Zur Mathematik in Bibel und Talmud.

Von Alfred Loewy s. A.[1] (Freiburg i. B.).

Die Bibel, die nur religiöse Belehrung bezweckt, ist keine Quelle mathematischer Erkenntnis. Der Zahlbegriff der Bibel ist ein bloß rhetorischer[2] ohne Rücksicht auf ökonomische Schreib- und bequeme Rechnungsweise. Doch findet sich die stenographische Zahlbezeichnung schon Jes 10_{19} mit den Worten angedeutet: „Die übrig gebliebenen Bäume seines Waldes werden wenig an Zahl sein, und ein kleiner Knabe kann sie hinschreiben.“ Tatsächlich wäre es nicht zu verstehen, daß hier an die sonst in der Bibel übliche rhetorische Zahlbezeichnung zu denken ist, weil in Buchstaben עשר nicht einfacher als אלף oder רבבה niedergeschrieben wird, während für ein Kind die stenographische Bezeichnung bei Belegung der Buchstaben des Alphabets mit Zahlwerten, falls es sich um eine kleinere Zahl statt um eine größere handelt, leichter ist, z. B. verlangt das Schreiben des hebräischen Buchstabens י für zehn keine besondere Überlegung, während für dasjenige von höheren Zahlen die 22 Buchstaben des Alphabets nicht mehr ausreichen, sondern neue Kombinationen oder Symbole erforderlich werden[3].

Die berühmte Bibelstelle vom ehernen Meer im Tempel des Königs Salomo I Kg 7_{23}; II Chr 4_2: „Und er machte das Meer, gegossen, zehn Ellen von einem Rande bis zum andern, gerundet ringsum, und fünf Ellen in der Höhe, und ein Faden von dreißig Ellen umfing es ringsum“ möchte ich, wie ich schon an

---

[1] Der hochverdiente Verfasser ist leider, kurz nach Absendung dieses Aufsatzes, der Wissenschaft und dem Judentum entrissen worden. Ehre seinem Andenken! Die Schriftleitung.

[2] Vgl. A. Loewy, Über die Zahlbezeichnung in der jüdischen Literatur, Jeschurun, XVII. Jahrgang, S. 202, Berlin 1930, umgearbeitet in Scripta mathematica (s. u.) Vgl. weiter S. Gandz, Hebrew numerals, Proceedings of American academy for Jewish research, vol. IV, 1932—1933, p. 53.

[3] Die hier vorgetragene Auffassung entspricht der durch Rabh übermittelten talmudischen Überlieferung (Talmud babli, Synhedrin, fol. 95 b), daß es sich um die Zahl zehn, jod, handelt, also um den am einfachsten zu schreibenden Buchstaben des hebräischen Alphabets.

anderer Stelle[4] ausgeführt habe, nicht als eine Angabe über das Verhältnis des Kreisumfanges zu seinem Durchmesser ansehen. Es handelt sich hier nicht um einen Näherungswert der Ludolphschen Zahl $\pi = 3$, sondern um ein zur Zeit des Tempelbaus für König Salomo bereits bekanntes mathematisches Experiment, wonach sich dem Kreis ein reguläres Sechseck mit der Seitenlänge gleich dem Halbmesser des Kreises einbeschreiben läßt; die Sechsteilung des Kreises wurde auch von den alten Babyloniern und Ägyptern bei sechsspeichigen Wagenrädern statt unserer vierspeichigen mit senkrechten Achsen verwendet. Da der Kreisbogen ersichtlich größer ist als die ihm zugehörige Sehne, ergibt sich aus der erwähnten anschaulich ableitbaren Tatsache, dem Kreis ein reguläres Sechseck mit der Seite gleich dem Halbmesser des Kreises einzubeschreiben, daß der Kreisumfang größer ist als sechs Halbmesser oder drei Durchmesser des Kreises. Wenn die Mischna (Erubin I 5) den Satz prägt: „Was im Umfang drei Handbreiten hat, besitzt einen Durchmesser von einer Handbreite" und Rabbi Jochanan im Talmud (14a) auf die Frage: „Woher dies?" als Antwort die Bibelstelle vom ehernen Meer anführt, so ist dieser Bescheid für eine experimentelle Mathematik und für einen nicht zu großen Kreisradius, was vielleicht durch Verwendung der Handbreite statt der sechsfach größeren Elle als Maß von der Mischna angedeutet wird, eine genügende Begründung. Der Feldmesser Heron (— 100) und der Architekt Vitruv (— 15) verwenden für praktische Zwecke ebenfalls den Näherungswert 3.

So wenig wie die Bibel wollen Mischna und Talmud der mathematischen Wissenschaft dienen. Alle im Talmud enthaltenen mathematischen Tatsachen lassen sich empirisch, also aus der Beobachtung allein, ableiten und erfordern nicht logisch-abstrakte Überlegungen, wie sie der von den Griechen geschaffenen Mathematik zugrunde liegen. Vermutlich ist die Mathematik im Sinne von Euklid und Archimedes, um ihre größten Repräsentanten im Altertum zu nennen, deswegen aus dem talmudischen System ausgeschlossen worden, weil die

[4] Die Arbeit wird in den Scripta mathematica, Yeshiva College, New York erscheinen.

Talmudgelehrten das Methodische, den Zwang rein logischer Beweisführung, was die Mathematik zur Wissenschaft erhebt, nicht weitergehend kannten oder nicht als Notwendigkeit empfanden oder weil von ihnen die für diese abstrakte Mathematik aufzuwendende Zeit als nicht im Verhältnis zu ihrer Anwendungsfähigkeit stehend angesehen wurde. War doch die Geometrie zu jener Zeit im wesentlichen nur reine Verstandesübung; noch waren nicht die Kegelschnitte als Planetenbahnen erkannt und noch existierte keine Formelsprache zur Beschreibung des Naturgeschehens. Die Anschauung, daß man nicht alles treiben kann und daß sich in der Beschränkung der Meister zeigt, war, wie ich glaube, der Grund dafür, daß die Verfasser des Talmuds, die sich infolge ihrer hingebungsvollen Begeisterung für das Religionsgesetz und für die Ethik möglichst auf die „vier Ellen der Halachah" zu beschränken suchten, der logischen Mathematik aus dem Wege gingen. Daß sie aber von Mathematik mehr gewußt haben, als im Talmud niedergelegt wurde, ist die Ansicht von Zuckermann[5]. Ob und wie weit es unter den Talmudgelehrten Persönlichkeiten gab, die in das Wesen griechischer Mathematik wirklich tiefer eingedrungen waren, vermag ich nicht zu sagen; von Feldmessern, bei denen eine Befruchtung durch Heronische Gedanken anzunehmen ist, spricht der Talmud (babli, Erubin 56b). Ein Beispiel dafür, wie weit man im Interesse seiner Jünger mit der Ablehnung von Gedanken, die einem selbst auf das innigste vertraut sind, gehen kann, bilden die Principia philosophiae naturalis des gewaltigen Naturforschers und Mathematikers Newton. Obgleich zur Herleitung der in ihnen enthaltenen Gesetze der Planetenbewegung die von Newton stammende Fluxions- oder Differentialrechnung die geeignetste Methode war, hat er diese, wohl um dem Leser nicht die Schwierigkeit zuzumuten, sich in eine neue Disziplin einzuarbeiten, und vielleicht auch in Verehrung der alten griechischen Mathematik, vermieden. Beständiges Zusammentreffen mit griechisch sprechenden Diasporajuden — er-

---

[5] Vgl. B. Zuckermann, Das Mathematische im Talmud, Beleuchtung und Erläuterung der Talmudstellen mathematischen Inhalts, Breslau 1878, S. 23 und 30.

zählt doch z. B. Philo, daß aus vielen tausenden von Städten viele Tausende zu jedem Wallfahrtsfeste nach Jerusalem strömten und auch er dort gewesen sei (vgl. Bergmann in Judaica, Festschrift zu Hermann Cohens 70. Geburtstage, Berlin 1912, S. 147) — macht es höchst unwahrscheinlich, daß zu den Talmudgelehrten trotz ihrer Exklusivität keine Kunde von griechisch-abstrakter Mathematik, wie diese in Alexandria getrieben wurde, gelangt ist. Daher möchte ich der Zuckermannschen Anschauung nur beipflichten und als Beleg hierfür noch auf die ausschließliche Verwendung des approximativen Wertes $\pi = 3$ im talmudischen Schrifttum statt des besseren archimedischen $3^1/_7$ hinweisen, obgleich sich letzterer[6] bereits in der nach der Datierung von Gandz[7] aus der Zeit vor der Mischna stammenden Mischnat ha middot (+ 150) findet. Der Wert $3^1/_7$ wurde wohl auch deshalb in Mischna und Gemara nicht benützt, weil er sich weder aus einer Bibelstelle folgern, noch experimentell herleiten läßt, sondern seine Berechnung weitergehende mathematische Kenntnisse erfordert. Noch im deutschen Mittelalter, im vierzehnten Jahrhundert, bemerkt Albert von Sachsen, der erste Rektor der Wiener Universität, in seiner Schrift über die Kreisquadratur[8] zunächst irrig, daß π genau $3^1/_7$ sei, und fügt bei, daß es einen Beweis dafür gebe, der aber schwierig sei. Ein mit dem talmudischen Schrifttum so vertrauter Mann wie der Wilnaer Gaon, Eliah Wilna (1720—1797)[9], begnügt sich und

[6] Auf Grund einer mir nach Abschluß dieses Aufsatzes von Herrn Professor Dr. Michael Guttmann in Budapest freundlichst gemachten Bemerkung war der Redaktion des Talmuds bekannt, daß π den Wert 3 um „etwas" übertrifft, was aus dem Worte maschehu = etwas im babylonischen Talmud (Erubin 14 a) hervorgeht.

[7] S. Gandz, The Mishnat ha middot, the first hebrew geometry of about 150 c. e. and the geometry of Muhammad ibn Musa Al-Khowarizmi, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung A, Quellen, Bd. 2, S. 48, Berlin 1932.

[8] Vgl. H. Suter, Der Tractatus „De quadratura circuli" des Albertus de Saxonia, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXIX. Jahrgang, historisch-literarische Abteilung, S. 90, Leipzig 1884.

[9] Vgl. E. Fink, Eliah Wilna und sein elementar-geometrisches Compendium, Festschrift zur 50jährigen Jubiläumsfeier der Unterrichtsanstalten der israelitischen Religionsgesellschaft zu Frankfurt a. M., S. 8 und 9, Frankfurt a. M. 1903.

vermag wohl auch mit seinen mathematischen Kenntnissen nicht mehr zu beweisen, als daß der Umfang des Kreises angenähert dreimal so groß wie der Durchmesser ist; er setzt hinzu, man sagt, er soll ungefähr $\frac{22}{7}$ sein.

Wenn schon die Resultate des ältesten jüdischen mathematischen Werkes, der Mischnat ha middot, die sich vornehmlich an Feldmesser wendet und nur praktischem Gebrauch dient, vom Talmud ausgeschlossen werden, um wieviel mehr muß dies bei der wissenschaftlichen Geometrie, die ihre Sätze nach dem Muster von Euklids Elementen möglichst logisch aus einer geringen Anzahl von Postulaten abzuleiten versucht, der Fall sein. Das im Talmud sich findende Wort Gematria bedeutet trotz seiner äußeren Ähnlichkeit durchaus nicht Geometrie und ist von den alten Kommentatoren richtig mit cheschbon (Rechnung), dem Operieren mit Zahlen, in Zusammenhang gebracht worden. Nach der Erklärung von M. Sachs[10] stammt Gematria wahrscheinlich vom griechischen Wort grammateia und wird ausnahmslos bei zahlenmäßiger Behandlung verwendet, wie der Buchstabe (griechisch gramma) im Hebräischen zur Zahlbezeichnung dient. Am charakteristischsten ist die Stelle im jerusalemischen Talmud, Terumoth Kap. V, Abschn. 1: „Gleich dem Stab des Blinden tasteten wir irrend herum, bis wir es durch mathematische Rechnung (cheschbon gematria) auffanden", eine Stelle, bei der es sich um eine rein numerische Rechnung handelt. Wenn die Mischna in Abot III, 19 von „tekufoth

[10] M. Sachs, Beiträge zur Sprach- und Altertumsforschung, II, Berlin 1854, S. 74; vgl. ferner W. Bacher, Die älteste Terminologie der jüdischen Schriftauslegung, S. 127, Leipzig 1899 sowie derselbe, Die exegetische Terminologie der jüdischen Traditionsliteratur, Leipzig 1905, I 127; II 27 und weiter S. Gandz in der in Anmerkung [2] zitierten Abhandlung, S. 87. Gematria bedeutet ursprünglich eine Buchstabenvertauschung (Permutation), was mit dem griechischen Wort gramma in Beziehung steht, und, da im Hebräischen die Zahlen mit Buchstaben bezeichnet werden, ist das Wort Gematria dann allgemein für numerisches Rechnen in Gebrauch gekommen. Hingegen lehnte die griechische Geometrie das Zahlenrechnen möglichst ab, so daß man nicht daran denken kann, in Gematria das griechische Wort Geometrie wiederzufinden und es gerade für das von den Griechen in der Geometrie möglichst abgelehnte numerische Rechnen verwendet zu sehen.

wegematrioth" spricht, so meint sie den Wechsel der Jahreszeiten und seine im Sinne des Talmuds (vgl. Erubin 56) behandelte numerische Berechnung; diese beiden Gegenstände werden als Zukost zur Weisheit erklärt. Es ist hier nicht von Geometrie die Rede, sondern von zwei in Zusammenhang stehenden Gebieten, ebenso wie im ersten Teil der Mischna sich das Vogelopfer bei Frauen nach ihrer Entbindung und der Wiedereintritt der Menstruation in Beziehung befinden. Die Ansicht Bachers[11], daß in der zitierten Mischna Abot III, 19 wahrscheinlich ausnahmsweise gematrioth für Geometrie gebraucht wird, scheint mir demnach nicht zutreffend, da Geometrie gar nicht in den Gedankenbereich der Talmudisten gehört, wohl aber die tekufoth und das Operieren mit Zahlen Gegenstände ihrer Beschäftigung waren. Wenn auch Hoffmann[12] bei seiner Übersetzung der angeführten Mischnastelle ebenfalls gematrioth mit Geometrie wiedergibt und auf die vielseitigen Kenntnisse des Autors der betreffenden Mischna Rabbi Eleasar ben Chisma in den mathematischen Wissenschaften hinweist, so darf ich demgegenüber bemerken, daß Rabbi Eleasar nachgerühmt wird, er habe die Tropfen des Meeres zählen können (Horajot 10a), das heißt: er war in der Lehre von der Zahl besonders bewandert, daß also gerade gematrioth im Sinne von Operieren mit Zahlen dem Kreise der wisenschaftlichen Betätigung des Rabbi Eleasar entsprechen würde.

Den Höhepunkt mathematischer Resultate im Talmud bilden der mehrfach verwendete Satz (Erubin 57a): „Eine Elle im Quadrat hat eine Elle und zwei Fünftel in der Diagonale"[13]

---

[11] W. Bacher, Die älteste Terminologie usw., Leipzig 1899, S. 127.

[12] Mischnaiot, hebräischer Text mit deutscher Übersetzung, Teil IV, Seder nesikin von D. Hoffmann, Berlin 1898, S. 344.

[13] Der numerische Wert $^7/_5$, der bei der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ auftritt, geht vielleicht schon auf die Pythagoräer zurück und findet sich ausdrücklich bei Theon von Smyrna (+ 120). Vgl. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 1, zweite Auflage, S. 408, Leipzig 1894, J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. 2, dritte Auflage, S. 82, Berlin u. Leipzig 1933, weiter etwa Fr. Hultsch, Bibliotheca mathematica, Bd. 1, dritte Folge, S. 8, Leipzig 1900. Durch Herrn Professor Dr. Michael Guttmann in Budapest werde ich nachträglich

sowie Angaben über Umfang und Flächeninhalt des Kreises. Die benützten Theoreme lassen sich, wie ich zeigen werde, durch rein experimentelle Mathematik herleiten. Die Bestimmung der Diagonale eines Quadrats erfordert den pythagoreischen Lehrsatz; jedoch wird er hier nicht im Falle eines beliebigen rechtwinkligen, sondern nur eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks benötigt. Dieser Spezialfall läßt sich ohne jegliche mathematische Vorkenntnisse folgendermaßen erledigen: Hat man ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C und den gleichen Katheten $CA = CB$, so klappe man dieses um die Kathete CA und ebenso um die Kathete CB um; hierdurch erhält man zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke ACA' und BCB' sowie das mit ihnen ebenfalls kongruente Dreieck $A'CB'$. Die um den Punkt C gelegenen vier kongruenten Dreiecke bilden das Quadrat $ABA'B'$, das infolge seiner vier kongruenten Bestandteile gleich viermal dem Dreieck ABC ist. Klappt man das Dreieck ABC um die Hypotenuse AB um, so erhält man ein zu ABC kongruentes Dreieck ABC', und die aus den zwei kongruenten Dreiecken bestehende Figur $ACBC'$ ist ein Quadrat, das infolge seiner zwei kongruenten Bestandteile gleich zweimal dem Dreieck ABC ist. Da aber das Quadrat $ABA'B'$ gleich viermal dem Dreieck ABC war, so ist das Quadrat $ABA'B'$, das heißt

auf Tossafoth zu Sukka 8b im babylonischen Talmud aufmerksam gemacht, wo sich folgende anschauliche Herleitung des Zahlenwertes $^7/_5$ für die Diagonale des Quadrates von der Seitenlänge 1 befindet: Man konstruiere ein Quadrat von der Seitenlänge 10, also dem Flächeninhalt 100. Durch Verbinden der Mittelpunkte der vier Seiten des Quadrats erhält man ein neues Quadrat und vier kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke. Klappt man jedes dieser vier Dreiecke um seine Hypotenuse um, so bedecken sie das eingezeichnete Quadrat vollkommen. Dieses hat daher den halben Flächeninhalt des Ausgangsquadrates und mithin die Seitenlänge $\sqrt{50}$ Die Quadratseite mit der Länge $\sqrt{50}$ ist aber auch Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit einer Kathete, die das Fünffache der Einheit beträgt, und hat daher die Länge $5\sqrt{2}$. Da ein Quadrat mit der Seitenlänge 7 den Flächeninhalt 49 hat und dieser Wert sich von 50 nur um 1 unterscheidet, so ist $\sqrt{50}$ angenähert gleich 7 und demnach 7 angenähert gleich $5\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}$ angenähert gleich $^7/_5$. Die Tossafoth sind im zwölften und dreizehnten Jahrhundert verfaßt; ob diese anschauliche Herleitung des Wertes $^7/_5$ älterer Quelle entstammt, ist mir nicht bekannt.

das Hypotenusenquadrat über A B, gleich zweimal dem Kathetenquadrat über A C. Mithin ist der pythagoreische Lehrsatz für das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck experimentell bewiesen, was sich nicht so für das ungleichschenklig rechtwinklige Dreieck durchführen läßt.

Zur weiteren Berechnung der Diagonale eines Quadrats A B C D von der Seitenlänge A B $= 1$, also der Größe $\sqrt{2}$ in unserer Bezeichnungsweise, ist die Seitenlänge eines Quadrats zu bestimmen, das den doppelten Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats A B C D besitzt. Der älteste talmudische Näherungswert von $\sqrt{2}$ ist $1^1/_3$, wovon die Mischna in Ohalot XII, 7[14], vermutlich einem der frühesten Bestandteile der Mischna, Gebrauch macht. Dieser Näherungswert läßt sich auch experimentell leicht finden. Einem primitiven Volk, bei dem sechs eine Einheit bildete, (Einteilung der Elle in sechs Handbreiten) lag es nahe, ein zu dem gegebenen Quadrat A B C D zweites kongruentes Quadrat in sechs untereinander kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen 1 und $^1/_6$ zu teilen. Legt man an die vier Seiten des ersten Quadrats vier von diesen Rechtecken an, so erhält man eine Figur, bei der die äußersten parallelen Seiten um $1^2/_6 = 1^1/_3$ voneinander abstehen, und um diese Figur zu vervollständigen, braucht man nur an den vier Ecken A B C D des ersten Quadrats noch vier Quadrate von der Seitenlänge $^1/_6$ anzusetzen, wofür das fünfte Rechteck zur Verfügung steht. Von dem zweiten Quadrat bleiben demnach übrig das sechste Rechteck mit den Seitenlängen 1 und $^1/_6$ und von dem fünften

---

[14] Vgl. B. Zuckermann, a. a. O. S. 9 und 11 sowie Mischnaiot, hebräischer Text mit deutscher Übersetzung, Teil VI, toharot von D. Hoffmann, Wiesbaden 1933, S. 209, Anmerkung 71. — Die Zahl $^4/_3$ ergibt sich für $a = 1$ und $r = 1$ aus dem angenäherten Werte $a + \frac{r}{2a+1}$ für $\sqrt{a^2 + r}$, einer Näherungsformel, die vermutlich Heron schon kannte und deren sich später besonders arabische Mathematiker (vgl. G. Wertheim, Die Arithmetik des Elia Misrachi, zweite Auflage, S. 33, Anmerkung 2, Braunschweig 1896) bedienten; der Bruch $^4/_3$ als eine Approximation für $\sqrt{2}$ läßt sich auch dem Näherungswert $^3/_2$ mittels der Proportion $1 : {}^4/_3 = {}^3/_2 : 2$ entnehmen. Wie ich glaube, sind die numerischen Werte $^4/_3$ und $^7/_5$ aber nicht der griechischen Wissenschaft entlehnt, sondern entstammen der babylonischen Gedankenwelt.

Rechteck ein kleineres Rechteck mit den Seitenlängen $^1/_6$ und $^2/_6$. Das erste Quadrat ist in ein Quadrat verwandelt von der Seitenlänge $1+{}^2/_6=1\,^1/_3$, die gesuchte Diagonale hat mithin einen größeren Wert als $1\,^1/_3$, und dabei wird das Quadrat des begangenen Fehlers gemessen durch den Flächeninhalt der restierenden zwei Rechtecke $1 \cdot {}^1/_6 + {}^1/_6 \cdot {}^2/_6 = {}^2/_9$.

In späterer Zeit hat man statt der Sechsteilung die Fünfteilung verwendet. Von den fünf Rechtecken mit den Seitenlängen 1 und $^1/_5$ des zweiten Quadrats lege man vier an die Seiten des ersten Quadrats an und weiter trenne man zur quadratischen Ergänzung des ursprünglichen Quadrats A B C D von dem fünften Rechteck vier Quadrate mit jeweiliger Seitenlänge $^1/_5$ ab, so daß das ursprüngliche Quadrat in ein Quadrat von der Seitenlänge $1\,^2/_5$ symmetrisch eingebettet wird; der restierende Teil des fünften Rechtecks aus dem zweiten Quadrat ist dann ein Quadrat von der Seitenlänge $^1/_5$. Als Näherungswert für die Diagonale des Quadrats erhält man demnach statt des früheren $1\,^1/_3$ die jetzige Quadratseite mit $1\,^2/_5$ (entsprechend den im babylonischen Talmud befindlichen Angaben z. B. in Erubin 57a, Sukka 8a, Baba Bathra 101b[15], was ebenso wie $1\,^1/_3$ zu klein ist, und das Quadrat des begangenen Fehlers wird gemessen durch den Flächeninhalt des Quadrats mit der Seitenlänge $^1/_5$, also $^1/_{25} = 2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2$.

Es gibt in der talmudischen Literatur noch bessere Näherungswerte für die Diagonale des Quadrats. Teilt man nämlich das bei dem letzten Resultat restierende Quadrat mit der Seitenlänge $^1/_5$ in 30 Rechtecke mit den Seitenlängen $^1/_5$ und $^1/_5 \cdot {}^1/_{30}$, so lassen sich von diesen sieben zu Rechtecken mit den Seitenlängen $^7/_5$ und $^1/_5 \cdot {}^1/_{30}$ zusammensetzen. Durch Anfügen von vier solchen Rechtecken, das sind 28 Rechtecke aus dem Quadrat mit der Seitenlänge $^1/_5$, und durch Ergänzung in den Ecken mittels vierer Quadrate der Seitenlänge $^1/_5 \cdot {}^1/_{30}$ erhält man ein neues Quadrat mit der Seitenlänge $^7/_5 + 2 \cdot {}^1/_5 \cdot {}^1/_{30} = 1 + {}^2/_5 + {}^1/_{75}$; das kleine Quadrat mit der Seitenlänge $^1/_5$ behält noch einen Rest in einem Rechteck mit den Seitenlängen $^1/_5$ und

[15] Vgl. die obige Anmerkung 13.

$^1/_5 \cdot {}^1/_{30}$ sowie ein Rechteck mit den Seitenlängen $^1/_5 \cdot {}^{26}/_{30}$ und $^1/_5 \cdot {}^1/_{30}$. Der Wert der gesuchten Diagonale mit $1 + {}^2/_5 + {}^1/_{75} = 1^{31}/_{75}$ ist wie die voraufgehenden ebenfalls zu klein, und das Quadrat des begangenen Fehlers wird gemessen durch den Flächeninhalt der zwei restierenden Rechtecke mit $^1/_5 \cdot {}^1/_{150} + {}^{26}/_{150} \cdot {}^1/_{150} = \frac{56}{150 \cdot 150} = \frac{14}{75 \cdot 75} = \frac{14}{5625} = 2 - (1^{31}/_{75})^2$.

Die Hälfte von $141^1/_3$, der in der Mischna (Erubin, Kap. V, Abschn. 3) angegebenen Zahl, mit $70^2/_3$ gilt als Seitenlänge eines Quadrats mit einem Flächeninhalt von 5000 Quadratellen, dem Flächenraum des Vorhofes des Heiligtums (Exodus, Kap. 27, V. 18). Verwendet man für $\sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$ den angegebenen Wert $70^2/_3$, so erhält man hieraus durch Division mit 50 für $\sqrt{2}$ angenähert gleich $^7/_5 + {}^1/_{75}$. Die hier auftretende Zahl $70^2/_3$ wird in der Mischna (Erubin, Kap. II, Abschn. 5 und Kap. V, Abschn. 2) mit 70 und etwas (schirajim) bezeichnet. Der jerusalemische Talmud (Erubin 20b)[16] gibt $70^2/_3$ ausdrücklich an, und man kann der zu dieser Zahl dort gegebenen Erläuterung noch entnehmen, daß das Quadratwurzelziehen durch symmetrische Einbettung eines Quadrats in ein anderes, wie wir sie auch oben vornahmen, durchgeführt wurde.

Später kam man dazu, das Quadrat mit der Seitenlänge $^1/_5$ statt in 30 in 28 Rechtecke zu teilen und aus sieben von ihnen Rechtecke mit den Seitenlängen $^7/_5$ und $^1/_5 \cdot {}^1/_{28}$ zusammenzusetzen. Dann wird das Quadrat mit der Seitenlänge $^1/_5$ durch die 28 Rechtecke erschöpft, ohne daß man noch zur Ergänzung

---

16 Vgl. die Übersetzung dieser Stelle und ihre mit unseren geometrischen Interpretationen übereinstimmende ausführliche Erläuterung bei Z u c k e r m a n n, a. a. O. S. 6—9. Auch der berühmteste Talmudkommentator Raschi (11. Jahrhundert) bestimmt in seiner Erklärung zum babylonischen Talmud (Erubin 23a) $\sqrt{5000}$ angenähert $70^2/_3$, nämlich 70 Ellen und 4 Handbreiten (1 Elle = 6 Handbreiten), durch dieselbe anschauliche geometrische Herleitung, indem er ein Quadrat von der Seitenlänge 50 symmetrisch in ein Quadrat von der Seitenlänge 70 und dieses weiter symmetrisch in ein solches von der Seitenlänge $70^2/_3$ einbettet. Vgl. auch E. M a h l e r, Zur talmudischen Mathematik, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXI. Jahrgang, historisch-literarische Abteilung, S. 122, Leipzig 1886.

in den Ecken die vier Quadrate mit den Seitenlängen $^1/_5 \cdot {}^1/_{28}$ herausbringen kann. Ein Quadrat mit der Seitenlänge $1 + {}^2/_5 + 2 \cdot {}^1/_5 \cdot {}^1/_{28} = 1 + {}^2/_5 + {}^1/_{70} = 1^{29}/_{70}$ gibt für $\sqrt{2}$ einen zu großen Näherungswert, und das Quadrat des begangenen Fehlers wird gemessen durch den Flächeninhalt der vier Quadrate mit den Seitenlängen $^1/_5 \cdot {}^1/_{28}$, also $4({}^1/_{140})^2 = {}^1/_{4900} = (1^{29}/_{70})^2 - 2$. Der zu große Näherungswert $^{99}/_{70}$ kann des Maimonides (12. Jahrhundert) Erklärung zur Mischna (Erubin II 5) entnommen werden, wo er $\sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$ angenähert als $70^5/_7$ erhält[17], was durch Division mit 50 für $\sqrt{2}$ angenähert $1^2/_5 + {}^1/_{70}$ ergibt. Dieser Näherungswert für die Diagonale des Quadrats findet sich aber in der jüdischen Literatur bereits früher bei Abraham bar Chijja in seinem chibbur ha-meschicha weha-tischboreth[18]; dort ist dieser Wert aus $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ angenähert $14^1/_7$ oder durch Division mit 10 als $1^2/_5 + {}^1/_{70}$ für $\sqrt{2}$ zu entnehmen. Bei Leonardo Pisano, dem ersten abendländischen Mathematiker, der bekanntlich die durch Plato von Tivoli unter dem Titel liber embadorum[19] im Jahre 1116 beendete lateinische Übersetzung

[17] Vgl. Mischnaiot, hebräischer Text mit deutscher Übersetzung, Teil II, Ordnung moed von E. Baneth, Berlin 1927, S. 57, Anmerkung 23 sowie Mahler in der in Anmerkung 16 zitierten Abhandlung, S. 123.

[18] Michael Guttmann, Chibbur ha-meschicha weha-tischboreth, S. 3 und 112 in Schriften des Vereins Mekize nirdamim, Berlin 1913 sowie Abraam bar hiia, llibro de geometria, hibbur hameixiha wehatixboret, katalonische Übersetzung von J. Millàs I. Vallicrosa nach M. Guttmann, Biblioteca hebraico-catalana, volum 3, Barcelona 1931, S. 6 und 132; vgl. auch Fr. Vera, Historia de la matemática en España, Bd. 3, Madrid 1933, S. 249. Der Näherungswert $14^1/_7$ für $\sqrt{200}$ ergibt sich für $a = 14$ und $r = 4$ aus der Heron bekannten Approximation $a + \frac{r}{2a}$ für $\sqrt{a^2 + r}$, einer Formel, die vermutlich aber schon bei den Babyloniern (— 2000), in Gebrauch war (vgl. J. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. 2, dritte Auflage, S. 168 und 170, Berlin und Leipzig 1933). Über die Möglichkeit der Einordnung des Näherungswertes $^{99}/_{70}$ für $\sqrt{2}$ in die griechische Mathematik durch das Lösungspaar 99,70 der Fermatschen Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ vgl. F. Bosch, Über die quadratischen Irrationalitäten in der griechischen Mathematik, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 41, S. 60, Leipzig und Berlin 1932.

[19] Vgl. M. Curtze, Der liber embadorum des Abraham bar Chijja

des chibbur ha-meschicha weha-tischboreth sehr eingehend, zum Teil wörtlich für seine Practica geometriae (1220) benützte, findet sich ebenfalls der fragliche Näherungswert.

Nachdem voraufgehend alle talmudischen Resultate über die Diagonale eines Quadrats anschaulich hergeleitet sind, soll noch der Flächeninhalt des Kreises, von dessen Umfang als dem Dreifachen des Durchmessers bereits die Rede war, besprochen werden. Es handelt sich hier um den im babylonischen Talmud (Erubin 76b und Sukka 8a, b) befindlichen, im Namen der Talmudlehrer oder, wie manche sagen, der Richter von Cäsarea überlieferten Satz: „Der Kreis im Quadrat ist ein Viertel, das Quadrat im Kreise ist die Hälfte.“ Dieser Satz will besagen, daß, wenn man ein Quadrat hat und ihm durch Verbindung der Mittelpunkte seiner Seiten ein zweites Quadrat einbeschreibt, der Flächeninhalt des letzteren halb so groß ist wie der des ersteren. Diese Tatsache wird sofort anschaulich klar, indem man jedes der vier rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke, mit denen das erste Quadrat über das zweite hinausragt, um seine Hypotenuse umklappt; hierdurch wird offenbar das zweite Quadrat vollständig gedeckt und ist in vier kongruente rechtwinklige gleichschenklige Dreiecke eingeteilt, die sich rings um den Mittelpunkt des zweiten Quadrats lagern. Nachdem diese Überlegung gezeigt hat, daß das einbeschriebene Quadrat den halben Flächeninhalt des umschriebenen Quadrats besitzt, bietet sich dem naiven Menschen leicht die Vorstellung, daß der Kreis, der dem ersten Quadrat einbeschrieben und dem zweiten umschrieben ist, den Flächeninhalt der vier gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke, mit denen das erste Quadrat das zweite überragt, wohl halbieren dürfte, der Kreis also von dem ersten Quadrat den vierten Teil, während das zweite Quadrat von dem ersten die Hälfte fortnimmt, wie der dunkle Ausspruch der Gelehrten von Cäsarea zu erklären ist. Natürlich nimmt der Kreis von dem ersten Quadrat nur $\frac{4-\pi}{4}$ Teile fort, demnach bloß $^1/_4$ im Falle des talmudischen Nähe-

Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli in Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Heft 12, S. 34, Leipzig 1902.

rungswertes 3 für π. An den zwei zitierten Talmudstellen kommen aber nicht die Flächeninhalte, sondern ausschließlich die Umfänge der Figuren in Frage. Die Umfänge stellen sich auf das Vierfache des Kreisdurchmessers für das umschriebene Quadrat, auf π mal den Durchmesser für den Kreis und auf $\sqrt{2}$ oder angenähert $2^4/_5$ mal den Durchmesser für das einbeschriebene Quadrat, so daß der von den Gelehrten von Cäsarea stammende, für die Flächeninhalte der drei Figuren verwendbare Satz für die Umfänge der drei Figuren nicht als zutreffende Approximation angesehen werden kann. Dem Talmud war bekannt, daß für die Umfänge der fragliche Satz nicht richtig ist, wie aus den Schlußworten der Diskussion in Sukka (fol. 8b) hervorgeht: „Die Rabbanan von Cäsarea, und, wie manche sagen, die Richter von Cäsarea, sagten: Der Kreis im Quadrate ist um ein Viertel [kleiner], das Quadrat im Kreise ist um die Hälfte kleiner. Das ist aber nichts; wir sehen ja, daß es nicht soviel ist." Tatsächlich wird man $\frac{4 - 2^4/_5}{4} = \frac{3}{10}$ nicht durch $^1/_2$ ersetzen dürfen, und die im Talmud Rabbi Jochanan, der den wohl aus mnemotechnischen Gründen dunklen, kurzen Satz auf die Umfänge anwenden wollte, zuteil werdende Abweisung ist völlig berechtigt; mit Hilfe der Diagonale eines Quadrats, als was die Seite des zweiten einbeschriebenen Quadrats auffaßbar ist, läßt sich der Irrtum durch eine Zeichnung unmittelbar vor Augen führen[20].

Mein Schlußergebnis ist dieses: Der Talmud enthält nur für das Religionsgesetz und für die Praxis anwendungsfähige mathematische Sätze, die der Wahrnehmungsgeometrie entlehnt werden und die sich experimentell jedermann klarmachen lassen. Das Nichtbenützen der auch nur für die Praxis bestimmten Mischnat ha middot, deren Resultate aber den Einfluß griechisch-abstrakter Mathematik verraten, scheint in der Tatsache seinen Grund zu haben, daß man eben ohne fremde Wissenschaft, nur mit Anschaulichkeit und mit dem Bibelworte arbeiten wollte und daher die logisch-abstrakte Mathematik für

[20] Vgl. für diesen Abschnitt auch die Auseinandersetzungen bei Zuckermann, S. 46 ff. und 52 ff.

das talmudische System ablehnte. Der mit dem Geiste des Talmuds vertrauteste Erklärer Raschi wird daher, wie ich glaube, der Stellung des Talmuds zur Mathematik am gerechtesten, wenn er z. B. das Resultat $70^2/_3$ beim Ausziehen der Quadratwurzel aus 5000 in einer derartig anschaulich geometrischen Weise herleitet, daß diese auf jeden, der nur denken kann, ohne etwas von Mathematik zu wissen, überzeugend wirkt[21].

Als Beispiel für das Anschauungsvermögen der Talmudgelehrten möchte ich noch aus dem Traktat Kilajim des jerusalemischen Talmuds zwei Anordnungen von Beeten anführen, bei denen das biblische Mischungsverbot Lv 19_{19} von dem Nebeneinandersäen verschiedener Pflanzenarten nicht verletzt wird. Schneidet man aus einem Quadrat an seinen Ecken vier kongruente kleine Quadrate heraus, so erhält man vier kongruente Rechtecke, von denen sich ein jedes an eine Quadratseite anlehnt und die ein innerhalb des ersten Quadrats gelegenes kleineres Quadrat bestimmen. Durch Verbindung der Mittelpunkte der Seiten des kleineren Quadrats ergibt sich ein halb so großes umgestülptes Quadrat. Die nur in je einem Punkte aneinandergrenzenden fünf Flächen, nämlich die vier Rechtecke und das umgestülpte Quadrat, lassen sich mit fünf Pflanzenarten besäen, ohne daß das Mischungsverbot übertreten wird. Ist das ursprüngliche Quadrat sechs Handbreiten lang und hat jedes der vier ausgeschnittenen Quadrate eine Länge von einer Handbreite, so beträgt die zu besäende Fläche 24 Quadrathandbreiten und liefert ein Maximum für die Saatfläche. — Hat man ein Rechteck mit den Seitenlängen von zwei und drei Handbreiten, so bildet die durch Verbinden der vier Mittelpunkte der Seiten entstehende Figur einen Rhombus. Ist die eine Seite des Rechtecks zwei, die andere drei Handbreiten lang und klappt man das Rechteck dreimal an der drei Handbreiten langen Seite um, so entsteht ein Rechteck mit der einen Seitenlänge sechs und der alten, unveränderten Seitenlänge drei, in das drei Rhomben einbeschrieben sind. Klappt man diese Figur an der Rechteckseite der Länge sechs um, so erscheint schließlich ein Quadrat von der Seitenlänge sechs, in dessen

[21] Vgl. die obige Anmerkung 16.

Innerem sich sechs Rhomben befinden, die nur an den Ecken zusammenhängen; die sechs Rhomben nehmen von dem ganzen Quadrat den halben Flächeninhalt von 18 Quadrathandbreiten ein und können ohne Übertretung des Mischungsverbots mit sechs verschiedenen Pflanzenarten besät werden, wie dies mit der von Rabbi Jehuda in der Mischna Kilajim III, 1[22] ausgesprochenen Ansicht übereinstimmt. Dieses aus dem Religionsgesetz und seinen Bestimmungen stammende Problem der Anordnung von verschiedenartig zu besäenden Pflanzenbeeten, die gewissen geometrischen Forderungen genügen sollen, zeigt naive Raumintuition und ist nicht auf kritisch-logischem Boden erwachsen.