STUDIENTEXTE

zur Methodik des Mathematikunterrichts

1971

Studientexte
zur Methodik des Mathematikunterrichts

Herausgegeben von der Fachkommission Methodik des Mathematikunterrichts beim Ministerium für Volksbildung und beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen

Als Manuskript gedruckt

Berlin, Juni 1971

Druck: Wissenschaftlich-Technisches Zentrum
der Pädagogischen Hochschule Potsdam

AG 124/38/71/DDR
1/16/18/6.71/523

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mit der hier vorliegenden Auswahl von Studientexten verfolgt die Fachkommission "Methodik des Mathematikunterrichts" das Ziel, unseren Studenten einige Beiträge aus der Zeitschrift "Mathematik in der Schule" leicht zugänglich zu machen, die schon vor einigen Jahren erschienen sind und nur noch in Bibliotheken in wenigen Exemplaren bereitstehen. Wir wollen damit erreichen, daß günstigere Bedingungen als bisher für die Durchführung von Übungen und Seminaren sowie für das Selbststudium geschaffen werden. Die Studientexte sollen dazu beitragen, die Ausbildung in der Methodik des Mathematikunterrichts im Sinne eines wissenschaftlich-produktiven Studiums effektiver zu gestalten.

Die Auswahl der Beiträge (die hier z.T. gekürzt oder überarbeitet wiedergegeben sind) richtete sich nach mehreren Gesichtspunkten:
Zunächst einmal wurden überhaupt nur solche Artikel ins Auge gefaßt, die vor 1970 erschienen sind, da man erwarten kann, daß Mathematiklehrerstudenten die Zeitschrift "Mathematik in der Schule" mit Beginn ihres Studiums abonnieren.

Aus den verbleibenden Jahrgängen der Zeitschrift wurden nur Beiträge aufgenommen, die wichtigen Themen unseres Studienprogramms zugeordnet werden können. Dabei sind solche Artikel bevorzugt worden, die gute Verallgemeinerungsmöglichkeiten bieten und sich nicht nur auf spezielle Lehrplanstoffe beziehen.

Schließlich mußte auch noch beachtet werden, daß der Gesamtumfang der Studientexte nicht über das hier gegebene Maß hinaus ausgeweitet werden konnte.

Aus diesen Prinzipien ergab sich, daß viele wertvolle Beiträge zu wichtigen methodischen Fragen hier keinen Platz finden konnten. Wir glauben aber, daß die Studientexte trotz notwendigerweise vorhandener inhaltlicher Lücken eine wirksame Hilfe für die methodische Ausbildung darstellen können.

Prof.Dr. Werner Walsch
Vorsitzender der Fachkommission

Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962

Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR

Mit dem Aufbau der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule und der Einführung neuer Lehrpläne im Jahre 1959 wurden wesentliche Grundlagen für eine höhere und bessere mathematische Bildung aller Schüler geschaffen.

Die wachsende Bedeutung der Mathematik, Physik und Chemie, der Kybernetik, Automatisierung, Elektronik und anderer Zweige der Wissenschaft und Technik für das Wachstum der Produktivkräfte der Gesellschaft macht es erforderlich, die wissenschaftlichen Erkenntnisse zum Gemeingut des Volkes zu machen. Dabei spielt die Mathematik bei der Weiterentwicklung der Naturwissenschaften sowie der technischen und ökonomischen Wissenschaften eine immer größere Rolle.

Eine umfassende und hohe mathematische Bildung wird immer mehr zu einem wesentlichen Bestandteil der allseitigen Bildung des Menschen der sozialistischen Gesellschaft. Vom Inhalt und von der Qualität der mathematischen Bildung, die in unlösbarem Zusammenhang mit der polytechnischen Bildung und Erziehung steht, hängt es in starkem Maße ab, wie die Aufgaben in Wissenschaft und Technik bewältigt werden. Die Erreichung des wissenschaftlich-technischen Höchststandes und die Beherrschung moderner Produktionsinstrumente und -verfahren in allen Bereichen unserer sozialistischen Industrie und Landwirtschaft erfordern hohes mathematisches Wissen und Können der Ingenieure, Techniker und aller Facharbeiter.

Daher ist der Verbesserung der mathematischen Bildung und Erziehung in den zehn- und zwölfklassigen Oberschulen, den berufsbildenden Schulen, den Fach- und Hochschulen besondere Aufmerksamkeit seitens der staatlichen Organe, der Parteiorganisationen und der gesamten demokratischen Öffentlichkeit zu widmen.

Der Mathematikunterricht in unserer sozialistischen Oberschule ist in keiner Weise mehr vergleichbar mit dem Rechen- und Raumlehreunterricht der bürgerlichen Volksschule, die heute in Westdeutschland noch die Schule für den überwiegenden Teil aller Kinder ist.

Dennoch muß festgestellt werden, daß das allgemeine Leistungsniveau unserer Schüler im Mathematikunterricht noch nicht befriedigt. Der Inhalt der mathematischen Bildung entspricht noch nicht den erhöhten und ständig wachsenden Anforderungen des umfassenden Aufbaus des Sozialismus.

- Es fehlt vielfach an genügend festen, dauerhaften und anwendungsbereiten Grundkenntnissen, besonders beim Rechnen mit natürlichen Zahlen, mit Brüchen, mit positiven und negativen Zahlen und unter Verwendung allgemeiner Zahlsymbole sowie auf dem Gebiete der Geometrie.
- Die Größen- und Raumvorstellung und das funktionale Denken sind unbefriedigend ausgebildet.
- Die spezifisch mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten sind gering entwickelt.
- In vielen Fällen sind weder Schüler noch Studenten befähigt, mathematische Probleme zu erkennen, geeignete Lösungswege zu finden und dabei ihre Gedanken in exakter, sprachlich und schriftlich einwandfreier Form anzugeben. Das Beweisen und Herleiten mathematischer Aussagen und das rechnerische und konstruktive Bestimmen gesuchter Größen bereiten vielfach große Schwierigkeiten.
- Die Fertigkeiten im Umgang mit dem Rechenstab, mit Tabellen und anderen Rechen- und Konstruktionshilfsmitteln sind nicht gefestigt.

Die ungenügende Schulung des mathematischen Denkens erweist sich als die Hauptschwäche im Mathematikunterricht. Darüber hinaus trägt der Inhalt des mathematischen Wissens und Könnens, das gegenwärtig den Schülern vermittelt wird, nicht genügend dem Entwicklungsstand der mathematischen Wissenschaft Rechnung. Es werden in der Schule zu wenig solide Grundlagen für die praktische Anwendung der Mathematik in den einzelnen Wissenschaften und in der Produktion gelegt.

Die Verbesserung der mathematischen Bildung und Erziehung in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen erfordert die Überwindung einer Reihe ideologischer Unklarheiten, fachlicher und methodischer Mängel sowie eine sachliche Leitungstätigkeit.

Der Revisionismus, der in den Jahren 1953 bis 1957 auf dem Gebiete der Volksbildung entgegen den wachsenden Anforderungen auf eine Senkung des Unterrichtsniveaus in der allgemeinbildenden Schule hinzielte, hatte im Mathematikunterricht geringe Anforderungen an das Leistungsvermögen der Schüler und mangelhafte Entwicklung des mathematischen Denkens zur Folge.

Die Unterschätzung der Notwendigkeit einer hohen mathematischen Bildung erweist sich auch gegenwärtig immer noch als wesentliches Hemmnis für die Verbesserung des Mathematikunterrichts.

Eine nicht geringe Anzahl von Schulfunktionären, pädagogischen Wissenschaftlern, Lehrerbildnern, Direktoren, Klassenleitern und Lehrern widmet dem Mathematikunterricht der sozialistischen Oberschule nicht die ihm gebührende Aufmerksamkeit.

Die Unterschätzung der Rolle des Mathematikunterrichts für die allseitige Bildung und Erziehung der heranwachsenden Generation zeigt sich besonders in der ungenügenden Entwicklung und dem unbefriedigenden Einsatz qualifizierter Kader für den Mathematikunterricht.

Die fachwissenschaftliche, aber auch die methodische Qualifikation vieler Mathematiklehrer ist noch unzureichend. Die Ausbildung an den Universitäten, der Pädagogischen Hochschule und an den Pädagogischen Instituten befähigt die Fachlehrer für Mathematik nicht genügend für die Erteilung eines modernen Mathematikunterrichts auf hohem wissenschaftlichen Niveau.

Die Unterstufenlehrer erhalten keine hinreichende fachmathematische Ausbildung und sind daher vielfach nicht in der Lage, die Erfordernisse des Mathematikunterrichts der Oberstufe in den unteren Klassen zu berücksichtigen.

Durch den Fachlehrermangel waren in den vergangenen Jahren verschiedenartige kurzfristige Ausbildungsformen erforderlich, die kein fundiertes Studium des Faches und der Unterrichtsmethodik gewährleisteten.Der Inhalt der Weiterbildung war bisher ungenügend auf die Überwindung dieser Schwächen und auf die unmittelbare Verbesserung des Unterrichts gerichtet. Die ständige, zielstrebige Weiterbildung wird von vielen Lehrern und Schulfunktionären unterschätzt.

Oftmals werden ausgebildete Fachlehrer von den Abteilungen Volksbildung und den Direktoren noch in vielen anderen Fächern, für die sie keine Qualifikation besitzen, eingesetzt. Außerdem erteilen für das Fach Mathematik nicht ausgebildete Lehrer den Mathematikunterricht, ohne daß sie sich in systematischen Weiterbildungsformen dafür qualifizieren.

Die Bemühungen hervorragender Mathematiklehrer, das Niveau des Mathematikunterrichts ständig zu heben, die mathematischen Leistungen aller Schüler zu verbessern und sie zum mathematischen Denken zu erziehen, werden nicht genügend unterstützt und verallgemeinert.

Ein ernstes Hemmnis für die Verbreitung der besten Erfahrungen und die Erreichung guter Leistungen aller Schüler im Mathematikunterricht sind das dogmatische Festhalten an hergebrachten Unterrichtsformen und der Schematismus in der Unterrichtsgestaltung.

Die Erfüllung der Lehrpläne, der Stand der Schülerleistungen und die Wissenschaftlichkeit des Mathematikunterrichts werden von den verantwortlichen Schulfunktionären zu wenig und oftmals nur oberflächlich kontrolliert. Die Anleitungen zur Verbesserung des Unterrichts sind nicht konkret genug, orientieren nicht genügend auf die Erfahrungen der Besten und gehen oftmals von dem alten Rechen- und Raumlehreunterricht der bürgerlichen Volksschule aus, der in keiner Weise den Erfordernissen des umfassenden Aufbaus des Sozialismus entspricht. Insbesondere werden von einigen Schulfunktionären und Lehrern Unterschätzungen des Leistungsvermögens der Schüler und zu geringe Anforderungen an das mathematische Denken im Unterricht geduldet. Diese Pädagogen gehen nicht von der gesellschaftlichen Notwendigkeit aus, allen Schülern eine hohe mathematische Bildung zu vermitteln, sondern setzen inzwischen überwundene Tendenzen der Senkung des Niveaus im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schule fort. Eini[ge] Lehrer und Eltern vertreten die irrige Meinung, zur Bewältigung der im Fach Mathematik der zehnklassigen Oberschule gestellten Anforderungen sei eine besondere Begabung erforderlich. Diese

Ansichten leisten einer mangelhaften Einstellung mancher Schüler zum Lernen Vorschub.

Die Intensität des Lernprozesses und die Effektivität des Unterrichts sind noch gering. Es werden nicht genügend solche Unterrichtsmethoden angewendet, die die Schüler zur Aktivität, zur Selbsttätigkeit sowie zum disziplinierten und freudigen Lernen führen; Festigung und Kontrolle des Wissens und Könnens werden vielfach vernachlässigt. Die Lehrpläne, Lehrbücher und andere Unterrichtsmaterialien enthalten eine Reihe Mängel und bestimmen nicht präzise genug Aufgabenstellung, Tiefe und Umfang der mathematischen Bildung auf den einzelnen Klassenstufen.

Obwohl in den letzten Jahren im Zusammenhang mit der Entwicklung des polytechnischen Unterrichts sich viele Lehrer bemühen, ihren Mathematikunterricht mit der Praxis zu verbinden, wird nicht selten nur eine oberflächliche und praktizistische Verbindung hergestellt. Dabei wird oft die Systematik des Mathematikunterrichts gestört, wertvolle Unterrichtszeit vertan und der Erwerb sicherer und anwendungsfähiger mathematischer Kenntnisse nicht gefördert. Im Unterricht in der sozialistischen Produktion, im Werkunterricht, in den naturwissenschaftlichen, aber auch in den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern sowie in den naturwissenschaftlichen und technischen Arbeitsgemeinschaften werden hingegen mathematische Methoden und Verfahren zu wenig genutzt.

Die außerunterrichtliche Betätigung der Schüler ist noch nicht zum festen Bestandteil der mathematischen Ausbildung geworden. Die Leitungen der Freien Deutschen Jugend, der Pionierorganisation Ernst Thälmann und die Organe der Volksbildung werden ihrer Verantwortung für die Entwicklung des Interesses aller Schüler an der Mathematik und für die zielstrebige Arbeit von Kursen, Zirkeln und Arbeitsgemeinschaften nicht gerecht.

Um die genannten Hemmnisse und Mängel bei der Verbesserung des Mathematikunterrichts schnell zu überwinden und die mathematische Bildung der heranwachsenden Generation auf ein wesentlich höheres Niveau zu heben, ist es erforderlich, folgende Hauptaufgaben zu lösen:

1. Die Ausbildung der Fachlehrer für Mathematik sowie die mathematische Ausbildung der Unterstufenlehrer ist grundlegend

zu verbessern, so daß sie für die Erteilung eines modernen Mathematikunterrichts von hohem wissenschaftlichen Niveau befähigt werden und mit den beim umfassenden Aufbau des Sozialismus wachsenden Anforderungen an den Mathematikunterricht Schritt halten können.

2. Die Sicherung eines hohen Niveaus des Mathematikunterrichts, die Wissenschaftlichkeit in jeder Unterrichtsstunde und die Intensivierung des Unterrichtsprozesses erfordern, daß der Mathematikunterricht an allen Schulen auf allen Klassenstufen von dafür qualifizierten Lehrern erteilt wird. Der Einsatz der Mathematiklehrer und ihre Weiterbildung sind wesentlich zu verbessern und straff zu leiten.

3. Die Unterrichtsgestaltung ist kritisch zu überprüfen und der Lernprozeß zu intensivieren, so daß alle Schüler ein sicheres und anwendbares mathematisches Grundwissen erwerben und zum mathematischen Denken befähigt werden. Dabei sind mathematisch talentierte Schüler systematisch zu fördern. Es ist erforderlich die Schülerleistungen und die Erfüllung der Lehrpläne regelmäßig zu analysieren, konkrete Schlußfolgerungen zu ziehen und die Anwendung der besten Unterrichtserfahrungen überall zu organisieren.

4. Der Mathematikunterricht in der Unterstufe muß die Schüler gründlich und zielstrebig auf die Anforderungen des Fachunterrichts der oberen Klassen vorbereiten. Beim Übergang der Schüler von einer Klassenstufe in die nächsthöhere ist die Kontinuität des Bildungsprozesses zu gewährleisten. Es ist notwendig, eine klare Abgrenzung der Aufgaben und des Inhaltes des Mathematikunterrichts der allgemeinbildenden Schulen, der Berufsbildung und der anderen weiterführenden Bildungseinrichtungen vorzunehmen.

5. Zur Verbesserung der mathematischen Bildung und Erziehung ist eine vielseitige Betätigung der Jugend auf mathematischem Gebiet mit Unterstützung der breiten demokratischen Öffentlichkeit zu entwickeln. Die außerunterrichtliche Arbeit auf dem Gebiet der Mathematik muß zum festen Bestandteil der mathematischen Ausbildung der Schüler werden.

Die Elternbeiräte sollten unter allen Eltern die Aufklärungsarbeit über Rolle und Bedeutung der Mathematik wirkungsvoll unterstützen.

6. Die höheren Anforderungen an die mathematische Bildung beim umfassenden Aufbau des Sozialismus erfordern zu untersuchen, welches mathematische Wissen und Können die Schüler in Zukunft in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule erwerben sollen. Die Lehrpläne sind weiter zu entwickeln, und gleichzeitig sind neue Schulbücher und moderne Lehrmittel zu erarbeiten.

(Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962. In: Mathematik und Physik in der Schule 10/1963 Heft 2, S. 141 - 144)

Über den Anteil des Mathematikunterrichts an der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung

Siegfried Schneider

Vorbemerkungen

Der Aufbau des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus in der DDR auf der Basis der am 6. April 1968 durch einen Volksentscheid gebilligten neuen sozialistischen Verfassung erlegt der Schule die Pflicht auf, alle Schüler zu Menschen zu erziehen, die imstande und bereit sind, diesen Aufbau parteiergreifend und bewußt mitzugestalten und ihn zu verteidigen. Diese Aufgabe, die Herausbildung aller derjenigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, Denk- und Verhaltensweisen, die einen künftigen Bürger unserer Republik auszeichnen, ist der umfassende Inhalt der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung. Die Diskussionen in den Pädagogischen Räten um die staatsbürgerliche Bildung und Erziehung erhielten einen besonderen Impuls durch die als Arbeitsmaterial vom Ministerrat der DDR, dem Ministerium für Volksbildung, dem Zentralrat der FDJ und der Zentralleitung der Pionierorganisation Ernst Thälmann herausgegebene Aufgabenstellung zur weiteren Entwicklung der staatsbürgerlichen Erziehung der Schuljugend [1]). Sie müssen darin gipfeln,

1) Aufgabenstellung zur weiteren Entwicklung der staatsbürgerlichen Erziehung der Schuljugend. In "Verfügungen und Mitteilungen des Ministeriums für Volksbildung und des Staatlichen Amtes für Berufsausbildung" 1966,Nr.10,32/66,S.121 bzw. im "Studienmaterial zum pädagogisch-psychologischen Grundkurs", Teil I, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1970, S. 69 bis 90.

die Anteile der einzelnen Erziehungsfaktoren und im Schulbereich die Anteile der einzelnen Unterrichtsfächer festzulegen. Es ist nicht möglich, in allen Fächern alle Aspekte der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung mit gleicher Intensität zur Wirkung kommen zu lassen. Es wäre aber auch falsch, einige Fächer in ihrer Bedeutung für diese umfassende Aufgabe herabzusetzen. Es ist nicht so, daß etwa im Mathematikunterricht weniger Möglichkeiten bestünden als im Fach Geschichte. Das ist nur dann so, wenn man den Begriff der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung in unzulässiger Weise auf wenige Aspekte einschränkt. Aus der Aufgabenstellung geht jedoch eindeutig hervor, daß mit diesem Begriff der umfassende Inhalt charakterisiert wird, wie er oben dargestellt wurde. Demnach kann es nicht darum gehen, welches Fach mehr und welches weniger zur staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung beitragen kann, vielmehr gilt es, die Anteile der Einzelfächer an der Gesamtaufgabe zu präzisieren. In der folgenden Darstellung wird der Versuch unternommen, den Anteil des Mathematikunterrichts an dieser großen Aufgabe zu umreißen und an Beispielen zu verdeutlichen. Dabei gehen wir von den vier Anforderungen an die politisch-ideologische Erziehung im Unterricht aus, die in der Aufgabenstellung herausgehoben sind, und beziehen sie auf den Mathematikunterricht.

I. Die Einheit von Wissenschaftlichkeit und Parteilichkeit im Mathematikunterricht

Die Mathematik wird als eine in hohem Maße abstrakte Wissenschaft bezeichnet. Ihre Aussagen sind klassenindifferent. Schon vor tausend Jahren einwandfrei bewiesene Sätze sind nach wie vor richtig und gültig. Lediglich ihre Stellung und Bedeutung im Rahmen des gesamten Begriffs- und Aussagengefüges der Mathematik oder einer ihrer Teildisziplinen kann sich verändern. Es erhebt sich damit die Frage, worin die Parteilichkeit der Wissenschaft Mathematik besteht, die im Unterricht den Schülern bewußt gemacht werden soll. In dieser Hinsicht nimmt die Mathematik keine Sonderstellung ein.

Auch andere Wissenschaften machen klassenindifferente Aussagen, so z.B. die in der Schule zu lehrenden naturwissenschaft lichen Fächer. Wie jede Wissenschaft zielt auch die Mathematik auf die umfassende Beherrschung der Prozesse in Natur und Gesellschaft ab. Darin zeigt sich ihr objektiv-progressiver Charakter. Neben ihrer Auffassung als System von Theorien und Methoden ist die Mathematik wie jede Wissenschaft auch ein Bereich der gesellschaftlichen Arbeitsteilung, in dem sich die "Produktion von Ideen" als gesellschaftlicher Prozeß vollzieht. Und sie wird immer mehr zur Produktivkraft und Grundlage für die Leitung der gesellschaftlichen Entwicklung. Jede Wissenschaft ist Bestandteil des geistigen Lebens der Gesellschaft, eine spezifische Form des gesellschaftlichen Bewußtseins. Parteilichkeit aber ist ein Wesenszug aller Formen des gesellschaftlichen Bewußtseins in der Klassengesellschaft, ist Ausdruck ihres Klassencharakters, ihrer Klassengebundenheit. Die Parteilichkeit der Wissenschaft ist objektiv bedingt. Entscheidend für die parteiliche Stellung der Mathematik, des Mathematikers, des Menschen, der sich der Mathematik in der Praxis bedient, ist das gesellschaftliche Ziel, für das der Einsatz erfolgt. In der praktischen Anwendung bleibt keine Wissenschaft neutral, sie gewinnt dort erst an Bedeutung. Eine wissenschaftliche Theorie, die ohne praktische Anwendung bleibt, ist zumindest von untergeordneter Bedeutung. Dabei darf die "Anwendung" nicht primitiv nur von ihrem unmittelbaren Nutzeffekt aus gesehen werden. Das ist gerade für die Mathematik wesentlich. Die moderne Mathematik als Theorie der möglichen Strukturen hat die gesellschaftlich wichtige Aufgabe, die zur mathematischen Modellierung der verschiedensten Prozesse und Erscheinungen in Natur und Gesellschaft notwendigen Strukturen zur Verfügung zu stellen. Bei diesen Forschungen werden zunächst auch unabhängig von der unmittelbaren Verwendbarkeit strukturelle Zusammenhänge aufgedeckt. Doch wird diese Entwicklung der Mathematik, wird diese Arbeit von Mathematikern ebenfalls von gesellschaftlichen Bedürfnissen getragen.

Die Verantwortung, die jedem Wissenschaftler, also auch dem Mathematiker damit auferlegt ist, wurde vielfach erkannt. Bertolt BRECHT läßt Galileo Galilei in seinem Stück Leben des Galilei Jahre nach der Widerrufung seiner Lehre vor der Inquisition zu seinem Schüler Andrea Sarti sagen: "Ich halte dafür, daß das einzige Ziel der Wissenschaft darin besteht, die Mühseligkeit der menschlichen Existenz zu erleichtern. Wenn Wissenschaftler, eingeschüchtert durch selbstsüchtige Machthaber, sich damit begnügen, Wissen um des Wissens willen aufzuhäufen, kann die Wissenschaft zum Krüppel gemacht werden, und eure neuen Maschinen mögen nur neue Drangsale bedeuten. Ihr mögt mit der Zeit alles entdecken, was es zu entdecken gibt, und euer Fortschritt wird doch nur ein Fortschreiten von der Menschheit weg sein. Di Kluft zwischen euch und ihr kann eines Tages so groß werden, da euer Jubelschrei über irgendeine neue Errungenschaft von einem universalen Entsetzensschrei beantwortet werden könnte." Und Galilei richtet sich selbst: "Und ich überlieferte mein Wissen den Machthabern, es zu gebrauchen, es nicht zu gebrauchen, es z mißbrauchen, ganz wie es ihren Zwecken diente. Ich habe meinen Beruf verraten. Ein Mensch, der das tut, was ich getan habe, kann in den Reihen der Wissenschaft nicht geduldet werden."

Diese Fassung der Worte Galileis erfolgte durch BRECHT unter dem Eindruck des Abwurfs der ersten Atombombe auf Hiroshima. Ein Dokument der Zeit beweist, daß es hier nicht nur um dichterisch wirkungsvoll gesetzte Worte geht, sondern um die Erkenntnis der Verantwortung der Wissenschaftler nicht nur für die theoretischen Forschungen, sondern auch für die praktische Anwendung der Erkenntnisse in der Gesellschaft, eben da, wo die Wissenschaft Partei nehmen muß.

Albert EINSTEIN hatte 1943 in einem Brief den amerikanische Präsidenten Roosevelt auf die große Gefahr aufmerksam gemacht, die der Welt durch die mögliche Entwicklung einer Atombombe durch Hitlerdeutschland droht [2]. Dieser Brief und die Hinweis anderer amerikanischer und deutscher in Amerika im Exil lebend Physiker waren ein wesentlicher Anstoß zur amerikanischen Atomwaffenproduktion. EINSTEIN bedauerte seinen Brief an Roosevelt später zutiefst, weil er sich mitschuldig fühlte. Er richtete unter dem Eindruck des infernalischen Mißbrauchs der Erkenntni der Physik durch den Abwurf einer Atombombe auf eine dichtbesi delte Stadt am 25. Mai 1946 eine Botschaft an das amerikanisch

---

2) Vgl. PAWELZIG, G.: Macht und Verantwortung. In "technikus", Heft 6/1968, S. 28.

Volk, in der es heißt: "Auf uns Wissenschaftlern, welche diese ungeheure Kraft entfesselt haben, liegt die überwältigende Verantwortung dafür, in diesem Kampf um Leben und Tod die Atomenergie so zu lenken, daß sie zum Wohle der Menschheit und nicht zu deren Vernichtung dient. Wir benötigen sofort 200 000 Dollar für unsere Kampagne zur Erziehung des ganzen amerikanischen Volkes zu der Art des Denkens, welche unerläßlich ist für das Weiterbestehen und den Fortschritt der Menschheit."

Wir wissen, daß diese Art des Denkens erst dann in aller Breite vollzogen werden kann, wenn das Haupthindernis für den Fortschritt der Menschheit, die Spaltung in antagonistische Klassen, beseitigt ist. Daher haben wir in unserer Republik, in der die gesellschaftlichen Voraussetzungen wie in den anderen sozialistischen Ländern im Kampf geschaffen wurden und gegeben sind, allen Grund und alle Möglichkeiten, zu dieser Art des Denkens zu erziehen. So hat der Mathematiklehrer die Aufgabe, den Schülern bewußtzumachen, daß die Mathematik heute und hier in der DDR objektiv dem allgemeinen gesellschaftlichen Fortschritt dient und dienen kann. Mathematik treiben, Mathematik lehren, Mathematik lernen heißt heute, den allgemeinen gesellschaftlichen Fortschritt voranzutreiben, heißt unsere Republik zu stärken. Es ist daher eine bedeutende Aufgabe der staatsbürgerlichen Erziehung, das Interesse der Schüler am Fach Mathematik zu wecken, sie für die Mathematik zu begeistern; denn diese Wissenschaft entwickelt sich zu einer wesentlichen Produktivkraft, zu einem wesentlichen "Handwerkzeug" beim Aufbau der modernen sozialistischen Gesellschaft.

Die Forderung nach Einheit von Wissenschaftlichkeit und Parteilichkeit bedeutet, daß die Mathematik, deren parteiliche Stellung in der Gesellschaft charakterisiert wurde, auch den modernsten Entwicklungen entsprechend gelehrt wird. Die Modernisierung des Mathematikunterrichts vom Inhalt her ist eine allgemeingesellschaftliche Forderung. Über die Möglichkeiten der Modernisierung befindet sich die Diskussion in breitem Fluß. Daher kann hier auf nähere Hinweise verzichtet werden. Wesentlich ist, daß der Mathematiklehrer erkennt, daß er mit der Vermittlung mathematischer Kenntnisse in einer dem neuesten Stand der Mathematik entsprechenden Betrachtungsweise genau solche Denkweisen beim Schüler herausbilden kann, die ein künftiger Bürger unseres sozialistischen Staates benötigt.

Ein bedeutender Beitrag zur sozialistischen Erziehung wird also geleistet, wenn gediegene moderne mathematische Kenntnisse vermittelt werden und die Rolle bewußt gemacht wird, die der Einsatz dieser Kenntnisse in der Praxis für die Entwicklung der Gesellschaft spielt.

II. Die Einheit von Theorie und Praxis im Mathematikunterricht

Die wachsende Bedeutung der Mathematik hat ihren Grund in der universalen Anwendbarkeit für die theoretische Behandlung aller mit den quantitativ oder strukturell erfaßbaren Merkmalen der Objekte und Prozesse in Natur und Gesellschaft zusammenhängenden Fragen. Gegenwärtig erleben viele Wissenschaften durch die Mathematisierung und die Mathematik selbst durch die Forderung nach Bereitstellung geeigneter mathematischer Theorien einen enormen Aufschwung. Eine erste an den Unterricht zu stellende Forderung in dieser Beziehung ist demnach die Schaffung anwendungsbereiter Kenntnisse. Den Schülern sind die Anwendungsmöglichkeiten sichtbar zu machen, es sind Anwendungsaufgaben zu lösen und es ist das Anwenden mathematischer Kenntnisse auf reale Sachverhalte zu üben. Durch eine gezielte Auswahl von Anwendungsaufgaben ist es möglich, die Schüler zu überzeugen, da die Erscheinungen in Natur, Technik und Gesellschaft erkannt, be herrscht, verändert und entwickelt werden können. Damit werden wesentliche Aspekte der weltanschaulichen Erziehung berührt. Das Lösen von Aufgaben aus dem gesellschaftlichen Bereich kann zu bestimmten Erkenntnissen und Einsichten in das politisch-gesellschaftliche Leben führen und an der Herausbildung des sozialistischen Bewußtseins mitwirken. Beispiele werden dazu oft in der Fachzeitschrift gegeben [3]). Hierzu muß gesagt werden, daß gelegentlich versucht wird, die staatsbürgerliche Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht auf die Lösung von Sachaufgaben mit

---

[3]) HÜNGER, A., und T. WALTHER: Ein Beispiel zur politisch-ideologischen Erziehung im Unterricht. In Math.i.Sch. 6 (1968), Heft 4, S. 278.

aktuell-politischem Inhalt zu reduzieren. Das Lösen derartiger Aufgaben bietet zwar gute Möglichkeiten, aber erschöpft keineswegs alle die Aspekte, die zur staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung gehören. Zudem ergibt sich ein Problem. In den Lehrbüchern finden sich mehrere Aufgaben etwa des folgenden Typs:

In der zweiten Hälfte des Jahres 1964 konnte festgestellt werden, daß in der DDR auf 100 Haushalte bereits 42 Fernsehgeräte kommen.
a) Wieviel Fernsehgeräte entfallen nach dieser Statistik auf einen Ort mit 740 Haushalten?
b) In einem anderen Ort mit 1420 Haushalten sind 692 Fernsehgeräte angemeldet. Liegt die Anzahl an Geräten je 100 Haushalte unter oder über dem DDR-Durchschnitt [4])?

Mit der Lösung einer derartigen Aufgabe ist erzieherisch so gut wie nichts getan. Im Jahre 1968 etwa sind diese Angaben bereits veraltet. Es wird von nirgends konkret angesiedelten Orten berichtet. Der Schüler hat zunächst weder zeitlich noch örtlich irgendeine Beziehung zu den Angaben. Zudem gibt die Aufgabe keinerlei Entwicklung an und verleitet im Teil a) zu unzulässigen Schlüssen. Man kann den Verfassern der Lehrbücher wegen der fehlenden Aktualität keinen Vorwurf machen. Die Aufgaben müßten nur vom Lehrer auf den neuesten Stand gebracht werden. Die Benutzung konkreter Orte im Lehrbuch würde auch lediglich in beschränktem Raume eine Beziehung zum Schüler und seiner Umwelt herstellen. Daraus ergibt sich, daß Aufgaben derartigen Inhalts dem Lehrer wohl zur Anregung dienen können, daß es aber notwendig ist, sie zeitlich und örtlich zu aktualisieren, wenn ein nachhaltiger erzieherischer Effekt damit verbunden werden soll. In den statistischen Jahrbüchern der Republik und der Kreise sowie in den Tageszeitungen und Wochenschriften findet der Lehrer allezeit vielfältiges Material. Weiterhin sollten Zahlenmaterialien aus dem Ort, der Gemeinde, dem Patenbetrieb, der Paten-LPG beschafft werden. Das bringt wohl für den Lehrer einen zusätzlichen

---

4) Mathematik. Lehrbuch für die Oberschule, Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966, S. 166, Aufgabe 137.

Zeitaufwand für die Vorbereitung seines Unterrichts mit sich. Jedoch werden ihm in Zukunft in wachsendem Maße Vorschläge für Stoffverteilungspläne und Unterrichtshilfen in die Hand gegeben, damit er Zeit für derartige Vorbereitungen hat, die es gestatten, den Unterricht erzieherisch zu intensivieren. Die Kreisfachkommissionen können solche Arbeiten auch rationalisieren.

Die Echtheit der Anwendung, die durch eine Aufgabe zum Ausdruck kommt, muß oft in Frage gestellt werden. So kann etwa die folgende Aufgabe nicht als praktische Anwendung betrachtet werden:

Eine 8,5 m lange Leiter wird so an eine Hauswand gestellt, daß ihr Fuß 3,20 m absteht. Wie hoch reicht die Leiter an die Wand hinauf [5])?

Abgesehen davon, daß eine derartige Fragestellung in der Praxis wohl kaum in dieser Form auftaucht (man wird vielmehr die Höhe der zu erreichenden Stelle einer Hauswand schätzen und prüfen, ob man eine etwas längere Leiter zur Verfügung hat), besteht die Gefahr, daß auf diese Weise den Schülern eine völlig verzerrte, die tatsächliche Bedeutung der Mathematik für die Praxis herabsetzende Vorstellung gegeben wird. Wenn man meint, auf solche Aufgaben nicht verzichten zu können, um daran das Umsetzen irgendwie gearteter Sachverhalte in die mathematische Sprache zu üben, so muß mit aller Deutlichkeit den Schülern gesagt werden, daß es sich um keine echte Anwendungsaufgabe handelt. Tatsächlich benötigen wir den Satz des PYTHAGORAS nicht, um derartig Scheinanwendungen zu lösen. Tatsächlich benötigen wir etwa auch die binomischen Formeln nicht, um untergeordnete Aufgaben wie $92 \cdot 88 = (90 + 2) \cdot (90 - 2)$ zu lösen. Vielmehr dienen uns diese Sätze im weiteren Aufbau des Gesamtsystems bestimmter mathematischer Disziplinen, die erst in ihrer Vollständigkeit unmittelbar auf praktische Probleme angewandt werden können. Man kann an geeigneter Stelle den Schülern bewußtmachen, daß solche Sätze als Spezialfälle in allgemeineren Sätzen enthalten sind. So ist

---

5) Mathematik, Lehrbuch für die Oberschule, Klasse 8. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966, S. 175, Nr. 32.

etwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ein Spezialfall des binomischen Satzes. Die Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und der Satz des PYTHAGORAS können auch als Grenzfälle, Spezialfälle des Kosinussatzes der ebenen Trigonometrie aufgefaßt werden.

Es wird also häufig vorkommen, daß einzelne mathematische Aussagen des Schulstoffs keine unmittelbare echte Anwendung zulassen. Brauchbare Anwendungsaufgaben insbesondere für die oberen Klassenstufen ergeben sich aus dem Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion, aus dem Patenbetrieb sowie aus mathematischen Aufgabensammlungen für die Berufsausbildung, aus technischen Tabellenbüchern, Werkstattabellen, Betriebsstatistiken u.a.m.

Ein weiteres Problem sei an der folgenden Aufgabe erläutert:

Wie lange braucht ein Kraftwagen mit einer Geschwindigkeit von 50 $\frac{km}{h}$, um einen 2 Stunden früher abgefahrenen Kraftwagen, der mit der Geschwindigkeit 40 $\frac{km}{h}$ fährt, einzuholen [6])?

Sehen wir einmal von der Frage nach der Echtheit einer solchen Problemstellung ab, so bleibt noch immer eine Idealisierung des tatsächlichen Vorgangs, wenn man ihn mit Hilfe einer linearen Gleichung beschreibt. Damit soll nicht gesagt werden, daß man einen solchen Vorgang der Bewegung von Fahrzeugen entweder nur in all seiner tatsächlichen Kompliziertheit oder überhaupt nicht als Anwendungsbeispiel benutzen kann. Es ist jedoch wesentlich, daß den Schülern bewußt wird, daß die Bewältigung dieser Aufgabe mit Hilfe einer linearen Gleichung lediglich eine grobe Annäherung an den wirklichen Vorgang liefert. Daraus ergibt sich u.a. der sinnvolle Genauigkeitsgrad, mit dem die Lösung anzugeben ist. Es muß auch erkannt werden, daß die in der Aufgabe enthaltenen Informationen (Durchschnittsgeschwindigkeiten) gar keine genauere Lösung zulassen. Durch solche Betrachtungen können auch Aufgaben mit idealisierten, vergröberten Sachbezügen für eine echte Verbindung von Theorie und Praxis genutzt werden. Man

---

[6]) Mathematik, Lehrbuch für die Oberschule, Klasse 8. A.a.O., S. 172, Nr. 119.

braucht also derartige Aufgaben nicht aus dem Mathematikunterricht zu verbannen, man muß sie nur im genannten Sinne durchleuchten.

Eine wesentliche Möglichkeit der Verbindung von Theorie und Praxis ergibt sich auch durch die ständige Pflege praxisgerechter Arbeits- und Lösungsverfahren. Schätzen, Überschlagen, Genauigkeitsbetrachtungen, Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, Proben und das Benutzen von Rechenhilfsmitteln wie Rechenstäben, Formelsammlungen, Tabellen, Diagrammen und Nomogrammen müssen organische Bestandteile des gesamten Mathematikunterrichts sein. Den Schülern sollten häufig Sachverhalte durch Modelle aus Klassenarbeitssätzen, auf Arbeitsblättern oder mit Hilfe von Schablonen vorgegeben werden. Wird dem Schüler etwa mit Hilfe einer Lochschablone ein trapezförmiges Viereck vorgelegt, wobei er dessen Gestalt selbst erkennen, die zur Berechnung des Flächeninhalts notwendigen Stücke selbst bestimmen, eventuell einzeichnen und selbst messen muß, so ist das praxisgerechter, als wenn er z.B. eine Aufgabe löst, in der vom trapezförmigen Querschnitt eines Dammes die Rede ist, von dem außer der Gestalt auch noch alle notwendigen Größen angegeben werden, so daß für ihn nur noch die Rechnung auszuführen bleibt [7].

Im Zusammenhang mit der Überprüfung einer mit mathematischen Mitteln gewonnenen Aussage ergibt sich die Frage, inwieweit die Praxis als Kriterium für die Richtigkeit herangezogen werden kann. Nehmen wir an, es liege eine physikalische Anwendungsaufgabe vor, in der ein bestimmter realer Sachverhalt beschrieben oder vorgegeben ist. Dann muß zunächst durch einen aktiven Denkprozeß eine Modellvorstellung entwickelt oder eine vorhandene benutzt werden, die alle für die Fragestellung wesentlichen Komponenten und Beziehungen enthält. Für dieses Modell, das ein vereinfachtes Abbild des realen Sachverhaltes darstellt, wird eine entsprechende mathematische Beschreibung, z.B. eine Gleichung gefunden. Durch Anwenden der Gesetze der Gleichungslehre wird die gesuchte Größe bestimmt. Man erhält eine Aussage. Die

---

7) Mathematik, Lehrbuch für die Oberschule, Klasse 7. A.a.O., S. 188, Nr. 19.

Überprüfung der Richtigkeit der Aussage besteht aus zwei Teilen. Ob die gewonnene Aussage mathematisch richtig ist, hängt davon ab, ob fehlerfrei im Rahmen der mathematischen Theorie, also etwa der Gleichungslehre, gearbeitet wurde, ob also lediglich äquivalente Umformungen vollzogen wurden oder ob der Beweis für die Richtigkeit der Lösung der Gleichung in Form der Probe exakt geführt wurde. Ob die Aussage auch der Realität entspricht, kann letztlich nur durch ein Experiment festgestellt werden. Bei Sachverhalten, die durch Texte beschrieben werden, fordert man an Stelle des Experiments die Überprüfung am Text, also am realen Sachverhalt. Es kann vorkommen, daß eine mathematisch richtig ermittelte Lösung nicht mit der Praxis übereinstimmt. Dann ist der Fehler nicht in der mathematischen Lösung zu suchen, sondern in der ungeeigneten Modellvorstellung oder in der nicht adäquaten mathematischen Beschreibung. Die mathematische Einzelaussage kann nicht an der Praxis unmittelbar überprüft werden. Vielmehr rechtfertigt sich eine mathematische Disziplin in ihrer Gesamtheit, in der Praxis, wenn sie immer wieder zu richtigen Aussagen in der Realität führt, sobald sie nur zur mathematischen Beschreibung und Behandlung in gewissen Grenzen geeigneter Denkmodelle verwendet wird. Die Forderung des Lehrers bei der Lösung von Anwendungsaufgaben zur Gleichungslehre: "Führe die Probe am Text durch!" berührt also den Wesensunterschied zwischen den Naturwissenschaften als Erfahrungswissenschaften, die wohl in bestimmten Grenzen deduktive Systeme entwickeln können, und der Mathematik als vorwiegend deduktiver Wissenschaft. Auf diese Eigenschaften sollten die Schüler der jeweiligen Altersstufe gemäß hingewiesen werden, damit auch in dieser Beziehung keine vulgären, falschen Auffassungen von der Rolle der Praxis für die Mathematik entstehen.

III. Die historische und perspektivische Betrachtungsweise im Mathematikunterricht

Zu dieser Anforderung an die politisch-ideologische Erziehung wurden bereits unter II. einige Bemerkungen gemacht, wie überhaupt die Anforderungen nicht isoliert voneinander betrachtet werden können. Die historische und perspektivische Betrachtungsweise verlangt, die Mathematik in ihrer Entwicklung darzustellen. Es gilt, die Entwicklung der Mathematik als Ganzes und einzelner Disziplinen im Zusammenhang mit der gesellschaftlichen Entwicklung zu sehen. Bei dem relativ geringen Einblick, den der Schüler von dem gewaltigen Gebäude der Mathematik erhält, ist es schwierig, die Entwicklungslinien sichtbar zu machen. Der hohe Entwicklungsstand der Mathematik und ihre Abstraktheit verhindern zudem weitgehend, daß der Schüler erkennt, welche Richtung die moderne mathematische Forschung nimmt. Um so mehr müssen alle Möglichkeiten, die im Rahmen des Schulstoffs und des für den Schüler Erfaßbaren liegen, genutzt werden. Die gültigen Lehrbücher enthalten mehrere Abschnitte, in denen die Entwicklung mathematischer Teilgebiete verständlich dargestellt wird. Auch wenn sich im Lehrplan nur spärliche Hinweise darauf befinden, sollten diese Lehrbuchabschnitte bei der Behandlung der jeweiligen Stoffgebiete auf keinen Fall übergangen werden. Auch in der mathematischen Unterhaltungsliteratur und den Bänden der Mathematischen Schülerbibliothek finden sich viele geeignete Darstellungen der Entwicklung mathematischer Gebiete und der schrittweisen Bewältigung mathematischer Probleme sowie Darstellungen des Lebens und Wirkens bedeutender Mathematiker. Die Entwicklungen sind bis in die Gegenwart hinein zu verfolgen, wobei jedoch Grenzen in der Verständlichkeit für den Schüler gesetzt sind. Perspektivische Betrachtungsweise - das heißt die Rolle der Mathematik von heute und morgen zu erläutern. Hier muß also der Schwerpunkt, wie schon unter II. genannt, darauf gelegt werden, auf keinen Fall eine praktizistische Deutung zuzulassen, sondern die Mathematik in ihrer umfassenden Rolle als Produktivkraft herauszustellen. Ein wesentlicher Beitrag wird geleistet, wenn im Mathematikunterricht nicht nur Kenntnisse vermittelt werden, sondern die Schüler an die mathematischen Denk- und Arbeitsweisen schrittweise und systematisch herangeführt werden. Hier begegnen wir erneut der Forderung nach inhaltlicher Modernisierung des Mathematikunterrichts.

IV. Die Anwendung von Methoden schöpferischer Arbeit im Mathematikunterricht

Der Mathematikunterricht ist im besten Falle ein angeleitetes forschendes Eindringen des Schülers in die Mathematik einschließlich ihrer Anwendung. Auf Grund des systematisch-logischen Aufbaus der mathematischen Disziplinen ist es ausgezeichnet möglich, den Unterricht als eine Folge von Problemlösungen zu gestalten, als eine Folge von Lernaufgaben, die in weitem Maße selbständig bewältigt werden können. Es ist sicher überflüssig, an dieser Stelle noch einmal auf die überragende Bedeutung der selbständigen Tätigkeit der Schüler für die Intensität des Lernprozesses und die Entwicklung der Persönlichkeit einzugehen. Mathematische Aufgaben führen in jedem Falle zu fest umrissenen Ergebnissen. (Die Nichtlösbarkeit, die Nichterfüllbarkeit ist auch ein Ergebnis.) Die Richtigkeit der Lösungsschritte und Lösungen ist vielfältig überprüfbar, allgemein durch Beweise, bei numerischen Lösungen durch Überschläge, Abschätzungen, Anwendung inverser Operationen, graphische oder rechnerische Gegenkontrollen u.a.m. Die Lösung kann man immer finden. Es hängt nur von den eigenen Kenntnissen, vom zähen Willen, von der Konzentrationsfähigkeit ab, ob das Ergebnis gefunden wird. Durch mathematische Übungen kann daher zu solchen Merkmalen eines sozialistischen Menschen erzogen werden wie Zielstrebigkeit, Sachlichkeit, Diszipliniertheit (im Denken), Sorgfalt, Exaktheit, Ausdauer, Gewissenhaftigkeit, Willensstärke und selbstkritisches Verhalten. Solche Eigenschaften sind für die künftigen Bürger unserer Republik wertvoll, wenn sie mit sozialistischen Motiven verknüpft sind.

Ein Beispiel soll erhärten, auf welche Weise bestimmte Denk- und Verhaltensweisen im Mathematikunterricht herausgebildet werden können. Eines der Erziehungsziele besteht darin, daß die Schüler bei allen zu lösenden Aufgaben darüber nachdenken, wie die zweckmäßigste und rationellste Lösung beschaffen ist. Wir wollen in den Schülern von heute die Neuerer, Rationalisatoren und Erfinder von morgen heranbilden. Läßt man, um diese Gedanken den Schülern nahezubringen, dazu etwa eine Aufgabe lösen, bei der zu berechnen ist, welche Einsparung an Zeit und Kosten durch einen Neuerervorschlag in einem volkseigenen Betrieb eingetreten ist, so hat man erzieherisch sehr wenig getan. Viel wirkungsvoller ist es, wenn der Lehrer eine Aufgabe stellt, die mehrere Lösungswege zuläßt, und wenn er die Schüler tatsächlich selbständig die verschiedenen Wege suchen, durchlaufen und miteinander vergleichen läßt, bis der rationellste gefunden ist. Eine solche Übung leistet, selbst wenn sie an einer formalen Aufgabe durchgeführt wird, weit mehr im Hinblick auf das gestellte Erziehungsziel als eine Textaufgabe obengenannter Art, die zwar die Rationalisierung zum Inhalt hat, aber nur dem Worte nach, nicht in bezug auf die zu findenden Lösungsverfahren, die vom Schüler eine aktive schöpferische Leistung fordern.

Schlußbemerkungen

In der dargestellten Weise zeigt sich der wesentliche Anteil des Mathematikunterrichts an der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung. Alles andere muß aufgepropft erscheinen und bleibt daher letztlich erzieherisch ohne die beabsichtigte Wirkung. Es kann nicht darum gehen, im Mathematikunterricht die Ziele anderer Fächer zu verfolgen, sondern einen fachspezifischen Beitrag zum Gesamterziehungsziel zu leisten. Der Wille, die Welt zu verändern, die Heimat sozialistisch umzugestalten, muß bei den Schülern im Mathematikunterricht vom Verstand her entwickelt werden. Dort liegen die Stärke und die Möglichkeiten des Mathematikunterrichts.

Die Festlegung des Anteils an der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung wirft auch die Frage nach der Meßbarkeit auf. Die pädagogischen Wissenschaften sind auf Grund ihres gegenwärtigen Entwicklungsstandes, der von der Kompliziertheit ihres Gegenstandes, der Bildung und Erziehung des sich entwickelnden Menschen, abhängt, noch nicht in der Lage, von Voraussetzungen ausgehend, exakte Voraussagen zu treffen. Daher ist es nicht möglich, mit Sicherheit zu erwarten, daß bei Nutzung der erzieherischen Möglichkeiten in oben beschriebener Form auch die erwarteten Erziehungserfolge in vollem Maße eintreten. Es lassen sich wohl über größere Zeiträume hinweg bestimmte Denk- und Verhaltensweisen feststellen, erfassen, registrieren. Es läßt sich jedoch noch nicht mit Sicherheit angeben, welche Maßnahmen beim einzelnen Schüler zu dieser oder jener Verhaltensweise geführt haben. Erst recht läßt sich nicht exakt der Anteil des einzelnen Fachunterrichts am Gesamterziehungsergebnis messen. Dieser Umstand darf uns jedoch nicht veranlassen, die Erziehung geringer zu schätzen. Unter Anwendung der besten Erfahrungen, die in den pädagogischen Wissenschaften ihren Niederschlag gefunden haben, müssen in jedem Fach, also auch im Mathematikunterricht, alle Möglichkeiten genutzt werden, die einen erzieherischen Erfolg versprechen. Daran allein kann und muß der erzieherische Wert jeder einzelnen Stunde gemessen werden.

Dem Lehrer fällt im Erziehungsprozeß in der Schule die entscheidende Rolle zu. Er muß über eine hohe fachliche Bildung verfügen und Parteilichkeit innerhalb und außerhalb des Unterrichts an den Tag legen. Als Mathematiklehrer benötigt er gediegene mathematische und auch wissenschaftstheoretische und philosophische Kenntnisse. Er muß seine Wissenschaft in ihren Entwicklungstendenzen verfolgen. Liebe zum Fach, zur Mathematik, Meisterschaft und Ideenreichtum im pädagogisch-methodischen Bereich führen zu einem interessanten, lebensverbundenen Mathematikunterricht. Das Wort eines solchen Mathematiklehrers wird bei den Schülern erhöhtes Gewicht auch dann haben, wenn er offen zu aktuellen politischen Problemen spricht, zu denen es im Unterricht selbst möglicherweise keinen direkten Bezug gibt.

Um das angestrebte Niveau des Mathematikunterrichts zu erreichen, um die Anteile unseres Faches an der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung vollständig zur Wirkung kommen zu lassen, sind in nächster Zukunft folgende Aufgaben zu bewältigen:

1. Die politisch-ideologische Qualifizierung der Mathematiklehrer, insbesondere ihre philosophische Weiterbildung.

2. Die fachliche Weiterbildung in systematischen Formen. Das im Dezember 1966 in dieser Zeitschrift veröffentlichte Programm für die Weiterbildung der Fachlehrer für den Mathematikunterricht gibt dafür eine gute Grundlage. Der Schwerpunkt sollte auf der Herausarbeitung der Rolle der Mathematik in der sozialistischen Gesellschaft liegen.

3. Die methodische Weiterbildung zur Bewältigung der Anforderungen an die politisch-ideologische Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht.

4. Die systematische Planung und Koordinierung der Erziehungsarbeit in den verschiedenen Klassenstufen und Unterrichtsfächern, insbesondere die weitere Präzisierung des Anteils des Mathematikunterrichts.

5. Die Überwindung jeglicher Formen von Praktizismus und Versimplifizierung in der Erziehungsarbeit im Mathematikunterricht.

Der Verfasser spricht die Hoffnung aus, mit diesem Beitrag einen weiteren Schritt zur Klärung des Anteils des Mathematikunterrichts an der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung gegangen zu sein und erbittet von den Fachkollegen Kritiken und Anregungen zum vorliegenden Problem.

Literatur

SCHULZ, G.: Philosophische Probleme der Mathematik. In Math.i. Sch. 4 (1966), Heft 5, S. 323.
SCHRÖTER, K.: Mathematik und Gesellschaft. In Math.i.Sch. 4 (1966), Heft 9, S. 626, und Heft 10, S. 705.
KASDORF, G.: Erkenntnistheoretische Probleme bei der Behandlung der Mengenlehre. In Math.i.Sch. 4 (1966), Heft 11, S. 786.
DIETZEL, K.: Die Aufgaben des naturwissenschaftlichen Unterrichts in den nächsten Jahren beim schrittweisen Aufbau des einheitlichen sozialistischen Bildungssystems. In Math.i.Sch. 5 (1967), Heft 4, S. 242.

LEY, H.: Zur ideologischen Bildung und Erziehung im naturwissenschaftlichen Unterricht. In Math.i.Sch. 5 (1967), Heft 5, S. 321.
Mathematik und objektive Realität. In Math.i.Sch. 6 (1968), Heft 3, S. 167.
VISSIO, P.: Die Entwicklung der Mathematik und der mathematische Unterricht. In Math.i.Sch. 6 (1968), Heft 3, S. 175.
KASDORF, G.: Weltanschaulich-philosophische Bildung und Erziehung im Mathematikunterricht und mathematische Grundlagenforschung. In Math.i.Sch. 6 (1968), Heft 6, S. 407.

Autorenkollektiv: Marxistische Philosophie, Lehrbuch, Dietz Verlag, Berlin 1967.

(Schneider, S.: Über den Anteil des Mathematikunterrichts an der staatsbürgerlichen Bildung und Erziehung.
In: Mathematik in der Schule 6 (1968), Heft 11, S. 801 ff.)

Über das Verhältnis von semantischen und syntaktischen Aspekten der Mathematik im Unterricht

Werner Walsch

Betrachten wir einige Beispiele aus der Unterrichtspraxis, bei denen es sich um bestimmte, von Schülern begangene Fehlleistungen handelt, die man relativ häufig registrieren muß:

(1) Es kommt vor, daß Schüler wie folgt umformen:

$$(a + b)\cdot(c + d) = a\cdot c + b\cdot d$$

(2) Manche Schüler sind nicht in der Lage, aus

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \qquad (*)$$

den Wert R zu berechnen, wenn R_1 und R_2 bekannt ist, bzw. sie kommen zu $R = R_1 + R_2$. Die Gleichung (*) kommt bekanntlich im Physikunterricht bei der Behandlung des verzweigten Stromkreises - Parallelschaltung von Widerständen - vor.

(3) Verschiedene Schüler scheitern, wenn sie beispielsweise $10^{\lg 7}$ berechnen sollen.

(4) Unsere Schüler lernen allerlei über Funktionen, kommen aber oft in Verlegenheit, wenn sie erklären sollen, was eine Funktion eigentlich ist. (Wenigstens war es bis vor kurzem so.)

Die Mängel, die in den Beispielen (1) und (2) zum Ausdruck kommen, unterscheiden sich nicht nur hinsichtlich der Stoffgebiete von jenen der Beispiele (3) und (4), sondern sie sind von einer ganz anderen Art: Während die Fehlleistungen in den Beispielen (3) und (4) in erster Linie durch einen Mangel an inhaltlichem Verständnis bestimmter mathematischer Begriffe bedingt sind, zeigen sich in den Beispielen (1) und (2) vor allem Schwächen in der Beherrschung eines bestimmten Kalküls.

Inhaltliches Verständnis hat mit dem semantischen Aspekt der Mathematik zu tun, die Beherrschung von Kalkülen bzw. Algorithmen mit der syntaktischen Seite der Mathematik. B e i d Aspekte sind für den Mathematikunterricht von Bedeutung. Das i in der Fachkonzeption [1]) auch zum Ausdruck gebracht worden. Do wird an mehreren Stellen gefordert, daß im Unterricht einersei inhaltliche Betrachtungen dem formalalgorithmischen Arbeiten gegenübergestellt werden, daß andererseits aber auch der enge Zusammenhang und die Wechselwirkung zwischen beiden Aspekten deutlich werden sollen. Einige Gedanken zu diesem Problem will ich hier darlegen.

Grundsätzlich darf man wohl sagen, daß Überbetonung wie auc Vernachlässigung der semantischen oder der syntaktischen Seite der Mathematik in gleicher Weise schädlich ist. Ich erinnere an die einführenden Beispiele. Alle vier Fehlleistungen sind doch eigentlich unerwünscht und werden - etwa in weiterführend Bildungseinrichtungen - bei ihrem Auftreten mit Recht kritisch vermerkt. Aber mit dieser Feststellung ist das Problem noch lange nicht gelöst. Wenn man den Mathematikunterricht plant -

---

[1]) Konzeption für den Mathematikunterricht in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule entsprechend dem "Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem". In Math.i.Sch. III (1965), Heft 6, S. 433.

Großen wie im Kleinen – muß man in dieser Beziehung eine ganze Reihe konkreter Entscheidungen treffen. Für jedes Stoffgebiet ist zu klären:

Welche Begriffe sollen die Schüler kennenlernen?

Bis zu welchem Grade wird die Darstellung formalisiert?

Wann sollen die Schüler mit der Formalisierung vertraut gemacht werden?

Für welche Aufgabentypen sollen sie spezielle Lösungsalgorithmen kennenlernen, und welche Algorithmen sollen das sein? (Es gibt ja nicht immer nur genau einen Lösungsalgorithmus.)

Wie weit soll den Schülern bewußtgemacht werden, daß sie algorithmisch arbeiten? Usw.

Ich will versuchen, an Hand ausgewählter Beispiele aus dem Schulstoff Antworten auf einige dieser Fragen zu geben oder zumindestens auf Probleme hinzuweisen, die in diesem Zusammenhang auftreten.

1. Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem

Wenden wir uns zuerst den Problemen zu, die im Zusammenhang mit der Unterscheidung von Zeichen oder Namen einerseits und den durch sie bezeichneten mathematischen Objekten oder Relationen andererseits entstehen. Die Hauptschwierigkeit, die hierbei im Unterricht zu überwinden ist, besteht in der Gefahr der Identifizierung von Zeichen und Bezeichnetem durch die Schüler.

Das beginnt schon in Klasse 1 bei der Einführung der natürlichen Zahlen. Es gehört viel methodisches Geschick dazu, zwischen den natürlichen Zahlen und den Zeichen für die Zahlen – den Ziffern – genau zu unterscheiden, ohne die Schüler aber durch unangebrachte Vorträge über diesen Unterschied zu verwirren. Leider ist es gar nicht so selten, daß in der Klasse 1 die Einführung der natürlichen Zahlen durch eine Einführung der Ziffern und Zahlwörter ersetzt wird. Begünstigend wirkt dabei die Tatsache, daß viele Kinder bei Schuleintritt eine ganze Reihe von Zahlwörtern und Ziffern schon kennen und dadurch eine Vertrautheit mit den natürlichen Zahlen vortäuschen, die in Wirklichkeit nur in geringem Maße vorhanden ist.

Bei den jetzigen Bestrebungen zur Verbesserung des Mathematikunterrichts wird großer Wert darauf gelegt, vor allem ausreichende inhaltliche Vorstellungen von den natürlichen Zahlen bei den Schülern zu entwickeln. Das geschieht einmal durch ein gründliches und vielseitiges Arbeiten mit Mengen konkreter Gegenstände vor Einführung der Ziffern und Zahlwörter und auch noch lange danach. Eigenschaften der natürlichen Zahlen (z.B. gerade und ungerade), Beziehungen zwischen ihnen (z.B. kleiner als) und Operationen mit ihnen werden durch Untersuchung konkreter Mengen und durch das Operieren mit diesen Mengen gewonnen. Dabei muß natürlich nicht nur zwischen Zahl und Ziffer, sondern auch zwischen den konkreten Mengen und den durch Abstraktion daraus gewonnenen natürlichen Zahlen unterschieden werden.

Natürlich tritt dieses Problem - die Unterscheidung von Zeichen und Bezeichnetem - nicht nur in Klasse 1 auf. Immer dann, wenn im Mathematikunterricht neue Namen oder Symbole eingeführt werden, ist darauf zu achten, daß die Schüler nicht nur das Zeichen, sondern vor allem auch das Bezeichnete erfassen. Zwei weitere Beispiele sollen das noch etwas verdeutlichen.

Zum Schulstoff gehört die Einführung des Funktionsbegriffs und die Behandlung von Funktionen. Dabei werden vorwiegend solche Funktionen betrachtet, die durch eine Gleichung gegeben werden können. Leider führt das nicht selten dazu, daß Schüler eine solche Gleichung mit der durch sie gegebenen Funktion identifizieren und daß sie dann zuweilen sogar jede Gleichung, in der zwei Variable vorkommen, als eine Funktion ansehen. Der Unterricht muß klären, daß nicht die Gleichung die Funktion ist sondern die durch sie festgelegte Zuordnung bzw. Abbildung. Die Gleichung ist gewissermaßen nur ein Name für die betreffende Funktion. Das Festhalten dieser Einsicht ist für die Schüler keineswegs einfach, denn bei der Untersuchung der einzelnen Funktionen - z.B. auf Nullstellen, auf lokale Extremstellen, auf Stetigkeit, usw. - wird ständig mit der Gleichung, mit dem analytischen Ausdruck der Funktion gearbeitet. (Der Ausdruck wird in verschiedener Weise umgeformt.) Das liegt daran, daß diese inhaltlichen Fragestellungen in der Regel mit Hilfe formaler Verfahren gelöst werden. Es besteht also ein enger Zusammenhang und eine Wechselbeziehung zwischen den semantischen und den syntaktischen Aspekten der Sache. Trotz dieser Schwierigkeiten muß aber verlangt werden, daß die Schüler neben der Beherrschung gewisser formaler Verfahren auch richtige inhaltliche Vorstellungen besitzen.

Noch einen etwas anderen Akzent hat folgendes Beispiel: Die Schüler lernen im Unterricht Logarithmen kennen. Das geschieht nicht selten so, daß man etwa sagt:

> "Der Logarithmus von 5 zur Basis 10 ist diejenige Zahl x, mit der man 10 potenzieren muß, um 5 zu erhalten. Wir schreiben für diese Zahl x den Ausdruck lg 5."

Das sieht für die Schüler so aus, als hätten sie damit den Logarithmus von 5 gewissermaßen in der Tasche. Was aber eingeführt wurde, ist nur ein Name, von dem noch gar nicht klar ist, ob er wirklich eine Zahl bezeichnet. Die ganze Sache wird erst legitim, wenn bewiesen oder in der Schule mindestens plausibel gemacht worden ist, daß es tatsächlich genau eine Zahl der angegebenen Art gibt. Wenn die Existenz dagegen schon durch die Angabe eines Namens als gesichert angesehen wird, so schließt man im Grunde genau so wie in jenem scherzhaften Beispiel: "Der Erzengel Gabriel existiert; denn er heißt ja Gabriel."

Zusammenfassend läßt sich folgendes sagen: Um zu vermeiden, daß der Zusammenhang zwischen Zeichen und Bezeichnetem fehlt, ist einmal bei der Einführung mathematischer Gegenstände sorgfältig darauf zu achten, daß vor allem und zunächst richtige inhaltliche Vorstellungen entwickelt werden, daß die Einführung der Sache nicht durch die Einführung eines Namens ersetzt wird, und zum anderen muß gesichert werden, daß der Zusammenhang zwischen Zeichen und Bezeichnetem nicht wieder verlorengeht. Wenn dieser Zusammenhang fehlt, d.h., wenn die Schüler nur mit Namen und Symbolen operieren, ohne hinreichende inhaltliche Vorstellungen damit zu verbinden, dann spricht man davon, daß die Schüler nur formale Kenntnisse besitzen, und ist mit Recht unzufrieden.

2. Formalisierung

Ein anderes nicht unwesentliches Problem, dem wir uns hier zu-wenden wollen, ist die Frage, wieweit in den verschiedenen Kla senstufen die im Mathematikunterricht verwendete Sprache über-haupt formalisiert werden soll.

Es ist sicher klar, daß man an keiner Stelle des Unterricht eine vollständige Formalisierung anstreben wird. Dazu besteht gar keine Notwendigkeit. Denken wir beispielsweise an die logi schen Bestandteile der Sprache der Mathematik: nicht; und; ode wenn – so; genau dann, wenn; es gibt ein; für alle; es gibt höchstens ein; usw. Eine Formalisierung der Sprache hinsichtli dieser Bestandteile wäre nur gerechtfertigt, wenn durch sie so nicht erreichbare Fortschritte erzielt werden könnten. Die bis herigen Erfahrungen scheinen zwar darauf hinzudeuten, daß man Unterricht an geeigneter Stelle die genaue Bedeutung dieser Re weisen einmal klären oder zumindest bewußtmachen muß, eine For lisierung dürfte dazu aber nicht erforderlich sein. Auch bei d Bestrebungen zur Modernisierung unseres Mathematikunterrichts ist daran nicht gedacht.

Ganz anders sieht es dagegen mit der Einführung von Variabl aus. Diese Bestandteile einer formalisierten Sprache werden je im Gegensatz zu früher nicht erst in Klasse 8, sondern schon a Klasse 1 benutzt. Dem liegt unter anderem folgender Gedanke zu-grunde: Da man von Klasse 1 an über Zahlen redet und mit Zahle operiert, soll man dabei auch in natürlicher Weise – so, wie e in der Mathematik üblich ist – Variablen für Zahlen benutzen. I Verwendung der Variablen wird in den unteren Klassen allerding begrenzt auf die Bildung einfacher Terme (z.B. beim Rechnen in Tabellen: a; $a + 3$; $a - 4$) und auf die Formulierung einfacher Ausdrücke (wie $14 + x < 19$ u.ä. oder auch $a + b = b + a$ usw.). Das Umformen von Termen und Ausdrücken – also die Einführung eines Kalküls – bleibt den höheren Klassen vorbehalten. Ganz neu ist die Sache außerdem gar nicht. Früher gab es in den un-teren Klassen z.B. Aufgaben wie $5 + ? =$ oder $8 - \square = 2$ und ähnliche. Gerade von der zweiten Darstellungsart kann man aus-gehen, wenn Variablen eingeführt werden.

Durch die frühzeitige Benutzung von Variablen entfällt übri-gens eine Schwierigkeit, die in Klasse 8 bisher immer auftrat:

In vielen Hospitationen konnte ich beobachten, daß bei der Einführung der sogenannten allgemeinen Zahlsymbole in Klasse 8 bei den Schülern mehr oder weniger stark der Eindruck erweckt wurde, als beschäftige man sich mit einem neuen Gegenstand - so, wie das bei allen anderen Lehrplanthemen ja tatsächlich immer der Fall war. In Wirklichkeit handelte es sich aber nicht um die Einführung eines neuen Gegenstandes, sondern um die Einführung gewisser Bestandteile der im Unterricht verwendeten Sprache der Mathematik. Das ist oft nicht klar gesehen worden. Die Folge war in der Regel das Fehlen einer richtigen semantischen Interpretation des Ganzen und dadurch ein ausgeprägter Formalismus in den Kenntnissen der Schüler. Dieses Beispiel zeigt, daß bei der Einführung von Formalisierungen im Unterricht nicht nur eine Gefahr der Verfrühung, sondern auch eine Gefahr der Verspätung existiert. In jedem Falle einen möglichst günstigen Zeitpunkt zu finden, ist eine Aufgabe, die noch manche Untersuchungen erfordern dürfte.

3. Algorithmen und Kalküle

Wenden wir uns nun noch einem dritten Problemkreis zu, bei dem es um die Einführung von Algorithmen bzw. Kalkülen im Unterricht geht.
Nach dem bisher Gesagten dürfte es kaum noch nötig sein zu betonen, daß wir im Unterricht Algorithmen soweit wie möglich auf der Grundlage inhaltlichen Verständnisses einführen wollen. Damit ist klar, daß man sie in der Regel durch inhaltliche Überlegungen allmählich entwickeln und erarbeiten und sie nicht als fertige Rezepte einfach vermitteln wird. Das ist jedoch leichter gesagt als getan. Es gibt verschiedene Stellen im Mathematiklehrgang, bei denen man auf die Einführung eines Algorithmus nicht länger verzichten möchte, bei denen seine inhaltliche Begründung aber für die Schüler gar nicht so leicht einzusehen ist - von einem Beweis, daß der Algorithmus das Verlangte leistet, ganz zu schweigen.

Ich denke hier z.B. an die Einführung der schriftlichen Rechenverfahren (vor allem an die Division), an die Einführung des Rechnens mit dem logarithmischen Rechenstab in Klasse 7 und an das Rechnen mit den sogenannten allgemeinen Zahlsymbolen in

Klasse 9 (vor allem wieder an die Division von mehrgliedrigen Summen). Man hilft sich in diesen und ähnlichen Fällen dann durch Analogieschlüsse, durch Plausibilitätsbetrachtungen und zum Teil eben doch durch das einfache Mitteilen der Regeln. Erschwert wird die Lage noch durch eine psychologische Situation, von der man schwer sagen kann, ob sie durch den bisherigen Unterricht selbst bedingt oder sowieso eine typische Haltung vieler Schüler ist: Man kann jedenfalls sehr oft beobachten, daß die Schüler nach einem Algorithmus drängen und auch gerne algorithmisch arbeiten, während sie die inhaltliche Begründung des Verfahrens wenig interessiert. Es liegt mir fern, diese Haltung von vornherein zu verurteilen, denn in unserer modernen technisierten Welt ist man ja vielfach darauf angewiesen, durch Algorithmen beschreibbare Tätigkeiten auszuführen, ohne den Vorgang inhaltlich voll zu überblicken und zu verstehen. Man denke nur an das Bedienen eines Fernsehgerätes, an das Kochen eines bestimmten Gerichtes nach einem Rezept oder an das Benutzen eines Telefons. Die Frage ist also nicht nur, wie man diesen oder jenen Algorithmus im Unterricht begründen kann, sondern auch, bei welchen Algorithmen man unter Umständen von vornherein auf eine Begründung verzichten will.

Eine andere Frage, die in jedem konkreten Einzelfall entschieden werden muß, ist folgende: Wieweit ist es angebracht, einen im Unterricht eingeführten Algorithmus den Schülern als solchen auch bewußtzumachen und ihn durch ein entsprechendes System von Regeln explizit zu beschreiben?

Auch hier ist eine generelle Antwort m.E. nicht möglich. Vielfach verzichtet man auf die explizite Formulierung und Fixierung von Regeln. Das halte ich für sinnvoll, sobald ein solches System von Regeln sehr kompliziert und dadurch für die Schüler unhandlich ist. Es ist dann vernünftig, durch entsprechende systematische Übungen die Schüler mit dem Algorithmus vertraut zu machen, ohne ihn zu beschreiben. (Nach meiner Auffassung sollte man in dieser Weise auch in Klasse 7 bei der Addition und Subtraktion rationaler Zahlen verfahren. Die im Lehrbuch [2])

2) Mathematik-Lehrbuch für die Oberschule, Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965, S. 20.

angegebene Regel halte ich jedenfalls für unbrauchbar.) Vielfach ist es aber sinnvoll und auch möglich, Regeln anzugeben. Nur sollte man dann konsequent sein und diese Regeln auch vollständig formulieren. Das ist leider nicht immer der Fall, z.B.

> Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

Danach wäre $a^3 \cdot a^4 = 3 + 4 = 7$.

Ich möchte in diesem Zusammenhang schließlich noch die vorn gestellte Frage aufgreifen, für welche Aufgaben im Unterricht Algorithmen eingeführt werden sollen, wann das zu geschehen hat und welche Algorithmen ausgewählt werden sollen.

Manche Entscheidungen sind relativ leicht zu treffen. Wir werden z.B. sicher nicht auf die üblichen schriftlichen Rechenverfahren verzichten wollen, und es gibt auch kaum Meinungsverschiedenheiten darüber, daß sie am Ende der Unterstufe eingeführt sein müßten. Es dürfte auch klar sein, daß die Schüler z.B. Algorithmen zum Lösen von linearen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen kennenlernen sollen. Aber hier gibt es schon offene Fragen. Wann sind die entsprechenden Algorithmen einzuführen? Die neue Fachkonzeption sieht vor, daß lineare Bestimmungsgleichungen schon in der Unterstufe betrachtet werden, wobei aber zunächst der semantische Aspekt im Vordergrund steht. Die Gleichungen werden durch Probieren gelöst. Erst in der Mittelstufe sollen die Schüler formale Verfahren (d.h. einen Algorithmus) für das Lösen solcher Gleichungen kennenlernen - dann nämlich, wenn die betrachteten Gleichungen komplizierter werden und nur noch schwer durch Probieren zu lösen sind. Bei Gleichungssystemen tritt später dann die zusätzliche Frage auf, ob über die jetzt im Unterricht behandelten Verfahren hinaus das GAUSSsche Verfahren eingeführt werden sollte. Es gibt Gründe, die dafür sprechen, aber es ist die Frage, ob es in der zehnklassigen Schule wirklich notwendig ist.

Ein anderes Beispiel ist die Behandlung der Quadratwurzeln. Zur Zeit lernen die Schüler den Begriff kennen und ein Verfahren, wie man entsprechende Näherungswerte aus einer Tabelle entnehmen kann. Sie lernen jedoch nicht, wie man diese Näherungswerte mit Hilfe eines Iterationsverfahrens berechnet. Man könnte fragen, ob das den modernen Zielsetzungen unseres Unterrichts ganz entspricht. Die Antwort ist nicht so leicht zu geben, weil es hier nicht nur um das spezielle Problem der näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln geht, sondern weil die allgemeine Frage hineinspielt, ob die Schüler in der zehnklassigen Oberschule überhaupt mit Iterationsverfahren bekannt gemacht werden sollen. Die Bedeutung solcher Verfahren für die angewandte Mathematik steht ganz außer Zweifel. Im Mathematikunterricht kommen die Schüler bisher jedoch nur mit Problemen in Berührung, die ohne Anwendung von Näherungsverfahren lösbar sind. Hier dürfte in Zukunft eine Modernisierung notwendig werden.

Es gibt noch eine ganze Reihe von Fragen dieser Art, ich will die Aufzählung aber nicht weiter fortsetzen. Sie sind oft schwierig zu entscheiden, weil einerseits die Entwicklung in der Mathematik und ihren Anwendungen nicht stillsteht und andererseits eine Antwort vielfach nicht allein aus der Sicht des Mathematikunterrichts gefunden werden kann. Die allgemeinen Zielsetzungen unserer Schule spielen natürlich ebenfalls eine gewichtige Rolle.

Es wird deutlich geworden sein, daß zwischen dem semantischen und dem syntaktischen Aspekt der Mathematik sehr enge Zusammenhänge bestehen. Davon wollen wir uns auch im Unterricht leiten lassen. Wir sind uns dabei aber bewußt, daß das richtige Verhältnis zwischen diesen beiden Aspekten nicht immer leicht zu bestimmen ist und daß es noch mancher Überlegungen und praktischer Versuche bedarf, um günstige Lösungen der damit zusammenhängenden Fragen zu finden.

(Walsch, W.: Über das Verhältnis von semantischen und syntaktischen Aspekten der Mathematik im Unterricht.
In: Mathematik in der Schule 5 (1967), Heft 8, S. 566 ff;
vom Autor gekürzt)

Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht [*] – das Prinzip der "heuristischen Schulung"

Diether Kuschmann

Das Wort Heuristik stammt aus dem Griechischen und heißt soviel wie "Erfindungskunst" oder dem Sinne nach besser "Lehre des Findens".

Es wird unterschieden zwischen heuristischen Unterrichtsmethoden und einer heuristischen Schulung im Mathematikunterricht. Während unter einer heuristischen Unterrichtsmethode eine Lehrmethode verstanden wird, die den Schüler, z.B. durch Fragen und Impulse mit anleitendem oder anregendem Charakter, dazu bringt, Probleme und ihre Lösungen möglichst selbständig zu finden, wird unter heuristischer Schulung im Unterricht das bewußte und planmäßige Lehren einiger allgemeiner und spezieller Richtlinien der Heuristik – letztere werden hier in Anlehnung an GALPERIN [1]) Orientierungshilfen genannt – für das Lösen von Problemen verstanden.

Dem Mathematikunterricht kommt eine große Bedeutung für die heuristische Schulung zu. Kaum ein Unterrichtsfach bietet in dieser Beziehung so gute Möglichkeiten, aber andererseits benötigt wohl auch kein anderes Fach zur Bewältigung seiner Probleme so vielfältige Grundsätze der Heuristik wie gerade der Mathematikunterricht.

Ist nun heuristische Schulung um der besseren mathematischen Ausbildung willen notwendig, oder dient die Mathematik der Entwicklung von Grundsätzen und Richtlinien der Heuristik, die es

---

*) Vgl. dazu WIESEMANN, H.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht – (1) Das Prinzip der Aktivierung der Schüler. In Math.i.Sch. 5 (1967), Heft 8, S. 582

1) Vgl. Probleme der Lerntheorie. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966, S. 36 (GALPERIN, P.S.: Die geistige Handlung als Grundlage für die Bildung von Gedanken und Vorstellungen.)

ermöglichen, die im praktischen Leben auftretenden Probleme rationeller und leichter zu bewältigen? Beides ist gleich wichtig und notwendig.

Zur Lösung praktischer Probleme benötigen wir häufig mathematische Hilfsmittel. Wir müssen also die Aufgabe, wie sie sich aus der Praxis ergibt, in eine mathematische Aufgabe übersetzen. Dabei helfen Richtlinien der Heuristik. Das mathematische Problem wird ebenfalls mit Hilfe von in der Heuristik entwickelten Richtlinien gelöst. Bei der Übersetzung des Ergebnisses in die Sprache der Praxis und schließlich beim Finden neuer Probleme und Aufgaben bedienen wir uns wieder solcher Richtlinien. Die neuen Probleme stellen oft sehr hohe Anforderungen in fachlicher und heuristischer Hinsicht.

Der augenblickliche Stand der heuristischen Schulung unserer Schüler kann uns nicht befriedigen. Meistens wird zwar in fachlicher Hinsicht so viel gelehrt, daß eine ausreichende fachliche Grundlage zur Lösung vieler Aufgaben gegeben ist. Oft kennen die Schüler jedoch keine Richtlinien für das Lösen eines Problems und damit ist für diese Schüler die Wahrscheinlichkeit, eine brauchbare Lösung zu finden, erheblich gesunken. In diesem Zusammenhang muß gesagt werden, daß Schüler, die im Lösen von Problemen sicher sind, nicht bewußt heuristisch geschult sein müssen. Oft haben sie gar keine Ahnung, daß es überhaupt Regeln für das Vorgehen bei Problemlösungen gibt, und dennoch lösen sie auch schwierige Probleme verhältnismäßig leicht. Sie können aber oft erst hinterher (d.h. nachdem das Problem gelöst ist) angeben, warum sie so und nicht anders vorgegangen sind. Im Grunde bedienen sich solche Schüler natürlich auch der Heuristik. Es ist aber sicher, daß bei bewußter heuristischer Schulung im Mathematikunterricht die Fertigkeiten im Bewältigen von Problemen und Aufgaben, die nicht einfach durch Algorithmen zu lösen sind, bei allen Schülern zunehmen müssen.

Ferner bin ich einerseits der Ansicht, daß Richtlinien zur Lösung geometrischer Aufgaben zu wenig bekannt sind und deshalb auch dem Schüler nicht bewußtgemacht werden können. Das hat dazu beigetragen, daß der Geometrieunterricht vielfach immer noch ein Stiefkind ist. Andererseits gibt es aber gerade für den Geometrieunterricht eine von DANILOWA verfaßte Broschüre [2]), in der in sehr klarer und beispielhafter Weise solche Richtlinien zu Systemen zusammengefaßt sind. Bevor an einigen Beispielen spezielle Richtlinien, also Orientierungshilfen, zur Lösung von Problemen demonstriert werden, sollen einige allgemeine angegeben werden. Von solchen Regeln darf man sicher nicht zuviel erwarten, jedoch ist es bestimmt nützlich und wertvoll, über die Regeln tiefer nachzudenken. Man wird dann sehr schnell erkennen, welche Fehler von einem selbst noch häufig bei Lösungen von schwierigen Problemen gemacht werden.

POLYA nennt in diesem Zusammenhang wörtlich die folgenden allgemeinen Hinweise zur Lösung von Problemen:

- "Handle nie gegen dein Gefühl, jedoch suche klare "rationale" Gründe, welche für oder gegen deine gefühlsmäßige Auffassung sprechen, unbefangen wahrzunehmen!
- Bleibe so nahe bei der Aufgabe als möglich!
- Jedoch sei bereit, so weit von der Aufgabe dich zu entfernen, als es erforderlich und zweckmäßig erscheint!
- Gib nicht zu früh auf! Verharre so lange bei dem untersuchten Punkt, als du hoffen kannst, davon noch eine nützlicht Anregung zu empfangen!
- Jedoch suche noch unerschöpften Boden zu bearbeiten und irgendeine belangvolle Anregung von jedem bearbeiteten Punkt zu empfangen" [3])!

Wir erkennen, daß dies Richtlinien sind, die auch erzieherische Potenzen in sich tragen. Daß es richtig und notwendig ist, allen Schülern die diesen Regeln entsprechenden Verhaltensweisen im Mathematikunterricht anzuerziehen, steht außer Zweifel.

---

[2]) DANILOWA, E.F.: Wege zur Lösung geometrischer Aufgaben. Übersetzung aus dem Russischen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1964.

[3]) POLYA, G.: Die Heuristik. In "Der Mathematikunterricht" 10 (1964), Heft 1, S. 8, Ernst Klett Verlag Stuttgart.

Über die genannten allgemeinen Regeln hinaus nennt POLYA folge de Vorrangregeln

(a) "Das Ganze hat den Vorrang vor Teilen.
(b) Hauptteile haben den Vorrang vor sekundären Teilen.
(c) Gehe auf Definitionen zurück, und ersetze in der Aufgabe die definierten durch die definierenden Angaben!
(d) Überlege, wie du bei Aufgaben mit ähnlicher Problematik vorgegangen bist!
(e) Überlege, ob du das Problem auf ein schon gelöstes Problem zurückführen kannst!
(f) Überlege, welche bekannten Sätze mit der Aufgabe (speziel der Behauptung) zusammenhängen"[4])!

Durch Beachtung der bisher genannten Regeln, die häufig unb wußt angewandt werden, sind bereits wichtige Voraussetzungen zur Lösung von Problemen gegeben.

Es wird in der Schule in verstärktem Maße darauf ankommen, solche Richtlinien für bestimmte Stoffgebiete und Aufgabengrup pen zu präzisieren und zu lehren. In diesem Beitrag können nur einige wenige konkrete Beispiele Anregungen dazu geben, wie ma allgemein eine bessere heuristische Schulung erreicht, als die bisher der Fall gewesen ist.

1. Beispiel

Das Beispiel entstammt der Gleichungslehre und steht in gewiss Beziehung für solche Stoffgebiete, bei denen algorithmische Lösungen eine wesentliche Rolle spielen. Es sollen Wege gezeig werden, die den Schülern das Aufstellen von Gleichungen aus Aufgabentexten erleichtern.

Der 1. Weg besteht darin, daß die Anwendungsaufgaben für Gleichungen typisiert werden und für die einzelnen Aufgabentyp dann mit ganz bestimmten Lösungswegen - ähnlich wie bei algorithmischem Vorgehen - die zugehörigen Gleichungen aufgestellt werden. Um gewisse Fertigkeiten beim Aufstellen der jeweiligen Gleichung eines Typs zu erreichen, müßte der Ansatz an vielen Beispielen desselben Typs geübt werden.

---

[4])Ebenda, S. 9.

Der Vorteil dieses Weges besteht darin, daß viele Schüler (auch leistungsschwächere) diese so behandelten Aufgaben im allgemeinen richtig ansetzen und lösen können. Der Nachteil, daß man so unmöglich alle wichtigen Typen von Aufgaben in der zur Verfügung stehenden Zeit behandeln kann, läßt diesen Weg nicht ideal erscheinen.

Beim 2. Weg wird so vorgegangen, daß zwar auch eine Typisierung von Aufgaben vorgenommen wird, aber möglichst von jedem wichtigen Typ eine Aufgabe im Ansatz gelöst wird. Es ist klar, daß es bei diesem Weg wenig sinnvoll ist, spezielle Ansätze in Form eines Algorithmus für den jeweiligen Typ zu geben. Andererseits – und das ist der große Vorteil dieses Weges – kann man die für das Aufstellen von Gleichungen allgemeinen Richtlinien explizit herausstellen und vom Schüler bewußt anwenden lassen. Das weitet den Blick, schult das Denkvermögen und bildet über den Rahmen des Mathematikunterrichts hinaus. Bei diesem Weg fällt es vielen Schülern nicht mehr so schwer, selbständig auch Aufgaben nicht behandelter Typen zu bearbeiten.

Der Nachteil dieses Weges besteht darin, daß Schüler, die noch zu wenig heuristisch geschult sind, viele Aufgaben nicht lösen können.

Um nun allen Schülern gerecht zu werden, scheint eine Synthese aus beiden Wegen ratsam zu sein. Zunächst sollte stets der 2. Weg beschritten werden, um erst dann gewisse in der Praxis besonders häufig vorkommende Aufgaben auch dem Ansatz nach algorithmisch zu behandeln. Auf keinen Fall darf man die heuristische Schulung, die sich bei solchen Textgleichungen in idealer Weise anbietet, vernachlässigen.

Formale Gleichungssysteme werden in der Klasse 9 nach erarbeiteten Algorithmen gelöst.

Dabei sollten in bezug auf die heuristische Schulung folgende Orientierungshilfen Beachtung finden:

- Versuche, das unbekannte Problem auf ein bekanntes (schon gelöstes) zurückzuführen Vorrangregel (e) !
  Auf das vorliegende Beispiel angewandt, heißt das:
  Versuche, aus dem Gleichungssystem mit zwei Variablen zunächst eine Gleichung mit einer Variablen zu machen!
- Versuche, in Analogie zu früher schon gelösten Aufgaben vorzugehen (Vorrangregel (d))!

Auf das vorliegende Beispiel angewandt, heißt das: Versuche, in Analogie zu solchen Gleichungsaufgaben vorzugehen, bei denen zwei Zahlen bzw. zwei Größen zu bestimmen waren! (Derartige Aufgaben mit praktischem Bezug sind ja bereits häufig Gegenstand des Mathematik- bzw. Physikunterrichts gewesen.)

Für die weiteren Schritte beim algorithmischen Lösen sind kaum noch Orientierungshilfen erforderlich. Sie werden aber notwendig, wenn gleichzeitig nach weiteren, eventuell günstigeren Lösungsmöglichkeiten gesucht wird. Orientierungshilfen benötigt der Schüler aber auch immer wieder dann, wenn er einen Schritt des gelernten Algorithmus vergessen hat oder ein Problem auftaucht, welches vom bisher gegebenen Algorithmus nicht erfaßt wird. So scheitern Schüler gerade bei der Gleichungslehre häufig an folgender Aufgabe, die bereits im Physikunterricht der Klasse 8 vorkommt, obwohl die mathematische Behandlung derartiger Aufgaben meist erst in Klasse 9 vorgenommen wird.

Berechne R_G aus $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_G}$!

Folgende spezielle Orientierungshilfen ermöglichen den ersten Schritt:

- Versuche, das an der Gleichung zu verändern, was dich am meisten stört!
  Auf das vorliegende Beispiel angewandt, heißt das: Versuche, die Brüche zu beseitigen! Dabei wird z.B., um einen möglichen Weg hier zu skizzieren, die schon bekannte Vorrangregel (d) bzw. (e) benutzt.
  Das heißt, man versucht so vorzugehen wie bisher, wenn in einer Gleichung Brüche auftreten. Auf diese Weise gewinnt man schließlich

$$R_G \cdot R_2 + R_G \cdot R_1 = R_1 \cdot R_2 .$$

Auch hier kommt der Schüler in der Regel aus obengenannten Gründen nicht weiter. Es wird nun die folgende Orientierungshilfe gegeben:

- Erinnere dich an Strukturen mit ähnlichem Aussehen und die damit zusammenhängenden Aufgaben!

Durch sie kann der Schüler veranlaßt werden, z.B. an $ab + ac = a(b + c)$, d.h. an das Ausklammern, zu denken.

2. Beispiel

Schon bei den ersten Beweisen im Geometrieunterricht der Klasse 6 ist es wichtig, heuristische Prinzipien nicht nur schlechthin anzuwenden, sondern sie ganz bewußt zu lehren.

Zur Gewinnung einer Vermutung, d.h. für die Erkenntnisgewinnung, werden folgende Orientierungshilfen gegeben [5]:

- Versuche, eine Lösung experimentell zu finden!
- Untersuche Sonderfälle, aber verallgemeinere die Ergebnisse nicht ohne weiteres!
- Untersuche, ob sich die für die Sonderfälle gewonnenen Aussagen für den allgemeinen Fall übertragen lassen!
- Untersuche zunächst qualitativ!
- Versuche, mittels Messungen quantitative Aussagen zu bekommen!
- Sei dir klar darüber, daß so gewonnene Erkenntnisse im Sinne der Mathematik nicht bewiesen sind.

So müssen die Schüler beispielsweise bei der Behandlung des Innenwinkelsatzes für Dreiecke folgendes erkennen, um es bei anderen Gelegenheiten verallgemeinern zu können:

<u>Erkenntnisgewinnung</u>	<u>Erkenntnissicherung</u>
Um eine Vermutung zu gewinnen, genügt es, eine begrenzte Anzahl von Dreiecksmodellen mit Hilfe physikalischer Meßmethoden zu untersuchen. Ähnliches Vorgehen ist sehr oft zur Erkenntnisgewinnung möglich.	Der Beweis der Behauptung muß für alle mathematischen Dreiecke mit Hilfe bekannter Sätze und logischer Schlußregeln geführt werden. Entsprechendes Vorgehen ist allgemein zur Erkenntnissicherung (Beweisführung) notwendig.

Es seien jetzt einige Orientierungshilfen für den Beweis dieses Innenwinkelsatzes erläutert.

---

5) Vgl. DIETZ, A.: Beiträge für Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts, 1.Teil. Lehrbrief für das Fernstudium der Lehrer, Pädagogische Hochschule Potsdam, S. 41/42.

Das erste, was die Schüler wissen müssen, ist folgendes: Wenn man einen Beweis für alle (mathematischen) Dreiecke führen soll, genügt es, die entsprechende Aussage für ein beliebiges (mathematisches) Dreieck zu beweisen. Die Schüler müssen also lernen, daß sie bei einem derartigen Vorgehen nur solche Dreieckseigenschaften benutzen dürfen, die jedem beliebigen Dreieck zukommen. Das ist eine wichtige und notwendige Orientierungshilfe, der der Schluß auf eine Allaussage zugrunde liegt [6]) und die, bezogen auf andere mathematische Objekte, bei fast allen zukünftigen Beweisen benutzt werden muß. Zum speziellen Beweis werden nun weitere Orientierungshilfen genutzt, die ebenfalls für fast alle Beweise der Geometrie gebraucht werden.

(Sk) Fertige eine Skizze an und vervollständige sie im Verlauf deiner Überlegungen!

(Hi) Zeichne eine oder mehrere Hilfslinien ein, die möglichst eng mit der Aufgabenstellung zusammenhängen!

Während auf Grund der erstgenannten Orientierung sofort die übliche Dreiecksfigur mit den Winkelgrößen α, β, γ gezeichnet werden kann, fällt es den Schülern bei den ersten geometrischen Beweisen oft schwer, die Orientierung bezüglich der Hilfslinien richtig zu nutzen.

Was soll heißen, die möglichst eng mit der Aufgabenstellung zusammenhängen? Wir verweisen die Schüler auf die Konklusio (hier: $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$) des Satzes und nennen gleichzeitig die neue Orientierungshilfe:

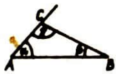
(Sä) Denke an Sätze, die mit der Behauptung zusammenhängen!

Der Schüler kann nun feststellen, daß in der Behauptung etwas über Winkel ausgesagt wird. Dann muß er sich an Sätze über Winkel erinnern. Folgende Beweismittel stehen ihm diesbezüglich zur Verfügung: Scheitelwinkelsatz, Nebenwinkelsatz und die Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen. Der Gedanke an den Nebenwinkelsatz begründet als Hilfslinie die Verlängerung einer Dreiecksseite, so daß z.B. bei C Nebenwinkel entstehen (vgl. Fig. 1)

---

6) Vgl. ILSE, D., und W. TIETZ: Übungsaufgaben zur Mengenlehre. In Math.i.Sch. 2 (1964), Heft 1, S. 14.

Der Satz über Nebenwinkel ist deshalb besonders naheliegend, weil er auch etwas über eine Winkelsumme von 180° aussagt. Um nun die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ der Beweisaufgabe zu veranschaulichen



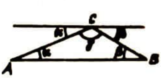
vgl. die genannten Orientierungshilfen (Sk) und (Hi) , wird ein Winkel mit der Größe β so an den Winkel ACB angetragen, daß ein Winkel mit der Größe x entsteht und

$$x + \beta + \gamma = 180^\circ$$

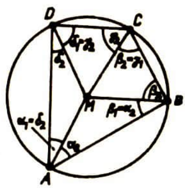
gilt (vgl. Fig. 2).

Jetzt ist noch zu beweisen, daß $x = \alpha$ gilt. Das wäre nach dem Stufenwinkelsatz der Fall, wenn der freie Schenkel des Winkels mit der Größe β , der bei C angetragen wurde, parallel zu AB wäre. Das ist aber nach Konstruktion und nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes richtig. Damit sind die eigentlichen heuristischen Überlegungen abgeschlossen.

Auch der Gedanke an Sätze über Winkel an Parallelen regt die Schüler zur Benutzung einer Hilfslinie an. Diesmal müßte eine Parallele Hilfslinie werden. Wozu? Wodurch? Da es drei gleichberechtigte Dreiecksseiten gibt, scheint eine Parallele zu einer beliebigen Dreiecksseite begründet zu sein. Als Punkt, durch den diese Parallele zu einer beliebig gewählten Dreiecksseite verlaufen soll, bietet sich der Eckpunkt an, der der gewählten Seite gegenüberliegt, weil er bereits Scheitelpunkt eines Innenwinkels des Dreiecks ist. Der Gedanke an den Wechselwinkelsatz läßt nun den letzten Beweisschritt erkennen (vgl. Fig. 3).



Die Skizzierung solcher Beweispläne zeigt, wie wesentlich es ist, den Schülern gewisse Orientierungshilfen für derartige Beweisaufgaben zu geben. Die hier genannten Hilfen werden in der Praxis nicht immer ausreichen. Wer als Schüler aber erst einmal gelernt hat, neben einigen allgemeinen Richtlinien die drei Orientierungshilfen (Sk), (Hi), (Sä) immer wieder bewußt und richtig zu benutzen, wird bald sehr viel freudiger und mutiger an Beweise herangehen. So muß der Schüler nach einigen weiteren Übungen dann z.B. in der Lage sein, den Satz über die Gegenwinkelsumme im Sehnenviereck selbständig für den Fall zu beweisen, daß der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises im Innern des Vierecks liegt. Als Hilfslinien bieten sich diesmal Radien an, weil durch sie gleichschenklige Dreiecke entstehen. Das erinnert an den Basiswinkelsatz. Dieser Gedanke führt zusammen mit dem Gedanken an die Innenwinkelsumme im Viereck zur Behauptung (vgl. Fig. 4).



Es wäre bei dieser Aufgabe immerhin leicht möglich, daß sich ein Schüler für die Diagonalen (oder auch nur für eine Diagonal als Hilfslinien (bzw. Hilfslinie) [7]) entscheidet. Er käme auf diesem Weg nur weiter, wenn er bereits den Peripheriewinkelsatz kennt.

Falls es bisher noch nicht geschehen ist, lernt der Schüler an dieser Aufgabe eine weitere Orientierungshilfe kennen, die eng mit einer allgemeinen Feststellung [8]) zusammenhängt.

---

7) Eine Begründung wäre z.B., daß auf diese Weise Dreiecke entstehen, deren Innenwinkelsumme gerade auch wie in der Behauptung 180° beträgt, und daß man so schon einmal bei dem Beweis für die Innenwinkelsumme im Viereck vorgegangen ist.

8) Vgl. ILSE, D., und W. TIETZ: A.a.O.

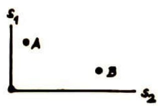
(Fa) Oft ist es nötig, mehrere Fälle zu unterscheiden, um eine für die jeweiligen mathematischen Objekte allgemeingültige Aussage zu erhalten.

Hier wären also noch die beiden Fälle zu untersuchen, bei denen der Mittelpunkt des Kreises auf einer Vierecksseite bzw. außerhalb des Vierecks liegt. Hat man auf diese Art den Beweis des Satzes über die Gegenwinkelsumme im Sehnenviereck vollständig geführt, so läßt sich dann übrigens ohne weitere Schwierigkeit der Beweis für den Peripherie-Zentriwinkel-Satz darauf aufbauen. Dieser Satz braucht nun nur noch für den leichtesten Fall bewiesen zu werden, da nach dem Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck Winkel über demselben Bogen gleich groß sind.

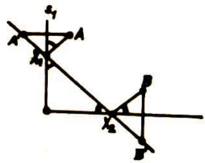
3. Beispiel

Sicher ist es nicht ratsam, die Anzahl der Orientierungshilfen möglichst groß werden zu lassen. Die Übersichtlichkeit und Anwendungsbereitschaft würde unter einer zu großen Anzahl leiden. Andererseits zeigt das folgende Beispiel, daß es Aufgaben gibt, bei denen man ohne weitere Orientierungshilfen schwer auskommt.

Aufgabe: Man konstruiere (vgl. Fig. 5) einen Streckenzug AX_1X_2B, so daß X_1 auf s_1 und X_2 auf s_2 liegt und die Einfallswinkel bei X_1 bzw. X_2 gleich den entsprechenden Ausfallswinkeln sind.



Diese Aufgabenstellung könnte sich beim Billardspiel oder bei der Behandlung des Stoffgebietes Optik im Physikunterricht ergeben. Viele vergebliche Ansätze werden für die Lösung dieser Aufgabe gemacht werden, bis man sich - eventuell angeregt durch eine praktische Aufgabenstellung aus der Optik - an die Spiegelung erinnert. Von diesem Gedanken bis zur Lösung ist es dann nur noch ein kleiner Weg. Man spiegele A an s_1 und B an s_2. Die Gerade, die die so erhaltenen Punkte A' und B' verbindet, schneidet s_1 in X_1 und s_2 in X_2. Der Beweis ist nun auch für den Durchschnittsschüler leicht zu sehen (vgl. Fig. 6).



An dieser Aufgabe erkennen wir, daß es wichtig ist, die Schüle
frühzeitig mit folgender Orientierungshilfe vertraut zu machen.

(Be) Versuche, bei Beweisen oder bei Konstruktionen der Geomet
die Eigenschaften der Bewegungen Spiegelung, Verschiebung
oder Drehung auszunutzen.

Sehr häufig wird dem Schüler auch die folgende Orientierung bei geometrischen Beweisen helfen.

(K, Ä) Versuche bei Beweisen und Konstruktionen die Kongruenz- oder Ähnlichkeitssätze zu verwenden.

4. Beispiel
Folgende Aufgabe, die aus der Bezirksolympiade 1966/1967 der Klassenstufe 10 stammt, soll gelöst werden:

Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen a,b,c stets

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c} \quad \text{gilt!}$$

Bei solchen Ungleichungs- bzw. Gleichungsaufgaben wird häufig der Fehler gemacht, daß die Richtigkeit angenommen und so lange umgeformt wird, bis etwas Richtiges herauskommt. Dann schließt man daraus, daß die Ausgangsaussage auch richtig ist. Der Schüler muß lernen, daß er beim Umformen von der Gültigkeit der erhaltenen Identität nicht auf die der Ausgangsgleichung schließen darf.

Von der heuristischen Schulung her gesehen, ist es sicher nicht richtig, dem Schüler die Lösung der obengenannten Aufgabe etwa so zu demonstrieren [9]:

---

[9]) Vgl. "Mathematische Schülerzeitschrift 'alpha'" 1 (1967, Heft 5, S. 155.

Um zu beweisen, daß die angegebene Beziehung gilt, gehen wir von der folgenden, für alle positiven reellen Zahlen gültigen Beziehung

$$a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geqq 0$$

aus.

Daraus folgt nach Anwendung der binomischen Formel, Multiplikation der Klammern und Zusammenfassung

$$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6\,abc \geqq 0.$$

Nach Addition von 9 abc und Umordnen erhält man

$$a^2b + a^2c + abc + ab^2 + b^2c + abc + ac^2 + bc^2 + abc \geqq 9abc.$$

Durch Ausklammern folgt daraus

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) \geqq 9\,abc\,.$$

Schließlich ergibt sich nach Division durch (abc)(a + b + c)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}\,,\ \text{w.z.b.w.}$$

Bei diesem Beweis hat der Schüler zwar eingesehen, daß alles richtig ist. Er erkennt auch noch eine auf die Behauptung hin zielgerichtete Umformung und käme eventuell selber dahin, wenn er die Ausgangszeile wüßte. Wie aber kommt er zu dieser? Hier sind richtige Orientierungshilfen offenbar unerläßlich, wenn viele Schüler solche Aufgaben selbständig richtig lösen sollen.

Da die Schüler auch in der Klasse 10 meistens die Umformungsregeln noch nicht so kennen, daß sie äquivalente Umformungen von nichtäquivalenten - aber doch möglichen - Umformungen unterscheiden können, sollte ihnen zunächst folgende Orientierungshilfe gegeben werden.

- Ziehe aus der ersten Zeile bzw. der Behauptung so lange Folgerungen, bis du auf eine dir bekannte allgemeingültige Aussageform bzw. wahre Aussage stößt! Dann versuche, diesen Weg rückwärts als Beweis zu gehen!

Kennen die Schüler aber die Sätze für äquivalente Umformungen, dann ist folgende Orientierungshilfe möglich.

- Forme die Behauptung solange äquivalent um, bis du auf eine bekannte wahre Aussage stößt. Dann ist auch die Behauptung wahr.

Die zuerst genannte Orientierungshilfe sollte später folgendermaßen ergänzt werden:

- Entsteht aber durch richtige Folgerungen eine nicht erfüllbare Gleichung oder Ungleichung bzw. falsche Aussage, dann ist auch die erste Zeile nicht erfüllbar bzw. die Behauptung falsch [10].

Diese drei genannten Orientierungshilfen lassen sich zur besseren Übersichtlichkeit teilweise schematisieren [11].

Es sei B die Ausgangszeile bzw. die Behauptung,
A_i $(i = 1,\dots,n-1)$ seien die durch Folgerungen entstehenden Zwischenzeilen bzw. -behauptungen. A_n sei die bekannte Endzeile bzw. Aussage.

$$B \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n$$

1. Möglichkeit

A_n allgemeinbültig bzw. wahr
Um die Behauptung zu beweisen, mußt du versuchen, rückwärts zu gehen. Gelingt das nicht, kannst du nichts über B aussagen [12].

2. Möglichkeit

A_n nicht erfüllbar bzw. falsch
Der Beweis, daß B nicht erfüllbar bzw. falsch ist, ist damit geführt. Also ist dann nicht B allgemeingültig bzw. wahr [13].

$$B \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_{n+1} \Leftrightarrow A_n$$

A_n und B_n haben dieselbe Erfüllungsmenge bzw. denselben Wahrheitswert.
Der mit Überlegungen heuristischer Art durchgeführte Beweis der genannten Olympiadeaufgabe hat nun etwa folgendes Aussehen. Dabei sei angenommen, der Schüler kennt die Sätze für das äquivalente Umformen von Ungleichungen nicht.

---

10) Das ist also eine Orientierungshilfe für das indirekte Beweisverfahren.

11) Vgl. auch DANILOWA, E.F.: A.a.O., S. 58 ff.

12) Das gleiche gilt, wenn nur eine nichtäquivalente Umformung dabei ist.

13) Ebenda.

Vorüberlegung:

Aus $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ folgt nach Multiplikation mit dem Hauptnenner ein Schritt, der als erster deshalb gemacht wird, weil bei analogen Aufgaben der Gleichungslehre auch so vorgegangen wird und die störenden Brüche so verschwinden (vgl. die früher genannten Orientierungshilfen) .

$$(a + b + c)(ab + bc + ac) \geq 9\,abc\ .$$

Daraus folgt nach Multiplikation

$$a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2 \geq 9\,abc\ .$$

Nach Subtraktion von 9 abc und Zusammenfassung ergibt sich

$$a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 - 6\,abc \geq 0\ .$$

Wenn es nun gelänge zu zeigen, daß die linke Seite nicht negativ ist, wäre die Vorüberlegung abgeschlossen. Die Orientierungshilfe (Sä) erinnert uns an binomische Formeln. Wir müssen versuchen, die linke Seite so umzuformen, daß Minuszeichen nur noch in Quadraten von binomischen Ausdrücken auftreten. Entsprechende Ausklammern nach Zerlegung von $-\,6\,abc$ in $-\,2\,abc\,-\,2abc\,-\,2\,abc$ liefert

$$a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geq 0\ .$$

Dieser letzte Schritt ist bei obengenannter Aufgabe, sowohl was das Finden als auch was die Ausführung anbelangt, sicher für die Schüler die schwierigste Umformung. Was soll man aber anderes tun als wieder ausklammern. Diesmal jedoch eben gerade so, daß möglichst Quadrate ähnlich denen bei binomischen Formeln entstehen. Dazu sind aber doppelte Produkte notwendig. Dieser Gedanke regt zur bereits genannten Zerlegung von $-\,6\,abc$ an. Der letzten Zeile ist sofort anzusehen, daß sie für den genannten Variablenbereich nicht kleiner als Null ist.

Die Vorüberlegung ist somit abgeschlossen, und es kann der eigentliche Beweis beginnen, der nun so abläuft, wie er bereits geschildert wurde.

Sehr viel rationeller wird die Aufgabenlösung, wenn die folgende Orientierungshilfe (indirekter Beweis) bekannt ist:

- Um eine Behauptung B als wahr (allgemeingültig) nachzuweisen, ist es oft zweckmäßig, von "nicht B" auszugehen und die Falschheit (Nichterfüllbarkeit) von "nicht B" nachzuweisen.

Für die vorstehende Aufgabe wäre also von

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{9}{a + b + c}$$

auszugehen.
Die oben angegebenen Umformungen führen dann auf

$$a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2 < 0 .$$

Dieser Ausdruck ist im angegebenen Grundbereich nicht erfüllbar, also ist die Ausgangszeile

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a + b + c}$$

allgemeingültig.

Andere Beispiele würden weitere notwendige Orientierungshilfe deutlich werden lassen. Das Gesamtsystem solcher Orientierungshilfen ist vielfältig. In der Schule kommt es darauf an, daß an entsprechenden Stellen im Unterricht solche Hilfen, wenn sie explizit zum erstenmal auftreten, klar als solche gekennzeichnet werden und ihrer Bedeutung nach im weiteren Unterricht immer wieder herausgestellt werden, bis die Schüler gelernt haben, sie selbständig und verallgemeinernd zu benutzen. Auf solche Weise müssen wir u.a. versuchen, das Lösen von Problemen zu lehren. Also kommt es weniger darauf an, spezielle Aufgabenlösungen zu trainieren, als vielmehr darauf, daß die Benutzung der Orientierungshilfen an vielfältigem und abwechslungsreichem Aufgabenmaterial geübt wird.

In dem Vorwort der genannten Arbeit von DANILOWA schreibt VOCKENBERG: "Das planvolle und systematische Herangehen an das Suchen nach Lösungen gegebener Aufgaben ist zweifellos ... wertvoller als die Lösung der Aufgabe selbst."

Lehrern, die so unterrichten (ohne dabei die Fertigkeitsübungen in den Algorithmen der wichtigen mathematischen Bereiche zu unterschätzen), wird ein guter Unterrichtserfolg nicht versagt bleiben.

(Kuschmann, D.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht. In Mathematik in der Schule 6 (1968), Heft 5, S. 339 ff.)

Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht - Systematische unterrichtliche Behandlung von Beweisaufgaben

Gerd Kaiser

Im Zusammenhang mit den in der Zeitschrift Mathematik in der Schule zum obengenannten Thema bereits erschienenen Beiträgen [1]) wird im folgenden eine weitere prinzipielle Bildungsabsicht unseres Unterrichts in den Mittelpunkt gerückt.

Immer von neuem bestätigt sich die Erfahrung, daß nur recht wenige unserer Schüler in der Lage sind, Beweise in einer Weise zu führen, die der Zielstellung des Mathematikunterrichts in der DDR entspricht.
Noch zu oft verstehen Schüler - um nur einige Mängel zu nennen - unter Beweisen Plausibilitätsbetrachtungen oder Nachweise, daß eine Behauptung nur für einige spezielle Fälle zutrifft; zu wenig ist die Fähigkeit entwickelt, zwischen allen Sätzen und Definitionen, die unmittelbar für einen bestimmten Beweis benötigt werden (den Beweisvoraussetzungen), der entsprechenden Behauptung und den Beweisschlußfolgerungen zu unterscheiden [2]); die schriftliche Fixierung gelingt ihnen i.allg. schon bei einfacheren Beweisen nur unzureichend.
Unseren Lehrerstudenten fallen anfangs die Vorbereitung und die Durchführung von solchen Unterrichtsstunden, in denen Beweisaufgaben zu behandeln sind, besonders schwer. Nicht umsonst wurde kürzlich als eine der im Mathematikbeschluß gestellten Hauptaufgaben, deren Lösung noch nicht abgeschlossen ist und auf die jetzt besonders orientiert werden muß, genannt,"die Schüler zu

---

[1]) WIESEMANN, H.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht - (1) Prinzip der Aktivierung der Schüler. In Math. i.Sch. 5 (1967), Heft 8, S. 582.
KUSCHMANN, D.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht - (2) Prinzip der heuristischen Schulung. In Math. i.Sch. 6 (1968), Heft 5, S. 339.

[2]) TITZE, H.: Ergebnisse der V.Internationalen Mathematikolympiade 1963. In Math.i.Sch. 1 (1963), Heft 5, S.321, insbesondere S. 324.
LERCH, R.: Beweisversuche von Schülern - kritisch untersucht. In Math.i.Sch. 2 (1964), Heft 8, S. 600.

solchen grundlegenden mathematischen Arbeits- und Denkweisen wie Beschreiben, Begründen, Beweisen zu befähigen und dabei eine prägnante mündliche und schriftliche Ausdrucksweise zu üben"[3]).

Die folgenden Betrachtungen stellen einen Versuch dar, von neuem an dieser Stelle die Diskussion über eine Erhöhung der Effektivität gerade solcher Unterrichtsstunden in Mathematik anzuregen, die der Behandlung von Beweisaufgaben gewidmet sind. Offensichtlich können bei dieser umfangreichen und vielseitigen Problematik in diesem Rahmen nur einige Teilaspekte berüht werden. Im ersten Teil werden Möglichkeiten genannt, innerhalb der unterrichtlichen Behandlung von Beweisaufgaben den mathematischen Beweisbegriff vorwissenschaftlich zur Geltung zu bringen, im zweiten wird versucht, die umfassende Behandlung von Beweisaufgaben zu systematisieren. Den ersten Teil beschließt ein Beispiel eines Beweisschemas, wie es sich am Ende einer systematischen Beweisbehandlung im Unterricht ab Klasse 6 anbietet, zur Zusammenfassung des zweiten Teils wird ein Vorschlag einer unterrichtlichen Behandlung einer Beweisaufgabe in Klasse 8 gebracht. Wesentliche Gesichtspunkte sind - wie in dieser Beitragsserie bereits angegeben - aus der Vorlesung von Herrn Prof.Dr. habil A. DIETZ der Jahre 1964 und 1965 entnommen [4]).

Propädeutik des Beweisbegriffs im Mathematikunterricht

Ein Leitgedanke unserer Bemühungen in der oben angegebenen Thematik soll derjenige sein, den G. POLYA zum Ausdruck bringt, wenn er (dem Sinn nach) formuliert, daß das Beweisen das Kernstück eines solchen Mathematikunterrichts sei, von dem man hoffen darf, daß er zum mathematischen Denken vordringt [5]). Selbstverständlich

---

[3]) Fünf Jahre später. In Math.i.Sch. 6 (1968), Heft 1, S. 13.

[4]) Grundlegendes aus dem 1. Teil dieser Vorlesungsreihe ist inzwischen in einem Lehrbrief für das Fernstudium der Lehrer nachzulesen:
DIETZ, A.: Beiträge zur Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts, 1.Teil. Herausgegeben von der Fachkommission Mathematik der Pädagogischen Hochschule Potsdam, 1967.

[5]) POLYA, G.: Schule des Denkens. A. Francke Verlag, Bern 1949.

kann man in unserem Unterricht, besonders bei ersten Beweisführungen, nicht streng nach der Fachwissenschaft verfahren, wir müssen uns jedoch von ihr leiten lassen. Bekanntlich unterscheidet man danach in einem axiomatischen System S solche Sätze, die in S nicht deduziert sind (Axiome, Grundsätze), von anderen, die in S durch Deduktion hervorgegangen sind (Theoreme, Lehrsätze) [6]. Gewisse Deduktionsregeln (Schlußregeln) stecken die in S zulässige Weise des Deduzierens ab [7].
Ohne Frage muß einer erfolgreichen Bewältigung von Beweisführungen durch den Schüler im Mathematikunterricht eine planmäßige Erziehung zum logischen Denken durch alle Schuljahre vorangehen. Dabei darf die Heranbildung der Fähigkeit des Begründens und Beschreibens nicht unterschätzt und muß von der Klasse 1 ab konsequent verfolgt werden. Will man nun erste Beweisführungen im Unterricht behandeln, so wird es sich häufig ergeben, daß man, um die Auffassungskraft der Schüler zu berücksichtigen, mehr Grundbegriffe und Grundsätze bereitstellt, als es fachwissenschaftlich notwendig ist, und daß man erst ganz allmählich vom Operieren mit inhaltlichen Bezügen zu dem mit formalen Zusammenhängen übergeht.

Man darf bei der Entwicklung der Fähigkeit der Schüler, beweisen zu können, nicht bei Hinweisen auf die Tatsache stehenbleiben, daß das logische Schließen auf bestimmten, vorgegebenen Schlußregeln beruht. Unsere Fachkonzeption [8] z.B. orientiert für den Unterricht der Mittelstufe u.a. auf das Umgehen mit Regeln ... für das logische Schließen. Also wird man die Schüler in vorwissenschaftlicher Weise mit dem Inhalt einiger Schlußregeln bekannt werden lassen und sie allmählich zu der Erkenntnis führen, daß zur logischen Analyse eines Beweisschrittes das Herauskristallisieren der ihm innewohnenden Schlußregel gehört.

---

6) Es wird hier vorgeschlagen, aus methodischen Gründen Satz als Oberbegriff zu verwenden. Ein Satz kann demnach entweder Grundsatz oder Lehrsatz sein.

7) Gemeint ist für uns interessierende axiomatische Systeme, daß solche Schlußregeln stets von wahren Aussagen zu wahren Aussagen führen müssen.
Vgl. z.B. ILSE, D., und W. TIETZ: Übungsaufgaben zur Mengenlehre. In Math.i.Sch. 2 (1964), Heft 1, S. 14.

8) Konzeption für den Mathematikunterricht in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule. In Math.i.Sch. 3 (1965), Heft 6, S. 437, insbesondere S. 443.

In diese Blickrichtung führt u.a. auch ein Schwerpunkt eines langfristigen pädagogisch-psychologischen Experiments des Fachgebietes Lernpsychologie im Deutschen Pädagogischen Zentralinstitut, bei der Herausbildung geistiger Operationen bereits für die Klasse 3 einfache Formen des Schließens auszuwählen [9]. Es wird interessant sein, von diesbezüglichen Ergebnissen zu erfahren. Es werden überhaupt noch sehr viele Untersuchungen dieser Art durchzuführen sein, wobei es nicht darum geht, ob den Schülern im Verlauf ihrer Schulzeit deutlich zu machen ist, daß das mathematische Beweisen in logischer Hinsicht mit Hilfe bestimmter logischer Schlußregeln durchgeführt wird, sondern auf welche Weise dies möglichst effektiv getan werden kann. So wird beispielsweise eine Möglichkeit angegeben, innerhalb einer propädeutischen Phase Schlußregeln - eventuell beginnend mit dem Kettenschluß - als Eigenschaften eines mengentheoretisch fundierten Folgerungsbegriffs zu erarbeiten [10]. Besonders hingewiesen wurde auch bereits darauf, daß die Kenntnis der Regel für den Schluß auf eine Implikation naturgemäß für den Mathematikunterricht besonders wichtig ist, da dieser Schluß häufig zu führen ist; außerdem ist beispielsweise seine Kenntnis eine notwendige Voraussetzung, um selbständig Beweise durch vollständige Induktion führen zu können [11]. Neben anderen in ihrer Bedeutung für das Führen von Beweisen im Schulunterricht besonders hervorzuhebenden Schlußregeln [12] sei noch auf eine andere mit besonderem Nachdruck verwie-

---

[9] LOMPSCHER, J.: Geistige Erziehung im Unterricht der Unterstufe (I). In "Die Unterstufe" 14 (1967), Heft 4, S. 11.

[10] Vgl. zu diesem Problemkreis (einschließlich der Erarbeitung eines solchen Folgerungsbegriffs, des Deutlichmachens der Anforderungen an Schlußregeln und der Gewinnung konkreter Beispiele solcher Schlußregeln)
DIETZ, A.: A.a.O., S. 46 und S. 92 bis 110!

[11] WALSCH, W.: Können vierzehnjährige Schüler die vollständige Induktion verstehen? In Math.i.Sch. III (1965), Heft 6, S. 427.

[12] Vgl. hierzu z.B.
ILSE, D., und W. TIETZ: A.a.O. und
FETISSOW, A.I., I.A. GIBSCH und A.D. SEMUSCHIN: Die Entwicklu[ng] des logischen Denkens im Mathematikunterricht. Volk und Wisse[n] Volkseigener Verlag, Berlin 1962.

sen. Eine vorwissenschaftliche Orientierung auf sie - ohne größere Vorleistungen als gegenwärtig zur Verfügung stehen - erscheint im laufenden Unterricht möglich und nötig, letzteres deshalb, weil diese Regel in fast allen Beweisen des Mathematikunterrichts angewandt werden muß. Gemeint ist die Regel für den Schluß auf eine Allaussage [13]. Sie sagt bekanntlich aus, daß man eine Universalaussage beweist, indem man den Beweis für ein beliebiges Objekt aus dem vorgegebenen Objektbereich führt. Es muß allerdings den Schülern klarwerden, was hierbei unter beliebig zu verstehen ist: Sie müssen aus einer Objektklasse einen Repräsentanten auswählen, dessen für den Beweis benutzte Eigenschaften sämtlichen Repräsentanten dieser Klasse zukommen. Sie dürfen also keine Sonderfälle herausgreifen und deren unterscheidende Merkmale für den Beweis benutzen.

Selbstverständlich darf man bei all diesen Betrachtungen nicht die Gefahr des zu schnellen Voranschreitens im Unterricht übersehen. Es sind bereits seit längerer Zeit Untersuchungen über die Art der Entwicklung des schlußfolgernden Denkens der Schüler in verschiedenen Schuljahren im Gange. Man will dabei Näheres über die Frage erkunden, wann ein Schüler in der Lage ist, über seine eigene Gedankenführung nachzudenken, was z.B. bei Beweisführungen notwendig ist. Erst dann ist es offensichtlich möglich, entsprechende Fähigkeiten beim Schüler zu entwickeln. Bei solchen Untersuchungen [14] habe es sich bestätigt, daß die Entwicklung der Fähigkeit, Schlußfolgerungen zu ziehen, vorrangig abhängig sei von der Entwicklung des Verstehens, Erkennens und Aneignens des Inhalts der spezifischen Schlußregel. Letzteres drücke sich aus im Übergang vom Operieren nur mit konkret-inhaltlichen Beziehungen (das Prinzip des Schließens wird noch nicht erkannt) zum Operieren mit formal-logischen Zusammenhängen in Verbindung mit konkret-inhaltlichen (Erkennen des Inhalts von Regeln für das logische Schließen). Das Herausbilden und Festigen formal-

---

[13] Als Schluß auf Für jedes bezeichnet in ILSE, D., und W. TIETZ: A.a.O., S. 17.

[14] Die folgenden Untersuchungsergebnisse sind entnommen aus VACHRUSEV, M.M.: Verstehen und Aneignen einiger Formen deduktiver Schlüsse bei Schülern des 2., 4. und 6. Schuljahres (russisch), Leningrad 1958 (Arbeitsübersetzung des Deutschen Pädagogischen Zentralinstituts, Reg.-Nr. 67:123).

logischer Zusammenhänge werde schließlich vor allem durch das Üben erreicht. Diese Entwicklung vollführe sich bei dem klassischen Muster deduktiver Schlüsse, den Syllogismen, etwa von der Klasse 3 an bis zur Klasse 7 in drei Stufen:

a) Stufe des konkret-elementaren Verstehens und Aneignens (Schlußform hebt sich nicht vom Lernstoffinhalt ab),
b) Stufe des spezifisch-verallgemeinerten Verstehens und Aneignens (Schlußform und Lernstoffinhalt werden getrennt),
c) Stufe des verallgemeinerten, mehr oder weniger vollen Verstehens und Aneignens (Schlußform und Lernstoffinhalt in dialektischer Einheit, gegenseitig kontrollierend, führende Rolle des letzteren).

Offenbar sind Verstehen und Aneignen von speziellen Schlußfolgerungen von vielerlei Faktoren abhängig, z.B. von der Art der Schlußregel, der Verständlichkeit des Lernstoffes, der Exaktheit der sprachlichen Formulierung der Schlußfolgerungen und von Altersbesonderheiten. Außerdem müssen weitere Untersuchungen zeigen, welche Modifikationen sich bei den deduktiven Schlüssen des Mathematikunterrichts ergeben. Höchstwahrscheinlich kann man jedoch Grundsätzliches bereits aus diesen Untersuchungsergebnissen für unsere Betrachtungen übernehmen.
Zusammenfassend sei an dieser Stelle formuliert: Die formale Logik lehrt uns, in welcher Weise in einem Kalkül ein Lehrsatz deduziert wird und daß Beweisschlußfolgerungen sich auf dort geltende Schlußregeln gründen. Wir Lehrer können nicht achtlos an dieser Tatsache vorbeigehen und müssen rechtzeitig und allmählich die Schüler mit demjenigen Handwerkszeug bekannt machen, mit dem sie aus (in einem Modell) wahren Sätzen wieder (im gleichen Modell) wahre Sätze gewinnen können.
Allerdings sind noch weitere pädagogisch-psychologische Untersuchungen, Unterrichtsversuche und die Veröffentlichung ihrer Ergebnisse dringend notwendig. Außerdem ist man auf einen Vorlauf an logischer und mengentheoretischer Durchdringung des Mathematikunterrichts durchgängig von der Unterstufe an angewiesen, was u.a. bedeutet, daß besonderer Wert auf das Begründen von Behauptungen und auf das (möglichst normgerechte) Beschreiben von Konstruktionen und Lösungswegen gelegt wird. Vor Überspitzungen muß auch hier gewarnt werden; denn schon allein der Zeitfaktor ließe beispiels-

weise nur zu, daß man bei wenigen repräsentativen Beweisaufgaben deren ausführliche Behandlung in eine solche logische Beweisanalyse einmünden läßt. Am Schluß des zweiten Teils dieser Ausführungen wird versuchsweise ein solches Beispiel aufgegriffen (siehe Beweisschema zweiter Art).

In Beiträgen dieser Zeitschrift wurde bereits seit längerer Zeit auf die Wichtigkeit der logischen Schulung im Mathematikunterricht hingewiesen [15]). Außerdem wurde ein für Beweisführungen wichtiger Aspekt bereits deutlich hervorgehoben: die Vorteile de: Wenn ..., so ... (Wenn ..., dann ...)-Form bei Lehrsätzen der Schulmathematik gegenüber der Merkform [16]). Sie bestehen darin, daß Schüler für Beweisanalysen schneller zwischen Prämisse und Konklusion unterscheiden können, also auch zielsicherer die Umkehrbarkeit von Lehrsätzen nachweisen und logisch äquivalente Ausdruckswe.sen für Lehrsätze bilden können. Letztere sollen möglichst neben der Wenn ..., dann ...-Form Verwendung finden, um Unklarheiten bei ihrem Gebrauch zu begegnen [17]). Weiterhin wurde wertvolle Untersuchungsergebnisse über das Erkennen logisch äquivalenter Ausdrucksweisen durch Schüler im Mathematikunterricht bekanntgemacht [18]), dabei die bereits zitierte Erkenntnis, daß mindestens ab Klasse 8 Schüler "bei Verständnis des speziellen Inhalts einer Aussage auch deren logische Struktur mehr oder weniger bewußt ... erfassen" [19]).

---

15) GLOCKE, T.: Dem logischen Denken ist auch im Mathematikunterricht mehr Beachtung zu schenken! In "Mathematik und Physik in der Schule" 9 (1962), Heft 12, S. 890.
LORENZ, G.: Stellungnahme zum Beitrag "Dem logischen Denken ist auch im Mathematikunterricht mehr Beachtung zu schenken! In "Mathematik und Physik in der Schule" 10 (1963), Heft 4, S. 330.

16) BOCK, H., und W. WALSCH: Möglichkeiten zur logischen Schulun im Mathematikunterricht. In Math.i.Sch. 2 (1964), Heft 6, S. 416, und Heft 8, S. 594.

17) WALSCH, W.: Einheit von sprachlicher und logischer Bildung i Mathematikunterricht. In Math.i.Sch. 5 (1967), Heft 7, S.490 insbesondere S. 492.

18) BOCK, H., und W. WALSCH: Logik und Mathematikunterricht. In "Wissenschaftliche Beiträge der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg" 1966/6 (E 2) und 1967/17 (E 4).

19) Ebenda, 1966/6 (E 2), S. 21.

Man wird also als Lehrkraft vor einer Beweisbehandlung dafür sorgen, daß die betreffende Behauptung auf die Wenn ..., dann ...-Form gebracht wird (falls sie nicht sowieso in dieser Form bereits vorliegt). Das ist nicht immer einfach; es wird den Schülern jedoch leichter fallen, wenn sie bereits von der Unterstufe her gewöhnt sind (quantifizierte) Implikationen (unter Weglassung des Quantifikators) zu benutzen, sich also die Wenn ..., dann ...-Form eingeprägt haben. Später sollte man ihr die Aus ..., folgt ...-Form an die Seite stellen, während den Schülern etwa in der Klasse 8 bewußtgemacht werden sollte, daß die Formulierung Für alle ...: Wenn ..., dann ... der anderen Form Aus ..., folgt ... gleichwertig ist.
Doch schon von der Klasse 6 ab sollte man propädeutisch im Sinne der ersteren Formulierung Es gilt stets: ... wählen, damit von da ab allmählich auf die bewußte Anwendung des Schlusses auf die Universalaussage hingearbeitet werden kann und dadurch gleichzeitig von den Schülern z.B. eine bisher bekannte Gleichung wie $a + b = b + a$ in der neuen Formulierung als Aussage erkannt wird.

Es sind in den letzten Jahren in dieser Zeitschrift mehrfach Möglichkeiten von Beweiskurzfassungen für den Unterricht veröffentlicht worden, wobei auch die Wenn ..., dann ...-Form für Lehrsätze Anwendung findet und ihre Vorteile zur Geltung kommen. Hier interessieren besonders Empfehlungen für die Behandlung im Unterricht bis zur Klasse 6 [20], um dabei zu zeigen, daß bei ersten zu formulierenden Beweiskurzfassungen (Schemata) in vorwissenschaftlicher Weise einige genannte Leitgedanken eingearbeitet werden können. Bekanntlich ist es günstig, als Extrakt nach gründlichen Beweisüberlegungen Beweisschemata anzufertigen; denn [21] es prägt sich in der Mathematik ein von konkreten Anga-

---

[20] Als Beispiele seien genannt:
HERZOG, H.: Empfehlungen für die Behandlung der Lehrplanabschnitte "Winkelbeziehungen" und "Symmetrie" in Klasse 6. In Math.i.Sch. 4 (1966), Heft 8, S. 583.
HERZOG, H.: Empfehlungen für die Behandlung des Lehrplanabschnittes "Planimetrie" in Klasse 6. In Math.i.Sch. 4 (1966), Heft 9, S. 648, und Heft 11, S. 805.

[21] KRUTEZKI, W.A.: Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Schülern. In Math.i.Sch. 6 (1968), Heft 1, S. 44, insbesondere S. 46.

ben abstrahiertes, gemeinsames Schema für gewisse einfache Beweise schneller und dauerhafter ein als eine bloße Aneinanderreihung einzelner spezieller Beweisüberlegungen ohne diese Hilfen. Bei einem solchen Beweisschema bewährt sich offenbar noch immer die Dreiteilung in Beweisvoraussetzungen, Behauptung und Beweisschlußfolgerungen. Es wird hier im Sinne bisher benutzter Begriffe vorgeschlagen, als Behauptung den gesamten Ausdruck (sowohl die Prämisse als auch die Konklusion) zu verstehen. Zur zielgerichteten Hinführung z.B. zur Abtrennungsregel und zum Schluß auf eine Implikation - beide Regeln sind wegen ihres häufigen Auftretens bei einschlägigen Beweisführungen besonders wichtig - sollte man von der Prämisse (dem Vorderglied der Behauptung) die Beweisvoraussetzungen unterscheiden [22]. Zu diesen gehören sämtliche sonstigen, den Beweisschlußfolgerungen unmittelbar zugrunde gelegten (bereits als wahr erkannten) Lehrsätze, zu benutzende Axiome und (anwendungsbereite) Definitionen. In höheren Klassenstufen sollten auch die zu verwendenden Schlußregeln inhaltlich genannt werden. Als Ergänzung zu den Beweisvoraussetzungen und der Behauptung fertigt man zum besseren Überblick bei geometrischen Beweisen bekanntlich sehr häufig eine Überlegungsskizze an. Zur Fixierung der Beweisschlußfolgerungen schließlich bietet es sich an, sie zeilenweise in Kurzform mit nebenstehenden (in Klammern gesetzten) Begründungen zu schreiben und als Zeichen für ein schlußfolgerndes Also unter die bisherigen Zeilen einen Querstrich zu setzen (wie bei Syllogismen). An die günstige Möglichkeit, im gegebenen Falle auch den Schluß auf eine Universalaussage bereits hierbei andeuten zu können, sei dabei erinnert.
In Klasse 6 können z.Z. natürlich nicht selbständig durchgeführte präzise Beweisüberlegungen von den Schülern verlangt werden, doch sollten die Schüler von dieser Klassenstufe ab vorwiegend unter stärkerer Anleitung durch die Lehrkraft gewisse systematisch aufgebaute Beweisüberlegungen verfolgen können. Nach ersten ausschließlich durch die Lehrkraft notierten Beweisschemata als

---

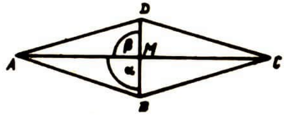
[22] Darauf, daß hierbei die Prämisse der Implikation nicht immer wie eine feststehende, gesicherte Tatsache formuliert werden sollte, wurde verwiesen in WALSCH, W.: Können vierzehnjährige Schüler die vollständige Induktion verstehen? A.a.O., S. 432.

Kurzfassungen bewährt sich die Methode des Ausfüllens von Lückentexten durch die Schüler, da auf diese Weise konsequent wichtige Bildungsabsichten im angedeuteten Sinne weiter verfolgt werden und es außerdem möglich ist, die Schüler gewissermaßen unter der leitenden Hand der Lehrkraft von Mal zu Mal selbsttätiger werden zu lassen (je nach Zunahme der Lückenanzahl).

Im folgenden wird ein Vorschlag eines solchen Beweisschemas angegeben. Es ist also eine zusammenfassende Überschau über vorher durchgeführte Beweisüberlegungen. Die dabei im vorliegenden Falle für einen lückenlosen Beweisgang für erforderlich gehaltenen Voraussetzungen wurden bereits vor dem zusammenfassenden Notieren der einzelnen Beweisschritte niedergeschrieben und an den Anfang des Schemas gestellt. Das kann man schon aus Zeitgründen nicht immer tun, erhöht jedoch bei ersten etwas umfangreicheren Beweisüberlegungen die Übersichtlichkeit für die Schüler und ist zugleich eine Vorunterweisung für das schriftliche Formulieren logischer Beweisanalysen, bei denen zum besseren Verständnis erst recht eine ähnlich übersichtliche Anordnung angebracht erscheint. Bei kurzen Beweisschemata dürfte es genügen, die in den Beweisschlußfolgerungen gefundenen Voraussetzungen in Kurzform als Begründungen hinter die jeweilig notierten Beweisschritte in Klammern zu setzen.

Beweisschema (erster Art)
(Es wird nun als solches formuliert, nachdem soeben in systematischen Beweisüberlegungen auf einem zweiten Weg [23]) nachgewiesen wurde, daß in jedem Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen und sich dabei die dort benutzten Beweismittel als Voraussetzungen ergaben.)
Skizze eines beliebigen Rhombus ABCD (kein Sonderfall; Fig. 1)

[23]) Es ist vorher im Unterricht der abbildungsgeometrische Beweis behandelt worden. Nun wird als Hausaufgabe ein Ausfüllen eines Lückentextes auf einem Arbeitsblatt verlangt, was bereits in anderen Fällen geübt worden ist. Im vorliegenden Beispiel sind die Lückentexte ausgefüllt. Vgl. HERZOG, H.: Empfehlungen für die Behandlung des Lehrplanabschnittes "Planimetrie" in Klasse 6. A.a.O., Heft 11, S. 815.



Beweisvoraussetzungen (BV), die sich aus den Beweisüberlegungen ergeben

BV 1: Ein Rhombus ist ein spezielles Parallelogramm, also halbieren die Diagonalen einander.

BV 2: Kongruenz von Dreiecken nach dem Kriterium sss.

BV 3: Wenn Dreiecke kongruent sind, dann haben Größen zugeordneter Stücke dieselben Maßzahlen (bei gleichen Maßeinheiten).

BV 4: Die Summe der Maßzahlen von Größen zweier Nebenwinkel beträgt 180 (bei Gradmaß).

BV 5: Ersetzungsregel [24])

Behauptung (umformulieren)

Es gilt stets:
Wenn Viereck ABCD ein Rhombus ist,
dann stehen die Diagonalen des Vierecks ABCD senkrecht aufeinander. – Wir nehmen also an, Viereck ABCD sei ein beliebiger Rhombus, d.h., ABCD sei ein Viereck mit vier kongruenten Seiten, Quadrat ausgenommen (Fig. 1).
Dann müßte sich durch Schlußfolgerungen ergeben, daß
$\overline{AC} \perp \overline{BD}$ gilt.

Beweisschlußfolgerungen

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (nach dem Vorderglied)
$\overline{BM} \cong \overline{DM}$ (nach BV 1)
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (Reflexivität)

$\Delta ABM \cong \Delta ADM$ (nach BV 2)
$\alpha = \beta$ (nach BV 3)
$\alpha + \beta = 180$ (nach BV 4)

$\alpha = 90$ (wegen BV 5)

Demnach gilt $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ (Hinterglied).

[24]) Über Termersetzungen vgl. z.B. DIETZ, A.a.O., S.117 u. 118!

Wir haben vom Vorderglied und von BV 1 mit Hilfe anderer Beweisvoraussetzungen auf das Hinterglied der Behauptung geschlossen. Da BV 1 stets wahr ist, ist damit auch die Wenn ..., dann ...-Formulierung wahr. Da wir den Beweis für einen beliebigen Rhombus geführt haben, gilt die Behauptung für alle Rhomben, w.z.b.w. Damit ist die Behauptung ein Lehrsatz.

Algorithmischer und inhaltlicher Aspekt bei der Behandlung von Beweisaufgaben

Mit der Akzentsetzung auf die Fassung eines Beweisschemas kann sich die Behandlung von Beweisaufgaben im Mathematikunterricht natürlich nicht erschöpfen, wenngleich damit eine nicht unbedeutende methodische Fragestellung berührt worden ist, diejenige nämlich, in welcher Weise den Schülern die vorausgegangenen vielfältigen Beweisüberlegungen überschaubarer gemacht werden können [25]. Jedoch dürfte für eine möglichst effektive Behandlung von Beweisaufgaben im Unterricht das Einflußnehmen auf die Erarbeitung und den Ablauf zielgerichteter Beweisüberlegungen der Schüler ebenfalls sehr wichtig sein.

Letztgenannten Problemen soll deshalb noch einige Aufmerksamkeit geschenkt werden. Sieht man sich die hauptsächlichen Gründe für das Versagen von Schülern bei der Lösung solcher Aufgaben näher an [26], so lassen sich folgende wesentlichen stichwortartig herauskristallisieren (abgesehen von fehlenden Rechenfertigkeiten):

(a) Herangehen, ohne das Problem voll begriffen zu haben;

(b) sehr nachlässiges Arbeiten, entsprechende äußere Form von Aufzeichnungen;

(c) im Problem enthaltene Bedingungen und Begriffe nicht vollständig benutzt, Mangel zuverlässiger Richtschnur bei der Suche nach der Beweisidee, sich nicht bzw. nur unzureichend klargemacht, welche Beweismittel zur Verfügung stehen;

---

25) Weshalb lediglich die Darbietung eines solchen Beweisschemas nicht als Ersatz für die Erarbeitung von Beweisüberlegungen gelten kann, wird ausführlich beantwortet in DIETZ, A.: A.a.O S. 125.

26) Für geometrische Beweisaufgaben findet man eine solche gründliche Fehleranalyse in DANILOWA, E.F.: Wege zur Lösung geometrischer Aufgaben. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1964. Hier ist davon ein Auszug angegeben.

(d) Formulieren eines Beweisschemas, ohne den Beweisplan bis zum Ende durchdacht zu haben, unvollständige Beweisführungen.

Was kann man tun, um den Schülern bei der systematischen Lösung von Beweisaufgaben mehr Unterstützung zu geben? Nach den in Analogie zur Aufstellung eines Beweisschemas bereits berücksichtigten Leitlinien wird hier versucht, durch eine Gliederung der Behandlung solcher Aufgaben den Schülern eine gewisse Unterstützung für die zielgerichtete Bewältigung der Reihenfolge umfangreicher inhaltlicher Fragen zu geben. Es wird bei diesem Gesichtspunkt davon ausgegangen, daß auch das Beweisen zu den allgemeinen Methoden des Lernens und der geistigen Arbeit gehört, also eine Handlung darstellt, die sich in einzelne Handlungsschritte unterteilen [27]) läßt. Im folgenden wird eine solche Schrittfolge als Hilfsmittel für den Schüler vorgeschlagen.

Der neue Lerngegenstand muß dem Kind zuerst einmal zum lebendigen Problem werden [28]). Damit soll auch hierfür der Weg charakterisiert sein, auf dem gegen das diesbezügliche Versagen der Schüler - siehe (a) in der oben dargelegten Aufstellung - vorgegangen werden kann. Recht häufig sollten die Schüler möglichst selbsttätig zur für sie neuen Behauptung vordringen, sie "entdecken". Demnach vermeide man möglichst bei der Herausbildung geistiger Fähigkeiten im hier betrachteten Sinne, häufiger solche Aufgaben zu wählen, die mit Beweise, daß ... beginnen. Diese Aufgabenart, früher häufig angewandt, zeigte, daß es sich nur darum handelte, Bekanntes, Katalogisiertes wiederzufinden, daß man den Schüler nie in die wahre Situation versetzen wollte, in der sich die Probleme stellten, d.h. ohne daß man wußte, welches die Lösung ist und ob es überhaupt eine Lösung gibt [29]).

Wesentliche Hinweise zur heuristischen Schulung bei der Erkenntnisgewinnung wurden in dieser Beitragsreihe bereits gegeben [30]). Diese Etappe in der Behandlung im Unterricht sollte mit der Formulierung einer Vermutung abschließen.

---

[27]) KLIMPEL, P.: Lernen die Schüler das selbständige Lernen? In "Deutsche Lehrerzeitung" 15 (1968), Nr. 9.

[28]) Übersetzt aus AEBLI, H.: Didactique psychologique, Neuchâtel 1951, S. 81.

[29]) REVUZ, A.: Moderne Mathematik im Schulunterricht. Herder Verlag, Freiburg 1965, S. 49.

[30]) KUSCHMANN, D.: A.a.O.

Ob nicht zu einem großen Teil an der Tatsache, daß Schüler gerade bei der Lösung von Beweisaufgaben nachlässig arbeiten, die fehlende Einsicht in die Beweisnotwendigkeit schuld ist? Und wie geduldig und bedacht muß man erfahrungsgemäß gerade bei dem Bemühen sein, diese (nicht nur formale) Einsicht bei den Schülern zu wecken, und wie leicht kann durch Unüberlegtes mühsam Errichtetes wieder zerstört werden! Gerade diese Einsicht ist aber ein nicht zu unterschätzender Hebel für das Aneignen der angestrebten geistigen Fähigkeiten. Auf keinen Fall darf man also z.B. für allererste Beweise solche Behauptungen wählen, die anschaulich sehr plausibel sind [31]). Man sollte, je nach Aufgabenart und Klassenstufe, folgende Motivationen für das Beweisen in unserem Mathematikunterricht wirksam werden lassen:

(1) Ungenauigkeit von Messungen, Unzuverlässigkeit von Beobachtungen [32]) (Forderung nach größerer Sicherheit)

(2) Endliche Anzahl praktischer Untersuchungen (Verlangen nach Allgemeingültigkeit)

(3) "Nicht wahr, auch das weißt du, daß sie (die Mathematiker) sich der sinnlich sichtbaren Dinge bedienen und ihre Demonstrationen auf jene beziehen, während doch nicht auf diese als auf solche (als sinnlich sichtbare) ihre Gedanken zielen, sondern nur auf das, wovon jene sinnlich sichtbaren Dinge nur Schattenbilder sind" [33])?

(Forderung nach Gültigkeit der Behauptung für die mathematischen Objekte selbst)

---

[31]) Zum Beispiel eignen sich hierzu Beweise über gemeinsame Schnittpunkte von Dreieckstransversalen.
HOMAGK, F.: Zur Planimetrie in den Lehrbüchern der Klassen 7 und 8. In Math.i.Sch. 4 (1966), Heft 1, S. 19 bis 23.

[32]) Ein gutes Beispiel für mögliche Sinnestäuschung durch eine Überlegungsskizze und eine daraus resultierende lückenhafte Beweisführung ist z.B. enthalten in
LIETZMANN, W.: Wo steckt der Fehler? B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963, S. 88 und 89.

[33]) PLATO: Staat. Nr. 510 (nach der Ausgabe von Henricus STEPHANUS), 1598. (Als Literaturhinweis in MESCHKOWSKI, H.: Einführung in die moderne Mathematik. Bibliographisches Institut Mannheim 1964.)

Um den Schülern bei der häufig schwierigen Arbeit des Suchens nach der Beweisidee behilflich zu sein, wurden in dem vorangehenden Beitrag dieser Reihe [34]) Orientierungshilfen (für die Erkenntnissicherung) und Vorrangregeln bereitgestellt. Hervorgehoben sei hier lediglich die wichtige Aufgabe der Lehrkraft, gut durchdachte Impulse zur zielstrebigen Auswahl von Beweismitteln durch die Schüler zu geben. So darf z.B. das weiterhelfende Einzeichnen von Hilfslinien in die Überlegungsskizze oder Zeichnung auf keinen Fall unmotiviert geschehen. (Nicht umsonst wurden schon seit langem "Mausefallenbeweise" angeprangert.) Dann kann die Anzahl der Fehlleistungen - in der Art der in (c) angedeuteten - vermindert werden.

Nach dem entscheidenden Einfall der Beweisidee sollten mit den Schülern planmäßig die Beweisüberlegungen bis zum Schluß verfolgt werden, wobei zugleich die Beweisidee gründlich ausgearbeitet wird. Daraus erwächst dann die Herstellung des Beweisschemas als Kontrolle einer lückenlosen, also logisch einwandfreien Beweisführung.

Offensichtlich wurden bei der vorgeschlagenen Durchgliederung der Behandlung einer Beweisaufgabe die vier Phasen des produktiven Denkens der Schüler [35]) als Grundlage benutzt. Außerdem lassen sich leicht die beiden wichtigen Teile des Behandlungsvorschlags unterscheiden, der induktive der Erkenntnisgewinnung, dem sich die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit anschließen muß, und der deduktive der Erkenntnissicherung.

Weiterhin sei zusammenfassend nochmals betont, daß innerhalb der vorgeschlagenen Schrittfolge und bei unserem Bemühen um Verständnis der Schüler für Beweisführungen im Mathematikunterricht laufend das Prinzip der Aktivierung der Schüler beachtet werden muß; denn "der Schüler soll nicht die Beweise, sondern das Beweisen lernen, ..." [36]) Dadurch werden wir zugleich besser dagegen angehen können, daß ein Beweis vom Schüler auswendig gelernt wird,

---

34) KUSCHMANN, D.: A.a.O.

35) WEINACHT, J.H.: Prinzipien zur Lösung mathematischer Probleme. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958.

36) FENKNER, Z.: Lehrbuch der Geometrie, 1. Teil. Berlin 1903.

ohne daß er ihn womöglich versteht. Damit Schüler jedoch im Laufe der Zeit die Fähigkeit erlangen, selbständig beweisen zu können, müssen sie erkannt haben, wozu überhaupt allgemein und im speziellen Fall ein Beweis geführt wird [37].

Welche Orientierungshilfen insgesamt bei der Behandlung einer Beweisaufgabe zu beachten sind, soll nun in Kurzfassung formuliert werden [38] als ein methodisches Leitprinzip:

Es ist in systematischer Unterrichtsarbeit bei der Behandlung von geeigneten Beweisaufgaben anzustreben, daß möglichst alle Schüler unter Anleitung

- den für sie neuen mathematischen Zusammenhang entdecken,
- eine hypothetische Aussage (Vermutung) formulieren und deren Beweisnotwendigkeit erkennen,
- eine Beweisidee entwickeln und dabei zielgerichtet Beweismittel auswählen,
- entsprechende Beweisüberlegungen planmäßig verfolgen
- und darauf aufbauend in einer abschließenden Kurzfassung, einem Beweisschema, jeden Beweisschritt begründen können.

Es sollen nun die zusammengetragenen Gesichtspunkte an einem Beispiel deutlich gemacht werden, wozu der Lehrsatz des PYTHAGORAS ausgewählt wurde. Nach dem präzisierten Lehrplan ist dieser Lehrsatz als Anwendung der Ähnlichkeitslehre zu gewinnen [39]. Weiterhin wird darin betont, daß für diesen bezüglich des Mathematikunterrichts nicht unwesentlichen Lehrsatz noch einige andere Beweise, die nicht auf Überlegungen aus der Ähnlichkeit beruhen, durchzuführen sind.

Die Phase der Erkenntnisgewinnung muß sich deshalb selbstverständlich auf den zuerst zu führenden Beweis (Anwendung der Ähnlichkeitslehre) beziehen. Hier werden die aus Orientierungshilfen [40] sich möglicherweise ergebenden Gesichtspunkte heuristischen Vor-

---

[37] DIETZ, A.: A.a.O., S. 45.

[38] DIETZ, A.: A.a.O., S. 40.

[39] Einige Hinweise zu einer derartigen Möglichkeit sind enthalten in
KAHL, G.: Die Herleitung der Satzgruppe des PYTHAGORAS im Mathematikunterricht der Klasse 8 nach dem präzisierten Lehrplan. In Math.i.Sch. III (1965), Heft 10, S. 775.

[40] KUSCHMANN, D.: A.a.O.

gehens nur kurz genannt. Über die Unterstützung der Einsicht der Schüler in die Beweisnotwendigkeit braucht im einzelnen nichts mehr ausgeführt zu werden. Innerhalb der Phase der Erkenntnissicherung für den angegebenen Beweis müßte für eine z.Z. durchzuführende unterrichtliche Behandlung als Zusammenfassung und Kontrolle der Beweisüberlegungen ein Beweisschema etwa in der Art des im ersten Teil dieser Ausführungen angegebenen Beispiels (Beweisschema erster Art) angefertigt werden. Wie bereits angedeutet, soll hier ausnahmsweise ein Beweisschema als logische Beweisanalyse (Beweisschema zweiter Art) formuliert werden, d.h., daß die den Schlußfolgerungen innewohnenden Schlußregeln zusätzlich angegeben werden. Damit wird eine Möglichkeit gezeigt, wohin das augenblickliche vorwissenschaftliche Umgehen mit logischen Schlußregeln führen sollte und wie wir z.Z. zumindest Lehrerstudenten etwas umfassender mit dieser Problematik bekannt machen können.

Möglichkeit für die Behandlung einer Beweisaufgabe

Erkenntnisgewinnung Motivationsgrundlage:	Was konstruktionsmäßig möglich war, müßte rechnerisch erfaßbar sein.
Gesichtspunkte beim heuristischen Vorgehen:	Es handelt sich um rechtwinklige Dreiecke; gesucht ist die Maßzahl einer Seitenlänge, die Maßzahlen der anderen beiden Seitenlängen sind gegeben; konstruktive Lösung ist stets eindeutig, demnach ist gesetzmäßige eindeutige Zuordnung zwischen den Maßzahlen möglich; diese wird gesucht.
Induktionsgrundlage:	Rechtwinklige Dreiecke werden gezeichnet; messen und Zahlen vergleichen lassen (Impulssteuerung durch die Lehrkraft, Tabellen), Gesetzmäßigkeit vermuten lassen.
Erkenntnis:	Es gilt in allen gemessenen Dreiecken angenähert: Die Summe der Quadrate der Maßzahlen der Kathetenlängen ist gleich dem Quadrat der Maßzahl der Hypotenusenlänge.
Vermutung (Behauptung):	Diese Feststellung gilt möglicherweise für alle rechtwinkligen Dreiecke, deshalb wird behauptet: Es gilt für jedes rechtwinklige Dreieck: ...

Sich bewußt sein über die Notwendigkeit einer Beweisführung.

Erkenntnissicherung
Umformulierte Behauptung:

Für alle a,b,c gilt:
Wenn a,b,c Seitenmaßzahlen eines Dreiecks ABC sind und die Größe von $\sphericalangle$ (a,b) 90° beträgt, (Vorderglied)
dann ist $a^2 + b^2 = c^2$. (Hinterglied)

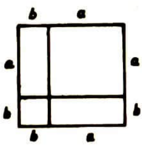
Es ist also auf eine Implikation zu schließen.

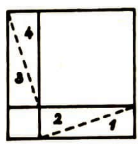
Versuche der Entwicklung einer Beweisidee (heuristisches Vorgehen!):

Nach eventuell fehlgeschlagenen Versuchen leistet eine Orientierungshilfe das Gewünschte (Strukturvergleich); es wird
$a^2+b^2 = c^2$ verglichen mit
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$;
geometrische Veranschaulichung zu letzterem, also ein mögliches Beweismittel gefunden.

Überlegungsskizze(Fig. 2)

Es gilt für beliebige positive a,b :
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.





Orientierungshilfe (mit der Beweisaufgabe in Beziehung bringen) verhilft zur

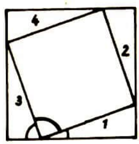
Beweisidee:

Wenn in der Skizze a und b als Kathetenmaßzahlen gedeutet werden können, wäre nur noch zu zeigen (für beliebiges positives c)
$c^2 = (a + b)^2 - 2ab$,
und wegen der Drittengleichheit der Gleichheitsrelation als Beweismittel würde sich $a^2 + b^2 = c^2$ ergeben.

Beweisüberlegungen (dabei Beweismittel herausschreiben):

(I)
Hilfslinien werden motiviert [Herstellen von c^2 (siehe Beweisidee und Fig. 3)]
Mit Manipermtafel und Dreiecksapplikationen arbeiten!
(a) Zu zeigen: Summe der Maßzahlen der Flächeninhalte beider Quadrate ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts

eines Quadrats mit der Seitenmaßzahl c.
(b) Versuch, dies durch Bewegung der Modelle zu finden (Beweismittel: Ergänzungsgleichheit).
(II)
(c) Zu zeigen: Neues Viereck ist ein Quadrat (Fig. 4). Auf einen rechten Winkel schließen!



Das gelingt (Beweismittel: Quadratdefinition).

$$
\begin{array}{lrl}
\text{(d)} & a^2+b^2 = & (a+b)^2-2ab \quad [\text{wegen (I)}] \\
& c^2 = & (a+b)^2-2ab \quad [\text{wegen (II)}] \\
\hline
& a^2+b^2 = & c^2 \qquad [\text{Drittengleichheit}]
\end{array}
$$

Beweisschema zweiter Art (für den derzeitigen Unterricht Beweisschema erster Art anwenden):

Beweisvoraussetzungen (siehe Beweisüberlegungen)

BV 1: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$,
BV 2: $c^2 = (a + b)^2 - 2ab$,
BV 3: Quadratdefinition und Ergänzungsgleichheit,
BV 4: Drittengleichheit.

Schlußregeln (SR) [41]

SR 1: Kettenschluß,
SR 2: Abtrennungsregel,
SR 3: Schluß auf eine Implikation.

Behauptung (s.o.)
Vorderglied sei A,
Hinterglied sei B.
Beweisschlußfolgerungen

---

41) Bei einem eventuell in Arbeitsgemeinschaften mit Schülern durchzuarbeitenden Beweisschema zweiter Art sollte man die entsprechenden Schlußregeln inhaltlich angeben. Für SR 2 und 3 vgl. ILSE, D., und W. TIETZ: A.a.O., S. 16! Man verwende möglichst eine Kurzform, etwa für SR 1:

$$
\begin{array}{l}
\text{Gilt: Wenn } H_1\text{, so } H_2 \\
\text{und gilt: Wenn } H_2\text{, so } H_3 \\
\hline
\text{so gilt: Wenn } H_1\text{, so } H_3
\end{array}
$$

Gilt: Wenn (BV 1 und A), dann (BV 1 und BV 2)	(wegen BV 3)
und gilt: BV 1 und A,	(gültige Voraussetzung)
so gilt: BV 1 und BV 2.	(wegen SR 2)
Gilt: Wenn (BV 1 und A), dann (BV 1 und BV 2)	(wegen BV 3)
und gilt: Wenn (BV 1 und BV 2), dann B,	(wegen BV 4)
so gilt: Wenn (BV 1 und A), dann B.	(wegen SR 1)
Gilt: Wenn (BV 1 und A), dann B	(siehe vorige Zeile)
und gilt: BV 1 ist allgemeingültig,	(ist es auch)
so gilt: Wenn A, dann B.	(wegen SR 3)

Die Schlußfolgerungen gelten für beliebige a,b,c; also gilt, w.z.b.w.

Unbestreitbar kann man schon aus Zeitgründen im Laufe eines Schuljahres nur verhältnismäßig wenige, ausgewählte Beweisaufgaben in ausführlicher Weise lösen lassen. In anderen Fällen wird man diese oder jene Etappe der Lösung durch verschiedene Varianten abkürzen. Außerdem gibt es Fälle, bei denen man im Schulunterricht bekanntlich gezwungen ist, an Stelle eines Beweises eine Plausibilitätsbetrachtung durchzuführen oder die Hauptgedanken eines Beweises in einfacher Form zu geben (was ein besonderes Geschick erfordert); wichtig ist es allerdings, die Schüler merken zu lassen, daß an dieser oder jener Stelle aus anzugebenden Gründen auf eine Beweisführung verzichtet werden muß.

Für die vollständige Lösung von Beweisaufgaben scheint jedoch sehr wesentlich zu sein, daß eine einheitliche methodische Konzeption der Bildungs- und Erziehungsarbeit in diesem Schwerpunkt unseres Mathematikunterrichts stark veranhelfen kann und daß häufiges Üben zur Konsolidierung der entsprechenden geistigen Operationen beiträgt und zugleich den Blick der Schüler für erfolgreiches selbständiges Arbeiten an analogen Beispielen schärft

(Kaiser, G.: Methodische Leitprinzipien für den Mathematikunterricht - Systematische unterrichtliche Behandlung von Beweisaufgaben. In: Mathematik in der Schule 6 (1968), Heft 10, S. 738 ff.

Einige Probleme der Festigung und ihre Bedeutung für die Effektivität des Mathematikunterrichts

Günter Pietzsch

1. Einleitung

Es ist allgemein bekannt und anerkannt, daß der Erfolg gerade des Mathematikunterrichts vom Festigen des Bildungsgutes abhängt. Demgegenüber wird von vielen die Gefahr gesehen, daß eine präzisere Begriffsbildung, gründlichere Herleitung von Sätzen und dergleichen, kurz, daß die Erhöhung des mathematischen Niveaus unseres Unterrichts ein zeitliches Hintansetzen des Festigens, dabei insbesondere eines selbständigen Arbeitens der Schüler am für sie lösbaren Problem, bedingen kann.

Für Tiefe und Dauerhaftigkeit der Festigung ist der Zeitfaktor nur die eine Seite, vielleicht gar nicht einmal die wichtigste; denn sie sind nicht nur abhängig von der aufgewandten Zeit, ja, ein Zuviel an Zeit kann sich auch nachteilig auswirken, wenn dadurch nämlich Langweiligkeit verursacht wird. Diese Langeweile wird meist bedingt durch eine Einseitigkeit in der Problemstellung. Es kommt also auf ein gesundes Maß an Abwechslung in der Problemstellung an, wenn man den Prozeß der Festigung möglichst effektiv gestalten will.

Diese notwendige Vielseitigkeit kommt methodisch in den unterschiedlichen Aspekten zum Ausdruck, unter denen die Festigung der verschiedenen Bildungsinhalte stehen kann. Es seien genannt das Üben, Vertiefen, Systematisieren und Anwenden. Es soll hier nicht versucht werden, eine genauere Abgrenzung oder gar Definition dieser vier Aspekte zu geben; eine gewisse Charakterisierung und damit Unterscheidung wird sich aus den nachfolgend besprochenen Beispielen ergeben. So viel sei aber gesagt: Genau so schädlich wie eine Vernachlässigung der gesamten Unterrichtskomponente Festigung ist, genau so schädlich ist es, die genannten vier Aspekte nicht als Einheit zu sehen, z.B. das Üben auf Kosten der drei anderen überzubetonen. Jedermann weiß, daß eine gewisse Übung, eine gewisse Fertigkeit Voraussetzung zum erfolgreichen Anwenden ist, und wohl auch, daß umgekehrt jedes Anwenden das zur Anwendung Kommende übt. Nicht so verbreitet ist aber die Einsicht, daß ein Übungsbetrieb, der einseitig nur auf gewisse Fertigkeiten ausgerichtet ist und nicht ergänzt wird durch ein tieferes Eindringen in den Übungsgegenstand, durch dessen Betrachten von verschiedenen Seiten und durch das Entdecken und Herausstellen von Zusammenhängen nicht zu einem hinreichend anwendungsbereiten Wissen führt.

2. Beispiele und allgemeine Prinzipien

An den folgenden Beispielen, die mit unterschiedlicher Ausführlichkeit dargestellt sind, sei das Gesagte verdeutlicht. Die jeweils angegebenen allgemeinen Gesichtspunkte für eine vielseitige Problemstellung, die auch den Lehrplananforderungen entsprechen, sollen den Leser anregen, in anderen Stoffgebieten selbständig entsprechende Aufgaben zu bilden und im Unterricht zu behandeln - freilich in Abhängigkeit davon, ob es die spezielle Klassensituation ermöglicht oder erfordert.

1. Division gebrochener Zahlen

a) Es ist unbestritten, daß das Dividieren gebrochener Zahlen - dargestellt als gemeine Brüche - zur Fertigkeit entwickelt werden muß. Dafür ist zunächst erforderlich, daß eine ganze Reihe von Aufgaben der Form

$$a:b = x$$

gelöst wird. Dabei müssen die gegebenen gebrochenen Zahlen a und b insgesamt ein hinreichend

typisches, vielseitiges, repräsentatives Ausgangsmaterial

darstellen. Dabei muß diese Vielseitigkeit einerseits auf spätere Anwendungen, vor allem aber auf das jeweilige Übungsobjekt gerichtet sein. In unserem Fall bedeutet das: Berücksichtigung der verschiedenen Arten gebrochener Zahlen und ihrer Darstellungsweisen und der drei Teilschritte Reziprokes bilden - Kürzen, soweit möglich - Ausmultiplizieren.

Unser gegenwärtiges Lehrbuch trägt dieser Forderung Rechnung, indem es über 300 formale Aufgaben der genannten Form bereitstellt [1]), in denen Stammbrüche, andere echte Brüche, unechte Brüche, gemischte Zahlen und natürliche Zahlen in Dividend, Divisor oder beidem mit und ohne Kürzungsmöglichkeiten auftreten.

---

[1]) Mathematik, Lehrbuch für die Oberschule, Klasse 6. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966, S. 155 ff.

[Auf einen weiteren Gesichtspunkt für die Vielseitigkeit wird in 1 e) eingegangen.]

b) Es bedarf keiner näheren Begründung, daß das Üben des Dividierens an diesem einzigen Aufgabentyp sehr schnell zu einem Drill wird, daß es vor allem aber nicht zu einem tieferen Eindringen in die Operation Division gebrochener Zahlen führt, weil es zugrunde liegende mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge ignoriert.

Das ändert sich sofort, wenn von den drei auftretenden Zahlen Dividend, Divisor und Quotient nicht stets nach dem Quotienten gefragt wird, allgemeiner, wenn ein vielseitiger, möglichst allseitiger

Wechsel zwischen den gegebenen Objekten und dem gesuchten

erfolgt. Darin enthalten ist die speziellere, in vielen Fällen wichtigere Forderung, auch beim Festigen stets den

Zusammenhang von Operation und Umkehroperation

bewußt zu machen. Für unseren Fall bedeutet das, auch Aufgaben der Form

$$x:a = b \quad \text{und} \quad a:x = b$$

z.B. $x:\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$ und $\frac{5}{7}:x = \frac{3}{8}$

einzubeziehen. Dabei ist es der Situation der Klasse anzupassen, ob solche Aufgaben

als Gleichungen (wie hier),

als Text, etwa in der Formulierung Welche Zahl muß durch $\frac{2}{3}$ dividiert werden, um den Quotienten $\frac{1}{4}$ zu ergeben, oder

mit Hilfe der bewährten Tabellen

an die Schüler herangebracht werden sollen.

Wichtig ist, daß diese Aufgaben – sollen sie die Division gebrochener Zahlen vertiefen – auch als Divisionsaufgaben gestellt werden, obwohl sie gar nicht mit Hilfe der bekannten Divisionsregel gelöst werden.

Stellt man Schülern erstmals solche Aufgaben wie $x:\frac{2}{3} = \frac{1}{4}$, so sind sie meist hilflos und fangen an zu probieren. Das trifft erstaunlicherweise für viele Schüler auch dann zu, wenn sie im vorangegangenen Unterricht angehalten worden sind, z.B. bei der Aufgabe $\frac{1}{6}:\frac{2}{3}$ die Probe zu machen. Obwohl es sich in beiden Fällen um das gleiche Produkt $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$ handelt, so ist es von der Problemstellung her doch ein Unterschied, ob der gefundene Quotient multipliziert und dieses Produkt mit dem gegebenen Dividenden verglichen wird oder ob der gegebene Quotient multipliziert wird und dieses Produkt der gesuchte Dividend ist.

Gegen das Einbeziehen derartiger Aufgaben könnte eingewandt werden, daß die Schüler zum Lösen eigentlich Kenntnisse über das Umformen von Gleichungen benötigen. Dem muß man aber entgegnen, daß das bei derartig einfachen Aufgaben nicht nötig ist (ein Blick in einen guten Unterstufenunterricht belegt das), daß ein derartiges Anwenden von Umformungsregeln für das eigentliche Anliegen geradezu schädlich ist; denn der Schüler soll sich ja gerade der Zusammenhänge bewußt werden, also der Tatsache:

Mit $a:b = c$ gilt auch $a = b \cdot c$ und $a:c = b$

Zur Rechtfertigung hierfür und auch für die folgenden Bemerkungen zur Division kann man wohl die beiden folgenden Lehrplanstellen heranziehen:

> "In der Bruchrechnung kommt es auf sicheres und verständiges Operieren mit Brüchen und auf das Erfassen des Wesentlichen der entsprechenden Rechenverfahren an, nicht auf das Einprägen bestimmter Schemata, Rechenregeln und Merksätze [2]. Zugleich (ist) ... der Zusammenhang der vier Grundrechenarten bei Brüchen ... zu erörtern" [3].

Man kann wohl diese Stellen dahingehend interpretieren, daß der Zusammenhang von Multiplikation und Division, allgemeiner von Operation und Umkehroperation, nicht nur Mittel zum Definieren des Quotienten, zum Gewinnen der Divisionsregel und zum Rechtfertigen der Probe ist, sondern daß er selbst Unterrichtsgegenstand ist. Dann aber muß er auch im Prozeß der Festigung berücksichtigt werden.

c) Es gehört zur Arbeitsweise des Mathematikers und sollte – weil es auch für viele andere Tätigkeiten von Bedeutung ist – dem Schüler ebenfalls anerzogen werden, bei einem Problem die

Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

---

2) Lehrplan für den Mathematikunterricht der Klassen 5 bis 10 der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule (präzisierter Lehrplan). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966, S. 20, Hervorhebungen vom Autor.

3) Ebenda, S. 24, Hervorhebungen vom Autor.

zu stellen. Oft wird diese Frage für eine ganze Klasse gleichartiger Probleme beantwortet, so z.B. für die Lösung von Aufgaben der Form $a:b = x$, bei denen diese Frage zusammenfällt mit der nach eindeutiger Ausführbarkeit der Division. Ganz entsprechend kann man es bei den beiden anderen Typen tun. Aufgeschlossen für eine solche Frage und bereit, nach einer Antwort zu suchen, ist der Schüler aber nur dann, wenn ihm durch das

Einbeziehen nicht lösbarer oder
mehrdeutig lösbarer Aufgaben

die Wichtigkeit dieser Frage und die Nützlichkeit ihrer Beantwortung nahegebracht werden.
Nun ist die Division gebrochener Zahlen, ein von Null verschiedener Divisor vorausgesetzt, stets eindeutig ausführbar. Will man den genannten Gesichtspunkt dennoch berücksichtigen, so kann man von den drei Zahlen in $a:b = c$ nur eine, etwa c, geben. Auch hier ist es gleichgültig, ob man z.B. sagt

Fülle in $\_:\_ = \frac{3}{4}$ die beiden Lücken richtig aus!
Löse die Gleichung $x:y = \frac{3}{4}$!
Nenne zwei Zahlen, die den Quotienten $\frac{3}{4}$ haben!

oder ob man wieder Tabellen zur Aufgabenstellung wählt.

Man wird bei derartigen Aufgaben sehr bald zusätzliche Bedingungen angeben müssen; denn schnell haben die Schüler in den Zahlen 3 und 4 und allen entsprechenden Vielfachen Lösungen gefunden. Eine solche zusätzliche Bedingung könnte sein: Der Dividend soll kleiner als 1 sein. Man kann beobachten, daß viele Schüler – auch vor dem Hinzunehmen einer einschränkenden Bedingung – die Aufgabe durch Probieren lösen wollen: Sie wählen sich irgendeine Zahl als Dividend – eventuell kleiner als 1 – und versuchen, sich durch mehr oder weniger systematisches Probieren an den geeigneten Divisor heranzutasten. Freilich übt auch das die Divisionsregel, zeigt aber doch, daß das Wissen vom Zusammenhang zwischen Division und Multiplikation kein anwendungsbereites Wissen ist; denn dann würde der Schüler irgendeine Zahl als Divisor setzen, sie mit dem gegebenen Quotienten multiplizieren und dieses Produkt als Dividend nennen. Auf die Möglichkeiten, die derartige Aufgaben für die Vorbereitung auf die Gebiete Gleichungen und Funktionen bieten, sei nur am Rande verwiesen.

d) Die oben genannte Aufgabe hätte man auch so formulieren können:

Bilde eine Divisionsaufgabe, deren Ergebnis $\frac{3}{4}$ ist! (Gegebenenfalls mit dem Zusatz: ... und deren Dividend kleiner als 1 ist!)

Man würde damit ein für die Festigung von Begriffen und Verfahren ganz wichtiges Prinzip befolgen, nämlich

Selbständiges Bilden von Aufgaben bei vorgegebenen Bedingungen,

und zwar solcher Aufgaben, deren Lösen gerade geübt werden soll. Das Beispiel zeigt, daß man sich im Falle der Division gebrochener Zahlen eine Aufforderung Bilde und löse eine Divisionsaufgabe! wegen ihrer zu geringen Anforderung sparen kann.

Anders ist das hingegen bei den folgenden, wohl im Text zu gebenden Aufforderungen:

Bilde und löse eine Divisionsaufgabe $a:b = c$, in der gilt!

(1) $c = 1$, $c = 0$

(2) $a < 1$ und $c > 1$, $b < 1$ und $c < 1$

(3) $a > b$ und $b = c$, $a > 1$ und $b = \frac{1}{2}a$ und $c < 1$

(4) $a < b < c$, $a > b > c$

(5) $a < 1 < b < 2 < c$, $a < 1 < b < c$

Vielleicht ist vorhin [unter c)] ein näheres Eingehen auf nicht lösbare Aufgaben vermißt worden. Die Division gebrochener Zahlen ist dafür ein nicht sehr ergiebiges Feld, wenn man von Aufgaben wie $\frac{3}{2}:\left(\frac{9}{6} - 1\frac{1}{2}\right)$ absieht. Die beiden Aufgaben (5) zeigen jedoch, daß durchaus nicht triviale Möglichkeiten bestehen.

Der methodische Wert mehrdeutig lösbarer oder nicht lösbarer Aufgaben ist aber vor allem auch darin zu sehen, daß sie – wie kaum andere – zum Beschreiben und Begründen herausfordern: In den Fällen, in denen eine irgendwie gewonnene Rechenregel $\left(\text{etwa } \frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)$ und entsprechende Fertigkeiten entwickelt geübt werden sollen, ist ein Beschreiben meist überflüssig. Vom Schüler jedoch eine Beschreibung dafür zu verlangen, wie er zu dem gegebenen Quotienten $\frac{3}{4}$ z.B. die Zahlen $\frac{3}{8}$ und $\frac{1}{2}$ als Dividend und Divisor gefunden hat, ist schon deshalb sinnvoll, weil dadurch meist der Ansatzpunkt für die notwendige Begründung der Mehrdeutigkeit gegeben wird. Vor allem bei den nichtlösbaren Aufgaben wird sich das Begründen auf gewisse Gesetzmäßigkeiten stützen müssen, z.B. bei den oben unter (5) genannten Aufgaben auf den Satz

Das Produkt zweier Zahlen, die größer als 1 sind, ist größer als jede der beiden.

e) In a) wurde über das vielseitige Zahlenmaterial gesprochen. Ein weiterer Gesichtspunkt für die Auswahl sollte das

Suchen nach Gesetzmäßigkeiten

an Hand konkreten Materials sein, dem sich dann – je nach Situation – ein allgemeiner Nachweis anschließen kann. Einige Beispiele mögen genügen:

Vergleiche Dividend, Divisor und Quotient miteinander!

$\frac{2}{3}:1$

$\frac{2}{3}:\frac{2}{3}$

$1:\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}:\frac{3}{2}$

Vergleiche $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}$ mit $\frac{3}{2}:\frac{5}{7}$!

Vergleiche $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}$ mit $\frac{7}{5}:\frac{2}{3}$!

Vergleiche $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}$ mit $\frac{2}{3}:\frac{6}{5}$ und mit $\frac{2}{3}:\frac{5}{5}$ und mit $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$!

Vergleiche $\frac{2}{3}:\frac{7}{5}$ mit $\frac{3}{3}:\frac{7}{5}$ und mit $\frac{4}{3}:\frac{7}{5}$ und mit $\frac{5}{3}:\frac{7}{5}$!

Man könnte die Feststellung, daß die Division gebrochener Zahlen nicht kommutativ ist, für überflüssig halten. Sie schafft aber die Möglichkeit des Vergleichs, der Gegenüberstellung sowie der Analogiebetrachtung, wirft die Frage der Assoziativität auf und hilft somit zu einem tieferen Eindringen in die Division, aber auch in die anderen drei Operationen und in die Zusammenhänge aller vier. Die Feststellung, daß die Division auch nicht assoziativ ist, führt zur Verwendung von mehr als zwei Operanden und zum Setzen von Klammern. Zur Festigung können Aufgaben folgender Art dienen:

Setze in $\frac{21}{20}:\frac{7}{5}:\frac{5}{12}:\frac{5}{9}$ Klammern, so daß sich als Lösung 1 ergibt!
Wieviel verschiedene Quotienten lassen sich aus $\frac{21}{20}:$ ... durch unterschiedliches Setzen von Klammern erzeugen? Wie heißen Sie?

Dem Zusammenhang der Operationen dienen auch die folgenden, allerdings nicht mehr ganz leichten Aufgaben.

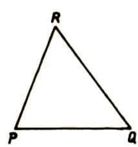
Suche nach gebrochenen Zahlen, die übereinstimmen in
Quotient und Produkt,
Quotient und Summe,
Quotient und Differenz!

Die bisherigen Beispiele sollten zeigen, wie man über das gewiß notwendige, rein mechanische Üben einer Rechenregel hinausgehen kann, um dabei die auftretenden Begriffe und das Verfahren selbst zu vertiefen, sie im Zusammenhang mit anderen zu sehen und somit auch den Festigungsprozeß der Systematisierung dienstbar und schließlich das erworbene Wissen durch Anwendung beim Lösen neuer Probleme flexibel zu machen.
An den folgenden Beispielen aus anderen Stoffgebieten sollen noch einige weitere allgemeine Gesichtspunkte herausgestellt bzw. die bisherigen nochmals verdeutlicht werden.

2. Flächeninhaltsformel des Dreiecks

Die bekannte Formel $A_D = \frac{1}{2}gh$ (für alle übrigen Flächeninhaltsformeln gilt ganz Entsprechendes) wird in der Regel nur dadurch geübt, daß zu gegebenen g und h der Flächeninhalt zu bestimmen ist. Das zahlenmäßige Verhältnis von 26:1 in unserem gegenwärtigen Lehrbuch [4]) (eine einzige Aufgabe fordert das Zeichnen mehrerer Dreiecke, die in einer Seite und dem Flächeninhalt übereinstimmen spiegelt diese Einseitigkeit wider. Sie sollte zumindest durch solche Aufgaben wie 1b) und 1c) überwunden werden, bei denen zu gegebenen A und h das g, zu A und g das h und schließlich zu A unterschiedliche Paare [g,h] zu bestimmen sind. Einige weiterführende Probleme könnten dann in folgender Weise angeschlossen werden:

a) Auf einem Arbeitsblatt (Fig. 1) wird jedem Schüler ein Dreieck PQR vorgelegt mit dem Auftrag, den Flächeninhalt dieses Dreiecks zu bestimmen.



[4]) Mathematik, Lehrbuch für die Oberschule, Kl. 6. A.a.O.,S.179.

Für den Schüler geht es also - zusätzlich zu dem einfachen Errechnen, das sonst meist nur verlangt wird - um ein

selbständiges Erkennen der notwendigen Stücke und Ermitteln der entsprechenden Maßangaben.

Der Leser durchmustere einmal die Anwendungsaufgaben unserer Schulbücher. Fast sämtlich stellen sie den Schüler nur vor das halbe Problem, wenn sie nämlich von der Art sind wie:

Der dreieckige Teil an der Giebelfläche eines Hauses ist 10,50 m breit und 2,75 m hoch. Berechne seinen Flächeninhalt [5])!

Derartige Aufgaben sagen dem Schüler, um was für eine Figur es sich handelt, welche Stücke man zur Berechnung des Flächeninhalts braucht (damit auch fast die benötigte Formel) und die Maße dieser Stücke. Damit aber sind solche Aufgaben praxisfremd; denn all das muß sich jemand, der tatsächlich einmal den Preis für das Verputzen eines solchen Giebels ermitteln soll, selbst überlegen. Nun ist diese Situation den Lehrbüchern nur zum geringen Teil zum Vorwurf zu machen; ihre Aufgaben können in dieser Hinsicht kaum anders sein. Vielmehr darf der Lehrer solche Aufgaben nicht nur in dieser Form an die Schüler herantragen, wenn er sie zum selbständigen Durchdenken eines Problems befähigen und dieses mit seiner Lösung echt gestalten will. Die gedankliche Reihenfolge müßte in diesem Fall - kurz skizziert - also folgendermaßen sein:

Aufgabe: Der Preis für das Verputzen eines Hausgiebels soll ermittelt werden. Wie könnte man vorgehen? (Noch besser wäre freilich, wenn es sich um ein reales Objekt aus der Umwelt der Schüler handelt.)

Erarbeitung: der Preis hängt von der Größe der Fläche ab. Wenn man sie und den Quadratmeterpreis hat, kann man den Gesamtpreis ermitteln. Die zu verputzende Fläche hat die Form eines Dreiecks, es wird also die Formel $A_D = \frac{1}{2}\,gh$ zu benutzen sein.

Es müßten die Längen von Grundlinie und Höhe des Dreiecks, also Breite und Höhe des Giebelstücks durch Messen ermittelt werden.

Jetzt kann der Lehrer die Angaben dem Lehrbuch entnehmen oder die Aufgabe nachlesen lassen.

---

[5]) Ebenda, Aufgabe Nr. 89a).

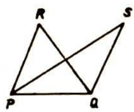
Gewiß ist das Geben eines Dreiecks (s. Fig. 1) auf einem Arbeitsblatt nur ein schwacher Ersatz dafür, aber eine notwendige Ergänzung bei der Festigung.
Wenn man das Dreieck PQR auf kariertem oder Millimeterpapier so vorgibt, daß eine Höhe in der einen Gitterrichtung liegt, ihre Länge also leicht abgelesen werden kann, dann liegt die Aufforderung zur Bestimmung der Längen der beiden anderen Höhen, ohne diese selbst zu messen, besonders nahe. Bei dieser Problemstellung werden mehrere der genannten Gesichtspunkte vereinigt: Erkennen der notwendigen Stücke, Bestimmen der zugehörigen Daten und Anwenden der Formel in entgegengesetzter Richtung (von rechts nach links), es handelt sich also um ein

> mehrmaliges, voneinander abhängiges Anwenden der gleichen Formel in unterschiedlichen Richtungen.

b) Die Aufgabe Zeichne ein Dreieck, das zu PQR flächengleich, aber nicht kongruent ist! fordert vom Schüler ein

> Umsetzen der Formel in geometrische Figuren

und bezieht gleichzeitig den Gesichtspunkt mehrdeutiger Lösbarkeit ein.



Relativ leicht gelingt dem Schüler dieses Umsetzen in Form von Fig. 2 zumal wenn er eigens den Satz

> Dreiecke, die in den Längen jeweils einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen, sind inhaltsgleich

formuliert hat. Das wird aber sofort anders bei folgenden Abwandlungen:

(1) Auf dem Arbeitsblatt wird eine Strecke $\overline{DE}$ vorgegeben, die eine Seite bzw. eine Höhe des zu zeichnenden und zum Dreieck PQR flächengleichen Dreiecks werden soll. Ihre Länge kann mit einer der Längen $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ (bzw. der entsprechenden Höhen) übereinstimmen, kann aber auch abweichen.

(2) Die Aufgabe nimmt überhaupt keinen Bezug auf sein vorgegebenes Dreieck, sondern gibt für das zu zeichnende lediglich den Flächeninhalt – in Quadratzentimeter oder in Quadraten des Heft-

gitters (meist 0,25 cm^2) oder auch in Rechtecken bei entsprechender Gittereinteilung - an.

Dem Gesichtspunkt der Nichtlösbarkeit kommt die Aufgabe Zeichne ein Dreieck, das zu PQR kongruent, aber nicht flächengleich ist! nach.
Natürlich werden durch solche Aufgaben nicht nur die genannte Formel und der Begriff der Flächengleichheit gefestigt, sondern durch die Gegenüberstellung auch der der Kongruenz von Dreiecken. Auf die Möglichkeiten, die sich bei solchen Aufgaben zur Schulung allgemeineren mathematisch-logischen Denkens durch das Herausarbeiten von notwendigen, aber nicht hinreichenden, von hinreichenden, aber nicht notwendigen, von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Flächengleichheit und Kongruenz von Dreiecken und durch entsprechende Sätze und deren Umkehrungen ergeben, sei nur am Rande verwiesen.

c) eine Formel festigen schließt ein, die Zusammenhänge zwischen den auftretenden Stücken näher zu untersuchen und zu beschreiben. Für das

Durchführen funktionaler Betrachtungen

ist das Erarbeiten von Sätzen wie

Halbieren der Höhe bedeutet Halbieren des Flächeninhalts oder
Verdoppeln von Seite und zugehöriger Höhe bedeutet Vervierfachen des Flächeninhalts oder (wenn die betreffenden Begriffe zur Verfügung stehen)
Bei gleicher Grundlinie sind Flächeninhalt und Höhe einander proportional oder
Bei gleichem Flächeninhalt sind Seite und zugehörige Höhe einander umgekehrt proportional oder
Flächeninhalt und Umfang sind nicht proportional

nur die eine Seite. Hinzukommen muß das Anwenden derartiger Erkenntnisse durch entsprechende Aufgaben; einige seien genannt:
(1) M sei der Mittelpunkt von $\overline{PQ} = r$, N sei der Mittelpunkt der Höhe h_r auf $\overline{PQ}$. Welche Flächeninhalte haben

$\triangle$ PMR ; $\triangle$ PQN ;
$\triangle$ MQN ; $\triangle$ PNR ?

Eine andere, etwas leichtere Formulierung zum gleichen Sachverhalt wäre: Gib die Flächeninhalte der Dreiecke ... als Teile von A_D an! Das Einbeziehen des Dreiecks PNR ist kein Versehen. Durch derartige Aufgaben sollen die Schüler dazu erzogen werden, jede Aufgabe zunächst gründlich zu durchdenken und erst dann zu entscheiden, ob die bisherigen Überlegungen auch diesmal zur Lösung führen.

(2) Zeichne ein Dreieck P'Q'R' mit dem Flächeninhalt A', für das gilt

(2.1.) $A' = 2\,A$,

(2.2.) $A' = 2\,A$ und $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$,

(2.3.) $A' = 3\,A$ und $h_r = h_{r'}$,

(2.4.) $A' = \frac{1}{2}\,A$ und $h_r = h_{r'}$ und $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$,

(2.5.) $A' = A$ und $h_r \neq h_{r'}$ und $\overline{PQ} \neq \overline{P'Q'}$!

(3) Um wieviel ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks PQR, wenn

(3.1.) $\overline{PQ}$ um 1 cm wächst,

(3.2.) $\overline{PQ}$ um 1 cm abnimmt, } (entsprechend für h_r)

(3.3.) $\overline{PQ}$ und h_r um je 1 cm wachsen,

(3.4.) $\overline{PQ}$ um 1 cm wächst, h_r um 1 cm abnimmt?

3. Zentrische Streckung

Die künftige Behandlung der Ähnlichkeitslehre wird abbildungsgeometrisch sein und dabei den Begriff der zentrischen Streckung zur Grundlage haben. Seine vielseitige Festigung ist daher besonders wichtig.

Bekanntlich ist eine zentrische Streckung der Ebene eine Abbildung dieser Ebene auf sich, die festgelegt wird durch ein Streckenzentrum Z, eine (vorerst) positive Zahl k, bei der jedem Punkt P sein Bildpunkt P' zugeordnet wird durch die Forderung: P' liegt auf dem Strahl ZP, und der Abstand von P' zu Z ist das k-fache des Abstandes von P zu Z, d.h., es ist

$$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}\ .$$

In die Definition gehen also vier Objekte ein: Z, k, P und P'. Soll nun der Begriff gefestigt werden, so liegt es zunächst nahe, die drei Objekte Z, k, P zu geben und P' konstruieren zu lassen; am sinnvollsten lassen sich solche Aufgaben mit Hilfe von Arbeitsblättern behandeln, auf denen die gegebenen geometrischen Objekte markiert sind. Es entspricht nun aber dem, was auf S. 78 bezüglich einer Rechenoperation über den Wechsel zwischen Gegebenem und Gesuchtem gesagt wurde, wenn auch hier drei andere

Objekte gegeben und das Ermitteln des vierten verlangt wird. Die auf diese Weise entstehenden vier Typen von Aufgaben werden durch die Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5 und Fig. 6 wiedergegeben.

Wie bei den Operationen, so braucht man auch hier nicht, um etwa P zu bestimmen, den Begriff der Umkehrabbildung einzuführen, sondern das Durchdenken und damit das Festigen der beschriebenen Definition führt zum Ziel. Wichtig ist aber, daß vor allem die

Fig. 3: Ermittle zu k = 1,5 das Bild P' von P !

Fig. 4: Ermittle P zu k = 2 !

Fig. 5: Ermittle Z zu $k = \frac{1}{2}$!

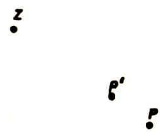


Fig. 6: Ermittle k !

Aufgabe Ermittle k ! (Fig. 6) zu der Frage führt, ob denn die drei gegebenen Objekte beliebig vorgegeben werden können, d.h., die Frage der Existenz einer Lösung wird aufgeworfen [6]; selbstverständlich kann man hierauf auch durch eine Aufgabe nach Fig. 7 kommen.

---

[6]) Die Frage nach der Existenz von k ist hier im Hinblick auf die Lage von Z,P und P' zu verstehen, nicht bezüglich ihrer Abstände. Diese ebenfalls wichtige Frage führt bekanntlich auf das Problem der reellen Zahlen, deren Existenz hier aber als bekannt vorausgesetzt wird.

Fig.7: Ermittle k!

Fig.7a): Gib eine zentrische Streckung an, bei der P' das Bild von P ist!

Die Antwort auf die Frage nach der Existenz führt auf die nach der Eindeutigkeit und diese wiederum - vor allem bei entsprechender Denkschulung und Gewöhnung - zu Überlegungen darüber, ob denn vielleicht schon zwei Objekte, etwa P und P' [Fig. 7a)], eine zentrische Streckung, also ein Z und ein k, eindeutig festlegen.

Die verneinende Antwort wiederum ermuntert zum Nachdenken darüber ob es vielleicht zwei Paare tun usw. Ein entsprechender Vergleich mit den anderen dem Schüler bekannten Abbildungen festigt beide, ein Vergleich mit anderen Relationen und Operationen verhilft zum Bewußtmachen allgemeiner mathematischer Fragestellungen und Denkweisen.

4. Parallelität zweier Geraden

Gleichgültig, wie der Begriff der Parallelität zweier Geraden definiert wird - ob durch gleiche Richtung haben, durch einander nicht schneiden oder mit Hilfe des gleichen Abstandes aller Punkt der einen Geraden von der anderen -, immer wird der früher als Ortsdefinition bezeichnete Satz

> Alle diejenigen Punkte (einer Ebene), die von einer gegebenen Geraden g den Abstand a haben, bilden die beiden Parallelen zu g im Abstand a

seine Bedeutung haben; denn in ihm wird diejenige Eigenschaft paralleler Geraden ausgesprochen, die z.B. bei Konstruktionsaufgaben am meisten benutzt wird. Das Erfassen eines solchen Satzes geschieht nun nicht durch Auswendiglernen und mehrmaliges Hersagen, sondern durch Lösen vielfältiger Aufgabenstellungen, in die nicht nur die Punkte dieser drei Geraden eingehen. Man könnte dies als

· Einbeziehen der Komplementärmengen

bezeichnen. Auch hierzu seien nur einige Aufgaben als Beispiele angeführt, für deren Behandlung wieder die Benutzung von Arbeitsblättern zu empfehlen ist.

a)

Fig. 8

(1) Zeichne einen Punkt P, dessen Abstand a von g 1,5 cm beträgt!

(2) Zeichne ein Q mit a < 1,5 cm!

(3) Zeichne ein R mit a > 1,5 cm!

(4) Müssen P und Q so liegen, daß die Strecke $\overline{PQ}$ und g einander schneiden?

(5) Können P und Q so liegen, daß $\overline{PQ}$ und g einander schneiden? (Entsprechende Aufgaben für Q und R bzw. P und R)

(6) Kennzeichne durch drei verschiedene Farben alle Punkte P,Q und R mit den unter (1), (2) und (3) genannten Eigenschaften!

b)

Fig. 9

Die beiden Geraden g_1 und g_2 sind parallel und haben einen Abstand von 3 cm. In den folgenden Aufgaben bedeutet a_1 den Abstand eines Punktes zu g_1, a_2 den Abstand zu g_2.

(1) Zeichne einen Punkt, für den a_1 gleich a_2 ist!

(2) Zeichne einen Punkt, für den a_1 größer als a_2 ist!

(3) Zeichne einen Punkt, für den a_1 kleiner als a_2 ist!

(4) Zeichne einen Punkt für den $a_1 = 1,5$ cm und $a_2 > 1,5$ cm ist!

(5) Zeichne einen Punkt, für den $a_1 = 1,5$ cm und $a_2 > 5$ cm ist!

(6) Zeichne einen Punkt, für den a_1 gleich 2 a_2 ist!

(7) Zeichne einen Punkt, für den a_1 größer als $\frac{1}{2}$ a_2 ist!

Zu jeder dieser Aufgaben sollte nun eine entsprechende gestellt werden der Art

(1a) Kennzeichne (durch Farbstift) alle Punkte, für die a_1 gleich a_2 ist!

usw.

c) (s.Fig.10)

(1) Zeichne einen Punkt mit $a_1 = a_2 = 1$ cm!

(2) Zeichne einen Punkt mit $a_1 \neq 1$cm und $a_2 < 1$ cm!

(3) Zeichne einen Punkt mit $a_1 < 1$ cm und $a_2 < 1$ cm!

(4) Zeichne einen Punkt mit $a_1 = 0$ cm und $a_2 = 1$ cm!

(5) Zeichne einen Punkt mit $a_1 > 1$ cm und $a_2 > 1$ cm!

(6) Zeichne einen Punkt mit $a_1 < 1$ cm und $a_2 > 1$ cm!

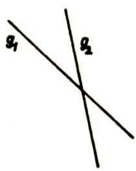


Fig. 10

Auch hier wäre nun wieder zu ergänzen durch Aufgaben wie

(1a) Kennzeichne alle Punkte mit $a_1 = a_2 = 1$ cm!

usw.

Es ist vorteilhaft, diese Fragen nach allen Punkten in unmittelbarem Zusammenhang mit den entsprechenden nach einzelnen Punkten zu behandeln.

d) Wichtig ist nun, daß die genannten Aufgaben, insbesondere die von b) und c), ergänzt werden durch solche, in denen einzelne Punkte, Strecken, Geraden oder Ebenenteile vorgegeben werden und in denen vom Schüler verlangt wird, diese Punktmengen durch Abstände zu charakterisieren. Derartige Aufgaben lassen sich am leichtesten mündlich mit Hilfe eines farbig gestalteten Tafelbildes nach Fig. 11 stellen. In ihr sind g_1 und g_2 die beiden Parallelen zu g im Abstand 1,5 cm, h_1 und h_2 die zu h im Abstand 1 cm Zur leichteren Formulierung der Aufgaben sind hier einige Punkte mit Buchstaben versehen; im Unterricht können diese Formulierungen zumeist durch Zeigen ersetzt werden.

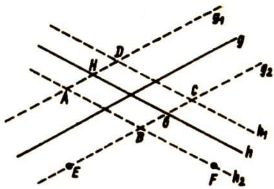


Fig. 11

Kennzeichne durch die Abstände zu g und h

(1) die Punkte A und B,
(2) die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$,
(3) die äußeren Punkte der Strecke $\overline{BC}$,
(4) die inneren Punkte der Strecke $\overline{BD}$,
(5) alle Punkte des Strahls BE außer B,
(6) die inneren Punkte des Winkels EBF,
(7) die inneren Punkte des Streifens um g,
(8) die inneren Punkte des Parallelogramms ABGH!

Und wenn nun z.B. bei (3) die richtige Antwort Alle diese Punkte haben von g einen Abstand von 1,5 cm, von h jedoch einen Abstand, der größer als 1 cm ist gefunden wurde, so wird sich sofort die Frage anschließen, ob das denn alle derartigen Punkte sind. So wird schließlich die Menge aller dieser Punkte gefunden und damit nicht nur der Begriff Parallelität von Geraden gefestigt, sondern eine Denkweise, die immer wieder auftritt.

e) Ganz entsprechend wie bei der Parallelität kann man bei den anderen "geometrischen Örtern" verfahren, insbesondere beim Kreis. Dabei ist nicht entscheidend, ob dieser Terminus benutzt wird – im Grunde genommen ist er überflüssig –, wichtig ist die Festigung der Erkenntnis: Jeder Punkt dieser Figur (Menge) hat die betreffende Eigenschaft – außerhalb von ihr gibt es keinen derartigen Punkt; auf die Möglichkeit der Festigung der Begriffe notwendig und hinreichend sei nur am Rande verwiesen. Auf S. 75 wurde vom Üben durch Anwenden gesprochen. Wenn man die Punkte eines Kreises, seine inneren und äußeren Punkte durch den Abstand r zum Mittelpunkt M charakterisiert hat, dann liegt es nahe, das auch auf andere Begriffe zu übertragen, z.B.: Der Berührungspunkt einer Tangente ist Kreispunkt, hat also zu M den Abstand r; alle anderen Tangentenpunkte sind äußere Punkte, haben also einen größeren Abstand, von allen Tangentenpunkten hat also der Berührungspunkt den kürzesten Abstand zu M (Fig. 12).

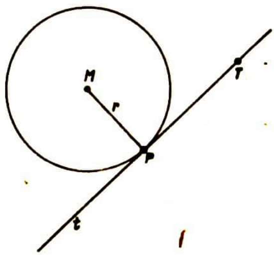


Fig. 12: $\overline{PM} = r$ (P ist Kreispunkt.)

$\overline{TM} > r$ (Gilt für alle äußeren Punkte des Kreises, also auch für alle $T \neq P$, die auf t liegen.)

und damit

$\overline{TM} > \overline{PM}$

Also:

$\sphericalangle\, MPT = 90^\circ$ (Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen einem Punkt und einer Geraden ist das Lot von diesem Punkt auf diese Gerade.)

Als Anwendung dieser Begriffe fällt nun aber der Beweis des Satzes

Tangente und Berührungsradius stehen aufeinander senkrecht

in den Schoß, und sein Gedankengang ist zudem motiviert; denn der Schüler weiß, daß der Abstand eines Punktes zu einer Geraden die Länge des Lotes ist, dieses aber von allen Verbindungsstrecken Punkt - Gerade die kürzeste ist, und umgekehrt (wegen der Eindeutigkeit des Lotes) die kürzeste Verbindungsstrecke senkrecht steht.

f) Es könnte der Eindruck entstanden sein, das Prinzip Einbeziehen der Komplementärmengen sei nur bei geometrischen Objekten sinnvoll bzw. möglich. Deshalb seien einige kurze Hinweise zu einem Übungsgegenstand gegeben, bei dem die Gefahr der Eintönigkeit besonders groß ist: Kopfrechnen an Einmaleinsfolgen. Soll z.B. die für die Zahl 7 geübt werden, so bedeutet das genannte Prinzip das Einbeziehen der nicht durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen, etwa folgendermaßen:

(1) Nenne alle Vielfache von 7
zwischen 20 und 30;
zwischen 40 und 50;...!

(2) Welches Vielfache von 7 liegt am dichtesten
bei 40; 50; 60;...?

(3) Zwischen welchen Vielfachen von 7 liegen 45; 68;...?

(4) Welchen Rest lassen 24; 41;... beim Dividieren durch 7?

(5) Nenne Zahlen, die beim Dividieren durch 7 den Rest 2; 6;... lassen!

(6) Nenne zwei Zahlen, die beim Dividieren durch 7 den gleichen Rest lassen!

(7) Zerlege 30; 38;... in zwei Summanden, von denen nur einer (keiner beide) durch 7 teilbar ist!
(Entsprechend für Differenzen)

(8) Nenne zwei Zahlen a und b, für die $7a = b$ nicht gilt!

(9) Nenne zwei Zahlen a und b, für die $7a = b + 2$ gilt!

Auf die Möglichkeiten der logischen Schulung im Verstehen und Bilden von Negationen, die man sich durch alle diese Aufgaben schafft, sei wiederum nur am Rande verwiesen. Desgleichen beachte der Leser, daß er mit derartigen Aufgaben durch wenig eigene Worte viele Schülerantworten verlangen kann, was zur Intensität des Übens wesentlich beiträgt.

3. Schlußbemerkungen

Es wurde einleitend eine stärkere Beachtung der Unterrichtskomponente Festigung gefordert und auf die Notwendigkeit hingewiesen, diese abwechslungsreich und vielseitig zu gestalten. Die an Beispielen demonstrierten Prinzipien sollten auf Möglichkeiten einer derartigen Unterrichtsgestaltung hinweisen, in Richtungen zeigen, in die sie gehen sollte.
Abschließend seien diese Prinzipien kurz, mehr ausblickend, unter einigen anderen, aber keineswegs unwichtigen Aspekten betrachtet:

1. Mehr und mehr gewinnt für unsere Schule, auch für den Mathematikunterricht, der differenzierte Unterricht an Bedeutung [7]. In ihm stecken Reserven für die Effektivität des Unterrichts, auf die wir auf die Dauer wohl nicht verzichten können. Eine Voraussetzung für diese Unterrichtsform ist, daß hinreichend viele, unterschiedlich schwer lösbare Probleme zur Verfügung stehen, die zu ein und demselben Stoff gehören, mit den gleichen Begriffen formulierbar und den gleichen Verfahren lösbar sind. Es sollte gezeigt werden, wie man sich als Lehrer derartige Probleme bilden kann.
Differenzierter Unterricht erfordert vom Lehrer mehr Zeit für Vorbereitung und Auswertung. Gegenwärtig können nur wenige Lehrer diese zusätzliche Zeit aufwenden. Daher sollten, solange entsprechende Materialien, z.B. Arbeitsblätter, von zentraler Stelle noch nicht zur Verfügung stehen, in Schulen und Kreisen alle personellen und materiellen Möglichkeiten genutzt und durch Gemeinschaftsarbeit entsprechende Materialien hergestellt werden. Dabei geht es nicht nur um eine zeitliche Entlastung des Lehrers, um bessere Ausnutzung der Unterrichtszeit, es geht auch darum, daß manche Probleme nur in dieser Form sinnvoll an den Schüler herangebracht werden können; die hier genannten Beispiele aus der Geometrie erfordern jedoch nicht unbedingt derartige Arbeitsblätter, lassen sie jedoch als zweckmäßig erscheinen.

2. Jeder gute Lehrer weiß um die Bedeutung einer tragfähigen Motivierung. Er weiß auch, daß rein praktische Motive nicht immer die besten sind. Mit zunehmendem Alter der Schüler, d.h. mit weiterem Fortschreiten im Stoff, wird an ihre Stelle mehr und mehr die sogenannte innermathematische Motivierung treten. Solche Motive sind aber um so natürlicher und daher um so wirksamer, je mehr die Schüler erlebt und gelernt haben, aus einem Problem neue zu entwickeln, z.B. durch Umkehren der Fragestellung, durch funktionale Betrachtungen, durch Einbeziehen von Grenzfällen usw.

---

7) Vgl. z.B. RÖSEL, R.: Erfahrungen bei differenzierter Unterrichtsgestaltung im Fach Mathematik. In Math.i.Sch. 5 (1967), Heft 7, S. 530.

3. Derartiges Motivieren ist nur die eine Seite. Damit hängt zusammen die Forderung [8], unsere Schüler zu einem Denken zu erziehen bzw. zu befähigen, das über den Einzelfall hinaus in der Mathematik von Bedeutung ist, ja sogar über sie hinaus. Viele der herausgestellten Prinzipien spiegeln derartige Denkmethoden wider (z.B. Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung), und ihre Realisierung wäre daher auch für eine gute Allgemeinbildung von Wichtigkeit. Natürlich ist dazu notwendig, daß man auch im Unterricht über den Einzelfall hinausgeht und durch Analyse, Vergleich, Analogiebetrachtung, Verallgemeinerung und dergleichen dem Schüler im Einzelfall das Wesentliche, das Allgemeine bewußt macht. In dieser Hinsicht ist das Aufgabenmaterial in unseren Schulbüchern noch nicht hinreichend durchdacht, entspricht es oftmals noch nicht dem modernen Geist, der die eigentlichen Lehrteile meist durchzieht.

4. Die bekannte Methodikerin Prof.Dr. Zofia KRYGOWSKA aus Krakow hat im Sommer 1966 auf dem Internationalen Mathematikerkongreß einen Vortrag gehalten [9], in dem sie der Frage nachgeht, ob und wie die Schüler zu einer geistig aktiven Beteiligung an einem modernen Mathematikunterricht geführt werden können. Unsere Fachkonzeption kommt dieser Frage nahe durch den Satz:

> "Demgemäß ist zu klären, wie im Mathematikunterricht die Schüler dazu geführt werden können, weitgehend selbständig Probleme zu erkennen und sich mit ihnen kritisch denkend auseinanderzusetzen" [10].

---

[8] Vgl. z.B. Lehrplan für den Mathematikunterricht der Klassen 5 bis 10 der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule (präzisierter Lehrplan). A.a.O., S. 5, Absatz 4 und S. 6 unten.
Konzeption für den Mathematikunterricht in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule entsprechend dem "Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem". In Math.i. Sch. III (1965), Heft 6, S. 442, Punkt 3.

[9] KRYGOWSKA, A.Z.: Entwicklung der mathematischen Schülertätigkeit; die Rolle der Probleme bei dieser Entwicklung. In "Matematika w schkole" (1966), Heft 6, S. 19.

[10] Konzeption für den Mathematikunterricht in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule entsprechend dem "Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem", A.a.O., S. 447.

Ganz entsprechend kennzeichnet es Frau Prof.Dr. Zofia KRYGOWSKA als die wichtigste Aufgabe des Mathematiklehrers von heute, den Unterrichtsprozeß auf die bewußte und schöpferische Mitarbeit des Schülers zu stützen, und betont, daß Wissen zu vermitteln und Wissen aufzuzwingen zwei außerordentlich verschiedene Verfahren seien.

> "Das Prinzip des schöpferischen Unterrichts drückt den Gedanken der aktivierenden Vermittlung eines Wissens aus, das wie eine Stafette weitergegeben wird. Die unbedingt notwendige Bedingung für diese Weitergabe liegt in der ständigen, tiefgreifenden und vielseitigen Zusammenarbeit des Lehrers mit den Schülern, und zwar sowohl bei der Entwicklung der Theorie als auch beim Üben"[11].

Ferner heißt es

> "Die auf einem einzigen Schema beruhenden wie auch die auf die Terminologie bezogenen Aufgaben können nützlich und sogar notwendig sein, um die Geschicklichkeit und die mechanischen Fertigkeiten zu fördern, aber ihr Beitrag zur Entwicklung der mathematischen Schüleraktivität ist minimal"[12]

und schließlich

> "Obwohl ein Kapitel schon von Grund auf erarbeitet und obwohl die neuen Ideen schon eingeführt worden sind, können weder der Lehrer noch der Schüler sicher sein, daß alles völlig genau erfaßt worden ist und daß alle neuen Fäden fest mit den früheren Kenntnissen verknüpft worden sind. Der Beweis dafür kann nur durch die Lösung von Aufgaben erbracht werden"[13].

Und es sei hinzugefügt: Von Aufgaben, die dem Schüler das selbständige Anwenden erarbeiteten Wissens ermöglichem, ja es von ihm erzwingen, und deren Probleme er als solche annimmt, d.h., sie müssen motiviert, nach Möglichkeit von ihm selbst entdeckt worden sein.

Der vorliegende Beitrag will im Sinne der angeführten vier Zitate verstanden werden und bei der Lösung der darin aufgeworfenen Probleme helfen.

---

11) KRYGOWSKA, A.Z.: A.a.O., S. 22.

12) Ebenda, S. 24.

13) Ebenda, S. 25.

(Pietzsch, G.: Einige Probleme der Festigung und ihre Bedeutung für die Effektivität des Mathematikunterrichts. In Mathematik in der Schule 6 (1968), Heft 12, S. 921 ff.)

Können unsere Schüler logisch denken?

Hans Bock und Werner Walsch

In Gesprächen, die wir mit Mathematiklehrern führen, wird häufig die in der Überschrift gestellte Frage aufgeworfen. Die Ansichten der Lehrer dazu sind in der Regel mehr oder weniger negativ gefärbt. Sie reichen von einem klaren "Nein" bestenfalls bis zu der differenzierten Auffassung: "Einige können es, viele können es nicht." Diese Einschätzungen sind sicher nicht aus der Luft gegriffen, sie beruhen auf bestimmten Erfahrungen. Trotzdem helfen sie uns im Grunde nicht viel bei dem Bemühen, die Situation zu verändern. Das liegt daran, weil der Begriff logisches Denken häufig zu global und undifferenziert gebraucht wird. Wenn wir die logische Schulung im Mathematikunterricht verbessern wollen, reicht es nicht aus zu wissen, daß viele Schüler nicht logisch denken können, sondern wir müssen vor allem wissen, was die Schüler können und was sie nicht können.

Wir haben in dieser Richtung im Schuljahr 1964/65 in unserer Abteilung verschiedene Untersuchungen durchgeführt. Aus dem Gesamtkomplex logische Schulung wählten wir dabei jenen Teilbereich aus, der mit dem Erkennen und Benutzen logischer Identitäten, die die Form von Äquivalenzen haben, zusammenhängt.

Wir hatten als erstes die Absicht, den Stand der entsprechenden Fähigkeiten bei Schülern der Klassen 8 bis 10 zu ermitteln. Genauer formuliert, ging es um folgendes:

(1) Wie weit sind Schüler der Klassen 8 bis 10, die keine speziellen Belehrungen logischer Art erhalten haben, in der Lage, die logische Äquivalenz mathematischer Aussagen bzw. Aussageformen zu erkennen?

(2) Neigen solche Schüler eventuell in gewissen Fällen umgekehrt dazu, mathematische Aussagen bzw. Aussageformen, die zwar ähnlich klingen, aber nicht äquivalent sind, doch als logisch gleichwertig anzusehen?

Es sollte also überprüft werden, wie weit diese speziellen logischen Fähigkeiten durch den bisher üblichen Unterricht in Mathematik entwickelt worden sind.
Wir stellten dazu acht Paare von Aussagen bzw. Aussageformen zusammen. Die Auswahl erfolgte so, daß vier Paare aus logisch äquivalenten Aussagen bzw. Aussageformen bestanden, die übrigen aus nicht äquivalenten. Den Schülern wurden nacheinander die acht Aussagenpaare vorgelegt. Sie bekamen dazu den Auftrag, jedes der Aussagenpaare daraufhin zu untersuchen, ob die Einzelaussagen logisch äquivalent sind oder nicht. Die schriftlich zu fixierende Antwort konnte "Ja", "Nein" oder "Ich weiß nicht" lauten. Soweit die Schüler sich dazu in der Lage fühlten, sollten sie ihre Entscheidung auch kurz schriftlich begründen. Nun war es allerdings nicht möglich, in der Aufgabenstellung den Terminus logisch äquivalent zu verwenden, weil die Schüler ihn nicht verstanden hätten. Wir erläuterten ihnen deshalb an Hand von Beispielen, etwa in folgender Form, worin ihre Aufgabe bestehen sollte:
"Ihr wißt, daß es möglich ist, einen bestimmten Sachverhalt in verschiedener Weise sprachlich auszudrücken. Zum Beispiel besagt "Karl ist kleiner als Fritz" dasselbe wie "Fritz ist größer als Karl". Genauso wird durch die Redeweise "Kein Schüler ist ohne Hausaufgaben" das gleiche ausgedrückt wie durch den Satz "Alle Schüler haben Hausaufgaben". Natürlich können Sätze, die ähnlich aussehen, auch verschiedene Sachverhalte ausdrücken. So beinhaltet der Satz "Kein Schüler ist ohne Hausaufgaben" doch offenbar etwas anderes als "Kein Schüler hat Hausaufgaben". Eure Aufgabe besteht im folgenden darin, von je zwei an die Tafel geschriebenen Sätzen zu entscheiden, ob sie in dem eben erläuterten Sinne genau dasselbe ausdrücken oder nicht".

Um störende Einflüsse zu vermeiden, die sich aus mangelhaftem inhaltlichem Verständnis der Sätze hätten ergeben können, wurden alle auftretenden mathematischen Sachverhalte in vorhergehenden Stunden wiederholt und geklärt. Um außerdem die Entscheidung der Schüler nicht durch Überlegungen über die Richtigkeit bzw. Falschheit der Sätze beeinflussen zu lassen, hatten wir nur wahre Sätze ausgewählt und dies den Schülern auch mitgeteilt. Dieser erste Versuch wurde in verschiedenen Schulen des Saalkreises und der Stadt Halle durchgeführt. Aus Gründen, die für die Ergebnisse unwesentlich sind und deshalb hier nicht weiter dargelegt zu werden brauchen, haben wir zu den einzelnen Aussagenpaaren unterschiedliche Anzahlen von Schülerurteilen erfaßt.

Wir wollen im folgenden die Ergebnisse zu jedem der acht Aussagenpaare angeben. (Die hier gewählte Reihenfolge stimmt nicht mit der bei der Versuchsdurchführung festgelegten überein, sondern beruht auf den Versuchsergebnissen.)

Beginnen wir mit dem Paar

1. a) Es ist nicht so, daß alle Quadratzahlen gerade sind.
   b) Es gibt Quadratzahlen, die nicht gerade sind.

Die logische Struktur der beiden Aussagen kann durch

$$\sim\forall a\, H(a) \quad \text{bzw. durch} \quad \exists a\, \sim H(a)$$

charakterisiert werden. Beide Aussagen sind äquivalent.

Von 347 befragten Schülern antworteten 309, das sind 89 %, mit "Ja". Sie waren also der richtigen Ansicht, daß beide Aussagen genau dasselbe ausdrücken. Nur 31 Schüler (9 %) antworteten mit "Nein", die übrigen sieben Schüler mit "Ich weiß nicht". Dieses Ergebnis ist eindeutig positiv. Man kann mit Hilfe von statistischen Prüfverfahren (Chi-Quadrat-Probe) nachweisen, daß es mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit n i c h t durch blindes, uneinsichtiges Raten der Schüler zustande gekommen ist. Dieses Verfahren ermöglicht vielmehr die Feststellung, daß die Mehrzahl der Schüler von der Äquivalenz der beiden Aussagen überzeugt gewesen ist.

Die Anwendung der Chi-Quadrat-Probe beruht hierbei auf folgender Überlegung: Wenn die Schüler ohne jede Einsicht nur geraten hätten, wäre etwa die gleiche Anzahl von Ja-Stimmen wie von Nein-Stimmen zu erwarten gewesen. Das Verhältnis der beiden Zahlen hätte somit ungefähr den Wert 1 haben müssen. Mit Hilfe der Chi-Quadrat-Probe kann nun überprüft werden, ob sich das tatsächliche Verhältnis (hier 309:31) genügend von dem hypothetischen Wert 1 unterscheidet, um eine rein zufällige Abweichung mit genügender Sicherheit ausschließen zu können [1]).

---

[1]) Genauere Darlegungen zur Chi-Quadrat-Probe findet man u.a. bei WEBER, E.: Grundriß der biologischen Statistik. VEB Gustav Fischer Verlag, Jena 1964.

Es erhebt sich schon hier und noch mehr bei einigen der folgenden Aussagenpaaren die Frage, wie weit die richtigen Schülerurteile wirklich auf einer klaren Erkenntnis der Äquivalenz bzw. Nicht-Äquivalenz des jeweiligen Aussagenpaares beruhen. Es ist kaum möglich, diese Frage an Hand unseres Materials mit genügender Sicherheit zu beantworten. Wir meinen aber, daß es in dieser Hinsicht erhebliche Unterschiede zwischen den Schülern geben dürfte und viele richtige Urteile auch durch ein mehr intuitives Erfassen des Sachverhaltes zustande gekommen sein mögen.

Ähnlich wie im ersten Fall liegen die Verhältnisse bei dem folgenden Paar:

2. a) Es gibt kein Dreieck, das gleichseitig und rechtwinklig ist.
   b) Für jedes Dreieck gilt: Wenn es gleichseitig ist, so ist es nicht rechtwinklig.

Die logische Struktur der beiden Aussagen ist hier:

$$\sim \exists x [H_1(x) \wedge H_2(x)] \quad \text{bzw.} \quad \forall x [H_1(x) \rightarrow \sim H_2(x)]$$

Von 347 Schülern antworteten 282 richtig mit "Ja", das sind 81 %, mit "Nein" antworteten 54 Schüler (16 %) und mit "Ich weiß nicht" elf Schüler. Auch in diesem hinsichtlich der auftretenden logischen Strukturen etwas komplizierteren Fall zeigte die statistische Überprüfung, daß das Ergebnis positiv zu bewerten ist. Die meisten Schüler haben die Äquivalenz beider Aussagen erkannt oder zumindest mehr oder weniger intuitiv erfaßt.

Nicht mehr ganz so überzeugend, aber doch noch positiv, war das Ergebnis bei dem folgenden Aussagenpaar:

3. a) Wenn ein Punkt P auf einer Geraden g liegt, so sind seine Abstände zu zwei bezüglich g symmetrisch liegenden Punkten A und B gleich groß.
   b) Es ist nicht möglich, daß ein Punkt P auf einer Geraden g liegt und seine Abstände zu zwei bezüglich g symmetrischen Punkten nicht gleich sind.

Seine logische Struktur wird durch

$$r \rightarrow s \quad \text{bzw.} \quad \sim(r \wedge \sim s)$$

erfaßt.

Von 123 befragten Schülern antworteten 82 (das sind 67 %) richti mit "Ja", während 19 Schüler (15 %) mit "Nein" antworteten. Auffallend ist der relativ hohe Anteil von Schülern, nämlich 22 (das sind 18 %), die mit "Ich weiß nicht" antworteten. Das zeigt, daß die Unsicherheit unter den Schülern in diesem Fall größer war als in den beiden erstgenannten Beispielen. Berücksichtigt man aber nur die Schüler, die eine Entscheidung getroffen haben, so ergibt sich ein Verhältnis von 82:19 zugunsten der richtigen Antworten. Die statistische Überprüfung zeigt, daß dieses Verhältnis sehr wahrscheinlich nicht zufallsbedingt ist, sondern auf ein Erfassen der Äquivalenz beider Aussagen durch die Mehrzahl der Schüler schließen läßt.

Merklich schlechter ist das Ergebnis bei dem nächsten Aussagenpaar:

4. a) Es gibt kein Dreieck, das gleichseitig und rechtwinklig ist.
   b) Es gibt Dreiecke, die nicht gleichseitig und nicht rechtwinklig sind.

Die Aussagen haben folgende logische Struktur:

$$\sim \exists x [H_1(x) \wedge H_2(x)] \quad \text{bzw.} \quad \exists x [\sim H_1(x) \wedge \sim H_2(x)]$$

Von 123 befragten Schülern gaben 71 (das sind 58 %) richtig an, daß beide Aussagen nicht dasselbe besagen. Mit "Ja" antworteten 41 Schüler (33 %), während elf Schüler (9 %) sich nicht entscheiden konnten. Die Chi-Quadrat-Probe ergibt hier zwar, daß das Verhältnis 71:41 immer noch genügend von dem Wert 1 abweicht, um die Annahme einer rein zufälligen, eventuell auf blindem Raten beruhenden Verteilung der Antworten ausschließen zu können. Man muß aber sagen, daß die Anzahl der richtigen Antworten schon unbefriedigend ist.
Weitgehend ähnlich sind die Ergebnisse beim nächsten Aussagenpaar:

5. a) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
   b) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl selbst nicht durch 3 teilbar.

Die logische Struktur beider Aussagen wird durch

$$p \rightarrow q \quad \text{und} \quad \sim p \rightarrow \sim q$$

erfaßt. Wir haben es hier also mit einer Implikation und der Kontraposition der Umkehrung dieser Implikation zu tun. Die beiden Aussagen sind somit logisch nicht äquivalent. Diesmal entschieden sich 166 von insgesamt 291 Schülern richtig für "Nein" (also 57 %), während 90 (das sind 31 %) mit "Ja" und 35 (das sind 12 %) mit "Ich weiß nicht" antworteten. Interessant war hierbei, daß die in der zweiten Aussage gegenüber der ersten vorgenommene Verneinung beider Teile der Implikation bei den Schülern zu ganz verschiedenen Schlußfolgerungen Anlaß gab. Während einige schrieben "Beide Aussagen bedeuten dasselbe, in der zweiten sind nur beide Sätze verneint worden", gaben andere die Verneinung gerade als Grund für die Verschiedenheit der Aussagen an. Manche Schüler argumentierten in diesem Zusammenhang auch so: "Es ist eine doppelte Verneinung und daher dasselbe." Sie verwechselten den vorliegenden Sachverhalt also mit

$$\sim\sim p \ \text{äqu.} \ p \ .$$

Betrachten wir das nächste Aussagenpaar:

6. a) Es ist nicht so, daß alle Quadratzahlen gerade sind.
   b) Es gibt Quadratzahlen, die gerade sind.

Die logischen Strukturen sind

$$\sim\forall a \ H(a) \quad \text{bzw.} \quad \exists a \ H(a) \ ,$$

es liegt also keine Äquivalenz vor.

Von 123 Schülern antworteten 65 richtig mit "Nein" (das sind 53 %), während 53 (oder 43 %) sich für "Ja" entschieden. Die übrigen fünf Schüler antworteten mit "Ich weiß nicht". Eine statistische Überprüfung zeigt, daß man die Möglichkeit einer blinden Raterei nun nicht mehr ausschließen kann. Das Verhältnis 65:53 unterscheidet sich dazu zu wenig von dem in einem solchen Fall zu erwartenden Wert 1 (d.h. von 59:59). Man geht deshalb wohl nicht fehl, wenn man annimmt, daß viele Schüler bei diesem Beispiel recht unsicher waren. Es zeigt sich also, daß den Schülern Aussagen, in denen die Redeweisen alle bzw. es gibt vorkommen, durchaus nicht immer so klar sind, wie man das nach den Ergebnissen bei den Paaren 1 und 2 hätte annehmen können. Vermutlich spielen hier umgangssprachliche Gewohnheiten eine störende Rolle. Wenn ein Lehrer sagt "In meiner Klasse können nicht alle Schüler schwimmen", so ist damit gewöhnlich unausgesprochen mit gemeint, daß immerhin einige Schüler der Klasse schwimmen können. Man glaubt, daß der Lehrer sonst gesagt hätte "In meiner Klasse kann kein Schüler schwimmen". Man muß sich aber klarmachen, daß die erste Aussage des Lehrers auch dann wahr ist, wenn tatsächlich kein Schüler schwimmen kann. Diese Aussage besagt wirklich gar nichts darüber, ob ein Schüler der Klasse schwimmen kann, es wird nur festgestellt, daß die Klasse jedenfalls nicht aus lauter Schwimmern besteht. Während also in der Umgangssprache die Redeweise "nicht alle" von den meisten zugleich im Sinne von "einige aber doch" verstanden wird, läßt ihr genauer logischer Sinn diese Deutung nicht zu. Mindestens den 43 % mit "Ja" antwortenden Schülern, die von uns befragt wurden, ist dieser logische Sachverhalt nicht klar.

Noch größer war die Unsicherheit anscheinend bei dem folgenden Aussagenpaar:

7. a) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
   b) Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so ist auch ihre Quersumme nicht durch 3 teilbar.

Wir haben es hier mit einer Implikation

$$p \rightarrow q$$

und ihrer Kontraposition

$$\sim q \rightarrow \sim p$$

zu tun. Es liegt also Äquivalenz vor. Von 123 befragten Schülern entschieden sich 54 (das sind 44 %) richtig für "Ja" und 44 (das sind 36 %) für "Nein". Die Anzahl der Schüler, die "Ich weiß nicht" antworteten, ist mit 25 (das sind 20 %) recht hoch. Auch hier kann man die Möglichkeit, daß vorwiegend geraten wurde, nicht ausschließen; das Verhältnis 55:44 liegt zu nahe bei dem Wert 1. Die schon bei dem Paar 5 in Erscheinung getretenen Unsicherheiten der Schüler im Zusammenhang mit dem Auftreten von Verneinungen in Implikationen kommen hier bei der Kontraposition verstärkt zum Ausdruck. Das Ergebnis ist unerfreulich, vor allem wenn man bedenkt, daß von der Kontraposition im Mathematikunterricht und in den Lehrbüchern doch immer wieder Gebrauch gemacht wird. Es erscheint im Lichte der oben angegebenen Zahlen recht fraglich, ob die Schüler dem Unterricht dann wirklich folgen können.

Ein ganz neues Bild ergibt sich bei dem letzten Aussagenpaar:

8. a) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.
   b) Wenn eine natürliche Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch ihre Quersumme durch 3 teilbar.

Es handelt sich hier um eine Implikation

$$p \rightarrow q$$

und ihre Umkehrung

$$q \rightarrow p ,$$

die natürlich nicht äquivalent sind.
Nur 51 Schüler (15 %) von insgesamt 347 befragten antworteten richtig mit "Nein", 272 Schüler (78 %) dagegen mit "Ja" und 24 Schüler (7 %) mit "Ich weiß nicht". Die Chi-Quadrat-Probe zeigt erwartungsgemäß, daß das Verhältnis 51:272 sich von dem bei bloßem Raten zu erwartenden Wert 1 signifikant unterscheidet. Die Mehrzahl der Schüler ist also offenbar nicht in der Lage, zwischen einer Implikation und ihrer Umkehrung zu unterscheiden. In verschiedenen Begründungen heißt es direkt: "Das ist dasselbe, nur umgekehrt gesagt".

Dieses Ergebnis ist u.E. alarmierend. Es dürfte nach sieben bis neun Jahren wissenschaftlichen Unterrichts eigentlich nicht passieren, daß ein erheblicher Teil der Schüler eine Aussage, die die Form einer Implikation hat, mit ihrer Umkehrung identifiziert. Es ist unbedingt notwendig, in Zukunft viel zielstrebiger als bisher darauf hinzuarbeiten, daß die Schüler in dieser Beziehung Klarheit gewinnen.

Die hier dargelegten Untersuchungen haben u.E. gezeigt, daß globale, undifferenzierte Beurteilungen der logischen Fähigkeiten unserer Schüler den wahren Sachverhalt tatsächlich nur sehr unvollkommen erfassen. Durch unsere Versuche haben wir zumindest innerhalb eines relativ eng begrenzten Bereiches einige Antworten auf die Frage erhalten, was die Schüler in logischer Hinsicht können und was nicht. Zusammengefaßt sind es im wesentlichen folgende Erkenntnisse:

1. Gewisse logische Zusammenhänge sind den meisten Schülern spätestens ab Klasse 8 mehr oder weniger intuitiv klar. Dazu gehören sowohl prädikatenlogische Beziehungen (z.B. Äquivalenz von

Nicht für alle gilt ... mit Es gibt welche, für die nicht gilt ...) wie auch aussagenlogische (z.B. die Äquivalenz von Es ist nicht so, daß A und B gilt mit Wenn A gilt, so gilt B nicht). Offenbar handelt es sich hierbei um Einsichten, die die Schüler ohne spezielle logische Belehrungen im Prozeß ihrer geistigen Auseinandersetzung mit der Umwelt gewonnen haben. Daß diese Einsichten z.T. jedoch recht begrenzt sein können, zeigen die Unklarheiten, die bei der Gegenüberstellung von Nicht für alle gilt ... und Es gibt welche, für die gilt ... zutage getreten sind.

2. Das Verständnis für verschiedene mit der Implikation zusammenhängende logische Beziehungen ist selbst bei Schülern der Klasse 10 vielfach nur schwach entwickelt. Die Mehrzahl sieht zwischen Wenn A, so B und Wenn B, so A keinen Unterschied. Hinsichtlich der Kontraposition bzw. der Kontraposition der Umkehrung sind die Ansichten der Schüler geteilt, und nicht wenige fühlen sich gar nicht in der Lage, ein Urteil abzugeben. Dieser Sachverhalt deutet nicht nur auf Mängel des Mathematikunterrichts hin, sondern auch auf Schwächen der logischen Schulung in anderen Unterrichtsfächern; denn Implikationen spielen in allen Wissenschaften eine fundamentale Rolle.

3. Die Mehrzahl der Schüler ist zumindest ab Klasse 8 offenbar durchaus in der Lage, bei Verständnis des speziellen Inhalts einer Aussage auch deren logische Struktur mehr oder weniger bewußt zu erfassen. Das bedeutet, daß eine wesentliche Voraussetzung für direkte logische Belehrungen bei Schülern dieser Altersstufe vorhanden ist.

4. Die zunächst naheliegende Erwartung, daß leistungsmäßig gute Schüler (von den Mathematikzensuren her gesehen) auch bei unseren Versuchen gute Ergebnisse erzielen würden, hat sich nur zum Teil bestätigt. Im Erfassen der logischen Struktur zeigen sich leistungsstarke Schüler den schwächeren gegenüber zwar etwas überlegen, bei der Beurteilung der Aussagenpaare ergab sich jedoch bei allen Zensurengruppen im wesentlichen das gleiche Bild.

Die Schlußfolgerungen, die aus diesen Ergebnissen zu ziehen sind, liegen auf der Hand. Im Mathematikunterricht muß zielstrebiger als bisher an der Entwicklung der logischen Fähigkeiten der Schüler gearbeitet werden. Über Möglichkeiten und Wege dazu ist nicht nur in unserem anfangs genannten Beitrag, sondern auch in anderen Aufsätzen in dieser Zeitschrift schon mehrfach geschrieben worden. Besonders dringend ist es, bei den Schülern Klarheit über die Implikation zu schaffen, weil sie sonst nicht nur die Mathematik, sondern auch vieles andere nicht richtig verstehen können.

(Bock, H. u. Walsch, W.: Können unsere Schüler logisch denken? In: Mathematik in der Schule 3 (1965), Heft 10, S. 721 ff; von den Autoren gekürzt)

Möglichkeiten zur logischen Schulung im Mathematikunterricht

Hans Bock und Werner Walsch

Seit langem wird es dem Mathematikunterricht als ein wesentliches Ziel gestellt, die Schüler zum logischen Denken zu erziehen. Es ist bekannt, daß dieses Ziel bisher jedoch noch nicht in dem gewünschten und notwendigen Maße erreicht wird. Man hat sich wohl lange Zeit mehr oder weniger bewußt der Hoffnung hingegeben, die Schüler würden durch den Mathematikunterricht ganz von selbst neben mathematischen Fakten auch das logische Denken lernen. Diese Vorstellung erwies sich aber doch nicht als allgemein zutreffend. Der Erfolg bei der Entwicklung des logischen Denkens hängt zu stark von der jeweiligen Gestaltung des Unterrichts ab, als daß der im Stoff liegende logische Gehalt an sich schon in jedem Falle einen entsprechenden Bildungseffekt bewirken könnte. Es ist deshalb notwendig, den Mathematikunterricht viel zielbewußter als bisher in den Dienst der logischen Bildung der Schüler zu stellen.

Unser Beitrag hat das Ziel, konkrete Möglichkeiten zur logischen Schulung im Mathematikunterricht anzugeben. Wir beschränken uns dabei darauf, die Bedeutung logisch äquivalenter Ausdrücke für den Mathematikunterricht zu untersuchen. Es wird sich zeigen, daß logisch äquivalente Umformungen mathematischer Ausdrucksweisen nicht nur der Erziehung zu logisch richtigem Denken und Sprechen dienen können, sondern vielfach auch ein besseres Erfassen der jeweiligen mathematischen Sachverhalte ermöglichen.

Die methodische Bedeutung logischer Identitäten der Form $H_1 \leftrightarrow H_2$ beruht auf folgendem: Da H_1 bei jeder Belegung der Variablen stets den gleichen Wahrheitswert annimmt wie H_2, sind die Ausdrücke H_1 und H_2 <u>logisch äquivalent</u>. Man kann mithin den Ausdruck H_1 stets durch den Ausdruck H_2 ersetzen.

Dabei ist es völlig gleichgültig, welchen speziellen Inhalt die einzelnen Aussagen und Aussagenverbindungen haben; die durch eine solche Ersetzung entstandene neue Aussage ist mit der ursprünglichen logisch gleichwertig und genau dann wahr, wenn die ursprüngliche wahr ist. Wir werden im folgenden eine Reihe von Beispielen betrachten und dabei noch im einzelnen auf methodische Fragen eingehen.

Wir beginnen mit der Äquivalenz

$$p \wedge (q \vee r) \quad \text{äqu} \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \tag{1}$$

Als Beispiel zu (1) wollen wir angeben, wann eine gebrochenrationale Funktion der Form $y = \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$ den Wert 0 annimmt. (Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ seien ganz-rational.) Die Bedingung lautet:

$$f(x) = 0 \text{ oder } g(x) = 0 \text{ und } h(x) \neq 0 .$$

Will man die Nullstellen im einzelnen bestimmen, so geht man gewöhnlich wie folgt vor: Man untersucht $f(x)$ auf Nullstellen und prüft nach, ob $h(x)$ für die gefundenen Werte verschieden von 0 ist, und anschließend verfährt man entsprechend mit $g(x)$. Bei diesem Vorgehen benutzt man jedoch eigentlich eine andere Form der angegebenen Bedingung, nämlich:

$$f(x) = 0 \text{ und } h(x) \neq 0 \text{ oder } g(x) = 0 \text{ und } h(x) \neq 0 .$$

Die ursprüngliche Form hatte die Struktur $(q \vee r) \wedge p$, die zuletzt benutzte Form dagegen die Struktur $(q \wedge p) \vee (r \wedge p)$. Beide sind nach (1) äquivalent, wenn man noch berücksichtigt, daß die Konjunktion kommutativ ist. (Hier ist es nun selbstverständlich möglich, daß beide Teile der Alternative gelten; denn $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ schließen sich ja nicht gegenseitig aus.) Im Unterricht macht man von beiden Formulierungen Gebrauch.

Als nächstes betrachten wir

$$p \rightarrow q \quad \text{äqu} \quad \sim(p \wedge \sim q) \tag{2}$$

Das bedeutet: Wenn q aus p folgt, so ist es nicht möglich, daß p und die Negation von q zugleich gelten und umgekehrt.

Implikationen spielen im Unterricht eine besondere Rolle, da sich jeder Lehrsatz in Form einer Implikation angeben läßt. So wird beispielsweise in der Klasse 6 der Begriff der geraden Zahl eingeführt. Eine Zahl gilt hierbei genau dann als gerade, wenn ihre letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6 oder 8 ist. Anschließend wird der folgende Satz behandelt:

Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar.

Das heißt doch:

Wenn eine Zahl gerade ist, so ist sie durch 2 teilbar.

Vom Sprachlichen her erscheint die zweite Formulierung vielleicht etwas schwerfälliger als die erste. Die wenn – so Formulierung hat jedoch Vorteile, die man nicht übersehen sollte. Durch das Zerlegen in Prämisse und Konklusion, wie es bei der Implikation der Fall ist, wird das Erkennen von Voraussetzung und Behauptung des betreffenden Lehrsatzes wesentlich erleichtert. Das ist für den Beweis eines Lehrsatzes von großer Bedeutung. Aber auch in anderer Hinsicht erscheint es zweckmäßig, die Darstellung von Sätzen in Form einer Implikation stärker als bisher im Unterricht zu benutzen (neben den anderen Ausdrucksweisen). Von einem gegebenen Lehrsatz möchte man z.B. wissen, ob er umkehrbar ist, d.h. ob der Satz, den man aus einem gegebenen erhält, indem man Voraussetzung und Behauptung desselben vertauscht, ebenfalls gilt. Der Übergang von $p \rightarrow q$ zu $q \rightarrow p$ wird erleichtert, wenn der betreffende Satz auch vom Sprachlichen her bereits diese Form aufweist. In unserem Beispiel lautet die Umkehrung:

Wenn eine Zahl durch 2 teilbar ist, so ist sie gerade.

Dieser Satz ist ebenfalls wahr. Eine logisch gleichwertige Ausdrucksweise dieses durch Umkehrung gewonnenen Satzes nach (2) lautet:

Es ist nicht so, daß eine Zahl durch 2 teilbar ist und nicht gerade ist.

Der ursprüngliche Satz dagegen kann durch

Es ist nicht so, daß eine Zahl gerade ist und nicht durch 2 teilbar

ausgedrückt werden.

Ausdrucksweisen in Form einer Implikation können auch in anderer Weise umgeformt werden. Es liegt dabei folgende aussagenlogische Identität zugrunde:

$$p \rightarrow q \quad \text{äqu} \quad \sim q \rightarrow \sim p \qquad (3)$$

Man sagt, der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist die Kontraposition des auf der linken Seite stehenden Ausdrucks. In der Implikation Wenn p, so q ist q eine notwendige Voraussetzung für p. Ist diese notwendige Voraussetzung nicht erfüllt, so trifft auch p nicht zu. Dieser Zusammenhang kommt in (3) zum Ausdruck. Die Kontraposition einer mathematischen Aussage wird häufig dann benutzt, wenn die Aussage zu beweisen ist.

Auch in anderem Zusammenhang bedient man sich der Kontraposition. Ein bekannter Satz aus der Theorie der relativen Extremwerte differenzierbarer Funktionen besagt:

> Wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.

Das Nullwerten der 1. Ableitung ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines relativen Extremwertes. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann es keine relativen Extremwerte geben. Gerade das besagt die Kontraposition des obigen Satzes:

> Wenn $f'(x_0) \neq 0$, so hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 keinen relativen Extremwert.

Ein fehlerhaftes Beispiel finden wir in einem älteren Lehrbuch

> Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist [1].

Dazu wird u.a. das Beispiel 5743 angeführt, bei dem die Voraussetzung dieses Satzes nicht erfüllt ist (die Quersumme ist 19). Es wird dann geschlossen:

> Da die Quersumme 19 nicht durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl 5743 nicht durch 3 teilbar.

Dieser Schluß ist nicht berechtigt. Hier wird nicht die Kontraposition des genannten Satzes benutzt, sondern die Kontraposition seiner Umkehrung. (Daß diese im vorliegenden Falle gilt und die Aussage somit richtig ist, interessiert uns hier nicht. Die Schlußweise ist auf jeden Fall falsch.) Man muß sich darüber klar sein, daß die Ausdrücke $p \rightarrow q$ und $\sim p \rightarrow \sim q$ nicht äquivalent

---

[1]) Mathematik, Ein Lehrbuch für die Oberschule, sechste Klasse. Ausgabe 1960. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1961, S.18. Man beachte, daß trotz der anderen Satzstellung Wenn ... die Prämisse ist.

sind. In $p \rightarrow q$ ist p lediglich eine hinreichende Bedingung für q. Gilt p nicht, so folgt daraus nicht, daß auch q nicht gilt. Der Ausdruck $\sim p \rightarrow \sim q$ ist die Kontraposition von $q \rightarrow p$, also von der Umkehrung von $p \rightarrow q$. Diese Umkehrung besagt hier:

Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, so ist ihre Quersumme durch 3 teilbar.

Hierin ist die Teilbarkeit der Quersumme durch 3 eine notwendige Voraussetzung für die Teilbarkeit der Zahl durch 3. Erst aus diesem Satz kann der anfangs genannte Schluß gezogen werden. Wir meinen, daß gerade an diesem Beispiel deutlich wurde, daß es im Unterricht u.a. darauf ankommt, auf einwandfreie logische Umformungen zu achten, um so die Schüler zu logisch richtigem Denken zu befähigen. Wir möchten auch noch einmal betonen, daß die Formulierung mathematischer Zusammenhänge in der Form wenn p, so q und in der Form wenn q nicht, so p nicht (und eventuell in weiteren Formen) dazu beiträgt, auch den Inhalt der jeweiligen Sätze allseitiger zu erfassen.

Ein wichtiger Satz für reelle Zahlen lautet:

Wenn ein Produkt zweier Faktoren 0 ist, so ist mindestens einer der Faktoren 0.

Ist nun in einem bestimmten Zusammenhang das Produkt $a \cdot b$ gleich 0, und einer der Faktoren ist von 0 verschieden, so muß der andere Faktor 0 sein. Diese Überlegung kommt in folgender Äquivalenz zum Ausdruck:

$$p \rightarrow (q \vee r) \text{ äqu } (p \wedge \sim q) \rightarrow r \qquad (4)$$

Das wird deutlich, wenn wir für p $a \cdot b = 0$, für q $a = 0$ und für r $b = 0$ setzen. Bei dieser Interpretation besagt nämlich der auf der linken Seite von (4) stehende Ausdruck

Wenn $a \cdot b = 0$, so $a = 0$ oder $b = 0$,

während der rechts stehende Ausdruck die dazu logisch gleichwertige Aussage

Wenn $a \cdot b = 0$ und $a \neq 0$, so $b = 0$

darstellt.

Beide Ausdrucksweisen desselben Sachverhaltes sollten im Unterricht benutzt werden.

Als letztes Beispiel einer aussagenlogischen Identität sei die sogenannte Prämissenvereinigung angeführt. Der zugehörige Ausdruck lautet:

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ äqu } (p \wedge q) \rightarrow r \tag{5}$$

Wir betrachten dazu die bekannte hinreichende Bedingung für die Existenz eines relativen Extremwertes einer differenzierbaren Funktion $f(x)$. Diese Bedingung läßt sich in folgender Weise formulieren:

> Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, so folgt aus $f''(x_0) \neq 0$, daß x_0 eine Extremwertstelle von $f(x)$ ist.

Diese Aussage hat die Struktur des auf der linken Seite von (5) stehenden Ausdrucks, nämlich $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. Eine andere Formulierung der hinreichenden Bedingung erhält man, wenn man die beiden Voraussetzungen nach (5) zu einer Konjunktion zusammenfaßt, z.B.:

> Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ gilt, so ist x_0 eine Extremwertstelle von $f(x)$.

Man findet im Unterricht auch Formulierungen, die eigentlich eine Implikation zum Inhalt haben, ohne daß dies explizit ausgedrückt wird. Man überlege sich z.B., daß auch der Satz

> Eine gerade Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, ist durch 6 teilbar

die Struktur $(p \wedge q) \rightarrow r$ besitzt. Der Leser versuche einmal selbst, den Satz zu einem logisch äquivalenten umzuformen, der die Struktur $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ hat.

Wir möchten nun auf einen weitverbreiteten Fehler aufmerksam machen, der seinen Ursprung in unserer Umgangssprache hat, häufig aber auch im Mathematikunterricht anzutreffen ist.

Zwei Schüler A und B, die in verschiedene Schulen gehen, unterhalten sich über das Ergebnis der Abschlußprüfungen. A sagt zu B: "Bei uns haben alle Prüflinge die Prüfung bestanden. Wie war es bei Euch?" B antwortet: "Alle haben die Prüfung bei uns nicht bestanden." Wahrscheinlich versteht A auf Grund des Tonfalles, was B meint. Die Antwort von B besagt aber genau genommen ganz etwas anderes, als B eigentlich zum Ausdruck bringen will. B meint in Wirklichkeit: "Nicht alle haben die Prüfung bestanden", d.h., es gibt Schüler, die die Prüfung nicht bestanden haben. Hätte B mit seiner ersten Formulierung wirklich recht, so würde das heißen, daß alle Schüler die Prüfung nicht bestanden hätten, d.h., es gäbe keinen Schüler, der sie bestanden hätte.

Das Beispiel zeigt, daß es keineswegs gleichgültig ist, wo in einer Allaussage eine Verneinung steht. In der Umgangssprache kann man in dieser Beziehung fehlerhafte Ausdrucksweisen sehr häufig hören. Sie führen dort in der Regel nicht zu Mißverständnissen, da durch eine bestimmte Art der Betonung beim Zuhörer das richtige Sinnverständnis erzielt wird. Problematischer ist es schon bei schriftlichen Äußerungen. In der Mathematik aber werden Unkorrektheiten in der Stellung einer Verneinung zu ausgesprochenen Fehlern. Die Ausdrücke $\sim \forall x\ H(x)$ und $\forall x \sim H(x)$ sind eben nicht logisch äquivalent. Als Beispiele seien noch zwei Schülerfehler aus Unterrichtsgesprächen angeführt:

(I) Alle quadratischen Bestimmungsgleichungen besitzen nicht reelle Lösungen.
(Richtig: Nicht alle quadratischen Bestimmungsgleichungen besitzen reelle Lösungen.)

(II) Alle flächengleichen Dreiecke sind nicht untereinander kongruent.
(Richtig: Nicht alle flächengleichen Dreiecke sind untereinander kongruent.)

Auch hierbei wurde von den Schülern durch eine bestimmte Art der Betonung deutlich gemacht, daß sie das Richtige meinten. Ihre Redeweise war aber objektiv falsch. Es ist die Aufgabe des Lehrers, in diesen und ähnlichen Fällen auf die Fehler aufmerksam zu machen und sie zu berichtigen.
Im folgenden wollen wir noch einige Beispiele betrachten, in denen es nicht um die Vermeidung von Fehlern geht, sondern um logische Schulung an Hand richtiger Ausdrucksweisen. Wie bereits mehrfach bemerkt, kann das Erfassen ein und desselben Sachverhaltes durch verschiedene, aber logisch äquivalente Ausdrucksweisen auch zu einem gründlicheren Verständnis der jeweiligen mathematischen Zusammenhänge beitragen.
Wir beginnen mit der Äquivalenz (6)

$$\exists x\ H(x) \quad \text{äqu} \quad \sim \forall x \sim H(x)$$

Die Aussage Die Funktion $y = x^3 - 10x^2 - x + 10$ besitzt wenigstens eine Nullstelle kann in der Form $\exists x\, H(x)$ dargestellt werden.

$$\exists x(x^3 - 10\, x^2 - x - 10 = 0),$$

d.h.:

Es gibt wenigstens ein x, so daß $x^3 - 10\, x^2 - x + 10 = 0$ ist.

Logisch äquivalent kann man dafür auch sagen:

$$\sim \forall x(x^3 - 10\, x^2 - x + 10 \neq 0),$$

d.h.:

Es ist nicht so, daß für jedes x der Term $x^3 - 10\, x^2 - x + 10$ verschieden von 0 ist.

Diese Umformung mag uns so selbstverständlich erscheinen, daß man kaum die Notwendigkeit einsieht, darüber zu sprechen. Wenn auch unsere Schüler zu dieser Ansicht gelangen, haben wir einen kleinen Beitrag für ihre logische Schulung geleistet.

Ähnlich steht es mit der Äquivalenz (7)

$$\forall x\, H(x) \quad \text{äqu} \quad \sim \exists x \sim H(x)$$

Wir betrachten dazu die Aussage

Für jedes x gilt: Wenn $x > 1$ ist, so ist auch $x^2 > 1$.

In formalisierter Form lautet sie: $\forall x(x > 1 \rightarrow x^2 > 1)$.

Ihre Umformung entsprechend der angegebenen Äquivalenz führt zunächst auf $\sim \exists x \sim (x > 1 \rightarrow x^2 > 1)$, d.h.,

Es gibt kein x, für das nicht gilt: Wenn $x > 1$, so ist $x^2 > 1$.

Diese Redeweise ist offensichtlich etwas holprig. Eine bessere Form ergibt sich, wenn wir den Teil $\sim (x > 1 \rightarrow x^2 > 1)$ auf Grund aussagenlogischer Äquivalenzen weiter umformen in

$$\sim (x > 1 \rightarrow x^2 > 1) \text{ äqu } \sim (\sim x > 1 \vee x^2 > 1) \text{ äqu } (x > 1 \wedge \sim x^2 > 1)$$

[Das entspricht den Umformungen $\sim (p \rightarrow q)$ äqu $\sim (\sim p \vee q)$ äqu $(p \wedge \sim q)$, wobei noch benutzt wurde, daß $\sim \sim p$ äqu p ist.]

Ersetzen wir in dem zuletzt gewonnenen Ausdruck noch $\sim x^2 > 1$ durch $x^2 \leqq 1$, so lautet die ursprüngliche Aussage nun: $\sim \exists x(x > 1 \wedge x^2 \leqq 1)$, d.h.,

Es gibt kein x, für das $x > 1$ und $x^2 \leqq 1$ gilt.

Im Unterricht wird man die hier angegebenen Zwischenschritte sicher weglassen. Wir halten es aber für nützlich, den Sachverhalt selbst in beiden Formen auszudrücken, etwa: Für jedes x gilt: Wenn $x > 1$, so ist auch $x^2 > 1$; d.h., es gibt keine Zahl, die größer als 1 und deren Quadrat kleiner oder gleich 1 ist.

Betrachten wir nun die Äquivalenz (8)

$$\sim \exists x\ H(x) \quad \text{äqu} \quad \forall x \sim H(x)$$

Als Beispiel soll uns die Funktion $y = 2^x$ dienen. Diese Funktion besitzt bekanntlich keine Nullstelle. Man kann das formal wie folgt ausdrücken: $\sim \exists x(2^x = 0)$. Umgeformt wird daraus: $\forall x(2^x \neq 0)$, d.h., für jeden Wert von x ist der Term 2^x von Null verschieden.

Ein anderes Beispiel sei die gebrochen-rationale Funktion $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. Bei der Untersuchung auf das Vorhandensein von Polstellen stellt man fest, daß der Nenner $x^2 + 1$ für jeden Wert von x von 0 verschieden ist, d.h. $\forall x(x^2 + 1 \neq 0)$.

Diese Erkenntnis formuliert man dann oft folgendermaßen: Es gibt keine Polstellen, d.h. keine Werte von x, für die der Nenner 0 wird. Dieser Formulierung entspricht aber gerade die Form:

$$\sim \exists x(x^2 + 1 = 0).$$

Es sei nun noch die Äquivalenz (9)

$$\sim \forall x\ H(x) \quad \text{äqu} \quad \exists x \sim H(x)$$

durch ein Beispiel illustriert. Wenn wir sagen, daß für das Potenzieren das kommutative Gesetz nicht gilt, so bedeutet das genau genommen $\sim \forall a \forall b\ (a^b = b^a)$, d.h., nicht für jedes a und für jedes b gilt, daß $a^b = b^a$ ist. Umgeformt wird daraus:

$$\sim \forall a \forall b\ (a^b = b^a) \text{ äqu } \exists a \sim \forall b\ (a^b = b^a) \text{ äqu } \exists a \exists b\ (a^b \neq b^a).$$

Der letzte Ausdruck besagt: Es gibt (mindestens) eine Zahl a und eine Zahl b, für die $a^b \neq b^a$ gilt.

Wir möchten in diesem Zusammenhang noch auf etwas aufmerksam machen. In mathematischen Lehrbüchern und auch im Unterricht ist es häufig üblich, den Alloperator nicht explizit anzugeben. So ist beispielsweise die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ eigentlich so zu verstehen: Für jedes a und für jedes b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$. Es wäre deshalb falsch, die Nichtgültigkeit des kommutativen Gesetzes für das Potenzieren einfach durch $a^b \neq b^a$ auszudrücken. In der üblichen Lesart würde das nämlich bedeuten: Für jedes a und für jedes b gilt: $a^b \neq b^a$. Das ist aber eine falsche Aussage. Sie gilt sicher nicht, wenn a = b ist, und ist auch für a = 2 und b = 4 nicht richtig.

Wir möchten zum Schluß noch einmal darauf hinweisen, daß unsere Darlegungen natürlich nur eine Möglichkeit erfassen, die Schüler logisch zu schulen. Um einen wirklichen Erfolg zu erzielen, müssen auch die anderen Möglichkeiten ausgenutzt werden, die sich beispielsweise bei der Arbeit an Definitionen, beim Beweisen von Sätzen, beim Systematisieren der Kenntnisse usw. ergeben.

Schließlich sei nochmals betont, daß der von uns hier benutzte formale Apparat für die logische Schulung nicht das Entscheidende ist. Man wird im Unterricht auf das meiste davon - z.B. auf die logischen Zeichen - verzichten, weil man dort nicht über die logischen Gesetze, Verknüpfungen usw. zu sprechen, sondern mit Hilfe dieser logischen Gesetze richtige Mathematik zu treiben hat.

(Bock, H. u. Walsch, W.: Möglichkeiten zur logischen Schulung im Mathematikunterricht, In: Mathematik in der Schule 2/1964, Heft 6 u. Heft 8, S. 416 ff. u. S. 596 ff; von den Autoren gekürzt)