der additiven *Z.*, ob sich jede natürliche Zahl als Summe von  $s \geq 2$  Elementen aus einer gegebenen Menge  $A$  natürlicher Zahlen darstellen läßt.

IV. Die *algebraische Z.* bedient sich der Mittel der *algebraischen Zahlkörper* ( $\nearrow$  Zahlkörper II.). Ein auch durch diese Mittel noch nicht gelöstes Problem

ist die *Fermatsche Vermutung*, daß es für keinen ganzzahligen Exponenten  $n > 2$  ganze, von Null verschiedene Zahlen  $x, y, z$  gibt, die der Gleichung  $x^n + y^n = z^n$  genügen. Für diese Vermutung liegen erst Teilergebnisse vor, z. B. weiß man, daß sie für alle Exponenten  $n \leq 4002$  richtig ist.

V. Als fest begründete und logisch aufgebaute Theorie gehört die *Z.* zu den jüngeren Zweigen der Mathematik, obwohl die natürlichen Zahlen den ersten Gegenstand mathematischer Untersuchungen überhaupt bildeten. Bereits die *Sumerer* und die *Babylonier* sowie die *alten Ägypter* verfügten über Kenntnisse bezüglich der Eigenschaften der natürlichen Zahlen. Doch erst im Zusammenhang mit der *pythagoreischen Schule* (etwa 500 v. u. Z.) kann man von eigentlichen zahlentheoretischen Untersuchungen sprechen. Die erste systematische Darstellung der bis dahin bekannten Ergebnisse der *Z.* gab EUKLID in seinen *Elementen*. Nach Euklid ist vor allem DIOPHANTOS von Alexandria zu nennen ( $\nearrow$  diophantische Gleichungen). Von den *Arabern* wurde die *Z.* nur wenig bereichert. Dagegen war die durch sie erfolgte Übernahme des Zehnerpositionssystems von den *Indern* grundlegend für die weitere Entwicklung der *Z.*, die allerdings erst im 17. Jh. in Europa durch den französischen Mathematiker Pierre de FERMAT zu neuer Blüte gelangte. Mit seinem Namen ist eine ganze Reihe zahlentheoretischer Probleme verbunden, die den Anlaß zu vielen fruchtbringenden Untersuchungen gaben. Die hervorragenden Zahlentheoretiker des 18. Jh. waren L. EULER, J. L. LAGRANGE und A. M. LEGENDRE. Die eigentliche Grundlegung der *Z.* als Wissenschaft gab GAUSS in seinem epochemachenden Werk *Disquisitiones Arithmeticae* (1801). Im 19. Jh. gaben bes. C. G. J. JACOBI, P. G. L. DIRICHLET, der die Methode der Analysis in die *Z.* einführte, E. E. KUMMER, P. L. TSCHEBYSCHOW, L. KRONECKER und R. DEDEKIND der *Z.* ihr Gepräge. In letzter Zeit sind besonders K. HENSEL (1861 bis 1941), H. HASSE, André WEIL sowie die erfolgreiche sowjetische zahlentheoretische Schule zu nennen.

**Zahlentripel, pythagoreisches**  $\nearrow$  Pythagoras, Satz des.

**Zähler**  $\nearrow$  Brüche I.

**Zahlklasse**  $\nearrow$  Ordinalzahl.

**Zahlkörper:** I. jede Menge von reellen oder komplexen Zahlen mit der Eigenschaft, daß die Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, außer der Division durch Null, nicht aus der Menge herausführen ( $\nearrow$  Körper). Die Gesamtheit  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen bildet z. B. einen *Z.*, ebenso die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen oder die der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  oder die Gesamtheit der Zahlen  $a + b\sqrt{5}$ , wenn  $a, b$  rationale Zahlen sind.

II. Besonders eingehend wurden die *algebraischen Z.* untersucht. Das sind die mit einer *algebraischen Zahl*  $\vartheta$  gebildeten endlich algebraischen *Erweiterungskörper*  $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$  ( $\nearrow$  Körper II.) des rationalen *Z.s*  $\mathbb{Q}$ .  $\mathbb{Q}(\vartheta)$  ist die Gesamtheit aller Zahlen, die aus Elementen von  $\mathbb{Q}$  und  $\vartheta$  mit Hilfe der vier Grundrechenarten hervorgehen,  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  z. B. besteht

aus allen Zahlen der Form  $a + b\sqrt{5}$ . Als *algebraische Zahl* wird dabei jede reelle oder komplexe Zahl  $\vartheta$  bezeichnet, die Nullstelle eines Polynoms  $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  von mindestens erstem Grade und mit rationalen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ist. Eine Zahl, die nicht algebraisch ist, heißt *transzendent*. Eine algebraische Zahl  $\alpha$  ist Wurzel unendlich vieler Polynome verschiedener Grade, z. B. erfüllt  $\alpha = \sqrt{3}$  die Gleichungen  $x^2 - 3 = 0$ ,  $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$ ,  $x^4 - 9 = 0$  u. a. Ist  $\alpha$  Nullstelle eines Polynoms vom  $n$ -ten Grade, jedoch nicht Nullstelle von Polynomen kleineren Grades, so heißt  $n$  der *Grad der algebraischen Zahl*  $\alpha$ . Jede rationale Zahl  $a/b$  z. B. ist algebraisch vom 1. Grade, da sie der Gleichung  $bx - a = 0$  genügt;  $\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$  ist algebraisch vom 2. Grade als Lösung der Gleichung  $x^2 - x + 1 = 0$ , und  $\sqrt[3]{2}$  ist algebraisch vom  $n$ -ten Grade als Lösung der Gleichung  $x^n - 2 = 0$ . Der Grad von  $\alpha$  ist genau dann gleich  $n$ , wenn das Polynom  $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  mit  $a_0 \neq 0$  und mit  $p(x) = 0$  irreduzibel über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist.

Ist  $\alpha$  Nullstelle eines Polynoms  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  mit ganzen rationalen Koeffizienten, dessen höchster Koeffizient gleich 1 ist, so heißt  $\alpha$  *ganze algebraische Zahl*. Die Elemente der algebraischen *Z.* sind sämtlich algebraische Zahlen. Die Menge der ganzen algebraischen Zahlen eines algebraischen *Z.s*  $K$  bilden einen Ring  $I$ , den *Ring der ganzen algebraischen Zahlen*, der sogar ein Integritätsbereich ist. In  $I$  gibt es ferner ein endliches System  $\omega_1, \dots, \omega_n$  von ganzen algebraischen Zahlen derart, daß sich jede Zahl  $\alpha$  aus  $I$  eindeutig durch  $\alpha = a_1\omega_1 + \dots + a_n\omega_n$  mit ganzzahligen  $a_1, \dots, a_n$  darstellen läßt. Die Menge  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  heißt *Ganzzheitsbasis* von  $K$ .

III. Betrachtet man ein über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen irreduzibles Polynom  $f(x)$  mit der Nullstelle  $\alpha$ , so heißt jede Nullstelle von  $f(x)$  eine zu  $\alpha$  *konjugierte Zahl*. Sind  $\alpha_1, \alpha_2$  zueinander konjugierte algebraische Zahlen mit  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , so heißen die algebraischen *Z.*  $K_1 = \mathbb{Q}(\alpha_1)$  und  $K_2 = \mathbb{Q}(\alpha_2)$ , die aus  $\mathbb{Q}$  durch Adjunktion von  $\alpha_1$  bzw.  $\alpha_2$  entstehen, zueinander bezüglich  $\mathbb{Q}$  *konjugierte Körper*. Gleichbedeutend damit ist, daß es einen Isomorphismus von  $K_1$  auf  $K_2$  gibt, der  $\mathbb{Q}$  elementweise fest läßt.

Besondere ganze algebraische Zahlen in einem algebraischen *Z.*  $K$  sind die *Einheiten*  $\varepsilon$ , die dadurch gekennzeichnet sind, daß auch  $\varepsilon^{-1}$  eine ganze algebraische Zahl ist. In  $\mathbb{Q}$  sind  $\pm 1$  die einzigen Einheiten. In einem algebraischen *Z.* gibt es aber in der Regel unendlich viele Einheiten. Nach dem *Dirichletschen Einheitensatz* lassen sich diese jedoch sämtlich aus einer endlichen Anzahl von ihnen, den *Grundeinheiten*, durch Multiplizieren und Potenzieren ableiten. Endlich viele Einheiten haben außer  $\mathbb{Q}$  die imaginär-quadratischen *Z.*, für die die erzeugende Zahl  $\vartheta$  komplex ist.

IV. Als *quadratischen Z.* bezeichnet man einen algebraischen Erweiterungskörper  $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$  des rationalen *Z.s*  $\mathbb{Q}$  mit einer algebraischen Zahl  $\vartheta$  vom

Grade 2. Man kann sich beschränken auf den Fall  $\vartheta = \sqrt{d}$ , in dem  $d \neq 1$  eine ganze rationale Zahl ohne quadratische Teiler ist, da alle diese Zahlen  $d$  bereits alle quadratischen Z. liefern. Unter dieser Voraussetzung rechnet man quadratische Z.  $\mathcal{Q}(\sqrt{d})$  mit  $d \equiv 1 \pmod{4}$  zum 1. Fall und solche mit  $d \equiv 2$  oder  $d \equiv 3 \pmod{4}$  zum 2. Fall. Im 1. Fall ist  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d})$ , im 2. Fall  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = \sqrt{d}$  eine Ganzheitsbasis des quadratischen Z.s  $K = \mathcal{Q}(\sqrt{d})$ . Der zu  $\mathcal{Q}(\sqrt{d})$  konjugierte Z. ist  $\mathcal{Q}(-\sqrt{d})$ ; er stimmt mit  $\mathcal{Q}(\sqrt{d})$  überein. Für  $d > 0$  ist  $\sqrt{d}$  reell. Dann sind alle Zahlen aus  $K$  reell, und  $K$  heißt *reell-quadratischer Z.* Für  $d < 0$  ist  $\sqrt{d}$  rein imaginär. Dann sind alle Zahlen aus  $K$ , die nicht zu  $\mathcal{Q}$  gehören, imaginär, und  $K$  heißt *imaginär-quadratischer Z.* Während die imaginär-quadratischen Z. nur endlich viele Einheiten haben, haben die reell-quadratischen Z. unendlich viele Einheiten. Für imaginär-quadratische Z. erhält man z. B. für  $\mathcal{Q}(\sqrt{-3})$  die Einheiten  $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$ ,  $\varepsilon_{3,4} = \pm \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ ,  $\varepsilon_{5,6} = \pm \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$ , für  $\mathcal{Q}(\sqrt{-1})$  die Einheiten  $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$ ,  $\varepsilon_{3,4} = \pm \sqrt{-1}$ , für  $\mathcal{Q}(\sqrt{d})$  mit  $d < 3$  die Einheiten  $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$ . Die Bestimmung der Einheiten läuft darauf hinaus, alle ganzzahligen Lösungen der *Pellschen Gleichung*  $x^2 - dy^2 = \pm 1$  für  $d \equiv 1 \pmod{4}$  bzw.  $(2x + y)^2 - dy^2 = \pm 4$  für  $d \equiv 1 \pmod{4}$  zu bestimmen. Als Einheiten ergeben sich dann die Zahlen  $\varepsilon = x + y\sqrt{d}$ , falls  $d \equiv 1 \pmod{4}$  bzw.  $\varepsilon = x + \frac{1}{2}y(1 + \sqrt{d})$ , falls  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , wenn  $(x, y)$  alle ganzzahligen Lösungspaare obiger Gleichungen durchläuft.

**Zahlzeichen** ↗ Zahl.

**Zahlzeichen, römische** ↗ Zahlensystem I.

**Zehneck, regelmäßiges konvexes:** I. regelmäßiges konvexes  $n$ -Eck mit 10 Eckpunkten. Sein Mittelpunktswinkel hat die Größe  $\varphi_{10} = 360^\circ/10 = 36^\circ$  und danach ein Basiswinkel etwa im Bestimmungsdreieck  $ABM$  die Größe  $\beta_{10} = (180^\circ - \varphi_{10})/2 = 72^\circ$  (Abb. 1). Die Winkelhalbierende eines Basiswinkels, z. B.  $BC$  von  $\sphericalangle ABM$ , teilt vom Bestimmungsdreieck ein Dreieck  $ABC$  ab, das wegen der Größe seiner Winkel dem Dreieck  $ABM$  ähnlich ist. Außerdem ist das Restdreieck  $BMC$  gleichschenkelig, d. h.  $|MC| = |CB| = |AB| = s_{10}$ . Aus  $\triangle BMA \sim \triangle ABC$  folgt dann  $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$ , d. h., die Seitenlänge  $s_{10}$  ergibt sich als der größere Abschnitt einer nach dem Goldenen Schnitt geteilten Strecke von der Länge des Radius  $r$  (↗ stetige Teilung),  $s_{10} = (r/2)(\sqrt{5} - 1)$ .

II. Verbindet man einen Eckpunkt  $B$  des Z.s mit seinem übernächsten Eckpunkt  $D$  (↗ Abb. 1), so ist die Verbindungsstrecke  $BD$  eine Seite des *regelmäßigen konvexen Fünfecks*.

Aus  $s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$  (↗  $n$ -Eck III.) erhält man für seine Länge  $s_5 = (r/2)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ . Dieses Fünfeck hat  $n(n-3) = 10$  Diagonalen, die aus Symmetriegründen gleiche Länge haben und von denen sich zwei von benachbarten Ecken des Fünfecks ausgehende Diagonalen in einem Punkt schneiden, der auf einer der Verbindungsgeraden  $MP_i$  mit  $i = 1, \dots, 10$  liegt,  $P_5P_1$  und  $P_2P_7$ , z. B. im Punkte  $F$  auf  $MP_4$  (Abb. 2). Das Dreieck  $FP_3P_5$  ist gleichschenkelig mit  $|FP_3| = |FP_5|$ . Im Bestimmungsdreieck  $MP_2P_3$  des Zehnecks hat der Mittelpunktswinkel die Größe  $|\sphericalangle P_2MP_3| = \varphi_{10} = 36^\circ$  und der Basiswinkel die Größe  $|\sphericalangle P_3P_2M| = \beta_{10} = 72^\circ$ ; im Bestimmungsdreieck  $MP_5P_3$  des Fünfecks gilt  $|\sphericalangle P_3MP_5| = \varphi_5 = 72^\circ$  und  $\beta_5 = |\sphericalangle MP_5P_3| = 54^\circ$ . Da der Umfangswinkel halb so groß ist wie der Mittelpunktswinkel über dem gleichen Bogen, gilt  $|\sphericalangle P_5P_3P_7| = 18^\circ$  im Dreieck  $P_5P_3P_7$  und deshalb  $|\sphericalangle FP_3P_5| = \beta_5 - 18^\circ = 36^\circ = \varphi_{10} = |\sphericalangle P_5P_3F|$ . Aus  $180^\circ - 2\varphi_{10} = 108^\circ = |\sphericalangle P_3FP_5|$  folgt  $|\sphericalangle P_5FP_7| = 72^\circ = \beta_{10}$ , so daß wegen  $|\sphericalangle FP_3P_5| = |\sphericalangle FP_7P_5| = \varphi_{10}$  im gleichschenkligen Dreieck  $P_3P_5P_7$  folgt  $|\sphericalangle FP_5P_7| = 72^\circ = \beta_{10}$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $P_3P_5M$  und  $FP_5P_7$  erhält man aber  $s_{10} : r = |FP_5| : |FP_7| = |FP_3| : |FP_7|$  sowie  $|FP_7| = |P_7P_5| = s_5$ . In Wort ten bedeutet dies, daß der Schnittpunkt zweier

Diagonalen

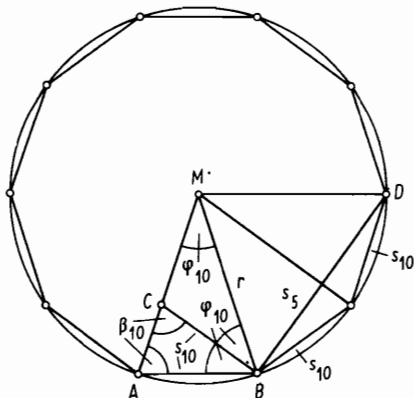
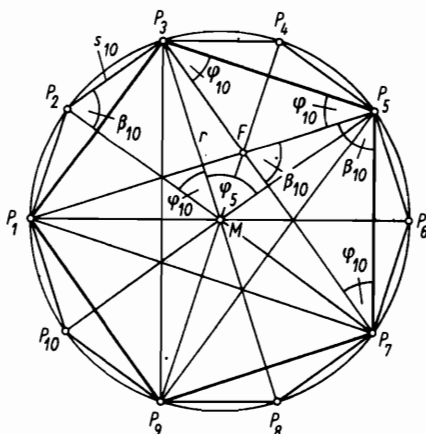


Abb. 1: Regelmäßiges Zehneck



Zehneck. Abb. 2: Regelmäßiges konvexes Fünfeck mit Diagonalen

Diagonalen jede von ihnen stetig teilt und daß die Länge der Seite des Fünfecks gleich der Länge des größeren Abschnitts der stetig geteilten Diagonale dieses Fünfecks ist. Alle Diagonalen des konvexen regelmäßigen Fünfecks bilden ein *Sternfünfeck* oder *Pentagramm*, ein nicht einfaches geschlossenes ebenes regelmäßiges Fünfeck ( $\nearrow$  *n*-Eck), z. B.  $P_1P_7P_3P_9P_5$ .

**Zehnerlogarithmus** svw. dekadischer Logarithmus I., s. a. Logarithmensystem I.

**Zehnerpotenzen:** die Potenzen  $10^n$  für ganzzahlige Exponenten *n*. Ist *n* ein ganzzahliges Vielfaches von 6, so haben die Z. besondere Bezeichnungen: *Mil-lion* für  $10^6$ , *Billion* für  $10^{12}$ , *Trillion* für  $10^{18}$ , *Quad-rillion* für  $10^{24}$ , *Quintillion* für  $10^{30}$ , *Sextillion* für  $10^{36}$ , *Septillion* für  $10^{42}$  usw.; für  $n = 6k + 3$  mit  $k \in \mathbf{N}$  werden oft die Bezeichnungen *Milliarde* für  $10^9$ , *Billiarde* für  $10^{15}$  und *Trilliarde* für  $10^{21}$  verwendet. In der UdSSR und in den USA sind Zahlwörter mit *illiard* nicht üblich; die mit *-illion* gebildeten Wörter bezeichnen die Zahlen  $10^{3k+3}$ , z. B. bedeutet  $10^9 = 10^{3 \cdot 2+3}$  Billion,  $10^{12} = 10^{3 \cdot 3+3}$  Trillion,  $10^{15} = 10^{3 \cdot 4+3}$  Quadrillion,  $10^{18} = 10^{3 \cdot 5+3}$  Quintillion usw.

Die Z. geben den Stellenwert der Ziffern bei der Schreibweise der Zahlen im Zehnersystem ( $\nearrow$  Zahlensystem) an. Sie werden benutzt zur abgekürzten Darstellung großer Zahlen durch nur zuverlässige Ziffern; ist z. B. in 1293000 die letzte zuverlässige Ziffer 3, so schreibt man  $1293 \cdot 10^3$  oder  $1,293 \cdot 10^6$ . Auch zur Darstellung sehr kleiner Zahlen eignen sich Z., um nur die zuverlässigen Ziffern anzugeben, z. B. wird der Durchmesser des Wasserstoffatoms mit  $1,06 \cdot 10^{-8}$  cm angegeben.

**Zehnersystem**  $\nearrow$  Zahlensystem V.

**Zehnerübertrag**  $\nearrow$  Addition II.,  $\nearrow$  Multiplikation III.

**Zeichen, Symbol:** Sinnbild, Element einer vereinbarten Menge, dem eine vereinbarte Bedeutung zukommt ( $\nearrow$  Formalisierung); die vereinbarte Menge wird meist als endlich angenommen und oft als *Alphabet* bezeichnet. Bekannt sind z. B. Verkehrs-Z., Licht-Z., akust. Z. und graph. Z.; bes. Bedeutung haben in der Mathematik die Z. für Ziffern zur Darstellung von Zahlen, die Z. für Buchstaben zur Darstellung von variablen Größen, die Operations-Z. wie +, -, ·, :, die Z. für Funktoren und Quantoren und die techn. Z. wie Klammern verschiedener Art. *Numer. Z.* sind auf Ziffern beschränkt, *alpha-numer. Z.* umfassen Ziffern, Buchstaben, Operations-Z. und techn. Z.

Als *Wort* bezeichnet man jede endl. Folge von Z. aus einem Alphabet *A* ( $\nearrow$  Semiotik). Zwischen den Wörtern aus dem *Binäralphabet* {0, 1} und den Wörtern in dem der Dezimalzahlen bestehen z. B. folgende Äquivalenzbeziehungen  $LL \leftrightarrow 3$ ,  $LLOOLOL \leftrightarrow 101$ ; im Alphabet  $(x, y, z, <, \cdot, (, ))$  z. B. ist  $(x < y \cdot z)$  ein Wort.

In digitalen Rechenanlagen werden *Maschinenwörter* als endl. Folgen von Binär-Z. verarbeitet. Durch ein Maschinenwort können z. B. ein *Befehl* oder eine *Zahl* dargestellt werden. Die *Wortlänge* ist sehr unterschiedlich. Sie schwankt zwischen 12

und 60 Bit. Die meisten Anlagen arbeiten mit variabler, vom Programmierer wählbarer Wortlänge. Im Falle fester Wortlänge entspricht einem Maschinenwort der Inhalt eines Speicherplatzes. Durch eine Syntax können aus allen über einem Alphabet bildbaren Wörtern bestimmte als zulässig ausgedeutet werden. Man erhält dann eine *Sprache* als formalen Rahmen für den Aufbau einer axiomat. Theorie bzw. für die Angabe von Algorithmen; um z. B. aus dem Alphabet {0, 1, +, -, ·, :} das Rechnen mit ganzen Zahlen aufbauen zu können, müssen als Syntax die bekannten Regeln für die verwendeten Operations-Z. zugefügt werden.

**Zeichenebene**  $\nearrow$  Projektion I.

**Zeichenreihe**  $\nearrow$  Formalisierung.

**Zeilendrucker**  $\nearrow$  digitale Rechanlage I.2.

**Zeilenmatrix**  $\nearrow$  Matrix I.

**Zeilenvektor**  $\nearrow$  Matrix I.,  $\nearrow$  Determinante III.

**Zeitfunktion:** Funktion, deren unabhängige Veränderliche die Zeit ist. Z.en werden in kybernet. Systemen benutzt, um die Werteverläufe des Informationsparameters der Eingangs-, der Ausgangs- und der Zustandsgrößen ( $\nearrow$  System) deterministisch zu beschreiben.

I. Unter den *Standardeingangssignalen* sind die Sprungfunktion, die Impulsfunktion und die Anstiegsfunktion von Bedeutung.

I.1. Die *Sprungfunktion*  $s(t) = s_0 \cdot 1(t)$  ist definiert durch die Größe  $s_0$  des *Schaltssprungs* und die *Einheitssprungfunktion*  $1(t)$ , die für  $t < 0$  den Wert 0 und für  $t \geq 0$  den Wert 1 annimmt. Die Sprungfunktion kann als mathemat. Abbild des Ein- bzw. Ausschaltens einer Gleichgröße, z. B. einer Gleichspannung, zum Zeitpunkt  $t = 0$  gedeutet werden. Signalverläufe vom Charakter einer Sprungfunktion werden vorzugsweise als Testsignale im Rahmen der Systemidentifikation angewendet.

I.2. Die *Delta- oder Impulsfunktion* ist im streng mathemat. Sinne keine Funktion, sondern wird als Distribution definiert. Ihre Einführung erfolgt meist über eine Rechteck-Impulsfunktion  $r(t) = r_0[1(t) - 1(t - \tau)]$  mit der Nebenbedingung (1) und Bildung des Grenzübergangs (2). Die  $\delta$ -Funktion ist nur in mathemat. Hinsicht bedeutungsvoll.

$$(1) \quad \int_0^{\tau} r(t) dt = 1$$

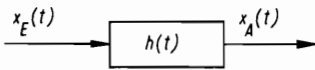
$$(2) \quad \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1(t) - 1(t - \tau)}{\tau} = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

Bei der experimentellen Systemuntersuchung arbeitet man an ihrer Stelle mit der Rechteck-Impulsfunktion  $r(t)$  und wählt dabei die Impulsbreite  $\tau$  möglichst so klein, daß innerhalb dieses Zeitintervalls noch keine meßbaren Änderungen am Systemausgang zu verzeichnen sind.

I.3. Die *Anstiegsfunktion* oder *Rampenfunktion:* Sie ist definiert durch die Forderung, daß  $a(t)$  für  $t < 0$  den Wert 0 und für  $t \geq 0$  die Werte  $k \cdot t$  annimmt. Sie wird in der Praxis meist erzeugt durch Integration der Sprungfunktion. Ihre besondere Bedeutung liegt vor allem auf dem Gebiet der Oszillographen- und Fernsehtechnik.

II. Die Zeitfunktionen der Systemausgangsgrößen werden nicht nur von dem Aufbau des betreffenden Systems bestimmt, sondern hängen wegen der vorausgesetzten Gültigkeit des Kausalitätsprinzips eindeutig vom zeitl. Verlauf der jeweiligen Eingangsgrößen ab. Aus der Menge dieser Zeitfunktionen sind diejenigen bedeutsam, die die Systemantworten auf bestimmte Standard-Zeitfunktionen darstellen. Hierzu zählen vor allem die Übergangsfunktion und die Gewichtsfunktion.

II.1. Die *Übergangsfunktion* stellt die Antwort eines Systems auf eine Einheitssprungfunktion oder auf eine verallgemeinerte Sprungfunktion  $s(t)$  dar, die auf den Schaltsprung  $s_0$  normiert ist; d. h., es gilt  $h(t) = x_A(t)$ , falls  $x_E(t) = 1(t)$  oder  $h(t) = (1/E) x_A(t)$ ,



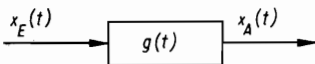
Zeitfunktion. Abb. 1: Symbol der Übergangsfunktion

falls  $x_E(t) = s(t)$  (Abb. 1). Wegen  $1(t) = 0$  bzw.  $s(t) = 0$  für  $t < 0$  gilt auch  $h(t) = 0$  für  $t < 0$ . Die Übergangsfunktion stellt darüber hinaus ebenfalls eine *allgemeine Systemcharakteristik* dar; dabei ist die Verknüpfung von  $h(t)$  mit beliebigen Eingangs- bzw. Ausgangszeitfunktionen mittels des *Duhamel'schen Integrals* durch die Integralgleichung (3) gegeben.

$$(3) \quad x_A(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x_E(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Die Übergangsfunktion hat erhebl. prakt. Bedeutung, da sie leicht meßbar ist und viele in der Praxis auftretende Erregungen näherungsweise Sprungfunktionen sind. Die Übergangsfunktion kann rechnerisch z. B. durch Lösen der beschreibenden Differentialgleichung für die Eingangszeitfunktion  $x_E(t) = 1(t)$  oder über die Laplace-Transformation für die transformierte Erregung  $X_E(p) = 1/p$  gewonnen werden.

II.2. Die *Gewichtsfunktion* stellt die Antwort eines Systems auf eine Impulsfunktion dar, d. h.  $g(t) = x_A(t)$ , falls  $x_E(t) = \delta(t)$  (Abb. 2). Wegen  $\delta(t) = 0$  für  $t < 0$  gilt auch  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ .



Zeitfunktion. Abb. 2: Symbol der Gewichtsfunktion

Für die Berechnung der Gewichtsfunktion ist es manchmal wichtig, den Zusammenhang zur Übergangsfunktion  $h(t)$  zu kennen, dabei gilt  $g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ .

Der Gewichtsfunktion kommt eine fundamentale Bedeutung als *verallgemeinerte Kennfunktion* für die Systembeschreibung im Zeitbereich zu. Für beliebige Erregungen  $x_E(t)$  gilt hierbei die Integralgleichung (4). Diese Beziehung bezeichnet man ma-

thematisch als *Faltungsintegral*, für das häufig (4a) als symbol. Schreibweise benutzt wird.

$$(4) \quad x_A(t) = \int_0^t g(t - \tau) x_E(\tau) d\tau$$

$$(4a) \quad x_A(t) = g(t) * x_E(t) = x_E(t) * g(t)$$

Durch Fourier-Transformation der Gewichtsfunktion gelangt man direkt zur Beschreibungsform des *Frequenzgangs*  $G(i\omega) = F\{g(t)\}$  und durch Laplace-Transformation zur *Übertragungsfunktion*  $G(p) = L\{g(t)\}$ .

**Zeitinvarianz**  $\nearrow$  System II.

**Zeitmultiplexbetrieb**  $\nearrow$  Betriebssystem I.,  $\nearrow$  Programmierung des Prozeßrechners II.

**Zeitreihenanalyse**: mathematisch-statist. Auswertung von *Zeitreihen*, d. h. von Folgen zahlenwertiger Beobachtungsergebnisse eines Vorgangs in Abhängigkeit von der Zeit. Der Begriff der *Zeitreihe* dient in vielen Gebieten der Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie zur Beschreibung der zeitl. Entwicklung beobachteter Vorgänge. Das Grundproblem der Z. besteht darin, aus endlich vielen beobachteten Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  Gesetzmäßigkeiten des zeitl. Ablaufs  $x_t$  zu erkennen. Da es sich i. allg. um zufällige Erscheinungen handelt, faßt man eine *Zeitreihe* als *Realisierung einer zufälligen Folge* auf ( $\nearrow$  stochastischer Prozeß I.). Man zerlegt  $x_t$  in mehrere Komponenten:  $x_t = m_t + s_t + z_t$ . Dabei ist  $m_t$  der *Trend*, der zum Ausdruck bringt, wie sich der Vorgang in der Tendenz entwickelt,  $s_t$  sind die period. Schwankungen, z. B. *Saisonschwankungen* im Absatz eines Erzeugnisses, und  $z_t$  enthält die zufälligen Einflüsse und wird als stationär stochast. Prozeß aufgefaßt. Für die Berechnung der einzelnen Komponenten gibt es verschiedene spezielle Verfahren, z. B. für die Berechnung des Trends die Methode der gleitenden Mittelwerte.

**Zeitreihe**  $\nearrow$  Rentenrechnung I.

**Zeitsteuerung**  $\nearrow$  Steuerung II.

**Zeiteilverfahren**  $\nearrow$  Betriebssystem I.

**Zeittransformation**  $\nearrow$  Programmierung des Analogrechners II.

**Zenti**  $\nearrow$  Strecke V.

**Zentilliter**  $\nearrow$  Rauminhalt II.

**Zentrale**  $\nearrow$  Kreistangente II.,  $\nearrow$  Kreis II.

**zentrale Differenzen**  $\nearrow$  Interpolation II.

**Zentraleinheit**  $\nearrow$  Digitalrechner, s. a. digitale Rechenanlage I., I.3.

**zentrale Momente**  $\nearrow$  Momente I., s. a. Stichprobenmoment.

**zentrales Feld**  $\nearrow$  skalares Feld I.

**Zentralmodell**  $\nearrow$  Modell, mathematisches II.

**Zentralprojektion**  $\nearrow$  Projektion I.

**Zentralpunkt**  $\nearrow$  Spiegelung II.,  $\nearrow$  Symmetrie II.

**zentralsymmetrisch**  $\nearrow$  Symmetrie II.

**Zentralwert**  $\nearrow$  Mittelwerte II.

**zentrierte Zufallsgröße**: eine *Zufallsgröße* mit dem *Erwartungswert* Null. Ist  $X$  eine beliebige Zufallsgröße, so ist  $X - EX$  eine z. Z. — S. a. Normalverteilung I.

**Zentriwinkel**  $\nearrow$  Kreis I., II.

**Zentrum**  $\nearrow$  Ellipsoid I.,  $\nearrow$  Kreis I.,  $\nearrow$  Kugel I.

**Zentrum der Verteilung** ↗ Erwartungswert II.  
**Zerfällungsknotenpunkt** ↗ Packungs- und Repräsentationsprobleme II.

**Zerfällungskörper** ↗ Körper II.

**Zerlegung** ↗ Äquivalenzrelation III.

**zerlegungsgleich:** Bezeichnung für zwei ebene Figuren, die so in endlich viele Dreiecke zerlegt werden können, daß jedem Dreieck der einen Figur eindeutig ein kongruentes Dreieck der anderen Figur entspricht. Analog heißen zwei Körper zerlegungsgleich, wenn sie so in endlich viele Tetraeder zerlegt werden können, daß jedem Tetraeder des einen Körpers eindeutig ein kongruentes Tetraeder des anderen Körpers entspricht. Wenn zwei ebene Figuren bzw. zwei Körper zerlegungsgleich sind, dann sind sie auch flächen- bzw. volumengleich. Wenn zwei ebene Vielecke flächengleich sind, dann sind sie auch zerlegungsgleich. Für Körper gilt ein analoger Satz nicht; z. B. sind ein Würfel und ein regelmäßiges Tetraeder, die gleichen Rauminhalt haben, nicht zerlegungsgleich.

**Zermelo, Ernst,** geb. 27. 7. 1871 Berlin, gest. 21. 5. 1953 Freiburg/Br. — Z. studierte in Berlin, Halle und Freiburg. Seit 1894 war er in Berlin, seit 1899 in Göttingen tätig. Es folgte eine Professur in Zürich, und seit 1926 arbeitete Z. in Freiburg. — Z. ist einer der Begründer der *axiomatic Mengenlehre*. Er arbeitet aber auch über Variations- und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Zeroring** [zero, arab. engl., *Null*]: Ring, in dem alle Produkte  $ab = 0$  sind. Jede additive abelsche Gruppe liefert einen Z., indem man stets  $ab = 0$  setzt.

**Zetafunktion, Riemannsche:** die durch die Reihe (1) definierte Funktion  $\zeta(z)$ . Die Reihe (1) konvergiert nur für  $\text{Re } z > 1$ , jedoch läßt sich die durch sie dargestellte Z. als meromorphe Funktion in die ganze  $z$ -Ebene fortsetzen (↗ analytische Fortsetzung). Dazu geht man in der Beziehung (2) für die

$$(1) \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Gamma-Funktion  $\Gamma(z)$  durch die Substitution  $s = nt$  über zu (3), woraus man (4) durch Summation über  $n$  erhält. Daraus ergibt sich (5), wobei der Integrationsweg  $C$  bei  $+\infty$  beginnend unter der

$$(2) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s} ds$$

$$(3) \quad \Gamma(z)/n^z = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt$$

$$(4) \quad \Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

$$(5) \quad \Gamma(z) \zeta(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi iz}} \int_C \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$$

positiven reellen Achse verläuft, den Nullpunkt in mathematisch negativem Sinne umgeht und oberhalb der positiven reellen Achse nach  $+\infty$  zurück-

führt. Durch (5) ist die Z. als überall meromorphe Funktion definiert.

Als einzige Singularität hat die Z. einen einfachen Pol für  $z = 1$  mit dem Residuum 1. Die Nullstellen der Z. sind für  $\text{Re } z > 1$  die  $z$ -Werte 3, 5, 7, ...; für  $\text{Re } z < 0$  die  $z$ -Werte  $-2, -4, -6, \dots$ . Man bezeichnet diese als die *trivialen* Nullstellen im Unterschied zu den noch vorhandenen, unendlich vielen *nichttrivialen* Nullstellen der Z., die demzufolge im *krit. Streifen*  $0 \leq \text{Re } z \leq 1$  liegen müssen. Die *Riemannsche Vermutung* besagt, daß sämtl. nichttrivialen Nullstellen der Z. auf der *krit. Geraden*  $\text{Re } z = 1/2$  liegen. Bislang konnte lediglich bewiesen werden, daß auf dieser Geraden unendlich viele nichttriviale Nullstellen liegen.

Da die Z. z. B. für das Problem der Primzahlverteilung (↗ Primzahl II.) bedeutungsvoll ist, wie aus Formel (6) hervorgeht, in der das Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken ist, würde es die genaue Kenntnis der Lage der Nullstellen der Z. gestatten, mehrere für die Primzahlverteilung gefundene Abschätzungen wesentlich zu verschärfen. Auch für andere analytische und arithmetische Probleme

$$(6) \quad \zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

hätte der Beweis der Riemannschen Vermutung weitreichende Folgen.

**Ziel** ↗ Relation I.

**Zielfunktion** ↗ Gütekriterium I., ↗ Optimierung I.

**Zielpunkt eines Bogens** ↗ Graph I.

**Ziffer** ↗ Zahl, ↗ Zahlensystem I.

**Ziffernrechner** svw. Digitalrechner.

**Zinseszinsrechnung:** I. Berechnung der Zinsen für längere Zeiträume unter der Annahme, daß am Ende jedes Jahres die Zinsen zum Kapital hinzugefügt und auf diese Weise ebenfalls verzinst werden. Ist  $k_0$  der zinsbringende Betrag am Anfang des 1. Jahres und  $p$  der Zinsfuß, so sind  $k_0 \cdot p/100$  die Zinsen am Ende dieses Jahres und  $k_1 = k_0 r$  mit  $r = (1 + p/100)$  das Kapital am Anfang des 2. Jahres. Am Ende des 2. Jahres hat man  $k_n = k_1 + k_1 p/100 = k_1 \cdot r = k_0 r^2$ ; am Ende des  $n$ -ten Jahres schließlich  $k_n = k_0 r^n$  mit  $r = (1 + p/100)$ . Die Größe  $r$  wird als *Aufzinsungsfaktor* bezeichnet, mit dem jährlich der zinspflichtige Anfangsbetrag zu multiplizieren ist. Die Beträge am Ende der Jahre sind die Glieder der *monoton wachsenden geometr. Folge*  $\{k_0 r^i\}$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Der Anfangsbetrag  $k_0$  ist nach  $n$  Jahren bei einem Zinsfuß  $p$  auf  $k_n = k_0(1 + p/100)^n = k_0 \cdot r^n$  angewachsen.

II. Aus dieser Gleichung ergeben sich vier Umkehrungsaufgaben.

II.1. Der *Anfangsbetrag* ist  $k_0 = k_n/r^n$ .

II.2. Der *Aufzinsungsfaktor* ist  $r = \sqrt[n]{k_n/k_0}$ .

II.3. Die *Anzahl n der Jahre* ist

$n = (\lg k_n - \lg k_0) / \lg r$ .

II.4. Der *Zinsfuß* ist  $p = 100 \left[ \sqrt[n]{k_n/k_0} - 1 \right]$ .

*Beispiel I:* 5000,— M wachsen in 20 Jahren bei 4% Zinseszins an auf 10955,— M, da  $k_n = k_0 \cdot r^n = 5000 \cdot 1,04^{20} = 5000 \cdot 2,191 = 10955,—$  M.



**Beispiel 2:** Damit der Betrag von 2325,— M bei 3,5% Zinseszins auf 5886,— M anwächst, müssen nach (1) 27 Jahre vergehen.

$$(1) \quad n = (\lg k_n - \lg k_0) / \lg r \\ = (\lg 5886 - \lg 2325) / \lg 1,035 \\ = 0,40340 / 0,01494 = 27,0$$

**Beispiel 3:** In rund 35 Jahren verdreifacht sich nach (2) ein Betrag  $k_0$  bei 3,25% Zinseszins.

$$(2) \quad n = (\lg k_n - \lg k_0) / \lg r = (\lg 3k_0 - \lg k_0) / \lg r \\ = \lg 3 / \lg 1,0325 = 0,47712 / 0,01389 \\ = 34,35$$

**Beispiel 4:** Zu einem Prozentsatz von 3% sind 3225,— M nach (3) und (3a) anzulegen, wenn sie in 60 Jahren durch Zinseszins auf 19000,— M angewachsen sein sollen.

$$(3) \quad p = 100 \left[ \sqrt[n]{k_n/k_0} - 1 \right] \\ (3a) \quad p = 100 \left[ \sqrt[60]{19000/3225} - 1 \right] \\ = 100 \left[ \sqrt[60]{760/129} - 1 \right] \\ = 100 (1,03 - 1) = 3$$

III. In Tabelle (4) sind die Zinsen und Zinseszinsen einzelner Jahre eines Betrages von 500,— M für 3,25% gegenübergestellt (Abb.).

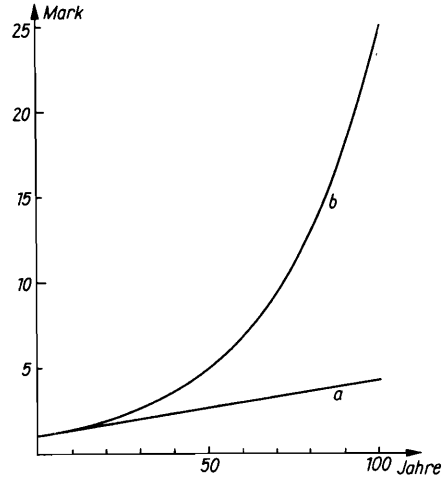
(4)

Zinsen	Zinseszinsen	Jahre
16,25	16,25	1
32,50	33,03	2
48,75	50,35	3
65,00	68,24	4
81,25	86,70	5
162,50	188,45	10
243,75	307,83	15
325,00	447,92	20
406,25	612,30	25
487,50	805,20	30

Einem erst nach  $n$  Jahren zahlbaren Endbetrag  $k_n$  entspricht heute ein Anfangsbetrag  $k_0$ , der bei einem Zinsfuß  $p$  in den  $n$  Jahren anwächst auf  $k_n$ . Die Berechnung des heutigen Anfangswertes nennt man *Diskontierung*. Aus  $k_0 = k_n / r^n$  folgt  $k_0 = k_n \cdot v^n$ , wenn  $v = 1/r$  den *Abzinsungs-* oder *Diskontierungsfaktor* bezeichnet. Der nach  $n$  Jahren fällige Betrag  $k_n$  wird auf die Gegenwart diskontiert.

**Beispiel 5:** Um nach 7 Jahren eine größere Anschaffung im Werte von 9000,— M machen zu können, muß der Betrag  $k_0$  heute auf ein Sparkonto eingezahlt werden. Beträgt der Zinsfuß  $p = 3,25\%$ , so gilt  $k_0 = k_n \cdot v^n$  mit  $v^n = (1/r)^n = (1/1,0325)^7 = 0,7994$ . Durch Einsetzen erhält man  $k_0 = 9000 \cdot 0,7994 = 7194,60$ , d. h., man muß jetzt 7194,60 M auf das Konto einzahlen.

Sparkassen und andere Kreditinstitute berechnen die Werte  $k_0$  und  $k_n$  mit Hilfe der *Zinseszinstabellen*. Hier können für entsprechende Zinssätze  $p$  und



Zinseszinsrechnung: Anwachsen eines Betrages von  $b = 1$  in 100 Jahren, a) mit Zins, b) mit Zinseszins

Jahre  $n$  die Potenzen  $r^n$  bzw.  $v^n$  des Aufzinsungsfaktors  $r$  bzw. des Abzinsungsfaktors  $v$  entnommen werden. Es werden vielfach Tabellenwerte benutzt, die die Werte  $r^n$  bzw.  $v^n$  auf acht Stellen genau angeben.

**Zinsrechnung:** Berechnung eines Zins  $z$  gen. Vergütung für die Nutzung eines Leihobjekts, die abhängt vom Wert  $k$  des Leihobjekts, von der Zeit  $t$  und von einem vereinbarten Prozentsatz  $p$  (↗ Prozentrechnung). Leihobjekte können z. B. sein: Geschäfts- oder Lagerräume, gemietete Wohnungen, gepachtete Gärten oder Felder oder auch geliehenes Geld; ihr Wert  $k$  wird als *Kapital* bezeichnet, der Prozentsatz  $p$  als *Zinssatz*. Die Berechnung des Zinses beruht auf der Vereinbarung, daß der Zins für  $k = 100$  in einem Jahre  $z = p$  beträgt; aus  $k : 100 = z : p$  folgt dann  $z = k \cdot p / 100$  für 1 Jahr, oder  $z = k \cdot p \cdot j / 100$  für  $j$  Jahre. Für kleinere Zeiträume wird das Jahr in 12 gleiche Monate von im Mittel 30 Tagen geteilt, das Jahr mithin in 360 Tage;  $m$  dieser Monate sind dann  $m/12$  Jahr für den Zins; und  $t$  dieser Tage  $t/360$  Jahr. Danach gilt  $z = kpj/100$ ,  $z = kpm/1200$  bzw.  $z = kpt/36000$ . Daraus ergeben sich die Lösungen der Umkehraufgaben nach Tabelle (1).

(1)	$j$ Jahre	$m$ Monate	$t$ Tage
$k =$	$100 z / (p \cdot j)$	$1200 z / (p \cdot m)$	$36000 z / (p \cdot t)$
$p =$	$100 z / (k \cdot j)$	$1200 z / (k \cdot m)$	$36000 z / (k \cdot t)$
$j =$	$100 z / (k \cdot p)$		
$m =$		$1200 z / (k \cdot p)$	
$t =$			$36000 z / (k \cdot p)$

Die Zinsformel  $z = [k \cdot t / 100] \cdot [p / 360]$  zur Bestimmung der Tageszinsen kann in *Zinszahl*  $n = kt/100$  und *Zinsteiler*  $d = 360/p$  mit  $z = n : d$  zerlegt werden, Zinszahlen und Zinsteiler werden dabei aus Tabellen entnommen. Sparkassen und Banken unserer Repu-

blik zahlen für Spareinlagen  $3\frac{1}{4}\%$  Zinsen und gewähren kurz- oder langfristige Kredite. Natürlich verlangen sie für diese Kredite ebenfalls Zinsen.

**Beispiel 1:** Eine Familie erhält von der Sparkasse einen langfristigen Kredit zu  $4\%$  in Höhe von 12000,— M. Nach sechs Jahren zahlt sie diesen Betrag und die anfallenden Zinsen in Höhe von  $z = k \cdot p \cdot j/100 = 120 \cdot 4 \cdot 6 = 2880$ , zurück, d. h. 12000,— M + 2880,— M = 14880,— M.

**Beispiel 2:** Für größere Anschaffungen für den Haushalt nimmt ein Ehepaar 10000,— M Kredit seiner Bank in Anspruch und muß nach 5 Jahren 13000,— M an die Bank zurückzahlen. Da es für  $j = 5$  an Zinsen 3000,— M gezahlt hat, betrug der Zinssatz  $p = 100 z/(k \cdot j) = 100 \cdot 3000/(5 \cdot 10000) = 6\%$ .

**Zinssatz** ↗ Zinsrechnung.

**Zinsteiler** ↗ Zinsrechnung.

**Zinszahl** ↗ Zinsrechnung.

**Zirkel** ↗ Kurvenzeichner I.

**Zirkelfreiheit** ↗ Definition.

**Zirkulation** ↗ Integralsätze II.

**Zissoide** ↗ rationale Kurve V.

**Zornsches Lemma** ↗ Mengenlehre II.

**zufällige Folge** ↗ stochastischer Prozeß II.

**zufällige Funktion** svw. stochastischer Prozeß.

**zufälliger Fehler:** bei jeder Messung auftretende Abweichung des Meßwerts vom wahren Wert der zu messenden Größe auf Grund zufälliger Schwankungen der verschiedensten auf den Meßprozeß einwirkenden Größen (s. a. Fehler IV.). Der z. F. kann als *Zufallsgröße* aufgefaßt werden. Da die einzelnen fehlerverursachenden Komponenten weitgehend unabhängig sind und jede für sich genommen klein ist, kann der z. F. auf Grund des *zentralen Grenzwertsatzes* als normalverteilt angenommen werden mit dem *Erwartungswert* 0. Ist der Erwartungswert des Meßfehlers nicht 0, so enthält die Meßanordnung einen *systemat. Fehler*, d. h., sie ist dann falsch eingestellt.

**zufälliger Prozeß** svw. stochastischer Prozeß.

**zufälliger Versuch:** ein Vorgang, bei dem verschiedene Ausgänge möglich sind, so daß man vorher nicht sagen kann, welcher Ausgang eintreten wird. Es wird ferner vorausgesetzt, daß ein z. V. im Prinzip beliebig oft wiederholbar ist. Ereignisse, die in Abhängigkeit vom Ausgang eines solchen z. V.s eintreten können, heißen *zufällige Ereignisse*, sie werden i. allg. mit  $A, B, \dots$  bezeichnet; z. B. ist »einmaliges Würfeln mit einem Würfel« ein z. V. Die mögl. Ausgänge sind das Fallen einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ein mit diesem z. V. verknüpftes zufälliges Ereignis wäre z. B. »es fällt eine gerade Zahl«. Weitere für die Praxis wichtige Beispiele z. V.e sind etwa die mit zufälligen Fehlern behaftete Messung einer Größe, die Messung von Größen, die zufälligen Einflüssen unterliegen, wie Körpergröße oder Gewicht einer beliebig herausgegriffenen Person, die Registrierung der Anzahl der Anrufe je Zeiteinheit in einer Telefonzentrale, das Ziehen der fünf Zahlen im Tele-Lotto u. a.

**zufälliges Ereignis, Ereignis:** I. ein Ereignis, das mit dem Ausgang eines zufälligen Versuchs zusam-

menhängt, zu dem stets eine Menge  $E$  von zufälligen Ereignissen, das *Ereignisfeld* des Versuchs, gehört. Ein  $E$ ., das stets eintritt, heißt ein *sicheres E.* Sichere Ereignisse braucht man vom Wahrscheinlichkeitstheoret. Standpunkt aus untereinander nicht zu unterscheiden; deshalb spricht man von *dem sicheren E. S.* Ein  $E$ ., das nie eintreten kann, heißt ein *unmögl. E.* Auch hier braucht man verschiedene unmögl. Ereignisse nicht zu unterscheiden und spricht von *dem unmögl. E.* Es wird mit  $\emptyset$  bezeichnet. Im Versuch »Würfeln mit einem Würfel« z. B. ist das  $E$ ., »es fällt eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6« sicher, das  $E$ ., »es fällt 2 und 3 gleichzeitig« ist aber unmöglich. Das  $E$ ., das genau dann eintritt, wenn wenigstens eins der Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eintritt, wird die *Summe der Ereignisse*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  genannt und mit  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  bezeichnet. Bezeichnet z. B.  $A_i$  beim Würfeln mit einem Würfel das  $E$ ., »es fällt  $i$  für  $i = 1, \dots, 6$ , so ist  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$  identisch mit dem  $E$ ., »es fällt eine ungerade Zahl«. Man kann demnach das Zeichen  $\cup$  als »oder« im Sinne des nichtausschließenden oder lesen, d. h.,  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  tritt genau dann ein, wenn  $A_1$  oder  $A_2$  oder ... oder  $A_n$  eintritt. Das  $E$ ., das genau dann eintritt, wenn die Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gleichzeitig eintreten, heißt das *Produkt der Ereignisse*  $A_1, A_2, \dots, A_n$  und wird mit  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  oder auch oft kurz mit  $A_1 A_2 \dots A_n$  bezeichnet. Sind beim Messen einer vom Zufall abhängigen Größe z. B.  $A_1$  das  $E$ ., »die Meßgröße unterschreitet  $\alpha$  nicht« und  $A_2$  das  $E$ ., »die Meßgröße überschreitet  $\beta$  nicht«, so ist  $A_1 \cap A_2$  das  $E$ ., »die Meßgröße  $\xi$  genügt der Beziehung  $\alpha \leq \xi \leq \beta$ . Das Zeichen  $\cap$  kann als »und« gelesen werden, d. h.,  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  tritt genau dann ein, wenn  $A_1$  und  $A_2$  und ... und  $A_n$  eintritt. Das  $E$ ., das genau dann eintritt, wenn  $A$  nicht eintritt, heißt *das zu A komplementäre E.* und wird mit  $\bar{A}$  bezeichnet. Ist beim Würfeln mit einem Würfel z. B.  $A$  das Ereignis »es fällt eine gerade Zahl«, so ist  $\bar{A}$  das  $E$ ., »es fällt eine ungerade Zahl«. Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen *unvereinbar* oder *konträr*, wenn  $A \cap B = \emptyset$ , wenn  $A$  und  $B$  nicht gleichzeitig eintreten können; z. B. sind  $A$  und  $\bar{A}$  stets konträr.

II. Für die Operationen mit zufälligen Ereignissen gelten folgende *Rechenregeln*:

*Kommutativgesetz:*

$$(1) A \cup B = B \cup A \quad (2) A \cap B = B \cap A$$

*Assoziativgesetz:*

$$(3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(4) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

*Distributivgesetz:*

$$(5) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(6) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

*Formeln von de Morgan:*

$$(7) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad (8) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

*konträre Ereignisse:*

$$(9) A \cup \bar{A} = S, \quad (10) A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Die völlige Analogie dieser Formeln mit denen der elementaren Mengenlehre ist eine der Grundlagen

für die auf der Mengentheorie beruhende Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Kolmogorow ( $\nearrow$  Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, III.).

**Zufallsfeld**  $\nearrow$  stochastischer Prozeß II.

**Zufallsgröße, Zufallsvariable:** I. eine reelle Variable, die je nach dem Ausgang eines *zufälligen Versuchs*, d. h. in Abhängigkeit vom Zufall, verschiedene Werte annimmt. Z.n werden mit  $X, Y, \dots$  bezeichnet, die konkreten Werte, die bei einer Realisierung des betreffenden Versuchs angenommen werden, entsprechend mit  $x, y, \dots$  Zur exakten Definition dieses Begriffes vgl. Wahrscheinlichkeitsrechnung, axiomatische, I. und *zufälliges Ereignis*.

Der zufällige Fehler einer Messung ist z. B. eine Z. Bezeichnet man sie mit  $X$  und führt eine konkrete Messung aus, dann ergibt sich ein konkreter Wert  $x$  des Fehlers, den man auch als *Realisierung der Z.*  $X$  bezeichnet. Auch die Länge eines zufällig von einem Baum ausgewählten Blattes ist eine Z. Weitere Z. sind die Anzahl der Atome, die in einer bestimmten Zeit in einer radioaktiven Substanz zerfallen, die Anzahl der Fadenrisse an einem Spinnaggregat je Schicht, die Lebensdauer einer Glühlampe, die zufällig aus einem Posten Glühlampen ausgewählt wurde, und die Anzahl der Knaben in einer zufällig ausgewählten Familie mit fünf Kindern. Allen diesen Größen ist gemeinsam, daß sie sich bei Wiederholung des jeweiligen Versuchs ändern können. Die Anzahl der Fadenrisse an einem Spinnaggregat z. B. wird von Schicht zu Schicht schwanken, weil das Material, die Temperatur, die Luftfeuchtigkeit, kurz alle Größen, die das Reißen des Fadens beeinflussen, zufälligen Schwankungen unterliegen.

Um eine Z. zu charakterisieren, reicht es nicht aus, zu wissen, welche Werte sie annehmen kann, z. B. daß die Anzahl der Fadenrisse eine positive ganze Zahl ist. Man muß vielmehr auch noch wissen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Werte angenommen werden bzw. allgemeiner, wie groß bei vorgegebenen  $a$  und  $b$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Z. einen Wert aus einem Intervall  $[a, b[$  annimmt. Sind diese Wahrscheinlichkeiten für jedes Intervall  $[a, b[$  im Prinzip bekannt, so sagt man, man kenne die *Verteilung, das Verteilungsgesetz, die Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Z. Die Verteilung wird durch die *Verteilungsfunktion* der Z. vollkommen eindeutig festgelegt. Ist  $X$  eine Z., so heißt  $F(x) = P(X < x)$  die Verteilungsfunktion der Z.  $X$ . Der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle  $x_0$  ist somit der Wahrscheinlichkeit dafür gleich, daß die Z. einen Wert annimmt, der kleiner als  $x_0$  ist. Eine Z. ist als gegeben zu betrachten, wenn ihre Verteilungsfunktion gegeben ist, denn sie wird durch die Verteilungsfunktion wahrscheinlichkeitstheoretisch vollständig charakterisiert. Mit Hilfe der Verteilungsfunktion kann sofort die Wahrscheinlichkeit (1) dafür angegeben werden, daß die Z.  $X$  in ein vorgegebenes halb-offenes Intervall fällt.

$$(1) \quad P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Die *Verteilungsfunktion* einer beliebigen Z. hat die charakterist. Eigenschaften (2), (2a), (3) und (4).

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (2a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

(3)  $F(x)$  ist *monoton nicht abnehmend*, d. h., für  $x_1 < x_2$  gilt  $F(x_1) \leq F(x_2)$

(4)  $F(x)$  ist *linksseitig stetig* (s. a. empirische Verteilungsfunktion)

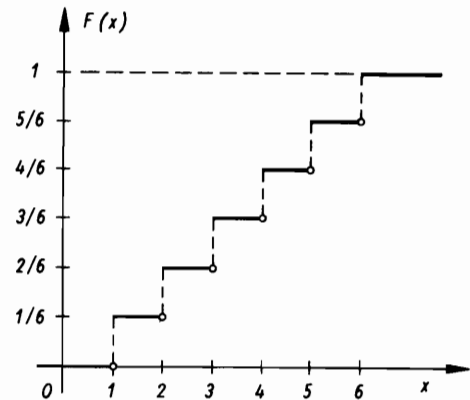
Für die Praxis sind zwei Typen von Z.n von besonderer Bedeutung, die *diskreten* und die *stetigen Z.n*. Vgl. Wahrscheinlichkeit, axiomatische, III.

II. Die *diskrete Z.* kann nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen. Sie wird charakterisiert durch die Werte  $x_1, x_2, \dots$ , die sie annehmen kann, und durch die Wahrscheinlichkeiten  $p_i = P(X = x_i)$ , mit denen sie diese Werte annimmt. Die  $p_i$  müssen die Bedingung  $\sum_i p_i = 1$  erfüllen.

Das System der  $p_i$  wird als *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der diskreten Z. bezeichnet, die einzelnen  $p_i$  heißen die Einzelwahrscheinlichkeiten. Für die Verteilungsfunktion einer diskreten Z. gilt (5); dabei wird zur Berechnung der Summe über alle

$$(5) \quad F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

$i$  summiert, für die die zugehörigen  $x_i < x$  sind.  $F(x)$  ist in diesem Falle eine *Treppenfunktion* mit den  $x_i$  als Sprungstellen und den  $p_i$  als Sprunghöhen (Abb. 1). Die durch ein  $F(x)$  vom Typ (5) beschrie-

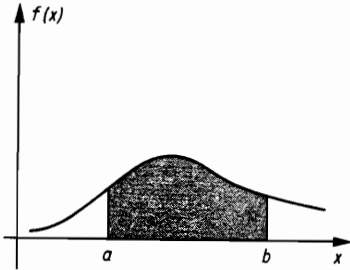


Zufallsgröße. Abb. 1: Beispiel einer Verteilungsfunktion für das Würfeln mit einem Würfel

bene Wahrscheinlichkeitsverteilung wird als *diskrete Verteilung* bezeichnet. Weitere Beispiele einer diskreten Verteilung sind *Einpunktverteilung, Zweipunktverteilung, Indikator eines Ereignisses, Binomialverteilung, hypergeometr. Verteilung, Poisson-Verteilung, Polya-Verteilung*.

III. Die Verteilungsfunktion einer *stetigen Z.* läßt sich durch (6) darstellen. Dabei heißt die Funktion

$$(6) \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



Zufallsgröße. Abb. 2:

Geometrische Deutung von  $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$  bei stetiger Zufallsgröße  $X$  mit der Dichte  $f(x)$

$f(x)$  Dichte, Dichtefunktion, Verteilungsdichte oder Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilung. Wegen  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  muß (7) für die Dichte gelten. Bei ge-

$$(7) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

gebener Dichte erhält man aus (6) die Wahrschein-

$$(8) P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

$$(9) P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

lichkeit (8) dafür, daß die Z.  $X$  in ein vorgegebenes Intervall fällt (Abb. 2). Es gilt (9).  
Die Wahrscheinlichkeit  $P(X = a)$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine stetige Z. eine vorgegebene reelle Zahl annimmt, ist stets Null. Man sieht hieraus: Es ist zwar  $P(\emptyset) = 0$  ( $\nearrow$  I.), aber umgekehrt folgt aus  $P(A) = 0$  nicht, daß  $A$  das unmögliche Ereignis ist. Beispiele für stetig verteilte Z.n sind Gleichverteilung,  $N$  normalverteilung, Exponentialverteilung,  $t$ -Verteilung,  $\chi^2$ -Verteilung, Maxwell-Verteilung,  $F$ -Verteilung.

S. a. Zufallsvektor.

**Zufallsvariable** svw. **Zufallsgröße.**

**Zufallsvektor, mehrdimensionale Zufallsgröße:**

I. ein  $n$ -Tupel  $(X_1, \dots, X_n)$  von Zufallsgrößen. Soll z. B. in einem zufälligen Versuch ein Gasmolekül willkürlich aus einem Gas ausgewählt und seine Geschwindigkeit gemessen werden, so hängt der Vektor  $(V_1, V_2, V_3)$  der Geschwindigkeit von der zufälligen Auswahl des Moleküls ab und ist eine dreidimensionale Zufallsgröße. Von Versuch zu Versuch erhält man jeweils als Realisierung des Z.s andere konkrete Werte der Geschwindigkeit.

II. Beim Beschießen einer Zielscheibe sind die Koordinaten  $X_1, X_2$  des Einschußpunkts Zufallsgrößen und dieser selbst durch den Z.  $(X_1, X_2)$  bestimmt. Er ist eine zweidimensionale Zufallsgröße. Jeder konkrete Schuß auf die Scheibe liefert eine Realisierung dieses Z.s. Ein Z. kann durch seine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion, auch gemeinsame Ver-

teilungsfunktion  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gen., charakterisiert werden, die durch (1) definiert wird.

$$(1) F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)$$

Die Funktion  $F(x_1, \dots, x_n)$  wird auch oft als Verteilung des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$  oder als gemeinsame Verteilung der Größen  $X_1, \dots, X_n$  bezeichnet. Betrachtet man die Größen  $X_1, \dots, X_n$  als Koordinaten eines Punktes im  $n$ -dimensionalen euklid. Raum, so hängt die Lage des Punktes  $(X_1, \dots, X_n)$  vom Zufall ab.  $F(x_1, \dots, x_n)$  ist gerade die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt in das halboffene Parallelepiped  $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$  mit zu den Koordinatenachsen parallelen Kanten fällt. Für die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt  $(X_1, \dots, X_n)$  in das Parallelepiped  $a_i \leq x_i < b_i$  für  $i = 1, \dots, n$  fällt, ergibt sich daraus (2).

$$(2) P(a_1 \leq X_1 < b_1, \dots, a_n \leq X_n < b_n) = F(b_1, \dots, b_n) - \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i < j} p_{ij} - \dots + (-1)^n F(a_1, \dots, a_n)$$

Dabei ist  $p_{ij\dots k} = F(c_1, \dots, c_n)$  mit  $c_i = a_i, c_j = a_j, \dots, c_k = a_k$ , aber alle übrigen  $c_s = b_s$ . Speziell für einen zweidimensionalen Z. mit  $n = 2$  geht (2) in (3) über.

$$(3) P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$$

**III. Eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion  $F(x_1, \dots, x_n)$  hat folgende charakterist. Eigenschaften:**

**III.1.** Für jedes  $j$  gelten (4) und (4a).

$$(4) \lim_{x_j \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n) = 1$$

$$(4a) \lim_{x_j \rightarrow -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0$$

**III.2.**  $F(x_1, \dots, x_n)$  ist in jeder Variablen linksseitig stetig.

**III.3.**  $F(x_1, \dots, x_n)$  ist in jeder Variablen monoton nichtabnehmend.

**III.4.** Für beliebige  $a_i \leq b_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  ist die rechte Seite von (2) nichtnegativ. In der Praxis sind zwei Typen von Z. von bes. Bedeutung, die diskreten Z. und die stetigen Z. Ein Z.  $(X_1, \dots, X_n)$  heißt *diskret*, wenn alle seine Komponenten *diskrete Zufallsgrößen* sind. Sind  $x_k^{(j)}$  die mögl. Werte der  $k$ -ten Komponente für  $j = 1, 2, \dots$ , so ist die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $p_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$  durch (5) definiert.

$$(5) p_{i_1, \dots, i_n} = P(X_1 = x_1^{(i_1)}, \dots, X_n = x_n^{(i_n)})$$

Für die Verteilungsfunktion gilt in Analogie zum eindimensionalen Fall die Formel (6), in der zu summieren ist über  $x_1^{(i_1)} < x_1, x_2^{(i_2)} < x_2, \dots, x_n^{(i_n)} < x_n$  d. h. über alle  $i_j$ , für die  $x_1^{(i_1)} < x_1$  usw. ist.

$$(6) F(x_1, \dots, x_n) = \sum p_{i_1, \dots, i_n}$$

Die *Polynomialverteilung* ist eine Verteilung, in der ein diskreter Z. auftritt.

Ein  $Z$ . heißt *stetig*, wenn für seine Verteilungsfunktion die Formel (7) gilt. Die Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$

$$(7) \quad F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

in ihr heißt die *Dichte*, *Verteilungsdichte* oder *Wahrscheinlichkeitsdichte* des Vektors  $(X_1, \dots, X_n)$  oder auch die *gemeinsame Dichte* der Größen  $X_1, \dots, X_n$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der stetige  $Z$ .  $(X_1, \dots, X_n)$  in ein Gebiet  $G$  des  $n$ -dimensionalen Raumes fällt, läßt sich mittels der Dichte in der Form (8) schreiben. Die Dichte muß demnach die Bedingung (9) erfüllen, denn offenbar ist  $P((X_1, \dots, X_n) \in \mathbf{R}^n) = 1$ .

$$(8) \quad P((X_1, \dots, X_n) \in G) = \int_G \dots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

In der *mehrdimensionalen Gleichverteilung* und in der *mehrdimensionalen Normalverteilung* treten stetige  $Z$ .en auf.

**Zufallszahlen** ↗ Monte-Carlo-Methode II.

**Zugriff:** Möglichkeit, Daten einem Speicher zu entnehmen oder sie in ihm abzuspeichern. In Abhängigkeit von der Adressierbarkeit unterscheidet man *wahlfreien*  $Z$ ., z. B. in Kernspeichern, ist jedes Wort adressierbar. Bei *blockweisem*  $Z$ ., z. B. in Magnetbandspeichern, ist ein einzelnes Wort nicht erreichbar. Es kann nur ein Block, das ist eine größere Dateneinheit, in den Hauptspeicher übernommen oder vom Hauptspeicher auf das Magnetband ausgegeben werden. Neben der Adressierbarkeit ist die *Zugriffszeit* ein wichtiges Merkmal des Speichers (↗ digitale Rechanlage II.).

**Zugriffszeit:** Zeitspanne für den Transport einer Information zwischen Rechenwerk und Speicher vom Aufruf durch das Steuerwerk bis zum Abschluß der Übertragung z. B. in einer digitalen Rechanlage. Die  $Z$ . eines Speichers hängt wesentlich von seinem Typ, von seiner Speicherkapazität und von seiner Funktion innerhalb der Rechanlage ab. Bei Kernspeichern beträgt die  $Z$ . 1 bis  $2\mu s$ , bei Plattenspeichern hingegen rund 100 ms im Mittel.

**zulässiger Bereich** ↗ Färbung von Graphen, ↗ Optimierung I., ↗ Optimierung, lineare, II.

**zulässig gefärbt** ↗ Färbung von Graphen, ↗ Landkarte I.

**Zunge** ↗ Rechenstab II.

**Zuordnungsproblem, Ernennungsproblem:** ein Standardproblem der Operationsforschung, bei dem die beste eindeutige Zuordnung zweier endlicher Mengen  $M$  und  $N$ , z. B. die von  $n$  Industriebetrieben  $m_i$  zu  $n$  Standorten  $n_j$ , unter der Voraussetzung gesucht wird, daß die Zuordnung von jedem  $m_i \in M$  zu einem  $n_j \in N$  Kosten in Höhe von  $a_{ij}$  erfordert, z. B. Erschließungskosten des Standortes. Formal sind aus einer  $(n, n)$ -Matrix  $(a_{ij})$  die als *unabhängig* bezeichneten Elemente auszuwählen, die in jeder

Zeile und Spalte höchstens einmal vorkommen, und die Summe dieser Elemente soll ein Minimum sein (vgl. Verzweigungsverfahren). Es werden Variable  $x_{ij}$  eingeführt, die bei Zuordnung von  $m_i$  zu  $n_j$  den Wert 1 haben, sonst aber den Wert Null. Die Summe dieser Variablen soll in jeder Zeile und in jeder Spalte den Wert 1 haben, und (1) soll gelten.

Da das  $Z$ . ein Spezialfall des Transportproblems ist, kann der Transportalgorithmus angewendet werden.

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} = \text{Min!}$$

Zusätzlich gibt es die *Ungarische Methode*, in der  $(a_{ij})$  schrittweise so zu  $(a'_{ij})$  umgeformt wird, daß die unbekannt optimalen Zuordnungen optimal bleiben. Dabei wird erreicht, daß für  $n$  Unabhängige unter den  $a'_{ij} \geq 0$  der Wert 0 ausgewählt werden kann; das ist offensichtlich optimal. Die Ungarische Methode kann auch zur Lösung des Transportproblems verallgemeinert werden.

**zusammengesetzte Funktion** ↗ mittelbare Funktion.

**zusammenhängender Graph** ↗ Durchlaufungen von Graphen I.1.

**zusammenhängender Raum** ↗ Raum, topologischer.

**Zusatzfehler** ↗ Fehler II.

**Zuschnittproblem:** ein Standardproblem der Operationsforschung, in dem aus endlich vielen Zuschnittvarianten die Kombination gesucht ist, die aus einem gegebenen Rohmaterial, z. B. aus Holzplatten, die größte Anzahl vorbestimmter Teile liefert, z. B. Möbelteile. Jede Variable bedeutet eine ganzzahlige Anzahl. Bei größeren Stückzahlen wird das  $Z$ . als gewöhnliche lineare Optimierungsaufgabe gelöst.

**Zustände, innere** ↗ Automat, determinierter, abstrakter I.

**Zustandsbereich** ↗ Bellmansche Funktionalgleichung.

**Zustandsbeschreibung** ↗ System II.

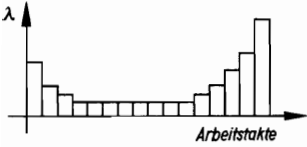
**Zustandsfunktion, -variable, -vektor** ↗ Optimierung, dynamische.

**Zustandsgröße** ↗ System II.

**Zustandsraum** ↗ System II.

**zuverlässige Ziffer** ↗ Runden.

**Zuverlässigkeitstheorie: Operationsforschung** Theorie über die *Zuverlässigkeit*, d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren eines Systems von bestimmtem Alter unter bestimmten Arbeitsbedingungen in einem gewissen Zeitintervall, z. B. für das ordnungsgemäße Arbeiten von Baugruppen, Geräten oder Versorgungsnetzen. Die Zuverlässigkeit wird eingeschränkt durch *Ausfälle* und durch *Fehloperationen*, das sind vorübergehende Fehler. Betrachtet man nur Ausfälle, stimmt die Zuverlässigkeit mit der *Überlebenswahrscheinlichkeit*  $R$  überein. Die Größe  $(1 - R)$  heißt dann *Ausfallwahrscheinlichkeit*. Die *Fehlerrate*  $\lambda$  gibt an, welcher Anteil einer Menge gleichartiger Systeme durchschnittlich in jeweiligen Arbeitstakt bzw. in der Zeiteinheit versagt. Meist ist  $\lambda$  in den ersten Arbeitstakten hoch, bleibt dann einige Zeit niedrig und wächst schließlich wieder an. Entsprechend spricht



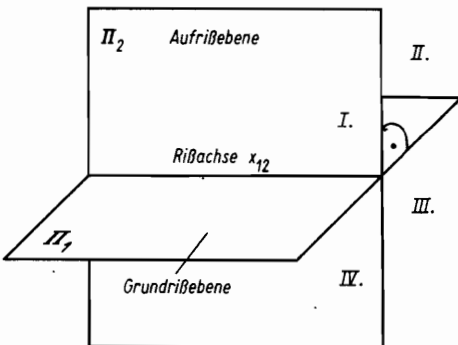
Zuverlässigkeitstheorie: Zeitl. Verlauf der Fehlerrate

man von einer Periode der *Frühfehler*, einer *Betriebsbrauchbarkeitsperiode* und einer Periode der *Er-müdungsfehler* (Abb.). Die *Halbwertszeit* ist der Erwartungswert des Zeitpunktes, zu dem 50% der Systeme ausgefallen sind. Die Z. untersucht auch Zusammenhänge zwischen der Zuverlässigkeit des Systems und der seiner Elemente. Es bestehen enge Beziehungen zur Erneuerungstheorie. S. a. Redundanz II.

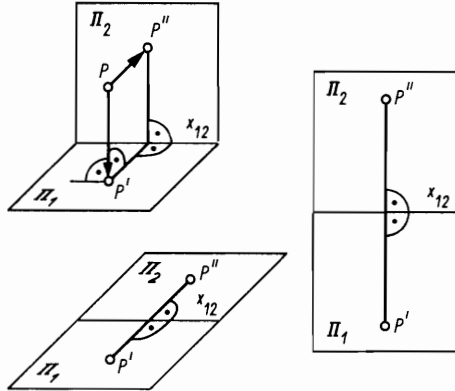
- Zwanzigflächner** ↗ regelmäßiges Polyeder I.
- Zweimengenaxiom** ↗ Mengenlehre II.
- Zweiersystem** ↗ dyadisches Zahlensystem, s. a. Zahlensystem VI.
- Zweierübertrag** ↗ Addition II., ↗ dyadisches Zahlensystem I., ↗ Multiplikation III.
- Zweig einer Funktion** ↗ analytische Fortsetzung II., ↗ komplexwertige Funktion, elementare, III.
- Zweikreisconstruction** ↗ Ellipsenconstructionen II.

**Zweipunktegleichung** ↗ Geradengleichung II.  
**Zweipunktverteilung:** Verteilungsgesetz für eine diskrete Zufallsgröße  $X$ , wenn diese nur zwei mögl. Werte  $x_0, x_1$  annehmen kann. Ist  $P(X = x_1) = p$ , so ist  $P(X = x_0) = 1 - p$ . Sind die beiden mögl. Werte 0 und 1, so spricht man von einer *Null-Eins-Verteilung*. Der ↗ Indikator eines zufälligen Ereignisses  $A$  hat z. B. eine Z.  
**Zweirollengerät** ↗ Kurvenmesser.

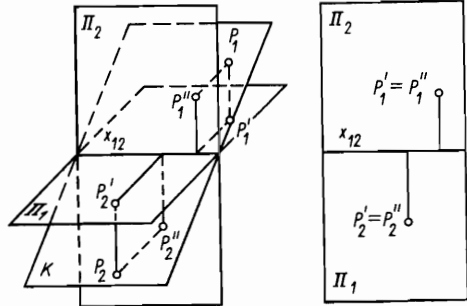
**Zweistichprobenproblem:** die Frage, ob zwei Stichproben  $(x_1, \dots, x_{n_1}), (y_1, \dots, y_{n_2})$  aus ein und derselben Grundgesamtheit stammen. Zur Entscheidung gibt es Tests, die Nullhypothese lautet  $F_X(x) = F_Y(x)$ , wenn  $F_X(x)$  die Verteilungsfunktion von  $X$  und  $F_Y(x)$  die von  $Y$  ist. Gebräuchlich ist z. B. der *Kolmogorow-Smirnow-Test*. Die Verallgemeinerung auf  $k$  Stichproben wird als *k-Stichprobenproblem* bezeichnet.



Zweitafelprojektion. Abb. 1: Vier Raumquadranten

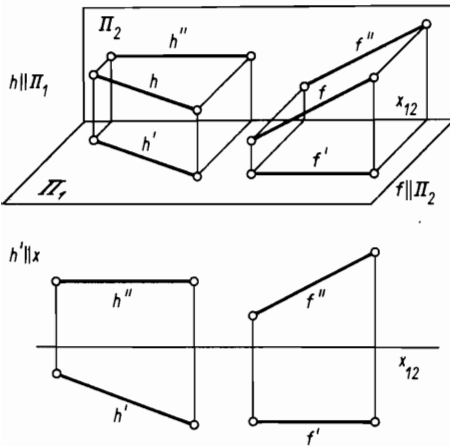


Zweitafelprojektion. Abb. 2: Verebnung von Grund- und Aufrißebenen



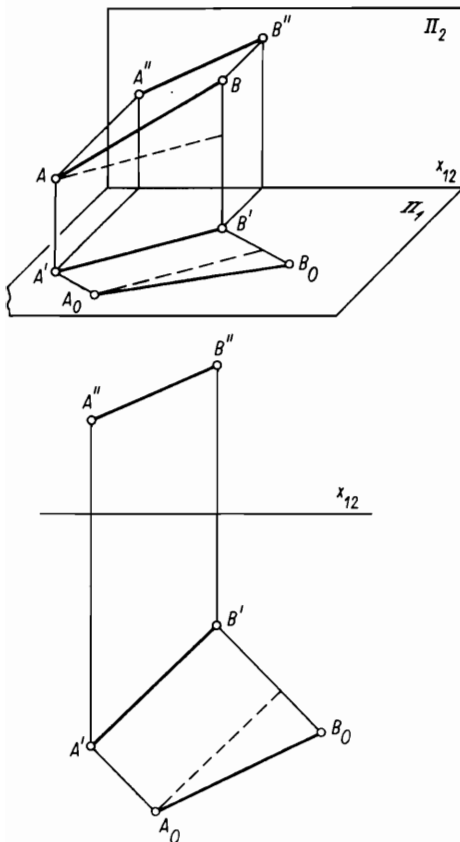
Zweitafelprojektion. Abb. 3: Deck- oder Koinzidenzebene K

**Zweitafelprojektion: I.** senkrechte Parallelprojektion auf zwei zueinander senkrechte Projektionsebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$ . Die *Grundrißebene*  $\Pi_1$  wird horizontal angenommen, die *Aufrißebene*  $\Pi_2$  vertikal (Abb. 1). Sie teilen den Raum in vier *Quadranten*. Beide schneiden sich in der *Rißachse*, *Projektions- oder Bildachse*  $x_{12}$ ; die von Gaspard MONGE (1746 bis 1818), dem Begründer der systemat. darstellenden Geometrie eingeführt wurde. Die Bilder oder Risse nennt man entsprechend *Grundriß* oder *Aufriß*. Klappt man nach MONGE die Aufrißebene  $\Pi_2$  um  $90^\circ$  um die Rißachse so, daß ihre obere Halbebene mit der hinteren von  $\Pi_1$  zusammenfällt, so steht für jeden Punkt  $P$  die *Ordnungslinie* oder der *Ordner* durch *Grundriß*  $P'$  und *Aufriß*  $P''$  senkrecht zur Rißachse (Abb. 2). Liegt der Punkt  $P$  im I. Quadranten, so liegen  $P'$  unterhalb und  $P''$  oberhalb der Rißachse. Für Punkte der *Koinzidenz- oder Deckebene*  $K$ , die die Quadranten II und IV halbiert, fallen Grundriß und Aufriß zusammen (Abb. 3). Geraden in ihr heißen *Deck- oder Koinzidenzgeraden*. Eine *Höhenlinie*  $h$  verläuft parallel zur Grundrißebene  $\Pi_1$ , d. h., ihr Aufriß  $h''$  ist eine Parallele zur Rißachse  $x_{12}$ . Eine *Frontlinie*  $f$  verläuft parallel zu  $\Pi_2$ , ihr Grundriß  $f'$  ist eine Parallele

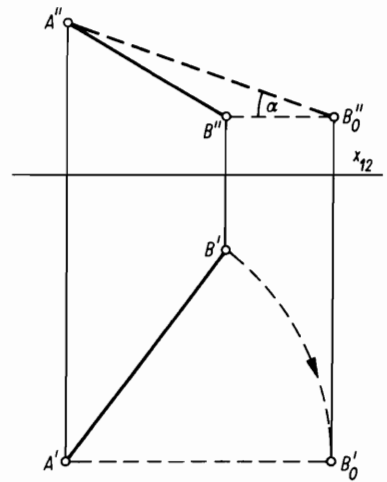
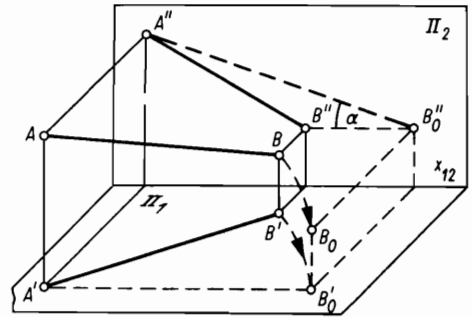


Zweitafelprojektion. Abb. 4: Höhen- und Frontlinie

zur Rißachse  $x_{12}$  (Abb. 4). Beide werden gemeinsam *Hauptlinien* gen. Man unterscheidet in der Z. folgende sechs Grundaufgaben der darstellenden Geometrie.



Zweitafelprojektion. Abb. 5: Wahre Länge durch Umklappen

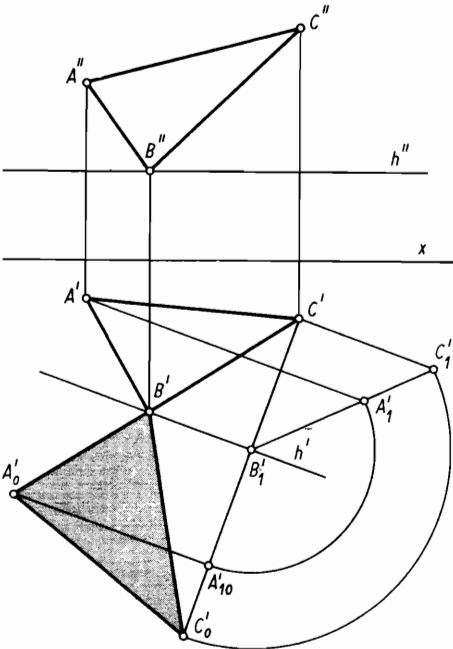
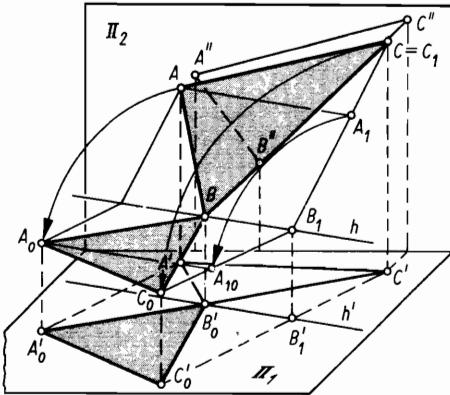


Zweitafelprojektion. Abb. 6: Drehverfahren

II. Die *wahre Länge einer Strecke* und ihren *Neigungswinkel*  $\alpha$  gegen die Grundrißebene können durch zwei Verfahren bestimmt werden: durch *Umklappen* des projizierenden Trapezes in die Grundrißebene (Abb. 5) und beim *Drehverfahren* durch Drehen des projizierenden Trapezes um eine Gerade, die auf  $\Pi_1$  senkrecht steht, parallel zur Aufrißebene  $\Pi_2$  (Abb. 6). Entsprechende Aufgaben ergeben sich durch Vertauschen von Grund- und Aufrißebene.

III. Die *wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur* bestimmt man, indem man sie um eine Höhenlinie  $h$  parallel zur Grundrißebene  $\Pi_1$  dreht, nachdem man die Abstände der Eckpunkte von der Höhenlinie  $h$  durch Stützdreiecke, d. h. auf Falllinien, bestimmt hat (Abb. 7). Die Figur erscheint in wahrer Größe und Gestalt in der Grundrißebene.

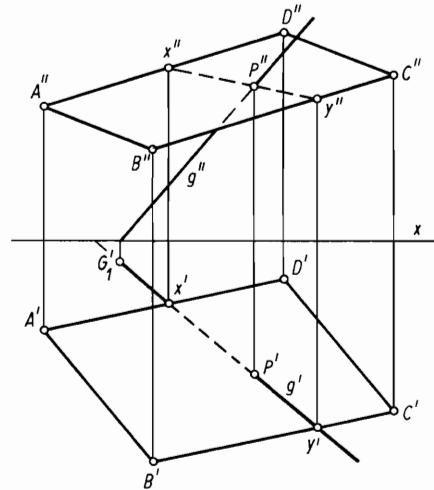
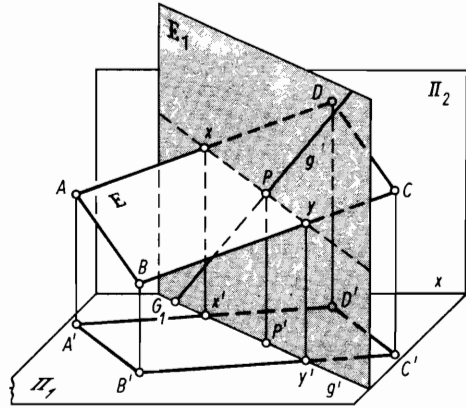
IV. Um den *Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene* zu bestimmen, legt man durch die Gerade  $g$  die projizierende Ebene, die senkrecht auf der Grundrißebene  $\Pi_1$  steht. Diese Ebene schneidet die gegebene Ebene  $E$  in einer Hilfsgeraden  $XY$  und diese schneidet die Gerade  $g$  im Durchstoßpunkt  $P$  durch die gegebene Ebene (Abb. 8).



Zweitafelprojektion. Abb. 7: Wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur

V. Die *Schnittgerade* zweier Ebenen ergibt sich als Verbindungsgerade der Durchstoßpunkte  $P_1$  und  $P_2$  zweier Geraden der einen Ebene, etwa durch die Ecken  $A, B, C, D$  eines Parallelogramms, durch die andere, die z. B. das Dreieck I II III enthält (Abb. 9, S. 620).

VI. Das von einem Punkt  $P$  außerhalb der Ebene  $E$  eines Dreiecks  $A, B, C$  auf diese *gefüllte Lot* steht in jedem Ebenenpunkt senkrecht auf der Höhenlinie  $h$  und auf der Fallinie  $f$  durch ihn. Der Grundriß des Lotes steht senkrecht auf dem Grundriß  $h'$  einer Höhenlinie der Ebene, sein Aufriß steht senkrecht auf dem Aufriß  $f''$  einer Frontlinie von  $E$ .



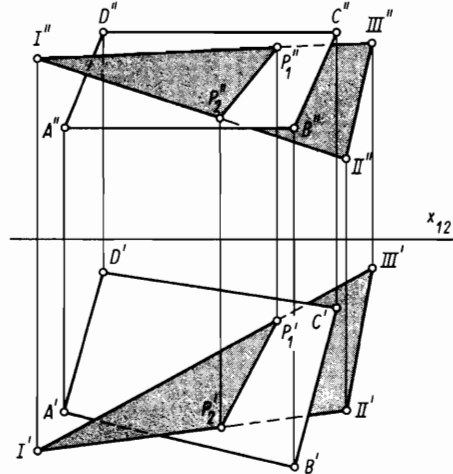
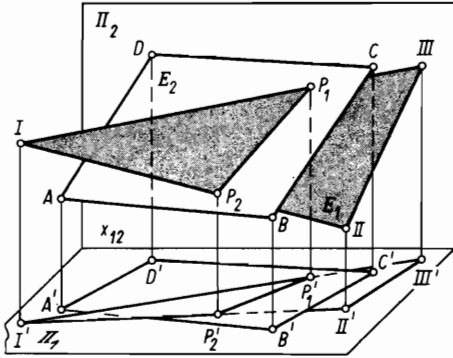
Zweitafelprojektion. Abb. 8: Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene

Nachdem so die Richtung des Lotes bestimmt wurde, liefert die Konstruktion des Durchstoßpunktes den Fußpunkt  $F$  des Lotes (Abb. 10, S. 620).

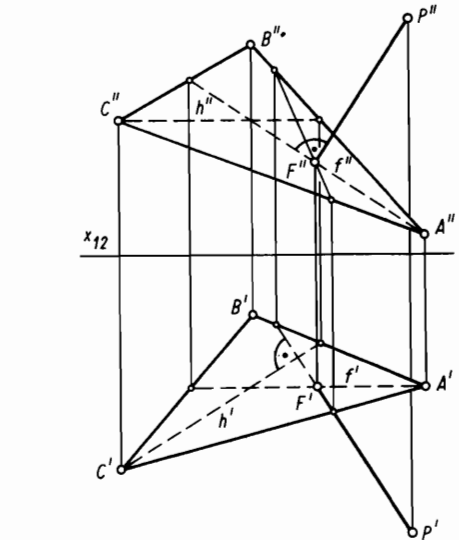
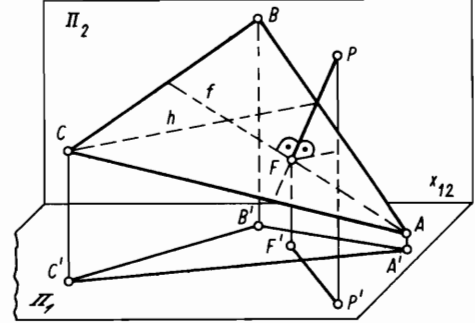
VII. Die *Normalebene*  $E$  zu einer Geraden  $g$  durch einen ihrer Punkte wird durch eine Höhenlinie  $h$  und eine Frontlinie  $f$  bestimmt. Ist z. B. die Gerade durch  $P, F$  gegeben und die Normalebene in  $F$  gesucht ( $\nearrow$  Abb. 10, S. 620), so liegt der Grundriß  $h'$  der Höhenlinie von  $E$  durch  $F'$  senkrecht zu  $P'F'$ , ihr Aufriß  $h''$  liegt parallel zur Rißachse. Der Aufriß  $f''$  der Frontlinie von  $E$  durch  $F''$  liegt senkrecht zu  $P''F''$ , ihr Grundriß  $f'$  liegt parallel zur Rißachse.

Besondere Verfahren der Z. sind die Spurendarstellung, das Seitenrißverfahren und das Drehverfahren. Die Z. wird auch bei der Darstellung von Durchdringungen, Körperschnitten, Abwicklungen und Körpernetzen sowie zur Kugeldarstellung verwendet.





Zweitafelprojektion. Abb. 9: Schnittgerade zweier Ebenen

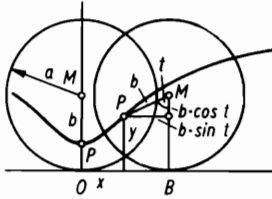


Zweitafelprojektion. Abb. 10: Von einem Punkt außerhalb einer Ebene auf diese gefälltes Lot

**Zweiwertigkeitsprinzip** ↗ Aussagenlogik I.  
**Zwischenankunftszeit** ↗ Bedienungstheorie.  
**Zwischenliegen** ↗ axiomatischer Aufbau der Geometrie.  
**Zwischensumme** ↗ Flächenintegral I., ↗ Integral I., ↗ Kurvenintegral I., II.1.  
**Zwischenwertsatz** ↗ Stetigkeit.  
**Zwölfflächner** ↗ regelmäßiges Polyeder I.  
**Zyklusbasis** ↗ Ströme auf Graphen IV.  
**zyklisch** ↗ Permutation III.  
**zyklische Gruppe:** Gruppe, deren Elemente sich alle als eine Potenz  $a^n$  eines „erzeugenden“ Elementes  $a$  schreiben lassen, wobei  $n$  eine ganze Zahl ist. Sind alle Potenzen  $a^n$  verschieden, so hat die z. G. unendlich viele Elemente:  $\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, a^3, \dots$ . Alle unendl. z.n G.n sind untereinander isomorph und isomorph zur additiven Gruppe der ganzen Zahlen. Ist  $a^m = a^n$  für  $n > m$ , so ist  $a^{n-m}$  das Einselement  $e$ , und ist  $k$  der kleinste positive Exponent mit  $a^k = e$ , so hat die z. G.  $k$  Elemente:  $e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$ .

Zu jeder Ordnung, die die Anzahl der Elemente der Gruppe angibt, gibt es bis auf Isomorphie genau eine z. G., und alle z.n G.n der Ordnung  $k$  sind isomorph zur additiven Gruppe der Restklassen ganzer Zahlen modulo  $k$ . S. a. Gruppe II., Kongruenz von Zahlen III.  
**zyklisches Vertauschen:** Verfahren, aus einer Beziehung zwischen zyklisch angeordneten Größen eine neue, ebenfalls wahre Aussage dadurch zu erhalten, daß jedes Element durch das ihm im Zyklus folgende ersetzt wird. In der Trigonometrie des allgemeinen Dreiecks besteht z. B. ein Zyklus  $(abc) = a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow \dots$  für die Seitenlängen und  $(\alpha\beta\gamma) = \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \dots$  für die Winkelgrößen.  
**zyklisch permutierter Kode** ↗ Kodierung III.  
**Zykloide, Rollkurve:** I. ebene Kurve, die von einem fest mit einem Kreis  $K$  verbundenen Punkt  $P$  beschrieben wird, wenn  $K$  ohne zu gleiten auf einer vorgegebenen *Leitkurve*  $C$  abrollt. Ist  $C$  eine Gerade, so entsteht eine *gewöhnl. Z.* Wird der Mittelpunkt

des rollenden Kreises mit  $M$  bezeichnet, sind  $a$  die Länge seines Radius,  $|MP| = b$  der Abstand des Punktes  $P$  von  $M$  und  $B$  der veränderl. Berührungspunkt von  $K$  und  $C$ , so ist in einem geeigneten kartes. Koordinatensystem (Abb. 1)  $|OB| = at$ , wenn



Zykloide. Abb. 1: Zur Parameterdarstellung

der Parameter  $t$  mit  $-\infty < t < +\infty$  den Wälzwinkel  $\sphericalangle PMB$  angibt. Für die gewöhnl. Z. erhält man die Parameterdarstellung (1). Sie hat als Funk-

$$(1) \quad x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

tion  $y(x)$  die Periode  $2\pi a$ . Die *Maxima* liegen in den Punkten  $A_k(2k + 1)\pi a, a + b$  und die *Minima* in  $B_k(2k\pi a, a - b)$  für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Bei einer *spitzen Z.* ist  $a = b$ ; die Punkte  $B_k$  werden dann *Spitzen* oder *Rückkehrpunkte* gen. (Abb. 2). Für die *Bogenlänge* der spitzen Z. ergibt sich aus (2) durch Integration  $s = 8a \sin^2(t/4)$  für  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Danach ist  $8a$  die Länge des vollen Z.nbogens.

$$(2) \quad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 2a \sin(t/2) dt$$

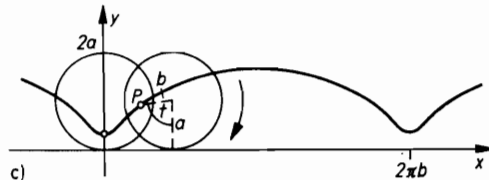
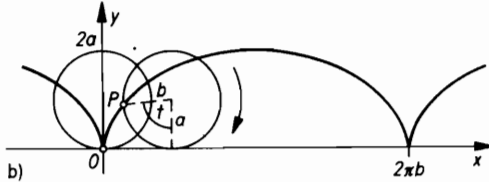
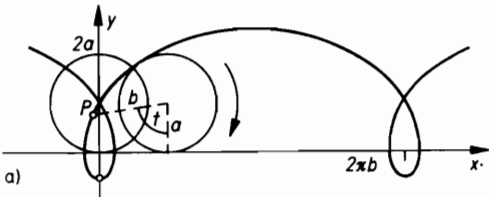
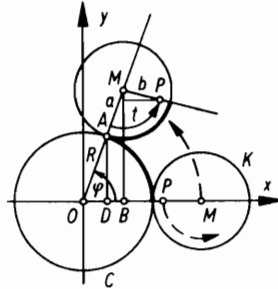


Abb. 2: Gewöhnl. Zykloide, a) verlängerte oder verschlungene mit Doppelpunkten, b) spitze mit Rückkehrpunkten, c) verkürzte mit Minima

Der Inhalt der von ihm begrenzten Fläche ist mit  $A = 3\pi a^2$  das Dreifache der Fläche des rollenden Kreises.

In einer *verkürzten Z.* ist  $a > b$ , und  $P$  liegt innerhalb des Kreises  $K$ . In einer *verschlungenen* oder *verlängerten Z.* ist  $a < b$ , und  $P$  liegt außerhalb des Kreises  $K$ . Für  $a < b$  treten *Doppelpunkte*  $D_k(2k\pi a, a - \sqrt{b^2 - a^2 \cos^2 t})$  auf, das sind Punkte, deren Lage sich für zwei verschiedene Winkel  $t$  ergibt. Die  $y$ -Koordinate eines Doppelpunktes ist  $y_0 = a - \sqrt{b^2 \sin^2 t_0} = a - \sqrt{b^2 - a^2 \cos^2 t_0}$ , wenn  $t_0$  die kleinste positive Wurzel der Gleichung  $at = b \sin t$  ist. Bei geeignetem großem Verhältnis  $b : a$  können weitere Doppelpunkte auftreten.

II. Ist die Leitkurve  $C$  ein Kreis, so entsteht eine *Epi-Z.*, wenn der *Rollkreis*  $K$  außerhalb, bzw. eine *Hypo-Z.*, wenn er innerhalb des *Leitkreises*  $C$  rollt. Ist  $\varphi$  der Winkel, um den die positive  $x$ -Achse in die Verbindungslinie  $OM$  der beiden Kreismittelpunkte im positiven Sinne zu drehen ist, und werden der Radius des Leitkreises mit  $R$ , die Streckenlängen im Rollkreis aber wieder mit  $|MA| = a$  und  $|MP| = b$  sowie der Wälzwinkel mit  $t$  bezeichnet, so gilt  $\varphi R = at$  (Abb. 3), und das von  $M$  auf die  $x$ -Achse gefällte Lot  $MB$  zerlegt  $t$  in die Teile  $(\pi/2 - \varphi)$  und  $\theta = t + \varphi - \pi/2 = (R + a) \cdot \varphi/a - \pi/2$  im Falle



Zykloide. Abb. 3: Zur Gleichung der Epizykloide.  $|\sphericalangle OMB| = \pi/2 - \varphi$ ,  $\theta = t - |\sphericalangle OMB|$

der *Epi-Z.* Daraus ergibt sich deren Parameterdarstellung (3). Entsprechend gilt (4) für die *Hypo-Z.*

$$(3) \quad x = (R + a) \cos \varphi - b \cos [\varphi \cdot (R + a)/a],$$

$$y = (R + a) \sin \varphi - b \sin [\varphi \cdot (R + a)/a]$$

$$(4) \quad x = (R - a) \cos \varphi + b \cos [\varphi(R - a)/a],$$

$$y = (R - a) \sin \varphi - b \sin [\varphi(R - a)/a]$$

Bei ganzzahligem Verhältnis  $R : a$  schließt sich die Kurve nach einem Umlauf, bei rationalem  $R : a$  nach endlich vielen Umläufen, bei irrationalem  $R : a$  erreicht der Punkt  $P$  seine Ausgangslage nicht wieder. Ist  $a = b$ , so werden diese Kurven *spitze Epi-Z.n* bzw. *Hypo-Z.* gen., die *Astroide* z. B. ist eine spitze *Hypo-Z.*, die *Kardioide* eine spitze *Epi-Z.* Nach jedem Umlauf des Rollkreises ist eine Spitze entstanden. Die Länge eines Zyklus ist  $8a(R \pm a)/R$ ; bei ganzzahligem  $R : a$  ist die Länge der Gesamtkurve  $8(R \pm a)$ . Die Fläche zwischen dem Leitkreis  $C$  und einem Bogen der Z. hat den Inhalt  $F = \pi a^2(3R \pm 2a)/R$ , je nachdem, ob eine *Epi-* oder

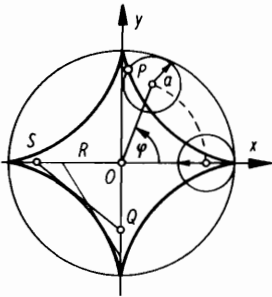
Hypo-Z. vorliegt. Die einzelnen Z. unterscheiden sich durch die Länge der gegebenen Strecken  $a, b$  und  $R$ . (S. a. Quadratur).

III. Die *Astroide* oder *Sternkurve* ist ein Hypo-Z., für die gilt  $R : a = 4$  und  $a = b$  (Abb. 4). Aus der Parameterdarstellung der Hypo-Z.n ergibt sich (5) und daraus die Gleichung (6) der Astroide.

$$(5) \quad x = R \cos^3 \varphi, \quad y = R \sin^3 \varphi$$

$$(6) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{R^2}$$

Aus der Länge  $l = 8a(R - a)/R = 6a$  eines Zyklus erhält man die Gesamtlänge  $4l = 6R$ , während  $2\pi R$  die des Leitkreises ist. Die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche hat den Inhalt  $F = \pi a^2(3R - 2a)/R = 5\pi R^2/32$ .



Zyklode. Abb. 4:  
Astroide als  
Hypozyklode

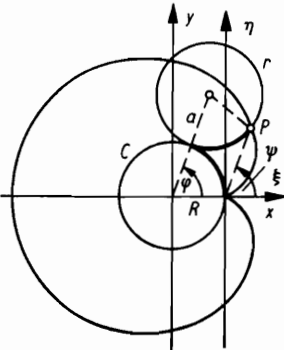
Man kann die Astroide auch auffassen als *Einhüllende* oder *Enveloppe* einer Geradenschar, die entsteht, wenn die Endpunkte  $S$  und  $Q$  einer Strecke der Länge  $R$  längs der Koordinatenachsen gleiten.

IV. Die *Kardioid* oder *Herzkurve* ist eine Epi-Z. mit  $R = a$  und  $b = a$  (Abb. 5). Diese Z. hat genau eine Spitze. Als Epi-Z. hat sie die Parameterdarstellung (7). Durch Eliminieren von  $\varphi$  erhält man die

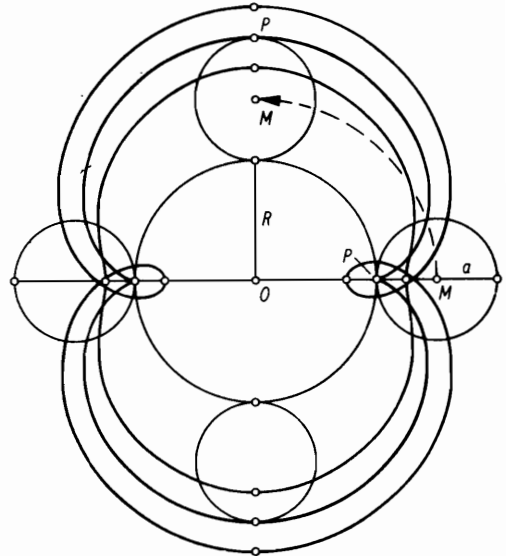
$$(7) \quad x = a(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi), \\ y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$$

$$(8) \quad (x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2[(x - a)^2 + y^2]$$

algebraische Gleichung (8). In einem kartes.  $\xi, \eta$ -Koordinatensystem, dessen Nullpunkt in der Spitze der Kardioid liegt, folgen aus  $\xi = x - a, \eta = y$



Zyklode. Abb. 5:  
Kardioid als  
Epizyklode



Zyklode. Abb. 6: Nephroide als Epizyklode mit  $R : a = 2$  und  $b : a = 1, b : a = 1 : 2$  und  $b : a = 3 : 2$

die Parameterdarstellung (9) und die Gleichung (10) als Darstellung der Kardioid in Polarkoordinaten  $\varrho, \psi$ .

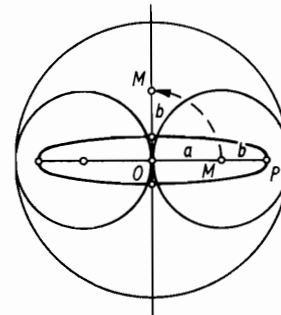
$$(9) \quad \xi = 2a \cos \psi(1 - \cos \psi), \\ \eta = 2a \sin \psi(1 - \cos \psi)$$

$$(10) \quad \varrho = 2a(1 - \cos \psi)$$

Als Epi-Z. mit  $R = a$  und  $b \neq a$  kann die *Pascalsche Schnecke* angesehen werden. Die *Nephroide* ist eine Epi-Z. mit  $R : a = 2$  und einem beliebigen rationalen Verhältnis von  $b : a$  (Abb. 6). Eine *Nephroide* mit  $R : a = 2$  und  $b = a$  hat die algebraische Gleichung (11).

$$(11) \quad (x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108 a^4 y^3$$

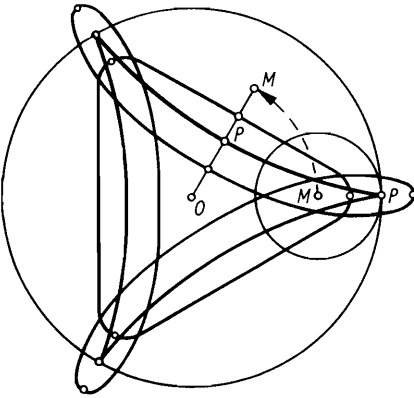
V. Eine Hypo-Z. für  $R : a = 1$  ist nicht definiert, für  $R : a = 2$  und  $b = a$  ergibt sich nach  $y = 0$  der Durchmesser des Leitkreises. Für  $R : a = 2$  und  $b \neq 0$  erhält man eine *Ellipse* mit den Strecken  $a + b$  als große und  $a - b$  als kleine Halbachse (Abb. 7).



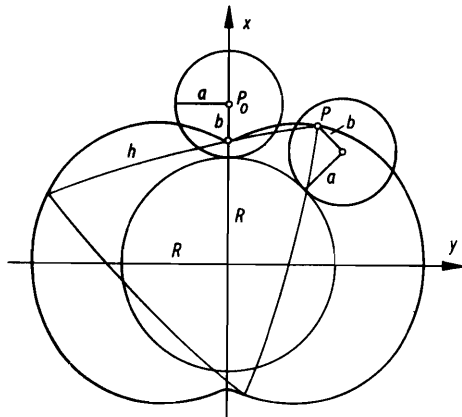
Zyklode. Abb. 7:  
Ellipse als  
Hypozyklode mit  
 $R : a = 2$  und  
 $3b = 2a$

Eine Hypo-Z. mit  $R : a = 3$  und  $b = a$  wird *Steinersche Kurve* gen. (Abb. 8).

VI. Z. mit  $a \neq b$  werden auch *Trochoiden* gen., im Falle von  $b < a$  spricht man auch von *verkürzten Epi-* bzw. *Hypo-Trochoiden*, im Falle  $b > a$  von *verlängerten* oder *verschlungenen Epi-* bzw. *Hypo-Trochoiden*. Technische Bedeutung hat die Epitrochoide mit  $R : a = 2$  und  $b : a = 2 : 3$  erlangt (Abb. 9). Sie bestimmt die Form des Gehäuses von *Rotationskolbenmaschinen*, z. B. vom Wankelmotor, ihre Hüllkurve  $h$  bestimmt die Form des Rotationskolbens.



Zykloide. Abb. 8: Steinersche Kurve als Hypozykloide mit  $R : a = 3$  und  $b = a$  sowie Hypotrochoide mit  $R : a = 3$  und  $b : a = 1 : 2$  sowie  $b : a = 3 : 2$



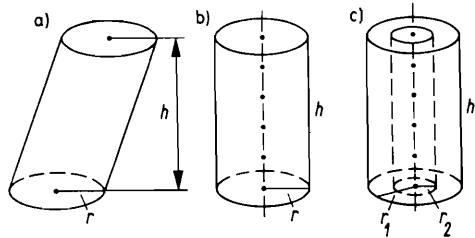
Zykloide. Abb. 9: Epitrochoide mit  $R : a = 2$  und  $b : a = 2 : 3$  und Hüllkurve  $h$

- Zykloidenzeichner ↗ Kurvenzeichner II.
- zyklomatische Zahl ↗ Ströme auf Graphen IV.
- zyklometrische Funktion svw. Arkusfunktion.
- Zyklus ↗ Durchlaufungen von Graphen II., ↗ Permutation III.

**Zylinder: I. Zylinderfläche**, Fläche, die eine durch einen Punkt einer Kurve, der *Leitkurve*  $k$ , verlaufende Gerade  $g$  beschreibt, wenn sie ohne Änderung ihrer Richtung entlang dieser Kurve gleitet. Die Gerade  $g$  und die Parallelen zu ihr heißen *Erzeugende* der Z.fläche. Die Leitkurve  $k$  soll nicht ausgeartet sein, z. B. kein Punkt oder keine Peano-Kurve, die ein ebenes Flächenstück vollständig bedeckt. Ist  $k$  eine ebene Kurve, so soll  $g$  nicht in dieser Ebene liegen. Der Z. ist in eine Ebene abwickelbar. Z.flächen kann man nach den Kurven einteilen, die sich bei einem ebenen Schnitt senkrecht zu den Erzeugenden ergeben, z. B. Kreis-Z., ellipt. Z., prismat. Fläche.

**II. Zylinderkörper**: ein ganz im Endlichen liegender Körper, der begrenzt wird von dem Teil einer Z.fläche mit einer einfach geschlossenen Leitkurve  $k$ , der von zwei parallelen Ebenen ausgeschnitten wird, sowie von den kongruenten Ebenenstücken, die die Z.fläche aus den Ebenen ausschneidet. Man nennt den Teil der Z.fläche, der zur Oberfläche des Z.s gehört, *Z.mantel*, die ebenen Teile der Oberfläche *Grund-* und *Deckfläche* und die Abschnitte der Erzeugenden auf dem Mantel *Mantellinien*.

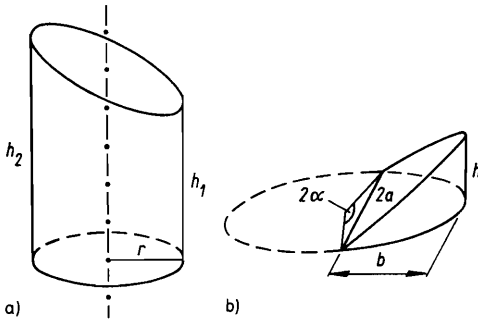
Der Abstand  $h$  der parallelen Ebenen ist die *Höhe* des Z.s. Ist  $G$  der Inhalt seiner Grundfläche, so gilt für sein *Volumen*  $V = G \cdot h$ . Stehen die Mantellinien senkrecht auf der Grundfläche des Z.s, so heißt er *gerade*, andernfalls *schief*. Die Z. werden nach der Art der Grundfläche bezeichnet; in einem *Kreis-Z.* ist sie ein Kreis (Abb. 1). Ein gerader Kreis-Z. ist ein *Rotationskörper*, dessen Symmetrieachse, die *Z.achse*, die Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche verbindet. Ist  $r$  der Radius des Grundkreises eines geraden Kreis-Z.s, so ist  $V = \pi r^2 h$  sein Volumen. Sein *Mantel* ist nach dem Aufschneiden längs



Zylinder. Abb. 1: Zylinderkörper, a) schiefer, b) gerader Kreiszyylinder, c) Hohlzylinder

einer Mantellinie abwickelbar und ergibt eine Rechteckfläche mit den Seiten der Längen  $2\pi r$  und  $h$ , so daß  $A = 2\pi r h$  der Flächeninhalt des Mantels ist. In einem *gleichseitigen Kreis-Z.* gilt  $h = 2r$ .

**III. Z.stumpf** nennt man jeden der beiden Teilkörper, in den ein gerader Kreis-Z. durch einen ebenen Schnitt zerlegt wird, der alle Mantellinien trifft. Sind  $h_1$  und  $h_2$  der kleinste und der größte Abstand, den Schnittfläche und Grundfläche eines Z.stumpfs voneinander haben, so ist sein Volumen dem eines



Zylinder. Abb. 2: a) Zylinderstumpf, b) Zylinderhuf

geraden Kreis-Z.s mit kongruenter Grundfläche gleich, der die Höhe  $h = (h_1 + h_2)/2$  hat, d. h., man erhält  $V = \pi r^2(h_1 + h_2)/2$ . Wird ein ebener Schnitt durch einen geraden Kreis-Z. so geführt, daß entweder die Grundfläche oder die Deckfläche getroffen wird, so heißt der kleinere Teilkörper *Z.huf*. Die raumgleichen Körper (Abb. 2), durch die sich der beschriebene Zylinderstumpf von einem Kreis-Z. mit der Höhe  $h_1 + h_2$  und kongruenter Grundfläche unterscheidet, sind spezielle *Z.hufe*. Die Grundfläche eines *Z.hufs* ist ein Kreissegment. Ist  $2a$  die Länge der Sehne, die das Segment begrenzt,  $b$  die Höhe des Segments,  $2\alpha$  der zu dem das Segment begrenzenden Kreisbogen gehörende Zentriwinkel und  $h$  die Höhe des *Z.hufs*, so gilt für sein Volumen

$$V = [h/(3b)] \cdot [a(3r^2 - a^2) + 3r^2(b - r)\alpha],$$

wenn  $\alpha$  im Bogenmaß angegeben ist. Entsteht ein *Hohl-Z.* dadurch, daß aus einem geraden Kreis-Z. mit  $r_1$  und  $h$  ein Kreis-Z. mit  $r_2 < r_1$  und der gleichen Höhe ausgebohrt wird, so ist sein Rauminhalt durch  $V = \pi h(r_1^2 - r_2^2)$  gegeben.

**Zylinderfunktionen** ↗ Besselsche Differentialgleichung.

**Zylinderhuf** ↗ Zylinder III.

**Zylinderkoordinaten** ↗ Koordinatensystem VI., ↗ Raumintegral.

**Zylinderstumpf** ↗ Zylinder III.

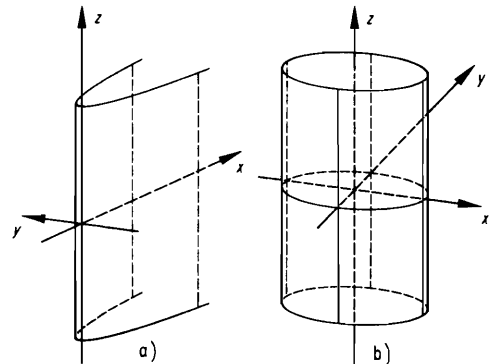
**Zylinder zweiter Ordnung:** entartete, nicht zerfallende Fläche zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt. Die Z. sind in vier Typen eingeteilt, die durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) in Normalform (↗ Hauptachsentransformation) dargestellt werden.

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(3) \quad y^2 = 2px \quad (4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

mit  $p \neq 0$

Diese Gleichungen enthalten die Koordinate  $z$  nicht, bei dem gewählten kartes.  $x, y, z$ -Koordinatensystem sind deshalb die *Mantellinien* des Z.s parallel zur  $z$ -Achse, und die Gleichungen (1), (2), (3), (4) stellen in der  $x, y$ -Ebene die Schnittkurven  $C$  des jeweiligen Z.s mit der  $x, y$ -Ebene dar, (1) einen *elliptischen*, (2) einen *hyperbolischen*, (3) einen *parabolischen*,



Zylinder zweiter Ordnung, a) parabolischer, b) elliptischer

(4) einen *nullteiligen* Z. Die Kurven  $C$  sind entsprechend eine *Ellipse*, *Hyperbel*, *Parabel* oder ein *nullteiliger Kegelschnitt*. Ist  $C$  ein *Mittelpunktskegelschnitt*, so ist die zu den Mantellinien parallele Gerade durch den *Mittelpunkt* von  $C$  die *Zylinderachse*. Für  $a = b$  stellt (1) einen *Kreiszyylinder* dar. **zylindrisches Feld** ↗ skalares Feld I.