Übungen zur Physik

Mit 100 Bildern,
66 Übungsbeispielen,
237 Übungsaufgaben
mit Antworten
und Ergebnissen
und einem Beiheft

Übungen zur PHYSIK

verfaßt von
Studiendirektor Dipl.-Phys. Wolfgang Körner, Leipzig
(Federführender)
Dipl.-Phys. Ewald Hausmann, Karl-Marx-Stadt
Fachschuldozent Dipl.-Phys. Dietmar Mende, Riesa
Fachschuldozent Dipl.-Gwl. Hellmut Spretke, Halle (Saale)

unter Mitarbeit von
Fachschuldozent Dipl.-Phys. Günther Kießling, Zittau
Fachschuldozent Dipl.-Phys. Günther Koksch, Dresden
Dipl.-Phys. Peter Leißner, Leipzig
Fachschuldozent Dipl.-Phys. Günter Simon, Apolda

VEB Fachbuchverlag Leipzig

Als Arbeitsbuch für die Ausbildung an Ingenieur- und Fachschulen der DDR anerkannt.

Berlin, September 1974

Minister
für Hoch- und Fachschulwesen

1. Auflage
Lizenznummer 114-210/14/76
LSV 1103
Verlagslektor: Dipl.-Phys. Klaus Vogelsang
Gestaltung: Lothar Gabler, Leipzig
Printed in GDR
Gesamtherstellung: Offizin Andersen Nexö,
Graphischer Großbetrieb, Leipzig III/18/38–5
Redaktionsschluß: 15. 5. 1975
Bestellnummer 546 034 2
EVP 9,80 Mark

Vorwort

Durch Übungen soll der Student die Kenntnisse, die er sich in der Vorlesung und durch Lehrbuchstudium angeeignet hat, festigen und vertiefen. Insbesondere soll er lernen, sein Wissen beim Lösen von Problemen der Praxis anzuwenden. Diesem Zweck dienen die vorliegenden „Übungen zur Physik". Der Band baut auf langjährigen Erfahrungen der Autoren im Physikunterricht des Direkt-, Fern- und Abendstudiums an Ingenieur- und Fachschulen auf und wurde als Arbeitsbuch zum Lehrbuch „Physik – Fundament der Technik" erarbeitet. Doch wird das Arbeitsbuch auch im Zusammenhang mit anderen Lehrbüchern der Physik einsetzbar sein.
Als Grundlage sowohl für das Auswerten von Meßergebnissen im Praktikum als auch für das Lösen von Aufgaben beginnt das Arbeitsbuch mit einer „Einführung in die Fehlerrechnung". Hier werden auch kurz Fragen der Rechengenauigkeit behandelt.
Es folgt der Hauptabschnitt „Übungen". Ihm ist eine methodische Anleitung für das Lösen von physikalischen Aufgaben vorangestellt. Sodann enthält er, gegliedert nach den Abschnitten des Lehrbuches, Beispiele, die als Muster vollständig vorgerechnet sind (Kennzeichen: ▶ vor der Aufgabennummer), und Übungen. Hier sind physikalisch-technische Probleme durch Rechnung oder verbale Antwort zu lösen. Ihre große Anzahl erlaubt es dem Lehrer bzw. dem Studenten, eine geeignete Auswahl zu treffen. Zu jeder Übung ist im Teil „Hinweise zu den Lösungen, Antworten und Ergebnisse" sowohl das allgemeine als auch das spezielle Ergebnis angegeben. Teilweise erfolgen Hinweise zur Lösung (Kennzeichen: ■ vor der Aufgabennummer).
Im Teil „Physikalisches Praktikum" wird zunächst Allgemeines zum physikalischen Praktikum gesagt. Dann werden drei verschiedenartige Versuche mit Meßprotokoll und vollständiger Auswertung dargestellt. Diese dienen als Muster und sollen dem Studenten helfen, im Praktikum zweckmäßig und rationell zu arbeiten.
Hinweise auf Textstellen erscheinen in Klammern, z. B. bedeutet (→ 3.6.3.) „siehe Abschnitt 3.6.3.". Der Buchstabe F in der Klammer (→ F 4.2.) weist auf eine Textstelle im Lehrbuch hin.

die Buchstaben FB (→ FB 7.2.) auf eine Tabelle in der Beilage zum Lehrbuch, jeweils bezogen auf die 4. Auflage des „Physik – Fundament der Technik“.
Als Beiheft sind dem Buch Zusammenfassungen zum Lehrbuch „Physik – Fundament der Technik“ beigegeben. Sie enthalten in Wissensspeicherform Gleichungen, die wie im Lehrbuch numeriert sind, und in verbaler Darstellung die Schwerpunkte des im Lehrbuch dargebotenen Stoffes. Diese Zusammenfassungen sollen neben der Lehrbuchbeilage als Hilfsmittel bei der Lösung von Aufgaben Verwendung finden.
Am Arbeitsbuch wirkten durch zahlreiche Hinweise neben den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Literatur der Zentralen Fachkommission Physik beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR als Gutachter mit die Herren Dipl.-Phys. Korst, Reichenbach, Dipl.-Phys. Mey, Leipzig, Dipl.-Phys. Wollmann, Dresden, Dipl.-Phys. Waldmann, Hermsdorf, und Wünschmann, Dresden. Die beiden Letztgenannten ergänzten auch die Übungen durch mehrere eigene Beiträge. Ihnen allen sei an dieser Stelle für ihre Unterstützung herzlich gedankt.
Lehrer und Studenten werden gebeten, ihre Erfahrungen aus der Arbeit mit den „Übungen zur Physik“ mitzuteilen und so zur Verbesserung der folgenden Auflagen des Buches beizutragen.

Autoren und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung in die Fehlerrechnung

1.1. Fehlerdefinition

Im physikalischen Grundlagenpraktikum, in weiteren Praktika und in Ihrer beruflichen Tätigkeit werden Sie vor das Problem gestellt werden, physikalische Größen zu messen. Dabei müssen Sie sich stets darüber im klaren sein, daß die erhaltenen *Meßwerte* keinesfalls völlig identisch sind mit den *wahren* Werten der physikalischen Größen. Durch die Unvollkommenheit der Meßgeräte und andere, oft sehr unterschiedliche Einflüsse sind Meßwerte stets fehlerbehaftet. Die Differenz zwischen Meßwert x' und wahrem Wert x bezeichnen wir als ***absoluten Fehler*** Δx:

$$\Delta x = x' - x \tag{1}$$

Dabei kann der auftretende absolute Fehler sowohl positiv als auch negativ sein.
Die Gleichung (1) ist nicht unmittelbar anwendbar, da von den drei vorkommenden Größen nur der Meßwert x' bekannt ist, der wahre Wert x und damit der absolute Fehler Δx sind unbekannt.
Ziel der folgenden Überlegungen ist, die unterschiedlichen Fehlerursachen zu charakterisieren. Dadurch sollen Sie in die Lage versetzt werden, bei jeder Messung die auftretenden Fehler *abschätzen* zu können. In vielen Fällen wird es sogar möglich sein, genaue Angaben über die Größe des *maximal möglichen* Fehlers zu machen. Der wahre Wert x der physikalischen Größe liegt dann entweder mit einer gewissen *Wahrscheinlichkeit* (bei Fehlerschätzungen und bei Meßreihen; → 1.4.) oder mit *Sicherheit* (bei Kenntnis des maximal möglichen Fehlers) im Bereich

$$x' - \Delta x \leqq x \leqq x' + \Delta x \tag{2}$$

Somit gilt

$$x = x' \pm \Delta x \tag{3}$$

Eine bessere Einschätzung der Genauigkeit einer physikalischen Messung ergibt sich bei Verwendung des ***relativen Fehlers***

$$\frac{\Delta x}{x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta x}{x'}$$

Wegen des meist nicht bekannten Vorzeichens von Δx und wegen der geringen Unterschiede zwischen x und x' ist es üblich, den *Betrag des relativen Fehlers*

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \tag{4}$$

anzugeben, bei seiner Berechnung aber x' zu verwenden.

Ein Beispiel soll die Bedeutung des relativen Fehlers anschaulich machen:

Beispiel Eine Strecke von 10,0 cm werde mit einem Absolutfehler von ± 1 mm ausgemessen. Dann ist

$$\left|\frac{\Delta l}{l}\right| = \frac{10^{-1}\ \mathrm{cm}}{10{,}0\ \mathrm{cm}} = 10^{-2} = 1\,\%$$

Diese Genauigkeit ist mit einfachen Längenmeßgeräten zu verwirklichen.
Soll dagegen der gleiche absolute Fehler bei einer Meßlänge von einem Kilometer zulässig sein, dann ergibt das einen relativen Fehler

$$\left|\frac{\Delta l}{l}\right| = \frac{10^{-1}\ \mathrm{cm}}{10^{3}\ \mathrm{m}} = 10^{-6} = 0{,}0001\,\%$$

Diese Genauigkeit ist nur durch den Einsatz modernster Geräte (z. B. Laserentfernungsmesser) realisierbar.

1.2. Fehlerarten

1.2.1. Grobe Fehler

Grobe Fehler können sehr unterschiedliche Ursachen haben. Defekte Meßgeräte, Nichtbeachtung äußerer Störeinflüsse oder falsche Skalenablesungen führen z. B. zu groben Fehlern. Diese sind jedoch stets vermeidbar und sollen im folgenden ausgeschlossen sein.

1.2.2. Zufällige Fehler

Zufällige Fehler treten bei jeder Messung auf. Sie sind am deutlichsten bei mehrfacher Messung der gleichen Meßgröße unter gleichen Bedingungen zu erkennen. Zufällige Fehler enthaltende Meßwerte der gleichen Meßgröße *streuen statistisch verteilt um einen Mittelwert*. Diese Streuungen sind vorwiegend auf zwei Ursachen zurückzuführen. Bei allen unter Zuhilfenahme der menschlichen Sinnesorgane durchgeführten Messungen (z. B. bei der Schätzung von Zwischenwerten beim Ablesen von Skalen oder bei Zeitmessungen mit Handstoppuhren) begrenzt das end-

liche Unterscheidungsvermögen unserer Sinnesorgane die Genauigkeit der Messung und führt zu unterschiedlichen Meßwerten (z. B. Ableseunsicherheit).
Daneben treten bei fast allen Meßgeräten Reibungskräfte in den Lagern der beweglichen Teile der Geräte auf. Diese sind die Ursache von statistischen Schwankungen der Anzeigewerte dieser Geräte um einen Mittelwert bzw. führen bei Einzelmessungen zu unterschiedlichen zufälligen Fehlern.
Die mathematische Behandlung zufälliger Fehler bei *Mehrfachmessungen* der gleichen Größe (Meßreihen) erfolgt im Abschnitt 1.4. Dort wird gezeigt werden, daß die Auswirkung der zufälligen Fehler durch mehrfache Messungen der gleichen Meßgröße weitgehend ausgeschaltet werden kann. Wird dagegen eine physikalische Größe nur *einmal gemessen*, dann muß der zufällige Fehler *geschätzt* werden. Je nach der Größe der Skalenteilung werden wir als zufälligen Fehler etwa die Hälfte bis ein Viertel des Abstandes zweier Teilstriche annehmen.

1.2.3. Systematische Fehler

Genau wie zufällige Fehler treten systematische Fehler ebenfalls bei jeder Messung auf und sind den zufälligen Fehlern nach 1.2.2. überlagert. Im Gegensatz zu zufälligen Fehlern haben jedoch systematische Fehler bei mehrfacher Messung der gleichen Meßgröße unter gleichen Bedingungen stets den gleichen Betrag und das gleiche Vorzeichen. Einige Beispiele sollen das verdeutlichen. Messen wir eine physikalische Größe mit einem bestimmten Meßgerät, dann werden die Anzeigewerte dieses Gerätes keinesfalls exakt mit den wahren Werten übereinstimmen. Jedes Meßgerät und jede Maßverkörperung (z. B. Wägestücke oder Parallelendmaße) haben mehr oder weniger große *Eichfehler*, also Differenzen zwischen dem angezeigten bzw. verkörperten und dem wahren Wert. Diese Differenzen bezeichnen wir als systematische Fehler. Eine Verringerung dieser Fehler ist nur durch die Verwendung genauerer Meßgeräte möglich.
Andere systematische Fehler treten durch die *Beeinflussung der Meßgrößen durch die Meßgeräte selbst* auf. Ermitteln wir z. B. die Größe eines Widerstandes durch gleichzeitige Spannungs- und Stromstärkemessung aus dem Ohmschen Gesetz, ohne dabei die Innenwiderstände der Meßgeräte zu berücksichtigen, dann enthält unser Ergebnis einen mehr oder weniger großen systematischen Fehler. Wir werden diesen im Versuch Widerstandsbestimmung (→ 3.6.3.) unter unterschiedlichen Meßbedingungen ermitteln.
Auch die Ermittlung der spezifischen Wärmekapazität von flüssigen oder festen Körpern mit Hilfe von Mischungsvorgängen führt ohne die Berücksichtigung der Wärmekapazität der verwendeten Geräte (Kalorimeter, Thermometer) zu systematischen Fehlern.

Die beiden letzten Beispiele zeigen, daß systematische Fehler oft rechnerisch erfaßt und damit korrigiert werden können. In manchen Fällen liegen für Meßgeräte Eichkurven oder -tabellen vor, die die Abweichungen zwischen den angezeigten und den wahren Werten nach Größe und Vorzeichen angeben. Die Korrektur der Anzeigewerte mit Hilfe der Eichwerte führt ebenfalls zur Verkleinerung der systematischen Fehler.
Oft werden jedoch systematische Fehler nur mit größerem apparativem oder mathematischem Aufwand erfaßbar und somit korrigierbar sein. In solchen Fällen werden wir auf die Erfassung dieser Fehler verzichten. Wir sind dann gezwungen, die Größe dieser nicht erfaßten systematischen Fehler abzuschätzen, um sie bei der Fehlerrechnung berücksichtigen zu können.

1.2.4. Meßunsicherheit

Wir haben festgestellt, daß jeder physikalische Meßwert fehlerbehaftet ist. Der Fehler setzt sich dabei stets aus einem zufälligen und einem nichterfaßten, abgeschätzten systematischen Fehler zusammen. Die Summe der beiden Fehleranteile bezeichnen wir als *Meßunsicherheit u.*:

$$|u| = |\Delta x_{\text{zuf}}| + |\Delta x_{\text{syst}}| \tag{5}$$

Bei der Wahl unseres Meßverfahrens (Einzelmessung oder Meßreihe) und unseres Meßgerätes sollten wir anstreben, daß beide Fehleranteile angenähert in der gleichen Größenordnung liegen. Es ist physikalisch und ökonomisch sinnlos, durch größere Meßreihen den zufälligen Fehler zu reduzieren, ohne gleichzeitig auch durch die Wahl eines genaueren Meßgerätes den systematischen Fehler zu verkleinern.
Als Ergebnis unserer Messung geben wir stets den Meßwert x' und die Meßunsicherheit u an:

$$x = x' \pm u \tag{6}$$

In dem Wort „Meßunsicherheit" kommt zum Ausdruck, daß unsere gesuchte physikalische Größe mit einer gewissen, aber meist nicht bekannten Wahrscheinlichkeit im Bereich $x' \pm u$ liegt.
Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, daß es in bestimmten Fällen möglich ist, Angaben über die *maximal mögliche Größe* des Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit 1, also mit Sicherheit, zu machen.

1.3. Fehlergrenzen von Meßgeräten

Für die meisten der von Ihnen verwendeten Meßgeräte bzw. Maßverkörperungen wird vom Hersteller die Einhaltung bestimmter *Fehlergrenzen* garantiert. Wir verstehen darunter

Grenzwerte für die maximal zulässigen Abweichungen zwischen angezeigten und wahren Werten.
Oft sind diese Fehlergrenzen standardisiert. Insbesondere elektrische Meßgeräte werden hinsichtlich ihrer Fehlergrenzen in Klassen eingeteilt. Dabei gibt die Klasse an, wieviel Prozent vom jeweiligen Meßbereich der Fehler des Gerätes maximal betragen darf. Bei einem Instrument der Klasse 1 und einem Meßbereich von 300 V beträgt der maximal zulässige Fehler an jeder Stelle der Skale ± 3 V. Bei Betriebsmeßgeräten wird die Einhaltung der Fehlergrenzen regelmäßig von den jeweiligen Eichämtern überprüft.
Die *zufälligen* Fehler eines Meßinstrumentes, also die Summe von Ableseunsicherheit beim Schätzen von Skalenzwischenwerten und von durch Reibungskräfte bedingten unterschiedlichen Einstellwerten beim gleichen Meßwert, müssen stets klein sein gegenüber den *Fehlergrenzen* des Meßgerätes. Wenn wir also bei der Angabe eines Meßfehlers die Fehlergrenzen des benutzten Meßgerätes verwenden, brauchen wir zufällige Fehler nicht zu berücksichtigen. Der wahre Wert liegt dann mit Sicherheit innerhalb des von uns durch die Fehlergrenzen angegebenen Bereiches. Wir bezeichnen den so angegebenen Fehler als *maximal möglichen* Fehler.
Wir sollten es uns zum Grundsatz machen, vor der Anwendung von Meßinstrumenten uns über deren Fehlergrenzen Klarheit zu verschaffen, um nicht durch zu gering geschätzte Fehler zu kleine Meßunsicherheiten vorzutäuschen.

1.4. Mathematische Erfassung zufälliger Fehler bei Meßreihen

1.4.1. Voraussetzungen

Meßreihen sind nur dann sinnvoll, wenn bei einer Messung zufällige Fehler auftreten, die größer sind als die Fehlergrenzen der verwendeten Meßgeräte. Dies ist insbesondere in der Feinmeßtechnik und in der Geodäsie der Fall. Auch in der subjektiven Fotometrie, wo mit Hilfe des menschlichen Auges Helligkeitsvergleiche durchgeführt werden, sind Meßreihen erforderlich.
Für die Mehrzahl dieser Meßprobleme ist charakteristisch, daß bei ihnen der Anteil der menschlichen Sinne bei der Ermittlung der Meßwerte hoch ist. Die Abweichungen, die zwischen den einzelnen Meßwerten einer Meßreihe auftreten, werden je nach der Übung des Beobachters mehr oder weniger groß sein.
Die mathematischen Grundlagen für den Ausgleich der streuenden Meßwerte einer Meßreihe sind relativ kompliziert. In den folgenden Abschnitten kann daher nur ein grober Überblick über die anzuwendenden Methoden gegeben werden.

1.4.2. Mittelwert einer Meßreihe und Vertrauensbereich des Mittelwertes

Als arithmetisches Mittel oder Mittelwert einer Meßreihe mit den n Meßwerten $x_1 \cdots x_n$ bezeichnen wir

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{7}$$

Ziel der folgenden Überlegungen ist, bei Meßreihen die Größe des zufälligen Fehlers Δx_{zuf} berechnen zu können. Dabei sollen zunächst die systematischen Fehler gegenüber den zufälligen Fehlern vernachlässigt werden können.

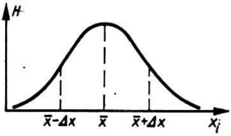


Bild 1

Wenn wir die gleiche physikalische Größe unter gleichen Bedingungen mehrfach messen und die Häufigkeit H übereinstimmender Meßwerte über dem Meßwert x_i auftragen, erhalten wir bei ausreichend hoher Zahl der Messungen eine Verteilung der Meßwerte nach Bild 1. Die Häufigkeit von Meßwerten in der Nähe des durch (7) definierten Mittelwertes $\bar{x}$ ist sehr groß, dagegen weichen nur wenige Meßwerte wesentlich von $\bar{x}$ ab. (Grobe Meßfehler sind dabei nicht berücksichtigt!) Die Festlegung eines Bereiches $\bar{x} \pm \Delta x_{\text{zuf}}$ wird damit zu einem Wahrscheinlichkeitsproblem. Wenn wir garantieren wollen, daß der wahre Wert x mit großer Wahrscheinlichkeit (hoher statistischer Sicherheit) in dem von uns anzugebenden Bereich $\bar{x} \pm \Delta x_{\text{zuf}}$ liegt, dann werden wir $|\Delta x_{\text{zuf}}|$ relativ groß wählen müssen. Begnügen wir uns jedoch mit einer geringen statistischen Sicherheit, dann werden wir auch einen kleineren Bereich angeben können. Wir müssen jedoch dann damit rechnen, daß mit zwar geringer, aber nicht zu vernachlässigender Wahrscheinlichkeit der wahre Wert x doch außerhalb des von uns angegebenen Bereiches liegt.

Wir bezeichnen den Bereich $\pm \Delta x_{\text{zuf}}$ als *Vertrauensbereich* des Mittelwertes. Seine Größe hängt außer von der willkürlich zu wählenden statistischen Sicherheit auch von der Zahl der durchgeführten Messungen ab. Eine hohe Zahl von Messungen wird bei vorgegebener statistischer Sicherheit zu einer Verkleinerung des Vertrauensbereiches führen.

In der Praxis sind folgende statistische Sicherheiten üblich:

$P = 68{,}3\,\%$ in der physikalischen Meßtechnik,
$P = 95\,\%$ in der industriellen Meßtechnik,
$P = 99{,}73\,\%$ in der biologischen Meßtechnik.

Den Vertrauensbereich einer Meßreihe mit n Einzelmessungen berechnen wir aus

$$\Delta x_{\text{zuf}} = \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{8}$$

mit t-Werten gemäß Tabelle 1.

Tabelle 1: t-Werte für verschiedene statistische Sicherheit P bei n Einzelmessungen

n		5	10	20
t	$P = 68{,}3\%$	1,15	1,06	1,03
	$P = 95\%$	2,8	2,3	2,1

Den Wurzelausdruck in (8) bezeichnen wir als *Standardabweichung* s:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{9}$$

Diese Größe wird insbesondere in der industriellen Fertigungsüberwachung benötigt. Dort können aus ökonomischen Gründen meist keine *Meßreihen*, sondern nur *Einzel*messungen durchgeführt werden, obwohl die verwendeten Meßgeräte nicht zu vernachlässigende zufällige Fehler aufweisen. Trotzdem muß mit einer bestimmten statistischen Sicherheit garantiert werden, daß die wahren Werte in einem bestimmten Bereich, dem *Vertrauensbereich der Standardabweichung* s, liegen. Die Standardabweichung muß zuvor für das jeweils verwendete Meßgerät aus einer Meßreihe ermittelt werden. Bei einer statistischen Sicherheit von 95% und einer aus 20 Einzelmessungen ermittelten Standardabweichung ergibt sich der Vertrauensbereich der Standardabweichung nach Hultzsch[1] zu $\pm 2{,}69s$ und somit der Wert einer Einzelmessung zu

$$x = x_i \pm 2{,}69s \tag{10}$$

Von 100 Einzelmessungen an unterschiedlichen Werkstücken liegen dann durchschnittlich 95 in dem Vertrauensbereich $\pm 2{,}69s$, 5 Messungen können jedoch Fehler enthalten, die über den angegebenen Bereich hinausgehen.

1.4.3. Meßunsicherheit und Ergebnis

Bei den bisherigen Überlegungen wurden systematische Fehler nicht berücksichtigt. Für die Angabe der Meßunsicherheit u und das endgültige Ergebnis der Meßreihe sind die nichterfaßten systematischen Fehler zu schätzen. Wir erhalten aus (5) und (8) mit s nach (9) als endgültiges Ergebnis

$$x = \bar{x} \pm \left(\frac{t}{\sqrt{n}} s + \Delta x_{\text{syst}}\right) \tag{11}$$

Aus (9) und (11) ist ersichtlich, daß der meist erhebliche Meß- und Rechenaufwand bei Meßreihen nur dann sinnvoll ist, wenn der Streubereich der Einzelmessungen x_i wesentlich größer ist als der nichterfaßte systematische Fehler.

[1] Hultzsch, E.: Ausgleichsrechnung mit Anwendungen in der Physik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1971.

1.5. Fehlerfortpflanzung

1.5.1. Aufgabenstellung

Viele physikalische Größen können nicht direkt gemessen, sondern müssen aus anderen Größen, die einer direkten Messung zugänglich sind, berechnet werden. Da jede Meßgröße fehlerbehaftet ist, entsteht die Frage, wie sich die Fehler der Eingangsgrößen auf die berechneten Größen auswirken. Dieses Problem soll jetzt untersucht werden. In 1.3. wurden die Fehlergrenzen von Meßgeräten betrachtet. Falls die Fehlergrenzen nicht bekannt sind, muß ein Maximalfehler geschätzt werden. Wir wollen die Maximalfehler der Meßgrößen x, y, u, v, w mit Δx, Δy, Δu, Δv und Δw bezeichnen. Die aus den Meßgrößen zu errechnende Größe soll z, ihr Maximalfehler Δz sein. Es gilt also $z = f(x, y, u, v, w)$.
Je nach der Art der Funktion ergeben sich für Δz, den Maximalfehler der errechneten Größe, verschiedene Ausdrücke. Einige typische Funktionen sollen untersucht werden. Das geschieht am einfachsten mit Hilfe der Differentialrechnung. Da aber nicht in allen Fällen schon die Kenntnis der Differentialrechnung vorausgesetzt werden kann, soll zunächst die Fehlerabschätzung ohne Differentialrechnung durchgeführt werden.

1.5.2. Fehlerfortpflanzung ohne Differentialrechnung

1.5.2.1. Fehler von Summen und Differenzen

Es liegen die Meßergebnisse $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ vor. Es ist gesucht $z \pm \Delta z$, wenn $z = x + y$ ist.
Wir wollen von einem Beispiel ausgehen. Es seien zwei Längen gemessen mit

Beispiel $x = (32{,}1 \pm 0{,}1)$ cm und $y = (23{,}5 \pm 0{,}1)$ cm

Das bedeutet

$32{,}2 \text{ cm} \geqq x \geqq 32{,}0 \text{ cm}$ und $23{,}6 \text{ cm} \geqq y \geqq 23{,}4 \text{ cm}$

Ohne Beachtung der Fehlergrenzen erhalten wir

$z = x + y = 32{,}1 \text{ cm} + 23{,}5 \text{ cm} = 55{,}6 \text{ cm}$

Setzen wir die oberen Grenzen, so ergibt sich

Fall 1: $z_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (32{,}2 + 23{,}6) \text{ cm} = 55{,}8 \text{ cm}$

Mit den minimalen Werten erhalten wir

Fall 2: $z_{\min} = x_{\min} + y_{\min} = (32{,}0 + 23{,}4) \text{ cm} = 55{,}4 \text{ cm}$

Wird x zu groß ($x_{\max}$), y jedoch zu klein ($y_{\min}$) gemessen, so ergibt sich

Fall 3: $z = x_{max} + y_{min} = (32{,}2 + 23{,}4)\ \text{cm} = 55{,}6\ \text{cm}$

Die Fehler heben sich in diesem Fall gegenseitig auf. Bei der Fehlerabschätzung interessiert uns dieser Fall jedoch nicht. Wir wollen wissen, wie groß der Fehler im ungünstigsten Fall wird, wir suchen den *Maximalfehler*. Die größten Abweichungen ergeben sich in den Fällen *1* und *2*. Dort ist

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y \quad \text{bzw.} \quad -\Delta z = -\Delta x - \Delta y$$

In beiden Fällen gilt

$$|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y| \tag{12}$$

Allgemein sieht die Rechnung so aus:

Wir setzen die Meßergebnisse in die Funktion ein und erhalten

$$z \pm \Delta z = x \pm \Delta x + y \pm \Delta y$$

Wir subtrahieren von der linken Seite dieser Gleichung z, von der rechten $x + y$, da $z = x + y$ vorausgesetzt wurde, und erhalten

$$\pm \Delta z = \pm \Delta x \pm \Delta y$$

Wir betrachten den Maximalfehler und stellen fest:

$$|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

Rechnen Sie nach, daß für die Differenz $z = x - y$ gilt

$$\Delta z = \pm \Delta x \mp \Delta y,$$

für den Maximalfehler also ebenfalls

$$|\Delta z| = |\Delta x| + |\Delta y|$$

> Der maximale Absolutfehler von Summen und Differenzen ist gleich der Summe der Beträge der Absolutfehler der einzelnen Summanden.

1.5.2.2. Fehler von Produkten

Wir untersuchen die Funktion $z = xy$. Dazu gehen wir aus von

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)(y \pm \Delta y)$$

Wir multiplizieren die rechte Seite aus:

$$z \pm \Delta z = xy \pm x\Delta y \pm y\Delta x \pm \Delta x\Delta y$$

Da Δx und Δy klein gegen x bzw. y sind, kann das Produkt $\Delta x\,\Delta y$ vernachlässigt werden. Beachten wir ferner $z = xy$, so bleibt

$$\pm \Delta z = \pm x\Delta y \pm y\Delta x$$

Die linke Seite dieser Gleichung dividieren wir durch z, die rechte durch $xy\,(z = xy)$ und erhalten

$$\pm \frac{\Delta z}{z} = \pm \frac{\Delta x}{x} \pm \frac{\Delta y}{y}$$

Für den Maximalfehler folgt daraus

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \tag{13}$$

Der maximale Relativfehler eines Produktes ist gleich der Summe der Beträge der Relativfehler der einzelnen Faktoren.

1.5.2.3. Fehler von Quotienten

Für die Funktion $z = x/y$ setzen wir an

$$z \pm \Delta z = \frac{x \pm \Delta x}{y \pm \Delta y}$$

und erweitern den Bruch mit $y \mp \Delta y$:

$$z \pm \Delta z = \frac{(x \pm \Delta x)\,(y \mp \Delta y)}{(y \pm \Delta y)\,(y \mp \Delta y)}$$

$$z \pm \Delta z = \frac{xy \pm y\Delta x \mp x\Delta y \mp \Delta x\,\Delta y}{y^2 - (\Delta y)^2}$$

Wir vernachlässigen wieder die Produkte kleiner Größen und erhalten

$$z \pm \Delta z = \frac{xy \pm y\Delta x \mp x\Delta y}{y^2}$$

$$z \pm \Delta z = \frac{x}{y} \pm \frac{\Delta x}{y} \mp \frac{x\,\Delta y}{y^2}$$

Wir beachten $z = x/y$ und dividieren dann die linke Seite der Gleichung durch z, die rechte durch x/y:

$$\pm \frac{\Delta z}{z} = \pm \frac{\Delta x}{x} \mp \frac{\Delta y}{y}$$

Der Maximalfehler tritt auf, wenn Δx und Δy verschiedene Vorzeichen haben (z. B. x zu groß, aber y zu klein gemessen wurde). Dann gilt wie bei Produkten

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \tag{13}$$

Der maximale Relativfehler eines Quotienten ist gleich der Summe der Beträge der Relativfehler von Dividend und Divisor.

1.5.2.4. Fehler von Potenzprodukten

Die in den letzten Abschnitten aufgestellten Gesetze der Fehlerfortpflanzung sollen nun auf Potenzprodukte angewendet werden. Da Potenzen als Produkte geschrieben werden können (z.B. $x^3 = x \cdot x \cdot x$), gilt folgender Satz (n beliebige positive oder negative [auch gebrochene] Zahl):

> Der maximale Relativfehler einer n-ten Potenz ist gleich dem $|n|$-fachen maximalen Relativfehler der Basis.

Wir untersuchen nun ein einfaches Potenzprodukt, die Funktion $z = x^m y^n$.
Nach den Sätzen über Produkte und Potenzen ergibt sich der Relativfehler zu

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = |m|\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + |n|\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \qquad (13')$$

1.5.2.5. Fehler von Quotienten aus Summen und Differenzen

Wir wollen nun Funktionen von der Form $z = \dfrac{x+y}{u-v}$ betrachten, in der die Variablen im Zähler und im Nenner voneinander unabhängig sind, und wenden dabei die Sätze über Summen und Quotienten an. Für den Zähler $Z = x + y$ gilt

$$|\Delta Z| = |\Delta x| + |\Delta y| \quad \text{und} \quad \left|\frac{\Delta Z}{Z}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x+y|}$$

Entsprechend erhalten wir für den Nenner $N = u - v$

$$|\Delta N| = |\Delta u| + |\Delta v| \quad \text{und} \quad \left|\frac{\Delta N}{N}\right| = \frac{|\Delta u| + |\Delta v|}{|u-v|}$$

Der Relativfehler von z ist damit

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = \left|\frac{\Delta Z}{Z}\right| + \left|\frac{\Delta N}{N}\right| = \frac{|\Delta x| + |\Delta y|}{|x+y|} + \frac{|\Delta u| + |\Delta v|}{|u-v|}$$

Beispiel Berechnen Sie den maximalen Relativfehler von $z = \dfrac{x^3(u+v)^2}{w^4}$.

Führen wir zunächst für $u + v$ die Abkürzung y ein, setzen also $u + v = y$, so vereinfacht sich das Potenzprodukt zu $z = \dfrac{x^3 y^2}{w^4}$.

Wir erhalten

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = 3\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + 2\left|\frac{\Delta y}{y}\right| + 4\left|\frac{\Delta w}{w}\right|$$

Nun beachten wir noch den Satz über den Absolutfehler von Summen und erhalten

$$|\Delta y| = |\Delta u| + |\Delta v|$$

Der maximale Relativfehler des betrachteten Potenzproduktes ist damit

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = 3\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + 2\left|\frac{\Delta u}{u+v}\right| + 2\left|\frac{\Delta v}{u+v}\right| + 4\left|\frac{\Delta w}{w}\right|$$

1.5.3. Fehlerfortpflanzung mit Differentialrechnung

1.5.3.1. Logarithmische Differentiation

Da wir annehmen können, daß der Meßfehler Δx klein gegen den Meßwert x ist, dürfen wir Δx durch das Differential $\mathrm{d}x$ ersetzen und haben damit die Möglichkeit, die Differentialrechnung zur Ermittlung des Maximalfehlers einzusetzen. Zunächst soll die *logarithmische Differentiation* erläutert werden. Dabei hat man die Funktion zunächst zu logarithmieren und anschließend zu differenzieren. Als Beispiel soll der Maximalfehler für die Funktion

$$z = \frac{u^a (v+w)}{x y^b}$$

ermittelt werden. Wir logarithmieren zunächst:

$$\ln z = a \ln u + \ln (v+w) - \ln x - b \ln y$$

Da es sich bei u, v, w, x, y, z um physikalische Größen handelt und der Logarithmus von Größen nicht gebildet werden kann, müßte im folgenden eigentlich $\ln \{z\}$, $\ln \{x\}$ usw. geschrieben werden. Der Einfachheit halber soll jedoch auf die geschweifte Klammer verzichtet werden.

Dann wird differenziert:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = a\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}v + \mathrm{d}w}{v+w} - \frac{\mathrm{d}x}{x} - b\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Nun werden die Differentiale $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, ... in erster Näherung durch die Fehler Δu, Δv, ... ersetzt. Der Maximalfehler entsteht, wenn man die Beträge summiert:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = a\left|\frac{\Delta u}{u}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v+w}\right| + \left|\frac{\Delta w}{v+w}\right| + \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + b\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Überzeugen Sie sich davon, daß dieses Ergebnis auch aus den in 1.5.2. abgeleiteten Regeln folgt!

1.5.3.2. Totales Differential

Eine andere Möglichkeit, den Maximalfehler zu berechnen, ist die Bildung des totalen Differentials. Wir betrachten eine Funktion mit mehreren unabhängigen Variablen

$$z = f(x, y, u, \ldots)$$

Dann versteht man unter dem *totalen Differential*

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \cdots \qquad (14)$$

Dabei sind $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ ... die *partiellen Ableitungen*. Man bildet beispielsweise $\partial z/\partial x$, indem man z nach x differenziert und dabei die übrigen Variablen wie Konstanten behandelt.

Beispiel Als Beispiel betrachten wir die Funktion $z = \dfrac{x^a\,\mathrm{e}^y}{u}$
Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\,x^{a-1}\frac{\mathrm{e}^y}{u}\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^a}{u}\,\mathrm{e}^y; \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{1}{u^2}\,x^a\,\mathrm{e}^y$$

Damit ergibt sich nach (14)

$$\mathrm{d}z = a\,x^{a-1}\frac{\mathrm{e}^y}{u}\,\mathrm{d}x + \frac{x^a\,\mathrm{e}^y}{u}\,\mathrm{d}y - \frac{x^a\,\mathrm{e}^y}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Ersetzt man noch die Differentiale dx, dy, ... in erster Näherung durch Δx, Δy, ..., so hat man bereits den maximalen *Absolut*fehler, wenn man zu den Beträgen übergeht:

$$|\Delta z| = a\,x^{a-1}\frac{\mathrm{e}^y}{u}\,|\Delta x| + \frac{x^a\,\mathrm{e}^y}{u}\,|\Delta y| + \frac{x^a\,\mathrm{e}^y}{u^2}\,|\Delta u|$$

Den maximalen *Relativ*fehler erhält man, wenn man die linke Seite durch z, die rechte durch $x^a\,\mathrm{e}^y/u$ dividiert:

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| = a\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + |\Delta y| + \left|\frac{\Delta u}{u}\right|$$

1.6. Rechengenauigkeit

Ehe wir uns mit weiteren Beispielen zur Fehlerrechnung beschäftigen, müssen wir klären, mit welcher Genauigkeit solche Rechnungen durchzuführen sind.
Meßwerte sind fehlerbehaftet und damit im mathematischen Sinn Näherungswerte. Ihre Unsicherheit ergibt sich aus dem Betrag des bekannten bzw. geschätzten Absolutfehlers.

Beispiel $l = (11{,}7 \pm 0{,}2)$ cm ist identisch mit der Angabe

$$11{,}5\ \text{cm} \leqq l \leqq 11{,}9\ \text{cm}.$$

Bei Aufgaben, in denen mit geschätzten bzw. angenommenen Zahlenwerten gearbeitet wird, betrachten wir die Zahlenangaben als auf die letzte Dezimalstelle *gerundete* Werte, ihre Unsicherheit ist damit gleich dem halben Wert ihrer letzten Dezimalstelle.

Beispiel $l = 1383$ m deuten wir im Sinne $1382{,}5 \text{ m} < l < 1383{,}5$ m.

Problematisch wird es in der Praxis, wenn wir mit Angaben wie $F = 2$ Mp oder $l = 6$ m Rechnungen durchführen sollen. Bei dem Beispiel $F = 2$ Mp ist es durchaus möglich, daß mit der nur einziffrigen Angabe zum Ausdruck gebracht werden soll, daß es sich dabei um eine großzügig geschätzte Lastannahme handelt. Beim zweiten Beispiel $l = 6$ m ist dagegen kaum damit zu rechnen, daß die 6 im Sinne einer gerundeten Zahl gemeint ist. Damit bleibt aber offen, ob es sich um 6,00 m (Unsicherheit 0,5 cm) oder um 6,000 m (Unsicherheit 0,5 mm) handelt. Sie sollten auch in der Praxis bemüht sein, Angaben so zu formulieren, daß solche Unbestimmtheiten vermieden werden.

Die relative Ungenauigkeit eines Näherungswertes hängt ab von der Anzahl der *geltenden* oder *wesentlichen* Ziffern.

Als geltende Ziffern eines Näherungswertes bezeichnen wir alle Ziffern außer den Nullen, die links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer stehen.

Die Zahlen 382, 0,00485 und 0,680 haben also 3 geltende Ziffern. Rechts stehende Nullen, die nur zur Angabe der Größenordnung dienen, also nicht geltende Ziffern sein sollen, vermeidet man besser und ersetzt sie durch Zehnerpotenzen oder wählt größere Einheiten („etwa 6000 m": besser $6 \cdot 10^3$ m oder 6 km).
Für das Rechnen mit gerundeten Zahlenwerten gelten folgende, aus den Sätzen des Abschnitts 1.2. abgeleitete *Faustregeln*:

Regel 1 Bei *Summen* und *Differenzen* von Näherungswerten sind im Ergebnis nur so viele *Dezimalstellen* beizubehalten, wie in der Eingangszahl mit kleinster Anzahl von Dezimalstellen vorhanden sind.

Regel 2 Bei *Potenzprodukten* von Näherungswerten sind im Ergebnis nur so viele *geltende* Ziffern beizubehalten, wie in der Eingangszahl mit der kleinsten Anzahl von geltenden Ziffern vorhanden sind.

Regel 3 Bei Berechnung von *Zwischenergebnissen* empfiehlt es sich, jeweils eine Stelle (Ziffer) mehr beizubehalten, als es die Regeln 1 und 2 angeben. Haben einige Eingangswerte mehr Dezimalstellen (bei Summen) oder mehr geltende Ziffern (bei Potenzprodukten) als die anderen, so sind sie vorher so zu runden, daß sie nur eine Stelle oder Ziffer mehr haben als die anderen.

Beim Lösen von Aufgaben mit angenommenen bzw. geschätzten Werten bewahrt uns die Anwendung der Regeln 1 bis 3 vor überhöhten Genauigkeiten bei der Ergebnisangabe.
Aufgaben, bei denen die gegebenen Werte mit zwei oder drei geltenden Ziffern vorhanden sind, lösen wir mit Hilfe eines

25-cm-Rechenstabes ausreichend genau (manchmal auch bereits zu genau). Lediglich Aufgaben, bei denen gegebene Werte mit mehr als drei geltenden Ziffern vorliegen, erfordern bei ihrer Lösung die Anwendung einer entsprechenden Logarithmentafel bzw. einer Rechenmaschine.

Beispiel *Gegeben:* $l_1 = 26$ m, $\Delta l = 31$ mm

Gesucht: 1. $l_2 = l_1 + \Delta l$ 2. $\Delta l / l_1$; 3. $l_1 / \Delta l$

1. $l_2 = 26\text{ m} + 0{,}031\text{ m} = \underline{\underline{26\text{ m}}}$ $(l_1 + \Delta l \approx l_1)$

2. $\dfrac{\Delta l}{l_1} = \dfrac{0{,}031\text{ m}}{26\text{ m}} = \underline{\underline{0{,}0012}}$

3. $\dfrac{l_1}{\Delta l} = \dfrac{26\text{ m}}{0{,}031\text{ m}} = \underline{\underline{8{,}4 \cdot 10^2}}$

Bei der Berechnung der Differenz zweier Größen, die sich nur wenig unterscheiden, kann sich die Anzahl der geltenden Ziffern des Ergebnisses gegenüber der der Eingangsgrößen wesentlich verkleinern. Damit ist die relative Unsicherheit des Ergebnisses wesentlich größer als die der gegebenen Größen. Insbesondere bei meßtechnischen Problemen sollte man daher nach Möglichkeit nicht die Größen messen, deren Differenz gesucht ist, sondern durch andere Meßverfahren direkt die Differenz messen.

Beispiel *Gegeben:* Außendurchmesser $d_a = 22{,}3$ mm;
Innendurchmesser $d_i = 21{,}7$ mm

Gesucht: Wanddicke $s = \dfrac{d_a - d_i}{2}$

$$s = \frac{(22{,}3 - 21{,}7)\text{ mm}}{2} = \underline{\underline{0{,}3\text{ mm}}}$$

Die relative Unsicherheit der gegebenen Werte ist

$$\left|\frac{\Delta d_a}{d_a}\right| \approx \left|\frac{\Delta d_i}{d_i}\right| \approx \frac{0{,}05}{22} \approx 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}2\,\%.$$

Die relative Unsicherheit des Ergebnisses ist

$$\left|\frac{\Delta s}{s}\right| = \frac{0{,}05}{0{,}3} \approx 2 \cdot 10^{-1} = 20\,\%,$$

also wesentlich größer als die der gegebenen Werte. Besser wäre hier die direkte Bestimmung der Wanddicke s durch ein genaueres Meßverfahren.

Nach diesen Beispielen wenden wir uns nun Aufgaben aus dem *Bereich der Fehlerrechnung* zu. Die von uns geschätzten Meßunsicherheiten bzw. die gegebenen Fehlergrenzen der von uns benutzten Meßinstrumente liegen meist als auf *eine* geltende Ziffer *gerundete* Werte vor ($1 \cdot 10^{-2}$ mm; 1 mg; 1 % des Meßwertes bei Vollausschlag). Durch Anwendung der Regel 2 auf die Fehlerfortpflanzungsrechnung ergibt sich folgende Regel:

> Der Absolutfehler im Endergebnis für eine aus mehreren gemessenen Größen berechnete Größe wird mit *einer* geltenden Ziffer angegeben.

Zwischenrechnungen (z. B. die vorher meist erforderliche Berechnung des relativen Fehlers) führen wir mit Rechenstabgenauigkeit aus und runden erst bei der Angabe des Absolutfehlers auf *eine* geltende Ziffer.
Dagegen sind die Meßwerte selbst nicht als gerundete, sondern nur allgemein als genäherte Werte zu betrachten. Die Zahl der geltenden Ziffern bei der endgültigen Angabe des Ergebnisses und damit der erforderliche Rechenaufwand (Rechenstab, Logarithmentafel oder Rechenmaschine) ergeben sich daher nur angenähert aus den Regeln 1 bis 3. Entscheidend für die Stellenzahl bei der Ergebnisangabe ist die Dezimalstelle, in der der auf eine geltende Ziffer gerundete Absolutfehler auftritt.

> Das Endergebnis für eine aus mehreren gemessenen Größen berechnete Größe ist auf die Dezimalstelle zu runden, in der der mit einer geltenden Ziffer angegebene Absolutfehler auftritt.

Beispiele $\varrho = (8{,}75 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$; $V = (10{,}3 \pm 0{,}3)\,\mathrm{cm^3}$;
$\mu = 0{,}4 \pm 0{,}1$

Mathematisch *nicht* sinnvoll sind dagegen Angaben wie

$\varrho = (8{,}753 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$; $V = (10{,}3 \pm 0{,}34)\,\mathrm{cm^3}$;
$\mu = 0{,}473 \pm 0{,}1$

Beispiel Die Kanten eines Quaders werden gemessen und betragen

$l_1 = (36{,}2 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$; $l_2 = (23{,}8 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$; $l_3 = (13{,}6 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$.

Berechnen Sie das Volumen des Quaders, den maximalen Relativfehler, den maximalen Absolutfehler, und geben Sie das Volumen des Quaders mit Fehlergrenzen an.

Gegeben: $l_1 = 36{,}2\,\mathrm{cm}$; $|\Delta l_1| = 0{,}1\,\mathrm{cm}$
$l_2 = 23{,}8\,\mathrm{cm}$; $|\Delta l_2| = 0{,}1\,\mathrm{cm}$
$l_3 = 13{,}6\,\mathrm{cm}$; $|\Delta l_3| = 0{,}1\,\mathrm{cm}$

Gesucht: V; $\left|\frac{\Delta V}{V}\right|$; $|\Delta V|$

Das Volumen des Quaders ist $V = l_1 l_2 l_3$.

$$V = 36{,}2 \cdot 23{,}8 \cdot 13{,}6\,\mathrm{cm^3} = \underline{\underline{11{,}72\,\mathrm{dm^3}}}$$

Der maximale Relativfehler ergibt sich nach (13) zu

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| = \left|\frac{\Delta l_1}{l_1}\right| + \left|\frac{\Delta l_2}{l_2}\right| + \left|\frac{\Delta l_3}{l_3}\right|$$

$$= \frac{0{,}1}{36{,}2} + \frac{0{,}1}{23{,}8} + \frac{0{,}1}{13{,}6} = 0{,}00276 + 0{,}00420 + 0{,}00735$$

$$= 0{,}01431 \approx \underline{\underline{1{,}4\,\%}}$$

Der maximale Absolutfehler ergibt sich daraus zu

$$|\Delta V| = \left|\frac{\Delta V}{V}\right| V = 0{,}01431 \cdot 11{,}72\ \mathrm{dm}^3 = 0{,}168\ \mathrm{dm}^3 \approx \underline{\underline{0{,}2\ \mathrm{dm}^3}}$$

Das Ergebnis lautet $V = \underline{\underline{(11{,}7 \pm 0{,}2)\ \mathrm{dm}^3}}$

Beispiel Der Wirkungsgrad eines Tauchsieders ist aus folgenden Meßergebnissen zu bestimmen:

Stromstärke:	$I = (4{,}4 \pm 0{,}2)$ A
Spannung:	$U = (220 \pm 4)$ V
Zeit:	$t = (280 \pm 1)$ s
Masse des Wassers:	$m = (880 \pm 5)$ g
Anfangstemperatur:	$\vartheta_1 = (15{,}2 \pm 0{,}2)$ °C
Endtemperatur:	$\vartheta_2 = (80{,}4 \pm 0{,}2)$ °C

Gegeben: siehe Aufgabenstellung *Gesucht:* η

Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis von abgegebener zu aufgenommener Energie:

$$\eta = \frac{cm(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{UIt}$$

$$\eta = \frac{4{,}18\ \mathrm{kJ} \cdot 0{,}88\ \mathrm{kg} \cdot 65{,}2\ \mathrm{K}}{\mathrm{kg\,K} \cdot 220\ \mathrm{V} \cdot 4{,}4\ \mathrm{A} \cdot 280\ \mathrm{s}} = \frac{4{,}18 \cdot 65{,}2}{1{,}1 \cdot 280} = 0{,}885$$

Die spezifische Wärmekapazität wird hier nicht gemessen, der verwendete Tabellenwert wird als gerundeter Wert betrachtet. Der maximale Relativfehler des Wirkungsgrades ist

$$\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \frac{|\Delta\vartheta_2| + |\Delta\vartheta_1|}{|\vartheta_2 - \vartheta_1|} + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right| + \left|\frac{\Delta t}{t}\right| + \left|\frac{\Delta c}{c}\right|$$

$$= \frac{5}{880} + \frac{0{,}4}{65{,}2} + \frac{4}{220} + \frac{0{,}2}{4{,}4} + \frac{1}{280} + \frac{0{,}005}{4{,}18}$$

$$= 0{,}0057 + 0{,}0061 + 0{,}0182 + 0{,}0455 + 0{,}0036 + 0{,}0012$$

An dieser Stelle lassen sich die Fehler der einzelnen Meßgrößen vergleichen. Wir stellen fest, daß die Fehler der Masse, der Temperatur und der Zeit von gleicher Größenordnung sind, während die Spannung und besonders die Stromstärke weit größere Fehler aufweisen. Um zu genaueren Ergebnissen zu kommen, müssen in erster Linie Stromstärke- und Spannungsmessung verbessert werden.

Insgesamt erhalten wir $\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| = 0{,}0803$.

Daraus folgt $|\Delta\eta| = 0{,}0803 \cdot \eta = 0{,}0803 \cdot 0{,}885 = 0{,}07$.

Das Ergebnis lautet $\eta = \underline{\underline{0{,}89 \pm 0{,}07}}$.

2. Übungen

2.1. Vorbemerkungen

Im Unterricht und im Lehrbuch wird die Physik dargestellt als ein System von Erscheinungen, das durch Gesetze, Erfahrungssätze und Theorien beschrieben wird. Durch die Übungen sollen Sie die Fähigkeit erwerben, die genannten Gesetzmäßigkeiten für die Beschreibung einzelner Erscheinungen und für die Vorausberechnung von Ereignissen anzuwenden. Beschreibung heißt in der Physik: Verwendung definierter Begriffe und Darstellung von Zusammenhängen in mathematischer Form. Beides wird im Physikunterricht an der Ingenieurschule vorausgesetzt und weiter geübt. Sie sollten bewußt nutzen, was Sie in dieser Hinsicht von den vorangegangenen Bildungseinrichtungen mitbringen.

Die im folgenden Abschnitt enthaltene *Anleitung* für das Lösen von physikalischen Aufgaben bezieht sich vor allem auf den Aufgabentyp, der letzten Endes mathematisch gelöst wird. Da aber die Hauptarbeit vor dem Rechnen liegt und reine Denkarbeit ist, wird ein großer Teil der Anleitung auch für sogenannte Denkaufgaben anwendbar sein. Aus dem gleichen Grund kann die Anleitung kein Algorithmus oder gar „Rechenrezept" sein, mit dem Sie ganz sicher zum Ziel kommen. Die eigene Denkarbeit nimmt Ihnen niemand ab. Wir können lediglich versuchen, diese Denkarbeit systematischer und damit zielstrebiger zu machen.

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit ist oft vom *physikalischen Denken* die Rede. Dieser Begriff soll nicht eine für Sie unerreichbare Fähigkeit bezeichnen, sondern eine Vorstufe dessen, was Sie als Ingenieur zu tun haben: Analysieren eines gegebenen, meist technischen Sachverhalts mit dem Ziel, Einflußgrößen zu ermitteln und quantitativ zu beschreiben sowie diesen Sachverhalt unter Nutzung der physikalischen Gesetze gezielt zu verändern. Die im Physikunterricht dargestellten Zusammenhänge sind meist bewußt einfacher und übersichtlicher gestaltet als die in der Technik. Deshalb ist die Physik das geeignete Übungsfeld für die genannten Fähigkeiten.

Die Anleitung zum Lösen von Aufgaben wird Ihnen zunächst allgemein gegeben. Später zeigen wir Ihnen anhand von durchgerechneten Beispielen und an Aufgaben mit Hinweisen zur Lösung, wie der Lösungsweg in den verschiedenen speziellen Fällen möglichst rationell zu wählen ist.

2.2. Methodische Anleitung für das Lösen von Aufgaben

Bei näherer Untersuchung des Lösungsweges für rechnerische Aufgaben stellt sich heraus, daß in allen Fällen fünf Bearbeitungsschritte notwendig sind. Ihre Abfolge stellt Bild 2 dar. Dieses Bild ist wegen seiner allgemeingültigen Aussage natürlich noch keine ausreichende Anleitung für jeden Einzelfall. Wir wollen deshalb näher untersuchen, welche Tätigkeiten im einzelnen zu jedem der genannten Schritte gehören.

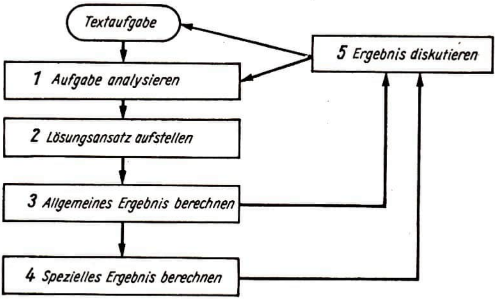


Bild 2

1 AUFGABE ANALYSIEREN

Die Analyse läßt sich in folgende Teilschritte auflösen:

- **Aufmerksames Lesen**

Hierbei ist jedes Wort in der Aufgabenstellung auf seine Bedeutung hin zu untersuchen. Die Aufgabenstellungen in Lehrbüchern sind meist so abgefaßt, daß sie keine überflüssigen Worte enthalten. So sagt z.B. die Bemerkung, daß sich eine Bewegung in geringer Höhe über der Erdoberfläche abspielt, aus, daß eine konstante Beschleunigung, die Fallbeschleunigung, in vertikaler Richtung zu berücksichtigen ist.

- **Zusammenstellen der gegebenen und gesuchten Größen**

Erfassen Sie dabei alle Größen, auch die durch den Text nur indirekt gegebenen. Im soeben erwähnten Beispiel hätten Sie unter die gegebenen Größen $a = g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ aufzunehmen.

Sorgen Sie für eine eindeutige Zuordnung der Größen zu den Symbolen, die Sie auswählen. Bei der Auswahl der Formelzeichen sollten Sie sich nach der TGL 0–1304 orientieren. Kommt eine Größenart mehrfach vor, legen Sie Indizes fest. Auch den gesuchten Größen werden Symbole eindeutig zugeordnet.

- **Anfertigen einer Skizze**

Dieser Teilschritt ist nicht in allen Fällen unbedingt erforderlich. Er verbessert aber die Anschauung und erleichtert Ihnen in jedem Fall die weitere Arbeit. In die Skizze tragen Sie die gegebenen und die gesuchten Größen ein. Dabei können Sie schon erste Aussagen über geometrische Bedingungen und Richtungsbeziehungen gewinnen. Eine maßstabgerechte Darstellung ist dafür nicht erforderlich. Als Beispiel seien die Kräfte dargestellt, die an einem Körper angreifen, der sich auf einer geneigten Ebene nach unten bewegt (Bild 3).

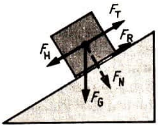


Bild 3

- **Klassifizieren**

Dem in der Aufgabenstellung beschriebenen Sachverhalt werden physikalische Begriffe oder Gesetze zugeordnet. Hierbei werden Sie einigen Schwierigkeiten begegnen. Wir empfehlen Ihnen, nach den folgenden Fragestellungen vorzugehen, mit denen sich das Suchfeld rasch einengen läßt. Die einfachste Frage ist:

Welchem Teilgebiet der Physik ist die Aufgabe zuzuordnen?

Diese Fragestellung führt oft zu rein formaler Behandlung der Aufgabe. Sie hat geringen Wert für die Behandlung von komplexen Aufgabenstellungen.

Um die Aufgabe von ihrem Inhalt her erschließen zu können, sollten Sie besser die Antwort auf die folgenden zwei Fragen suchen:

Soll ein Zustand (von Körpern oder Feldern) beschrieben werden?

Die für die Beschreibung benutzten Größen sind dabei zeitlich konstant. Es kann sich um Zustände folgender Art handeln:

Geometrische Anordnung, räumliche Struktur
Massenverteilung
Ladungsverteilung
Statisches Kräftegleichgewicht
Thermodynamischer Zustand, gekennzeichnet durch Temperatur, Druck, Volumen, innere Energie, Entropie, Phase
Struktur von Feldern, gekennzeichnet durch Feldstärke, Potential, elektrische Verschiebung, magnetische Flußdichte

Soll ein Vorgang beschrieben werden?

Dabei ist mindestens eine Größe zeitlich veränderlich. Mögliche Vorgänge sind:

Ortsveränderung ohne bekannte Kraftwirkung, gekennzeichnet durch kinematische Größen

Wirkung von Kräften (Beschleunigung oder Verformung von Körpern), gekennzeichnet durch dynamische Größen
Energietransport (Stromfluß, Wärmeleitung, Wellenausbreitung)
Energieumwandlungen (Änderungen der Energieform), beschrieben durch den Energieerhaltungssatz
Änderung von Körpereigenschaften (Form, Volumen, Dichte, Struktur bzw. Aggregatzustand, Leitfähigkeit, Ladung), beschrieben durch die Definitionsgleichungen für die genannten Größen

Wenn Sie nach unserer Liste versuchen, Aufgaben zu klassifizieren, werden Sie kaum eine Aufgabe finden, die sich nicht einordnen läßt, obwohl diese Liste nicht vollständig sein kann. Sollte die Aufgabe komplexer Art sein, d.h. die Berechnung mehrerer Größen aus verschiedenen Teilgebieten der Physik erfordern, dann wenden Sie unsere Fragestellung auf jede gesuchte Größe bzw. auf jede Teilaufgabe gesondert an, ohne Rücksicht auf die anderen Teile.

2 LÖSUNGSANSATZ AUFSTELLEN

Dies ist der schwierigste Teil der Aufgabenlösung. Die vorangegangene gründliche Klassifizierung erleichtert Ihnen aber die weitere Arbeit wesentlich. Ein eindeutiges Rezept für die Aufstellung des Lösungsansatzes gibt es nicht. Auf jeden Fall werden Sie Wissensspeicher benutzen müssen. Dabei bedenken Sie zunächst, daß Ihr Gedächtnis der am leichtesten zugängliche Wissensspeicher ist. Wir wollen vier Möglichkeiten diskutieren, von denen eine, gegebenenfalls in Kombination mit den anderen, zum Ziel führen muß. Für die Auswahl des geeignetsten Weges können wir noch keine exakten Kriterien angeben. Versuchen Sie die genannten Möglichkeiten zunächst formal nacheinander und wenden Sie die dabei gesammelten Erfahrungen bei den später folgenden Aufgaben an.

- Ihr erster Versuch könnte darin bestehen, daß Sie im Wissensspeicher **nach einer gleichartigen Aufgabe suchen**, die bereits gerechnet wurde. Solche Beispielaufgaben finden Sie u.a. auch im folgenden Übungsteil. Dieses Vorgehen kann sehr zeitaufwendig sein. Es birgt auch die Gefahr in sich, daß der Vergleich der Aufgaben zu formal erfolgt und gelegentlich am Problem vorbeiführt.
  Sie sollten diesen Weg vorwiegend nur so lange verwenden, wie Sie noch zu wenig Übung haben. Tragfähiger sind die folgenden Varianten, unter denen Sie je nach Problemstellung zu wählen haben:

- Versuchen Sie im Wissensspeicher die **Gleichung zu finden, die die gesuchte Größe definiert.** Enthält die Definitionsgleichung zwar die gesuchte Größe, nicht aber die gegebenen, benutzen Sie sie trotzdem und suchen Sie nach weiteren Gleichungen, die eine Verknüpfung der in der Definitionsgleichung vorkommenden Größen mit den gegebenen ermöglichen. Dabei ist es oft notwendig, auch mathematische bzw. geometrische Beziehungen zu benutzen, wie etwa $\tan\alpha$ = Gegenkathete : Ankathete.

- Genügen Definitionsgleichungen nicht, suchen Sie im Wissensspeicher die **Gleichung, die den ablaufenden Vorgang bzw. den gegebenen Zustand beschreibt.** Das Aufsuchen sollte nach der Bezeichnung des Vorgangs oder Zustands erfolgen, nicht aber formal nach dem – vielleicht zufällig – gewählten Symbol. Wenn beispielsweise nach dem Wurfwinkel beim schrägen Wurf gefragt wird und Sie diesem Winkel das Symbol α zuordnen, dann dürfen Sie nicht etwa aus dem Wissensspeicher die Definitionsgleichung für die Winkelbeschleunigung heraussuchen, nur weil diese ebenfalls mit dem Symbol α belegt ist. Wenn Sie beim Klassifizieren sorgfältig gearbeitet haben, kann es Ihnen nicht schwerfallen, mit den Gleichungen für den schrägen Wurf zu arbeiten, selbst wenn darin der gesuchte Winkel eine andere Bezeichnung tragen sollte.
  Um Fehler der genannten Art zu vermeiden, sollten Sie statt des Symbols immer die Größe lesen, für die dieses Symbol steht. Um ein bekanntes Beispiel zu verwenden: Lesen Sie nicht „$F = ma$“, sondern „Kraft = Masse · Beschleunigung“.

- Im dritten Fall finden Sie keine Gleichung, die die gesuchte Größe oder einen Vorgang bzw. Zustand beschreibt, für den diese Größe eine Rolle spielt. Dann überlegen Sie, welche **allgemeingültigen Gesetze** Sie auf den gegebenen speziellen Fall anwenden können. Dieser Weg ist mitunter etwas langwierig, aber sicher. Die zu verwendenden Gesetze sind vorwiegend der Energieerhaltungssatz, die Newtonschen Axiome, der Impulserhaltungssatz, das Ohmsche und das Kirchhoffsche Gesetz sowie die Erhaltungssätze für Masse und Ladung.
  Sie schreiben das allgemeine Gesetz zunächst verbal auf und *präzisieren* es dann in weiteren Schritten. Sie können auch mit einer global formulierten Gleichung beginnen. Das kann beispielsweise so aussehen:

Summe aller Energien	= const
Energie vor dem Bremsen	= an den Bremsklötzen umgesetzte Arbeit
Kinetische Energie	= Reibungsarbeit
$^1/_2 m v^2$	$= F_R s$
$^1/_2 m v^2$	$= \mu m g s \cos\alpha$

Beim Präzisieren des allgemeinen Gesetzes benötigen Sie allerdings Gleichungen für die Kräfte, Energieformen und andere Größen, die Sie unter den Definitionsgleichungen finden. Die meisten dieser Definitionen benötigen Sie so oft, daß es sich lohnt, sie sich einzuprägen.

Überprüfen Sie zum Schluß, ob Ihr Ansatz ebenso viele Gleichungen enthält wie Unbekannte. Ist dieses formale Kriterium erfüllt, folgt der nächste Schritt.

3 ALLGEMEINES ERGEBNIS BERECHNEN

Wir unterscheiden zwei Arten von Ergebnissen: das allgemeine und das spezielle. Das allgemeine Ergebnis stellt die funktionale Abhängigkeit der gesuchten Größe von den gegebenen als Gleichung oder als Diagramm dar. Sie finden dieses Ergebnis, indem Sie die im Lösungsansatz zusammengefaßten Gleichungen nach der gesuchten Größe auflösen. Das ist eine rein mathematische Arbeit.
Ist außer der Gleichung oder statt der Gleichung eine grafische Darstellung gefragt und soll diese Darstellung Zahlenwerte enthalten, so ermitteln Sie zuerst den maximalen Funktionswert im Intervall. Dadurch wird der Maßstab der Achsenteilung bestimmt. Es genügt oft, wenn Sie den Kurvenverlauf durch einige ausgezeichnete Funktionswerte (Maxima, Nullstellen) festlegen. Ein punktweises Berechnen der Kurve erübrigt sich.

4 SPEZIELLES ERGEBNIS BERECHNEN

Das spezielle Ergebnis erhalten Sie, wenn Sie im allgemeinen Ergebnis die gegebenen speziellen Größen einsetzen. Beachten Sie dabei folgende Regeln, die Ihnen die Arbeit wesentlich erleichtern können:

Setzen Sie die gegebenen Größen, d. h. Zahlenwerte und Einheiten, so *ein*, wie Sie diese unter „*Gegeben*" aufgeschrieben haben.

Lassen Sie dabei *Zahlenwerte und Einheiten zusammen* (für jeweils eine gegebene Größe), um bei etwa nötiger Kontrollrechnung Übertragungsfehler ermitteln zu können.

Rechnen Sie zuerst mit den Einheiten. Falls sich nicht die Einheit der gesuchten Größen ergibt, ist die gefundene Gleichung, d. h. das allgemeine Ergebnis, falsch. Sie brauchen nicht weiterzurechnen.

Fassen Sie alle Zehnerpotenzen zusammen und berechnen Sie *überschlagsmäßig das Ergebnis.*

Berechnen Sie den *Zahlenwert mit sinnvoller Genauigkeit* (→ 1.6.).

5 ERGEBNIS DISKUTIEREN

Untersuchen Sie zunächst, ob das allgemeine Ergebnis eine sinnvolle Aussage liefert. Die Entscheidung darüber sollten Sie aber nicht dem Gefühl und auch nicht allein der Erfahrung überlassen. Oftmals enthalten nämlich die Ergebnisse Aussagen, die zwar sachlich richtig, aber nicht auf den ersten Blick plausibel sind. Sie sollten die Fähigkeit üben, sich eine exakte Vorstellung von der gefundenen funktionalen Abhängigkeit zu machen. Das gelingt Ihnen am besten, wenn Sie nacheinander alle variablen gegebenen Größen in der Gleichung nach Grenzwerten (vorwiegend Null oder Unendlich) gehen oder solche Werte annehmen lassen, die durch die Aufgabenstellung ausgezeichnet sind (Randwerte). Überprüfen Sie zum Schluß, ob die Formulierung

des Ergebnisses der Aufgabenstellung entspricht. Wenn beispielsweise ein Winkel gesucht wird, dann ist $\tan\alpha = a/b$ noch kein Ergebnis. Sie müssen eine solche Gleichung bis zum Ende lösen: $\alpha = \arctan a/b$.
Die Diskussion des speziellen Ergebnisses beginnt bei der Einheit. Das haben Sie zweckmäßigerweise schon vor der Berechnung des Betrages getan. Nun schätzen Sie ab, ob Sie einen sinnvollen Betrag ermittelt haben. Sie dürfen davon ausgehen, daß die Aufgaben der Sammlung so gestellt sind, daß praktisch mögliche spezielle Ergebnisse auftreten. Diese Ergebnisse können Ihnen ein Gefühl für die realen Größenordnungen vermitteln.

Beispiel

Wir wollen am folgenden Beispiel das Vorgehen bei der Lösung einer Aufgabe demonstrieren:

TEXTAUFGABE

Ein Stausee wird durch Bäche gespeist, die zusammen einen Mindestzufluß von 2,8 m³ s⁻¹ erbringen. Überprüfen Sie, ob damit der Wasserbedarf eines Wasserkraftwerks gedeckt werden kann, das unter folgenden Bedingungen arbeiten soll: Der Überlauf des Staudamms liegt 18 m über den Turbinenschaufeln. Die Turbine treibt einen Generator an, der eine Elektrolyseanlage speist. Diese Anlage arbeitet nach Transformation und Gleichrichtung mit einer Spannung von 10 V und einem Strom der Stärke 10 kA. Die Wirkungsgrade betragen für die Turbine 0,68, den Transformator 0,96 und den Gleichrichter 0,94.

AUFGABE ANALYSIEREN
aufmerksam lesen

Über die Elektrolyseanlage, die hier den Endverbraucher darstellt, wird nichts Näheres gesagt. Offenbar interessiert an ihr nur die Leistung. Die Zwischenstufen Trafo und Gleichrichter scheinen ebenfalls keine wesentliche Rolle zu spielen. Mehr läßt sich hier noch nicht herauslesen.

gegebene und gesuchte Größen zusammenfassen, Größen einer Größenart mit Indizes versehen

Gegeben: $h = 18\ \text{m}$; $\eta_1 = 0{,}68$; $\eta_2 = 0{,}96$
$U = 10\ \text{V}$; $I = 10\ \text{kA}$; $\eta_3 = 0{,}94$
$Z_{\text{min}} = 2{,}8\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}$

Gesucht: Vt^{-1} (zum Vergleich mit dem gegebenen Zufluß Z_{min})

Skizze anfertigen

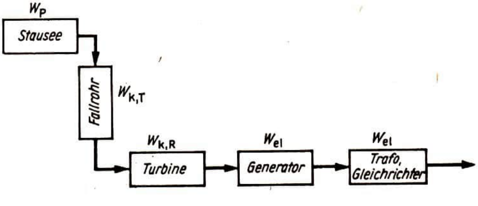


Bild 4

Klassifizieren
Welches Teilgebiet der Physik?

Die Begriffe in der Aufgabenstellung stammen aus den Abschnitten Dynamik, Mechanik strömender Flüssigkeiten, Gleichstromkreis und elektromagnetisches Feld. Es handelt sich also um eine komplexe Aufgabe. Es empfiehlt sich eine andere Fragestellung:

Wird ein Zustand beschrieben?

(Sind alle Größen zeitlich konstant?)

Geometrische Anordnung:
Wasser strömt, also Ortsveränderung

Massenverteilung:
Es werden Massen bewegt, also Änderung der Massenverteilung

Ladungsverteilung:
Zwischen Generator und Verbraucher Stromfluß, also Änderung der Ladungsverteilung

Statisches Kräftegleichgewicht:
Keine Kräfte gegeben

Thermodynamischer Zustand:
Keine thermodynamischen Größen gegeben

Struktur von Feldern:
Keine Feldgrößen gegeben

Wird ein Vorgang beschrieben?

(Gibt es zeitlich veränderliche Größen?)

Ortsveränderung:
Wasser fällt unter dem Einfluß der Schwerkraft, also

Wirkung von Kräften:
Schwerkraft ist wirksam

Energietransport:
Sowohl Wasser als auch elektrischer Strom transportieren Energie

Energieumwandlung:
Es wird aus Strömungsenergie des Wassers Elektroenergie gewonnen

Änderung von Körpereigenschaften:
Keine Größen gegeben

Ergebnis des Klassifizierens: Vorgang der Energieumwandlung in mehreren Stufen: potentielle Energie des gespeicherten Wassers, kinetische Energie des Turbinenläufers, kinetische Energie des Generatorankers, elektrische Energie des Generators, des Transformators, des Gleichrichters und der Elektrolyseanlage (Bild 4).

LÖSUNGSANSATZ AUFSTELLEN

Gleichung suchen

Bei komplexen Aufgaben beginnt man zweckmäßigerweise nicht mit Definitionsgleichungen. Da ein Vorgang beschrieben wird, suchen wir eine Gleichung, die diesen Vorgang, die Energieumwandlung, darstellt. In den uns zugänglichen Wissensspeichern finden wir keine Gleichung, die den Wasserbedarf eines Kraftwerkes in Abhängigkeit von der Ausgangsleistung angibt. Deshalb benutzen wir den Energiesatz:

Allgemeine Aussage formulieren

$$W_{zu} = W_{ab} + \text{Verluste} \qquad (1)$$

Für die Energiebilanz genügen die erste und die letzte in der Aufgabe auftretende Energieform. Die in den einzelnen Zwischenstufen auftretenden Verluste lassen sich durch den Gesamtwirkungsgrad erfassen:

Allgemeine Aussage präzisieren

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} \tag{2}$$

Daraus wird, da nur Anfangs- und Endform der Energie (potentielle Energie des gespeicherten Wassers und elektrische Energie) in die Rechnung eingehen:

$$\eta W_p = W_{el} \tag{3}$$

Die Gleichungen für die in (3) vorkommenden Energieformen entnehmen wir dem Wissensspeicher:

$$W_p = mgh \tag{4}$$

$$W_{el} = UIt \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt

$$\eta mgh = UIt \tag{6}$$

(6) genügt noch nicht, da sie die gesuchte Größe nicht enthält und statt der gegebenen Einzelwirkungsgrade den noch unbekannten Gesamtwirkungsgrad aufweist. Die Beziehung zwischen diesem und den Einzelwirkungsgraden entnehmen wir dem Wissensspeicher:

Ergänzende Beziehungen suchen

$$\eta = \eta_1\eta_2\eta_3 \tag{7}$$

Statt des gesuchten Volumens enthält (6) die Masse. Im Wissensspeicher findet sich eine Beziehung zwischen Masse und Volumen:

$$\varrho = mV^{-1} \tag{8}$$

Die Dichte des Wassers ist bekannt. Sie läßt sich der Tabelle der Stoffeigenschaften (→ FB 7.2.) entnehmen. Damit ist jetzt das Gleichungssystem vollständig, der Lösungsansatz ist erfolgt.

ALLGEMEINES ERGEBNIS BERECHNEN

Durch Einsetzen von (7) und (8) in (6) ergibt sich die allgemeine Lösung über $\eta_1\eta_2\eta_3\varrho Vgh = UIt$ zu

$$\frac{V}{t} = \underline{\underline{\frac{UI}{\eta_1\eta_2\eta_3\varrho gh}}}$$

SPEZIELLES ERGEBNIS BERECHNEN

Einsetzen der Größen

$$\frac{V}{t} = \frac{10\ \text{V} \cdot 10\ \text{kA} \qquad \text{s}^2 \qquad \text{cm}^3}{0{,}68 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}94 \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot 18\ \text{m} \cdot 1\ \text{g}}$$

Einheitenrechnung

$$\frac{\text{V kA s}^2\ \text{cm}^3}{\text{m m g}} = \frac{\text{V} \cdot 10^3\ \text{A s}^2 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3}{\text{m}^2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}$$

$$= \frac{\text{W s}^2\ \text{m}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg m}^2\ \text{s}^2\ \text{m}}{\text{s}^3\ \text{kg}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Einheit prüfen

Die Einheit $m^3\,s^{-1}$ ist gleich der Einheit des zum Vergleich genannten Zuflusses Z_{min}, ist also richtig.

Ordnen, Überschlagsrechnen

$$\frac{V}{t} = \frac{10^{2-1} \qquad\qquad m^3}{0{,}68 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}94 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}8\ s} \approx 1\,\frac{m^3}{s}$$

Betrag berechnen

$$\frac{V}{t} = \underline{\underline{0{,}92\ m^3\,s^{-1}}}$$

Vergleich mit dem Zufluß: $2{,}8\ m^3\,s^{-1} > 0{,}92\ m^3\,s^{-1}$. Der Zufluß ist ausreichend.

ERGEBNIS DISKUTIEREN

Die im allgemeinen Ergebnis formulierte funktionale Abhängigkeit ist sinnvoll. Die benötigte Wassermenge wächst mit der elektrischen Leistung und sinkt mit zunehmender Fallhöhe.
Die Einheit ist die der gesuchten Größe, der Betrag ist sinnvoll.
Die Aufgabe ist gelöst.

Lassen Sie sich durch den großen Umfang des Beispiels nicht abschrecken. Es wurde bewußt so ausführlich dargestellt. Dabei wurde fast alles mitgeschrieben, was man gewöhnlich nur denkt. Wenn Sie jetzt selbständig Aufgaben lösen, schreiben Sie nur die wichtigsten Ergebnisse des Nachdenkens auf, nicht aber alle Operationen.
Für das praxisbezogene Lösen von Aufgaben gibt es zwei unterschiedliche Wege: 1. Berechnen des allgemeinen Ergebnisses ohne spezielle Zwischenergebnisse, 2. Verzichten auf das allgemeine Ergebnis und schrittweises Rechnen mit speziellen Zwischenergebnissen.
Wenn es um die theoretisch wichtige Erkenntnis funktionaler Abhängigkeit geht, ist eine allgemeine Lösung nützlich; d.h., daß im allgemeinen Ergebnis außer der gesuchten Größe nur solche Größen vorkommen, die in der Aufgabenstellung gegeben sind. In dieses allgemeine Ergebnis sind dann die gegebenen Werte einzusetzen, um das spezielle Ergebnis zu errechnen.
Bei Bemessungsaufgaben, bei denen funktionale Zusammenhänge weniger interessieren als das spezielle Ergebnis, werden Zwischenergebnisse in der nachfolgenden Rechnung wie gegebene Größen verwendet. Dieses Vorgehen ist beispielsweise bei der Berechnung von Widerstandskombinationen zu bevorzugen, da dort allgemeine Ergebnisse sehr umfangreich, aber wenig aussagekräftig sind.
Um Ihnen die Entscheidung über die Wahl des geeigneteren Weges zu erleichtern, vereinbaren wir: Werden in der Aufgabenstellung keine Zwischenergebnisse gefordert, verfahren Sie nach 1., sind Zwischenergebnisse verlangt, wählen Sie Weg 2.

2.3. Beispiele und Übungen

2.3.1. Beispiele und Übungen zum Rechnen mit Einheiten und mit Größengleichungen

▶ 1.1 Eine Rechnung ergibt eine Größe mit der Einheit $\frac{\text{As}}{\text{g}}\,\frac{\text{Vs cm}}{\text{cm} \cdot \text{cm}}$. Weisen Sie nach, daß diese Größe eine Geschwindigkeit sein kann.

Lösung: Der Nachweis wird durch Einheitenrechnung geführt.

$$\frac{\text{As Vs cm}}{\text{g cm}^2} = \frac{\text{Ws}^2\text{ cm}}{\text{g cm}^2} = \frac{\text{Nm s}}{\text{g cm}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s g cm}} = \frac{10^3\text{ m}}{10^{-2}\text{ s}} = \underline{\underline{10^5\text{ m s}^{-1}}}$$

Die Einheit Meter je Sekunde weist auf eine Geschwindigkeit hin.

1.2 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, die nur SI-Einheiten enthalten, durch formale Rechnung. Ordnen Sie den vereinfachten Einheiten Größen X_i zu.

$$[X_1] = \frac{\text{N m}^3\text{ kg}}{\text{J s}^2} \qquad [X_3] = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2\,\Omega\text{ A}}$$

$$[X_2] = \frac{\text{N A}^2\text{ T}}{\text{Pa V J}} \qquad [X_4] = \frac{\text{m kg}}{\text{H F N s}}$$

■ 1.3 Rechnen Sie die folgenden Ausdrücke, die auch inkohärente Einheiten enthalten, in einfachere Ausdrücke um, die ausschließlich SI-Einheiten enthalten.

$$[X_1] = \frac{\text{kWh Nm}}{\text{PS at cm}^3} \qquad [X_3] = \frac{\text{As}^2\text{ V cm}}{\text{g cm}^2}$$

$$[X_2] = \frac{\text{kcal s}^3}{\text{kg m}^2\text{ h}} \qquad [X_4] = \frac{\text{kp cm Ws}}{\text{Torr m}^3\text{ N}}$$

▶ 1.4 Die Energie W in Kilopondmeter soll nach der Gleichung $W = {}^1/_2 m v^2$ für den Fall, daß die Masse m in Tonnen und die Geschwindigkeit v in Kilometer je Stunde gegeben sind, berechnet werden. Stellen Sie die dafür zugeschnittene Größengleichung auf.

Gegeben: m; $[m] = \text{t}$; v; $[v] = \text{km h}^{-1}$

Gesucht: W; $[W] = \text{kpm}$

Wir verwandeln eine Größengleichung in eine zugeschnittene Größengleichung, indem wir zunächst jede Größe durch ihre vorgegebene Einheit teilen (dabei verwenden wir den schrägen Bruchstrich) und dann wieder mit dieser Einheit multiplizieren:

$$W_{/\text{kpm}} \cdot \text{kpm} = \frac{1}{2}\, m_{/\text{t}} \cdot \text{t} \cdot (v_{/\text{kmh}^{-1}})^2 \cdot (\text{km h}^{-1})^2$$

Nun fassen wir alle Einheiten zusammen, die nicht unter einem schrägen Bruchstrich stehen:

$$W_{/\mathrm{kpm}} = \frac{1}{2}\, m_{/\mathrm{t}}\, (v_{/\mathrm{kmh^{-1}}})^2 \frac{\mathrm{t\ km^2}}{\mathrm{kpm\ h^2}}$$

$$\textit{Nebenrechnung:}\ \frac{\mathrm{t\ km^2}}{\mathrm{kp\ m\ h^2}} = \frac{10^3\ \mathrm{kg} \cdot 10^6\ \mathrm{m^2}}{9{,}81\ \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s^2}}\ \mathrm{m} \cdot 3{,}6^2 \cdot 10^6\ \mathrm{s^2}} = 7{,}88$$

$$W_{/\mathrm{kpm}} = \underline{\underline{3{,}94\, m_{/\mathrm{t}}\, (v_{/\mathrm{kmh^{-1}}})^2}}$$

1.5 Die folgenden Gleichungen sind auf die vorgegebenen Einheiten zuzuschneiden:

$$F = \frac{P}{2\pi\, n r} \qquad\qquad I = \frac{P}{\eta H}$$

Kraft	F	in kp	Stromstärke (Volumenstrom)	I	in $\mathrm{m^3\ h^{-1}}$
Leistung	P	in W	Leistung	P	in kW
Frequenz	n	in $\mathrm{min^{-1}}$	Wirkungsgrad	η	–
Radius	r	in cm	Heizwert	H	in $\mathrm{kcal\ m^{-3}}$

2.3.2. Beispiele und Übungen zur Kinematik

▶ 2.1 Ein Motorradfahrer überholt auf der Autobahn mit der Geschwindigkeit 90 km h⁻¹ einen Bus, der mit der Geschwindigkeit 86 km $\mathrm{h^{-1}}$ in gleicher Richtung fährt. Im Bus läuft ein Fahrgast mit der Geschwindigkeit 1,68 m $\mathrm{s^{-1}}$ in Fahrtrichtung. Vergleichen Sie die Geschwindigkeiten, mit denen sich Motorradfahrer und Busfahrgast gegenüber der Straße bewegen.

Gegeben: $v_\mathrm{M} = 90\ \mathrm{km\ h^{-1}}$; $v_\mathrm{B} = 86\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ *Gesucht:* v_F
$v_\mathrm{rel} = 1{,}68\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

Der Fahrgast bewegt sich gegenüber der Straße mit der Summe aus seiner eigenen Geschwindigkeit und der des Omnibusses:

$$v_\mathrm{F} = v_\mathrm{B} + v_\mathrm{rel}$$

$$v_\mathrm{F} = 86\ \mathrm{km\ h^{-1}} + 1{,}68\ \mathrm{m\ s^{-1}} = (86 + 1{,}68 \cdot 3{,}6)\ \mathrm{km\ h^{-1}} = 92\ \mathrm{km\ h^{-1}}$$

$\underline{\underline{v_\mathrm{F} > v_\mathrm{M}}}$; der Fahrgast „überholt" das Motorrad

2.2 Drei Panzerabwehrraketen fliegen mit einer Geschwindigkeit von 300 km $\mathrm{h^{-1}}$ über das Gelände. Jede trifft einen Panzer. Der erste steht, der zweite rollt mit einer Geschwindigkeit von 60 km $\mathrm{h^{-1}}$ auf die Abschußrampe zu, der dritte entfernt sich von ihr mit der gleichen Geschwindigkeit. Berechnen Sie die drei Auftreffgeschwindigkeiten.

■ **2.3** Auf einer Baustelle werden Ziegelsteine mit einem Förderband nach oben befördert. Wegen starker Schrägneigung des Bandes rutschen die Steine während der Beförderung mit der Geschwindigkeit 5,0 cm s^{-1} nach unten. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Band laufen muß, wenn in einer Stunde 6000 Steine befördert werden sollen. Die Steine werden in einem mittleren Abstand von 50 cm auf das Band gelegt.

2.4 Zeichnen Sie die Bahn, die ein Punkt auf dem Umfang des Rades eines mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Wagens für einen am Straßenrand stehenden Beobachter beschreibt.

▶ **2.5** Beschreiben Sie die Art der Bewegung 1. eines Kolbens im Verbrennungsmotor, 2. der mit dem Kolben verbundenen Kurbelwelle.

1. Der Kolben führt in der durch die Zylinderwand gegebenen Führung eine Translationsbewegung aus. 2. Die mit dem Kolben verbundene Kurbelwelle rotiert.

Bemerkung: Mit Hilfe der gelenkigen Verbindung zwischen Kolben und Kurbelwelle, dem Pleuel, und wegen der exzentrischen Befestigung an der Kurbelwelle ist es möglich, Translation in Rotation umzuwandeln. Die Umwandlung in entgegengesetzter Richtung ist ebenso möglich.

▶ **2.6** Aus einem Kraftfahrzeug tropft in einem zeitlichen Abstand von 2,5 s Öl auf die Straße. Bild 5 zeigt die Markierungspunkte MP, die während einer Minute durch die Öltropfen auf der Straße entstanden. 1. Beschreiben Sie den Bewegungsablauf qualitativ. 2. Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit in Meter je Sekunde und in Kilometer je Stunde für die gesamte Strecke. 3. Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung auf der Beschleunigungsstrecke.

Gegeben: MP (→ Bild 5) *Gesucht:* 1. Beschreibung
2. v_m; 3. a_m

1. Der Abstand der Markierungspunkte MP ist um so größer, je schneller der Wagen fährt. Aus dem Bild lesen wir ab: Bis MP *6* ist $v = \text{const}$; von MP *6* bis MP *10* ist $\Delta v < 0$; von MP *10* bis MP *12* ist $v = \text{const}$; von MP *12* bis MP *21* ist $\Delta v > 0$; von MP *21* bis MP *24* ist $v = \text{const}$.

2. Aus dem Bild folgt weiterhin $s = 360$ m; $t = 60$ s.

$$v_m = \frac{s}{t}; \qquad v_m = \frac{360\ \text{m}}{60\ \text{s}} = \underline{\underline{6\ \text{m s}^{-1}}} = \underline{\underline{21{,}6\ \text{km h}^{-1}}}$$

3. Für die Beschleunigungsstrecke (MP *12* bis MP *21*) gilt:

$$a_m = \frac{v_{21} - v_{12}}{t_{21} - t_{12}}$$

$$v_{12} = \frac{s_{11/12}}{t_{11/12}} = \frac{4\ \text{m}}{2{,}5\ \text{s}} = 1{,}6\ \text{m s}^{-1};$$

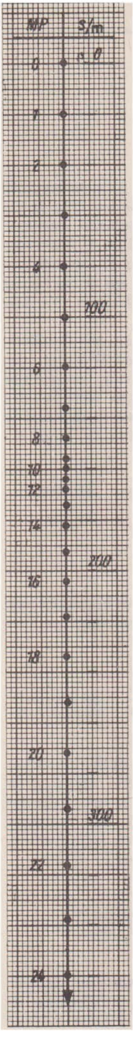


Bild 5

$$v_{21} = \frac{s_{21/22}}{t_{21/22}} = \frac{22\ \text{m}}{2{,}5\ \text{s}} = 8{,}8\ \text{m s}^{-1}$$

$$a_\text{m} = \frac{8{,}8\ \text{m s}^{-1} - 1{,}6\ \text{m s}^{-1}}{22{,}5\ \text{s}} = \underline{\underline{0{,}32\ \text{m s}^{-2}}}$$

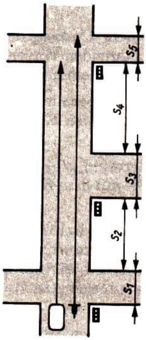


Bild 6

▶ 2.7 An einer Hauptverkehrsstraße folgen drei mit Ampeln besetzte Kreuzungen aufeinander. Die erste Querstraße ist 12 m breit, die zweite 18 m und die dritte 10 m. Die Abstände zwischen den Querstraßen betragen 520 m und 640 m (Bild 6). Die erste Ampel leuchtet 30 s lang grün; die zweite wird 47,3 s nach der ersten auf Grün geschaltet, und zwar für 20 s. Sie dritte Ampel wird 60,5 s nach der zweiten umgeschaltet und bleibt 20 s lang grün.
Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit, die ein Radfahrer haben muß, der mit Beginn der grünen Welle an der ersten Ampel startet und die dritte Kreuzung beim Umschalten auf Gelb verläßt. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert mit der Geschwindigkeit, die ein PKW hat, der die erste Ampel gerade noch bei Grün, die letzte aber beim Umschalten auf Grün erreicht.

Gegeben: $s_1 = 12$ m; $s_2 = 520$ m; $s_3 = 18$ m
$s_4 = 640$ m; $s_5 = 10$ m
$t_1 = 30$ s; $t_2 = 47{,}3$ s
$t_3 = 20$ s; $t_4 = 60{,}5$ s; $t_5 = 20$ s

Gesucht: v_R, v_P

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Radfahres berechnet sich als Quotient der gesamten Strecke und der gesamten zur Verfügung stehenden Zeit:

$$\underline{\underline{v_\text{R} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5}{t_2 + t_4 + t_5}}}\,; \qquad v_\text{R} = \frac{1200\ \text{m}}{127{,}8\ \text{s}} = \underline{\underline{34{,}0\ \text{km h}^{-1}}}$$

t_1 und t_3 kommen in der Lösung nicht vor, da es für den Radfahrer nicht von Belang ist, wie lange die erste Ampel grün leuchtet. Der PKW startet um die Zeitspanne t_1 später als der Radfahrer. Für ihn ist die Schaltdauer der 2. und 3. Ampel nicht wesentlich. Ebenso geht aus den Angaben nicht hervor, in welcher Zeit er die letzte Kreuzung überquert.

$$\underline{\underline{v_\text{P} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_2 + t_4}}}\,; \qquad v_\text{P} = \frac{1190\ \text{m}}{107{,}8\ \text{s}} = \underline{\underline{39{,}8\ \text{km h}^{-1}}}$$

2.8 Der Schnellzug Dresden – Leipzig legt die 120 km lange Strecke in 1 h 35 min zurück. 15 min davon entfallen auf Bahnhofsaufenthalte. Ein Personenzug benötigt für die gleiche Strecke

2 h 20 min, wovon 28 min Bahnhofsaufenthalte gerechnet werden. Vergleichen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeiten beider Züge, 1. bezogen auf die Reisedauer, 2. bezogen auf die reine Fahrzeit.

2.9 Im Lauf einer Maschinenpistole wird ein Geschoß in 1,21 ms auf 795 m s^{-1} beschleunigt. Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung.

▶ **2.10** Die Orte A, B und C liegen an der gleichen Straße. Die Entfernung $\overline{AB}$ beträgt 15 km, $\overline{AC}$ 85 km und $\overline{BC}$ 70 km. Ein Mopedfahrer startet in A und fährt in Richtung C mit einer Geschwindigkeit von 45 km h^{-1}. 40 min nach ihm startet in B ein PKW und fährt mit einer Geschwindigkeit von 75 km h^{-1} in gleicher Richtung. Ermitteln Sie grafisch, wo und wann der Mopedfahrer vom PKW überholt wird.

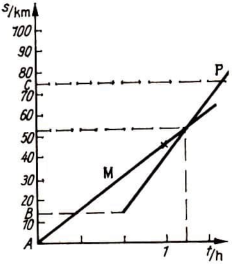


Bild 7

Gegeben: $s_{AB} = 15$ km; $s_{AC} = 85$ km; $s_{BC} = 70$ km
$v_M = 45$ km h^{-1}; $v_P = 75$ km h^{-1}

Gesucht: $s_ü$; $t_ü$

Wir zeichnen zunächst die Koordinatenachsen (Bild 7). Da sowohl die Zeit als auch die Wege nur positiv vorkommen, genügt der erste Quadrant. Wegen der geforderten quantitativen Auswertung werden die Achsen genügend groß und genügend fein geteilt gezeichnet. Die Wegachse braucht nicht länger zu sein als der angegebenen größten Entfernung, also 85 km, entspricht. Für die Zeitachse empfiehlt sich die Länge entsprechend 1 h 40 min, weil dann das Zeichnen besonders leicht wird: Die Kurve M beginnt bei $s = 0$ und $t = 0$, als Endpunkt zeichnen wir für $t = 1$ h die in 1 h zurückgelegte Strecke 45 km ein, die wir ohne Umrechnung der Geschwindigkeitsangabe entnehmen. Damit bekommt die Kurve die richtige Steigung. Die Kurve P beginnt bei $t = 40$ min und $s = 15$ km. Wir tragen der Einfachheit halber wieder die in 1 h zurückgelegte Strecke an. Wo sich beide Kurven schneiden, stimmen Orts- und Zeitkoordinaten beider Fahrzeuge überein, dann und dort findet die Begegnung bzw. der Überholvorgang statt. Aus dem Diagramm lesen wir ab:

$s_ü = 53$ km, $t_ü = 1$ h 10 min.

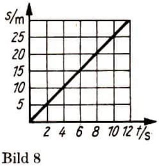


Bild 8

2.11 Zeichnen Sie zu dem in Übung 2.6 behandelten Bewegungsvorgang das s,t-, das v,t- und das a,t-Diagramm.

■ **2.12** Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Körpers, dessen Bewegung Bild 8 darstellt.

■ **2.13** Beschreiben Sie die durch das Diagramm (Bild 9) dargestellte gleichförmige Bewegung 1. durch eine Größengleichung und 2. durch eine zugeschnittene Größengleichung.

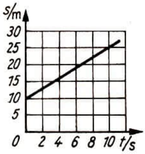


Bild 9

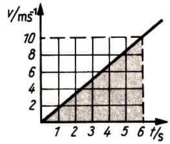


Bild 10

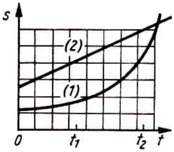


Bild 11

■ 2.14 In welchem Abstand von der ersten Ampel überholt der PKW aus Übung 2.7 den Radfahrer? Veranschaulichen Sie das Ergebnis der Rechnung durch ein s, t-Diagramm.

■ 2.15 Berechnen Sie für die Bewegung, die durch das Diagramm (Bild 10) dargestellt wird, den in 6 s zurückgelegten Weg.

■ 2.16 Vergleichen Sie die Momentangeschwindigkeiten bei den im Diagramm (Bild 11) durch die Kurven (*1*) und (*2*) dargestellten Bewegungen zu den Zeitpunkten $t = 0$; $t = t_1$ und $t = t_2$.

2.17 Ein Sprinter läuft 100 m in 10,0 s. Stellen Sie fest, ob er mit einem Radfahrer Schritt halten kann, der in 5,0 min 2,0 km weit fährt.

2.18 Ein Schützenpanzerwagen fährt im Gelände mit einer Geschwindigkeit von 75 km h^{-1}. Berechnen Sie die Zeit, die er benötigt, um eine 320 m breite Schneise zu überqueren.

■ 2.19 Am Anfangspunkt (Kilometer *0*) einer 150 km langen Strecke startet ein PKW, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 70 km h^{-1} fährt. 20 min später startet bei Kilometer *18* ein zweiter PKW, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km h^{-1} fährt. Berechnen Sie für beide PKW die Fahrzeiten.

■ 2.20 Auf einer Straßenbahnstrecke fahren die Bahnen im zeitlichen Abstand von 10 min mit einer Geschwindigkeit von 54 km h^{-1}. Ein Fußgänger läuft mit der Geschwindigkeit 6,0 km h^{-1} in Fahrtrichtung der Bahnen. Berechnen Sie den zeitlichen Abstand, in dem der Fußgänger die Bahnen an sich vorüberfahren sieht.

2.21 An Eisenbahnstrecken stehen die „Kilometersteine“ im Abstand von 200 m. Sie beobachten, daß der Zug 9 s benötigt, um von einem Stein zum nächsten zu gelangen. 1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit Ihres Zuges. 2. Zeichnen Sie ein Diagramm, aus dem Sie bei gegebenen zeitlichen Abständen zwischen zwei „Kilometersteinen“, gemessen in Sekunden, die Geschwindigkeit des Zuges bis 120 km h^{-1} ablesen können.

▶ 2.22 Ein Kraftwagen fährt 10 s lang mit einer mittleren Beschleunigung von 1,5 m s^{-2} an. Dann fährt er 100 m weit mit konstanter Geschwindigkeit und bremst schließlich auf einer Strecke von 15 m bis zum Stillstand ab. Berechnen Sie 1. die Dauer des gesamten Vorgangs, 2. die Länge der gesamten Fahrstrecke. 3. Zeichnen Sie das s, t-, das v, t- und das a, t-Diagramm.

Gegeben: $t_1 = 10$ s; $a_1 = 1{,}5$ m s^{-2}
$s_2 = 100$ m; $s_3 = 15$ m

Gesucht: 1. t_{ges}; 2. s_{ges}; 3. Diagramm

Die Bewegung hat drei Phasen:

I	gleichmäßig beschleunigt	$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2$	(1)
		$v_1 = a t_1$	(2)
II	gleichförmig	$s_2 = v_2 t_2$	(3)
		$v_2 = v_1$	(4)
III	gleichmäßig verzögert	$s_3 = \frac{a_3}{2} t_3^2$	(5)
		$a_3 = \frac{v_2}{t_3}$	(6)
		$v_3 = v_2$	(7)

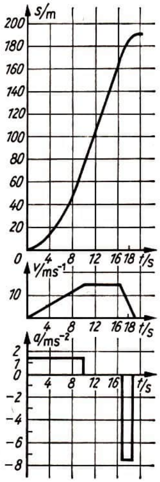


Bild 12

Gesamtweg und Gesamtzeit setzen sich aus drei Anteilen zusammen:

1. $t_{ges} = t_1 + t_2 + t_3$

   Aus (3), (4) und (2) folgt $t_2 = \frac{s_2}{a_1 t_1}$ und aus (4) ⋯ (7) $t_3 = \frac{2 s_3}{a_1 t_1}$.
   Damit wird

$$t_{ges} = t_1 + \frac{s_2}{a_1 t_1} + \frac{2 s_3}{a_1 t_1} = \underline{\underline{t_1 + \frac{s_2 + 2 s_3}{a_1 t_1}}}; \qquad t_{ges} = \underline{\underline{18{,}7\ \mathrm{s}}}$$

2. $s_{ges} = s_1 + s_2 + s_3 = \underline{\underline{\frac{a_1}{2} t_1^2 + s_2 + s_3}}$; $\qquad \underline{\underline{s_{ges} = 190\ \mathrm{m}}}$

3. Bild 12

2.23 Ein Fahrzeug wird von 80 km h^{-1} auf 20 km h^{-1} gebremst und legt dabei 120 m zurück. Berechnen Sie 1. seine Beschleunigung und 2. die Fahrtdauer für die zurückgelegte Strecke.

2.24 Ein Stein fällt von einer Brücke ins Wasser. Nach 4 s sieht man seinen Aufschlag auf dem Wasser. Berechnen Sie 1. die Höhe der Brücke über der Wasserfläche und 2. die Geschwindigkeit, mit der der Stein aufschlägt.

■ **2.25** Ein Kraftwagen fährt 100 m weit mit konstanter Geschwindigkeit. Anschließend bremst er auf einer Strecke von 50 m innerhalb von 5 s seine Bewegung bis zum Stillstand ab und fährt sofort weiter. In den nächsten 20 s beschleunigt er mit 1 m s^{-2}.
1. Skizzieren Sie das a,t-, das v,t- und das s,t-Diagramm.
2. Berechnen Sie die Dauer des ganzen beschriebenen Vorgangs.
3. Berechnen Sie die Länge der gesamten Fahrstrecke.

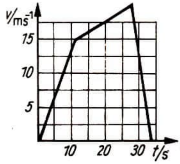


Bild 13

2.26 Ein LKW erreicht beim Anfahren aus dem Stillstand nach 18 s die Geschwindigkeit 65 km h^{-1}. Berechnen Sie 1. die durchschnittliche Beschleunigung und 2. den Anfahrtsweg.

2.27 Ein Fahrzeug bewegt sich nach dem im Bild 13 dargestellten v,t-Diagramm. Entwickeln Sie daraus das a,t- und das s,t-Diagramm.

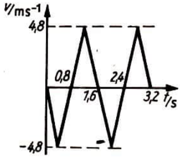


Bild 14

2.28 Das im Bild 14 dargestellte Diagramm stellt eine geradlinige Bewegung eines Maschinenteils dar, das als Massenpunkt aufgefaßt werden kann. Zum Zeitpunkt Null befindet sich der Punkt bei $+0{,}96$ m. Entwickeln Sie daraus das a,t- und das x,t-Diagramm.

2.29 Ein Schnellzug fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $60\ \mathrm{km\ h^{-1}}$, bremst vor einem Signal auf einer Strecke von 900 m gleichmäßig bis zum Stillstand, hält 4,0 min am Signal und beschleunigt schließlich mit $0{,}15\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ wieder auf die Geschwindigkeit $60\ \mathrm{km\ h^{-1}}$. Berechnen Sie die Verspätung, die der Zug durch den Haltevorgang erhält.

■ **2.30** Ein PKW überholt einen LKW von 15 m Länge, der eine konstante Geschwindigkeit von $60\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ hat. Der Überholvorgang beginnt 30 m hinter und endet 30 m vor dem LKW. Der PKW beschleunigt vom Beginn des Vorgangs bis zum Erreichen des LKW seine Geschwindigkeit gleichmäßig von $60\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ auf $80\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ und behält dann die erreichte Geschwindigkeit bei. Berechnen Sie die Dauer des Überholvorganges und die Weglänge, über die er sich erstreckt.

2.31 Zeichnen Sie zu dem in 2.30 beschriebenen Überholvorgang das s,t-Diagramm.

2.32 Ein Stein wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $30\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ senkrecht nach oben geworfen. Gleichzeitig wird von der gleichen Stelle aus ein zweiter Stein mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit nach unten geworfen. Berechnen Sie den Abstand, den die Steine nach 5,0 s voneinander haben, und stellen Sie den Bewegungsablauf bis zur 8. Sekunde im s,t- und im v,t-Diagramm dar.

2.33 Ein Radargerät ortet in 60 km horizontaler Entfernung ein Flugzeug, das mit einer Geschwindigkeit von $1200\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ anfliegt. 40 s später wird eine Fla-Rakete gestartet, die 50 s lang mit $20\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ beschleunigt wird und dann mit konstanter Geschwindigkeit auf das Ziel zusteuert. Berechnen Sie die horizontale Entfernung, in der die Rakete das Flugzeug trifft.

2.34 Eine Kugel fällt senkrecht aus einer Höhe von 10,0 m herunter. Im Zeitpunkt ihres Starts wird eine andere Kugel mit der Anfangsgeschwindigkeit $25{,}0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ senkrecht nach oben geschossen. Berechnen Sie die Höhe, in der sich die Kugeln treffen.

▶ **2.35** Bei einer geradlinigen Bewegung wurde nebenstehendes s,t-Diagramm aufgenommen (Bild 15.1). Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung am Ende der 1., 2. und 3. Sekunde.

Gegeben: → Bild 15.1 *Gesucht:* v_1; v_2; v_3; a_1; a_2; a_3

Analytische Lösung:

Das Diagramm liefert die Wertetabelle

t/s	1	2	3
s/m	1	8	27

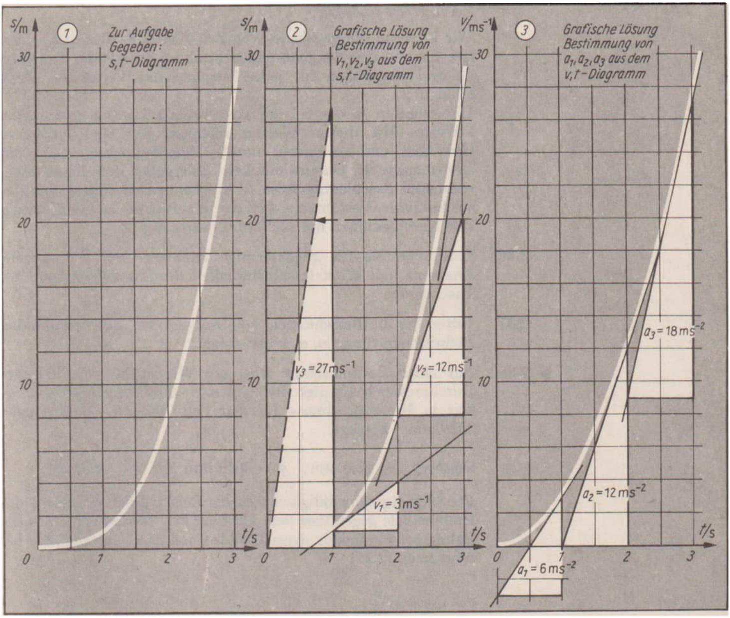


Bild 15

Daraus entnehmen wir, daß s der dritten Potenz von t proportional ist: $s = kt^3$.
Einsetzen von zwei zusammengehörigen Werten von t und s ergibt $k = 1\ \mathrm{m\ s^{-3}}$. Wir erhalten daraus durch Differenzieren für die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(kt^3) = 3kt^2$ und durch nochmaliges Differenzieren für die Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = 6kt$.
Einsetzen von k ergibt $v = 3\ \mathrm{m\ s^{-3}}t^2$; $a = 6\ \mathrm{m\ s^{-3}}t$. Mit den gegebenen Werten für t ergänzt sich die obige Wertetabelle:

$t_{/s}$	1	2	3
$v_{/\mathrm{m\ s^{-1}}}$	3	12	27
$a_{/\mathrm{m\ s^{-2}}}$	6	12	18

Zeichnerische Lösung:

Wir legen an die gegebene Weg-Zeit-Kurve in den zu $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s und $t_3 = 3$ s gehörenden Punkten jeweils die Tangente an und bestimmen für jede Tangente das Verhältnis $\Delta s/\Delta t$ (Bild 15.2).
Wir erhalten so die bei der analytischen Lösung errechneten v-Werte. Mit diesen Werten zeichnen wir eine v,t-Kurve (Bild 15.3) und bestimmen nun die Beschleunigung analog zur Bestimmung der Geschwindigkeit. Es ergeben sich die oben berechneten Beschleunigungen. Wir erkennen allerdings, daß das zeichnerische Verfahren wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeit beim Zeichnen nur Näherungswerte ergibt.

2.36 Berechnen Sie für gleichförmige Drehbewegung Umlaufzeit, Frequenz und Winkelgeschwindigkeit des Sekundenzeigers der Taschenuhr.

2.37 Leiten Sie die Beziehungen $s_B = r\varphi$, $v_B = r\omega$, $a_B = r\alpha$ aus den Definitionen für φ, ω, α, v und a her.

▶ 2.38 Auf einer Drehmaschine wird ein Werkstück von 12,0 mm Durchmesser bearbeitet. Berechnen Sie die Schnittgeschwindigkeit in Meter je Minute für den Fall, daß die Drehfrequenz 3000 min⁻¹ beträgt.

Gegeben: $d = 12{,}0$ mm; $n = 3000\ \text{min}^{-1}$ *Gesucht:* v

Die Schnittgeschwindigkeit v ist die Relativgeschwindigkeit des Drehmeißels gegenüber dem Umfang des Werkstücks, also die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Umfang. Sie beträgt nach (2.21)

$$v = \omega r = \omega \frac{d}{2}.$$

Mit (2.16) wird daraus

$$v = \frac{2\pi n}{t} \frac{d}{2} = \underline{\underline{\frac{d\pi n}{t}}}$$

$$v = \frac{12\ \text{mm} \cdot \pi \cdot 3000}{1\ \text{min}} = \frac{36\pi\ \text{m}}{60\ \text{s}} = \underline{\underline{18{,}8\ \text{m s}^{-1}}}$$

2.39 Ein Synchronnachrichtensatellit, der scheinbar still über einem Erdort am Äquator bei der täglichen Drehung der Erde steht, kreist in einer Höhe von $3{,}56 \cdot 10^4$ km über der Erdoberfläche. Wie groß ist seine Bahngeschwindigkeit?

■ 2.40 Der Perforationsabstand beim 8-mm-Schmalfilm beträgt 3,8 mm, die Bildfolgefrequenz sei 16 s⁻¹. Berechnen Sie die Drehzahl, mit der ein gezähntes Transportrad des Vorführapparates laufen muß, wenn sein Durchmesser 20 mm beträgt.

2.41 Die Seiltrommel einer Motorwinde hat den Durchmesser 50 cm. Ihre Drehfrequenz ist 120 min^{-1}. Berechnen Sie 1. die Umlaufzeit, 2. die Winkelgeschwindigkeit, 3. die Geschwindigkeit, mit der sich das Seil bewegt, und 4. die Zeit, die vergeht, bis 30,0 m Seil aufgewunden sind.

▶ 2.42 Ein Körper rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0. Berechnen Sie die Dauer der Bremsvorganges, durch den er mit einer konstanten Winkelbeschleunigung so weit abgebremst wird, daß die Radialbeschleunigung auf die Hälfte des Anfangswertes verringert wird.

Gegeben: ω_0; a_r; $\alpha = \text{const}$; $a_{r1} = \frac{1}{2} a_{r0}$ *Gesucht:* Δt

Nach (2.15) ist

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\Delta t} \tag{1}$$

Weiter gilt (2.25)

$$a_r = \omega^2 r \tag{2}$$

Aus (2) folgt mit $a_{r1} = {}^1/_2 a_{r0}$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\omega_0 \tag{3}$$

Aus (1) und (3) erhalten wir mit (2.22) $a = \alpha r$

$$\underline{\underline{\Delta t = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right)}{a}\,\omega_0 r}}$$

■ 2.43 Eine Magnetbandspule hat einen Kerndurchmesser von 60 mm, der Durchmesser der vollgewickelten Spule (äußere Windung) betrage 160 mm. Berechnen Sie den Bereich, in dem die Drehzahl der Spule während des Abspielens des Bandes variiert, wenn das Gerät mit der Bandgeschwindigkeit 9,5 cm s^{-1} arbeitet.

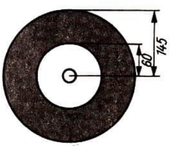


Bild 16

■ 2.44 Bei einer großen Schallplatte (33 min^{-1}) hat das Rillenfeld die im Bild 16 gegebenen Abmessungen. Auf die Strecke von einem Millimeter in radialer Richtung kommen 10 Durchgänge der spiralförmig angeordneten Rille. Berechnen Sie 1. die Spieldauer der Schallplatte, 2. den Bereich, in dem die Abtastgeschwindigkeit während des Abspielens der Schallplatte variiert, 3. die Länge der Rille.

▶ 2.45 Der Anker eines Motors erreicht bei konstanter Winkelbeschleunigung 2,0 s nach dem Einschalten die Drehfrequenz 1800 min^{-1}. Berechnen Sie 1. den Betrag der Winkelbeschleunigung und 2. die Anzahl der Umdrehungen in der angegebenen Zeit.

Gegeben: $\Delta t = 2$ s; $f_e = 1800$ min^{-1} *Gesucht:* 1. α; 2. z

1. $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$; $\Delta\omega = \omega_e = 2\pi f_e$

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{2\pi f_e}{\Delta t}}} \qquad \alpha = \underline{\underline{94\ \mathrm{s}^{-2}}}$$

2. Für die gleichförmige Drehbewegung gilt $f = z/\Delta t$ und damit $z = f\Delta t$. Diese Gleichung können wir auch bei der vorliegenden gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung verwenden, wenn wir für f die mittlere Drehfrequenz $f_m = f_e/2$ einsetzen. Wir erhalten dann

$$\underline{\underline{z = \frac{f_e}{2}t}} \qquad z = \frac{1800 \cdot 2\ \mathrm{s}}{2 \cdot 60\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{30}}$$

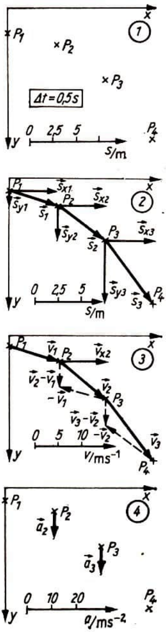


Bild 17

2.46 Ein Turbinenläufer vom Durchmesser 800 mm wird aus dem Stillstand auf die Nenndrehzahl 3000 min^{-1} beschleunigt. Die Drehzahl erhöht sich dabei gleichförmig in je 12 s um 100 min^{-1}. Berechnen Sie 1. die Winkelbeschleunigung und 2. die Dauer des Anfahrvorgangs.

■ **2.47** Bestimmen Sie für die gleichförmige Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn die Lage des Beschleunigungsvektors für zwei beliebige Bahnpunkte.

2.48 Ein Kraftfahrzeug durchfährt eine Kurve, die den Radius 60 m hat, mit einer Geschwindigkeit von 30 km h^{-1}. 1. Berechnen Sie Winkelgeschwindigkeit und Radialbeschleunigung des Fahrzeugs. 2. Vergleichen Sie das Ergebnis Ihrer Rechnung mit den Werten, die sich ergeben, wenn sowohl der Radius als auch die Geschwindigkeit verdoppelt wird.

2.49 Berechnen Sie Bahngeschwindigkeit und Radialbeschleunigung in einer Zentrifuge, die einen Radius von 2,0 cm hat und mit 10000 Umdrehungen je Minute rotiert.

▶ **2.50** Im Bild 17.1 ist die Bewegung eines Massenpunktes durch vier im zeitlichen Abstand von je 0,5 s festgehaltene Bahnpunkte einer ebenen Bewegung gegeben. 1. Bestimmen Sie grafisch die Richtungen der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. 2. Berechnen Sie die x-Komponente der Geschwindigkeit und beide Komponenten der Beschleunigung.

Gegeben: Ort des bewegten Massenpunktes zu den Zeiten t_1, t_2, t_3, t_4

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = 0{,}5\ \mathrm{s}$$

Gesucht: 1. $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{a}$; nur Richtungen. 2. v_x; a_x; a_y

1. Die Verbindung der Bahnpunkte durch die Verschiebungsvektoren $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3$ (Bild 17.2) und deren Zerlegung in x- und y-Komponenten zeigt:

in x-Richtung:

$|s_{x1}| = |s_{x2}| = |s_{x3}| = 5$ m, d.h. gleichförmige Bewegung;

in y-Richtung:

$|s_{y1}| < |s_{y2}| < |s_{y3}|$, d.h. beschleunigte Bewegung.

Das Diagramm der Vektoren der Durchschnittsgeschwindigkeit (Bild 17.2) $v_i = s_i/\Delta t$ ergibt das gleiche Bild wie die Verschiebungen, wenn der Geschwindigkeitsmaßstab passend gewählt wird.

2. In x-Richtung gilt

$$v_x = \frac{|s_x|}{\Delta t} = \frac{5\ \mathrm{m}}{0{,}5\ \mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{const}; \qquad a_x = 0$$

Wir konstruieren dann die Differenzvektoren $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_2$. Diese, durch Δt dividiert, ergeben die Beschleunigungsvektoren a_{y2} und a_{y3} (Bild 17.3). Wir erhalten

$$|a_y| = \frac{|v_2 - v_1|}{\Delta t} = \frac{|v_3 - v_2|}{\Delta t} = \frac{5\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{0{,}5\ \mathrm{s}} = \underline{\underline{10\ \mathrm{m\ s^{-2}}}}$$

Es liegt also in y-Richtung eine konstante Beschleunigung vor.

2.51 Ein Motorboot, das gegenüber dem Wasser eine Geschwindigkeit von 20 km h^{-1} entwickelt, durchquert einen 150 m breiten Fluß. Dessen Wasser strömt mit einer Geschwindigkeit von 4,0 m s^{-1}. Berechnen Sie die Strecke, um die das Boot während der Überfahrt abgetrieben wird, wenn es senkrecht zur Strömung gesteuert wird.

2.52 Mit einem Motorboot, das eine Eigengeschwindigkeit von 18 km h^{-1} entwickelt, soll ein Fluß von 200 m Breite in kürzester Zeit überquert werden. Berechnen Sie die Dauer der Überfahrt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Fluß eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit von 2,5 m s^{-1} hat.

■ **2.53** Auf einer programmgesteuerten Drehmaschine soll ein Kegel (Konus) mit einem Öffnungswinkel von 20° gefertigt werden. Berechnen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten für Längs- und Planvorschub (Vorschub parallel zur Achse und senkrecht dazu), das an der Maschine einzustellen ist.

■ **2.54** Ein Düngerstreuer arbeitet nach folgendem Prinzip: Aus dem Behälter fällt der Mineraldünger auf waagerecht liegende rotierende Scheiben. Er wird von der Drehung erfaßt und am Rande der Scheibe tangential fortgeschleudert. Berechnen Sie die theoretische Streubreite (durch Annahme von Haftreibung), die sich für eine Scheibe von 30 cm Durchmesser ergibt, welche mit 60 min^{-1} in einer Höhe von 50 cm über dem Boden rotiert.

2.3.3. Beispiele und Übungen zur Dynamik

▶ 3.1 Ein Rammbär mit der Masse 400 kg fällt aus 4,0 m Höhe herab und trifft auf einen Pfahl, wobei er in 0,010 s abgebremst wird. Berechnen Sie die Kraft, mit der der Pfahl in den Boden gedrückt wird.

Gegeben: $m = 400$ kg; $h = 4{,}0$ m; $t = 0{,}010$ s *Gesucht:* F

$$F = ma \qquad a = \Delta v/t = v_E/t \qquad v_E = \sqrt{2gh}$$

$$\underline{\underline{F = \frac{m}{t}\sqrt{2gh}}} \qquad F = \underline{\underline{3{,}6 \cdot 10^5\ \text{N}}}$$

▶ 3.2 Ein PKW muß mit einem dünnen Seil abgeschleppt werden. Beim ruckartigen Anfahren reißt das Seil. Bei einem zweiten Versuch mit langsamem Anfahren hält es. Begründen Sie diesen Sachverhalt.
Da die Kraft, die das Seil zu übertragen hat, bei Vernachlässigung des Fahrwiderstandes der Beschleunigung proportional ist, überschreitet sie beim ruckartigen Anfahren, das mit großer Beschleunigung verbunden ist, die Reißfestigkeit des Seils, während sie bei kleiner Beschleunigung darunter bleibt.

■ 3.3 Berechnen Sie die Beschleunigungen und die Seilkräfte in den drei im Bild 18 skizzierten Systemen (Massen der Rollen und der Seile sowie Reibung vernachlässigen).

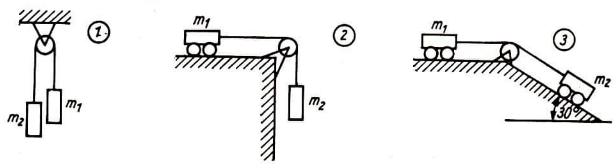


Bild 18 $m_1 = 600$ g, $m_2 = 800$ g | $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 3$ kg | $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg

3.4 Beim Holzhacken gibt es drei Möglichkeiten: 1. Die Axt dringt beim ersten Schlag durch das Holz. 2. Es wird wiederholt geschlagen, und zwar mit dem Holzklotz, in dem die Axt steckt, gegen die Unterlage. 3. Beim Wiederholen schlägt die Rückseite der Axt, auf der der Klotz steckt, auf die Unterlage auf. Fall 1 ist sofort geklärt. Erklären Sie, wovon die Wahl der Variante 2 oder 3 abhängt.

3.5 Berechnen Sie das Gewicht eines Körpers mit der Masse 100 kg in den Einheiten Newton und Kilopond für folgende Orte:

1. Berlin, 2. einen Ort im Weltraum, der von der Erdoberfläche einen Erdradius weit entfernt ist, 3. einen Ort, der von der Erdoberfläche zwei Erdradien entfernt ist.

3.6 Bei einer Wiederholung des historischen Versuchs mit den Magdeburger Halbkugeln werden die evakuierten Halbkugeln vom Luftdruck mit einer Kraft von 12 MN zusammengepreßt. Sie sollen mit Hilfe von zwei Gruppen von Pferden auseinandergezogen werden. Jedes Pferd entwickelt eine Zugkraft von 1,5 MN. Ermitteln Sie, wieviel Pferde in jeder Gruppe benötigt werden, wenn die Kräfte aller Tiere sich ohne gegenseitige Störung addieren.

3.7 Weshalb ist es einem Radfahrer nicht möglich, eine starke Steigung freihändig zu bewältigen, selbst wenn er ein sicherer Fahrer ist?

3.8 Berechnen Sie mit Hilfe des Gravitationsgesetzes und der Definitionsgleichung des Gewichts die Masse der Erde.

■ 3.9 Geben Sie den relativen Fehler an, den man begeht, wenn man für eine Höhe von 637 km ($= 0{,}1 r_E$) noch mit $g = 9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ rechnet.

▶ 3.10 Ein Aufzug mit einer Masse von 2,0 t soll aus der Ruhe so nach oben bewegt werden, daß er nach 50 m eine Geschwindigkeit von $10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ hat. Die Reibung wird vernachlässigt. Berechnen Sie 1. die im Zugseil auftretende Kraft und 2. die als konstant angenommene Beschleunigung des Aufzugs.

Gegeben: $m = 2{,}0\ \mathrm{t}$; $v_0 = 0$; $h = 50\ \mathrm{m}$; $v = 10\ \mathrm{m\ s^{-1}}$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ *Gesucht:* 1. F_s; 2. a

1. Die Gesamtkraft im Seil setzt sich zusammen aus der Gegenkraft zum Gewicht und der Beschleunigungskraft:

$$F_s = mg + F_B; \quad \text{mit} \quad F_B = \frac{W_B}{h} = \frac{mv^2}{2h} \text{ folgt}$$

$$\underline{\underline{F_s = m\left(g + \frac{v^2}{2h}\right)}}$$

$$F_s = 2 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}\left(9{,}8\ \mathrm{m\ s^{-2}} + \frac{100\ \mathrm{m^2}}{100\ \mathrm{m\ s^2}}\right) = \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^4\ \mathrm{N}}}$$

2. Aus $F_B = ma$ folgt

$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{v^2}{2h} \qquad a = \frac{100\ \mathrm{m^2}}{100\ \mathrm{m\ s^2}} = \underline{\underline{1\ \mathrm{m\ s^{-2}}}}$$

3.11 Berechnen Sie die Federkonstante einer senkrecht hängenden Schraubenfeder, die bei einer Belastung mit verschiedenen Massenstücken folgende Dehnungen aufweist:

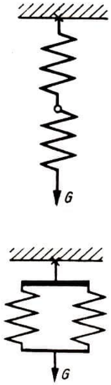


Bild 19

100 g: 1 cm; 200 g: 2 cm; 300 g: 3,8 cm.

Welche Aussagen können Sie über das Belastungsverhalten der Feder machen?

3.12 Ein 1,00 m langer Hebel ist an einem Ende drehbar gelagert. Er wird in der Mitte durch eine Schraubenfeder gehalten, die die Federkonstante 15 kp cm^{-1} hat. Berechnen Sie die Kraft, mit der das freie Ende des Hebels belastet wird, wenn ein am Federende befestigter Zeiger eine Auslenkung von 50 mm anzeigt.

■ **3.13** Zwei gleiche Schraubenfedern werden 1. hintereinander, 2. parallel hängend verbunden (Bild 19) mit dem gleichen Wägestück belastet. Geben Sie an, ob und wie sich die Dehnung beider Kombinationen von der Dehnung der einzelnen Feder unter gleicher Belastung unterscheidet.

▶ **3.14** Erklären Sie, weshalb Notbremsstrecken mit rutschenden Rädern länger sind als solche mit haftenden.

Die Bremskraft muß von den Rädern auf die Straßenoberfläche als Gleit- oder Haftreibungskraft übertragen werden. Weil $\mu_0 > \mu$, ist die Haftreibungskraft und damit die zugehörige negative Beschleunigung größer als die Gleitreibungskraft.

■ **3.15** Ein Ziegelstein, der am Ende eines 1,0 m langen Brettes liegt, beginnt bei einseitigem Anheben des Brettes zu gleiten, sobald er eine Höhe von 25 cm erreicht hat. Berechnen Sie 1. die maximale Haftreibungskraft und 2. die Geschwindigkeit, die der Stein beim Erreichen des Fußpunktes hat. Die Gleitreibungszahl ist halb so groß wie die Haftreibungszahl.

3.16 Fallschirmspringer haben nach dem Öffnen des Schirmes eine konstante Sinkgeschwindigkeit, obwohl die Fallbeschleunigung nach wie vor wirkt. Erklären Sie diese Erscheinung.

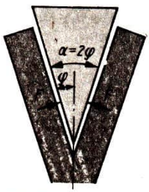


Bild 20

▶ **3.17** Ein Keil ist zwischen zwei Flächen eingeklemmt, gegen die seine Flanken eine Reibungszahl von 0,10 haben.
Bemessen Sie den Höchstwert des Keilwinkels so, daß der Keil nicht durch die senkrecht auf seine Flanken wirkenden Kräfte herausgetrieben werden kann (Bild 20).

Gegeben: $\mu = 0{,}10$ *Gesucht:* 2φ

$$F = 2F_s \sin\varphi \leq 2F_R = 2\mu F_s \cos\varphi$$

$\tan\varphi \leq \mu$ $\qquad 2\varphi = \underline{\underline{2 \operatorname{arc\,tan} \mu}}$

$\tan\varphi \leq 0{,}10$ $\qquad 2\varphi \leq \underline{\underline{11^\circ}}$

▶ **3.18** Ein Raumschiff bewegt sich im freien Fall in Richtung Erde (1.) und bremst in einem bestimmten Abstand einige Minuten lang mit einer konstanten Bremsbeschleunigung von $6g$ (2.). Berechnen Sie für beide Fälle die Kraft, die auf einen im Raumschiff befindlichen Kosmonauten wirkt.

Gegeben: 1. $a = -g$; 2. $a_1 = -g$; $a_2 = 6g$ (Bild 21) *Gesucht:* F

1. Auf den Körper wirkt das Gewicht $G = mg$.
Das Raumschiff ist für ihn ein beschleunigtes Bezugssystem. In diesem tritt eine entgegengesetzt gleich große Trägheitskraft $F_T = -ma$ auf. Die Gesamtkraft ist die Summe beider:

$$F_{ges_1} = G + F_T = -mg + mg = \underline{\underline{0}}.$$

Ein frei fallender Körper ist im mitbeschleunigten System kräftefrei.

2. Beim Bremsen des Raumschiffes wirkt auf den Körper immer noch das Gewicht. Außerdem wirkt sich die Bremsbeschleunigung aus. Da sie gegen die Fahrtrichtung gerichtet ist, bewirkt sie im Körper eine Trägheitskraft, die entgegengesetzt gleich, also mit dem Betrag der Bremsbeschleunigung in Flugrichtung wirkt.
Damit ist

$$F_{ges_2} = G + F_{T2} = -mg - 6mg = -7mg = \underline{\underline{7G}}$$

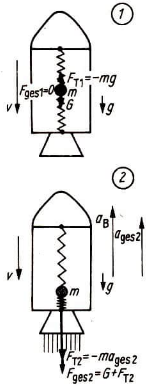


Bild 21

3.19 Erklären Sie mit Hilfe der Newtonschen Axiome, worauf die Wirkung des Hammers als Werkzeug beruht.

3.20 Eine Raketenstufe wird mit konstanter Schubkraft in 371 s von der Anfangsgeschwindigkeit $9{,}1 \cdot 10^3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ auf $2{,}45 \cdot 10^4\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ beschleunigt. Berechnen Sie die Trägheitskraft, die während dieser Flugphase auf den Piloten (Masse 75 kg) wirkt.

■ **3.21** An einem Fliehkraftregler (Bild 22) wird eine Stahlkugel mit der Masse 120 g, die auf einer Kreisbahn mit dem Radius 480 mm umläuft, durch eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten $20\,\mathrm{kp\,cm^{-1}}$ nach innen gezogen. Berechnen Sie die Drehzahl, bei der die Feder um 20 mm gedehnt wird.

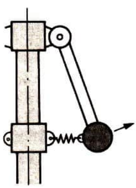


Bild 22

3.22 Der Durchmesser einer Raumstation der Zukunft (Bild 23) betrage 20 m. Berechnen Sie 1. die Drehzahl, mit der die Station rotieren muß, wenn am „Boden" die Radialbeschleunigung ein Drittel der Erdbeschleunigung betragen soll, 2. um wieviel Prozent die Radialbeschleunigung am Kopf eines 1,80 m großen „aufrecht" stehenden Menschen geringer ist als an seinen Füßen.

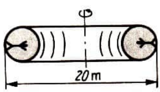


Bild 23

▶ **3.23** Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ durch eine Kurve, die einen Krümmungsradius von 160 m hat. Berechnen Sie, wie groß die Reibungszahl für den Reifen auf ebener Straßendecke mindestens sein muß, damit der Wagen nicht aus der Kurve getragen wird.

Gegeben: $v = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$; $r = 160$ m *Gesucht:* μ

Wir wählen für die Beschreibung den Standpunkt (das Bezugssystem) des mitbewegten Beobachters. Dann stehen zwei Kräfte im Gleichgewicht: Zentrifugalkraft nach außen und Reibungskraft nach innen.

$$F_Z = F_{RH}$$

$$\frac{mv^2}{r} = mg\mu_0$$

$$\underline{\underline{\mu_0 = \frac{v^2}{gr}}} \qquad \mu_0 = \frac{60^2 \cdot 3{,}6^{-2}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 160\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{0{,}17}}$$

3.24 Ein mit Wasser gefülltes Gefäß wird an einer Schnur in einer lotrechten Kreisbahn vom Radius 1 m geschwungen. 1. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit, die das Wasser mindestens haben muß, um nicht auszufließen. 2. Geben Sie die entsprechende Frequenz an.

■ 3.25 Ein Eisenbahngleis der Normalspurweite 1435 mm beschreibt eine Kurve mit dem Radius 810 m. Bestimmen Sie die Überhöhung der äußeren Schiene, die so zu bemessen ist, daß bei einer Geschwindigkeit von 65 km h^{-1} die resultierende Kraft in die Mittelsenkrechte der Waggons fällt.

■ 3.26 Eine konstante Kraft von 20 kN wirkt unter einem Winkel von 60° gegen eine mögliche Bewegungsrichtung auf einen Körper und verschiebt ihn um 300 m. Berechnen Sie die von der Kraft verrichtete Verschiebungsarbeit.

■ 3.27 In den Diagrammen 1 und 2 im Bild 24 sind zwei Kräfte als Funktionen des Weges dargestellt. Ermitteln Sie diese Funktionen analytisch und vergleichen Sie die Beträge der Arbeit, die in beiden Fällen bei Verschiebung eines Körpers um 10 m verrichtet werden muß.

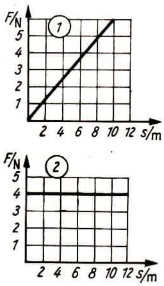


Bild 24

3.28 Berechnen Sie den Betrag der Arbeit, die ein Bergsteiger mit der Masse (Eigenmasse und Gepäck) 90 kg verrichtet, der von einem in 300 m Höhe liegenden Ort aus auf einen Gipfel von 1600 m Höhe steigt. Berechnen Sie den „Wert“ dieser Arbeit unter der Voraussetzung, daß eine Kilowattstunde 8 Pfennig kostet.

3.29 Eine Schraubenfeder mit der Federkonstante 45 N cm^{-1} wurde um 4 cm gedehnt. Berechnen Sie die in der Feder gespeicherte Energie.

■ 3.30 Eine senkrecht hängende Schraubenfeder wird durch eine angehängte Masse von 1 kg um 2 cm gedehnt. Berechnen Sie die Arbeit, die aufzuwenden ist, um die vorbelastete Feder um weitere 3 cm zu dehnen.

■ 3.31 Ein Steinquader mit der Masse 20 t wird über eine um 30° geneigte Ebene aus einem 15 m tiefen Steinbruch gezogen. Die Gleitreibungszahl beträgt 0,25. Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit.

▶ **3.32** Ein Aufzug mit einer Masse von 2,0 t soll aus der Ruhe so nach oben bewegt werden, daß er nach 50 m eine Geschwindigkeit von 10 m s^{-1} hat. Die Reibung wird vernachlässigt. Berechnen Sie die aufzuwendende Energie.

Gegeben: $m = 2{,}0\ \text{t}; \quad v_0 = 0$ *Gesucht:* W_{ges}
$h = 50\ \text{m}; \quad v = 10\ \text{m s}^{-1}$
$g = 9{,}8\ \text{m s}^{-2}$

Es werden Hubarbeit und Beschleunigungsarbeit verrichtet. Somit ist

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{H}} + W_{\text{B}} \quad \text{mit} \quad W_{\text{H}} = mgh \quad \text{und} \quad W_{\text{B}} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \underline{\underline{m \left(gh + \frac{1}{2} v^2\right)}}$$

$$W_{\text{ges}} = 2 \cdot 10^3\ \text{kg}\ (9{,}8\ \text{m s}^{-2} \cdot 50\ \text{m} + 0{,}5 \cdot 100\ \text{m}^2\,\text{s}^{-2})$$

$$= \underline{\underline{1{,}1 \cdot 10^6\ \text{J}}}$$

3.33 Wie unterscheiden sich die Gipfelhöhen zweier Geschosse unterschiedlicher Masse, die mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben geschossen werden? Die Luftreibung werde vernachlässigt.

3.34 Luftgewehrkugeln der Masse 2,2 g prallen mit einer Geschwindigkeit von 80 m s^{-1} gegen einen Kugelfang. 1. Berechnen Sie die am Kugelfang umgesetzte Energie. 2. Was wird aus der kinetischen Energie der Kugel?

▶ **3.35** Beim Rangieren wird ein Güterwagen abgestoßen und rollt danach einen 30 m langen Abrollberg mit einem Neigungswinkel von 3° hinunter. Auf der anschließenden horizontalen Strecke bleibt er nach 80 m stehen. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Wagens zu Beginn des Abrollvorgangs. Die Fahrwiderstandszahl ist 0,02.

Gegeben: $s_1 = 30\ \text{m}; \quad s_2 = 80\ \text{m}$ *Gesucht:* v_0
$\alpha = 3°; \quad \mu_{\text{F}} = 0{,}02$

Wir beginnen mit der Energiebilanz:
Zu Beginn des Abrollens ist nur potentielle und kinetische Energie vorhanden, nach dem Rollen ist diese Energie in Arbeit gegen den Fahrwiderstand umgewandelt, die sich entsprechend den beiden Streckenabschnitten aus zwei Anteilen zusammensetzt.
Am Beginn des ersten Abschnitts s_1 ist

$$W = W_{\text{p}} + W_{\text{k}} \quad \text{mit}$$

(3.30) $W_{\text{p}} = mgh;$ (h ergibt sich aus der Geometrie: $h = s_1 \sin\alpha$)

(3.37) $W_{\text{k}} = \frac{1}{2} m v_0^2.$

Am Ende des ersten und Beginn des zweiten Abschnitts s_2 ist $W_k = 0$, sie wurde teils in kinetische Energie und teils in Reibungsarbeit umgewandelt.
Die Reibungsarbeit ist nach (3.32) $W_{R1} = mg\mu_F s_1 \cos\alpha$. Am Ende des zweiten Abschnitts ist auch $W_k = 0$. Sie wurde restlos in Reibungsarbeit umgewandelt: $W_{R2} = mg\mu_F s_2$. Die Energiebilanz ist jetzt zu formulieren:

$$W_{\mathrm{Beginn}} = W_{\mathrm{Ende}}$$

$$W_p + W_{k0} = W_{R1} + W_{R2}$$

$$mgs_1 \sin\alpha + \frac{1}{2} m v_0^2 = mg\,\mu_F s_1 \cos\alpha + mg\,\mu_F s_2$$

Daraus folgt

$$v_0 = \sqrt{2g[\mu(s_1 \cos\alpha + s_2) - s_1 \sin\alpha]}; \qquad v_0 = 3{,}5 \text{ m s}^{-1}$$

3.36 Ein beladener Waggon der Masse 15 t rollt mit der Anfangsgeschwindigkeit 3,0 m s^{-1} einen Ablaufberg hinab, der die Länge 150 m und den Neigungswinkel α hat ($\sin\alpha = 0{,}03$). Berechnen Sie 1. die Endgeschwindigkeit in Kilometer je Stunde und 2. die kinetischen Energien zu Beginn und am Ende der beschleunigten Bewegung. Der Fahrwiderstand wird vernachlässigt.

■ 3.37 Ein Waggon mit einer Masse von 40 t rollt mit einer Geschwindigkeit von 15 km h^{-1} gegen einen Puffer und drückt dessen Feder um 50 mm zusammen. Berechnen Sie die Federkonstante der Pufferfeder.

3.38 Ein Skiläufer der Masse 75 kg startet zu einer Abfahrt von 120 m Länge und 17 m Höhenunterschied mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit. Die Reibungszahl beträgt 0,03. Die durch den Luftwiderstand hervorgerufene Bremskraft beträgt im Mittel 30 N. Welche Endgeschwindigkeit erreicht der Skiläufer?

▶ 3.39 Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit eines auf geneigter Ebene gleitenden Körpers der Masse m 1. bei reibungsfreier Bewegung und 2. bei Bewegung mit Reibung. Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Endgeschwindigkeit von der Masse des Körpers und von der Form der Gleitbahn (Bild 25).

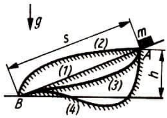


Bild 25

Gegeben: s; h; m; g; $v_0 = 0$ *Gesucht:* v

1. $W_1 = W_2$

$$W_p = W_k$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \qquad v = \underline{\underline{\sqrt{2gh}}}$$

2. $W_1 = W_2$

$$W_p = W_k + W_R \qquad W_R = \mu F_N s = \mu m g s \cos\alpha$$

$$= \mu m g s \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$= \mu m g \sqrt{s^2 - h^2}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \mu mg\sqrt{s^2 - h^2}$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{2g\left(h - \mu\sqrt{s^2 - h^2}\right)}}}$$

Das Ergebnis zeigt, daß im Fall 2. (Bewegung mit Reibung) die Endgeschwindigkeit v stets kleiner ist als bei reibungsfreier Bewegung. Der Unterschied ist um so geringer, je kleiner die Differenz $s^2 - h^2$ ist, d.h. je steiler die Ebene verläuft. Im Grenzfall $h \to s$ liegt freier Fall vor.
In den Gleichungen für v kommt die Masse des Körpers nicht vor, es gibt also keine Massenabhängigkeit. Bei Bewegung ohne Reibung hängt die Endgeschwindigkeit nur von der Höhe ab. Bei Bewegung mit Reibung dagegen hängt die Endgeschwindigkeit von der Weglänge s und damit von der Form des Weges ab.

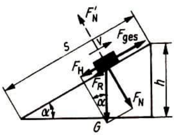


Bild 26

▶ **3.40** Ein Kraftwagen mit der Masse 2,0 t startet auf einer ansteigenden Straße (4,0 m Höhenunterschied auf 100 m Straße) und erreicht bei konstanter Beschleunigung nach 30 s die Geschwindigkeit 54 km h⁻¹. Die Fahrwiderstandszahl beträgt 0,03 (Bild 26). Berechnen Sie 1. die mittlere Leistung, die der Motor aufbringen muß, sowie 2. dessen Momentanleistung am Ende des Vorgangs.

Gegeben: $m = 2{,}0$ t; $v_0 = 0$; $t = 30$ s; $v = 54$ km h^{-1}; $g = 9{,}8$ m s^{-1}; $\mu = 0{,}03$; $h' = 4{,}0$ m; $s' = 100$ m

Gesucht: 1. P_m; 2. P_e

1. Es ist $P_m = W/t$. W setzt sich zusammen aus der Hubarbeit W_H, der Reibungsarbeit W_R und der Beschleunigungsarbeit W_B:

$$W = W_H + W_R + W_B; \qquad P_m = \frac{W_H + W_R + W_B}{t} \tag{1}$$

$W_H = mgh$; mit $h = s \sin\alpha$; $s = {}^1/_2 vt$ und $\sin\alpha = h'/s'$

$$W_H = \frac{mgvth'}{2s'} \tag{2}$$

$W_R = \mu F_N s$; mit $F_N = mg\cos\alpha = mg\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \approx mg$

(für kleine Winkel α ist $\sin^2\alpha \ll 1$) folgt

$$W_R = \frac{1}{2}\mu mgvt \tag{3}$$

$$W_B = W_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4}$$

Aus (1) ··· (4) folgt

$$P_m = \frac{mv}{2}\left[g\left(\frac{h'}{s'} + \mu\right) + \frac{v}{t}\right]$$

$$P_m = \frac{2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 54\,\mathrm{m}}{2 \cdot \quad 3{,}6\,\mathrm{s}}\left(\frac{9{,}81\,\mathrm{m} \cdot 0{,}07}{\mathrm{s}^2} + \frac{54\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s} \cdot 30\,\mathrm{s}}\right) = \underline{\underline{18\,\mathrm{kW}}}$$

2. Für die Momentanleistung gilt $P = Fv$. Da hier die Kraft $F = F_H + F_R + F_B$ aufgrund der gegebenen Bedingungen konstant ist, ist $P_e \sim v$.
Die Geschwindigkeit und damit also auch die Leistung nehmen bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung linear zu. Für diesen Fall ist

$$P_e = \underline{\underline{2P_m}} \qquad\qquad P_e = 2 \cdot 18\,\mathrm{kW} = \underline{\underline{36\,\mathrm{kW}}}$$

Das Ergebnis läßt sich durch eine Rechnung über den Kräfteansatz bestätigen.

■ **3.41** Der Bär einer Ramme hat eine Masse von 2,5 t. Zum Anheben auf 5 m Höhe steht ein Motor mit einer Leistung von 27,3 kW zur Verfügung. Der Wirkungsgrad beträgt 90 %. Berechnen Sie 1. die Dauer des Anhebens (Beschleunigungs- und Verzögerungsphase werden vernachlässigt) und 2. die Zahl der je Minute möglichen Hübe (Fallzeit berücksichtigen).

3.42 Die sowjetische Windkraftmaschine TW 8 hat eine maximale Nutzleistung von 4 kW. Sie nutzt 42 % der Windenergie aus und treibt eine Wasserpumpe an, die einen Wirkungsgrad von 0,70 hat. Berechnen Sie, 1. wieviel Prozent der Windleistung insgesamt genutzt werden, 2. welche Leistung der Wind zur Verfügung stellen muß und 3. welche Leistung die Pumpe abgibt, wenn die Anlage mit Höchstleistung arbeitet.

3.43 Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der man einen kleinen Handwagen, dessen Deichsel 40° gegen die Straße geneigt ist und an der eine Zugkraft von 10,0 kp (in Deichselrichtung) wirkt, ziehen kann, wenn man sich über längere Zeit eine Leistung von 75 W (≙ 0,1 PS) zumutet.

3.44 Berechnen Sie die bei einem Kraftwagen zur Überwindung der Luftreibung und des Fahrwiderstandes erforderliche Leistung bei einer Geschwindigkeit von 100 km h^{-1} auf Asphalt. Die Gesamtmasse des Wagens beträgt 1,3 t, die Querschnittsfläche 2,06 m^2, der Widerstandsbeiwert $c = 0{,}5$, die Dichte der Luft 1,2 kg m^{-3} und die Fahrwiderstandszahl 0,022.

3.45 Eine Raumkapsel der Masse 4,5 t, die von einem Mondflug zurückkommt, wird beim Eintauchen in die Erdatmosphäre durch die Luft mit vierfacher Fallbeschleunigung gebremst. Ihre Anfangsgeschwindigkeit beträgt 39 700 km h^{-1}. Berechnen Sie die in der Kapsel auftretenden Kräfte und die Bremsleistung der Erdatmosphäre in Megawatt bci Beginn der Bremsung.

■ **3.46** Eine Einstufenrakete hat ein Massenverhältnis von 5,42. Die Treibgase strömen mit einer Geschwindigkeit von $3{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ aus. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit dieser von einer Raumstation aus in den luftleeren Raum startenden Rakete relativ zur Raumstation.

3.47 Von einem Wagen der Masse 40 kg, der mit einer Geschwindigkeit von $2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ rollt, springt ein Mensch (Masse 80 kg) mit einer Geschwindigkeit von $10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ (relativ zum ruhenden Wagen) schräg nach vorn im Winkel von 30° zur Bewegungsrichtung des Wagens ab. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Wagens nach dem Sprung.

3.48 Beschreiben Sie die Wirkungsweise des Hammers als Werkzeug mit Hilfe der Begriffe Kraftstoß und Impuls.

3.49 Die Düse eines Raketentriebwerkes liefert 12 s lang einen Schub von 15 kN. Berechnen Sie die Geschwindigkeitsänderung der Rakete, die eine Masse von 4,5 t hat.

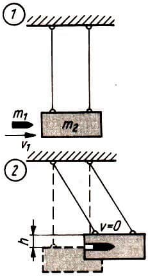


Bild 27

▶ **3.50** Zur Messung der Geschoßgeschwindigkeit schießt man ein Geschoß, das die Masse 5,0 g hat, in einen pendelnd aufgehängten Holzklotz, der dadurch aus der Ruhelage ausgelenkt wird. Das Geschoß bleibt im Klotz stecken (ballistisches Pendel, Bild 27). Berechnen Sie die Geschoßgeschwindigkeit unter der Voraussetzung, daß der Klotz eine Masse von 2,5 kg hat und beim Pendeln eine Höhe von 50 mm über der Ruhelage erreicht.

Gegeben: $m_1 = 5{,}0$ g; $m_2 = 2{,}5$ kg; $h = 50$ mm; $v_2 = 0$; $g = 9{,}8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ *Gesucht:* v_1

Die Aufgabe enthält zwei nacheinander ablaufende Vorgänge: den unelastischen Stoß und die darauf folgende Pendelbewegung. Für den unelastischen Stoß gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_n \tag{1}$$

Daraus folgt die Geschoßgeschwindigkeit v_1, wenn wir die Geschwindigkeit v_n des Pendels unmittelbar nach dem Stoß kennen. Diese Geschwindigkeit ist zugleich Anfangsgeschwindigkeit der Pendelbewegung und folgt aus dem Energiesatz:

$$W_{\text{p am höchsten Punkt}} = W_{\text{k am tiefsten Punkt}}$$

$$(m_1 + m_2) g h = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_n^2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2 g h}}} \qquad v_1 = \underline{\underline{5{,}0 \cdot 10^2\ \mathrm{m\,s^{-1}}}}$$

3.51 Ein Wasserstoffmolekül mit der Geschwindigkeit $200\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ stößt in elastischem geradem Stoß auf ein Sauerstoffmolekül, das sich mit $110\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Moleküle nach dem Stoß.

3.52 Ein Stahlbolzen mit der Masse 1,5 kg stößt mit der Geschwindigkeit 45 m s^{-1} auf eine ruhende Stahlkugel, welche die Masse 60 g hat. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der die Kugel davonfliegt.

3.53 Eine Stahlkugel mit einer Masse von 120 g fällt mit der Geschwindigkeit 10 m s^{-1} senkrecht auf eine Amboßbahn (die gehärtete ebene Fläche des Ambosses). Ermitteln Sie, wie hoch die Kugel nach dem Aufprall steigt, unter der Annahme eines rein elastischen Stoßes.

3.54 Eine unbewegt hängende Stahlplatte mit der Masse 10 kg wird mit einem Hammer (Masse 1,0 kg, Auftreffgeschwindigkeit 25 m s^{-1}) angeschlagen. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten, mit denen beide Körper sich nach dem Stoß bewegen.

3.55 Ein Kraftwagen mit einer Masse von 2,5 t fährt mit einer Geschwindigkeit von 80 km h^{-1} auf einen vor ihm fahrenden Wagen auf, der eine Masse von 0,8 t und eine Geschwindigkeit von 60 km h^{-1} hat. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Wagen nach dem als unelastischen Stoß zu behandelnden Aufprall.

■ **3.56** Nach einem schweren Verkehrsunfall, bei dem zwei Wagen frontal zusammenstießen, miteinander verklemmten und noch 30 m in Richtung des schwereren Fahrzeuges weiterrutschten, ist zur Klärung der Schuldfrage die Geschwindigkeit des schwereren Wagens vor dem Aufprall zu bestimmen. Die Massen der Fahrzeuge betragen 2000 kg und 800 kg, die Geschwindigkeit des leichteren davon war vor dem Unfall 42 km h^{-1}. Die Gleitreibungszahl betrage 0,2. Berechnen Sie außer der Anfangsgeschwindigkeit des zweiten Wagens die Gleitgeschwindigkeit nach dem Stoß und den Energieanteil, der zur Deformation der Wagen verbraucht wurde.

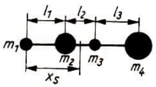


Bild 28

▶ **3.57** Vier verschieden große Körper unterschiedlicher Masse sind in einer Anordnung nach Bild 28 durch eine starre prismatische Stange verbunden. Berechnen Sie den Abstand des Massenmittelpunktes des Systems vom Mittelpunkt der Masse m_1.

Gegeben: $m_1 = 5{,}0$ kg; $m_2 = 12{,}0$ kg; $m_3 = 3{,}0$ kg; $m_4 = 10{,}0$ kg; $l_1 = 0{,}60$ m; $l_2 = 0{,}30$ m; $l_3 = 0{,}80$ m

Gesucht: x_S

Nach (3.50) ist

$$x_M = \frac{\sum x_\nu m_\nu}{\sum m_\nu} = \frac{m_2 l_1 + m_3(l_1 + l_2) + m_4(l_1 + l_2 + l_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_M = \frac{(12 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}9 + 10 \cdot 1{,}7)\ \text{kg m}}{30\ \text{kg}} = \underline{\underline{0{,}89\ \text{m}}}$$

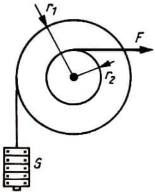


Bild 29

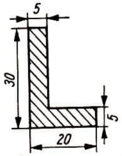


Bild 30

■ **3.58** Ein Spanndraht wird dadurch straff gehalten, daß er nach Bild 29 an einer durch schwere Betonklötze belasteten Rolle befestigt wird. Berechnen Sie allgemein die Zugkraft, die auf den Spanndraht ausgeübt wird.

3.59 Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes für das im Bild 30 dargestellte 1,00 m lange Winkelprofil (Maßangaben in Millimeter).

3.60 Eine Schallplatte hat das Massenträgheitsmoment (bezogen auf die Schwerpunktsachse) $4{,}5 \cdot 10^3$ g cm². Berechnen Sie die Masse des punktförmigen Körpers, der auf einer Kreisbahn mit dem Radius 50 cm das gleiche Massenträgheitsmoment hat. (In der Technik bezeichnet man solche Massenangaben als reduzierte Massen.)

3.61 Vergleichen Sie die Trägheitsmomente eines dickwandigen Rohres und eines Vollzylinders, die gleiche Masse und gleichen Außendurchmesser haben.

▶ **3.62** Ein 0,50 m langer Körper aus Stahl mit quadratischem Profil (Kantenlänge 30 mm) ist drehbar um eine seiner Längskanten gelagert. Er soll innerhalb von 0,5 s aus dem Stillstand gleichmäßig auf eine Drehzahl von 2000 min⁻¹ beschleunigt werden. Berechnen Sie das dafür erforderliche Drehmoment.

Gegeben: $l = 0{,}50$ m; $a = 30$ mm; $t = 0{,}5$ s; $\varrho = 7{,}86$ g cm^{-3}; $n = 2000$ min^{-1} — *Gesucht:* M

$$M = J_A \alpha \qquad \alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{2\pi n}{t}$$

$$J_A = J_S + m s^2 \qquad m = \varrho V = \varrho a^2 l$$

$$J_S = \frac{1}{6} m a^2 = \frac{1}{6} a^4 l \varrho$$

$$J_A = \frac{1}{6} a^4 l \varrho + \frac{1}{2} a^4 \varrho \qquad s = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$J_A = \frac{2}{3} a^4 l \varrho$$

$$M = \frac{4\pi n a^4 l \varrho}{3t} \qquad M = \underline{\underline{0{,}89 \text{ N m}}}$$

▶ **3.63** Eine Kugel und ein Vollzylinder mit gleicher Masse und gleichem Durchmesser rollen auf einer geneigten Ebene. Ermitteln Sie, welcher von den beiden Körpern zuerst den Fußpunkt der geneigten Ebene erreicht. Voraussetzung ist gleichzeitiger Start in gleicher Höhe.

Gegeben: $m_K = m_Z$; $r_K = r_Z$; $s_K = s_Z$ *Gesucht:* $t_K \lesseqgtr t_Z$

Beide Körper haben zu Beginn der Bewegung die gleiche potentielle Energie ($W_p = mgh$), die sich, wenn der Fußpunkt erreicht ist, in kinetische Energie (Translations- und Rotationsenergie) umgewandelt hat. An beiden Körpern ist das gleiche Drehmoment wirksam. Nach der Grundgleichung der Dynamik wird jedoch der Körper mit dem größeren Trägheitsmoment weniger beschleunigt. Da Rotations- und Translationsgeschwindigkeit gekoppelt sind, hat der Körper mit dem größeren Trägheitsmoment nach dem Abrollen über die gleiche Strecke die kleinere Geschwindigkeit und damit die kleinere Translationsenergie. Da die Gesamtenergie bei beiden Körpern gleich sein muß, hat also der Körper mit dem größeren Trägheitsmoment die größere Rotationsenergie, obwohl er langsamer rollt als der andere.

Bei der rechnerischen Behandlung setzen wir voraus, daß beide Körper beim Abrollen den gleichen Weg zurücklegen. Wegen $r_K = r_Z$ ist $\varphi_K = \varphi_Z$. Die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt, da $a = g$. Demzufolge ist $\varphi = \frac{1}{2}\omega t$ bzw. $t = \frac{2\varphi}{\omega}$. Mit $v = \omega r$ gilt deshalb für beide Bewegungen

$$W = W_p = W_k + W_{rot}$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{2mgh}{mr^2 + J_A} \quad \text{bzw. mit } t = \frac{2\varphi}{\omega} \qquad t^2 = \frac{4\varphi^2 (mr^2 + J_A)}{2mgh}$$

Wir bilden nun das Verhältnis der Zeiten für beide Körper:

$$\frac{t_Z^2}{t_K^2} = \frac{4\varphi^2 (mr^2 + J_{AZ})\, 2mgh}{4\varphi^2 (mr^2 + J_{AK})\, 2mgh}$$

$$\frac{t_Z}{t_K} = \sqrt{\frac{mr^2 + J_{AZ}}{mr^2 + J_{AK}}}$$

Nach F B 5. ist $J_{AZ} = \frac{1}{2} mr^2$

$$J_{AK} = \frac{2}{5} mr^2$$

Mit dem Einsetzen der Massenträgheitsmomente ergibt sich

$$\frac{t_Z}{t_K} = \sqrt{\frac{15}{14}} = \underline{\underline{1{,}03}}$$

Damit ist die Richtigkeit der angestellten Überlegungen nachgewiesen.

3.64 Berechnen Sie die kinetische Energie (in Kilowattstunden) eines mit der Drehzahl 3000 min^{-1} rotierenden Turbogenerators, dessen Rotor das Massenträgheitsmoment $5 \cdot 10^4$ kg m^2 besitzt.

3.65 Berechnen Sie die kinetische Energie der Erde auf der als kreisförmig anzunehmenden Bahn um die Sonne (Energie der Revolution).

3.66 Ein Wirbelsturm läßt sich näherungsweise darstellen als ein rotierender Luftzylinder mit einem Durchmesser von 60 km und einer Höhe von 6 km. Am äußeren Rand herrscht eine Windgeschwindigkeit von 181 km h^{-1}. Berechnen Sie die Energie, die in diesem Wirbelsturm gespeichert ist.

■ **3.67** Ein Rad mit dem Durchmesser 1,2 m hat das Massenträgheitsmoment 0,44 kg m^2. Es rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit 628 min^{-1}. 1. Berechnen Sie seine kinetische Energie. 2. An das Rad wird ein Bremsklotz mit einer Kraft von 60 kp auf den Radumfang gepreßt. Die Reibungszahl beträgt 0,40. Geben Sie an, wie viele Umdrehungen das Rad noch macht.

■ **3.68** Eine Rolle mit der Masse 2,0 kg und dem Massenträgheitsmoment 5,2 kg cm^2 rollt auf horizontaler Unterlage mit 15 Umdrehungen je Sekunde auf den Fußpunkt einer Ebene zu, die um 30° geneigt ist. Berechnen Sie die Höhe, die diese Rolle erreicht.

3.69 Berechnen Sie den Drehimpuls und die kinetische Energie der Erde bezüglich ihrer Rotation um die Erdachse. Wir nehmen die Erde als homogene Kugel an.

▶ **3.70** Eine Kupplungsscheibe mit dem Trägheitsmoment J_1 rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Es wird eine zweite Scheibe mit dem Trägheitsmoment J_2 angekuppelt, die in Ruhe war. Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit, mit der beide Scheiben nach dem Kuppeln rotieren.

Gegeben: J_1; ω_1; J_2; $\omega_2 = 0$ *Gesucht:* ω_n

Der Vorgang ist ein Analogon zum unelastischen Stoß. Beide Körper rotieren nach dem Ankuppeln mit gemeinsamer Winkelgeschwindigkeit. Es gilt der Drehimpulserhaltungssatz:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\,\omega_n$$

Da $\omega_2 = 0$, erhalten wir daraus

$$\underline{\underline{\omega_n = \frac{J_1}{J_1 + J_2}\,\omega_1}}$$

3.71 Ein Vollzylinder, der den Radius 25 cm hat, rotiert mit der Drehzahl 100 min^{-1} um seine Längsachse. Seine Masse beträgt 360 kg. Berechnen Sie seinen Drehimpuls. Berechnen Sie ferner, wie lange ein Drehmoment von 20 Nm wirken muß, damit sich die Drehzahl verdoppelt.

3.72 Eine runde Scheibe mit dem Durchmesser 40 cm und der Masse 20 kg rotiert mit 180 Umdrehungen je Minute. An einem Stift, der in 10 cm Abstand von der Achse angebracht ist, wird die Rotation in 50 ms gestoppt. Berechnen Sie die Kraft, mit der der Stift dabei belastet wird.

2.3.4. Beispiele und Übungen zur Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

▶ 4.1 In einem vorschriftsmäßig behandelten Einkochglas herrscht der der Außentemperatur entsprechende Dampfdruck. Bei Zimmertemperatur sind das etwa 20 Torr. Berechnen Sie die Kraft, mit der der Deckel auf das Glas gepreßt wird. Der Durchmesser des Deckels beträgt 10,5 cm. Der Luftdruck ist 760 Torr.

Gegeben: $p_D = 20$ Torr; $p_L = 760$ Torr *Gesucht:* F
$d = 10{,}5$ cm

Nach der Definition des Druckes (4.4) ist die Druckkraft gleich dem Produkt aus Druck und Fläche. Für den Druck haben wir hier die Druckdifferenz zu setzen:

$$\underline{\underline{F = (p_L - p_D)\frac{\pi d^2}{4}}}$$

$$F = (760 - 20)\,\text{Torr}\,\frac{\pi\, 10{,}5^2\,\text{cm}^2}{4}$$

$$= 740\,\text{Torr} \cdot 1{,}33 \cdot 10^2 \frac{\text{N m}^{-2}}{\text{Torr}}\,\frac{\pi}{4} \cdot 10{,}5^2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = \underline{\underline{8{,}52 \cdot 10^2\,\text{N}}}$$

■ 4.2 Ein evakuierter Behälter ist oben mit einem kreisrunden Deckel mit dem Durchmesser 500 mm und der Masse 10 kg verschlossen. Berechnen Sie die Kraft, die zum Anheben des Deckels erforderlich ist.

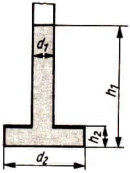


Bild 31

4.3 Ein aus zwei zylindrischen Teilen nach Bild 31 zusammengesetztes Gefäß ist bis zur Höhe h_1 mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Kraft auf die Kreisringfläche (in der Schnittdarstellung durch eine dicke Linie hervorgehoben). Die Höhen sind 50 cm und 5 cm, die Durchmesser 20 mm und 80 mm.

■ 4.4 Berechnen Sie näherungsweise die Luftdruckänderung, die sich ergibt, wenn Sie den Luftdruck einmal am Erdboden und zum anderen in 10 m Höhe messen, in den Einheiten Torr und Pascal.

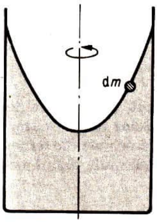


Bild 32

4.5 In einem zylindrischen Gefäß, das um seine senkrechte Achse rotiert, befindet sich Wasser. In einem durch die Rotationsachse verlaufenden Schnitt ist die Wasseroberfläche parabelförmig (Bild 32). Begründen Sie das qualitativ, indem Sie die auf ein Flüssigkeitsteilchen mit der Masse dm wirkenden Kräfte untersuchen.

4.6 In einem mit großer Beschleunigung anfahrenden Wagen wird ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon losgelassen. Beschreiben Sie die Bewegung, die der Ballon im beschleunigten Bezugssystem (Wagen) ausführt.

4.7 Beschreiben Sie den Aufstieg eines mit Wasserstoff gefüllten Ballons in der Atmosphäre für zwei verschiedene Fälle: für einen Ballon mit nichtdehnbarer Hülle und für einen (Gummi-) Ballon, dessen Hülle mit vernachlässigbar kleinem Kraftaufwand dehnbar ist.

■ 4.8 Ein quaderförmiger Körper aus Holz (Dichte $0{,}8\ \mathrm{kg\ dm^{-3}}$; Höhe 25 cm) schwimmt in Wasser. Berechnen Sie die Eintauchtiefe.

▶ 4.9 Ein dünnwandiges Kästchen hat die Masse 350 g, die Grundfläche 320 mm · 180 mm und die Höhe 120 mm. 1. Welche Masse Sand darf eingefüllt werden, wenn der Kasten in Wasser 20 mm tief einsinken soll? 2. Wird mehr oder weniger Sand benötigt, um in Öl die gleiche Eintauchtiefe zu erzielen? 3. Welche Masse Sand darf maximal noch hinzugefügt werden, damit der Kasten gerade noch schwimmt? Geben Sie für den letzten Fall an, welche Höhe trockener Sand im Kasten einnimmt. Setzen Sie dafür näherungsweise Innenmaße = Außenmaße.

Gegeben:	$m_K = 350$ g;	$a = 320$ mm	*Gesucht:* 1. m_S
	$b = 180$ mm;	$H = 120$ mm	2. $m_2 \gtrless m_1$?
zu 1.:	$h = 20$ mm;	$\varrho_W = 1{,}0\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$	3. Δm_S, H_S
zu 2.:	$h = 20$ mm;	$\varrho_{Öl} < \varrho_W$	
zu 3.:	$h = H$;	$\varrho_S = 1{,}5\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$	

1. Aus dem Ansatz für das Kräftegleichgewicht $G_K + G_S = F_A$ folgt mit $F_A = \varrho_W abgh$

$$\underline{\underline{m_S = \varrho_W abh - m_K}}$$

$$m_S = 1\ \mathrm{g\ cm^{-3}} \cdot 32\ \mathrm{cm} \cdot 18\ \mathrm{cm} \cdot 2\ \mathrm{cm} - 350\ \mathrm{g} = \underline{\underline{802\ \mathrm{g}}}$$

2. Wegen $m_{ges} = m_S + m_K = \varrho_F abh$ ist $m_{ges} \sim \varrho_F$. Bei kleinerer Dichte der Flüssigkeit F wird folglich weniger Sand benötigt, wenn die gleiche Eintauchtiefe erreicht werden soll.

3. $\underline{\underline{\Delta m_S = \varrho_W abh - (m_K - m_S)}}$; $\quad \Delta m_S = \underline{\underline{5{,}76\ \mathrm{kg}}}$

$$\underline{\underline{H_S = \frac{m_S + \Delta m_S}{\varrho_S ab}}}; \qquad H_S = \frac{(5760 + 802)\ \mathrm{g\ cm^3}}{1{,}5\ \mathrm{g} \cdot 32\ \mathrm{cm} \cdot 18\ \mathrm{cm}} = \underline{\underline{76\ \mathrm{mm}}}$$

4.10 Der in Übung 4.8 betrachtete Holzquader wird so festgehalten, daß sich seine Oberfläche 2 m unter der Wasseroberfläche befindet. Länge und Breite des Quaders sind 100 cm und 50 cm. 1. Berechnen Sie einzeln die am Quader angreifenden Kräfte.

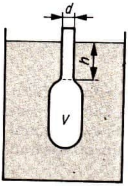


Bild 33

2. Berechnen Sie die Beschleunigung, mit der der Quader aufsteigt, wenn er losgelassen wird. 3. Berechnen Sie ohne Berücksichtigung der Reibung die Zeit, in der der Körper die Wasseroberfläche erreicht. 4. Stellen Sie den Einfluß von bewegungshemmenden Kräften in einem v, t-Diagramm dar.

4.11 Ein Aräometer (Bild 33) mit der Masse m taucht in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ ein. Berechnen Sie die Eintauchtiefe h.

4.12 In einem Flugzeug zeigt ein Prandtlsches Staurohr einen dynamischen Druck von 21,5 Torr an. Berechnen Sie die Relativgeschwindigkeit des Flugzeuges gegenüber der Luft, die eine Temperatur von 0 °C und einen Druck von 760 Torr aufweist.

4.13 Eine Venturidüse zeigt einen Druckunterschied von 10 mm WS an. Die Querschnitte verhalten sich wie 3:1. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Wasser an der Stelle des größeren Querschnitts durch die Düse strömt.

4.14 In einer Wasserleitung herrscht bei geschlossenem Hahn ein Druck von 6 at. Wenn das Wasser mit 3,5 m s^{-1} aus dem geöffneten Hahn fließt, ändert sich der statische Druck. Berechnen Sie die Druckänderung in Prozent. Geben Sie weiterhin die relative Änderung des gegen den Luftdruck (1 at) gemessenen statischen Überdrucks an.

▶ 4.15 Eine Kugel mit einem Radius von 3,0 mm und einer Dichte von 2,5 g cm^{-3} durchfällt in einer Flüssigkeit der Dichte 0,90 g cm^{-3} eine Strecke von 10 cm in einer Zeit von 0,70 s mit konstanter Geschwindigkeit. Berechnen Sie die dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit in Zentipoise unter der Annahme einer laminaren Umströmung.

Gegeben: $r = 3{,}0$ mm; $\varrho_K = 2{,}5$ g cm^{-3} *Gesucht:* η
$\varrho_F = 0{,}90$ g cm^{-3}; $s = 10$ cm; $t = 0{,}70$ s

Auf die Kugel wirken drei Kräfte, die miteinander im Gleichgewicht stehen:

$$G_K = F_A + F_R \tag{1}$$

(3.6) und (3.3)
$$G_K = m_K g = V_K \varrho_K g \tag{2}$$

(4.11)
$$F_A = G_F = m_F g = V_F \varrho_F g \tag{3}$$

$$V_F = V_K \tag{4}$$

(4.21)
$$F_R = 6\pi\eta v r \tag{5}$$

$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{6}$$

(2.1″)
$$v = \frac{s}{t} \tag{7}$$

Nun haben wir 7 Gleichungen mit 7 unbekannten Variablen (G_K, F_A, F_R, V_K, V_F, η, v), davon ist eine gesucht (η). Einsetzverfahren: (2), (3) – unter Beachtung von (4) und (6) – sowie (5) in (1) eingesetzt, ergibt

$$\eta = \frac{V_K g t (\varrho_K - \varrho_F)}{6\pi s r} = \underline{\underline{\frac{2t\, g r^2 (\varrho_K - \varrho_F)}{9s}}}$$

$$\eta = \frac{2 \cdot 0{,}7\ \text{s} \cdot 9{,}81\ \text{m}\ (3 \cdot 10^{-3})^2\ \text{m}^2\ (2{,}5 - 0{,}9)\ \text{g}}{9 \cdot 10\ \text{cm}\quad \text{s}^2 \qquad\qquad \text{cm}^3}$$

$$= \frac{2 \cdot 7 \cdot 9{,}81 \cdot 9 \cdot 1{,}6}{9} \cdot 10^{-1-6-1} \cdot \frac{\text{s m m}^2\ \text{kg} \cdot 10^2 \cdot 10^6}{10^3\ \text{m s}^2\ \text{m}^3}$$

Einheitenrechnung: $\frac{\text{s m}^3\ \text{kg}}{\text{m}^4\ \text{s}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\ \frac{\text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = 10^3\ \text{cP}$

$\eta = \underline{\underline{220\ \text{cP}}}$

2.3.5. Beispiele und Übungen zur kinetischen Theorie der Wärme

▶ 5.1 Berechnen Sie die Boltzmann-Konstante. Gehen Sie dabei von der Aussage aus, daß unter Normalbedingungen das Verhältnis der Teilchenzahl zum Volumen gleich der Loschmidt-Konstante ist.

Gegeben: $p = 760$ Torr; $T = 273{,}15$ K *Gesucht:* k
$N_L = 2{,}687 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$

Aus (5.4), (5.12) und (5.13) folgt

$pV = nkT$

Mit (5.6) $\frac{n}{V} = N_L$ wird daraus $k = \underline{\underline{\frac{p}{TN_L}}}$

Mit 760 Torr = 101325 Pa folgt

$$k = \frac{101\,325\ \text{Pa}}{273{,}15\ \text{K} \cdot 2{,}687 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}} = \underline{\underline{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}}}$$

Die Boltzmann-Konstante gibt die Energie an, die ein Teilchen des idealen Gases aufnimmt (abgibt), wenn die Temperatur des Gases um 1 K steigt (fällt).

5.2 Berechnen Sie das spezifische Volumen von Wasserstoff unter Normalbedingungen.

▶ 5.3 Berechnen Sie die Dichte des Sauerstoffs in einer 40-l-Stahlflasche, in der das Gas bei einer Temperatur von 17 °C unter einem Überdruck von 144 at (gegenüber dem normalen Luftdruck von 1 at) steht.

Gegeben: $V = 40\,\mathrm{l}$; $M = 32\,\mathrm{kg\,kmol^{-1}}$; $T = 290\,\mathrm{K}$

$p = 145\,\mathrm{at} = 145 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$

Gesucht: ϱ

Aus der Zustandsgleichung und der Definition der Dichte folgt

$$\varrho = \frac{Mp}{RT}; \qquad \varrho = \frac{32\,\mathrm{kg} \cdot 145 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa\,kmol\,K}}{\mathrm{kmol} \cdot 8314\,\mathrm{J} \cdot 290\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{189\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}}$$

▶ 5.4 Berechnen Sie das „spezifische" Volumen, das einem einzelnen Wassermolekül zur Verfügung steht, und zwar 1. in Wasser der Dichte $1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ und 2. in Wasserdampf der Dichte $0{,}6\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Gegeben: $\varrho_1 = 1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$; $\varrho_2 = 0{,}6\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ *Gesucht:* v_1; v_2

Aus (5.8) $v = \dfrac{V}{N}$, (3.3) $V = \dfrac{m}{\varrho}$ und (5.4) $N = N_A n$ ergibt sich

$v = \dfrac{m}{\varrho N_A n}$; mit (5.2) $\dfrac{m}{n} = M$ (molare Masse) folgt

$$\underline{\underline{v = \frac{M}{\varrho N_A}}}; \qquad v_1 = \frac{18\,\mathrm{g\,mol^{-1}}}{1\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}} = \underline{\underline{3 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m^3}}}$$

Da $V \sim \dfrac{1}{\varrho}$ ist, gilt $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\varrho_2}{\varrho_1}$ und damit

$$\underline{\underline{v_2 = v_1 \frac{\varrho_1}{\varrho_2}}} \qquad v_2 = \underline{\underline{5 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{m^3}}}$$

■ 5.5 Berechnen Sie das Volumen, das einem Sauerstoffmolekül in flüssigem Sauerstoff der Dichte $1{,}1\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ zur Verfügung steht. Benutzen Sie das Ergebnis, um den Durchmesser eines O_2-Moleküls abzuschätzen.

5.6 Um eine Vorstellung von der Größenordnung der Avogadro-Konstante zu erhalten, machen wir folgenden Gedankenversuch: Die in 1 g Wasser enthaltenen Moleküle werden gleichmäßig über die Oberfläche der Erdkugel verteilt. Bestimmen Sie, wieviel Moleküle hierbei auf jeden Quadratzentimeter der Erdoberfläche entfallen würden.

5.7 Berechnen Sie das Volumen, das 0,24 kg Luft bei einem Druck von 740 Torr und einer Temperatur von 17 °C einnehmen.

■ 5.8 Berechnen Sie den Druck, der erforderlich ist, um 4,2 kg Stickstoff bei einer Temperatur von 7,0 °C auf 0,48 m³ zu komprimieren.

5.9 Berechnen Sie die Masse der Luft in einem Zimmer von 5,00 m Länge, 4,00 m Breite und 3,00 m Höhe bei 20 °C und 735 Torr.

5.10 Berechnen Sie die innere Energie von 0,24 kg Helium bei einer Temperatur von − 13 °C. Geben Sie das Ergebnis in Joule und Kilokalorien an.

2.3.6. Beispiele und Übungen zur Thermodynamik

▶ 6.1 Ein Glasgefäß (Pyknometer aus Labortherm G), das bei 20 °C genau 100,0 cm³ faßt, wird bis zum Rand mit Wasser gefüllt und anschließend auf 50 °C erwärmt. Berechnen Sie die Wassermenge, die beim Erwärmen aus dem Gefäß ausfließt.

Gegeben: $V_1 = 100{,}0\ \text{cm}^3;\quad t_1 = 20\ °\text{C};\quad t_2 = 50\ °\text{C}$
$\alpha_G = 4{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1};\quad \gamma_W = 0{,}18 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$

Gesucht: $\Delta V'_W$

Sowohl das Volumen des Wassers als auch das des Pyknometers nimmt mit steigender Temperatur zu. Das Wasservolumen wächst stärker, deshalb fließt ein Teil des Wassers aus. Das Volumen dieses Teils ist gleich der Differenz der beiden Volumenzunahmen.

$$\Delta V'_W = \Delta V_W - \Delta V_G;\qquad \Delta V_G = 3\alpha_G V_1\,\Delta t;\qquad \Delta V_W = \gamma_W V_1\,\Delta t$$

$$\Delta V'_W = \underline{\underline{V_1\,\Delta t\,(\gamma_W - 3\alpha_G)}}$$

$$\Delta V'_W = 100\ \text{cm}^3 \cdot (50 - 20)\ \text{K} \cdot (180 - 14) \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-1} = \underline{\underline{0{,}5\ \text{cm}^3}}$$

6.2 Der Kupferdraht einer Freileitung ist bei 25 °C 200,0 m lang. Berechnen Sie die Längenänderung, die dieser Draht beim Absinken der Temperatur auf − 15 °C erfährt.

■ 6.3 Ein Meßglas aus Labortherm G trägt die Aufschrift „100,00 cm³ bei 20 °C". Berechnen Sie, welches Volumen es bei 120 °C hat.

■ 6.4 Zink hat bei 18 °C eine Dichte von 7,12 g cm⁻³. Berechnen Sie die Temperatur, auf die es erwärmt werden muß, damit die Dichte auf 7,05 g cm⁻³ abnimmt.

▶ 6.5 Zur Bestimmung der Wärmekapazität eines Kalorimeters wird es mit 400 g Wasser von 15 °C gefüllt. Beim Zugießen von 600 g Wasser von 60 °C ergibt sich eine Mischungstemperatur von 39 °C. Berechnen Sie daraus die Wärmekapazität des Kalorimeters.

Gegeben: $m_1 = 600\ \text{g};\quad m_2 = 400\ \text{g}$ *Gesucht:* C
$t_1 = 60\ °\text{C};\quad t_2 = 15\ °\text{C}$
$t_m = 39\ °\text{C};\quad c = 1\ \text{cal g}^{-1}\,\text{K}^{-1} = 4{,}18\ \text{J g}^{-1}\,\text{K}^{-1}$

Das warme Wasser gibt die Wärmemenge Q_1 ab:

$$Q_1 = c\,m_1(t_1 - t_m)$$

Das kalte Wasser nimmt die Wärmeenergie Q_2 auf:

$$Q_2 = c\,m_2(t_m - t_2)$$

Das Kalorimeter nimmt die Wärmemenge Q_3 auf:

$$Q_3 = C\,(t_m - t_2)\,.$$

Nach dem Energieerhaltungssatz ist $Q_1 = Q_2 + Q_3$, also $cm_1(t_1 - t_m) = cm_2(t_m - t_2) + C\,(t_m - t_2)$, daraus

$$\underline{\underline{C = c\left(m_1 \frac{t_1 - t_m}{t_m - t_2} - m_2\right)}}$$

$$C = 1\,\frac{\text{cal}}{\text{g K}}\left(600\,\text{g}\,\frac{21\,\text{K}}{24\,\text{K}} - 400\,\text{g}\right) = \underline{\underline{125\,\text{cal K}^{-1}}} = \underline{\underline{522\,\text{J K}^{-1}}}$$

■ 6.6 Berechnen Sie, um wieviel Kelvin sich die Temperatur des Wassers in einem Wasserfall ändert, wenn die Fallhöhe 40 m beträgt und der Wärmeaustausch mit der Umgebung vernachlässigt wird. Die kinetische Energie des oben zufließenden Wassers ist gleich der des unten abfließenden.

6.7 Berechnen Sie die Zeit, in der ein elektrischer Heißwasserspeicher 8,00 l Wasser von 10 °C auf 95 °C erwärmt. Die Heizleistung beträgt 950 W, der Wirkungsgrad 92 %.

■ 6.8 Der Pkw Wartburg 1000 hat einen Motor mit einer Nutzleistung von 33,1 kW. Berechnen Sie den Benzinverbrauch für den Fall, daß der Motor auf einem Prüfstand eine Stunde lang mit Höchstleistung läuft und einen Wirkungsgrad von 28 % hat.

■ 6.9 In einem elektrischen Schmelzofen soll Reinaluminium geschmolzen werden. Berechnen Sie die für ein Kilogramm Aluminium benötigte Energie in Kilowattstunden unter der Voraussetzung, daß die Anlage einen Wirkungsgrad von 60 % hat und die Anfangstemperatur des Metalls 25 °C beträgt.

▶ 6.10 Berechnen Sie den Druck, bis zu dem 100 m³ Luft von 1,00 at isotherm komprimiert werden können, wenn eine Energie von 3,00 kWh aufgewendet wird.

Gegeben: $V_1 = 100\,\text{m}^3$; $W = -3{,}00\,\text{kWh}$ *Gesucht:* p_2
$p_1 = 1{,}00\,\text{at} = 98{,}1\,\text{kPa}$

Aus (6.17) und (5.13) folgt $W = p_1 V_1 \ln(p_1/p_2)$

$$\underline{\underline{p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{W}{p_1 V_1}\right)}}$$

$$p_2 = 1\,\text{at} \cdot \exp\left(\frac{3 \cdot 3{,}6 \cdot 10^6\,\text{Ws}}{98{,}1 \cdot 10^3\,\text{Nm}^{-2} \cdot 100\,\text{m}^3}\right) = 1\,\text{at} \cdot e^{1{,}10} = \underline{\underline{3\,\text{at}}}$$

■ 6.11 3,0 m³ Luft von 1,1 at und 300 K sollen isotherm auf 5,0 at komprimiert werden. Berechnen Sie 1. das Volumen nach der Verdichtung, 2. die erforderliche Kompressionsarbeit und 3. die abzuführende Wärmemenge.

6.12 1,0 m³ Luft von 0,90 at und 300 K soll durch Temperaturerhöhung auf einen Druck von 3,0 at gebracht werden. Berechnen Sie 1. die erforderliche Temperatur und 2. die zuzuführende Wärmemenge.

■ 6.13 1,0 m³ Luft von 300 K soll bei konstantem Druck von 0,9 at auf 1000 K erwärmt werden. Berechnen Sie 1. das Endvolumen, 2. die zuzuführende Wärmemenge und 3. die dabei verrichtete Ausdehnungsarbeit. Die mittlere spezifische Wärmekapazität beträgt im gegebenen Temperaturbereich 0,255 kcal kg⁻¹ K⁻¹.

▶ 6.14 3,00 m³ Luft von 300 K und 1,1 at sollen adiabatisch auf 5,00 at komprimiert werden. Berechnen Sie 1. das Volumen nach der Verdichtung, 2. die Temperatur, die das Gas annimmt, und 3. die zur Kompression erforderliche Arbeit.

Gegeben: $V_1 = 3{,}00\ \mathrm{m^3}$; $p_2 = 5{,}00$ at; $T_1 = 300$ K; $p_1 = 1{,}1$ at; $M = 29$; $\varkappa = 1{,}4$

Gesucht: 1. V_2; 2. T_2; 3. W

1. (6.32) $$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

$$V_2 = 3\ \mathrm{m^3} \left(\frac{1{,}1\ \mathrm{at}}{5\ \mathrm{at}}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} = 3\ \mathrm{m^3} \cdot 0{,}339 = 1{,}02\ \mathrm{m^3}$$

2. $$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

$$T_2 = 300\ \mathrm{K} \left(\frac{5\ \mathrm{at}}{1{,}1\ \mathrm{at}}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} = 300\ \mathrm{K} \cdot 1{,}541 = \underline{\underline{462\ \mathrm{K}}}$$

3. Aus (6.33) und (5.13) folgt

$$W = \underline{\underline{\frac{p_1 V_1}{(\varkappa - 1)\, T_1} (T_1 - T_2)}}$$

$$W = \frac{1{,}1\ \mathrm{at} \cdot 3\ \mathrm{m^3}\,(-162\ \mathrm{K})}{0{,}4 \cdot 300\ \mathrm{K}}$$

$$= \underline{\underline{-44{,}6\ \mathrm{Mpm}}} = \underline{\underline{-437\ \mathrm{kJ}}} = \underline{\underline{-0{,}121\ \mathrm{kWh}}}$$

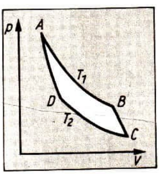


Bild 34

■ 6.15 Mit 10,0 l Luft, die unter einem Druck von 18,0 at steht, soll ein Carnot-Prozeß zwischen 400 °C und 20 °C durchgeführt werden. Nach der adiabatischen Expansion soll das Volumen des Gases 100 l betragen. Bild 34 soll den Vorgang veranschaulichen. Berechnen Sie 1. das Volumen im Zustand B, 2. den Druck im Zustand B, 3. den Druck im Zustand C, 4. das Volumen im Zustand D, 5. den Druck im Zustand D und 6. den Wirkungsgrad.

▶ 6.16 Die Kompression von 3,00 m³ Luft, die eine Temperatur von 300 K und einen Druck von 1,10 at hat, erfolgt polytrop auf 5,00 at. Der Polytropenexponent ist 1,2, die spezifische Wärmekapazität $c_v = 0{,}186$ kcal kg^{-1} K^{-1}. Berechnen Sie die abzuführende Wärmeenergie.

Gegeben: $V_1 = 3{,}00\ \mathrm{m^3}$; $T_1 = 300$ K *Gesucht:* Q

$p_1 = 1{,}10$ at; $k = 1{,}2$

$p_2 = 5{,}00$ at; $\varkappa = 1{,}4$

$M = 29 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}$; $c_v = 0{,}186 \dfrac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\,K}}$

Wir benutzen die Gleichungen

(6.10) $$Q = \Delta U + W \tag{1}$$

mit

$$\Delta U = c_v m (T_2 - T_1) \tag{2}$$

und

$$W = M\left(\frac{mR}{k-1}\right)(T_1 - T_2) \tag{3}$$

(5.13) $$pV = \frac{m}{M} RT \tag{4}$$

(6.25) $$\frac{R}{M} = c_p - c_v \tag{5}$$

(6.29) $$c_p = \varkappa c_v \tag{6}$$

(6.35) $$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{7}$$

Kombination von (1), (2) und (3) ergibt

$$Q = m(T_2 - T_1)\left(c_v \frac{R}{M(k-1)}\right) \tag{8}$$

Mit (4) und (5) wird daraus

$$Q = \frac{Mp_1V_1}{RT_1}(T_2 - T_1)\frac{c_v k - c_v - c_p + c_v}{k-1} \tag{9}$$

und mit (6)

$$Q = c_v \frac{k-\varkappa}{k-1} \frac{p_1 V_1 M}{R}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \tag{10}$$

Mit (7) folgt das Endergebnis

$$\underline{\underline{Q = c_v \frac{k-\varkappa}{k-1} \frac{Mp_1V_1}{R}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]}}$$

$$Q = \frac{0{,}186\ \mathrm{kcal}}{\mathrm{kg\,K}} \frac{-0{,}2}{0{,}2} \frac{1{,}1\ \mathrm{at} \cdot 3\ \mathrm{m^3} \cdot 29\ \mathrm{kmol\,kg\,K}}{8314\ \mathrm{J}\quad \mathrm{kmol}}\left[\left(\frac{5}{1{,}1}\right)^{\frac{0{,}2}{1{,}2}} - 1\right]$$

$$= \underline{\underline{-60{,}3\ \mathrm{kcal}}} = \underline{\underline{-2{,}52 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}}$$

6.17 Berechnen Sie für die in Übung 6.16 behandelte polytrope Zustandsänderung 1. das Volumen nach der Verdichtung, 2. die Temperatur, die das Gas annimmt, und 3. die zur Kompression erforderliche mechanische Arbeit.

6.18 Eine Wärmepumpe entnimmt Wärmeenergie aus einem See, der eine Temperatur von 5,0 °C hat, und führt sie einer Warmwasserheizung zu, deren Heißwasser eine Temperatur von 75 °C hat. Berechnen Sie die Leistungszahl.

▶ **6.19** Für die in Übung 6.17 und 6.18 behandelte polytrope Zustandsänderung soll die Entropieänderung berechnet werden.

Gegeben: $V_1 = 3{,}00\ \text{m}^3$; $T_1 = 300\ \text{K}$ *Gesucht:* ΔS

$p_1 = 1{,}10\ \text{at}$; $p_2 = 5{,}00\ \text{at}$

$k = 1{,}2$; $\varkappa = 1{,}4$

$M = 29\,\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$; $c_v = 0{,}186\,\frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$

Die Entropieänderung ist durch (6.46′) definiert:

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

$\mathrm{d}Q$ erhalten wir aus der in Übung 6.17 hergeleiteten Gleichung

$$Q = \frac{M p_1 V_1}{R T_1}(T_2 - T_1)\frac{c_v n - c_v \varkappa}{k - 1} = c_v m \frac{k - \varkappa}{k - 1}(T_2 - T_1)$$

$$\mathrm{d}Q = c_v m \frac{k - \varkappa}{k - 1}\,\mathrm{d}T$$

Damit wird

$$\mathrm{d}S = c_v m \frac{k - \varkappa}{k - 1}\,\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

Daraus folgt ΔS durch Integration

$$\Delta S = c_v m \frac{k - \varkappa}{k - 1}\ln\frac{T_2}{T_1}$$

Da in dieser Gleichung T_2 nicht bekannt ist, wandeln wir sie mit

$$(6.35)\qquad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

um zu

$$\Delta S = c_v m \frac{k - \varkappa}{k}\ln\frac{p_2}{p_1}$$

In dieser Gleichung wird m eliminiert mit Hilfe der Zustandsgleichung (5.13) $pV = \frac{m}{M} RT$. Das ergibt

$$\Delta S = c_v \frac{M p_1 V_1}{R T_1} \frac{k - \varkappa}{k} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\Delta S = \frac{0{,}186 \text{ kcal} \cdot 29 \text{ kg kmol K} \cdot 1{,}1 \text{ at} \cdot 3 \text{ m}^3 \cdot (-0{,}2)}{\text{kg K} \quad \text{kmol} \cdot 8314 \text{ J} \cdot 300 \text{ K} \cdot \quad 1{,}2} \cdot \ln\left(\frac{5}{1{,}1}\right)$$

$$= -\frac{1{,}86 \cdot 2{,}9 \cdot 1{,}1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1{,}51}{8{,}314 \cdot 3 \cdot 1{,}2} \cdot 10^{-1-3-2} \cdot \frac{\text{kcal} \cdot 9{,}81 \cdot 10^4 \text{ N m}^3}{\text{K} \quad \text{Nm} \quad \text{m}^2}$$

$$= -0{,}175 \frac{\text{kcal}}{\text{K}} = -0{,}733 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

6.20 500 g Wasser der Temperatur 360 K werden mit 500 g Wasser der Temperatur 300 K gemischt. Berechnen Sie die Entropiezunahme unter der Voraussetzung, daß kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet.

6.21 5,0 kg Wasser befinden sich auf Siedetemperatur. Berechnen Sie den Energiebedarf und den Entropiezuwachs für das restlose Verdampfen des Wassers.

▶ 6.22 Begründen Sie, weshalb der Deckel von Einkochgläsern in der ersten Abkühlungsphase durch einen Federbügel, durch Wägestücke oder von Hand auf den Dichtungsring gepreßt werden muß.

Die Gläser werden dadurch verschlossen, daß die von außen auf den Deckel wirkende Druckkraft größer ist als die von innen wirkende. Abnahme des Innendrucks wird erreicht, wenn im Glas der über der Flüssigkeit vorhandene Wasserdampf kondensiert, ohne daß Außenluft eindringen kann. Zu Beginn der Abkühlungsphase, wenn die Druckdifferenz noch nicht ausreichend groß ist, um den Deckel fest aufzupressen, ist eine äußere Zusatzbelastung erforderlich.

6.23 In einem 1200 m³ großen Fabriksaal wird bei 25 °C eine relative Luftfeuchtigkeit von 60 % gemessen. Berechnen Sie die absolute Feuchtigkeit, den Taupunkt und die Wassermenge, die kondensiert, wenn die Temperatur nachts auf 10 °C absinkt.

6.24 Erklären Sie, weshalb Nahrungsmittel, die unbedeckt im Kühlschrank lagern, rasch austrocknen.

6.25 Erklären Sie, weshalb im Freien aufgehängte Wäsche im Wind rascher trocknet als in ruhender Luft, gleiche Lufttemperatur vorausgesetzt.

6.26 Die Wände eines Zimmers sollen bei Frostwetter mit Leimfarbe gestrichen werden. Beschreiben Sie die Verfahrensweise, mit der sich die Wände nach dem Anstreichen schnell trocknen lassen.

6.27 Die Temperatur einer Streichholzflamme beträgt maximal 1300 °C. Weshalb lassen sich trotzdem Briketts nicht mit einem Streichholz entzünden?

▶ **6.28** Ein Warmwasserspeicher von 30 dm² Oberfläche und einer Wanddicke von 0,5 cm soll bei einer Raumtemperatur von 25 °C Wasser von 90 °C speichern. Die Wärmeübergangszahlen sind innen 1000 kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1}, außen 5,0 kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1}. Die Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials ist 0,8 kcal m^{-1} h^{-1} K^{-1}. Berechnen Sie die Wärmedurchgangszahl und die mittlere Heizleistung, die zur Aufrechterhaltung der Temperaturdifferenz erforderlich ist.

Gegeben: $t_i = 90\ °\text{C}$; $t_a = 25\ °\text{C}$ *Gesucht: k, P*

$l = 0{,}5\ \text{cm}$; $A = 30\ \text{dm}^2$

$\alpha_i = 1000\ \text{kcal m}^{-2}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1}$

$\alpha_a = 5{,}0\ \text{kcal m}^{-2}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1}$

$\lambda = 0{,}8\ \text{kcal m}^{-1}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1}$

Der Wärmedurchgang besteht aus zwei Wärmeübergängen und einem Wärmeleitungsvorgang. Nach (6.59) errechnet sich

$$\underline{\underline{k = \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{l}{\lambda}\right)^{-1}}}$$

$$k = \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{5} + \frac{0{,}005}{0{,}8}\right)^{-1} \left(\frac{\text{m}^2\ \text{h K}}{\text{kcal}}\right)^{-1} = \underline{\underline{4{,}83\ \text{kcal m}^{-2}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1}}}$$
$$= \underline{\underline{20{,}2\ \text{kJm}^{-2}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1}}}$$

Die mittlere Heizleistung ist der Quotient aus der Wärmemenge, die durch Wärmedurchgang (6.59) verlorengeht, und der Zeit:

$$P = \underline{\underline{kA\ (t_i - t_a)}}$$

$$P = 4{,}83\ \text{kcal m}^{-2}\ \text{h}^{-1}\ \text{K}^{-1} \cdot 30\ \text{dm}^2 \cdot 65\ \text{K} = \underline{\underline{94{,}2\ \text{kcal h}^{-1}}}$$
$$= \underline{\underline{394\ \text{kJ h}^{-1}}}$$

6.29 Ein Kupferstab von 1,57 m Länge und einem Durchmesser von 10 cm ist längs seines Umfangs vollständig wärmeisoliert. Zwischen seinen Enden wird eine Temperaturdifferenz von 100 K aufrechterhalten. Berechnen Sie die in einer Stunde übertragene Wärmeenergie und den Wärmeleitwiderstand.

6.30 Durch die 1 cm dicke Metallwand eines Kessels wird Wärmeenergie von den Heizgasen (1100 °C) auf siedendes Wasser übertragen. Die Wärmeleitfähigkeit des Metalls ist 50 kcal m^{-1} h^{-1} K^{-1}; der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Heizgas und Wand beträgt 50 kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1}, zwischen Wand und Wasser dagegen 5000 kcal m^{-2} h^{-1} K^{-1}. Berechnen Sie 1. den Wärmedurchgangskoeffizienten und 2. die in einer Stunde durch die 10 m² große Wand übertragene Wärmeenergie.

6.31 Begründen Sie, weshalb bei niedrigen Temperaturen das Sitzen auf Holzflächen angenehmer ist als auf Stahl- oder Steinplatten.

2.3.7. Beispiele und Übungen zum Gleichstromkreis

7.1 An einem Heizgerät mit dem Widerstand 45 Ω liegt die Spannung 220 V. Berechnen Sie Stromstärke und aufgenommene Leistung.

7.2 Der Widerstand eines Drahtes von 150 m Länge und 0,50 mm Durchmesser wird mit 13,3 Ω gemessen. Berechnen Sie 1. den Leitwert des Drahtes und 2. den spezifischen Widerstand und die Leitfähigkeit des Materials, aus dem der Draht besteht.

■ 7.3 Ein elektrisches Gerät mit einer Nennleistung von 2 kW bei einer Nennspannung von 220 V wird über eine Kupferleitung von 2,5 mm² Querschnitt an eine 125 m entfernte Spannungsquelle mit 220 V angeschlossen. Berechnen Sie 1. den Leitungswiderstand, 2. den Gerätewiderstand, 3. die Stromstärke und 4. die Nutzleistung am Gerät.

▶ 7.4 In einem elektrischen Kammerofen für 220 V sind 12 Silitstäbe mit je 22,8 Ω parallelgeschaltet. Berechnen Sie 1. die elektrische Leistung, die der Ofen aufnimmt, 2. die stündlich erzeugte Wärmemenge und 3. die Energiekosten für den 24stündigen Betrieb bei einem Preis von 0,08 M/kWh.

Gegeben: $R = 22{,}8\,\Omega$; $n = 12$; $U = 220$ V; $k = 0{,}08$ M (kWh)$^{-1}$; zu 2. $t_2 = 1$ h; zu 3. $t_3 = 24$ h

Gesucht: 1. P_{el} 2. P_{th} 3. K_w

1. (7.11′) $P_{el} = \dfrac{U^2}{R_{ges}}$; nach (7.19) ist $R_{ges} = \dfrac{R}{n}$. Damit folgt

$$\underline{\underline{P_{el} = n\,\frac{U^2}{R}}}$$

$$P_{el} = 12 \cdot \frac{2{,}2^2 \cdot 10^4\ \mathrm{V}^2}{22{,}8\ \Omega} = 12 \cdot \frac{2{,}2^2}{22{,}8} \cdot 10\ \mathrm{kW} = \underline{\underline{25\ \mathrm{kW}}}$$

2. Die gesamte elektrische Energie wird in Wärme umgewandelt:

$$P_{th} = \frac{Q}{t_2} = P_{el}$$

$$P_{th} = 25\ \mathrm{kW} = \frac{25\ \mathrm{kW} \cdot 8{,}6 \cdot 10^2\ \mathrm{kcal}}{\mathrm{kWh}} = \underline{\underline{2{,}15 \cdot 10^4\ \mathrm{kcal\ h^{-1}}}}$$

3. $K_w = \underline{\underline{P t_3 k}}$; $\quad K_w = 25\ \mathrm{kW} \cdot 24\ \mathrm{h} \cdot 0{,}08\ \mathrm{M\ (kWh)^{-1}} = \underline{\underline{48\ \mathrm{M}}}$

7.5 Ein Trockenofen soll je Stunde 2,2 Mcal abgeben. Bemessen Sie den Widerstand des Heizkörpers so, daß bei einer Netzspannung von 220 V die dafür notwendige Heizleistung erbracht wird.

▶ 7.6 An eine Spannungsquelle mit der Urspannung 120 V und dem inneren Widerstand 4 Ω wird ein Regelwiderstand angeschlossen, der in den Grenzen 0 ··· 25 Ω stufenlos einstellbar ist. Stellen

Sie 1. die Stromstärke, 2. die Klemmenspannung und 3. die äußere Leistung in Abhängigkeit vom Außenwiderstand in Gleichungen und Diagrammen dar.

Gegeben: $U_0 = 120\ \text{V}$; $R_i = 4\ \Omega$; $R_a = 0 \cdots 25\ \Omega$

Gesucht: 1. $I(R_a)$; 2. $U_k(R_a)$; 3. $P_a(R_a)$

1. $$I(R_a) = \underline{\underline{\frac{U_0}{R_a + R_i}}}$$

Wollen wir wie in unserem Falle mehrere Funktionswerte ausrechnen, so empfiehlt es sich, die Gleichungen auf die gewünschten Einheiten zuzuschneiden und die konstanten Größen einzusetzen:

$$I_{/\text{A}} = \underline{\underline{\frac{120}{R_{a/\Omega} + 4}}}$$

2. $$U_k(R_a) = IR_a = \frac{U_0 R_a}{R_a + R_i} = \frac{U_0}{1 + \frac{R_i}{R_a}}; \qquad U_{k/\text{V}} = \underline{\underline{\frac{120}{1 + \frac{4}{R_{a/\Omega}}}}}$$

3. $$P_a(R_a) = IU_k = \underline{\underline{\frac{R_a U_0^2}{(R_a + R_i)^2}}}; \qquad P_{a/\text{kW}} = 14{,}4\,\underline{\underline{\frac{R_{a/\Omega}}{(R_{a/\Omega} + 4)^2}}}$$

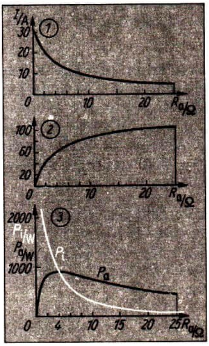


Bild 35

Im Bild 35 sind die Diagramme zu diesen Funktionen dargestellt. Die nach außen abgegebene Leistung hat bei $R_a = 4\ \Omega$ ein Maximum. Das gilt immer, wenn $R_a = R_i$ ist. Diesen Fall bezeichnet man als *Anpassung*.

▶ 7.7 Wird einer Akkumulatorenbatterie ein Strom von 10 A entnommen, so ist die Klemmenspannung 42 V. Bei der Entnahme von 20 A sinkt die Klemmenspannung auf 36 V. Berechnen Sie 1. die Urspannung und 2. den inneren Widerstand der Batterie.

Gegeben: $I_1 = 10\ \text{A}$; $U_{k1} = 42\ \text{V}$; $I_2 = 20\ \text{A}$; $U_{k2} = 36\ \text{V}$

Gesucht: 1. U_0; 2. R_i

1. $$U_{k1} = U_0 - I_1 R_i \qquad (1)$$

$$U_{k2} = U_0 - I_2 R_i \qquad (2)$$

Daraus folgt

$$U_0 = \underline{\underline{\frac{U_{k1} I_2 - U_{k2} I_1}{I_2 - I_1}}}; \qquad U_0 = \underline{\underline{48\ \text{V}}}$$

2. Ebenfalls aus (1) und (2) folgt

$$R_i = \underline{\underline{\frac{U_{k1} - U_{k2}}{I_2 - I_1}}}; \qquad R_i = \underline{\underline{0{,}6\ \Omega}}$$

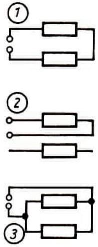


Bild 36

■ **7.8** An eine Akkumulatorenbatterie mit der Urspannung 6,0 V wird ein Gerät mit dem Widerstand 2,1 Ω geschaltet. Die Stromstärke beträgt 2,8 A. Berechnen Sie die Stromstärke des Stromes, der fließt, wenn ein Gerät mit dem Widerstand 1,2 Ω eingeschaltet wird.

7.9 Berechnen Sie 1. den inneren Widerstand einer Spannungsquelle mit der Urspannung 15 V, die beim Einschalten des Widerstandes 1,8 Ω einen Strom von 7,5 A abgibt, und 2. die Stromstärke des maximal möglichen Stromes.

7.10 Ein elektrisches Heizgerät besitzt 3 Schaltstufen (Bild 36). An 220 V angeschlossen, fließt bei Schaltstufe 3 ein Strom von 10 A. Beide Widerstände sind gleich. Berechnen Sie die Heizleistung der einzelnen Schaltstufen.

7.11 Zwei Widerstände sind parallel zueinander und mit einem dritten in Reihe geschaltet. Alle Widerstände sind gleich und an eine Batterie von 6 in Reihe geschalteten Akkus mit je 2,00 V Klemmenspannung und je 100 mΩ innerem Widerstand angeschlossen. Der Gesamtstrom beträgt 500 mA. 1. Zeichnen Sie das Schaltbild. 2. Berechnen Sie einen Widerstand. 3. Berechnen Sie die Urspannung der gesamten Batterie.

7.12 Zwischen den Punkten A und B der im Bild 37.1 dargestellten Schaltung liegt die konstante Spannung 120 V. Die Widerstände haben folgende Werte: $R_1 = R_4 = 200\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 100\ \Omega$. Berechnen Sie die Stromstärke für den Fall, daß der Schalter 1. geöffnet und 2. geschlossen ist.

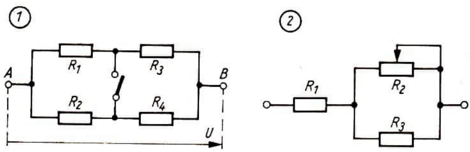


Bild 37

7.13 In der Schaltung nach Bild 37.2 kann der veränderliche Widerstand R_2 von 0 bis 30 Ω stufenlos eingestellt werden. Berechnen Sie, in welchen Grenzen der Ersatzwiderstand liegt, wenn die beiden anderen Widerstände die Werte $R_1 = 10\ \Omega$ und $R_3 = 20\ \Omega$ haben.

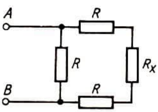


Bild 38

7.14 Bemessen Sie den Widerstand R_x in der Schaltung nach Bild 38 so, daß der Ersatzwiderstand 9 Ω beträgt. Die drei gleichen Widerstände betragen jeweils 10 Ω.

■ **7.15** Eine Weihnachtsbaumbeleuchtung für 220 V hat 16 Kerzen. Während des Betriebes fallen zwei Kerzen aus. Diese werden durch einen dicken Kupferdraht überbrückt, so daß nur noch 14 Kerzen leuchten. Um wieviel Prozent wird dann die einzelne Kerze überlastet?

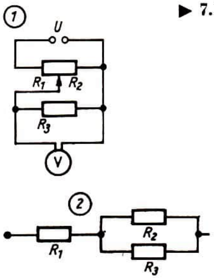


Bild 39

▶ **7.16** An einem Widerstand von 120 Ω, an dessen Enden eine Spannung von 200 V liegt, soll eine kleinere Spannung abgegriffen werden. Ohne Belastung wird eine Spannung von 100 V eingestellt. Dann wird ein Widerstand von 16 Ω angeschlossen. Berechnen Sie die Teilspannung an diesem Widerstand.

Gegeben: $U = 200\ \mathrm{V}$; $R = 120\ \Omega$ *Gesucht:* U_3

$U_{1L} = 100\ \mathrm{V}$; $R_3 = 16\ \Omega$

Schaltbild: Bild 39.1

Wir berechnen zunächst für den Leerlauf (Index L) den Teilwiderstand R_1:

Aus

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_{1L}}{U} \quad \text{folgt} \quad R_1 = \frac{U_{1L}}{U}(R_1 + R_2) = \frac{U_{1L}}{U} R = 60\ \Omega$$

Bei Belastung ist dem Widerstand R_1 der Widerstand R_3 parallelgeschaltet. Dabei ändert sich die Spannungsverteilung, und R_1 und R_2 sind nicht mehr von Strom gleicher Stromstärke durchflossen. Es gelten (Bild 39.2):

$$U_3 = IR_{13} \tag{1}$$

$$I = \frac{U}{R_G} = \frac{U}{R_{13} + R_2} \tag{2}$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{3}$$

(2) und (3) in (1) ergibt

$$U_3 = \frac{U}{\dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2} \; \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \underline{\underline{\frac{U}{1 + \dfrac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_3}}}}$$

$$U_3 = \frac{200\ \mathrm{V}}{1 + \dfrac{60 \cdot 76\ \Omega^2}{60 \cdot 16\ \Omega^2}} = \underline{\underline{34{,}8\ \mathrm{V}}}$$

■ **7.17** In einem Projektionsapparat, der mit 220 V betrieben wird, sind 2 Projektionslampen von je 500 W und 110 V Spannung in Reihe geschaltet. Infolge Ausfalls beider Lampen kann nur eine mit den genannten Betriebsdaten ersetzt werden, als zweite steht eine von 500 W und 80 V zur Verfügung. Was ist zu tun, damit beide Lampen entsprechend ihren Betriebsdaten betrieben werden können?

7.18 Fünf bekannte Widerstände werden auf die drei im Bild 40.1 dargestellten Arten zusammengeschaltet. Berechnen Sie die Ersatzwiderstände dieser Schaltungen.

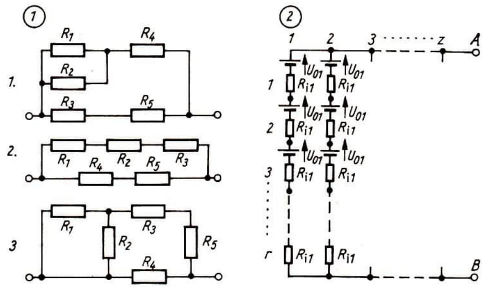


Bild 40

7.19 Ein Elektronikbastler hat 4 Widerstandsschaltelemente zur Verfügung: 2 Stück zu je 300 Ω und 2 Stück zu je 1,2 kΩ. Berechnen Sie, wieviel verschiedene Widerstände er mit diesen 4 Schaltelementen (oder einem Teil davon) realisieren kann.

▶ **7.20** Die Batterie einer Notstromversorgungsanlage besteht aus 300 Elementen, von denen jeweils 60 in Reihe und 5 solche Zweige parallelgeschaltet sind. Jedes Element hat die Urspannung 2,02 V und den Innenwiderstand 50 mΩ. Berechnen Sie 1. die Leerlaufspannung und die Kurzschlußstromstärke der Batterie sowie 2. die Leistung, die die Batterie abgibt, wenn man sie mit 10 % der Kurzschlußstromstärke belastet.

Gegeben: $U_{01} = 2{,}02$ V; $R_{i1} = 50$ mΩ; $r = 60$; $z = 5$; $p = 10\,\%$

Gesucht: 1. U_0, I_K; 2. P

1. Eine Reihe (Bild 40.2) hat die Ersatzurspannung $U_{0r} = rU_{01}$ und den Ersatzwiderstand $R_{ir} = rR_{i1}$.

$$U_0 = \underline{\underline{rU_{01}}}; \qquad U_0 = \underline{\underline{121{,}2\ \text{V}}}$$

Wir schalten die 5 Ersatzquellen parallel: $R_i = \dfrac{r}{z} R_{i1}$

$$I_K = \frac{U_0}{R_i} = \underline{\underline{z\frac{U_{01}}{R_{i1}}}}; \qquad I_K = \underline{\underline{202\ \text{A}}}$$

2. $$P = U_K p I_K = \underline{\underline{(U_0 - pI_K R_i)\,pI_K}}; \qquad P = \underline{\underline{2{,}2\ \text{kW}}}$$

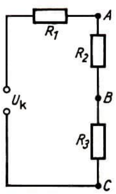


Bild 41

7.21 Berechnen Sie in der Schaltung nach Bild 41 die Spannung zwischen den Punkten 1. A und B, 2. A und C, 3. B und C. Geben Sie an, welchen Innenwiderstand diese drei als Spannungsquellen benutzbaren Anschlußmöglichkeiten haben.

7.22 Zwei Akkumulatorenbatterien sind parallelgeschaltet. Da die zweite Batterie schon weit entladen ist, beträgt ihre Urspannung

7,8 V bei einem inneren Widerstand von 30 mΩ. Für die erste Batterie sind diese Kennwerte 8,0 V und 20 mΩ. Der Verbraucher entnimmt einen Strom von 50 A. Berechnen Sie 1. die Stärken der Ströme, die den Einzelbatterien entnommen werden, und 2. die Klemmenspannung zwischen den Knotenpunkten.

7.23 Drei Spannungsquellen sind in der im Bild 42 dargestellten Weise zusammengeschaltet. Die Urspannungen betragen

$U_{01} = U_{02} = {}^1/_2 U_{03} = 105$ V und die Innenwiderstände

$R_{i1} = R_{i2} = {}^1/_2 R_{i3} = 2{,}0\ \Omega$. Die äußeren Widerstände haben die Werte

$R_4 = R_6 = 10\ \Omega$ und $R_5 = 20\ \Omega$. Berechnen Sie die Potentiale an den Klemmen D und E, wenn 1. Klemme A, 2. Klemme B und 3. Klemme C geerdet wird.

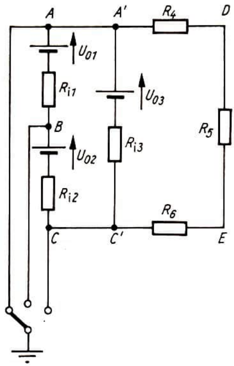


Bild 42

■ **7.24** An einer elektronischen Spannungsquelle mit der Urspannung 400 V und dem Innenwiderstand 10 kΩ soll die Spannung gemessen werden. Bemessen Sie den Innenwiderstand des Spannungsmessers so, daß der Spannungsverlust durch den Meßstrom kleiner als 1 % bleibt.

7.25 Ein Strommesser mit einem Innenwiderstand von 200 Ω und Vollausschlag bei 500 μA soll als Vielfachinstrument für folgende Meßbereiche verwendet werden: 2,5 mA, 5,0 A; 2,5 V und 250 V. 1. Entwerfen Sie eine einfache Schaltung des Vielfachmeßinstruments unter Verwendung eines Meßbereichsschalters mit 4 Schaltstellungen. Berechnen Sie 2. den Spannungsabfall am Strommesser und 3. die erforderlichen Shunts und Vorwiderstände.

7.26 Für einen Polarografen (Gerät zur elektrischen Messung von Ionenkonzentrationen) soll ein Galvanometer gleichzeitig mit einem Vor- und einem Nebenwiderstand versehen werden. Der Vorwiderstand beträgt 1,0 kΩ, der Galvanometerwiderstand 2,0 kΩ und der Nebenwiderstand 5,0 kΩ. Berechnen Sie, wieviel Prozent des Gesamtstromes das Galvanometer anzeigt und welche Spannung insgesamt anliegen muß, wenn durch das Galvanometer selbst ein Strom von $5{,}0 \cdot 10^{-7}$ A fließen soll.

2.3.8. Beispiele und Übungen zum elektromagnetischen Feld

8.1 Zeichnen Sie Feldlinien und Potentiallinien einer Punktladung, die weit von der Erde entfernt ist.

▶ 8.2 Zwei kugelförmige Gaswolken, die sich in 1000 m Abstand voneinander befinden, bestehen aus jeweils einem Mol einfach positiver bzw. negativer Ionen. Berechnen Sie die Kraft, mit der sie einander anziehen.

Gegeben: $Q = Q'$; $r = 1000$ m; $n = 1$ mol *Gesucht:* F

Zwischen beiden Wolken wirkt die Coulomb-Kraft (8.1)

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \underline{\underline{\frac{n^2 N_A^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}} \quad (\text{mit } Q = Ne = nN_A e) \ (\rightarrow \text{F B 6.})$$

$$F = \frac{1\,\text{mol}^2 (6{,}02 \cdot 10^{23})^2 \cdot (1{,}60 \cdot 10^{-19})^2 (\text{A s})^2\,\text{Vm}}{\text{mol}^2 \cdot 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{A s} \cdot 10^6\,\text{m}^2}$$

$$= \frac{6{,}02^2 \cdot 1{,}6^2}{4\pi \cdot 8{,}85} \cdot 10^{46-38+12-6} \frac{\text{A s V}}{\text{m}} = \underline{\underline{8{,}3 \cdot 10^{13}\,\text{N}}}$$

Die Kraft ist selbst in dem gegebenen relativ großen Abstand unvorstellbar groß. Wir finden bestätigt, daß die elektrostatische Kraft eine um Größenordnungen stärkere Wechselwirkung ist als die Gravitation.

■ 8.3 Berechnen Sie 1. die elektrische Feldstärke, die eine dicht konzentrierte Protonenwolke der Masse 2 kg im Abstand von 100 km hervorruft, und 2. den Potentialunterschied, der sich bei Vergrößerung des Abstandes auf 500 km ergibt.

8.4 Zwei große Platten stehen im Abstand von 0,5 m parallel. Zwischen ihnen wird die elektrische Feldstärke 100 V cm⁻¹ gemessen. 1. Berechnen Sie die an den Platten liegende Spannung. 2. Geben Sie an, was mit einer sehr kleinen Probeladung geschieht, die frei beweglich in der Mitte zwischen beiden Platten schwebt. 3. Stellen Sie fest, wie sich das Verhalten der Probeladung ändert, wenn sie an einem (masselosen) Faden im Feld aufgehängt wird.

8.5 Ein sehr langer Draht vom Durchmesser 2 mm trägt je Meter Drahtlänge die Ladung 90 nC. Berechnen Sie die Feldstärke auf der Oberfläche des Drahtes.

8.6 Kunstfasern, die beim Spinnen durch Reibung mit gleichem Vorzeichen aufgeladen werden, stoßen einander ab und lassen sich schwer zu Garn verarbeiten. Schlagen Sie eine Maßnahme vor, durch die die auf den Fäden befindlichen Ladungen kontinuierlich abgeführt werden können.

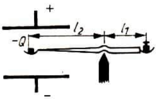


Bild 43

■ 8.7 Mit einer Vorrichtung nach Bild 43 soll die Ladung Q bestimmt werden. Die Ladung ist auf einem kleinen Metallhohlkörper konzentriert, der auf einer nichtleitenden Waagschale liegt. Liegt an den Platten die Spannung U, stellt das Wägestück m auf der äußeren Waagschale das Gleichgewicht her. Bei ausgeschaltetem Feld wird für die Erhaltung des Gleichgewichtes der Waage die Masse $m + \Delta m$ benötigt. Berechnen Sie die Ladung.

▶ 8.8 Untersuchen Sie anhand der Gleichungen, wie sich die Größen Kapazität, Spannung und Ladung verändern, wenn der Plattenabstand eines Plattenkondensators 1. bei angeschlossener Spannungsquelle und 2. bei abgetrennter Spannungsquelle auf das Doppelte des Anfangswertes vergrößert wird.

Gegeben: A; d_0; U_0

$d_1 = d_2 = 2d_0$

Gesucht: 1. $\frac{C_1}{C_0}$; $\frac{U_1}{U_0}$; $\frac{Q_1}{Q_0}$

2. $\frac{C_2}{C_0}$; $\frac{U_2}{U_0}$; $\frac{Q_2}{Q_0}$

Es gelten die Gleichungen (8.9) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ und (8.8) $Q = CU$.

1. $\frac{C_1}{C_0} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \, \frac{d_0}{\varepsilon_0 A} = \frac{d_0}{d_1} = \frac{d_0}{2d_0} = \frac{1}{2}$; $\qquad \underline{\underline{C_1 = \frac{1}{2} C_0}}$

Die Kapazität hat sich auf die Hälfte verringert.
$U_1 = \underline{\underline{U_0}}$ laut Aufgabenstellung

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{C_1 U_1}{C_0 U_0} = \frac{C_1}{C_0} = \frac{C_0}{2C_0} = \frac{1}{2}; \qquad \underline{\underline{Q_1 = \frac{1}{2} Q_0}}$$

Die Ladung hat sich auf die Hälfte verringert (die eine Hälfte ist in die Spannungsquelle zurückgeflossen).

2. $\underline{\underline{C_2 = \frac{1}{2} C_0}}$ wie bei 1.

$Q_2 = \underline{\underline{Q_0}}$ laut Aufgabenstellung

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{Q_2 C_0}{C_2 Q_0} = \frac{C_0}{C_2} = \frac{C_0 \cdot 2}{C_0} = 2; \qquad \underline{\underline{U_2 = 2U_0}}$$

Die Spannung ist auf das Doppelte angewachsen.

8.9 Berechnen Sie die Kapazität eines Plattenkondensators, der Platten mit einer Fläche von $150\ \mathrm{cm}^2$ im Abstand von 1,0 mm hat. Berechnen Sie weiterhin die Ladung, die dieser Kondensator bei einer Spannung von 1000 V speichert.

■ 8.10 Berechnen Sie die Kraft, mit der die Platten eines geladenen Plattenkondensators der Kapazität C und mit dem Plattenabstand d bei der Spannung U einander anziehen.

8.11 Drei Kondensatoren von je 1,0 µF werden einmal in Reihe, zum anderen parallelgeschaltet. Berechnen Sie 1. die Ersatzkapazitäten der beiden Schaltungen, 2. die Spannungen und 3. die Ladungen an den einzelnen Kondensatoren, wenn beide Systeme mit je 600 V aufgeladen werden.

■ 8.12 Die Kapazitäten dreier hintereinandergeschalteter Kondensatoren verhalten sich wie 1:3:5. Das System wird aufgeladen. Berechnen Sie, in welchem Verhältnis 1. die Spannungen, 2. die Ladungen und 3. die Energieinhalte der drei Kondensatoren stehen.

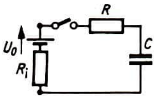


Bild 44

▶ 8.13 In dem im Bild 44 dargestellten System wird bei entladenem Kondensator zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ der Schalter geschlossen. Es sind: Außenwiderstand 4,0 MΩ, Innenwiderstand 5,0 Ω, Anfangsspannung 120 V und Kapazität 2,0 µF. Berechnen Sie 1. die Spannung, 2. die Stromstärke am Kondensator jeweils in Abhängigkeit von der Zeit und 3. die Zeitkonstante.

Gegeben: $R_a = 4{,}0\ \mathrm{M\Omega}$; $R_i = 5{,}0\ \Omega$; $U_0 = 120\ \mathrm{V}$; $C = 2{,}0\ \mu\mathrm{F}$

Gesucht: 1. $u = U(t)$ 2. $i = I(t)$; 3. τ

Beim Schließen des Schalters beginnt das Laden des Kondensators. Den Vorgang beschreiben wir analog zu (8.11) und (8.12). Dabei ist zu beachten, daß die Spannung des Kondensators von Null bis zum Maximalwert U_0 wächst, die Stromstärke dagegen vom Maximalwert U_0/R nach Null abnimmt. Der Verlauf der Zeitfunktion wird durch die gleichen Größen bestimmt wie beim Entladevorgang:

$$1.\ u_C = \underline{\underline{U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}} \qquad \text{mit} \quad R = R_a + R_i \approx R_a$$

$$2.\ i = \underline{\underline{\frac{U_0}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

Einsetzen von $t = 0$ und $t \gg RC$ in beide Gleichungen bestätigt ihre Richtigkeit.

$$3.\ \tau = \underline{\underline{RC}} \qquad \tau = 4 \cdot 10^6\ \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = 8\,\frac{\mathrm{V\,As}}{\mathrm{A\,V}} = \underline{\underline{8\ \mathrm{s}}}$$

■ 8.14 Für eine Elektronenblitzleuchte steht eine 6-V-Batterie zur Verfügung. Die Blitzlampe soll in einem 100 μs dauernden Blitz eine Leistung von 200 W abgeben. Berechnen Sie die Kapazität, die der als Zwischenspeicher benutzte Kondensator mindestens haben muß.

8.15 Einem auf 100 V aufgeladenen Kondensator von 100 μF wird nach Abtrennen der Spannungsquelle ein zweiter ungeladener Kondensator der gleichen Kapazität parallelgeschaltet. Berechnen Sie 1. die ursprünglich im Kondensator gespeicherte Energie, 2. die Spannung an den parallelgeschalteten Kondensatoren und 3. die in den parallelgeschalteten Kondensatoren gespeicherte Energie. 4. Begründen Sie die auftretende Energiedifferenz.

8.16 Ein Drehkondensator ist aus 7 parallelen halbkreisförmigen Metallscheiben vom Radius 5 cm aufgebaut, die jeweils den lichten Abstand 0,7 mm haben und zwischen denen sich Luft befindet. Die 1., 3., 5. und 7. Scheibe ist mit einem Pol einer Spannungsquelle verbunden, die übrigen mit dem anderen Pol. Die Kapazität wird verändert, indem man die 2., 4. und 6. Scheibe um die gemeinsame, an einem Endpunkt befindliche Achse dreht. Skizzieren Sie den Aufbau und berechnen Sie die größtmögliche Kapazität.

8.17 Um Ladungen mit einem Elektrometer zu messen, das in Volt geeicht ist, wird es zuerst auf 3,5 V geladen. Schaltet man eine bekannte Kapazität von 3,5 pF parallel, so erhält man an den gemeinsamen Klemmen 1,6 V. 1. Berechnen Sie die Elektrometerkapazität. 2. Die zu messende unbekannte Ladung bringt das Elektrometer allein auf 5,3 V. Berechnen Sie diese Ladung.

▶ 8.18 Ein Elektron mit der Geschwindigkeit $6{,}5 \cdot 10^6$ m s^{-1} soll durch ein elektrisches Gegenfeld vollständig abgebremst werden. Berechnen Sie die Potentialdifferenz, die das Teilchen zu diesem Zweck durchlaufen muß.

Gegeben: $v_A = 6{,}5 \cdot 10^6\ \text{m s}^{-1}$; $v_E = 0$; $Q = e$

Gesucht: $\Delta\varphi = U$

Das elektrische Feld leistet (negative) Beschleunigungsarbeit $W = \int_A^E eE\,ds = eU$. Da das Elektron vollständig gebremst werden soll, ist diese gleich der anfangs vorhandenen kinetischen Energie:

$$eU = \frac{1}{2} m_e v_A^2$$

Daraus folgt $\underline{\underline{U = \dfrac{m_e}{2e} v_A^2}}$

$$U = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 6{,}5^2 \cdot 10^{12}\ \text{m}^2}{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{A s}\quad \text{s}^2} = \underline{\underline{120\ \text{V}}}$$

8.19 Staubteilchen sind zum Teil ionisiert. Diese Tatsache wird für die Entstaubung der Luft genutzt. Die staubhaltige Luft strömt zwischen zwei entgegengesetzt geladenen Platten hindurch. Geladene Teilchen werden von der entgegengesetzt geladenen Platte angezogen und bleiben dort haften. Ungeladene Teilchen fliegen allerdings ungehindert weiter. Weisen Sie den Nachteil dieses Verfahrens nach und schlagen Sie ein wirksameres vor.

▶ 8.20 Ein Plattenkondensator (Plattenabstand d) wird aufgeladen (Spannung 1000 V). Danach wird er mit einem Dielektrikum (Dicke d, Dielektrizitätszahl 4) 1. bis zur Hälfte und 2. vollständig gefüllt. Berechnen Sie Spannung (allgemeines und spezielles Ergebnis) sowie allgemein elektrische Feldstärke und elektrische Verschiebung.

Gegeben: $U_0 = 1000\ \mathrm{V}$; $\varepsilon_r = 4$; d *Gesucht:* U_1; E_1; D_1
U_2; E_2; D_2

1. Der halb gefüllte Kondensator entspricht der Parallelschaltung eines gefüllten (Index m) und eines leeren (Index l) Kondensators mit jeweils der halben Plattenfläche:

$$C_1 = C_l + C_m = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{2d} = \frac{1}{2} C_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0$$

Die gespeicherte Ladung bleibt konstant: $Q = U_0 C_0$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{U_0 C_0}{\frac{1}{2} C_0 (1 + \varepsilon_r)} = \underline{\underline{\frac{2U_0}{1 + \varepsilon_r}}}; \quad U_1 = \frac{2000\ \mathrm{V}}{1 + 4} = \underline{\underline{400\ \mathrm{V}}}$$

Die elektrische Feldstärke ist nach (8.5″)

$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{2U_0}{d(1 + \varepsilon_r)} = \underline{\underline{\frac{2E_0}{1 + \varepsilon_r}}}$$

und in beiden Teilen gleich.

$$\underline{\underline{E_1 = \frac{2}{5} E_0}}$$

Die elektrische Verschiebung ist nach (8.7) bzw. (8.7′) im leeren und im gefüllten Teil des Kondensators unterschiedlich:

$$D_{l1} = \varepsilon_0 E_1 = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{1 + \varepsilon_r} = \underline{\underline{\frac{2D_0}{1 + \varepsilon_r}}} \qquad \underline{\underline{D_{l1} = \frac{2}{5} D_0}}$$

$$D_{m1} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_1 = \underline{\underline{\frac{2\varepsilon_r D_0}{1 + \varepsilon_r}}} \qquad \underline{\underline{D_{m1} = \frac{8}{5} D_0}}$$

2. Für den gefüllten Kondensator ist nach (8.9′) $C_2 = \varepsilon_r C_0$.

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{\varepsilon_r C_0} = \frac{C_0 U_0}{\varepsilon_r C_0} = \underline{\underline{\frac{U_0}{\varepsilon_r}}}; \qquad U_2 = \frac{1000\ \text{V}}{4} = \underline{\underline{250\ \text{V}}}$$

Feldstärke und Verschiebung werden berechnet wie bei 1.

$$E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{U_0}{\varepsilon_r d} = \underline{\underline{\frac{E_0}{\varepsilon_r}}} \qquad\qquad E_2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} E_0}}$$

$$D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E_0}{\varepsilon_r} = \underline{\underline{D_0}}$$

8.21 Ein Kondensator, dessen Platten Flächen von 5 cm² und einen Abstand von 1 mm haben, ist mit Glimmer ausgefüllt. Berechnen Sie 1. die Kapazität, 2. die Ladung, 3. die Feldstärke und 4. die Energie für eine Spannung von 500 V.

■ **8.22** Der Kondensator der Übung 8.21 wird geladen und anschließend von der Spannungsquelle getrennt. Danach wird die Glimmerschicht entfernt. Berechnen Sie zunächst allgemein 1. die Ladung, 2. die Kapazität, 3. die Feldstärke und 4. die Energie des Kondensators. Berechnen Sie anschließend jeweils die speziellen Ergebnisse.

▶ **8.23** Zur Messung der Horizontalkomponente der erdmagnetischen Feldstärke wird eine Spule mit 3000 Windungen und 40 cm Länge benutzt. Die Spulenlängsachse bringt man in Richtung der Horizontalkomponente. Bei einem Spulenstrom von 26 μA wird die Horizontalkomponente des Erdfeldes aufgehoben. Berechnen Sie den Betrag der Horizontalkomponente.

Gegeben: $N = 3000$; $l = 40$ cm; $I = 26\ \mu$A *Gesucht:* H_h

Mit Hilfe der Spule wird ein Magnetfeld erzeugt, das entgegengesetzt gleich der Horizontalkomponente des Erdfeldes ist. Deshalb braucht nur das Magnetfeld der Spule nach (8.17) berechnet zu werden.

$$H_h = H = \underline{\underline{\frac{N}{l} I}}$$

$$H_h = \frac{3000}{40\ \text{cm}} \cdot 26\ \mu\text{A} = \frac{300}{4} \cdot 26 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{\underline{0{,}195\ \text{A m}^{-1}}}$$

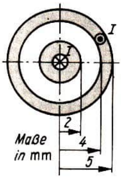


Bild 45

8.24 Berechnen Sie die Feldstärkefunktion $H(r)$ (allgemein und als zugeschnittene Größengleichung) für ein Kabel aus einem Hohlleiter und einem in der Mitte angeordneten Draht. Die Maße sind dem Bild 45 zu entnehmen. Die Stromstärke beträgt 10 A. Stellen Sie das Ergebnis in einem Diagramm dar.

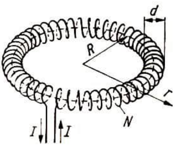


Bild 46

■ **8.25** Eine Ringspule (Bild 46) hat 400 Windungen, den Radius 8,0 cm und den Wicklungsdurchmesser 2,0 cm. Sie wird von einem Strom der Stärke 3,0 A durchflossen. Berechnen Sie das Magnetfeld der Spule (allgemein und als zugeschnittene Größengleichung) und stellen Sie die Feldstärke in Abhängigkeit vom Abstand von der Rotationsachse dar. Der Drahtquerschnitt ist vernachlässigbar klein.

▶ 8.26 Durch ein Magnetfeld der Flußdichte 500 mT führt ein Leiter, der von einem Strom der Stärke 10 A durchflossen wird. Er bildet mit dem Flußdichtevektor einen Winkel von 10°. Berechnen Sie die Kraft, die auf ein Leiterstück von 4,0 cm Länge wirkt.

Gegeben: $B = 500$ mT; $I = 10$ A; $\sphericalangle\, l, B = 10°$; $l = 4{,}0$ cm *Gesucht:* F

(8.22) $F = \underline{\underline{IlB \sin(l, B)}}$

$$F = 10\ \text{A} \cdot 4\ \text{cm} \cdot 500\ \text{mT} \cdot \sin 10°$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot \sin 10° \cdot 10^{1+2} \cdot \frac{\text{A m} \quad \text{V s}}{10^2 \cdot 10^3\ \text{m}^2} = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}}$$

8.27 Weisen Sie nach, daß die Gleichung $F = I_2 l B$ für die Kraft zwischen zwei Strömen I_1 und I_2 in geraden parallelen Leitern identisch ist mit der Gleichung $F = \dfrac{I_1 I_2 l \mu_0}{2\pi r}$.

■ 8.28 Zwei parallel im Abstand von 40 cm verlaufende Stromschienen, die Ströme der Stromstärken 20 kA bzw. 50 kA führen, werden durch Stützen gehalten, die jeweils 2,0 m der Schiene tragen. Das Material, aus dem die Stützen bestehen, hat eine zulässige Scherfestigkeit von 15 kp mm^{-2}. Berechnen Sie den Mindestquerschnitt der Stützen, der erforderlich ist, um ein Losreißen durch die magnetische Kraft zu verhindern.

8.29 Eine leere Spule mit 1000 Windungen hat die Länge 12 cm und den Querschnitt 10 cm². Berechnen Sie die Induktivität der Spule.

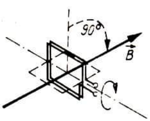


Bild 47

8.30 Eine flache Spule, deren Flächennormale zunächst parallel zum Flußdichtevektor eines Magnetfeldes steht, wird in dem im Bild 47 dargestellten Drehsinn um 90° gekippt. Geben Sie die Polung der Induktionsspannung an den Spulenklemmen an und überprüfen Sie, ob sich die Polung beim Wechsel des Drehsinns ändert.

8.31 Mit Hilfe eines Zweistrahloszillografen werden die im Bild 48 dargestellten Diagramme aufgezeichnet. Die obere Kurve gibt den Strom- und die untere den Spannungsverlauf an einer Spule wieder. Die Maßstäbe des quadratischen Gitternetzes sind bekannt:

Zeit:	1 cm ≙ 0,1 ms (Horizontalablenkung)
Stromstärke:	1 cm ≙ 20 mA
Spannung:	1 cm ≙ 4 V

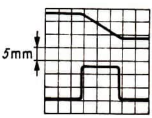


Bild 48

Berechnen Sie die Induktivität der Spule. Die gekrümmten Kurventeile sollen durch gerade Linien angenähert werden.

▶ 8.32 Berechnen Sie die magnetische Feldenergie, die in einer Spule mit 1000 Windungen bei einer Stromstärke von 2,0 A gespeichert ist. Die Spule ist 8,0 cm lang und hat den Durchmesser 3,5 cm.

Gegeben: $N = 1000$; $I = 2{,}0$ A; $l = 8{,}0$ cm; $d = 3{,}5$ cm *Gesucht:* W_{magn}

Aus (8.28) folgt mit (8.27)

$$W_{\text{magn}} = \frac{1}{2} L I^2 = \underline{\underline{\frac{\mu_0 N^2 \pi d^2 I^2}{8 l}}}$$

$$W_{\text{magn}} = \frac{4\pi\,\text{H} \cdot 10^6 \pi \cdot 3{,}5^2\,\text{cm}^2 \cdot 4\,\text{A}^2}{10^7\,\text{m} \cdot 8 \cdot 8\,\text{cm}}$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 3{,}5^2 \cdot 4 \cdot 10^{-7+6}}{8 \cdot 8} \frac{\text{V s m A}^2}{\text{A m} \cdot 10^2} = \underline{\underline{30\,\text{mJ}}}$$

■ 8.33 Durch eine Spule der Induktivität L fließt ein Strom mit der Stromstärke $I = I_0 e^{-at}$. Berechnen Sie die induzierte Gegenspannung.

▶ 8.34 Überprüfen Sie, ob sich die Flußdichte in einer Spule, die statt in Luft in Äthanol ($\mu_r = 0{,}999993$) getaucht wird, meßbar ändert.

Gegeben: $\mu_r = 0{,}999993$ *Gesucht:* ΔB

Aus $\Delta B = B_2 - B_1$; $B_2 = \mu_0 \mu_r H$ und $B_1 = \mu_0 H$ folgt

$$\Delta B = \mu_0 H (\mu_r - 1) = \underline{\underline{B_1(\mu_r - 1)}}; \qquad B = \underline{\underline{-0{,}000007\,B_1}}$$

Der Unterschied tritt lediglich in der 6. Dezimale auf. Wir können ihn in den meisten Fällen als nicht meßbar vernachlässigen.

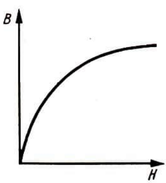


Bild 49

8.35 Im B,H-Diagramm (Bild 49) wird die Feldstärke über den Sättigungswert hinaus vergrößert. Machen Sie eine Aussage über die weitere Steigung der B,H-Kurve.

▶ 8.36 Beschreiben Sie, was mit einem Ion geschieht, das in einem Raum ruht, in dem plötzlich ein Magnetfeld eingeschaltet wird.

Es geschieht nichts. Nach (8.22′) gibt es nur dann eine Wechselwirkung zwischen Ladungsträger und Magnetfeld, wenn sie sich relativ zueinander bewegen.

8.37 α-Teilchen haben die spezifische Ladung $Q/m = 2e/m$. Ein α-Strahl wird im Vakuum quer in ein Magnetfeld der Flußdichte 1,6 T eingeschossen und durchläuft eine Kreisbahn vom Radius 42 cm. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der α-Teilchen.

■ 8.38 Für die Trennung einfach geladener Kaliumionen der Isotope K^{39} und K^{41} im Massenspektrometer ist es erforderlich, daß sich ihre Ablenkradien im Magnetfeld mindestens um 1% unterscheiden. Prüfen Sie, ob die Trennung unter folgenden Bedingungen möglich ist: Beide Ionenarten haben die gleiche Energie 2,5 keV, und die magnetische Flußdichte beträgt 0,8 T.

8.39 Zwei Gleichstrommotoren sind im Aufbau in allen Kennwerten gleich, außer in der Länge. Stator und Rotor des zweiten Motors sind doppelt so lang wie die des ersten. Geben Sie (mit Begründung) an, ob sich die Motoren in der Leistung unterscheiden.

2.3.9. Beispiele und Übungen zur Stromleitung in Flüssigkeiten

▶ 9.1 In einem Elektrolyten befinden sich einwertige Ionen vom Radius r. Formulieren Sie die resultierende Kraft, die auf die Ionen wirkt, wenn die Feldstärke E herrscht und die innere Reibung des Lösungsmittels berücksichtigt wird. Geben Sie eine Erklärung dafür, daß die Beweglichkeit der Ionen sich mit der Temperatur ändert.

Gegeben: r; E; $Z = 1$ *Gesucht:* F

Die Gesamtkraft setzt sich aus elektrischer und Reibungskraft zusammen: $F = F_{el} + F_R$. Mit (8.2), $Q' = Ze$ und (4.21) folgt $\underline{\underline{F = ZeE - 6\pi\eta rv}}$.

Die Ionen bewegen sich dann mit der beobachteten konstanten Geschwindigkeit v, wenn $F = 0$, d.h. $ZeE = 6\pi\eta rv$ ist. Daraus folgt $v/E \sim 1/\eta$. Nach (9.1) ist $v/E = u$ die Ionenbeweglichkeit. Weil mit steigender Temperatur die Viskosität η abnimmt, nimmt die Ionenbeweglichkeit mit der Temperatur zu.

Bemerkung: Außer durch die Zunahme der Ionenbeweglichkeit wächst die Leitfähigkeit des Elektrolyten mit der Temperatur auch durch Zunahme des Dissoziationsgrades, die eine Vermehrung der Ladungsträger bedeutet.

■ 9.2 Berechnen Sie, wie lange es dauert, 1,0 m^3 Wasserstoff von 20 °C und 760 Torr durch einen Strom der Stromstärke $5{,}0 \cdot 10^2$ A elektrolytisch abzuscheiden.

■ 9.3 Berechnen Sie die Energie, die theoretisch erforderlich ist, um 1,0 t Aluminium aus einer Aluminium-Kryolith-Schmelze bei 2,5 V abzuscheiden.

9.4 Im „Silberbad" (Elektrolysebad mit Silbersalzlösung) soll eine Schale mit 5,0 dm^2 Oberfläche eine Auflage von 25 g Silber erhalten. Es wird mit einer Stromdichte von 0,30 A dm^{-2} gearbeitet. Nur 98% des Stromes werden für die Silberabscheidung wirksam (katodischer Wirkungsgrad). Berechnen Sie 1. die Dauer der Behandlung und 2. die Dicke des Niederschlags.

■ 9.5 Eine Akkumulatorenbatterie hat eine Kapazität von 75 Ah. Berechnen Sie die Bleimenge, die bei vollständiger Entladung in $PbSO_4$ übergeführt wird.

Bemerkung: Die Kapazität eines Akkumulators entspricht der eines Kondensators nur insofern, als sie die insgesamt gespeicherte Ladung angibt. Der Bezug auf die Spannung fehlt.

■ 9.6 An einen Akkumulator mit der Klemmenspannung 6,0 V ist ein Widerstand der Leistung 30 W angeschlossen. Berechnen Sie die Bleimenge, die durch den Stromfluß in einer Stunde an sämtlichen Katoden in $PbSO_4$ übergeführt wird.

2.3.10. Beispiele und Übungen zu Schwingungen

▶ 10.1 Ein an einem Seil hängender Körper führt in 30 s 10 Perioden aus. Der Weg von einem Umkehrpunkt zum anderen beträgt 30 cm. Berechnen Sie die Elongation nach 1 s, 2 s, 5 s und 5 min. Alle Zeiten zählen vom ersten beobachteten Durchgang des Pendels durch seine Nullage.

Gegeben: $z = 10$; $t_z = 30$ s; $s = 30$ cm; $\varphi = 0$; $t_1 = 1$ s; $t_2 = 2$ s; $t_3 = 5$ s; $t_4 = 5$ min

Gesucht: y_i, $i = 1, 2, 3, 4$

(10.1) $y_i = y_m \sin \omega t_i$ (1)

$$y_m = \frac{s}{2} \qquad (2)$$

(2.16) und (2.13) $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (3)

$$T = \frac{t_z}{z} \qquad (4)$$

Aus (1) ··· (4) folgt

$$\underline{\underline{y_i = \frac{s}{2} \sin\left(\frac{2\pi z t_i}{t_z}\right)}}$$

Wir berechnen zuerst das Argument des Sinus:

$$\frac{2\pi \cdot 10 \cdot 1\,\text{s}}{30\,\text{s}} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$$

$$y_1 = 15\,\text{cm} \cdot \sin 120° = \underline{\underline{13\,\text{cm}}}$$

Entsprechend folgt $y_2 = y_3 = \underline{\underline{-13\,\text{cm}}}$

Für $t_4 = 5$ min $= 300$ s ergibt sich

$$\frac{2\pi \cdot 10 \cdot 300\,\text{s}}{30\,\text{s}} = 100 \cdot 2\pi$$

Dies bedeutet: es sind 100 Perioden abgelaufen, und es ist $y_4 = \underline{\underline{0}}$.

Bild 50

10.2 Ein Fadenpendel wird ausgelenkt und losgelassen. Gleichzeitig beginnt die Zeitmessung. Stellen Sie diesen Vorgang im y,t-Diagramm und als Gleichung dar.

■ **10.3** Ein Körper wird im Schwerefeld der Erde sinusförmig bewegt. Er beschreibt dabei eine geradlinige vertikale Bahn (Bild 50). Berechnen Sie die Frequenz, mit der er schwingen muß, damit an den Umkehrpunkten die resultierenden Beschleunigungen gerade Null bzw. gleich der zweifachen Fallbeschleunigung auf der Erde sind. Die Amplitude ist 50 mm.

■ **10.4** Ein Schüttelsieb bewegt sich vertikal und sinusförmig mit einer Amplitude von 3,0 cm. Auf dem Sieb liegen Körner der mittleren Masse m. Berechnen Sie die Frequenz, mit der das Sieb bewegt werden muß, damit sich die Körner vom Sieb ablösen können.

■ **10.5** Drei Wechselströme gleicher maximaler Stromstärke mit den Nullphasenwinkeln 0°, 120° und 240° (Drehstrom) fließen in einem Draht zusammen. Ermitteln Sie mit Hilfe der rotierenden Zeiger die resultierende maximale Stromstärke.

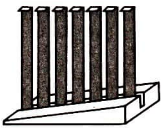


Bild 51

10.6 Ein Zungenfrequenzmesser für Wechselstrom besteht aus kleinen einseitig eingespannten Blattfedern verschiedener Länge (Bild 51), die durch eine Magnetspule (im Bild nicht gezeichnet) erregt werden. Erklären Sie die Wirkungsweise des Gerätes.

■ **10.7** Es ist eine Arbeit von 0,025 kpm erforderlich, um eine gegebene Feder um 100 mm zu dehnen. Geben Sie die Periodendauer der Schwingung an, die die Feder ausführt, wenn sie mit einem Körper der Masse 200 g belastet, um 50 mm ausgelenkt und dann losgelassen wird.

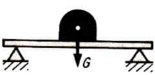


Bild 52

▶ **10.8** Eine Maschine belastet ihr Fundament. Nach Bild 52 (sehr vereinfachte Darstellung) ruft ihr Gewicht von 500 kp eine Durchbiegung des Fundaments um 20 mm hervor. Berechnen Sie die Frequenz, mit der das System Maschine/Fundament (≙ Körper/Feder) schwingen kann. Die Masse des Fundaments ist vernachlässigbar klein gegenüber der Masse der Maschine.

Gegeben: $G = 500$ kp; $s = 20$ mm *Gesucht:* f

Die Frequenz eines Feder-Masse-Schwingers ist

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

Die Federkonstante ergibt sich nach (3.16) zu

$$k = \frac{F}{s} \tag{2}$$

Die Kraft F ist hier das Gewicht

$$G = mg \tag{3}$$

Aus (1) ··· (3) folgt

$$\underline{\underline{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{s}}}} \qquad\qquad f = \underline{\underline{3{,}5\ \text{Hz}}}$$

■ 10.9 Zwei gleich lange, in Wasser schwimmende Holzbalken der Dichte 0,80 kg dm^{-3} haben 1. rechteckigen (60 cm · 40 cm) und 2. kreisförmigen Querschnitt (Durchmesser 40 cm). Die Balken werden so in Schwingungen in vertikaler Richtung versetzt, daß stets die Längsachse des Balkens parallel zur Wasseroberfläche liegt. Berechnen Sie die Periodendauer dieser Schwingungen unter Vernachlässigung der Reibung.

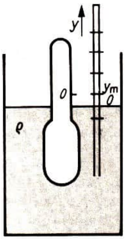


Bild 53

10.10 Ein Aräometer mit der Masse m und dem oberen Spindelquerschnitt A schwimmt, wie Bild 53 zeigt, in einer Flüssigkeit der Dichte ϱ. Es wird um eine kleine Strecke von $y = 0$ bis $y = y_m$ angehoben und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Danach schwingt es vertikal um die Ruhelage. Der Einfluß der Reibung und der Bewegung der Flüssigkeitsoberfläche kann vernachlässigt werden. Ermitteln Sie das Weg-Zeit-Gesetz und die Periodendauer der Bewegung. Begründen Sie qualitativ, wie sich das Weg-Zeit-Gesetz bei Berücksichtigung der Reibung ändert.

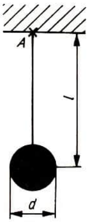


Bild 54

▶ 10.11 Untersuchen Sie an zwei Beispielen, ob die nach Bild 54 aufgehängte Kugel als Fadenpendel aufgefaßt werden darf, indem Sie das Verhältnis der Frequenzen ausrechnen. Es ist

1. $d_1 = l/2$ und 2. $d_2 = l/10$

Gegeben: $d_1 = \frac{1}{2}l;\quad d_2 = \frac{1}{10}l$ *Gesucht:* 1. und 2. $\frac{f_F}{f_P}$

Die Frequenzen der Pendel sind

$$f_P = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J_A}}, \qquad f_F = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Für unsere Untersuchung sind Masse und Länge konstant. Es ändert sich nur das Verhältnis $l:d$ und damit das Massenträgheitsmoment. Wir berechnen deshalb zunächst die beiden Trägheitsmomente und verwenden dazu den Steinerschen Satz.

$$1.\ J_{A1} = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = \frac{2}{5}m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + ml^2 = ml^2\left(\frac{1}{40} + 1\right)$$

$$= \frac{41}{40}ml^2$$

$$2.\ J_{A2} = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 = \frac{2}{5}m\left(\frac{l}{20}\right)^2 + ml^2 = ml^2\left(\frac{1}{1000} + 1\right)$$

$$= \frac{1001}{1000}ml^2 \approx ml^2$$

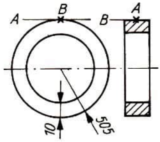


Bild 55

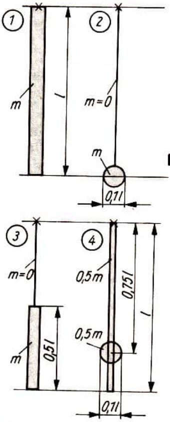


Bild 56

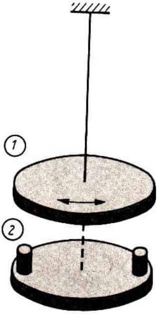


Bild 57

Im ersten Fall ist das Massenträgheitsmoment um 2,5 % größer als das des entsprechend aufgehängten Massenpunktes. Im zweiten Fall ist der Unterschied zum Fadenpendel verschwindend klein, das Pendel mit $d_2 = {}^1/_{10} l$ verhält sich praktisch wie ein mathematisches Pendel. Das Frequenzverhältnis ist

$$\frac{f_F}{f_p} = \sqrt{\frac{J_A g}{m g l l}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{J_A}{m l^2}}}}$$

$$1.\ \frac{f_F}{f_p} = \sqrt{\frac{41}{40}} = \underline{\underline{1{,}01}}; \qquad 2.\ \frac{f_F}{f_p} = \sqrt{\frac{1001}{1000}} = \underline{\underline{1{,}0005}}$$

Dies bedeutet: Für $d_1 = {}^1/_2 l$ weicht die Frequenz des als Fadenpendel berechneten Pendels um 1 %, für $d_2 = {}^1/_{10} l$ jedoch nur um 0,05 % von der des exakt als physisches Pendel berechneten ab.

■ **10.12** Ein Hohlzylinder von sehr geringer Wanddicke ist an einem Punkt des äußeren Umfangs aufgehängt. Die zwei möglichen Drehachsen sind aus Bild 55 zu entnehmen. Berechnen Sie die Periodendauer bei sinusförmigen Schwingungen für eine Zylinderlänge von 100 mm um 1. Achse A und 2. Achse B.

10.13 Berechnen Sie die Frequenzen der verschiedenen physischen Pendel nach Bild 56 für jeweils kleinen Ausschlag. Die Gesamtmasse ist 500 g, die Länge 100 cm. Weitere Maße entnehmen Sie dem Bild.

10.14 Ein physisches Pendel der Masse 8,5 kg ist um eine Achse A drehbar gelagert, die im Abstand 35 mm parallel zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Achse verläuft. Die Schwingungsfrequenz ist 0,65 Hz. Berechnen Sie 1. die Periodendauer, 2. das Massenträgheitsmoment bezüglich der Achse A und 3. das Massenträgheitsmoment bezüglich der zur Achse A parallelen Achse durch den Schwerpunkt.

▶ **10.15** Das Massenträgheitsmoment eines kleinen Schwungrades soll experimentell bestimmt werden. Zu diesem Zweck befestigen wir es nach Bild 57 an einem Stahldraht und lassen es Torsionsschwingungen ausführen. Wir messen die Zeit t_1 für 100 Perioden. Danach befestigen wir zwei Wägestücke (Masse m_2 je ${}^1/_5$ bis ${}^1/_{10}$ der Masse m_1 des Schwungrades), wie auf dem unteren Bildteil erkennbar.

Gegeben: t_1; t_2; $z = 100$ *Gesucht:* J

Nach (10.15) unter Beachtung von (2.13) ist

$$T_1 = \frac{t_1}{z} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k'}} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{t_2}{z} = 2\pi \sqrt{\frac{J + J'}{k'}}$$

Darin ist J das Massenträgheitsmoment des Schwungrades und J' das Massenträgheitsmoment der beiden im Abstand r befestigten Wägestückchen ($J' = 2mr^2$). Nun gilt

$$T_1 : T_2 = t_1 : t_2 = \sqrt{J : (J + J')}\,.$$

Daraus folgt

$$J = J' \frac{t_1^2}{t_2^2 - t_1^2} = \underline{\underline{2 m_2 r^2 \frac{t_1^2}{t_2^2 - t_1^2}}}$$

■ **10.16** Zur Bestimmung des Massenträgheitsmoments eines Zahnrades lassen wir zunächst einen zylindrischen Körper an einem Draht Torsionsschwingungen ausführen, dann das Zahnrad. Der zylindrische Körper hat das Massenträgheitsmoment 7,80 kg cm² und führt 20 Perioden in 1,945 min aus, das Zahnrad benötigt für 20 Perioden 0,930 min. Berechnen Sie 1. die Richtgröße k', die bei der Torsion des Drahtes auftritt, und 2. das Massenträgheitsmoment des Zahnrades.

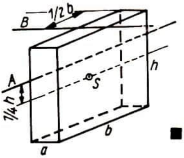


Bild 58

■ **10.17** Ein homogener Quader (a = 20 mm; b = 50 mm; h = 80 mm) ist 1. um eine Achse A, 2. um eine Achse B nach Bild 58 drehbar gelagert, und er führt jeweils sinusförmige Schwingungen aus. Berechnen Sie die beiden Frequenzen.

■ **10.18** Berechnen Sie die Induktivität einer Spule und die Kapazität eines Kondensators, die bei der Frequenz 2,0 kHz den gleichen Wechselstromwiderstand 20 Ω haben.

10.19 Berechnen Sie die Induktivität der Spule und die Kapazität des Kondensators, die jeweils bei Anschluß an eine Wechselspannung von 220 V/50 Hz von der gleichen Stromstärke durchflossen werden wie eine 60-W-Glühlampe.

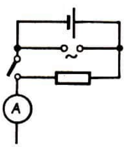


Bild 59

10.20 In der nebenstehend dargestellten Schaltung (Bild 59) fließt mit dem Schließen des Schalters durch den (sehr großen) Widerstand R sowohl Gleich- als auch Wechselstrom. Vervollständigen Sie die Schaltung so, daß Sie 1. den Gesamtstrom und 2. den Wechselstrom allein messen können.

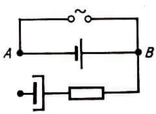


Bild 60

10.21 In der in Bild 60 dargestellten Schaltung sind an den Punkten A und B eine Gleich- und eine Wechselspannung einander überlagert. Ergänzen Sie die Schaltung so, daß an dem Elektrolytkondensator nur Gleichspannung liegt.

■ **10.22** An die Netzspannung 220 V/50 Hz sind in Reihe liegend eine Spule mit der Induktivität 0,50 H und dem ohmschen Widerstand 10 Ω sowie ein Verbraucher mit dem ohmschen Widerstand 100 Ω angeschlossen. Berechnen Sie 1. Stromstärke und 2. Spannungsabfall über der Spule.

10.23 Durch eine Spule fließt bei 10,0 V Gleichspannung ein Strom der Stromstärke 6,10 A, bei 10,0 V Wechselspannung beträgt die Stromstärke 1,99 A. Die Frequenz der Wechselspannung ist 50,0 Hz. Berechnen Sie 1. den ohmschen Widerstand, 2. den Scheinwiderstand und 3. die Induktivität der Spule.

10.24 Berechnen Sie 1. Scheinwiderstand und 2. Phasenverschiebung für eine Reihenschaltung von ohmschem Widerstand (500 Ω), Spule (Induktivität 2,50 H) und Kondensator (Kapazität 1,50 μF) für eine Wechselspannung 220 V/50,0 Hz.

10.25 Berechnen Sie die Frequenz, bei der in der Schaltung der Übung 10.24 Spannungsresonanz auftritt.

■ 10.26 Eine Spule mit einem ohmschen Widerstand von 100 Ω wird an eine Wechselspannung von 220 V und 50 Hz angeschlossen. Im Stromkreis liegt ein Elektrizitätszähler, der in 2 min 5 Umdrehungen macht (Zähleraufschrift 1 kWh = 1500 Umdrehungen). Berechnen Sie 1. die Leistung, die die Spule aufnimmt, 2. die Phasenverschiebung und 3. die Induktivität der Spule.

■ 10.27 Eine Glühlampe für 110 V und 60 W soll an 220 V angeschlossen werden, die Frequenz sei 50 Hz. Dies läßt sich durch Reihenschaltung von einem ohmschen Widerstand, einem Kondensator oder einer Spule, deren ohmscher Widerstand vernachlässigbar klein ist, verwirklichen. 1. Berechnen Sie die erforderlichen Schaltelemente R, C bzw. L. 2. Berechnen Sie für alle drei Fälle die Gesamtwirkleistung.

■ 10.28 Ein Gleichstrommotor und ein Wechselstrommotor nehmen bei Anschluß an 220 V eine Leistung von 1,65 kW auf. Für den Wechselstrommotor ist $\cos\varphi = 0{,}50$. Berechnen Sie für beide Motoren die Stromstärke.

10.29 Berechnen Sie Wirk-, Blind- und Scheinleistung für die Schaltelemente in Übungsaufgabe 10.22.

■ 10.30 Ein Einphasenwechselstrommotor nimmt an einem 220-V-Netz mit 50 Hz bei seiner Nennleistung 180 W einen Strom der Stromstärke 1,17 A auf. 1. Berechnen Sie Leistungsfaktor und Phasenwinkel des Motors. 2. Bestimmen Sie die Kapazität des Kondensators, der dem Motor parallelgeschaltet werden muß, damit die aufgenommene Blindleistung Null wird.

2.3.11. Beispiele und Übungen zu Wellen

11.1 Ein Ultraschallsender strahlt Schallwellen mit der Frequenz 800 kHz ab. Berechnen Sie die Wellenlänge dieser Schallwellen in Luft und in Wasser.

▶ 11.2 Berechnen Sie die Längenänderung eines Kupferstabes für den Fall, daß er in Achsenrichtung durch eine Masse von 40 kg belastet wird. Ein Schallsignal benötigt 0,78 ms, um den 3,0 m langen Stab von 20 mm² Querschnitt entlang der Achse zu durchlaufen.

Gegeben: $\Delta t = 0{,}78$ ms; $l = 3{,}0$ m *Gesucht:* Δl

$A = 20\ \text{mm}^2$; $m = 40$ kg

$\varrho = 8{,}92\ \text{g cm}^{-3}$

Die gesuchte Größe ist die elastische Dehnung. Sie wird aus dem Hookeschen Gesetz (3.14) berechnet:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{1}$$

Weiterhin gilt (3.12)

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{2}$$

und (11.25)

$$v = c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{3}$$

sowie nach (2.1″)

$$v = \frac{l}{\Delta t} \tag{4}$$

Aus (1) ⋯ (4) folgt

$$\Delta l = l\,\frac{F}{AE} = \frac{F\Delta t^2}{A\,l\varrho} = \underline{\underline{\frac{mg\Delta t^2}{A\,l\varrho}}}$$

$$\Delta l = \frac{40\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot 0{,}78^2 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^2\ \text{cm}^3}{20\ \text{mm}^2 \cdot 3\ \text{m} \cdot \text{s}^2 \cdot \qquad 8{,}92\ \text{g}} = \underline{\underline{0{,}45\ \text{mm}}}$$

11.3 Radaranlagen ermitteln den Abstand von Flugzeugen aus Laufzeitmessungen. Es werden kurze Hochfrequenzimpulse ausgestrahlt, die nach Reflexion am Flugzeug zurückkehren. Die Laufzeit eines Impulses beträgt 1 ms. Berechnen Sie für diesen Fall die Entfernung des Flugzeuges von der Radaranlage. Geben Sie an, mit welcher Genauigkeit die Zeitmessung erfolgen muß, wenn die Entfernung auf 15 m genau bestimmt werden soll.

11.4 Berechnen Sie den Brechungswinkel 1. für Schallwellen, 2. für Lichtwellen, die unter einem Winkel von 10° gegenüber dem Lot bei 20 °C vom Wasser aus auf die Grenzfläche Wasser/Luft treffen.

11.5 In der Übung 11.4 sei der Einfallswinkel des Lichtstrahls 60°. Welche Schlußfolgerungen ergeben sich daraus?

11.6 Nennen Sie die physikalischen Vorgänge aus dem Bereich der Optik, die sich mit Hilfe eines Glasprismas nachweisen lassen. Skizzieren Sie diese Vorgänge.

11.7 Erklären Sie folgende Erfahrungstatsache: Wenn man tagsüber aus einem hellen Raum durch das Fensterglas nach draußen blickt, sieht man die Umgebung. Nachts dagegen erblickt man in der Fensterscheibe das Spiegelbild des hellen Raumes.

11.8 Erklären Sie, weshalb ein Fettfleck auf weißem Papier im reflektierten Licht dunkler als seine Umgebung erscheint.

▶ **11.9** Ein Großlautsprecher gibt eine Schalleistung von etwa 10 W ab. Die Schallenergie soll sich kugelförmig ungestört nach allen Seiten ausbreiten. Von Verlusten wird abgesehen. Ein Hörer befindet sich 10 m vom Lautsprecher entfernt. Berechnen Sie 1. die Schallintensität am Ort des Hörers, 2. den von ihm wahrgenommenen Schallpegel, 3. die am Ort des Hörers in 1 l Luft enthaltene Schallenergie und 4. die Druckamplitude am Ohr des Hörers.

Gegeben: $\Phi = 10\ \mathrm{W}$; $r = 10\ \mathrm{m}$; $V = 1{,}0\ \mathrm{l}$
$c = 3{,}4 \cdot 10^2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$;
$\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$; $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\ m^{-2}}$

Gesucht: 1. I; 2. L; 3. W; 4. p_m

1. $I = \frac{\Phi}{A} = \underline{\underline{\frac{\Phi}{4\pi r^2}}}$; $\quad I = \frac{10\ \mathrm{W}}{4\pi\ 10^2\ \mathrm{m^2}} = \underline{\underline{8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W\ m^{-2}}}}$

2. $\underline{\underline{L = 10 \lg \frac{I}{I_0}}}$;

$$L = 10 \lg \frac{8{,}0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 10(9 + \lg 8) = 10 \cdot 9{,}9 = \underline{\underline{99\ \mathrm{dB}}}$$

3. $W = wV = \underline{\underline{\frac{I}{c}}}\ V$;

$$W = \frac{8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W\ m^{-2}} \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{3{,}4 \cdot 10^2\ \mathrm{m\ s^{-1}}} = \underline{\underline{2{,}4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Ws}}}$$

4. $p_m = \underline{\underline{\sqrt{2 I \varrho c}}}$

$$p_m = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W\ m^{-2}} \cdot 1{,}3\ \mathrm{kg\ m^{-3}} \cdot 3{,}4 \cdot 10^2\ \mathrm{m\ s^{-1}}} = \underline{\underline{2{,}7\ \mathrm{Pa}}}$$

11.10 Der absolute Schallpegel einer Schallquelle ist in 2,0 m Entfernung 60 dB. Berechnen Sie die Schallstärke in 2,0 m Entfernung von der Quelle sowie die Schallstärke und den absoluten Schallpegel in 4,0 m Abstand von der Quelle.

11.11 Das Geräusch eines Motorrades dringt mit einer Lautstärke von 90 phon an das Ohr. Berechnen Sie die Lautstärke, die 10 solche Motorräder in der gleichen Entfernung erzeugen.

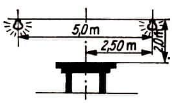


Bild 61

■ **11.12** Zwei Glühlampen von je 32 cd sind 5,0 m voneinander entfernt 2,0 m hoch über einer Tischfläche angebracht (Bild 61). Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke der Tischfläche in der Mitte zwischen den beiden Lampen unter Annahme richtungsunabhängiger Lichtstärkeverteilung.

▶ **11.13** Zum Lesen ist eine Beleuchtung von 50 lx nötig. Es steht eine 60-W-Glühlampe zur Verfügung, die einen Lichtstrom von $6 \cdot 10^2$ lm erzeugt. Berechnen Sie 1. die „Lichtausbeute" (Lichtstrom/elektrische Leistung), 2. ihre Lichtstärke und 3. die Höhe, in der die Lampe aufgehängt werden muß, damit auf dem senkrecht darunter liegenden Arbeitsplatz die vorgeschriebene Beleuchtungsstärke erzielt wird. Es soll richtungsunabhängige Lichtstärkeverteilung angenommen werden.

Gegeben: $P = 60\ \mathrm{W}$; $\Phi = 6 \cdot 10^2\ \mathrm{lm}$ *Gesucht:* 1. $\dfrac{\Phi}{P}$
$E = 50\ \mathrm{lx}$ 2. I; 3. h

1. $$\frac{\Phi}{P} = \frac{6 \cdot 10^2\ \mathrm{lm}}{60\ \mathrm{W}} = \underline{\underline{10\ \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{W}}}}$$

2. $$I = \frac{\Phi}{\Omega}; \qquad I = \frac{6 \cdot 10^2\ \mathrm{lm}}{4\pi\ \mathrm{sr}} = \underline{\underline{48\ \mathrm{cd}}}$$

3. Die senkrechte Anordnung gibt $\alpha = 0°$ und $\cos\alpha = 1$

$$E = \frac{I}{h^2} \quad \text{und damit} \quad h = \sqrt{\frac{I}{E}}; \quad h = \sqrt{\frac{48\ \mathrm{cd}}{50\ \mathrm{lx}}} = \underline{\underline{98\ \mathrm{cm}}}$$

Bemerkung: Der Arbeitsplatz ist heller als hier berechnet, da die Leuchte kein Kugelstrahler ist, wie hier vorausgesetzt wurde. In der Regel wird durch die Leuchte ein großer Teil des nach oben abgestrahlten Lichts nach unten reflektiert.

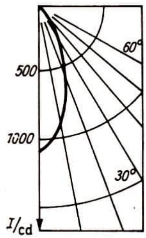


Bild 62

▶ **11.14** Eine HQL-Lampe 250 W mit einem Gesamtlichtstrom von 11500 lm in einem Reflektor mit einem Lichtstärkediagramm nach Bild 62 ist 10 m über dem Erdboden befestigt. Berechnen Sie die Beleuchtungsstärke auf dem Erdboden 1. senkrecht unterhalb der Lampe, 2. auf einer Kreislinie mit dem Radius 1,75 m und 3. auf einer Kreislinie mit dem Radius 3,50 m (Kreismittelpunkte jeweils senkrecht unter dem Aufhängepunkt).

Gegeben: $\Phi = 11500\ \mathrm{lm}$; $h = 10\ \mathrm{m}$ *Gesucht:* E_i
$R_1 = 0$; $R_2 = 1{,}75\ \mathrm{m}$ $i = 1, 2, 3$
$R_3 = 3{,}5\ \mathrm{m}$

Hinweis: Die Berechnung der Beleuchtungsstärken nach (11.37′) $E_{/\mathrm{lx}} = \dfrac{I_{/\mathrm{cd}}}{(r_{/\mathrm{m}})^2}$ setzt die Kenntnis der Lichtstärken des Strahlers in Richtung des Lichteinfalls auf dem Erdboden voraus. Diese können wir jedoch nicht direkt dem Diagramm entnehmen, da dieses wie allgemein üblich auf eine Gesamtstrahlung von 1000 lm bezogen ist. Aus diesen Überlegungen ergeben sich folgende Lösungsschritte:

1. Schritt: Berechnung der Lichteinfallswinkel für die verschiedenen Radien

2. Schritt: Entnahme der zu diesen Winkeln gehörenden Lichtstärken aus dem Diagramm

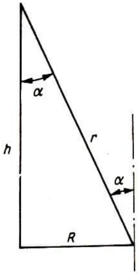


Bild 63

3. Schritt: Umrechnung dieser Lichtstärken auf den Lichtstrom der HQL-Lampe

4. Schritt: Berechnung der gesuchten Beleuchtungsstärken.

Weiterhin formen wir (11.37′) um. Nach Bild 63 folgt $h/r = \cos\alpha$. Damit ergibt sich

$$E_{/\text{lx}} = \frac{I_{/\text{cd}}}{(h_{/\text{m}})^2}\cos^3\alpha$$

1. Schritt: $R_1 = 0;\qquad \alpha_1 = 0$

$R_2 = 1{,}75\ \text{m};\qquad \tan\alpha_2 = \frac{R_2}{h} = 0{,}175;\quad \alpha_2 = 10°$

$R_3 = 3{,}5\ \text{m};\qquad \tan\alpha_3 = \frac{R_3}{h} = 0{,}35;\quad \alpha_3 = 19{,}2°$

2. Schritt: $\alpha_1 = 0;\qquad I'_1 = 1100\ \text{cd}$

$\alpha_2 = 10°;\qquad I'_2 = 900\ \text{cd}$

$\alpha_3 \approx 20°;\qquad I'_3 = 600\ \text{cd}$

3. Schritt: $I = \frac{11\,500\ \text{lm}}{1000\ \text{lm}} I' = 11{,}5\, I'$

$I_1 = 11{,}5 \cdot 1100\ \text{cd} = 12\,650\ \text{cd}$

$I_2 = 11{,}5 \cdot 900\ \text{cd} = 10\,350\ \text{cd}$

$I_3 = 11{,}5 \cdot 600\ \text{cd} = 6900\ \text{cd}$

4. Schritt: 1. $E_{/\text{lx}} = \frac{12\,650}{10{,}0^2};\quad E = \underline{\underline{127\ \text{lx}}}$

2. $E_{/\text{lx}} = \frac{10\,350}{10{,}0^2}\cos^3 10°;\quad E = \underline{\underline{98\ \text{lx}}}$

3. $E_{/\text{lx}} = \frac{6900}{10{,}0^2}\cos^3 19{,}2°;\quad E = \underline{\underline{58\ \text{lx}}}$

■ **11.15** Für Meßzwecke soll die Lichtstärke einer Niedervoltglühlampe durch Vergleich mit einer geeichten Glühlampe (Lichtstärke 250 cd) ermittelt werden. Dazu werden beide Lampen auf einer optischen Bank angeordnet (Bild 64). Zwischen den beiden Lampen befindet sich ein verschiebbarer weißer Schirm, der durch geeignete Spiegelanordnungen gleichzeitig von beiden Seiten betrachtet werden kann. Der Schirm wird so lange verschoben, bis die Beleuchtungsstärke auf beiden Seiten gleich ist. Dabei ergeben sich folgende Werte: Abstand der beiden Lampen 1,50 m, Abstand des Schirmes von der geeichten Lampe bei Gleichheit der Beleuchtungsstärken 118 cm. Berechnen Sie die Lichtstärke der zu eichenden Lampe.

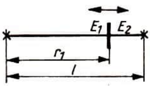


Bild 64

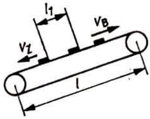


Bild 65

2.4. Hinweise zu den Lösungen, Antworten und Ergebnisse

1.2 $[X_1] = \mathrm{Nm}$; $[X_2] = \mathrm{A\,V^{-1}} = \mathrm{S}$; $[X_3] = \mathrm{A\,s} = \mathrm{C}$; $[X_4] = \mathrm{s^{-1}} = \mathrm{Hz}$
X_1 kann eine Arbeit sein, eine Energie oder ein Drehmoment, X_2 ein Leitwert, X_3 eine Ladung und X_4 eine Frequenz.

1.3 $[X_1] = 5{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{s}$; $[X_2] = 1{,}16$; $[X_3] = 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
$[X_4] = 7{,}36 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$

Für das weitere Rechnen werden die Zahlenfaktoren abgetrennt; dann verbleiben:

$[X_1] = \mathrm{s}$; $[X_2] = 1$; $[X_3] = \mathrm{m\,s^{-1}}$; $[X_4] = \mathrm{m}$

1.5 $F_{/\mathrm{kp}} = 97{,}3 \dfrac{P_{/\mathrm{W}}}{f_{/\mathrm{min^{-1}}}\, r_{/\mathrm{cm}}}$; $\quad I_{/\mathrm{m^3 h^{-1}}} = 860 \dfrac{P_{/\mathrm{kW}}}{\eta H_{/\mathrm{kcal\,kg^{-1}}}}$

2.2

1. $v = v_\mathrm{R}$	$v = 300\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
2. $v = v_\mathrm{R} + v_\mathrm{P}$	$v = 360\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
3. $v = v_\mathrm{R} - v_\mathrm{P}$	$v = 240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

2.3 Zur Orientierung diene die Skizze (Bild 65). Die Geschwindigkeit, mit der sich die Ziegelsteine nach oben bewegen, ist $v = v_\mathrm{B} - v_\mathrm{Z}$. Die Zahl der transportierten Ziegel erhalten wir nach Bild 65:

$n = \dfrac{s}{l_1} = \dfrac{v_\mathrm{B} - v_\mathrm{Z}}{l_1} t$. Daraus ergibt sich

$v_\mathrm{B} = \dfrac{n l_1}{t} + v_\mathrm{Z} \qquad v_\mathrm{B} = 0{,}88\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

2.4 Die Kurve (Bild 66) wird als Zykloide bezeichnet. Die Geschwindigkeit wechselt periodisch zwischen $v_{\min} = 0$ in den Punkten A und C und $v_{\max}$ in Punkt B.

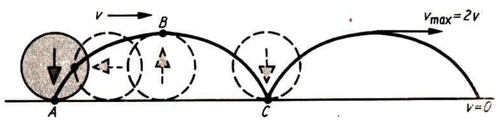


Bild 66

2.8 1. $v = \dfrac{s}{t_\mathrm{R}} \qquad v_\mathrm{D} = 76\,\mathrm{km\,h^{-1}}$; $\quad v_\mathrm{P} = 51\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

2. $v = \dfrac{s}{t_\mathrm{F}} \qquad v_\mathrm{D} = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$; $\quad v_\mathrm{P} = 64\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

2.9 $a_\mathrm{m} = \dfrac{v}{t} \qquad a_\mathrm{m} = 6{,}57 \cdot 10^5 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$

2.11 Bild 67

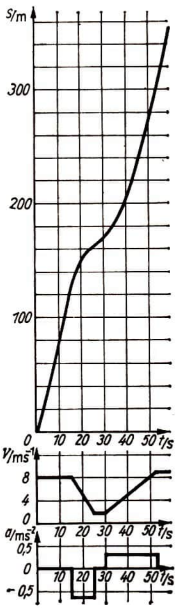


Bild 67

2.12 Bild 8 zeigt, daß der Körper in 10 s 25 m zurücklegt. Die Kurve ist eine Gerade, also ist

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = 2{,}5 \text{ m s}^{-1}$$

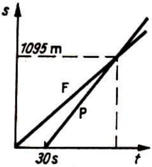


Bild 68

2.13 Die Bewegung beginnt nicht bei $s = 0$ und verläuft linear. Daraus folgt $s = v_0 t + s_0$. Die quantitative Auswertung ergibt $s_{/\text{m}} = 1{,}5 t_{/\text{s}} + 10$.

2.14 Im Zeitpunkt des Überholens haben beide Fahrzeuge den gleichen Weg zurückgelegt, die Fahrzeiten dagegen unterscheiden sich um den Betrag t_1.

$$s = v_R\left(\frac{s}{v_P} + t_1\right) = \frac{v_R t_1}{1 - \frac{v_R}{v_P}}; \qquad s = 1{,}9 \text{ km}; \qquad \text{Bild 68}$$

2.15 Im v,t-Diagramm ergibt sich der in der Zeit t zurückgelegte Weg als Fläche unter der Kurve. Das ist hier eine Dreiecksfläche mit der Grundlinie $t = 6$ s und der Höhe $v = 10 \text{ m s}^{-1}$. Daraus folgt

$$s = \frac{vt}{2} \qquad s = 30 \text{ m}$$

2.16 Kurve (*1*) beginnt parallel zur t-Achse, also mit der Steigung Null. Zur Zeit $t = 0$ ist die Geschwindigkeit von (*1*) Null, während die von (*2*) einen endlichen Wert besitzt. Zur Zeit $t = t_1$ bewegt sich (*1*) schon mit endlicher Geschwindigkeit, die aber kleiner ist als die von (*2*). Zur Zeit $t = t_2$ ist die Geschwindigkeit von (*2*) noch immer konstant, während die von (*1*) so weit zunahm, daß sie die andere übertrifft.

2.17 $v_R = 6{,}7 \text{ m s}^{-1} < v_S$

2.18 $$t = \frac{s}{v} \qquad t = 15{,}4 \text{ s}$$

2.19 $$t_1 = \frac{s}{v_1} \qquad t_1 = 2{,}1 \text{ h}$$

$$t_2 = \frac{s - s_2}{v_2} \qquad t_2 = 1{,}5 \text{ h}$$

Da der zweite PKW um 20 min = 0,33 h später startet als der erste, kommt er 1,8 h nach dem Start des ersten, also vor diesem, am Ziel an.

2.20 Bahn und Fußgänger mögen gleichzeitig an der Haltestelle mit der Bewegung beginnen. Beim Start findet also die erste Überholung statt.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{1 - \frac{v_F}{v_S}} \qquad \Delta t = 11 \text{ min}$$

2.21 1. $$v = \frac{s}{t} \qquad v = 80 \text{ km h}^{-1}$$

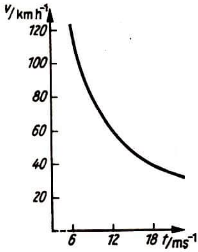


Bild 69

2. Die Funktion ist eine Hyperbel, ihr Verlauf ist punktweise zu berechnen. Dazu stellen wir eine zugeschnittene Größengleichung auf:

$$v_{/\mathrm{km\,h^{-1}}} = \frac{720}{t_{/\mathrm{s}}};$$ Bild 69

2.23 1. $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$ $\quad a = -1{,}9\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

2. $\Delta t = \dfrac{2s}{v_1 + v_2}$ $\quad \Delta t = 8{,}6\ \mathrm{s}$

2.24 1. $s = {}^1/_2 g t^2$ $\quad s = 80\ \mathrm{m}$

2. $v = gt$ $\quad v = 40\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

2.25 Die Bewegung besteht aus drei Phasen:

I gleichförmige Bewegung, es ist $s = v_0 t$

II gleichmäßig beschleunigte Bewegung, es ist $a = \dfrac{v_0}{\Delta t}$ $(a < 0)$

III gleichmäßig beschleunigte Bewegung, es ist $v_\mathrm{E} = a\Delta t$.

1. Bild 70

2. $t_\mathrm{ges} = \dfrac{1}{2}\dfrac{s_1}{s_2}t_2 + t_2 + t_3$ $\quad t_\mathrm{ges} = 30\ \mathrm{s}$

3. $s_\mathrm{ges} = s_1 + s_2 + \dfrac{1}{2}a_3 t_3^2$ $\quad s_\mathrm{ges} = 350\ \mathrm{m}$

2.26 1. $a_\mathrm{m} = \dfrac{v_2}{t_2}$ $\quad a_\mathrm{m} = 1{,}0\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

2. $s = \dfrac{v_2}{2}t_2$ $\quad s = 160\ \mathrm{m}$

2.27 Bild 71

2.28 Bild 72

2.29 $\Delta t = \dfrac{s_1}{v} + t_2 + \dfrac{v}{2a_3}$ $\quad \Delta t = 5{,}8\ \mathrm{min}$

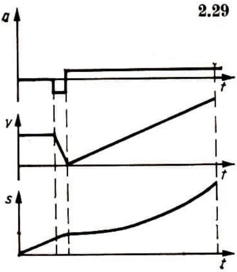


Bild 70

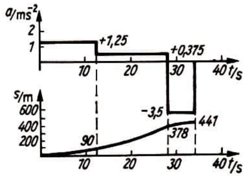


Bild 71

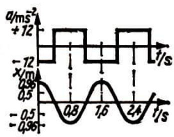


Bild 72

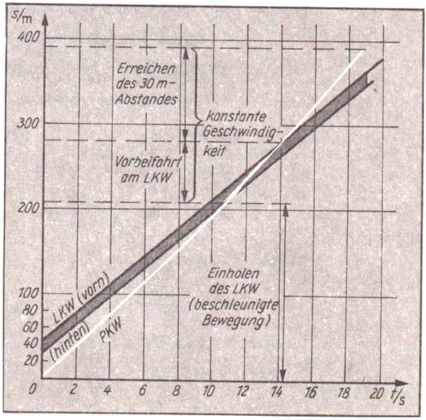
2.30 Wählen Sie ein Bezugssystem, das mit dem LKW fest verbunden ist. In diesem System wird der Überholvorgang durch zwei Phasen beschreibbar. In der ersten wird der PKW von 0 auf 20 km h^{-1} beschleunigt. In der zweiten Phase bewegt sich der PKW mit der Geschwindigkeit 20 km h^{-1} gleichförmig gegenüber dem LKW.

$$t_{ges} = \frac{2s_v + s_L + s_n}{v_{P2} - v_{P1}} \qquad t_{ges} = 18{,}9 \text{ s}$$

$$s_{ges} = v_L t_{ges} + s_v + s_L + s_n; \qquad s_{ges} = 390 \text{ m}$$

2.31 Bild 73

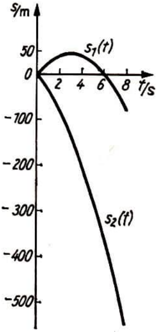
Bild 73



2.32 $\Delta s = t(|v_{02}| - |v_{01}|)$ $\qquad \Delta s = 300$ m; Bild 74

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

t /s	s_1/m	s_2/m
1	25	− 35
2	40	− 80
3	45	−135
5	25	−275
8	−80	−560



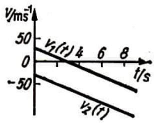


Bild 74

2.33 $x = \frac{a}{2} t_B^2 + a t_B \frac{x_0 - v_F(t_0 + t_B) - \frac{a}{2} t_B^2}{a t_B + v_F}$; $x = 29\ \text{km}$

2.34 $h = h_1 - \frac{g h_1^2}{2 v_{02}^2}$ $h = 9{,}22\ \text{m}$

2.36 $T = \frac{\Delta t}{z}$ $T = 60\ \text{s}$

$f = \frac{1}{T}$ $f = 1{,}67 \cdot 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$

$\omega = 2\pi f$ $\omega = 1{,}05 \cdot 10^{-1}\ \text{s}^{-1}$

2.37 Aus $v_B = \frac{s_B}{t}$; $a_B = \frac{v_B}{t}$; $\varphi = \frac{s_B}{r}$; $\omega = \frac{\varphi}{t}$; $\alpha = \frac{\omega}{t}$

folgt: $s_B = r\varphi$; $v_B = r\omega$; $a_B = r\alpha$

2.39 $v = \frac{2\pi(r_E + h)}{T}$ $v = 3{,}05\ \text{km s}^{-1}$

2.40 Die Drehzahl wird durch die je Sekunde ablaufende Filmlänge, also durch die Umfangsgeschwindigkeit der Filmrolle bestimmt.

$n = \frac{f_B h_B}{\pi d}$ $n = 58\ \text{min}^{-1}$

2.41 1. $T = \frac{1}{f}$ $T = 0{,}50\ \text{s}$

2. $\omega = 2\pi f$ $\omega = 12{,}6\ \text{s}^{-1}$

3. $v = \frac{\omega d}{2}$ $v = 3{,}14\ \text{m s}^{-1}$

4. $t = \frac{s}{v}$ $t = 9{,}55\ \text{s}$

2.43 Beim Abspielen des Bandes ist die Bandgeschwindigkeit (= Umfangsgeschwindigkeit) konstant zu halten, während der Durchmesser sich ändert. Das geschieht durch Änderung der Drehzahl.

$n = \frac{v}{\pi d}$ $11\ \text{min}^{-1} \leqq n \leqq 30\ \text{min}^{-1}$

2.44 1. $t = \frac{(r_1 - r_2)K}{f}$ $t = 25{,}8\ \text{min}$

mit $K = 10\ \text{mm}^{-1}$

2. $v = 2\pi f r$ $21\ \text{cm s}^{-1} \leqq v \leqq 50\ \text{cm s}^{-1}$

3. $l \approx \pi K (r_1^2 - r_2^2)$ $l = 548\ \text{m}$

(Annäherung als Summe einer arithmetischen Folge von konzentrischen Kreisen)

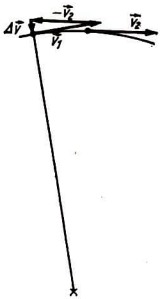


Bild 75

2.46 1. $\alpha = 2\pi \dfrac{\Delta n}{\Delta t}$ $\qquad \alpha = 0{,}87\ \mathrm{s^{-2}}$

2. $t = \dfrac{2\pi n_N}{\alpha}$ $\qquad t = 6{,}0\ \mathrm{min}$

2.47 Der Beschleunigungsvektor hat die Richtung des Vektors der Geschwindigkeitsänderung. Wir bilden grafisch die Differenz der Geschwindigkeitsvektoren in zwei benachbarten Punkten. Diese Differenz ist der Vektor der Geschwindigkeitsänderung (Bild 75). Der Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{v}/\Delta t$ zeigt zum Mittelpunkt der Kreisbahn.

2.48 1. $\omega_1 = \dfrac{v_{B1}}{r_1}$ $\qquad \omega_1 = 0{,}14\ \mathrm{s^{-1}}$

$a_{r1} = \dfrac{v_{B1}}{r}$ $\qquad a_{r1} = 1{,}2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

2. $\omega_2 = \omega_1$ $\qquad \omega_2 = 0{,}14\ \mathrm{s^{-1}}$

$a_{r2} = 2a_{r1}$ $\qquad a_{r2} = 2{,}3\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

2.49 $v_B = 2\pi n r$ $\qquad v_B = 21\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

$a_r = 4\pi^2 n^2 r$ $\qquad a_r = 2{,}2 \cdot 10^4\ \mathrm{m\ s^{-2}}$

2.51 $s = v_F \dfrac{b}{v_B}$ $\qquad s = 108\ \mathrm{m}$

2.52 $t = \dfrac{b}{v_B}$ $\qquad t = 40\ \mathrm{s}$

Bemerkung: Das Ergebnis zeigt, daß die Zeit unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit ist.

2.53 Längs- und Planvorschub bilden die Katheten in dem rechtwinkligen Dreieck, das sich als halbe Schnittfläche durch den Konus ergibt. Daraus folgt die Beziehung

$\dfrac{v_P}{v_L} = \tan\dfrac{\alpha}{2}$ $\qquad \dfrac{v_P}{v_L} = \tan 10° = \underline{\underline{0{,}176}} = \underline{\underline{176:1000}}$

In technischen Zeichnungen werden Kegelwinkel meist nicht im Gradmaß, sondern in dem hier gefundenen Steigungsmaß (Verhältnis der Vorschubgeschwindigkeiten) angegeben.

2.54 Der Vorgang, der hier beschrieben wird, ist ein waagerechter Wurf aus der Höhe h. Die Anfangsgeschwindigkeit der geworfenen Körper ist gleich der Bahngeschwindigkeit, mit der sie auf der Scheibe rotieren.

$s = \pi d f \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ $\qquad s = 0{,}30\ \mathrm{m}$

Dies ist die Wurfweite vom Rand der Scheibe aus gerechnet. Die gesamte Düngerspur ist $2s = 0{,}60\ \mathrm{m}$ breit.

3.3 Die Seilkräfte werden durch Gewicht und Trägheitskraft verursacht.

1. $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$ $\quad a = 1{,}4 \text{ m s}^{-2}$

$F_s = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ $\quad F_s = 6{,}7 \text{ N}$

2. $a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$ $\quad a = 7{,}4 \text{ m s}^{-2}$

$F_s = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ $\quad F_s = 7{,}4 \text{ N}$

3. $a = \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$ $\quad a = 1{,}6 \text{ m s}^{-2}$

$F_s = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ $\quad F_s = 3{,}2 \text{ N}$

3.4 Entscheidend für die Wirkung ist die Trägheitskraft, die die Axt in das Holz treibt, wenn der Klotz oder die Axt beim Aufschlag auf die Unterlage gebremst wird. Ist die Masse und damit die Trägheitskraft des Klotzes größer als die der Axt, sollte die umgekehrte Axt aufprallen, im anderen Fall ist die Wirkung größer, wenn der Klotz aufschlägt.

3.5 1. $G_1 = m g_{\mathrm{m}}$ $\quad G_1 = 980 \text{ N} = 100 \text{ kp}$

2. $\frac{G_1}{G_2} = \frac{(2R)^2}{R^2} = 4;$

$G_2 = \frac{1}{4} G_1;$ $\quad G_2 = 245 \text{ N} = 25 \text{ kp}$

3. $G_3 = \frac{1}{9} G_1$ $\quad G_3 = 109 \text{ N} = 11 \text{ kp}$

3.6 In jeder Gruppe 8, da jede Gruppe die gesamte Kraft aufbringen muß. Eine Gruppe liefert die Kraft zur Überwindung des Luftdrucks, die andere die Gegenkraft. Würde eine Halbkugel an einer stabilen Mauer befestigt, genügten insgesamt 8 Pferde, die in einer Gruppe ziehen.

3.7 Nach dem dritten Newtonschen Axiom muß der Fahrer die Kraft, mit der er auf die Pedale drückt, durch eine gleich große Gegenkraft kompensieren. Auf horizontaler Strecke geschieht dies durch sein Körpergewicht. Wird jedoch auf einer Steigung die auf die Pedale auszuübende Kraft größer als die wirksame Komponente seines Körpergewichts, müssen die Hände durch Zug am Lenker die fehlende Gegenkraft aufbringen.

3.8 $m_E = \frac{g}{\gamma} r_E^2$ $\qquad m_E = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg

3.9 Mit $r_1 = a r_E$ (hier $a = 1{,}1$) gilt $\frac{\Delta g_1}{g_1} = a^2 - 1$; $\quad \frac{\Delta g_1}{g_1} = 21\,\%$

3.11 $k = \frac{mg}{s}$ $\qquad k_1 = k_2 = 0{,}98$ N cm^{-1}

$k_3 = 0{,}78$ N cm^{-1}

Im dritten Fall ist die Feder über die Elastizitätsgrenze hinaus belastet, man sagt auch „überdehnt".

3.12 $F = \frac{1}{2} k \Delta s$ $\qquad F = 3{,}8 \cdot 10^2$ N

3.13 Die hintereinander verbundenen Federn übertragen beide die gleiche Kraft. Sie werden demzufolge um den gleichen Betrag gedehnt wie eine einzeln belastete Feder. Die beiden Dehnungen addieren sich:

$\Delta s_2 = 2 \Delta s_1$

Die parallel verbundenen Federn werden jeweils nur mit der halben Last beansprucht und dehnen sich deshalb nur halb soweit aus wie eine Einzelfeder:

$\Delta s_2 = \frac{1}{2} \Delta s_1$

3.15 Das Gleiten beginnt, sobald die Hangabtriebskraft, die Komponente des Gewichts in Richtung der geneigten Ebene, die Haftreibungskraft überwiegt.

1. $F_{RH} = \frac{h}{l} G$ $\qquad F_{RH} = 0{,}25\,G$

2. $v = \sqrt{gh}$ $\qquad v = 1{,}6$ m s^{-1}

3.16 Bei geöffnetem Schirm ist die Reibungskraft (Reibung gegen Luft) ebenso groß wie die Schwerkraft. Da sie der Bewegungsrichtung und damit der Richtung der Schwerkraft entgegen wirkt, ist die Resultierende aus beiden Kräften Null, es gibt keine Beschleunigung.

3.19 Die Kraft, die der Hammer auf die Unterlage überträgt, ist gleich der Kraft, die infolge seiner negativen Beschleunigung auf ihn wirkt. Da die Beschleunigung gleich der Geschwindigkeitsänderung in der gegebenen Zeit ist, nimmt die vom Hammer ausgeübte Kraftwirkung mit der Auftreffgeschwindigkeit des Hammers zu und mit der Dauer des Bremsvorganges ab. Auf harten Unterlagen, von denen das Werkzeug ohne nennenswertes Eindringen sofort reflektiert wird, bei denen also die Stoß- und Bremszeit sehr kurz ist, ist deshalb die Kraftwirkung größer als auf weichen.

3.20 $F_T = -m_P \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ $F_T = -0{,}865$ kN

3.21 Die Feder wird durch die auftretende Fliehkraft gedehnt. Federkraft und Fliehkraft stehen im Gleichgewicht.

$n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{ks}{mr}}$ $n = 13\ \mathrm{s^{-1}} = 780\ \mathrm{min^{-1}}$

3.22 1. $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{3r}}$ $f = 5{,}5\ \mathrm{min^{-1}}$

2. $\dfrac{\Delta a}{a_{rF}} = \dfrac{h}{r_F}$ $\dfrac{\Delta a}{a_{rF}} = 0{,}18 = 18\,\%$

3.24 1. $v = \sqrt{rg}$ $v = 3{,}15\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

2. $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{r}}$ $n = 30\ \mathrm{min^{-1}}$

3.25 Benutzen Sie ein mitbewegtes Bezugssystem und bestimmen Sie darin die Resultierende aus Gewicht und Zentrifugalkraft. Benutzen Sie die Näherung $\sin\alpha \approx \tan\alpha$ für kleine Winkel α.

$\Delta h = \dfrac{v^2 l}{rg}$ $\Delta h = 59$ mm

3.26 Es wird nur die Komponente der Kraft wirksam, die in Richtung der Bewegung fällt: $F_s = F\cos\alpha$. Diese Komponente ist mit dem zurückgelegten Weg zu multiplizieren:

$W = Fs\cos\alpha$ $W = 3$ MJ

3.27 1. Die Kraft nimmt proportional dem Abstand zu. Das Steigungsmaß ist 6 N/10 m. Damit lautet die Funktion

$$F = 0{,}6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,s$$

Die Verschiebungsarbeit entspricht der Fläche unter der Kurve:

$W = \dfrac{1}{2}Fs$ $W = 30$ J

2. $F = 4\ \mathrm{N} = \mathrm{const}$

$W = Fs$ $W = 40$ J

3.28 $W = mgh$ $W = 1{,}15 \cdot 10^7\ \mathrm{J} = 3{,}19$ kWh

Der „Wert", als elektrische Arbeit berechnet, beträgt rund 0,26 M.

3.29 $W = \dfrac{1}{2}ks^2$ $W = 3{,}6$ J

3.30 $W = {}^1/_2 k(s_2^2 - s_1^2)$. Die Federkonstante k ist mit dem Hookeschen Gesetz (3.16) aus dem ersten Belastungsfall bestimmbar.

$$\Delta W = \frac{mg(s_2^2 - s_1^2)}{2s_1} \qquad \Delta W = 0{,}52\ \mathrm{J}$$

3.31 Es wird Hubarbeit und Reibungsarbeit verrichtet. Die Länge des mit Reibung zurückgelegten Weges ist $h/\cos\alpha$. Damit erhalten wir

$$W = W_H + W_R = mgh + \mu mgs\cos\alpha$$

$$= mgh(1 + \mu\cot\alpha) \qquad W = 4{,}23\ \mathrm{MJ}$$

3.33 $$\frac{m}{2}v_0^2 = mgh \qquad h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Bemerkung: Da beide Geschosse mit gleicher Geschwindigkeit starten, wirkt auf beide auch annähernd die gleiche Reibungskraft, gleiches Kaliber und gleiche Oberfläche vorausgesetzt. Die Vernachlässigung der Reibung ist beim Vergleich also zu rechtfertigen. Es gibt keinen Unterschied in der Gipfelhöhe.

3.34 1. $$W = \frac{m}{2}v^2 \qquad W = 7{,}03\ \mathrm{J}$$

2. Verformungsarbeit an der Kugel und Erwärmung von Kugel und Kugelfang.

3.36 1. $$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gs\sin\alpha} \qquad v_2 = 35{,}5\ \mathrm{km\ h^{-1}}$$

2. $$W_{kA} = \frac{m}{2}v_1^2 \qquad W_{kA} = 67{,}5\ \mathrm{kJ}$$

$$W_{kE} = \frac{m}{2}v_2^2 \qquad W_{kE} = 0{,}73\ \mathrm{MJ}$$

3.37 Wir beginnen mit der Energiebilanz: Die gesamte kinetische Energie wird in Federspannarbeit umgesetzt. Daraus folgt

$$k = \frac{mv^2}{s^2} \qquad k = 2{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{kp\ cm^{-1}} = 275\ \mathrm{MN\ m^{-1}}$$

3.38 $$v = \sqrt{2\left(gh - g\mu s\cos\alpha - \frac{F_W s}{m}\right)}; \quad v = 13\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$

3.41 Wir benutzen die Definition der Leistung (3.40) $P = W/t$.

1. $$t_H = \frac{mgh}{\eta P} \qquad t = 5{,}0\ \mathrm{s}$$

2. $$z = \frac{t}{t_H + \sqrt{\dfrac{2s}{g}}} \qquad z = 10$$

3.42 1. $\eta_{ges} = \eta_T \eta_P$ $\qquad \eta_{ges} = 29\,\%$

2. $P_W = \dfrac{P_T}{\eta_T}$ $\qquad P_W = 9{,}5\ \text{kW}$

3. $P_P = \eta_P P_T$ $\qquad P_P = 2{,}8\ \text{kW}$

3.43 $v = \dfrac{P}{F \cos\alpha}$ $\qquad v = 0{,}97\ \text{m s}^{-1}$

3.44 $P = v(F_R + F_W)$

$= v\left(\mu_F mg + cA\dfrac{\varrho}{2}v^2\right)$ $\qquad P = 21\ \text{kW} = 28{,}6\ \text{PS}$

3.45 $F_T = -ma = 4mg$ $\qquad F_T = 177\ \text{kN}$

$P = F_T v$ $\qquad P = 2000\ \text{MW} = 2\ \text{GW}$

3.46 Wir benutzen die Ziolkowski-Gleichung (3.47):

$v_E = v_T \ln\dfrac{m_0}{m_L}$ $\qquad v_E = 5{,}9\ \text{km s}^{-1}$

3.47 $v_W = v_0 - \dfrac{m_M v_M \cos\alpha}{m_W}$ $\qquad v_W = -15{,}3\ \text{m s}^{-1}$

3.48 In der Beschleunigungsphase wird dem Hammer ein Impuls erteilt, der beim Aufprall als Kraftstoß auf die Unterlage abgegeben wird:

$mv = -\int\limits_v^0 F\,\mathrm{d}t$ (vgl. Ü 3.19)

3.49 $\Delta v = \dfrac{F\,\Delta t}{m}$ $\qquad \Delta v = 40\ \text{m s}^{-1}$

3.51 $v_{H_2} = v_{H_2 0}\dfrac{m_{H_2} - m_{O_2}}{m_{H_2} + m_{O_2}} - v_{O_2 0}\dfrac{2m_{O_2}}{m_{H_2} + m_{O_2}}$; $\qquad v_{H_2} = -383\ \text{m s}^{-1}$

$v_{O_2} = v_{O_2 0}\dfrac{m_{O_2} - m_{H_2}}{m_{O_2} + m_{H_2}} + v_{H_2 0}\dfrac{2m_{H_2}}{m_{O_2} + m_{H_2}}$; $\qquad v_{O_2} = -73{,}6\ \text{m s}^{-1}$

3.52 $v_K = v_1\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}$ $\qquad v_K = 86{,}5\ \text{m s}^{-1}$

3.53 $h = \dfrac{v^2}{2g}$ $\qquad h = 5{,}1\ \text{m}$

3.54 $v_{n1} = v_2\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad v_{n1} = 4{,}6\ \text{m s}^{-1}$

$v_{n2} = v_2\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$ $\qquad v_{n2} = -20\ \text{m s}^{-1}$

3.55 $v_n = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\qquad v_n = 75\ \text{km h}^{-1}$

3.56 Gleitgeschwindigkeit nach dem Zusammenstoß:

$$v_n = \sqrt{2\mu g s} \qquad v_n = 39{,}5 \text{ km h}^{-1}$$

$$v_1 = v_n + \frac{m_2}{m_1}(v_n - v_2) \qquad v_1 = 72 \text{ km h}^{-1}$$

$$\frac{\Delta W}{W_{ges}} = 1 - \frac{(m_1 + m_2)v_n^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} \qquad \frac{\Delta W}{W} = 0{,}63 = 63\,\%$$

3.58 Das Gewicht der Klötze und die Spannkraft des Drahtes erzeugen gleiche Drehmomente $mgr_1 = Fr_2$. Daraus folgt

$$F = mg\frac{r_1}{r_2}$$

3.59 $$x_S = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} \qquad x_S = 5{,}8 \text{ mm}$$

$$y_S = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} \qquad y_S = 9{,}5 \text{ mm}$$

$z_S = 500$ mm (Mitte)

3.60 $$m_{red} = \frac{J}{r^2} \qquad m_{red} = 1{,}8 \text{ g}$$

3.61 Nach (3.58′) $J = \int r^2 \,\mathrm{d}m$ hat *der* Körper das größere Massenträgheitsmoment, bei dem ein größerer Anteil der Masse einen großen Abstand von der Achse hat. Das gilt auch für das dickwandige Rohr.

3.64 $$W_k = 2\pi^2 J n^2 \qquad W_k = 700 \text{ kWh}$$

3.65 $$W_k = \frac{2\pi^2 m r^2}{T^2} \qquad W_k = 2{,}7 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

3.66 $$W_k = \frac{1}{4}\pi r^2 \varrho h v^2 \qquad W_k = 3{,}8 \cdot 10^{9} \text{ kWh}$$

Bemerkung: Vergleichen Sie mit dem Kernkraftwerk Nord, das für eine Leistung von 3,5 GW projektiert ist. Es wird jährlich etwa $3 \cdot 10^{10}$ kWh liefern.

3.67 1. $$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2 \qquad W_k = 24 \text{ J}$$

2. Beim Bremsen wird die kinetische Energie in Reibungsarbeit umgewandelt. Der Weg, der gegen die Reibungskraft zurückgelegt wird, ist gleich dem Produkt aus Radumfang und Zahl der Umdrehungen.

$$z = \frac{W_k}{\pi d \mu F_N} \qquad z = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$$

$\widehat{=}$ Drehung um 10°

3.68 Die Rotationsenergie wird beim Aufwärtsrollen vollständig in potentielle Energie umgewandelt.

$$h = \frac{6\pi^2 f^2 J}{mg} \qquad h = 35{,}3\ \text{cm}$$

3.69 $$L = \frac{4\pi m r^2}{5T} \qquad L = 7{,}1 \cdot 10^{33}\ \text{Nm s}$$

$$W_k = \frac{4\pi^2 m R^2}{5T^2} \qquad W_k = 2{,}6 \cdot 10^{29}\ \text{J}$$

3.71 $$L = \pi r^2 m n_1 \qquad L = 118\ \text{Nm s}$$

$$\Delta t = \frac{L}{M} \qquad \Delta t = 5{,}9\ \text{s}$$

3.72 $$F = \frac{\pi d^2 m n}{4 r_{St} t} \qquad F = 1{,}5\ \text{kN}$$

4.2 Auf einen evakuierten Behälter wirkt der äußere Luftdruck. Ist dieser nicht gegeben, rechnet man mit $p_L \approx 1$ at ≈ 1 bar. Der Deckel drückt zusätzlich durch sein Eigengewicht auf die Unterlage.

$$F = mg + \frac{\pi}{4} d^2 p_L \qquad F = 20\ \text{kN} = 2{,}03\ \text{Mp}$$

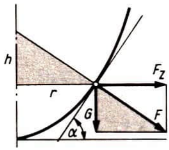


Bild 76

4.3 $$F = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)\varrho g (h_1 - h_2) \qquad F = 20{,}8\ \text{N}$$

4.4 Für kleine Höhenunterschiede verläuft die Änderung des Luftdrucks nahezu linear. Also läßt sich schreiben

$$\Delta p = \varrho_0 g \Delta h \qquad \Delta p = 127\ \text{Pa} \approx 1\ \text{Torr}$$

4.5 Das im Bild 76 markierte Flüssigkeitsteilchen unterliegt einer Kraft, die die Resultierende aus Gewicht und Fliehkraft ist. Die Oberfläche liegt senkrecht zur Resultierenden. Sie ist gekrümmt, da die Fliehkraft mit dem Abstand des Teilchens von der Drehachse zunimmt und sich damit die Richtung der Resultierenden ändert.

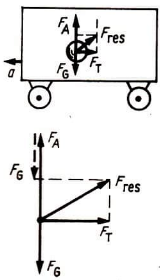


Bild 77

4.6 Auf den Ballon im Fahrzeug wirken Gewicht, Trägheitskraft und Auftrieb. Die Richtungen der Kräfte zeigt Bild 77. Der Auftrieb ist größer als das Gewicht, deshalb zeigt die Resultierende der drei Kräfte nach oben. Die Trägheitskraft wirkt der Beschleunigung entgegen, also wird der Ballon im Inneren des Wagens entgegen der Fahrtrichtung schräg nach oben bewegt.

4.7 Auf den Ballon wirken Gewicht und Auftrieb. Die Masse ist konstant. Die beschleunigende Kraft ist $F = F_A - G$.

1. Das Volumen des Ballons ist konstant. Wegen der Abnahme der Luftdichte mit zunehmender Höhe wird der Auftrieb mit zunehmender Höhe kleiner. Wenn $F_A = G$ ist, schwebt der Ballon, er ändert seine Höhe nicht mehr.

2. Das Volumen des Ballons ist nicht konstant; das eingeschlossene Gas dehnt sich aus, wenn der äußere Druck abnimmt. Nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetz (4.4) $pV = p_0V_0$ ist mit (3.3) $\varrho = \frac{m}{V}$; $\frac{p_L}{\varrho_L} = \frac{p_0}{\varrho_0} = \text{const}$. Ebenfalls nach Boyle-Mariotte ist $p_L V_B = \text{const}$ und somit $\varrho_L V_B = \text{const}$. Der Auftrieb berechnet sich nach (4.11) $F_A = \varrho_L V_B g$, und es ist folglich $F_A = \text{const} \cdot g$. Solange $g = \text{const}$, ist auch die beschleunigende Kraft konstant. Der Ballon steigt ständig, bis die Hülle platzt.

Bemerkung: Die Änderung der Temperatur mit der Höhe wurde bei unseren Überlegungen nicht berücksichtigt. Sie gelten für konstante Temperatur.

4.8 Beim Schwimmen herrscht Gleichgewicht zwischen dem Gewicht des schwimmenden Körpers und seinem Auftrieb:

$m_K = V_F \varrho_F$ bzw. $\varrho_K H A = \varrho_F h A$

Mit der Körperhöhe H ist die Eintauchtiefe h:

$h = H \frac{\varrho_K}{\varrho_W}$ $\qquad h = 20 \text{ cm}$

4.10 1. $G = \varrho_K g a b H$ $\qquad G = 100 \text{ kp} = 981 \text{ N}$

$F_A = G_W = \varrho_W g a b H$ $\qquad F_A = 125 \text{ kp} = 1226 \text{ N}$

Resultierende Kraft

$F = F_A - G = g a b H (\varrho_W - \varrho_K)$; $\qquad F = 25 \text{ kp} = 245 \text{ N}$

2. $a = \frac{F}{m}$ $\qquad a = 2{,}45 \text{ m s}^{-2}$

3. $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ $\qquad t = 1{,}28 \text{ s}$

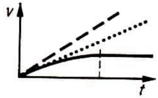


Bild 78

4. Bild 78; ohne Reibung: $v = at$ (gestrichelte Kurve); bei konstanter Reibung: $v = a' t$ (punktierte Kurve); Reibung wächst mit Geschwindigkeit, folglich wird Beschleunigung kleiner (gekrümmter Kurventeil); Antriebskraft = Reibungskraft, folglich $a = 0$ (Kurventeil parallel zur Zeitachse)

4.11 $h = 4 \frac{m - V\varrho}{\pi d^2}$

4.12 $v = \sqrt{\frac{2 p_{dyn}}{\varrho}}$ $\qquad v = 240 \text{ km h}^{-1}$

4.13 $v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\varrho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)}}$ $\qquad v_1 = 0{,}16 \text{ m s}^{-1}$

4.14 Mit dem Symbol p für den statischen Druck ist

$$|\Delta p| = \frac{1}{2} v^2 \qquad |\Delta p| = 6125\ \text{Pa}$$

$$\left|\frac{\Delta p}{p}\right| = \frac{\varrho v^2}{2p} \qquad \left|\frac{\Delta p}{p}\right| = 1{,}04\,\%$$

$$\left|\frac{\Delta p}{p_{ü}}\right| = \frac{\varrho v^2}{2(p - p_L)} \qquad \left|\frac{\Delta p}{p_{ü}}\right| = 1{,}25\,\%$$

5.2 $v = \dfrac{V_m}{M}$ $\qquad v = 11{,}2\ \text{m}^3\,\text{kg}^{-1}$

5.5 Das einem Molekül zur Verfügung stehende Volumen wird als Würfel angesehen, in den eine Kugel mit dem Durchmesser $d = \sqrt[3]{V_{O_2}}$, das O_2-Molekül, paßt. Dieses Bild ist sehr grob und nur für eine Abschätzung geeignet.
Wir dividieren das Gesamtvolumen durch die Zahl der darin vorhandenen Moleküle und erhalten damit das gesuchte Teilvolumen

$$V = \frac{m}{\varrho}\ \text{(Gesamtvolumen)}, \qquad N = \frac{m}{M} N_A\ \text{(Teilchenzahl)}$$

$$V_{O_2} = \frac{M}{\varrho N_A} \qquad V_{O_2} = 4{,}8 \cdot 10^{-29}\ \text{m}^3$$

$$d_{O_2} = \sqrt[3]{V_{O_2}} \qquad d_{O_2} = 3{,}6 \cdot 10^{-10}\ \text{cm}$$

5.6 $\dfrac{N}{A} = \dfrac{m N_A}{M \cdot 4\pi r_E^2}$ $\qquad \dfrac{N}{A} = 6{,}6 \cdot 10^3\ \text{cm}^{-2}$

5.7 $V = \dfrac{mRT}{p}$ $\qquad V = 0{,}20\ \text{m}^3$

5.8 Es interessiert hier nur der Endzustand, nicht der Vorgang des Komprimierens.

$$p = \frac{mRT}{V} \qquad p = 7{,}4\ \text{at} = 7{,}3 \cdot 10^5\ \text{Pa}$$

5.9 $m = \dfrac{p l_1 l_2 l_3}{RT}$ $\qquad m = 70\ \text{kg}$

5.10 $U = \dfrac{3}{2} mRT$ $\qquad U = 194\ \text{kJ} = 46{,}4\ \text{kcal}$

6.2 $\Delta l = \alpha l_1 \Delta T$ $\qquad \Delta l = -120\ \text{mm}$

6.3 Es handelt sich um eine Volumenzunahme. Da der räumliche Ausdehnungskoeffizient γ nicht gegeben ist, benutzen wir $\gamma = 3\alpha$.

$$V_2 = V_1(1 + 3\alpha \Delta T) \qquad V_2 = 100{,}14\ \text{cm}^3$$

Die Volumenzunahme kann hier nicht beobachtet werden.

6.4 Da sich das Volumen verändert, die Masse aber konstant bleibt, ändert sich die Dichte bei Temperaturänderung

von $\varrho_1 = \frac{m}{V_1}$ nach $\varrho_2 = \frac{m}{V_1 + 3\alpha(T_2 - T_1)}$

$T_2 = T_1 + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{3\alpha\varrho_2}$ $\qquad T_2 = 110\ °\mathrm{C}$

6.6 Die potentielle Energie des Wassers verwandelt sich in Wärmeenergie $Q = cm\Delta T$.

$\Delta T = \frac{gh}{c}$ $\qquad \Delta T = 0{,}09\ \mathrm{K}$

6.7 $t = \frac{cm\Delta T}{\eta P}$ $\qquad t = 54\ \mathrm{min}\ 18\ \mathrm{s}$

6.8 Beginnen Sie mit der Definition des Wirkungsgrades $\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}$ und präzisieren Sie die beiden Energien.

$m = \frac{Pt}{\eta H}$ $\qquad m = 9{,}4\ \mathrm{kg}$

6.9 Es ist Energie für zwei Vorgänge zuzuführen: Erwärmen und Schmelzen.

$\frac{Q}{m} = \frac{c\Delta T + q}{\eta}$ $\qquad \frac{Q}{m} = 0{,}447\ \mathrm{kWh\ kg^{-1}}$

6.11 Zur Berechnung von 1. genügt das Gesetz von Boyle-Mariotte.

1. $V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2}$ $\qquad V_2 = 0{,}66\ \mathrm{m^3}$

2. $W = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$ $\qquad W = -489\ \mathrm{kJ} = -0{,}136\ \mathrm{kWh}$

3. Die gesamte vom Kompressor aufgewendete (und in Wärme umgewandelte) Energie ist abzuführen, wenn die Temperatur konstant bleiben soll.

$Q = W$ $\qquad Q = -489\ \mathrm{kJ} = -117\ \mathrm{kcal}$

6.12 1. $T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1}$ $\qquad T_2 = 1000\ \mathrm{K} = 1\ \mathrm{kK}$

2. $Q = \frac{c_v V}{R}(p_2 - p_1)$ $\qquad Q = 0{,}123\ \mathrm{kcal} = 0{,}517\ \mathrm{kJ}$

6.13 Die Angabe „bei konstantem Druck“ schließt die Möglichkeit zur Ausdehnung des Gases ein.

1. $V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1}$ $\qquad V_2 = 3{,}33\ \mathrm{m^3}$

2. $Q = c_p \dfrac{pV_1}{RT_1}(T_2 - T_1)$ $\qquad Q = 183\ \text{kcal} = 766\ \text{kJ}$

3. $W = \dfrac{pV_1}{T_1}(T_2 - T_1)$ $\qquad W = 206\ \text{kJ}$

6.15 Der Carnot-Prozeß setzt sich aus zwei adiabatischen und zwei isothermen Prozessen zusammen. Jeder Prozeß wird gesondert berechnet.

1. $V_B = V_C \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$ $\qquad V_B = 12{,}5\ \text{l}$

2. $p_B = \dfrac{V_A\, p_A}{V_B}$ $\qquad p_B = 14{,}4\ \text{at} = 1{,}41 \cdot 10^6\ \text{Pa}$

3. $p_C = p_B \left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$ $\qquad p_C = 0{,}78\ \text{at} = 7{,}6 \cdot 10^4\ \text{Pa}$

4. $V_D = \dfrac{V_C\, V_A}{V_B}$ $\qquad V_D = 80\ \text{l}$

5. $p_D = \dfrac{p_C V_C}{V_D}$ $\qquad p_D = 0{,}98\ \text{at} = 9{,}6 \cdot 10^4\ \text{Pa}$

6. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$ $\qquad \eta = 56{,}4\,\%$

6.17 1. $V_2 = V_1 \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}$ $\qquad V_2 = 0{,}85\ \text{m}^3$

2. $T_2 = T_1 \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ $\qquad T_2 = 386\ \text{K}$

3. $W = \dfrac{p_1 V_1}{k - 1}\left[1 - \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$ $\qquad W = -230\ \text{kJ}$

6.18 $\varepsilon_W = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2}$ $\qquad \varepsilon_W = 4{,}97$

6.20 $\Delta S = cm \ln \dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}$ $\qquad \Delta S = 4{,}15\ \text{cal K}^{-1} = 17{,}4\ \text{J K}^{-1}$

6.21 $Q = rm$ $\qquad Q = 2{,}7\ \text{Mcal} = 1{,}13 \cdot 10^4\ \text{kJ}$

$\Delta S = \dfrac{rm}{T}$ $\qquad \Delta S = 7{,}23\ \text{kcal K}^{-1} = 30{,}3\ \text{kJ K}^{-1}$

6.23 $f = \varphi f_{\max};$ $\qquad f_{\max} = 23\ \text{g m}^{-3}$ bei 25 °C (F B 7.13)

$f = 13{,}8\ \text{g m}^{-3}$

$\tau \approx 16{,}2\ °\text{C}$

$m = (f - f_{\max 2})V$ $\qquad m = 5{,}28\ \text{kg}$

6.24 Aus dem Kühlgut verdampft Wasser so lange, bis die Luft darüber mit Wasserdampf gesättigt ist. Im Kühlschrank zirkuliert die Luft, da sie sich oben am Verdampfer abkühlt und infolge der dadurch zunehmenden Dichte absinkt. Die über dem Kühlgut liegende wärmere Luft steigt nach oben. Der Sättigungswert der Luftfeuchte wird mit abnehmender Temperatur kleiner. Die Wassermenge, die der Differenz der Sättigungswerte von wärmerer und kälterer Luft entspricht, wird an den kalten Wänden des Verdampfers kondensiert. Die relative Luftfeuchte beträgt dort noch immer 100 %, die absolute hat jedoch abgenommen. Die abgekühlte, absolut trockenere Luft sinkt wieder nach unten und erwärmt sich dort. Damit sinkt die relative Luftfeuchte, die Luft kann wieder Wasser aufnehmen.

Bemerkung: Diesen ständig sich wiederholenden Vorgang nennt man in der Technik Gefriertrocknung. In Vakuumanlagen benutzt man den gleichen Effekt zur Verbesserung des Vakuums, indem mit Hilfe von flüssigem Stickstoff oder Helium Dämpfe ausgefroren werden.

6.25 Durch den Wind wird ständig die wasserdampfgesättigte Luft von der Oberfläche entfernt und relativ trockenere Luft zugeführt.

6.26 Es ist eine Art Gefriertrocknung anzuwenden. Kalte Außenluft, die durchaus die relative Luftfeuchte 100 % haben kann, wird eingelassen. Die Fenster werden geschlossen, und das Zimmer wird geheizt. Dadurch sinkt die relative Luftfeuchte, die Luft sättigt sich mit Wasser aus der Wand. Danach wird mit kalter Außenluft ausgetauscht.

6.27 Die dem Brikett zugeführte Wärmemenge, die nur ein Teil der ohnehin kleinen Verbrennungswärme des Streichholzes ist, wird zum größten Teil durch Wärmeleitung in das Innere transportiert. Dadurch kann die Temperatur der Oberfläche nicht die Entzündungstemperatur erreichen. Für einen dünnen Holzspan oder für einen Bogen Papier, die beide geringere Wärmeleitfähigkeit und obendrein geringere Wärmekapazität haben als das Brikett, genügt die geringe Verbrennungswärme eines Streichholzes, um diese Körper auf die Entzündungstemperatur aufzuheizen. Deren eigene Verbrennungswärme bringt dann die zunächst noch nicht brennenden Teile auf die nötige Temperatur.

6.29 $Q = \dfrac{\pi d^2 \lambda t \Delta T}{4l}$ $\qquad Q = 7{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$

$R_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{4l}{\pi d^2}$ $\qquad R_\lambda = 0{,}14\,\mathrm{h\,K\,kJ^{-1}}$

6.30 1. $k = \left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \dfrac{l}{\lambda}\right)^{-1}$ $\qquad k = 49\,\mathrm{kcal\,m^{-2}\,h^{-1}\,K^{-1}}$

$= 205\,\mathrm{kJ\,m^{-2}\,h^{-1}\,K^{-1}}$

2. $Q = kAt\Delta T$ $\qquad Q = 490\,\mathrm{Mcal} = 570\,\mathrm{kWh}$

6.31 Holz ist ein schlechter Wärmeleiter. Wer darauf sitzt, hat fast nur die Fläche zu erwärmen, die er bedeckt. Metall oder Stein leitet die Wärme ständig in das Innere weiter, der Sitzende liefert ständig Wärmeenergie nach, kühlt dabei ab und hat dadurch das Gefühl, Metall und Stein seien kälter als Holz.

7.1 $I = \frac{U}{R}$ $\qquad I = 4{,}9\ \mathrm{A}$

$P = \frac{U^2}{R}$ $\qquad P = 1{,}1\ \mathrm{kW}$

7.2 1. $G = \frac{1}{R}$ $\qquad G = 75\ \mathrm{mS}$

2. $\varrho = \frac{\pi d^2 R}{4l}$ $\qquad \varrho = 0{,}017\ \Omega\ \mathrm{mm^2\ m^{-1}}$

$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{4l}{\pi d^2 R}$ $\qquad \varkappa = 57\ \mathrm{S\ m\ mm^{-2}}$

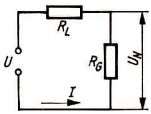


Bild 79

7.3 Bei der Berechnung des Leitungswiderstandes ist zu berücksichtigen, daß Hin- und Rückleitung nötig sind, die Leitungslänge also gleich dem doppelten Abstand Spannungsquelle – Verbraucher ist. Der Leitungswiderstand wirkt wie ein Vorschaltwiderstand. Index N Nenn(-leistung; -spannung). Ersatzschaltbild: Bild 79.

1. $R_L = \varrho_{Cu} \frac{l}{A}$ $\qquad R_L = 1{,}78\ \Omega$

2. $R_G = \frac{U_N^2}{P_N}$ $\qquad R_G = 24{,}2\ \Omega$

3. $I = \frac{U}{R_G + R_L}$ $\qquad I = 8{,}47\ \mathrm{A}$

4. $P_G = I^2 R_G$ $\qquad P_G = 1730\ \mathrm{W}$

7.5 $R = \frac{U^2 t}{Q}$ $\qquad R = 19\ \Omega$

7.8 Wir verwenden die Gleichung $I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$ zweimal mit verschiedenen Wertepaaren und eliminieren aus beiden Gleichungen den unbekannten inneren Widerstand:

$I_1 = \frac{U_0}{R_i + R_{a1}}$ $\qquad R_i = \frac{U_0}{I_1} - R_{a1}$

Damit wird aus

$$I_2 = \frac{U_0}{R_i + R_{a2}} = \frac{U_0}{\frac{U_0}{I_1} - R_{a1} + R_{a2}} \qquad I_2 = 4{,}8\ \mathrm{A}$$

7.9 1. $R_i = \frac{U_0}{I} - R_a$ $\qquad R_i = 0{,}2\ \Omega$

2. $I_{max} = I_K = \frac{U_0}{R_i} = \frac{U_0}{\frac{U_0}{I} - R_a}$ $\qquad I_{max} = 75$ A

7.10 $R = nR_E$ $\qquad P_1 = 550$ W

$P = \frac{U^2}{R}$ $\qquad P_2 = 1100$ W

$\qquad P_3 = 2200$ W

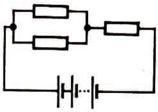


Bild 80

7.11 1. Bild 80

2. $R = \frac{2U}{3I}$ $\qquad R = 16\ \Omega$

3. $U_0 = nU_k + InR_i$ $\qquad U_0 = 12{,}3$ V

7.12 1. $R_{ers1} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$

$I_1 = \frac{U}{R_{ers1}}$ $\qquad I_1 = 0{,}8$ A

2. $I_2 = \frac{U}{R_{ers2}} = \frac{U}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}$; $\qquad I_2 = 0{,}9$ A

7.13 $R = f(R_2) = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$

Für $R_2 = 0$ erhalten wir den minimalen Ersatzwiderstand

$R_{min} = R_1$ $\qquad R_{min} = 10\ \Omega$

Für $R_2 = 30\ \Omega$ ergibt sich der maximale Ersatzwiderstand

$R_{max} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ $\qquad R_{max} = 22\ \Omega$

Der Ersatzwiderstand ändert sich stufenlos zwischen 10 Ω und 22 Ω.

7.14 $R_x = \frac{3R_{AB} - 2R}{R - R_{AB}} R$ $\qquad R_x = 70\ \Omega$

7.15 Die Überlastung entsteht dadurch, daß die Spannung, die ursprünglich an den beiden nun ausgefallenen Kerzen abfiel, sich auf die anderen Kerzen als Überspannung verteilt.

$U_K = \frac{U}{n}$

$\Delta U_K = \frac{U}{n-2} - \frac{U}{n} = U\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)$

$\frac{\Delta U_K}{U_K} = \frac{n}{n-2} - 1$ $\qquad \frac{\Delta U_K}{U_K} = 0{,}14 = 14\,\%$

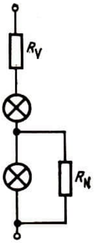


Bild 81

7.17 Die Schaltung erfordert folgende Überlegungen: An der Ersatzlampe fällt eine zu geringe Spannung ab. Ihr ist ein Widerstand vorzuschalten.
Da $P = UI$ bzw. $I = P/U$ ist, benötigt die Ersatzlampe bei geringerem Spannungsabfall eine größere Stromstärke als die Originallampe für die gleiche Leistung. Die Differenz der Stromstärken muß durch einen Nebenwiderstand zur Originallampe aufgenommen werden (Bild 81).

$$R_N = \frac{U_1}{I_2 - I_1} \qquad R_N = 64{,}4\ \Omega$$

$$R_V = \frac{U - (U_1 + U_2)}{I_2} \qquad R_V = 4{,}8\ \Omega$$

7.18 1. $R_{ers\,1} = \dfrac{R_{124} R_{35}}{R_{124} + R_{35}}$ $\qquad R_{ers\,1} = 174\ \Omega$

($R_{\mu\nu}$ ist der Ersatzwiderstand der Kombination R_μ und R_ν)

2. $R_{ers\,2} = \dfrac{(R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$; $\qquad R_{ers\,2} = 287\ \Omega$

3. $R_{ers\,3} = \dfrac{(R_{12} + R_3 + R_5) R_4}{R_{12} + R_3 + R_4 + R_5}$; $\qquad R_{ers\,3} = 197\ \Omega$

7.19 Es gibt 39 Kombinationen, die zu unterschiedlichen Ersatzwiderständen führen. Wir geben hier nur die Zahlenwerte für $R_{ers/\Omega}$, nach steigenden Werten geordnet, an:

120; 133; 141; 150; 200; 207; 225; 240; 248; 250; 267; 270; 300; 372; 400; 480; 500; 540; 567; 600; 635; 667; 720; 750; 900; 967; 1200; 1330; 1350; 1440; 1450; 1500; 1600; 1740; 1800; 2400; 2550; 2700; 3000.

7.21 1. $U_{AB} = U_k - I(R_1 + R_2)$ $\qquad R_i = R_1 + R_3$

2. $U_{AC} = U_k - IR_1$ $\qquad R_i = R_1$

3. $U_{BC} = U_k - I(R_1 + R_2)$ $\qquad R_i = R_1 + R_2$

7.22 1. $I_1 = \dfrac{U_{01} - U_{02} + IR_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}$ $\qquad I_1 = 34\ \text{A}$

$I_2 = \dfrac{U_{02} - U_{01} + IR_{i1}}{R_{i1} + R_{i2}}$ $\qquad I_2 = 16\ \text{A}$

2. $U_k = U_{01} - \dfrac{R_{i1}}{R_{i1} + R_{i2}}(U_{01} - U_{02} + IR_{i2})$ $\qquad U_k = 7{,}3\ \text{V}$

7.23 $I = \dfrac{2U_{01}}{R_{i1} + 2R_4 + R_5}$

$U_5 = IR_5$; $\quad U_4 = U_6 = \dfrac{U_5}{2}$; $\qquad U_5 = 100\ \text{V}$; $\quad U_4 = 50\ \text{V}$

1. $\varphi_{D1} = -\ \ 50$ V $\qquad \varphi_{E1} = -150$ V

2. $\varphi_{D2} = +\ \ 50$ V $\qquad \varphi_{E2} = -\ \ 50$ V

3. $\varphi_{D3} = +150$ V $\qquad \varphi_{E3} = +\ \ 50$ V

7.24 Der bei der Messung fließende Strom fließt nacheinander durch den „Innenwiderstand" der Quelle und durch das Meßinstrument. Benutzen Sie die Maschenregel. Die Stromstärke muß so klein bleiben, daß der Spannungsabfall am inneren Widerstand unter dem angegebenen Wert bleibt.
R_a ist der Instrumentenwiderstand. Für ihn gilt

$$R_a > (10^2 - 1)R_i \qquad R_a \approx 1\ \mathrm{M\Omega}$$

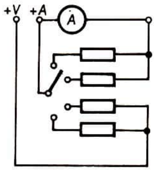


Bild 82

7.25 1. Bild 82

2. $U_i = I_i R_i \qquad U_i = 0{,}1$ V

3. $$R_S = \frac{R_i}{n-1} = \frac{R_i}{\frac{I}{I_i} - 1} \qquad R_{S1} = 50\ \Omega; \quad R_{S2} = 0{,}02\ \Omega$$

$$R_V = R_i\left(\frac{U}{U_i} - 1\right) \qquad R_{V1} = 4{,}8\ \mathrm{k\Omega}; \quad R_{V2} = 500\ \mathrm{k\Omega}$$

7.26 $$\frac{I_G}{I} \approx \frac{R_S}{R_S + R_G} \qquad \frac{I_G}{I} = 71\ \%$$

$$U = I\left(R_V + \frac{R_G R_S}{R_G + R_S}\right) \qquad U = 1{,}71\ \mathrm{mV}$$

8.1 Bild 83

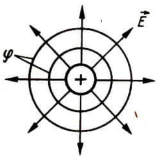


Bild 83

8.3 Der große Abstand ermöglicht die Berechnung als Feld einer Punktladung. Nach (8.3) ist $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Die Ladung errechnet sich aus Elementarladung und Teilchenzahl. Da Protonen einfach positiv geladen sind, ist die Gesamtladung $Q = eN_A m/M$. Darin sind m die gegebene und M die molare Masse sowie N_A die Avogadro-Konstante.

$$E = \frac{\frac{m}{M} e N_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad E = 1{,}73 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$|\Delta\varphi| = \int_1^2 E\,\mathrm{d}s = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{\frac{m}{M} e N_A}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{\frac{m}{M} e N_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right); \qquad |\Delta\varphi| = 1{,}38 \cdot 10^{13}\ \mathrm{V}$$

8.4 1. $U = Ed$ $\qquad U = 5\,\mathrm{kV}$

2. Die Probeladung wird zur entgegengesetzt geladenen Platte hin beschleunigt, und zwar mit der Kraft $F = Q'E$.

3. Auf die Probeladung wirken zwei Kräfte, $F = Q'E$ und das Gewicht G. Der Faden orientiert sich in die Richtung der Resultierenden.

8.5 $E = \dfrac{Q}{\pi \varepsilon_0 d l}$ $\qquad E = 1{,}6\,\dfrac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}$

8.6 Die Fasern sollten zwischen zwei gut geerdeten Metallrollen hindurchgeführt werden. Dabei läßt sich die Ladung wieder abführen.

8.7 Feld ausgeschaltet: $m_K g l_2 = (m + \Delta m) g l_1$

$$m_K = (m + \Delta m)\frac{l_1}{l_2}$$

Feld eingeschaltet: $m_K g l_2 - QE l_2 = m g l_1$

$$Q = \frac{\Delta m g d l_1}{U\ l_2}$$

8.9 $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$ $\qquad C = 0{,}13\,\mathrm{nF}$

$Q = CU = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d} U$ $\qquad Q = 0{,}13\,\mu\mathrm{C}$

8.10 $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 A}$

$$F = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{CU^2}{2d}$$

8.11

Reihenschaltung	Parallelschaltung
1. $C_r = \dfrac{C}{3}$; $\quad C_r = 0{,}33\,\mu\mathrm{F}$	$C_p = 3\,C$; $\quad C_p = 3\,\mu\mathrm{F}$
2. $U_r = \dfrac{U}{3}$; $\quad U_r = 200\,\mathrm{V}$	$U_p = U$; $\quad U_p = 600\,\mathrm{V}$
3. $Q_r = CU_r$; $\quad Q_r = 0{,}2\,\mathrm{mC}$	$Q_p = CU_p$; $\quad Q_p = 0{,}6\,\mathrm{mC}$

8.12 1. $U_1 : U_2 : U_3 = \dfrac{1}{C_1} : \dfrac{1}{C_2} : \dfrac{1}{C_3}$; $\qquad U_1 : U_2 : U_3 = 15:5:3$

2. $Q_1 : Q_2 : Q_3 = 1:1:1$

3. Weil $W = \dfrac{1}{2} QU$ und $Q = \text{const}$, gilt

$W_1 : W_2 : W_3 = U_1 : U_2 : U_3$; $\qquad W_1 : W_2 : W_3 = 15:5:3$

8.14 Die umgesetzte elektrische Energie ist gleich der im Kondensator gespeicherten: $W = {}^1/_2CU^2 = Pt$.

$$C = \frac{2Pt}{U^2} \qquad C = 1{,}11 \text{ mF}$$

8.15 1. $W_1 = \dfrac{C_1 U_1^2}{2}$ $\qquad W_1 = 0{,}50$ J

2. $U_2 = \dfrac{U_1}{2}$ $\qquad U_2 = 50$ V

3. $W_2 = \dfrac{W_1}{2}$ $\qquad W_2 = 0{,}25$ J

4. Beim Stromfluß von einem Kondensator zum anderen treten Energieverluste durch den Leitungswiderstand und durch den Aufbau eines Magnetfeldes auf.

8.16 Bild 84

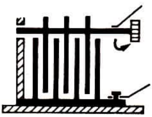


Bild 84

$$C_{\max} = (n-1)\frac{\pi r^2 \varepsilon_0}{2d} \qquad C_{\max} = 3 \cdot 10^2 \text{ pF}$$

8.17 1. $C = C_2 \dfrac{U_2}{U_1 - U_2}$ $\qquad C = 2{,}9$ pF

2. $Q = CU$ $\qquad Q = 1{,}5 \cdot 10^{-11}$ C

8.19 Der Nachteil des Verfahrens besteht darin, daß der hohe Anteil neutraler Teilchen nicht erfaßt wird. Zwar werden auf ihnen Ladungen influenziert, aber das bleibt ohne Wirkung. Die Ladungen beiderlei Vorzeichens sind an beiden Seiten des Teilchens gleich groß. Im homogenen Feld sind deshalb auch die Kräfte in beiden Richtungen gleich, die Resultierende ist Null. In inhomogenen Feldern, etwa in der Nähe geladener Drähte, überwiegt dagegen die Kraft in Richtung der größeren Feldstärke, also zum Draht hin. Deshalb benutzen die Entstaubungsanlagen der Praxis meist inhomogene Felder.

8.21 1. $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{A}{d}$ $\qquad C = 31$ pF

2. $Q = CU$ $\qquad Q = 1{,}55 \cdot 10^{-8}$ C

3. $E = \dfrac{U}{d}$ $\qquad E = 500 \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$

4. $W = \dfrac{1}{2} CU^2$ $\qquad W = 3{,}88\ \mu$J

8.22 Die Ergebnisse von 8.21 werden jetzt als gegebene Größen betrachtet. Wir nennen sie C_1, Q_1, E_1 und W_1. Es sind $\varepsilon_{r1} = 7$ und $\varepsilon_{r2} = 1$. Trennung von der Spannungsquelle bedeutet, daß die Ladung konstant bleibt.

1. $Q_2 = Q_1$ $\qquad Q_2 = 1{,}55 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$

2. $C_2 = \dfrac{C_1}{\varepsilon_{r1}}$ $\qquad C_2 = 4{,}42\,\mathrm{pF}$

3. $E_2 = \dfrac{U_2}{d} = 7E_1$ $\qquad E_2 = 3{,}5\,\dfrac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}$

4. $W_2 = \dfrac{1}{2}C_2U_2^2 = 7W_1$ $\qquad W_2 = 27\,\mu\mathrm{J}$

8.24 Wir unterscheiden vier Bereiche:

			$H_{/\mathrm{Am}^{-1}}$
I	$0 \leqq r \leqq r_0$:	$H_\mathrm{I} = \dfrac{I}{2\pi r_0^2}\,r$;	$398\,r_{/\mathrm{mm}}$
II	$r_0 \leqq r \leqq r_1$:	$H_\mathrm{II} = \dfrac{I}{2\pi r}$;	$\dfrac{1590}{r_{/\mathrm{mm}}}$
III	$r_1 \leqq r \leqq r_2$:	$H_\mathrm{III} = \dfrac{I}{2\pi r}\,\dfrac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}$;	$\dfrac{177}{r_{/\mathrm{mm}}}\,[25 - (r_{/\mathrm{mm}})^2]$
IV	$r \geqq r_2$:	$H_\mathrm{IV} = 0$	(Bild 85)

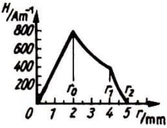


Bild 85

8.25 Für die Berechnung der Feldstärke ist die Spule als endlos lang zu betrachten. Wir unterscheiden drei Bereiche:

I $\quad 0 \leqq r < R - \dfrac{d}{2}$: $\qquad H_\mathrm{I} = 0$

II $\quad R - \dfrac{d}{2} < r < R + \dfrac{d}{2}$: $\quad H_\mathrm{II} = \dfrac{NI}{2\pi r}$; $\quad H_{\mathrm{II}/\mathrm{Am}^{-1}} = \dfrac{19{,}1 \cdot 10^3}{r_{/\mathrm{cm}}}$

III $\quad r > R + \dfrac{d}{2}$: $\qquad H_\mathrm{III} = 0 \qquad$ (Bild 86)

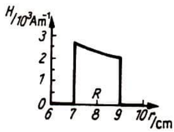


Bild 86

8.27 Die Flußdichte B wird vom Strom der Stärke I_1 erzeugt. Aus (8.18) und (8.20) folgt:

$$B = \mu_0\,\frac{I_1}{2\pi r}.$$

Dieser Ausdruck, in die Ausgangsgleichung eingesetzt, führt zum Nachweis der Identität.

8.28 Aus (8.34) ergibt sich (→ Ü. 8.27) als Kraft zwischen parallelen Strömen

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$$

l Länge der Leiter zwischen zwei Stützen

r Abstand der Leiter

Mit der Scherfestigkeit τ_{max} ergibt sich nach (3.13) die Scherkraft $F_{max} = A\tau_{max}$.

$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r \tau_{max}} \qquad A = 6{,}8 \text{ mm}^2$$

8.29 $$L = \mu_0 N^2 \frac{A}{l} \qquad L = 10{,}5 \text{ mH}$$

8.30 Weil $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, gilt nach dem Induktionsgesetz $U_i = N\frac{d\Phi}{dt} > 0$.
Das bedeutet: Die Urspannung U_i wirkt im positiven Rechtsschraubensinn. Es entsteht an der oberen Klemme der positive Pol.
Die Polung bleibt beim Wechsel des Drehsinns gleich.

8.31 $$\left.\begin{array}{l} 1{,}5 \text{ cm} \mathrel{\widehat{=}} \Delta t = 0{,}15 \text{ ms} \\ 0{,}9 \text{ cm} \mathrel{\widehat{=}} \Delta I = -18 \text{ mA} \\ 1{,}2 \text{ cm} \mathrel{\widehat{=}} U = 4{,}8 \text{ V} \end{array}\right\} \text{Werte aus dem Diagramm entnommen}$$

$$L = \frac{U\Delta t}{|\Delta I|} \qquad L = 40 \text{ mH}$$

8.33 Nach (8.26) ist $U_i = -L\frac{dI}{dt}$.

Differentiation der gegebenen Stromstärke:

$$\frac{dI}{dt} = -aI_0 e^{-at} \text{ und damit } U_i = LaI_0 e^{-at}.$$

Beachten Sie, daß der abnehmende Strom eine positive Spannung induziert.

8.35 Bei der Sättigungsfeldstärke sind alle Weißschen Bezirke bereits in Feldrichtung umgeklappt. Wird die Feldstärke weiter erhöht, so bleibt die Flußdichte praktisch konstant.

8.37 $$v = \frac{2e}{m} rB \qquad v = 3{,}2 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

8.38 Die Ionenmasse ist das Produkt aus Massenzahl und durchschnittlicher Nukleonenmasse.

$$r = \frac{\sqrt{2Wm}}{eB}; \qquad \frac{\Delta r}{r_1} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} - 1; \qquad \frac{\Delta r}{r_1} = 2{,}5\,\%$$

Die Trennung ist möglich.

8.39 Nach (8.36) hängt die Leistung auch von der Fläche ab, die eine Spule umschließt. Diese ist abhängig von Länge und Durchmesser des Rotors. Der längere Motor hat also eine größere Leistung als der kürzere.

9.2 Das Volumen ist mit (6.13) für konstanten Druck auf Normalbedingungen umzurechnen: $V_0 = VT_0/T$. Nach (3.3) setzen wir $V_0 = m_0/\varrho_0$. Weiter gilt (9.4′); daraus folgt mit (7.2′) und $Z = 1$, $It = Fm_0/M$. Aus den angeführten Gleichungen erhalten wir

$$t = \frac{F\varrho_0 VT_0}{IMT} \qquad t = 1{,}62 \cdot 10^4\ \mathrm{s} = 4{,}5\ \mathrm{h}$$

9.3 In (7.12) $W_{el} = UIt$ ist die Ladung $Q = It$ nach (9.4′) zu ersetzen:

$$W_{el} = UF\frac{m}{M}; \qquad W_{el} = 7{,}4\ \mathrm{MWh}$$

Bemerkung: Die tatsächlich benötigte Elektroenergie beträgt etwa das Dreifache des theoretischen Wertes (Wärmeverluste).

9.4 1. $t = \dfrac{ZmF}{M\eta jA}$ $\qquad t = 4{,}2\ \mathrm{h}$

2. $d = \dfrac{m}{\varrho_s A}$ $\qquad d = 46\ \mu\mathrm{m}$

9.5 Blei ist im $PbSO_4$ 2wertig und hat die molare Masse 207 kg kmol^{-1}.

$$m = \frac{MIt}{ZF} \qquad m = 0{,}29\ \mathrm{kg}$$

9.6 Eine 6-V-Bleibatterie besteht aus 3 Zellen, die in Reihe geschaltet, also von der gleichen Ladung durchflossen sind.

$$m = 3\frac{ItM}{ZF} = 3\frac{PtM}{UZF} \qquad m = 58\ \mathrm{g}$$

10.2 Bild 87

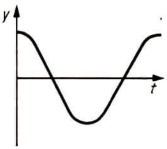


Bild 87

$$y = y_m \cos \omega t = y_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

10.3 An den Umkehrpunkten wirken maximale Beschleunigung nach (10.3″) und die Fallbeschleunigung. Die Bedingung $a_{ges} = 0$ bzw. $a_{ges} = 2g$ wird erfüllt durch $a_m = g$ (z. B. $a_{ges} = a_m + g = 2g$). Dann folgt aus (10.3″) $a_m = \omega^2 y_m$ mit (2.16)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_m}} \qquad f = 2{,}24\ \mathrm{Hz}$$

10.4 Ein Ablösen vom Sieb erfolgt, wenn sich das Sieb am oberen Umkehrpunkt mit der Beschleunigung a_m, die Körner aber mit der kleineren Beschleunigung g nach unten bewegen:
$\omega^2 y_m \geqq mg$. Daraus folgt

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_m}} \qquad f = 2{,}9\ \mathrm{Hz}$$

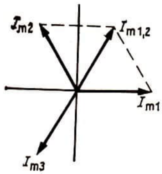


Bild 88

10.5 Die Stromstärke eines Wechselstromes ist eine sich sinusförmig ändernde Größe wie die Elongation bei der mechanischen Schwingung (Bild 88). Die resultierende maximale Stromstärke (aus $I_{m1,2}$ und I_{m3}) ist Null. Das bedeutet: die resultierende Stromstärke ist zu allen Zeiten Null.

10.6 Die Blattfeder, die die Eigenfrequenz 50 Hz hat, schwingt bei Netzfrequenz 50 Hz in Resonanz, also mit maximaler Amplitude. Die Eigenfrequenz der Feder ist durch deren Länge und Dicke bestimmt.

10.7 Es werden zwei verschiedene Vorgänge beschrieben: eine Dehnung unter statischer Belastung und eine Schwingung. Aus den Angaben über die statische Dehnung und dem Hookeschen Gesetz (3.16) wird die Federkonstante allgemein berechnet.

$$T = 2\pi s \sqrt{\frac{m}{2W}} \qquad T = 0{,}40 \text{ s}$$

10.9 Bei diesen Schwingungen ist der Auftrieb die rücktreibende Kraft. Er hängt von der Eintauchtiefe, also von der Elongation, sowie von der Gestalt des eingetauchten Körpers ab.

1. Die rücktreibende Kraft ist, wenn der Balken um y tiefer gedrückt wird, $F = -\varrho_W g A y = -ky$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \sqrt{\frac{\varrho_K H}{\varrho_W g}} \qquad T = 1{,}1 \text{ s}$$

2. Für den Holzbalken mit kreisförmigem Querschnitt ist die Bedingung $k = \varrho_W g A = \text{const}$ nicht mehr erfüllt, da die Schnittfläche A in Höhe der Wasseroberfläche von der Eintauchtiefe abhängig und somit nicht konstant ist. Dieser Balken kann keine sinusförmigen Schwingungen ausführen.

10.10 $$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\varrho A g}} \qquad y = y_m \cos \sqrt{\frac{\varrho A g}{m}}\, t$$

Bei Berücksichtigung der Reibung erhalten wir eine gedämpfte Schwingung. An die Stelle von y_m tritt $y_n = y_n(t)$ (→ F 10.3.1.3).

10.12 Die Massenträgheitsmomente müssen mit Hilfe des Steinerschen Satzes bestimmt werden.

1. $T_A = 2\pi \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2} r_m^2 + \frac{1}{12} h^2 + r_a^2}{g r_a}} \qquad T_A = 1{,}76 \text{ s}$

2. $T_B = 2\pi \sqrt{\dfrac{r_m^2 + r_a^2}{g r_a}} \qquad T_B = 2{,}0 \text{ s}$

10.13 $$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgs}{J}}$$

1. $J_A = \frac{1}{3} m l^2$; $s = \frac{l}{2}$; $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2l}}$; $f = 0{,}61$ Hz

2. $l \gg r$, folglich gilt wie beim mathematischen Pendel

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$ $f = 0{,}50$ Hz

3. $J_S = \frac{1}{12} m \left(\frac{l}{2}\right)^2$; $J_A = \frac{7}{12} m l^2$; $s = \frac{3}{4} l$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9g}{7l}}$ $f = 0{,}57$ Hz

4. $J_A = J_{\text{Stab}} + J_{\text{Kugel}}$. Mit der Kugel als Massenpunkt folgt

$J_A = \frac{43}{96} m l^2$; $s = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{5}{8} l$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{60g}{43l}}$ $f = 0{,}59$ Hz

10.14 1. $T = \frac{1}{f}$ $T = 1{,}54$ s

2. $J_A = \frac{mgs}{4\pi^2 f^2}$ $J_A = 0{,}175$ kg m^2

3. $J_S = J_A - ms^2$ $J_S = 0{,}165$ kg m^2

10.16 Aus (10.9) folgt mit (2.13) $T = 2\pi\sqrt{J_1/k'}$.

Die Meßwerte für den zylindrischen Körper ergeben mit $T = t/z$

1. $k' = \frac{4\pi^2 z^2 J_1}{t_1^2}$ $k' = 9{,}05 \cdot 10^{-4}$ Nm

Für das Zahnrad ergibt sich damit

2. $J_2 = \frac{k' t_2^2}{4\pi^2 z^2}$ $J_2 = 1{,}78$ kg cm^2

Bemerkung: Die Rechnung läßt sich vereinfachen, wenn wir zur Berechnung von J_2 das allgemeine Ergebnis von k' verwenden:

$$J_2 = \frac{4\pi^2 z^2 J_1 t_2^2}{t_1^2\, 4\pi^2 z^2} = J_1 \frac{t_2^2}{t_1^2}$$

10.17 1. Mit $s = \frac{h}{4}$ und $J_A = \frac{1}{12} m (a^2 + h^2) + m\left(\frac{h}{4}\right)^2$ folgt

$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12gh}{4a^2 + 7h^2}}$ $f_1 = 2{,}27$ Hz

2. Mit $s = \dfrac{h}{2}$ und $J_B = \dfrac{1}{12} m(b^2 + h^2) + m\left(\dfrac{h}{2}\right)^2$ folgt

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6gh}{b^2 + 4h^2}} \qquad f_2 = 2{,}06\ \mathrm{Hz}$$

10.18 Nach (10.23) und (10.24) sind die Wechselstromwiderstände $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ und $X_L = \omega L$. Damit ist

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} \qquad L = 1{,}6\ \mathrm{mH}$$

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} \qquad C = 4\ \mu\mathrm{F}$$

10.19
$$L = \frac{U^2}{2\pi f P_G} \qquad L = 2{,}57\ \mathrm{H}$$

$$C = \frac{P_G}{2\pi f U^2} \qquad C = 3{,}94\ \mu\mathrm{F}$$

10.20 Bild 89; 1. Schalterstellung *1*; 2. Schalterstellung *2*

10.21 Bild 90

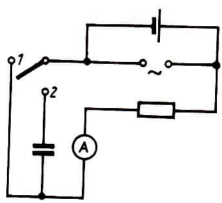


Bild 89

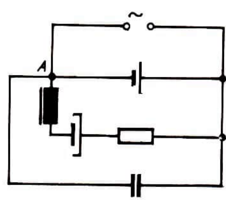


Bild 90

10.22 Eine Spule mit ohmschem Widerstand wird als Reihenschaltung von ohmschem und induktivem Widerstand aufgefaßt (Ersatzschaltung Bild 91.1).

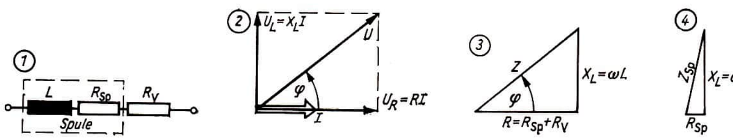


Bild 91

1. $I = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}$ $\qquad I = 1{,}15$ A

2. $U_{Sp} = I Z_{Sp} = I \sqrt{R_{Sp}^2 + (2\pi f L)^2}$ $\qquad U_{Sp} = 181$ V

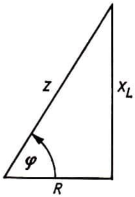


Bild 92

10.23 1. $R = \dfrac{U_-}{I_-}$ $\qquad R = 1{,}64\ \Omega$

2. $Z = \dfrac{U_\sim}{I_\sim}$ $\qquad Z = 5{,}02\ \Omega$

3. $L = \dfrac{X_L}{\omega} = \dfrac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}$ (Bild 92) $\qquad L = 15{,}1$ mH

10.24 1. $Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \dfrac{1}{2\pi f C}\right)^2}$ $\qquad Z = 1430\ \Omega$

2. $\tan\varphi = \dfrac{2\pi f L - \dfrac{1}{2\pi f C}}{R}$ $\qquad \tan\varphi = -2{,}677$

$\varphi = \arctan \dfrac{2\pi f L - \dfrac{1}{2\pi f C}}{R}$ $\qquad \varphi = -69{,}5°$

10.25 $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ $\qquad f_0 = 82{,}3$ Hz

10.26 1. Allgemein gilt (3.40) $P = W/t$. Die Arbeit W ist der Umdrehungszahl proportional: $W = W_0 n/n_0$. So folgt

$P = W_0 \dfrac{n}{n_0 t}$ $\qquad P = 100$ W

2. Mit $\cos\varphi = R/Z$, (7.11′) $P = I^2 R$ und $I = U/Z$ ergibt sich

$\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{PR}}{U}$; $\qquad \varphi = \arccos \dfrac{\sqrt{PR}}{U} = 62{,}9°$

3. Nach (10.24) und (2.16) ist $X_L = 2\pi f l$, nach Bild 92 ist aber auch $X_L = R \tan\varphi$. Daraus folgt

$L = \dfrac{R \tan\varphi}{2\pi f}$ $\qquad L = 625$ mH

10.27 1.1 $R = R_L = \dfrac{U^2}{P}$ $\qquad R = 202\ \Omega$

Der Betrag des Gesamtwiderstandes dieser Reihenschaltung ist 404 Ω. Damit gleiche Stromstärke durch die Glühlampe fließt, muß bei Reihenschaltung eines Kondensators oder einer Spule jeweils der Scheinwiderstand 404 Ω sein. Aus

$Z = \sqrt{X_C^2 + R_L^2}$ bzw. $Z = \sqrt{X_L^2 + R_L^2}$

folgt dann

1.2 $C = \dfrac{1}{\sqrt{3}\pi f Z}$ $C = 9{,}1\ \mu\text{F}$

1.3 $L = \dfrac{\sqrt{3}Z}{4\pi f}$ $L = 1{,}12\ \text{H}$

2.1 Ohmscher Vorwiderstand: reine Wirkleistung

$P = P_L + P_R = 2P_L$ $P = 120\ \text{W}$

2.2 Kapazitiver Vorwiderstand
2.3 Induktiver Vorwiderstand } reine Blindleistung an den Vorwiderständen, folglich

$P = P_L$ $P = 60\ \text{W}$

10.28 Beim Gleichstrommotor tritt nur Wirkleistung auf, beim Wechselstrommotor ist die Phasenverschiebung zu berücksichtigen.

$I_- = \dfrac{P}{U}$ $I_- = 7{,}5\ \text{A}$

$I_\sim = \dfrac{P}{U\cos\varphi}$ $I_\sim = 15\ \text{A}$

10.29 $P = I^2R$ $P = 145{,}5\ \text{W}$

$P_s = UI$ $P_s = 253\ \text{W}$

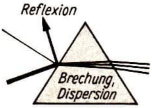
$P_q = \dfrac{UI\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$ $P_q = 207\ \text{W}$

10.30 1. $\cos\varphi = \dfrac{P}{UI}$ $\cos\varphi = 0{,}70$

$\varphi = \arccos\dfrac{P}{UI}$ $\varphi = 45{,}5°$

2. $\cos\varphi$ wird 1, wenn $\varphi = 0$, d.h., wenn keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Stromstärke auftritt. Um das zu erreichen, muß die induktive Blindleistung des Motors durch die kapazitive Blindleistung des parallelgeschalteten Kondensators kompensiert werden. Es muß also gelten
$P_{qL} = P_{qC}$ oder $U\sin\varphi = \dfrac{U^2}{X_C} = 2\pi f C U^2$.
Darin ist φ die Phasenverschiebung, die unter 1. für den nicht kompensierten Motor berechnet wurde. Wir erhalten

$C = \dfrac{I\sin\varphi}{2\pi f U}$ $C = 12\ \mu\text{F}$



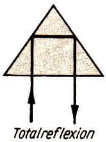


Bild 93

11.1 $\lambda = \frac{c}{f}$ $\qquad \lambda_L = 0{,}415$ mm; $\lambda_W = 1{,}86$ mm

11.3 $s = ct$ $\qquad s = 300$ km

$\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$ $\qquad \Delta t = 5\,\mu s$.

11.4 $\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 \frac{c_2}{c_1}$; $\qquad$ 1. $\sin\alpha_2 = 0{,}04$; $\qquad$ 2. $\sin\alpha_2 = 0{,}233$

$\alpha_2 = 2{,}3°$ $\qquad \alpha_2 = 13{,}5°$

11.5 Aus der Rechnung folgt $\sin\alpha_2 > 1$. Das bedeutet, daß es keinen in Luft übergehenden Strahl gibt. Es findet Totalreflexion statt.

11.6 Reflexion, Brechung, Totalreflexion, Dispersion (Bild 93).

11.7 Die Fensterscheibe läßt den überwiegenden Teil des auf sie auftreffenden Lichtes hindurch und reflektiert nur einen geringen Bruchteil. Tagsüber überwiegt das von außen nach innen gelangende Licht, das die Umgebung abbildet, den an der Innenfläche reflektierten Teil. Die geringe reflektierte Lichtmenge, die das Innere des Raumes abbildet, wird von dem auf große Intensität adaptierten Auge nicht wahrgenommen. Nachts gelangt nur der von innen kommende und an der Glasscheibe reflektierte Anteil ins Auge und wird ungestört wahrgenommen.

11.8 Das Licht wird vom weißen Papier stärker reflektiert als vom Fettfleck. Deshalb wirkt dieser dunkler als seine Umgebung.

11.10 $I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{\dot{L}}{10}}$ $\qquad I_2 = 10^{-6}$ W m^{-2}

$I_4 = I_2 \frac{r_2^2}{r_4^2}$ $\qquad I_4 = 0{,}25\,\mu$W m^{-2}

$L_4 = 10 \lg \frac{I_4}{I_0}$ $\qquad L_4 = 54$ dB

11.11 $L_{N\,ges} = L_N + 10 \lg n$ $\qquad L_{N\,ges} = 100$ phon

11.12 Wegen der Symmetrie der Anordnung ist die gesuchte Beleuchtungsstärke gleich dem doppelten Betrag der Beleuchtungsstärke einer einzigen Lampe; aus (11.37′) folgt

$$E_{/\mathrm{lx}} = \frac{2 I_{/\mathrm{cd}} h_{/\mathrm{m}}}{\sqrt{[(h_{/\mathrm{m}})^2 + (l_{/\mathrm{m}})^2]^3}} \qquad E = 3{,}8 \text{ lx}$$

11.15 Aus Bild 64 und aus (11.20) unter Beachtung von (11.17) ergibt sich bei gleichen Beleuchtungsstärken

$$I_2 = I_1 \frac{(l - r_1)^2}{r_1^2} \qquad I_2 = 18{,}4 \text{ cd}$$

3. Physikalisches Praktikum

3.1. Aufgaben des physikalischen Praktikums

Die Durchführung des physikalischen Praktikums ist ein wichtiger Bestandteil der Physikausbildung. Durch das physikalische Praktikum soll das erworbene Wissen erweitert und vertieft werden. Der Student soll im Praktikum bestimmte Fähigkeiten und Fertigkeiten erwerben, die ihn befähigen, später in der Praxis selbständig Aufgaben der Meßtechnik zu bewältigen. Er soll in der Lage sein, Theorien und Gesetze vorgegebenen Aufgaben zuzuordnen und aus der vorhandenen Literatur Fakten und Methoden zur Lösung der gestellten Aufgaben zu erarbeiten. Dabei sollen der Lehrstoff systematisiert, Analogiebeziehungen genutzt und physikalische Interpretationen technischer Sachverhalte gegeben werden.
Das physikalische Praktikum dient auch dazu, Fähigkeiten zum Ableiten von Meßvorschriften aus physikalischen Gesetzen zu erwerben und evtl. eine Auswahl geeigneter Meßverfahren und Meßgeräte nach Genauigkeitskriterien zu treffen. Dabei sollen die Meßgeräte sachgemäß eingesetzt werden.
Eine wichtige Aufgabe kommt der Fehlerrechnung bzw. der Fehlerabschätzung zu (→ 1.). Der Student wird zu exakter experimenteller Arbeit angehalten, wobei er Meßgenauigkeiten ermitteln und beurteilen soll. Somit lernt er die Methoden der experimentellen Forschung kennen und wird gleichzeitig sowohl vor einer Überschätzung als auch vor einer Unterschätzung der Genauigkeit seiner Messungen bewahrt.
Wie bei jedem wissenschaftlichen Arbeiten müssen auch im physikalischen Praktikum die gemessenen Werte sorgfältig registriert werden. Über jeden Versuch ist also ein Protokoll anzufertigen, welches alle Meßwerte und Versuchsergebnisse sowie die Berechnungen in übersichtlicher Form enthält (→ 3.5.). Oft müssen die Meßergebnisse auch grafisch dargestellt werden, wodurch die Auswertung erleichtert und funktionelle Zusammenhänge besser erkannt werden können.
Die folgenden Abschnitte sollen dem Studenten helfen, sich in die Praktikumsversuche der betreffenden Schule einzuarbeiten. Es wird bewußt darauf verzichtet, eine Vielzahl von Versuchsbeschreibungen vorzulegen. Dafür gibt es spezielle Bücher für

das Physikpraktikum. Nach einigen Hinweisen werden drei Musterversuche beschrieben und ausgewertet. Damit ist dem Studenten das Rüstzeug für die Durchführung weiterer Versuche gegeben.

3.2. Laborordnung

Die Durchführung der Versuche erfolgt in Versuchsgruppen. Wie in jedem Laboratorium gelten auch im Physikpraktikum bestimmte Vorschriften, die unbedingt eingehalten werden müssen. Einige allgemeine Hinweise sind:

Einrichtungen, Geräte, Werkzeuge und Material sind Volkseigentum und als solches zu achten und zu behandeln.

Das Physiklabor darf durch die Praktikanten nur in der dafür vorgesehenen Zeit und bei Anwesenheit des Praktikumsleiters oder Assistenten betreten werden.

Vor Beginn des Versuches sind die in der Versuchsanleitung angegebenen Geräte, Werkzeuge und Materialien in Empfang zu nehmen und auf ihre Vollständigkeit zu prüfen.

Beim ersten Inbetriebsetzen elektrischer Versuchsschaltungen und Geräte muß der verantwortliche Praktikumsleiter anwesend sein.

Das unbefugte Hantieren mit Geräten, die nicht zum Versuch gehören, ist zu unterlassen.

Die in der Arbeitsschutzbelehrung gegebenen Hinweise und Anweisungen sind strikt zu beachten.

Mit Material und Energie ist so sparsam wie möglich umzugehen.

Nach Beendigung der Versuche ist der Arbeitsplatz zu reinigen und aufzuräumen. Geräte und Werkzeuge sind auf Vollzähligkeit zu überprüfen.

Der Praktikumsraum darf erst nach Abmeldung und erlangtem Testat verlassen werden. Die Abmeldung geschieht bei dem Praktikumsleiter, der auch das Testat erteilt.

Die vorgesehene Zeit ist für den Versuch voll auszunutzen.

Allen speziellen Hinweisen des Praktikumsleiters ist unbedingt Folge zu leisten.

Weitere Hinweise entnehmen Sie der Arbeitsschutz- und Brandschutzanordnung 430/1 vom 15. 4. 74 (GBl. I Nr. 23/1974).

3.3. Ordnung und Sicherheit im physikalischen Praktikum

Bevor die Studenten mit dem ersten Versuch beginnen, werden sie außer mit der Laborordnung mit der Arbeits- und Brandschutzordnung vertraut gemacht. Auf folgende Dinge ist besonders zu achten:

Elektrizität

Spannungen unter 40 V gehören in den Bereich der Kleinspannungen und erfordern keine besonderen Schutzmaßnahmen. Wie bei der Benutzung von höheren Spannungen ist jedoch auch hier die verlangte Schaltung zunächst aufzubauen und dem Praktikumsleiter vorzuzeigen, bevor die Spannungsquelle angeschlossen wird. Spannungführende Teile sind während des Versuches unter keinen Umständen zu berühren.

Anschlußschnüre sind nur am Stecker, nicht an der Schnur aus der Buchse zu ziehen. Verschlingen oder Verknoten der Schnüre ist zu vermeiden (Kabelbrüche!).

Die Schalttafel wird nur vom Praktikumsleiter bedient. Alle elektrischen Geräte, die mit Netzspannung betrieben werden, sind nur über ein ordnungsgemäßes Kabel mit Schutzkontakt anzuschließen. Sie sollen nicht länger als unbedingt erforderlich eingeschaltet sein. Elektrische Geräte dürfen nicht geöffnet werden.

Nach Beendigung des Versuches ist der Hauptschalter zu unterbrechen und der Netzstecker aus der Steckdose zu ziehen.

Stadtgas

Vor Einschalten der Bunsenbrenner ist die Luftzufuhr am Brenner zu schließen. Nach Entzündung des Gases wird die Wärmeabgabe nur mit der Lufteinstelldüse reguliert. Verändern Sie nicht die Gaseinstelldüse.

Nach Beendigung des Versuches ist der Gashahn richtig zu schließen. Es ist dafür zu sorgen, daß nicht unnötig Gas in den Raum ausströmt.

Wärmeenergie

Alle Heizgeräte müssen gegenüber brennbaren Materialien gut isoliert werden (Verwendung von geeigneten Unterlagen oder Halterungen).

Wenn in Bechergläsern oder Kochflaschen Flüssigkeiten erhitzt werden sollen, ist zur Halterung der Gefäße das vorgesehene Stativmaterial zu verwenden.

Umgang mit Chemikalien

Vorsicht ist beim Umgang mit Giften, Säuren und Laugen geboten. Bei Quecksilbergeräten (Thermometer, Barometer) darf im Schadensfall kein Quecksilber verschüttet werden. Geschah dies doch einmal, muß auch der kleinste Quecksilbertropfen mit der Quecksilberzange aufgenommen werden.

Säuren und Laugen werden verdünnt, indem die Säure bzw. die Lauge vorsichtig in das Wasser geschüttet wird, niemals umgekehrt.

Flaschen mit Äther oder anderen brennbaren Flüssigkeiten dürfen nicht in der Nähe von Gasflammen aufbewahrt oder geöffnet werden. Versuche mit Äther sind nur an den dafür vorgesehenen Stellen durchzuführen.

Nach Umgang mit Chemikalien sind grundsätzlich die Hände zu waschen.

Verschiedenes

Glasgeräte sind im Stativ mit elastischem Zwischenmaterial einzuspannen. Zerbrochene oder angebrochene Glasgeräte dürfen nicht mehr verwendet werden.

Vorsicht ist beim Umgang mit scharfen und spitzen Gegenständen geboten.

Glasgefäße sind nicht über eine offene Gasflamme zu stellen; Asbestnetz benutzen.

Bei Vakuumgefäßen können Implosionen auftreten. Thermosgefäße sind deshalb unbedingt in ihren Behältern zu lassen.

Rotierende Teile sind so abzusichern, daß eine Berührung während des Betriebes nicht möglich ist.

In den Lichtbogen von Kohlebogen- oder Quecksilberdampflampen darf nie ohne Lichtschutz gesehen werden.

3.4. Vorbereitung auf die Versuche

Um erfolgreich arbeiten zu können, muß man nicht nur die Theorie kennen, sondern auch die Wirkungsweise der zu benutzenden Apparatur. Neben einem intensiven Selbststudium und einer eingehenden Wiederholung des zum Versuch gehörenden Stoffes muß man sich daher schon vor Versuchsbeginn mit dem Versuchsaufbau und mit den Bedienungsvorschriften der Geräte vertraut machen. Ist dies geschehen, können Störungen in der Arbeit der Geräte frühzeitig festgestellt, Fehlerquellen beseitigt und damit falsche Ergebnisse vermieden werden.
Für den Umgang mit Meßgeräten ist es erforderlich, sich mit einigen wichtigen Grundbegriffen der Meßtechnik vertraut zu machen. Üben Sie, an den verwendeten Meßgeräten innerhalb der durchgeführten Versuche möglichst die folgenden Begriffe anzuwenden und am Beispiel auszudrücken:

Meßgröße M ist die zu messende physikalische Größe.

Meßgegenstand MG ist der Körper, an dem die Meßgröße eine physikalische Eigenschaft darstellt.

Meßwert MW ist der aus der abgelesenen Anzeige ermittelte Wert der zu messenden physikalischen Größe.

Meßergebnis ME ist der Meßwert selbst oder das Ergebnis, welches sich aus mehreren Meßwerten mit einer mathematischen Beziehung ergibt.

Skalenteil ST ist eine Teilungseinheit, in der die Anzeige angegeben werden kann. Als Zähleinheit wird der Teilstrichabstand verwendet.

Skalenwert S ist die Änderung der Meßgröße, die eine Verschiebung der Marke um einen Skalenteil bewirkt.

Skalenkonstante SK ist die Größe, mit der der Zahlenwert, auf dem die Marke der Skale steht, multipliziert werden muß, um den Meßwert zu erhalten.

Meßbereich MB ist der Teil des Anzeigebereichs, für den der Fehler der Anzeige innerhalb von angegebenen bzw. vereinbarten Fehlergrenzen bleibt. Oft ist Anzeigebereich gleich Meßbereich.

Empfindlichkeit E ist der Quotient aus der am Meßgerät beobachteten Änderung seiner Anzeige und der sie verursachenden möglichst sehr kleinen Änderung der Meßgröße.
Für eine Strichskale gilt:

$$E = \frac{\Delta l}{\Delta M} \approx \frac{A}{S}$$

E Empfindlichkeit
Δl Änderung der Anzeige in Längeneinheiten
ΔM Änderung der Meßgröße
A Teilstrichabstand
S Skalenwert

Ist die Empfindlichkeit einer Skale nicht konstant, muß insbesondere zwischen der Anfangs- und der Endempfindlichkeit unterschieden werden.
Weitere Begriffe und Definitionen sind TGL 0-1319 zu entnehmen.

3.5. Protokollführung

3.5.1. Bestandteile des Protokolls

Äußerst wichtig ist eine übersichtliche und für jeden Sachverständigen verständliche Protokollführung. Über jeden durchzuführenden Versuch ist daher ein Protokoll anzufertigen.
Das Protokoll soll sämtliche Angaben enthalten, die zur Nachprüfung der Messung erforderlich sind, auch wenn sie im Moment unwichtig erscheinen.
Ist Text notwendig, so ist er stichwortartig zu halten und soll auf das unbedingt Notwendige beschränkt sein. Das Protokoll besteht aus zwei Teilen, dem Meßprotokoll und der Auswertung.

3.5.2. Meßprotokoll

Das Meßprotokoll wird während des Versuches geführt. Es besteht aus einem einheitlich gestalteten Deckblatt, welches vollständig ausgefüllt wird. Um die Zeit für die Durchführung der Versuche rationell auszunutzen, sollen alle Teile des Deckblattes, die nicht unmittelbar mit der Versuchsdurchführung zu tun haben, bereits in der Vorbereitung fertiggestellt sein.
Die für den Versuch nötigen Geräte werden vor Beginn der Messungen eingetragen. Dabei ist besonders auf den Meßbereich und auf den Skalenwert zu achten. Letzterer gibt bereits Aufschluß über den zu erwartenden Maximalfehler des Meßwertes.
Während der Durchführung der Versuche werden die gemessenen Größen in eine vorbereitete Tabelle bzw. Übersicht mit Tinte oder Kugelschreiber eingetragen. Bereits während des Versuches ist eine Überschlagsrechnung zur Ermittlung des Meßergebnisses zu machen. Nur so können prinzipielle Fehler bei der Versuchsdurchführung vermieden und sinnvolle Versuchsergebnisse gewährleistet werden.
Lassen Sie sich vor dem Verlassen des Labors vom Praktikumsleiter das Meßprotokoll testieren.

3.5.3. Auswertung

Während das Meßprotokoll bereits während des Praktikums fertiggestellt wird, müssen Sie den zweiten und umfangreicheren Teil des Protokolls, die Auswertung, im allgemeinen als Hausarbeit anfertigen.
Von der zum Versuch gehörenden Theorie sollen nur die Gleichungen aufgenommen werden, die für die Ermittlung der Meßergebnisse erforderlich sind. Weiterhin sollte das Schaltbild bzw. eine Skizze des Versuchsaufbaus in der Auswertung erscheinen. Die Berechnungen werden ausführlich und sorgfältig geschrieben aufgeführt. Bei sich wiederholenden Rechnungen genügt es, ein Beispiel in die Auswertung aufzunehmen. Die verbleibenden Meßergebnisse werden übersichtlich (in einer Tabelle) dargestellt.
Vergessen Sie nicht, zu jedem Meßergebnis eine Fehlerrechnung durchzuführen. Auch diese muß ausführlich und sorgfältig in der Auswertung dargestellt und begründet werden. Nur so ist es Ihnen möglich, die Genauigkeit der Versuchsergebnisse einzuschätzen. Ohne Fehlerangabe für das Meßergebnis hat ein Protokoll nur geringen praktischen Wert.
Besondere Aufmerksamkeit ist der grafischen Darstellung von Meßwerten und Versuchsergebnissen zu widmen. Diese müssen in vernünftigen Maßstäben grundsätzlich auf Koordinatenpapier gezeichnet werden. Meistens wird für die grafische Darstellung Millimeterpapier verwendet werden können. Die Kurven müssen ausgezogen sein und einen stetigen Verlauf haben. Die Meßpunkte sind deutlich einzuzeichnen. Die Maßstäbe bei-

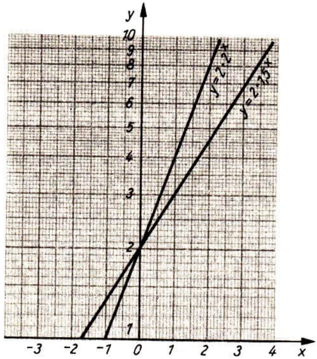


Bild 94

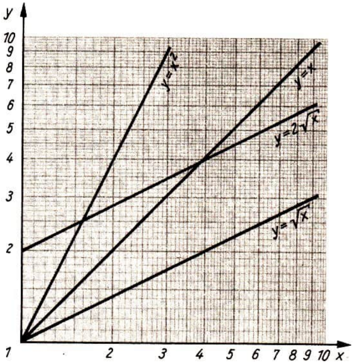


Bild 95

der Koordinaten sind so zu wählen, daß die Kurve etwa unter 45° gegen die Achsen geneigt ist.

Für die Darstellung bestimmter Funktionen gibt es Spezialpapiere. Besteht zwischen zwei physikalischen Größen die Beziehung

$$y = ab^x \quad (a, b \text{ konstant})$$

so gilt

$$\lg y = \lg a + x \lg b$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden in einem Papier, dessen Ordinate logarithmisch und dessen Abszisse linear geteilt ist (Bild 94).

Liegt die Beziehung

$$y = ax^b \quad (a, b \text{ konstant})$$

vor, dann ist

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$

Hier ergibt sich im doppeltlogarithmischen Papier (beide Achsen sind logarithmisch geteilt) eine Gerade (Bild 95).

3.6. Versuchsanleitungen

3.6.1. Bestimmung der Dichte fester Körper

Grundlagen

Die Dichte ist ein wichtiger Materialwert. Für homogene Körper gilt

$$\varrho = \frac{m}{V} \tag{1}$$

(m Masse, V Volumen)

Für nichthomogene Körper gibt (1) die mittlere Dichte an.
Bei der experimentellen Bestimmung der Dichte nach (1) müssen Masse und Volumen des Körpers gemessen werden. Die Masse des Körpers läßt sich mit Waagen recht genau bestimmen. Zur Feststellung des Volumens können verschiedene Verfahren angewendet werden. Es gibt auch Meßmethoden, die die Ermittlung des Volumens umgehen und die Dichtebestimmung auf mehrere Wägungen zurückführen.

Regelmäßige Körper

Bei regelmäßigen Körpern kann das Volumen aus den charakteristischen Abmessungen des Körpers nach den Gleichungen der Stereometrie berechnet werden.

Volumenmessung mit dem Überlaufgefäß

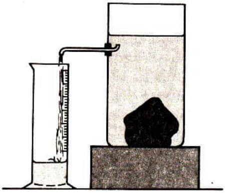


Bild 96

Für unregelmäßige Körper bestimmt man häufig das Volumen durch Verdrängung einer Flüssigkeit. Dazu wird ein Überlaufgefäß mit Flüssigkeit (meist Wasser) gefüllt, der Körper vorsichtig vollständig eingetaucht und das Volumen der ausfließenden Flüssigkeit mit einem Meßzylinder gemessen (Bild 96). Selbstverständlich ist das Verfahren auch für regelmäßige Körper anwendbar.

Dichtebestimmung mit Hilfe der Auftriebsmessung

Von festen Stoffen kann man auch die Dichte bestimmen, ohne das Volumen zu kennen. Dies geschieht durch die Messung des Auftriebs des Körpers in einer Flüssigkeit, in der der zu untersuchende Stoff nicht löslich sein darf. Man verwendet meist Wasser, aber auch Benzin, Öl u.a. Nach dem Prinzip von Archimedes (→ F 4.3.5.) wirkt auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper eine Auftriebskraft, die gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist. Die Auftriebskraft ist daher

$$F_A = \varrho_{Fl} V_{Fl}\, g \tag{2}$$

(V_{Fl} Volumen, ϱ_{Fl} Dichte der verdrängten Flüssigkeit, g Fallbeschleunigung)

Da das Volumen der verdrängten Flüssigkeit gleich dem Volumen des eingetauchten Körpers ist ($V_{Fl} = V$), gilt nach (2)

$$V = \frac{F_A}{\varrho_{Fl} g} \tag{3}$$

Aus (1) folgt mit (3)

$$\varrho = \frac{mg}{F_A} \varrho_{Fl} \tag{4}$$

Das Produkt mg ist das Gewicht des Körpers in Luft ($mg = G_L$), die Auftriebskraft F_A der scheinbare Gewichtsverlust, den der Körper in der Flüssigkeit erfährt, also $F_A = G_L - G_{Fl}$. Damit folgt aus (4)

$$\varrho = \frac{G_L}{G_L - G_{Fl}} \varrho_{Fl} \tag{5}$$

Die Dichte des Körpers kann also durch zwei Gewichtsbestimmungen ermittelt werden, wenn die Dichte der Flüssigkeit, in die der Körper getaucht wird, bekannt ist. Da die Meßfehler beim Wägen klein sind, ist die Dichtebestimmung nach (5) recht genau.
Allerdings wird bei der Auftriebsmessung ein systematischer Fehler durch den Aufhängefaden oder -draht verursacht.

Dichtebestimmung mit dem Pyknometer

Bild 97

Die Dichtebestimmung mit dem Pyknometer (Bild 97) eignet sich besonders für feinkörniges Material und für kleine Körper. Auch bei dieser Methode wird die Volumenbestimmung umgangen und die Dichte durch verschiedene Wägungen ermittelt. Das Pyknometer ist ein Glasfläschchen mit kapillar durchbohrtem, gut eingeschliffenem Stopfen. Die Masse des leeren Pyknometers mit Stopfen ist m_0. Ist das Pyknometer mit Wasser gefüllt, beträgt die Masse m_1. Daraus ergibt sich die Masse des Wassers

$$m_W = m_1 - m_0 \tag{6}$$

Man füllt das zu untersuchende Material in das leere und trokkene Pyknometer (bei feinkörnigem Material etwa $^1/_4$ füllen). Die Wägung ergibt die Masse m_2 des Pyknometers mit Material. Die Masse des Materials allein ist dann

$$m_M = m_2 - m_0 \tag{7}$$

Das Material bleibt im Pyknometer, und man füllt mit Wasser auf (gegebenenfalls Luftblasen beseitigen!). Die erneute Wägung ergibt m_3. Die Masse des von der Versuchssubstanz verdrängten Wassers ist

$$m_{W1} = m_1 + m_M - m_3 \tag{8}$$

Das Volumen des verdrängten Wassers ist gleich dem Volumen V des Materials, es kann aus

$$V = \frac{m_{W1}}{\varrho_W} \tag{9}$$

berechnet werden. ϱ_W ist die Dichte des Wassers. Die Dichte des zu untersuchenden Stoffes ist $\varrho = m_M/V$, mit (9) also

$$\varrho = \frac{m_M}{m_{W1}} \varrho_W \tag{10}$$

Mit (7) und (8) folgt daraus

$$\varrho = \frac{m_2 - m_0}{m_1 + m_2 - m_0 - m_3} \varrho_W \tag{11}$$

Die Ermittlung der Dichte ist damit auf die Durchführung von vier Wägungen zurückgeführt worden:

m_0 Masse des leeren Pyknometers,
m_1 Masse des Pyknometers vollständig mit Wasser gefüllt,
m_2 Masse des Pyknometers mit Material,
m_3 Masse des Pyknometers mit Material und aufgefülltem Wasser

Bestimmt man die Masse des Probekörpers nicht im Pyknometer, so hat man in (11) die Differenz $m_2 - m_0$ nach (7) durch m_M zu ersetzen und erhält

$$\varrho = \frac{m_M}{m_1 + m_M - m_3} \varrho_W \tag{12}$$

In diesem Falle braucht die Masse m_0 des Pyknometers nicht bestimmt zu werden.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Dichte eines regelmäßigen homogenen Körpers durch Wägung und Berechnung seines Volumens aus seinen Abmessungen (Metallzylinder).
2. Bestimmen Sie die Dichte des gleichen Körpers, jedoch durch Volumenmessung mit dem Überlaufgefäß.
3. Bestimmen Sie die Dichte des gleichen Körpers mit Hilfe einer hydrostatischen Waage (Bild 98) nach der Auftriebsmethode.
4. Vergleichen Sie die Meßergebnisse, die nach den einzelnen Meßverfahren erhalten wurden.
5. Bestimmen Sie die Dichte eines feinkörnigen Materials und eines unregelmäßigen Körpers mit dem Pyknometer. Überlegen Sie, welche Reihenfolge der Wägungen zweckmäßig ist.
6. Begründen Sie, weshalb für die Dichtebestimmung des unregelmäßigen Körpers eine Waage mit höherer Empfindlichkeit verwendet werden muß.

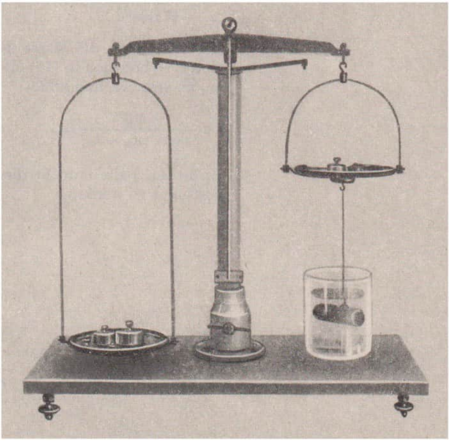


Bild 98

Meßprotokoll

Das Deckblatt des Meßprotokolls und die Zusammenstellung der Meßwerte sind in Tabelle 2 (S. 145, 146) dargestellt.

Tabelle 2.1: **Meßprotokoll**

Versuchsnummer:	Seminargruppe: Gruppe:
Thema: Bestimmung der Dichte fester Körper	
Datum der Durchführung:	Abgabetermin:
Namen:	Unterschrift:

Verwendete Geräte:

Nr.	Art	Technische Daten	
1.	Meßschieber	*MB* 200 mm	*S* 0,1 mm
2.	Meßschraube	*MB* 50 mm	*S* 0,01 mm
3.	Meßzylinder	*MB* 100 ml	*S* 1 ml
4.	Hydrostatische Waage	*MB* 1 kg	*S* 0,01 g
5.	Analysenwaage	*MB* 1 kg	*S* 0,001 g
6.	Überlaufgefäß		
7.	Pyknometer		
8.	Wägesatz		
9.	Probekörper		
10.	Destilliertes Wasser		

Bestätigung der Durchführung:

Tabelle 2.2: **Meßwerte**

zu 1.: Die Abmessungen des Metallzylinders werden mit dem Meßschieber bestimmt.

$h = (38{,}3 \pm 0{,}1)$ mm
$d = (22{,}2 \pm 0{,}1)$ mm
$m = (40{,}16 \pm 0{,}01)$ g

zu 2.: $V = (15 \pm 1)$ ml
$m = (40{,}16 \pm 0{,}01)$ g

zu 3.: $G_L = (40{,}16 \pm 0{,}01)$ p
$G_{Fl} = (25{,}37 \pm 0{,}01)$ p
$\varrho_{Fl} = (0{,}998 \pm 0{,}001)$ g cm^{-3} (Tabellenwert)

zu 5.: Feiner Kies; Meßwerte (in der Reihenfolge der Messung):

$m_0 = (25{,}13 \pm 0{,}01)$ g
$m_2 = (32{,}17 \pm 0{,}01)$ g
$m_3 = (54{,}32 \pm 0{,}01)$ g
$m_1 = (50{,}01 \pm 0{,}01)$ g
$\varrho_W = (0{,}998 \pm 0{,}001)$ g cm^{-3} (Tabellenwert)

Von dem vorgelegten Gestein wird ein Teil abgeschlagen, der in das Pyknometer paßt; Meßwerte:

$m_M = (0{,}651 \pm 0{,}001)$ g
$m_1 = (50{,}012 \pm 0{,}001)$ g
$m_3 = (50{,}393 \pm 0{,}001)$ g

Auswertung

zu 1.: Die Dichte ergibt sich aus (1) und der Gleichung für das Zylindervolumen

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4} \quad \text{zu}$$

$$\varrho = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

$$\varrho = \frac{4 \cdot 40{,}16 \text{ g}}{\pi \cdot 2{,}22^2 \text{ cm}^2 \cdot 3{,}83 \text{ cm}} = 2{,}71 \text{ g cm}^{-3}$$

Relativfehler: $\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + 2\left|\frac{\Delta d}{d}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right|$

$$\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \frac{0{,}01 \text{ g}}{40{,}16 \text{ g}} + 2 \cdot \frac{0{,}1 \text{ mm}}{22{,}2 \text{ mm}} + \frac{0{,}1 \text{ mm}}{38{,}3 \text{ mm}}$$

$$= 0{,}00025 + 0{,}009 + 0{,}0026 = 0{,}01185 \approx 0{,}012 = 1{,}2\,\%$$

Absolutfehler: $|\Delta\varrho| = \left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| \varrho$

$|\Delta\varrho| = 0{,}012 \cdot 2{,}71 \text{ g cm}^{-3} = 0{,}032 \text{ g cm}^{-3}$

Meßergebnis: $\underline{\underline{\varrho = (2{,}71 \pm 0{,}03) \text{ g cm}^{-3}}}$ (Aluminium)

Der Maximalfehler wird vor allem von der Durchmesserbestimmung beeinflußt. Daher sollte dieser genauer gemessen werden (Meßschraube).

zu 2.: $\varrho = \frac{m}{V}$

$$\varrho = \frac{40{,}16 \text{ g}}{15 \text{ cm}^3} = 2{,}68 \text{ g cm}^{-3}$$

Relativfehler: $\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|\frac{\Delta V}{V}\right|$

$$\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \frac{0{,}01 \text{ g}}{40{,}16 \text{ g}} + \frac{1 \text{ cm}^3}{15 \text{ cm}^3} = 0{,}00025 + 0{,}067 \approx 0{,}067 = 6{,}7\,\%$$

Der Fehler der Wägung ist vernachlässigbar klein gegen den Fehler der Volumenbestimmung.

Absolutfehler: $|\Delta\varrho| = \left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| \varrho$

$|\Delta\varrho| = 0{,}067 \cdot 2{,}68 \text{ g cm}^{-3} = 0{,}18 \text{ g cm}^{-3}$

Meßergebnis: $\underline{\underline{\varrho = (2{,}7 \pm 0{,}2) \text{ g cm}^{-3}}}$

zu 3.: Berechnung der Dichte nach (5):

$$\varrho = \frac{G_L}{G_L - G_{Fl}} \varrho_{Fl}$$

$$\varrho = \frac{40{,}16 \text{ p}}{(40{,}16 - 25{,}37) \text{ p}} \cdot 0{,}998 \text{ g cm}^{-3} = 2{,}710 \text{ g cm}^{-3}$$

Relativfehler: $\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \left|\frac{\Delta G_L}{G_L}\right| + \frac{|\Delta G_L| + |\Delta G_{Fl}|}{G_L - G_{Fl}} + \left|\frac{\Delta\varrho_{Fl}}{\varrho_{Fl}}\right|$

$$\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \frac{0{,}01 \text{ p}}{40{,}16 \text{ p}} + \frac{0{,}02 \text{ p}}{14{,}79 \text{ p}} + \frac{0{,}001 \text{ g cm}^{-3}}{0{,}998 \text{ g cm}^{-3}}$$

$$= 0{,}00025 + 0{,}00135 + 0{,}001 = 0{,}0026 = 0{,}26\,\%$$

Absolutfehler: $|\Delta\varrho| = \left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| \varrho$

$|\Delta\varrho| = 0{,}0026 \cdot 2{,}710 \text{ g cm}^{-3} = 0{,}007 \text{ g cm}^{-3}$

Meßergebnis: $\underline{\underline{\varrho = (2{,}710 \pm 0{,}007) \text{ g cm}^{-3}}}$

zu 4.: Vergleich der erhaltenen Versuchsergebnisse

Meßverfahren	ϱ/g cm^{-3}
Messung des Volumens mit dem Überlaufgefäß	2,7 ± 0,2
Messung aller Längen mit dem Meßschieber	2,71 ± 0,03
Auftriebsverfahren	2,710 ± 0,007

zu 5.: Berechnung der Dichte nach (11):

$$\varrho = \frac{m_2 - m_0}{m_1 + m_2 - m_0 - m_3}\,\varrho_W$$

$$\varrho = \frac{32{,}17\ \text{g} - 25{,}13\ \text{g}}{50{,}01\ \text{g} + 32{,}17\ \text{g} - 25{,}13\ \text{g} - 54{,}32\ \text{g}} \cdot 0{,}998\ \text{g cm}^{-3}$$

$$= 2{,}57\ \text{g cm}^{-3}$$

Relativfehler: Wir setzen den Zähler des Bruches in der Bestimmungsgleichung für die Dichte gleich Z, den Nenner gleich N. Die Absolutfehler von Z und N sind:

$$|\Delta Z| = |\Delta m_2| + |\Delta m_0| = 0{,}01\ \text{g} + 0{,}01\ \text{g} = 0{,}02\ \text{g}$$

$$|\Delta N| = |\Delta m_1| + |\Delta m_2| + |\Delta m_0| + |\Delta m_3| = 0{,}04\ \text{g}$$

$$\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \left|\frac{\Delta Z}{Z}\right| + \left|\frac{\Delta N}{N}\right| + \left|\frac{\Delta\varrho_W}{\varrho_W}\right|$$

$$= \frac{0{,}02\ \text{g}}{7{,}04\ \text{g}} + \frac{0{,}04\ \text{g}}{2{,}73\ \text{g}} + \frac{0{,}001\ \text{g cm}^{-3}}{0{,}998\ \text{g cm}^{-3}}$$

$$= 0{,}0028 + 0{,}015 + 0{,}001 = 0{,}0188 = 1{,}88\,\%$$

Absolutfehler: $|\Delta\varrho| = \left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right|\varrho$

$$|\Delta\varrho| = 0{,}0188 \cdot 2{,}57\ \text{g cm}^{-3} = 0{,}048\ \text{g cm}^{-3}$$

Meßergebnis: $\underline{\underline{\varrho = (2{,}57 \pm 0{,}05)\ \text{g cm}^{-3}}}$

Berechnung der Dichte nach (12):

$$\varrho = \frac{m_M}{m_1 + m_M - m_3}\,\varrho_W$$

$$\varrho = \frac{0{,}651\ \text{g}}{50{,}012\ \text{g} + 0{,}651\ \text{g} - 50{,}393\ \text{g}} \cdot 0{,}998\ \text{g cm}^{-3} = 2{,}41\ \text{g cm}^{-3}$$

Relativfehler: $\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \left|\frac{\Delta Z}{Z}\right| + \left|\frac{\Delta N}{N}\right| + \left|\frac{\Delta\varrho_W}{\varrho_W}\right|$

Mit $|\Delta Z| = 0{,}001$ g und $|\Delta N| = 0{,}003$ g folgt

$$\left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right| = \frac{0{,}001\ \text{g}}{0{,}651\ \text{g}} + \frac{0{,}003\ \text{g}}{0{,}270\ \text{g}} + \frac{0{,}001\ \text{g cm}^{-3}}{0{,}998\ \text{g cm}^{-3}}$$

$$= 0{,}0015 + 0{,}0111 + 0{,}0010 = 0{,}0136 = 1{,}36\,\%$$

Absolutfehler: $|\Delta\varrho| = \left|\frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right|\varrho$

$|\Delta\varrho| = 0{,}0136 \cdot 2{,}41\ \text{g cm}^{-3} = 0{,}033\ \text{g cm}^{-3}$

Meßergebnis: $\underline{\underline{\varrho = (2{,}41 \pm 0{,}03)\ \text{g cm}^{-3}}}$

zu 6.: Da die Masse des unregelmäßigen Körpers kleiner als 1 g ist und mindestens drei geltende Ziffern bestimmt werden müssen, wenn der Fehler nicht wesentlich größer als der für die Dichte von Kies werden soll, darf der Fehler der Wägung nicht größer als 10^{-3} g sein.

Bemerkung: Die zu 5. durchgeführten Fehlerrechnungen können falsch sein. Es wurde nicht berücksichtigt, daß gleiche fehlerbehaftete Größen im Zähler *und* Nenner von (11) und (12) stehen und damit den Fehler des Ergebnisses in entgegengesetzter Weise beeinflussen können. Zur Gegenüberstellung soll deshalb die letzte Fehlerfortpflanzung nochmals mit Differentialrechnung durchgerechnet werden, indem das totale Differential gebildet wird (→ 1.5.3.2.).

Aus (12) $\varrho = \frac{m_M}{m_1 + m_M - m_3}\varrho_W$

folgen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\varrho}{\partial m_M} = \frac{(m_1 - m_3)\varrho_W}{(m_1 + m_M - m_3)^2} = \frac{-0{,}381 \cdot 0{,}998}{0{,}27^2}\ \text{cm}^{-3} = -5{,}22\ \text{cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial m_1} = \frac{-m_M\varrho_W}{(m_1 + m_M - m_3)^2} = \frac{-0{,}651 \cdot 0{,}998}{0{,}27^2}\ \text{cm}^{-3} = -8{,}91\ \text{cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial m_3} = \frac{m_M\varrho_W}{(m_1 + m_M - m_3)^2} = \frac{0{,}651 \cdot 0{,}998}{0{,}27^2}\ \text{cm}^{-3} = 8{,}91\ \text{cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial\varrho}{\partial\varrho_W} = \frac{m_M}{m_1 + m_M - m_3} = \frac{0{,}651}{50{,}012 + 0{,}651 - 50{,}393} = 2{,}41$$

Totales Differential:

$$\mathrm{d}\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial m_M}\mathrm{d}m_M + \frac{\partial\varrho}{\partial m_1}\mathrm{d}m_1 + \frac{\partial\varrho}{\partial m_3}\mathrm{d}m_3 + \frac{\partial\varrho}{\partial\varrho_W}\mathrm{d}\varrho_W$$

Die Differentiale werden durch die Fehlerbeträge ersetzt:

$$|\Delta\varrho| = (5{,}22 \cdot 0{,}001 + 8{,}91 \cdot 0{,}001 + 8{,}91 \cdot 0{,}001 + 2{,}41 \cdot 0{,}001)\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$
$$= 25{,}45 \cdot 0{,}001\ \mathrm{g\ cm^{-3}} = 0{,}02545\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$

Im vorliegenden Falle stimmt unser gerundetes Ergebnis mit dem zuvor erhaltenen überein.

3.6.2. Bestimmung der Federkonstanten einer Schraubenfeder

Grundlagen

Wirkt auf eine Schraubenfeder eine Kraft, etwa das Gewicht eines angehängten Körpers der Masse m, so ruft diese Kraft eine Längenänderung y der Feder hervor. Die Längenänderung ist der einwirkenden Kraft proportional. In der Feder entsteht eine Federkraft von gleichem Betrage wie die von außen wirkende Kraft. Die Federkraft F ist der äußeren Kraft entgegengerichtet. Für die Federkraft gilt

$$F = -ky \tag{1}$$

Der Proportionalitätsfaktor k heißt *Richtgröße* oder *Federkonstante.* k hängt von den Abmessungen der Feder und von ihrem Material ab.
Lenkt man den angehängten Körper aus seiner Gleichgewichtslage und läßt ihn los, dann führt er Schwingungen um seine Gleichgewichtslage aus. Diese Schwingung genügt der Differentialgleichung

$$m\ddot{y} + ky = 0 \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung folgt aus (1), wenn man die Grundgleichung der Dynamik $F = ma = m\ddot{y}$ anwendet. Eine Lösung von (2) ist

$$y = y_\mathrm{m} \sin \omega t \tag{3}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

(y Elongation, y_m Amplitude, ω Kreisfrequenz)

(3) beschreibt eine Sinusschwingung (→ F 10.2.).

Zwischen der Periodendauer T, der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω besteht die Beziehung

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt für die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6}$$

Die Federkonstante läßt sich aus dem Torsionsmodul G des Federmaterials und den Abmessungen der Feder errechnen:

$$k = \frac{G d^4}{8 N D_m^3} \tag{7}$$

(d Drahtdurchmesser, N Windungszahl, D_m mittlerer Windungsdurchmesser)

Aufgaben

1. Nehmen Sie für 2 Schraubenfedern die Längenänderung in Abhängigkeit von der einwirkenden Kraft auf und tragen Sie die Wertepaare in ein Diagramm ein. Welche Kurve ergibt sich? Berechnen Sie die Federkonstanten nach (1).
2. Lassen Sie Körper verschiedener Masse an den Schraubenfedern schwingen; bestimmen Sie die Periodendauer jeweils aus 20 Perioden. Berechnen Sie die Federkonstanten nach (6).
3. Bestimmen Sie die Abmessungen der Federn und berechnen Sie nach (7) die Torsionsmoduln.
4. Weisen Sie nach, daß (3) die Differentialgleichung (2) erfüllt.
5. Erläutern Sie, wie sich die Federkonstanten einer harten und einer weichen Feder voneinander unterscheiden.
6. Zwei gleiche Schraubenfedern (Federkonstante k) werden einmal in Reihe, zum andern parallel geschaltet. Wie groß ist in beiden Fällen die resultierende Federkonstante?

Meßprotokoll

Das Deckblatt des Meßprotokolls und die Zusammenstellung der Meßwerte sind in Tabelle 3 (Seite 152, 153) dargestellt.

Tabelle 3.1: **Meßprotokoll**

Versuchsnummer:	Seminargruppe: Gruppe:
Thema: Bestimmung der Federkonstanten einer Schraubenfeder	
Datum der Durchführung:	Abgabetermin:

Namen:	Unterschrift:

Verwendete Geräte:

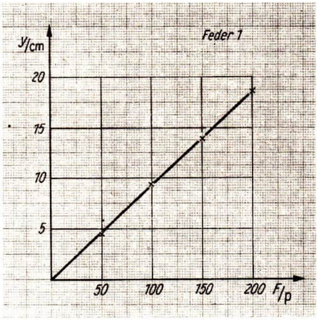
Nr.	Art	Technische Daten	
1.	2 Schraubenfedern		
2.	Stativ mit Vertikalmaßstab	*MB* 1000 mm	*S* 1 mm
3.	Massenstücke mit Haken	50 g	
4.	Meßschieber	*MB* 200 mm	*S* 0,1 mm
5.	Meßschraube	*MB* 20 mm	*S* 0,01 mm
6.	Stoppuhr	*MB* 15 min	*S* 0,1 s
7.	Waage	*MB* 1 kg	*S* 0,1 g

Bestätigung der Durchführung:

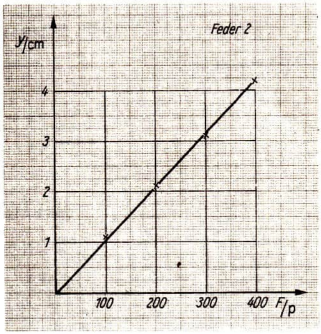
Tabelle 3.2: **Meßwerte**

zu 1.:

Feder *1* $F/_{\mathrm{p}}$	$y/_{\mathrm{cm}}$	Feder *2* $F/_{\mathrm{p}}$	$y/_{\mathrm{cm}}$
50 ± 0,5	4,5 ± 0,2	100 ± 0,5	1,1 ± 0,2
100 ± 0,5	9,4 ± 0,2	200 ± 0,5	2,1 ± 0,2
150 ± 0,5	13,9 ± 0,2	300 ± 0,5	3,1 ± 0,2
200 ± 0,5	18,6 ± 0,2	400 ± 0,5	4,2 ± 0,2



((T 3.1))



((T 3.2))

zu 2.:

Feder *1* $m/_{\mathrm{g}}$	$20\,T/_{\mathrm{s}}$	Feder *2* $m/_{\mathrm{g}}$	$20\,T/_{\mathrm{s}}$
250 ± 0,5	19,1 ± 0,1	250 ± 0,5	6,4 ± 0,1
	19,2 ± 0,1		6,5 ± 0,1
	19,3 ± 0,1		6,5 ± 0,1
	19,2 ± 0,1		6,6 ± 0,1
	19,2 ± 0,1		6,5 ± 0,1

$m/_{\mathrm{g}}$	$20\,T/_{\mathrm{s}}$	$m/_{\mathrm{g}}$	$20\,T/_{\mathrm{s}}$
400 ± 0,5	24,2 ± 0,1	400 ± 0,5	8,2 ± 0,1
	24,3 ± 0,1		8,3 ± 0,1
	24,3 ± 0,1		8,2 ± 0,1
	24,4 ± 0,1		8,1 ± 0,1
	24,3 ± 0,1		8,2 ± 0,1

zu 3.:

Feder *1*

$d = (0{,}80 \pm 0{,}01)$ mm
$D_{\mathrm{m}} = (20{,}8 \pm 0{,}1)$ mm
$N = 53$

Feder *2*

$d = (1{,}50 \pm 0{,}01)$ mm
$D_{\mathrm{m}} = (20{,}1 \pm 0{,}1)$ mm
$N = 60$

Auswertung

zu 1.: Die Federkonstante wird aus (1) berechnet:

$$k = \left|\frac{F}{y}\right|$$

Feder *1*: Für das erste Wertepaar ergibt die Rechnung

$$k = \frac{50\ \text{p}}{4{,}5\ \text{cm}} = \frac{5\ \text{kp}}{4{,}5\ \text{m}} = \frac{5 \cdot 9{,}81\ \text{N}}{4{,}5\ \text{m}} = 10{,}90\ \text{N m}^{-1}$$

Zusammenstellung der auf diese Weise errechneten Ergebnisse:

	Feder *1* $k_{/\text{N m}^{-1}}$	Feder *2* $k_{/\text{N m}^{-1}}$
	10,90	89,15
	10,43	93,40
	10,58	94,90
	10,54	93,40
Mittelwert:	10,61	92,71

Relativfehler der Federkonstante:

$$\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \left|\frac{\Delta F}{F}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Danach ergibt sich für Feder *1* (erstes Wertepaar):

$$\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \frac{0{,}5\ \text{p}}{50\ \text{p}} + \frac{0{,}2\ \text{cm}}{4{,}5\ \text{cm}} = 0{,}01 + 0{,}0445 = 0{,}0545$$

Feder *1* (viertes Wertepaar):

$$\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \frac{0{,}5\ \text{p}}{200\ \text{p}} + \frac{0{,}2\ \text{cm}}{18{,}6\ \text{cm}} = 0{,}0025 + 0{,}0107 = 0{,}0132$$

Feder *2* (erstes Wertepaar):

$$\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \frac{0{,}5\ \text{p}}{100\ \text{p}} + \frac{0{,}2\ \text{cm}}{1{,}1\ \text{cm}} = 0{,}0050 + 0{,}1818 = 0{,}1868$$

Feder *2* (viertes Wertepaar):

$$\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \frac{0{,}5\ \text{p}}{400\ \text{p}} + \frac{0{,}2\ \text{cm}}{4{,}2\ \text{cm}} = 0{,}0013 + 0{,}0475 = 0{,}0488$$

Die Ergebnisse zeigen, daß die aus den ersten Wertepaaren berechneten Federkonstanten mit größeren Fehlern behaftet sind als die vierten. Man sollte daher nicht mit zu geringen Belastungen arbeiten. Wir werden deshalb bei der Mittelwertbildung für k die jeweils aus den ersten Wertepaaren errechneten Werte unberücksichtigt lassen; zumal sie auch stark von den übrigen drei

Werten abweichen. Damit erhalten wir folgende korrigierte Mittelwerte für k:

Feder *1*	Feder *2*
$k = 10{,}52\ \mathrm{N\,m^{-1}}$	$k = 93{,}9\ \mathrm{N\,m^{-1}}$

Aus den für die vierten Wertepaare ermittelten Relativfehlern ergeben sich folgende Absolutfehler $|\Delta k| = \left|\frac{\Delta k}{k}\right| k$:

Feder *1*: $|\Delta k| = 10{,}52\ \mathrm{N\,m^{-1}} \cdot 0{,}0132 = 0{,}139\ \mathrm{N\,m^{-1}}$

Feder *2*: $|\Delta k| = 93{,}9\ \mathrm{N\,m^{-1}} \cdot 0{,}0488 = 4{,}6\ \mathrm{N\,m^{-1}}$

Endergebnisse:

Feder *1*: $\underline{\underline{k = (10{,}5 \pm 0{,}1)\ \mathrm{N\,m^{-1}}}}$

Feder *2*: $\underline{\underline{k = (94 \pm 5)\ \mathrm{N\,m^{-1}}}}$

Der lineare Kurvenverlauf in den Diagrammen bedeutet: $F \sim y$; die Elastizitätsgrenze der Federn wurde nicht überschritten.

zu 2.: Aus dem Meßprotokoll werden entnommen:

Feder *1*: $m = (250 \pm 0{,}5)\ \mathrm{g}$

$$T = \frac{19{,}2 \pm 0{,}1}{20}\ \mathrm{s} = (0{,}960 \pm 0{,}005)\ \mathrm{s}$$

Aus (6) folgt

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

$$k = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}25\ \mathrm{kg}}{0{,}9216\ \mathrm{s^2}} = 10{,}71\ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

Relativfehler: $\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \left|\frac{\Delta m}{m}\right| + 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right|$

$$\left|\frac{\Delta k}{k}\right| = \frac{0{,}5\ \mathrm{g}}{250\ \mathrm{g}} + 2 \cdot \frac{0{,}005\ \mathrm{s}}{0{,}960\ \mathrm{s}} = 0{,}0020 + 0{,}0104 = 0{,}0124$$

Absolutfehler: $|\Delta k| = \left|\frac{\Delta k}{k}\right| k$

$$|\Delta k| = 0{,}0124 \cdot 10{,}71\ \mathrm{N\,m^{-1}} = 0{,}133\ \mathrm{N\,m^{-1}}$$

Meßergebnis: $\underline{\underline{k = (10{,}7 \pm 0{,}1)\ \mathrm{N\,m^{-1}}}}$

Entsprechende Rechnung ergibt für

$$m = (400 \pm 0{,}5)\ \mathrm{g}$$

$$T = \frac{24{,}3 \pm 0{,}1}{20}\ \mathrm{s} = (1{,}215 \pm 0{,}005)\ \mathrm{s}$$

$$\underline{\underline{k = (10{,}7 \pm 0{,}1)\ \mathrm{N\,m^{-1}}}}$$

Feder *2*: $m = (250 \pm 0{,}5)\ \mathrm{g}$

$$T = \frac{6{,}5 \pm 0{,}1}{20}\ \mathrm{s} = (0{,}325 \pm 0{,}005)\ \mathrm{s}$$

$$\underline{\underline{k = (93 \pm 3)\ \mathrm{N\,m^{-1}}}}$$

$$m = (400 \pm 0{,}5)\ \mathrm{g}$$

$$T = \frac{8{,}2 \pm 0{,}1}{20}\ \mathrm{s} = (0{,}410 \pm 0{,}005)\ \mathrm{s}$$

$$\underline{\underline{k = (94 \pm 2)\ \mathrm{N\,m^{-1}}}}$$

zu 3.: Aus (7) folgt

$$G = \frac{8kND_\mathrm{m}^3}{d^4}$$

Feder *1*: $G = \dfrac{8 \cdot 10{,}6\ \mathrm{N} \cdot 20{,}8^3\ \mathrm{mm^3} \cdot 53}{0{,}8^4\ \mathrm{mm^4} \cdot \mathrm{m}} = 0{,}988 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N\,m^{-2}}$

Relativfehler: $\left|\dfrac{\Delta G}{G}\right| = \left|\dfrac{\Delta k}{k}\right| + 3\left|\dfrac{\Delta D_\mathrm{m}}{D_\mathrm{m}}\right| + 4\left|\dfrac{\Delta d}{d}\right|$

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| = \frac{0{,}2}{10{,}6} + \frac{3 \cdot 0{,}1}{20{,}8} + \frac{4 \cdot 0{,}01}{0{,}80}$$

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| = 0{,}0187 + 0{,}0144 + 0{,}0500$$

$$= 0{,}0831$$

Absolutfehler: $|\Delta G| = \left|\dfrac{\Delta G}{G}\right| G$

$$|\Delta G| = 0{,}0831 \cdot 0{,}988 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

$$= 0{,}082 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

Ergebnis: $\underline{\underline{G = (1{,}00 \pm 0{,}08) \cdot 10^{11}\ \mathrm{N\,m^{-2}}}}$

Feder *2*: Entsprechende Rechnung ergibt

$$\underline{\underline{G = (0{,}72 \pm 0{,}05) \cdot 10^{11}\ \mathrm{N\,m^{-2}}}}$$

zu 4.: Aus (3) ist $\ddot{y}$ zu bilden:

$$\dot{y} = \omega y_m \cos \omega t$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y_m \sin \omega t$$

Das ist in (2) einzusetzen. Man erhält mit y aus (3)

$$-m\omega^2 y_m \sin \omega t + k y_m \sin \omega t = 0$$

Nach (4) ist $k = m\omega^2$. Damit wird

$$-m\omega^2 y_m \sin \omega t + m\omega^2 y_m \sin \omega t = 0$$

(3) erfüllt die Differentialgleichung (2).

zu 5.: Je härter die Feder, um so größer die Federkonstante.

zu 6.: Reihenschaltung: $k_{ers} = \frac{1}{2} k$ Parallelschaltung: $k_{ers} = 2k$

3.6.3. Widerstandsbestimmung

● **Grundlagen**

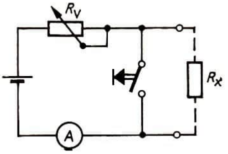


Bild 99

Die Messung von Widerständen kann mit einem direkt anzeigenden Widerstandsmesser (Ohmmeter), mit einer Wheatstoneschen Brücke (→ F 7.3.4.) oder durch gleichzeitige Spannungs- und Stromstärkemessung mit Hilfe von Vielfachmeßinstrumenten erfolgen.

Direkt anzeigende Widerstandsmesser besitzen eine eingebaute Spannungsquelle, einen Strommesser und einen Abgleichwiderstand R_V nach Bild 99. Der Abgleichwiderstand wird bei kurzgeschlossenen Meßklemmen so eingestellt, daß der Strommesser gerade Vollausschlag anzeigt ($\triangleq R_x = 0\,\Omega$). Da für U = const $R \sim 1/I$ ist, kann der Strommesser direkt in Ohmwerten geeicht werden. Dabei ergeben sich eine starke Zusammendrängung der höheren Widerstandswerte im unteren Skalenbereich und somit relativ hohe Fehlergrenzen.

In ähnlicher Form können Widerstandswerte auch durch gleichzeitige *Spannungs- und Stromstärkemessungen* ermittelt werden. Dieses Verfahren wird insbesondere dann angewendet, wenn der Widerstand von Bauelementen direkt oder indirekt von der Betriebsspannung abhängig ist. Dies ist insbesondere bei Halbleitern und bei Metallwiderständen, die bei hohen Temperaturen betrieben werden (Glühlampen), der Fall.

Für die gleichzeitige Messung von Spannung und Stromstärke stehen zur Verfügung

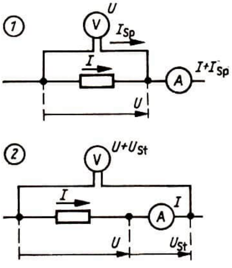


Bild 100

1. die spannungsrichtige Schaltung (Bild 100.1)
2. die stromrichtige Schaltung (Bild 100.2)

In beiden Schaltungen ergeben sich bei Vernachlässigung der Innenwiderstände der Meßgeräte, also bei Ermittlung des Widerstandes R_x aus

$$R_x = \frac{U}{I} \tag{1}$$

systematische Fehler. Diese können jedoch, wenn die Innenwiderstände der Meßgeräte bekannt sind, erfaßt und korrigiert werden. Durch Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze ergeben sich für die spannungsrichtige Schaltung mit dem Innenwiderstand R_{Sp} des Spannungsmessers

$$R_x = \frac{U}{I - \dfrac{U}{R_{\text{Sp}}}} \tag{2}$$

für die stromrichtige Schaltung mit dem Innenwiderstand R_{St} des Strommessers

$$R_x = \frac{U - IR_{\text{St}}}{I} \tag{3}$$

Bei Vielfachmeßinstrumenten werden meist nicht die vom *Meßbereich* U_{M} bzw. I_{M} abhängigen Innenwiderstände, sondern für die Spannungsmeßbereiche der Wert $r = R_{\text{Sp}}/U_{\text{M}}$ in Ohm/Volt, für die Stromstärkemeßbereiche der Spannungsabfall U_{St} am Gerät bei Vollausschlag, also meßbereichunabhängige Werte, angegeben. Aus diesen Werten können die Innenwiderstände für den jeweiligen Meßbereich ermittelt werden:

$$R_{\text{Sp}} = r\,U_{\text{M}} \tag{4}$$

$$R_{\text{St}} = \frac{U_{\text{St}}}{I_{\text{M}}} \tag{5}$$

Die Fehlergrenzen elektrischer Meßgeräte werden meist durch die Klasse angegeben (→ 1.3.).
Für jeden Meßbereich ergibt sich dann der ausschlagunabhängige Absolutfehler

$$|\Delta U| = 0{,}01\,K_{\text{Sp}}\,U_{\text{M}} \tag{6}$$

$$|\Delta I| = 0{,}01\,K_{\text{St}}\,I_{\text{M}} \tag{7}$$

(K_{Sp} Klasse des Spannungsmessers;
K_{St} Klasse des Strommessers)

Die relativen Fehler $\left|\frac{\Delta U}{U}\right|$ bzw. $\left|\frac{\Delta I}{I}\right|$ einer Spannungs- bzw. Stromstärkemessung sind wegen ΔU bzw. $\Delta I = \text{const}$ bei klei-

nen Ausschlägen verhältnismäßig groß; elektrische Meßgeräte sollten daher nach Möglichkeit nicht im unteren Drittel des jeweiligen Meßbereiches verwendet werden.
Sinnvoll konstruierte Geräte haben eine Meßbereichstufung, die es gestattet, bei Meßwerten von etwa einem Drittel des Meßbereiches auf die nächstempfindlichere Stufe umzuschalten.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie den Widerstandswert eines Drahtwiderstandes bei etwa 6 V Wechselspannung und den Widerstandswert eines Schichtwiderstandes bei etwa 8 V Wechselspannung durch gleichzeitige Spannungs- und Stromstärkemessung

1.1. in der spannungsrichtigen Schaltung

1.1.1. R_{x11} ohne Korrektur nach (1),

1.1.2. R_{x12} mit Korrektur nach (2),

1.2. in der stromrichtigen Schaltung

1.2.1. R_{x21} ohne Korrektur nach (1),

1.2.2. R_{x22} mit Korrektur nach (3).

2. Berechnen Sie die relativen systematischen Fehler, die sich bei Vernachlässigung der Gerätewiderstände ergeben, aus

$$\left|\frac{\delta R}{R}\right|_1 = \left|\frac{R_{x12} - R_{x11}}{R_{x12}}\right| \tag{8}$$

bzw.

$$\left|\frac{\delta R}{R}\right|_2 = \left|\frac{R_{x22} - R_{x21}}{R_{x22}}\right| \tag{9}$$

3. Berechnen Sie für die Ergebnisse von 1.1.2. und 1.2.2. die maximalen relativen und absoluten Fehler, die sich aus den Fehlergrenzen der Meßgeräte ergeben.
Bei den Berechnungen sollen die Korrekturglieder in (2) bzw. (3) vernachlässigt werden.

4. Vergleichen Sie die relativen systematischen und die relativen maximalen Fehler miteinander und entscheiden Sie, wann eine Berücksichtigung der Gerätewiderstände sinnvoll ist.

Das Deckblatt des Meßprotokolls und die Zusammenstellung der Meßwerte sind in Tabelle 4 (S. 160, 161) dargestellt.

Tabelle 4.1: **Meßprotokoll**

Versuchsnummer:	Seminargruppe: Gruppe:
Thema: Widerstandsbestimmung	
Datum der Durchführung:	Abgabetermin:

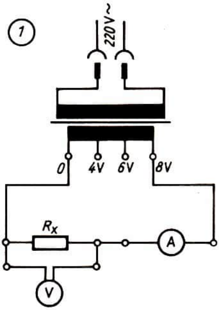
Namen:	Unterschrift:

Verwendete Geräte:

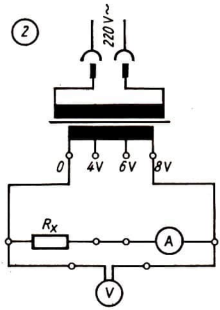
Nr.	Art	Technische Daten
1.	Transformator	220 V/4/6/8 V
2.	Vielfachmeßgerät Mellenbach (verwendet als Spannungsmesser)	Innenwiderstand 4 kΩ V^{-1} Klasse 2,5 bei Wechselstrom
3.	Vielfachmeßgerät EAW (verwendet als Strommesser)	Spannungsabfall bei Vollausschlag 500 mV Klasse 1,5 bei Wechselstrom

Bestätigung der Durchführung:

Tabelle 4.2: **Meßwerte**



Spannungsrichtige Schaltung



Stromrichtige Schaltung

1. Schichtwiderstand

	$U_{/V}$	$U_{M/V}$	$\Delta U_{/V}$	$I_{/mA}$	$I_{M/mA}$	$\Delta I_{/mA}$
1.1.	7,90	10	0,25	1,41	1,5	$2{,}25 \cdot 10^{-2}$
1.2.	8,33	10	0,25	1,22	1,5	$2{,}25 \cdot 10^{-2}$

2. Drahtwiderstand

				$I_{/A}$	$I_{M/A}$	$\Delta I_{/A}$
1.1.	5,85	10	0,25	0,72	1,5	$2{,}25 \cdot 10^{-2}$
1.2.	6,10	10	0,25	0,72	1,5	$2{,}25 \cdot 10^{-2}$

Innenwiderstand des Spannungsmessers nach (4), Meßbereich 10 V:

$$R_{Sp} = r\,U_M = 4\ \mathrm{k\Omega\,V^{-1}} \cdot 10\ \mathrm{V} = 40\ \mathrm{k\Omega}$$

Innenwiderstand des Strommessers nach (5), Meßbereich 1,5 A:

$$R_{St} = \frac{U_{St}}{I_M} = \frac{0{,}5\ \mathrm{V}}{1{,}5\ \mathrm{A}} = 0{,}333\ \Omega$$

Innenwiderstand des Strommessers, Meßbereich 1,5 mA:

$$R_{St} = \frac{0{,}5\ \mathrm{V}}{1{,}5\ \mathrm{mA}} = 333\ \Omega$$

Auswertung

1. Drahtwiderstand

zu 1.1.1.: $R_{x11} = \dfrac{5{,}85\ \text{V}}{0{,}72\ \text{A}} = 8{,}13\ \Omega$

zu 1.1.2.: $R_{x12} = \dfrac{5{,}85\ \text{V}}{0{,}72\ \text{A} - \dfrac{5{,}85\ \text{V}}{40\ \text{k}\Omega}} = 8{,}13\ \Omega$

zu 1.2.1.: $R_{x21} = \dfrac{6{,}10\ \text{V}}{0{,}72\ \text{A}} = 8{,}48\ \Omega$

zu 1.2.2.: $R_{x22} = \dfrac{6{,}1\ \text{V} - 0{,}72\ \text{A} \cdot 0{,}333\ \Omega}{0{,}72\ \text{A}} = 8{,}14\ \Omega$

zu 2.1.: $\left|\dfrac{\delta R}{R}\right|_1 = \left|\dfrac{(8{,}13 - 8{,}13)\ \Omega}{8{,}13\ \Omega}\right| = 0$

zu 2.2.: $\left|\dfrac{\delta R}{R}\right|_2 = \left|\dfrac{(8{,}14 - 8{,}48)\ \Omega}{8{,}48\ \Omega}\right| = 4{,}0 \cdot 10^{-2} = 4{,}0\,\%$

zu 3.: Relative Fehler: $\left|\dfrac{\Delta R}{R}\right| = \left|\dfrac{\Delta U}{U}\right| + \left|\dfrac{\Delta I}{I}\right|$

Spannungsrichtige Schaltung:

$$\left|\frac{\Delta R_{x12}}{R_{x12}}\right| = \frac{0{,}25\ \text{V}}{5{,}85\ \text{V}} + \frac{2{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{A}}{0{,}72\ \text{A}} = (4{,}3 + 3{,}1) \cdot 10^{-2} = 7{,}4\,\%$$

Stromrichtige Schaltung:

$$\left|\frac{\Delta R_{x22}}{R_{x22}}\right| = \frac{0{,}25\ \text{V}}{6{,}1\ \text{V}} + \frac{2{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{A}}{0{,}72\ \text{A}} = (4{,}1 + 3{,}1) \cdot 10^{-2} = 7{,}2\,\%$$

Absolute Fehler: $|\Delta R| = \left|\dfrac{\Delta R}{R}\right| R$

$$|\Delta R_{x12}| = 8{,}13\ \Omega \cdot 7{,}4 \cdot 10^{-2} = 0{,}60\ \Omega$$

$$|\Delta R_{x22}| = 8{,}14\ \Omega \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-2} = 0{,}59\ \Omega$$

2. Schichtwiderstand

zu 1.1.1.: $R_{x11} = \dfrac{7{,}90\ \text{V}}{1{,}41\ \text{mA}} = 5{,}60\ \text{k}\Omega$

zu 1.1.2.: $R_{x12} = \dfrac{7{,}90\ \text{V}}{1{,}41\ \text{mA} - \dfrac{7{,}90\ \text{V}}{40\ \text{k}\Omega}} = 6{,}53\ \text{k}\Omega$

zu 1.2.1.: $$R_{x21} = \frac{8{,}33\ \mathrm{V}}{1{,}22\ \mathrm{mA}} = 6{,}83\ \mathrm{k\Omega}$$

zu 1.2.2.: $$R_{x22} = \frac{8{,}33\ \mathrm{V} - 1{,}22\ \mathrm{mA} \cdot 333\ \Omega}{1{,}22\ \mathrm{mA}} = 6{,}50\ \mathrm{k\Omega}$$

zu 2.1.: $$\left|\frac{\delta R}{R}\right|_1 = \left|\frac{(6{,}53 - 5{,}60)\ \mathrm{k\Omega}}{6{,}53\ \mathrm{k\Omega}}\right| = 14{,}2 \cdot 10^{-2} = 14{,}2\,\%$$

zu 2.2.: $$\left|\frac{\delta R}{R}\right|_2 = \left|\frac{(6{,}50 - 6{,}83)\ \mathrm{k\Omega}}{6{,}50\ \mathrm{k\Omega}}\right| = 5{,}1 \cdot 10^{-2} = 5{,}1\,\%$$

zu 3.: Spannungsrichtige Schaltung:

$$\left|\frac{\Delta R_{x12}}{R_{x12}}\right| = \frac{0{,}25\ \mathrm{V}}{7{,}90\ \mathrm{V}} + \frac{2{,}25 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A}}{1{,}41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}} = (3{,}2 + 1{,}6) \cdot 10^{-2} = 4{,}8\,\%$$

Stromrichtige Schaltung:

$$\left|\frac{\Delta R_{x22}}{R_{x22}}\right| = \frac{0{,}25\ \mathrm{V}}{8{,}33\ \mathrm{V}} + \frac{2{,}25 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{A}}{1{,}22 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}} = (3{,}0 + 1{,}8) \cdot 10^{-2} = 4{,}8\,\%$$

$$|\Delta R_{x12}| = 6{,}53\ \mathrm{k\Omega} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-2} = 0{,}31\ \mathrm{k\Omega}$$

$$|\Delta R_{x22}| = 6{,}50\ \mathrm{k\Omega} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-2} = 0{,}31\ \mathrm{k\Omega}$$

Zusammenfassung der Meßergebnisse

	R_{x11} (unkorrigiert)	R_{x12} (korrigiert)	R_{x21} (unkorrigiert)	R_{x22} (korrigiert)
Drahtwiderstand	8,1 Ω	(8,1 ± 0,6) Ω	8,5 Ω	(8,1 ± 0,6) Ω
Schichtwiderstand	5,6 kΩ	(6,5 ± 0,3) kΩ	6,8 kΩ	(6,5 ± 0,3) kΩ

zu 4.: Die maximalen relativen Fehler betragen beim Drahtwiderstand etwa 7 %, beim Schichtwiderstand etwa 5 %. Die höheren Werte beim Drahtwiderstand ergeben sich dadurch, daß hier zufällig die Instrumentenausschläge sowohl bei der Spannungs- als auch bei der Stromstärkemessung etwas niedriger lagen als bei dem Schichtwiderstand.

Die systematischen Fehler, die sich bei Vernachlässigung der Gerätewiderstände ergeben, sind sehr unterschiedlich. Insbesondere beim Schichtwiderstand liegt der in der spannungsrichtigen Schaltung ohne Berücksichtigung des Spannungsmesserwiderstandes errechnete Wert weit außerhalb des Bereiches, der sich bei korrekter Berechnung, also bei Berücksichtigung des Spannungsmesserwiderstandes und der Fehlergrenzen der Meßgeräte, ergibt.

Eine Vernachlässigung der Gerätewiderstände ist dann zulässig, wenn

- in der spannungsrichtigen Schaltung $R_{Sp} \gg R_x$,
- in der stromrichtigen Schaltung $R_{St} \ll R_x$

ist (Bild 100).
Diese Bedingung ist lediglich beim Drahtwiderstand in der spannungsrichtigen Schaltung erfüllt ($40\,k\Omega \gg 8{,}1\,\Omega$). In der stromrichtigen Schaltung ist hier $R_x : R_{St} = 8{,}1\,\Omega : 0{,}333\,\Omega$; dabei ergibt sich ein relativer systematischer Fehler von 4,2 %. Bei der Messung des Schichtwiderstandes sind die obigen Bedingungen noch weniger erfüllt, so daß die systematischen Fehler hier noch größer sind (etwa 5 bzw. 14 %).
Bei allen praktischen Spannungs- bzw. Stromstärkemessungen sollte daher überprüft werden, inwieweit durch die Innenwiderstände der Meßgeräte die zu ermittelnden Werte beeinflußt und verfälscht werden.