Differential- und Integralrechnung III

Von G. M. Fichtenholz

Mit 145 Abbildungen

Elfte Auflage

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1987

Г. М. Фихтенгольц
Курс дифференциального и интегрального исчисления
Том III
Физматгиз, Москва 1960

Die Übersetzung aus dem Russischen besorgten: Ludwig Boll und Konrad Gröger, die wissenschaftliche Redaktion: Ludwig Boll

ISBN 3-326-00025-1

ISSN 0073-2842

Verlagslektor: Erika Arndt
Umschlaggestaltung: Hartwig Hoeftmann
© der deutschsprachigen Ausgabe 1964 und 1987
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, DDR - 1080 Berlin, Postfach 1216
Lizenz-Nr. 206 · 435/68/86
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei „Gottfried Wilhelm Leibniz",
4450 Gräfenhainichen · 6563
LSV 1034
Bestellnummer: 569 751 8
03030

Inhalt

XV.	**Kurvenintegrale. Das Stieltjessche Integral**	**13**
§ 1.	Kurvenintegrale erster Art	13
	543. Definition des Kurvenintegrals erster Art	13
	544. Zurückführung auf das gewöhnliche bestimmte Integral.	15
	545. Beispiele	16
§ 2.	Kurvenintegrale zweiter Art	21
	546. Definition des Kurvenintegrals zweiter Art	21
	547. Existenz und Berechnung eines Kurvenintegrals zweiter Art.	23
	548. Der Fall einer geschlossenen Kurve. Die Orientierung der Ebene	25
	549. Beispiele	27
	550. Approximation mit Hilfe eines Integrals über einen Streckenzug	30
	551. Berechnung von Flächeninhalten mit Hilfe von Kurvenintegralen	31
	552. Beispiele	34
	553. Der Zusammenhang zwischen den Kurvenintegralen beider Arten	38
	554. Physikalische Aufgaben.	39
§ 3.	Bedingungen für die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Weg	44
	555. Problemstellung. Zusammenhang mit dem totalen Differential	44
	556. Differentiation eines Integrals, das nicht vom Weg abhängt	45
	557. Berechnung eines Kurvenintegrals mit Hilfe einer Stammfunktion	47
	558. Ein Kriterium für die Vollständigkeit des Differentials. Das Auffinden einer Stammfunktion im Fall eines rechteckigen Bereichs	48
	559. Verallgemeinerung auf beliebige Bereiche	50
	560. Zusammenfassung	52
	561. Integrale über eine geschlossene Kurve	52
	562. Mehrfach zusammenhängende Bereiche. Singuläre Punkte	54
	563. Das Gaußsche Integral	58
	564. Der dreidimensionale Fall	61
	565. Beispiele	63
	566. Anwendung auf physikalische Aufgaben	67
§ 4.	Funktionen endlicher Schwankung	69
	567. Definition der Funktionen endlicher Schwankung	69
	568. Die Klassen der Funktionen endlicher Schwankung	71
	569. Eigenschaften der Funktionen endlicher Schwankung.	73
	570. Kriterien für Funktionen endlicher Schwankung	76
	571. Stetige Funktionen endlicher Schwankung	77
	572. Rektifizierbare Kurven	79

§ 5. Das Stieltjessche Integral . 81

573. Definition des Stieltjesschen Integrals 81
574. Allgemeine Bedingungen für die Existenz des Stieltjesschen Integrals 82
575. Klassen von Fällen, in denen das Stieltjessche Integral existiert . 83
576. Eigenschaften des Stieltjesschen Integrals . 86
577. Partielle Integration 87
578. Zurückführung eines Stieltjesschen Integrals auf ein Riemannsches Integral 88
579. Berechnung Stieltjesscher Integrale 90
580. Beispiele 93
581. Geometrische Veranschaulichung des Stieltjesschen Integrals 98
582. Der Mittelwertsatz. Abschätzungen 99
583. Grenzübergang unter dem Integralzeichen beim Stieltjesschen Integral 100
584. Beispiele und Ergänzungen 102
585. Zurückführung eines Kurvenintegrals zweiter Art auf ein Stieltjessches Integral . . . 105

XVI. Flächenintegrale

§ 1. Definition und einfachste Eigenschaften von Flächenintegralen 107

586. Das Volumen eines zylindrischen Körpers 107
587. Zurückführung des Flächenintegrals auf ein Doppelintegral . 108
588. Definition des Flächenintegrals 110
589. Existenzbedingungen für das Flächenintegral . 111
590. Klassen integrierbarer Funktionen 113
591. Untere und obere Integrale als Grenzwerte 115
592. Eigenschaften von integrierbaren Funktionen und von Flächenintegralen 116
593. Das Integral als additive Funktion des Bereichs; Differentiation nach dem Bereich . . 118

§ 2. Berechnung von Flächenintegralen 121

594. Die Zurückführung des Flächenintegrals auf ein Doppelintegral im Fall eines Rechtecks 121
595. Beispiele 124
596. Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein Doppelintegral im Fall eines krummlinig begrenzten Gebiets . . 131
597. Beispiele 134
598. Anwendungen in der Mechanik 145
599. Beispiele . 147

§ 3. Der Gaußsche Integralsatz. 154

600. Herleitung des Gaußschen Satzes 154
601. Die Anwendung des Gaußschen Satzes bei der Untersuchung von Kurvenintegralen . . 157
602. Beispiele und Ergänzungen 158

§ 4. Variablentransformation in Flächenintegralen 161

603. Transformation ebener Gebiete 161
604. Beispiele . 164

605. Der Flächeninhalt in krummlinigen Koordinaten 168
606. Ergänzende Bemerkungen . 171
607. Geometrische Herleitung . 172
608. Beispiele 174
609. Variablentransformation in Flächenintegralen 182
610. Die Analogie zu einfachen Integralen. Das Integral über ein orientiertes Gebiet . . 184
611. Beispiele 185

§ 5. Uneigentliche Flächenintegrale . 192

612. Integrale über ein unbeschränktes Gebiet 192
613. Satz über die absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale . . 193
614. Die Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein iteriertes Integral 195
615. Integrale unbeschränkter Funktionen 197
616. Variablentransformation in uneigentlichen Integralen 198
617. Beispiele . 200

XVII. Flächeninhalt. Oberflächenintegrale

§ 1. Zweiseitige Flächen . . . 215
618. Die Seite einer Fläche 215
619. Beispiele 216
620. Die Orientierung von Flächen und die Orientierung des Raumes . 218
621. Die Vorzeichenwahl in den Formeln für die Richtungskosinus der Normalen 219
622. Der Fall stückweise glatter Flächen 221

§ 2. Der Flächeninhalt krummer Flächen . 222

623. Der Schwarzsche Zylinder 222
624. Definition des Inhalts krummer Flächen . 224
625. Bemerkung 225
626. Die Existenz des Inhalts einer Fläche und seine Berechnung. 226
627. Die Definition mit Hilfe einbeschriebener Polyederflächen 230
628. Definition des Inhalts in singulären Fällen . 232
629. Beispiele . . . 232

§ 3. Oberflächenintegrale erster Art 244

630. Definition des Oberflächenintegrals erster Art . . . 244
631. Zurückführung auf ein gewöhnliches Flächenintegral 245
632. Anwendungen von Oberflächenintegralen erster Art in der Mechanik 247
633. Beispiele . 248

§ 4. Oberflächenintegrale zweiter Art . 254

634. Definition des Oberflächenintegrals zweiter Art 254
635. Einfachste Spezialfälle . 256
636. Der allgemeine Fall . . 258
637. Eine Einzelheit des Beweises 260
638. Das Volumen eines Körpers als Oberflächenintegral 260
639. Der Stokessche Integralsatz 264
640. Beispiele 266
641. Anwendung des Stokesschen Satzes auf die Untersuchung von Kurvenintegralen im Raum . . 271

XVIII. Raumintegrale und mehrdimensionale Integrale

§ 1. Das Raumintegral und seine Berechnung 273

642. Das Problem der Bestimmung der Masse eines Körpers . 273
643. Das Raumintegral. Bedingungen für seine Existenz 274
644. Eigenschaften integrierbarer Funktionen und dreidimensionaler Integrale 275
645. Die Berechnung eines Raumintegrals über ein Parallelepiped 276
646. Die Berechnung eines Raumintegrals für ein beliebiges Gebiet . 278
647. Uneigentliche Raumintegrale . . 279
648. Beispiele 280
649. Anwendungen in der Mechanik 286
650. Beispiele 288

§ 2. Der Integralsatz von GAUSS-OSTROGRADSKI 294

651. Der Satz von OSTROGRADSKI 294
652. Anwendung des Satzes von OSTROGRADSKI zur Untersuchung von Oberflächenintegralen . . . 296
653. Das Gaußsche Integral . 297
654. Beispiele . 299

§ 3. Variablentransformation in Raumintegralen . 302

655. Abbildung von Räumen und krummlinige Koordinaten . 302
656. Beispiele 303
657. Ein Ausdruck für das Volumen in krummlinigen Koordinaten . 305
658. Ergänzende Bemerkungen . 307
659. Geometrische Herleitung . 308
660. Beispiele 310
661. Variablentransformation in Raumintegralen 316
662. Beispiele 318
663. Die Anziehungskraft und das Potential eines Körpers in einem inneren Punkt 321

§ 4. Elemente der Vektoranalysis 324

664. Skalare und Vektoren . . 324
665. Skalar- und Vektorfelder . 324
666. Der Gradient 325
667. Der Fluß eines Vektors durch eine Fläche 327
668. Der Satz von OSTROGRADSKI. Die Divergenz 328
669. Die Zirkulation eines Vektors. Der Stokessche Satz. Die Rotation . 329
670. Spezielle Felder 331
671. Das Umkehrproblem der Vektoranalysis 334
672. Anwendungen 335

§ 5. Mehrdimensionale Integrale . 340

673. Das Problem der Anziehungskraft und des Potentials zweier Körper 340
674. Das Volumen eines n-dimensionalen Körpers. Das n-dimensionale Integral 342
675. Koordinatentransformation bei n-dimensionalen Integralen 343
676. Beispiele 346

XIX. Fourierreihen

§ 1. Einführung 364

677. Periodische Größen und harmonische Analyse 364
678. Die Bestimmung der Koeffizienten nach der Methode von EULER-FOURIER 366
679. Orthogonale Funktionensysteme . 369
680. Trigonometrische Interpolation 372

§ 2. Entwicklung von Funktionen in Fourierreihen . 375

681. Problemstellung. Dirichletsches Integral 375
682. Erster Fundamentalhilfssatz . 377
683. Das Lokalisationsprinzip 379
684. Die Kriterien von DINI und von LIPSCHITZ für die Konvergenz von Fourierreihen 380
685. Zweiter Fundamentalhilfssatz 383
686. Das Kriterium von DIRICHLET-JORDAN . 384
687. Nichtperiodische Funktionen 386
688. Beliebige Intervalle 387
689. Entwicklungen in reine Kosinusreihen und reine Sinusreihen 388
690. Beispiele 391
691. Entwicklung von $\ln \Gamma(x)$ 403

§ 3. Ergänzungen 406

692. Reihen mit abnehmenden Koeffizienten. 406
693. Summation trigonometrischer Reihen mit Hilfe analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . 411
694. Beispiele 413
695. Die komplexe Form der Fourierreihen 417
696. Die konjugierte Reihe . 420
697. Mehrfache Fourierreihen 422

§ 4. Der Konvergenzcharakter von Fourierreihen . . 424

698. Einige Ergänzungen zu den Fundamentalhilfssätzen . . . 424
699. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen . . 426
700. Das Verhalten einer Fourierreihe in der Nähe eines Unstetigkeitspunktes. Ein Spezialfall 429
701. Der Fall einer beliebigen Funktion 433
702. Singularitäten von Fourierreihen. Vorbereitende Bemerkungen 435
703. Die Konstruktion von Singularitäten . . 437

§ 5. Restabschätzungen in Abhängigkeit von Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion . . . 439

704. Der Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten einer Funktion und ihren Ableitungen 439
705. Eine Abschätzung für die Partialsumme im Fall einer beschränkten Funktion 440
706. Eine Abschätzung des Restes für eine Funktion mit beschränkter k-ter Ableitung 441
707. Funktionen, deren k-te Ableitung von endlicher Schwankung ist . 443
708. Einfluß von Unstetigkeiten der Funktion und ihrer Ableitungen auf die Ordnung des Kleinerwerdens der Fourierkoeffizienten 444

709. Funktionen, die in $[0, \pi]$ gegeben sind 448
710. Die Methode der Abtrennung der Singularitäten . 450

§ 6. Das Fourierintegral 456

711. Das Fourierintegral als Grenzfall der Fourierreihe 456
712. Vorbereitende Bemerkungen 458
713. Hinreichende Kriterien 459
714. Modifikation der Grundvoraussetzung 460
715. Verschiedene Formen der Fourierschen Formel 462
716. Die Fouriertransformation 464
717. Einige Eigenschaften der Fouriertransformierten 466
718. Beispiele und Ergänzungen . . . 467
719. Funktionen zweier Veränderlicher 473

§ 7. Anwendungen . 474

720. Die Abhängigkeit der exzentrischen Anomalie eines Planeten von seiner mittleren Anomalie 474
721. Das Problem der schwingenden Saite 476
722. Das Problem der Wärmeausbreitung in einem endlichen Stab . 480
723. Der Fall eines unendlichen Stabes . 483
724. Modifikation der Randbedingungen 485
725. Die Wärmeausbreitung in einer kreisförmigen Platte 486
726. Praxis der harmonischen Analyse. Ein Schema für 12 Ordinaten . 487
727. Beispiele 490
728. Ein Schema für 24 Ordinaten . 492
729. Beispiele 493
730. Vergleich der angenäherten und der exakten Werte der Fourierkoeffizienten . . 494

XX. **Fourierreihen (Fortsetzung)**

§ 1. Das Rechnen mit Fourierreihen. Abgeschlossenheit und Vollständigkeit 497

731. Gliedweise Integration einer Fourierreihe . 497
732. Gliedweise Differentiation einer Fourierreihe 499
733. Die Abgeschlossenheit des trigonometrischen Systems 500
734. Die gleichmäßige Approximation von Funktionen. Die Sätze von Weierstrass 501
735. Approximation im Mittel. Extremaleigenschaften der Abschnitte einer Fourierreihe 504
736. Die Vollständigkeit des trigonometrischen Systems. Satz von Ljapunoff 506
737. Die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung 509
738. Multiplikation von Fourierreihen 511
739. Einige Anwendungen der Vollständigkeitsrelation 512

§ 2. Anwendung verallgemeinerter Summationsmethoden auf Fourierreihen . 516

740. Ein Hilfssatz 516
741. Die Summation von Fourierreihen nach dem Poisson-Abelschen Verfahren 518
742. Lösung des Dirichletschen Problems für den Kreis 520
743. Summierung von Fourierreihen nach dem Cesàro-Fejérschen Verfahren 522

744. Einige Anwendungen der verallgemeinerten Summation von Fourierreihen 524
745. Gliedweise Differentiation von Fourierreihen 526

§ 3. Die Eindeutigkeit der trigonometrischen Reihenentwicklung einer Funktion . . 527

746. Hilfssätze über verallgemeinerte Ableitungen 527
747. Das Riemannsche Summationsverfahren für trigonometrische Reihen 530
748. Ein Hilfssatz über die Koeffizienten konvergenter trigonometrischer Reihen 533
749. Die Eindeutigkeit der trigonometrischen Entwicklung 534
750. Abschließende Sätze über Fourierreihen 535
751. Verallgemeinerung . 538

Anhang. Der allgemeine Gesichtspunkt beim Limesbegriff

752. Die verschiedenen Arten des Grenzwertes, die in der Analysis vorkommen 541
753. (Total-) Geordnete Mengen 542
754. Halbgeordnete Mengen 543
755. Geordnete Veränderliche und ihr Grenzwert 545
756. Beispiele 546
757. Bemerkung zum Grenzwert einer Funktion 549
758. Erweiterung der Theorie der Grenzwerte 549
759. Gleichgeordnete Veränderliche 552
760. Ordnung mit Hilfe von Zahlenparametern. 553
761. Zurückführung auf diskrete Veränderliche. 554
762. Oberer und unterer Limes einer geordneten Veränderlichen 556

Namen- und Sachverzeichnis . 558

XV. Kurvenintegrale. Das Stieltjessche Integral

§ 1. Kurvenintegrale erster Art

543. Definition des Kurvenintegrals erster Art. Um auf möglichst einfache Weise zu diesem neuen Begriff zu gelangen, betrachten wir ein mechanisches Problem, das auf ein Kurvenintegral erster Art führt.

Es sei in der Ebene eine stetige einfache[1]) rektifizierbare Kurve (K) gegeben (Abb. 1), längs derer Masse verteilt sei; ihre lineare Dichte $\varrho(M)$ in allen Punkten M der Kurve sei bekannt. Es soll die Masse m der ganzen Kurve (K) bestimmt werden. Zu diesem Zweck wählen wir zwischen den Endpunkten A und B von (K) Punkte $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n=B$, die von A nach B numeriert seien (Nr. 246).

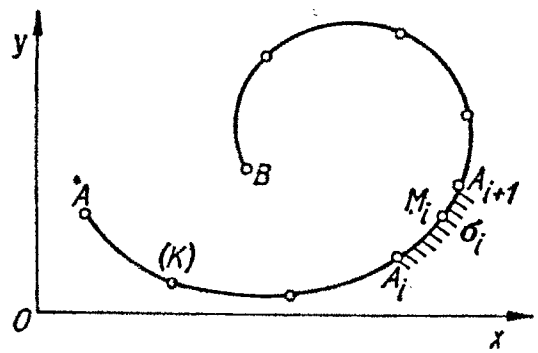

Abb. 1

Wir wählen irgendeinen Punkt M_i auf dem Bogen $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ der Kurve und berechnen die Dichte $\varrho(M_i)$ in diesem Punkt. Nehmen wir etwa an, in allen Punkten dieses Abschnittes sei die Dichte dieselbe, und bezeichnen wir die Länge des Bogens $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ mit σ_i, so erhalten wir für die Masse dieses Bogens den Näherungswert

$$m_i \approx \varrho(M_i)\,\sigma_i$$

und für die gesuchte Gesamtmasse den Näherungswert

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(M_i)\,\sigma_i\,.$$

Der Fehler, den wir dabei im Zusammenhang mit der obigen Annahme begehen, wird im allgemeinen gegen 0 streben, wenn die Längen σ_i aller Abschnitte gegen 0 streben. Bezeichnen wir also mit λ das größte σ_i, so brauchen wir, um zu einer ge-

[1]) Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, beschränken wir uns auf nichtgeschlossene Kurven.

nauen Formel zu gelangen, nur zur Grenze überzugehen:

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\varrho(M_i)\,\sigma_i\,.$$

Wir wollen nun Grenzübergänge dieser Art allgemein betrachten und von dem gestellten Problem abstrahieren; wir nehmen eine beliebige „Punktfunktion" $f(M)=f(x, y)$, die längs einer stetigen einfachen rektifizierbaren Kurve (K) gegeben sei,[1]) und wiederholen den beschriebenen Prozeß. Wir zerlegen die Kurve (K) in Elementarbögen $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ und wählen darauf je einen beliebigen Punkt $M_i(\xi_i, \eta_i)$, berechnen den Wert $f(M_i)=f(\xi_i, \eta_i)$ in diesen Punkten und bilden die Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(M_i)\,\sigma_i=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i, \eta_i)\,\sigma_i\,,$$

eine Art „Integralsumme".

Das analoge Verfahren kann auch auf den Fall einer geschlossenen Kurve angewandt werden, wenn als A_0 (A_n) irgendeiner ihrer Punkte gewählt wird und die anderen Punkte A_i in dem einen oder anderen Durchlaufungssinn auf der Kurve angenommen werden (Nr. 246).

Hat für gegen 0 strebendes $\lambda=\max\sigma_i$ die Integralsumme einen bestimmten endlichen Grenzwert I, der weder von der Art der Zerlegung von (K) noch von der Wahl der Punkte M_i auf den Abschnitten A_iA_{i+1} abhängt, so nennt man diesen Grenzwert das *Kurvenintegral (erster Art*[2])) der Funktion $f(M)=f(x, y)$ längs der Kurve oder längs des Weges (K) und schreibt

$$I=\int_{(K)}f(M)\,ds=\int_{(K)}f(x, y)\,ds \tag{1}$$

(dabei ist s die Bogenlänge der Kurve, und ds weist auf die Länge der Elementarbögen σ_i hin). Die genaue Charakterisierung des Grenzprozesses kann dem Leser überlassen bleiben.

Somit kann der oben gefundene Ausdruck für die Masse der massebelegten Kurve in der Form

$$m=\int_{(K)}\varrho(M)\,ds \tag{2}$$

geschrieben werden.

Wir weisen besonders darauf hin, daß *in dieser Definition der Durchlaufungssinn, der dem Weg (K) gegeben werden kann, keine Rolle spielt.* Ist z. B. diese Kurve nicht geschlossen und versteht man unter (AB) und (BA) die in verschiedenem Sinne durchlaufene Kurve, so ist

$$\int_{(AB)}f(M)\,ds=\int_{(BA)}f(M)\,ds\,.$$

Ganz analog können wir auch den Begriff des längs einer *Raumkurve* (K) erstreckten

---

[1]) Dabei wird vorausgesetzt, es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt.

[2]) Zum Unterschied von dem in Nr. 546 zu betrachtenden Kurvenintegral *zweiter Art.*

Integrals einführen:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{(K)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s\,.^{1})$$

Da hierbei nichts prinzipiell Neues auftritt, brauchen wir nicht näher darauf einzugehen.

544. Zurückführung auf das gewöhnliche bestimmte Integral. Wir nehmen an, auf (K) sei irgendwie einer der beiden möglichen Durchlaufungssinne festgelegt, so daß die Lage eines Punktes M auf der Kurve durch die Länge des vom Anfangspunkt A an gerechneten Bogens $s = \overset{\frown}{AM}$ gegeben ist. Dann kann die Kurve (K) in Parameterform durch Gleichungen der Gestalt

$$x = x(s), \qquad y = y(s) \qquad (0 \leqq s \leqq S)$$

beschrieben werden, und die in den Punkten von (K) gegebene Funktion $f(x, y)$ ist eine mittelbare Funktion $f(x(s), y(s))$ des Parameters s.

Bezeichnet man mit s_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ die den Teilpunkten A_i entsprechenden Bögen, so ist offenbar $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$. Bezeichnet man ferner den Bogen, der dem Punkt M_i entspricht, mit $\bar{s}_i$ (offenbar ist $s_i \leqq \bar{s}_i \leqq s_{i+1}$), so folgt, daß die Integralsumme des Kurvenintegrals,

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\,\Delta s_i\,,$$

zugleich Integralsumme eines gewöhnlichen bestimmten Integrals ist, und zwar folgt dann

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,\mathrm{d}s = (\mathrm{R}) \int\limits_{0}^{S} f(x(s), y(s))\,\mathrm{d}s\,, \tag{3}$$

wobei die Existenz des einen Integrals die des anderen nach sich zieht.[2])

Diese unmittelbare Zurückführbarkeit des Kurvenintegrals erster Art auf ein gewöhnliches Integral vermindert natürlich seine theoretische Bedeutung, keinesfalls aber seine methodische. Das Integral existiert beispielsweise, wenn die Funktion $f(M)$ stetig ist, was wir im folgenden voraussetzen werden.[3])

Es sei jetzt eine einfache Kurve (K) in beliebiger Parameterform durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq T)$$

---

[1]) Es sei ein rechtwinkliges x, y, z-Koordinatensystem zugrunde gelegt. Die Funktion f braucht nur in den Punkten von (K) definiert zu sein.

[2]) Das Zeichen (R) soll darauf hinweisen, daß es sich hier um das gewöhnliche Integral im *Riemannschen* Sinne handelt.

[3]) Dabei meinen wir hier Stetigkeit in den Punkten von (K) längs (K). In der ε-δ-Sprache bedeutet das folgendes: Zu jedem $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\delta > 0$ finden derart, daß für je zwei Kurvenpunkte M und M' mit $\overline{MM'} < \delta$ die Beziehung $|f(M') - f(M)| < \varepsilon$ gilt. Unter dieser Annahme ist auch die zusammengesetzte Funktion $f(x(s), y(s))$ eine stetige Funktion von s, da $x(s)$ und $y(s)$ stetig von s abhängen.

gegeben, wobei φ und ψ nebst ihren Ableitungen φ' und ψ' stetig seien. Dann ist die Kurve sicher rektifizierbar (vgl. Nr. 248), und wenn der Bogen $s=\overset{\frown}{AM}=s(t)$ mit dem Parameter t wächst, ist

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$$

(vgl. Formel (10) aus Nr. 248). Durch Variablensubstitution auf der rechten Seite von (3) folgt

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{t_0}^{T} f(\varphi(t),\psi(t))\,\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

Somit muß man zur Berechnung eines Kurvenintegrals erster Art in der zu integrierenden Funktion die Veränderlichen x und y durch ihre Parameterdarstellungen ersetzen und $\mathrm{d}s$ *durch das Bogendifferential als Funktion des Parameters. Dabei muß die untere Grenze des bestimmten Integrals kleiner sein als die obere.*

Im Fall einer durch

$$y=y(x)\qquad (a\leqq x\leqq b)$$

gegebenen Kurve nimmt (4) folgende Gestalt an:

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\,\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

Dieser Beziehung kann man auch eine andere Gestalt geben. Unter der Annahme, $y(x)$ sei nebst der Ableitung $y'(x)$ stetig, hat die Kurve (K) in jedem Punkt eine bestimmte Tangente, die der y-Achse nicht parallel ist. Bezeichnet α den Neigungswinkel der Tangente zur x-Achse, so folgt

$$\tan\alpha=y'(x),\qquad |\cos\alpha|=\frac{1}{[1+(y'(x))^2]^{1/2}},$$

also

$$\int\limits_{(K)} f(M)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{a}^{b}\frac{f(x,y(x))}{|\cos\alpha|}\,\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

Insbesondere gilt, da offenbar $\int\limits_{(K)}\mathrm{d}s=S$ ist, wobei S die Länge der ganzen Kurve (AB) bezeichnet,

$$S=\int\limits_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{|\cos\alpha|}\,. \tag{7}$$

Bemerkung. Wir haben (7) als Resultat formaler Umformungen erhalten. Würden wir die Länge des Bogens einer Kurve als Grenzwert umbeschriebener statt einbeschriebener Streckenzüge definieren, so würde diese Definition — im Fall einer explizit gegebenen Kurve — unmittelbar auf Formel (7) führen. Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen.

545. Beispiele.

1. Man berechne das Integral $I=\int\limits_{(K)} xy\,\mathrm{d}s$, wenn (K) der im ersten Quadranten gelegene Viertelbogen der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ist.

Lösung. (a) Es ist

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2-x^2}},$$

so daß nach (5)

$$I=\int_0^a x\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2-x^2}}\,dx=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}\cdot x\,dx$$

gilt. Führt man die Integration aus, so folgt

$$I=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}\,[a^4-(a^2-b^2)\,x^2]^{3/2}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Herleitung insofern nicht ganz einwandfrei ist, als im Punkt $x=a$ eine senkrechte Tangente auftritt. Von diesem Mangel frei ist folgende Lösung:

(b) Man geht zur Parameterdarstellung $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ der Ellipse über und erhält

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=-a\sin t, \qquad \dot{y}=\frac{dy}{dt}=b\cos t,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t},$$

so daß man nach (4) vorgehen kann:

$$I=\int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

Die Substitution $\cos 2t=z$, also $\sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}\,dz$ liefert

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\,z}\,dz$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}\,z\right]^{3/2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2. Man berechne $I=\int_{(K)} y\,ds$, wenn (K) das Stück der Parabel $y^2=2px$ vom Ursprung bis zum Punkt (x_0, y_0) ist.

Lösung. Aus der Kurvengleichung folgt

$$yy'=p;$$

somit ist

$$y\,ds=y\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}\,dx=\sqrt{p^2+2px}\,dx$$

und

$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}\,dx=\frac{1}{3p}\left[(p^2+y_0^2)^{3/2}-p^3\right].$$

3. Man berechne $I=\int_{(A)}(x^2+y^2)\,ds$, wenn (A) die geradlinige Strecke zwischen den Punkten (a, a) und (b, b) ist $(b>a)$.

Hinweis. Gleichung der Geraden: $y=x$.

Lösung. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot(b^3-a^3)$.

4. Man berechne $K=\int_{(C)}ye^{-x}\,ds$, wenn (C) der Bogen der Kurve

$$x=\ln(1+t^2),\qquad y=2\arctan t-t+3$$

zwischen $t=0$ und $t=1$ ist.

Hinweis. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=1$;

$$K=\int_0^1\frac{2\arctan t-t+3}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{3\pi}{4}.$$

5. Bei den meisten der häufig vorkommenden Kurven (Ellipse, Hyperbel, Sinusoide, Lemniskate u. a.) kann die Bogenlänge nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden, da ds nicht in geschlossener Form integrierbar ist. Trotzdem kann das Integral $\int_{(K)}f(x, y)\,ds$ auch für solche Kurven oft mit Hilfe elementarer Funktionen berechnet werden (z. B. im ersten Beispiel), da der Faktor $f(x, y)$ die Struktur des Integranden beeinflußt. Der Leser möge Beispiele für Integrale $\int_{(K)}f(x, y)\,ds$ längs der Sinuskurve $y=\sin x$ oder der Hyperbel $xy=1$ konstruieren, die durch elementare Funktionen ausdrückbar sind.

6. Man berechne $I=\int_{(C)}xyz\,ds$, wenn (C) der Bogen der Kurve $x=t$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $z=\frac{1}{2}t^2$ zwischen $t=0$ und $t=1$ ist.

Lösung.

$$ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt=(1+t)\,dt,\qquad I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{9/2}(1+t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

7. Man gebe eine Formel zur Berechnung von $I=\int_{(K)}f(x, y)\,ds$ für den Fall an, daß die Kurve (K) durch Polarkoordinaten $r=r(\theta)$, $\theta_1\leqq\theta\leqq\theta_2$, gegeben ist.

Lösung. $I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r\cdot\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$.

8. Man berechne

$$H=\int_{(K)}\frac{ds}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

wenn (K) das Stück der hyperbolischen Spirale $r\cdot\theta=1$ zwischen $\theta=\sqrt{3}$ und $\theta=2\sqrt{2}$ ist.

Lösung. $\frac{19}{3}$.

9. Man berechne die Masse des Bogens der Kurve $y=\ln x$ zwischen den Punkten mit den Abszissen x_1 und x_2, wenn die (lineare) Dichte der Kurve in jedem Punkt gleich dem Quadrat seiner Abszisse ist.

Lösung. Nach (2) folgt wegen $\varrho=x^2$ die Beziehung $m=\int_{x_1}^{x_2} x^2\,ds$. Nun ist $ds=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$, also

$$m=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+x^2}\cdot x\,dx=\frac{1}{3}\left[(1+x_2^2)^{3/2}-(1+x_1^2)^{3/2}\right].$$

10. Man berechne die Masse des Bogens der Kettenlinie $y=a\cosh\frac{x}{a}$ zwischen den Punkten $x=0$ und $x=a$, wenn die Dichte der Kurve in jedem ihrer Punkte der Ordinate umgekehrt proportional ist.

Hinweis. $\varrho=\frac{k}{y}$, $ds=\cosh\frac{x}{a}\,dx=\frac{y}{a}\,dx$, $m=k$.

Auch andere Probleme, die mit stetig verteilten Massen längs massebelegten Kurven zusammenhängen, führen ganz naturgemäß auf Kurvenintegrale des betrachteten Typus.

11. Wir hatten uns schon in Kapitel X, Nr. 349, mit der Berechnung der statischen Momente einer ebenen Kurve in bezug auf die Koordinatenachsen sowie den Schwerpunktskoordinaten beschäftigt, und zwar unter der Annahme, die „lineare Dichte" ϱ sei gleich 1. Der Leser kann die dort erhaltenen Resultate leicht auf den allgemeinen Fall einer stetigen Masseverteilung ausdehnen. Benutzt man den Begriff des Kurvenintegrals, so lassen sich die Resultate folgendermaßen schreiben:

$$M_y=\int_{(K)}\varrho x\,ds,\qquad M_x=\int_{(K)}\varrho y\,ds,$$

$$x_S=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_{(K)}\varrho x\,ds}{\int_{(K)}\varrho\,ds},\qquad y_S=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_{(K)}\varrho y\,ds}{\int_{(K)}\varrho\,ds}.$$

12. Wir bringen noch ein Beispiel für die Anwendung des Kurvenintegrals erster Art auf das Problem der Anziehung eines Massepunktes durch eine massebelegte Kurve.

Bekanntlich zieht nach dem Newtonschen Gesetz ein Massepunkt M der Masse m einen Massepunkt M_0 der Masse m_0 mit einer Kraft an, die von M_0 nach M gerichtet und zahlenmäßig gleich $k\frac{mm_0}{r^2}$ ist, wobei r der Abstand M_0M und k ein Koeffizient ist, der von der Wahl der Maßeinheiten abhängt. Der Einfachheit halber setzen wir im allgemeinen $k=1$.

Wird M_0 von einem System von Massepunkten $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit den Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ angezogen, so ergibt sich die resultierende Kraft als geometrische Summe der Anziehungskräfte der einzelnen Massepunkte. Die Projektionen der resultierenden Kraft auf die Achsen sind gleich den algebraischen Summen der Projektionen der einzelnen Kräfte.

Bezeichnet man die Projektionen auf die Achsen mit X bzw. Y und den Winkel, den der Vektor $\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{M_0M_i}$ mit der x-Achse bildet, mit θ_i (Abb. 2), so ist offenbar

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\cos\theta_i,\qquad Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_0m_i}{r_i^2}\sin\theta_i$$

(r_i ist die Länge von $\boldsymbol{r}_i$).

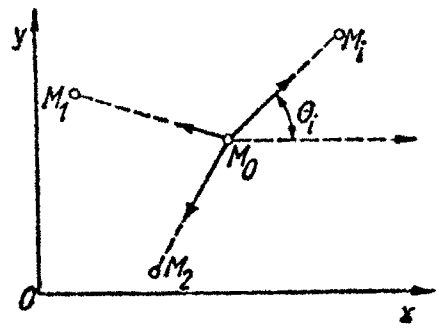

Abb. 2

Es sei jetzt die anziehende Masse stetig längs einer Kurve (K) verteilt. Zur Bestimmung der Anziehungskraft zerlegen wir (K) in Teile σ_i, konzentrieren die Masse jedes Teilstückes in einem beliebigen seiner Punkte M_i und berechnen den Näherungswert der Projektionen der Resultate auf die Achsen:

$$X \approx \sum_i \frac{m_0 \varrho(M_i)\,\sigma_i}{r_i^2} \cos\theta_i, \qquad Y \approx \sum_i \frac{m_0 \varrho(M_i)\,\sigma_i}{r_i^2} \sin\theta_i;$$

denn in diesem Fall ist die Masse eines Teilstückes angenähert gleich $\varrho(M_i)\,\sigma_i$.

Streben alle σ_i gegen 0, so ergeben sich in der Grenze Gleichheiten, und die Summen gehen, falls ϱ stetig ist, in Integrale über:

$$X = m_0 \int_{(K)} \frac{\varrho(M)\cos\theta}{r^2}\,ds, \qquad Y = m_0 \int_{(K)} \frac{\varrho(M)\sin\theta}{r^2}\,ds; \tag{8}$$

hier ist r die Länge von $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{M_0 M}$ und θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und der x-Achse.

13. Man bestimme die Anziehungskraft, die ein homogener Halbkreisbogen für $\varrho = 1$ auf eine Einheitsmasse in seinem Mittelpunkt ausübt.

Lösung. Wir legen den Koordinatensprung in den Mittelpunkt des Halbkreisbogens und die x-Achse durch seine Endpunkte (Abb. 3). Aus Symmetriegründen ist $X = 0$, so daß sich die Aufgabe auf die Bestimmung von Y reduziert. Nach (8) ist

$$Y = \frac{\sin\theta}{r^2}\,ds\,.$$

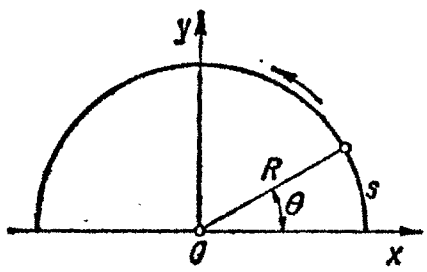

Abb. 3

In unserem Fall gilt $r = R$ (Radius des Halbkreises) und $ds = R d\theta$. Daher ist

$$Y = \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = \frac{2}{R}\,.$$

14. Man bestimme die Anziehungskraft der unendlichen homogenen Geraden (bei $\varrho = 1$) auf einen Punkt mit der Einheitsmasse ($m_0 = 1$) im Abstand h von der Geraden.

Lösung. Wir betrachten die gesuchte Anziehungskraft als Limes der Anziehungskraft, die von einem endlichen Stück der Geraden ausgeübt wird, falls die Endpunkte auf beiden Seiten gegen ∞ streben. Nehmen wir die Gerade als x-Achse und legen die

y-Achse durch den gegebenen Punkt, so erhalten wir (wegen $ds = dx$)

$$Y = -h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{2}{h}.$$

Analog ergibt sich $X = 0$, was übrigens aus Symmetriegründen (bei dem symmetrischen Grenzübergang) zu vermuten war.

15. Man bestimme die Anziehungskraft, die von dem im ersten Quadranten liegenden Bogen der Astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ auf eine Einheitsmasse im Ursprung ausgeübt wird, wenn die Dichte der Kurve in jedem ihrer Punkte gleich dem Kubus seines Abstandes vom Ursprung ist.

Lösung. $X = Y = \frac{3a^2}{5}$.

§ 2. Kurvenintegrale zweiter Art

546. Definition des Kurvenintegrals zweiter Art. Wir kommen jetzt zu dem für die Praxis wichtigeren Begriff des Kurvenintegrals zweiter Art, wobei wir hier direkt die Definition bringen und die Anwendungen dieses Begriffes auf später (vgl. beispielsweise Nr. 554) verschieben wollen. Es sei eine stetige Kurve (AB) gegeben, die wir der Einfachheit halber als *nicht geschlossen* voraussetzen (vgl. die Fußnote 1 auf S. 14, und längs dieser Kurve sei eine Funktion $f(x, y)$ definiert. Wir zerlegen die Kurve durch Teilpunkte $A_i(x_i, y_i)$ in Teile, wählen auf dem Abschnitt A_iA_{i+1} von (AB) einen beliebigen Punkt $M_i(\xi_i, \eta_i)$ und berechnen dafür, wie auch schon früher, den Funktionswert $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$. Diesmal jedoch multiplizieren wir diesen Wert nicht mit der Länge des Bogens A_iA_{i+1}, sondern mit der Größe der Projektion dieses Bogens, beispielsweise auf die x-Achse, d. h. mit $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$; dann bilden wir die Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i .$$

Wenn für gegen 0 strebendes $\mu = \max \overline{A_iA_{i+1}}$ diese Summe einen endlichen Grenzwert I hat, der weder von der Art der Zerlegung der Kurve noch von der Wahl der Punkte M_i abhängt, dann nennen wir diesen Grenzwert das *Kurvenintegral (zweiter Art)* von $f(M)\,dx$ längs der Kurve (oder längs des Weges) (AB) und bezeichnen ihn mit

$$I = \int_{(AB)} f(M)\,dx = \int_{(AB)} f(x, y)\,dx . \tag{1}$$

Analog bilden wir, indem wir $f(M_i)$ nicht mit Δx_i, sondern mit Δy_i, d. h. mit der Projektion des Bogens $\widehat{A_iA_{i+1}}$ auf die y-Achse multiplizieren, die Summe

$$\sigma^* = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\,\Delta y_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta y_i ,$$

als deren Grenzwert wir das Kurvenintegral zweiter Art von $f(M)\,dy$,

$$I^* = \int_{(AB)} f(M)\,dy = \int_{(AB)} f(x, y)\,dy , \tag{2}$$

erhalten.

Sind längs der Kurve (AB) die beiden Funktionen $P(M)=P(x, y)$ und $Q(M)=Q(x, y)$ definiert und existieren die Integrale

$$\int\limits_{(AB)} P(M)\,dx=\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx, \qquad \int\limits_{(AB)} Q(M)\,dy=\int\limits_{(AB)} Q(x, y)\,dy,$$

so nennt man auch ihre Summe ein Kurvenintegral (in allgemeiner Form) und setzt

$$\int\limits_{(AB)} [P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]=\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx+\int\limits_{(AB)} Q(x, y)\,dy.$$

Wir wollen nun die Definition des Kurvenintegrals zweiter Art (1) (oder (2)) mit der Definition des Kurvenintegrals erster Art (vgl. Nr. 543, Formel (1)) vergleichen. Schon auf den ersten Blick zeigen beide Definitionen einen wesentlichen Unterschied: *Im Fall des Kurvenintegrals erster Art werden bei der Bildung der Integralsumme die Funktionswerte $f(M_i)$ mit der Länge $\sigma_i=\Delta s_i$ des Bogenstückes $\widehat{A_iA_{i+1}}$ der Kurve multipliziert, während beim Kurvenintegral zweiter Art diese Funktionswerte mit der Projektion Δx_i (oder Δy_i) dieses Bogenstückes auf die x-Achse (bzw. auf die y-Achse) multipliziert werden.*

Wir haben gesehen, daß der Durchlaufungssinn des Weges (AB), längs dessen die Integration erfolgt, im Falle des Kurvenintegrals erster Art keine Rolle spielt, da die Länge σ_i des Bogens $\widehat{A_iA_{i+1}}$ nicht von dieser Richtung abhängt. Anders ist der Sachverhalt beim Kurvenintegral zweiter Art: *Die Größe der Projektion des Bogens auf die eine oder andere Achse hängt wesentlich von dem Durchlaufungssinn des Bogens ab und wechselt das Vorzeichen, wenn der Durchlaufungssinn gewechselt wird.* Somit gilt für Kurvenintegrale zweiter Art

$$\int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dx=-\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dx$$

und analog

$$\int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dy=-\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dy,$$

wobei aus der Existenz der Integrale auf der rechten Seite die der Integrale auf der linken Seite folgt (und umgekehrt).

In ähnlicher Weise kann man den Begriff des Kurvenintegrals zweiter Art über eine Raumkurve (AB) einführen. Ist eine Funktion $f(M)=f(x, y, z)$ in den Punkten dieser Kurve gegeben, so bilden wir wie oben die Summe

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta x_i$$

und untersuchen ihren Grenzwert für gegen 0 strebendes $\mu=\max \widehat{A_iA_{i+1}}$. Falls dieser Grenzwert existiert, nennt man ihn das *Kurvenintegral zweiter Art* von $f(M)\,dx$ und bezeichnet ihn mit

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dx=\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,dx.$$

Analog definiert man die Integrale

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dy=\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,dy$$

und

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Schließlich betrachtet man auch das Integral (in allgemeiner Form)

$$\int\limits_{(AB)} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z) = \int\limits_{(AB)} P\,\mathrm{d}x + \int\limits_{(AB)} Q\,\mathrm{d}y + \int\limits_{(AB)} R\,\mathrm{d}z\,.$$

Auch hier zieht eine Änderung der Integrationsrichtung eine Änderung des Vorzeichens nach sich.

Wir bemerken abschließend, daß sich die einfachsten Eigenschaften des gewöhnlichen bestimmten Integrals (Nr. 302, 303) leicht auf das hier betrachtete Kurvenintegral übertragen lassen, ohne daß wir allerdings hier näher darauf eingehen möchten.

547. Existenz und Berechnung eines Kurvenintegrals zweiter Art. Es sei eine Kurve (AB) in Parameterdarstellung gegeben,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)\,, \tag{3}$$

wobei φ und ψ stetige Funktionen sind. Falls t von α bis β läuft, möge die Kurve in Richtung von A nach B beschrieben werden. Die Funktion $f(x, y)$ setzen wir ebenfalls längs der Kurve als stetig voraus.

Handelt es sich um das Integral (1), so setzen wir zusätzlich noch die Existenz und Stetigkeit der Ableitung $\varphi'(t)$ voraus.

Unter diesen Voraussetzungen existiert das Kurvenintegral (1), und es gilt die Gleichung

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

Somit hat man zur Berechnung des Kurvenintegrals (1) *im Integranden die Veränderlichen x und y durch ihre Parameterdarstellung* (3) *zu ersetzen und* dx *durch das Differential von x als Funktion des Parameters. Dabei werden die untere bzw. obere Grenze des Integrals entsprechend dem auf der Kurve gewählten Durchlaufungssinn ersetzt.*

Wir kommen zum Beweis unserer Behauptungen. Es seien die Punkte A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ auf der Kurve durch die Werte t_i des Parameters festgelegt, und dem Punkt M_i auf dem Bogen $\overset{\frown}{A_i A_{i+1}}$ entspreche der Parameterwert τ_i (der natürlich zwischen t_i und t_{i+1} liegt). Dann kann die Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i$$

unter Beachtung von

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,\mathrm{d}$$

auf die Form

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

gebracht werden. Andererseits kann auch das Integral auf der rechten Seite von (4), das auf Grund der Stetigkeit des Integranden existiert, in Form einer Summe geschrieben werden:

$$I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Hieraus folgt

$$\sigma-I=\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))-f(\varphi(t), \psi(t))]\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Wir geben nun ein $\varepsilon>0$ beliebig vor und setzen alle Δt_i als so klein voraus, daß in allen Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$ die Schwankung der stetigen Funktion $f(\varphi(t), \psi(t))$ kleiner als ε ist. Da die stetige Funktion $\varphi'(t)$ beschränkt ist, gilt $|\varphi'(t)| \leqq L$, so daß

$$|\sigma-I|<\varepsilon L\, |\beta-\alpha|$$

folgt. Somit ist, falls $\lambda=\max |\Delta t_i|$ gegen 0 strebt,

$$\lim \sigma=I\,,$$

womit gleichzeitig die Existenz des Kurvenintegrals und die behauptete Identität bewiesen sind.

Übrigens ist bei einer nicht geschlossenen Kurve die Tatsache, daß λ gegen 0 strebt, gleichwertig mit der Tatsache, daß die größte Sehne gegen 0 strebt (vgl. Nr. 245).

Für das Integral (2) zeigt man in ähnlicher Weise die Existenz und das Bestehen der Beziehung

$$\int_{(AB)} f(x, y)\, \mathrm{d}y=(\mathrm{R}) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t \tag{5}$$

unter der Bedingung, daß $\psi'(t)$ existiert und *stetig* ist.

Handelt es sich schließlich um das Integral in der allgemeinen Form

$$\int_{(AB)} [P(x, y)\, \mathrm{d}x+Q(x, y)\, \mathrm{d}y]$$

mit stetigen P und Q, so verlangen wir, daß auf der Kurve (AB) die beiden Funktionen (3) stetige Ableitungen besitzen. Alsdann gilt die Beziehung

$$\int_{(AB)} (P\, \mathrm{d}x+Q\, \mathrm{d}y)=\int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)+Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)]\, \mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

Die Definition des Kurvenintegrals und die hier angegebene Methode seiner Zurückführung auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral lassen sich unmittelbar auf eine Kurve (3) übertragen, die sich überschneidet (Doppelpunkte hat), solange der Durchlaufungssinn auf dieser Kurve wie im früheren Fall durch monotone Änderung des Parameters t von α bis β bestimmt wird.

Zum Schluß erwähnen wir einige Fälle, in denen sich die Berechnung des Kurvenintegrals besonders einfach gestaltet. Das Integral (1) möge längs einer Kurve berechnet werden, die in ihrer expliziten Form

$$y=y(x)$$

gegeben ist, wobei die Anordnung der Punkte von A bis B der Änderung von x von a bis b entspreche. Dann ergibt sich ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Kurve – von ihrer Stetigkeit abgesehen – die Beziehung

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x\,. \tag{7}$$

Analog ist, wenn das Integral (2) über eine stetige Kurve zu erstrecken ist, die in ihrer expliziten Darstellung

$$x = x(y)$$

vorliegt, wobei y von c bis d variiert,

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,\mathrm{d}y = (\mathrm{R})\int\limits_{c}^{d} f(x(y), y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{8}$$

Ist schließlich das Integral (1) über eine geradlinige, zur y-Achse parallele Strecke (AB) zu erstrecken, so ist es gleich 0, denn dann sind alle Δx_i und damit alle Summen σ gleich 0. Analog verschwindet das über eine geradlinige, zur x-Achse parallele Strecke erstreckte Integral (2).

Läßt sich der Integrationsweg (K) in endlich viele aneinander anschließende Kurven zerlegen und existieren längs jeder von ihnen die Kurvenintegrale einzeln und lassen sie sich nach einer der angegebenen Formeln berechnen, so kann man leicht beweisen, daß auch das Kurvenintegral längs der ganzen Kurve (K) existiert und gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Teilstücke ist.

548. Der Fall einer geschlossenen Kurve. Die Orientierung der Ebene. Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß der Anfangspunkt A und der Endpunkt B des Integrationsweges übereinstimmen. Wählt man auf der Kurve einen von A verschiedenen Punkt C, so erhält man nach Definition unter Berücksichtigung des auf der Kurve gewählten Durchlaufungssinnes (der in Abb. 4 durch Pfeile angegeben ist) und unter der Annahme, daß die Integrale rechts existieren, die Beziehung

$$\int\limits_{(K)} = \int\limits_{(AMC)} + \int\limits_{(CNA)}\,.$$

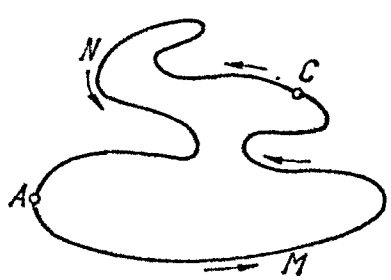

Abb. 4

Man zeigt leicht, daß Existenz und Wert der Integrale nicht von der Wahl der Punkte A und C abhängen. Außerdem sind auch für geschlossene Kurven (K) die Formeln (4), (5) und (6) aus Nr. 547 anwendbar.

Bemerkung. Übrigens kann man auch hier das Kurvenintegral als Resultat eines Grenzübergangs erhalten – ebenso wie bei nichtgeschlossenen Kurven –,

nur wird hier der Grenzübergang z. B. durch die Forderung eingeschränkt, daß zwei von vornherein fest gewählte Punkte A und C zu allen Systemen von Teilpunkten gehören. Ein beliebig ausgeführter Grenzübergang für $\overline{A_iA_{i-1}} \to 0$ würde hier nicht zum Ziel führen (vgl. Nr. 330).

Die Besonderheit dieses Falles liegt hier darin, daß die Angabe des Anfangspunktes und des mit ihm zusammenfallenden Endpunktes diesmal den Durchlaufungssinn nicht festlegt. Man könnte in jedem einzelnen Fall besonders erwähnen, welchen Durchlaufungssinn man gerade meint. So muß man es auch machen, wenn es sich um eine Raumkurve handelt. Im Fall einer ebenen Kurve (K) geht man jedoch anders vor.

Von den beiden für eine gegebene Ebene möglichen Drehrichtungen – entgegen dem Uhrzeigersinn und im Uhrzeigersinn – wählt man eine als positiv: Damit wird eine bestimmte Orientierung der Ebene erzeugt. Nimmt man die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv, so spricht man von einer *Rechtsorientierung* der Ebene, im anderen Fall von einer *Linksorientierung*.

Im Fall einer Rechtsorientierung der Ebene legen wir also gerade die Drehung *entgegen dem Uhrzeigersinn* der Definition des *positiven Durchlaufungssinnes* einer einfachen geschlossenen Kurve zugrunde (Abb. 5a). Jedoch ist diese Definition nur für kreisähnliche geschlossene Kurven hinreichend deutlich. Daher vereinbaren wir noch genauer: Unter dem positiven Durchlaufungssinn einer einfachen geschlossenen Kurve verstehen wir denjenigen, bei dem einem sich längs der Kurve bewegenden Beobachter der Bereich, den die Kurve begrenzt, links liegend erscheint (Abb. 5a). Bei einer linksorientierten Ebene ist der Umlauf im Uhrzeigersinn positiv, da der Bereich rechts vom Beobachter bleibt (Abb. 5b).

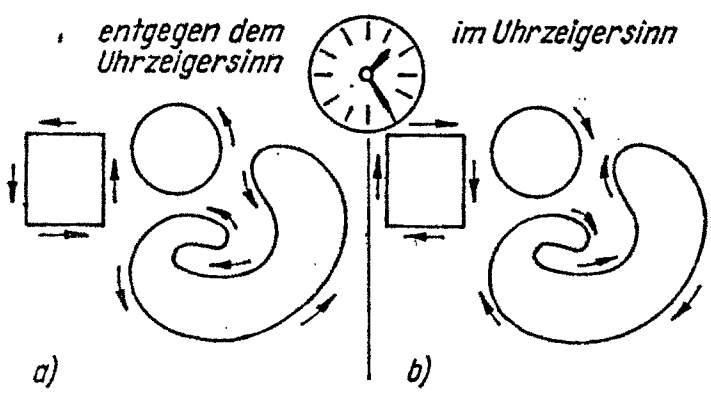

Abb. 5

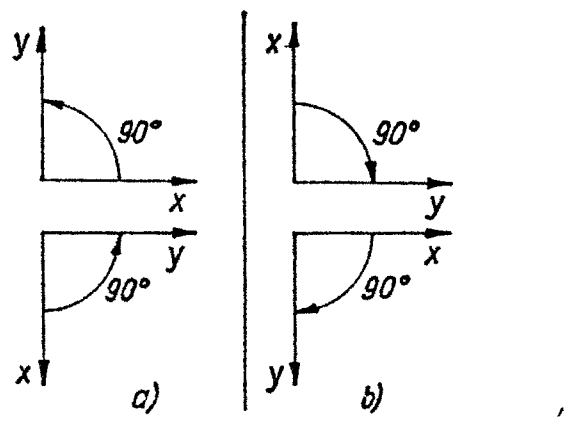

Abb. 6

Wir weisen darauf hin, daß die Anordnung der Koordinatenachsen auf der Ebene immer im Zusammenhang mit ihrer Orientierung steht: Die x-Achse geht bei einer rechtsorientierten Ebene durch eine Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn in die y-Achse über, bei einer linksorientierten Ebene dagegen durch die entsprechende Drehung im Uhrzeigersinn (vgl. Abb. 6a, b). Im ersten Fall sprechen wir auch von einem *Rechtssystem*, im zweiten von einem *Linkssystem*.

Nach diesen Erläuterungen treffen wir noch folgende Übereinkunft: *Ist der Integrationsweg (K) eine einfache geschlossene Kurve, so verstehen wir unter dem*

Symbol

$$\int_{(K)} (P\,dx+Q\,dy),$$

wenn ein näherer Hinweis auf den Durchlaufungssinn fehlt, das im positiven Umlaufsinn genommene Integral. Natürlich hindert uns diese Übereinkunft nicht daran, auch gelegentlich im negativen Umlaufsinn genommene Integrale zu untersuchen, die wir dann mit

$$-\int_{(K)} (P\,dx+Q\,dy)$$

bezeichnen.

549. Beispiele.

1. Man bestimme $I=\int_{(K)}(x^2-y^2)\,dx$, wenn (K) das Stück der Parabel $y=x^2$ zwischen den Abszissen $x=0$ und $x=2$ ist.

Lösung. Da die Integrationskurve explizit gegeben ist, wenden wir Formel (7) an und erhalten

$$I=\int_0^2 (x^2-x^4)\,dx=-\frac{56}{15}.$$

2. Man bestimme $I=\int_{(K)}(x^2-y^2)\,dy$ über dieselbe Kurve (K) wie in Beispiel 1.

Lösung. Hier müssen wir Formel (8) benutzen. Da nach der Kurvengleichung $x^2=y$ ist, variiert y zwischen den Grenzen 0 und 4; somit erhalten wir

$$I=\int_0^4 (y-y^2)\,dy=-\frac{40}{3}.$$

3. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals

$$H=\int_{(L)}[2xy\,dx+x^2\,dy]$$

über einen Weg (L), der die Punkte $O(0,0)$ und $A(1,1)$ verbindet. Dabei sei L (vgl. Abb. 7) (a) die Gerade $y=x$; (b) die Parabel $y=x^2$; (c) die Parabel $x=y^2$; (d) die kubische Parabel $y=x^3$.

Lösung. (a) Aus $dy=dx$ folgt $\int_{(L)}[2xy\,dx+x^2\,dy]=\int_0^1 3x^2\,dx=1$;

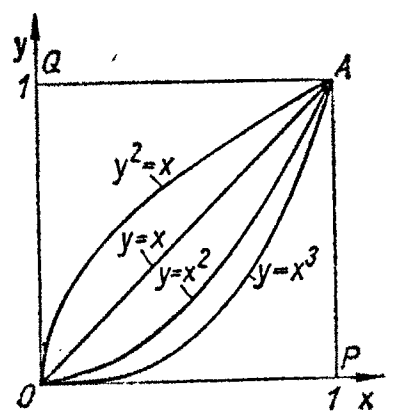

Abb. 7

(b) $dy=2x\,dx$, $H=\int_0^1 4x^3\,dx=1$; (c) $dx=2y\,dy$, $H=\int_0^1 5y^4\,dy=1$;

(d) $dy=3x^2\,dx$, $H=\int_0^1 5x^4\,dx=1$.

4. Man berechne das Kurvenintegral

$$G=\int_{(L)}[xy\,dx+(y-x)\,dy]$$

über dieselben Integrationswege.

Lösung. (a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{1}{12}$; (c) $\frac{17}{30}$; (d) $-\frac{1}{20}$.

5. Man berechne das Kurvenintegral

$$I=\int_{(OA)}[(x-y^2)\,dx+2xy\,dy],$$

wenn als Integrationsweg eine der folgenden Kurven zwischen $O(0, 0)$ und $A(1, 1)$ genommen wird (vgl. Abb. 7):

(a) die geradlinige Strecke OA $(y=x)$;

(b) der Streckenzug OPA aus der Strecke OP der x-Achse $(y=0)$ und der Strecke PA der Geraden $x=1$;

(c) der Streckenzug OQA aus den Strecken OQ der y-Achse $(x=0)$ und QA der Geraden $y=1$.

Lösung. (a) Wegen $y=x$ und $dy=dx$ ist

$$I=\int_0^1 (x+x^2)\,dx=\frac{5}{6};$$

(b) in diesem Fall zerlegt man natürlich den Integrationsweg in zwei Strecken:

$$I=\int_{(OPA)}=\int_{(OP)}+\int_{(PA)}=I_1+I_2.$$

Längs OP ist $y=0$ und $dy=0$, also

$$I_1=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Längs PA ist $x=1$ und $dx=0$, also

$$I_2=\int_0^1 2y\,dy=1.$$

Somit ist $I=\frac{3}{2}$.

(c) Analog finden wir (da das Integral längs OQ verschwindet)

$$I=\int_{(QA)}=\int_0^1 (x-1)\,dx=-\frac{1}{2}.$$

6. Man berechne das Integral

$$J=\int_{(OA)}((y^2+2xy)\,dx+(2xy+x^2)\,dy)$$

für dieselben drei Fälle.

Lösung. In allen Fällen ist $J=2$.

Bemerkung. Dem Leser ist wahrscheinlich der Unterschied der Ergebnisse der Beispiele 3 und 6 einerseits und der Beispiele 4 und 5 andererseits schon aufgefallen. Der Wert der Integrale in den Beispielen 3 und 6 hängt anscheinend nicht von der Verbindungskurve des Anfangs- und Endpunktes ab. Dagegen ist das bei den Beispielen 4 und 5 sehr wohl der Fall. In § 3 werden wir uns mit diesem Problem näher beschäftigen und seine Bedeutung klären.

7. Man berechne

$$I=\int\limits_{(C)}(x^2+2xy)\,dy\,,$$

wobei (C) die entgegen dem Uhrzeigersinn zu durchlaufende obere Hälfte der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ bedeutet.

Lösung. Wir benutzen die Parameterdarstellung der Ellipse: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$; t variiert zwischen 0 und π. Nach Formel (5) erhalten wir nach den entsprechenden Substitutionen

$$I=\int\limits_0^{\pi}(a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)\,b\cos t\,dt$$

$$=a^2b\int\limits_0^{\pi}\cos^3 t\,dt+2ab^2\int\limits_0^{\pi}\cos t^2\sin t\,dt=\frac{4}{3}ab^2\,.$$

8. Man berechne

$$K=\int\limits_{(L)}(y^2\,dx-x^2\,dy)\,,$$

wobei (L) den Kreis mit dem Radius 1
(a) um den Ursprung (0, 0), (b) um den Punkt (1, 1)
bedeutet.

Lösung. (a) Mit der Parameterdarstellung $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqq t\leqq 2\pi$, liefert Formel (5)

$$K=-\int\limits_0^{2\pi}(\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt=0\,.$$

(b) Analog erhält man mit der Parameterdarstellung $x-1=\cos t$, $y-1=\sin t$ die Beziehung

$$K=-\int\limits_0^{2\pi}(2+\sin t+\cos t+\sin^3 t+\cos^3 t)\,dt=-4\pi\,.$$

9. Man bestimme

$$J=\int\limits_{(K)}\frac{x\,dy-y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}\qquad(A,\,C\text{ und }AC-B^2>0)\,,$$

wobei (K) der Kreis $x^2+y^2=r^2$ ist.

Hinweis. Vgl. Nr. 339, Beispiel 14.

Lösung. $J=\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.

10. Man berechne

$$L=\int\limits_{(A)}\left(\frac{x\,dx}{y}+\frac{dy}{y-a}\right),$$

wobei (A) das Stück der Zykloide

$$x=a\,(t-\sin t), \qquad y=a\,(1-\cos t)$$

von $t=\frac{\pi}{6}$ bis $t=\frac{\pi}{3}$ ist.

Lösung.

$$L=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\left[a\,(t-\sin t)-\frac{\sin t}{\cos t}\right]\mathrm{d}t=a\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln 3\,.$$

11. Man berechne

$$I=\int\limits_{(K)}\frac{x^2\,\mathrm{d}y-y^2\,\mathrm{d}x}{x^{5/3}+y^{5/3}},$$

wobei (K) das Stück der Astroide

$$x=a\cos^3 t, \qquad y=a\sin^3 t$$

vom Punkt $A(a, 0)$ bis zum Punkt $B(0, a)$ ist.

Lösung.

$$I=3a^{4/3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{16}\,\pi a^{4/3}\,.$$

550. Approximation mit Hilfe eines Integrals über einen Streckenzug. In vielen Fällen, in denen man mit Kurvenintegralen zu tun hat, ist es zweckmäßig, sie durch Integrale über Streckenzüge zu approximieren. Diese Approximation beruht auf nachstehendem Satz, der uns im folgenden oft nützlich sein wird.

Die Kurve (L), über die integriert wird, werde als einfach und nicht geschlossen vorausgesetzt. Sie sei durch Gleichungen der Form (3) gegeben, worin die Funktionen φ und ψ nebst ihren Ableitungen stetig seien. Dadurch ist die Existenz des Kurvenintegrals in der nachstehenden Gleichung gewährleistet (Nr. 547), ebenso wie die Rektifizierbarkeit der Kurve (L); vgl. Nr. 248.

Lemma. *Es seien die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ in einem (offenen) Gebiet (E) stetig, (L) sei eine in diesem Gebiet verlaufende Kurve der oben erwähnten Klasse. Beschreibt man der Kurve (L) einen Streckenzug (Λ) ein und läßt die größte seiner Teilstrecken gegen 0 gehen, so gilt, wie wir zeigen wollen,*

$$\lim\int\limits_{(\Lambda)}(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)=\int\limits_{(L)}(P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)\,.$$

Man kann sich offenbar auf die Integrale $\int P\,\mathrm{d}x$ und $\int P\,\mathrm{d}x$ beschränken, da die Überlegungen für $\int Q\,\mathrm{d}y$ und $\int Q\,\mathrm{d}y$ völlig analog verlaufen.

Der in (L) einbeschriebene Streckenzug (Λ) habe seine Ecken in den Punkten

$$A\equiv A_0, A_1, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n\equiv B;$$

die Werte von x und P im Punkt A_i bezeichnen wir mit x_i bzw. P_i. Wir geben uns ein $\varepsilon>0$ vor und nehmen dann die Strecken $\overline{A_iA_{i+1}}$ so klein an, daß a) die

Schwankung der stetigen Funktion P längs $\overline{A_iA_{i+1}}$ kleiner als ε ist und b) sich die Integralsumme $\sum_i P_i \Delta x_i$ vom Integral $\int_{(L)} P\,dx$ um weniger als ε unterscheidet.

Offenbar ist

$$\int_{(A)} P\,dx = \sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} P\,dx$$

und andererseits

$$\sum_i P_i \Delta x_i = \sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} P_i\,dx,$$

also

$$\int_{(A)} P\,dx = \sum_i P_i \Delta x_i + \sum_i \int_{(A_iA_{i+1})} [P - P_i]\,dx.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite unterscheidet sich aber von $\int_{(L)} P\,dx$ um weniger als ε (vgl. b)), und der zweite ist dem absoluten Betrag nach nicht größer als $\varepsilon \sum_i \overline{A_iA_{i+1}}$ (vgl. a)), also nicht größer als εL, wobei L die Länge der Kurve (L) ist. Somit ist schließlich

$$\left| \int_{(A)} P\,dx - \int_{(L)} P\,dx \right| < \varepsilon\,(1+L),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung. Die soeben bewiesene Aussage kann in gewissem Sinne auch auf den Fall einer *geschlossenen* einfachen Kurve (L) ausgedehnt werden, wenn man sie in zwei *nicht geschlossene* Kurven zerlegt und auf jede von diesen den Hilfssatz einzeln anwendet. Der Grenzübergang wird hier durch die Forderung eingeschränkt, daß in jedem System von Teilpunkten zwei im vorhinein festgelegte Punkte enthalten sind (vgl. die Bemerkung in Nr. 548).

551. Berechnung von Flächeninhalten mit Hilfe von Kurvenintegralen. Wir zeigen jetzt, wie man mit Hilfe von Kurvenintegralen (zweiter Art) den Flächeninhalt ebener Figuren berechnen kann.

Wir betrachten zunächst (Abb. 8) eine Figur $(D) = PQRS$, die begrenzt wird von den geradlinigen Strecken PS und QR, welche der y-Achse parallel sind (und die in einzelnen Fällen auch auf einen Punkt zusammenschrumpfen können), sowie von zwei Kurven PQ und SR, welche beide von jeder Parallelen zur y-Achse in genau

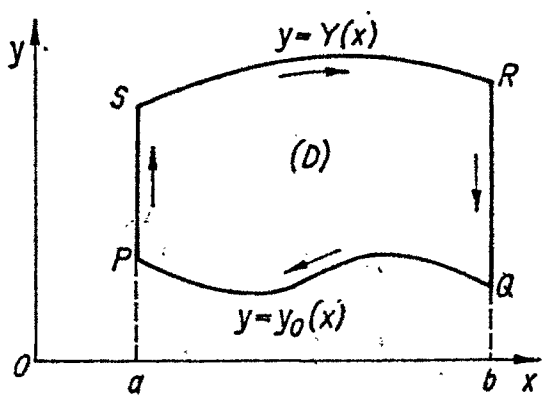

Abb. 8

einem Punkt geschnitten werden. Die expliziten Gleichungen der Kurven seien

$$(PQ): y=y_0(x), \qquad (SR): y=Y(x),$$

wobei x im Intervall $[a, b]$ variieren möge.

Den zu untersuchenden (stets nichtnegativen) Flächeninhalt D des krummlinigen Trapezes $PQRS$ kann man als Differenz der beiden krummlinigen Trapeze $abRS$ und $abQP$ schreiben:

$$D=\int_a^b Y(x)\,dx-\int_a^b y_0(x)\,dx.$$

Andererseits ist nach Formel (7)

$$\int_{(PQ)} y\,dx=\int_a^b y_0(x)\,dx, \qquad \int_{(SR)} y\,dx=\int_a^b Y(x)\,dx.$$

Daher ist

$$D=\int_{(SR)} y\,dx+\int_{(QP)} y\,dx;$$

dabei haben wir die Grenzen des zweiten Integrals vertauscht und damit die Integrationsrichtung geändert. Addiert man zur rechten Seite der Gleichung die Integrale

$$\int_{(PS)} y\,dx \quad \text{und} \quad \int_{(RQ)} y\,dx,$$

die gleich 0 sind, da sie über Strecken genommen werden, die zur y-Achse parallel sind, so bleibt sie richtig. Also ist

$$D=\int_{(PSRQP)} y\,dx,$$

wobei die Kurve in dem durch die Buchstaben angegebenen Sinne zu durchlaufen ist.

Bezeichnen wir den Rand von (D) mit (L), so bezeichnet $\int_{(L)} y\,dx$ nach der Vereinbarung am Schluß von Nr. 548 das in positivem Sinne erstreckte Integral. Bei einer Rechtsorientierung der Achsen (Abb. 8) ist dabei der Umlaufsinn zu nehmen, bei dem die Fläche links liegt, während doch der Durchlaufungssinn $PSRQP$ dieses Gebiet rechts liegen läßt. Daher ist

$$\int_{(PSRQP)} y\,dx=-\int_{(L)} y\,dx$$

und somit

$$D=-\int_{(L)} y\,dx. \tag{9}$$

Wir wollen nun annehmen, die Figur (D) sei von einer Kurve komplizierterer Form berandet; der Rand darf sogar aus mehreren Kurven bestehen, (D) darf also „Löcher" haben. Jedoch sei (D) durch zur y-Achse parallele Geraden in endlich viele Flächenstücke der zuerst betrachteten Art zerlegbar (Abb. 9).

Jedes dieser einzelnen Flächenstücke hat einen Flächeninhalt, der nach Formel

(9) ausdrückbar ist. Durch Addition der sich so ergebenden Gleichungen erhalten wir auf der linken Seite den Flächeninhalt der ganzen Figur (D), auf der rechten eine Summe von Integralen, die sich über alle Ränder der Teilstücke erstrecken. Die Integrale lassen sich jedoch zu einem einzigen zusammenfassen, das über ganz (L) zu erstrecken ist; denn die Integrale über jede der (zweimal, aber in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen) Hilfsstrecken sind gleich 0. Somit läßt sich auch in diesem Fall der Flächeninhalt D durch Formel (9) ausdrücken.

Für die Figur $PQRS$ (Abb. 10), die von den geradlinigen, zur x-Achse parallelen Strecken PQ und SR sowie von den beiden Kurven

$$(PS)\colon x=x_0(y) \qquad (QR)\colon x=X(y) \qquad (c\leqq y\leqq d)$$

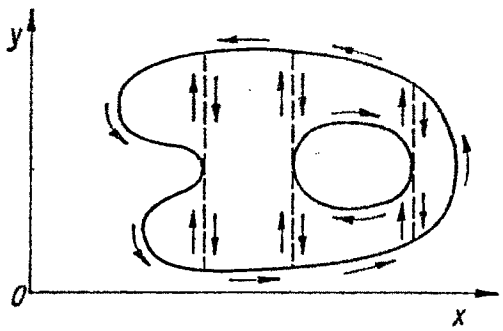

Abb. 9

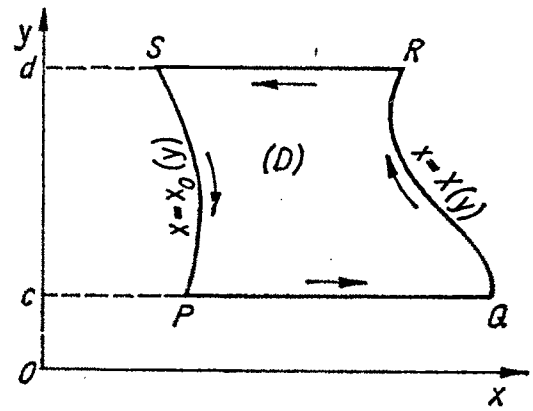

Abb. 10

berandet ist, erhält man mit Hilfe ähnlicher Überlegungen die Formel

$$D=\int\limits_{(L)} x\,\mathrm{d}y\,. \tag{10}$$

Übrigens kann man sie auch direkt aus (9) erhalten, indem man die Rollen von x und y vertauscht. Dabei muß man das Vorzeichen ändern, da unabhängig von der Rolle der Koordinatenachsen der positive Umlaufsinn derselbe bleibt wie beim vorigen Fall, während sich die Orientierung der Ebene ändert.

Es versteht sich, daß (10) auch für kompliziertere Figuren, die sich durch zur x-Achse parallele Geraden in endlich viele krummlinige Trapeze des vorhin betrachteten Typs zerlegen lassen, gültig bleibt.

Dieses Ergebnis ist im Grunde schon von einer völlig hinreichenden Allgemeinheit. Jedoch ist es in konkreten Fällen oft sehr umständlich, die Zerlegbarkeit einer Figur in endlich viele Teile der speziellen Form nachzuweisen. Daher geben wir noch eine andere, ebenfalls äußerst allgemeine, aber leicht zu verifizierende Bedingung an, unter der sich die Formeln (9) und (10) als anwendbar herausstellen.

Wir wollen nämlich voraussetzen, daß der Bereich (D) von einer beliebigen, stückweise glatten Kurve (L) berandet ist. (Bekanntlich heißt eine Kurve *stückweise glatt*, wenn sie aus glatten Bögen zusammengesetzt ist; vgl. Nr. 337 und Nr. 261.) Da ein solcher Bereich quadrierbar ist (d. h. einen Flächeninhalt hat; vgl. Nr. 337), kann man von (D) überdeckte bzw. (D) überdeckende Polygonbereiche (A) bzw. (B) derart konstruieren, daß

$$A<D<B, \qquad B-A<\varepsilon$$

ist, wobei ε eine vorgegebene positive Zahl ist (vgl. Nr. 335). A, B, D sind die Flächeninhalte von $(A), (B), (D)$. Dabei nehmen wir an, daß die Ränder aller dieser Bereiche paarweise punktfremd sind. Wir bezeichnen mit δ den kleinsten Abstand zwischen Randpunkten der verschiedenen Bereiche (vgl. Nr. 336, Fußnote). Beschreibt man (L) einen Streckenzug (Δ) ein, dessen Glieder sämtlich kleiner als δ sind, so kann dieser Streckenzug mit den Polygonen (A) und (B) keine Punkte gemein haben, so daß das von ihm berandete Polygon (Δ) das Polygon (A) enthält und in (B) enthalten ist. Dann ist

$$|\Delta - D| < \varepsilon ,$$

so daß Δ gegen D strebt, wenn die längste Strecke des einbeschriebenen Streckenzuges gegen 0 strebt.

Jetzt kann man sich leicht davon überzeugen, daß zur Berechnung des Flächeninhaltes Δ des Polygons (Δ) sowohl (9) als auch (10) anwendbar ist; d. h., es ist

$$\Delta = -\int\limits_{(\Delta)} y\,dx = \int\limits_{(\Delta)} x\,dy .$$

Mit Hilfe achsenparalleler Geraden kann man nämlich dieses Polygon leicht in Trapeze des entsprechenden Typus zerlegen. Gehen wir dann zur Grenze über, so erhalten wir unter Benutzung des Hilfssatzes aus Nr. 550: *Der Flächeninhalt einer von einer stückweise glatten Kurve (Δ) berandeten Figur (D) läßt sich durch jede der angegebenen Formeln ausdrücken.*

Am häufigsten jedoch benutzt man zur Berechnung eines Flächeninhaltes die symmetrische Beziehung

$$D = \frac{1}{2}\int\limits_{(L)} (x\,dy - y\,dx) , \tag{11}$$

die sich leicht aus (9) und (10) ergibt (vgl. Nr. 339, Formel (16)).

Bemerkung. Man überzeugt sich leicht davon, daß auch das Vorhandensein endlich vieler singulärer Punkte die Gültigkeit der hergeleiteten Formeln nicht beeinträchtigt. Schließt man diese Punkte mittels kleiner Kreisumgebungen aus, so bleiben die Formeln auf den Rest der Figur anwendbar. Dann braucht man nur die Durchmesser dieser Kreisumgebungen gegen 0 streben zu lassen.

552. Beispiele.

1. Man bestimme den Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b.

Lösung. Wir benutzen die Parameterdarstellung der Ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$. Nach Formel (11) ist

$$D = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos t \cdot b\cos t\,dt - b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt] = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab .$$

Bei der Berechnung des Kurvenintegrals haben wir (6) benutzt. Bei den Integrationsgrenzen muß beachtet werden, daß einem positiven Umlaufen der Randkurve ein Wachsen der Parameterwerte entspricht.

2. Man bestimme den Flächeninhalt der Astroide

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi) .$$

Lösung. $D=\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}$.

3. Man bestimme den Flächeninhalt der Figur, die von einem Bogen der Epizykloide

$$x=a[(1+m)\cos mt-m\cos(1+m)t],$$

$$y=a[(1+m)\sin mt-m\sin(1+m)t]$$

und dem entsprechenden Kreisbogen berandet ist (Abb. 11).

Lösung. Das Integral (11) ist zunächst über die Kurve (ABC) und dann über die Kurve (CDA) zu erstrecken. Im ersten Fall können wir die oben angegebene Parameterdarstellung mit $0\leqq t\leqq 2\pi$ benutzen. Dann ist

$$x\,dy-y\,dx=a^2m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt,$$

also

$$\frac{1}{2}\int_{(ABC)}=\pi a^2m(1+m)(1+2m).$$

Für den Bogen (CDA) der Kurve haben wir die Parameterdarstellung

$$x=a\cos mt,\qquad y=a\sin mt,$$

wenn wir denselben Parameter benutzen, der diesmal aber von 2π bis 0 variiert. Das entsprechende Integral ergibt sich zu

$$\frac{1}{2}\int_{(CDA)}=\frac{1}{2}a^2m\int_{2\pi}^{0}dt=-\pi a^2m.$$

Somit gilt

$$D=\pi a^2m^2(2m+3).$$

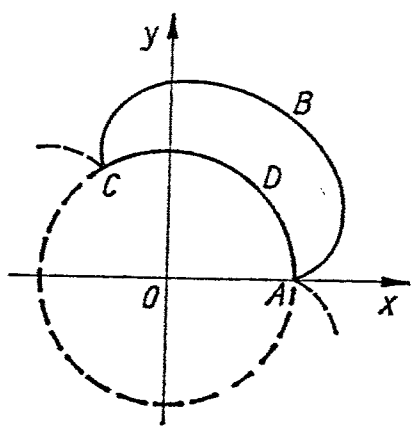

Abb. 11

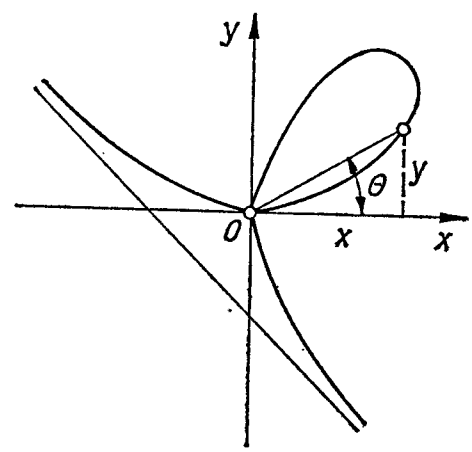

Abb. 12

4. Man bestimme den Flächeninhalt der Schleife des Cartesischen Blattes (Abb. 12)

$$x^3+y^3=3axy.$$

Lösung. Um eine Parameterdarstellung zu erhalten, setzen wir $y=tx$. Eine solche Substitution ist in der Regel zweckmäßig, wenn die Gleichung einer algebraischen Kurve zwei homogene Gruppen von Gliedern enthält und sich der Grad dieser Gruppen um 1

unterscheidet. Dann folgt (vgl. Nr. 224, Beispiel 5)

$$x=\frac{3at}{1+t^3}, \qquad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Geometrische Überlegungen lehren, daß die Schleife beschrieben wird, wenn t von 0 bis ∞ variiert $\left(\text{denn es ist } t=\frac{y}{x}=\tan\theta,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$. Wir erhalten somit

$$\mathrm{d}x=3a\,\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y=3a\,\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

und

$$D=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}=\frac{3}{2}\,a^2.$$

Wir weisen darauf hin, daß wir hier ein uneigentliches Integral mit der oberen Grenze ∞ benutzt haben, während wir bei der Herleitung der Formel (6) angenommen hatten, das Parameterintervall sei endlich. Das läßt sich jedoch leicht rechtfertigen, wenn man zuerst einen anderen Parameter mit endlichem Variabilitätsbereich einführt (beispielsweise den Winkel θ) und dann erst zum Parameter $t=\frac{y}{x}$ übergeht.

5. Dasselbe für die Kurven

(a) $(x+y)^4=ax^2y$; (b) $(x+y)^{2n+1}=ax^ny^n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Hinweis. Man setze $t=\frac{y}{x}$ $(0\leqq t\leqq\infty)$. In (b) ergibt sich

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=a^2\,\frac{t^{2n}}{(1+t)^{4n+2}}\,\mathrm{d}t.$$

Bei der Integration erhält man eine Zerlegung in Partialbrüche, wenn man von der Identität

$$t^{2n}=[(1+t)-1]^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k(1+t)^k$$

ausgeht.

Lösung. (a) $D=\frac{a^2}{210}$; (b) $D=\frac{a^2}{2}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\,\frac{\binom{2n}{k}}{4n-k+1}$.

6. Man bestimme den Flächeninhalt der von den Koordinatenachsen und der Kurve

$$x^3+y^3=x^2+y^2$$

berandeten Fläche.

Lösung. $D=\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$.

7. Als Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Formel (10) zur Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren beliebiger Form (natürlich unter Beachtung der oben genannten Einschränkungen, die wir der Kürze halber hier nicht wiederholen) behandeln wir abschließend folgendes Problem.

Als Grund- und Deckfläche eines Körpers seien zwei beliebig geformte Figuren gegeben, die in parallelen Ebenen liegen; die Mantelfläche sei eine Regelfläche und von Geraden erzeugt, die nach einer beliebigen Vorschrift die Randpunkte von Grund- und Deckfläche verbinden (Abb. 13). Man zeige, daß das Volumen V des Körpers nach der Formel

$$V=\frac{h}{6}(Q_0+4Q_1+Q_2) \tag{12}$$

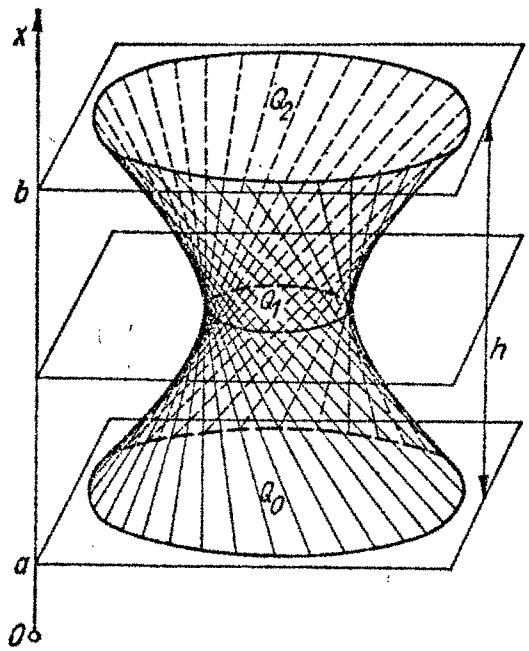

Abb. 13

berechnet werden kann, wobei h die Höhe des Körpers ist und Q_0, Q_1, Q_2 die Flächeninhalte von Grundfläche, mittlerem Querschnitt bzw. Deckfläche bedeuten. Wir wissen, daß sich das Volumen V mit Hilfe des Querschnittes $Q=Q(x)$ nach der Formel

$$V=\int_a^b Q(x)\,dx$$

ergibt (vgl. Nr. 342). Andererseits ist die Simpsonsche Formel

$$\int_a^b Q(x)\,dx=\frac{h}{6}(Q_0+4Q_1+Q_2),$$

wenn $Q(x)$ ein Polynom höchstens dritten Grades ist, *exakt* (vgl. die Fußnote 1 auf S. 168 von Bd. II). Nun ist aber hier, wie wir sehen werden, $Q(x)$ ein Polynom *zweiten* Grades.

Es seien

$$y=\alpha x+\beta, \qquad z=\gamma x+\delta \tag{13}$$

die Gleichungen der Erzeugenden dieser Regelfläche, die den Körper berandet. Dabei kann man annehmen, die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien Funktionen eines Parameters t, und die Fläche werde von den Erzeugenden beschrieben, wenn t von t_0 bis T variiert. Wird jetzt die Fläche von einer zur y, z-Ebene parallelen Ebene im Abstand x von dieser geschnitten, so ergibt sich als Schnitt eine Kurve, deren Projektion (ohne Verzerrung!) auf die y, z-Ebene genau die Gleichungen (13) als Parameterdarstellung hat. Wir nehmen an, daß für $t_0 \leqq t \leqq T$ die Ränder aller Querschnitte (durch die entsprechenden Punkte der Erzeugenden) in positivem Sinne durchlaufen werden. Dann erhält man für den Flächeninhalt des Querschnittes nach der zu (10) analogen Formel

$$Q(x)=\int_{(K_x)} y\,dz=\int_{t_0}^{T}(\alpha x+\beta)\,d(\gamma x+\delta)$$

$$=x^2\int_{t_0}^{T}\alpha\,d\gamma+x\int_{t_0}^{T}(\alpha\,d\delta+\beta\,d\gamma)+\int_{t_0}^{T}\beta\,d\delta,$$

d. h. tatsächlich eine Darstellung durch ein quadratisches Trinom von x.

Man zeigt leicht, daß eine zu (12) analoge Formel auch zur Berechnung des Träg-

heitsmomentes des Körpers in bezug auf die y, z-Ebene anwendbar ist; es ist nämlich

$$M_{yz}=\int_a^b xQ(x)\,dx$$

(vgl. Nr. 356, Beispiel 1); hier ist der Integrand ein Polynom dritten Grades.

553. Der Zusammenhang zwischen den Kurvenintegralen beider Arten. Wir betrachten eine *glatte* Kurve $(K)\equiv(AB)$ und stellen sie, nach Wahl des Parameters $s=\widehat{AM}$, durch ihre Gleichungen

$$x=x(s), \qquad y=y(s) \qquad (0\leqq s\leqq S)$$

dar. Die Funktionen $x(s)$, $y(s)$ haben stetige Ableitungen $x'(s)$, $y'(s)$. Bezeichnet man den Winkel zwischen der x-Achse und der nach der Seite des wachsenden Bogens gerichteten Tangente mit α, so ist bekanntlich (vgl. Nr. 249, Formel (15))

$$\cos\alpha=x'(s), \qquad \sin\alpha=y'(s)\,.$$

Ist längs der Kurve (K) eine stetige Funktion $f(M)=f(x, y)$ gegeben, so gilt

$$\int_{(K)} f(M)\,dx=\int_0^S f(x(s), y(s))\;x'(s)\,ds$$

$$=\int_0^S f(x(s), y(s))\cos\alpha\,ds=\int_{(K)} f(M)\cos\alpha\,ds;$$

somit ist ein Kurvenintegral zweiter Art auf ein Kurvenintegral erster Art zurückgeführt.

Analog ergibt sich

$$\int_{(K)} f(M)\,dy=\int_{(K)} f(M)\sin\alpha\,ds\,.$$

Sind schließlich zwei längs (K) stetige Funktionen $P(M)=P(x, y)$ und $Q(M)=Q(x, y)$ gegeben, so ist

$$\int_{(K)}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{(K)}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,ds\,. \tag{14}$$

Wir betonen, daß in allen diesen Formeln der Winkel α mit der Richtung der Tangente zu bilden ist, die dem Durchlaufungssinn von (K) entspricht. Ändert man diesen Durchlaufungssinn, so ändert das Integral links sein Vorzeichen, und entsprechend, da sich α um $\pm\pi$ ändert, auch das Integral rechts. Offenbar bleiben die hier hergeleiteten Formeln auch für doppelpunkt- und singularitätenfreie stückweise glatte Kurven gültig. Davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die Formeln auf die glatten Bögen einzeln anwendet und dann addiert.

Als Übungsaufgabe formen wir die Formel (11) für den Flächeninhalt in ein Kurvenintegral erster Art um:

$$D=\frac{1}{2}\int_{(K)}(x\,dy-y\,dx)=\frac{1}{2}\int_{(K)}(x\sin\alpha-y\cos\alpha)\,ds\,.$$

Der Übergang zu Polarkoordinaten r, θ liefert

$$D=\frac{1}{2}\int_{(K)} r\,(\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta)\,ds=\frac{1}{2}\int_{(K)} r\sin(\alpha-\theta)\,ds\,.$$

Beachtet man, daß $\alpha-\theta$ der Winkel (r, t) zwischen dem Radiusvektor des Punktes und der Tangente in ihm ist, so kann man dieser Formel die Gestalt

$$D=\frac{1}{2}\int_{(K)} r\sin(r, t)\,ds$$

geben.

Analoge Überlegungen lassen sich auch bei Kurvenintegralen längs *Raumkurven* anstellen. Im Ergebnis erhält man

$$\int_{(K)}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)=\int_{(K)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds\,,$$

wobei $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus der Tangente sind, unter der Annahme, daß ihr Durchlaufungssinn dem des Integrationsweges entspricht.

Für den Fall einer ebenen Kurve ist oft folgende Formel zweckmäßig, die die Kurvenintegrale beider Arten und den Winkel zwischen der x-Achse und der Normalen der Kurve, über die zu integrieren ist, verknüpft.

Ist diese Normale so gerichtet, daß der Winkel (t, n) zwischen Tangente und Normale gleich $+\frac{\pi}{2}$ ist,[1]) so daß also

$$\sphericalangle(x, n)=\sphericalangle(x, t)+\sphericalangle(t, n)=\alpha+\frac{\pi}{2}$$

gilt, dann ist $\cos\alpha=\sin(x, n)$, $\sin\alpha=-\cos(x, n)$. Alsdann kann (14) in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\int_{(K)}(P\,dx+Q\,dy)=\int_{(K)}[P\sin(x, n)-Q\cos(x, n)]\,ds\,. \tag{15}$$

Die Winkel werden in Übereinstimmung mit der Orientierung der Ebene gemessen.

554. Physikalische Aufgaben. Wir gehen abschließend auf einige physikalische Probleme ein, in denen Kurvenintegrale angewendet werden.

1. *Die Arbeit eines Kraftfeldes.* In einem Punkt M der x, y-Ebene (oder eines bestimmten Teiles davon) wirke auf eine dort befindliche Einheitsmasse eine bestimmte Kraft $\boldsymbol{F}$, deren Größe und Richtung nur von der Lage von M abhängt. Ist die im Punkt M befindliche Masse m eines Massepunktes von 1 verschieden, so ist die auf ihn wirkende Kraft gleich $m\boldsymbol{F}$. Unter diesen Voraussetzungen nennt man die Ebene ein (*ebenes*) *Kraftfeld* und die auf die Einheitsmasse wirkende Kraft die *Feldstärke*. Die Vorgabe der Kraft $\boldsymbol{F}$ nach Größe und Richtung ist gleichbedeutend damit, daß die Projektionen X und Y auf die Achsen, welche offenbar Funktionen der Koordinaten x, y des Punktes M sind, vorgegeben werden:

$$X=X(x, y),\qquad Y=Y(x, y)\,.$$

Ist φ der Winkel zwischen dem Vektor $\boldsymbol{F}$ und der x-Achse, so ist (Abb. 14)

$$X=F\cos\varphi,\qquad Y=F\sin\varphi\,. \tag{16}$$

Wir wollen nun annehmen, der im Feld befindliche Massepunkt M mit der Einheitsmasse bewege sich und beschreibe eine stetige Kurve (K) in einem bestimmten Durchlaufungssinn. Das Problem besteht darin, die Arbeit A zu bestimmen, welche die Feldstärke bei dieser Bewegung leistet.

---

[1]) Der Drehsinn, in dem der Winkel gemessen wird, muß mit der Orientierung der Ebene übereinstimmen.

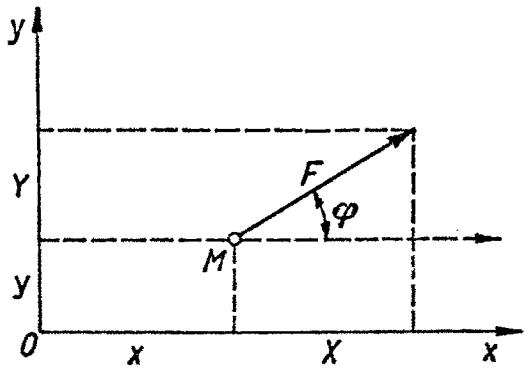

Abb. 14

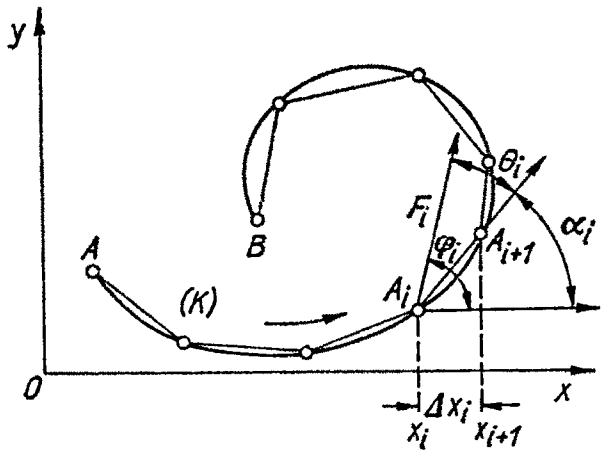

Abb. 15

Wäre die auf den Punkt wirkende Kraft stets von gleicher Größe F und von gleicher Richtung und die Bewegung des Punktes geradlinig, so wäre die Arbeit A gleich dem Produkt der Weglänge l mit der Projektion der Kraft auf die Richtung der Bewegung,

$$A = Fl \cos \theta ,$$

wenn θ der Winkel zwischen der Richtung des Kraftvektors $\boldsymbol{F}$ und der Bewegungsrichtung ist.

Im Fall einer nicht geradlinigen Bewegung und einer nicht konstanten Kraft läßt sich die Arbeit mit Hilfe eines Grenzprozesses bestimmen. Man wird hierbei zu der aus den Anwendungen vertrauten Methode der „Summierung unendlich kleiner Größen“ (vgl. Nr. 348) greifen. Wir werden die Lage des Punktes M auf der Kurve (K) durch die Länge s des Bogens $\overset{\frown}{AM}$ beschreiben (Abb. 15). Wir betrachten das Bogenelement $ds = A_i A_{i+1}$ der Kurve und nehmen als Approximation an die Wirklichkeit an, die Kraft $\boldsymbol{F}$ und der Winkel θ_i seien konstant. Dann ergibt sich für das entsprechende Element der Arbeit

$$dA = F \cos \theta \, ds .$$

Jetzt braucht man nur diese Elemente längs der Kurve (K) zu „summieren“ und erhält für die Arbeit A ein Kurvenintegral erster Art:

$$A = \int_{(K)} F \cos \theta \, ds . \tag{17}$$

Wir führen den Winkel α zwischen der Richtung von ds (d. h. zwischen der Richtung der Tangente im Punkt A_i) und der x-Achse ein. Offenbar ist $\theta = \varphi - \alpha$, also

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha ,$$

und für das Integral kann man

$$\int_{(K)} (F \cos \varphi \cos \alpha + F \sin \varphi \sin \alpha) \, ds$$

oder nach (16)

$$A = \int_{(K)} (X \cos \alpha + Y \sin \alpha) \, ds$$

schreiben. Nach Formel (14), die den Zusammenhang zwischen den Kurvenintegralen beider Typen angibt, ist also

$$A = \int_{(K)} (X \, dx + Y \, dy) . \tag{18}$$

Somit läßt sich die Arbeit eines Kraftfeldes durch ein Kurvenintegral zweiter Art ausdrücken. Das ist der am meisten verwendete Ausdruck für die Arbeit, der zur Unter-

suchung folgender Fragen recht zweckmäßig ist: Hängt die Arbeit von der Gestalt der Kurve ab, die zwei Punkte verbindet? Ist die Arbeit längs einer geschlossenen Kurve immer gleich 0? (Vgl. dazu Nr. 555 bis 562.)

2. *Die ebene stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit.* Eine solche Bewegung ist dadurch charakterisiert, daß erstens alle Teilchen, die sich auf einer Vertikalen zu einer bestimmten Ebene befinden, gleiche Geschwindigkeit haben, welche überdies dieser Ebene parallel ist, so daß man zur Beschreibung der ganzen Bewegung nur die Bewegung in einer Ebene (die wir als x, y-Ebene wählen) zu untersuchen braucht, und daß zweitens die Geschwindigkeit $\mathbf{c}$ eines Flüssigkeitsteilchens nur von der Lage des Teilchens, aber nicht von der Zeit abhängt. Somit ist in jedem Punkt der betrachteten Ebene (oder eines Teiles davon) eine nach Größe und Richtung bestimmte Geschwindigkeit gegeben; wir sagen auch, es sei ein zeitunabhängiges Geschwindigkeitsfeld gegeben.

Bezeichnet man den Winkel zwischen dem Vektor $\mathbf{c}$ und der x-Achse mit φ und die Projektionen von $\mathbf{c}$ auf die Achsen (d. h. die Geschwindigkeitskomponenten) mit u und v, so ergibt sich (Abb. 16a)

$$u = c_x = c\cos\varphi, \qquad v = c_y = c\sin\varphi\,.$$

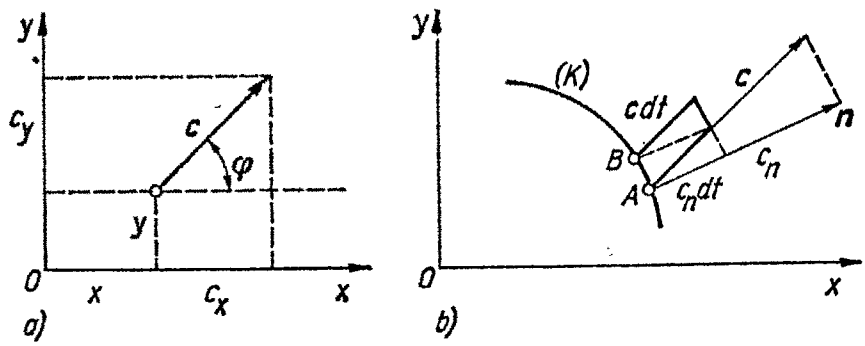

Abb. 16

Wir wählen in der x, y-Ebene eine Kurve (K) und versuchen, die Flüssigkeitsmenge Q zu bestimmen, die bei einer bestimmten Geschwindigkeit von einer bestimmten Seite her in der Zeiteinheit durch die Kurve hindurchströmt. Da wir die Flüssigkeit als inkompressibel voraussetzen, können wir die Flüssigkeitsmenge durch den Flächeninhalt der von ihr eigenommenen Figur bestimmen. Wir sehen diese Flüssigkeitsmenge als negativ an, wenn die Flüssigkeit in der entgegengesetzten Richtung strömt.

Wir betrachten ein Bogenelement $ds = AB$ von (K). In der Zeit dt strömt durch dieses Element eine Flüssigkeitsmenge

$$c_n\,ds\,dt\,, \tag{19}$$

wobei c_n die Projektion des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{c}$ auf die Normale $\boldsymbol{n}$ des in Strömungsrichtung gerichteten Elements ds ist. Diese Flüssigkeitsmenge ist nämlich gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten ds und $c\,dt$, dessen Höhe gerade $c_n\,dt$ ist (Abb. 16b).

Zur Berechnung der Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch ds hindurchtritt, summieren wir (19) nach t und erhalten $c_n\,ds$. Nun summieren wir über alle Bogenelemente von (K) und erhalten die gesuchte Menge Q als Kurvenintegral erster Art:

$$Q = \int\limits_{(K)} c_n\,ds\,. \tag{20}$$

Dabei haben wir wieder das Prinzip der „Summierung unendlicher kleiner Größen" angewandt. Ist (x, n) der Winkel zwischen der x-Achse und der Kurvennormalen $\boldsymbol{n}$, so ergibt sich für den Winkel zwischen der Normalen und dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{c}$

$$(n, c) = (x, c) - (x, n) = \varphi - (x, n);$$

also ist

$$c_n = c\cos(n, c) = c(\cos\varphi\cos(x, n) + \sin\varphi\sin(x, n)) = u\cos(x, n) + v\sin(x, n)\,.$$

Dann geht (20) über in

$$Q = \int_{(K)} [u\cos(x, n) + v\sin(x, n)]\,ds\,. \tag{21}$$

Jetzt kann man nach (15) aus Nr. 553 dieses Integral als Kurvenintegral zweiter Art darstellen:

$$Q = \int_{(K)} (v\,dx - u\,dy)\,, \tag{22}$$

wobei es wichtig ist, darauf hinzuweisen, daß die Kurve so durchlaufen werden muß, daß der Winkel zwischen der entsprechenden Richtung der Tangente und der vorher gewählten Richtung der Normalen gleich $+\frac{\pi}{2}$ ist (denn unter dieser Annahme ist die Formel (15) hergeleitet worden).

Ist (K) eine geschlossene Kurve und das Integral (22) wie üblich (vgl. Nr. 548) in positivem Sinne genommen, so muß die Normale in Formel (22) ins Innere des von (K) berandeten Bereichs gerichtet sein, damit die obige Bedingung erfüllt ist. Daher liefert (22) in diesem Fall die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch (K) in den Bereich hineinströmt. Wollen wir die Menge haben, die aus dem Bereich herausströmt, so brauchen wir in (22) nur die Vorzeichen zu ändern.

Hat ferner das Feld weder „Quellen" noch „Senken", so bleibt in jedem berandeten Bereich die Flüssigkeitsmenge konstant. Daher muß für jede geschlossene Kurve (K) das Integral (22) gleich 0 sein.

Somit ist, falls u und v die Geschwindigkeitskomponenten einer ebenen stationären Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit und keine Quellen und Senken vorhanden sind,

$$\int_{(K)} (v\,dx - u\,dy) = 0$$

für jede geschlossene Kurve (K).

In Nr. 566, Beispiel 2, werden wir sehen, daß dieses mit Hilfe physikalischer Überlegungen gewonnene Ergebnis auch eine analytische Charakterisierung der Funktionen u und v liefert.

3. *Wärmeabsorption durch ein Gas.* Wir betrachten eine bestimmte Menge eines Gases. Der Zustand des Gases wird durch drei Größen charakterisiert: durch sein Volumen V, den Druck p und die absolute Temperatur T. Handelt es sich um ein ideales Gas, so besteht zwischen diesen Größen die Clapeyronsche Formel

$$pV = RT\,,$$

wobei R eine Konstante ist. Somit kann jede der drei Größen p, V und T durch die beiden anderen ausgedrückt werden, und man braucht zur Charakterisierung des Zustandes eines idealen Gases nur zwei dieser Größen zu kennen. Dies seien etwa V und p. Dann liefert der Punkt mit der Abszisse V und der Ordinate p ein Bild des Zustandes des Gases. Ändert sich dieser Zustand von einem Anfangszustand, der dem Punkt A entspricht, bis zu einem Endzustand, dem der Punkt B entspricht, so wird der Prozeß der Änderung durch eine Kurve $(K) \equiv (AB)$ charakterisiert, die die Aufeinanderfolge sich kontinuierlich ändernder Zustände bildlich darstellt. (Hier und im folgenden handelt es sich um sogenannte *quasistationäre Prozesse*, d. h., wir stellen uns vor, der Zustand des Gases ändere sich so langsam (aber homogen), daß die ganze Gasmenge sich jeweils in dem betreffenden Zustand befindet.)

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Wärmemenge Q zu bestimmen, die von einer gegebenen Gasmenge im Verlauf des durch die Kurve (K) charakterisierten Prozesses absorbiert wird. Zu diesem Zweck betrachten wir wie üblich einen „unendlich kleinen" Elementarprozeß, der das Gas aus dem Zustand (V, p, T) in den unendlich benach-

barten Zustand $(V+\mathrm{d}V, p+\mathrm{d}p, T+\mathrm{d}T)$ überführt. Ihm entspricht ein Element der Kurve (K); vgl. Abb. 17. Die Wärmemenge, die dabei absorbiert wird, haben wir schon einmal bestimmt (bei der Herleitung der Poissonschen Formel, Nr. 361, Beispiel 3). Dort hatten wir

$$\mathrm{d}Q=\frac{c_v}{R}V\,\mathrm{d}p+\frac{c_p}{R}p\,\mathrm{d}V$$

erhalten.

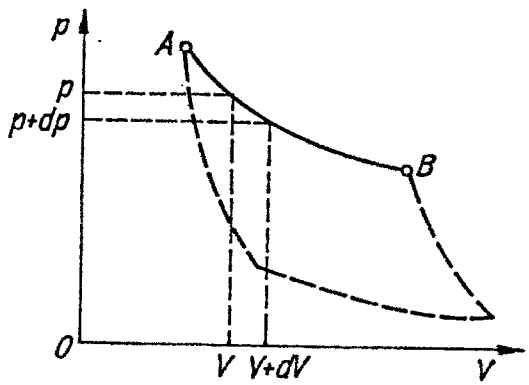

Abb. 17

Um die Gesamtwärmemenge Q zu erhalten, die während des ganzen Prozesses absorbiert wird, der durch (K) charakterisiert wird, brauchen wir nur die Elemente $\mathrm{d}Q$ längs der Kurve zu summieren:

$$Q=\int\limits_{(K)}\left(\frac{c_v}{R}V\,\mathrm{d}p+\frac{c_p}{R}p\,\mathrm{d}V\right). \tag{23}$$

Somit ergibt sich Q unmittelbar als Kurvenintegral zweiter Art. Hätten wir $\mathrm{d}Q$ nicht durch $\mathrm{d}V$ und $\mathrm{d}p$, sondern durch $\mathrm{d}V$ und $\mathrm{d}T$ oder durch $\mathrm{d}p$ und $\mathrm{d}T$ ausgedrückt, so hätten wir ebenfalls Kurvenintegrale erhalten, natürlich dann in der V, T- bzw. in der p, T-Ebene.

4. *Wirkung des Stromes auf einen Magneten.* Das Biot-Savartsche Gesetz, das die Wirkung des Stromes auf einen Magneten charakterisiert, hat Differentialform. Nach diesem Gesetz übt ein Leiterelement $\mathrm{d}s$, durch das ein Strom der Stärke I fließt, auf eine im Abstand r befindliche „magnetische Masse" m eine Kraft aus, deren Größe gleich

$$\frac{Im\sin\varphi\,\mathrm{d}s}{r^2} \tag{24}$$

ist; dabei bedeutet φ $(0<\varphi<\pi)$ den Winkel zwischen dem Vektor $\boldsymbol{r}$, der den Pol des Magneten mit dem Leiterelement verbindet, und dem nach der Seite der Stromrichtung gerichteten Leiterelement $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$. Die Richtung dieser Kraft steht senkrecht auf der Ebene der Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, und zwar nach der Seite, von der die Drehung von $\boldsymbol{r}$ nach $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ um den Winkel φ dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt erscheint (vgl. Nr. 356, Beispiel 8).

Wir wollen nun das *Magnetfeld* des Stromes charakterisieren, das von einem endlichen geschlossenen Leiter (K) beliebiger Form ausgeht, der beliebig im Raum liegt. Mit anderen Worten, wir wollen die Kraft bestimmen, mit der der ganze Leiter auf eine magnetische Masse m in einem beliebigen Punkt M des Raumes wirkt. Die Herleitung des Biot-Savartschen Gesetzes in seiner „Integralform" wird dadurch erschwert, daß die einzelnen Elementarkräfte, von denen oben die Rede war, in verschiedenen Richtungen wirken und vektoriell addiert werden müssen.

In diesem Fall geht man gewöhnlich zu den Projektionen der Vektoren auf die Achsen irgendeines rechtwinkligen Koordinatensystems über, da die Projektionen der Elementarkräfte sich algebraisch addieren.

Zur Vereinfachung benutzen wir die Hilfsmittel der Algebra. Schreibt man den Ausdruck (24) für die Größe der Kraft $d\boldsymbol{F}$ in der Gestalt

$$\frac{mI}{r^3} \cdot r\, ds \sin\varphi\,,$$

so bemerkt man leicht, daß er sich nur durch den Faktor $\frac{mI}{r^3}$ von der Größe des *Vektorproduktes* $\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s}$ unterscheidet. Da auch die Richtung von $d\boldsymbol{F}$ nach dem Biot-Savartschen Gesetz mit der Richtung dieses Vektors übereinstimmt, kann man schreiben:

$$d\boldsymbol{F} = \frac{mI}{r^3}(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s})\,.$$

Wir betrachten nun ein rechtsorientiertes rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z. Bezeichnen x, y, z die Koordinaten des Anfgangspunktes von $d\boldsymbol{s}$ und ξ, η, ζ die des betrachteten Raumpunktes M, so sind die Projektionen von $\boldsymbol{r}$ auf die Achsen gleich

$$x-\xi, \qquad y-\eta, \qquad z-\zeta;$$

$d\boldsymbol{s}$ hat die Projektionen

$$dx, \qquad dy, \qquad dz\,.$$

Somit sind die Projektionen von $d\boldsymbol{F}$ die Produkte $\frac{mI}{r^3}$ mit

$$(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy, \qquad (z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz, \qquad (x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx\,.$$

Die Projektionen von $\boldsymbol{F}$ auf die Achsen erhalten wir durch Summation über (K), und zwar als Kurvenintegrale:

$$F_x = mI \int_{(K)} \frac{(y-\eta)\,dz-(z-\zeta)\,dy}{r^3}\,,$$

$$F_y = mI \int_{(K)} \frac{(z-\zeta)\,dx-(x-\xi)\,dz}{r^3}\,,$$

$$F_z = mI \int_{(K)} \frac{(x-\xi)\,dy-(y-\eta)\,dx}{r^3}\,.$$

Die Kurve ist dabei in der Stromrichtung zu durchlaufen. Dabei ist unsere Aufgabe gelöst.

§ 3. Bedingungen für die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Weg

555. Problemstellung. Zusammenhang mit dem totalen Differential. In einem zusammenhängenden Gebiet (D) seien zwei stetige Funktionen

$$P = P(x, y) \quad \text{und} \quad Q = Q(x, y)$$

gegeben. Wir betrachten das Kurvenintegral zweiter Art

$$\int_{(AB)} (P\,dx + Q\,dy)\,. \tag{1}$$

Dabei sind A und B zwei beliebige Punkte in (D), und (AB) ist eine ganz in (D) liegende *stückweise glatte* Verbindungslinie. (Wir beschränken uns hier auf solche

Integrationswege; dadurch ist die Existenz des Integrals (1) gesichert.) *Die Hauptaufgabe dieses Paragraphen besteht darin, die Bedingungen zu klären, unter denen der Wert des Integrals nicht von der Gestalt des Weges* (AB) *abhängt*, d. h. durch die Anfangs- und Endpunkte A bzw. B eindeutig bestimmt ist, wo in (D) sie auch liegen mögen.

Das Verhalten des Ausdrucks (1) wird bestimmt durch die Eigenschaften des Differentialausdrucks

$$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\,, \tag{2}$$

der unter dem Integralzeichen steht. Mit solchen Ausdrücken haben wir uns schon einmal beschäftigt, und zwar, als wir die Differenzierbarkeit einer Funktion $F(x, y)$ zweier Veränderlicher und ihr (totales oder vollständiges) Differential (Nr. 179)

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

behandelten; für

$$P=\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Q=\frac{\partial F}{\partial y}$$

stimmen (2) und (3) überein.

Jedoch ist bei weitem nicht jeder Ausdruck der Form (2) ein „totales Differential", d. h., nicht zu jedem solchen Ausdruck existiert eine Stammfunktion $F(x, y)$, deren totales Differential er ist. Es wird sich sogleich zeigen, daß das Integral (1) gerade in den Fällen vom Weg unabhängig ist, in denen der Integrand ein exaktes (totales, vollständiges) Differential ist. Wir formulieren diesen Sachverhalt in einem Satz, dessen Beweis in den beiden folgenden Nummern erbracht wird.

Satz 1. *Ein Kurvenintegral* (1) *hängt genau dann nicht von der Gestalt des Weges ab, wenn der Differentialausdruck* (2) *in dem betreffenden Gebiet das totale Differential einer eindeutigen Funktion zweier Veränderlicher ist.*

(In Nr. 562 wird dem Leser klar werden, warum die Eindeutigkeit der Stammfunktion gefordert werden muß.)

556. Differentiation eines Integrals, das nicht vom Weg abhängt. Wir nehmen zunächst an, *das Integral* (1) *hänge nicht vom Weg ab.* Dann ist es durch die Vorgabe des Anfangs- und Endpunktes $A(x_0, y_0)$ bzw. $B(x_1, y_1)$ eindeutig bestimmt, was man dadurch andeutet, daß man

$$\int_A^B (P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y) \quad \text{oder} \quad \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} (P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)$$

schreibt. Der Weg wird also nicht angegeben, da er bei der Integration keine Rolle spielt. Sonst wäre ja die Bezeichnung sinnlos.

Ist $A(x_0, y_0)$ fest und ersetzt man B durch einen beliebigen Punkt $M(x, y)$ aus (D), so wird das Integral zu einer Funktion des Punktes M, d. h. seiner beiden Koordinaten in (D),

$$F(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)\,. \tag{4}$$

Wir untersuchen nun die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach x und y. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt $B(x_1, y_1)$ in (D) und einen Zuwachs Δx von x_1, der so klein ist, daß der Punkt $C(x_1+\Delta x, y_1)$ nebst der ganzen Strecke $\overline{BC}$ noch in (D) liegt (Abb. 18); dann ergeben sich die Funktionswerte

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} (P\,dx + Q\,dy),$$

$$F(x_1+\Delta x, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} (P\,dx + Q\,dy).$$

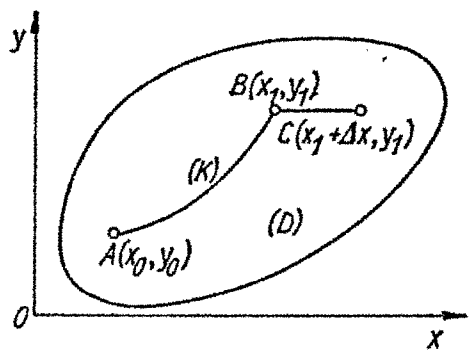

Abb. 18

Das erste Integral berechnen wir längs einer beliebigen Kurve (K), das zweite längs (K) und der Strecke $\overline{BC}$. Der Zuwachs von F ergibt sich somit zu

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{(BC)} (P\,dx - Q\,dy) = \int_{(BC)} P(x, y)\,dx;$$

das Integral über $Q\,dy$ verschwindet, da die Strecke $\overline{BC}$ senkrecht zur y-Achse verläuft.

Das übrigbleibende Integral reduziert sich sofort auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral; man braucht nur y durch y_1 zu ersetzen (auf $\overline{BC}$ ist $y=y_1$) und als Integrationsgrenzen die Abszissen von B und C zu nehmen. Somit ist

$$F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = (\mathrm{R}) \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)\,dx.$$

Nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung (und Division durch Δx) erhalten wir

$$\frac{F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1+\theta\Delta x, y_1) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Nun lassen wir Δx gegen 0 streben. Da $P(x, y)$ stetig ist, strebt die rechte Seite und damit auch die linke gegen $P(x_1, y_1)$. Also ist im Punkt (x_1, y_1) die Funktion F nach x differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P(x_1, y_1).$$

Völlig analog ergibt sich

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q(x_1, y_1).$$

Da (x_1, y_1) im Innern von (D) beliebig war, erhalten wir

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) .$$

Da diese partiellen Ableitungen stetig sind, existiert das totale Differential von $F(x, y)$:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y;$$

dieses Differential stimmt mit dem Integranden von (1) überein (vgl. Nr. 179). (Daraus folgt übrigens auch die Stetigkeit von F in beiden Variablen.)

Somit haben wir für ein vom Weg unabhängiges Kurvenintegral ein Ergebnis erhalten, das dem Satz über die Differentiation eines bestimmten Integrals nach der veränderlichen oberen Grenze völlig analog ist (vgl. Nr. 305, 12°).

Außerdem haben wir bewiesen, daß die in Nr. 555 genannte Voraussetzung *notwendig* ist.

Hängt das Integral (1) nicht vom Weg ab, so ist der Integrand ein exaktes (totales) Differential. Das Integral (4) liefert uns unter unserer Voraussetzung eine eindeutige Stammfunktion des Integranden.

557. Berechnung eines Kurvenintegrals mit Hilfe einer Stammfunktion. Wir nehmen nun umgekehrt an, der Ausdruck (2) sei ein totales Differential einer eindeutigen Funktion $\Phi(x, y)$, so daß also

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{5}$$

ist. Wir betrachten irgendeine stückweise glatte Kurve (K), die zwei gegebene Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ verbindet. Ihre Parameterdarstellung sei

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

bei einer Änderung des Parameters t von α bis β möge die Kurve in der Richtung von A nach B durchlaufen werden. Es ist also

$$\varphi(\alpha) = x_A, \qquad \psi(\alpha) = y_A, \qquad \varphi(\beta) = x_B, \qquad \psi(\beta) = y_B .$$

Wir berechnen nun das Kurvenintegral längs (K) durch Zurückführung auf ein gewöhnliches Integral nach Formel (6) aus Nr. 547 und erhalten

$$I = \int_{(K)} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_{\alpha}^{\beta} \{P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)\}\, \mathrm{d}t$$

oder, unter Beachtung von (5),

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, \varphi'(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, \psi'(t)\right\} \mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \Phi(\varphi(t), \psi(t))\, \mathrm{d}t$$

(nach der Kettenregel).

Somit ist schließlich

$$I = \Phi(\varphi(t), \psi(t))\,\Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$
$$= \Phi(x_B, y_B) - \Phi(x_A, y_A) .$$

Falls also eine Stammfunktion

$$\Phi(M)=\Phi(x, y)$$

existiert, ergibt sich das Kurvenintegral nach der einfachen Formel

$$\int_{(AB)}(P\,dx+Q\,dy)=\Phi(x_B, y_B)-\Phi(x_A, y_A)=\Phi(x, y)\Big|_{(x_A,y_A)}^{(x_B,y_B)} \tag{6}$$

oder, kürzer,

$$\int_{(AB)}(P\,dx+Q\,dy)=\Phi(B)-\Phi(A)=\Phi(M)\Big|_A^B. \tag{6*}$$

Diese Formel ist dem Hauptsatz der Integralrechnung (Nr. 308) analog, der das gewöhnliche bestimmte Integral durch eine Stammfunktion ausdrückt. Wir machen aber nochmals darauf aufmerksam, daß sie nur auf solche Integrale anwendbar ist, deren Integrand ein totales (exaktes) Differential ist.

Gleichzeitig beweist die Formel, daß *in diesem Fall das Integral* (1) *nicht von der Wahl der Kurve* (AB) *abhängt* (da Φ eindeutig ist, sind die Werte $\Phi(A)$ und $\Phi(B)$ durch die Punkte A und B völlig bestimmt), und damit ist bewiesen, daß die Voraussetzung des Satzes aus Nr. 555 auch *hinreichend* ist. Somit ist dieser Satz jetzt vollständig bewiesen.

558. Ein Kriterium für die Vollständigkeit des Differentials. Das Auffinden einer Stammfunktion im Fall eines rechteckigen Bereichs. Jetzt erhebt sich natürlich die Frage, nach welchem Kriterium festgestellt werden kann, ob ein vorgelegter Differentialausdruck (2) ein totales Differential ist oder nicht. Die Antwort auf diese Frage wird dann endgültig ermöglichen, die Bedingungen zu klären, unter denen das Kurvenintegral vom Weg unabhängig ist.

Um ein Kriterium in einfacher und zur Nachprüfung geeigneter Form zu erhalten, wollen wir zunächst zusätzlich voraussetzen, daß *in dem zu untersuchenden Bereich* (D) *die beiden partiellen Ableitungen* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *und* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *esistieren und stetig sind.*

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich das gesuchte Kriterium sehr leicht. Ist (2) das totale Differential einer Funktion $\Phi(x, y)$, so daß (5) gilt,

$$P=\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad Q=\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}.$$

Infolge der vorausgesetzten Stetigkeit von $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sind dann nach Nr. 190 die gemischten Ableitungen einander gleich, also

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{A}$$

Diese bemerkenswert einfache Beziehung ist also *notwendig* dafür, daß (2) ein totales Differential ist.

Nun wollen wir sehen, ob (A) auch hinreichend ist. Dabei setzen wir zunächst

(D) als rechteckig voraus, (D) sei also das endliche Rechteck $[a, b; c, d]$. Ferner sei (A) erfüllt; alsdann ergibt sich eine Stammfunktion ohne besondere Schwierigkeiten.

Die Aufgabe besteht darin, im Rechteck $[a, b; c, d]$ eine Funktion $\Phi(x, y)$ zu bestimmen, welche den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) \tag{5*}$$

genügt. Da P und Q stetig sind, folgt hieraus nach Nr. 179, daß (2) das totale Differential von Φ ist.

Wir wählen x_0 und x beliebig in $[a, b]$, integrieren die erste Gleichung von (5*) für festes y aus $[c, d]$ nach x von x_0 bis x und erhalten

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,\mathrm{d}x + \Phi(x_0, y)\,.$$

Setzen wir nun in der zweiten Gleichung (5*) $x = x_0$ und integrieren sie zwischen y_0 und y aus $[c, d]$ nach y, so folgt

$$\Phi(x_0, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,\mathrm{d}y + \Phi(x_0, y_0)\,.$$

Somit hat die gesuchte Funktion $\Phi(x, y)$ notwendigerweise die Gestalt

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,\mathrm{d}y + C \tag{7}$$

mit $C = \Phi(x_0, y_0) = \text{const}$.

Nun bleibt noch nachzuweisen, daß eine durch (7) definierte Funktion (für beliebiges C) tatsächlich den beiden Gleichungen (5*) genügt. In bezug auf die erste ist das klar, denn die Ableitung des ersten Summanden auf der rechten Seite von (7) nach x ist gleich $P(x, y)$ (vgl. Nr. 305), während die beiden anderen Summanden nicht von x abhängen. Differenzieren wir jetzt (7) nach y unter Anwendung der Leibnizschen Regel (Nr. 507), so folgt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x + Q(x_0, y)\,.$$

Nach (A) können wir hierin $\frac{\partial P}{\partial y}$ durch $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ersetzen. Dann ist das Integral gleich $Q(x, y) - Q(x_0, y)$, und es ergibt sich $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$, was zu beweisen war.

Hätten wir zuerst nach y integriert, so hätten wir folgenden Ausdruck für die gesuchte Stammfunktion erhalten:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,\mathrm{d}y + C\,. \tag{8}$$

Er unterscheidet sich nur formal von dem vorhergehenden.

Man sollte sich klar machen, daß durch die Festlegung des Wertes der Stammfunktion in irgendeinem Punkt des Bereichs der Wert der Konstanten in dem all-

gemeinen Ausdruck für die Stammfunktion festgelegt wird, so daß sich eine wohlbestimmte eindeutige Stammfunktion ergibt.

559. Verallgemeinerung auf beliebige Bereiche. Wir betrachten jetzt einen beliebigen (natürlich zusammenhängenden) endlichen oder auch unendlichen Bereich (D), der von einer oder von mehreren stückweise glatten Kurven berandet ist. Diesen Bereich setzen wir im folgenden als offen voraus. Dann sind seine sämtlichen Punkte innere Punkte (Nr. 163) und gehören nebst einer rechteckigen Umgebung zu diesem Bereich. Da sich auf diese Umgebungen die Überlegungen aus Nr. 558 anwenden lassen, existiert in einer Umgebung jedes Punktes von (D), falls die Bedingung (A) erfüllt ist, für den Ausdruck (2) eine Stammfunktion; es existieren sogar unendlich viele Stammfunktionen, die sich durch Konstanten voneinander unterscheiden. Es ist aber nicht immer möglich, diese Stammfunktionen zu einer einzigen eindeutigen Stammfunktion für den ganzen Bereich (D) zusammenzufügen. Das hängt vielmehr von der Art des Bereichs ab.

Damit die Existenz einer eindeutigen Stammfunktion im allgemeinen Fall gewährleistet ist, muß der Bereich (D) einer bestimmten Einschränkung unterworfen werden. Man kann sie folgendermaßen formulieren: Für *jede* in (D) liegende einfache geschlossene Kurve muß der von dieser Kurve berandete endliche Bereich ganz zu (D) gehören. Mit anderen Worten, der Bereich darf keine „Löcher" enthalten, auch keine punktförmigen. Ein zusammenhängender Bereich mit dieser Eigenschaft heißt *einfach zusammenhängend.*

Handelt es sich um einen endlichen Bereich, so kann man den Begriff des einfachen Zusammenhangs noch einfacher formulieren: Der Bereich soll von *einer einzigen* geschlossenen Kurve berandet sein. Abb. 19 zeigt Beispiele einfach zusammenhängender und mehrfach zusammenhängender Bereiche; a), d), e) sind endlich, b), c), f) unbeschränkt.

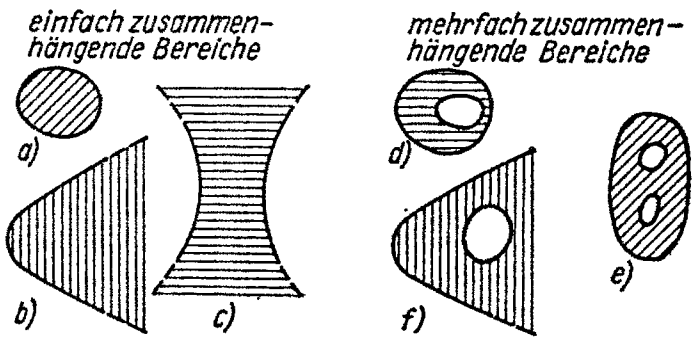

Abb. 19

Es sei also der betrachtete Bereich (D) einfach zusammenhängend; zunächst setzen wir ihn als endlich voraus, so daß er von einer einzigen geschlossenen Kurve (K) berandet ist, die wir als stückweise glatt annehmen. Die Stammfunktion für (D) werden wir schrittweise konstruieren, indem wir von Bereichen ausgehen, die in (D) enthalten und in Rechtecke zerlegbar sind.

Ist ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so können wir jeden Punkt M der Kurve (K) derart mit einem achsenparallelen Quadrat einer Seitenlänge kleiner als ε umgeben, daß innerhalb seines Randes die Kurve durch eine explizite Gleichung eines von zwei Typen ausdrückbar ist (vgl. Nr. 223); nur in den Ecken haben wir „Nahtstellen".

Nach dem Borelschen Überdeckungssatz (Nr. 175) reichen endlich viele dieser Quadrate zur Überdeckung der Kurve (K) aus. Durch diese endliche Kette von Quadraten wird ein abgeschlossener Bereich (D) von außen berandet, der ganz in (D) liegt und offenbar in Rechtecke zerlegbar ist. Er ist zusammenhängend und ebenso wie (D) auch einfach zusammenhängend; offenbar gehören ihm alle Punkte von (D) an, deren Abstand vom Rand nicht kleiner als ε ist.

Gehören zwei Punkte M_0 und M_1 zu $(\bar{D})$, so kann man sie durch einen Streckenzug (L) verbinden, der ganz in (D) liegt (Nr. 163). Dieser Streckenzug kann zwar die Grenzen des Bereichs $(\bar{D})$ überschreiten, verläuft aber dann in irgendwelchen der im Text erwähnten Quadrate. Ein in einem solchen Quadrat enthaltener Teil des Streckenzuges kann aber immer durch einen entsprechenden Teil des Quadratrandes ersetzt werden. Auf diese Weise erhält man einen M_0 und M_1 verbindenden Streckenzug $(\bar{L})$, der ganz in $(\bar{D})$ liegt.

Wir zeigen weiter unten, wie man eine Stammfunktion für $(\bar{D})$ konstruiert.

Um eine bestimmte Stammfunktion auszuzeichnen, legen wir ihren Wert in einem bestimmten Punkt M_0 aus $(\bar{D})$ fest. Wir weisen darauf hin, daß *sich zwei für zwei sich überlappende Bereiche definierte Stammfunktionen in dem Durchschnitt dieser Bereiche nur um eine Konstante unterscheiden* (da die partiellen Ableitungen ihrer Differenz gleich 0 sind; Nr. 183). Stimmen also diese Stammfunktionen auch nur in einem einzigen Punkt überein, so sind sie in diesem ganzen Durchschnitt identisch. Hieraus ist ersichtlich, daß wir, wenn wir ε gegen 0 streben lassen, tatsächlich die Definition der Stammfunktion auf ganz (D) ausdehnen können, und zwar so, daß sie eindeutig bleibt.

Um die Stammfunktion für $(\bar{D})$ zu konstruieren, stellen wir uns diesen Bereich in Rechtecke zerlegt vor, die sich längs vertikaler Strecken berühren (Abb. 20a). Zwei solcher benachbarter Rechtecke d_1 und d_2 zeigt Abb. 20b. Für jedes von ihnen seien die Stammfunktionen Φ_1 und Φ_2 konstruiert. Längs der den Rechtecken d_1 und d_2 gemeinsamen Strecke $\overline{\alpha\beta}$ können sie sich nur um eine Konstante unterscheiden; dies wird klar, wenn man sich vergegenwärtigt, daß jede von ihnen sich längs $\overline{\alpha\beta}$ nur um einen konstanten Summanden von irgendeiner für das schraffierte Rechteck konstruierten Stammfunktion unterscheidet (eine solche Stammfunktion existiert nach Nr. 558). Ändert man eine der Stammfunktionen Φ_1, Φ_2 um eine passende Konstante, so kann man erreichen, daß sie längs $\overline{\alpha\beta}$ übereinstimmen.

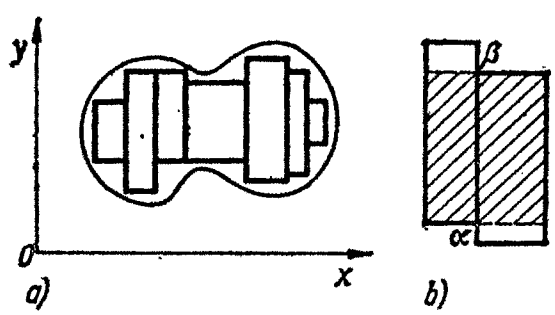

Abb. 20

Wir beginnen mit der Konstruktion der Stammfunktion für dasjenige Rechteck, in dem der Punkt M_0 liegt, wobei wir dafür sorgen, daß sie in diesem Punkt gerade den vorher festgelegten Wert hat. Alsdann konstruieren wir die Stamm-

funktion für die daran anschließenden Rechtecke, und zwar so, daß der Übergang von einem zum anderen (über den gemeinsamen Rand) stetig erfolgt usw.

Wir wollen uns nun klarmachen, worin die Bedeutung der Bedingung besteht, daß (D) und damit $(\bar{D})$ *einfach zusammenhängend* ist. Die Folge der Rechtecke in Abb. 20a kann sich, wenn (K) kompliziert verläuft, *verzweigen* (wie Abb. 21a zeigt). Das stört die stetige Fortsetzung der Stammfunktion längs der einzelnen, voneinander getrennt liegenden Stücke jedoch nicht. Hat aber der Bereich Löcher (Abb. 21b) und *vereinigen* sich zwei Zweige wieder, so kann es vorkommen, daß für das schließende Rechteck keine Stammfunktion existiert, welche auf beiden Stücken $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\gamma\delta}$ gleichzeitig einen stetigen Übergang ermöglicht.

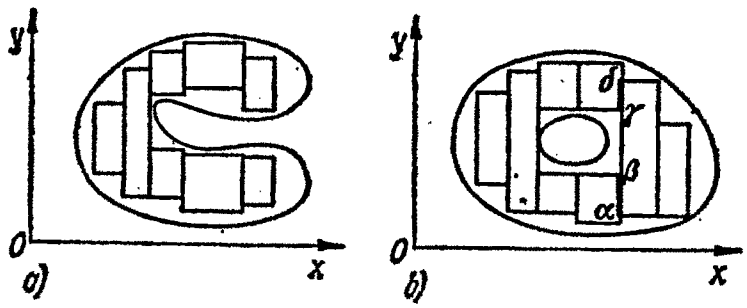

Abb. 21

Ist (D) unbegrenzt, so kann man analog vorgehen, indem man von endlichen Teilbereichen aus die Stammfunktion auf ganz (D) fortsetzt.

560. Zusammenfassung. Die Ausführungen von Nr. 558 und 559 lassen sich in folgenden Aussagen zusammenfassen:

Satz 2. *Ist der Ausdruck* (2) *im ganzen Bereich* (D) *totales Differential einer eindeutigen Funktion zweier Veränderlichen, so ist Bedingung* (A) *erfüllt. Ist* (D) *einfach zusammenhängend, so ist* (A) *dafür auch hinreichend.*

Im Zusammenhang damit nennt man (A) die *Integrabilitätsbedingung* für den Ausdruck (2). Zieht man noch Satz 1 heran, so ergibt sich folgender Satz:

Satz 3. *Wenn ein Kurvenintegral* (1) *bei beliebiger Wahl eines Anfangspunktes A und eines Endpunktes B in einem Bereich* (D) *nicht von der Gestalt des Weges abhängt, so ist die Bedingung* (A) *erfüllt. Ist* (D) *einfach zusammenhängend, so ist die Bedingung* (A) *dafür auch hinreichend.*

Somit haben wir schließlich in der Bedingung (A) ein bequemes und leicht zu verifizierendes Kriterium für die Unabhängigkeit eines Kurvenintegrals vom Weg gefunden. Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man z. B. die in den Beispielen 3 bis 6 aus Nr. 549 vorgelegten Integrale leicht klassifizieren und ihre in der Bemerkung angegebenen Besonderheiten vorhersehen.

Für diese Resultate werden wir später wichtige Anwendungen kennenlernen. Auf die Besonderheiten mehrfach zusammenhängender Bereiche werden wir in Nr. 562 eingehen.

561. Integrale über eine geschlossene Kurve. Bisher haben wir das Kurvenintegral (1)

$$\int\limits_{(AB)} (P\,dx + Q\,dy)$$

und diejenige wichtige Klasse von Fällen betrachtet, in denen dieses Integral nicht vom Integrationsweg abhängt. Nun wollen wir das Integral

$$\int_{(L)} (P\,dx + Q\,dy) \tag{9}$$

untersuchen, das über eine beliebige einfache *geschlossene* Kurve (L) erstreckt wird, die innerhalb des Gebietes (D) verläuft, und zwar stellen wir die Frage nach den Bedingungen, unter denen dieses Integral gleich 0 wird. Es zeigt sich, daß dieses Problem dem oben gelösten völlig analog ist: Wenn für einen gegebenen Differentialausdruck (2) das Integral nicht vom Weg abhängt, verschwindet das Integral (9), und umgekehrt.

Wir setzen also zunächst voraus, das Integral (1) sei vom Weg unabhängig. Ist (L) eine beliebige einfache geschlossene Kurve im Gebiet (D) (Abb. 22), so zerlegen wir sie durch zwei beliebige ihrer Punkte A und B in die Teilstücke (AMB) und (ANB). Da die Integrale über die Teilstücke gleich sind, also

$$\int_{(AMB)} = \int_{(ANB)} \tag{10}$$

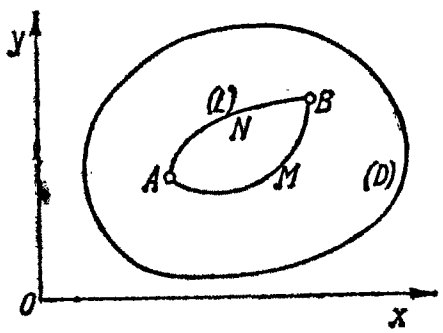

Abb. 22

ist, folgt

$$\int_{(L)} = \int_{(AMB)} + \int_{(BNA)} = \int_{(AMB)} - \int_{(ANB)} = 0\,. \tag{11}$$

Es sei jetzt, umgekehrt, bekannt, daß das Integral (9) über eine einfache geschlossene Kurve stets verschwindet. Wir wählen dann zwei Punkte A und B, verbinden sie durch zwei Kurven (AMB) und (ANB) und bilden die geschlossene Kurve

$$(L) = (AMBNA)\,.$$

Haben die Kurven (AMB) und (ANB) außer A und B keine gemeinsamen Punkte, so hat (L) keine Doppelpunkte, d. h., die Kurve (L) ist *einfach*.

Gibt es aber weitere gemeinsame Punkte, so ist (L) nicht mehr einfach. Wie das folgende Lemma zeigt, kann man sich jedoch trotzdem auf einfache geschlossene Kurven beschränken.

Lemma. *Verschwindet das Integral* (9) *über jede einfache* (*d. h. doppelpunktfreie*) *geschlossene Kurve, so verschwindet es auch über jede* (*also auch nicht einfache*) *geschlossene Kurve.*

Nach dem in Nr. 550 bewiesenen Lemma genügt es, diese Behauptung für jeden (nicht notwendig einfachen) geschlossenen *Streckenzug* zu beweisen. Es sei also

(L) ein derartiger, in bestimmter Weise gerichteter Streckenzug. Von einem seiner Punkte M_0 gehen wir in dieser Richtung bis zur ersten Überschneidung M_1. Wir lassen den sich dabei ergebenden geschlossenen Streckenzug (L_1) fort, setzen den Weg M_0M_1 bis zum nächsten Überschneidungspunkt fort, was wieder einen geschlossenen Streckenzug (L_2) auszusondern gestattet, usw. Nach endlich vielen Schritten ist (L) in endlich viele sich nicht überschneidende geschlossene Streckenzüge

$$(L_1), (L_2), \ldots$$

zerlegt, längs deren das Integral 0 ist. Das bedeutet aber, daß es auch längs (L) verschwindet, was zu beweisen war. Damit haben wir folgenden wichtigen Satz bewiesen.

Satz 4. *Das Kurvenintegral* (1) *ist genau dann vom Weg unabhängig, wenn das Integral* (9) *über jede geschlossene Kurve verschwindet. Diese Bedingung ist auch dann noch hinreichend, wenn man dabei nur einfache (d. h. doppelpunktfreie) Kurven heranzieht.*

Ob das Integral (9) über eine geschlossene Kurve verschwindet, kann man also mit Hilfe desselben Kriteriums entscheiden, das wir in Satz 3 für die Unabhängigkeit des Integrals (1) vom Weg aufgestellt hatten:

Satz 5. *Dafür, daß das Integral* (9) *über eine beliebige geschlossene Kurve im Gebiet* (D) *verschwindet, ist notwendig, daß in* (D) *die Bedingung* (A) *erfüllt ist. Ist* (D) *einfach zusammenhängend, so ist diese Bedingung auch hinreichend. Die Bedingung bleibt auch dann noch notwendig, wenn man dabei nur einfache (doppelpunktfreie) Kurven heranzieht.*

In Nr. 601 werden wir auf die hier behandelte Frage zurückkommen, nachdem wir über weitere Hilfsmittel verfügen (Doppelintegrale, Gaußscher Satz). Dort werden wir einige der hier erhaltenen Resultate nochmals bekommen, und zwar mit geringerem Aufwand.

562. Mehrfach zusammenhängende Bereiche. Singuläre Punkte. Die bisher entwickelte und mit der Integrabilitätsbedingung (A) zusammenhängende Theorie beruht auf den Voraussetzungen, daß a) der betrachtete Bereich (D) einfach zusammenhängend ist (d. h. keine „Löcher" hat) und b) die Funktionen P und Q nebst ihren Ableitungen P_y und Q_x in (D) stetig sind. Sind diese Bedingungen verletzt, so sind die oben formulierten Behauptungen im allgemeinen nicht mehr richtig. Das Ziel dieser Nummer besteht nun darin, die dann auftretenden Besonderheiten zu untersuchen.

Wir bemerken, daß „singuläre" Punkte, in denen die Stetigkeitsbedingung b) verletzt ist, auch in der Weise behandelt werden können, daß man sie sozusagen als punktförmige Löcher aus dem Bereich entfernt. Somit reduziert sich das Problem auf die Untersuchung eines Bereichs (D), in dem alle Stetigkeitsbedingungen und die Bedingung (A) erfüllt sind, der aber eines oder mehrere punktförmige oder auch andere „Löcher" haben kann. Übrigens beschränken wir uns im folgenden der Einfachheit halber auf den Fall punktförmiger Löcher, d. h. singulärer Punkte. Der allgemeine Fall läßt sich völlig analog behandeln.

Wir nehmen zunächst an, der Bereich (D) enthalte nur einen *einzigen* singulären Punkt M und sonst keine „Löcher". Wir wählen in (D) eine einfache geschlossene Kurve (L) und betrachten das Integral (9)

$$\int_{(L)} (P\,dx + Q\,dy)\,. \tag{9}$$

Umfaßt (L) den singulären Punkt nicht, so ist das Integral natürlich wieder gleich 0. Liegt aber M im Innern von (L), dann kann das Integral von 0 verschieden sein.

Es ist jedoch sehr bemerkenswert, daß *alle in positivem Umlaufsinn erstreckten Integrale* (Nr. 548) *über alle möglichen Kurven dieser Art, die den Punkt M im Innern enthalten, einander gleich sind.*

In der Tat, betrachten wir zwei stückweise glatte Kurven (L_1) und (L_2), die M im Innern enthalten. Man kann voraussetzen, daß sie punktfremd sind. Denn sonst nehme man eine dritte Kurve (L_3), welche (L_1) und (L_2) im Innern enthält, und betrachte die Kurvenpaare (L_1), (L_3) und (L_2), (L_3) einzeln.

Die Kurven (L_1) und (L_2) bilden den Rand eines ringförmigen Bereichs (Δ), der zwischen ihnen liegt (Abb. 23). Mit Hilfe der beiden Schnitte (A_1A_2) und (B_1B_2) teilen wir (Δ) in die beiden einfach zusammenhängenden Bereiche (Δ') und (Δ'').

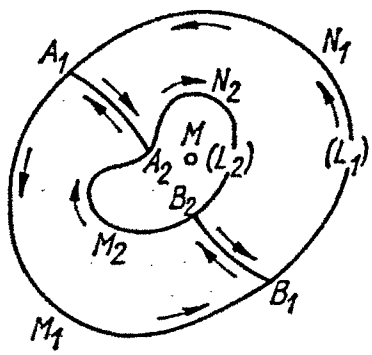

Abb. 23

Dann können wir schreiben:

$$\int_{(A_1M_1B_1)} + \int_{(B_1B_2)} + \int_{(B_2M_2A_2)} + \int_{(A_2A_1)} = 0 \quad \text{und} \quad \int_{(B_1N_1A_1)} + \int_{(A_1A_2)} + \int_{(A_2N_2B_2)} + \int_{(B_2B_1)} = 0\,.$$

Da die Integrale über die Schnittstrecken in entgegengesetzter Richtung erstreckt werden, sind sie entgegengesetzt gleich, und wir erhalten durch Addition

$$\int_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} + \int_{(A_2N_2B_2M_2A_2)} = 0$$

und hieraus

$$\int_{(A_1M_1B_1N_1A_1)} = \int_{(A_2M_2B_2N_2A_2)} \quad \text{oder} \quad \int_{(L_1)} = \int_{(L_2)}\,.$$

Die letzten beiden Integrale sind in positivem Sinne zu nehmen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Den gemeinsamen Wert dieser Integrale bezeichnen wir mit σ; man nennt ihn die zum singulären Punkt M gehörige *zyklische Konstante.* (Entsprechend definiert man auch die zu einem – nicht punktförmigen – „Loch" gehörige zyklische Konstante.)

Wir zeigen nun folgendes: Ist (L) eine *beliebige* (nicht notwendig einfache) Kurve in (D), die nicht durch den singulären Punkt M hindurchgeht, so ist

$$\int_{(L)} (P\,dx+Q\,dy)=n\sigma\,, \tag{12}$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Das ist klar für ein Polygon, da sich ein Polygon in endlich viele einander nicht schneidende geschlossene Polygone zerlegen läßt, über welche jedes Integral gleich 0 oder gleich $\pm\sigma$ ist. Im allgemeinen Fall benutzen wir wieder das Lemma und die zugehörige Bemerkung aus Nr. 550 und gehen dann von einbeschriebenen Polygonen zur Grenze über. Da ein Ausdruck der Form $n\sigma$ (für $\sigma\neq 0$ und ganzes n) nur gegen einen endlichen Grenzwert derselben Form streben kann (da sich n schließlich – da die Approximation von (L) durch Polygone stetig erfolgt – nicht mehr ändert), gilt (12) auch für eine beliebige Kurve (L).

Wir wollen nun das Integral über eine Kurve betrachten, welche die Punkte $A(x_0, y_0)$ und $B(x_1, y_1)$ in (D) verbindet und nicht durch den singulären Punkt geht. Ist $(AB)_0$ eine solche Kurve und (AB) eine andere, so bilden (AB) und $(BA)_0$ zusammen eine geschlossene Kurve, so daß nach (12)

$$\int_{(AB)} (P\,dx+Q\,dy)+\int_{(BA)_0} (P\,dx+Q\,dy)=n\sigma\,,$$

also

$$\int_{(AB)} (P\,dx+Q\,dy)=\int_{(AB)_0} (P\,dx+Q\,dy)+n\sigma$$

gilt. Hier hängt das Integral wirklich vom Weg ab, aber nur so, daß ein ganzzahliges Vielfaches der zyklischen Konstanten σ addiert wird. Nimmt man zur Kurve $(AB)_0$ eine entsprechende Anzahl von Schleifen hinzu, die den Punkt M umlaufen (Abb. 24), so kann man der Zahl n jeden gewünschten Wert geben.

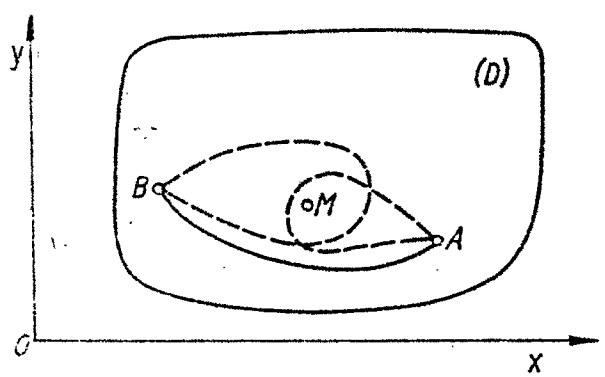

Abb. 24

Mit anderen Worten, in unserem Fall ist das Symbol

$$\int_{(AB)} (P\,dx+Q\,dy)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} (P\,dx+Q\,dy)$$

bei gegebenen A und B (für $\sigma\neq 0$) nicht eindeutig, sondern nur bis auf einen Summanden der Form $n\sigma$ bestimmt; dabei ist n eine ganze Zahl. Ersetzt man B durch einen veränderlichen Punkt $M(x, y)$, so stellt das Integral

$$F(x, y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P\,dx+Q\,dy)$$

nach dem Vorhergehenden eine *Stammfunktion* für den Ausdruck $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ dar, die mit Ausnahme des singulären Punktes stetig, aber *nicht eindeutig* ist.

Es ist wichtig, sich über den Unterschied des betrachteten Falles von dem früher (in Nr. 556, 558, 559) untersuchten Fall klar zu werden. Auch dort hätte man angesichts der additiven Konstanten von einer Mehrdeutigkeit der Stammfunktion sprechen können; jedoch erhielt man, wenn diese Konstante festgelegt wurde, im ganzen betrachteten Gebiet eine eindeutige Funktion. Es bestand keinerlei innerer Zusammenhang zwischen den einzelnen Werten der von der Wahl der Konstanten abhängigen mehrdeutigen Stammfunktion. Hier kann man jedoch die „Zweige", die sich um Vielfache der zyklischen Konstante unterscheiden, nicht mehr gesondert betrachten, denn beim Umlaufen des singulären Punktes gehen sie stetig ineinander über. Hinzu kommt hier auch noch die beliebige additive Konstante. Ähnlich liegen die Verhältnisse im Fall mehrdeutiger Funktionen einer komplexen Veränderlichen (vgl. etwa Nr. 458). Es ist nicht schwer zu sehen, daß in beiden Fällen Eigenschaften der Ebene eine Rolle spielen.

Zur Illustration der bisherigen Ausführungen setzen wir beispielsweise

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Diese Funktionen sind mit Ausnahme des Ursprungs $O(0, 0)$ in der ganzen Ebene stetig; der Ursprung ist also der einzige singuläre Punkt. Offenbar ist die Integrabilitätsbedingung (bis auf den Ursprung) überall erfüllt:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Man berechnet leicht, daß

$$\int_{(L)} \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

über jeden Kreis um den Ursprung (im positiven Sinne) gleich 2π ist. Die Zahl 2π ist also die zyklische Konstante des Ursprungs. Eine Stammfunktion des Differentialausdrucks

$$\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

läßt sich jetzt leicht erraten: Eine solche Stammfunktion ist der Polarwinkel θ, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ setzt. Die allgemeine Form ist also $\theta+c$ ($c=\mathrm{const}$). Von welchem Wert des Polarwinkels θ wir in einem gegebenen, vom Ursprung verschiedenen Punkt der Ebene auch ausgehen, der Winkel θ erfährt, wenn man den Punkt den Ursprung in irgendeiner Richtung n-mal umlaufen läßt, bei der Rückkehr des Punktes in die Ausgangslage, unter stetiger Änderung, einen Zuwachs von $\pm 2n\pi$; er wächst also um ein Vielfaches der zyklischen Konstanten. Betrachtet man hier also die Stammfunktion in der ganzen Ebene oder in einem ihrer Teile, der den Ursprung enthält (dieser ist natürlich auszuschließen), so muß man die Mehrdeutigkeit als inhärente Eigenschaft berücksich-

tigen: Die Zweige, die sich um ganze Vielfache von 2π unterscheiden, sind in gewissem Sinne nicht zu trennen.

Diese Betrachtungen kann der Leser unschwer auch auf den Fall ausdehnen, daß mehrere singuläre Punkte oder „Löcher" existieren. Sind beispielsweise k singuläre Punkte

$$M_1, M_2, \ldots, M_k$$

vorhanden, sind A und B zwei von den Punkten M_i verschiedene Punkte des Gebietes und ist $(AB)_0$ irgendeine *bestimmte* Verbindungskurve dieser beiden Punkte (die nicht durch einen singulären Punkt geht), so ist die allgemeine Form des Integrals über eine beliebige derartige Kurve (AB)

$$\int\limits_{(AB)} (P\,dx+Q\,dy) = \int\limits_{(AB)_0} (P\,dx+Q\,dx) + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \ldots + n_k\sigma_k .$$

Dabei ist σ_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ die zyklische Konstante, die dem singulären Punkt M_i entspricht, d. h. der Wert des Integrals

$$\int\limits_{(L_i)} (P\,dx+Q\,dy)$$

in positivem Umlaufsinn über eine einfache geschlossene Kurve (L_i), die M_i, aber keine anderen singulären Punkte im Innern enthält. Die Koeffizienten $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sind voneinander unabhängig und können beliebige ganze Werte annehmen.

563. Das Gaußsche Integral. Bei einigen Problemen der mathematischen Physik muß man das folgende Kurvenintegral erster Art betrachten:

$$g = \int\limits_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r}\,ds ,$$

das man das *Gaußsche Integral* nennt. Dabei ist

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

die Länge des Vektors $\boldsymbol{r}$, der von einem äußeren Punkt $A(\xi, \eta)$ nach einem veränderlichen Punkt $M(x, y)$ der Kurve (L) führt (Abb. 25), und (r, n) der Winkel zwischen diesem Vektor und der Normalen an die Kurve im Punkt M.

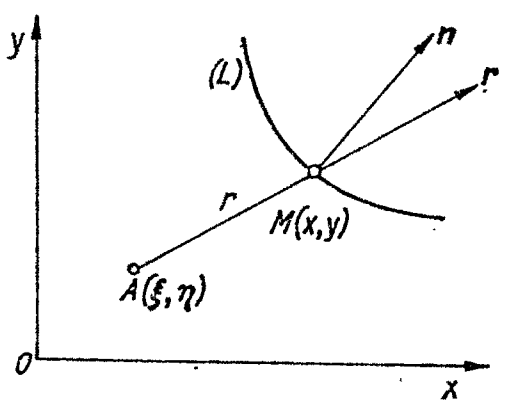

Abb. 25

Da A fest ist, ist der Integrand $\dfrac{\cos(r, n)}{r}$ eine Funktion der Koordinaten x, y von M. Wir bringen nun das Gaußsche Integral auf die Form eines Kurvenintegrals zweiter Art. Sind (x, n) bzw. (x, r) die Winkel zwischen der positiven Richtung der x-Achse

und dem Radiusvektor bzw. der Normalen, so ist offenbar

$$(r, n) = (x, n) - (x, r) ,$$

also

$$\cos(r, n) = \cos(x, n)\cos(x, r) + \sin(x, n)\sin(x, r) = \frac{x-\xi}{r}\cos(x, n) + \frac{y-\eta}{r}\sin(x, n) .$$

Setzen wir das in das Gaußsche Integral ein, so geht es über in

$$g = \int_{(L)} \left[\frac{y-\eta}{r^2}\sin(x, n) + \frac{x-\xi}{r^2}\cos(x, n)\right] ds .$$

Benutzen wir nun Formel (15) aus Nr. 553, so erhalten wir den gesuchten Ausdruck für g als Kurvenintegral zweiter Art:

$$g = \pm \int_{(L)} \left(\frac{y-\eta}{r^2}\,dx - \frac{x-\xi}{r^2}\,dy\right),$$

wobei das doppelte Vorzeichen der Wahl der Normalenrichtungen entspricht.

Die Funktionen $P = \frac{y-\eta}{r^2}$ und $Q = -\frac{x-\xi}{r^2}$ sind ebenso wie ihre Ableitungen in der ganzen x, y-Ebene stetig, mit Ausnahme des Punktes A, in dem $r = 0$ ist. In allen von A verschiedenen Punkten gilt die Integrabilitätsbedingung, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-\eta}{r^2}\right) = \frac{r^2 - 2(y-\eta)^2}{r^4} = \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x-\xi}{r^2}\right) = -\frac{r^2 - 2(x-\xi)^2}{r^4} = \frac{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}{r^4} .$$

Ist die Kurve (L) geschlossen, umfaßt aber den Punkt A nicht (geht auch nicht durch ihn hindurch), so ist $g = 0$. Liegt aber A im Innern von (L), so kann das Gaußsche Integral auch von 0 verschieden sein; jedoch ist dann sein Wert für alle solchen Kurven derselbe, wie wir in Nr. 562 gesehen haben. Um diesen Wert zu ermitteln, wählen wir als (L) den Kreis mit dem Radius R um A. Dann ist

$$r = R \quad \text{und} \quad \cos(r, n) = 1 .$$

Dabei werde angenommen, daß die Normale und der Radiusvektor dieselbe Richtung haben. Demnach ist

$$g = \frac{1}{R}\int_{(L)} ds = \frac{1}{R}\cdot 2\pi R = 2\pi .$$

Somit ist für jede geschlossene Kurve (L), in deren Innern der Punkt A liegt,

$$g = \int_{(L)} \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds = 2\pi ,$$

wenn die Normale nach außen gerichtet ist, wie im Fall des Kreises.

Dieses Resultat hätte sich leicht vorhersehen lassen, wenn wir uns die geometrische Bedeutung des Gaußschen Integrals vergegenwärtigt hätten: *g ist die Größe des Winkels, unter dem man von A aus die Kurve (L) sieht* (wenn der von dem von A ausgehenden Radiusvektor überstrichene Winkel bei einem Umlaufen der Kurve mit Vorzeichen genommen wird).

Um das zu erkennen, setzen wir zunächst voraus, daß (L) von jedem von A ausgehenden Strahl in höchstens einem Punkt getroffen wird (Abb. 26). Es sei ferner die

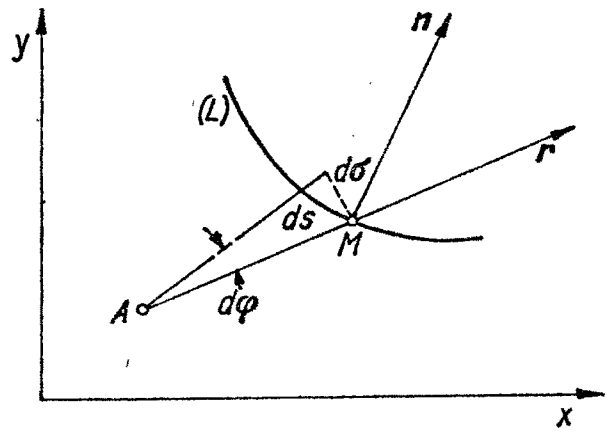

Abb. 26

Kurvennormale n nach der dem Punkt A entgegengesetzten Seite gerichtet, so daß also

$$0 < (r, n) < \frac{\pi}{2}$$

ist. Wir nehmen auf (L) ein Element ds und bestimmen den Winkel, unter dem dieses Element von A aus gesehen wird. Ist M beispielsweise der Anfangspunkt von ds, so beschreiben wir um A den Kreis mit dem Radius AM und projizieren ds auf diesen Kreis. Die Projektion sei $d\sigma$. Da der Winkel zwischen diesen Elementen, die angenähert als geradlinig angesehen werden können, gleich dem Winkel (r, n) ist, gilt

$$d\sigma = \cos(r, n)\, ds;$$

andererseits ist offenbar

$$d\sigma = r\, d\varphi,$$

wobei $d\varphi$ der dem Bogen $d\sigma$ entsprechende Zentriwinkel ist, d. h. gerade der Winkel, unter dem ds von A aus gesehen wird. Hieraus folgt für das Element des Sehwinkels

$$d\varphi = \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds.$$

Summiert man diese Elemente, so folgt, daß der Winkel, unter dem (L) gesehen wird, gerade das Integral g ist.

Wird eine Kurve in mehr als einem Punkt von Strahlen geschnitten, die vom Punkt A ausgehen, und wird sie dadurch in Stücke zerlegt, deren jedes nur einmal von diesen Strecken getroffen wird, so brauchen die Gaußschen Integrale über diese Kurvenstücke nur summiert zu werden.

Wir wählen auf der Kurve (L) einen bestimmten Umlaufsinn und orientieren die Normale z. B. so, daß der Winkel zwischen der positiven Tangentenrichtung und der Normalen gleich $+\frac{\pi}{2}$ ist. Dann ist in einigen Teilen der Kurve die Normale nach der dem Punkt A entgegengesetzten Richtung gerichtet, und das Gaußsche Integral liefert den Sehwinkel mit dem Pluszeichen; in anderen Teilen von (L) ist die Normale nach A hin gerichtet, und der Sehwinkel ist negativ. Im ganzen liefert das Gaußsche Integral die algebraische Summe der Sehwinkel. Man nennt diese Summe den *Sehwinkel für die ganze Kurve* (L), indem man also unter dem Sehwinkel das volle Maß der Drehung des Sehstrahls vom Anfangspunkt bis zum Endpunkt der Kurve versteht.

Ist die Kurve geschlossen und umfaßt sie den Punkt A, so ist der Sehwinkel der Kurve offenbar gleich 2π. Umfaßt die geschlossene Kurve den Punkt A nicht, so heben sich die Sehwinkel dank des verschiedenen Vorzeichens gegenseitig auf und liefern die Summe 0. In dem einfachen Fall der Abb. 27 zerfällt die Kurve (L) in zwei Teilkurven (L_1) und (L_2), die von A unter ein und demselben Winkel gesehen werden; aber für (L_1) ist dieser Winkel positiv, für (L_2) negativ zu nehmen.

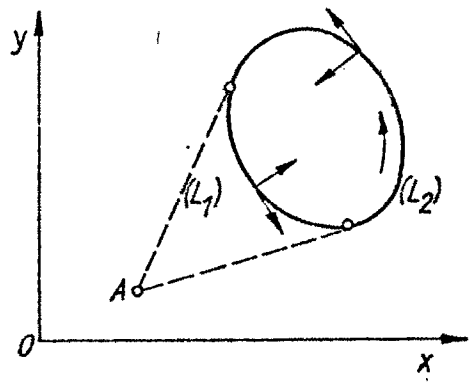

Abb. 27

Bemerkung. Die geometrische Behandlung des Gaußschen Integrals erlaubt den Schluß, daß dann, wenn eine geschlossene Kurve (L) durch den Punkt A hindurchgeht und dort eine Tangente hat, der Wert des Integrals gleich π ist. Ist aber A eine Ecke der Kurve und der Winkel zwischen den Halbtangenten in A gleich α, so ist auch das Gaußsche Integral gleich α. Zur analytischen Begründung dieses Resultats schneide man zunächst aus (L) eine gewisse Umgebung von A aus und gehe unter Verkleinerung dieser Umgebung zur Grenze über.

564. Der dreidimensionale Fall. Alle Überlegungen aus Nr. 561 bis 563 lassen sich auf den dreidimensionalen Fall übertragen.

In einem dreidimensionalen Bereich (V) seien drei Funktionen $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ definiert und dort stetig. Wir betrachten das Kurvenintegral

$$\int\limits_{(AB)} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z) \tag{13}$$

über eine beliebige in (V) verlaufende Kurve (AB). Die Überlegungen aus Nr. 556 und 557 lassen sich ohne weiteres unverändert auf diesen Fall übertragen. Hier gilt ein zu Satz 1 aus Nr. 555 analoger Satz: *Die Frage, ob das Integral* (1) *vom Integrationsweg unabhängig ist, reduziert sich darauf, ob der Ausdruck*

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \tag{14}$$

ein totales Differential ist, d. h., ob eine „Stammfunktion" $\Phi(x, y, z)$ existiert, deren vollständiges Differential

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

mit (14) *übereinstimmt.*

Wir bemerken beiläufig, daß dann, wenn eine solche Funktion existiert, das Integral (13) die Differenz ihrer Werte an den Grenzen ist:

$$\int\limits_{(AB)} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z) = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(M)\Big|_A^B \tag{15}$$

(vgl. Nr. 557, Formel (6*)).

Wie früher erhebt sich die Frage nach Kriterien dafür, daß der Ausdruck (14) ein totales Differential ist. Wir setzen in (V) die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen

$$\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial R}{\partial y}$$

voraus. Ist nun (14) das totale Differential einer Funktion $\Phi(x, y, z)$, gelten also die Gleichungen

$$P=\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Q=\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad R=\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{16}$$

so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial x},$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial y}.$$

Alle diese Ableitungen sind nach Voraussetzung stetig; dann gelten aber nach Nr. 191 die Beziehungen

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{B}$$

Somit ist in jedem Bereich (V) *die Bedingung* (B) *notwendig dafür, daß der Ausdruck* (14) *ein totales Differential ist, also auch dafür, daß das Integral* (13) *nicht vom Weg abhängt.*

Bei der Untersuchung der Frage, ob diese Bedingung auch *hinreichend* ist, wollen wir uns hier auf den Fall beschränken, daß (V) ein Quader ist:

$$(V)=[a, b; c, d; e, f].$$

Hier wiederholen wir die Betrachtungen aus Nr. 558.

Zur Bestimmung der Funktion $\Phi(x, y, z)$ aus den Bedingungen (16) integrieren wir die erste zwischen x_0 und x $(a \leqq x_0,\ x \leqq b)$ nach x, wobei wir y und z als beliebig, aber fest ansehen. Dann erhalten wir

$$\Phi(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x+\Phi(x_0, y, z).$$

In der zweiten der Beziehungen (16) setzen wir $x=x_0$ und integrieren zwischen y_0 und y $(c \leqq y_0,\ y \leqq d)$ nach y:

$$\Phi(x_0, y, z)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,\mathrm{d}y+\Phi(x_0, y_0, z).$$

Schließlich setzen wir in der dritten Beziehung von (16) $x=x_0$, $y=y_0$ und integrieren von z_0 bis z $(e \leqq z_0,\ z \leqq f)$ nach z:

$$\Phi(x_0, y_0, z)=\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,\mathrm{d}z+\Phi(x_0, y_0, z_0).$$

Bezeichnen wir den offenbar willkürlichen konstanten Wert $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ mit C, so erhalten wir für die gesuchte Funktion

$$\Phi(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,\mathrm{d}z+C. \tag{17}$$

Durch Anwendung der Leibnizschen Regel läßt sich leicht feststellen, daß diese Funktion tatsächlich allen Bedingungen (16) genügt.

Diese direkte Konstruktion der Stammfunktion überzeugt uns davon, daß zumindest *in einem Quader* (V) *die Bedingung* (B) *hinreichend dafür ist, daß der Ausdruck* (14) *ein vollständiges Differential ist, also auch dafür, daß das Integral* (13) *nicht vom Weg abhängt.*

Die Übertragung auf den allgemeinen Fall ist auch hier möglich, mit der Einschränkung, daß der Bereich (V) einer Bedingung genügt, die dem einfachen Zusammenhang in der Ebene entspricht. Da aber die Durchführung aller Überlegungen auf Schwierigkeiten stößt, wollen wir hier darauf verzichten. In Nr. 641, nachdem wir Oberflächenintegrale und den Stokesschen Satz zur Verfügung haben, werden wir auf die Frage zurückkommen.

565. Beispiele.

1. Ist das Kurvenintegral

$$\int_{(l)} (x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)$$

über jede geschlossene Kurve (l) gleich 0?

Lösung. Ja, denn der Integrand ist das totale Differential der Funktion $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2$.

2. Man entscheide, ohne sich auf die Bedingung (A) zu stützen, ob das Integral

$$\int_{(AB)} (x\,dy - y\,dx)$$

vom Weg abhängt.

Lösung. Im allgemeinen ja, denn dieses Integral über eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve ist das Doppelte des Inhalts der von der Kurve berandeten Fläche (Nr. 551) und somit von 0 verschieden.

3. Man beweise die Existenz einer Stammfunktion und bestimme diese für folgende Ausdrücke:

(a) $(4x^3y^3-3y^2+5)\,dx+(3x^4y^2-6xy-4)\,dy$,
(b) $(10xy-8y)\,dx+(5x^2-8x+3)\,dy$,
(c) $(4x^3y^3-2y^2)\,dx+(3x^4y^2-2xy)\,dy$,
(d) $[(x+y+1)\,e^x-e^y]\,dx+[e^x-(x+y+1)\,e^y]\,dy$.

Lösung. Die Integrabilitätsbedingung zeigt die Existenz einer Stammfunktion in den Fällen (a), (b), (d); der Ausdruck (c) ist kein totales Differential.

(a) Nach Formel (8) erhalten wir für $x_0=0$, $y_0=0$

$$\Phi(x,y)=\int_0^x 5\,dx+\int_0^y (3x^4y^2-6xy-4)\,dy+C=5x+x^4y^3-3xy^2-4y+C\,.$$

Ebenso erhält man nach Formel (7)

$$\Phi(x,y)=\int_0^x (4x^3y^3-3y^2+5)\,dx+\int_0^y (-4)\,dy+C=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+C\,.$$

(b) Es empfiehlt sich, $x_0=y_0=0$ zu setzen und (8) zu benutzen; denn dann verschwindet das erste Integral:

$$\Phi(x,y)=\int_0^y (5x^2-8x+3)\,dy+C=(5x^2-8x+3)\,y+C\,.$$

(d) Nach jeder der beiden Formeln ergibt sich

$$\Phi(x,y)=(x+y)\,(e^x-e^y)+C\,.$$

4. Man beweise, daß die Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ äquivalent ist mit der Identität

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy$$

$\left(\text{wenn } P, Q, \frac{\partial P}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ als stetig vorausgesetzt werden}\right)$.

5. Manchmal läßt sich, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, die Stammfunktion nach einer anderen Methode als in Nr. 558 auffinden. Wir zeigen das am Beispiel 3(a).

Aus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=4x^3y^3-3y^2+5$$

finden wir durch Integration nach x für Φ den Ausdruck $x^4y^3-3xy^2+5x$ bis auf eine „Integrationskonstante". Diese hängt nicht von x ab, kann aber vom „Parameter" y abhängen. Daher schreiben wir sie in der Form $\varphi(y)$. Somit ist

$$\Phi=x^4y^3-3xy^2+5x+\varphi\,. \qquad (*)$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=3x^4y^2-6xy-4$$

liefert, wenn wir für Φ den Ausdruck (*) einsetzen,

$$\frac{d\varphi}{dy}=-4\,,$$

also $\varphi=-4y+C$. Somit ist

$$\Phi=x^4y^3-3xy^2+5x-4y+C\,.$$

Diese Methode wird in der Theorie der Differentialgleichungen die *Variation der Konstanten* genannt.

6. Wendet man dasselbe Verfahren auf das Beispiel 3(c) an, ohne zu beachten, daß die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist, so erhält man zur Bestimmung von φ die Beziehung

$$\frac{d\varphi}{dy}=2xy\,.$$

Sie enthält einen Widerspruch, da rechts ein von x abhängiger Ausdruck steht, während φ nicht von x abhängen sollte!

7. Es ist interessant, in allgemeiner Form zu klären, welche Rolle bei der Variation der Konstanten die Integrabilitätsbedingung spielt.

Integriert man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P(x, y)$$

nach x, so folgt wie im speziellen Beispiel

$$\Phi(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\varphi(y)\,.$$

Die zweite Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q(x, y)$$

liefert zur Bestimmung von $\varphi(y)$ die Bedingung

$$\frac{d\varphi}{dy}=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx=Q(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx. \tag{18}$$

Hängt die rechte Seite in Wirklichkeit nicht von x ab, d. h., ändert sie sich für $y=\text{const}$ bei einer Änderung von x nicht, so führt eine einfache Quadratur nach y auf einen Ausdruck für φ. Hängt (18) aber von x ab, so enthält die Bedingung für φ einen Widerspruch, denn φ darf nicht von x abhängen. Der Erfolg hängt also ausschließlich davon ab, ob der Ausdruck (18) von x frei ist oder nicht, und das läßt sich am einfachsten dadurch feststellen, daß man nachprüft, ob die partielle Ableitung von (18) nach x verschwindet oder nicht. Diese Ableitung ist aber gerade die Differenz $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, womit wir wieder bei der Integrabilitätsbedingung (A) angelangt sind.

8. Man leite die Formeln (7) und (8) aus Nr. 558 für die Stammfunktion her, indem man den Ausdruck für die Stammfunktion als Kurvenintegral benutzt (Nr. 556, Formel (4)) und als Integrationsweg einmal den Streckenzug ACM, ein andermal den Strekkenzug ADM wählt (Abb. 28).

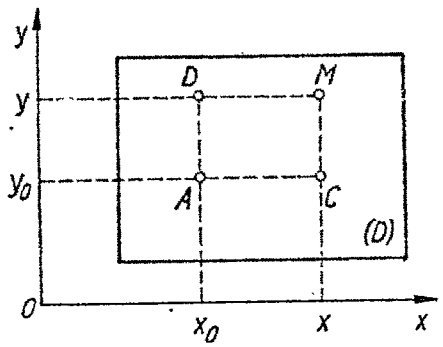

Abb. 28

9. Welcher Bedingung muß eine Funktion $F(x, y)$ genügen, damit der Ausdruck

$$F(x,y)\,(x\,dx+y\,dy)$$

ein vollständiges Differential ist?

Lösung. $x\frac{\partial F}{\partial y}=y\frac{\partial F}{\partial x}$.

10. Um ein weiteres Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Formel (4) aus Nr. 556 zum Aufsuchen einer Stammfunktion zu geben, lösen wir nach dieser Formel nochmals die Aufgabe 3(a), wobei wir als Integrationsweg die geradlinige Strecke nehmen, die den Ursprung mit einem beliebigen Punkt (x', y') der Ebene verbindet. Wir wählen diese Bezeichnung, um seine Koordinaten nicht mit denen der Punkte des Integrationsweges zu verwechseln.

Im Integral

$$F(x',y')=\int_{(0,0)}^{(x',y')}[(4x^3y^3-3y^2+5)\,dx+(3x^4y^2-6xy-4)\,dy]$$

hat man y durch $\frac{y'x}{x'}$ zu ersetzen (denn $y=\frac{y'x}{x'}$ ist jetzt die Gleichung des Integrationsweges) und damit die Aufgabe auf die Berechnung eines gewöhnlichen bestimmten Integrals nach x von 0 bis x' zurückzuführen. Man erhält

$$F(x',y')=\int_0^{x'}\left(\frac{7y'^3x^6}{x'^3}-\frac{9y'^2x^2}{x'^2}+5-\frac{4y'}{x'}\right)dx=x'^4y'^3-3x'y'^2+5x'-4y';$$

das ist bis auf die Bezeichnung der früher gefundene Ausdruck.

11. Man bestimme das Gebiet, in dem (bei positiven Wurzeln) der Ausdruck

$$P\,dx+Q\,dy=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\,dx+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}\,dy$$

ein vollständiges Differential ist, und ermittle dort eine Stammfunktion.

Lösung. Für $y\neq 0$ gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

wobei in $\frac{\partial P}{\partial y}$ das Plus- bzw. Minuszeichen zu nehmen ist, je nachdem, ob y positiv oder negativ ist. Die Integrabilitätsbedingung ist also nur für $y>0$ erfüllt.

Wir beschränken uns also auf die obere Halbebene und benutzen zur Bestimmung einer Stammfunktion dasselbe Verfahren wie in Beispiel 10, nehmen aber die Gleichung der geradlinigen Strecke in Parameterform:

$$x=x't,\qquad y=y't\qquad(0\leqq t\leqq 1).$$

Dann ist

$$F(x',y')=\int_{(0,0)}^{(x',y')}(P\,dx+Q\,dy)=\int_0^1\left(x'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}-x'}+y'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}+x'}\right)\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\left(x'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}-x'}+y'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2}+x'}\right).$$

12. Es sei

$$P\,dx+Q\,dy=\frac{1}{2}\,\frac{x\,dy-y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}\qquad(A>0,\ C>0,\ AC-B^2>0).$$

Man prüfe, ob die Integrabilitätsbedingung (A) erfüllt ist, und bestimme die zyklische Konstante des singulären Punktes (0, 0).

Hinweis. Am einfachsten berechne man das Kurvenintegral über die Ellipse

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\,,\qquad(E)$$

denn dann reduziert sich

$$\int_{(E)}(P\,dx+Q\,dy)=\frac{1}{2}\int_{(E)}(x\,dy-y\,dx)$$

einfach (vgl. Nr. 551, Formel (10)) auf den Flächeninhalt dieser Ellipse, der uns ja bekannt ist (Nr. 339, Beispiel 6); vgl. auch Nr. 549, Beispiel 9.

13. Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, so kann ein Kurvenintegral auch dann vom Weg unabhängig und eine Stammfunktion eindeutig sein, wenn ein singulärer Punkt im Bereich enthalten ist. Beispiel: Für den Ausdruck

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2},$$

für den der Ursprung singulärer Punkt ist, ist die Stammfunktion $\ln(x^2+y^2)$ bis auf den Ursprung nebst ihren Ableitungen in der ganzen Ebene stetig und eindeutig. Der Leser kann sich leicht davon überzeugen, daß das damit zusammenhängt, daß die zum Ursprung gehörige zyklische Konstante gleich 0 ist.

14. Man integriere den Differentialausdruck

$$z\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\frac{z}{xy^2}\,dy+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz\,.$$

Lösung. Die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{z}{x^2y^2},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{1}{xy^2},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{x^2y}+\frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2}$$

lassen sich leicht als erfüllt nachweisen.

Wir legen eine zu (17) analoge Formel zugrunde, vertauschen die Rollen von x und z, wobei wir $z_0=0$, $x_0>0$, $y_0>0$ setzen. Dann bleibt nur eines der drei Integrale übrig, und wir finden

$$\Phi(x,y,z)=\int_0^z\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz+C=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C\,.$$

566. Anwendung auf physikalische Aufgaben. Mit den Hilfsmitteln der bisher ausgearbeiteten Theorie behandeln wir jetzt einige schon früher untersuchte Probleme aus Mechanik und Physik.

1. *Die Arbeit eines Kraftfeldes.* In Nr. 554 haben wir gesehen, daß die Arbeit eines Kraftfeldes bei der Bewegung eines Massepunktes der Masse 1 längs einer Bahnkurve (K) durch ein Kurvenintegral ausdrückbar ist (vgl. Nr. 554, Formel (18)):

$$A=\int_{(K)}(X\,dx+Y\,dy)\,,\tag{19}$$

wobei $X=X(x,y)$ und $Y=Y(x,y)$ die Projektionen der Feldstärke auf die Koordinatenachsen sind.

Naturgemäß ergibt sich das Problem der Bedingungen, unter denen die Arbeit der Feldstärke nur von der Anfangs- und der Endlage des Punktes, aber nicht von der Gestalt der Bahnkurve abhängt. Das Problem ist offenbar gleichbedeutend mit der Frage, wann das Kurvenintegral (19) vom Integrationsweg unabhängig ist. Daher besteht die gesuchte Bedingung in der Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}\,,\tag{20}$$

natürlich unter der Annahme, daß das vom Feld umfaßte Gebiet einfach zusammenhängend ist und daß keine singulären Punkte vorliegen.

Diese Bedingung läßt sich auch folgendermaßen formulieren: *Die Arbeit eines Kraftfeldes bei der Bewegung eines Massepunktes aus einer Lage in eine andere hängt genau dann nicht von der Form der Bahnkurve ab, wenn das Element der Arbeit,*

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y\,,$$

ein vollständiges Differential einer eindeutigen Funktion $U(x,y)$ ist. Diese Funktion wird *Potentialfunktion* genannt; ein Feld mit einer Potentialfunktion heißt ein *Potentialfeld.*

Die Arbeit eines Potentialfeldes bei der Bewegung eines Punktes von $A(x_0,y_0)$ nach $B(x_1,y_1)$ ist gleich dem entsprechenden Zuwachs der Potentialfunktion (vgl. Nr. 557, Formel (6))

$$U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0)=U(B)-U(A)\,.$$

Als Beispiel betrachten wir ein *Newtonsches Schwerkraftfeld.* Ist im Ursprung O eine Masse μ, im Punkt A die Masse 1 angebracht, so wirkt diese auf O mit der Kraft F, und zwar ist ihre Größe

$$F=\frac{\mu}{r^2}\,,$$

wobei $r=\sqrt{x^2+y^2}$ der Abstand zwischen A und O ist. Da die Kosinus der Winkel, die dieser Kraftvektor mit den Achsen bildet, gleich $-\frac{x}{r}$ bzw. $-\frac{y}{r}$ sind, sind die Projektionen von $\boldsymbol{F}$ auf die Achsen gleich

$$X=-\frac{\mu x}{r^3}, \qquad Y=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

Offenbar ist das Newtonsche Feld ein Potentialfeld; denn

$$-\frac{\mu x}{r^3}\,dx-\frac{\mu y}{r^3}\,dy \tag{21}$$

ist das totale Differential von

$$U=\frac{\mu}{r},$$

der *Newtonschen Potentialfunktion* (des Feldes des Punktes O). Obwohl ein singulärer Punkt (eben der Ursprung) existiert, ist diese Funktion eindeutig: Das Integral von (21) über eine geschlossene Kurve verschwindet, selbst wenn die Kurve den Ursprung umschließt (seine zyklische Konstante ist gleich 0).

Bei einer Bewegung des Punktes von A nach B leistet die Feldstärke die Arbeit

$$A=\frac{\mu}{r_B}-\frac{\mu}{r_A},$$

wobei r_A bzw. r_B die Abstände zwischen A bzw. B und dem Zentrum sind. Strebt B gegen ∞, so geht die Arbeit in $-\frac{\mu}{r_A}$ über. Sie ist gleich der Größe des Newtonschen Potentials, wenn sich der Punkt aus dem Unendlichen auf A zu bewegt.

Felder, die keine Potentialfelder sind, werden beispielsweise durch die Kraft

$$F=kr \quad \text{oder} \quad F=\frac{k}{r} \qquad (k=\text{const})$$

erzeugt, deren Richtung mit dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet.

Diese Ausführungen lassen sich leicht auf ein räumliches Kraftfeld übertragen.

2. *Ebene stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit.* Bezeichnen u und v die axialen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, so gilt, wie wir in Nr. 554, Aufgabe 2, gesehen haben, für die Flüssigkeitsmenge Q, die durch die geschlossene Kurve (K) in der Zeiteinheit einströmt,

$$Q=\int\limits_{(K)}(v\,dx-u\,dy)$$

(vgl. Nr. 554, Formel (22)). Im Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit ist, wenn weder Quellen noch Senken vorliegen, dieses Integral stets gleich 0. Hieraus folgt, daß für die Komponenten u, v des Geschwindigkeitsvektors notwendigerweise die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

erfüllt ist. Dann gibt es zum Integranden $v\,dx-u\,dy$ eine Stammfunktion $\varphi(M)=\varphi(x, y)$, die in der Hydrodynamik die *Stromfunktion* genannt wird.

Ist (AB) eine beliebige Verbindungskurve zwischen A und B, so gilt für die Flüssigkeitsmenge Q, die in der Zeiteinheit in *bestimmter Richtung* durch sie hindurchströmt, bekanntlich (Nr. 554, Formel (22))

$$Q=\int\limits_{(AB)}(v\,dx-u\,dy),$$

wobei der Durchlaufungssinn auf (AB) so zu nehmen ist, daß die nach der betreffenden Seite gerichtete Normale mit der positiven Tangentenrichtung den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ bildet. Dann ist diese Größe gleich der Differenz $\varphi(B)-\varphi(A)$ der Werte der Stromfunktion φ an den Endpunkten der Kurve.

3. *Die von einem Gas absorbierte Wärme.* Wir wenden uns wieder (vgl. Nr. 554, Aufgabe 3) der Frage zu, welche Wärmemenge man durch Änderung des Zustandes einer gegebenen Menge eines idealen Gases erhält. Wird die Zustandsänderung durch eine Kurve (K) in der p, V-Ebene charakterisiert, so läßt sich diese Wärmemenge Q, wie wir in Nr. 554, Aufgabe 3, gesehen haben, durch ein Kurvenintegral ausdrücken:

$$Q=\int\limits_{(K)}\left(\frac{c_p}{R}\,p\,\mathrm{d}V+\frac{c_v}{R}\,V\,\mathrm{d}p\right)$$

(wir haben die früheren Bezeichnungen beibehalten).

Sieht man die Wärmekapazitäten c_v und c_p des Gases (bei konstantem Volumen und konstantem Druck) als unveränderlich an, so ist die Integrabilitätsbedingung hier offenbar verletzt. Wegen $c_p \neq c_v$ ist nämlich

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{R}\,p\right)=\frac{c_p}{R}\neq\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{c_v}{R}\,V\right)=\frac{c_v}{R}\,.$$

Hieraus folgt, daß *die Wärmemenge Q nicht etwa eine Funktion des Gaszustandes ist*, sondern von dem Prozeß abhängt, der zu diesem Zustand führte. Selbst bei einem zyklischen Prozeß, der das Gas in seinen ursprünglichen Zustand zurückversetzt, kann Wärme gewonnen oder verloren werden.

Multipliziert man den Ausdruck für das Element der Wärmemenge

$$\mathrm{d}Q=\frac{c_p}{R}\,p\,\mathrm{d}V+\frac{c_v}{R}\,V\,\mathrm{d}p$$

mit $\frac{1}{T}$, wobei $T=\frac{pV}{R}$ die absolute Temperatur des Gases ist, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}Q}{T}=c_p\,\frac{\mathrm{d}V}{V}+c_v\,\frac{\mathrm{d}p}{p}\,,$$

d. h. ein totales Differential. Eine Stammfunktion ist

$$S=c_p\ln V+c_v\ln p\,.$$

Das Kurvenintegral

$$\int\limits_{(V_0,p_0)}^{(V,p)}\frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

hängt nicht mehr vom Weg ab, der den festen Punkt (V_0, p_0) mit dem veränderlichen Punkt (V, p) verbindet, und unterscheidet sich nur durch eine Konstante von der oben erwähnten Funktion S. Durch dieses Integral wird eine physikalische Größe, die sogenannte *Entropie*, definiert, die eine Funktion des Gaszustandes ist und in der Wärmelehre eine wichtige Rolle spielt.

§ 4. Funktionen endlicher Schwankung

567. Definition der Funktionen endlicher Schwankung. Der vorliegende Paragraph fällt etwas aus dem Rahmen dieses Kapitels heraus. Er soll den Leser mit einer wichtigen (in der Überschrift genannten) Funktionenklasse vertraut machen,

die von dem französischen Mathematiker C. JORDAN[1]) eingeführt wurde. Sie spielt bei der im folgenden Paragraphen einzuführenden Verallgemeinerung des bestimmten Integrals eine wichtige Rolle. Übrigens ist sie auch in anderen Zweigen der Analysis von großer Bedeutung.

Die Funktion $f(x)$ sei auf dem endlichen Intervall $[a, b]$, $a<b$, definiert. Wir zerlegen es mit Hilfe von Teilpunkten

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$$

in Teilintervalle, wie wir das auch bei der Einführung der Darbouxschen bzw. Riemannschen Integralsummen getan hatten. Dann bilden wir die Summe

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| \tag{1}$$

der absoluten Beträge der Zuwächse in den Intervallen. Es geht nun darum, ob die Menge dieser Zahlen v, die sich bei beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ ergeben, nach oben beschränkt ist oder nicht.

Sind die Summen (1) bei beliebigen Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ nach oben beschränkt, so nennt man $f(x)$ in $[a, b]$ eine *Funktion von endlicher Schwankung* (oder auch Funktion von *beschränkter Schwankung* oder von *endlicher* oder von *beschränkter Variation*). Die obere Grenze dieser Summen wird die *Totalvariation* der Funktion in dem betreffenden Intervall genannt und mit

$$\bigvee_a^b f(x)=\sup\{v\}$$

bezeichnet. Diesen Begriff kann man auch bei Funktionen verwenden, die nicht von endlicher Schwankung sind; dann ist die Totalvariation gleich ∞.

Gemäß der Definition der oberen Grenze kann man in beiden Fällen durch geeignete Wahl der Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ die Totalvariation $\bigvee_a^b f(x)$ beliebig approximieren. Mit anderen Worten, man kann eine solche Folge von Zerlegungen des Intervalls wählen, daß die Totalvariation der Limes der entsprechenden Summen v ist.

Manchmal muß man untersuchen, ob eine Funktion $f(x)$ in einem *unendlichen* Intervall, etwa $[a,\infty]$, von endlicher Schwankung ist. Man sagt, $f(x)$ sei in $[a,\infty]$ von endlicher Schwankung, wenn $f(x)$ in jedem endlichen Teilintervall $[a, A]$ von endlicher Schwankung ist und die Totalvariationen $\bigvee_a^A f(x)$ gleichmäßig beschränkt sind. In solchen Fällen setzen wir

$$\bigvee_a^\infty f(x)=\sup_{A>a}\left\{\bigvee_a^A f(x)\right\}. \tag{2}$$

Wir weisen darauf hin, daß in diesen Definitionen von der Stetigkeit von $f(x)$ nicht die Rede ist.

Ein Beispiel einer Funktion endlicher Schwankung in einem endlichen oder unendlichen Intervall liefert eine beschränkte monotone Funktion. Ist das Intervall

[1]) CAMILLE JORDAN, 1838–1922.

$[a, b]$ endlich, so folgt dies einfach aus

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_{i+1})-f(x_i)]\right|=|f(b)-f(a)|\,,$$

so daß also $\bigvee_a^b f(x)=|f(b)-f(a)|$ ist. Für das Intervall $[a, \infty]$ ist offenbar

$$\bigvee_a^{\infty} f(x)=\sup_{A>a}\{|f(A)-f(a)|\}=|f(\infty)-f(a)|\,,$$

wenn, wie üblich, $f(\infty)=\lim_{A\to\infty} f(A)$ gesetzt wird.

Wir führen nun ein Beispiel einer *stetigen* Funktion an, die nicht von endlicher Schwankung ist, und zwar sei

$$f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x} \quad \text{für} \quad x\neq 0, \qquad f(0)=0\,.$$

Wir betrachten das Intervall [0, 1]. Als Teilpunkte nehmen wir

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1\,.$$

Dann wird

$$v=v_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=H_n$$

und (vgl. Nr. 365, Beispiel 1)

$$\bigvee_0^1 f(x)=\sup\{v\}=\infty\,.$$

568. Die Klassen der Funktionen endlicher Schwankung. Wir haben schon erwähnt, daß die monotonen Funktionen von endlicher Schwankung sind. Man kann diese Klasse folgendermaßen erweitern.

1°. *Ist eine im Intervall $[a, b]$ gegebene Funktion $f(x)$ so beschaffen, daß dieses Intervall in endlich viele Teilintervalle*

$$[a_k, a_{k+1}] \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1;\ a_0=a,\ a_m=b)$$

zerlegt werden kann derart, daß $f(x)$ auf jedem Teilintervall monoton ist, so ist $f(x)$ auf $[a, b]$ von endlicher Schwankung. (Solche Funktionen nennt man *stückweise monoton.*)

Zum Beweis teilen wir $[a, b]$ beliebig in Teilintervalle und bilden die Summe v. Da bei Hinzunahme eines neuen Teilpunktes die Summe v nicht kleiner wird (denn es gilt

$$|f(_{i+1})-f(x_i)|\leqq|f(x_{i+1})-f(x')|+|f(x')-f(x_i)|$$

für $x_i<x'<x_{i+1}$), erhalten wir bei Hinzunahme sämtlicher Teilpunkte a_k eine Summe $\bar{v}\geqq v$. Sondert man aus $\bar{v}$ diejenigen Summanden aus, die sich auf das Intervall $[a_k, a_{k+1}]$ beziehen, und bezeichnet man ihre Summe mit $\bar{v}^{(k)}$, so ist

$$\bar{v}^{(k)}=|f(a_{k+1})-f(a_k)|, \quad \text{also} \quad \bar{v}=\sum_{k=0}^{m-1}|f(a_{k+1})-f(a_k)|\,.$$

Da keine Summe v diese Zahl übertrifft, ist dieses $\bar{v}$ genau die Totalvariation.

2°. *Genügt $f(x)$ in $[a, b]$ der Bedingung*

$$|f(\bar{x})-f(x)| \leqq L\,|\bar{x}-x|\,, \tag{3}$$

einer sogenannten Lipschitzbedingung[1]*, wobei $L=\text{const}$ ist und $\bar{x}$ und x beliebige Punkte des Intervalls sind, so ist $f(x)$ von endlicher Schwankung, und es gilt*

$$\bigvee_a^b f(x) \leqq L\,(b-a)\,.$$

Das folgt aus der Ungleichung

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| \leqq L\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=L\,(b-a)\,.$$

Insbesondere gilt also

3°. *Jede Funktion, die im Intervall $[a, b]$ eine beschränkte Ableitung hat ($|f'(x)| \leqq L$; $L=\text{const}$), ist dort von endlicher Schwankung.*

Aus dem Mittelwertsatz folgt nämlich

$$|f(\bar{x})-f(x)|=|f'(\xi)\,(\bar{x}-x)| \leqq L\,|\bar{x}-x| \qquad (x \lessgtr \xi \lessgtr \bar{x})\,,$$

so daß die Lipschitzbedingung (3) erfüllt ist.

So kann man sich z. B. leicht davon überzeugen, daß

$$f(x)=x^2 \sin\frac{\pi}{x} \qquad (x \neq 0), \qquad f(0)=0\,,$$

in jedem endlichen Intervall von endlicher Schwankung ist. Denn

$$f'(x)=2x \sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x} \qquad (x \neq 0), \qquad f'(0)=0\,,$$

ist beschränkt. Es ist interessant, daß in jedem den Punkt 0 enthaltenden Intervall die Funktion unendlich oft oszilliert, d. h. vom Fallen zum Steigen übergeht und umgekehrt.

Eine sehr umfassende Klasse von Funktionen endlicher Schwankung liefert folgender Satz:

4°. *Ist $f(x)$ im endlichen oder auch unendlichen Intervall $[a, b]$ als Integral mit veränderlicher oberer Grenze darstellbar,*

$$f(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{4}$$

wobei $\varphi(t)$ in diesem Intervall als absolut integrierbar vorausgesetzt wird (d. h., $\varphi(t)$ soll nebst $|\varphi(t)|$, eventuell uneigentlich, integrierbar sein), *so ist $f(x)$ dort von endlicher Schwankung. Dabei ist*

$$\bigvee_a^b f(x) \leqq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Es sei $[a, b]$ endlich; dann ist

$$v=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t=\int_a^b|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

und daraus folgt die Behauptung.

---

[1]) Rudolf Lipschitz, 1832–1903, deutscher Mathematiker.

Für $[a,\infty]$ genügt es zu bemerken, daß

$$\bigvee_a^A f(x) \leqq \int_a^A |\varphi(t)|\,dt \leqq \int_a^\infty |\varphi(t)|\,dt$$

ist.

Bemerkung. Man kann zeigen, daß sowohl für ein endliches als auch für ein unendliches Intervall tatsächlich die Identität

$$\bigvee_a^b f(x) = \int_a^b |\varphi(t)|\,dt$$

besteht. Ist $\varphi(t)$ in $[a, b]$ integrierbar, aber nicht absolut integrierbar, so ist die Totalvariation von $f(x)$ gleich ∞. Wir gehen darauf nicht weiter ein, sondern erläutern das an einigen Beispielen.

Es sei $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, so daß

$$f'(x) = \varphi(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \qquad (x \neq 0), \qquad f'(0) = \varphi(0) = 0$$

gilt. Dann ist z. B. für $0 \leqq x \leqq 2$

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt;$$

wir haben aber in Nr. 482 gezeigt, daß dieses Integral nicht absolut konvergiert. Wir gehen wie dort vor und zerlegen [0, 2] mit Hilfe der Punkte

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sqrt{\frac{2}{2n-1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad \sqrt{\frac{2}{2n-3}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad 1, \quad \sqrt{2}, \quad 2$$

in Teilintervalle; für die entsprechende Summe v ist offenbar

$$v > \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\sqrt{\frac{2}{2k-1}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_k,$$

also

$$\bigvee_0^2 f(x) = \infty .$$

Analog zeigt man leicht, daß

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

im Intervall $[0, \infty]$ von unendlicher Schwankung ist (vgl. Nr. 476).

569. Eigenschaften der Funktionen endlicher Schwankung. Wir setzen das Intervall $[a, b]$ als *endlich* voraus.

1°. *Jede Funktion endlicher Schwankung ist beschränkt.*

Denn für $a < x' \leqq b$ gilt

$$v' = |f(x') - f(a)| + |f(b) - f(x')| \leqq \bigvee_a^b f(x),$$

also

$$|f(x')| \leqq |f(x')-f(a)| + |f(a)| \leqq |f(a)| + \bigvee_a^b f(x) .$$

2°. *Summe, Differenz und Produkt zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ endlicher Schwankung sind ebenfalls Funktionen endlicher Schwankung.*

Es sei $s(x)=f(x)\pm g(x)$. Dann ist

$$|s(x_{i+1})-s(x_i)| \leqq |f(x_{i+1})-f(x_i)| + |g(x_{i+1})-g(x_i)| .$$

Durch Summation über i folgt

$$\sum_i |s(x_{i+1})-s(x_i)| \leqq \sum_i |f(x_{i+1})-f(x_i)| + \sum_i |g(x_{i+1})-g(x_i)| \leqq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x),$$

also

$$\bigvee_a^b s(x) \leqq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x) .$$

Nun sei $p(x)=f(x)\cdot g(x)$ und für $a \leqq x \leqq b$

$$|f(x)| \leqq K, \qquad |g(x)| \leqq L \qquad (K, L = \text{const})$$

(vgl. 1°). Offenbar ist

$$\begin{aligned} |p(x_{i+1})-p(x_i)| &= |f(x_{i+1})\,[g(x_{i+1})-g(x_i)] + g(x_i)\,[f(x_{i+1})-f(x_i)]| \\ &\leqq K\cdot|g(x_{i+1})-g(x_i)| + L\cdot|f(x_{i+1})-f(x_i)| , \end{aligned}$$

also folgt durch Summierung

$$\bigvee_a^b p(x) \leqq K \bigvee_a^b g(x) + L \bigvee_a^b f(x) .$$

3°. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ Funktionen endlicher Schwankung und ist überdies $|g(x)| \geqq \sigma > 0$, so ist auch der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ von endlicher Schwankung.*

Nach 2° brauchen wir das nur für $h(x)=\frac{1}{g(x)}$ zu beweisen. Nun ist

$$|h(x_{i+1})-h(x_i)| = \frac{|g(x_{i+1})-g(x_i)|}{|g(x_i)|\cdot|g(x_{i+1})|} \leqq \frac{1}{\sigma^2}\,|g(x_{i+1})-g(x_i)| ,$$

also gilt

$$\bigvee_a^b h(x) \leqq \frac{1}{\sigma^2} \bigvee_a^b g(x) .$$

4°. *Es sei $f(x)$ in $[a, b]$ definiert und $a<c<b$. Ist $f(x)$ in $[a, b]$ von endlicher Schwankung, so auch in $[a, c]$ und in $[c, b]$, und umgekehrt. Dabei ist*

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) . \tag{5}$$

Es sei $f(x)$ in $[a, b]$ von endlicher Schwankung. Wir zerlegen jedes der Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ einzeln in Teilintervalle:

$$y_0=a<y_1<\ldots<y_m=c, \qquad z_0=c<z_1<\ldots<z_n=b . \tag{6}$$

Dadurch wird auch das ganze Intervall $[a, b]$ in Teile zerlegt. Für $[a, c]$ und $[c, b]$ bilden wir die Summen

$$v_1 = \sum_k |f(y_{k+1}) - f(y_k)|, \qquad v_2 = \sum_i |f(z_{i+1}) - f(z_i)|;$$

die entsprechende Summe für $[a, b]$ ist $v = v_1 + v_2$. Somit ist

$$v_1 + v_2 \leqq \bigvee_a^b f(x);$$

also ist jede der Summen v_1, v_2 beschränkt, d. h., die Funktion $f(x)$ ist in den Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$ von endlicher Schwankung. Wählt man die Zerlegungen (6) so, daß v_1 und v_2 gegen die entsprechenden Totalvariationen streben, so ergibt sich in der Grenze

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leqq \bigvee_a^b f(x). \tag{7}$$

Nun nehmen wir an, $f(x)$ sei sowohl in $[a, c]$ als auch in $[c, b]$ von endlicher Schwankung. Wir zerlegen $[a, b]$ beliebig in Teilintervalle. Ist c kein Teilpunkt, so nehmen wir ihn zusätzlich hinzu, wodurch, wie wir wissen (vgl. S. 71), die Summe nicht kleiner wird. In den früheren Bezeichnungen ist dann

$$v \leqq v_1 + v_2 \leqq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Hieraus folgt sofort, daß $f(x)$ in $[a, b]$ von endlicher Schwankung ist und daß die Ungleichung

$$\bigvee_a^b f(x) \leqq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \tag{8}$$

gilt. Schließlich folgt (5) aus (7) und (8).

Insbesondere folgt aus diesem Satz:

5°. *Ist $f(x)$ in $[a, b]$ von endlicher Schwankung, so ist für $a \leqq x \leqq b$ die Totalvariation*

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

eine monoton wachsende (und beschränkte) Funktion von x.

Für $a \leqq x' < x'' \leqq b$ ist nämlich

$$\bigvee_a^{x''} f(t) = \bigvee_a^{x'} f(t) + \bigvee_{x'}^{x''} f(t),$$

also

$$g(x'') - g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t) \geqq 0 \tag{9}$$

(da die Totalvariation definitionsgemäß nicht negativ ist).

Hiernach ist klar, daß man die Totalvariation im *unendlichen* Intervall $[a, \infty]$ statt durch (2) auch durch

$$\bigvee_a^{\infty} f(x) = \lim_{A \to \infty} \bigvee_a^A f(x) \tag{2*}$$

definieren kann.

Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich die Sätze dieser Nummer leicht auf den Fall eines unendlichen Intervalls übertragen.

570. Kriterien für Funktionen endlicher Schwankung. Die Funktion $f(x)$ sei auf einem endlichen oder unendlichen Intervall $[a, b]$ definiert.

6°. *Eine Funktion $f(x)$ ist in $[a, b]$ genau dann von endlicher Schwankung, wenn auf diesem Intervall eine monoton wachsende und beschränkte Funktion $F(x)$ existiert derart, daß in jedem Teilintervall $[x', x'']$ von $[a, b]$ (mit $x' < x''$) der absolute Betrag des Zuwachses von $f(x)$ den Zuwachs von $F(x)$ nicht übertrifft:*

$$|f(x'')-f(x')| \leqq F(x'')-F(x') .$$

(Man könnte sich übrigens auf die Ungleichung $f(x'')-f(x') \leqq F(x'')-F(x')$ beschränken.)

Eine solche Funktion $F(x)$ könnte man natürlich eine *Majorante* von $f(x)$ nennen.

Die *Notwendigkeit* der Bedingung folgt daraus, daß für eine Funktion $f(x)$ von endlicher Schwankung beispielsweise die Funktion

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t) ,$$

die nach 5° monoton wächst und beschränkt ist, als Majorante dienen kann. Die Ungleichung

$$|f(x'')-f(x')| \leqq g(x'')-g(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f(t)$$

folgt aus der Definition der Totalvariation.

Daß die Bedingung *hinreichend* ist, folgt für ein endliches Intervall unmittelbar aus der Ungleichung

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})-f(x_i)| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1})-F(x_i)] = F(b)-F(a)$$

und für ein unendliches Intervall durch Grenzübergang.

Sehr wichtig ist eine andere Form dieses Kriteriums:

7°. *In $[a, b]$ ist $f(x)$ genau dann von endlicher Schwankung, wenn $f(x)$ in diesem Intervall als Differenz zweier monoton wachsender beschränkter Funktionen darstellbar ist:*

$$f(x) = g(x)-h(x) . \tag{10}$$

Die Bedingung ist *notwendig*: Nach 6° existiert für eine Funktion $f(x)$ von endlicher Schwankung eine monoton wachsende beschränkte Majorante $F(x)$. Setzt man

$$g(x) = F(x), \qquad h(x) = F(x)-f(x) ,$$

so ist (10) erfüllt. Man muß sich noch davon überzeugen, daß $h(x)$ monoton ist: Für $x' < x''$ ist aber nach der Definition der Majorante

$$h(x'')-h(x') = [F(x'')-F(x')]-[f(x'')-f(x')] \geqq 0 .$$

Die Bedingung ist *hinreichend*; denn falls (10) gilt, ist wegen

$$|f(x'')-f(x')| \leqq [g(x'')-g(x')]+[h(x'')-h(x')]=F(x'')-F(x')$$

die Funktion $F(x)=g(x)+h(x)$ eine Majorante.

Der Leser möge zur Übung

a) unter Benutzung dieser Kriterien die Behauptungen 1° bis 4° aus Nr. 569 und

b) für die in Nr. 568 betrachteten Klassen von Funktionen endlicher Schwankung die Existenz einer monotonen Majorante und die Darstellbarkeit als Differenz monotoner Funktionen beweisen.

In bezug auf Satz 7° machen wir noch eine zusätzliche Bemerkung. Da g und h beide beschränkt sind, kann man durch Addition einer Konstanten immer erreichen, daß Minuend und Subtrahend *positiv* sind. Ebenso kann man durch Addition einer echt wachsenden, aber beschränkten Funktion (beispielsweise $\arctan x$) zu g und h immer zu einer solchen Zerlegung gelangen, daß beide Funktionen *echt wachsen*.

Die in 7° bewiesene Möglichkeit der Zurückführung der Funktionen endlicher Schwankung auf monotone Funktionen darf beim Leser nicht die Illusion erzeugen, die Funktionen endlicher Schwankung seien irgendwie „einfach“: Sogar die unendlich oft oszillierende Funktion

$$f(x)=x^2 \sin\frac{\pi}{x} \qquad (x \neq 0), \qquad f(0)=0\,,$$

die wir schon in Nr. 568 betrachteten, läßt sich als Differenz zweier monotoner Funktionen darstellen.

Trotzdem lassen sich auf Grund der Darstellung (10) einige Eigenschaften der monotonen Funktionen auf Funktionen endlicher Schwankung übertragen. So kommt man auf Grund dessen, daß für eine monotone beschränkte Funktion $f(x)$ für jedes $x=x_0$ die einseitigen Grenzwerte von links und von rechts, d. h.

$$f(x_0-0)=\lim_{x \to x_0-0} f(x), \qquad f(x_0+0)=\lim_{x \to x_0+0} f(x) \tag{11}$$

existieren (Nr. 71, 1°), durch Anwendung auf g und h zu dem folgenden Satz:

8°. *Für eine Funktion $f(x)$ endlicher Schwankung in $[a, b]$ existieren in jedem Punkt $x=x_0$ dieses Intervalls die einseitigen Grenzwerte* (11), *in den Endpunkten natürlich jeweils nur ein Grenzwert.*

571. Stetige Funktionen endlicher Schwankung.

9°. *In $[a, b]$ sei $f(x)$ von endlicher Schwankung. Ist $f(x)$ in $x=x_0$ stetig, so ist auch*

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t)$$

in $x=x_0$ stetig.

Wir nehmen $x_0<b$ an und beweisen, daß $g(x)$ in x_0 *von rechts* stetig ist. Zu diesem Zweck wählen wir ein $\varepsilon>0$ und zerlegen das Intervall $[x_0, b]$ durch die Punkte

$x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ so in Teilintervalle, daß

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| > \bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \varepsilon \tag{12}$$

ist. Da $f(x)$ stetig ist, kann man dabei x_1 so nahe bei x_0 gelegen annehmen, daß

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt (nötigenfalls kann man noch einen Teilpunkt hinzunehmen, was v nicht verkleinert). Dann folgt aus (12)

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) < \varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b} f(t) ,$$

also $\bigvee_{x}^{x_1} f(t) < 2\varepsilon$ oder schließlich $g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$.

Um so mehr ist $0 \leqq g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$, also, da ε beliebig war,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0) .$$

Analog zeigt man (für $x_0 > a$)

$$g(x_0 - 0) = g(x_0) ,$$

d. h., daß $g(x)$ in x_0 von *links* stetig ist.

Es ergibt sich als Folgerung:

10°. *Jede stetige Funktion endlicher Schwankung ist als Differenz zweier stetiger monoton wachsender Funktionen darstellbar.*

Untersucht man nämlich den Beweis von Satz 7° (insbesondere den Teil, der sich auf die *Notwendigkeit* der Bedingung bezieht) und nimmt als monotone Majorante gerade die Funktion

$$g(x) = \bigvee_{a}^{x} f(t) ,$$

die nach 9° stetig ist, so erhält man die gesuchte Zerlegung.

Zum Schluß zeigen wir, daß man für *stetige* Funktionen in der Definition der Totalvariation

$$\bigvee_{a}^{b} f(x) = \sup \{v\}$$

das Supremum durch den Grenzwert ersetzen kann, und zwar sowohl in dem Fall, daß die Totalvariation endlich ist, als auch dann, wenn sie unendlich ist.

11°. *Die Funktion $f(x)$ sei in dem endlichen Intervall $[a, b]$ stetig. Wir zerlegen es durch die Punkte $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ in Teilintervalle und bilden die Summe*

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| .$$

Dann ist

$$\lim_{\lambda \to 0} v = \bigvee_{a}^{b} f(x) , \tag{13}$$

wobei $\lambda = \max (x_{i+1} - x_i)$ ist.

Hier handelt es sich um einen Grenzübergang wie bei Darbouxschen oder Riemannschen Summen (vgl. Nr. 295, 296).

Wie schon öfter bemerkt, nimmt v bei Hinzunahme eines neuen Teilpunktes nicht ab (vgl. S. 71). Andererseits kann die Summe v um nicht mehr als die *doppelte* Schwankung von $f(x)$ in $[x_k, x_{k+1}]$ zunehmen, wenn dieser neue Teilpunkt in dieses Intervall fällt.

Nun wählen wir eine Zahl A derart, daß

$$A < \bigvee_a^b f(x)$$

ist, und suchen eine Summe v^*, für die

$$v^* > A \tag{14}$$

gilt. Diese Summe entspreche der Teilung $x_0^* = a < x_1^* < \ldots < x_m^* = b$. Dann wählen wir $\delta > 0$ so klein, daß

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{v^* - A}{4m}$$

gilt, sobald $|x'' - x'| < \delta$ ist; das ist auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ möglich. Wir zeigen nun, daß für jede Zerlegung, bei der $\lambda < \delta$ ist,

$$v > A \tag{15}$$

gilt.

Haben wir nämlich eine solche Zerlegung (I), so bilden wir eine neue Zerlegung (II) durch Hinzunahme aller x_i^* als Teilpunkte. Für die entsprechende Summe v_0 gilt dann

$$v_0 \geqq v^*. \tag{16}$$

Andererseits ergibt sich (II) aus (I) durch eine höchstens m-malige Hinzunahme je eines Punktes. Die Summe v wächst jedesmal um höchstens $\frac{v^* - A}{2m}$; daher ist

$$v_0 - v < \frac{v^* - A}{2}.$$

Hieraus und aus (16) und (14) folgt

$$v > v_0 - \frac{v^* - A}{2} \geqq \frac{A + v^*}{2} > A.$$

Für $\lambda < \delta$ ist also (15) erfüllt. Da aber stets

$$v \leqq \bigvee_a^b f(x)$$

ist, gilt (13), was zu beweisen war.

572. Rektifizierbare Kurven. Der Begriff der Funktion endlicher Schwankung findet Anwendung beim Problem der Rektifizierbarkeit einer Kurve; gerade in diesem Zusammenhang wurde er von C. JORDAN eingeführt. Mit der Erläuterung dieser Frage wollen wir den vorliegenden Paragraphen beschließen.

Es sei eine Kurve (K) in Parameterdarstellung

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t) \tag{17}$$

gegeben; dabei werden $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ nur als stetig vorausgesetzt. Ferner sei (K) doppelpunktfrei.

Wir wählen die Ecken eines einbeschriebenen Polygonzuges in den Punkten der Kurve, die den Parameterwerten

$$t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T \tag{18}$$

entsprechen; dann ergibt sich als Länge des Polygonzuges

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\,.$$

Wie wir wissen (vgl. Nr. 247), definiert man die Länge s des betrachteten Kurvenbogens als obere Grenze der Längen aller dieser Polygonzüge k. Ist diese obere Grenze endlich, so nennt man die Kurve *rektifizierbar*. Hinreichende Bedingungen für die Rektifizierbarkeit haben wir schon in Band I angegeben (vgl. Nr. 248). Der nachstehende Satz gibt die allgemeinsten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Rektifizierbarkeit an.

Satz von Jordan. *Die Kurve* (17) *ist genau dann rektifizierbar, wenn* $\varphi(t)$ *und* $\psi(t)$ *im Intervall* $[t_0, T]$ *beide von endlicher Schwankung sind.*

Die Bedingung ist *notwendig.* Ist (K) rektifizierbar und ist s die Länge, so gilt für jede Zerlegung (18) von $[t_0, T]$

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqq s\,,$$

und hieraus folgt auf Grund der trivialen Ungleichung

$$|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqq\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}$$

die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|\leqq s\,.$$

Also ist $\varphi(t)$ von endlicher Schwankung. Dasselbe gilt offenbar für $\psi(t)$.

Die Bedingung ist *hinreichend.* Die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ seien von endlicher Schwankung. Auf Grund der trivialen Ungleichung

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)]^2+[\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)]^2}\leqq\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)|+\sum_{i=0}^{n-1}|\psi(t_{i+1})-\psi(t_i)|$$

sind also alle Zahlen p nach oben beschränkt, beispielsweise durch die Zahl

$$\bigvee_{t_0}^{T}\varphi(t)+\bigvee_{t_0}^{T}\psi(t);$$

daraus folgt nach dem oben Bewiesenen die Rektifizierbarkeit von (K).

Zum Schluß bringen wir zwei wichtige Bemerkungen.

Aus dem Bisherigen wird klar, daß für die ganze Länge s der Kurve (17) die Ungleichung

$$s \leqq \bigvee_{t_0}^{T} \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^{T} \psi(t)$$

gilt. Nun betrachten wir die *veränderliche* Länge $s(t)$, die dem Intervall $[t_0, t]$ des Parameters entspricht, und wenden die obige Ungleichung auf das Intervall $[t, t+\Delta t]$, $\Delta t > 0$, an. Dann folgt

$$0 < \Delta s < \bigvee_{t}^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_{t}^{t+\Delta t} \psi(t) .$$

Da für hinreichend kleines Δt beide Summen rechts (auf Grund von Nr. 571, 9°) und damit auch Δs beliebig klein werden, ergibt sich: *Bei einer stetigen rektifizierbaren Kurve ist die Bogenlänge $s(t)$ eine stetige Funktion des Parameters.*

Da diese Funktion monoton von 0 bis S (der Länge der ganzen Kurve) wächst, kann man sich für jedes natürliche n die Kurve in n Teile der Länge $\frac{S}{n}$ geteilt vorstellen (Satz von CAUCHY, Nr. 82). Bedeckt man die Ebene mit einem Netz von Quadraten der Seitenlänge $\frac{S}{n}$, so kann keiner der Teile mit mehr als vier dieser Quadrate Punkte gemein haben. Daher ist die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate, die mit der Kurve Punkte gemein haben, nicht größer als $4n \cdot \frac{S^2}{n^2}$ und kann somit beliebig klein gemacht werden. *Eine rektifizierbare Kurve hat den Flächeninhalt* 0.

Hieraus ergibt sich die interessante Folgerung: *Eine von einer rektifizierbaren Kurve (oder mehreren solchen Kurven) berandete Flächen ist quadrierbar*, d. h. hat einen Flächeninhalt (Nr. 337).

§ 5. Das Stieltjessche Integral

573. Definition des Stieltjesschen Integrals. Das Stieltjessche Integral (nach dem holländischen Mathematiker TH. J. STIELTJES[1]) ist eine direkte Verallgemeinerung des gewöhnlichen bestimmten Riemannschen Integrals (vgl. Nr. 295). Es läßt sich folgendermaßen definieren:

Im Intervall $[a, b]$ seien zwei beschränkte Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben. Durch die Punkte

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{1}$$

zerlegen wir $[a, b]$ in Teilintervalle; ferner sei $\lambda = \max \Delta x_i$. In jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ wählen wir einen Punkt ξ_i, berechnen den Wert $f(\xi_i)$ von $f(x)$ in diesem Punkt und multiplizieren ihn mit dem Zuwachs von $g(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, also mit

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i) .$$

[1]) THOMAS JEAN STIELTJES, 1856–1894.

Schließlich bilden wir die Summe aller dieser Produkte:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i)\,, \tag{2}$$

eine sogenannte *Stieltjessche Integralsumme.*

Hat diese Summe σ für gegen 0 strebendes $\lambda = \max \Delta x_i$ einen endlichen Grenzwert, so nennt man diesen das *Stieltjessche Integral von $f(x)$ nach* (oder in bezug auf) $g(x)$, in Zeichen

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta g(x_i)\,. \tag{3}$$

Dabei haben wir $a < b$ vorausgesetzt. Analog kann man natürlich auch den Fall $a > b$ betrachten. Übrigens läßt er sich wegen $\int_a^b = -\int_b^a$ sofort auf den vorigen zurückführen.

Gelegentlich benutzt man, wenn man besonders darauf aufmerksam machen will, daß es sich um ein Stieltjessches Integral handelt, auch die Bezeichnungen

$$(\mathrm{S}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) \quad \text{oder} \quad \mathrm{S}\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x)\,.$$

Der Grenzwert ist in demselben Sinne zu verstehen wie beim gewöhnlichen bestimmten Integral. Genauer: Die Zahl I heißt Stieltjessches Integral, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß dann, wenn das Intervall $[a, b]$ so in Teilintervalle zerlegt ist, daß $\lambda < \delta$ ist, die Ungleichung $|\sigma - I| < \varepsilon$ gilt, wie die Punkte ξ_i in den Teilintervallen auch gewählt sein mögen.

Falls das Integral (3) existiert, sagt man auch, $f(x)$ sei in $[a, b]$ *in bezug auf* $g(x)$ *integrierbar.*

Der Leser erkennt, daß der einzige, aber wesentliche Unterschied zwischen diesem soeben definierten Begriff und dem bestimmten Riemannschen Integral darin besteht, daß $f(\xi_i)$ nicht mit dem Zuwachs Δx_i der unabhängigen Veränderlichen, sondern mit dem Zuwachs $\Delta g(x_i)$ einer zweiten Funktion multipliziert wird. Somit ist das Riemannsche Integral ein Spezialfall des Stieltjesschen Integrals, und zwar für $g(x) = x$, also der Fall, daß als zweite Funktion einfach die unabhängige Veränderliche selbst genommen wird.

574. Allgemeine Bedingungen für die Existenz des Stieltjesschen Integrals. Wir leiten jetzt allgemeine Bedingungen für die Existenz des Stieltjesschen Integrals her, wobei wir uns auf den Fall beschränken, daß $g(x)$ monoton wächst.

Hieraus folgt, daß für $a < b$ alle $\Delta g(x_i)$ positiv sind, ebenso wie früher alle Δx_i positiv waren. Somit lassen sich alle Konstruktionen aus Nr. 296 und 297 wortwörtlich wiederholen, wenn man für Δx_i jetzt $\Delta g(x_i)$ setzt.

In Analogie zu den Darbouxschen Summen führt man zweckmäßigerweise hier die Summen

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i)$$

ein, wobei m_i bzw. M_i die untere bzw. die obere Grenze von $f(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ bezeichnen. Wir nennen sie *Darboux-Stieltjessche Unter-* bzw. *Obersummen.*

Offenbar gilt bei ein und derselben Zerlegung

$$s \leqq \sigma \leqq S ,$$

wobei s bzw. S die untere bzw. obere Grenze der Stieltjesschen Summen σ bezeichnen.

Die Darboux-Stieltjesschen Summen besitzen offenbar die folgenden beiden Eigenschaften (analog zu Nr. 296):

1. Fügt man zu einem System von Teilpunkten neue Punkte hinzu, so wird die Darboux-Stieltjessche Untersumme nicht kleiner, die Obersumme nicht größer.

2. Keine Darboux-Stieltjessche Untersumme ist größer als irgendeine Darboux-Stieltjessche Obersumme, auch wenn die beiden Summen verschiedenen Zerlegungen entsprechen.

Führt man das untere bzw. das obere Darboux-Stieltjessche Integral ein,

$$I_* = \sup \{s\}, \qquad I^* = \inf \{S\} ,$$

so ergibt sich

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S .$$

Mit Hilfe der Darboux-Stieltjesschen Summen erhält man schließlich leicht das fundamentale Kriterium für die Existenz des Stieltjesschen Integrals (in unserem Fall $a < b$, $g(x)$ monoton wachsend):

Satz. *Notwendig und hinreichend für die Existenz des Stieltjesschen Integrals ist*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

oder

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i) = 0 , \tag{4}$$

wobei ω_i wie üblich die Schwankung $M_i - m_i$ von $f(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ bezeichnet.

Alle Beweise stimmen, wie gesagt, mit den entsprechenden Beweisen aus Nr. 296 und 297 überein, können also dem Leser überlassen bleiben.

In Nr. 575 wenden wir dieses Kriterium auf Klassen von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an, für die das Stieltjessche Integral existiert.

575. Klassen von Fällen, in denen das Stieltjessche Integral existiert.

I. *Ist $f(x)$ stetig und $g(x)$ von endlicher Schwankung, so existiert das Stieltjessche Integral*

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) . \tag{5}$$

Wir setzen zunächst voraus, $g(x)$ sei monoton wachsend. Dann können wir das Kriterium aus Nr. 574 benutzen. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert auf Grund der

gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ ein $\delta>0$ derart, daß in jedem Intervall, dessen Länge kleiner als δ ist, die Schwankung von $f(x)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ ist. Nun sei $[a,b]$ so in Teile zerlegt, daß $\lambda=\max \Delta x_i<\delta$ ist. Dann sind alle ω_i kleiner als $\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$, und es ist

$$\sum_i \omega_i \Delta g(x_i)<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_i [g(x_{i+1})-g(x_i)]=\varepsilon;$$

also ist (4) erfüllt und die Existenz des Integrals bewiesen.

Ist $g(x)$ von endlicher Schwankung, so ist $g(x)$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar: $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$ (vgl. Nr. 570, Satz 7°). Somit gilt für die Stieltjessche Summe in bezug auf $g(x)$

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ \Delta g(x_i)=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ \Delta g_1(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\ \Delta g_2(x_i)=\sigma_1-\sigma_2\,.$$

Nach dem schon Bewiesenen streben σ_1 und σ_2 für $\lambda\to 0$ gegen einen endlichen Grenzwert, also auch die Summe σ, und das sollte bewiesen werden.

Die Voraussetzungen für $f(x)$ lassen sich abschwächen, wenn die für $g(x)$ ver schärft werden:

II. *Ist $f(x)$ in $[a,b]$ Riemann-integrierbar und genügt $g(x)$ einer Lipschitzbedingung*

$$|g(\bar{x})-g(x)|\leqq L\,(\bar{x}-x) \qquad (L=\text{const},\ a\leqq x\leqq \bar{x}\leqq b)\,, \tag{6}$$

so existiert das Integral (5).

Damit wir das oben bewiesene Kriterium anwenden können, möge zunächst $g(x)$ nicht nur der Bedingung (6) genügen, sondern auch monoton wachsen.

Wegen (6) ist offenbar $\Delta g(x_i)\leqq L\Delta x_i$, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i)\leqq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i\,.$$

Da $f(x)$ Riemann-integrierbar ist, strebt die Summe rechts für $\lambda\to 0$ gegen 0 (vgl. Nr. 297), also auch die linke Seite. Somit existiert (5).

Wenn $g(x)$ nicht monoton wächst, aber der Lipschitzbedingung (6) genügt, so stellen wir $g(x)$ in der Form

$$g(x)=Lx-[Lx-g(x)]=g_1(x)-g_2(x)$$

dar. Offenbar genügt $g_1(x)=Lx$ der Lipschitzbedingung; überdies ist Lx monoton wachsend. Das gleiche gilt aber auch für $g_2(x)=Lx-g(x)$; denn nach (6) gilt für $a\leqq x\leqq \bar{x}\leqq b$

$$g_2(\bar{x})-g_2(x)=L\,(\bar{x}-x)-[g(\bar{x})-g(x)]\geqq 0$$

und

$$|g_2(\bar{x})-g_2(x)|\leqq L\,(\bar{x}-x)+|g(\bar{x})-g(x)|\leqq 2L\,(\bar{x}-x)\,.$$

Jetzt kann man wie oben weiter schließen.

III. *Ist $f(x)$ Riemann-integrierbar und $g(x)$ als Integral mit veränderlicher oberer Grenze darstellbar,*

$$g(x)=c+\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{7}$$

wobei $\varphi(t)$ in $[a,b]$ absolut integrierbar ist, so existiert (5).

Es sei $\varphi(t) \geqq 0$, also $g(x)$ monoton wachsend. Ist $\varphi(t)$ eigentlich integrierbar, also beschränkt, $|\varphi(t)| \leqq L$, so gilt für $a \leqq x < \bar{x} \leqq b$

$$|g(\bar{x}) - g(x)| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t)\, dt \right| \leqq L\,(\bar{x} - x)\,.$$

Somit genügt $g(x)$ einer Lipschitzbedingung, und das Integral existiert nach Satz II.

Nun sei $\varphi(t)$ uneigentlich integrierbar. Wir beschränken uns auf den Fall eines einzigen singulären Punktes, etwa b. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst ein $\eta > 0$ derart, daß

$$\int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega} \tag{8}$$

ist, wobei Ω die totale Schwankung von $f(x)$ im betrachteten Intervall bezeichne.

Nun zerlegen wir $[a, b]$ beliebig und bilden die Summe

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i)\,.$$

Sie ist in die beiden Summen Σ' und Σ'' zerlegbar, $\Sigma = \Sigma' + \Sigma''$, von denen die erste dem Intervall entspricht, das ganz in $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$ enthalten ist, die zweite dem Rest des Intervalls. Das letztere ist im Intervall $[b - \eta, b]$ enthalten, sobald $\lambda = \max \Delta x_i < \frac{\eta}{2}$ ist. Dann ist nach (8)

$$\Sigma'' < \Omega \int_{b-\eta}^{b} \varphi(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Da $\varphi(t)$ in $\left[a, b - \frac{\eta}{2}\right]$ eigentlich integrierbar ist, ist nach dem schon Bewiesenen für hinreichend kleines λ auch $\Sigma' < \frac{\varepsilon}{2}$. Hieraus folgt (4).

Im allgemeinen Fall, wenn $\varphi(t)$ in $[a, b]$ absolut integrierbar ist, betrachten wir die Funktionen

$$\varphi_1(t) = \frac{|\varphi(t)| + \varphi(t)}{2}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{|\varphi(t)| - \varphi(t)}{2},$$

die offenbar nichtnegativ und im Intervall $[a, b]$ integrierbar sind. Wegen

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$$

ist damit das Problem auf einen schon behandelten Fall zurückgeführt.

Bemerkung. Ist $g(x)$ in $[a, b]$ stetig und existiert mit Ausnahme *endlich* vieler Punkte die Ableitung $g'(x)$ und ist diese Ableitung von a bis b (eigentlich oder uneigentlich) integrierbar (in den Punkten, in denen sie nicht existiert, wähle man sie beliebig), so gilt bekanntlich (vgl. die Bemerkung in Nr. 470) eine Formel der Gestalt (7):

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)\, dt\,.$$

Ist $g'(x)$ absolut integrierbar, so ist auf $g(x)$ das in Satz III Bewiesene anwendbar.

576. Eigenschaften des Stieltjesschen Integrals. Aus der Definition folgen sofort die Eigenschaften:

1°. $\int_a^b \mathrm{d}g(x) = g(b) - g(a)$;

2°. $\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}g(x) \pm \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}g(x)$;

3°. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_1(x) \pm \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_2(x)$;

4°. $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}[lg(x)] = kl \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ $\quad (k, l = \text{const})$.

Dabei folgt in 2°, 3°, 4° aus der Existenz der Integrale rechts die Existenz der Integrale auf der linken Seite.

Unter der Voraussetzung $a < c < b$ und der Existenz aller Integrale gilt ferner

5°. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$.

Zum Beweis dieser Formel genügt es, dafür zu sorgen, daß der Punkt c bei der Bildung der Stieltjesschen Summe für $\int_a^b f\mathrm{d}g$ unter die Teilpunkte des Intervalls $[a, b]$ aufgenommen wird.

Zu dieser Formel selbst ist noch einiges zu sagen. Zunächst *folgt aus der Existenz von* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *die Existenz der beiden Integrale* $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ *und* $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$.

Für den Grenzübergang, mit dessen Hilfe man aus der Stieltjesschen Summe das Stieltjessche Integral erhält, gilt das Konvergenzprinzip von Bolzano-Cauchy. Somit gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ auf Grund der Existenz des Integrals $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ ein $\delta > 0$ derart, daß sich je zwei Stieltjessche Summen σ und $\bar{\sigma}$, für die $\lambda < \delta$ bzw. $\bar{\lambda} < \delta$ gilt, um weniger als ε unterscheiden. Ist dabei c Teilpunkt und nimmt man in $[c, b]$ in beiden Fällen dieselben Teilpunkte, so reduziert sich die Differenz $\sigma - \bar{\sigma}$ auf die Differenz $\sigma_1 - \bar{\sigma}_1$ der beiden Stieltjesschen Summen, die sich auf das Intervall $[a, c]$ beziehen, da sich die übrigen Summanden wegheben. Wenden wir auf das Intervall $[a, c]$ und die dafür berechneten Stieltjesschen Summen dasselbe Konvergenzprinzip an, so können wir auf die Existenz des Integrals $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ schließen. Analog folgt die Existenz von $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$.

Besonders hervorgehoben werden muß folgende, im Vergleich zum Riemannschen Integral überraschende Tatsache: *Aus der Existenz der beiden Integrale* $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ *und* $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$ *folgt im allgemeinen nicht die Existenz von* $\int_a^b f\mathrm{d}g$.

Davon überzeugen wir uns an einem Beispiel. In $[-1, 1]$ seien $f(x)$ und $g(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 0, \\ 1 & \text{für} \quad 0 < x \leqq 1; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -1 \leqq x < 0, \\ 1 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

Offenbar existieren

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}g(x), \qquad \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}g(x);$$

beide Integrale sind gleich 0, da die entsprechenden Stieltjesschen Summen sämtlich 0 sind. Bei dem ersten Integral folgt das daraus, daß stets $f(x)=0$ ist, bei dem zweiten daraus, daß $g(x)$ konstant, also stets $\Delta g(x_i)=0$ ist.

Dagegen existiert

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

nicht: Wir zerlegen das Intervall $[-1, 1]$ so in Teile, daß der Punkt 0 kein Teilpunkt ist, und bilden

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)\,.$$

Fällt der Punkt 0 in das Intervall $[x_k, x_{k+1}]$, so daß also $x_k<0<x_{k+1}$ ist, so bleibt in der Summe σ nur der k-te Summand stehen. Die übrigen Summanden sind gleich 0, da $\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)=0$ für $i\neq k$ ist. Also ist

$$\sigma=f(\xi_k)\,[g(x_{k+1})-g(x_k)]=f(\xi_k)\,.$$

Je nachdem, ob $\xi_k\leqq 0$ oder $\xi_k>0$ ist, ergibt sich $\sigma=0$ oder $\sigma=1$, so daß kein Grenzwert existiert.

Dieses Verhalten hängt damit zusammen, daß in $x=0$ sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ unstetig sind (vgl. Nr. 584, Ergänzung 3 und 4).

577. Partielle Integration. Für Stieltjessche Integrale gilt die Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=f(x)\,g(x)\,\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x) \tag{9}$$

unter der Annahme, daß eines dieser Integrale existiert; die Existenz des anderen folgt dann daraus. Die Formel selbst heißt *Formel für die partielle Integration.* Wir wollen sie nun beweisen. Das Integral $\int_a^b g\mathrm{d}f$ möge existieren. Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ und wählen in jedem einen Punkt ξ_i, so daß also

$$a=x_0\leqq\xi_0\leqq x_1\leqq\ldots\leqq x_{i-1}\leqq\xi_{i-1}\leqq x_i\leqq\xi_i\leqq x_{i+1}\leqq\ldots\leqq x_{n-1}\leqq\xi_{n-1}\leqq x_n=b$$

gilt. Die Stieltjessche Summe σ für $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$,

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]\,,$$

läßt sich in der Form

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i-1})\,g(x_i)-\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,g(x_i)$$

$$=-\Big\{g(a)\,f(\xi_0)+\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})]-g(b)\,f(\xi_{n-1})\Big\}$$

darstellen. Addiert und subtrahiert man rechts den Ausdruck

$$f(x)\,g(x)\,|_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)\,,$$

so erhält man

$$\sigma = f(x)\,g(x)\,|_a^b - \left\{ g(a)\,[f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] + g(b)\,[f(b) - f(\xi_{n-1})] \right\}.$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist aber die Stieltjessche Summe für das Integral $\int_a^b g\,df$, dessen Existenz vorausgesetzt war. Sie entspricht der Zerlegung von $[a, b]$ durch die Teilpunkte

$$a \leqq \xi_0 \leqq \xi_1 \leqq \ldots \leqq \xi_{i-1} \leqq \xi_i \leqq \ldots \leqq \xi_{n-1} \leqq b\,,$$

wenn man in den Intervallen $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ die Punkte x_i und in den Intervallen $[a, \xi_0]$ bzw. $[\xi_{n-1}, b]$ die Punkte a bzw. b wählt. Setzt man wie üblich $\lambda = \max\,(x_{i+1} - x_i)$, so wird die Länge der einzelnen Teilintervalle nicht größer als 2λ. Für $\lambda \to 0$ strebt die Summe in der geschweiften Klammer gegen $\int_a^b g\,df$; daher existiert auch für σ der Grenzwert, d. h. $\int_a^b f\,dg$, und dieses Integral wird durch (9) bestimmt.

Als Folgerung unserer Überlegung ergibt sich die interessante Tatsache: *Ist $g(x)$ in $[a, b]$ bezüglich $f(x)$ integrierbar, so auch $f(x)$ in bezug auf $g(x)$.*

Diese Bemerkung gestattet uns, den in Nr. 575 betrachteten Fällen der Existenz des Stieltjesschen Integrals eine Reihe neuer Fälle hinzuzufügen, die sich durch Vertauschen von f und g ergeben.

578. Zurückführung eines Stieltjesschen Integrals auf ein Riemannsches Integral. Es sei $f(x)$ in $[a, b]$ stetig und $g(x)$ dort echt monoton wachsend. (Die letzte Voraussetzung machen wir nur, um die nachstehenden Ausführungen etwas zu vereinfachen.) Dann läßt sich, wie H. Lebesgue[1]) gezeigt hat, das Stieltjessche Integral

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

mit Hilfe der Substitution $v = g(x)$ unmittelbar auf ein Riemannsches Integral zurückführen.

Abb. 29 zeigt die Kurve der Funktion $v = g(x)$. Für alle Werte $x = x'$, in denen $g(x)$

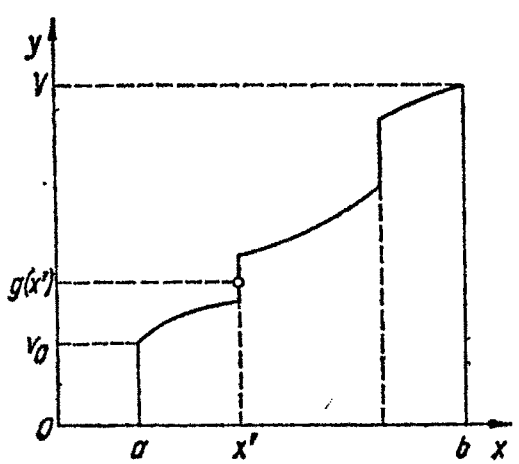

Abb. 29

[1]) Henri Lebesgue, 1875–1941, französischer Mathematiker.

einen Sprung macht (wir haben $g(x)$ nicht als stetig vorausgesetzt), vervollständigen wir die Kurve durch die senkrechte Strecke, welche die Punkte $(x', g(x'-0))$ und $(x', g(x'+0))$ verbindet. So entsteht eine *stetige* Linie, die *jedem* Wert von v zwischen $v_0=g(a)$ und $V=g(b)$ einen wohlbestimmten Wert von x zwischen a und b zuordnet. Diese Funktion $x=g^{-1}(v)$ ist offenbar stetig und (nicht notwendig echt) monoton wachsend; man kann sie als Umkehrfunktion von $v=g(x)$ ansehen.

Beschränkt man sich nämlich auf diejenigen Werte von v, die $v=g(x)$ wirklich annimmt, wenn x von a bis b variiert, so ist $x=g^{-1}(v)$ die Umkehrfunktion im gewöhnlichen Sinne, d. h., sie liefert genau diejenigen x-Werte, für welche $g(x)=v$ ist. Aus einem v-Intervall $[g(x'-0),\ g(x'+0)]$, das einem Sprung von $g(x)$ entspricht, hat nur ein Wert $v=v'=g(x')$ einen ihm entsprechenden Wert $x=x'$; anderen Werten von v aus diesem Intervall entsprechen offenbar keine x-Werte. Wir ordnen ihnen nun denselben Wert $x=x'$ zu, was geometrisch gerade der Ergänzung der Kurve durch vertikale Strecken entspricht.

Wir wollen nun zeigen, daß

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=(\mathrm{R})\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v \tag{10}$$

gilt, wobei das Integral rechts im gewöhnlichen Sinne zu verstehen ist, da es auf Grund der Stetigkeit von $g^{-1}(v)$ und damit der zusammengesetzten Funktion $f(g^{-1}(v))$ existiert.

Mit Hilfe der Teilpunkte

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$$

zerlegen wir $[a, b]$ in Teilintervalle und bilden

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,[g(x_{i+1})-g(x_i)]\,.$$

Dabei wählen wir in $[x_i, x_{i+1}]$ der Einfachheit halber jeweils den Punkt x_i aus. Setzen wir $v_i=g(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, so folgt

$$v_0<v_1<\ldots<v_i<v_{i+1}<\ldots<v_n=V\,.$$

Wegen $x_i=g^{-1}(v_i)$ ist also

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(g^{-1}(v_i))\,\Delta v_i \qquad (\Delta v_i=v_{i+1}-v_i)\,.$$

Dieser Ausdruck hat die Form einer Riemannschen Summe für das Integral

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v\,.$$

Hieraus kann man jedoch noch nicht unmittelbar auf das Bestehen der Gleichung (10) schließen; denn selbst bei $\Delta x_i\to 0$ $(\lambda\to 0)$ braucht Δv_i nicht gegen 0 zu streben, so beispielsweise, wenn zwischen zwei beliebig benachbarten Punkten x_i und x_{i+1} ein Punkt $x=x'$ liegt, in dem $g(x)$ einen Sprung hat. Daher müssen wir anders vorgehen.

Es ist

$$\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} f(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v \quad\text{und}\quad \sigma=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} f(x_i)\,\mathrm{d}v\,,$$

also

$$\sigma-\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{v_i}^{v_{i+1}} [f(x_i)-f(g^{-1}(v))]\,\mathrm{d}v\,.$$

Wir nehmen nun Δx_i so klein, daß die Schwankung von $f(x)$ in allen Intervallen $[x_i, x_{i+1}]$ kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon>0$ ist. Da für $v_i\leqq v\leqq v_{i+1}$ offenbar die Beziehung

$x_i \leqq g^{-1}(v) \leqq x_{i+1}$ gilt, ist auch $|f(x_i) - f(g^{-1}(v))| < \varepsilon$. Dann ist aber

$$\left| \sigma - \int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\, \mathrm{d}v \right| < \varepsilon\,(V - v_0)\,.$$

Damit ist

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\, \mathrm{d}v$$

bewiesen, und daraus folgt (10).

Trotz seiner prinzipiellen Bedeutung liefert dieses Resultat kein praktisch anwendbares Verfahren zur Berechnung Stieltjesscher Integrale. Wie dies zu geschehen hat, zeigt in einigen einfachen Fällen Nr. 579.

579. Berechnung Stieltjesscher Integrale. Wir beweisen zunächst folgenden Satz.

1°. *Ist $f(x)$ im Riemannschen Sinne in $[a, b]$ integrierbar und $g(x)$ in der Form*

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

darstellbar, wobei $\varphi(t)$ in $[a, b]$ absolut integrierbar ist, so ist

$$(\mathrm{S}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

Das Integral rechts existiert (Nr. 298, Nr. 482). Die Existenz des Stieltjesschen Integrals unter unseren Voraussetzungen war in Nr. 575, Satz III, bewiesen worden.

Wir brauchen also nur noch die Gleichung (11) zu beweisen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\varphi(x)$ als positiv voraussetzen (vgl. S. 85). Wir bilden wie gewöhnlich die Stieltjessche Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Da andererseits

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

ist, gilt

$$\sigma - \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(\xi_i) - f(x)]\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Für $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ gilt offenbar $|f(\xi_i) - f(x)| \leqq \omega_i$, wenn ω_i die Schwankung von $f(x)$ in $[x_i, x_{i+1}]$ ist. Hieraus folgt für die obige Differenz die Abschätzung

$$\left| \sigma - \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta g(x_i)\,.$$

Wir wissen aber aus Nr. 575, Satz III, daß für $\lambda \to 0$ diese Summe gegen 0 strebt; also ist

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

womit (11) bewiesen ist.

Insbesondere folgt aus dem soeben bewiesenen Satz (unter Berücksichtigung der Bemerkung am Schluß von Nr. 575) die auch für die unmittelbare Anwendung in der Praxis nützliche Folgerung:

2°. *Unter derselben Voraussetzung über $f(x)$ sei $g(x)$ in ganz $[a, b]$ stetig und habe dort, mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte, eine in $[a, b]$ absolut integrierbare Ableitung $g'(x)$* (vgl. die Bemerkung auf S. 85). *Dann ist*

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{12}$$

Wir bemerken sogleich, daß sich das Integral auf der rechten Seite von (12) formal aus dem auf der linken Seite ergibt, wenn man $\mathrm{d}g(x)$ als Differential auffaßt und durch $g'(x)\,\mathrm{d}x$ ersetzt.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß $g(x)$ unstetig ist (der für die Praxis von besonderem Interesse ist); wir betrachten zunächst die Funktion

$$\varrho(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqq 0\,, \\ 1 & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

eine „Standardfunktion". Diese Funktion hat in $x=0$ eine Unstetigkeit erster Art, einen Sprung rechts, dessen Größe $\varrho(+0)-\varrho(-0)$ gleich 1 ist; in $x=0$ ist $\varrho(x)$ von links stetig und in allen übrigen Punkten ebenfalls stetig. Die Funktion $\varrho(x-c)$ hat denselben Sprung in $x=c$ von *rechts*, $\varrho(c-x)$ einen ähnlichen Sprung von *links*, und zwar den Sprung -1.

Wir nehmen an, $f(x)$ sei in $x=c$ stetig, und berechnen

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varrho(x-c), \qquad a \leqq c < b \qquad (\text{für } c=b \text{ ist das Integral gleich } 0)\,.$$

Wir bilden die Stieltjessche Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta\varrho(x_i - c)\,.$$

Der Punkt c falle in das k-te Intervall, $x_k \leqq c < x_{k+1}$. Dann ist $\Delta\varrho(x_k - c) = 1$, und für $i \neq k$ hat man offenbar $\Delta\varrho(x_i - c) = 0$. Somit besteht σ nur aus einem einzigen Summanden: $\sigma = f(\xi_k)$. Für $\lambda \to 0$ gilt aus Stetigkeitsgründen $f(\xi_k) \to f(c)$. Also existiert für $a \leqq c < b$

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varrho(x-c) = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = f(c)\,. \tag{13}$$

Analog überzeugt man sich davon, daß für $a < c \leqq b$

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\varrho(c-x) = -f(c) \tag{14}$$

ist (für $c=a$ verschwindet das Integral).

Nun sind wir in der Lage, einen Satz zu beweisen, der allgemeiner ist als 2°, da er auf die Stetigkeit von $g(x)$ verzichtet:

3°. *In $[a, b]$ sei $f(x)$ stetig, $g(x)$ habe dort mit eventueller Ausnahme endlich vieler Punkte eine absolut integrierbare Ableitung $g'(x)$. Die Funktion $g(x)$ möge in den end-*

lich vielen Punkten

$$c_0 = a < c_1 < \ldots < c_k < \ldots < c_m = b$$

Unstetigkeiten erster Art haben. Dann existiert das Stieltjessche Integral, und zwar ist

$$\begin{aligned}(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x + f(a)\,[g(a+0)-g(a)] \\ + \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)] \\ + f(b)\,[g(b)-g(b-0)]\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Charakteristisch sind hier die Summen außerhalb des Integrals, in denen auch die einseitigen Sprünge von $g(x)$ in a bzw. b vorkommen. (Liegt dort kein Sprung vor, so verschwindet der betreffende Summand.) Zur Abkürzung setzen wir

$$\alpha_k^+ = g(c_k+0)-g(c_k) \qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,m-1)\,,$$
$$\alpha_k^- = g(c_k)-g(c_k-0) \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,m);$$

offenbar gilt für $1 \leqq k \leqq m-1$ die Beziehung

$$\alpha_k^+ + \alpha_k^- = g(c_k+0)-g(c_k-0)\,.$$

Wir bilden die Hilfsfunktion

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \varrho(x-c_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \varrho(c_k-x)\,,$$

welche sozusagen sämtliche Sprünge von $g(x)$ erfaßt, so daß die Differenz $g_2(x) = g(x)-g_1(x)$, wie wir sogleich beweisen werden, stetig ist.

Für diejenigen Werte von x, die von allen c_k verschieden sind, steht die Stetigkeit von $g_2(x)$ außer Zweifel, da dort sowohl $g(x)$ als $g_1(x)$ stetig sind. Wir beweisen nun die Stetigkeit von $g_2(x)$ in c_k $(k<m)$ von *rechts*. Alle Summanden von $g_1(x)$, mit Ausnahme von $\alpha_k^+\varrho(x-c_k)$, sind für $x=c_k$ von rechts stetig; daher braucht nur das Verhalten von $g(x)-\alpha_k^+\varrho(x-c_k)$ untersucht zu werden. Für $x=c_k$ hat dieser Ausdruck den Wert $g(c_k)$. Das ist aber auch sein Limes für $x \to c_k+0$:

$$\lim_{x\to c_k+0} [g(x)-\alpha_k^+\varrho(x-c_k)] = g(c_k+0)-\alpha_k^+ = g(c_k)\,.$$

Analog zeigt man die Stetigkeit von $g_2(x)$ in c_k $(k>0)$ von *links*.

Nimmt man ferner einen von allen c_k verschiedenen Punkt x, in dem $g(x)$ eine Ableitung hat, so ist in der Nähe dieses Punktes $g_1(x)$ konstant. Daher hat in diesem Punkt $g_2(x)$ eine Ableitung, und es ist

$$g_2'(x) = g'(x)\,.$$

Für die *stetige* Funktion $g_2(x)$ existiert aber nach dem vorhergehenden Satz das Stieltjessche Integral

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_2(x) = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,g_2'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ebenso berechnet man leicht (vgl. (13), (14))

$$(S)\int_a^b f(x)\,dg_1(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^-\cdot(S)\int_a^b f(x)\,d\varrho(x-c_k)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot(S)\int_a^b f(x)\,d\varrho(c_k-x)$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+f(c_k)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-f(c_k)=f(a)\,[g(a+0)-g(a)]$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}f(c_k)\,[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)\,[g(b)-g(b-0)]\,.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man (15). Die Existenz des Stieltjesschen Integrals von $f(x)$ in bezug auf $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ ergibt sich nebenbei (Nr. 576, 3°).

580. Beispiele.

1. Man berechne nach (11) die Integrale

$$\text{(a) } (S)\int_0^2 x^2\,d\ln(1+x),\qquad \text{(b) } (S)\int_0^{\pi/2} x\,d\sin x,\qquad \text{(c) } (S)\int_{-1}^{1} x\,d\arctan x\,.$$

Lösung.

$$\text{(a) } (S)\int_0^2 x^2\,d\ln(1+x)=(R)\int_0^2\frac{x^2}{1+x}\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right)\Big|_0^2=\ln 3 \quad \text{usw.}$$

(b) $\frac{\pi}{2}-1$; (c) 0.

2. Man berechne nach (15)

$$\text{(a) } (S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)\quad\text{mit}\quad g(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x=-1\,,\\ 1 & \text{für } -1<x<2\,,\\ -1 & \text{für } 2\leqq x\leqq 3;\end{cases}$$

$$\text{(b) } (S)\int_0^2 x^2\,dg(x)\quad\text{mit}\quad g(x)=\begin{cases}-1 & \text{für } 0\leqq x<\frac{1}{2}\,,\\ 0 & \text{für } \frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{2}\,,\\ 2 & \text{für } x=\frac{3}{2}\,,\\ -2 & \text{für } \frac{3}{2}<x\leqq 2\,.\end{cases}$$

Lösung. (a) Die Funktion $g(x)$ hat den Sprung 1 in $x=-1$ und den Sprung -2 in $x=2$; sonst ist $g'(x)=0$. Also ist

$$(S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5\,.$$

(b) Sprung 1 in $x=\frac{1}{2}$, Sprung -2 in $x=\frac{3}{2}$ (der Wert von g für $x=\frac{3}{2}$ beeinflußt das Resultat nicht); sonst ist $g'(x)=0$. Also ist

$$(S)\int_0^2 x^2\,dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}\,.$$

3. Man berechne nach (15)

$$\text{(a)}\ \int_{-2}^{2} x\,dg(x), \qquad \text{(b)}\ \int_{-2}^{2} x^2\,dg(x), \qquad \text{(c)}\ \int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dg(x)$$

mit

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{für} \quad -2\leqq x\leqq -1\,, \\ 2 & \text{für} \quad -1<x<0\,, \\ x^2+3 & \text{für} \quad 0\leqq x\leqq 2\,. \end{cases}$$

Lösung. $g(x)$ hat den Sprung 1 in $x=-1$ und $x=0$; es ist

$$g(x)=\begin{cases} 1 & \text{für} \quad -2\leqq x<-1\,, \\ 0 & \text{für} \quad -1<x<0\,, \\ 2x & \text{für} \quad 0<x\leqq 2\,. \end{cases}$$

Daher ist

$$\int_{-2}^{2} x\,dg(x)=\int_{-2}^{-1} x\,dx+2\int_{0}^{2} x^2\,dx+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=\frac{17}{6}\,;$$

analog ist

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dg(x)=\frac{34}{3} \quad \text{und} \quad \int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dg(x)=\frac{301}{20}\,.$$

4. Wir nehmen nun an, längs des Intervalls $[a, b]$ der x-Achse sei Masse verteilt, und zwar sowohl in einzelnen Punkten punktförmig als auch stetig. Wir machen dazwischen keinen Unterschied und bezeichnen für $x>a$ mit $\Phi(x)$ die Summe aller in $[a, x]$ verteilten Massen. Ferner sei $\Phi(a)=0$. Offenbar ist $\Phi(x)$ eine monoton wachsende Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, das statische Moment dieser Massen in bezug auf den Ursprung zu ermitteln.

Das Intervall $[a, b]$ teilen wir in Teilintervalle

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b\,.$$

In (x_i, x_{i+1}) ist für $i>0$ offenbar die Masse $\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)=\Delta\Phi(x_i)$ enthalten, in $[a, x_1]$ die Masse $\Phi(x_1)-\Phi(x_0)=\Delta\Phi(x_0)$. Nehmen wir die Masse in allen Fällen z. B. im rechten Intervallende als punktförmig an, so erhalten wir für das gesuchte statische Moment den Näherungsausdruck

$$M\approx\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}\Delta\Phi(x_i)\,.$$

Falls alle Δx_i gegen 0 streben, erhalten wir in der Grenze

$$M=(\mathrm{S})\int_{a}^{b} x\,d\Phi(x)\,. \tag{16}$$

Man könnte auch hier ebenso wie in Band II beim gewöhnlichen bestimmten Integral (Nr. 348) vorgehen und zunächst das „Element" des statischen Momentes, $dM=x\,d\Phi(x)$, bestimmen, das dem Stück von x bis $x+dx$ entspricht, und dann alle diese Elemente „summieren".

Analog ergibt sich für das Trägheitsmoment I derselben Massen in bezug auf den Ursprung

$$I=(\mathrm{S})\int_{a}^{b} x^2\,d\Phi(x)\,. \tag{17}$$

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß *das Stieltjessche Integral es ermöglicht, die verschiedenen Fälle stetig verteilter und punktförmiger Massen in einer einzigen Integralformel zusammenzufassen.*

Die stetig verteilten Massen mögen die lineare Dichte $\varrho(x)$ haben, außerdem seien in den Punkten $x=c_1, c_2,\ldots, c_k$ die punktförmigen Massen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ angebracht. Schließt man diese Punkte aus, so hat $\Phi(x)$ die Ableitung

$$\Phi'(x)=\varrho(x)\,.$$

In jedem der Punkte $x=c_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ erleidet die Funktion einen Sprung, der genau gleich der in diesem Punkt angebrachten punktförmigen Masse m_j ist. Zerlegt man jetzt (16) nach der Formel (15), so folgt

$$M=(\mathrm{S})\int_a^b x\,\mathrm{d}\Phi(x)=(\mathrm{R})\int_a^b x\,\varrho(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{k} c_j m_j\,.$$

Ein Blick auf die rechte Seite lehrt, daß der erste Summand das statische Moment der stetig verteilten Massen liefert, der zweite das der punktförmigen. Ein analoges Resultat erhält man auch für das Integral (17).

5. Um das Vorhergehende besser verstehen zu können, möge der Leser

(a) den Ausdruck $\Phi(x)$ bilden und seine Kurve zeichnen für folgende Massenbelegung: eine Masse 1 in den Punkten $x=1, 2, 3$ und stetig verteilte Massen der Dichte 2 im Intervall $[1, 3]$.

(b) dasselbe für folgende Belegung durchführen: Masse 2 in $x=2$ und $x=4$, stetig verteilte Massen der Dichte $2x$ in $[0, 5]$;

(c) die Massenbelegung berechnen, wenn $\Phi(x)$ gleich der Funktion $g(x)$ aus Beispiel 3 ist.

Lösung. (a) In $[1, 3]$ gilt

$$\Phi(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x=1,\\ 2x-1 & \text{für } 1<x<2,\\ 2x & \text{für } 2\leqq x<3,\\ 7 & \text{für } x=3\,.\end{cases}$$

(b) In $[0, 5]$ gilt

$$\Phi(x)=\begin{cases}x^2 & \text{für } 0\leqq x<2,\\ x^2+2 & \text{für } 2\leqq x<4,\\ x^2+4 & \text{für } 4\leqq x\leqq 5\,.\end{cases}$$

(c) Massen der Größe 1 in $x=-1$ und $x=0$, in $[-2, -1]$ stetig verteilte Massen der Dichte 1, in $[0, 2]$ Massen der Dichte $2x$.

6. Wir betrachten ein anderes Problem, bei dem das Stieltjessche Integral dieselbe Rolle spielt wie in Beispiel 4. Wir nehmen an, daß auf einen auf zwei[1]) Stützen liegenden Balken (Abb. 30) neben stetig verteilten Lasten auch Einzelkräfte wirken. Die x-Achse

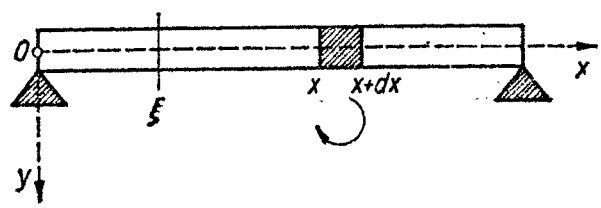

Abb. 30

sei längs der Balkenachse, die y-Achse vertikal nach unten gerichtet. Wir machen keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Kräften und bezeichnen für $x>0$ mit $F(x)$ die Summe aller im Intervall $[0, x]$ angreifenden Kräfte, einschließlich der Stützkräfte; ferner sei $F(0)=0$. Die Kraft $F(x)$ nennt man *Querschnittskraft* im Querschnitt x. Dabei rechnen wir die nach unten wirkenden Kräfte positiv, die nach oben wirkenden negativ.

Wir wollen das sogenannte *Biegemoment* M in einem beliebigen Querschnitt $x=\xi$ des Balkens berechnen. Darunter versteht man die Summe der Momente aller Kräfte,

[1]) Diese Voraussetzung machen wir nur der Einfachheit halber.

die auf den rechten (bzw. linken) Teil des Balkens in bezug auf diesen Querschnitt wirken. Dabei rechnen wir das Moment, wenn es sich um den rechten Teil handelt, positiv, wenn es diesen Teil im Uhrzeigersinne dreht (für den linken Teil in entgegengesetzter Richtung). Da auf das Element $(x, x+\mathrm{d}x]$ beispielsweise des rechten Teils des Balkens die Kraft $F(x+\mathrm{d}x)-F(x)=\mathrm{d}F(x)$ wirkt, welche das Elementarmoment $\mathrm{d}M=(x-\xi)\,\mathrm{d}F(x)$ erzeugt, folgt durch Summation

$$M=M(\xi)=(\mathrm{S})\int_{\xi}^{l}(x-\xi)\,\mathrm{d}F(x)\,.$$

Analog würde man für den linken Teil des Balkens (wo die positive Richtung eine andere ist)

$$M(\xi)=(\mathrm{S})\int_{0}^{\xi}(\xi-x)\,\mathrm{d}F(x) \tag{18}$$

erhalten.

Man sieht aber leicht, daß beide Ausdrücke in Wirklichkeit identisch sind. Ihre Gleichheit ist der Bedingung

$$\int_{0}^{l}x\,\mathrm{d}F(x)-\xi F(l)=0$$

gleichwertig, die ihrerseits eine Folge der *Gleichgewichtsbedingung*

$$F(l)=0,\qquad \int_{0}^{l}x\,\mathrm{d}F(x)=0$$

ist, welche zum Ausdruck bringt, daß die Summe aller auf den Balken wirkenden Kräfte und die Summe der Momente aller Kräfte in bezug auf den Ursprung gleich 0 ist. Bezeichnet man die Intensität der stetig verteilten Belastung mit $q(x)$, so ist außerhalb der Punkte, in denen Einzelkräfte wirken,

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)\,.$$

Die Einzelkräfte F_j $(j=1, 2, \ldots, k)$ mögen in den Punkten $x=x_j$ angreifen. Dann hat offenbar die Querkraft in diesen Punkten einen Sprung der Größe F_j. Ferner erhalten wir durch Anwendung von Formel (15) auf das Integral (18)

$$M(\xi)=\int_{0}^{\xi}(\xi-x)\,q(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{x_j<\xi}(\xi-x_j)\,F_j\,.$$

In den beiden Summanden auf der rechten Seite erkennt man leicht die von den stetigen Belastungen und von den Einzelkräften erzeugten Momente: *Das Stieltjessche Integral liefert sie in einer einzigen Integralbeziehung.*

Wir weisen noch auf eine Tatsache hin, die für die Festigkeitslehre interessant ist. Integrieren wir (18) partiell, so folgt

$$M(\xi)=\int_{0}^{\xi}(\xi-x)\,\mathrm{d}F(x)=(\xi-x)\,F(x)\,\Big|_{0}^{\xi}-\int_{0}^{\xi}F(x)\,\mathrm{d}(\xi-x)=\int_{0}^{\xi}F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hieraus ergibt sich, daß bis auf die Angriffspunkte der Einzelkräfte überall

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\xi}=F(\xi)$$

ist.

7. Ein Balken der Länge $l=3$ trage eine „dreieckige" Last der Intensität $\frac{2}{3}x$ (Abb. 31); außerdem greife im Punkt $x=1$ die Einzelkraft 3 an, die Stützkräfte seien beide

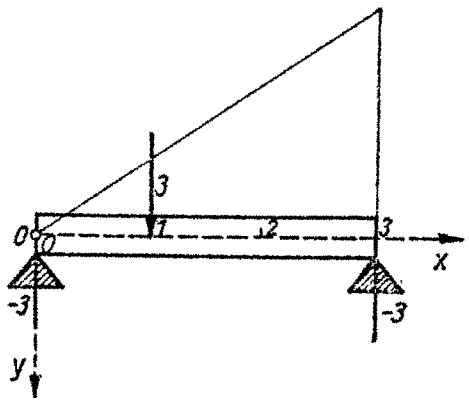

Abb. 31

gleich -3 (sie ergeben sich nach dem Hebelgesetz). Man bestimme die Querkraft $F(x)$ und das Biegemoment $M(\xi)$.

Lösung.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x=0,\\ \frac{1}{3}x^2-3 & \text{für } 0<x<1,\\ \frac{1}{3}x^2 & \text{für } 1\leqq x<3,\\ 0 & \text{für } x=3\ ;\end{cases}\qquad M(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{9}\xi^3-3\xi & \text{für } 0\leqq\xi\leqq 1,\\ \frac{1}{9}\xi^3-3 & \text{für } 1<\xi\leqq 3\ .\end{cases}$$

8. Formel (15) kann auch zur Berechnung gewöhnlicher (Riemannscher) Integrale nützlich sein. Wir zeigen das an folgendem allgemeinen Beispiel. Es sei $\varphi(x)$ im Intervall $[a, b]$ eine „stückweise Polynomfunktion", d. h., das Intervall läßt sich durch

$$a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_k=b$$

in endlich viele Teilintervalle zerlegen derart, daß $\varphi(x)$ in jedem Teilintervall ein Polynom höchstens n-ten Grades ist. Wir ersetzen die Werte von $\varphi(x)$ und aller Ableitungen in a und b durch 0 und bezeichnen mit $\delta_j^{(i)}(j=0,\ 1,\ \ldots,\ k;\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ die Größe des Sprunges der i-ten Ableitung $\varphi^{(i)}(x)$ im j-ten Punkt $x=\xi_j$. Ferner sei $f(x)$ irgendeine stetige Funktion. Wir setzen

$$F_1(x)=\int f(x)\,dx$$

und allgemein

$$F_s(x)=\int F_{s-1}(x)\,dx \qquad (s>1)\ .$$

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=-\sum_{j=0}^{k}F_1(\xi_j)\,\delta_j^{(0)}+\sum_{j=0}^{k}F_2(\xi_j)\,\delta_j^{(1)}-\ldots+(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}F_{k+1}(\xi_j)\,\delta_j^{(k)}\ .$$

Wir finden nämlich sukzessive

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=(\mathrm{S})\int_a^b\varphi(x)\,dF_1(x)=\varphi(x)\,F_1(x)\,\Big|_a^b-(\mathrm{S})\int_a^b F_1(x)\,d\varphi(x)\ .$$

Der erste Summand rechts verschwindet, und es ist

$$\int_a^b F_1(x)\,d\varphi(x)=\sum_j F_1(\xi_j)\,\delta_j^{(0)}+\int_a^b F_1(x)\,\varphi'(x)\,dx\ ;$$

analog gilt

$$\int_a^b F_1(x)\,\varphi'(x)\,dx=-\sum_j F_2(\xi_j)\,\delta_j^{(1)}-\int_a^b F_2(x)\,\varphi''(x)\,dx$$

usw.

9. Wir wollen zum Schluß mit Hilfe von Formel (11) noch eine nützliche *Verallgemeinerung der Formel für die partielle Integration gewöhnlicher Integrale* herleiten. Es seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei in $[a, b]$ *absolut* integrierbare Funktionen und $U(x)$ und $V(x)$ definiert durch

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t)\,dt, \qquad V(x) = V(a) + \int_a^x v(t)\,dt\ ;$$

dann gilt

$$\int_a^b U(x)\,v(x)\,dx = U(x)\,V(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,u(x)\,dx\ . \tag{19}$$

Zum Beweis ersetzen wir nach (11) das Integral links durch ein Stieltjessches Integral und integrieren partiell (Nr. 577):

$$\int_a^b U(x)\,v(x)\,dx = \int_a^b U(x)\,dV(x) = U(x)\,V(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,dU(x)\ .$$

Nun braucht man nur noch einmal (11) auf das letzte Integral anzuwenden, um (19) zu erhalten.

Hier spielen $u(x)$ und $v(x)$ sozusagen die Rolle der Ableitungen von $U(x)$ bzw. $V(x)$, ohne daß sie es im allgemeinen sein müßten. Sind $u(x)$ und $v(x)$ stetig, so kommen wir auf die gewöhnliche Formel der partiellen Integration; denn dann ist tatsächlich

$$U'(x) = u(x), \qquad V'(x) = v(x)\ .$$

581. Geometrische Veranschaulichung des Stieltjesschen Integrals. Wir betrachten das Integral

$$(S)\int_a^b f(t)\,dg(t)\ , \tag{20}$$

wobei wir $f(t)$ als stetig und positiv und $g(t)$ nur als echt monoton wachsend voraussetzen; $g(t)$ kann also Sprünge haben.

Das System der Parametergleichungen

$$x = g(t), \qquad y = f(t) \tag{21}$$

beschreibt eine Kurve (K), die im allgemeinen unstetig ist (Abb. 32). Erleidet für $t = t_0$ die Funktion $g(t)$ einen Sprung, so daß also $g(t_0 - 0) < g(t_0 + 0)$ ist, so entspricht diesen Grenzwerten von $x = g(t)$ ein und derselbe Grenzwert von $y = f(t)$, der gleich $f(t_0)$ ist.

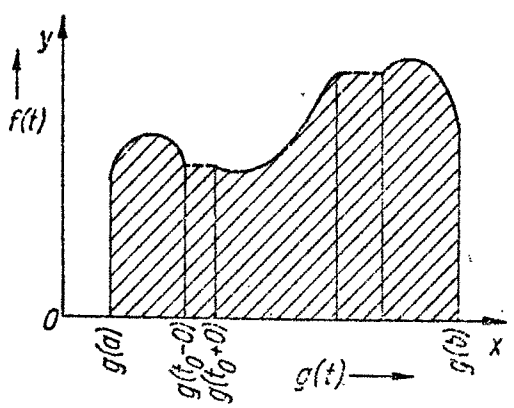

Abb. 32

Wir ergänzen (K) durch alle horizontalen Strecken, die die Punktepaare

$$(g(t_0 - 0), f(t_0)) \quad \text{und} \quad (g(t_0 + 0), f(t_0))$$

verbinden, die allen Sprüngen von $g(t)$ entsprechen (vgl. Abb. 32). So entsteht eine stetige Kurve (L). Wir zeigen nun, daß (20) genau der Flächeninhalt der Figur *unterhalb*

dieser Kurve ist, d. h. der Inhalt des Flächenstücks, das von (L), der x-Achse und den beiden Randordinaten, die $g(a)$ und $g(b)$ entsprechen, begrenzt wird.

Zu diesem Zweck zerlegen wir $[a, b]$ durch

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b$$

in Teilintervalle und dementsprechend das Intervall $[g(a), g(b)]$ durch die Punkte

$$g(a) < g(t_1) < \ldots < g(t_i) < g(t_{i+1}) < \ldots < g(b) .$$

Sind m_i bzw. M_i Minimum bzw. Maximum von $f(t)$ in $[t_i, t_{i+1}]$, so sind

$$s = \sum_i m_i \Delta g(t_i), \qquad S = \sum_i M_i \Delta g(t_i)$$

die untere bzw. die obere Stieltjes-Darbouxsche Summe. Man sieht leicht, daß sie die Flächeninhalte von einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen Polygonen sind, zwischen denen die betrachtete Figur liegt. Da für $\Delta t_i \to 0$ beide Summen gegen den gemeinsamen Grenzwert (20) streben, folgt hieraus nach Nr. 336, daß die obige Figur einen Flächeninhalt hat und dieser genau gleich dem Integral (20) ist.

582. Der Mittelwertsatz. Abschätzungen.

1°. *Es sei $f(x)$ in $[a, b]$ beschränkt, $m \leqq f(x) \leqq M$, und $g(x)$ monoton wachsend. Existiert das Stieltjessche Integral I von $f(x)$ in bezug auf $g(x)$, so gilt*

$$I = (\mathrm{S}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) = \mu\, [g(b) - g(a)] \quad \textit{mit} \quad m \leqq \mu \leqq M . \tag{22}$$

Das ist der *Mittelwertsatz* für Stieltjessche Integrale.

Zum Beweis gehen wir von den trivialen Ungleichungen für σ aus:

$$m\, [g(b) - g(a)] \leqq \sigma \leqq M\, [g(b) - g(a)] .$$

In der Grenze erhalten wir

$$m\, [g(b) - g(a)] \leqq I \leqq M\, [g(b) - g(a)] \tag{23}$$

oder

$$m \leqq \frac{I}{g(b) - g(a)} \leqq M .$$

(Dabei nahmen wir $g(b) > g(a)$ an; der Fall $g(a) = g(b)$, d. h. $g(x) = \text{const}$ ist uninteressant; dann sind beide Seiten von (22) gleich 0.) Mit $\mu = \dfrac{I}{g(b) - g(a)}$ ist das genau die Behauptung.

Ist $f(x)$ in $[a, b]$ stetig, so kann man sich mit den üblichen Mitteln davon überzeugen, daß μ der Wert der Funktion in einem Zwischenwert ist. Dann geht (22) über in

$$(\mathrm{S}) \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) = f(\xi)\, [g(b) - g(a)] \quad \text{mit} \quad a \leqq \xi \leqq b . \tag{24}$$

2°. Praktisch der wichtigste Fall bei Stieltjesschen Integralen ist der, daß $f(x)$ *stetig* und $g(x)$ *von endlicher Schwankung* ist. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}g(x) \right| \leqq MV \tag{25}$$

mit

$$M=\max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)|, \qquad V=\bigvee_a^b g(x)\,.$$

Für die Stieltjessche Summe σ ist nämlich

$$|\sigma|=\Big|\sum_i f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)\Big|\leqq\sum_i|f(\xi_i)|\,|\Delta g(x_i)|\leqq M\sum_i|g(x_{i+1})-g(x_i)|\leqq MV\,,$$

so daß man nur noch zur Grenze überzugehen hat, um die geforderte Ungleichung zu erhalten.

3°. Hieraus folgt insbesondere auch eine Abschätzung für die Güte der Approximation des Stieltjesschen Integrals I durch die Summe σ (unter den früheren Voraussetzungen für f und g). Wir stellen σ und I in der Gestalt

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)=\sum_i\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\,\mathrm{d}g(x), \qquad I=\sum_i\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

dar. Durch Subtraktion erhalten wir

$$\sigma-I=\sum_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}g(x)\,.$$

Bezeichnet man mit ω_i, wie gewöhnlich, die Schwankung von $f(x)$ in $[x_i, x_{i+1}]$, so daß also

$$|f(\xi_i)-f(x)|\leqq\omega_i \quad \text{für} \quad x_i\leqq x\leqq x_{i+1}$$

ist, so folgt durch Anwendung von (25) auf jedes Integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$ einzeln die Beziehung

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(\xi_i)-f(x)]\,\mathrm{d}g(x)\right|\leqq\omega_i\bigvee_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\,.$$

Zerlegt man $[a, b]$ in so kleine Teilintervalle, daß alle $\omega_i<\varepsilon$ sind, wobei $\varepsilon>0$ vorgegeben ist, so folgt

$$|\sigma-I|\leqq\varepsilon\bigvee_a^b g(x)\,. \tag{26}$$

Diese Abschätzungen benutzen wir in Nr. 583.

583. Grenzübergang unter dem Integralzeichen beim Stieltjesschen Integral.

1°. *Die Funktionen $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ mögen in $[a, b]$ stetig sein und für $n\to\infty$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(x)$ streben* (die nach Nr. 436 offenbar stetig ist), *und $g(x)$ sei eine Funktion endlicher Schwankung. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\,.$$

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon>0$ existiert ein N derart, daß für $n>N$ für alle x

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

gilt. Dann ist nach (25) für $n>N$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}g(x)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]\,\mathrm{d}g(x)\right|\leqq\varepsilon\bigvee_a^b g(x)\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist, da ε beliebig war.

2°. *Nun sei $f(x)$ in $[a, b]$ stetig, und alle $g_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ seien dort von endlicher Schwankung. Sind die Totalvariationen dieser Funktionen gleichmäßig beschränkt,*

$$\bigvee_a^b g_n(x)\leqq V\qquad(n=1, 2, 3, \ldots)\,,$$

und strebt $g_n(x)$ für $n\to\infty$ gegen eine Grenzfunktion $g(x)$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_n(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\,.$$

Beweis. Zunächst überzeugen wir uns davon, daß auch die Grenzfunktion $g(x)$ von endlicher Schwankung ist. Wir zerlegen $[a, b]$ durch Teilpunkte

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_m=b$$

beliebig in Teilintervalle. Dann ist für jedes n

$$\sum_i |g_n(x_{i+1})-g_n(x_i)|\leqq\bigvee_a^b g_n(x)\leqq V\,.$$

Durch Grenzübergang für $n\to\infty$ erhalten wir

$$\sum_i |g(x_{i+1})-g(x_i)|\leqq V\,,$$

also auch

$$\bigvee_a^b g(x)\leqq V\,.$$

Wir bilden die Stieltjesschen Summen

$$\sigma=\sum_i f(x_i)\,\Delta g(x_i),\qquad \sigma_n=\sum_i f(x_i)\,\Delta g_n(x_i)\,.$$

Nimmt man an, $[a, b]$ sei dabei in so kleine Teilintervalle zerlegt, daß die Schwankung von $f(x)$ in jedem Teilintervall kleiner als ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon>0$ ist, so gilt für jedes n auf Grund von (26)

$$\left|\sigma_n-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g_n(x)\right|\leqq\varepsilon V,\qquad\left|\sigma-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\right|\leqq\varepsilon V\,.\tag{27}$$

Hält man andererseits die unter diesen Bedingungen gewählte Zerlegung fest, so gilt für $n\to\infty$ offenbar $\sigma_n\to\sigma$, so daß es also ein N gibt derart, daß für $n>N$

$$|\sigma_n-\sigma|<\varepsilon\tag{28}$$

gilt. Für dieselben n gilt dann nach (27) und (28)

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n-\int_a^b f\,\mathrm{d}g\right|\leqq\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n-\sigma_n\right|+|\sigma_n-\sigma|+\left|\sigma-\int_a^b f\,\mathrm{d}g\right|<(2V+1)\,\varepsilon\,,$$

woraus, da ε beliebig war, die Behauptung folgt.

584. Beispiele und Ergänzungen.

1. *Setzt man $g(x)$ als streng monoton wachsend voraus, so kann man über den in* (24) *vorkommenden Wert ξ die schärfere Behauptung $a<\xi<b$ beweisen.*

Sind nämlich m und M der kleinste bzw. der größte Wert von $f(x)$ in $[a, b]$ und ist $m<M$ (für $m=M$ ist $f(x)$ konstant und der Wert kann beliebig angenommen werden), so läßt sich leicht ein Teilintervall $[\alpha, \beta]$ finden, in dem die Grenzen von $f(x)$ Zahlen $m'>m$ bzw. $M'<M$ sind, so daß also (vgl. (23))

$$m\,[g(\beta)-g(\alpha)]<m'\,[g(\beta)-g(\alpha)]\leqq(\mathrm{S})\int_a^\beta\leqq M'\,[g(\beta)-g(\alpha)]<M\,[g(\beta)-g(\alpha)]$$

gilt. Schreibt man für $[a, \alpha]$ und $[\beta, b]$ die Ungleichungen (23) auf und addiert sie zu den obigen, so folgt nach (23) die schärfere Ungleichung

$$m\,[g(b)-g(a)]<I<M\,[g(b)-g(a)]\,,$$

so daß die Zahl $\mu=\dfrac{I}{g(b)-g(a)}$ echt zwischen m und M liegt (d. h., die Beziehung $m<\mu<M$ gilt); dann läßt sich aber ein ξ echt zwischen a und b (also $a<\xi<b$) finden derart, daß $\mu=f(\xi)$ ist, usw.

2. Unter Benutzung von (11) aus Nr. 579, der Formel für die partielle Integration und des Mittelwertsatzes für Stieltjessche Integrale (Nr. 577; Nr. 582, 1°) findet man leicht wiederum den *zweiten Mittelwertsatz für gewöhnliche Integrale* (Nr. 306).

Es sei also $f(x)$ im Riemannschen Sinne integrierbar und $g(x)$ in $[a, b]$ monoton wachsend (der Fall eines monoton fallenden $g(x)$ läßt sich leicht darauf zurückführen). Ferner sei

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x\qquad(a\leqq x\leqq b)\,.$$

Diese Funktion ist bekanntlich stetig (Nr. 305, 11°).

Dann ergibt sich sukzessive

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}F(x)=g(x)\;F(x)\,\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}g(x)\\&=g(b)\;F(b)-F(\xi)\,[g(b)-g(a)]\\&=g(a)\;F(\xi)+g(b)\,[F(b)-F(\xi)]\\&=g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\quad(a\leqq\xi\leqq b)\,,\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Ist $g(x)$ echt monoton wachsend, so kann man auf Grund von Satz 1 sogar $a<\xi<b$ beweisen.

3. Man beweise: *Ist in $x=c$ eine der Funktionen f oder g stetig und zugleich die andere in der Umgebung dieses Punktes beschränkt, so folgt aus der Existenz der Integrale* $(\mathrm{S})\int_a^c$ *und* $(\mathrm{S})\int_c^b$ *die Existenz von* $(\mathrm{S})\int_a^b$ (vgl. Nr. 576, 5°).

Zu diesem Zweck bemerken wir, daß sich die Stieltjessche Summe σ, wenn bei ihrer Bildung der Punkt c Teilpunkt ist, aus zwei analogen Summen für die Teilintervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ additiv zusammensetzt; für $\lambda=\max\Delta x_i\to 0$ strebt σ gegen die Summe der Integrale $\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ und $\int_c^b f\,\mathrm{d}g$.

Jetzt sei c kein Teilpunkt. Nehmen wir c als solchen hinzu, so geht σ in eine neue

Summe $\bar{\sigma}$ über, von der wir schon wissen, daß sie für $\lambda \to 0$ den erwähnten Grenzwert hat. Somit genügt es zu beweisen, daß die Differenz $\sigma - \bar{\sigma}$ für $\lambda \to 0$ gegen 0 strebt.

Der Punkt c falle in das Intervall $[x_k, x_{k+1}]$. Dann unterscheidet sich $\bar{\sigma}$ von σ nur dadurch, daß an Stelle von $f(\xi_k)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$ die beiden Summanden

$$f(\xi')\,[g(c) - g(x_k)] + f(\xi'')\,[g(x_{k+1}) - g(c)]$$

stehen, wobei ξ' und ξ'' in $x_k \leqq \xi' \leqq c$ bzw. $c \leqq \xi'' \leqq x_{k+1}$ beliebig gewählt sind. Setzt man hierin der Einfachheit halber $\xi' = \xi'' = c$, so reduziert sich dieser Ausdruck wieder auf $f(c)\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$, so daß

$$\sigma - \bar{\sigma} = [f(\xi_k) - f(c)]\,[g(x_{k+1}) - g(x_k)] \tag{29}$$

ist. Für $\lambda \to 0$ wird der eine der Faktoren rechts beliebig klein, während der andere beschränkt bleibt. Also gilt $\sigma - \bar{\sigma} \to 0$, was zu beweisen war.

4. *Sind $f(x)$ und $g(x)$ beide in demselben Punkt $x = c$ $(a \leqq c \leqq b)$ unstetig, so existiert das Stieltjessche Integral*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) \tag{30}$$

nicht.

Zum Beweis unterscheiden wir zwei Fälle. Zunächst sei $a < c < b$ und $g(c-0) \neq g(c+0)$. Dann werden wir bei der Bildung der Stieltjesschen Summe den Punkt c nicht als Teilpunkt nehmen; es sei etwa $x_k < c < x_{k+1}$. Wir wählen einmal $\xi_k \neq c$, ein andermal $\xi_k = c$ und bilden die beiden Summen σ und $\bar{\sigma}$, deren Differenz ein Ausdruck der Form (29) ist. Lassen wir die Teilpunkte aneinander rücken, so folgt

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) \to g(c+0) - g(c-0) \neq 0\,.$$

Außerdem kann man ξ_k so wählen, daß auch der Absolutbetrag der Differenz $f(\xi_k) - f(c)$ größer als eine vorgegebene positive Zahl bleibt. Dann strebt $\sigma - \bar{\sigma}$ nicht gegen 0, so daß das Integral nicht existieren kann.

Ist aber $g(c-0) = g(c+0)$, sind aber beide Werte von $g(c)$ verschieden (nicht hebbare Unstetigkeit; hierauf reduziert sich auch der Fall, daß $c = a$ und $g(a+0) \neq g(a)$ oder $c = b$ und $g(b-0) \neq g(b)$ ist), so nehmen wir c als Teilpunkt; es sei $c = x_k$. Hat $f(x)$ etwa in $x = c$ eine Unstetigkeit von *rechts*, so bilden wir wie vorhin die Summen σ und $\bar{\sigma}$, die sich nur in der Wahl von ξ_k unterscheiden. Für σ wählen wir ξ_k zwischen $x_k = c$ und x_{k+1}, für $\bar{\sigma}$ nehmen wir $\xi_k = c$. Wieder erhalten wir (29) und schließen wie vorhin weiter.

Die Beispiele 3 und 4 erläutern die bemerkenswerte Tatsache, von der am Schluß von Nr. 576 die Rede war.

5. Nun sei $f(x)$ in $[a, b]$ stetig, $g(x)$ dort von endlicher Schwankung. Mit Hilfe von (25) *beweisen wir die Stetigkeit von*

$$I(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}g(t)$$

bezüglich der oberen Grenze in jedem Stetigkeitspunkt x_0 von $g(x)$.

Das folgt sofort aus der Ungleichung

$$|I(x_0 + \Delta x) - I(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f\,\mathrm{d}g \right| \leqq \max_{a \leqq x \leqq b} f(x) \cdot \bigvee_{x_0}^{x_0 + \Delta x} g(x)\,,$$

wenn man beachtet, daß auch die Totalvariation $\bigvee_a^x g(x)$ in x_0 stetig sein muß (vgl. Nr. 571, 9°).

6. Ist $\mathfrak{F}$ die Klasse der in $[a, b]$ stetigen Funktionen und $\mathfrak{G}$ die Klasse der Funktionen, die dort von endlicher Schwankung sind, so ist bekanntlich jede Funktion der einen Klasse bezüglich jeder Funktion der anderen Klasse integrierbar.

Wir zeigen, daß *keine dieser Klassen erweitert werden kann, ohne daß diese Eigenschaft verloren geht.* Das ist nach Beispiel 4 für $\mathfrak{F}$ fast trivial. Ist nämlich $f(x)$ in x_0 unstetig, so ist $f(x)$ in bezug auf die Funktion $\varrho(x-x_0)$, die von endlicher Schwankung (vgl. Nr. 579) und in x_0 ebenfalls unstetig ist, sicher nicht integrierbar.

Nun habe $g(x)$ in $[a, b]$ eine *unendliche* Totalvariation; wir konstruieren dazu eine stetige Funktion $f(x)$, für die (30) nicht existiert. Wir halbieren $[a, b]$; in mindestens einer Hälfte hat $g(x)$ unendliche Totalvariation; diese Hälfte halbieren wir ebenfalls, usw. Nach dieser Methode läßt sich ein Punkt c bestimmen, in dessen *Umgebung* $g(x)$ nicht von endlicher Schwankung ist. Der Einfachheit halber sei $c=b$. Dann läßt sich leicht eine Folge wachsend gegen b strebender Werte $x=a_n$ finden,

$$a_0=a<a_1<\ldots<a_n<a_{n+1}<\ldots<b, \qquad a_n\to b,$$

derart, daß

$$\sum_{i=0}^{\infty}|g(a_{i+1})-g(a_i)|$$

divergiert. Zu dieser Reihe läßt sich eine Folge positiver gegen 0 strebender Zahlen f_i $(i=1, 2, \ldots)$ finden derart, daß auch

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i\,|g(a_{i+1})-g(a_i)| \tag{31}$$

divergiert (vgl. Nr. 375, Ergänzungen 4 und 7). Jetzt definieren wir $f(x)$ durch

$$f(a_i)=f_i\,\operatorname{sgn}[g(a_{i+1})-g(a_i)] \qquad (i=0, 1, 2, \ldots), \qquad f(b)=0,$$

während in (a_i, a_{i+1}) die Funktion $f(x)$ *linear* sei:

$$f(x)=f(a_i)+\frac{f(a_{i+1})-f(a_i)}{a_{i+1}-a_i}(x-a_i) \qquad (i=0, 1, 2, \ldots).$$

Dabei ist $\operatorname{sgn} z=+1$, 0 oder -1, je nachdem, ob $z>0$, $=0$ oder <0 ist; stets ist

$$z\operatorname{sgn} z=|z|.$$

Offenbar ist $f(x)$ stetig. Da aber (31) divergiert, gilt für $n\to\infty$ auch

$$\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)[g(a_{i+1})-g(a_i)]=\sum_{i=0}^{n-1} f_i|g(a_{i+1})-g(a_i)|\to\infty,$$

so daß das Integral über f in bezug auf g nicht existiert.

Dieser Satz läßt sich auch folgendermaßen formulieren: *Existiert das Stieltjessche Integral* (30) *für gegebenes f bei jedem g aus $\mathfrak{G}$, so muß f zu $\mathfrak{F}$ gehören. Existiert* (30) *für gegebenes g in bezug auf jedes f aus $\mathfrak{F}$, so gehört g zu $\mathfrak{G}$.*

7. Im ersten Satz über den Grenzübergang unter dem (Stieltjesschen) Integralzeichen (Nr. 583, 1°) verlangten wir die *gleichmäßige Konvergenz* der Folge $\{f_n(x)\}$ gegen $f(x)$. Man kann diese Bedingung durch die schwächere ersetzen, daß diese Funktionen *gleichmäßig beschränkt* sind:

$$|f_n(x)|\leqq M \qquad (M=\text{const};\ a\leqq x\leqq b;\ n=1, 2, 3, \ldots).$$

(Nur muß man dann die Stetigkeit der Grenzfunktion $f(x)$ voraussetzen!)

Zum Beweis genügt es, den Fall zu betrachten, daß $g(x)$ echt wächst (vgl. die Bemerkung in Nr. 570). Dann kann man aber die in Nr. 578, Formel (10), hergeleiteten Transformationen

$$(\mathrm{S})\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}g(x)=(\mathrm{R})\int_{v_0}^{V} f_n(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v,$$

$$(\mathrm{S})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=(\mathrm{R})\int_{v_0}^{V} f(g^{-1}(v))\,\mathrm{d}v$$

benutzen und für diese Riemannschen Integrale den Satz von ARZELÀ (Nr. 526) benutzen.

8. Zum Schluß erwähnen wir eine andere Betrachtungsweise des Stieltjesschen Integrals, die mit dem Begriff der additiven Intervallfunktion zusammenhängt (vgl. Nr. 348).

Jedem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ von $[a, b]$ sei eine Zahl $G([\alpha, \beta])$ zugeordnet, und zwar so, daß bei einer Zerlegung von $[\alpha, \beta]$ durch einen Punkt γ in $[\alpha, \gamma]$ und $[\gamma, \beta]$ auch

$$G([\alpha, \beta]) = G([\alpha, \gamma]) + G([\gamma, \beta])$$

gilt. Dann ist $G([\alpha, \beta])$ eine *additive Funktion des veränderlichen Intervalls* $[\alpha, \beta]$. Wir nehmen an, außer G sei auf $[a, b]$ eine *Punktfunktion* $f(x)$ definiert. Wie üblich zerlegen wir $[a, b]$ durch

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, wählen in jedem Teilintervall einen Punkt ξ_i und bilden die Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, G([x_i, x_{i+1}])\,. \tag{32}$$

Der Grenzwert dieser Summe für $\lambda = \max (x_{i+1} - x_i) \to 0$ ist ein Stieltjessches Integral, das man naturgemäß auf Grund seiner Konstruktion mit

$$\int_a^b f(x)\, G(\mathrm{d}x) \tag{33}$$

bezeichnet. Definiert man eine zweite Punktfunktion $g(x)$ durch

$$g(x) = G([a, x]) \quad \text{für} \quad x > a, \qquad g(a) = 0\,,$$

so ist in allen Fällen, da G *additiv* ist,

$$G([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha)\,, \tag{34}$$

so daß (32) in eine gewöhnliche Stieltjessche Summe

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, [g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

und der Grenzwert (33) in das gewöhnliche Stieltjessche Integral

$$(\mathrm{S}) \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}g(x)$$

übergeht.

Umgekehrt kann man, wenn dieses Integral existiert, durch (34) eine (offenbar additive) Intervallfunktion definieren und das Stieltjessche Integral in ein Integral (33) umformen.

585. Zurückführung eines Kurvenintegrals zweiter Art auf ein Stieltjessches Integral. Nachdem der Leser den Stieltjesschen Integralbegriff kennengelernt hat, ist es nützlich, sich wieder der Untersuchung des Kurvenintegrals zweiter Art zuzuwenden (vgl. Nr. 546):

$$\int_{(AB)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \quad \left(\text{bzw.} \int_{(AB)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\right). \tag{35}$$

Wir stellen uns vor, die Kurve (AB) sei in Parameterform gegeben,

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

dabei entspreche dem Durchlaufungssinn von A nach B ein Variieren von t von α bis β; es sei etwa $\alpha<\beta$. Dann entsprechen die Punkte A_i $(i=0, 1, \ldots, n)$, die auf der Kurve zur Bildung der Integralsummen zu wählen sind, wachsenden t-Werten,

$$t_0=\alpha<t_1<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=\beta\,,$$

und die auf den Bögen $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ gewählten Punkte M_i Werten $t=\tau_i$, $t_i\leqq\tau_i\leqq t_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$. Eine Integralsumme für das erste Integral erhält dann die Gestalt

$$\sigma=\sum_i f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))\,\Delta\varphi(t_i)\,.$$

Man sieht unmittelbar, daß das eine Stieltjessche Summe ist, so daß ein Kurvenintegral zweiter Art nach Definition ein Spezialfall eines Stieltjesschen Integrals ist:

$$\int_{(AB)} f(x, y)\,\mathrm{d}x=(\mathrm{S})\int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)\,.$$

Analog ist auch

$$\int_{(AB)} f(x, y)\,\mathrm{d}y=(\mathrm{S})\int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\,\mathrm{d}\psi(t)\,.$$

Hieraus erhält man leicht sehr allgemeine Bedingungen für die Existenz des Kurvenintegrals (35): *Es genügt, $f(x, y)$ als stetig und $\varphi(t)$ (bzw. $\psi(t)$) als Funktion von endlicher Schwankung vorauszusetzen* (Nr. 575, I). *Ist insbesondere die Kurve (AB) rektifizierbar* (vgl. Nr. 572) *und sind die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ stetig, so existiert*

$$\int_{(AB)} (P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)=\int_\alpha^\beta P(\varphi(t), \psi(t))\,\mathrm{d}\varphi(t)+\int_\alpha^\beta Q(\varphi(t), \psi(t))\,\mathrm{d}\psi(t)\,.$$

Berücksichtigt man das in Nr. 579 über die Berechnung Stieltjesscher Integrale Gesagte (insbesondere 2°), so kann man wieder die Formeln (4), (5) und (6) aus Nr. 547 erhalten, diesmal sogar unter allgemeineren Voraussetzungen.

Ferner kann man das Ergebnis der Nr. 551 jetzt leicht verallgemeinern. Der Flächeninhalt einer von einer stetigen rektifizierbaren Kurve begrenzten Figur wird durch eine der Formeln (9), (10) oder (11) aus Nr. 551 gegeben. Dabei braucht nichts in den Überlegungen geändert zu werden, denn das Lemma aus Nr. 550 (und die Bemerkung dazu) läßt sich ohne weiteres auf rektifizierbare Kurven verallgemeinern; vgl. auch Nr. 572.

Schließlich überträgt sich auch die ganze Theorie der Unabhängigkeit eines Kurvenintegrals vom Weg (§ 3) unmittelbar auf Integrale über *rektifizierbare* Kurven.

XVI. Flächenintegrale

§ 1. Definition und einfachste Eigenschaften von Flächenintegralen

586. Das Volumen eines zylindrischen Körpers. So wie uns die Frage nach dem Flächeninhalt eines krummlinigen Trapezes zum Begriff des einfachen bestimmten Integrals geführt hat (Nr. 294), wird uns die analoge Frage nach dem Volumen eines zylindrischen Körpers zu einem neuen Begriff führen, dem Begriff des (bestimmten) Flächenintegrals (auch zweidimensionales Integral oder Gebietsintegral genannt).

Wir betrachten einen Körper (V), der oben von der Fläche

$$z=f(x, y)\,, \tag{1}$$

seitlich von einer Zylinderfläche mit Erzeugenden parallel zur z-Achse und schließlich unten von einer ebenen Figur (P) in der x, y-Ebene begrenzt wird (Abb. 33). Es soll das Volumen V des Körpers bestimmt werden.[1])

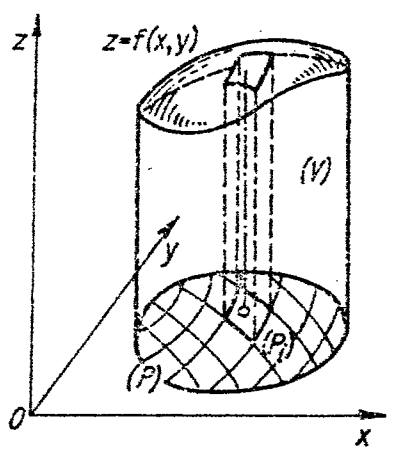

Abb. 33

Zur Lösung dieser Aufgabe verfahren wir so, wie es in der Integralrechnung üblich ist: Wir zerlegen die gesuchte Größe in Elemente, berechnen jedes Element näherungsweise, summieren und führen anschließend einen Grenzübergang durch. Zu diesem Zweck zerlegen wir den Bereich (P) durch ein Netz von Kurven in Teile (P_1), ..., (P_n) und betrachten die Menge der zylindrischen Säulen, die diese Teilbereiche als Grundflächen haben und die in ihrer Gesamtheit den gegebenen Körper bilden.

---

[1]) Setzt man die Funktion $f(x, y)$ als stetig und den ebenen Bereich als quadrierbar voraus, so folgt die Existenz des Volumens im vorliegenden Fall leicht aus Überlegungen von Nr. 341 und 337.

Zur Berechnung des Volumens der einzelnen Säulen wählen wir in jeder Figur (P_i) willkürlich jeweils einen Punkt (ξ_i, η_i). Wenn wir jede Säule näherungsweise als Zylinder mit der Höhe $f(\xi_i, \eta_i)$ auffassen, so ist das Volumen einer einzelnen Säule näherungsweise gleich $f(\xi_i, \eta_i)\, P_i$, wenn man mit P_i den Inhalt der Figur (P_i) bezeichnet. Daher wird das Volumen des ganzen Körpers näherungsweise durch

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, P_i$$

ausgedrückt.

Um die Güte dieser Approximation zu erhöhen, werden wir die Abmessungen der Flächenstücke (P_i) verkleinern, indem wir deren Anzahl vergrößern. Wenn der größte der Durchmesser aller Gebiete (P_i) gegen 0 strebt, so erhält man, falls der Grenzübergang möglich ist,

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, P_i\,. \tag{2}$$

Damit ist das gestellte Problem gelöst.

Einen Grenzwert dieser Form nennt man das *Flächenintegral der Funktion* $f(x, y)$ *über den Bereich* (P); man bezeichnet es mit dem Symbol

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P\,,$$

so daß die Formel (2) für das Volumen die Gestalt

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P \tag{2*}$$

annimmt.[1])

Also ist das Flächenintegral eine direkte Verallgemeinerung des Begriffs des einfachen bestimmten Integrals auf den Fall einer Funktion von zwei Veränderlichen. Es spielt ebenfalls bei der Bestimmung verschiedener geometrischer und physikalischer Größen eine wichtige Rolle.

587. Zurückführung des Flächenintegrals auf ein Doppelintegral. Wir werden das Flächenintegral weiterhin geometrisch als Volumen eines zylindrischen Körpers behandeln und werden hier Hinweise darauf geben, wie man es durch Zurückführung auf ein zweifaches Integral (Doppelintegral, iteriertes Integral) berechnen kann.

Im zweiten Band haben wir uns bereits mit dem Problem der Berechnung des Volumens eines Körpers (V) mit Hilfe seiner Querschnitte befaßt (Nr. 342). Wir erinnern an die diesbezügliche Formel. Der Körper werde von den Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt (Abb. 34).Wir nehmen an, daß der der Abszisse x $(a \leqq x \leqq b)$ entsprechende Schnitt des Körpers senkrecht zur x-Achse den Inhalt $Q(x)$ hat. Dann wird das Volumen des Körpers, falls es existiert, durch die Formel

$$V = \int_a^b Q(x)\, \mathrm{d}x \tag{3}$$

ausgedrückt.

[1]) Es ist leicht, diese Formel in strenger Form herzuleiten; vgl. die Bemerkung in Nr. 590.

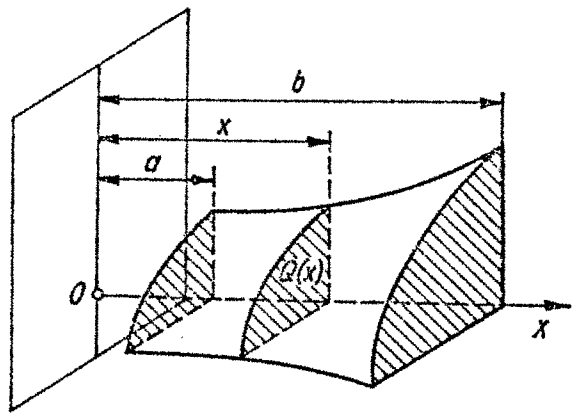

Abb. 34

Wir wenden nun diese Formel zur Berechnung des Volumens des zylindrischen Körpers an, von dem in Nr. 586 die Rede war. Wir beginnen mit dem einfachen Fall, daß die Grundfläche des Körpers das Rechteck $[a, b; c, d]$ ist (Abb. 35).

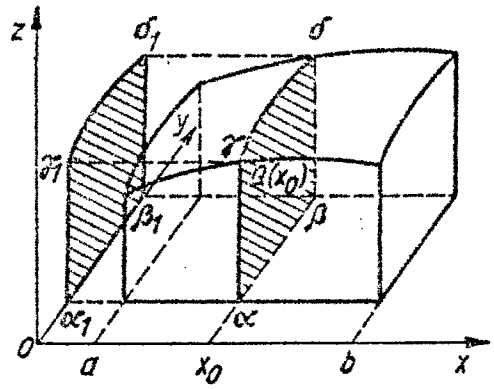

Abb. 35

Der Schnitt des Körpers mit der Ebene $x=x_0$ $(a \leqq x_0 \leqq b)$ ist ein krummliniges Trapez $\alpha\beta\gamma\delta$. Um den Flächeninhalt dieser Figur zu finden, projizieren wir sie auf die y, z-Ebene; wir erhalten ein zu ihr kongruentes Trapez $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ (da die Projektion ohne Verzerrungen vor sich geht). Daher ist

$$Q(x_0) = \text{Inh. } \alpha\beta\gamma\delta = \text{Inh. } \alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1 .$$

Nun lautet die Gleichung der Kurve $\gamma_1\delta_1$ in der y, z-Ebene aber offenbar

$$z = f(x_0, y) \qquad (c \leqq y \leqq d) .$$

Benutzen wir die bekannte Darstellung des Inhalts eines krummlinigen Trapezes als bestimmtes Integral, so erhalten wir, falls $f(x_0, y)$ integrierbar ist,

$$Q(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\, dy .$$

Da sich unsere Überlegung auf einen beliebigen Schnitt bezieht, gilt allgemein für $a \leqq x \leqq b$ die Beziehung[1])

$$Q(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy .$$

[1]) Diese Funktion von x ist unter unseren Voraussetzungen über $f(x, y)$ überdies *stetig* (Nr. 506), und das hatten wir auch bei der Herleitung der Formel (3) vorausgesetzt.

Setzen wir diesen Wert in die Formel (3) ein, so erhalten wir

$$V=\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Nun wird aber das Volumen V auch durch den Ausdruck (2) angegeben, folglich gilt

$$\iint_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P=\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{4}$$

d. h., das Flächenintegral ist auf ein zweifaches (ein „iteriertes") zurückgeführt.

Ein entsprechendes Ergebnis kann man auch für den allgemeineren Fall erhalten, daß der Bereich (P) in der x, y-Ebene ein krummliniges Trapez ist, das von den beiden Kurven

$$y=y_0(x), \qquad y=Y(x) \qquad (a\leqq x\leqq b)$$

und den beiden Ordinaten $x=a$ und $x=b$ begrenzt wird (Abb. 36). Der Unterschied im Vergleich zu dem bisher betrachteten Fall besteht in folgendem: Früher durchlief y für jedes feste $x=x_0$ ein und dasselbe Intervall $[c, d]$, während jetzt dieses Intervall $[y_0(x_0), Y(x_0)]$ noch von x_0 abhängt, so daß

$$Q(x_0)=\int_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0, y)\,\mathrm{d}y$$

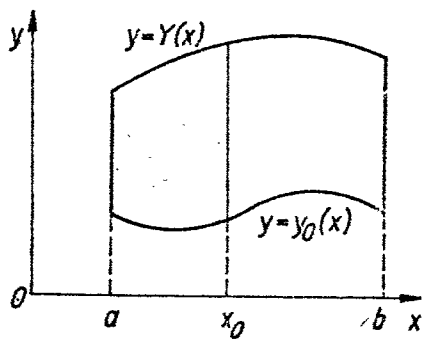

Abb. 36

wird. Wir erhalten schließlich

$$V=\iint_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,.^{1}) \tag{5}$$

Nachdem wir den Leser auf geometrischem Wege mit dem Begriff des Flächenintegrals und seiner Berechnung bekannt gemacht haben, kommen wir nun zu einer allgemeineren Darlegung des Problems vom rein analytischen Standpunkt aus.

588. Definition des Flächenintegrals. Wir werden auch hier die Geometrie oder zumindest die *Sprache der Geometrie* (Nr. 160 bis 163) nicht entbehren können. So werden wir von einem „zweidimensionalen Bereich" (P) reden, in dem die betrachtete Funktion von zwei Veränderlichen definiert ist, mit Hilfe von „Kurven" werden wir diesen in „Teilbereiche" zerlegen, wir werden die „Flächeninhalte"

[1]) Auch hier ist das innere Integral eine stetige Funktion von x (vgl. Nr. 509).

dieser „Bereiche" benutzen usw. In Wirklichkeit handelt es sich um „Bereiche" und „Kurven" aus dem *arithmetischen* zweidimensionalen Raum, ihre „Punkte" sind *Zahlenpaare*. Gewöhnlich ersetzt man jedoch der Bequemlichkeit halber diese „Gebilde" durch die ihnen entsprechenden echten geometrischen Gebilde, ohne zwischen ihnen irgendeinen Unterschied zu machen. Insbesondere versteht man unter dem „Inhalt eines Bereichs" des zweidimensionalen arithmetischen Raums immer den Inhalt des entsprechenden geometrisches Bereichs.

Wir erinnern uns, daß ein Bereich genau dann quadrierbar ist, wenn seine Randkurve den Inhalt 0 hat (Nr. 337). Eine große Klasse solcher Kurven bilden die glatten Kurven und die Kurven, die aus endlich vielen glatten Stücken bestehen (die sogenannten *stückweise glatten Kurven*).[1] *Wir werden von nun an voraussetzen, daß der Rand des Bereichs* (P) *und die Kurven, mit deren Hilfe wir* (P) *in Teile zerlegen, den Inhalt* 0 *haben* (daß sie beispielsweise zu der angegebenen Klasse gehören); dadurch wird die Existenz aller von uns benötigten Inhalte gesichert.

Wir kehren nun zum Begriff des Flächenintegrals zurück, der faktisch schon in Nr. 586 eingeführt wurde, und definieren ihn allgemein und ausführlich.

Es sei im Bereich (P) eine Funktion $f(x, y)$ definiert.[2] Wir zerlegen (P) durch ein Netz von Kurven in *endlich* viele Bereiche $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$, deren Inhalte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sind. Obwohl es am einfachsten ist, sich diese Teilbereiche *zusammenhängend* vorzustellen, ist es zur Erleichterung der weiteren Darlegungen zweckmäßig, zuzulassen, daß *sie auch nichtzusammenhängend sein können*. Wir wählen in dem i-ten Teilbereich (P_i) willkürlich einen Punkt (ξ_i, η_i), multiplizieren den Funktionswert $f(\xi_i, \eta_i)$ in diesem Punkt mit dem Inhalt P_i des entsprechenden Bereichs und addieren alle diese Produkte. Die so erhaltene Summe

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, P_i$$

nennen wir eine *Integralsumme* der Funktion $f(x, y)$ im Bereich (P).

Wir bezeichnen den größten Durchmesser[3] der Teilbereiche (P_i) mit λ.

Falls der Grenzwert[4] I *der Integralsumme* σ *für* $\lambda \to 0$ *existiert und endlich ist, nennt man ihn das Flächenintegral der Funktion* $f(x, y)$ *über den Bereich* (P) und bezeichnet es mit

$$I = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P\,.$$

Eine Funktion, die ein Integral besitzt, nennt man *integrierbar* oder *integrabel*. Im Fall $f \equiv 1$ stellt I offenbar den Inhalt P von (P) dar.

589. Existenzbedingungen für das Flächenintegral. Eine integrierbare Funktion muß notwendigerweise *beschränkt* sein. Andernfalls könnte man nämlich bei jeder

[1] Man darf sogar die Existenz endlich vieler singulärer Punkte zulassen, ohne daß die angegebene Eigenschaft verletzt wird.

[2] Wir machen über diese Funktion jetzt keinerlei Stetigkeitsvoraussetzungen.

[3] Wir erinnern daran, daß man die obere Grenze der Abstände je zweier beliebiger Punkte einer Punktmenge einen *Durchmesser* dieser Menge nennt. Im Fall eines ebenen abgeschlossenen Bereichs, der von einer stetigen Kurve begrenzt wird, ist der Durchmesser einfach die längste Sehne; vgl. Nr. 174.

[4] Der Leser wird den genauen Sinn dieses neuen „Grenzwerts" leicht selbst feststellen.

vorgegebenen Zerlegung des Bereichs (P) durch geeignete Wahl der Punkte (ξ_i, η_i) die Integralsumme beliebig groß machen.

Wenn wir also *Bedingungen für die Integrierbarkeit* einer gegebenen Funktion $f(x, y)$ aufstellen wollen, können wir diese daher von vornherein als beschränkt voraussetzen:

$$m \leqq f(x, y) \leqq M .$$

Es ist hier genau wie im Fall einer Funktion einer Veränderlichen zweckmäßig, die sogenannten *unteren* und *oberen Darbouxschen Summen* einzuführen:

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i P_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i P_i .$$

Dabei bezeichnen m_i und M_i die untere bzw. obere Grenze der Werte der Funktion $f(x, y)$ im Bereich (P_i).

Bei einer vorgegebenen Zerlegung des Bereichs (P) gelten unabhängig von der Wahl der Punkte (ξ_i, η_i) die Ungleichungen

$$s \leqq \sigma \leqq S .$$

Nun kann man aber durch geeignete Wahl dieser Punkte die Werte $f(\xi_i, \eta_i)$ den Werten m_i (bzw. M_i) beliebig annähern und damit die Summe σ der Summe s (bzw. S) beliebig annähern. *Also sind die obere bzw. die untere Darbouxsche Summe die obere bzw. untere Grenze der Integralsummen,* die derselben Zerlegung des Bereichs entsprechen.

Wie im linearen Fall kann man folgende Eigenschaften der Darbouxschen Summen beweisen:

1. *Bei weiterer Zerlegung der Teilbereiche (P_i) durch Hinzufügen neuer Teilkurven zu den alten wird die untere Darbouxsche Summe nicht kleiner, die obere Darbouxsche Summe nicht größer.*

2. *Keine untere Darbouxsche Summe übersteigt eine obere Darbouxsche Summe, auch wenn beide zu verschiedenen Zerlegungen des Bereichs (P) gehören.*

Der Beweis wird wie früher geführt (vgl. Nr. 296); nur muß man in den Fällen, in denen dort von Teilpunkten die Rede ist, hier von Teilkurven sprechen.

Es gibt jedoch einen Punkt, auf den wir den Leser aufmerksam machen wollen. Im linearen Fall ist klar, daß jeder neue Teilpunkt eins der alten Intervalle in zwei teilt; ferner ist der Durchschnitt zweier Intervalle wieder ein Intervall. Im ebenen Fall wird die Lage dadurch erschwert, daß sich zwei Kurven in mehreren (sogar in unendlich vielen) Punkten schneiden können. Daher kann ein zusammenhängender Teilbereich durch eine neue Kurve auch in nichtzusammenhängende Teile zerlegt werden; ebenso kann der Durchschnitt zweier zusammenhängender Bereiche ein nichtzusammenhängender Bereich sein. Deswegen haben wir von vornherein aus unseren Betrachtungen Zerlegungen des Grundbereichs in nichtzusammenhängende Teile nicht ausgeschlossen.

Weiter definiert man den Begriff des *unteren* und des *oberen Darbouxschen Integrals:*

$$I_* = \sup \{s\}, \qquad I^* = \inf \{S\} ,$$

und es zeigt sich dabei, daß

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S$$

ist.

Schließlich ergibt sich durch wörtliche Wiederholung des Beweises für den linearen Fall (Nr. 297) auch hier der

Satz. *Für die Existenz des Flächenintegrals ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

ist, oder in anderen Bezeichnungen, daß

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \omega_i P_i = 0 \tag{6}$$

ist, wobei ω_i die Schwankung $M_i - m_i$ der Funktion $f(x, y)$ auf dem Teilbereich (P_i) ist.

590. Klassen integrierbarer Funktionen. Mit Hilfe des oben aufgestellten Integrierbarkeitskriteriums kann man leicht beweisen:

I. *Jede in einem Bereich (P) stetige Funktion $f(x, y)$ ist dort integrierbar.*

Ist nämlich die Funktion f in dem (abgeschlossenen) Bereich (P) stetig, so entspricht infolge der gleichmäßigen Stetigkeit jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$, daß in jedem Teil des Bereichs (P), dessen Durchmesser kleiner als δ ist, die Schwankung der Funktion kleiner als ε wird. Es sei nun der Bereich (P) in Teile (P_i) zerlegt, deren Durchmesser sämtlich kleiner als δ sind. Dann sind alle Schwankungen ω_i kleiner als ε, und es gilt

$$\sum_i \omega_i P_i < \varepsilon \sum_i P_i = \varepsilon P .$$

Daraus folgt, daß die Bedingung (6) erfüllt ist. Damit ist die Integrierbarkeit der Funktion bewiesen.

Bemerkung. Jetzt kann man die Formel (2*) für das Volumen eines zylindrischen Körpers bereits völlig exakt herleiten. Das geschieht ganz genau so wie bei der Herleitung der Integralformel für den Inhalt eines krummlinigen Trapezes (Nr. 335ff.) unter Heranziehung einbeschriebener und umbeschriebener Körper, deren Volumina durch Darbouxsche Summen ausgedrückt werden.

Um die Klasse der Funktionen, deren Integrierbarkeit nachgewiesen ist, etwas zu erweitern, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma. *In dem Bereich (P) sei irgendeine Kurve (L) vom Flächeninhalt 0 gegeben. Dann entspricht jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Wird der Bereich (P) in Teile zerlegt, deren Durchmesser kleiner als δ sind, so ist die Summe der Inhalte derjenigen Teile, die mit der Kurve (L) Punkte gemeinsam haben, kleiner als ε.*

Nach Voraussetzung kann man die Kurve (L) in ein Polygon (Q) einschließen, dessen Inhalt kleiner als ε ist. Das kann man so tun, daß die Kurve (L) und der Rand (K) dieses Polygons durchschnittsfremd sind. Dann nimmt der Abstand zwischen den veränderlichen Punkten beider Kurven seinen kleinsten Wert $\delta_1 > 0$ an.[1])

[1]) Vgl. Band II, Nr. 336, Fußnote.

Wir zerlegen nun den Bereich (P) willkürlich in Teile, deren Durchmesser kleiner als δ_1 sind. Diejenigen von ihnen, die mit (L) Punkte gemeinsam haben, liegen notwendigerweise ganz in (Q); folglich ist ihr Gesamtinhalt kleiner als ε.

II. *Wenn eine beschränkte Funktion $f(x, y)$ höchstens auf endlich vielen Kurven vom Inhalt 0 unstetig ist, so ist sie integrierbar.*

Wir geben eine beliebige Zahl $\varepsilon>0$ vor. Nach Voraussetzung lassen sich alle „Unstetigkeitskurven" der Funktion $f(x, y)$ in ein Polygon (Q) mit einem Inhalt $<\varepsilon$ einschließen. In Abb. 37 ist dieses Polygon schraffiert. Sein Rand besteht aus endlich vielen Polygonzügen (L), die offenbar selbst den Inhalt 0 haben.

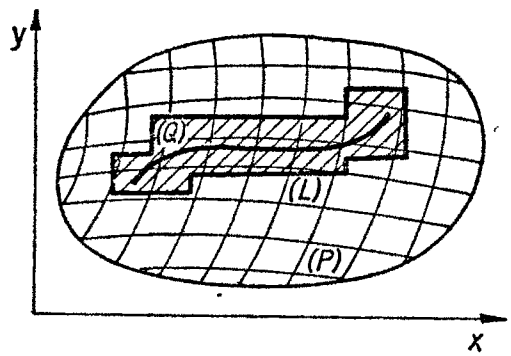

Abb. 37

In dem abgeschlossenen Bereich, den man aus (P) dadurch erhält, daß man das Innere des Bereichs (Q) herausnimmt, ist die Funktion $f(x, y)$ durchweg stetig, folglich auch gleichmäßig stetig. Daher existiert zu dem vorgegebenen ε eine Zahl $\delta_1>0$ derart, daß die Schwankung von $f(x, y)$ in jedem Teil dieses Bereichs, dessen Durchmesser kleiner als δ_1 ist, kleiner als ε wird.

Nun kann man auf Grund des Lemmas ein solches $\delta_2>0$ finden, daß Folgendes gilt: Wird der Bereich (P) durch willkürlich gewählte Kurven in Teile zerlegt, deren Durchmesser kleiner als δ_2 sind, so wird die Summe der Inhalte derjenigen Teile, die mit dem Polygonzug (L) des Randes des herausgenommenen Polygons (Q) Punkte gemein haben, sicher kleiner als ε.

Es sei δ das Minimum der beiden Zahlen δ_1 und δ_2. Wir zerlegen den Bereich (P) in Teile (P_1), (P_2), ..., (P_n), deren Durchmesser kleiner als δ sind, und betrachten die entsprechende Summe $\sum_i \omega_i P_i$. Wir zerlegen sie in zwei Summen,

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''},$$

wobei der Index i' denjenigen Bereichen (P_i) entsprechen soll, die ganz außerhalb des herausgenommenen Bereichs (Q) liegen, während der Index i'' allen übrigen Bereichen entspricht. Wir schätzen jede dieser Summen einzeln ab.

Da alle $(P_{i'})$ in dem Bereich liegen, den man aus (P) durch Herausnehmen von (Q) erhält, und da ihre Durchmesser $<\delta\leqq\delta_1$ sind, sind alle $\omega_{i'}$ kleiner als ε, so daß

$$\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon P$$

wird.

Wenn wir die Schwankung der Funktion $f(x, y)$ im ganzen Bereich (P) mit Ω be-

zeichen, so erhalten wir andererseits (weil $\omega_i \leqq \Omega$ ist)

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} \leqq \Omega \sum_{i''} P_{i''} .$$

Hierbei ist $\sum P_{i''}$ die Summe der Inhalte derjenigen der Bereiche (P_i), die entweder ganz in dem herausgenommenen Bereich (Q) liegen oder mit dem Rand (L) dieses Bereichs Punkte gemein haben. Der Gesamtinhalt der ersten ist kleiner als ε, denn es ist $Q < \varepsilon$; dasselbe gilt für den Gesamtinhalt der zweiten, denn der Bereich ist in Teile zerlegt, deren Durchmesser kleiner als $\delta \leqq \delta_2$ sind. Daher ist $\sum P_{i''} < 2\varepsilon$, also

$$\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < 2\Omega\varepsilon .$$

Endgültig ergibt sich für $\lambda < \delta$

$$\sum_{i} \omega_i P_i < (P + 2\Omega)\, \varepsilon .$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung mit ε beliebig klein wird, ist die Bedingung (6) erfüllt.

591. Untere und obere Integrale als Grenzwerte. Auch im zweidimensionalen Fall gilt der

Satz von Darboux. *Für jede in (P) beschränkte Funktion $f(x, y)$ gelten die Grenzwertbeziehungen*

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s, \qquad I^* = \lim_{\lambda \to 0} S$$

(vgl. Nr. 301).

Wir skizzieren den Beweis (etwa für die Obersummen), da er sich in einem Punkt wesentlich von den Überlegungen unterscheidet, die im linearen Fall durchgeführt wurden.

Genau wie dort zerlegen wir zunächst zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ den Bereich (P) mit Hilfe eines Netzes von Kurven derart in Teile, daß für die entsprechende Summe S' die Beziehung

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Das soeben erwähnte Kurvennetz, das wir mit (L) bezeichnen, hat den Flächeninhalt 0. Dann existiert nach dem Lemma aus Nr. 590 ein solches $\delta > 0$, daß für jede Zerlegung des Bereichs (P) in Teilbereiche (P_i) mit Durchmessern $< \delta$ die Summe der Inhalte derjenigen Teile, die wenigstens mit einer der Kurven von (L) Punkte gemein haben, kleiner als $\frac{\varepsilon}{2\Omega}$ wird, wobei Ω die Gesamtschwankung der Funktion f in (P) ist.

Wir bezeichnen mit S eine Summe, die einer *willkürlichen* solchen Zerlegung entspricht, und vergleichen sie mit der Summe S'', die man erhält, wenn man zu den vorhandenen Teilkurven das ganze Netz (L) hinzunimmt. Auf Grund der ersten Eigenschaft der Darbouxschen Summen (Nr. 589) ist $S'' \leqq S'$, so daß um so mehr

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Die Summen S und S'' unterscheiden sich jedoch nur um jene Summanden, die Teilen (P_i) entsprechen, die mit dem Netz (L) Punkte gemein haben. Da die Summe der Flächeninhalte dieser Teile kleiner als $\frac{\varepsilon}{2\Omega}$ ist, stellt man leicht fest, daß

$$S - S'' < \Omega \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Schließlich ergibt sich

$$I^* \leqq S < I^* + \varepsilon ,$$

womit der Beweis abgeschlossen ist.

Das Integrierbarkeitskriterium reduziert sich nun auf die Gleichheit

$$I_* = I^* .$$

Mit ihrer Hilfe kann man wie im linearen Fall beweisen, daß eine Funktion integrierbar ist, wenn bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ *wenigstens ein Paar von Darbouxschen Summen* die Ungleichung

$$S - s < \varepsilon$$

erfüllt.

592. Eigenschaften von integrierbaren Funktionen und von Flächenintegralen.

1°. *Wenn man die Werte einer in* (P) *integrierbaren Funktion* $f(x, y)$ *längs irgendeiner Kurve* (L) *vom Inhalt* 0 *in beliebiger Weise abändert (jedoch so, daß die abgeänderte Funktion beschränkt bleibt), so ist die erhaltene Funktion ebenfalls in* (P) *integrierbar, und ihr Integral ist gleich dem Integral von* $f(x, y)$.

Zum Beweis hat man die Integralsummen für die abgeänderte und die ursprüngliche Funktion zu vergleichen. Sie können sich nur in Summanden unterscheiden, die Bereichen (P_i) entsprechen, die mit der Kurve (L) Punkte gemein haben. Nun strebt aber für $\lambda \to 0$ nach dem Lemma aus Nr. 590 der Gesamtinhalt dieser Bereiche gegen 0, und daraus kann man leicht schließen, daß beide Integralsummen gegen den gleichen Grenzwert streben.

Also hängen die Existenz und der Wert eines Flächenintegrals nicht von den Werten ab, die der Integrand längs endlich vieler Kurven vom Inhalt 0 *annimmt.*

2°. *Wird der Definitionsbereich* (P) *der Funktion* $f(x, y)$ *von der Kurve* (L) *(vom Inhalt* 0*) in zwei Bereiche* (P') *und* (P'') *zerlegt, so folgt aus der Integrierbarkeit der Funktion* $f(x, y)$ *im ganzen Bereich* (P) *ihre Integrierbarkeit in den Teilbereichen* (P') *und* (P'')*, und umgekehrt folgt aus der Integrierbarkeit der Funktion in den beiden Bereichen* (P') *und* (P'') *die Integrierbarkeit in dem Bereich* (P). *Dabei gilt*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P = \iint\limits_{(P')} f(x, y)\, \mathrm{d}P + \iint\limits_{(P'')} f(x, y)\, \mathrm{d}P . \qquad (*)$$

Wir zerlegen die Bereiche (P') und (P'') in beliebiger Weise in Teile; dadurch wird auch (P) in Teile $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n)$ zerlegt. Bezeichnen wir mit dem Index i' die in (P') enthaltenen Teile und mit dem Index i'' die in (P'') enthaltenen Teile, so gilt

$$\sum \omega_i P_i = \sum \omega_{i'} P_{i'} + \sum \omega_{i''} P_{i''} .$$

Die Funktion $f(x, y)$ sei in (P) integrierbar, so daß die Summe links für $\lambda \to 0$ gegen 0 strebt; dann strebt jede der Summen rechts erst recht gegen 0, d. h., unsere Funktion ist auch in (P') und (P'') einzeln integrierbar.

Streben umgekehrt die beiden rechten Summen für $\lambda \to 0$ gegen 0, so strebt auch die linke Summe gegen 0. Wir müssen jedoch beachten, daß sie nicht für eine beliebige Zerlegung des Bereichs (P) gebildet worden ist: Wir sind ja von einer Zerlegung der einzelnen Bereiche (P') und (P'') ausgegangen.

Um von einer beliebigen Zerlegung des Bereichs (P) zu einer Zerlegung dieser speziellen Form zu kommen, genügt es, zu den Teilkurven die Kurve (L) hinzuzufügen. Die ihnen entsprechenden Summen unterscheiden sich nur durch Summanden, die zu den Teilbereichen gehören, die mit der Kurve (L) Punkte gemein haben. Nun strebt aber für $\lambda \to 0$ nach dem Lemma aus Nr. 590 deren Gesamtinhalt gegen 0, die beiden Summen unterscheiden sich also um einen beliebig kleinen Wert. Daher ist die Bedingung (6) in voller Allgemeinheit erfüllt, und die Funktion $f(x, y)$ ist in (P) integrierbar.

Die zu beweisende Formel (*) ergibt sich schließlich durch den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus der Gleichung

$$\sum f(\xi_i, \eta_i)\, P_i = \sum f(\xi_{i'}, \eta_{i'})\, P_{i'} + \sum f(\xi_{i''}, \eta_{i''})\, P_{i''} .$$

In analoger Weise, also durch Betrachtung von Integralsummen und durch Grenzübergang, ergeben sich auch die folgenden drei Eigenschaften:

3°. *Multipliziert man eine in (P) integrierbare Funktion $f(x, y)$ mit einer Konstanten k, so ist die entstehende Funktion ebenfalls integrierbar, und es gilt*

$$\iint\limits_{(P)} k f(x, y)\, \mathrm{d}P = k \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P .$$

4°. *Sind die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ im Bereich (P) integrierbar, so ist auch die Funktion $f(x, y) \pm g(x, y)$ integrierbar, und es gilt*

$$\iint\limits_{(P)} [f(x, y) \pm g(x, y)]\, \mathrm{d}P = \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P \pm \iint\limits_{(P)} g(x, y)\, \mathrm{d}P .$$

5°. *Wenn für die in (P) integrierbaren Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ die Ungleichung $f(x, y) \leqq g(x, y)$ erfüllt ist, so gilt*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P \leqq \iint\limits_{(P)} g(x, y)\, \mathrm{d}P .$$

Ferner gilt:

6°. *Ist $f(x, y)$ integrierbar, so ist auch $|f(x, y)|$ integrierbar, und es gilt die Ungleichung*

$$\left| \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P \right| \leqq \iint\limits_{(P)} |f(x, y)|\, \mathrm{d}P . \qquad (**)$$

Die Integrierbarkeit der Funktion $|f|$ folgt aus der einfachen Bemerkung, daß die Schwankung $\tilde{\omega}_i$ dieser Funktion in jedem Bereich (P_i) die entsprechende Schwankung ω_i der Funktion f nicht übersteigt. Es gilt daher

$$\sum \tilde{\omega}_i P_i \leqq \sum \omega_i P_i ,$$

und die Konvergenz der zweiten Summe gegen 0 zieht die Konvergenz der ersten Summe gegen 0 nach sich.

Die zu beweisende Ungleichung (**) ergibt sich durch Grenzübergang aus der Ungleichung

$$\left| \sum f(\xi_i, \eta_i)\, P_i \right| \leqq \sum |f(\xi_i, \eta_i)|\, P_i .$$

7°. *Genügt eine in (P) integrierbare Funktion $f(x, y)$ der Ungleichung*

$$m \leqq f(x, y) \leqq M ,$$

so gilt

$$mP \leqq \iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P \leqq MP\,. \tag{7}$$

Das ergibt sich durch Grenzübergang aus der trivialen Ungleichung

$$mP \leqq \sum f(\xi_i, \eta_i)\, P_i \leqq MP\,.$$

Wir dividieren die Ungleichung (7) durch P:

$$m \leqq \frac{\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P}{P} \leqq M\,.$$

Wenn wir den Quotienten mit μ bezeichnen, so erhalten wir die folgende andere Schreibweise der Ungleichung (7):

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P = \mu P \qquad (m \leqq \mu \leqq M)\,. \tag{8}$$

Diese Beziehung ist der sogenannte *erste Mittelwertsatz für Flächenintegrale.*

Wir setzen nun speziell voraus, die Funktion $f(x, y)$ sei in (P) stetig. Als Schranken m und M wählen wir den kleinsten und den größten Funktionswert im abgeschlossenen Bereich (P); nach dem Satz von WEIERSTRASS (Nr. 173) existieren diese. Dann muß die Funktion $f(x, y)$, die die Werte m und M annimmt, nach dem bekannten Satz von BOLZANO-CAUCHY (Nr. 171) jeden Zwischenwert annehmen. Also gibt es im Bereich (P) immer einen Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, für den $\mu = f(\bar{x}, \bar{y})$ ist.

Die Formel (8) erhält dann die Gestalt

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P\,. \tag{9}$$

Das ist eine viel verwendete Form des Mittelwertsatzes.

Ebenso läßt sich auch der verallgemeinerte Mittelwertsatz (Nr. 304, 10°) leicht auf den vorliegenden Fall übertragen; wir überlassen das dem Leser.

593. Das Integral als additive Funktion des Bereichs; Differentiation nach dem Bereich.[1]) Wir betrachten einen (abgeschlossenen) ebenen Bereich (P) und gewisse in (P) enthaltene (abgeschlossene) Teilbereiche (p). Wir wollen alle Bereiche als *quadrierbar* voraussetzen (je nach den Umständen können sie auch anderen Einschränkungen unterliegen). *Wird jedem Teil (p) des Bereichs (P) irgendeine bestimmte Zahl*

$$\Phi = \Phi((p))$$

zugeordnet, so wird dadurch eine „Funktion des Bereichs (p)" für die angegebenen (p) definiert. Beispiele solcher Bereichs- oder Gebietsfunktionen sind der Inhalt eines Gebiets, die Masse bei einer stetigen Belegung eines Gebiets, die statischen Momente dieser Masse, eine stetige Belastung oder überhaupt eine auf ein Gebiet wirkende Kraft usw.

Gilt für jede Zerlegung

$$(p) = (p') + (p'')$$

[1]) Von jetzt an benutzen wir „Bereich" und „Gebiet" als synonyme Termini, dem üblichen Sprachgebrauch folgend, ohne Rücksicht darauf, daß ein Gebiet ein spezieller, nämlich ein offener einfach zusammenhängender Bereich ist. — *Anm. d. Red.*

des Gebiets (p) in einander nicht überlappende Teile

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) + \Phi((p'')) ,$$

so nennt man die Gebietsfunktion $\Phi((p))$ *additiv*. Alle oben als Beispiele angeführten Funktionen besitzen diese Eigenschaft. Additive Gebietsfunktionen sind besonders wichtig, da sie häufig bei der Untersuchung von Naturerscheinungen auftreten.

In einem quadrierbaren Bereich (P) sei eine integrierbare Punktfunktion $f(M) = f(x, y)$ gegeben; dann ist diese auch in jedem quadrierbaren Teilbereich (p) von (P) integrierbar, also ist das Integral

$$\Phi((p)) = \iint\limits_{(p)} f(x, y)\, \mathrm{d}P \tag{10}$$

ebenfalls eine Funktion des Bereichs (p). Auf Grund der Ausführungen von Nr. 592, 2°, ist sie offenbar *additiv*.

Wir kommen nun zur Differentiation einer Funktion $\Phi((p))$ nach dem Gebiet. Es sei M ein fester *Punkt* des Gebiets (P) und (p) ein beliebiges *Teilgebiet, das diesen Punkt enthält*. Strebt der Quotient

$$\frac{\Phi((p))}{p}$$

(p ist der Inhalt des Gebiets (p)) gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert $f = f(M)$, wenn man den Durchmesser des Gebiets (p) unbegrenzt verringert, so nennt man diesen Grenzwert die *Ableitung von $\Phi((p))$ nach dem Gebiet im Punkt M*. Ist $\Phi((p))$ beispielsweise die Masse, die stetig über die ebene Figur (p) verteilt ist, so ist $f(M)$ nichts anderes als die Massendichte im Punkt M; bezeichnet $\Phi((p))$ eine auf die Figur (p) wirkende Kraft, so drückt $f(M)$ die Kraftdichte im Punkt M aus, usw.

Besonderes Interesse hat für uns der Fall, daß eine Gebietsfunktion durch ein Integral der Form (10) ausgedrückt wird, dessen Integrand $f(x, y)$ eine im Gebiet (P) *stetige* Funktion ist. Wir werden zeigen, daß die *Ableitung des Integrals nach dem Gebiet im Punkt M gerade gleich dem Integranden in diesem Punkt ist*, d. h.

$$f(M) = f(x, y) .$$

Wählt man nämlich ein Gebiet (p) wie in der Definition der Ableitung, so gilt nach dem Mittelwertsatz (siehe (9))

$$\Phi((p)) = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot p ,$$

wobei $(\bar{x}, \bar{y})$ ein bestimmter Punkt von (p) ist. Strebt der Durchmesser des Gebiets (p) gegen 0, so kommt der Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ dem Punkt (x, y) beliebig nahe, und infolge der Stetigkeit gilt

$$\frac{\Phi((p))}{p} = f(\bar{x}, \bar{y}) \to f(x, y) ,$$

was zu beweisen war.

Also ist das Flächenintegral (10) über ein veränderliches Gebiet in gewissem Sinne eine „Stammfunktion" für die unter dem Integral stehende Punktfunktion: Es ist eine Gebietsfunktion, die, nach dem Gebiet abgeleitet, gerade diese Punkt-

funktion ergibt. Es erhebt sich natürlich die Frage, ob überhaupt die „Stammfunktion" durch ihre Ableitung eindeutig bestimmt wird.

In dieser Hinsicht kann man folgenden Satz beweisen: *Zwei additive Gebietsfunktionen $\Phi_1((p))$ und $\Phi_2((p))$, die in allen Punkten des zugrunde liegenden Gebiets (P) ein und dieselbe Ableitung nach dem Gebiet haben, sind identisch.*

Betrachtet man die Differenz $\Phi((p)) = \Phi_1((p)) - \Phi_2((p))$, so reduziert sich das Problem auf den Beweis der Tatsache, daß *eine additive Gebietsfunktion $\Phi((p))$, deren Ableitung in allen Punkten von (P) gleich 0 ist, selbst identisch verschwindet.*

Nach Definition der Ableitung kann man für jeden Punkt M von (P) und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Umgebung finden, daß für jedes Teilgebiet (p) dieser Umgebung, die den Punkt M enthält, die Beziehung

$$\left|\frac{\Phi((p))}{p}\right| < \varepsilon$$

gilt. Durch Anwendung des Borelschen Überdeckungssatzes (Nr. 175) auf das System dieser Umgebungen gelingt es dann, das Gebiet (P) in endlich viele, einander nicht überlappende Gebiete zu zerlegen,

$$(P) = (p_1) + (p_2) + \ldots + (p_k) ,$$

und zwar so, daß für jedes dieser Gebiete $(i = 1, 2, \ldots, k)$

$$\left|\frac{\Phi((p_i))}{p_i}\right| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad |\Phi((p_i))| < p_i \varepsilon$$

gilt. Da $\Phi((p))$ *additiv* ist, gilt

$$\Phi((P)) = \sum_i \Phi((p_i)) .$$

Hieraus folgt in Verbindung mit der vorhergehenden Ungleichung

$$|\Phi((P))| \leqq \sum_i |\Phi((p_i))| < P\varepsilon .$$

Hierbei ist aber ε willkürlich, folglich ist $\Phi((P)) = 0$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; denn an Stelle von (P) hätte man auch ein beliebiges Teilgebiet (p) nehmen können.

Zusammenfassend können wir folgendes feststellen: *Das Flächenintegral* (10) *über ein veränderliches Gebiet ist die einzige additive „Stammfunktion" der unter dem Integral stehenden Punktfunktion*[1]).

Daher ist beispielsweise ohne Berechnung klar, daß die Gesamtmasse einer Figur (P) durch das Integral

$$m = \iint_{(P)} \varrho(x, y)\, \mathrm{d}P$$

ausgedrückt wird, wenn die Massendichte $\varrho(M) = \varrho(x, y)$ im Punkt M gegeben ist; ist $q(M) = q(x, y)$ die Kraftdichte im Punkt M, so wird die auf die Figur (P) wirkende Gesamtkraft gleich

$$F = \iint_{(P)} q(x, y)\, \mathrm{d}P$$

usw.

[1]) Diese Funktion wird wie oben als stetig vorausgesetzt.

Bemerkung. Früher hatten wir bereits *additive Intervallfunktionen* zu behandeln (Nr. 348; Nr. 584, Ergänzung 8). Da sich eine solche Funktion immer als Differenz zweier Werte irgendeiner *Punktfunktion* darstellen läßt, brauchte man für den „linearen" Fall keine solche Theorie zu entwickeln, wie sie für den „ebenen" Fall dargelegt wurde. Der Leser erkennt jedoch leicht, daß der Satz über die Differentiation eines bestimmten Integrals nach der variablen oberen Grenze (Nr. 305, Satz 12°) ein Analogon des soeben bewiesenen Satzes über die Differentiation eines Flächenintegrals nach dem Gebiet ist. Die Überlegungen von Nr. 348 kann man als Beweis dafür ansehen, daß das Integral die einzige additive Intervallfunktion ist, die eine „Stammfunktion" der gegebenen Punktfunktion ist.

§ 2. Berechnung von Flächenintegralen

594. Die Zurückführung des Flächenintegrals auf ein Doppelintegral im Fall eines Rechtecks. Mit diesem Problem haben wir uns vom geometrischen Standpunkt aus und unter gewissen speziellen Voraussetzungen schon in Nr. 587 beschäftigt.

Wir untersuchen es jetzt mit Methoden der Analysis in seiner allgemeinsten Form; dabei beginnen wir mit dem einfachen Fall, daß der Integrationsbereich ein *Rechteck* $(P)=[a, b; c, d]$ ist.

Satz. *Existiert für eine in dem Rechteck* $(P)=[a, b; c, d]$ *definierte Funktion* $f(x, y)$ *das Flächenintegral*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P \tag{1}$$

und für jeden festen Wert x *aus* $[a, b]$ *das einfache Integral*

$$I(x)=\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad (a\leqq x\leqq b)\,, \tag{2}$$

so existiert auch das zweifache Integral

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

und genügt der Gleichung

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P=\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,.^{1}) \tag{4}$$

Beweis. Wir zerlegen die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$, die das Rechteck (P) bestimmen, durch die Punkte

$$x_0=a<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b\,,$$

$$y_0=c<y_1<\ldots<y_k<y_{k+1}<\ldots<y_m=d$$

in Teilintervalle. Dadurch wird (P) in Teilrechtecke $(P_{i,k})=[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, n-1;\ k=0, 1, \ldots, m-1)$ zerlegt (Abb. 38).

---

[1]) Der Leser wird in dieser Aussage leicht eine Modifikation des bekannten Satzes über Doppellimites und zweifache Grenzwerte erkennen (Nr. 168).

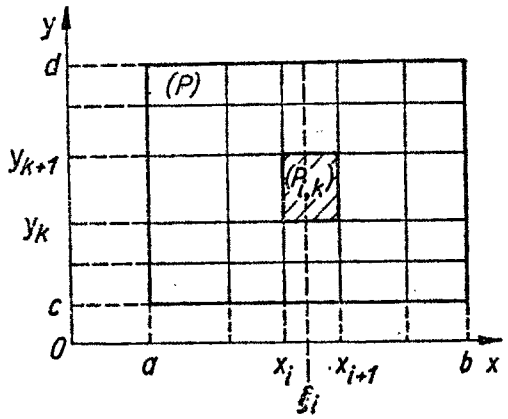

Abb. 38

Es seien $m_{i,k}$ bzw. $M_{i,k}$ die untere bzw. obere Grenze der Funktion $f(x, y)$ im Rechteck $(P_{i,k})$, so daß für alle Punkte dieses Rechtecks

$$m_{i,k} \leqq f(x, y) \leqq M_{i,k}$$

gilt.

Halten wir ein willkürlich gewähltes x aus dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ fest, etwa $x = \xi_i$, und integrieren wir über y von y_k bis y_{k+1}, so erhalten wir (Nr. 304, Satz 8°)

$$m_{i,k} \Delta y_k \leqq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\, \mathrm{d}y \leqq M_{i,k} \Delta y_k ,$$

wenn $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ist; das Integral über y existiert, da die Existenz des Integrals (2) über das ganze Intervall $[c, d]$ vorausgesetzt wurde. Durch Summation dieser Ungleichungen über k von 0 bis $m-1$ erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leqq I(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\, \mathrm{d}y \leqq \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k .$$

Wenn wir diese Ungleichungen mit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ multiplizieren und über den Index i von 0 bis $n-1$ summieren, so finden wir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k \leqq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\, \Delta x_i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} M_{i,k} \Delta y_k .$$

In der Mitte haben wir eine Integralsumme für die Funktion $I(x)$ erhalten. Die beiden äußeren Glieder sind nichts anderes als Darbouxsche Summen s und S für das Flächenintegral (1). Da $\Delta x_i \Delta y_k$ der Flächeninhalt $P_{i,k}$ des Rechtecks $(P_{i,k})$ ist, gilt nämlich beispielsweise

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta y_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} m_{i,k} \Delta x_i \Delta y_k = \sum_{i,k} m_{i,k} P_{i,k} = s .$$

Also ergibt sich schließlich

$$s \leqq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\, \Delta x_i \leqq S .$$

Wenn nun alle Δx_i und Δy_k gleichzeitig gegen 0 streben, so konvergieren die beiden Summen s und S, da das Flächenintegral (1) existiert, gegen dieses Integral. Daher gilt auch

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\, \Delta x_i = \iint_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P ,$$

d. h., das Flächenintegral (1) ist gleichzeitig das Integral der Funktion $I(x)$:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P = \int\limits_a^b I(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,,$$

was zu beweisen war.

Vertauscht man die Rollen der Veränderlichen x und y, so kann man neben (4) auch die Formel

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \tag{4*}$$

beweisen, vorausgesetzt, daß das Integral

$$\int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

für $y = \text{const}$ existiert.

Bemerkung. Wenn zugleich mit dem Flächenintegral (1) die beiden einfachen Integrale

$$\int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \quad (x = \text{const}) \quad \text{und} \quad \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \quad (y = \text{const})$$

existieren, so gelten die Formeln (4) und (4*) gleichzeitig. Daraus folgt

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

Dieses Ergebnis hatten wir früher hergeleitet (Nr. 528), ohne die Voraussetzung der Existenz des Flächenintegrals zu benutzen.

Die Anwendung der Formel (4) bzw. (4*) ist an die Existenz des Flächenintegrals und eines der einfachen Integrale gebunden. Wenn die Funktion $f(x, y)$ *stetig* ist (in der Praxis ist das gewöhnlich der Fall), so ist die Existenz aller erwähnten Integrale gesichert; in bezug auf das Flächenintegral folgt das beispielsweise aus Nr. 590, Satz I. In diesem Fall kann man jede der angegebenen Formeln zur tatsächlichen Berechnung des Flächenintegrals benutzen, da die Berechnung einfacher Integrale eine weit einfachere Aufgabe darstellt.

Beim Beweis der Formel (4) war die Zerlegung des Rechtecks (P) durch achsenparallele Geraden in rechteckige Elemente mit den Flächeninhalten $\Delta x_i \Delta y_k$ völlig naturgemäß. Um im Symbol des Flächenintegrals selbst auf seine Entstehung aus der Teilung des Gebiets durch achsenparallele Geraden hinzuweisen, schreibt man an Stelle von $\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P$ oft

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \left(\text{bzw. } \iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right).$$

Darüber hinaus bezeichnet man das Flächenintegral über das Rechteck $(P) = [a, b; c, d]$ mit Rücksicht auf seine Zurückführbarkeit auf ein iteriertes Integral oft mit einem Symbol, das dem des iterierten ähnlich ist:

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Bei dieser Bezeichnung entsprechen das „äußere Integralzeichen“ und das „äußere Differentialzeichen“ einander, so daß man nur Klammern zu setzen braucht, um das eine oder das andere iterierte Integral zu erhalten:

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx \quad \text{bzw.} \quad \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy .$$

595. Beispiele.

1. Man berechne das folgende Integral über das Rechteck $(P) = [3, 4; 1, 2]$:

$$\iint_{(P)} \frac{dx\, dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \int_3^4 \frac{dx\, dy}{(x+y)^2} .$$

Lösung. Nach Formel (4*) schreiben wir

$$\iint_{(P)} \frac{dx\, dy}{(x-y)^2} = \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} .$$

Wir finden zunächst für das innere Integral

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} .$$

Hieraus folgt

$$\iint_{(P)} \frac{dx\, dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right] dy = \ln \frac{25}{24} .$$

2. Man berechne die Integrale

(a) $I_1 = \int_1^3 \int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\, dx\, dy$, (b) $I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2\, dx\, dy}{1+y^2}$, (c) $I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y\, dx\, dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

Lösung. (a) $I_1 = \int_1^3 dy \int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\, dx = \int_1^3 (195y - 6y^3)\, dy = 660.$

(b) $I_2 = \int_0^1 x^2\, dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{12} .$

(c) Am einfachsten stellt man das Integral I_3 nach Formel (4) in der Form

$$I_3 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y\, dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

dar, denn man erhält sofort

$$\int_0^1 \frac{y\, dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} ,$$

so daß

$$I_3 = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}} \Bigg|_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

wird.

Wenn wir das andere Doppelintegral zu Hilfe nehmen, so erweisen sich die Integrationen als etwas schwieriger:

$$I_3=\int_0^1 y\,dy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{1+y^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}},$$

$$I_3=\int_0^1\frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2+y^2}-1}{\sqrt{2+y^2}+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}.$$

Man kann dieses Ergebnis leicht auf die frühere Form bringen.

3. Man bestimme das Volumen V des Körpers, der unten von der x, y-Ebene, seitlich von den Ebenen $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ und von oben von dem elliptischen Paraboloid

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

begrenzt wird.

Lösung. Zunächst ist nach Formel (2*)

$$V=\iint\limits_{[0,a;0,b]}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dP.$$

Die eigentliche Berechnung des Integrals führen wir nach Formel (4*) durch:

$$V=\int_0^b dy\int_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx=\int_0^b\left(\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\right)dy=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$$

4. Man löse die gleiche Aufgabe für den Körper, der von der x, y-Ebene, der Fläche $x^2+z^2=R^2$ $(z>0)$ und den Ebenen $y=0$ und $y=H$ begrenzt wird.

Lösung. Wenn man das Rechteck $[-R, R; 0, H]$ in der x, y-Ebene als Grundfläche des Körpers ansieht, so wird

$$V=\int_0^H\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,dy=2H\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2H}{2}.$$

[Es wäre natürlich einfacher gewesen, den Körper als Zylinder anzusehen, dessen Grundfläche ein Halbkreis in der x, z-Ebene ist.]

5. Man berechne das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z=0$, $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ $(b>a>0, d>c>0)$ und dem hyperbolischen Paraboloid $z=\frac{xy}{m}$ $(m>0)$ begrenzt wird.

Lösung. $V=\frac{(d^2-c^2)(b^2-a^2)}{4m}$.

6. Man beweise die Relation

$$\int_0^1\int_0^1(xy)^{xy}\,dx\,dy=\int_0^1 y^y\,dy.$$

Der Integrand des Flächenintegrals ist in dem ganzen Quadrat [0, 1; 0, 1] stetig, wenn man ihn für $xy=0$ gleich 1 setzt.

Es gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 (xy)^{xy}\,dx .$$

Führen wir in dem inneren Integral die Substitution $xy = t$ (für $y = \text{const} > 0$) aus und integrieren dann partiell, so erhalten wir für das Flächenintegral

$$\int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y t^t\,dt = \ln y \cdot \int_0^y t^t dt \Big|_0^1 - \int_0^1 y^y \ln y\,dy .$$

Beim Einsetzen der Grenzen verschwindet der erste Summand rechts, weil das Integral $\int_0^y t^t dt$ für $y \to 0$ von erster Ordnung gegen 0 strebt.[1]) Das letzte Integral reduziert sich infolge der Identität

$$(y^y)' = y^y \ln y + y^y$$

auf das Integral $\int_0^1 y^y\,dy$.

7. Man beweise, daß (für beliebiges konstantes z)

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(2z \sin\varphi \sin\theta)\,d\varphi\,d\theta = \left\{\int_0^{\pi/2} \cos(z \sin\lambda)\,d\lambda\right\}^2$$

ist.

Zum Beweis entwickeln wir beide Integrale in eine Potenzreihe nach z. Für das einfache Integral ist das schon in Nr. 440, Beispiel 12, durchgeführt worden:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(z \sin\lambda)\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right\} .$$

Für den Integranden des Flächenintegrals gilt die Reihenentwicklung

$$\cos(2z \sin\varphi \sin\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{(2i)!} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta ,$$

die für alle Werte von φ und θ aus dem Quadrat $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right]$ gleichmäßig konvergiert. Integrieren wir sie in diesem Quadrat gliedweise, so erhalten wir[2])

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos(2z \sin\varphi \sin\theta)\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(2z)^{2i}}{(2i)!} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta\,d\varphi\,d\theta .$$

Nun ist aber (vgl. Nr. 312, Formel (8))

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^{2i}\varphi \sin^{2i}\theta\,d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2i}\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{2i}\varphi\,d\varphi = \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\right]^2 ;$$

---

[1]) Denn es ist $\lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \int_0^y t^t\,dt = \lim_{t \to 0} t^t = 1$.

[2]) Ohne weitere Erklärungen dürfte es dem Leser möglich sein, sowohl den Begriff der gleichmäßig konvergenten Reihe als auch den Satz über die gliedweise Integration auf den Fall auszudehnen, daß die Glieder der Reihe von zwei Veränderlichen abhängen.

daher ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi^2}{4}\left\{1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i z^{2i}\cdot(2i)!}{2^{2i}(i!)^4}\right\}.$$

Man kann nun leicht nachprüfen (vgl. Nr. 390, Beispiel 3), daß tatsächlich

$$1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i z^{2i}\cdot(2i)!}{2^{2i}(i!)^4} = \left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right\}^2$$

ist. Also kann der Wert des vorliegenden Flächenintegrals durch die Besselfunktion vom Index 0 ausgedrückt werden:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi^2}{4}\left[J_0(z)\right]^2.$$

8. Man beweise für beliebiges k $(0<k<1)$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi\,d\theta}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2\sin^2\lambda}} = \frac{\pi}{2}F(k).$$

Hinweis. Man entwickle beide Integrale in eine Potenzreihe nach k; die Entwicklung des rechten Integrals ist uns ja bereits bekannt (Nr. 440, Beispiel 13).

9. Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[a, b]$, die Funktion $g(y)$ im Intervall $[c, d]$ integrierbar. Man beweise, daß die Funktion $f(x)\,g(y)$ als Funktion von zwei Veränderlichen im Rechteck $(P)=[a, b; c, d]$ integrierbar ist.

Hinweis. Man kann die Aufgabe auf die Frage zurückführen, ob die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ einzeln, aufgefaßt als Funktionen von zwei Veränderlichen, in (P) integrierbar sind.[1]) Um das zu beweisen, benutzt man zweckmäßigerweise das am Schluß von Nr. 591 angegebene vereinfachte Integrierbarkeitskriterium.

Wir bemerken, daß sich dabei

$$\iint_{(P)} f(x)\,g(y)\,dx\,dy = \int_c^d dy\left\{\int_a^b f(x)\,g(y)\,dx\right\}$$
$$= \int_c^d g(y)\left\{\int_a^b f(x)\,dx\right\}dy = \int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy$$

ergibt; *das Flächenintegral reduziert sich hier also auf ein Produkt zweier einfacher Integrale.*

Manchmal erweist es sich umgekehrt als nützlich, das Produkt zweier einfacher Integrale als Flächenintegral darzustellen. Im folgenden geben wir hierzu einige Beispiele.

10. Man beweise für eine positive stetige Funktion $f(x)$ die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)} \geqq (b-a)^2.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $a<b$ voraussetzen. Da ein Integral nicht von der Bezeichnung der Integrationsvariablen abhängt, kann man in einem beliebigen der beiden Integrale den Buchstaben x durch den Buchstaben y ersetzen, so daß sich die linke Seite der Ungleichung in der Form

$$I = \iint_{(P)}\frac{f(x)}{f(y)}\,dx\,dy = \iint_{(P)}\frac{f(y)}{f(x)}\,dx\,dy$$

---

[1]) Wenn man den Satz II aus Nr. 299 auf Funktionen von zwei Veränderlichen ausdehnt.

schreiben läßt, wobei $(P)=[a, b; a, b]$ ist. Hieraus folgt

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)}\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dx\,dy=\iint\limits_{(P)}\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2f(x)\,f(y)}\,dx\,dy\,.$$

Auf Grund der trivialen Ungleichung $2AB\leqq A^2+B^2$ ist der Integrand $\geqq 1$, so daß (vgl. Nr. 592, 7°)

$$I\geqq(b-a)^2$$

wird, was zu beweisen war.

11. *Die Schwarzsche Ungleichung.* Wir haben uns mit dieser Ungleichung bereits beschäftigt (Nr. 321). Als Übung werden wir nun einen neuen Beweis dieser Ungleichung für den Fall angeben, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in $[a, b]$ eigentlich integrierbar sind.

Wir betrachten das Integral

$$B=\iint\limits_{(P)}[f(x)\,g(y)-f(y)\,g(x)]^2\,dx\,dy$$

über das Quadrat $(P)=[a, b; a, b]$. Durch Auflösen der Klammer erhalten wir (siehe Beispiel 9)

$$B=\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(y)\,dy-2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\cdot\int_a^b f(y)\,g(y)\,dy+\int_a^b f^2(y)\,dy\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$$

oder schließlich, wenn wir wieder beachten, daß es auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen nicht ankommt,

$$B=2\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx-\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2\right\}.$$

Da der Integrand des Integrals B nicht negativ ist, ist $B\geqq 0$. Daraus folgt die gewünschte Ungleichung

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2\leqq\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx\,.$$

Bemerkung. Aus dieser Ungleichung folgt speziell die aus Beispiel 10 (wenn man f durch $\sqrt{f}$ und g durch $\frac{1}{\sqrt{f}}$ ersetzt).

12. *Die Tschebyscheffsche Ungleichung.* Durch ähnliche Überlegungen läßt sich die Ungleichung

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,g(x)\,dx\leqq\int_a^b p(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx$$

beweisen, die von P. L. Tschebyscheff stammt. Hierbei ist $p(x)$ eine positive *integrierbare* Funktion, während $f(x)$ und $g(x)$ *monoton wachsende* Funktionen sind.

Es sei $a<b$. Wir betrachten die Differenz

$$\Delta=\int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,dx-\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cdot\int_a^b p(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Ersetzen wir in den zweiten Faktoren beider Glieder den Buchstaben x durch y, so erhält diese Differenz Δ die Gestalt

$$\Delta=\int_a^b\int_a^b p(x)\,p(y)\,f(x)\,[g(x)-g(y)]\,dx\,dy\,.$$

Wir vertauschen nun die Rollen von x und y:

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b p(x)\, p(y)\, f(y)\, [g(y) - g(x)]\, dx\, dy.$$

Wenn wir schließlich das arithmetische Mittel der beiden Ausdrücke bilden, so erhalten wir

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)\, p(y)\, [f(x) - f(y)]\, [g(x) - g(y)]\, dx dy\,.$$

Da die beiden Funktionen f und g monoton wachsen, haben die beiden eckigen Klammern das gleiche Vorzeichen, d. h., der Integrand ist stets nichtnegativ. Daher ist $\Delta \geqq 0$, also die gewünschte Ungleichung bewiesen.

Wie man leicht sieht, gilt diese auch dann, wenn beide Funktionen f und g fallen. Wenn eine von ihnen fällt, die andere dagegen wächst, so kehrt sich die Ungleichung um.

13. Die Funktion $f(x, y)$ sei im Rechteck $(P) = [a, b; c, d]$ stetig. Wir bezeichnen mit (x, y) einen beliebigen Punkt dieses Rechtecks und betrachten die Funktion, die durch das Flächenintegral

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v)\, dv du$$

ausgedrückt wird. Stellen wir sie in der Form

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_c^y f(u, v)\, dv$$

dar, d. h. als Doppelintegral, und differenzieren zuerst nach x und dann nach y, so erhalten wir[1])

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_c^y f(x, v)\, dv, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)\,.$$

Wir sind zu einem Analogon des Satzes über die Differentiation eines einfachen Integrals nach der variablen oberen Grenze gelangt. Ebenso ergibt sich auch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y)\,.$$

14. Es sei $f(x, y)$ im Rechteck $(P) = [a, b; c, d]$ integrierbar. Existiert für diese Funktion (die wir diesmal nicht notwendig als stetig voraussetzen) eine „Stammfunktion" $\Phi(x, y)$ in dem Sinne, daß

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

ist, so gilt

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dx dy = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c)\,.$$

Das ist ein Analogon zu der Formel, die ein gewöhnliches bestimmtes Integral durch eine Stammfunktion ausdrückt.

Wir skizzieren den Beweis. Wir zerlegen das Rechteck $[a, b; c, d]$ wie in Nr. 594 in Teilrechtecke

$$[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, \ldots, m-1)\,.$$

---

[1]) Dabei ist zu berücksichtigen, daß der Integrand $\int_c^y f(u, v)\, dv$ des äußeren Integrals eine stetige Funktion von u ist (Nr. 506, Satz 2).

Durch zweimalige Anwendung des Mittelwertsatzes[1]) auf den Ausdruck

$$\Phi(x_{i+1}, y_{k+1}) - \Phi(x_{i+1}, y_k) - \Phi(x_i, y_{k+1}) + \Phi(x_i, y_k)$$

erhalten wir

$$\Phi_{xy}(\xi_{ik}, \eta_{ik})\, \Delta x_i \Delta y_k = f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\, \Delta x_i \Delta y_k ,$$

wobei $x_i \leqq \xi_{ik} \leqq x_{i+1}$ und $y_k \leqq \eta_{ik} \leqq y_{k+1}$ gilt. Summation über i und k ergibt

$$\sum_{i,k} f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\, \Delta x_i \Delta y_k = \Phi(b, d) - \Phi(b, c) - \Phi(a, d) + \Phi(a, c) .$$

Anschließend gehen wir zur Grenze über.

Wie wir sehen, ist das Beweisschema das gleiche wie beim Beweis des Hauptsatzes der Integralrechnung, der ein einfaches bestimmtes Integral durch eine Stammfunktion ausdrückt (Nr. 310).

Zum Abschluß führen wir zwei lehrreiche Beispiele an, die zeigen, daß die Bedingungen des Satzes aus Nr. 594 voneinander unabhängig sind.

15. Ist x eine rationale Zahl, so stellen wir diese als unkürzbaren Bruch mit positivem Nenner dar und bezeichnen diesen Nenner mit q_x. Wir definieren im Quadrat $(P) = [0, 1; 0, 1]$ eine Funktion $f(x, y)$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_x} + \dfrac{1}{q_y}, & \text{wenn } x \text{ und } y \text{ beide rational sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist in allen Punkten des Quadrats mit rationalen Koordinaten unstetig, in allen anderen Punkten dagegen stetig.

Da für jedes $\varepsilon > 0$ nur in *endlich* vielen Punkten $f > \varepsilon$ sein kann, ist die in Nr. 589 aufgestellte Integrierbarkeitsbedingung erfüllt, und das Flächenintegral

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P$$

existiert; es ist gleich 0.

Für einen irrationalen Wert y verschwindet die Funktion $f(x, y)$ für alle x; also ist auch

$$\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x = 0 .$$

Ist y jedoch rational, so ist $f(x, y) = 0$ für irrationale Werte x, während $f(x, y) = \dfrac{1}{q_x} + \dfrac{1}{q_y}$ für rationale x gilt. Diese Funktion der Veränderlichen x hat in jedem x-Intervall eine Schwankung $> \dfrac{1}{q_y}$; folglich ist sie *über x nicht integrierbar*. Daher kann man auch nicht von dem Doppelintegral

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

sprechen.

Entsprechend beweist man, daß auch das Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y$$

nicht existiert.

16. Wir setzen jetzt $f(x, y) = 1$ in allen Punkten des Quadrats, für die die beiden Ko-

[1]) Vgl. die Transformation des Ausdrucks W beim Beweis des Satzes über die Vertauschbarkeit zweier Differentiationen (Nr. 190).

ordinaten x und y rational sind und für die außerdem $q_x = q_y$ gilt, und $f(x, y) = 0$ in den übrigen Punkten.

Da in *jedem* Teil des Quadrats die Schwankung der Funktion f gleich 1 ist, existiert in diesem Fall das Flächenintegral

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P$$

nicht.

Gleichzeitig ist die Funktion $f(x, y)$ für konstantes y entweder identisch 0 (wenn y irrational ist), oder sie ist nur für *endlich* viele x-Werte von 0 verschieden (wenn y rational ist). In beiden Fällen ist

$$\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

folglich existiert auch das zweifache Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Ebenso existiert auch das zweifache Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y = 0$$

(vgl. Nr. 528).

596. Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein Doppelintegral im Fall eines krummlinig begrenzten Gebiets. Wir betrachten ein Gebiet (P), das „oben" und „unten" von zwei stetigen Kurven

$$y = y_0(x), \qquad y = Y(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

und seitlich von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist (Abb. 39), d. h. ein krummlinig begrenztes Trapez, dessen Basen auch die Länge 0 haben können.

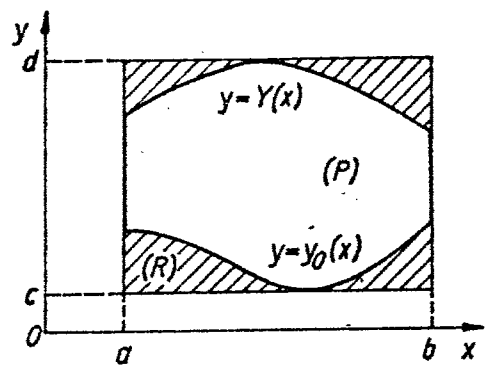

Abb. 39

Dann gilt in Analogie zu dem Satz aus Nr. 594 der folgende

Satz. *Existiert für eine im Gebiet (P) definierte Funktion $f(x, y)$ das Flächenintegral*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, \mathrm{d}P$$

und für jeden konstanten Wert x aus $[a, b]$ das einfache Integral

$$I(x) = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y\,,$$

so existiert auch das zweifache Integral

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,,$$

und es ist

$$\iint_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{6}$$

Der Beweis stützt sich auf eine Zurückführung dieses Falles auf den in Nr. 594 betrachteten Fall. Wir schließen dazu das Gebiet (P) in ein Rechteck $(R)=[a, b; c, d]$ ein, indem wir $c=\min\limits_{a\leqq x\leqq b} y_0(x)$ und $d=\max\limits_{a\leqq x\leqq b} Y(x)$ setzen (vgl. Abb. 39), und definieren in diesem Rechteck eine Funktion $f^*(x, y)$ in folgender Weise:

$$f^*(x, y)=\begin{cases} f(x, y)\,, & \text{wenn der Punkt } (x, y) \text{ zu dem Gebiet } (P) \text{ gehört,} \\ 0 & \text{in den übrigen Punkten des Rechtecks } (R). \end{cases}$$

Wir werden nun zeigen, daß diese Funktion den Bedingungen des Satzes aus Nr. 594 genügt.

Zunächst ist sie im Gebiet (P) integrierbar, denn dort stimmt sie mit der nach Voraussetzung integrierbaren Funktion $f(x, y)$ überein; daher ist trivialerweise

$$\iint_{(P)} f^*(x, y)\,\mathrm{d}P = \iint_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P\,.$$

Außerhalb von (P) ist jedoch $f^*(x, y)=0$, folglich ist diese Funktion auch in dem restlichen Teil $(Q)=(R)-(P)$ des Rechtecks (R) integrierbar,[1]) und es gilt

$$\iint_{(Q)} f^*(x, y)\,\mathrm{d}Q=0\,.$$

Daher ist f^* auf Grund von Nr. 592, Satz 2°, im ganzen Rechteck (R) integrierbar, und es ist

$$\iint_{(R)} f^*(x, y)\,\mathrm{d}R = \iint_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P\,. \tag{7}$$

Für einen konstanten Wert x aus $[a, b]$ existiert das Integral

$$\int_c^d f^*(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^{y_0(x)} f^*\mathrm{d}y + \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*\mathrm{d}y + \int_{Y(x)}^d f^*\,\mathrm{d}y;$$

denn es existiert jedes der drei Integrale rechts. Das erste und das dritte Integral existieren deshalb, weil die Funktion $f^*(x, y)$ in den y-Intervallen $[c, y_0(x))$ und $(Y(x), d]$ gleich 0 ist; beide Integrale sind gleich 0. Das zweite Integral aber stimmt mit dem Integral über die Funktion $f(x, y)$ überein, d. h., es ist

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} f^*(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,,$$

denn es gilt $f^*(x, y)=f(x, y)$ für y aus $[y_0(x), Y(x)]$. Somit ist

$$\int_c^d f^*(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{8}$$

---

[1]) Ihre Werte auf dem Rand dieses Gebiets spielen keine Rolle (vgl. Nr. 592, Satz 1°).

Auf Grund des erwähnten Satzes existiert für die Funktion f^* auch das zweifache Integral, und es ist gleich dem Flächenintegral [vgl. Nr. 594, Formel (4)]

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x, y)\,\mathrm{d}R = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f^*(x, y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Berücksichtigen wir noch die Beziehungen (7) und (8), so sehen wir, daß diese Formel der Formel (6) gleichwertig ist.

Ist das Gebiet (P) ein anders gelegenes krummliniges Trapez, das von den Kurven

$$x = x_0(y), \qquad x = X(y) \qquad (c \leqq y \leqq d)$$

und den Geraden $y = c$, $y = d$ begrenzt wird, so kommen wir statt zu (6) zur Formel

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}P = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,, \tag{6*}$$

vorausgesetzt, daß neben dem Flächenintegral auch das einfache Integral über x für $y = \text{const}$ existiert.

Bemerkung. Wenn der Rand des Gebiets (P) sowohl die zur x-Achse als auch die zur y-Achse parallelen Geraden jeweils in höchstens zwei Punkten schneidet (wie beispielsweise in dem in Abb. 40 dargestellten Fall), so sind, wenn die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, die beiden Formeln (6) und (6*) anwendbar. Vergleicht man sie miteinander, so ergibt sich die Gleichung

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,, \tag{9}$$

die auch selbständiges Interesse besitzt. Sie ist eine Verallgemeinerung der Formel (5) aus Nr. 594.

Wenn die Funktion $f(x, y)$ im Gebiet (P) stetig ist, so existieren das Flächenintegral und das eindimensionale Integral, und je nachdem, welche Art des Gebiets vorliegt, kann man Formel (6) oder Formel (6*) zur Berechnung des Flächenintegrals benutzen.

Ist der Rand komplizierter, so läßt sich das Gebiet (P) gewöhnlich in endlich viele Teile des betrachteten Typs zerlegen. [Beispielsweise wird die Figur in Abb. 41

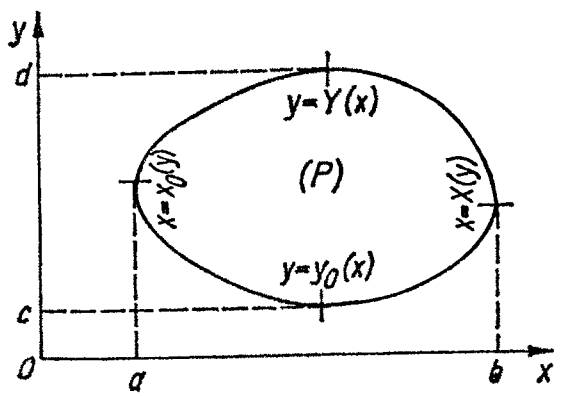

Abb. 40

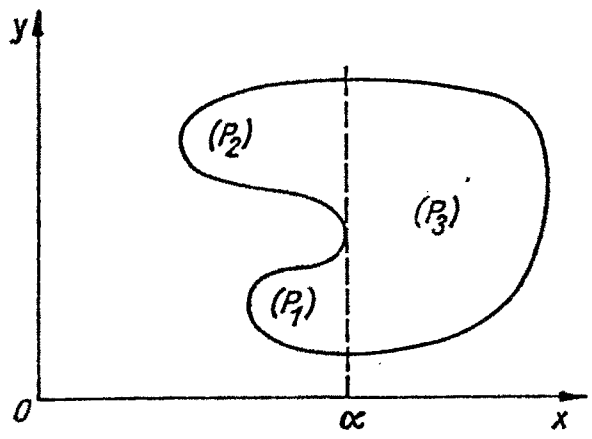

Abb. 41

durch die Gerade $x=\alpha$ in drei solche Gebiete zerlegt, und zwar in (P_1), (P_2) und (P_3).] Das gesuchte Integral wird dann auf Grund von Nr. 592, Satz 2°, eine Summe von Integralen über diese Teilgebiete; jedes dieser Integrale wird wie angegeben berechnet.

Auch im allgemeinen Fall liegt den Schlußfolgerungen die Zerlegung der betrachteten Figur in rechteckige Elemente zugrunde, denn wir haben das Problem auf den Satz aus Nr. 594 zurückgeführt. Im Zusammenhang damit benutzt man auch hier zur Bezeichnung des Flächenintegrals oft das Symbol

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx dy;$$

das Produkt $dxdy$ erinnert an den Inhalt eines rechteckigen Elements.

Ohne weiteres verständlich sind auch die Bezeichnungen

$$\int_a^b \int_{y_0(x)}^{Y(x)} f\,dy\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_c^d \int_{x_0(y)}^{X(y)} f\,dx\,dy\,.$$

597. Beispiele.

1. Man berechne das Flächenintegral

$$I = \iint\limits_{(P)} y^2 \sqrt{R^2-x^2}\,dP$$

über den Kreis (P) vom Radius R um den Koordinatenursprung (Abb. 42).

Lösung. Der Rand des Gebiets (P) hat die Gleichung $x^2+y^2=R^2$, woraus $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ folgt. Offenbar ist $y=+\sqrt{R^2-x^2}$ die Gleichung des oberen Halbkreises und $y=-\sqrt{R^2-x^2}$ die des unteren. Also durchläuft y bei festem x aus dem Intervall $[-R, R]$ die Werte von $-\sqrt{R^2-x^2}$ bis $+\sqrt{R^2-x^2}$. Nach Formel (6) gilt (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Integrand eine *gerade* Funktion von y ist)

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2-x^2}\,dy = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy\,.$$

Wir berechnen das innere Integral:

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\,.$$

Dann wird (da der Integrand eine gerade Funktion von x ist)

$$I = \frac{2}{3}\int_{-R}^{R} (R^2-x^2)^2\,dx = \frac{4}{3}\int_0^R (R^2-x^2)^2\,dx = \frac{32}{45}R^5\,.$$

Völlig analog verläuft auch die Berechnung nach Formel (6*).

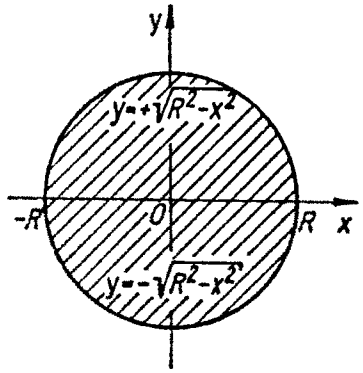

Abb. 42

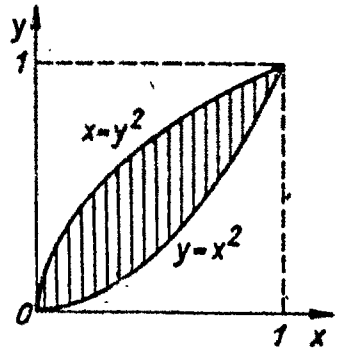

Abb. 43

2. Man berechne das Integral

$$K=\iint\limits_{(A)}(x^2+y)\,dx\,dy$$

über das (endliche) Gebiet (A), das von den beiden Parabeln $y=x^2$ und $y^2=x$ begrenzt wird.

Lösung. Es ist zweckmäßig, eine Skizze zu machen, um überhaupt eine Vorstellung von dem Gebiet zu erhalten. Die Lösung des Systems der Parabelgleichungen ergibt die Schnittpunkte (0, 0) und (1, 1) der beiden Parabeln (Abb. 43).

Führt man die äußere Integration über y durch, so durchläuft y offenbar das Intervall [0, 1]. Wählen wir einen beliebigen Wert y aus diesem Intervall, so sehen wir an Hand der Zeichnung, daß x die Werte von $x=y^2$ bis $x=\sqrt{y}$ durchläuft. Nach Formel (6*) ist

$$K=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)\,dx\,.$$

Wir berechnen das innere Integral:

$$\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+y)\,dx=\frac{x^3}{3}+yx\,\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}=\frac{4}{3}\,y^{3/2}-\frac{1}{3}\,y^6-y^3.$$

Dann wird das äußere Integral

$$K=\int\limits_0^1\left(\frac{4}{3}\,y^{3/2}-\frac{1}{3}\,y^6-y^3\right)dy=\frac{33}{140}\,.$$

3. Man berechne das Integral

$$J=\iint\limits_{(D)}xy\,dx\,dy$$

über das Gebiet (D), das von den Koordinatenachsen und der Kurve $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ begrenzt wird (Abb. 44).

Lösung. Es gilt

$$J=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^{(1-\sqrt{x})^2}y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,(1-\sqrt{x})^4\,dx=\frac{1}{280}\,.$$

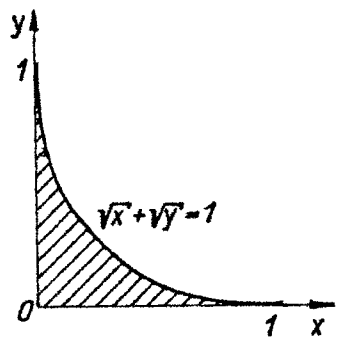

Abb. 44

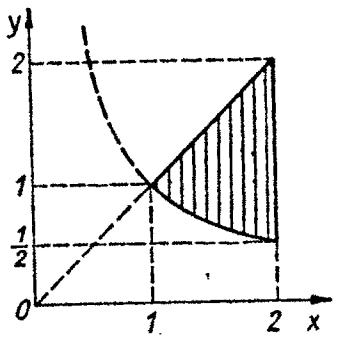

Abb. 45

4. Man berechne das Integral

$$I=\iint\limits_{(C)}\frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$$

über das Gebiet (C), das von den Geraden $x=2$, $y=x$ und der Hyperbel $xy=1$ begrenzt wird.

Lösung. Wir tragen diese Linien in eine Zeichnung ein (Abb. 45). Die Lösung des Systems der entsprechenden Gleichungen zeigt, daß die Gerade $x=2$ die Gerade $y=x$ im Punkt (2, 2) und die Hyperbel $xy=1$ im Punkt $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ schneidet, während sich die Gerade $y=x$ und die Hyperbel (im ersten Quadranten, in dem das betrachtete Gebiet liegt) im Punkt (1, 1) schneiden.

Wenn wir zur Berechnung des Integrals I die Formel (6) wählen, so müssen wir die äußere Integration über das x-Intervall [1, 2] erstrecken. Bei festem x aus diesem Intervall durchläuft y die Werte von $y=\frac{1}{x}$ bis $y=x$. Daher ist

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Nun ist aber

$$\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{x^2}{y}\Big|_{1/x}^{x}=x^3-x\,,$$

also gilt

$$I=\int_1^2 (x^3-x)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}\,.$$

Während in den vorigen Beispielen die Berechnung nach beiden Formeln (6) und (6*) gleichermaßen einfach war, verhält sich die Sache im vorliegenden Fall anders: Die Berechnung nach Formel (6*) wäre hier schwieriger. Nichtsdestoweniger werden wir diese Berechnung ausführen, da es lehrreich ist, sich über die Ursachen dieses Sachverhalts Rechenschaft abzulegen.

Eine zur x-Achse parallele Gerade schneidet den Rand des Gebiets in zwei Punkten, die Formel (6*) ist also anwendbar. Aber die Kurve, die unser Gebiet links begrenzt (sie entspricht der Kurve $x=x_0(y)$ der allgemeinen Theorie) besteht hier aus zwei Teilen, einem Geradenstück und einem Hyperbelstück, die durch verschiedene Gleichungen ausgedrückt werden. Mit anderen Worten: Die Funktion $x_0(y)$ wird in verschiedenen Teilen des y-Intervalls $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ durch verschiedene Gleichungen angegeben, und zwar gilt

$$x_0(y)=\begin{cases}\frac{1}{y} & \text{für } \frac{1}{2}\leqq y\leqq 1\,,\\ y & \text{für } 1\leqq y\leqq 2\,.\end{cases}$$

Rechts wird das Gebiet von der Geraden $x=2$ begrenzt.

Daher ist es zweckmäßig, die Integration über y zu zerlegen und I in der Form

$$I=\int_{1/2}^{1} \mathrm{d}y \int_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x$$

darzustellen. Da

$$\int_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5} \quad \text{und} \quad \int_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}$$

ist, gilt

$$I=\int_{1/2}^{1}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_{1}^{2}\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=\frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}.$$

Solche Umstände muß man berücksichtigen; von den beiden möglichen Wegen der Berechnung eines Flächenintegrals wird man natürlich den einfacheren wählen.

5. Man berechne die Integrale

(a) $I_1=\iint\limits_{(Q_1)}\cos(x+y)\,dxdy$, (b) $I_2=\iint\limits_{(Q_2)}(2x+y)\,dxdy$, (c) $I_3=\iint\limits_{(Q_3)}(x+6y)\,dxdy$.

Dabei sei (Q_1) das Dreieck, das von den Geraden $x=0$, $y=x$, $y=\pi$ begrenzt wird, (Q_2) das Dreieck, das von den Koordinatenachsen und der Geraden $x+y=3$ begrenzt wird, und (Q_3) das Dreieck, das von den Geraden $y=x$, $y=5x$, $x=1$ begrenzt wird.

Hinweis. In den Fällen (a) und (b) ist es gleichgültig, welche der Formeln (6) und (6*) benutzt wird. Im Fall (c) ist es jedoch bequemer, Formel (6) anzuwenden. (Warum? Man fertige eine Skizze an!)

Lösung. (a) $I_1=-2$; (b) $I_2=\frac{27}{2}$; (c) $I_3=25\frac{1}{3}$.

6. Man berechne das Integral

$$I=\iint\sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy$$

über das Dreieck, das von den Geraden $y=0$, $x=1$ und $y=x$ gebildet wird.

Lösung. Nach Formel (6) ist $I=\int_0^1 dx\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,dy$; für das innere Integral gilt

$$\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,dy=\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\Big|_{y=0}^{y=x}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2$$

und daher schließlich $I=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$. (Natürlich ist der Hauptwert des Arkussinus zu nehmen.)

Wir hätten die Berechnung auch nach Formel (6*) durchführen können, wären jedoch in diesem Fall auf schwierigere Quadraturen gestoßen. Auch diesen Umstand muß man bei der Auswahl des Weges der Berechnung berücksichtigen.

Angesichts der Schwierigkeiten, die die Aufstellung der Integrationsgrenzen im Fall eines krummlinigen Gebiets manchmal bereitet, sind die folgenden Übungen nützlich:

7. Man ändere in den nachstehenden iterierten Integralen nach Formel (9) die Integrationsreihenfolge:

(a) $\int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy$, (b) $\int_{-7}^1 dy\int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)\,dx$,

(c) $\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy$, (d) $\int_0^1 dy\int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx$.

Die Funktion $f(x,y)$ werde als stetig angenommen.

(a) Hinweis. Das Integrationsgebiet wird durch die Ungleichungen

$$0\leqq x\leqq 4,\qquad 3x^2\leqq y\leqq 12x$$

bestimmt. Hieraus folgt zunächst, daß die Grenzen von y die Werte 0 und 48 sind. Lösen wir die letzten Ungleichungen nach x auf, so finden wir, daß x bei festem y die Werte von $\frac{1}{12}y$ bis $\sqrt{\frac{y}{3}}$ durchläuft.[1])

[1]) Diese Zahlen liegen beide innerhalb des Intervalls [0, 4].

Noch einfacher ist dieses Ergebnis aus Abb. 46 zu ersehen, in der das Gebiet dargestellt ist, das von der Geraden $y=12x$ und der Parabel $y=3x^2$ begrenzt wird, die sich in den Punkten mit den Abszissen 0 und 4 schneiden. Wir weisen darauf hin, daß für die x-Achse ein anderer Maßstab gewählt worden ist als für die y-Achse.

Lösung. $\int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f\,dx.$

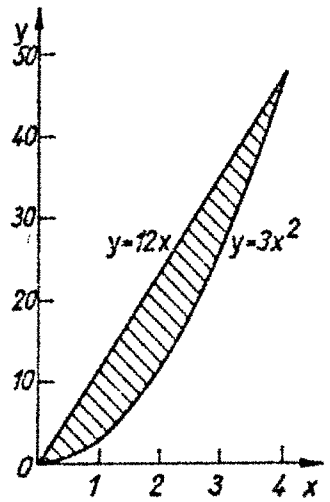

Abb. 46

(b) Hinweis. Das Integrationsgebiet wird von dem Kreis $(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$ begrenzt.

Lösung. $\int_{-2}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f\,dy.$

(c) Hinweis. Das Integrationsgebiet wird durch die Ungleichungen $0\leqq x\leqq 1$, $2x\leqq y\leqq 3x$ bestimmt. Daraus ergeben sich für y die Grenzen 0 und 3.

Lösen wir die letzten Ungleichungen auf, so sehen wir, daß $\frac{y}{3}\leqq x\leqq\frac{y}{2}$ ist. Für $y>2$ liegt aber die Grenze $\frac{y}{2}$ nicht mehr im x-Intervall [0, 1]. Folglich durchläuft x für $0\leqq y\leqq 2$ die Werte von $\frac{y}{3}$ bis $\frac{y}{2}$ und für $2\leqq y\leqq 3$ die Werte von $\frac{y}{3}$ bis 1.

Wesentlich einfacher ergibt sich dieses Ergebnis geometrisch, wenn man sich überlegt, daß das Integrationsgebiet das Dreieck ist, das von den Geraden $y=3x$, $y=2x$ und $x=1$ begrenzt wird. (Man fertige eine Zeichnung an!)

Lösung. Wir erhalten eine Summe von *zwei* iterierten Integralen:

$$\int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f\,dx+\int_2^3 dy \int_{y/3}^{1} f\,dx \quad \text{(vgl. die Beispiele 4 und 5(c)).}$$

(d) Lösung. Wir erhalten eine Summe von *drei* iterierten Integralen

$$\int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f\,dy+\int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int_0^{1} f\,dy+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f\,dy\,.$$

8. Man schreibe folgende Ausdrücke in Form eines *einzigen* iterierten Integrals:

(a) $\int_0^1 dy \int_{y^2/9}^{y} f(x,y)\,dx+\int_1^3 dy \int_{y^2/9}^{1} f(x,y)\,dx,$ (b) $\int_3^7 dy \int_{9/y}^{3} f(x,y)\,dx+\int_7^9 dy \int_{9/y}^{10-y} f(x,y)\,dx\,.$

Lösung. (a) $\int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f\,dy;$ (b) $\int_1^3 dx \int_{9/x}^{10-x} f\,dy.$

(Es empfiehlt sich, in allen Fällen Skizzen anzufertigen.)

9. Man zeige: Die übliche Formel der Integralrechnung

$$P=\int_a^b f(x)\,dx,$$

die den Inhalt des krummlinigen Trapezes angibt, das von der x-Achse, den Ordinaten $x=a$, $x=b$ und der Kurve $y=f(x)$ begrenzt wird (hierbei sei $f\geqq 0$), ist eine Folgerung der trivialen Gleichung

$$P=\iint_{(P)} dx\,dy.$$

Hinweis. Man benutze Formel (6).

10. Man beweise die Formel

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx \tag{10}$$

für eine jede Funktion $f(x, y)$, die in dem Dreieck (Δ) stetig ist, das von den Geraden $y=a$, $x=a$ und $y=x$ begrenzt wird.

Hinweis. Siehe Abb. 47; man benutze Formel (9), d. h., man setze die beiden iterierten Integrale gleich, auf die das Flächenintegral über das Gebiet (Δ) führt.

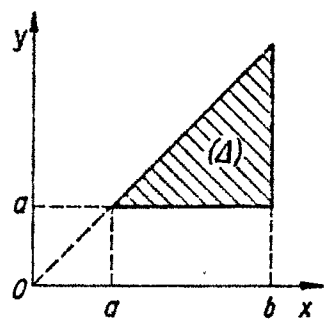

Abb. 47

Die bewiesene Formel wird gewöhnlich nach DIRICHLET benannt; sie findet zahlreiche Anwendungen, insbesondere in der Theorie der sogenannten Volterraschen[1]) Integralgleichungen.

11. Mit Hilfe der Formel (10) kann man leicht beweisen, daß

$$\int_a^x dt_1\int_a^{t_1}(t_1-t)^{n-2}f(t)\,dt=\frac{1}{n-1}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt$$

ist. Die wiederholte Anwendung dieser Formel führt zu dem Ergebnis

$$\underbrace{\int_a^x dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2}\cdots\int_a^{t_1}}_{n} f(t)\,dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt,$$

das wir früher (Nr. 511, Beispiel 13) auf anderem Wege hergeleitet hatten.

12. Man berechne das Integral

$$I=\iint\limits_{\substack{x\geqq 0,\,y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} x^{p-1}y^{q-1}dx\,dy$$

unter der Voraussetzung, daß $p\geqq 1$ und $q\geqq 1$ ist.[2])

---

[1]) VITO VOLTERRA, 1860–1940, italienischer Mathematiker.

[2]) Diese Einschränkung machen wir hier nur deshalb, um zu vermeiden, daß der Integrand unbeschränkt wird; später (Nr. 617, Beispiel 14) wird sie abgeschwächt werden.

Nach Formel (5) gilt

$$I=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y^{q-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,\mathrm{d}x=\frac{1}{q}B(p,q+1).$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\iint\limits_{\substack{x\geqq 0,y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

Diese Formel stammt von DIRICHLET.

13. Analog läßt sich das allgemeinere Integral

$$J=\iint\limits_{\substack{x\geqq 0,y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

unter der Voraussetzung $p\geqq 1$, $q\geqq 1$, $r\geqq 1$ berechnen.[1])

Zunächst gilt wie oben

$$J=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,\mathrm{d}y.$$

Substituieren wir dann im inneren Integral $y=(1-x)\,t$, so erhalten wir

$$J=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}\,\mathrm{d}x\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}\,\mathrm{d}t$$

$$=B(p,q+r)\,B(q,r)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

14. Man berechne das folgende Integral, das eine weitere Verallgemeinerung des vorigen darstellt:

$$K=\iint\limits_{\substack{x\geqq 0,y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} \frac{x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q+r}}$$

(hierbei gelte $\alpha,\beta\geqq 0$, $\gamma>0$ und außerdem $p\geqq 1$, $q\geqq 1$, $r\geqq 1$).[1])

Durch Übergang zu einem iterierten Integral erhalten wir

$$K=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q+r}}\,\mathrm{d}y.$$

Wir führen die Substitution $y=(1-x)\,t$ durch und ändern dann die Integrationsreihenfolge:

$$K=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}\,\mathrm{d}t\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}}{[\alpha x+\beta t(1-x)+\gamma]^{p+q+r}}\,\mathrm{d}x.$$

Zur Berechnung des inneren Integrals benutzen wir ein bereits bekanntes Ergebnis (Nr. 534, Beispiel 2). Dann wird

$$K=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p}\int_0^1\frac{t^{q-1}(1-t)^{r-1}}{(\beta t+\gamma)^{q+r}}\,\mathrm{d}t,$$

[1]) Vgl. die Fußnote 2 auf S. 139.

und es ergibt sich schließlich wieder mit Hilfe desselben Ergebnisses

$$K=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\cdot\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p}\cdot\frac{\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}\,\frac{1}{(\beta+\gamma)^q\gamma^r}$$
$$=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}\,\frac{1}{(\alpha-\gamma)^p\,(\beta+\gamma)^q\gamma^r}\,.$$

15. Die Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ seien in einem beschränkten abgeschlossenen Gebiet (D) stetig, m und M seien der kleinste bzw. größte Wert der Funktion g in diesem Gebiet; $\varphi(u)$ bezeichne eine Funktion, die für $m\leqq u\leqq M$ stetig ist.

Wir bezeichnen mit $\psi(u)$ das Integral

$$\iint\limits_{m\leqq g\leqq u} f(x, y)\,dx dy\,,$$

das über den Teil des Gebiets (D) erstreckt wird, in dem die unter dem Integralzeichen angegebene Ungleichung erfüllt ist.[1])

Dann gilt folgende Formel von CATALAN:

$$\iint\limits_{m\leqq g\leqq M} f(x, y)\,\varphi(g(x, y))\,dx dy=\int\limits_m^M \varphi(u)\,d\psi(u)\,.$$

Dabei ist das Integral rechts als Stieltjessches Integral zu verstehen.

Da man eine stetige Funktion f immer als Differenz zweier positiver stetiger Funktionen ansehen kann, dürfen wir für den Beweis dieser Formel annehmen, die Funktion f sei positiv.

Wir geben eine Zerlegung

$$m=u_0<u_1<\ldots<u_i<u_{i+1}<\ldots<u_n=M$$

des Intervalls $[m, M]$ willkürlich vor und zerlegen dementsprechend auch das zugrundeliegende Integral (wir bezeichnen es mit I):

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\iint\limits_{u_i\leqq g\leqq u_{i+1}} f\cdot\varphi(g)\,dx dy=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(g(\xi_i^*, \eta_i^*))\iint\limits_{u_i\leqq g\leqq u_{i+1}} f(x, y)\,dx dy\,.$$

Wir haben hierbei den verallgemeinerten Mittelwertsatz benutzt; (ξ_i^*, η_i^*) ist ein gewisser Punkt des Gebiets, in dem $u_i\leqq g\leqq u_{i+1}$ ist; also ist $u_i\leqq u_i^*\leqq u_{i+1}$, wenn $g(\xi_i^*, \eta_i^*)=u_i^*$ gesetzt wird. Daher ist schließlich

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(u_i^*)\,[\psi(u_{i+1})-\psi(u_i)]\,.$$

Wie wir sehen, ist die Summe rechts eine Stieltjessche Summe. Durch den Grenzübergang $\max \Delta u_i\to 0$ gelangen wir zu dem gewünschten Ergebnis:

$$I=(\mathrm{S})\int\limits_m^M \varphi(u)\,d\psi(u)\,.$$

Besitzt die Funktion $\psi(u)$ eine stetige (oder zumindest absolut integrierbare) Ableitung $\psi'(u)$, so läßt sich das Stieltjessche Integral durch das gewöhnliche Integral

$$I=\int\limits_m^M \varphi(u)\,\psi'(u)\,du$$

ersetzen.

16. Als Beispiel zeigen wir, wie man nach der Methode von CATALAN aus der elementaren Dirichletschen Formel (vgl. Beispiel 12) eine allgemeinere Formel herleiten kann, die von LIOUVILLE[2]) stammt.

Wir setzen speziell

$$f(x, y)=x^{p-1}y^{q-1},\qquad g(x, y)=x+y\,,$$

[1]) Wir nehmen an, die Gleichung $g(x, y)=u$ beschreibe eine geschlossene Kurve, so daß das im Text erwähnte Gebiet von zwei solchen Kurven begrenzt wird.

[2]) JOSEPH LIOUVILLE, 1809–1882, französischer Mathematiker.

und als Gebiet (D) wählen wir das Dreieck $x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1$. Dann gilt nach der Dirichletschen Formel für $0 < u \leqq 1$

$$\varphi(u) = \iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x+y\leqq u}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy = u^{p+q} \iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$$
$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}\,u^{p+q},$$

und unter Benutzung der Transformation von CATALAN erhalten wir

$$\iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} x^{p-1}y^{q-1}\varphi(x+y)\,dx\,dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)} \int_0^1 \varphi(u)\,du^{p+q}$$
$$= \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u)\,u^{p+q-1}du\,.$$

Das ist gerade die *Liouvillesche Formel.*

17. Man bestimme das Volumen des Körpers, der begrenzt wird von

(a) den Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, dem Zylinder $x^2+y^2=R^2$ und dem hyperbolischen Paraboloid $z=xy$ (im ersten Oktanten);

(b) den Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y=1$ und der Fläche $z=x^2+y+1$;

(c) den Ebenen $y=1$, $z=0$, dem parabolischen Zylinder $y=x^2$ und dem Paraboloid $z=x^2+y^2$;

(d) den Ebenen $y=0$, $z=0$, $y=\frac{b}{a}x$ und dem elliptischen Zylinder $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Lösung. (a) $V = \int_0^R x\,dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy = \frac{1}{8}R^4$; (b) $V = \int_0^{1/2} dy \int_0^{1-2y} (x^2+y+1)\,dx = \frac{1}{3}$;

(c) $V = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\,dy = \frac{88}{105}$; (d) $V = \int_0^a dx \int_0^{bx/a} \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dy = \frac{abc}{3}$.

18. Die gleiche Aufgabe löse man für den Körper, der begrenzt wird von

(a) dem elliptischen Zylinder $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ und den Ebenen $z=0$, $z=\lambda x+\mu y+h$ $(h>0)$;

(b) den Zylindern $az=y^2$, $x^2+y^2=r^2$ und der Ebene $z=0$;

(c) dem Teil der Fläche $xyz=a^3$, der aus der Fläche durch die Ebenen $z=p$, $z=q$ $(0<p<q)$, $x=r$, $x=s$ $(0<r<s)$ herausgeschnitten wird, der Projektion dieses Teils auf die x, y-Ebene und der durch die Projektion entstehenden Zylinderfläche.

Lösung. (a) $V = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{a^2-x^2}/a}^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} (\lambda x+\mu y+h)\,dy = \pi abh = Ph$

(wenn P den Flächeninhalt der Ellipse bezeichnet; das Ergebnis ist geometrisch einleuchtend);

(b) $V = \frac{4}{a}\int_0^r dy \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} y^2\,dx = \frac{4}{a}\int_0^r y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy = \frac{\pi r^4}{4a}$;

(c) $V = \int_r^s dx \int_{a^3/qx}^{a^3/px} \frac{a^3}{xy}\,dy = a^3 \ln\frac{q}{p}\ln\frac{s}{r}$.

19. Man bestimme das Volumen V des Körpers, der von dem Zylinder $x^2+y^2=2ax$ aus dem Rotationsparaboloid $y^2+z^2=4ax$ herausgeschnitten wird.

Lösung. Es gilt

$$V=4\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Wir bestimmen die Stammfunktion $\int\sqrt{4ax-y^2}\,\mathrm{d}y$, indem wir in der bekannten Formel

$$\int\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{b^2}{2}\arcsin\frac{y}{b}+\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}$$

$b^2=4ax$ setzen. Mit Hilfe der Stammfunktion finden wir das innere Integral (arcsin bezeichnet den Hauptwert)

$$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,\mathrm{d}y=2ax\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}+\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}\,.$$

Durch partielle Integration erhalten wir weiter

$$2a\int_0^{2a}x\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{x}{4a}}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\int_0^{2a}\frac{x^2}{\sqrt{4a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{2}\left(2a^2\arcsin\frac{x}{2a}-\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}\right)\Big|_0^{2a}=\frac{\pi a^3}{2}\,.$$

Schließlich wird

$$\frac{1}{2}\int_0^{2a}x\sqrt{4a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a^3\quad\text{und}\quad V=4\left(\frac{\pi a^3}{2}+\frac{4}{3}a^3\right)=a^3\left(2\pi+\frac{16}{3}\right).$$

20. Man bestimme das Volumen V des Körpers, den der Zylinder $x^2+y^2=Rx$ aus der Kugel $x^2+y^2+z^2=R^2$ herausschneidet (Abb. 48).[1])

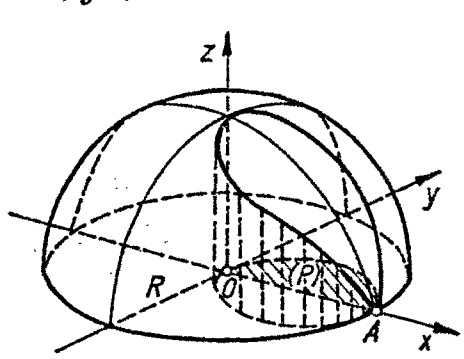

Abb. 48

Lösung. Es gilt

$$V=4\iint_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

dabei ist (P) der Halbkreis im ersten Quadranten der x, y-Ebene, der von den Kurven $y=0$ und $x^2+y^2=Rx$ begrenzt wird, d. h., es ist

$$V=4\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

[1]) Diesen Körper nennt man manchmal den *Vivianischen Körper*, nach dem italienischen Mathematiker VIVIANI, der ihn zuerst untersuchte.

Nun ist

$$\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy = \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} + \frac{y}{2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{Rx-x^2}}$$

$$= \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}} + \frac{1}{2}\sqrt{R}\,(R-x)\sqrt{x}\,.$$

Durch partielle Integration finden wir

$$\frac{1}{2}\int_0^R (R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx = \frac{\pi R^3}{12} - \frac{\sqrt{R}}{12}\int_0^R \frac{3R^2x^{1/2}-x^{5/2}}{R+x}\,dx\,.$$

Beispielsweise mit Hilfe der Substitution $x = Rt^2$ kann man den Wert des letzten Integrals leicht finden. Er ist gleich

$$\frac{\sqrt{R}}{12}\cdot 2R^2\sqrt{R}\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{16}{45}-\frac{\pi}{12}\right)R^3\,,$$

also ist

$$\frac{1}{2}\int_0^R (R^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\,dx = \left(\frac{\pi}{6}-\frac{16}{45}\right)R^3\,.$$

Weiter finden wir mühelos

$$\frac{1}{2}\sqrt{R}\int_0^R (R-x)\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{15}R^3\,,$$

so daß sich schließlich

$$V = 4\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{8}{9}R^3$$

ergibt.[1])

Bemerkung. Da das Volumen der Halbkugel gleich $\frac{2}{3}\pi R^3$ ist, wird das Volumen des Teils der Halbkugel, den man durch Herausschneiden des Vivianischen Körpers erhält, gleich $\frac{8}{9}R^3$. Es ist interessant, daß es sich rational durch den Radius R (ohne Zuhilfenahme irgendeiner Irrationalität) ausdrücken läßt.

21. Man berechne die Integrale

$$I_1 = \iint\limits_{(A)} y\,dx\,dy \quad \text{und} \quad I_2 = \iint\limits_{(A)} x\,dx\,dy$$

über das Gebiet (A), das von dem Zykloidenbogen

$$x = a\,(t-\sin t), \qquad y = a\,(1-\cos t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

und der x-Achse begrenzt wird.

Lösung. Das Besondere dieser Aufgabe besteht darin, daß der Rand des Gebiets in Parameterdarstellung gegeben ist. Die Ordinate eines Zykloidenpunktes ist aber den-

[1]) Später werden wir ein weit einfacheres Verfahren zur Berechnung dieses Volumens angeben (Nr. 611, Beispiel 6).

noch eine eindeutige und stetige Funktion der Abszisse x, $y=y(x)$. Also erhalten wir, wenn wir nach der allgemeinen Formel zu einem iterierten Integral übergehen,

$$I_1=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}y^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Um uns von der uns unbekannten Funktion $y(x)$ freizumachen und zu bekannten Funktionen zurückzukehren, führen wir die Substitution $x=a\,(t-\sin t)$ durch. Dann muß $y(x)$ durch $a\,(1-\cos t)$ ersetzt werden, und wir erhalten

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}a^2\,(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}a\,(t-\sin t)=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\,\pi a^3\,.$$

Analog ergibt sich

$$I_2=3\pi^2a^3.$$

22. Man berechne das Integral

$$K=\iint\limits_{(B)}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

wobei das Gebiet (B) von den Koordinatenachsen und dem Astroidenbogen

$$x=a\cos^3 t,\qquad y=a\sin^3 t\quad\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

begrenzt wird.

Lösung. $K=\frac{1}{80}\,a^4$.

598. Anwendungen in der Mechanik. Alle geometrischen und mechanischen Größen, die mit einer ebenen stetigen Massenbelegung einer Figur (P) zusammenhängen und additive Gebietsfunktionen sind, lassen sich im Prinzip durch Flächenintegrale über diese Figur ausdrücken. In Nr. 593 sind wir auf diese Frage bereits ausführlich eingegangen. Insbesondere sahen wir, daß die gesamte verteilte Materie durch die vorgegebene Massendichte $\varrho(M)=\varrho(x,y)$ folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$m=\iint\limits_{(P)}\varrho\,\mathrm{d}P\,. \tag{11}$$

Wir wollen hier kurz skizzieren, wie man üblicherweise Formeln dieser Art erhält. Der Gedankengang ist derselbe wie bei der Anwendung einfacher bestimmter Integrale (vgl. Nr. 348).

Man greift ein Element $(\mathrm{d}P)$ der Figur (P) heraus und macht eine Annahme, die die Rechnung vereinfacht (beispielsweise, daß die Masse des ganzen Elements in einem Punkt konzentriert oder die Massendichte innerhalb eines Elements konstant ist), so daß es möglich wird, für das Element $\mathrm{d}Q$ der gesuchten Größe Q näherungsweise einen Ausdruck in der Gestalt

$$\mathrm{d}Q=q(M)\,\mathrm{d}P$$

so anzugeben, daß der auftretende Fehler von kleinerer Größenordnung als $\mathrm{d}P$ ist. Dann wird der *genaue Wert* Q durch die Formel

$$Q=\iint\limits_{(P)}q(M)\,\mathrm{d}P$$

gegeben.

Das kann man (wie in Nr. 348) auf zweifache Weise begründen.

Einmal kann man durch Summation der Näherungsausdrücke für die Elemente $\mathrm{d}Q$

einen Näherungswert für Q in Form einer Integralsumme erhalten, und der Grenzübergang ergibt dann den genauen Wert Q als Grenzwert der Summe, d. h. als Integral.

Andererseits erlaubt der Ausdruck für das Element $\mathrm{d}Q$ den Schluß, daß $q(M)$ die Ableitung der Größe Q nach dem Gebiet (im Punkt M) ist, und daraus folgt auf Grund der Ausführungen von Nr. 593 wieder das gleiche Ergebnis.

Es ist beispielsweise leicht festzustellen, daß die Elemente der statischen Momente und der Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen durch die Beziehungen

$$\mathrm{d}M_x = y\varrho\,\mathrm{d}P, \qquad \mathrm{d}M_y = x\varrho\,\mathrm{d}P,$$
$$\mathrm{d}I_x = y^2\varrho\,\mathrm{d}P, \qquad \mathrm{d}I_y = x^2\varrho\,\mathrm{d}P$$

gegeben werden. Daraus folgt für die Momente selbst sofort

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_{(P)} y\varrho\,\mathrm{d}P, & M_y &= \iint\limits_{(P)} x\varrho\,\mathrm{d}P, \\ I_x &= \iint\limits_{(P)} y^2\varrho\,\mathrm{d}P, & I_y &= \iint\limits_{(P)} x^2\varrho\,\mathrm{d}P. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts der Figur ergeben sich dann in der üblichen Weise zu

$$\xi = \frac{\iint\limits_{(P)} x\varrho\,\mathrm{d}P}{m}, \qquad \eta = \frac{\iint\limits_{(P)} y\varrho\,\mathrm{d}P}{m}. \tag{13}$$

Im Fall einer *homogenen* Figur ($\varrho = \mathrm{const}$) vereinfachen sich diese Formeln:

$$\xi = \frac{\iint\limits_{(P)} x\,\mathrm{d}P}{P}, \qquad \eta = \frac{\iint\limits_{(P)} y\,\mathrm{d}P}{P}. \tag{14}$$

Das sind die Koordinaten des sogenannten *geometrischen* Schwerpunkts.

In einzelnen einfachen Fällen gelingt es, mit Hilfe von Flächenintegralen entsprechende Aufgaben bei dreidimensionalen Körpern zu behandeln; hierher gehören vor allem zylindrische Körper.

Es sei ein solcher Körper gegeben, der von einer Fläche $z = z(x, y)$, deren Projektion (P) auf die x, y-Ebene und der bei der Projektion entstehenden Zylinderfläche (deren Erzeugende parallel zur z-Achse sind) begrenzt wird. Wenn beispielsweise gefordert wird, das statische Moment M_{xy} eines *homogenen* Stabes zu bestimmen (der Einfachheit halber nehmen wir an, die räumliche Dichte sei gleich 1), so stellen wir uns vor, der Stab bestehe aus einer Reihe von Säulen mit der Grundfläche $\mathrm{d}P$ und der Höhe z. Das statische Moment einer Säule bezüglich der x, y-Ebene ist gleich ihrer Masse oder (was im vorliegenden Fall das gleiche ist) gleich ihrem Volumen $z\,\mathrm{d}P$, multipliziert mit dem Abstand ihres Schwerpunkts von dieser Ebene, d. h. mit $\frac{1}{2}z$. Daher ist das Element des statischen Moments gleich

$$\mathrm{d}M_{xy} = \frac{1}{2}z^2\mathrm{d}P.$$

Daraus ergibt sich durch Summation über alle Säulen und anschließenden Grenzübergang

$$M_{xy} = \frac{1}{2}\int\!\!\int\limits_{(P)} z^2\mathrm{d}P. \tag{15}$$

Analog kann man auch die Formeln

$$M_{zx} = \iint\limits_{(P)} yz\mathrm{d}P, \qquad M_{yz} = \iint\limits_{(P)} xz\mathrm{d}P \tag{15a}$$

herleiten.

Hiermit kann man leicht einen Ausdruck für die Schwerpunktskoordinaten ξ, η, ζ des Stabes angeben:

$$\xi = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{\iint\limits_{(P)} xz\,dP}{V} \quad \text{usw.}$$

Ganz genauso werden auch die Formeln für das Trägheitsmoment I_z bezüglich der z-Achse und die Trägheitsmomente I_{yz} und I_{zx} bezüglich der Koordinatenebenen hergeleitet:

$$I_z = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\,z\,dP, \qquad I_{zx} = \iint\limits_{(P)} y^2 z\,dP, \qquad I_{yz} = \iint\limits_{(P)} x^2 z\,dP\,. \tag{16}$$

Offenbar ist $I_z = I_{zx} + I_{yz}$.

Wenn die räumliche Massendichte ϱ zwar nicht konstant wäre, aber nur von x und y abhängen würde (d. h. längs einer Säule konstant wäre), so wäre es nach wie vor möglich, mit Flächenintegralen auszukommen. Im allgemeinen Fall jedoch, wenn ϱ auch von z abhängt, sind Flächenintegrale nicht mehr ausreichend, und man muß Raumintegrale zu Hilfe nehmen (vgl. Nr. 649).

599. Beispiele.

1. Die Figur (P) sei ein krummliniges Trapez, das von der Kurve $y = f(x)$, den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ und dem entsprechenden Abschnitt der x-Achse begrenzt wird. Die Dichte der über diese Figur verteilten Masse sei 1. Man bestimme die statischen Momente M_x und M_y.

Gehen wir in den Formeln (12) zu Doppelintegralen über, so erhalten wir

$$M_x = \iint\limits_{(P)} y\,dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\,,$$

$$M_y = \iint\limits_{(P)} x\,dP = \int\limits_a^b x\,dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

oder, kürzer

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx, \qquad M_y = \int\limits_a^b xy\,dx\,.$$

Damit sind wir auf die Ausdrücke für die statischen Momente zurückgekommen, die wir schon früher erhalten hatten (Nr. 351).

Wir überlassen es dem Leser, die entsprechenden Rechnungen für die Trägheitsmomente I_x und I_y durchzuführen.

2. Ein zylindrischer Stab (V) habe die ebene Figur (P) als Grundfläche und werde oben von einer beliebigen Ebene (K) begrenzt. Man beweise: Das Volumen V des Körpers ist gleich dem Produkt des Inhalts P der Grundfläche und der Länge k der Senkrechten auf der Grundfläche, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und zwar bis zum Schnitt mit der Ebene (K).

Liegen die Achsen wie gewöhnlich (Abb. 49) und hat die Gleichung der Ebene (K) die Gestalt

$$z = ax + by + c\,,$$

so gilt nach Formel (2*) aus Nr. 586

$$V = \iint\limits_{(P)} (ax+by+c)\,dP = a\iint\limits_{(P)} x\,dP + b\iint\limits_{(P)} y\,dP + c\iint\limits_{(P)} dP$$
$$= (a\xi + b\eta + c)\,P = Pk\,.$$

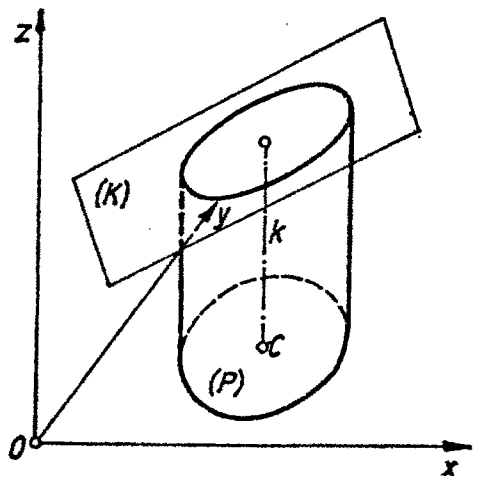

Abb. 49

3. Es seien x und x' zwei parallele Achsen vom Abstand h in der Ebene einer Figur (P), von denen x durch den Schwerpunkt der Figur gehe. Man beweise, daß die Trägheitsmomente der Figur bezüglich dieser Achsen durch die Beziehung

$$I_{x'}=I_x+h^2m$$

miteinander verknüpft sind. Hierbei bezeichnet m die Masse der Figur.

Wählt man die x-Achse als Abszissenachse, so gilt

$$I_{x'}=\iint\limits_{(P)}(y-h)^2\,\varrho\,\mathrm{d}P=I_x-2hM_x+h^2m\,.$$

Da nach Voraussetzung $M_x=0$ ist, kommen wir zu der gewünschten Beziehung.

4. Unter dem *polaren Trägheitsmoment* eines Massepunktes versteht man das Produkt der Masse des Punktes mit dem Quadrat seines Abstandes von einem Pol. Es ist klar, was man unter dem polaren Trägheitsmoment einer ebenen Figur zu verstehen hat.

Man beweise: Legt man den Pol in den Koordinatenursprung O, so gilt für das polare Trägheitsmoment

$$I_O=I_x+I_y\,.$$

5. In der x, y-Ebene sei eine beliebige Figur (P) gegeben. Man suche einen allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment dieser Figur bezüglich einer beliebigen Achse u durch O, die mit der x-Achse den Winkel θ bildet (Abb. 50).

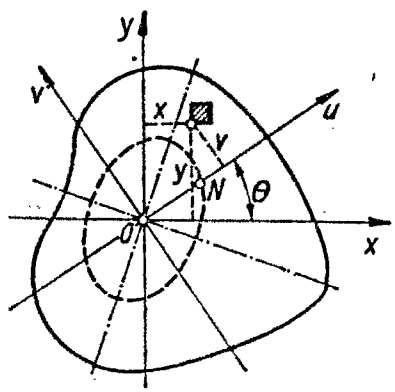

Abb. 50

Wählt man die Achse u und die zu ihr senkrechte Achse v durch O als neue Koordinatenachsen, so sind bekanntlich die neuen Koordinaten u, v mit den alten Koordinaten x, y durch die Beziehungen

$$u=x\cos\theta+y\sin\theta,\qquad v=-x\sin\theta+y\cos\theta$$

verknüpft. Daher gilt

$$I_u=\iint\limits_{(P)}v^2\varrho\,\mathrm{d}P=\cos^2\theta\cdot\iint\limits_{(P)}y^2\varrho\,\mathrm{d}P-2\sin\theta\cos\theta\cdot\iint\limits_{(P)}xy\varrho\,\mathrm{d}P+\sin^2\theta\cdot\iint\limits_{(P)}x^2\varrho\,\mathrm{d}P\,.$$

Die Koeffizienten von $\cos^2\theta$ und $\sin^2\theta$ sind, wie wir sehen, die Trägheitsmomente I_x und I_y bezüglich der Koordinatenachsen. Außer diesen tritt aber hier noch die Größe

$$K_{xy}=\iint\limits_{(P)} xy\varrho\,\mathrm{d}P$$

auf, die man *Zentrifugalmoment* (vgl. Beispiel 7) oder *Trägheitsprodukt* nennt. Also ist

$$I_u=I_x\cos^2\theta-2K_{xy}\sin\theta\cos\theta+I_y\sin^2\theta\,. \tag{17}$$

Um die Änderung des Trägheitsmoments der Figur bei einer Drehung der Achse u zu veranschaulichen, geht man folgendermaßen vor. Auf der Achse u trägt man von O aus die Strecke

$$\overline{ON}=\frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

ab (vgl. Abb. 50) und betrachtet den geometrischen Ort der so erhaltenen Punkte N. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes N mit x, y, so gilt

$$x=\overline{ON}\cos\theta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{I_u}},\qquad y=\overline{ON}\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{I_u}}\,.$$

Dividieren wir die Beziehung (17) durch I_u, so erhalten wir die Gleichung des erwähnten geometrischen Ortes:

$$I_xx^2-2K_{xy}xy+I_yy^2=1\,. \tag{18}$$

Dehnt man die Schwarzsche Ungleichung auf Flächenintegrale aus, so erkennt man leicht, daß die Diskriminante $I_xI_y-K_{xy}^2$ positiv ist; die Kurve (18) ist also eine Ellipse. Man nennt sie die *Trägheitsellipse*.

Wenn $K_{xy}=0$ ist, so erhält die Gleichung (18) die Form

$$I_xx^2+I_yy^2=1\,.$$

Sie zeigt, daß in diesem Fall die Koordinatenachsen die Achsen der Trägheitsellipse (*Hauptträgheitsachsen*) sind.

6. Man beweise folgende Aussagen bezüglich des Zentrifugalmoments K_{xy}:

(a) Ist eine der Achsen, etwa die y-Achse, eine Symmetrieachse sowohl für die Figur (P) selbst als auch für deren Massenbelegung,[1]) so ist $K_{xy}=0$.

(b) Ist der Koordinatenursprung der Schwerpunkt der Figur und sind die Achsen x_1 und y_1 durch den Punkt $O_1(a, b)$ parallel zu den ursprünglichen Achsen (Abb. 51), so gilt

$$K_{x_1y_1}=K_{xy}+ab\cdot P\,.$$

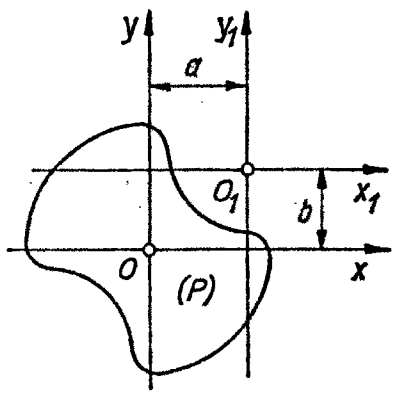

Abb. 51

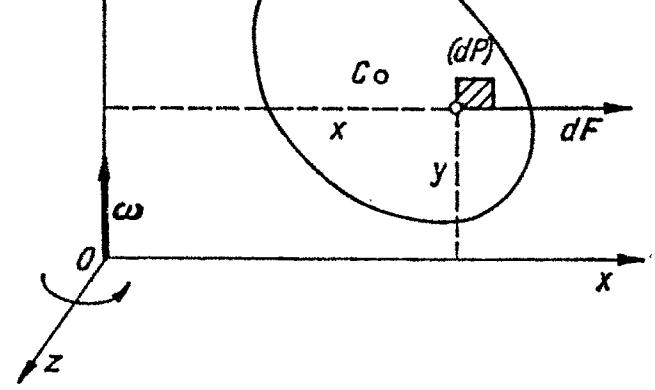

Abb. 52

[1]) So daß $\varrho(-x, y)=\varrho(x, y)$ ist.

Die Formel wird besonders einfach, wenn $K_{xy}=0$ ist, und zwar gilt dann

$$K_{x_1y_1}=ab\cdot P\,. \tag{19}$$

7. Eine ebene Figur (P) (Abb. 52), die stetig mit Materie belegt ist, rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die y-Achse. Wir wollen die dabei entstehende resultierende Zentrifugalkraft F und ihr Moment M bezüglich der z-Achse bestimmen.[1])

Für ein Element $\varrho\,\mathrm{d}P$ ist die Zentrifugalkraft gleich

$$\mathrm{d}F=\omega^2 x\varrho\,\mathrm{d}P$$

(für $x>0$ nach der einen und für $x<0$ nach der anderen Seite gerichtet), und das Moment bezüglich der z-Achse ist

$$\mathrm{d}M=\omega^2 xy\varrho\,\mathrm{d}P\,.$$

Hieraus folgt durch Summation:

$$F=\omega^2\iint\limits_{(P)} x\varrho\,\mathrm{d}P=\omega^2 M_y\,,\qquad M=\omega^2\iint\limits_{(P)} xy\varrho\,\mathrm{d}P=\omega^2 K_{xy}\,.$$

Also ist die Größe K_{xy} für $\omega=1$ das Moment der Zentrifugalkraft; daher stammt auch die Benennung „Zentrifugalmoment".

Die Zentrifugalkraft übt auf die Drehachse genau dann keine Wirkung aus, wenn die Bedingungen $M_y=0$, $K_{xy}=0$ erfüllt sind.

Die erste bedeutet, daß der Schwerpunkt der Figur auf der y-Achse liegt, und die zweite, daß diese Achse Hauptträgheitsachse ist. Also übt die Zentrifugalkraft nur dann keine Wirkung auf die Drehachse aus, wenn diese eine der Hauptträgheitsachsen bezüglich des Schwerpunkts der Figur ist.

8. Es sei (P) eine Figur, die mit der y-Achse keine Punkte gemein hat (Abb. 53). Wir betrachten den Körper, der durch Rotation der Figur (P) um die y-Achse entsteht. Man bestimme sein Volumen V und die Lage seines Schwerpunkts C^* (der trivialerweise auf der y-Achse liegt).

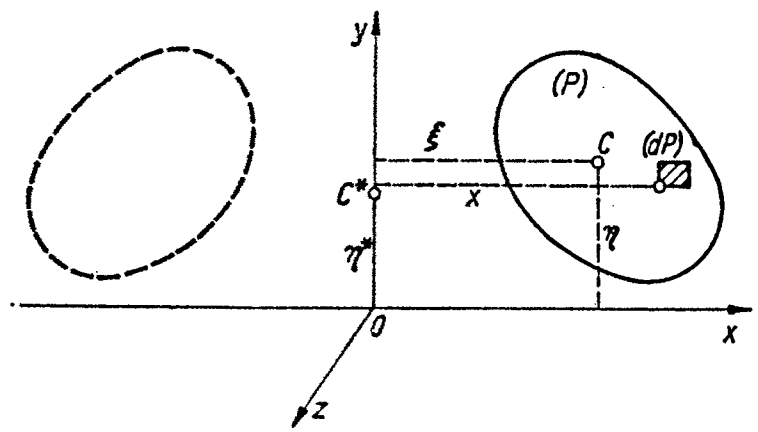

Abb. 53

Lösung. Wir betrachten zunächst den Ring, der von einem Element $(\mathrm{d}P)$ der Figur beschrieben wird. Denkt man sich diesen Ring aufgeschnitten und gestreckt, so kann man sein Volumen gleich dem Volumen eines Zylinders der Höhe $2\pi x$ mit der Grundfläche $\mathrm{d}P$ ansetzen, d. h., es ist

$$\mathrm{d}V=2\pi x\cdot\mathrm{d}P\,.$$

Daher ist

$$V=2\pi\iint\limits_{(P)} x\,\mathrm{d}P=2\pi M_y=2\pi\xi\cdot P\,,$$

[1]) Die Momente bezüglich der anderen Achsen sind offenbar gleich 0.

wobei M_y das statische Moment der Figur bezüglich der y-Achse und ξ der Abstand des Schwerpunkts C der Figur von dieser Achse ist. Damit haben wir wieder die Guldinsche Regel erhalten (Nr. 351), diesmal allerdings für eine Figur mit beliebigem Rand.

Das statische Moment des von $(\mathrm{d}P)$ erzeugten Rings bezüglich der x, z-Ebene ist offenbar gleich

$$\mathrm{d}M = y\mathrm{d}V = 2\pi xy\mathrm{d}P;$$

also ist

$$M = 2\pi \iint\limits_{(P)} xy\mathrm{d}P = 2\pi K_{xy}.$$

Folglich gilt für die Koordinate $y=\eta^*$ des Schwerpunkts C^*

$$\eta^* = \frac{M}{V} = \frac{K_{xy}}{M_y}. \tag{20}$$

9. Man wende diese Formel auf den Spezialfall an, daß die Figur (P) ein rechtwinkliges Dreieck ist (Abb. 54).

Mit den Bezeichnungen aus Abb. 54 gilt

$$M_y = \frac{bh}{2}\left(a+\frac{1}{3}b\right) = \frac{bh(3a+b)}{6}$$

(da die Lage des Schwerpunkts des Dreiecks bekannt ist). Berücksichtigen wir, daß die Hypotenuse des Dreiecks die Gleichung

$$y = \frac{h}{b}(a+b-x)$$

hat, so finden wir $K_{xy} = \dfrac{bh^2(4a+b)}{24}$. Hieraus folgt auf Grund von (20)

$$\eta^* = \frac{h}{4}\cdot\frac{4a+b}{3a+b}.$$

Wie wir sehen, ist diese Koordinate von der Koordinate $\eta = \dfrac{h}{3}$ des Schwerpunkts des Dreiecks verschieden.

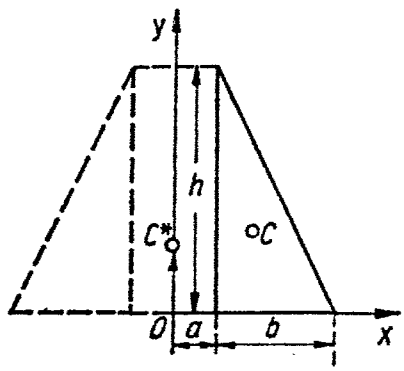

Abb. 54

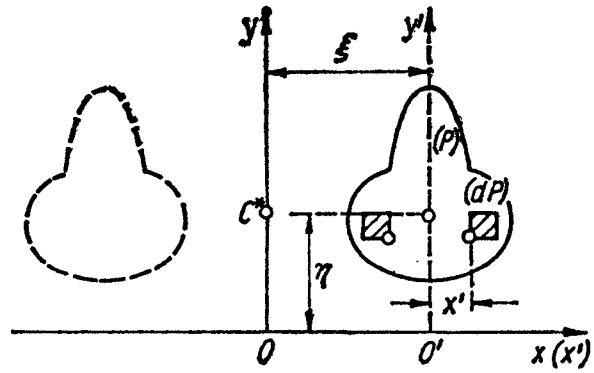

Abb. 55

10. Man beweise: Besitzt die rotierende Figur eine Symmetrieachse, die parallel zur Rotationsachse ist (Abb. 55), so ist notwendigerweise

$$\eta^* = \eta,$$

d. h., die Schwerpunkte des Körpers und der ebenen Figur liegen auf einer Höhe.

Hinweis. Das folgt aus (20) und (19), wenn man berücksichtigt, daß $K_{y'x'}=0$ ist (vgl. Beispiel 6(a)).

11. Man zeige, daß unter den gleichen Voraussetzungen das Trägheitsmoment I des Rotationskörpers der betrachteten Figur bezüglich der Rotationsachse durch die Formel $I=2\pi\xi\,(\xi^2P+3I_{y'})$ ausgedrückt wird.

12. Man wende die Formeln (15) und (15a) auf folgenden Spezialfall an: Die Grundfläche des Körpers sei das Rechteck $[0, a; 0, b]$, während der Körper oben von dem elliptischen Paraboloid

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

begrenzt wird.

Lösung. $\xi=\dfrac{3a^2q+2b^2p}{a^2q+b^2p}\cdot\dfrac{a}{4}$, $\eta=\dfrac{2a^2q+3b^2p}{a^2q+b^2p}\cdot\dfrac{b}{4}$,

$$\zeta=\frac{9a^4q^2+10a^2b^2pq+9b^4p^2}{a^2q+b^2p}\cdot\frac{1}{60pq}.$$

13. Man bestimme den Schwerpunkt eines Zylinderabschnitts (Nr. 343, Beispiel 8; Abb. 56).

Lösung. Mit den Bezeichnungen aus Abb. 56 ist $z=ky$ die Gleichung der Schnittebene, wobei $k=\tan\alpha$ ist. Die Rolle von (P) spielt hier die von dem Halbkreis $x^2+y^2=a^2$ begrenzte halbe Kreisscheibe. Es gilt

$$M_{zx}=\iint\limits_{(P)} yz\,dP=k\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dx\,dy=\frac{2k}{3}\int\limits_{0}^{a}(a^2-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{\pi}{8}ka^4,$$

$$M_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2\,dP=\frac{k}{2}\iint\limits_{(P)} yz\,dP=\frac{\pi}{16}k^2a^4,\qquad M_{yz}=0.$$

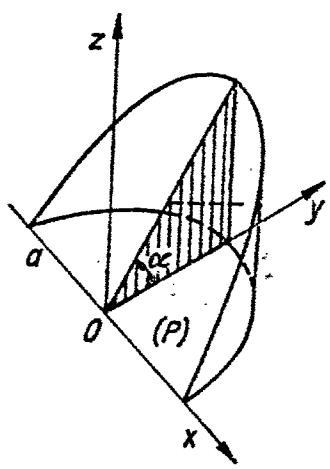

Abb. 56

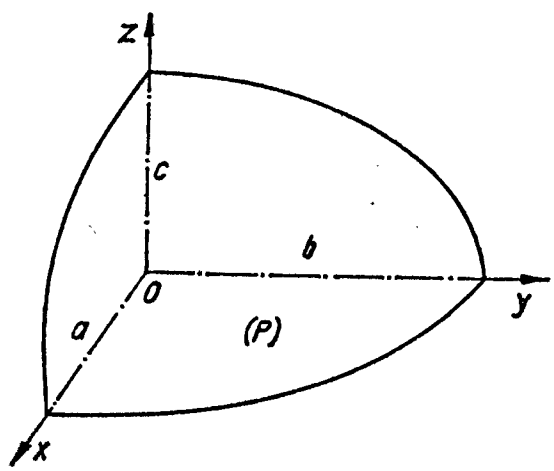

Abb. 57

Da das Volumen $V=\dfrac{2}{3}ka^3$ ist, gilt $\xi=0$, $\eta=\dfrac{3}{16}\pi a$, $\zeta=\dfrac{3}{32}\pi ka$.

14. Man bestimme den Schwerpunkt des Teils des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1,$$

der im ersten Oktanten liegt (Abb. 57).

Lösung. Das Gebiet (P) wird von den Koordinatenachsen und der Ellipse

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\qquad(0\leqq x\leqq a)$$

begrenzt; die Gleichung der Ellipsoidfläche in expliziter Form ist

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,.$$

Nach Formel (15) ist

$$M_{xy}=\frac{1}{2}c^2\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=\frac{bc^2}{3a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{\pi}{16}abc^2\,.$$

Analog ergibt sich

$$M_{yz}=\frac{\pi}{16}a^2bc,\qquad M_{zx}=\frac{\pi}{16}ab^2c\,.$$

Da für das Volumen $V=\frac{\pi}{6}abc$ gilt, wird $\xi=\frac{3}{8}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$, $\zeta=\frac{3}{8}c$.

15. Man bestimme das Trägheitsmoment eines Kreiszylinders von der Höhe h und dem Radius a bezüglich einer beliebigen Ebene, die durch seine Achse hindurchgeht (Abb. 58).

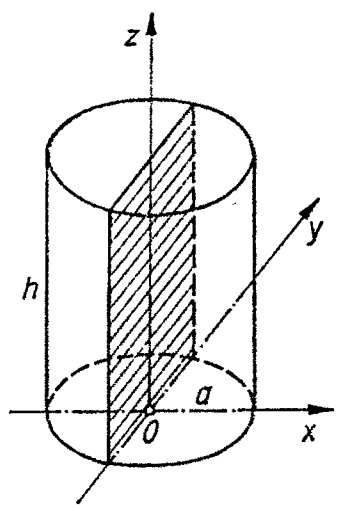

Abb. 58

Lösung. Haben wir die Koordinatenachsen so gewählt, wie es in Abb. 58 angegeben ist, so erhalten wir aus der zweiten der Formeln (16)

$$I_{xz}=\iint y^2z\,dP=h\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2dy=\frac{4}{3}h\int_0^a(a^2-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{\pi}{4}ha^4\,.$$

16. Man bestimme das Trägheitsmoment I_z des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1\,.$$

Lösung. Man kann sich auf einen Oktanten des Ellipsoids beschränken (Abb. 57) und das Ergebnis mit 8 multiplizieren. Dann wird das Gebiet (P) ein Quadrant der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1\,.$$

Es gilt

$$I_{zx}=8\iint\limits_{(P)} y^2z\,dP=\frac{8c}{a}\int\limits_0^b y^2dy\int\limits_0^{a\sqrt{1-y^2/b^2}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}\,dx$$

$$=2\pi ac\int\limits_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c\,.$$

Analog wird

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc\,,$$

und schließlich ist

$$I_z=I_{zx}+I_{yz}=\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+b^2)\,.$$

§ 3. Der Gaußsche Integralsatz

600. Herleitung des Gaußschen Satzes. Wir wollen nun eine Formel herleiten, die ein Flächenintegral mit einem Kurvenintegral verknüpft.

Wir betrachten dazu ein „krummliniges Trapez“ (D) (Abb. 59), dessen Rand (L) aus den Kurven

$$(PQ):\quad y=y_0(x)\quad (a\leqq x\leqq b)$$

und

$$(RS):\quad y=Y(x)\quad (a\leqq x\leqq b)$$

und den beiden Strecken (PS) und (QR) parallel zur y-Achse besteht.

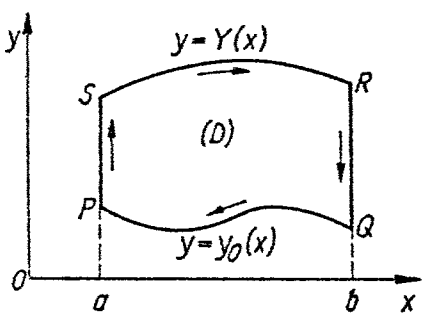

Abb. 59

Wir nehmen an, daß im Gebiet (D) eine Funktion $P(x, y)$ gegeben ist, die nebst ihrer Ableitung $\frac{\partial P}{\partial y}$ stetig ist.

Wir berechnen nun das Flächenintegral

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

nach Formel (6) aus Nr. 596; wir erhalten

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,.$$

Das innere Integral läßt sich hier leicht mit Hilfe der Stammfunktion $P(x, y)$ ausrechnen, und zwar ist

$$\int_{y_0(x)}^{Y(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = P(x, y)\Big|_{y=y_0(x)}^{y=Y(x)} = P(x, Y(x)) - P(x, y_0(x))\,.$$

Also folgt

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx dy = \int_a^b P(x, Y(x))\,dx - \int_a^b P(x, y_0(x))\,dx\,.$$

Diese beiden Integrale können durch je ein *Kurvenintegral* ersetzt werden. Erinnern wir uns nämlich an die Formel (7) von Nr. 547, so sehen wir, daß

$$\int_a^b P(x, Y(x))\,dx = \int_{(SR)} P(x, y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b P(x, y_0(x))\,dx = \int_{(PQ)} P(x, y)\,dx$$

ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx dy &= \int_{(SR)} P(x, y)\,dx - \int_{(PQ)} P(x, y)\,dx \\ &= \int_{(SR)} P(x, y)\,dx + \int_{(QP)} P(x, y)\,dx\,.\end{aligned}$$

Da wir das Integral über den ganzen Rand (L) des Gebiets (D) in die Betrachtung einführen wollen, addieren wir zur rechten Seite dieser Beziehung noch die Integrale

$$\int_{(PS)} P(x, y)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{(RQ)} P(x, y)\,dx\,,$$

die offenbar gleich 0 sind, da die Strecken (PS) und (RQ) auf der x-Achse senkrecht stehen (siehe Nr. 547). Wir erhalten

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx dy = \int_{(PS)} P dx + \int_{(SR)} P dx + \int_{(RQ)} P dx + \int_{(QP)} P dx\,.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Integral über die geschlossene Kurve (L), die das Gebiet (D) begrenzt, aber in *negativer* Richtung. In Übereinstimmung mit der Vereinbarung, die wir hinsichtlich der Bezeichnung von Kurvenintegralen über geschlossene Kurven getroffen haben (Nr. 548), können wir schließlich die erhaltene Formel wie folgt schreiben:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx dy = -\int_{(L)} P(x, y)\,dx\,. \tag{1}$$

Obwohl diese Formel unter der Voraussetzung hergeleitet worden ist, daß die Achsen ein Rechtssystem bilden, gilt sie, wie man sich leicht überzeugen kann, ohne Änderung auch für ein Linkssystem (es wird nur der positive Umlaufssinn der Kurve ein anderer).

Die hergeleitete Formel gilt auch für Gebiete von allgemeinerer Form als das bisher betrachtete: Es genügt vorauszusetzen, daß das Gebiet (D) durch Parallelen zur y-Achse in *endlich* viele krummlinige Trapeze der angegebenen Form zerlegt

werden kann. Wir werden auf den Beweis dieser Tatsache nicht eingehen, da er ganz genauso geführt wird wie in Nr. 551 bei der Verallgemeinerung der Formel, die den Flächeninhalt durch ein Kurvenintegral ausdrückt. Der Bereich (D) kann auch mehrfach zusammenhängend sein.

Analog beweist man auch die Formel

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{(L)} Q(x, y)\,dy \tag{2}$$

unter der Voraussetzung, daß die Funktion Q und ihre partielle Ableitung $\frac{\partial Q}{\partial x}$ im Gebiet (D) stetig sind. Dabei wird jetzt das Gebiet (D) zunächst als krummliniges Trapez der in Abb. 60 dargestellten Form angenommen. Es wird von Kurven

$$(PS): \quad x = x_0(y) \quad (c \leqq y \leqq d)$$

und

$$(QR): \quad x = X(y) \quad (c \leqq y \leqq d)$$

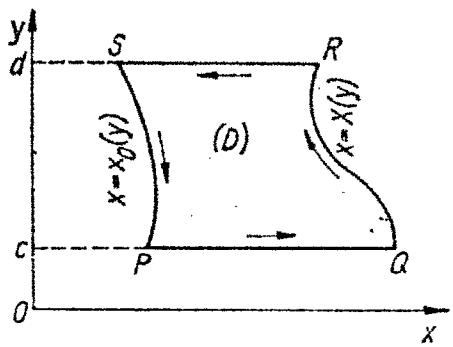

Abb. 60

und zwei Strecken (PQ) und (RS) parallel zur x-Achse begrenzt. Danach läßt sich die Formel wie oben auf den Fall verallgemeinern, daß das Gebiet durch Parallelen zur x-Achse in endlich viele krummlinige Trapeze dieser Art zerlegt werden kann.

Genügt das Gebiet (D) gleichzeitig den Bedingungen beider Fälle, d. h., *läßt es sich sowohl in endlich viele Trapeze der ersten Art als auch* (unabhängig davon) *in endlich viele Trapeze der zweiten Art zerlegen*, so gelten für (D) beide Formeln (1) und (2), natürlich unter der Voraussetzung, daß die Funktionen P, Q und ihre Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ stetig sind. Durch Subtraktion der Formel (1) von (2) erhalten wir

$$\int\limits_{(L)} (P\,dx + Q\,dy) = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,. \tag{3}$$

Das ist der *Gaußsche Integralsatz.*[1])

Die Formeln in Nr. 551, die den Flächeninhalt durch Kurvenintegrale ausdrücken, erhält man hieraus leicht als Spezialfälle. Beispielsweise kommen wir zu Formel (9) aus Nr. 551, wenn wir $P = -y$, $Q = 0$ setzen und die triviale Gleichung $\iint\limits_{(D)} dx\,dy = D$ benutzen.

---

[1]) Er wird gelegentlich auch nach GREEN oder RIEMANN benannt.

Auch hier kann man, wie in Nr. 551, den Bedingungen, unter denen (3) gilt, eine besser zu überblickende Form geben, und zwar kann man beweisen, daß *der Gaußsche Satz für jedes Gebiet* (D) *gilt, dessen Rand aus einer oder mehreren stückweise glatten Kurven besteht.*

Es sei (L) der gesamte Rand unseres Gebiets. Wir wiederholen die Überlegungen von Nr. 551, beschreiben in (L) einen Polygonzug (Δ) ein (der zwei vorher festgelegte Eckpunkte hat) und betrachten das von diesem begrenzte Vieleck (Δ). Wir setzen der Einfachheit halber voraus, daß die Funktionen P und Q auch außerhalb des Gebiets (D), etwa in irgendeinem (D) umfassenden Rechteck (R), definiert und stetig sind und daß sie dort stetige Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ besitzen.[1]) Man kann annehmen, daß auch (Δ) in (R) enthalten ist. Da das Vieleck offenbar sowohl in Trapeze der einen als auch in Trapeze der anderen Art zerlegt werden kann, darf man darauf den Gaußschen Satz anwenden:

$$\int_{(\Delta)} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy] = \iint_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy\,. \tag{4}$$

Wenn die Länge der längsten Seite des Polygonzuges (Δ) gegen 0 strebt, so konvergiert nach dem Lemma aus Nr. 550 (und der dazugehörigen Bemerkung) die linke Seite von (4) gegen die linke Seite von (3).

Andererseits kann man, wie wir in Nr. 551 gesehen haben, den Polygonzug (Δ) so wählen, daß er außerhalb eines Vielecks (A) und innerhalb eines Vielecks (B) liegt, die dem Gebiet (D) ein- bzw. umbeschrieben sind und deren Inhalte sich beliebig wenig unterscheiden:

$$B - A < \varepsilon\,.$$

Man kann annehmen, daß (A) und (B) in dem oben erwähnten Rechteck (R) liegen. Es gilt, wenn man zur Abkürzung $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f$ setzt,

$$\begin{aligned}\left| \iint_{(D)} f\,dx dy - \iint_{(A)} f\,dx dy \right| &= \left| \iint_{(D)-(A)} f\,dx dy - \iint_{(\Delta)-(A)} f\,dx dy \right| \\ &\leqq \iint_{(D)-(A)} |f|\,dx dy + \iint_{(\Delta)-(A)} |f|\,dx dy \\ &\leqq 2 \iint_{(B)-(A)} |f|\,dx dy < 2M\varepsilon\,,\end{aligned}$$

wobei M das Maximum von $|f|$ auf (R) ist. Hieraus folgt, daß bei dem erwähnten Grenzübergang auch die rechte Seite von (4) gegen die rechte Seite von (3) konvergiert. Damit ist die Gültigkeit dieser Formel bewiesen.

601. Die Anwendung des Gaußschen Satzes bei der Untersuchung von Kurvenintegralen. Wir betrachten ein einfach zusammenhängendes (Nr. 559) offenes Gebiet (G) und setzen voraus, daß in ihm Funktionen P und Q gegeben sind, die nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ stetig sind. Wir stellen noch einmal (Nr. 561) die Frage:

[1]) In Wirklichkeit ist diese Voraussetzung für die Gültigkeit des Satzes unwesentlich.

Welchen Bedingungen müssen die Funktionen P und Q genügen, damit das Kurvenintegral

$$\int_{(L)} (P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y) \tag{5}$$

über eine beliebige einfache geschlossene Kurve (L), die ganz in (G) liegt, verschwindet?

Da wir das zugrunde liegende Gebiet (G) als einfach zusammenhängend vorausgesetzt haben, gehört das Gebiet (D), das von der Kurve (L) von außen begrenzt wird, ebenfalls zu (G), so daß wir darauf den Gaußschen Satz anwenden dürfen[1]; dadurch wird das Kurvenintegral (5) durch das Flächenintegral

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

ersetzt. Damit ein solches Integral immer verschwindet, ist offenbar die Voraussetzung *hinreichend*, daß

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{A}$$

ist.

Daß die Bedingung (A) notwendig ist, kann man am einfachsten beweisen, indem man unter der Voraussetzung, daß das Integral (6) gleich 0 ist, nach dem Gebiet differenziert (Nr. 593): Der Integrand muß als „Ableitung" des Integrals (6) selbst identisch verschwinden.

Damit haben wir, wenn man das Lemma aus Nr. 561 berücksichtigt, erneut bewiesen, daß *die Bedingung* (A) *notwendig und hinreichend dafür ist, daß Integrale der Form* (5) *über eine beliebige geschlossene Kurve verschwinden, wenn nur das zugrundeliegende Gebiet* (G) *einfach zusammenhängend ist* (Nr. 561, Satz 5). Nach Satz 4 aus Nr. 561 *ist die Bedingung* (A) *unter den gleichen Voraussetzungen bezüglich des Gebiets auch notwendig und hinreichend dafür, daß das Kurvenintegral*

$$\int_{(AB)} (P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y)$$

über eine Kurve (AB), die die Punkte A und B verbindet, nicht von der Form des Integrationsweges abhängt (Nr. 560, Satz 3).

Der Gaußsche Satz erlaubte es, dies direkt zu beweisen und alle Überlegungen zu vermeiden, die mit der Integration vollständiger Differentiale zusammenhängen. Dabei wurde nochmals die Rolle der Voraussetzung über den *einfachen Zusammenhang* des zugrundeliegenden Gebiets beleuchtet.

Jetzt kann man umgekehrt hieraus mit Hilfe der Betrachtungen von Nr. 556 beweisen, daß die Bedingung (A) für die Integrabilität von $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ *hinreichend* ist (Nr. 560, Satz 2). Daß sie *notwendig* ist, ist unmittelbar klar.

602. Beispiele und Ergänzungen.

1. Man prüfe den Gaußschen Satz für die Funktionen

$$\text{(a) } P=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2};\qquad \text{(b) } P=\frac{x}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{y}{x^2+y^2}$$

im Kreis vom Radius 1 um den Koordinatenursprung nach.

[1]) Der Leser beachte, in welcher Weise hier der einfache Zusammenhang des Gebiets (G) benutzt wird.

Hinweis. In beiden Fällen ist $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, so daß das Flächenintegral verschwindet. Das Kurvenintegral über den Kreis

$$x=\cos t, \qquad y=\sin t \qquad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

ist jedoch nur im Fall (b) gleich 0, im Fall (a) dagegen gleich 2π.

Das stammt daher, daß der Gaußsche Satz unter der Voraussetzung hergeleitet worden ist, daß die betrachteten Funktionen und ihre Ableitungen stetig sind, während hier in beiden Fällen diese Bedingung im Koordinatenursprung verletzt ist (P und Q existieren dort nicht). Im Fall (a) gilt der Gaußsche Satz tatsächlich nicht; es ist interessant, daß er, wie im Fall (b), auch gültig sein kann, wenn die Stetigkeitsvoraussetzung verletzt ist (vgl. Nr. 565, Beispiel 13).

2. Man transformiere den Gaußschen Satz auf die Form

$$\text{(a)} \quad \iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{(L)}(Pdy-Qdx)$$

oder

$$\text{(b)} \quad \iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{(L)}[P\cos(x,\nu)+Q\sin(x,\nu)]\,ds$$

(wobei ν die Richtung der äußeren Normalen bezeichnet).

Hinweis. Man ersetze P durch $-Q$ und Q durch P; danach benutze man die Formel (15) aus Nr. 553 zur Transformation des Kurvenintegrals zweiter Art in ein Kurvenintegral erster Art. Man beachte die Normalenrichtung.

3. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes beweise man die Formeln

$$\text{(a)} \quad \iint\limits_{(D)}\Delta u\,dxdy=\int\limits_{(L)}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

$$\text{(b)} \quad \iint\limits_{(D)}v\Delta u\,dxdy=-\iint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\int\limits_{(L)}v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds,$$

$$\text{(c)} \quad \iint\limits_{(D)}(v\Delta u-u\Delta v)\,dxdy=\int\limits_{(L)}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)ds,$$

wenn

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \nu}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(x,\nu)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(x,\nu)$$

ist. Dabei seien u und v nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig.

Hinweis. (b) ergibt sich aus Beispiel 2 (b), wenn man dort $P=v\frac{\partial u}{\partial x}$ und $Q=v\frac{\partial u}{\partial y}$ setzt; (a) ist ein Spezialfall von (b) ($v=1$); (c) erhalten wir, indem wir in (b) die Rollen von u und v vertauschen und das Ergebnis von (b) subtrahieren.

4. Eine Funktion u, die einschließlich ihrer Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist und in dem betrachteten Gebiet der Gleichung $\Delta u=0$ genügt, nennt man in diesem Gebiet *harmonisch*.

Unter der Voraussetzung, daß die Funktion u im Gebiet (G) stetige Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ besitzt, beweise man folgenden Satz: *Die Funktion* $u=u(x,y)$

ist genau dann harmonisch, wenn für jede einfache geschlossene Kurve (L) *die Bedingung*

$$\int_{(L)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds = 0$$

erfüllt ist.

Hinweis. Man benutze die Formel 3(a).

5. *Wenn eine Funktion* $u = u(x, y)$ *in einem abgeschlossenen Bereich* (D), *d. h. in einem umfassenderen offenen Gebiet, harmonisch ist, so sind ihre Werte im Innern des Bereichs* (D) *eindeutig durch ihre Werte auf dem Rand* (L) *bestimmt.*

Mit anderen Worten: Zwei im Gebiet (D) harmonische Funktionen u_1 und u_2, die auf dem Rand (L) die gleichen Werte annehmen, sind im ganzen Gebiet identisch.

Durch Einführung der Differenz $u = u_1 - u_2$ reduzieren wir das Problem auf den Beweis dafür, daß *eine im Gebiet* (D) *harmonische Funktion, die auf dem Rand* (L) *verschwindet, im ganzen Gebiet identisch* 0 *ist.*

Wir setzen in Formel 3(b) die Funktionen u und v gleich: $v = u$. Berücksichtigen wir die Bedingungen für u, so erhalten wir

$$\int_{(D)}\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = 0\,.$$

Hieraus folgt, daß im ganzen Gebiet (D)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ist, folglich ist u eine Konstante. Da u auf (L) verschwindet, ist also u überall gleich 0. Wenn also die Randwerte die Funktion u bestimmen, dann eindeutig.

6. Es sei u eine harmonische Funktion im Gebiet (G), (x_0, y_0) irgendein innerer Punkt dieses Gebiets und (K_R) der Kreis vom Radius R um diesen Punkt.[1]) Dann gilt die wichtige Formel

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{(K_R)} u(x, y)\,ds\,, \tag{7}$$

d. h., *der Wert der harmonischen Funktion im Mittelpunkt ist das „arithmetische Mittel" ihrer Werte auf dem Kreis.* Das wollen wir jetzt beweisen.

Wir setzen $v = \ln r$, wobei $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ist. Es ist leicht nachzuprüfen, daß v eine harmonische Funktion in dem Gebiet ist, das man aus der Ebene durch Herausnehmen des Punktes (x_0, y_0) erhält. In diesem Punkt existiert die Funktion nicht. Sie strebt dort gegen $-\infty$.

Wir umgeben den Punkt (x_0, y_0) mit einem Kreis (k_ϱ) vom Radius ϱ $(\varrho < R)$ und wenden auf das Gebiet (D) zwischen den Kreisen (K_R) und (k_ϱ) die Formel 3 (c) an; der Rand (L) ist die Vereinigung von (K_R) und (k_ϱ). Da in diesem Gebiet die beiden Funktionen u und v harmonisch sind, erhalten wir links 0. Rechts verschwindet das Integral

$$\int_{(L)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds\,,$$

denn beispielsweise auf dem Kreis (K_R) ist $v = \ln R = \text{const}$ und (unter Berücksichtigung von Beispiel 4)

$$\int_{(K_R)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds = 0\,.$$

[1]) Der Radius R wird als so klein vorausgesetzt, daß (K_R) ganz im Gebiet (G) liegt.

Andererseits gilt

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=\frac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R}=\frac{1}{R}\text{ auf }(K_R)\quad\text{und}\quad\frac{\partial v}{\partial \nu}=-\frac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=\varrho}=-\frac{1}{\varrho}\text{ auf }(k_\varrho);$$

also erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{\varrho}\int\limits_{(k_\varrho)} u\,\mathrm{d}s=\frac{1}{R}\int\limits_{(K_R)} u\,\mathrm{d}s\,.$$

Für hinreichend kleines ϱ unterscheidet sich die Funktion u auf dem Kreis (k_ϱ) beliebig wenig von dem Wert $u(x_0, y_0)$ im Mittelpunkt, die linke Seite strebt also für $\varrho\to 0$ gegen den Grenzwert $2\pi\cdot u(x_0, y_0)$. Durch diesen Grenzübergang wird die Behauptung bewiesen.

7. Das in Aufgabe 6 bewiesene Ergebnis läßt eine interessante Schlußfolgerung zu: *Ist eine Funktion $u(x, y)$ in einem abgeschlossenen Gebiet (D) mit dem Rand (L) stetig und im Inneren dieses Gebiets harmonisch, so kann die Funktion ihr Maximum (Minimum) nicht im Inneren des Gebiets annehmen, es sei denn, sie sei eine Konstante.*

Wenn nämlich die erwähnte Funktion $u(x, y)$ nicht konstant wäre und etwa ihr Maximum in einem *inneren* Punkt (x_0, y_0) annähme, so könnte man leicht zu einem Widerspruch zu Formel (7) gelangen.

Nun können wir auch das Ergebnis von Aufgabe 5 verschärfen. Die Funktion u sei jetzt im abgeschlossenen Bereich (D) stetig, aber nur im Inneren des Gebiets harmonisch. Auch hier genügt es zu beweisen, daß die Funktion u identisch 0 ist, wenn sie auf dem Rand verschwindet. Das folgt aber aus der Überlegung, daß sie andernfalls im Widerspruch zu der oben gemachten Bemerkung ihren größten oder kleinsten Wert im *Inneren* des Gebiets annehmen würde.

§ 4. Variablentransformation in Flächenintegralen

603. Transformation ebener Gebiete. Wir nehmen an, es seien zwei Ebenen gegeben, von denen die eine auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) und die andere auf ein ebensolches System (ξ, η) bezogen ist. Wir betrachten in diesen Ebenen zwei *abgeschlossene* Bereiche: einen Bereich (D) in der x, y-Ebene und einen Bereich (Δ) in der ξ, η-Ebene. Jeder dieser Bereiche darf auch unbeschränkt und insbesondere gleich der vollen Ebene sein. Wir wollen voraussetzen, der Rand des Bereichs (wenn nicht der Fall der vollen Ebene vorliegt) sei eine einfache stückweise glatte Kurve; wir bezeichnen sie für den Bereich (D) mit (S) und für den Bereich (Δ) mit (Σ); vgl. Abb. 61.

Wir nehmen an, im Gebiet (Δ) sei ein System stetiger Funktionen

$$x=x(\xi, \eta),\qquad y=y(\xi, \eta)\tag{1}$$

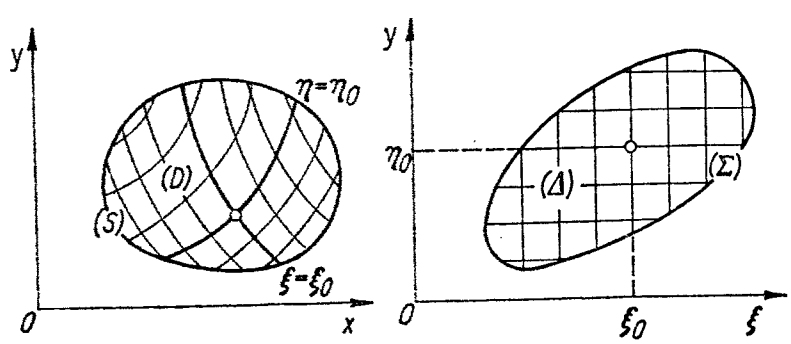

Abb. 61

gegeben, das jedem Punkt (ξ, η) des Bereichs (Δ) einen bestimmten Punkt (x, y) aus (D) zuordnet, und zwar so, daß kein Punkt (x, y) aus (D) ausgelassen wird, daß also jeder solche Punkt wenigstens einem Punkt (ξ, η) aus (Δ) zugeordnet ist. Wenn verschiedenen Punkten (ξ, η) verschiedene Punkte (x, y) entsprechen (was wir in Zukunft voraussetzen wollen), wenn also jeder Punkt (x, y) nur einem Punkt (ξ, η) zugeordnet ist, so sind die Formeln (1) *eindeutig nach* ξ *und* η *auflösbar*. Die Veränderlichen ξ und η sind also ihrerseits eindeutige Funktionen von x und y in (D):

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y)\,. \tag{1a}$$

Somit besteht zwischen den Bereichen (D) und (Δ) eine *umkehrbar eindeutige* oder *eineindeutige* Beziehung. Man sagt auch, daß die Formeln (1) eine *Abbildung des Bereichs* (Δ) *auf den Bereich* (D) vermitteln, während die Formeln (1a) die (dazu *inverse*) *Abbildung des Bereichs* (D) *auf dem Bereich* (Δ) liefern.

Wenn die genannten Bereiche gleich den entsprechenden Ebenen sind, so handelt es sich um eine *Abbildung einer Ebene auf eine andere*. Wenn schließlich beide Ebenen zusammenfallen, d. h., wenn man die Punkte (x, y) und (ξ, η) als Punkte ein und derselben Ebene ansieht, so liegt eine *Abbildung der Ebene auf sich selbst* vor.

Wir wollen weiter voraussetzen, daß die Funktionen (1) und (1a) nicht nur stetig sind, sondern auch stetige partielle Ableitungen (erster Ordnung) besitzen. Dann gilt bekanntlich (Nr. 203, Formel (4))

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} \cdot \frac{\mathrm{D}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(x, y)} = 1;$$

also sind beide Funktionaldeterminanten von 0 verschieden, und sie haben auf Grund der Stetigkeit stets dasselbe Vorzeichen.

Aus der Tatsache, daß die Determinante

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{2}$$

von 0 verschieden ist, folgt bereits, daß einem *inneren* Punkt (ξ_0, η_0) des Bereichs (Δ) auf Grund der Formeln (1) ein *innerer* Punkt des Bereichs (D) entspricht; denn nach dem Satz über implizite Funktionen (Nr. 208) sind die Variablen ξ und η durch diese Formeln in einer Voll-Umgebung des Punktes (x_0, y_0) als eindeutige Funktionen von x und y bestimmt. Analog entspricht einem *inneren* Punkt des Bereichs (D) immer ein *innerer* Punkt des Bereichs (Δ). Daraus folgt, daß Punkten des Randes (Σ) wieder Punkte des Randes (S) entsprechen müssen und umgekehrt.

Ist (Λ) eine einfache stückweise glatte Kurve im Bereich (Δ), so ist ihr Bild bei der Abbildung (1) eine ebensolche Kurve (L) im Bereich (D). Sind nämlich

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta \text{ oder } \alpha \geqq t \geqq \beta) \tag{3}$$

die Gleichungen der Kurve (Λ), so darf man annehmen, daß die Funktionen $\xi(t)$ und $\eta(t)$ stetige Ableitungen haben, die *nicht gleichzeitig verschwinden* (indem man sich auf ein *glattes* Stück der Kurve beschränkt). Setzen wir diese Funktionen in die Transformationsformeln (1) ein, so erhalten wir die Parameterdarstellung der

zugehörigen Kurve (L),

$$x=x(\xi(t),\eta(t))=x(t), \qquad y=y(\xi(t),\eta(t))=y(t)\,. \tag{4}$$

Wie man leicht sieht, besitzen diese Funktionen ebenfalls stetige Ableitungen

$$x'(t)=\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\xi'(t)+\frac{\partial x}{\partial \eta}\,\eta'(t), \qquad y'(t)=\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial \eta}\,\eta'(t)\,. \tag{5}$$

Auch diese können nicht gleichzeitig verschwinden, so daß also auf der Kurve (L) keine singulären Punkte liegen können. Weil die Determinante $\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}$ von 0 verschieden ist, würde nämlich andernfalls aus (5) folgen, daß gleichzeitig $\xi'=0$ und $\eta'=0$ ist, und das ist unmöglich.

Wenn der Punkt (ξ,η) in der ξ,η-Ebene eine *geschlossene* Kurve (Δ) etwa in positiver Richtung durchläuft, so durchläuft der entsprechende Punkt (x,y) ebenfalls irgendeine *geschlossene* Kurve (L) in der x,y-Ebene; *seine Umlaufrichtung kann jedoch sowohl positiv als auch negativ sein.* Dies hängt, wie wir später sehen werden (Nr. 606, 1°), von dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante (2) ab.

Die Angabe eines Wertepaares der Veränderlichen ξ und η aus dem Bereich (Δ) bestimmt eindeutig irgendeinen Punkt des Gebiets (D) in der x,y-Ebene (und umgekehrt). Das berechtigt uns, auch die Zahlen ξ,η *Koordinaten der Punkte* des Bereichs (D) zu nennen. Im Grunde genommen liefern uns die Gleichungen (1) eine Parameterdarstellung[1]) der ebenen Figur (D); sie ist ein Spezialfall der Parameterdarstellung von Flächen, die bereits behandelt wurde (Nr. 228).

Wie dort wird eine Kurve, die aus solchen Punkten besteht, deren eine Koordinate einen festen Wert hat, eine *Koordinatenlinie* genannt. Beispielsweise erhalten wir die Parameterdarstellung einer Koordinatenlinie, wenn wir in (1) $\eta=\eta_0$ setzen:

$$x=x(\xi,\eta_0), \qquad y=y(\xi,\eta_0)$$

(die Rolle des Parameters spielt hier ξ). Eine implizite Gleichung derselben Linie erhalten wir, wenn wir in der zweiten der Gleichungen (1a) $\eta=\eta_0$ setzen:

$$\eta(x,y)=\eta_0\,.$$

Da die Koordinatenlinien im allgemeinen gekrümmt sind, nennt man auch in diesem Fall (wie im Fall einer krummen Fläche) die Zahlen ξ,η, die die Lage eines Punktes in der x,y-Ebene charakterisieren, *krummlinige Koordinaten des Punktes.*

Zu verschiedenen (zulässigen) festen Werten der Koordinate η gehört ein ganzes System von Koordinatenlinien in der x,y-Ebene. Halten wir den Wert der Koordinate ξ fest, so erhalten wir ein anderes System von Koordinatenlinien. Liegt eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den betrachteten Bereichen vor, so schneiden verschiedene Kurven ein und desselben Systems einander nicht, und durch jeden Punkt des Bereichs (D) geht je eine Linie eines jeden Systems, die sich unter einem von 0 verschiedenen Winkel schneiden.

Das gesamte Netz der Koordinatenlinien in der x,y-Ebene ist das Bild des Netzes der Geraden $\xi=\text{const}$ und $\eta=\text{const}$ in der ξ,η-Ebene (Abb. 61).

[1]) Wenn man zu ihnen noch die Gleichung $z=0$ hinzufügt.

604. Beispiele.

1. Das einfachste und wichtigste Beispiel krummliniger Koordinaten sind die *Polarkoordinaten* r, θ. Man kann sie anschaulich geometrisch als polaren Radiusvektor und als polaren Winkel deuten, man kann sie aber auch formal mit Hilfe der bekannten Beziehungen

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (r \geqq 0)$$

einführen.

Wenn man die Werte r und θ auf zwei zueinander senkrechten Achsen abträgt und annimmt, daß etwa r die Abszisse und θ die Ordinate ist (bei Rechtsorientierung der Achsen), so entspricht jedem Punkt der Halbebene $r \geqq 0$ nach den angegebenen Formeln genau ein bestimmter Punkt der x, y-Ebene.

Der Leser wird mit den diesbezüglichen Koordinatenlinien wahrscheinlich bereits zu tun gehabt haben: Den Geraden $r = \text{const} > 0$ entsprechen Kreise vom Radius r um den Koordinatenursprung O, den Geraden $\theta = \text{const}$ entsprechenden Strahlen, die vom Koordinatenursprung ausgehen und mit der x-Achse den Winkel θ bilden (Abb. 62).

Jedoch sind im vorliegenden Fall die Transformationsformeln im allgemeinen nicht eindeutig auflösbar: Eine Änderung der Größe des Winkels θ um $2k\pi$ (wobei k eine ganze Zahl ist) ändert die Werte x und y nicht. Um alle Punkte der x, y-Ebene zu erhalten, genügt es, sich auf die Werte

$$r \geqq 0, \qquad 0 \leqq \theta < 2\pi$$

zu beschränken. Jedem vom Koordinatenursprung verschiedenen Punkt (x, y) entspricht ein einziger Wert $r > 0$ und ein einziger Wert θ in den angegebenen Grenzen. Eine nicht zu behebende Verletzung der Eindeutigkeit der Beziehung liegt jedoch im Koordinatenursprung vor: Dem Punkt $x = y = 0$ entspricht in der r, θ-Ebene die ganze θ-Achse (oder, wenn man so will, ihr Abschnitt von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$).

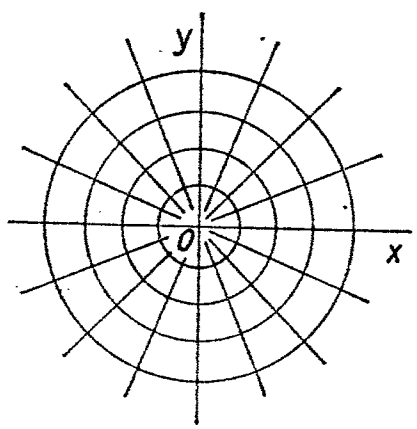

Abb. 62

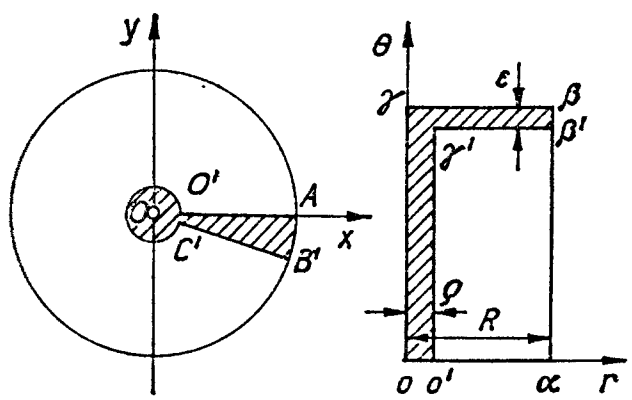

Abb. 63

Wir betrachten in der r, θ-Ebene das abgeschlossene Rechteck $[0, R; 0, 2\pi]$ oder $o\alpha\beta\gamma$ (Abb. 63); wie man leicht sieht, entspricht ihm in der x, y-Ebene die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $R = OA$ um den Koordinatenursprung O. Jedoch entspricht der Rand dieses Kreises nur der Seite $\alpha\beta$ des erwähnten Rechtecks; den Seiten $o\alpha$ und $\beta\gamma$ entspricht (beiden!) ein und derselbe Radius OA des Kreises, und der Seite $o\gamma$ schließlich entspricht allein der Punkt O. Hier sind die im vorigen Abschnitt angegebenen Bedingungen offensichtlich nicht erfüllt.

Verschiebt man aber die Seite $o\gamma$ um einen kleinen Betrag $\varrho = oo'$ und die Seite $\gamma\beta$ um $\varepsilon = \beta\beta'$, so entspricht dem neuen Rechteck $o'\alpha\beta'\gamma'$ in der x, y-Ebene eine Figur $O'AB'C'$, die man erhält, wenn man aus dem Kreis einen kleinen Kreis von Radius ϱ und einen Kreissektor vom Zentriwinkel ε herausschneidet. Jetzt sind alle obengenannten Forderungen erfüllt. Verschiebt man einen Punkt in der r, θ-Ebene längs der

Strecken $\alpha\beta'$, $\beta'\gamma'$, $\gamma'o'$ und $o'\alpha$, so beschreibt der entsprechende Punkt in der x, y-Ebene der Reihe nach den Bogen AB' (Radius R), die Strecke $B'C'$, den Bogen $C'O'$ (Radius ϱ) und die Strecke $O'A$. Wir bemerken nebenbei, daß dem positiven Umlaufsinn in der r, θ-Ebene der positive Umlaufsinn in der x, y-Ebene entspricht.

Für die Funktionaldeterminante gilt im vorliegenden Fall

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r;$$

sie ist (wenn man den Koordinatenursprung ausschließt) durchweg positiv.

2. Wir betrachten die Abbildung der Ebene auf sich selbst, die durch die Formeln

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \qquad y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

definiert wird (ξ und η sollen nicht gleichzeitig 0 sein).

Läßt man die x-Achse mit der ξ-Achse und die y-Achse mit der η-Achse zusammenfallen, so hat diese Abbildung eine anschauliche geometrische Bedeutung. Wegen

$$x^2+y^2 = \frac{1}{\xi^2-\eta^2} \quad \text{und} \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta}$$

ist klar, daß einander entsprechende Punkte immer auf demselben Strahl vom Koordinatenursprung aus liegen und daß das Produkt ihrer Abstände vom Koordinatenursprung gleich 1 ist. Diese Abbildung nennt man *Abbildung durch reziproke Radien* oder *Inversion* am Einheitskreis. Sie ist eindeutig umkehrbar:

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2+y^2}$$

(wobei jetzt x und y nicht gleichzeitig 0 sein sollen).

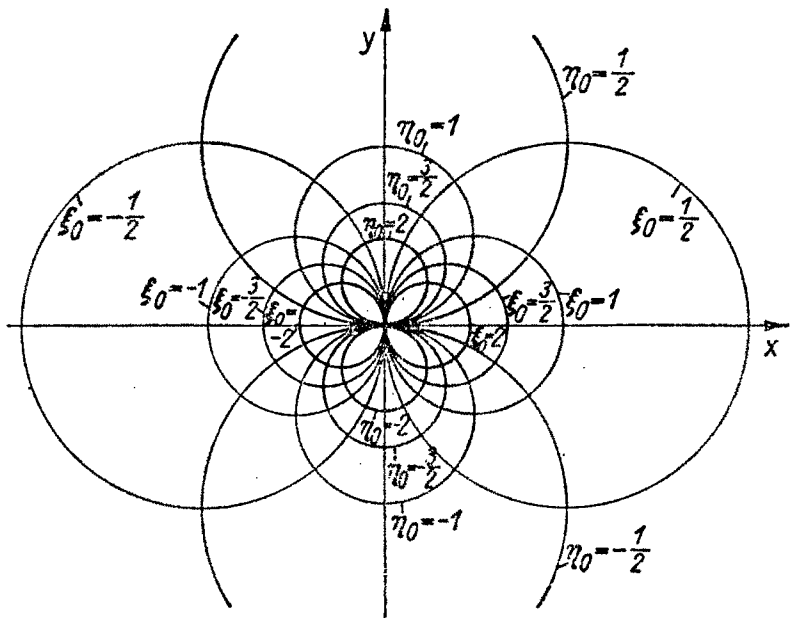

Abb. 64

Die Koordinatenlinien sind Kreise durch den Koordinatenursprung, deren Mittelpunkte auf der x- bzw. y-Achse liegen (Abb. 64):

$$x^2+y^2-\frac{1}{\xi_0}x = 0 \qquad (\xi_0 \neq 0),$$

$$x^2+y^2-\frac{1}{\eta_0}y = 0 \qquad (\eta_0 \neq 0).$$

Für $\xi_0 = 0$ ergibt sich die y-Achse ($x = 0$) und für $\eta_0 = 0$ die x-Achse ($y = 0$).

Dem Quadrat $\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1\right]$ in der ξ, η-Ebene beispielsweise entspricht das in Abb. 64 gestrichelte Gebiet. Die Umlaufrichtungen der Randkurven stimmen hier nicht überein.

Wegen

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\frac{2\xi\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}$$

ist die Funktionaldeterminante negativ:

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = -\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^2} < 0 .$$

3. Geht man von den Transformationsformeln

$$x = \xi^2 - \eta^2, \qquad y = 2\xi\eta$$

aus, so werden x und y eindeutig durch ξ und η bestimmt. Lösen wir diese Formeln nach ξ und η auf, so finden wir

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}, \qquad \eta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}} .$$

Dabei sind die Vorzeichen von ξ und η durch die Bedingung $\xi\eta = \frac{1}{2}y$ miteinander verknüpft. Also entsprechen jedem Punkt (x, y) mit Ausnahme des Koordinatenursprungs *zwei* Punkte (ξ, η), die bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch liegen. Um Eindeutigkeit herzustellen, kann man sich beispielsweise auf die *obere* Hälfte der ξ, η-Ebene beschränken (einschließlich des positiven Teils der ξ-Achse, aber ohne deren negativen Teil).

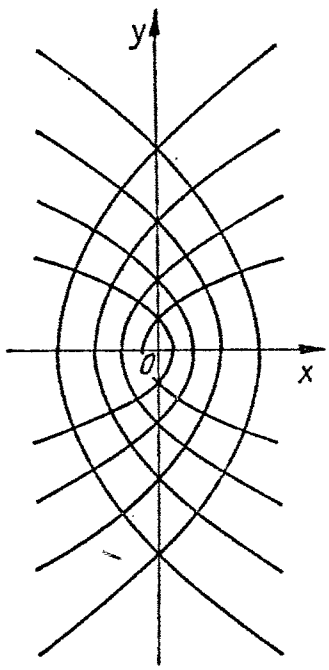

Abb. 65

Koordinatenlinien sind hier konfokale und koaxiale Parabeln (deren Brennpunkt der Koordinatenursprung ist; vgl. Abb. 65):

$$y^2 = 4\xi_0^2(\xi_0^2 - x) \quad (\xi_0 \neq 0), \qquad y^2 = 4\eta_0^2(x + \eta_0^2) \quad (\eta_0 \neq 0) .$$

Dem Wert $\xi_0 = 0$ entspricht der negative Teil der x-Achse und dem Wert $\eta_0 = 0$ deren positiver Teil. Für die Funktionaldeterminante gilt

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} 2\xi & -2\eta \\ 2\eta & 2\xi \end{vmatrix} = 4(\xi^2+\eta^2) > 0 ,$$

wenn man den Koordinatenursprung ausschließt.

4. Manchmal ist es zweckmäßig, zuerst das Netz der Koordinatenlinien anzugeben und daraus dann das krummlinige Koordinatensystem zu bestimmen.

Wir betrachten beispielsweise die beiden Parabelsysteme (Abb. 66)

$$y^2=2px \quad \text{und} \quad x^2=2qy;$$

beide überdecken jeweils die ganze x, y-Ebene (ausgenommen je eine Koordinatenachse).

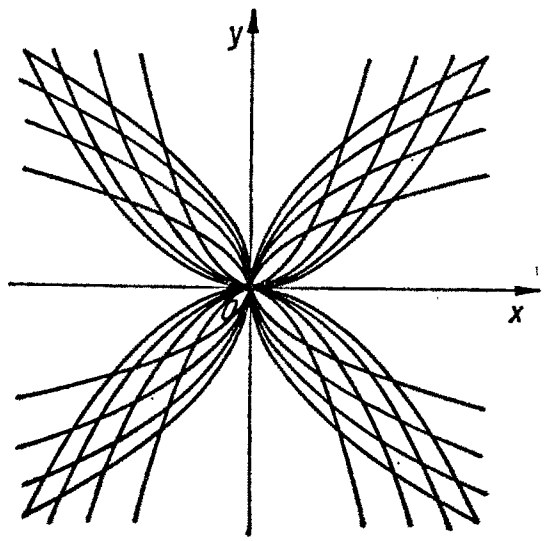

Abb. 66

Man wird natürlich $\xi=2p$ und $\eta=2q$ als krummlinige Koordinaten einführen. Aus den Gleichungen $y^2=\xi x$ und $x^2=\eta y$ folgt

$$x=\sqrt[3]{\xi\eta^2}, \quad y=\sqrt[3]{\xi^2\eta} \quad \text{und} \quad \xi=\frac{y^2}{x}, \quad \eta=\frac{x^2}{y} \qquad (x, y\neq 0).$$

Für die Funktionaldeterminante gilt hier

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}\xi^{\frac{1}{3}}\eta^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}\xi^{\frac{2}{3}}\eta^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}.$$

5. Wir gehen von folgendem System konfokaler und koaxialer Kegelschnitte aus:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1 \tag{6}$$

(für $\lambda>c$ Ellipsen, für $0<\lambda<c$ Hyperbeln; Abb. 67).

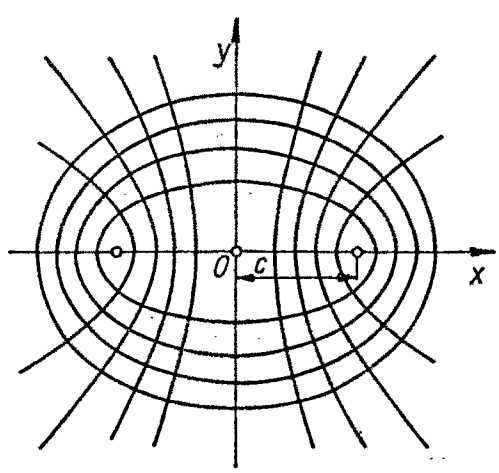

Abb. 67

Durch jeden Punkt (x, y) der Ebene, der nicht auf einer Achse liegt, gehen eine Ellipse und eine Hyperbel dieses Systems. Die linke Seite der Gleichung

$$(\lambda^2)^2 - \lambda^2 (x^2+y^2+c^2) + c^2x^2 = 0\,, \tag{6a}$$

die sich aus (6) ergibt, ist nämlich für $\lambda = 0$ positiv, für $\lambda = c$ negativ und für große λ wieder positiv. Folglich hat diese Gleichung *zwei positive* Wurzeln: eine Wurzel $\lambda > c$ und eine andere Wurzel[1]) $\mu < c$; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wenn man die Gleichung (6a) als quadratische Gleichung für λ^2 ansieht, so gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$\lambda^2 + \mu^2 = x^2 + y^2 + c^2, \qquad \lambda^2\mu^2 = c^2x^2.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man x und y leicht durch λ und μ ausdrücken:

$$x = \pm\frac{\lambda\mu}{c}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}}{c}.$$

Beschränken wir uns auf den ersten Quadranten, so dürfen wir hier nur die positiven Vorzeichen beibehalten. Die Zahlen λ und μ kann man als krummlinige Koordinaten der Punkte dieses Quadranten ansehen; man nennt sie *elliptische Koordinaten*. Die Koordinatenlinien sind in diesem Fall gerade die Kegelschnitte, von denen wir ausgegangen sind.

Wir weisen darauf hin, daß λ die Werte von c bis $+\infty$ und μ die Werte von 0 bis c durchläuft. Für die Randwerte erhalten wir:

für $\lambda = c$ den Abschnitt der x-Achse von $x = 0$ bis $x = c$,
für $\mu = c$ den Abschnitt der x-Achse von $x = c$ bis $x = +\infty$,
für $\mu = 0$ den positiven Teil der y-Achse.

Schließlich kann man auch die Funktionaldeterminante leicht ausrechnen:

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} = \frac{\mu^2-\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}} < 0\,.$$

605. Der Flächeninhalt in krummlinigen Koordinaten. Wir nehmen an, daß in der x, y-Ebene irgendein Bereich (D) mit einer stückweise glatten doppelpunktfreien Randkurve (S) gegeben ist. Die Formeln (1) mögen eine eineindeutige Beziehung zwischen diesem Bereich und einem Bereich (Δ) der ξ, η-Ebene herstellen, der eine ebensolche Randkurve (Σ) besitzt.

Wir behalten sämtliche Voraussetzungen aus Nr. 603 über diese Abbildung der Gebiete bei und nehmen darüber hinaus noch an, daß die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung einer der Funktionen (1), etwa von y, im Bereich (Δ) existieren und stetig sind:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial\eta\,\partial\xi}$$

(auf Grund der Stetigkeit sind sie einander gleich[2]); Nr. 190).

Unter diesen Voraussetzungen stellen wir uns die Aufgabe, den Inhalt D des betrachteten Bereichs in der x, y-Ebene durch ein Flächenintegral über den Bereich (Δ) in der ξ, η-Ebene auszudrücken.

---

[1]) Um diese Wurzeln nicht zu verwechseln, behalten wir für die größere die Bezeichnung λ bei, während wir die kleinere mit μ bezeichnen.

[2]) Wir bemerken hier jedoch, daß diese zusätzliche Voraussetzung unnötig ist und nur aus beweistechnischen Gründen eingeführt wurde.

Wir wollen von der Formel ausgehen, die den Inhalt von (D) durch ein Kurvenintegral über den Rand (S) von (D) ausdrückt:

$$D = \int_{(S)} x\,dy \tag{7}$$

(vgl. Nr. 551, Formel (10)).

Das Programm der weiteren Umformungen ist das folgende: Zuerst gehen wir mit Hilfe einer Parameterdarstellung des Randes von dem Kurvenintegral (7) zu einem gewöhnlichen bestimmten Integral über. Dann formen wir dieses wieder in ein Kurvenintegral um, diesmal aber über den Rand (Σ) des Bereichs (Δ). Schließlich ersetzen wir unter Benutzung des Gaußschen Satzes das erhaltene Kurvenintegral durch ein Flächenintegral über (Δ).

Zur Ausführung dieses Programms benötigen wir eine Parameterdarstellung des Randes (S). Da wir aber im weiteren zu dem Rand (Σ) übergehen wollen, ziehen wir es vor, sofort von einer Darstellung dieser Kurve auszugehen. Es sei (3) eine Parameterdarstellung der Kurve (Σ); dann liefert (4) offenbar eine ebensolche Darstellung der Kurve (S) mit dem gleichen Parameter; denn diese entspricht (wie wir in Nr. 603 festgestellt hatten) in der x, y-Ebene der Randkurve (Σ). Die Grenzen α und β des Intervalls, das t durchläuft, wählen wir so, daß beim Übergang von α zu β die Kurve (S) in *positiver* Richtung durchlaufen wird.

Dann gilt gemäß Formel (5) aus Nr. 547

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, y'(t)\, dt$$

oder, wenn man (4) und (5) berücksichtigt,

$$D = \int_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t), \eta(t)) \left[\frac{\partial y}{\partial \xi}\,\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\eta'(t)\right] dt\,. \tag{8}$$

Wir vergleichen dieses Integral mit dem Kurvenintegral

$$\int_{(\Sigma)} x(\xi, \eta) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta\right) \tag{9}$$

über den Rand (Σ) in *positiver* Richtung. Wenn wir (9) nach der üblichen Regel auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral zurückführen, so sind darin an Stelle von ξ und η die Funktionen $\xi(t)$ und $\eta(t)$ aus der Parameterdarstellung der Kurve (Σ) einzusetzen, und wir erhalten das Integral (8).

Man muß übrigens noch einen Umstand beachten. Durchläuft t die Werte von α bis β, so wird der Rand (S) in positiver Richtung durchlaufen; so haben wir nämlich diese Grenzen gewählt. Der Rand (Σ) kann hierbei aber sowohl in positiver als auch in negativer Richtung durchlaufen werden; also können sich die Integrale (8) und (9), wenn in beiden derselbe Umlaufsinn gewählt wird, noch durch das Vorzeichen unterscheiden. In jedem Fall ist

$$D = \pm \int_{(\Sigma)} \left(x\,\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + x\,\frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta\right). \tag{10}$$

Dabei (wir betonen das nochmals) *gilt das positive Vorzeichen, wenn einem positiven Umlaufen des Randes* (S) *ein positives Umlaufen des Randes* (Σ) *entspricht, und das negative Vorzeichen im entgegengesetzten Fall.*

Es ist schließlich noch das erhaltene Kurvenintegral (8) in ein Flächenintegral zu transformieren. Dazu benötigen wir den Gaußschen Satz:

$$\int\limits_{(\Sigma)} (P(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\xi + Q(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\eta) = \iint\limits_{(\Delta)} \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,.$$

Hierin setzen wir

$$P(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad Q(\xi, \eta) = x \frac{\partial y}{\partial \eta}\,.$$

Weil

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$$

ist und weil die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung von y einander gleich sind, gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\,,$$

und wir kommen zu der Formel

$$D = \pm \iint\limits_{(\Delta)} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,.$$

Wir haben in Nr. 603 gesehen, daß unter unseren Voraussetzungen die Funktionaldeterminante

$$J(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}$$

im Bereich (Δ) ein und dasselbe Vorzeichen hat. Das gleiche Vorzeichen hat auch das Integral. Was bedeutet nun das doppelte Vorzeichen $\pm$? Da sich als Ergebnis die ihrem Wesen nach positive Zahl D ergeben muß, ist klar, daß *das Vorzeichen vor dem Integral mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante übereinstimmen muß.* Wenn man dieses Vorzeichen mit dem Integranden zusammenfaßt, so ergibt sich unter dem Integral offenbar der *absolute Betrag* der Funktionaldeterminante, so daß wir für den Inhalt schließlich folgenden Ausdruck erhalten:

$$D = \iint\limits_{(\Delta)} \left|\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \iint\limits_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,. \tag{11}$$

Das ist die Formel, die wir herleiten wollten.

Den Ausdruck

$$\left|\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = |J(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

unter dem Integral nennt man gewöhnlich *Flächenelement in den krummlinigen Koordinaten* ξ, η. Wir haben beispielsweise gesehen, daß beim Übergang zu Polarkoordinaten die Funktionaldeterminante gleich r ist; folglich ist das Flächenelement in Polarkoordinaten gleich $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

606. Ergänzende Bemerkungen.

1°. Vergleicht man die Vorschrift, nach der das Vorzeichen Plus oder Minus in Formel (10) gewählt wurde, mit der Tatsache, daß dieses Vorzeichen mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante übereinstimmen muß, so ergibt sich eine interessante Schlußfolgerung: *Ist die Funktionaldeterminante positiv, so entsprechen in den Transformationsformeln die positiven Umlaufrichtungen der Kurven* (S) *und* (Σ) *einander; ist die Funktionaldeterminante negativ, so entspricht dem positiven Umlaufsinn auf der einen Kurve der negative Umlaufsinn auf der anderen.*

Offenbar gilt dasselbe auch für jedes Paar einander entsprechender einfacher geschlossener Kurven (L) und (Λ) aus (D) bzw. (Δ). Das erhaltene Ergebnis läßt sich an den Beispielen aus Nr. 604 leicht nachprüfen.

2°. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes (Nr. 592, Formel (9)) auf Formel (11) erhalten wir die Beziehung

$$D=|J(\bar{\xi},\bar{\eta})|\,\Delta\,, \tag{12}$$

wobei $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ ein gewisser Punkt des Bereichs (Δ) ist und Δ der Inhalt von (Δ).

Wir vergleichen diese Beziehung mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung,

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\bar{\xi})\,(\beta-\alpha)\qquad(\alpha<\bar{\xi}<\beta)\,.$$

Wenn $x=f(\xi)$ eine monotone Funktion ist, so vermittelt sie eine eineindeutige Abbildung des Intervalls $\alpha\leqq\xi\leqq\beta$ auf das Intervall $f(\alpha)\leqq x\leqq f(\beta)$ (oder $f(\beta)\leqq x\leqq f(\alpha)$, wenn $f(x)$ eine fallende Funktion ist). Wir bezeichnen die Längen dieser Intervalle mit δ bzw. d; der Mittelwertsatz führt somit auf die Gleichung

$$d=|f'(\bar{\xi})|\cdot\delta\,, \tag{13}$$

die der Gleichung (12) analog ist.

Wenn wir in (13) das Intervall (δ) auf den Punkt ξ zusammenziehen, so erhalten wir

$$|f'(\xi)|=\lim\frac{d}{\delta}\,,$$

der absolute Betrag der Ableitung ist also der *Verzerrungskoeffizient* (oder *Dehnungskoeffizient*) der ξ-Gerade in dem gegebenen Punkt bei ihrer Abbildung auf die x-Gerade.

Genauso erhalten wir aus (12) durch Zusammenziehen des Gebiets (Δ) auf den Punkt (ξ,η)

$$|J(\xi,\eta)|=\lim\frac{D}{\Delta}\,;$$

also spielt der absolute Betrag der Funktionaldeterminante die Rolle eines *Verzerrungs-* oder *Dehnungskoeffizienten* der ξ,η-Ebene (in dem gegebenen Punkt) bei ihrer Abbildung auf die x, y-Ebene.[1])

Diese Bemerkung zeigt die weitgehende Analogie zwischen der Ableitung und der Funktionaldeterminante (vgl. Kap. VI).

[1]) Im Grunde genommen differenzieren wir das Integral (11) im Punkt (ξ,η) nach dem Gebiet (Nr. 593).

3°. Formel (11) zeigt, daß sich bei unbegrenzter Verringerung des Inhalts Δ auch der ihm entsprechende Inhalt D unbegrenzt verringert. Daraus kann man leicht herleiten, daß die in Nr. 603 untersuchte Abbildung von Bereichen auch folgende wichtige Eigenschaft hat: *Sie führt eine Kurve* (Δ) *vom Flächeninhalt* 0 *im Bereich* (Δ) *in irgendeine Kurve* (L) *im Bereich* (D) *über, die ebenfalls den Flächeninhalt* 0 *hat.*

4°. Die Formel (11) wurde unter der Voraussetzung hergeleitet, daß die Beziehung zwischen den Bereichen (D) und (Δ) eineindeutig ist und daß die Funktionen (1) und (2) und ihre partiellen Ableitungen stetig sind. Jedoch stößt man in der Praxis gewöhnlich auf Fälle, in denen diese Voraussetzungen in einzelnen Punkten oder längs einzelner Kurven verletzt sind.

Wenn die erwähnten Punkte und Kurven in beiden Ebenen in Gebiete (d) und (δ) von beliebig kleinem Inhalt eingeschlossen werden können, so ist die Formel nach Herausnahme dieser Gebiete anwendbar:

$$D-d=\iint\limits_{(\Delta)-(\delta)} |J(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\,. \tag{11*}$$

Die Funktionaldeterminante sei im Gebiet (Δ) beschränkt, $|J(\xi,\eta)|\leqq M$; dann unterscheidet sich das Integral (11*) von dem Integral (11) um den Wert

$$\iint\limits_{(\delta)} |J(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\leqq M\delta\,.$$

Gehen wir in (11*) zum Grenzwert $\delta\to 0$ und somit $d\to 0$ über, so gelangen wir wieder zu Formel (11).

Zur Veranschaulichung kommen wir nochmals auf das Beispiel 1 aus Nr. 604 und die in Abb. 63 dargestellten Figuren zurück. Auf das Rechteck $(\Delta)=[0, R; 0, 2\pi]$ und den Kreis (D) vom Radius R um den Koordinatenursprung darf man die Formel (11), die in diesem Fall die Gestalt

$$D=\iint\limits_{(\Delta)} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

hat, nicht unmittelbar anwenden. Wenn man aber die schraffierten Gebiete ausschließt (deren Inhalte mit ϱ und ε gegen 0 streben), so kann man auf die restlichen Gebiete diese Formel anwenden und hat nur noch zum Grenzwert überzugehen.

607. Geometrische Herleitung. Wir haben die Formel (11) mit Hilfe zwar einfacher, aber formaler und nicht anschaulicher Überlegungen hergeleitet. Wir halten es für nützlich, eine andere Herleitung (besser: eine anschauliche Deutung) dieser Formel anzugeben, die zwar nicht ganz exakt, aber dafür vom geometrischen Standpunkt völlig einleuchtend ist. Sie stammt von M. W. Ostrogradski[1]).

Wir betrachten wieder die durch die Formel (1) gegebene Abbildung der ξ, η-Ebene auf die x, y-Ebene und wählen in der ξ, η-Ebene ein „unendlich kleines" Rechteck $\Pi_1\Pi_2\Pi_3\Pi_4$ mit achsenparallelen Seiten $\mathrm{d}\xi$ und $\mathrm{d}\eta$ (Abb. 68a). Das Bild dieses Rechtecks in der x, y-Ebene ist jetzt ein *krummliniges* Viereck $P_1P_2P_3P_4$ (Abb. 68b); wir bestimmen dessen Inhalt.

Die Ecken des Rechtecks haben die Koordinaten

$$\Pi_1(\xi,\eta),\quad \Pi_2(\xi+\mathrm{d}\xi,\eta),\quad \Pi_3(\xi+\mathrm{d}\xi,\eta+\mathrm{d}\eta),\quad \Pi_4(\xi,\eta+\mathrm{d}\eta);$$

[1]) Michail Wassiljewitsch Ostrogradski, 1801–1861, russischer Mathematiker.

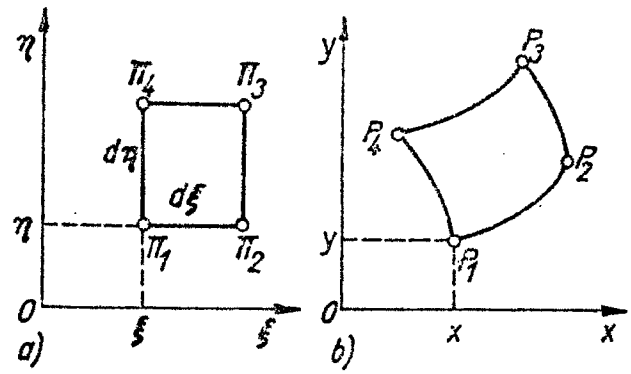

Abb. 68

daher haben die entsprechenden Ecken des krummlinigen Vierecks die Koordinaten

$$P_1(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)),$$

$$P_2\,(x\,(\xi+\mathrm{d}\xi, \eta), y\,(\xi+\mathrm{d}\xi, \eta)),$$

$$P_3\,(x\,(\xi+\mathrm{d}\xi, \eta+\mathrm{d}\eta), y\,(\xi+\mathrm{d}\xi, \eta+\mathrm{d}\eta)),$$

$$P_4\,(x\,(\xi, \eta+\mathrm{d}\eta), y\,(\xi, \eta+\mathrm{d}\eta)).$$

Wenn man sich auf Glieder erster Ordnung in $\mathrm{d}\xi$ und $\mathrm{d}\eta$ beschränkt, so kann man näherungsweise folgende Punkte verwenden:

$$P_1(x, y), \qquad P_2\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi, y+\frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi\right),$$

$$P_3\left(x+\frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta, y+\frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta\right),$$

$$P_4\left(x+\frac{\partial x}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta, y+\frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta\right).$$

Hierbei ist $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$, und alle Ableitungen sind im Punkt (ξ, η) zu nehmen. Da die einander entsprechenden achsenparallelen Komponenten der Strecken P_1P_2 und P_3P_4 gleich sind, sind diese Strecken gleichlang und parallel, das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ist also (bis auf Größen höherer Ordnung) ein Parallelogramm.

Sein Inhalt ist gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Aus der analytischen Geometrie ist aber bekannt, daß der doppelte Inhalt eines Dreiecks, dessen Ecken in den Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) liegen, gleich dem absoluten Betrag der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_2 \\ y_2-y_1 & y_3-y_2 \end{vmatrix}$$

ist. Wenden wir diese Formel auf unseren Fall an, so ergibt sich, daß der gesuchte Inhalt (wieder bis auf Größen höherer Ordnung) gleich dem absoluten Betrag der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

ist.

Daher ist

$$\text{Inh. } P_1P_2P_3P_4 \approx \left|\frac{D(x, y)}{D(x, \eta)}\right| d\xi d\eta .$$

Zerlegen wir die Figur (Δ) durch achsenparallele Geraden in „unendlich kleine" Rechtecke (und vernachlässigen wir die „irregulären" Elemente am Rand), so zerlegen wir gleichzeitig die Figur (D) in der x, y-Ebene in *krummlinige Vierecke* der betrachteten Form. Summieren wir die für deren Inhalte erhaltenen Ausdrücke, so kommen wir wieder zu Formel (11).

Die soeben durchgeführte Überlegung hebt also einen wichtigen geometrischen Gedanken hervor: *Das Wesen der Formel* (11) *besteht darin, daß die Figur* (D) *zur Bestimmung ihres Flächeninhalts nicht in Rechtecke, sondern mit Hilfe eines Netzes von Koordinatenlinien in krummlinige Elemente zerlegt wird.*

In einigen einfachen Fällen erlaubt dieser Gedanke, das „Flächenelement" in krummlinigen Koordinaten fast ohne Rechnung zu bestimmen.

Beispielsweise kann man im Fall des Übergangs zu Polarkoordinaten folgendermaßen argumentieren: Einem Rechteckelement mit den Seiten dr und $d\theta$ in der r, θ-Ebene entspricht in der x, y-Ebene eine Figur, die von Kreisbögen vom Radius r bzw. $r+dr$ und zwei vom Koordinatenursprung ausgehenden Strahlen im Winkel θ bzw. $\theta+d\theta$ zur x-Achse begrenzt wird (Abb. 69). Fassen wir diese Figur näherungsweise als Rechteck mit den Seiten dr und $f \cdot d\theta$ auf, so erhalten wir sofort den gesuchten Ausdruck $rdrd\theta$ für das Flächenelement.

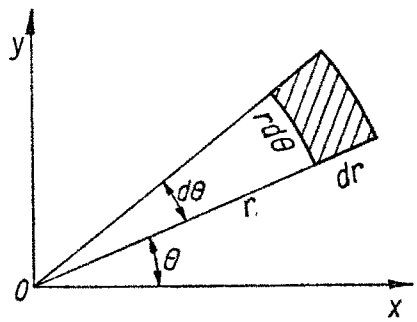

Abb. 69

608. Beispiele.

1. Man berechne den Inhalt der Figuren, die von folgenden Kurven begrenzt werden:
(a) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (Lemniskate),
(b) $(x^2+y^2)^2=2ax^3$, (c) $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.

Lösung. Das Auftreten des Binoms x^2+y^2 in allen Fällen legt den Gedanken nahe, zu Polarkoordinaten überzugehen, indem man $x=r\cos\theta$ und $y=r\sin\theta$ setzt, und den Flächeninhalt nach der Formel

$$D=\iint\limits_{(\Delta)} rdrd\theta \tag{14}$$

zu berechnen.

(a) Die Gestalt der Lemniskate ist uns bekannt (Abb. 70). Die Kurve ist symmetrisch bezüglich der Koordinatenachsen (das erkennt man leicht aus der Gleichung der Kurve, da diese sich nicht ändert, wenn man x durch $-x$ oder y durch $-y$ ersetzt). Daher genügt es, den Inhalt des Teils (D) zu bestimmen, der im ersten Quadranten liegt, und diesen dann mit 4 zu multiplizieren.

Die Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten ist

$$r^2=2a^2\cos 2\theta ,$$

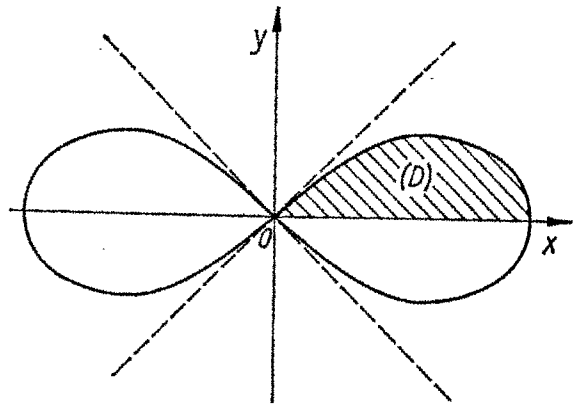

Abb. 70

wobei θ in Anbetracht dessen, daß $\cos 2\theta$ positiv sein muß, nur die Werte von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ durchlaufen kann (wenn man sich auf den ersten Quadranten beschränkt). Also wird das Gebiet (Δ) in der r, θ-Ebene, das (D) entspricht, von der Kurve

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

(Bild der Lemniskate), einem Abschnitt der r-Achse (der dem Abschnitt der x-Achse entspricht) und dem Abschnitt $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ der θ-Achse (dem Bild des Koordinatenursprungs; Verletzung der Eindeutigkeit der Zuordnung!) begrenzt.[1])

Es gilt

$$D = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr = a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2},$$

so daß der ganze gesuchte Flächeninhalt gleich $2a^2$ ist.

(b) Es ist zweckmäßig, sich vorher eine ungefähre Vorstellung von der Gestalt der Kurve zu machen. Die Kurve ist symmetrisch bezüglich der x-Achse (die Gleichung ändert sich nicht, wenn man y durch $-y$ ersetzt), sie liegt rechts von der y-Achse (x kann nicht negativ sein); sie schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und bei $x = 2a$. Überdies ist die Kurve beschränkt: Aus der Gleichung selbst ist klar, daß $x^4 \leqq 2ax^3$ ist; also gilt $x \leqq 2a$, und weil auch $y^4 \leqq 2ax^3$ ist, gilt auch $|y| \leqq 2a$. Eine Skizze der Kurve zeigt Abb. 71.

Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten ist $r = 2a\cos^3\theta$. Dabei durchläuft θ die Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$. Auf Grund der Symmetrie gilt

$$D = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos^3\theta} r\,dr = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^6\theta\, d\theta = \frac{5}{8}\pi a^2.$$

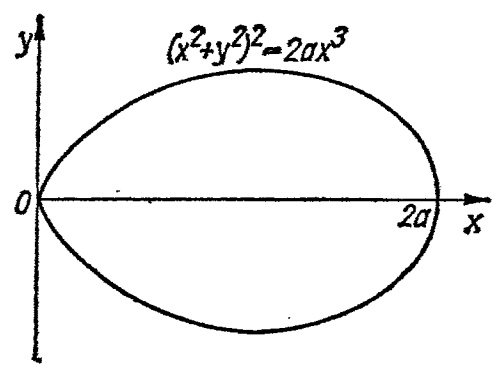

Abb. 71

[1]) Vgl. dazu die Bemerkung 4° in Nr. 606.

(c) Die Kurve ist bezüglich beider Achsen symmetrisch. Der Koordinatenursprung $x=y=0$ gehört zwar formal zur Kurve, da er der Gleichung genügt; er ist aber ein isolierter Punkt. Wir erhalten nämlich für $x \geqq y > 0$ aus der Kurvengleichung leicht $(2x^2)^3 \geqq 2a^2x^4$, woraus $x \geqq \frac{a}{2}$ folgt. In der Umgebung des Koordinatenursprungs liegen also tatsächlich keine Kurvenpunkte.[1]) Wir schließen den Koordinatenursprung aus unseren Betrachtungen aus. Wie man leicht sieht, ist die Kurve beschränkt: Für $x \geqq y$ gilt offenbar $x^6 \leqq 2a^2x^4$, $x^2 \leqq 2a^2$ usw. Die Kurve hat ungefähr die in Abb. 72 angegebene Gestalt.

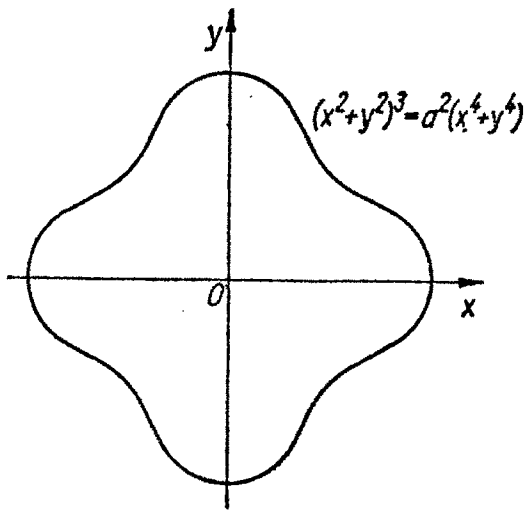

Abb. 72

Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten ist $r^2=a^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$. Unter Berücksichtigung der Symmetrie erhalten wir

$$D=4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}} r\,dr = 2a^2\int_0^{\pi/2}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\,d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

2. Man zeige, daß die Formel (14) unmittelbar auf die folgende bereits bekannte Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Sektors in Polarkoordinaten führt (Nr. 338):

$$D=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta;$$

hierbei versteht man unter r diejenige Funktion von θ, die in der Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten auftritt.

Die Aufgaben 1a, b, c hätte man auch unmittelbar mit Hilfe dieser Formel lösen können.

3. Man bestimme den Inhalt der Figuren, die von folgenden Kurven begrenzt werden:

(a) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$, (b) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$,

(c) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{c^2}$, (d) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^3}$.

Lösung. In solchen Fällen, in denen in der Kurvengleichung das Binom $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ auftritt, empfiehlt es sich, „verallgemeinerte" Polarkoordinaten einzuführen, die mit

[1]) Davon hätte man sich natürlich auch mit Hilfe des Kriteriums aus Nr. 236 überzeugen können.

den kartesischen Koordinaten durch die Formeln

$$x = ar\cos\theta, \qquad y = br\sin\theta$$

verknüpft sind.[1]) Die geometrische Bedeutung dieser Transformation besteht in einer Kontraktion der Ebene in Richtung der Koordinatenachsen und nachfolgendem Übergang zu Polarkoordinaten.

Die Funktionaldeterminante der Transformation ist gleich abr.

(a) Die Kurve ist beschränkt und symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs (denn ihre Gleichung ändert sich nicht, wenn man *gleichzeitig* x durch $-x$ und y durch $-y$ ersetzt); zwei symmetrische Schleifen liegen im ersten bzw. dritten Quadranten ($xy \geqq 0$); der Koordinatenursprung ist der einzige Schnittpunkt mit den Achsen.

Die Gleichung des Bildes unserer Kurve[2]) in der r, θ-Ebene ist

$$r^2 = \frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta\,.$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie erhalten wir

$$D = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{(ab/c^2)\sin\theta\cos\theta}} abr\,dr = \frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2}\,.$$

(b) Die Kurve ist beschränkt und symmetrisch bezüglich der Achsen; der Koordinatenursprung ist ein isolierter Punkt der Kurve. Es gilt

$$D = 4ab\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} r\,dr = 2ab\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}ab\,(a^2+b^2)\,.$$

(c) Die Kurve ist beschränkt und symmetrisch bezüglich der Achsen; der Koordinatenursprung ist ihr einziger Schnittpunkt mit der y-Achse, während sie die x-Achse noch in den Punkten $x = \pm\frac{a^2}{c}$ schneidet. Für die Schleife, die rechts von der y-Achse liegt, gilt $r = \frac{a}{c}\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$; daher ist

$$D = 4ab\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{(a/c)\cos\theta} r\,dr = \frac{2a^3b}{c^2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^3b}{c^2}\,.$$

(d) Die Kurve ist beschränkt und symmetrisch bezüglich der y-Achse, sie liegt oberhalb der x-Achse. Der Koordinatenursprung ist der einzige Schnittpunkt mit den Achsen, so daß die Kurve aus zwei Schleifen besteht, die im ersten und zweiten Quadranten liegen.

Die Gleichung der Kurve in den neuen Koordinaten ist

$$r = \frac{a^2b}{c^3}\cos^2\theta\sin\theta\,.$$

Lösung. $D = \frac{\pi}{32}\cdot\frac{a^5b^3}{c^6}$.

4. Man bestimme den Flächeninhalt der Schleifen folgender Kurven:

(a) $(x+y)^4 = ax^2y$, (b) $(x+y)^3 = axy$, (c) $(x+y)^5 = ax^2y^2$.

[1]) Bei Verwendung dieser Koordinaten wird die Eindeutigkeit der Beziehung ebenso verletzt wie im Fall der Polarkoordinaten (vgl. Nr. 606, 4°).

[2]) Man sieht leicht, daß man die Kurve als verzerrte Lemniskate auffassen kann.

Lösung. Diejenigen Teile aller dieser Kurven, die im ersten Quadranten liegen (so daß $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$ ist), sind beschränkt. Davon kann man sich ähnlich wie in 1 (b) überzeugen. Die Kurven gehen durch den Koordinatenursprung und haben keine anderen Schnittpunkte mit den Achsen. Somit ist klar, daß gerade diese Teile die Schleifen darstellen, von denen in der Aufgabenstellung die Rede ist.

In den vorangegangenen Aufgaben beruhte der Übergang von der komplizierten Gleichung der Kurve in kartesischen Koordinaten zu einer einfachen Gleichung der Kurve in krummlinigen Koordinaten im wesentlichen auf der Ausnutzung der bekannten Identität $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Das Binom $x+y$ legt den Gedanken nahe, auch hier die gleiche Identität zu benutzen: Wir setzen (nur für $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$)

$$x = r\cos^2\theta, \qquad y = r\sin^2\theta .$$

Die Funktionaldeterminante der Transformation ist[1])

$$J = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & -2r\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & 2r\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix} = 2r\sin\theta\cos\theta .$$

(a) Die Gleichung der Schleife in den neuen Koordinaten ist

$$r = a\cos^4\theta\sin^2\theta .$$

Ferner gilt

$$D = 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{a\cos^4\theta\sin^2\theta} r\,dr = a^2\int_0^{\pi/2} \cos^9\theta\sin^5\theta\,d\theta = \frac{a^2}{210} .$$

(b) $D = \frac{a^2}{60}$. (c) $D = \frac{a^2}{1260}$.

5. Wir weisen nun auf eine Möglichkeit hin, die krummlinigen Koordinaten so geschickt zu wählen, daß sie zur Bestimmung des Inhalts *krummliniger Vierecke* günstig sind. Wenn die beiden Kurvenpaare, die die gegenüberliegenden Seiten dieses Vierecks bilden, jeweils zu einer (einparametrigen) *Schar von Kurven* gehören, die die ganze Ebene überdecken, so wird man natürlich gerade diese beiden Scharen als Koordinatenlinien wählen. Ihre Parameter bilden gewöhnlich gleichzeitig ein für den vorliegenden Fall geeignetes System krummliniger Koordinaten.

Wir erläutern dieses Verfahren an einem Beispiel. Es soll der Flächeninhalt der Figur bestimmt werden, die von den Parabeln

$$y^2 = px, \qquad y^2 = qx, \qquad x^2 = ay, \qquad x^2 = by$$

begrenzt wird, wenn $0 < p < q$ und $0 < a < b$ ist (Abb. 73).

Hier ist es günstig, die zwei Parabelscharen

$$y^2 = \xi x \ (p \leqq \xi \leqq q) \quad \text{und} \quad x^2 = \eta y \ (a \leqq \eta \leqq b)$$

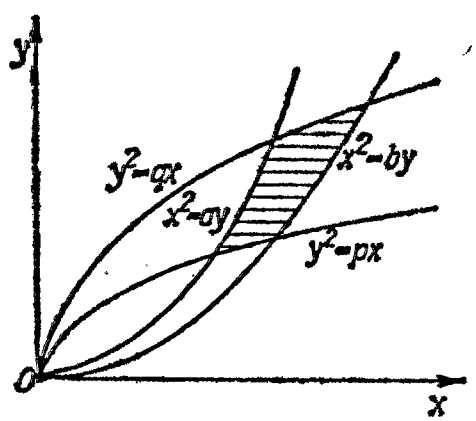

Abb. 73

[1]) Hier wird wieder die Bemerkung 4° aus Nr. 606 benutzt.

zu betrachten, von denen jede unsere Figur überdeckt, und aus ihnen ein Netz von Koordinatenlinien zu bilden. Das ist gleichwertig damit, daß wir ihre Parameter ξ und η als krummlinige Koordinaten auffassen. Das alles ist uns bereits aus Nr. 604, Beispiel 4, bekannt; aus den hingeschriebenen Gleichungen folgt $x=\sqrt[3]{\xi\eta^2}$ und $y=\sqrt[3]{\xi^2\eta}$, also gilt für die Funktionaldeterminante J:

$$J=-\frac{1}{3}.$$

Hieraus erhalten wir sofort

$$D=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

6. Nach der gleichen Methode bestimme man den Inhalt des Vierecks, das begrenzt wird von

(a) den Hyperbeln $xy=p$, $xy=q$ und den Geraden $y=ax$, $y=bx$;
(b) den Hyperbeln $xy=p$, $xy=q$ und den Parabeln $y^2=ax$, $y^2=bx$;
(c) den Parabeln $x^2=py$, $x^2=qy$ und den Geraden $y=ax$, $y=bx$;
(d) den Geraden $x+y=p$, $x+y=q$ und $y=ax$, $y=bx$.

In allen Fällen soll $0<p<q$ und $0<a<b$ gelten.

(a) Lösung. Das Netz der Koordinatenlinien ist

$$xy=\xi \quad (p\leqq\xi\leqq q), \qquad y=\eta x \quad (a\leqq\eta\leqq b).$$

Hieraus folgt

$$x=\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}, \qquad y=\sqrt{\xi\eta}$$

und

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\xi}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi}{\eta}} \end{vmatrix}=\frac{1}{2\eta}.$$

Daher wird schließlich

$$D=\frac{1}{2}\int_p^q d\xi\int_a^b\frac{d\eta}{\eta}=\frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}.$$

(b) Hinweis. Man setze $xy=\xi$, $y^2=\eta x$ $(p\leqq\xi\leqq q,\ a\leqq\eta\leqq b)$; die Funktionaldeterminante ist $J=\frac{1}{3\eta}$.

Lösung. $D=\frac{1}{3}(q-p)\ln\frac{b}{a}$.

(c) Lösung. $D=\frac{1}{6}(q^2-p^2)(b^3-a^3)$.

(d) Lösung. $D=\frac{1}{2}\frac{(b-a)(q^2-p^2)}{(1+a)(1+b)}$.

7. Man bestimme den Flächeninhalt der Astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Lösung. Eine Parameterdarstellung der Astroide ist

$$x=a\cos^3 t, \qquad y=a\sin^3 t \quad (0\leqq t\leqq 2\pi).$$

Ersetzen wir hier a durch r $(0 \leqq r \leqq a)$, so erhalten wir eine Schar ähnlicher Astroiden, die unsere Figur überdecken:

$$x = r\cos^3 t, \qquad y = r\sin^3 t\,.$$

Für feste t liefern diese Gleichungen offenbar das vom Koordinatenursprung ausgehende Strahlenbüschel. Wir benutzen diese Formeln als Transformationsformeln; offenbar liegt hier dem Wesen nach der gleiche Gedanke zugrunde wie in den zwei vorangegangenen Aufgaben. Die Funktionaldeterminante ist

$$J = 3r\sin^2 t\cos^2 t\,.$$

Schließlich ergibt sich

$$D = 6a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2\,.$$

8. Wir betrachten die Transformation, die durch die Formeln

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \sqrt{uv} \qquad (u \geqq 0,\ v \geqq 0)$$

definiert wird. Offenbar ist immer $x \geqq y \geqq 0$; der Punkt (x, y) liegt also im Winkelraum zwischen der positiven Richtung der x-Achse und der Winkelhalbierenden $y = x$ des ersten Quadranten. Umgekehrt entsprechen jedem Punkt (x, y) aus diesem Winkelraum im allgemeinen zwei Paare nichtnegativer Werte u, v, die der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 2xz + y^2 = 0$$

genügen. Man kann die Zuordnung eindeutig machen, indem man immer $u \geqq v$ fordert, d. h. den Punkt (u, v) im analogen Winkelraum der u, v-Ebene wählt; dann ist

$$u = x + \sqrt{x^2 - y^2}, \qquad v = x - \sqrt{x^2 - y^2}\,.$$

Die Funktionaldeterminante der Transformation läßt sich leicht berechnen; es ist

$$J = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{u}{v}} - \sqrt{\frac{v}{u}}\right).$$

Eine interessante Besonderheit weisen hier die Koordinatenlinien auf. Für $u = \text{const}$ erhalten wir

$$y^2 = u(2x - u) = 2u\left(x - \frac{u}{2}\right),$$

und analog für $v = \text{const}$

$$y^2 = v(2x - v) = 2v\left(x - \frac{v}{2}\right).$$

Also erhalten wir in beiden Fällen ein und dieselbe Schar von Parabeln

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

deren Achse mit der x-Achse und deren Leitlinie mit der y-Achse übereinstimmt. Jede solche Parabel berührt die Gerade $y = x$ im Punkt (p, p).

Der scheinbare Widerspruch läßt sich einfach lösen: Für $u = p$ durchläuft v die Werte von 0 bis p und beschreibt den Teil der Parabel von deren Scheitelpunkt bis zu dem erwähnten Berührungspunkt. Für $v = p$ dagegen beschreibt u, das die Werte von p bis ∞ durchläuft, den restlichen Teil der Parabel, der sich ins Unendliche erstreckt (Abb. 74).

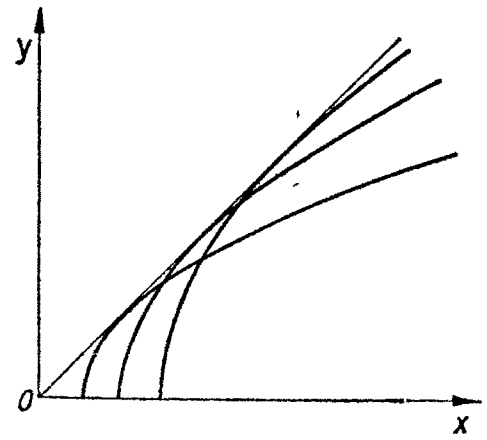

Abb. 74

Wählt man in der x, y-Ebene eine Figur (D_1), die von der x-Achse und zwei Parabeln

$$y^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right), \qquad y^2=2q\left(x-\frac{q}{2}\right) \qquad (0<p<q)$$

begrenzt wird, so entspricht ihr in der u, v-Ebene das Rechteck $(\Delta_1)=[p, q; 0, p]$, und den Abschnitten der Geraden $u=p$ und $v=p$ entsprechen hierbei zwei Bögen der ersten Parabel, die im Berührungspunkt aneinandergrenzen. Einer Figur (D_2) (in der x, y-Ebene), die von drei Parabeln begrenzt wird, und zwar außer von den zwei angegebenen noch von der Parabel

$$y^2=2r\left(x-\frac{r}{2}\right) \qquad (r>q),$$

entspricht in analoger Weise in der u, v-Ebene das Rechteck $(\Delta_2)=[q, r; p, q]$, und wieder entsprechen den Abschnitten der Geraden $u=q$ und $v=q$ zwei Bögen ein und derselben Parabel.

Mit Hilfe der angegebenen Transformation kann man nun beispielsweise leicht den Inhalt der Figur (D_2) bestimmen. Es gilt

$$D_2=\frac{1}{4}\int_p^q\int_q^r\left(\sqrt{\frac{u}{v}}-\sqrt{\frac{v}{u}}\right)dudv$$

$$=\frac{1}{3}\left[(\sqrt{q}-\sqrt{p})\,(\sqrt{r^3}-\sqrt{q^3})-(\sqrt{r}-\sqrt{q})\,(\sqrt{q^3}-\sqrt{p^3})\right]$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{q}-\sqrt{p})\,(\sqrt{r}-\sqrt{q})\,(\sqrt{r}-\sqrt{p})\,(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}).$$

Wir könnten versuchen, analog auch D_1 zu bestimmen; wir würden jedoch in diesem Fall auf ein *uneigentliches* Flächenintegral stoßen, dessen Integrand längs des Abschnitts der u-Achse unendlich wird. Solche Integrale werden wir später behandeln (vgl. Nr. 617, Beispiel 8).

9. Dafür, daß die Inhalte von Figuren (Δ) und (D), die einander bezüglich der Transformation (1) entsprechen, *immer* gleich sind, ist offenbar die Bedingung

$$\left|\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\right|=1$$

notwendig und hinreichend.

Wir stellen uns die Aufgabe, *die allgemeine Gestalt der Abbildungen der Ebene zu finden, die den Inhalt aller wie oben betrachteten Figuren ungeändert lassen.* Dabei können wir in der obigen Bedingung die Absolutstriche weglassen und diese in der Form

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}=1 \qquad (15)$$

schreiben; denn man kann das Problem immer auf diesen Fall zurückführen, indem man nötigenfalls ξ und η vertauscht.

Außerdem werden wir der Einfachheit halber annehmen, daß eine der in der Funktionaldeterminante auftretenden vier partiellen Ableitungen, etwa $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, im ganzen betrachteten Gebiet von 0 verschieden ist. Dann kann man die zweite der Gleichungen (1) nach η auflösen und durch Einsetzen des erhaltenen Ausdrucks in die erste Gleichung die betrachtete Transformation in der Gestalt

$$\eta = f(\xi, y), \qquad x = x(\xi, f(\xi, y)) = g(\xi, y) \tag{16}$$

schreiben. Wir werden uns darum bemühen, die Funktionen f und g zu charakterisieren, und zwar werden wir beweisen, daß die Bedingung (15) der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \tag{17}$$

gleichwertig ist. Zunächst erhalten wir nach der Regel für die Differentiation impliziter Funktionen

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \tag{18}$$

Danach finden wir durch Differentiation von g nach der Kettenregel

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Hieraus und aus der zweiten Gleichung (18) eliminieren wir $\frac{\partial f}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}.$$

Schließlich kommen wir durch Subtraktion der ersten Gleichung (18) zu der Identität

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}\left(\frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} - 1,$$

die unserer Behauptung entspricht.

Nach Satz 2 aus Nr. 560 sehen wir nun, daß die allgemeine Gestalt der Funktionen f und g, für die *die Transformation* (16) *den Inhalt ungeändert läßt*, durch die Formeln

$$f(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial \xi}, \qquad g(\xi, y) = \frac{\partial U(\xi, y)}{\partial y}$$

gegeben wird, wobei U eine willkürlich wählbare Funktion ist.

609. Variablentransformation in Flächenintegralen. Wir betrachten das Flächenintegral

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx dy \tag{19}$$

für ein Gebiet (D) mit einem stückweise glatten Rand (S) und einer Funktion $f(x, y)$, die in diesem Gebiet stetig ist oder, allgemeiner, Unstetigkeiten nur längs endlich vieler stückweise glatter Kurven besitzt (und auch in diesem Fall beschränkt bleibt).

Wir setzen nun voraus, daß das Gebiet (D) durch die Formeln (1)

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

mit irgendeinem Gebiet (Δ) in der ξ, η-Ebene verknüpft ist und daß alle Bedingungen erfüllt sind, unter denen wir in Nr. 605 die Formel (11) hergeleitet haben, die den Flächeninhalt der Figur (D) in krummlinigen Koordinaten ausdrückt.[1]) Wir setzen uns jetzt das Ziel, das Integral (19) durch Einführung neuer Veränderlicher als Integral über das Gebiet (Δ) darzustellen.

Zu diesem Zweck zerlegen wir das Gebiet (Δ) mit Hilfe eines Netzes stückweise glatter Kurven in Teile (Δ_i) $(i=1, 2, ..., n)$; dann wird (D) durch die entsprechenden (ebenfalls stückweise glatten) Kurven in Teile (D_i) zerlegt

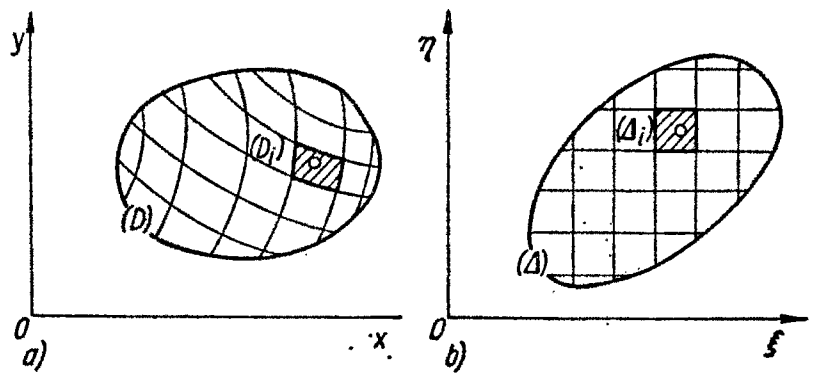

Abb. 75

(Abb. 75a, b). In jedem Teil (D_i) wählen wir *willkürlich* jeweils einen Punkt (x_i, y_i) und bilden schließlich die zu dem Integral (19) gehörige Integralsumme

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, D_i\,,$$

die gegen dieses Integral konvergiert, wenn der größte der Durchmesser der Gebiete (D_i) gegen 0 strebt.

Durch Anwendung der Formel (12) aus Nr. 606 auf jedes Teilgebiet (D_i) ergibt sich

$$D_i=|J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\cdot \Delta_i \qquad (i=1, 2, ..., n)\,,$$

wobei (ξ_i^*, η_i^*) ein bestimmter Punkt des Gebiets (Δ_i) ist. Ersetzen wir in der Summe σ jedes D_i durch diesen Ausdruck, so erhalten wir

$$\sigma=\sum_{i} f(x_i, y_i)\, |J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\, \Delta_i\,.$$

Während sich der Punkt (ξ_i^*, η_i^*) aus dem Mittelwertsatz ergibt und nicht willkürlich gewählt werden darf, ist die Wahl des Punktes (x_i, y_i) *völlig willkürlich*. Wir nutzen diese Willkür aus und setzen

$$x_i=x(\xi_i^*, \eta_i^*), \qquad y_i=y(\xi_i^*, \eta_i^*)\,,$$

d. h., wir wählen als Punkt (x_i, y_i) den Punkt des Gebiets (D_i), der dem Punkt (ξ_i^*, η_i^*) des Gebiets (Δ_i) entspricht. Dann erhält die Summe σ die Gestalt

$$\sigma=\sum_{i} f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*))\, |J(\xi_i^*, \eta_i^*)|\, \Delta_i;$$

---

[1]) Wir setzen also auch Existenz und Stetigkeit der gemischten zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}$ voraus (vgl. die Fußnote 2 auf S. 168).

in dieser Form ist sie offenbar eine Integralsumme des Integrals

$$\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\, |J(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,. \tag{20}$$

Die Existenz dieses Integrals folgt daraus, daß der Integrand stetig ist oder beschränkt ist und Unstetigkeiten nur längs der endlich vielen stückweise glatten Kurven zuläßt, die in der ξ, η-Ebene Bilder der Unstetigkeitskurven der Funktion $f(x, y)$ sind.

Wenn wir nun die Durchmesser aller Gebiete (Δ_i) gegen 0 streben lassen, so streben auf Grund der Stetigkeit der Funktionen (1) auch die Durchmesser aller Gebiete (D_i) gegen 0. Die Summe σ muß dann sowohl gegen das Integral (19) als auch gegen das Integral (20) konvergieren; denn sie ist für beide gleichzeitig eine Integralsumme. Also gilt

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\, |J(\xi, \eta)|\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta\,. \tag{21}$$

Diese Formel löst die gestellte Aufgabe bezüglich der Variablentransformation in Flächenintegralen. Die Formel (11) ist offenbar ein Spezialfall dieser Formel; sie ergibt sich aus ihr für $f(x, y) \equiv 1$.

Um in dem Flächenintegral (19) *eine Variablentransformation durchzuführen, hat man also nicht nur in der Funktion f an Stelle von x und y die Ausdrücke* (1) *einzusetzen, sondern auch das Flächenelement* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *durch seinen Ausdruck in krummlinigen Koordinaten zu ersetzen.*

Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen wie in Nr. 606, 4°, kann man auch hier leicht beweisen, daß die Formel (21) in einer Reihe von Fällen gültig bleibt, in denen die der Abbildung (1) auferlegten Bedingungen in einzelnen Punkten oder längs einzelner Linien verletzt sind.

610. Die Analogie zu einfachen Integralen. Das Integral über ein orientiertes Gebiet. Die Formel für die Variablentransformation in einem Flächenintegral ist der Formel

$$\int\limits_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(x(\xi))\, x'(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{22}$$

für die Variablentransformation in einem gewöhnlichen bestimmten Integral sehr ähnlich.

In der Formel (22) fehlen jedoch die Absolutstriche, und das stört die Analogie etwas. Dieser Unterschied läßt sich leicht erklären. Das gewöhnliche bestimmte Integral wird über ein *orientiertes Intervall* erstreckt (Nr. 302); a kann nämlich kleiner oder größer als b sein, und genauso kann α kleiner oder größer als β sein. Das Flächenintegral haben wir jedoch bisher nur bezüglich eines *nichtorientierten Gebiets* betrachtet.

Man kann aber auch bei Flächenintegralen zur Betrachtung *orientierter* Gebiete übergehen. Eine Orientierung eines Gebiets wird dadurch erzeugt, daß seiner Randkurve ein bestimmter Umlaufsinn (der positive oder der negative) vorgeschrieben wird (Nr. 548); damit wird gleichzeitig ein Umlaufsinn für alle geschlossenen einfachen Kurven in diesem Gebiet vorgeschrieben. Ist der positive Umlaufsinn gewählt worden, so sagt man, das Gebiet sei *positiv orientiert*, anderenfalls, es sei *negativ orientiert.*

Natürlich vereinbaren wir, daß der Inhalt eines orientierten Gebiets (D) dem absoluten Betrag nach gleich dem gewöhnlichen Inhalt dieses Gebiets sein soll; er soll positiv sein, wenn das Gebiet positiv orientiert ist, anderenfalls negativ. Bei einer Zerlegung des Gebiets (D) in Teile (D_i) werden diese Teile, wie wir festgestellt haben, so orientiert wie das ganze Gebiet; in entsprechender Weise werden auch ihre Inhalte mit Vorzeichen versehen.

Nun kann man nach dem Vorbild von Nr. 588 für ein *orientiertes* Gebiet (D) den Begriff des Flächenintegrals

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx dy$$

definieren, wobei dieses Integral mit dem früher definierten übereinstimmt, wenn das Gebiet positiv orientiert ist, und sich von ihm durch das Vorzeichen unterscheidet, wenn das Gebiet negativ orientiert ist.

Diese neue Auffassung des Flächenintegrals erlaubt es, zunächst die Formel (11) aus Nr. 605, die den Inhalt in krummlinigen Koordinaten ausdrückt, ohne Absolutstriche bei der Funktionaldeterminante zu schreiben:

$$D=\iint\limits_{(\Delta)} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\,d\xi d\eta=\iint\limits_{(\Delta)} J(\xi, \eta)\,d\xi d\eta\,,$$

wenn nur die Gebiete (D) *und* (Δ) *übereinstimmend orientiert werden.* Das folgt unmittelbar aus Nr. 606, Bemerkung 1°.

Unter den gleichen Bedingungen kann man auch die Formel (12) aus Nr. 606 ohne Absolutstriche schreiben:

$$D=J(\bar{\xi}, \bar{\eta})\cdot \Delta\,.$$

In dieser Form ist sie die natürliche Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

Schließlich kann man nun auch die allgemeine Formel (21) *für übereinstimmend orientierte Gebiete* (D) *und* (Δ) in der Form

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\,dx dy=\iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\,J(\xi, \eta)\,d\xi d\eta$$

schreiben. Man braucht also nur einfache Integrale und Flächenintegrale den *gleichen Bedingungen* zu unterwerfen, um völlige Analogie zu erreichen.

Im übrigen werden wir in den kommenden Darlegungen dennoch wieder zu der gewöhnlichen Auffassung zurückkehren und Flächenintegrale über nichtorientierte Gebiete betrachten.

611. Beispiele. Da eine Variablentransformation in Flächenintegralen oft die Vereinfachung des Integrationsgebiets zum Ziel hat, sind hier wieder alle Hinweise anwendbar, die in dieser Hinsicht in Nr. 608 gegeben wurden. Daneben ist auch die Vereinfachung des Integranden ein natürliches Ziel der Transformation.

1. Ist das Gebiet ein Kreis (um den Koordinatenursprung) oder ein Sektor eines solchen Kreises, so ist es günstig, zu Polarkoordinaten überzugehen. Zur Übung löse man nochmals die Beispiele 1, 17(a) und 18(b) aus Nr. 597.

Für das zweite von ihnen erhalten wir

$$V=\iint\limits_{(D)} xy\,dx dy=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{R} r^3\cos\theta\sin\theta\,dr d\theta=\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^{R} r^3 dr=\frac{R^4}{8}\,.$$

Wenn dabei im Integranden auch noch die Summe x^2+y^2 auftritt, so hat man um so mehr Grund, von der Verwendung von Polarkoordinaten eine Vereinfachung zu erwarten.

2. Man bestimme das Volumen desjenigen Teils einer Kugel (vom Radius R), der aus dieser durch einen geraden Kreiszylinder (vom Radius $r<R$) herausgeschnitten wird, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Lösung. Wählen wir den Mittelpunkt der Kugel als Koordinatenursprung und die Zylinderachse als z-Achse, so gilt

$$V=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqq r^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r}\sqrt{R^2-\varrho^2}\,\varrho d\varrho d\theta=\frac{4\pi}{3}\left[R^3-(R^2-r^2)^{3/2}\right].$$

3. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von der Rotationsparaboloidfläche $az=x^2+y^2$ und der Ebene $z=a$ begrenzt wird.

Lösung. $V=\frac{\pi a^3}{2}$.

4. Man bestimme die Lage des Schwerpunkts des Kreissektors vom Radius R, dessen Zentriwinkel 2α ist.

Lösung. Wenn wir die Winkelhalbierende des Zentriwinkels als Polarachse (und als x-Achse) wählen, so erhalten wir

$$M_y=\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\int\limits_0^{R}r^2\cos\theta\,drd\theta=\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\,.$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch den Inhalt $P=R^2\alpha$ des Kreissektors, so ergibt sich die Abszisse ξ des Schwerpunkts:

$$\xi=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,.$$

Da der Schwerpunkt auf Grund der Symmetrie auf der Winkelhalbierenden liegt, ist seine Lage somit bestimmt.

5. Man bestimme die Masse der Kreisscheibe (vom Radius R), deren Dichte in jedem Punkt gleich dem Abstand dieses Punktes vom Rand der Kreisscheibe ist.

Lösung. $m=\frac{\pi}{3}R^3$.

Wir führen noch eine Reihe von Beispielen an, in denen es günstig ist, Polarkoordinaten zu benutzen.

6. Man bestimme das Volumen des „Vivianischen Körpers“ (Nr. 597, Beispiel 20).

Lösung. Wir hatten bereits

$$V=4\iint\limits_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy,$$

wobei (P) der über dem Radius R der Kugel errichtete Halbkreis im ersten Quadranten der x, y-Ebene ist (Abb. 48). Das Auftreten des Ausdrucks x^2+y^2 im Integranden legt den Übergang zu Polarkoordinaten nahe.

Die Polargleichung des Randes von (P), d. h. des Halbkreises, ist $r=R\cos\theta$, wobei θ die Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft. Also ist

$$V=4\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,rdr=\frac{4}{3}R^3\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Wie wir sehen, haben sich die Rechnungen hier tatsächlich wesentlich vereinfacht.[1])

7. Man bestimme (a) die Lage des Schwerpunkts und (b) das polare Trägheitsmoment eines Blattes der Lemniskate

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2).$$

Lösung. (a) Die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten ist

$$r^2=2a^2\cos 2\theta \quad \left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right).$$

Folglich gilt

$$M_y=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^2\cos\theta\,dr d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\cos^{3/2}2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3\int_0^{\pi/4}(1-2\sin^2\theta)^{3/2}\cos\theta\,d\theta$$

und weiter, wenn man $\sqrt{2}\sin\theta=\sin\omega$ setzt,

$$M_y=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\omega\,d\omega=\frac{\pi}{4}a^3.$$

Da der Inhalt eines Blattes $P=a^2$ ist (Nr. 339, Beispiel 12), ist $\xi=\frac{\pi a}{4}$, womit die Lage des Schwerpunkts bestimmt ist.

(b) Es gilt

$$I_0=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3 dr d\theta=\frac{\pi a^4}{4}.$$

8. Man bestimme das polare Trägheitsmoment der Kardioide $r=a(1+\cos\theta)$ bezüglich des Pols.

Lösung. $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$.

9. Man bestimme die Lage des Schwerpunkts des „Vivianischen Körpers“ (vgl. Beispiel 6).

Lösung. Aus Symmetriebetrachtungen ergibt sich, daß der Schwerpunkt auf der x-Achse liegt. Wir berechnen das statische Moment

$$M_{yz}=4\iint_{(P)} xz\,dx dy=4\iint_{(P)} x\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx dy=4\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r^2 dr.$$

Für das innere Integral gilt

$$\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r^2 dr=\frac{r}{8}(2r^2-R^2)\sqrt{R^2-r^2}+\frac{R^4}{8}\arcsin\frac{r}{R}\Big|_0^{R\cos\theta}$$

$$=\frac{R^4}{8}\left[\cos\theta(2\cos^2\theta-1)\sin\theta+\frac{\pi}{2}-\theta\right];$$

[1]) Natürlich kann es vorkommen, daß die *Vereinfachung des Integranden* mit einer solchen *Komplizierung des Integrationsgebiets* verbunden ist, daß der Übergang zu Polarkoordinaten letzten Endes unzweckmäßig ist.

daher wird

$$M_{yz}=\frac{R^4}{2}\int_0^{\pi/2}\left[(2\cos^4\theta-\cos^2\theta)\sin\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R^4}{2}\left[-\frac{2}{5}\cos^5\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\theta-\cos\theta\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{8}{15}R^4.$$

Hieraus folgt schließlich

$$\xi=\frac{M_{yz}}{V}=\frac{12}{5(3\pi-4)}R.$$

10. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von dem elliptischen Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

der Ebene $z=0$ und einer der folgenden Flächen begrenzt wird:

(a) $z=\lambda x+\mu y+h$ $(h>0)$ (Ebene),

(b) $\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$ $(c>0)$ (elliptisches Paraboloid),

(c) $cz=xy$ $(c>0)$ (hyperbolisches Paraboloid).

Lösung. Das Problem führt auf die Berechnung eines Integrals über eine *Ellipse* in der x, y-Ebene. Deswegen ist es zweckmäßig, zu verallgemeinerten Polarkoordinaten überzugehen, indem man $x=ar\cos\theta$ und $y=br\sin\theta$ setzt. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist $J=abr$.

Für den Fall (b) erhalten wir beispielsweise

$$V=\frac{c}{2}\iint_{(D)}\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2abc\int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(\frac{a^2\cos^2\theta}{p^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{q^2}\right)r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{8}abc\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right).$$

Analog finden wir in den beiden anderen Fällen[1]:

(a) $V=\pi abh$, (c) $V=\frac{a^2b^2}{2c}$.

11. Man bestimme das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Hinweis. Man benutze verallgemeinerte Polarkoordinaten.

Lösung. $\frac{4}{3}\pi abc$.

12. Man berechne das Integral

$$I=\iint_{(D)}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

über die Schleife der Kurve

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^3}$$

im ersten Quadranten (vgl. Nr. 608, Beispiel 3(d)).

[1]) Im Fall (c) besteht der Körper aus vier symmetrischen Teilen, von denen zwei oberhalb und zwei unterhalb der x, y-Ebene liegen.

Hinweis wie oben. Lösung. $\frac{1}{840}\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}$.

13. Man berechne die Integrale

(a) $I_1=\iint\limits_{(A)}\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy$, (b) $I_2=\iint\limits_{(A)}x^n y^n dxdy$

(n eine natürliche Zahl), wenn (A) das Gebiet ist, das von den Koordinatenachsen und der Parabel $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ begrenzt wird.

Lösung. Eine Parameterdarstellung der Kurve ist $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$. Natürlich wird man die Schar der Parabeln betrachten, die (bezüglich des Koordinatenursprungs) ähnlich liegen: $x=\varrho\cos^4 t$, $y=\varrho\sin^4 t$ $(0\leqq\varrho\leqq 1)$. Führt man ϱ und t als neue Veränderliche ein, so wird die Funktionaldeterminante $J=4\varrho\cos^3 t\sin^3 t$; also ist

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\sqrt[4]{\varrho}\,4\varrho\cos^3 t\sin^3 t\,d\varrho dt=\frac{4}{27},$$

$$I_2=4\int_0^{\pi/2}\int_0^1\varrho^{2n+1}\cos^{4n+3}t\sin^{4n+3}t\,d\varrho dt$$

$$=\frac{2}{n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{4n+3}t\sin^{4n+3}t\,dt=\frac{2}{n+1}\frac{[(4n+2)!!]^2}{(8n+6)!!}.$$

Die rechte Seite kann man auf die Form

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)(2n+2)(2n+3)\ldots(4n+3)}$$

bringen. Für $n=1$ ergibt sich hieraus insbesondere die Lösung der Aufgabe 3 aus Nr. 597.

14. Man berechne das Integral

$$K=\iint\limits_{(B)}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dxdy,$$

wenn (B) das Gebiet ist, das von den Koordinatenachsen und der Parabel

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$$

begrenzt wird.

Hinweis. Man setze $x=a\varrho\cos^4 t$, $y=b\varrho\sin^4 t\left(0\leqq\varrho\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$.

Lösung. $K=\frac{2}{21}ab$.

15. Man berechne das Integral

$$L=\iint\limits_{(D)}\frac{x^2\sin xy}{y}dxdy$$

über das Gebiet (D), das von den vier Parabeln $x^2=ay$, $x^2=by$, $y^2=px$, $y^2=qx$ $(0<a<b$, $0<p<q)$ begrenzt wird.

Lösung. Mit Hilfe der in Nr. 604, Beispiel 4, angegebenen Variablentransformation (vgl. Nr. 608, Beispiel 5) bringen wir das Integral auf die Form

$$L=\frac{1}{3}\int_a^b\int_p^q\eta\sin\xi\eta\,d\xi d\eta.$$

Nun ergibt eine leichte Rechnung

$$L=\frac{1}{3}\left(\frac{\sin pb-\sin pa}{p}-\frac{\sin qb-\sin qa}{q}\right).$$

Analog läßt sich auch in den folgenden Fällen ein geeignetes System krummliniger Koordinaten erraten.

16. Man berechne das Integral

$$I=\iint\limits_{(A)} xy\,dx\,dy\,,$$

wenn (A) das Vierseit ist, das von den folgenden Kurven begrenzt wird:
(a) $y=ax^3$, $y=bx^3$, $y^2=px$, $y^2=qx$;
(b) $y^3=ax^2$, $y^3=bx^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$.

Hinweis. Man führe folgendermaßen neue Koordinaten ξ, η ein:

(a) $y=\xi x^3$, $y^2=\eta x$; (b) $y^3=\xi x^2$, $y=\eta x$.

Lösung. (a) $I=\frac{5}{48}(a^{-6/5}-b^{-6/5})(q^{8/5}-p^{8/5})$;

(b) $I=\frac{1}{40}(b^4-a^4)(\alpha^{-10}-\beta^{-10})$.

17. Es sei (D) das Dreieck, das durch die Ungleichungen $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ und $x+y\leqq 1$ bestimmt wird. Unter der Voraussetzung $p\geqq 1$, $q\geqq 1$ beweise man direkt die Liouvillesche Formel aus Nr. 597, Beispiel 16[1]):

$$\iint\limits_{(D)}\varphi(x+y)\,x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy=B(p,q)\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p+q-1}\,du\,,$$

wobei $\varphi(u)$ eine im Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion ist.

Beweis. Wir setzen

$$x=u(1-v),\ y=uv \quad \text{oder} \quad u=x+y,\ v=\frac{y}{x+y}.$$

Diese Formeln stellen eine eineindeutige Beziehung zwischen dem Dreieck (D) in der x, y-Ebene und dem Quadrat $(\Delta)=[0, 1; 0, 1]$ in der u, v-Ebene her. (Eine Ausnahme macht nur der Punkt $x=0$, $y=0$, der einem Abschnitt der v-Achse entspricht.) Dabei gilt

$$J=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}=u\,.$$

Durch Übergang zu den neuen Veränderlichen finden wir, daß das Flächenintegral gleich

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p+q-1}v^{q-1}(1-v)^{p-1}\,du\,dv$$

oder gleich

$$\int\limits_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}\,dv\int\limits_0^1\varphi(u)\,u^{p+q-1}\,du$$

ist. Da der erste Faktor gerade gleich $B(q, p)=B(p, q)$ ist, ist das gewünschte Ergebnis bewiesen.

---

[1]) In Nr. 597 war sie aus der Dirichletschen Formel hergeleitet worden, die ein Spezialfall von ihr ist ($\varphi\equiv 1$).

18. Mit Hilfe derselben Variablentransformation kann man auch die allgemeinere Formel

$$\iint\limits_{\substack{x\geqq 0,\, y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} \varphi(x+y)\,\frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(\alpha x+\beta y+\gamma)^{p+q}}\,dx\,dy = B(p,q)\int\limits_0^1 \frac{\varphi(u)\,u^{p+q-1}\,du}{(\alpha u+\gamma)^p\,(\beta u+\gamma)^q}$$

beweisen (wenn $p, q \geqq 1$; $\alpha, \beta \geqq 0$, $\gamma > 0$ und $\varphi(u)$ stetig ist). Man muß dabei das Ergebnis von Aufgabe 2 aus Nr. 534 benutzen.

19. Die Formel

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(\alpha\beta)\,(1-\alpha)^{p-1}\,\beta^p\,(1-\beta)^{q-1}\,d\alpha\,d\beta = B(p,q)\int\limits_0^1 f(v)\,(1-v)^{p+q-1}\,dv$$

reduziert sich auf die Liouvillesche Formel, wenn man die Substitution

$$\alpha = \frac{1-x-y}{1-y}, \qquad \beta = 1-y$$

durchführt, und zwar für $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq 1$. Die Funktionaldeterminante ist $J = \frac{1}{1-y}$.[1])

20. Man beweise mit Hilfe einer Koordinatentransformation (für beliebiges $z = \text{const}$) die Identität

$$\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi\,d\theta = \left\{\int\limits_0^{\pi/2}\cos(z\sin\lambda)\,d\lambda\right\}^2$$

(vgl. Nr. 595, Beispiel 7).

Beweis. Durch die Substitution

$$\varphi = \frac{u+v}{2}, \qquad \theta = \frac{u-v}{2}$$

erhält das Flächenintegral die Gestalt

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Delta)} [\cos(z\cos u)\cos(z\cos v) + \sin(z\cos u)\sin(z\cos v)]\,du\,dv\,.$$

Hierbei ist (Δ) das in Abb. 76 dargestellte, auf einer Spitze stehende Quadrat. Nun ist aber das Integral des zweiten Summanden gleich 0 (Substitution $u = \pi - u'$), während das Integral des ersten Summanden über das Quadrat (Δ) unmittelbar auf den doppelten Wert des entsprechenden Integrals über das Quadrat $\left[0, \frac{\pi}{2}; 0, \frac{\pi}{2}\right]$ führt. Daraus erhält man leicht das gewünschte Ergebnis.

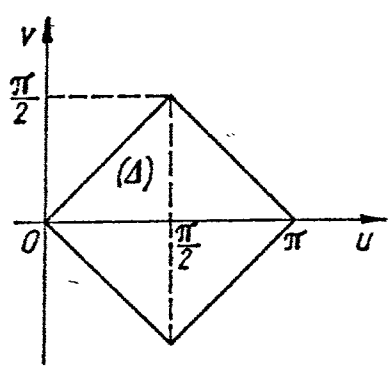

Abb. 76

[1]) Übrigens erfordert der Punkt $x = 0, y = 1$ einen gewissen Vorbehalt.

§ 5. Uneigentliche Flächenintegrale

612. Integrale über ein unbeschränktes Gebiet. Der Begriff des Flächenintegrals läßt sich auf den Fall eines *unbeschränkten*, d. h. sich ins Unendliche erstreckenden Gebiets und auf den Fall einer *unbeschränkten* Funktion ähnlich erweitern, wie das in Kapitel XIII in bezug auf einfache Integrale geschehen ist.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Fall eines unbeschränkten Gebiets (P). Beispiele solcher Gebiete sind die ganze Ebene, das Äußere eines Kreises oder irgendeiner anderen beschränkten ebenen Figur, jeder Winkelraum usw. Über den Rand dieses Gebiets setzen wir voraus, daß jeder beschränkte Teil den Inhalt 0 hat (beispielsweise, daß er aus stückweise glatten Kurven besteht). Im Gebiet (P) sei eine Funktion $f(x, y)$ gegeben, von der wir voraussetzen, daß sie in jedem beschränkten quadrierbaren Teilgebiet von (P) im gewöhnlichen Sinne integrierbar ist.

Wir ziehen eine Hilfskurve K' (die ebenfalls den Inhalt 0 hat) und schneiden damit von dem Gebiet (P) ein *beschränktes* und *zusammenhängendes* Teilgebiet (P') ab. Das Integral

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

existiert nach Voraussetzung. Wir lassen nun die Kurve (K') so ins Unendliche rücken, daß der *kleinste* Abstand R vom Koordinatenursprung zu einem Punkt dieser Kurve über alle Grenzen wächst. Dann erfaßt das durch sie abgeschnittene veränderliche Gebiet (P') nach und nach alle Punkte des Gebiets (P): Jeder Punkt aus (P) gehört für genügend großes R zu (P').

Den (endlichen oder unendlichen) Grenzwert des Integrals (1) für $R\to\infty$ nennt man das (*uneigentliche*) *Integral der Funktion* $f(x, y)$ *über das unbeschränkte Gebiet* (P) und bezeichnet es mit

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{(P')} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{2}$$

Im Fall der Existenz eines endlichen Grenzwerts nennt man das Integral (2) *konvergent*, anderenfalls *divergent*. Eine Funktion, für die das Integral (2) konvergiert, nennt man im Gebiet (P) (uneigentlich) *integrierbar*.

Im Fall einer *positiven* Funktion $f(x, y)$ genügt es, irgendeine Folge von gegen Unendlich strebenden Kurven $(K_1), (K_2), \ldots, (K_n), \ldots$ und die von diesen abgeschnittenen Gebiete $(P_1), (P_2), \ldots, (P_n), \ldots$ zu betrachten und vorauszusetzen, daß

$$I = \sup_n \left\{ \iint\limits_{(P_n)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right\}$$

endlich ist, um die Konvergenz des Integrals (2) zu sichern.

Jedes Gebiet (P'), das durch eine Kurve (K') von (P) abgetrennt wird, liegt nämlich für genügend großes n ganz in (P_n), also ist

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq \iint\limits_{(P_n)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

und um so mehr

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqq I\,. \tag{3}$$

Andererseits existiert zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ ein n_0, für das

$$\iint\limits_{(P_{n_0})} f(x, y)\,dx dy > I-\varepsilon$$

wird. Für genügend großes R umfaßt das Gebiet (P') seinerseits (P_{n_0}) [1]; folglich gilt erst recht

$$\iint\limits_{(P')} f(x, y)\,dx dy \geqq I-\varepsilon\,. \tag{4}$$

Die Ungleichungen (3) und (4) zusammen beweisen, daß die Zahl I der Wert des Flächenintegrals ist.

Mit Hilfe dieser Überlegung kann man leicht einen Satz über den Vergleich von Integralen beweisen, der dem Satz 1 aus Nr. 474 analog ist. Wenn man die früheren Voraussetzungen bezüglich der Funktion $f(x, y)$ beibehält, so *folgt ferner aus der Konvergenz des Integrals von* $|f(x, y)|$ *über das unbeschränkte Gebiet* (P) *die Konvergenz des entsprechenden Integrals für die Funktion* $f(x, y)$.

Um das zu beweisen, betrachten wir die beiden nichtnegativen Funktionen

$$f_+(x, y)=\frac{|f(x, y)|+f(x, y)}{2} \quad \text{und} \quad f_-(x, y)=\frac{|f(x, y)|-f(x, y)}{2}\,;$$

offenbar gilt

$$f_+(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & \text{wenn } f(x, y)\geqq 0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$f_-(x, y)=\begin{cases} -f(x, y), & \text{wenn } f(x, y)\leqq 0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Integrierbarkeit der Funktion $|f(x, y)|$ folgt die Konvergenz der Integrale der Funktionen

$$f_+(x, y)\leqq|f(x, y)| \quad \text{und} \quad f_-(x, y)\leqq|f(x, y)|\,;$$

folglich konvergiert auch das Integral für die Funktion

$$f(x, y)=f_+(x, y)-f_-(x, y)\,.$$

Äußerst bemerkenswert ist die Tatsache, daß auch das Umgekehrte gilt: *Aus der Konvergenz des Integrals der Funktion* $f(x, y)$ *über ein unbeschränktes Gebiet* (P) *folgt die Konvergenz des Integrals auch für* $|f(x, y)|$. Dieser Satz besitzt in der Theorie der einfachen uneigentlichen Integrale kein Analogon: Wir wissen (Nr. 475), daß dort auch nicht-absolut konvergierende Integrale existieren können.

Den Beweis geben wir in Nr. 613.

613. Satz über die absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale. *Jedes konvergente Integral*

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx dy \tag{5}$$

[1] R bezeichnet weiterhin den kleinsten Abstand von Punkten der Kurve (K') zum Koordinatenursprung.

konvergiert notwendigerweise auch absolut, d. h., mit ihm konvergiert zugleich auch das Integral

$$\iint\limits_{(P)} |f(x, y)|\, dx dy\,. \tag{6}$$

Wir nehmen das Gegenteil an. Wählen wir eine *Folge* $\{(P_n)\}$ von Gebieten, die *wachsen* und nach und nach das ganze Gebiet (P) erfassen, so gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx dy = +\infty\,.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß für jeden Index n die Ungleichung

$$\iint\limits_{(P_{n+1})} |f(x, y)|\, dx dy > 3 \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx dy + 2n$$

erfüllt ist. Das kann man dadurch erreichen, daß man (nötigenfalls) eine Teilfolge der Folge $\{(P_n)\}$ auswählt und diese neu numeriert.

Bezeichnet man mit (p_n) die Differenz der Gebiete (P_{n+1}) und (P_n), so gilt offenbar

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x, y)|\, dx dy > 2 \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx dy + 2n\,.$$

Nun ist aber

$$|f(x, y)| = f_+(x, y) + f_-(x, y)\,,$$

also gilt

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x, y)|\, dx dy = \iint\limits_{(p_n)} f_+(x, y)\, dx dy + \iint\limits_{(p_n)} f_-(x, y)\, dx dy\,.$$

Von den beiden Integralen rechts sei etwa das erste das größere. Dann gilt

$$\iint\limits_{(p_n)} f_+(x, y)\, dx dy > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx dy + n\,.$$

Ersetzen wir das Flächenintegral links durch eine ihm genügend nahe kommende untere Darbouxsche Summe, so erhalten wir die Ungleichung[1])

$$\sum_i m_n^{(i)} p_n^{(i)} > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx\, dy + n\,.$$

Es ist erlaubt, in dieser Summe nur diejenigen Glieder beizubehalten, für die $m_n^{(i)} > 0$ ist; bezeichnen wir die *Gesamtheit* der entsprechenden Elemente $(p_n^{(i)})$ mit $(\tilde{p}_n)$, so gilt erst recht

$$\iint\limits_{(\tilde{p}_n)} f(x, y)\, dx dy = \iint\limits_{(\tilde{p}_n)} f_+(x, y)\, dx dy > \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx dy + n\,.$$

Wir bezeichnen mit $(\tilde{P}_n)$ die Vereinigung der Gebiete (P_n) und $(\tilde{p}_n)$. Addieren wir die Ungleichung

$$\iint\limits_{(P_n)} f(x, y)\, dx dy \geqq - \iint\limits_{(P_n)} |f(x, y)|\, dx dy$$

---

[1]) Hierbei sind die $(p_n^{(i)})$ Elemente, in die das Gebiet (p_n) zerlegt worden ist, und die $m_n^{(i)}$ sind die entsprechenden unteren Grenzen der Funktion $f_+(x, y)$.

zu der vorhergehenden, so finden wir

$$\iint\limits_{(\tilde{P}_n)} f(x, y)\,dxdy > n\,.$$

Das Gebiet $(\tilde{p}_n)$ und damit auch $(\tilde{P}_n)$ kann man so abändern, daß aus $(\tilde{P}_n)$ ein *zusammenhängendes* Gebiet (P_n') entsteht, das sich in bezug auf den Inhalt beliebig wenig von $(\tilde{P}_n)$ unterscheidet und für das immer noch die Ungleichung

$$\iint\limits_{(P_n')} f(x, y)\,dxdy > n$$

gilt. Das kann man leicht dadurch erreichen, daß man die getrennten Teile des Gebiets durch schmale „Korridore" mit beliebig kleinem Inhalt verbindet.

Hieraus ergibt sich, daß das Integral (5) entgegen unserer Voraussetzung nicht konvergieren kann; dieser Widerspruch beweist unseren Satz.

Wir bemerken, daß der prinzipielle Unterschied zwischen dem eindimensionalen und dem zweidimensionalen Fall gerade mit dem letzten Teil unserer Überlegung zusammenhängt. Ein nichtzusammenhängendes eindimensionales Gebiet, das aus getrennten Intervallen besteht, kann man nicht durch eine beliebig kleine Deformation in ein zusammenhängendes Gebiet (d. h. ein volles Intervall) verwandeln.

Der bewiesene Satz und die Bemerkungen von Nr. 612 führen das Problem der Konvergenz und der Berechnung eines uneigentlichen Integrals einer beliebigen Funktion auf das entsprechende Problem für eine positive (nichtnegative) Funktion zurück. Mit diesem Problem werden wir uns in Nr. 614 hauptsächlich beschäftigen.

614. Die Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein iteriertes Integral. Wir beschränken uns von vornherein auf den Fall, daß die Funktion $f(x, y)$ nichtnegativ ist. Wenn diese Funktion in einem unbeschränkten Gebiet beliebiger Form gegeben ist, so kann man die Funktion außerhalb dieses Gebiets gleich 0 setzen und dadurch das Problem immer auf ein *rechteckiges* unbeschränktes Gebiet zurückführen. Es handle sich etwa um das in einer Richtung unbeschränkte Rechteck $[a, b; c, \infty]$ (a, b, c seien endliche Zahlen, und es gelte $b > a$). Wir setzen voraus, daß in jedem Rechteck $[a, b; c, d]$ (für beliebiges $d > c$) das Flächenintegral und das einfache Integral über y existieren, und zwar beide *im eigentlichen Sinne*. Dann gilt (Nr. 594)

$$\iint\limits_{[a,b;c,d]} f\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f\,dy\,. \tag{7}$$

Wir wollen eine analoge Formel auch für das unendliche Rechteck beweisen, d. h. für den Fall $d = \infty$. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß das Doppelintegral

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\infty f\,dy$$

konvergiert. Aus der Tatsache, daß für jedes $d > c$

$$\iint\limits_{[a,b;c,d]} f\,dxdy \leqq I$$

ist, folgt nach Nr. 612 bereits die Konvergenz des Flächenintegrals

$$\iint\limits_{[a,b;c,\infty]} f\,dxdy = \lim_{d\to\infty} \iint\limits_{[a,b;c,d]} f\,dxdy\,, \tag{8}$$

das offensichtlich nicht größer als I ist. Es bleibt nur zu beweisen, daß das Flächenintegral tatsächlich gleich I ist.

Wenn das Integral $\int_c^\infty f\,dy$ eine Funktion von x darstellt, die *eigentlich* integrierbar ist und folglich irgendeine obere Schranke L besitzt, so ist erst recht

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \leqq L\,.$$

Daher gilt nach Satz 2 von Nr. 526

$$I = \lim_{d\to\infty} \int_a^b dx \int_c^d f\,dy\,.$$

Vergleichen wir dies mit (7) und (8), so kommen wir zu dem gewünschten Ergebnis.

Die aufgestellte Beziehung bleibt auch dann gültig, wenn das Integral I *uneigentlich* konvergiert. Es sei etwa b der einzige singuläre Punkt des Integrals $\int_c^\infty f\,dy$ als Funktion von x. Dann gilt nach dem bereits Bewiesenen für $0<\eta<b-a$

$$\iint\limits_{[a,b-\eta;c,\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^{b-\eta} dx \int_c^\infty f\,dy\,, \tag{9}$$

und beide Seiten der Gleichung streben für $\eta\to 0$ gegen I. Beachten wir, daß

$$I \geqq \iint\limits_{[a,b;c,\infty]} f\,dx\,dy \geqq \iint\limits_{[a,b-\eta;c,\infty]} f\,dx\,dy$$

ist, so können wir wieder schließen, daß das Flächenintegral und das Doppelintegral über das Rechteck $[a, b; c,\infty]$ gleich sind.

Wir erwähnen, daß aus den letzten zwei Beziehungen ersichtlich ist, daß das Flächenintegral unendlich wird, wenn das uneigentliche Doppelintegral unendlich ist.

Daher gilt analog zu (7)

$$\iint\limits_{[a,b;c,\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^\infty f\,dy\,, \tag{10}$$

wobei aus der Existenz des Doppelintegrals rechts die Existenz des Flächenintegrals folgt. Die Gleichheit gilt sogar dann noch, wenn das Integral rechts gleich ∞ ist.

Wir wenden uns schließlich der Betrachtung eines Rechtecks $[a,\infty; c,\infty]$ zu, das sich in zwei zueinander senkrechten Richtungen ins Unendliche erstreckt. Auch hier werden wir voraussetzen, daß in jedem endlichen Rechteck $[a, b; c, d]$ (für beliebige $b>a$ und $d>c$) das Flächenintegral und das einfache Integral über y *im eigentlichen Sinne* existieren.

Für den vorliegenden Fall kann man die Formel

$$\iint\limits_{[a,\infty;c,\infty]} f\,dx\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f\,dy \tag{11}$$

beweisen, vorausgesetzt, daß das Doppelintegral rechts konvergiert. Das ergibt sich aus (10) durch den Grenzübergang $b\to\infty$, und zwar ähnlich, wie wir oben (10) aus (9) erhalten haben.

Wir gehen noch kurz auf den Fall ein, daß die Funktion $f(x, y)$ das Vorzeichen wechselt; wir beschränken uns hierbei etwa auf die Formel (10). Für das endliche Rechteck $[a, b; c, d]$ (für $d > c$) behalten wir die früheren Voraussetzungen bei, nehmen aber diesmal neben der Konvergenz des Integrals

$$\int_a^b dx \int_c^\infty f(x, y)\, dy$$

der Funktion selbst auch die Konvergenz des Integrals ihres absoluten Betrages an:

$$\int_a^b dx \int_c^\infty |f(x, y)|\, dy .$$

Dann existieren die entsprechenden Integrale auch für die am Schluß von Nr. 612 erwähnten Funktionen $f_+(x, y)$ und $f_-(x, y)$. Wenden wir auf diese *nichtnegativen* Funktionen einzeln die bewiesene Formel (10) an und subtrahieren die Ergebnisse, so sehen wir, daß die Formel (10) auch für die gegebene Funktion $f(x, y)$ gültig bleibt.

615. Integrale unbeschränkter Funktionen. In einem beschränkten Gebiet (P) sei eine Funktion $f(x, y)$ gegeben, die in der Umgebung einzelner Punkte $M_1, M_2, \ldots$ unbeschränkt ist; wir nehmen an, daß die Funktion in jedem Teilgebiet von (P), das diese Punkte nicht enthält, eigentlich integrierbar ist.

Wir trennen nun die *singulären Punkte* $M_1, M_2, \ldots$ ab, indem wir sie mit geschlossenen Kurven $(k_1), (k_2), \ldots$ umgeben. Wenn wir aus dem Gebiet (P) die von diesen Kurven begrenzten Umgebungen der singulären Punkte entfernen, so erhalten wir ein Gebiet (P'), für das das Integral

$$\iint_{(P')} f(x, y)\, dx dy \tag{1*}$$

nach Voraussetzung konvergiert. Wir werden die Kurven $(k_1), (k_2), \ldots$ auf die erwähnten Punkte so zusammenziehen, daß der *größte* der Abstände der Punkte dieser Kurven (k) von dem entsprechenden Punkt M (wir bezeichnen ihn mit ϱ) gegen 0 strebt.[1]) Wir bemerken, daß dabei auch die Inhalte der betrachteten Umgebungen (die kleiner als $\pi\varrho^2$ sind) gegen 0 streben.

Das (*uneigentliche*) *Integral der unbeschränkten Funktion* $f(x, y)$ *über das Gebiet* (P) wird als Grenzwert des Integrals (1*) für $\varrho \to 0$ definiert:

$$\iint_{(P)} f(x, y)\, dx dy = \lim_{\varrho \to 0} \iint_{(P')} f(x, y)\, dx dy . \tag{2*}$$

Die singulären Punkte dürfen auch längs irgendwelcher *singulärer Linien* liegen, von denen wir immer annehmen werden, daß sie den Inhalt 0 haben. In diesem Fall muß man diese Linien mit Umgebungen versehen, die sich auf sie zusammenziehen. Prinzipiell tritt hier nichts Neues auf.

Die genaue Kennzeichnung des zuletzt betrachteten Grenzprozesses erfordert jedoch noch einige Erklärungen. Die singuläre Linie (l) besitze eine Umgebung mit der Randkurve (k). Wählt man auf (k) einen Punkt A, so existiert unter den Abständen dieses Punktes zu den verschiedenen Punkten B von (l) ein *kleinster* Ab-

[1]) Statt dessen hätte man auch annehmen können, daß die *Durchmesser* aller Gebiete, die von den Kurven (k) begrenzt werden, gegen 0 streben.

stand ϱ_A; variiert man die Lage von A auf (k), so existiert andererseits unter allen Abständen ϱ_A ein größter Abstand ϱ. Diese Zahl ist in gewissem Sinne ein Maß für die Entfernung des Randes (k) von der Kurve (l), und der Grenzprozeß wird durch die Bedingung $\varrho \to 0$ beschrieben. (Liegen mehrere Kurven vor, so versteht man unter ϱ die größte der entsprechenden Zahlen.) Auch hier kann man beweisen, daß gleichzeitig mit ϱ auch der Inhalt der betrachteten Umgebung gegen 0 strebt.

Schließlich läßt sich die Definition des uneigentlichen Integrals leicht auf den Fall ausdehnen, daß das Gebiet unbeschränkt ist und daß die in diesem Gebiet definierte Funktion im Endlichen singuläre Punkte hat.

Bemerkung. Wenn man bei der Konstruktion des uneigentlichen Integrals außer den singulären Punkten (oder Linien) auch einige solche Punkte (oder Linien) herausnehmen würde, die in Wirklichkeit nicht singulär sind, so würde sich das weder auf die Existenz noch auf den Wert des Grenzwertes auswirken, durch den das Integral dargestellt wird. Fügt man nämlich etwa den regulären Punkt A zu den singulären Punkten hinzu und nimmt überdies eine Umgebung dieses Punktes A heraus, so strebt das Integral über diese Umgebung gleichzeitig mit deren Inhalt gegen 0, weil die Funktion in der Umgebung von A beschränkt ist.

Auf alle aufgezählten Fälle uneigentlicher Integrale lassen sich die Überlegungen aus Nr. 612 bis 614 übertragen.

Außerdem gilt auch hier der wichtige Satz, daß *ein uneigentliches konvergentes Flächenintegral notwendigerweise absolut konvergiert.* Der Beweis wird genauso geführt wie in Nr. 613.

Für das Problem der Zurückführung eines Flächenintegrals auf ein Doppelintegral genügt es auch hier, sich auf den Fall zu beschränken, daß das Gebiet (P) ein (endliches) Rechteck $[a, b; c, d]$ ist. Man kann beweisen, daß für eine nichtnegative Funktion $f(x, y)$ die Formel (7) gilt, wenn die Existenz des iterierten Integrals vorausgesetzt wird (die Existenz des Flächenintegrals folgt daraus bereits).

Zur Berechnung des Integrals muß man die zugrunde liegende Verteilung der *singulären Punkte* der Funktion kennen.[1]) Wir beginnen mit dem Fall, daß sie auf einer horizontalen Geraden (beispielsweise $y=d$) liegen oder allgemeiner auf einer Kurve, die durch eine explizite Gleichung der Gestalt

$$y=y(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

ausgedrückt wird. In diesem Fall ist der Beweis der gleiche wie in Nr. 614 für $d=\infty$. Danach geht man zu dem Fall über, daß singuläre Punkte auch noch auf einer *vertikalen* Geraden liegen (beispielsweise $x=b$), indem man wie oben für $b=\infty$ verfährt. Wenn die betrachtete Funktion das Vorzeichen wechselt, so muß man zusätzlich die Existenz des Doppelintegrals der Funktion $|f(x, y)|$ voraussetzen.

Die Verallgemeinerung auf den Fall mehrerer Kurven oder Geraden bzw. auf den Fall eines unendlichen Rechtecks mit Singularitäten im Endlichen ist trivial.

616. Variablentransformation in uneigentlichen Integralen. In der x, y-Ebene und der ξ, η-Ebene seien zwei *beschränkte* Gebiete (D) bzw. (Δ) gegeben, die durch die

[1]) In jedem Teilrechteck, das keine singulären Punkte enthält, soll eine Formel der Gestalt (7) gelten.

Transformationsformeln

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta) \tag{12}$$

bzw. die inversen Formeln

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y) \tag{12a}$$

verknüpft sind. Es sollen alle Bedingungen erfüllt sein, von denen in Nr. 603 ausführlich die Rede war.

Ferner sei im Gebiet (D) eine Funktion $f(x, y)$ gegeben, die überall stetig ist, abgesehen von endlich vielen einzelnen Punkten oder Kurven[1]), in denen sie unendlich wird.

Wir werden zeigen, daß unter diesen Bedingungen die Gleichung

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx dy = \iint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\, |J(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta \tag{13}$$

gilt, sobald eines der beiden Integrale konvergiert; die Konvergenz des anderen folgt dann daraus.

Wenn man nämlich die singulären Punkte und singulären Linien des ersten Integrals im Gebiet (D) mit Hilfe von Umgebungen herausnimmt, so werden durch die *entsprechenden* Umgebungen im Gebiet (Δ) die singulären Punkte und singulären Linien des zweiten Integrals herausgenommen. Es ergebe sich dadurch in der x, y-Ebene das Gebiet (D') und in der ξ, η-Ebene das Gebiet (Δ'). Dann gilt nach Formel (21) aus Nr. 609

$$\iint\limits_{(D')} f(x, y)\, dx dy = \iint\limits_{(\Delta')} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\, |J(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta\,. \tag{14}$$

Setzen wir voraus, daß die Beziehung zwischen den Gebieten (D) und (Δ) in beiden Richtungen stetig ist[2]), so sehen wir leicht, daß ein Zusammenziehen der Umgebungen in der x, y-Ebene auf die jeweiligen Punkte oder Linien den entsprechenden Prozeß auch für die Umgebungen in der ξ, η-Ebene zur Folge hat, und umgekehrt. Somit ist klar, daß wir durch Grenzübergang in der Beziehung (14) schließen können, daß aus der Konvergenz eines der Integrale die Konvergenz des anderen und gleichzeitig die Gültigkeit der Gleichung (13) folgt.

Man hätte sogar zulassen dürfen, daß die Funktionaldeterminante $J(\xi, \eta)$ in einzelnen Punkten oder einzelnen Linien des Gebiets (Δ), die die oben betrachteten singulären Linien in diesem Gebiet nicht schneiden, und damit auch der Integrand des zweiten Integrals, ∞ wird. Obwohl die entsprechenden Punkte und Linien in der x, y-Ebene für das erste Integral nicht singulär sind, bereitet es nach der Bemerkung von Nr. 615 keine Schwierigkeiten, sie herauszunehmen; die Schlußfolgerung bleibt also auch unter den neuen Annahmen gültig.

Wir bemerken noch, daß man auch im vorliegenden Fall oft auf eine Verletzung der Stetigkeit oder der Eindeutigkeit der Beziehungen (12) und (12a) in einzelnen Punkten oder längs einzelner Linien stößt. Unter diesen Umständen sind die Überlegungen der Nr. 606, 4° anwendbar (vgl. den Schluß von Nr. 609).

---

[1]) Alle Kurven, von denen in Nr. 616 die Rede ist, werden als stückweise glatt vorausgesetzt.

[2]) Wir meinen damit die Stetigkeit der Funktionen (12) und (12a).

Schließlich wenden wir uns dem Fall zu, daß wenigstens eins der Gebiete (D) und (Δ) *unbeschränkt* ist.

Erstrecken sich beide Gebiete ins Unendliche und sind ihre Punkte, die sich im Endlichen befinden, durch die Beziehungen (12) bzw. (12a) verknüpft, so gilt für *beschränkte* Teilgebiete (D') und (Δ'), die durch einander entsprechende Kurven begrenzt werden, die Gleichung (14), wenn die oben angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Da sich die erwähnten Kurven offenbar nur gleichzeitig ins Unendliche entfernen können, braucht man in (14) nur zur Grenze überzugehen, um (13) zu erhalten, und wieder folgt aus der Konvergenz eines Integrals die Konvergenz des anderen.

Es sei nun etwa das Gebiet (Δ) beschränkt, aber das Gebiet (D) nicht. Die Punkte des Gebiets (D) seien Bilder aller Punkte des Gebiets (Δ) mit Ausnahme eines einzelnen Punktes (oder einer einzelnen Linie), der (die) sozusagen dem im Unendlichen verlaufenden Teil des Randes des Gebiets (D) entspricht. Wir trennen mit Hilfe einer Kurve einen beschränkten Teil des Gebiets (D) ab und nehmen mit Hilfe der entsprechenden Kurve im Gebiet (Δ) den erwähnten Punkt (bzw. die erwähnte Kurve) heraus und erhalten so Gebiete (D') und (Δ'), auf die die früheren Überlegungen anwendbar sind, usw.

Wir bemerken, daß eine Variablentransformation mit anschließendem Übergang zu einem iterierten Integral ein sehr geeignetes Mittel ist, die Existenz uneigentlicher Flächenintegrale nachzuweisen. Zahlreiche Beispiele dafür findet der Leser im nächsten Abschnitt.

617. Beispiele.

1. Man stelle Konvergenzbedingungen für folgende Integrale auf $(m>0)$:

$$\text{(a)} \iint\limits_{x^2+y^2\leqq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}, \quad \text{(b)} \iint\limits_{x^2+y^2\geqq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}, \quad \text{(c)} \iint\limits_{x^2+y^2\leqq 1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^m}.$$

Lösung. In Polarkoordinaten reduzieren sich diese Integrale auf

$$\text{(a)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r\,dr}{r^{2m}} = 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad \text{(b)} \; 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2m-1}}, \quad \text{(c)} \; 2\pi \int_0^1 \frac{r\,dr}{(1-r^2)^m}.$$

Die Konvergenzbedingungen sind offensichtlich

(a) $m<1$, (b) $m>1$, (c) $m<1$.

2. Man löse das gleiche Problem für die Integrale $(\alpha, \beta, m>0)$

$$\text{(a)} \iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x^\alpha+y^\beta\leqq 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m}, \quad \text{(b)} \iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x^\alpha+y^\beta\geqq 1}} \frac{dx\,dy}{(x^\alpha+y^\beta)^m}, \quad \text{(c)} \iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x^\alpha+y^\beta\leqq 1}} \frac{dx\,dy}{(1-x^\alpha-y^\beta)^m}.$$

Hinweis. Man benutze die Substitution

$$x=r^{2/\alpha}\cos^{2/\alpha}\theta, \qquad y=r^{2/\beta}\sin^{2/\beta}\theta.$$

Lösung. (a) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>m$; (b) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<m$; (c) $m<1$.

Die gleichen Antworten ergeben sich auch dann, wenn die Variablen in den Aufgaben 1 und 2 nur den *Sektor* zwischen den Strahlen $\theta=\theta_0$ und $\theta=\theta_1$ durchlaufen.

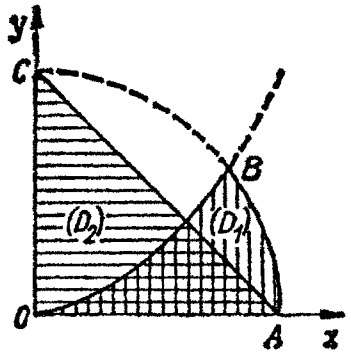

Abb. 77

3. Wenn das Gebiet (D_1), das die Variablen x und y durchlaufen, das krummlinige Dreieck AOB ist (Abb. 77), das von dem Abschnitt AO der x-Achse, dem Bogen OB der Parabel $y=x^2$ und dem Bogen BA des Kreises $x^2+y^2=1$ begrenzt wird, so existiert das Integral

$$\iint\limits_{(D_1)} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2},$$

für das der Koordinatenursprung wiederum ein singulärer Punkt ist (obwohl es für den Kreis nicht existiert). Bei Übergang zu Polarkoordinaten erhält das Integral nämlich die Gestalt[1])

$$\int\limits_0^{\delta} d\theta \int\limits_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{1} \frac{dr}{r} = \int\limits_0^{\delta} \ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta,$$

und daraus folgt die Behauptung.

4. Wählt man als Gebiet (D_2) das Dreieck AOC (Abb. 77), so kann man analog die Existenz des Integrals

$$\iint\limits_{(D_2)} \frac{dx\,dy}{1-x^2-y^2}$$

nachweisen, *für das die Punkte A und C singulär sind.*

Da die Linie AC in Polarkoordinaten die Gleichung $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$ hat, führt das vorliegende Integral auf das Integral

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{r\,dr}{1-r^2} = -\int\limits_0^{\pi/4} \ln\frac{\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\,d\varphi,$$

das offenbar existiert.

5. Auf einem Vergleich mit den in Aufgabe 1 betrachteten Integralen beruht folgendes *Konvergenzkriterium*:

Ist (D)

(a) ein beschränktes Gebiet, das den Koordinatenursprung enthält,

(b) ein unbeschränktes Gebiet, das den Koordinatenursprung nicht enthält,

so konvergiert das Integral über die Funktion $f(x, y)$ in (D), falls sich $f(x, y)$ in (D) in der Form

$$f(x, y)=\frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^m}$$

darstellen läßt, wobei φ beschränkt und integrierbar ist und (a) $m<1$ bzw. (b) $m>1$ ist.

[1]) Mit δ wird der Winkel des Strahls OB mit der Polarachse bezeichnet.

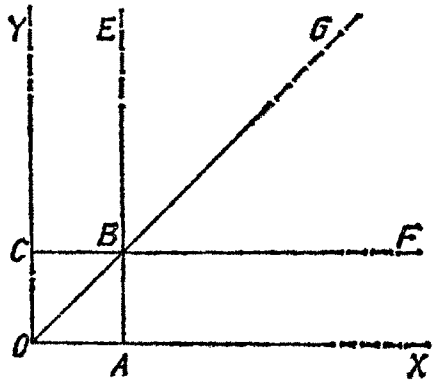

Abb. 78

Man kann dieses Kriterium leicht auf den Fall übertragen, daß der Koordinatenursprung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) ersetzt ist.

6. Man prüfe die Konvergenz des Flächenintegrals der Funktion

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

über (a) das Dreieck OBC (Abb. 78), (b) das Quadrat $OABC$, (c) den unendlichen Streifen $YCBE$, (d) das unendliche Dreieck EBG, (e) das unendliche Quadrat EBF.

Lösung. In den Fällen (a) und (d) konvergiert das Integral nicht (daher gilt das gleiche erst recht für die Fälle (b) und (e); im Fall (c) konvergiert das Integral, und zwar gegen $\frac{\pi}{4}$.

7. Die Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ seien *absolut* integrierbar, die erste im Intervall $[a, b]$, die zweite im Intervall $[c, d]$; jedes dieser Intervalle darf sowohl endlich als auch unendlich sein. Man beweise, daß dann auch das Flächenintegral

$$\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x)\, g(y)\, dx dy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy$$

konvergiert (vgl. Nr. 595, Beispiel 9).

Das Problem läßt sich leicht auf den Fall nichtnegativer Funktionen zurückführen; auf diesen Fall wollen wir uns beschränken.

Sind etwa beide Intervalle endlich und b bzw. d die einzigen singulären Punkte, so existiert, wie wir bereits wissen, das Flächenintegral (δ und $\varepsilon > 0$)

$$\iint\limits_{[a,b-\delta;c,d-\varepsilon]} f(x)\, g(y)\, dx dy = \int_a^{b-\delta} f(x)\, dx \int_c^{d-\varepsilon} g(y)\, dy\,.$$

Man hat nur noch die Grenzübergänge $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ auszuführen.

Die angegebenen Bedingungen für die Funktionen f und g sind auch notwendig für die Existenz des Flächenintegrals, ausgenommen den Fall, daß eins der Integrale

$$\int_a^b |f(x)|\, dx, \qquad \int_c^d |g(y)|\, dy$$

gleich 0 ist.

8. Man bestimme den Flächeninhalt der Figur (D_1), die von den Parabeln $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right)$ und $y^2 = 2q\left(x - \frac{q}{2}\right)$ $(0 < p < q)$ und der x-Achse begrenzt wird (vgl. Nr. 608, Beispiel 8).

Lösung. Benutzen wir die krummlinigen Koordinaten, die an der angegebenen Stelle eingeführt worden sind, so erhalten wir

$$D_1=\frac{1}{4}\int_0^p\int_p^q\left(\sqrt{\frac{u}{v}}-\sqrt{\frac{v}{u}}\right)du\,dv$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\int_0^p\frac{dv}{\sqrt{v}}\int_p^q\sqrt{u}\,du-\int_0^p\sqrt{v}\,dv\int_p^q\frac{du}{\sqrt{u}}\right\}=\frac{4}{3}(q-p)\sqrt{pq}\,.$$

Die Berechnung des Flächeninhalts hat auf ein *uneigentliches* Integral geführt (die singuläre Linie ist ein Abschnitt der u-Achse). Nachdem allgemein die Variablentransformation auch auf den Fall uneigentlicher Integrale ausgedehnt wurde, ist natürlich die durchgeführte Rechnung erlaubt.

9. Man berechne das Integral $(0<c<a)$

$$R=\int_0^1\int_0^c\sqrt{a^2-x^2-(c^2-x^2)\,y^2}\sqrt{c^2-x^2}\;dx\,dy.$$

Wir benutzen die Substitution

$$x=\frac{v}{\sqrt{1+u^2}},\quad y=\frac{uv}{\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}};$$

(u, v) durchläuft hierbei das unendliche Rechteck $[0,\infty;\,0,\,c]$; die Funktionaldeterminante ist gleich $-\dfrac{v}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{c^2(1+u^2)-v^2}}$. Es gilt

$$R=\int_0^c\int_0^\infty\frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{1+u^2}\,du\,dv=\int_0^\infty\frac{du}{1+u^2}\int_0^c v\sqrt{a^2-v^2}\,dv=\frac{\pi}{6}\left[a^3-(a^2-c^2)^{3/2}\right].$$

Hier hat es sich als zweckmäßig erwiesen, das *eigentliche* Integral auf ein *uneigentliches* zurückzuführen, das sich leicht berechnen läßt.

10. Das Flächenintegral

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

existiert; denn es existiert das zweifache Integral

$$P=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}dy=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\left\{\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right\}^2.$$

Man kann es leicht berechnen, indem man zu Polarkoordinaten übergeht; der erste Quadrant der x, y-Ebene wird dabei auf den Streifen der r, θ-Ebene abgebildet, der von den Geraden $\theta=0$, $r=0$ und $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ begrenzt wird. Also ist

$$P=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}.$$

Daher ist

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Dieses seiner Einfachheit wegen bemerkenswerte Berechnungsverfahren stammt von Poisson.

11. Gehen wir in dem gleichen Integral P nach den Formeln

$$x=\frac{\lambda\mu}{c}, \qquad y=\frac{\sqrt{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}}{c}, \qquad x^2+y^2=\lambda^2+\mu^2-c^2,$$

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\lambda,\mu)}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}}$$

zu *elliptischen Koordinaten* (Nr. 604, Beispiel 5) über, so erhalten wir

$$P=\int_c^{\infty}\int_0^{c}\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda^2+\mu^2-c^2)}(\lambda^2-\mu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}}\,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda=\frac{\pi}{4}$$

oder

$$\int_c^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda^2}\lambda^2\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\int_0^{c}\frac{\mathrm{e}^{-\mu^2}\mathrm{d}\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}-\int_c^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda^2}\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\int_0^{c}\frac{\mathrm{e}^{-\mu^2}\mu^2\mathrm{d}\mu}{\sqrt{c^2-\mu^2}}=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-c^2}.$$

Wenn wir $c=1$ setzen und die Substitution $\lambda=\sqrt{v+1}$, $\mu=\sqrt{v}$ durchführen, so kommen wir zu der interessanten Beziehung

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-v}\sqrt{\frac{1+v}{v}}\,\mathrm{d}v\int_0^{1}\frac{\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v}{\sqrt{v\,(1-v)}}-\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v}{\sqrt{v\,(1+v)}}\int_0^{1}\mathrm{e}^{-v}\sqrt{\frac{v}{1-v}}\,\mathrm{d}v=\pi\,.$$

12. Durch Übergang zu den verallgemeinerten Polarkoordinaten

$$x=ar\cos\theta, \quad y=br\sin\theta \qquad (0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

kann man den Wert des Flächenintegrals

$$J=\iint\limits_{\substack{x\geqq 0,\,y\geqq 0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\frac{\pi}{2}ab$$

leicht bestimmen.

Wenn wir dagegen zu den elliptischen Koordinaten übergehen, von denen soeben die Rede war (und $c^2=a^2-b^2$ setzen, so daß die gegebene Ellipse $\lambda=a$ entspricht), so erhalten wir für dasselbe Integral

$$J=ab\int_0^{c}\int_c^{a}\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)\,(a^2-\mu^2)\,(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu\,.$$

Also ist

$$\int_0^{c}\int_c^{a}\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(a^2-\lambda^2)\,(a^2-\mu^2)\,(\lambda^2-c^2)\,(c^2-\mu^2)}}\,\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\mu=\frac{\pi}{2}\,.$$

Setzt man hier $a=1$, $c=k<1$, $k'=\sqrt{1-k^2}$ und schließlich $\lambda=\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}$, $\mu=k\sin\varphi\left(0\leqq\varphi,\psi\leqq\frac{\pi}{2}\right)$, so führt dieses Integral auf

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{(1-k'^2\sin^2\psi)+(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)\,(1-k'^2\sin^2\psi)}}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi=\frac{\pi}{2}\,.$$

Das kann man in folgender Form schreiben:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}\,d\psi + \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$
$$- \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}} = \frac{\pi}{2}.$$

Der Leser erkennt hierin die Legendresche Relation, der wir bereits begegnet sind (vgl. Nr. 511, Beispiel 12, und Nr. 534, Beispiel 10).

13. Wir geben eine Herleitung der bekannten Beziehung zwischen den Eulerschen Integralen erster und zweiter Art an, die von JACOBI stammt.

Da (für $a>0$ und $b>0$)

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1}dy \quad \text{und} \quad \Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1}dx$$

ist, gilt

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{b-1} y^{a-1}dxdy\,.$$

Wir setzen hierin $x=u(1-v)$, $y=uv$, so daß dem ersten Quadranten in der x, y-Ebene der Streifen der u, v-Ebene entspricht, der von den Geraden $v=0$, $u=0$ und $v=1$ begrenzt wird. Die Funktionaldeterminante der Transformation ist gleich u. Daher ist

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^1 \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1-v)^{b-1}\,dudv$$
$$= \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1}du \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,dv = \Gamma(a+b)\,B(a,b)\,,$$

was zu beweisen war.

14. In früheren Darlegungen haben wir eine Reihe von Formeln hergeleitet, deren Anwendbarkeitsbereich jetzt erweitert werden kann. Das bezieht sich beispielsweise auf die Dirichletsche Formel

$$\iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

(Nr. 597, Beispiel 12) und auf die allgemeinere Liouvillesche Formel

$$\iint\limits_{\substack{x\geqq 0, y\geqq 0\\ x+y\leqq 1}} \varphi(x+y)\,x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \int_0^1 \varphi(u)\,u^{p+q-1}du$$

(Nr. 611, Beispiel 17), die für beliebige p und $q>0$ Gültigkeit behalten. Die Beweise bleiben dabei die gleichen.

Man kann sogar noch weiter gehen: In der Liouvilleschen Formel hatten wir bisher angenommen, daß die Funktion $\varphi(u)$ im Intervall $[0, 1]$ stetig ist; jetzt können wir jedoch zulassen, daß sie in einem oder mehreren Punkten dieses Intervalls unendlich wird, sobald das Integral rechts *absolut* konvergiert (sonst konvergiert das Integral links überhaupt nicht).

Schließlich kann man die Liouvillesche Formel auf das Flächenintegral über das unbeschränkte Gebiet erweitern, das durch die Ungleichungen $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+y\geqq 1$ de-

finiert wird, wenn man das Integral rechts über das Intervall von 1 bis ∞ erstreckt (wieder unter der Voraussetzung, daß es absolut konvergiert).

Das alles erfordert keine wesentlichen Änderungen des Beweises.

15. Wenn man in den Formeln von DIRICHLET und LIOUVILLE p und q durch $\frac{p}{\alpha}$ und $\frac{q}{\beta}$ ersetzt und dann die Substitution $x=\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}$, $y=\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}$ durchführt, so erhalten diese Formeln die allgemeinere Gestalt

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqq 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\leqq 1}} \xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+1\right)},$$

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqq 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\leqq 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\right)\xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int_0^1 \varphi(u)u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}\,du,$$

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqq 0\\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\geqq 1}} \varphi\left(\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\beta}\right)\xi^{p-1}\eta^{q-1}\,d\xi\,d\eta$$

$$=\frac{a^p b^q}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}\right)}\int_1^{\infty} \varphi(u)u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-1}\,du.^{1})$$

Zur Übung stelle man die Konvergenzbedingungen auf und berechne die folgenden Integrale ($m>0$):

$$\text{(a)}\iint\limits_{\substack{x,y\geqq 0\\ x^{\alpha}+y^{\beta}\leqq 1}}\frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^{\alpha}+y^{\beta})^m}\,dx\,dy,\qquad \text{(b)}\iint\limits_{\substack{x,y\geqq 0\\ x^{\alpha}+y^{\beta}\geqq 1}}\frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(x^{\alpha}+y^{\beta})^m}\,dx\,dy,$$

$$\text{(c)}\iint\limits_{\substack{x,y\geqq 0\\ x^{\alpha}+y^{\beta}\leqq 1}}\frac{x^{p-1}y^{q-1}}{(1-x^{\alpha}-y^{\beta})^m}\,dx\,dy.$$

Lösung. (a) $\dfrac{B\left(\frac{p}{\alpha},\frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}-m\right)}$ $\left(\text{unter der Bedingung } \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}>m\right)$;

---

1) Alle Konstanten a, b, α, β, p, q werden hier als positiv vorausgesetzt.

(b) $$\frac{B\left(\frac{p}{\alpha},\frac{q}{\beta}\right)}{\alpha\beta\left(m-\frac{p}{\alpha}-\frac{q}{\beta}\right)} \quad \left(\text{unter der Bedingung } \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}<m\right);$$

(c) $$\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma(1-m)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+1-m\right)} \quad (\text{unter der Bedingung } m<1)$$

(vgl. Aufgabe 1).

16. Die in Nr. 597, Beispiel 15, eingeführte Formel von CATALAN

$$\iint\limits_{m\leqq g(x,y)\leqq M} f(x,y)\,\varphi[g(x,y)]\,dxdy=\int\limits_{m}^{M}\varphi(u)\,d\psi(u)$$

für

$$\psi(u)=\iint\limits_{m\leqq g(x,y)\leqq u} f(x,y)\,dxdy$$

kann durch die Einführung uneigentlicher Integrale auf den Fall $M=\infty$ verallgemeinert werden, wenn man unter $\int\limits_{m}^{\infty}$ auch hier $\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{m}^{M}$ versteht.

17. Man bestimme den Wert des Integrals

$$L=\iint\limits_{(A)}\ln\sin(x-y)\,dxdy\,,$$

wenn (A) das Dreieck ist, das von den Geraden $y=0$, $x=\pi$ und $y=x$ begrenzt wird (Abb. 79a).

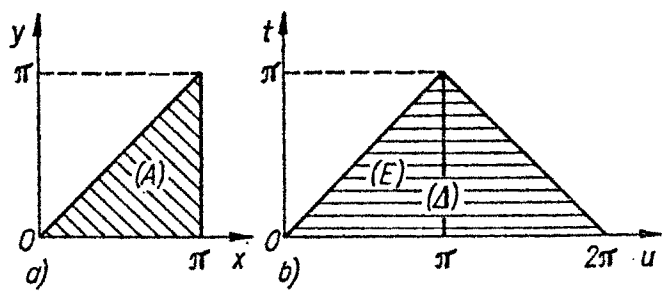

Abb. 79

Setzen wir

$$x=\frac{u+t}{2},\qquad y=\frac{u-t}{2},$$

so wird das Gebiet (A) auf das Dreieck (Δ) in der u, t-Ebene abgebildet, das von den Geraden $u=t$, $u+t=2\pi$ und $t=0$ begrenzt wird (Abb. 79b). Da die Funktionaldeterminante der Transformation gleich $\frac{1}{2}$ ist, gilt

$$L=\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Delta)}\ln\sin t\,dtdu=\iint\limits_{(E)}\ln\sin t\,dtdu\,,$$

wenn man mit (E) das Dreieck bezeichnet, das von den Geraden $u=t$, $u=\pi$ und $t=0$ begrenzt wird (vgl. Abb. 79b). Weiter gilt

$$L=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\ln\sin t\,dtdu=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\ln\sin t\,dt=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2\,.$$

18. Man berechne (für beliebige natürliche Zahlen m und n) das Integral

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq 1}\frac{P_m(x)\,P_n(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy\,,$$

wenn P_n das n-te Legendresche Polynom bezeichnet.

Lösung. Wir erinnern uns, daß ein Legendresches Polynom mit einem ungeraden (geraden) Index nur ungerade (gerade) Potenzen von x enthält. Daraus folgt sofort, daß $I=0$ ist, wenn auch nur einer der Indizes m und n *ungerade* ist.

Es seien jetzt jedoch beide gerade: $m=2\mu$, $n=2\nu$. Wir betrachten das Integral

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqq 1}\frac{P_{2\mu}(x)\,y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1}P_{2\mu}(x)\,dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y^{2p}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dy\,.$$

Nach einer bekannten Formel ist

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{y^{2p}}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy=2\int\limits_{0}^{a}=2a^{2p}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^{2p}\theta\,d\theta=\pi a^{2p}\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\,,$$

daher reduziert sich unser Integral auf

$$\pi\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\int\limits_{-1}^{1}P_{2\mu}(x)\,(1-x^2)^p\,dx;$$

folglich ist es für $p<\mu$ gleich 0 (nach der grundlegenden Eigenschaft der Legendreschen Polynome; Nr. 320, Formel (8)). Daher ist das vorliegende Integral I für $n=2\nu\neq m=2\mu$ gleich 0. Es bleibt der Fall, daß $n=m=2\mu$ ist. In diesem Fall ist

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq 1}\frac{P_{2\mu}(x)\,P_{2\mu}(y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\frac{(4\mu-1)!!}{(2\mu)!}\iint\limits_{x^2+y^2\leqq 1}\frac{P_{2\mu}(x)\,y^{2\mu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=\pi\frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!}\,\frac{(4\mu-1)!!}{(2\mu)!}\int\limits_{-1}^{1}P_{2\mu}(x)\,(1-x^2)^\mu\,dx\,,$$

$$=(-1)^\mu\pi\frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!}\,\frac{(4\mu-1)!!}{(2\mu)!}\int\limits_{-1}^{1}P_{2\mu}(x)\,x^{2\mu}dx$$

$$=(-1)^\mu\pi\frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!}\int\limits_{-1}^{1}P_{2\mu}(x)\,P_{2\mu}(x)\,dx=(-1)^\mu 2\pi\frac{(2\mu-1)!!}{(2\mu)!!}\,\frac{1}{4\mu+1}$$

(Nr. 320, Formel (10)). Daher wird schließlich

$$I=\begin{cases}0 & \text{außer im Fall } n=m=2\mu\,,\\ (-1)^{n/2}\,2\pi\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{1}{2n+1}\,, & \text{wenn } n=m=2\mu \text{ ist}.\end{cases}$$

Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß die durchgeführten Operationen erlaubt sind.

19. Man berechne das Integral (Liouville)

$$R(\lambda)=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\left(x+y+\frac{\lambda^3}{xy}\right)}x^{\frac{1}{3}-1}\,y^{\frac{2}{3}-1}\,dx\,dy\quad(\lambda>0)\,.$$

Unter Benutzung der Leibnizschen Regel finden wir für die Ableitung des Integrals nach dem Parameter λ:

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3\lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x+y+\frac{\lambda^3}{xy}\right)} x^{\frac{1}{3}-1} y^{\frac{2}{3}-1} \frac{dx\,dy}{xy}.$$ [1]

Wir ersetzen hier nur die Veränderliche x, und zwar setzen wir (für $y = \text{const}$) $z = \frac{\lambda^3}{xy}$. Daher wird $\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z}$, und wir erhalten

$$\frac{dR}{d\lambda} = -3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(y+z+\frac{\lambda^3}{yz}\right)} y^{\frac{1}{3}-1} z^{\frac{2}{3}-1}\, dy\,dz = -3R.$$

Durch Integration dieser einfachen Differentialgleichung finden wir $R = Ce^{-3\lambda}$. Die Konstante C läßt sich bestimmen, indem man $\lambda = 0$ setzt:

$$R(0) = C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Daher wird schließlich $R = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3\lambda}$.

20. Man berechne das Integral

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\, dx\,dy \qquad (k = \text{const}).$$

Da der Integrand dem absoluten Betrag nach die Funktion $\frac{e^{-x-y}}{\sqrt{xy}}$ nicht übersteigt, die offenbar im ersten Quadranten integrierbar ist (vgl. Beispiel 7), ist die Existenz des Integrals A gesichert.

Bezeichnen wir mit (D) den Teil des ersten Quadranten, für den $x \geqq y$ ist (in Abb. 80 ist er schraffiert), so gilt offenbar

$$A = 2 \int_{(D)} \int e^{-x-y} \frac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\, dx\,dy.$$

Wir führen nun mit Hilfe der Formeln $u = x + y$, $v = 2\sqrt{xy}$ neue Veränderliche ein; der Punkt (u, v) durchläuft in der u, v-Ebene das zu (D) analoge Gebiet (Δ), es ist also

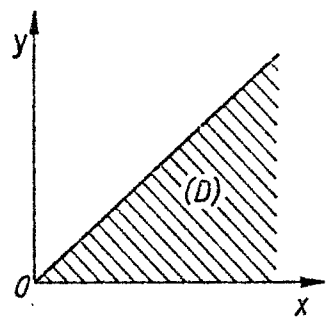

Abb. 80

[1] Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, daß das Integral R existiert und daß die Anwendung der Leibnizschen Regel (auf Grund von Überlegungen wie im Fall eines einfachen Integrals) erlaubt ist.

$u \geqq v$. Hierbei ist

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{x-y}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{u^2-v^2}}{v}$$

und

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{v}{2\sqrt{u^2-v^2}}.$$

Wir erhalten nach der Substitution

$$A = 2\iint_{(\Delta)} e^{-u} \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2-v^2}}\, du\,dv = 2\int_0^{\infty} e^{-u}du \int_0^{u} \frac{\cos kv}{\sqrt{u^2-v^2}}\, dv.$$

Zur Berechnung des inneren Integrals setzen wir

$$v = u\sin\theta, \qquad dv = u\cos\theta\, d\theta = \sqrt{u^2-v^2}\, d\theta;$$

es reduziert sich auf das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos(ku\sin\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} J_0(ku)$$

(Nr. 440, Beispiel 12). Unter Benutzung eines bekannten Ergebnisses (Nr. 524, Beispiel 3) finden wir schließlich

$$A = \pi\int_0^{\infty} e^{-u} J_0(ku)\, du = \frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}}.$$

21. Man berechne das Integral

$$B = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a\sqrt{x^2+y^2}} \cos x\xi \cos y\eta\, dx dy,$$

wenn a, ξ und η Konstanten sind und $a > 0$ ist.

Offenbar ist

$$B = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots\, dx dy.$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über, indem wir

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

setzen; gleichzeitig schreiben wir zur Erleichterung der Rechnungen auch

$$\xi = \varrho\cos\varphi, \qquad \eta = \varrho\sin\varphi.$$

Nach der Substitution und leichten Umformungen erhalten wir

$$B = \frac{1}{8}\left\{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar}\cos[r\varrho\cos(\theta-\varphi)]\cdot r\,dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar}\cos[r\varrho\cos(\theta+\varphi)]\cdot r\,dr\right\}.$$

Setzt man $\theta \mp \varphi = \lambda$ und benutzt die Periodizität, so führen die beiden iterierten Integrale auf ein und dasselbe Integral

$$B = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-ar} \cos(r\varrho \cos\lambda) \cdot r dr = \int_0^{\pi/2} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-ar} \cos(r\varrho \cos\lambda) \cdot r dr .$$

Man kann leicht nachrechnen (beispielsweise durch partielle Integration), daß

$$\int_0^{\infty} e^{-ar} \cos br \cdot r dr = \frac{a^2 - b^2}{(a^2+b^2)^2} \qquad (a > 0)$$

ist. Daher wird

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 - \varrho^2 \cos^2\lambda}{(a^2+\varrho^2\cos^2\lambda)^2} d\lambda = \frac{\pi}{2} \frac{a}{(a^2+\varrho^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \frac{a}{(a^2+\xi^2+\eta^2)^{3/2}} .$$

Man kann auch in allgemeiner Form zeigen (indem man das gleiche Verfahren benutzt), daß das Integral

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi(\sqrt{x^2+y^2}) \cos x\xi \cos y\eta \, dxdy ,$$

wenn es konvergiert, stets nur von $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ abhängt, d. h. die Form $f(\sqrt{\xi^2+\eta^2})$ hat.

22. Es bezeichne (D) das Dreieck OAB (Abb. 81), das durch die Ungleichungen $0 \leqq x \leqq \alpha$ und $y \leqq x$ charakterisiert wird; $f(x)$ sei eine beliebige im Intervall $[0, \alpha]$ stetige Funktion. Man beweise die Formel

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} \int_0^{x} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}} = \pi \int_0^{\alpha} f(y)\,dy \tag{15}$$

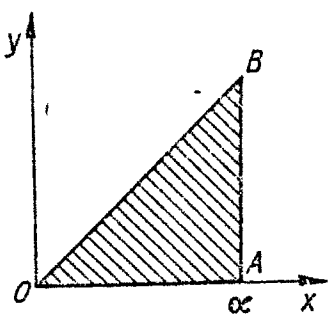

Abb. 81

dadurch, daß man das Flächenintegral

$$\iint_{(D)} \frac{f(y)\,dxdy}{\sqrt{(\alpha - x)(x-y)}}$$

auf zwei verschiedene Arten auf ein iteriertes Integral zurückführt. (Im wesentlichen handelt es sich hier um eine spezielle Anwendung der Dirichletschen Formel, Nr. 597, Beispiel 10, in diesem Fall aber auf uneigentliche Integrale; die singulären Linien sind hier $x = \alpha$ und $y = x$.)

Wir benutzen die Formel (15) zur Lösung eines interessanten Problems, das von ABEL stammt.

Es sei $\varphi(x)$ eine *gegebene* Funktion, die nebst ihrer Ableitung im Intervall $[0, a]$ stetig ist und für die $\varphi(0) = 0$ gilt. Es soll eine im gleichen Intervall stetige Funktion $f(x)$ so

bestimmt werden, daß für alle x die Bedingung

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{x-y}} \tag{16}$$

erfüllt ist. (Einen solchen Gleichungstyp, in dem die *gesuchte* Funktion unter dem Integralzeichen steht, nennt man *Integralgleichung*. Die Abelsche Gleichung ist eines der ersten Beispiele von Integralgleichungen; heute existiert für Integralgleichungen eine weit entwickelte Theorie.)

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (16) mit $\frac{1}{\sqrt{\alpha-x}}$ und integrieren sie dann über x von 0 bis zu einem beliebigen α $(0<\alpha\leqq a)$; in Anbetracht von (15) finden wir

$$\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}=\pi\int_0^\alpha f(y)\,dy\,.$$

Wenn wir sowohl rechts als auch links nach α differenzieren und das Ergebnis von Nr. 511, Beispiel 14, benutzen, so kommen wir zu folgendem Ausdruck für die gesuchte Funktion:

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx\,.$$

Es bleibt nachzuprüfen, ob die erhaltene Funktion den gestellten Forderungen genügt. Ihre Stetigkeit bezüglich α läßt sich leicht mit Hilfe der in Nr. 511, Beispiel 14, angegebenen Substitution nachweisen. Setzen wir diese Funktion in die Gleichung (16) ein, so finden wir, gestützt auf Formel (15),

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}\int_0^y \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{y-t}}\,dt=\int_0^x \varphi'(t)\,dt=\varphi(x)\qquad[\varphi(0)=0]\,,$$

was zu beweisen war.

Zum Abschluß wollen wir mit ein paar Beispielen einige prinzipielle Fragen klären.

23. Wir werden zunächst zeigen, daß der Satz aus Nr. 594, der es erlaubt, von der Existenz des Flächenintegrals auf die Existenz des iterierten Integrals zu schließen, für uneigentliche Integrale (selbst von nichtnegativen Funktionen) im allgemeinen nicht gilt.

Im Quadrat $[0, 1; 0, 1]$ sei eine Funktion $f(x, y)$ folgendermaßen definiert:

$$f(x,y)=\begin{cases} 2^n, & \text{wenn } x=\dfrac{2m-1}{2^n} \text{ und } 0<y\leqq\dfrac{1}{2^n} \text{ ist} \\ & (n=1,2,3,\ldots;\ m=1,2,\ldots,2^{n-1}), \\ 0 & \text{in den übrigen Punkten.}\end{cases}$$

Für $y=\text{const}$ können nur endlich viele x-Werte existieren, für die $f\neq 0$ ist. Folglich gelten die Beziehungen

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx=0 \quad\text{und}\quad \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx=0\,.$$

Wenn $x=\text{const}$ ist und nicht die Form $\frac{2m-1}{2^n}$ hat, so ist $f=0$ und damit $\int_0^1 f(x,y)\,dy=0$. Ist jedoch $x=\text{const}=\frac{2m-1}{2^n}$, so ist $\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^{1/2^n} f\,dy=1$. Hieraus folgt, daß das Doppelintegral $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy$ nicht existiert.

(Für die Funktion $f(x, y)+f(y, x)$ existiert offenbar keines der zweifachen Integrale.)

Was das Flächenintegral betrifft, so bemerken wir zunächst, daß die *singulären* Punkte gerade die Punkte des Intervalls [0, 1] der x-Achse sind. Für beliebiges $\varepsilon>0$ kann die Funktion f im Rechteck $[0, 1; \varepsilon, 1]$ nur auf denjenigen endlich vielen Abschnitten der Geraden $x=\frac{2m-1}{2^n}$ von 0 verschieden sein, für die $\frac{1}{2^n}\geqq\varepsilon$ ist. Daher ist

$$\iint\limits_{[0,1;\varepsilon,1]} f(x, y)\,dxdy=0\,,$$

und durch Grenzübergang für $\varepsilon\to 0$ ergibt sich

$$\iint\limits_{[0,1;0,1]} f(x, y)\,dxdy=0\,.$$

24. Es ist nicht schwer, zu beweisen, daß die Flächenintegrale

$$\text{(a)}\ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dxdy, \qquad \text{(b)}\ \int_0^\infty\int_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dxdy$$

beide (im Sinne der in Nr. 612 gegebenen Definition) *nicht konvergieren.*

Im Fall (a) existiert offenbar das Integral über den absoluten Betrag des Integranden nicht, denn sonst hätte das iterierte Integral

$$\int_0^\infty |\sin x|\,dx\int_0^\infty e^{-xy}dy=\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

einen endlichen Wert; das ist aber nicht der Fall (Nr. 477). Hieraus folgt in Anbetracht von Nr. 613 die Behauptung.

Im Fall (b) erhalten wir, wenn wir mit (K_R) den Viertelkreis vom Radius R um den Koordinatenursprung bezeichnen und zu Polarkoordinaten übergehen,

$$\iint\limits_{(K_R)}\sin(x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R\sin r^2\cdot r\,dr=\frac{\pi}{4}(1-\cos R^2)\,.$$

Wenn R über alle Grenzen wächst, so hat dieser Ausdruck keinen Grenzwert, und damit ist auch hier die Konvergenzfrage entschieden.

Es ist interessant, daß in jedem dieser Beispiele die zweifachen Integrale beide existieren (und sogar einander gleich sind):

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx=\int_0^\infty\sin x\,dx\int_0^\infty e^{-xy}dy=\frac{\pi}{2}\qquad\text{(Nr. 552, 2°)}\,,$$

$$\int_0^\infty dy\int_0^\infty\sin(x^2+y^2)\,dx=\int_0^\infty dx\int_0^\infty\sin(x^2+y^2)\,dy=\frac{\pi}{4}\qquad\text{(Nr. 522, 5°)}\,.$$

Für Funktionen von veränderlichem Vorzeichen folgt also allein aus der Existenz des Doppelintegrals noch nicht die Existenz des Flächenintegrals (wir erinnern daran, daß wir in Nr. 614 zusätzlich die Existenz des iterierten Integrals für den *absoluten Betrag* der Funktion gefordert haben).

25. Wenn man das unendliche Rechteck $[0,\infty; 0,\infty]$ nicht durch beliebige, über alle Grenzen wachsende Gebiete ausschöpft (wie das die Definition in Nr. 612 fordert), sondern speziell durch *Rechtecke* der Form $[0, A; 0, B]$, so zeigt sich, daß in beiden oben betrachteten Fällen die Integrale

$$\iint\limits_{[0,A;0,B]}\ldots\,dxdy$$

für $A, B\to\infty$ gegen einen endlichen Grenzwert streben.

Das sieht man unmittelbar für das Integral

$$\iint\limits_{[0,A;0,B]} \sin(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^A \sin x^2\,dx \int_0^B \cos y^2\,dy + \int_0^A \cos x^2\,dx \int_0^B \sin y^2\,dy\,,$$

das bei dem angegebenen Grenzübergang gegen den Grenzwert $\frac{\pi}{4}$ strebt (Nr. 522, 5°).

Wir betrachten nun das Integral

$$\int\limits_{[0,A;0,B]}\int e^{-xy}\sin x\,dxdy = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^A \frac{e^{-Bx}\sin x}{x}\,dx\,.$$

Das erste Integral rechts strebt (für $A \to \infty$) gegen $\frac{\pi}{2}$, während das zweite (für $A, B \to \infty$) den Grenzwert 0 hat, da es dem absoluten Betrag nach das Integral

$$\int_0^A e^{-Bx}dx = \frac{1-e^{-AB}}{B}$$

nicht übersteigt. Daher ergibt sich hier als Grenzwert schließlich $\frac{\pi}{2}$.[1])

Solche Grenzwerte, die mit einer *Spezialisierung* des Grenzübergangs zusammenhängen, erinnern an die „Hauptwerte" uneigentlicher Integrale (Nr. 484). Man kann sie auch im Fall eines beliebigen unbeschränkten Gebiets betrachten, wenn man die Funktion außerhalb dieses Gebiets gleich 0 setzt. Einige Mathematiker haben es für zweckmäßig gehalten, gerade diese Grenzwerte der Definition der uneigentlichen Flächenintegrale zugrunde zu legen (das unterscheidet sich wesentlich von der bei uns gewählten Definition). Von diesem Standpunkt aus würden die beiden in Beispiel 24 betrachteten Integrale konvergieren, und zwar *nicht-absolut.*

Bemerkung. Ähnliche Verhältnisse liegen in bezug auf *Doppelreihen* vor. Da wir dort stets von einer unendlichen *rechteckigen* Matrix ausgegangen sind, erschien es natürlich, diese durch ständig wachsende endliche *rechteckige* Matrizen auszuschöpfen, und das hatten wir auch unserer Definition der Summe einer Doppelreihe zugrunde gelegt (Nr. 394). Daher konnten Doppelreihen sowohl absolut als auch nicht-absolut konvergieren. Man kann aber auch hier von einem anderen Standpunkt ausgehen, der dem analog ist, auf dem die in Nr. 612 gegebene Definition uneigentlicher Flächenintegrale aufbaut. Man trennt von der unendlichen Matrix endliche Stücke durch beliebige Kurven ab, die sich mit allen ihren Punkten ins Unendliche entfernen. Von diesem Standpunkt aus können auch Doppelreihen ähnlich wie uneigentliche Flächenintegrale nur *absolut* konvergieren.

---

[1]) Die Übereinstimmung dieses Grenzwerts mit dem gemeinsamen Wert der beiden Doppelintegrale, die in beiden Fällen vorliegt, ist natürlich gesetzmäßig (vgl. Nr. 168).

XVII. Flächeninhalt, Oberflächenintegrale

§ 1. Zweiseitige Flächen

618. Die Seite einer Fläche. Wir führen zunächst den für die weitere Darlegung wichtigen Begriff der *Seite einer Fläche* ein.

In einer Reihe von Fällen ist dieser Begriff anschaulich klar. Ist eine Fläche durch eine explizite Gleichung der Form $z=f(x, y)$ gegeben, so kann man von der *oberen* bzw. der *unteren* Seite der Fläche sprechen.[1]) Wenn eine Fläche irgendeinen Körper begrenzt, so kann man sich ebenfalls leicht ihre zwei Seiten vorstellen: die dem Körper zugekehrte *innere* Seite und die dem umgebenden Raum zugekehrte *äußere* Seite.

Ausgehend von dieser anschaulichen Vorstellung wollen wir nun den Begriff der Seite einer Fläche exakt definieren.

Wir betrachten eine *glatte* Fläche (S), die entweder geschlossen ist oder einen stückweise glatten Rand besitzt. Da die Fläche keine singulären Punkte hat, gibt es in jedem inneren Punkt der Fläche eine bestimmte Tangentialebene, deren Lage *stetig* vom Berührungspunkt abhängt.

Auf der Fläche wählen wir einen bestimmten Punkt M_0 und errichten in ihm die Normale, der wir einen der beiden möglichen Richtungssinne vorschreiben (sie unterscheiden sich voneinander durch die Vorzeichen der Richtungskosinus). Durch den Punkt M_0 legen wir eine geschlossene Kurve, die *in* der Fläche verläuft und deren Rand nicht schneidet. Wir lassen den Punkt M diese Kurve durchlaufen und schreiben der Normalen in jeder seiner aufeinanderfolgenden Lagen diejenige der beiden Richtungen vor, in welche die im Anfangspunkt M_0 gewählte Richtung stetig übergeht. Dabei können zwei Fälle eintreten: Wir kehren nach dem Durchlaufen der Kurve zum Punkt M_0 entweder mit der gleichen oder mit der zur Ausgangsrichtung entgegengesetzten Normalenrichtung zurück.

Tritt für irgendeinen Punkt M_0 und irgendeine durch ihn hindurchgehende Kurve M_0AM_0 der zweite Fall ein, so kann man auch für jeden anderen Punkt M_1 leicht eine geschlossene Kurve konstruieren, die bei einem von M_1 ausgehenden und dorthin zurückkehrenden Umlauf zu der zur Ausgangsrichtung entgegengesetzten Normalenrichtung führt. Eine solche Kurve ist beispielsweise $M_1M_0AM_0M_1$, wenn man unter M_1M_0 irgendeine Kurve versteht, die in der Fläche verläuft,

---

[1]) Wir werden diese Ausdrucksweise oft benutzen; dabei nehmen wir an, die z-Achse selbst sei senkrecht nach oben gerichtet.

M_1 mit M_0 verbindet und den Rand der Fläche nicht schneidet, und wenn M_0M_1 dieselbe Kurve in umgekehrter Richtung ist.

In diesem Fall nennt man die Fläche *einseitig*. Das klassische Beispiel einer solchen Fläche ist das sogenannte *Möbiussche Band* (Abb. 82). Ein Modell davon erhält man, wenn man ein rechteckiges Stück Papier $ABCD$ nach einmaligem Verdrehen so zusammenklebt, daß A mit C und B mit D übereinstimmt. Es ist möglich, den ganzen so erhaltenen verdrehten Ring mit irgendeiner Farbe anzustreichen, ohne dabei seinen Rand zu überschreiten. Wir schließen von nun an solche Flächen aus den Betrachtungen aus.

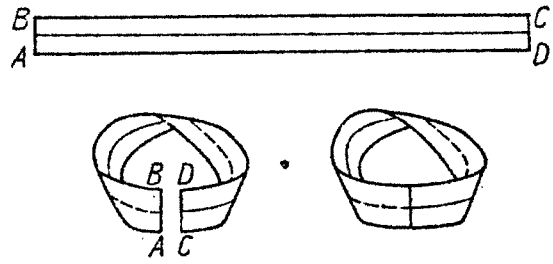

Abb. 82

Wir setzen jetzt voraus, daß wir bei *jedem* Punkt M_0 und bei *jeder* geschlossenen Kurve durch M_0, die den Rand der Fläche nicht schneidet, nach deren Durchlaufen zum Ausgangspunkt M_0 stets mit der ursprünglichen Normalenrichtung zurückkehren. Unter diesen Bedingungen heißt die Fläche *zweiseitig*.

Es sei (S) eine zweiseitige Fläche. Wir wählen auf ihr einen beliebigen Punkt M_0 und schreiben in diesem Punkt eine bestimmte Normalenrichtung vor. Wir wählen dann irgendeinen anderen Punkt M_1 der Fläche und verbinden M_0 und M_1 durch einen willkürlichen Weg (K), der auf der Fläche verläuft und deren Rand nicht schneidet. Der Punkt M soll diesen Weg von M_0 bis M_1 durchlaufen. Wenn sich dabei die Normalenrichtung stetig ändert, so liefert der Punkt M in der Lage M_1 eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung, die nicht von der Wahl des Weges (K) abhängt. Erhielten wir nämlich beim Durchlaufen zweier verschiedener Wege (K_1) und (K_2) von M_0 nach M_1 im Punkt M_1 verschiedene Normalenrichtungen, so würde uns der *geschlossene* Weg $M_0(K_1)\,M_1(K_2^{-1})\,M_0$ zum Punkt M_0 mit der von der Ausgangsrichtung verschiedenen Normalenrichtung führen, und das widerspräche der Definition einer zweiseitigen Fläche.

Somit bestimmt die Wahl einer Normalenrichtung in einem Punkt einer zweiseitigen Fläche eindeutig eine Wahl der Normalenrichtung in allen Punkten der Fläche. Die Gesamtheit aller Flächenpunkte mit einer nach der angegebenen Vorschrift bestimmten Normalenrichtung nennt man eine *Seite* der Fläche.

619. Beispiele.

1°. Das einfachste und wichtigste Beispiel einer zweiseitigen Fläche ist eine Fläche, die durch eine explizite Gleichung $z=z(x, y)$ gegeben wird, vorausgesetzt, daß z in einem ebenen Gebiet (D) stetig ist und dort stetige Ableitungen

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{und} \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$$

besitzt.

In diesem Fall haben die Richtungskosinus der Flächennormalen die Form (Nr. 234,

Formel (11))

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Wählen wir ein bestimmtes Vorzeichen der Wurzel, so legen wir damit in allen Punkten der Fläche eine bestimmte Normalenrichtung fest. Da die Richtungskosinus auf Grund unserer Voraussetzungen stetige Funktionen der Koordinaten der Punkte sind, hängt auch die festgelegte Normalenrichtung stetig von der Lage des Punktes ab. Damit ist klar, daß *die Wahl des Vorzeichens der Wurzel in den Formeln für* $\cos\lambda$, $\cos\mu$ *und* $\cos\nu$ *eine Seite der Fläche bestimmt* (in eben dem Sinne, der diesem Begriff oben gegeben wurde).

Wählen wir das positive Vorzeichen der Wurzel, so wird in allen Punkten der Fläche

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

positiv, d. h., der Winkel, den die Normale der entsprechenden Seite mit der z-Achse bildet, ist spitz. Also ist die Seite der Fläche, die sich bei dieser Wahl des Vorzeichens ergibt, die *obere* Seite. Umgekehrt charakterisiert die Wahl des negativen Vorzeichens in den Ausdrücken für die Richtungskosinus der Normalen die *untere* Seite der Fläche (die Normalen bilden mit der z-Achse stumpfe Winkel).

2°. Wir betrachten nun allgemeiner eine beliebige einfache *nichtgeschlossene* glatte Fläche (S), die durch Parametergleichungen

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v),\qquad z=z(u,v) \tag{1}$$

gegeben wird, wobei die Parameter u, v ein beschränktes Gebiet (Δ) der u, v-Ebene durchlaufen. Die Forderung, daß die Fläche glatt ist, bedeutet, daß *die Funktionen* (1) *nebst ihren partiellen Ableitungen in* (Δ) *stetig sind und daß auf der Fläche keine singulären Punkte liegen.* Außerdem (und das muß besonders betont werden) haben wir *vorausgesetzt,* daß die Fläche einfach ist, d. h., daß sie keine *mehrfachen Punkte* enthält, sondern daß sich jeder Punkt der Fläche nur bei einem einzigen Wertepaar der Parameter u und v ergibt.

Wenn wir mit A, B, C wie üblich die Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

bezeichnen, so ist nach Voraussetzung stets $A^2+B^2+C^2>0$, und die Richtungskosinus der Flächennormalen werden durch die bekannten Formeln (Nr. 234, (17))

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{2}$$

ausgedrückt.

Auch in diesem Fall charakterisiert die Wahl des Vorzeichens der Wurzel eine Seite der Fläche; die Fläche erweist sich also als zweiseitig. Wenn nämlich das Vorzeichen gewählt ist, so ordnen die Formeln (2) jedem Punkt der Fläche (weil ihm nur ein einziges Wertepaar u, v entspricht) eine bestimmte Normalenrichtung zu, die sich bei Verschiebung des Punktes stetig ändert.

Existiert ein mehrfacher Punkt, so ist die Fläche nicht notwendig zweiseitig. Dann entsprechen dem mehrfachen Punkt M_0 der Fläche mindestens zwei Paare u_0, v_0 und u_1, v_1 von Parameterwerten, und es kann vorkommen, daß für diese Werte die Formeln (2) selbst bei gleicher Wahl des Vorzeichens der Wurzel *entgegengesetzte* Normalenrichtungen in M_0 bestimmen. Tritt dieser Fall ein, so ist die Fläche sicher *einseitig.* Verbinden wir nämlich in der u, v-Ebene die Punkte $m_0(u_0, v_0)$ und $m_1(u_1, v_1)$ durch eine Kurve m_0m_1, so entspricht dieser auf der Fläche (S) eine *geschlossene* Kurve, die in M_0 beginnt und in M_0 endet; gehen wir von M_0 mit einer Normalenrichtung aus, so kehren

wir nach dem Durchlaufen dieser Kurve mit der entgegengesetzten Normalenrichtung nach M_0 zurück.

3°. Ist die glatte Fläche (S) geschlossen und begrenzt sie irgendeinen Körper, so ist unmittelbar klar, daß sie zwei Seiten, eine *äußere* und eine *innere* besitzt. Wir nehmen an, daß diese Fläche durch Gleichungen der Form (1) dargestellt wird. Die Voraussetzung, daß zwischen den Punkten der Fläche und den Punkten des Gebiets (Δ) eine umkehrbar eindeutige Zuordnung besteht, kann hier nicht völlig erfüllt sein. Dennoch *wird durch die Wahl des Vorzeichens in den Formeln* (2) *eine Seite der Fläche bestimmt.* Der entscheidende Grund dafür ist die Tatsache, daß der Fall, von dem vorhin die Rede war, hier offenbar nicht eintreten kann. Man vergleiche hierzu die Sachlage bei geschlossenen Kurven, Nr. 229.

620. Die Orientierung von Flächen und die Orientierung des Raumes. Es sei (S) eine *nichtgeschlossene* glatte zweiseitige Fläche, die von einer einfachen Kurve (L) begrenzt wird. Wir wählen eine *bestimmte Seite* dieser Fläche aus. Wir erklären dann mit Hilfe folgender Regel einen bestimmten Durchlaufungssinn der Kurve (L) als *positiv*: Bewegt sich ein Beobachter auf der Kurve in dieser Richtung und zeigt für ihn die der ausgewählten Seite entsprechende Normale von unten nach oben, so soll ihm der Umlauf entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn erscheinen. Die Worte „entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn" bedeuten, genauer gesagt, daß der Beobachter den unmittelbar angrenzenden Teil der Fläche *links* von sich sehen muß. Nach derselben Regel wird gleichzeitig ein positiver Umlaufsinn für jede einfache geschlossene Kurve auf der Fläche, die also irgendeinen Teil[1]) dieser Fläche begrenzt, festgelegt. Den zum positiven Umlaufsinn entgegengesetzten nennt man *negativen* Umlaufsinn. Dies alles zusammen macht den Inhalt des Begriffs der *Orientierung einer Fläche* aus.

Gehen wir von der anderen Seite der Fläche aus, so kehren die Normalen ihre Richtung um, es ändert sich die Lage des Beobachters, und im Zusammenhang damit hat man den positiven und den negativen Umlaufsinn der Kurve (L) zu vertauschen: Die Fläche ändert ihre Orientierung. Wenn man sich immer an die aufgestellte Regel hält, so *bestimmt also die Wahl der Seite der Fläche deren Orientierung, und umgekehrt bestimmt die Wahl des Umlaufsinns der Randkurve der Fläche eindeutig deren Seite.*

Im Fall einer *geschlossenen* glatten Fläche (S), die irgendeinen Körper begrenzt, kann man von einer bezüglich dieses Körpers *inneren* oder *äußeren* Seite der Fläche sprechen. Hier gelingt es nicht, mit Hilfe der oben formulierten Regel für eine beliebige geschlossene Kurve einen positiven Umlaufsinn festzulegen. Es gibt dafür zwei Gründe. Zunächst braucht eine solche Kurve die Fläche gar nicht zu zerlegen (wie z. B. im Fall beliebiger Parallelkreise oder Meridiane des Torus); in diesem Fall grenzt die Fläche auf *beiden* Seiten an die Kurve, und unsere Regel ergibt nichts. Aber selbst wenn die Kurve die Fläche in zwei Gebiete zerlegt, so begrenzt sie beide in gleicher Weise, und je nachdem, welchen der beiden Teile wir wählen, liefert unsere Regel die eine oder die andere der beiden Richtungen als die positive. Wir werden uns auf Kurven beschränken, die die Fläche zerlegen, und zusammen mit der Kurve auch das Gebiet angeben; damit ist die positive Richtung der Kurve

[1]) Nur diesen Teil hat man bei der Definition des positiven Umlaufsinns der Kurve in Betracht zu ziehen.

schon eindeutig festgelegt.[1]) *Dadurch wird also eine Orientierung der Fläche definiert,* und zwar *die eine oder die andere je nach Wahl der Seite.*

Wenn man vereinbart, für jede Fläche mit den genannten Eigenschaften als *positive Orientierung* diejenige zu nehmen, die der äußeren Seite der Fläche entspricht, so entsteht dadurch eine gewisse *Orientierung des ganzen Raums.* Das ist völlig analog der Tatsache, daß die Wahl der positiven Richtung (man könnte auch sagen der *positiven Orientierung*) einer beliebigen in einer Ebene liegenden einfachen geschlossenen Kurve die *Orientierung der Ebene* charakterisiert (Nr. 548).

Die soeben definierte Orientierung des Raums, welcher letzten Endes die Drehung *entgegen* dem Uhrzeigersinn zugrunde liegt, heißt *Rechtsorientierung.* Geht man statt dessen von der Drehung *im* Uhrzeigersinn aus, so erhält man die *Linksorientierung* des Raums. *Um Unklarheiten zu vermeiden, werden wir von nun an in denjenigen Fragen, in denen die Orientierung des Raums eine Rolle spielt, den Raum stets als rechtsorientiert annehmen.*

Es sei darauf hingewiesen, daß auch die Anordnung der Koordinatenachsen im Raum mit der festgelegten Orientierung des Raums im Zusammenhang steht. Bei Rechtsorientierung sind die Achsen so gelegen, daß die Drehung von der x-Achse zur y-Achse entgegen dem Uhrzeigersinn verläuft, wenn man auf sie vom positiven Teil der z-Achse blickt (diese Aussage bleibt auch bei zyklischer Vertauschung der Buchstaben x, y, z gültig) (Abb. 83a); bei Linksorientierung verläuft die erwähnte Drehung im Uhrzeigersinn (Abb. 83b). Im ersten Fall nennt man das x, y, z-Koordinatensystem ein Rechtssystem, im zweiten Fall ein Linkssystem. In Übereinstimmung mit der getroffenen Abmachung werden wir in den angegebenen Fällen in Zukunft Rechtssysteme benutzen.

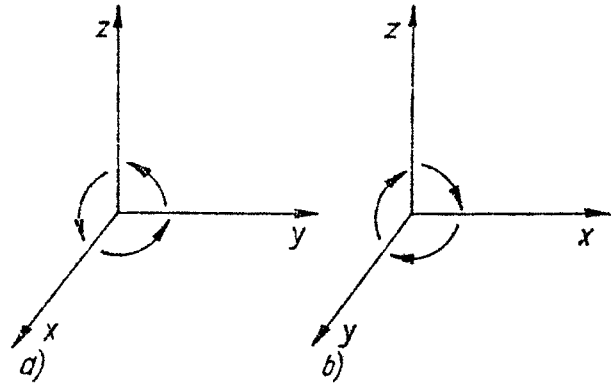

Abb. 83

621. Die Vorzeichenwahl in den Formeln für die Richtungskosinus der Normalen. Wir geben jetzt eine für das Weitere wichtige Anwendung des oben dargelegten Zusammenhangs zwischen der Wahl einer *Seite* einer Fläche und der Erzeugung der einen oder der anderen *Orientierung* auf dieser Fläche.

Wir betrachten wiederum eine nichtgeschlossene glatte Fläche (S) und wählen

[1]) Betrachtet man in der Ebene eine nichtgeschlossene oder geschlossene, in bestimmter Weise orientierte Kurve, so kann man im ersten Fall von zwei beliebigen Kurvenpunkten sagen, welcher von ihnen dem anderen vorausgeht, während man das im zweiten Fall nur dann tun kann, wenn man mit den Punkten auch einen von ihnen begrenzten Bogen der Kurve angibt. Das kann man als Analogon zu dem im Text Gesagten ansehen.

eine bestimmte ihrer Seiten (und damit auch eine Orientierung). Es sei (Δ) die Berandung des Gebiets (Δ) in der u, v-Ebene und (L) die ihr entsprechende Berandung der Fläche. Wir nehmen an, daß *dem positiven Umlaufsinn des Randes* (Δ) *der positive Umlaufsinn des Randes* (L) *entspricht.*[1]) Dann gilt auch für beliebige einander entsprechende Kurven (λ) im Gebiet (Δ) und (l) auf der Fläche (S) dasselbe: Ein positives Durchlaufen von (λ) hat ein positives Durchlaufen von (l) zur Folge.[2])

Unter diesen Bedingungen muß man zur Charakterisierung der ausgewählten Seite der Fläche in den Formeln (2) *für die Richtungskosinus der Normalen das positive Vorzeichen der Wurzel wählen.*

Um das zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß *wenigstens in einem Punkt* die Richtung, die durch diese Formeln mit dem positiven Vorzeichen bestimmt wird, mit der erforderlichen Normalenrichtung übereinstimmt. Wir wählen auf der Fläche irgendeinen inneren Punkt M_0; ihm entspricht ein Punkt $m_0(u_0, v_0)$ im Gebiet (Δ). Es sei in diesem Punkt etwa die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden. Dann läßt sich in der u, v-Ebene eine so kleine Umgebung des Punktes m_0 mit der Berandung (λ) finden, daß die entsprechende Umgebung des Punktes M_0 auf der Fläche (S) mit der Berandung (l) umkehrbar eindeutig auf die x, y-Ebene projiziert wird. Die Berandung dieser Projektion auf die x, y-Ebene bezeichnen wir mit (k); vgl. Abb. 84.

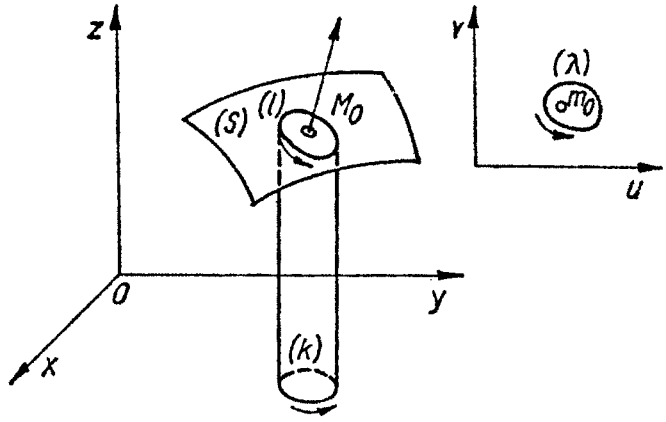

Abb. 84

Ist in dem betrachteten Punkt und seiner Umgebung die Determinante C positiv, so entspricht einem positiven Durchlaufen der Kurve (λ) ein positives Durchlaufen der Kurve (k), d. h. bei der gewählten Anordnung der Achsen der *Umlauf entgegen dem Uhrzeigersinn* (vgl. Nr. 606, 1°). Aus der Zeichnung ersieht man folgendes: Soll der entsprechende Durchlaufungssinn der Kurve (l) ebenfalls *entgegen* dem Uhrzeigersinn gerichtet sein, so muß man von *oben* auf die Fläche sehen. Die Normale im Punkt M_0 muß also nach *oben* gerichtet sein, d. h., sie muß mit der z-Achse

[1]) Das läßt sich stets leicht dadurch erreichen, daß man nötigenfalls den Parameter u durch $-u$ ersetzt.

[2]) Da man von der Richtung eines beliebigen Teils einer Kurve auf den Umlaufsinn der Kurve schließen kann, ist diese Aussage für eine Kurve (λ), die mit (Δ) einen gemeinsamen Teil hat, trivial, und hieraus läßt sie sich leicht auf den allgemeinen Fall übertragen.

einen *spitzen* Winkel bilden. Das tritt aber gerade dann ein, wenn man in den Formeln (2) das positive Vorzeichen wählt; denn für $C>0$ ist dann auch $\cos\nu>0$. Umgekehrt muß für $C<0$ die Normale mit der z-Achse einen stumpfen Winkel bilden; das wird offenbar ebenfalls durch die angegebene Vorzeichenwahl erreicht; denn für $C<0$ ist dann auch $\cos\nu<0$.

Ist die glatte Fläche (S) geschlossen und begrenzt sie irgendeinen Körper (vgl. Nr. 619, 3°), so liegt für sie ein analoger Sachverhalt vor. Wir nehmen an, daß *wir uns auf eine bestimmte Seite der Fläche festgelegt haben und daß dem positiven Umlaufsinn irgendeiner Kurve* (λ_0) *in* (Δ) *der positive Umlaufsinn der zugehörigen Kurve* (l_0) *auf der Fläche* (S) *entspricht*, wenn wir (l_0) den Teil der Fläche (S) zuordnen, der dem von (λ_0) begrenzten Gebiet der u, v-Ebene entspricht. Auch in diesem Fall gilt der Satz, der oben für den Fall nichtgeschlossener Flächen bewiesen wurde.

622. Der Fall stückweise glatter Flächen. Die in Nr. 620 entwickelten Gedanken sind auch zur Erweiterung des Begriffs der Seite einer Fläche auf den Fall einer stückweise glatten Fläche geeignet. Die Überlegungen von Nr. 618 sind in diesem Fall nicht unmittelbar anwendbar, weil entlang der „Kanten", die die glatten Stücke der Fläche verbinden, keine eindeutig bestimmte Tangentialebene existiert und weil man daher beim Durchgang durch die Kanten nicht von einer stetigen Änderung der Normalen sprechen kann.

Es sei eine stückweise glatte Fläche (S) gegeben, die aus den glatten Stücken (S_1), (S_2), ... besteht, die jeweils längs einer Kante, dem gemeinsamen Teil ihrer Berandungen, aneinanderstoßen. Wir setzen zunächst voraus, daß *jedes dieser Stücke, für sich allein genommen, eine zweiseitige Fläche ist.* Das ist natürlich nicht dafür hinreichend, daß man die ganze Fläche (S) als zweiseitig ansehen kann; z. B. läßt sich auch das Möbiussche Band leicht aus zwei glatten zweiseitigen Stücken bilden.

Auf dem Rand (K_i) eines jeden Stückes (S_i) $(i=1, 2, ...)$ wählen wir eine der beiden Richtungen als positiv; dadurch wird, wie wir sahen, eine Seite der Fläche (S_i) festgelegt. Dann und nur dann, wenn diese Wahl so durchgeführt werden kann, daß *der gemeinsame Teil je zweier aneinandergrenzender Berandungen*[1] *beim Durchlaufen der einzelnen Flächenstücke in verschiedenen Richtungen durchlaufen wird* (Abb. 85), ist die Fläche *zweiseitig*. Eine Seite der Fläche (S) wird definiert als Gesamtheit der Seiten ihrer Teile, die in der angegebenen Weise gewählt sind.

Wenn wir auch nur in einem einzigen Fall den Umlaufsinn einer Berandung umkehren, so müssen wir das auch bei allen anderen Berandungen durchführen, um

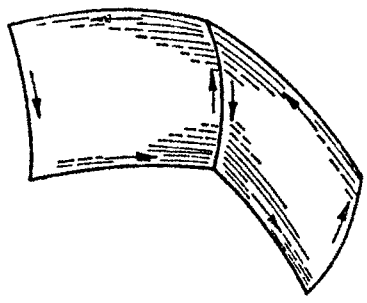

Abb. 85

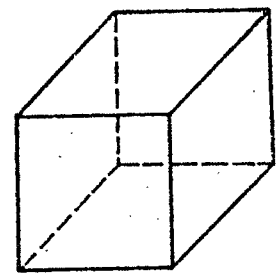

Abb. 86

[1]) Dieser Teil kann aus getrennten Stücken bestehen.

unsere Bedingung zu erfüllen. Dann werden auch die gewählten Seiten aller Stücke (S_i) durch die entgegengesetzten ersetzt; ihre Gesamtheit bildet die zweite Seite der Fläche.

Um sich mit den getroffenen Vereinbarungen vertraut zu machen, möge der Leser zeigen, daß

a) die Oberfläche des Würfels (Abb. 86) zweiseitig ist, indem er passende Umlaufsrichtungen für alle sechs ebenen Stücke wählt,

b) eine entsprechende Wahl für das in zwei oder mehr zweiseitige Teile zerlegte Möbiussche Band nicht möglich ist,

c) die oben gegebene Definition nicht davon abhängt, wie man eine Fläche in glatte Stücke zerlegt.

§ 2. Der Flächeninhalt krummer Flächen

623. Der Schwarzsche Zylinder. Der Begriff des Flächeninhalts einer krummen Fläche weist eine gewisse Analogie zum Begriff der Länge einer Kurve auf. Die Länge eines (nichtgeschlossenen) Bogens definierten wir als Grenzwert der Längen von einbeschriebenen Polygonzügen, für die die Länge aller Glieder gegen 0 strebt. Im Fall einer krummen Fläche (die ebenfalls nichtgeschlossen sein möge) wäre es natürlich, einbeschriebene Polyederflächen zu betrachten und den *Inhalt der krummen Fläche als Grenzwert des Inhalts solcher einbeschriebenen Polyederflächen* zu definieren, für die der Durchmesser aller Seitenflächen gegen 0 strebt.

Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts wurde jedoch festgestellt, daß diese Definition unbrauchbar ist. H. A. Schwarz[1]) zeigte nämlich, daß der erwähnte Grenzwert sogar in dem einfachen Fall der Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders nicht existiert. Wir führen dieses lehrreiche Beispiel an.

Es sei ein gerader Kreiszylinder vom Radius R und der Höhe H gegeben. Wir beschreiben ihm eine Polyederfläche in folgender Weise ein. Wir teilen die Höhe des Zylinders in m gleiche Teile und legen durch die Teilpunkte Ebenen senkrecht zur Zylinderachse. Wir erhalten so auf der Fläche $m+1$ Kreise (der obere und der untere Randkreis des Zylinders sind hierin einbegriffen). Jeden dieser Kreise teilen wir so in n gleiche Teile, daß *die Teilpunkte eines Kreises sich über den Mittelpunkten der Teilbögen des unmittelbar darunterliegenden Kreises befinden.*

Wir nehmen die Sehnen aller Teilbögen und verbinden außerdem die Endpunkte der Sehnen mit denjenigen Teilpunkten des darüber- und des darunterliegenden Kreises, die jeweils über bzw. unter den Mittelpunkten der entsprechenden Kreisbögen liegen. Wir betrachten alle durch diese Strecken gebildeten Dreiecke (Abb. 87). Insgesamt bilden diese $2mn$ gleichen Dreiecke gerade eine Polyederfläche $(\Sigma_{m,n})$, wie wir sie suchen; ein Modell dieser Fläche zeigt Abb. 88.

Wir berechnen nun den Flächeninhalt σ eines jeden dieser Dreiecke. Als Grundlinie nehmen wir die Sehne an, deren Länge gleich $2R \sin \frac{\pi}{n}$ ist. Um die Höhe $\overline{AB}$

[1]) Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921, deutscher Mathematiker.

des Dreiecks (vgl. Abb. 87) zu finden, bemerken wir, daß $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}$ ist, wobei

$$\overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad \overline{BC}=\frac{H}{m}$$

ist. Also gilt für den Inhalt eines Dreiecks

$$\sigma=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

und der Inhalt der ganzen Polyederfläche wird

$$\Sigma_{m,n}=2mn\cdot\sigma=2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

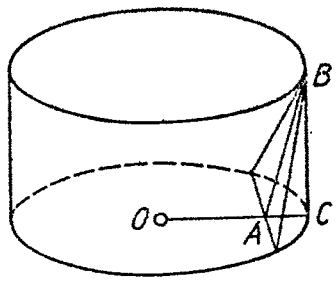

Abb. 87

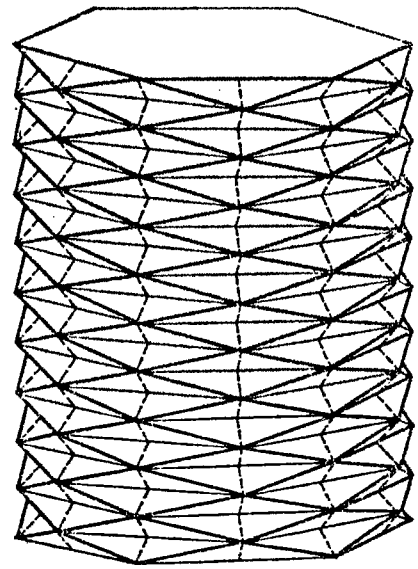

Abb. 88

Wenn m und n unbegrenzt wachsen, so streben die Durchmesser aller Dreiecke gegen 0, aber $\Sigma_{m,n}$ hat keinen Grenzwert. Um das zu zeigen, nehmen wir zunächst an, daß m und n so wachsen, daß der Quotient $\frac{m}{n^2}$ gegen einen bestimmten Wert q strebt:

$$\lim\frac{m}{n^2}=q\,.$$

Nun gilt

$$\lim n\sin\frac{\pi}{n}=\pi\,,$$

und andererseits ist auf Grund unserer Annahme

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim m\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}=\lim\frac{\pi^2}{2}\frac{m}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}q\,.$$

Folglich ist

$$\lim\Sigma_{m,n}=2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}\cdot q^2+H^2},$$

und wir sehen, daß dieser Grenzwert wesentlich von dem Wert q abhängt, d. h. von der Art und Weise, in der m und n wachsen. Für $q=0$, und nur in diesem Fall

ist der genannte Grenzwert gleich $2\pi RH$ (dem Wert, der in der Schulgeometrie hergeleitet wird); andererseits kann der Grenzwert gleichzeitig mit q sogar unendlich werden. Streben m und n unabhängig voneinander gegen Unendlich, so existiert also für die Flächeninhalte $\Sigma_{m,n}$ tatsächlich kein Grenzwert, und die Zylinderfläche hat vom Standpunkt der erwähnten Definition keinen Flächeninhalt.

Es ist wichtig, zu erkennen, worin sich der Fall eines Polygonzuges, der einer Kurve einbeschrieben ist, von dem Fall einer Polyederfläche, die einer krummen Fläche einbeschrieben ist, unterscheidet. Wir nehmen der Einfachheit halber die Kurve und die krumme Fläche, von denen die Rede ist, als *glatt* an. Sind die Sehnen, die den Polygonzug bilden, hinreichend kurz, so unterscheidet sich die Richtung jeder dieser Sehnen beliebig wenig von der Richtung der Tangente in einem beliebigen Punkt des entsprechenden Bogens. Daher kann eine solche beliebig kleine Sehne mit stets wachsender Genauigkeit als Ersatz für das entsprechende Bogenelement dienen. Im Gegensatz dazu braucht ein Vieleck, dessen Ecken auf der krummen Fläche liegen, bezüglich seiner Lage im Raum der Tangentialebene nicht „benachbart" zu sein, selbst wenn es beliebig klein ist; in diesem Fall kann das Vieleck das Flächenelement begreiflicherweise nicht ersetzen. Dieser Sachverhalt wird durch das soeben betrachtete Beispiel sehr gut veranschaulicht: Die Tangentialebenen zur Zylinderfläche verlaufen alle parallel zur Zylinderachse, während die dreieckigen Seitenflächen der einbeschriebenen Polyederfläche für große q fast senkrecht zur Achse werden und eine Art Lampion bilden.

624. Definition des Inhalts krummer Flächen. Diese Ausführungen legen den Gedanken nahe, von der einer gekrümmten Fläche einbeschriebenen Polyederfläche von vornherein nicht nur zu fordern, daß die Durchmesser ihrer Seitenflächen gegen 0 streben, sondern auch, daß *sich die Lage dieser Seitenflächen im Raum der Lage der Tangentialebenen der Fläche unbegrenzt nähert.*

Die vollständige Ausführung dieses Gedankens ist jedoch gar nicht einfach, und wir sind gezwungen, darauf zu verzichten (vgl. Nr. 627). Wir werden eine Definition des Inhalts einer gekrümmten Fläche geben, die auf einer anderen Idee beruht, die übrigens ebenfalls völlig naturgemäß erscheint.

Wir betrachten eine nichtgeschlossene *glatte* Fläche (S), die von einem stückweise glatten Rand (L) begrenzt wird. Diese Fläche denken wir uns durch ein Netz stückweise glatter Kurven in Teile $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$ zerlegt, und in jedem Teil (S_i) wählen wir willkürlich jeweils einen Punkt M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Durch orthogonale Projektion des Elements (S_i) auf die Tangentialebene im Punkt M_i an die Fläche erhalten wir eine ebene Figur (T_i) mit dem Flächeninhalt T_i.

Als *Inhalt* S der Fläche (S) definieren wir den Grenzwert der Summen dieser Flächeninhalte T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, der sich ergibt, wenn die Durchmesser aller Elemente (S_i) gegen 0 streben.

Wenn man mit λ den größten dieser Durchmesser bezeichnet, so kann man

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i T_i$$

schreiben. Der Leser wird diesen Grenzprozeß sowohl mit Hilfe der „Epsilontik" als auch in der „Sprache der Folgen" leicht charakterisieren können.

Eine Fläche, die einen Inhalt besitzt, nennt man *quadrierbar.*

625. Bemerkung. Damit diese Definition einen genauen Sinn erhält, beweisen wir folgenden Hilfssatz:

Die Projektion eines jeden Teils (S') *einer Fläche* (S), *der hinreichend kleinen Durchmesser besitzt, auf die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt* M' *dieses Teils ist umkehrbar eindeutig.*

Wenn also die Durchmesser aller Flächenelemente (S_i), von denen in Nr. 624 die Rede war, hinreichend klein sind, so sind die Projektionen (T_i) der (S_i) auf die entsprechenden Tangentialebenen völlig bestimmte ebene Figuren, die von stückweise glatten Kurven begrenzt werden und offenbar quadrierbar sind: Die Summe $\sum T_i$ hat einen Sinn.

Beweis. Die Fläche (S) sei durch Parametergleichungen

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v) \tag{1}$$

gegeben, wobei (u, v) ein Gebiet (Δ) der u, v-Ebene durchläuft, das von einer stückweise glatten Kurve (Λ) begrenzt wird. Dabei soll zwischen den Punkten von (S) und denen von (Δ) eine umkehrbar eindeutige Zuordnung bestehen, und den Punkten des Randes (Λ) sollen die Punkte des Randes (L) der Fläche entsprechen.

Zur Beseitigung gewisser Schwierigkeiten, die mit den Randpunkten verbunden sind, ist es zweckmäßig, von vornherein die Funktionen (1) unter Erhaltung ihrer Differentiationseigenschaften (Nr. 261) auf ein größeres Gebiet $(\bar{\Delta})$ zu *erweitern*, so daß man dadurch eine glatte Fläche $(\bar{S})$ erhält, die man als *Fortsetzung* der Fläche (S) auffassen kann.

Jeden Punkt M_0 der Fläche (S) kann man mit einem solchen Stück (s) der Fläche (S) [oder $(\bar{S})$, wenn es sich um einen Randpunkt handelt] umgeben, das durch eine explizite Gleichung einer der drei Typen der Nr. 228 ausgedrückt wird und dessen Projektion auf die entsprechende Koordinatenebene einen *Kreis* ergibt. Man kann darüber hinaus voraussetzen, daß *die Normalen zweier Punkte von* (s) *nie aufeinander senkrecht stehen* (das ist leicht durch Verringerung des Durchmessers des Gebiets zu erreichen). Dann behaupten wir, daß *die Projektion des Stückes* (s) *auf die Tangentialebene in jedem Punkt* M *von* (s) *umkehrbar eindeutig ist.*

Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an. Dann existieren auf (s) drei Punkte M_1, M_2, M_3 derart, daß die Sehne M_1M_2 parallel zur Flächennormale im Punkt M_3 ist (Abb. 89). Die Fläche (s) selbst werde dabei etwa durch eine explizite Gleichung der Form

$$z = f(x, y)$$

ausgedrückt, wobei der Punkt (x, y) in der x, y-Ebene den Kreis (k) durchläuft. Wir legen durch M_1M_2 eine Ebene, die parallel zur z-Achse ist; sie schneidet unsere Fläche (s) in irgendeinem Bogen $\overset{\frown}{M_1M_2}$.[1]) Wie wir wissen (Nr. 112, 114), existiert auf diesem Bogen ein Punkt M_4, in dem die Tangente parallel zur Sehne ist. Dann ist aber die Flächennormale im Punkt M_4 sicher senkrecht zu dieser Sehne und daher auch zur Normale im Punkt M_3. Das widerspricht der Annahme. Die Projektion von (s) auf die Tangentialebene ist also umkehrbar eindeutig.

[1]) Hier spielt es eine Rolle, daß die Projektion $M_1'M_2'$ der Sehne M_1M_2 auf die x, y-Ebene ganz zum Kreis (k) gehört.

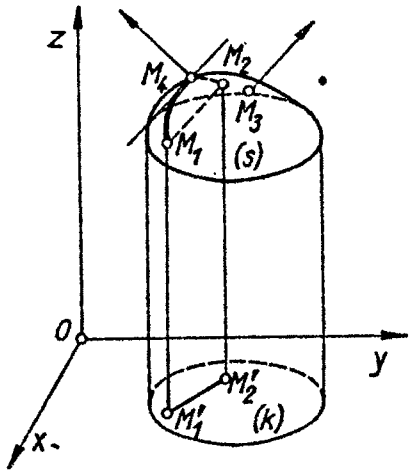

Abb. 89

Um nun, darauf gestützt, die anfangs ausgesprochene Behauptung zu beweisen, verfahren wir folgendermaßen: Für jeden Punkt M_0 der Fläche (S) ersetzen wir dessen oben eingeführte „Umgebung" (s) durch eine kleinere Umgebung (s') in der Weise, daß *ihre Ränder durchschnittsfremd sind.* Dem Punkt M_0 und dem Flächenstück (s') entsprechen in der u, v-Ebene ein Punkt m_0 und eine Umgebung (δ') dieses Punktes; es ändert sich nichts, wenn wir zu (s') und (δ') ihre Ränder nicht hinzurechnen, d. h., wenn wir sie als *offen* auffassen. Wir wenden auf das System $\{(\delta')\}$ von offenen Gebieten, die das ganze Gebiet (Δ) überdecken, den Borelschen Überdeckungssatz (vgl. Nr. 175) an und wählen eine *endliche* Überdeckung aus. Für die Fläche (S) erhalten wir hieraus leicht endlich viele Stücke (s_1'), (s_2'), ..., (s_m'), deren Vereinigung die ganze Fläche (S) überdeckt. Daneben betrachten wir die entsprechenden anfangs eingeführten größeren Gebiete (s_1), (s_2), ..., (s_m). Wir wählen für jedes i die untere Grenze der Abstände von den Punkten des Stückes (s_i') zu den Punkten des Teils $(S)-(s_i)$ der Fläche und bezeichnen mit η die kleinste dieser Zahlen. Der Durchmesser eines Teils (S') unserer Fläche sei kleiner als η. Wenn ein beliebiger Punkt von (S') in irgendein bestimmtes (s_i') fällt, so ist der Teil (S') ganz in dem entsprechenden (s_i) enthalten, besitzt also ebenso wie (s_i) die geforderte Eigenschaft.

626. Die Existenz des Inhalts einer Fläche und seine Berechnung. Wir werden zeigen, daß unter den obigen Voraussetzungen die Fläche (1) *quadrierbar* ist, und eine zur Berechnung ihres Inhalts geeignete Formel herleiten.

Es sei (S') ein beliebiger Teil von (S), der die zu Beginn von Nr. 625 formulierte Eigenschaft hat, und $M'(x', y', z')$ sei ein beliebiger Punkt von (S'). Wir verschieben den Koordinatenursprung in diesen Punkt und gehen zu einem neuen Koordinatensystem ξ, η, ζ über, und zwar wählen wir als ξ, η-Ebene die Tangentialebene an die Fläche im Punkt M' und als ζ-Achse die entsprechende Normale (Abb. 90). Die Formeln der Koordinatentransformation lauten

$$\xi = (x-x')\cos\alpha_1 + (y-y')\cos\beta_1 + (z-z')\cos\gamma_1,$$

$$\eta = (x-x')\cos\alpha_2 + (y-y')\cos\beta_2 + (z-z')\cos\gamma_2,$$

$$\zeta = (x-x')\cos\lambda' + (y-y')\cos\mu' + (z-z')\cos\nu',$$

wobei $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu'$ die Winkel zwischen den neuen und den alten Koordinatenachsen bezeichnen. Die folgende Tabelle gibt ihre genaue Bedeutung an:

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	λ'	μ'	ν'

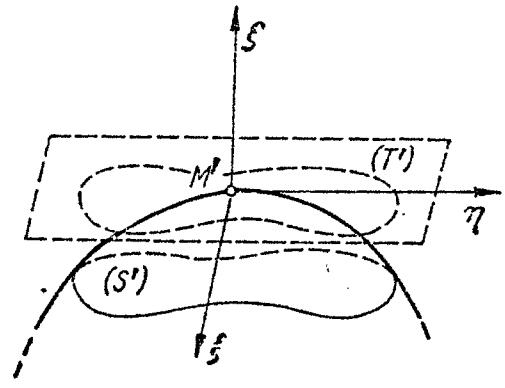

Abb. 90

Da (S') umkehrbar eindeutig auf ein Gebiet (T') der ξ, η-Ebene projiziert wird und da andererseits die Punkte von (S') umkehrbar eindeutig den Punkten eines Teilgebiets (Δ') von (Δ) entsprechen, besteht auch zwischen den Punkten von (T') und (Δ') eine umkehrbar eindeutige Beziehung. Sie wird durch die ersten beiden Transformationsformeln gegeben, wenn man unter x, y, z die Funktionen (1) versteht. Benutzen wir den Ausdruck für den Flächeninhalt in krummlinigen Koordinaten (vgl. Nr. 605), so erhalten wir

$$T' = \iint\limits_{(\Delta')} \left| \frac{\mathrm{D}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(u, v)} \right| du dv . \tag{2}$$

Nun ist aber die Funktionaldeterminante

$$\frac{\mathrm{D}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u \cos\alpha_1 + y_u \cos\beta_1 + z_u \cos\gamma_1 & x_v \cos\alpha_1 + y_v \cos\beta_1 + z_v \cos\gamma_1 \\ x_u \cos\alpha_2 + y_u \cos\beta_2 + z_u \cos\gamma_2 & x_v \cos\alpha_2 + y_v \cos\beta_2 + z_v \cos\gamma_2 \end{vmatrix}$$

die Determinante, die dem Produkt der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

entspricht, und nach einem bekannten Satz der linearen Algebra ist sie gleich der Summe der Produkte der entsprechenden zweireihigen Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix} = A \cos\lambda' + B \cos\mu' + C \cos\nu'.$$

Wir haben hierbei benutzt, daß die Adjunkten der Elemente der Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\lambda' & \cos\mu' & \cos\nu' \end{vmatrix} = 1$$

genau gleich diesen Elementen selbst sind. Das folgt z. B. daraus, daß jeder der Koordinateneinheitsvektoren $(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$, $(\cos\lambda', \cos\mu', \cos\nu')$ das Vektorprodukt der beiden anderen ist (vgl. Nr. 664, Formel (2)).

Bezeichnet man mit A', B', C' die Werte der Determinanten A, B, C im Punkt M', so gilt andererseits

$$\cos\lambda' = \frac{A'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}, \qquad \cos\mu' = \frac{B'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$\cos\nu' = \frac{C'}{\pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

(es ist in allen Fällen ein und dasselbe Vorzeichen zu nehmen). Daher ist

$$\left|\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}\right| = \frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Rechts steht eine stetige Funktion der vier unabhängigen Veränderlichen u, v, u', v' im Gebiet $(\Delta)\times(\Delta)$.[1]) Für $u'=u$, $v'=v$ wird sie zu $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, und sie unterscheidet sich sonst von diesem Ausdruck um einen Wert $\alpha=\alpha(u,v,u',v')$, der in Anbetracht der gleichmäßigen Stetigkeit der genannten Funktion unabhängig von der Lage des Punktes (u',v') beliebig klein wird, wenn nur der Abstand der Punkte (u,v) und (u',v') hinreichend klein wird. Daraufhin ergibt sich aus (2)

$$T' = \iint\limits_{(\Delta')} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv + \varepsilon'\Delta',$$

wobei ε' gleichzeitig mit dem Durchmesser von (Δ') oder, wenn man will, gleichzeitig mit dem Durchmesser von (S') beliebig klein wird. Wenden wir dieses Ergebnis auf alle Teile (S_i) $(i=1,2,\ldots,n)$ an, in die wir die Fläche (S) zerlegen, so kommen wir zu einer Reihe von analogen Gleichungen

$$T_i = \iint\limits_{(\Delta i)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv + \varepsilon_i\Delta_i;$$

hierbei ist (Δ_i) der (S_i) entsprechende Teil des Gebiets (Δ). Wir summieren über i und erhalten

$$\sum_i T_i = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv + \varepsilon;$$

dabei wird $\varepsilon = \sum\limits_i \varepsilon_i\Delta_i$ offenbar zugleich mit λ beliebig klein. Also existiert für $\sum\limits_i T_i$ tatsächlich ein Grenzwert S für $\lambda\to 0$, und es ist

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv\,. \tag{3}$$

Dieser Grenzwert ist definitionsgemäß gerade der *Inhalt der Fläche.*

Wenn man die Matrix

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

„ins Quadrat erhebt" und die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_u^2+y_u^2+z_u^2 & x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v \\ x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v & x_v^2+y_v^2+z_v^2 \end{vmatrix}$$

[1]) Damit bezeichnen wir das vierdimensionale Gebiet der Punkte (u,v,u',v'), für die (u,v) und (u',v') einzeln zum zweidimensionalen Gebiet (Δ) gehören.

bildet, so wird diese nach einem bekannten Satz der Algebra gerade gleich $A^2+B^2+C^2$. Gewöhnlich setzt man (nach GAUSS)

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=E, \qquad x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v=F, \qquad x_v^2+y_v^2+z_v^2=G;$$

das sind die sogenannten Gaußschen Koeffizienten der Fläche, die in der Differentialgeometrie eine wichtige Rolle spielen. Mit diesen Bezeichnungen ist $A^2+B^2+C^2=EG-F^2$, so daß die Formel (3) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$S=\iint\limits_{(A)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,. \tag{3*}$$

Den Ausdruck

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv \equiv \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{4}$$

nennt man *Flächenelement in krummlinigen Koordinaten.*

Wir hatten uns bisher auf den Fall einer *nichtgeschlossenen glatten* Fläche beschränkt. Wenn eine Fläche nicht zu dieser Klasse gehört, aber in endlich viele nichtgeschlossene glatte Stücke zerlegt werden kann, so erklären wir als ihren Inhalt die Summe der Inhalte der einzelnen Stücke. Man kann dabei leicht zeigen, daß der so definierte Inhalt in Wirklichkeit unabhängig davon ist, wie die Fläche in Stücke des erforderlichen Typs zerlegt ist. Wird die ganze gegebene Fläche durch Parametergleichungen beschrieben, so wird ihr Inhalt in dem genannten allgemeinen Fall wiederum durch die Formel (3) oder (3*) ausgedrückt.

Wir befassen uns zum Abschluß mit dem sehr einfachen Spezialfall, daß die Fläche (S) durch eine *explizite* Gleichung $z=f(x, y)$ gegeben wird, wobei (x, y) ein Gebiet (D) der x, y-Ebene durchläuft. Die Veränderlichen x und y spielen die Rolle der Parameter u und v. Wir setzen, wie üblich,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Aus der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Determinanten $A=-p$, $B=-q$, $C=1$, so daß im vorliegenden Fall

$$S=\iint\limits_{(D)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy \tag{5}$$

wird. Wir erinnern uns, daß für einen *spitzen* Winkel ν der Normalen mit der z-Achse

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

wird, und können daher die Formel für den Flächeninhalt wie folgt schreiben:

$$S=\iint\limits_{(D)} \frac{dx\,dy}{\cos\nu}\,. \tag{5a}$$

Wenn wir nicht fordern, daß ν spitz sein soll, so ergibt sich schließlich

$$S=\iint\limits_{(D)}\frac{dxdy}{|\cos\nu|}. \tag{5b}$$

(Vgl. Formel (7) aus Nr. 544 für die *Bogenlänge* einer Kurve, die durch eine *explizite* Gleichung $y=f(x)$ gegeben ist.)

627. Die Definition mit Hilfe einbeschriebener Polyederflächen. Obwohl wir davon absehen wollten, die *Definition* des Inhalts einer gekrümmten Fläche auf die Approximation durch einbeschriebene Polyederflächen zu gründen, wenden wir uns jetzt dieser Frage zu und zeigen wenigstens, wie man einbeschriebene Polyederflächen konstruieren kann, deren Inhalte offensichtlich gegen den Inhalt der gekrümmten Fläche konvergieren.

Wir beschäftigen uns nur mit dem Fall, daß das Gebiet (Δ) ein *Rechteck* ist, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind.

Wir wählen eine bestimmte *Seite* der Fläche (S) und legen dadurch einen positiven Umlaufsinn für ihren Rand fest. Wir können annehmen, daß diese Richtung dem positiven Umlaufsinn des Randes des Rechtecks (Δ) entspricht. Wir wissen (Nr. 621), daß unter diesen Bedingungen die Richtungskosinus der Flächennormalen durch die Formeln

$$\cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{6}$$

mit dem *positiven* Wert der Wurzel gegeben werden.

Wir zerlegen jetzt das Rechteck (Δ) durch Parallelen zu seinen Seiten in Teilrechtecke und anschließend noch jedes von diesen durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke (Abb. 91a). Auf diese Weise führen wir eine *Triangulation* des Gebiets (Δ) durch. Es sei $\triangle m_0m_1m_2$ eins der Teildreiecke mit den Eckpunkten $m_0(u_0, v_0)$, $m_1(u_0+h, v_0)$, $m_2(u_0, v_0+k)$, wobei h und k gleiches Vorzeichen haben sollen. Auf der Fläche (S) entsprechen ihnen die Punkte $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, die im Raum ein Dreieck $\triangle M_0M_1M_2$ bestimmen (Abb. 91b). Alle diese Dreiecke bilden eine Polyederfläche (Σ), die der Fläche (S) einbeschrieben ist; eben diese werden wir be-

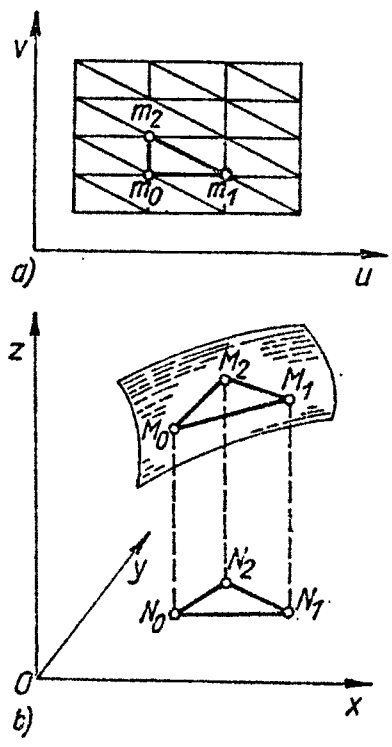

Abb. 91

trachten. Wenn wir den Rand eines jeden solchen Dreiecks in der Richtung $M_0M_1M_2M_0$ durchlaufen (das entspricht dem positivem Umlauf um das Dreieck $\triangle m_0m_1m_2$), so definieren wir dadurch in Übereinstimmung mit den in Nr. 622 aufgestellten Bedingungen eine Seite der Polyederfläche (Σ).

Wenn man $\triangle M_0M_1M_2$ auf die x, y-Ebene projiziert, erhält man ein Dreieck mit den Eckpunkten $N_0(x_0, y_0)$, $N_1(x_1, y_1)$, $N_2(x_2, y_2)$. Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß der Inhalt dieses letzten Dreiecks nach Größe und *Vorzeichen* (bei Berücksichtigung seiner Orientierung) durch die Determinante

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$$

gegeben wird. Nach dem Mittelwertsatz folgt

$$x_1-x_0=x(u_0+h, v_0)-x(u_0, v_0)=x_u(u_0+\theta h, v_0)\cdot h=[x_u(u_0, v_0)+\varepsilon_1]\cdot h\,,$$

wobei der Wert ε_1 gleichzeitig mit h beliebig klein wird, und zwar *unabhängig von der Lage des Punktes* (u_0, v_0).[1]) Genauso ist

$$y_1-y_0=(y_u+\varepsilon_2)\cdot h, \qquad x_2-x_0=(x_v+\varepsilon_3)\cdot k, \qquad y_2-y_0=(y_v+\varepsilon_4)\cdot k\,,$$

wobei alle Ableitungen an der Stelle $u=u_0$, $v=v_0$ zu nehmen sind und der Buchstabe ε mit Indizes hier (und in Zukunft) Größen bezeichnet, die unabhängig von der Lage des Punktes (u_0, v_0) zugleich mit h und k beliebig klein werden. Den Wert σ_{xy} kann man nun in der Form

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{2}hk\begin{vmatrix} x_u+\varepsilon_1 & y_u+\varepsilon_2 \\ x_v+\varepsilon_3 & y_v+\varepsilon_4 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}hk\,(C+\varepsilon_5)=(C+\varepsilon_5)\cdot\delta \tag{6a}$$

schreiben, wobei δ der Inhalt von $\triangle m_0m_1m_2$ ist. Analog erhalten wir für die Projektionen auf die anderen Koordinatenebenen

$$\sigma_{yz}=(A+\varepsilon_6)\cdot\delta, \qquad \sigma_{zx}=(B+\varepsilon_7)\cdot\delta\,. \tag{6b}$$

Der Inhalt σ des Dreiecks $\triangle M_0M_1M_2$ selbst wird jetzt nach der Formel

$$\sigma=\sqrt{\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2}$$

berechnet; man findet dafür leicht den Ausdruck

$$\sigma=\{\sqrt{A^2+B^2+C^2}+\varepsilon_8\}\,\delta\,. \tag{7}$$

Es ist unschwer einzusehen, daß die Quotienten $\frac{\sigma_{yz}}{\sigma}, \frac{\sigma_{zx}}{\sigma}, \frac{\sigma_{xy}}{\sigma}$ die Richtungskosinus der Normalen auf der Ebene des Dreiecks $\triangle M_0M_1M_2$ *entsprechend dessen Orientierung* angeben. In Anbetracht von (6a), (6b) und (7) streben sie für $h\to 0$ und $k\to 0$ gegen die Richtungskosinus (6) der Flächennormalen, und zwar *gleichmäßig für alle Seitenflächen des Polyeders*. Offenbar streben bei dem angegebenen Grenzübergang auch die *Durchmesser aller Seiten der Fläche* (Σ) *gleichmäßig gegen* 0, was zu beweisen war.

Schließlich ist durch Summation der Gleichungen (7) leicht zu ersehen, daß der Inhalt der Polyederfläche (Σ),

$$\Sigma=\sum\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\delta+\sum\varepsilon_8\cdot\delta\,,$$

für $h\to 0$ und $k\to 0$ gerade gegen den Inhalt (3) der gekrümmten Fläche konvergiert.

Diese Konstruktionen lassen sich natürlich auf den Fall ausdehnen, daß das Gebiet (Δ) aus Rechtecken zusammengesetzt ist. Die Triangulation eines beliebigen Gebiets würde jedoch ziemlich mühselige (wenn auch völlig elementare) Überlegungen erfordern; darauf werden wir nicht eingehen.

---

[1]) Wir benutzen hier die *gleichmäßige* Stetigkeit der Ableitung x_u. Analoge Überlegungen werden auch im folgenden angewandt.

628. Definition des Inhalts in singulären Fällen. Es sei wiederum eine glatte Fläche ohne mehrfache Punkte gegeben. Sie hat einen Inhalt S, der durch (3) oder (3*) angegeben wird. Wir stellen uns vor, es sei irgendein Teil (s) der Fläche (S) ausgewählt, der von einer stückweise glatten Kurve (l) begrenzt wird; ihm entspricht ein Teil (δ) des Gebiets (Δ), der von einer ebenfalls stückweise glatten Kurve (λ) begrenzt wird. Der Inhalt des Teils (S') der Fläche, den man durch Herausnahme der Figur (s) erhält, und der Inhalt der Figur (s) selbst sind offenbar gleich

$$S' = \iint\limits_{(\Delta)-(\delta)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \quad \text{bzw.} \quad s = \iint\limits_{(\delta)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv\,.$$

Wenn sich jetzt die Figur (s) auf der Fläche auf einen Punkt oder eine Linie zusammenzieht, so geht dasselbe mit der Figur (δ) vor sich, und ihr Inhalt δ strebt gegen 0, so daß

$$\lim S' = S \tag{8}$$

wird.

Wir nehmen jetzt an, dieselbe Fläche sei durch eine andere Darstellung

$$x = x^*(u^*, v^*), \qquad y = y^*(u^*, v^*), \qquad z = z^*(u^*, v^*)$$

gegeben, die in einem *isolierten Punkt* oder *längs einer isolierten Linie* eine Singularität hat (insbesondere können die Ableitungen der in dieser Darstellung auftretenden Funktionen unendlich werden). Wir nehmen mit Hilfe einer Umgebung (s) diesen Punkt oder diese Linie heraus und drücken den Inhalt des übrigbleibenden Teils, wie gewöhnlich, durch

$$S' = \iint\limits_{(\Delta^*)-(\delta^*)} \sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,du^*dv^*$$

aus. Mit einem Stern sind hier alle Größen gekennzeichnet, die sich auf die zweite Darstellung beziehen. Wir wissen aber schon (vgl. Formel (8)), daß S' gegen S streben muß, wenn sich (s) auf den erwähnten Punkt oder die erwähnte Linie zusammenzieht; folglich können wir, um S zu erhalten, in der letzten Formel zur Grenze übergehen, indem wir das Gebiet (δ^*) auf einen Punkt oder eine Linie zusammenziehen. Dann ergibt sich aber wieder die Formel in der üblichen Gestalt

$$S = \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{E^*G^*-F^{*2}}\,du^*dv^*,$$

nur daß das Integral *uneigentlich* sein kann.

Selbst wenn eine sonst glatte Fläche in einem einzelnen Punkt oder längs einer einzelnen Linie eine *nichthebbare*, d. h. nicht von der Art der Darstellung abhängende Singularität hat, werden wir das Integral (3*) benutzen, um den Flächeninhalt auszudrücken, vorausgesetzt, daß das Integral (wenn auch als uneigentliches) existiert. Es ist klar, daß wir damit in Wirklichkeit den Flächeninhalt S als Grenzwert der Flächeninhalte S' definieren, d. h., die Beziehung (8), die wir oben bewiesen haben, dient hier einfach zur *Erweiterung* unserer ursprünglichen Definition.

629. Beispiele.

1. Man bestimme den Inhalt der Teilfläche, die

(a) vom Zylinder $x^2+y^2=R^2$ $(x, y>0)$ aus dem hyperbolischen Paraboloid $z=xy$,

(b) vom Zylinder $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ aus dem elliptischen Paraboloid $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$,

(c) vom Zylinder $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ aus dem hyperbolischen Paraboloid $xy=az$,

(d) vom Zylinder $x^2+y^2=\varrho^2$ aus der Kugel $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(\varrho<R)$

herausgeschnitten wird.

(a) Lösung. Es ist $p=y$, $q=x$, so daß nach Formel (5)

$$S = \iint\limits_{\substack{x,y\geqq 0\\ x^2+y^2\leqq R^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

wird. Durch Übergang zu Polarkoordinaten finden wir

$$S=\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R r\sqrt{1+r^2}\,dr=\frac{\pi}{6}[(1+R^2)^{3/2}-1].$$

(b) Hinweis. Man benutze verallgemeinerte Polarkoordinaten.

Lösung. $S=\frac{2}{3}\pi ab[(1+c^2)^{3/2}-1]$.

(c) Hinweis. Man gehe zu Polarkoordinaten über. Die Gleichung des Zylinders in Polarkoordinaten ist $r^2=a^2\sin 2\theta$. Wir erhalten

$$S=\frac{2}{3}a^2\int_0^{\pi/2}[(1+\sin 2\theta)^{3/2}-1]\,d\theta.$$

Zur Lösung des Integrals substituieren wir $\theta=\frac{\pi}{4}+\lambda\left(-\frac{\pi}{4}\leqq\lambda\leqq\frac{\pi}{4}\right)$.

Lösung. $S=\frac{2}{3}a^2\left(\frac{10}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

(d) Lösung. $S=4\pi R(R-\sqrt{R^2-\varrho^2})$.

2. Man bestimme den Inhalt des Teils der Oberfläche der Kugel $x^2+y^2+z^2=R^2$, der aus ihr vom Zylinder $x^2+y^2=Rx$ herausgeschnitten wird (obere und untere Deckfläche des „Vivianischen Körpers“; vgl. Nr. 597, Aufgabe 20; Abb. 48).

Lösung. Für die obere Fläche gilt

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\qquad p=-\frac{x}{z},\qquad p=-\frac{y}{z},\qquad \sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}};$$

folglich ist

$$S=2R\iint_{(D)}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

wobei über das Gebiet integriert wird, das durch den Kreis $x^2+y^2=Rx$ begrenzt wird.

Durch den Übergang zu Polarkoordinaten erhalten wir (vgl. Nr. 611, Beispiel 6)

$$S=2R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=4R\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}.$$

Durch Ausführung der Integration finden wir schließlich $S=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Weil der Inhalt der Halbkugeloberfläche gleich $2\pi R^2$ ist, wird der Inhalt des Teils der Oberfläche, der nach Wegnahme des Vivianischen Körpers übrigbleibt, gleich $4R^2$; er ist also eine rationale Funktion des Radius R; vgl. in diesem Zusammenhang die Bemerkung in Nr. 597, Beispiel 20, bezüglich des Volumens des „Vivianischen Körpers“.

Bemerkung. Man hätte natürlich das Integral über das Intervall $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ nicht durch das doppelte Integral über das Intervall $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ zu ersetzen brauchen. Wenn man jedoch sofort das Integral von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ berechnet, muß man beachten, daß der Ausdruck

$$\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=[-\sqrt{R^2-r^2}]\Big|_0^{R\cos\theta}=R-R\sqrt{\sin^2\theta}$$

für das innere Integral für $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ in der Form $R(1-\sin\theta)$ und für $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ in der Form $R(1+\sin\theta)$ geschrieben werden muß (denn die Wurzel ist stets positiv, und es war $z = R|\sin\theta|$). Würde man das nicht beachten, so erhielte man ein falsches Ergebnis.

3. Man bestimme den Flächeninhalt (a) des Teils der Oberfläche des Kegels $y^2+z^2=x^2$, der innerhalb des Zylinders $x^2+y^2=R^2$ liegt; (b) des Teils der Oberfläche des Kegels $z^2=2xy$ $(x, y \geqq 0)$, der von den Ebenen $x=a$ und $y=b$ eingeschlossen wird; (c) des Teils der gleichen Fläche, der innerhalb der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$ liegt.

Hinweis. (a) $S = 8\sqrt{2}\int\limits_0^{R/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-y^2}} = 2\pi R^2$;

(b) $S = \sqrt{2}\int\limits_0^b dy \int\limits_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dx = \frac{4}{3}(a+b)\sqrt{2ab}$.

(c) Der Durchschnitt der Flächen liegt in der Ebene $x+y=a$. Weiterhin ist

$$S = 2\sqrt{2}\iint\limits_{\substack{x,y\geqq 0\\ x+y\leqq a}} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dx\,dy = 4\sqrt{2}\int\limits_0^a \sqrt{x}\,dx \int\limits_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$= 8\sqrt{2}\int\limits_0^a \sqrt{x(a-x)}\,dx = \pi\sqrt{2}\cdot a^2.$$

4. Man beweise, daß der Flächeninhalt einer beliebigen Figur, die auf einer Hälfte (etwa der oberen) des Kreiskegels

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

liegt, dem Inhalt der Projektion der Figur auf die x, y-Ebene *proportional* ist.

Hinweis. Man gehe von der expliziten Gleichung $z = \frac{c}{a}\sqrt{x^2+y^2}$ aus und benutze Formel (5).

5. Man bestimme den Inhalt desjenigen Teils der Fläche $z = \arcsin(\sinh x \cdot \sinh y)$, der zwischen den Ebenen $x=a$ und $x=b$ liegt $(0<a<b)$.

Lösung. Es gilt

$$p = \frac{\cosh x\cdot\sinh y}{\sqrt{1-\sinh^2 x\cdot\sinh^2 y}}, \qquad q = \frac{\sinh x\cdot\cosh y}{\sqrt{1-\sinh^2 x\cdot\sinh^2 y}},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\cosh x\cdot\cosh y}{\sqrt{1-\sinh^2 x\cdot\sinh^2 y}}.$$

Das Integrationsgebiet wird durch die Bedingungen $a \leqq x \leqq b$, $|\sinh x\cdot\sinh y| \leqq 1$ definiert. Wir führen die Substitution $\sinh x = \xi$, $\sinh y = \eta$ durch; dann durchlaufen die neuen Veränderlichen die Intervalle

$$\sinh a \leqq \xi \leqq \sinh b, \qquad -\frac{1}{\xi} \leqq \eta \leqq \frac{1}{\xi}.$$

Also wird

$$S = \int\limits_{\sinh a}^{\sinh b} d\xi \int\limits_{-1/\xi}^{1/\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\xi^2\eta^2}} = \pi \int\limits_{\sinh a}^{\sinh b} \frac{d\xi}{\xi} = \pi\cdot\ln\frac{\sinh b}{\sinh a}.$$

6. Man bestimme den Inhalt des Teils der Zylinderfläche $x^2+y^2=Rx$, der von der Kugel $x^2+y^2+z^2=R^2$ umschlossen wird (Mantelfläche des Vivianischen Körpers).

Lösung. Die Gleichung des vorderen Teils der Fläche ist $y=\sqrt{Rx-x^2}$. Das Gebiet, das die unabhängigen Veränderlichen x, z durchlaufen, wird von der z-Achse und der Parabel $z=\sqrt{R^2-Rx}$ begrenzt. Da

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}R-x}{\sqrt{Rx-x^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z}=0$$

ist, gilt

$$S=R\int_0^R\int_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}}\frac{dz\,dx}{\sqrt{Rx-x^2}}=2R\sqrt{R}\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{x}}=4R^2$$

(vgl. Nr. 347, Beispiel 4).

7. Man bestimme den Inhalt der Mantelfläche des geraden Kegels der Höhe c, dessen Grundfläche die Ellipse mit den Halbachsen a und b ist ($a>b$).

Lösung. Wählen wir als Koordinatenursprung die Spitze des Kegels und legen wir die x, y-Ebene parallel zur Grundfläche (Abb. 92), so lautet die Gleichung der Fläche

$$z=c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}.$$

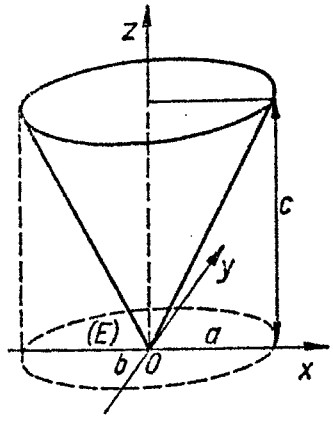

Abb. 92

Der gesuchte Inhalt ist

$$S=\iint_{(E)}\sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha x}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta y}{b}\right)^2}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\,dx\,dy,$$

wobei (E) die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1$ ist und der Kürze halber $\alpha=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}$, $\beta=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b}$ gesetzt ist.

Gehen wir zu verallgemeinerten Polarkoordinaten über, so erhalten wir

$$S=2ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Dieses Ergebnis läßt sich leicht auf ein vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung zurückführen:

$$S=2a\sqrt{b^2+c^2}\,E(k) \quad \text{mit} \quad k=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}.$$

8. Man bestimme den Inhalt der Fläche, die durch Rotation der Kurve $y=f(x)$ um die x-Achse erzeugt wird ($a\leqq x\leqq b$, $f(x)\geqq 0$).

Lösung. Wie man leicht sieht, ist $y^2+z^2=[f(x)]^2$ die Gleichung der Rotationsfläche und $z=\sqrt{[f(x)]^2-y^2}$ die Gleichung ihrer oberen Hälfte. Hieraus folgt

$$p=\frac{f(x)\,f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},\qquad q=\frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}},\qquad \sqrt{1+p^2+q^2}=f(x)\,\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}.$$

Also wird der gesuchte Inhalt durch das Integral

$$S=2\iint\limits_{(D)} f(x)\,\frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}\,dx\,dy$$

ausgedrückt, wobei das Gebiet (D) in der x, y-Ebene von den Linien $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$ und $y=-f(x)$ begrenzt wird.

Durch Übergang zu einem Doppelintegral finden wir

$$S=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2-y^2}}.$$

Da das innere Integral gleich π ist, ergibt sich die uns schon bekannte Formel (Nr. 344, Formel (22)):

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,.$$

Wie der Leser wahrscheinlich selbst bemerkt hat, handelt es sich in den Beispielen 2 bis 8 durchweg um solche singulären Fälle der Inhaltsberechnung, wie sie in Nr. 628 besprochen wurden.

9. Man löse Beispiel 2 unter Benutzung der Parameterdarstellung der Kugeloberfläche durch Kugelkoordinaten

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=R\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=R\cos\varphi\qquad (0\leqq\varphi\leqq\pi,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)\,.$$

Aus der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0\end{pmatrix}$$

findet man leicht die Gaußschen Koeffizienten der Kugeloberfläche $E=R^2$, $F=0$, $G=R^2\sin^2\varphi$, so daß $\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi$ wird.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Viertels der gesuchten Fläche, das im ersten Oktanten liegt. Für die Punkte der „Vivianischen Kurve", d. h. der Schnittkurve der Kugel und des Zylinders (im ersten Oktanten), gilt $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$.

Drücken wir nämlich in der Zylindergleichung $x^2+y^2=Rx$ die Koordinaten x und y durch φ und θ aus, so erhalten wir $\sin\varphi=\cos\theta$, und da in den betrachteten Punkten offenbar $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ und $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ ist, folgt hieraus gerade $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$.

Nachdem wir so die Grenzen für die Parameter φ und θ ermittelt haben, erhalten wir nach Formel (3*)

$$S=4R^2\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{(\pi/2)-\theta}\sin\varphi\,d\varphi=4R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Wie wir sehen, sind wir zu dem schon bekannten Ergebnis gekommen, aber diesmal haben wir Unstetigkeiten des Integranden vermieden.

10. Wir betrachten die sogenannte *allgemeine Schraubenfläche* (Nr. 229, Beispiel 5), die von der (in der x, z-Ebene gelegenen) Kurve $x=\varphi(u)$, $z=\psi(u)$ $(\varphi(u)\geqq 0)$ bei schrau-

benförmiger Bewegung um die z-Achse und längs der z-Achse beschrieben wird. Ihre Gleichung ist (wenn man den Drehwinkel mit v bezeichnet)

$$x=\varphi(u)\cos v, \qquad y=\varphi(u)\sin v, \qquad z=\psi(u)+cv\,.$$

Entsprechend der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \varphi'(u)\cos v & \varphi'(u)\sin v & \psi'(u) \\ -\varphi(u)\sin v & \varphi(u)\cos v & c \end{pmatrix}$$

bilden wir die Gaußschen Koeffizienten der Fläche:

$$E=[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2, \qquad F=c\psi'(u), \qquad G=[\varphi(u)]^2+c^2.$$

Also hängt der Ausdruck

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{\{[\varphi(u)]^2+c^2\}\,\{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2\}-c^2[\psi'(u)]^2}$$

nur von u ab, was im allgemeinen die Rechnungen vereinfacht.

11. Man benutze diese Ergebnisse zur Bestimmung des Inhalts des Teils

(a) der gewöhnlichen Schraubenfläche

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v, \qquad z=cv\,,$$

der vom Zylinder $x^2+y^2=a^2$ und den Ebenen $z=0$ und $z=2\pi c$ (d. h. $0\leqq v\leqq 2\pi$) herausgeschnitten wird;

(b) der Schraubenfläche

$$x=\tan u\cos v, \qquad y=\tan u\sin v, \qquad z=\frac{\sin u}{2\cos^2 u}+\ln\sqrt{\frac{1+\sin u}{\cos u}}+v,$$

der dem Parameterrechteck $0\leqq u\leqq\frac{\pi}{4}$, $0\leqq v\leqq 2\pi$ entspricht.

(a) Lösung. Im vorliegenden Fall ist $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2+c^2}$, so daß

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\sqrt{u^2+c^2}\;du\,dv=2\pi\left[\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\frac{c^2}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right]$$

wird.

(b) Lösung. $S=\frac{8}{3}\pi$.

12. Wenn man in der Aufgabe über die Schraubenbewegung einer Kurve $c=0$ setzt, so daß also die Vorwärtsbewegung fehlt, so ergibt sich eine *Rotationsfläche*:

$$x=\varphi(u)\cos v, \qquad y=\varphi(u)\sin v, \qquad z=\psi(u) \qquad (\alpha\leqq u\leqq\beta,\ 0\leqq v\leqq 2\pi)\,.$$

Dann ist

$$\sqrt{EG-F^2}=\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2},$$

und der Inhalt dieser Fläche wird durch die Formel

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\varphi(u)\sqrt{[\varphi'(u)]^2+[\psi'(u)]^2}\;du$$

ausgedrückt. Diese Formel verallgemeinert das Ergebnis von Beispiel 8, erfordert aber nicht die Einführung uneigentlicher Integrale. (Vgl. Nr. 344, Formel (21).)

13. Man verifiziere, ausgehend von der allgemeinen Formel (3*), die in Nr. 346 hergeleitete Formel (25) für den Inhalt eines Teils einer *Zylinderfläche*.

14. Manchmal ist es vorteilhaft, die Fläche in Kugelkoordinaten r, θ, φ anzugeben. Diese sind mit den gewöhnlichen kartesischen Koordinaten durch die bekannten Formeln

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, \qquad y=r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z=r\cos\varphi \qquad (r\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq\pi,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

verknüpft. Man nimmt hierbei an, daß der Radiusvektor r als Funktion der Winkel φ und θ gegeben ist: $r=r(\varphi,\theta)$ (*Gleichung der Fläche in räumlichen Polarkoordinaten*). Gesucht wird für diesen Fall ein Ausdruck für den Inhalt einer krummen Fläche.

Lösung. Man kann den allgemeinen Ausdruck (3*) verwenden, wenn man φ und θ als Parameter wählt. Die oben angegebenen Formeln liefern gerade eine Parameterdarstellung der Fläche, wenn man r mit Hilfe der Gleichung der Fläche in Polarkoordinaten durch φ und θ ausdrückt.

Aus der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\theta & \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\sin\theta & \frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\sin\varphi & \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)\sin\varphi & \frac{\partial r}{\partial\theta}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

findet man leicht

$$E=\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2,\qquad F=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial\theta},\qquad G=\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+r^2\sin^2\varphi,$$

$$EG-F^2=\left[\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right]r^2.$$

Also erhalten wir schließlich

$$S=\iint\limits_{(\Delta)}\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2}\;r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta, \tag{9}$$

wobei (Δ) das Gebiet ist, das die Argumente φ, θ durchlaufen.

Für das *Flächenelement in Kugelkoordinaten* gilt

$$\mathrm{d}S=\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2}\;r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

15. Man berechne den Inhalt der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy.$$

Lösung. Hier ist es gerade vorteilhaft, Formel (9) zu benutzen. Die Gleichung der Fläche in Polarkoordinaten lautet $r=a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$. Dann ist

$$\sqrt{\left(r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2}=\frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\sin 2\theta}},$$

und nach Formel (9) erhalten wir

$$S=4a^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\pi^2a^2.$$

16. Wir betrachten die Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2=2Rz$$

vom Radius R, die die x, y-Ebene im Koordinatenursprung berührt. Es soll der Inhalt desjenigen Teils der Fläche gefunden werden, der innerhalb des Kegels $z^2=Ax^2+By^2$ liegt. Die Spitze des Kegels liegt im Koordinatenursprung (Abb. 93).

Lösung. Wir benutzen auch hier Formel (9), indem wir von der Gleichung $r=2R\cos\varphi$ der Kugelfläche ausgehen. Es gilt

$$S=\iint\limits_{(\Delta)}4R^2\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

wobei das Integrationsgebiet (Δ) bezüglich φ und θ durch die Kurve

$$(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta)\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$$

begrenzt wird. Wenn wir die Aufgabe auf die Bestimmung des Inhalts desjenigen Teils zurückführen, der im ersten Oktanten liegt, so durchläuft φ für beliebiges θ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Werte von 0 bis zum Winkel $\varphi_0 = \varphi_0(\theta)$, für den

$$\tan^2\varphi_0 = \frac{1}{A\cos^2\theta + B\sin^2\theta}$$

ist. Offenbar ist

$$S = 16R^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\varphi_0} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi .$$

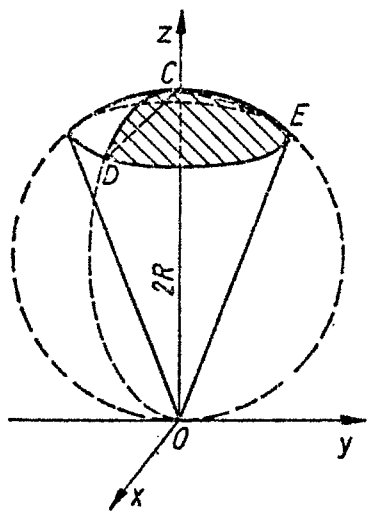

Abb. 93

Nun ist aber

$$\int_0^{\varphi_0} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\sin^2\varphi_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + A\cos^2\theta + B\sin^2\theta}$$

und daher schließlich

$$S = 8R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(A+1)\cos^2\theta + (B+1)\sin^2\theta} = \frac{4\pi R^2}{\sqrt{(A+1)(B+1)}}.$$

Es ist interessant, daß dieser Inhalt mit dem Inhalt der Ellipse übereinstimmt, die als Halbachsen die Sehnen DC und EC besitzt (siehe Abb. 93).

17. Man beweise, daß der Inhalt der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2$$

mit dem Inhalt der Ellipsoidfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

übereinstimmt, wenn man $a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$, $b = \frac{\gamma\alpha}{\beta}$, $c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ wählt.

Beweis. In Kugelkoordinaten lautet die Gleichung der Fläche

$$r^2 = \alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \beta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \gamma^2\cos^2\varphi ,$$

und nach Formel (9) ist ihr Inhalt gleich

$$S_1 = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\alpha^4 \cos\theta + \beta^4 \sin^2\theta)\sin^2\varphi + \gamma^4 \cos^2\varphi}\, \sin\varphi \, d\varphi d\theta .$$

Geht man andererseits von der gewöhnlichen Parameterdarstellung

$$x = a \sin\varphi \cos\theta, \qquad y = b \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = c\cos\varphi \qquad (0 \leqq \varphi \leqq \pi;\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

des Ellipsoids aus, so werden die Unterdeterminanten der Funktionalmatrix gleich

$$A = cb \sin^2\varphi \cos\theta, \qquad B = ac \sin^2\varphi \sin\theta, \qquad C = ab \sin\varphi \cos\varphi ,$$

und nach Formel (3) wird der Inhalt der Ellipsoidfläche folgendermaßen ausgedrückt:

$$S = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(c^2b^2 \cos^2\theta + c^2a^2 \sin^2\theta)\sin^2\varphi + a^2b^2 \cos^2\varphi}\, \sin\varphi \, d\varphi d\theta .$$

Wir sehen, daß die Ausdrücke für S_1 und S tatsächlich identisch werden, wenn wir

$$cb = \alpha^2, \qquad ca = \beta^2, \qquad ab = \gamma^2 \quad \text{oder} \quad a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \qquad b = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \qquad c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

setzen, was zu beweisen war.

18. Man bestimme den Inhalt der Ellipsoidfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c > 0) .$$

Wir schreiben die Gleichung der Fläche im ersten Oktanten in der expliziten Form

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

und erhalten

$$p = -c\,\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \qquad q = -c\,\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

so daß

$$1 + p^2 + q^2 = \frac{1 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

wird. Wir setzen zur Abkürzung

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = \alpha^2, \qquad 1 - \frac{c^2}{b^2} = \beta^2;$$

dann wird der gesuchte Flächeninhalt nach Formel (5) durch das Integral

$$S = 8 \iint\limits_{\substack{x,y \geqq 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1}} \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \frac{x^2}{a^2} - \beta^2 \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\, dx dy$$

ausgedrückt. Durch die Substitution $\frac{x}{a}=\xi$, $\frac{y}{b}=\eta$ bringen wir das Integral auf die Gestalt

$$S=8ab\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqq 0\\ \xi^2+\eta^2\leqq 1}}\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\,.$$

Wir wollen hier eine Transformationsformel für Flächenintegrale anwenden, die von CATALAN stammt (vgl. Nr. 597, Beispiel 15, und Nr. 617, Beispiel 16). Wir bemerken dazu, daß die Kurve

$$\sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}}=u=\text{const}\qquad(u\geqq 1)$$

nichts anderes ist als die Ellipse

$$\frac{\xi^2}{\frac{u^2-1}{u^2-\alpha^2}}+\frac{\eta^2}{\frac{u^2-1}{u^2-\beta^2}}=1\,,$$

so daß ein Viertel ihrer Fläche gleich

$$\iint\limits_{\substack{\xi,\eta\geqq 0\\ \sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2\eta^2}}\leqq u}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}$$

ist. Dann ist nach der Formel von CATALAN

$$S=2\pi ab\int\limits_1^\infty u\mathrm{d}\,\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}\,.$$

Wir formen dieses elliptische Integral um.

Zunächst integrieren wir partiell[1]):

$$\int\limits_1^\infty u\mathrm{d}\,\frac{u^2-1}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}=\left\{\frac{u\,(u^2-1)}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}-\int\frac{(u^2-1)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}\right\}\Bigg|_1^\infty.$$

Dann führen wir die Substitution

$$u=\frac{\alpha}{\sin\varphi},\qquad \mathrm{d}u=-\frac{\alpha\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

durch, wobei wir φ die Werte von $\mu=\arcsin\alpha$ bis 0 durchlaufen lassen. Somit wird, wenn wir $k=\frac{\beta}{\alpha}$ $(k<1)$ setzen, einerseits

$$\frac{u\,(u^2-1)}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}=\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Andererseits ist

$$-\frac{(u^2-1)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)\,(u^2-\beta^2)}}=\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2\varphi}-1\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}$$

[1]) Wir bemerken, daß hier weder das integralfreie Glied noch das Integral für sich allein einen Sinn hat, wenn man die Grenzen 1 und ∞ einsetzt. Es liegt für $u=\infty$ eine Unbestimmtheit der Form $\infty-\infty$ vor.

$$= \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1-\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi$$

$$= \left(\alpha \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1-\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) d\varphi ,$$

so daß das Integral die Gestalt

$$\alpha \int \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{1-\beta^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

erhält.

Durch partielle Integration des ersten Gliedes transformieren wir diesen Ausdruck schrittweise folgendermaßen:

$$-\alpha \cot \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - k^2 \alpha \int \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi - \frac{1-\beta^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$= -\alpha \cot \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{1-k^2 \alpha^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$= -\alpha \cot \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi .$$

Danach fassen wir die beiden Glieder außerhalb des Integralzeichens zusammen[1]):

$$\frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \cot \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi}{\alpha \cos \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} .$$

Einsetzen der Grenzen $\varphi = \arcsin \alpha$ und $\varphi = 0$ liefert für diesen Ausdruck das Ergebnis $\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$. Berücksichtigen wir auch bei den Integralen die Grenzen, so erhalten wir schließlich die Formel

$$S = 2\pi ab \left\{ \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\beta^2} + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} F(\mu, k) + \alpha E(\mu, k) \right\}$$

$$= 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}} \{ c^2 F(\mu, k) + (a^2 - c^2) E(\mu, k) \} ,$$

die von LEGENDRE stammt. Hierbei ist

$$\mu = \arcsin \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} , \qquad k = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} .$$

19. GAUSS führte für Flächen den Begriff der Totalkrümmung in einem gegebenen Punkt ein, der dem Begriff der Krümmung ebener Kurven völlig analog ist (Nr. 250).

Es seien eine Fläche und auf ihr ein Punkt gegeben. Wir wählen einen beliebigen Teil (S) der Fläche, der diesen Punkt umgibt, und betrachten die Gesamtheit der *Normalen* in den verschiedenen Punkten von (S). Wir legen um den Koordinatenursprung die Einheitskugel und ziehen vom Koordinatenursprung aus Strahlen, die zu den erwähnten Normalen parallel sind; sie schneiden einen gewissen Teil (Σ) der Oberfläche der Einheitskugel aus. Der Inhalt Σ dieses Teils ist ein Maß für den Raumwinkel, den alle diese Strahlen erfüllen; das ist ein Analogon zum Winkel ω, von dem in der Definition in Nr. 250 die Rede war. Den Grenzwert des Quotienten $\frac{\Sigma}{S}$ für den Fall, daß sich (S) auf den gegebenen Punkt zusammenzieht, nennt man *Totalkrümmung* der Fläche in diesem Punkt. Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese zu berechnen.

---

[1]) Damit beseitigen wir natürlich die Unbestimmtheit bei $\varphi = 0$, auf die oben hingewiesen worden war.

Wir setzen voraus, die Fläche sei durch eine Gleichung $z=f(x, y)$ gegeben. Hierbei soll die Funktion f stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

und außerdem soll die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)}=rt-s^2 \tag{10}$$

(im betrachteten Punkt und in seiner Umgebung) von 0 verschieden sein.

Nach Formel (5b) gilt

$$S=\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos \nu|}, \qquad \Sigma=\iint\limits_{(D')} \frac{dx'dy'}{|\cos \nu|},$$

wobei (D) die Projektion von (S) und (D') die Projektion von (Σ) auf die x, y-Ebene ist. Der Winkel ν ist jedoch für entsprechende Punkte (x, y, z) und (x', y', z') der beiden Flächen ein und derselbe.

Wir transformieren das zweite Integral auf die Veränderlichen x und y. Da offenbar

$$x'=\cos \lambda=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad y'=\cos \mu=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad \left(z'=\cos \nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

ist, gilt

$$\frac{D(x', y')}{D(p, q)}=\frac{1}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Berücksichtigen wir noch (10), so erhalten wir schließlich

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Nach der Substitutionsregel folgt daraus

$$\Sigma=\iint\limits_{(D)} \frac{|rt-s^2|}{(1+p^2+q^2)^2} \frac{dxdy}{|\cos \nu|}.$$

Differenziert man sowohl S als auch Σ nach dem Gebiet (D) (vgl. Nr. 593), so erhält man nun leicht

$$\lim_{(S)\to M} \frac{\Sigma}{S}=\frac{|rt-s^2|}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Das ist der gesuchte Ausdruck für die Totalkrümmung.

20. Die Formel (5b) kann man sehr einfach erhalten, wenn man für den Fall einer explizit gegebenen Fläche (S) von einer anderen Definition des Inhalts einer gekrümmten Fläche ausgeht.

Wir zerlegen die Fläche (S) in Teile (S_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$; dementsprechend wird ihre Projektion (D) auf die x, y-Ebene in Teile (D_i) zerlegt. In irgendeinem Punkt M_i des Stückes (S_i) legen wir die Tangentialebene an die Fläche und projizieren das Stück (S_i) *parallel* zur z-Achse auf diese Ebene. Bezeichnen wir mit T_i den Inhalt der entstandenen Figur, so gilt offenbar $D_i=T_i|\cos \nu_i|$, wenn ν_i der Winkel der Flächennormalen im Punkt M_i mit der z-Achse ist. Wenn wir als Inhalt S der Fläche den Grenzwert der Summe der Inhalte gerade dieser ebenen Figuren erklären, so gelangen wir unmittelbar zu dem Ergebnis

$$S=\lim \sum_i T_i=\lim \sum_i \frac{D_i}{|\cos \nu_i|}=\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos \nu|},$$

da die auftretende Summe offenbar eine Integralsumme für das letzte Integral darstellt.

Wir betonen, daß die abgeänderte Definition des Inhalts einer gekrümmten Fläche einen wesentlichen Mangel hat, obwohl sie hier sehr einfach zur endgültigen Formel führt: Sie hängt formal von der Wahl des Koordinatensystems ab (die Projektion erfolgt parallel zur z-Achse), und sie ist nur auf einen speziellen Typ von Flächen anwendbar.

21. Von einer Parameterdarstellung

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v), \qquad z=z(u, v) \qquad ((u, v) \text{ aus } (\Delta))$$

einer glatten Fläche (S) wollen wir mit Hilfe der Formeln[1])

$$u=U(u^*, v^*), \qquad v=V(u^*, v^*) \qquad ((u^*, v^*) \text{ aus } (\Delta^*))$$

zu einer anderen Darstellung

$$x=x^*(u^*, v^*), \qquad y=y^*(u^*, v^*), \qquad z=z^*(u^*, v^*)$$

übergehen, in der die Fläche ebenfalls keine Singularitäten hat. Man kann leicht *direkt* zeigen, daß dabei die Formel (3) für den Inhalt S der Fläche in die analoge Formel

$$S=\iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}\, du^* dv^*$$

transformiert wird (alle Größen, die sich auf die neue Darstellung beziehen, versehen wir mit einem Stern).

Setzen wir nämlich

$$I=\frac{D(u, v)}{D(u^*, v^*)},$$

so gilt nach einer bekannten Eigenschaft der Funktionaldeterminante $A^*=AI$, $B^*=BI$, $C^*=CI$. Hieraus ersieht man unter anderem, daß I in (Δ^*) von 0 verschieden ist, denn sonst hätte die Fläche in der neuen Darstellung eine Singularität. Nun erhalten wir nach der Substitutionsregel unmittelbar

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du\, dv &= \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, |I|\, du^* dv^* \\ &= \iint\limits_{(\Delta^*)} \sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}\, du^* dv^*,\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

§ 3. Oberflächenintegrale erster Art

630. Definition des Oberflächenintegrals erster Art. Die Oberflächenintegrale erster Art sind eine ebensolche natürliche Verallgemeinerung der Flächenintegrale, wie es die Kurvenintegrale erster Art bezüglich der einfachen bestimmten Integrale sind.

Diese Verallgemeinerung geschieht folgendermaßen. Es sei in den Punkten irgendeiner zweiseitigen glatten (oder stückweise glatten) Fläche (S), die von einer stückweise glatten Kurve begrenzt wird, eine Funktion $f(M)=f(x, y, z)$ definiert. Wir zerlegen die Fläche (S) mit Hilfe eines Netzes willkürlich gezogener stückweise glatter Kurven in Teile (S_1), (S_2), ..., (S_n) und wählen in jedem Teil (S_i) $(i=1, 2, ..., n)$ willkürlich einen Punkt $M_i(x_i, y_i, z_i)$, bestimmen in diesem Punkt den Funktionswert $f(M_i)=f(x_i, y_i, z_i)$, multiplizieren ihn mit dem Inhalt S_i des entsprechenden

[1]) Die Funktionen U und V und ihre partiellen Ableitungen werden als stetig vorausgesetzt.

Teils der Fläche und bilden die Summe aller dieser Produkte,

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,S_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,S_i\,,$$

die wir auf Grund der Ähnlichkeit zu vielen früher betrachteten Summen eine *Integralsumme* nennen wollen.

Den endlichen Grenzwert dieser Integralsumme für den Fall, daß die Durchmesser aller Teile (S_i) gegen 0 streben, nennt man (falls er existiert) *Oberflächenintegral erster Art*[1]) der Funktion $f(M)=f(x, y, z)$ über die Fläche (S) und bezeichnet ihn mit

$$I=\iint\limits_{(S)} f(M)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S\,, \tag{1}$$

wobei $\mathrm{d}S$ an die Inhalte S_i der Flächenelemente erinnern soll.

631. Zurückführung auf ein gewöhnliches Flächenintegral. Wir beschränken uns auf den Fall einer einfachen nichtgeschlossenen glatten Fläche ohne mehrfache Punkte, die durch eine Parameterdarstellung gegeben ist.

Es sei $f(x, y, z)$ eine beliebige Funktion, die in den Punkten von (S) definiert und beschränkt ist:

$$|f(x, y, z)|\leqq L\,. \tag{2}$$

Dann gilt

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,, \tag{3}$$

vorausgesetzt, daß eines der beiden Integrale existiert (das hat die Existenz des anderen Integrals zur Folge).

Zur Zurückführung eines Oberflächenintegrals erster Art auf ein gewöhnliches Flächenintegral hat man also nur die Koordinaten x, y, z durch die Parameter auszudrücken und das Flächenelement $\mathrm{d}S$ durch seinen Ausdruck in krummlinigen Koordinaten zu ersetzen.

Wir wenden uns dem Beweis dieser Behauptung zu.

Wie bereits bemerkt, entspricht der Zerlegung der Fläche (S) in Teile mit Hilfe stückweise glatter Kurven eine analoge Zerlegung des Gebiets (Δ) und umgekehrt.

Wir zerlegen in entsprechender Weise die Fläche (S) in Teile (S_1), (S_2), ..., (S_n) und das Gebiet (Δ) in Teile (Δ_1), (Δ_2), ..., (Δ_n). In jedem Teil (S_i) wählen wir jeweils einen Punkt (x_i, y_i, z_i) und im Teil (Δ_i) den entsprechenden Punkt (u_i, v_i), so daß

$$x_i=x(u_i, v_i),\qquad y_i=y(u_i, v_i),\qquad z_i=z(u_i, v_i) \tag{4}$$

gilt. Wir bilden nun die Integralsumme für das Integral (1):

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,S_i\,.$$

[1]) Im Unterschied zu den Oberflächenintegralen zweiter Art, die später behandelt werden (Nr. 634).

Nach der allgemeinen Formel (3*) aus Nr. 626 ist $S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$. Wenden wir den Mittelwertsatz an, so erhalten wir

$$S_i = [\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i ,$$

wobei $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ ein beliebiger Punkt des Gebiets (Δ_i) ist.

Mit Hilfe dieses Ausdrucks für S_i und in Anbetracht von (4) können wir die Summe σ wie folgt schreiben:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\, [\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} \cdot \Delta_i .$$

In dieser Form erinnert sie an die Integralsumme für das zweite Integral in (3):

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\, [\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \cdot \Delta_i .$$

Der Unterschied der Summen σ und σ^* besteht darin, daß in der letzten Summe die mittelbare Funktion $f(...)$ und die Wurzel $\sqrt{...}$ stets in ein und demselben (willkürlich gewählten) Punkt (u_i, v_i) zu berechnen sind, während in der ersten Summe die Funktion $f(...)$ im Punkt (u_i, v_i) genommen wird, der Ausdruck $\sqrt{...}$ dagegen im Punkt $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ (der durch den Mittelwertsatz vorgeschrieben wird und *nicht willkürlich* ist).

Wir betrachten die Differenz der beiden Summen:

$$\sigma - \sigma^* = \sum_i f(...)\, \{[\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}}\}\, \Delta_i .$$

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl. Auf Grund der (gleichmäßigen) Stetigkeit der Funktion $\sqrt{EG-F^2}$ gilt für hinreichend kleine Durchmesser der Gebiete (Δ_i)

$$\left| [\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=\bar{u}_i \\ v=\bar{v}_i}} - [\sqrt{EG-F^2}]_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \right| < \varepsilon .$$

Unter Berücksichtigung von (2) gelangen wir leicht zu der Abschätzung $|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon L \Delta$, so daß $\lim (\sigma - \sigma^*) = 0$ wird.

Hieraus ergibt sich, daß aus der Existenz eines Grenzwerts für eine der beiden Summen die Konvergenz der anderen gegen den gleichen Wert folgt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Insbesondere existiert das Flächenintegral rechts in (3) und damit auch das Oberflächenintegral links, wenn die Funktion $f(x, y, z)$ auf der Fläche (S) stetig ist.

Ist die Fläche (S) durch die explizite Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben, so erhält Formel (3) die Gestalt

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D)} f(x, y, z)\, \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\,dy , \tag{5}$$

wobei (D) die Projektion der Fläche (S) auf die x, y-Ebene bezeichnet.

Weil $\sqrt{1+p^2+q^2} = \dfrac{1}{|\cos \nu|}$ ist (wobei ν, wie üblich, der Winkel zwischen der Flä-

chennormale und der z-Achse ist), kann man die Formel (5) auch folgendermaßen schreiben:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{(D)} f((x, y, z(x, y)) \frac{dx dy}{|\cos \nu|}. \tag{5*}$$

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß die Fläche (S), über die das Integral erstreckt wurde, glatt und nichtgeschlossen war. Unsere Ergebnisse lassen sich leicht auf den Fall einer *stückweise glatten* Fläche ausdehnen, die sowohl nichtgeschlossen als auch geschlossen sein darf.

632. Anwendungen von Oberflächenintegralen erster Art in der Mechanik.

1°. Mit Hilfe der genannten Integrale kann man Massen, Momente, Schwerpunktskoordinaten und weitere Größen für massebelegte Flächen bestimmen, deren Masse in jedem Punkt eine bestimmte Flächendichte besitzt.

Weil hier im Vergleich zu dem oben betrachteten Fall einer ebenen Masseverteilung nichts Neues auftritt, gehen wir auf diese Fragen nur in Übungsaufgaben ein.

2°. *Die Anziehungskraft einer einfachen Schicht.* Oberflächenintegrale erster Art treten naturgemäß bei der Untersuchung der Anziehungskraft von Massen auf, die flächenhaft verteilt sind.

Die Fläche (S) sei kontinuierlich mit Masse belegt, und zwar mit einer in jedem Punkt $M(x, y, z)$ der Fläche vorgegebenen stetigen Dichte $\varrho(M) = \varrho(x, y, z)$.[1]) Im Punkt $A(\xi, \eta, \zeta)$ (außerhalb der Fläche) befinde sich eine Masseneinheit. Es sollen Größe und Richtung der Kraft F bestimmt werden, mit der die Fläche (S) den Punkt A anzieht, wenn das Newtonsche Anziehungsgesetz (das universelle Gravitationsgesetz) zugrundegelegt wird.

Würde der Punkt A nur von einem Massepunkt $M(x, y, z)$ mit einer in ihm konzentrierten Masse m angezogen, so wäre die Größe der Anziehungskraft gleich[2])

$$F = \frac{m}{r^2},$$

wobei r der Abstand AM ist, d. h.

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}. \tag{6}$$

Da diese Kraft von A nach M gerichtet ist, sind ihre Richtungskosinus

$$\frac{x-\xi}{r}, \quad \frac{y-\eta}{r}, \quad \frac{z-\zeta}{r};$$

folglich gilt für die Komponenten der Anziehungskraft F in Richtung der Koordinatenachsen

$$F_x = m\frac{x-\xi}{r^3}, \quad F_y = m\frac{y-\eta}{r^3}, \quad F_z = m\frac{z-\zeta}{r^3}. \tag{7}$$

Im Fall eines Systems anziehender Punkte müßten diese Ausdrücke durch Summen solcher Ausdrücke ersetzt werden; bei kontinuierlicher Verteilung der Masse auf einer Fläche schließlich treten an die Stelle der Summen Integrale.

Man stellt das gewöhnlich so dar, daß man sich ein Flächenelement dS (im Sinne von Nr. 631) mit der Masse ϱdS in einem seiner Punkte $M(x, y, z)$ konzentriert denkt. Die

---

[1]) In diesem Fall spricht man von einer einfachen Schicht (im Unterschied zu einer Doppelschicht, die wir nicht untersuchen).

[2]) Wie üblich setzen wir die „Gravitationskonstante", d. h. den Proportionalitätsfaktor im Newtonschen Gesetz (der von der Wahl der Einheiten abhängt), gleich 1, um die Schreibweise zu vereinfachen.

von ihm auf den Punkt A ausgeübte Anziehungskraft hat die Komponenten

$$dF_x=\varrho\frac{x-\xi}{r^3}\,dS,\qquad dF_y=\varrho\frac{y-\eta}{r^3}\,dS,\qquad dF_z=\varrho\frac{r-\zeta}{r^3}\,dS$$

in Richtung der Koordinatenachsen (vgl. Formel (7)), wobei r den Abstand AM bezeichnet, der durch (6) angegeben wird. Es sind jetzt diese Ausdrücke nur noch zu „summieren". Das führt auf die folgenden Formeln für die Komponenten der *Anziehungskraft F einer einfachen Schicht* (vorausgesetzt, daß ϱ über (S) integrierbar ist):

$$F_x=\iint\limits_{(S)}\varrho\frac{x-\xi}{r^3}\,dS,\qquad F_y=\iint\limits_{(S)}\varrho\frac{y-\eta}{r^3}\,dS,\qquad F_z=\iint\limits_{(S)}\varrho\frac{z-\zeta}{r^3}\,dS. \tag{8}$$

Damit ist die Kraft F sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach vollständig bestimmt.

Läge der angezogene Punkt A selbst auf der Fläche, so würden die Komponenten der Anziehungskraft wieder durch die Integrale (8) ausgedrückt werden, aber diesmal wären die Integrale *uneigentlich*, denn in der Umgebung des Punktes A würden die Integranden alle unbeschränkt werden.

3°. *Das Potential einer einfachen Schicht.* Im Fall eines anziehenden Punktes $M(x, y, z)$ haben die Komponenten der Anziehungskraft, wie wir sahen, die Form (7). Es ist leicht zu sehen, daß diese Komponenten die partiellen Ableitungen der Funktion

$$W(\xi,\eta,\zeta)=\frac{m}{r}$$

nach ξ, η und ζ sind. Diese Funktion nennt man *Newtonsches Potential* im Punkt A des vom Punkt M erzeugten Feldes (vgl. Nr. 566, Aufgabe 1).

Im Fall eines Feldes, das von einem System von Massepunkten erzeugt wird, würde das Potential durch eine Summe von Brüchen dieser Form ausgedrückt werden, wobei die Ableitungen des Potentials nach ξ, η, ζ wieder die Komponenten der Anziehungskraft ergäben.

Hieraus ergibt sich natürlich für das *Potential einer einfachen Schicht* (auf der Fläche (S) mit der Dichte ϱ) im Punkt A

$$W(\xi,\eta,\zeta)=\iint\limits_{(S)}\varrho\frac{dS}{r}. \tag{9}$$

Es erhebt sich nur die Frage, ob auch dieses Potential die grundlegende Eigenschaft

$$\frac{\partial W}{\partial\xi}=F_x,\qquad \frac{\partial W}{\partial\eta}=F_y,\qquad \frac{\partial W}{\partial\zeta}=F_z \tag{10}$$

behält, wobei F_x, F_y, F_z die Komponenten der Anziehungskraft F der einfachen Schicht in Richtung der Koordinatenachsen bezeichnen, die durch die Formeln (8) gegeben sind.

Wenn der Punkt A nicht auf der Fläche liegt, so daß keine Unstetigkeit auftritt, so kann man leicht zeigen, daß bei der Differentiation des Integrals (9) nach ξ, η oder ζ die Leibnizsche Regel anwendbar ist (dazu wäre nur eine Wiederholung uns schon bekannter Überlegungen erforderlich). Auf diesem Wege verifiziert man auch für den vorliegenden Fall der Masseverteilung die Relation (10).

633. Beispiele.

1. Man berechne die Oberflächenintegrale

(a) $I_1=\iint\limits_{(S)}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS$, (b) $I_2=\iint\limits_{(S)}\frac{dS}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$,

die über die Oberfläche (S) des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c>0)$$

erstreckt werden.

Lösung. (a) Wenn man die Darstellung

$$x=a\sin\varphi\cos\theta, \qquad y=b\sin\varphi\sin\theta, \qquad z=c\cos\varphi \qquad (0\leqq\varphi\leqq\pi;\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

des Ellipsoids benutzt, so erhält das Flächenelement (Nr. 629, Beispiel 17) die Form

$$\mathrm{d}S=abc\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

Andererseits ergibt sich für den Integranden

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}.$$

Auf Grund von Symmetrieüberlegungen führt man die Berechnung auf den ersten Oktanten zurück. Es wird

$$I_1=8abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

(b) Analog wird

$$I_2=8abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)^{3/2}}.$$

Zur Berechnung des inneren Integrals über φ setzen wir $\cos\varphi=z$:

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{\{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)\,z^2\}^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\cdot\frac{z}{\sqrt{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)\,z^2}}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{c}\,\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},$$

und schließlich wird

$$I_2=8ab\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=4\pi.$$

2. Man berechne das Integral

$$L=\iint_{(S)}(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,\mathrm{d}S,$$

wobei (S) die Fläche ist, die vom oberen Teil des Kegels $z^2=k^2(x^2+y^2)$ durch den Zylinder $x^2+y^2-2ax=0$ abgeschnitten wird.

Lösung. Wir schreiben die Gleichung der Fläche in der Form $z=k\sqrt{x^2+y^2}$ und erhalten $\mathrm{d}S=\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; nach Formel (5) wird

$$L=\sqrt{1+k^2}\iint_{(D)}[k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

wobei (D) die Kreisscheibe ist, die von dem Kreis $x^2+y^2-2ax=0$ in der x,y-Ebene begrenzt wird. Durch Übergang zu Polarkoordinaten finden wir

$$L=\frac{1}{24}(80k^2+7)\,\pi a^6\sqrt{1+k^2}\,.$$

3. Man leite folgende (von Poisson stammende) Formel her:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,\mathrm{d}u\,,$$

wobei $m^2+n^2+p^2>0$ ist und $f(t)$ für $|t|\leqq\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ eine stetige Funktion ist.

Lösung. Wir bezeichnen das Integral links mit P; man kann es leicht als Oberflächenintegral über die Oberfläche (S) der Einheitskugel um den Koordinatenursprung darstellen:

$$P=\iint_{(S)} f(mx+ny+pz)\,\mathrm{d}S\,.$$

Wir gehen zu einem neuen Koordinatensystem u, v, w über; als v, w-Ebene wählen wir gerade die Ebene $mx+ny+pz=0$ und errichten die u-Achse senkrecht auf ihr (Abb. 94); dann ist

$$u=\frac{mx+ny+pz}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\,.$$

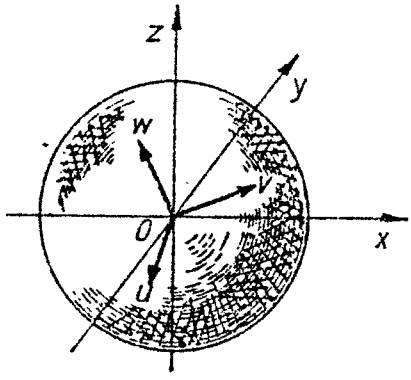

Abb. 94

In den Koordinaten u, v, w schreibt sich unser Integral in der Gestalt

$$P=\iint_{(S)} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,\mathrm{d}S\,.$$

Wenn man die Parameterdarstellung der Kugelfläche (S) in der Gestalt

$$u=u,\qquad v=\sqrt{1-u^2}\cos\omega,\qquad w=\sqrt{1-u^2}\sin\omega\qquad(-1\leqq u\leqq 1;\ 0\leqq\omega\leqq 2\pi)$$

annimmt, so wird $\mathrm{d}S=\mathrm{d}u\mathrm{d}\omega$ und schließlich

$$P=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{m^2+n^2+p^2})\,\mathrm{d}u\,.$$

Oft setzt man $u=\cos\lambda\ (0\leqq\lambda\leqq\pi)$ und schreibt die Poissonsche Formel in der Gestalt

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(m\sin\varphi\cos\theta+n\sin\varphi\sin\theta+p\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi\int_0^{\pi} f(\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cos\lambda)\sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

4. Die Fläche (S) sei mit Materie von der Dichte $\varrho = \varrho(x, y, z)$ belegt. Man leite Ausdrücke in Form von Oberflächenintegralen über (S) her für: (a) die Gesamtmasse m; (b) die statischen Momente und die Trägheitsmomente $M_{yz}, M_{zx}, M_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{xy}$ bezüglich der Koordinatenebenen; (c) die Schwerpunktskoordinaten ξ, η, ζ.

5. Man bestimme die Masse einer Kugelfläche, wenn deren Flächendichte in jedem Punkt (a) dem Abstand dieses Punktes von dem „senkrechten Durchmesser" (also dem Radius seines „Breitenkreises"), (b) dem Quadrat dieses Abstandes gleich ist.

Lösung. (a) Wir wählen als Koordinatenursprung den Kugelmittelpunkt, legen die z-Achse in den erwähnten Durchmesser und gehen zu Kugelkoordinaten φ und θ über, indem wir

$$x = R \sin\varphi \cos\theta, \qquad y = R \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = R \cos\varphi$$

setzen, wobei R der Radius der Kugel ist. Dann ist

$$dS = R^2 \sin\varphi \, d\varphi d\theta, \qquad \varrho = \sqrt{x^2+y^2} = R \sin\varphi,$$

so daß

$$m = \iint\limits_{(S)} \varrho dS = R^3 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi d\theta = \pi^2 R^3$$

wird.

(b) $m = \frac{8}{3} \pi R^4$.

6. Unter den Voraussetzungen (a) und (b) der Aufgabe 5 bezüglich der Massenverteilung bestimme man die Lage des Schwerpunkts der oberen Halbkugel.

Lösung. (a) Wählt man die Achsen wie in der vorigen Aufgabe, so ist aus Symmetriegründen sofort klar, daß $\xi = \eta = 0$ ist.

Wir berechnen das statische Moment

$$M_{xy} = \iint\limits_{(S)} z\varrho dS = R^4 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi d\theta = \frac{2}{3} \pi R^4.$$

Wir kennen bereits die Gesamtmasse (vgl. Beispiel 5), nämlich $m = \frac{1}{2} \pi^2 R^3$; also ist

$$\zeta = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{4}{3\pi} R.$$

(b) Bei derselben Lage der Achsen ist $\xi = \eta = 0, \zeta = \frac{3}{8} R$.

7. Man bestimme (a) die Lage des Schwerpunkts der homogenen ($\varrho = \text{const}$) Kegelfläche

$$z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2 \leqq R^2),$$

(b) ihre Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenebenen.

Lösung. Offenbar ist $\xi = \eta = 0$. Weiter gilt

$$dS = \sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \, dx \, dy = \frac{l}{R} dx dy \qquad (l = \sqrt{h^2+R^2});$$

folglich ist

$$M_{xy} = \frac{hl}{R^2} \varrho \iint\limits_{x^2+y^2 \leqq R^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dx dy = \frac{2\pi hl}{R^2} \varrho \int\limits_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \pi hl R \varrho.$$

Wegen $m = \pi l R \varrho$ ist $\zeta = \frac{2}{3} h$.

(b) $I_{xy} = \iint\limits_{(S)} \varrho z^2 dS = \frac{2\pi h^2 l}{R^3} \varrho \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi h^2 l R}{2} \varrho.$

Analog erhält man

$$I_{yz}=I_{zx}=\frac{\pi l R^3}{4}\varrho\,.$$

8. Gegeben sei ein gerader Kreiszylinder vom Radius R und der Höhe h. Wir setzen seine Mantelfläche als homogen mit Masse belegt voraus ($\varrho=1$) und suchen (a) die Anziehungskraft, die von der Fläche auf den Mittelpunkt der Grundfläche ausgeübt wird, (b) das Potential dieser Fläche im Mittelpunkt der Grundfläche.

Lösung. (a) Wenn man den Mittelpunkt der Grundfläche als Koordinatenursprung und die Zylinderachse als z-Achse wählt, so ist offenbar $F_x=F_y=0$. Für die Parameterdarstellung

$$x=R\cos\theta,\qquad y=R\sin\theta,\qquad z=z$$

des Zylinders gilt $\mathrm{d}S=R\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta$, so daß

$$F_z=\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{zR\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}=2\pi R\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

wird.

(b) Es gilt

$$W=\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\frac{R\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2+z^2}}=2\pi R\ln\frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R}\,.$$

9. Für die Kegelfläche aus Aufgabe 7 bestimme man (a) das Potential dieser Fläche im Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels und (b) in seiner Spitze, außerdem (c) die Anziehungskraft, die auf den Mittelpunkt der Grundfläche bzw. (d) auf die Spitze des Kegels ausgeübt wird.

Lösung. Setzt man $l=\sqrt{R^2+h^2}$, so gilt

$$\begin{aligned}W&=\frac{l}{R}\varrho\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}=2\pi l\varrho\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}\\&=\frac{2\pi}{l}\varrho\int_0^R\frac{l^2r-Rh^2}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}\mathrm{d}r+\frac{2\pi Rh^2}{l}\varrho\int_0^R\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}}\\&=\frac{2\pi\varrho}{l}\sqrt{l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2}\,\Big|_0^R\\&\quad+\frac{2\pi Rh^2\varrho}{l^2}\ln\left[l^2r-Rh^2+\sqrt{l^2\left(l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2\right)}\right]\Big|_0^R\\&=\frac{2\pi R\varrho}{l}(R-h)+\frac{2\pi Rh^2\varrho}{l^2}\ln\frac{R}{h}\,\frac{l+R}{l-h}\,.\end{aligned}$$

(b) $$W=\frac{l\varrho}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=2\pi R\varrho\,.$$

(c) Aus Symmetrieüberlegungen folgt $F_x=F_y=0$. Weiter ist

$$F_z=\frac{l\varrho}{R}\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2}\frac{z-h}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi hlR\varrho\int_0^R\frac{(r-R)\,r\mathrm{d}r}{[l^2r^2-2Rh^2r+h^2R^2]^{3/2}}\,.$$

Das Integral zerlegen wir in eine Summe von drei Integralen:

$$\frac{1}{l^2}\int_0^R\frac{\mathrm{d}r}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h)^{1/2}}+\frac{R\,(h^2-R^2)}{l^4}\int_0^R\frac{l^2r-Rh^2}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}r$$

$$-\frac{2R^4h^2}{l^4}\int_0^R \frac{dr}{(l^2r^2-2Rh^2r+R^2h^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{1}{l^3}\ln\frac{R}{h}\cdot\frac{l+R}{l-h}+\frac{h^2-R^2}{Rhl^4}(R-h)-\frac{2}{l^4}(R+h).$$

Durch Zusammenfassung aller Ergebnisse erhalten wir schließlich

$$F_z=\frac{2\pi hR\varrho}{l^2}\ln\frac{R}{h}\frac{l+R}{l-h}-\frac{2\pi\varrho(R+h)}{l}.$$

(d) In diesem Fall erweist sich das *uneigentliche* Integral als divergent:

$$F_z=\frac{Rh\varrho}{l^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2}\frac{dxdy}{x^2+y^2}=\infty.$$

10. Wir nehmen an, daß über eine Kegelfläche Masse mit einer Dichte verteilt ist, die gleich dem Abstand des Punktes von der Spitze ist. Man bestimme (a) das Potential der Fläche in der Spitze, (b) die von der Fläche auf die Spitze ausgeübte Anziehungskraft.

Lösung. (a) $W=\pi Rl=S$; (b) $F_x=F_y=0$, $F_z=\frac{2\pi Rh}{l}$.

11. Man bestimme die Kraft, mit der ein Punkt von einer homogenen ($\varrho=$const) Kugelschicht angezogen wird.

Lösung. Der Kugelmittelpunkt liege im Koordinatenursprung, der angezogene Punkt A (der Masse 1) befinde sich auf der positiven z-Achse im Abstand a vom Mittelpunkt. Die Komponenten F_x und F_y der Anziehungskraft in Richtung der x- bzw. y-Achse sind offenbar gleich 0. Weiter gilt

$$F_z=\iint\limits_{(S)}\varrho\frac{z-a}{r^3}dS$$

(r ist der Abstand des Punktes A von einem beliebigen Punkt M der Kugel). Geht man zu Kugelkoordinaten

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=R\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=R\cos\varphi$$

über, so wird

$$dS=R^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta,\qquad r=\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}$$

und

$$F_z=2\pi R^2\varrho\int_0^\pi\frac{(R\cos\varphi-a)\sin\varphi\,d\varphi}{(R+a^2-2Ra\cos\varphi)^{3/2}}. \tag{11}$$

Durch die Substitution $R^2+a^2-2Ra\cos\varphi=t^2$ transformieren wir diesen Ausdruck in

$$F_z=\frac{\pi R}{a^2}\varrho\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)dt=-\frac{\pi R}{a^2}\varrho\left(2R-\frac{R^2-a^2}{|R-a|}-|R-a|\right).$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

(1) Es sei $a<R$; in diesem Fall ist $|R-a|=R-a$, in den runden Klammern steht 0, und es ist $F_z=0$. *Also erfährt ein Punkt, der sich im Innern einer homogenen Kugelschicht befindet, von dieser keine Anziehung.*

(2) Wenn jedoch $a>R$ ist, so ist $|R-a|=-(R-a)$, also

$$F_z=-\frac{4\pi R^2\varrho}{a^2}.$$

Daher erfährt ein Punkt, der sich außerhalb einer homogenen Kugelschicht befindet, von dieser dieselbe Anziehung, die er erfahren würde, wenn man die Gesamtmasse $m = 4\pi R^2\varrho = S\varrho$ *der Schicht im Kugelmittelpunkt konzentrieren würde.*

Auf den Fall $a = R$ gehen wir gesondert ein. In diesem Fall liegt der Punkt A auf der Fläche, und das Integral (11) wird *uneigentlich.* Nach naheliegenden Vereinfachungen erhält es die Gestalt

$$F_z = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\varrho \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\cos\varphi}} = -2\pi\varrho\,.$$

Bei Annäherung von a an R von unten oder oben besitzt F_z Grenzwerte, und zwar 0 bzw. $-4\pi\varrho$. Also erleidet die Anziehungskraft beim Durchgang des angezogenen Punktes durch die Kugelfläche einen Sprung, und die Größe der Anziehung für Punkte auf der Kugelfläche ist das arithmetische Mittel der erwähnten Grenzwerte.

12. Man bestimme das Potential einer homogenen Kugelschicht in einem beliebig gewählten Punkt.

Lösung. Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$W(a) = \iint_{(S)} \varrho\,\frac{dS}{r} = 2\pi R^2\varrho \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\varphi}}$$

$$= \frac{2\pi R}{a}\,\varrho \int_{|R-a|}^{R+a} dt = \frac{2\pi R}{a}\,\varrho\,(R+a-|R-a|)\,.$$

Ist $a < R$, so wird

$$W(a) = 4\pi R\varrho\,,$$

also ist das Potential einer homogenen Kugelschicht in ihrem Innern konstant, entsprechend Beispiel 11, Fall (1).

Im Gegensatz dazu wird für $a > R$

$$W(a) = \frac{4\pi R^2\varrho}{a}\,,$$

d. h., *das Potential, das von einer homogenen Kugelschicht im äußeren Raum erzeugt wird, ändert sich nicht, wenn man die ganze Masse im Kugelmittelpunkt konzentriert,* entsprechend Beispiel 11, Fall (2).

Für $a = R$ hat das *uneigentliche* Integral, welches das Potential ausdrückt, den Wert

$$W(R) = 4\pi R\varrho\,.$$

Wie wir sehen, ist das Potential beim Durchgang des Punktes durch die Kugelfläche stetig.

§ 4. Oberflächenintegrale zweiter Art

634. Definition des Oberflächenintegrals zweiter Art. Dieser neue Integralbegriff wird nach dem Vorbild des Kurvenintegrals zweiter Art konstruiert.

Dort gingen wir von einer orientierten Kurve aus, zerlegten sie in Elemente und projizierten jedes der entsprechend orientierten Elemente auf eine Koordinatenachse. Die Projektion war ebenfalls orientiert, und wir nahmen ihre Länge positiv oder negativ, je nachdem, ob ihre Richtung mit der Achsenrichtung übereinstimmte oder nicht.

In analoger Weise betrachten wir jetzt eine *zweiseitige* glatte oder stückweise glatte Fläche (S) und legen uns auf eine ihrer beiden Seiten fest; das ist, wie wir sahen (Nr. 620), *gleichwertig mit der Wahl einer bestimmten Orientierung der Fläche.*

Wir nehmen zunächst an, die Fläche sei durch eine explizite Gleichung $z=z(x, y)$ gegeben, wobei der Punkt (x, y) ein Gebiet (D) der x, y-Ebene durchläuft, das von einer stückweise glatten Kurve begrenzt wird. Dann kann man zwischen der oberen und der unteren Seite der Fläche wählen. Im ersten Fall wird einer geschlossenen Kurve auf der Fläche der Umlaufsinn *entgegen dem Uhrzeigersinn* vorgeschrieben, wenn man von *oben* blickt, im zweiten Fall der entgegengesetzte Umlaufsinn.

Zerlegt man die Fläche in Elemente und projiziert jedes solche entsprechend orientierte Element auf die x, y-Ebene, so bestimmt der Umlaufsinn des Randes der Figur, die projiziert wird, auch einen Umlaufsinn des Randes der Projektion. Diese Richtung stimmt mit der Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn überein, d. h. entspricht der Orientierung der x, y-Ebene selbst, wenn die *obere* Seite der Fläche gewählt worden war; in diesem Fall nehmen wir den Inhalt der Projektion positiv. Im Fall der *unteren* Seite ist die Drehung umgekehrt, und wir nehmen den Inhalt der Projektion negativ (vgl. Nr. 610).

Es sei nun in den Punkten einer gegebenen Fläche (S) eine Funktion $f(M)=$ $=f(x, y, z)$ definiert. Wir zerlegen die Fläche durch ein Netz stückweise glatter Kurven in Elemente $(S_1), (S_2), \ldots, (S_n)$ und wählen in jedem Element (S_i) jeweils einen Punkt $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Dann bestimmen wir den Funktionswert $f(M_i)=$ $=f(x_i, y_i, z_i)$ und multiplizieren ihn mit dem Inhalt D_i der Projektion des Elements (S_i) auf die x, y-Ebene, der nach der oben angegebenen Regel mit einem Vorzeichen versehen ist. Wir bilden schließlich die Summe

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, D_i=\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, D_i \tag{1}$$

(die ihrer Gestalt nach eine Integralsumme ist).

Existiert der endliche Grenzwert dieser Integralsumme für den Fall, daß die Durchmesser aller Teile (S_i) gegen 0 streben, so nennt man ihn *Oberflächenintegral (zweiter Art)* von $f(M)=f(x, y, z)$ über die *ausgewählte Seite* der Fläche (S) und schreibt

$$I=\iint\limits_{(S)} f(M)\, dx dy=\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx dy \tag{2}$$

(hier erinnert $dx\, dy$ an den Inhalt der Projektion eines Flächenelements auf die x, y-Ebene).

Übrigens enthält dieses Symbol keinen Hinweis darauf, welche Seite der Fläche betrachtet wird; dieser Hinweis muß also jedesmal besonders erfolgen. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß das Integral sein Vorzeichen wechselt, wenn man die betrachtete Seite der Fläche durch die entgegengesetzte ersetzt.

Hat die Fläche (S) nicht die angegebene spezielle Form, so definiert man das Oberflächenintegral entsprechend, man hat lediglich für die Inhalte D_i der Projektionen nicht immer ein und dasselbe Vorzeichen zu nehmen, sondern es sind auch solche mit verschiedenen Vorzeichen möglich, wenn die einen Flächenelemente sozusagen *oben* und die anderen *unten* liegen (Abb. 95).

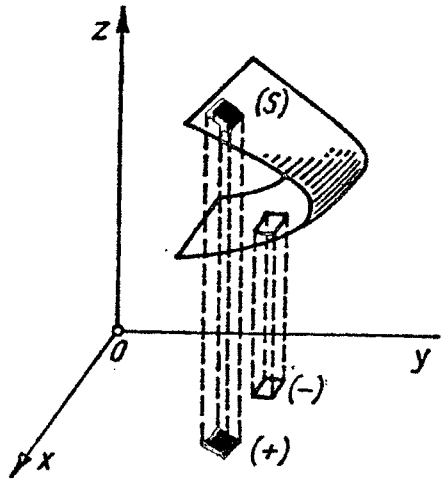

Abb. 95

Liegt ein Element auf einem senkrecht zur x, y-Ebene gelegenen zylindrischen Teil der Fläche (dessen Erzeugende also zur z-Achse parallel sind), so ist seine Projektion ein Teil der Leitkurve der Zylinderfläche; wir werden voraussetzen, daß diese Kurve den Inhalt 0 hat, in diesem Fall braucht man also von einem Vorzeichen nicht zu reden.

Es kann jedoch noch der Fall eintreten, daß ein Element zum Teil oben, zum Teil unten liegt oder daß ein Element nicht umkehrbar eindeutig auf die x, y-Ebene projiziert wird.

Da in Wirklichkeit solche „irregulären" Elemente eine unerhebliche Rolle spielen, lassen wir in der Integralsumme diejenigen Summanden aus, die diesen Elementen entsprechen. Später werden wir uns davon überzeugen, daß diese Vereinbarung weder die Berechnung noch die Verwendung von Oberflächenintegralen erschwert.

Projizieren wir die Flächenelemente auf die y, z- oder die z, x-Ebene statt auf die x, y-Ebene, so erhalten wir zwei weitere Oberflächenintegrale zweiter Art:

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dydz \quad \text{bzw.} \quad \iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dzdx\,. \tag{2*}$$

In den Anwendungen treten häufig Summen von Integralen aller dieser Formen auf:

$$\iint\limits_{(S)} (P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy)\,,$$

wobei P, Q und R in den Punkten der Fläche (S) definierte Funktionen von (x, y, z) sind. Wir betonen nochmals, daß in allen Fällen die Fläche (S) als zweiseitig vorausgesetzt wird und daß das Integral über eine bestimmte Seite der Fläche erstreckt wird.

635. Einfachste Spezialfälle.

1°. Wir wenden uns erneut dem Integral (2) für den Fall zu, daß die Fläche (S) durch eine *explizite Gleichung* $z = z(x, y)$ ((x, y) aus (D)) gegeben ist, wobei die Funktion z nebst ihren partiellen Ableitungen $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ stetig ist.

Nimmt man das Integral (2) über die *obere* Seite der Fläche, so sind in der Integralsumme (1) alle D_i positiv. Setzen wir in diese Summe für z_i seinen Wert

$z(x_i, y_i)$ ein, so erhält diese die Form

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\, D_i;$$

dies ist, wie man leicht erkennt, eine Integralsumme für das gewöhnliche Flächenintegral

$$\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Durch Grenzübergang ergibt sich

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \tag{3}$$

wobei die Existenz eines dieser Integrale die Existenz des anderen nach sich zieht. Insbesondere existieren beide Integrale sicher dann, wenn die Funktion f stetig ist.

Erstrecken wir das Integral über die *untere* Seite der Fläche (S), so gilt offenbar

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{3*}$$

Bemerkung. Man könnte in allen Fällen Formel (3) erhalten, wenn man nur das Flächenintegral rechts über das *zugehörige orientierte* Gebiet (D) erstrecken würde (vgl. Nr. 610).

Wir zeigen nun (für den betrachteten Fall), daß sich ein Oberflächenintegral zweiter Art auf ein Oberflächenintegral erster Art zurückführen läßt. Wir betrachten wieder die Summe (1), und zwar unter der Voraussetzung, daß die obere Seite der Fläche gewählt worden ist, so daß alle $D_i > 0$ sind. Nach Formel (5a) aus Nr. 626 gilt

$$S_i = \iint_{(D_i)} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos \nu}\,,$$

wobei ν der *spitze* Winkel zwischen der Flächennormalen und der z-Achse ist. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir

$$S_i = \frac{D_i}{\cos \nu_i^*} \quad \text{oder} \quad D_i = S_i \cos \nu_i^*;$$

hierbei bezeichnet ν_i^* den Winkel der Flächennormalen in einem gewissen (keineswegs willkürlich gewählten) Punkt des Elements (S_i) mit der z-Achse. Setzen wir in σ diesen Wert von D_i ein, so erhalten wir

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i^*\, S_i\,.$$

Diese Summe vergleicht man natürlich mit der Summe

$$\bar{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i\, S_i\,,$$

wobei ν_i dem schon willkürlich gewählten Punkt (x_i, y_i, z_i) entspricht; die letzte Summe ist offenbar eine Integralsumme für das Oberflächenintegral erster Art

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu\, \mathrm{d}S\,.$$

Zerlegt man die Fläche (S) in hinreichend kleine Elemente, so wird wegen der Stetigkeit der Funktion

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

die Schwankung dieses Kosinus auf jedem einzelnen Element kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$. Wir setzen die Funktion f als beschränkt voraus, $|f| \leqq M$, und schätzen die Differenz der beiden Summen σ und $\bar{\sigma}$ ab:

$$|\sigma - \bar{\sigma}| \leqq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i, y_i, z_i)|\, |\cos\nu_i^* - \cos\nu_i|\, S_i < MS\varepsilon;$$

also gilt $\sigma - \bar{\sigma} \to 0$. Es ist klar, daß für beide Summen die Grenzwerte gleichzeitig existieren und übereinstimmen. So kommen wir zu der Beziehung

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx dy = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z) \cos\nu\, dS\,, \tag{4}$$

wobei aus der Existenz eines dieser Integrale die Existenz des anderen folgt. Wir sehen wieder, daß die beiden Integrale insbesondere dann existieren, wenn die Funktion f stetig ist.

Ersetzen wir die obere Seite der Fläche durch die *untere*, so ändern wir damit das Vorzeichen der linken Seite von (4). Verstehen wir gleichzeitig unter ν den Winkel der *nach unten* gerichteten Normalen mit der z-Achse, so ändert auch der Kosinus und mit ihm das Integral rechts sein Vorzeichen, so daß die Beziehung erhalten bleibt.

2°. Ist (S) ein Teil einer Zylinderfläche mit Erzeugenden, die parallel zur z-Achse sind und deren Leitkurve in der x, y-Ebene den Inhalt 0 hat, so haben alle ihre Elemente Projektionen vom Inhalt 0, und dann ist

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z)\, dx dy = 0\,. \tag{5}$$

Offenbar gilt auch hier Formel (4): Wegen $\cos\nu = 0$ ist auch die rechte Seite dieser Formel gleich 0.

636. Der allgemeine Fall. Wir kehren zum allgemeinen Fall einer einfachen nichtgeschlossenen glatten Fläche zurück. In der Integralsumme

$$\sigma' = \sum{}' f(x_i, y_i, z_i)\, D_i$$

fehlen, wie wir vereinbart haben, diejenigen Summanden, die „irregulären" Elementen entsprechen, d. h. Elementen, die entweder auf der Fläche zum Teil oben, zum Teil unten liegen oder keine umkehrbar eindeutige Projektion auf die x, y-Ebene zulassen. Darauf soll der Strich am Summenzeichen hinweisen.

Versteht man allgemein unter ν den Winkel zwischen der z-Achse und der Flächennormalen, *die der ausgewählten Seite der Fläche entspricht*, so gilt einschließlich des Vorzeichens stets folgende Gleichung (ν_i^* hat dieselbe Bedeutung wie oben): $D_i = S_i \cos\nu_i^*$. Also ist

$$\sigma' = \sum{}' f(x_i, y_i, z_i) \cos\nu_i^*\, S_i\,.$$

Diese Summe vergleichen wir mit der Summe

$$\bar{\sigma}' = \sum{}' f(x_i, y_i, z_i) \cos\nu_i\, S_i$$

(ν_i entspricht dem gewählten Punkt). Wie oben überzeugen wir uns leicht davon, daß

$$\lim (\sigma' - \bar{\sigma}') = 0 \tag{6}$$

ist. Wenn man zur Summe $\bar{\sigma}'$ noch die Summe

$$\bar{\sigma}'' = \sum'' f(x_i, y_i, z_i) \cos \nu_i S_i$$

hinzufügt, die den weggelassenen „irregulären" Elementen entspricht, so ergibt sich eine vollständige Integralsumme $\bar{\sigma}$ für das Oberflächenintegral erster Art

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) \cos \nu \, dS .$$

Man kann beweisen (wir ziehen es vor, das in Nr. 637 zu tun), daß

$$\bar{\sigma}'' \to 0 \tag{7}$$

gilt, wenn die Durchmesser aller Elemente (S_i) gegen 0 streben. Dann erhalten wir in Verbindung mit (6) wieder die Beziehung (4), vorausgesetzt, daß eines der beiden in (4) auftretenden Integrale existiert (die Existenz des anderen folgt hieraus bereits).

Geht man von einer Parameterdarstellung der Fläche (S) aus, so kann man das rechte Integral in (4), also nach dem Bewiesenen auch das linke Integral, auf ein gewöhnliches Flächenintegral über einen Parameterbereich (Δ) zurückführen, und zwar gilt

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y, z) \, dx dy = \pm \iint\limits_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, C du dv , \tag{8}$$

weil

$$\cos \nu = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du dv$$

ist. Das zweifache Vorzeichen entspricht den beiden Seiten der Fläche (S); entspricht insbesondere die Orientierung der u, v-Ebene der Orientierung der Fläche (S), die mit der ausgewählten Seite verbunden ist, so hat man das *positive* Vorzeichen zu nehmen (Nr. 621). Auch hier zieht die Existenz eines dieser Integrale die Existenz des anderen nach sich.

Analoge Betrachtungen können auch für die anderen Oberflächenintegrale zweiter Art durchgeführt werden, die zu den Projektionen auf die anderen Koordinatenebenen gehören. Faßt man alle diese Ergebnisse zusammen, so ergibt sich

$$\iint\limits_{(S)} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) = \iint\limits_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) \, dS . \tag{9}$$

Diese allgemeine Formel führt ein Oberflächenintegral zweiter Art auf ein Oberflächenintegral erster Art zurück. Hierbei bezeichnen P, Q, R beschränkte integrierbare Funktionen, die in den Punkten der Fläche (S) definiert sind, und $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ sind die Richtungskosinus der Normalen, deren Richtung der ausgewählten Seite der Fläche entspricht.

Wir führen schließlich die allgemeine Formel an, die ein Oberflächenintegral zweiter Art auf ein gewöhnliches Flächenintegral zurückführt:

$$\iint\limits_{(S)} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) = \pm \iint\limits_{(\Delta)} (PA + QB + RC) \, du dv . \tag{10}$$

Die Funktionen P, Q, R auf der rechten Seite hat man so zu verstehen, daß für x, y, z deren Ausdrücke in u, v eingesetzt sind. In bezug auf das Vorzeichen kann man frühere Bemerkungen wiederholen.

Alle erhaltenen Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf den allgemeineren Fall ausdehnen, daß die (geschlossene oder nichtgeschlossene) Fläche aus endlich vielen einfachen nichtgeschlossenen glatten aneinandergrenzenden Flächen besteht.

637. Eine Einzelheit des Beweises. Wir wenden uns dem Beweis der Beziehung (7) zu. Wir behaupten, daß zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $\eta > 0$ existiert, daß in den „irregulären" Elementen überall die Ungleichung

$$|\cos \nu| < \varepsilon \tag{11}$$

erfüllt ist, wenn nur die Durchmesser aller Elemente kleiner als η sind.

Wir nehmen das Gegenteil an; dann existiert ein solches $\varepsilon_0 > 0$ und eine solche Folge „irregulärer" Elemente (s_k) mit *gegen 0 strebenden Durchmessern*, daß in irgendeinem Punkt eines jeden (s_k)

$$|\cos \nu| \geqq \varepsilon_0 \tag{12}$$

wird. Bezeichnet man mit (δ_k) das (s_k) entsprechende Element des Gebiets (Δ), so streben auch die Durchmesser der Elemente (δ_k) gegen 0. Nach dem Lemma von Bolzano-Weierstrass (Nr. 172) kann man aus der Folge $\{(\delta_k)\}$ eine Teilfolge auswählen, deren Elemente sich auf einen Punkt (u_0, v_0) des Gebiets (Δ) zusammenziehen; wir können das also ohne Beschränkung der Allgemeinheit bezüglich der Folge $\{(\delta_k)\}$ selbst annehmen.

Für den Winkel $\nu = \nu_0$, der den Parameterwerten $u = u_0$, $v = v_0$ entspricht, muß notwendigerweise

$$\cos \nu_0 = 0 \tag{13}$$

sein. Andernfalls wäre nämlich für diese Parameterwerte

$$C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

und dann könnte man in einer Umgebung des Punktes (u_0, v_0) die Parameter u und v als eindeutige Funktionen von x und y betrachten, in der Gleichung $z = z(u, v)$ die Parameter durch x und y ausdrücken und damit die Fläche durch eine explizite Gleichung $z = f(x, y)$ darstellen.[1]) Außerdem hätte $\cos \nu$ in dieser Umgebung, wenn man sie hinreichend klein wählt, ein bestimmtes Vorzeichen. Da die (δ_k) für hinreichend große k unvermeidlich in diese Umgebung fallen würden, könnten ihnen keine „irregulären" Elemente (s_k) entsprechen.

Somit ist Gleichung (13) bewiesen. Sind die (δ_k) dem Punkt (u_0, v_0) hinreichend benachbart, so hätten wir in diesem Fall für diese Gebiete durchweg $|\cos \nu| < \varepsilon_0$, im Widerspruch zur Annahme (12). Der erhaltene Widerspruch beweist unsere Behauptung bezüglich der Ungleichung (11).

Es seien nun die Durchmesser der Elemente, in welche die Fläche (S) zerlegt ist, sämtlich kleiner als η. Dann gilt für die „irregulären" Elemente (wenn es solche überhaupt gibt) die Ungleichung (11), und die entsprechende Summe $\bar{\sigma}''$ wird dem absoluten Betrag nach kleiner als $MS\varepsilon$, wenn man mit M die obere Grenze von $|f|$ bezeichnet. Hieraus folgt gerade (7).

638. Das Volumen eines Körpers als Oberflächenintegral. Das Volumen eines Körpers läßt sich durch ein Integral über die Oberfläche dieses Körpers ausdrücken, ähnlich wie sich der Inhalt einer ebenen Figur durch ein Integral über ihren Rand

[1]) Gehört der Punkt (u_0, v_0) zum *Rand* des Gebiets (Δ), so bleibt die Aussage für den Durchschnitt der erwähnten Umgebung dieses Punktes mit dem Gebiet (Δ) richtig; vgl. den Anhang zu Band I (Nr. 262).

ausdrücken läßt (Nr. 551). Wir betrachten einen Körper (V), der von den stückweise glatten Flächen

$$(S_1)\colon\ z=z_0(x, y), \qquad (S_2)\colon\ z=Z(x, y) \qquad (z_0<Z)$$

und einer zylindrischen Fläche (S_3), deren Erzeugende parallel zur z-Achse sind, begrenzt wird (Abb. 96). Die Leitkurve der Zylinderfläche sei eine stückweise glatte geschlossene Kurve (K) in der x, y-Ebene, die einen ebenen Bereich (D) begrenzt. Speziell kann auf der Kurve (K) gerade die Gleichung $z_0(x, y)=Z(x, y)$ erfüllt sein; dann artet die Fläche (S_3) in eine Linie aus.

Das Volumen V des Körpers ist offenbar gleich der Differenz der Integrale:

$$V=\iint\limits_{(D)} Z(x, y)\,dx dy-\iint\limits_{(D)} z_0(x, y)\,dx dy\,.$$

Führt man Oberflächenintegrale ein, so kann man diese Gleichung folgendermaßen schreiben (vgl. (3) und (3*)):

$$V=\iint\limits_{(S_2)} z dx dy+\iint\limits_{(S_1)} z dx dy\,,$$

wobei sich die Integrale über die *obere* Seite der Fläche (S_2) und die *untere* Seite der Fläche (S_1) erstrecken. Wir fügen zur rechten Seite das Integral

$$\iint\limits_{(S_3)} z dx dy$$

über die *äußere* Seite der zylindrischen Fläche (S_3) hinzu. Dieses Integral ist auf Grund von (5) gleich 0, der Wert von V ändert sich dabei also nicht. Somit gilt schließlich

$$V=\iint\limits_{(S)} z dx dy\,, \tag{14}$$

wobei das Integral über die *äußere* Seite der Fläche $(S)=(S_1)+(S_2)+(S_3)$ erstreckt wird, die den Körper begrenzt.

Wir haben die Formel (14) nur für zylindrische Körper bewiesen, die in bestimmter Weise orientiert sind. Offenbar gilt sie aber für die weit größere Klasse derjenigen Körper, die mit Hilfe von Zylinderflächen, deren Erzeugende parallel zur z-Achse sind, in Teile der untersuchten Form zerlegt werden können. Führen wir

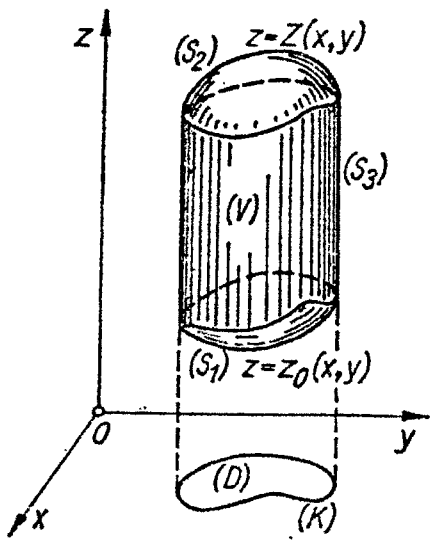

Abb. 96

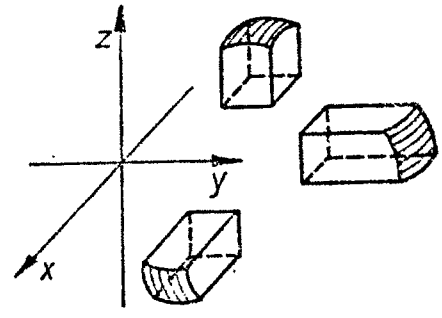

Abb. 97

nämlich diese Zerlegung durch, so können wir auf jeden Teil die Formel (14) anwenden und dann die Ergebnisse addieren. Da die Integrale über die Hilfszylinderflächen gleich 0 sind, kommen wir wieder zur Formel (14).

Wir beweisen jetzt, daß (14) für die große Klasse der am häufigsten auftretenden Körper gilt, *nämlich für Körper, die von beliebigen stückweise glatten Flächen begrenzt werden.*

Es sei (V) ein solcher Körper. Zuerst nehmen wir mit Hilfe endlich vieler rechtwinkliger Parallelepipede[1]) alle „Kanten" seiner Oberfläche (S) heraus, und zwar so, daß nicht nur ihr Gesamtvolumen beliebig klein ist, sondern daß auch der Inhalt des von ihnen eingeschlossenen Teils der Fläche (S) beliebig klein ist. Damit wird auch das über diesen Teil erstreckte Integral $\iint z\,dx\,dy$ beliebig klein.

Wir wählen nun einen beliebigen Punkt $M_0(u_0, v_0)$ der Oberfläche, der nicht auf einer Kante liegt. Da er nicht singulär ist, ist in ihm wenigstens eine der Determinanten A, B, C von 0 verschieden. Wenn $C \neq 0$ ist, so läßt sich bekanntlich in einer Umgebung des Punktes M_0 das entsprechende Stück der Fläche (S) durch eine explizite Gleichung $z = f(x, y)$ ausdrücken. Für $A \neq 0$ oder $B \neq 0$ kommen wir zu expliziten Gleichungen der Gestalt $x = g(y, z)$ bzw. $y = h(z, x)$. Also kann der Punkt M_0 mit einem Parallelepiped umgeben werden, das aus dem Körper (V) ein „Prisma" herausschneidet, das von fünf Ebenen und einem Stück der Fläche von einer dieser drei Formen begrenzt wird (Abb. 97).

Wir wenden den Borelschen Überdeckungssatz (Nr. 175) auf unsere Fläche[2]) an und wählen endlich viele Parallelepipede aus dem ganzen unendlichen System aus. Infolgedessen zerfällt der Teil (V_1) des Körpers (V), der nach dem Herausnehmen der Parallelepipede, die die Kanten enthalten, übrigbleibt, in endlich viele „Prismen" und Parallelepipede. Wenn es gelingt, die Gültigkeit der Formel (14) für alle diese „Elementarkörper" zu beweisen, so kann man sich durch Addition leicht von ihrer Richtigkeit für deren Vereinigung (V_1) überzeugen. Mit Hilfe eines Grenzübergangs (bei dem die Umgebungen der „Kanten" zusammengezogen werden) beweist man Formel (14) dann auch für den Ausgangskörper (V).

Nun ist aber (14) für prismenförmige Körper der ersten Form (d. h. $z = f(x, y)$) und erst recht für Parallelepipede oben schon bewiesen worden. Wir befassen uns nun zum Beispiel mit einem „Prisma" (V) der zweiten Form, das von Ebenen $x = x_0$, $y = y_0$, $y = y_1$, $z = z_0$, $z = z_1$ und einer Fläche (s), $x = g(y, z)$, begrenzt wird.

Wir ahmen den Prozeß nach, den wir in Nr. 551 benutzt haben, um die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Formel für den Flächeninhalt einer ebenen Figur abzuschwächen. Diesmal werden wir nicht einer Kurve einen Polygonzug einbeschreiben, sondern der Fläche (s) eine Polyederfläche (σ). Das Rechteck $(d) = [y_0, y_1; z_0, z_1]$ ist die Projektion des Körpers auf die y, z-Ebene. Wie wir wissen (Nr. 627), kann man mit Hilfe einer *Triangulation* von (d) die Polyederfläche (σ) so konstruieren, daß die Normalen auf den Seiten der Fläche (σ) bezüglich ihrer Richtung den Flächennormalen in den Punkten der entsprechenden Flächenstücke beliebig nahe kommen. Ersetzen wir die Fläche (s) durch die Polyederfläche (σ),

[1]) Hier und später meinen wir Parallelepipede, deren Seiten den Koordinatenebenen parallel sind.

[2]) Die, wie man leicht sieht, eine *abgeschlossene* Menge ist.

so gilt für den abgeänderten Körper $(\tilde{V})$ die Formel

$$\tilde{V} = \iint\limits_{(\tilde{S})} z\,dx\,dy\,, \tag{15}$$

wobei mit $(\tilde{S})$ die ganze Oberfläche des Polyeders $(\tilde{V})$ bezeichnet wird. Man kann nämlich dieses Polyeder leicht in Teile des Typs zerlegen, für den unsere Formel schon bewiesen worden ist. Um (14) zu erhalten, hat man nun in (15) zur Grenze überzugehen (unter beliebiger Verkleinerung der Kanten der Polyederfläche und unter Annäherung der Normalen auf den Seiten der Polyederfläche und der Flächennormalen).

Zum Beweis der Annäherung der rechten Seiten der genannten Formeln stellen wir ihre Differenz in folgender Form dar:

$$\iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy - \iint\limits_{(\sigma)} z\,dx\,dy + \alpha\,.$$

Hierbei bezeichnet α die Integrale über diejenigen Teile der Seitenflächen der Körper (V) und $(\tilde{V})$, um die sich diese Flächen unterscheiden. Offenbar gilt $\alpha \to 0$. Indem man zu Integralen erster Art übergeht, kann man die Differenz der Integrale zunächst in der Form

$$\iint\limits_{(S)} z\cos\nu\,ds - \iint\limits_{(\sigma)} z\cos\tilde{\nu}\,d\sigma$$

und dann, indem man wieder zu Integralen zweiter Art zurückkehrt, in der Form

$$\int\limits_{(S)}\int z\,\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}\,dy\,dz - \int\limits_{(\sigma)}\int z\,\frac{\cos\tilde{\nu}}{\cos\tilde{\lambda}}\,dy\,dz \tag{*}$$

schreiben. Hierbei sind $\cos\lambda$, $\cos\nu$, $\cos\tilde{\lambda}$, $\cos\tilde{\nu}$ die Richtungskosinus der *äußeren* Normalen zu beiden Flächen. Wir bemerken, daß

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+g_y^2+g_z^2}}$$

auf (s) eine stetige Funktion ist, die nicht 0 wird, und folglich eine *positive untere Schranke* besitzt; bei hinreichender Annäherung der Normalen der Flächen (s) und (σ) gilt das gleiche auch bezüglich $\cos\tilde{\lambda}$ für die Fläche (σ).

Schließlich können wir durch Einführung der Gleichung $x = \tilde{g}(y, z)$ der Polyederfläche (σ) den Ausdruck (*) als gewöhnliches Flächenintegral über das Rechteck (d) schreiben:

$$\int\limits_{(d)}\int \left\{\left[z\,\frac{\cos\nu}{\cos\lambda}\right]_{x=g(y,z)} - \left[z\,\frac{\cos\tilde{\nu}}{\cos\tilde{\lambda}}\right]_{x=\tilde{g}(y,z)}\right\} dy\,dz\,.$$

Berücksichtigt man, daß sich nicht nur die entsprechenden Punkte der Flächen (s) und (σ) nähern, sondern auch ihre Normalen, so ist sofort klar, daß dieses Integral bei dem erwähnten Grenzprozeß gegen 0 strebt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Zugleich mit (14) wird das Volumen des Körpers auch durch die Formeln

$$V = \iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz \quad \text{bzw.} \quad V = \iint\limits_{(S)} y\,dz\,dx \tag{14*}$$

ausgedrückt, die sich einfach durch zyklische Vertauschung der Achsen ergeben. Durch Addition aller drei Ausdrücke kann man eine symmetrische Formel er-

halten:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)}(x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)\,. \tag{16}$$

In allen Fällen wird das Integral über die *äußere* Seite der Oberfläche (S) des Körpers erstreckt.

Wir führen wieder die Richtungskosinus $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ der äußeren Normalen ein und schreiben den letzten Ausdruck als Flächenintegral erster Art:

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(S)}(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)\,dS\,. \tag{17}$$

639. Der Stokessche Integralsatz. Es sei (S) wieder eine einfache glatte zweiseitige Fläche mit einer stückweise glatten Randkurve (L). Die Punkte der Fläche seien mit Hilfe der Formeln $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $u=z(u,v)$ eineindeutig den Punkten eines ebenen Gebiets (Δ) in der u,v-Ebene zugeordnet, das von einer ebenfalls stückweise glatten Kurve (Λ) begrenzt wird. Unter unseren Voraussetzungen ist immer $A^2+B^2+C^2>0$.

Nach Wahl einer bestimmten *Seite* und der ihr entsprechenden *Orientierung* der Fläche (Nr. 620) legen wir fest, daß dem positiven Umlaufsinn des Randes (Λ) der positive Umlaufsinn des Randes (L) entsprechen soll. Dann charakterisieren, wie wir in Nr. 619 und 621 bewiesen haben, die Formeln

$$\cos\lambda=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\mu=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\qquad \cos\nu=\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{18}$$

gerade die ausgewählte Seite der Fläche (S).

Nach diesen Bemerkungen wenden wir uns der Herleitung einer Formel zu, die ein Oberflächenintegral mit einem Kurvenintegral verknüpft und eine Verallgemeinerung des uns schon bekannten Gaußschen Satzes aus Nr. 600 ist.

Es sei in einem räumlichen Gebiet, das die Fläche (S) im Innern enthält, eine Funktion $P=P(x,y,z)$ gegeben, die in diesem Gebiet nebst ihren partiellen Ableitungen stetig ist. Dann gilt

$$\int\limits_{(L)}P\,dx=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right), \tag{19}$$

wobei der Umlaufsinn der Kurve (L) derjenigen Seite der Fläche (S) entspricht, über die das Integral rechts erstreckt wird.

Zunächst transformieren wir das Kurvenintegral über die Kurve (L) in ein Integral über die Kurve (Λ):

$$\int\limits_{(L)}P\,dx=\int\limits_{(\Lambda)}P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right). \tag{20}$$

Diese Gleichung läßt sich leicht verifizieren, indem man eine Parameterdarstellung der Kurve (Λ) und damit auch der Kurve (L) einführt: Beide Integrale führen auf ein und dasselbe gewöhnliche Integral über den Parameter.

Nun wenden wir auf das rechte Integral in (20) den Gaußschen Satz an:

$$\int\limits_{(\Lambda)}P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du+\frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right)=\iint\limits_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}du\,dv\,.$$

Weil der letzte Integrand, ausführlich geschrieben, gleich

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$$
$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$$
$$=\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

ist, kommen wir zu dem Flächenintegral

$$\int\limits_{(A)}\int\left\{\frac{\partial P}{\partial z}B-\frac{\partial P}{\partial y}C\right\}dudv\,.$$

Nach (10) ist dieses jedoch leicht in das Oberflächenintegral

$$\int\limits_{(S)}\int\left(\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\right)$$

umzuformen, das über die gewählte Seite der Fläche erstreckt wird, denn gerade diese Seite charakterisieren die Formeln (18). Damit ist der Beweis der Gleichung (19) abgeschlossen.[1])

Wir haben diese Formel für eine *glatte* Fläche bewiesen; sie kann jedoch leicht auch auf den Fall einer *stückweise glatten* (sich nicht durchdringenden) Fläche erweitert werden: Man braucht sie nur für jedes glatte Stück einzeln hinzuschreiben und die erhaltenen Gleichungen zu addieren.

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x, y, z erhalten wir noch zwei analoge Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{(L)}Qdy&=\int\limits_{(S)}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz\right),\\ \int\limits_{(L)}Rdz&=\int\limits_{(S)}\int\left(\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx\right),\end{aligned}\right\}\qquad(19^*)$$

wobei Q und R neue Funktionen von x, y, z sind, die den gleichen Bedingungen wie P genügen.

Addieren wir alle drei Gleichungen (19) und (19*), so erhalten wir das gesuchte Ergebnis in der symmetrischen Form:

$$\int\limits_{(L)}(Pdx+Qdy+Rdz)$$
$$=\int\limits_{(S)}\int\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx\right\}.\qquad(21)$$

Diese Gleichung nennt man den *Stokesschen Integralsatz*. Wir betonen nochmals,

[1]) Es muß erwähnt werden, daß wir bei der Herleitung die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$ benutzt haben, die im endgültigen Ergebnis nicht auftreten. In Wirklichkeit gilt die Formel auch ohne diese Voraussetzungen.

daß *die Seite der Fläche und der Umlaufsinn des Randes nach der in* Nr. 620 *aufgestellten Regel einander gegenseitig bestimmen.*

Wählt man als Fläche (S) ein ebenes Gebiet (D) in der x, y-Ebene, so daß $z=0$ ist, dann ergibt sich die Formel

$$\int_{(L)} (P\,dx+Q\,dy)=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\,,$$

in der der Leser den Gaußschen Satz wiedererkennt; dieser ist also ein Spezialfall des Stokesschen Satzes.[1])

Wir bemerken schließlich noch, daß das Oberflächenintegral zweiter Art im Stokesschen Satz durch ein Oberflächenintegral erster Art ersetzt werden kann. Dann nimmt der Satz folgende Gestalt an:

$$\int_{(L)} (P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$$
$$=\iint_{(S)}\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\lambda+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\mu+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\nu\right\}dS\,. \qquad (21^*)$$

Dabei bezeichnen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungskosinus der Normalen, die gerade der ausgewählten Seite der Fläche entspricht.

640. Beispiele.

1. Man berechne das Integral

$$I=\iint_{(S)}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

über die *untere* Seite des Kreises $x^2+y^2=R^2$.

Hinweis. Da die Fläche, über die das Integral erstreckt wird, mit ihrer Projektion (D) auf die x, y-Ebene übereinstimmt, gilt unter Berücksichtigung der Seite

$$I=-\iint_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,.$$

Lösung. $I=-\frac{\pi}{2}R^4$.

2. Man berechne das Integral

$$J=\iint_{(S)}x^2y^2z\,dx\,dy$$

über die *obere* Seite der unteren Hälfte der Kugel $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Hinweis. Die Projektion der Halbkugel auf die x, y-Ebene ist die Kreisscheibe (D), die von dem Kreis $x^2+y^2=R^2$ begrenzt wird. Die Gleichung der unteren Halbkugel ist $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Daher ist $J=-\iint_{(D)}x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

Lösung. $J=-\frac{2\pi}{105}R^7$.

---

[1]) Um das Einprägen des Stokesschen Satzes zu erleichtern, weisen wir darauf hin, daß der erste Summand im Integral rechts derselbe wie im Gaußschen Satz ist und daß sich die übrigen daraus durch zyklische Vertauschung der Buchstaben P, Q, R ergeben.

3. Man berechne das Integral

$$K=\iint\limits_{(S)}(x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

über die äußere Seite der Kugelfläche $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Lösung. Wir befassen uns zunächst mit der Berechnung des Integrals

$$K_3=\iint\limits_{(S)}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Da $z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ die explizite Gleichung der Kugelfläche ist (wobei das Pluszeichen der oberen, das Minuszeichen der unteren Halbkugel entspricht), ist es zweckmäßig, den Integranden z^2 in der Gestalt

$$z^2=(z-c)^2+c^2+2c\,(z-c)$$

darzustellen. Die Summe der ersten beiden Glieder, integriert über die *obere* Seite der oberen Halbkugel und die *untere* Seite der unteren Halbkugel, liefert dem Betrag nach gleiche Ergebnisse mit verschiedenen Vorzeichen, die sich gegenseitig aufheben. Das letzte Glied jedoch, das beim Übergang von der oberen zur unteren Halbkugel selbst das Vorzeichen wechselt, ergibt bei Integration über die Hälften der Kugelfläche gleiche Resultate, so daß

$$K_3=4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqq R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\,\pi cR^3$$

wird. Analog erhält man die beiden anderen Integrale

$$K_1=\iint\limits_{(S)}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad K_2=\iint\limits_{(S)}y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,.$$

Das Ergebnis lautet

$$K=\frac{8}{3}\,\pi R^3\,(a+b+c)\,.$$

4. Man berechne die Integrale

$$\text{(a) } I_1=\iint\limits_{(S)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad \text{(b) } I_2=\iint\limits_{(S)}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad \text{(c) } I_3=\iint\limits_{(S)}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

über die äußere Seite des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Lösung. (a) $I_1=0$; (b) $I_2=\frac{4}{3}\,\pi abc$; (c) $I_3=0$.

5. Man berechne die Integrale

$$\text{(a) } L_1=\iint\limits_{(S)}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \text{(b) } L_2=\iint\limits_{(S)}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

über die *äußere* Seite der oberen Hälfte des gleichen Ellipsoids.

Lösung. (a) $x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}$, $\quad L_1=4a^3\iint\limits_{(D_1)}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$

wobei (D_1) der im ersten Quadranten liegende Teil der Ellipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ist. Durch Übergang zu verallgemeinerten Polarkoordinaten finden wir leicht

$$L_1=\frac{2}{5}\,\pi a^3bc\,.$$

Man kann dieses Ergebnis ebenso leicht erhalten, indem man von der Parameterdarstellung

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=b\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=c\cos\varphi\qquad \left(0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2};\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi\right) \tag{22}$$

der Fläche ausgeht. Da $A=bc\sin^2\varphi\cos\theta$ ist, gilt nach (10)

$$L_1=a^3bc\int\limits_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{2}{5}\pi a^3bc\,.$$

(Der *äußeren* Seite der Fläche entspricht in der erwähnten Formel das positive Vorzeichen.)

(b) Wir benutzen auch hier die Parameterdarstellung und bemerken, daß die Beziehung $B=ac\sin^2\varphi\sin\theta$ gilt. Daher ist

$$L_2=abc^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

6. Man berechne das Integral

$$\int\limits_{(S)}\int\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)$$

über die *äußere* Seite des obigen Ellipsoids.

Hinweis. Das Integral ist uneigentlich, denn der Integrand wird (in den Schnittlinien der Ellipsoidfläche mit den Koordinatenebenen) unendlich. Mit Hilfe der Parameterdarstellung kommen wir zu einem eigentlichen Flächenintegral.

Lösung. $4\pi\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)$.

7. Wenn wir den Ausdruck (16) für das Volumen V eines Körpers nach Formel (10) in ein gewöhnliches Flächenintegral transformieren, so erhalten wir

$$V=\pm\frac{1}{3}\int\limits_{(\Delta)}\int(Ax+By+Cz)\,dudv\,. \tag{23}$$

Setzen wir für A, B, C die entsprechenden Determinanten ein, so können wir dieses Ergebnis leicht auf die Form

$$V=\pm\frac{1}{3}\int\limits_{(\Delta)}\int\begin{vmatrix}x & y & z\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}dudv$$

bringen.

Dabei steht das positive Vorzeichen, wenn A, B, C die Vorzeichen der Richtungskosinus der äußeren Normalen haben, andernfalls das negative.

8. Man berechne nach dieser Formel das Volumen V des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Man gehe von der Parameterdarstellung (22) ($0\leqq\varphi\leqq\pi$; $0\leqq\theta\leqq 2\pi$) aus.

Hinweis. Die Determinante ist gleich $abc\sin\varphi$.

Lösung. $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

9. Ist die Oberfläche eines Körpers durch eine Gleichung $r=r(\varphi,\theta)$ gegeben, so kann man wie in Nr. 629, Beispiel 14, zu einer Parameterdarstellung der Fläche übergehen, bei der φ und θ die Rolle der Parameter spielen.

Ausgehend von dieser Darstellung leite man aus (23) den eleganten Ausdruck

$$V=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\Delta)} r^3\sin\varphi\,d\varphi d\theta \tag{24}$$

für das Volumen her, wobei (Δ) das Gebiet ist, das die Parameter φ,θ durchlaufen.

10. Man berechne das Volumen des Körpers, der von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$$

begrenzt wird.

Lösung. Wir gehen von der Gleichung $r=a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$ der Fläche in Polarkoordinaten aus, benutzen (24) und erhalten

$$V=\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{3/2}\theta\cos^{3/2}\theta\,d\theta\,.$$

Berechnen wir das erste Integral nach Formel (8) aus Nr. 312 und das zweite nach der Formel in Nr. 534, Beispiel 4(a), so finden wir schließlich

$$V=\frac{\sqrt{2\pi}}{48}a^3\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

11. Man verifiziere den Stokesschen Satz (21) für die Funktionen $P=x^2y^3, Q=1, R=z$, wenn der Rand (L) der Kreis $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ und die Fläche (S) die Halbkugelfläche $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$ ist. Dabei wählen wir die *obere* Seite der Fläche und orientieren den Rand (von oben gesehen) entgegen dem Uhrzeigersinn.

Das Integral

$$\int\limits_{(L)}(x^2y^3\,dx+dy+z\,dz)$$

reduziert sich offenbar auf das erste Glied allein:

$$\int\limits_{(L)}x^2y^3dx=-a^6\int\limits_0^{2\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{8}a^6.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2,\qquad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0\,.$$

Die Berechnung des Integrals

$$-3\iint\limits_{(S)}x^2y^2dxdy=-3\iint\limits_{x^2+y^2\leqq a^2}x^2y^2dxdy=-\frac{\pi}{8}a^6$$

führt zu dem gleichen Ergebnis.

12. Man verifiziere den Stokesschen Satz für die Funktion $P=y, Q=z, R=x$, wenn (L) der Kreis

$$x=a\cos^2 t,\qquad y=a\sqrt{2}\sin t\cos t,\qquad z=a\sin^2 t\qquad (0\leqq t\leqq\pi)$$

ist und (S) die von (L) begrenzte Kreisscheibe. (Dieser Kreis ergibt sich als Schnitt der Ebene $x+z=a$ und der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$; sein Radius ist gleich $\frac{a}{\sqrt{2}}$.)

Das Kurvenintegral ist

$$\int_{(L)}(y\,dx+z\,dy+x\,dz)=a^2\int_0^{\pi}(-\sqrt{2}\sin^2 t+2\cos^3 t\sin t)\,dt=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi a^2,$$

während das Oberflächenintegral

$$-\iint_{(S)}(dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx)$$

gleich der negativen Summe der Inhalte der Projektionen der erwähnten Kreisscheibe auf die Koordinatenebenen ist, d. h. $-2\,\frac{\pi a^2}{2}\cos 45^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,a^2$.

13. Man setze

$$P=y^2+z^2,\qquad Q=z^2+x^2,\qquad R=x^2+y^2$$

und wähle als (S) die Fläche, die der Zylinder $x^2+y^2=2rx$ aus der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=2\varrho x$ $(\varrho>r,\ z>0)$ herausschneidet. Für diesen Fall verifiziere man den Stokesschen Satz.

Benutzen wir die Parameterdarstellung

$$x=r(1+\cos t),\qquad y=r\sin t,\qquad z=\sqrt{2r(\varrho-r)}\,\sqrt{1+\cos t}\qquad(0\leqq t\leqq 2\pi)$$

der Kurve[1]), so finden wir für das Kurvenintegral einen ziemlich komplizierten Ausdruck in Fom eines gewöhnlichen Integrals:

$$\int_0^{2\pi}\Big\{[r^2\sin^2 t+2r(\varrho-r)(1+\cos t)](-r\sin t)$$
$$+[2r(\varrho-r)(1+\cos t)+r^2(1+\cos t)^2]\,r\cos t$$
$$+[r^2(1+\cos t)^2+r^2\sin^2 t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(\varrho-r)}{1+\cos t}}\,(-\sin t)\Big\}\,dt\,.$$

Der erste und der dritte Summand in der geschweiften Klammer haben aber die Gestalt $f(\cos t)\,d\cos t$, und ihre Integrale sind auf Grund der Periodizität des Kosinus gleich 0. Führen wir die übrigbleibende Rechnung aus, so erhalten wir $2\pi\varrho r^2$.

Das Oberflächenintegral

$$2\iint_{(S)}[(y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy]$$

über die obere Seite der angegebenen Fläche transformieren wir zunächst in ein Integral erster Art:

$$2\iint_{(S)}[(y-z)\cos\lambda+(z-x)\cos\mu+(x-y)\cos\nu]\,dS\,.$$

Wegen

$$\cos\lambda=\frac{x-\varrho}{\varrho},\qquad\cos\mu=\frac{y}{\varrho},\qquad\cos\nu=\frac{z}{\varrho}$$

vereinfacht sich das gesuchte Integral nach Einsetzen dieser Ausdrücke, und man erhält $2\iint_{(S)}(z-y)\,dS$. Auf Grund der Symmetrie der Fläche bezüglich der x, z-Ebene ist das Integral $\iint_{(S)}y\,dS$ gleich 0. Das übrigbleibende Integral transformieren wir wieder in ein Integral zweiter Art:

$$2\iint_{(S)}z\,dS=2\iint_{(S)}\frac{z}{\cos\nu}\,dx\,dy=2\varrho\iint_{(S)}dx\,dy=2\pi\varrho r^2.$$

---

[1]) Setzt man $x-r=r\cos t$, $y=r\sin t$, so wird die geometrische Bedeutung des Parameters t klar; setzen wir diese Ausdrücke in die Kugelgleichung ein, so finden wir auch z als Funktion von t.

14. Man verifiziere den Stokesschen Satz

$$\int_{(L)} [(z^2-x^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy+(y^2-z^2)\,dz]=2\iint_{(S)}(x\,dx\,dy+y\,dy\,dz+z\,dz\,dx),$$

wenn (S) die Schraubenfläche

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v, \qquad z=cv \qquad (a\leqq u\leqq b;\ 0\leqq v\leqq 2\pi)$$

ist, die von zwei Schraubenlinien und zwei Geradenstücken begrenzt wird, die zusammen den Rand (L) bilden.

Lösung. Erstreckt man das Oberflächenintegral über die obere Seite der angegebenen Fläche und nimmt man das Kurvenintegral in der dementsprechenden Richtung, so werden beide Integrale gleich $\pi c\,(b^2-a^2)$.

641. Anwendung des Stokesschen Satzes auf die Untersuchung von Kurvenintegralen im Raum. In einem offenen Gebiet (T) seien Funktionen P, Q, R gegeben, die nebst ihren Ableitungen

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}$$

stetig sind.

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes kann man leicht *Bedingungen aufstellen, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß das Integral*

$$\int_{(L)}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz) \tag{25}$$

über eine beliebige einfache (d. h. *sich nicht überschneidende*) *geschlossene stückweise glatte Kurve* (L), *die in* (T) *liegt, verschwindet.*

Damit es möglich ist, den Stokesschen Satz zu benutzen, muß man zunächst dem dreidimensionalen Gebiet (T), auf das sich unsere Betrachtungen beziehen, von vornherein eine natürliche Einschränkung auferlegen. Man muß nämlich fordern, daß *in jede einfache geschlossene stückweise glatte Kurve* (L) *im Gebiet* (T) *eine stückweise glatte* (*sich nicht durchdringende*) *Fläche* (S) *„eingespannt" werden kann, die* (L) *als Rand besitzt und ebenfalls ganz in* (T) *enthalten ist.* Diese Eigenschaft ist ein Analogon der Eigenschaft eines ebenen Gebiets, einfach zusammenhängend zu sein; liegt sie vor, so nennt man das räumliche Gebiet (T) ebenfalls (*„flächenartig"*) *einfach zusammenhängend.*[1]) Wir erwähnen als Beispiel, daß ein Körper, der von zwei konzentrischen Kugelflächen begrenzt ist, in diesem Sinne einfach zusammenhängend ist, der Torus dagegen nicht.

Es sei nun das Gebiet (T) (flächenartig) einfach zusammenhängend. Wir spannen, wie angegeben, in die Kurve (L) eine Fläche (S) ein und ersetzen nach dem Stokesschen Satz das Kurvenintegral (25) durch das Oberflächenintegral

$$\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx\right].$$

Dafür, daß dieses Integral gleich 0 wird, sind offenbar die Bedingungen

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \tag{B}$$

[1]) Im Unterschied zu einer anderen Art des einfachen Zusammenhangs räumlicher Gebiete, von dem später die Rede sein wird (Nr. 652).

hinreichend. Diese Bedingungen sind zugleich auch *notwendig.* Davon überzeugt man sich leicht (wie in Nr. 601), indem man *ebene* Figuren (S) betrachtet, die in Ebenen liegen, die der Reihe nach der einen oder anderen Koordinatenebene parallel sind.

Der Leser sieht, daß wir hier den Stokesschen Satz ganz genauso benutzt haben wie in Nr. 601 für den entsprechenden Zweck den Gaußschen Satz.

Man kann leicht beweisen, daß *dieselben Bedingungen* (B) *notwendig und hinreichend dafür sind, daß das Integral*

$$\int_{(AB)} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z) \tag{26}$$

nicht von der Kurve (AB) *abhängt, die zwei beliebige Punkte A und B des Gebiets* (T) *verbindet,* natürlich vorausgesetzt, daß dieses Gebiet flächenartig einfach zusammenhängend ist.

Die Bedingungen sind *notwendig.* Setzt man voraus, daß das Integral (26) vom Weg unabhängig ist, so folgt hieraus (wie in Nr. 561), daß das Integral (25) über eine einfache geschlossene Kurve (L) verschwindet; folglich sind auch die Bedingungen (B) erfüllt.

Die Bedingungen sind *hinreichend.* Aus (B) folgt, daß das Integral (25) über eine einfache geschlossene Kurve (L) verschwindet. Hieraus ergibt sich (wie in Nr. 561) leicht

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIB)}, \tag{27}$$

wenn nur die Kurven (AIB) und ($AIIB$) außer A und B keine gemeinsamen Punkte haben. Ist das jedoch nicht der Fall, d. h., schneiden sich die gewählten Kurven, so ist hier die Frage weit einfacher als im ebenen Fall: In einem zusammenhängenden räumlichen Gebiet (T) kann man stets eine solche dritte Kurve ($AIIIB$) wählen, die keine der beiden vorhergehenden schneidet. Dann ist

$$\int_{(AIB)} = \int_{(AIIIB)}, \qquad \int_{(AIIB)} = \int_{(AIIIB)}.$$

Daraus folgt (27).

Mit dieser Untersuchung kann man auch die Frage verbinden, ob *der Differentialausdruck*

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \tag{28}$$

das totale Differential einer eindeutigen Funktion der drei Veränderlichen ist. Die *Notwendigkeit* der Bedingungen (B) dafür, daß das der Fall ist, verifiziert man direkt; vgl. Nr. 564. Wenn bewiesen ist, daß die Bedingungen (B) für den Fall *hinreichend* sind, daß (T) ein rechtwinkliges Parallelepiped ist, so kann der Beweis leicht auch für den allgemeinen Fall eines (flächenartig) einfach zusammenhängenden Gebiets geführt werden. Eine Stammfunktion kann sofort in Form des Kurvenintegrals

$$F(x, y, z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z)$$

angegeben werden, das vom Weg unabhängig ist, wenn die Bedingungen (B) erfüllt sind. Also sind für ein Gebiet (T) des angegebenen Typs *die Bedingungen* (B) *notwendig und hinreichend dafür, daß der Ausdruck* (28) *ein totales Differential ist.*

XVIII. Raumintegrale und mehrdimensionale Integrale

§ 1. Das Raumintegral und seine Berechnung

642. Das Problem der Bestimmung der Masse eines Körpers. Es sei irgendein masseerfüllter Körper (V) gegeben, und in allen seinen Punkten $M(x, y, z)$ sei die Massendichte $\varrho = \varrho(M) = \varrho(x, y, z)$ bekannt. Es soll die Gesamtmasse m des Körpers bestimmt werden.

Zur Lösung dieses Problems zerlegen wir den Körper (V) in eine Reihe von Teilen $(V_1), (V_2), \ldots, (V_n)$ und wählen in jedem Teil jeweils einen Punkt $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Wir nehmen näherungsweise an, innerhalb eines Teils (V_i) sei die Dichte konstant, und zwar gerade gleich der Dichte $\varrho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ in dem ausgewählten Punkt. Dann wird die Masse m_i dieses Teils näherungsweise durch

$$m_i \approx \varrho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i$$

ausgedrückt, während die Masse des ganzen Körpers

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \varrho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i$$

wird.

Wenn die Durchmesser aller Teile gegen 0 streben und der Grenzwert existiert, so wird bei dem Grenzübergang diese annähernde Gleichheit exakt, d. h., es ist

$$m = \lim \sum_{i=1}^{n} \varrho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i\,, \tag{1}$$

und das Problem ist gelöst.

Wir sehen, daß die Lösung des Problems auch hier auf die Betrachtung des Grenzwerts einer eigenartigen Summe führt, die vom gleichen Typus wie die verschiedenen Integralsummen ist, die schon wiederholt auftraten.

Solche Grenzwerte muß man in der Mechanik und der Physik oft betrachten; man nennt sie *Raumintegrale* oder *dreidimensionale Integrale*. In der für dreidimensionale Integrale üblichen Bezeichnungsweise schreibt man das obige Ergebnis in der Gestalt

$$m = \iiint_{(V)} \varrho(x, y, z)\, \mathrm{d}V\,. \tag{2}$$

Das vorliegende Kapitel befaßt sich im wesentlichen mit der Theorie der dreidimensionalen Integrale sowie wichtigen Anwendungen dieser Integrale. Da sich

eine Reihe von Sätzen, die für Flächenintegrale aufgestellt wurden, einschließlich ihrer Beweise auf Raumintegrale übertragen läßt, werden wir uns meist mit der Formulierung dieser Sätze begnügen und es dem Leser überlassen, die früheren Beweise zu übertragen.

643. Das Raumintegral. Bedingungen für seine Existenz. Bei der Aufstellung der allgemeinen Definition des neuen Integralbegriffs, des Raumintegrals, spielt der Begriff des Volumens eines Körpers eine grundlegende Rolle, ähnlich wie der Begriff des Inhalts einer ebenen Figur der Definition des Flächenintegrals zugrunde lag.

Mit dem Begriff des Volumens sind wir schon vom ersten Band her vertraut, und wir sind ihm bereits mehrmals begegnet. Eine Existenzbedingung für das Volumen eines gegebenen Körpers bestand darin, daß seine Oberfläche das Volumen 0 hat (Nr. 341). Nur solche Flächen werden wir betrachten, so daß dadurch die Existenz der Volumina in allen erforderlichen Fällen gesichert ist. Wie wir wissen, gehören insbesondere die stückweise glatten Flächen zu der angegebenen Klasse von Flächen.

Es sei nun in einem räumlichen Gebiet (V) eine Funktion $f(x, y, z)$ gegeben. Wir zerlegen dieses Gebiet mit Hilfe eines Netzes von Flächen in endlich viele Teile $(V_1), (V_2), \ldots, (V_n)$. Ihre Volumina seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Im Element (V_i) wählen wir willkürlich einen Punkt (ξ_i, η_i, ζ_i), multiplizieren den Funktionswert $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ in diesem Punkt mit dem Volumen V und bilden die Integralsumme

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, V_i .$$

Falls ein endlicher Grenzwert I dieser Summe für den Fall existiert, daß der größte der Durchmesser aller Gebiete (V_i) gegen 0 strebt, nennt man ihn *dreidimensionales Integral* (oder *Raumintegral*) der Funktion $f(x, y, z)$ über den Bereich (V) und bezeichnet ihn mit

$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

Ein endlicher Grenzwert dieser Form kann nur für eine *beschränkte* Funktion existieren; für eine solche Funktion führt man neben der Integralsumme σ noch die *Darbouxschen Summen*

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \qquad S = \sum_{i=1}^{n} M_i V_i$$

ein, wobei

$$m_i = \inf_{(V_i)} \{f\} \quad \text{und} \quad M_i = \sup_{(V_i)} \{f\}$$

ist.

Auf dem üblichen Wege beweist man, daß für die Existenz des Integrals die Bedingung

$$\lim (S - s) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim \sum_{i=1}^{n} \omega_i V_i = 0$$

notwendig und hinreichend ist, wobei $\omega_i = M_i - m_i$ die Schwankung der Funktion f im Bereich (V_i) ist. (Wir bemerken, daß im Fall der Existenz des Integrals die beiden Summen s und S gegen dieses Integral konvergieren.)

Hieraus folgt unmittelbar, daß *jede stetige Funktion f integrierbar ist.*

Man kann diese Bedingung folgendermaßen abschwächen: *Jede beschränkte Funktion, deren sämtliche Unstetigkeiten auf endlich vielen Flächen vom Volumen 0 liegen, ist integrierbar.*

Der Beweis dieser Behauptung (vgl. Nr. 590) beruht auf folgendem

Lemma. *Wird ein Bereich (V), der eine Fläche (S) vom Volumen 0 enthält, in Teilbereiche zerlegt, so strebt die Summe der Volumina aller derjenigen Teilgebiete, die mit (S) Punkte gemein haben, zugleich mit dem Durchmesser aller Teilbereiche gegen 0.*

644. Eigenschaften integrierbarer Funktionen und dreidimensionaler Integrale. Es genügt, diese Eigenschaften aufzuzählen (sie werden wie die Aussagen in Nr. 592 bewiesen).

1°. *Die Existenz und der Wert eines Raumintegrals hängen nicht von den Werten ab, die die Funktion auf einer endlichen Zahl von Flächen vom Volumen 0 annimmt.*

2°. *Ist* $(V) = (V') + (V'')$, *so gilt*

$$\iiint\limits_{(V)} f\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V')} f\,\mathrm{d}V + \iiint\limits_{(V'')} f\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei aus der Existenz des Integrals links die Existenz der Integrale rechts folgt, und umgekehrt.

3°. *Ist* $k = \mathrm{const}$, *so gilt*

$$\iiint\limits_{(V)} kf\,\mathrm{d}V = k \iiint\limits_{(V)} f\,\mathrm{d}V\,,$$

wobei aus der Existenz des Integrals rechts die Existenz des Integrals links folgt.

4°. *Sind die Funktionen f und g im Gebiet (V) integrierbar, so ist auch die Funktion $f \pm g$ integrierbar, und es gilt*

$$\iiint\limits_{(V)} (f \pm g)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{(V)} f\,\mathrm{d}V \pm \iiint\limits_{(V)} g\,\mathrm{d}V\,.$$

5°. *Genügen die im Gebiet (V) integrierbaren Funktionen f und g der Ungleichung $f \leqq g$, so gilt*

$$\iiint\limits_{(V)} f\,\mathrm{d}V \leqq \iiint\limits_{(V)} g\,\mathrm{d}V\,.$$

6°. *Im Fall der Integrabilität der Funktion f ist auch die Funktion $|f|$ integrierbar, und es gilt*

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f\,\mathrm{d}V\right| \leqq \iiint\limits_{(V)} |f|\,\mathrm{d}V\,.$$

7°. *Genügt die im Bereich (V) integrierbare Funktion f der Ungleichung $m \leqq f \leqq M$, so gilt*

$$mV \leqq \iiint\limits_{(V)} f\,\mathrm{d}V \leqq MV\,.$$

Mit anderen Worten, es gilt der *Mittelwertsatz*

$$\iiint_{(V)} f\,dV = \mu V \qquad (m \leqq \mu \leqq M)\,.$$

Im Fall der Stetigkeit der Funktion f kann man diese Formel in der Gestalt

$$\iiint_{(V)} f\,dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\, V \tag{3}$$

schreiben, wobei $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ein gewisser Punkt des Gebiets (V) ist.

Ferner läßt sich auch Nr. 593 leicht auf den dreidimensionalen Fall erweitern: Genauso wie dort wird der Begriff einer Funktion und insbesondere einer additiven Funktion eines (dreidimensionalen) Gebiets aufgestellt. Ein wichtiges Beispiel einer solchen Funktion (vgl. 2°) ist das Integral über ein veränderliches Gebiet (v)

$$\Phi((v)) = \iiint_{(V)} f\,dv\,. \tag{4}$$

Wie früher führt man den Begriff der *Ableitung einer Funktion* $\Phi((v))$ *nach dem Gebiet in einem gegebenen Punkt* M ein; darunter versteht man den Grenzwert

$$\lim_{(v)\to M} \frac{\Phi((v))}{v}\,,$$

wenn (v) den Punkt M enthält und sich auf diesen zusammenzieht.

8°. *Ist der Integrand stetig, so ist die Ableitung des Integrals* (4) *nach dem Gebiet im Punkt* $M(x, y, z)$ *gerade gleich dem Wert des Integranden in diesem Punkt, d. h. gleich* $f(M) = f(x, y, z)$.

Also ist unter unseren Voraussetzungen das Integral (4) für die Funktion f in gewissem Sinne eine „Stammfunktion", und zwar die *einzige additive* Stammfunktion. Das beweist man wie im ebenen Fall.

645. Die Berechnung eines Raumintegrals über ein Parallelepiped. Wir beginnen die Darlegung des Problems, ein Raumintegral zu berechnen, mit dem Fall, daß der Körper, in dem die Funktion $f(x, y, z)$ definiert ist, das rechtwinklige Parallelepiped $(T) = [a, b; c, d; e, f]$ ist (Abb. 98). Die Projektion von (T) auf die y, z-Ebene ist das Rechteck $(R) = [c, d; e, f]$.

Satz. *Existiert für die Funktion* $f(x, y, z)$ *das Raumintegral*

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)\,dT \tag{5}$$

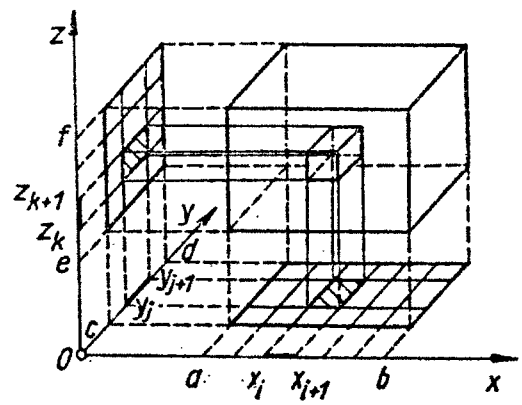

Abb. 98

und für jedes feste x aus $[a, b]$ das Flächenintegral

$$I(x)=\iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}R\,, \tag{6}$$

so existiert auch das iterierte Integral

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}R\,, \tag{7}$$

und es gilt

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}T=\int\limits_a^b \mathrm{d}x \iint\limits_{(R)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}R. \tag{8}$$

Der Beweis ist dem in Nr. 594 geführten analog. Wir unterteilen die Strecken $[a, b]$, $[c, d]$ und $[e, f]$ mit Hilfe der Punkte

$$x_0=a<x_1<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b\,,$$

$$y_0=c<y_1<\ldots<y_j<\ldots<y_m=d\,,$$

$$z_0=e<z_1<\ldots<z_k<\ldots<z_l=f$$

und zerlegen damit das Parallelepiped (T) in Teilparallelepipede

$$(T_{i,j,k})=[x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

$$(i=0, 1, \ldots, n-1; j=0, 1, \ldots, m-1; k=0, 1, \ldots, l-1)$$

und zugleich das Rechteck (R) in Teilrechtecke $(R_{j,k})=[y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$ (wobei j und k dieselben Werte wie oben durchlaufen).

Setzen wir

$$m_{i,j,k}=\inf_{(T_{i,j,k})}\{f\},\qquad M_{i,j,k}=\sup_{(T_{i,j,k})}\{f\}\,,$$

so gilt auf Grund von Nr. 644, Eigenschaft 7°, die Beziehung

$$m_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k\leqq\iint\limits_{(R_{j,k})} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqq M_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k$$

für alle Werte x aus $[x_i, x_{i+1}]$. Wir halten einen beliebigen Wert $x=\xi_i$ aus diesem Intervall fest, summieren über die entsprechenden Ungleichungen für alle Werte j und k und erhalten

$$\sum_j\sum_k m_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k\leqq I(\xi_i)=\iint\limits_{(R)} f(\xi_i, y, z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqq\sum_j\sum_k M_{i,j,k}\Delta y_j\Delta z_k\,.$$

Schließlich multiplizieren wir diese Ungleichungen mit Δx_i und summieren diesmal über den Index i:

$$\sum_i\sum_j\sum_k m_{i,j,k}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\leqq\sum_i I(\xi_i)\,\Delta x_i\leqq\sum_i\sum_j\sum_k M_{i,j,k}\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k\,.$$

Die äußeren Glieder sind Darbouxsche Summen für das Integral (5), und sie besitzen dieses als Grenzwert, wenn alle Differenzen Δx_i, Δy_j, Δz_k gegen 0 streben. Folglich strebt auch die mittlere Integralsumme gegen den gleichen Grenzwert. Damit ist gleichzeitig sowohl die Existenz des Integrals (7) als auch die Gleichung (8) bewiesen.

Setzen wir noch die Existenz des einfachen Integrals

$$\int_e^f f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \tag{9}$$

für beliebige Werte x aus $[a, b]$ und y aus $[c, d]$ voraus, so können wir das Flächenintegral in (8) durch ein Doppelintegral ersetzen (Nr. 594) und erhalten schließlich

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}T = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y \int_e^f f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{10}$$

Also reduziert sich die Berechnung eines Raumintegrals auf die schrittweise Berechnung dreier einfacher Integrale. Die Rollen der Veränderlichen x, y, z in (10) können natürlich beliebig vertauscht werden.

Der Leser möge sich davon überzeugen, daß aus der Existenz des dreidimensionalen Integrals (5) und des einfachen Integrals (9) die Beziehung

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}T = \iint_{(Q)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_e^t f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \tag{11}$$

folgt, wobei $Q = [a, b; c, d]$ ist. Auch hier kann man die Rollen der Veränderlichen vertauschen.

Insbesondere gelten für den Fall einer *stetigen* Funktion offensichtlich alle Formeln (8), (10), (11) und die ihnen entsprechenden, die man durch Vertauschung der Veränderlichen erhält.

646. Die Berechnung eines Raumintegrals für ein beliebiges Gebiet. Wie in Nr. 596 kann der allgemeine Fall eines Integrals über einen Körper (V) beliebiger Form leicht auf den soeben betrachteten Fall zurückgeführt werden. Man braucht nämlich nur an Stelle der im Gebiet (V) definierten Funktion $f(x, y, z)$ eine Funktion $f^*(x, y, z)$ einzuführen, die in einem rechtwinkligen Parallelepiped (T), das (V) umfaßt, folgendermaßen definiert ist:

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{in } (V)\,, \\ 0 & \text{außerhalb von } (V)\,. \end{cases}$$

Auf diesem Wege ergeben sich alle unten angeführten Formeln.

Wir gehen auf die Fälle ein, die das größte Interesse besitzen. Der Körper (V) sei zwischen den Ebenen $x = x_0$ und $x = X$ enthalten und schneide jede zu diesen parallele Ebene, die einem festen Wert x $(x_0 \leqq x \leqq X)$ entspricht, in einer Figur, die einen Flächeninhalt besitzt; mit (P_x) bezeichnen wir deren Projektion auf die y, z-Ebene (Abb. 99). Dann gilt

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \int_{x_0}^{X} \mathrm{d}x \iint_{(P_x)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8*}$$

unter der Voraussetzung, daß das Raumintegral und das Flächenintegral existieren. Das ist ein Analogon zu Formel (8).

Es sei weiter (V) ein zylindrischer Körper, der oben und unten von den Flächen $z = z_0(x, y)$ bzw. $z = Z(x, y)$ begrenzt wird. Ihre Projektion auf die x, y-Ebene sei eine Figur (D), die von einer Kurve (K) mit dem Flächeninhalt 0 begrenzt wird.

Seitlich werde der Körper von einer Zylinderfläche begrenzt, deren Erzeugende parallel zur z-Achse sind und deren Leitkurve (K) ist (Abb. 96). Dann gilt analog zu Formel (11)

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{(D)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,, \tag{11*}$$

wenn die Existenz des dreidimensionalen Integrals und des einfachen inneren Integrals rechts vorausgesetzt wird.

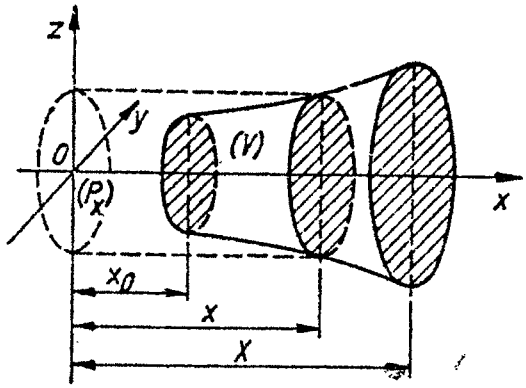

Abb. 99

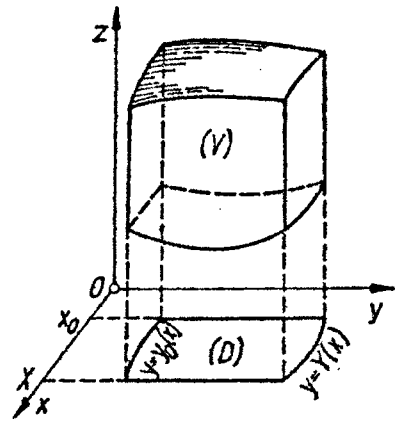

Abb. 100

Ist das Gebiet (D) selbst ein krummliniges Trapez (Abb. 100), das von den beiden Kurven $y = y_0(x)$ und $y = Y(x)$ $(x_0 \leqq x \leqq X)$ und den Geraden $x = x_0$, $x = X$ begrenzt wird, so läßt sich der Körper (V) bei den oben betrachteten Typen einordnen. Ersetzen wir in (8*) oder in (11*) das Flächenintegral durch ein Doppelintegral, so erhalten wir

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{x_0}^{X} \mathrm{d}x \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{10*}$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung von (10).

Genau wie in dem einfachsten Fall, der in Nr. 645 betrachtet wurde, sichert auch hier die Stetigkeit der Funktion $f(x, y, z)$ die Anwendbarkeit der Formeln (8*), (11*), (10*) und aller Formeln, die sich aus diesen durch Permutation der Variablen x, y, z ergeben.

647. Uneigentliche Raumintegrale. Wenn sich das Integrationsgebiet ins Unendliche erstreckt oder wenn der Integrand in der Umgebung *singulärer* Punkte, Linien oder Flächen unbeschränkt ist, so ergibt sich das uneigentliche dreidimensionale Integral durch einen *zusätzlichen Grenzübergang* aus eigentlichen Integralen. Die Besonderheiten des mehrdimensionalen Falls im Vergleich zum eindimensionalen Fall wurden schon im Zusammenhang mit der Untersuchung uneigentlicher Flächenintegrale erwähnt. Dem ist jetzt nichts hinzuzufügen.

Uneigentliche Raumintegrale konvergieren ebenfalls notwendigerweise absolut. Daher reduziert sich das ganze Problem der Existenz und der Berechnung solcher Integrale auf den Fall eines positiven (nichtnegativen) Integranden.

Unter dieser einschränkenden Voraussetzung kann man, wie bei Flächenintegra-

len, einen Zusammenhang zwischen dem dreidimensionalen Integral und verschiedenen Typen mehrfacher (iterierter) Integrale nachweisen. Darauf werden wir nicht eingehen.

648. Beispiele.

1. Man berechne das Integral

$$I=\iiint\limits_{(V)}\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$

über das Tetraeder (V), das von den Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ und $x+y+z=1$ begrenzt wird (Abb. 101).

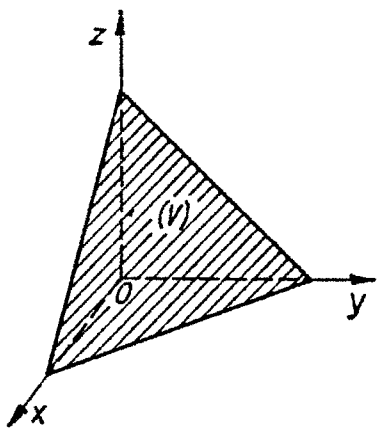

Abb. 101

Lösung. Die Projektion des Körpers auf die x, y-Ebene ist das Dreieck, das von den Geraden $x=0$, $y=0$ und $x+y=1$ gebildet wird. Es ist klar, daß x die Grenzen 0 und 1 besitzt, während die Veränderliche y für konstantes x die Werte von 0 bis $1-x$ durchläuft. Wenn x und y festgehalten werden, so kann sich der Punkt senkrecht von der Ebene $z=0$ bis zur Ebene $x+y+z=1$ bewegen; also durchläuft z die Werte von 0 bis $1-x-y$.

Nach Formel (10*) gilt

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Wir berechnen die Integrale nacheinander, beginnend mit dem inneren:

$$\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right],$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right)$$

und schließlich

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

2. Man berechne das Integral

$$K=\iiint\limits_{(V)} z\,dxdydz$$

über die obere Hälfte (V) des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1$.

Lösung. Die Projektion des Körpers auf die x, y-Ebene ist die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1$. Daher sind die Grenzen für x die Zahlen $-a$ und a, während y bei festem x von $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ bis $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ variiert. Der Körper wird unten von der x, y-Ebene und oben von der Oberfläche des Ellipsoids begrenzt, daher durchläuft z bei festgehaltenen x und y die Werte von 0 bis $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

Nach der gleichen Formel (10*) gilt

$$I=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}z\,dz=\frac{c^2}{2}\int_{-a}^{a}dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=c^2\int_{-a}^{a}dx\int_{0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy \quad \text{(da der Integrand eine gerade Funktion ist)}$$

$$=\frac{2bc^2}{3a^3}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{4bc^2}{3a^3}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)^{3/2}\,dx \quad \text{(aus demselben Grunde)}$$

$$=\frac{\pi}{4}abc^2.$$

Die Ausrechnung könnte man auch auf anderem Wege durchführen. Wir erhalten nämlich nach Formel (8*), wenn wir in dieser die Rollen der Veränderlichen x und z vertauschen,

$$I=\int_0^c dz\iint\limits_{(R_z)}z\,dx\,dy=\int_0^c z\,dz\iint\limits_{(R_z)}dx\,dy,$$

wobei (R_z) die Projektion des Schnitts des Ellipsoids mit der Ebene $Z=z$ auf die x, y-Ebene ist (die Projektion geht ohne Verzerrung vor sich). Nun ist aber das Flächenintegral $\iint\limits_{(R_z)}dx\,dy$ nichts anderes als der Inhalt R_z dieser Projektion. Da der Rand der Projektion in der x, y-Ebene die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1$$

hat, d. h. eine Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ ist, gilt, wie wir wissen,

$$R_z=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Folglich ist

$$I=\pi ab\int_0^c z\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{\pi abc^2}{4}.$$

Die Rechnung ließ sich wesentlich vereinfachen, aber nur deshalb, weil es gelungen ist, den uns bekannten Flächeninhalt einer Ellipse zu benutzen.

3. Man berechne das Integral

$$L=\iiint\limits_{(T)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

wobei (T) das ganze Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1$ ist.

Lösung. Indem wir die zweite Methode anwenden, die bei der Lösung der vorangegangenen Aufgabe angegeben wurde, erhalten wir

$$L=\int\limits_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{d}x\iint\limits_{(P_x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int\limits_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}\,\mathrm{d}y\iint\limits_{(Q_y)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int\limits_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\,\mathrm{d}z\iint\limits_{(R_z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Hieraus folgt

$$L=\frac{\pi bc}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{\pi ca}{b^2}\int\limits_{-c}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y+\frac{\pi ab}{c^2}\int\limits_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z$$
$$=\frac{4}{5}\,\pi abc\,.$$

4. Man berechne das Integral

$$I=\iiint\limits_{(A)}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über den Körper (A), der von der Kegelfläche $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ und der Ebene $z=h$ begrenzt wird (Abb. 102).

Lösung. (a) Die Projektion (Q) des Kegels auf die x, y-Ebene ist der Kreis $x^2+y^2\leqq R^2$. Nach Formel (11*) ist

$$I=\iint\limits_{(Q)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{(Q)}\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

oder, in Polarkoordinaten,

$$I=\frac{h^2}{2R^2}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{R}(R^2-r^2)\,r\mathrm{d}r=\frac{\pi R^2h^2}{4}\,.$$

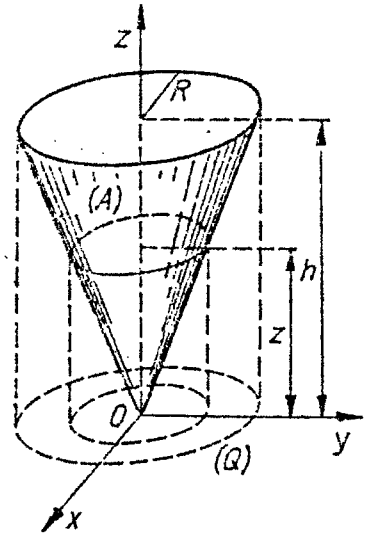

Abb. 102

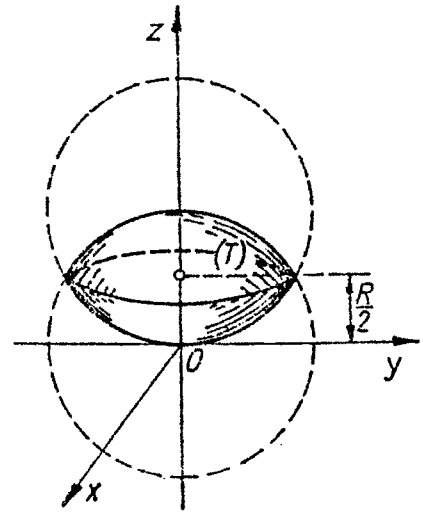

Abb. 103

(b) Nach dem anderen Lösungsverfahren kann man schreiben:

$$I=\int_0^h z\,dz \iint_{(D)} dx\,dy\,.$$

Hierbei ist (D) die Projektion des Schnitts des Kegels mit der zur x, y-Ebene parallelen Ebene der Höhe z auf die x, y-Ebene. Diese Projektion ist ein Kreis vom Radius $\frac{Rz}{h}$, so daß das Flächenintegral, das dessen Inhalt darstellt, gleich $\frac{\pi R^2}{h^2}z^2$ ist. Hieraus folgt

$$I=\int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}z^3dz=\frac{\pi R^2h^2}{4}\,.$$

5. Man berechne das Integral

$$K=\iiint_{(V)} x\,dx\,dy\,dz$$

über das Prisma (V), das von den Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$ und $x+z=a$ begrenzt wird.

Hinweis. Man benutze Formel (8*); (P_z) ist das Rechteck mit den Seiten h und $a-x$.

Lösung. $K=\frac{a^3h}{6}$.

6. Man berechne den Wert des Integrals

$$J=\iiint_{(T)} z^2dx\,dy\,dz$$

über den Durchschnitt (T) der beiden Kugeln (Abb. 103)

$$x^2+y^2+z^2\leqq R^2 \quad \text{und} \quad x^2+y^2+z^2\leqq 2Rz\,.$$

Lösung. Der Durchschnitt ihrer Oberflächen liegt in der Ebene $z=\frac{R}{2}$. Die Schnitte des Körpers (T) mit Ebenen, die zur x, y-Ebene parallel sind, sind Kreise. Gehen wir auch hier zu einem mehrfachen Integral über, einem einfachen Integral über ein Flächenintegral, so finden wir

$$J=\pi\int_0^{R/2} z^2\,(2Rz-z^2)\,dz+\pi\int_{R/2}^{R} z^2\,(R^2-z^2)\,dz=\frac{59}{480}\,\pi R^5\,.$$

7. Man berechne das Integral

$$S=\iiint_{(V)} (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$$

über den Durchschnitt (V) des Paraboloids $x^2+y^2\leqq 2az$ und der Kugel $x^2+y^2+z^2\leqq 3a^2$.

Lösung. Wir multiplizieren zunächst den Integranden aus und sehen durch Symmetriebetrachtungen, daß die Integrale der Glieder $2xy$, $2xz$, $2yz$ verschwinden.[1]) Also ist

$$S=\iiint_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Nach Formel (8*) ist (bei Vertauschung der Rollen von x und z)

$$S=\int_0^a dz \iint_{x^2+y^2\leqq 2az} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy+\int_a^{a\sqrt{3}} dz \iint_{x^2+y^2\leqq 3a^2-z^2} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy.$$

[1]) Das kann man (unter Zuhilfenahme iterierter Integrale) allein mit Eigenschaften von einfachen und von Flächenintegralen begründen.

Die Flächenintegrale kann man leicht durch Übergang zu Polarkoordinaten berechnen:

$$2\pi\int_0^{\sqrt{2az}}(r^2+z^2)\,r\,dr=2\pi\,(a^2z^2+az^3),\qquad 2\pi\int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}}(r^2+z^2)\,r\,dr=\frac{1}{2}\,\pi\,(9a^4-z^4)\,.$$

Hieraus folgt

$$S=2\pi\int_0^a(a^2z^2+az^3)\,dz+\frac{1}{2}\,\pi\int_a^{a\sqrt{3}}(9a^4-z^4)\,dz=\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right).$$

8. Man berechne das Integral

$$I=\iiint_{(T)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

über den Durchschnitt (T) des Kegels $y^2+z^2\leqq x^2$ und der Kugel $x^2+y^2+z^2\leqq R^2$ $(x\geqq 0)$.

Lösung. $I=\dfrac{\pi R^5}{5}\,(2-\sqrt{2})$.

9. Gegeben sei der Kegel $\left(\frac{z}{c}\right)^2=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2$; er schneidet die Ebene $z=c$ in einer Ellipse, deren Projektion auf die x, y-Ebene die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ hat. Wir betrachten den Körper (V), der im ersten Oktanten liegt und von der erwähnten Kegelfläche, der Ebene $z=c$ und den Koordinatenebenen $x=0$ und $y=0$ begrenzt wird (Abb. 104).

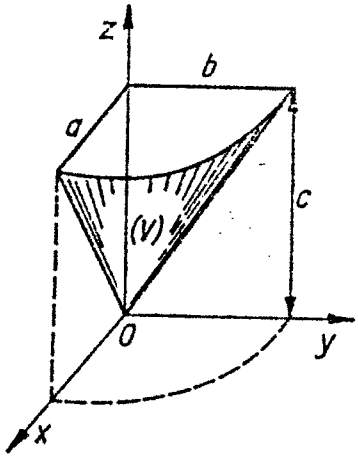

Abb. 104

Es soll das über diesen Körper erstreckte Integral

$$A=\iiint_{(V)}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

berechnet werden.

(a) Integrieren wir zuerst über z, dann über y und zuletzt über x, so finden wir als Integrationsgrenzen

für x: 0 und a, für y: 0 und $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, für z: $c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}$ und c.

Dann ist

$$A=\int_0^a x\,dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}y\,dy\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}\,,$$

und schrittweise erhalten wir

$$\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{c}\left[1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right],$$

$$2\sqrt{c}\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left[1-\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right]ydy = \frac{b^2\sqrt{c}}{a^2}(a^2-x^2)-\frac{4}{5}b^2\sqrt{c}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{5/2}\right],$$

$$A=\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}\,.$$

(b) Die Rechnungen vereinfachen sich etwas, wenn man in der umgekehrten Reihenfolge integriert. Der Körper wird auf die y, z-Ebene als Dreieck projiziert, das von den Geraden $y=0$, $z=c$ und $y=\frac{b}{c}z$ begrenzt wird. Daher sind die Integrationsgrenzen

$$\text{für } z\text{: 0 und } c, \qquad \text{für } y\text{: 0 und } \frac{b}{c}z, \qquad \text{für } x\text{: 0 und } a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2},$$

und das gesuchte Integral schreibt sich folgendermaßen:

$$A=\int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}}\int_0^{\frac{b}{c}z} ydy \int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} xdx\,.$$

In diesem Fall ist

$$\int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} xdx=\frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right], \qquad \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{b}{c}z}\left[\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]ydy=\frac{1}{8}\frac{a^2b^2}{c^4}z^4,$$

$$A=\frac{1}{8}\frac{a^2b^2}{c^4}\int_0^c z^{7/2}dz=\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}\,.$$

10. Man berechne die Integrale

(a) $I_1=\iiint\limits_{(V)} z^m dxdydz$, (b) $I_2=\iiint\limits_{(V)} x^m dxdydz$

über denselben Körper (V) wie in der vorigen Aufgabe (m sei eine natürliche Zahl).

Hinweis. Man wähle die gleiche Integrationsreihenfolge wie in Aufgabe 9(b). Im zweiten Fall führt das Integral

$$\int_0^{\frac{b}{c}z}\left[\left(\frac{bz}{c}\right)^2-y^2\right]^{\frac{m+1}{2}}dy$$

auf das bekannte Integral $\int_0^{\pi/2}\cos^{m+2}\theta\,d\theta$ (Nr. 312, Beispiel 1).

Lösung. (a) $I_1=\frac{\pi}{4}\frac{abc^{m+1}}{m+3}$.

(b) $I_2=\begin{cases}\frac{a^{m+1}bc}{m+3}\frac{(m-1)!!}{(m+2)!!}\frac{\pi}{2} & \text{(für gerades } m\text{)},\\ \frac{a^{m+1}bc}{m+3}\frac{(m-1)!!}{(m+2)!!} & \text{(für ungerades } m\text{)}.\end{cases}$

11. Man berechne das Integral

$$H=\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqq 0\\ x^2+y^2+z^2\leqq R^2}} \frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}} \qquad (\alpha>\beta>\gamma>0)\,.$$

Lösung. Es gilt

$$H=\int_0^R x\,dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{z\,dz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}\,,$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \ldots\,dz=\frac{1}{\gamma^2}\left[\sqrt{\gamma^2R^2+(\alpha^2-\gamma^2)\,x^2+(\beta^2-\gamma^2)\,y^2}-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}\right],$$

$$\frac{1}{\gamma^2}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} [\ldots]\,y\,dy=\frac{1}{3\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}\left[\beta^2R^2+(\alpha^2-\beta^2)\,x^2\right]^{3/2}$$

$$-\frac{1}{3\gamma^2(\beta^2-\gamma^2)}\left(\gamma^2R^2+(\alpha^2-\gamma^2)\,x^2\right]^{3/2}+\frac{\alpha^3}{3\beta^2\gamma^2}x^3,$$

und schließlich ergibt sich nach elementaren (jedoch langwierigen) Umformungen

$$H=\frac{R^5}{15}\,\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)\,(\gamma+\alpha)\,(\alpha+\beta)}\,.$$

12. Man zeige, daß die üblichen Formeln zur Berechnung (a) des Volumens eines zylindrischen Körpers, der von der Fläche $z=z(x, y)$ begrenzt wird,

$$V=\iint\limits_{(P)} z\,dx\,dy\,,$$

und (b) des Volumens des Körpers mit Hilfe seiner Querschnitte,

$$V=\int_a^b Q(x)\,dx\,,$$

Folgerungen der grundlegenden Formel

$$V=\iiint\limits_{(V)} dV=\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz$$

sind.

Hinweis. Man wende auf das letzte Integral die Formeln (11*) und (8*) an.[1])

649. Anwendungen in der Mechanik. Naturgemäß lassen sich alle geometrischen und mechanischen Größen, die mit einer Massenverteilung über irgendeinen Körper (V) im Raum zusammenhängen, im Prinzip durch *Raumintegrale* über den Körper (V) ausdrücken. Auch hier benutzt man am einfachsten das Prinzip der „Summation unendlich kleiner Elemente" (vgl. Nr. 348 bis 356 und 598).

Wir bezeichnen mit ϱ die Massendichte in einem beliebigen Punkt des Körpers (V); sie ist eine Funktion der Koordinaten des Punktes, und wir werden diese Funktion immer als stetig voraussetzen. Durch Summation der Massenelemente $dm=\varrho\,dV=\varrho\,dx\,dy\,dz$ erhalten wir die Größe der Gesamtmasse

$$m=\iiint\limits_{(V)} \varrho\,dV=\iiint\limits_{(V)} \varrho\,dx\,dy\,dz \qquad (12)$$

(vgl. Nr. 642).

[1]) Weitere Beispiele für die Berechnung von Raumintegralen kann man Nr. 676 entnehmen, indem man in den dort betrachteten n-dimensionalen Integralen $n=3$ setzt.

Ausgehend von den Elementen der statischen Momente,

$$dM_{yz}=x\,dm=x\varrho\,dV, \qquad dM_{zx}=y\,dm=y\varrho\,dV, \qquad dM_{xy}=z\,dm=z\varrho\,dV,$$

finden wir die statischen Momente selbst:

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)} x\varrho\,dV, \qquad M_{zx}=\iiint\limits_{(V)} y\varrho\,dV, \qquad M_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z\varrho\,dV \tag{13}$$

und aus diesen die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)} x\varrho\,dV}{m}, \qquad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)} y\varrho\,dV}{m}, \qquad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)} z\varrho\,dV}{m}. \tag{14}$$

Im Fall eines *homogenen* Körpers ($\varrho=\text{const}$) erhalten wir einfacher

$$\xi=\frac{\iiint\limits_{(V)} x\,dV}{V}, \qquad \eta=\frac{\iiint\limits_{(V)} y\,dV}{V}, \qquad \zeta=\frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dV}{V},$$

die Koordinaten des „geometrischen Schwerpunkts".

Ohne weiteres verständlich sind auch die folgenden Formeln für die Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen:

$$I_x=\iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\,\varrho\,dV, \qquad I_y=\iiint\limits_{(V)} (z^2+x^2)\,\varrho\,dV, \qquad I_z=\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,\varrho\,dV \tag{15}$$

oder bezüglich der Koordinatenebenen:

$$I_{yz}=\iiint\limits_{(V)} x^2\varrho\,dV, \qquad I_{zx}=\iiint\limits_{(V)} y^2\varrho\,dV, \qquad I_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z^2\varrho\,dV. \tag{16}$$

Schließlich möge die über den Körper (V) verteilte Masse auf den Punkt $A(\xi, \eta, \zeta)$ (der Masse 1) eine Anziehungskraft nach dem Newtonschen Gesetz ausüben. Die Anziehungskraft, die von dem Massenelement $dm=\varrho\,dV$ ausgeht, hat in Richtung der Koordinatenachsen die Komponenten [1])

$$dF_x=\frac{x-\xi}{r^3}\varrho\,dV, \qquad dF_y=\frac{y-\eta}{r^3}\varrho\,dV, \qquad dF_z=\frac{z-\zeta}{r^3}\varrho\,dV,$$

wobei

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

der Abstand des Elements (oder des Punktes, in dem wir uns seine Masse konzentriert vorstellen) vom Punkt A ist. Durch Summation erhalten wir für die Komponenten der Gesamtanziehungskraft in Richtung der Koordinatenachsen:

$$F_x=\iiint\limits_{(V)} \frac{x-\xi}{r^3}\varrho\,dV, \qquad F_y=\iiint\limits_{(V)} \frac{y-\eta}{r^3}\varrho\,dV, \qquad F_z=\iiint\limits_{(V)} \frac{z-\zeta}{r^3}\varrho\,dV. \tag{17}$$

Analog bestimmt man auch das Potential des Körpers in einem Punkt:

$$W=\iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho\,dV}{r}. \tag{18}$$

Liegt der Punkt A außerhalb des Körpers, so sind alle diese Integrale eigentlich. In diesem Fall können wir das Integral W nach einer beliebigen der Veränderlichen ξ, η, ζ unter dem Integralzeichen differenzieren, und zwar auf Grund von Überlegungen, die denen ähnlich sind, die wir bezüglich einfacher Integrale angestellt haben (Nr. 507). Infolgedessen erhalten wir

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=F_x, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta}=F_y, \qquad \frac{\partial W}{\partial \zeta}=F_z. \tag{19}$$

[1]) Vgl. die Fußnote 2 auf S. 247.

Falls der Punkt A selbst zum Körper (V) gehört, ist in diesem Punkt $r=0$, und die Integranden von (17) und (18) sind in seiner Umgebung unbeschränkt. In Nr. 663 wird gezeigt, daß diese Integrale als uneigentliche Integrale dennoch existieren und daß sie den grundlegenden Beziehungen (19) genügen.

650. Beispiele.

1. In Nr. 598 hatten wir für die statischen Momente eines zylindrischen Stabes (für $\varrho=1$) die Formeln

$$M_{yz}=\iint\limits_{(P)} zx\,dx\,dy, \qquad M_{zx}=\iint\limits_{(P)} zy\,dx\,dy, \qquad M_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(P)} z^2\,dx\,dy$$

erhalten. Man leite diese aus den allgemeinen Formeln (13) von Nr. 649 her.

Es gilt beispielsweise

$$M_{xy}=\iiint\limits_{(V)} z\,dV=\iint\limits_{(P)} dx\,dy\int\limits_0^{z(x,y)} z\,dz;$$

nun ist aber

$$\int\limits_0^{z(x,y)} z\,dz=\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{z(x,y)},$$

was gerade zu dem gewünschten Ergebnis führt.

In Nr. 598 waren an Stelle der Berechnung des letzten Integrals Überlegungen aus der Mechanik (bezüglich des statischen Moments einer dünnen Säule) herangezogen worden.

2. Analog hatten wir in Nr. 356, Aufgabe 1, unter der Voraussetzung, daß der Inhalt des Querschnitts eines Körpers (V) parallel zu irgendeiner Ebene als Funktion $P(x)$ des Abstands x vom Schnitt zu dieser Ebene gegeben ist, für das statische Moment die Formel

$$M=\int\limits_a^b xP(x)\,dx$$

hergeleitet. Auch diese kann man als Folgerung aus der allgemeinen Formel erhalten.

Es gilt nämlich nach (8*)

$$M=\iiint\limits_{(V)} x\,dV=\int\limits_a^b x\,dx\iint\limits_{(P_x)} dy\,dz,$$

und das innere Integral ist gerade der vorgegebene Inhalt des Querschnitts.

Bemerkung. Diese Beispiele lenken unsere Aufmerksamkeit auf die Tatsache, daß sich gewisse mechanische Größen, die sich auf eine *räumliche* Verteilung von Massen beziehen, durch *Flächenintegrale* und sogar durch *einfache* Integrale ausdrücken lassen (allerdings unter sehr vereinfachenden Voraussetzungen). Diese scheinbare Erniedrigung der Vielfachheit des Integrals rührt, wie der Leser sieht, daher, daß bei der Darstellung des Raumintegrals als Flächenintegral eines einfachen Integrals oder als einfaches Integral von einem Flächenintegral das innere Integral in einfachen Fällen schon durch geometrische oder mechanische Überlegungen bekannt ist und keiner Berechnung bedarf.

3. Man benutze die Beispiele 2, 4, 10 in Nr. 648 zur Bestimmung der Lage des Schwerpunkts der dort betrachteten Körper.

4. Man bestimme die Koordinaten des Schwerpunktes des Körpers, der von der Paraboloidfläche $x^2+y^2=2az$ und der Kugelfläche $x^2+y^2+z^2=3a^2$ begrenzt wird.

Lösung. Das statische Moment bezüglich der x, y-Ebene berechnet man am einfachsten nach der in Beispiel 2 angegebenen Formel, in der man lediglich x durch z er-

setzt. Der Inhalt $R(z)$ des Querschnitts ist gleich $\pi \cdot 2az$ für $0 \leqq z \leqq a$ und $\pi(3a^2 - z^2)$ für $a \leqq z \leqq a\sqrt{3}$. Also ist

$$M_{xy} = 2\pi a \int_0^a z^2 dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} z(3a^2 - z^2)\, dz = \frac{5}{3}\pi a^4.$$

Weil das Volumen des Körpers schon bekannt ist $\left[V = \frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5)$; vgl. Nr. 343, Beispiel 6$\right]$, ist $\zeta = \frac{5}{83}(6\sqrt{3} + 5)\, a$. Aus Symmetriegründen gilt $\xi = \eta = 0$.

5. Man bestimme die Masse und die Lage des Schwerpunkts der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 2az,$$

wenn die Dichte in den Kugelpunkten dem Abstand dieser Punkte vom Koordinatenursprung umgekehrt proportional ist:

$$\varrho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Lösung. Nach Formel (12) aus Nr. 649 gilt für die Masse (uneigentliches Integral!)

$$m = k \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqq 2az} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Transformiert man das Raumintegral analog zu (8*), so kann man es als einfaches Integral von einem Flächenintegral darstellen,

$$m = k \int_0^{2a} dz \iint\limits_{(R_z)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

wobei (R_z) ein Kreis vom Radius $\sqrt{2az - z^2}$ ist. Das innere Integral läßt sich ohne Mühe ausrechnen, wenn man zu Polarkoordinaten übergeht; es ist gleich

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az - z^2}} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi(\sqrt{2az} - z).$$

Hieraus folgt

$$m = \frac{4}{3}\pi k a^2.$$

Analog berechnet man auch das statische Moment

$$M_{xy} = k \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqq 2az} \frac{z\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{16}{15}\pi k a^3.$$

Also ist $\zeta = \frac{4}{5}a$. Die übrigen beiden Schwerpunktskoordinaten sind offensichtlich gleich 0.

6. Die gleiche Aufgabe, nur mit der neuen Massendichte

$$\varrho = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2},$$

führt zu den Ergebnissen

$$m = 2\pi k a, \qquad M_{xy} = \pi k a^2, \qquad \zeta = \frac{a}{2}.$$

In den weiteren Aufgaben setzen wir die Massendichte als konstant voraus.

7. Man berechne die auf den Mittelpunkt der Grundfläche eines Zylinders durch die gesamte Masse des Zylinders (Abb. 105) ausgeübte Anziehungskraft.

Benutzt man die Bezeichnungen aus Abb. 105, so gilt (vgl. Nr. 649, Formel (17))

$$F_z=\iiint\limits_{(V)}\frac{\varrho z\,dV}{r^3}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2}dx\,dy\int\limits_0^h\frac{\varrho z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2}\varrho\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}\right)dx\,dy=2\pi\varrho\,(R+h-\sqrt{R^2+h^2});$$

die übrigen beiden Komponenten der Anziehungskraft sind 0, so daß die Anziehung senkrecht nach oben gerichtet ist.

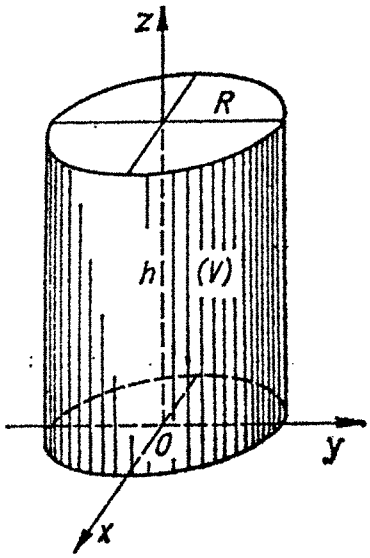

Abb. 105

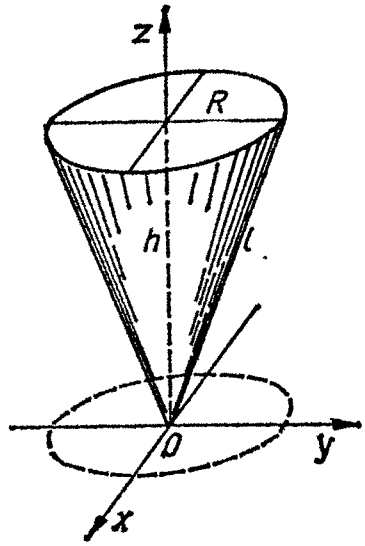

Abb. 106

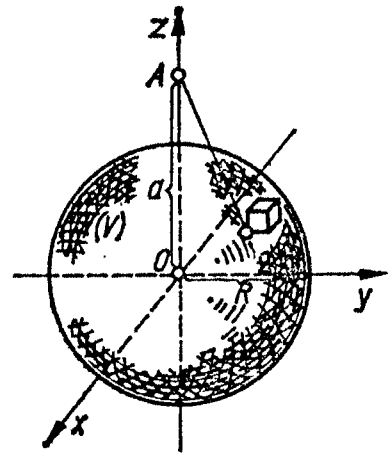

Abb. 107

8. Man berechne die Anziehungskraft, die ein Kegel auf seine Spitze ausübt (Abb. 106).

Lösung. $F=F_z=\dfrac{2\pi h\varrho}{l}(l-h)$.

9. Man bestimme die Anziehungskraft, die von einer Kugel auf einen beliebigen Punkt A (der Masse 1) ausgeübt wird (Abb. 107).

Lösung. Wir bezeichnen den Radius der Kugel mit R und den Abstand OA mit a. Die Koordinatenachsen legen wir so, daß die positive Richtung der z-Achse durch den Punkt A geht. Dann ist

$$F_z=\iiint\limits_{(V)}\frac{\varrho\,(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\varrho\int\limits_{-R}^{R}(z-a)\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqq R^2-z^2}\frac{dx\,dy}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}.$$

Das innere Integral läßt sich leicht durch Übergang zu Polarkoordinaten berechnen; es ist gleich

$$2\pi\left(\frac{1}{|z-a|}-\frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right).$$

Daher ist

$$F_z=2\pi\varrho\int\limits_{-R}^{R}\left[\frac{z-a}{|z-a|}-\frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right]dz.$$

Nun ist aber

$$\int_{-R}^{R} \frac{z-a}{|z-a|}\,dz = \int_{-R}^{R} \operatorname{sgn}(z-a)\,dz = \begin{cases} -2R & \text{für } a \geqq R, \\ -2a & \text{für } a \leqq R. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Substitution $t = \sqrt{R^2 - 2az + a^2}$ kann man auch das zweite Integral leicht berechnen:

$$\int_{-R}^{R} \frac{z-a}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\,dz = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{R^3}{a^2} - 2R & \text{für } a \geqq R, \\ -\frac{4}{3}a & \text{für } a \leqq R. \end{cases}$$

Abschließend erhalten wir

$$F_z = \begin{cases} -\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \cdot \frac{1}{a^2} & \text{für } a \geqq R, \\ -\frac{4}{3}\pi a \varrho & \text{für } a \leqq R. \end{cases}$$

Zugleich ist offenbar $F_x = F_y = 0$. Daher ist die Anziehungskraft in allen Fällen zum Mittelpunkt der Kugel gerichtet.

Dabei erfährt ein Punkt, der sich außerhalb der Kugel befindet ($a \geqq R$) *von dieser die gleiche Anziehung, die er erfahren würde, wenn die Gesamtmasse der Kugel,* $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$, *in deren Mittelpunkt konzentriert wäre.* Da andererseits in einem inneren Punkt der Kugel ($a < R$) die Anziehungskraft nicht vom Radius R abhängt (und den gleichen Wert wie im Fall $R = a$ hat), wird klar, daß *die äußere Schicht der Kugel keine Wirkung auf einen inneren Punkt ausübt.*

10. Man bestimme das Potential eines Zylinders im Mittelpunkt seiner Grundfläche.

Hinweis. Hier ist es einfacher, mit der Integration über x und y zu beginnen, wobei man zur Berechnung des Flächenintegrals Polarkoordinaten heranzieht:

$$W = \int_0^h \varrho\,dz \iint_{x^2+y^2 \leqq R^2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 2\pi\varrho \int_0^h (\sqrt{R^2+z^2} - z)\,dz$$

$$= \varrho\pi R^2 \cdot \ln \frac{h+\sqrt{R^2+h^2}}{R} + \varrho\pi h\,(\sqrt{R^2+h^2} - h).$$

11. Man bestimme das Potential eines Kegels (a) in seiner Spitze und (b) im Mittelpunkt seiner Grundfläche.

Hinweis. Man verfahre wie in der vorigen Aufgabe.

Lösung. (a) $W = \pi h\,(l-h)\,\varrho$; (b) $W = \frac{\pi R^2 h^2}{l^3}\,\varrho \ln \frac{R\,(l+R)}{h\,(l-h)} + \frac{\pi R^2 h}{l^2}\,\varrho\,(R-h)$.

12. Man bestimme das Potential einer Kugel in einem beliebigen Punkt A.

Lösung. Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 9 gilt

$$W = \varrho \int_{-R}^{R} dz \iint_{x^2+y^2 \leqq R^2-z^2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = 2\pi\varrho \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2-2az+a^2} - |z-a|)\,dz.$$

Wir trennen die Fälle $a \leqq R$ und erhalten weiter

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-2az+a^2}\,dz = \frac{1}{3a}\left[(R+a)^3 - |R-a|^3\right] = \begin{cases} \frac{2}{3}R^3 \cdot \frac{1}{a} + 2Ra & (a \geqq R), \\ \frac{2}{3}a^2 + 2R^2 & (a \leqq R) \end{cases}$$

und

$$\int_{-R}^{R} |z-a|\,dz = \begin{cases} 2Ra & (a \geqq R), \\ a^2+R^2 & (a \leqq R). \end{cases}$$

Also ist

$$W = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \cdot \frac{1}{a} & (a \geqq R), \\ \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\varrho & (a \leqq R). \end{cases}$$

Wir sehen zunächst, daß *das Potential in einem Punkt außerhalb der Kugel dasselbe ist, als wenn die Gesamtmasse der Kugel in deren Mittelpunkt konzentriert wäre.*

Das zweite Ergebnis dagegen läßt folgenden Schluß zu: Betrachtet man eine Hohlkugel mit dem inneren Radius R_1 und dem äußeren Radius R_2, so ist ihr Potential W in einem Punkt des Hohlraumes ($a < R_1$) gleich der Differenz

$$W_2 - W_1 = \left(2\pi R_2^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\varrho - \left(2\pi R_1^2 - \frac{2}{3}\pi a^2\right)\varrho = 2\pi\,(R_2^2 - R_1^2)\,\varrho$$

und hängt nicht von a ab. Das Potential einer Hohlkugel ist innerhalb des Hohlraumes konstant.

13. In den Bezeichnungen von Abb. 108 bestimme man die Trägheitsmomente I_z und I_x des Torus (vgl. Nr. 649, Formel (15)).

Hinweis. Es gilt

$$I_z = 2\varrho \int_0^a dz \iint\limits_{R_1^2 \leqq x^2+y^2 \leqq R_2^2} (x^2+y^2)\,dx dy, \qquad I_x = 2\varrho \int_0^a dz \iint\limits_{R_1^2 \leqq x^2+y^2 \leqq R_2^2} (y^2+z^2)\,dx dy,$$

wobei $R_1 = d - \sqrt{a^2-z^2}$ und $R_2 = d + \sqrt{a^2-z^2}$ ist. Die Flächenintegrale berechnet man durch Übergang zu Polarkoordinaten.

Lösung. $I_z = \frac{\pi^2}{2} a^2 d\,(4d^2+3a^2)\,\varrho, \qquad I_x = \frac{\pi^2}{4} a^2 d\,(4d^2+5a^2)\,\varrho.$

14. Ein Körper (V) rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Dann hat ein Massenelement $dm = \varrho dV$, dessen Abstand von der Drehachse $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ist, die Bahngeschwindigkeit $v = r\omega$; folglich gilt für die kinetische Energie

$$dT = \frac{1}{2}\,dm \cdot v^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \varrho\, dV.$$

Hieraus erhält man leicht einen Ausdruck für die kinetische Energie T des gesamten rotierenden Körpers:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \iiint\limits_{(V)} r^2 \varrho\, dV = \frac{1}{2}\,\omega^2 \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,\varrho\, dV.$$

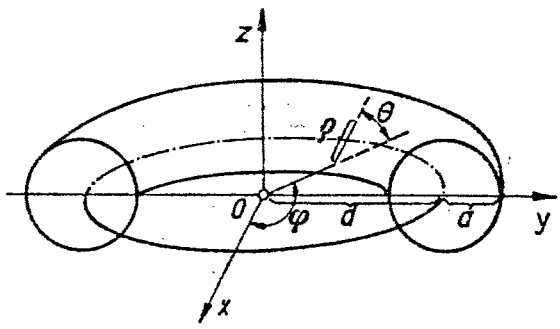

Abb. 108

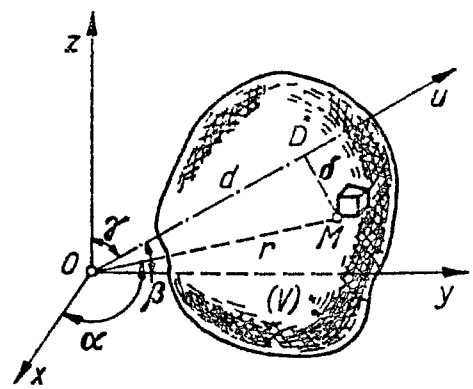

Abb. 109

Das letzte Integral ist, wie wir sehen, der Ausdruck für das Trägheitsmoment I_z des Körpers bezüglich der Drehachse (Nr. 649, Formel (15)). Daher ergibt sich schließlich

$$T=\frac{1}{2}I_z\omega^2.$$

15. Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Trägheitsmoment eines bestimmten Körpers bezüglich einer willkürlich gewählten Achse u (Abb. 109) zu berechnen. Die Achse u soll mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bilden.

Für den Abstand $MD=\delta$ eines beliebigen Punktes $M(x, y, z)$ des Körpers von der Achse gilt $\delta=r^2-d^2$, wobei, wie man aus der analytischen Geometrie weiß,

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \quad \text{und} \quad d=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$$

ist.[1]) Da $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ ist, erhalten wir hieraus

$$\delta^2=x^2(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+y^2(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha)+z^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)$$
$$-2yz\cos\beta\cos\gamma-2zx\cos\gamma\cos\alpha-2xy\cos\alpha\cos\beta\,.$$

Daraus folgt

$$I_u=\iiint\limits_{(V)}\delta^2\varrho\,\mathrm{d}V=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$$
$$-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta;$$

hierbei ist

$$K_{yz}=\iiint\limits_{(V)}yz\varrho\,\mathrm{d}V, \qquad K_{zx}=\iiint\limits_{(V)}zx\varrho\,\mathrm{d}V, \qquad K_{xy}=\iiint\limits_{(V)}xy\varrho\,\mathrm{d}V\,.$$

Diese Integrale nennt man *Trägheitsprodukte* oder *Zentrifugalmomente* (vgl. Nr. 599, Beispiel 5).

Wollen wir die Verteilung der Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der verschiedenen Achsen durch den Koordinatenursprung anschaulich darstellen, so haben wir, wie im Fall ebener Figuren, auf jeder Achse u die Strecke $\overline{ON}=1/\sqrt{I_u}$ abzutragen. Es seien

$$X=\overline{ON}\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_u}}, \qquad Y=\frac{\cos\beta}{\sqrt{I_u}}, \qquad Z=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{I_u}}$$

die Koordinaten des Endpunktes N dieser Strecke. Dann erhält man leicht aus dem für I_u gefundenen Ausdruck die Gleichung des geometrischen Orts der Punkte N:

$$I_xX^2+I_yY^2+I_zZ^2-2K_{yz}YZ-2K_{zx}ZX-2K_{xy}XY=1\,.$$

Da $\overline{ON}$ nicht unendlich wird, ist diese Fläche zweiter Ordnung notwendigerweise ein Ellipsoid, das sogenannte *Trägheitsellipsoid*. Bei der Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers spielen die Achsen des Trägheitsellipsoids eine wichtige Rolle. Sie heißen die *Hauptträgheitsachsen*. Ist O der Schwerpunkt des Körpers, so nennt man die entsprechenden Trägheitsachsen die *zentralen Hauptträgheitsachsen*.

Ob die eine oder andere Koordinatenachse eine Hauptträgheitsachse ist, hängt von den Zentrifugalmomenten ab. So ist z. B. die x-Achse genau dann Hauptträgheitsachse, wenn die Bedingungen $K_{xy}=0$, $K_{zx}=0$ erfüllt sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Massenverteilung symmetrisch zur y, z-Ebene ist.

16. Wir betrachten zum Abschluß die Frage nach der Zentrifugalkraft, die bei der Rotation eines starren Körpers um eine Achse entsteht.

Wenn der Körper (V) mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, so wirkt auf das Körperelement $\mathrm{d}m=\varrho\,\mathrm{d}V$ eine Zentrifugalkraft der Größe

$$\mathrm{d}F=\omega^2r\,\mathrm{d}m=\omega^2r\varrho\,\mathrm{d}V\,,$$

[1]) Die letzte Beziehung bringt zum Ausdruck, daß der Punkt M auf der Ebene liegt, die im Abstand d vom Koordinatenursprung durch die Achse senkrecht hindurchgeht.

wobei r der Abstand des Elements von der Drehachse ist. Ihre Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen sind

$$dF_x=\omega^2 x\varrho dV, \qquad dF_y=\omega^2 y\varrho dV, \qquad dF_z=0,$$

so daß die Komponenten der resultierenden Zentrifugalkraft F durch die Integrale

$$F_x=\omega^2\iiint\limits_{(V)} x\varrho dV=\omega^2 M_{yz}, \qquad F_y=\omega^2 M_{zx}, \qquad F_z=0$$

ausgedrückt werden, wobei M_{yz} und M_{zx} die statischen Momente des Körpers sind. Bezeichnet man die Schwerpunktskoordinaten des Körpers mit ξ, η, ζ, so kann man diese Formeln folgendermaßen schreiben:

$$F_x=\omega^2\xi m, \qquad F_y=\omega^2\eta m, \qquad F_z=0.$$

Hieraus ersieht man, daß *die erwähnte resultierende Zentrifugalkraft F genau dieselbe ist, als wenn die Gesamtmasse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert wäre.*

Das oben aufgetretene Differential der Zentrifugalkraft besitzt folgende Momente bezüglich der Koordinatenachsen:

$$dM_x=z dF_y=\omega^2 yz\varrho dV, \qquad dM_y=z dF_x=\omega^2 zx\varrho dV, \qquad dM_z=0.$$

Folglich sind die resultierenden Momente bezüglich dieser Achsen

$$M_x=\omega^2\iiint\limits_{(V)} yz\varrho dV=\omega^2 K_{yz}, \qquad M_y=\omega^2 K_{zx}, \qquad M_z=0.$$

Dafür, daß sich die Zentrifugalkräfte gegenseitig aufheben und keine Wirkung auf eine Welle (und damit auf die Lager, in denen diese befestigt ist) ausüben, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$M_{yz}=0, \qquad M_{zx}=0, \qquad K_{yz}=0, \qquad K_{zx}=0.$$

Die ersten beiden besagen, daß der Schwerpunkt des Körpers auf der z-Achse liegen muß; es sei dies gerade der Koordinatenursprung O. Die letzten beiden zeigen, daß die z-Achse eine der Hauptträgheitsachsen sein muß. *Daher übt die Zentrifugalkraft nur dann keinen Druck auf die Lager aus, wenn die Drehachse mit einer der Hauptträgheitsachsen des rotierenden Körpers bezüglich seines Schwerpunkts zusammenfällt.*

§ 2. Der Integralsatz von Gauß-Ostrogradski

651. Der Satz von Ostrogradski. In der Theorie der Flächenintegrale haben wir den Gaußschen Satz kennengelernt, der ein Flächenintegral über ein ebenes Gebiet mit einem Kurvenintegral über den Rand dieses Gebiets verknüpft. Das Analogon in der Theorie der Raumintegrale ist der Satz von OSTROGRADSKI, der ein Raumintegral über ein räumliches Gebiet mit einem Oberflächenintegral über die Oberfläche dieses Gebiets verknüpft.

Wir betrachten einen Körper (V) (Abb. 96, S. 261), der von stückweise glatten Flächen

$$(S_1)\colon\ z=z_0(x, y), \qquad (S_2)\colon\ z=Z(x, y) \qquad (z_0\leqq Z)$$

und einer Zylinderfläche (S_3) begrenzt wird, deren Erzeugende parallel zur z-Achse sind. Die Leitkurve sei eine stückweise glatte geschlossene Kurve (K) in der x, y-Ebene. Sie begrenzt die Projektion (D) des Körpers auf diese Ebene.

Wir nehmen an, daß im Gebiet (V) irgendeine Funktion $R(x, y, z)$ definiert ist, die nebst ihrer Ableitung $\frac{\partial R}{\partial z}$ im ganzen Gebiet (V) einschließlich seines Randes

stetig ist. Dann gilt

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} R\,dx\,dy\,, \tag{1}$$

wobei (S) die Oberfläche des Körpers ist und das Integral rechts über deren äußere Seite erstreckt wird.

Es gilt nämlich nach Formel (11*) aus Nr. 646

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz$$

$$= \iint\limits_{(D)} R(x, y, Z(x, y))\,dx\,dy - \iint\limits_{(D)} R(x, y, z_0(x, y))\,dx\,dy\,.$$

Benutzen wir Oberflächenintegrale, so gilt auf Grund der Formeln (3) und (3*) aus Nr. 635

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{(S_1)} R(x, y, z)\,dx\,dy\,,$$

wobei das erste Integral rechts über die *obere* Seite der Fläche (S_2) und das zweite über die *untere* Seite der Fläche (S_1) erstreckt wird. Die Gleichung bleibt richtig, wenn wir zur rechten Seite das Integral

$$\iint\limits_{(S_3)} R(x, y, z)\,dx\,dy$$

über die äußere Seite von (S_3) hinzufügen, weil dieses Integral gleich 0 ist (Nr. 635, Formel (5)). Fassen wir alle drei Oberflächenintegrale zu einem einzigen zusammen, so kommen wir zu Formel (1), die einen Spezialfall des Satzes von Ostrogradski darstellt.

Der Leser hat wahrscheinlich schon bemerkt, daß diese Überlegungen denen ähnlich sind, mit deren Hilfe in Nr. 638 die Formel (14) für das Volumen eines Körpers (V) hergeleitet wurde: Diese Formel ergibt sich aus Formel (1) für $R(x, y, z) = z$.

Wie dort ist leicht einzusehen, daß die Formel (1) für die größere Klasse derjenigen Körper gilt, die sich in Teile des untersuchten Typs zerlegen lassen. Man kann ebenfalls beweisen, daß die Formel (1) ganz allgemein für Körper gültig ist, deren Oberfläche stückweise glatt ist.

Der Beweis wird im Prinzip genauso geführt wie in Nr. 638 bei der Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der Volumenformel. Wir fügen dem nur eine Bemerkung hinzu. Ist der Körper (V) selbst ein „Prisma", das rechts etwa von der Fläche $x = g(y, z)$ begrenzt wird, so läßt sich der in Nr. 638 dargelegte Gedanke nur dann auf den vorliegenden Fall übertragen, wenn die Funktionen R und $\frac{\partial R}{\partial z}$ auch in einem gewissen Gebiet *rechts* von der genannten Fläche definiert und stetig sind (denn die einbeschriebene Polyederfläche kann auch etwas über die Grenzen des betrachteten Körpers hinausragen).[1])

[1]) In Wirklichkeit ist diese Voraussetzung für die Gültigkeit des Satzes unwesentlich.

Analog zu (1) gelten die Formeln

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} P\,dy\,dz\,, \tag{2}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} Q\,dz\,dx\,, \tag{3}$$

wenn die Funktionen P und Q im Gebiet (V) nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial x}$ und $\frac{\partial Q}{\partial y}$ stetig sind.

Addieren wir die Formeln (1), (2) und (3), so kommen wir gerade zum *Satz von* OSTROGRADSKI:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy)\,. \tag{4}$$

Er drückt ein allgemeines Oberflächenintegral zweiter Art über die äußere Seite einer geschlossenen Fläche durch ein Raumintegral über den Körper aus, der von dieser Fläche begrenzt wird.

Wenn wir Oberflächenintegrale erster Art heranziehen, so kommen wir zu einer anderen, sehr gebräuchlichen und leicht zu merkenden Form des Satzes von OSTROGRADSKI:

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,dS\,. \tag{5}$$

Hierbei sind λ, μ und ν die Winkel der äußeren Flächennormalen mit den Koordinatenachsen.

Bemerkung. Die Sätze von GAUSS, STOKES und OSTROGRADSKI haben einen gemeinsamen Grundgedanken: Sie drücken ein Integral über ein geometrisches Gebilde durch ein Integral über den Rand des Gebildes aus. Dabei bezieht sich der Gaußsche Satz auf den Fall eines zweidimensionalen Raums, der Stokessche Satz ebenfalls auf den Fall eines zweidimensionalen, aber gekrümmten Raums, während sich der Satz von OSTROGRADSKI auf den Fall eines dreidimensionalen Raums bezieht.

Den Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$$

kann man als Analogon dieser Sätze für den eindimensionalen Raum ansehen.

652. Anwendung des Satzes von Ostrogradski zur Untersuchung von Oberflächenintegralen. In irgendeinem offenen Gebiet (T) des dreidimensionalen Raums seien stetige Funktionen P, Q, R gegeben. Wir wählen eine beliebige geschlossene Fläche (S), die in diesem Gebiet liegt und irgendeinen Körper begrenzt, und betrachten das Oberflächenintegral

$$\iint\limits_{(S)} (P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy) = \iint\limits_{(S)} (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,dS\,. \tag{6}$$

Welchen Bedingungen müssen die Funktionen P, Q, R genügen, damit das Integral (6) in jedem Fall gleich 0 wird?

Dieses Problem ist dem Problem analog, wann ein Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet (Nr. 601 und 641), das sich leicht mit Hilfe des Gaußschen oder das Stokesschen Satzes lösen ließ. Hier verwenden wir nun den Satz von OSTROGRADSKI und setzen natürlich voraus, daß die Ableitungen der Funktionen P, Q, R, die in diesem Satz auftreten, existieren und stetig sind.

Damit man das Recht hat, das Integral (6) nach dem Satz von OSTROGRADSKI zu transformieren, muß man jedoch auch im vorliegenden Fall dem zugrunde liegenden Gebiet (T) eine gewisse Einschränkung auferlegen. Man muß nämlich fordern, daß *mit jeder zu dem Gebiet (T) gehörigen einfachen geschlossenen Fläche (S) auch derjenige Körper (V) ganz zu (T) gehört, den die Fläche (S) von außen begrenzt.* Ein Gebiet, das diese Eigenschaft hat, nennt man (räumlich) *einfach zusammenhängend* (vgl. Nr. 641). Das Wesen dieser Art des einfachen Zusammenhangs besteht im Fehlen von „Löchern", selbst von punktförmigen; bezüglich eines Körpers, der sich nicht ins Unendliche erstreckt, könnte man einfach fordern, daß sein Rand eine einzige geschlossene Fläche ist (vgl. Nr. 659). Daher wird hier im Gegensatz zu den Aussagen über den „flächenartigen" einfachen Zusammenhang in Nr. 641 der Torus einfach zusammenhängend, die Hohlkugel dagegen nicht.

Der Satz von GAUSS-OSTROGRADSKI führt sofort auf die gesuchte Bedingung

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0\,. \tag{B}$$

Daß sie hinreicht, ist offenbar, daß sie *notwendig ist*, läßt sich leicht durch Differentiation des Raumintegrals nach dem Gebiet beweisen (Nr. 644, 8°).

Analog zum Fall der Kurvenintegrale ist die Frage nach dem Verschwinden des Integrals über eine geschlossene Fläche gleichwertig mit der Frage nach der Unabhängigkeit des Integrals über eine nichtgeschlossene Fläche, die in eine gegebene Kurve „eingespannt" wird, von der *Form* der Fläche. Wir werden darauf nicht weiter eingehen.

Wir bemerken zum Abschluß, daß das Integral (6) von 0 verschieden sein kann, falls die Forderung der Stetigkeit der Funktionen P, Q, R und ihrer Ableitungen in einem oder in mehreren Punkten von (T) verletzt ist, auch wenn die Gleichung (B) erfüllt ist. Allerdings kann man in diesem Fall leicht beweisen, daß das Integral (6) für alle geschlossenen Flächen (S), die eine bestimmte Singularität umfassen, den gleichen Wert hat (vgl. Nr. 562).

Dies alles wird in Nr. 653 am Beispiel des Gaußschen Integrals erläutert.

653. Das Gaußsche Integral. So nennt man das Integral

$$G=\iint\limits_{(S)}\frac{\cos(r,n)}{r^2}\,dS\,,$$

wobei r die Länge des Radiusvektors ist, der einen festen Punkt $A(\xi,\eta,\zeta)$ mit dem variablen Punkt $M(x,y,z)$ der Fläche verbindet:

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Mit (r, n) wird der Winkel zwischen diesem Radiusvektor und der Flächennormale im Punkt M bezeichnet. Dabei wird die Fläche (S) als zweiseitig vorausgesetzt, und die Normale entspricht einer bestimmten Seite der Fläche.

Sind $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungskosinus der Normalen, so gilt

$$\cos(r, n) = \cos(x, r)\cos\lambda + \cos(y, r)\cos\mu + \cos(z, r)\cos\nu$$
$$= \frac{x-\xi}{r}\cos\lambda + \frac{y-\eta}{r}\cos\mu + \frac{z-\zeta}{r}\cos\nu .$$

Also läßt sich das Gaußsche Integral folgendermaßen schreiben:

$$G = \iint\limits_{(S)} \left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\lambda + \frac{y-\eta}{r^3}\cos\mu + \frac{z-\zeta}{r^3}\cos\nu\right) dS$$
$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{x-\xi}{r^3}\,dydz + \frac{y-\eta}{r^3}\,dzdx + \frac{z-\zeta}{r^3}\,dxdy\right).$$

Hier ist

$$P = \frac{x-\xi}{r^3}, \qquad Q = \frac{y-\eta}{r^3}, \qquad R = \frac{z-\zeta}{r^3},$$

so daß

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$$

wird. Man kann leicht nachprüfen, daß die Bedingung (B) im ganzen Raum erfüllt ist, ausgenommen den Punkt $A(\xi, \eta, \zeta)$, in dem die Funktionen P, Q, R unstetig sind. Daher ist das Gaußsche Integral über eine geschlossene Fläche gleich 0, wenn die Fläche den Punkt A nicht umfaßt. Dagegen hat das Integral für alle Flächen, die diesen Punkt im Inneren enthalten, ein und denselben Wert. Dieser ist leicht zu finden, wenn man beispielsweise als Fläche (S) die Kugelfläche vom Radius R um den Punkt A wählt. Hier hat der Radiusvektor der Kugelpunkte konstante Länge, und seine Richtung stimmt mit der Richtung der äußeren Kugelnormalen überein, so daß $\cos(r, n) = 1$ ist. Wir erhalten

$$G = \iint\limits_{(S)} \frac{dS}{R^2} = \frac{S}{R^2} = 4\pi;$$

das ist der Wert des Gaußschen Integrals für alle Flächen, die den Punkt A einschließen.

Alle diese Ergebnisse lassen sich auch leicht unmittelbar beweisen, wenn man von der geometrischen Bedeutung des Gaußschen Integrals als *Maß für den Raumwinkel*[1]) *ausgeht, unter dem die Fläche* (S) *vom Punkt* A *aus sichtbar ist.*

Um das zu beweisen, nehmen wir zunächst an, die Fläche (S) schneide jeden vom Punkt A ausgehenden Strahl nicht mehr als einmal. Die Normale n sei nach der Seite gerichtet, die dem Punkt A entgegengesetzt ist. Wir nehmen ein Element (dS) der Fläche (S), wählen darauf einen Punkt M und legen durch diesen Punkt eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Punkt A ist. Projiziert man das Element (dS) von A aus auf die erwähnte Kugelfläche, so wird der Inhalt der Projektion gleich[2]) $\cos(r, n)\,dS$, so daß der Inhalt der Figur, die durch die von A ausgehenden Sehstrahlen auf der

[1]) Ein Teil des Raumes, der von einer Kegelfläche begrenzt wird, heißt ein *Raumwinkel*; die Kegelspitze ist der Scheitelpunkt des Winkels. Legt man um die Spitze eine Kugelfläche vom Radius 1, so schneidet die erwähnte Kegelfläche aus ihr eine Figur heraus, deren Inhalt ein *Maß* für den Raumwinkel ist.

[2]) Dabei nehmen wir näherungsweise sowohl das Element (dS) als auch seine Projektion als eben an und benutzen die Formel für die orthogonale Projektion (und nicht die Zentralprojektion). Für hinreichend kleine Elemente (dS) wird aber auch der hier zugelassene *relative* Fehler beliebig klein.

Einheitskugel ausgeschnitten wird, gleich

$$\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS$$

wird. Das ist gerade der Raumwinkel, unter dem das Element (dS) sichtbar ist. Ein Maß für den Sehwinkel der ganzen Fläche (S) ist die Summe aller Winkelelemente, d. h. das Integral G.

Wenn die Fläche (S) die von A ausgehenden Strahlen in mehr als einem Punkt schneidet, aber in Teile zerlegt werden kann, von denen jeder diese Strahlen in höchstens einem Punkt schneidet, so braucht man nur die Gaußschen Integrale zu addieren, die sich auf diese Teile beziehen.

Wie üblich wird eine bestimmte Seite der Fläche gewählt, und die Normalenrichtung n entspricht dieser Wahl. Dann ist diese Normale für gewisse Teile der Fläche nach der A entgegengesetzten Seite gerichtet, und der Sehwinkel wird positiv; für die anderen Teile jedoch, für die die Normale A zugewandt ist, wird dieser Winkel negativ. Das Gaußsche Integral ist die algebraische Summe dieser Sehwinkel.

Aus der geometrischen Deutung des Gaußschen Integrals folgt unmittelbar, daß $G=4\pi$ ist, wenn die Fläche (S) geschlossen ist und der Punkt A im Inneren des von ihr eingeschlossenen Gebiets liegt. Liegt dagegen der Punkt außerhalb dieses Gebiets, so heben sich die Sehwinkel verschiedenen Vorzeichens gegenseitig auf, und es ist $G=0$.

Liegt der Punkt A auf der Fläche (S) selbst, so wird das Gaußsche Integral uneigentlich. Wie man leicht sieht, ist $G=2\pi$, wenn die Fläche (S) im Punkt A eine bestimmte Tangentialebene hat.

654. Beispiele.

1. Man transformiere folgende Oberflächenintegrale nach dem Satz von OSTROGRADSKI:

(a) $I_1=\iint\limits_{(S)}(x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy)$,

(b) $I_2=\iint\limits_{(S)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu)\,dS$,

(c) $I_3=\iint\limits_{(S)}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$.

Man nehme dabei an, daß die Fläche (S) den Körper (V) begrenzt.

Lösung. (a) $I_1=2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dV$,

(b) $I_2=\iiint\limits_{(V)}\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV$, (c) $I_3=3V$ (vgl. Nr. 638, Formel (16)).

2. Man beweise mit Hilfe des Satzes von OSTROGRADSKI die Formeln

(a) $\iiint\limits_{(V)}\Delta u\,dxdydz=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$,

(b) $\iiint\limits_{(V)}v\Delta u\,dxdydz=-\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz+\iint\limits_{(S)}v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$,

(c) $\iiint\limits_{(V)}(v\Delta u-u\Delta v)\,dxdydz=\iint\limits_{(S)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS$.

Dabei sei

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(x, n)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(y, n)+\frac{\partial f}{\partial z}\cos(z, n),$$

und unter n verstehe man die äußere Flächennormale.

Hinweis. Die Lösung dieser und der folgenden Aufgaben ist der Lösung der Aufgaben 3, 4, 5, 6 und 7 aus Nr. 602 völlig analog.

3. Eine Funktion u, die im Gebiet (V) nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist und dort der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt, heißt in diesem Gebiet *harmonisch*. Man beweise, daß eine harmonische Funktion dadurch charakterisiert wird, daß die Bedingung

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$$

für jede im Gebiet (V) enthaltene geschlossene Fläche (S) erfüllt ist.

4. Man beweise folgende Behauptung:

Ist die Funktion u in einem abgeschlossenen Gebiet (V) harmonisch, so werden ihre Werte im Innern des Gebiets eindeutig durch ihre Werte auf der Oberfläche (S) dieses Gebiets bestimmt.

5. Es sei u eine harmonische Funktion im Gebiet (V), (x_0, y_0, z_0) irgendein innerer Punkt dieses Gebiets und (S_R) die in (V) gelegene Kugelfläche vom Radius R um den Punkt (x_0, y_0, z_0). Dann gilt

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{(S_R)} u(x, y, z)\, dS\,.$$

Man beweise diese Formel.

Hinweis. Vgl. den Beweis von Nr. 602, Beispiel 6; nur muß man hier $v = \frac{1}{r}$ als harmonische Hilfsfunktion nehmen, wobei

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

ist.

6. Man beweise, daß *eine Funktion $u(x, y, z)$, die in einem abgeschlossenen Gebiet (V) stetig und im Innern dieses Gebiets harmonisch ist, ihr Maximum (Minimum) nicht im Inneren des Gebiets annehmen kann* (wenn sie nicht konstant ist).

Benutzt man dies, so kann man das Ergebnis von Beispiel 4 ähnlich verschärfen, wie das in Nr. 602, Beispiel 7, geschehen ist.

7. Man beweise, daß sich eine starre geschlossene Fläche, die einem allseitigen *gleichmäßigen* Druck ausgesetzt ist, im Gleichgewicht befindet.

Zu diesem Zweck beweisen wir, daß der *Gesamtvektor* und das *Gesamtmoment* (bezüglich eines beliebigen Punktes) des ganzen Systems der auf die Fläche ausgeübten Kräfte gleich 0 sind.

Wir wählen ein Flächenelement (dS) aus. Bezeichnen wir mit $p = \text{const}$ den Druck, d. h. die Kraft, die auf eine Flächeneinheit wirkt, so hat das Kraftelement, das senkrecht auf das Element (dS) wirkt, in Richtung der Koordinatenachsen die Komponenten

$$-p\cos\lambda\, dS, \qquad -p\cos\mu\, dS, \qquad -p\cos\nu\, dS \tag{7}$$

(das Minuszeichen ist deshalb gesetzt worden, weil der Druck nach *innen* gerichtet ist, während λ, μ und ν die Winkel der *äußeren* Normalen mit den Koordinatenachsen sind).

Die Komponenten R_x, R_y, R_z des Gesamtvektors erhält man durch Summation aus den Komponenten (7) der Kraftelemente:

$$R_x = -p \iint\limits_{(S)} \cos\lambda\, dS, \qquad R_y = -p \iint\limits_{(S)} \cos\mu\, dS, \qquad R_z = -p \iint\limits_{(S)} \cos\nu\, dS\,.$$

Alle diese Integrale sind aber gleich 0; das sieht man aus dem Satz von Ostrogradski, wenn man in ihm

$$P = 1, \quad Q = R = 0; \qquad Q = 1, \quad P = R = 0; \qquad R = 1, \quad P = Q = 0$$

setzt. Also ist der Gesamtvektor des Drucks gleich 0.

Zur Bestimmung des Gesamtmoments des Systems der Kraftelemente, etwa bezüglich des Koordinatenursprungs, summieren wir die Komponenten der Momente dieser

Kraftelemente in Richtung der Koordinatenachsen:

$$p\,(z\cos\mu - y\cos\nu)\,dS, \qquad p\,(x\cos\nu - z\cos\lambda)\,dS, \qquad p\,(y\cos\lambda - x\cos\mu)\,dS.^{1})$$

Also sind die Komponenten des Gesamtmoments des Drucks bezüglich des Koordinatenursprungs

$$L_x = p\iint\limits_{(S)} (z\cos\mu - y\cos\nu)\,dS, \qquad L_y = p\iint\limits_{(S)} (x\cos\nu - z\cos\lambda)\,dS,$$

$$L_z = p\iint\limits_{(S)} (y\cos\lambda - x\cos\mu)\,dS.$$

Wählen wir im Satz von OSTROGRADSKI $P=0$, $Q=pz$, $R=-py$, so erhalten wir $L_x=0$. Ebenso kann man leicht zeigen, daß auch $L_y=L_z=0$ ist. *Das Gesamtmoment des Drucks (bezüglich des Koordinatenursprungs) ist gleich* 0. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

8. Als letztes Anwendungsbeispiel für den Satz von OSTROGRADSKI führen wir eins der Grundgesetze der Hydrostatik an, nämlich das *Archimedische Gesetz.*

Taucht man ein Flächenstück in eine Flüssigkeit ein, so ist der Druck der Flüssigkeit auf dieses Stück bekanntlich senkrecht zu diesem gerichtet und gleich dem Gewicht der Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche dieses Flächenstück und deren Höhe die Eintauchtiefe dieses Flächenstücks ist. Wir nehmen nun an, daß ein starrer Körper in die Flüssigkeit eingetaucht ist; auf jedes Element (dS) seiner Oberfläche (S) drückt die Flüssigkeit nach dem angegebenen Gesetz. Es sollen die Resultierende aller Druckelemente und ihr Angriffspunkt bestimmt werden.

Zur Lösung der Aufgabe wählen wir das Koordinatensystem so, daß die x, y-Ebene mit der Flüssigkeitsoberfläche zusammenfällt und die z-Achse senkrecht nach unten gerichtet ist.

Die Dichte der Flüssigkeit sei gleich ϱ und die Eintauchtiefe des Elements (dS) gleich z; dann ist der auf dieses Element ausgeübte Druck $\varrho z dS$, und seine Komponenten bezüglich der Koordinatenachsen sind

$$-\varrho z\cos\lambda\,dS, \qquad -\varrho z\cos\mu\,dS, \qquad -\varrho z\cos\nu\,dS.$$

Daher gilt für die Komponenten der Resultierenden bezüglich der Achsen

$$R_x = -\varrho\iint\limits_{(S)} z\cos\lambda\,dS, \qquad R_y = -\varrho\iint\limits_{(S)} z\cos\mu\,dS, \qquad R_z = -\varrho\iint\limits_{(S)} z\cos\nu\,dS.$$

Mit Hilfe des Satzes von OSTROGRADSKI erhält man, wie im vorigen Beispiel, leicht

$$R_x = R_y = 0, \qquad R_z = -\varrho\iiint\limits_{(V)} dV = -\varrho V.$$

Also ist die Resultierende des Drucks senkrecht nach oben gerichtet und gleich dem Gewicht der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Wir betrachten nun die Momente der Kraftelemente bezüglich des Schwerpunkts $C(\xi, \eta, \zeta)$ des Körpers (*hier und im weiteren meinen wir den Schwerpunkt des geometrischen Körpers* bei homogener Massendichte; er braucht nicht mit dem Schwerpunkt des *physikalischen* Körpers übereinzustimmen). Diese Momente haben folgende Komponenten bezüglich der Koordinatenachsen:

$$\varrho z\,[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]\,dS, \qquad \varrho z\,[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]\,dS,$$

$$\varrho z\,[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]\,dS.$$

Für die Komponenten des Gesamtmoments (bezüglich des Punktes C) erhalten wir

$$L_x = \varrho\iint\limits_{(S)} z\,[(z-\zeta)\cos\mu - (y-\eta)\cos\nu]\,dS,$$

$$L_y = \varrho\iint\limits_{(S)} z\,[(x-\xi)\cos\nu - (z-\zeta)\cos\lambda]\,dS,$$

$$L_z = \varrho\iint\limits_{(S)} z\,[(y-\eta)\cos\lambda - (x-\xi)\cos\mu]\,dS.$$

---

[1]) Wir erinnern daran, daß eine Kraft mit den achsenparallelen Komponenten X, Y, Z, die im Punkt (x, y, z) angreift, im Punkt (ξ, η, ζ) ein Moment mit den Komponenten

$$L_x = (y-\eta)Z - (z-\zeta)Y, \qquad L_y = (z-\zeta)X - (x-\xi)Z, \qquad L_z = (x-\xi)Y - (y-\eta)X$$

hervorruft.

Durch Anwendung des Satzes von OSTROGRADSKI auf das erste Integral finden wir

$$L_x = \varrho \iiint\limits_{(V)} \left[\frac{\partial z\,(z-\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial z\,(y-\eta)}{\partial z}\right] \mathrm{d}V = \varrho \iiint\limits_{(V)} (\eta - y)\,\mathrm{d}V = \varrho \left[\eta V - \iiint\limits_{(V)} y\,\mathrm{d}V\right] = 0;$$

denn das Integral $\iiint\limits_{(V)} y\,\mathrm{d}V$ ist das statische Moment bezüglich der x, z-Ebene und gleich ηV. Analog beweist man, daß $L_y = 0$ ist, und schließlich ergibt sich unmittelbar auch $L_z = 0$.

Also ist das Gesamtmoment des Drucks bezüglich des Schwerpunkts des Körpers gleich 0. Fassen wir diese Aussage mit dem oben bewiesenen Satz über die Resultierende zusammen, so kommen wir zu folgendem Schluß: *Auf einen Körper, der in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, übt diese Flüssigkeit eine Kraft aus, die gleich dem Gewicht der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge ist; diese Kraft greift im Schwerpunkt des (geometrischen) Körpers an und ist senkrecht nach oben gerichtet.*

§ 3. Variablentransformation in Raumintegralen

655. Abbildung von Räumen und krummlinige Koordinaten. Die in Nr. 603 im Zusammenhang mit der Abbildung ebener Gebiete entwickelten Gedanken lassen sich in natürlicher Weise auch auf den Fall räumlicher Gebiete übertragen.

Gegeben seien ein Raum, der auf ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z bezogen ist, und ein anderer Raum mit einem Koordinatensystem ξ, η, ζ. Wir betrachten zwei abgeschlossene Bereiche (D) und (Δ) in diesen Räumen, die von den Flächen (S) bzw. (Σ) begrenzt werden, die wir stets als stückweise glatt voraussetzen wollen. Wir nehmen an, daß zwischen (D) und (Δ) eine *eineindeutige* stetige Beziehung besteht, die durch die Formeln

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = y(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = z(\xi, \eta, \zeta) \tag{1}$$

realisiert wird. Hierbei entsprechen notwendigerweise den Punkten der Fläche (Σ) gerade die Punkte der Fläche (S), und umgekehrt.

Die Funktionen (1) sollen im Gebiet (Δ) stetige partielle Ableitungen besitzen; dann ist auch die Funktionaldeterminante

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta)} \tag{2}$$

eine stetige Funktion in (Δ). Wir werden auch hier (vgl. Nr. 603) annehmen, daß *diese Determinante stets von* 0 *verschieden ist, also das Vorzeichen nicht wechselt.*

Wenn wir im Gebiet (Δ) eine *stückweise glatte* Fläche

$$\xi = \xi(u, v), \qquad \eta = \eta(u, v), \qquad \zeta = \zeta(u, v) \tag{3}$$

wählen (die Parameter sollen ein gewisses Gebiet (E) der u, v-Ebene durchlaufen), so bilden die Formeln (1) diese auf eine ebenfalls *stückweise glatte* Fläche im Gebiet (D) ab. Diese Fläche hat die Gleichung

$$x = x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)\,. \tag{4}$$

Wir beschränken uns auf den Fall einer glatten Fläche (3): Auf ihr existieren keine singulären Punkte, so daß die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}{\mathrm{D}(u, v)}, \qquad \frac{\mathrm{D}(\zeta, \xi)}{\mathrm{D}(u, v)}, \qquad \frac{\mathrm{D}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(u, v)} \tag{5}$$

nicht gleichzeitig verschwinden. Ob auch auf der Fläche (4) keine singulären Punkte existieren, muß erst geprüft werden.

Nach Formel (6) auf Nr. 204 gelten die folgenden bezüglich der Größen (5) linearen Gleichungen:

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{D(y,z)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(y,z)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}+\frac{D(y,z)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)},$$

$$\frac{D(z,x)}{D(u,v)}=\frac{D(z,x)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(z,x)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}+\frac{D(z,x)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)},$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}+\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}.$$

Die Determinante aus den Koeffizienten dieser Größen, d. h. aus den Adjunkten der Elemente der Determinante (2), ist nach einem bekannten Satz der Algebra gleich dem Quadrat von (2) und daher gleichzeitig mit (2) *von 0 verschieden.* Wären die linken Seiten der angegebenen Gleichungen in irgendeinem Punkt (u, v) gleichzeitig 0, so wären auch alle drei Determinanten (5) gleich 0, und das widerspräche unserer Annahme.

Die Zahlen ξ, η, ζ, die die Lage eines Punktes im x, y, z-Raum eindeutig charakterisieren, nennt man *krummlinige Koordinaten* dieses Punktes. Die Punkte des x, y, z-Raums, in denen eine dieser Koordinaten einen festen Wert hat, bilden eine *Koordinatenfläche.* Insgesamt existieren drei Systeme von Koordinatenflächen; durch jeden Punkt des Gebiets (D) geht je eine Fläche eines jeden Systems.

Das alles gilt übrigens nur unter der Voraussetzung, daß die Beziehungen zwischen (D) und (Δ) streng eineindeutig sind. In der Praxis ist diese Eineindeutigkeit oft verletzt.

656. Beispiele.

1. *Zylinderkoordinaten* setzen sich zusammen aus Polarkoordinaten in der x, y-Ebene und der gewöhnlichen kartesischen z-Achse (Abb. 110). Die Formeln, die sie mit den kartesischen Koordinaten verbinden, lauten

$$x=\varrho\cos\theta, \qquad y=\varrho\sin\theta, \qquad z=z.$$

Diese Formeln bilden das Gebiet

$$0\leqq\varrho<+\infty, \qquad 0\leqq\theta<2\pi, \qquad -\infty<z<+\infty$$

auf den ganzen x, y, z-Raum ab. Wir bemerken jedoch, daß die Gerade $\varrho=0$, $z=z$ auf den einzigen Punkt $(0, 0, z)$ abgebildet wird; dadurch wird die Eineindeutigkeit der Beziehung dort verletzt.

Die Koordinatenflächen sind im vorliegenden Fall:

(a) $\varrho=$const — Zylinderflächen mit Erzeugenden, die parallel zur z-Achse sind; die Leitkurven sind Kreise in der x, y-Ebene um den Koordinatenursprung;

(b) $\theta=$const — Halbebenen durch die z-Achse;

(c) $z=$const — Ebenen, die parallel zur x, y-Ebene sind. Die Funktionaldeterminante der Abbildung ist

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\varrho\sin\theta & \varrho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\varrho\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=\varrho.$$

Schließt man den Fall $\varrho=0$ aus, so ist die Funktionaldeterminante durchweg positiv.

2. *Kugelkoordinaten*, auch *räumliche Polarkoordinaten* genannt, sind mit den kartesischen Koordinaten durch die Formeln

$$x=r\sin\varphi\cos\theta, \qquad y=r\sin\varphi\sin\theta, \qquad z=r\cos\varphi$$
$$(0\leqq r<+\infty,\ 0\leqq\varphi\leqq\pi,\ 0\leqq\theta\leqq2\pi)$$

verknüpft. Die geometrische Bedeutung der Größen r, φ und θ ersieht man aus der Abb. 111; r ist der Radiusvektor $\vec{OM}$, der den Koordinatenursprung (*Pol*) mit dem gegebenen Punkt M verbindet; φ ist der Winkel, den dieser Radiusvektor mit der z-Achse (*Polarachse*) bildet; θ ist der Winkel, den die x-Achse mit der Projektion $OP = r\sin\varphi$ des Radiusvektors auf die (zur Polarachse senkrechte) x, y-Ebene bildet.

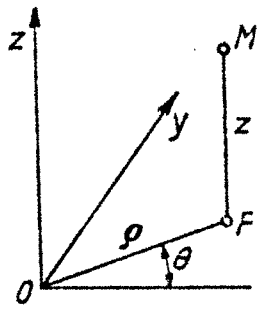

Abb. 110

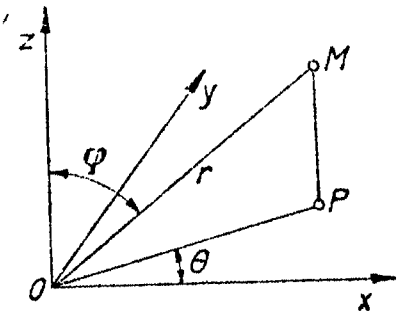

Abb. 111

In diesem Fall ist wieder die Eineindeutigkeit der Beziehung verletzt: Die Ebene $r=0$ des r, φ, θ-Raums wird auf den Koordinatenursprung $x=y=z=0$ abgebildet, und die Gerade $\varphi=0$ $(=\pi)$, $r=r$ wird auf den einzigen Punkt $x=y=0$, $z=r$ abgebildet.

Die Koordinatenflächen bilden drei Systeme:

(a) $r=\text{const}$ — konzentrische Kugeln um den Koordinatenursprung;

(b) $\varphi=\text{const}$ — Kreiskegel, deren Achse die z-Achse ist;

(c) $\theta=\text{const}$ — Halbebenen durch die z-Achse.

Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

$$J=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\varphi\,.$$

Die Funktionaldeterminante ist positiv mit Ausnahme der oben erwähnten Fälle $r=0$ oder $\varphi=0$ $(=\pi)$. In diesen Fällen wird die Funktionaldeterminante gleich 0.

3. Die Abbildung des Raumes auf sich selbst nach den Formeln

$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,,\qquad y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,,\qquad z=\frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2>0)$ ist eindeutig umkehrbar:

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,,\qquad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,,\qquad \zeta=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Man nennt sie wie im ebenen Fall (Nr. 604, Beispiel 2) *Inversion* (*Transformation durch reziproke Radien*). Sie besitzt eine anschauliche geometrische Deutung; wir überlassen es dem Leser, diese zu geben und die dieser Abbildung entsprechenden drei Systeme von Koordinatenflächen zu finden.

4. *Elliptische Koordinaten.* Wir betrachten das folgende System von konfokalen und koaxialen Flächen zweiter Ordnung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-k^2}=1\qquad (0<h<k)\,. \tag{*}$$

Es besteht aus Ellipsoiden (für $\lambda>k$), einschaligen Hyperboloiden (für $k>\lambda>h$) und schließlich aus zweischaligen Hyperboloiden (für $0<\lambda<h$).

Durch jeden Raumpunkt (x, y, z), der nicht auf den Koordinatenebenen liegt, geht je eine Fläche von jedem Typ. Die linke Seite der aus (*) folgenden Gleichung

$$\lambda^2(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)-(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)x^2-\lambda^2(\lambda^2-k^2)y^2-\lambda^2(\lambda^2-h^2)z^2=0$$

ist nämlich negativ für $\lambda=0$, positiv für $\lambda=h$, wieder negativ für $\lambda=k$ und schließlich positiv für große λ. Hieraus folgt, daß die Gleichung *drei positive* Wurzeln hat: die erste

$\lambda > k$ (das entspricht einem Ellipsoid), die zweite $\mu < k$, aber $> h$ (sie liefert ein einschaliges Hyperboloid), die dritte $\nu < h$ (zweischaliges Hyperboloid).

Benutzen wir die Eigenschaften

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = x^2+y^2+z^2+h^2+k^2,$$
$$\lambda^2\mu^2+\mu^2\nu^2+\nu^2\lambda^2 = (h^2+k^2)\,x^2+k^2y^2+h^2z^2+h^2k^2,$$
$$\lambda^2\mu^2\nu^2 = h^2k^2x^2$$

der Wurzeln der obigen Gleichung, die wir als kubische Gleichung für λ^2 auffassen können, so finden wir

$$x = \pm\frac{\lambda\mu\nu}{hk}, \qquad y = \pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-h^2)\,(\mu^2-h^2)\,(h^2-\nu^2)}}{h\sqrt{k^2-h^2}},$$
$$z = \pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-k^2)\,(k^2-\mu^2)\,(k^2-\nu^2)}}{k\sqrt{k^2-h^2}}.$$

Beschränken wir uns auf den ersten Oktanten der Koordinaten, so dürfen wir in diesen Formeln nur das positive Vorzeichen beibehalten. Die Zahlen λ, μ und ν kann man als krummlinige Koordinaten der Punkte dieses Oktanten ansehen. Man nennt sie *elliptische Koordinaten*. Die drei Systeme von Koordinatenflächen sind gerade die Systeme der Ellipsoide, der einschaligen Hyperboloide und der zweischaligen Hyperboloide, von denen oben die Rede war.

Die Funktionaldeterminante hat die Gestalt

$$J = \frac{(\lambda^2-\mu^2)\,(\lambda^2-\nu^2)\,(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)\,(\lambda^2-k^2)\,(\mu^2-h^2)\,(k^2-\mu^2)\,(h^2-\nu^2)\,(k^2-\nu^2)}}.$$

657. Ein Ausdruck für das Volumen in krummlinigen Koordinaten. Wir kehren zu den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Nr. 655 zurück und stellen uns die Aufgabe, das Volumen des (beschränkten) Körpers (D) im x, y, z-Raum durch ein Raumintegral über den entsprechenden Körper (Δ) im ξ, η, ζ-Raum auszudrücken.[1])

Das gesuchte Volumen drücken wir zunächst durch ein Oberflächenintegral zweiter Art über die äußere Seite der Oberfläche (S) aus (vgl. Nr. 638, Formel (14)):

$$D = \iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy.$$

Wir werden versuchen, hiervon zu einem gewöhnlichen Flächenintegral überzugehen.

Wir gehen von der Parameterdarstellung (3) der Fläche (Σ) aus (u, v durchlaufen das Gebiet (E) der u, v-Ebene). Dann liefern die Gleichungen (4) offenbar die Fläche (S). Setzen wir

$$C = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)},$$

so gilt nach Formel (8) aus Nr. 636

$$D = \iint\limits_{(E)} zC\,du\,dv.$$

---

[1]) Wie in Nr. 605 setzen wir hier zusätzlich die Existenz und Stetigkeit gewisser partieller Ableitungen voraus, etwa von

$$x_{\xi\eta}, x_{\eta\xi}, \ldots, y_{\xi\eta}, y_{\eta\xi}, \ldots;$$

das erleichtert den Beweis, ist aber für die Gültigkeit des Endergebnisses unwesentlich.

Dabei ist das Integral mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen, wenn die Orientierung der Fläche (S), die zur äußeren Seite von (S) gehört, der Orientierung der u, v-Ebene entspricht, was man stets voraussetzen kann (Nr. 620, 621).

Da x, y durch ξ, η, ζ mittelbar von u, v abhängen, gilt nach einer bekannten Eigenschaft von Funktionaldeterminanten (Nr. 204, Formel (6))

$$C=\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} \frac{\mathrm{D}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(u, v)}+\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)} \frac{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}{\mathrm{D}(u, v)}+\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)} \frac{\mathrm{D}(\zeta, \xi)}{\mathrm{D}(u, v)} .$$

Setzen wir diesen Ausdruck für C in das oben erhaltene Integral ein, so finden wir

$$D=\iint\limits_{(E)} z\left[\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} \frac{\mathrm{D}(\xi, \eta)}{\mathrm{D}(u, v)}+\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)} \frac{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}{\mathrm{D}(u, v)}+\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)} \frac{\mathrm{D}(\zeta, \xi)}{\mathrm{D}(u, v)}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v . \tag{6}$$

Wir vergleichen dieses Integral mit dem folgenden Oberflächenintegral zweiter Art über die äußere Seite der Fläche (Σ):

$$\iint\limits_{(\Sigma)} z\left[\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)} \mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi\right]. \tag{7}$$

Wenn wir dieses, ausgehend von den Parametergleichungen (3), nach einer Formel, die zu Formel (10) aus Nr. 636 analog ist, in ein gewöhnliches Flächenintegral transformieren, so kommen wir gerade zum Integral (6). Einzig und allein im *Vorzeichen* können sich die beiden Integrale unterscheiden: Entspricht die Orientierung der u, v-Ebene derjenigen Orientierung der Fläche (Σ), die zu deren *äußerer* Seite gehört, so sind die Integrale gleich, andernfalls unterscheiden sie sich durch das Vorzeichen.

Schließlich kann man nach dem Satz von OSTROGRADSKI vom Integral (7) zu einem Raumintegral über das Gebiet (Δ) übergehen:

$$D=\pm \iiint\limits_{(\Delta)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[z \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[z \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)}\right]+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[z \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\right]\right\} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta .$$

Der Integrand läßt sich in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}+\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)}+\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}+z\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}+\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)}+\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\right].$$

Die Summe außerhalb der Klammer ist gleich der Funktionaldeterminante

$$\frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix};$$

davon überzeugt man sich leicht durch Entwicklung dieser Determinante nach den Elementen der letzten Zeile. Dagegen ist die Summe in der eckigen Klammer gleich 0; das zeigt man durch direktes Ausrechnen.[1])

[1]) Offenbar ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\eta, \zeta)}=\frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta}+\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \xi}-\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi},$$

Also kommen wir zu der Formel

$$D = \pm \iiint\limits_{(\Delta)} \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta)} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \, .$$

Beachten wir, daß nach Voraussetzung die Funktionaldeterminante ihr Vorzeichen beibehält und dieses also auch dem Integral erteilt, so wird klar (weil wir hier $D > 0$ annehmen), daß das Vorzeichen vor dem Integral mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante übereinstimmen muß. Das gibt uns das Recht, das erhaltene Ergebnis in der endgültigen Form

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} \left| \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta)} \right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{8}$$

oder

$$D = \iiint\limits_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta \tag{8*}$$

zu schreiben, wenn man die Funktionaldeterminante der Kürze halber mit $J(\xi, \eta, \zeta)$ bezeichnet.

Den Ausdruck

$$\left| \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta)} \right| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)| \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\zeta$$

unter dem Integral nennt man gewöhnlich *Volumenelement in krummlinigen Koordinaten.*

658. Ergänzende Bemerkungen.

1°. Auf den Flächen (Σ) und (S) hatten wir bestimmte Seiten ausgezeichnet, und zwar die *äußeren* bezüglich der von ihnen begrenzten Körper. Dadurch wurden für die genannten Flächen auch bestimmte Orientierungen festgelegt (Nr. 620). Wenn ein Punkt auf der Fläche (Σ) eine einfache geschlossene Kurve durchläuft, die die Fläche zerlegt, und wenn wir uns auf ein *beliebiges* der beiden von ihr begrenzten Gebiete festlegen, so beschreibt der ihm nach den Formeln (1) entsprechende Punkt auf der Fläche (S) eine ebensolche Kurve, wobei man diesmal keine Auswahl des Gebiets durchzuführen hat; denn *diese Wahl ergibt sich schon von selbst aus der gleichen Zuordnungsvorschrift* (1). Ist der Umlaufsinn der ersten Kurve vom Standpunkt der Orientierung der Fläche (Σ) etwa *positiv*, so kann der Umlaufsinn der zweiten Kurve, bezogen auf die Orientierung der Fläche (S), *sowohl positiv als auch negativ* sein. Im ersten Fall werden wir sagen, daß die Orientierungen beider Flächen einander bezüglich der Transformationsformeln entsprechen, und im zweiten Fall, daß sie einander nicht entsprechen.

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\zeta, \xi)} = \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \eta} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} .$$

Durch Addition dieser Gleichungen wird die rechte Seite identisch gleich 0.

Da wir von vornherein angenommen haben, daß die Orientierung der Fläche (S) der Orientierung der u, v-Ebene entspricht, tritt der eine oder der andere Fall ein, je nachdem, ob die Orientierung der Fläche (Σ) der Orientierung der u, v-Ebene entspricht oder nicht. Damit war seinerseits die Wahl des einen oder des anderen Vorzeichens vor dem Integral in der Formel für das Volumen verbunden. Zum Schluß hatten wir jedoch erkannt, daß das erwähnte Vorzeichen mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante übereinstimmt.

Durch Zusammenfassung dieser Aussagen kommen wir zu folgendem Schluß:

Je nachdem, ob die Funktionaldeterminante positiv oder negativ ist, entsprechen die Orientierungen der Flächen (Σ) und (S) bezüglich der Transformationsformeln (1) *einander oder nicht.*

2°. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Formel (8*) erhalten wir

$$D = J(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})\, \Delta\,, \tag{9}$$

wobei $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ ein bestimmter Punkt des Gebiets (Δ) ist und Δ das Volumen dieses Gebiets. Hieraus kann man leicht herleiten, daß dann, wenn sich das Gebiet (Δ) auf den Punkt (ξ, η, ζ) zusammenzieht,

$$|J(\xi, \eta, \zeta)| = \lim \frac{D}{\Delta}$$

wird (vgl. auch Nr. 644, 8°), so daß der absolute Betrag der Funktionaldeterminante der *Ausdehnungskoeffizient* (Verzerrungsfaktor) des ξ, η, ζ-Raums (in einem gegebenen Punkt) bei seiner Abbildung in den x, y, z-Raum ist.

3°. Die Formel (8) [(8*)] wurde unter gewissen Voraussetzungen hergeleitet (umkehrbar eindeutige und stetige Zuordnung zwischen den Gebieten (D) und (Δ) usw.). Jedoch kann man (wie in Nr. 606, 4°) zeigen, daß die Verletzung der Voraussetzungen in einzelnen Punkten, Linien oder Flächen die Gültigkeit dieser Formel nicht berührt, wenn nur die Funktionaldeterminante beschränkt oder zumindest (eventuell im uneigentlichen Sinne) integrierbar bleibt.

659. Geometrische Herleitung. Den Beweis der Formel (8) kann man auch auf rein geometrischen Überlegungen aufbauen (die auch hier zum ersten Mal von M. W. Ostrogradski formuliert wurden; vgl. Nr. 607). Dem „unendlich kleinen" rechtwinkligen Parallelepiped im ξ, η, ζ-Raum mit den Seiten $d\xi, d\eta, d\zeta$ entspricht im x, y, z-Raum das Körperelement zwischen den Koordinatenflächen „ξ" und „$\xi + d\xi$", „η" und „$\eta + d\eta$", „ζ" und „$\zeta + d\zeta$", das man angenähert als schiefwinkliges Parallelepiped ansehen kann. Sein Volumen ist gleich dem sechsfachen Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten

$$P_1(x, y, z), \qquad P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi,\ z + \frac{\partial z}{\partial \xi}\, d\xi\right),$$

$$P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\, d\eta,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta,\ z + \frac{\partial z}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\eta\right),$$

$$P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\, d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\, d\zeta,\ y + \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\, d\zeta,\ z + \frac{\partial z}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}\, d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\, d\zeta\right).$$

Es wird nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie (dem absoluten Betrag nach) durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta$$

ausgedrückt. Durch Summation dieser einzelnen „Volumenelemente" kommen wir zu Formel (8).

Also besteht auch hier das Wesen der Sache darin, daß *der Körper zur Bestimmung seines Volumens nicht mit Hilfe zueinander senkrechter Ebenen, sondern mit Hilfe eines Netzes von Koordinatenflächen in Elemente zerlegt wird.*

In einfachen Fällen kann man einen Ausdruck für das „Volumenelement" in krummlinigen Koordinaten auf direktem Weg erhalten.

Als Beispiel betrachten wir im Fall von *Zylinderkoordinaten* ein Gebiet (im x, y, z-Raum), das begrenzt wird von zwei Zylinderflächen vom Radius ϱ bzw. $\varrho + d\varrho$, zwei horizontalen Ebenen in den Höhen z bzw. $z + dz$ und zwei Halbebenen durch die z-Achse, deren Neigungswinkel gegen die x, z-Ebene θ bzw. $\theta + d\theta$ sind (Abb. 112a). Fassen wir das Gebiet als rechtwinkliges Parallelepiped auf, so finden wir mühelos, daß seine Seiten $d\varrho$, $\varrho d\theta$ und dz sind, so daß sein Volumen gleich $\varrho d\varrho d\theta dz$ wird. Also ist die Funktionaldeterminante, die das Verhältnis dieses Volumens zum Volumen $d\varrho d\theta dz$ des entsprechenden Parallelepipeds im ϱ, θ, z-Raum darstellt, gleich ϱ.

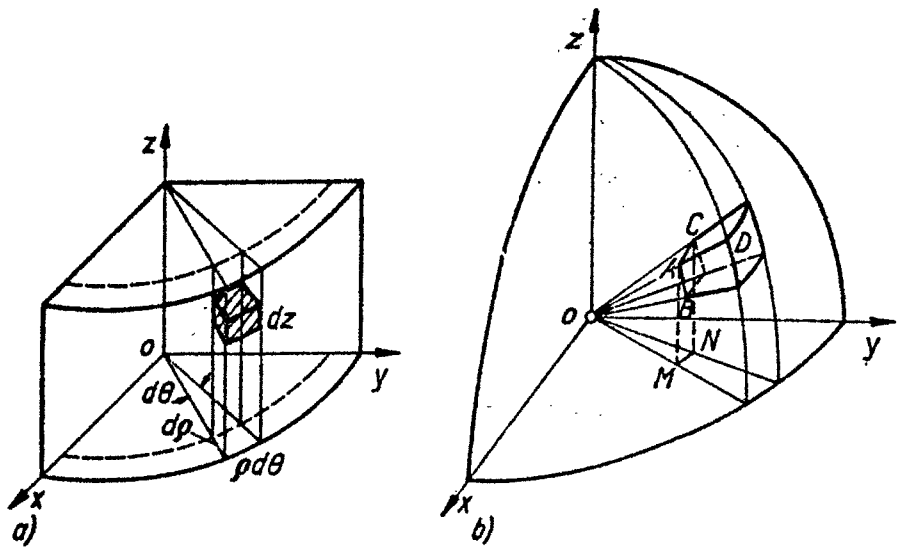

Abb. 112

Analog betrachten wir im Fall von *Kugelkoordinaten* ein Gebiet (im x, y, z-Raum), das von Kugelflächen vom Radius r und $r + dr$, Kegelflächen φ und $\varphi + d\varphi$ und Halbebenen θ und $\theta + d\theta$ begrenzt wird (Abb. 112b). Auch dieses Gebiet kann man als rechtwinkliges Parallelepiped auffassen, und zwar mit den Seiten $AD = dr$, $AB = r d\varphi$ und schließlich AC. Der Bogen AC ist gleich seiner Projektion MN. MN hat den Radius $OM = r \sin \varphi$ und entspricht dem Zentriwinkel $d\theta$. Daher ist $AC = r \sin \varphi \, d\theta$. Auf Grund dessen ist das Volumen des betrachteten Gebiets gleich $r^2 \sin \varphi \, dr d\theta d\varphi$, und die Funktionaldeterminante ist $r^2 \sin \varphi$.

Diese beiden Ergebnisse, die durch elementargeometrische Überlegungen gefunden worden sind, stimmen mit den Aussagen in Nr. 656, Beispiel 1 und 2, überein.

660. Beispiele.

1. Man berechne das Volumen des Körpers, der von folgender Fläche begrenzt wird:
(a) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$, (b) $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$, (c) $(x^2+y^2+z^2)^n=x^{2n-1}$.

Lösung. (a) Der Körper liegt symmetrisch zur y, z- und zur z, x-Ebene, denn x und y treten in der Gleichung nur im Quadrat auf. Da die linke Seite der Gleichung immer positiv ist, ist notwendigerweise auch $z\geqq 0$, d. h., der ganze Körper liegt oberhalb der x, y-Ebene. Diese Bemerkungen erlauben es, sich auf die Berechnung des Volumens des Viertels des Körpers zu beschränken, das im ersten Oktanten liegt.

Der Ausdruck $x^2+y^2+z^2$ in der Gleichung legt es nahe, zu Kugelkoordinaten überzugehen. Setzen wir in die Gleichung (a) der Fläche die Ausdrücke

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=r\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=r\cos\varphi$$

ein, so kommen wir zur Gleichung der Fläche in Kugelkoordinaten: $r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$. Da der erste Oktant durch die Ungleichungen $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$, $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ charakterisiert wird, erhalten wir unter Berücksichtigung des Wertes $J=r^2\sin\varphi$ der Funktionaldeterminante (Nr. 656, Beispiel 2)

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi\,dr=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{3}\pi a^3.$$

(b) Der Körper liegt im ersten, dritten, sechsten und achten Oktanten. Diese Oktanten werden durch die Ungleichungen

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad z\geqq 0;\qquad x\leqq 0,\quad y\leqq 0,\quad z\geqq 0;$$
$$x\leqq 0,\quad y\geqq 0,\quad z\leqq 0;\qquad x\geqq 0,\quad y\leqq 0,\quad z\leqq 0$$

charakterisiert. Der Körper besteht aus vier Teilen, die paarweise bezüglich einer der Koordinatenachsen symmetrisch sind (weder die linke noch die rechte Seite der Gleichung ändert sich, wenn man gleichzeitig das Vorzeichen zweier beliebiger der Größen x, y, z ändert).

Durch Übergang zu Kugelkoordinaten erhalten wir

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}}r^2\sin\varphi\,dr$$
$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^3}{6}.$$

(c) Die Formeln für den Übergang zu Kugelkoordinaten nimmt man hier am einfachsten in der Gestalt

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi\cos\theta,\qquad z=r\sin\varphi\sin\theta.$$

Die Gleichung der Fläche hat dann die Form $r=\cos^{2n-1}\varphi$. Das Ergebnis lautet

$$V=\frac{\pi}{3(3n-1)}.$$

2. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von der folgenden Fläche begrenzt wird:
(a) $(x^2+y^2)^2+z^4=y$, (b) $(x^2+y^2)^3+z^6=3z^3$.

(a) Lösung. Obwohl der Typ der Aufgabe von dem der vorigen etwas verschieden ist, ist es auch hier günstig, Kugelkoordinaten anzuwenden. Die Gleichung der Fläche erhält die Gestalt

$$r^3(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)=\sin\varphi\sin\theta.$$

In Anbetracht der Symmetrie erhalten wir

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sin^4\varphi+\sin^4\varphi}}}r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}=\frac{4}{3}\int_0^{\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\,dt=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

(b) Hinweis. $V=2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{\sin^6\varphi+\cos^6\varphi}=\pi\int_0^1\frac{u\,du}{3u^2-3u+1}$

(wenn man $u=\cos^2\varphi$ setzt).

Lösung. $V=\frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

3. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von folgender Fläche begrenzt wird:

(a) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2y}{h^3}$; (b) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$;

(c) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c}$.

Lösung. (a) Kommt in der Gleichung der Fläche der Ausdruck $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ vor, so ist oft der Übergang zu *verallgemeinerten Kugelkoordinaten*[1]) nach den Formeln

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=br\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=cr\cos\varphi$$

nützlich; für die Funktionaldeterminante gilt in diesem Fall $J=abcr^2\sin\varphi$. Es gilt (in Anbetracht der Symmetrie)

$$V=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a^2b\sin^3\varphi\cos^2\theta\sin\theta/h^3}abcr^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{4}{3}\frac{a^7b^4c}{h^9}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^{10}\varphi\,d\varphi,$$

so daß schließlich

$$V=\frac{\pi}{192}\frac{a^7b^4c}{h^9}$$

wird.

(b) $V=\frac{\pi^2}{4}abc$. (c) $V=\frac{\pi}{60}abc$.

4. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von den Flächen $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $z=0$, $y=0$ und $y=x$ begrenzt wird.

Hinweis. Diese Flächen legen für die Kugelkoordinaten folgende Grenzen fest:

$$1\leqq r\leqq 4;\qquad \frac{\pi}{4}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2},\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\quad\left(\text{oder }\pi\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{4}\right).$$

Der Körper besteht aus zwei getrennten Teilen (im ersten und dritten Oktanten).

Lösung. $V=\frac{21\sqrt{2}\pi}{4}$.

---

[1]) Die den verallgemeinerten Polarkoordinaten in der Ebene entsprechen.

5. Man berechne das Volumen des Körpers, der von der Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$$

begrenzt wird.

Lösung. Wir führen durch die Formeln

$$x=ar\sin^3\varphi\cos^3\theta,\qquad y=br\sin^3\varphi\sin^3\theta,\qquad z=cr\cos^3\varphi$$
$$(0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\varphi\leqq\pi,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

neue Koordinaten ein. In diesem Fall gilt für die Funktionaldeterminante

$$J=9abcr^2\sin^5\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta\,,$$

so daß

$$V=9abc\int_0^1 r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin^5\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{35}\pi abc$$

wird.

6. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von den Flächen

$$(x+y+z)^2=ay,\qquad x=0,\qquad y=0,\qquad z=0$$

begrenzt wird.

Hinweis. Man setze

$$x=r\sin^2\varphi\cos^2\theta,\qquad y=r\sin^2\varphi\sin^2\theta,\qquad z=r\cos^2\varphi$$
$$\left(r\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2},\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

Für die Funktionaldeterminante gilt

$$J=4r^2\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,.$$

Lösung. $V=\dfrac{a^3}{60}$.

7. Man bestimme das Volumen des schiefwinkligen Parallelepipeds, das von den sechs Ebenen

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1\,,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2\,.$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$$

begrenzt wird, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß die Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist.

Lösung. Wir führen die neuen Veränderlichen

$$\xi=a_1x+b_1y+c_1z\,,$$
$$\eta=a_2x+b_2y+c_2z\,,$$
$$\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$$
$$(-h_1\leqq\xi\leqq h_1,\ -h_2\leqq\eta\leqq h_2,\ -h_3\leqq\zeta\leqq h_3)$$

ein. Die Determinante $\dfrac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(\xi,\eta,\zeta)}$ findet man am einfachsten durch die Feststellung, daß sie gleich dem reziproken Wert der Determinante $\dfrac{\mathrm{D}(\xi,\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(x,y,z)}$ ist. Wir erhalten

$$V=\frac{1}{|\Delta|}\int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}\xi\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}\eta\int_{-h_3}^{h_3}\mathrm{d}\zeta=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}\,.$$

8. Man bestimme das Volumen des Körpers, der begrenzt wird
(a) von dem Zylinder

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2=R^2$$

und den Ebenen

$$a_3x+b_3y+c_3z=0 \quad \text{und} \quad a_3x+b_3y+c_3z=h;$$

(b) von dem Ellipsoid

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=R^2$$

(unter der gleichen Voraussetzung wie oben, daß die Determinante $\Delta \neq 0$ ist).

Lösung. (a) $V=\dfrac{\pi R^2 h}{|\Delta|}$; (b) $V=\dfrac{4}{3}\dfrac{\pi R^3}{|\Delta|}$.

9. Die Anwendung von *Zylinderkoordinaten* zur Berechnung des Volumens eines Körpers führt auf eine interessante Formel.

Wir betrachten einen Körper (V) mit einer stückweise glatten Oberfläche und setzen voraus, daß eine von der z-Achse ausgehende Halbebene, die $\theta=\text{const}$ entspricht, den Körper in irgendeiner ebenen Figur (Q_θ) schneidet, wenn θ die Werte von α bis β durchläuft (Abb. 113). Dann ist

$$V=\iiint\limits_{(V)} \varrho\,d\varrho\,d\theta\,dz=\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \iint\limits_{(Q_\theta)} \varrho\,d\varrho\,dz\,,$$

wobei man die Figur (Q_θ) zweckmäßigerweise auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem ϱ, z bezieht, das sich mit der erwähnten Halbebene um die z-Achse dreht.[1])

Nun sieht man leicht, daß das Flächenintegral $\iint\limits_{(Q_\theta)} \varrho\,d\varrho\,dz$ das statische Moment der Figur (Q_θ) in bezug auf die z-Achse ist, welches gleich dem Produkt des Inhalts $Q(\theta)$ dieser Figur und dem Abstand $\varrho_C(\theta)$ ihres Schwerpunkts C von der z-Achse ist:

$$\iint\limits_{(Q_\theta)} \varrho\,d\varrho\,dz=Q(\theta)\,\varrho_C(\theta)\,.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Volumenformel ein, so erhalten wir schließlich

$$V=\int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\theta)\,\varrho_C(\theta)\,d\theta\,.$$

Diese Formel wurde von P. P. Kuskow angegeben. Sie ist besonders geeignet zur Bestimmung des Volumens von Körpern, die sich bei einer Schraubenbewegung einer (konstanten oder veränderlichen) ebenen Figur ergeben, wie Gewinde, Federn usw.

Ist der Körper (V) einfach ein *Rotationskörper* einer unveränderlichen Figur (Q), die die z-Achse nicht schneidet, um diese Achse, so ist $Q=\text{const}$, $\varrho_C=\text{const}$, $\alpha=0$, $\beta=2\pi$, und die Formel nimmt die Gestalt

$$V=Q\cdot 2\pi\varrho_C$$

an. Das ist die bekannte Guldinsche Regel (Nr. 351), die besagt, daß *das Volumen eines Rotationskörpers einer ebenen Figur, die die Rotationsachse nicht schneidet, gleich dem Produkt des Inhalts dieser Figur mit der Länge des Kreises ist, den der Schwerpunkt dieser Figur beschreibt.* Also ist die Formel von Kuskow eine natürliche Verallgemeinerung dieser klassischen Regel (man kann sie umgekehrt leicht aus dieser erhalten).

10. Das Volumen des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c)$$

---

[1]) Statt daß wir die mit ihr identische Figur auf die unbewegliche ϱ, z-Ebene im ϱ, θ, z-Raum beziehen.

ist mehrfach berechnet worden; es ist gleich $\frac{4}{3}\pi abc$. Wir wollen nun versuchen, zur Berechnung dieses Volumens elliptische Koordinaten λ, μ, ν (Nr. 656, Beispiel 4) heranzuziehen. Setzt man

$$h^2 = a^2 - b^2, \qquad k^2 = a^2 - c^2,$$

so erhält man das gegebene Ellipsoid selbst für $\lambda = a$.

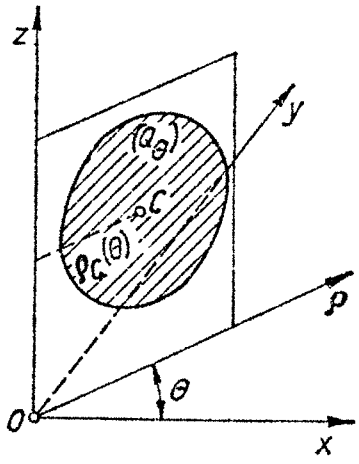

Abb. 113

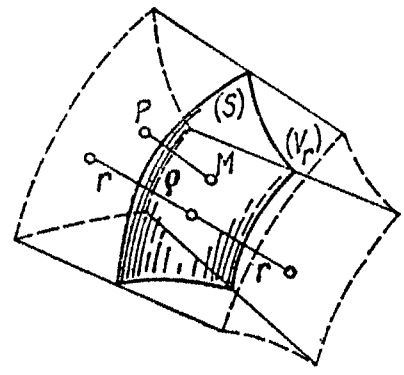

Abb. 114

Dem ersten Oktanten des Ellipsoids entsprechen die Werte von λ zwischen k und a, von μ zwischen h und k und von ν zwischen 0 und h. Daher ist

$$\frac{1}{8}V = \int_0^h d\nu \int_h^k d\mu \int_k^a \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-k^2)(\mu^2-h^2)(k^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)}}\, d\lambda .$$

Nun ist aber, wie oben angegeben, dieses Volumen gleich

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi abc = \frac{\pi}{6}\, a\sqrt{(a^2-h^2)(a^2-k^2)} .$$

Das ist also der Wert des oben hingeschriebenen komplizierten Integrals; diesen Wert auf anderem Wege zu finden, würde bedeutende Schwierigkeiten bereiten.

Zum Abschluß geben wir zwei interessante Anwendungen der grundlegenden Formel (8), die den Zusammenhang zwischen den Begriffen des *Inhalts einer gekrümmten Fläche* und der *Länge einer Kurve* und dem im Grunde genommen einfacheren Begriff des *Volumens eines Körpers* erkennen lassen.

11. Gegeben sei eine glatte Fläche (S):

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v) ,$$

wobei diese Funktionen im Gebiet (Δ), das von den Parametern u, v durchlaufen wird, sogar stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben sollen.

Auf der Normale in jedem Punkt M der Fläche tragen wir symmetrisch nach beiden Seiten der Fläche eine Strecke der Länge $2r > 0$ ab. Diese Strecken erfüllen einen Körper (V_r),[1]) in dem die vorgegebene Fläche enthalten ist (Abb. 114).

Bezeichnen wir mit x, y, z die Koordinaten eines Flächenpunktes M und mit X, Y, Z die Koordinaten eines beliebigen Punktes P auf dem erwähnten Abschnitt der Normalen in M, so gilt offenbar

$$X = x + \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\varrho, \qquad Y = y + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\varrho, \qquad Z = z + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\varrho ,$$

[1]) Man kann beweisen, daß *für hinreichend kleines r* diese Strecken einander nicht schneiden, so daß jeder Punkt des Körpers auf einer einzigen Normalen liegt.

wobei A, B, C die übliche Bedeutung haben und ϱ den Abstand MP bezeichnet (mit dem entsprechenden Vorzeichen, so daß $-r \leqq \varrho \leqq r$ gilt). Die Parameter u, v, ϱ sind also krummlinige Koordinaten für die Punkte des erwähnten Gebiets (V_r). Nach Formel (8) gilt für das Volumen V_r dieses Körpers

$$V_r = \int\int\int \left| \frac{\mathrm{D}(X, Y, Z)}{\mathrm{D}(u, v, \varrho)} \right| du dv d\varrho .$$

Nun ist aber

$$\frac{\mathrm{D}(X, Y, Z)}{\mathrm{D}(u, v, \varrho)} = \begin{vmatrix} x_u + \alpha_1(u, v)\,\varrho & y_u + \alpha_2(u, v)\,\varrho & z_u + \alpha_3(u, v)\,\varrho \\ x_v + \beta_1(u, v)\,\varrho & y_v + \beta_2(u, v)\,\varrho & z_v + \beta_3(u, v)\,\varrho \\ \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{A^2+B^2+C^2} + \gamma_1(u, v)\,\varrho + \gamma_2(u, v)\,\varrho^2,$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ stetige Funktionen von u und v bezeichnen. Offenbar erhält dieser Ausdruck für hinreichend kleines r (weil $|\varrho| \leqq r$ ist) das Vorzeichen des ersten Summanden, d. h., er wird positiv. Daher ist

$$V_r = \int_{-r}^{r} d\varrho \iint_{(\Delta)} \{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \gamma_1\varrho + \gamma_2\varrho^2\}\, du dv$$

$$= 2r \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du dv + Lr^3 \qquad (L = \text{const}) .$$

Hieraus folgt leicht

$$\lim_{r \to 0} \frac{V_r}{2r} = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, du dv ,$$

und dieses Integral ist, wie wir sehen, der Inhalt S der gekrümmten Fläche. *Also kann man vom Volumen ausgehend diesen Inhalt erhalten.*

12. Gegeben sei eine glatte Kurve

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq T) ,$$

wobei die Funktionen x, y, z stetige zweite Ableitungen haben sollen. In der Ebene, die in einem beliebigen Punkt M der Kurve senkrecht zu dieser steht, stellen wir uns eine Kreisscheibe vom Radius $r > 0$ um M vor. Alle diese Kreisscheiben bilden einen Körper (V_r),[1]) der die Kurve enthält.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß auf dem betrachteten Abschnitt der Kurve immer $x'^2 + y'^2 > 0$ ist. Dann können wir als rechtwinkliges Koordinatensystem in der erwähnten zur Kurve senkrechten Ebene die zwei zueinander senkrechten Normalen mit den folgenden Richtungskosinus wählen:

$$\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad -\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \qquad 0$$

und

$$\frac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad \frac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \qquad -\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} .$$

[1]) Auch hier kann man beweisen, daß (wieder *für hinreichend kleines* r) diese Kreisscheiben paarweise durchschnittsfremd sind, so daß jeder Punkt des Körpers nur zu einer dieser Kreisschreiben gehört.

Bezeichnen wir die entsprechenden Koordinaten mit u und v, so können wir die Koordinaten X, Y, Z eines beliebigen Punktes P des Körpers (V_r) so ausdrücken:

$$X = x + \frac{y'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + \frac{x'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$Y = y - \frac{x'u}{\sqrt{x'^2+y'^2}} + \frac{y'z'v}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

$$Z = z - \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\,v.$$

Hier spielen t, u, v die Rolle von krummlinigen Koordinaten, so daß

$$V_r = \int\int\int \left| \frac{\mathrm{D}(X, Y, Z)}{\mathrm{D}(t, u, v)} \right| \mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

wird.

Wie man leicht sieht, gilt

$$\frac{\mathrm{D}(X, Y, Z)}{\mathrm{D}(t, u, v)} = \begin{vmatrix} x' + \alpha_1(t)\,u + \beta_1(t)\,v & y' + \alpha_2(t)\,u + \beta_2(t)\,r & z' + \alpha_3(t)\,u + \beta_3(t)\,v \\ \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & -\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} & 0 \\ \dfrac{x'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & \dfrac{y'z'}{\sqrt{x'^2+y'^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} & -\dfrac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} + \alpha(t)\,u + \beta(t)\,v,$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \beta$ stetige Funktionen von t sind. Dieser Ausdruck wird für hinreichend kleines r positiv (da $|u|, |v| \leqq r$ gilt). Daraus folgt

$$V_r = \int_{t_0}^{T} \mathrm{d}t \iint_{u^2+v^2 \leqq r^2} \{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} + \alpha(t)\,u + \beta(t)\,v\}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \pi r^2 \int_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t + \iint_{u^2+v^2 \leqq r^2} (Ku + Lv)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

wobei K und L Konstante sind. Das erste Integral ist, wie wir sehen, die Bogenlänge s, das zweite Integral dagegen wird gleich 0. Daher gilt

$$V_r = \pi r^2 s, \qquad s = \frac{V_r}{\pi r^2}.$$

Die Bogenlänge ergibt sich also sofort aus dem Volumen, sogar ohne Grenzübergang.

661. Variablentransformation in Raumintegralen. Mit Hilfe des Ausdrucks für das Volumen in krummlinigen Koordinaten kann man leicht auch eine allgemeine Formel für die Variablentransformation in Raumintegralen herleiten.

Zwischen den Gebieten (D) und (Δ) im x, y, z- bzw. ξ, η, ζ-Raum bestehe eine Zuordnung, wie sie in Nr. 655 beschrieben wurde. Unter der Annahme, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind, unter denen Formel (8) hergleitet worden ist, zeigen wir nun, daß folgende Beziehung gilt:

$$\iiint_{(D)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))\,|J(\xi, \eta, \zeta)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{10}$$

$$\text{mit} \quad J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta)}.$$

Sie ist der Formel für die Variablentransformation in Flächenintegralen völlig analog. Dabei setzen wir die Funktion $f(x, y, z)$ als stetig voraus oder lassen höchstens Unstetigkeiten längs endlich vielen stückweise glatten Flächen zu (in jedem Fall aber nehmen wir an, daß f beschränkt bleibt). Also unterliegt die Existenz der beiden Integrale in Gleichung (10) keinem Zweifel; man hat nur die Gleichheit nachzuweisen.

Zum Beweis verfahren wir genauso wie in Nr. 609. Wir zerlegen die Gebiete (D) und (Δ) durch stückweise glatte Flächen in (einander entsprechende) Elemente (D_i) und (Δ_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und wenden auf jedes Paar von Gebieten (D_i), (Δ_i) die Formel (9) an. Wir erhalten

$$D_i = |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)|\, \Delta_i\,, \tag{11}$$

wobei $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$ ein gewisser Punkt des Gebiets Δ_i ist, der nicht mehr unserer Wahl unterliegt. Wir wählen den entsprechenden Punkt $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ des Gebiets (D_i), d. h., wir setzen

$$\bar{x}_i = x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \qquad \bar{y}_i = y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \qquad \bar{z}_i = z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)\,, \tag{12}$$

und bilden die Integralsumme für das erste Integral in (10):

$$\sigma = \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\, D_i\,.$$

Setzen wir hier an Stelle von $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ die Ausdrücke (12) und an Stelle von D den Ausdruck (11) ein, so kommen wir zu der Summe

$$\sigma = \sum_i f(x(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), y(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), z(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i))\, |J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)|\, \Delta_i\,,$$

die offenbar eine Integralsumme für das zweite Integral in (10) ist.

Streben die Durchmesser der Gebiete (Δ_i) gegen 0, so streben infolge der Stetigkeit der Zuordnung auch die Durchmesser der Gebiete (D_i) gegen 0. Die Summe σ muß gleichzeitig gegen beide Integrale konvergieren. Daraus folgt die geforderte Gleichheit.

Wie bei Flächenintegralen gilt (10) auch dann, wenn die oben beim Beweis von (8) formulierten Voraussetzungen in einzelnen Punkten oder längs endlich vielen stückweise glatten Kurven und Flächen verletzt sind, sobald die Funktionaldeterminante beschränkt bleibt.

Man kann die Bedingungen für Formel (10) noch weiter abschwächen, wenn man auch uneigentliche Integrale zuläßt. Wir überlassen es dem Leser, die Darlegungen aus Nr. 616 auf den vorliegenden Fall zu übertragen. Wir betonen nochmals, daß unter den dort angegebenen Bedingungen die Formel unter der Voraussetzung gilt, daß eines der beiden Integrale in (10) existiert; daraus folgt bereits die Existenz des anderen.

Zum Abschluß bemerken wir, daß die Formeln (8) und (10) auch ohne die Absolutstriche bei der Funktionaldeterminante geschrieben werden könnten. Um das zu ermöglichen, müßte man den Begriff des orientierten Körpers einführen (im Zusammenhang mit der Orientierung seiner Oberfläche) und dann dem Volumen des Körpers bzw. einem Integral über den Körper je nach dessen Orientierung das eine oder das andere Vorzeichen vorschreiben. Die Einzelheiten überlassen wir dem Leser, wobei wir ihn auf Nr. 616 und die Bemerkung 1° in Nr. 658 verweisen.

662. Beispiele.

1. Man berechne das Integral

$$I=\iiint\limits_{(V)}\frac{xyz}{x^2+y^2}\,dxdydz$$

über den Körper (V), der oben von der Fläche $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$ und unten von der Ebene $z=0$ begrenzt wird.

Lösung. Wir gehen zu Kugelkoordinaten über. Die Gleichung der Fläche erhält die Gestalt $r^2=a^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta$, während sich das Integral infolge der Symmetrie des Körpers bezüglich der z-Achse folgendermaßen transformiert:

$$I=2\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^3\theta\,d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{a^4}{144}.$$

2. Man berechne das Integral

$$H=\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqq 0\\ x^2+y^2+z^2\leqq R^2}}\frac{xyzdxdydz}{\sqrt{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2}}\qquad(\alpha>\beta>\gamma>0)$$

(vgl. Nr. 648, Beispiel 11).

Lösung. In Kugelkoordinaten ist

$$H=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{R}\frac{r^4\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,drd\varphi d\theta}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+\gamma^2\cos^2\varphi}}.$$

Es ist zweckmäßig, die Substitution $\sin^2\varphi=u$, $\sin^2\theta=v$ durchzuführen. Dann wird

$$H=\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\int_0^R r^4\frac{udrdudv}{\sqrt{\alpha^2u(1-v)+\beta^2uv+\gamma^2(1-u)}}$$

$$=\frac{R^5}{20}\int_0^1 udu\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{[\gamma^2+(\alpha^2-\gamma^2)u]+(\beta^2-\alpha^2)uv}}=\frac{R^5}{15}\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

3. Man berechne das Integral

$$K=\iiint\limits_{(V)}\frac{xyzdxdydz}{x^2+y^2+z^2},$$

wobei (V) das dreiachsige Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1$ ist.

Lösung. Gehen wir mit Hilfe der Formeln

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\qquad y=br\sin\varphi\sin\theta,\qquad z=cr\cos\varphi,\qquad J=abcr^2\sin\varphi$$

zu verallgemeinerten Kugelkoodinaten über, so läßt sich das Integral in der Gestalt

$$K=a^2b^2c^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,drd\varphi d\theta}{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}$$

schreiben. Wir substituieren $\sin^2\varphi=u$, $\sin^2\theta=v$. Das endgültige Ergebnis ist

$$K=\frac{a^2b^2c^2}{8(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\left\{b^2c^2\ln\frac{c}{b}+c^2a^2\ln\frac{a}{c}+a^2b^2\ln\frac{b}{a}\right\}.$$

4. Man berechne das mehrfache Integral

$$\int_1^\infty dz \int_1^\infty y\,dy \int_0^{1/yz} e^{xyz}x^2\,dx\,.$$

Lösung. Wir ersetzen es durch das Integral

$$\iiint\limits_{\substack{x\geqq 0,y,z\geqq 1\\ xyz\leqq 1}} e^{xyz}x^2y\,dx\,dy\,dz$$

und führen dann die Substitution

$$x=u,\qquad y=\frac{u+v}{u},\qquad z=\frac{u+v+w}{u+v},\qquad J=\frac{1}{u\,(u+v)}$$

durch. Das Integral reduziert sich auf

$$\iiint\limits_{\substack{u,v,w\geqq 0\\ u+v+w\leqq 1}} e^{u+v+w}\,du\,dv\,dw\,.$$

Dieses Integral läßt sich leicht berechnen; es folgt als Ergebnis $\frac{e}{2}-1$.

5. Wir kommen auf die Berechnung des Doppelintegrals

$$B=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

zurück (vgl. Nr. 617, Beispiel 21). Da für $b>0$

$$\int_0^\infty e^{-\theta^2-\frac{b}{4\theta^2}}\,d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\sqrt{b}}$$

ist (Nr. 497, Beispiel 8), erhalten wir, wenn wir $b=a^2\,(x^2+y^2)$ setzen,

$$e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\theta^2-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}}\,d\theta\,.$$

Setzen wir das in das Integral B ein und ändern die Integrationsreihenfolge, so finden wir

$$B=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\theta^2}d\theta\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{a^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}}\cos x\xi\cos y\eta\,dx\,dy$$

oder, wenn wir zu den Veränderlichen $u=\frac{ax}{2\theta}$ und $v=\frac{ay}{2\theta}$ übergehen,

$$B=\frac{8}{\sqrt{\pi}\,a^2}\int_0^\infty e^{-\theta^2}\theta^2 d\theta\left\{\int_0^\infty e^{-u^2}\cos\frac{2\theta u\xi}{a}\,du\int_0^\infty e^{-v^2}\cos\frac{2\theta v\eta}{a}\,dv\right\}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{\pi}\,a^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{a^2}(a^2+\xi^2+\eta^2)}\theta^2 d\theta$$

[Nr. 519, Beispiel 6(a)]. Durch partielle Integration erhält man nun leicht

$$B=\frac{\pi}{2}\,\frac{a}{(a^2+\xi^2+\eta^2)^{3/2}}\,.$$

Daß man die Reihenfolge der Integrationen ändern kann, beruht auf der Existenz des Raumintegrals.

6. Man bestimme die Masse und die Lage des Schwerpunkts der Kugel

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 2az$$

bei der Massendichte

$$\varrho = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

(vgl. Nr. 650, Beispiel 5).

Hinweis. Man gehe zu Kugelkoordinaten über.

7. Man bestimme die Anziehungskraft, die von einer homogenen Kugel auf einen beliebigen Punkt des Raums ausgeübt wird (vgl. Nr. 650, Beispiel 9).

Lösung. Durch Übergang zu Kugelkoordinaten finden wir

$$F_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\varrho r^2 (r\cos\varphi - a)\sin\varphi \, dr d\varphi d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Nun haben wir aber bei der Bestimmung der Anziehungskraft einer Kugelschicht bereits den Wert des zweifachen Integrals

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(r\cos\varphi - a)\sin\varphi \, d\varphi d\theta}{(r^2+a^2-2ar\cos\varphi)^{3/2}} = \begin{cases} 0 & \text{für } a<r, \\ -\dfrac{4\pi}{a^2} & \text{für } a>r \end{cases}$$

gefunden. Daher ist für $a>R$

$$F_z = -\frac{4\pi\varrho}{a^2}\int_0^{R} r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \cdot \frac{1}{a^2},$$

für $a<R$

$$F_z = -\frac{4\pi\varrho}{a^2}\int_0^{a} r^2 dr = -\frac{4}{3}\pi\varrho a.$$

8. Man bestimme das Potential einer homogenen Kugel in einem beliebigen Punkt (vgl. Nr. 650, Beispiel 12).

Hinweis. Man gehe zu Kugelkoordinaten über und benutze die Ergebnisse von Beispiel 12 aus Nr. 633.

9. Man löse erneut die Aufgaben bezüglich der Anziehung und des Potentials einer Kugel bei der allgemeineren Massendichte $\varrho = f(r)$, wobei f eine beliebige Funktion des Abstands des Punktes vom Mittelpunkt ist.

Wir bemerken, daß die Schlußfolgerungen, die wir in Nr. 650, Beispiel 9 und 12, formuliert haben, auch im vorliegenden Fall gültig bleiben.

10. Man bestimme die Trägheitsmomente I_z und I_x des Torus (vgl. Nr. 650, Beispiel 13).

Hinweis. Berücksichtigt man, daß sich der Torus durch Rotation eines Kreises ergibt (vgl. Abb. 108), so kann man die Lage eines Punktes in diesem Körper in natürlicher Weise erstens durch den Winkel φ, den der Meridionalschnitt mit der x, z-Ebene bildet, und zweitens durch die gewöhnlichen Polarkoordinaten ϱ, θ in diesem Schnitt bestimmen.

Dann ist

$$x = (d+\varrho\cos\theta)\cos\varphi, \qquad y = (d+\varrho\cos\theta)\sin\varphi, \qquad z = \varrho\sin\theta,$$
$$J = \varrho\,(d+\varrho\cos\theta),$$

wobei ϱ die Werte von 0 bis a durchläuft und φ und θ die Werte von 0 bis 2π durchlaufen.

11. Die Berechnung des Potentials des homogenen ($\varrho = 1$) Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1 \qquad (a>b>c)$$

in seinem Mittelpunkt führt auf ein elliptisches Integral.

Wir führen Kugelkoordinaten ein, nehmen aber diesmal die x-Achse als Polarachse,

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi\cos\theta, \qquad z=r\sin\varphi\sin\theta,$$

und erhalten

$$W=\iiint\limits_{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leqq 1}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=8\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{1/A}r\,dr$$

$$=4\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{B\cos^2\theta+C\sin^2\theta}$$

mit

$$A=\sqrt{\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{b}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\sin\theta}{c}\right)^2},$$

$$B=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}, \qquad C=\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{c^2}.$$

Das innere Integral ist gleich $\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}$. Setzen wir weiter $\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\cos\varphi=t$, so erhalten wir das elliptische Integral erster Gattung

$$W=\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}\int\limits_0^{\sqrt{a^2-c^2}/a}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t^2\right)}},$$

das seinerseits durch die Substitution $t=\sin\lambda$ auf die Legendresche Form

$$W=\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}\int\limits_0^{\lambda_0}\frac{d\lambda}{\sqrt{1-k_0^2\sin^2\lambda}}=\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}F(\lambda_0, k_0)$$

gebracht werden kann, wobei der Kürze halber $\lambda_0=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$ und $k_0=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$ gesetzt worden ist.

663. Die Anziehungskraft und das Potential eines Körpers in einem inneren Punkt. Wir kehren nun zu den allgemeinen Ausdrücken (17) und (18) aus Nr. 649 für die achsenparallelen Komponenten der Anziehungskraft eines Körpers auf einen Punkt $A(\xi, \eta, \zeta)$ und das Potential des Körpers in diesem Punkt zurück, befassen uns aber speziell mit dem Fall, daß der Punkt A selbst zu dem Körper gehört. Das wird wieder Anlaß dazu geben, eine Koordinatentransformation zu benutzen.

Man kann sich zunächst leicht davon überzeugen, daß die erwähnten uneigentlichen Integrale existieren. Es genügt, zu Kugelkoordinaten mit dem Pol A überzugehen, um diese Integrale in eigentliche zu transformieren. Wenn wir aus dem Körper (V) eine Kugel (v_0) mit dem Radius r_0 und dem Mittelpunkt A herausschneiden, so erhalten wir

$$\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\varrho\,dv}{r}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r_0}\varrho\,\frac{r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta}{r}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r_0}\varrho r\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta;$$

analog gilt

$$\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho\,(x-\xi)}{r^3}\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_0} \varrho\cos\theta\sin^2\varphi\,dr d\varphi d\theta\,,$$

usw. Die hier auftretenden Integranden sind stetig.[1])

Sehr viel feinere Überlegungen erfordert der Beweis der Beziehungen (19) aus Nr. 649 für den vorliegenden Fall. Hier erweisen sich die Kugelkoordinaten ebenfalls als nützlich.

Zunächst ergeben sich aus den vorigen Gleichungen die Ungleichungen

$$\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho dv}{r} \leqq 2\pi L r_0^2 \tag{13}$$

und

$$\left|\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho\,(x-\xi)\,dv}{r^3}\right| \leqq 2\pi L r_0 \qquad (L=\max\varrho)\,, \tag{14}$$

die wir später benutzen werden.

Wir lassen nun ξ um h wachsen und betrachten neben dem Punkt $A(\xi, \eta, \zeta)$ den Punkt $A_1(\xi+h, \eta, \zeta)$. Wie früher bezeichnen wir mit r den Abstand AM vom Punkt A zu einem beliebigen Punkt $M(x, y, z)$ des Körpers und mit r_1 den Abstand A_1M. Es muß bewiesen werden, daß für $h\to 0$ die Differenz

$$\Delta = \frac{1}{h}\left\{\iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho dV}{r_1} - \iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho dV}{r}\right\} - \iiint\limits_{(V)} \frac{\varrho\,(x-\xi)}{r^3}\,dV$$

gegen 0 strebt.

Wir betrachten die Kugel (v_0) vom Radius $2|h|$ um A (Abb. 115); dabei sei h so klein, daß (v_0) ganz in (V) liegt. Dann wird Δ eine Summe von vier Gliedern:

$$\Delta = \frac{1}{h}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho dv}{r_1} - \frac{1}{h}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho dv}{r} - \iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho\,(x-\xi)}{r^3}\,dv$$
$$+ \iiint\limits_{(V)-(v_0)} \varrho\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right) - \frac{x-\xi}{r^3}\right\} dV\,.$$

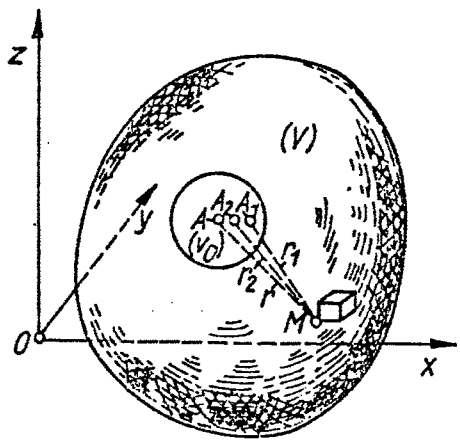

Abb. 115

Das zweite und das dritte Glied lassen sich sofort mit Hilfe der Ungleichungen (13) und (14) für $r_0 = 2|h|$ abschätzen:

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho dv}{r} \leqq \frac{2\pi L(2h)^2}{|h|} = 8\pi L|h|, \qquad \left|\iiint\limits_{(v_0)} \frac{\varrho\,(x-\xi)}{r^3}\,dv\right| \leqq 2\pi L\cdot 2|h| = 4\pi L|h|\,.$$

[1]) Die Dichte ϱ nehmen wir als stetige Funktion der Koordinaten an.

Um das erste Glied abzuschätzen, umgeben wir den Punkt A_1 mit einer Kugel (v_1) vom Radius $3|h|$; die Kugel (v_0) ist ganz in ihr enthalten. Dann erhalten wir, indem wir wieder eine Ungleichung der Form (13) benutzen,

$$\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_0)}\frac{\varrho\,dv}{r_1}\leqq\frac{1}{|h|}\iiint\limits_{(v_1)}\frac{\varrho\,dv}{r_1}\leqq\frac{2\pi L(3h)^2}{|h|}=18\pi L|h|\,.$$

Wir wenden uns schließlich dem letzten Glied zu. Führen wir die Funktion $f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{r}$ ein, so ist der Ausdruck in den geschweiften Klammern nichts anderes als

$$\frac{f(\xi+h,\eta,\zeta)-f(\xi,\eta,\zeta)}{h}-f_\xi(\xi,\eta,\zeta)\,,$$

was nach der Taylorschen Formel durch $\frac{h}{2}f_{\xi\xi}(\xi+\theta h,\eta,\zeta)\,(0<\theta<1)$ ersetzt werden kann. In unserem Fall ist aber

$$f_{\xi\xi}(\xi,\eta,\zeta)=\frac{3(x-\xi)^2}{r^5}-\frac{1}{r^3};$$

daher ist

$$|f_{\xi\xi}(\xi+\theta h,\eta,\zeta)|\leqq\frac{4}{r_2^3}\,,$$

wobei r_2 der Abstand A_2M des Punktes M vom Punkt $A_2(\xi+\theta h,\eta,\zeta)$ ist.

Aus dem Dreieck AMA_2 (vgl. Abb. 115) ergibt sich $A_2M>AM-AA_2$. Nun liegt aber der Punkt M außerhalb der Kugel (v_0) vom Radius $2|h|$, und AA_2 ist offenbar kleiner als $|h|$. Daher gilt $AA_2<\frac{1}{2}AM$ und $A_2M>\frac{1}{2}AM$, also $r_2>\frac{1}{2}r$. Berücksichtigen wir das alles, so kommen wir zu der Abschätzung

$$\left|\iiint\limits_{(V)-(v_0)}\varrho\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)-\frac{x-\xi}{r^3}\right\}dV\right|\leqq 16L|h|\cdot\iiint\limits_{(V)-(v_0)}\frac{dV}{r^3}\,.$$

Wir wählen nun eine Kugel (V_1) mit dem Mittelpunkt A und einem so großen Radius R, daß der Körper (V) ganz in ihr enthalten ist. Dann ist der erhaltene Ausdruck seinerseits kleiner als

$$16L|h|\iiint\limits_{(V_1)-(v_0)}\frac{dV}{r^3}=16L|h|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{2|h|}^{R}\frac{\sin\varphi}{r}\,dr\,d\varphi\,d\theta=64\pi L|h|\,(\ln R-\ln 2|h|)\,.$$

Endgültig ergibt sich

$$|\Delta|\leqq C_1|h|+C_2|h|\ln 2|h|\,,$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind, die man leicht bestimmen kann. Damit ist klar, daß Δ zugleich mit h gegen 0 strebt, d. h., daß

$$\frac{\partial W}{\partial\xi}=F_x$$

ist. Analog beweist man auch die beiden anderen Beziehungen (19) aus Nr. 649. Schließlich kann man durch ähnliche Überlegungen auch die Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial\xi}$, $\frac{\partial W}{\partial\eta}$, $\frac{\partial W}{\partial\zeta}$ sogar für Punkte A beweisen, die zum Körper (V) gehören.

§ 4. Elemente der Vektoranalysis

664. Skalare und Vektoren. Für die Anwendung der Integralrechnung auf Fragen der mathematischen Physik und der Mechanik erweist sich oft die vektorielle Form als geeigneter. Daher ist es für den Leser nützlich, sich mit einigen Grundbegriffen der Vektoranalysis vertraut zu machen, die zu einer vektoriellen Interpretation der Integralbegriffe und der sie verknüpfenden Formeln der Integralrechnung führen.

Wir setzen voraus, daß der Leser den Begriff des *Skalars* oder der skalaren Größe und den Begriff des *Vektors* oder der vektoriellen Größe bereits kennt. Ein Skalar wird völlig durch seinen Zahlenwert charakterisiert (wie beispielsweise Volumen, Masse, Dichte, Temperatur). Ein Vektor wird durch seinen Zahlenwert und seine Richtung vollständig bestimmt (Verschiebung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft usw.). Vektoren werden wir, wie üblich, durch gerichtete Strecken darstellen. Wir vereinbaren, Vektoren durch fette Buchstaben zu bezeichnen: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \ldots$; die Buchstaben $A, r, v, \ldots$ sollen die Länge der Vektoren bezeichnen, also ist

$$A = |\boldsymbol{A}|, \qquad r = |\boldsymbol{r}|, \qquad v = |\boldsymbol{v}| .$$

Die Buchstaben mit Indizes, wie beispielsweise $A_x, r_y, v_n, \ldots$ bezeichnen die Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \ldots$ in den durch die Indizes angegebenen Richtungen. Die Komponenten A_x, A_y, A_z des Vektors $\boldsymbol{A}$ in Richtung der Koordinatenachsen bestimmen sowohl dessen Länge (Zahlenwert) als auch dessen Richtung vollständig.

Wir nehmen darüber hinaus an, daß der Leser auch die Grundtatsachen der Vektoralgebra beherrscht. Wir beschränken uns darauf, daran zu erinnern, daß man als *Skalarprodukt* der Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ den Skalar (die Zahl)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB \cos(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$$

bezeichnet, der (die) durch die achsenparallelen Komponenten folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z . \tag{1}$$

Das *Vektorprodukt* der Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ist der Vektor mit der Länge $AB\,|\sin(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})|$, der auf beiden Faktoren senkrecht steht und nach derjenigen Seite gerichtet ist, von der aus gesehen die Drehung von $\boldsymbol{A}$ nach $\boldsymbol{B}$ (um einen Winkel kleiner als 180°) *entgegen dem Uhrzeigersinn* vor sich zu gehen scheint; wir bezeichnen das Vektorprodukt mit $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$. Legt man ein *Rechtssystem* (Nr. 620) zugrunde, und das wollen wir in Zukunft tun, so sind die Komponenten des Vektorprodukts in Richtung der Achsen gleich

$$A_y B_z - A_z B_y, \qquad A_z B_x - A_x B_z, \qquad A_x B_y - A_y B_x . \tag{2}$$

665. Skalar- und Vektorfelder. Ist jedem Punkt M eines bestimmten räumlichen Gebiets (das auch gleich dem ganzen Raum sein kann) ein Skalar oder ein Vektor zugeordnet, so sagt man, daß ein *Skalarfeld* bzw. ein *Vektorfeld* vorliegt. In den nächsten Abschnitten werden wir uns laufend mit solchen Feldern beschäftigen.

Beispiele von Skalarfeldern sind das Temperaturfeld und das Feld des elektrostatischen Potentials. Bestimmen wir die Lage eines Punktes M durch seine Koordinaten bezüglich eines willkürlich gewählten Koordinatensystems $(O; x, y, z)$, so ist die Angabe eines Skalarfeldes U einfach der Angabe einer Funktion $U(x, y, z)$ gleichwertig. Wir werden immer voraussetzen, daß diese Funktion stetige partielle Ableitungen mindestens erster Ordnung nach allen Veränderlichen hat. Wenn diese Ableitungen nicht gleichzeitig verschwinden, so definiert die Gleichung

$$U(x, y, z) = C \qquad (C = \text{const})$$

eine Fläche (ohne singuläre Punkte), längs der die Größe U konstant ist. Eine solche Fläche nennt man *Niveaufläche*. Das ganze betrachtete Gebiet wird von diesen Flächen ausgefüllt, so daß durch jeden Punkt des Gebiets genau eine Niveaufläche hindurchgeht. Es ist klar, daß die Niveauflächen einander nicht schneiden.

Beispiele von Vektorfeldern sind das Kraftfeld und das Geschwindigkeitsfeld; solchen Feldern sind wir bereits begegnet. Legt man irgendein Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ zugrunde, so kann man ein Vektorfeld dadurch angeben, daß man die Komponenten des zum Punkt M gehörigen Vektors $\boldsymbol{A}$ als Funktionen der Koordinaten des Punktes M angibt:

$$A_x(x, y, z), \qquad A_y(x, y, z), \qquad A_z(x, y, z)\,. \tag{3}$$

Wir werden annehmen, daß auch diese Funktionen stetige Ableitungen haben. Bei der Untersuchung eines Vektorfeldes spielen die Feldlinien eine wichtige Rolle; eine Kurve nennt man *Feldlinie*, wenn ihre Richtung in jedem Punkt M mit der Richtung des Vektors $\boldsymbol{A}$, der diesem Punkt entspricht, übereinstimmt. Erinnern wir uns daran (Nr. 234), daß die Richtungskosinus der Tangente an die Kurve den Differentialen dx, dy, dz proportional sind, so erkennen wir, daß eine Feldlinie durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$$

charakterisiert wird. Unter der Voraussetzung, daß $\boldsymbol{A}$ nie der Nullvektor ist, kann man, gestützt auf einen Existenzsatz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme,[1]) beweisen, daß das ganze betrachtete Gebiet von Feldlinien erfüllt wird, wobei durch jeden Punkt des Gebiets genau eine solche Kurve hindurchgeht. Die Feldlinien schneiden einander nicht.

Manchmal hat man auch Flächen zu betrachten, die aus Feldlinien gebildet werden; man nennt sie *Feldflächen*. Eine Feldfläche wird dadurch gekennzeichnet, daß in jedem Punkt M der entsprechende Vektor $\boldsymbol{A}(M)$ in der Tangentialebene an die Fläche in diesem Punkt liegt (oder dadurch, daß die Komponente A_n des Vektors $\boldsymbol{A}$ in Richtung der Flächennormalen n in allen Punkten der Fläche 0 ist). Wählt man in dem betrachteten Gebiet eine Kurve, die keine Feldlinie ist, und legt durch jeden ihrer Punkte eine Feldlinie, so ist der geometrische Ort dieser Linien gerade eine Feldfläche. Ist die erwähnte „Leitkurve" geschlossen, so ergibt sich eine röhrenartige Feldfläche, die man auch *Feldröhre* nennt.

666. Der Gradient. Gegeben sei ein Skalarfeld $U(M)=U(x, y, z)$. Den Vektor $\boldsymbol{g}$ mit den achsenparallelen Komponenten

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} \tag{4}$$

nennt man *Gradient* der Größe U (im entsprechenden Punkt) und bezeichnet ihn mit

$$\boldsymbol{g}=\operatorname{grad} U\,.$$

Diese formale Definition hat den Mangel, daß sie die Koordinatenachsen benutzt und die Frage offenläßt, ob der Begriff des Gradienten unabhängig von deren Wahl ist.

Um uns davon zu überzeugen, daß der Gradient nicht von der Wahl der Achsen abhängt, erinnern wir uns an die schon im ersten Band (Nr. 184) gegebene Definition der Ableitung einer Funktion in einer vorgegebenen Richtung l: $\dfrac{\partial U}{\partial l}$, die die Wachstumsgeschwindigkeit der Funktion in der Richtung l ausdrückt. Wir hatten dort die Formel

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

bewiesen, wobei $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus der Richtung l sind. Bezeichnen wir mit λ den Einheitsvektor in dieser Richtung, so kann man die Richtungsableitung

[1]) Diesen Satz möge der Leser in einem einschlägigen Lehrbuch nachlesen — *Anm. d. Red.*

auch so schreiben:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \operatorname{grad} U \cdot \boldsymbol{\lambda} = \operatorname{grad}_l U .$$

Den größten Wert erreicht diese Richtungsableitung offenbar dann, wenn die Richtung l mit der Richtung des Gradienten übereinstimmt, und dieser größte Wert ist gleich

$$|\operatorname{grad} U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} .$$

Das führt uns zu folgender Definition (vgl. Nr. 184): Den *Gradienten des Skalars U in einem gegebenen Punkt* nennt man denjenigen Vektor, der nach Größe und Richtung die größte Wachstumsgeschwindigkeit von U charakterisiert. Hier wird das Koordinatensystem überhaupt nicht mehr erwähnt.

Wie man leicht sieht, stimmt die Richtung des Gradienten mit der Normalenrichtung der Niveaufläche $U(x, y, z) = C$ überein, die durch den gegebenen Punkt geht.

Also erzeugt ein *Skalarfeld $U(M)$* das *Vektorfeld des Gradienten* grad U.

W. R. Hamilton[1]) führte den symbolischen Vektor mit den Komponenten

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

ein, den er „Nabla" nannte und mit ∇ bezeichnete. Benutzt man diese Bezeichnung, so kann man

$$\operatorname{grad} U = \nabla U$$

schreiben. „Multipliziert" man nämlich den erwähnten „Vektor" formal mit dem Skalar U, so ergibt sich gerade der Vektor mit den Komponenten (4).

Beispiele.

1. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{r}$ den Radiusvektor $\overrightarrow{OM}$, der irgendeinen festen Punkt O mit einem variablen Punkt M des Raums verbindet, und mit r seine Länge. Wir setzen $U(M) = \varphi(r)$, wobei φ eine skalare Funktion des positiven skalaren Arguments r ist, deren Ableitung das Vorzeichen nicht wechselt. Die Niveauflächen sind offenbar Kugeln vom Radius r um O, so daß die Gradientenrichtung mit der radialen Richtung übereinstimmt oder dieser direkt entgegengesetzt ist, je nachdem, ob $\varphi'(r) > 0$ oder < 0 ist. Wie man leicht sieht, ist

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r} .$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{grad} \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3} \boldsymbol{r} \qquad (c = \text{const}) .$$

Wenn wir im Punkt O die Masse m anbringen und das Newtonsche Gravitationsfeld betrachten, so wird seine *Anziehungskraft $\boldsymbol{F}$* im Punkt M gleich

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}, \quad \text{also} \quad \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \frac{m}{r} .$$

Die Frage, ob man ein *gegebenes* Vektorfeld als Gradientenfeld eines Skalars ansehen kann, ist sehr wichtig. Im Grunde genommen ist sie für uns nicht neu; wir kommen darauf später zurück (Nr. 670).

2. Wir betrachten das *Temperaturfeld U*. Wir wählen ein Flächenelement (dS), legen eine Normalenrichtung n fest und bestimmen die Wärmemenge dQ, die durch dieses Element in Richtung n während des „unendlich kleinen" Zeitintervalls dt hindurchfließt. Die Wärme fließt von den wärmeren Teilen des Körpers oder des Mediums zu den kälte-

[1]) William Rowan Hamilton, 1805–1865, irischer Mathematiker.

ren Teilen, und zwar um so schneller, je schneller sich die Temperatur *erniedrigt*. Gewöhnlich nimmt man an, daß die oben erwähnte Wärmemenge dQ zu dS, zu dt und schließlich zu $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ proportional ist. Bezeichnet man mit $k>0$ den Proportionalitätsfaktor (die „Wärmeleitfähigkeit" der gegebenen Stelle), so kann man

$$dQ = -k\,dS\,dt\,\frac{\partial U}{\partial n}$$

schreiben; in Übereinstimmung mit dem oben Gesagten wird die Wärmemenge dQ gerade dann positiv, wenn $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ negativ ist, d. h., wenn die Temperatur in Richtung n sinkt.

Führt man den sogenannten *Wärmestromvektor*

$$q = -k\,\mathrm{grad}\,U$$

ein, so kann man den Ausdruck für dQ kürzer wie folgt schreiben:

$$dQ = dS\,dt\,q_n\,.$$

667. Der Fluß eines Vektors durch eine Fläche. Gegeben sei jetzt irgendein Vektorfeld $A(M)$, d. h., es seien drei Funktionen (3) gegeben. Wir nehmen eine Fläche (S), wählen eine ihrer Seiten aus und bezeichnen mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungskosinus der entsprechend gerichteten Normalen n. Dann nennt man das Oberflächenintegral

$$\iint\limits_{(S)} (A_x\cos\lambda + A_y\cos\mu + A_z\cos\nu)\,dS\,,$$

für das man kürzer

$$\iint\limits_{(S)} A_n\,dS$$

schreiben kann, den *Fluß des Vektors A durch die Fläche* (S) nach der angegebenen Seite.

Wir wenden uns Beispielen zu.

1. Die Bezeichnung „Fluß" hängt mit einem hydromechanischen Problem zusammen. Wir betrachten die Bewegung einer Flüssigkeit im Raum; im allgemeinen setzen wir diese nicht als *stationär* voraus, so daß die Geschwindigkeit v der Bewegung nicht nur von der Lage des Punktes M abhängt, auf den sie sich bezieht, sondern auch von der Zeit t. Wir stellen uns die Aufgabe, die Flüssigkeitsmenge zu berechnen, die in dem „unendlich kleinen" Zeitintervall dt durch die Fläche nach der festgelegten Seite hindurchfließt. Durch ein Flächenelement (dS) fließt eine Flüssigkeitsmenge, die einen Zylinder mit der Grundfläche dS und der Höhe $v_n dt$ ausfüllt (Abb. 116), wobei

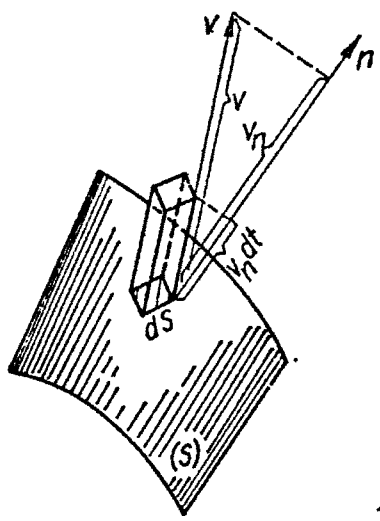

Abb. 116

die Normale $\boldsymbol{n}$ nach der ausgewählten Seite gerichtet sein soll. Bezeichnet man mit ϱ die Dichte der Flüssigkeit, die ebenfalls sowohl von der Lage des Punktes als auch von der Zeit abhängen kann, so wird die Masse der durch (dS) hindurchfließenden Flüssigkeit gleich $\varrho dS v_n dt$. Für die ganze Fläche (S) erhalten wir $dt \iint\limits_{(S)} \varrho v_n dS$. Die pro Zeiteinheit hindurchfließende Flüssigkeitsmenge Q wird durch das Integral

$$Q = \iint\limits_{(S)} \varrho v_n dS \tag{5}$$

ausgedrückt; der Leser erkennt darin leicht den „Fluß des Vektors" $\varrho \boldsymbol{v}$ durch die Fläche (S).

2. Analoge Aussagen kann man auch über den *Wärmestrom* machen. Wie man leicht sieht, ist (in den Bezeichnungen aus Nr. 666, Beispiel 2) die Wärmemenge, die in der Zeit dt durch (S) hindurchfließt, gleich $dt \iint\limits_{(S)} q_n dS$. Beziehen wir die durchfließende Wärmemenge auf die Zeiteinheit, so erhalten wir $\iint\limits_{(S)} q_n dS$, d. h. den „Fluß des Vektors" $\boldsymbol{q}$ durch die Fläche (S). Hiervon stammt auch die Bezeichnung „Wärmestromvektor" für den Vektor

$$\boldsymbol{q} = -k \operatorname{grad} U.$$

Bemerkung. Da wir die beiden in den Beispielen 1 und 2 betrachteten Prozesse nicht als stationär vorausgesetzt haben, hängt in Wirklichkeit die Größe Q selbst im allgemeinen von der Zeit ab. Sie hat den Charakter einer Geschwindigkeit und könnte genauer *Wachstumsgeschwindigkeit der durch* (S) *hindurchfließenden Flüssigkeitsmenge* (*oder Wärmemenge*) *im betrachteten Zeitpunkt* genannt werden.

3. Betrachtet man das Newtonsche Gravitationsfeld

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r}$$

(von dem in Nr. 666, Beispiel 1, die Rede war), so zeigt sich, daß der Fluß

$$\int\limits_{(S)}\int F_n dS = -m \int\limits_{(S)}\int \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^2} dS$$

dieses Vektors durch die Fläche (S) mit dem Raumwinkel zusammenhängt, unter dem die Fläche (S) vom Punkt O aus sichtbar ist (Nr. 653).

668. Der Satz von Ostrogradski. Die Divergenz. Wir kehren zu dem allgemeinen Fall eines Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$ zurück und betrachten einen Körper (V), der von einer geschlossenen Fläche (S) begrenzt wird; mit $\boldsymbol{n}$ bezeichnen wir die äußere Normale der Fläche. Dann kann man nach dem Satz von Ostrogradski (Nr. 651, Formel (5)) den Fluß des Vektors $\boldsymbol{A}$ durch die Fläche (S) nach außen in ein Raumintegral umwandeln, wenn man in diesem Satz $P = A_x$, $Q = A_y$ und $R = A_z$ setzt:

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS = \iint\limits_{(S)} (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu)\, dS$$
$$= \int\limits_{(V)}\int\int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV.$$

Den Integranden des Raumintegrals nennt man *Divergenz* des Vektors $\boldsymbol{A}$ (in dem entsprechenden Punkt) und bezeichnet ihn mit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Also läßt sich der Satz von Ostrogradski in der Form

$$\iint\limits_{(S)} A_n dS = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dV \tag{7}$$

schreiben, in der er am häufigsten angewandt wird.

Die soeben eingeführte Größe, die Divergenz, ist ein Skalar; ihre Definition hängt jedoch formal von der Wahl des Koordinatensystems ab. Um diesen Mangel zu beseitigen, verfahren wir folgendermaßen. Wir umgeben den Punkt M mit irgendeinem Körper (V) mit der Oberfläche (S) und schreiben Formel (7) auf; dividiert man beide Seiten durch das Volumen V des Körpers und geht zur Grenze über, indem man den Körper (V) auf den Punkt M zusammenzieht, so ergibt sich rechts gerade div $\boldsymbol{A}$ im Punkt M (Nr. 644, 8°). Also ist

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} A_n \mathrm{d}S}{V}. \tag{8}$$

Diese Gleichung kann man auch als Definition der Divergenz auffassen; in dieser Form hängt die Definition nicht mehr von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Diesmal erzeugt das Vektorfeld $\boldsymbol{A}$ das Skalarfeld der Divergenz div $\boldsymbol{A}$.

Wir bemerken, daß man die Definition (6) der Divergenz mit Hilfe des symbolischen Hamiltonschen Vektors ∇ folgendermaßen schreiben kann:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A};$$

das wird klar, wenn wir uns an den Ausdruck (1) für das Skalarprodukt zweier Vektoren erinnern.

Beispiel. Wir befassen uns mit der Bewegung einer *inkompressiblen* Flüssigkeit ($\varrho = 1$) beim Vorhandensein von Quellen (oder Senken). *Ergiebigkeit* der Quellen innerhalb einer geschlossenen Fläche (S) nennt man die durch (S) in der Zeiteinheit herausfließende Flüssigkeitsmenge, d. h. den Fluß

$$\iint\limits_{(S)} v_n \mathrm{d}S$$

des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ (vgl. Nr. 667, Beispiel 1). Wenn die Quellen *stetig* über das betrachtete Gebiet verteilt sind, führt man den Begriff der *Quellendichte* ein. So nennt man den Grenzwert der Ergiebigkeit der Quellen im Körper (V), der den Punkt M umgibt, bezogen auf die Volumeneinheit, d. h.

$$\lim_{(V)\to M} \frac{\iint\limits_{(S)} v_n \mathrm{d}S}{V}.$$

Nun ist aber, wie wir soeben gesehen haben (vgl. (8)), dieser Grenzwert gleich div $\boldsymbol{v}$, daher ist div $\boldsymbol{v}$ die Quellendichte.

Eine analoge Betrachtung kann man auch für den Wärmestrom beim Vorhandensein von Wärmequellen durchführen, man hat nur an Stelle des Geschwindigkeitsvektors den Wärmestromvektor zu nehmen.

669. Die Zirkulation eines Vektors. Der Stokessche Satz. Die Rotation. Gegeben sei wieder ein Vektorfeld $\boldsymbol{A}(M)$. Das Integral

$$\int\limits_{(l)} (A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z) = \int\limits_{(l)} A_l \mathrm{d}l$$

über eine Kurve (l) im betrachteten Gebiet nennt man *Kurvenintegral des Vektors $\boldsymbol{A}$ längs der Kurve (l)*. Im Fall einer geschlossenen Kurve nennt man dieses Integral die *Zirkulation des Vektors $\boldsymbol{A}$ längs (l)*.

Ist das Feld $\boldsymbol{A}$ ein Kraftfeld, so drückt das Kurvenintegral die Arbeit der Feldkräfte bei Verschiebung eines Punktes längs der Kurve (l) aus (vgl. Nr. 554).

Wir stellen uns eine Fläche (S) vor, die von der geschlossenen Kurve (l) begrenzt wird. Dann kann nach dem schon bekannten Stokesschen Satz (Nr. 639, Formel (21*)) die Zirkulation des Vektors $\boldsymbol{A}$ längs (l) durch ein Oberflächenintegral ausgedrückt werden:

$$\int\limits_{(l)} A_l \mathrm{d}l = \iint\limits_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos\mu + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos\nu \right\} \mathrm{d}S.$$

Den Vektor mit den achsenparallelen Komponenten

$$\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\qquad \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\qquad \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{9}$$

nennt man *Rotation des Vektors* $\boldsymbol{A}$ und bezeichnet ihn mit[1])

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Also kann man den Stokesschen Satz in vektorieller Form so schreiben:

$$\int\limits_{(l)} A_l\,dl=\iint\limits_{(S)}\operatorname{rot}_n \boldsymbol{A}\,dS. \tag{10}$$

Die Zirkulation eines Vektors längs einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Fluß der Rotation durch eine Fläche, die von dieser Kurve begrenzt wird. Dabei müssen der Umlaufsinn der Kurve und die Seite der Fläche einander so entsprechen, wie es in Nr. 620 erklärt worden ist.

Die oben gegebene Definition des Begriffs der „Rotation" hat den üblichen Mangel: Sie benutzt ein bestimmtes Koordinatensystem. Wählen wir eine beliebige Richtung $\boldsymbol{n}$ und umgeben wir einen vorgegebenen Punkt M in der zu $\boldsymbol{n}$ senkrechten Ebene mit einem Gebiet (σ), das den Rand (λ) hat (Abb. 117), so gilt nach dem Stokesschen Satz

$$\int\limits_{(\lambda)} A_\lambda\,d\lambda=\iint\limits_{(\sigma)}\operatorname{rot}_n \boldsymbol{A}\,d\sigma.$$

Dividieren wir beide Seiten durch den Inhalt σ des erwähnten Gebiets und ziehen wir dieses auf den gegebenen Punkt zusammen, so erhalten wir[2])

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{A}=\lim_{(\sigma)\to M}\frac{\int\limits_{(\lambda)} A_\lambda\,d\lambda}{\sigma}.$$

Also kann man die Komponente des Vektors rot $\boldsymbol{A}$ in einer *beliebigen* Richtung und folglich auch den Vektor selbst definieren, ohne auf ein vorher gewähltes Koordinatensystem Bezug zu nehmen.

Wir betonen, daß *hier das Vektorfeld* $\boldsymbol{A}$ *wieder ein Vektorfeld erzeugt*, nämlich das Feld der Rotation rot $\boldsymbol{A}$. Mit Hilfe des Hamiltonschen Vektors ∇ kann man die Definition der Rotation auch einfach $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ schreiben (vgl. den Ausdruck (2) für die Komponenten des Vektorprodukts).

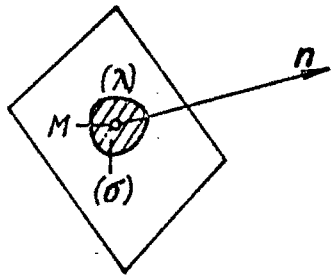

Abb. 117

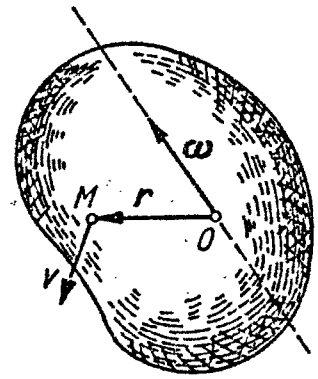

Abb. 118

Beispiel. Wir betrachten eine beliebige Bewegung eines starren Körpers. Wenn man in diesem einen Punkt O auszeichnet (Abb. 118), so wird, wie man in der Kinematik beweist, das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$ der Punkte des Körpers in einem beliebigen Zeitpunkt durch die Formel

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

---

[1]) Gebräuchlich ist auch die Bezeichnung curl $\boldsymbol{A}$ nach dem englischen Wort curl = Locke.

[2]) Man kann hierin leicht eine Art *Differentiation nach dem Gebiet* sehen; das zu begründen überlassen wir dem Leser.

bestimmt. Dabei ist v^0 die „vorwärts gerichtete Geschwindigkeit", d. h. die Geschwindigkeit des Punktes O, ferner ω die momentane „Winkelgeschwindigkeit" und r der Radiusvektor, der den Punkt O mit einem beliebigen Punkt M des Körpers, in dem v berechnet wird, verbindet. Die Komponenten dieses Vektors in Richtung der Achsen eines beliebigen Systems $(O; x, y, z)$ sind (vgl. (2))

$$v_x^0 + \omega_y z - \omega_z y, \qquad v_y^0 + \omega_z x - \omega_x z, \qquad v_z^0 + \omega_x y - \omega_y x .$$

Berechnen wir unter Benutzung der Ausdrücke (9) die Komponenten der Rotation dieses Feldes, so erhalten wir $2\omega_x$, $2\omega_y$, $2\omega_z$. Daher ist $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot} v$.

Also ergibt die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes v bis auf einen Zahlenfaktor genau die momentane Winkelgeschwindigkeit; damit hängt die Bezeichnung Rotation zusammen.

670. Spezielle Felder. In diesem und im nächsten Abschnitt werden wir uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung von Feldern in *quaderförmigen* räumlichen Gebieten und speziell im ganzen Raum beschränken.

1°. *Potentialfelder.* Ein Vektorfeld A nennt man *Potentialfeld*, wenn eine skalare Größe U existiert, deren Gradient der Vektor A ist:

$$A = \operatorname{grad} U .$$

Diese Gleichung zerfällt in die drei Gleichungen (vgl. (4))

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

und ist der Behauptung gleichwertig, daß der Ausdruck

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

das totale Differential der Funktion $U(x, y, z)$ ist. Die Stammfunktion U nennt man das *Potential* des Feldes A.

Bereits bekannte Aussagen (Nr. 564 und 641; vgl. die Bedingung (B)) können wir folgendermaßen neu formulieren:

Ein Vektorfeld A ist dann und nur dann ein Potentialfeld, wenn in dem ganzen betrachteten Gebiet die Gleichungen

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

erfüllt sind, d. h., *wenn* $\operatorname{rot} A$ *der Nullvektor ist.*

Also stimmt der Begriff des Potentialfeldes mit dem Begriff des „wirbelfreien" Feldes überein.

Gestützt auf die Aussagen in Nr. 564 und Nr. 641 kann man ein Potentialfeld auch dadurch charakterisieren, daß *die Zirkulation über eine einfache geschlossene Kurve stets* 0 *ist, während das Kurvenintegral über eine Kurve, die zwei beliebige Feldpunkte verbindet, nicht von der Form der Kurve abhängt.*

Das Potential U selbst wird bis auf eine additive Konstante durch das Kurvenintegral

$$\int_{(l)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \int_{(l)} A_l dl$$

bestimmt, das man über eine beliebige Kurve (l) erstreckt, die einen festen Punkt M_0 mit dem veränderlichen Punkt M des betrachteten Gebietes verbindet.

Alle diese Tatsachen erhalten dann, wenn das Potentialfeld ein Kraftfeld ist, eine natürliche Deutung als Aussagen über die Arbeit. Ein solches Kraffeld ist bekanntlich das Newtonsche Gravitationsfeld sowohl im Fall einzelner Anziehungszentren als auch im Fall einer stetigen Verteilung der anziehenden Masse.

2°. *Solenoidale Felder.* Ein Vektorfeld $\boldsymbol{A}$ nennt man *solenoidal* (vom griechischen $\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu$ = Röhre abgeleitet), wenn ein Vektorfeld $\boldsymbol{B}$ existiert, dessen Rotation gleich $\boldsymbol{A}$ ist:

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B} . \tag{11}$$

Diese Gleichung zerfällt in die drei Gleichungen

$$A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \qquad A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \qquad A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} . \tag{12}$$

Den Vektor $\boldsymbol{B}$ nennt man ein *Vektorpotential* des Feldes $\boldsymbol{A}$.

Wir beweisen nun den folgenden Satz, der ein leicht nachzuprüfendes Kriterium dafür liefert, daß ein Feld solenoidal ist.

Ein Feld $\boldsymbol{A}$ ist dann und nur dann solenoidal, wenn im ganzen betrachteten Gebiet die Gleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{13}$$

erfüllt ist.

Daß die Bedingung notwendig ist, verifiziert man durch direkte Ausrechnung: Wenn $\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}$ ist, so gilt (vgl. (12))

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = 0$$

Daß sie hinreicht, kann man folgendermaßen einsehen: Es gelte die Gleichung (13). Wir werden versuchen, wenigstens eine partikuläre Lösung (B_x, B_y, B_z) der Gleichungen (12) zu finden. Zur Vereinfachung nehmen wir von vornherein $B_z \equiv 0$ an. Dann erhalten die ersten beiden Gleichungen (12) die Gestalt

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = A_x, \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = A_y;$$

bei Integration über z ergeben sie für B_x und B_y die Ausdrücke

$$B_y = -\int_{z_0}^{z} A_x(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y), \qquad B_x = \int_{z_0}^{z} A_y(x, y, z)\, dz .$$

Dabei ist z_0 ein beliebiger zulässiger Wert und $\varphi(x, y)$ eine Funktion der beiden Veränderlichen, die noch bestimmt werden muß. Durch Differentiation der Integrale nach der Leibnizschen Regel finden wir

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_x}{\partial x}\, dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B_x}{\partial y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial A_y}{\partial y}\, dz .$$

Benutzen wir die Gleichung (13), um die letzte der Gleichungen (12) zu erfüllen, so erhalten wir für die Funktion φ die Bedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_z(x, y, z_0) ,$$

aus der wir φ leicht durch Integration über x bestimmen können (bis auf einen von y abhängigen willkürlichen Summanden).

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Es ist noch von Interesse, festzustellen, in welchem Maße man das Vektorpotential $\boldsymbol{B}$ aus der Gleichung (11) willkürlich bestimmen kann. Ist $\boldsymbol{B}^{(0)}$ irgendeine feste Lösung dieser Gleichung, so wird die allgemeine Lösung $\boldsymbol{B}$ aus der Bedingung $\operatorname{rot}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^{(0)})=0$ bestimmt, und sie läßt sich im Hinblick auf 1° in der Form

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{(0)}+\boldsymbol{C}$$

darstellen, wobei $\boldsymbol{C}$ ein beliebiges Potentialfeld ist.

Aus den Überlegungen der Nr. 652 geht hervor: Die Bedingung (13), die ein solenoidales Feld charakterisiert, ist gleichbedeutend mit der *Forderung, daß der Fluß des Vektors $\boldsymbol{A}$ durch jede geschlossene* (und einen Körper (V) begrenzende) *Fläche (S) gleich 0 ist.*

Wir betrachten nun als Körper (V) den Abschnitt einer *Feldröhre* zwischen zwei beliebigen Querschnitten (S_1) und (S_2) dieser Röhre. Die Mantelfläche des Röhrenabschnitts bezeichnen wir mit (S_3). Dann gilt im Fall eines solenoidalen Feldes nach dem eben Gesagten

$$\left\{\iint\limits_{(S_1)}+\iint\limits_{(S_2)}+\iint\limits_{(S_3)}\right\} A_n \mathrm{d}S=0\,,$$

wobei die Normale bezüglich des Körpers nach außen gerichtet ist. Längs der Fläche (S_3) gilt offenbar $A_n=0$ (Nr. 665); kehren wir im Schnitt (S_1) die Normalenrichtung um (so daß die Normalen in gewissem Sinne wie die Normalen in (S_2) gerichtet sind; vgl. Abb. 119), so kommen wir zu der Gleichung

$$\iint\limits_{(S_1)} A_n \mathrm{d}S=\iint\limits_{(S_2)} A_n \mathrm{d}S\,.$$

Also erhalten wir folgende Eigenschaft eines solenoidalen Feldes: *Der Fluß des Vektors durch die Querschnitte einer Feldröhre ist konstant*; man nennt ihn die *Intensität* der Feldröhre.

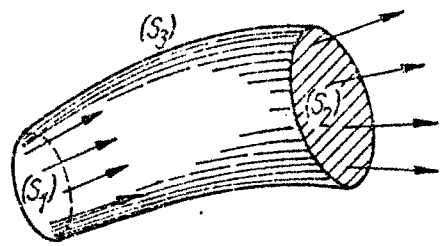

Abb. 119

Man kann leicht zeigen, daß die angegebene Eigenschaft ein solenoidales Feld vollständig charakterisiert. Das folgt sofort aus Formel (8) für die Divergenz eines Vektors $\boldsymbol{A}$, wenn man als Körper (V), der den gewählten Punkt M umgibt, gerade einen Abschnitt einer Feldröhre nimmt: dann wird $\iint\limits_{(S)} A_n \mathrm{d}S=0$ und damit auch $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$.

Wenn man zu der oben angegebenen hydromechanischen Interpretation eines Vektorfelds zurückkehrt, so zeigt sich, daß im Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit und bei *Quellenfreiheit* ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$) durch jeden Querschnitt einer Feldröhre gleich viel Flüssigkeit hindurchtritt.

3°. *Die Zerlegung eines beliebigen Vektorfeldes.* Wir zeigen nun, daß *jedes Vektorfeld A als Summe eines Potentialfeldes A' und eines solenoidalen Feldes A'' dargestellt werden kann.*

$$A = A' + A'' \qquad (\operatorname{rot} A' = 0,\ \operatorname{div} A'' = 0)\,.$$

Wir setzen sofort $A' = \operatorname{grad} \Phi$, wobei Φ eine noch zu bestimmende skalare Funktion ist; die Gleichung $\operatorname{rot} A' = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = 0$ ist dadurch schon gesichert. Nun ist $A'' = A - \operatorname{grad} \Phi$, so daß Φ so gewählt werden muß, daß die Bedingung

$$\operatorname{div} A'' = \operatorname{div} A - \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0$$

erfüllt ist. Wegen

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi\,,$$

wobei, wie üblich, Δ der Laplace-Operator ist, erhalten wir zur Bestimmung von Φ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} A\,,$$

die immer eine Lösung hat (und sogar unendlich viele).

671. Das Umkehrproblem der Vektoranalysis. Es besteht darin, ein Vektorfeld A zu *vorgegebener* Divergenz $\operatorname{div} A = F$ (F ist eine skalare Funktion) und Rotation $\operatorname{rot} A = B$ zu bestimmen. In Anbetracht von Nr. 670, 2°, ist klar, daß für die Lösbarkeit des Problems in jedem Fall die Bedingung $\operatorname{div} B = 0$ *notwendig* ist; wir nehmen an, *diese Bedingung sei erfüllt.*

Man wird (wenn man sich an Nr. 670, 3°, erinnert) die Lösung A naturgemäß als Summe von Lösungen A' und A'' der Systeme

$$(1) \qquad \operatorname{rot} A' = 0, \qquad \operatorname{div} A' = F\,,$$

$$(2) \qquad \operatorname{rot} A'' = B, \qquad \operatorname{div} A'' = 0$$

suchen.

(1) Aus der ersten Gleichung folgt auf Grund von Nr. 670, 1°, daß $A' = \operatorname{grad} \Phi$ ist. Zur Bestimmung von Φ wenden wir uns der zweiten Gleichung zu:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = F \quad \text{oder} \quad \Delta \Phi = F\,.$$

Φ ist also eine der Lösungen der uns schon bekannten Poissonschen Differentialgleichung.

(2) Da (nach Voraussetzung) $\operatorname{div} B = 0$ ist, hat die erste Gleichung des betrachteten Systems nach Nr. 670, 2°, eine Lösung.[1]) Bezeichnen wir mit A'' eine partikuläre Lösung dieser Gleichung, so läßt sich die *allgemeine* Lösung in der Form $A'' = A_0'' + C$ schreiben, wobei C ein beliebiges Potentialfeld ist, $C = \operatorname{grad} \Phi$. Es ist noch die zweite Gleichung des Systems (2) zu befriedigen, d. h. Φ so zu bestimmen, daß die Bedingung

$$\operatorname{div} A'' = \operatorname{div} A_0'' + \Delta \Phi = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta \Phi = -\operatorname{div} A_0''$$

erfüllt ist.

[1]) Wir machen den Leser auf die Änderung der Bezeichnung im Vergleich zu Beispiel 2 aufmerksam.

Das gestellte Problem ist damit gelöst. Es soll nun festgestellt werden, in welchem Maße das gesuchte Vektorfeld $\boldsymbol{A}$ willkürlich ist. Wie man leicht sieht, unterscheiden sich zwei Lösungen um einen solchen Vektor $\boldsymbol{G}$, der den beiden Gleichungen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{G} = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{G} = 0$$

genügt. Die zweite von ihnen liefert $\boldsymbol{G} = \operatorname{grad} H$, und aus der ersten erhalten wir dann $\Delta H = 0$; also ist H eine beliebige *harmonische* Funktion. Der Vektor $\boldsymbol{A}$ ergibt sich *eindeutig*, wenn zusätzlich „Randbedingungen" gestellt sind, die die erwähnte harmonische Funktion eindeutig festlegen.

Die Ergebnisse von Nr. 670 und 671 lassen sich auch auf Gebiete von allgemeinerer Form ausdehnen, die (das muß betont werden) je nach dem vorliegenden Fall in der einen oder anderen Art einfach zusammenhängend sind.

672. Anwendungen. Zum Abschluß dieses Paragraphen führen wir verschiedene Beispiele für die Benutzung der Begriffe der Vektoranalyse und der grundlegenden Integralsätze in Vektorform an. Wir beginnen mit Anwendungsbeispielen des Satzes von OSTROGRADSKI und der mit ihm zusammenhängenden Begriffe.

1°. *Die Kontinuitätsgleichung.* Wir betrachten wieder eine Bewegung einer *quellenfreien* Flüssigkeit, setzen diese jedoch im allgemeinen nicht als inkompressibel voraus. Wir nehmen an, daß die Flüssigkeit den Raum oder einen bestimmten Teil davon lükkenlos ausfüllt, und schneiden aus der Flüssigkeit einen beliebigen Körper (V) heraus, der von einer Fläche (S) begrenzt wird. Die Flüssigkeitsmenge, die aus diesem Körper pro Zeiteinheit herausfließt, wird, wie wir wissen, durch (5) ausgedrückt. Wir berechnen die gleiche Menge anders. Die Änderung der Dichte ϱ im Zeitintervall dt um den Wert $\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dt$ bewirkt eine Änderung der Masse $\varrho\,dV$ des Elements (dV) um $\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dt\,dV$, und die Gesamtmasse des betrachteten Körpers ändert sich um

$$dt \iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV .$$

Eine entsprechende Flüssigkeitsmenge muß im Zeitintervall dt in den Körper hineinfließen; ändern wir ihr Vorzeichen, so erhalten wir die Flüssigkeitsmenge, die in diesem Zeitintervall herausfließt. Beziehen wir schließlich die herausfließende Flüssigkeitsmenge auf die Zeiteinheit, so finden wir

$$Q = -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV .$$

Um den Vergleich der beiden Ausdrücke für Q zu erleichtern, transformieren wir das Oberflächenintegral (5) nach dem Satz von OSTROGRADSKI (7) auch in ein Raumintegral. Auf diesem Wege erhalten wir

$$\iiint\limits_{(V)} \left\{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v})\right\} dV = 0 .$$

Weil diese Gleichung für jeden Körper (V) in dem betrachteten Gebiet gilt, folgt hieraus nach Nr. 644, 8°, die Identität

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0 .$$

Diese Gleichung ist unter dem Namen *Kontinuitätsgleichung* bekannt.

2°. *Die Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit.* Es mögen im allgemeinen Fall auf die Flüssigkeit sowohl äußere als auch innere Kräfte wirken. Wir nehmen an, die äußeren Kräfte seien der Masse proportional, so daß auf das Flüssigkeitselement $(\mathrm{d}V)$ die Kraft $\varrho \mathrm{d}V\boldsymbol{F}$ wirkt, wenn $\boldsymbol{F}$ die Kraft ist, die auf die Masseneinheit ausgeübt wird.

Was die inneren Kräfte betrifft, d. h. die Kräfte, die auf einen Teilkörper (V) der Flüssigkeit von der übrigen Flüssigkeit ausgeübt werden, so wird eine ideale Flüssigkeit gerade dadurch charakterisiert, daß diese Kräfte einen ins Innere gerichteten Druck senkrecht auf die Oberfläche (S) dieses Körpers hervorrufen. Dabei hängt die Größe p des Drucks nicht von der Stellung des Flächenelements im Raum ab, auf das er ausgeübt wird, sondern nur von dessen Koordinaten. Also wirkt auf das Flächenelement $(\mathrm{d}S)$ eine Kraft, deren Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen gleich

$$-p\mathrm{d}S\cos\lambda, \qquad -p\mathrm{d}S\cos\mu, \qquad -p\mathrm{d}S\cos\nu$$

sind, wobei $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungskosinus der *äußeren* Flächennormalen bezeichnen. Auf den ganzen Körper (V) wirkt eine Kraft mit den Komponenten

$$-\iint\limits_{(S)} p\cos\lambda\,\mathrm{d}S, \qquad -\iint\limits_{(S)} p\cos\mu\,\mathrm{d}S, \qquad -\iint\limits_{(S)} p\cos\nu\,\mathrm{d}S\,.$$

Greift man wieder auf die Transformation nach dem Satz von Ostrogradski zurück, so erhält man dafür die Integrale

$$-\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}V, \qquad -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{d}V, \qquad -\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}V\,.$$

Die Kraft, die auf das Flüssigkeitselement $(\mathrm{d}V)$ entfällt, hat die Komponenten

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}V, \qquad -\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}V, \qquad -\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}V;$$

sie läßt sich folglich als Vektor in der Gestalt $-\mathrm{d}V\,\mathrm{grad}\,p$ darstellen.

Bezeichnen wir nun mit $\boldsymbol{a}$ die dem Element $(\mathrm{d}V)$ entsprechende Beschleunigung, so gilt nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz

$$\varrho\mathrm{d}V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}\varrho\mathrm{d}V - \mathrm{d}V\,\mathrm{grad}\,p\,,$$

woraus schließlich

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p \tag{14}$$

folgt. Das ist die *Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit* in vektorieller Form. Sie zerfällt in drei skalare Gleichungen, wenn man zu den Komponenten in Richtung der drei Koordinatenachsen übergeht.

3°. *Die Wärmeleitungsgleichung.* Als letztes Anwendungsbeispiel des Satzes von Ostrogradski betrachten wir die Frage nach dem thermischen Zustand eines Körpers bei innerer Wärmeleitung für den Fall, daß keine Wärmequellen vorhanden sind.

Greifen wir einen Körper (V) mit der Oberfläche (S) heraus, so wird, wie wir in Nr. 667, 2°, gesehen haben, die Wärmemenge Q, die aus dem Körper pro Zeiteinheit herausfließt, gleich

$$-\iint\limits_{(S)} k\,\mathrm{grad}_n\,U\,\mathrm{d}S$$

(wir behalten die früheren Bezeichnungen bei). Indem wir in diesem Ausdruck das Vorzeichen wechseln und ihn in ein Raumintegral umwandeln, erhalten wir für die in den Körper hineinfließende Wärmemenge den Ausdruck.

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\,(k\,\mathrm{grad}\,U)\,\mathrm{d}V\,. \tag{15}$$

Diese Wärmemenge ruft eine Temperaturänderung im Körper (V) hervor; sie kann auch anders ausgedrückt werden. Zur Erhöhung der Temperatur U um $\mathrm{d}U=\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}t$ im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ ist es erforderlich, daß dem Körperelement $(\mathrm{d}V)$ die Wärmemenge

$$c\,\mathrm{d}U\varrho\,\mathrm{d}V=c\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}t\varrho\,\mathrm{d}V$$

zugeführt wird, wobei c die *spezifische Wärme* des Körpers im betrachteten Punkt bezeichnet. Der ganze Körper (V) nimmt in der Zeit $\mathrm{d}t$ die Wärmemenge

$$\mathrm{d}t\iiint\limits_{(V)}c\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

auf; beziehen wir diese auf die Zeiteinheit, so erhalten wir

$$\iiint\limits_{(V)}c\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}V\,. \tag{16}$$

Durch Vergleich von (15) und (16) kommen wir zu der Gleichung

$$\iiint\limits_{(V)}\left\{c\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}+\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)\right\}\mathrm{d}V=0\,,$$

die für jeden Körper (V) aus dem betrachteten Gebiet erfüllt ist. Hieraus schließen wir wie oben in 1°, daß in diesem Gebiet die Identität

$$c\varrho\,\frac{\partial U}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}U)$$

gilt. Das ist die *Wärmeleitungsgleichung.*

Im Fall eines homogenen Mediums erhält sie die Gestalt

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\,\Delta U\,,$$

wobei $a^2=\frac{k}{c\varrho}$ ist und Δ den LAPLACE-Operator bezeichnet:

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\,.$$

Schließlich hängt U bei einer *stationären* Temperaturverteilung nicht von der Zeit ab und genügt der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta U=0\,,$$

d. h., U ist eine *harmonische* Funktion der Koordinaten des Punktes.

Wir kommen zu Anwendungsbeispielen des Stokesschen Satzes und der mit ihm zusammenhängenden Begriffe. Diese Anwendungen beziehen sich auf die Bewegung einer Flüssigkeit.

4°. Wir betrachten in einem gewissen Zeitpunkt in der Flüssigkeit eine Linie oder eine Fläche und interessieren uns dafür, was für eine Figur dieselben Flüssigkeitsteilchen in einem anderen Zeitpunkt bilden. In diesen Untersuchungen wird folgender Hilfssatz eine wichtige Rolle spielen: *Die Ableitung der Zirkulation der Geschwindigkeit nach der Zeit über eine geschlossene Flüssigkeitskurve ist gleich der Zirkulation der Beschleunigung über dieselbe Kurve.*

Wir betrachten irgendeine Kurve $(L_0)=(A_0B_0)$ zum Zeitpunkt t_0. Als Parameter, der die Lage eines Punktes M_0 auf ihr bestimmt, wählen wir etwa die Bogenlänge $\sigma=\overset{\frown}{A_0M_0}$ (Abb. 120); wenn zum Zeitpunkt t die Flüssigkeitskurve $(L_0)=(A_0B_0)$ in $(L)=(AB)$

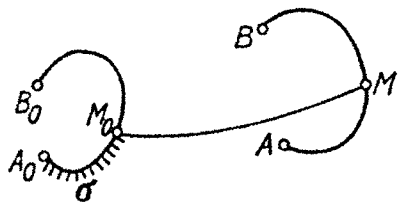

Abb. 120

übergegangen ist, so wird die Lage des Punktes M, in den der Punkt M_0 übergegangen ist, durch Gleichungen der Form

$$x=\varphi(\sigma, t), \qquad y=\psi(\sigma, t), \qquad z=\chi(\sigma, t) \qquad (0\leqq\sigma\leqq\bar{\sigma})$$

bestimmt. Die Zirkulation der Geschwindigkeit

$$J=\int\limits_{(L)}(v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y+v_z\mathrm{d}z)=\int\limits_0^{\bar{\sigma}}\left(v_x\frac{\partial x}{\partial\sigma}+v_y\frac{\partial y}{\partial\sigma}+v_z\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{17}$$

kann nach der Leibnizschen Regel nach t differenziert werden:

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\int\limits_0^{\bar{\sigma}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial\sigma}+\frac{\partial v_y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial\sigma}+\frac{\partial v_z}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma+\int\limits_0^{\bar{\sigma}}\left(v_x\frac{\partial^2 x}{\partial\sigma\partial t}+v_y\frac{\partial^2 y}{\partial\sigma\partial t}+v_z\frac{\partial^2 z}{\partial\sigma\partial t}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int\limits_0^{\bar{\sigma}}\left(a_x\frac{\partial x}{\partial\sigma}+a_y\frac{\partial y}{\partial\sigma}+a_z\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma+\int\limits_0^{\bar{\sigma}}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial\sigma}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial\sigma}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial\sigma}\right)\mathrm{d}\sigma\,.$$

Das erste dieser beiden Integrale liefert die Zirkulation der Beschleunigung:

$$\int\limits_{(L)}(a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z)\,.$$

Das zweite kann man dagegen direkt ausrechnen, da der Integrand die Ableitung von $(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2=v^2/2$ nach σ ist; es ist gleich

$$v^2/2\,|_A^B\,.$$

Dieser Ausdruck verschwindet im Fall einer geschlossenen Kurve (L).

Daher ist schließlich

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\int\limits_{(L)}(a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z)\,, \tag{18}$$

was zu beweisen war.

5°. Es liege eine ideale Flüssigkeit im Sinne von 2° vor. Außerdem machen wir noch zwei Voraussetzungen: 1. Die Kraft $\boldsymbol{F}$ habe ein Potential, d. h., es sei $\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}\,U$; 2. die Dichte ϱ sei eine eindeutige Funktion des Drucks[1]): $\varrho=\varphi(p)$.

Wir führen die Größe

$$\Phi(p)=\int\frac{\mathrm{d}p}{\varphi(p)}$$

ein; dann ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

und analog

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

[1]) Eine Flüssigkeit, die dieser Forderung genügt, nennt man manchmal *barotrop*.

so daß

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p$$

wird.

Wir kennen bereits die Grundgleichung (14) der Hydrodynamik. Diese läßt sich nun in der Form

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} (U - \Phi)$$

schreiben. Setzt man das in die oben erhaltene Gleichung (18) ein, so ergibt sich

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(L)} d(U - \Phi) = 0 \quad \text{und damit} \quad J = \text{const.}$$

Also ist die Zirkulation der Geschwindigkeit über eine beliebige geschlossene Flüssigkeitskurve zeitlich konstant. Das ist der Satz von THOMSON[1]).

Hieraus ergibt sich als einfache Folgerung der interessante Satz von LAGRANGE: *Hat die betrachtete Flüssigkeitsmenge zu einem bestimmten Zeitpunkt keine Wirbel, so hat sie auch in keinem anderen Zeitpunkt Wirbel.* Die Wirbelfreiheit ist nämlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Zirkulation der Geschwindigkeit über eine beliebige geschlossene Kurve (Nr. 670, 1°). Tritt dieser Zustand einmal ein, so liegt er nach dem Satz von THOMSON immer vor.

6°. Jetzt sind wir in der Lage, zwei wichtige Sätze von HELMHOLTZ[2]) bezüglich der „Wirbellinien" und „Wirbelröhren"[3]) zu beweisen. Dabei behalten wir stets die zu Beginn von 5° angegebenen Voraussetzungen bei.

Satz von der Erhaltung der Wirbellinien. *Flüssigkeitsteilchen, die zu einem gewissen Zeitpunkt eine Wirbellinie bilden, bilden auch während der ganzen Zeit der Bewegung eine Wirbellinie.*

Es ist für uns einfacher, den Satz zunächst für Wirbelflächen zu beweisen. Es sei (S_0) eine solche Fläche zum Zeitpunkt t_0; dann liegt in allen ihren Punkten die Rotation der Geschwindigkeit

$$\Omega = \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$$

in der Tangentialebene an (S_0), d. h., es ist $\Omega_n = 0$. Wählt man auf der Fläche eine beliebige geschlossene Kurve (λ_0), die einen Teil (σ_0) der Fläche begrenzt, so gilt nach dem Stokesschen Satz (10)

$$\int_{(\lambda_0)} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \iint_{(\sigma_0)} \Omega_n dS_0 = 0 .$$

Zum Zeitpunkt t ist die Flüssigkeitsfläche (S_0) in die Fläche (S) übergegangen, ihr Teil (σ_0) in (σ) und die Flüssigkeitskurve (λ_0) in die Kurve (λ). Nun gilt aber nach dem Thomsonschen Satz sofort

$$\int_{(\lambda)} (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = 0 ,$$

so daß (wiederum nach dem Satz von STOKES)

$$\iint_{(\sigma)} \Omega_n dS = 0$$

wird. Da (σ) willkürlich war, kann man hieraus leicht schließen, daß längs (S) identisch $\Omega_n = 0$ gilt, daß also auch (S) eine Wirbelfläche ist.

Da man eine Wirbellinie stets als Durchschnitt zweier Wirbelflächen ansehen kann,

---

[1]) Sir WILLIAM THOMSON (Lord KELVIN), 1824–1907, englischer Physiker.

[2]) HERMANN VON HELMHOLTZ, 1821–1894, deutscher Physiker und Physiologe.

[3]) Eine Feldlinie bzw. Feldfläche (Feldröhre) des Wirbelfeldes nennt man *Wirbellinie* oder *Wirbelfläche* (speziell Wirbelröhre).

ist unsere Behauptung bewiesen. Insbesondere folgt hieraus auch die Erhaltung der Wirbelröhren.

Nun ergibt sich ganz leicht der

Satz von der Erhaltung der Intensität von Wirbelröhren. *Die Intensität jeder Wirbelröhre bleibt während der ganzen Zeit der Bewegung konstant.*

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes wird die Intensität einer Wirbelröhre, d. h. der Fluß der Rotation durch einen Querschnitt der Röhre, auf die Zirkulation der Geschwindigkeit bezüglich der Randkurve dieses Schnitts zurückgeführt (vgl. Nr. 670, 2°). Daher folgt die Behauptung direkt aus dem Satz von THOMSON (vgl. 5°).

Mit diesen Beispielen für die Anwendung der eingeführten Begriffe und der grundlegenden Integralsätze wollen wir uns begnügen.

§ 5. Mehrdimensionale Integrale

673. Das Problem der Anziehungskraft und des Potentials zweier Körper. Die bisher untersuchten Typen bestimmter Integrale (eindimensionale [Kurvenintegrale], zweidimensionale [Flächenintegrale] und dreidimensionale [Raumintegrale]) reichen für die Erfordernisse der Analysis und ihrer Anwendungen nicht aus.

Wir wollen das am Problem der *Anziehung zweier Körper* veranschaulichen. Wir bezeichnen mit x_1, y_1, z_1 die Koordinaten der Punkte des ersten Körpers (V_1) und mit x_2, y_2, z_2 die Koordinaten der Punkte des zweiten Körpers (V_2). Die Massendichten beider Körper seien als Funktionen dieser Koordinaten gegeben: $\varrho_1 = \varrho_1(x_1, y_1, z_1)$ und $\varrho_2 = \varrho_2(x_2, y_2, z_2)$. Wählt man in jedem Körper jeweils ein Element mit der Masse $\varrho_1 dx_1 dy_1 dz_1$ bzw. $\varrho_2 dx_2 dy_2 dz_2$, so wirkt das zweite auf das erste nach dem Newtonschen Gesetz mit der Kraft

$$\frac{\varrho_1 \varrho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}^2},^{1})$$

wobei $r_{1,2}$ der Abstand der Elemente ist:

$$r_{1,2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Da diese Kraft vom Punkt (x_1, y_1, z_1) zum Punkt (x_2, y_2, z_2) hin gerichtet ist, sind ihre Richtungskosinus $\frac{x_2-x_1}{r_{1,2}}$, $\frac{y_2-y_1}{r_{1,2}}$, $\frac{z_2-z_1}{r_{1,2}}$. Daher hat die Anziehungskraft, die das zweite Element auf das erste ausübt, etwa in Richtung der x-Achse die Komponente

$$\frac{\varrho_1 \varrho_2 (x_2-x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 .$$

Die Komponente F_x der resultierenden Kraft, mit der der zweite Körper den ersten anzieht, ergibt sich durch Summation der gefundenen Ausdrücke über alle Elemente beider Körper, d. h., sie wird ausgedrückt durch das sechsdimensionale Integral

$$F_x = \int\int\int\int\int\int \frac{\varrho_1 \varrho_2 (x_2-x_1)}{r_{1,2}^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 ,$$

[1]) Den Proportionalitätsfaktor im universellen Newtonschen Gravitationsgesetz setzen wir, wie üblich, gleich 1.

erstreckt über das sechsdimensionale Gebiet $(V)=(V_1)\times(V_2)$ aller Punkte $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, für die (x_1, y_1, z_1) zu (V_1) und (x_2, y_2, z_2) zu (V_2) gehört. Ebensolche Ausdrücke ergeben sich für die anderen beiden Komponenten.

Analog dazu ist die Größe

$$\frac{\varrho_1\varrho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}$$

das Potential eines Elements bezüglich eines anderen. Durch Summation dieser Ausdrücke erhalten wir das Potential eines Körpers bezüglich eines anderen, und zwar wieder als sechsdimensionales Integral

$$W=\int\int\int_{(V)}\int\int\int \frac{\varrho_1\varrho_2}{r_{1,2}}\,dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2\,.$$

Sind beide Körper identisch, so liefert uns das entsprechende halbe Integral (denn sonst würde jedes Elementepaar zweimal gezählt) das *Selbstpotential* eines Körpers.

Wir wollen als Beispiel das Selbstpotential der homogenen ($\varrho_1=\varrho_2=1$) Kugel $x^2+y^2+z^2\leqq R^2$ berechnen, d. h. das Integral

$$W_0=\frac{1}{2}\int\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqq R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqq R^2}}\int\int\int\int\int\int \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}\,.$$

Die Berechnung kann man folgendermaßen durchführen. Das Potential der Kugel $x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqq R^2$ bezüglich eines Elements $dx_1\,dy_1\,dz_1$ mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1, das sich im Abstand $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ vom Mittelpunkt befindet, kennen wir bereits (Nr. 650, Beispiel 12); es wird durch ein Raumintegral ausgedrückt und ist gleich

$$\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1 dy_1 dz_1\,.^{1})$$

Man hat nun noch die entsprechenden Ausdrücke für alle Elemente der Kugel $x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqq R^2$ zu summieren, d. h. noch ein Raumintegral zu bilden:

$$\int\int\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqq R^2}\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1 dy_1 dz_1\,.$$

Diese Integration kann man durch Übergang zu Polarkoordinaten leicht ausführen. Wir erhalten schließlich

$$W_0=\frac{16}{15}\pi^2 R^5\,.$$

Im vorliegenden Fall ließ sich die Berechnung des sechsdimensionalen Integrals auf die Berechnung zweier dreidimensionaler Integrale reduzieren, von denen überdies eins schon bekannt war.

Wir kommen nun zur Herleitung der entsprechenden allgemeinen Begriffe,

---

[1]) Man muß berücksichtigen, daß die Masse des Punktes, für den hier das Potential berechnet wird, nicht 1, sondern $dx_1 dy_1 dz_1$ ist; außerdem spielt hier r_1 die Rolle des a, das in der in Nr. 650 hergeleiteten Formel auftritt.

obwohl wir uns in den meisten Fällen mit einem Hinweis auf die Analogie zu den oben untersuchten Typen von Integralen begnügen müssen.

674. Das Volumen eines n-dimensionalen Körpers. Das n-dimensionale Integral. Bei der Definition des eindimensionalen, zweidimensionalen und dreidimensionalen Integrals (Kurvenintegrals, Flächenintegrals, Raumintegrals) haben wir den Begriff der Länge einer Strecke, des Flächeninhalts einer ebenen Figur und des Volumens eines räumlichen Körpers benutzt. Analog dazu liegt der Definition des n-dimensionalen Integrals der Begriff des Volumens[1]) eines n-dimensionalen Bereichs zugrunde. Das Produkt der Kantenlängen

$$(b_1-a_1)\,(b_2-a_2)\,\ldots\,(b_n-a_n)$$

des einfachsten n-dimensionalen Gebiets, des n-dimensionalen rechtwinkligen Parallelepipeds

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n]\,,$$

nennt man das *Volumen* dieses Körpers. Es versteht sich von selbst, was man unter dem Volumen eines Körpers zu verstehen hat, der aus endlich vielen solcher Parallelepipede besteht. Man kann auf elementarem Wege zeigen, daß das Volumen nicht davon abhängt, in welcher Weise der Körper in Parallelepipede zerlegt wird.

Indem man solche „Parallelepipedkörper" betrachtet, die einem gegebenen n-dimensionalen Körper (V) ein- bzw. umbeschrieben sind, kann man in der üblichen Weise den Begriff des Volumens V für den Körper (V) definieren (vgl. Nr. 340).

Wir werden es nur mit Körpern zu tun haben, die ein Volumen besitzen; es existiert offenbar für Körper, die von *glatten* oder *stückweise glatten* Flächen[2]) begrenzt werden, insbesondere für die einfachsten uns bekannten n-dimensionalen Gebiete, das n-dimensionale Simplex

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq h$$

und die n-dimensionale Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq r^2;$$

diese Volumina werden wir in Nr. 676, Beispiel 1 und 2, berechnen.

Es sei im Gebiet (V) eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Veränderlichen gegeben; dann kommen wir zum Begriff des n-dimensionalen Integrals

$$I = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{(V)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n\,, \tag{2}$$

[1]) Wir haben uns entschlossen, diesen Ausdruck beizubehalten, obwohl sich natürlich sein Sinn zugleich mit n ändert: Es handelt sich um das „n-dimensionale Volumen". Man hätte statt dessen auch das Wort „Maß" verwenden können.

[2]) Ein Gebilde im n-dimensionalen Raum, das durch n Parametergleichungen mit $n-1$ Parametern bestimmt wird, wobei die in den Gleichungen auftretenden Parameterfunktionen nebst ihren partiellen Ableitungen stetig sind und die Funktionalmatrix den Rang $n-1$ hat, heißt hier eine *glatte* Fläche.

indem wir das Gebiet in Elemente zerlegen und die anderen uns schon ebenso geläufigen Operationen wiederholen (vgl. Nr. 643). Wenn der Integrand stetig ist, existiert das Integral sicher.

Die Berechnung solcher Integrale wird auf die Berechnung von Integralen geringerer Dimension zurückgeführt, und zwar bis auf die Berechnung eindimensionaler Integrale. Ist das Integrationsgebiet (V) das rechtwinklige Parallelepiped (1), so gilt eine Formel, die zu (10) aus Nr. 645 analog ist:

$$I=\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n . \tag{3}$$

Auf Gebiete allgemeinerer Form, die durch Ungleichungen

$$x_1^0 \leqq x_1 \leqq X_1, \qquad x_2^0(x_1) \leqq x_2 \leqq X_2(x_1), \dots,$$
$$x_n^0(x_1, \dots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq X_n(x_1, \dots, x_{n-1})$$

charakterisiert werden, ist eine Formel anwendbar, die zu (10*) aus Nr. 646 analog ist:

$$I=\int_{x_1^0}^{X_1} dx_1 \int_{x_2^0(x_1)}^{X_2(x_1)} dx_2 \dots \int_{x_n^0(x_1,\dots,x_{n-1})}^{X_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_n . \tag{4}$$

In ähnlicher Weise gelten (für eine entsprechende Form der Gebiete, die in jedem Fall leicht zu bestimmen ist) auch andere Formeln, die zu (8*) und (11*) aus Nr. 646 analog sind. Dabei wird die Berechnung des n-dimensionalen Integrals auf die schrittweise Berechnung von Integralen niedrigerer Dimensionen zurückgeführt; die Summe dieser Dimensionen ist gleich n.

Das alles wird ganz genauso wie für die Fälle $n=2$ und $n=3$ bewiesen, ohne daß irgendwelche neuen Gedanken hinzukommen. Daher brauchen wir uns damit nicht aufzuhalten. Es ist auch ohne weiteres klar, wie man *uneigentliche* n-dimensionale Integrale definiert und wie man die oben erwähnten Formeln auf diese ausdehnt.

Bemerkung. Man könnte für eine Funktion von n Veränderlichen den Begriff des *Integrals über eine* $(n-1)$*-dimensionale Fläche* (Oberflächenintegral) erklären (vgl. die Bemerkungen zu den Beispielen 3 und 16 in Nr. 676). In Anbetracht der Kompliziertheit dieses Gegenstands können wir darauf hier nicht eingehen. Wir bemerken lediglich, daß W. M. Ostrogradski in Verallgemeinerung von Formel (4) aus Nr. 651 eine Beziehung aufgestellt hat, die ein solches Integral über eine geschlossene Fläche mit einem gewissen n-dimensionalen Integral über den von der Fläche begrenzten Körper verknüpft.

675. Koordinatentransformation bei n-dimensionalen Integralen. Diese Frage untersuchen wir etwas eingehender. Gegeben seien zwei n-dimensionale Gebiete: (D) im $x_1, x_2, \dots, x_n$-Raum und (Δ) im $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$-Raum. Die Oberflächen beider Gebiete seien stetige, glatte oder stückweise glatte Flächen. Wir nehmen an, daß die Formeln

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= x_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

zwischen (D) und (Δ) eine eineindeutige Beziehung vermitteln. Dann kann man unter den üblichen Voraussetzungen bezüglich der Ableitungen und des Vorzeichens der Funktionaldeterminante

$$J=\frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

das Integral einer in (D) stetigen Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ folgendermaßen transformieren:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(D)} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

$$=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{(\Delta)} f(x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n))\,|J|\,\mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n\,. \tag{6}$$

Diese Formel ist den Transformationsformeln für zweidimensionale und dreidimensionale Integrale völlig analog (Nr. 609, Formel (21); Nr. 661, Formel (10)).

Den Beweis dieser Formel führen wir durch vollständige Induktion. Für $n=2$ und $n=3$ ist sie schon bewiesen worden. Daher genügt es, die Formel für die Dimension n unter der Voraussetzung zu beweisen, daß *die entsprechende Formel für die Dimension $n-1$ richtig ist.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß irgendeine partielle Ableitung $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}$ das Vorzeichen nicht ändert (andernfalls könnten wir das Gebiet (Δ) in Teile zerlegen, in denen das der Fall ist); es sei dies die Ableitung $\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$.

Wir greifen in dem vorgegebenen Integral (2) die Integration über x_1 heraus und schreiben es in der Form

$$\int_{x_1^0}^{X_1} \mathrm{d}x_1 \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{(D_{x_1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n; \tag{7}$$

hierbei bezeichnet (D_{x_1}) das Gebiet, das die Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ bei festgehaltenem x_1 durchlaufen.

Wir lösen die erste der Gleichungen (5) nach der Variablen ξ_1 auf und drücken diese als Funktion von $x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ aus:

$$\xi_1=\xi_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die übrigen Formeln ein. Auf diesem Wege kommen wir zu den neuen Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_2(\xi_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \xi_2, \ldots, \xi_n)=\bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_n(\xi_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \xi_2, \ldots, \xi_n)=\bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Ausgehend von diesen Formeln transformieren wir das $(n-1)$-dimensionale innere Integral in (7) auf die Veränderlichen $\xi_2, \ldots, \xi_n$. Das kann nach Voraussetzung mit Hilfe einer Formel geschehen, die zu (6) analog ist. Wir kommen zu dem Integral

$$\int_{x_1^0}^{X_1} \mathrm{d}x_1 \overbrace{\int \ldots \int}^{x-1}_{(\Delta_{x_1})} f(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) \, |J^*| \, \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n \,, \quad (9)$$

wobei

$$J^* = \frac{\mathrm{D}(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{\mathrm{D}(\xi_2, \ldots, \xi_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

ist. Wir setzen darin nun die Integration über x_1 an die erste Stelle,

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{(\Delta^*)} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n \int_{x_1^0(\xi_2, \ldots, \xi_n)}^{X_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)} f(x_1, \bar{x}_2(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots, \bar{x}_n(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) \, |J^*| \, \mathrm{d}x_1 \,,$$

und gehen im inneren Integral mit Hilfe der ersten der Formeln (5) (für festgehaltene $\xi_2, \ldots, \xi_n$) von der Veränderlichen x_1 zu der Veränderlichen ξ_1 über. Wir erhalten

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{(\Delta^*)} \mathrm{d}\xi_2 \ldots \mathrm{d}\xi_n \int_{\xi_1^0(\xi_2, \ldots, \xi_n)}^{\Xi_1(\xi_2, \ldots, \xi_n)} f(x_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), x_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| \mathrm{d}\xi_1$$

oder, wenn wir zu einem n-dimensionalen Integral zurückkehren,

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{(\Delta)} f(x_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)) \left| J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \right| \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n \,.$$

Um zu (6) zu gelangen, hat man sich nur noch von der Identität

$$J = J^* \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$$

zu überzeugen. Nun finden wir aber durch Differentiation der mittelbaren Funktionen (8) nach $\xi_2, \ldots, \xi_n$, wenn wir die Ableitungen der Funktion $\bar{\xi}_1$ unter Benutzung der Differentiationsregel für implizite Funktionen ausdrücken,

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \bar{\xi}_1}{\partial \xi_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} - \frac{\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}} \qquad (i, k = 2, \ldots, n) \,.$$

Daher nimmt die Determinante J, wenn man zu den Elementen der k-ten Zeile $(k = 2, \ldots, n)$ die mit $-\dfrac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_k}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}$ multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten

Zeile addiert, die folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \xi_n} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix} .$$

Daraus ersieht man, daß sie gleich $J^* \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}$ ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Bemerkung. Wir haben dabei stillschweigend angenommen, daß die $(n-1)$-dimensionalen Gebiete (D_{x_1}) und (Δ_{x_1}) alle von einer stetigen, glatten oder stückweise glatten Fläche (im entsprechenden Raum) begrenzt werden. Zerlegt man vorher das Gebiet (D) und zugleich damit (Δ) in Teile, so kann man erreichen, daß das wenigstens für jeden Teil einzeln der Fall ist. Aus der Gültigkeit der Formel (6) für diese Teile folgt ihre Gültigkeit auch für das Gesamtgebiet.

Die Formel für die Koordinatentransformation läßt sich in der üblichen Weise auch auf den Fall *uneigentlicher* Integrale erweitern.

676. Beispiele.

1. Man bestimme das Volumen T_n des n-dimensionalen Simplexes (Nr. 162)

$$(T_n)\colon\ x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq h .$$

Lösung. Es gilt

$$T_n = \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{(T_n)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \int_0^h dx_1 \int_0^{h-x_1} dx_2 \ldots \int_0^{h-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n .$$

Wir transformieren in diesen einfachen Integralen die Veränderlichen nacheinander entsprechend den Formeln $x_1 = h\xi_1$, $x_2 = h\xi_2$, ..., $x_n = h\xi_n$. Dafür wird die allgemeine Formel (6) nicht benötigt. Wir kommen zu dem Ergebnis

$$T_n = h^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \ldots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n = h^n \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{\xi_1 \geqq 0, \ldots, \xi_n \geqq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leqq 1}} d\xi_1 \ldots d\xi_n = \alpha_n h^n,$$

wenn man mit α_n den Wert des Integrals bezeichnet, das dem Ausgangsintegral analog ist, aber $h = 1$ entspricht.

Andererseits ergibt sich (unter gleichzeitiger Benutzung des erhaltenen Ergebnisses)

$$\alpha_n = \int_0^1 d\xi_n \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{\xi_1 \geqq 0, \ldots, \xi_{n-1} \geqq 0 \\ \xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} \leqq 1 - \xi_n}} d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1} = \alpha_{n-1} \int_0^1 (1-\xi_n)^{n-1}\, d\xi_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n} .$$

Diese Rekursionsformel liefert uns (wegen $\alpha_1 = 1$) $\alpha_n = 1/n!$, so daß schließlich $T_n = h^n/n!$ wird.

2. Man bestimme das Volumen V_n der n-dimensionalen Kugel (Nr. 162)

$$(V_n)\colon\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq R^2 .$$

Lösung. In diesem Fall handelt es sich um die Berechnung des Integrals

$$V_n = \overbrace{\int \dots \int}^{n} \limits_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \leqq R^2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n .$$

Setzt man

$$x_1 = R\xi_1, \qquad x_2 = R\xi_2, \dots, x_n = R\xi_n,^1)$$

so ergibt sich leicht $V_n = \beta_n R^n$, wobei der Koeffizient β_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

Zur Bestimmung von β_n führen wir folgende Umformung durch:

$$\beta_n = \overbrace{\int \dots \int}^{n} \limits_{\xi_1^2+\dots+\xi_n^2 \leqq 1} \mathrm{d}\xi_1 \dots \mathrm{d}\xi_n = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\xi_n \overbrace{\int \dots \int}^{n-1} \limits_{\xi_1^2+\dots+\xi_{n-1}^2 \leqq 1-\xi_n^2} \mathrm{d}\xi_1 \dots \mathrm{d}\xi_{n-1} .$$

Das innere Integral ist das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Kugel vom Radius $\sqrt{1-\xi_n^2}$ und daher gleich $\beta_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Setzen wir diesen Wert ein, so kommen wir wieder zu einer Rekursionsformel:

$$\beta_n = 2\beta_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta$$

oder (vgl. Nr. 534, Beispiel 4 (b))

$$\beta_n = \beta_{n-1} \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} .$$

Da $\beta_1 = 2$ ist, ergibt eine leichte Rechnung

$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} .$$

Für das gesuchte Volumen folgt somit

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R^n .$$

Durch Fallunterscheidung ergeben sich für gerades bzw. ungerades n die Formeln

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} R^{2m}, \qquad V_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} R^{2m+1} .$$

Speziell finden wir natürlich für V_1, V_2 und V_3 die wohlbekannten Werte $2R$, πR^2 und $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Man berechne das (uneigentliche) Integral

$$S = \overbrace{\int \dots \int}^{n-1} \limits_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \leqq 1} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}} \qquad (n>2) .$$

---

[1]) Auch hier ist die *allgemeine Formel* (6) nicht erforderlich: Nachdem man das mehrdimensionale Integral nach Formel (4) als mehrfaches Integral dargestellt hat, kann man schrittweise jeweils eine Veränderliche in jedem einfachen Integral transformieren.

Lösung. Wir transformieren das angegebene Integral wie folgt:

$$S=\underset{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqq 1}{\int\cdots\int} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-2}^2-x_{n-1}^2}},$$

wobei $\alpha=\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-2}^2}$ ist. Das innere Integral ist hier gleich π, so daß (vgl. Beispiel 2)

$$S=\pi\underset{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\leqq 1}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-2}=\pi\beta_{n-2}=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

wird.

Bemerkung. Es ist interessant, daß das soeben berechnete Integral bis auf den Faktor 2 den *Inhalt der Oberfläche der n-dimensionalen Kugel* $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$ ausdrückt. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir, daß der Inhalt einer Fläche durch das Integral[1])

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{(E)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}$$

ausgedrückt wird, wenn die Fläche durch eine explizite Gleichung $x_n=f(x_1,\ldots,x_{n-1})$ gegeben ist und der Punkt $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ dabei das $(n-1)$-dimensionale Gebiet (E) durchläuft. Speziell für die *Halbkugel*

$$x_n=\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}$$

erhalten wir

$$\underset{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqq 1}{\int\cdots\int}\frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}}{x_n}=\underset{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqq 1}{\int\cdots\int}\frac{\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}}.$$

Also ist der Inhalt der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel gleich $2\pi\beta_{n-2}$; im Fall einer Kugel vom Radius R wird der Inhalt offenbar gleich

$$2\pi\beta_{n-2}R^{n-1}=2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^{n-1}.$$

Dieses Ergebnis stammt von JACOBI.

4. Man beweise die Dirichletsche Formel

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}}x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}\qquad(p_1,\ldots,p_n>0).$$

Wir wenden vollständige Induktion an und stützen uns darauf, daß die Formel für $n=2$ schon bewiesen ist (Nr. 597, Beispiel 12; Nr. 617, Beispiel 14). Sie sei also für das $(n-1)$-dimensionale Integral richtig. Wir schreiben die linke Seite der Formel in der

[1]) Diese Formel ist ein vollständiges Analogon der Formeln (4a) aus Nr. 329 und (5) aus Nr. 626 für die Bogenlänge einer explizit gegebenen Kurve bzw. den Inhalt einer explizit gegebenen gekrümmten Fläche.

Gestalt

$$\int x_n^{p_n-1}\,dx_n \overbrace{\int\cdots\int}^{n} x_1^{p_1-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,dx_1\cdots dx_{n-1}$$
$$x_1,\ldots,x_{n-1}>0,\quad x_1+\cdots+x_{n-1}\leqq 1-x_n$$

und führen im inneren Integral die Substitution

$$x_1=(1-x_n)\,\xi_1,\ \ldots,\ x_{n-1}=(1-x_n)\,\xi_{n-1}$$

durch.[1]) Dann wenden wir auf das $(n-1)$-dimensionale Integral die Dirichletsche Formel an. Wir erhalten

$$\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+\cdots+p_{n-1}}\,dx\,.$$

Wenn wir für das Integral seinen Wert

$$\frac{\Gamma(p_n)\,\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+p_n+1)}$$

einsetzen, so kommen wir zu dem gewünschten Ergebnis.

5. Die Dirichletsche Formel läßt sich leicht verallgemeinern:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\cdots dx_n=\frac{a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}}{\alpha_1\cdots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}+1\right)}\,.$$
$$x_1,\ldots,x_n\geqq 0,\quad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leqq 1$$
$$(a_i,\ \alpha_i,\ p_i>0).$$

Diese Formel reduziert sich auf die bereits bewiesene, wenn man zu den neuen Veränderlichen $\xi_i=\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i}$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ übergeht.[1])

Insbesondere ergibt sich für $p_1=\cdots=p_n=1$, $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=2$, $a_1=\cdots=a_n=R$ hieraus wieder die Formel für das Volumen V_n der n-dimensionalen Kugel[2]) (vgl. Beispiel 2).

6. Wir heben besonders die Dirichletsche Formel für den Fall $n=3$ hervor:

$$\iiint x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz=\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+1\right)}$$
$$x,y,z\geqq 0,\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\leqq 1$$
$$(p,\ q,\ r>0)\,.$$

Sie ist nützlich zur Bestimmung von Volumina, statischen Momenten, Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten von homogenen Körpern der angegebenen Form.

So erhalten wir beispielsweise für den Teil des Ellipsoids $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\leqq 1$

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 347.

[2]) Man muß nur beachten, daß die Dirichletsche Formel wegen der Einschränkung auf positive Werte der Veränderlichen unmittelbar nur den 2^n-ten Teil des Volumens liefert.

($\alpha=\beta=\gamma=2$), der im ersten Oktanten liegt (wenn wir annehmen, daß die Dichte gleich 1 ist),

$$\text{für } p=q=r=1: \qquad V=\frac{abc}{8}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\pi}{6}\,abc\,,$$

$$\text{für } p=2,\ q=r=1: \qquad M_{yz}=\frac{a^2bc}{8}\,\frac{\Gamma(1)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\pi}{16}\,a^2bc\,,$$

$$\text{für } p=3,\ q=r=1: \qquad I_{yz}=\frac{a^3bc}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{\pi}{30}\,a^3bc\,,$$

$$\text{für } p=1,\ q=r=2: \qquad K_{yz}=\frac{ab^2c^2}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[\Gamma(1)]^2}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}=\frac{1}{15}\,ab^2c^2 \quad \text{usw.}$$

7. Man beweise die Liouvillesche Formel ($p_1, p_2, \ldots, p_n>0$)

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} \varphi(x_1+\cdots+x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\int_0^1\varphi(u)\,u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1}du$$

unter der Voraussetzung, daß das einfache Integral rechts *absolut* konvergiert.

Für $n=2$ ist die Formel bereits bekannt (Nr. 597, Beispiel 16; Nr. 611, Beispiel 17; Nr. 617, Beispiel 14). Wir nehmen ihre Richtigkeit für das $(n-1)$-dimensionale Integral an. Die linke Seite der zu beweisenden Formel schreiben wir folgendermaßen:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{x_1,\ldots,x_{n-1}\geqq 0\\ x_1+\cdots+x_{n-1}\leqq 1}} x_1^{p_1-1}\ldots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,dx_1\ldots dx_{n-1}\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}}\varphi(x_1+\cdots+x_n)\,x_n^{p_n-1}\,dx_n\,.$$

Setzt man

$$\psi(t)=\int_0^{1-t}\varphi(t+x_n)\,x_n^{p_n-1}\,dx_n\,, \qquad (*)$$

so läßt sich hierin das innere Integral durch $\psi(x_1+\cdots+x_{n-1})$ ersetzen. Dann erhält das $(n-1)$-dimensionale Integral, wenn man darauf die Liouvillesche Formel anwendet, die Gestalt

$$\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1})}\int_0^1\psi(t)\,t^{p_1+\cdots+p_{n-1}-1}dt\,.$$

Wir setzen für $\psi(t)$ den Ausdruck (*) ein und ersetzen das entstehende Doppelintegral durch ein zweidimensionales:

$$\iint_{\substack{t,x_n\geqq 0\\ t+x_n\leqq 1}}\varphi(t+x_n)\,t^{p_1+\cdots+p_{n-1}-1}x_n^{p_n-1}\,dt\,dx_n\,.$$

Um zu dem gewünschten Ergebnis zu gelangen, braucht man nur noch auf dieses Integral die schon bewiesene Formel anzuwenden.

8. Hieraus erhält man leicht die allgemeinere Formel

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\leqq 1}} \varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\cdots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right) x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=\frac{a_1^{p_1}\ldots a_n^{p_n}}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\int_0^1\varphi(u)\,u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1}\,du$$

(alle Zahlen a_i, α_i, p_i werden als positiv vorausgesetzt).

Diese Formel erlaubt es beispielsweise, die folgenden Integrale zu berechnen, und sie gibt für diese gleichzeitig auch Existenzbedingungen an:[1])

(a) $$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\cdots+x_n^{\alpha_n}\leqq 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(1-x_1^{\alpha_1}-\cdots-x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=\frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(1-\mu+\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\qquad(\text{für }\mu<1);$$

(b) $$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\cdots+x_n^{\alpha_n}\leqq 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}}{(x_1^{\alpha_1}+\cdots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}}\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=\frac{1}{\alpha_1\ldots\alpha_n\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}-\mu\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}\qquad\left(\text{für }\mu<\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right);$$

(c) $$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ x_1^{\alpha_1}+\cdots+x_n^{\alpha_n}\leqq 1}} x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\sqrt{\frac{1-x_1^{\alpha_1}-\cdots-x_n^{\alpha_n}}{1+x_1^{\alpha_1}+\cdots+x_n^{\alpha_n}}}\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\alpha_1\ldots\alpha_n}\,\frac{1}{\Gamma(m)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}\right\},$$

wobei zur Abkürzung $m=\frac{p_1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{p_n}{\alpha_n}$ gesetzt worden ist.

---

[1]) Da das Integral rechts in der Liouvilleschen Formel genau dann absolut konvergiert, wenn das Integral links konvergiert.

9. Man beweise durch vollständige Induktion die Formel

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} \varphi(x_1+\cdots+x_n)\,\frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\ldots dx_n}{(a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b)^{p_1+\cdots+p_n}}$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_0^1\varphi(u)\,\frac{u^{p_1+\cdots+p_n-1}}{(a_1u+b)^{p_1}\ldots(a_nu+b)^{p_n}}\,du \qquad (a_1,\ldots,a_n\geqq 0,\ b>0)$$

(vgl. Nr. 611, Beispiel 18; man benutze Nr. 534, Beispiel 2).

10. Wir zeigen, wie nach CAUCHY die Berechnung des mehrfachen Integrals

$$K=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\frac{x_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}e^{-(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}}{(b_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n)^q}\,dx_1\ldots dx_n \qquad (p_i,\ a_i,\ b_j,\ q>0)$$

auf die Berechnung eines einfachen Integrals zurückgeführt werden kann.

Nach einer bekannten Formel (Nr. 531, Formel (13)) ist

$$\frac{1}{(b_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n)^q}=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty e^{-u(b_0+b_1x_1+\cdots+b_nx_n)}u^{q-1}du\,.$$

Setzen wir dies in das Integral K ein und ändern die Integrationsreihenfolge, so erhält K die Form

$$K=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty e^{-b_0u}u^{q-1}du\left\{\int_0^\infty e^{-(a_1+b_1u)x_1}x_1^{p_1-1}dx_1\ldots\int_0^\infty e^{-(a_n+b_nu)x_n}x_n^{p_n-1}dx_n\right\}.$$

Wenn wir für die Integrale in der geschweiften Klammer wieder die angegebene Formel benutzen, ergibt sich schließlich

$$K=\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(q)}\int_0^\infty\frac{e^{-b_0u}u^{q-1}du}{(a_1+b_1u)^{p_1}\ldots(a_n+b_nu)^{p_n}}\,.$$

Dieses Ergebnis gilt auch für $b_0=0$, vorausgesetzt, daß $p_1+\ldots+p_n>q$ ist.

11. Man berechne das Integral

$$L_{2k}=\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq 1}(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^{2k}\,dx_1\ldots dx_n\,,$$

wobei k eine natürliche Zahl ist, während $a_1,\ldots,a_n$ beliebige reelle Zahlen sind.

Wir erhalten zunächst nach dem polynomischen Satz

$$(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^{2k}=\sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=2k}\frac{(2k)!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}a_1^{\lambda_1}\ldots a_n^{\lambda_n}x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}\,.$$

Wenn wir über die Kugel $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqq 1$ integrieren, so verschwinden die Integrale derjenigen Glieder, für die wenigstens einer der Exponenten λ eine ungerade Zahl ist. Also ist

$$L_{2k}=\sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=k}\frac{(2k)!}{(2\mu_1)!\ldots(2\mu_n)!}a_1^{2\mu_1}\ldots a_n^{2\mu_n}\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\leqq 1}x_1^{2\mu_1}\ldots x_n^{2\mu_n}dx_1\ldots dx_n\,.$$

Nach der verallgemeinerten Dirichletschen Formel (vgl. Beispiel 5) hat das letzte Integral den Wert[1])

$$\frac{\Gamma\left(\mu_1+\frac{1}{2}\right)\dots\Gamma\left(\mu_n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}.$$

Setzen wir hier

$$\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)=\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2\mu-1)!!}{2^\mu}\sqrt{\pi},$$

so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$L_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}\sum_{\mu_1+\dots+\mu_n=k}\frac{k!}{\mu_1!\dots\mu_n!}a_1^{2\mu_1}\dots a_n^{2\mu_n}$$

$$=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}(a_1^2+\dots+a_n^2)^k.$$

Dieses Integral wurde zuerst (allerdings auf anderem Wege) von N. J. Sonin[2]) berechnet. Sonin bemerkte, daß das Integral

$$L_{2k+1}=\overbrace{\int\dots\int}^{n}_{x_1^2+\dots+x_n^2\leqq 1}(a_1x_1+\dots+a_nx_n)^{2k+1}\,dx_1\dots dx_n$$

immer gleich 0 ist, und erhielt dann durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und gliedweise Integration auch den Wert des Integrals

$$\overbrace{\int\dots\int}^{n}_{x_1^2+\dots+x_n^2\leqq 1}e^{a_1x_1+\dots+a_nx_n}dx_1\dots dx_n=\pi^{n/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2k},$$

wobei zur Abkürzung $\varrho=\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}$ gesetzt ist.

Für gerades $n=2m$ kann man dieses Ergebnis in der Form

$$\pi^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2k}=\frac{(2\pi)^m}{(i\varrho)^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{i\varrho}{2}\right)^{2k+m}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{(i\varrho)^{n/2}}J_{n/2}(i\varrho)$$

schreiben, d. h., man kann es durch den Wert der Besselfunktion mit dem Index $m=\frac{n}{2}$ (Nr. 395, Beispiel 14) in einem imaginären Punkt ausdrücken. Man muß übrigens hinzufügen, daß dieses Ergebnis auch für *ungerades* n gültig bleibt, wenn man Besselfunktionen mit gebrochenen Indizes einführt.

12. Wir kommen nun zu Beispielen für die Anwendung der *allgemeinen Formel* (6) der Koordinatentransformation zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale.

---

[1]) Dabei muß berücksichtigt werden, daß die Dirichletsche Formel die Beziehungen $x_1\geqq 0,\dots,x_n\geqq 0$ voraussetzt; daher muß das Ergebnis, das diese liefert, noch mit 2^n multipliziert werden.

[2]) Nikolai Jakowlewitsch Sonin(e), 1849–1915, russischer Mathematiker.

Man wird natürlich mit der Einführung *verallgemeinerter* Kugelkoordinaten durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1\,,\\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\,,\\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\,,\\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

beginnen. Wenn man im $x_1, \ldots, x_n$-Raum die Kugel $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqq R^2$ betrachtet, so kann man ihr im neuen $r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$-Raum offenbar das *rechtwinklige Parallelepiped*

$$0 \leqq r \leqq R. \qquad 0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \ldots, \qquad 0 \leqq \varphi_{n-2} \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_{n-1} \leqq 2\pi$$

zuordnen; beschränkt man sich auf den Teil der Kugel, der den Ungleichungen $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ entspricht, so durchlaufen alle Winkel $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ das Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Die direkte Berechnung der Funktionaldeterminante

$$J = \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}$$

aus der Definition ist sehr mühselig. Daher berechnen wir sie auf einem Umweg. Die Formeln (10) führen leicht auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv r^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) = 0\,,\\ F_2 &\equiv r^2\sin^2\varphi_1-(x_2^2+\cdots+x_n^2) = 0\,,\\ F_3 &\equiv r^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2-(x_3^2+\cdots+x_n^2) = 0\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F_n &\equiv r^2\sin^2\varphi_1\ldots\sin^2\varphi_{n-1}-x_n^2 = 0\,, \end{aligned}$$

für das umgekehrt das Funktionensystem (10) die Lösung ist. Daher gilt nach der Formel aus Nr. 210, Beispiel 8,

$$\frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = (-1)^n \frac{\dfrac{\mathrm{D}(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\mathrm{D}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}}{\dfrac{\mathrm{D}(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}}.$$

Die letzten beiden Funktionaldeterminanten lassen sich sofort berechnen, denn sie reduzieren sich auf das Produkt der Diagonalglieder; es folgt somit

$$\frac{\mathrm{D}(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\mathrm{D}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = 2^n r^{2n-1}\sin^{2n-3}\varphi_1\cos\varphi_1\sin^{2n-5}\varphi_2\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)} &= (-1)^n\, 2^n x_1 x_2 \ldots x_n\\ &= (-1)^n\, 2^n r^n \sin^{n-1}\varphi_1\cos\varphi_1\sin^{n-2}\varphi_2\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Also wird schließlich

$$J = \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\,.$$

Wir betrachten als Beispiel das Integral

$$G = \overbrace{\int\ldots\int}^{n}_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqq R^2} f\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right) dx_1 \ldots dx_n\,.$$

Nehmen wir Kugelkoordinaten zu Hilfe, so wird seine Berechnung unmittelbar auf die Berechnung von n einzelnen voneinander unabhängigen Integralen zurückgeführt:

$$G=\int_0^R r^{n-1}f(r)\,dr\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\dots\int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3}\,d\varphi_{n-3}\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1}.$$

Benutzen wir zur Berechnung der Integrale der Sinuspotenzen die Formel

$$\int_0^\pi \sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=2\int_0^{\pi/2}\sin^{a-1}\varphi\,d\varphi=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$$

aus Nr. 534, Beispiel 4 (b), so erhalten wir nach Vereinfachungen

$$G=2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^R r^{n-1}f(r)\,dr,$$

so daß das Problem auf die Berechnung eines einzigen einfachen Integrals über r zurückgeführt worden ist.

Darin sind als Spezialfälle die Ergebnisse der Beispiele 2 und 3 enthalten. Seinerseits ist das erhaltene Ergebnis in der Formel von LIOUVILLE (Beispiel 8) enthalten.

13. Quadrieren wir die Formeln (10) und ersetzen wir $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ durch $x_1, \dots, x_n$[1]) und $r^2, \sin^2\varphi_1, \dots, \sin^2\varphi_{n-1}$ durch $u_1, u_2, \dots, u_n$, so kommen wir zu folgendem System von Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1(1-u_2),\\ x_2 &= u_1u_2(1-u_3),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{n-1} &= u_1u_2\dots u_{n-1}(1-u_n),\\ x_n &= u_1u_2\dots u_n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Transformation (11) ist also in gewissem Sinne dem Übergang (10) zu Kugelkoordinaten gleichwertig. Für $n=2$ hat JACOBI sie zum Beweis der bekannten Beziehung zwischen der Beta- und der Gammafunktion (Nr. 617, Beispiel 13) angewandt.

Man beweise die Liouvillesche Formel (Beispiel 7) direkt durch Anwendung der Transformation (11) auf das Integral der linken Seite.

Dem Simplex

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \dots,\ x_n\geqq 0,\qquad x_1+\dots+x_n\leqq 1$$

entspricht hierbei der Würfel $[0, 1; \dots; 0, 1]$ im $u_1, \dots, u_n$-Raum. Für die Funktionaldeterminante ergibt sich

$$J=\begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & u_2\dots u_{n-1}(1-u_n) & u_2\dots u_n\\ -u_1 & u_1(1-u_3) & u_1u_3\dots u_{n-1}(1-u_n) & u_1u_3\dots u_n\\ 0 & -u_1u_2 & & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & u_1\dots u_{n-2}(1-u_n) & u_1\dots u_{n-2}u_n\\ 0 & 0 & -u_1\dots u_{n-1} & u_1\dots u_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Fügen wir zu den Elementen jeder Spalte die entsprechenden Elemente aller folgenden Spalten hinzu, so werden alle Elemente unterhalb der Diagonale durch Nullen ersetzt, und die Diagonalglieder werden $1, u_1, u_1u_2, \dots, u_1\dots u_{n-1}$. Also ist schließlich

$$J=u_1^{n-1}u_2^{n-2}\dots u_{n-1}.$$

[1]) Natürlich können jetzt diese Veränderlichen nur *nichtnegative* Werte annehmen.

Nach Formel (6) wird unser Integral auf das folgende zurückgeführt:

$$\overbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}^{n} \varphi(u_1)\, u_1^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} (1-u_2)^{p_1-1} \times u_2^{p_2+\dots+p_n-1} \dots (1-u_n)^{p_{n-1}-1} u_n^{p_n-1} \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_n .$$

Dies ist bereits ein *Produkt* einfacher Integrale; das übrige ist klar.

14. Die gleiche Transformation erlaubt es, auch die modifizierte Liouvillesche Formel zu beweisen, bei der das n-dimensionale Integral über ein *unendliches* Gebiet erstreckt wird:

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1,\dots,x_n \geqq 0 \\ x_1+\dots+x_n \geqq 1}} \varphi(x_1+x_2+\dots+x_n)\, x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)} \int_1^\infty \varphi(u)\, u^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} \mathrm{d}u;$$

dabei wird vorausgesetzt, daß das Integral rechts *absolut* konvergiert.

Diese Formel läßt sich genau wie die vorige verallgemeinern (vgl. Beispiel 8):

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1,\dots,x_n \geqq 0 \\ \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} \geqq 1}} \varphi\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\alpha_1}+\dots+\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right) x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

$$= \frac{a_1^{p_1} \dots a_n^{p_n}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \int_1^\infty \varphi(u)\, u^{\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}-1} \mathrm{d}u.$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man beispielsweise zeigen, daß $\left(\text{für } \mu > \frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)$

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{\substack{x_1,\dots,x_n \geqq 0 \\ x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n} \geqq 1}} \frac{x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{(x_1^{\alpha_1}+\dots+x_n^{\alpha_n})^{\mu}}$$

$$= \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n \left(\mu-\frac{p_1}{\alpha_1}-\dots-\frac{p_n}{\alpha_n}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}+\dots+\frac{p_n}{\alpha_n}\right)}$$

ist.

15. Man beweise die folgende Formel (die ebenfalls von LIOUVILLE stammt):

$$\overbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}^{n} \varphi(v_1 v_2 \dots v_n)\, (1-v_1)^{p_1-1} (1-v_2)^{p_2-1} \dots (1-v_n)^{p_{n-1}} v_2^{p_1} v_3^{p_1+p_2} \dots v_n^{p_1+\dots+p_{n-1}} \mathrm{d}v_1 \dots \mathrm{d}v_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_n)} \int_0^1 \varphi(u)\, (1-u)^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} \mathrm{d}u.$$

Hinweis. Die Formel läßt sich aus der in Beispiel 7 angegebenen Beziehung herleiten, wenn man dort $\varphi(u)$ durch $\varphi(1-u)$ ersetzt und

$$\begin{aligned} x_1 &= (1-v_1)\, v_2 \dots v_n\,, \\ x_2 &= (1-v_2)\, v_3 \dots v_n\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= (1-v_{n-1})\, v_n\,, \\ x_n &= 1-v_n \end{aligned}$$

setzt. Die Funktionaldeterminante der Transformation hat in diesem Fall den Wert

$$J = (-1)^n v_2 v_3^2 \dots v_{n-1}^{n-2} v_n^{n-1}\,.$$

16. Wir betrachten nach CATALAN das Integral[1]) $(n \geqq 3)$

$$K = \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{x_1^2+\dots+x_n^2=1} f(m_1x_1+\dots+m_nx_n)\,\frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{|x_n|}$$

$$= 2 \overbrace{\int \dots \int}^{n-1}_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2 \leqq 1} f(m_1x_1+\dots+m_nx_n)\,\frac{dx_1 \dots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}\,;$$

wir nehmen dabei an, daß die Funktion $f(u)$ für $|u| \leqq M = \sqrt{m_1^2+\dots+m_n^2}$ stetig ist.

Wir nehmen eine *orthogonale* Transformation aller Veränderlichen einschließlich x_n vor. Es sei

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1u_1+b_1u_2+\dots+k_1u_{n-1}+l_1u_n\,, \\ x_2 &= a_2u_1+b_2u_2+\dots+k_2u_{n-1}+l_2u_n\,, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_nu_1+b_nu_2+\dots+k_nu_{n-1}+l_nu_n\,, \end{aligned}$$

wobei die n^2 Koeffizienten den $\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungen

$$\begin{aligned} &a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=1, && a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=0\,, \\ &\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots \\ &l_1^2+l_2^2+\dots+l_n^2=1, && k_1l_1+k_2l_2+\dots+k_nl_n=0 \end{aligned}$$

unterworfen sind. Aus diesen folgt

$$u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2 = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = 1;$$

wir wählen als neue unabhängige Veränderliche $u_1, \dots, u_{n-1}$, während wir

$$u_n = \pm\sqrt{1-u_1^2-\dots-u_{n-1}^2}$$

setzen. Die Willkür in der Wahl der Koeffizienten ist so groß, daß wir berechtigt sind,

$$a_i = \frac{m_i}{M} \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

zu setzen und sogar zusätzlich noch zu fordern, daß die Koeffizientendeterminante der Transformation gleich $+1$ sein soll. Unter diesen Voraussetzungen ist bekanntlich die Adjunkte eines Elements der Determinante gleich diesem Element selbst. Berücksich-

---

[1]) In der ersten Form ist dieses Integral dem Wesen nach das Oberflächenintegral

$$\int \dots \int f(m_1x_1+\dots+m_nx_n)\,dS$$

über die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel (vgl. die Bemerkung zu Beispiel 3).

tigt man dies, so ergibt sich, daß die Funktionaldeterminante

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} = \begin{vmatrix} a_1 - l_1 \frac{u_1}{u_n} & b_1 - l_1 \frac{u_2}{u_n} & \cdots & k_1 - l_1 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ a_2 - l_2 \frac{u_1}{u_n} & b_2 - l_2 \frac{u_2}{u_n} & \cdots & k_2 - l_2 \frac{u_{n-1}}{u_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_1}{u_n} & b_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_2}{u_n} & \cdots & k_{n-1} - l_{n-1} \frac{u_{n-1}}{u_n} \end{vmatrix}$$

gleich

$$l_n + a_n \frac{u_1}{u_n} + b_n \frac{u_2}{u_n} + \cdots + k_n \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{x_n}{u_n}$$

ist. Also ist

$$K = 2 \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \leqq 1} f(Mu_1) \frac{du_1 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \cdots - u_{n-1}^2}}$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} f(Mu_1)\, du_1 \overbrace{\int \cdots \int}^{n-2}_{u_2^2 + \cdots + u_{n-1}^2 \leqq 1 - u_1^2} \frac{du_2 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{(1 - u_1^2) - u_2^2 - \cdots - u_{n-1}^2}}.$$

Das innere Integral ist, wie man leicht aus Beispiel 3 erhält, gleich

$$\frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}},$$

so daß schließlich

$$K = 2 \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2}\, u\right) (1 - u^2)^{\frac{n-3}{2}} du$$

folgt. Setzt man hier $u = \cos \lambda$ $(0 \leqq \lambda \leqq \pi)$, so kann man das Ergebnis in der Form

$$K = 2 \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{0}^{\pi} f\left(\sqrt{m_1^2 + \cdots + m_n^2} \cos \lambda\right) \sin^{n-2} \lambda \, d\lambda$$

schreiben.

Für $n = 3$ ergibt sich hieraus die bekannte Poissonsche Formel, die wir in Nr. 633, Beispiel 3, hergeleitet hatten, und zwar im wesentlichen mit der gleichen Methode der Koordinatentransformation.

17. Die uns bereits bekannte Formel von CATALAN (vgl. Nr. 597, Beispiel 15, und Nr. 617, Beispiel 16) läßt sich durch Wiederholung der gleichen Überlegungen unmittelbar auf den n-dimensionalen Fall übertragen:

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{m \leqq g(x_1, \ldots, x_n) \leqq M} f(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi(g(x_1, \ldots, x_n))\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= (\mathrm{S}) \int_{m}^{M} \varphi(u)\, d\psi(u) = (\mathrm{R}) \int_{m}^{M} \varphi(u) \frac{d\psi(u)}{du} du, \tag{12}$$

wobei

$$\psi(u) = \overbrace{\int \dots \int}^{n}_{m \leqq g(x_1,\dots,x_n) \leqq u} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \tag{13}$$

ist.

Wenn man unter $\int_m^\infty$ den Grenzwert $\lim_{M\to\infty} \int_m^M$ versteht, so darf hier auch $M = \infty$ sein.

Als Beispiel für die Methode von CATALAN leite man die Liouvillesche Formel (Beispiel 7) aus der Dirichletschen Formel (Beispiel 4) her.

18. N. J. SONIN machte darauf aufmerksam, daß man die Formel von CATALAN mitunter in anderem Zusammenhang benutzen kann.

Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ homogen (Nr. 187) vom Grad s und die Funktion $g(x_1, \dots, x_n)$ ebenfalls homogen, aber vom Grad 1, sei; beispielsweise kann die Funktion g die Gestalt

$$x_1 + \dots + x_n \quad \text{oder} \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

haben. Es sei weiter $m = 0$. Dann erhalten wir, indem wir in (13) $x_1 = u\xi_1$, $x_2 = u\xi_2$, ..., $x_n = u\xi_n$ setzen (Funktionaldeterminante $J = u^n$) und berücksichtigen, daß die Ungleichung $0 \leqq g(x_1, \dots, x_n) \leqq u$ dabei in die Ungleichung $0 \leqq g(\xi_1, \dots, \xi_n) \leqq 1$ übergeht,

$$\psi(u) = u^{n+s} \overbrace{\int \dots \int}^{n}_{0 \leqq g(\xi_1,\dots,\xi_n) \leqq 1} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n .$$

Das setzen wir in (12) ein (nur schreiben wir an Stelle von ξ wieder x) und erhalten

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{0 \leqq g(x_1,\dots,x_n) \leqq M} f(x_1, \dots, x_n)\, \varphi(g(x_1, \dots, x_n))\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \overbrace{\int \dots \int}^{n}_{0 \leqq g(x_1,\dots,x_n) \leqq 1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \int_0^M \varphi(u)\, du^{n+s} .$$

Wenn es gelingt, erstens die Funktion φ und zweitens die Grenze M so zu wählen, daß sich das Integral links leicht berechnen läßt, so ergibt sich hieraus ein Ausdruck für das Integral

$$\overbrace{\int \dots \int}^{n}_{0 \leqq g(x_1,\dots,x_n) \leqq 1} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n .$$

Wenn wir beispielsweise

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n, \qquad f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} \quad (p_i > 0)$$

$$\varphi(u) = e^{-u}, \qquad M = +\infty$$

setzen und uns auf nichtnegative Werte $x_1, \dots, x_n$ beschränken, so wird $s = p_1 + \dots + p_n - n$, und wir erhalten die Dirichletsche Formel (Beispiel 4)

$$\int \dots \int_{\substack{x_1,\dots,x_n \geqq 0 \\ 0 \leqq x_1 + \dots + x_n \leqq 1}} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{p_1-1} dx_1 \dots \int_0^\infty e^{-x_n} x_n^{p_n-1} dx_n}{(p_1 + \dots + p_n) \int_0^\infty e^{-u} u^{p_1+p_2+\dots+p_n-1} du} = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)} .$$

19. Nach dem gleichen Verfahren reduziere man das Integral

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{x_1,\ldots,x_n\geqq 0\\ 0\leqq x_1+\cdots+x_n\leqq 1}} \frac{x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}}{(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)^q}\,dx_1\ldots dx_n,$$

vorausgesetzt, daß $p_i>0$, $b_i>0$ und $p_1+\cdots+p_n>q>0$ ist.

Hinweis. Man wähle $\varphi(u)=e^{-u}$, $M=+\infty$ und benutze das Ergebnis von Aufgabe 10 für $a_1=\cdots=a_n=1$ und $b_0=0$.

Lösung.

$$\frac{\Gamma(p_1)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n-q+1)\,\Gamma(q)}\int_0^\infty\frac{u^{q-1}du}{(1+b_1u)^{p_1}\ldots(1+b_nu)^{p_n}}.$$

20. Von N. J. Sonin stammt auch die folgende Verallgemeinerung der Catalanschen Formel:

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g(x_1,\ldots,x_n)\leqq M}\varphi(x_1,\ldots,x_n,g(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n=(\mathrm{R})\int_m^M\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right\}_{c=t}dt,$$

wobei

$$\Phi(t,c)=\int\cdots\int_{m\leqq g(x_1,\ldots,x_n)\leqq t}\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)\,dx_1\ldots dx_n$$

ist.

(Die Catalansche Formel ergibt sich hieraus, wenn man der Funktion $\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)$ die spezielle Form $f(x_1,\ldots,x_n)\,\varphi(c)$ erteilt.)

Wir geben einen Beweis an, der von Fichtenholz stammt.

In der offenbar richtigen Gleichung

$$\int_m^M dt\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g\leqq M}F(x_1,\ldots,x_n,t)\,dx_1\ldots dx_n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g\leqq M}dx_1\ldots dx_n\int_m^M F(x_1,\ldots,x_n,t)\,dt$$

setzen wir

$$F=\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t} & \text{für}\quad m\leqq g(x_1,\ldots,x_n)\leqq t,\\ 0 & \text{für}\quad g(x_1,\ldots,x_n)>t;\end{cases}$$

dann erhalten wir

$$\int_m^M dt\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g\leqq t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dx_1\ldots dx_n=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g\leqq M}dx_1\ldots dx_n\int_g^M\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dt.$$

Wenn man das innere Integral rechts ausrechnet, so ergibt sich hieraus

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g\leqq M}\varphi(x_1,\ldots,x_n,g)\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=\Phi(M,M)-\int_m^M dt\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq g\leqq t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,dx_1\ldots dx_n. \qquad (14)$$

Andererseits gilt nach der Differentiationsregel für mittelbare Funktionen für die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t,t)=\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right\}_{c=t}+\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial c}\right\}_{c=t}.$$

Wir wenden zur Berechnung der zweiten Ableitung rechts die Leibnizsche Regel an und ersetzen diese so durch

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq\varrho\leqq t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,.$$

Wir integrieren nun diese Gleichung über t von m bis M. Da $\Phi(m,m)=0$ ist, finden wir

$$\Phi(M,M)-\int_m^M\mathrm{d}t\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{m\leqq\varrho\leqq t}\frac{\partial\varphi(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\int_m^M\left\{\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right\}_{c=t}\mathrm{d}t\,. \tag{15}$$

Faßt man (14) und (15) zusammen, so ergibt sich die zu beweisende Formel.

21. Wir benutzen die Soninsche Formel zur Berechnung des Integrals

$$S=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqq\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqq1}\mathrm{e}^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,.$$

Hier ist

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n,c)=\mathrm{e}^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{c}},\qquad g(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},\qquad m=0,\qquad M=1\,,$$

$$\Phi(t,c)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqq\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqq t}\mathrm{e}^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{c}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,.$$

Es gilt offenbar

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqq\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqq t}\mathrm{e}^{\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{c}}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=t^n\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{0\leqq\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqq1}\mathrm{e}^{\frac{t}{c}(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\,.$$

Unter Benutzung des Ergebnisses von Beispiel 11 erhalten wir leicht die Reihenentwicklung

$$\Phi(t,c)=\pi^{n/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}\left(\frac{\varrho}{2c}\right)^{2k}t^{2k+n}\,,$$

wobei $\varrho=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ ist.

Hieraus folgt

$$\left[\frac{\partial\Phi(t,c)}{\partial t}\right]_{c=t}=t^{n-1}2\pi^{n/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2k},$$

so daß nach der Formel von Sonin

$$S=\frac{2\pi^{n/2}}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2k}=\frac{2\pi^{n/2}}{n(\varrho\mathrm{i})^{\frac{n}{2}-1}}J_{\frac{n}{2}-1}(\varrho\mathrm{i})$$

wird (vgl. Beispiel 11).

22. Man berechne das Integral ($\lambda \geqq 0$)

$$R(\lambda) = \overbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}^{n-1} e^{-\left(x_1+\dots+x_{n-1}+\frac{\lambda^n}{x_1 \dots x_{n-1}}\right)} x_1^{\frac{1}{n}-1} x_2^{\frac{2}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

(vgl. Nr. 617, Beispiel 19).

Differenzieren wir (für $\lambda > 0$) unter dem Integralzeichen nach dem Parameter λ und ersetzen wir im Ergebnis die *eine* Veränderliche x_1 durch

$$z = \frac{\lambda^n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}},$$

so erhalten wir

$$\frac{dR}{d\lambda} = -n \overbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}^{n} e^{-\left(x_2+\dots+x_{n-1}+z+\frac{\lambda^n}{x_2 \dots x_{n-1} z}\right)} x_2^{\frac{1}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-2}{n}-1} z^{\frac{n-1}{n}-1} dx_2 \dots dx_{n-1} dz,$$

d. h. $\frac{dR}{d\lambda} = -nR$. Daraus folgt $R = Ce^{-n\lambda}$.

Da das Integral R für $\lambda = 0$ stetig bleibt, ist

$$C = R(0) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

(Nr. 531, 6°). Daher wird schließlich

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-n\lambda}.$$

23. Liouville benutzte dieses Integral in scharfsinniger Weise zur Herleitung des von Gauss stammenden Multiplikationssatzes für die Gammafunktion (Nr. 536).

Wir multiplizieren beide Seiten der erhaltenen Gleichungen mit λ^{p-1} $(p > 0)$ und integrieren sie über λ von $\lambda = 0$ bis $\lambda = \infty$. Rechts ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty \lambda^{p-1} e^{-n\lambda} d\lambda = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{p+1/2}} \Gamma(p). \tag{16}$$

Links setzen wir die Integration über λ an die erste Stelle (bezüglich der Ausführung):

$$\overbrace{\int_0^\infty \dots \int_0^\infty}^{n-1} e^{-(x_1+\dots+x_{n-1})} x_1^{\frac{1}{n}-1} \dots x_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^n}{x_1 \dots x_{n-1}}} \lambda^{p-1} d\lambda.$$

Das innere Integral reduziert sich durch die Substitution $\frac{\lambda^n}{x_1 \dots x_{n-1}} = t$ auf

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)(x_1 \dots x_{n-1})^{\frac{p}{n}},$$

worauf das übrigbleibende $(n-1)$-dimensionale Integral in ein Produkt einzelner einfacher Integrale zerfällt:

$$\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right) \int_0^\infty e^{-x_1} x_1^{\frac{p+1}{n}-1} dx_1 \dots \int_0^\infty e^{-x_{n-1}} x_{n-1}^{\frac{p+n-1}{n}-1} dx_{n-1}$$

$$= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p+n-1}{n}\right).$$

Vergleichen wir dieses Produkt mit (16) und ersetzen wir p durch na $(a>0)$, so kommen wir zu der Gaußschen Formel in ihrer üblichen Gestalt:

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-1/2}}\,\Gamma(na)\,.$$

24. Es seien $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ beschränkte, in dem endlichen Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktionen. Man beweise

$$\frac{1}{n!}\overbrace{\int_a^b\dots\int_a^b}^{n}\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n)\end{vmatrix}^2 \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n$$

$$=\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_1f_2\mathrm{d}x & \dots & \int_a^b f_1f_n\mathrm{d}x\\ \int_a^b f_2f_1\mathrm{d}x & \int_a^b f_2^2\mathrm{d}x & \dots & \int_a^b f_2f_n\mathrm{d}x\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \int_a^b f_nf_1\mathrm{d}x & \int_a^b f_nf_2\mathrm{d}x & \dots & \int_a^b f_n^2\mathrm{d}x\end{vmatrix}.$$

Die Determinante rechts nennt man *Gramsche Determinante.*[1])

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in m $(>n)$ gleiche Teile und betrachten die Werte aller n Funktionen in den Teilpunkten

$$f_{ij}^{(m)}=f_i\left(a+j\,\frac{b-a}{m}\right)\quad(i=1, 2,\dots, n;\ j=0, 1, \dots, m-1)\,.$$

Wir quadrieren die aus diesen Zahlen bestehende Matrix. Nach einem bekannten Satz ist die dem Quadrat entsprechende Determinante[2])

$$\left|\sum_j f_{ij}^{(m)}f_{kj}^{(m)}\right|$$

gleich der Quadratsumme von Unterdeterminanten der erwähnten Ausgangsmatrix

$$\sum_{j_1<j_2<\dots<j_n}\left|f_{ij_k}^{(m)}\right|^2;$$

die Summation wird *über alle möglichen Kombinationen* der m $(>n)$ Indizes $0, 1, \dots, m-1$ zur Klasse n erstreckt. Wenn man von Kombinationen zu *Variationen* übergeht, wird jedes Glied $n!$-mal wiederholt; man darf auch die Gleichheit von Indizes j zulassen, denn diesem Fall entspricht der Summand 0. Infolgedessen gilt

$$\frac{1}{n!}\sum_{j_1=0}^{m-1}\dots\sum_{j_n=0}^{m-1}\left|f_{ij_k}^{(m)}\right|^2=\left|\sum_{j=0}^{m-1}f_{ij}^{(m)}f_{kj}^{(m)}\right|.$$

Multipliziert man jeden *Summanden* der mehrfachen Summe links mit $\left(\frac{b-a}{m}\right)^n$ und gleichzeitig jedes *Element* der Determinante rechts mit $\frac{b-a}{m}$, so ergibt sich eine Beziehung von der Art derjenigen, die bewiesen werden soll, nur daß Integralsummen an Stelle von Integralen auftreten. Der Grenzübergang $m\to\infty$ vervollständigt den Beweis.

---

[1]) Jörgen Pedersen Gram, 1850–1916, dänischer Mathematiker.

[2]) Der Kürze halber schreiben wir die Determinante, bei der im Schnittpunkt der i-ten Zeile und der k-ten Spalte das Element a_{ik} steht, in der Form $|a_{ik}|$.

XIX. Fourierreihen

§ 1. Einführung

677. Periodische Größen und harmonische Analyse. In Wissenschaft und Technik hat man es häufig mit *periodischen Erscheinungen* zu tun, d. h. mit Erscheinungen, die sich nach einem bestimmten Zeitabschnitt T, der sogenannten *Periode*, wiederholen. Als Beispiel mögen die Arbeitstakte einer Dampfmaschine dienen, die nach einer bestimmten Anzahl Umdrehungen wieder die ursprüngliche Phase durchlaufen, oder auch Wechselstrom usw. Die verschiedenen Größen, die mit einer periodischen Erscheinung zusammenhängen, nehmen nach Ablauf einer Periode T ihre früheren Werte an, sind also *periodische* Funktionen der Zeit t, die sich durch Beziehungen der Form

$$\varphi(t+T)=\varphi(t)$$

charakterisieren lassen. Von dieser Art sind etwa Stromstärke und Spannung eines Wechselstroms oder, beim Beispiel der Dampfmaschine, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes, der Dampfdruck, die Tangentialkraft am Handgriff einer Kurbel usw.

Die einfachste periodische Funktion (von der Konstanten abgesehen) ist die *Sinusfunktion* $A \sin(\omega t+\alpha)$, wobei ω die Kreisfrequenz ist, die mit der Periode T durch

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

zusammenhängt. Aus solchen einfachsten periodischen Funktionen lassen sich auch kompliziertere additiv zusammensetzen. Es ist von vornherein klar, daß die Frequenzen der Sinusfunktionen, aus denen sich die komplizierteren zusammensetzen, verschieden sein müssen; man überzeugt sich nämlich leicht davon, daß die Addition von Sinusgrößen derselben Frequenz wieder auf eine Sinusfunktion, und zwar derselben Frequenz, führt. Addiert man dagegen einige Größen der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} y_0&=A_0\,,\\ y_1&=A_1\sin(\omega t+\alpha_1)\,,\\ y_2&=A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)\,,\\ y_3&=A_3\sin(3\omega t+\alpha_3)\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

welche, wenn man sie nicht als konstant annimmt, die Frequenzen ω, 2ω, 3ω, ..., also Vielfache der kleinsten Frequenz ω, und die Perioden T, $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$, ... haben,

so erhält man eine *periodische* Funktion (der Periode T), die aber von allen Funktionen der Form (2) verschieden ist.

Als Beispiel bilden wir die Summe (Abb. 121) dreier Sinusfunktionen:

$$\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 3t\,.$$

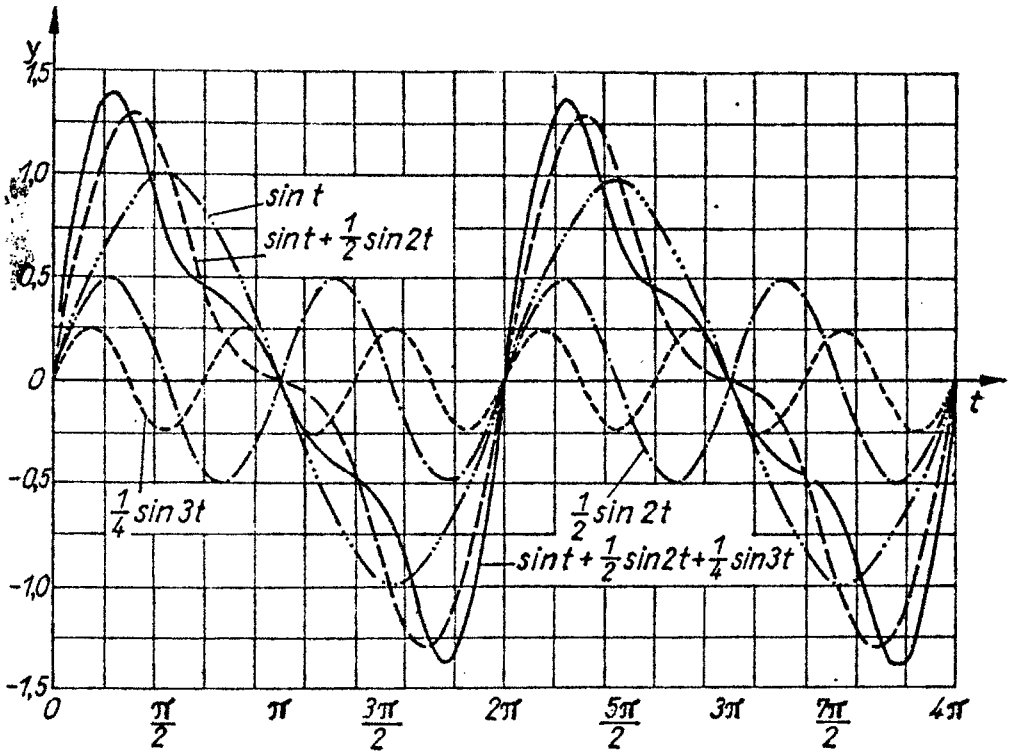

Abb. 121

Die Kurve dieser Funktion unterscheidet sich schon wesentlich von einer Sinuskurve. Um so mehr gilt das für die Summe einer *unendlichen* Reihe aus Summanden der Form (2).

Jetzt kann man sich natürlich die umgekehrte Frage stellen: Kann man eine gegebene periodische Funktion $\varphi(t)$ der Periode T als Summe endlich oder unendlich vieler Sinusfunktionen der Form (2) darstellen? Wie wir noch sehen werden, läßt sich diese Frage für eine ziemlich große Klasse von Funktionen positiv beantworten, aber nur, wenn man die ganze unendliche Folge von Größen der Form (2) heranzieht. Die Funktionen dieser Klasse lassen sich in eine „trigonometrische Reihe"

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A_0+A_1\sin(\omega t+\alpha_1)+A_2\sin(2\omega t+\alpha_2)+A_3\sin(3\omega t+\alpha_3)+\dots\\ &= A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\alpha_n)\end{aligned}\qquad(3)$$

entwickeln; dabei sind $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2, \dots$ Konstante, die für jede solche Funktion bestimmte Werte haben, und die Frequenz ω ist durch (1) gegeben.

Geometrisch bedeutet das, daß *man die Kurve einer periodischen Funktion durch Überlagerung von Sinuskurven erhalten kann.* Deutet man jede Sinuskurve mechanisch als Darstellung einer harmonischen Schwingung, so kann man auch sagen,

daß *hier eine durch eine Funktion $\varphi(t)$ charakterisierte zusammengesetzte Schwingung in einzelne harmonische Schwingungen zerlegt wird.* Daher nennt man die in der Entwicklung (3) auftretenden einzelnen Sinusfunktionen die *harmonischen Komponenten* der Funktion $\varphi(t)$ oder einfach erste, zweite usw. *Harmonische.* Den Prozeß der Entwicklung einer periodischen Funktion nach Harmonischen nennt man *harmonische Analyse.*

Wählt man als unabhängige Veränderliche

$$x = \omega t = \frac{2\pi t}{T},$$

so erhält man eine Funktion von x,

$$f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

die ebenfalls periodisch ist, aber mit der Standardperiode 2π. Die Entwicklung (3) nimmt dann folgende Form an:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x+\alpha_1) + A_2 \sin(2x+\alpha_2) + A_3 \sin(3x+\alpha_3) + \ldots$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\alpha_n). \tag{4}$$

Formt man die Glieder dieser Reihe nach dem Additionstheorem für den Sinus um und setzt

$$A_0 = a_0, \qquad A_n \sin\alpha_n = a_n, \qquad A_n \cos\alpha_n = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

so gelangt man schließlich zu der Normalform einer trigonometrischen Reihe,

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5}$$

in der wir sie auch im folgenden stets betrachten wollen.[1]) Hier ist eine Funktion des Winkels x, welche die Periode 2π hat, nach Kosinus- und Sinusfunktionen von Winkeln, die Vielfache von x sind, entwickelt.

Wir gelangten zur Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe, indem wir von periodischen Schwingungserscheinungen und damit zusammenhängenden Größen ausgingen. Es ist jedoch wichtig, an dieser Stelle schon darauf hinzuweisen, daß ähnliche Entwicklungen sich oft auch nützlich erweisen bei der Untersuchung von Funktionen, die nur auf einem bestimmten endlichen Intervall definiert sind und mit Schwingungserscheinungen überhaupt nichts zu tun haben.

678. Die Bestimmung der Koeffizienten nach der Methode von Euler-Fourier. Um zu beweisen, daß die Entwicklung einer gegebenen Funktion $f(x)$ der Periode 2π in eine trigonometrische Reihe der Form (5) möglich ist, muß man von einem bestimmten System der Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$, ausgehen. Wir geben ein Verfahren zu ihrer Bestimmung bei gegebenem $f(x)$ an, das in der zweiten Hälfte

[1]) Von dieser Entwicklung kann man selbstverständlich leicht wieder zu einer Entwicklung der Gestalt (4) übergehen.

des XVIII. Jahrhunderts von EULER und unabhängig von ihm zu Anfang des XIX. Jahrhunderts von FOURIER[1]) benutzt wurde.

Wir setzen $f(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ als eigentlich oder uneigentlich integrierbar voraus, im letzten Fall dann als absolut integrierbar. Wir nehmen an, eine Entwicklung der Form (5) liege vor, integrieren sie gliedweise von $-\pi$ bis π (was wir vorläufig als erlaubt voraussetzen wollen) und erhalten

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\right].$$

Wie man leicht sieht, ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{6}$$

Daher sind alle Glieder unter dem Summenzeichen gleich 0, so daß wir schließlich

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \tag{7}$$

finden.

Um nun die Koeffizienten a_m zu bestimmen, multiplizieren wir beide Seiten der Entwicklung (5), die wir als gültig ansehen, mit $\cos mx$ und integrieren gliedweise über dasselbe Intervall:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$
$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx\right].$$

Das erste Glied verschwindet nach (6). Ferner ist (nach Nr. 309, Beispiel 4)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,dx = 0 \tag{8}$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\,dx = 0 \tag{9}$$

für $n \neq m$ und schließlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx = \pi. \tag{10}$$

Somit verschwinden alle Integrale unter dem Summenzeichen, außer dem Integral, das gerade den Faktor a_m hat. Also ist

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{11}$$

[1]) JOSEPH FOURIER, 1768–1830, französischer Mathematiker.

Analog erhalten wir durch Multiplikation von (5) mit sin mx und gliedweise Integration

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \qquad (m = 1, 2, \ldots) . \tag{12}$$

Dabei benutzen wir außer (6) und (8) noch die leicht zu verifizierenden Beziehungen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \tag{13}$$

für $n \neq m$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi . \tag{14}$$

Die Beziehungen (7), (11) und (12) sind unter dem Namen *Euler-Fouriersche Formeln* bekannt; die nach diesen Formeln berechneten Koeffizienten heißen *Fourierkoeffizienten* der gegebenen Funktion und die mit ihrer Hilfe gebildete trigonometrische Reihe (5) ihre *Fourierreihe*. Mit diesen Fourierreihen wollen wir uns in diesem Kapitel ausschließlich befassen.

Wir wollen uns jetzt Rechenschaft darüber ablegen, welchen logischen Wert unsere Überlegungen haben. Da wir von der Annahme ausgingen, es gelte die trigonometrische Reihenentwicklung (5), bleibt die Frage, ob sie wirklich existiert, natürlich noch offen. Sind nun aber die Überlegungen, mit deren Hilfe wir nach dem Vorbild von Euler und Fourier die Koeffizienten der Entwicklung (5) bestimmt haben, tatsächlich überzeugend, selbst wenn die Reihenentwicklung möglich ist? Wir haben z. B. wiederholt eine Reihe gliedweise integriert, aber das ist nicht immer erlaubt (Nr. 434). Hinreichend dafür ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe. Daher kann man streng genommen nur folgendes sagen:

Ist die Funktion f der Periode 2π in eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe (5) *entwickelbar, so ist diese notwendigerweise ihre Fourierreihe.*[1])

Wenn wir aber nicht von vornherein voraussetzen, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert, so beweisen unsere Überlegungen keineswegs, daß die Funktion in eine Fourierreihe entwickelbar ist (vgl. Nr. 749, 750). Welchen Sinn haben sie dann? Man kann sie nur als heuristisches Prinzip ansehen, das ausreicht, um bei Versuchen, eine gegebene Funktion in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln, mit ihrer Fourierreihe zu beginnen, dann (in aller Strenge) zu beweisen, unter welchen Voraussetzungen sie konvergiert, und schließlich zu zeigen, daß sie gerade gegen die gegebene Funktion konvergiert.

Solange das nicht geschehen ist, haben wir nur *formal* das Recht, die Fourierreihe einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu betrachten, und können nichts anderes darüber sagen, als daß sie durch die Funktion $f(x)$ „erzeugt" wird. Diesen Zu-

[1]) Die gleichmäßige Konvergenz bleibt auch bei der Multiplikation aller Glieder der Reihe mit den beschränkten Funktionen cos mx, sin mx erhalten (vgl. Nr. 429). Die gleichmäßige Konvergenz ließe sich hier durch die Beschränktheit der Partialsummen ersetzen (vgl. Nr. 528).

sammenhang mit der Funktion f deutet man gewöhnlich durch die Schreibweise

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{5a}$$

an, wobei man das Gleichheitszeichen vermeidet.

679. Orthogonale Funktionensysteme. Die in den vorigen Abschnitten angestellten Überlegungen sind ein Musterbeispiel für Überlegungen, wie man sie in der Mathematik bei der Untersuchung vieler Reihenentwicklungen häufig durchführt.

Wir nennen zwei im Intervall $[a, b]$ definierte Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in diesem Intervall zueinander *orthogonal*, wenn das Integral über ihr Produkt gleich 0 ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 0 .$$

Wir betrachten ein System $\{\varphi_n(x)\}$ von Funktionen, die im Intervall $[a, b]$ definiert und dort nebst ihren Quadraten integrierbar sind; dann sind, wie wir wissen (Nr. 483, Beispiel 6), auch die Produkte je zweier dieser Funktionen integrierbar. Sind die Funktionen eines gegebenen Systems paarweise orthogonal,

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0 \qquad (n, m = 0, 1, 2, \ldots; n \neq m) , \tag{15}$$

so spricht man von einem *Orthogonalsystem*. Dabei setzen wir stets

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx = \lambda_n > 0 \tag{16}$$

voraus, so daß in unserem System weder eine identisch verschwindende noch eine einer solchen irgendwie äquivalente[1]) Funktion enthalten ist, für die das Integral über ihr Quadrat verschwindet.

Ist $\lambda_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so heißt das Funktionensystem *normiert* (*orthonormiert*, ein *Orthonormalsystem*). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man zu dem System $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\, \varphi_n(x)\right\}$ übergehen, das normiert ist.

Wir betrachten nun einige Beispiele.

1. Das wichtigste Beispiel eines Orthogonalsystems ist das trigonometrische System

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{17}$$

im Intervall $[-\pi, \pi]$, das wir oben betrachtet haben. Die Orthogonalität folgt aus den Beziehungen (6), (8), (9) und (13). Es ist (vgl. (10) und (14)) offenbar nicht normiert. Multipliziert man jedoch die trigonometrischen Funktionen (17) mit einem passenden Faktor, so erhält man das Orthonormalsystem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{17*}$$

[1]) Vgl. Nr. 733.

2. Wir weisen darauf hin, daß das System (17) bzw. (17*) im verkürzten Intervall $[0, \pi]$ nicht mehr orthogonal ist; denn es ist

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \neq 0 ,$$

wenn von den Zahlen n und m genau eine ungerade ist. Umgekehrt ist, wovon man sich leicht überzeugen kann, jedes der Teilsysteme

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots \tag{18}$$

bzw.

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots \tag{19}$$

in diesem Intervall ein Orthogonalsystem.

3. Unwesentlich verschieden davon sind die Systeme (vgl. Nr. 688)

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \ldots \tag{18*}$$

und

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sin \frac{n\pi x}{l} \ldots, \tag{19*}$$

die im Intervall $[0, l]$ orthogonal sind.

4. Um auch ein Beispiel eines komplizierten trigonometrischen Orthogonalsystems anzugeben, betrachten wir die transzendente Gleichung

$$\tan \xi = c\xi \qquad (c = \text{const}) . \tag{20}$$

Man kann zeigen, daß sie unendlich viele positive Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ hat. Man erhält die Wurzeln graphisch als Abszissen der Schnittpunkte der Tangenskurve $\eta = \tan \xi$ und der Geraden $\eta = c\xi$ (Abb. 122).

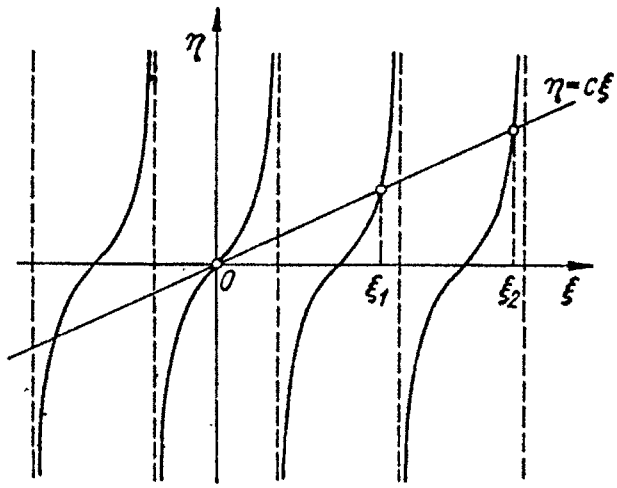

Abb. 122

Wir bilden das System

$$\sin \frac{\xi_1}{l} x, \sin \frac{\xi_2}{l} x, \ldots, \sin \frac{\xi_n}{l} x, \ldots$$

Man zeigt leicht (für $\alpha \neq \beta$)

$$\int_0^l \sin \alpha x \sin \beta x dx = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (\alpha - \beta) l}{\alpha - \beta} - \frac{\sin (\alpha + \beta) l}{\alpha + \beta} \right\}$$

$$= \cos \alpha l \cos \beta l \, \frac{\beta \tan \alpha l - \alpha \tan \beta l}{\alpha^2 - \beta^2} .$$

Setzt man $\alpha=\frac{\xi_n}{l}$, $\beta=\frac{\xi_m}{l}$ (für $n\neq m$), so erhält man nach (20)

$$\int_0^l \sin\frac{\xi_n}{l}x\cdot\sin\frac{\xi_m}{l}x\,dx=0 \quad (n\neq m)\,.$$

Damit ist die Orthogonalität des Systems im Intervall $[0, l]$ bewiesen.

Analog zeigt man die Orthogonalität des Systems

$$\cos\frac{\xi_1'}{l}x,\ \cos\frac{\xi_2'}{l}x,\ \ldots,\ \cos\frac{\xi_n'}{l}x,\ \ldots\,,$$

wenn $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n', \ldots$ die Folge der positiven Wurzeln der Gleichung $\cot\xi=c\xi$ ($c=$const) ist. Jedoch ist keines der beiden Systeme normiert.

5. Ein wichtiges Beispiel eines im Intervall $[-1,+1]$ orthogonalen Funktionensystems bilden die Legendreschen Polynome

$$P_0(x)=1, \qquad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

(vgl. Nr. 118, Nr. 320). Wegen

$$\int_{-1}^{1} P_n^2\,dx=\frac{2}{2n+1}$$

erhält man ein *normiertes* System, wenn man die Polynome mit $\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ multipliziert.

6. Schließlich betrachten wir noch ein Beispiel, das mit den Besselschen Funktionen zusammenhängt. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Funktion $J_0(x)$, jedoch bleibt alles auch für die Funktionen $J_n(x)$, $n>0$, gültig.

In der Theorie der Besselschen Funktionen wird gezeigt, daß $J_0(x)$ unendlich viele Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ hat. Schreibt man die Differentialgleichung, der $J_0(x)$ genügt, in der Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dz}{dx}\right]=-xz\,,$$

so erhält man für beliebige α, β leicht

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\alpha x)}{dx}\right]=-\alpha^2 x J_0(\alpha x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_0(\beta x)}{dx}\right]=-\beta^2 x J_0(\beta x)\,.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $J_0(\beta x)$ bzw. $J_0(\alpha x)$ und nachfolgende Subtraktion

$$(\beta^2-\alpha^2)\,xJ_0(\alpha x)\,J_0(\beta x)=\frac{d}{dx}\left[\alpha x J_0(\beta x)\,J_0'(\alpha x)-\beta x J_0(\alpha x)\,J_0'(\beta x)\right],$$

also für $\alpha\neq\beta$

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)\,J_0(\beta x)\,dx=\frac{\alpha J_0(\beta)\,J_0'(\alpha)-\beta J_0(\alpha)\,J_0'(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}\,. \tag{21}$$

Setzt man hier $\alpha=\xi_n$, $\beta=\xi_m$ (für $n\neq m$), so gelangt man zu

$$\int_0^1 xJ_0(\xi_n x)\,J_0(\xi_m x)\,dx=0\,,$$

womit gezeigt ist, daß das System $\{\sqrt{x}J_0(\xi_n x)\}$ im Intervall $[0, 1]$ *orthogonal* ist.[1]) Das System ist jedoch *nicht normiert.*

Es sei jetzt im Intervall $[a, b]$ irgendein Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$ gegeben. Wir stellen uns das Ziel, eine in $[a, b]$ definierte Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach den Funktionen φ zu entwickeln:

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots . \tag{22}$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen, setzen wir voraus, diese Entwicklung sei möglich, und verfahren wie oben. Wir multiplizieren also beide Seiten mit $\varphi_m(x)$ und integrieren formal gliedweise:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx .$$

Auf Grund der Orthogonalität (vgl. (15) und (16)) verschwinden rechts alle Integrale außer einem, und es ergibt sich

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{23}$$

Die Formeln (7), (11), (12) sind offenbar Spezialfälle von (23).

Die mit den Koeffizienten (23) gebildete Reihe (22) wird die (*verallgemeinerte*) *Fourierreihe* von $f(x)$ in bezug auf das System $\{\varphi_n(x)\}$ genannt, die Koeffizienten c_n heißen die (*verallgemeinerten*) *Fourierkoeffizienten* in bezug auf $\{\varphi_n(x)\}$. Besonders einfache Gestalt nimmt (23) bei normierten Systemen an:

$$c_m = \int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{23*}$$

Natürlich ist die am Schluß von Nr. 678 gemachte Bemerkung auch hier zu beachten: Bisher ist der Zusammenhang einer gegebenen Funktion $f(x)$ mit ihrer verallgemeinerten Fourierreihe nur formaler Natur. Daher schreibt man auch im allgemeinen Fall

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) . \tag{22*}$$

Die Konvergenz dieser Reihe gegen die Funktion $f(x)$ muß, wie im Fall der trigonometrischen Reihe, gesondert untersucht werden.

680. Trigonometrische Interpolation. Man gelangt ganz naturgemäß zum Problem der Darstellung einer gegebenen Funktion $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe,

---

[1]) Der Begriff der Orthogonalität der Funktionen φ und ψ läßt sich verallgemeinern, indem man den Begriff der Orthogonalität mit dem Gewicht $p(x)$ oder mit der Belegungsfunktion $p(x)$ einführt.

Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ heißen *orthogonal zum Gewicht* $p(x)$, wenn

$$\int_a^b p(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0$$

ist. Unter Benutzung dieser Redeweise kann man auch sagen, das System der Funktionen $J_0(\xi_n x)$ sei orthogonal zum Gewicht x.

wenn man von der trigonometrischen Interpolation ausgeht, d. h. von der Approximation von $f(x)$ durch ein trigonometrisches Polynom

$$\sigma_n(x)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\,, \tag{24}$$

dessen Werte in einer Reihe von Punkten mit den entsprechenden Werten von $f(x)$ übereinstimmen.

Man kann nämlich stets die $2n+1$ Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ eines trigonometrischen Polynoms n-ter Ordnung der Form (24) so wählen, daß die Werte dieses Polynoms gleich den Werten von $f(x)$ in $2n+1$ vorgegebenen Punkten des Intervalls $(-\pi, \pi)$ sind, z. B. in den Punkten

$$\xi_i=i\lambda \quad (i=-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n)\,,$$

wobei $\lambda=\dfrac{2\pi}{2n+1}$ ist. In der Tat haben wir zur Bestimmung dieser $2n+1$ Koeffizienten die $2n+1$ linearen Gleichungen

$$\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos k\xi_i+\beta_k\sin k\xi_i)=f(\xi_i) \qquad (i=-n, -n+1, \ldots, n)\,.$$

Zur Lösung dieses Systems brauchen wir uns nur der elementaren trigonometrischen Identität[1])

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos ih=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)h}{2\sin\frac{h}{2}} \tag{26}$$

zu erinnern.

Wir addieren alle Gleichungen (25). Da $\sin x$ eine ungerade Funktion ist, verschwindet der Koeffizient von β_k:

$$\sum_{i=-n}^{n}\sin k\xi_i=0\,.$$

Dasselbe gilt für den Koeffizienten von α_k; denn da $\cos x$ eine gerade Funktion ist, folgt aus (26) für $h=k\lambda=\dfrac{2k\pi}{2n+1}$ die Beziehung

$$\sum_{i=-n}^{n}\cos k\xi_i=1+2\sum_{i=1}^{n}\cos i\,k\lambda=0\,. \tag{27}$$

Daher ist

$$\alpha_0=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}f(\xi_i)\,. \tag{28}$$

---

[1]) Man erhält sie leicht, indem man die linke Seite mit $2\sin\dfrac{h}{2}$ multipliziert und jedes Produkt $2\sin\dfrac{h}{2}\cos ih$ durch die Differenz $\sin\left(i+\dfrac{1}{2}\right)h-\sin\left(i-\dfrac{1}{2}\right)$ ersetzt (vgl. Nr. 307, Formel (2)).

Um α_m $(1 \leqq m \leqq n)$ zu bestimmen, multiplizieren wir (25) mit $\cos m\xi_i$ und addieren wieder. Der Koeffizient von α_0 verschwindet wegen (27); ebenso verschwindet der Koeffizient von β_k (da $\sin x$ ungerade ist). Für den Koeffizienten von α_k ergibt sich

$$\sum_{i=-n}^{n} \cos k\xi_i \cos m\xi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^{n} \cos (k+m)\, \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=-n}^{n} \cos (k-m)\, \xi_i .$$

Für $k \neq m$ sind beide Summen rechts gleich 0 (auf Grund von (27)), für $k=m$ verschwindet die erste Summe, für die zweite ergibt sich offenbar $\frac{2n+1}{2}$. Somit ist nur der Koeffizient von α_m von 0 verschieden, und zwar ist er gleich $\frac{2n+1}{2}$. Jetzt findet man leicht

$$\alpha_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \cos m\xi_i \qquad (1 \leqq m \leqq n) . \tag{29}$$

Völlig analog ergibt sich durch Multiplikation von (25) mit $\sin m\xi_i$ und Addition

$$\beta_m = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \sin m\xi_i \qquad (1 \leqq m \leqq n) . \tag{30}$$

Der Leser hat sicher bei diesem Verfahren die Ähnlichkeit mit dem Euler-Fourierschen Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe bemerkt. Hier sind jedoch unsere Schlüsse einwandfrei; denn man überzeugt sich leicht davon, daß die Werte, die sich für die Unbekannten ergaben, tatsächlich den Gleichungen (25) genügen. Übrigens folgt das auch ohne besondere Prüfung aus einfachen algebraischen Überlegungen. Wir haben gesehen, daß das System (25), wenn überhaupt, nur eine einzige Lösung haben kann, welche durch (28), (29), (30) gegeben wird, und zwar bei beliebiger rechter Seite. Dann ist aber seine Determinante sicher von 0 verschieden, und das System selbst ist eindeutig lösbar. Daher genügt das trigonometrische Polynom $\sigma_n(x)$ mit den errechneten Koeffizienten den gestellten Bedingungen und kann im Intervall $[-\pi, \pi]$ als Interpolationspolynom von $f(x)$ dienen.

Wir setzen nun voraus, diese Funktion sei dort integrierbar, und zwar diesmal im eigentlichen Sinne. Lassen wir jetzt n gegen ∞ streben, so wird sich das Interpolationspolynom ändern und mit $f(x)$ auf einer stets dichteren Menge von Punkten übereinstimmen. Es wird sich nicht nur „verlängern" (mehr Glieder erhalten), sondern auch alle seine Koeffizienten werden sich ändern. Um von ihrem Verhalten ein besseres Bild zu bekommen, denken wir uns das Intervall $[-\pi, \pi]$ durch Punkte $x_i = (2i-1)\frac{\pi}{2n+1}$ $(-n \leqq i \leqq n+1)$ in $2n+1$ gleiche Teile zerlegt. Die ξ_i sind dann die Mittelpunkte dieser Teilintervalle, deren Länge $\Delta x_i = \frac{2\pi}{2n+1} = \lambda$ ist. Formen wir (28), (29) und (30) in

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i, \qquad \alpha_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \cos m\xi_i \Delta x_i ,$$

$$\beta_m = \frac{1}{\pi} \sum_{i=-n}^{n} f(\xi_i) \sin m\xi_i \Delta x_i$$

um, so sind die Summen auf der rechten Seite Integralsummen, die der gewählten Zerlegung des Intervalls entsprechen. Jetzt ist klar, daß für $n \to \infty$

$$\alpha_0 \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad \alpha_m \to \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx, \qquad \beta_m \to \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\,dx$$

gilt, so daß die Grenzwerte der Koeffizienten des trigonometrischen Interpolationspolynoms genau die entsprechenden Fourierkoeffizienten der gegebenen Funktion sind. Man kann sagen, daß das Interpolationspolynom „im Limes" in die Fourierreihe übergeht.

Natürlich hat dieses Verfahren nur heuristischen Wert. Es beweist nichts über den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Fourierreihe, dürfte aber unser Interesse gerade an solchen Reihen hinreichend motivieren. In den folgenden Paragraphen werden wir schließlich unmittelbar das Verhalten der Fourierreihen verschiedener Klassen von Funktionen untersuchen.

§ 2. Entwicklung von Funktionen in Fourierreihen

681. Problemstellung. Dirichletsches Integral. Die Funktion $f(x)$ der Periode 2π sei im Intervall $[-\pi, \pi]$ (wenigstens uneigentlich) absolut integrierbar. Sie ist es daher in jedem endlichen Intervall. Wir berechnen die Konstanten (ihre Fourierkoeffizienten)

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu\,du \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu\,du \qquad (m = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und bilden damit die Fourierreihe unserer Funktion:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)\,. \tag{2}$$

Der Leser möge den kleinen Unterschied zu den Bezeichnungen in Nr. 678 beachten: Den Koeffizienten a_0 bestimmen wir jetzt aus der allgemeinen Formel für a_m, anders als in Formel (7) von Nr. 678, und das absolute Glied der Reihe schreiben wir als $\frac{a_0}{2}$.

Ferner weisen wir hier darauf hin (und das werden wir im folgenden benutzen), daß für eine Funktion $F(u)$ der Periode 2π das Integral

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(u)\,du$$

über ein Intervall der Länge 2π nicht von α abhängt (vgl. Nr. 314, Beispiel 10, und Nr. 316). Daher können zur Berechnung der Fourierkoeffizienten die Integrale in Formel (1) über ein beliebiges Intervall der Länge 2π erstreckt werden; beispiels-

weise könnte man

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (m=0,\,1,\,2,\,\ldots)\,,\\ b_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (m=1,\,2,\,\ldots)\end{aligned}\right\} \tag{1*}$$

schreiben.

Um nun das Verhalten der Reihe (2) in irgendeinem festen Punkt $x=x_0$ zu untersuchen, formen wir die Partialsumme

$$s_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0+b_m\sin mx_0)$$

passend um, und zwar setzen wir für a_m, b_m die Integrale (1) ein und ziehen die Konstanten $\cos mx_0$ und $\sin mx_0$ unter das Integralzeichen

$$\begin{aligned} s_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,[\cos mu\cos mx_0+\sin mu\sin mx_0]\,du\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m\,(u-x_0)\right\}du\,.\end{aligned}$$

Nach (26) aus Nr. 680 ist (im Fall $u=x_0$ ist die rechte Seite als Grenzwert zu verstehen)

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m\,(u-x_0)=\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u-x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u-x_0}{2}}\,,$$

so daß wir schließlich

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u-x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u-x_0}{2}}\,du \tag{3}$$

erhalten. Dieses Integral wird nach DIRICHLET benannt.

Da wir es hier mit Funktionen von u zu tun haben, die die Periode 2π besitzen, können wir das Integrationsintervall $[-\pi,\,\pi]$ nach der obigen Bemerkung beispielsweise durch das Intervall $[x_0-\pi,\,x_0+\pi]$ ersetzen und

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(u)\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{u-x_0}{2}}{2\sin\dfrac{u-x_0}{2}}\,du$$

schreiben. Die Substitution $t=u-x_0$ liefert

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Nun spalten wir das Integral in $\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$ auf, formen den ersten Summanden durch eine triviale Substitution wieder in ein Integral von 0 bis π um und erhalten so schließlich für die n-te Partialsumme der Fourierreihe den Ausdruck

$$s_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\{f(x_0+t)+f(x_0-t)\}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

Somit läuft unsere Aufgabe auf die Untersuchung des Verhaltens dieses Integrals hinaus, das den Parameter n enthält. *Die Besonderheit dieser Aufgabe besteht darin, daß hierbei der Grenzübergang nicht unter dem Integralzeichen vollzogen werden kann,* da der Integrand für $n\to\infty$ überhaupt keinen Grenzwert besitzt. Bisher (vgl. Kap. XIV) war das aber unsere einzige Methode zur Bestimmung des Grenzwertes eines Integrals mit einem Parameter. Diesen Sachverhalt wollen wir nun in diesem und dem folgenden Kapitel systematisch untersuchen.

682. Erster Fundamentalhilfssatz. Ehe wir unsere Überlegungen fortsetzen, beweisen wir den folgenden Satz, der von RIEMANN stammt:

Ist $g(t)$ im endlichen Intervall $[a, b]$ absolut integrierbar, so ist

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\,\mathrm{d}t=0$$

und analog

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos pt\,\mathrm{d}t=0\,.$$

Beweis. Offenbar genügt es, die erste Behauptung zu beweisen. Trivialerweise gilt für jedes endliche Intervall $[\alpha, \beta]$ die Abschätzung $(p>0)$

$$\left|\int_a^\beta \sin pt\,\mathrm{d}t\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\leqq\frac{2}{p}\,. \tag{5}$$

Wir wollen nun zunächst annehmen, $g(x)$ sei eigentlich integrierbar. Dann teilen wir das Intervall $[a, b]$ in n Teile durch die Punkte

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=b \tag{6}$$

und zerlegen das Integral entsprechend:

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt\,\mathrm{d}t\,.$$

Ist m_i die untere Grenze der Werte von $g(t)$ im i-ten Intervall, so kann man schreiben:

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin pt\,dt+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin pt\,dt\,.$$

Ist ω_i die Schwankung von $g(t)$ im i-ten Intervall, so gilt dort $g(t)-m_i\leqq\omega_i$; auf Grund von (5) folgt jetzt leicht

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right|\leqq\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\,.$$

Für gegebenes $\varepsilon>0$ wählen wir nun die Einteilung (6) so, daß

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{2}$$

ist; das ist auf Grund der Integrierbarkeit von g möglich (vgl. Nr. 297). Da dann die Zahlen m_i bestimmt sind, kann

$$p>\frac{4}{\varepsilon}\sum|m_i|$$

gewählt werden. Für solche p erhalten wir aber jetzt

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right|<\varepsilon\,,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Ist $g(t)$ uneigentlich (aber immer noch *absolut*) integrierbar, so kann man sich darauf beschränken, im Intervall $[a, b]$ einen einzigen singulären Punkt, etwa b anzunehmen (sonst könnte man das Intervall in endlich viele Teilintervalle mit je einem singulären Punkt zerlegen und die folgenden Überlegungen für diese Intervalle einzeln anstellen).

Es sei $0<\eta<b-a$. Schreibt man $\int_a^b=\int_a^{b-\eta}+\int_{b-\eta}^b$, so gilt für jedes p

$$\left|\int_{b-\eta}^b g(t)\sin pt\,dt\right|\leqq\int_{b-\eta}^b|g(t)|\,dt\,,$$

und das ist für hinreichend kleine η kleiner als $\varepsilon/2$. Der erste Summand strebt nach dem Bewiesenen für $p\to\infty$ gegen 0, da in $[a, b-\eta]$ die Funktion $g(t)$ eigentlich integrierbar ist; das Integral wird also für hinreichend großes p kleiner als $\varepsilon/2$. Demnach gilt der Satz im behaupteten Umfang.

Wir lenken die Aufmerksamkeit des Lesers darauf, daß schon hier die Grenzwerte, gegen welche die Integrale streben, *nicht durch Grenzübergang unter dem Integralzeichen* gefunden wurden.

Als unmittelbare Folgerung unseres Satzes ergibt sich aus den Formeln (1):

Die Fourierkoeffizienten einer absolut integrierbaren Funktion streben für unbegrenzt wachsende Indizes gegen 0.

683. Das Lokalisationsprinzip. Die zweite unmittelbare Folgerung des in Nr. 682 bewiesenen Satzes ist das sogenannte Lokalisationsprinzip.

Für beliebiges positives $\delta < \pi$ zerlegen wir das Integral (4) in zwei Integrale: $\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi$. Schreibt man den zweiten Summanden in der Gestalt

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2 \sin \frac{1}{2} t} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t \, dt ,$$

so ist klar, daß der Faktor von $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t$ im Intervall $[\delta, \pi]$ eine absolut integrierbare Funktion von t ist, da der Nenner dort nicht verschwindet. Nach dem oben Bewiesenen strebt dieses Integral für $n \to \infty$ gegen 0, so daß Existenz und Wert des Limes der Partialsummen der Fourierreihe, also $\lim s_n(x_0)$, durch das Verhalten von

$$\varrho_n(\delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)] \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt \tag{7}$$

festgelegt sind. In dieses Integral gehen aber nur Werte der Funktion $f(x)$ ein, die Werten des Arguments im Intervall $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ entsprechen. Diese einfache Überlegung beweist das sogenannte *Lokalisationsprinzip*:

Satz von Riemann. *Das Verhalten der Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 hängt ausschließlich von den Werten der Funktion in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punktes (d. h. in einer beliebig kleinen Umgebung dieses Punktes) ab.*[1])

Hat man beispielsweise zwei Funktionen, deren Werte in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes x_0 übereinstimmen, so verhalten sich die diesen Funktionen entsprechenden Fourierreihen in diesem Punkt völlig gleich, wie sehr sich die Funktionen außerhalb dieser Umgebung von x_0 auch unterscheiden mögen; sie konvergieren entweder beide, und zwar gegen dieselbe Summe, oder sie divergieren beide. Dieses Resultat erscheint noch merkwürdiger, wenn man sich vor Augen hält, daß die Fourierkoeffizienten der betrachteten Funktionen, die ja von allen Funktionswerten abhängen, völlig verschieden sein können.

Dieser Satz wird gewöhnlich nach Riemann benannt; er folgt nämlich aus einem von ihm im Jahre 1853 bewiesenen allgemeinen Satz. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die Idee des Lokalisationsprinzips in einer Arbeit von Ostrogradski aus dem Jahre 1828 zur mathematischen Physik enthalten ist und auch schon in Untersuchungen Lobatschewskis[2]) vom Jahre 1834 über trigonometrische Reihen vorkommt.

---

[1]) Unter „Verhalten" verstehen wir dabei Konvergenz oder Divergenz der Reihe in x^0 sowie im Fall der Konvergenz den Wert der Summe.

[2]) Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski, 1792–1856, russischer Mathematiker.

684. Die Kriterien von Dini und von Lipschitz für die Konvergenz von Fourierreihen. Wir kehren jetzt zu der begonnenen Untersuchung des Verhaltens der Teilsumme $s_n(x_0)$ einer Fourierreihe zurück, für die wir den Integralausdruck (4) hergeleitet hatten. Wir weisen darauf hin, daß diese Identität für *jede* Funktion $f(x)$ gilt, welche den angegebenen Voraussetzungen genügt. Ist insbesondere $f(x)\equiv 1$, so ist auch $s_n(x)\equiv 1$, und aus (4) folgt

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Multiplizieren wir diese Beziehung mit der Konstanten S_0, worunter wir die *Summe* unserer Reihe verstehen wollen (hier setzen wir die Existenz also voraus, und den genauen Wert werden wir später ermitteln), und subtrahieren die erhaltene Gleichung von (4), so ergibt sich

$$s_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t\,, \tag{8}$$

wobei zur Abkürzung

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0 \tag{9}$$

gesetzt wurde.

Wenn wir beweisen wollen, daß S_0 wirklich die Summe der Reihe ist, so müssen wir zeigen, daß das Integral in (8) für $n\to\infty$ gegen 0 strebt.

Wir wenden uns nun der Bestimmung von S_0 zu. Praktisch wichtig sind diejenigen Fälle, in denen a) die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist oder b) die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 von beiden Seiten eine Unstetigkeit erster Art hat, d. h. einen Sprung erfährt, so daß also die beiden Grenzwerte $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$ existieren. Auf diese beiden Fälle werden wir uns im folgenden beschränken und ein für allemal festsetzen:

im Fall a) $S_0=f(x_0)$,

im Fall b) $S_0=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Eine Unterscheidung der Fälle a) und b) erübrigt sich, wenn bei Vorliegen einer Unstetigkeit erster Art im Punkt x_0 die Beziehung

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

gilt. Solche Punkte werden manchmal *regulär* genannt.

Wir bemerken, daß wegen

$$\text{a)}\ \lim_{t\to+0}f(x_0\pm t)=f(x_0)\quad\text{bzw.}\quad\text{b)}\ \lim_{t\to+0}f(x_0\pm t)=f(x_0\pm 0)$$

auf Grund der Wahl von S_0 stets

$$\lim_{t \to +0} \varphi(t) = 0 \tag{10}$$

gilt. Auf Grund dessen können wir jetzt das Kriterium von DINI[1]) formulieren:

Kriterium von DINI. *Die Fourierreihe der Funktion $f(x)$ konvergiert im Punkt x_0 gegen die Summe S_0, wenn für ein gewisses $h>0$ das Integral*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt$$

existiert.

Unter dieser Voraussetzung existiert nämlich auch das Integral

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt\,.$$

Schreibt man (8) in der Gestalt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\,,$$

so folgt unmittelbar aus dem Fundamentalhilfssatz, daß dieses Integral für $n\to\infty$ gegen 0 strebt, da

$$\frac{\varphi(t)}{t} \quad \text{und damit auch} \quad \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

absolut integrierbar ist. Damit ist der Beweis erbracht.

Ausführlich geschrieben lautet das Dinische Integral folgendermaßen:

im Fall a) $$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)|}{t}\,dt;$$

im Fall b) $$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{t}\,dt\,.$$

Offenbar genügt es, die Existenz der Integrale

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}\,dt \tag{11}$$

bzw.

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,dt$$

[1]) ULISSE DINI, 1845–1918, italienischer Mathematiker.

einzeln vorauszusetzen. Hieraus kann man eine Reihe von Kriterien herleiten, indem man bekannte Kriterien für die Existenz von Integralen benutzt. Beschränkt man sich auf Fall a), so erhält man das

Kriterium von Lipschitz[1]). *Die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ konvergiert in einem Stetigkeitspunkt x_0 gegen die Summe $f(x_0)$, wenn für hinreichend kleine die Ungleichung*

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leqq L t^{\alpha}$$

gilt, wobei L und α ($\alpha \leqq 1$) positive Konstante sind.

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leqq L ,$$

so daß das Integral (11) im eigentlichen Sinne existiert (Nr. 480). Ist aber $\alpha < 1$, so ist

$$\left| \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0)}{t} \right| \leqq \frac{L}{t^{1-\alpha}} ;$$

rechts steht eine integrierbare Funktion, so daß die Integrale (11) ebenfalls existieren, eventuell jedoch als uneigentliche Integrale (Nr. 482).

Insbesondere ist die Lipschitzbedingung für $\alpha = 1$ sicher dann erfüllt, wenn $f(x)$ in x_0 eine endliche Ableitung $f'(x_0)$ hat oder wenn wenigstens die rechts- und die linksseitigen Ableitungen

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{-t}$$

existieren, selbst wenn sie verschieden sind (die Kurve einen Knick hat). *Somit konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$, und zwar gegen die Summe $f(x_0)$, in jedem Punkt x_0, in dem die Ableitung bzw. die rechtsseitige und die linksseitige Ableitung existieren und endlich sind.*

Dieses Lipschitzsche Kriterium läßt sich auch leicht für den Fall b) aussprechen. Als spezielle Folgerung hieraus geben wir auch hier folgenden Satz an:

In einem Unstetigkeitspunkt x_0 erster Art konvergiert die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}, \qquad \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

existieren und endlich sind, und zwar konvergiert sie gegen

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} .$$

Diese Grenzwerte ähneln in gewisser Weise den rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen, nur ist der Funktionswert $f(x_0)$ in diesem Punkt x_0 durch seinen Grenzwert von rechts bzw. links zu ersetzen. In der Praxis hat man es meist mit *dif-*

[1]) Rudolf Lipschitz, 1832–1903, deutscher Mathematiker.

ferenzierbaren oder *stückweise differenzierbaren*[1]) Funktionen der Periode 2π zu tun. Für solche Funktionen konvergiert die Fourierreihe überall, und zwar gegen die Funktion selbst, mit Ausnahme der „Nahtstellen", wo die Summe der Werte gleich

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

ist.

685. Zweiter Fundamentalhilfssatz. Zur Herleitung weiterer Kriterien benötigen wir einen zweiten Hilfssatz, der von DIRICHLET stammt:

Wenn eine Fuktion $g(t)$ im Intervall $[0, h]$ monoton wächst, aber dort beschränkt ist, so ist

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}g(+0)\,. \tag{12}$$

Beweis. Zunächst kann dieses Integral als Summe zweier Integrale,

$$g(+0)\int_0^h\frac{\sin pt}{t}\,dt+\int_0^h[g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}\,dt\,, \tag{13}$$

dargestellt werden. Die Substitution $pt=z$ führt das erste in

$$g(+0)\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

über, und dieser Ausdruck strebt wegen (vgl. Nr. 492, 3°)

$$\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}\,dz=\frac{\pi}{2}$$

für $p\to\infty$ gegen $\frac{\pi}{2}g(+0)$. Es bleibt also zu zeigen, daß das zweite Integral (13) gegen 0 strebt.

Zu vorgegebenem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ (man kann $\delta<h$ annehmen) derart, daß

$$0\leqq g(t)-g(+0)<\varepsilon \quad \text{für} \quad 0<t\leqq\delta$$

gilt. Das zu untersuchende Integral zerlegen wir an der Stelle δ,

$$\left(\int_0^\delta+\int_\delta^h\right)[g(t)-g(+0)]\frac{\sin pt}{t}\,dt=I_1+I_2\,.$$

[1]) Eine Funktion $f(x)$ heißt im Intervall $[a, b]$ *stückweise differenzierbar*, wenn dieses Intervall sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen läßt, in deren Innerem sie differenzierbar ist, und wenn sie in den Endpunkten der Teilintervalle nicht nur Grenzwerte besitzt, sondern im abgeschlossenen Intervall eindeutige Differentialquotienten, sobald die Funktionswerte in den Endpunkten durch diese Grenzwerte ersetzt werden. Man kann sich eine stückweise differenzierbare Funktion vorstellen als aus mehreren in den abgeschlossenen Teilintervallen differenzierbaren (also auch stetigen) Funktionen „verheftet", wobei in den „Nahtstellen" (ebenso wie in den Endpunkten a und b des ursprünglichen Intervalls) die Funktionswerte besonders festzusetzen sind.

Auf I_1 wenden wir die Formel von BONNET (Nr. 306) an; es ergibt sich

$$I_1=[g(\delta)-g(+0)]\int_{\eta}^{\delta}\frac{\sin pt}{t}\,dt=[g(\delta)-g(+0)]\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz \qquad (0<\eta<\delta).$$

Hierin ist der erste Faktor kleiner als ε, der zweite ist für alle p gleichmäßig beschränkt. Aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz$$

folgt nämlich, daß die für $z\geqq 0$ stetige Funktion von z,

$$\int_0^{z}\frac{\sin u}{u}\,du,$$

die für $z\to\infty$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt, für alle z beschränkt ist,

$$\left|\int_0^{z}\frac{\sin u}{u}\,du\right|\leqq L \qquad (L=\text{const}),$$

so daß also

$$\left|\int_{p\eta}^{p\delta}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|=\left|\int_0^{p\delta}-\int_0^{p\eta}\right|\leqq 2L$$

ist. Für I_1 gilt also unabhängig von p die Abschätzung

$$|I_1|<2L\varepsilon. \tag{14}$$

Das Integral I_2 strebt für $p\to\infty$ (und festes δ) nach dem Hilfssatz aus Nr. 682 gegen 0, da der Faktor von $\sin pt$ (wegen $t\geqq\delta$) im eigentlichen Sinne integrierbar ist. Damit ist alles bewiesen.

686. Das Kriterium von Dirichlet-Jordan. Wir kommen zur Herleitung eines weiteren Konvergenzkriteriums für Fourierreihen, das auf einem anderen Gedanken beruht.

Kriterium von DIRICHLET-JORDAN. *Die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ konvergiert in dem Punkt x_0 gegen die Summe S_0, wenn in einem Intervall $[x_0-h, x_0+h]$ um diesen Punkt die Funktion $f(x)$ von endlicher Schwankung ist.*

Wir sahen in Nr. 683, daß das Verhalten der Partialsumme $s_n(x_0)$ für $n\to\infty$ durch das Verhalten des Integrals $\varrho_n(\delta)$ bestimmt ist (vgl. Formel (7)), wobei δ insbesondere gleich h sein kann. Wir formen $\varrho_n(h)$ folgendermaßen um:

$$\varrho_n(h)=\frac{1}{\pi}\int_0^{h}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt.$$

Nach Voraussetzung ist der Ausdruck in der eckigen Klammer von endlicher Schwankung,

$$\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

ist eine wachsende Funktion, also ist das Produkt von endlicher Schwankung und somit als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar. Der Hilfssatz aus Nr. 685 ist daher auf Minuenden und Subtrahenden einzeln anwendbar, also auch auf die Differenz, und liefert

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n(h) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] = \frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}.$$

Damit ist alles bewiesen, denn in einem Stetigkeitspunkt x_0 geht dieser Ausdruck in $f(x_0)$ über.

Es sei darauf hingewiesen, daß DIRICHLET ursprünglich sein Kriterium spezieller formuliert hatte. Von ihm stammt folgender Satz:

Dirichletsches Kriterium. *Ist die Funktion $f(x)$ der Periode 2π im Intervall $[-\pi, \pi]$ stückweise monoton*[1]) *und hat sie dort nur endlich viele Unstetigkeitspunkte, so konvergiert ihre Fourierreihe in jedem Stetigkeitspunkt x_0 gegen $f(x_0)$ und in jedem Unstetigkeitspunkt gegen*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Diese Bedingungen sind bis jetzt als *Dirichletsche Bedingungen* bekannt gewesen. Jede Funktion, die diesen Bedingungen genügt, ist offenbar in jedem endlichen Intervall von endlicher Schwankung, so daß das Dirichletsche Kriterium formal in dem vorhergehenden (allgemeinen) Kriterium enthalten ist.

Die bisher angegebenen Kriterien genügen den praktischen Erfordernissen der Analysis und ihrer Anwendung. Andere Kriterien sind in der Hauptsache von theoretischem Interesse; auf sie können wir hier nicht eingehen.

Schließlich wollen wir uns noch der Frage zuwenden, in welcher Beziehung die Kriterien von DINI und von DIRICHLET-JORDAN zueinander stehen. Man kann zeigen, daß sie nicht äquivalent sind, d. h. nicht auseinander hergeleitet werden können.

Zunächst betrachten wir die Funktion $f(x)$, die auf $[-\pi, \pi]$ folgendermaßen definiert (und auf dem Rest der Zahlengeraden durch $f(x+2\pi)=f(x)$ periodisch fortgesetzt) sei:

$$f(x) = \frac{1}{\ln\frac{|x|}{2\pi}} \quad \text{für} \quad x\neq 0, \qquad f(0)=0.$$

[1]) Darunter versteht man folgendes: Das Intervall $[-\pi, \pi]$ kann in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, in deren Innerem die Funktion monoton ist.

Diese Funktion ist stetig und stückweise monoton, genügt also der Dirichletschen Bedingung. Dagegen divergiert das für $x=0$ angesetzte Dirichletsche Integral

$$\int_0^h \frac{|f(t)+f(-t)-2f(0)|}{t}\,dt = 2\int_0^h \frac{dt}{t\ln\frac{t}{2\pi}}$$

offenbar für jedes $h>0$.

Betrachten wir andererseits die für $[-\pi, \pi]$ folgendermaßen definierte (und sonst periodisch fortgesetzte) Funktion

$$f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x} \quad \text{für} \quad x\neq 0, \qquad f(0)=0\,,$$

so ist in $x=0$ offenbar die Lipschitzbedingung $|f(x)-f(0)|\leqq|x|$ erfüllt, also auch die Dinische Bedingung. Dagegen ist diese Funktion in keinem Intervall um $x=0$ von endlicher Schwankung (Nr. 567).

687. Nichtperiodische Funktionen. Die ganze bisherige Theorie beruhte auf der Voraussetzung, die gegebene Funktion $f(x)$ sei für alle reellen x definiert und habe die Periode 2π. Häufig hat man es aber mit Funktionen zu tun, die nicht periodisch sind, oder auch mit Funktionen, die nur auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert sind. Um die Theorie auf eine solche Funktion $f(x)$ anwenden zu können, führen wir an ihrer Stelle eine Hilfsfunktion $f^*(x)$ ein, die folgendermaßen definiert ist: Im Intervall $(-\pi, \pi]$ identifizieren wir f^* mit f,

$$f^*(x)=f(x) \qquad (-\pi<x\leqq\pi)\,, \tag{15}$$

und setzen dann $f^*(-\pi)=f^*(\pi)$; auf den übrigen reellen Werten setzen wir $f^*(x)$ periodisch fort.

Auf diese Funktion $f^*(x)$ der Periode 2π ist die ganze bisherige Theorie anwendbar. Wenn es sich nun um die Entwicklung in einem Punkt x_0 handelt, der zwischen $-\pi$ und π liegt, brauchen wir uns zur Nachprüfung der Voraussetzungen der Entwicklungssätze auf Grund von (15) nur mit der tatsächlich angegebenen Funktion $f(x)$ zu befassen. Ebenso werden die Fourierkoeffizienten nach den Formeln (1) berechnet, ohne daß die Funktion f^* herangezogen zu werden braucht. Kurz gesagt, *alles oben Bewiesene überträgt sich unmittelbar auf die gegebene Funktion* $f(x)$, ohne daß man sich um $f^*(x)$ zu kümmern braucht.

Besondere Aufmerksamkeit erfordern allerdings die Intervallenden $x=\pm\pi$. Um für die Funktion $f^*(x)$ die Voraussetzungen irgendeines der Sätze aus Nr. 684 oder Nr. 686 nachzuprüfen, etwa im Punkt $x=\pi$, müssen wir sowohl Werte von $f^*(x)$ links von $x=\pi$, wo f^* mit f übereinstimmt, als auch Werte von f^* rechts von $x=\pi$, wo $f^*(x)$ mit $f(x)$ für x-Werte rechts von $x=-\pi$ übereinstimmt, berücksichtigen.

Wenn wir daher etwa für $x=\pm\pi$ das Kriterium von DIRICHLET-JORDAN anwenden wollen, müssen wir in beiden Fällen fordern, daß $f(x)$ links von $x=\pi$ und rechts von $x=-\pi$ von endlicher Schwankung ist. Als S_0 hat man dann in beiden Fällen

$$S_0=\frac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}=\frac{f^*(-\pi+0)+f^*(-\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

zu nehmen. Selbst wenn also die gegebene Funktion $f(x)$ für $x=\pm\pi$ stetig ist, aber nicht die Periode 2π hat, so daß also $f(\pi)\neq f(-\pi)$ ist, und wenn die für die Konvergenz der Fourierreihe hinreichenden Voraussetzungen erfüllt sind, ist die Summe der Reihe gleich der Zahl

$$\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2},$$

die sowohl von $f(-\pi)$ als auch von $f(\pi)$ verschieden ist. Für eine solche Funktion braucht die Reihenentwicklung nur im offenen Intervall $(-\pi, \pi)$ zu gelten.

Folgende Bemerkung verdient unsere besondere Aufmerksamkeit. Wenn die trigonometrische Reihe (2) im Intervall $(-\pi, \pi)$ gegen $f(x)$ konvergiert, so konvergiert sie, da ihre Glieder die Periode 2π haben, *überall*, und ihre Summe $S(x)$ ist eine periodische Funktion von x mit der Periode 2π. *Diese Summe stimmt aber außerhalb von* $(-\pi, \pi)$ *im allgemeinen nicht mit* $f(x)$ *überein*, wenn $f(x)$ auf der ganzen reellen Achse definiert ist. In Nr. 690 werden wir dafür zahlreiche Beispiele angeben.

Statt des Intervalls $[-\pi, \pi]$ könnte man natürlich jedes Intervall $[\alpha, \alpha+2\pi]$ der Länge 2π nehmen.

688. Beliebige Intervalle. Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $[-l, l]$ der beliebigen Länge $2l$ $(l>0)$ gegeben. Unterwirft man die Funktion der Substitution

$$x=\frac{ly}{\pi} \qquad (-\pi\leqq y\leqq\pi),$$

so erhält man die Funktion $f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ von y im Intervall $[-\pi, \pi]$, auf die die Betrachtungen aus Nr. 687 anwendbar sind. Wenn bestimmte Voraussetzungen erfüllt sind, so kann man sie, wie wir gesehen haben, in eine Fourierreihe

$$f\left(\frac{yl}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)$$

entwickeln, deren Koeffizienten durch die Euler-Fourierschen Formeln

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ny\,dy \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ny\,dy \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

gegeben sind.

Durch die Substitution $y=\frac{\pi x}{l}$ kehren wir zur Variablen x zurück und erhalten

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{16}$$

Hier sind die Sinus und Kosinus nicht Funktionen von Vielfachen von x, sondern von $\frac{\pi x}{l}$. Mittels derselben Substitution gelangt man übrigens zu folgenden Formeln

für die Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\,1,2,\ldots),\\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Bezüglich der Intervallenden $x=\pm l$ bleiben alle Bemerkungen aus Nr. 687 in bezug auf die Punkte $\pm\pi$ gültig. Schließlich kann das Intervall $[-l, l]$ durch ein beliebiges Intervall der Länge $2l$ ersetzt werden, insbesondere durch $[0, 2l]$. In diesem Fall müssen die Formeln (17) ersetzt werden durch

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\,1,\,2,\ldots),\\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{17*}$$

Bei allen Vorbehalten bezüglich der Enden des Intervalls oder bezüglich der Unstetigkeitspunkte der Funktion haben wir hiermit eine Tatsache von eminenter prinzipieller Bedeutung festgestellt: *Jede in einem beliebigen Intervall willkürlich vorgegebene Funktion einer sehr umfangreichen Funktionenklasse* (die z. B. die stückweise differenzierbaren und die stückweise monotonen Funktionen umfaßt) *läßt sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln,* ist also durch einen einzigen analytischen Ausdruck, eine trigonometrische Reihe, im ganzen Definitionsbereich der Funktion darstellbar. In Nr. 690 werden wir insbesondere viele Beispiele einer solchen Reihenentwicklung für Funktionen angeben, die ursprünglich auf verschiedenen Teilen des Intervalls durch verschiedene analytische Ausdrücke definiert sind. *Die trigonometrischen Reihen sind ein universelles Hilfsmittel zur „Verheftung" von Funktionen, wodurch die Grenzen zwischen solchen Funktionen, die auf ihrem ganzen Definitionsbereich durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck darstellbar sind, und solchen Funktionen, die mittels verschiedener analytischer Ausdrücke definiert sind, verwischt werden* (vgl. Nr. 46, 3°; Nr. 363, Beispiel 5; Nr. 407, Bemerkung I; Nr. 497, Beispiel 11, u. a.).

689. Entwicklungen in reine Kosinusreihen und reine Sinusreihen. Wir beginnen mit folgender Bemerkung: Ist die im Intervall $[-\pi, \pi]$ gegebene (eigentlich oder uneigentlich) integrierbare Funktion $f(x)$ *ungerade*, so gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0\,.$$

Davon überzeugt man sich leicht, wenn man $\int_{-\pi}^{\pi}$ als Summe $\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$ darstellt und im ersten Summanden x durch $-x$ ersetzt. Ebenso findet man für *gerade Funktionen* $f(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

(vgl. Nr. 314, Beispiel 9).

Es sei jetzt $f(x)$ eine in $[-\pi, \pi]$ absolut integrierbare *gerade* Funktion; dann ist $f(x) \sin nx$ ungerade und

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Somit enthält die Fourierreihe einer geraden Funktion nur Kosinusglieder:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{18}$$

Da $f(x) \cos nx$ dann ebenfalls eine gerade Funktion ist, können wir die Koeffizienten der Entwicklung nach der zweiten obigen Bemerkung auch in der Form

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{19}$$

scheiben.

Ist aber $f(x)$ *ungerade*, so ist auch $f(x) \cos nx$ ungerade und somit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Fourierreihe einer ungeraden Funktion enthält also nur Sinusglieder:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{20}$$

Dabei ist dann offenbar (da $f(x) \sin nx$ jetzt gerade ist)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Übrigens kann jede in $[-\pi, \pi]$ gegebene Funktion $f(x)$ als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion geschrieben werden:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

mit

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Offenbar besteht die Fourierreihe von $f(x)$ genau aus der Entwicklung von f_1 nach Kosinusgliedern und der von f_2 nach Sinusgliedern.

Wir nehmen nun ferner an, $f(x)$ sei nur im Intervall $[0, \pi]$ gegeben. Wenn wir $f(x)$ in diesem Intervall in eine Fourierreihe (2) entwickeln wollen, setzen wir die Definition für die x-Werte in $[-\pi, 0]$ beliebig fest und wenden dann das in Nr. 687 Gesagte an. Die Willkür bei der Fortsetzung von $f(x)$ ermöglicht es, auf diesem Wege verschiedene trigonometrische Reihen zu erhalten. Genügt in einem Punkt x_0 zwischen 0 und π unsere Funktion einem der Kriterien aus Nr. 684, Nr. 686, so konvergieren alle diese Reihen gegen $f(x_0)$ oder im Fall einer Unstetigkeit gegen

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Man kann die Willkür bei der Definition von $f(x)$ im Intervall $[-\pi, 0]$ benutzen, um für $f(x)$ eine Entwicklung nur nach Kosinusgliedern oder nur nach Sinusgliedern zu erhalten. Setzen wir nämlich für $0<x\leqq\pi$

$$f(-x)=f(x)\,, \tag{22}$$

so erhalten wir in $[-\pi, \pi]$ eine gerade Funktion (Abb. 123a) der Periode 2π. Ihre Reihenentwicklung enthält, wie wir gesehen haben, nur Kosinusglieder. Die Koeffizienten kann man nach (19) berechnen, wobei nur ursprünglich vorgegebene Werte von $f(x)$ benutzt werden.

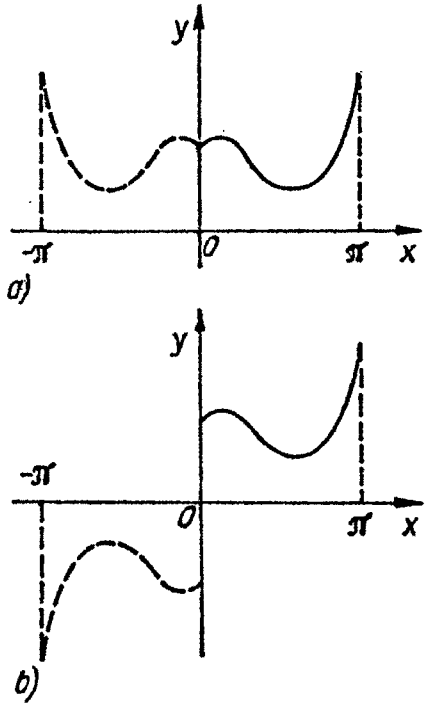

Abb. 123

Setzt man $f(x)$ für $0<x\leqq\pi$ durch

$$f(-x)=-f(x) \tag{23}$$

auf $(-\pi, 0)$ fort, so wird $f(x)$ ungerade (Abb. 123b), die Entwicklung enthält nur Sinusglieder, und die Koeffizienten ergeben sich nach (21).

Eine in $[0, \pi]$ gegebene Funktion, die bestimmten Voraussetzungen genügt, läßt sich sowohl in eine Kosinus- als auch in eine Sinusreihe entwickeln.

Eine besondere Untersuchung erfordern natürlich die Punkte $x=0$ und $x=\pi$. Hier unterscheiden sich die Entwicklungen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, $f(x)$ sei in $x=0$ und $x=\pi$ stetig, und betrachten zunächst die Entwicklung nach Kosinusgliedern. Die Bedingung (22) sichert zunächst die Stetigkeit in $x=0$, so daß, wenn die übrigen Bedingungen erfüllt sind, die Reihe (18) genau gegen $f(0)$ konvergiert. Da ferner $f(-\pi+0)=f(\pi-0)=f(\pi)$ ist, gilt Entsprechendes für $x=\pi$.

Anders verhält sich die Sache bei einer Entwicklung nach Sinusgliedern. Ohne auf Überlegungen bezüglich des Aufhörens der Stetigkeit einzugehen, bemerken wir nur, daß die Summe der Reihe (20) für $x=0$ und $x=\pi$ offenbar gleich 0 ist. Daher kann sie nur dann die Werte von $f(0)$ und $f(\pi)$ liefern, wenn diese tatsächlich gleich 0 sind.

Ist die Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, l]$ $(l>0)$ gegeben, so kann man durch die

Transformation aus Nr. 688 das Problem auf das der Entwicklung in eine Kosinusreihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$$

bzw. eine Sinusreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

zurückführen. Die Koeffizienten ergeben sich dabei wie folgt:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots) \tag{24}$$

bzw.

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\,2,\,\ldots)\,. \tag{25}$$

690. Beispiele. Die nachstehend als Beispiele betrachteten Funktionen sind in der Regel differenzierbar oder stückweise differenzierbar. Daher ist die Entwickelbarkeit in eine Fourierreihe gesichert, so daß wir auf diese Frage nicht mehr einzugehen brauchen.

1. Man entwickle die Funktion

$$f(x)=e^{ax} \qquad (a=\text{const},\ a\neq 0)$$

im Intervall $(-\pi,\,\pi)$.

Nach (1) ist

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi}=2\,\frac{\sinh a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{a\cos nx+n\sin nx}{a^2+n^2}\,e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(-1)^n\,\frac{1}{\pi}\,\frac{2a}{a^2+n^2}\sinh a\pi,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{a\sin nx-n\cos nx}{a^2+n^2}\,e^{ax}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=(-1)^{n-1}\,\frac{1}{\pi}\,\frac{2n}{a^2+n^2}\sinh a\pi\,.$$

Für $-\pi<x<\pi$ ist also

$$e^{ax}=\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\,[a\cos nx-n\sin nx]\right\}.$$

Wären wir vom Intervall $(0,\,2\pi)$ ausgegangen, so hätten wir eine Entwicklung mit anderen Koeffizienten erhalten; dann hätten wir (1*) benutzen müssen. Übrigens läßt sich die neue Entwicklung auch aus der obigen herleiten.

2. Man entwickle die Funktion

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

im Intervall $(0, 2\pi)$ in eine Fourierreihe.

Nach (1*) ist

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

Somit kommen wir zu der bemerkenswert einfachen Entwicklung nach Sinusgliedern:

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\qquad(0<x<2\pi).$$

Für $x=0$ (oder 2π) ist die Reihensumme 0, und die Entwicklung gilt nicht mehr. Auch außerhalb des Grundintervalls gilt die Gleichheit nicht mehr. Das Bild der Reihe $S(x)$ besteht aus unendlich vielen parallelen Strecken und einer Reihe isolierter Punkte auf der x-Achse (Abb. 124).

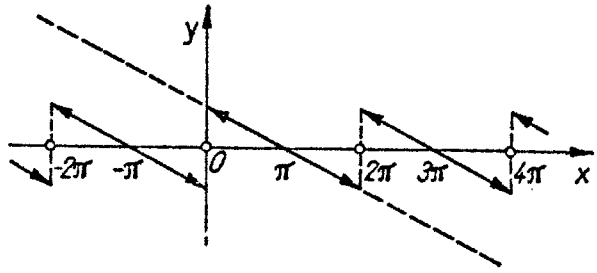

Abb. 124

3. Angesichts der besonderen Wichtigkeit der Entwicklung aus Beispiel 2 leiten wir sie jetzt auf elementarem Wege her, ohne die allgemeine Theorie zu benutzen.

Es sei $0<x<2\pi$. Wir benutzen Formel (26) aus Nr. 680, die wir folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos kt\,dt=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$$

$$=-\frac{x}{2}+\int_0^x\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin(2n+1)\frac{t}{2}\,dt+\int_0^x\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{t}\,dt.$$

Nach dem Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682 strebt der zweite Summand rechts für $n \to \infty$ gegen 0[1]), der dritte geht durch die Substitution $u = (2n+1)\frac{t}{2}$ über in

$$\int_0^{(2n+1)x/2} \frac{\sin u}{u}\, du$$

und strebt offenbar gegen

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt aber

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2},$$

was zu beweisen war.

4. Aus der Entwicklung in Beispiel 2 kann man ohne große Rechnung weitere interessante Entwicklungen erhalten. Ersetzt man x durch $2x$ und dividiert durch 2, so folgt

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} \qquad (0 < x < \pi)$$

und durch Subtraktion

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1)\, x}{2k-1} \qquad (0 < x < \pi).$$

Bezeichnet man die Summe dieser Reihe mit $S(x)$, so ist $S(0) = S(\pi) = 0$. Ändert man das Vorzeichen von x, so ergibt sich für $(-\pi, 0)$, da Sinus eine ungerade Funktion ist, $S(x) = -\frac{\pi}{4}$; für die übrigen Werte von x ergibt sich der Wert von $S(x)$ aus der Periodizität, so daß insbesondere für $(2\pi, 3\pi)$ wieder $S(x) = \frac{\pi}{4}$ ist. Das Bild von $S(x)$ zeigt Abb. 125; Abb. 126 zeigt die Approximation dieser unstetigen Funktion durch die Partialsummen der Reihe.

Setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die bekannte Leibnizsche Reihe (Nr. 404, Formel (16))

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

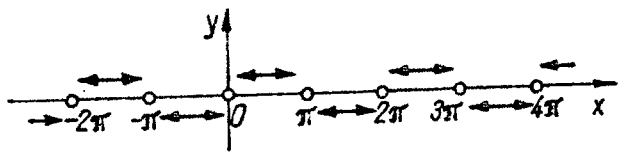

Abb. 125

[1]) Der Faktor in eckigen Klammern ist, wenn man ihm für $t = 0$ den Wert 0 zuschreibt, in diesem Punkt eine analytische Funktion, denn in der Umgebung der Null gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12}\, t + \frac{37}{5760}\, t^3 + \dots.$$

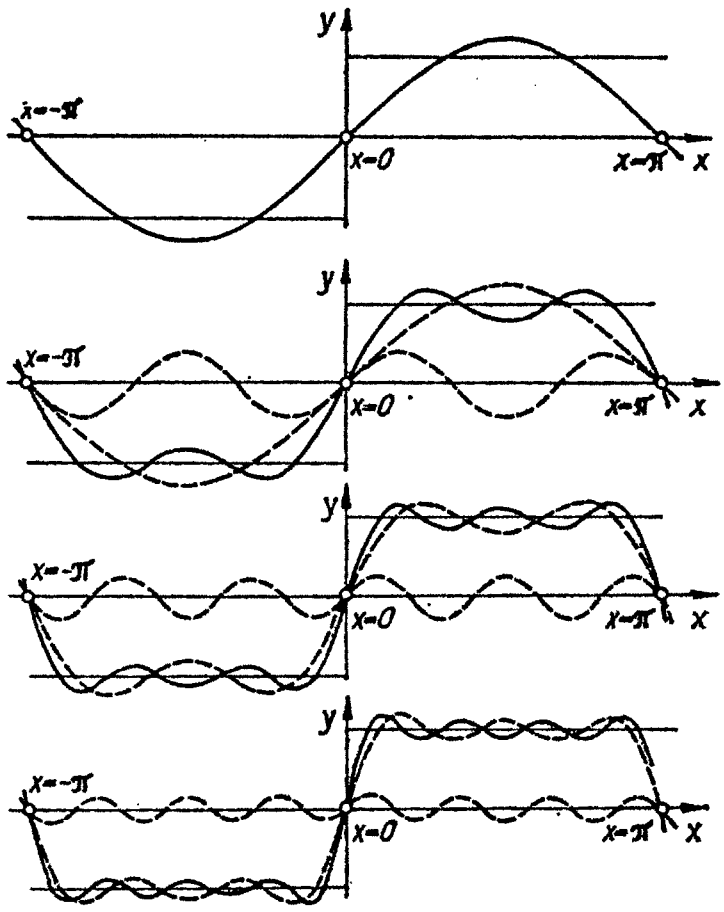

Abb. 126

Für $x=\frac{\pi}{6}$ bzw. $x=\frac{\pi}{3}$ folgt

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\dots$$

bzw.

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\dots .$$

Kombiniert man diese Entwicklung mit der aus Beispiel 2, so findet man leicht für $f(x)=x$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi) .$$

Unmittelbar folgt diese Entwicklung nur für $0<x<\pi$, sie gilt aber offenbar für $x=0$ und, da beide Seiten ungerade Funktionen sind, auch für $-\pi<x<0$, also für $(-\pi, \pi)$.

Das Bild der Summe der Reihe für $-\infty$ bis ∞ kann man sich anhand von Abb. 127 leicht vorstellen. Abb. 128 zeigt die Kurve der Partialsumme

$$y=s_5(x)=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 5x}{5}\right) .$$

5. Unter Benutzung von Beispiel 2 zeige man, daß auf der ganzen reellen Achse

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}=\begin{cases}x-[x] & \text{für nicht ganze } x ,\\ \frac{1}{2} & \text{für ganze } x\end{cases}$$

gilt.

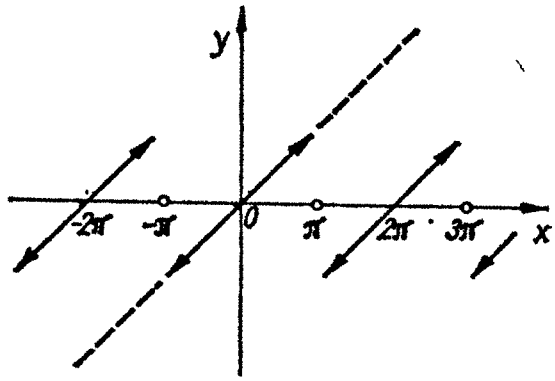

Abb. 127

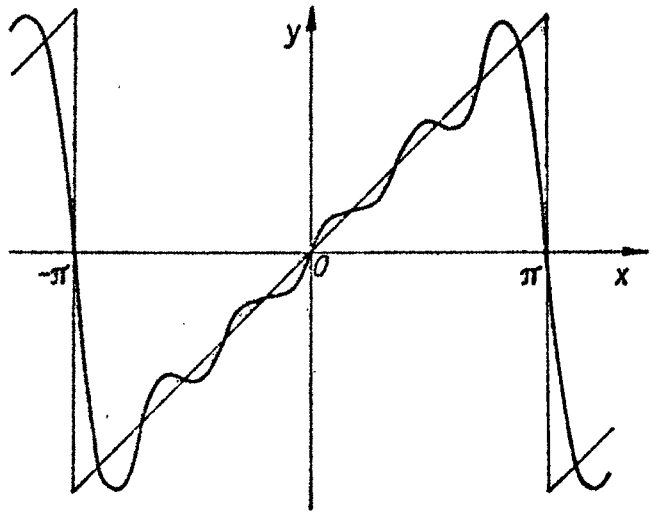

Abb. 128

6. Man entwickle die gerade Funktion $f(x)=x^2$ in eine Kosinusreihe für $[-\pi, \pi]$. Nach (19) ist

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\,x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n\pi}\,x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2}\qquad(n>0),$$

also

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}\qquad(-\pi\leqq x\leqq\pi).$$

Abb. 129 zeigt die Kurve der Summe, die aus unendlich vielen aneinander anschließenden Parabelbögen besteht.

Für $x=\pi$ bzw. $x=0$ erhält man die bekannten Entwicklungen

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\qquad\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

von denen man übrigens auch direkt die eine aus der anderen herleiten kann.

7. Man entwickle (für nicht ganzes a)
(a) $f_1(x)=\cos ax$ in $[-\pi, \pi]$ in eine Kosinusreihe,
(b) $f_2(x)=\sin ax$ in $(-\pi, \pi)$ in eine Sinusreihe.

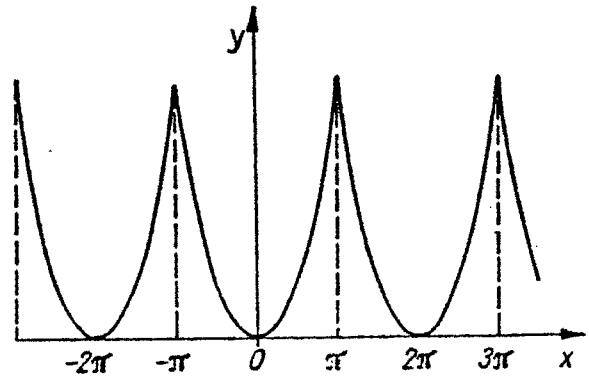

Abb. 129

Lösung. (a) Es ist

$$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=\frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x]\,dx=(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cdot\frac{\sin a\pi}{\pi}\qquad(n>0),$$

also

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos ax}{\sin a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\qquad(-\pi\leqq x\leqq\pi).$$

(b) $$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin ax}{\sin a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}\qquad(-\pi<x<\pi).$$

Für $x=0$ folgt übrigens aus (a)

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}$$

oder mit $a\pi=z$

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right].$$

Hier ist z beliebig, aber kein Vielfaches von π. Wir haben damit wieder die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{\sin z}$ erhalten. Setzt man in (a) aber $x=\pi$, so erhält man die Partialbruchzerlegung von $\cot z$ (vgl. Nr. 441, Beispiel 9).

Es ist äußerst bemerkenswert, daß man derart wichtige mathematische Beziehungen als einfache Folgerungen aus einzelnen trigonometrischen Reihenentwicklungen erhalten kann.

8. Die Entwicklungen der Funktionen

(a) $f_1(x)=\cosh ax$ in $[-\pi,\pi]$ in eine Kosinusreihe,

(b) $f_2(x)=\sinh ax$ in $(-\pi,\pi)$ in eine Sinusreihe

ergeben sich am einfachsten aus der Entwicklung der Funktion $f(x)=e^{ax}$ (vgl. Beispiel 1), deren gerade bzw. ungerade Komponenten sie sind (Nr. 689).

Sie haben die Gestalt

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cosh ax}{\sinh a\pi}=\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{a^2+n^2}\cos nx\qquad(-\pi\leqq x\leqq\pi),$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sinh ax}{\sinh a\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx\qquad(-\pi<x<\pi).$$

Als Folgerung kann man hieraus die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sinh z}$ und $\coth z$ erhalten.

Jetzt betrachten wir Beispiele für die Entwicklung von Funktionen, die im Intervall $(0, \pi)$ definiert sind, in Kosinus- bzw. Sinusreihen (Nr. 689).

9. Man entwickle $f(x) = x$ in $[0, \pi]$ in eine Kosinusreihe.

Nach (19) ist

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = 2 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2 \pi} \quad (n > 0),$$

also

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die gesuchte Entwicklung lautet demnach

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k-1) x}{(2k-1)^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

Die Kurve der Reihe ist in Abb. 130 dargestellt (vgl. dazu die Darstellung derselben Funktion als Sinusreihe in Beispiel 4 und die Abb. 127). Abb. 131 zeigt die Approximation durch die Partialsumme

$$y = s_5(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x \right).$$

Durch die Kombination obiger Entwicklung mit der für x^2 in Beispiel 6 in eine Kosinusreihe erhält man

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

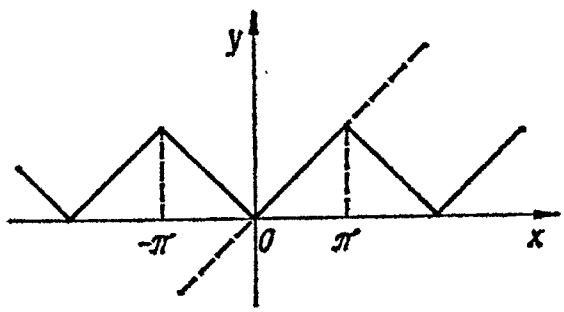

Abb. 130

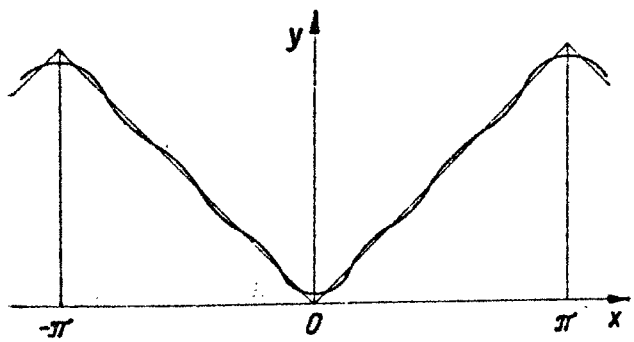

Abb. 131

Übrigens bleibt diese Identität auch im Intervall $[0, 2\pi]$ gültig, da beide Seiten ihren Wert nicht ändern, wenn man x durch $2\pi - x$ ersetzt.

10. Die Entwicklung von $f(x) = x^2$ im Intervall $(0, \pi)$ in eine Sinusreihe lautet

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{mit} \quad b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \qquad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi (2k-1)^3}.$$

Man stelle die Reihensumme graphisch dar und vergleiche das Bild mit Abb. 129.

11. Man entwickle $f(x) = e^{ax}$ im Intervall $(0, \pi)$
(a) in eine Kosinusreihe, (b) in eine Sinusreihe.

Lösung. Diese Entwicklungen lauten

$$\text{(a)} \quad e^{ax} = \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2} \cos nx \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

$$\text{(b)} \quad e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{a\pi}] \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx \qquad (0 < x < \pi).$$

12. Man entwickle
(a) $f_1(x) = \sin ax$ in $[0, \pi]$ in eine Kosinusreihe,
(b) $f_2(x) = \cos ax$ in $(0, \pi)$ in eine Sinusreihe.

Lösung. (a) Zunächst sei *a nicht ganz*. Dann ist

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \, dx = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin (a+n) x + \sin (a-n) x] \, dx$$

$$= \frac{2a}{\pi} [1 - (-1)^n \cos a\pi] \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

Die gesuchte Entwicklung läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\sin ax = \frac{1 - \cos a\pi}{\pi} \left\{ 1 + 2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{a^2 - (2k)^2} \right\} + 2a \frac{1 + \cos a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k-1) x}{a^2 - (2k-1)^2}$$

$(0 \leqq x \leqq \pi)$.

Jetzt sei a eine *ganze* Zahl. Hier unterscheiden wir die Fälle $a = 2m$ (gerade) und $a = 2m - 1$ (ungerade). Für $a = 2m$ ist

$$a_0 = 0, \qquad a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = \frac{8m}{\pi} \frac{1}{(2m)^2 - (2k-1)^2},$$

also

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2k-1) x}{(2m)^2 - (2k-1)^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).^{1})$$

Entsprechend gilt für $a = 2m - 1$

$$\sin (2m-1) x = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2 (2m-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{(2m-1)^2 - (2k)^2} \right\} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

(b) Hinweis. Man treffe dieselben Fallunterscheidungen wie in (a).

---

[1]) Man zeigt leicht: Ersetzt man links den Sinus durch seinen absoluten Betrag, so gilt die Entwicklung auf der ganzen reellen Achse.

13. Man beweise, daß für $0 \leqq x \leqq \pi$ die Entwicklung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4} = \frac{1}{96}\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2)$$

gilt.

Hinweis. Man entwickle die Funktion $f(x)$ auf der rechten Seite in eine Fourierreihe und beachte bei der wiederholten partiellen Integration, daß $f'(0)=f'(\pi)=0$ gilt.

14. Wir betrachten jetzt Beispiele uneigentlich integrierbarer Funktionen. Es sei in $(-\pi, \pi)$ die gerade Funktion

$$f(x) = \ln 2\cos\frac{x}{2}$$

in eine Kosinusreihe zu entwickeln.

In den Intervallenden wird die Funktion unendlich, bleibt aber absolut integrierbar. Nach Formel (19) ist

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\,dx = \ln 2 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln\cos t\,dt = 0$$

(vgl. Nr. 492, 1°) und für $n>0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln 2\cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\ln 2\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx\cdot\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$$

(hier wurde x durch $\pi-x$ ersetzt). Zur Berechnung dieses letzten Integrals schreiben wir den Integranden als Summe:

$$\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} + \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

und die Summanden ersetzen wir nach (26) aus Nr. 680 durch

$$\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos ix \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\cos ix\,.$$

So ergibt sich schließlich

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

und die gesuchte Entwicklung lautet

$$\ln 2\cos\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi).$$

Man kann diese Entwicklung auch für $x = \pm\pi$ als gültig ansehen, da dann beide Seiten gleich $-\infty$ werden. Nimmt man statt $\ln 2\cos\frac{x}{2}$ die Funktion $\ln 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|$, so gilt die Entwicklung für *alle* reellen x.

Ersetzt man in der Gleichung x durch $\pi - x$, so erhält man die interessante Entwicklung

$$-\ln 2\sin\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi)\,.$$

Bezüglich einer Erweiterung des Gültigkeitsbereiches gelten die obigen Bemerkungen.

Zum Schluß geben wir einige Beispiele für Entwicklungen von „verhefteten" Funktionen, d. h. solchen Funktionen, die auf Teilintervallen durch verschiedene analytische Ausdrücke definiert sind.[1])

15. Man entwickle

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi < x < 0\,, \\ x & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \pi \end{cases}$$

in eine Fourierreihe.

Nach (1) gilt

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\,x\,\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}\,,$$

d. h.

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k-1} = -\frac{2}{(2k-1)^2\,\pi}$$

und analog

$$b_n = -\frac{\cos n\pi}{n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\,.$$

Demnach lautet die Entwicklung

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \cdots \qquad (-\pi < x < \pi)\,.$$

16. Man entwickle in $[0, \pi]$ folgende Funktionen in Kosinusreihen:

$$\text{(a)}\quad f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq h\,, \\ 0 & \text{für} \quad h < x \leqq \pi; \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad f_2(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2h} & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 2h\,, \\ 0 & \text{für} \quad 2h < x \leqq \pi\,. \end{cases}$$

Lösung. (a) $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{h} dx = \frac{h}{\pi}\,,$ $\qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin nh}{n}\,,$

$$f_1(x) = \frac{2h}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right\} \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)\,,$$

[1]) Übrigens liegt hier nichts prinzipiell Neues im Vergleich zu den schon behandelten Beispielen vor: Man kann beispielsweise die Summe der Reihe in Beispiel 2 ebenfalls als aus einer Reihe linearer Funktionen verheftet ansehen (vgl. Abb. 124).

mit Ausnahme des Punktes $x=h$, wo die Summe der Reihe gleich $\frac{1}{2}$ ist.

(b) $$\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)dx=\frac{h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2h}\left(1-\frac{x}{2h}\right)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos 2nh}{2n^2h}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 nh}{n^2h},$$

$$f_2(x)=\frac{2h}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right\}\quad(0\leqq x\leqq\pi).$$

17. Man beweise die Entwicklungen

(a) $$\cos x-\frac{\cos 5x}{5}+\frac{\cos 7x}{7}-\frac{\cos 11x}{11}+\cdots=\begin{cases}\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{für } 0\leqq x<\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{für } x=\frac{\pi}{3},\\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3},\\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} & \text{für } x=\frac{2\pi}{3},\\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{für } \frac{2\pi}{3}<x\leqq\pi.\end{cases}$$

(b) $$\sin x-\frac{\sin 5x}{5^2}+\frac{\sin 7x}{7^2}-\frac{\sin 11x}{11^2}+\cdots=\begin{cases}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}x & \text{für } 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3},\\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}} & \text{für } \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3},\\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi-x) & \text{für } \frac{2\pi}{3}\leqq x\leqq\pi.\end{cases}$$

18. Die Funktion $f(x)$ sei folgendermaßen definiert:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{für } 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2},\\ -\cos x & \text{für } \frac{\pi}{2}<x\leqq\pi.\end{cases}$$

Man entwickle sie in eine Kosinusreihe.

Lösung. $$f(x)=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\right\}.$$

19. Man zeige, daß die Summe der Reihe

$$\frac{\pi}{2}(\cos x+\sin x)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}[\cos(4k+1)x-\sin(4k+1)x-\cos(4k+3)x-\sin(4k+3)x]$$

gleich

$\pi\sin x$ für $m\pi<x<m\pi+\frac{\pi}{2}$,

$\pi\cos x$ für $m\pi+\frac{\pi}{2}<x<(m+1)\pi$

und gleich

$$(-1)^m \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad x = m\pi \quad \text{oder} \quad x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ist.

20. Einem Kreis mit dem Radius a ist ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Um jede zweite Ecke dieses Sechsecks schlage man einen Kreis, dessen Radius gleich der Sechseckseite ist. So entsteht ein *dreiblättriges Kleeblatt* (Abb. 132). Man gebe seine Gleichung in Polarkoordinaten an; der Pol sei der Mittelpunkt des Sechsecks, die Achse seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt eines der drei Kreise.

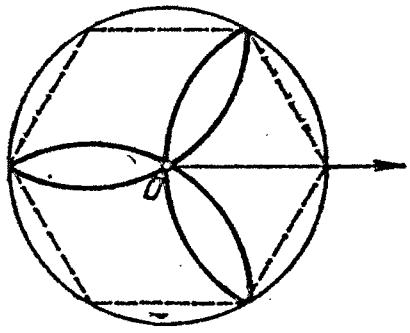

Abb. 132

Hinweis. $r = f(\theta)$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$, wobei die gerade Funktion $f(\theta)$ folgendermaßen definiert wird:

$$f(\theta) = \begin{cases} 2a\cos\theta & \text{für} \quad 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}, \\ 2a\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi. \end{cases}$$

Man entwickle diese Funktion in eine Kosinusreihe.

Lösung. Es ergibt sich

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3a}} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\theta - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\theta + \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\theta - \cdots \qquad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi).$$

21. Unter Benutzung schon bekannter Entwicklungen beweise man

(a) $x \sin x = 1 - \dfrac{1}{2}\cos x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1}$ $\qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi)$;

(b) $x \cos x = -\dfrac{1}{2}\sin x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{n^2 - 1}\sin nx$ $\qquad (-\pi < x < \pi)$;

(c) $\sin x \ln 2\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4}\sin x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2 - 1}\sin nx$ $\qquad (-\pi < x < \pi)$;

(d) $\cos x \ln 2\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\cos x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2 - 1}\cos nx$ $\qquad (-\pi < x < \pi)$.

22. Genügt eine in $[0, 2\pi]$ definierte Funktion der Bedingung (a) $f(2\pi - x) = f(x)$ oder (b) $f(2\pi - x) = -f(x)$, so sind im ersten Fall alle $b_n = 0$, im zweiten alle $a_n = 0$.

Man beweise diese Tatsache entweder auf Grund der Formeln (1) oder auf Grund dessen, daß die periodisch fortgesetzte Funktion gerade bzw. ungerade ist.

Bemerkung. Jetzt ist klar, daß die Besonderheiten der Entwicklung der Funktionen $\dfrac{\pi - x}{2}$ und $\ln 2\sin\dfrac{x}{2}$ (vgl. die Beispiele 2 und 14) im Intervall $[0, 2\pi]$ vorauszusehen

waren, da folgende Beziehungen gelten:

$$\frac{\pi-(2\pi-x)}{2}=-\frac{\pi-x}{2}, \qquad \ln 2\sin\frac{2\pi-x}{2}=\ln 2\sin\frac{x}{2}.$$

23. Man beweise: Erfüllt in $[-\pi, \pi]$ eine Funktion $f(x)$ die Bedingung (a) $f(x+\pi)=f(x)$ bzw. (b) $f(x+\pi)=-f(x)$, so gilt $a_{2m-1}=b_{2m-1}=0$ bzw. $a_{2m}=b_{2m}=0$.

24. Unter Beschränkung auf Funktionen, die in $[0, \pi]$ definiert sind, beweise man, daß
(a) aus $f(\pi-x)=f(x)$ bei einer Entwicklung in eine Kosinusreihe $a_{2m-1}=0$ und bei einer Entwicklung in eine Sinusreihe $b_{2m}=0$,
(b) aus $f(\pi-x)=-f(x)$ bei Kosinusreihen $a_{2m}=0$ und bei Sinusreihen $b_{2m-1}=0$ folgt.

Bemerkung. Auf Grund dessen lassen sich die Besonderheiten der Sinusentwicklung von $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ und von $\frac{\pi}{4}$ in Beispiel 4, der Kosinusentwicklung von $\sin 2mx$ und $\sin(2m-1)x$ in Beispiel 12 und die der Entwicklungen in den Beispielen 13, 17 und 18 voraussehen.

25. Durch Wiederholung der Überlegungen aus Nr. 689 beweise man, daß eine nur auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definierte Funktion unter dem üblichen Vorbehalt dort in eine Kosinusreihe mit nur geraden Vielfachen von x bzw. in eine Sinusreihe mit nur ungeraden Vielfachen von x entwickelt werden kann. Man leite die Formeln für die Koeffizienten her und wende sie auf Beispiele an.

26. Es sei eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π gegeben; a_m, b_m seien ihre Fourierkoeffizienten. Man drücke durch sie die Fourierkoeffizienten $\bar{a}_m$, $\bar{b}_m$ der „benachbarten" Funktion $f(x+h)$ aus ($h=$const).

Nach der Bemerkung aus Nr. 681 über das Integral einer periodischen Funktion gilt

$$\bar{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\,dx=a_0,$$

$$\bar{a}_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos m(x-h)\,dx$$

$$=\cos mh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\cos mx\,dx+\sin mh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(x)\sin mx\,dx$$

$$=a_m\cos mh+b_m\sin mh$$

und analog

$$\bar{b}_m=b_m\cos mh-a_m\sin mh.$$

691. Entwicklung von ln $\Gamma(x)$. Als etwas komplizierteres Beispiel bringen wir jetzt nach Kummer[1]) die Entwicklung der Funktion ln $\Gamma(x)$ im Intervall $(0, 1]$ in eine Fourierreihe.

Nach Nr. 688 ist (hier ist $2l=1$) im Intervall $(0, 2l)$

$$\ln\Gamma(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2n\pi x+b_n\sin 2n\pi x),$$

wobei Formel (17*) aus Nr. 688 für die Koeffizienten gilt:

$$a_n=2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n=2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\sin 2n\pi x\,dx \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

---

[1]) Ernst Eduard Kummer, 1810–1893, deutscher Mathematiker.

Übrigens können die a_n fast ohne Rechnung bestimmt werden. Durch Logarithmieren der aus Nr. 531, 5°, bekannten Beziehung

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{2\pi}{2\sin\pi x}$$

folgt nämlich

$$\ln\Gamma(x)+\ln\Gamma(1-x)=\ln 2\pi-\ln 2\sin\pi x\,.$$

Die Fourierreihe von $\ln\Gamma(1-x)$ ergibt sich aus der Fourierreihe von $\ln\Gamma(x)$, indem man x durch $1-x$ ersetzt. Dabei bleiben die Kosinusglieder unverändert, die Sinusglieder ändern das Vorzeichen. Durch Addition erhalten wir

$$\ln\Gamma(x)+\ln\Gamma(1-x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}2a_n\cos 2n\pi x\,.$$

Die Fourierreihe für die rechte Seite läßt sich leicht angeben; man benutze dazu die aus Nr. 690, Beispiel 14, bekannte Entwicklung der Funktion $-\ln 2\sin\frac{x}{2}$ und ersetze x durch $2\pi x$:

$$\ln 2\pi-\ln 2\sin\pi x=\ln 2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos 2n\pi x\,.$$

Somit ergibt sich sofort

$$\frac{1}{2}a_0=\ln\sqrt{2\pi}\,,\qquad a_n=\frac{1}{2n}\qquad(n=1,2,\ldots)\,.$$

Die Bestimmung der b_n ist wesentlich schwieriger. Wir gehen von der Formel für $\ln\Gamma(x)$ aus Nr. 540 aus:

$$\ln\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\left[(x-1)e^{-z}-\frac{e^{-z}-e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right]\frac{dz}{z}\,,$$

die wir durch die Substitution $e^{-z}=t$ umformen:

$$\ln\Gamma(x)=\int_0^1\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t}-x+1\right]\frac{dt}{\ln t}\,.$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Formeln für b_n ein und vertauschen die Integrationen nach x und t; das liefert

$$b_n=2\int_0^1\frac{dt}{\ln t}\int_0^1\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t}-x+1\right]\sin 2n\pi x\,dx\,.$$

Diese Vertauschung ist erlaubt; denn $\left[\frac{1-t^{x-1}}{1-t}-x+1\right]\frac{\sin 2n\pi x}{\ln t}$ wird als Funktion zweier Veränderlicher nur für $t=0$ unstetig, während die Stetigkeit für $t=1$ erhalten bleibt, wovon man sich leicht überzeugt. Das Integral über diesen Ausdruck nach t konvergiert aber in $[0,1]$ gleichmäßig bezüglich x, denn für $0<\tau<1$ ist

$$\int_0^{\tau}\left[\frac{t^{x-1}-1}{1-t}-(1-x)\right]\frac{|\sin 2n\pi x|}{|\ln t|}\,dt<\frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{|\ln\tau|}\cdot\frac{|\sin 2n\pi x|}{x}\,\tau^x$$

$$<\frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{|\ln\tau|}\cdot 2n\pi\,.$$

Daher ist die Vertauschung der Integrationen nach dem Satz aus Nr. 521 zulässig.

Nun setzen wir die Rechnung fort. Es ist

$$\int_0^1 \sin 2n\pi x \, dx = 0, \qquad \int_0^1 x \sin 2n\pi x \, dx = -\frac{1}{2n\pi},$$

$$\int_0^1 t^{x-1} \sin 2n\pi x \, dx = \frac{1}{t} \int_0^1 e^{x \ln t} \sin 2n\pi x \, dx$$

$$= \frac{\ln t \cdot \sin 2n\pi x - 2n\pi \cos 2n\pi x}{t\,[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]} e^{x \ln t} \Big|_0^1$$

$$= \frac{(1-t)\, 2n\pi}{t\,[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]}.$$

Hieraus folgt

$$b_n = 2 \int_0^1 \left[-\frac{2n\pi}{t\,[\ln^2 t + 4n^2\pi^2]} + \frac{1}{2n\pi} \right] \frac{dt}{\ln t}.$$

Setzen wir hierin $t = e^{-2n\pi u}$, so erhalten wir

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - e^{-2n\pi u} \right] \frac{du}{u}.$$

Insbesondere ist

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+u^2} - e^{-2\pi u} \right] \frac{du}{u},$$

und hieraus folgt

$$n b_n - b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{-2\pi u} - e^{-2n\pi u}) \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi} \ln n$$

(Integral von FRULLANI; Nr. 495). Somit reduziert sich die Bestimmung der b_n auf die von b_1.

In Nr. 535 hatten wir folgende Integraldarstellung der Eulerschen Konstanten kennengelernt:

$$C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u} - e^{-u} \right) \frac{du}{u}.$$

Also ist

$$b_1 - \frac{1}{\pi} C = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u} \right) \frac{du}{u} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (e^{-u} - e^{-2\pi u}) \frac{du}{u}.$$

Das erste Integral läßt sich unmittelbar berechnen, es hat den Wert 0; das zweite ist gleich $\frac{1}{\pi} \cdot \ln 2\pi$ (Frullanisches Integral). Daher ist

$$b_1 = \frac{1}{\pi} (C + \ln 2\pi), \quad \text{also} \quad b_n = \frac{1}{n\pi} (C + \ln 2n\pi).$$

Die gesuchte Entwicklung lautet

$$\ln \Gamma(x) = \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} \cos 2n\pi x + \frac{1}{n\pi} (C + \ln 2n\pi) \sin 2n\pi x \right] \qquad (0 < x < 1) .$$

§ 3. Ergänzungen

692. Reihen mit abnehmenden Koeffizienten. Bisher sind wir von vorgegebenen Funktionen ausgegangen und haben sie in Fourierreihen entwickelt, nachdem wir dazu irgendwelche hinreichenden Bedingungen als erfüllt nachgewiesen hatten. In vielen einfachen Fällen gelingt es auch umgekehrt, von einer gegebenen trigonometrischen Reihe zu beweisen, daß sie gegen eine absolut integrierbare Funktion konvergiert und deren Fourierreihe ist. Wir bringen hier die einschlägigen Untersuchungen von W. H. YOUNG.[1])

Wir untersuchen Reihen der Gestalt

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x , \qquad (C)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \sin \nu x , \qquad (S)$$

wobei wir ein für allemal annehmen, daß die Koeffizienten q_ν positiv sind und monoton abnehmend gegen 0 streben. Aus Nr. 430 wissen wir, daß beide Reihen in jedem abgeschlossenen Intervall, das keinen Punkt der Form $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$) enthält, gleichmäßig konvergieren. Die Summe der Reihe (C) bezeichnen wir mit $f(x)$, die von (S) mit $g(x)$; beide Funktionen haben die Periode 2π und sind mit Ausnahme der Punkte $2k\pi$ überall stetig. In diesen Ausnahmepunkten kann die Reihe (C) auch divergieren.[2]) Da $f(x)$ gerade und $g(x)$ ungerade ist, dürfen wir uns auf das Intervall $[0, \pi]$ beschränken.

1°. *Ist f (bzw. g) absolut integrierbar, so ist* (C) (*bzw.* (S)) *die Fourierreihe von f (bzw. g).*[3])

a) Multiplizieren wir g mit $\sin mx$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$),

$$g(x) \sin mx = \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \sin \nu x \cdot \sin mx ,$$

so erhalten wir eine in $[0, \pi]$ gleichmäßig konvergente Reihe. Wegen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x = \frac{\cos \frac{1}{2} x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

---

[1]) WILLIAM HENRY YOUNG, 1882–1946, englischer Mathematiker.

[2]) Konvergiert $\sum_{1}^{\infty} q_\nu$, so konvergieren die beiden Reihen (C) und (S) gleichmäßig gegen stetige Funktionen, deren Fourierreihen sie sind (vgl. Nr. 678). Alles weitere ist nur für den Fall interessant, daß diese Reihe divergiert.

[3]) Dieser Satz ist ein Spezialfall eines allgemeinen und sehr schwer zu beweisenden Satzes (vgl. Nr. 750, 751). Wir ziehen es jedoch vor, für Reihen des betrachteten einfachen Typs dieses Problem hier erschöpfend zu behandeln.

ist nämlich

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x \sin mx\right| \leqq \frac{|\sin mx|}{\sin \frac{x}{2}} \leqq \frac{mx}{\frac{x}{\pi}} = m\pi ,$$

und darauf wenden wir das Dirichletsche Kriterium (Nr. 430) an. Wir haben hierbei die elementaren Ungleichungen

$$|\sin z| \leqq z \quad (z \geqq 0) \quad \text{und} \quad \sin z > \frac{2}{\pi} z \quad \left(0 < z \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

benutzt. Dann kann aber die Reihe gliedweise von 0 bis π integriert werden, und wir erhalten

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin mx \, dx .$$

b) Nun multiplizieren wir f mit $1-\cos mx$ und finden

$$f(x)\,(1-\cos mx) = \frac{1}{2} q_0 (1-\cos mx) + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x \,(1-\cos mx) .$$

Auch diese Reihe konvergiert nach dem Dirichletschen Kriterium im Intervall $[0, \pi]$ gleichmäßig. Um sich davon zu überzeugen, hat man nur zu beachten, daß

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x = \frac{\sin \left(n+\frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} , \tag{1}$$

also

$$\left|\frac{1}{2}(1-\cos mx) + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x \,(1-\cos mx)\right|$$

$$\leqq \frac{1-\cos mx}{2 \sin \frac{x}{2}} \leqq \frac{\frac{1}{2} m^2 x^2}{\frac{2x}{\pi}} = \frac{1}{4} m^2 \pi x \leqq \frac{1}{4} m^2 \pi^2$$

ist. Dabei haben wir die Ungleichung $1-\cos z < \frac{1}{2} z^2$ benutzt. Durch gliedweise Integration von 0 bis π erhalten wir

$$q_0 - q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Jetzt gehen wir für $m \to \infty$ zur Grenze über. Nach Voraussetzung gilt $q_m \to 0$, und nach dem Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682 strebt auch das letzte Integral gegen 0. Somit erhalten wir

$$q_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx \quad \text{und allgemein} \quad q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

2°. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_\nu}{\nu} = Q \tag{2}$$

konvergiert, so definieren die beiden Reihen (C) *und* (S) *absolut integrierbare Funktionen* (*und sind daher ihre Fourierreihen*). Da die Überlegungen für beide Reihen gleichartig sind, beschränken wir uns auf (C). Setzen wir

$$Q_n = \frac{1}{2} q_0 + q_1 + \cdots + q_n ,$$

so folgt nacheinander

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n(n+1)} &= \frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_\nu}{\nu} = \frac{1}{2} q_0 + Q ; \end{aligned} \tag{3}$$

dabei haben wir die Summation nach Nr. 393 vertauscht und die trivialen Identitäten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{und allgemein} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\nu}$$

benutzt.

Nun sei

$$\frac{\pi}{n+1} \leqq x \leqq \frac{\pi}{n} .$$

Für diese x-Werte stellen wir $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \cos \nu x \right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x$$

dar. Die erste Summe ist dem absoluten Betrag nach höchstens gleich Q_n. Zur Abschätzung der zweiten wenden wir auf den Ausdruck $\sum_{\nu=n+1}^{\nu=n+m} q_\nu \cos \nu x$ den Hilfssatz von Abel an (Nr. 383). Wegen

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+\mu} \cos \nu x \right| = \left| \frac{\sin\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2} x} \right| \leqq \frac{1}{\sin \frac{1}{2} x}$$

ist

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+m} q_\nu \cos \nu x \right| \leqq \frac{q_{n+1}}{\sin \frac{1}{2} x} < \frac{\pi}{x} q_{n+1} < \frac{\pi}{x} q_n < (n+1) q_n .$$

Diese Ungleichung bleibt auch in der Grenze für die ganze Summe gültig, so daß wir schließlich

$$|f(x)| \leqq Q_n + (n+1) q_n \qquad \left(\frac{\pi}{n+1} \leqq x \leqq \frac{\pi}{n} \right)$$

erhalten. Dann ist aber (vgl. (3) und (2))

$$\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} |f(x)|\,dx \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)} [Q_n + (n+1)\,q_n]$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2} q_0 + 2Q\right),$$

so daß $f(x)$ tatsächlich absolut integrierbar ist. Jetzt braucht man nur noch 1° anzuwenden, um den Satz zu beweisen.

Wie wir in Nr. 732 sehen werden, ist die Konvergenz der Reihe (2) gleichzeitig auch notwendig dafür, daß (S) eine Fourierreihe ist, so daß sich in bezug auf (S) das erhaltene Resultat nicht verschärfen läßt. Anders ist es mit (C): Hier ist die angegebene Bedingung nicht notwendig. Für diesen Fall geben wir eine weitere hinreichende Bedingung an, die in der vorigen nicht enthalten ist.

3°. *Wenn auch die Differenz* $\Delta q_\nu = q_\nu - q_{\nu+1}$ *mit wachsendem* ν *monoton abnimmt, so ist* $f(x)$ *nichtnegativ und integrierbar* (*und* (C) *ist die Fourierreihe von* $f(x)$).

Wir unterwerfen die Partialsumme

$$C_n(x) = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \cos \nu x \qquad (x > 0)$$

der Abelschen Transformation (Nr. 383). Unter Berücksichtigung von (1) erhalten wir

$$C_n(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} x} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta q_\nu \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x + q_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right\}.$$

Auf diese Summe wenden wir wieder die Abelsche Transformation an. Setzen wir zur Abkürzung $\Delta q_\nu - \Delta q_{\nu+1} = \Delta^2 q_\nu$ und berücksichtigen wir die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{m} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) x = \frac{1 - \cos(m+1)\,x}{2 \sin \frac{1}{2} x},$$

so erhalten wir $C_n(x)$ in der Gestalt

$$C_n(x) = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} x} \sum_{\nu=0}^{n-2} \Delta^2 q_\nu (1 - \cos(\nu+1)\,x)$$
$$+ \Delta q_{n-1} \frac{1 - \cos nx}{4 \sin^2 \frac{1}{2} x} + q_n \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x}.$$

Da die letzten beiden Glieder für $n \to \infty$ gegen 0 streben, erhalten wir für $f(x)$ durch Grenzübergang eine Entwicklung nach nichtnegativen und stetigen Funktionen:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \frac{1 - \cos(\nu+1)\,x}{4 \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

($\Delta^2 q_\nu > 0$ nach Voraussetzung). Daher ist auch $f(x)$ nichtnegativ.

Zum Beweis der Integrierbarkeit dieser Funktion benutzen wir die Folgerung aus Nr. 518 und die auf den Fall von Reihen umformulierte Bemerkung dazu. Man kann also

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \int_0^\pi \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx$$

schreiben, wenn diese Reihe konvergiert.

Wegen

$$\frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \sum_{\mu=0}^{\nu}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\lambda=1}^{\mu}\cos\lambda x\right\}$$

erhalten wir sofort

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\nu+1)$$

(vgl. Nr. 309, Beispiel 5 (b)), so daß

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,\Delta^2 q_\nu$$

folgt. Jetzt brauchen wir nur noch die Konvergenz der Reihe rechts zu beweisen. In Nr. 375, Beispiel 3, haben wir gesehen, daß aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \tag{4}$$

mit monoton abnehmenden positiven a_ν notwendigerweise $\nu a_\nu \to 0$ folgt. Hieraus ergibt sich ferner, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,\Delta a_\nu$$

konvergiert, und zwar gegen dieselbe Summe wie (4). Das folgt nämlich aus der Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu - n a_n\,.$$

Setzt man jetzt $a_\nu = \Delta q_\nu$, so folgt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,\Delta^2 q_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta q_\nu = q_0\,,$$

also schließlich

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}q_0\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Beispielsweise genügt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ den Voraussetzungen des Satzes; dieses Beispiel ist lehrreich in der Hinsicht, daß Satz 2° darauf nicht anzuwenden ist, denn $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergiert (Nr. 367, Beispiel 6).

Bemerkung. Ersetzt man in (C) und (S) die Veränderliche x durch $x+\pi$, so erhält man Reihen mit Koeffizienten abwechselnder Vorzeichen, die aber dem absoluten Betrag nach abnehmen. Für solche Reihen bleiben die hier bewiesenen Sätze gültig.

693. Summation trigonometrischer Reihen mit Hilfe analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen. In vielen Fällen kann man durch Untersuchung der Koeffizienten von Reihen der Form (C) oder (S) feststellen, daß diese Reihen konvergieren (eventuell mit Ausnahme einzelner Punkte) und die Fourierreihen ihrer Summen sind (vgl. z. B. Nr. 692); in allen diesen Fällen erhebt sich aber naturgemäß die Frage, wie man die Summe dieser Reihen findet, d. h. genauer, wie man sie in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrückt, wenn sie überhaupt in solcher Form ausdrückbar sind. Schon EULER (und LAGRANGE) haben zur Summation trigonometrischer Reihen in geschlossener Form mit Erfolg analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen verwendet. Die Eulersche Methode besteht dabei in folgendem: Wir wollen annehmen, daß bei bestimmter Wahl der $\{q_\nu\}$ die Reihen (C) und (S) mit eventueller Ausnahme einzelner Punkte überall im Intervall $[0, 2\pi]$ gegen die Funktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ konvergieren. Nun betrachten wir die Potenzreihe in der komplexen Veränderlichen z mit denselben Koeffizienten:

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu z^\nu . \tag{5}$$

Auf dem Rand des Einheitskreises $|z| = 1$, d. h. für $z = e^{ix}$, konvergiert diese Reihe nach Voraussetzung, eventuell bis auf einzelne Punkte:

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu e^{\nu ix} = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu (\cos \nu x + i \sin \nu x) = f(x) + i g(x) . \tag{6}$$

Dann konvergiert nach einem bekannten Potenzreihensatz die Reihe (5) sicher für $|z| < 1$, d. h. im Innern des Einheitskreises, und definiert dort eine Funktion $\varphi(z)$ einer komplexen Veränderlichen. Unter Benutzung bekannter (vgl. Kap. XII, § 5) Entwicklungen elementarer Funktionen einer komplexen Veränderlichen gelingt es häufig, die Funktion $\varphi(z)$ auf solche Funktionen zurückzuführen. Dann ist für $z = re^{ix}$ $(r < 1)$

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu r^\nu e^{i\nu x} = \varphi(re^{ix}) ,$$

und nach dem Satz von ABEL (Nr. 456) erhält man, sobald die Reihe (6) konvergiert, ihre Summe als Limes dieser Funktion:

$$f(x) + i g(x) = \lim_{r \to 1} \varphi(re^{ix}) . \tag{7}$$

Meist ist dieser Limes gleich $\varphi(e^{ix})$, und dann sind $f(x)$ und $g(x)$ in geschlossener Form darstellbar.

Als Beispiel betrachten wir die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu x}{\nu} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

Die Sätze aus Nr. 692 gestatten den Schluß, daß diese beiden Reihen konvergieren (die erste mit Ausnahme der Punkte 0 und 2π) und die Fourrierreihen der durch sie definierten Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind. Wie lauten aber diese Funktionen? Zur Beantwortung dieser Fragen bilden wir die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu}.$$

Von der logarithmischen Reihe (Nr. 458) ausgehend, findet man leicht ihre Summe

$$\varphi(z) = -\ln(1-z) = \ln \frac{1}{1-z} \qquad (|z|<1);$$

also ist

$$f(x) + i g(x) = \ln \frac{1}{1-e^{ix}} \qquad (x \neq 0, 2\pi).$$

Eine leichte Umformung liefert

$$\frac{1}{1-e^{ix}} = \frac{1}{(1-\cos x) - i \sin x} = \frac{1}{2} + i \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$$
$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \right],$$

so daß der Modul dieses Ausdrucks gleich $\frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}}$ und sein Argument gleich $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ ist. Daher ist

$$\ln \frac{1}{1-e^{ix}} = -\ln 2 \sin \frac{x}{2} + i \frac{\pi - x}{2},$$

also schließlich

$$f(x) = -\ln 2 \sin \frac{x}{2}, \qquad g(x) = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Diese Resultate sind uns aus Nr. 690, Beispiel 14 und 2, bekannt und waren sogar schon früher mit Hilfe von Überlegungen im Komplexen erhalten worden (Nr. 461, Beispiel 6 (b)); aber im ersten Fall waren wir von den Funktionen f und g ausgegangen, im zweiten von der analytischen Funktion φ. Hier sind wir zum erstenmal von den Reihen selbst ausgegangen. Weitere Beispiele ähnlicher Art findet der Leser in Nr. 694.

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß man sich zunächst von der *Konvergenz* der Reihen (C) und (S) überzeugen muß, damit man ihre Summe mit Hilfe der Limesgleichung (7) bestimmen darf. Die Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite dieser Gleichung allein erlaubt noch nicht den Schluß auf die Konvergenz

dieser Reihen. Um das an einem Beispiel zu belegen, betrachten wir die Reihen

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos \nu x \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sin \nu x\,,$$

die für $0<x<2\pi$ sicher divergieren. Bildet man die entsprechende Potenzreihe

$$\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}z^{\nu}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\,,$$

so hat diese Summe, wenn der Punkt $z=re^{ix}$ längs des Radius gegen den Punkt e^{ix} auf dem Rand strebt, den wohlbestimmten Limes

$$\frac{1}{1-e^{ix}}-\frac{1}{2}=i\,\frac{\sin x}{2\,(1-\cos x)} \qquad (0<x<2\pi)\,.$$

Wenn die Konvergenz der Reihen (C) und (S) nicht von vornherein erwiesen ist, kann man die Gleichung (7) nur als heuristisches Hilfsmittel ansehen. Wenn man mit ihrer Hilfe die Funktionen f und g erhalten hat, muß man deren Fourierkoeffizienten berechnen, und nur wenn diese mit den Koeffizienten der gegebenen Reihen übereinstimmen, darf man auf die bekannten Konvergenzkriterien für Fourierreihen zurückgreifen.

694. Beispiele. In allen Aufgaben bleibt der Beweis der Konvergenz der angegebenen Reihen dem Leser überlassen.

1. Man summiere die Reihen

(a) $1+\dfrac{\cos x}{1}+\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\cdots+\dfrac{\cos nx}{n!}+\cdots$; (b) $\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 2x}{1\cdot 2}+\cdots+\dfrac{\sin nx}{n!}+\cdots$;

Lösung. Hier ist (in den Bezeichnungen aus Nr. 693)

$$\varphi(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu!}=e^{z}\,,$$

also

$$\varphi(e^{ix})=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}\,[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)]\,.$$

Daher ist

(a) $f(x)=e^{\cos x}\cos(\sin x)$, $\quad g(x)=e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

2. Man summiere die Reihen

(a) $\dfrac{\cos x}{1!}-\dfrac{\cos 3x}{3!}+\dfrac{\cos 5x}{5!}-\cdots$, (b) $\dfrac{\sin x}{1!}-\dfrac{\sin 3x}{3!}+\dfrac{\sin 5x}{5!}-\cdots$,

(c) $1-\dfrac{\cos 2x}{2!}+\dfrac{\cos 4x}{4!}-\cdots$, (d) $\dfrac{\sin 2x}{2!}-\dfrac{\sin 4x}{4!}+\dfrac{\sin 6x}{6!}-\cdots$.

Hinweis. Die Funktion $\varphi(z)$ ist gleich

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

in den Fällen (a) und (b); sie ist gleich

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

in den Fällen (c) und (d). Man benutze die Zerlegung von Sinus und Kosinus eines komplexen Argumentes in Real- und Imaginärteil (Nr. 459):

$$\sin(\alpha+\beta\mathrm{i}) = \sin\alpha\cosh\beta + \mathrm{i}\cos\alpha\sinh\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta\mathrm{i}) = \cos\alpha\cosh\beta - \mathrm{i}\sin\alpha\sinh\beta.$$

Lösung.

(a) $\sin(\cos x)\cosh(\sin x)$, (b) $\cos(\cos x)\sinh(\sin x)$,
(c) $\cos(\cos x)\cosh(\sin x)$, (d) $\sin(\cos x)\sinh(\sin x)$.

3. Man summiere die Reihen

(a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$;

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{n^2-1}$, (d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin nx}{n^2-1}$;

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\cos nx$, (f) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n^2-1}\sin nx$;

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}$.

(a), (b) Lösung. Die diesen Fällen entsprechende Reihe

$$\varphi(z) = 1+\frac{z}{1\cdot 2}-\frac{z^2}{2\cdot 3}+\frac{z^3}{3\cdot 4}-+\ldots$$

liefert unmittelbar keine bekannte elementare Funktion; benutzt man jedoch die triviale Identität

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

so kann man sie umformen zu

$$1+\left\{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots\right\}+\left\{-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\cdots\right\},$$

woraus man unter Bezugnahme auf die logarithmische Reihe (Nr. 458) leicht die Beziehung

$$\varphi(z) = 1+\ln(1+z)+\frac{1}{z}[\ln(1+z)-z] = \left(1+\frac{1}{z}\right)\ln(1+z)$$

erhält. Hier setzen wir nun $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ und erhalten

$$1+z = (1+\cos x)+\mathrm{i}\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{x}{2}\right),$$

so daß für $0<x<\pi$ der Modul dieses Ausdrucks gleich $2\cos\frac{x}{2}$ und sein Argument $\frac{x}{2}$ ist; ferner ist

$$\ln(1+z) = \ln 2\cos\frac{x}{2}+\mathrm{i}\frac{x}{2}.$$

Somit ist also

$$\varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = [(1+\cos x)-\mathrm{i}\sin x]\cdot\left[\ln 2\cos\frac{x}{2}+\mathrm{i}\frac{x}{2}\right].$$

Für $-\pi<x<\pi$ folgt hieraus

$$f(x)=(1+\cos x)\ln 2\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sin x,$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x(1+\cos x)-\sin x\ln 2\cos\frac{x}{2}.$$

(c) – (h) Hinweis. In allen Fällen benutze man die Identitäten

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),\qquad \frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

und ziehe die logarithmische Reihe heran.

Lösung. (g) $(\cos x+\cos 2x)\ln 2\cos\frac{x}{2}+\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x)-\cos x,$

(h) $(\sin x+\sin 2x)\ln 2\cos\frac{x}{2}-\frac{x}{2}(\cos x+\cos 2x)-\sin x.$

(Für (c) bis (f) vgl. Nr. 690, Beispiel 21.)

4. Man summiere die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{n}.$$

Hinweis. $\varphi(z)=\frac{1}{z}\ln(1+z^2)$.

Lösung. Beschränkt man sich auf das Intervall $0\leqq x\leqq\pi$, so ergibt sich

$$f(x)=\begin{cases}\cos x\ln 2\cos x+x\sin x & \text{für } 0\leqq x<\frac{\pi}{2},\\ \cos x\ln 2|\cos x|+(x-\pi)\sin x & \text{für } \frac{\pi}{2}<x\leqq\pi.\end{cases}$$

5. Man summiere die Reihen

(a) $\frac{\cos 2x}{1\cdot 2}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4}+\cdots$, (b) $\frac{\cos 2x}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\cos 3x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$.

Hinweis. Man benutze die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(n-1)n}$ und $\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$ und ziehe die Reihenentwicklung von $\ln\frac{1}{1-z}$ heran.

Lösung. (a) $(1-\cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2}-\frac{\pi-x}{2}\sin x+\cos x,$

(b) $(1-\cos x)\ln 2\sin\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\cos x-\frac{1}{2}.$

6. Man summiere die Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}$.

(a), (b) Lösung. Wir bilden die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1},$$

in der wir die Entwicklung des Arkustangens erkennen,

$$\arctan z=\frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\ln\frac{1+z\mathrm{i}}{1-z\mathrm{i}},$$

die mit Ausnahme von $z=\pm\mathrm{i}$ für $|z|\leqq 1$ gültig ist (Nr. 459).

Wir setzen hier $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, beschränken uns auf das Intervall $0\leqq x\leqq\pi$, schließen aber $x=\frac{\pi}{2}$ aus. Nun ist

$$\frac{1+z\mathrm{i}}{1-z\mathrm{i}}=\mathrm{i}\,\frac{\cos x}{1+\sin x}=\mathrm{i}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

so daß der Modul des Ausdrucks gleich $\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$ ist, das Argument ist $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem, ob $x<\frac{\pi}{2}$ oder $x>\frac{\pi}{2}$ ist. Daher ist

$$\ln\frac{1+z\mathrm{i}}{1-z\mathrm{i}}=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\pm\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$$

und

$$\arctan z=\pm\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Also ist

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \text{für } 0\leqq x<\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{4} & \text{für } \frac{\pi}{2}<x\leqq\pi\end{cases}$$

und für diese Werte von x

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|=\frac{1}{4}\ln\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

(c) Hinweis. Subtraktion dieses Resultates vom Resultat aus Beispiel 4 liefert

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\cos x\ln 2\cos x+x\sin x) & \text{für } 0\leqq x<\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\cos x\ln 2|\cos x|+(x-\pi)\sin x) & \text{für } \frac{\pi}{2}<x\leqq\pi.\end{cases}$$

7. Man summiere die Reihen

(a) $\cos x+\frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7}+\cdots;$

(b) $\sin x+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5}+\cdots;$

(c) $\frac{\cos x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\cos 7x}{7\cdot 8}+\cdots;$

(d) $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin 5x}{5\cdot 6}+\cdots.$

Lösung. Für die Fälle (a) und (b) ist

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}=\arcsin z$$

(Nr. 459). Ferner ist für $0\leqq x\leqq\pi$

$$\arcsin e^{ix}=\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}+i\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right).$$

Das läßt sich leicht nachprüfen, indem man nachrechnet, daß der Sinus des Ausdrucks auf der rechten Seite wirklich gleich e^{ix} ist. Übrigens läßt sich dieser Ausdruck auch leicht herleiten, indem man u, v aus den Gleichungen

$$\sin u\cosh v=\cos x,\qquad \cos u\sinh v=\sin x$$

berechnet. Demnach ist (für $0\leqq x\leqq\pi$)

$$f(x)=\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}},\qquad g(x)=\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right).$$

Für die Fälle (c) und (d) erhält man die Reihe

$$\begin{aligned}&\frac{z}{1\cdot2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3\cdot4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{z^5}{5\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{z^7}{7\cdot8}+\cdots\\&=\left\{z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{z^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{z^7}{7}+\cdots\right\}\\&\quad-\frac{1}{z}\left\{\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot1}{2\cdot4}z^4+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}z^6+\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}z^8+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun noch die Ergebnisse aus Nr. 459, so kann man die rechte Seite in der Gestalt

$$\arcsin z+\frac{1}{z}\left(\sqrt{1-z^2}-1\right)$$

schreiben. Hieraus erhält man für $0\leqq x\leqq\pi$

$$f(x)=\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}+\sqrt{2\sin x}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x,$$

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)-\sqrt{2\sin x}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin x.$$

695. Die komplexe Form der Fourierreihen. Wir betrachten wieder eine beliebige Funktion $f(x)$ der Periode 2π, die in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar ist, und die mit ihr verknüpfte Fourierreihe

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx+b_m\sin mx. \tag{8}$$

Ihre Koeffizienten sind durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned}a_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos mu\,du\qquad(m=0,1,2,\ldots),\\b_m&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin mu\,du\qquad(m=1,2,\ldots)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

bestimmt. Ersetzt man hier $\cos mx$ und $\sin mx$ durch die Exponentialfunktion eines rein imaginären Argumentes (Nr. 457),

$$\cos mx = \frac{1}{2}\left(e^{mxi} + e^{-mxi}\right),$$

$$\sin mx = \frac{1}{2i}\left(e^{mxi} - e^{-mxi}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{-mxi} - e^{mxi}\right),$$

so erhält man

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_m - b_m i\right) e^{mxi} + \frac{1}{2}\left(a_m + b_m i\right) e^{-mxi}.$$

Das läßt sich kürzer in der Form

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{kxi} \tag{10}$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad c_m = \frac{1}{2}\left(a_m - b_m i\right), \qquad c_{-m} = \frac{1}{2}\left(a_m + b_m i\right) \tag{11}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots)$$

schreiben, so daß also

$$c_{-m} = \bar{c}_m \tag{12}$$

ist. (Mit $\bar{z}$ bezeichnen wir die zu z konjugiert-komplexe Zahl.) Das ist die *komplexe Form der Fourierreihe der Funktion* $f(x)$.

Sind die hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz der Reihe (8) bei der Funktion $f(x)$ erfüllt, so konvergiert auch die Reihe (10) gegen dieselbe Summe, wenn (wie aus der Art ihrer Bildung von selbst hervorgeht) die Summation als symmetrischer Grenzübergang für $n \to \infty$ aufgefaßt wird, d. h. als Limes der Partialsumme

$$\sum_{m=-n}^{n} c_m e^{mxi}$$

für $n \to \infty$. Wenn übrigens die Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{mxi}$ und $\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-mxi}$ einzeln konvergieren, so erhält man den obigen Grenzwert einfach durch Addition der beiden Reihensummen.

Die durch die Formeln (11) definierten Koeffizienten c_m der Entwicklung (10) können unter Berücksichtigung der Euler-Fourierschen Formeln (9) einheitlich dargestellt werden:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-nui} du \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{13}$$

Diese Form der Koeffizienten könnte man auch unmittelbar erhalten, ähnlich wie die a_m und b_m in Nr. 678, wenn man annimmt, $f(x)$ sei in eine Reihe (10) entwickelbar (so daß $\sim$ durch $=$ ersetzt werden kann), beide Seiten mit e^{-nxi} multi-

pliziert und von $-\pi$ bis π integriert, wobei man auf der rechten Seite die Integration gliedweise ausführt.

Haben wir eine *komplexe* Funktion

$$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)\,,$$

wobei f_1, f_2 reelle Funktionen der betrachteten Art sind, so können wir als Fourierreihe von f die Summe der Fourierreihen von f_1 und f_2 (die von f_2 gliedweise mit i multipliziert) bezeichnen. In komplexer Form hat die Fourierreihe von f die Gestalt (10), wobei die Koeffizienten c_n wie bisher durch (13) bestimmt sind. Allerdings braucht im allgemeinen Fall nicht $c_m=\bar{c}_{-m}$ zu sein.

Manchmal ergibt sich die Fourierreihenentwicklung einer Funktion naturgemäß und unmittelbar in komplexer Form. Als Beispiel führen wir die erzeugende Funktion für die Besselschen Funktionen und ihre Reihenentwicklung an (vgl. Nr. 395, Beispiel 14):

$$\mathrm{e}^{\frac{a}{2}(z-z^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a)\,z^n\,.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß diese Entwicklung für alle von 0 verschiedenen komplexen z gilt. Setzen wir hier $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, so finden wir

$$\mathrm{e}^{a\mathrm{i}\sin x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a)\,\mathrm{e}^{nx\mathrm{i}}\,; \tag{14}$$

die komplexe Funktion

$$\mathrm{e}^{a\mathrm{i}\sin x}=\cos(a\sin x)+\mathrm{i}\sin(a\sin x) \tag{15}$$

ist in eine Reihe vom Typ (10) entwickelt, die als Potenzreihe (wir meinen die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}$ und $\sum_{n=-1}^{-\infty}$ einzeln) *gleichmäßig* in x konvergiert und somit ihre Fourierreihe ist. Auf Grund von

$$J_{-m}(a)=(-1)^m J_m(a)$$

(Nr. 395, Beispiel 14) können wir diese Entwicklung wie folgt schreiben:

$$J_0(a)+\sum_{m=1}^{\infty}J_m(a)\,[\mathrm{e}^{mx\mathrm{i}}+(-1)^m\mathrm{e}^{-mx\mathrm{i}}]$$

$$=J_0(a)+2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos 2kx+2\mathrm{i}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)\,x\,. \tag{16}$$

Gleichsetzen von Real- und Imaginärteil in (15) und (16) liefert die interessanten Entwicklungen

$$\cos(a\sin x)=J_0(a)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(a)\cos 2kx\,,$$

$$\sin(a\sin x)=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(a)\sin(2k-1)\,x\,.$$

Ersetzt man x durch $x+\frac{\pi}{2}$, so findet man noch die Entwicklungen

$$\cos(a\cos x)=J_0(a)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(a)\cos 2kx\,,$$

$$\sin(a\cos x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}J_{2k-1}(a)\cos(2k-1)\,x\,.$$

Wendet man schließlich zur Berechnung der Koeffizienten der Entwicklung (14) die Formeln (13) an, so gelangt man zu den bekannten Integralausdrücken für die Besselschen Funktionen:

$$J_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a\sin x - nx)i}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(a\sin x - nx)\,dx\,, \tag{17}$$

denen wir schon mehrmals begegnet sind.

696. Die konjugierte Reihe. Eine trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx + b_m\sin mx) \tag{17}$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten kann man formal[1]) als Realteil der Potenzreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m - b_m i)\,z^m \tag{18}$$

in z für $z = e^{xi}$ betrachten. Dann ist nämlich

$$z^m = e^{mxi} = \cos mx + i\sin mx$$

und

$$(a_m - b_m i)\,z^m = (a_m\cos mx + b_m\sin mx) + i\,(-b_m\cos mx + a_m\sin mx)\,.$$

Der Imaginärteil wird *formal* durch die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-b_m\cos mx + a_m\sin mx) \tag{19}$$

dargestellt. Die Reihe (19) heißt die *zur Reihe* (17) *konjugierte Reihe.*

Besonderes Interesse bietet die zu der Fourierreihe einer absolut integrierbaren Funktion der Periode 2π konjugierte Reihe. Insbesondere kann man parallel zur Frage nach der Konvergenz der Fourierreihe (17) die Frage nach der Konvergenz der konjugierten Reihe stellen. Übrigens entsteht hierbei eine zusätzliche Schwierigkeit dadurch, daß von vornherein nicht klar ist, welche Summe die konjugierte Reihe natürlicherweise haben sollte.

Wir beginnen wie in Nr. 691 mit der Herleitung eines geeigneten Ausdrucks für die Partialsumme $\tilde{s}_n(x_0)$ der Reihe (19) für den Punkt x_0. Setzen wir für a_m, b_m die Integrale (vgl. (9)) ein, so finden wir

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n(x_0) &= \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,[-\sin mu\cos mx_0 + \cos mu\sin mx_0]\,du \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{m=1}^{n}\sin m\,(u-x_0)\,du\,.\end{aligned}$$

Formen wir die Summe unter dem Integralzeichen nach der Beziehung

$$\sum_{m=1}^{n}\sin mt = \frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

[1]) Formal, weil wir nichts über die Konvergenz der angeschriebenen Reihen wissen.

um, so folgt

$$\tilde{s}_n(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(u-x_0) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x_0)}{\sin\frac{1}{2}(u-x_0)}\,du\,.$$

Das ist das Analogon des Dirichletschen Integrals.

Gehen wir zum Intervall $[x_0-\pi, x_0+\pi]$ über und substituieren $u-x_0=t$ wie in Nr. 681, so finden wir

$$\tilde{s}_n(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \psi(t)\,\frac{\cos\frac{1}{2}t - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt \tag{20}$$

mit

$$\psi(t) = f(x_0+t) - f(x_0-t)\,. \tag{21}$$

Setzen wir die (nicht notwendig absolute) Konvergenz des Integrals

$$\tilde{S}_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{\tan\frac{1}{2}t}\,dt \tag{22}$$

voraus, so können wir

$$\tilde{s}_n(x_0) - \tilde{S}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

schreiben; wir versuchen zu beweisen, daß dieses Integral für $n\to\infty$ gegen 0 strebt. Dann wäre S_0 genau die Summe der Reihe (19). Wir beschränken uns darauf, dafür eine hinreichende Bedingung vom Typ des Dinischen Kriteriums (Nr. 684) anzugeben:

Die zu der Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ konjugierte Reihe konvergiert im Punkt x_0 gegen $\tilde{S}_0$, wenn das Integral

$$\int_0^h \frac{|\psi(t)|}{t}\,dt \qquad (h>0)$$

existiert.

Wegen

$$\frac{\psi(t)}{2\tan\frac{1}{2}t}=\frac{\psi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t}$$

folgt aus unserer Annahme sogar die absolute Konvergenz des Integrals (22). Analog beweist man die absolute Konvergenz von

$$\int_0^\pi \frac{\psi(t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt,$$

und daraus folgt nach dem Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682 die Beziehung $\tilde{s}_n(x_0)-\tilde{S}_0\to 0$, die zu beweisen war.

Offenbar genügt es, die Existenz der Integrale

$$\int_0^h \frac{|f(x_0+t)-f(x_0)|}{t}\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^h \frac{|f(x_0-t)-f(x_0)|}{t}\,dt$$

einzeln vorauszusetzen oder die speziellere Annahme zu machen, daß die Lipschitzbedingung

$$|f(x_0\pm t)-f(x_0)|\leqq Ct^\alpha \qquad (0<\alpha\leqq 1)$$

erfüllt sei.

Wir weisen darauf hin, daß alle diese Bedingungen die Stetigkeit von $f(x)$ im Punkt x_0 voraussetzen oder wenigstens die Übereinstimmung der Grenzwerte $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$. Übrigens kann man auch im allgemeinen Fall beweisen, daß beim Vorliegen eines Sprunges von $f(x)$ in x_0, d. h. unter der Bedingung

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)\lesseqgtr 0$$

die konjugierte Reihe (19) und natürlich auch das Integral (22) in diesem Punkt sicher divergieren, so daß die Voraussetzung über die Stetigkeit von $f(x)$ in x_0 *notwendig* ist. Dabei ergibt sich ein interessanter Sachverhalt in bezug auf die Reihen (17) und (19): Für die Fourierreihe (17) bedeutet das Vorliegen eines Sprunges an sich keine Beeinträchtigung der Konvergenz.

Auf eine eingehendere Behandlung der zu Fourierreihen konjugierten Reihen müssen wir hier verzichten.

697. Mehrfache Fourierreihen. Man kann auch Fourierreihen von Funktionen mehrerer Veränderlicher betrachten. Um einen Begriff davon zu vermitteln, wollen wir uns auf den Fall einer Funktion zweier Veränderlicher beschränken.

Es sei für alle reellen x und y eine Funktion $f(x, y)$ gegeben. Sie möge sowohl in x als auch in y die Periode 2π haben und im Quadrat $(Q)=[-\pi, \pi;-\pi, \pi]$ (eigentlich oder uneigentlich) integrierbar sein.

Wir schreiben die der Entwicklung (10) entsprechende Entwicklung als Doppelreihe

$$f(x, y)\sim\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\gamma_{n,m}e^{(nx+my)i}, \tag{23}$$

wobei die Koeffizienten $\gamma_{\nu,\mu}$ nach den zu (13) analogen Formeln

$$\gamma_{\nu,\mu}=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\, e^{-(\nu x+\mu y)i}dxdy \qquad (\nu, \mu=0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

zu bestimmen sind. (23) ist die *Fourierreihe von $f(x, y)$ in komplexer Form.* Ihre Koeffizienten können in üblicher Weise berechnet werden, wenn man in den obigen Beziehungen $\sim$ durch $=$ ersetzt, beide Seiten der „Gleichung" mit $e^{-(nx+my)i}$ multipliziert und über das Quadrat (Q) integriert, und zwar die Reihe gliedweise.

In reeller Form sieht die Fourierreihe hier recht kompliziert aus. Vereinigt man in der komplexen Reihe die konjugierten Glieder, so erhält man

$$f(x, y)\sim\sum_{n,m=0}^{\infty}[a_{n,m}\cos nx\cos my+b_{n,m}\cos nx\sin my + c_{n,m}\sin nx\cos my+d_{n,m}\sin nx\sin my] \tag{24}$$

mit

$$a_{0,0}=\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\,dxdy,$$

$$a_{n,0}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\cos nx\,dxdy \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

$$a_{0,m}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\cos my\,dxdy \qquad (m=1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_{0,m}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\sin my\,dxdy \qquad (m=1, 2, 3, \ldots),$$

$$c_{n,0}=\frac{1}{2\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\sin nx\,dxdy \qquad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

und schließlich für $m, n=1, 2, 3, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} a_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\cos nx\cos my\,dxdy,\\ b_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\cos nx\sin my\,dxdy,\\ c_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\sin nx\cos my\,dxdy,\\ d_{n,m}&=\frac{1}{\pi^2}\int\int_{(Q)} f(x, y)\sin nx\sin my\,dxdy. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Übrigens schreibt man die Reihe (24) gewöhnlich in der Gestalt

$$f(x, y)\sim\sum_{n,m=0}^{\infty}\lambda_{n,m}[a_{n,m}\cos nx\cos my+b_{n,m}\cos nx\sin my + c_{n,m}\sin nx\cos my+d_{n,m}\sin nx\sin my]; \tag{24*}$$

dabei ist

$$\lambda_{n,m}=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{für} \quad n=m=0\,,\\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad n=0 \text{ oder } m=0 \text{ (aber nicht } n=m=0)\,,\\ 1 & \text{für} \quad n\cdot m>0\,.\end{cases}$$

Dann kann man sämtliche Koeffizienten $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ nach den Formeln (25) berechnen.

Das Problem der Konvergenz der Reihe (24) [oder (24*)] läßt sich durch Untersuchung ihrer Partialsumme $S_{n,m}(x_0, y_0)$ lösen, für die man einen Integralausdruck finden kann, der dem Dirichletschen Integral ähnelt:

$$S_{n,m}(x_0, y_0)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{(Q)}\int f(x_0+u, y_0+v)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)v}{\sin\frac{1}{2}u\,\sin\frac{1}{2}v}\,du\,dv\,.$$

Wir gehen nicht weiter darauf ein, sondern bemerken nur, daß eine Funktion $f(x, y)$ sicher im Punkt x_0, y_0 in eine Fourierreihe entwickelbar ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die partiellen Ableitungen f_x und f_y existieren überall und sind beschränkt;
2. in der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) existiert die zweite Ableitung f_{xy} (oder f_{yx}), die überdies in diesem Punkt stetig ist.

§ 4. Der Konvergenzcharakter von Fourierreihen

698. Einige Ergänzungen zu den Fundamentalhilfssätzen. Wir wollen nun den Charakter der Konvergenz von Fourierreihen untersuchen und beginnen mit hinreichenden Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihen.

Zu diesem Zweck bringen wir zunächst eine Ergänzung zum ersten Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682, und zwar wollen wir uns jetzt dafür interessieren, ob die Integrale in bezug auf die darin auftretenden Parameter *gleichmäßig* gegen 0 streben.

1°. *Es sei $g(t)$ im Intervall $[A, B]$ definiert und absolut integrierbar; dann streben die beiden Integrale*

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt, \qquad \int_a^b g(t)\cos pt\,dt$$

für $p\to\infty$ gleichmäßig in bezug auf a und b, die beliebige Werte im Intervall $[A, B]$ annehmen, gegen 0.

Es genügt, das erste Integral zu untersuchen. Da $\int_A^t |g(s)|\,ds$ gleichmäßig stetig in $[A, B]$ ist, kann man zu gegebenen $\varepsilon>0$ durch Punkte

$$A=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_i<\tau_{i+1}<\ldots<\tau_n=B$$

das Intervall $[A, B]$ in so kleine Teile teilen, daß

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |g(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1)$$

gilt. Für die Integrale der Form

$$\int_{\tau_i}^{\tau_j} g(t) \sin pt\,\mathrm{d}t \qquad (i, j=0, 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

kann man, da es insgesamt nur endlich viele sind, ein gemeinsames $\Delta>0$ finden derart, daß für $p>\Delta$ ihre absoluten Beträge sämtlich kleiner als ε sind. Nun unterscheidet sich aber, wie man leicht sieht, das Integral

$$\int_a^b g(t) \sin pt\,\mathrm{d}t$$

bei beliebigen a und b für jedes p von einem der Integrale (1) um weniger als 2ε. Daher ist es für $p>\Delta$, unabhängig von a und b, dem absoluten Betrag nach kleiner als 3ε, was zu beweisen war.

2°. *Man kann ferner behaupten, daß auch die Integrale*

$$\int_a^b g(x\pm t) \sin pt\,\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b g(x\pm t) \cos pt\,\mathrm{d}t$$

für $p\to\infty$ in bezug auf a, b und alle x, für die

$$A \leqq x\pm a, \qquad x\pm b \leqq B$$

ist, gleichmäßig gegen 0 streben.

Das erste dieser Integrale läßt sich durch die Substitution $x\pm t=u$ in

$$\int_{x\pm a}^{x\pm b} g(u) \sin p(u-x)\,\mathrm{d}u = \cos px \int_{x\pm a}^{x\pm b} g(u) \sin pu\,\mathrm{d}u - \sin px \int_{x\pm a}^{x\pm b} g(u) \cos pu\,\mathrm{d}u$$

überführen, so daß sich das Problem auf den schon betrachteten Fall 1° reduziert.

3°. *Führt man schließlich in den Integranden noch einen beliebigen Faktor $\gamma(t)$ ein, der in $[A, B]$ von endlicher Schwankung ist, so streben auch die Integrale*

$$\int_a^b g(x\pm t)\,\gamma(t) \sin pt\,\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b g(x\pm t)\,\gamma(t) \cos pt\,\mathrm{d}t$$

für $p\to\infty$ gleichmäßig gegen 0.

Da $\gamma(t)$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist, genügt es, $\gamma(t)$ selbst als monoton wachsend vorauszusetzen. Dann ist nach dem zweiten Mittelwertsatz (Nr. 306)

$$\int_a^b g(x\pm t)\,\gamma(t) \sin pt\,\mathrm{d}t = \gamma(a) \int_a^\tau g(x\pm t) \sin pt\,\mathrm{d}t + \gamma(b) \int_\tau^b g(x\pm t) \sin pt\,\mathrm{d}t$$

$(a \leqq \tau \leqq b)$.

Da $\gamma(t)$ beschränkt ist, reduziert sich das Problem hier wieder auf den schon behandelten Fall 2°.

Wir gehen nun zum zweiten Fundamentalhilfssatz (Nr. 685) über, den wir durch folgende Bemerkung ergänzen:

4°. *Die Funktion $g(t)$ sei in $[A, B]$ stetig und monoton wachsend; ferner sei $A<a<b<B$. Dann strebt*

$$\int_0^h g(x\pm t)\frac{\sin pt}{t}\,\mathrm{d}t,$$

wobei $0<h\leqq a-A$ und $0<h\leqq B-b$ ist, in $[a, b]$ für $p\to\infty$ gegen den Limes $\frac{\pi}{2}g(x)$, und zwar gleichmäßig in x.

Wir schneiden den Beweis von Nr. 685 unmittelbar auf unseren Fall zu. Das erste der Integrale (13) aus Nr. 685, das wir jetzt in der Gestalt

$$g(x)\int_0^h \frac{\sin pt}{t}\,\mathrm{d}t = g(x)\int_0^{ph}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$$

schreiben, strebt infolge der Beschränktheit von $g(x)$ in $[a, b]$ gleichmäßig in bezug auf x gegen $\frac{\pi}{2}g(x)$. Andererseits ermöglicht uns die gleichmäßige Stetigkeit von $g(x)$ in $[A, B]$, zu gegebenen $\varepsilon>0$ (unabhängig von dem zwischen a und b variierenden x) eine Zahl $\delta>0$ derart zu wählen, daß

$$|g(x\pm t)-g(x)|<\varepsilon \quad \text{für} \quad 0<t\leqq\delta$$

ist. Wenn wir wie dort das zweite Integral (13) aus Nr. 685 in eine Summe I_1+I_2 zerlegen, gilt die Abschätzung (14) nicht nur unabhängig von p, sondern auch unabhängig von x. Schließlich strebt I_2 in bezug auf x gleichmäßig gegen 0 auf Grund von 3°. Insgesamt folgt daraus die zu beweisende Behauptung.

699. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen. Jetzt ist es nicht mehr schwierig, bequeme Kriterien aufzustellen, nach denen man entscheiden kann, ob eine Fourierreihe in einem Intervall $[a, b]$ gegen die Funktion $f(x)$ gleichmäßig konvergiert. Diese Funktion muß natürlich in dem betreffenden Intervall als stetig vorausgesetzt werden (vgl. Nr. 431). Wir formulieren zunächst das modifizierte

Kriterium von Dini. *Die Fourierreihe einer im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion $f(x)$ konvergiert in diesem Intervall gleichmäßig gegen diese Funktion, wenn für ein $h>0$ für alle x aus $[a, b]$ das Integral*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

konvergiert, und zwar (für $t=0$) gleichmäßig in bezug auf x.

In diesem Fall ist nämlich

$$\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

und

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon>0$ existiert auf Grund unserer Voraussetzung eine nicht von x abhängende positive Zahl δ derart, daß für alle x aus $[a, b]$

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt<\varepsilon$$

ist. Dann läßt sich das Integral (3) in der Form $\frac{1}{\pi}\int_0^\delta+\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi$ darstellen. Dabei ist offenbar für jedes n

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \varphi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt\right|\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{|\varphi(t)|}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$<\frac{1}{2}\int_0^\delta\frac{|\varphi(t)|}{t}\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

gleichzeitig für alle x aus $[a, b]$ $\left(\text{das folgt aus } \sin z>\frac{2}{\pi}z \text{ für } 0<z<\frac{\pi}{2}\right)$.

Wenden wir uns dem Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \varphi(t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \tag{4}$$

zu, so sehen wir, daß

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi f(x\pm t)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

für $n\to\infty$ gleichmäßig in bezug auf x aus $[a, b]$ gegen 0 strebt (nach 3° aus Nr. 698). Das gilt auch für

$$\frac{1}{\pi}\,f(x)\int_\delta^\pi\frac{1}{\sin\frac{1}{2}t}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

auf Grund der Beschränktheit von $f(x)$ in $[a, b]$. Daher existiert eine von x unabhängige Zahl N derart, daß für $n>N$ auch das Integral (3) dem Betrag nach kleiner als ε wird, und zwar für jedes x aus $[a, b]$. Damit ist alles bewiesen.

Hieraus folgt insbesondere das

Kriterium von Lipschitz. *Die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ konvergier im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f(x)$, wenn in einem umfassenderen Intervall $[A, B]$ $(A<a<b<B)$ die Bedingung*

$$|f(x')-f(x)|\leqq C\,|x'-x|^\alpha$$

erfüllt ist, wobei x, x' beliebige Punkte aus $[A, B]$ und C und α ($\alpha \leqq 1$) positive Konstanten sind.

Wählt man nämlich für h die kleinere der Zahlen $B-b, a-A$, so wird das Integral (2) für alle x aus $[a, b]$ durch das Integral

$$\int_0^h \frac{2C}{t^{1-\alpha}}\,dt$$

majorisiert.

Offenbar ist die Lipschitzbedingung für $\alpha = 1$ erfüllt; *daher ist die Konvergenz gegen $f(x)$ in $[a, b]$ gleichmäßig, wenn in dem größeren Intervall die Funktion $f(x)$ eine beschränkte Ableitung $f'(x)$ hat.*

Übrigens ist diese Bedingung als Spezialfall im folgenden Kriterium enthalten:

Kriterium von Dirichlet-Jordan. *Die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ konvergiert im Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen diese Funktion, wenn in einem umfassenderen Intervall $[A, B]$ die Funktion $f(x)$ stetig und von endlicher Schwankung ist.*

Im Anschluß an die Überlegungen von Nr. 686 stellen wir

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

in der Form $\frac{1}{\pi}\int_0^h + \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}$ dar, wobei wir $0 < h = \min[a-A, B-b]$ wählen, also unabhängig von x in $[a, b]$. Für den zweiten Summanden ist klar, daß er für $n \to \infty$ nach 3° gleichmäßig in bezug auf x gegen 0 strebt. Aus dem ersten Summanden sondern wir, nachdem wir

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} = \left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right] + \frac{1}{t}$$

gesetzt haben, zunächst den Teil

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}t} - \frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

ab, der, ebenfalls nach 3°, gleichmäßig gegen 0 strebt (vgl. die Fußnote auf S. 393).

Schließlich untersuchen wir das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\,dt\,.$$

Da $f(x)$ in $[A, B]$ als Differenz zweier stetiger monoton wachsender Funktionen darstellbar ist,

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)\,,$$

überzeugt man sich durch Anwendung von 4° auf f_1 und f_2 davon, daß das Integral ebenfalls gleichmäßig gegen den Grenzwert $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2f(x)=f(x)$ strebt. Damit ist unser Beweis beendet.

Insbesondere gilt also: *Ist eine in* $[-\pi, \pi]$ *definierte Funktion* $f(x)$ *dort stetig und von endlicher Schwankung und gilt überdies* $f(-\pi)=f(\pi)$, *so konvergiert ihre Fourierreihe dort gleichmäßig gegen* $f(x)$.

Zum Beweis braucht man nur $f(x)$ mit der Periode 2π auf die ganze reelle Achse fortzusetzen und für $[A, B]$ ein beliebiges Intervall zu nehmen, das $[-\pi, \pi]$ im Innern enthält.

700. Das Verhalten einer Fourierreihe in der Nähe eines Unstetigkeitspunktes. Ein Spezialfall. Wir wollen nun das Verhalten der Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ in der Nähe eines Unstetigkeitspunktes dieser Funktion betrachten und beginnen mit der Untersuchung einer speziellen Reihe, die das uns interessierende Phänomen in größter Einfachheit und Deutlichkeit zeigt.

Bekanntlich strebt die Reihe

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=2\left\{\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right\} \tag{5}$$

gegen die Summe

$$\sigma(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{für } 0<x<\pi,\\ 0 & \text{für } x=0,\ \pm\pi,\\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } -\pi<x<0.\end{cases}$$

(vgl. Nr. 690, Beispiel 4); im Punkt $x=0$ hat die Funktion einen Sprung, und zwar von links und von rechts, und es ist

$$\sigma(+0)-\sigma(0)=\frac{\pi}{2},\qquad \sigma(0)-\sigma(-0)=\frac{\pi}{2}.$$

Wir wollen das Verhalten der Partialsumme

$$\sigma_{2n-1}(x)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

untersuchen (offenbar ist $\sigma_{2n}(x)=\sigma_{2n-1}(x)$). Da diese Funktion ungerade ist, genügt es, sie in $[0, \pi]$ zu betrachten. Überdies zeigt die triviale Identität

$$\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}+x'\right)=\sin(2k-1)\left(\frac{\pi}{2}-x'\right),$$

daß $\sigma_{2n-1}(x)$ in bezug auf den Punkt $x=\frac{\pi}{2}$ symmetrisch ist:

$$\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}+x'\right)=\sigma_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}-x'\right);$$

daher kann man sich auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ beschränken. Für $\sigma_{2n-1}(x)$ erhält man leicht

$$\sigma_{2n-1}(x)=2\int_0^x[\cos u+\cos 3u+\cdots+\cos(2n-1)u]\,du=\int_0^x\frac{\sin 2nu}{\sin u}\,du \tag{6}$$

oder, wenn man $2nu = t$ setzt,

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \int_0^{2nx} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} \, dt \,. \tag{7}$$

Diesen Ausdruck kann man in der Gestalt

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \left\{ \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \cdots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{2nx} \right\} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} \, dt \tag{8}$$

schreiben; dabei ist $k = \left[\frac{2nx}{\pi}\right]$. Setzt man allgemein für $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\frac{1}{2n} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} \, dt = (-1)^i \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{\sin \frac{z + i\pi}{2n}} \, dz = (-1)^i v_i \,,$$

so folgt offenbar

$$v_i > 0 \quad \text{und} \quad v_{i+1} < v_i \,. \tag{9}$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\sigma_{2n-1}(x) = v_0 - v_1 + \cdots + (-1)^{k-1} v_{k-1} + (-1)^k \tilde{v}_k \,, \tag{8*}$$

wobei mit $(-1)^k \tilde{v}_k$ der letzte („unregelmäßige") Summand in (8) bezeichnet ist; er hat das Vorzeichen $(-1)^k$ und ist dem absoluten Betrag nach kleiner als v_k.

Hieraus lassen sich leicht einige Schlußfolgerungen über das Verhalten von $\sigma_{2n-1}(x)$ ziehen, wenn n fest ist und x von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ variiert:

1. *Die Summe $\sigma_{2n-1}(x)$ ist positiv und verschwindet nur für $x = 0$.*

2. *Sie hat Extrema in den Punkten $x_m = \frac{m\pi}{2n}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, und zwar Maxima für ungerade m, Minima für gerade m.* Im Intervall $\left[m \frac{\pi}{2n}, (m+1) \frac{\pi}{2n}\right]$ wächst nämlich $\sigma_{2n-1}(x)$ für gerades m und fällt $\sigma_{2n-1}(x)$ für ungerades m, wie aus (8*) folgt.[1])

Schließlich erhält man aus der Darstellung

$$\sigma_{2n-1}(x_m) = v_0 - v_1 + \cdots + (-1)^m v_m$$

des Extremalwertes mit Rücksicht auf Ungleichung (9):

3. *Variiert x innerhalb des Intervalls $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, so nehmen die Maximalwerte von $\sigma_{2n-1}(x)$ von links nach rechts ab, die Minima zu.*

Abb. 133 illustriert am Beispiel $\sigma_{11}(x)$ diese Aussagen. Wir untersuchen nun das größte Maximum von $\sigma_{2n-1}(x)$, d. h. das auf $x = 0$ folgende erste Maximum. Es wird für $x_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$

[1]) Die Behauptung 2 über die Extrema von $\sigma_{2n-1}(x)$ ergibt sich auch leicht, wenn man die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \sigma_{2n-1}(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x}$$

(vgl. (6)) untersucht.

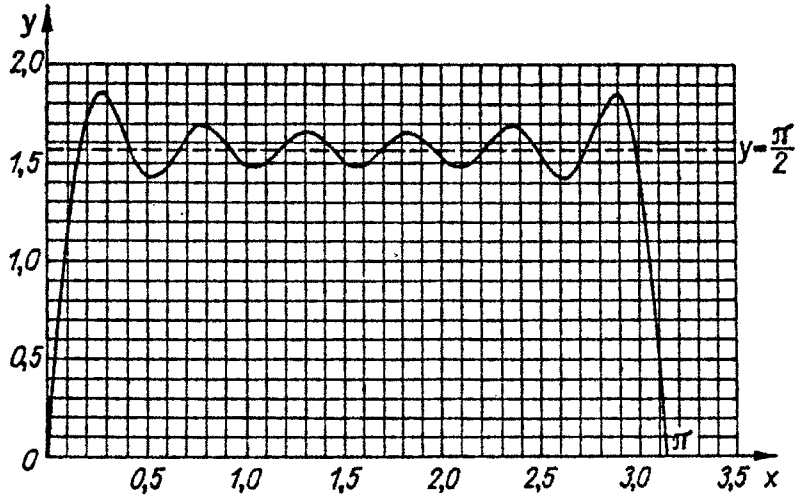

Abb. 133

angenommen und hat den Wert (vgl. (7))

$$M_1^{(n)} = \sigma_{2n-1}(x_1^{(n)}) = \frac{1}{2n} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin \frac{t}{2n}} \, dt .$$

Hier haben wir den Index n eingeführt, weil wir diesmal auch die Absicht haben, das Verhalten der Funktion für variables n zu untersuchen. Offenbar nimmt $x_1^{(n)}$ mit wachsendem n monoton ab und strebt für $n \to \infty$ gegen 0. Um die Untersuchung von $M_1^{(n)}$ zu erleichtern, formen wir den Ausdruck etwas um:

$$M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \frac{\frac{t}{2n}}{\sin \frac{t}{2n}} \, dt .$$

Da der zweite Faktor im Integranden mit wachsendem n gleichmäßig (in bezug auf t), und zwar abnehmend,[1]) gegen 1 strebt, strebt offenbar auch $M_1^{(n)}$ abnehmend gegen einen Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} M_1^{(n)} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt = \mu_1 . \tag{10}$$

Also können wir sagen:

4. *Das erste (größte) Maximum von $\sigma_{2n-1}(x)$ wird für einen Wert $x = x_1^{(n)}$ angenommen, der für unbegrenzt wachsendes n monoton abnehmend gegen 0 strebt; der Maximalwert $M_1^{(n)}$ strebt dabei monoton abnehmend gegen einen Grenzwert μ_1, der durch (10) gegeben wird.*

Eine analoge Aussage gilt für das k-te Extremum der Funktion (bei festem k): *Es wird für den Wert $x_k^{(n)} = k \frac{\pi}{2n}$ $(n \geqq k)$ angenommen, der für $n \to \infty$ gegen 0 strebt, und der Wert $M_k^{(n)}$ des k-ten Extremums strebt dabei monoton gegen den Grenzwert*

$$\mu_k = \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt ,$$

[1]) Dabei benötigen wir die Tatsache, daß $\frac{z}{\sin z}$ wächst, wenn z von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst.

und zwar abnehmend, wenn es sich (für ungerades k) um ein Maximum, wachsend, wenn es sich (für gerades k) um ein Minimum handelt.

Zur Illustration dieses Sachverhaltes vergleiche man Abb. 134, wo die Kurven der ersten sechs Summen $\sigma_{2n-1}(x)$ für $n=1, 2, \ldots, 6$ gezeichnet sind.

Die Zahlen μ_k sind, wie aus den Überlegungen von Nr. 502, 2°, hervorgeht, abwechselnd größer bzw. kleiner als

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Für die Differenzen $\varrho_k = \mu_k - \frac{\pi}{2}$ ergeben sich die Werte[1])

$$\varrho_1 \approx 0{,}281, \quad \varrho_2 \approx -0{,}153, \quad \varrho_3 \approx 0{,}104, \quad \varrho_4 \approx -0{,}078, \quad \varrho_5 \approx 0{,}063, \ldots \tag{11}$$

Jetzt sind wir schon imstande, die Konvergenz der Partialsumme $\sigma_{2n-1}(x)$ der Reihe (5) gegen die Summe $\sigma(x)$ hinreichend vollständig zu charakterisieren; wir wollen uns der Einfachheit halber auf das Intervall $[0, \pi]$ beschränken.

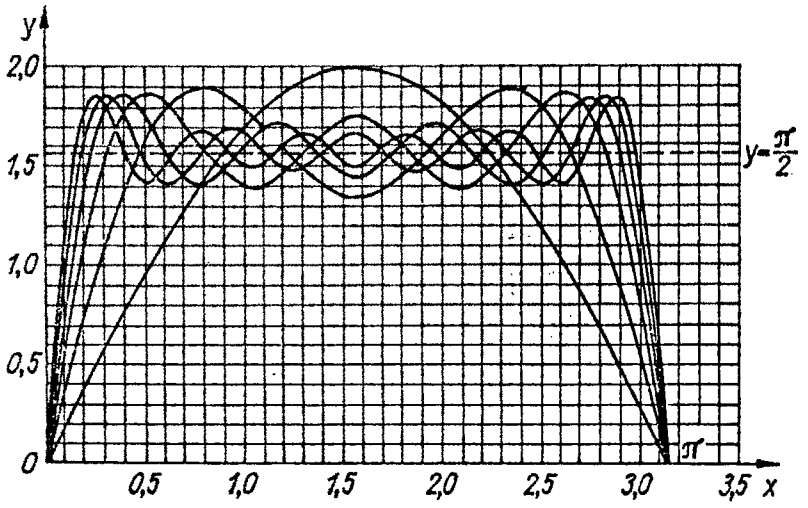

Abb. 134

Trennt man die Unstetigkeitspunkte $x=0$ und $x=\pi$ durch beliebig kleine Umgebungen $[0, \delta)$ und $(\pi-\delta, \pi]$ ab, so konvergiert die Reihe nach dem in Nr. 699 Bewiesenen im übrigbleibenden Intervall $[\delta, \pi-\delta]$ gleichmäßig. Mit anderen Worten, die Kurven der Partialsummen $\sigma_{2n-1}(x)$ schmiegen sich bei hinreichend großen n in diesem ganzen Intervall der Geraden $y=\frac{\pi}{2}$ beliebig dicht an. In der Nähe der Punkte $x=0$ und $x=\pi$ aber, wo die Funktion $\sigma(x)$ von $\frac{\pi}{2}$ nach 0 springt, ist die gleichmäßige Approximation natürlich gestört, denn $\sigma_{2n-1}(x)$ geht von nahe bei $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werten für $x=\delta$ (bzw. $x=\pi-\delta$) stetig in den Wert 0 für $x=0$ (bzw. $x=\pi$) über.

Es ist jedoch sehr bemerkenswert, daß sich die Störung der gleichmäßigen Konvergenz hierin nicht erschöpft, und hierauf möchten wir den Leser besonders hinweisen. In unmittelbarer Nähe der y-Achse schwankt die Kurve von $\sigma_{2n-1}(x)$, ehe sie schnell gegen (0, 0) strebt, um die Gerade $y=\frac{\pi}{2}$, wobei die Amplituden dieser Schwankungen für $n\to\infty$ keineswegs beliebig klein werden. Im Gegenteil, wie wir gesehen haben, strebt die Höhe der ersten und größten Erhebung oberhalb der Geraden $y=\frac{\pi}{2}$ dabei gegen den Wert $\varrho_1 \approx 0{,}281$; auf diese erste Erhebung folgen, sich mit wachsendem n von rechts

[1]) Vgl. Nr. 502, 2°.

nach links verschiebend und an die y-Achse anschmiegend, weitere „Berge“ und „Täler“, deren Höhen bzw. Tiefen im Vergleich zu der Geraden $y=\frac{\pi}{2}$ für $n\to\infty$ gegen die Werte $\varrho_2, \varrho_3, \ldots$ der Folge (11) streben. Ein analoges Bild zeigt sich links in der Nähe der Geraden $x=\pi$; genau wie bei der Annäherung an die y-Achse von links wiederholt sich das Bild, allerdings haben alle betrachteten Abweichungen jetzt entgegengesetztes Vorzeichen.

Man kann sagen, daß für $n\to\infty$ die Grenzkurve der Kurven $y=\sigma_{2n-1}(x)$ nicht der in Abb. 135a abgebildete Streckenzug (wie man erwarten sollte) ist, sondern der vertikal entsprechend „verlängerte“ Streckenzug der Abb. 135b. Die Verlängerung beträgt übrigens 0,281: $\frac{\pi}{2}\approx 18\,\%$.

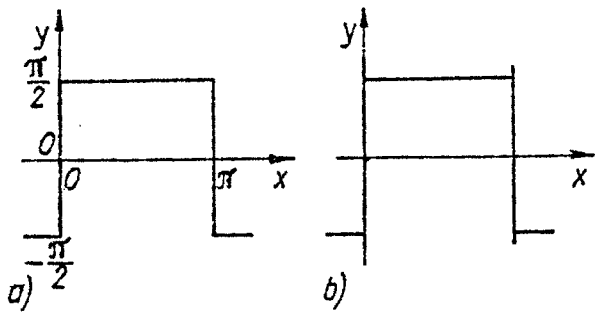

Abb. 135

Dieses eigenartige Konvergenzverhalten wurde zuerst von J. W. Gibbs[1]), ebenfalls an einem speziellen Beispiel einer trigonometrischen Reihenentwicklung, bemerkt (Ende des vorigen Jahrhunderts) und ist unter der Bezeichnung *Gibbssches Phänomen* bekannt. Wir werden sehen, daß dieses Phänomen in gewisser Weise auch im allgemeinen Fall auftritt.

701. Der Fall einer beliebigen Funktion. Wir betrachten eine absolut integrierbare Funktion $f(x)$ der Periode 2π mit einem isolierten Unstetigkeitspunkt erster Art $x=x_0$. Dann gibt es in einem Intervall $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ $(\Delta>0)$ keine weiteren Unstetigkeitspunkte. Der Einfachheit halber nehmen wir noch an, in diesem Intervall sei $f(x)$ von endlicher Schwankung.

Wir führen die Funktion $\sigma(x-x_0)$ ein, die sich von der in Nr. 700 untersuchten Funktion durch eine Rechtsverschiebung um x_0 unterscheidet, und bilden mit ihrer Hilfe die Funktion

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}-\frac{1}{\pi}[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\sigma(x-x_0)\,.$$

Nimmt man für $f(x_0)$ den Wert $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, so ist, wie man leicht nachrechnet,

$$\varphi(x_0+0)=\varphi(x_0-0)=\varphi(x_0)=0\,.$$

Die Funktion $\varphi(x)$ ist in x_0 stetig. Mit Hilfe der Funktion σ konnte man also die Unstetigkeit von f beheben; φ ist auch in den übrigen Punkten des Intervalls $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ stetig, solange $\Delta<\pi$ ist. Außerdem ist mit f und σ auch φ in diesem Intervall von endlicher Schwankung.

Jetzt können wir

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{\pi}[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\sigma(x-x_0)+\varphi(x)$$

[1]) Josiah Willard Gibbs, 1839–1903, amerikanischer Physiker.

schreiben. Hierin ersetzen wir nun $\sigma(x-x_0)$ und $\varphi(x)$ durch ihre Fourierreihenentwicklungen und erhalten so die Fourierreihenentwicklung der gegebenen Funktion. Die Partialsumme $s_m(x)$ dieser Reihe hat die Gestalt

$$s_m(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{2}\,\sigma_m(x-x_0) + \varphi_m(x)\,.$$

Hierin ist für $m = 2n-1$ oder $m = 2n$

$$\sigma_m(x-x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)(x-x_0)}{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left[\cos(2k-1)x_0 \sin(2k-1)x - \sin(2k-1)x_0 \cos(2k-1)x\right],$$

und $\varphi_m(x)$ bezeichnet die entsprechende Partialsumme der Reihe für $\varphi(x)$.

Da $\varphi(x_0) = 0$ und $\varphi(x)$ in x_0 stetig ist, sind für hinreichend kleine Δ alle Werte von φ im Intervall $[x_0-\Delta, x_0+\Delta]$ beliebig klein. Gleichzeitig strebt in diesem Intervall $\varphi_m(x)$ gleichmäßig gegen $\varphi(x)$, so daß für hinreichend große m auch die Werte von $\varphi_m(x)$ beliebig klein sind. Somit wird das Verhalten von $s_m(x)$ im Grunde durch das Verhalten von $\sigma_m(x-x_0)$ bestimmt. Das Vorhandensein des Zusatzgliedes $\varphi_m(x)$ führt nur zu einer unbedeutenden Verzerrung, die um so kleiner ist, je näher x bei x_0 liegt und je größer m ist.

Setzen wir für ungerades $m = 2n-1$

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m+1}$$

und für gerades $m = 2n$

$$\xi_m = x_0 + \frac{\pi}{2n} = x_0 + \frac{\pi}{m},$$

so ist

$$\lim_{m\to\infty} \xi_m = x_0\,.$$

Außerdem ist, wenn man (10) berücksichtigt,

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m) = f(x_0) + \frac{1}{\pi}\left[f(x_0+0) - f(x_0-0)\right]\cdot\mu_1\,,$$

da offenbar

$$\varphi_m(\xi_m) = [\varphi_m(\xi_m) - \varphi(\xi_m)] + \varphi(\xi_m) \to 0$$

für $m \to \infty$ gilt. Ersetzt man μ_1 durch $\frac{\pi}{2} + \varrho_1$ und führt $D = f(x_0+0) - f(x_0-0)$, die Größe des Sprunges, ein, so kann man

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\xi_m) = f(x_0+0) + \frac{D}{\pi}\varrho_1 \tag{12}$$

schreiben. Analog erhält man mit

$$\bar{\xi}_m = x_0 - \frac{\pi}{m+1} \quad \text{bzw.} \quad x_0 - \frac{\pi}{m},$$

je nachdem, ob m ungerade oder gerade ist,

$$\lim_{m\to\infty} s_m(\bar{\xi}_m) = f(x_0-0) - \frac{D}{\pi}\varrho_1\,. \tag{13}$$

Somit erweist sich auch im soeben betrachteten allgemeinen Fall der Grenzwert der Abweichung der Summe $s_m(x)$ in der Umgebung des Unstetigkeitspunktes x_0 vom

Funktionswert in diesem Punkt x_0 um $\frac{2|D|}{\pi}\varrho_1$, d. h. um dieselben 18 % größer als die Größe $|D|$ des Sprunges von $f(x)$. Und auch hier genügt es nicht, zur Kurve $y=f(x)$ die geradlinige Verbindungsstrecke der Punkte $(x_0, f(x_0-0))$ und $(x_0, f(x_0+0))$ zur graphischen Darstellung von $s_m(x)$ hinzuzunehmen, wenn man das geometrische Bild im Grenzfall erhalten will, sondern diese Verbindungsstrecke muß nach oben und nach unten verlängert werden. *Auch bei beliebigen Funktionen tritt also das Gibbssche Phänomen auf.*

Bemerkung. Die mit dem Gibbsschen Phänomen zusammenhängenden Untersuchungen führen noch zu anderen interessanten Resultaten. So können mit ihrer Hilfe Formeln aufgestellt werden, die für eine Funktion $f(x)$ endlicher Schwankung ihre links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(x_0 \pm 0)$ und die Größe des Sprunges in einem beliebigen Punkt x_0 bestimmen, und zwar unmittelbar aus der Fourierreihe von $f(x)$. Zu diesem Zweck können z. B. die Formeln (12) und (13) benutzt werden. Durch Subtraktion erhält man nämlich

$$D=\frac{\pi}{2\mu_1}\lim_{m\to\infty}[s_m(\xi_m)-s_m(\bar{\xi}_m)],$$

und hieraus läßt sich $f(x_0 \pm 0)$ leicht bestimmen. Verschiedene Formeln dieses Typs wurden von L. Fejér[1]) angegeben.

702. Singularitäten von Fourierreihen. Vorbereitende Bemerkungen. In allen Kriterien für die Konvergenz von Fourierreihen, die sich auf stetige Funktionen beiziehen, wird von der Funktion mehr gefordert als die Stetigkeit: sei es die Existenz eines Integrals, das Bestehen einer Ungleichung, die Existenz einer endlichen Ableitung, endliche Schwankung oder stückweise Monotonie. Natürlich entsteht die Frage, ob nicht für die Konvergenz einer Fourierreihe schon die Stetigkeit der erzeugenden Funktion hinreichend ist. Jedoch konnte bereits im Jahre 1876 P. du Bois-Reymond[2]) ein Beispiel einer stetigen Funktion konstruieren, deren Fourierreihe in einzelnen Punkten divergiert, und damit war die Frage entschieden.

Im Jahre 1906 gab H. Lebesgue ein Beispiel einer stetigen Funktion an, deren Fourierreihe zwar überall gegen die Funktion konvergiert, aber nicht gleichmäßig.

Wir bringen hier Beispiele sowohl für die du-Bois-Reymondsche als auch für die Lebesguesche Singularität, und zwar im Anschluß an Methoden von Fejér.

Wir gehen in beiden Fällen von endlichen trigonometrischen Polynomen aus (m, n bedeuten natürliche Zahlen):

$$P_{m,n}(x)=\left[\frac{\cos mx}{n}+\frac{\cos(m+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\cos(m+n-1)x}{1}\right]$$
$$-\left[\frac{\cos(m+n+1)x}{1}+\cdots+\frac{\cos(m+2n-1)x}{n-1}+\frac{\cos(m+2n)x}{n}\right],$$
$$Q_{m,n}(x)=\left[\frac{\sin mx}{n}+\frac{\sin(m+1)x}{n-1}+\cdots+\frac{\sin(m+n-1)x}{1}\right]$$
$$-\left[\frac{\sin(m+n+1)x}{1}+\cdots+\frac{\sin(m+2n-1)x}{n-1}+\frac{\sin(m+2n)x}{n}\right].$$

Zunächst beweisen wir einige für das Folgende wichtige Eigenschaften dieser Polynome.

[1]) Leopold Fejér, 1880–1959, ungarischer Mathematiker.
[2]) Paul du Bois-Reymond, 1831–1889, deutscher Mathematiker.

1°. Es existiert eine Konstante M derart, daß für jeden Wert der Veränderlichen x und für alle m, n

$$|P_{m,n}(x)| \leqq M \quad \text{und} \quad |Q_{m,n}(x)| \leqq M \tag{14}$$

gilt.

Zum Beweis formen wir P und Q um, indem wir jeweils die Glieder mit gleichen Koeffizienten zusammenfassen. Setzen wir (für $\nu = 1, 2, \ldots, n$)

$$\frac{\cos(m+n-\nu)x}{\nu} - \frac{\cos(m+n+\nu)x}{\nu} = 2\sin(m+n)x\,\frac{\sin \nu x}{\nu}$$

ein, so erhalten wir

$$P_{m,n}(x) = 2\sin(m+n)x \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

Analog ergibt sich

$$Q_{m,n}(x) = -2\cos(m+n)x \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}.$$

Da die Faktoren der Summe beschränkt sind, bleibt die Beschränktheit dieser Summe zu zeigen. Schon in Nr. 690, Beispiel 3, hatten wir die Darstellung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = -\frac{x}{2} + \int_0^x \left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right] \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt + \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\,du$$

gefunden. Der zweite Summand auf der rechten Seite ist beschränkt, da er für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 strebt (vgl. Nr. 698, 1°), der dritte Summand ist beschränkt, da bekanntlich das Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ konvergiert. Damit ist aber die Behauptung bewiesen.

2°. Anders verhält es sich mit den Teilsummen von P und Q, d. h. mit den Summen beliebig vieler aufeinanderfolgender Glieder (vom ersten an). Nimmt man für $P_{m,n}(x)$ die Summe der ersten n Glieder, so erhält man für $x = 0$ den Wert

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

der mit wachsendem n unendlich wird (Nr. 365, Beispiel 1). Da offenbar

$$\frac{1}{\nu} > \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{x} = \ln(\nu+1) - \ln \nu$$

ist, erhält man für H_n die bekannte Abschätzung $H_n > \ln n$. Die Teilsummen von $Q_{m,n}(x)$ verschwinden sämtlich für $x = 0$. Berechnen wir jedoch die Summe der ersten n Glieder für den (für große m und n) beliebig nahe bei 0 gelegenen Punkt $x = \frac{\pi}{2(m+n)}$, so erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2(m+n)}\right).$$

Da aber für $0<z<\frac{\pi}{2}$ bekanntlich $\sin z>\frac{2}{\pi}z$ ist, ist diese Summe größer als

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{m+n}\right)=H_n-\frac{n}{m+n}>\ln n-1\,,$$

und dieser Ausdruck wächst ebenfalls unbegrenzt mit n. Darin strecken sozusagen im Keim schon die Singularitäten von DU BOIS-REYMOND und LEBESGUE.

3°. Wenn wir aber für beliebig vorgegebenes $\varepsilon>0$ die Variable nur im Intervall $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ (oder, was auf dasselbe hinausläuft, für ganzes k im Intervall $[2k\pi+\varepsilon, 2(k+1)\pi-\varepsilon)]$ variieren lassen, so sind alle Teilsummen der beiden Polynome dem absoluten Betrag nach durch ein und dieselbe Konstante $L(\varepsilon)$ beschränkt, die von m und n nicht abhängt. Es genügt, dies für Ausdrücke der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\cos(p\pm\lambda)x}{\lambda}\,,\qquad \sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\sin(p\pm\lambda)x}{\lambda} \tag{15}$$

zu beweisen, da, wie man leicht sieht, die betreffenden Teilsummen sich als Differenzen zweier solcher Ausdrücke darstellen lassen. Wir untersuchen beispielsweise den Ausdruck

$$\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}$$

und schätzen ihn mit Hilfe des Abelschen Hilfssatzes ab (Nr. 383). Der Faktor $\frac{1}{\lambda}$ nimmt mit wachsendem λ ab, bleibt aber positiv. Die Summe beliebig vieler Faktoren $\cos(p+\lambda)x$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda_0}\cos(p+\lambda)x=\frac{\sin\left(p+\lambda_0+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,,$$

übertrifft dem absoluten Betrag nach die Konstante $\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ nicht. Daher folgt

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{l}\frac{\cos(p+\lambda)x}{\lambda}\right|\leqq\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\,.$$

Das gilt auch für die anderen Ausdrücke (15). Daher kann man für $L(\varepsilon)$ die Konstante $\frac{2}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$ nehmen.

Alle diese Eigenschaften werden in Nr. 703 benutzt.

703. Die Konstruktion von Singularitäten. Wir wählen jetzt eine Folge positiver Zahlen a_k, für welche $\sum a_k$ konvergiert, und zwei unbegrenzt wachsende Folgen natürlicher Zahlen m_k, n_k und bilden die beiden Reihen

$$\text{(I)}\ \sum_{k=1}^{\infty}a_kP_{m_k,n_k}(x)=\Phi(x),\qquad \text{(II)}\ \sum_{k=1}^{\infty}a_kQ_{m_k,n_k}(x)=\Psi(x)\,.$$

Beide Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig, denn nach (14) werden sie beide durch die konvergente Reihe $M\sum a_k$ majorisiert. Nach Nr. 431 sind daher die Funktionen $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ stetig.

Nun wählen wir die Zahlen a_k, m_k, n_k so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{a) } m_{k+1} > m_k + 2n_k \quad (\text{für } k = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \text{b) } a_k \ln n_k \to \infty \quad \text{für} \quad k \to \infty .$$

Beispielsweise kann man $a_k = \frac{1}{k^2}$, $m_k = n_k = 2^{k^3}$ wählen.

Auf Grund von a) enthalten zwei verschiedene trigonometrische Polynome $a_k P_{m_k,n_k}(x)$ oder $a_k Q_{m_k,n_k}(x)$, die in den Reihen (I) bzw. (II) vorkommen, keine Glieder mit denselben Vielfachen von x. Wenn man jetzt alle Glieder der aufeinanderfolgenden Polynome in (I) bzw. (II) einfach hintereinander aufschreibt, d. h. alle Klammern auflöst, so erhält man zwei trigonometrische Reihen (eine Kosinusreihe und eine Sinusreihe), welche genau die Fourierreihe von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ sind. Multipliziert man nämlich (I) mit $\cos px$ und integriert von 0 bis 2π, so darf man wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe gliedweise integrieren. Dann läßt sich jedes Integral

$$\int_0^{2\pi} a_k P_{m_k,n_k}(x) \cos px \, dx$$

durch eine endliche Summe von Integralen ersetzen, die alle verschwinden, mit Ausnahme des Falles, daß $\cos px$ in $a_k P_{m_k,n_k}(x)$ vorkommt. Auf diese Weise überzeugen wir uns davon, daß der Koeffizient von $\cos px$ der Fourierkoeffizient ist.

Jetzt untersuchen wir die Konvergenz dieser Fourierreihen. Beschränkt man x auf das Intervall $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, so konvergieren beide Reihen, und zwar sogar gleichmäßig, ähnlich wie die Reihen (I) und (II). Das geht daraus hervor, daß jede Partialsumme, etwa der Fourierreihe von $\Phi(x)$, sich von einer gewissen Partialsumme

$$\sum_{k=1}^{s-1} a_k P_{m_k,n_k}(x)$$

der Reihe (I) um eine Partialsumme des trigonometrischen Polynoms

$$a_s P_{m_s,n_s}(x)$$

unterscheidet, deren absoluter Betrag nach Nr. 702, 3°, die Größe $a_s L(\varepsilon)$ nicht übertrifft und bei unbegrenzt wachsendem s gleichmäßig gegen 0 strebt.

Da ε beliebig war, ist die Konvergenz der Fourierreihen von $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ für alle x in $(0, 2\pi)$ gesichert. Für $x = 0$ (oder $x = 2\pi$) divergiert aber die erste Reihe. Hier haben wir also die Singularität von DU BOIS-REYMOND. Bezeichnen wir nämlich ihre m-te Partialsumme mit $s_m(x)$, so folgt

$$s_{m_k+n_k-1}(x) - s_{m_k-1}(x) = a_k \left[\frac{\cos m_k x}{n_k} + \cdots + \frac{\cos (m_k + n_k - 1)\, x}{1}\right],$$

also (vgl. Nr. 702, 2°)

$$s_{m_k+n_k-1}(0) - s_{m_k-1}(0) = a_k H_{n_k} > a_k \ln n_k ,$$

was, zusammen mit der Bedingung b), zeigt, daß die Grundvoraussetzung für die Konvergenz einer Reihe (Nr. 376) verletzt ist.

Die Fourierreihe von $\Psi(x)$, die eine Sinusreihe ist, konvergiert zwar für $x=0$ (oder $x=2\pi$), aber diese Konvergenz ist in der Umgebung von $x=0$ nicht gleichmäßig, und wir haben hier ein Beispiel für die Lebesguesche Singularität. Um uns davon zu überzeugen, bezeichnen wir ihre m-te Partialsumme mit $\bar{s}_m(x)$ und berechnen die Differenz

$$\bar{s}_{m_k+n_k-1}(x)-\bar{s}_{m_k-1}(x)=a_k\left[\frac{\sin m_k x}{n_k}+\cdots+\frac{\sin(m_k+n_k-1)\,x}{1}\right]$$

im Punkt $x=\dfrac{\pi}{2(m_k+n_k)}$; nach Nr. 702, 2°, ist sie größer als $a_k(\ln n_k-1)$ und wächst mit k unbegrenzt.

Durch eine etwas komplizierte Konstruktion gelingt es, eine stetige Funktion $\Phi(x)$ der Periode 2π zu definieren, deren Fourierreihe in jedem Teilintervall des Intervalls $[0, 2\pi]$ Divergenzpunkte hat.

Bisher ist jedoch das Problem, ob die Fourierreihe einer stetigen Funktion überall divergieren kann, noch nicht gelöst. Zwar ist von A. N. Kolmogoroff[1]) mit Hilfe einer verfeinerten Konstruktion ein Beispiel einer überall divergierenden Fourierreihe angegeben worden, doch gehört die Funktion einer komplizierteren Funktionenklasse an, und überdies wird dabei ein allgemeinerer Integralbegriff (das Lebesguesche Integral) benutzt.

§ 5. Restabschätzungen in Abhängigkeit von Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion

704. Der Zusammenhang zwischen den Fourierkoeffizienten einer Funktion und ihren Ableitungen. Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π, die Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich ($k\geqq 1$) besitzt. Die ersten $k-1$ Ableitungen sind naturgemäß stetige Funktionen; von der k-ten setzen wir einstweilen absolute Integrierbarkeit voraus. Wie bisher sollen a_m, b_m die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ bezeichnen, $a_m^{(i)}, b_m^{(i)}$ seien die Fourierkoeffizienten der i-ten Ableitung $f^{(i)}(x)$ ($i=1, 2, \ldots, k$).

Durch partielle Integration ergibt sich (für $m=1, 2, 3, \ldots$)

$$\pi a_m=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=f(x)\frac{\sin mx}{m}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin mx\,dx\,,$$

also

$$a_m=-\frac{b_m'}{m}\quad\text{und analog}\quad b_m=\frac{a_m'}{m}\,.$$

Wendet man diese Formeln auf a_m', b_m' an und setzt in die sich für a_m'', b_m'' ergebenden Ausdrücke die für a_m, b_m ein, so folgt

$$a_m=-\frac{a_m''}{m^2},\qquad b_m=\frac{-b_m''}{m^2}\,.$$

[1]) Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff, geb. 1903, sowjetischer Mathematiker.

Durch Induktion ergibt sich, wobei die Fallunterscheidung für gerades und ungerades k zu beachten ist,

$$\text{für } k=2h: \qquad a_m=(-1)^h\frac{a_m^{(k)}}{m^k}, \qquad b_m=(-1)^h\frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \tag{1a}$$

$$\text{für } k=2h+1: \quad a_m=(-1)^{h+1}\frac{b_m^{(k)}}{m^k}, \quad b_m=(-1)^h\frac{a_m^{(k)}}{m^k}. \tag{1b}$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, unter Benutzung dieser Formeln eine Abschätzung für den Rest der Fourierreihe einer k-mal differenzierbaren Funktion herzuleiten, wenn die k-te Ableitung bestimmte Bedingungen erfüllt. Zu Anfang des vorigen Paragraphen untersuchten wir das Problem der gleichmäßigen Konvergenz einer Fourierreihe, d. h. das Problem, wann der Rest gleichmäßig gegen 0 strebt.

Jetzt sind wir, wenn auch unter schärferen Voraussetzungen, in der Lage, die Geschwindigkeit dieser Konvergenz abzuschätzen, nachdem wir eine Ordnung für die Größe des Restes in Abhängigkeit von den Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion eingeführt haben.

705. Eine Abschätzung für die Partialsumme im Fall einer beschränkten Funktion. Zur Vorbereitung geben wir zunächst eine Abschätzung für die Partialsumme $s_n(x)$ einer Fourierreihe, die auch für die Partialsumme $\tilde{s}_n(x)$ der konjugierten Reihe gilt, wobei wir nur voraussetzen, daß $f(x)$ beschränkt ist:

$$|f(x)|\leqq M;$$

unter M kann man dabei etwa die obere Grenze von $|f(x)|$ verstehen. Nach Nr. 681, Formel (4), ist

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Hieraus ergibt sich[1])

$$|s_n(x)|\leqq\frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt<M\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}\,dt$$

$$=M\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,du<M\int_0^{1}du+M\int_1^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{du}{u}$$

$$=M\left[1+\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]<M\,(\ln n+1+\ln 2\pi).$$

---

[1]) Wegen $\sin z>\frac{2}{\pi}z$ für $0<z<\frac{\pi}{2}$.

Versteht man unter A eine hinreichend große Konstante, so wird für $n \geqq 2$ der Ausdruck in der Klammer kleiner als $A \ln n$, so daß man schließlich

$$|s_n(x)| \leqq AM \ln n \qquad (n \geqq 2) \tag{2}$$

erhält. Beispielsweise kann man $A = 2 + \frac{1+\ln \pi}{\ln 2}$ nehmen. Das ist natürlich nicht die bestmögliche Konstante A.

Für die konjugierte Reihe war nach Nr. 696, Formel (20),

$$\tilde{s}_n(n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos \frac{1}{2} t - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt .$$

Daher ist

$$|\tilde{s}_n(x)| \leqq \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\cos \frac{1}{2} t - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) t\right|}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt$$

$$= \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin \frac{n}{2} t \cdot \sin \frac{n+1}{2} t\right|}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt < \frac{4M}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin \frac{n+1}{2} t\right|}{2 \sin \frac{1}{2} t} \, dt .$$

Wie oben gelangt man zu

$$|\tilde{s}_n(x)| \leqq AM \ln n \qquad (n \geqq 2) , \tag{3}$$

wobei A eine neue Konstante ist, die im allgemeinen von der obigen verschieden ist, aber ähnlich wie diese nicht von der Wahl von $f(x)$ abhängt. Übrigens kann man in beiden Fällen dieselbe, nämlich die größere, Konstante nehmen.

Die Differenz $R_n(x) = f(x) - s_n(x)$ (das ist der Rest der Fourierreihe, wenn sie gegen $f(x)$ konvergiert) läßt sich analog (2) abschätzen:

$$|R_n(x)| \leqq AM \ln n \qquad (n \geqq 2) .$$

Es ist nämlich

$$|R_n(x)| \leqq |f(x)| + |s_n(x)| \leqq M + AM \ln n ,$$

so daß man nur die Konstante A entsprechend groß zu wählen braucht, um zu der gewünschten Ungleichung zu gelangen.

Wir dürfen uns nicht darüber wundern, daß in dieser Ungleichung rechts eine Größe steht, die mit n gleich ∞ wird. Wir wissen ja, daß für einige beschränkte (sogar stetige; vgl. Nr. 703) Funktionen $f(x)$ die Größe $R_n(x)$ tatsächlich unendlich werden kann, und unsere Ungleichung soll ja für alle beschränkten integrierbaren Funktionen gelten.

706. Eine Abschätzung des Restes für eine Funktion mit beschränkter k-ter Ableitung. Wir wollen nun wieder eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π betrachten, die

Ableitungen bis zur Ordnung k einschließlich ($k \geqq 1$) besitzt, jetzt aber die k-te Ableitung als *beschränkt* und *eigentlich integrierbar* voraussetzen; insbesondere ist also

$$|f^{(k)}(x)| \leqq M_k .$$

Zunächst wollen wir folgenden wichtigen Satz, der von S. N. BERNSTEIN[1]) stammt, herleiten: *Unter unseren Annahmen existiert eine absolute Konstante A derart, daß (für $n \geqq 2$)*

$$|R_n(x)| \leqq A M_k \frac{\ln n}{n^k} \tag{4}$$

gilt.

Beim Beweis unterscheiden wir die Fälle eines geraden und eines ungeraden k.

1°. Es sei $k = 2h$. Der Rest der Fourierreihe von $f(x)$,[2])

$$R_n = R_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) ,$$

kann unter Benutzung der Formeln (1a) in der Form

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (a_m^{(k)} \cos mx + b_m^{(k)} \sin mx)$$

geschrieben werden.

In der Klammer steht das m-te Glied der Fourierreihe der Funktion $f^{(k)}(x)$; führen wir die Partialsummen $\sigma_m = \sigma_m(x)$ dieser Reihe ein, so können wir dieses Glied durch $\sigma_m - \sigma_{m-1}$ ersetzen:

$$R_n = (-1)^h \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^k} (\sigma_m - \sigma_{m-1}) .$$

Fassen wir die Glieder anders zusammen (vgl. Nr. 383), so erhalten wir

$$(-1)^h R_n = -\frac{\sigma_n}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k} \right) \sigma_m . \tag{5}$$

Diese Operation ist erlaubt, da $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{\sigma_m}{m^k} = 0$ ist; dies folgt aus der Ungleichung

$$|\sigma_m| \leqq A M_k \ln m , \tag{6}$$

die sich ergibt, wenn man die Ungleichung (2) auf $f^{(k)}$ anwendet. Aus (5) und (6) folgt

$$\frac{|R_n|}{M_k} \leqq \frac{A \ln n}{(n+1)^k} + A \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^k} - \frac{1}{(m+1)^k} \right) \ln m .$$

Die letzte Summe formen wir (vgl. Nr. 371) weiter um in

$$\frac{\ln (n+1)}{(n+1)^k} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} [\ln (m+1) - \ln m] .$$

---

[1]) SERGEJ NATANOWITSCH BERNSTEIN, 1880–1968, sowjetischer Mathematiker.

[2]) Unter den obigen Voraussetzungen konvergiert die Fourierreihe überall gegen die Funktion $f(x)$; vgl. Nr. 684.

Benutzt man noch die Ungleichungen

$$\ln(m+1)-\ln m=\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}<\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}$$

(vgl. Nr. 373, a), so erhält man dafür sukzessive

$$\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)^k}<\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^k}+\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^{k+1}}$$
$$<\frac{\ln n}{n^k}+\frac{1}{n^{k+1}}+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{n^k}<\frac{\ln n+2}{n^k}.$$

Für $|R_n|$ ergibt sich jetzt die Abschätzung

$$|R_n|<M_k\cdot\frac{2A\ln n+2A}{n^k} \qquad (n\geqq 2),$$

woraus für passendes A die zu beweisende Abschätzung (4) folgt.

2°. Jetzt sei $k=2h+1$. Unter Benutzung von Formel (1b) schreiben wir R_n in der Gestalt

$$R_n=(-1)^h\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^k}\left(a_m^{(k)}\sin mx-b_m^{(k)}\cos mx\right).$$

In dem Ausdruck in der Klammer erkennen wir das m-te Glied der zur Fourierreihe von $f^{(k)}(x)$ konjugierten Reihe (Nr. 696). Da für ihre Partialsumme $\tilde{\sigma}_m=\tilde{\sigma}_m(x)$ ebenfalls die Abschätzung $|\tilde{\sigma}_m|\leqq AM_k\ln m$ (vgl. (3)) gilt, unterscheiden sich die weiteren Überlegungen nicht von den vorhin angestellten.

707. Funktionen, deren k-te Ableitung von endlicher Schwankung ist. Zunächst betrachten wir eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π, die im Intervall $[-\pi,\pi]$ von endlicher Schwankung ist. Gehen wir zum Stieltjesintegral über und benutzen die Formel für die partielle Integration (Nr. 577), so können wir den Koeffizienten a_n von $f(x)$ wie folgt darstellen:

$$a_n=\frac{1}{\pi}(S)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}\frac{\sin nx}{n}=f(x)\frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}(S)\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}f(x). \qquad (7)$$

Das integralfreie Glied verschwindet; für das Integral erhalten wir, wenn wir es in üblicher Weise abschätzen (Nr. 582, 2°),

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqq\max|\sin nx|\bigvee_{-\pi}^{\pi}f(x).$$

Somit ergibt sich schließlich $|a_n|\leqq\frac{1}{\pi}V\cdot\frac{1}{n}$, wobei V die Totalvariation von $f(x)$ in $[-\pi,\pi]$ ist. Ebenso läßt sich b_n abschätzen.

Ist für zwei von ein und derselben unabhängigen Veränderlichen abhängende Größen α und β der Quotient beschränkt,

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\leqq M \qquad (M=\text{const}),$$

so kann man das mit Hilfe des Landausymbols O folgendermaßen ausdrücken (vgl. Nr. 60, wo wir das Symbol o eingeführt hatten):

$$\beta = O(\alpha) .$$

Unter Benutzung dieses Symbols läßt sich die oben bewiesene Eigenschaft der Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer Funktion endlicher Schwankung in der Gestalt

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

schreiben.

Existiert für eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π die k-te Ableitung $f^{(k)}(x)$ und ist diese im Intervall $[-\pi, \pi]$ von endlicher Schwankung, so gelten für die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ die Abschätzungen

$$|a_n| \leqq \frac{V_k}{\pi} \frac{1}{n^{k+1}}, \qquad |b_n| \leqq \frac{V_k}{\pi} \frac{1}{n^{k+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

wobei V_k die Totalvariation von $f^{(k)}(x)$ in $[-\pi, \pi]$ ist.

Das folgt sofort aus dem oben Bewiesenen und den Formeln (1a) und (1b) aus Nr. 704.

Dann ist also

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \qquad b_n = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) . \tag{8}$$

Nachdem man die Ordnung der Fourierkoeffizienten kennt, läßt sich der Rest der Fourierreihe leicht abschätzen; unter unseren Annahmen gilt für den Rest $R_n(x)$ der Fourierreihe von $f(x)$ die Ungleichung $|R_n(x)| < V_k/n^k$. Es ist nämlich

$$|R_n(x)| \leqq \sum_{m=n+1}^{\infty} (|a_m| + |b_m|) \leqq \frac{2V_k}{\pi} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+1}} < \frac{2V_k}{k\pi} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{V_k}{n^k} .$$

Somit ergab sich unter der im Vergleich zu Nr. 706 etwas schärferen Annahme über die k-te Ableitung eine Verbesserung für die Abschätzung des Restes $R_n(x)$: Im Zähler konnte auf den Faktor $\ln n$ verzichtet werden.

Bemerkung. Wir weisen nochmals darauf hin, daß hier und in Nr. 706 die Tatsache eine wesentliche Rolle spielte, daß die Funktion $f(x)$ nebst ihren Ableitungen periodisch war. Wäre die ursprüngliche Funktion nur in $[-\pi, \pi]$ gegeben, so müßte man zusätzlich

$$f(-\pi) = f(\pi), \; f'(-\pi) = f'(\pi), \; \ldots, \; f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$$

fordern, wobei an den Intervallenden die einseitige Ableitung zu verstehen ist. Nur dann sind Stetigkeit und Existenz der Ableitungen für die periodisch fortgesetzte Funktion und damit auch die Gültigkeit der oben hergeleiteten Abschätzungen gewährleistet.

708. Einfluß von Unstetigkeiten der Funktion und ihrer Ableitungen auf die Ordnung des Kleinerwerdens der Fourierkoeffizienten. Wir haben gesehen, daß die Existenz mehrerer stetiger Ableitungen einer Funktion ein schnelles Kleinerwerden des Fourierkoeffizienten und damit die schnelle Konvergenz der Fourierreihe sichert.

In der Praxis hat man es jedoch häufig mit Funktionen zu tun, die zwischen $-\pi$

und π aus mehreren Funktionen „verheftet“ sind, die einzeln in ihrem Definitionsbereich eine bestimmte Anzahl von Ableitungen besitzen. An den „Nahtstellen“ entstehen daher sowohl bei der Funktion selbst als auch bei den Ableitungen *Sprünge*. Diese Unstetigkeiten erniedrigen die Ordnung des Kleinerwerdens der Fourierkoeffizienten und, wie leicht einzusehen, auch die Ordnung des Kleinerwerdens des Restes der Fourierreihe. Dieses Problem wollen wir nun im einzelnen untersuchen.

1°. Die Funktion $f(x)$ sei in $[-\pi, \pi)$ stetig mit Ausnahme der „Nahtstellen“

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \tag{9}$$

in denen sie eine Unstetigkeit erster Art habe, d. h. einen Sprung

$$\delta_\mu^{(0)} = f(\xi_\mu + 0) - f(\xi_\mu - 0) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

erleiden möge. Dazu muß man noch den Punkt $\xi_0 = -\pi$ rechnen, wenn die Differenz

$$\delta_0^{(0)} = f(-\pi + 0) - f(\pi - 0)$$

von 0 verschieden ist; denn dann tritt bei der periodischen Fortsetzung der Funktion dort eine Unstetigkeit auf.

Wir nehmen ferner an, mit Ausnahme der erwähnten Punkte existiere überall eine endliche Ableitung $f'(x)$, die in $[-\pi, \pi]$ etwa absolut integrierbar sei. Um einen passenden Ausdruck für die Fourierkoeffizienten a_n von $f(x)$ zu finden, gehen wir wieder zum Stieltjesintegral über und integrieren partiell (vgl. (7)). Führen wir im letzten Integral den Summanden ein, der dem Sprung von $f(x)$ entspricht (Nr. 579, Formel (15)), so erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = -\frac{1}{n\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(0)} \sin n\xi_\mu - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

oder kürzer

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{b_n'}{n}, \tag{10}$$

wobei

$$A_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(0)} \sin n\xi_\mu \tag{11}$$

gesetzt und mit b_n' wie früher der Fourierkoeffizient von $f'(x)$ bezeichnet ist. Analog ergibt sich

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{a_n'}{n}, \tag{12}$$

wobei

$$B_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^{m} \delta_\mu^{(0)} \cos n\xi_\mu \tag{13}$$

ist und a_n' den Fourierkoeffizienten von $f'(x)$ bedeutet.

Von der Ableitung $f'(x)$ fordern wir jetzt, daß sie in $[-\pi, \pi]$ von endlicher Schwan-

kung ist. Da ihre Fourierkoeffizienten dann von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind (Nr. 707), kann man (10) und (12) auch folgendermaßen schreiben:

$$a_n=\frac{A_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{14}$$

$$b_n=\frac{B_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{15}$$

Diese Formeln zeigen mit aller Deutlichkeit, daß das Vorliegen von Unstetigkeitspunkten der Funktion (ohne Rücksicht auf die Existenz der Ableitung in allen übrigen Punkten) die Ordnung des Kleinerwerdens der Fourierkoeffizienten erniedrigt.

Es sei jetzt umgekehrt bekannt, daß die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f(x)$ die Form (14) bzw. (15) haben, wobei die Größen A_n, B_n durch (11) und (13) definiert und $\{\delta_\mu^{(0)}\}$ eine gegebene Menge von $m+1$ Zahlen seien. Dann hat $f(x)$ notwendigerweise Unstetigkeitspunkte erster Art in den Punkten (9) und in diesen Punkten Sprünge der Größe $\delta_\mu^{(0)}$ ($\mu=1, 2, \ldots, m$). Außerdem existieren die Grenzwerte[1]) $f(-\pi+0)$ und $f(\pi-0)$; ihre Differenz ist gleich $\delta_0^{(0)}$. In den übrigen Punkten ist $f(x)$ stetig.

Um sich davon zu überzeugen, bildet man eine Hilfsfunktion $\bar{f}(x)$, beispielsweise aus Funktionen, die in $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ linear (oder konstant) sind, und zwar derart, daß die Hilfsfunktion in den Punkten ξ_μ genau die betreffenden Sprünge erleidet. Für eine solche Funktion ergeben sich analog (14) und (15) die Fourierkoeffizienten

$$a_n=\frac{A_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad b_n=\frac{B_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

wobei A_n und B_n die frühere Bedeutung haben. Dann erhält man für die Differenz $f(x)-\bar{f}(x)$ eine Entwicklung der Form

$$\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx]$$

mit

$$\alpha_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \beta_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d. h.

$$|\alpha_n|\leqq\frac{K}{n^2}, \qquad |\beta_n|\leqq\frac{K}{n^2} \qquad (K=\text{const}).$$

Diese durch die konvergente Reihe $2K\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$ majorisierbare Reihe konvergiert überall gleichmäßig. Hieraus folgt offenbar, daß $f(x)-\bar{f}(x)$ eine stetige Funktion der Periode 2π ist; daher hat $f(x)$ dieselben Unstetigkeiten, und zwar in genau denselben Punkten wie $\bar{f}(x)$.

2°. Jetzt setzen wir überdies voraus, daß für $f'(x)$ die Grenzwerte $f'(-\pi+0)$, $f'(\xi_\mu\pm0)$, $f'(\pi-0)$ existieren, ferner, daß außer an den Nahtstellen überall $f''(x)$

[1]) Hier und im folgenden sei stets

$$f(\xi_\mu)=\frac{1}{2}(f(\xi_\mu+0)+f(\xi_\mu-0)), \qquad f(-\pi)=f(\pi)=\frac{1}{2}(f(-\pi+0)+f(\pi-0)),$$

so daß alle Unstetigkeitspunkte regulär sind (vgl. Nr. 684).

existiert und daß $f''(x)$ in $[-\pi, \pi]$ von endlicher Schwankung ist. Auf Grund des oben Bewiesenen kann man dann behaupten, daß

$$a'_n = \frac{A'_n}{n} - \frac{b''_n}{n} = \frac{A'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad b'_n = \frac{B'_n}{n} + \frac{a''_n}{n} = \frac{B'_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ist, wenn mit A'_n, B'_n analog (11) und (13) die Größen

$$A'_n = -\frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{m} \delta_\mu^{(1)} \sin n\xi_\mu , \tag{16}$$

$$B'_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^{m} \delta_\mu^{(1)} \cos n\xi_\mu \tag{17}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bezeichnet werden und

$$\delta_\mu^{(1)} = f'(\xi_\mu + 0) - f'(\xi_\mu - 0) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\delta_0^{(1)} = f'(-\pi + 0) - f'(\pi - 0)$$

st. Setzt man diese Ausdrücke für a'_n und b'_n in (10) und (12) ein, so ergibt sich schließlich

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{18}$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A'_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{19}$$

Auch hier läßt sich in gewissem Sinne die Umkehrung beweisen. Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f(x)$ mögen die Gestalt (18) und (19) haben, wobei A_n, B_n, A'_n, B'_n für gegebene Zahlen $\delta_\mu^{(0)}$, $\delta_\mu^{(1)}$ durch die Formeln (11), (13), (16), (17) bestimmt seien. Dann kann man von der Funktion $f(x)$ behaupten, daß sie in $(-\pi, \pi)$ stetig ist und eine stetige Ableitung $f'(x)$ hat, mit Ausnahme der Punkte ξ_μ, wo sowohl $f(x)$ als auch $f'(x)$ Sprünge der Größe $\delta_\mu^{(0)}$ bzw. $\delta_\mu^{(1)}$ haben, und daß außerdem

$$f(-\pi + 0) - f(\pi - 0) = \delta_0^{(0)} \quad \text{und} \quad f'(-\pi + 0) - f'(\pi - 0) = \delta_0^{(1)}$$

ist.

Der Beweis läßt sich wie oben mit Hilfe einer Hilfsfunktion $\bar{f}(x)$ führen, die jetzt aber aus quadratischen Funktionen zusammengesetzt sein kann, und zwar so, daß $\bar{f}(x)$ und $\bar{f}'(x)$ an den gegebenen Punkten genau die gegebenen Unstetigkeiten haben. Man sieht leicht, daß die Differenz $f(x) - \bar{f}(x)$ in eine Fourierreihe mit Koeffizienten der Ordnung $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ entwickelbar ist. Dann konvergiert aber nicht nur diese Reihe, sondern auch die durch gliedweises Differenzieren erhaltene Reihe, deren Koeffizienten die Ordnung $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ haben, gleichmäßig; folglich ist diese Differenz $f - \bar{f}$ eine nebst ihrer Ableitung stetige Funktion der Periode 2π. Daraus folgt aber die Behauptung.

3°. Im allgemeinen Fall seien $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ Funktionen, die in $(-\pi, \pi)$ mit Ausnahme der Punkte ξ_μ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ stetig sind, in denen alle Funktionen Sprünge der Größe $\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \ldots, \delta_\mu^{(k-1)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ erleiden. Außerdem wollen wir annehmen, überall (mit Ausnahme der Nahtstellen) existiere $f^{(k)}$ und sei in $[-\pi, \pi]$ von

endlicher Schwankung. Es sei

$$A_n^{(i)} = -\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(i)}\sin n\xi_\mu\,,$$

$$B_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=0}^{m}\delta_\mu^{(i)}\cos n\xi_\mu \qquad (i=0,\,1,\,\ldots,\,k-1;\; n=1,\,2,\,3,\,\ldots)\,.$$

Dann gelten (für ungerades bzw. gerades k) die Formeln

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B_n'}{n^2} - \frac{A_n''}{n^3} + \frac{B_n'''}{n^4} + \cdots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right) \\ +(-1)^{\frac{k}{2}}\dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right); \end{cases} \tag{20}$$

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A_n'}{n^2} - \frac{B_n''}{n^3} - \frac{A_n'''}{n^4} + \cdots \begin{cases} +(-1)^{\frac{k-1}{2}}\dfrac{B_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right) \\ +(-1)^{\frac{k}{2}+1}\dfrac{A_n^{(k-1)}}{n^k} + O\left(\dfrac{1}{n^{k+1}}\right). \end{cases} \tag{21}$$

Wenn dagegen bekannt ist, daß solche Formeln gelten, dann kann man hieraus umgekehrt (wie oben) Schlußfolgerungen über die Unstetigkeitspunkte und die Sprünge der Funktion und ihrer ersten $k-1$ Ableitungen ziehen.

709. Funktionen, die in $[0,\pi]$ gegeben sind. Bekanntlich kann eine nur im Intervall von 0 bis π definierte Funktion $f(x)$ unter bestimmten Bedingungen in diesem Intervall sowohl in eine Kosinusreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad (0 \leqq x \leqq \pi) \tag{22}$$

als auch in eine Sinusreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (0 < x < \pi) \tag{23}$$

entwickelt werden (Nr. 689). Solche Entwicklungen trifft man in der Praxis häufig an. Die Resultate aus Nr. 708 können auch auf diesen Fall angewandt werden, wenn man sich die Funktion $f(x)$ auf das Intervall $[-\pi, 0]$ (a) als gerade Funktion oder (b) als ungerade Funktion fortgesetzt denkt; (a) liefert eine Kosinusreihe, (b) eine Sinusreihe.

Es seien $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < \pi$ die Unstetigkeitspunkte von Funktionen und Ableitungen bis zur $(k-1)$-ten einschließlich und $\delta_\mu^{(0)}, \delta_\mu^{(1)}, \ldots, \delta_\mu^{(k-1)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ die Größen der entsprechenden Sprünge.

Wird die Funktion gerade fortgesetzt, so entspricht einem Sprung ξ_μ der Sprung mit entgegengesetztem Vorzeichen in $-\xi_\mu$, bei ungerader Fortsetzung jedoch der Sprung mit demselben Vorzeichen in $-\xi_\mu$. Ferner ist für eine gerade Funktion

$$f(+0) - f(-0) = 0, \qquad f(-\pi+0) - f(\pi-0) = 0\,,$$

für eine ungerade Funktion jedoch können die Sprünge

$$f(+0) - f(-0) = 2f(+0)\,,$$

$$f(-\pi+0) - f(\pi-0) = -2f(\pi-0)$$

von 0 verschieden sein. Schließlich weisen wir noch darauf hin, daß bei der Differentiation eine gerade Funktion in eine ungerade, eine ungerade Funktion in eine gerade übergeht. Unter Berücksichtigung aller dieser Bemerkungen erhalten wir für die Koeffizienten a_n und b_n der Entwicklung unserer Funktion in eine Kosinus- bzw. Sinusreihe Formeln der Art (20) und (21), jedoch mit folgenden Werten für $A_n^{(i)}$ und $B_n^{(i)}$:

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(i)} &= -\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(i)}\sin n\xi_\mu\,, \\ B_n^{(i)} &= \frac{2}{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{m}\delta_\mu^{(i)}\cos n\xi_\mu + f^{(i)}(+0) - \cos n\pi\cdot f^{(i)}(\pi-0)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

In diesem Zusammenhang bringen wir noch folgende wichtige Bemerkung. Es sei $f(x)$ im ganzen Intervall $[0, \pi]$ nebst ihren Ableitungen bis zur $(k-1)$-ten Ordnung einschließlich stetig. Die k-te Ableitung existiere und sei dort von endlicher Schwankung. Dann kann man trotzdem im allgemeinen *nicht* behaupten, die Koeffizienten a_n, b_n der Entwicklungen (22) und (23) seien von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$; vgl. dazu Nr. 707 und die Formeln (8). Denn obwohl alle Summen $A_n^{(i)}$ in diesem Fall 0 werden, kann man das von der Summe

$$B_n^{(i)} = \frac{2}{\pi}\{f^{(i)}(0) - \cos n\pi\cdot f^{(i)}(\pi)\}$$

nicht sagen. Die ungerade Fortsetzung schafft eine künstliche Unstetigkeit in $x=0$ und verletzt die Periodizität der Funktion und ihrer Ableitungen gerader Ordnung, die gerade Fortsetzung tut dasselbe für die Ableitungen ungerader Ordnung.

Soll eine Funktion $f(x)$ mit den erwähnten Eigenschaften im Intervall $[0, \pi]$ in eine schnell konvergierende Reihe entwickelt werden, unter voller Benutzung der Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion, so ist es daher zweckmäßig, sie auf das Intervall $[-\pi, 0]$ mit Hilfe eines Polynoms $r(x)$ vom Grad $2k-1$ fortzusetzen, das durch Definition in den Endpunkten festgelegt ist:

$$r(0) = f(0),\ r'(0) = f'(0),\ \ldots,\ r^{(k-1)}(0) = f^{(k-1)}(0)\,,$$
$$r(-\pi) = f(\pi),\ r'(-\pi) = f'(\pi),\ \ldots,\ r^{(k-1)}(-\pi) = f^{(k-1)}(\pi)\,.$$

(Das läßt sich beispielsweise nach dem Verfahren aus Nr. 257 machen.) Auf diese Weise bleiben alle Differenzierbarkeitseigenschaften von $f(x)$ auf dem ganzen Intervall $[-\pi, \pi]$ erhalten.

Es sei für $0 \leqq x \leqq \pi$ etwa $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Um diese Funktion in eine Reihe mit Koeffizienten der Ordnung $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ zu entwickeln, setzen wir sie mit Hilfe des Polynoms

$$r(x) = x - \frac{\pi}{2} + x^3\left[-\frac{12}{\pi^4}x^2 - \frac{30}{\pi^3}x - \frac{20}{\pi^2}\right] = -\frac{12}{\pi^4}x^5 - \frac{20}{\pi^3}x^4 - \frac{20}{\pi^2}x^3 + x - \frac{\pi}{2}$$

fort. Für die so fortgesetzte Funktion bilden wir die gewöhnliche Fourierreihe und erhalten auf diese Weise für die Funktion $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ in $[0, \pi]$ die geforderte schnell konvergierende Entwicklung

$$\frac{240}{\pi^3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\nu-1)^4} - \frac{12}{\pi^2(2\nu-1)^6}\right]\cos(2\nu-1)\,x + \frac{1440}{\pi^4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu)^5}\sin 2\nu x\,.$$

Dieses Verfahren wurde von A. S. Malijew angegeben.[1])

[1]) Aleksej Semjonowitsch Malijew, geb. 1895, sowjetischer Mathematiker.

710. Die Methode der Abtrennung der Singularitäten. Es sei $f(x)$ im Intervall $[0, \pi]$ durch eine Entwicklung (22) nach Kosinus von Vielfachen von x bzw. durch eine Entwicklung (23) nach Sinus von Vielfachen von x gegeben;[1]) die Koeffizienten mögen die Form (20) bzw. (21) haben, wobei $A_n^{(i)}$, $B_n^{(i)}$ durch die Formeln (24) definiert seien. Diese Reihen konvergieren schlecht, und wir wissen, daß dies an den Unstetigkeiten der Funktion und ihrer Ableitungen liegt. Zur Verbesserung der Konvergenz dieser Reihen schlug A. N. KRYLOW[2]) ein eigenartiges Verfahren vor, die *Abtrennung der Singularitäten.*

Das Wesen dieser Methode ist eigentlich schon in den vorhergehenden Überlegungen enthalten. Es besteht in der Konstruktion einer (aus Polynomen zusammengesetzten) Hilfsfunktion $\tilde{f}(x)$ mit bekannter trigonometrischer Reihenentwicklung, welche sozusagen alle Singularitäten von $f(x)$, die aus der Reihenentwicklung ersichtlich sind, in sich vereint. Subtrahiert man von der Funktion $f(x)$ diese Hilfsfunktion und entsprechend von der gegebenen Entwicklung die Entwicklung der Hilfsfunktion, so trennt man den langsam konvergierenden Teil der gegebenen Entwicklung ab, und es bleibt eine schnell konvergierende Reihe übrig.

Am besten ist es, wenn man die schlecht konvergierenden Teile unter Benutzung bekannter Entwicklungen direkt summieren kann.

1°. Gegeben sei eine Kosinusreihe (22) mit

$$a_n = \frac{A_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad A_n = -\frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu \sin n\xi_\mu. \tag{25}$$

Die Punkte $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_m < \pi$ seien ebenfalls gegeben, ebenso die Zahlen c_μ. Wir bilden unmittelbar

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx\,.$$

Eine einfache Umformung führt auf

$$g(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,(x-\xi_\mu)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,(x+\xi_\mu)}{n}\right] = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{c_\mu}{\pi}\,\varphi_\mu(x)\,,$$

wobei sich die Summe

$$\varphi_\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,(x-\xi_\mu)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,(x+\xi_\mu)}{n}$$

leicht berechnen läßt, wenn man sich der bekannten Entwicklung von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$ erinnert (Nr. 690, Beispiel 2), welche für $0 < z < 2\pi$ die Summe $\frac{\pi - z}{2}$ und für $-2\pi < z < 0$ offenbar die Summe $-\frac{\pi + z}{2}$ hat. Daher ist

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} -\frac{\pi + x - \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = -\pi + \xi_\mu & \text{für } x < \xi_\mu\,, \\ \frac{\pi - x + \xi_\mu}{2} - \frac{\pi - x - \xi_\mu}{2} = \xi_\mu & \text{für } x > \xi_\mu\,. \end{cases}$$

[1]) Der in der Praxis häufig vorkommende Fall, daß im Intervall [0, 1] nach Kosinus bzw. Sinus von Vielfachen von πx zu entwickeln ist, ergibt sich aus dem betrachteten Fall, indem x durch $\frac{\pi x}{l}$ ersetzt wird.

[2]) ALEKSEJ NIKOLAJEWITSCH KRYLOW, 1863–1945, sowjetischer Mathematiker.

Hieraus folgt $g(x)=\text{const}=\gamma_\mu$ im Innern jedes der Intervalle $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$, $\mu=0, 1, \ldots, m$ (der Einfachheit halber nehmen wir $\xi_0=0$ und $\xi_{m+1}=\pi$ an); die Funktion $g(x)$ springt in ξ_μ $(\mu=1, 2, \ldots, m)$ genau um c_μ. Daher ist $\gamma_\mu-\gamma_{\mu-1}=c_\mu$ $(\mu=1, 2, \ldots, m)$ und

$$\gamma_\mu=\gamma_0+\sum_{\lambda=1}^{\mu} c_\lambda; \tag{26}$$

wegen $\varphi_\mu(0)=-\pi+\xi_\mu$ ist außerdem

$$\gamma_0=g(0)=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}(-\pi+\xi_\mu)=\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu\xi_\mu-\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu. \tag{27}$$

Damit ist $g(x)$ völlig bestimmt.

Ist z. B.

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\cos nx,$$

so ist

$$A_n=-\frac{2}{\pi}c_1\sin n\frac{\pi}{2}$$

mit $c_1=-\frac{\pi}{2}$, $\xi_1=\frac{\pi}{2}$. Dann folgt

$$\gamma_0=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

oder, unmittelbar,

$$\gamma_0=g(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{2\nu-1}=\frac{\pi}{4};$$

also gilt

$$\gamma_1=\gamma_0+c_1=-\frac{\pi}{4}.$$

Somit ist $g(x)=\frac{\pi}{4}$ für $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ und $g(x)=-\frac{\pi}{4}$ für $\frac{\pi}{2}<x\leqq\pi$.

2°. Wir betrachten jetzt eine Sinusreihe (23) mit $b_n=\frac{B_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

$$B_n=\frac{2}{\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{m} c_\mu\cos n\xi_\mu+c_0-c_{m+1}\cos n\pi\right\}. \tag{28}$$

Dieses Mal wollen wir die Reihe

$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}\sin nx$$

direkt summieren. Es ist

$$\begin{aligned}h(x)&=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\xi_\mu)}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\xi_\mu)}{n}\right]\\&\quad+\frac{2c_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{c_{m+1}}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+\pi)}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-\pi)}{n}\right]\\&=\sum_{\mu=1}^{m}\frac{c_\mu}{\pi}\varphi_\mu(x)+\frac{c_0}{\pi}(\pi-x)-\frac{c_{m+1}}{\pi}\varphi(x)\end{aligned}$$

mit

$$\varphi(x)=\frac{\pi-(x+\pi)}{2}-\frac{\pi+(x-\pi)}{2}=-x \qquad \text{für alle } x;$$

$$\varphi_\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-(x+\xi_\mu)}{2}-\dfrac{\pi+(x-\xi_\mu)}{2}=-x & \text{für } x<\xi_\mu,\\[2ex] \dfrac{\pi-(x+\xi_\mu)}{2}+\dfrac{\pi-(x-\xi_\mu)}{2}=\pi-x & \text{für } x>\xi_\mu.\end{cases}$$

Offenbar ist

$$h(+0)=c_0,\quad h(\pi-0)=c_{m+1};\qquad h(\xi_\mu+0)-h(\xi_\mu-0)=c_\mu\quad(\mu=1,2,\ldots,m).$$

Außerdem existiert bis auf die Unstetigkeitspunkte die Ableitung $h'(x)=\text{const}=\gamma$, nämlich

$$\gamma=\frac{1}{\pi}\left(c_{m+1}-c_0-\sum_{\mu=1}^{m}c_\mu\right). \tag{29}$$

Die Funktion $h(x)$ ist innerhalb jedes Intervalls $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ linear, mit dem Richtungskoeffizienten γ:

$$h(x)=\gamma x+\delta_\mu \quad \text{für} \quad \xi_\mu<x<\xi_{\mu+1} \qquad (\mu=0,1,\ldots,m),$$

mit

$$\delta_0=c_0,\ \delta_1=c_0+c_1,\ \ldots,\ \delta_m=c_0+c_1+\ldots+c_m. \tag{30}$$

Die Kurve von $h(x)$ läßt sich leicht zeichnen (Abb. 136). Die Gerade, welche die Punkte $(0, c_0)$ und $(\pi, c_{m+1}-\sum_1^m c_\mu)$ verbindet, hat offenbar den Richtungskoeffizienten γ. Der Rest der Konstruktion ist aus Abb. 136 ersichtlich.

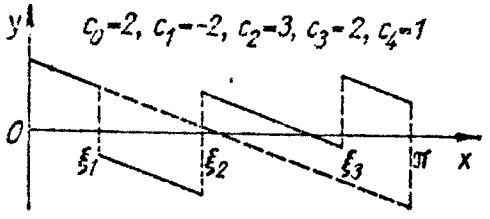

Abb. 136

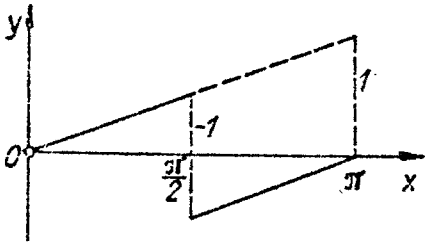

Abb. 137

Es sei z. B.

$$h(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin nx,$$

so daß $B_n=-\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}$, $c_0=c_2=0$, $c_1=-1$, $\xi_1=\frac{\pi}{2}$ ist. Hierbei ist (vgl. Abb. 137)

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}x & \text{für} \quad 0\leqq x<\dfrac{\pi}{2},\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\cdot x-1=\dfrac{1}{\pi}(x-\pi) & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\leqq\pi.\end{cases}$$

Dieses Resultat läßt sich benutzen, um die Konvergenz von

$$f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}\cdot\cos n\frac{\pi}{2}\sin nx \tag{31}$$

zu verbessern. Wegen

$$\frac{n}{n^2-1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n(n^2-1)}$$

ist in unserem Fall

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n} - \frac{2}{\pi}\cdot\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n(n^2-1)}.$$

Wenn man von $f(x)$ die soeben berechnete Funktion $h(x)$ abzieht, erhält man für $f(x)-h(x)$ die Entwicklung

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n(n^2-1)}\sin nx,$$

deren Koeffizienten schon von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ sind.

3°. Wir wenden uns der Kosinusreihe (22) zu und nehmen jetzt an, es sei

$$a_n = \frac{A_n}{n} - \frac{B_n'}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

wobei A_n durch (25) gegeben sei, während sich B_n' durch Ersetzen der $c_0, c_1, \ldots, c_{m+1}$ durch andere Konstanten $c_0', c_1', \ldots, c_{m+1}'$ ergebe. Da wir schon (vgl. 1°) den Teil einer trigonometrischen Reihe, der von Gliedern erster Ordnung abhängt, abtrennen können, wenden wir uns nun den Gliedern zweiter Ordnung zu.

Es sei (der Einfachheit halber schreiben wir B_n statt B_n')

$$g_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2}\cos nx.$$

Offenbar ist $g_1(x)$ eine stetige Funktion von x. Durch gliedweises Differenzieren der Reihe erhalten wir die neue Reihe

$$g_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n}\sin nx,$$

die wir schon summieren können (vgl. 2°). Da diese Reihe in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0, \pi]$, das weder die Intervallendpunkte noch Unstetigkeitspunkte enthält, gleichmäßig konvergiert,[1]) stellt ihre Summe tatsächlich (mit Ausnahme dieser Punkte) die Ableitung von $g_1(x)$ dar. Also ist nach 2°

$$g_1'(x) = \gamma x + \delta_\mu \quad \text{für} \quad \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m),$$

wobei γ und δ_μ durch (29) und (30) gegeben sind. Durch Integration ergibt sich (mit Rücksicht auf die Stetigkeit)

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta_\mu x + \varepsilon_\mu \quad \text{für} \quad \xi_\mu \leqq x \leqq \xi_{\mu+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m).$$

In den Teilpunkten $\xi_{\mu+1}$ erhält man den Wert von $g_1(x)$ gleichzeitig aus zwei Formeln, so daß also

$$\frac{1}{2}\gamma\xi_{\mu+1}^2 + \delta_\mu\xi_{\mu+1} + \varepsilon_\mu = \frac{1}{2}\gamma\xi_{\mu+1}^2 + \delta_{\mu+1}\xi_{\mu+1} + \varepsilon_{\mu+1}$$

folgt. Wegen $\delta_{\mu+1} = \delta_\mu + c_{\mu+1}$ ergibt sich hieraus $\varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_\mu - c_{\mu+1}\xi_{\mu+1}$. Ist ε_0 bekannt, so lassen sich hieraus $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ ermitteln; ε_0 kann man aus

$$\varepsilon_0 = g_1(0) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n^2}$$

[1]) Das folgt aus bekannten Eigenschaften der Reihe $\sum_1^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$.

erhalten. Die Summe dieser Reihe läßt sich in geschlossener Form bestimmen, wenn man den Ausdruck für B_n einsetzt und die aus Nr. 690, Beispiel 9, bekannte Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

heranzieht. Ist z. B.

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\frac{\pi}{3}}{n^2} \cos nx\,,$$

so ist

$$B_n = -1 + \cos n\frac{\pi}{3}, \qquad c_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad c_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad c_2 = 0, \qquad \xi_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\gamma = 0, \qquad \delta_0 = -\frac{\pi}{2}, \qquad \delta_1 = 0\,.$$

Zur Bestimmung von

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{3}}{n^2}$$

setzen wir in der oben erwähnten Entwicklung $x = 0$, dann $x = \frac{\pi}{3}$. Damit finden wir $\varepsilon_0 = \frac{5\pi^2}{36}$, also ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - c_1\xi_1 = -\frac{\pi^2}{36}$. Schließlich folgt

$$g_1(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi^2}{36} & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}, \\ -\frac{\pi^2}{36} & \text{für} \quad \frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi\,. \end{cases}$$

4°. Jetzt setzen wir in der Sinusreihe (23)

$$b_n = \frac{B_n}{n} + \frac{A_n'}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right);$$

B_n ist wie früher durch (28) definiert und A_n' nach dem Vorbild von (25) konstruiert, wobei c durch c' ersetzt ist. Auch hier genügt es, sich auf die Glieder zweiter Ordnung zu beschränken.

Wir betrachten die Reihe (wieder A_n statt A_n')

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} \sin nx\,,$$

die offenbar eine stetige Funktion darstellt. Durch Differentiation folgt

$$h_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \cos nx = g(x)$$

(vgl. 1°). Wie oben überzeugt man sich leicht davon, daß mit Ausnahme der Intervallendpunkte und der Punkte ξ_μ die Funktion $g(x)$ tatsächlich die Ableitung von $h_1(x)$ ist. Nach 1° ist

$$h_1'(x) = \gamma_\mu \quad \text{für} \quad \xi_\mu < x < \xi_{\mu+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)\,,$$

wobei γ_μ durch (26) und (27) definiert ist. Hieraus folgt $h_1(x) = \gamma_\mu x + \delta_\mu$ für $\xi_\mu \leqq x \leqq \xi_{\mu+1}$. Dabei ist $\delta_0 = 0$ (da $h_1(0) = 0$ ist), und die übrigen δ_μ lassen sich sukzessive auf Grund der Stetigkeit von $h_1(x)$ in $\xi_{\mu+1}$ bestimmen:

$$\gamma_\mu \xi_{\mu+1} + \delta_\mu = \gamma_{\mu+1}\xi_{\mu+1} + \delta_{\mu+1} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m-1);$$

das ergibt $\delta_{\mu+1} = \delta_\mu - c_{\mu+1}\xi_{\mu+1}$.

Es sei z. B. die Reihe

$$h_1(x) = \sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \ldots$$

gegeben, die auch in der Gestalt

$$h_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2}\sin nx$$

geschrieben werden kann. Hier ist

$$\xi_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad c_1 = -\frac{\pi}{2}, \qquad \gamma_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad \gamma_1 = -\frac{\pi}{4}, \qquad \delta_0 = 0, \qquad \delta_1 = \frac{\pi^2}{4}$$

(vgl. das Beispiel in 1°), also gilt

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{4}(\pi - x) & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi. \end{cases}$$

5°. Man könnte in ähnlicher Weise auch die Teile einer trigonometrischen Reihe summieren, die mit Gliedern höherer Ordnung in der Entwicklung der Koeffizienten zusammenhängen. Statt allgemeine Regeln aufzustellen, ist es praktischer, in jedem konkreten Fall so vorzugehen, wie wir es oben bei der Untersuchung von Reihen allgemeiner Form getan haben. Wir wenden uns wieder der Reihe (31) zu; diesmal setzen wir

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^3(n^2-1)};$$

dann erhalten wir b_n in der Gestalt

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^3} - \frac{2}{\pi}\cos n\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^3(n^2-1)}.$$

Dementsprechend wird $f(x)$ in drei Summanden zerlegt. Der erste ist die schon in 2° berechnete Funktion $h(x)$; der zweite lautet

$$g(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^3}\sin nx.$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$g'(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2}\cos nx, \qquad g''(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{n}\sin nx.$$

Die Funktion $g''(x)$ unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen von $h(x)$:

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{\pi}(x-\pi) & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir durch Integrieren

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}x^2 + \gamma_0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{2\pi}(x-\pi)^2 + \gamma_1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi. \end{cases}$$

Durch Vergleich der beiden so erhaltenen Werte $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ folgt $\gamma_1 = \gamma_0$. Den Wert γ_0 findet man leicht, indem man in der Entwicklung von $g'(x)$ für x den Wert 0 einsetzt: $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$. Durch nochmalige Integration finden wir unter Beachtung von $g(0) = g(2\pi) = 0$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6\pi} x^3 + \gamma_0 x & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{1}{6\pi}(x-\pi)^3 + \gamma_0 (x-\pi) & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi . \end{cases}^{1})$$

Somit ist $g(x)$ völlig bestimmt, und wir finden schließlich

$$f(x) = h(x) + g(x) + \varphi(x),$$

wobei $\varphi(x)$ zwar nicht in geschlossener Form bekannt, aber durch die Reihenentwicklung

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n^3(n^2-1)} \sin nx$$

gegeben ist, deren Koeffizienten von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n^5}\right)$ sind, so daß sie sehr schnell konvergiert.

§ 6. Das Fourierintegral

711. Das Fourierintegral als Grenzfall der Fourierreihe. Wir wollen hier in großen Zügen die äußerst durchsichtigen, wenn auch nicht strengen Überlegungen wiedergeben, die FOURIER zu seiner Integralformel führten. Diese Formel wurde unabhängig von FOURIER auch von CAUCHY gefunden.

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem endlichen Intervall $[-l, l]$ gegeben, so kann man sie unter bestimmten Bedingungen, die uns jetzt nicht interessieren, in diesem Intervall in eine trigonometrische Reihe entwickeln:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l},$$

wobei

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) \cos \frac{m\pi u}{l} \, du \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) \sin \frac{m\pi u}{l} \, du \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ist (vgl. Nr. 688). Setzt man die Ausdrücke für die Koeffizienten ein, so kann man

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(u) \, du + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) \cos \frac{m\pi}{l} (u-x) \, du \tag{1}$$

schreiben. Es sei jetzt $f(x)$ in dem ganzen Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert. Dann kann man für jedes x mit $|x| < l$ den entsprechenden Wert von $f(x)$ durch die Entwick-

[1]) Durch Vergleich der beiden erhaltenen Werte von $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ finden wir wieder $\gamma_0 = \frac{\pi}{24}$.

lung (1) ausdrücken. Wir wollen versuchen, durch den Grenzübergang $l \to \infty$ die „Grenzform" dieser Entwicklung herzuleiten.

Vom ersten Glied der rechten Seite von (1) kann man naturgemäß annehmen, daß es gegen 0 strebt.[1]) Bei der unendlichen Reihe können wir den Faktor $\frac{m\pi}{l}$ unter dem Kosinus als diskrete Werte $z_1 = \frac{\pi}{l}$, $z_2 = \frac{2\pi}{l}$, ..., $z_m = \frac{m\pi}{l}$, ... einer Veränderlichen z betrachten, die stetig von 0 bis ∞ variiert. Dabei strebt das Inkrement

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m = \frac{\pi}{l}$$

für $l \to \infty$ offenbar gegen 0. In diesen Bezeichnungen kann man unsere Reihe auch in der Gestalt

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-l} f(u) \cos z_m (u-x)\, du$$

schreiben, was an die Integralsumme für die Funktion

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z\,(u-x)\, du$$

von z im Intervall $[0, +\infty]$ erinnert. Für $l \to \infty$ erhält man statt der Summe ein Integral, und so gelangt man zur Fourierschen Integralformel

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos z\,(u-x)\, du\,,$$

der man auch die Gestalt

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(z) \cos zx + b(z) \sin zx]\, dz$$

mit

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu\, du, \qquad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu\, du$$

geben kann. Hier ist die Analogie zur trigonometrischen Reihenentwicklung klar erkennbar, nur ist der Parameter m, der die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft, jetzt durch den stetig veränderlichen Parameter z ersetzt und die unendliche Reihe durch ein Integral. Die Koeffizienten $a(z)$ und $b(z)$ erinnern in ihrer Struktur an Fourierkoeffizienten.

Natürlich haben diese Überlegungen nur heuristischen Wert, die tatsächlichen Bedingungen für die Gültigkeit der Fourierschen Formeln müssen noch geklärt werden. Aber auch bei der Durchführung der strengen Überlegungen werden wir in den Grundzügen den Überlegungen folgen, die mit Fourierreihen zusammenhängen.

[1]) Das ist trivial, wenn man z. B. voraussetzt, daß $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du$ konvergiert.

712. Vorbereitende Bemerkungen. Die Funktion $f(x)$ sei im unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$ absolut integrierbar. Unter dieser Annahme betrachten wir das Integral

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^A dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du\,,$$

wobei A eine beliebige positive Zahl und x_0 ein beliebiger fester Wert ist. Dieses Integral ist das Analogon der Partialsumme der Fourierreihe; man erhält daraus das Fourierintegral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du \tag{2}$$

für $A\to\infty$.

Da $f(x)$ auch für beliebiges $B>0$ in $[-B, B]$ absolut integrierbar ist, ist nach Satz 4* aus Nr. 510

$$\int_0^A dz \int_{-B}^{B} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du=\int_{-B}^{B} f(u)\,du \int_0^A \cos z\,(u-x_0)\,dz$$

$$=\int_{-B}^{B} f(u)\,\frac{\sin A\,(u-x_0)}{u-x_0}\,du\,. \tag{3}$$

Das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du \tag{4}$$

wird aber durch das nach Voraussetzung konvergente Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\,du$$

majorisiert und konvergiert daher gleichmäßig bezüglich z (sowohl für $u=\infty$ als auch für $u=-\infty$) in jedem Intervall. Daher strebt $\int_{-B}^{B} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du$ für $B\to\infty$ gleichmäßig gegen seinen Grenzwert (4). Infolgedessen kann man in (3) für $B\to\infty$ im Integral links unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen (vgl. Satz 1 aus Nr. 506).[1]) So erhält man für $J(A)$ den Ausdruck

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\frac{\sin A\,(u-x_0)}{u-x_0}\,du\,,$$

der an das Dirichletsche Integral (Nr. 681) erinnert und tatsächlich auch dieselbe Rolle spielt. Durch eine elementare Transformation geht es über in

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\,\frac{\sin At}{t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,\frac{\sin At}{t}\,dt\,. \tag{5}$$

[1]) Vgl. Satz 4 aus Nr. 508, wo wir den Integranden als stetig vorausgesetzt hatten. Hier machen wir diese Voraussetzung nicht.

Für das Weitere benötigen wir die folgende triviale Ergänzung zu dem Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682:

Ist $f(x)$ absolut integrierbar im unendlichen Intervall $[a, \infty]$, so ist

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^\infty g(t) \sin pt \, dt = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{p\to\infty} \int_a^\infty g(t) \cos pt \, dt = 0 .$$

Den Beweis führt man wörtlich so wie den für den Hilfssatz aus Nr. 682 (für den Fall, daß $f(x)$ einen singulären Punkt hat).

713. Hinreichende Kriterien. Wir multiplizieren beide Seiten der Identität

$$1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin At}{t} \, dt \qquad (A > 0)$$

mit der Konstanten S_0, dem vermutlichen Wert des Integrals (2), und subtrahieren das Resultat von (5). So erhalten wir

$$J(A) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t) \frac{\sin At}{t} \, dt , \tag{6}$$

wenn, wie in Nr. 684, zur Abkürzung

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0$$

gesetzt wird.

Auch hier beschränken wir uns auf die Fälle, daß $f(x)$ (a) in x_0 stetig ist, (b) dort von beiden Seiten eine Unstetigkeit erster Art hat.

Dann setzen wir

$$\text{im Fall (a) } S_0 = f(x_0), \qquad \text{im Fall (b) } S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} .$$

Unter diesen Annahmen gilt das

Kriterium von Dini. *Das Fourierintegral von $f(x)$ konvergiert in x_0 und hat dort den Wert S_0, wenn für ein $h > 0$ das Integral*

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} \, dt$$

konvergiert.

Wir zerlegen (6):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^h + \frac{1}{\pi} \int_h^\infty$$

Nach dem Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682 strebt das erste Integral für $A \to \infty$ gegen 0. Das zweite zerlegen wir, nachdem wir $\varphi(t)$ eingesetzt haben, in die Differenz

$$\frac{1}{\pi} \int_h^\infty \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{t} \sin At \, dt - \frac{2}{\pi} S_0 \int_h^\infty \frac{\sin At}{t} \, dt .$$

Da f nach Voraussetzung absolut integrierbar ist, gilt dies auch für

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t},$$

so daß der Minuend für $A\to\infty$ nach der Ergänzung zum Fundamentalhilfssatz (vgl. Nr. 712) gegen 0 strebt. Schließlich strebt auch

$$\int_h^\infty \frac{\sin At}{t}\,dt = \int_{Ah}^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz$$

nach der Definition des uneigentlichen Integrals gegen 0.

Hieraus kann man, wie in Nr. 684, einfachere Kriterien herleiten. So erinnern wir daran, daß die Existenz einer endlichen Ableitung von $f(x)$ in x_0 oder auch schon die Existenz endlicher einseitiger Ableitungen hinreichend ist.

Auf das Fourierintegral ist auch das folgende Kriterium anwendbar:

Kriterium von Dirichlet-Jordan. *Das Fourierintegral von $f(x)$ konvergiert in x_0 und hat dort den Wert S_0, wenn in einem Intervall $[x_0-h, x_0+h]$ um x_0 die Funktion $f(x)$ von endlicher Schwankung ist.*

Stellt man

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt$$

in der Form

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h + \frac{1}{\pi}\int_h^\infty$$

dar, so strebt der zweite Summand für $A\to\infty$ gegen 0, wie wir soeben bewiesen haben. Der erste strebt nach dem Hilfssatz aus Nr. 685 gegen

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]=S_0\,.$$

Die Funktion $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ ist nämlich im t-Intervall $[0, h]$ von endlicher Schwankung, also als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar, und auf diese ist der Hilfssatz einzeln anzuwenden.

714. Modifikation der Grundvoraussetzung. Bisher beruhten unsere Betrachtungen auf der in Nr. 712 formulierten Annahme, die Funktion $f(x)$ sei auf dem ganzen unendlichen Intervall von $-\infty$ bis ∞ absolut integrierbar. Alsdann gelang es unter zusätzlichen Voraussetzungen über das Verhalten der Funktion in der unmittelbaren Umgebung des uns interessierenden Punktes, hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit der Funktion durch ein Fourierintegral herzuleiten.

In der Praxis erweist sich jedoch die erwähnte Grundannahme vielfach als zu einschränkend, so daß wir jetzt nur folgendes voraussetzen wollen:

1°. *Die Funktion $f(x)$ sei in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar.*

Die Bedingung für das Verhalten im Unendlichen ersetzen wir durch die Forderung:

2°. *Für $|x|\geqq H$* (d. h. für $x\geqq H$ und für $x\leqq -H$ einzeln) *sei $f(x)$ monoton abnehmend, und es gelte*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0\,. \tag{7}$$

Wir erinnern daran, daß in den Überlegungen von Nr. 712 die gleichmäßige Konvergenz des Integrals (4),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du\,,$$

bezüglich z für $u=\infty$ und für $u=-\infty$ eine große Rolle spielte. Da für $z\geqq a>0$

$$\left|\int_H^u \cos z\,(u-x_0)\,du\right|\leqq\frac{2}{z}\leqq\frac{2}{a}$$

ist, können wir nach dem Kriterium 2° aus Nr. 515 sofort auf die gleichmäßige Konvergenz dieses Integrals bezüglich z schließen, diesmal aber, wie wir sogleich sehen werden, nur für Werte $z\geqq a$, wobei a eine beliebige feste positive Zahl ist. Das zwingt uns, statt $J(A)$ das Integral

$$J(A,a)=\frac{1}{\pi}\int_a^A dz\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z\,(u-x_0)\,du\qquad(A>a>0)$$

zu betrachten, aus dem sich das Fourierintegral durch doppelten Grenzübergang ergibt: für $A\to\infty$ und $a\to 0$. Für $J(A,a)$ kann man genau wie in Nr. 712 den Ausdruck

$$J(A,a)=\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin at}{t}\,dt \tag{8}$$

erhalten, so daß

$$J(A,a)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(t)\frac{\sin At}{t}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin at}{t}\,dt \tag{9}$$

folgt.

Zunächst beweisen wir

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin at}{t}\,dt=0\,. \tag{10}$$

Wir schreiben unser Integral in der Gestalt $\int_0^{\Delta}+\int_{\Delta}^{\infty}$, wobei Δ jedenfalls so groß angenommen werde, daß $x_0-\Delta<-H$, $x_0+\Delta>H$ ist. Alsdann ist offenbar für genügend kleines a

$$\left|\int_0^{\Delta}\right|\leqq a\int_0^{\Delta}[|f(x_0+t)|+|f(x_0-t)|]\,dt\,,$$

so daß bei jedem Δ dieses Integral für $a\to 0$ gegen 0 strebt.

Für das zweite Integral folgt unter Berücksichtigung von (7) nach dem zweiten Mittelwertsatz aus Nr. 487 die Beziehung

$$\int_{\Delta}^{\infty} f(x_0\pm t)\frac{\sin at}{t}\,dt=f(x_0\pm\Delta)\int_{\Delta}^{\Delta'}\frac{\sin at}{t}\,dt=f(x_0\pm\Delta)\int_{a\Delta}^{a\Delta'}\frac{\sin z}{z}\,dz\quad(\Delta'>\Delta).$$

Da der zweite Faktor beschränkt ist (wir werden das im folgenden nicht nochmals erwähnen) und der erste nach (7) in Abhängigkeit von Δ beliebig klein gemacht werden kann, gilt das auch für das Produkt. Damit ist (10) bewiesen, und das Verhalten der Ausdrücke (8) oder (9) hängt nur von dem Integral ab, das A enthält.

Oben hatten wir die Beziehung

$$\lim_{A\to\infty}\int_h^\infty [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt=0$$

bewiesen (wobei $h>0$ eine beliebige feste Zahl war), und zwar unter der Annahme, daß f im unendlichen Intervall absolut integrierbar sei. Das kann nun auch unter unserer neuen Annahme gezeigt werden. Für $A>h$ gilt nämlich

$$\int_h^\infty = \int_h^A + \int_A^\infty .$$

Das zweite Integral rechts kann ebenso behandelt werden wie das analoge, den Parameter a enthaltende Integral; das erste strebt nach dem Fundamentalhilfssatz aus Nr. 682 für $A\to\infty$ gegen 0.

Jetzt ist klar, daß *sowohl das Dinische als auch das Dirichlet-Jordansche Kriterium* (Nr. 713) *unter unseren neuen Voraussetzungen über $f(x)$ gültig bleibt.*

Aus unseren Ausführungen ergibt sich insbesondere folgende Bedingung für die Anwendbarkeit der Fourierschen Formel: *Ist die Funktion $f(x)$ im ganzen Intervall $[-\infty, \infty]$ von endlicher Schwankung und gilt überdies die Beziehung* (7), *so konvergiert in jedem Punkt x_0 das Fourierintegral, und zwar gegen den Wert S_0.*

Unter diesen Annahmen kann man nämlich $f(x)$ als Differenz zweier monoton wachsender beschränkter Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ darstellen, die für $x\to\infty$ und für $x\to-\infty$ auf Grund von (7) *gleiche* Grenzwerte haben:

$$f_1(\infty)=f_2(\infty)=c', \qquad f_1(-\infty)=f_2(-\infty)=c''.$$

Statt f_1 und f_2 führen wir jetzt folgende Funktionen ein:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} f_1(x)-c' & \text{für } x\geqq 0,\\ f_1(x)-c'' & \text{für } x<0,\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases} f_2(x)-c' & \text{für } x\geqq 0,\\ f_2(x)-c'' & \text{für } x<0.\end{cases}$$

Dann wird wie früher $f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$, aber jetzt

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_1(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_2(x)=0,$$

so daß sowohl für φ_1 als auch für φ_2 die Bedingungen 1° und 2° erfüllt sind. Außerdem ist für jeden Punkt das Kriterium von DIRICHLET-JORDAN anwendbar.

715. Verschiedene Formen der Fourierschen Formel. Wir setzen voraus, daß hinreichende Bedingungen für die Anwendbarkeit der Fourierschen Formel erfüllt sind, und nehmen der Einfachheit halber an, die Funktion $f(x)$ sei in dem betrachteten Punkt x stetig oder sie genüge, falls sie unstetig ist, der Beziehung

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

d. h., der betrachtete Punkt sei regulär (Nr. 684). Dann gilt jedenfalls

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos z\,(u-x)\,du. \tag{11}$$

Da das innere Integral offenbar eine gerade Funktion von z ist, kann man diese Formel auch folgendermaßen schreiben:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dz\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos z\,(u-x)\,du. \tag{12}$$

Man kann ferner leicht zeigen, daß unter den allgemeinen Annahmen von Nr. 712 (oder Nr. 714) über $f(x)$ auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin z\,(u-x)\,du$$

existiert. Dieses Integral ist eine stetige, offenbar ungerade Funktion von z.[1]) Zwar kann man nicht behaupten, daß das uneigentliche Integral von $-\infty$ bis ∞ über diese Funktion existiert, sicher existiert es aber im Sinne des Hauptwertes (Nr. 484), und zwar ist

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin z\,(u-x)\,du = 0\,.$$

Durch Multiplikation mit $\frac{i}{2\pi}$ und Addition zu (12) gelangt man zu

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{iz(u-x)} du\,, \tag{13}$$

wobei das äußere Integral im Sinne des Hauptwertes zu verstehen ist. In dieser Gestalt hat CAUCHY die Formel zuerst dargestellt. Wir wenden uns wieder der Formel (11) zu und schreiben sie in der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx\, dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu\, du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx\, dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu\, du\,.$$

Ist f eine *gerade* Funktion, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos zu\, du = 2 \int_0^{\infty} f(u) \cos zu\, du, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin zu\, du = 0\,,$$

und wir erhalten eine vereinfachte Form, bei der nur Kosinus auftreten:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos zx\, dz \int_0^{\infty} f(u) \cos zu\, du\,. \tag{14}$$

Analog erhalten wir für eine *ungerade* Funktion f eine Darstellung, die nur Sinus enthält:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin zx\, dz \int_0^{\infty} f(u) \sin zu\, du\,. \tag{15}$$

Jetzt sei $f(x)$ nur im Intervall $[0, \infty)$ gegeben und genüge dort analogen Bedingungen, wie wir sie früher in bezug auf das ganze Intervall $(-\infty, \infty)$ gestellt hatten. Setzen wir dann $f(x)$ mittels der Beziehungen (für $x>0$)

$$f(-x) = f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(-x) = -f(x)$$

auf $(-\infty, 0)$ fort, so erhalten wir im ersten Fall eine gerade, im zweiten Fall eine ungerade Funktion im Intervall $(-\infty, \infty)$. Für positive x können wir daher (wenn

[1]) Legt man die Voraussetzungen von Nr. 714 zugrunde, so kann nur bei $z=0$ eine Ausnahme vorliegen.

die entsprechenden hinreichenden Bedingungen erfüllt sind) sowohl (14) als auch (15) benutzen.

Wird im Punkt $x=0$ die Funktion $f(x)$ als stetig vorausgesetzt, so ist auch (13) in diesem Punkt anwendbar; denn die als gerade Funktion fortgesetzte Funktion bleibt hier stetig. Formel (15) ist im Punkt $x=0$ im allgemeinen nicht anwendbar, sie liefert $f(0)$ nur dann, wenn $f(0)=0$ ist.

Diese Überlegungen sind den Ausführungen von Nr. 689 über Fourierreihen völlig analog.

716. Die Fouriertransformation. Wir wollen annehmen, die Fouriersche Formel (12) gelte (eventuell mit Ausnahme endlich vieler Punkte) für alle x aus dem Intervall $(-\infty, \infty)$. Diese Formel kann man auch als Superposition der beiden Formeln

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{izu}du, \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,e^{-ixz}dz \tag{16}$$

auffassen.[1]) Die der Funktion $f(x)$ nach der ersten Formel zugeordnete Funktion $F(x)$ wird die *Fouriertransformierte* von $f(x)$ genannt. Ihrerseits ist nach der zweiten Formel $f(x)$ die (inverse) Fouriertransformierte von $F(x)$. (Man beachte das entgegengesetzte Vorzeichen im Exponenten!) Im allgemeinen ist F auch für reelles f komplex; übrigens kann man die Ausgangsfunktion ebenfalls als komplex ansehen.

Die Beziehung

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,e^{-ixz}dz\,,$$

wobei $f(x)$ gegeben ist, kann als *Integralgleichung* für die unbekannte Funktion $F(z)$ unter dem Integralzeichen aufgefaßt werden. Die Lösung dieser Integralgleichung wird durch

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{izu}du$$

gegeben. Natürlich können diese Integralgleichungen auch ihre Rollen tauschen.

Gilt die Formel (14) für alle positiven x (eventuell mit Ausnahme endlich vieler Punkte), so kann man sie als Superposition der beiden, diesmal reellen und völlig symmetrischen Formeln

$$F_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\cos zu\,du, \qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(z)\cos xz\,dz \tag{17}$$

auffassen. Analoges gilt für (15):

$$F_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(u)\sin zu\,du, \qquad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_s(z)\sin xz\,dz\,. \tag{18}$$

[1]) Das letzte Integral ist, wenn man nur diejenigen Voraussetzungen über $f(x)$ zugrunde legt, von denen oben die Rede war, im Sinne des Hauptwertes zu verstehen.

Die Funktionen $F_c(z)$ bzw. $F_s(z)$ heißen die *Fourierschen Kosinus-* bzw. *Sinustransformierten* der Funktion $f(x)$. Wie wir sehen, ergibt sich f aus F_c (bzw. F_s) genau so wie F_c (bzw. F_s) aus f. Mit anderen Worten, die Funktionen f und F_c (bzw. F_s) sind Kosinus- (bzw. Sinus-)transformierte voneinander. CAUCHY nannte die Paare f und F_c bzw. f und F_s konjugierte Funktionen erster bzw. zweiter Art. Auch hier kann jede der Gleichungen (17) bzw. (18) als *Integralgleichung* aufgefaßt werden, bei der die Funktion außerhalb des Integrals gegeben, die Funktion unter dem Integralzeichen gesucht ist; die Lösung wird jeweils durch die andere Gleichung geliefert.

Vergleicht man F, F_c und F_s miteinander, so kann man folgendes aussagen: Im Fall eines *geraden* $f(x)$ ist

$$F(z)=F_c(z)$$

(für $z<0$ wird $F_c(z)$ gerade fortgesetzt), für *ungerades* $f(x)$ ist

$$F(z)=\mathrm{i}F_s(z)$$

(für $z<0$ wird $F_s(z)$ ungerade fortgesetzt). Im allgemeinen Fall zerlege man $f(x)$ in die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Dann ist

$$F(z)=G_c(z)+\mathrm{i}H_s(z).$$

Dabei ist $G_c(z)$ die Kosinustransformierte von $g(x)$, $H_s(z)$ die Sinustransformierte von $h(x)$.

Daher genügt es, sich bei Beispielen auf Sinus- bzw. Kosinustransformierte zu beschränken.

1. Es sei $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$ $(a>0,\ x\geqq 0)$; dann lautet die Kosinustransformierte

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-az}\cos zx\,\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+x^2}$$

und die Sinustransformierte

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-az}\sin zx\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{a^2+x^2}.$$

Da e^{-ax} in $[0,\infty]$ integrierbar ist, müssen folgende Beziehungen gelten:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2+z^2}\,\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-ax} \qquad (x\geqq 0)$$

und

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\sin zx}{a^2+z^2}\,\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{-ax} \qquad (x>0)$$

oder

$$\int_0^\infty \frac{\cos xz}{a^2+z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-ax}, \qquad \int_0^\infty \frac{z\sin xz}{a^2+z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ax}.$$

In diesen Integralen erkennen wir die bekannten Laplaceschen Integrale (Nr. 522, 4°).

Somit haben wir in den Paaren der Funktionen

$$e^{-ax},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+x^2} \quad \text{und} \quad e^{-ax},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x}{a^2+x^2}$$

Beispiele konjugierter Funktionen erster und zweiter Art (im Sinne CAUCHYS) vor uns. Wären uns die Laplaceschen Integrale nicht bekannt, so würde uns die hier dargelegte Theorie einen Weg zu ihrer Berechnung erschließen.

2. Wir betrachten jetzt die Funktion ($a>0$)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } 0\leqq x<a,\\ \frac{1}{2} & \text{für } x=a,\\ 0 & \text{für } x>a.\end{cases}$$

Dann ist

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ax}{x}.$$

Wenn wir auch in diesem Beispiel die Fouriersche Formel verifizieren wollen, so müssen wir die Kosinustransformierte für die erhaltene Funktion suchen und dann zum Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor (Nr. 497, Beispiel 11)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\cos zx\,dz$$

übergehen, dessen Wert tatsächlich mit der Ausgangsfunktion $f(x)$ übereinstimmt.

Analog ist

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \sin zx\,dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos ax}{x} \quad \text{usw.}$$

Weitere Beispiele für Fouriertransformierte findet der Leser in Nr. 718.

717. Einige Eigenschaften der Fouriertransformierten. Die Untersuchung der Eigenschaften der Fouriertransformierten $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ unter bestimmten Annahmen über $f(x)$ ist recht interessant.

Ist $f(x)$ im Intervall $[-\infty, \infty]$ absolut integrierbar, so ist die Funktion

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{ixu}du \tag{19}$$

in diesem Intervall stetig und strebt für $x\to\pm\infty$ gegen 0.

Die Stetigkeit folgt daraus, daß das Integral für $u=\pm\infty$ in x gleichmäßig konvergiert; es wird nämlich durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,du$$

majorisiert, das den Parameter x nicht enthält. Der Beweis deckt sich mit dem der Sätze 1 aus Nr. 518 und 2 aus Nr. 520, wobei man sich auf Satz 1* aus Nr. 510 (statt auf Satz 1 aus Nr. 506) zu stützen hat. Das Verhalten von F im Unendlichen ergibt sich auf Grund der Schlußbemerkung von Nr. 712.

Nun wollen wir annehmen, für natürliches n sei die Funktion $x^n f(x)$ im Intervall $[-\infty, \infty]$ absolut integrierbar. *Dann ist $F(x)$ sicher n-mal differenzierbar, und alle Ableitungen $F'(x), \ldots, F^{(n)}(x)$ streben für $x \to \pm\infty$ gegen 0.*

Wenn wir das Integral (19) unter dem Integralzeichen nach dem Parameter x differenzieren, so erhalten wir

$$F^{(k)}(x) = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, u^k e^{ixu} du \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Dieses Integral konvergiert gleichmäßig in x, da es von

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)\, u^k|\, du$$

majorisiert wird, und darauf beruht die Anwendbarkeit der Leibnizschen Regel. Der Beweis verläuft ebenso wie der von Satz 3 aus Nr. 520, wobei noch Satz 3* aus Nr. 510 (statt Satz 3 aus Nr. 507) heranzuziehen ist. Das Verhalten der Ableitungen im Unendlichen ergibt sich ebenfalls auf Grund der Schlußbemerkung von Nr. 712.

Somit werden die Differenzierbarkeitseigenschaften von $F(x)$ im Grunde durch das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen bestimmt. Umgekehrt kann man aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von $f(x)$ bis zu einem gewissen Grade Schlüsse über das Verhalten von $F(x)$ im Unendlichen ziehen. Es gilt nämlich: *Streben $f(x)$ und die ersten $n-1$ Ableitungen für $x \to \pm\infty$ gegen 0 und ist die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ im Intervall $[-\infty, \infty]$ absolut integrierbar, so ist*

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n F(x) = 0\,.$$

Das folgt unmittelbar aus nachstehendem Ausdruck für $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{i}{x}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(u)\, e^{ixu} du\,,$$

den man durch wiederholte partielle Integration erhält.

718. Beispiele und Ergänzungen.

1. Man zeige, daß die Kosinustransformierte von $e^{-x^2/2}$ mit dieser Funktion übereinstimmt.

Nach Nr. 519, Beispiel 6(a), ist in der Tat

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2/2} \cos zx\, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}\,.$$

Differenziert man diese Identität nach x, so ergibt sich, daß die Sinustransformierte von $x \cdot e^{-x^2/2}$ gleich dieser Funktion ist.

2. Man beweise

(a) $$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx\, dz = \begin{cases} 1-x & \text{für } 0 \leqq x \leqq 1\,, \\ 0 & \text{für } x \geqq 1\,; \end{cases}$$

(b) $$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \cos xz\, dz = \frac{1-e^{-x}}{x} \qquad (x \geqq 0)\,.$$

Hinweis. Man berechne die Kosinustransformierte der rechts stehenden Funktion von x und benutze die Tatsache, daß die beiden Funktionen konjugiert sind (die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Fourierschen Formeln sind erfüllt).

3. Man löse die Integralgleichung

$$\int_0^\infty g(z) \sin zx \, dz = f(x)$$

im Fall

$$\text{(a)}\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \\ 0 & \text{für} \quad x \geqq \pi, \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x & \text{für} \quad 0 \leqq x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4} & \text{für} \quad x = \pi, \\ 0 & \text{für} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Hinweis. Die Sinustransformierte von $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f(x)$ ist die Lösung.

Lösung. (a) $\frac{\sin \pi x}{1-x^2}$; (b) $\frac{x \cdot \sin \pi x}{1-x^2}$.

4. Man zeige, daß die Funktion $\frac{1}{\sqrt{x}}$ gleichzeitig ihre eigene Kosinus- und ihre Sinustransformierte ist.

Es ist beispielsweise

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin xz}{\sqrt{z}} \, dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{(Nr. 522, 5°)}.$$

5. Man benutze die Sinustransformierte der Funktion $\frac{1}{e^{2\pi x}+1}$, um ein Integral zu berechnen, das auf anderem Wege hier noch nicht berechnet wurde.

Nach Beispiel 8(b) aus Nr. 519 lautet die Sinustransformierte

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \right).$$

Da die ursprüngliche Funktion den Bedingungen für die Anwendbarkeit der Fourierschen Formel genügt, ist sie die Sinustransformierte der oben angegebenen Funktion.

Berücksichtigt man den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz}{z} \, dz = \frac{\pi}{2} \qquad (x > 0),$$

so kann man hieraus leicht die Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \, dz = \frac{\pi}{2} \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}$$

erhalten oder (in anderer Bezeichnung)

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sinh \pi x} \, dx = \frac{1}{2} \tanh \frac{a}{2} \qquad (a > 0).$$

6. Man zeige, daß die Funktion $\frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}x}-1}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}$ mit ihrer Sinustransformierten identisch ist.

Hinweis. Man benutze Nr. 519, Beispiel 8(a).

7. Man prüfe die Fouriersche Formel (14) für die Funktionen $\cos\frac{1}{2}x^2$ und $\sin\frac{1}{2}x^2$ nach (die übrigens den Voraussetzungen, unter denen die Fouriersche Formel hergeleitet wurde, nicht genügen).

Es ist

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos\frac{1}{2}z^2\cos xz\,dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2}z^2-xz\right)dz+\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{2}z^2+xz\right)dz\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{2}z^2-xz\right)dz$$

oder mit $z=x+u$ und unter Berücksichtigung der bekannten Werte der Fresnelschen Integrale (Nr. 522, 5°)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\frac{1}{2}(u^2-x^2)\,du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\cos\frac{1}{2}x^2\int_{-\infty}^{\infty}\cos\frac{1}{2}u^2\,du+\sin\frac{1}{2}x^2\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{1}{2}u^2\,du\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{2}x^2+\sin\frac{1}{2}x^2\right).$$

Analog ergibt sich

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\frac{1}{2}z^2\cos xz\,dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{1}{2}x^2-\sin\frac{1}{2}x^2\right).$$

Jetzt ist schon unmittelbar klar, daß die Kosinustransformierten der erhaltenen Funktionen genau die ursprünglichen Funktionen sind; das ist mit der Gültigkeit der Fourierschen Formel gleichwertig.

8. Man verifiziere (a) die Fouriersche Formel (14) für den Integralkosinus

$$f(x)=\operatorname{ci}x=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt,$$

(b) die Formel (15) für den Integralsinus

$$g(x)=\operatorname{si}x=-\int_x^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Formeln sind nicht erfüllt.

(a) Lösung. Nach Nr. 497, Beispiel 23(a), ist

$$F_c(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos xu\,du\int_u^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt=\begin{cases}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x} & \text{für } x>1,\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{für } x=1,\\ 0 & \text{für } x<1\end{cases}$$

und

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(z)\cos xz\,dz=-\int_1^\infty\frac{\cos xz}{z}\,dz=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt=\operatorname{ci}x\,.$$

(b) Hinweis. Man benutze Nr. 497, Beispiel 23(b).

9. Man verifiziere die Formeln (14) und (15) für die Funktion $\frac{1}{x^s}$ $(0<s<1)$.
Nach Nr. 539, Beispiel 3, ist

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\cos zx}{z^s}\,dz=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}},$$

somit

$$\frac{1}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty\frac{\cos zx}{z^{1-s}}\,dz=\frac{1}{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)\cos\frac{\pi(1-s)}{2}}.$$

Das ist aber gleich $\frac{1}{x^s}$, wenn man den Ergänzungssatz der Γ-Funktion (Nr. 531, 5°) berücksichtigt.

Analog verifiziert man (15).

10. Man verifiziere (14) für die Besselfunktion $J_0(x)$.
Nach Nr. 524, Beispiel 5, ist

$$\int_0^\infty J_0(z)\cos zx\,dz=\begin{cases}0 & \text{für } x>1\,,\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x<1\,.\end{cases}$$

Daher ist

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos ux\,du\int_0^\infty J_0(z)\cos zu\,dz=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}}\,du=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi\,,$$

und das ist tatsächlich gleich $J_0(x)$; vgl. Nr. 695.

11. Für $n=0, 1, 2, \ldots$ betrachten wir die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{n-(1/2)} & \text{für } 0\leqq x<1\,,\\ 0 & \text{für } x>1\,.\end{cases}$$

Ihre Kosinustransformierte ist

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1(1-z^2)^{n-(1/2)}\cos zx\,dz$$

oder, wenn man den Kosinus in eine Reihe entwickelt und gliedweise integriert,

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\nu=0}^\infty(-1)^\nu\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\int_0^1 z^{2\nu}(1-z^2)^{n-(1/2)}\,dz\,.$$

Nun ist aber nach Nr. 534, Beispiel 1,

$$\int_0^1 z^{2\nu}(1-z^2)^{n-(1/2)}\,dz=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+n+1)}=\frac{(2\nu-1)!!\,(2n-1)!!}{2^{\nu+n+1}(\nu+n)!}\,\pi.$$

Daher erhält man, wenn man die Reihenentwicklung der Besselfunktionen J_n (Nr. 395, Beispiel 14) heranzieht,

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(2n-1)!!\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu+n)!}\frac{x^{2\nu}}{2^{n+2\nu}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n-1)!!}{x^n}J_n(x)\,.$$

Da für die ursprüngliche Funktion die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Fourierschen Formel erfüllt sind, ist die Kosinustransformierte von $F_c(x)$ genau die Ausgangsfunktion. Das führt auf das interessante Integral

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n}\cos zx\,dz=\begin{cases}\dfrac{1}{(2n-1)!!}(1-x^2)^{n-(1/2)} & \text{für } 0\leqq x<1\,,\\ 0 & \text{für } x>1\,.\end{cases}$$

Für $n=0$ folgt hieraus die schon bekannte Formel aus Nr. 524, Beispiel 5.

12. In dem Ausdruck für den Integrallogarithmus,

$$\operatorname{li} z=\int_0^z\frac{dt}{\ln t}\qquad(0<z<1)\,,$$

setzen wir $z=e^{-x}$ $(x>0)$ und $t=e^{-u}$; dann erhalten wir

$$\operatorname{li} e^{-x}=-\int_x^\infty\frac{du}{ue^u}\,.$$

Da

$$\int_x^\infty\frac{du}{ue^u}<e^{-x}\quad\text{für } x>1\quad\text{und}\quad\int_x^1\frac{du}{ue^u}<|\ln x|\quad\text{für } 0<x<1$$

gilt, ist li e^{-x} von 0 bis ∞ integrierbar, und somit sind (14) und (15) anwendbar. Für die Kosinustransformierte von li e^{-x} finden wir

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\operatorname{li} e^{-z}\cos zx\,dz=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos zx\,dz\int_z^\infty\frac{du}{ue^u}$$

und durch partielle Integration

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-z}\frac{\sin zx}{z}\,dz=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\arctan x}{x}$$

(Nr. 522, 2°). Hieraus folgt umgekehrt

$$\int_0^\infty\frac{\arctan z}{z}\cos zx\,dz=-\frac{\pi}{2}\operatorname{li} e^{-x}\qquad(x>0)\,,$$

und wir haben damit eine neue Integralformel gefunden.

Analog finden wir mit Hilfe der Sinustransformierten

$$\int_0^\infty\frac{\ln(1+z^2)}{z}\sin zx\,dz=-\pi\operatorname{li} e^{-x}\qquad(x>0).^{1})$$

---

1) Das Integral $\int_0^\infty e^{-z}\dfrac{\cos xz-1}{z}\,dz$ ist leicht durch Differentiation nach dem Parameter x zu berechnen.

13. Man beweise, daß in der Fourierschen Formel

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos z\,(u-x)\,du\,,$$

wenn irgendwelche der oben angegebenen hinreichenden Bedingungen erfüllt sind, das innere Integral durch ein Integral

$$\int_a^b f(u)\cos z\,(u-x)\,du$$

mit beliebigen endlichen Grenzen ersetzt werden kann, sobald x *zwischen* a und b liegt.

Hinweis. Statt $f(u)$ betrachte man die Funktion $f^*(u)$, die für $a<u<b$ mit $f(u)$ übereinstimmt und sonst den Wert 0 hat.

14. Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $(0, \infty)$ monoton nicht wachsend und strebe für $x\to\infty$ gegen 0; in der Umgebung des Nullpunktes setzen wir sie als integrierbar voraus (eventuell uneigentlich, wenn sie für $x=0$ unendlich wird). Man beweise, daß dann ihre Sinustransformierte $F_s(x)$ für $x>0$ eine nichtnegative Funktion ist.

Aus unseren Annahmen folgt zunächst die Existenz des Integrals

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(z)\sin xz\,dz$$

(Nr. 476, 482). Man kann es auch in Form einer Reihe

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi/x}^{(n+1)\pi/x} f(z)\sin xz\,dz$$

darstellen, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind und dem absoluten Betrag nach abnehmen (eine Reihe vom Leibnizschen Typ; Nr. 381). Hieraus folgt die Behauptung.

15. Jetzt sei $f(x)$ in $[0, \infty]$ eine beschränkte monoton abnehmende Funktion, die für $x\to\infty$ gegen 0 strebt. Überdies setzen wir für $x>0$ die Existenz einer negativen monoton nicht abnehmenden Ableitung $f'(x)$ voraus. Man zeige, daß dann die Kosinustransformierte $F_c(x)$ eine nichtnegative, in $[0, \infty]$ integrierbare Funktion ist.

Für $0<a<A<\infty$ gilt

$$\int_a^A |f'(x)|\,dx=-\int_a^A f'(x)\,dx=f(a)-f(A)\,,$$

so daß infolge der Beschränktheit von $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ im Intervall $[0, \infty]$ integrierbar ist. Hieraus folgt aber $f'(x)\to 0$ für $x\to\infty$. Durch partielle Integration erhält man

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(z)\cos xz\,dz=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{x}\int_0^{\infty} f'(z)\sin xz\,dz;$$

wendet man auf das letzte Integral das in Beispiel 14 Bewiesene an, so ergibt sich $F_c(x)\geqq 0$.

Da für $f(x)$ die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Fourierschen Formel erfüllt sind, erhalten wir für $x=0$

$$f(+0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dz\int_0^{\infty} f(u)\cos zu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F_c(z)\,dz\,,$$

wodurch die Integrierbarkeit $F_c(x)$ bewiesen ist.

Bemerkung. Wir weisen darauf hin, daß keiner dieser beiden Sätze für die Transformation des anderen Typus richtig ist. Für die in Nr. 716, Beispiel 2, betrachtete Funktion $f(x)$ wechselt die entsprechende Kosinustransformierte

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

das Vorzeichen. Nimmt man $f(x) = e^{-ax}$ (Beispiel 1 aus Nr. 716), so behält die Sinustransformierte

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2+x^2}$$

zwar für $x>0$ ihr Vorzeichen, ist aber in $[0,\infty]$ nicht integrierbar.

719. Funktionen zweier Veränderlicher. Die Fouriersche Formel kann auch auf den Fall einer Funktion mehrerer Veränderlicher $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ausgedehnt werden. Wir beschränken uns auf Funktionen zweier Veränderlicher $f(x_1, x_2)$, die wir als in der ganzen Ebene $(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$ definiert und nach jeder einzelnen Veränderlichen differenzierbar voraussetzen.

Ferner sei $f(x_1, x_2)$ für jedes feste x_2 im Intervall $[-\infty, \infty]$ nach x_1 absolut integrierbar, analog für jedes feste x_1 in $[-\infty, \infty]$ nach x_2 absolut integrierbar. Wenden wir für festes x_2 auf $f(x_1, x_2)$ (das ist eine Funktion *einer* Veränderlichen) die uns bekannte Fouriersche Formel (11) an,[1]) so erhalten wir

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^\infty f(u_1, x_2) \cos z_1 (u_1 - x_1)\, du_1 .$$

Analog läßt sich die Funktion $f(u_1, x_2)$ der Veränderlichen x_2 bei festem u_1 folgendermaßen darstellen:

$$f(u_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz_2 \int_{-\infty}^\infty f(u_1, u_2) \cos z_2 (u_2 - x_2)\, du_2 .$$

Durch Einsetzen erhalten wir die gesuchte Formel

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^\infty \cos z_1 (u_1 - x_1)\, du_1 \int_0^\infty dz_2 \int_{-\infty}^\infty f(u_1, u_2) \cos z_2 (u_2 - x_2)\, du_2$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dz_1 \int_{-\infty}^\infty du_1 \int_0^\infty dz_2 \int_{-\infty}^\infty f(u_1, u_2) \cos z_1 (u_1 - x_1) \cos z_2 (u_2 - x_2)\, du_2 .$$

Ebenso wie in Nr. 715 kann man auch hierbei zu der Exponentialform übergehen:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dz_1 \int_{-\infty}^\infty du_1 \int_{-\infty}^\infty dz_2 \int_{-\infty}^\infty f(u_1, u_2)\, e^{i[z_1(u_1 - x_1) + z_2(u_2 - x_2)]} du_2 , \quad (20)$$

wobei die Integrale nach z_1 und z_2 im Sinne des Hauptwertes zu verstehen sind.

[1]) Diese Formel ist hier auf Grund unserer Voraussetzungen anwendbar. Natürlich könnte man diese Voraussetzungen auch ändern.

Ist $f(x_1, x_2)$ sowohl in bezug auf x_1 als auch in bezug auf x_2 *gerade*, so kann man alle Intervalle auf das Intervall $[0, \infty]$ reduzieren und erhält

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \cos z_1 x_1 \, dz_1 \int_0^\infty \cos z_1 u_1 \, du_1 \int_0^\infty \cos z_2 x_2 \, dz_2 \int_0^\infty f(u_1, u_2) \cos z_2 u_2 \, du_2, \quad (21)$$

wobei nur Kosinus auftreten. Ist $f(x_1, x_2)$ in beiden Veränderlichen *ungerade*, so hat man die Kosinus durch Sinus zu ersetzen.

Beide Formeln gelten auch für Funktionen $f(x_1, x_2)$, die nur im ersten Quadranten gegeben sind, da man sie nach Belieben gerade oder ungerade auf die ganze Ebene fortsetzen kann (für die Formeln, die Sinus enthalten, bilden die Punkte auf den Achsen Ausnahmen).

In allen diesen Formeln darf die Integrationsreihenfolge nicht geändert werden. (Es sei denn, man vertausche die Indizes 1 und 2.) Gelingt es jedoch, die Vertauschbarkeit der beiden inneren Integrationen zu beweisen, so nehmen die Formeln eine besonders symmetrische Gestalt an. Dann ist Formel (20) den beiden folgenden äquivalent:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, u_2) \, e^{i(z_1 u_1 + z_2 u_2)} \, du_2 ,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} F(z_1, z_2) \, e^{-i(z_1 x_1 + z_2 x_2)} \, dz_2 ;$$

$F(z_1, z_2)$ heißt die *Fouriertransformierte* von $f(x_1, x_2)$.

Analog läßt sich Formel (21) in zwei Formeln aufspalten, die dann völlig gleiche Gestalt haben:

$$F(z_1, z_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty du_1 \int_0^\infty f(u_1, u_2) \cos z_1 u_1 \cos z_2 u_2 \, du_2 ,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz_1 \int_0^\infty F_c(z_1, z_2) \cos z_1 x_1 \cos z_2 x_2 \, dz_2 .$$

Hier ist $F_c(z_1, z_2)$ die *Kosinustransformierte* von $f(x_1, x_2)$, und $f(x_1, x_2)$ ist die Kosinustransformierte von $F_c(z_1, z_2)$.

Die Übertragung auf die Sinustransformierte überlassen wir dem Leser.

§ 7. Anwendungen

720. Die Abhängigkeit der exzentrischen Anomalie eines Planeten von seiner mittleren Anomalie. Die Entwicklung einer Funktion in eine Fourierreihe führt zu einer bequemen analytischen Darstellung dieser Funktion, die häufig für numerische Zwecke geeignet ist. Wir entnehmen der theoretischen Astronomie das nachstehende wichtige Beispiel: Wir haben uns schon einmal mit der *Keplerschen Gleichung*

$$E = M + \varepsilon \sin E \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

beschäftigt, welche die *exzentrische Anomalie* E eines Planeten mit seiner *mittleren Anomalie* M verknüpft (Nr. 83; Nr. 452, Beispiel 3). Nach dieser Gleichung ist E eine eindeutige und differenzierbare Funktion von M, die überdies ungerade ist. Eine Vergrößerung von M um 2π zieht offenbar auch eine Vergrößerung von E um 2π nach sich. Daher ist $\sin E$ eine periodische Funktion von M mit der Periode 2π und in eine Sinusreihe (nach Vielfachen von M) entwickelbar:

$$\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nM .$$

Jetzt müssen noch die Koeffizienten b_n bestimmt werden.

Nach Formel (21) aus Nr. 689 ist

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^{\pi} \sin E \sin nM \, dM = -\sin E \frac{\cos nM}{n} \Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nM \frac{d \sin E}{dM} dM .$$

Das integralfreie Glied verschwindet, da für $M = 0$ bzw. π auch $E = 0$ (bzw. π) ist. Ersetzt man im letzten Integral die Veränderliche M durch die Veränderliche E, die im gleichen Intervall variiert, und subtrahiert die Keplersche Gleichung, so erhält man

$$\frac{\pi}{2} b_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nM \cos E \, dE = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos (nE - n\varepsilon \sin E) \cos E \, dE$$

$$= \frac{1}{2n} \left[\int_0^{\pi} \cos \{(n+1) E - n\varepsilon \sin E\} \, dE + \int_0^{\pi} \cos \{(n-1) E - n\varepsilon \sin E\} \, dE \right] .$$

Nach einer bekannten Integralformel für die Besselsche Funktion $J_m(x)$ ist

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (mE - x \sin E) \, dE = J_m(x)$$

(vgl. z. B. Nr. 695) und somit

$$b_n = \frac{1}{n} [J_{n+1}(n\varepsilon) + J_{n-1}(n\varepsilon)] .$$

Andererseits ergibt sich leicht die Identität

$$\frac{x}{2n} [J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)] = J_n(x) .$$

Daher ist $b_n = \frac{2}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon)$, also

$$\sin E = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM$$

und schließlich

$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM .$$

Dieser Ausdruck für die exzentrische Anomalie E mit Hilfe der mittleren Anomalie spielt in der Himmelsmechanik eine große Rolle. Wir hatten schon früher eine Entwicklung von E nach Potenzen der Exzentrizität ε mit von M abhängenden Koeffizienten gefunden (Nr. 452, Beispiel 3). Sie galt aber nur für $\varepsilon < 0{,}6627 \ldots$ und konnte z. B. auf Kometenbahnen mit großer Exzentrizität nicht angewendet werden. Unsere jetzige Formel ist von diesem Mangel frei.

721. Das Problem der schwingenden Saite. Die wichtigsten Anwendungen der Fourierreihen (und -integrale) liegen auf dem Gebiet der mathematischen Physik. Um dies an Beispielen zu illustrieren, beginnen wir mit dem klassischen Problem der schwingenden Saite, wo die Frage, wann eine Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, eine wichtige Rolle gespielt hat.

Unter einer *Saite* verstehen wir einen frei verbiegbaren gewichtslosen Faden. Eine solche Saite der Länge l sei an den Enden $x=0$ und $x=l$ der x-Achse eingespannt und unter Einwirkung einer Spannung H längs dieser Achse in Gleichgewicht (Abb. 138). Wir stellen uns vor, im Zeitpunkt $t=0$ sei die Saite aus der Gleichgewichtslage gebracht; ihre Punkte mögen außerdem eine gewisse Geschwindigkeit in vertikaler Richtung besitzen. Dann beginnen die Punkte der Saite in einer vertikalen Ebene zu schwingen.[1]) Nimmt man an, jeder Punkt M der Saite mit der Abszisse x schwinge streng vertikal, so ist seine Auslenkung y aus der Gleichgewichtslage zur Zeit $t \geqq 0$ eine Funktion der beiden Veränderlichen x und t:

$$y = y(x, t) .$$

Diese Funktion soll bestimmt werden.

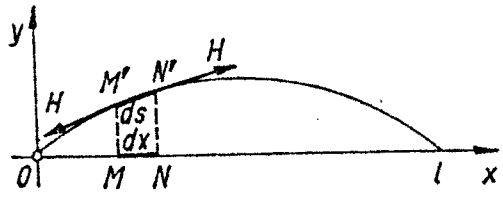

Abb. 138

Wir beschränken uns auf *kleine Schwingungen*, bei denen y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ klein sind (so daß sich die Saite nur wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt und die Neigung der Tangente an die Saite klein bleibt); alsdann werden wir, wie üblich, die Quadrate dieser Größen vernachlässigen dürfen.

Wir betrachten das Element $ds = M'N'$ der Saite im Zeitpunkt t (vgl. Abb. 138); seine Länge können wir auf Grund unserer Annahmen gleich seiner ursprünglichen Länge $dx = MN$ im Anfangszeitpunkt ansehen, eben wegen

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx dx .$$

Da wir die Längenänderungen vernachlässigen, können wir auch die Spannung der Saite als unverändert ansehen.

Auf das herausgegriffene Saitenelement wirkt im Punkt M' die Spannung H tangential nach links, in N' dieselbe Spannung tangential nach rechts. Sind α bzw. $\bar{\alpha}$ die Neigungswinkel der Tangenten, so ist die Summe der vertikalen Komponenten dieser Kräfte (die wir allein zu berücksichtigen brauchen) gleich

$$H \cdot (\sin \bar{\alpha} - \sin \alpha) = H \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{N'} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'} \right] = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx .$$

Auch hier haben wir wieder benutzt, daß wir die Quadrate kleiner Größen vernachlässigen dürfen; z. B. setzten wir

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} .$$

Ferner haben wir den Zuwachs der Funktion $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch ihr Differential ersetzt.

Ist ϱ die lineare Dichte der Saite, so ist die Masse des Elements gleich $\varrho ds = \varrho dx$. Nach dem Newtonschen Gesetz muß nun das Produkt aus der Masse ϱdx und der Be-

[1]) Die Ebene der Abb. 138 nehmen wir ebenfalls als vertikal an.

schleunigung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ gleich der Kraft sein, die auf das Element wirkt; also ist

$$\varrho dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx .$$

Setzt man $a^2 = \frac{H}{\varrho}$, so erhält man die *partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{2}$$

welche die zu untersuchende Erscheinung beschreibt.

Außerdem muß die gesuchte Funktion $y = y(x, t)$ noch gewissen Forderungen, zunächst den sogenannten *Randbedingungen*, etwa

$$y(0, t) = 0, \qquad y(l, t) = 0 \tag{3}$$

genügen, die zum Ausdruck bringen, daß die Saite an den Enden eingespannt ist. Beschreiben ferner $f(x)$ und $g(x)$ für $0 \leqq x \leqq l$ die Auslenkung und die Geschwindigkeit der Punkte der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$, so müssen auch die *Anfangsbedingungen*

$$y(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = g(x) \tag{4}$$

erfüllt sein. Natürlich muß $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$ sein.

Unser Problem findet also seinen mathematischen Ausdruck darin, daß eine Funktion $y(x, t)$ zu bestimmen ist, die der Differentialgleichung (2) *und den Bedingungen* (3) *und* (4) *genügt.*

Wir beginnen, dem von FOURIER angegebenen Weg folgend, damit, daß wir *von der Nullösung verschiedene partikuläre Lösungen* suchen, welche überdies den Randbedingungen (3) genügen (um die Anfangsbedingungen kümmern wir uns vorläufig noch nicht). Diese partikulären Lösungen setzen wir als Produkt zweier Funktionen an, von denen die eine nur von x, die andere nur von t abhängt: $y = X(x)\, T(t)$. Dann nimmt (2) die Gestalt $XT'' = a^2 X'' T$ an (wobei die Striche die Ableitungen nach der Variablen bedeuten, von der die Funktion abhängt) oder

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{X''}{X} . \tag{5}$$

Die linke Seite hängt nicht von x, die rechte nicht von t ab; also ist der gemeinsame Wert weder von x noch von t abhängig, sondern eine Konstante, die wir mit $-a^2\lambda^2$ $(\lambda > 0)$ bezeichnen. Dann kann man (5) in die beiden Differentialgleichungen

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{6}$$

aufspalten; ihre mit je zwei willkürlichen Konstanten behafteten Lösungen („allgemeine Integrale") lauten

$$T = A \cos a\lambda t + B \sin a\lambda t, \qquad X = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x .$$

Damit $y = XT$ den Randbedingungen (3) genügt, muß ihnen X genügen. Für $x = 0$ ergibt sich sofort $C = 0$; setzt man $x = l$, so kommt man, da D nicht auch gleich 0 sein kann (denn sonst hätte man die triviale Lösung $X \equiv 0$), zu der Bedingung $\sin \lambda l = 0$, also zu $\lambda l = n\pi$ für natürliches n, d. h. zu folgenden Werten für λ:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \qquad \lambda_2 = 2\frac{\pi}{l}, \ldots, \qquad \lambda_n = n\frac{\pi}{l}, \ldots^{1}) . \tag{7}$$

Setzt man für $\lambda = \lambda_n$

$$AD = a_n, \qquad BD = b_n ,$$

[1]) Hätten wir den konstanten Wert in (5) in der Form $a^2\lambda^2$ angesetzt, so könnten die Randbedingungen nur von der Funktion $X \equiv 0$ erfüllt werden.

so gelangt man zu partikulären Lösungen

$$y_n = (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Man sieht leicht, daß auch die Summe beliebig vieler solcher Lösungen die gestellten Forderungen erfüllt. Es liegt daher nahe, die aus allen Lösungen gebildete *unendliche* Reihe zu betrachten:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin \lambda_n x . \tag{8}$$

Wir nehmen einstweilen an, diese Reihe konvergiere und ihre Summe genüge der Differentialgleichung (2). Die Bedingungen (3) sind offenbar erfüllt. Jetzt erst wenden wir uns den Anfangsbedingungen (4) zu, und zwar wollen wir a_n, b_n so wählen, daß die Funktion (8) auch ihnen genügt. Wir setzen die Reihe als gliedweise differenzierbar voraus, so daß also

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n a\lambda_n \sin a\lambda_n t + b_n a\lambda_n \cos a\lambda_n t) \sin \lambda_n x \tag{9}$$

gilt. Setzen wir in (8) und (9) $t = 0$, so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = f(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n b_n \sin \lambda_n x = g(x) . \tag{10}$$

Wenn aber die Funktionen f und g den Bedingungen für die Entwickelbarkeit in Fourierreihen genügen, werden die gesuchten Koeffizienten durch die Formeln (24) und (25) aus Nr. 689 bestimmt:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \lambda_n x \, dx, \qquad b_n = \frac{2}{a\lambda_n l} \int_0^l g(x) \sin \lambda_n x \, dx . \tag{11}$$

Somit haben wir wenigstens *formal* die vollständige Lösung unseres Problems in Form der Reihe (8) mit den Koeffizienten (11) erhalten.

Allerdings ist die Frage, ob (8) wirklich eine Lösung ist, noch offen. Um sie beantworten zu können, müssen wir bestimmte Bedingungen für f und g formulieren; und zwar sei g differenzierbar, f zweimal differenzierbar, f'' und g' seien in $[0, l]$ von endlicher Schwankung. Dann gilt

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \lambda_n b_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$ [1]

Beide Entwicklungen (10) gelten im ganzen Intervall $[0, l]$; auch die Reihe (8) konvergiert, und die durch sie dargestellte Funktion genügt den Rand- und den Anfangsbedingungen (die gliedweise Differenzierbarkeit nach t ist jetzt durch die gleichmäßige Konvergenz von (9) gewährleistet). Etwas komplizierter ist der Beweis der Tatsache, daß y auch der Differentialgleichung genügt.[2])

Wir weisen zunächst darauf hin, daß die Reihen (10) auch außerhalb des Intervalls $[0, l]$ konvergieren; bezeichnen wir ihre Summen wie oben mit $f(x)$ bzw. $g(x)$, so erhalten

---

[1]) Das folgt aus den allgemeinen Formeln (21) der Nr. 708 und der Bemerkung in Nr. 709; die Ersetzung des Intervalls $[0, \pi]$ durch $[0, l]$ ist natürlich unwesentlich. Dabei ziehen die naturgemäßen Bedingungen

$$f(0) = f(l) = 0, \qquad g(0) = g(l) = 0 ,$$

die sich daraus ergeben, daß die Saite an den Enden eingespannt ist, sofort das Verschwinden der dort mit B_n bezeichneten Größe nach sich.

[2]) Das könnte man durch gliedweise Differentiation zeigen, wenn man die Funktionen f und g den äußerst starken Einschränkungen unterwirft, daß die Koeffizienten a_n und b_n von höherer Ordnung klein werden.

wir somit eine Entwicklung dieser Funktionen im ganzen unendlichen Intervall $(-\infty, \infty)$, wobei die Differenzierbarkeitseigenschaften dieser Funktionen erhalten bleiben, mit Ausnahme der Punkte kl für ganzes k. Die in jedem endlichen Intervall gleichmäßig konvergente Reihe für $g(x)$ kann man gliedweise integrieren, so daß

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \lambda_n x = \frac{1}{a} g_1(x)$$

ist, wobei $g_1(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist. Durch Auflösen der Klammern in (8) erhält man diesen Ausdruck in der Gestalt

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{2}\Big\{ &\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n (x+at) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n (x-at) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \lambda_n (x+at) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \lambda_n (x-at)\Big\} \\ = \frac{1}{2}\Big\{ &f(x+at) + f(x-at) + \frac{1}{a} g_1(x+at) - \frac{1}{a} g_1(x-at)\Big\}. \end{aligned}$$

Durch zweimaliges Differenzieren nach x und t kann man sich jetzt leicht davon überzeugen, daß y auch (2) befriedigt.

Die Lösung der hier betrachteten Aufgabe hätte man auch direkt in der zuletzt angegebenen Form erhalten können; die Lösung in der Form der trigonometrischen Reihe (8) hat jedoch den Vorzug, daß sie es ermöglicht, wichtige physikalische Besonderheiten der untersuchten Erscheinung aufzudecken. Wenn man nämlich in (8) die beiden Glieder in der Klammer zusammenfaßt, kann man

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin\left(\frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n\right)$$

schreiben. Wir sehen, daß sich die vollständige Schwingung der Saite aus den einzelnen Schwingungen

$$y_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin\left(\frac{n\pi a}{l} t + \alpha_n\right)$$

additiv zusammensetzt. Alle Punkte der Saite, die an einer solchen Elementarschwingung beteiligt sind, schwingen mit derselben Frequenz bzw. mit ein und derselben Periode, der jeweils eine bestimmte Tonhöhe entspricht. Die Amplitude der Schwingung jedes Punktes hängt von seiner Lage ab und ist gleich $A_n \left|\sin \frac{n\pi}{l} x\right|$. Denkt man sich die ganze Saite in n gleiche Teile geteilt, so befinden sich die Punkte desselben Teilstückes stets in gleicher, die Punkte benachbarter Teilstücke jeweils in entgegengesetzter Phase. Abb. 139 zeigt aufeinanderfolgende Lagen der Saite für $n = 1, 2, 3, 4$.

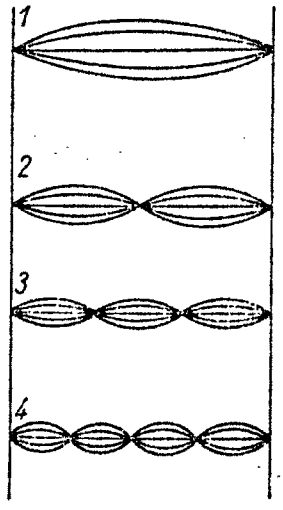

Abb. 139

Die Punkte, die ein Teilstück von dem nächsten trennen, befinden sich in Ruhe, es sind die sogenannten *Knoten*. Die Mitten der Teilstücke (die *Bäuche*) schwingen mit der größten Amplitude. Diese Erscheinung heißt *stehende Welle*; daher wird die Fouriersche Methode auch *Methode der stehenden Wellen* genannt.

Der *Grundton* wird durch die erste Komponente y_1 bestimmt; ihm entsprechen die Frequenz $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\varrho}}$ und die Periode $T_1 = 2l\sqrt{\frac{\varrho}{H}}$. Die übrigen Töne, die gleichzeitig mit dem Grundton von der Saite hervorgebracht werden, charakterisieren eine bestimmte Färbung des Tones, sein *Timbre*. Drückt man einen Finger auf die Mitte der Saite, so ersterben sowohl der Grundton als auch die ungeraden Obertöne, für welche dort ein Bauch war. Die geraden Obertöne, für welche in der Mitte ein Knoten war, ertönen weiter; unter ihnen spielt der zweite Oberton mit der Frequenz $T_2 = \frac{1}{2} T_1$ eine wichtige Rolle, und die Saite liefert die *Oktave* des ursprünglichen Tones. Alles das kann man aus der Lösung unserer Aufgabe ablesen.

722. Das Problem der Wärmeausbreitung in einem endlichen Stab. Gegeben sei ein dünner homogener Stab der Länge l zwischen den Punkten $x=0$ und $x=l$ der x-Achse. Den Querschnitt des Stabes, der den Flächeninhalt σ habe, nehmen wir als so klein an, daß alle Punkte dieses Querschnittes in jedem Moment dieselbe Temperatur haben. Die Mantelfläche des Stabes denken wir uns gegenüber dem umgebenden Medium isoliert.[1]) Im Anfangszeitpunkt $t=0$ sei eine Temperaturverteilung u längs des Stabes gegeben, die durch die Funktion $f(x)$, $0 \leqq x \leqq l$, charakterisiert sei. Außerdem sei eine Wärmeregelung gegeben, die an den Stabenden aufrechterhalten werde. Das Problem besteht darin, die Temperatur der einzelnen Punkte des Stabes als Funktion der Abszisse x und der Zeit t zu bestimmen: $u = u(x, t)$.

Wir betrachten ein Element des Stabes zwischen den Querschnitten x und $x+\mathrm{d}x$. Die Wärmemenge, die während eines „unendlich kleinen" Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ durch den linken Querschnitt in das Element eintritt, ist nach Nr. 666, Beispiel 2, gleich

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}t\ ,$$

wobei k das Wärmeleitvermögen des Stabes ist; das Minuszeichen erklärt sich dadurch, daß die Wärme von wärmeren zu kälteren Stellen fließt. Analog dazu fließt durch den rechten Querschnitt die Wärmemenge

$$-k\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

nach außen. Ändert man hier das Vorzeichen, so erhält man die Wärmemenge, die durch diesen Querschnitt von rechts nach links, d. h. in dieses Element hineinfließt. Somit ist die gesamte Wärmemenge, die sich in dem herausgegriffenen Element in dem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ ansammelt, gleich

$$k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\ .$$

Diese Menge kann man auch anders erhalten, wenn man davon ausgeht, daß durch sie eine Temperaturerhöhung um $\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t$ verursacht wird. Bezeichnet man mit c und ϱ die Wärmekapazität bzw. die Dichte des Stabmaterials, so läßt sich die aufgewandte Wärmemenge folgendermaßen ausdrücken:

$$c\varrho\sigma\,\mathrm{d}x \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}t\ .$$

---

[1]) Statt eines Stabes könnte man sich eine unendliche Platte zwischen den Ebenen $x=0$ und $x=l$ vorstellen, unter der Annahme, daß in jeder zur x-Achse senkrechten Ebene ein und dieselbe Temperatur herrscht.

Vergleicht man beide Ausdrücke, so kommt man zu der fundamentalen *Differentialgleichung der Wärmeleitung:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a=\sqrt{\frac{k}{c\varrho}}. \tag{12}$$

Übrigens könnte man diese Gleichung auch aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\Delta u$$

erhalten, die in Nr. 672, 3°, für den Raum hergeleitet wurde, wenn man u nur von x, nicht aber von y und z abhängen läßt.

(a) Wir nehmen zunächst an, an den beiden Stabenden werde dieselbe Temperatur, etwa 0°, aufrechterhalten. Das führt zu den *Randbedingungen*

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad (t\geqq 0).$$

Die *Anfangsbedingung*

$$u(x,0)=f(x) \qquad (0\leqq x\leqq l) \tag{13}$$

hatten wir schon erwähnt. Im Zusammenhang mit den Randbedingungen muß übrigens $f(0)=f(l)=0$ sein. Zur Ermittlung der Funktion $u(x,t)$, die der Differentialgleichung (12) und allen aufgezählten Bedingungen genügen soll, verwenden wir die Fouriersche Methode.

Wie oben setzen wir $u=XT$ an, so daß die Gleichung die Gestalt

$$XT'=a^2X''T \quad \text{oder} \quad \frac{T'}{T}=a^2\frac{X''}{X}$$

annimmt. Setzt man den *konstanten* Wert dieser Quotienten gleich $-a^2\lambda^2$ $(\lambda>0)$, so erhält man die beiden Gleichungen $T'+a^2\lambda^2T=0$, also

$$T=Ce^{-a^2\lambda^2t}, \tag{14}$$

und $X''+\lambda^2X=0$, also

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x. \tag{15}$$

Damit XT den Randbedingungen genügt, muß $A=0$, $\lambda l=n\pi$ $(n=1,2,3,\ldots)$ sein, so daß λ wie auch bei der vorigen Aufgabe nur die Werte (7) annehmen kann.[1]) Mit $BC=b_n$ erhält man die partikulären Lösungen

$$u_n=b_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\lambda_nx \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Die allgemeine Lösung setzen wir als Reihe

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\lambda_nx \tag{16}$$

an. Um die Anfangsbedingungen zu befriedigen, müssen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x) \qquad (0\leqq x\leqq l)$$

setzen. Ist $f(x)$ stetig und von endlicher Schwankung, so genügt es,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

zu setzen, um diese Entwicklung zu erhalten.

Diesmal bereitet der Nachweis, daß die formale Lösung (16) tatsächlich Lösung ist,

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 477.

keine Schwierigkeit. Das Vorhandensein des Faktors

$$e^{-a^2\lambda_n^2 t} = e^{\frac{-a^2n^2\pi^2}{l^2}t}$$

ermöglicht es, die Reihe (16) gliedweise einmal nach t und zweimal nach x zu differenzieren; denn die Reihen, die man so erhält, konvergieren gleichmäßig in x $(0 \leqq x \leqq l)$ und in t $(t \geqq a > 0)$.

(b) Es werde jetzt am Ende $x = l$ die konstante Temperatur u_0 aufrechterhalten, das Ende $x = 0$ sei isoliert, so daß keine Wärme hindurchtritt. Diesen Annahmen entsprechen die Randbedingungen

$$u(l, t) = u_0 \qquad (u_0 \text{ konstant}), \qquad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 . \tag{17}$$

Die Anfangsbedingungen bleiben wie oben.

Übrigens ist es jetzt zweckmäßig, statt u eine neue unbekannte Funktion v durch $u = u_0 + v$ einzuführen. Für v ergibt sich offenbar dieselbe Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} .$$

Die Randbedingungen werden durch einfachere ersetzt:

$$v(l, t) = 0, \qquad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 .$$

Schließlich lautet die Anfangsbedingung:

$$v(x, 0) = f(x) - u_0 .$$

Setzen wir wieder $v = XT$, so erhalten wir für T und X die früheren Ausdrücke (14) und (15). Da

$$\frac{dX}{dx} = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x$$

ist, liefert die zweite Randbedingung $B = 0$, und aus der ersten erhalten wir $\cos \lambda l = 0$, so daß diesmal λ folgende Werte annehmen kann:

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2l}, \ \lambda_2 = 3\frac{\pi}{2l}, \ \ldots, \ \lambda_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}, \ \ldots$$

Schließlich kommen wir zu den partikulären Lösungen

$$v_n = a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

aus denen wir die allgemeine Lösung

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

bilden.

Die Anfangsbedingungen führen jetzt auf die Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos (2n-1)\frac{\pi x}{2l} = f(x) - u_0 ,$$

welche nicht die Standardform hat (vgl. Nr. 690, Aufgabe 25). Man kann jedoch leicht zeigen, daß unter den üblichen Voraussetzungen über $f(x)$ diese Entwicklung tatsächlich für

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos (2n-1)\frac{\pi x}{2l}\, dx - \frac{4}{\pi} u_0 \frac{1}{2n-1}$$

gilt. Somit ergibt sich schließlich

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

mit den soeben angegebenen Werten für die a_n. Daß das tatsächlich eine Lösung ist, beweist man wie im Fall (a).

Insbesondere gilt für $f(x)=0$ die Entwicklung

$$u=u_0-\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\,e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x\,.$$

Nach dieser Formel wurden für $u_0=300$ und $a^2=0{,}139$[1]) die Werte von u für verschiedene t und x berechnet und in Abb. 140 (siehe S. 484) die Kurven der Temperaturverteilung im Stab zu verschiedenen Zeitpunkten konstruiert.

723. Der Fall eines unendlichen Stabes. Wir wollen jetzt dasselbe Problem der Wärmeausbreitung für den Fall eines beiderseitig unendlichen, längs der x-Achse liegenden Stabes lösen (oder für den ganzen Raum, wenn nur in allen Punkten jeder zur x-Achse senkrechten Ebene dieselbe Temperatur herrscht). Die Differentialgleichung bleibt dieselbe; die Anfangsbedingung $u(x,0)=f(x)$ muß diesmal im ganzen Intervall $(-\infty,\infty)$ gelten, während Randbedingungen jetzt natürlich entfallen.

Ebenso wie in den vorhergehenden Fällen erhält man eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung in der Gestalt

$$u=(a\cos\lambda x+b\sin\lambda x)\,e^{-a^2\lambda^2 t};$$

aber hier liegt kein Grund vor, aus allen positiven Werten von λ bestimmte Werte auszuwählen. Daher setzt man auch a und b als von λ abhängig an, $a=a(\lambda)$, $b=b(\lambda)$, und erhält dann naturgemäß die allgemeine Lösung in Gestalt eines Integrals:

$$u=\int_0^{\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda\,. \tag{18}$$

Damit diese (bisher nur formale) Lösung der Anfangsbedingung genügt, müssen die Funktionen $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ so gewählt werden, daß für alle x

$$\int_0^{\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda=f(x)$$

gilt.

Wir wollen nun annehmen, $f(x)$ genüge den Bedingungen, welche die Anwendbarkeit der Fourierschen Formeln gestatten; dann können wir

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\cos\lambda z\,dz+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz\right\}d\lambda$$

schreiben. Dann ist klar, daß $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ durch

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\cos\lambda z\,dz,\qquad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\sin\lambda z\,dz$$

bestimmt werden. Somit nimmt (18) folgende Gestalt an:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\cos\lambda(z-x)\,dz\,.$$

---

[1]) Es handelt sich dabei um einen 5 cm langen gußeisernen Stab. In diesem Fall ist

$$\varrho=0{,}0072\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{cm}^3},\qquad c=0{,}544\ \mathrm{J/(kg\cdot K)},\qquad k=0{,}544\cdot10^{-3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{K}\cdot\mathrm{s}},\qquad \text{also}$$

$$a^2=0{,}139\,\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}\,.$$

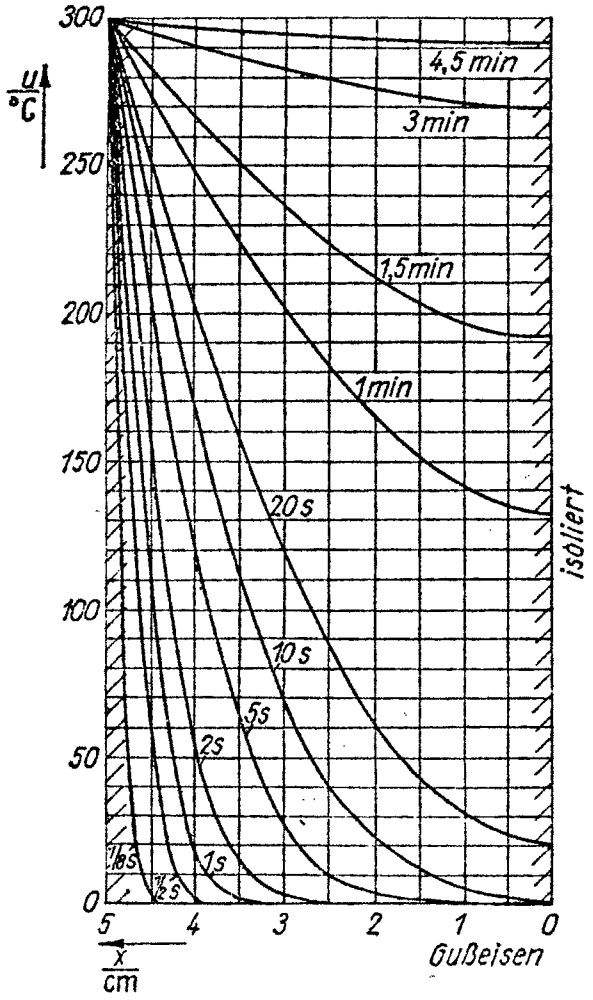

Abb. 140

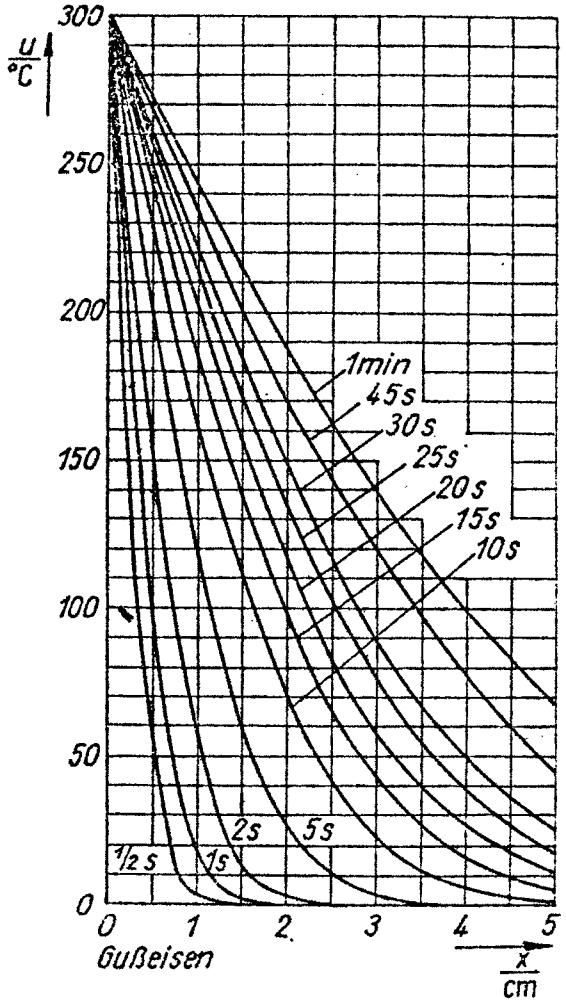

Abb. 141

Ist $f(x)$ in $[-\infty, \infty]$ absolut integrierbar, so kann man nach Nr. 521, Satz 5, die Reihenfolge der Integration nach λ und z vertauschen:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz \int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos \lambda (z-x)\, d\lambda .$$

Das innere Integral läßt sich nach Nr. 519, Beispiel 6 (a), direkt berechnen; es ergibt sich zu

$$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}}$$

Somit erhalten wir die Lösung in der folgenden einfachen Gestalt:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}}\, dz . \tag{19}$$

Durch Differentiation nach t und zweimaliges Differenzieren nach x unter dem Integralzeichen überzeugt man sich leicht davon, daß (19) tatsächlich Lösung ist.

Nun untersuchen wir noch den Fall eines einseitig unendlichen, etwa längs der positiven x-Achse gelegenen Stabes (bzw. des Halbraumes $x \geqq 0$). In $x = 0$ werde die Temperatur 0° aufrechterhalten. Für diesen Fall läßt sich die Lösung (19) benutzen, wenn die jetzt nur für $0 \leqq x \leqq \infty$ gegebene Funktion $f(x)$ so auf die negative Achse fortgesetzt

wird, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}\, dz = 0$$

ist. Da der Exponentialfaktor gerade ist, genügt es offenbar, $f(x)$ ungerade fortzusetzen. Dann kann man die Lösung des neuen Problems folgendermaßen schreiben:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(z) \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} \right] dz .$$

Fordert man $u = u_0$ für $x = 0$, so erhält man, wenn man $v = u - u_0$ einführt, leicht

$$u = u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [f(z) - u_0] \cdot \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} \right] dz .$$

Wir vermerken noch den Spezialfall $f(x) = 0$:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-\xi^2}\, d\xi \right\}.$$

Für $u_0 = 300°$ und $a^2 = 0{,}139$ (vgl. die Fußnote auf S. 483) wurden nach dieser Formel für verschiedene x und t die Werte von u berechnet und die Kurven der Temperaturverteilung im Stab zu verschiedenen Zeitpunkten gezeichnet. Diese Kurven zeigt Abb. 141; man stelle sie der Abb. 140 gegenüber.

724. Modifikation der Randbedingungen. Wir wenden uns wieder dem Problem der Wärmeausbreitung in einem endlichen Stab zu (vgl. Nr. 722), ändern aber die Randbedingungen. Wie damals nehmen wir an, in $x = 0$ werde die Temperatur 0° unterhalten; jedoch möge in $x = l$ eine freie Wärmeausstrahlung in das umgebende Medium der Temperatur 0° stattfinden. Die im Zeitintervall dt diesem Ende zufließende Wärmemenge ist (vgl. Nr. 722)

$$-k\sigma \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}\, dt ,$$

und die nach dem Newtonschen Gesetz ausgestrahlte Wärmemenge (vgl. Nr. 359, Beispiel 3) ist $h\sigma u(l, t)\, dt$, wobei h die „Wärmeübergangszahl" ist. Daher muß am Ende $x = l$ die Bedingung

$$-k \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = h u(l, t)$$

erfüllt sein.

Betrachtet man jetzt eine partikuläre Lösung der Form $U = XT$, so findet man wie in Nr. 722

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}, \qquad X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x .$$

Die Randbedingung für $x = 0$ liefert $A = 0$, die für $x = l$ führt auf

$$-k\lambda \cos \lambda l = h \sin \lambda l \quad \text{oder} \quad \tan \lambda l = -\frac{k}{hl} \lambda l .$$

Somit ergeben sich für λ die Werte $\lambda_n = \frac{\xi_n}{l}$, wobei die ξ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) die positiven Wurzeln der transzendenten Gleichung $\tan \xi = -\frac{k}{hl} \xi$ (vgl. Nr. 679, Beispiel 4) sind. Die allgemeine Lösung ergibt sich in der Gestalt

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x ,$$

ähnlich (16), jedoch, und das ist wichtig, sind die Zahlen λ_n hier von *sehr viel komplizierterer* Natur.

Die Anfangsbedingung führt auf die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\xi_n x}{l} = f(x); \tag{20}$$

man kann sie als verallgemeinerte Fourierreihe von $f(x)$ im Intervall $[0, l]$ auffassen und dann unter Benutzung der Orthogonalität der Funktionen $\sin \frac{\xi_n x}{l}$ (Nr. 679, Beispiel 4) in üblicher Weise die b_n bestimmen:

$$b_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{\xi_n x}{l} \, dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\xi_n x}{l} \, dx}.$$

Wir lassen die Frage nach den Bedingungen, denen $f(x)$ genügen muß, damit (20) gilt, offen, beschränken uns hier also auf die formale Lösung des Problems.

725. Die Wärmeausbreitung in einer kreisförmigen Platte. Wir betrachten ein weiteres Wärmeausbreitungsproblem, nämlich das einer kreisförmigen Platte vom Radius R mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Wir setzen die Platte als so dünn voraus, daß die Temperatur nicht von der Höhe abhängt; die Grund- und die Deckfläche seien isoliert. Außerdem beschränken wir uns auf den Fall, daß die Temperatur u nur vom Radius r, nicht aber vom Polarwinkel θ abhängt. Wir geben die entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen an. (Man könnte ebensogut einen beiderseits unendlichen Zylinder untersuchen.)

Da u nicht von z abhängt, können wir die allgemeine Wärmeleitungsgleichung (Nr. 672, 3°)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

in der Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

schreiben. Wenn wir zu Polarkoordinaten übergehen, wird der Klammerausdruck zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

(vgl. Nr. 222, Beispiel 1). Da u nicht von θ abhängt, ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \tag{21}$$

Die Anfangstemperaturverteilung möge in der Gestalt $u(r, 0) = \varphi(r)$ $(0 \leqq r \leqq R)$ gegeben sein, die Randbedingung als $u(R, t) = 0$. Wir gehen auch hier nach der Fourierschen Methode vor, setzen also die Lösung von (21) in der Gestalt

$$u = R(r)\, T(t)$$

an. Zur Bestimmung von R und T erhalten wir die Differentialgleichungen

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0, \qquad R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0.$$

Aus der ersten ergibt sich $T=Ce^{-a^2\lambda^2 t}$. Die zweite geht mit $r=\frac{1}{\lambda}z$ und $R\left(\frac{1}{\lambda}z\right)=J(z)$ in die Besselsche Gleichung

$$J''+\frac{1}{z}J'+J=0$$

über, die die Besselfunktion J_0 als Lösung hat; wir setzen $R(r)=J_0(\lambda r)$. Dann liefert die Randbedingung $J_0(\lambda R)=0$. Wir haben schon in Nr. 679, Beispiel 6, darauf hingewiesen, daß $J_0(x)$ unendlich viele positive Nullstellen ξ_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ hat; für λ sind also die Werte $\lambda_n=\frac{\xi_n}{R}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ möglich. Ihnen entsprechen die partikulären Lösungen

$$u_n=c_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)\,,$$

aus denen wir die allgemeine Lösung

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)$$

bilden.

Nun müssen noch die c_n bestimmt werden. Die bisher noch nicht verwendete Anfangsbedingung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)=\varphi(r)\qquad(0\leqq r\leqq R)\,.$$

Wir hatten schon in Nr. 679, Beispiel 6, gesehen, daß das System $\{J_0(\xi_n x)\}$ im Intervall [0, 1] orthogonal mit dem Gewicht[1]) x ist; offenbar ist das System $\left\{J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\right\}$ orthogonal in $[0, R]$ mit dem Gewicht r. In üblicher Weise erhalten wir die Koeffizienten dieser verallgemeinerten Fourierreihe:

$$c_n=\frac{\int_0^R r\varphi(r)\,J_0\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\mathrm{d}r}{\int_0^R rJ_0^2\left(\frac{\xi_n r}{R}\right)\mathrm{d}r}\,.$$

Auch hier geben wir uns mit der formalen Lösung zufrieden.

Der Leser sieht, daß die letzten beiden Beispiele schon über den Rahmen der gewöhnlichen Fourierreihen hinausgehen. Wir haben sie gebracht, um zu zeigen, wie wichtig die Anwendung der Fourierreihen in der mathematischen Physik ist. Sie spielen dort zwar eine große Rolle, genügen aber bei weitem nicht allen Erfordernissen der mathematischen Physik. Eine kleine Modifikation der Bedingungen des Problems macht andere Entwicklungen notwendig. Das mindert aber keinesfalls die Bedeutung der Fourierreihen und des weiteren Ausbaues ihrer Theorie: Die Fourierreihen sind das einfachste und wichtigste Beispiel einer Orthogonalentwicklung. Nach diesem Muster wurden alle übrigen ähnlichen Entwicklungen, deren Theorie engstens mit der Theorie der Fourierreihen zusammenhängt, konstruiert.

726. Praxis der harmonischen Analyse. Ein Schema für 12 Ordinaten. Die Entwicklung einer Funktion in eine Fourierreihe, eine *harmonische Analyse*, kann sich bei Problemen der Praxis, z. B. in der Maschinenkunde und in der Elektrotechnik, als notwendig er-

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 372.

weisen. In diesen Fällen kann man aber sehr selten die Euler-Fourierschen Formeln

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,^{1}) \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

zur tatsächlichen Berechnung der Koeffizienten benutzen. Das liegt daran, daß die zu entwickelnde Funktion gewöhnlich in Tabellenform oder graphisch gegeben ist. Es gibt also keinen analytischen Ausdruck für sie; oft wird gerade die harmonische Analyse vorgenommen, um einen analytischen Ausdruck (und sei er auch nur angenähert richtig) für die Funktion zu erhalten. Unter diesen Umständen muß man zur Ermittlung der Fourierkoeffizienten Näherungsmethoden verwenden. Natürlich kann man in der Praxis nur mit den ersten Gliedern einer trigonometrischen Reihe rechnen. Zum Glück nehmen die Fourierkoeffizienten in den meisten Fällen rasch ab, so daß die weiteren nur wenig Einfluß ausüben.

Meistens werden äquidistante Ordinaten vorgegeben (oder einer Kurve entnommen), d. h. Werte der Funktion y in äquidistanten Argumentwerten x. Für diese Ordinaten kann man mit Hilfe der in Kap. IX, § 5, dargelegten Methoden die Größen (22) näherungsweise berechnen. Diese Berechnung ist aber sehr umständlich, so daß man zur Vereinfachung, sozusagen zur Automatisierung, zahlreiche Verfahren erdacht hat, von denen wir jetzt eines darlegen.

Es sei beispielsweise das Intervall $[0, 2\pi]$ in k gleiche Teile geteilt, und es seien die Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k = y_0$ in den Teilpunkten

$$0, \frac{2\pi}{k}, 2\cdot\frac{2\pi}{k}, \ldots, (k-1)\,\frac{2\pi}{k}, 2\pi$$

bekannt. Dann ist nach der Trapezformel (Nr. 322)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{k}\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} + \frac{1}{2}y_k\right]$$

(natürlich nur näherungsweise).

Auf Grund der Periodizität der Funktion ist $y_k = y_0$, also

$$ka_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1}\,. \tag{23}$$

Analog ergibt sich mit Hilfe der Trapezformel für die übrigen Integrale (22)

$$a_m = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{k}\left[y_0 + y_1\cos m\frac{2\pi}{k} + y_2\cos m\frac{4\pi}{k} + \cdots + y_{k-1}\cos m\frac{2(k-1)\,\pi}{k}\right]$$

oder

$$\frac{k}{2}a_m = y_0 + y_1\cos m\frac{2\pi}{k} + y_2\cos m\frac{4\pi}{k} + \cdots + y_{k-1}\cos m\frac{2(k-1)\,\pi}{k}\,, \tag{24}$$

ebenso

$$\frac{k}{2}b_m = y_1\sin m\frac{2\pi}{k} + y_2\sin m\frac{4\pi}{k} + \cdots + y_{k-1}\sin m\frac{2(k-1)\,\pi}{k}\,. \tag{25}$$

Wir setzen zunächst $k=12$ und gehen von den zwölf Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{11}$ aus, die den 12 äquidistanten Argumentwerten

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

---

1) Wir kehren hier zu der Bezeichnung des freien Gliedes einer trigonometrischen Entwicklung mit a_0 $\left(\text{nicht } \frac{a_0}{2}\right)$ zurück.

d. h. den Winkeln

$$0°,\ 30°,\ 60°,\ 90°,\ 120°,\ 150°,\ 180°,\ 210°,\ 240°,\ 270°,\ 300°,\ 330°$$

entsprechen.

Alle Faktoren, mit denen man diese Ordinaten zu multiplizieren hat, reduzieren sich auf $+1$, $\pm\sin 30° = \pm 0{,}5$, $\pm\sin 60° = \pm 0{,}866$. Man prüft nämlich leicht nach, daß

$$\left.\begin{aligned}
12a_0 &= y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9+y_{10}+y_{11},\\
6a_1 &= (y_2+y_{10}-y_4-y_8)\sin 30°+(y_1+y_{11}-y_5-y_7)\sin 60°+(y_0-y_6),\\
6a_2 &= (y_1+y_5+y_7+y_{11}-y_2-y_4-y_8-y_{10})\sin 30°+(y_0+y_6-y_3-y_9),\\
6a_3 &= y_0+y_4+y_8-y_2-y_6-y_{10},\\
6b_1 &= (y_1+y_5-y_7-y_{11})\sin 30°+(y_2+y_4-y_8-y_{10})\sin 60°+(y_3-y_9),\\
6b_2 &= (y_1+y_2+y_7+y_8-y_4-y_5-y_{10}-y_{11})\sin 60°,\\
6b_3 &= y_1+y_5+y_9-y_3-y_7-y_{11}\quad\text{usw.}
\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

ist. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}
6a_1 &= y_0+y_1\cos 30°+y_2\cos 60°+y_3\cos 90°+y_4\cos 120°+y_5\cos 150°\\
&\quad +y_6\cos 180°+y_7\cos 210°+y_8\cos 240°+y_9\cos 270°+y_{10}\cos 300°\\
&\quad +y_{11}\cos 330°\\
&= y_0+y_1\sin 60°+y_2\sin 30°-y_4\sin 30°-y_5\sin 60°-y_6-y_7\sin 60°\\
&\quad -y_8\sin 30°+y_{10}\sin 30°+y_{11}\sin 60°,
\end{aligned}$$

was dem oben angegebenen Ausdruck entspricht. Um die Berechnungen (etwa die Multiplikationen) auf ein Minimum zu reduzieren, führt man sie nach einem bestimmten Schema aus, das von RUNGE[1]) stammt.

Zunächst schreibt man die Ordinaten in der nachstehend angegebenen Anordnung, darunter die Summe und die Differenz je zweier übereinander stehender Ordinaten:

	Ordinaten						
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Summen	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Differenzen		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

Danach verfährt man mit diesen Summen und Differenzen ähnlich:

	Summen					Differenzen			
	u_0	u_1	u_2	u_3		v_1	v_2	v_3	
	u_6	u_5	u_4			v_5	v_4		
Summen	s_0	s_1	s_2	s_3	Summen	σ_1	σ_2	σ_3	
Differenzen	d_0	d_1	d_2		Differenzen	δ_1	δ_2		

Mit Hilfe dieser Größen s, d, σ, δ können wir die gesuchten Koeffizienten folgendermaßen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
12a_0 &= s_0+s_1+s_2+s_3,\\
6a_1 &= d_0+0{,}866d_1+0{,}5d_2,\\
6a_2 &= (s_0-s_3)+0{,}5\,(s_1-s_2),\\
6a_3 &= d_0-d_2,\\
6b_1 &= 0{,}5\sigma_1+0{,}866\sigma_2+\sigma_3,\\
6b_2 &= 0{,}866\,(\delta_1+\delta_2),\\
6b_3 &= \sigma_1-\sigma_3,\quad\text{usw.}
\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

Man prüft leicht nach, daß diese Formeln genau die Werte (26) liefern.

[1]) CARL RUNGE, 1856–1927, deutscher Mathematiker.

727. Beispiele.

1. Abb. 142 zeigt das Diagramm der Tangentialkräfte (an der Kurbelwelle) für eine Dampfmaschine.[1]) Im Zusammenhang mit dem Problem der kleinen Schwingungen der Welle ist es interessant, die harmonischen Komponenten der Tangentialkraft T als Funktion des Drehwinkels φ der Kurbelwelle zu bestimmen. Dem Diagramm entnimmt man 12 äquidistante Ordinaten und führt die harmonische Analyse nach dem angegebenen Schema aus:

T	-7200	-300	7000	4300	0	-5200	-7400
		250	4500	7600	3850	-2250	
u	-7200	-50	11500	11900	3850	-7450	-7400
v		-550	2500	-3300	-3850	-2950	

u	-7200	-50	11500	11900	v	-550	2500	-3300
	-7400	-7450	3850			-2950	-3850	
s	-14600	-7500	15350	11900	σ	-3500	-1350	-3300
d	200	7400	7650		δ	2400	6350	

Jetzt ist nach (27)

$$
\begin{aligned}
12a_0 &= -14600-7500+15350+11900=5150, & a_0 &= 429,\\
6a_1 &= 200+7400\cdot 0{,}866+7650\cdot 0{,}5=10433, & a_1 &= 1739,\\
6a_2 &= (-14600-11900)+(-7500-15350)\cdot 0{,}5=-37925, & a_2 &= -6321,\\
6a_3 &= 200-7650=-7450, & a_3 &= -1242,\\
6b_1 &= -3500\cdot 0{,}5-1350\cdot 0{,}866-3300=-6219, & b_1 &= -1037,\\
6b_2 &= (2400+6350)\cdot 0{,}866=7578, & b_2 &= 1263,\\
6b_3 &= -3500+3300=-200, & b_3 &= -33,
\end{aligned}
$$

also

$$T = 429+1739\cos\varphi-1037\sin\varphi-6321\cos 2\varphi+1263\sin 2\varphi$$
$$-1242\cos 3\varphi-33\sin 3\varphi+\cdots$$

oder, wenn man die Kosinus und Sinus desselben Winkels zusammenfaßt,

$$T = 430+2020\sin(\varphi+121°)+6440\sin(2\varphi+281°)+1240\sin(3\varphi+268°)+\cdots.$$

Wir sehen, daß hier die *zweite* Harmonische den größten Einfluß ausübt.

2. Um sich an einem Beispiel darüber klar zu werden, mit welcher Genauigkeit man etwa die Fourierkoeffizienten einer Funktion aus 12 Ordinaten ihrer Kurve erhält, wenden wir diese Methode auf eine analytisch gegebene Funktion an und vergleichen die Näherungsresultate mit den genauen.

Zunächst betrachten wir die in $[0, 2\pi]$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x)$$

und für die übrigen x durch

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

definierte Funktion, deren Kurve Abb. 143 zeigt.

---

[1]) Ähnliche Diagramme ergeben sich auf Grund der Indikatordiagramme unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte.

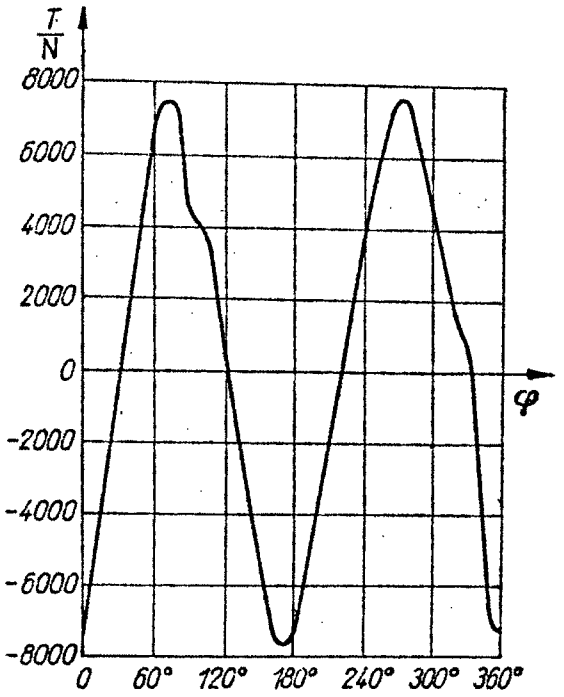

Abb. 142

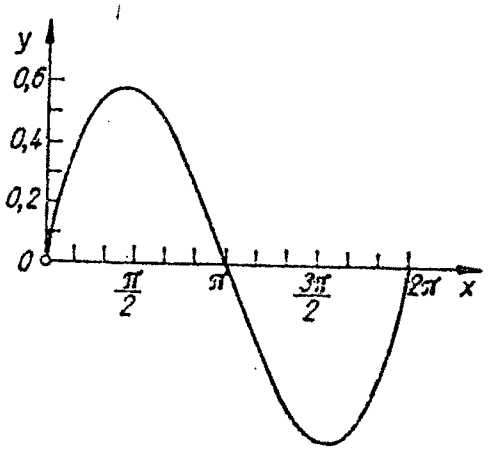

Abb. 143

Wir berechnen die Tabelle

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0,400	0,582	0,589	0,465	0,255	0	−0,255	−0,465	−0,589	−0,582	−0,400	0

Dabei kann man die leicht zu beweisende Identität

$$f(2\pi - x) = -f(x)$$

benutzen.

Nach dem Rungeschen Schema finden wir für diese y die Koeffizienten $b_1 = 0{,}608$, $b_2 = 0{,}076$, $b_3 = 0{,}022$; alle u_i und damit alle a_n sind gleich 0 (Nr. 690, Beispiel 22).

Formel (22) liefert direkt (durch dreimalige partielle Integration)

$$b_m = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin mx \, dx = \frac{6}{m^3\pi^2};$$

demnach ist

$$b_1 = \frac{6}{\pi^2} = 0{,}6079, \qquad b_2 = \frac{3}{4\pi^2} = 0{,}0760, \qquad b_3 = \frac{2}{9\pi^2} = 0{,}0225,$$

in guter Übereinstimmung mit den obigen Zahlen.

3. Jedoch ergibt sich nicht immer ein so genaues Resultat. Als Beispiel betrachten wir nun die in $[0, 2\pi]$ durch

$$y = f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$$

definierte und mit der Periode 2π fortgesetzte Funktion, deren Kurve Abb. 144 zeigt.

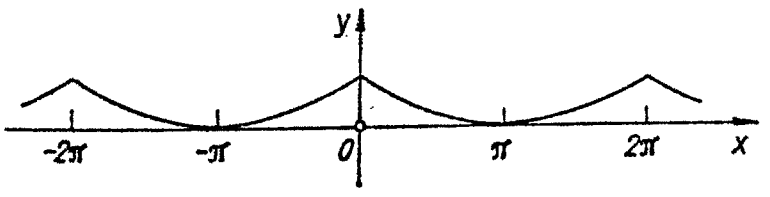

Abb. 144

Unter Benutzung der trivialen Identität $f(2\pi - x) = f(x)$ erhalten wir die Tabelle

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	1	0,694	0,444	0,250	0,111	0,028	0	0,028	0,111	0,250	0,444	0,694	1

Nach dem Rungeschen Schema ergibt sich $a_0 = 0{,}338$, $a_1 = 0{,}414$, $a_2 = 0{,}111$, $a_3 = 0{,}056$; alle v_i und alle b_m sind 0 (Nr. 690, Beispiel 22). Die genauen Werte der Koeffizienten sind

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \, dx = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \,,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos mx \, dx = \frac{4}{m^2\pi^2} \qquad (m \geqq 1) \,,$$

insbesondere ist

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2} \approx 0{,}405 \,, \qquad a_2 = \frac{1}{\pi^2} \approx 0{,}101 \,, \qquad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} \approx 0{,}045 \,.$$

Für die ersten beiden Koeffizienten beträgt der relative Fehler höchstens 1,5 bis 2 %, aber für die folgenden erreicht er 10 % (a_2) und sogar 20 % (a_3). In Nr. 730 wenden wir uns dem Problem der Genauigkeit unserer Näherungsformeln nochmals zu. Aber schon jetzt ist klar, daß zur Erhöhung der Genauigkeit mehr Ordinaten erforderlich sind.

728. Ein Schema für 24 Ordinaten. Wir wollen jetzt annehmen, es seien 24 Ordinaten gegeben oder abgelesen, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{23}$, die den Argumenten

$$0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{23\pi}{12}, \quad \text{d. h.} \quad 0°, 15°, 30°, 45°, \ldots, 345°$$

entsprechen.

Diesmal sind die Faktoren, mit denen zur angenäherten Berechnung der Fourierkoeffizienten die Ordinaten zu multiplizieren sind, die Werte

$$\pm 1, \pm\sin 15°, \pm\sin 30°, \pm\sin 45°, \pm\sin 60°, \pm\sin 75°.$$

Ohne auf Einzelheiten einzugehen (da alles in völliger Analogie zum Vorhergehenden verläuft), geben wir hier ein Rechenschema an, das ebenfalls von RUNGE stammt. Nach einem vom Leser leicht durchzuführenden Ansatz wird ihm das Schema ohne weitere Erläuterungen klar sein.

	Ordinaten												
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
		y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	
Summen	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
Differenzen		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	

	Summen							Differenzen					
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7		v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7	
Summen	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	Summen	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
Differenzen	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5		Differenzen	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	

	Summen					Differenzen				
	p_0	p_1	p_2	p_3		s_1	s_2	s_3		
	p_6	p_5	p_4			s_5	s_4			
Summen	k_0	k_1	k_2	k_3	Summen	m_1	m_2	m_3		
Differenzen	l_0	l_1	l_2		Differenzen	n_1	n_2			

Mit den q und r brauchen keine Additionen und Subtraktionen ausgeführt zu werden.

Mit Hilfe der so errechneten k, l, m, n, q und r lassen sich die Fourierkoeffizienten folgendermaßen ausdrücken:

$$
\left.\begin{aligned}
24a_0 &= k_0 + k_1 + k_2 + k_3 ,\\
12a_1 &= [q_0 + 0{,}5q_4 + 0{,}6124\ (q_1 + q_5)] + [0{,}8660q_2 + 0{,}7071q_3 + 0{,}3536\ (q_1 - q_5)] ,\\
12a_2 &= l_0 - 0{,}8660l_1 + 0{,}5l_2 ,\\
12a_3 &= (q_0 - q_4) + 0{,}7071\ (q_1 - q_3 - q_5) ,\\
12a_4 &= (k_0 - k_3) + 0{,}5\ (k_1 - k_2) ,\\
12a_5 &= [q_0 + 0{,}5q_4 + 0{,}6124\ (q_1 + q_5)] - [0{,}8660q_2 + 0{,}7071q_3 + 0{,}3536\ (q_1 - q_5)] ,\\
12a_6 &= l_0 - l_2 ,\\
12b_1 &= [0{,}5r_2 + r_6 + 0{,}6124\ (r_1 + r_5)] + [0{,}7071r_3 + 0{,}8660r_4 - 0{,}3536\ (r_1 - r_5)] ,\\
12b_2 &= 0{,}5m_1 + 0{,}8660m_2 + m_3 ,\\
12b_3 &= (r_2 - r_6) + 0{,}7071\ (r_1 + r_3 - r_5) ,\\
12b_4 &= 0{,}8660\ (n_1 + n_2) ,\\
12b_5 &= [0{,}5r_2 + r_6 + 0{,}6124\ (r_1 + r_5)] - [0{,}7071r_3 + 0{,}8660r_4 - 0{,}3536\ (r_1 - r_5)] ,\\
12b_6 &= m_1 - m_3 \quad \text{usw.}
\end{aligned}\right\} \qquad (28)
$$

Die weiteren Koeffizienten ergeben sich für 24 Ordinaten mit immer geringerer Genauigkeit.

Wir machen den Leser noch auf folgendes aufmerksam. Um a_1 und a_5 zu erhalten, muß man die Ausdrücke in den eckigen Klammern einzeln ausrechnen und dann addieren (für a_1) bzw. subtrahieren (für a_5). Entsprechendes gilt für b_1 und b_5.

729. Beispiele.

1. Wir wenden uns wieder dem Diagramm der Abb. 142 zu, entnehmen ihm 24 Ordinaten und führen die harmonische Analyse nach folgendem Schema durch:

T	−7200	−4150	−300	3250	7000	7450	4300
		−5150	250	2300	4500	6800	7600
u	−7200	−9300	− 50	5550	11500	14250	11900
v		1000	−550	950	2500	650	− 3300

(Fortsetzung)

T	2750	0	−2650	−5200	− 7700	−7400	
	6400	3850	650	−2250	− 4850		
u	9150	3850	−2000	−7450	−12550	−7400	
v	−3650	−3850	−3300	−2950	− 2850		
u	− 7200	− 9300	− 50	5550	11500	14250	11900
	− 7400	−12550	−7450	−2000	3850	9150	
p	−14600	−21850	−7500	3550	15350	23400	11900
q	200	3250	7400	7550	7650	5100	

v	1000	− 550	950	2500	650	−3300
	−2850	−2950	−3300	−3850	−3650	
r	−1850	−3500	−2350	−1350	−3000	−3300
s	3850	2400	4250	6350	4300	

p	−14600	−21850	− 7500	3550	s	3850	2400	4250
	11900	23400	15350			4300	6350	
k	− 2700	1550	7850	3550	m	8150	8750	4250
l	−26500	−45250	−22850		n	− 450	−3950	

Hieraus folgt nach (28)

$a_0 = 427$, $a_1 = 1685$, $a_2 = -6426$, $a_3 = -1175$, $a_4 = -783$,
$a_5 = -163$, $a_6 = -304$, $b_1 = -938$, $b_2 = 1325$, $b_3 = -87$,
$b_4 = -318$, $b_5 = -398$, $b_6 = 325$.

Es ergibt sich

$$T = 427 + 1685\cos\varphi - 938\sin\varphi - 6426\cos 2\varphi + 1325\sin 2\varphi - 1175\cos 3\varphi - 87\sin 3\varphi - 783\cos 4\varphi - 318\sin 4\varphi - 163\cos 5\varphi - 398\sin 5\varphi - 304\cos 6\varphi + 325\sin 6\varphi + \cdots$$

oder, zusammengefaßt und gerundet,

$$T = 430 + 1930\sin(\varphi + 119°) + 6560\sin(2\varphi + 282°) + 1180\sin(3\varphi + 266°) + 845\sin(4\varphi + 248°) + 430\sin(5\varphi + 202°) + 445\sin(6\varphi + 317°) + \cdots.$$

Ein Vergleich mit den Größen der Entwicklung von T in Nr. 727, Beispiel 1, zeigt in den ersten drei Harmonischen eine mehr oder weniger gute Übereinstimmung.

2. Die Berechnung der 24 Ordinaten für die Kurve

$$y = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$$

aus Nr. 727, Beispiel 3, überlassen wir dem Leser, ebenso wie die Bestimmung der Näherungswerte für $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ nach dem erwähnten Schema.

Lösung. Es ist $a_0 \approx 0{,}334$, $a_1 \approx 0{,}407$, $a_2 \approx 0{,}104$, $a_3 \approx 0{,}047$, $a_4 \approx 0{,}028$, $a_5 \approx 0{,}019$, $a_6 \approx 0{,}014$, während die genaueren Werte

$$a_0 \approx 0{,}333,\ a_1 \approx 0{,}405,\ a_2 \approx 0{,}101,\ a_3 \approx 0{,}045,\ a_4 \approx 0{,}025,\ a_5 \approx 0{,}016,\ a_6 \approx 0{,}011$$

sind.

Außer diesem angegebenen Schema existieren andere zur Berechnung von Näherungswerten für die Koeffizienten: für 16 und für 32 Ordinaten (die in der Schiffahrt zur Untersuchung von Kompaßabweichungen benutzt werden), für 36 Ordinaten (in der Elektrotechnik) usw. Man hat auch Schablonen ausgearbeitet, mit denen sich die Berechnungen „automatisch" ausführen lassen. In allen diesen Fällen ist das Wesen der Verfahren, mit deren Hilfe sich die Berechnung der Fourierkoeffizienten vereinfachen läßt, das gleiche wie bei dem oben betrachteten.

730. Vergleich der angenäherten und der exakten Werte der Fourierkoeffizienten. Ist $f(x)$ in $[0, 2\pi]$ durch einen analytischen Ausdruck gegeben und zweimal differenzierbar, so kann der Fehler der oben gefundenen Näherungsformel für die Fourierkoeffizienten wie üblich ermittelt werden (Nr. 727). Jetzt stellen wir uns ein anderes Ziel; wir wollen nämlich eine Beziehung zwischen dem Näherungswert eines gegebenen Koeffizienten und den genauen Werten dieses und der anderen Koeffizienten herleiten. Sie liefert zwar keine Abschätzung für die Fehler, wirft aber Licht auf das Problem im Großen und gibt eine zweckmäßige Orientierung.

Wir nehmen also für $y=f(x)$ in $[0, 2\pi]$ die Fourierreihenentwicklung

$$y=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

als gültig an. Wir haben die Koeffizienten mit großen Buchstaben bezeichnet, um sie von den Näherungswerten, die wir mit kleinen Buchstaben bezeichnen, zu unterscheiden. Wir setzen $x=\frac{2i\pi}{k}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ und berechnen die speziellen Werte der y_i, die in (23), (24) und (25) vorkommen und die Näherungswerte für die Koeffizienten liefern:

$$y_i=A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2in\pi}{k}+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2in\pi}{k}.$$

Wir setzen diese Werte in (23) ein; durch Vertauschen der Summationen finden wir

$$a_0=\frac{1}{k}\left\{kA_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sum_{i=0}^{k-1} \cos\frac{2in\pi}{k}+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sum_{i=1}^{k-1} \sin\frac{2in\pi}{k}\right\}.$$

Wie man leicht sieht, sind aber die Summen $\sum_{i=0}^{k-1} \cos\frac{2in\pi}{k}$, $\sum_{i=1}^{k-1} \sin\frac{2in\pi}{k}$ gleich 0, mit Ausnahme des Falles, daß n ein Vielfaches von k ist; dann ist die erste gleich k (die zweite ist auch dann 0). Hieraus ergibt sich sofort

$$a_0=A_0+A_k+A_{2k}+A_{3k}+\cdots. \tag{29}$$

Setzen wir die Ausdrücke für y_i in (24) ein und vertauschen die Summationen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a_m=\frac{2}{k}\Bigg\{&A_0\sum_{i=0}^{k-1}\cos i\frac{2m\pi}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sum_{i=0}^{k-1}\cos i\frac{2m\pi}{k}\cos i\frac{2n\pi}{k}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sum_{i=0}^{k-1}\cos i\frac{2m\pi}{k}\sin i\frac{2n\pi}{k}\Bigg\}\\ =\frac{1}{k}\Bigg\{&2A_0\sum_{i=0}^{k-1}\cos i\frac{2m\pi}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\sum_{i=0}^{k-1}\cos i\frac{2(n+m)\pi}{k}+\sum_{i=0}^{k-1}\cos i\frac{2(n-m)\pi}{k}\right]\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\sum_{i=1}^{k-1}\sin i\frac{2(n+m)\pi}{k}+\sum_{i=1}^{k-1}\sin i\frac{2(n-m)\pi}{k}\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Auch hier sind nur diejenigen Summen der Kosinus von 0 verschieden (und zwar gleich k), bei denen der Faktor $n\pm m$ ein Vielfaches von k ist, d. h. für Werte von n der Form $pk\pm m$ (p ganz). Nehmen wir etwa $2m\leqq k$ an, so kommen wir zu folgender Reihe für a_m:

$$a_m=A_m+A_{k-m}+A_{k+m}+A_{2k-m}+\cdots. \tag{30}$$

Völlig analog ergibt sich

$$b_m=B_m-B_{k-m}+B_{k+m}-B_{2k-m}+\cdots. \tag{31}$$

Das sind genau die Formeln, die wir herleiten wollten.

Wir ersehen daraus, daß sich etwa a_m von A_m um die Summe einiger Koeffizienten A mit großer Nummer unterscheidet, wenn nur k groß und m dagegen nicht zu groß ist. Es wird klar, daß für die Genauigkeit der Approximation die Geschwindigkeit, mit der die Fourierkoeffizienten abnehmen, eine wichtige Rolle spielt. Diese Geschwindigkeit hängt aber, wie wir wissen (Nr. 706 bis 708) mit den Differenzierbarkeitseigenschaften der auf $(-\infty, \infty)$ fortgesetzten Funktion zusammen. Das wird durch die Beispiele 2 und 3 aus Nr. 727 gut illustriert; der Leser beachte die Spitzen der Kurve in Beispiel 3!

Für $k=12$ haben wir insbesondere (wir beschränken uns auf die Koeffizienten der Kosinus)

$$a_0=A_0+A_{12}+\cdots, \qquad a_1=A_1+A_{11}+\cdots,$$
$$a_2=A_2+A_{10}+\cdots, \qquad a_3=A_3+A_9+\cdots$$

und daneben

$$a_5 = A_5 + A_7 + \cdots, \qquad a_6 = 2A_6 + \cdots \text{ (!)},$$

usw. Hieraus folgt, daß innerhalb der ersten zwei bis drei Harmonischen keine befriedigende Genauigkeit zu erwarten ist. Für $k = 24$ werden die Resultate sofort besser:

$$a_0 = A_0 + A_{24} + \cdots, \qquad a_1 = A_1 + A_{23} + \cdots,$$
$$a_6 = A_6 + A_{18} + \cdots \qquad \text{usw.}$$

Hier darf man eine gute Genauigkeit für die ersten sieben bis acht Harmonischen erwarten.

XX. Fourierreihen (Fortsetzung)[1]

§ 1. Das Rechnen mit Fourierreihen. Abgeschlossenheit und Vollständigkeit

731. Gliedweise Integration einer Fourierreihe. Wie gewöhnlich setzen wir die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ als *absolut* integrierbar voraus. Ihre Fourierreihe sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) . \tag{1}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] \mathrm{d}t , \tag{2}$$

die für $-\pi \leqq x \leqq \pi$ offenbar stetig und von endlicher Schwankung ist (Nr. 486, 7°; Nr. 568, 4°); ferner hat sie wegen

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x - \pi a_0 = 0 \tag{3}$$

offenbar auch die Periode 2π. Daher ist sie nach dem Satz aus Nr. 686 im ganzen Intervall in eine Fourierreihe entwickelbar,

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{4}$$

(die überdies nach Nr. 699 dort gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergiert).

Zwischen den Koeffizienten der Reihen (1) und (4) besteht ein einfacher Zusammenhang. Benutzt man nämlich die verallgemeinerte Formel für die partielle Integration aus Nr. 580, Beispiel 9, so erhält man für $n \geqq 1$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, \mathrm{d}x ,$$

[1] Kapitel XIX behandelte in der Hauptsache die Entwicklung von Funktionen in konvergente Fourierreihen; dort wurden diese Reihen als Rechenhilfsmittel untersucht. In dem vorliegenden Kapitel stellen wir uns auf einen allgemeineren Standpunkt und untersuchen eine Reihe wichtiger Probleme von vorwiegend theoretischem Interesse.

d. h.

$$A_n = -\frac{b_n}{n}.$$

Analog erhält man, unter Berücksichtigung von (3),

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

Um A_0 zu finden, setze man in (4) $x=0$:

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \tag{5}$$

Setzen wir diese berechneten Werte für die Koeffizienten in (4) ein, so können wir

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n (1-\cos nx)}{n}$$

schreiben. Hieraus ergibt sich wegen (2)

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x [a_n \cos nt + b_n \sin nt]\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Offenbar gilt somit für jedes Intervall $[x', x'']$ mit $-\pi \leqq x' < x'' \leqq \pi$ die Beziehung

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x'}^{x''} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x'}^{x''} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]\,\mathrm{d}x.$$

Demnach erhält man das Integral der Funktion $f(x)$ durch gliedweise Integration ihrer Fourierreihe. Dieses Resultat, daß die gliedweise Integration einer Fourierreihe stets zulässig ist, ist um so bemerkenswerter, als wir es erhielten, ohne über die Konvergenz der Reihe (1) gegen $f(x)$ irgend etwas vorausgesetzt zu haben.

Natürlich kann man statt des Intervalls $[-\pi, \pi]$ auch jedes andere Intervall der Länge 2π nehmen. Ebenso bezieht sich alles bisher Gesagte auch auf reine Kosinus- bzw. Sinusreihen im Intervall $[0, \pi]$.

Durch Integration bekannter trigonometrischer Entwicklungen können weitere Entwicklungen erhalten werden. Das Glied $\frac{a_0}{2}x$ in (6) läßt sich durch passende Wahl der trigonometrischen Entwicklung in den übrigen Teil der Reihe hineinbringen. Einige Beachtung erfordert das freie Glied $\frac{A_0}{2}$; man erhält es in geschlossener Form entweder durch unmittelbare Summation der Reihe (5) oder durch Integration nach der Formel

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \mathrm{d}x.$$

Wir erläutern das an einem Beispiel. Integriert man die Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (0 < x < 2\pi)$$

(vgl. Nr. 690, Beispiel 2) von 0 bis x, so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2$$

und hieraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + c \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi),$$

wobei man c entweder als Summe der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

oder als Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right) dx = \frac{\pi^2}{6}$$

erhält. Somit sind wir wieder zu einer Entwicklung gelangt, die wir unabhängig in Nr. 690, Beispiel 9, erhalten hatten. Analog kann man die Entwicklung von Beispiel 7(a) erhalten, wenn man von Beispiel 7(b) ausgeht, usw.

Bemerkung. Wir weisen darauf hin, daß wir auf diesem Wege folgenden Satz bewiesen haben: *Für jede in* $[-\pi, \pi]$ *absolut integrierbare Funktion* $f(x)$ *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \tag{5*}$$

wobei die b_n *die Koeffizienten der Sinusglieder in ihrer Fourierreihe sind* (vgl. Nr. 692, 2°). Diese Bemerkung wird uns später, in Nr. 750, von Nutzen sein.

732. Gliedweise Differentiation einer Fourierreihe. Es sei im Intervall $[-\pi, \pi]$ eine stetige und eventuell bis auf endlich viele Ausnahmepunkte auch differenzierbare Funktion $f(x)$ gegeben, für welche außerdem $f(-\pi) = f(\pi)$ ist. Die Ableitung $f'(x)$ sei in $[-\pi, \pi]$ absolut integrierbar. Dann ist

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt + f(0)$$

(Nr. 310, Nr. 481), und wie wir soeben gesehen haben, ergibt sich die Fourierreihe (1) von $f(x)$ durch gliedweise Integration der Fourierreihe von $f'(x)$,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx), \tag{7}$$

da auf Grund der Voraussetzungen über $f(x)$ kein freies Glied auftritt:

$$a_0' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0.$$

In diesem Fall kann offenbar auch umgekehrt die Reihe (7) für $f'(x)$ aus der Reihe (1) für $f(x)$ durch gliedweise Differentiation erhalten werden.

Wir weisen besonders auf die Rolle hin, welche hier die Voraussetzung über die Periodizität von $f(x)$ spielt. Wenn sie nicht erfüllt ist, ist das freie Glied $\frac{a_0'}{2}$ der Fourierreihe von $f'(x)$ von 0 verschieden, und schon allein dadurch könnte die Reihe für $f'(x)$ nicht durch gliedweise Differentiation aus der Reihe (1) erhalten werden. Beispielsweise würde im Fall der Entwicklung (a keine ganze Zahl)

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^2 - n^2} \sin nx$$

(Nr. 690, Beispiel 7(b)) gliedweises Differenzieren zur Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{a^2-n^2} \cos nx$$

führen, die keine Fourierreihe sein kann, da die Koeffizienten nicht einmal gegen 0 streben (Nr. 682).

Bemerkung. Bisher sprachen wir von der Möglichkeit, die Fourierreihe (7) von $f'(x)$ durch gliedweises Differenzieren der Fourierreihe von $f(x)$ zu erhalten. Wir haben aber überhaupt noch nichts darüber gesagt, ob die Reihe (7) gegen $f'(x)$ konvergiert. Diese Konvergenz muß gesondert bewiesen werden, wobei zweckmäßigerweise irgendwelche hinreichenden Kriterien zu benutzen sind (Nr. 684, Nr. 686).

Es sei darauf hingewiesen, daß das Auftreten des Faktors n bei der Differentiation von $\sin nx$ und $\cos nx$ die Ordnung des Kleinerwerdens der Koeffizienten erniedrigt und damit die Wahrscheinlichkeit der Konvergenz verkleinert. Gerade bei der Lösung von Aufgaben der mathematischen Physik mittels Fourierreihen hat man häufig diese Reihen zu differenzieren, und sogar mehrmals. Um die Konvergenz der erhaltenen Reihen zu sichern, ist es oft zweckmäßig, nach der Methode von Krylow (Nr. 710) die schlecht konvergierenden Teile abzutrennen. Dabei differenziert man die Summe des abgetrennten Teils, die in geschlossener Form bekannt ist, unmittelbar, und für den übrigen Teil sucht man eine so hohe Ordnung der Konvergenz zu erhalten, daß die durch gliedweises Differenzieren entstehenden Reihen noch gleichmäßig konvergieren.

733. Die Abgeschlossenheit des trigonometrischen Systems. Sind die Fourierkoeffizienten einer in $[-\pi, \pi]$ stetigen Funktion $f(x)$ sämtlich gleich 0, so ist $f(x) \equiv 0$. In diesem Fall ergibt sich nämlich für alle x aus (6) die Beziehung

$$\int_0^x f(t)\,dt = 0\,, \tag{8}$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach x, da der Integrand stetig ist (Nr. 305, 12°),

$$f(x) \equiv 0\,.$$

Mit anderen Worten, *außer der identisch verschwindenden Funktion gibt es keine stetige Funktion, die im Intervall* $[-\pi, \pi]$ (oder einem anderen Intervall der Länge 2π) *zu allen Funktionen des trigonometrischen Systems*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{9}$$

orthogonal (Nr. 679) *ist.* Diesen Sachverhalt beschreibt man auch dadurch, daß man sagt, das trigonometrische Funktionensystem sei in der Klasse der stetigen Funktionen *abgeschlossen.*[1])

Haben zwei stetige Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ dieselben Fourierkoeffizienten, so sind sie identisch, da die Fourierkoeffizienten ihrer Differenz sämtlich verschwin-

[1]) Hier ist der Sprachgebrauch nicht einheitlich; gelegentlich findet man statt „abgeschlossen" das Wort „vollständig" und umgekehrt. — *Anm. d. Red.*

den. *Eine stetige Funktion ist also durch ihre Fourierkoeffizienten eindeutig bestimmt.* Auf diese Weise läßt sich die Abgeschlossenheit des trigonometrischen Systems ebenfalls ausdrücken.

Läßt man auch unstetige Funktionen zu, so ändert sich die Sachlage. Eine Funktion, die etwa endlich viele von 0 verschiedene Werte hat, ist nicht identisch 0, aber offenbar ebenfalls zu jeder der Funktionen (9) orthogonal, ebenso wie zu jeder (eigentlich oder uneigentlich) integrierbaren Funktion. Man kann sogar Funktionen konstruieren, die in unendlich vielen Punkten von 0 verschieden sind und trotzdem diese Eigenschaft besitzen, etwa die Funktion $f(x)$ (vgl. Nr. 70, Beispiel 8; Nr. 300, Beispiel 1), die gleich $\frac{1}{q}$ ist, wenn x ein unkürzbarer Bruch der Form $\pm\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}<\pi\right)$ ist, und sonst in $[-\pi, \pi]$ gleich 0 ist.

Jedoch unterscheidet sich eine Funktion, die zu jeder integrierbaren Funktion in diesem Intervall orthogonal ist, nicht „wesentlich" von 0; wir nennen sie *der Null äquivalent.*

Wir können also zeigen, daß *eine in* $[-\pi, \pi]$ *absolut integrierbare Funktion, deren Fourierkoeffizienten sämtlich gleich* 0 *sind, notwendigerweise der Null äquivalent ist.*

Ist nämlich $g(x)$ eigentlich integrierbar, so ist nach Nr. 579, 1°,

$$(\mathrm{R})\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx=(\mathrm{S})\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dF(x);$$

dabei ist $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Unter unseren Annahmen ist $F(x)=0$ (vgl. (8)), so daß $f(x)$ zu $g(x)$ orthogonal ist.

Der Übergang zu uneigentlich integrierbarem $g(x)$ ist einfach. Es sei etwa π der einzige singuläre Punkt. Dann setzen wir $g^*(x)=g(x)$ in $[-\pi, \pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ und $g^*(x)=0$ in $(\pi-\varepsilon, \pi]$ und haben nach dem Obigen

$$\int_{-\pi}^{\pi-\varepsilon} f\cdot g\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g^*\,dx=0\,.$$

Jetzt führt man den Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ durch.

Erweitert man so den Begriff der Abgeschlossenheit, so kann man sagen, daß das trigonometrische System (9) in der Klasse der absolut integrierbaren Funktionen abgeschlossen ist. Damit meint man, daß es außer den der Null äquivalenten Funktionen keine absolut integrierbare Funktion gibt, die in $[-\pi, \pi]$ zu allen Funktionen des Systems (9) orthogonal ist.

Haben schließlich zwei absolut integrierbare Funktionen dieselben Fourierkoeffizienten, so ist ihre Differenz der Null äquivalent. Sieht man solche Funktionen nicht als wesentlich verschieden an, so kann man sagen, daß *eine absolut integrierbare Funktion durch ihre Fourierkoeffizienten eindeutig bestimmt ist.*

Bemerkung. Alles Bisherige bleibt auch gültig für die Funktionensysteme

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots \quad \text{und} \quad \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots$$

im Intervall $[0, \pi]$.

734. Die gleichmäßige Approximation von Funktionen. Die Sätze von Weierstraß. Wird irgendeine Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ mit Hilfe einer anderen Funktion $g(x)$ approximiert, d. h. angenähert wiedergegeben, so kann man die Güte dieser Approximation je nach den Umständen auf verschiedene Weise abschätzen. Natürlich legt man in allen Fällen die Differenz

$$r(x)=f(x)-g(x)$$

der Untersuchung zugrunde. Interessiert man sich jedoch für die Abweichung der einen Funktion von der anderen in jedem einzelnen Punkt, so nimmt man als Maß für die Güte der Approximation ihre maximale Abweichung im Intervall, d. h. die Zahl

$$\delta = \sup_{a \leqq x \leqq b} |r(x)| .$$

Man spricht dann von *gleichmäßiger Approximation* von $f(x)$ durch $g(x)$.

Wir bringen nun zwei grundlegende Sätze von WEIERSTRASS über die gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen, erstens mit Hilfe trigonometrischer Polynome und zweitens mit Hilfe algebraischer Polynome.

Satz 1. *Ist $f(x)$ stetig in $[-\pi, \pi]$ und ist $f(-\pi) = f(\pi)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom*

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

derart, daß gleichmäßig für alle x aus diesem Intervall die Ungleichung

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \tag{10}$$

gilt.

Zunächst konstruieren wir eine stückweise lineare Funktion $\varphi(x)$ derart, daß in $[-\pi, \pi]$ überall

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

ist. Zu diesem Zweck teilen wir das Intervall $[-\pi, \pi]$ durch die Punkte

$$-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_k = \pi$$

in so kleine Teile, daß in jedem Teilintervall die Schwankung von f kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Die Funktion $\varphi(x)$ definieren wir in $[-\pi, \pi]$, indem wir sie in jedem einzelnen Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ gleich der linearen Funktion

$$f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

setzen, die in den Endpunkten des Teilintervalls mit $f(x)$ übereinstimmt. Im Grunde handelt es sich um einen der Kurve $y = f(x)$ einbeschriebenen Streckenzug. Sind m_i bzw. M_i der kleinste bzw. der größte Wert von f im i-ten Teilintervall, so ist nach unserer Annahme $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{2}$, und da in diesem Intervall die Werte der beiden Funktionen f und φ zwischen m_i und M_i liegen, gilt die Ungleichung (11) im ganzen Intervall $[-\pi, \pi]$.

Die Funktion $\varphi(x)$ ist wie $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ stetig, und es ist

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi);$$

überdies ist sie als stückweise monotone Funktion in diesem Intervall von endlicher Schwankung (Nr. 568, 1°). Nach dem Kriterium von DIRICHLET-JORDAN (Nr. 699) ist $\varphi(x)$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe entwickelbar:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) .$$

Nimmt man für $T(x)$ die n-te Partialsumme dieser Reihe für hinreichend großes n, so unterscheidet sich $T(x)$ von $\varphi(x)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$,

$$|\varphi(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

und zwar gleichzeitig für alle betrachteten x. Aus (11) und (12) folgt (10).

Wir wählen jetzt eine Folge $\{\varepsilon_k\}$ positiver, gegen 0 strebender Zahlen und konstruieren zu jedem $\varepsilon=\varepsilon_k$ ein Polynom $T=T_k(x)$; dann ergibt sich eine Folge $\{T_k(x)\}$ trigonometrischer Polynome, die in $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ strebt. Geht man in der üblichen Weise (Nr. 427) von der Folge zu einer unendlichen Reihe über, so erhält man eine andere Formulierung des Satzes, die offenbar der vorhergehenden gleichwertig ist: *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1 *läßt sich* $f(x)$ *in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach trigonometrischen Polynomen entwickeln.*

Aus Satz 1 folgt leicht

Satz 2. *Ist* $f(x)$ *in* $[a, b]$ *stetig, so gibt es zu jedem* $\varepsilon>0$ *ein algebraisches Polynom*

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

derart, daß für alle x *aus* $[a, b]$ *gleichmäßig die Beziehung*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \tag{13}$$

gilt.

Durch die Substitution

$$x=a+\frac{x'}{\pi}(b-a)$$

führt man das Problem auf das Intervall $[0, \pi]$ zurück; denn ein Polynom in x' ist auch ein Polynom in x. Um die Bezeichnung nicht unnötig kompliziert zu machen, setzen wir einfach $a=0$, $b=\pi$ voraus.

Nun setzen wir $f(x)$ durch $f(-x)=f(x)$ für $0<x\leqq\pi$ auf das ganze Intervall $[-\pi, \pi]$ fort. Dabei bleibt $f(x)$ stetig, und es ist $f(-\pi)=f(\pi)$. Nach Satz 1 gibt es also ein trigonometrisches Polynom $T(x)$ derart, daß für alle x aus $[-\pi, \pi]$

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{14}$$

ist.

Ersetzt man nun jede der trigonometrischen Funktionen in T durch ihre Potenzreihenentwicklung in x (Nr. 404), so erhält man auch für T eine überall konvergente Potenzreihe:

$$T(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m.$$

In $[-\pi, \pi]$ konvergiert sie gleichmäßig; daher gibt es ein Polynom $P(x)$ (z. B. eine n-te Partialsumme dieser Reihe) derart, daß für hinreichend großes n für alle x aus $[-\pi, \pi]$

$$|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

gilt. Aus (14) und (15) folgt aber die Behauptung.

Dieser Satz läßt sich ebenfalls anders formulieren: *Eine in* $[a, b]$ *stetige Funktion* $f(x)$ *läßt sich dort in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach algebraischen Polynomen entwickeln.*

735. Approximation im Mittel. Extremaleigenschaften der Abschnitte einer Fourierreihe. Bei der Approximation einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ mittels einer Funktion $g(x)$ kann man sich auch auf einen anderen Standpunkt stellen und statt der gleichmäßigen Approximation dieser Funktion nun fordern, daß beide Funktionen „im Mittel" benachbart sind. In diesem Fall nimmt man als Maß für die Nachbarschaft die mittlere Abweichung

$$\delta' = \frac{1}{b-a}\int_a^b |r(x)|\,dx$$

oder, was wir im folgenden tun werden, die mittlere quadratische Abweichung

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b r^2(x)\,dx}\,.$$

Statt dieses Ausdrucks betrachtet man zweckmäßigerweise die Größe

$$\Delta = \int_a^b r^2(x)\,dx = (b-a)\,\delta''^2.$$

Wir wenden uns wieder der Untersuchung eines beliebigen im Intervall $[a, b]$ orthogonalen Systems $\{\varphi_m(x)\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ von Funktionen zu, die nebst ihren Quadraten integrierbar sind (Nr. 679). Es sei $f(x)$ eine in diesem Intervall nebst ihrem Quadrat integrierbare Funktion, n eine feste natürliche Zahl. Wir stellen uns folgendes Problem: Aus allen Linearkombinationen der ersten $n+1$ Funktionen φ_m,

$$\sigma_n(x) = \gamma_0\varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \cdots + \gamma_n\varphi_n(x)\,, \tag{16}$$

bei beliebigen zur Verfügung stehenden Koeffizienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ diejenigen Linearkombinationen zu finden, welche die im Sinne der mittleren quadratischen Abweichung beste Approximation von $f(x)$ liefern. Mit anderen Worten, es soll

$$\Delta_n = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2\,dx$$

zu einem Minimum gemacht werden.

Setzen wir den Ausdruck für $\sigma_n(x)$ ein, so erhalten wir

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{m=0}^{n}\gamma_m\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx + \sum_{m=0}^{n}\gamma_m^2\int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx + 2\sum_{k<m}\gamma_k\gamma_m\int_a^b \varphi_k(x)\,\varphi_m(x)\,dx\,.$$

Die letzte Summe verschwindet auf Grund der Orthogonalität des Systems. Führt man die Konstanten

$$\lambda_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)\,dx$$

und die verallgemeinerten Fourierkoeffizienten von $f(x)$,

$$c_m=\frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx\,,$$

ein, so kann man

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m\gamma_m+\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\gamma_m^2$$

schreiben. Um unter dem Summenzeichen ein vollständiges Quadrat zu erhalten, muß man noch die Glieder der Form $\lambda_m c_m^2$ hinzufügen. So ergibt sich

$$\Delta_n=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m^2+\sum_{m=0}^{n}\lambda_m\,(\gamma_m-c_m)^2.$$

Jetzt ist klar ersichtlich, daß Δ_n seinen kleinsten Wert annimmt, wenn die letzte Summe verschwindet, d. h. für $\gamma_0=c_0$, $\gamma_1=c_1$, ..., $\gamma_n=c_n$. Somit macht von allen Polynomen der Gestalt (16) gerade der Abschnitt

$$s_n(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)$$

der verallgemeinerten Fourierreihe die Größe Δ_n zu einem Minimum; ihr Minimalwert ist

$$\delta_n=\int_a^b[f(x)-s_n(x)]^2\,dx=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m^2\,. \tag{17}$$

Somit stoßen wir wieder auf die Fourierkoeffizienten als auf die im gewissen Sinne „besten" aus allen möglichen. Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß die Koeffizienten, die für ein bestimmtes n die „besten" sind, auch für größere n die besten bleiben, da wir nur neue Koeffizienten hinzuzufügen haben!

Die Gleichung (17) wird *Besselsche Identität* genannt. Aus ihr folgen die Ungleichungen

$$\sum_{m=0}^{n}\lambda_m c_m^2\leqq\int_a^b f^2(x)\,dx$$

und (für $n\to\infty$)

$$\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m c_m^2\leqq\int_a^b f^2(x)\,dx\,, \tag{18}$$

die *Besselsche Ungleichung*. Es ist interessant, daß die Reihe in (18) immer konvergiert, sobald die Funktion $f(x)$ nebst ihrem Quadrat integrierbar ist.

Bei wachsendem n nimmt δ_n ab, da in (17) weitere negative Summanden auftreten. Je größer n ist, desto näher kommt $s_n(x)$ „im Mittel" an $f(x)$ heran. Naturgemäß stellt man die Frage, ob man für hinreichend großes n die mittlere quadratische Abweichung beliebig klein machen kann, d. h., ob für $n\to\infty$ die Größe δ_n gegen 0 strebt.

Wenn das so ist, so sagt man, $s_n(x)$ konvergiere „im Mittel" gegen $f(x)$ (was natürlich keinesfalls die punktweise Konvergenz von $s_n(x)$ gegen $f(x)$ im üblichen Sinne bedeutet). Aus der Besselschen Identität folgt, daß dann (und nur dann)

die Identität (vgl. (18))

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx$$

gilt. Nach W. A. STEKLOW[1]) nennt man sie die *Vollständigkeitsrelation*. Gewöhnlich heißt sie *Parsevalsche Gleichung* (nach M. A. PARSEVAL[2]), der schon zu Anfang des 19. Jahrhunderts eine ähnliche Formel für das trigonometrische System (ohne irgendwelche Beweise) betrachtete).

Gilt die Vollständigkeitsrelation für jede nebst ihrem Quadrat integrierbare Funktion $f(x)$, so nennt man das System $\{\varphi_n(x)\}$ *vollständig*[3]).

Wir wenden das Bisherige nun speziell auf das trigonometrische System (9) an. Statt (16) haben wir also trigonometrische Polynome

$$S_n(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{n} (A_m \cos mx + B_m \sin mx)$$

zu betrachten und die mit ihrer Hilfe durchzuführende Approximation im Mittel, die durch die Größe

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx$$

charakterisiert ist, zu untersuchen. Es zeigt sich, daß bei festem n das Minimum dieser Größe für den Abschnitt

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

der Fourierreihe erreicht wird. Dieser Minimalwert ergibt sich zu

$$\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m^2 + b_m^2)\right\} \tag{19}$$

(Besselsche Identität). Daraus folgt wie im allgemeinen Fall die Konvergenz der Reihe, die aus den Quadraten der Fourierkoeffizienten gebildet ist:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

(Besselsche Ungleichung).

Für das betrachtete konkrete System (9) sind wir in der Lage, die oben gestellte Frage vollständig zu beantworten. Das soll in Nr. 736 geschehen.

736. Die Vollständigkeit des trigonometrischen Systems. Satz von Ljapunoff. Es gilt folgender wichtiger Satz, den (für den Fall beschränkter Funktionen) zuerst A. M. LJAPUNOFF[4]) streng bewiesen hat.

---

[1]) WLADIMIR ANDREJEWITSCH STEKLOW, 1864–1926, russischer Mathematiker.
[2]) M. A. PARSEVAL, 19. Jh., französischer Mathematiker.
[3]) Vgl. die Fußnote auf S. 500. — *Anm. d. Red.*
[4]) ALEXANDR MICHAILOWITSCH LJAPUNOFF, 1857–1918, russischer Mathematiker.

Satz. *Für jede quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ ist $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, und es gilt die Vollständigkeitsrelation*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2+b_m^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\,. \tag{20}$$

Wir beweisen ihn in mehreren Schritten.

1°. Ist $f(x)$ in $[-\pi,\pi]$ stetig und gilt $f(-\pi)=f(\pi)$, so existiert nach dem ersten Weierstraßschen Satz ein trigonometrisches Polynom $T(x)$ der Ordnung N derart, daß

$$|f(x)-T(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}$$

gilt, wobei ε eine beliebig vorgegebene positive Zahl ist. Dann ist

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx<\varepsilon\,.$$

Nach der Extremaleigenschaft der Abschnitte einer Fourierreihe (Nr. 735) gilt, da $T(x)$ nach Belieben als trigonometrisches Polynom einer beliebigen Ordnung $n\geqq N$ angesehen werden kann, also erst recht für $n\geqq N$

$$\delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\,dx<\varepsilon\,,$$

so daß $\delta_n\to 0$ für $n\to\infty$ folgt.

2°. Damit wir diesen Schluß auch auf andere Fälle übertragen können, leiten wir zunächst eine Ungleichung her, die uns von Nutzen sein wird.

Stellt man die quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ als Summe zweier ebensolcher Funktionen $f'(x)$ und $f''(x)$ dar und bezeichnet die entsprechenden Größen ebenfalls mit $'$ bzw. $''$, so erhält man

$$f(x)-s_n(x)=[f'(x)-s_n'(x)]+[f''(x)-s_n''(x)]$$

und hieraus (mit Hilfe der elementaren Ungleichung $(a+b)^2\leqq 2\,(a^2+b^2)$)

$$[f(x)-s_n(x)]^2\leqq 2\,\{[f'(x)-s_n'(x)]^2+[f''(x)-s_n''(x)]^2\}\,,$$

ferner

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\,dx\leqq 2\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f'(x)-s_n'(x)]^2\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}[f''(x)-s_n''(x)]^2\,dx\right\}$$

oder kurz

$$\delta_n\leqq 2\,\{\delta_n'+\delta_n''\}\,.$$

Schließlich bemerken wir, daß aus der Besselschen Identität (vgl. (19)) für die Funktion f''

$$\delta_n''\leqq\int_{-\pi}^{\pi}f''^2\,dx$$

folgt. Somit ist schließlich

$$\delta_n\leqq 2\left\{\delta_n'+\int_{-\pi}^{\pi}f''^2dx\right\}, \tag{21}$$

und diese Ungleichung wollten wir herleiten.

3°. Jetzt sei $f(x)$ eigentlich integrierbar (also beschränkt) in $[-\pi, \pi]$. Falls notwendig, ändern wir die Funktion in einem Endpunkt ab, so daß wir $f(-\pi)=f(\pi)$ annehmen können. Nun konstruieren wir eine Hilfsfunktion $\varphi(x)$ wie beim Beweis des ersten Weierstraßschen Satzes (Nr. 734), wobei wir die Intervallzerlegung diesmal so wählen, daß

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega}$$

ist; unter ε verstehen wir eine beliebig vorgegebene positive Zahl, unter ω_i die Schwankung von f im i-ten Teilintervall und unter Ω die Totalschwankung von f im ganzen Intervall $-\pi$ bis π (Nr. 297).

Wir setzen $f'=\varphi$, $f''=f-\varphi$. Nach 1° gilt $\delta_n' \to 0$ für $n \to \infty$, so daß von einer bestimmten Stelle an $\delta_n' < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Da andererseits im i-ten Teilintervall

$$|f''(x)| = |f(x)-\varphi(x)| \leqq \omega_i$$

ist, gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 \mathrm{d}x = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''^2 \mathrm{d}x \leqq \sum_i \omega_i^2 \Delta x_i \leqq \Omega \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Jetzt ist nach (21) schon klar, daß für hinreichend große n

$$\delta_n < \varepsilon$$

wird usw.

4°. Nun sei schließlich $f(x)$ uneigentlich integrierbar, aber notwendigerweise auch quadratisch integrierbar. Der Einfachheit halber nehmen wir an, der einzige singuläre Punkt für f (oder f^2) sei $x=\pi$. Dann kann man zu gegebenem $\varepsilon>0$ ein $\eta>0$ finden derart, daß

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. In diesem Fall setzen wir

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad -\pi \leqq x < \pi-\eta, \\ 0 & \text{für} \quad x \geqq \pi-\eta \end{cases}$$

und

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi \leqq x < \pi-\eta, \\ f(x) & \text{für} \quad x \geqq \pi-\eta. \end{cases}$$

Offenbar ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} f''^2 \mathrm{d}x = \int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Auf die eigentlich integrierbare Funktion f' wenden wir unser soeben bewiesenes Resultat an. Mit Hilfe von (21) können wir schließen, daß auch hier $\delta_n \to 0$ gilt. Damit ist der Beweis des Satzes von LJAPUNOFF beendet.

Unter Benutzung der Terminologie aus Nr. 735 können wir also von der *Vollständigkeit des trigonometrischen Systems* sprechen.

737. Die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung. Es seien zwei in $[-\pi, \pi]$ quadratisch integrierbare Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben. Bekanntlich (Nr. 483, Beispiel 6) sind dann auch $f+\varphi$ und $f-\varphi$ quadratisch integrierbar. Sind a_m, b_m, α_m, β_m die Fourierkoeffizienten von f bzw. φ, so sind die Fourierkoeffizienten von $f \pm \varphi$ offenbar $a_m \pm \alpha_m$, $b_m \pm \beta_m$.

Nun wenden wir die Vollständigkeitsrelation auf $f+\varphi$ und $f-\varphi$ einzeln an und finden

$$\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m+\alpha_m)^2+(b_m+\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f+\varphi]^2\,dx$$

und

$$\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}[(a_m-\alpha_m)^2+(b_m-\beta_m)^2]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f-\varphi]^2\,dx\,.$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so erhält man unter Berücksichtigung der Identität $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ die *verallgemeinerte Vollständigkeitsrelation* (*verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung*)

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\alpha_m+b_m\beta_m)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\varphi(x)\,dx\,, \tag{22}$$

aus der für $\varphi=f$ die Parsevalsche Gleichung (20) folgt.

Die Beziehung (22) hängt engstens mit dem Problem der gliedweisen Integration von Fourierreihen zusammen. Setzt man nämlich

$$\alpha_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos mx\,dx \qquad (m=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$\beta_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx \qquad (m=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

ein, so geht (22) in

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\varphi(x)\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\,\varphi(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

über. Die erwähnte Gleichung ist also völlig gleichwertig mit der Aussage: *Die Fourierreihe einer quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ kann nach Multiplikation aller ihrer Glieder mit einer ebenfalls quadratisch integrierbaren Funktion von $-\pi$ bis π gliedweise integriert werden;* dabei ergibt sich das Integral über das Produkt der beiden Funktionen.

Schließlich kann das Intervall $[-\pi, \pi]$ durch ein beliebiges Teilintervall $[x', x'']$ ersetzt werden; denn die Betrachtung reduziert sich einfach darauf, daß φ durch eine Funktion ersetzt wird, die in $[x', x'']$ mit φ übereinstimmt und außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Für $\varphi=1$ erhalten wir wieder die in Nr. 731 bewiesene Aussage, allerdings mit einer Einschränkung: Hier wird f als quadratisch integrierbar vorausgesetzt.

Die Formel (22) kann auch unter unsymmetrischen Voraussetzungen für f und φ bewiesen werden; für die eine Funktion kann man sie abschwächen, für die andere verschärfen. So bewies W. H. YOUNG den folgenden Satz: *Die Formel* (22) *gilt, wenn* $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ *absolut integrierbar und* $\varphi(x)$ *dort von endlicher Schwankung ist.*

Der Beweis beruht auf der erst in Nr. 744, 5°, zu beweisenden Eigenschaft der Partialsummen $\sigma_n(x)$ der Fourierreihe von $\varphi(x)$, daß nämlich diese Summen gleichmäßig beschränkt sind, d. h. daß für $-\pi \leqq x \leqq \pi$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\sigma_n(x)| \leqq L \qquad (L = \text{const})$$

ist. Wir verwenden diese Eigenschaft bis dahin ohne Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(x)$ seien sämtlich regulär (Nr. 684), so daß stets

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+0) + \varphi(x-0)}{2}$$

ist. Dann gilt nach dem Kriterium von DIRICHLET-JORDAN (Nr. 686) für alle x

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f(x)\, \sigma_n(x) = f(x)\, \varphi(x)\,.$$

Ist $f(x)$ beschränkt, $|f(x)| \leqq M$ ($M = \text{const}$), also auch $|f(x)\, \sigma_n(x)| \leqq ML$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), so können wir nach dem Satz von ARZELÀ (Nr. 526) schließen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sigma_n(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \varphi(x)\, dx\,. \tag{23}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung kann auch für den Fall einer unbeschränkten (aber absolut integrierbaren) Funktion $f(x)$ bewiesen werden. Ihr einziger singulärer Punkt sei $x = \pi$. Dann wählen wir zunächst zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ so, daß

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} |f(x)|\, dx < \varepsilon$$

ist; außerdem gelten auch die Ungleichungen

$$\left| \int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x)\, \varphi(x)\, dx \right| < L\varepsilon, \qquad \left| \int_{\pi-\eta}^{\pi} f(x)\, \sigma_n(x)\, dx \right| < L\varepsilon\,,$$

die letzte für jedes n. In $[-\pi, \pi-\eta]$, wo $f(x)$ beschränkt ist, gilt analog (23)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x)\, \sigma_n(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi-\eta} f(x)\, \varphi(x)\, dx\,.$$

Hieraus erhält man leicht (23) selbst.

Die soeben bewiesene Gleichung ist nur eine andere Schreibweise für (22), denn es ist

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sigma_n(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \right] dx$$

$$= \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m)\,.$$

Die unter anderen Voraussetzungen als früher hergeleitete Vollständigkeitsrelation kann weiter umgeformt werden, nämlich zu einer Aussage über die gliedweise Integration einer Fourierreihe (und zwar in zwei verschiedenen Formulierungen, im Zusammenhang mit der Unsymmetrie der Voraussetzungen über f und φ). Die Aussage der Nr. 731 ergibt sich diesmal als Folgerung in voller Allgemeinheit.

738. Multiplikation von Fourierreihen. Es seien zwei Funktionen f und φ mit ihren Fourierreihen

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx)$$

gegeben. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Fourierreihe für das Produkt $f\varphi$ zu bestimmen:

$$f(x)\,\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

d. h., die Koeffizienten A_m, B_m durch die a, b, α, β auszudrücken. Wir setzen f und φ als quadratisch integrierbar voraus (man könnte auch f als absolut integrierbar und φ von endlicher Schwankung voraussetzen); es gilt also die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung (22). Das liefert sofort A_0:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi \,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m\alpha_m + b_m\beta_m).$$

Auch A_k, B_k (für $k = 1, 2, 3, \ldots$) lassen sich mit Hilfe von (22) leicht bestimmen: Der Ausdruck

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\varphi \cos kx \,dx$$

unterscheidet sich dadurch von A_0, daß φ durch $\varphi \cos kx$ ersetzt ist. Für diese Funktion erhalten wir als Fourierkoeffizienten:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \cos mx \,dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos (m+k)x \,dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos (m-k)x \,dx \right\} = \frac{1}{2} (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}),$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx \cdot \sin mx \,dx = \frac{1}{2} (\beta_{m+k} + \beta_{m-k}),$$

und zwar gelten diese Formeln nicht nur für $m \geqq k$, sondern auch für $m < k$, wenn man $\alpha_{-h} = \alpha_h$, $\beta_{-h} = -\beta_h$ setzt. Jetzt ist nach (22)

$$A_k = \frac{a_0\alpha_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\alpha_{m+k} + \alpha_{m-k}) + b_m (\beta_{m+k} + \beta_{m-k})]$$

und analog

$$B_k = \frac{a_0\beta_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [a_m (\beta_{m+k} - \beta_{m-k}) - b_m (\alpha_{m+k} - \alpha_{m-k})].$$

Damit ist unser Problem gelöst.

Es ist interessant zu bemerken, daß *diese Ausdrücke für die Koeffizienten A, B durch formale Multiplikation der Fourierreihen der Funktionen f und φ erhalten werden können,* wenn man darin die Produkte der Kosinus und Sinus durch ihre Summen bzw. Differenzen ersetzt und entsprechende Glieder zusammenfaßt.

Das ist um so bemerkenswerter, als hier nichts über die Konvergenz der zu multiplizierenden Reihen vorausgesetzt wurde.

739. Einige Anwendungen der Vollständigkeitsrelation. Die Vollständigkeitsrelation findet zahlreiche Anwendungen, sowohl in der Theorie der Fourierreihen selbst als auch in anderen Gebieten der Analysis. Wir wollen einige Beispiele untersuchen.

1°. *Die absolute Konvergenz von Fourierreihen.* Von S. N. BERNSTEIN stammt der folgende Satz:

Genügt eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π einer Lipschitzbedingung

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq L|h|^{\alpha}$$

mit dem Exponenten $\alpha > \frac{1}{2}$, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

wobei a_n, b_n die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ sind.

Daraus folgt sofort die Konvergenz der Reihen $\sum |a_n|$ und $\sum |b_n|$ und somit die absolute Konvergenz der Fourierreihe $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Ist

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

so ist

$$f(x \pm h) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [(a_m \cos mh \pm b_m \sin mh) \cos mx + (b_m \cos mh \mp a_m \sin mh) \sin mx]$$

(Nr. 690, Beispiel 26). Dann ist also

$$f(x+h)-f(x-h) \sim 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin mh\,(b_m \cos mx - a_m \sin mx)$$

und nach der Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h)-f(x-h)]^2\,dx = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 mh\,.$$

Auf Grund der Lipschitzbedingung läßt sich das Integral durch $Ch^{2\alpha}$ (C = const) abschätzen. Für beliebiges natürliches N setzen wir $h = \frac{\pi}{2N}$; dann ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \leqq C_1 N^{-2\alpha}$$

(C_1 = const), also erst recht

$$\sum_{m > \frac{N}{2}}^{\infty} \varrho_m^2 \sin^2 \frac{m\pi}{2N} \leqq C_1 N^{-2\alpha}.$$

Für $m > \frac{N}{2}$ ist offenbar

$$\sin^2 \frac{m\pi}{2N} > \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2},$$

so daß

$$\sum_{m>\frac{N}{2}}^{N} \varrho_m^2 < 2C_1 N^{-2\alpha}$$

gilt. Nimmt man insbesondere $N=2^\nu$ ($\nu=1, 2, 3, \ldots$), so folgt

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \varrho_m^2 \leqq 2C_1 \cdot 2^{-2\nu\alpha}.$$

Nach Nr. 133, Formel (5a), ist demnach

$$\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \varrho_m \leqq \left\{\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \varrho_m^2\right\}^{1/2} \cdot \left\{\sum_{m=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} 1^2\right\}^{1/2}$$

$$\leqq \sqrt{2C_1} \cdot 2^{-\nu\alpha} \cdot 2^{\frac{1}{2}(\nu-1)} = \sqrt{C_1}\, 2^{\nu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}.$$

Durch Summierung solcher Ungleichungen für $\nu=1, 2, 3, \ldots$ ergibt sich

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varrho_m \leqq \sqrt{C_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} < \infty;$$

denn für $\alpha > \frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe rechts. Damit ist der Satz bewiesen.

Das Resultat kann nicht verschärft werden; Beispiele zeigen, daß es für $\alpha = \frac{1}{2}$ schon nicht mehr gilt.

2°. *Beweis einiger Ungleichungen.* Die Vollständigkeitsrelation kann zum Beweis einiger nützlicher Ungleichungen verwendet werden. Wir beginnen mit einer zuerst von W. A. Steklow angegebenen Ungleichung, die er mit Erfolg in der mathematischen Physik verwendete. Die Funktion $f(x)$ sei in $[0, \pi]$ stetig und habe dort (eventuell mit Ausnahme endlich vieler Punkte) eine nebst ihrem Quadrat integrierbare Ableitung $f'(x)$. Ist dann eine der Bedingungen

$$\text{(a)} \int_0^\pi f(x)\,dx = 0 \quad \text{oder} \quad \text{(b)} \; f(0) = f(\pi) = 0$$

erfüllt, so gilt die Ungleichung

$$\int_0^\pi [f'(x)]^2\,dx \geqq \int_0^\pi [f(x)]^2\,dx, \tag{24}$$

wobei das Gleichheitszeichen im Fall (a) nur für $f(x) = A\cos x$ und im Fall (b) nur für $f(x) = B\sin x$ gilt (A, B beliebige Konstante).

Im Fall (a) fehlt in der Entwicklung von $f(x)$ im Intervall $[0, \pi]$ in eine Kosinusreihe das konstante Glied,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Da bei gerader Fortsetzung von $f(x)$ auf $[-\pi, 0]$ die Bedingung $f(-\pi) = f(\pi)$ erfüllt ist, ist nach der Regel aus Nr. 732

$$f'(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx.$$

Jetzt ist nach der Vollständigkeitsrelation, die, wie man leicht sieht, in $[0, \pi]$ sowohl für Kosinus- als auch für Sinusreihen gilt,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{und} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [f'(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar gerade die Ungleichung (24), wobei klar ist, daß das Gleichheitszeichen nur für $a_n = 0$ für $n \geqq 2$, d. h. für $f(x) = a_1 \cos x$ gelten kann.

Im Fall (b) betrachten wir für $f(x)$ die Sinusreihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Bei ungerader Fortsetzung von $f(x)$ auf $[-\pi, 0]$ bleibt, wenn (b) erfüllt ist, $f(x)$ in $x = 0$ stetig, und es ist $f(-\pi) = f(\pi)$, so daß nach Nr. 732

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx$$

ist. Die Anwendung der Vollständigkeitsrelation führt auch hier schnell zur Lösung des Problems.

Von W. WIRTINGER[1]) stammt eine etwas allgemeinere Ungleichung. Es sei $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ stetig und habe dort (eventuell bis auf endlich viele Punkte) eine nebst ihrem Quadrat integrierbare Ableitung $f'(x)$. Ist dann

$$f(-\pi) = f(\pi) \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 ,$$

so gilt die Ungleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\,dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx , \tag{25}$$

wobei das Gleichheitszeichen für $f(x) = A \cos x + B \sin x$ (A, B beliebige Konstante) eintritt. Der Beweis ergibt sich wie oben durch Anwendung der Vollständigkeitsrelation auf die Reihen

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{und} \quad f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\,(b_n \cos nx - a_n \sin nx) .$$

Die Steklowsche Ungleichung ergibt sich aus (25), wenn man insbesondere $f(x)$ (a) als gerade, (b) als ungerade voraussetzt.

Wir bringen später ein Beispiel für die Herleitung einer noch komplizierteren Ungleichung.

3°. *Ein isoperimetrisches Problem.* Unter allen möglichen geschlossenen ebenen Kurven gegebener Länge L bestimme man diejenige, die eine Figur größten Flächeninhalts umschließt. Bekanntlich ist das die Kreislinie; wir bringen dafür den Hurwitzschen rein analytischen Beweis.[2]) Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf glatte Kurven.

Die Kurve (L) der Länge L sei in Parameterform gegeben; Parameter sei die von einem bestimmten Punkt aus gerechnete Bogenlänge s:

$$x = x(s), \qquad y = y(s) \qquad (0 \leqq s \leqq L) .$$

Durch die Substitution $t = \frac{2\pi s}{L}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ bringen wir sie auf die Gestalt

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi);$$

überdies ist

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \quad \text{und} \quad \psi(0) = \psi(2\pi) .$$

Nach Nr. 732 erhält man aus den Fourierreihen, in die sich voraussetzungsgemäß $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ entwickeln lassen,

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt), \qquad \psi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos mt + d_m \sin mt) ,$$

---

[1]) WILHELM WIRTINGER, 1865–1945, österreichischer Mathematiker.

[2]) ADOLF HURWITZ, 1859–1919, deutscher Mathematiker.

die Fourierreihen ihrer Ableitungen

$$\varphi'(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} (mb_m \cos mt - ma_m \sin mt), \qquad \psi'(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} (md_m \cos mt - mc_m \sin mt) .$$

Die Vollständigkeitsrelation liefert

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi'(t)]^2 \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2), \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\psi'(t)]^2 \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (c_m^2 + d_m^2) .$$

Aus

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \tag{26}$$

folgt

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) . \tag{27}$$

Andererseits wissen wir aus Nr. 551, Formel (10), daß für den Flächeninhalt F der von unserer Kurve berandeten Figur die Beziehung

$$F = \int_{(L)} x \, dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dt} \, dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) \, \psi'(t) \, dt \tag{28}$$

gilt (wenn für von 0 bis 2π wachsendes t die Kurve im positiven Umlaufsinn durchlaufen wird).

Anwendung der Vollständigkeitsrelation liefert

$$F = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m (a_m d_m - b_m c_m) . \tag{29}$$

Subtrahieren wir von (27) die mit 4π multiplizierte Gleichung (29), so folgt

$$L^2 - 4\pi F = 2\pi^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (a_m^2 + b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) - \sum_{m=1}^{\infty} 2m (a_m d_m - b_m c_m) \right\}$$

$$= 2\pi^2 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (ma_m - d_m)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (mc_m + b_m)^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 - 1) (b_m^2 + d_m^2) \right\},$$

und da alle Summanden nichtnegativ sind, gilt stets die isoperimetrische Ungleichung

$$L^2 - 4\pi F \geqq 0, \quad \text{d. h.} \quad F \leqq \frac{L^2}{4\pi} .$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann (und zugleich nimmt F den größtmöglichen Wert nur dann an), wenn alle Summanden gleich 0 sind, d. h. für

$$d_m = ma_m, \quad b_m = -mc_m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \qquad b_m = d_m = 0 \quad (m = 2, 3, \ldots) .$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$d_1 = a_1, \qquad c_1 = -b_1, \qquad a_m = b_m = c_m = d_m = 0 \quad \text{für} \quad m \geqq 2 .$$

Dann ist aber

$$x = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \qquad y = \frac{1}{2} c_0 - b_1 \cos t + a_1 \sin t ,$$

also

$$\left(x - \frac{1}{2} a_0\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} c_0\right)^2 = a_1^2 + b_1^2 ,$$

und diese Kurve ist nichts anderes als eine Kreislinie. Damit haben wir die Extremaleigenschaft des Kreises bewiesen.

Ist (25) erfüllt (das ist natürlich auch der Fall, wenn das Intervall $[-\pi, \pi]$ durch $[0, 2\pi]$ ersetzt wird), so kann man die isoperimetrische Ungleichung auch ohne Berufung auf die Vollständigkeitsrelation beweisen. Wir können nämlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, der Schwerpunkt der Kurve liegt auf der y-Achse, d. h., es sei

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0. \tag{30}$$

Dann folgt aus (26) und (28)

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 + \psi'^2]\,dt - 2\int_0^{2\pi} \varphi\psi'\,dt = \int_0^{2\pi} [\varphi - \psi']^2\,dt + \int_0^{2\pi} [\varphi'^2 - \varphi^2]\,dt \geqq 0,$$

und zwar mit Hilfe von (25) unter Berücksichtigung von (30). Gleichheit kann nur für $\varphi(t) = A\cos t + B\sin t$ und $\psi'(t) = \varphi(t)$, also $\psi(t) = A\sin t - B\cos t + C$ eintreten, usw.

§ 2. Anwendung verallgemeinerter Summationsmethoden auf Fourierreihen

740. Ein Hilfssatz. Um in den folgenden Ausführungen Wiederholungen zu vermeiden, schicken wir ihnen einige allgemeine Überlegungen voraus, die den Kern zahlreicher folgender Beweise bilden. Wir betrachten für $a > 0$ das Integral der allgemeinen Gestalt

$$J(\lambda) = \int_0^a g(t)\,\Phi(t, \lambda)\,dt, \tag{1}$$

das den Parameter λ enthält. Der Variationsbereich von λ sei eine Menge $\Lambda = \{\lambda\}$, die einen endlichen oder auch unendlichen Häufungspunkt ω besitze. Die Funktion $\Phi(t, \lambda)$ sei für alle t aus $[0, a]$ und alle λ aus Λ definiert und bei festem λ nach t eigentlich integrierbar. Außerdem möge $\Phi(t, \lambda)$ folgenden Bedingungen genügen:

1°. $\Phi(t, \lambda) \geqq 0$;

2°. für jedes λ aus Λ sei

$$\int_0^a \Phi(t, \lambda)\,dt = 1;^{1})$$

3°. für jedes δ, $0 < \delta < a$, strebe

$$M(\delta, \lambda) = \sup_{t \geqq \delta} \Phi(t, \lambda)$$

für $\lambda \to \omega$ gegen 0.

Eine solche Funktion Φ wollen wir der Kürze halber einen *positiven Kern* nennen.

Hilfssatz. *Ist $\Phi(t, \lambda)$ ein positiver Kern, $g(t)$ eine beliebige, absolut integrierbare Funktion, für die der Grenzwert $g(+0)$ existiert, so ist*

$$\lim_{\lambda \to \omega} J(\lambda) = g(+0).$$

---

[1]) Es würde genügen $\lim_{\lambda \to \omega} \int_0^a \Phi(t, \lambda)\,dt = 1$ vorauszusetzen, aber diese Verallgemeinerung interessiert uns nicht.

Beweis. Nach 2° ist

$$g(+0)=\int_0^a g(+0)\,\Phi(t,\lambda)\,dt\,.$$

Subtrahiert man diese Beziehung von (1), so folgt

$$J(\lambda)-g(+0)=\int_0^a [g(t)-g(+0)]\,\Phi(t,\lambda)\,dt\,.$$

Ist $\varepsilon>0$ gegeben, so wählt man ein δ $(0<\delta<a)$ derart, daß für $0<t\leqq\delta$ die Ungleichung $|g(t)-g(+0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ gilt, und zerlege das obige Integral mittels δ:

$$\int_0^a=\int_0^\delta+\int_\delta^a=J_1+J_2\,.$$

Für J_1 erhalten wir unter Berücksichtigung von 1° und 2° die Abschätzung

$$|J_1|\leqq\int_0^\delta |g(t)-g(+0)|\,\Phi(t,\lambda)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_0^\delta \Phi(t,\lambda)\,dt<\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

die für alle λ gilt. Ferner ist

$$|J_2|\leqq\int_\delta^a |g(t)-g(+0)|\,\Phi(t,\lambda)\,dt\leqq M(\delta,\lambda)\int_0^a |g(t)-g(+0)|\,dt\,. \tag{2}$$

Nach 3° strebt J_2 gegen 0, so daß für alle hinreichend nahe bei ω gelegenen λ die Ungleichung $|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ gilt; daher gilt tatsächlich $|J(\lambda)-g(+0)|<\varepsilon$, was zu beweisen war.

Wir wollen dieses Ergebnis ergänzen. Die Funktion g möge außer von t noch von einer Veränderlichen x $(0\leqq x\leqq a)$ abhängen, $g=g(t,x)$, dabei aber für festes x den Voraussetzungen des Hilfssatzes genügen. Dann gilt folgendes:

Ist a) *$g(t,x)$ gleichmäßig in x und t beschränkt, d. h., ist*

$$|g(t,x)|\leqq L\,,$$

und strebt b) *$g(t,x)$ gleichmäßig bezüglich x gegen $g(+0,x)$, so strebt auch*

$$J(\lambda,x)=\int_0^a g(t,x)\,\Phi(t,\lambda)\,dt$$

für $\lambda\to\omega$ gleichmäßig bezüglich x gegen $g(+0,x)$.

Nach b) kann man nämlich die Zahl δ (im Beweis des Hilfssatzes) unabhängig von x wählen. Da ferner nach a)

$$|g(t,x)-g(+0,x)|\leqq 2L$$

gilt, kann man (2) durch die Ungleichung

$$|J_2|\leqq 2LaM(\delta,\lambda)$$

ersetzen, deren rechte Seite von x frei ist. Daher gilt für hinreichend zu ω benachbarte λ die Ungleichung $|J_2|<\frac{\varepsilon}{2}$, also gilt auch $|J(\lambda,x)-g(+0,x)|<\varepsilon$ für alle x gleichzeitig, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

741. Die Summation von Fourierreihen nach dem Poisson-Abelschen Verfahren. Die Funktion $f(x)$ habe die Periode 2π und sei in jedem endlichen Intervall absolut integrierbar. Wir betrachten ihre Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{3}$$

und wenden für beliebiges festes x darauf das verallgemeinerte Poisson-Abelsche Summationsverfahren (Nr. 418) an. Zu diesem Zweck multiplizieren wir das allgemeine Glied mit r^m $(m=0, 1, 2, \ldots;\ 0<r<1)$ und bilden die Reihe

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos mx + b_m \sin mx)\,. \tag{4}$$

Da die Koeffizienten a_m, b_m für $m \to \infty$ nach Nr. 682 gegen 0 streben, sind sie gleichmäßig beschränkt: $|a_m| \leqq K$, $|b_m| \leqq K$ ($K=\text{const}$). Daher wird die Reihe (4) durch $2K \sum_{0}^{\infty} r^m$ majorisiert, ist also konvergent.

Um das Verhalten ihrer Summe $f(r, x)$ für $r \to 1$ besser untersuchen zu können, stellen wir sie als Integral dar. Wenn wir in (4) die bekannten Formeln für die Koeffizienten,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mu \, du \qquad (m=0, 1, 2, \ldots)\,,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mu \, du \qquad (m=1, 2, \ldots)\,,$$

einsetzen, erhalten wir zunächst

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, du + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos m\,(u-x)\, du$$

und somit

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m\,(u-x) \right\} du\,.$$

Dieser Übergang ist nach der in Nr. 510 bewiesenen Folgerung erlaubt: Die bezüglich x gleichmäßig konvergente Reihe in der geschweiften Klammer darf nach Multiplikation ihrer Glieder mit einer absolut integrierbaren Funktion gliedweise integriert werden. Nun ist aber nach Nr. 418, Beispiel 2,

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m\,(u-x) = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,,$$

so daß wir schließlich

$$f(r, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\, du \tag{5}$$

erhalten. Dieses nach POISSON benannte Integral spielt in vielen Problemen der Analysis eine wichtige Rolle.

Tatsächlich wurden sowohl die Reihe (4) als auch das Integral (5), auf das die Reihe führt, von POISSON schon untersucht, ehe der Begriff der verallgemeinerten Summation auftauchte; allerdings fehlte es seinen Überlegungen an Strenge. Erst H. A. SCHWARZ lieferte die strenge Theorie des Poissonschen Integrals:

Satz. *Für die Funktion $f(x)$ mögen in dem Punkt x die Grenzwerte $f(x+0)$ und $f(x-0)$ existieren. Dann ist*

$$\lim_{r\to 1-0} f(r,x)=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-x)+r^2}\,du=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{6}$$

Insbesondere ist in einem Stetigkeitspunkt dieser Limes gleich $f(x)$.

Ist $f(x)$ überall stetig ($f(x)$ war als periodisch mit der Periode 2π vorausgesetzt worden), so strebt $f(r,x)$ bezüglich x gleichmäßig gegen $f(x)$.

Beweis. Wenn wir das Poissonsche Integral ebenso umformen wie seinerzeit (in Nr. 681) das Dirichletsche Integral, so erhalten wir

$$f(r,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt\,. \tag{7}$$

Um den Hilfssatz aus Nr. 740 auf dieses Integral anwenden zu können, setzen wir

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}=g(t)$$

und nehmen als Kern

$$\Phi(t,r)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \tag{8}$$

(*Poissonscher Kern*). Die Rolle des Parameters λ spielt r, sein Variationsbereich ist das Intervall $[0,1)$, und der Häufigkeitspunkt ist $\omega=1$. Wir wollen nun zeigen, daß Φ tatsächlich ein positiver Kern ist.

Zunächst ist $\Phi(t,r)>0$. Für $r<1$ ist der Zähler des Bruches in (8) offenbar positiv; ebenso der Nenner, denn es ist ja

$$1-2r\cos t+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\,. \tag{9}$$

Somit ist die Forderung 1° erfüllt. Setzt man ferner in (7) $f\equiv 1$, so ist auch $f(r,x)\equiv 1$ und

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=1\,,$$

also 2° erfüllt. Schließlich ist für $\delta\leqq t\leqq\pi$ (δ beliebig zwischen 0 und π) offenbar $\sin\frac{t}{2}\geqq\sin\frac{\delta}{2}$, also (vgl. (9))

$$1-2r\cos t+r^2\geqq 4r\sin^2\frac{\delta}{2}$$

und somit

$$M(\delta,r)=\sup_{\delta\leqq t\leqq\pi}\Phi(t,r)\leqq\frac{1}{\pi}\,\frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac{\delta}{2}}\,.$$

Offenbar gilt $M(\delta,r)\to 0$ für $r\to 1$ und festes δ, so daß auch 3° erfüllt ist.

Nach dem Hilfssatz ist somit

$$\lim_{r\to 1-0} f(r,x)=\lim_{t\to +0}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,,$$

was zu beweisen war.

Nun sei $f(x)$ überall stetig. Dann ist notwendigerweise $|f(x)|\leqq K$ und demnach auch

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right|\leqq K\,.$$

Da $f(x)$ gleichmäßig stetig ist, strebt

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}$$

für $t\to +0$ gleichmäßig bezüglich x gegen den Grenzwert $f(x)$. Damit ist auf Grund der Zusatzbemerkung aus Nr. 740 auch der Rest der Behauptung bewiesen.

Der soeben bewiesene Satz besagt: *In einem Punkt x, in dem $f(x)$ stetig ist bzw. eine Unstetigkeit erster Art besitzt, ist die Fourierreihe* (3) *nach dem Poisson-Abelschen Verfahren summierbar, und die verallgemeinerte Summe ist*

$$f(x)\quad bzw.\quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

Bemerkung. Ist $f(x)$ ursprünglich nur in $[-\pi,\pi]$ gegeben, so sieht man leicht, daß bei dem üblichen Übergang (Nr. 687) zu einer periodischen Funktion für $-\pi<x<\pi$ alles beim alten bleibt, während für $x=\pm\pi$ der Limes des Poissonschen Integrals bzw. die verallgemeinerte Summe der Reihe gleich

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

ist.

742. Lösung des Dirichletschen Problems für den Kreis. Das in Nr. 741 untersuchte Poissonsche Integral kann zur Lösung des sogenannten *Dirichletschen Problems* in einem einfachen, aber wichtigen Spezialfall benutzt werden. Bekanntlich wird eine Funktion $u=u(x,y)$ in einem bestimmten Gebiet *harmonisch* genannt, wenn sie nebst ihren Ableitungen u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy} dort stetig ist und der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{10}$$

genügt. Wir betrachten ein von einer geschlossenen Kurve (L) begrenztes Gebiet (D). Dann lautet das Dirichletsche Problem für dieses Gebiet folgendermaßen: *Auf (L) ist eine beliebige stetige Punktfunktion gegeben; es soll eine im abgeschlossenen Bereich (D) stetige und im Innern von (D) harmonische Funktion $u=u(x,y)$ bestimmt werden, die auf dem Rand mit der gegebenen Funktion übereinstimmt.* (In Nr. 602, Beispiel 7, war gezeigt worden, daß eine harmonische Funktion durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert.)

Wir wollen die Existenz der Lösung dieses Problems für den Fall zeigen, daß (D) ein Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1 ist (darauf läßt sich natürlich der Fall eines beliebigen Kreises zurückführen).

Es sei auf der Kreislinie (L) eine stetige Punktfunktion gegeben. Wird die Lage eines Punktes auf der Kreislinie durch den Winkel θ bestimmt (Abb. 145), so ist das gleichbedeutend mit der Vorgabe einer stetigen Funktion $f(\theta)$ der Periode 2π. Es wird sich als

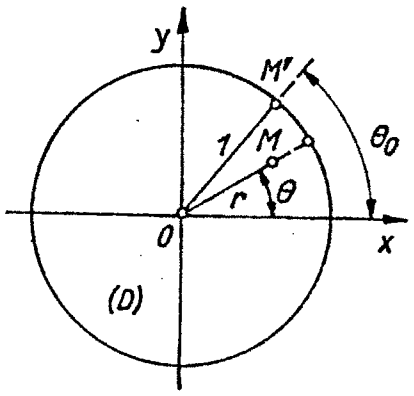

Abb. 145

zweckmäßig herausstellen, innerhalb (D) zu Polarkoordinaten r, θ überzugehen und die Gleichung (10) durch die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0 \tag{10*}$$

zu ersetzen (vgl. Nr. 222, Beispiel 1). Es handelt sich also darum, eine für $r \leqq 1$ stetige Funktion $u=u(r, \theta)$ zu finden, die für $r<1$ der Gleichung (10*) genügt und für $r=1$ mit $f(\theta)$ übereinstimmt.

Wir beginnen mit den einfachsten (nicht konstanten) Lösungen der Gleichung (10*):

$$r^n \cos n\theta, \qquad r^n \sin n\theta \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Man könnte sie beispielsweise mit der Fourierschen Methode (Nr. 721) finden; jedenfalls verifiziert man leicht, daß sie der Gleichung genügen. Wir multiplizieren sie mit beliebigen Faktoren A_n, B_n und bilden die Reihe

$$u(r, \theta)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos m\theta+B_m \sin m\theta)\, r^m$$

unter Hinzufügung eines konstanten Gliedes A_0; sie genügt formal der Differentialgleichung (10*), wenn man unbeschränkt gliedweise Differenzierbarkeit annimmt. Ist $u(r, \theta)$ unsere Lösung, so ist $u(1, \theta)=f(\theta)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos m\theta+B_m \sin m\theta)$, woraus wir, wie üblich, den Schluß ziehen, daß A_0, A_m, B_m die Fourierkoeffizienten von $f(\theta)$ sind:

$$A_0=\frac{a_0}{2}, \qquad A_m=a_m, \qquad B_m=b_m.$$

So gelangen wir, wenn auch formal, zur Lösung des Problems:

$$u(r, \theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} r^m (a_m \cos m\theta+b_m \sin m\theta). \tag{11}$$

In dieser Reihe erkennt man leicht die Poissonsche Reihe für $f(\theta)$, die man auch durch das Poissonsche Integral

$$u(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2}\,du \tag{11*}$$

ersetzen kann.

Jetzt muß man sich davon überzeugen, daß diese Funktion tatsächlich allen Bedingungen genügt. Zunächst ist auf Grund der gleichmäßigen Beschränktheit der Koeffizienten a_m und b_m leicht folgender Sachverhalt einzusehen: Werden nur die Werte $r \leqq r_0$ betrachtet, wobei $r_0<1$ ist, aber beliebig nahe bei 1 liegt, so konvergieren alle Reihen, die sich durch gliedweises (einmaliges oder zweimaliges) Differenzieren nach r bzw. nach θ aus (11) ergeben, gleichmäßig bezüglich r und bezüglich θ. Dann liefern sie

aber genau die sukzessiven Ableitungen von $u(r, \theta)$, und diese Funktion genügt im Innern des Kreises, d. h. für $r<1$, der transformierten Laplaceschen Gleichung, da ja jedes Glied der Reihe dieser Gleichung genügt.

Im Innern des Kreises hängt $u(r, \theta)$ stetig von beiden Variablen ab; das folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (11) in bezug auf beide Veränderliche (für $r \leqq r_0 < 1$), und zwar nach Satz 1 aus Nr. 431, den man leicht auf den Fall zweier Variablen verallgemeinert. Nun wollen wir beweisen, daß $u(r, \theta)$ gegen $f(\theta_0)$ strebt, wenn der Punkt $M(r, \theta)$ vom Innern des Kreises her gegen den Punkt $M'(1, \theta_0)$ auf dem Rand strebt. Da $f(\theta)$ stetig ist, gibt es zu beliebigem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ derart, daß für $|\theta-\theta_0|<\delta$ die Beziehung

$$|f(\theta)-f(\theta_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Andererseits kann man, da $u(r, \theta)$ für $r \to 1-0$ gleichmäßig in θ (vgl. Nr. 741) gegen $f(\theta)$ strebt, die Zahl δ so klein annehmen, daß für $|r-1|<\delta$ die Beziehung

$$|u(r, \theta)-f(\theta)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

für alle θ gilt. Somit erhalten wir für $|r-1|<\delta$ und $|\theta-\theta_0|<\delta$ schließlich

$$|u(r, \theta)-f(\theta_0)|<\varepsilon,$$

womit alles bewiesen ist.

743. Summierung von Fourierreihen nach dem Cesàro-Fejérschen Verfahren. Bekanntlich (Nr. 681) läßt sich die Partialsumme $s_n(x)$ der Fourierreihe (3) durch das Dirichletsche Integral darstellen:

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du\,.$$

Somit läßt sich das arithmetische Mittel der ersten n solchen Summen in der Gestalt

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du$$

oder nach Vereinfachung (vgl. Nr. 420, Beispiel 2) in der Form

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du$$

schreiben. Dieses Integral wird nach L. Fejér benannt, dem es als erstem gelang, die Methode der arithmetischen Mittel auf die verallgemeinerte Summation von Fourierreihen anzuwenden. Von Fejér stammt auch der folgende Satz (vgl. auch den Satz von Schwarz auf S. 519).

Satz. *Für $f(x)$ mögen in dem betrachteten Punkt x die Grenzwerte $f(x+0)$ und*

$f(x-0)$ existieren. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(u-x)}{\sin\frac{1}{2}(u-x)}\right]^2 du=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,. \tag{12}$$

Insbesondere ist in einem Stetigkeitspunkt dieser Limes gleich $f(x)$.

Ist $f(x)$ überall stetig (die Periode 2π war vorausgesetzt!), *so strebt $\sigma_n(x)$ gleichmäßig in x gegen $f(x)$.*

Beweis. Ähnlich dem Dirichletschen und dem Poissonschen Integral kann man das Fejérsche Integral folgendermaßen darstellen:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\cdot\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt\,. \tag{13}$$

Dieser Fall ordnet sich ebenfalls dem allgemeinen Schema von Nr. 740 unter, wenn man wie in Nr. 741

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}=g(t)$$

setzt und als Kern die Funktion

$$\Phi(t,n)=\frac{1}{n\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2$$

nimmt (*Fejérscher Kern*).

Man überzeugt sich leicht davon, daß das wirklich ein positiver Kern im Sinne von Nr. 740 ist (statt λ hat man als Parameter die natürliche Zahl n; ferner ist $\omega=\infty$). Offenbar ist nämlich $\Phi(t,n)\geqq 0$. Setzt man in (13) ferner $f\equiv 1$, so ist zugleich auch $s_n\equiv 1$ und $\sigma_n\equiv 1$, also

$$\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt=1\,, \tag{14}$$

d. h., für den Fejérschen Kern ist Forderung 2° aus Nr. 740 erfüllt. Außerdem ergibt sich leicht die Abschätzung

$$M(\delta,n)=\sup_{\delta\leqq t\leqq\pi}\Phi(t,n)\leqq\frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\,,$$

woraus $M(\delta,n)\to 0$ für $n\to\infty$ folgt. Somit ist auch 3° erfüllt, und durch Anwendung des Hilfssatzes aus Nr. 740 ergibt sich die Limesbeziehung (12).

Schließlich erhält man die letzte Behauptung des Satzes ebenso wie im Fall des Schwarzschen Satzes.

Nun folgt aus dem soeben bewiesenen Satz sofort: *In einem Stetigkeitspunkt x bzw. im Grenzfall, einem Unstetigkeitspunkt x erster Art der Funktion $f(x)$, ist die Fourierreihe nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel summierbar, und die verallgemeinerte Summe der Reihe ist*

$$f(x) \quad bzw. \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Nach dem Satz von FROBENIUS aus Nr. 421 erhält man als Folgerung hieraus die analoge Aussage zu der aus Nr. 741, die sich auf die Poisson-Abelsche Summation bezieht.

Ist $f(x)$ nur in $[-\pi, \pi]$ gegeben, so gilt entsprechend die Bemerkung wie am Schluß von Nr. 741.

744. Einige Anwendungen der verallgemeinerten Summation von Fourierreihen. Wir wollen nun einige Folgerungen aus dem Fejérschen Satz herleiten (man könnte sie auch, allerdings durch kompliziertere Überlegungen, aus dem Schwarzschen Satz gewinnen). Die ersten beiden veranschaulichen die interessante Tatsache, daß die verallgemeinerte Summation die Begründung von Sätzen liefern kann, die sich auf die Summierung im eigentlichen Sinne beziehen.

1°. *Konvergiert eine Fourierreihe* (3) *in einem Punkt x, in dem $f(x)$ stetig ist bzw. eine Unstetigkeit erster Art hat, so ist die Summe der Reihe notwendigerweise gleich*

$$f(x) \quad bzw. \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Nach dem Fejérschen Satz hat die verallgemeinerte Summe (nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel) gerade diese Werte. Da dieses Verfahren regulär (im Sinne von Nr. 420) ist und die Reihe im gewöhnlichen Sinne eine Summe hat, muß diese mit der verallgemeinerten Summe übereinstimmen.

2°. Aus dem Fejérschen Satz kann man den Satz von DIRICHLET-JORDAN über die Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion von endlicher Schwankung (vgl. Nr. 686, 699 und 706) gewinnen.

Ist $f(x)$ im ganzen Intervall $[-\pi, \pi]$ von endlicher Schwankung, so existieren in jedem Punkt x die Grenzwerte $f(x+0)$ und $f(x-0)$, und die verallgemeinerte Summe der Fourierreihe ist $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Andererseits haben (vgl. Nr. 707) die Fourierkoeffizienten a_n, b_n einer Funktion endlicher Schwankung bekanntlich die Ordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$; dann folgt aber nach dem Satz von HARDY (Nr. 422), daß die Reihe (3) im gewöhnlichen Sinne konvergiert, und zwar gegen dieselbe Summe.

Das entspricht allerdings nicht ganz dem Satz von DIRICHLET-JORDAN, der in der Formulierung von Nr. 686 sozusagen „lokalen" Charakter hat. Dort wird nämlich die endliche Schwankung nur für eine beliebig kleine Umgebung des betrachteten Punktes gefordert. Nun wissen wir aber aus Nr. 683, daß gerade die Werte, die die Funktion in einer solchen Umgebung annimmt, sowohl das Verhalten der Fourierreihe als auch den Wert ihrer Summe in dem gegebenen Punkt bestimmen. Daher können wir, ohne im Grunde etwas zu ändern, die Werte der Funktion außerhalb der betreffenden Umgebung so abändern, daß wir eine Funktion erhalten, die im ganzen Intervall $[-\pi, \pi]$ von endlicher Schwankung ist, und auf diese Funktion das oben Gesagte anwenden.

3°. Ist $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ stetig und ist überdies $f(-\pi)=f(\pi)$, so kann $f(x)$ als stetige Funktion der Periode 2π auf die ganze Zahlengerade fortgesetzt werden. In diesem Fall konvergiert die Folge $\{\sigma_n(x)\}$ der Fejérschen Summen für alle x in $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Da jede solche Summe ein trigonometrisches Polynom ist, folgt hieraus in üblicher Weise der Satz von WEIERSTRASS über die Approximation einer stetigen periodischen Funktion (Nr. 734).

4°. Aus dem Fejérschen Satz kann man unmittelbar den Satz über die Abgeschlossenheit des trigonometrischen Systems in der Klasse der stetigen Funktionen erhalten (vgl. Nr. 733). Ist nämlich eine in $[-\pi, \pi]$ stetige Funktion $f(x)$ orthogonal zu allen Funktionen des trigonometrischen Systems, so daß alle ihre Fourierkoeffizienten verschwinden, so ist $\sigma_n(x)=0$. Gleichzeitig strebt, wenigstens im offenen Intervall $(-\pi, \pi)$, offenbar $\sigma_n(x)$ gegen $f(x)$ für $n\to\infty$. Daher ist $f(x)=0$ im Innern und aus Stetigkeitsgründen auch in den Endpunkten des Intervalls.

Wir bringen noch eine Bemerkung, die zwar nicht mit dem Fejérschen Satz, aber mit den Fejérschen Summen zusammenhängt.

5°. *Ist $f(x)$ beschränkt und liegen die Werte von $f(x)$ für $-\pi\leqq x\leqq\pi$ zwischen m und M, so liegen auch alle Fejérschen Summen $\sigma_n(x)$ zwischen m und M.*

Das folgt sofort aus der Abschätzung des Integrals (13), wenn man (14) berücksichtigt:

$$m\cdot\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt = m \leqq \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt$$

$$\leqq M\cdot\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^2 dt = M\,.$$

Für die Partialsummen $s_n(x)$ einer Fourierreihe gilt die entsprechende Aussage *nicht*. Das folgt daraus, daß der *Dirichletsche Kern*

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

im Gegensatz zum Fejérschen das Vorzeichen wechselt. In bezug auf diese Summen kann man nicht einmal etwas über die Existenz von *gemeinsamen* Schranken sagen.

Sind jedoch die Fourierkoeffizienten a_n, b_n von $f(x)$ von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$, so sind auch alle Partialsummen $s_n(x)$ gleichmäßig beschränkt.

Ist nämlich für alle $n=1, 2, 3, \ldots$

$$n|a_n|\leqq A,\qquad n|b_n|\leqq B\,,$$

so kann man

$$m-(A+B)\leqq s_n(x)\leqq M+(A+B)$$

beweisen.

Wenn wir nämlich auf den vorliegenden Fall die Überlegungen der Nr. 422 anwenden, so erhalten wir

$$s_n(x)=\sigma_{n+1}(x)+\frac{\sum_{k=1}^{n} k\,(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}{n+1}\,.$$

Nun ist aber $|k\,(a_k\cos kx+b_k\sin kx)|\leqq A+B$ und nach dem schon Bewiesenen $m\leqq\sigma_{n+1}(x)\leqq M$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Betrachten wir beispielsweise die Entwicklung (Nr. 690, Beispiel 2)

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (0 < x < 2\pi), \tag{15}$$

so ist $m = -\frac{\pi}{2}$, $M = \frac{\pi}{2}$, $A = 0$, $B = 1$. Daher kann man sagen, daß die Partialsummen der Reihe gleichmäßig durch die Zahl $\frac{\pi}{2} + 1$ beschränkt sind (vgl. Nr. 702).

Hieraus kann man noch eine allgemeinere Schlußfolgerung ziehen: Die Partialsummen der Fourierreihe einer Funktion von endlicher Schwankung sind gleichmäßig beschränkt (vgl. Nr. 737). Das folgt daraus, daß für solche Funktionen die Fourierkoeffizienten a_n, b_n von der Ordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind (vgl. Nr. 707).

745. Gliedweise Differentiation von Fourierreihen. Differenziert man die Fourierreihe (3) einer Funktion $f(x)$ gliedweise, so erhält man die Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\,(b_m \cos mx - a_m \sin mx), \tag{16}$$

die im allgemeinen divergiert, selbst wenn $f(x)$ in dem betrachteten Punkt x eine endliche Ableitung $f'(x)$ hat. Als Beispiel möge die Reihe (15) dienen; bei gliedweiser Differentiation erhält man die divergente Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos mx\,.$$

Es gilt jedoch folgender interessanter Satz, der von FATOU[1]) stammt: *Existiert im Punkt x eine endliche Ableitung $f'(x)$, so ist die Reihe* (16) *nach dem Poisson-Abelschen Verfahren summierbar, und zwar gegen die verallgemeinerte Summe $f'(x)$.*

Zum Beweis differenzieren wir die Poissonsche Reihe (4) nach x:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} r^m m\,(b_m \cos mx - a_m \sin mx); \tag{17}$$

das kann gliedweise geschehen, da die sich dabei ergebende Reihe gleichmäßig in x konvergiert. Dasselbe Resultat ergibt sich, wie wir sogleich sehen werden, wenn man das Poissonsche Integral (5) nach x differenziert:

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, \frac{2r\,(1 - r^2)\sin(u - x)}{[1 - 2r\cos(u - x) + r^2]^2}\, du;$$

hier ist nach Satz 3* aus Nr. 510 die Differentiation unter dem Integralzeichen legitim. Das Integral formen wir um:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t)\, \frac{2r\,(1 - r^2)\sin t}{[1 - 2r\cos t + r^2]^2}\, dt \\ &= r \cdot \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x + t) - f(x - t)}{2\sin t} \cdot \frac{2\,(1 - r^2)\sin^2 t}{[1 - 2r\cos t + r^2]^2}\, dt\,.\end{aligned} \tag{18}$$

[1]) PIERRE FATOU, 1878–1929, französischer Mathematiker.

Nun setzen wir

$$g(t)=\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}$$

oder auch

$$g(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+t)-f(x)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right]\cdot\frac{t}{\sin t};$$

dann ist

$$g(+0)=f'(x)\,.$$

Wir zeigen jetzt, daß

$$\Phi(t,r)=\frac{1}{\pi}\,\frac{2(1-r^2)\sin t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}$$

ein positiver Kern im Sinne von Nr. 740 ist. Zunächst ist offenbar $\Phi(t,r)\geqq 0$. Setzt man in (18) insbesondere $f(x)=\sin x$, so ist

$$f(r,x)=r\sin x,\qquad \frac{\partial f(r,x)}{\partial x}=r\cos x,\qquad \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin t}=\cos x\,.$$

Setzen wir dies ein und kürzen wir durch $r\cos x$, so folgt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(1-r^2)\sin^2 t}{[1-2r\cos t+r^2]^2}\,\mathrm{d}t=1\,.$$

Schließlich ist

$$M(\delta,r)=\sup_{\delta\leqq t\leqq\pi}\Phi(t,r)\leqq\frac{1}{\pi}\,\frac{2(1-r^2)}{\left[4r\sin^2\frac{\delta}{2}\right]^2},$$

so daß sicher $M(\delta,r)\to 0$ für $r\to 1$ gilt.

Wenden wir jetzt den Hilfssatz aus Nr. 740 an, so ergibt sich, daß das Integral (18), die Summe der Reihe (17), für $r\to 1$ gegen $f'(x)$ strebt. Das bedeutet aber, daß die Reihe (16) nach dem Poisson-Abelschen Verfahren summierbar ist, und zwar gegen den Wert $f'(x)$, was zu beweisen war.

Bemerkungen. I. Der soeben bewiesene Satz läßt sich auf mehrmalige Differentiation verallgemeinern: *Existiert im betrachteten Punkt eine endliche Ableitung $f^{(p)}(x)$, $p>1$, so ist die durch p-malige gliedweise Differentiation aus* (3) *erhaltene Reihe nach dem Poisson-Abelschen Verfahren gegen $f^{(p)}(x)$ smmierbar.*

II. Für das Cesàrosche Summationsverfahren gilt die dem Fatouschen Satz analoge Behauptung nicht. Fordert man aber die Stetigkeit der Ableitung im betrachteten Punkt, so kann die Poisson-Abelsche Summation durch die Cesàrosche Summation ersetzt werden.

§ 3. Die Eindeutigkeit der trigonometrischen Reihenentwicklung einer Funktion

746. Hilfssätze über verallgemeinerte Ableitungen. Um später die Darlegung des in der Überschrift genannten wichtigen Problems nicht unterbrechen zu müssen, führen wir zunächst einige Überlegungen durch, die wir dazu benötigen.

Im Intervall $[a, b]$ sei eine Funktion $F(x)$ gegeben. Wir wählen ein x zwischen a und b: $a<x<b$. Dann hat für hinreichend kleines $h>0$ die Differenz $\Delta_h F(x)= =F(x+h)-F(x-h)$ einen Sinn. Wenn der Grenzwert

$$F^{[1]}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h F(x)}{2h}$$

existiert und endlich ist, nennt man ihn die *verallgemeinerte* („symmetrische") *Ableitung* von $F(x)$ im Punkt x. Wenn die gewöhnliche Ableitung $F'(x)$ existiert, existiert auch die verallgemeinerte Ableitung $F^{[1]}(x)$ und stimmt mit ihr überein. Das folgt unmittelbar aus nachstehender Beziehung: Für $h\to+0$ gilt

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right]\to F'(x)\,.$$

Jedoch kann die verallgemeinerte Ableitung in manchen Fällen existieren, in denen die gewöhnliche Ableitung nicht existiert. Beispielsweise hat die Funktion

$$F(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0),\end{cases}$$

wie aus Nr. 102, 1°, bekannt ist, in $x=0$ keine gewöhnliche Ableitung. Die verallgemeinerte Ableitung existiert jedoch und ist dort gleich 0. Nun betrachten wir die zweite Differenz

$$\begin{aligned}\Delta_h^2 F(x)&=\Delta_h\Delta_h F(x)=\Delta_h F(x+h)-\Delta_h F(x-h)\\ &=[F(x+2h)-F(x)]-[F(x)-F(x-2h)]\\ &=F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h)\,.\end{aligned}$$

Wenn der Grenzwert

$$F^{[1]}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

existiert und endlich ist, nennt man ihn die *verallgemeinerte zweite Ableitung* von $F(x)$ im Punkt x. Auch hier kann man zeigen, daß diese verallgemeinerte Ableitung existiert, wenn die gewöhnliche Ableitung $F''(x)$ existiert, und daß sie mit dieser übereinstimmt. Wendet man nämlich auf die beiden Funktionen von h, $\Delta_h^2 F(x)$ und $4h^2$, die Cauchysche Formel (den zweiten Mittelwertsatz)

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}=\frac{F'(x+2\theta h)-F'(x-2\theta h)}{4\theta h}$$

an,[1]) so folgt nach dem oben über die verallgemeinerte (erste) Ableitung Gesagten, daß für $h\to 0$ der erhaltene Ausdruck gegen $F''(x)$ strebt. Das Beispiel der Funktion

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(vgl. Nr. 101, 2°) zeigt, daß die umgekehrte Aussage falsch ist. Aus der Existenz der verallgemeinerten Ableitung $F^{[1]}(x)$ folgt nicht die Existenz von $F''(x)$.

[1]) Die Voraussetzung, daß $F''(x)$ im Punkt x existiert, schließt die Voraussetzung der Existenz von $F'(x)$ in einer Umgebung von x ein.

Der folgende Satz zeigt, daß in einigen Fällen die verallgemeinerte Ableitung die Rolle der gewöhnlichen Ableitung spielen kann.

Satz von SCHWARZ. *Existiert für eine im Intervall* $[a, b]$ *stetige Funktion* $F(x)$ *die verallgemeinerte zweite Ableitung* $F^{[''']}(x)$ *im Innern des Intervalls und ist sie dort identisch* 0, *so ist* $F(x)$ *eine lineare Funktion* (ganz so, als wenn $F''(x)$ existiert und identisch 0 ist).

Zum Beweis wählen wir eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$ und bilden die Hilfsfunktion

$$\varphi(x) = \pm\left\{F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\} + \varepsilon\,(x-a)\,(x-b)\,,$$

wobei sich unsere Überlegung in gleichem Maße auf die beiden Vorzeichen vor der Klammer bezieht. Dann ist im Innern des Intervalls

$$\varphi^{[''']}(x) = 2\varepsilon\,, \tag{1}$$

denn für $F(x)$ ist die verallgemeinerte zweite Ableitung gleich 0, und für die quadratische Funktion ist sie gleich ihrer gewöhnlichen zweiten Ableitung.[1])

Die Funktion $\varphi(x)$ verschwindet in den Endpunkten des Intervalls $[a, b]$. Wir zeigen zunächst, daß sie im Innern keine positiven Werte annehmen kann. Wäre dies doch der Fall, so müßte nämlich $\varphi(x)$ als stetige Funktion ihren größten positiven Wert in einem inneren Punkt x_0 annehmen. Dann wäre aber

$$\varphi(x_0 \pm 2h) \leqq \varphi(x_0), \qquad \Delta_h \varphi(x_0) \leqq 0$$

und schließlich

$$\varphi^{[''']}(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta_h \varphi(x_0)}{4h^2} \leqq 0\,,$$

entgegen (1).

Also ist $\varphi(x) \leqq 0$ für alle x, d. h.

$$\pm\left\{F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\} \leqq \varepsilon\,(x-a)\,(b-x) < \varepsilon\,(b-a)^2,$$

und zwar für jedes Vorzeichen. Dann ist aber

$$\left| F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a) \right| < \varepsilon\,(b-a)^2.$$

Da ε beliebig ist, folgt, daß die linke Seite 0 ist, so daß also

$$F(x) = F(a) + \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)$$

gilt, was zu beweisen war.

Ist $F^{[''']}(x) = 0$ überall mit Ausnahme endlich vieler „unbekannter" Punkte, in denen darüber nichts bekannt ist, so gilt der

Verallgemeinerte Satz von SCHWARZ. *Für eine im Intervall* $[a, b]$ *stetige Funktion* $F(x)$ *existiere und verschwinde im Innern des Intervalls die verallgemeinerte zweite Ableitung* $F^{[''']}(x)$ *überall, bis auf endlich viele Punkte* $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < b$,

[1]) Klar ist folgendes: Haben F und G im betrachteten Punkt die verallgemeinerten Ableitungen $F^{[''']}$ und $G^{[''']}$, so existiert für ihre Summe bzw. Differenz $F \pm G$ die verallgemeinerte Ableitung, die gleich $F^{[''']} \pm G^{[''']}$ ist.

in denen darüber nichts bekannt sei. Gilt in jedem dieser Punkte wenigstens die abgeschwächte Bedingung

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h}=0\,, \tag{2}$$

so ist $F(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ linear.

Nach dem vorhergehenden Satz ist $F(x)$ bestimmt linear zwischen je zwei Ausnahmepunkten, so daß also z. B. in $[x_{i-1}, x_i]$

$$F(x)=cx+d$$

und im Nachbarintervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$F(x)=c'x+d'$$

gilt. Dabei stimmen für $x=x_i$ die beiden Ausdrücke überein:

$$F(x_i)=cx_i+d=c'x_i+d'. \tag{3}$$

Die Bedingung (2) liefert für $x=x_i$ die Beziehung

$$\lim_{h\to+0}\left\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h}-\frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\right\}=0\,.$$

Die linke Seite ist aber einfach die Differenz der Richtungskoeffizienten der Geraden $y=cx+d$ und $y=c'x+d'$. Also gilt $c=c'$ und somit wegen (3) auch $d=d'$; die beiden geradlinigen Stücke sind also Verlängerungen voneinander. Da das für je zwei benachbarte Teilintervalle gilt, ist das graphische Bild von $F(x)$ eine Gerade im ganzen Intervall; $F(x)$ ist also linear.

747. Das Riemannsche Summationsverfahren für trigonometrische Reihen. Im folgenden spielt ein von RIEMANN angegebenes Summationsverfahren für trigonometrische Reihen

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{4}$$

eine wichtige Rolle. Dieses Verfahren setzt keineswegs voraus, daß die Reihe (4) die Fourierreihe irgendeiner Funktion ist, und kann auf völlig beliebige trigonometrische Reihen angewandt werden, sofern nur die Koeffizienten gleichmäßig beschränkt sind, d. h.

$$|a_n|\leqq L,\qquad |b_n|\leqq L\qquad (L=\text{const}) \tag{5}$$

gilt. Durch zweimalige formale gliedweise Integration der Reihe (4) erhält man die Reihe

$$\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}\,. \tag{6}$$

Auf Grund der Bedingung (5) wird sie durch die konvergente Reihe $L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ majorisiert, konvergiert also in jedem x-Intervall gleichmäßig und definiert eine stetige Funktion $F(x)$. Existiert für diese Funktion im gegebenen Punkt x der endliche Grenzwert

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h F(x)}{4h^2}\,,$$

d. h. die *verallgemeinerte* zweite Ableitung $F^{[''1]}(x)$, so nennt man diesen die *verallgemeinerte Summe der Reihe* (4) *im Riemannschen Sinne.*

Für die Reihe $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ ergibt sich beispielsweise nach diesem Verfahren

$$F(x)=\frac{x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

In Nr. 690, Beispiel 9, hatten wir für die rechts stehende Reihe die Summe $\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi^2}{6}$ (für $0\leqq x\leqq 2\pi$) gefunden; demnach ist

$$F(x)=\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{6}.$$

Daher ist für $0<x<2\pi$ offenbar $F^{[''1]}(x)=F''(x)=0$, so daß die verallgemeinerte Summe der Reihe gleich 0 ist (vgl. Nr. 418 und Nr. 420). Man bestätigt leicht, daß

$$\Delta_2^h\cos nx=-2\cos nx\,(1-\cos 2nh)=-4\cos nx\sin^2 nh$$

und

$$\Delta_h^2\sin nx=-4\sin nx\sin^2 nh$$

ist. Somit ist

$$\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \tag{7}$$

Das Riemannsche Summationsverfahren besteht also darin, die Glieder der Reihe (4) *mit dem Faktor* $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ *zu multiplizieren und den Grenzübergang* $h\to 0$ *zu vollziehen.*

In dieser Form kann das Riemannsche Summationsverfahren auch auf völlig beliebige Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ angewendet werden. Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ wenigstens für hinreichend kleine h konvergiert und ihre Summe $\varphi(h)$ für $h\to 0$ gegen einen Grenzwert U strebt, so nennt man U die verallgemeinerte Summe der ursprünglichen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$.

Wie der Leser sieht, ordnet sich das Riemannsche Verfahren dem allgemeinen Schema aus Nr. 426 unter. Die Rolle des Parameters x übernimmt h (bei $\omega=0$), und die Faktoren $\gamma_n(h)=\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ für $n\geqq 1$, $\gamma_0(h)=1$, genügen den beiden dort formulierten Bedingungen. Das ist für die erste klar:

$$\lim_{h\to 0}\gamma_n(h)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=1.$$

Wegen

$$\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-\left(\frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h}\right)^2=\int_{(n-1)h}^{nh}\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]'dz$$

und

$$\left|\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-\left(\frac{\sin(n-1)h}{(n-1)h}\right)^2\right|\leqq\int_{(n-1)h}^{nh}\left|\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]'\right|dz$$

gilt

$$|\gamma_0(h)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(h) - \gamma_{n-1}(h)| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin (n-1)\,h}{(n-1)\,h}\right)^2 \right|$$

$$\leqq 1 + \int_0^{\infty} \left| \left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]' \right| dz .$$

Von der Existenz dieses Integrals überzeugt man sich leicht, denn es ist

$$\left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right]' = 2 \sin z \left(\cos z - \frac{\sin z}{z}\right) \frac{1}{z^2} = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

für $z \to \infty$. Somit ist auch die zweite Bedingung erfüllt.

Das verallgemeinerte Riemannsche Summationsverfahren ist also *regulär*. Wenden wir dies auf trigonometrische Reihen an, so erhalten wir den

Ersten Satz von RIEMANN. *Konvergiert eine trigonometrische Reihe* (4) *in einem Punkt x gegen die Summe S, so hat die durch zweimaliges gliedweises Integrieren daraus entstehende Funktion $F(x)$ in diesem Punkt eine verallgemeinerte zweite Ableitung, die gleich S ist:*

$$F^{[1]}(x) = S .$$

Wir bemerken, daß für den Fall einer Fourierreihe der Ausdruck

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$$

sich leicht in ein Integral von dem in Nr. 740 untersuchten Typus umformen läßt, und zwar mit positivem Kern. Daher kann für das Riemannsche Summationsverfahren ein dem Schwarzschen Satz (Nr. 741) und dem Fejérschen Satz (Nr. 743) völlig analoger Satz formuliert werden. Wir gehen jedoch nicht darauf ein; für uns ist das Riemannsche Verfahren wichtig als mächtiges Hilfsmittel zur Untersuchung trigonometrischer Reihen von allgemeinem Typus.[1]) Dabei ist noch folgender Satz von Nutzen:

Zweiter Satz von RIEMANN. *Streben die Koeffizienten a_n, b_n der Reihe* (4) *gegen 0, so gilt unabhängig von der Konvergenz der Reihe die Bedingung* (2):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0 .$$

Für beliebiges festes x setzen wir

$$u_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad u_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

Dann reduziert sich das Problem auf den Nachweis der Beziehung

$$\lim_{h \to 0} \left\{ u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} \right\} h = 0 . \tag{8}$$

[1]) RIEMANN selbst befaßte sich überhaupt nicht mit der verallgemeinerten Summation von Reihen. Er entwickelte seine Theorie zur Lösung des Problems, das er sich selbst gestellt hatte: diejenigen Funktionen, die sich in trigonometrische Reihen allgemeiner Form entwickeln lassen, vollständig zu charakterisieren. Wir können hier diese Riemannschen Untersuchungen jedoch nicht anführen.

Nach Voraussetzung gilt $u_n \to 0$, d. h., zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index N derart, daß für $n \geqq N$ die Beziehung $|u_n| < \varepsilon$ gilt. Wir spalten nun den uns interessierenden Ausdruck in zwei Summanden auf:

$$S_1 = \left\{u_0 + \sum_{n=1}^{N-1}\right\} \cdot h \quad \text{und} \quad S_2 = \sum_{n=N}^{\infty} \cdot h;$$

dann ist

$$|S_2| < \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 h < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 h .$$

Man zeigt leicht, daß der Faktor von ε für alle h gleichmäßig beschränkt ist. Beispielsweise wissen wir aus Nr. 494, Beispiel 4, daß

$$\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2} = \frac{\pi - h}{2}$$

ist. Daher ist

$$|S_2| < \frac{\pi}{2} \varepsilon .$$

Der Summand S_1 strebt mit $h \to 0$ offenbar gegen 0, wird daher für hinreichend kleines h absolut kleiner als ε. Damit ist die Beziehung (8) bewiesen.

748. Ein Hilfssatz über die Koeffizienten konvergenter trigonometrischer Reihen. Die nachstehend bewiesene Aussage, die im folgenden benutzt wird, ist auch für sich allein genommen von Interesse.

Cantorsches Lemma. *Wenn die trigonometrische Reihe* (4)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

wenigstens für die x eines Intervalls $(d) = [\alpha, \beta]$ konvergiert, so streben die Koeffizienten a_m, b_m für $m \to \infty$ notwendigerweise gegen 0.

Wir schreiben das allgemeine Glied der Reihe, $a_m \cos mx + b_m \sin mx$, in der Gestalt $\varrho_m \sin m(x - \alpha_m)$ mit $\varrho_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$. Dann muß gezeigt werden, daß ϱ_m gegen 0 strebt. Wäre das nicht der Fall, so müßte für ein positives δ und für unendlich viele m die Ungleichung

$$\varrho_m \geqq \delta \tag{9}$$

gelten.

Wir konstruieren *induktiv* eine Folge ineinandergeschachtelter Intervalle (d_n) und eine Folge wachsender Indizes m_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ derart, daß

$$|\varrho_{m_n} \sin m_n (x - \alpha_{m_n})| > \frac{\delta}{2} \quad \text{für } x \text{ aus } (d_n) \tag{10}$$

ist. Als m_1 wählen wir den ersten der Indizes m, die außer der Ungleichung (9) noch der Ungleichung $md > \pi$ genügen; dabei ist d die Länge des Intervalls $(d) = [\alpha, \beta]$. Wenn x in (d) variiert, nimmt $\sin m_1 (x - \alpha_{m_1})$ wenigstens einmal den Wert ± 1 an; dann gibt es aber aus Stetigkeitsgründen auch ein in (d) enthaltenes Intervall (d_1), in dessen sämtlichen Punkten der absolute Betrag von $\sin m_1 (x - \alpha_{m_1})$

größer als $\frac{1}{2}$ ist, so daß also wegen (9) auch

$$|\varrho_{m_1} \sin m_1 (x-\alpha_{m_1})| > \frac{\delta}{2} \quad \text{für } x \text{ aus } (d_1)$$

gilt. Sind (d_{n-1}) und m_{n-1} schon bestimmt, so lassen sich völlig analog ein Index m_n und ein in (d_{n-1}) enthaltenes Intervall (d_n) konstruieren derart, daß (10) gilt. Überdies läßt sich auch noch $m_n > m_{n-1}$ erreichen.

Wir wählen nun einen Punkt x_0, der allen (d_n) angehört (mindestens ein solcher Punkt existiert stets). Für ihn gilt die Ungleichung (10) für alle n, d. h., es würde dann die Reihe (4) dort divergieren (da eine notwendige Bedingung für die Konvergenz nicht erfüllt ist), entgegen der Voraussetzung. Damit ist das Lemma bewiesen.

749. Die Eindeutigkeit der trigonometrischen Entwicklung. Wir kommen nun zu einer der Hauptfragen dieses Paragraphen: *Wenn $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ in eine trigonometrische Reihe* (4) *entwickelbar ist, ist diese Entwicklung eindeutig?* Diese Frage ist um so berechtigter, als der Ausdruck für die Koeffizienten der Reihe durch die Euler-Fourierschen Formeln, wie wir in Nr. 678 betonten, nicht logisch einwandfrei motiviert war. Der folgende Satz gibt darauf eine positive Antwort.

Satz von HEINE-CANTOR. *Konvergieren die beiden trigonometrischen Reihen*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \tag{4}$$

und

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) \tag{11}$$

in allen Punkten des Intervalls $[-\pi, \pi]$ gegen dieselbe Summe $f(x)$, eventuell mit Ausnahme endlich vieler „Unbestimmtheitspunkte" $x_1, x_2, \ldots, x_k$, dann sind diese Reihen identisch, d. h., es ist

$$a_m = \alpha_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad b_m = \beta_m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Durch Subtraktion der Reihen (4) und (11) führen wir das Problem auf den Nachweis der Eindeutigkeit der trigonometrischen *Entwicklung der Null* zurück:

Konvergiert (eventuell mit Ausnahme endlich vieler Unbestimmtheitspunkte) im Intervall $[-\pi, \pi]$ die trigonometrische Reihe (4) *gegen* 0, *so sind alle Koeffizienten gleich* 0:

$$a_m = 0, \qquad b_m = 0.$$

Diese Behauptung wollen wir jetzt beweisen.

Nach dem Lemma aus Nr. 748 streben die Koeffizienten a_m und b_m gegen 0. Insbesondere sind sie also gleichmäßig beschränkt.

Wir betrachten die Riemannsche Funktion $F(x)$ (vgl. (6)), die unter unseren Voraussetzungen stetig ist. Bis auf die endlich vielen Unbestimmtheitspunkte ist ihre verallgemeinerte zweite Ableitung $F^{[2]}(x)$ überall gleich 0 (nach dem ersten Riemannschen Satz; Nr. 747). Nach dem zweiten Riemannschen Satz (Nr. 747)

gilt sogar in den Unbestimmtheitspunkten die abgeschwächte Bedingung (2). (Dieser Satz ist hier anwendbar, da die Koeffizienten a_m und b_m gegen 0 streben.) Dann kann man auf Grund des Schwarzschen Satzes (Nr. 746) schließen, daß $F(x)$ linear ist:

$$\frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2} = cx + d\,.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Identität auf der ganzen Zahlengeraden gilt, denn was für $[-\pi, \pi]$ gesagt wurde, gilt auch für jedes endliche Intervall. Schreiben wir die Identität in der Form

$$\frac{a_0 x^2}{4} - cx = d + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

so können wir aus der Periodizität der auf der rechten Seite stehenden Funktion schließen, daß $a_0 = c = 0$ ist. Somit haben wir folgende *Entwicklung der Null*:

$$0 = d + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \cos mx + b_m \sin mx}{m^2},$$

dieses Mal aber in eine *gleichmäßig konvergente* Reihe. In diesem Fall ergeben sich aber nach Nr. 678 die Koeffizienten nach den Euler-Fourierschen Formeln, und wir finden $a_m = b_m = 0$.

Bemerkung. Man kann übrigens die Berufung auf das Cantorsche Lemma vermeiden.

Es sei x ein beliebiger Punkt, aber kein Unbestimmtheitspunkt, so daß die Reihe (4) für dieses x konvergiert und ihr allgemeines Glied

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{12}$$

gegen 0 strebt. Setzt man in (4) statt x die Werte $x+\delta$ und $x-\delta$ ein und addiert, so kommt man zu der Entwicklung

$$a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \cos m\delta\,,$$

die für alle Werte von δ (eventuell mit Ausnahme endlich vieler) gegen 0 konvergiert. In bezug auf diese trigonometrische Reihe mit veränderlichem δ wissen wir schon, daß ihre Koeffizienten gegen 0 streben und daß (ohne Berufung auf das Cantorsche Lemma) die obigen Überlegungen anwendbar sind, so daß $a_0 = 0$ und

$$a_m \cos mx + b_m \sin mx = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{13}$$

ist. Diese Gleichungen gelten nun nicht nur für die von den Unbestimmtheitspunkten verschiedenen x, sondern aus Stetigkeitsgründen überall. Durch Differentiation nach x erhalten wir auch

$$b_m \cos mx - a_m \sin mx = 0; \tag{14}$$

aus (13) und (14) folgt schließlich $a_m = b_m = 0$.

750. Abschließende Sätze über Fourierreihen. Wir wissen also jetzt: Ist für eine Funktion $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ eine Entwicklung in eine trigonometrische Reihe mög-

lich, dann nur auf eine Art und Weise. Wie sieht sie nun aus? Ist sie notwendigerweise die Fourierreihe von $f(x)$?[1])

Uns sind (sogar stetige) Funktionen bekannt, die nicht in eine Fourierreihe entwickelbar sind (Nr. 703); bis jetzt war aber die Frage offen, ob solche Funktionen nicht in eine trigonometrische Reihe mit Koeffizienten, die von Fourierkoeffizienten verschieden sind, entwickelt werden können.

Diese Fragen sind um so verständlicher, als wir leicht überall konvergente trigonometrische Reihen konstruieren können (die also eine bestimmte Funktion eindeutig definieren), die ganz gewiß keine Fourierreihen sind. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Sie konvergiert sogar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Punkte der Form $2\pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (Nr. 430) enthält, und definiert dort eine stetige Funktion. In den Punkten $2k\pi$ konvergiert sie natürlich ebenfalls, und zwar gegen 0. Diese Reihe ist aber keine Fourierreihe, weil die notwendige Bedingung aus Nr. 731 verletzt ist (vgl. die Bemerkung dort): Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergiert (Nr. 367, Beispiel 6).

Unser Problem erfährt seine endgültige Lösung in dem Satz von DU BOIS-REYMOND und seiner Verallgemeinerung in Nr. 751.

Zunächst bringen wir einen von LEBESGUE stammenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Hat die im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $F(x)$ dort im Innern überall eine verallgemeinerte zweite Ableitung $F^{[''']}(x)$, die zwischen den Grenzen m und M liegt,*

$$m \leqq F^{[''']}(x) \leqq M,$$

so liegt auch jeder Quotient der Form $\frac{\Delta_h^2 F(x_0)}{4h^2}$ zwischen diesen Grenzen (natürlich unter der Annahme, daß das Intervall $[x_0-2h, x_0+2h]$ ganz in $[a, b]$ liegt).

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x-x_0)\frac{\Delta_{2h} f(x_0)}{4h} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2},$$

offenbar ein Polynom zweiten Grades. Man überzeugt sich durch Nachrechnen unmittelbar davon, daß sie in den drei Punkten x_0-2h, x_0, x_0+2h dieselben Werte wie $f(x)$ annimmt, so daß in diesen Punkten die Differenz

$$\lambda(x) = f(x) - \varphi(x)$$

verschwindet. Die Funktion $\lambda(x)$ ist in $[x_0-2h, x_0+2h]$ stetig und hat im Innern dieses Intervalls eine verallgemeinerte zweite Ableitung:

$$\lambda^{[''']}(x) = f^{[''']}(x) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}$$

[1]) Natürlich unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ absolut integrierbar ist; denn wenn wir von Fourierreihen sprechen, meinen wir immer (wie auch oben) Fourierreihen absolut integrierbarer Funktionen.

(für das Polynom φ ist die verallgemeinerte zweite Ableitung natürlich gleich der gewöhnlichen zweiten Ableitung). Ihren größten und ihren kleinsten Wert nimmt die Funktion $\lambda(x)$ in den beiden Punkten x_1 und x_2 im Innern des Intervalls $[x_0-2h, x_0+2h]$ an.[1]) Man kann leicht zeigen, daß in diesen Punkten $\lambda^{[''']}(x_1)\leqq 0$ bzw. $\lambda^{[''']}(x_2)\geqq 0$ gilt (vgl. die Überlegungen auf S. 529), woraus

$$f^{[''']}(x_1)\leqq \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{4h^2}\leqq f^{[''']}(x_2)$$

folgt, womit die Behauptung bewiesen ist.

Jetzt sind wir in der Lage, folgenden wichtigen Satz zu beweisen.

Satz von du Bois-Reymond. *Läßt sich eine in* $[-\pi, \pi]$ *beschränkte und eigentlich integrierbare Funktion* $f(x)$ *in diesem Intervall in eine trigonometrische Reihe*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{15}$$

entwickeln, so ist diese Reihe notwendigerweise ihre Fourierreihe.

Aus der Konvergenz der Reihe folgt die Beschränktheit der Koeffizienten a_n, b_n (Hilfssatz aus Nr. 748). Wir führen die Riemannsche Funktion $F(x)$ ein und erhalten für den Ausdruck $\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}$ die Entwicklung in die trigonometrische Reihe (7):

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2,$$

die bei konstantem h gleichmäßig in x konvergiert, da sie durch eine Reihe der Form $L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ majorisiert wird. Dann sind aber nach Nr. 678 ihre Koeffizienten die Fourierkoeffizienten ihrer Summe:

$$\left.\begin{aligned} &a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\,dx,\\ &a_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\,dx, \qquad b_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\,dx\\ &(n=1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Entwicklung (15) kann auch außerhalb des Intervalls $[-\pi, \pi]$ als gültig angesehen werden, wenn man $f(x)$ periodisch auf die ganze Zahlengerade fortsetzt. Daher gilt nach dem ersten Riemannschen Satz aus Nr. 747 für alle Werte von x

$$F^{[''']}(x)=f(x).$$

Da $f(x)$ beschränkt ist, $|f(x)|\leqq K$, gilt nach dem vorhergehenden Hilfssatz zugleich auch

$$\left|\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}\right|\leqq K \tag{17}$$

für alle x und h.

[1]) Selbst wenn einer dieser Werte 0 ist, wird er im Innern angenommen, nämlich in x_0.

In den Gleichungen (16) lassen wir jetzt h gegen 0 gehen; der Grenzübergang kann nach dem Satz von ARZELÀ (Nr. 526) unter dem Integralzeichen vollzogen werden. So erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, & a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & (n&=1, 2, 3, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

was zu beweisen war.

751. Verallgemeinerung. Wir verzichten jetzt auf die Voraussetzung, $f(x)$ sei beschränkt, und wollen sogar zulassen, in endlich vielen Punkten möge die Entwicklung (15) nicht gelten. Unter diesen schwächeren Voraussetzungen gilt der folgende Satz:

Verallgemeinerter Satz von DU BOIS-REYMOND. *Ist die in* $[-\pi, \pi]$ *absolut integrierbare Funktion* $f(x)$ *dort (eventuell mit Ausnahme endlich vieler Punkte) in eine trigonometrische Reihe* (15) *entwickelbar, so ist diese die Fourierreihe von* $f(x)$.[1])

Zunächst werde $f(x)$ periodisch auf die ganze Zahlengerade fortgesetzt.[2]) Dann betrachtet man statt $f(x)$ zweckmäßiger die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}.$$

Für sie gilt in jedem endlichen Intervall (eventuell mit Ausnahme endlich vieler Punkte) die Entwicklung

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

bei der das freie Glied fehlt. Wir beweisen nun erstens

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = 0$$

und zweitens für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx; \tag{19}$$

hieraus läßt sich dann die Beziehung (18) folgern.

Da auch hier (nach dem Hilfssatz aus Nr. 748) die Koeffizienten beschränkt sind, kann man die Riemannsche Funktion

$$\Phi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

heranziehen, die die Periode 2π hat.

---

[1]) Diese Verallgemeinerung stammt von CHARLES J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, 1866–1962, belgischer Mathematiker.

[2]) Genügt $f(x)$ nicht der Bedingung $f(-\pi) = f(\pi)$, so muß man zunächst, um sie zu erfüllen, den Wert von $f(x)$ an einem der Intervallenden ändern, etwa an dem, an welchem die Entwicklung (15) nicht gilt.

Wir greifen ein Intervall $[\alpha, \beta]$ heraus, das weder Ausnahmepunkte von $f(x)$ noch singuläre Punkte von $\varphi(x)$ enthält; auch die Intervalle $[\alpha-\delta, \beta+\delta]$ sind für hinreichend kleine δ so beschaffen. Da φ beschränkt ist, können wir wie oben schließen, daß $\frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2}$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $h \leqq \delta$ beschränkt ist. Außerdem ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} = \varphi(x) .$$

Für beliebiges y aus $[\alpha, \beta]$ gilt nach dem Satz von ARZELÀ (Nr. 526)

$$\lim_{h \to 0} \int_\alpha^y \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{4h^2} \, dx = \int_\alpha^y \varphi(x) \, dx .$$

Setzen wir

$$\Phi_1(y) = \int_0^y \Phi(t) \, dt ,$$

so können wir das in der Form

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(y)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_\alpha^y \varphi(t) \, dt$$

schreiben. Da der Ausdruck in der geschweiften Klammer für $\alpha \leqq y \leqq \beta$, $h \leqq \delta$ beschränkt ist, erhalten wir, wieder nach dem Satz von ARZELÀ,

$$\lim_{h \to 0} \int_\alpha^x \{\ldots\} \, dy = \int_\alpha^x dy \int_\alpha^y \varphi(t) \, dt \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta) .$$

Setzen wir ferner

$$\Phi_2(x) = \int_0^x \Phi_1(y) \, dy ,$$

so können wir diese Beziehung folgendermaßen schreiben:

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2} - \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2} - (x-\alpha) \cdot \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2} \right\} = \int_\alpha^x dy \int_\alpha^y \varphi(t) \, dt .$$

Offenbar hat aber $\Phi_2(x)$ die gewöhnliche zweite Ableitung $\Phi(x)$, so daß

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(x)}{4h^2} = \Phi(x), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_2(\alpha)}{4h^2} = \Phi(\alpha)$$

ist. Bezeichnen wir den (offenbar existierenden) Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 \Phi_1(\alpha)}{4h^2}$ mit γ, so finden wir schließlich

$$\int_\alpha^x dy \int_\alpha^y \varphi(t) \, dt = \Phi(x) - \Phi(\alpha) - \gamma \, (x-\alpha) .$$

Nun erkennt man leicht, daß sich $\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) \, dt$ (für $-\pi \leqq x \leqq \pi$) von dem vorhergehenden Doppelintegral um eine lineare Funktion unterscheidet. Somit ist die Funktion

$$\Psi(x) = \Phi(x) - \int_0^x dy \int_0^y \varphi(t) \, dt \tag{20}$$

in jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ linear. Demnach ist in jedem Punkt x, der kein singulärer Punkt von $\varphi(x)$ und kein Ausnahmepunkt von $f(x)$ ist, in dem also (15) nicht gilt,

$$\Psi^{[r']}(x) = 0 .$$

Andererseits ist ausnahmslos in allen Punkten x eine Bedingung vom Typ (2) erfüllt: Der Ausdruck

$$\frac{\Delta_h^2 \Psi(x)}{2h} = \frac{\Delta_h^2 \Phi(x)}{2h} - \frac{1}{2h} \int_x^{x+2h} dy \int_0^y \varphi(t)\, dt + \frac{1}{-2h} \int_x^{x-2h} dy \int_0^y \varphi(t)\, dt$$

strebt für $h \to 0$ gegen 0. Für den ersten Summanden folgt das aus dem zweiten Riemannschen Satz (nach dem Hilfssatz aus Nr. 748), und für die Summe der beiden anderen Summanden folgt es aus dem Satz aus der Differenzierbarkeit des Integrals nach der oberen Grenze (Nr. 305, 12°).

Dann gilt auf Grund des verallgemeinerten Satzes von SCHWARZ (Nr. 746) in jedem endlichen Intervall, also für alle x,

$$\Psi(x) = cx + d . \tag{21}$$

Es sei jetzt

$$\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx);$$

durch zweimalige Integration erhalten wir (Nr. 731)

$$\int_0^x dy \int_0^y \varphi(t)\, dt = \frac{\alpha_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx}{n^2} . \tag{22}$$

Durch Gegenüberstellung von (20), (21) und (22) kommen wir zu der Entwicklung

$$\frac{\alpha_0 x^2}{4} + cx + d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n) \cos nx + (\beta_n - b_n) \sin nx}{n^2} ,$$

die ausnahmslos für alle reellen x gilt. Da die rechte Seite eine stetige und periodische, also beschränkte Funktion von x ist, ist $c = 0$, also auch

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx = 0 .$$

Somit zeigt sich, daß die Reihe

$$-d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n - a_n) \cos nx + (\beta_n - b_n) \sin nx}{n^2}$$

überall gegen 0 konvergiert, und zwar gleichmäßig. Hieraus folgt nach Nr. 678 oder Nr. 749, daß alle ihre Koeffizienten verschwinden, so daß (19) erfüllt ist:

$$a_n = \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\, dx ,$$

und somit ist der Beweis zu Ende geführt.

Damit haben wir schließlich die ganze bisher behandelte Theorie der Entwicklung von Funktionen in trigonometrische Reihen wirklich auf feste Grundlagen gestellt und insbesondere begründet, wieso sich gerade die Fourierreihen einer solchen besonderen Aufmerksamkeit erfreuen.

Anhang

Der allgemeine Gesichtspunkt beim Limesbegriff

752. Die verschiedenen Arten des Grenzwertes, die in der Analysis vorkommen. Der Grenzwertbegriff durchzieht den ganzen Analysislehrgang; er nimmt jedoch in verschiedenen Teilen ganz verschiedene Formen an.

Wir begannen mit der Untersuchung des einfachsten Falles, des Grenzwertes einer diskreten Veränderlichen, die eine numerierte Folge von Werten durchläuft (Nr. 22, 23); gerade im Hinblick darauf wurde die Theorie der Grenzwerte im einzelnen entwickelt (Kap. I).

Alsdann wurde der Grenzwertbegriff verallgemeinert auf den Fall des Grenzwertes einer Funktion einer oder mehrerer Veränderlichen (Nr. 52, 165). Dabei meinen wir immer die Definition des Grenzwertes mit Hilfe der „Epsilontik", d. h. mit ε und δ. Der Grenzprozeß wurde dabei zwar komplizierter, änderte sich aber nicht grundsätzlich. Die Integralrechnung führte uns auf die Untersuchung der Grenzwerte von Riemannschen und Darbouxschen Summen (Nr. 295, 296, 301). Hierbei hing der Grenzprozeß mit der Zerlegung eines gegebenen Intervalls in Teilintervalle zusammen und zeigte im Vergleich zu dem früher untersuchten schon bemerkenswerte Eigentümlichkeiten.

Mit diesem Typus von Grenzwerten sind in gewissem Maße auch die Grenzwerte verwandt, denen wir in Kap. X bei der Definition der Bogenlänge (als Grenzwert der Länge einbeschriebener Polygonzüge; Nr. 330), des Flächeninhaltes ebener Figuren (als Grenzwert einbeschriebener und umbeschriebener geradlinig begrenzter Flächen; Nr. 336) usw. begegneten.

Schließlich wurde der Leser im Band III noch mit anderen Grenzwertbildungen bekannt, die sich als Resultat von Grenzprozessen ergaben, welche von den oben erwähnten verschieden sind.

Alle diese verschiedenartigen Grenzwerte können prinzipiell auf den Grenzwert einer diskreten Veränderlichen zurückgeführt werden. Diesen Gedanken haben wir im Laufe der ganzen Untersuchung hervorgehoben, wobei wir anfangs (Nr. 53, 166, 295) auf Einzelheiten eingingen, während wir uns später darauf beschränkten, die Möglichkeit der Umformulierung der Grenzwertdefinition in die Sprache der Folgen nur zu erwähnen. Natürlich ist die Zurückführung komplizierter Grenzprozesse auf den einfachen Grenzwert einer diskreten Veränderlichen an sich interessant. Für uns jedoch war sie nur in der Hinsicht wichtig, daß sie uns der Notwendigkeit enthob, jedesmal die elementaren Sätze aus der Theorie der Grenzwerte von Neuem zu beweisen.

Obwohl sich auf diesem Wege gerade die Einheitlichkeit aller Formen von Grenzwerten zeigt, mit denen wir bisher zu tun hatten, stellt die Notwendigkeit, zu diesem Zweck die Veränderliche gleichsam zu „anatomisieren", numerierte Folgen aus der Menge ihrer Werte auszusondern, zweifellos etwas Gekünsteltes dar. Jedenfalls führt dieses Verfahren nicht zur Herausarbeitung einer allgemeinen Definition des Grenzwertes einer Veränderlichen.

Das Ziel dieses Anhangs besteht gerade darin, einen allgemeinen Gesichtspunkt beim Grenzwertbegriff herauszuarbeiten, *der alle in der Analysis vorkommenden verschiedenen Grenzwertbildungen als Spezialfälle umfaßt*, und auf dieser Grundlage die Umrisse einer allgemeinen Theorie der Grenzwerte zu skizzieren.

Die im folgenden dargelegten Gedanken wurden zuerst von S. O. Schatunowski[1]) geäußert, später von den amerikanischen Mathematikern E. H. Moore[2]) und H. L. Smith[3]). Wir weisen jedoch darauf hin, daß diese von ihnen stammende Problemstellung keineswegs die einzig mögliche ist.

753. (Total-) Geordnete Mengen. Die oben untersuchten Formen von Veränderlichen, die einen Grenzwert haben, legen folgenden Gedanken nahe: Damit es allgemein sinnvoll ist, vom Grenzwert einer Veränderlichen zu sprechen, darf ihr Variabilitätsbereich nicht „amorph" sein, sondern er muß in bestimmter Weise *gerichtet* oder *geordnet* sein. In diesem Zusammenhang definieren wir zunächst einen grundlegenden Begriff in seiner allgemeinen Form, nämlich den der *geordneten Menge*.

Es sei eine Menge $\mathfrak{S} = \{P\}$ von Elementen P irgendwelcher Art gegeben. Wenn für ein bestimmtes Paar *verschiedener* Elemente P, P' vereinbart ist, daß eines dieser Elemente (etwa P') auf das andere (also P) folgt, so schreibt man $P' \succ P$ und sagt, *für das Paar P, P' sei eine Ordnung definiert*. Die Vorschrift, die für alle möglichen Paare verschiedener Elemente von $\mathfrak{S}$ oder auch nur für einige dieser Paare eine Ordnung festlegt, muß in jedem Fall folgenden beiden Forderungen genügen:

(I) *Ist $P_1 \succ P_2$, so kann nicht gleichzeitig $P_2 \succ P_1$ gelten;*

(II) *ist $P_1 \succ P_2$ und $P_2 \succ P_3$, so ist notwendigerweise $P_1 \succ P_3$* (d. h., die Beziehung „folgt auf" ist *transitiv*).

Ist nach irgendeiner Vorschrift für alle Paare verschiedener Elemente von $\mathfrak{S}$ eine Ordnung festgelegt, die den Forderungen (I) und (II) genügt, so nennt man die Menge $\mathfrak{S}$ *(total-) geordnet*, zum Unterschied von den in Nr. 754 zu untersuchenden halbgeordneten Mengen, bei denen nicht für alle Paare von Elementen eine Ordnung definiert ist.[4]) Wir geben einige Beispiele für geordnete Mengen an:

1. Jede Menge $\{x\}$ reeller Zahlen x ist *in natürlicher Weise* geordnet, wenn man diese Zahlen wachsend ($x' \succ x$, wenn $x' > x$) oder fallend ($x' \succ x$, wenn $x' < x$) anordnet.

---

[1]) Samuil Ossipowitsch Schatunowski, 1859–1829, russischer Mathematiker.

[2]) Eliakim Hastings Moore, 1862–1932.

[3]) H. L. Smith, 20. Jh.

[4]) Der Sprachgebrauch ist nicht einheitlich; man spricht von totalgeordneten bzw. von geordneten Mengen oder aber von geordneten bzw. halbgeordneten (oder teilweise geordneten) Mengen. – *Anm. d. Red.*

Auf Grund dieses einfachen Beispiels kam man zu dem Wort „folgt“ und zur Bezeichnung $\succ$ (stilisiertes $>$).

Dasselbe Beispiel kann in geometrischer Form folgendermaßen beschrieben werden: Jede Menge von Punkten auf einer horizontalen Geraden ist geordnet, wenn man von zwei Punkten denjenigen als auf den anderen folgend ansieht, der rechts (bzw. links) von diesem liegt.

2. Wir betrachten jetzt irgendeine Menge $\mathfrak{M}=\{M(x, y)\}$ von Punkten $M(x, y)$ des zweidimensionalen (Zahlen-) Raumes. Diese Menge kann z. B. folgendermaßen geordnet werden:

$$M'(x', y')\succ M(x, y), \quad \text{wenn} \quad x>x' \quad \text{oder, falls} \quad x=x', \quad \text{wenn} \quad y>y'.$$

In den angegebenen Beispielen verifiziert man leicht, daß die Bedingungen (I) und (II) erfüllt sind.

Um die Benutzung des soeben eingeführten Begriffes bei dem Limes einer Veränderlichen zu erleichtern, wollen wir zusätzlich annehmen, die betrachtete Menge $\mathfrak{S}$ habe kein „letztes“ Element (d. h. kein Element, das auf alle übrigen folgt). Alsdann läßt sich zu jedem Element P von $\mathfrak{S}$ ein Element P' finden derart, daß $P'\succ P$ gilt.

754. Halbgeordnete Mengen. Wie wir im folgenden sehen werden, ist man häufig genötigt, die Annahme, für jedes Paar von Elementen aus $\mathfrak{S}$ sei eine Ordnung festgelegt, fallen zu lassen und sich damit zufrieden zu geben, daß eine solche Ordnung unter Beibehaltung der Bedingungen (I) und (II) nur für gewisse Paare von Elementen aus $\mathfrak{S}$ vorliegt. In solchen Fällen fordern wir aber noch, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

(III) *Zu je zwei Elementen P, P' der Menge $\mathfrak{S}$ gibt es in $\mathfrak{S}$ ein Element P'', das auf beide folgt, also*

$$P''\succ P \quad \textit{und} \quad P''\succ P'.$$

Dabei ist es gleichgültig, ob für das Paar P, P' eine Ordnung definiert ist oder nicht.

Diese Forderung schließt die Existenz eines letzten Elementes in $\mathfrak{S}$ aus.

Man sieht leicht, daß jede geordnete Menge $\mathfrak{S}$, die kein letztes Element besitzt, notwendigerweise auch der Bedingung (III) genügt. Für je zwei Elemente P, P' aus $\mathfrak{S}$ ist nämlich eine Ordnung definiert, etwa $P'\succ P$. Da P' nicht letztes Element ist, gibt es in $\mathfrak{S}$ ein Element P'' mit $P''\succ P'$; wegen der Transitivität der Ordnungsbeziehung $\succ$ gilt dann auch $P''\succ P$, was zu beweisen war.

Wenn wenigstens für gewisse Paare von Elementen aus $\mathfrak{S}$ eine Ordnung definiert ist, die den Forderungen (I), (II), (III) genügt, so nennen wir P eine *halbgeordnete Menge* (vgl. die Fußnote 4 auf S. 542).

Wir geben einige Beispiele an.

3. Wir betrachten eine Menge $\mathfrak{X}$ reeller Zahlen x, für welche die Zahl a Häufungspunkt ist (Nr. 52); dabei gehöre a nicht zu $\mathfrak{X}$. Wir setzen

$$x'\succ x, \quad \text{falls} \quad |x'-a|<|x-a|\,.$$

Also folgt eine Zahl einer anderen, wenn sie näher am Häufungspunkt liegt als diese.

Die Forderungen (I) und (II) sind offenbar erfüllt. Gibt es in $\mathfrak{X}$ keine Werte von x, die gleich weit von a entfernt sind, aber auf verschiedenen Seiten von a liegen, so kann $\mathfrak{X}$ (total-) geordnet werden. Gibt es aber solche Wertepaare, so lassen sich diese nach unserer Ordnungsvorschrift offenbar nicht ordnen.

Nun wollen wir Forderung (III) verifizieren. Wir wählen zwei beliebige Zahlen x und x' aus $\mathfrak{X}$. Da sie beide von a verschieden sind und a Häufungspunkt von $\mathfrak{X}$ ist, gibt es in $\mathfrak{X}$ notwendigerweise ein x'', das näher an a liegt als x und x'; dann ist aber $x'' \succ x$ und $x'' \succ x'$. Somit ist $\mathfrak{X}$ jedenfalls halbgeordnet.

4. Es sei $\mathfrak{X}$ eine Menge von Zahlen mit dem Häufungspunkt ∞. Man kann $\mathfrak{X}$ ordnen mit Hilfe der Bedingung

$$x' \succ x, \quad \text{wenn} \quad |x'| > |x| .$$

Die Bedingungen (I) bis (III) sind erfüllt. Gibt es in $\mathfrak{X}$ keine Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so kann $\mathfrak{X}$ (total-) geordnet werden. Existieren jedoch solche Paare, so kann man diese nicht ordnen, und $\mathfrak{X}$ ist nur halbgeordnet.

5. Wir betrachten jetzt eine beliebige Menge $\mathfrak{M} = \{M(x, y)\}$ von Punkten $M(x, y)$ des zweidimensionalen Raumes mit dem Häufungspunkt $M_0(a, b)$ (Nr. 163). Wir nehmen seine beiden Koordinaten a und b als endlich an; ferner gehöre M_0 der Menge $\mathfrak{M}$ nicht an. Wir definieren die Ordnung durch

$$M'(x', y') \succ M(x, y) ,$$

wenn

$$\max(|x'-a|, |y'-b|) < \max(|x-a|, |y-b|) .$$

Wie in Beispiel 3 sind (I), (II) und (III) erfüllt. Wir verifizieren beispielsweise (III). Es seien $M(x, y)$ und $M'(x', y')$ aus $\mathfrak{M}$ gegeben. Da beide von M_0 verschieden sind, ist

$$\sigma = \max(|x-a|, |y-b|) > 0$$

und

$$\sigma' = \max(|x'-a|, |y'-b|) > 0 .$$

Es sei $\delta = \min(\sigma, \sigma')$. Da M_0 Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ ist, gibt es in $\mathfrak{M}$ einen Punkt $M''(x'', y'')$ derart, daß $|x''-a| < \delta$ und $|y''-b| < \delta$ ist. Dann ist aber $M'' \succ M$ und $M'' \succ M'$. Somit ist (III) erfüllt, und $\mathfrak{M}$ ist tatsächlich halbgeordnet.

Ist eine der Koordinaten von M_0, etwa a, gleich ∞, so kann man die Definition der Ordnung beispielsweise so modifizieren, daß man $|x-a|$ durch $\frac{1}{|x|}$ ersetzt.

6. Wir geben noch zwei andere Vorschriften an, nach denen man die Menge $\mathfrak{M}$ aus Beispiel 5 ordnen kann; a und b seien wieder endlich.

Es sei

$$M'(x', y') \succ M(x, y) ,$$

wenn

$$|x'-a| + |y'-b| < |x-a| + |y-b| ,$$

oder auch

$$M'(x', y') \succ M(x, y),$$

wenn

$$\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2} < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

ist. Wir überlassen es dem Leser, nachzuprüfen, daß die Bedingungen (I) bis (III) erfüllt sind.

7. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge der Gitterpunkte (m, n) mit natürlichen Zahlen m, n und dem Punkt (∞, ∞) als Häufungspunkt. Analog zu Beispiel 5 kann man diese Menge nach folgender Vorschrift ordnen:

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{wenn} \quad \min(m', n') > \min(m, n).$$

Einfacher wäre

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{wenn} \quad m' > m \quad \text{und} \quad n' > n;$$

auch hier sind (I) bis (III) erfüllt.

8. Wir betrachten ein Beispiel aus einem anderen Gebiet. Die Elemente der betrachteten Menge $\mathfrak{R}$ seien alle möglichen Zerlegungen R eines gegebenen Intervalles $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle mit Hilfe der Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Bezeichnet λ die größte Länge der Teilintervalle, so ist es naturgemäß, verschiedene Zerlegungen R nach abnehmendem λ zu ordnen. Alsdann ist diejenige Zerlegung die nachfolgende, der das kleinere λ entspricht.

Daß (I) und (II) erfüllt sind, ist klar. Auch (III) ist leicht zu verifizieren. Zu zwei Zerlegungen, die den Werten λ und λ' entsprechen, läßt sich eine Zerlegung in noch kleinere Teilintervalle finden, der eine Zahl λ'' entspricht, die kleiner als λ und λ' ist.

Die Menge $\mathfrak{R}$ ist somit (halb)geordnet, denn für zwei Zerlegungen mit demselben λ ist die Ordnung nicht definiert.

9. Diese Menge $\mathfrak{R} = \{R\}$ läßt sich auch noch anders ordnen: Eine Zerlegung R' folge auf die Zerlegung R, wenn R' aus R durch Hinzunahme weiterer Teilpunkte entsteht. Auch diese Vorschrift führt nur zu einer Halbordnung, da beispielsweise für zwei Zerlegungen R und R' mit ganz verschiedenen Teilpunkten eine Ordnung nicht definiert ist.

755. Geordnete Veränderliche und ihr Grenzwert. Wir betrachten jetzt eine Veränderliche x mit dem Variabilitätsbereich $\mathfrak{X}$. Man kann sich vorstellen, daß dieser Bereich $\mathfrak{X}$ selbst geordnet (oder auch nur halbgeordnet) ist oder, allgemeiner, daß die Werte x aus $\mathfrak{X}$ eindeutig den Elementen P einer geordneten Menge $\mathfrak{P} = \{P\}$ zugeordnet sind, die aus Objekten beliebiger Natur besteht. In diesem Fall wird die Veränderliche x eine *geordnete Veränderliche* genannt.

Entsprechend der Ordnung in $\mathfrak{P}$ ist auch die Menge der Werte $x = x_P$ geordnet:

$$x_{P'} \succ x_P, \quad \text{wenn} \quad P' \succ P \qquad (\text{in } \mathfrak{P}).$$

Das ist die verallgemeinernde Nachbildung des Sachverhalts, den wir für diskrete Veränderliche x_n vorgefunden haben, deren Werte den Zahlen der natürlichen Zahlenreihe – den Nummern – eindeutig zugeordnet waren und deren Ordnung derjenigen der natürlichen Zahlen entsprach:

$$x_{n'} > x_n, \quad \text{wenn} \quad n' > n .$$

So wie wir die Elemente P von $\mathfrak{S}$ unterscheiden, so auch die Werte $x = x_P$ unserer Veränderlichen, nämlich nach ihren „Indizes" P. Unter dieser Voraussetzung lassen wir (ebenso wie im Fall einer diskreten Veränderlichen) auch gleiche Werte mit verschiedenen „Indizes" zu.

Wir weisen besonders darauf hin, daß wir, wenn wir von einer geordneten Veränderlichen sprechen, im Grunde keinerlei Vorstellungen über die Anordnung ihrer Werte im Raum oder in der Zeit damit verknüpfen. Ein folgender Wert bedeutet nicht etwa „weiter entfernt" als der vorhergehende, auch nicht „später" als der vorhergehende, usw. Wenn wir uns trotzdem den Gebrauch von Worten wie „von einer bestimmten Stelle an" oder „von einem gewissen Moment der Veränderung an" usw. gestatten, so tun wir das nur der Bildhaftigkeit des Ausdrucks halber.

Die Definition des Grenzwertes einer geordneten Veränderlichen $x = x_P$ (oder, wie man manchmal auch sagt, des Grenzwertes einer geordneten Menge $\{x_P\}$) ist der Definition des Grenzwertes einer diskreten Veränderlichen (einer Folge) völlig analog:

Die Veränderliche $x = x_P$ hat den *endlichen Grenzwert* a, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index P_ε aus $\mathfrak{S}$ gefunden werden kann derart, daß für alle $P > P_\varepsilon$ die entsprechenden Werte von $x = x_P$ der Ungleichung

$$|x - a| = |x_P - a| < \varepsilon$$

genügen.

In der Definition aus Nr. 23 spielte die Rolle von P_ε offenbar die Zahl N_ε; die Beziehung $n > N_\varepsilon$ ist mit $n > N_\varepsilon$ gleichbedeutend.

Ebenso lautet die Definition für einen unendlichen Grenzwert:

Die Veränderliche $x = x_P$ hat den *Grenzwert* ∞, wenn für jede Zahl $E > 0$ ein „Index" P_E aus $\mathfrak{S}$ gefunden werden kann derart, daß

$$|x| = |x_P| > E ,$$

sobald $P > P_E$ ist.

Man kann diese Definition leicht umformen, wenn der Limes $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Dabei schreibt man wie üblich

$$\lim x = a \ (\infty, +\infty, -\infty) \quad \text{oder} \quad x \to a \ (\infty, +\infty, -\infty) .$$

756. Beispiele. Wir beginnen mit dem Beispiel einer Veränderlichen x, deren Variabilitätsbereich $\mathfrak{X}$ selbst geordnet ist.

1. Es sei $\mathfrak{X} = \{x\}$ eine Menge reeller Zahlen mit dem Häufungspunkt a, die nach fallendem $|x - a|$ geordnet ist (vgl. Beispiel 3 aus Nr. 754). Offenbar hat die entsprechende Veränderliche x den Grenzwert a: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es in $\mathfrak{X}$ ein $x_\varepsilon \neq a$ derart, daß $|x_\varepsilon - a| < \varepsilon$ ist; dann ist für $x > x_\varepsilon$ erst recht $|x - a| < \varepsilon$.

Analog gilt, wenn $\mathfrak{X}=\{x\}$ den Häufungspunkt ∞ hat und man diese Menge nach wachsendem $|x|$ ordnet (vgl. Beispiel 4 aus Nr. 754), $x\to\infty$.

Oft jedoch hat man den Fall, daß die Werte der Veränderlichen den Elementen P einer geordneten „Indexmenge" $\mathfrak{P}$ zugeordnet sind. Die nachstehenden Beispiele sind besonders wichtig: Sie zeigen, daß *die in diesem Lehrgang betrachteten verschiedenen Formen des Grenzwertes tatsächlich als Spezialfälle des oben behandelten allgemeinen Grenzwertbegriffes angesehen werden können.*

2. Wir betrachten den Grenzwert einer Funktion (Nr. 52)

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\,, \tag{1}$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf endliche a und A beschränken.

Es sei $f(x)$ auf einem Bereich $\mathfrak{X}=\{x\}$ definiert, der den Häufungspunkt a habe. Der Wert a selbst möge nicht zu $\mathfrak{X}$ gehören oder wenigstens bei der Definition des Grenzwertes (1) nicht berücksichtigt werden. Diese Funktion ist hier genau diejenige Veränderliche, von deren Grenzwert die Rede ist, während x die Rolle des Index P spielt. Wir wollen die Schreibweise $x\to a$ so verstehen, daß der Variabilitätsbereich $\mathfrak{X}$ von x nach abnehmendem $|x-a|$ geordnet ist (vgl. Nr. 754, Beispiel 3). Dann läßt sich die Menge $\{f(x)\}$ der Werte der Funktion $f(x)$ entsprechend ordnen, und die Gleichung (1) erhält in Übereinstimmung mit der allgemeinen Definition einen bestimmten Sinn. Sie bedeutet nämlich, daß zu gegebenem $\varepsilon>0$ immer ein x_ε aus $\mathfrak{X}$ gefunden werden kann derart, daß die Ungleichung

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{2}$$

erfüllt ist, sobald $x>x_\varepsilon$, d. h. sobald $|x-a|<|x_\varepsilon-a|$ ist. Setzt man $|x_\varepsilon-a|=\delta$, so kann man diese Bedingung in der Form $|x-a|<\delta$ schreiben. Umgekehrt, gilt (2) für $|x-a|<\delta$, so kann man, falls x_ε so gewählt wird, daß $|x_\varepsilon-a|<\delta$ ist, behaupten, daß (2) für $x>x_\varepsilon$ gilt. Somit ist die neue Definition des Grenzwertes einer Funktion der alten aus Nr. 52 äquivalent.

3. Die Definition des Grenzwertes einer Funktion zweier Veränderlicher,

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A \tag{3}$$

kann in der Terminologie der geordneten Veränderlichen völlig analog formuliert werden. Es sei $(M)=f(x,y)$ auf einem Bereich $\mathfrak{M}=\{M(x,y)\}$ mit dem Häufungspunkt $M_0(a,b)$ definiert. Dieser Punkt selbst bleibt bei der Definition der Gleichung (3) außer Betracht. Die Punkte $M(x,y)$ aus $\mathfrak{M}$ spielen die Rolle der Indizes. Wir ordnen die Menge $\mathfrak{M}$ so wie in Nr. 754, Beispiel 5, und in diesem Sinne wollen wir die Schreibweise $M\to M_0$ oder $x\to a$, $y\to b$ verstehen. Damit ordnen wir auch die Menge der Funktionswerte $\{f(M)\}=\{f(x,y)\}$. Dann erhält (3) einen Sinn, in Übereinstimmung mit der allgemeinen Definition des Grenzwertes einer geordneten Veränderlichen.

Auch hier ist klar, daß die neue Deutung der Beziehung (3) mit der früheren aus Nr. 165 äquivalent ist.

Die Definition des Grenzwertes bleibt im Grunde dieselbe, wenn statt der Ordnungsvorschrift von Nr. 754, Beispiel 5, für $\mathfrak{M}=\{M(x,y)\}$ die Vorschrift aus Nr. 754, Beispiel 6, zugrunde gelegt wird.

4. Für eine von zwei natürlichen Nummern m und n abhängige Veränderliche $x_{m,n}$ wird der Grenzwert

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} x_{m,n} = A$$

nach folgender Ordnungsvorschrift für Paare (m, n) definiert:

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{wenn} \quad \min(m', n') > \min(m, n)$$

(vgl. Nr. 754, Beispiel 7). Dies stimmt mit der Definition am Schluß von Nr. 165 überein.

Dasselbe Resultat würden wir erhalten, wenn wir von der einfacheren Ordnungsvorschrift

$$(m', n') \succ (m, n), \quad \text{wenn} \quad m' > m, n' > n,$$

(vgl. Nr. 754, Beispiel 7) ausgehen würden.

Die Ausdehnung der vorstehenden Ausführungen auf den Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher bereitet keine Schwierigkeiten.

5. Abschließend wenden wir uns dem Problem des Grenzwertes Riemannscher oder Darbouxscher Summen für eine in einem gegebenen Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion $f(x)$ zu. Diese Summen hängen mit Zerlegungen R des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle mittels beliebiger Teilpunkte

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

zusammen, wobei der Grenzprozeß in der Richtung $\lambda \to 0$ verläuft ($\lambda = \max \Delta x_i$). In Nr. 754, Beispiel 8, haben wir die Menge $\mathfrak{R} = \{R\}$ der möglichen Zerlegungen R eines Intervalls in Teilintervalle schon nach abnehmendem λ geordnet. Dementsprechend lassen sich auch die Werte s und S der Darbouxschen Summen ordnen.

Zur Bildung einer Riemannschen Summe σ muß man nicht nur das Intervall in Teilintervalle zerlegen, sondern noch in jedem Teilintervall einen bestimmten Punkt auswählen. Somit wird eine Riemannsche Summe nicht nur durch das System der Teilpunkte, sondern auch durch das System der Punkte in den Teilintervallen charakterisiert; diese Systeme und damit auch die Riemannschen Summen lassen sich ebenfalls nach abnehmendem λ ordnen.

Damit ist schon klar, daß auch die Limites

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma, \qquad \lim_{\lambda\to 0} s, \qquad \lim_{\lambda\to 0} S$$

nach dem hier erläuterten allgemeinen Schema definiert werden können.

Wir weisen beiläufig darauf hin, daß wir im Grunde in allen Fällen dieselben Grenzwerte erhalten würden, wenn wir zur Ordnung der Mengen $\{\sigma\}$, $\{s\}$, $\{S\}$ die Vorschrift aus Beispiel 9 von Nr. 754 heranziehen würden. Der Leser möge das zur Übung beweisen; die Ergebnisse aus Nr. 297 und 301 sind dabei zu benutzen.

Analog läßt sich das Problem der Grenzwerte erschöpfend behandeln, die wir bei der Definition der Bogenlänge (Nr. 330), des Flächeninhalts ebener Figuren (Nr. 336), der Kurvenintegrale, der Flächen- und Oberflächenintegrale (Nr. 544, 550, 589, 630, 635) untersucht haben.

757. Bemerkung zum Grenzwert einer Funktion. Bei dem Grenzwert (1) vereinbarten wir nun eine ganz bestimmte Art und Weise der Ordnung der Menge $\mathfrak{X}=\{x\}$ (vgl. Nr. 754, Beispiel 3) und damit auch der Menge $\{f(x)\}$ der Funktionswerte. Die Definition des Grenzwertes dieser Menge, die auf der betrachteten „Standardvorschrift" der Annäherung von x an a beruhte, erwies sich der Definition des Grenzwertes aus Nr. 52 in der ε-δ-Sprache (der „Epsilontik") als gleichwertig.

Man könnte jedoch von der Standardisierung der Annäherung von x an a abgehen, indem man x in der Menge $\mathfrak{X}$ oder in irgendeiner ihrer Teilmengen variieren ließe, die a zum Häufungspunkt haben, und nach irgendeiner Vorschrift ordnet, aber so, daß a ihr Grenzwert ist. Die Werte von $f(x)$ ließen sich jedesmal entsprechend der Ordnung der x-Werte ordnen.

Alsdann hat man (1) folgendermaßen zu verstehen: *Nach welcher Vorschrift auch immer die unabhängige Veränderliche x gegen den Grenzwert strebt, die Funktion $f(x)$ strebt immer gegen denselben Grenzwert A.*

Diese Definition kommt der Definition aus Nr. 53 „in der Sprache der Folgen" nahe, nur wird die beliebige Folge von x-Werten, die gegen a strebt, hier durch eine ganz willkürliche geordnete Menge von x-Werten, die a zum Limes hat, ersetzt.

Zum Beweis der Gleichwertigkeit dieser Definition mit der Definition aus Nr. 756 genügt es zu zeigen, daß aus der Existenz des Grenzwertes (1) im Sinne von Nr. 52 die oben formulierte Aussage folgt. Es möge also zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existieren derart, daß Ungleichung (2) erfüllt ist, sobald $|x-a|<\delta$ ist. Nach welcher Vorschrift auch immer x gegen a strebt, nach Definition des Grenzwertes muß ein $\bar{x}$ existieren derart, daß für $x>\bar{x}$ die Beziehung $|x-a|<\delta$ gilt; dann ist für alle diese x auch die Ungleichung (2) erfüllt, d. h., tatsächlich gilt $f(x)\to A$.

Dieselbe Bemerkung trifft natürlich auch in bezug auf Funktionen zweier (oder mehrerer) Veränderlicher zu.

758. Erweiterung der Theorie der Grenzwerte. Wir kommen nun zur Ausdehnung der in Kapitel I für diskrete Veränderliche bewiesenen Aussagen auf den allgemeinen Fall einer *geordneten Veränderlichen*. Diese Übertragung bietet keine Schwierigkeit, wenn man den Aufbau der Theorie der Grenzwerte für diskrete Veränderliche schrittweise verfolgt.

Jedesmal, wenn davon die Rede war, daß irgendeine Beziehung für Werte x_n mit einer Nummer n, die größer als ein gewisses N ist, gilt, muß man jetzt sagen, daß sie für Werte $x=x_P$ gilt, deren „Index" P einem gewissen P' folgt.

Als Beispiel beweisen wir das Analogon zu Nr. 26, 1°: *Strebt eine geordnete Veränderliche x_P gegen einen Grenzwert a und ist $a>p$ ($a<q$), so gilt auch $x_P>p$ ($x_P<q$) wenigstens von einer gewissen Stelle an* (d. h., es gibt ein P_0 derart, daß die gewünschte Beziehung für alle x_P mit $P<P_0$ gilt).

Wählen wir $\varepsilon<a-p$ ($\varepsilon<q-a$), so finden wir ein P' derart, daß für $P>P'$ die Beziehung $|x_P-a|<\varepsilon$ gilt; für diese x_P ist offenbar auch

$$x_P>a-\varepsilon>p \qquad (x_P<a+\varepsilon<q)\,.$$

Ebenso lassen sich die Aussagen 2° bis 4° aus Nr. 26 verallgemeinern. Die letzte lautet dann beispielsweise: *Hat eine Veränderliche x den (endlichen) Grenzwert a, so ist sie (wenigstens von einer gewissen Stelle an) beschränkt* (vgl. Nr. 55, I, 4°).

Zum Beweis der Eindeutigkeit des Grenzwertes (Nr. 26, 5°) muß man die Bedingung (III) aus Nr. 754 heranziehen.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gelte $x_P \to a$, $x_P \to b$, $a<b$. Wählt man r zwischen a und b, so ist einerseits $x_P<r$ für $P>P'$, andererseits $x_P>r$ für $P>P''$. Nach (III) gibt es aber einen „Index" P derart, daß gleichzeitig $P>P'$ und $P>P''$ gilt. Dann wäre gleichzeitig $x_P<r$ und $x_P>r$, womit der gewünschte Widerspruch vorliegt.

Auf geordnete Veränderliche überträgt sich der Begriff der monotonen Veränderlichen folgendermaßen: Die Veränderliche x_P heißt *monoton wachsend* (*monoton nicht abnehmend*), wenn aus $P'>P$ stets $x_{P'}>x_P$ (bzw. $x_{P'} \geqq x_P$) folgt.

Als Beispiel einer solchen Veränderlichen kann eine monoton wachsende Funktion $f(x)$ dienen, wenn ihre Werte nach wachsenden Werten der unabhängigen Veränderlichen geordnet werden, oder etwa eine Partialsumme $A_m^{(n)}$ einer positiven Doppelreihe

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k},$$

wenn

$$A_{m'}^{(n')} > A_m^{(n)} \quad \text{für} \quad m'>m \quad \text{und} \quad n'>n$$

gesetzt wird.

Entsprechend wird der Begriff einer monoton fallenden Veränderlichen erklärt.

Mit Rücksicht auf bekannte Eigenschaften der Darbouxschen Summen s und S (vgl. Nr. 296) erweist sich, wenn die Intervallzerlegungen so wie in Beispiel 9 von Nr. 754 geordnet werden, die Untersumme s als monoton wachsende Veränderliche, die Obersumme S als monoton abnehmend. Das kann man jedoch nicht behaupten, wenn man nach der anderen Vorschrift ordnet (vgl. Nr. 754, Beispiel 8).

Jetzt läßt sich der Satz aus Nr. 34 über monotone diskrete Veränderliche leicht verallgemeinern:

Eine monoton wachsende Veränderliche $x=x_P$ hat stets einen Grenzwert. Ist sie nach oben beschränkt, so ist dieser Grenzwert endlich, sonst unendlich.

Wir setzen die Veränderliche als beschränkt voraus und setzen $a=\sup\{x_P\}$, so daß alle $x_P \leqq a$ sind, andererseits für jedes $\varepsilon>0$ ein Index P_ε existiert derart, daß $x_{P_\varepsilon}>a-\varepsilon$ ist. Dann ist aber, sobald $P>P_\varepsilon$ ist, $x_P>x_{P_\varepsilon}$, also erst recht $x_P>a-\varepsilon$. Also ist für $P>P_\varepsilon$ die Ungleichung $|x_P-a|<\varepsilon$ erfüllt, und daraus folgt $x_P \to a$.

Ist x_P nicht beschränkt, so gibt es zu jedem $E>0$ ein P_E derart, daß $x_{P_E}>E$ ist. Dann ist für $P>P_E$ erst recht $x_P>E$, also $x_P \to +\infty$. Damit ist der Satz bewiesen.

In diesem Satz sind als Spezialfälle enthalten: der Satz aus Nr. 34 über den Grenzwert einer monotonen diskreten Veränderlichen, der Satz aus Nr. 57 über die Existenz des Grenzwertes einer monotonen Funktion, ebenso wie der Satz 5 aus Nr. 394 über die Konvergenz einer positiven Doppelreihe. Die hier angestellten Überlegungen bilden, wie der Leser ohne weiteres einsieht, nur diejenigen nach, welche an den angegebenen Stellen zum Beweis der einzelnen speziellen Sätze durchgeführt wurden.

Wir bemerken, daß aus dem bewiesenen allgemeinen Satz sofort auch die Existenz endlicher Grenzwerte für die Darbouxschen Summen s und S folgt, aber nur, wenn man sich auf den Standpunkt der Nr. 754, Beispiel 9, stellt. Daß diese Grenzwerte mit den in Nr. 301 betrachteten Grenzwerten übereinstimmen, muß noch bewiesen werden.

Um auch ein weniger einfaches Beispiel zu betrachten, gehen wir auf den Beweis des Cauchyschen Konvergenzkriteriums ein (vgl. Nr. 39):

Eine geordnete Veränderliche x_P hat genau dann einen endlichen Grenzwert, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ ein Index P_ε existiert derart, daß die Ungleichung

$$|x_P-x_{P'}|<\varepsilon$$

für alle $P>P_\varepsilon$ und $P'>P_\varepsilon$ erfüllt ist.

Zunächst beweisen wir, daß diese Bedingung notwendig ist. Gilt $x_P\to a$, so gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2}$ ein $\bar{P}$ derart, daß $|x_P-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ für $P>\bar{P}$ gilt. Es sei $P>\bar{P}$ und $P'>\bar{P}$; dann gilt

$$|x_P-a|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |a-x_{P'}|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{also} \quad |x_P-x_{P'}|<\varepsilon;$$

als P_ε kann man also hier $\bar{P}$ nehmen.

Zum Beweis der Tatsache, daß sie hinreichend ist, setzen wir die Bedingung als erfüllt voraus.

Wir erklären in der Menge aller reellen Zahlen einen Schnitt nach folgender Vorschrift. In die Klasse A tun wir alle Zahlen α, für die von einer gewissen Stelle an

$$x_P>\alpha$$

ist. In die Klasse A' tun wir die übrigen reellen Zahlen α'. Man sieht leicht, daß diese Einteilung ein Schnitt ist. Wir beschränken uns auf den Nachweis, daß keine der Klassen leer ist.

Zu beliebigem $\varepsilon>0$ existiert nach Voraussetzung ein Index P_ε derart, daß für $P>P_\varepsilon$ und $P'>P_\varepsilon$ die Beziehung $|x_P-x_{P'}|<\varepsilon$ gilt, d. h.

$$x_{P'}-\varepsilon<x_P<x_{P'}+\varepsilon.$$

Hieraus folgt, daß für $P'>P_\varepsilon$ die Zahl $x_{P'}-\varepsilon$ eine der Zahlen α ist, während $x_{P'}+\varepsilon$ eine der Zahlen α' ist. Dieser Schluß erfordert allerdings wieder die Bedingung (III): Wäre $x_{P'}+\varepsilon$ eine der Zahlen α, so daß die Beziehung $x_P>x_{P'}+\varepsilon$ etwa für $P>\bar{P}$ gelten würde, so könnte man nach (III) ein P so wählen, daß gleichzeitig $P>P_\varepsilon$ und $P>\bar{P}$ wäre, also gleichzeitig $x_P<x_{P'}+\varepsilon$ und $x_P>x_{P'}+\varepsilon$.

Nach dem Dedekindschen Hauptsatz (Nr. 10) existiert eine Zahl a mit

$$\alpha\leqq a\leqq\alpha'$$

für alle α, α'. Insbesondere ist für $P'>P_\varepsilon$

$$x_{P'}-\varepsilon\leqq a\leqq x_{P'}+\varepsilon, \quad \text{d. h.} \quad |x_{P'}-a|\leqq\varepsilon;$$

also strebt x_P gegen a.

Dieser Satz gestattet eine interessante Anwendung. Er enthält nicht nur die uns schon bekannten Sätze aus Nr. 39 und 58, sondern führt auch zu neuen Resul-

taten. So kann man mit seiner Hilfe das Cauchysche Konvergenzkriterium auf Funktionen mehrerer Veränderlicher, Doppelreihen usw. ausdehnen. Er liefert auch eine Bedingung für die Rektifizierbarkeit eines Bogens (Nr. 330). Wir überlassen es dem Leser, diese Bedingung zu formulieren, und machen darauf aufmerksam, daß diese Bedingung offenbar für Teilbögen erfüllt ist, wenn sie für den ganzen Bogen gilt. Jetzt können wir also sozusagen eine Aussage in zwei Worten beweisen, die uns früher längere Überlegung gekostet hat (Nr. 247).

759. Gleichgeordnete Veränderliche. Zur Verallgemeinerung solcher Aussagen, in denen gleichzeitig zwei (oder mehrere) Veränderliche vorkommen, führen wir den Begriff der *gleichgeordneten Veränderlichen* ein. So nennen wir zwei Veränderliche x und y, die mit Hilfe ein und derselben geordneten Menge $\mathfrak{P}=\{P\}$ geordnet werden können, deren Elementen ihre Werte eindeutig zugeordnet sind; solche demselben Index P zugeordnete (einander entsprechende) Werte bezeichnen wir mit x_P, y_P.

Haben wir z. B. zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ein und derselben unabhängigen Veränderlichen x in dem geordneten Variabilitätsbereich $\mathfrak{X}$, so sind diese Funktionen gleichgeordnete Veränderliche. Einander entsprechend sind diejenigen Werte von f und g, welche durch ein und denselben Wert von x bestimmt sind (dieses x spielt hier die Rolle des Index P).

Hier ein anderes Beispiel. Es seien für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, die auf einem gewissen Intervall $[a, b]$ definiert sind, die Riemannschen Summen

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad \text{bzw.} \quad \tau=\sum_i g(\xi_i)\,\Delta x_i$$

konstruiert. Hier muß man als einander entsprechende Elemente offenbar diejenigen Summen nehmen, die ein und demselben System von Teilpunkten x_i und Intervallpunkten ξ_i entsprechen. Dieses System spielt hier die Rolle des Index P; ordnet man die Menge dieser Systeme und mit ihnen die Summen σ und τ nach fallenden $\lambda=\max \Delta x_i$, so erhält man wieder gleichgeordnete Veränderliche.

Fassen wir jetzt zwei Veränderliche x, y durch Gleichheitszeichen oder Zeichen für Rechenoperationen zusammen, so werden wir diese Veränderlichen als gleichgeordnet voraussetzen und stillschweigend annehmen, daß es sich um entsprechende Werte x_P und y_P mit gleichem Index handelt. Mit Hilfe dieser Indizes können wir leicht alle früheren Überlegungen über diskrete Veränderliche, wo wir die Gleichheit der Nummern n der diskreten Veränderlichen benutzten, auf unseren Fall übertragen.

Als Beispiel beweisen wir einen Satz, der das Lemma 2 aus Nr. 29 verallgemeinert:

Ist die Veränderliche x_P (wenigstens von einem bestimmten Index an) beschränkt und ist die mit ihr gleichgeordnete Veränderliche α_P unendlich klein, so ist auch ihr Produkt unendlich klein.

Es sei also $|x_P|\leqq M$, sagen wir für $P>P'$. Ist $\varepsilon>0$ gegeben, so gibt es zu der Zahl $\frac{\varepsilon}{M}$ einen Index P'' derart, daß für $P>P''$ die Ungleichung $|\alpha_P|<\frac{\varepsilon}{M}$ gilt.

Nach Bedingung (III) existiert ein Index P_0 mit

$$P_0>P' \quad \text{und} \quad P_0>P''.$$

Ist $P \succ P_0$, so ist nach (II) gleichzeitig

$$P \succ P' \quad \text{und} \quad P \succ P''.$$

Demnach gelten gleichzeitig die Ungleichungen

$$|x_P| \leqq M \quad \text{und} \quad |\alpha_P| < \frac{\varepsilon}{M},$$

also ist

$$|x_P \alpha_P| = |x_P| \cdot |\alpha_P| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nach den bisherigen Beispielen dürfte dem Leser klar sein, daß die ganze Theorie der Grenzwerte (einschließlich ihrer Beweisgänge) auf den allgemeinen Fall geordneter Veränderlicher übertragen werden kann.

760. Ordnung mit Hilfe von Zahlenparametern. In allen Fällen der Anwendung des Grenzwertbegriffes, mit denen wir es in der Analysis zu tun haben, konnte die Indexmenge $\mathfrak{S} = \{P\}$ für die Werte der Veränderlichen x_P einheitlich realisiert werden. In allgemeiner Form kann die verwendete Methode der Ordnung folgendermaßen beschrieben werden:

Jedem Element P von $\mathfrak{S}$ wird ein Wert t eines Parameters zugeordnet, wobei auch mehrere P ein und demselben t entsprechen können. Die Menge aller dieser P bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_t$. Wir setzen voraus, daß alle t positiv sind und daß beliebig kleine Werte von t existieren, für welche $\mathfrak{S}_t$ nicht leer ist.

Wir vereinbaren nun, von zwei Elementen P dasjenige als das *nachfolgende* anzusehen, dem der kleinere Parameterwert t entspricht (wir ordnen also die Elemente P nach abnehmendem Parameter). Für zwei Elemente P, denen ein und dasselbe t entspricht, so daß sie zu ein und derselben Menge $\mathfrak{S}_t$ gehören (für welche also auch die ihnen entsprechenden x-Werte gleich sind), wird keine Ordnungsbeziehung erklärt. Dann sind die Bedingungen (I) bis (III) erfüllt. Da das für (I) und (II) klar ist, verifizieren wir nur (III). Es seien P und P' zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{S}$, denen die Parameterwerte t und t' entsprechen mögen. Nach Voraussetzung gibt es ein t'', das kleiner ist als t und als t', für welches $\mathfrak{S}_{t''}$ nicht leer ist. Dann folgt jedes P'' aus $\mathfrak{S}_{t''}$ sowohl auf P als auch auf P'.

Der Leser stellt leicht fest, daß alle ihm bekannten Fälle der Anwendung des Grenzwertbegriffes sich diesem Schema unterordnen. Für eine diskrete Veränderliche x_n mit der Nummer n kann man $t = \frac{1}{n}$ nehmen. Handelt es sich um eine Funktion und ihren Grenzwert für $x \to a$, so läßt sich die Indexmenge $\{x\}$ nach abnehmendem $t = |x-a|$ ordnen. Auch im Fall einer Funktion zweier Veränderlicher, $f(M) = f(x, y)$, wo die Menge der Punkte $M(x, y)$ die Rolle der Indexmenge spielt, läßt sich der Grenzwert der Funktion für $x \to a$, $y \to b$ durch unser Verfahren charakterisieren, und zwar mit Hilfe jedes der Parameter

$$t_1 = \max\{|x-a|, |y-b|\}, \qquad t_2 = |x-a| + |y-b|,$$
$$t_3 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Für die Darbouxschen Summen

$$s=\sum_i m_i\Delta x_i\,,\qquad S=\sum_i M_i\Delta x_i$$

ist die Indexmenge die Menge der Systeme von Teilpunkten; beim Übergang zur Riemannschen Summe

$$\sigma=\sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

muß man zu den Systemen der Teilpunkte noch die Systeme der Punkte ξ_i hinzunehmen. In beiden Fällen lassen sich die Indexmengen mit Hilfe des Parameters $t=\max \Delta x_i$ ordnen. Bei der Definition der Bogenlänge dient die größte Sehne der Teilbögen als Parameter; usw.

In allen Fällen, in denen der Variationsbereich $\mathfrak{X}$ der Veränderlichen x oder genauer die Indexmenge $\mathfrak{S}=\{P\}$ mit Hilfe eines Zahlenparameters t in der oben genannten Weise geordnet ist, kann man den Grenzwert (wir beschränken uns auf den Fall eines endlichen Grenzwertes) offenbar folgendermaßen definieren: Die Zahl a ist *Grenzwert* von x, wenn jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ zugeordnet werden kann derart, daß $|x-a|<\varepsilon$ ist, sobald der der Veränderlichen x entsprechende Parameter t kleiner als δ ist.

Die Ordnung mit Hilfe eines Zahlenparameters benutzten wir auch in Band III. Jedoch genügt dieses einfache Verfahren der Ordnung den Anforderungen der Analysis in ihren höheren Zweigen keineswegs. Als Beispiel einer solchen Ordnung, die nicht auf dem angegebenen Wege verwirklicht werden kann (d. h. durch Zurückführung auf einen Zahlenparameter), kann die Vorschrift aus Beispiel 9 von Nr. 754 dienen. Das wird aus den Überlegungen von Nr. 761 klar werden.

761. Zurückführung auf diskrete Veränderliche. In allen konkreten Fällen, in denen wir es mit dem Begriff des Grenzwertes zu tun hatten, erwies es sich bisher als möglich, das Problem auf den Grenzwert einer diskreten Veränderlichen zurückzuführen. Diese Möglichkeit, den Grenzwertbegriff „in der Sprache der Folgen" zu formulieren, spielte in den vorangegangenen Überlegungen eine wichtige Rolle. Wir untersuchen jetzt, wie sich die Sache im allgemeinen Fall einer geordneten Veränderlichen $x=x_P$ verhält.

Zu diesem Zweck führen wir den Begriff der konfinalen Teilfolgen für eine gegebene geordnete Menge $\mathfrak{S}=\{P\}$ ein. Unter *konfinalen Teilfolgen* verstehen wir Folgen

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots \tag{4}$$

von Elementen aus $\mathfrak{S}$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Welches Element P' aus $\mathfrak{S}$ man auch nehmen möge, stets folgen Elemente P_n für hinreichend großes n auf P',

$$P_n\succ P' \qquad (\text{für } n>N)\,.$$

Wenn die Veränderliche x mit Hilfe von Indizes P aus $\mathfrak{S}$ geordnet ist, so nennen wir, falls es für die Menge $\mathfrak{S}$ eine konfinale Folge (4) gibt, eine aus $\mathfrak{X}$ genommene Folge von x-Werten

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\,, \tag{5}$$

wobei $x_n=x_{P_n}$ ist, eine *konfinale Teilfolge* für $\mathfrak{X}=\{x\}$.

Zunächst erhebt sich die Frage, ob *es überhaupt eine Teilfolge* (4) *gibt, die zu* $\mathfrak{S}$ *konfinal ist oder, was genau dasselbe ist, ob es eine mit* $\mathfrak{X}$ *konfinale Teilfolge* (5) *gibt.*

Man muß sagen, daß es in allen Fällen, in denen die Ordnung der Menge $\mathfrak{S}$ mit Hilfe eines Zahlenparameters t erklärt ist (wie es in Nr. 760 vorlag), überhaupt keine Schwierigkeiten bereitet, eine solche Teilfolge zu konstruieren: Man nehme eine Folge $\{t_n\}$, $t_n \to 0$, derart, daß alle Mengen $\mathfrak{S}_{t_n}$ nicht leer sind, und wähle aus jedem $\mathfrak{S}_{t_n}$ ein Element P_n. Die so gebildete Folge $\{P_n\}$ ist offenbar die gewünschte.

Im allgemeinen Fall jedoch braucht für eine geordnete Menge $\mathfrak{S} = \{P\}$ überhaupt keine konfinale Teilfolge zu existieren.

Wir betrachten als Beispiel die Menge $\mathfrak{R} = \{R\}$ der verschiedenen Zerlegungen eines gegebenen Intervalls $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle, wobei die Menge nach der Vorschrift aus Nr. 754, Beispiel 9, geordnet werde. (Diese R können als Indizes z. B. der Darbouxschen Summen jeder auf $[a, b]$ definierten Funktion dienen.) Wir wollen indirekt zeigen, daß keine konfinale Teilfolge existiert, nehmen also an, es gäbe zu $\mathfrak{R}$ eine konfinale Teilfolge $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ von Zerlegungen. Jedem R_n entspricht ein endliches System von Teilpunkten. Man kann nun leicht ein Intervall $[a_1, b_1]$, $a < a_1 < b_1 < b$, konstruieren derart, daß in ihm kein Teilpunkt der Zerlegung R_1 enthalten ist. Dann konstruieren wir ein Intervall $[a_2, b_2]$, $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$, das keine Teilpunkte der Zerlegung R_2 enthält, usw. Beim n-ten Schritt haben wir ein Intervall $[a_n, b_n]$, $a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$, konstruiert, in dem kein Teilpunkt von R_n liegt. Wenn wir es noch so einrichten, daß $b_n - a_n \to 0$ strebt, so existiert nach dem Intervallschachtelungssatz aus Nr. 38 ein eindeutig bestimmter Punkt $c = \lim a_n = \lim b_n$, der allen Intervallen $[a_n, b_n]$ angehört. Dieser Punkt ist offenbar nicht Teilpunkt irgendeines R_n. Nimmt man jetzt eine beliebige Zerlegung R' des Intervalls $[a, b]$, unter deren Teilpunkten sich der Punkt c befindet, so kann nach der Vorschrift aus Nr. 754, Beispiel 9, kein R_n als auf R' folgend angesehen werden, entgegen der Definition der konfinalen Teilfolge. Dieser Widerspruch zeigt, daß es in der Tat keine konfinale Teilfolge gibt.

Hieraus folgt übrigens auch, daß das angegebene Verfahren zur Ordnung der Menge $\mathfrak{R} = \{R\}$ nicht durch Zahlenparameter im Sinne von Nr. 760 beschrieben werden kann.

Wir setzen nun voraus, daß die Indexmenge $\mathfrak{S}$ und mit ihr auch der Variabilitätsbereich $\mathfrak{X}$ der geordneten Veränderlichen x tatsächlich konfinale Teilfolgen enthält. In diesem Fall (und natürlich nur in diesem Fall) läßt sich das Problem des Grenzwertes der Veränderlichen x in der üblichen Weise auf das Problem des Grenzwertes einer diskreten Veränderlichen zurückführen:

Eine Veränderliche x hat genau dann den *Grenzwert* a, wenn jede diskrete Veränderliche x_n, die eine zu $\mathfrak{X}$ konfinale Teilfolge durchläuft, gegen eben diesen Grenzwert strebt.

Gilt nämlich $x \to a$ (der Einfachheit halber sei a endlich), so ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$|x_P - a| < \varepsilon ,$$

sobald $P > P_\varepsilon$ ist. Nimmt man irgendeine konfinale Teilfolge (4), so ist für hinreichend große n nach Definition $P_n > P_\varepsilon$, so daß

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| < \varepsilon$$

gilt. Das bedeutet, daß die diskrete Veränderliche x_n gegen a strebt.

Umgekehrt, es strebe jede solche diskrete Veränderliche gegen a. Um zu beweisen, daß $x \to a$ gilt, nehmen wir das Gegenteil an: Zu irgendeinem $\varepsilon > 0$ ließe sich zu jedem P' aus $\mathfrak{P}$ ein $P \succ P'$ finden derart, daß $|x_P - a| \geqq \varepsilon$ wäre. Wir wählen dann irgendeine konkrete zu $\mathfrak{P}$ konfinale Teilfolge $\{P'_n\}$. Dann gibt es nach den obigen Ausführungen zu jedem P'_n in $\mathfrak{P}$ ein Element $P_n \succ P'_n$, für welches

$$|x_n - a| = |x_{P_n} - a| \geqq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Man zeigt leicht, daß auch die Teilfolge $\{P_n\}$ zu $\mathfrak{P}$ konfinal ist, d. h. aber, daß die Teilfolge $\{x_n\}$ konfinal zu $\mathfrak{X}$ ist; dann steht die letzte Ungleichung im Widerspruch zur Voraussetzung.

762. Oberer und unterer Limes einer geordneten Veränderlichen. Wir betrachten eine geordnete Veränderliche x, deren Werte mit Hilfe von Indizes P aus $\mathfrak{P}$ indiziert seien. Jedem P ordnen wir die Menge $\mathfrak{X}_P$ derjenigen x-Werte zu, welche auf x_P folgen, d. h. welchen Indizes $P' \succ P$ entsprechen, und bilden ihre Grenzwerte

$$\sup \mathfrak{X}_P \quad \text{und} \quad \inf \mathfrak{X}_P ,$$

die auch unendlich sein können. Jeder dieser Grenzwerte ist eine geordnete Veränderliche, die durch die Indizes P indiziert ist; der erste ist monoton fallend, der zweite monoton wachsend (im Sinne von Nr. 758). Dann existieren nach dem Satz über monotone Veränderliche die (endlichen oder unendlichen) Grenzwerte

$$M^* = \lim (\sup \mathfrak{X}_P), \qquad M_* = \lim (\inf \mathfrak{X}_P) . \tag{6}$$

(Daß die betrachteten Veränderlichen auch die Werte $\pm\infty$ annehmen können, bereitet keine Schwierigkeiten.) Man nennt sie auch im allgemeinen Fall den *oberen* bzw. den *unteren Limes* der Veränderlichen x, in Zeichen

$$M^* = \overline{\lim}\, x, \qquad M_* = \underline{\lim}\, x .$$

Die Gleichheit dieser beiden Grenzwerte ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Grenzwertes der Veränderlichen x im gewöhnlichen Sinne (vgl. Nr. 755).

Wenn nämlich ein endlicher Grenzwert

$$a = \lim x \tag{7}$$

existiert, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index P_ε derart, daß

$$a - \varepsilon < x_P < a + \varepsilon \quad \text{für} \quad P \succ P_\varepsilon \tag{8}$$

gilt. Dann ist aber auch

$$a - \varepsilon \leqq \inf \mathfrak{X}_{P_\varepsilon} \leqq M_* \leqq M^* \leqq \sup \mathfrak{X}_{P_\varepsilon} = a + \varepsilon ,$$

also, da ε willkürlich war,

$$M^* = M_* = a .$$

Umgekehrt, gilt diese Gleichheit (für endliches a), so läßt sich nach (6) wieder zu $\varepsilon > 0$ ein P_ε finden derart, daß

$$a - \varepsilon < \inf \mathfrak{X}_{P_\varepsilon} \leqq \sup \mathfrak{X}_{P_\varepsilon} < a + \varepsilon$$

ist, so daß (8) erfüllt ist, und daraus folgt (7).

Wir überlassen dem Leser, diese Überlegungen für die Fälle $a = \pm\infty$ durchzuführen.

Die Zahlen M^* und M_* können, falls sie endlich sind, durch ihre Eigenschaften charakterisiert werden, die den in Nr. 42 untersuchten Eigenschaften völlig analog sind. Wir betrachten als Beispiel M^*.

Wenn wir ein willkürliches $\varepsilon > 0$ und einen Index P_0 wählen, so existiert ein $P_\varepsilon > P_0$ derart, daß

$$M^* - \varepsilon < \sup \mathfrak{X}_{P_\varepsilon} < M^* + \varepsilon$$

ist.

Hieraus folgt nach Definition der oberen Grenze die
Eigenschaft I der Zahl M^*: *Für alle* $P > P_\varepsilon$ *ist*

$$x_P < M^* + \varepsilon .$$

Eigenschaft II der Zahl M^*: *Es gibt mindestens einen Wert* $x_{P'}$ *(dabei ist* $P' > P_0$*) derart, daß*

$$x_{P'} > M^* - \varepsilon$$

ist.

Die Menge $\mathfrak{P} = \{P\}$ möge konfinale Teilfolgen (4) besitzen, denen zu $\mathfrak{X}$ konfinale Teilfolgen (5) von Werten unserer Veränderlichen entsprechen. Hat irgendeine dieser Teilfolgen einen Grenzwert, so nennen wir ihn einen partiellen Grenzwert der Veränderlichen x (vgl. Nr. 40 und 59).

In diesem Fall kann man zeigen, daß der obere Limes M^* und der untere Limes M_* (wie sie oben definiert wurden) gleichzeitig auch oberer bzw. unterer Limes aller partiellen Grenzwerte der Veränderlichen x sind (wie in Nr. 40 und 59).

Wir wollen uns wieder auf den oberen Limes beschränken und ihn als endlich voraussetzen. Dann folgt aus Eigenschaft I, daß kein partieller Grenzwert größer als M^* sein kann. Um eine zu $\mathfrak{X}$ konfinale Teilfolge (5) zu konstruieren, die gegen M^* strebt (und damit zu zeigen, daß M^* selbst partieller Grenzwert ist), gehen wir von einer zu $\mathfrak{P}$ konfinalen Teilfolge $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n, \ldots$ aus. Dann konstruieren wir mit Hilfe der Eigenschaften I und II (vgl. Nr. 40) induktiv eine Teilfolge (4) derart, daß erstens $P_n > P'_n$ (so daß auch (4) konfinal zu $\mathfrak{P}$ ist) und zweitens $x_n = x_{P_n}$ der doppelten Ungleichung $M^* - \varepsilon_n < x_n < M^* + \varepsilon_n$ genügt, wobei ε_n eine positive, gegen 0 strebende diskrete Veränderliche ist. Offenbar hat die zu $\mathfrak{X}$ konfinale Folge (5) den Grenzwert M^*.

Man kann noch ein Beispiel eines oberen und unteren Limes aus einem dem Leser schon bekannten Gebiet angeben. Offenbar sind das obere und das untere Darbouxsche Integral I^* bzw. I_* (Nr. 296, 301) oberer bzw. unterer Limes der Riemannschen Summe

$$\sigma = \sum_i f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

für $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$.

Namen- und Sachverzeichnis

ABEL, N. H. 211
Abbildung einer Ebene auf eine andere 162
— — — auf sich 162
— durch reziproke Radien 165
— von Räumen 302
Ableitung nach dem Gebiet 276
— in bestimmter Richtung 326
—, verallgemeinerte 527
Abtrennung der Singularitäten zur Verbesserung der Konvergenz 450, 500
Abweichung, mittlere 504
—, — quadratische 504
additive Gebietsfunktion 118, 145, 276
— Intervallfunktion 105
Analyse, harmonische 366
—, —; Schema für 12 Ordinaten 487
—, —; Schema für 24 Ordinaten 492
Anfangsbedingungen 477, 481—483, 486
Anomalien eines Planeten 475
Anziehung eines Körpers durch einen anderen 340
— — — auf einen Punkt 320, 321
— eines Massenpunktes durch eine Fläche 247
— — — durch einen Körper 287, 321
— — — durch eine Kugel 290
— — — durch eine Kugelschicht 254
— — — durch eine Kurve 19
Anziehungskraft einer einfachen Schicht 458
Approximation von Funktionen, gleichmäßige 501
— — — im Mittel 504
Arbeit eines Kraftfeldes 39, 67, 329
Archimedisches Gesetz 301
Astroide 34, 179

Balken 95, 96
Bauch einer Welle 480
Bereich, einfach zusammenhängender 50
—, mehrfach zusammenhängender 50
BERNSTEIN, S. N. 442, 512
Besselfunktionen 127, 210, 353, 362, 371, 419, 471, 475, 487
Besselsche Identität 505
— Ungleichung 505
Betafunktion 140, 190, 191, 205
Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit 336
Biegemoment 95
Biot-Savartsches Gesetz 43
Blatt, Cartesisches 35
Bogenlänge 16, 230, 316, 552
DU BOIS-REYMOND, P. 435

Cantorsches Lemma 533
Cartesisches Blatt 35
CATALAN, E. 141, 357, 359
Catalansche Formel 141, 207, 359
CAUCHY, A. 352, 456, 463, 465, 466
Clapeyronsche Formel 42

Dampfmaschine; Diagramm der Tangentialkräfte an der Kurbelwelle 490
Darbouxsche Integrale (obere und untere) 112
— — als Grenzwerte 115, 557
— Summen für ein Flächenintegral 112
— — für ein dreifaches Integral 274
Darboux-Stieltjessche Summen 83
Dehnungskoeffizient 171
Dichte, lineare 13
Differential, vollständiges; Integration 48, 49, 62, 63
—, —; Kriterien für die Vollständigkeit 48, 62, 158
—, —; Zusammenhang mit einem Kurvenintegral 45, 61, 63, 271
Differentialgleichung, partielle 477
Differentiation nach dem Gebiet 118, 330
DINI, U. 381
Dinische Kriterien 381, 426, 459, 462

Dinisches Lemma 426
Dirichlet, P. L. 139, 140
Dirichletsche Bedingungen 385
– Formel 139, 206
–r Diskontinuitätsfaktor 466
–r Kern 525
–s Integral 376
–s Kriterium 385
–s Lemma 383
–s Problem für den Kreis 520
Dirichlet-Jordansche Kriterien 384, 428, 460, 462
Divergenz eines Vektors 329
Doppelintegral 108, 121, 131, 195
Doppelreihen und Flächenintegrale 214
Durchlaufungssinn auf einer geschlossenen Kurve 25
Durchmesser einer Menge 111

Ebene, linksorientierte 26
–, orientierte 25
–, rechtsorientierte 26
einfachzusammenhängendes räumliches Gebiet 271, 296
Ellipse; Berechnung des Flächeninhalts 34
Ellipsoid 152, 153, 188, 239, 240, 249, 267, 268, 313, 349
elliptische Integrale 241, 321
– Koordinaten 168, 204, 305, 314
Energie, kinetische, eines rotierenden Körpers 292
Entropie 69
Epizykloide 35
Epsilontik 541
Ergiebigkeit einer Quelle 329
Euler, L. 368, 411
Eulersche Konstante 405
– Summationsmethode 411
Euler-Fouriersche Formeln 368

Fatou, P. 526
Fejér, L. 435, 522
Fejérscher Kern 523
Feldfläche 325
Feldröhre 325
–; Intensität 333
Feldstärke 39
Fläche, einseitige 216
–; Gleichung in Polarkoordinaten 238
–, krumme 222
–, –, in Parameterdarstellung 225, 244
–, orientierte 218
–, quadrierbare 81, 224, 226
Fläche, zweiseitge 215
Flächendichte 247
Flächenelement in krummlinigen Koordinaten 170, 229
– in Kugelkoordinaten 238
– in Polarkoordinaten 170, 174
Flächeninhalt 224, 228
–; Beispiele zu seiner Berechnung 232
–; Berechnung mit Hilfe von Kurvenintegralen zweiter Art 31
– einer ebenen Figur, ausgedrückt durch ein Kurvenintegral 106, 156
– krummer Flächen 222, 224, 228, 314
– – – in singulären Fällen 232
– in krummlinigen Koordinaten 168, 170
– der Oberfläche der n-dimensionalen Kugel 348
– der Schraubenfläche 237
Flächenintegral 108, 111
–; Eigenschaften 116
–; Existenzbedingungen 111, 116
– als additive Gebietsfunktion 118
–; Gegenüberstellung mit Doppelreihen 214
–; Klassen integrierbarer Funktionen 113
–; Mittelwertsatz 118
–, ausgedrückt durch eine Stammfunktion 130
–, uneigentliches 181, 192, 198
–, –; absolute Konvergenz 193, 198
–; Variablentransformation 182
–; Zurückführung auf ein Doppelintegral 108, 121, 131, 195
Fluß eines Vektors durch eine Fläche 327
Flüssigkeit, barotrope 338
–, ideale; Bewegungsgleichung 336
Flüssigkeitskurve 337, 339
Fourier, J. 367, 368, 456, 477
Fourierintegral 456
–, mehrfaches 473
Fourierkoeffizienten 368, 506
–; Extremaleigenschaften 505, 506
–; Größenordnung 444
–, verallgemeinerte 372, 486, 487
–; Vergleich der angenäherten und der exakten Werte 494
Fourierreihe 368, 375
–; Abschätzung für die Partialsumme 440
–; – des Restes 439, 441
–; gliedweise Differentiation 499

Fourierreihe als Doppelreihe 422
Fourierreihe; komplexe Form 418, 423
— einer geraden Funktion 389
— einer ungeraden Funktion 389
—; gliedweise Integration 497
— mit abnehmenden Koeffizienten 406
—, konjugierte 420
—; absolute Konvergenz 512
—; gleichmäßige Konvergenz 368, 426
—; ungleichmäßige Konvergenz 432, 435
—, mehrfache 422
—; Multiplikation 511
—; Singularität 435
—; Summation nach dem Poisson-Abelschen Verfahren 518
—, verallgemeinerte 372
—; verallgemeinerte Summationsmethoden 516
—; Verbesserung der Konvergenz 450
—; Verhalten in der Nähe eines Unstetigkeitspunktes 429
Fouriersche Integralformel 456, 462
— — für Funktionen zweier Veränderlicher 473
— Methode 477, 479, 481, 486, 521
Fouriertransformation 464
Fouriertransformierte 464, 466
— für Funktionen zweier Veränderlicher 474
Frullanisches Integral 405
Funktion, additive, eines räumlichen Gebiets 276
—, harmonische, im ebenen Gebiet 159
—, —, im Kreis 520
—, —, im Raum 300, 337
—, integrierbare 82, 111, 116, 192, 275
—, der Null äquivalente 501
—, periodische 364
— von endlicher (beschränkter) Schwankung (Variation) 70, 73, 76
— — —; Eigenschaften 73
— — —; Klassen 71
— — —; Kriterien 76
— — —; Ordnung der Fourierkoeffizienten 444
— — —, stetige 77
—, stückweise differenzierbare 383
—, konjugierte, erster und zweiter Art 465, 466
—en, orthogonale 369
—en, —, mit Gewicht 372, 487
Funktionensysteme, abgeschlossene 500
—, orthogonale 369
—, vollständige 506
Gammafunktion 140—144, 205, 206, 348 bis 353, 355—363, 403, 470
Gauss, C. F. 242, 362
Gaußsche Koeffizienten einer Fläche 236
—r Integralsatz 154, 156, 266
—r —; Anwendung bei der Untersuchung von Kurvenintegralen 157
—r Multiplikationssatz für die Gammafunktion 362
—s Integral 58, 297
Gauß-Ostrogradskischer Integralsatz 294
Gebiet, einfach zusammenhängendes 297
—, orientiertes 184
Gebietsfunktion, additive 118, 145, 276
Gebietsintegral *siehe* Flächenintegral
Gibbs, J. W. 433
Gibbssches Phänomen 433, 435
Gleichgewichtsbedingung 96
Gradient 326
Gram, J. P. 363
Gramsche Determinante 363
Green, G. 156
Grenzwert einer geordneten Veränderlichen 546, 556
— einer monotonen Veränderlichen 550
Grenzwertbegriff 541
Grundton 480
Guldinsche Regel 151, 313

Harmonische 366
harmonische Analyse 366
— —; Schema für 12 Ordinaten 487
— —; Schema für 24 Ordinaten 492
— Funktion im ebenen Gebiet 159
— — im Kreis 520
— — im Raum 300, 337
— Schwingung 366
Hauptträgheitsachsen 149, 293
—, zentrale 293
Hauptwert eines uneigentlichen Integrals 214, 463
Helmholtz, H. v. 339
Hurwitz, A. 514

Integral, Dirichletsches 376
—, dreidimensionales *siehe* Raumintegral
—, Frullanisches 405
—, Gaußsches 58, 296
— über ein orientiertes Gebiet 184
—, iteriertes *siehe* Doppelintegral
—, mehrdimensionales 342
—, —; Koordinatentransformation 343
Integral, mehrdimensionales; Zurückfüh-

rung auf ein Integral niedrigerer Dimension 343
—, Poissonsches 519
—, Stieltjessches 82
—, zweidimensionales *siehe* Flächenintegral
—, zweifaches *siehe* Doppelintegral
—e, Darbouxsche 112, 115, 557
—e, elliptische 241, 321
Integralgleichung 212, 464, 465, 468
Integralkosinus 469
Integrallogarithmus 471
Integralsatz, Gaußscher 154, 156, 266
—, Gauß-Ostrogradskischer 294
—, Stokesscher 265, 330
Integralsinus 469
Integralsumme 14, 21, 111, 245, 255, 273
Integration des vollständigen Differentials 48, 49, 62, 63
—, partielle, eines gewöhnlichen Integrals 98
—, —, eines Stieltjesschen Integrals 87
Interpolation, trigonometrische 372
Intervall, orientiertes 184
Intervallfunktion, additive 105
Inversion 165, 304
isoperimetrisches Problem 514

JACOBI, C. G. J. 205, 348, 355
JORDAN, C. 70, 79

Kardioide 187
KELVIN, Lord 339
Keplersche Gleichung 474
Kern, Dirichletscher 525
—, Fejérscher 523
—, Poissonscher 519
—, positiver 516, 519
Kettenlinie 19
Kleeblatt, dreiblättriges 402
Knoten einer Welle 480
KOLMOGOROFF, A. N. 439
konfinale Teilfolge 554
Konstante, zyklische 55, 66
Kontinuitätsgleichung 335
Koordinaten, elliptische 168, 204, 305, 314
—, krummlinige 303
—, —, in der Ebene 163
Koordinatenfläche 303
Koordinatenlinie 163
Körpervolumen 107
Kosinustransformierte 465, 471
Kosinustransformierte für Funktionen zweier Veränderlicher 474
Kraftfeld 39, 67, 329
Kreisfrequenz 364
Kriterien von DINI 381, 426, 459, 462
— von DIRICHLET-JORDAN 384, 428, 460, 462
— VON LIPSCHITZ 382, 427
Kriterium, Dirichletsches 385
krummlinige Koordinaten 303
KRYLOW, A. N. 450
Kugelkoordinaten 303
—, verallgemeinerte 311
Kugelschicht; Anziehung und Potential 254
KUMMER, E. E. 403
Kurve, einfache 53
—, geschlossene 25
—, rektifizierbare 13, 80, 81
—, stückweise glatte 33, 111
Kurvenintegral; Approximation mit Hilfe eines Integrals über einen Streckenzug 30
— erster Art 14, 38
— — —; Zurückführung auf ein gewöhnliches Integral 15
— zweiter Art 21, 22
— — —; Berechnung mit Hilfe einer Stammfunktion 47, 62
— — —; Differentiation 45
— — — im Fall mehrfach zusammenhängender Bereiche 54
— — —; Unabhängigkeit vom Weg 28, 44, 52, 61, 106, 158, 272
— — —; Zurückführung auf ein Stieltjessches Integral 105
— — —; Zusammenhang mit Kurvenintegral erster Art 38
— über eine einfache geschlossene Kurve 25, 52, 63, 158, 271
— längs einer Raumkurve 15, 22, 39
— eines Vektors 329
KUSKOW, P. P. 313
Kuskowsche Formel 313

LAGRANGE, J. L. 411
Laplace-Operator 334
Laplacesche Integrale 465
LEBESGUE, H. 88, 435, 536
LEGENDRE, A. M. 242
Legendresche Polynome 208, 371
— Relation 205
Leibnizsche Reihe 393
Lemniskate 174, 187

Linksorientierung der Ebene 26
– des Raumes 219
Linkssystem 26, 219
Liouville, J. 141, 208, 356, 362
Liouvillesche Formeln 142, 205, 350, 356
Lipschitz, R. O. 72, 382
Lipschitzsche Kriterien 382, 427
Ljapunoff, A. M. 506
Lobatschewski, N. I. 379
Lokalisationsprinzip 379

Magnetfeld 43
Malijew, A. S. 449
Masse einer ebenen Figur 120, 145
– eines Körpers 273, 287
– einer Kurve 13, 19
Massendichte eines Punktes 119
Menge; Durchmesser 111
–, geordnete 542
–, halbgeordnete 543
–, totalgeordnete 542
Mittelwertsatz 276
– für Flächenintegrale 118
– für Stieltjessche Integrale 99
–, zweiter, für gewöhnliche Integrale 102
Möbiussches Band 216, 221, 222
Moment, statisches, einer ebenen Figur 146
–, –, eines Körpers 287
–, –, einer Kurve 19
Moore, E. H. 542

Nabla 326
Newtonsche Potentialfunktion 68
Newtonsches Anziehungsgesetz 19, 68, 247, 287
– Potential 248
– – des Ellipsoids 321
– – einer Kugel 292
– Schwerkraftfeld 67
Niveaufläche 324

Oberflächenintegral erster Art 245
– – –, Zurückführung auf ein gewöhnliches Flächenintegral 245
– – – über eine geschlossene Fläche 296
– – –; Unabhängigkeit von der Form der Fläche 296
– zweiter Art 255, 256
– –; Zurückführung auf ein gewöhnliches Flächenintegral 259
– – –; – auf ein Oberflächenintegral erster Art 257, 259
–; Beispiele für seine Berechnung 248
– im n-dimensionalen Raum 342
Orientierung der Ebene 25
– einer Fläche 218
– eines Gebiets 184
– der Oberfläche eines Körpers 317
– des Raumes 219
Orthonormalsystem 369
Ostrogradski, M. W. 172, 294, 343, 379

Parseval, M. A. 506
Parsevalsche Gleichung 506
– –, verallgemeinerte 509
Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin z}$ 396
Periode 364
Poisson, S.-D. 204, 250, 519
Poissonscher Kern 519
Poissonsches Integral 519
Polarachse 304
Polarkoordinaten in der Ebene 164
–; Flächenelement 170, 174
– im n-dimensionalen Raum 354
–, räumliche 303
–, verallgemeinerte 176
Polynom, trigonometrisches 373
Potential 331
– zweier Körper 340
– einer Kugelschicht 254
– einer einfachen Schicht 248
Potentialfeld 67, 331
Potentialfunktion 68
Prozeß, quasistationärer 42
Punkt, regulärer 380
–, singulärer 54
Punktfunktion 105

Quellen 329
Quellendichte 329
Quellenfreiheit 333
Querschnittskraft 95

Randbedingungen 477, 481–483, 485, 486
Raum, arithmetischer zweidimensionaler 111
–, orientierter 219
Raumintegral 274, 286
–; Eigenschaften 275
–; Existenzbedingung 274
– über ein beliebiges Gebiet 278
– als additive Gebietsfunktion 276
–; Klassen integrierbarer Funktionen 275
– über ein Parallelepiped 276
–, uneigentliches 279
–; Variablentransformation 302, 316

Raumintegral; Zurückführung auf ein iteriertes Integral 276, 277
Raumwinkel 242, 298
Rechtsorientierung der Ebene 26
– des Raumes 219
Rechtssystem 26, 219
Reihe, trigonometrische 365
Richtungsableitung 326
Riemann, B. 156, 377, 379, 530, 532
Rotation einer ebenen Figur 150
– eines Vektors 330
Rotationsfläche 237
Rotationskörper 313
Runge, C. 489, 492

Saite, schwingende 476
Satz von du Bois-Reymond 537
– – –, verallgemeinerter 538
– von Darboux 115
– von der Erhaltung der Wirbellinien 339
– – – – der Intensität von Wirbelröhren 340
– von Fatou 526
– von Heine-Cantor 534
– von Jordan 80
– von Lagrange 339
– von Ostrogradski 294, 296, 328
– von Schwarz 529
– – –, verallgemeinerter 529
– von Stokes 329
– von Thomson 339
Sätze von Helmholtz 339
– von Riemann 377, 379, 532
– von Weierstrass 501, 502
Schatunowski, S. O. 542
Schicht, einfache 248
Schraubenfläche, allgemeine 236
Schwarz, H. A. 222, 519
Schwarzsche Ungleichung 128
–r Zylinder 222
Schwerkraftfeld, Newtonsches 67
Schwerpunkt, geometrischer, einer ebenen Figur 146
– eines Kreissektors 186
– eines Körpers 287
– einer Kurve 19
Schwingung, harmonische 366
–, kleine 476
– einer Saite 476
Sehwinkel 60, 328
Seite einer Fläche 215, 216, 221
Selbstpotential eines Körpers 341
Simpsonsche Formel 37
Singularitäten; Abtrennung zur Verbesserung der Konvergenz 450, 500
Sinusfunktion 364
Sinustransformierte 465, 471
Skalar 324
Skalarfeld 324
Skalarprodukt 324
Smith, H. L. 542
Sonin, N. J. 353, 359, 360
Stammfunktion 45, 57, 61, 119, 129
Steklow, W. A. 506, 513
Steklowsche Ungleichung 513
Stieltjes, Th. J. 81
Stieltjessche Integralsumme 82
–s Integral 82
–s –; Abschätzungen 99
–s –; Berechnung 90
–s –; Eigenschaften 86
–s –; Existenzbedingung 86
–s –; Existenzklassen 83
–s –; Grenzübergang unter dem Integralzeichen 100
–s –; partielle Integration 87
–s –; Mittelwertsatz 99
–s –; Stetigkeit bezüglich der oberen Grenze 103
–s –; geometrische Veranschaulichung 98
–s –; Zurückführung auf ein Riemannsches 88
Stokesscher Integralsatz 265, 330
– –; Anwendung auf die Untersuchung von Kurvenintegralen im Raum 271
Stromfunktion 68
Strömung, ebene stationäre, einer inkompressiblen Flüssigkeit 41
–, stationäre, einer inkompressiblen Flüssigkeit 68
Summation trigonometrischer Reihen 411
Summe einer Reihe, im Riemannschen Sinne verallgemeinerte 531

Temperaturfeld 326
Thomson, W. 339
Timbre eines Tones 480
Torus 292
Totalkrümmung einer Fläche 242
Totalvariation 70
Trägheitsellipse 149
Trägheitsellipsoid 293
Trägheitsmoment 94
–, polares 148
– des Torus 320

Trägheitsprodukt 149, 293
Transformation ebener Gebiete 161
Triangulation eines Gebiets 230
TSCHEBYSCHEFF, P. L. 128
Tschebyscheffsche Ungleichung 128

VALLÉE POUSSIN, CH. J. DE LA 538
Variablentransformation in Flächenintegralen 182
– in uneigentlichen Flächenintegralen 198
– in Raumintegralen 302, 316
Variation der Konstanten 64
Vektor 324
Vektoranalysis 324
Vektorfeld 324
–, solenoidales 332
Vektorpotential 332
Vektorprodukt 44, 324
Veränderliche, diskrete 541
–, geordnete 545
–, –; Zurückführung auf diskrete 554
–, gleichgeordnete 552
–, monotone 550
Verzerrungskoeffizient 171
VIVIANI, V. 143
Vivianische Kurve 236
–r Körper 143, 186, 187, 233–235
vollständiges Differential; Integration 48, 49, 62, 63
– –; Kriterien für die Vollständigkeit 48, 62, 158
– –; Zusammenhang mit einem Kurvenintegral 45, 61, 63, 271
Vollständigkeitsrelation 506
–; Anwendungen 512
–, verallgemeinerte 52
VOLTERRA, V. 139
Volumen eines Körpers; Berechnung mit Hilfe seines Querschnitts 286
– eines n-dimensionalen Körpers 342
– eines zylindrischen Körpers 107, 286
– der n-dimensionalen Kugel 346
– des n-dimensionalen Parallelepipeds 342
– des n-dimensionalen Simplexes 346
– als Oberflächenintegral 260, 294
– einer zylindrischen Säule 107
Volumendichte 273, 287
Volumenelement in krummlinigen Koordinaten 307, 309
– in Kugelkoordinaten 309
– in Zylinderkoordinaten 309

Wärmeabsorption durch ein Gas 42, 69
Wärmeausbreitung in einer kreisförmigen Platte 486
– in einem Stab 480, 483
Wärmeleitungsgleichung 337, 481, 486
Wärmestrom 328
Wärmestromvektor 327
Welle, stehende 480
Wirbelfläche 339
Wirbellinie 339
WIRTINGER, W. 514

YOUNG, W. H. 406, 510

Zentrifugalkraft 150, 294
Zentrifugalmoment 149, 293
Zirkulation eines Vektors 329
Zylinder, elliptischer 188
–, Schwarzscher 222
Zylinderabschnitt 152
Zylinderfläche 237
Zylinderkoordinaten 303
zylindrischer Stab 147