Textaufgaben zur Mathematik

Cuninka
Križalkovič
Šedivý

mit Ansatz
und Lösung

Anton Cuninka
Karol Križalkovič
Ondrej Šedivý

VEB Fachbuchverlag
Leipzig

Textaufgaben zur Mathematik – mit Ansatz und Lösung

Mit 63 Bildern

Über 500 durchgerechnete Sachaufgaben
aus Naturwissenschaft, Technik, Ökonomie
und Unterhaltungsmathematik

Titel des slowakischen Originals:
500 RIEŠENÝCH SLOVNÝCH ULOH Z MATEMATIKY

Deutschsprachige Ausgabe nach der 2. Auflage des slowakischen Originals

Übersetzer: Dipl.-Slawist Erwin Weiss Kuka, Leipzig
Bearbeiter: Dr. rer. nat. Steffen Koch, Leipzig

1. Auflage
Lizenznummer: 114-210/1/77
LSV 1002
Verlagslektor: Dipl.-Ing. Heinz Waurick
Einbandgestaltung: Lothar Gabler, Leipzig
Printed in GDR
Satz und Druck: VEB Druckhaus „Maxim Gorki", Altenburg
Redaktionsschluß 15. 5. 1977
Bestellnummer 546 286 6
DDR 9,— M

Vorwort

Aus dem Vorwort des slowakischen Originals

Die Lösung mathematischer Textaufgaben kann in starkem Maße zur Entwicklung des logischen Denkens des Lesers beitragen, ihm bei der Suche nach Lösungen unterschiedlicher Probleme und Situationen helfen.
Auf unserem Buchmarkt wird kein Buch angeboten, das eine größere Menge gelöster Textaufgaben im Komplex beinhaltet. Das Buch, das wir den Lesern vorlegen, kann zumindest teilweise diese Lücke schließen, da die Lösung von Textaufgaben den Schülern oft große Schwierigkeiten bereitet.
Das vorliegende Buch enthält gelöste Textaufgaben aus dem täglichen Leben, der Ökonomie, der technischen Praxis, der Chemie, der Physik und auch der Unterhaltungsmathematik. Die Aufgaben sind nach einer Vorüberlegung durch Gleichungen, grafisch bzw. mittels Ungleichungen gelöst.
Wir haben nicht die Absicht, den Lesern irgendwelche Vorschriften für das mechanische Lösen von Textaufgaben in die Hand zu geben, sondern wollen einige Verfahren und Methoden zur Lösung von Textaufgaben zeigen. Einige Aufgaben haben wir nach mehreren Verfahren gelöst.
Wir empfehlen den Lesern, sich nicht mit der im Buch angegebenen Lösung zufrieden zugeben, sondern auch nach anderen Lösungsmöglichkeiten zu suchen.
In jedem Abschnitt sind Aufgaben mit komplettem Lösungsweg, mit verkürzter Darstellung desselben und am Ende eines jeden Hauptabschnitts einige Aufgaben angeführt, zu denen der Leser am Ende des Buches Ergebnisse findet. Aufgrund dieser Beispiele kann sich der Leser davon überzeugen, bis zu welchem Grade er die Lösungsmethoden begriffen hat.
In jedem Abschnitt sind einfachere und kompliziertere Aufgaben enthalten, die auch anspruchsvolle Leser zufriedenstellen. Nach aufmerksamem Lesen der kurzen Hinweise zu den einzelnen Abschnitten müßte jeder Leser in die Lage versetzt sein, alle Lösungen zu verstehen.
Wir verwendeten mannigfaltige Lösungsansätze und -verfahren, um den Leser zu keinerlei Schablonendenken zu verleiten.

Wir empfehlen den Lesern, sich von nachstehenden Grundsätzen leiten zu lassen:

a) Lesen Sie sich den Text der Aufgabe aufmerksam durch, damit Sie alle in der Aufgabe verwendeten Ausdrücke und Begriffe verstehen. (Ein Nichtbegreifen der Aufgabenstellung ist oft Ursache eines Mißerfolges der Arbeit.)

b) Versuchen Sie auf Ihre Art, die Aufgaben zu lösen. Wenn Ihnen das Lösungsverfahren nicht einfällt, lesen Sie die im Buch angegebene Lösung und versuchen Sie dann so, die Aufgabe zu lösen.

c) Nachdem Sie die Aufgabe selbständig gelöst haben, vergleichen Sie Ihre Lösung mit der im Buch dargestellten Lösung. Suchen Sie nach weiteren Lösungsformen. Geben Sie sich nie damit zufrieden, daß Sie die im Buch angegebene Lösung gefunden haben.

d) Vergessen Sie nicht, nach jeder Lösung die Probe durchzuführen!

Wir möchten daran erinnern, daß dieses Buch kein Lehrbuch, sondern ein Hilfsmittel darstellt, das für die Mathematiklehrer von Oberschulen, die Schüler vorgenannter Schulen, die Eltern, Studenten sowie andere mathematisch Interessierte bestimmt ist.
Für die zahlreichen wertvollen Hinweise und Verbesserungsvorschläge sind wir Prof. Anton Dubec und Prof. Josef Ivanič, die vorliegendes Buch lektorierten, in Dankbarkeit verbunden.

Die Autoren

Vorwort zur deutschsprachigen Ausgabe

Erfahrungsgemäß treten auch bei unseren Lernenden immer wieder erhebliche Schwierigkeiten beim Lösen von Text- bzw. Sachaufgaben auf. Insbesondere fällt das Aufstellen des Ansatzes bei diesen Aufgaben schwer. Um diese Hindernisse beseitigen zu helfen, haben wir uns entschlossen, dieses Buch den Lesern in der DDR durch eine deutschsprachige Ausgabe zugänglich zu machen.

Einige Aufgaben mußten geändert werden, da sie für unsere Leser wenig aussagekräftig waren. Außerdem sind durchweg die SI-Einheiten benutzt und, wenn nötig, bei uns übliche Formelzeichen verwendet worden.
Wir danken Herrn Erwin Weiss Kuka für die schnelle Übersetzung und Herrn Dr. Steffen Koch für die Bearbeitung.

Der Verlag

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Aufgaben, bei denen der Zusammenhang zwischen vorgegebenen und gesuchten Zahlen durch eine Textformulierung ausgedrückt wird, bezeichnen wir als *Textaufgaben*. In Textaufgaben ist auf der Grundlage einer geeigneten Überlegung zu ermitteln, welche Rechenoperationen wir mit den gegebenen Zahlen ausführen müssen, um diejenigen Zahlen zu finden, die gesucht sind. Die Aufgaben, bei denen von vornherein vorgeschrieben ist, welche Rechenoperationen mit den gegebenen Zahlen auszuführen sind, zählen wir nicht zu den Textaufgaben. Die Beschreibung dessen, worum es in einer Textaufgabe geht (gemeinsam mit den Zahlenangaben), bezeichnet man oft als *Bedingung* und die Erläuterung dessen, was zu berechnen ist, als *Fragestellung* oder *Aufgabenstellung*.
Die Thematik der Textaufgaben ist größtenteils der technischen Praxis, den Naturwissenschaften entlehnt, von Fall zu Fall handelt es sich um Unterhaltungsmathematik. Aus jeder dieser Aufgaben ist eine mathematische Aufgabe zu schaffen, und zwar entweder durch ein **„synthetisches" Verfahren**, und zwar

mit Hilfe von Zahlen (arithmetisch)
mit Hilfe einer grafischen Darstellung (grafisch) oder

durch ein **„analytisches Verfahren"**
mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen.

Bei der arithmetischen Lösung gehen wir von vorgegebenen Zahlen aus und berechnen weitere Zahleneigenschaften des entsprechenden Problems, bis wir die Antwort auf die gestellte Frage erhalten.
Bei der grafischen Lösung mit Hilfe eines Koordinatensystems drücken wir die Beziehungen zwischen den Größen zeichnerisch aus.
Beim analytischen Verfahren kennzeichnen wir die gesuchten Zahlen durch Buchstabensymbole (z. B. x, y, z, ...) und stellen eine Gleichung oder ein Gleichungssystem auf. Es können **lineare, quadratische** oder **Gleichungen höheren Grades** sein, gegebenenfalls können wir bei einigen Textaufgaben auf Ungleichungen stoßen.
Wir unterteilen die Textaufgaben entsprechend der Anzahl der Rechenoperationen, die bei der Suche nach der unbekannten Zahl bzw. nach den unbekannten Zahlen vorgenommen werden müssen, in:

a) **einfache**,
b) **komplizierte**.

Als *einfache Textaufgaben* bezeichnen wir diejenigen, bei deren Lösung nur eine Rechenoperation erforderlich wird.
Als *komplizierte Textaufgaben* bezeichnen wir diejenigen, deren Lösung mindestens zwei Rechenoperationen erfordert. Komplizierte Textaufgaben lösen wir so, daß wir sie in mehrere einfache Aufgaben untergliedern, wobei die Lösung der letzten einfachen Aufgabe die Lösung der komplizierten Aufgabe darstellt.
Einige Textaufgaben haben keine oder nur eine Lösung, andere mehrere und einige schließlich unendlich viele Lösungen, d. h.,

die Lösungsmenge kann leer sein, nur aus einem oder mehreren Elementen bestehen oder unendlich viele Elemente umfassen.

Daß eine Textaufgabe unendlich viele Lösungen aufweist, kann z. B. darin begründet sein, daß in ihr einige bestimmende Angaben fehlen. Manchmal kommt es auch vor, daß in Textaufgaben überflüssige Bedingungen gestellt werden, die mit der Aufgabe nicht zusammenhängen und die wir weglassen können. Ferner könnte eine weitere Bedingung gegeben sein, die einer der übrigen Bedingungen widerspricht und verursacht, daß die Aufgabe nicht gelöst werden kann. In einem solchen Fall sprechen wir davon, daß die Aufgabe durch ihre Angaben *überbestimmt* ist.

Kommen wir zur Lösung von Textaufgaben zurück. Gleich zu Beginn muß folgender Grundsatz unterstrichen werden: *Keine Textaufgabe kann gelöst werden, bevor sie nicht als Aufgabe mathematisch klar formuliert wird.* Es empfiehlt sich, daß wir aus der gegebenen Sachlage heraus auch gleich zu Anfang den Definitionsbereich X festlegen.

Um eine Textaufgabe in eine mathematische Ausdrucksweise zu übertragen, müssen wir die Bedeutung und den Sinn der Ausdrücke bzw. der Wortwendungen begreifen, die in der Textaufgabe verwendet werden. Erst danach können wir die mathematischen Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen den Zahlenangaben ermitteln, die an bestimmte Ausdrücke bzw. Wörter gebunden sind. Wir müssen also das tiefere Wesen der Aufgabe vollkommen begreifen.

Bei der Ermittlung der Abhängigkeit zwischen den Angaben (vorgegebenen Zahlen) und den gesuchten Zahlen können wir gelegentlich auch geometrisch vorgehen, wodurch die Anschaulichkeit erhöht wird und auch schneller die Lösung gefunden werden kann.

Der Lösungserfolg ist davon abhängig, ob wir in der Lage sind, aus der Aufgabe alle die Bedingungen auszuwählen, die wir für die Ermittlung des ersten, zweiten bis letzten Teilergebnisses benötigen.

Danach stellen wir den **Lösungsplan** auf, und die erforderlichen Rechenoperationen werden ausgeführt.

Wenn wir die Bedingungen der Aufgabe mathematisch formulieren, erreichen wir die mathematische Form der Aufgabenstellung. Es kann jedoch auch passieren, daß wir irgendeine der Aufgabenbedingungen mathematisch nicht erfassen können (oder daß sie im Text überhaupt nicht angegeben ist), dann sind die Ergebnisse, die wir gefunden haben, nicht in jedem Fall Lösungen der gegebenen Textaufgabe. Es kann auch der Fall eintreten, daß irgendeines der Ergebnisse einer mathematischen Aufgabe der Textaufgabe nicht gerecht wird (bei der Lösung mit Hilfe einer quadratischen Gleichung, einer irrationalen Gleichung usw.), auch dann nicht, wenn alle Bedingungen der Aufgabe in Betracht gezogen werden. Daher müssen wir die **Probe** machen, ob die mathematische Lösung auch Lösung der entsprechenden Textaufgabe ist. Es reicht nicht aus, lediglich die Richtigkeit der durchgeführten Rechenoperationen zu überprüfen (rechnerische Kontrolle), sondern es ist auch festzustellen, ob die gewonnenen Angaben dem Sachverhalt der Textaufgabe entsprechen (logische Kontrolle), da wir ja bereits bei der Aufstellung des Lösungsplans einen Fehler begehen konnten. Viele Textaufgaben gestatten es, eine grobe Schätzung (Überschlag) der Ergebnisse vorzunehmen, noch bevor wir mit der Lösung der Aufgabe beginnen. Eine vorläufige Grobschätzung kann uns gegebenenfalls auf einen eventuellen Fehler in der Lösung hinweisen oder gibt Aufschluß über einen falschen Teilschritt.)

Die Lösungskontrolle setzt sich zusammen aus:

a) einer vorläufigen Abschätzung des Endergebnisses (das ist nicht immer einfach durchzuführen) sowie einer vorläufigen Schätzung jedes Teilergebnisses und der vorgenommenen Ergebniskontrolle nach der Berechnung

b) einer Kontrolle des Endergebnisses und einer eventuellen Suche nach Fehlern in den Rechenoperationen bzw. bei der Aufstellung des *mathematischen Modells*, d. h. bei der Zusammenstellung der für die Aufgabenstellung zutreffenden mathematisch formulierten Beziehungen

c) aus der sogenannten *logischen Kontrolle*, d. h. der Untersuchung, ob die rechnerisch richtig ermittelten Ergebnisse auch wirklich brauchbar sind bzw. dem anfangs festgelegten Definitionsbereich angehören. Kriterium der Wahrheit ist bekanntlich nicht die formale Richtigkeit der ausgeführten Operationen, sondern die Übereinstimmung mit der Praxis.

Erst danach formulieren wir die Textantwort.
Wenn in einer Textaufgabe außer konkreten Zahlenangaben auch unbestimmte (nennen wir sie Parameter) auftreten, müssen wir eine **Diskussion** durchführen. Die Diskussion ist ein wesentlicher Bestandteil der Lösung der gestellten Aufgabe. In der Diskussion prüfen wir, ob die Aufgabe lösbar oder unlösbar ist oder ob wir in der Aufgabe die Bedingungen für die Parameter so festlegen, daß die Aufgabe gelöst werden kann, und ob wir weitere mögliche Schlußfolgerungen ziehen können.
Wenn wir eine Textaufgabe mit Hilfe von Gleichungen (bzw. Ungleichungen) lösen, sollte möglichst wie folgt vorgegangen werden:

1. Nach dem aufmerksamen Lesen des Textes der Aufgabe bestimmen wir eine bzw. mehrere der unbekannten Angaben als Unbekannte und versehen sie mit einer geeigneten Bezeichnung.

2. Mit Hilfe der ausgewählten Unbekannten drücken wir alle übrigen durch den Text der Aufgabe gegebenen Angaben aus, wobei wir bestrebt sind, zwei Ausdrücke (bzw. mehrere) aufzustellen, zwischen denen eine Gleichungsbeziehung gilt. Damit wurde eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem aufgestellt. Wenn zwischen den Ausdrücken keine Gleichung besteht, stellen wir eine Ungleichung auf.

3. Danach lösen wir die aufgestellte Gleichung oder das aufgestellte Gleichungssystem.

4. Die Probe auf Richtigkeit der Lösung führen wir wie folgt durch:

Wir ermitteln, ob die gefundene Lösung (zuweilen werden die Lösungen bzw. Elemente der Lösungsmenge von Gleichungen auch „Wurzeln“ genannt) der Textaufgabe gerecht wird. Muß das verneint werden, so sind zwei Fälle möglich:

a) Die Lösung(en) bzw. Wurzel(n) erfüllen die Gleichung(en) oder Ungleichung(en), die Probe führt zu einer Identität bzw. einer wahren Aussage.
Dann erfaßt das mathematische Modell bzw. die Gleichung oder Ungleichung nicht den tieferen Inhalt der Aufgabenstellung richtig. Es kann auch sein, daß die Aufgabenstellung keine brauchbare Lösung besitzt.

b) Die Lösung (oder ein Teil davon) erfüllt die aufgestellte Gleichung nicht. Dann liegt ein Fehler in der Rechnung vor, also bei der Ausführung der Operationen. Zu beachten ist, daß ein solcher Fehler auch in der Durchführung nichtäquivalenter Umformungen bestehen kann. Bei Wurzelgleichungen und goniometrischen Gleichungen *müssen* deshalb die Proben ausgeführt werden, gegebenenfalls sind nicht brauchbare Lösungen auszuscheiden. Die Probe hat in jedem Fall in der Ausgangsgleichung zu erfolgen.

Anmerkung

In einigen Lehrbüchern oder Handbüchern werden Textaufgaben in **typische Aufgaben** und **nichttypische Aufgaben** untergliedert. (Als typische Aufgaben bezeichnen wir diejenigen, die nach einem bekannten Verfahren gelöst werden.) Diese Klassifizierung ist nicht immer erschöpfend und eindeutig, weil Aufgaben vorliegen, die wir unterschiedlichen Typen zuordnen können. Einige Aufgaben sind jedoch für den einen „typische“ Aufgaben, für den anderen können sie „nichttypisch“ sein. Daher sollten wir bei der Lösung von Textaufgaben keine bestimmten Vorschriften erlernen, wie eine gestellte Aufgabe zu lösen ist, sondern wir müssen stets jede Textaufgabe rational erfassen und können sie nicht nur mechanisch lösen.
Im vorliegenden Buch werden aus diesen Gründen die Aufgaben nicht in typisch und nichttypisch, sondern danach untergliedert, welche Art von Gleichung bzw. Ungleichung oder Gleichungen bzw. Ungleichungen wir bei der Lösung verwenden.

2. Lineare Gleichungen (Textaufgaben)

Unter einer Gleichung verstehen wir eine Aussageform, die bei Belegung der Variablen zu einer wahren bzw. zu einer falschen Aussage wird. Eine Gleichung hat die Eigenschaft, daß sich die linke und die rechte Seite (vom Gleichheitszeichen) dem Wert nach gleichen. Hingegen trennt das Relationszeichen bei einer Ungleichung verschieden große Ausdrücke bzw. Terme.

Eine Gleichung lösen heißt, alle diejenigen Variablen finden, durch deren Belegung die Aussageform zu einer wahren Aussage wird. Man sagt auch, gesucht werden alle Zahlen, die die Gleichung erfüllen. Diese Zahlen nennt man auch Wurzeln, ihre Gesamtheit bildet die Lösungsmenge. Bei einer Ungleichung besteht die Lösungsmenge meist aus einem Intervall, bei Gleichungen aus einer gewissen Zahl von Elementen.

Das Lösen der Gleichungen geschieht durch äquivalentes Umformen (wobei die Lösungsmenge der Gleichungen erhalten bleibt).

Bei der Lösung von Gleichungen dienen uns nachstehende Lehrsätze:

1. Die Wurzel einer Gleichung ändert sich nicht, wenn zu beiden Seiten die gleiche Zahl addiert wird.

2. Die Wurzel einer Gleichung ändert sich nicht, wenn wir beide Seiten der Gleichung mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multiplizieren.

Beispielsweise lautet die gegebene Gleichung:

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 5 \\ -3 &\quad -3 \\ 4x &= 2 \end{aligned}$$

Man hüte sich vor der Ausdrucksweise: „... ich bringe die $+3$ mit minus auf die andere Seite ...“. Sie liegt zwar nahe, entspricht aber nicht dem verwendeten Prinzip der äquivalenten Umformung.

Division beider Seiten durch 4

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Probe: $4 \cdot 0{,}5 + 3$
$= 2 \quad + 3$
$= 5$ | Probe stimmt.

Lösungsmenge: $x = 5$ oder $x \in \{5\}$ oder $L = \{5\}$

Beispiel 1. Ermitteln Sie, welches x nachstehender Gleichung gerecht wird:

$$(x - 3)(x + 4) = (x - 4)(x + 7)$$

Lösung: Zunächst beseitigen wir durch Multiplikation die Klammern

$$x^2 + x - 12 = x^2 + 3x - 28$$

Wenn wir zu beiden Seiten der Gleichung den Ausdruck $(12 - 3x - x^2)$ addieren, erhalten wir nach entsprechender Rechenoperation

$$-2x = -16$$

Weiterhin multiplizieren wir beide Seiten mit der Zahl $-\frac{1}{2}$, wodurch wir erhalten:

$$x = 8,$$

was die gesuchte Wurzel darstellt.

Beispiel 2. Lösen Sie folgende Gleichung:

$$\frac{3z - 1}{5} - \frac{1 + z}{2} = 3 - \frac{z - 1}{4}$$

Lösung: Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (k g V), die Brüche mit den Nennern 5, 2, 4, also mit der Zahl 20:

$$4(3z - 1) - 10(1 + z) = 3 \cdot 20 - 5(z - 1)$$

Durch eine weitere Umformung erhalten wir:

$$12z - 4 - 10 - 10z = 60 - 5z + 5$$
$$2z - 14 = -5z + 65$$
$$7z = 79$$
$$z = 11\frac{2}{7}$$

Wollen wir eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Nenner steht, lösen, müssen wir von vornherein voraussetzen, daß die Nenner aller Brüche von Null verschieden sind, da sonst die Brüche nicht erklärt sind. Im weiteren multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit dem kgV, wodurch wir die Brüche beseitigen. Gleichzeitig schreiben wir die Bedingung, nach der der Ausdruck mit der Unbekannten aus dem Nenner nicht gleich Null sein darf. Als Lösung der Gleichung gelten nur diejenigen berechneten Wurzeln, die diese Bedingung erfüllen.
Durch weitere Umformungen erhalten wir eine Gleichung, und zwar eine lineare oder quadratische, die wir wiederum nach bekannten Methoden lösen.

Beispiel 3. Lösen Sie die Gleichung:

$$\frac{x+7}{x-5} - 2 = -\frac{5+x}{x-7}$$

Lösung: Zunächst beseitigen wir die Brüche, und zwar so, daß wir beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(x - 5) \times (x - 7)$ unter der Voraussetzung multiplizieren, daß $(x - 5) \neq 0$, $(x - 7) \neq 0$, also $x \neq 5$, $x \neq 7$.

$$(x + 7)(x - 7) - 2(x - 5)(x - 7)$$
$$= -(5 + x)(x - 5)$$
$$x^2 - 49 - 2x^2 + 24x - 70 = -(x^2 - 25)$$
$$24x = 144$$
$$x = 6$$

Probe: Linke Seite: $\frac{13}{1} - 2 = 11$

Rechte Seite: $-\frac{11}{-1} = 11$

Die berechnete Wurzel $x = 6$ erfüllt die Voraussetzungen, da $x \neq 5$ und $x \neq 7$. Die Zahl $x = 6$ ist tatsächlich die Wurzel der gestellten Gleichung.

Beispiel 4. Lösen Sie die Gleichung:

$$x - a = \frac{x}{a-1},$$

wobei x die Unbekannte und a einen Parameter darstellen. Wir verlangen $(a - 1) \neq 0$, d. h., $a \neq 1$, und beseitigen den Nenner. Wir erhalten die Gleichung:

$$(x - a)(a - 1) = x$$

nach der Umformung

$$x(a - 2) = a^2 - a \qquad (a - 2 \neq 0)$$

$$x = \frac{a^2 - a}{a - 2}$$

Diskussion: Um die letzte Umformung vornehmen zu können, müssen wir voraussetzen, daß $a \neq 2$. Wenn wir dazu auch die vorgenannte Voraussetzung in Betracht ziehen, d. h., $a \neq 1$, dann hat die gegebene Gleichung nur die eine Wurzel

$$x = \frac{a(a-1)}{a-2}$$

für jedes a, für das $a \neq 1$, $a \neq 2$ gilt.
Wenn $a = 2$ ist, dann hat die gegebene Gleichung die Form $x - 2 = x$; in diesem Fall hat sie keine Wurzel, denn $-2 \neq 0$.

Anmerkung: Bei praktischen Berechnungen werden häufig Formeln angewendet, z. B. in der Physik, in der technischen Praxis und in der Ökonomie. Die Berechnung nach einer bestimmten Formel bedeutet, eine Gleichung nach einer gesuchten Unbekannten zu lösen.

2.1. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

1. Zwei Arbeiter führen gemeinsam innerhalb von 16 Tagen eine bestimmte Arbeit aus. Nach vier Tagen gemeinsamer Arbeit beendet diese jedoch einer der Arbeiter in 36 Tagen.

Innerhalb wieviel Tagen würde sie jeder Arbeiter allein ausführen?

Lösung:

a) Nach vier Tagen gemeinsamer Arbeit verblieben $\frac{3}{4}$ der Gesamtarbeit, die von einem in noch 36 Tagen ausgeführt wird, d. h., die Gesamtarbeit würde er innerhalb von 48 Tagen ausführen.

b) Bei gemeinsamer Arbeit würden die Arbeiter an einem Tag gemeinsam $\frac{1}{16}$ der Gesamtarbeit ausführen. Der Arbeiter, der die Arbeit beendete, führte an einem Tag $\frac{1}{48}$ der Gesamtarbeit aus, also erfüllte der andere Arbeiter an einem Tag $\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\right) = \frac{1}{24}$ der Gesamtarbeit.

c) Der andere Arbeiter würde allein die Gesamtarbeit in 24 Tagen ausführen.

Antwort: Der erste Arbeiter würde die Arbeit in 24 Tagen, der zweite in 48 Tagen ausführen.

2. Die Summe zweier Zahlen ist 4120, die Differenz 1280. Welche Zahlen sind das?

a) *Arithmetische Lösung:* Die Tatsache, daß die Differenz zweier Zahlen 1280 beträgt, bedeutet, daß von den beiden Zahlen die erste um 1280 größer ist als die zweite (Bild 1). Wenn wir also von der Summe zweier Zahlen 1280 subtrahieren, erhalten wir das Zweifache der zweiten Zahl. Somit gilt für das Zweifache der zweiten Zahl (4120—1280), und die Hälfte dieser Differenz ist die zweite Zahl

$$\frac{4120 - 1280}{2} = \frac{2840}{2} = 1420$$

Somit gilt für die erste Zahl:

$$1420 + 1280 = 2700$$

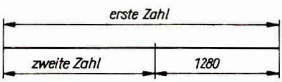

Bild 1

Die Aufgabe können wir nach verschiedenen Verfahren lösen, z. B., wenn wir die Summe um 1280 erhöhen, dann ist (4120 + 1280) das Doppelte der ersten Zahl.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung:* Die zweite der beiden Zahlen bezeichnen wir mit x, dann ist die erste Zahl entsprechend der Bedingung der Aufgabe $(1280 + x)$, woraus nachstehende Gleichung resultiert:

$$x + (1280 + x) = 4120$$
$$2x + 1280 = 4120$$
$$2x = 4120 - 1280$$
$$2x = 2840$$
$$x = \frac{2840}{2}$$
$$x = 1420$$

Antwort: Die zweite Zahl lautet 1420 und die erste (1420 + 1280) = 2700.

Probe: Die Summe der Zahlen 1420 + 2700 = 4120, die Differenz der Zahlen 2700 — 1420 = 1280, was zu berechnen war.

3. 3 m Kunstfaserstoff und 4 m Wollstoff kosten 470 M, wobei 1 m Wollstoff um 30 M teurer ist als 1 m Kunstfaserstoff. Wieviel kostet 1 m Wollstoff und wieviel 1 m Kunstfaserstoff?

a) *Arithmetische Lösung*

1. 3 m Kunstfaserstoff sind um 90 M billiger als 3 m Wollstoff.

2. Wenn wir insgesamt nur Wollstoff kauften, bezahlten wir 90 M mehr, also 560 M. Daraus resultiert, daß 7 m Wollstoff 560 M kosten.

3. 1 m Wollstoff kostet 560:7, also 80 M. Dann kostet 1 m Kunstfaserstoff (80 — 30), also 50 M.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Den Preis für 1 m Wollstoff bezeichnen wir mit x, demnach ist der Preis für 1 m Kunstfaserstoff $(x - 30)$.
Entsprechend den Bedingungen der Aufgabe

gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned}4x + 3(x - 30) &= 470\\ 4x + 3x - 90 &= 470\\ 7x &= 560\\ x &= \frac{560}{7}\\ x &= 80\end{aligned}$$

Antwort: 1 m Wollstoff kostet 80 M, und 1 m Kunstfaserstoff kostet 50 M.

4. Von Bratislava bis Banská Bystrica[1] fuhr ein Lastkraftwagen mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h. Gleichzeitig mit diesem fuhr ein Autobus ab, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h fuhr und 1 h und 45 min früher als der Lastkraftwagen in Banská Bystrica ankam. Wie groß ist die Entfernung zwischen Bratislava und Banská Bystrica?

a) *Arithmetische Lösung*

1. In jeder Stunde legte der Autobus gegenüber dem Lastkraftwagen um (40 – 30) km = 10 km mehr zurück.

2. Als der Autobus in Banská Bystrica eintraf, hatte der Lastkraftwagen noch 1 h und 45 min zu fahren und legte in dieser Zeit $30 \text{ km h}^{-1} \cdot 1{,}75 \text{ h} = 52{,}5 \text{ km}$ zurück. Demnach betrug die Differenz zwischen beiden Fahrzeugen im Augenblick, als der Autobus in Banská Bystrica ankam, 52,5 km.

3. Der Abstand von 52,5 km zwischen beiden Fahrzeugen entsteht nach $52{,}5 : 10 = 5{,}25$ Fahrtstunden, da der Autobus gegenüber dem Lastkraftwagen in einer Stunde 10 km aufholt (schneller fährt). Der Autobus fuhr also 5 h und 15 min.

4. In 5 h und 15 min legte der Autobus mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km h^{-1} eine Strecke von 210 km zurück.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Wir wollen die Entfernung von Bratislava bis Banská Bystrica mit x km kennzeichnen.

[1] Banská Bystrica ist eine Stadt in der Niederen Tatra, Bratislava ist Grenzstadt nach der UVR an der Donau

Der Autobus legt diese Strecke in $\frac{x}{40}$ h und der Lastkraftwagen in $\frac{x}{30}$ h zurück. Der Zeitunterschied beträgt 1,75 h. Es gilt also

$$\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = 1{,}75.$$

Die gesamte Gleichung multiplizieren wir mit dem gemeinsamen Nenner 120, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}4x - 3x &= 1{,}75 \cdot 120\\ x &= 210.\end{aligned}$$

Antwort: Die Entfernung zwischen Banská Bystrica und Bratislava beträgt 210 km.

5. 30 kg des Materials A und 40 kg des Materials B kosten insgesamt 320 M. Ein Kilogramm des Materials B ist um 1 M teurer als 1 kg des Materials A. Wieviel kostet 1 kg jeden Materials?

a) *Arithmetische Lösung*

Wenn man anstelle zweier Arten von Material nur das Material A kaufte, dann würden 70 kg des Materials A (320 – 40) M = 280 M kosten, da anstelle von 40 kg des Materials B 40 kg des Materials A gekauft wurden, das je 1 kg 1 M billiger ist als das Material B.
Es kostet also 1 kg des Materials A (280 : 70) M = 4 M, 1 kg des Materials B kostet (4 + 1) M = 5 M.

Probe: 30 kg des Materials A und 40 kg des Materials B kosten

$$(4 \cdot 30 + 5 \cdot 40) \text{ M} = 320 \text{ M}.$$

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Möge 1 kg des Materials A x M kosten, dann kostet 1 kg des Materials B $(x + 1)$ M.
Entsprechend der Bedingung der Aufgabe gilt:

$$\begin{aligned}30x + 40(x + 1) &= 320\\ 30x + 40x + 40 &= 320\\ 70x &= 280\\ x &= 4\end{aligned}$$

Antwort: 1 kg des Materials A kostet 4 M, und 1 kg des Materials B kostet 5 M.

6. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich sie mit 5 multipliziere und vom Ergebnis 20 subtrahiere, erhalte ich die Zahl 15. Welche Zahl habe ich mir ausgedacht?

a) *Arithmetische Lösung*

Die Zahl 15 haben wir durch Subtrahieren der Zahl 20 erhalten. Das bedeutet, daß wir vor dem Substrahieren die Zahl $(15 + 20) = 35$ hatten. Die Zahl 35 erhielten wir durch Multiplizieren der gedachten Zahl mit 5. Daher war die gedachte Zahl $35:5 = 7$.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Die gedachte Zahl ist x. Aus der Bedingung der Aufgabenstellung resultiert die Gleichung:

$$5x - 20 = 15$$
$$x = 7$$

Antwort: Ich habe mir die Zahl 7 gedacht.

7. Wenn wir 10 kg Ware der Sorte I und 25 kg der Ware von der Sorte II mischen, wobei 1 kg der Ware der ersten Sorte 15 M kostet, um wieviel Mark muß dann 1 kg der Ware von der Sorte II billiger sein, damit 1 kg des Gemisches 10 M kostet?

a) *Arithmetische Lösung*

1. Das Gemisch $(10 + 25)$ kg soll $(35 \cdot 10)$ M $= 350$ M kosten.

2. Wenn das „Gemisch" nur aus der Ware der I. Sorte bestünde, kostete es mehr, und zwar $(35 \cdot 15)$ M $= 525$ M.

3. Die Einsparung von $(525 - 350)$ M $= 175$ M bei 35 kg Gemisch, das durch Hinzufügen der billigeren Ware entstand, ist auf die Preisdifferenz der teureren Ware (25 kg) zurückzuführen.

4. 25 kg der II. Warensorte ist 175 M billiger als 25 kg der Ware der I. Sorte. 1 kg der Ware der Sorte II ist $(175:25)$ M $= 7$ M billiger.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Möge 1 kg der Ware der Sorte II x M billiger sein als 1 kg der Ware der Sorte I, dann kostet 1 kg der Ware der Sorte I 15 M, der Ware der Sorte II $(15 - x)$ M.

35 kg Gemisch kosten $[150 + 25(15 - x)]$ M.

1 kg des Gemisches kostet $\frac{150 + 25(15 - x)}{35}$ M, was entsprechend der Bedingung der Aufgabe 10 M ausmacht. Also gilt die Gleichung:

$$\frac{150 + 25(15 - x)}{35} = 10$$

Nach Multiplizieren der Gleichung mit der Zahl 35 erhalten wir:

$$\begin{aligned} 150 + 25 \cdot 15 - 25x &= 10 \cdot 35 \\ -25x &= -150 - 25 \cdot 15 \\ &\quad + 10 \cdot 35 \\ -25x &= -150 - 375 + 350 \\ -25x &= -175 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit der Zahl -1 erhalten wir die Gleichung:

$$25x = 175,$$

somit ist

$$x = 7.$$

Antwort: 1 kg der Ware der Sorte II ist 7 M billiger als 1 kg der Ware der Sorte I.

8. Schüler unternahmen einen Ausflug und legten in drei Tagen 65 km zurück. Am ersten Tag gingen sie doppelt soviel wie am dritten Tag. Am zweiten Tag legten sie 10 km weniger zurück als am ersten Tag. Wieviel Kilometer legten sie an jedem Tag zurück?

a) *Arithmetische Lösung* (Man vergleiche den Lösungsweg in Bild 2)

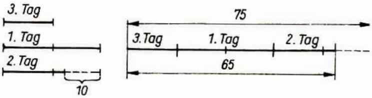

Bild 2

1. Die Schüler legten insgesamt 65 km zurück, die Anzahl der an einem Tag zurückgelegten Kilometer ist ein Teil der Gesamtmenge der zurückgelegten Kilometer.

2. Da die Anzahl der am ersten Tag zurückgelegten Kilometer dem Doppelten der am dritten Tag zurückgelegten gleich ist, nehmen wir die Anzahl der am dritten Tag zurückgelegten Kilometer als Grundlage (x) an.

3. Am ersten Tag legten sie das Doppelte zurück. Die Anzahl der am ersten Tag zurückgelegten Kilometer ist gleich $2x$. Am ersten und dritten Tag zusammen legten sie das Dreifache von x an Kilometern zurück.

4. Wenn wir zur Anzahl der am zweiten Tag zurückgelegten Kilometer 10 km hinzuzählen, erhalten wir die Anzahl der am ersten Tag zurückgelegten Kilometer, also das Fünffache von x. Dadurch kommen wir aber auf eine Gesamtzahl von 75 km.

5. Das Fünffache von x ist 75, x beträgt 75:5, d. h. 15.

6. Am dritten Tag legten sie 15 km, am ersten Tag 30 km und am zweiten Tag 20 km zurück.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Am dritten Tag legten die Schüler x km zurück,
am ersten Tag $2x$ km,
am zweiten Tag $(2x - 10)$ km,
und insgesamt 65 km.
Es gilt also

$$x + 2x + 2x - 10 = 65$$
$$x = 15$$

Antwort: Am ersten Tag legten sie 30 km, am zweiten Tag 20 km und am dritten Tag 15 km zurück.

9. Für 332 M kauften wir 13 m Stoff zweier Sorten, und zwar für 27,50 M und 22,40 M je Meter. Wieviel Meter Stoff der einzelnen Sorten haben wir eingekauft?

a) *Arithmetische Lösung*

Nehmen wir an, daß die gesamten 13 m des gekauften Stoffes von einer Sorte waren, und zwar der teureren Sorte mit einem Preis von 27,50 M je Meter, dann hätte der gesamte Stoff $(27{,}50 \cdot 13)$ M = 357,50 M gekostet. Dieser Gesamtpreis ist um $(357{,}50 - 332)$ M = 25,50 M höher als in der Aufgabe angegeben. Tauscht man bei der vorausgegangenen Berechnung einen Meter des teureren Stoffes gegen den des billigeren Stoffes aus, so führt das zu einer Verringerung des Einkaufspreises um $(27{,}50 - 22{,}40)$ M = 5,10 M. Wir müssen jedoch den Gesamtpreis um 25,50 M verringern. Daher müssen wir den Austausch nicht bezüglich eines Meters, sondern für $(25{,}5:5{,}1)$ m = 5 m Stoff vornehmen. Wir ermitteln also, daß der billigere Stoff in der Menge von 5 m, der teurere Stoff in der Menge $(13 - 5)$ m = 8 m vorhanden war.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Die Meterzahl der einen Stoffart ist x, der anderen $(13 - x)$. Ausgehend von den Bedingungen der Aufgabenstellung erhalten wir folgende Gleichung:

$$27{,}5x + 22{,}4(13 - x) = 332$$
$$27{,}5x + 22{,}4 \cdot 13 - 22{,}4x = 332$$
$$5{,}1x = 332 - 22{,}4 \cdot 13$$
$$5{,}1x = 40{,}8$$
$$x = 8$$

Antwort: Wir haben 8 m Stoff für je 27,50 M je Meter und 5 m für je 22,40 M je Meter eingekauft.

10. Die Summe zweier Zahlen beträgt 165. Vier Sechstel der ersten Zahl gleichen vier Fünfteln der zweiten Zahl. Um welche Zahlen handelt es sich?

a) *Arithmetische Lösung*

1. Wir veranschaulichen beide Zahlen durch Strecken (Bild 3), wobei die Teilstriche des einen Abschnitts den Teilstrichen auf dem anderen Abschnitt gleichen.

Bild 3

2. Aus dem Bild 3 wird ersichtlich, daß die zweite Zahl fünf Sechstel der ersten Zahl beträgt.

3. Wenn wir beide Zahlen addieren, erhalten wir 11 gleiche Teile, die Summe soll 165 sein.

4. Ein Teilstrich entspricht $165:11 = 15$. Die erste Zahl hat 6 Teilstriche und ist demnach die Zahl 90, während die zweite Zahl 5 Teilstriche hat, also 75 heißt.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Die erste Zahl bezeichnen wir mit x, dann beträgt die zweite Zahl $(165 - x)$. Aus der Bedingung der Aufgabenstellung folgt, daß

$$\frac{4}{6}x = \frac{4}{5}(165 - x)$$

Wenn wir die gesamte Gleichung mit dem Hauptnenner 30 multiplizieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4x &= 6 \cdot 4(165 - x) \\ 20x &= 24(165 - x) \\ 44x &= 3960 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

Antwort: Die erste Zahl heißt 90 und die zweite 75.

11. Wir haben einen 6 m langen Kupferdraht in zwei Teile zu unterteilen, so daß der eine Teil 60 cm länger ist als der andere.

a) *Arithmetische Lösung*

Aus Bild 4 wird ersichtlich, daß wir durch Subtraktion von 60 cm von einem 6 m langen Draht eine Länge erhalten, die zwei gleichen kleineren Teilstücken x gleicht. Es ist also 6 m − 60 cm = 5,4 m.

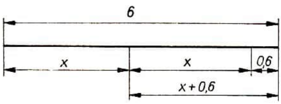

Bild 4

5,4 m : 2 = 2,7 m. Das kleinere Teilstück ist 2,7 m lang, das längere 2,7 m + 0,6 m = 3,3 m lang.

Probe: Beide Teilstücke zusammen haben die Länge

2,7 m + 3,3 m = 6 m.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Wenn wir die Länge des kleineren Teilstücks mit x m bezeichnen, dann beträgt das längere Teilstück $(x + 0{,}6)$ m.
Aus der Bedingung, daß die Gesamtlänge des Kupferdrahts 6 m beträgt, folgt:

$$x + (x + 0{,}6) = 6 \Rightarrow 2x + 0{,}6 \Rightarrow x = 2{,}7$$ [1]

Antwort: Der kleinere Teil hat eine Länge von 2,7 m und der größere eine von 3,3 m.

12. Beim Getreidetransport auf der Eisenbahn hat man in jedem Waggon je 10 t Getreide geladen, wobei 8 t Getreide noch unverladen bleiben. Damit es nicht erforderlich wird, noch einen Waggon anzukuppeln, verteilte man die übriggebliebenen 8 t auf einige bereits beladene Waggons, und zwar so, daß auf diese je 2 t zusätzlich geladen wurden. Wieviel Tonnen betrug die Gesamtmenge des Getreides, wenn 5mal soviel Waggons mit je 10 t Ladung wie Waggons mit einer Ladung von je 12 t vorhanden waren?

a) *Arithmetische Lösung*

Es waren $8:2 = 4$ Waggons mit einer Ladung von je 12 t vorhanden, während die Anzahl der Waggons mit je 10 t Ladung (entsprechend der Bedingung der Aufgabenstellung) das 5fache betrug, d. h., $4 \cdot 5 = 20$. Es war also eine Gesamtmenge des Getreides von $(12 \cdot 4 + 10 \cdot 20)$ t = 248 t vorhanden.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Mit x bezeichnen wir die Anzahl der Waggons mit einer Ladung von je 12 t und mit $5x$ die Anzahl der Waggons mit einer Ladung von je 10 t. Es war eine Gesamtmenge von Waggons $(x + 5x) = 6x$ vorhanden. Die Gesamtmenge des Getreides in den Waggons mit einer Ladung von je 12 t betrug $12x$ t, in den Waggons mit einer Ladung von je 10 t $(5x \cdot 10)$ t. Die Gesamtmenge des Getreides betrug $(6x \cdot 10 + 8)$ t. Die Aufgabe kann in Form folgender Gleichung geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 12x + 5x \cdot 10 &= 6x \cdot 10 + 8 \\ 62x &= 60x + 8 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

[1] Das Zeichen ⇒ bedeutet: „es folgt (daraus)"

Antwort: In vier Waggons zu je 12 t befanden sich 48 t Getreide und in 20 Waggons zu je 10 t 200 t Getreide.

13. Die Summe dreier Zahlen, von denen jede nachfolgende um 3 größer ist als die vorhergehende, beträgt 63. Um welche Zahlen handelt es sich?

Lösung: Wenn wir die erste Zahl mit x bezeichnen, dann ist die zweite Zahl $(x + 3)$ und die dritte $(x + 6)$. Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$x + (x + 3) + (x + 6) = 63$$
$$x = 18$$

Antwort: Die gesuchten Zahlen lauten 18, 21 und 24.

14. Ein 80 m langer Schnellzug, der eine Geschwindigkeit von 72 km h^{-1} hat, fährt an einem stehenden Personenzug vorbei. Das Vorbeifahren dauert 10 s. Wie lang ist der Personenzug (Bild 5)?

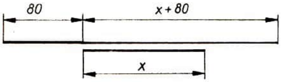

Bild 5

Lösung: Die Geschwindigkeit des Schnellzugs beträgt 72 km h^{-1}, was 20 m s^{-1} bedeutet. Um am Personenzug vorbeizufahren, muß der Schnellzug eine Strecke zurücklegen, die seiner Länge und der Länge des Personenzuges gleicht. Die Länge des Personenzuges ist x.
Es gilt also

$$10 \cdot 20 = 80 + x$$
$$x = 120$$

Antwort: Die Länge des Personenzuges beträgt 120 m.

15. Ein 80 m langer Schnellzug mit einer Geschwindigkeit von 72 km h^{-1} fährt an einem 120 m langen fahrenden Personenzug vorbei. Sie fahren 20 s nebeneinander. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Personenzuges? (72 km h^{-1} $\triangleq$ 20 m s^{-1})

Lösung: Der Schnellzug legt in 20 s eine Strecke von 400 m zurück. Diese Strecke ist entsprechend der Aufgabenstellung gleich der Summe seiner Länge, der Länge des Personenzuges und der vom Personenzug zurückgelegten Strecke, d. h.,

$$20x + 120 + 80 = 20 \cdot 20,$$

wobei x die Geschwindigkeit des Personenzuges in m s^{-1} bedeutet.

$$x = 10$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Personenzuges beträgt 10 m s^{-1}, d. h. 36 km h^{-1}.

16. Ein Lehrer will das Geld aus der Altpapiersammlung unter zehn Schülern aufteilen. Wenn er jedem Schüler 2 M gäbe, fehlten ihm gerade soviel Mark, wie er übrigbehielte, wenn er jedem Schüler je 1,80 M gäbe.

Lösung: Die Anzahl der Mark möge x sein; wenn der Lehrer jedem Schüler 2 M gäbe, fehlten ihm $(20 - x)$ M; wenn er jedem 1,80 M gäbe, behielte er noch $(x - 18)$ M zurück. Entsprechend der Aufgabe erhalten wir:

$$20 - x = x - 18$$
$$x = 19$$

Antwort: Der Lehrer hatte 19 M zu verteilen.

17. Jemand kaufte für 642 M 6 kg Kaffee und 3 kg Tee. Wieviel bezahlte er für 1 kg jeder Ware, wenn 1 kg Kaffee und 1 kg Tee zusammen 134 M kosten?

Lösung: Möge 1 kg Kaffee x M kosten, dann folgert man aus der Aufgabe, daß 1 kg Tee $(134 - x)$ M kostet. Da für den gesamten Einkauf 642 M bezahlt wurden, erhalten wir die Gleichung:

$$6x + 3(134 - x) = 642$$
$$6x + 402 - 3x = 642$$
$$3x = 642 - 402$$
$$3x = 240$$
$$x = 80$$

Antwort: 1 kg Kaffee kostet 80 M und 1 kg Tee 54 M.

18. Ein Student, der nach seinem Alter gefragt wurde, antwortete: In 10 Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie ich vor 4 Jahren war. Wie alt war der Student?

Lösung: Das Alter des Studenten ist x, in 10 Jahren wird er $(x + 10)$ Jahre alt sein; vor vier Jahren war er $(x - 4)$ Jahre alt. Entsprechend der Aufgabe ist die erste Zahl das Doppelte der zweiten, also

$$x + 10 = 2(x - 4)$$
$$x = 18$$

Antwort: Der Student war 18 Jahre alt.

19. Ein Läufer läuft von der Stadt A nach der Stadt B, wobei er täglich 28 km zurücklegt. Gleichzeitig läuft ein anderer Läufer, der täglich 24 km zurücklegt, von B aus in Richtung A. Die Entfernung zwischen den Städten A und B beträgt 260 km.
In wieviel Tagen treffen sich beide Läufer?

Lösung: Die Läufer treffen sich in x Tagen. Also legt der erste Läufer in x Tagen $28 \cdot x$ km, der zweite $24 \cdot x$ km zurück. Da die Entfernung $\overline{AB} = 260$ km beträgt, erhalten wir folgende Gleichung:

$$28x + 24x = 260$$
$$x = 5$$

Antwort: Die Läufer treffen sich in 5 Tagen.
Probe: Der erste Läufer legt in 5 Tagen 140 km zurück, also ist er von der Stadt B noch 120 km entfernt. Der zweite Läufer absolviert in 5 Tagen 120 km (er ist von der Stadt A noch 140 km entfernt). Die Läufer treffen sich tatsächlich nach 5 Tagen.

20. Ein Betrieb fertigte im I. Quartal 200 t Erzeugnisse, davon 80% bester Qualität. Im II. Quartal erzeugte er 300 t, davon 90% bester Qualität. Wie hoch war die Produktion bester Qualität im I. Halbjahr in Prozenten?

Lösung: 80% der Produktion bester Qualität von 200 t Erzeugnissen im I. Quartal ist

$$200 \text{ t} \cdot \frac{80}{100} = 160 \text{ t}.$$

90% bester Qualität von 300 t Erzeugnissen im II. Quartal ist

$$300 \text{ t} \cdot \frac{90}{100} = 270 \text{ t}.$$

Die Erzeugung bester Qualität im I. Halbjahr ist in Prozenten ausgedrückt

$$P = \frac{100(160 + 270)}{(200 + 300)}\,\% = \frac{100 \cdot 430}{500}\,\% = 86\,\%$$

Antwort: Der Anteil von Erzeugnissen bester Qualität im I. Halbjahr betrug 86%.

21. Auf die 3 Personen A, B und C sollen 1000 M so aufgeteilt werden, daß die Person A doppelt soviel wie die Person B und die Person B das Dreifache der Person C erhält. Wieviel Geld bekommt jede Person?

Lösung: Möge die Person C x M erhalten, dann erhält die Person B $3x$ M und die Person A $6x$ M.
Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$6x + 3x + x = 1000$$
$$x = 100$$

Antwort: Die Person C erhält 100 M, die Person B 300 M und die Person A 600 M.

22. Eine Flasche mit Korken kostet 32 Pf; die Flasche ist 30 Pf teurer als der Korken. Wieviel kostet die Flasche und wieviel der Korken?

Lösung: Den Preis des Korkens bezeichnen wir mit x Pf, dann ist der Preis der Flasche $(x + 30)$ Pf. Die Flasche kostet zusammen mit dem Korken 32 Pf, d. h.:

$$(x + 30) + x = 32$$
$$x = 1$$

Antwort: Der Preis des Korkens ist also 1 Pf und der der Flasche 31 Pf.
Aus der Probe resultiert, daß die Flasche zusammen mit dem Korken tatsächlich 32 Pf kostet, wobei die Flasche 30 Pf teurer ist als der Korken.

23. Die Genossenschaftsbauern ernteten von ihren Feldern 1200 dt Weizen, was abzüglich 90 dt das Zehnfache der ausgesäten Menge darstellt. Wieviel Weizen haben sie ausgesät?

Lösung: Die Menge des ausgesäten Weizens bezeichnen wir mit x dt, dann resultiert aus der Aufgabe folgendes:

$$10x = 1200 + 90$$
$$x = 129$$

Antwort: Die Genossenschaftsbauern haben 129 dt Weizen ausgesät.

24. Als man den berühmten griechischen Mathematiker Pythagoras fragte, wieviel Schüler in seine Schule gingen, antwortete er wie folgt: „Die Hälfte der Schüler studiert Mathematik, ein Viertel Musik, ein Siebentel schweigt, und außerdem sind dort noch 3 Frauen.“ Wieviel Schüler waren in seiner Schule?

Lösung: Die Anzahl aller Schüler bezeichnen wir mit x, Mathematik studieren $\frac{x}{2}$, Musik $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{7}$ schweigen. Aus der Bedingung der Aufgabe resultiert folgende Gleichung:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$$

Wenn wir die Gleichung mit der Zahl 28 multiplizieren, erhalten wir:

$$14x + 7x + 4x + 84 = 28x$$
$$x = 28$$

Antwort: In der Schule waren 28 Schüler.

25. Von der Stadt A bis zu der 213 km entfernten Stadt B fährt ein Lastkraftwagen mit einer Geschwindigkeit von 50 km h^{-1}. Gleichzeitig fährt von der Stadt B in Richtung Stadt A ein Radfahrer mit einer Geschwindigkeit von 18 km h^{-1}. Nach welcher Zeit treffen sie sich und an welcher Stelle, wenn der Lkw eine Panne hatte und für deren Beseitigung 30 min erforderlich waren?

Lösung: Die tatsächliche Fahrzeit des Lkw bis zum Treffpunkt bezeichnen wir mit x h, dann beträgt die tatsächliche Fahrzeit des Radfahrers $(x + 0{,}5)$ h. Das Auto legte eine Strecke von $50x$ km und der Radfahrer $18(x + 0{,}5)$ km zurück. Die Summe der zurückgelegten Strecken muß 213 km sein, also

$$50x + 18(x + 0{,}5) = 213$$
$$x = 3$$

Antwort: Das Auto trifft sich mit dem Radfahrer nach $3\frac{1}{2}$ Stunden an einer Stelle, die 150 km von der Stadt A entfernt liegt.

26. 50 Fleischkonserven zweier Sorten, und zwar Gänsefleisch für 5 M und Schweinefleisch für 3 M, kosten 210 M. Ermitteln Sie, wieviel Konserven Gänsefleisch und wieviel Konserven Schweinefleisch es waren.

Lösung: Die Anzahl der Gänsefleischkonserven bezeichnen wir mit x. Wenn die Gesamtzahl der Konserven 50 beträgt, dann waren es $(50 - x)$ Stück Schweinefleischkonserven. x Stück Gänsefleischkonserven kosten $5x$ M, und $(50 - x)$ Stück Schweinefleischkonserven kosten $3(50 - x)$ M, wodurch wir folgende Gleichung erhalten:

$$5x + 3(50 - x) = 210 \quad \Rightarrow x = 30$$

Antwort: Es waren 30 Gänsefleischkonserven und 20 Schweinefleischkonserven.

Probe: 30 St. Gänsefleischkonserven zu je 5 M kosten 150 M, 20 St. Schweinefleischkonserven zu je 3 M kosten 60 M. 50 St. Konserven mit beiden Fleischsorten kosten 210 M, was der Aufgabenstellung entspricht.

27. Aus einem Behälter, in dem sich 133 l Benzin befinden, gießen wir soviel heraus, daß in ihm das $5\frac{1}{3}$ fache weniger verbleibt, als wir herausgegossen haben. Wieviel Liter Benzin haben wir ausgegossen?

Lösung: x möge die Anzahl der Liter des ausgegossenen Benzins darstellen. Dann sind im Behälter $(133 - x)$ l verblieben. Aus der Aufgabe folgt, daß die Menge $(133 - x)$ l das $5\frac{1}{3}$ fache weniger als die Menge von x Litern darstellt. Daher nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$x = 5\frac{1}{3}\,(133 - x)$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$x = 5\frac{1}{3} \cdot 133 - 5\frac{1}{3}x$$

$$5\frac{1}{3}x + x = \frac{16}{3} \cdot 133$$

$$6\frac{1}{3}x = \frac{16 \cdot 133}{3}$$

$$\frac{19}{3}x = \frac{16 \cdot 133}{3}$$

$$x = \frac{3 \cdot 16 \cdot 133}{19 \cdot 3} = 16 \cdot 7$$

$$x = 112$$

Antwort: Wir haben 112 l Benzin ausgegossen.

28. Der Vater ist 48 Jahre, der Sohn 21 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war der Vater zehnmal so alt wie sein Sohn?

Lösung: Das war vor x Jahren. Vor x Jahren war der Vater $(48 - x)$, der Sohn $(21 - x)$ Jahre alt. Aus den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt:

$$48 - x = 10(21 - x) \Rightarrow x = 18$$

Antwort: Vor 18 Jahren war der Vater zehnmal so alt wie der Sohn.

Probe: Vor 18 Jahren war der Vater 30 Jahre, der Sohn 3 Jahre alt; der Vater war also damals zehnmal so alt wie sein Sohn.

29. Meerwasser enthält 5% Salz.[1] Wieviel Kilogramm Süßwasser muß man zu 40 kg Meerwasser hinzugießen, damit der Salzgehalt 2% beträgt?

Lösung: Die Menge des hinzuzugießenden Süßwassers bezeichnen wir mit x kg. In 40 kg Meerwasser befinden sich 5% Salz, d. h. $\left(\frac{5}{100}\right) \cdot 40$ kg. Die Menge des Salzes in $(40 + x)$ kg Meerwasser einschließlich des zuzugießenden Süßwassers beträgt 2%, d. h. $\left[\frac{2}{100}(40 + x)\right]$ kg (die Salzmenge bleibt erhalten).

Das bedeutet, daß

$\frac{5}{100} \cdot 40 = \frac{2}{100}(40 + x)$ gilt.

Die Gleichung multiplizieren wir mit der Zahl 100 und erhalten nach der Umformung:

$$5 \cdot 40 = 2(40 + x)$$
$$200 = 80 + 2x$$
$$x = 60$$

[1] Der Salzgehalt der Meere ist unterschiedlich. Im Toten Meer beträgt er bis zu 25%, im Nordatlantik fast 4%, im Schwarzen Meer etwa 1,8% und in der Ostsee 0,8%. Werte über 4% findet man beispielsweise im Roten Meer und im Persischen Golf.

Antwort: In das Meerwasser müßten 60 kg Süßwasser hineingegossen werden.

30. In einem Dreieck ist ein Winkel 4° größer als der zweite und 10° kleiner als der dritte Winkel. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?

Lösung: Mit α bezeichnen wir die Größe des ersten Winkels, der 4° größer ist als der zweite. Der zweite Winkel hat also die Größe von $(\alpha - 4°)$ und der dritte Winkel, der 10° größer ist, die Größe von $(\alpha + 10°)$. Die Summe der Winkel im Dreieck beträgt 180°, also

$$\alpha + (\alpha - 4°) + (\alpha + 10°) = 180°$$
$$3\alpha = 174°$$
$$\alpha = 58°$$

Antwort: Die Winkel im Dreieck haben die Größe von 54°, 58° und 68°.

31. Drei Seiten eines Sechsecks sind gleich lang, die vierte Seite ist 2 cm und die fünfte 5 cm länger als die erste. Die sechste Seite ist 7 cm kürzer als die erste Seite. Wie lang sind die Seiten, wenn der Umfang des Sechsecks 120 cm beträgt?

Lösung: Die Längen der Seiten des Sechsecks bezeichnen wir mit a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und a_6 cm. Entsprechend der Bedingung der Aufgabe gilt:

$$a_1 = a_2 = a_3,$$

diese Länge bezeichnen wir mit x. Dann gilt:

$$a_4 = x + 2 \qquad a_5 = x + 5 \qquad a_6 = x - 7$$

Der Umfang des Sechsecks gleicht der Summe der Längen seiner Seiten, also

$$3x + (x + 2) + (x + 5) + (x - 7) = 120$$
$$6x = 120$$
$$x = 20$$

Antwort: Die Seiten des Sechsecks haben die Längen

$a_1 = a_2 = a_3 = 20$ cm, $a_4 = 22$ cm,
$a_5 = 25$ cm, $a_6 = 13$ cm.

32. Ondrej bekam als Arbeitslohn 480 Kčs mehr als die Hälfte der Summe, die Pavol bekam. Zusammen bekamen sie 3360 Kčs.

Welchen Arbeitslohn bekam Ondrej und welchen Pavol?

Lösung: Den Arbeitslohn von Pavol bezeichnen wir mit x Kčs, die Hälfte seines Arbeitslohnes beträgt $\frac{1}{2}x$ Kčs. Der gesamte Arbeitslohn von Ondrej wird also $\left(\frac{1}{2}x + 480\right)$ Kčs sein. Zusammen verdienten sie 3360 Kčs, also:

$$\left(\frac{1}{2}x + 480\right) + x = 3360$$
$$x = 1920$$

Antwort: Der Arbeitslohn von Pavol beträgt 1920 Kčs, der von Ondrej 1440 Kčs.[1]

33. Ein Zug legt eine bestimmte Strecke in 4 h zurück. Ein anderer Zug, dessen Geschwindigkeit 14 km h^{-1} höher liegt, legt die gleiche Strecke in 3 h zurück. Wie hoch ist die Geschwindigkeit jeder der beiden Züge?

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Zuges bezeichnen wir mit x km h^{-1}, die Geschwindigkeit des zweiten Zuges ist dann $(x + 14)$ km h^{-1}. In 4 h legt der erste Zug eine Strecke von $4x$ km und der zweite Zug legt die gleiche Strecke in 3 h zurück, also:

$$4x = 3(x + 14)$$
$$x = 42$$

Antwort: Der erste Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 42 km h^{-1} und der zweite mit einer Geschwindigkeit von 56 km h^{-1}.

34. In einem bestimmten Betrieb wurde der Jahresplan der Arbeitsproduktivität mit 103,8% erfüllt, wodurch man eine Produktivitätssteigerung gegenüber dem Vorjahr um 19,8% erreichte. Berechnen Sie, wie hoch die geplante Jahressteigerung der Arbeitsproduktivität war.

Lösung: Die vorgesehene Erfüllung der jährlichen Arbeitsproduktivität bezeichnen wir mit x. Der tatsächlich erreichte Stand beträgt 119,8% (beide Angaben beziehen sich auf den vorjährigen Stand der Arbeitsproduktivität). Entsprechend der Aufgabe beträgt die neue Arbeitsproduktivität 103,8% der geplanten. Es gilt also

$$119{,}8 : x = 1{,}038 \Rightarrow x = \frac{119{,}8}{1{,}038} = 115{,}4$$

Antwort: Ursprünglich war also eine Steigerung der Arbeitsproduktivität um 15,4% geplant.

35. Ein Lagerverwalter sagt: „Ich habe die Hälfte des Lagerbestandes und ein Stück darüber hinaus ausgeliefert; außerdem habe ich noch 10 Ausschußstücke ausgesondert. Im Lager verblieb mir also ein Drittel der ursprünglichen Anzahl, 7 komplette Stücke und zwei Drittel eines Stücks." Wieviel Stück hatte der Lagerverwalter ursprünglich?

Lösung: Die Anzahl der Stücke, die der Lagerverwalter als Lagerbestand hatte, bezeichnen wir mit x. Aus dem Lager hat er ausgeliefert:

$$\left(\frac{x}{2} + 1 + 10\right)$$

Im Lager verblieben ihm:

$$\left(\frac{x}{3} + 7 + \frac{2}{3}\right)$$

Insgesamt waren x Stück vorhanden, also:

$$\frac{x}{2} + 1 + 10 + \frac{x}{3} + 7 + \frac{2}{3} = x$$

Als Lösung erhalten wir $x = 112$.

Antwort: Der Lagerverwalter hatte am Anfang 112 Stück Waren.

36. Ein junges Ehepaar kauft sich für den Bau eines Einfamilienhauses ein Grundstück mit einer Fläche von 400 m² für 3000 M. Einen Teil des Grundstückes kaufte es sich für 7 M je m² und den Rest für 8 M je m². Berechnen Sie, wieviel Quadratmeter sie sich für 7 M und wieviel für 8 M kauften.

Lösung: Bezeichnet man die Anzahl der Quadratmeter des Teiles des Grundstückes, den es sich für 7 M kaufte, mit x, dann beträgt der Rest $(400 - x)$. Insgesamt bezahlten die Eheleute also (in M):

$$7x + 8(400 - x) = 3000$$

Die Lösung der Aufgabe ergibt $x = 200$.

Antwort: Das Ehepaar kaufte die Hälfte des Grundstückes für 7 M je m² und die andere Hälfte für 8 M je m².

[1] 1 Kčs (tschechoslow. Krone) entspricht etwa dem Wert von 0,33 M

37. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v, mit der ein Draht von einer Walze (Bild 6) mit einem Durchmesser $d = 20$ mm abgewickelt wird, wenn die Drehzahl der Stange, die in die Spindel einer Maschine eingespannt wurde, $n = 160\ \text{min}^{-1}$ beträgt.

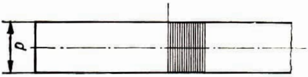

Bild 6

Lösung: Bei einer Umdrehung wird eine Länge des Drahtes abgewickelt, die dem Kreisumfang entspricht, also πd.
Die Geschwindigkeit v berechnen wir aus der Formel $v = \pi d n$ ... (1). Nach Einsetzen der speziellen Werte in die Formel (1) erhalten wir:

$$v = \pi \cdot 0{,}02\ \text{m} \cdot 160\ \text{min}^{-1} = 10\ \text{m min}^{-1}$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Abwickelns des Drahtes beträgt $v = 10\ \text{m min}^{-1}$.

38. Schüler sammelten 3200 g weiße Akazienblüten, gelbe Akazienblüten, Lindenblüten und Ahornblüten. Welche Mengen der Blüten einer jeden Art haben sie gesammelt, wenn sie das Dreifache an Lindenblüten im Vergleich zu weißen Akazienblüten, doppelt soviel Ahornblüten wie weiße Akazienblüten und Lindenblüten zusammen sowie 1200 g gelbe Akazienblüten mehr als Ahornblüten gesammelt hatten?

Lösung: Die Schüler mögen x g Lindenblüten gesammelt haben, dann sammelten sie $3x$ g weiße Akazienblüten, $2(x + 3x) = 8x$ g Ahornblüten und $(8x + 1200)$ g gelbe Akazienblüten.
Aus der Aufgabenstellung resultiert die Gleichung:

$$x + 3x + 8x + (8x + 1200) = 3200$$
$$\Rightarrow x = 100$$

Antwort: Die Schüler sammelten folgende Blütenmengen: Lindenblüten 100 g, weiße Akazienblüten 300 g, Ahornblüten 800 g und gelbe Akazienblüten 2 kg.

39. Vom Bahnhof S fuhr um 8.30 Uhr ein Güterzug mit einer Geschwindigkeit von $20\ \text{km h}^{-1}$ ab. Als er vom Ausgangsbahnhof 2 km entfernt war, durchfuhr ein Schnellzug mit $60\ \text{km h}^{-1}$ den Bahnhof. Beide fuhren in der gleichen Richtung. Wann überholt der Schnellzug den Güterzug?

Lösung: Der Güterzug legte die 2 km in 0,1 h zurück. Die Zeit von der Abfahrt des Güterzuges bis zum Zeitpunkt des „Überholens" bezeichnen wir mit x. In dieser Zeit hat der Güterzug eine Strecke von $20x$ km zurückgelegt. Der Schnellzug fuhr vom Bahnhof 0,1 h später als der Güterzug ab, erreichte also den Güterzug um $(x - 0{,}1)$ h nach 8.30 Uhr. In dieser Zeit legte er $60(x - 0{,}1)$ km zurück, also:

$$20x = 60(x - 0{,}1)$$
$$x = 0{,}15$$

Antwort: Der Schnellzug holte den Güterzug um 8.39 Uhr ein.
Der Leser möge sich an Hand einer Grafik (sog. „grafischer Fahrplan") von der Richtigkeit der Antwort überzeugen und kann auch dort den Ort des Überholungsvorganges ablesen.

40. Wir addieren zu einer bestimmten Zahl ihre Hälfte hinzu, wodurch diese Summe die Zahl 60 um soviel überschreitet, um wieviel diese Zahl kleiner ist als 65. Um welche Zahl handelt es sich?

Lösung: Die gesuchte Zahl ist x. Wenn wir zu dieser ihren halben Wert addieren, erhalten wir $\left(x + \frac{x}{2}\right) = \frac{3x}{2}$, diese Zahl ist um $\left(\frac{3x}{2} - 60\right)$ größer als 60, und zwar gleicht sie entsprechend der Aufgabenstellung der Zahl $(65 - x)$, oder

$$\frac{3x}{2} - 60 = 65 - x$$

Die Lösung ist $x = 50$.

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 50.

41. Ein Wirbelsturm knickte einen Baum, dessen Höhe 14,5 m betrug, auf die Weise, daß seine Spitze 4,3 m über dem Erdboden hing (Bild 7). In welcher Höhe wurde der Baum geknickt?

Lösung: Die gesuchte Höhe bezeichnen wir als x. Die Länge des geknickten Baumteils ist dann $(x - 4{,}3)$ m. Die Höhe des Baumes wird demnach $[x + (x - 4{,}3)]$ m sein. Daraus resultiert die Gleichung:

$$x + (x - 4{,}3) = 14{,}5$$
$$2x = 14{,}5 + 4{,}3$$
$$x = 9{,}4$$

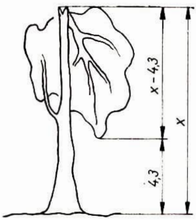

Bild 7

Antwort: Der Baum wurde in einer Höhe von 9,4 m geknickt.

42. Welcher Strom durchfließt einen Kupferdraht mit einem spezifischen Widerstand $\varrho = 0{,}0175\ \Omega \cdot \mathrm{mm^2/m}$, mit einer Länge von $l = 300$ m und einem Querschnitt von $A = 0{,}25\ \mathrm{mm^2}$, wenn an seinen Enden eine Spannung von 120 V angelegt wird?

Lösung: Aus den Beziehungen:

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{und} \quad R = \varrho \frac{l}{A}$$

resultiert, daß

$$I = \frac{UA}{\varrho l}$$

Nach Einsetzen gilt

$$I = \frac{120 \cdot 0{,}25}{0{,}0175 \cdot 300}\ \mathrm{A} = 5{,}71\ \mathrm{A}$$

Antwort: Der Kupferdraht wird von einem Strom 5,71 A durchflossen.

43. In einem alten ägyptischen Ahmed-Rechenbuch (1700 v. u. Z.) wurde folgende Aufgabe gefunden: Ein Mathematiker ermittelte, daß in einer Herde, die ein Hirte auf die Weide führte, 70 Tiere waren. Er fragte den Hirten, wie groß der Teil des Viehs seiner Herde ist, den er treibt. Daraufhin antwortete der Hirte: „Ich führe zwei Drittel von einem Drittel der Herde, die mir anvertraut ist, auf die Weide." Berechnen Sie, wie groß die Stückzahl seiner Herde war.

Lösung: Möge die Stückzahl in der Herde x sein, dann ist ein Drittel der Herde $\frac{x}{3}$, zwei Drittel von diesem Drittel sind $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{3}$, das ist gleich 70, also gilt

$$\frac{2x}{9} = 70$$
$$x = 315$$

Antwort: Der Hirte hatte in der Herde 315 Stück Vieh.

44. Eine LPG bewirtschaftet Boden, von dem 55% Ackerland, der Rest, d. h. 270 ha, Wald ist. Wieviel Hektar Boden besitzt die LPG?

Lösung: Die gesuchte Anzahl der Hektar bezeichnen wir mit x. Die Ackerfläche beträgt $\frac{55}{100} \cdot x$ ha. Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\frac{55}{100} x + 270 = x$$
$$\frac{11}{20} x + 270 = x$$
$$\frac{9}{20} x = 270$$
$$x = \frac{20 \cdot 270}{9} = 20 \cdot 30 = 600$$

Antwort: Die LPG besitzt 600 ha Boden.

45. Zwei Zimmerleute verdienten zusammen 500 M. Zwei Drittel des Verdienstes des ersten Zimmermanns gleichen dem halben Verdienst des zweiten Zimmermanns, erhöht um 30 M. Wieviel hat jeder von ihnen verdient?

Lösung: Wenn wir den Verdienst des ersten Zimmermanns mit x M bezeichnen, dann ist der Verdienst des zweiten Zimmermanns $(500 - x)$ M. Entsprechend der Aufgabenstellung gilt:

$$\frac{2}{3} x = \frac{1}{2} (500 - x) + 30$$

Durch die Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 240$.

Antwort: Der erste Zimmermann verdiente 240 M und der zweite Zimmermann 260 M.

46. Die Entfernung zwischen den Orten C und D beträgt 174 km. Von C nach D fährt ein Zug mit einer Geschwindigkeit von 30 km h^{-1}, von D nach C ein anderer Zug mit einer Geschwindigkeit von 57 km h^{-1}. Beide Züge fahren 10.30 Uhr ab. Wann treffen sie sich?

Lösung: Möge die Länge der Strecke, die der von C nach D fahrende Zug zurückgelegt hat, zum Zeitpunkt des Zusammentreffens x sein. Seine Geschwindigkeit ist 30 km h^{-1}, d. h., die Strecke legte er in der Zeit $\frac{x}{30}$ h zurück (Strecke geteilt durch die Geschwindigkeit).
Der von D nach C fahrende Zug hat bis zum Zeitpunkt des Zusammentreffens die Strecke $(174 - x)$ km zurückgelegt. Diese Strecke durchfuhr er in der Zeit $\left(\frac{174 - x}{57}\right)$ h.
Die Züge verließen gleichzeitig die Bahnhöfe, das bedeutet, daß

$$\frac{x}{30} = \frac{174 - x}{57}$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert $x = 60$.

Antwort: Die Züge trafen sich in einer Entfernung von 60 km von der Bahnstation C um 12.30 Uhr.

47. Nach dem Tode des Vaters sollten sich vier Kinder laut Testament 18000 M untereinander aufteilen. Die Tochter, die das älteste Kind war, bekam ein Drittel der Gesamtsumme und jeder der drei Söhne je 1000 M mehr als der jeweils jüngere Bruder. Wieviel bekam jedes Kind?

Lösung: Die Tochter bekam 6000 M, der jüngste Bruder bekam x M, der ältere $(x + 1000)$ M und der älteste $(x + 2000)$ M. Zusammen bekamen sie:

$$x + (x + 1000) + (x + 2000) + 6000$$
$$= 18000$$
$$x = 3000$$

Antwort: Der jüngste bekam 3000 M, der ältere 4000 M und der älteste Bruder 5000 M, die Schwester bekam 6000 M.

48. Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Produktion absinken würde, wollten wir ohne Steigerung der Arbeitsproduktivität von der achtstündigen auf die siebenstündige Arbeitszeit übergehen. Um wieviel Prozent müßte die Arbeitsproduktivität ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt?

Lösung 1: Bei einer achtstündigen Arbeitszeit werden in 1 h $\frac{x}{8}$ der Erzeugnisse und bei der gleichen Arbeitsproduktivität werden in 7 h $\frac{x}{8} \cdot 7$ Erzeugnisse hergestellt. Dann gilt:

$$p = \frac{100 \cdot \frac{7}{8} x}{x} \% = 87{,}5\%$$

Antwort 1: Die Produktion würde um 12,5% absinken.

Lösung 2: Die Arbeitsproduktivität ist als Anzahl der Erzeugnisse je Zeiteinheit erklärt. Oder wenn wir die Anzahl der Erzeugnisse mit x bezeichnen, dann beträgt die Arbeitsproduktivität bei einer achtstündigen Arbeitszeit $\frac{x}{8}$, bei einer siebenstündigen Arbeitszeit $\frac{x}{7}$, also

$$p = \frac{100 \cdot \frac{x}{7}}{\frac{x}{8}} \% = \frac{100 \cdot 8x}{7x} \% = 114{,}3\%$$

Antwort 2: Die Arbeitsproduktivität müßte um 14,3% ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt.

49. Ein Lötmaterial enthält Kupfer und Zink. Wieviel Kupfer und Zink enthalten 60 cm^3 Lötmaterial mit einer Masse von 485 g? (Die Dichte von Kupfer beträgt 8,92 g/cm^3, die von Zink 7,13 g/cm^3.)

Lösung: Im Lötmaterial sind x cm^3 Kupfer enthalten, seine Masse beträgt $8{,}92 \cdot x$ g.

Zink ist im Lötmaterial $(60 - x)$ cm³ enthalten, seine Masse ist $7{,}13 \cdot (60 - x)$ g. Wir wollen die Gleichung aufstellen:

Masse des Kupfers + Masse des Zinks = Masse des Lötmaterials.

$$\begin{aligned} 8{,}92x + 7{,}13(60 - x) &= 485 \\ 8{,}92x + 427{,}8 - 7{,}13x &= 485 \\ 1{,}79x &= 57{,}2 \\ x &= 31{,}96 \end{aligned}$$

Antwort: Im Lötmaterial sind annähernd 32 cm³ Kupfer und 28 cm³ Zink enthalten.

50. Eine Uhr zeigt die Zeit 9.00 Uhr an. Stellen Sie fest, in wieviel Minuten der Minutenzeiger den Stundenzeiger einholt.

Lösung: Wir nehmen an, daß die Uhrzeiger sich gleichmäßig bewegen. Möge bis zum Zusammentreffen der Zeiger der Stundenzeiger x Minutenteilstriche des Zifferblattes weitergerückt sein; dann rückt der Minutenzeiger in der gleichen Zeit $(45 + x)$ Minutenteilstriche weiter. Da der Stundenzeiger in der gleichen Zeit 1/12 der Bahn des Minutenzeigers zurücklegt, gilt:

$$x = \frac{45 + x}{12}$$

$$12x = 45 + x$$

$$x = 4\frac{1}{11}$$

Antwort: Der Minutenzeiger erreicht den Stundenzeiger in $49\frac{1}{11}$ min.

51. Mit welcher Beschleunigung setzt sich ein Zug in Bewegung, dessen Gesamtmasse 200 t beträgt und dessen Lokomotive eine Zugkraft von 80000 N entwickelt?

Lösung: Die Zugkraft der Lokomotive ist $F = ma$, wobei m die Masse und a die Beschleunigung sind. Daraus berechnen wir dann:

$$a = \frac{F}{m} \qquad (200 \text{ t} = 200000 \text{ kg})$$

Nach dem Einsetzen gilt:

$$a = \frac{80000}{200000}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Antwort: Der Zug setzt sich mit einer Beschleunigung von 0,4 m/s² in Bewegung.

52. In einer zweiziffrigen Zahl ist die Zehnerziffer um 5 größer als die Einerziffer. Wenn wir in der gegebenen Zahl die Ziffern austauschen, beträgt die neue Zahl $\frac{3}{8}$ der ursprünglichen Zahl. Um welche Zahl handelt es sich?

Lösung: In der gegebenen Zahl bezeichnen wir die Einer mit dem Buchstaben x. An der Stelle der Zehner ist die Ziffer $(x + 5)$. Wenn jeder Zehner zehn Einer hat, wird die gesuchte Zahl $[10(x + 5) + x]$. Nach dem Austauschen der Ziffern wird sich an der Stelle der Einer die Ziffer $(x + 5)$ und an der Stelle der Zehner die Ziffer x befinden. Die neue, aus zwei Ziffern bestehende Zahl wird dann $(10x + x + 5)$. Da die neue Zahl $\frac{3}{8}$ der ursprünglichen beträgt, gilt:

$$\frac{3}{8}[10(x + 5) + x] = 10x + x + 5$$

$$\begin{aligned} 3(10x + 50 + x) &= 8(11x + 5) \\ 33x + 150 &= 88x + 40 \\ 55x &= 110 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Als Einer steht in der gesuchten Zahl die Ziffer 2 und als Zehner die Ziffer 7 (da $2 + 5 = 7$).

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 72.

53. Eine Aufgabe, die bereits der griechische Landvermesser Heron zu lösen wußte (etwa 170 bis 100 Jahre v. u. Z.), lautet: Aus vier Rohren fließt Wasser in einen Behälter zu, wobei sich letzterer über das erste Rohr innerhalb eines Tages, über das zweite innerhalb zweier Tage, über das dritte innerhalb dreier Tage und über das vierte Rohr innerhalb von vier Tagen füllen würde. Berechnen Sie, im Verlaufe welcher Zeit sich der Behälter füllt, wenn das Wasser durch alle Rohre gleichzeitig zufließt.

Lösung: Möge der Inhalt des Behälters V sein. Die gesuchte Zeit bezeichnen wir mit x. Im Verlaufe eines Tages fließt durch die einzelnen

Rohre $V, \frac{V}{2}, \frac{V}{3}, \frac{V}{4}$ Wasser. Im Verlaufe von x Tagen fließt folgende Wassermenge zu:

$$x\left(V + \frac{V}{2} + \frac{V}{3} + \frac{V}{4}\right) = V$$

$$xV + \frac{Vx}{2} + \frac{Vx}{3} + \frac{Vx}{4} = V$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung durch Zahl $V \neq 0$ dividieren, erhalten wir:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$$

Nach Multiplizieren der Gleichung mit 12 und nach Umformung erhalten wir:

$$12x + 6x + 4x + 3x = 12 \Rightarrow x = 0{,}48$$

Antwort: Wenn das Wasser durch alle Rohre gleichzeitig zufließt, füllt sich der Behälter im Verlaufe von 0,48 Tagen, d. h. im Verlaufe von 11 h, 31 min und 12 s.

54. Zwei Freunde aus ein und derselben Ortschaft sollen sich in eine unweit gelegene Stadt begeben. Der erste geht zu Fuß und braucht für die Strecke 1 h. Der andere fährt mit dem Fahrrad und braucht für die Strecke 20 min. In welcher Zeit holt der Radfahrer den Fußgänger ein, der eine Viertelstunde vor ihm losgegangen ist?

Lösung: Die Entfernung bis zur Stadt bezeichnen wir mit d km. Die Geschwindigkeit des Fußgängers ist also $\frac{d}{60}$ km/min, die Geschwindigkeit des Radfahrers $\frac{d}{20}$ km/min. Die gesuchte Zeit (in Minuten) kennzeichnen wir mit x. In einer viertel Stunde legt der Fußgänger $\frac{d}{4}$ km zurück, in x Minuten absolviert er $\frac{xd}{60}$ km; der Radfahrer legt in x Minuten $\frac{xd}{20}$ km zurück. Wir können also folgende Gleichung schreiben:

$$\frac{xd}{20} = \frac{xd}{60} + \frac{d}{4}$$

Da $d \neq 0$ ist, gilt:

$$\frac{x}{20} = \frac{x}{60} + \frac{1}{4} \Rightarrow x = 7\frac{1}{2}$$

Antwort: Der Radfahrer holt den Fußgänger in $7\frac{1}{2}$ min ein.

55. Wieviel Prozent Kohlenstoff und Wasserstoff enthält Benzol, dessen Formel C_6H_6 ist?

Lösung: Die relative Atommasse des Kohlenstoffs ist 12 und die des Wasserstoffs 1. Die relative Molekülmasse des Benzols ist $6 \cdot 12 + 6 \cdot 1 = 78$. Für die prozentuale Kohlenstoffmenge gilt:

$$78:72 = 100:x.$$

Aus der Gleichung der Anteile folgt

$$78 \cdot x = 72 \cdot 100$$

und daraus wiederum

$$x = \frac{72 \cdot 100}{78}$$

$$x = 92{,}3$$

Antwort: Das Benzol beinhaltet 92,3% Kohlenstoff und 7,7% Wasserstoff.

56. Zwei Lehrlinge hatten eine bestimmte Menge Geld. Der erste hatte vier Fünftel des Geldes des zweiten. Als der erste ein Drittel seines Geldes ausgegeben hatte und der zweite noch 60 M bekam, hatten beide zusammen 934 M. Wieviel M hatte ursprünglich der erste und wieviel der zweite Lehrling?

Lösung: Die Menge des Geldes des zweiten Lehrlings bezeichnen wir mit x M, dann hatte der erste $\frac{4}{5}x$ M. Wenn der erste Lehrling ein Drittel seines Geldes ausgab, verblieben ihm $\left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{15}x\right)$ M. Der zweite bekam 60 M, also hatte er $(x + 60)$ M. Beide hatten zusammen

$$\left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{15}x\right) + (x + 60) = 934$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 570$.

Antwort: Der zweite Lehrling hatte 570 M und der erste $\frac{4}{5}x = 456$ M.

57. Wenn ein Radrennfahrer seine Geschwindigkeit um 4 km h^{-1} verringert, legt er in 1 h 15 min 9 km mehr zurück, als er in 45 min bei unverminderter Geschwindigkeit zurückgelegt hätte. Wie hoch war seine ursprüngliche Geschwindigkeit? Welche Strecke würde er in 45 min zurücklegen?

Lösung: Die Unbekannte in der Aufgabe ist die Geschwindigkeit v (in km h^{-1}), die verminderte Geschwindigkeit beträgt $v - 4$ km h^{-1}, und die Strecke, die in 1,25 h zurückgelegt wird, ist um 9 km länger als die Strecke (0,75 h $\cdot$ v), d. h.,

$$1{,}25(v - 4) = 0{,}75v + 9$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $v = 28$.

Antwort: In 45 min legt er 21 km zurück, und seine Geschwindigkeit beträgt 28 km h^{-1}.

58. In einer Fabrik arbeiteten 1440 Beschäftigte (Männer und Frauen). Für vorbildliche Arbeit bekamen $18\frac{3}{4}\%$ aller Männer und $22\frac{1}{2}\%$ aller Frauen Prämien. Die Betriebsleitung gab bekannt, daß 20% aller Beschäftigten prämiert wurden. Wieviel Männer und wieviel Frauen waren in der Fabrik beschäftigt?

Lösung: Die Anzahl der Männer, die in der Fabrik arbeiteten, bezeichnen wir mit x; dann beträgt die Anzahl der Frauen, die in der Fabrik arbeiteten $(1440 - x)$. Prämiert wurden:

$18\frac{3}{4}\%$ der Anzahl aller Männer oder

$$\frac{x}{100} \cdot 18\frac{3}{4} = \frac{75x}{400},$$

$22\frac{1}{2}\%$ der Anzahl aller Frauen oder

$$\frac{1440 - x}{100} \cdot 22\frac{1}{2} = \frac{1440 - x}{100} \cdot \frac{45}{2} = \frac{45(1440 - x)}{200},$$

20% aller Beschäftigten oder $\frac{1440}{100} \cdot 20 = \frac{1440}{5}$.

Die Summe der Anzahl der prämierten Männer und Frauen gleicht der Anzahl der prämierten Beschäftigten, es gilt also:

$$\frac{75x}{400} + \frac{45(1440 - x)}{200} = \frac{1440}{5} \Rightarrow x = 960$$

Antwort: In der Fabrik arbeiteten 960 Männer und 480 Frauen.

Probe: Es ist $960 + 480 = 1440$. Weiterhin gilt:

$18\frac{3}{4}\%$ von 960 ist $\frac{960}{100} \cdot \frac{75}{4} = 180$
(Anzahl der prämierten Männer),

$22\frac{1}{2}\%$ von 480 ist $\frac{480}{100} \cdot \frac{45}{2} = 108$
(Anzahl der prämierten Frauen),

20% von 1440 ist $1440 \cdot \frac{1}{5} = 288$
(Anzahl der prämierten Beschäftigten).

Es gilt tatsächlich, daß $180 + 108 = 288$.

59. Ein Arbeitsplatz wird durch 45 Glühlampen beleuchtet, die insgesamt eine Leistung von 2500 W umsetzen. Einige von ihnen sind 40-W-, die anderen 75-W-Glühlampen. Wieviel Glühlampen von jeder Sorte sind für die Beleuchtung des Arbeitsplatzes erforderlich?

Lösung: Die Anzahl der 40-W-Glühlampen bezeichnen wir mit x; diese setzen eine Leistung von $40x$ W um. Von den 75-W-Glühlampen, die eine Leistung von $75(45 - x)$ W umsetzen, sind $(45 - x)$ erforderlich. Insgesamt setzen sie eine Leistung von 2500 W um. Es gilt also:

$$40x + 75(45 - x) = 2500$$
$$x = 25$$

Antwort: Für die Beleuchtung des Arbeitsplatzes sind 25 St. 40-W- und 20 (nämlich $45 - x$) St. 75-W-Glühlampen erforderlich.

60. Der Umfang des Vorderrades eines Wagens beträgt 25 dm, der des Hinterrades 34 dm. Auf der Strecke von A nach B macht das Vorderrad 387 Umdrehungen mehr als das Hinterrad. Berechnen Sie die Strecke von A nach B.

Lösung: Die Drehzahl des Hinterrades ist n. Die Strecken für beide Räder sind gleich, daher hat die Gleichung folgende Form:

$$n \cdot 34 = (n + 387)\,25$$
$$n = 1075$$

Antwort: Die Strecke von A nach B ist $n \cdot 34$ dm $= 1075 \cdot 34$ dm $= 36\,550$ dm $= 3{,}655$ km.

61. Berechnen Sie aus der Formel $M = 9550\,\frac{P}{n}$ die Leistung P, die eine Kupplung überträgt. Die Kupplung führt $n = 180\ \text{min}^{-1}$ aus und kann durch das Moment $M = 515$ Nm belastet werden (M in Nm, n in min^{-1}, P in kW).

Lösung: Aus der Formel $M = 9550\,\frac{P}{n}$

$$\Rightarrow P = \frac{Mn}{9550}$$

und damit

$$P = \frac{515 \cdot 180}{9550} = 9{,}71$$

Antwort: Die Leistung der Kupplung beträgt 9,71 kW.

62. Arbeiter vereinbaren, daß sie für jeden Arbeitstag 48 fr[1] bekommen, wobei sie für jeden Tag ohne Arbeitsleistung 12 fr zurückgeben wollen. Nach 30 Tagen jedoch stellten sie fest, daß sie nichts verdient hatten. Wieviel Tage arbeiteten sie? [Die Aufgabe stellte der berühmte französische Mathematiker Étienne Bézout (1730 bis 1783).]

Lösung: Wenn wir die Anzahl der Arbeitstage mit x kennzeichnen, dann gibt es $(30 - x)$ freie Tage. Unter Berücksichtigung dessen, daß jeder der Arbeiter die gleiche Summe bekam und auch die gleiche Summe zurückgab, folgt aus der Aufgabe, daß der Verdienst eines Arbeiters in x Tagen $48x$ fr ist. Das von einem Arbeiter in $(30 - x)$ Tagen zurückgegebene Geld beträgt $[12(30 - x)]$ fr.

[1] fr: Franc, französische Währungseinheit

Daraus entsteht dann die Gleichung:

$$48x = 12(30 - x)$$
$$48x = 360 - 12x$$
$$60x = 360$$
$$x = 6$$

Antwort: Die Arbeiter arbeiteten 6 Tage.

63. In einer Obstverkaufsstelle hatte man im Verlauf des Tages bereits 835 kg Kirschen zu 2 M verkauft. Wieviel Kilogramm Kirschen muß der Verkäufer noch verkaufen, damit er den Tagesplanerlös von 1600 M erfüllt?

Lösung: Die Anzahl der Kilogramm, die der Verkäufer noch zu verkaufen hat, kennzeichnen wir mit x; dann ist die gesamte verkaufte Menge $(835 + x)$ kg; der Erlös für die $(835 + x)$ kg zu 2 M ist $[2(835 + x)]$ M, und der Planerlös betrug 1600 M. Daraus resultiert die Gleichung:

$$2(835 + x) = 1600$$
$$x = -35$$

Diese Zahl wird jedoch unserer Aufgabe nicht gerecht. Der Verkäufer kann nicht -35 kg Kirschen mehr verkaufen. Die Gleichung aber war richtig angesetzt. Wir erklären das ermittelte Ergebnis wie folgt:
Insgesamt waren $(835 + x)$ kg Kirschen zu verkaufen. Wenn wir die richtig berechnete Lösung $x = -35$ einsetzen, erhalten wir

$$(835 + x) = 835 - 35 = 800$$

Antwort: Der Verkäufer erfüllte den Planerlös von 1600 M tatsächlich bereits durch den Verkauf von 800 kg Kirschen, weil $800 \cdot 2$ M $= 1600$ M ist. Wenn er 835 kg Kirschen verkaufte, hätte er bereits 35 kg mehr verkauft. Das Vorzeichen Minus im Ergebnis bedeutet, daß das geforderte Tagesziel, d. h. der Erlös von 1600 M, bereits vor dem Verkauf der letzten 35 kg Kirschen erreicht wurde.

64. In einem Stromkreis sind Rheostaten mit den Widerständen $R_1 = 300\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$ und den Widerständen R_3 und R_4 (mit $R_3 = 2R_4$) hintereinandergeschaltet. Es sind die Widerstände zu berechnen, wenn der Gesamtwiderstand R des Stromkreises $1000\ \Omega$ beträgt.

Lösung: Bei Reihenschaltung von Widerständen ist der resultierende Widerstand:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Wenn wir die gegebenen Werte einsetzen, erhalten wir:

$$1000\ \Omega = 700\ \Omega + 3R_4 \Rightarrow R_4 = 100\ \Omega$$

Antwort: Die gesuchten Widerstände sind $R_4 = 100\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$.

65. Ein Betrieb produziert in 30 Arbeitstagen 600 Stück Erzeugnisse. Um wieviel Prozent muß die Arbeitsproduktivität gesteigert werden, damit er die gleiche Menge in 26 Arbeitstagen herstellt?

Lösung: Möge die Steigerung der Arbeitsproduktivität (Produktionssteigerung) $p\%$ sein. Beim ursprünglichen Arbeitstempo produziert der Betrieb täglich $\frac{600}{30} = 20$ Erzeugnisse.
Nach Produktivitätssteigerung werden je Tag $\frac{20}{100}p$ Erzeugnisse mehr produziert, so daß die Anzahl gesamtproduzierter Erzeugnisse je Tag $\left(20 + \frac{20}{100}p\right)$ beträgt. In 26 Tagen werden gefertigt: $26\left(20 + \frac{20}{100}p\right)$, woraus folgt:

$$26\left(20 + \frac{20p}{100}\right) = 600 \Rightarrow p = 15{,}4$$

Antwort: Die Produktivität der Fertigung muß um 15,4% gesteigert werden.

66. Im Zuge einer Übung brach um 9.00 Uhr früh eine Fahrzeugkolonne der NVA vom Standort auf und fuhr dabei mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_1 = 48$ km h^{-1}. Um halb zehn wurde ein Kradmelder dieser Kolonne nachgeschickt. Er fuhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_2 = 68$ km h^{-1}. Wann erreichte der Melder die Fahrzeugkolonne?

Lösung: Mit x bezeichnen wir die Zeit, in der der Melder die Fahrzeugkolonne erreichte. Während der Zeit x legte der Melder mit dem Krad eine Strecke von $48x$, die Fahrzeugkolonne legte während der Zeit $(x - 0{,}5)$ die gleiche Strecke zurück, d. h.,

$$48x = 68(x - 0{,}5)$$
$$x = 1{,}7$$

Antwort: Der Kradmelder erreichte die Fahrzeugkolonne nach 1 h 42 min, d. h. gegen 10.40 Uhr.

67. Berechnen Sie den Anteil des Phosphors (in Prozent) in der Orthophosphorsäure, deren Formel H_3PO_4 ist.

Lösung: Die relative Atommasse des Wasserstoffs ist 1, des Phosphors 30,98 und des Sauerstoffs 16. Die relative Molekülmasse der Orthophosphorsäure $H_3P_1O_4$ ist gerundet 98 $[(3 \cdot 1 + 1 \cdot 30{,}98 + 4 \cdot 16) = 98]$. Den prozentualen Gehalt an Phosphor berechnen wir aus dem Verhältnis

$$98 : 30{,}98 = 100 : x,$$

woraus

$$x = \frac{30{,}98 \cdot 100}{98} \Rightarrow x = 31{,}61$$

Antwort: In der Orthophosphorsäure sind 31,61% Phosphor enthalten (Massenprozente).

68. Die Oberflächen zweier Würfel, von denen einer eine um 22 cm längere Kante hat als der andere, unterscheiden sich um 19272 cm² voneinander. Berechnen Sie die Länge der Kanten beider Würfel.

Lösung: Die Kante des ersten Würfels ist x cm, die des anderen $(x + 22$ cm); die Fläche des ersten Würfels ist $6x^2$ cm², die des zweiten $6(x + 22)^2$ cm². Aus der Aufgabe erhalten wir die Gleichung:

$$6(x + 22)^2 - 6x^2 = 19272$$
$$6(x^2 + 44x + 484) - 6x^2 = 19272$$
$$x = 62$$

Antwort: Die Kante des ersten Würfels mißt 62 cm und die des zweiten 84 cm.

69. Die Uhrzeiger mögen sich gerade in diesem Augenblick decken. In wieviel Minuten werden sie sich gegenüberstehen?

Lösung: Mit x min bezeichnen wir die Zeit, die vergeht, bis sich die Uhrzeiger gegenüberstehen werden. Der große Zeiger überstreicht

x Minutenteilstriche des Zifferblatts, und in der gleichen Zeit überstreicht der kleine Zeiger $\frac{x}{12}$ Minutenteilstriche. Wenn sich die Zeiger gegenüberstehen, liegt zwischen ihnen eine Differenz von 30 Minutenteilstrichen, d. h.,

$$x - \frac{x}{12} = 30$$

$$x = 32\frac{8}{11}$$

Antwort: Die Zeiger werden sich nach $32\frac{8}{11}$ min gegenüberstehen.

70. Unter 3 Personen haben wir eine bestimmte Geldsumme so aufgeteilt, daß die erste zwei Fünftel dessen bekam, was die zweite und dritte zusammen bekamen. Die zweite bekam das Doppelte von der ersten. Wenn die dritte Person 750 M weniger bekam als die erste, wieviel Mark bekam dann jede Person?

Lösung: Die erste Person bekam die Summe von x M, die zweite bekam dann $2x$ M, die dritte bekam $(x - 750)$ M. Die erste bekam $\frac{2}{5}$ der Summe, die wiederum die Summe des zweiten und dritten Betrags darstellt, oder

$$x = \frac{2}{5}(2x + x - 750)$$

woraus folgt:

$x = 1500$.

Antwort: Die erste Person bekam 1500 M, die zweite 3000 M und die dritte 750 M.

71. Von einer Ziegelei aus der Ortschaft A fährt man mit einem Lkw Ziegelsteine auf die Baustelle in den Ort B. Der Fahrer des Lkw beginnt und beendet die Arbeit in der Ortschaft A. Mit beladenem Lkw fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km h^{-1} und mit unbeladenem Fahrzeug 48 km h^{-1}. Bei jeder Fahrt dauert das Beladen des Lkw 35 min, sein Entladen 20 min. Berechnen Sie die Entfernung zwischen den Ortschaften A und B, wenn Ihnen bekannt ist, daß der Fahrer bei einer achtstündigen Arbeitszeit 5 mit Ziegelsteinen beladene Lkw von der Ziegelei auf die Baustelle fuhr. Um wieviel Minuten muß bei jeder Fahrt die Be- und Entladezeit verkürzt werden (zusammengerechnet), damit die Achtstundenleistung des Fahrers nicht absinkt, wenn der Lkw von der Ortschaft A nach B (und zurück) eine Umleitung fahren muß, die um ein Viertel länger ist als der ursprüngliche Weg?

Lösung: Die Entfernung (in km) zwischen den Ortschaften A und B (gemessen auf dem ursprünglichen Weg) kennzeichnen wir mit s, dann dauert die Fahrt mit unbeladenem Fahrzeug $\frac{s}{48}$ h, die Fahrt mit beladenem Fahrzeug $\frac{s}{45}$ h. Das Be- und Entladen eines Fahrzeugs dauert $\frac{55}{60}$ h. Für eine Gesamtfahrt mit dem Fahrzeug (einschließlich Beladen, Entladen und Rückkehr) sind $\left(\frac{s}{45} + \frac{s}{48} + \frac{55}{60}\right)$ h erforderlich. Für fünf Gesamtfahrten je Tag waren insgesamt 8 h erforderlich, woraus folgt:

$$5\left(\frac{s}{45} + \frac{s}{48} + \frac{55}{60}\right) = 8 \Rightarrow s = 15\frac{27}{31}$$

Antwort 1: Die Entfernung zwischen den Ortschaften A und B beträgt fast 16 km $\left(15\frac{27}{31}\,\text{km}\right)$.

Im Falle der Umleitung legt der Lastkraftwagen bei Hin- und Rückfahrt eine um $\frac{1}{4}s$ längere Strecke zurück, wodurch sich die Fahrzeit verlängert.

$$x = \left(\frac{1}{4}s \cdot \frac{1}{45} + \frac{1}{4}s \cdot \frac{1}{48}\right)\text{h}$$

$$= \frac{1}{4}s\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{48}\right)\text{h},$$

woraus folgt:

$$x = \frac{41}{240}\,\text{h}$$

Das entspricht $10\frac{1}{4}$ Minuten.

Antwort 2: Insgesamt muß die Zeit von 55 min, die für das Be- und Entladen des

Lastkraftwagens erforderlich wird, um $10\frac{1}{4}$ min verkürzt werden, d. h. auf etwa 45 min $\left(44\frac{3}{4}\text{ min}\right)$.

72. Wieviel Kilowattstunden Elektroenergie werden in 10 h von einer technischen Anlage verbraucht, durch die bei einer Spannung von 220 V ein Strom von 5 A fließt?

Lösung: Die Leistung der Anlage berechnen wir aus der Beziehung $P = UI$ (P bedeutet die Leistung, U die Spannung, I die Stromstärke). Der Elektroenergieverbrauch wird aus der Beziehung $W = Pt$ berechnet, wobei P die Leistung und t die Zeit bedeuten, in der durch die Anlage Strom fließt. In unserem Fall gilt

$$W = UIt$$

$$W = 220\text{ V} \cdot 5\text{ A} \cdot 10\text{ h}$$

$$W = 11\,000\text{ Wh} = 11\text{ kWh}.$$

Antwort: Durch die Anlage werden in 10 h 11 kWh Elektroenergie verbraucht.

73. Ein Kellner verkaufte 170 Essen im Werte von 730 M. Die eine Sorte von Essen kostete 4 M und die andere 5 M. Wieviel Portionen von jedem Essen hat er verkauft?

Lösung: Die Anzahl der Portionen des Essens der ersten Sorte bezeichnen wir mit x. Dann ist die Anzahl der Portionen des Essens der anderen Sorte $(170 - x)$. Die Geldmenge für die erste Essensorte ist $4x$ M, und $[5(170 - x)]$ M ist die Geldmenge für die zweite Essensorte. Daher gilt

$$4x + 5(170 - x) = 730 \Rightarrow x = 120$$

Antwort: Von der ersten Sorte hat der Kellner 120 Portionen und von der anderen Sorte 50 Portionen verkauft.

74. Die Legierung aus Silber und Zinn mit einer Dichte von $\varrho = 9\text{ g/cm}^3$ hat eine Masse von 10000 g. Wieviel Silber und wieviel Zinn enthält die Legierung ($\varrho_{Ag} = 10{,}5\text{ g/cm}^3$; $\varrho_{Sn} = 7{,}28\text{ g/cm}^3$)?

Lösung: Die Legierung enthält x g Silber und $(10000 - x)$ g Zinn.

x g Silber besitzen ein Volumen von

$$V_{Ag} = \frac{x\text{ g}}{\varrho_{Ag}}$$

$(10000 - x)$ g Zinn haben ein Volumen von

$$V_{Sn} = \frac{(10000 - x)\text{ g}}{\varrho_{Sn}}$$

Die Legierung besitzt ein Volumen von

$$V = \frac{10000\text{ g}}{\varrho}$$

Die Volumen des Silbers und Zinns gleichen dem Volumen der Legierung, es gilt also

$$\frac{x}{\varrho_{Ag}} + \frac{10000 - x}{\varrho_{Sn}} = \frac{10000}{\varrho}$$

Nach dem Einsetzen erhalten wir

$$\frac{x}{10{,}5} + \frac{10000 - x}{7{,}28} = \frac{10000}{9} \Rightarrow x = 6232$$

Antwort: In der Legierung sind 6,232 kg Silber und 3,768 kg Zinn enthalten.

75. Zwei Wettkämpfer A und B laufen eine 500 m lange Strecke, der Läufer B bleibt dabei 7 m hinter A zurück. Wenn die Wettkämpfer B und C diese Strecke gemeinsam laufen, bleibt C 8 m hinter B zurück. Um wieviel Meter bleibt der Läufer C hinter Läufer A beim Lauf über 500 m zurück, wenn sie genauso schnell wie vorher laufen?

Lösung: Die Geschwindigkeiten der Läufer A, B und C kennzeichnen wir durch die Buchstaben a, b und c. Das Nacheilen des Läufers C hinter dem Läufer A kennzeichnen wir mit x m. Entsprechend der Aufgabenstellung gelten nachstehende Gleichungen:

$$\frac{500}{a} = \frac{500 - 7}{b}$$

$$\frac{500}{b} = \frac{500 - 8}{c}$$

$$\frac{500 - x}{c} = \frac{500}{a}$$

Durch Multiplikation der drei linken und drei rechten Seiten der Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{500 \cdot 500 \cdot (500 - x)}{abc} = \frac{493 \cdot 492 \cdot 500}{abc}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit dem Ausdruck abc erhalten wir:

$$500 \cdot 500(500 - x) = 493 \cdot 492 \cdot 500$$
$$x = 14{,}89$$

Antwort: Der Läufer C bleibt fast 15 m hinter dem Läufer A zurück.

76. Die Summe dreier aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist 75. Um welche Zahlen handelt es sich?

Lösung: Die erste der gesuchten ungeraden Zahlen bezeichnen wir mit x, die zweite darauffolgende ungerade Zahl ist dann $(x + 2)$ und die dritte ist $(x + 4)$. Ihre Summe ist 75, also gilt

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 75$$
$$3x = 75 - 6$$
$$x = 23$$

Antwort: Die Zahlen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, sind 23, 25 und 27.

77. In einem bestimmten konvexen n-Eck sind 13 Diagonalen mehr als in einem $(n - 2)$-Eck. Ermitteln Sie, für welches n diese Bedingung erfüllt ist?

Lösung: In der Aufgabe ist die Zahl n die Unbekannte. Bekannt ist, daß für die Anzahl der Diagonalen in jedem beliebigen n-Eck folgende Beziehung gilt:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Wir schreiben als Gleichung

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-2)(n-5)}{2} + 13,$$

wobei $\frac{(n-2)(n-5)}{2}$ die Anzahl der Diagonalen im $(n - 2)$-Eck darstellt. Nach Multiplikation der Gleichung mit der Zahl 2 und nach Umformung erhalten wir:

$$n^2 - 3n = n^2 - 7n + 10 + 26$$
$$4n = 36$$
$$n = 9$$

Antwort: Der Aufgabe wird $n = 9$ gerecht, es handelt sich um ein Neuneck.

78. Klempnerlötmaterial ist eine Legierung aus Zinn und Blei. Die eine Sorte des Lötmaterials enthält 25% Zinn und die andere Sorte 60%. Durch eine Mischung beider Sorten des Lötmaterials und durch Hinzufügen von 2 kg reinen Bleis sollen wir 10 kg Lötmaterial herstellen, das 30% Zinn enthält. Wieviel Kilogramm jeder Sorte des Lötmaterials müssen wir dabei verwenden?

Lösung: Die Anzahl der Kilogramm des Lötmaterials der ersten Sorte kennzeichnen wir mit x, so daß $(10 - 2 - x)$ kg oder $(8 - x)$ kg Lötmaterial der Sorte 2 vorhanden waren. Wenn wir die Masse des Zinns bei beiden verwendeten Lötmaterialien und in der gesamten Legierung miteinander vergleichen, erhalten wir:

$$x \cdot \frac{25}{100} + (8 - x) \cdot \frac{60}{100} = \frac{10 \cdot 30}{100} \Rightarrow x = \frac{36}{7}$$

Antwort: Es waren $5\frac{1}{7}$ kg Lötmaterial der ersten Sorte und $2\frac{6}{7}$ kg Lötmaterial der zweiten Sorte vorhanden.

Probe: Beide verwendeten Lötmaterialien mit 2 kg reinen Bleis hatten tatsächlich eine Masse von 10 kg. Die Masse des Zinns in den verwendeten Lötmaterialien (in kg) betrug:

$$\frac{36}{7} \cdot \frac{25}{100} + \frac{20}{7} \cdot \frac{60}{100} = \frac{6 \cdot 25}{700}(6 + 4 \cdot 2)$$
$$= \frac{6 \cdot 25}{700} \cdot 14 = 3,$$

daher enthielt die gesamte Legierung tatsächlich 30% Zinn, denn $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$.

79. Wie stark erwärmt sich ein Relais, wenn sich sein bei einer Temperatur von 15 °C gemessener Widerstand um $\frac{1}{32}$ seines Wertes erhöht (Temperaturkoeffizient $\alpha = 0{,}004\ \mathrm{K}^{-1}$)?

Lösung: Aus der Formel

$$R_t = R_{15}[1 + \alpha(t - 15)]$$

für

$$R_t = R_{15} + \frac{1}{32} R_{15}$$

nach Einsetzen der gegebenen Werte

$$1 + \frac{1}{32} = 1 + \alpha(t - 15)$$

erhalten wir:

$$t = 15 + \frac{1000}{4 \cdot 32} = 22{,}8$$

Antwort: Die Temperatur des Relais ist auf 22,8 °C angestiegen.

80. In einem Generator wird in trockener Luft Koks vergast, der 85% C und 13% Asche enthält. Das erzeugte Gas enthält in Volumenprozenten 28% CO, 5% CO_2 und 67% N_2. Die Generatorabfälle haben 15% unverbrannten C. Berechnen Sie die Menge des aus 100 kg Koks erzeugten Gases, wenn 1 m³ Gas 0,176 kg Kohlenstoff enthält (bei 0 °C und 1013,25 mbar).

Lösung: Den unverbrannten Kohlenstoff kennzeichnen wir mit x kg, dann ist der Rest $(13 + x)$ kg. Aus der Aufgabe resultiert folgende Gleichung:

$$100x - (13 + x) \cdot 15 = 0$$
$$x = 2{,}3$$

In das Gas gingen 85 kg — 2,3 kg = 82,7 kg Kohlenstoff über. Wenn wir dividieren, erhalten wir: 82,7 kg : 0,176 kg/m³ ≈ 470 m³.

Antwort: Aus 100 kg Koks entstanden 470 m³ Gas.

81. Ein Übungsleiter stellte die Übungsteilnehmer im Stadion im Quadrat auf; das erste Mal blieben ihm 89 übrig, das zweite Mal, als er die Seite des Quadrats um einen Übungsteilnehmer verlängerte, fehlten ihm 50 Übungsteilnehmer. Wieviel Übungsteilnehmer waren im Stadion?

Lösung: Als die Übungsteilnehmer im Quadrat aufgestellt waren, glich die Anzahl der Übungsteilnehmer in einer Reihe der Anzahl der Reihen. Mögen in einer Reihe x Übungsteilnehmer sein, dann waren x^2 im Quadrat aufgestellt; da ihm jedoch 89 übrigblieben, waren es insgesamt

$x^2 + 89$ Übungsteilnehmer. (1)

Als er die Seite des Quadrats um einen Übungsteilnehmer vergrößerte, fehlten für die Zahl $(x + 1)^2$ 50 Übungsteilnehmer, also waren insgesamt vorhanden:

$(x + 1)^2 - 50$ (2)

Der Ausdruck (1) ist gleich dem Ausdruck (2), d. h.:

$$x^2 + 89 = (x + 1)^2 - 50$$
$$x^2 + 89 = x^2 + 2x + 1 - 50$$
$$x = 69$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 69$.

Antwort: Die Anzahl der Übungsteilnehmer ist $69^2 + 89$, d. h. 4850.

82. Der Preis einer Ware stieg um 10%, dann sank er um 10%. Um wieviel Prozent des ursprünglichen Warenpreises änderte sich der Preis?

Lösung: Möge der ursprüngliche Preis x M sein; der Warenpreis nach der Steigerung um 10% ist $\left(x + \frac{x}{100} \cdot 10\right)$ M. Der Warenpreis nach der Senkung um 10% ist:

$$\left[\left(x + \frac{10x}{100}\right) - \frac{10\,\frac{x}{100} + x}{100} \cdot 10\right] \mathrm{M}$$

Aus der Aufgabenstellung resultiert:

$$p = \frac{100\left[\left(x + \frac{10x}{100}\right) - \frac{\frac{10x}{100} + x}{100} \cdot 10\right]}{x}\,\%$$

$$= \frac{100\left[\frac{110x}{100} - \frac{110x}{100 \cdot 100} \cdot 10\right]}{x}\,\%$$

$$= \frac{110x - 11x}{x}\,\% = \frac{99x}{x}\,\% = 99\,\%$$

Antwort: Der Warenpreis sank um 1% des ursprünglichen Wertes.

83. Um 7.00 Uhr fährt ein Lkw von der Ortschaft A mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 40$ km h⁻¹ ab. Ihm entgegen fährt von der Ortschaft B um 8.30 Uhr ein Pkw mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $v_2 = 70$ km h⁻¹ ab. Die Entfernung zwischen den Ortschaften A und B ist $s = 225$ km. Wann und wo treffen sich die beiden Fahrzeuge?

Lösung: Die Fahrzeuge treffen sich nach einer bestimmten Zeit nach Abfahrt des Lkw. In der Zeit t legt der Lkw eine Strecke von $s_1 = v_1 t$ zurück. Der Pkw fährt 1,5 h später ab als der Lkw, es verbleiben bis zum Zusammentreffen auf der Strecke also nur $t - 1{,}5$ h. In dieser Zeit legt er eine Strecke von $s_2 = v_2(t - 1{,}5\text{ h})$ zurück. Wenn beide Autos sich entgegen fahren, muß die Summe ihrer Teilstrecken

$$s_1 + s_2 = s$$

oder

$$v_1 t + v_2(t - 1{,}5\text{ h}) = s$$

sein.

Nach Einsetzen und Umformen erhalten wir:

$$40\text{ km h}^{-1} \cdot t + 70\text{ km h}^{-1}(t - 1{,}5\text{ h})$$
$$= 225\text{ km}$$
$$t = 3\text{ h}$$

Antwort: Beide Fahrzeuge treffen sich 3 h nach Abfahrt des Lastkraftwagens, also 10.00 Uhr. Die Stelle befindet sich in einer Entfernung von 120 km von A.

84. 5 h plus $3k$ Minuten ist das gleiche wie sechs Stunden minus $2k$ Minuten. Ermitteln Sie die Zahl k.

Lösung: Die Aufgabe schreiben wir als Gleichung:

$$5 \cdot 60 + 3k = 6 \cdot 60 - 2k$$
$$300 + 3k = 360 - 2k$$
$$k = 60$$
$$k = 12$$

Antwort: 5 h plus 36 min ist das gleiche wie 6 h minus 24 min.

85. An einer Stange wirken zwei senkrecht angreifende Kräfte von 100 N und 150 N in einer Entfernung von 80 cm voneinander (Bild 8). Welches ist ihre Resultierende, und wo liegt ihr Angriffspunkt, wenn diese Kräfte parallel wirken? (Die Masse der Stange bleibe unberücksichtigt.)

Lösung: Die Größe der Resultierenden ist wegen der Parallelität durch die Summe der Komponenten gegeben: $F_1 + F_2 = 100\text{ N} + 150\text{ N} = 250\text{ N}$, und ist ihnen parallel

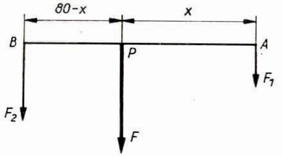

Bild 8

gerichtet. Mit P bezeichnen wir den gesuchten Angriffspunkt. $\overline{AP} = x\text{ cm}$, $\overline{PB} = (80 - x)\text{ cm}$, wenn A und B die Punkte bezeichnen, in denen die Kräfte F_1 und F_2 wirken. Nach dem Momentensatz gilt:

$$F_1 x - F_2(80 - x) = 0$$
$$100x - 150(80 - x) = 0$$
$$250x = 12\,000$$
$$x = 48$$

Antwort: Der Angriffspunkt der Resultierenden ist 48 cm vom Punkt A entfernt.

86. Die Länge eines Rechtecks ist 12 cm größer als das Dreifache seiner Breite. Der Umfang beträgt 104 cm. Welche Abmessungen hat das Rechteck?

Lösung: Mit x bezeichnen wir die Maßzahl der Breite des Rechtecks, dann ist seine Länge $(3x + 12)$ cm. Der Umfang des Rechtecks ist:

$$2[x + (3x + 12)] = 104$$

Das Ergebnis ist $x = 10$, dann gilt $3x + 12 = 42$.

Antwort: Die Breite des Rechtecks beträgt 10 cm und seine Länge 42 cm.

87. Wieviel Gramm Eisen(II)-sulfid erhalten wir durch die Verbindung von 100 g Eisenspänen mit Schwefel?

Lösung: Zunächst wollen wir die Gleichung notieren, nach der die Reaktion verläuft:

$Fe + S = FeS$[1]

Das bedeutet, daß wir durch die Verbindung von 55,85 g Eisen und 32,06 g Schwefel

[1] Beachten Sie übrigens die etwas andere Rolle des Gleichheitszeichens in der Chemie

87,91 g Eisen(II)-sulfid erhalten. (55,85 und 32,06 sind die relativen Atommassen von Eisen und Schwefel.) Für die gesuchte Menge x Eisen(II)-sulfid können wir die Proportion

$$55{,}85:100 = 87{,}91:x$$

schreiben, aus der folgt:

$$55{,}85x = 87{,}91 \cdot 100$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir:

$$x = 157{,}4$$

Antwort: Aus 100 g Eisenspänen können wir durch Verbindung mit Schwefel 157,4 g Eisen(II)-sulfid gewinnen.

88. Im Jahre 1975 büßte eine Fabrik gegenüber 1974 4% an Produktivität ein. Im Jahre 1976 wurde die Produktivität aber im Vergleich zum Vorjahr wieder um 11% gesteigert. Berechnen Sie die prozentuale Steigerung der Produktivität im Vergleich zum Jahre 1974.

Lösung: Die Produktivität der Fabrik im Jahre 1974 kennzeichnen wir durch x, die Produktivität im Jahre 1975 ist $\left(x - \frac{x}{100} \cdot 4\right)$ und die des Jahres 1976

$$\left[\frac{x - \frac{x}{100} \cdot 4}{100} \cdot 11 + x - \frac{x}{100} \cdot 4\right].$$

Es folgt:

$$p = \frac{100\left[\frac{x - \frac{x}{100} \cdot 4}{100} \cdot 11 + \left(x - \frac{x}{100} \cdot 4\right)\right]}{x}$$

$$= \frac{100\left[\frac{100x - 4x}{100 \cdot 100} \cdot 11 + \frac{100x - 4x}{100}\right]}{x}$$

$$= \frac{0{,}96x \cdot 11 + 96x}{x} = \frac{10{,}56x + 96x}{x}$$

$$= \frac{106{,}56x}{x} = 106{,}56$$

Antwort: Die Steigerung der Produktivität in der Fabrik betrug im Vergleich zum Jahre 1974 6,56%.

89. Auf einer Kreisbahn starteten von einer Stelle aus entgegengesetzt zwei Radfahrer mit gleicher Geschwindigkeit. Von dem gegenüberliegenden Punkt auf der Kreisbahn aus startet gleichzeitig ein Motorradfahrer, der den ersten Radfahrer in 30 s trifft und den zweiten in 1 min und 30 s einholt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Radfahrer und die Länge der Kreisbahn, wenn die Geschwindigkeit des Motorradfahrers 60 km h^{-1} betrug.

Lösung: Die Geschwindigkeit eines Radfahrers bezeichnen wir mit x m min^{-1}. Die Geschwindigkeit des Motorradfahrers beträgt 1000 m min^{-1}. Der Radfahrer legt in 30 s eine Strecke von $0{,}5x$ m zurück, der Motorradfahrer legt in der gleichen Zeit 500 m zurück. Sie fahren sich entgegen, es ist also

$$0{,}5x = \pi r - 500 \qquad (1)$$

Der andere Radfahrer legt in 1,5 min eine Strecke von $1{,}5x$ m zurück, und der Motorradfahrer holt ihn in dieser Zeit ein, wobei er eine Strecke von 1500 m zurücklegt, d. h.,

$$1{,}5x + \pi r = 1500 \qquad (2)$$

Gl. (1) lösen wir nach πr auf und erhalten nach Einsetzen in die Gl. (2):

$$2x = 1000$$

$$x = 500$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Radfahrers beträgt 500 m min^{-1}. Die Kreisbahn hat eine Länge von 1500 m.

90. Plangemäß sollte eine Gruppe von Arbeitern im Monat (26 Arbeitstage) eine bestimmte Menge Erzeugnisse fertigen. Nach 24 Tagen hat sie den Plan nicht nur erfüllt, sondern 60 Erzeugnisse mehr gefertigt. Diesen Erfolg erreichte die Gruppe dadurch, daß sie die Norm täglich mit 5 Erzeugnissen übererfüllte. Wieviel Erzeugnisse sollte die Gruppe nach dem Plan erzeugen?

Lösung: Plangemäß sollte sie x Stück Erzeugnisse in 26 Tagen herstellen, bei einer Tagesleistung von $\frac{x}{26}$ Erzeugnissen. Tatsächlich fertigte sie $(x + 60)$ Erzeugnisse innerhalb von 24 Tagen, bei einer Tagesleistung von $\frac{x+60}{24}$ Erzeugnissen. Ein Vergleich der Tagesleistungen ergibt:

$$\frac{x+60}{24} = \frac{x}{26} + 5$$

$$26(x + 60) = 24x + 5 \cdot 24 \cdot 26$$

$$x = 780$$

Antwort: Plangemäß sollte die Gruppe von Arbeitern 780 Stück Erzeugnisse herstellen.

91. Die Länge eines Grundstücks ist doppelt so groß wie seine Breite. Wenn seine Breite um 5 m und seine Länge um 4 m erweitert werden, wächst der Flächeninhalt des Grundstücks um 111 m² an. Wie groß sind Länge und Breite des Grundstücks?

Lösung: Die Breite des Grundstücks bezeichnen wir mit x m, dann ist seine Länge $2x$ m und sein Flächeninhalt $x\,\text{m} \cdot 2x\,\text{m} = 2x^2\,\text{m}^2$. Das vergrößerte Grundstück weist eine Breite von $(x + 5)$ m, eine Länge von $(2x + 4)$ m und eine Fläche von $(2x + 4) \times (x + 5)\,\text{m}^2$ auf. Aus der Bedingung der Aufgabe ergibt sich die Gleichung:

$$(2x + 4)(x + 5) = 2x^2 + 111 \Rightarrow x = 6{,}5$$

Antwort: Die Breite des Grundstücks ist 6,5 m und seine Länge 13 m.

92. Bei der ersten Fahrt verbrauchte ein Auto 20% des Benzins, das sich im Tank befand; bei der zweiten Fahrt wurden 10% der Benzinmenge verbraucht, die nach der ersten Fahrt übrigblieb. Nach den beiden Fahrten verblieben 9 l im Tank. Wieviel Liter befanden sich zu Beginn im Tank?

Lösung: Wenn wir die ursprüngliche Benzinmenge im Tank mit x l bezeichnen, dann wurden $\frac{x \cdot 20}{100} = \frac{1}{5}x$ bei der ersten Fahrt verbraucht.

$x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$ verblieben nach der ersten Fahrt.

$\frac{10}{100} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{2}{25}x$ wurden bei der zweiten Fahrt verbraucht.

$\frac{1}{5}x + \frac{2}{25}x = \frac{7}{25}x$ wurden bei der ersten und zweiten Fahrt verbraucht.

Der Rest des Benzins nach den beiden Fahrten ist:

$$x - \frac{7}{25}x = \frac{18}{25}x$$

Nach der Aufgabenstellung betrug der Rest 9 l, also

$$\frac{18}{25}x = 9 \Rightarrow x = 12{,}5$$

Antwort: Im Tank befanden sich ursprünglich 12,5 l Benzin.

93. Wieviel gleich starke Glühlampen können in Reihe an ein 220-V-Netz geschaltet werden, wenn jede einen Widerstand von 30 Ω aufweist und eine Stromstärke von 0,3 A aushält?

Lösung: Durch U_1 kennzeichnen wir die Spannung an jeder Glühlampe, die Anzahl der Glühlampen möge x sein. Wenn sie in Serie geschaltet sind, ist die Summe der Spannungen der einzelnen Glühlampen gleich der Gesamtspannung, also:

$$xU_1 = U$$

Die Spannung U_1 ist entsprechend dem Ohmschen Gesetz I_1R_1. In unserem Fall gilt:

$$x \cdot 0{,}3 \cdot 30 = 220$$

$$x = 24\frac{4}{9}$$

$$x \approx 24$$

Antwort: An das 220-V-Netz können 24 Glühlampen in Serie geschaltet werden.

94. Der Buchhandel bezahlt an den Verlag 65% des auf dem Buchumschlag ausgezeichneten Preises, verkauft es aber zu dem auf dem Umschlag ausgezeichneten Preis. Wieviel Prozent beträgt der Handelsaufschlag?

Lösung: Möge der Buchpreis x M sein. Der

Handel ist verpflichtet, für ein Buch $\frac{x}{100} \cdot 65$ M an den Verlag zu zahlen. Der prozentuale Aufschlag ist:

$$p = \frac{a \cdot 100}{z},$$

wobei

$$a = x - 0{,}65x$$
$$z = 0{,}65x$$

$$p = \frac{(x - 0{,}65x)}{0{,}65x} \cdot 100\% = \frac{0{,}35}{0{,}65} \cdot 100\%$$
$$= 53{,}85\%$$

Antwort: Der Aufschlag beträgt rund 54%.

95. Welchen Winkel schließt die Mantellinie eines geraden Kreiskegels mit der Grundfläche ein, wenn der Flächeninhalt des Mantels doppelt so groß wie der Flächeninhalt der Grundfläche ist?

Lösung: Den Flächeninhalt der Grundfläche bezeichnen wir mit A_G und den Inhalt des Mantels mit A_M. Den Winkel, den die Mantellinie des Rotationskegels mit der Ebene der

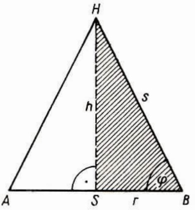

Bild 9

Grundfläche einschließt, ermitteln wir wie folgt: Wir führen längs der Höhe des Kegels einen Schnitt (senkrecht auf die Grundfläche). Es entsteht das Dreieck ABH (Bild 9). Dann ist der gesuchte Winkel $\varphi < 90°$ der von der Mantellinie (Seite) des Kegels und dessen Radius gebildete Winkel. Aus der Aufgabe folgt:

$$A_M = 2A_G$$
$$A_M = 2\pi r^2 = \pi r s$$
$$s = 2r$$

$$\cos\varphi = \frac{r}{s} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2}$$
$$\varphi = 60°$$

Antwort: Die Mantellinie des gegebenen geraden Kreiskegels schließt mit der Grundfläche den Winkel $\varphi = 60°$ ein.

96. Der Widerstand der Spulen eines Magneten betrug 12,5 Ω. Nach viertelstündiger Belastung stieg er auf 14,3 Ω an, wobei die Umgebungstemperatur unverändert blieb. Berechnen Sie, um wieviel Kelvin die Temperatur der Spulen anstieg?

Lösung: Der Widerstand ändert sich mit der Temperaturänderung nach folgender Formel:

$$R_t = R(1 + \alpha\Delta t)$$

wobei R den ursprünglichen Widerstand, Δt die Temperaturdifferenz (Temperaturerhöhung) darstellt. Daraus ergibt sich dann

$$\Delta t = \frac{R_t - R}{R\alpha} \quad [R = 12{,}5\ \Omega;\ R_t = 14{,}3\ \Omega]$$

Für Kupfer ist $\alpha = 0{,}004\ \mathrm{K}^{-1}$. Die Lösung der Gleichung ist $\Delta t = 36$ K.

Antwort: Die Temperatur stieg um 36 K.

97. Der Preis einer Ware wurde um 15% gesenkt, mußte aber später wieder um 5% des neuen Preises erhöht werden. Um wieviel Prozent des ursprünglichen Preises wurde der Preis der Ware gesenkt?

Lösung: Der ursprüngliche Preis der Ware beträgt x M. Nach der 15%igen Senkung ist der Preis der Ware $\left(x - \frac{x}{100} \cdot 15\right)$ M. Der Warenpreis nach der 5%igen Steigerung des neuen Preises beträgt:

$$\left[\frac{x - \frac{x}{100} \cdot 15}{100} \cdot 5 + x - \frac{x}{100} \cdot 15\right] \mathrm{M}$$

Nach der Umformung folgt:

$$\frac{357x}{400}\ \mathrm{M}$$

Weiterhin finden wir den Warenpreis nach der letzten Steigerung [in %, bezogen auf den ursprünglichen Preis] durch die Beziehung

$$p = \frac{100 \cdot a}{z},$$

wobei

$$a = \frac{357x}{400}, \quad z = x$$

dann ist

$$p = \frac{100 \cdot \frac{357x}{400}}{x} \% = \frac{357}{4} \% = 89{,}25\%$$

Antwort: Der Warenpreis wurde insgesamt um $(100 - 89{,}25)\% = 10{,}75\%$ gesenkt.

98. Eine Fahrzeugkolonne mit einer Länge von $l = 2$ km bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_k = 20 \text{ km h}^{-1}$. Von der Spitze der Kolonne zum letzten Fahrzeug und zurück fährt ein Verbindungsmann auf einem Motorrad mit einer Geschwindigkeit von $v_s = 60 \text{ km h}^{-1}$. Welche Zeit braucht der Verbindungsmann, und welche Strecke legt er dabei zurück?

Lösung: Die Gesamtzeit bezeichnen wir mit t; die Zeit, die der Verbindungsmann braucht, um auf das letzte Fahrzeug zu stoßen, bezeichnen wir mit t_1 und die für das Erreichen der Spitze der Kolonne erforderliche Zeit mit t_2, oder

$$t = t_1 + t_2 \tag{1}$$

Bei der Fahrt an das Ende der Kolonne legt der Verbindungsmann die Strecke $v_s t_1$ zurück, die um $v_k t_1$ kürzer ist als die Länge der Kolonne

$$v_s t_1 = l - v_k t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l}{v_s + v_k} \tag{2}$$

Auf der Rückfahrt an die Spitze der Kolonne muß der Verbindungsmann eine Strecke von der Länge $v_s t_2$ zurücklegen, die um $v_k t_2$ länger ist als die Länge l der Kolonne:

$$v_s t_2 = l + v_k t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{l}{v_s - v_k} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) berechnen wir die Werte von t_1, t_2 und setzen sie in (1) ein:

$$t = \frac{l}{v_s + v_k} + \frac{l}{v_s - v_k} = \frac{2lv_s}{v_s^2 - v_k^2}$$

In unserem Fall gilt:

$$t = \frac{2 \cdot 2 \cdot 60}{60^2 - 20^2} \text{ h} = \frac{3}{40} \text{ h} = 4{,}5 \text{ min} = 270 \text{ s}$$

Die Größe der Strecke s, die der Verbindungsmann in dieser Zeit zurücklegt, ist:

$$s = 60 \cdot \frac{3}{40} \text{ km} = 4{,}5 \text{ km}$$

Antwort: Die gesuchte Zeit ist 270 s, und die zurückgelegte Strecke beträgt 4,5 km.

99. Ein Sportflugzeug fliegt zu Beginn mit einer Geschwindigkeit von 180 km h^{-1}. Der verbleibende Teil der Flugstrecke, der 320 km kürzer war als der, den es bereits absolviert hatte, wurde von ihm mit einer Geschwindigkeit von 250 km h^{-1} durchflogen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der gesamten Strecke betrug 200 km h^{-1}. Welche Entfernung legte das Flugzeug zurück?

Lösung: Mit x bezeichnen wir die Entfernung in Kilometern, die das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 180 km h^{-1} durchflog. Dann hatte es noch $(x - 320)$ km zu fliegen. Insgesamt legte es $x + (x - 320)$ km, also $(2x - 320)$ km zurück. Da es die gesamte Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 200 km h^{-1} flog, betrug die Gesamtzeit für die Gesamtstrecke:

$$\left[\frac{2x - 320}{200}\right] \text{h}$$

Den ersten Teil der Strecke legte es in $\frac{x}{180}$ h und den zweiten Teil der Strecke in $\left[\frac{x - 320}{250}\right]$ h zurück. Daraus folgt die Gleichung:

$$\frac{x}{180} + \frac{x - 320}{250} = \frac{2x - 320}{200}$$

Nach Multiplikation der gesamten Gleichung mit 9000 und nach Umformen erhalten wir:

$$50x + 36(x - 320) = 45(2x - 320)$$

$$x = 720$$

Der erste Teil der Strecke betrug 720 km, der zweite 400 km ($720 - 320 = 400$), und die Gesamtentfernung war 1120 km.

Antwort: Das Flugzeug legte 1120 km zurück.

100. Von drei Gefäßen in Würfelform ist das erste 1 dm höher als das zweite, das zweite ist 1 dm höher als das dritte. Wenn das zweite Gefäß aus dem ersten und das dritte Gefäß aus dem zweiten mit Wasser gefüllt wird, verbleiben im ersten Gefäß 12 l mehr als im zweiten. Welches sind die Abmessungen der Gefäße?

Lösung: Der Aufgabe entsprechend ist das dritte Gefäß das kleinste, seine Abmessungen bezeichnen wir mit x dm. Dann hat das zweite Gefäß die Abmessung $(x + 1)$ dm und das erste Gefäß $(x + 2)$ dm. Aus der Aufgabe folgt weiter, daß die Differenz der Volumina des ersten und zweiten Gefäßes 12 dm³ größer ist als die Differenz der Volumina des zweiten und dritten Gefäßes, was wir in folgende Gleichung fassen können:

$$(x + 2)^3 - (x + 1)^3 = (x + 1)^3 - x^3 + 12$$

Nach Umformung dieser Gleichung erhalten wir:

$$6x = 6$$
$$x = 1$$

Antwort: Die Kante des ersten Gefäßes mißt 3 dm, die des zweiten 2 dm und die des dritten 1 dm.

101. Ein Genossenschaftsbauer, der vom Dorf zur Bahnstation ging, legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Er stellte fest, daß er 40 min nach Abfahrt des Zuges ankommt, wenn er mit der gleichen Geschwindigkeit weitergeht. Den Rest des Weges legte er deshalb mit einer Geschwindigkeit von 4 km h⁻¹ zurück und traf 45 min vor Abfahrt des Zuges auf dem Bahnhof ein. Berechnen Sie die Entfernung vom Dorf bis zum Bahnhof.

Lösung: Die gesuchte Entfernung bezeichnen wir mit x km. Die Zeit, in der der Genossenschaftsbauer bei einer Geschwindigkeit von 3 km h⁻¹ diese Entfernung zurücklegt, beträgt $\frac{x}{3}$ h. Der Rest des Weges, den er mit einer Geschwindigkeit von 4 km h⁻¹ zurücklegt, beträgt $(x - 3)$ km, und die Zeit, die er dafür benötigt, ist $\frac{x-3}{4}$ h. Wenn der Genossenschaftsbauer mit der anfänglichen Geschwindigkeit den Weg zurücklegt, verspätet er sich um 40 min $\left(\frac{2}{3}\text{ h}\right)$, d. h., bis zur Abfahrt des Zuges verbleiben ihm $\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)$ h. Nach einer Stunde Marsch verbleiben ihm bis zur Abfahrt des Zuges $\left[\frac{x}{3} - \left(1 + \frac{2}{3}\right)\right]$ h $= \left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right)$ h.

Wenn wir berücksichtigen, daß der Genossenschaftsbauer mit der neuen Geschwindigkeit 45 min $\left(\frac{3}{4}\text{ h}\right)$ vor der Abfahrtszeit eintrifft, erhalten wir die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{3}\right) - \frac{x-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x-5}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x - 20 - (3x - 9) = 9$$

$$x = 20$$

Antwort: Die Entfernung zwischen dem Dorf und der Bahnstation beträgt 20 km.

102. Wie spät ist es, wenn die Uhrzeiger zwischen der 4 und 5 übereinander stehen?

Lösung: Um 4 Uhr steht der Stundenzeiger auf der 4, der Minutenzeiger auf der 12; der Stundenzeiger steht also 20 min vor dem Minutenzeiger. In wieviel Minuten holt der Minutenzeiger den Stundenzeiger ein? Wenn die Anzahl der Minutenteilstriche mit x bezeichnet wird, durchläuft der Stundenzeiger in dieser Zeit $\frac{x}{12}$ Teilstriche; die Differenz zwischen diesen beiden Zeitabschnitten beträgt 20 min, also

$$x - \frac{x}{12} = 20 \Rightarrow x = 21\frac{9}{11}$$

Antwort: Wenn die Uhrzeiger übereinander stehen, wird es $4.21\frac{9}{11}$ Uhr bzw. 4 Uhr 21 min 49 s sein.

103. Für das Abzählen[1] eines enzyklopädischen Wörterbuchs benötigte man 6869 Ziffern. Wieviel Seiten hat das Wörterbuch?

Lösung: Einstellige Ziffern gibt es 9, die Anzahl der Ziffern ist also 9. Zweistellige Zahlen gibt es 90, die Anzahl der Ziffern ist also $90 \cdot 2$. Dreistellige Zahlen gibt es 900, die Anzahl der Ziffern ist also $900 \cdot 3$. Vierstellige Ziffern gibt es 9000, die Anzahl der Ziffern ist also $9000 \cdot 4$. Für das Abzählen der Seiten verwenden wir alle ein-, zwei-, drei- und x vierstellige Zahlen, d. h.,

$$9 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + x \cdot 4$$
$$= 6869 \Rightarrow x = 995$$

Die Seitenzahl ist gegeben durch die Anzahl der Zahlen, also

$$9 + 90 + 900 + 995 = 1994$$

Antwort: Das Wörterbuch wird 1994 Seiten haben.

104. Auf einer Fotografie hat ein Gebäude eine scheinbare Höhe von 7 cm. Welches ist die tatsächliche Höhe des Gebäudes, wenn es aus einer Entfernung von 80 m fotografiert wurde und das Objektiv des Fotoapparates eine Brennweite von 20 cm aufwies? (Die Linsengleichung ist $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$)

Lösung: Aus der Linsengleichung leitet sich die Entfernung des Bildes von der Linse ab:

$$\text{(Bildweite)} \quad b = \frac{gf}{g-f} = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}$$

Die Vergrößerung des Bildes ist

$$Z = -\frac{b}{g} = -\frac{0{,}2}{80} = -0{,}0025$$

Das Bild ist verkleinert, seine Höhe ist 7 cm. Die Höhe des Gebäudes kennzeichnen wir mit h, dann gilt $0{,}0025 \cdot h = 0{,}07$ m, und daraus folgt dann $h = 28$ m.

Antwort: Die Gebäudehöhe ist 28 m.

105. Im ersten Halbjahr 1976 stieg die Produktion im Vergleich zum ersten Halbjahr des Jahres 1975 um 12,2%. Die Beschäftigtenzahl erhöhte sich um 8,3%. Um wieviel Prozent stieg die Menge der erzeugten Ware je Arbeitskraft?

Lösung: Die Produktion im ersten Halbjahr 1975 bezeichnen wir mit x, dann gilt für das erste Halbjahr 1976 $\left(x + \frac{x}{100} \cdot 12{,}2\right)$. Möge die Beschäftigtenzahl im ersten Halbjahr 1975 y und im ersten Halbjahr 1976 $\left(y + \frac{y}{100} \cdot 8{,}3\right)$ sein. Die Menge der im ersten Halbjahr 1976 je Arbeitskraft erzeugten Ware ist:

$\dfrac{\left(x + \frac{x}{100} \cdot 12{,}2\right)}{\left(y + \frac{y}{100} \cdot 8{,}3\right)}$ und im ersten Halbjahr 1975 $\dfrac{x}{y}$. Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$p = \frac{100\% \cdot \dfrac{\left(x + \frac{x \cdot 12{,}2}{100}\right)}{\left(y + \frac{y \cdot 8{,}3}{100}\right)}}{\dfrac{x}{y}} = \frac{11220}{108{,}3}\%$$
$$= 103{,}6\%$$

Antwort: Die Menge der durchschnittlich erzeugten Ware je Arbeitskraft stieg um 3,6%.

106. Welche prozentuale Zusammensetzung hat Kaliumchlorat, wenn es die Formel $KClO_3$ hat?

Lösung:

$$K + Cl + \frac{3}{2}\, O_2 \rightarrow KClO_3$$

Die relative Atommasse von Kalium ist 39,10, von Chlor 35,46 und von Sauerstoff 16. Die Molekülmasse des Kaliumchlorats ist $39{,}10 + 35{,}46 + 48 = 122{,}56$.

a) Den prozentualen Kaliumgehalt x_1 be-

[1] Gemeint ist das „Nacheinanderaufschreiben" sämtlicher Zahlen, die die Seiten kennzeichnen.

rechnen wir wie folgt:

$$122{,}56 : 39{,}10 = 100 : x_1$$

$$x_1 = \frac{39{,}10 \cdot 100}{122{,}56} \Rightarrow x_1 = 31{,}89$$

Im Kaliumchlorat sind 31,89% Kalium enthalten.

b) Den prozentualen Gehalt von Chlor x_2 berechnen wir aus der Beziehung

$$122{,}56 : 35{,}46 = 100 : x_2$$

$$x_2 = \frac{35{,}46 \cdot 100}{122{,}56} \Rightarrow x_2 = 28{,}92$$

Chlor ist im Kaliumchlorat zu 28,92% enthalten.

c) Für den Sauerstoff gilt:

$$122{,}56 : 48 = 100 : x_3$$

$$x_3 = \frac{48 \cdot 100}{122{,}56} \Rightarrow x_3 = 39{,}15$$

Antwort: Sauerstoff ist zu 39,15%, Kalium zu 31,89 und Chlor zu 28,92% vertreten.

107. Ein Hund verfolgt einen Hasen, der sich in einer Entfernung von 60 Sprüngen vom Hund befindet. Der Hase macht 9 Sprünge in der Zeit, in der der Hund 6 ausführt. Die Größe von 3 Sätzen des Hundes gleicht 7 Sätzen des Hasen. Wieviel Sätze muß der Hund ausführen, um den Hasen einzuholen?

Lösung: Die Strecken, die vom Hund und Hasen zurückgelegt wurden, sind unterschiedlich. Die Laufzeit ist die gleiche. Die entsprechenden Strecken und Geschwindigkeiten des Hundes und Hasen kennzeichnen wir mit s_1, s_2 und v_1, v_2, dann folgt aus $s = vt$:

$$\frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} \qquad (1)$$

$s_1 \triangleq x$ Sätzen des Hundes,
$s_2 \triangleq x$ Sätzen des Hundes $-$ 60 Sätzen des Hasen,
$v_1 \triangleq 6$ Sätzen des Hundes in einer bestimmten Zeit,
$v_2 \triangleq 9$ Sätzen des Hasen in der gleichen Zeit wie v_1.

Die Sätze des Hundes und des Hasen sind von unterschiedlichen Einheiten, z. B. Meter oder „Fuß". Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir auf eine der Einheiten übergehen, z. B. auf den Satz des Hundes.

Aus der Aufgabe folgt:
7 Sätze des Hasen = 3 Sätze des Hundes,
oder 1 Satz des Hasen = $\frac{3}{7}$ des Satzes des Hundes.

Es ist also
$s_2 = x$ Sätze des Hundes minus $60 \cdot \frac{3}{7}$ Sätze des Hundes $= \left(x - \frac{180}{7}\right)$ Sätze des Hundes.
$v_2 = 9 \cdot \frac{3}{7}$ des Satzes des Hundes in einer bestimmten Zeit.

Nach Einsetzen in (1) erhalten wir:

$$\frac{x \text{ Sätze des Hundes}}{6 \text{ Sätze des Hasen}} = \frac{\left(x - \frac{180}{7}\right) \text{ Sätze des Hundes}}{\frac{27}{7} \text{ Sätze des Hundes}}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{x - \frac{180}{7}}{\frac{27}{7}}$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$\frac{x}{6} = \frac{7x - 180}{7} \cdot \frac{7}{27} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{7x - 180}{9}$$

$$\Rightarrow x = 72$$

Antwort: Der Hund muß 72 Sätze ausführen, um den Hasen einzuholen.

108. Ein im Sterben liegender Vater faßte den Beschluß, seinen Besitz so aufzuteilen, daß der älteste Sohn 1000 M und $\frac{1}{10}$ des Restes des Besitzes, der zweite 2000 M und $\frac{1}{10}$ des nun verbleibenden Restes bekommt. Auf diese Weise teilte er seinen Besitz auch auf die übrigen Söhne auf. Bei dieser Teilung zeigte sich, daß der Erbteil jedes Sohnes gleich groß war. Berechnen Sie den Wert des Gesamtbesitzes, wieviel jeder Sohn erbte und wieviel Söhne es waren.

Lösung: Den Wert des Gesamtbesitzes bezeichnen wir mit x M. Wieviel bekam der erste Sohn? Da $\frac{1}{10}$ des verbleibenden Restes $\frac{1}{10}(x - 1000)$ M ist, bekam der erste Sohn:

$$1000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$$
$$= 1000 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{10} \cdot 1000$$
$$= 1000 + \frac{1}{10}x - 100 = \frac{1}{10}x + 900$$

oder der erste Sohn bekam $\left(\frac{1}{10}x + 900\right)$ M.
Wieviel bekam nun der zweite Sohn? Da $\frac{1}{10}$ des Restes $\frac{1}{10}\left[x - \left(\frac{1}{10}x + 900\right) - 2000\right]$ M ausmacht, bekam der zweite Sohn:

$$2000 + \frac{1}{10}\left[x - \left(\frac{x}{10} + 900\right) - 2000\right]$$
$$= 2000 + \frac{1}{10}\left[x - \frac{x}{10} - 900 - 2000\right]$$
$$= 2000 + \frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}x - 2900\right]$$
$$= 2000 + \frac{9}{100}x - 290 = \frac{9}{100}x + 1710,$$

oder, der zweite Sohn bekam $\left(\frac{9}{100}x + 1710\right)$ M.
Von der Aufgabenstellung her ist uns bekannt, daß der Erbteil jedes Sohnes gleich groß war.
Daher gilt:

$$\frac{1}{10}x + 900 = \frac{9}{100}x + 1710$$
$$\frac{10x + 90000}{100} = \frac{9x + 171000}{100}$$
$$10x + 90000 = 9x + 171000$$
$$x = 81000$$

Der Wert des Gesamtbesitzes ist 81000 M. Wenn das Erbe jedes Sohnes gleich groß war, können wir seinen Wert aus nachstehender Beziehung berechnen:

$$\frac{1}{10}x + 900$$
$$= \frac{1}{10} \cdot 81000 + 900 = 8100 + 900 = 9000$$

Jeder der Söhne bekam 9000 M. Die Anzahl der Söhne ermitteln wir ebenfalls aus
81000: 9000 = 9

Antwort: Der Wert des Gesamtbesitzes betrug 81000 M. Jeder Sohn bekam 9000 M, und es waren 9 Söhne.

109. Wir haben zwei Gefäße, in denen sich Benzin befindet. Das erste hat einen Inhalt von 12 l Benzin, und im zweiten befindet sich eine unbekannte Menge Benzin. Aus dem ersten Gefäß gießen wir die Hälfte des Benzins in das zweite Gefäß um und dann aus dem zweiten Gefäß ein Fünftel des Benzins, das es nach dem Umfüllen noch enthält, in das erste zurück. Beide Gefäße enthalten dann die gleichen Benzinmengen. Wieviel Liter Benzin waren ursprünglich im zweiten Gefäß?

Lösung: Die unbekannte Benzinmenge im zweiten Gefäß bezeichnen wir mit x l. Wenn wir aus dem ersten Gefäß die Hälfte umfüllen, d. h., 6 l in das zweite Gefäß gießen, wird im zweiten $(x + 6)$ l enthalten sein. Füllen wir ein Fünftel, d. h. $\frac{1}{5}(x + 6)$ l aus dem zweiten in das erste Gefäß, dann wird darin die Menge von $\left[6 + \frac{1}{5}(x + 6)\right]$ l und im zweiten $\left[(x + 6) - \frac{1}{5}(x + 6)\right]$ l enthalten sein.
Zwischen den Mengen gilt die Gleichung

$$6 + \frac{1}{5}(x + 6) = x + 6 - \frac{1}{5}(x + 6)$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 4$.

Antwort: Im zweiten Gefäß waren 4 l Benzin enthalten.

2.2. Lineare Bruchgleichungen mit einer Unbekannten

110. Drei Maler sollen eine Brücke streichen. Der erste würde die Arbeit in 5 Tagen, der zweite in 6 Tagen und der dritte in $7\frac{1}{2}$ Tagen ausführen. In welcher Zeit streichen sie die Brücke, wenn sie gemeinsam arbeiten?

Lösung: Es mögen alle drei gemeinsam x Tage arbeiten. Der erste leistet an einem Tag $\frac{1}{5}$, der zweite $\frac{1}{6}$, der dritte $\frac{1}{7\frac{1}{2}}$ der Arbeit, und gemeinsam leisten sie $\frac{1}{x}(x \neq 0)$. Wenn sie einen Tag lang gemeinsam arbeiten, dann leisten sie

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{15}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{15}{30}=\frac{1}{x}$$

Als Lösung erhalten wir $x = 2$.

Antwort: Gemeinsam streichen sie in 2 Tagen die Brücke.

111. Ein Fischer ruderte zunächst eine ganze Stunde lang gegen den Strom und entfernte sich dabei 2 km von der Anlegestelle. Zurück — also in Strömungsrichtung des Flusses — benötigte er nur 12 min; er war also bereits nach 1 h 12 min an der Anlegestelle zurück, weil er sich am Ziel nicht aufhielt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Bootes im stehenden Wasser, wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses 4 km h^{-1} beträgt.

Lösung: Der Weg ist hin und zurück derselbe. Die Geschwindigkeit des Bootes in stehendem Wasser bezeichnen wir mit x km h^{-1}. Die Geschwindigkeit in Strömungsrichtung ist dann $(x + 4)$ km h^{-1}, gegen den Strom dagegen $(x - 4)$ km h^{-1}.

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$$

Daraus folgt: $v_1 : v_2 = t_2 : t_1$

$$\frac{x-4}{x+4}=\frac{12}{60} \qquad x \neq -4$$

$$5(x-4) = x + 4$$

$$x = 6$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Bootes in stehendem Wasser beträgt 6 km h^{-1}. Beachten Sie, daß die Aufgabe durch die Angabe ... 2 km... überbestimmt ist!

112. Die resultierende Kapazität dreier Kondensatoren beträgt $C = 500$ pF. Die Kondensatoren mit der Kapazität $C_3 = C_2 = 500$ pF sind parallel geschaltet, und mit ihnen ist der Kondensator C_1 in Reihe geschaltet. Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators C_1.

Lösung: Für die Schaltung der Kondensatoren gilt hier:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2+C_3}$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhalten wir:

$$\frac{1}{500}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{500+500}$$

$$C_1 = 1000$$

Antwort: Die Kapazität des Kondensators beträgt $C_1 = 1000$ pF.

113. Wir haben 1500 g 7,2%ige Kochsalzlösung im Wasser. Durch Kochen dieser Lösung verdampft ein Teil des Wassers, und es verbleiben 1200 g der neuen Lösung.

a) Wieviel prozentig ist die neue Lösung?

b) Wieviel Gramm Kochsalz müssen wir hinzugeben, damit die neue Lösung 25%ig wird?

Erläuterung: p- prozentige Kochsalzlösung bedeutet: Wenn wir z. B. 100 g Lösung haben, sind darin p g Kochsalz und $(100 - p)$ g Wasser.

Lösung: In 1500 g ursprünglicher Lösung sind enthalten:

$$\frac{1500}{100} \cdot 7{,}2 \text{ g, also } 108 \text{ g Salz.}$$

a) Es ist:

$$108 : \frac{1200}{100} = 9$$

Antwort: Die entstehende Kochsalzlösung ist 9%ig.

b) Wenn wir x g Salz hinzufügen, wird die erreichte Lösung $(1200 + x)$ g haben, und in ihr sind $(108 + x)$ g Salz, wobei entsprechend der Aufgabenstellung ist:

$$(108 + x) : \frac{1200 + x}{100} = 25$$

$$(108 + x) \frac{100}{1200 + x} = 25$$

$$x = 256 \qquad (x \neq -1200)$$

Antwort: Es müssen 256 g Salz hinzugefügt werden; die erreichte Lösung hat eine Masse von 1456 g.

Probe: Es gilt:

$$364 : \frac{1456}{100} = \frac{364 \cdot 100}{1456} = 25,$$

was der Forderung entspricht, daß die neue Lösung 25%ig sein soll.

114. Schnitter sollten zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Zu Mittag teilten sie sich jedoch. Die Hälfte der Schnitter verblieb zum Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähten. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich der Hälfte der ersten war. Wieviel Schnitter waren bei der Arbeit, wenn wir wissen, daß ein Schnitter den Rest der zweiten Wiese in einem Tag zu Ende mähte? (Aufgabe von L. N. Tolstoi[1])

Lösung: Die Anzahl der Schnitter bezeichnen wir mit x. Als Zeiteinheit wählen wir einen halben Tag. Am Vormittag mähten x Schnitter die erste Wiese und am Nachmittag $\frac{x}{2}$, daraus folgt, daß sie am Nachmittag $\frac{1}{3}$ der Wiese mähten; ein Schnitter mähte also an einem halben Tag $\frac{2}{3x}$ der Wiese. Von der anderen Wiese mit dem halben Flächeninhalt wurde am Nachmittag ein Teil gemäht, der $\frac{1}{3}$ der ersten Wiese gleicht (gleiche Anzahl von Schnittern auf beiden Wiesen). Den Rest mähte ein Schnitter am anderen Tag zu Ende. Das bedeutet

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3x} \cdot 2 = \frac{1}{2} \qquad (x \neq 0)$$

Durch die Lösung dieser Gleichung erhalten wir $x = 8$.

Antwort: Die Wiesen wurden von 8 Schnittern gemäht.

115. Der Nenner eines bestimmten Bruches ist um 2 größer als der Zähler. Wenn wir den Zähler und Nenner des Bruches um 7 vergrößern, hat der entstehende Bruch den Wert $\frac{5}{6}$. Ermitteln Sie den ursprünglichen Bruch.

Lösung: Den Zähler des Bruches kennzeichnen wir durch den Buchstaben x, der Nenner ist dann $(x + 2)$. Wenn wir sowohl den Zähler als auch den Nenner um 7 vergrößern, erhalten wir den Bruch $\frac{5}{6}$; d. h.

$$\frac{x + 7}{x + 9} = \frac{5}{6} \qquad (x \neq 9)$$

als Lösung erhalten wir $x = 3$.

Antwort: Der ursprüngliche Bruch lautete $\frac{3}{5}$.

116. Mit zwei Baggern wird eine Arbeit in 12 Tagen ausgeführt. Mit dem ersten würde sie 20 Tage dauern. In wieviel Tagen würde sie mit dem zweiten Bagger ausgeführt werden können?

Lösung: Die Anzahl der Tage, in denen der zweite Bagger allein eingesetzt war, bezeichnen wir mit x. Gemeinsam waren beide Bagger an einem Tag bei $\frac{1}{12}$ der Arbeit eingesetzt. Mit dem ersten führt man an einem Tag $\frac{1}{20}$ der Arbeit aus, mit dem zweiten $\frac{1}{x}$ der Arbeit. Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12} \quad (x \neq 0)$$

$$x = 30$$

Antwort: Mit dem zweiten Bagger würde die Arbeit in 30 Tagen ausgeführt werden.

[1] Tolstoi, Lew Nikolajewitsch, 1828 bis 1910, bedeutender russischer Schriftsteller

117. An einen Widerstand von 3 Ω wurde ein Widerstand von 5 Ω in Reihe geschaltet. Welchen Widerstand müssen wir parallel in diesen Stromkreis schalten, damit der resultierende Widerstand wieder 3 Ω beträgt?

Lösung: Der resultierende Widerstand R_s beträgt bei Reihenschaltung[1] der Widerstände von 3 Ω und 5 Ω gleich 8 Ω, $R_s = (3 + 5)\,\Omega$. Bei Parallelschaltung des dritten gilt für den resultierenden Widerstand $R = 3\,\Omega$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_p} \qquad (R_p \neq 0),$$

wobei $R = 3\,\Omega$ und $R_s = 8\,\Omega$, oder

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{R_p}$$

Für R_p ist das eine Gleichung mit einer Unbekannten, deren Lösung $R_p = 4{,}8\,\Omega$ ist.

Antwort: Zu dem Stromkreis muß ein Widerstand von 4,8 Ω parallel geschaltet werden.

118. Ein 1 km langer Straßenabschnitt, auf dem eine Straßenbahn verkehrt, wird von einem bestimmten Fußgänger jeden Tag in 12 min zurückgelegt. Jedesmal zählt er die ihn überholenden Straßenbahnen und auch diejenigen, die ihm entgegenkommen. In einem ganzen Monat betrug die Gesamtzahl der ihn überholenden Straßenbahnen $u = 45$, die Zahl der ihm begegnenden Straßenbahnen aber $e = 120$. Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der Straßenbahnen. (Die Geschwindigkeiten des Fußgängers und der Straßenbahnen werden als konstant angenommen, der Halt der Bahnen an Haltestellen bleibe unberücksichtigt. Daß der Monat bei dieser Aufgabe mit 30 Tagen gerechnet wird, spielt für die Lösung keine Rolle.)

Lösung: Die gesuchte Straßenbahngeschwindigkeit sei x km h^{-1}, die des Fußgängers ist 5 km h^{-1}. Relativ zum Fußgänger besitzt eine diesem entgegenkommende Straßenbahn eine Geschwindigkeit von $(x + 5)$ km h^{-1}, eine den Fußgänger überholende dagegen $(x - 5)$ km h^{-1}. Das Verhältnis $e:u$ der Anzahl „entgegenkommender“ zu „überholender“ Straßenbahnen ist bei normalen Verkehrsbedingungen gleich dem Verhältnis der (zum Fußgänger) relativen Geschwindigkeiten der Straßenbahnen.
Also gilt:

$$\frac{x+5}{x-5} = \frac{120}{45} \qquad (x \neq 5)$$

$$x = 11$$

Antwort: Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn beträgt 11 km h^{-1}.
(Dem Leser mag diese Geschwindigkeit etwas gering vorkommen, man beachte aber dabei, daß auf dem Straßenabschnitt 2 Haltestellen liegen könnten, so daß die effektive Fahrtgeschwindigkeit der Bahnen wesentlich höher sein kann.)

[1] Kirchhoffsche Gesetze im verzweigten Stromkreis

2.3. Lineare Gleichungen mit Parametern

Wenn in einer Gleichung außer konkreten Zahlenwerten und Unbekannten auch noch unbestimmte Angaben auftauchen, die in der Regel durch Buchstaben-Symbole als variable Größen gekennzeichnet werden, so handelt es sich um Gleichungen mit Parametern. Am Ende muß dann nach der eigentlichen Lösung noch eine Diskussion durchgeführt werden, bei der zu untersuchen ist,

a) ob bzw. unter welchen Bedingungen die Aufgabe eine Lösung besitzt

b) welche Ergebnisse in Abhängigkeit von den möglichen Werten der Parameter erhalten werden.

Die Aufgaben werden zunächst so gelöst, daß im Ergebnis noch die Parameter auftreten. Anschließend wird auch die Lösung für die in Klammern stehenden speziellen Zahlenwerte genannt. In ähnlicher Weise geht man übrigens in der Regel vor, wenn Formeln aus Formelsammlungen verwendet werden.
Man löst die Aufgabe „allgemein“, d. h. für beliebige Werte der in der Formel vorkommenden Größen, anschließend werden für die Parameter bestimmte Werte eingesetzt. Der „allgemeinen“ Lösung ist der Vorzug zu geben.

119. Berechnen Sie den Modul m eines Zahnrades von der Art $d = m(z + 2)$, wenn der

Durchmesser des Kopfkreises des Rades $d\ (= 190\ \mathrm{LE})$ und die Anzahl der Zähne $z\ (= 36)$ ist.

Lösung:

$$d = m(z + 2) \Rightarrow m = \frac{d}{z + 2}; \quad z > 0,\ d > 0$$

$$m = \frac{190}{36 + 2} = 5$$

Antwort: Der Modul des Zahnrades ist $m = 5$.

120. Am ersten Tag übererfüllte ein Arbeiter seine Norm um $p\ (= 5)\%$, am zweiten Tag um $q\ (= 7)\%$ und produzierte an beiden Tagen um $r\ (= 12)$ Stück mehr, als er geplant hatte. Wieviel Stück Erzeugnisse mußte er täglich produzieren?

Lösung: Der Arbeiter produzierte täglich x Stück Erzeugnisse. Am ersten Tag übererfüllte er die Norm um $p\%$, was $\frac{x}{100} \cdot p$ Stück entspricht. Am zweiten Tag übererfüllte er die Norm um $q\%$, was $\frac{x}{100} \cdot q$ Stück entspricht. Aus den Voraussetzungen der Aufgabe erhalten wir:

$$2x + \frac{x}{100}p + \frac{x}{100}q = 2x + r$$

$$x(p + q) = 100r,\ p > 0,\ r > 0,\ q > 0$$

$$x = \frac{100r}{p + q}$$

$$x = \frac{100 \cdot 12}{5 + 7} = 100$$

Antwort: Der Arbeiter produzierte täglich $\frac{100r}{p + q}$ bzw. 100 Stück.

121. Ein Meisterbereich erfüllte in der ersten Woche den Plan, d. h., er produzierte n Stück Erzeugnisse. In der zweiten Woche verringerte sich die Produktion gegenüber der ersten Woche um $p\ (= 10)\%$. Um wieviel Prozent mußte der Meisterbereich seine Leistung der zweiten Woche in der dritten Woche steigern, damit am Wochenende der Dreiwochenplan erfüllt wurde?

Lösung: In der ersten Woche produzierte der Meisterbereich n Erzeugnisse, und in der zweiten Woche produzierte er:

$$v = n - \frac{np}{100} = \frac{n(100 - p)}{100} \text{ Erzeugnisse,} \qquad (1)$$

$n > 0;\ 0 < p < 100$

In der dritten Woche muß er die Produktion aus der zweiten Woche um x Prozent steigern, so daß er herstellen muß:

$$\left(v + \frac{vx}{100}\right) \text{ Erzeugnisse} \qquad (2)$$

Diese Zahl gleicht der Summe derjenigen n Erzeugnisse, die ursprünglich für die dritte Woche geplant waren, zuzüglich der $\frac{np}{100}$ Erzeugnisse, die in der zweiten Woche nicht hergestellt wurden, d. h. der Zahl

$$\left(n + \frac{np}{100}\right) \qquad (3)$$

Durch einen Vergleich von (2) und (3) erhalten wir die lineare Gleichung für das unbekannte x

$$v + \frac{vx}{100} = n + \frac{np}{100}$$

Nach der Umformung

$$x = \frac{n(100 + p)}{v} - 100 \qquad (4)$$

Nach dem Einsetzen für v aus (1) in (4) und nach Umformen ist

$$x = \frac{200p}{100 - p}$$

Der Meisterbereich muß also seine Leistung aus der zweiten Woche um $\frac{200p}{100 - p}$ Prozent steigern.
Nach dem Einsetzen für $p = 10$ erhalten wir:

$$x = \frac{2000}{90} = 22\frac{2}{9} < 22{,}3$$

Antwort: Wenn der Meisterbereich sein Versäumnis aus der zweiten Woche wettmachen will, muß er seine Leistung aus dieser Woche in der dritten Woche um etwa 22,3% steigern.

122. Zwei Arbeiter müssen eine bestimmte Arbeit in t (= 6) Tagen ausführen. Der erste Arbeiter kann diese Arbeit allein in a (= 15) Tagen ausführen. In wieviel Tagen (x) kann der zweite Arbeiter die gleiche Arbeit ausführen, wenn er allein arbeiten würde?

Lösung: Der erste Arbeiter führt an einem Tag die Arbeit p_1 aus, der zweite p_2. Die Gesamtarbeit ist P. Es gilt also:

$$(p_1 + p_2)\, t = P \tag{1}$$

$$p_1 a = P \Rightarrow p_1 = \frac{P}{a}, \quad p_2 x = P \Rightarrow p_2 = \frac{P}{x}$$

Wenn wir p_1 und p_2 in (1) einsetzen, erhalten wir:

$$\left(\frac{P}{a} + \frac{P}{x}\right) t = P \qquad P\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) t = P$$

Nach Dividieren der Gleichung durch P erhalten wir:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{t} \qquad a > t$$

$$t > 0 \Rightarrow x = \frac{at}{a-b} \text{ bzw. } x = \frac{15 \cdot 6}{15 - 6} = 10$$

Antwort: Der zweite Arbeiter kann die Arbeit in 10 Tagen ausführen.

123. Eine bestimmte Arbeit wurde von a (= 5) Arbeitern in b (= 8) Tagen ausgeführt. Wieviel Arbeiter müssen noch hinzugezogen werden, damit die Arbeit 6 Tage früher ausgeführt wird?

Lösung: Die Anzahl der Arbeiter ist indirekt proportional der Anzahl der für die Ausführung der bestimmten Arbeit erforderlichen Tage. Wenn wir die gesuchte Anzahl der Arbeiter mit x bezeichnen, erhalten wir die Proportion

$$a : (a + x) = (b - 6) : b$$

Wenn wir die Eigenschaften einer Proportion nutzen, daß das Produkt der Innenglieder (der Proportion) dem Produkt der Außenglieder gleich ist, erhalten wir:

$$(a + x)(b - 6) = ab$$
$$a(b - 6) + x(b - 6) = ab$$
$$x(b - 6) = ab - a(b - 6)$$
$$x(b - 6) = ab - ab + 6a$$
$$a > 0;\ b > 6$$
$$x(b - 6) = 6a$$
$$x = \frac{6a}{b - 6} \quad \text{bzw.}$$
$$x = \frac{6 \cdot 5}{8 - 6} = \frac{30}{2} = 15$$

Antwort: Es müssen noch 15 Arbeiter hinzugezogen werden.

124. Der Vater ist 40 Jahre alt, der Sohn 10 Jahre. In wieviel Jahren wird der Vater n-mal so alt sein wie der Sohn?

Lösung: Möge der Vater in x Jahren n-mal so alt sein wie der Sohn. Nach x Jahren wird der Vater $(40 + x)$ Jahre und der Sohn $(10 + x)$ Jahre alt sein. Aus der Aufgabe ergibt sich die Gleichung:

$$40 + x = n(10 + x)$$
$$40 + x = 10n + nx$$
$$40 - 10n = nx - x$$
$$40 - 10n = x(n - 1)$$
$$x = \frac{40 - 10n}{n - 1} \tag{1}$$

Antwort: Der Vater wird in $\dfrac{40 - 10n}{n - 1}$ Jahren n-mal so alt sein wie der Sohn.

Diskussion: Damit die Aufgabe einen Sinn hat, setzen wir voraus, daß $n > 1$. Dann wird sich im Nenner des Bruchs (1) immer eine positive Zahl befinden. Bei $n < 4$ ist der Zähler des Bruchs (1) positiv. Wenn $n = 4$, ist der Zähler gleich Null. Bei $n > 4$ ist der Zähler negativ. Es können also folgende drei Fälle eintreten:

1. Wenn $1 < n < 4$, dann hat die Aufgabe genau eine Lösung. Für $n = 2$ ist die Lösung $x = 20$, was bedeutet, daß der Vater in 20 Jahren 60 und der Sohn 30 Jahre alt ist, daß der Vater also doppelt so alt sein wird wie der Sohn.

2. Wenn $n = 4$, dann ist $x = 0$, was nur bedeutet, daß der Vater gerade jetzt vier mal so alt ist wie der Sohn.

3. Wenn $n > 4$ (z. B. $n = 6$), dann hat die Aufgabe formal die Lösung $x = -4$, was bedeutet, daß vor vier Jahren der Vater 36,

der Sohn 6 Jahre alt war und der Vater damit 6 mal so alt war wie der Sohn.

125. Für das Gleichgewicht zwischen einer Last und einer Kraft am Hebel[1] gilt die Gleichung $F \cdot a = F_Q \cdot b$, wobei F die Kraft, a den Kraftarm, F_Q die Last und b den Lastarm bedeuten. Berechnen Sie die Kraft F, die für das Halten der Last F_Q ($F_Q = 3600$ N) erforderlich ist, wenn a (= 420) cm, b (= 175) cm.

Lösung: Als Gleichung finden wir:

$$F \cdot a - F_Q \cdot b = 0 \Rightarrow F = \frac{F_Q \cdot b}{a}$$

$$F = \frac{3600\text{ N} \cdot 175\text{ cm}}{420\text{ cm}} = 1500\text{ N}$$

Antwort: Für das Halten der Last ist eine Kraft von 1500 N erforderlich.

126. Um wieviel Prozent muß sich die Geschwindigkeit eines Autos erhöhen, damit die Fahrzeit auf gleichen Weg um p(= 25)% verringert wird?

Lösung: Der Weg des Autos ist durch die Beziehung $s = vt$ gegeben, woraus folgt: $v = \frac{s}{t}$. Die um p% verringerte Fahrzeit ist durch den Ausdruck $\left(t - \frac{t}{100}p\right)$ gegeben. Um die Erhöhung der Geschwindigkeit des Autos in Prozent p_1 auszudrücken, untersuche man

$$p_1 = \frac{100 v_1}{v}, \text{ wobei } v_1 = \frac{s}{t - \frac{t}{100}p}$$

$$p_1 = \frac{100\left[\frac{s}{t - \frac{t}{100}p}\right]}{\frac{s}{t}} = \frac{\frac{10000 s}{t(100-p)}}{\frac{s}{t}}$$

$$p_1 = \frac{10000\, st}{t(100-p)\, s}$$

$$p_1 = \frac{10000}{100-p} \quad 0 < p < 100$$

[1] Es wird vorausgesetzt, daß die Kräfte rechtwinklig zur Hebelstange angreifen.

Da $p_1 > 100$, ist die in Prozent ausgedrückte Geschwindigkeitssteigerung des Autos:

$$\frac{10000}{100-p} - 100 = \frac{100p}{100-p} \quad \text{und hier:}$$

$$p = \frac{100 \cdot 25}{100 - 25} = \frac{100 \cdot 25}{75} = 33{,}3$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Autos muß auf der gleichen Strecke um 33,3% gesteigert werden.

127. Ein Arbeiter führt eine bestimmte Arbeit in a (= 10) Tagen aus, ein anderer in b (= 15) Tagen. In wieviel Tagen führen beide gleichzeitig diese Arbeit aus?

Lösung: Wenn der erste Arbeiter die gesamte Arbeit in a Tagen ausführt, erledigt er an einem Tag $\frac{1}{a}$ (den a-ten Teil) dieser Arbeit. Wenn der zweite Arbeiter die gesamte Arbeit in b Tagen ausführt, erledigt er an einem Tag $\frac{1}{b}$ dieser Arbeit, und beide führen zusammen an einem Tag $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ der Gesamtarbeit aus. Wenn sie gemeinsam die gesamte Arbeit in x Tagen ausführen, erledigen sie an einem Tag $\frac{1}{x}$ der Arbeit. Daher können wir schreiben:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \qquad a > 0^1$$
$$b > 0$$
$$x \neq 0$$

Durch Multiplikation der gesamten Gleichung mit abx erhalten wir:

$$bx + ax = ab$$

$$x(a + b) = ab$$

$$x = \frac{ab}{a+b} \quad \text{hier: } x = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 6$$

Antwort: Beide Arbeiter zusammen führen die Arbeit in 6 Tagen aus.

[1] Die hier entstehende Gleichung tritt in der Optik als Linsengleichung und in der Elektrik im verzweigten Stromkreis (Parallelschaltung) für die Widerstände auf.

128. Ein Personenzug fuhr von der Ortschaft A nach B mit einer Geschwindigkeit von v_1 ab. Ihm fuhr ein Schnellzug mit einer Geschwindigkeit von v_2 nach, der den Personenzug in der Ortschaft B einholen soll. Als der Personenzug bereits $\frac{2}{3}$ der Entfernung zurückgelegt hatte, verlangsamt er seine Fahrt und legt den weiteren Abschnitt mit der halben Geschwindigkeit zurück. Infolgedessen holt der Schnellzug den Personenzug d Kilometer vor der Ortschaft B ein.
Wie groß ist die Entfernung von der Ortschaft A bis B?
(Spezielle Werte: $d = 27\frac{1}{9}$ km, $v_1 = \frac{1}{2}$ km min^{-1}, $v_2 = 1$ km min^{-1} als Beispiel)

Lösung: Die gesuchte Entfernung bezeichnen wir mit x. Der Schnellzug fuhr von der Ortschaft A um $\left(\frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2}\right)$ später ab als der Personenzug. Der Personenzug legt $\frac{2}{3}x$ in der Zeit $\frac{2x}{3v_1}$ zurück. Die Entfernung $\left(x - \frac{2}{3}x - d\right)$ $= \left(\frac{x}{3} - d\right)$ legt der Personenzug in $\dfrac{\frac{x}{3} - d}{\frac{v_1}{2}}$ $= \dfrac{2\left(\frac{x}{3} - d\right)}{v_1}$ zurück; währenddessen legt der Schnellzug eine Entfernung $(x - d)$ in der Zeit $\frac{x-d}{v_2}$ zurück, woraus folgt:

$$\frac{2x}{3v_1} + \frac{2\left(\frac{x}{3} - d\right)}{v_1} - \frac{x-d}{v_2} = \frac{x}{v_1} - \frac{x}{v_2}$$

Es folgt weiter:

$$x = \frac{3d(2v_2 - v_1)}{v_2}$$

$$d > 0,\ v_1 > 0,\ 2v_2 - v_1 > 0 \Rightarrow v_2 > \frac{v_1}{2}$$

Nach dem Einsetzen der speziellen Werte erhalten wir:

$$x = \frac{3 \cdot 27\frac{1}{9}\left(2 \cdot 1 - \frac{1}{2}\right)}{1}\ \text{km} = 122\ \text{km}$$

Antwort: Die Ortschaft A ist 122 km von der Ortschaft B entfernt.

129. Aus einem bestimmten Material wurden zwei Betonmasten mit Querschnitten von den Abmessungen 15 cm $\times$ 20 cm und 25 cm $\times$ 35 cm, wobei beide Masten die gleiche Höhe aufwiesen, hergestellt. Wieviel wiegt der eine Mast, wenn der andere um a (= 46) kg schwerer ist?

Lösung: Die Masse des ersten Mastes ist x kg, die des zweiten $(x + a)$ kg. Die Differenz der Massen der Masten, die aus dem gleichen Material gefertigt wurden und die gleiche Höhe aufweisen, hängt nur vom Querschnitt ab. Daher ist das Verhältnis der Querschnitte beider Masten gleich dem Verhältnis ihrer Massen.
Die Fläche des Querschnittes des ersten Mastes beträgt 15 cm $\times$ 20 cm = 300 cm^2 und die des zweiten 25 cm $\times$ 35 cm = 875 cm^2.

Es gilt also $\frac{300}{875} = \frac{x}{x+a}$

oder $\frac{12}{35} = \frac{x}{x+a}$ $\quad (x \neq -a,\ a > 0)$

$$\begin{aligned} 12(x + a) &= 35x \\ 12x + 12a &= 35x \\ -23x &= -12a \\ x &= \frac{12}{23}a; \quad \text{hier } x = 24 \end{aligned}$$

Antwort: Die Masse vom ersten Mast ist 24 kg und die vom zweiten 70 kg.

130. Wir haben zwei Weinsorten zu mischen. Ein Liter der ersten Weinsorte kostet p (= 12) M, ein Liter der zweiten kostet q (= 15) M. Wieviel Liter von jeder Sorte müssen genommen werden, damit wir k (= 18) l Wein für r (= 13) M je Liter gewinnen?

Lösung: Wir nehmen x l der zweiten Weinsorte. Von der ersten Weinsorte nehmen wir dann $(k - x)$ l. Der Preis des Weins der zweiten Sorte ist xq M, der der ersten $[p(k - x)]$ M und der des Gemisches kr M. Es gilt also

$$xq + (k - x)\,p = kr$$
$$xq + kp - px = kr$$

$$x(q-p) = k(r-p)$$

$$x = k\,\frac{(r-p)}{q-p} \qquad \text{hier: } x = \frac{18(13-12)}{15-12} = 6$$

Von der ersten Weinsorte sind erforderlich:

$$k - x = k - \frac{k(r-p)}{q-p} = \frac{k(q-p) - k(r-p)}{q-p}$$

$$= \frac{k(q-p-r+p)}{q-p} = \frac{k(q-r)}{q-p}$$

hier: $\dfrac{18(15-13)}{15-12} = 12$

Antwort: Von der ersten Weinsorte sind 12 l, von der zweiten Weinsorte 6 l erforderlich.

Diskussion: Von den Parametern k, p, q, r gilt: $k > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$. Aus der Aufgabenstellung folgt, daß $x > 0$ und $k - x > 0$. Es muß gleichzeitig also auch gelten:

$$\left.\begin{array}{l} r - p > 0 \Rightarrow r > p \\ q - r > 0 \Rightarrow q > r \\ q - p > 0 \Rightarrow q > p \end{array}\right\} \Rightarrow p < r < q$$

oder gleichzeitig

$$\left.\begin{array}{l} r - p < 0 \Rightarrow r < p \\ q - r < 0 \Rightarrow q < r \\ q - p < 0 \Rightarrow q < p \end{array}\right\} \Rightarrow q < r < p^{1}$$

131. Von der Ortschaft A fährt ein Auto mit einer Geschwindigkeit von v_1 ($= 75$ km h^{-1}) ab. Eine Stunde später fährt diesem ein zweites Auto mit einer Geschwindigkeit von v_2 ($= 90$ km h^{-1}) hinterher. In wieviel Stunden holt das zweite Auto das erste ein?

Lösung:

a) Die Strecke sei s, an deren Ende das zweite Auto das erste einholt. Die Zeit t_1, in der das erste Auto die Strecke s zurücklegt, ist $\dfrac{s}{v_1}$, die Zeit t_2 für das zweite Auto ist $\dfrac{s}{v_2}$.

Es folgt, daß $v_2 > v_1$, $v_1 > 0$, dann gilt:

$$\frac{s}{v_1} - \frac{s}{v_2} = 1 \Rightarrow s = \frac{v_1 v_2}{v_2 - v_1} \Rightarrow t_2 = \frac{v_1}{v_2 - v_1},$$

hier $t_2 = s$

[1] Die jeweils drittgenannte Ungleichung folgt aus den übrigen beiden.

Antwort: Das zweite Auto holt das erste Auto in 5 h ein.

b) Die Strecke s legt das erste Auto in der Zeit t, das zweite Auto in der Zeit $(t-1)$ zurück. Da die Strecke für beide Autos die gleiche ist, gilt:

$$v_1 t = v_2(t-1) \Rightarrow t = \frac{v_2}{v_2 - v_1}$$

Das zweite Auto fuhr eine Stunde später ab, daher ist

$$\frac{v_2}{v_2 - v_1} - 1 = \frac{v_1}{v_2 - v_1}$$

Antwort: Das zweite Auto holt das erste in $\dfrac{v_1}{v_2 - v_1}$ ein, d. h. hier in 5 h (und zwar nach seiner Abfahrt). Die Wegstrecke ermittelt man zu 450 km.

132. Der Produktionszuwachs eines Betriebes betrug im Vergleich zum Vorjahr im ersten Jahr a ($= 20$)%, im zweiten Jahr b ($= 40$)%. Wie hoch muß die Zuwachsrate für das dritte Jahr sein, damit der durchschnittliche Jahresproduktionszuwachs für drei Jahre c ($= 60$)% beträgt?

Lösung: Wenn wir als Einheit die Produktion des Betriebes für das Jahr, das dem ersten vorausging, annehmen, dann ist die Produktion im ersten Jahr gleich $\left(1 + \dfrac{a}{100}\right)$.

Die Produktion im zweiten Jahr wird sein:

$$1 + \frac{a}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100}$$

$$= \left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)$$

Im dritten Jahr erhöht sich die Produktion um $\left(1 + \dfrac{a}{100}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{b}{100}\right) \cdot \dfrac{x}{100}$, wobei x die Zuwachsrate der Produktion für das dritte Jahr darstellt. Aus der Aufgabe ergibt sich folgender durchschnittlicher Jahresproduktionszuwachs für die drei Jahre:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a}{100} + \left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{b}{100} + \left(1 + \frac{b}{100}\right)\left(1 + \frac{a}{100}\right) \cdot \frac{x}{100}\right] = \frac{c}{100}$$

$$x = \frac{3c - a - b - \frac{ab}{100}}{\left(1 + \frac{a}{100}\right)\left(1 + \frac{b}{100}\right)}$$

$$\left[3c - a - b - \frac{ab}{100} > 0\right.$$

$$300c - 100a - 100b - ab > 0$$

$$300c > 100a + 100b + ab$$

$$\left. 0 < a < 100,\ 0 < b < 100 \right]$$

Hier

$$x = \frac{3 \cdot 60 - 20 - 40 - \frac{20 \cdot 40}{100}}{\left(1 + \frac{20}{100}\right)\left(1 + \frac{40}{100}\right)} = 66{,}6\%$$

Antwort: Die Produktionszuwachsrate für das dritte Jahr beträgt 66,6%.

2.4. Grafische Lösung linearer Gleichungen

Zuweilen ist es angebracht, Gleichungen auf grafischem Wege zu lösen. Das gilt vor allem für solche Aufgaben, bei denen Fragen der Bewegung, der Mischung oder der verrichteten Arbeit untersucht werden.

Bei der Lösung von Aufgaben über die gleichförmige Bewegung verwendet man gern das **Bild linearer Funktionen** — das sind Geraden. Bei dem Aufbau eines solchen (Schau-)Bildes kommt es zunächst auf eine günstige Wahl des Koordinatensystems an. Man konstruiert ein Bewegungsdiagramm (hier: s,t-Diagramm bzw. Weg-Zeit-Diagramm), indem man als Abszissenachse die Zeitachse und als Ordinatenachse die Wegachse wählt. Maß für die Geschwindigkeit ist dann jeweils der Anstieg der Geraden. Für gewöhnlich zeichnet man dann die Geraden jeweils mit Hilfe zweier Punkte ein [$P_1(t_1; s_1)$ und $P_2(t_2; s_2)$]. Sie veranschaulichen zwei Bewegungszustände. Der Anfangszustand der Bewegung wird häufig durch die Koordinaten des Ursprungs des Koordinatensystems gekennzeichnet.

Ist die Geschwindigkeit der einen Bewegung gegeben, so benutzt man zum Zeichnen der Geraden zunächst einen Punkt mit gegebenen Werten $t_1; s_1$ und bestimmt die Koordinaten eines zweiten Punktes mit Hilfe der gegebenen Geschwindigkeit. Das braucht nicht über die — oft schwerfällige — Berechnung des Anstiegswinkels zu geschehen. Bequemer ist es, den Wegzuwachs für eine Zeiteinheit zu berechnen und so die Koordinaten t_2 und s_2 zu bestimmen.

Ähnlich verfährt man bei Mischungsaufgaben und auch bei Aufgaben über verrichtete Arbeit (und Energie).

Bei Mischungsaufgaben verwendet man in der Regel sogenannte Flächendiagramme. Die Lösung mit Hilfe solcher Diagramme beruht auf der Umformung von Figuren in flächengleiche andere. Zu beachten ist eine Reihe von Besonderheiten bei der grafischen Lösung — gültig übrigens in allen mathematischen Bereichen:

a) Grafische Lösungen sind stets mit einer unvermeidbaren Ungenauigkeit behaftet. Die Ungenauigkeit ist besonders groß, wenn der Richtungsunterschied der benutzten Geraden sehr gering ist.

b) Grafiken besitzen einen hohen Grad von Anschaulichkeit. Zur Vororientierung, Abschätzung (Überschlag) oder zur Kontrolle sind sie daher außerordentlich zu empfehlen. Auf die Berechnung sollte aber nicht verzichtet werden.

Es muß darauf verwiesen werden, daß beim Aufstellen der funktionalen Abhängigkeit zwischen den in Textaufgaben auftretenden Größen darauf zu achten ist, daß wir den in der Textaufgabe auftretenden Parameter als unabhängige variable Größe wählen.

133. Wieviel Kilogramm rohes Fleisch müssen wir kochen lassen, um für 30 Personen ein Mittagessen bereiten zu können, wenn wir für jede Person 100 g Kochfleisch berechnen. Fleisch verliert durch das Kochen 35% seiner Masse.

Lösung: y sei die Menge des rohen Fleisches und x die Menge des gekochten Fleisches (in kg). Für 30 Personen benötigen wir $30 \cdot 100\ \text{g} = 3\ \text{kg}$ Kochfleisch. Von 1 kg rohen Fleisches gewinnen wir 0,65 kg Kochfleisch. Die Beziehung zwischen den Mengen des Kochfleisches und des rohen Fleisches wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$x:y = 65:100 \Rightarrow y = \frac{100}{65}x \qquad (1)$$

Zeichnen wir nun das Diagramm der Abhängigkeit (1) (Bild 10) auf — es ist eine Gerade a, die ausgehend vom Ursprung des

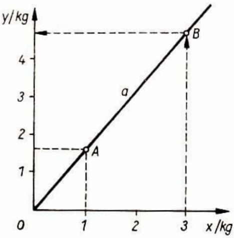

Bild 10

Koordinatensystems über einen weiteren Punkt, z. B. A verläuft $\left[1; \frac{100}{65}\right]$. Ausgehend von $x = 3$ ziehen wir die Parallele zur y-Achse, die die Gerade a im Punkt B schneidet. Die Koordinate y des Punktes B ist $y = 4{,}7$.

Antwort: Wir müssen 4,7 kg rohes Fleisch kochen.

134. Äpfel verlieren durch das Trocknen 84% ihrer Masse. Wieviel Kilogramm frische Äpfel müssen wir trocknen, damit wir 32 kg Trokkenäpfel gewinnen?

Lösung: Mit x kennzeichnen wir die Menge frische Äpfel und mit y diejenige Menge

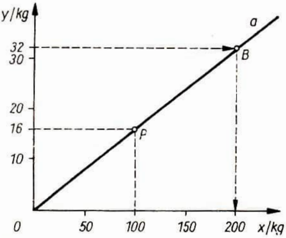

Bild 11

Trockenäpfel, die wir aus der Menge x frischer Äpfel gewinnen. Zwischen x und y besteht eine direkte Proportionalität, die wir in Form der Gleichung $y = \frac{16}{100}x$ ausdrücken, wobei $16\% = (100 - 84)\%$. Ihre grafische Darstellung ist eine Gerade, die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht (Bild 11). Die Gerade a stellen wir mit Hilfe eines Punktes P auf, der die Koordinaten $x_P = 100$ und $y_P = 16$ hat. Von $y = 32$ ausgehend, ziehen wir die Parallele zur x-Achse. Diese schneidet die Gerade a im Punkt B mit den Koordinaten $x = 200$, $y = 32$. 32 kg getrocknete Äpfel entsprechen 200 kg frischen Äpfeln.

Antwort: 32 kg getrocknete Äpfel gewinnen wir aus 200 kg frischen Äpfeln.

135. Drei Körper bewegen sich von einem Punkt aus in gleicher Richtung. Die Geschwindigkeit des ersten ist 4 cm s^{-1}, die des zweiten 5 cm s^{-1} und die des dritten 6 cm s^{-1}. Der zweite Körper begann seine Bewegung 2 h nach dem ersten. Welche Zeit nach dem Beginn der Bewegung des zweiten muß der dritte Körper seine Bewegung beginnen, damit er den ersten und den zweiten gleichzeitig einholt? An welchem Kilometer tritt das ein?

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Körpers ist $4 \cdot 3600$ cm $h^{-1} = 144$ m h^{-1}.
Die Geschwindigkeit des zweiten Körpers ist

$5 \cdot 3600$ cm $h^{-1} = 180$ m h^{-1}.

Die Geschwindigkeit des dritten Körpers ist

$6 \cdot 3600$ cm $h^{-1} = 216$ m h^{-1}.

Wir zeichnen ein Diagramm (Bild 12) der Bewegung N_1 des ersten Körpers mit Hilfe der Punkte A_1 (0; 0), A_2 (1; 144), ein Diagramm der Bewegung N_2 des zweiten Körpers mit Hilfe der Punkte B_1 (2; 0), B_2 (3; 180). Diese haben den gemeinsamen Punkt B (10; 1440), dessen Abszisse die Zeit des Zusammentreffens $t = 10$ und dessen Ordinate die Stelle angibt, an der der zweite den ersten Körper einholt, nämlich $s = 1440$ m. Das Bewegungsdiagramm des dritten Körpers muß durch den Punkt B verlaufen. Uns ist es möglich, eine Hilfsgerade, z. B. N_3' zu konstruieren, die parallel zur Bewegungskennlinie N_3 des dritten Körpers verläuft. Die Gerade N_3' zeichnen wir mit Hilfe der Punkte $C_1'(0; 0)$ und $C_2'(1; 216)$.

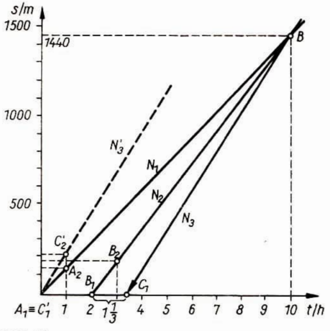

Bild 12

Durch den Punkt B ziehen wir die Parallele N_3 zu N_3', die die t-Achse im Punkt C_1 $\left(3\frac{1}{3}; 0\right)$ schneidet. Der dritte Körper muß also seine Bewegung $1\frac{1}{3}$ h nach dem zweiten beginnen.

Antwort: Der dritte Körper muß seine Bewegung $1\frac{1}{3}$ h nach dem zweiten beginnen. Das Zusammentreffen aller drei Körper erfolgt in 1440 m Entfernung 10 h nach Beginn der Bewegung des ersten Körpers.

136. In der Ortschaft A setzte sich ein Personenzug in Bewegung, der mit einer Geschwindigkeit von 50 km h^{-1} fährt. Eine Stunde später startete von der Ortschaft A in gleicher Richtung ein mit der Geschwindigkeit von 60 km h^{-1} fahrender Schnellzug. Wie lange muß der Personenzug in der Ortschaft B, die 100 km von A entfernt liegt, aufgehalten werden, damit das Überholen des Personenzuges durch den Schnellzug in der Ortschaft C erfolgt, die 120 km von A entfernt ist?

Lösung: Die Strecke des Personenzuges ist durch die Gleichung $s = 50\,t$ und die Strecke des Schnellzuges durch die Gleichung $s = 60(t - 1)$ gegeben. Die Kennlinie der Gleichung $s = 50\,t$ ist die Gerade a, die vom Ausgangspunkt des Koordinatensystems durch den Punkt A $(1; 50)$ (Bild 13) verläuft. Die Kennlinie der Gleichung

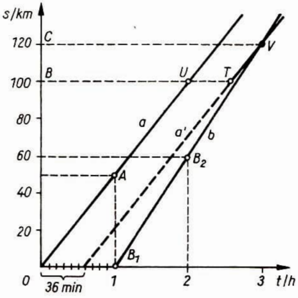

Bild 13

$s = 60(t - 1)$ ist die Gerade b, die durch die Punkte B_1 $(1; 0)$, B_2 $(2; 60)$ verläuft. Da der Überholvorgang in der Ortschaft C erfolgen soll, ziehen wir, ausgehend vom Punkt 120 auf der s-Achse, die Parallele zur t-Achse, die die Gerade b im Punkt V schneidet. Durch den Punkt V ziehen wir die Parallele a' zur Geraden a. Die Gerade a' schneidet die zur t-Achse parallel verlaufende Gerade, die vom Punkt 100 auf der s-Achse ausgeht, im Punkt T. Die Größe des Abschnittes $\overline{UT}$ entspricht der gesuchten Zeit.

Antwort: In der Ortschaft B muß der Personenzug 36 min aufgehalten werden.

137. Auf zwei parallel zueinander verlaufenden Strecken fahren zwei Züge, und zwar ein Schnellzug und ein Güterzug, in der gleichen Richtung. Der Schnellzug hat eine Länge von 75 m, und seine Geschwindigkeit beträgt 58 km h^{-1}. Der Güterzug hat eine Länge von 105 m, seine Geschwindigkeit beträgt 40 km h^{-1}. Welche Zeit vergeht von dem Zeitpunkt, wo die Schnellzuglokomotive den letzten Waggon des Güterzuges erreicht, bis zu dem Zeitpunkt, an dem der letzte Waggon des Schnellzuges die Güterzuglokomotive überholt?

a) *Arithmetische Lösung* (Bild 14)

1. Die Geschwindigkeit des Schnellzuges ist um 18 km h^{-1} größer als die Geschwindigkeit des Güterzuges, so daß der Schnellzug den Güterzug überholen kann.

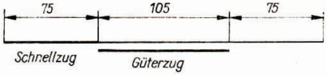

Bild 14

2. Die Lokomotive des Schnellzuges muß die Strecke, die gleich der Länge des Güterzuges ist, und die Strecke, die gleich der Länge des Schnellzuges ist, also 180 m, zusätzlich zurücklegen.

3. Die relative Geschwindigkeit des Schnellzuges bezüglich des Güterzuges beträgt 18 km h^{-1}, d. h., daß er die Strecke von 180 m in $\frac{180}{18000}$ h $= 0{,}01$ h, also in 36 s zurücklegt. (Wir lösen die Aufgabe, indem wir annehmen, der Güterzug stünde und der Schnellzug hätte eine Geschwindigkeit von 18 km h^{-1}.)

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Die gesuchte Zeit kennzeichnen wir mit x; dann gilt entsprechend der Aufgabe und dem oben Gesagten die Gleichung:

$$40000x + 180 = 58000$$
$$18000x = 180$$
$$x = \frac{1}{100}$$

Antwort: Der Überholvorgang dauerte 36 s bzw. $\frac{1}{100}$ h.

c) *Grafische Lösung*

1. Die Geschwindigkeit des Schnellzuges ist $\frac{580}{36}$ m s^{-1} und die des Güterzuges $\frac{400}{36}$ m s^{-1}.

2. Wir entwickeln die Bewegungskennlinien des Schnellzuges und des Güterzuges (Bild 15). L_1 (0; 0) ist der Bewegungszustand der

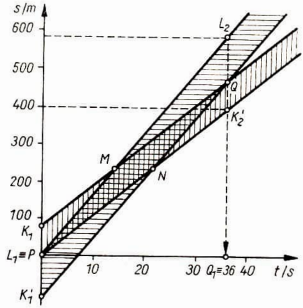

Bild 15

Schnellzuglokomotive und gleichzeitig des Endes des Güterzuges zu Beginn der Bewegung. Das Ende des Schnellzuges hat also zu Beginn des Vorgangs den Bewegungszustand K_1' (0; -105) und die Lokomotive des Güterzuges K_1 (0; 75). Den anderen Bewegungszustand erhalten wir auf Grund der bekannten Geschwindigkeit, z. B. für die Lokomotive des Schnellzuges L_2 (36; 580) und für das Ende des Güterzuges K_2' (36; 400).

3. Das Vorbeifahren der Züge ist durch die gemeinsamen Punkte dieser Kennlinien, also durch das Parallelogramm $PMQN$, gekennzeichnet.

4. Aus dem Diagramm lesen wir heraus: Das Vorbeifahren der beiden Züge dauert $t(\triangleq \overline{PQ_1}) = 36$ s an.

138. Ein Radfahrer, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 18 km h^{-1} fährt, legt eine bestimmte Strecke in einer um 5 min kürzeren Zeit zurück als ein Radfahrer, der mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 12 km h^{-1} fuhr. Wie lang war die Strecke (in km)?

Lösung: Es handelt sich um eine gleichförmige Bewegung der Radfahrer. Die Abhängigkeit zwischen der Zeit und dem Weg ist daher linear, die Kennlinie der linearen Abhängigkeit ist eine Gerade. Wir wählen ein Koordinatensystem (Bild 16), wobei die Abszissenachse die t-Achse (für die Zeit) und die Ordinatenachse die s-Achse (für die Strecke) ist. Entsprechend der Aufgabenstellung wird die Zeit in Minuten und die Strecke in Kilometern gemessen.

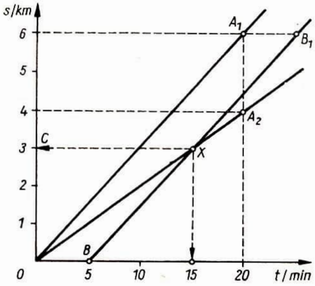

Bild 16

Für $t = 0$ ist die Strecke für beide Radfahrer gleich Null — es handelt sich um den Ursprung des Koordinatensystems O. Wir wählen nun einen beliebigen Zeitzuwachs, z. B. $\Delta t = 20$ min. Die Strecke des ersten Radfahrers für $t = 20$ min beträgt 6 km, die des zweiten beträgt 4 km. Für $\Delta t = 20$ min wird der Bewegungszustand des ersten Radfahrers durch den Punkt A_1 (20; 6), des zweiten durch den Punkt A_2 (20; 4) veranschaulicht. Die Strecke $\overline{OA_1}$ stellt die Kennlinie der Abhängigkeit der Strecke des ersten Radfahrers von der Zeit dar. Die Strecke $\overline{OA_2}$ ist die Kennlinie der Abhängigkeit der Strecke des zweiten Radfahrers von der Zeit für den Zeitzuwachs $\Delta t = 20$ min. Entsprechend der Aufgabe legte der erste Radfahrer die Strecke in einer um 5 min kürzeren Zeit zurück als der zweite, wir ziehen also durch den Punkt B auf der t-Achse, für den die Strecke $\overline{OB}$ der Zeit $t = 5$ min entspricht, die Parallele $\overline{BB_1}$ zu $\overline{OA_1}$. Durch den Punkt X (Schnittpunkt der Strecken $\overline{OA_2}$ und $\overline{BB_1}$) ziehen wir die Parallele zur t-Achse und erhalten auf der s-Achse den Punkt C, wobei der Abschnitt $\overline{OC}$ der Strecke $s = 3$ km entspricht.

Antwort: Die Strecke war 3 km lang.

139. Ein Radfahrer gelangt von der Ortschaft A nach der Ortschaft B in 90 km Entfernung in 6 h, ein Motorradfahrer legt diese Entfernung in 1,5 h zurück. Nach welcher Zeit treffen sie sich, wenn der Radfahrer von der Ortschaft A und der Motorradfahrer von der Ortschaft B gleichzeitig auf dem gleichen Weg einander entgegenfahren? Wieviel Kilometer legt der Radfahrer bis zum Zeitpunkt des Zusammentreffens zurück und wieviel der Motorradfahrer?

Lösung: Wir wählen ein Koordinatensystem (Bild 17) mit den Achsen t und s. Die Zeit wird in Stunden und die Strecke in Kilometern angegeben.
Für den Radfahrer ist der Ausgangsbewegungszustand der Punkt O (0; 0) und für den Motorradfahrer B_1 (0; 90). Der andere bekannte Bewegungszustand ist die Ankunft am Ziel, für den Radfahrer A_1 (6; 90) und für den Motorradfahrer B_2 (1,5; 0). Nach Zeichnen der Kennlinien ermitteln wir den Schnittpunkt X (1,2; 18)

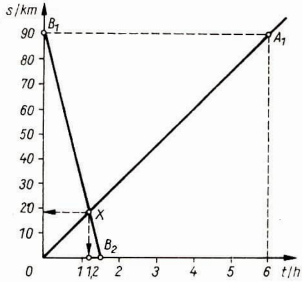

Bild 17

Antwort: Sie treffen sich nach 1 h 12 min, nachdem der Radfahrer 18 km und der Motorradfahrer (90 − 18) km = 72 km zurückgelegt haben.

140. Um 12 Uhr ging ein Fußgänger mit einer Geschwindigkeit von 5 km h^{-1} aus dem Dorf A in Richtung auf das Dorf B zu. Um 15 Uhr fuhr ihm ein Radfahrer mit einer Geschwindigkeit von 11 km h^{-1} nach. Wann und wo holt der Radfahrer den Fußgänger ein?

a) *Grafische Lösung*

1. Wir wählen ein Koordinatensystem (Bild 18), die Abszissenachse ist die t-Achse und die Ordinatenachse die s-Achse.

2. Für den Fußgänger ist der Anfangsbewegungszustand A_1 (12; 0), und der andere Bewegungszustand ist durch den Punkt A_2 (14; 10) gegeben. Die Bewegungskennlinie des Fußgängers ist die Gerade A_1A_2.

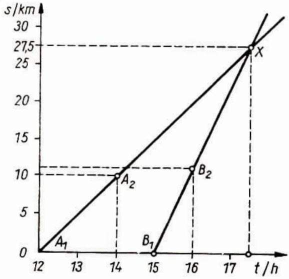

Bild 18

3. Für den Radfahrer ist der Grundbewegungszustand B_1 (15; 0) und der andere B_2 (16; 11). Die Kennlinie seiner Bewegung ist die Gerade B_1B_2.

4. Die Geraden A_1A_2 und B_1B_2 schneiden sich im Punkt X, dessen Koordinaten $t = 17{,}5$, $s = 27{,}5$ sind und die Zeit und den Ort bestimmen, wann und wo der Radfahrer den Fußgänger einholt.

b) *Lösung mit Hilfe einer Gleichung*

Die Zeit, in der der Radfahrer den Fußgänger einholt (gerechnet ab Anfangspunkt des Weges des Fußgängers), kennzeichnen wir mit x Stunden; dann holt der Radfahrer den Fußgänger in $(x - 3)$ h ein. Ihre Strecken müssen gleich groß sein, also

$$5x = 11(x - 3)$$
$$x = 5{,}5$$

Antwort: Der Radfahrer holt den Fußgänger um $(12 + 5{,}5)$ h $= 17$ h 30 min an einer Stelle ein, die 27,5 km vom Dorf A entfernt liegt.

141. Uns ist bekannt, daß a (= 12) Arbeiter eine bestimmte Arbeit in t_1 (= 25) Tagen ausführen können. Nach Verstreichen von t_2 (= 5) Tagen stellte man zur Ausführung der Arbeit zusätzlich eine bestimmte Anzahl von Arbeitern ein, und die Arbeit wurde um t_3 (= 4) Tage vorfristig ausgeführt. Wieviel Arbeiter wurden zusätzlich zur Arbeit eingestellt?

Lösung: Der Arbeitsumfang ist direkt proportional der Anzahl der Arbeiter und der Anzahl der Arbeitstage (unter der Voraussetzung, daß die Leistung jedes Arbeiters gleich groß ist). Die verrichtete Arbeit können wir als Inhalt eines Rechtecks darstellen, in dem eine Seite die Anzahl der Arbeiter und die andere die Anzahl der Arbeitstage zum Ausdruck bringt. Die grafische Darstellung ist ein Flächendiagramm. Wir zeichnen das Rechteck $OABC$ (Bild 19) mit den Seiten $\overline{OA} \triangleq a$ und $\overline{OC} \triangleq t_1$, dessen Inhalt den Umfang der gesamten Arbeit ausdrückt. Da nach Verstreichen von t_2 Tagen $\left(\overline{OD} \triangleq t_2\right)$ eine bestimmte Anzahl von Arbeitern zusätzlich eingestellt wurde, konnte die Arbeit um t_3 Tage vorfristig $\left(\overline{EC} \triangleq t_3\right)$ beendet werden. Dann war es erforderlich, nach Verstreichen von t_2 Tagen eine Arbeit auszuführen, die durch den Inhalt des Rechtecks $DFBC$ in der Zeit $[t_1 - (t_2 + t_3)]$ Tage oder $\overline{DE} = \overline{OC} - \left(\overline{OD} + \overline{EC}\right) \triangleq t_1 - (t_2 + t_3)$ zum Aus-

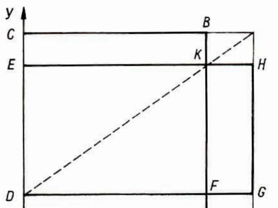

Bild 19

druck gebracht wird. Wenn wir das Rechteck $DFBC$ in ein Rechteck mit gleicher Fläche mit der Höhe $\overline{DE}$ umwandeln, bekommen wir das Rechteck $DGHE$, in dem die Seite $\overline{DG}$ die Gesamtzahl der Arbeiter bestimmt. Die Strecke $\overline{FG}$ bestimmt also die Anzahl der zusätzlich eingestellten Arbeiter. Aus der Eigenschaft der Rechtecke gleicher Fläche $FGHK$ und $EKBC$ folgt

$$\overline{FG} \cdot \overline{GH} = \overline{EK} \cdot \overline{EC}$$

oder

$$\overline{FG}[t_1 - (t_2 + t_3)] = at_3,$$

woraus

$$\overline{FG} = \frac{at_3}{t_1 - (t_2 + t_3)} = \frac{12 \cdot 4}{25 - (5 + 4)} = 3$$

folgt.

Antwort: Es wurden 3 Arbeiter zusätzlich eingestellt.

142. Eine Wanne wird durch die eine Öffnung A in a (= 20) min mit kaltem und durch die andere Öffnung B in b (= 30) min mit heißem Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Zeit, in der die Wanne gefüllt wird, wenn das Wasser durch beide Öffnungen gleichzeitig zuläuft.

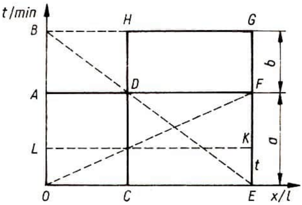

Bild 20

Lösung: Es sei $\overline{OA} \triangleq a$ und $\overline{AB} \triangleq b$ (Bild 20). Auf der x-Achse drückt die Strecke $\overline{OC}$ die kalte Wassermenge aus, d. h. die Anzahl der Liter des in 1 min durch die Öffnung zufließenden Wassers. Der Inhalt des Rechtecks $OADC$ bestimmt den Inhalt der Wanne. Wenn wir das Rechteck $OADC$ in ein Rechteck gleicher Fläche mit der Seite b $(b \triangleq \overline{AB})$ umwandeln, erhalten wir das Rechteck $DFGH$, in dem die Seite $\overline{DF}$ die Menge des durch die entsprechende Öffnung zufließenden warmen Wassers bestimmt. Wenn $\overline{CE} = \overline{DF}$, bestimmt die Strecke $\overline{OE}$ die Summe der Mengen des durch die einzelnen Öffnungen zufließenden Wassers. Wenn wir das Rechteck $OADC$ in das Rechteck gleicher Fläche mit der Seite $\overline{OE}$ umwandeln, erhalten wir das Rechteck $OEKL$, in dem die Seite $\overline{OL}$ die gesuchte Zeit t bestimmt, in der die Wanne gefüllt wird, wenn das Wasser durch beide Öffnungen gleichzeitig zufließt. Aus der Eigenschaft der Rechtecke gleicher Fläche $OEKL$, $OCDA$ und $DFGH$ erhalten wir:

$$t \cdot \overline{OE} = a \cdot \overline{OC} \tag{1}$$

und

$$a \cdot \overline{OC} = b(\overline{OE} - \overline{OC})$$

$$[\text{oder } \overline{DF} = \overline{CE} = \overline{OE} - \overline{OC}]. \tag{2}$$

Wenn wir für $\overline{OC}$ aus (2) den Ausdruck in (1) einsetzen, erhalten wir:

$$t = \frac{ab}{a + b} \quad \text{hier:} \quad \frac{20 \cdot 30}{50} = 12$$

Antwort: Die Wanne füllt sich durch beide Öffnungen gleichzeitig in 12 min.

143. Zuweilen ist die grafische Lösung etwas umständlich, wie folgende Aufgabe zeigt: Für p (= 10200) M kaufte man m (= 150) kg Kaffee zweier Sorten zu a (= 60) M und b (= 80) M das Kilogramm. Wieviel Kilogramm Kaffee jeder Sorte wurden eingekauft?

Lösung: Auf der x-Achse stellt die Strecke $\overline{OA}$ m kg des Gemisches dar, auf der y-Achse stellen die Strecken $\overline{OM} \triangleq b$ und $\overline{AE} \triangleq a$ die Preise für 1 kg der einzelnen Kaffeesorten dar, und die Strecke $\overline{OB}$ bringt den Preis für 1 kg des Gemisches $\left(\overline{OB} \triangleq \frac{p}{m}\right)$ (Bild 21) zum Ausdruck. Der Inhalt des Rechtecks $OADB$ stellt den Preis für m kg des Gemisches dar. Zwecks Ermittlung der Menge an Kilogramm der einzelnen Kaffeesorten wird es erforderlich, das Rechteck $OADB$ in zwei Rechtecke mit den Höhen $\overline{OC}$ ($OGFC$) und $\overline{AL} = \overline{OM}$ ($ALHG$) zu zerlegen, die beide zusammen ein Vieleck bilden, dessen Inhalt dem gegebenen Rechteck gleich ist. Im Recht-

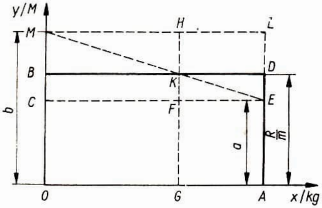

Bild 21

eck $ALHG$ bringen die Seite $\overline{GA}$ und im Rechteck $OGFC$ die Seite $\overline{OG}$ die Menge an Kilogramm der einzelnen Kaffeesorten zum Ausdruck. Bei gegebener Einheitsstrecke können wir die gesuchten Mengen aus dem Schaubild ablesen. Da die Rechtecke $DLHK$ und $CFKB$ gleichen Flächeninhalt besitzen, erhalten wir:

$$\overline{DK}\left(b - \frac{p}{m}\right) = \overline{CF}\left(\frac{p}{m} - a\right)$$

Da

$$\overline{DK} = \overline{AG},\ \overline{CF} = \overline{OG} = m - \overline{AG},$$

dann

$$\overline{AG}\left(b - \frac{p}{m}\right) = \left(m - \overline{AG}\right)\left(\frac{p}{m} - a\right),$$

daraus

$$\overline{AG} = \frac{p - am}{b - a} = \frac{10200 - 60 \cdot 150}{80 - 60} = 60$$

$$\overline{OG} = m - \overline{AG} = \frac{bm - p}{b - a}$$

$$= \frac{80 \cdot 150 - 10200}{80 - 60} = 90$$

Antwort: Es wurden 90 kg Kaffee für 60 M und 60 kg Kaffee für 80 M je kg gekauft.

Analytische Lösung:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 150 \\ ax + by &= 10200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 150 - y$$

$$\begin{aligned} 60x + 80y &= 10200 \\ 60(150 - y) + 80y &= 10200 \\ 9000 - 60y + 80y &= 10200 \\ 20y &= 1200 \\ y &= 60 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

144. Ein mit dem Strom eines Flusses schwimmendes Boot legt die Entfernung zwischen zwei Ortschaften in a (= 4) Tagen zurück. Wenn es gegen den Strom schwimmt, legt es die gleiche Entfernung in b (= 12) Tagen zurück. In welcher Zeit überwindet der Wasserstrom diese Entfernung?

Lösung: Es möge sein $\overline{OA} \triangleq a$, $\overline{OB} \triangleq b$ (Bild 22). Die Strecke $\overline{OC}$ drückt die Ge-

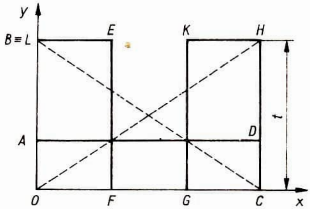

Bild 22

schwindigkeit aus, die gleich der Summe der Geschwindigkeit des Bootes selbst und der Geschwindigkeit der Flußströmung ist. Durch den Inhalt des Rechtecks $OADC$ veranschaulichen wir die Entfernung zwischen den beiden Ortschaften. Wenn wir das Rechteck $OADC$ in ein Rechteck gleicher Fläche mit der Seite $\overline{OB}$ umwandeln, erhalten wir das Rechteck $OBEF$, in dem die Strecke $\overline{OF}$ die Geschwindigkeit zum Ausdruck bringt, die gleich der Differenz zwischen der Geschwindigkeit des Bootes selbst und der Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist. Die Strecke $\overline{FC}$ drückt die doppelte Geschwindigkeit des Flusses aus. Wenn wir im

Punkt G die Strecke $\overline{FC}$ in zwei gleiche Teile unterteilen und das Rechteck $OADC$ in ein Rechteck gleicher Fläche mit der Seite $\overline{GC}$ umwandeln, erhalten wir das Rechteck $GCHK$, in dem die Seite $\overline{GK}$ $(\overline{GK} = \overline{OL})$ die gesuchte Zeit t ausdrückt. Bei gegebener Einheitsstrecke auf der Zeitachse und bei den Werten für a und b können wir die gesuchte Zeit t unmittelbar vom Schaubild ablesen.
Die beschriebene Konstruktion können wir als Hilfsmittel bei der Berechnung verwenden, wobei wir uns auf die Eigenschaft der Gleichflächigkeit stützen können. Da die Rechtecke $OADC$, $OBEF$ und $GCHK$ gleiche Flächeninhalte aufweisen, gilt:

$$t \cdot \overline{GC} = a \cdot \overline{OC} \tag{1}$$

oder

$$a \cdot \overline{OC} = b(\overline{OC} - 2\overline{GC}) \tag{2}$$

Aus (2) berechnen wir das Verhältnis $\frac{\overline{OC}}{\overline{GC}}$ wie folgt:

$$a \cdot \overline{OC} = b \cdot \overline{OC} - 2b \cdot \overline{GC}$$

$$\overline{OC}(b - a) = 2b \cdot \overline{GC}$$

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{GC}} = \frac{2b}{b - a}$$

Den Ausdruck $\frac{2b}{b-a}$ setzen wir in (1) ein und berechnen die Zeit

$$t = a\frac{\overline{OC}}{\overline{GC}} = \frac{2ab}{b - a}, \text{ hier } \frac{2 \cdot 4 \cdot 12}{12 - 4} = 12$$

Antwort: Die Wasserströmung überwindet die Entfernung zwischen den beiden Ortschaften in 12 Tagen.

145. In ein Gefäß, in dem sich a (= 25) kg Wasser mit einer Temperatur von t_1 (= 90 °C) befindet, gießen wir b (= 5) kg Wasser mit einer Temperatur t_2 (= 30 °C) hinzu ($t_2 < t_1$). Welches ist die entstehende Wassertemperatur im Gefäß?

Lösung: Die Wärmemenge Q, die für eine Temperaturänderung um Δt erforderlich wird, berechnen wir aus der Beziehung

$$Q = mc\Delta t,$$

wobei m die Wassermenge und c die spezifische Wärmekapazität darstellen.
Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten m und Δt drückt die entsprechende Wassermenge aus; und den Temperaturanstieg können wir als Wärmemenge interpretieren, die für die Erwärmung der gegebenen Wassermenge erforderlich wird (die spezifische Wärmekapazität des Wassers ist 4,19 kJ/K kg).

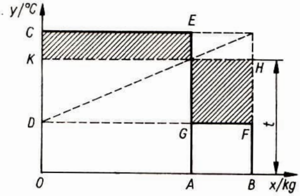

Bild 23

Es seien $\overline{OA} \triangleq a$, $\overline{AB} \triangleq b$, $\overline{OC} \triangleq t_1$ und $\overline{OD} \triangleq t_2$ (Bild 23). Der Inhalt des Rechtecks $OAEC$ bestimmt die Wärmemenge, die für die Erwärmung von a kg Wasser von 0 °C auf t_1 notwendig ist. Der Inhalt des Rechtecks $ABFG$ bestimmt die für die Erwärmung von b kg Wasser von 0 °C auf t_2 erforderliche Wärmemenge. Der Inhalt des Vielecks $OBFGEC$ drückt die dem Gemisch zur Temperaturerhöhung von 0 °C auf die gesuchte Temperatur t zugeführte Wärmemenge aus. Wenn wir das Vieleck in ein gleichflächiges Rechteck mit der Seite $\overline{OB}$ umwandeln, erhalten wir das Rechteck $OBHK$, in dem die Seite $\overline{OK}$ die gesuchte Temperatur t bestimmt. Aus der Gleichheit der Flächen des Rechtecks $OBHK$ und des Vielecks folgt:

$$\overline{OK} \cdot \overline{OB} = \overline{OA} \cdot \overline{OC} + \overline{AB} \cdot \overline{AG}$$

oder

$$t(a + b) = at_1 + bt_2,$$

woraus

$$t = \frac{at_1 + bt_2}{a + b} = \frac{25 \cdot 90 + 5 \cdot 30}{25 + 5} = 80$$

Antwort: Die entstehende Wassertemperatur wird 80 °C sein.

2.5. Übungen (Ergebnisse s. S. 183)

146. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich diese verfünffache und von diesem Produkt 20 subtrahiere, erhalte ich die gleiche Zahl, die ich mir zu Beginn gedacht hatte. Welche Zahl hatte ich mir gedacht?

147. Der Preis einer Ware wurde um $p = 20\%$ gesenkt. Um wieviel Prozent ist der ursprüngliche Preis höher als der gesenkte Preis?

148. Wir kauften uns Aktentaschen aus Leder und aus Kunstleder. Eine Aktentasche aus Leder kostet 70 M und eine aus Kunstleder 20 M. Wenn 8 Aktentaschen 310 M kosteten, wieviel von jeder Sorte Aktentaschen haben wir dann gekauft?

149. Wir sollen ein Gefäß mit 36 l Wasser von 30 °C füllen. Uns steht Wasser mit einer Temperatur von 100 °C und Wasser mit einer Temperatur von 10 °C zur Verfügung. Wieviel Liter heißes und kaltes Wasser müssen wir mischen?

150. Aus zwei Teesorten für einen Preis von 50 M und 70 M je Kilogramm sollen wir 20 kg Gemisch für einen Preis von 55 M je Kilogramm vorbereiten. Wieviel Kilogramm jeder Sorte müssen wir mischen?

151. Welches ist die Länge l eines Drahtes mit einer Querschnittsfläche $A = 0{,}5\ \mathrm{mm}^2$ und einem spezifischen Widerstand $\varrho = 0{,}004\ \Omega\ \mathrm{mm}^2\ \mathrm{m}^{-1}$, wenn sein Widerstand $R = 0{,}8\ \Omega$ ist?

152. Frische Pilze enthalten $p\ (= 90)\%$ Wasser, getrocknete $q\ (= 12)\%$ Wasser. Wieviel frische Pilze müssen wir sammeln, um a $(= 5)$ kg getrocknete Pilze zu gewinnen?

153. Die Summe zweier Zahlen ist 75. Ermitteln Sie diese Zahlen, wenn Sie wissen, daß $\frac{3}{4}$ der ersten Zahl $\frac{1}{7}$ der zweiten Zahl beträgt.

154. Wir sollen einen 95 cm langen Draht zu einem rechten Winkel so biegen, daß der längere Schenkel um 5 cm kürzer ist als die dreifache Länge des kürzeren Schenkels. Berechnen Sie die Länge der Schenkel.

155. Ein Arbeiter führt eine bestimmte Arbeit in 10 Tagen aus, ein anderer erfüllt die gleiche Arbeit in 15 Tagen. In welcher Zeit erfüllen beide Arbeiter diese Arbeit gemeinsam?

156. Der Zentralausschuß des FDGB gab für 36 Mitarbeiter bei einem Ausflug in die Komische Oper Berlin 360 M für den Erwerb von Eintrittskarten ins Theater aus. Der Preis einer Eintrittskarte betrug 9 und 12 M. Wieviel Eintrittskarten welcher Sorte kauften sie, damit jeder der Mitarbeiter eine bekam?

157. Zu einer Versammlung kamen dreimal soviel Männer wie Frauen. Nachdem 8 Männer und 8 Frauen die Versammlung vorzeitig verließen, verblieben auf der Versammlung fünfmal soviel Männer wie Frauen. Wieviel Männer und wieviel Frauen waren zu Beginn auf der Versammlung anwesend?

158. Von zwei 117 km voneinander entfernten Ortschaften fuhren gleichzeitig ein Rad- und Raupenschlepper in entgegengesetzter Richtung (aufeinander zu). Der Radschlepper hatte eine um 11 km h^{-1} höhere Geschwindigkeit als der Raupenschlepper. Mit welcher Geschwindigkeit fuhren sie, wenn sie sich nach 3 h trafen?

159. Es ist ein Bruch gegeben, dessen Nenner um 5 größer ist als der Zähler. Wenn wir sowohl zum Zähler als auch zum Nenner 2 addieren, erhalten wir $\frac{1}{2}$. Welches ist der Bruch?

160. Ein Freiluftbassin, das bis 0,10 m unter dem Rand mit Wasser gefüllt ist und dessen Volumen 10 m³ beträgt, hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 2,40 m. Wie tief ist das Bassin?

161. Eine kreisrunde Scheibe mit einer Dicke h ist aus zwei gleich schweren Sektoren zusammengesetzt, und zwar einer aus Eisen und einer aus Kupfer. Wieviel Grad ist jeder Sektor groß? Für Eisen ist $\varrho_1 = 7{,}85$ g cm^{-3}, für Kupfer $\varrho_2 = 8{,}93$ g cm^{-3}.

162. Ein Zug fuhr von der Ortschaft A nach B in 6 h 30 min. Wenn die Geschwindigkeit des Zuges um 10 km h^{-1} geringer wäre, käme er in B 1 h 18 min zu spät an. Berechnen Sie die Entfernung zwischen den Ortschaften A und B sowie die Geschwindigkeit des Zuges.

163. Einem Brigadier stand laut Arbeitsrechtsverhältnis ein Gehalt von monatlich 600 M zu. Im Verlaufe eines Jahres erhöhte man sein Gehalt auf 750 M monatlich, so daß er für das gesamte Jahr 7950 M bekam. Ab wann erhöhte sich das Gehalt?

164. Zwei Maurer verputzen eine Mauer. Der erste würde sie in 8 Tagen, der zweite in 12 Tagen verputzen. In wieviel Tagen werden sie mit der Arbeit fertig sein, wenn sie gemeinsam arbeiten?

165. Wie groß sind die Innenwinkel eines Dreiecks, wenn einer seiner Winkel die Größe von 60° hat und die Differenz zwischen den übrigen beiden Winkeln 30° beträgt?

166. Ein Freileitungsmast steht mit einem Sechstel seiner Länge in der Erde; das macht 1,2 m aus. Wie lang ist der Mast?

167. Eine Kiste mit Gips wiegt 42 kg. Der Gips wiegt das Sechsfache der Kiste. Wieviel Gips befindet sich in der Kiste?

168. Wieviel Schüler hat eine Berufsschule, wenn in der Klasse der Maurerlehrlinge $\frac{1}{3}$ aller Schüler, in der Klasse der Schlosserlehrlinge $\frac{1}{5}$, in der Klasse der Kraftfahrzeugmechanikerlehrlinge $\frac{2}{9}$ und in der Klasse der Elektromechanikerlehrlinge 33 Schüler sind?

3. Systeme linearer Gleichungen (Textaufgaben)

Die allgemeine Form einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten ist:

$$a_1x + b_1y = c_1, \qquad (1)$$

wobei a_1, b_1 und c_1 Konstanten bzw. Koeffizienten und x, y Unbekannte (Variablen) darstellen.
Eine solche Gleichung lösen heißt solche Wertepaare (x, y) zu finden, daß nach Einsetzen in die Gleichung (1) eine Identität entsteht, oder: Die Wertepaare müssen die gegebene Gleichung „erfüllen"; (z. B. $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ ist eine Lösung der Gleichung $2x + 3y = 8$). Zu jeder Zahl x erhalten wir eine weitere Zahl y, und zwar eine solche, daß beide Zahlen zusammen Lösung der Gleichung (1) sind; d. h., es existiert eine unendlich große Zahl von Wertepaaren als Lösung der gegebenen Gleichung.
Wenn wir der Gleichung (1) eine weitere lineare Gleichung mit den gleichen zwei Unbekannten (Variablen) hinzufügen, und zwar

$$a_2x + b_2y = c_2, \qquad (2)$$

dann erhalten wir ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Suche nach einem solchen Wertepaar[1], das beiden Gleichungen gleichzeitig entspricht, bezeichnen wir als Lösung eines Gleichungssystems. Ein Wurzelpaar des Systems existiert immer dann, wenn

a) die Gleichungen sich einander nicht widersprechen und

b) die Gleichungen auch voneinander unabhängig sind.

Wenn Gleichungen einander widersprechen, existiert keinerlei Wurzelpaar als Lösung.

$$x - y = 2$$

$$x - y = 10$$

stellen z. B. Gleichungen dar, in denen die Differenz zweier Zahlen 2 und 10 ist. Die Gleichungen widersprechen einander, das System hat keine Lösung.
Wenn die eine Gleichung die Multiplikation einer anderen mit einer bestimmten Zahl ist, sprechen wir davon, daß es sich um voneinander linear abhängige Gleichungen handelt. So z. B. sind die Gleichungen

$$2x + 3y = 8$$

$$4x + 6y = 16$$

voneinander abhängig, weil die zweite Gleichung durch Multiplikation mit 2 aus der ersten hervorging. Es handelt sich also um dieselbe Gleichung mit zwei Unbekannten mit unendlich vielen Lösungen (Belegungen[1] von x und y).
Bei der Lösung eines Gleichungssystems sind wir bestrebt, aus den gegebenen Gleichungen eine Gleichung mit einer Unbekannten zu er-

[1] Auch Wurzelpaar genannt. Man nennt die Lösungen von Gleichungen zuweilen auch Wurzeln der Gleichung. Das hat nichts mit dem vom Radizieren her bekannten Wurzelbegriff zu tun.

[1] Die Aussagenlogik nennt Gleichungen Aussageformen. Bei Belegung der Variablen mit (der Lösung entsprechenden) Werten entstehen wahre Aussagen.

halten. Wir können das nach mehreren Verfahren erreichen, von denen folgende am häufigsten angewendet werden:

a) Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode),

b) Additionsverfahren.

Diese Verfahren wollen wir anhand von Beispielen nachstehend erläutern.

Beispiel 1. Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$x + y = 120$$

$$x - y = 20$$

Das Gleichungssystem werden wir nach dem Einsetzungsverfahren lösen. Aus der zweiten Gleichung berechnen wir:

$$x = 20 + y \text{ (Substitution)} \tag{3}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die erste Gleichung ein

$$(20 + y) + y = 120$$

Somit haben wir **eine** Gleichung mit nur **einer** Unbekannten y erhalten, die wir auf gewöhnliche Art lösen

$$20 + 2y = 120$$

$$2y = 120 - 20$$

$$y = 50$$

Dieses y setzen wir nun in die Gl. (3) ein und erhalten:

$$x = 70$$

Das errechnete Lösungspaar $x = 70$ und $y = 50$ erfüllt das gegebene System, wovon wir uns durch eine Probe in beiden Gleichungen überzeugen.
Zunächst ersetzen wir die Unbekannten auf der linken Seite der ersten Gleichung und berechnen ihre Werte:

$$70 + 50 = 120$$

Diesen Wert vergleichen wir mit dem Wert auf der rechten Seite, also

$$120 = 120$$

Die Werte gleichen einander, daher erfüllt das Lösungspaar die Gleichung. Das gleiche machen wir auch noch mit der anderen Gleichung des Systems.

$$70 - 50 = 20$$

$$20 = 20$$

Beispiel 2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x + 3y = 6 \tag{4}$$

$$2x - y = 5 \tag{5}$$

Wir wenden das Additionsverfahren an.[1] Die Gleichungen multiplizieren wir so, daß wir als Koeffizient bei einer Unbekannten in beiden Gleichungen Zahlen erhalten, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Bei der Summation beider Gleichungen erhalten wir eine Gleichung mit einer Unbekannten. Im vorliegenden Fall multiplizieren wir die Gleichung (5) mit 3, wobei wir erhalten:

$$x + 3y = 6$$

$$6x - 3y = 15$$

Nach der Summation beider Gleichungen erhalten wir die Gleichung mit der Unbekannten x, also

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

Nach dem Einsetzen in eine der beiden Gln. (4), (5), z. B. in die (4), errechnen wir $y = 1$.
Die Lösung des durch die beiden Gleichungen (4) und (5) bestimmten Systems ist das Paar $x = 3$, $y = 1$. Führen Sie die Probe selbst durch!
Sofern es um eine Textaufgabe geht, die zu einem Gleichungssystem führt, müssen zunächst aus den Bedingungen der Aufgabe Gleichungen gebildet werden. Danach lösen wir diese nach den vorgenannten Verfahren.
Bei der Lösung eines Systems dreier Gleichungen mit 3 Unbekannten geht man gewöhnlich so vor, daß man das Gleichungs-

[1] Während das Substitutionsverfahren immer zum Ziel führt, lassen sich in einzelnen Fällen Gleichungssysteme nicht nach dem Additionsverfahren bearbeiten, z. B.

$$x + y = 10$$
$$x \cdot y = 21$$

system mit drei Unbekannten auf ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zurückführt. Dazu muß eine Unbekannte aus allen Gleichungen eliminiert werden. Die angeführten Verfahren werden auch hier wieder angewendet. Manchmal verwendet man bei der Lösung auch andere Verfahren und Verfahrensweisen. Auf diese wird bei der Lösung von Textaufgaben für ein System von drei bzw. vier Gleichungen mit drei bzw. vier Unbekannten speziell eingegangen.

3.1. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

169. Durch die Verbrennung von 1 kg guter Kohle kann man 8 kg Dampf erzeugen, durch die Verbrennung von 1 kg Kohle schlechterer Qualität nur 5 kg Dampf. Für 1425 kg Dampf wurden 225 kg Kohle verbraucht. Wieviel Kohle von welcher Qualität wurde verbraucht?

Lösung: Die Kohlemenge der besseren Qualität kennzeichnen wir durch x kg und die der schlechteren Qualität mit y kg. Es wurden 225 kg Kohle verbraucht, also gilt:

$$x + y = 225 \tag{1}$$

Aus x kg guter Kohle entstanden $8x$ kg Dampf und aus y kg Kohle schlechterer Qualität entstanden $5x$ kg Dampf, zusammen entstanden 1425 kg Dampf, also

$$8x + 5y = 1425 \tag{2}$$

Wir verwenden das Einsetzungsverfahren. Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$y = 225 - x \tag{3}$$

Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} 8x + 5(225 - x) &= 1425 \\ 8x - 5x + 1125 &= 1425 \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Aus (3) folgt $y = 125$.

Antwort: Es wurden 100 kg Kohle der besseren Qualität und 125 kg der schlechteren Kohle verbraucht.

Probe: Es wurden 100 kg + 125 kg = 225 kg Kohle verbraucht.

Nach der Aufgabenstellung wurden 8 kg · 100 + 5 kg · 125 = 1425 kg Dampf erzeugt; die errechneten Mengen werden der Textaufgabe gerecht.

170. Durch das Mischen von 6 l der einen Spiritussorte mit 4 l einer anderen Spiritussorte erhalten wir 52%igen Spiritus; durch das Mischen von 4 l der ersten Spiritussorte mit 5 l der anderen Sorte erhalten wir 45%igen Spiritus. Wie hochprozentig ist jede der beiden Spiritussorten?

Lösung: Die erste Spiritussorte kennzeichnen wir als x%ig, die andere als y%ig. In 6 l der ersten Sorte sind

$$6 \cdot \frac{x}{100}\,\mathrm{l}$$

reiner Spiritus, und in 4 l der zweiten Sorte sind

$$4 \cdot \frac{y}{100}\,\mathrm{l}$$

reiner Spiritus enthalten. Wir bekommen 10 l Gemisch, und in diesem sind entsprechend der Aufgabe

$$10 \cdot \frac{52}{100}\,\mathrm{l}$$

reiner Spiritus enthalten, und zwar Spiritus sowohl aus der ersten als auch aus der zweiten Sorte. Es gilt also

$$6 \cdot \frac{x}{100} + 4 \cdot \frac{y}{100} = 10 \cdot \frac{52}{100}$$

Analog erhalten wir aus der zweiten Bedingung der Aufgabe die zweite Gleichung

$$4 \cdot \frac{x}{100} + 5 \cdot \frac{y}{100} = 9 \cdot \frac{45}{100}$$

Beide Gleichungen multiplizieren wir mit 100, um die Brüche zu beseitigen, also

$$6x + 4y = 520 \tag{1}$$

$$4x + 5y = 405 \tag{2}$$

Die Gl. (1) multiplizieren wir mit der Zahl 5 und die Gl. (2) mit der Zahl -4, wobei wir erhalten:

$$\begin{aligned} 30x + 20y &= 2600 \\ -16x - 20y &= -1620 \end{aligned}$$

Nach ihrer Addition erhalten wir:

$14x = 980 \Rightarrow x = 70$

Nach Einsetzen in die Gl. (1) erhalten wir die Gleichung

$4y = 100$

$y = 25$

Antwort: Die erste Spiritussorte ist 70%ig, die zweite 25%ig.

171. In einer Produktionsabteilung arbeiten 100 Arbeiter. Einige von ihnen verdienen 3 M und andere 4 M in der Stunde. Alle gemeinsam verdienen in der Stunde 360 M. Wieviel Arbeiter arbeiten für einen Stundenlohn von 3 M und wieviel für 4 M?

Lösung: Durch den Buchstaben x kennzeichnen wir die Anzahl der Arbeiter mit einem Stundenlohn von 3 M und die übrigen durch y. Insgesamt sind sie 100, also

$x + y = 100$[1]

x Arbeiter der ersten Gruppe verdienen in der Stunde $3x$ M, und y Arbeiter der zweiten Gruppe verdienen in der Stunde $4y$ M, zusammen verdienen sie

$3x + 4y = 360$

Lösen wir nun das Gleichungssystem:

$$x + y = 100$$

$$3x + 4y = 360 \qquad (1)$$

Aus der Gl. (1) folgt $x = 100 - y$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhalten wir eine Gleichung mit einer Unbekannten

$3(100 - y) + 4y = 360$

Daraus ergibt sich

$y = 60$, dann ist $x = 40$

Antwort: 40 Arbeiter bekommen 3 M in der Stunde und 60 Arbeiter 4 M in der Stunde.

172. Ein Arbeiter bekam als Lohn 550 M in 100-M- und 50-M-Banknoten. Insgesamt bekam er 8 Banknoten. Wieviel bekam er von jeder Sorte?

Lösung: Die Anzahl der Hundertmarkscheine kennzeichnen wir mit x und die der Fünfzigmarkscheine mit y. Insgesamt sind 8 Scheine vorhanden, d. h.,

$x + y = 8$

x Hundertmarkscheine sind $100x$ M und y Fünfzigmarkscheine sind $50y$ M, insgesamt sind das 550 M, also

$100x + 50y = 550$

Lösen wir nun das System nach dem Additionsverfahren.

$$x + y = 8 \qquad (1)$$

$$100x + 50y = 550 \qquad (2)$$

Wenn wir die Gl. (1) mit der Zahl (−50) multiplizieren und weiterhin zur Gl. (2) addieren, erhalten wir:

$50x = 150$

und daraus dann $x = 3$. Nach Einsetzen in die Gl. (1) erhalten wir $y = 5$.

Antwort: Der Arbeiter erhielt als Lohn 3 Banknoten zu je 100 M und 5 Banknoten zu je 50 M.

173. Auf der kreisrunden Aschenbahn eines Stadions wetteifern zwei Rennfahrer. Wenn sie in entgegengesetzter Richtung fahren, treffen sie sich alle 10 s. Fahren sie in gleicher Richtung, treffen sie sich alle 170 s. Welche Geschwindigkeit weisen sie auf, wenn die Länge der Kreisbahn 170 m beträgt?

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Radrennfahrers ist x m s^{-1}, die des zweiten Radrennfahrers y m s^{-1}. In 10 s legt der erste eine Strecke von $10x$ m, der zweite von $10y$ m zurück. Wenn beide in entgegengesetzter Richtung fahren, gilt:

$10x + 10y = 170$

Wenn sie in gleicher Richtung fahren, legt der erste in 170 s eine Strecke von $170x$ m, der zweite eine Strecke von $170y$ m zurück. Wenn der erste schneller fährt, dann fährt er von einem Zusammentreffen bis zum zweiten

[1] Zuweilen bezeichnet man diese Gleichung als (quantitative) Mengengleichung, die andere hat qualitativen Charakter.

eine Runde mehr als der zweite, oder

$$170x - 170y = 170$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$x + y = 17$$

$$x - y = 1$$

woraus $x = 9$, $y = 8$.

Antwort: Der erste Radrennfahrer hat eine Geschwindigkeit von $9\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, der zweite von $8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

174. Auf einem Hof waren Hühner und Kaninchen. Insgesamt hatten sie 22 Köpfe und 54 Beine. Wieviel Hühner und wieviel Kaninchen waren es? — [Vier Lösungsvarianten] —

a) Lösung durch Überlegungen

Aus der Aufgabenstellung folgt, daß es insgesamt 22 Tiere waren. Wenn es alles Hühner gewesen wären, dann wären es nur 44 Beine. Die Differenz $54 - 44 = 10$ entfällt auf die übrigen Beine der Kaninchen, von denen $10 : 2 = 5$ existieren. Es waren 5 Kaninchen und 17 Hühner.

b) Lösung mit Hilfe eines Gleichungssystems

Die Anzahl der Hühner kennzeichnen wir mit x und die Anzahl der Kaninchen mit y. Zusammen waren sie 22, oder

$$x + y = 22$$

Die Hühner hatten insgesamt $2x$ und die Kaninchen $4y$ Beine, oder

$$2x + 4y = 54$$

Durch die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x + y &= 22 \\ 2x + 4y &= 54 \end{aligned}$$

erhalten wir $x = 17$, $y = 5$.

Antwort: Auf dem Hof waren 17 Hühner und 5 Kaninchen.

c) Lösung mit Hilfe einer Gleichung mit einer Unbekannten

Kaninchen sind x, Hühner $(22 - x)$ vorhanden. Die Kaninchen haben $4x$ Beine, die Hühner $2(22 - x)$ Beine. Zusammen haben sie 54 Beine, woraus die Gleichung resultiert:

$$\begin{aligned} 4x + 2(22 - x) &= 54 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Antwort: Es waren 5 Kaninchen und $(22 - x) = 17$ Hühner.

d) Weiteres Lösungsverfahren (Bild 24)

Durch Kreise veranschaulichen wir die Köpfe der Hühner und Kaninchen; die Beine illustrieren wir durch Striche. Wir zeichnen zunächst zu jedem Kopf 2 Beine hinzu, wonach uns jedoch noch 10 Beine übrigbleiben, die wir in Zweierpaaren zu jedem Kopf hinzufügen. Dabei erhalten wir fünf Köpfe mit vier Beinen. Soviel Kaninchen sind es gerade, der Rest sind Hühner.

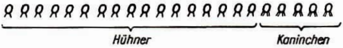

Bild 24

175. Ein Flugzeug durchfliegt in drei Stunden mit Wind eine Strecke von 1134 km Länge. Gegen den Wind und bei gleicher Eigengeschwindigkeit legt das Flugzeug in einer Stunde 342 km zurück. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Flugzeuges und wie groß die des Windes?

Lösung: Wenn das Flugzeug mit Wind fliegt, geht es um eine Addition der Geschwindigkeiten, und wenn es gegen den Wind fliegt, werden die Geschwindigkeiten voneinander subtrahiert. Möge $x\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ die Geschwindigkeit des Flugzeuges und $y\ \mathrm{km\ h^{-1}}$ die Geschwindigkeit des Windes sein. Aus der ersten Bedingung der Aufgabe ergibt sich die Gleichung:

$$3x + 3y = 1134 \tag{1}$$

und aus der zweiten Bedingung der Aufgabenstellung folgt die Gleichung:

$$x - y = 342 \tag{2}$$

Wir wollen die Gln. (1) und (2) lösen:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 1134 \\ x - y &= 342 \quad | \cdot 3 \\ \hline 3x + 3y &= 1134 \\ 3x - 3y &= 1026 \\ \hline 6x &= 2160 \\ x &= 360 \end{aligned}$$

dann ist $y = 18$.

Antwort: Die Geschwindigkeit des Flugzeuges beträgt 360 km h^{-1}, und die Windgeschwindigkeit ist 18 km h^{-1}.

176. Ein Dampfer legt stromaufwärts in 4 h eine Strecke von 48 km zurück, stromabwärts aber die gleiche Strecke in 3 h. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Dampfers und wie hoch die Strömungsgeschwindigkeit?

Lösung: Es handelt sich um eine Aufgabe der Überlagerung von Bewegungen. Die Geschwindigkeit des Dampfers bezeichnen wir mit x km h^{-1} und die Strömungsgeschwindigkeit mit y km h^{-1}. Wenn der Dampfer stromaufwärts fährt, wird er durch die Strömung des Wassers abgebremst, also

$$4x - 4y = 48$$

Wenn er stromabwärts fährt, geht es um eine Überlagerung der Bewegungen durch Addition, also

$$3x + 3y = 48$$

Wir lösen das System:

$$\begin{array}{rl} 4x - 4y = 48 & | \cdot 3 \\ 3x + 3y = 48 & | \cdot 4 \\ \hline 12x - 12y = 144 & \times \\ 12x + 12y = 192 & \\ \hline 24x = 336 & \\ x = 14 & \end{array}$$

Es ergibt sich $y = 2$; $x = 14$.

Antwort: Die Geschwindigkeit des Dampfers ist 14 km h^{-1} und die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers 2 km h^{-1}.

177. Wieviel 20%ige und 45%ige Schwefelsäure (H_2SO_4) müssen wir mischen, um 250 ml 35%ige Schwefelsäure zu gewinnen?

Lösung: Wenn x ml 20%ige und y ml 45%ige Schwefelsäure vorhanden sind, dann gilt die Gleichung:

$$x + y = 250 \qquad (1)$$

In x ml 20%iger H_2SO_4 sind $\frac{x}{100} \cdot 20$ ml reine H_2SO_4 und in y ml 45%iger H_2SO_4 $\frac{y}{100} \cdot 45$ ml reine H_2SO_4 enthalten. In 250 ml 35%iger H_2SO_4 sind $\frac{35}{100} \cdot 250$ reine H_2SO_4 enthalten. Daher gilt:

$$\frac{20}{100}x + \frac{45}{100}y = \frac{35}{100} \cdot 250 \qquad (2)$$

Nach der Umformung von (2) zusammen mit (1) erhalten wir

$$x + y = 250$$
$$20x + 45y = 35 \cdot 250$$
$$x = 100, \quad y = 150$$

Antwort: Wir müssen 100 ml 20%ige und 150 ml 45%ige H_2SO_4 mischen.

178. Wenn anstelle von Buchenholz mit einer zulässigen Belastung von 1000 N cm^{-2} Fichtenholz mit einer zulässigen Belastung von 850 N cm^{-2} verwendet wird und wenn der Querschnitt um 20% vergrößert wird, kann der Querschnitt mit 2000 N mehr belastet werden. Wie groß war der Querschnitt des Buchenholzes, und wie hoch war seine Belastung?

Lösung: Den Querschnitt des Buchenholzes kennzeichnen wir mit A cm^2 und den des Fichtenholzes mit A_1 cm^2. Zwischen beiden besteht nachstehende Gleichung:

$$A + \frac{1}{5}A = A_1 \qquad \left(\frac{1}{5}A \triangleq 20\% \text{ von } A\right)$$

Zwischen den Belastungen besteht folgende Beziehung:

$$A_1 \cdot 850 = A \cdot 1000 + 2000$$

Als Lösung des Systems

$$\frac{6}{5}A = A_1$$
$$850\,A_1 - 1000\,A = 2000$$

erhalten wir $A = 100$ cm^2; die ursprüngliche Belastung ist also 100000 N.

Antwort: Der Querschnitt des Buchenholzes betrug 100 cm^2, und die ursprüngliche Belastung war 100 kN.

179. Wenn sich die Spannung einer Spannungsquelle um 50 V und der Widerstand um 20 Ω verringern, fließt durch den Stromkreis ein Strom mit einer Stärke von 5 A. Wenn sich die Spannung um 20 V und der Widerstand um 60 Ω erhöhen, sinkt die Stromstärke auf 2 A. Wie hoch war die ursprüngliche Spannung, und wie groß war der ursprüngliche Widerstand? (Es gilt $U = RI$, Ohmsches Gesetz)

Lösung: Die ursprüngliche Spannung bezeichnen wir mit U, den ursprünglichen Widerstand mit R. Die Spannung wird um 50 V verringert, wird also $U - 50$ V betragen; der Widerstand wird also $R - 20\,\Omega$, die Stromstärke beträgt 5 A. Durch Einsetzen in die Beziehung $IR = U$ erhalten wir:

$$5(R - 20) = U - 50$$

Analog erhalten wir die Gleichung

$$2(R + 60) = U + 20$$

Wir lösen das System:

$$\begin{array}{rcl} 5(R-20) &=& U-50 \\ 2(R+60) &=& U+20 \\ \hline 5R-100 &=& U-50 \\ 2R+120 &=& U+20 \\ \hline 5R-U &=& 50 \qquad (1)\\ 2R-U &=& -100 \qquad (2)\\ \hline 3R &=& 150 \end{array}$$

[(2) subtrahieren wir von (1)]

$R = 50$,

dann ist

$U = 200$

Antwort: Die ursprüngliche Spannung betrug 200 V und der ursprüngliche Widerstand 50 Ω.

180. Wenn wir die eine Seite eines Rechtecks um 4 cm und die andere um 1 cm verlängern, vergrößert sich der Inhalt um 32 cm². Wenn wir die erste Seite um 2 cm verkürzen und die zweite um 3 cm, verringert sich der Inhalt um 28 cm². Berechnen Sie die Seiten des Rechtecks.

Lösung: Die Länge der ersten Seite des Rechtecks bezeichnen wir mit x, die der zweiten mit y; der Inhalt des Rechtecks ist dann xy. Aus beiden Bedingungen folgt:

$$(x + 4)(y + 1) = xy + 32$$
$$(x - 2)(y - 3) = xy - 28$$

Nach der Umformung ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 28 \\ 3x + 2y = 34 \end{array}\right. \Rightarrow x = 8;\ y = 5$$

Antwort: Die Seiten des Rechtecks sind 8 cm und 5 cm lang.

181. Für die Imprägnierung von Kordgewebe wird Latex-Imprägnierungslösung mit 10% Trockensubstanz verwendet. Laut Produktionsvorschrift entfallen auf 80 kg Lösung eine bestimmte Menge Material mit 35% Trockensubstanz, 3 kg feste Zusatzstoffe und als Verdünnungsmittel destilliertes Wasser. Wieviel Material und destilliertes Wasser braucht man für die Zubereitung der Lösung?

Lösung: In 80 kg Lösung sind x kg Material, y kg destilliertes Wasser und 3 kg feste Zusatzstoffe. Es gilt daher die Gleichung

$$x + y + 3 = 80$$
$$x + y = 77 \qquad (1)$$

In 80 kg Lösung sind $\frac{80}{100} \cdot 10$ kg Trockensubstanz. In x kg Material sind $\frac{x}{100} \cdot 35$ kg Trockensubstanz enthalten. Zu dieser Trokkensubstanz muß man 3 kg feste Zusatzstoffe hinzurechnen. Somit erhalten wir also die zweite Gleichung

$$\frac{80}{100} \cdot 10 = \frac{x}{100} \cdot 35 + 3 \qquad (2)$$

Die Lösung der Gln. (1) und (2) führt auf $x = 14\frac{2}{7}$, $y = 62\frac{5}{7}$.

Antwort: Die Latex-Imprägnierungslösung enthält $14\frac{2}{7}$ kg Material und $62\frac{5}{7}$ kg destilliertes Wasser.

182. Zwei Betriebsteile eines bestimmten Betriebes erzeugten täglich zusammen 25 Einzelteile. Um zusammen 300 Einzelteile fertigen zu können, arbeitete der eine Betriebsteil 10 Tage und der andere 15 Tage. Wieviel Einzelteile fertigte jeder Betriebsteil täglich?

Lösung: Die Menge der im ersten Betriebsteil an einem Tag gefertigten Einzelteile bezeichnen wir mit x, die der im zweiten Betriebsteil an einem Tag gefertigten Einzelteile mit y. An einem Tag produzieren sie also zusammen:

$$x + y = 25.$$

In 10 Tagen werden im ersten Betriebsteil $10x$ Einzelteile und im zweiten in 15 Tagen $15y$ Einzelteile gefertigt, zusammen fertigen sie 300, d. h.,

$$10x + 15y = 300$$

Als Lösung des Systems

$$x + y = 25$$
$$10x + 15y = 300$$

erhalten wir

$$x = 15, \; y = 10.$$

Antwort: Im ersten Betriebsteil erzeugt man an einem Tag 10 Einzelteile und im zweiten 15 Einzelteile.

183. In einem Geschäft mischte man eine bestimmte Kaffeemenge für 35 M/kg mit einer anderen Kaffeesorte für 50 M/kg, wobei man 150 kg Kaffeegemisch für 45 M/kg erhielt. Wieviel Kilogramm Kaffee jeder Sorte befinden sich im gegebenen Gemisch?

Lösung: Die Kaffeemenge der ersten Sorte kennzeichnen wir mit x kg, die Kaffeemenge der zweiten Sorte mit y kg. Zusammen waren von beiden Sorten $x + y = 150$. x kg Kaffee der ersten Sorte kosteten $35x$, und y kg Kaffee der zweiten Sorte kosteten $50y$; zusammen kosteten beide Sorten $150 \cdot 45$ M, also

$$35x + 50y = 6750$$

Als Lösung des Gleichungssystems

$$x + y = 150$$
$$35x + 50y = 6750$$

erhalten wir $x = 50$, $y = 100$.

Antwort: Im Gemisch waren 50 kg Kaffee der ersten Sorte und 100 kg Kaffee der zweiten Sorte enthalten.

184. Zwei Sorten Alkohol, die eine 84%ig und die andere 70%ig, ergeben 14 l 79%igen gemischten Alkohol. Wieviel Liter der einzelnen Sorten sind im Gemisch enthalten?

Lösung: Von der ersten Sorte sind x l und von der zweiten Sorte y l enthalten. Es gilt also die Gleichung:

$$x + y = 14 \tag{1}$$

In x l der ersten Sorte sind $\frac{x}{100} \cdot 84$ l reiner Alkohol und in y l der zweiten Sorte $\frac{y}{100} \cdot 70$ l reiner Alkohol enthalten. In 14 l Gemisch sind $\frac{14}{100} \cdot 79$ l reiner Alkohol[1] enthalten. Das Volumen des reinen Alkohols vor dem Mischen ist gleich dem nach dem Mischen; es gilt also die Gleichung

$$\frac{x}{100} \cdot 84 + \frac{y}{100} \cdot 70 = \frac{14}{100} \cdot 79$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$6x + 5y = 79 \tag{2}$$

Die Lösung des Gleichungssystems aus (1) und (2) ist $x = 9$, $y = 5$.

Antwort: Im Gemisch waren 9 l 84%iger und 5 l 70%iger Alkohol enthalten.

185. Wenn die auf die Masse m wirkende Kraft $F = ma$ um 12 N auf 84 N vergrößert wird, erhöht sich die Beschleunigung um 2 m s^{-2}. Wie groß ist die Masse m? Wie groß war die ursprüngliche Beschleunigung a?

Lösung: Es gilt die Gleichung

$$F = ma \tag{1}$$

Aus dem Text der Aufgabe folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} F + 12 &= 84 \\ a + 2 &= \frac{84}{m} \end{aligned} \tag{2}$$

Nach Einsetzen von (1) in (2) und nach Umformung erhalten wir:

$$ma + 12 = 84 \tag{3}$$
$$ma + 2m = 84 \tag{4}$$

Durch einen Vergleich der Gleichungen (3) und (4) ist $m = 6$, dann $a = 12$.

Antwort: Die Masse ist 6 kg und die Beschleunigung beträgt 12 m s^{-2}.

186. Die Masse einer Messingplatte, die in Luft 41 kg beträgt, wird in Wasser zu 36 kg ermittelt.

[1] gemeint ist 100%iger Alkohol (Vol.-%)

Wieviel Kupfer ($\varrho_{Cu} = 8{,}92\ kg/dm^3$) und wieviel Zink ($\varrho_{Zn} = 7{,}12\ kg/dm^3$) sind in der Platte enthalten? Berechnen Sie auch ihre Volumen.

Lösung: Die Differenz zwischen dem Gewicht der Platte in der Luft und im Wasser ist gleich dem Gewicht des verdrängten Wassers. Das bedeutet, daß das Volumen der Platte 5 dm³ ist, da auch das Volumen des verdrängten Wassers 5 dm³ beträgt.
Das Volumen des Kupfers kennzeichnen wir mit x und das Volumen des Zinks mit y. Die Masse des Kupfers ist $8{,}92x$, die Masse des Zinks ist $7{,}12\,y$. Entsprechend der Aufgabenstellung sind die Gleichungen für das Volumen und die Masse zu finden:

$$x + y = 5 \tag{1}$$

$$8{,}92x + 7{,}12y = 41 \tag{2}$$

Aus der Gl. (1) ist $x = 5 - y$, nach Einsetzen in die Gl. (2) erhalten wir:

$$8{,}92(5 - y) + 7{,}12y = 41\,,$$

woraus folgt:

$$y = 2,\ x = 3$$

Antwort: In der Platte sind 26,76 kg Kupfer und 14,24 kg Zink enthalten. Ihre Volumen sind 3 dm³ Kupfer und 2 dm³ Zink.

187. Die Kräfte F_1 und F_2 greifen in dem gleichen Punkt an. Wenn sie in gleicher Richtung wirken, ist ihre Resultierende $F = F_1 + F_2 = 2640$ N. Wirken sie einander entgegengesetzt, ist ihre Resultierende 240 N. Wie groß sind die einzelnen Kräfte?

Lösung: Entsprechend der Aufgabenstellung gilt:

$$F_1 + F_2 = 2640\ \mathrm{N}$$

Wenn die Kräfte im Gegensinn wirken, ist ihre Resultierende gleich der Differenz der Kräfte F_1 und F_2, also

$$F_1 - F_2 = 240\ \mathrm{N}$$

Durch die Lösung des Systems

$$F_1 + F_2 = 2640\ \mathrm{N}$$
$$F_1 - F_2 = \ \ 240\ \mathrm{N}$$

erhalten wir:

$$F_1 = 1440\ \mathrm{N},\ F_2 = 1200\ \mathrm{N}$$

Antwort: Die Kraft F_1 ist 1440 N, die Kraft F_2 beträgt 1200 N.

188. Wenn die Bauleitung 11 Arbeiter von der Baustelle M auf die Baustelle N umdisponiert, ist auf beiden Baustellen die gleiche Anzahl von Arbeitern vorhanden. Wenn sie jedoch 11 Arbeiter von der Baustelle N auf die Baustelle M umdisponiert, dann sind auf der Baustelle M doppelt soviel Arbeiter wie auf der Baustelle N. Wieviel Arbeiter waren auf der Baustelle M und wieviel auf der Baustelle N?

Lösung: Auf der Baustelle M sind x Arbeiter, auf der Baustelle N y Arbeiter. Nach dem Abgang der 11 Arbeiter von der Baustelle M verbleiben $(x - 11)$ Arbeiter, und auf der Baustelle N sind es jetzt $(y + 11)$ Arbeiter, wodurch ihre Anzahl gleich groß ist; es gilt also die Gleichung

$$x - 11 = y + 11$$

Nach dem Weggang der 11 Arbeiter von der Baustelle N auf die Baustelle M ist folgender Stand zu verzeichnen: Auf der Baustelle M sind $(x + 11)$ Arbeiter, und auf der Baustelle N sind $(y - 11)$ Arbeiter. Entsprechend der Aufgabenstellung ist die Anzahl $(x + 11)$ doppelt so groß wie die Anzahl der Arbeiter auf der Baustelle N, also

$$x + 11 = 2(y - 11)$$

Wir haben folgendes Gleichungssystem erhalten:

$$\begin{aligned} x - 11 &= y + 11 \\ x + 11 &= 2(y - 11) \\ \hline x - y &= 22 \\ x - 2y &= -33 \end{aligned}$$

Es hat die Lösung $x = 77$ und $y = 55$. (Machen Sie die Probe!)

Antwort: Auf der Baustelle M waren 77 Arbeiter, und auf der Baustelle N waren 55 Arbeiter.

189. Im Rahmen des innerbetrieblichen Wettbewerbs verpflichtete sich die Brigade „Thälmann“, 600 Ziegelsteine mehr als die Jugendbrigade „Coppi“ zu vermauern. Die Brigade

„Thälmann" erfüllte ihre Verpflichtung mit 102%, vermauerte aber nur 132 Ziegelsteine mehr als die Jugendbrigade „Coppi", weil diese ihre Verpflichtung um 10% übererfüllte. Wie hoch war die Verpflichtung der Brigade „Thälmann" und die der Jugendbrigade?

Lösung: Die Verpflichtung der Brigade „Thälmann" betrifft x Ziegelsteine, die der Jugendbrigade y Ziegelsteine. Die Erfüllung der Verpflichtung mit 102% bedeutet das Vermauern von $\frac{102}{100}x$ Ziegelsteinen, die Erfüllung der Verpflichtung mit 110% bedeutet das Vermauern von $\frac{110}{100}y$ Ziegelsteinen. Nach der Aufgabe ist x um 600 größer als y; das bedeutet, daß $x = y + 600$; $\frac{102}{100}x$ ist um 132 größer als $\frac{110}{100}y$, was bedeutet, daß

$$\frac{102}{100}x = \frac{110}{100}y + 132$$

Wir erhalten folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{array}{r} x - y = 600 \\ \frac{102}{100}x - \frac{110}{100}y = 132 \\ \hline x - y = 600 \\ 102x - 110y = 13\,200 \end{array}$$

Die Lösung ist: $x = 6600$, $y = 6000$.

Antwort: Die Brigade „Thälmann" verpflichtete sich, 6600 und die Brigade „Coppi" 6000 Ziegelsteine zu vermauern.

190. Wieviel Wasser muß einer 82,5%igen Kaprolaktam-Wasserlösung zugegeben werden, wenn 1650 kg 80%ige Kaprolaktamlösung entstehen sollen?

Lösung: Die 82,5%ige Lösung besitzt eine Masse von x kg und Wasser y kg. Es gilt also die Gleichung

$$x + y = 1650 \qquad (1)$$

In 1650 kg 80%iger Lösung sind $\frac{1650}{100} \cdot 80$ kg Kaprolaktam enthalten. Die Masse des Kaprolaktams ändert sich durch das Verdünnen nicht, es gilt demnach die Gleichung

$$\frac{x}{100} \cdot 82{,}5 = \frac{1650}{100} \cdot 80 \qquad (2)$$

Aus den Gln. (1) und (2) folgt: $x = 1600$, $y = 50$.

Antwort: Einer 82,5%igen Kaprolaktamlösung werden 50 kg Wasser zugegeben.

191. Einige Freunde in der befreundeten ČSSR entschlossen sich, ein Motorboot zu kaufen. Wenn jeder von ihnen 700 Kčs beisteuert, fehlen ihnen 300 Kčs. Steuert jeder je 800 Kčs bei, haben sie 400 Kčs übrig. Wieviel Freunde waren es, und wieviel kostete das Motorboot?

Lösung: Die Anzahl der Freunde ist x. Der Preis des Motorbootes ist y Kčs. Daher gilt:

$$\begin{array}{l} y - 700x = 300 \\ 800x - y = 400 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 5200 \end{array}$$

Antwort: Es waren 7 Freunde, und das Motorboot kostete 5200 Kčs.

192. Zwei Sorten von Äscher[1], 96%iger und 61%iger, bilden 250 kg 75%igen Äscher. Wie groß ist die Menge des 96%igen und die des 61%igen Äschers?

Lösung: 96%iger Äscher hat eine Masse von x kg und 61%iger eine von y kg. Entsprechend dieser Bezeichnung gelten die Gleichungen:

$$x + y = 250 \qquad (1)$$

$$\frac{x}{100} \cdot 96 + \frac{y}{100} \cdot 61 = \frac{250}{100} \cdot 75 \qquad (2)$$

Die Lösung der Gln. (1) und (2) ist: $x = 100$, $y = 150$.

Antwort: Das Gemisch enthält 100 kg 96%igen und 150 kg 61%igen Äscher.

193. 1 t hydraulischer Kalk ist 5 M teurer als 1 t gewöhnlicher Stückkalk. 1 t Stückkalk, 2 t hydraulischer Kalk und 1 t gelöschter Kalk kosten 305 M.
2 t Stückkalk und 3 t gelöschter Kalk kosten

[1] Äscher: Aschen- oder Kalklauge, auch Bezeichnung für das entsprechende Gefäß

395 M. Wieviel kosten die einzelnen Kalksorten?

Lösung: Der Preis für 1 t Stückkalk wird mit x bezeichnet, dann ist der Preis für 1 t hydraulischen Kalks $(x + 5)$. Den Preis für 1 t gelöschten Kalks bezeichnen wir mit y, dann können wir entsprechend der Aufgabe folgende Gleichungen aufschreiben:

$$x + 2(x + 5) + y = 305$$
$$2x + 3y = 395$$

Als Lösung erhalten wir: $x = 70$, $y = 85$.

Antwort: 1 t Stückkalk kostet 70 M, 1 t hydraulischer Kalk 75 M und 1 t gelöschter Kalk 85 M.

194. Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder ist $i = 5$. Berechnen Sie die Durchmesser der Teilkreise der Zahnräder, wenn der Abstand der Wellenachsen $a = 150$ mm beträgt. (Das Übersetzungsverhältnis ist $i = \frac{d_2}{d_1}$, wobei d_1 der Durchmesser des Antriebsrades und d_2 der des angetriebenen Rades bedeutet).

Lösung: In unserem Beispiel gilt

$$\frac{d_2}{d_1} = 5$$

Die Summe der Radien der in Betracht gezogenen Kreise muß gleich 150 mm sein, weil beide Räder sich berühren. Somit erhalten wir die zweite Gleichung

$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = 150$$

Als Lösung des Systems

$$\frac{d_2}{d_1} = 5$$
$$\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = 150$$
$$\overline{\quad d_2 = 5d_1 \quad}$$
$$d_1 + d_2 = 300$$

erhalten wir $d_1 = 50$ und $d_2 = 250$.

Antwort: Die Durchmesser der Kreise der Zahnräder sind 50 mm und 250 mm.

195. Ein Junge sagt: „Ich habe genau soviel Brüder wie Schwestern." Seine Schwester entgegnete: „Ich habe dreimal soviel Brüder wie Schwestern." Um wieviel Jungen und Mädchen handelt es sich?

Lösung: Die Anzahl der Jungen bezeichnen wir mit x und die der Mädchen mit y. Aus der Aussage des Jungen folgt:
$y = x - 1$ (außer ihm sind $x - 1$ Jungen vorhanden).
Aus der Aussage der Schwester resultiert:
$x = 3(y - 1)$ (außer ihr sind $y - 1$ Mädchen da).
Die Lösung des Systems

$$y = x - 1$$
$$x = 3(y - 1)$$

ist $x = 3$, $y + 2$.

Antwort: Es handelt sich um drei Jungen und zwei Mädchen.

196. Zwei Freunde hatten zusammen $\frac{2}{9}$ Rubel Schulden. Jeder der beiden besaß zwar Geld, jedoch nicht so viel, daß er diese gemeinsamen Schulden allein hätte begleichen können. Deshalb sagte der erste zum zweiten: „Gib mir zwei Drittel deines Geldes, und ich bezahle sofort die Schulden." Der andere entgegnete: „Wenn du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes gibst, werde ich die gesamten Schulden bezahlen können." Wieviel Geld besaß jeder der Freunde? [Aus dem Lehrbuch für Algebra des Schweizer Mathematikers Leonhard Euler (1707 bis 1783).]

Lösung: Mit dem Buchstaben x kennzeichnen wir die Geldmenge des ersten Freundes, durch den Buchstaben y die Geldmenge des zweiten Freundes. Es gelten dann folgende Gleichungen:

$$x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{9}$$
$$\frac{3}{4}x + y = \frac{2}{9}$$

Nach der Umformung ist:

$$9x + 6y = 2$$
$$27x + 36y = 8$$

Als Lösung erhalten wir $x = \frac{4}{27}$ und $y = \frac{1}{9}$.

Antwort: Der erste Freund hatte $\frac{4}{27}$ Rubel und der zweite $\frac{1}{9}$ Rubel.

197. Zerlegen Sie die Zahl 135 so in zwei Summanden, daß ein Summand um 30 größer ist als $\frac{2}{5}$ des zweiten Summanden.

Lösung: Den ersten Summanden bezeichnen wir mit x und den zweiten mit y. Die Summe ist 135, also

$$x + y = 135$$

Die Zahl x ist um 30 größer als $\frac{2}{5}\,y$, d. h.,

$$x = \frac{2}{5}\,y + 30$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y &= 135 \\ x &= \frac{2}{5}\,y + 30 \end{aligned}$$

ergibt, daß die Zahlen $x = 60$ und $y = 75$ heißen.

Antwort: Die gesuchten Zahlen sind 60 und 75.

198. Die Prämien zweier Arbeiter betrugen zusammen für ein Jahr 672 M. Die Prämie des einen von ihnen für 9 Monate war so hoch wie die des anderen für das ganze Jahr. Wie hoch waren die Prämien eines jeden von ihnen?

Lösung: Die Prämie des ersten Arbeiters bezeichnen wir mit x und die des zweiten mit y. Ihre Summe ist 672, d. h.,

$$x + y = 672$$

x ist größer als y, und es gilt zwischen ihnen die Beziehung

$$\frac{9}{12}\,x = y$$

Als Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x + y &= 672 \\ y &= \frac{9}{12}\,x \end{aligned}$$

erhalten wir $x = 384$ und $y = 288$.

Antwort: Der erste Arbeiter erhielt 384 M und der zweite 288 M Prämie.

199. Auf einer Länge von 172 m verlegte man eine Wasserleitung. Dazu verwendete man 23 Wasserleitungsrohre, die Längen von 470 cm und 825 cm aufwiesen. Wieviel Rohre welcher Sorte verwendete man?

Lösung: Es sei x die Anzahl der Rohre mit einer Länge von 470 cm und y die Anzahl der Rohre mit einer Länge von 825 cm. Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 23 \\ 470x + 825y &= 17\,200 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 5, \\ y &= 18 \end{aligned}$$

Antwort: Man verwendete 5 Rohre mit einer Länge von 470 cm und 18 Rohre mit einer Länge von 825 cm.

200. Bei der Division der Zahl p durch die Zahl q erhalten wir den Quotienten 4 und den Rest 30. Wenn wir den Dividenden, den Divisor, den Quotienten und den Rest summieren, erhalten wir die Zahl 574. Ermitteln Sie Dividenden und Divisor.

Lösung: Nach der Aufgabenstellung gilt:

$$p = 4q + 30 \qquad (1)$$

$$p + q + 4 + 30 = 574 \qquad (2)$$

Wir haben ein System zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten p und q. Wenn wir p aus der Gl. (1) in die Gl. (2) einsetzen, dann gilt:

$$\begin{aligned} 5q &= 510 \\ q &= 102 \end{aligned}$$

Die Lösung des gegebenen Systems ist $p = 438$ und $q = 102$.

Antwort: Der Dividend ist 438 und der Divisor 102.

201. Auf einer Delegiertenversammlung, auf der 360 Delegierte abstimmten, gab es 104 einen bestimmten Vorschlag bestätigende Stimmen mehr als Gegenstimmen. Wieviel Stimmen gab es für den Vorschlag, und wieviel Gegenstimmen waren zu verzeichnen?

Lösung: Möge die Anzahl der Stimmen für den Vorschlag x, die der Gegenstimmen y sein, dann ist also

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 360 \\ x - y &= 104 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 232,\ y = 128$$

Antwort: Für den Vorschlag stimmten 232 Delegierte und gegen den Vorschlag 128 Delegierte.

202. An den Enden eines zweiarmigen Hebels (Bild 25) greifen die zwei Kräfte $F_1 = 120$ N und $F_2 = 210$ N senkrecht zur Hebelstange an. Berechnen Sie die Längen der Hebelarme, wenn die Hebelstange eine Länge von 88 cm hat.

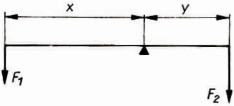

Bild 25

Lösung: Wir wollen die Längen der Hebelarme mit x und y bezeichnen. Dann erhalten wir:

$$x + y = 88 \tag{1}$$

Entsprechend dem Gleichgewichtsgesetz am Hebel gilt:

$$F_1 \cdot x = F_2 \cdot y \tag{2}$$

Nach Einsetzen und Umformen erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 88 \\ 120x - 210y &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 88 \\ 4x - 7y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 56,\ y = 32$$

Antwort: Die Längen der Hebelarme sind 56 cm und 32 cm.

203. Stefan sagt zu Jan: „Wenn ich Dir 1 Kčs gebe, dann werden wir beide die gleiche Geldsumme haben; gibst Du mir jedoch 2 Kčs, dann werde ich doppelt soviel Geld haben wie Du.“ Wieviel Kronen hatte Stefan und wieviel Jan?

Lösung: Stefan hatte x Kčs, Jan y Kčs. Aus den Bedingungen der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= y + 1 \\ x + 2 &= 2(y - 2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 10,\ y = 8$$

Antwort: Stefan hatte 10 Kčs und Jan 8 Kčs.

204. Die Summe der Ziffern einer zweistelligen Zahl ist gleich 9. Wenn wir die beiden Ziffern gegeneinander austauschen, erhalten wir eine neue Zahl, die um 45 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Bestimmen Sie die ursprüngliche Zahl.

Lösung: Wenn die gesuchte zweistellige Zahl als erste Ziffer x und als zweite y hat, dann hat diese Zahl die Ziffernsumme $(x + y) = 9$. Die gesuchte Zahl können wir in Form $a_1 = (10x + y)$ ausdrücken. Wenn wir die beiden Ziffern miteinander vertauschen, erhalten wir eine neue Zahl, die als erste Ziffer y und als zweite x hat; diese neue Zahl können wir auf die Form $a_2 = (10y + x)$ bringen. Entsprechend den Bedingungen ist die Zahl $(10y + x)$ um 45 größer als die Zahl $(10x + y)$, was wir durch die Gleichung

$$10y + x = 10x + y + 45$$

ausdrücken können.

Nach der Umformung erhalten wir $y - x = 5$.

Wir erhielten somit das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ y - x &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 2,\ y = 7$$

Antwort: Die gesuchte zweistellige Zahl ist 27.

205. Aus einem Lager wurden zwei Sorten Ware ausgeliefert. Uns ist bekannt, daß $\frac{2}{5}$ der Masse der ersten Ware um 96 kg geringer ist als $\frac{3}{4}$ der Masse der zweiten Ware und $\frac{5}{8}$ der Masse der zweiten Ware gerade soviel ausmacht wie $\frac{4}{9}$ der Masse der ersten Ware. Bestimmen Sie die Massen der beiden Waren.

Lösung: Die Masse der ersten Ware kennzeichnen wir mit x kg, die der zweiten Ware mit y kg. Aus der Aufgabe erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{5}x &= \frac{3}{4}y - 96 \\ \frac{5}{8}y &= \frac{4}{9}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 720,\ y = 512$$

Antwort: Die Masse der ersten Ware ist 720 kg, die der zweiten Ware 512 kg.

Probe: $\frac{2}{5}$ der Masse der ersten Ware sind 288 kg.

$\frac{3}{4}$ der Masse der zweiten Ware sind 384 kg.

288 kg sind um 96 kg weniger als 384 kg.

$\frac{5}{8}$ der Masse der zweiten Ware sind 320 kg.

$\frac{4}{9}$ der Masse der ersten Ware sind 320 kg.

206. Ein Junge besitzt 27 Stück Metallmünzen, wieviel 25-Heller- und wieviel 10-Heller-Münzen hat er? Diese Münzen haben zusammen einen Wert von 4,35 Kčs.

Lösung: Die Anzahl der 10-Heller-Münzen kennzeichnen wir mit x, die der 25-Heller-Münzen mit y. Aus der Aufgabe folgt:

$x + y = 27$ ... wir vergleichen die Anzahl der Münzen

$10x + 25y = 435$ ... wir vergleichen den Wert aller Münzen[1]

Die Lösung des Gleichungssystems ist $x = 16$, $y = 11$.

Antwort: Der Junge hatte sechzehn 10-Heller-Münzen und elf 25-Heller-Münzen.

207. In den Gruben A und B sollten zusammen 20000 t Kohle gefördert werden, und man förderte 133 t über den Plan. Das Verdienst daran hatte man in der Grube A, in der man den Plan um 2% übererfüllte, wogegen man in der Grube B in der Förderung mit 1% unter dem Plan blieb. Wieviel Tonnen hatte man in jeder Grube geplant, und wieviel förderte man tatsächlich?

Lösung: In der Grube A sollten x t Kohle, in der Grube B y t Kohle gefördert werden. In der Grube A übererfüllte man den Plan mit 2%, was $\frac{x}{100} \cdot 2\,t = \frac{x}{50}$ t Kohle ausmacht. In der Grube B blieb man mit 1% unter dem Plan, was $\frac{y}{100} \cdot 1\,t = \frac{y}{100}$ t Kohle ausmacht. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt:

$$x + y = 20000$$

$$x + \frac{x}{50} + y - \frac{y}{100} = 20133$$

$$x + y = 20000$$

$$102x + 99y = 2013300$$

$x = 11100$ t, $y = 8900$ t.

Antwort: In der Grube A waren 11100 t Kohle, in der Grube B 8900 t Kohle geplant. Tatsächlich förderte man in der Grube A 11322 t Kohle und in der Grube B 8811 t Kohle.

208. Das Alter eines bestimmten Ehepaares wird mit Hilfe von zweistelligen Zahlen angegeben: „xy" und „yx".[1] Die Differenz des Alters von Mann und Frau macht gerade ein Fünftel des Alters der Ehefrau aus.
Wie alt ist der Ehemann, wie alt ist die Ehefrau?

Lösung: Das Alter des Mannes ist $(10x + y)$, wobei x den Zehner und y die Einerziffer bedeuten. Das Alter der Frau ist $(10y + x)$, wobei y die Zehnerziffer und x die Einerziffer bedeuten.
Aus der Aufgabe folgt:

$$(10x + y) - (10y + x) = \frac{1}{5}(10y + x)$$

Als Lösung der Gleichung erhalten wir:

$$4x = 5y$$

Daraus finden wir dann

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

Da x und y natürliche Zahlen darstellen und kleiner sind als 10, gilt:

$x = 5$, $y = 4$

Antwort: Der Mann ist 54 und seine Frau 45 Jahre alt.

209. Aus Eisenerz mit einer Masse von 50 t, das Magnetit und Hämatit enthält, wurden 35,7 t Eisen gewonnen. Wie groß war die Menge des Magnetits und wie groß die des Hämatits?

[1] Zuweilen wird vor allem bei Mischungsaufgaben die erste Gleichung Mengen- oder quantitative Gleichung, die zweite Wert- oder qualitative Gleichung genannt.

[1] „xy" bedeutet hier: x ... Zehner, y ... Einer der zweistelligen Alterszahl

Lösung: Magnetit ist Eisen(II, III)-oxid $FeO \cdot Fe_2O_3$ mit der Summenformel Fe_3O_4 und Hämatit ist Eisen(III)-oxid Fe_2O_3. Wenn x t Magnetit und y t Hämatit vorliegen, gilt die Gleichung

$$x + y = 50 \tag{1}$$

Wenn wir die relative Atommasse des Eisens von 55,85 auf 56 runden, erhalten wir eine weitere Gleichung:

$$\frac{56 \cdot 3}{56 \cdot 3 + 16 \cdot 4}x + \frac{56 \cdot 2}{56 \cdot 2 + 16 \cdot 3}y = 35{,}7,$$

aus der wir nach der Umformung erhalten:

$$30x + 29y = 29 \cdot 51 \tag{2}$$

Die Lösung des Systems der Gl. (1) und (2) ist $x = 29$ und $y = 21$.

Antwort: Das Magnetit hat eine Masse von 29 t und das Hämatit von 21 t.

210. Als Eintrittsgeld zur Premiere einer Kinderoper nahm man insgesamt 1000 M ein. Erwachsene bezahlten 4 M, Kinder 2 M. Insgesamt waren es 300 Besucher. Wieviel Erwachsene und wieviel Kinder waren es?

Lösung: Erwachsene waren es x, Kinder y. Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 300 \\ 4x + 2y &= 1000 \end{aligned} \Rightarrow x = 200,\ y = 100$$

Antwort: Es waren 200 Erwachsene und 100 Kinder.

211. Ein Erzgemisch soll 3,6 t Eisen und 240 kg Mangan enthalten. Das Eisenerz chargieren wir mit einem Gehalt von 55% Eisen und 0,3% Mangan, das Manganerz mit einem Gehalt von 6% Eisen und 24% Mangan. Wieviel Eisen- und wieviel Manganerz muß die Charge enthalten?

Lösung: Die Eisenerzmenge in der Charge ist x t, die Manganerzmenge in der Charge ist y t.
Das Eisenerz liefert:
Eisen 55% $x = 0{,}55x$,
Mangan 0,3% $x = 0{,}003x$;
das Manganerz liefert:
Eisen 6% $y = 0{,}06y$
Mangan 24% $y = 0{,}24y$.
Stellen wir nun die Gleichungen auf:

a) Masse des Eisens im Eisenerz + Masse des Eisens im Manganerz = 3,6 t

b) Masse des Mangans im Eisenerz + Masse des Mangans im Manganerz = 0,24 t

$$0{,}55x + 0{,}06y = 3{,}6$$
$$0{,}003x + 0{,}24y = 0{,}24$$

Aus der zweiten Gleichung bestimmen wir x:

$$0{,}003x = 0{,}24 - 0{,}24y$$
$$x = 80 - 80y$$

und setzen dies in die erste Gleichung ein:

$$\begin{aligned} 0{,}55 \cdot (80 - 80y) + 0{,}06y &= 3{,}6 \\ 44 - 44y + 0{,}06y &= 3{,}6 \\ -43{,}94y &= -40{,}4 \\ y &= \frac{40{,}4}{43{,}94} = 0{,}92 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung ergibt sich $x = 80 - 80y \Rightarrow x = 6{,}5$.

Antwort: Die Charge enthält annähernd 6,5 t Eisen- und 9,92 t Manganerz.

Probe:
Eisengehalt im Erz

a) Eisenerz: 55% von 6,5 t ist $[0{,}065 \cdot 55]$ t $= 3{,}575$ t,

b) Manganerz: 6% von 0,92 t ist $[0{,}0092 \cdot 6]$ t $= 0{,}0372$ t. Die Eisenmasse in beiden Erzen: $3{,}575 \text{ t} + 0{,}0372 \text{ t} = 3{,}6122 \text{ t} \approx 3{,}6$ t.

Mangangehalt im Erz

a) Eisenerz: 0,3% von 6,5 t ist $[0{,}065 \cdot 0{,}3]$ t $= 0{,}0195$ t,

b) Manganerz: 24% von 0,92 t ist $[0{,}0092 \cdot 24]$ t $= 0{,}2208$ t.

Die Manganmasse in beiden Erzen ist: $0{,}0195 \text{ t} + 0{,}2208 \text{ t} = 0{,}2403 \text{ t} \triangleq 240$ kg.

Anmerkung: In der Gleichung mußten wir y mit hoher Genauigkeit berechnen, weil wir den x-Wert aus der Gleichung

$$x = 80 - 80y$$

ermitteln, d. h., die Zahl y multiplizieren wir mit 80, so daß jeder Genauigkeitsfehler der Zahl y 80fach vergrößert wird.

212. Ein Vater versprach dem Sohn für jede fehlerlose Aufgabe 10 Pf, für jede fehlerhafte Aufgabe ist der Sohn jedoch verpflichtet, 5 Pf zurückzugeben. Nach der Lösung von 20 Aufgaben blieben dem Sohn 80 Pf. Wieviel Aufgaben löste er fehlerhaft und wieviel fehlerfrei?

Lösung: Es mögen x fehlerfrei gelöste Aufgaben sein, für die der Sohn $10x$ Pf bekam, und y fehlerhaft gelöste Aufgaben, für die er $5y$ Pf zurückerstatten mußte. Aus der Aufgabenstellung folgt dann:

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 10x - 5y &= 80 \end{aligned} \quad \Rightarrow x = 12,\ y = 8$$

Antwort: Fehlerfrei gelöste Aufgaben waren es 12 und fehlerhaft gelöste 8.

Probe: Der Sohn bekam $1 \cdot 12 = 12$ Zehnpfennigstücke und gab $0{,}5 \cdot 8 = 4$ Zehnpfennigstücke zurück. Es verblieben ihm also $12 - 4 = 8$ Zehnpfennigstücke. Überlegen Sie selbst: Wie kann man die Aufgabe mit Hilfe einer Unbekannten lösen?

213. Im Dezember wurden in einem Haushalt 1,5 t Koks und 0,6 t Kohle zu einem Preis von rund 180 M verbrannt. Im Januar wurden 1,8 t Koks und 0,8 t Kohle zu einem Preis von rund 222 M verbraucht. Wieviel kostete 1 t Koks und 1 t Kohle?

Lösung: Den Preis für 1 t Koks bezeichnen wir mit x M und den für 1 t Kohle mit y M. Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1{,}5x + 0{,}6y &= 180 \mid \cdot 4 \\ 1{,}8x + 0{,}8y &= 222 \mid \cdot (-3) \\ \hline 6x + 2{,}4y &= 720 \\ -5{,}4x - 2{,}4y &= -666 \\ \hline 0{,}6x &= 54 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

Dann finden wir $y = 75$.

Antwort: 1 t Koks kostet 90 M und 1 t Kohle rund 75 M.

214. Eine LPG bewirtschaftet 240 ha Felder und Wälder. Dabei ist das Ausmaß des Waldes um 10 ha kleiner als $\frac{1}{4}$ der Fläche der Felder. Wie groß ist die Fläche der Felder und Wälder?

Lösung: Möge die Fläche der Felder x ha und die der Wälder y ha sein. Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y &= 240 \\ y + 10 &= \frac{1}{4}x \end{aligned} \quad \Rightarrow x = 200,\ y = 40$$

Antwort: Die Fläche der Felder mißt 200 ha und die der Wälder 40 ha.

215. In einem gemeinsamen Rinderstall einer LPG waren 124 Stück Kühe und Kälber. Für die Kühe sind 7 Abteilungen, für die Kälber 2 Abteilungen bestimmt. In jeder Abteilung für Kühe ist die gleiche Stückzahl Vieh, und in jeder Abteilung für Kälber sind 8 Stück Vieh mehr als in einer Abteilung für Kühe. Wieviel Kühe und wieviel Kälber hatte man im Rinderstall?

Lösung: Durch x kennzeichnen wir die Anzahl der Kühe und durch y die Anzahl der Kälber in einer Abteilung. In 7 Abteilungen befinden sich $7x$ Kühe, in 2 Abteilungen sind $2y$ Kälber, insgesamt sind es 124, also

$$7x + 2y = 124$$

Entsprechend der Aufgabe gilt

$$y = x + 8$$

Die Lösung des Systems ist

$$\begin{aligned} 7x + 2y &= 124 \\ y &= x + 8 \end{aligned} \quad \Rightarrow x = 12,\ y = 20$$

Antwort: Im gemeinsamen Rinderstall waren 84 Kühe und 40 Kälber.

216. Auf dem Bauernmarkt in der ČSSR verkaufte eine Verkäuferin 250 kg Äpfel und 200 kg Birnen und nahm 2050 Kčs ein. Zwei Wochen später verkaufte sie 180 kg Äpfel und 230 kg Birnen für insgesamt 1820 Kčs. Wieviel Kčs kostete 1 kg Äpfel und wieviel 1 kg Birnen?

Lösung: Den Preis für 1 kg Äpfel kennzeichnen wir mit x Kčs und den Preis für 1 kg Birnen mit y Kčs. Das erste Mal nahm sie auf dem Markt für 250 kg Äpfel $250x$ Kčs und für 200 kg Birnen $200y$ Kčs ein; zusammen waren das 2050 Kčs, oder

$$250x + 200y = 2050$$

Zwei Wochen danach nahm sie für 180 kg Äpfel $180x$ und für 230 kg Birnen $230y$ Kčs ein; zusammen waren das 1820 Kčs, oder

$$180x + 230y = 1820$$

Als Lösung des Systems

$$250x + 200y = 2050$$
$$180x + 230y = 1820$$

erhalten wir $x = 5$, $y = 4$

Antwort: Der Preis für 1 kg Äpfel war 5 Kčs und der für 1 kg Birnen 4 Kčs.

217. Zum Herstellen von 200 m³ Betongemisch wurden Betonmischer eingesetzt. Die I. Mischanlage arbeitete 44 min und die II. Mischanlage war 60 min in Betrieb, wobei 20 m³ Betongemisch angefertigt wurden. Wenn die I. Mischanlage 36 min und die II. Mischanlage 40 min in Betrieb sind, stellen sie zusammen 15 m³ Betongemisch her. Welche Leistungen weisen die einzelnen Mischanlagen auf? In welcher Zeit mischen sie bei gleichzeitigem Betrieb 200 m³?

Lösung: Die I. Mischanlage fertigte in der Minute x m³ Betongemisch, die II. Mischanlage in der Minute y m³. Aus den in der Aufgabe genannten Bedingungen folgen die Gleichungen:

$$44x + 60y = 20$$

$$36x + 40y = 15$$

Als Lösung erhalten wir $x = 0{,}25$, $y = 0{,}15$. Die I. Mischanlage fertigte in der Minute 0,25 m³ und die II. Mischanlage 0,15 m³ Betongemisch. Den weiteren Teil der Aufgabe lösen wir wie folgt:
Wenn die I. Mischanlage allein arbeitete, würde sie die 200 m³ in 800 min und die II. Mischanlage diese in $\frac{4000}{3}$ min fertigen. Wenn sie gleichzeitig arbeiten, stellen sie von der Gesamtmischung in der Minute

$$\frac{1}{800} + \frac{3}{4000} = \frac{1}{500} \quad \text{her.}$$

Antwort: 200 m³ würden beide gleichzeitig arbeitenden Mischanlagen in 500 min fertigen.

218. In einem gleichschenkligen Dreieck beträgt die Differenz zwischen den Längen eines Schenkels und der Basis 5,5 cm. Sein Umfang ist 32,75 cm. Berechnen Sie die Seiten des Dreiecks.

Lösung: Möge die Basis des gleichschenkligen Dreiecks x cm, sein Schenkel y cm sein. Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y - x &= 5{,}5 \\ 2y + x &= 32{,}75 \end{aligned} \Rightarrow x = 7{,}25,\ y = 12{,}75$$

Antwort: Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ist 7,25 cm und die Schenkel je 12,75 cm lang.

219. Ein Lagerverwalter einer LPG hat zwei Sorten Wein: 1 l der ersten Sorte kostet 10 M, der zweiten Sorte 6 M. Durch Mischen will er 8 l Wein für 8 M (je Liter) gewinnen. Wieviel Liter muß er von jeder Sorte nehmen?

Lösung: Möge x l der Anteil des teureren Weines, y l der Anteil des billigeren Weines sein, dann kostet der eine Teil des Weingemisches $10x$ M und der andere Teil $6y$ M. Der gemischte Wein kostet $8 \cdot 8\text{ M} = 64$ M, also

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 10x + 6y &= 64 \end{aligned} \Rightarrow x = 4,\ y = 4$$

Antwort: Der Lagerverwalter mischte 4 l Wein für 10 M und 4 l Wein für 6 M.

220. Die Zinsen von zwei Baukrediten mit einer Gesamthöhe von 10000 M belaufen sich jährlich auf 315 M, wobei die Zinsen des einen Kredites 3% und des anderen 3,5% betragen. Wie hoch sind die einzelnen Kredite?

Lösung: Die Höhe des einen Kredites bezeichnen wir mit x M und die des anderen mit y M. Die Zinsen des ersten Kredites betragen

$\frac{3}{100}x$ M, die des zweiten Kredites $\frac{3,5}{100}y$ M. Die Kredite machen jedoch 10000 M aus, woraus die Gleichung

$$x + y = 10000$$

resultiert, und die Zinsen belaufen sich auf 315 M, was durch die nachstehende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$\frac{3}{100}x + \frac{3,5}{100}y = 315$$

Lösen wir nun folgendes Gleichungssystem:

$$x + y = 10000$$

$$\frac{3}{100}x + \frac{3,5}{100}y = 315$$

Die zweite Gleichung multiplizieren wir mit 100, und aus der ersten Gleichung setzen wir in sie für $x = 10000 - y$ ein, wonach wir erhalten:

$$3(10000 - y) + 3,5y = 31500$$

$$0,5y = 1500$$

$$y = 3000,$$

dann ist $x = 7000$

Antwort: Der erste Kredit läuft über 7000 M und der zweite über 3000 M.

221. Ein Esel und ein Kamel trugen Säcke mit Wasser. Wenn man dem Esel einen Sack abnähme und dem Kamel auflüde, trüge das Kamel doppelt soviel wie der Esel. Wenn man dem Kamel einen Sack abnähme und dem Esel auflüde, trügen beide gleich viel. Wieviel Säcke trug das Kamel und wieviel der Esel?

Lösung: Der Esel trug x und das Kamel y Säcke. Wenn wir dem Esel einen Sack abnehmen und dem Kamel aufladen, trägt das Kamel doppelt soviel wie der Esel, oder

$$y + 1 = 2(x - 1) \qquad (1)$$

Nehmen wir dem Kamel einen Sack ab und laden diesen dem Esel dazu, gilt die Gleichung

$$y - 1 = x + 1 \qquad (2)$$

Die Lösung der Gln. (1) und (2) ist $x = 5$, $y = 7$.

Antwort: Der Esel trug 5 Säcke und das Kamel 7 Säcke.

222. Zwei Lkw sollten in 10 Tagen Baustoffe anfahren. Nach sechs Tagen fiel der eine Lkw infolge eines Schadens aus, und der andere fuhr noch 9 Tage Baustoffe an. In wieviel Tagen hätte das erste und in wieviel Tagen das zweite Auto allein die Baustoffe antransportiert?

Lösung: Das erste Auto würde allein die Baustoffe in x Tagen anfahren, das zweite Auto in y Tagen. Zusammen fuhren sie an einem Tag $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ an, was $\frac{1}{10}$ der Gesamtarbeit ausmacht. In sechs Tagen haben sie also antransportiert:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) 6 = \frac{6}{10}$$

Von der Gesamtmenge mußten also noch $\frac{4}{10}$ angefahren werden. Das zweite Auto transportierte diese Menge jedoch in 9 Tagen, fuhr also an einem Tag an:

$$\frac{4}{10} : 9 = \frac{4}{90},$$

d. h.,

$$\frac{1}{y} = \frac{4}{90} \Rightarrow y = 22,5$$

x berechnen wir aus der Gleichung

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$$

und erhalten $x = 18$.

Antwort: Das erste Auto allein würde die Baustoffe in 18 Tagen und das zweite in 22,5 Tagen anfahren.

223. 0,6 kmol CO_2 hat bei einer Temperatur von 62 °C ein Volumen von 0,5 m^3 und einen Druck von $3 \cdot 10^6$ Pa (1 Pa = 1 N m^{-2}). Wenn wir das Gas auf eine Temperatur von 347 °C erhitzen, weist es bei konstantem Volumen einen Druck von $6 \cdot 10^6$ Pa auf. Berechnen Sie die Konstanten a und b in der van der Waalsschen Gleichung. Die van der Waalssche Gleichung hat für reale Gase die Form:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \qquad (1)$$

wobei a die Proportionalitätskonstante darstellt, die die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen charakterisiert und vom Verhalten des Gases abhängig ist;

b das Volumen des nichtkomprimierten Teils, das nach van der Waals dem vierfachen Volumen seiner Moleküle entspricht;

p Druck
V Volumen
T absolute Temperatur
R Gaskonstante, $R = 8314$ J kmol^{-1} K^{-1}

Lösung: Nach Einsetzen in die Gl. (1) erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\left(3 \cdot 10^6 + \frac{0{,}6^2 a}{0{,}5^2}\right)(0{,}5 - 0{,}6b) = 0{,}6 \cdot 335R$$

$$\left(6 \cdot 10^6 + \frac{0{,}6^2 a}{0{,}5^2}\right)(0{,}5 - 0{,}6b) = 0{,}6 \cdot 620R$$

Wenn wir die Gleichungen dividieren, erhalten wir:

$$\frac{\left(3 \cdot 10^6 + \frac{0{,}6^2 a}{0{,}5^2}\right)}{\left(6 \cdot 10^6 + \frac{0{,}6^2 a}{0{,}4^2}\right)} = \frac{201}{372} \Rightarrow a = 0{,}365 \cdot 10^6$$

Dann finden wir: $b = 4{,}26 \cdot 10^{-2}$

Antwort: Die Konstanten sind
$a = 3{,}65 \cdot 10^5$ Nm^4 kmol^{-2} und
$b = 4{,}26 \cdot 10^{-2}$ m^3 kmol^{-1}.

224. Die Tagesnorm zweier verschiedener Maurerbrigaden ist, zusammen 10200 Ziegelsteine zu vermauern. Die Brigaden übererfüllten jedoch zusammen die Norm um 348 Ziegelsteine, wobei der einen Brigade an der Erfüllung 2% fehlten, während die andere die Norm um 9,5% übererfüllte. Wie hoch waren die beiden Normen?

Lösung: Die Norm der ersten Brigade ist x Ziegelsteine, die der zweiten y Ziegelsteine. Zusammen betrugen die Normen beider Brigaden 10200 Ziegelsteine, also

$$x + y = 10200$$

Der ersten Brigade fehlten an der Erfüllung $\frac{2}{100}x$ Ziegelsteine, die zweite Brigade übererfüllte den Plan um $\frac{9{,}5}{100}y$ Ziegelsteine. Insgesamt wurde der Plan um 348 Ziegelsteine übererfüllt, was man in der Form einer Gleichung wie folgt schreiben kann:

$$\frac{9{,}5}{100}y - \frac{2}{100}x = 348$$

Die Lösung der Aufgabe erhalten wir durch die Lösung des Gleichungssystems:

$$x + y = 10200$$

$$\frac{9{,}5}{100}y - \frac{2}{100}x = 348$$

Die erste Gleichung multiplizieren wir mit 2 und die zweite mit 100, wonach wir durch Addition beider dann erhalten:

$$11{,}5y = 55200$$

$$y = 4800,$$

dann ist

$$x = 5400$$

Antwort: Die Norm der ersten Brigade war 5400 Ziegelsteine und die der zweiten Brigade 4800 Ziegelsteine.

225. Wenn Schwefelsäure auf 406 g Zink-Kadmium-Legierung einwirkt, entwickeln sich 100 l Wasserstoff. Welche Menge Zink und welche Menge Kadmium waren in der Legierung enthalten?

Lösung: Zink sind x g und Kadmium y g enthalten. Es gilt also die Gleichung

$$x + y = 406 \qquad (1)$$

Zink und Kadmium spalten die Schwefelsäure entsprechend den chemischen Formeln:

$$Zn + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2$$

$$Cd + H_2SO_4 = CdSO_4 + H_2$$

Wenn also 65 g Zink oder 112 g Kadmium mit Schwefelsäure reagieren, entwickelt sich unter normalen Bedingungen 1 Mol Wasserstoff ($\triangleq$ 22,4 l). Wir erhalten demnach die Gleichung

$$\frac{22{,}4}{65} \cdot x + \frac{22{,}4}{112} \cdot y = 100 \qquad (2)$$

Aus den Gln. (1) und (2) erhalten wir $x = 130$, $y = 276$.

Antwort: In der Legierung sind 130 g Zink und 276 g Kadmium enthalten.

226. Zwei Installateure sollen gemeinsam eine bestimmte Arbeit in 30 Tagen ausführen. Nach sechstägiger gemeinsamer Arbeit erkrankte einer von beiden, und der andere beendete die Arbeit in 40 Tagen. In welcher Zeit würde jeder der beiden die Arbeit ausführen, arbeiteten sie allein?

Lösung: Möge x die Anzahl der Arbeitstage des ersten und y die Anzahl der Arbeitstage des zweiten Installateurs sein, in denen sie die gesamte Arbeit allein ausführen würden. An einem Tag führten sie jeweils bei gemeinsamer Arbeit $\frac{1}{30}$ der Gesamtarbeit und in sechs Tagen $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ der Gesamtarbeit aus. Die Arbeit, die der erste Installateur an einem Tag ausführt, ist $\frac{1}{x}$, die der zweite Installateur ausführt, ist $\frac{1}{y}$ der Gesamtarbeit. Die Arbeit, die beide in 6 Tagen ausführen, nämlich $\left(\frac{6}{x} + \frac{6}{y}\right)$, ist gleich $\frac{1}{5}$ der Gesamtarbeit, d. h.,

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{5} \qquad (1)$$

Nach Erkrankung des einen verblieben von der Gesamtarbeit $\frac{4}{5}$ und der zweite beendete sie in 40 Tagen, d. h.,

$$\frac{40}{y} = \frac{4}{5} \qquad (2)$$

Aus der Gl. (2) finden wir $y = 50$, und nach Einsetzen in die Gl. (1) erhalten wir $x = 75$.

Antwort: Der erste Installateur würde die Arbeit allein in 75 Tagen und der zweite in 50 Tagen ausführen.

227. Ein erfahrener Bergmann förderte in der Schicht 10,5 t Kohle mehr als ein Brigadier, der noch nicht eingearbeitet war. Der Brigadier förderte 66 t in der Zeit, in der der Bergmann 108 t förderte. Wie lange muß der Brigadier arbeiten, um 1485 t Kohle zu fördern?

Lösung: Durch x kennzeichnen wir die Anzahl der Tonnen, die in einer Schicht der Brigadier fördert, und mit y die Anzahl der Tonnen des Bergmanns. Für die Förderung von 66 t Kohle benötigt der Brigadier $\frac{66}{x}$ Schichten, für die Förderung von 108 t Kohle benötigt der Bergmann $\frac{108}{y}$ Schichten. Aus der Aufgabe folgt:

$$\left.\begin{aligned} y - 10{,}5 &= x \\ \frac{66}{x} &= \frac{108}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 16{,}5,\ y = 27$$

Antwort: Für die Förderung von 1485 t Kohle benötigt der Brigadier $\frac{1485}{x} = \frac{1485}{16{,}5} = 90$ Schichten.

228. Wenn wir zwei Goldlegierungen der Qualität 0,905[1] und 0,800 mit 2 kg reinem Gold zusammengießen, erhalten wir 25 kg einer neuen Legierung mit einer Qualität von 0,906. Berechnen Sie die Masse der ersten beiden Legierungen. (Die Qualität ist durch den Bruch vorgegeben, der das Verhältnis der Masse des reinen Goldes zur Gesamtmasse der Legierung zum Ausdruck bringt. So bedeutet 0,905, daß in 1000 g Legierung 905 g reines Gold enthalten sind.)

Lösung: Die Gesamtmasse der Legierung ist P kg. Die Masse des reinen Goldes ist p kg. Die Masse des Goldes in der Legierung ist t kg.

$$t = \frac{p}{P} \Rightarrow p = Pt$$

Die Masse der ersten Legierung ist x kg, die der zweiten y kg. Wenn wir von der Gleichung $p = Pt$ ausgehen, erhalten wir:

$$x \cdot 0{,}905 + y \cdot 0{,}800 + 2 = 25 \cdot 0{,}906 \qquad (1)$$

$$x + y + 2 = 25 \qquad (2)$$

Gl. (1) gibt die Masse des reinen Goldes in

[1] Gewöhnlich werden die Legierungen mit dreistelligen Zahlen, d. h. in Promille, angegeben; hier also 905 und 800.

der Legierung an. Gl. (2) gibt die Masse der Legierung an. Die Lösung ist $x = 15$, $y = 8$.

Antwort: Die Masse der ersten Legierung ist 15 kg, die Masse der zweiten Legierung 8 kg.

229. Für einen bestimmten Produktionsbetrieb ist im kommenden Jahr eine Steigerung der Arbeitsproduktivität um 8% geplant, wobei der Produktionszuwachs von 90% durch die Steigerung der Arbeitsproduktivität und nur der Rest in Form einer Produktionssteigerung erreicht werden soll, bei der die Anzahl der Arbeitskräfte erhöht wird. Berechnen Sie, um wieviel Prozent wir die Beschäftigtenzahl erhöhen müssen und um wieviel Prozent die Produktion tatsächlich steigt.

Lösung: Wenn wir die ursprüngliche Beschäftigtenzahl mit D und die neue Anzahl der Beschäftigten mit D_1 kennzeichnen, dann ist $D_1 = (1 + x) D$, wobei x die Steigerung (relativ) der Beschäftigtenzahl darstellt. Die ursprüngliche Produktion kennzeichnen wir mit V, die neue Gesamtproduktion mit V_1, dann gilt $V_1 = (1 + y) V$, wobei y die Steigerung der Produktion kennzeichnet. Durch eine höhere Arbeitsproduktivität kann die Produktion allein um 90% gesteigert werden. V_2 ist die um 90% gesteigerte Produktion infolge der Steigerung der Arbeitsproduktivität, d. h., die Produktion $V_2 = (1 + 0{,}9\,y)\,V$. Die ursprüngliche Arbeitsproduktivität war $p = V/D$, die neue Arbeitsproduktivität muß sein:

$$p_1 = 1{,}08 \cdot p \tag{1}$$

Diese neue Arbeitsproduktivität können wir nach zwei unterschiedlichen Verfahren berechnen, und zwar:

a) entweder mit Hilfe der neuen Gesamtproduktion und der neuen Beschäftigtenzahl

$$p_1 = \frac{V_1}{D_1} = \frac{(1 + y)\,V}{(1 + x)\,D} = \frac{1 + y}{1 + x}p \tag{2}$$

b) oder nur mit Hilfe der Teilerhöhung der Produktion und der ursprünglichen Beschäftigtenzahl

$$p_1 = \frac{V_2}{D} = \frac{(1 + 0{,}9y)\,V}{D} = (1 + 0{,}9y)\,p \tag{3}$$

Wenn wir p_1 aus (1) in (2) und (3) einsetzen, erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{1 + y}{1 + x} = 1{,}08$$

$$1 + 0{,}9y = 1{,}08$$

Aus der zweiten Gleichung berechnen wir die Produktionssteigerung $y = 0{,}0889$ und dann aus der ersten Gleichung $x = 0{,}0082$.

Antwort: Die Beschäftigtenzahl muß um 0,82% erhöht werden, dann steigt die Produktion um 8,89%.

230. Das eine Eisenerz enthält 72% und das zweite 58% Eisen. Nachdem wir eine bestimmte Menge des ersten Erzes mit einer bestimmten Menge des zweiten Erzes gemischt haben, erhalten wir ein Erz, das 62% Eisen enthält. Wenn wir von jedem Erz 15 kg mehr nehmen, erhalten wir ein Erz, das 63,25% Eisen enthält. Welche Mengen beider Erze haben wir ursprünglich genommen?

Lösung: Die ursprüngliche Erzmenge mit einem Gehalt von 72% Eisen wollen wir mit x und die Menge des zweiten Erzes mit y bezeichnen. Aus den Bedingungen der Aufgabe resultieren die Gleichungen:

$$\frac{72 \cdot x}{100} + \frac{58 \cdot y}{100} = (x + y)\,\frac{62}{100}$$

$$\frac{72}{100}\,(x + 15) + \frac{58}{100}\,(y + 15)$$

$$= (x + y + 30)\,\frac{63{,}25}{100}$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$10x - 4y = 0 \tag{1}$$

$$8{,}75x - 5{,}25y = -52{,}5 \tag{2}$$

Aus der Gl. (1) finden wir $y = 2{,}5x$ und nach Einsetzen in (2)

$$8{,}75x - 13{,}125x = -52{,}5$$

$$x = 12$$

Dann ist $y = 30$.

Antwort: Ursprünglich waren 12 kg des Erzes höherer Qualität und 30 kg des Erzes geringerer Qualität vorhanden.

231. In einer Sparkasse zahlte jemand eine Summe ein zu 2% Zinsen (einfache Verzinsung). Nach Verstreichen einer bestimmten Zeit hat er die gesamte Summe zusammen mit den Zinsen in der Höhe von 8502 M abgehoben. Wenn die ursprüngliche Summe zu 3% Zinsen (einfache Verzinsung) für eine um ein Jahr geringere Zeit eingezahlt worden wäre, hätten sich die Zinsen auf 819 M belaufen. Welche Summe hatte er in der Sparkasse für welche Zeit eingezahlt?

Lösung: Die ursprünglich in der Sparkasse eingezahlte Summe ist x M. Die Zinsen belaufen sich bei 2% für ein Jahr auf $\frac{x}{100} \cdot 2$ M $= 0{,}02x$ M, für t Jahre werden die Zinsen $0{,}02x \cdot t$ M betragen. Die Zinsen bei 3% betragen für 1 Jahr $\frac{x}{100} \cdot 3\ \mathrm{M} = 0{,}03x$ M, für die Zeit von $(t-1)$ Jahren werden die Zinsen $0{,}03x(t-1)$ M betragen.
Es gilt also:

$$x + 0{,}02x \cdot t = 8502$$

$$0{,}03x(t-1) = 819$$

Die Lösung des vorliegenden Systems ist $t = 4{,}5$, $x = 7800$.

Antwort: In der Sparkasse wurden von ihm 7800 M für den Zeitraum von $4\frac{1}{2}$ Jahren eingezahlt.

232. Ein elektrischer Strom von 7 A verzweigt sich in zwei Drähte mit den Widerständen $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 9\ \Omega$. Bestimmen Sie den elektrischen Strom in jedem Abzweig.

Lösung: Die Stromstärken in den einzelnen Drähten kennzeichnen wir mit I_1, I_2, die Gesamtstromstärke mit I (Bild 26). Entsprechend der 1. Kirchhoffschen Regel gilt:

$$I = I_1 + I_1$$

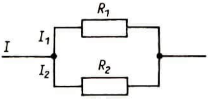

Bild 26

Die Spannungen in den Abzweigen sind gleich, so daß gilt:

$$I_1R_1 = I_2R_2$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1R_1 = I_2R_2$$

ist:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I = 4{,}5\ \mathrm{A},$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I = 2{,}5\ \mathrm{A}$$

Antwort: Im ersten Zweig fließt ein elektrischer Strom von 4,5 A und im anderen von 2,5 A.

233. Ein Wanderer legte die Strecke von der Ortschaft A in die Ortschaft B und zurück in 3 h 41 min zurück. Der Weg von A nach B führt zunächst bergauf, dann ist er flach, und schließlich führt er bergab. Über welch eine Länge ist der Weg flach, wenn die Geschwindigkeit des Wanderers bergauf 4 km h^{-1}, über die flache Strecke 5 km h^{-1} und bergab 6 km h^{-1} beträgt? Die Entfernung von A nach B über die gegebene Strecke beträgt 9 km.

Lösung: Die Länge der Strecke über ebenes Gelände in beiden Richtungen bezeichnen wir mit x km und den Rest der Strecke mit y km (d. h. die Strecke bergauf und bergab in beiden Richtungen). Der Wanderer legte eine Strecke von 18 km zurück (von A nach B und zurück), also

$$x + y = 18 \qquad (1)$$

Die Strecke x legte er in der Zeit $\frac{x}{5}$ h zurück. Bergauf und bergab hat der Weg eine Länge von y km. Den Weg bergauf legte er in der Zeit $\frac{\frac{y}{2}}{4}$ h und den Weg bergab in der Zeit $\frac{\frac{y}{2}}{6}$ h zurück. Den Weg in beiden Richtungen legte er in 3 h 41 min zurück, oder

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{8} + \frac{y}{12} = \frac{221}{60} \qquad (2)$$

Wenn wir die Gl. (2) mit der Zahl 120 multiplizieren, erhalten wir das Gleichungssystem:

$$x + y = 18$$
$$24x + 25y = 442$$

Die Lösung ist $x = 8$, $y = 10$.

Antwort: Der Weg über ebenes Gelände führt über $\frac{x}{2} = 4$ km.

234. Ein Vater ist dreimal so alt wie der Sohn; vor 12 Jahren war der Vater neunmal so alt wie sein Sohn. Wie alt ist der Vater und wie alt der Sohn?

Lösung: a) Das Alter des Vaters ist x und das des Sohnes y Jahre; vor 12 Jahren war der Vater $(x - 12)$ Jahre und der Sohn $(y - 12)$ Jahre alt. Entsprechend den Bedingungen erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{matrix} x = 3y \\ x - 12 = 9(y - 12) \end{matrix} \Rightarrow x = 48,\ y = 16$$

b) Lösung der Aufgabe mit Hilfe einer Unbekannten

Wenn der Vater x Jahre alt ist, dann ist der Sohn $\frac{x}{3}$ Jahre alt; vor 12 Jahren war der Vater $(x - 12)$ Jahre und der Sohn $\left(\frac{x}{3} - 12\right)$ Jahre alt. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$x - 12 = 9\left(\frac{x}{3} - 12\right) \Rightarrow x = 48$$

Antwort: Der Vater war 48 und der Sohn 16 Jahre alt.

235. Ein Fuhrmann, der auf dem beladenen Wagen saß, bemerkte, daß sich hinten am Wagen eine Kette löste. Er stieg vom Wagen und schritt ans Wagenende, wobei der Wagen mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit seine Fahrt fortsetzte. Bis an das Wagenende benötigte er 8 Schritte. Er befestigte die Kette und kehrte auf den Wagen zurück. Da der Wagen gleichmäßig weiterfuhr, mußte der Fuhrmann 24 Schritte ausführen, um auf seinen Platz zu gelangen. Wie lang ist der Wagen, gemessen in Schritten?

Lösung: Die Länge des Wagens kennzeichnen wir mit x Schritten. Wenn der Fuhrmann 8 Schritte macht, legt der Wagen eine Strecke von a Schritten zurück, d. h.,

$$a + 8 = x \tag{1}$$

Auf dem Rückweg macht der Fuhrmann dreimal so viel Schritte wie auf dem Hinweg, der Wagen legt eine Strecke von $3a$ zurück, also

$$24 - 3a = x \tag{2}$$

Durch die Lösung der Gln. (1) und (2) erhalten wir $x = 12$, $a = 4$.

Antwort: Die Länge des Wagens ist 12 Schritte. (Bei einer Schrittlänge von 75 cm entspräche das 9 m.)

236. Zwei sich entgegenfahrende Züge — ein Personenzug, der von A nach B fährt, und der andere, ein von B nach A fahrender Schnellzug, — wurden auf dem Bahnhof C für 2 h angehalten. Der Bahnhof C liegt zwischen den Bahnhöfen A und B. Durch eine Geschwindigkeitserhöhung um 25% bei beiden Zügen holte der Schnellzug die Verspätung zum Bahnhof A bis auf 1 h 36 min auf und der Personenzug zum Bahnhof B bis auf 48 min. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeiten beider Züge und die Entfernung zwischen den Bahnhöfen A und C, wenn die Geschwindigkeit des Schnellzuges 20 km h^{-1} höher war als die des Personenzuges und die Entfernung von A nach B 360 km beträgt.

Lösung: Die Entfernung $\overline{AC}$ bezeichnen wir mit x km, die Geschwindigkeit des Personenzuges mit y km h^{-1}; dann ist die Geschwindigkeit des Schnellzuges $(y + 20)$ km h^{-1}. Die Entfernung $\overline{BC}$ ist $(360 - x)$ km, die der Personenzug in der Zeit $\frac{360 - x}{y}$ h zurücklegte. Als er seine Geschwindigkeit um 25% erhöhte, legte er sie in einer um 1,2 h kürzeren Zeit zurück, also gilt:

$$\frac{360 - x}{y} = \frac{360 - x}{y + \frac{1}{4}y} + 1{,}2$$

Die Entfernung x km legte der Schnellzug in der Zeit $\frac{x}{y + 20}$ h, nach der Erhöhung der Geschwindigkeit in der Zeit

$$\frac{x}{(y+20)+\frac{1}{4}(y+20)}$$

zurück, was einer Zeiteinsparung von 0,4 h entspricht, also

$$\frac{x}{y+20}=\frac{x}{\frac{5}{4}(y+20)}+0{,}4$$

Wir lösen nun das Gleichungssystem

$$\frac{360-x}{y}=\frac{360-x}{\frac{5}{4}y}+1{,}2 \;\Big|\cdot\frac{5}{4}y$$

$$\frac{x}{y+20}=\frac{x}{\frac{5}{4}(y+20)}+0{,}4 \;\Big|\cdot\frac{5}{4}(y+20)$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$x+6y=360$

$x-2y=40$

Die Lösung ist $x=120$, $y=40$.

Antwort: Die Geschwindigkeit des Personenzuges war $40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, die des Schnellzuges $60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$, und die Entfernung $\overline{AC}$ betrug 120 km.

237. Eine Legierung setzt sich aus zwei Metallen mit einem Verhältnis 1:2 zusammen, eine andere Legierung, die die gleichen Metalle enthält, mit einem Verhältnis von 2:3. Aus wieviel Anteilen beider Legierungen kann man eine neue Legierung gewinnen, die die gleichen Metalle mit einem Verhältnis von 17:27 enthält?

Lösung: Die Komponenten des in der Legierung enthaltenen ersten und zweiten Metalls bezeichnen wir mit x und y. In der neuen Legierung werden also $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y\right)$ kg des ersten Metalls und $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y\right)$ kg des zweiten Metalls enthalten sein. Dann gilt:

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{17}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}{27}=\frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$$

Antwort: In der neuen Legierung sind 9 Anteile der ersten und 35 Anteile der zweiten Legierung enthalten.

Die folgenden fünf Aufgaben ordnen wir den sog. unbestimmten oder den **diophantischen Gleichungen** zu (Bezeichnung rührt vom griechischen Mathematiker Diophant, der im 3. Jh. u. Z. in Alexandria lebte, her).
Als eine unbestimmte Gleichung bezeichnen wir eine Gleichung mit mehreren Unbekannten $x, y, z, u, v, \ldots$, wenn wir für diese Unbekannten ausschließlich nur ganze Zahlen, meist nur natürliche Zahlen und die Null zulassen.

238. Wir sollen einen Brief mit Marken in einem Gesamtwert von 1,60 M frankieren. Auf wieviel verschiedene Arten können wir das durchführen, wenn wir nur 40-Pf- und 60-Pf-Briefmarken verwenden würden?

Lösung: Die Anzahl der 40-Pf-Briefmarken kennzeichnen wir mit x, die der 60-Pf-Briefmarken mit y. Entsprechend den Bedingungen der Aufgabe soll gelten:

$40x+60y=160$,

nach der Umformung

$$2x+3y=8 \tag{1}$$

Die Gl. (1) ist unbestimmt und kann auf folgende Form gebracht werden:

$$x=\frac{8-3y}{2}, \tag{2}$$

wobei der Zähler eine ganze durch zwei teilbare Zahl mit positivem Vorzeichen sein muß. Für y können wir nur 0 und 2 wählen.
Wenn wir $y=0$ in (2) einsetzen, ist $x=4$. Das Paar $x=4$, $y=0$ wird also der Gl. (2) gerecht. Wenn wir einsetzen $y=2$, dann ist $x=1$. Ebenso wird auch das Paar $x=1$, $y=2$ der Gl. (2) gerecht.

Antwort: Die Frankierung kann auf zweierlei Art vorgenommen werden, und zwar verwenden wir entweder vier 40-Pf-Briefmarken oder eine 40-Pf-Briefmarke und zwei 60-Pf-Briefmarken.

239. Zwei ganzzahlige Ziffern mit positivem Vorzeichen haben wir summiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Nachdem wir diese 4 gewonnenen Ergebnisse addierten, erhielten wir die Zahl 243. Um welche Zahlen handelt es sich?

Lösung: Die gesuchten Zahlen kennzeichnen wir mit x und y. Entsprechend der Bedingung der Aufgabe gilt:

$$(x + y) + (x - y) + xy + \frac{x}{y} = 243$$

Durch die Umformung erhalten wir:

$$x(2y + y^2 + 1) = 243y$$

Weil

$1 + 2y + y^2 = (1 + y)^2$, so folgt

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

In Übereinstimmung mit der Definition diophantischer Gleichungen müssen x und y ganze und positive Zahlen sein, d. h., $243y$ muß ohne Rest durch die Zahl $(y + 1)^2$ teilbar sein. Da es bei $243y$ ausreicht, daß einer der Faktoren durch $(y + 1)^2$ teilbar ist, wird dann $243y$ ebenfalls durch $(y + 1)^2$ teilbar. Die Zahl $243 = 3 \cdot 9^2 = 27 \cdot 3^2 = 243 \cdot 1$. Daraus resultiert, daß

$$(y + 1)^2 = 9^2, \quad y = 8$$

oder

$$(y + 1)^2 = 3^2, \quad y = 2$$

Die Zerlegung $243 \cdot 1$ entspricht nicht der Forderung, denn 243 ist kein Quadrat irgendeiner ganzen Zahl mit positivem Vorzeichen. Demnach ist

$$x = \frac{243 \cdot 8}{81} \quad \text{oder} \quad x = \frac{243 \cdot 2}{9}$$

Antwort: Die gesuchten Zahlen sind 24 und 8 oder 54 und 2.

240. Eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks hat die Länge von 5 cm. Berechnen Sie die Länge der Hypotenuse und der anderen Kathete, wenn Ihnen bekannt ist, daß die Längen dieser Seiten (in cm) durch natürliche Zahlen ausgedrückt werden.

Lösung: Die Länge der zweiten Kathete kennzeichnen wir mit x und mit y die Länge der Hypotenuse des gesuchten Dreiecks. Entsprechend dem Satz des Pythagoras gilt:

$$x^2 + 5^2 = y^2, \quad \text{oder} \quad y^2 - x^2 = 25$$

Daraus folgt dann

$$(y + x)(y - x) = 25 \tag{1}$$

Um die unbestimmte Gl. (1) zu lösen, zerlegen wir zunächst die Zahl 25 auf alle möglichen Arten zu der Summe zweier natürlicher Zahlen. Es gilt: $25 = 1 \cdot 25$; $25 = 5 \cdot 5$; $25 = 25 \cdot 1$. Auf der linken Seite der Gl. (1) haben wir zwei Faktoren. Entsprechend der Bedeutung der Zahlen x und y ist offensichtlich, daß der Faktor $(y + x)$ größer ist als der Faktor $(y - x)$. Daraus resultiert das System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten, und zwar

$$\begin{matrix} y + x = 25 \\ y - x = 1 \end{matrix} \Rightarrow x = 12,\ y = 13$$

Antwort: Der Aufgabe wird nur ein einziges rechtwinkliges Dreieck gerecht, dessen zweite Kathete 12 cm und dessen Hypotenuse 13 cm lang sind.

241. Eine dreistellige Zahl wird mit der Ziffer 4 abgeschlossen. Wenn wir diese Ziffer an die erste Stelle rücken (und die übrigen zwei unverändert lassen), erhalten wir eine Zahl, die um 81 kleiner ist als die ursprüngliche Zahl. Berechnen Sie die ursprüngliche Zahl.

Lösung: Die erste Ziffer der gesuchten Zahl bezeichnen wir mit x, die andere mit y. Die gesuchte Zahl im Dezimalsystem hat die Form $(100x + 10y + 4)$. Wenn wir die Ziffer 4 an die erste Stelle rücken, entsteht die neue Zahl $(400 + 10x + y)$, die um 81 kleiner ist als die ursprüngliche Zahl. Daraus resultiert, daß

$$400 + 10x + y = 100x + 10y + 4 - 81$$

Nach der Umformung finden wir

$$90x + 9y = 477$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung durch neun dividieren, erhalten wir:

$$10x + y = 53$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung haben wir eigentlich eine zweistellige Zahl geschrieben, deren erste Ziffer x und die zweite Ziffer y ist, auf der anderen Seite dieser Gleichung ist jedoch die zweistellige Zahl 53 notiert. Aus dieser Überlegung folgt:

$x = 5$, $y = 3$.

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 534.

242. Im Jahre 1887 glich das Alter irgendeines Bürgers der Summe der Ziffern seines Geburtsjahres. Wie alt war er?

Lösung: Das Alter des Bürgers ist gleich der Summe der Ziffern einer vierstelligen Zahl. Jede dieser Ziffern hat einen Wert, der nicht über 9 liegt. Das bedeutet, daß der Bürger nicht über 36 Jahre alt war. Aus der Bedingung der Aufgabe, Geburtsjahr $> (1887 - 36)$, resultiert also, daß er im 19. Jahrhundert geboren wurde. Wenn wir die Anzahl der Zehner mit x und die Anzahl der Einer des Geburtsjahres mit y bezeichnen, ist die Summe der Ziffern des Geburtsjahres $(1 + 8 + x + y)$ gleich dem Alter des Bürgers

$$1887 - (1\,000 + 800 + 10x + y)$$
$$= 87 - (10x + y)$$

Es ist also

$$1 + 8 + x + y = 87 - (10x + y)$$
$$11x + 2y = 78 \tag{1}$$

Die Gl. (1) ist unbestimmt, und wir können sie in folgender Form niederschreiben:

$$x = \frac{78 - 2y}{11}, \tag{2}$$

wobei der Zähler eine Zahl mit positivem Vorzeichen und durch 11 teilbar sein muß. Für y können wir 6, 17 und 28 wählen. Wenn wir $y = 6$ in (2) einsetzen, ist $x = 6$; wenn $y = 17$ ist, finden wir für $x = 4$; ist $y = 28$, wird $x = 2$. Der Bedingung der Aufgabe wird nur das Paar $x = 6$, $y = 6$ gerecht. Das Alter des Bürgers ist durch die Beziehung gegeben:

$$1 + 8 + 6 + 6 = 21$$

Antwort: Der Bürger war 21 Jahre alt.

Für das Lösen diophantischer Gleichungen gibt es auch ein allgemeines Lösungsverfahren, das hier an einem Beispiel erläutert werden soll:

Welche positiven Zahlen kleiner als 100 ergeben durch 7 geteilt den Rest 1 und durch 4 geteilt den Rest 3?

Lösung: Auf Grund der beiden Bedingungen gilt für eine der gesuchten Zahlen n:

1. $n = 7x + 1$
2. $n = 4y + 3$

Nach dem Gleichsetzen folgt:

$$7x - 4y = 2$$

Diese diophantische Gleichung wird wie folgt gelöst:

a) Auflösen nach der Unbekannten mit dem kleinsten Koeffizienten:

$$4y = 7x - 2; \; y = \frac{1}{4}(7x - 2)$$

b) Abspalten der ganzzahligen Bestandteile:

$$y = x + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

c) Der verbleibende Bruch wird als neue Unbekannte (Variable) eingeführt:

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = u \quad \text{oder} \quad 4u = 3x - 2$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{4u}{3} + \frac{2}{3} = u + \frac{u+2}{3}$$

Wiederholung des Verfahrens ...

$$3v = u + 2$$

$u = 3v - 2$ ... bis — wie jetzt — eine bruchlose Beziehung entstanden ist.

d) Dann wird rückwärts eingesetzt:

$$x = \frac{12v - 8 + 2}{3} = 3v - 2 + \frac{3v}{3}$$

$$x = 4v - 2$$

$$y = 4v - 2 + \frac{4u}{4} = 4v - 2 + u$$

e) Eine Unbekannte muß nun eliminiert werden:

$$y = 4v - 2 + 3v - 2 = 7v - 4$$

$$n = 4y + 3 = 28v - 16 + 3$$

$$n = 28v - 13$$

Zu diesem Ergebnis wäre man auch durch $n = 7x + 1 = 7(4v - 2) + 1 = 28v - 13$ gekommen.

Wir setzen nun aufeinanderfolgend für v ganze Zahlen ein. Negative v würden zu negativem n führen. Also wird mit $v = 0; 1; 2; 3; \ldots$ probiert. Für $v = 1; 2; 3; 4$ finden wir für $n = 15$ oder 43 oder 71 oder 99.

3.2. Gleichungssysteme mit drei und mehr Unbekannten

243. Wenn wir die eine Seite eines Dreiecks um 15 cm verlängern und die andere um 15 cm verkürzen, würde das Dreieck zu einem gleichseitigen. Das Vierfache der ersten Seite ist um 5 cm größer als das Dreifache der dritten Seite. Bestimmen Sie die Seiten des Dreiecks.

Lösung: Die Seitenlängen des Dreiecks bezeichnen wir mit a cm, b cm und c cm. Wenn wir die Seite mit a cm um 15 cm verlängern, erhalten wir $(a + 15)$ cm; wenn wir die Seite mit b cm um 15 cm verkürzen, erhalten wir $(b - 15)$ cm, wobei diese der dritten Seite gleichen, oder

$$a + 15 = c$$

$$b - 15 = c$$

Das Vierfache von a ist $4a$, das Dreifache von c ist $3c$, ihre Differenz ist 5; nach der Aufgabenstellung gilt also:

$$4a - 3c = 5$$

Lösen wir nun das System

$$a + 15 = c \qquad (1)$$

$$b - 15 = c \qquad (2)$$

$$4a - 3c = 5 \qquad (3)$$

Wir setzen aus der Gl. (1) für c in die Gl. (3) ein und erhalten $a = 50$, für a setzen wir in (1) ein und berechnen $c = 65$, für c setzen wir in (2) ein und erhalten $b = 80$.

Antwort: Die Seiten des Dreiecks haben die Größen 50 cm, 80 cm und 65 cm.

244. Jemand bezahlte auf seiner Urlaubsreise im Hotel die Rechnung zu 169 Kčs mit 27 Banknoten[1] im Werte von 10 Kčs, 5 Kčs und 3 Kčs. Beim Auszahlen bemerkte er, daß von den 5-Kronen-Scheinen einer mehr war als 3-Kronen-Scheine. Wieviel Banknoten waren von jeder Sorte dabei?

Lösung: Die Anzahl der Banknoten zu 10 Kčs kennzeichnen wir mit x, mit y die Anzahl der Banknoten zu 5 Kčs und mit z die Anzahl der Banknoten zu 3 Kčs. Aus den Bedingungen der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$x + y + z = 27 \qquad (1)$$

$$10x + 5y + 3z = 169 \qquad (2)$$

$$y - 1 = z \qquad (3)$$

Nach Einsetzen aus (3) für z in (1) und (2) und nach der Umformung erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 28 \\ 5x + 4y = 86 \end{array}\right. \Rightarrow x = 10,\ y = 9$$

und aus (3) ist dann $z = 8$.

Antwort: Es waren 10 Zehn-Kronen-Scheine, 9 Fünf-Kronen-Scheine und 8 Drei-Kronen-Scheine dabei.

245. In ein Möbelgeschäft brachte man auf drei Fahrzeugen Möbelstücke. Das erste Fahrzeug brachte zwei große und sechs kleine Möbelstücke, das zweite brachte vier mittlere und sechs kleine Möbelstücke und das dritte Fahrzeug brachte ein großes, drei mittlere und drei kleine Möbelstücke. Auf jedem Fahrzeug waren einheitlich 900 kg Möbel geladen. Wie groß war die Masse der einzelnen Möbelstücke?

Lösung: Die Masse der kleinen Möbelstücke bezeichnen wir mit z kg, die der mittleren mit y kg und die der großen mit x kg. Aus

---

[1] In der ČSSR gibt es Münzen und Banknoten auch mit 3 Kčs Wert

den Bedingungen der Aufgabe folgt:

3. Fahrzeug:	$x + 3y + 3z = 900$	(1)
1. Fahrzeug:	$2x + 6z = 900$	(2)
2. Fahrzeug:	$4y + 6z = 900$	(3)

Aus der Gl. (1) finden wir $x = 900 - 3y - 3z$. Wir setzen für x in (2) ein und erhalten nach der Umformung:

$$2(900 - 3y - 3z) - 6z = 900$$
$$1800 - 6y - 6z + 6z = 900$$
$$-6y = -900$$
$$y = 150$$

Nach Einsetzen für y in (3) erhalten wir:

$$4 \cdot 150 + 6z = 900$$
$$6z = 900 - 600$$
$$z = 50$$

Nach Einsetzen in (1) für y und z erhalten wir $x = 300$.

Antwort: Ein großes Möbelstück hatte die Masse von 300 kg, ein mittleres von 150 kg und ein kleines von 50 kg.

246. Unter drei Lehrlingen sollte ein bestimmter Geldbetrag so aufgeteilt werden, daß der zweite 20 M weniger als der erste, der dritte 20 M weniger als der zweite bekommt; der Gesamtbetrag war 25 M höher als das Vierfache der Summe, die der dritte Lehrling bekam. Wieviel bekam jeder Lehrling?

Lösung:

a) Wenn der Anteil des ersten x, der des zweiten y und der des dritten z M ist, erhalten wir entsprechend der Aufgabenstellung:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 20 \\ y = z + 20 \\ x + y + z = 4z + 25 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 75,\ y = 55,\quad z = 35$$

b) Wir können die Aufgabe auch mit nur einer Unbekannten lösen. Wenn der Anteil des ersten Lehrlings x M ist, dann wird der des zweiten $(x - 20)$ M und der Anteil des dritten $(x - 40)$ M betragen. Alle drei bekommen zusammen $(3x - 60)$ M.
Entsprechend der Aufgabe erhalten wir also:

$$3x - 60 = 4(x - 40) + 25 \Rightarrow x = 75$$

Antwort: Der erste Lehrling bekam 75 M, der zweite $(x - 20)$ M $= 75$ M $- 20$ M $= 55$ M und der dritte $(x - 40)$ M $= 35$ M.

247. Wenn man die eine Kantenlänge eines Quaders um 1 cm vergrößert, vergrößert sich der Inhalt der Oberfläche um 54 cm²; vergrößert man die zweite Kantenlänge um 2 cm, wächst der Oberflächeninhalt um 96 cm²; wenn man die Länge der dritten Kante um 3 cm vergrößert, wächst der Inhalt der Oberfläche um 126 cm². Bestimmen Sie die Abmessungen des Quaders!

Lösung: Die Abmessungen des Quaders bezeichnen wir mit a, b und c. Die Oberfläche des Quaders ist

$$A_0 = 2(ab + bc + ac)$$

Wenn man a cm um 1 cm vergrößert, wird die neue Abmessung $(a + 1)$, und die Oberfläche wird dann:

$$2[(a + 1)\, b + bc + (a + 1)\, c]$$
$$= 2(ab + bc + ac) + 54$$

Wenn wir b cm um 2 cm vergrößern, wird die Oberfläche zu

$$2[a(b + 2) + (b + 2)\, c + ac]$$
$$= 2(ab + bc + ac) + 96$$

Wenn wir c cm um 3 cm vergrößern, ist die Oberfläche:

$$2[ab + b(c + 3) + a(c + 3)]$$
$$= 2(ab + bc + ac) + 126$$

Wir haben somit drei Gleichungen mit drei Unbekannten erhalten, nach deren Umformung wir erhalten:

$$c + b = 27$$
$$a + b = 21$$
$$a + c = 24$$

Ihre Lösung ist $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$

Antwort: Die Abmessungen des Quaders sind 9 cm, 12 cm und 15 cm.

248. Im vierstöckigen Wohngebäude einer Universität sind 600 Studenten untergebracht. In der ersten Etage wohnen doppelt soviel Studenten wie in der vierten Etage. Die

Anzahl der Studenten in der zweiten und dritten Etage gleicht der Anzahl der Studenten in der vierten und in der ersten Etage, wobei die Anzahl der Studenten in der dritten Etage $\frac{5}{7}$ der Anzahl der Studenten der zweiten Etage ausmacht. Wieviel Studenten waren auf jeder Etage?

Lösung: Die Anzahl der Studenten auf der ersten Etage bezeichnen wir mit x, die der zweiten Etage mit y, die der dritten Etage mit z und die der vierten Etage mit $600-(x+y+z)$. Aus der ersten Bedingung der Aufgabe folgt, daß $x = 2[600-(x+y+z)]$, aus der zweiten $y+z = x+600-(x+y+z)$ und aus der dritten $z = \frac{5}{7}y$. Somit erhalten wir ein System dreier Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$3x + 2y + 2z = 1\,200$$
$$y + x = 300$$
$$5y - 7z = 0$$

Dann ist $x = 200$, $y = 175$, $z = 125$.

Antwort: In der ersten Etage wohnen 200, in der zweiten 175, in der dritten 125 und in der vierten 100 Studenten.

249. Drei Säcke mit Getreide der Güteklasse I enthalten mit zwei Säcken Getreide der Klasse II und einem Sack Getreide der Klasse III 39 Wirkstoffeinheiten. Zwei Säcke Getreide der ersten Klasse bilden mit drei Säcken Getreide der zweiten Klasse und einem Sack der dritten Klasse 34 Einheiten Wirkstoff. Ein Sack der ersten Klasse bildet mit zwei Säcken der zweiten Klasse und drei Säcken der dritten Klasse 26 Einheiten des Wirkstoffs. Wieviel Einheiten des Wirkstoffs sind in jedem Sack enthalten? (Chinesische Aufgabe aus dem 2. oder 1. Jh. u. Z.)

Lösung: Mögen in einem Sack der ersten Getreideklasse x Einheiten, in einem Sack der zweiten Getreideklasse y Einheiten und in einem Sack der dritten Getreideklasse z Einheiten sein. Aus der Aufgabe folgt das Gleichungssystem:

$$3x + 2y + z = 39$$
$$2x + 3y + z = 34 \Rightarrow x = 9\frac{1}{4},\ y = 4\frac{1}{4}$$
$$z = 2\frac{3}{4}$$
$$x + 2y + 3z = 26$$

Antwort: Im Getreide der ersten Klasse waren in jedem Sack $9\frac{1}{4}$ Einheiten, der zweiten Klasse $4\frac{1}{4}$ Einheiten und der dritten Klasse $2\frac{3}{4}$ Einheiten des Wirkstoffs enthalten.

250. In ein Bassin führten 3 Zuleitungsrohre. Wenn das Wasser durch das Rohr A 5 h, durch das Rohr B 2 h und durch das Rohr C 3 h zufloß, waren im Bassin 180 m³ Wasser. Wenn das Wasser durch das Rohr A 3 h, durch das Rohr B 2 h und durch das Rohr C 1 h zufloß, waren im Bassin 100 m³ Wasser. Wenn das Wasser durch das Rohr A 6 h, durch das Rohr B 4 h und durch das Rohr C 3 h zufloß, waren im Bassin 230 m³ Wasser. Wieviel Wasser floß in einer Stunde durch jedes Rohr zu?

Arithmetische Lösung: Die Bedingungen der Aufgabe veranschaulichen wir uns wie folgt:

$$\boxed{AAAAA} + \boxed{BB} + \boxed{CCC} \Rightarrow 180\ \text{m}^3$$
$$\boxed{AAA} + \boxed{BB} + \boxed{C} \Rightarrow 100\ \text{m}^3$$
$$\boxed{AAAAAA} + \boxed{BBBB} + \boxed{CCC} \Rightarrow 230\ \text{m}^3$$

oder als Übersicht:

Erste Bedingung: A 5 Stunden + B 2 Stunden + C 3 Stunden ... 180 m³
Zweite Bedingung: A 3 Stunden + B 2 Stunden + C 1 Stunde ... 100 m³
Dritte Bedingung: A 6 Stunden + B 4 Stunden + C 3 Stunden ... 230 m³

1. Wenn wir das Doppelte der zweiten Bedingung von der dritten Bedingung subtrahieren, stellen wir fest, daß durch das Rohr C in 1 h 30 m³ Wasser zufließen.
2. In die erste und zweite Bedingung setzen wir den im Punkt 1 berechneten Wert ein und

subtrahieren von der ersten Bedingung die zweite, wobei wir feststellen, daß in 2 h durch das Rohr A 20 m³ Wasser zufließen, also in einer Stunde durch dieses 10 m³ Wasser zufließen.

3. Durch Einsetzen in die zweite Bedingung stellen wir fest, daß durch das Rohr B in 2 h $(100 - 3 \cdot 10 - 1 \cdot 30)\ \text{m}^3 = 40\ \text{m}^3$ Wasser, also in einer Stunde 20 m³ Wasser zufließen.

Durch Einsetzen in die übrigen Bedingungen überzeugen wir uns von der Richtigkeit der Lösung.

Lösung mit Hilfe einer Gleichung: Die Wassermengen, die in einer Stunde durch die Rohre A, B und C zufließen, bezeichnen wir durch x, y und z m³. Entsprechend der Aufgabe gilt:

$$5x + 2y + 3z = 180$$
$$3x + 2y + z \ \ = 100$$
$$6x + 4y + 3z = 230$$

Das gegebene System hat die Lösung $x = 10$, $y = 20$, $z = 30$. Das Vorgehen bei der Lösung des Systems ist analog dem Vorgehen bei der arithmetischen Lösung.

Antwort: Durch das Rohr A fließt je Stunde die Menge von 10 m³ zu, durch das Rohr B 20 m³ und durch das Rohr C 30 m³ Wasser.

251. Ein Becher hat eine Masse von 100 g. Eine Flasche und ein Becher haben zusammen die gleiche Masse wie ein Krug. Eine Flasche hat die Masse wie ein Becher und ein Teller, sowie zwei Krüge haben die gleiche Masse wie drei Teller. Wie schwer ist die Flasche?

Lösung: Der Becher hat eine Masse von 100 g, die Flasche von y g, der Teller von x g und der Krug von v g. Entsprechend der Aufgabe gilt:

$$100 + y = v$$
$$y = 100 + z$$
$$2v = 3z$$

Die Lösung des Systems ist $y = 500$.

Antwort: Die Flasche hat eine Masse von 500 g.

252. Ein Goldschmied hat drei Stangen Legierung.

In der ersten Stange sind 4 g Gold (Au), 8 g Silber (Ag) und 12 g Kupfer (Cu), in der zweiten 8 g Gold (Au), 10 g Silber (Ag) und 2 g Kupfer (Cu), in der dritten 10 g Gold (Au), 6 g Silber (Ag) und 14 g Kupfer (Cu) enthalten.

Aus diesen Stangen will er eine Stange herstellen, die 10 g Gold, 10 g Silber und 11 g Kupfer enthält. Wieviel Gramm muß er von jeder Stange nehmen?

Lösung: Möge er von der ersten Stange x, von der zweiten y und von der dritten z g nehmen.

In 1 g der ersten Stange sind $\frac{1}{6}$ g Au, $\frac{1}{3}$ g Ag, $\frac{1}{2}$ g Cu;

in 1 g der zweiten Stange sind $\frac{2}{5}$ g Au, $\frac{1}{2}$ g Ag, $\frac{1}{10}$ g Cu;

in 1 g der dritten Stange sind $\frac{1}{3}$ g Au, $\frac{1}{5}$ g Ag, $\frac{7}{15}$ g Cu;

also

in x g der ersten Stange sind $\frac{x}{6}$ g Au, $\frac{x}{3}$ g Ag, $\frac{x}{2}$ g Cu;

in y g der zweiten Stange sind $\frac{2y}{5}$ g Au, $\frac{y}{2}$ g Ag, $\frac{y}{10}$ g Cu;

in z g der dritten Stange sind $\frac{z}{3}$ g Au, $\frac{z}{5}$ g Ag, $\frac{7z}{15}$ g Cu enthalten.

Entsprechend der Aufgabenstellung sollen in der neuen Stange 10 g Gold, 10 g Silber und 11 g Kupfer enthalten sein; wir erhalten also das Gleichungssystem:

$$\frac{x}{6} + \frac{2y}{5} + \frac{z}{3} = 10$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 10 \Rightarrow x = 6, \quad y = 10, \quad z = 15$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{10} + \frac{7z}{15} = 11$$

Antwort: Von der ersten Stange müssen 6 g, von der zweiten 10 g und von der dritten 15 g genommen werden.

253. In drei Gefäßen sind 18 l Wasser enthalten. Die Hälfte des Wassers gossen wir aus dem ersten Gefäß in das zweite um, $\frac{1}{3}$ des Wassers gossen wir aus dem zweiten in das dritte, $\frac{1}{4}$ der Wassermenge gossen wir aus dem dritten in das erste Gefäß; danach verblieb in jedem Gefäß die gleiche Wassermenge. Welche Wassermenge war ursprünglich in jedem Gefäß?

Lösung: Die ursprünglichen Wassermengen in den Gefäßen bezeichnen wir mit x l, y l und z l. Aus der Aufgabe folgt:

$\left[\frac{x}{2}+y-\frac{\left(\frac{x}{2}+y\right)}{3}\right]$ l Wasser verblieben im zweiten Gefäß,

$\left[\frac{\frac{x}{2}+y}{3}+z-\frac{\left(\frac{\frac{x}{2}+y}{3}+z\right)}{4}\right]$ l Wasser verblieben im dritten Gefäß,

$\left[\frac{\frac{\frac{x}{2}+y}{3}+z}{4}+\frac{x}{2}\right]$ l Wasser verblieben im ersten Gefäß nach dem Umgießen.

Da diese Mengen nach dem Umgießen gleich groß waren, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{x}{2}+y-\left(\frac{x+2y}{6}\right)=6$$

$$\frac{x+2y}{6}+z-\frac{\frac{x+2y}{6}+z}{4}=6$$

$$\frac{\frac{x+2y}{6}+z}{4}+\frac{x}{2}=6$$

und nach der Umformung:

$$x+2y=18$$
$$x+2y+6z=48$$
$$13x+2y+6z=144$$

Die Lösung des Systems ist $x=8$, $y=5$, $z=5$.

Antwort: Die ursprüngliche Wassermenge im ersten Gefäß war 8 l, im zweiten 5 l und im dritten 5 l.

254. Vier Jugendliche hatten 45 M. Wenn sich der Besitz des ersten um 2 M vergrößerte, die Barschaft des zweiten um 2 M verringerte, das Vermögen des dritten verdoppelte und die Barschaft des vierten sich um die Hälfte verringerte, hätten sie alle gleich viel Geld. Wieviel hatte jeder einzelne?

Lösung: Die Geldmengen bezeichnen wir mit x, y, z und t M. Dann folgt aus der Aufgabe:

$$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$$

Es ist also:

$$y=x+4$$
$$z=\frac{x+2}{2}$$
$$t=2x+4$$

Zusammen hatten sie:

$$x+(x+4)+\left(\frac{x+2}{2}\right)+(2x+4)=45$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$x=8$, und dann ist

$y=12$, $z=5$, $t=20$.

Antwort: Der erste Jugendliche besaß 8 M, der zweite 12 M, der dritte 5 M und der vierte 20 M.

255. Für 10 Ansichtskarten, 12 gleiche Briefmarken und 6 Bogen Briefpapier muß man 5,20 M bezahlen. Für 2 Karten und 6 gleiche Briefmarken muß man 1,55 M mehr bezahlen als für 3 Bogen Briefpapier. Für 8 Karten und 2 Bogen Briefpapier muß man 1,50 M mehr bezahlen als für 3 Briefmarken. Wieviel kostet eine Karte, wieviel 1 Briefmarke und wieviel ein Bogen Briefpapier?

Lösung: Den Preis für eine Karte bezeichnen wir mit x Pf, den der Briefmarke mit y Pf und den des Briefpapiers mit z Pf. Es gilt also:

$$\begin{aligned} 10x + 12y + 6z &= 5{,}20 \\ 2x + 6y - 3z &= 1{,}55 \Rightarrow x = 25,\ y = 20,\ z = 5 \\ 8x - 3y + 2z &= 1{,}50 \end{aligned}$$

Antwort: Die Ansichtskarte kostete 25 Pf, die Briefmarke 20 Pf und das Papier 5 Pf.

256. In einem Philatelistenzirkel eines Jugendklubhauses waren 38 Jungen unterschiedlichen Alters, 10-, 11-, 12-, 13- und 14jährige. Elfjährige waren es genau soviel wie dreizehnjährige, zehnjährige genau soviel wie vierzehnjährige, zwölfjährige waren 3 mehr als elfjährige und elfjährige 5 mehr als zehnjährige Jungen. Wieviel waren von jeder Altersstufe vertreten?

Lösung: Mögen es je x elf- und dreizehnjährige Jungen, je y zehn- und vierzehnjährige und z zwölfjährige gewesen sein. Aus den Bedingungen der Aufgabe erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 38 \\ z - 3 &= x \Rightarrow x = 9,\ y = 4,\ z = 12 \\ x - 5 &= y \end{aligned}$$

Antwort: Es waren 9 elfjährige, 9 dreizehnjährige, 4 zehnjährige, 4 vierzehnjährige und 12 zwölfjährige Jungen.

257. „Die Königliche Krone hatte eine Masse von 60 Mina[1], sie war aus Gold, Kupfer, Blei und Eisen. Das Gold macht zusammen mit dem Kupfer $\frac{2}{3}$ der Masse aus, das Gold zusammen mit dem Blei $\frac{3}{4}$ der Masse, das Eisen zusammen mit dem Gold $\frac{3}{5}$ der Masse. Ermitteln Sie, wieviel von jedem Metall in der Königlichen Krone enthalten war." (Aufgabe des griechischen Mathematikers Metrodor — 3. Jh. v. u. Z.)

[1] altes griechisches Massen- und Gefäßmaß 1 Mina, auch 1 Mna = 100 Drachmen oder 1/60 Talent

Lösung: Möge x den Goldgehalt in der Krone, y den Kupfergehalt, z den Bleigehalt und t den Eisengehalt kennzeichnen. Aus der ersten Bedingung erhalten wir die Gleichung: $x + y + z + t = 60$, aus der zweiten $x + y = \frac{2}{3} \cdot 60$, aus der dritten $x + z = \frac{3}{4} \cdot 60$ und aus der vierten $x + t = \frac{3}{5} \cdot 60$. Somit erhalten wir das Gleichungssystem mit vier Unbekannten:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 60 \\ x + y &= 40 \Rightarrow x = 30{,}5,\ y = 9{,}5 \\ x + z &= 45 \qquad z = 14{,}5,\ t = 5{,}5 \\ x + t &= 36 \end{aligned}$$

Antwort: Die Königliche Krone enthielt 30,5 Mina Gold, 9,5 Mina Kupfer, 14,5 Mina Blei und 5,5 Mina Eisen.

258. Drei Maurer sollen gemeinsam eine Mauer errichten. Zwei Maurer, K und L, würden die Mauer in 12 Tagen, die Maurer K und Z gemeinsam in 15 Tagen, die Maurer L und Z gemeinsam in 20 Tagen errichten. Wie lange würde jeder der Maurer die Mauer errichten, arbeitete er allein? Wie lange werden die Maurer alle gemeinsam die Mauer fertigstellen?

Lösung: Der Maurer K würde die Arbeit allein in x Tagen, der Maurer L in y Tagen, der Maurer Z in z Tagen erledigen. Das bedeutet, daß der Maurer K an einem Tag $\frac{1}{x}$ der Arbeit, der Maurer L $\frac{1}{y}$ der Arbeit und der Maurer Z $\frac{1}{z}$ der Arbeit ausführt. Wenn K und L gemeinsam arbeiten, führen sie an einem Tag aus:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

Analog können wir zwei weitere Gleichungen schreiben:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20}$$

Wenn wir $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ und $\frac{1}{z} = w$ bezeichnen, dann wird das System folgende Form annehmen:

$$u + v = \frac{1}{12}$$
$$u + w = \frac{1}{15} \qquad (1)$$
$$v + w = \frac{1}{20}$$

Nach der Umformung des Systems (1) erhalten wir das System:

$$12u + 12v = 1$$
$$15u + 15w = 1$$
$$20v + 20w = 1,$$

woraus dann $u = \frac{1}{20}$, $v = \frac{1}{30}$ und $w = \frac{1}{60}$. Damit finden wir $x = 20$, $y = 30$ und $z = 60$.

Antwort: Der Maurer K würde die Arbeit allein in 20 Tagen, der Maurer L in 30 Tagen und der Maurer Z in 60 Tagen ausführen. Wenn sie alle gemeinsam arbeiten würden, erledigten sie an einem Tag $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{10}$. Das bedeutet, daß alle gemeinsam die Mauer in 10 Tagen errichten würden.

259. Drei Widerstände $R_1 = x\,\Omega$, $R_2 = y\,\Omega$ und $R_3 = z\,\Omega$ wurden abwechselnd paarweise parallel geschaltet, wobei die resultierenden Widerstände $R_1' = 0{,}66\,\Omega$, $R_2' = 0{,}75\,\Omega$ und $R_3' = 1{,}2\,\Omega$ gemessen wurden. Berechnen Sie die Widerstände R_1, R_2 und R_3.

Lösung: Für parallel geschaltete Widerstandsdrähte gilt:

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$
$$\frac{1}{R_2'} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \qquad (1)$$
$$\frac{1}{R_3'} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

wobei

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{R_2'} = \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{R_3'} = \frac{5}{6}.$$

Wir substituieren: $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, $\frac{1}{z} = w$.

Durch Einsetzen in (1) erhalten wir:

$$\frac{3}{2} = u + v$$
$$\frac{4}{3} = u + w \qquad (2)$$
$$\frac{5}{6} = v + w$$

Nach der Umformung des Systems (2) finden wir:

$$2u + 2v = 3$$
$$3u + 3w = 4 \qquad (3)$$
$$6v + 6w = 5$$

Daraus ist $u = 1$, $v = \frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{3}$, dann wird $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Antwort: $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$.

260. Karl und Hans haben zusammen 3400 M, Hans und Heinrich 3840 M. Karl und Heinrich besitzen gemeinsam 3560 M. Wieviel hat jeder von ihnen?

Lösung: Karl hat x M, Hans y M und Heinrich z M. Entsprechend der Aufgabenstellung erhalten wir das Gleichungssystem:

$$x + y = 3400$$
$$y + z = 3840$$
$$x + z = 3560$$

Daraus finden wir $x = 1560$, $y = 1840$, $z = 2000$.

Antwort: Karl hat 1560 M, Hans 1840 M und Heinrich 2000 M.

261. In der UdSSR gibt es Banknoten zu 1, zu 3 und zu 5 Rubel sowie solche zu 10 Rubel (1 Rubel hat etwa den gleichen Wert wie 3,20 M).
Auf wieviel verschiedene Arten kann man in der Sowjetunion einen Zehnrubelschein in

Scheine anderer Werte wechseln? (Unbestimmte Gleichung)

Lösung: Beim Wechseln können wir 1-Rubel-, 3-Rubel- und 5-Rubel-Scheine verwenden. Die Anzahl der verwendeten Scheine zu 1 Rubel bezeichnen wir mit x, zu 3 Rubel mit y und zu 5 Rubel mit z. Dann gilt:

$$x + 3y + 5z = 10 \qquad (1)$$

Bei der Lösung der Gl. (1) sind die Zahlen x, y und z selbstverständlich natürliche Zahlen (ganze Zahlen größer gleich 0). Die Gl. (1) ist eine unbestimmte, man kann sie in folgender Form schreiben:

$$x = 10 - 3y - 5z \qquad (2)$$

Für z können wir 0, 1 oder 2 und für y nur 0, 1, 2 oder 3 ansetzen. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

Fall	y	z	x
1	0	0	10
2	0	1	5
3	0	2	0
4	1	0	7
5	1	1	2
6	2	0	4
7	3	0	1

Andere Fälle sind nicht möglich.

Antwort: Ein Zehn-Rubel-Schein läßt sich (in Scheinen) auf siebenfache Art wechseln.

3.3. Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

262. Der Umfang eines Parallelogramms ist $U = 16$ cm, eine Seite ist um $n = 4$ cm länger als die benachbarte Seite. Berechnen Sie die Seiten des Parallelogramms.

Lösung: Die Seiten des Parallelogramms bezeichnen wir mit x, y und den Umfang mit $2(x + y)$; aus der Aufgabenstellung erhalten wir:

$$2(x + y) = U$$

$$x = y + n$$

$$x = \frac{U + 2n}{4} = \frac{16 + 2 \cdot 4}{4} = 6$$

$$y = \frac{U - 2n}{4} = \frac{16 - 2 \cdot 4}{4} = 2$$

Diskussion: Über die Parameter U und n gilt: $U > 0$, $n > 0$. Da x und y die Seiten eines Parallelogramms darstellen, müssen $x > 0$ und $y > 0$ sein.

$$\left.\begin{array}{l} x > 0, \text{ so } U + 2n > 0 \\ y > 0, \text{ so } U - 2n > 0 \end{array}\right. \Rightarrow U > 2n$$

Antwort: Die Seiten des Parallelogramms sind 6 cm und 2 cm lang.

263. ϱ (6,4 g/cm³) sei die Dichte einer Legierung, ϱ_1 (5,7 g/cm³) und ϱ_2 (7,8 g/cm³) die Dichten der Grundmetalle der Legierung. Berechnen Sie das Massenverhältnis der Metalle in der Legierung.

Lösung: Vom ersten Metall waren in der Legierung x g, vom zweiten y g enthalten. Die Legierung hat eine Masse von $(x + y)$ g. Das Volumen des ersten Metalls ist $\frac{x}{\varrho_1}$ cm³, das des zweiten $\frac{y}{\varrho_2}$ cm³, und das Volumen der Legierung beträgt $\frac{(x + y)}{\varrho}$ cm³. Es ist also:

$$x + y = \left(\frac{x}{\varrho_1} + \frac{y}{\varrho_2}\right)\varrho \Rightarrow x\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= y\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

Daher:

$$x : y = \frac{\varrho_2 - \varrho}{\varrho\varrho_2} : \frac{\varrho - \varrho_1}{\varrho\varrho_1} = \frac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)}{\varrho_2(\varrho - \varrho_1)}$$

$$= \frac{5{,}7(7{,}8 - 6{,}4)}{7{,}8(6{,}4 - 5{,}7)} = \frac{5{,}7 \cdot 1{,}4}{7{,}8 \cdot 0{,}7} = \frac{57}{39}$$

Diskussion: Damit die Aufgabe eine Lösung hat, muß die Dichte der Legierung zwischen den Dichten der zur Legierung verarbeiteten Metalle liegen. Das resultiert aus der Beziehung

$$\frac{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho)}{\varrho_2(\varrho - \varrho_1)},$$

wobei sein muß $\varrho_2 - \varrho > 0$
und gleichzeitig

$\varrho - \varrho_1 > 0 \Rightarrow \varrho_2 > \varrho > \varrho_1$ oder $\varrho_2 - \varrho < 0$

und gleichzeitig

$\varrho - \varrho_1 < 0 \Rightarrow \varrho_2 < \varrho < \varrho_1$.

Antwort: Das Masseverhältnis der Metalle in der Legierung ist hier 57:39.

264. Ein Zug fährt an einem Beobachter in der Zeit $t_1 = 3$ s vorbei, über eine $s = 75$ m lange Brücke in $t_2 = 6$ s. Wie hoch ist seine Geschwindigkeit, und wie lang ist er?

Lösung: Die Länge des Zuges bezeichnen wir mit l. Die Strecke, die gleich der Länge l ist, durchfährt er in der Zeit t_1 (Vorbeifahren am Beobachter). Die Zeit t_2 gilt vom Zeitpunkt an, in dem das Vorderteil des Zuges an den Brückenanfang gelangt, bis zu dem Zeitpunkt, in dem der letzte Waggon die Brücke verläßt; das bedeutet, daß er in der Zeit t_2 die Strecke $(s + l)$ zurücklegt. Wir können also folgendes Gleichungssystem schreiben:

$$vt_2 = s + l,\ s > 0$$

$$vt_1 = l$$

Nach Einsetzen aus der zweiten Gleichung vt_1 in die erste für l gilt:

$$(t_2 - t_1)\,v = s \Rightarrow v = \frac{s}{t_2 - t_1},\quad t_2 > t_1$$

$$v = \frac{75\text{ m}}{(6 - 3)\text{ s}} = 25\text{ m s}^{-1} = 90\text{ km h}^{-1}$$

Durch Einsetzen für v in die zweite Gleichung erhalten wir:

$$l = \frac{st_1}{t_2 - t_1} = \frac{75\text{ m}\cdot 3\text{ s}}{(6 - 3)\text{ s}} = 75\text{ m}$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Zuges beträgt 90 km h^{-1}, und seine Länge ist 75 m.

265. Ein Betrieb liefert $p\%$ seiner Erzeugnisse für den Export, den Rest für den Binnenmarkt.

a) Der Betrieb wird beauftragt, den Export um $q\%$ und die Lieferungen für den Binnenmarkt um $r\%$ zu erhöhen. Um wieviel Prozent muß er insgesamt die Produktion steigern?

b) Der Betrieb steigert seine Gesamtproduktion um $s\%$. Von dieser Steigerung liefert er das Dreifache der Lieferungen an den Binnenmarkt für den Export. Um wieviel Prozent sind seine Lieferungen für den Export und um wieviel Prozent die Lieferungen für den Binnenmarkt angestiegen?

Lösung:

a) Die ursprüngliche Anzahl der Erzeugnisse (in einem bestimmten Zeitraum) bezeichnen wir mit n. Davon entfielen für den Export $\left(\frac{p}{100}n\right)$ Erzeugnisse und auf den Binnenmarkt $\left[\left(1 - \frac{p}{100}\right)n\right]$ Erzeugnisse. Bei der Produktionssteigerung entfallen auf den Export $\left[\left(1 + \frac{q}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}\,n\right]$ Erzeugnisse, auf den Binnenmarkt $\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)n\right]$ Erzeugnisse. Wenn die Gesamterhöhung der Produktion mit $x\%$ gegeben ist, dann beträgt die gesteigerte Erzeugnismenge $\left[\left(1 + \frac{x}{100}\right)n\right]$.

Entsprechend der Bedingung der Aufgabe a) ist

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}\,n + \left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)n$$
$$= \left(1 + \frac{x}{100}\right)n$$

Nach der Umformung folgt:

$$x = r + \frac{p}{100}\,(q - r) \tag{1}$$

So ergibt sich zahlenmäßig für

$p = 40,\ q = 20,\ r = 25:\ x = 23.$

Antwort 1: Der Betrieb muß die Gesamtproduktion um 23% steigern.

b) Im zweiten Teil der Aufgabe gilt zwischen den Zahlen r, s und q, r (es sind dies die gesuchten Prozentzahlen der Steigerung der Lieferungen) entsprechend (1) die Beziehung:

$$s = r + \frac{p}{100}\,(q - r) \tag{2a}$$

Der Zuwachs der Lieferungen für den Export ist $\left(\frac{q}{100}\cdot\frac{p}{100}\,n\right) = \left(\frac{pq}{100^2}\,n\right)$ Erzeugnisse, der Zuwachs der Lieferungen für den Binnenmarkt ist $\left[\frac{r}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right)n\right]$ Erzeugnisse. Entsprechend der Aufgabe ist:

$$\frac{pq}{100^2}\, n = 3 \cdot \frac{r}{100}\left(1 - \frac{p}{100}\right) n$$

Nach dem Umformen:

$$pq = 3r(100 - p) \tag{2b}$$

Die Gln. (2a) und (2b) bilden ein System zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten q, r, und als Lösung erhalten wir:

$$q = \frac{75s}{p}, \; r = \frac{25s}{100 - p}, \; s > 0, \; 0 < p < 100\%$$

Für $s = 8$, $p = 40$ ergibt sich zahlenmäßig

$$q = 15\%, \; r = \frac{10}{3}\,\%.$$

Antwort 2: Die Lieferungen für den Export stiegen um 15% und die für den Binnenmarkt um $\frac{10}{3}$ %.

266. Ein Betrieb kaufte für m (400) M Material zweierlei Art ein, und zwar für a (16) M und für b (12) M je 1 m. Wenn er von der zweiten Art so viel gekauft hätte wie von der ersten und von der ersten Art so viel wie von der zweiten, dann hätte er für beide Arten des Materials die gleiche Summe bezahlt. Wieviel Meter Material jeder Art kaufte der Betrieb?

Lösung: Möge x die Anzahl an Metern der ersten Materialart und y die Anzahl an Metern der zweiten Art sein. Aus der Aufgabe folgt:

1. Bedingung

$$\begin{matrix} x \text{ m zu } a \text{ M} \\ y \text{ m zu } b \text{ M} \end{matrix} \Rightarrow ax + by = m \tag{1}$$

2. Bedingung

$$\begin{matrix} y \text{ m zu } a \text{ M} \\ x \text{ m zu } b \text{ M} \end{matrix} \Rightarrow ay = bx \tag{2}$$

Als Lösung von (1) und (2) finden wir:

$$x = \frac{am}{a^2 + b^2}, \; a > 0, \quad b > 0, \quad m > 0;$$

$$x = \frac{16 \cdot 400}{16^2 + 12^2} = 16$$

$$y = \frac{bm}{a^2 + b^2}; \; y = \frac{12 \cdot 400}{16^2 + 12^2} = 12$$

Antwort: Der Betrieb kaufte vom ersten Material 16 m und vom zweiten 12 m.

267. Berechnen Sie, wieviel Gramm Silber von der Qualität a (0,850) und Silber von der Qualität b (0,720) verwendet werden müssen, um m (1040) g Silberlegierung von der Qualität c (0,800) zu gewinnen. (Die durch die Zahl 0,850 angegebene Qualität kennzeichnet den Gehalt an reinem Silber in der Legierung. Also bedeutet 0,850, daß in 1000 g Legierung 850 g reines Silber enthalten sind.)

Lösung: Wir setzen voraus, daß in der Legierung gerade so viel reines Silber enthalten ist, wie in beiden verwendeten Mengen von der Qualität a und b. Möge die Silbermenge von der Qualität ax g und die Silbermenge von der Qualität by g sein. x g Silber von der Qualität a enthalten ax g reinen Silbers. y g Silber der Qualität b enthalten by g reinen Silbers. Da entsprechend der Aufgabe die Legierung m g Silber von der Qualität c enthalten soll, erhalten wir die Gleichungen:

$$x + y = m \qquad \text{und} \qquad ax + by = cm,$$

woraus wir dann finden:

$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot m, \qquad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot m$$

Diskussion: Für die Parameter a, b, c und m gilt: $a > 0, b > 0, c > 0$ und $m > 0$. Aus den Bedingungen der Aufgabe folgt, daß auch x und y Zahlen mit positivem Vorzeichen sein müssen, daher ist

$$c - b > 0 \Rightarrow c > b$$

$$a - b > 0 \Rightarrow a > b \Rightarrow b < c < a$$

$$a - c > 0 \Rightarrow a > c$$

oder

$$c - b < 0 \Rightarrow c < b$$

$$a - b < 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow a < c < b$$

$$a - c < 0 \Rightarrow a < c$$

$$x = \frac{0{,}800 - 0{,}720}{0{,}850 - 0{,}720} \cdot 1040 = 640,$$

$$y = \frac{0{,}850 - 0{,}800}{0{,}850 - 0{,}720} \cdot 1040 = 400$$

Antwort: Es müssen 640 g Silber von der Qualität 0,850 und 400 g Silber von der Qualität 0,720 verwendet werden.

268. Das Verhältnis zweier positiver Zahlen ist $a:b$. Wenn wir die erste Zahl um p und die zweite Zahl um q vermehren, wird das Verhältnis dieser Zahlen $m:n$ sein. Berechnen Sie beide Zahlen.

Lösung: Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit x und mit y. Als erste Bedingung haben wir:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \tag{1}$$

als zweite Bedingung folgt:

$$\frac{x+p}{y+q} = \frac{m}{n} \tag{2}$$

Die Lösung des Systems dieser beiden Gleichungen führt zu:

$$x = \frac{a(mq - np)}{an - bm}$$

$$y = \frac{b(mq - np)}{an - bm}$$

Diskussion: Für die Parameter a, b, p, q, m und n gilt:

$$a > 0,\ b > 0,\ p > 0,\ q > 0,\ m > 0,\ n > 0.$$

Die Realität fordert, daß x und y Zahlen mit positivem Vorzeichen sein müssen, deshalb ist

$x > 0$, $y > 0$, so $mq - np > 0$

und gleichzeitig $an - bm > 0$

oder

$mq - np < 0$

und gleichzeitig $an - bm < 0$

Es ist für $a = 6$, $b = 4$, $m = 5$, $n = 4$, $p = 2$, $q = 3$:

$$x = \frac{6(5 \cdot 3 - 4 \cdot 2)}{6 \cdot 4 - 4 \cdot 5} = \frac{21}{2};$$

$$y = \frac{4(5 \cdot 3 - 4 \cdot 2)}{6 \cdot 4 - 4 \cdot 5} = 7$$

Antwort: Die beiden Zahlen sind $\frac{21}{2}$ und 7.

269. Zwei Siemens-Martin-Öfen sollen in a (9) Tagen die geplante Stahlmenge produzieren. Die Tagesproduktion des ersten Ofens ist m-(3-)mal so hoch wie die des zweiten. In wieviel Tagen kann jeder der Öfen die geplante Stahlmenge allein produzieren?

Lösung: Im ersten Ofen wird die geplante Stahlmenge in x Tagen und im zweiten in y Tagen produziert. Der erste Ofen produziert an einem Tag $\frac{1}{x}$, der zweite $\frac{1}{y}$ des geplanten Stahls. Aus der ersten Bedingung erhalten wir:

$$\frac{1}{x} = m \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{m}{y} = 0,$$

$$x \neq 0, \quad y \neq 0 \tag{1}$$

Wenn beide Öfen gleichzeitig arbeiten, produzieren sie die geplante Stahlmenge in a Tagen; an einem Tag produzieren sie $\frac{1}{a}$ der Gesamtmenge, oder

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \tag{2}$$

Wir erhalten also das Gleichungssystem:

$$\frac{1}{x} - \frac{m}{y} = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \quad \text{wobei } a > 0,\ m > 0$$

Wenn wir die Substitution $\frac{1}{x} = n$, $\frac{1}{y} = v$ durchführen, erhalten wir nach der Umformung:

$$\begin{array}{l} n + mv = 0 \\ an + av = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v = \dfrac{1}{a(m+1)}; \\ n = \dfrac{m}{a(m+1)} \end{array}$$

Dann ist:

$$x = \frac{a(m+1)}{m} = \frac{9(3+1)}{3} = 12$$

$$y = a(m+1) = 9(3+1) = 36$$

Antwort: Der erste Ofen produziert allein die geplante Stahlmenge in 12 Tagen und der zweite in 36 Tagen.

270. Berechnen Sie die Seiten eines Dreiecks, in dem die Summen zweier Seiten folgenden Zahlen entsprechen: a (8) cm, b (6) cm, c (5) cm.

Lösung: Die Seiten eines Dreiecks bezeichnen wir mit x, y und z. Aus der Aufgabe folgt das Gleichungssystem:

$$x + y = a$$
$$y + z = b$$
$$x + z = c$$

Daraus ergibt sich

$$x = \frac{a + c - b}{2}, \quad a + c > b;$$
$$x = \frac{8 + 5 - 6}{2} = 3{,}5$$
$$y = \frac{a + b - c}{2}, \quad a + b > c;$$
$$y = \frac{8 + 6 - 5}{2} = 4{,}5$$
$$z = \frac{b + c - a}{2}, \quad b + c > a;$$
$$z = \frac{6 + 5 - 8}{2} = 1{,}5$$

Antwort: Die Seiten des Dreiecks sind 3,5 cm, 4,5 cm und 1,5 cm.

271. Traktoristen sollen in a (= 96) h ein Feld bearbeiten. Der Traktor des einen ist jedoch durch einen Schaden ausgefallen und war d (= 16) h in Reparatur; infolgedessen verlängerte sich die Bearbeitungsdauer auf b (= 106) h. In wieviel Stunden hätte jeder Traktor allein das Feld gepflügt?

Lösung: Den Flächeninhalt des Feldes bezeichnen wir mit A. Der erste Traktorist würde das Feld in x, der zweite in y Stunden pflügen. Der erste pflügt in 1 Stunde $\frac{A}{x}$, der zweite $\frac{A}{y}$ des Feldes. Plangemäß sollte jeder a Stunden arbeiten, demnach sollte der erste $\left(\frac{A}{x}\cdot a\right)$ und der zweite $\left(\frac{A}{y}\cdot a\right)$ pflügen, zusammen sollten sie A pflügen. Da einer von ihnen seinen Traktor d Stunden in der Reparatur hatte und sich die Arbeit um b Stunden verlängerte, arbeitete der eine von ihnen $(b - d)$ Stunden und pflügte $\frac{A(b-d)}{x}$, der andere pflügte $\frac{Ab}{y}$ des Feldes. Zusammen pflügten sie A. Also

$$\frac{Aa}{x} + \frac{Aa}{y} = A$$
$$\frac{A(b-d)}{x} + \frac{Ab}{y} = A$$

Beide Gleichungen lassen sich mit $\frac{1}{A}$ multiplizieren, und nach der Umformung, nachdem wir $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$ (Substitution) gesetzt haben, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} au + av &= 1 \\ u(b-d) + bv &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= \frac{b-a}{ad} \\ v &= \frac{a-b+d}{ad} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{ad}{b-a}, \quad y = \frac{ad}{a-b+d}$$

Diskussion: Für die Parameter a, b und d gilt: $a > 0$, $b > 0$ und $d > 0$. Als Realitätsbedingung folgt, daß x und y Zahlen mit positivem Vorzeichen sein müssen, deshalb

$$\left.\begin{aligned} x > 0,\ \text{so}\ b - a > 0 \\ y > 0,\ \text{so}\ a - b + d > 0 \end{aligned}\right. \Rightarrow a + d > b > a$$

Antwort: Der erste Traktorist würde das Feld in $\frac{ad}{b-a} = 153{,}6$ h, der zweite in $\frac{ad}{a-b+d} = 256$ h pflügen.

272. Für a (10 m) Leinen und b (12 m) Dekostoff muß man d (260 M) bezahlen. Für die gleiche Summe kann man jedoch auch u (15 m) Leinen und v (5 m) Dekostoff kaufen. Wieviel kostet ein Meter Leinen und wieviel ein Meter Dekostoff?

Lösung: Möge ein Meter Dekostoff x M und ein Meter Leinen y M kosten. Aus der Aufgabe folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} bx + ay &= d \\ vx + uy &= d \end{aligned} \Rightarrow y = \frac{d(b-v)}{bu - av}, x = \frac{d(u-a)}{bu-av}$$

Diskussion: Für die Parameter a, b, d, u und v gilt: $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$, $u > 0$ und $v > 0$. Aus den Realitätsbedingungen folgt, daß x und y Zahlen mit positivem Vorzeichen sein müssen, daher:

$$\begin{aligned} &b - v > 0 \Rightarrow b > v \\ &u - a > 0 \Rightarrow u > a \quad \Rightarrow b > v, u > a \\ &bu - av > 0 \Rightarrow bu > av \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &b - v < 0 \Rightarrow b < v \\ &u - a < 0 \Rightarrow u < a \quad \Rightarrow b < v, u < a \\ &bu - av < 0 \Rightarrow bu < av \end{aligned}$$

Antwort: Das Meter Leinen kostet

$$\frac{d(b-v)}{bu-av} = \frac{260(12-5)}{12 \cdot 15 - 10 \cdot 5}\,\mathrm{M} = 14\,\mathrm{M},$$

das Meter Dekostoff kostet

$$\frac{d(u-a)}{bu-av} = \frac{260(15-10)}{130}\,\mathrm{M} = 10\,\mathrm{M}$$

273. In einen Wasserbehälter fließt durch zwei Zuleitungen Wasser zu, durch die er in a Minuten gefüllt wird. Wenn wir die erste Zuleitung für b Minuten und die zweite für c Minuten öffnen, füllt sich nur der m-te Teil des Wasserbehälters. In welcher Zeit füllt sich der Wasserbehälter durch jede Zuleitung gesondert?

Lösung: Die gesuchten Zeiten bezeichnen wir mit x min und y min. Es mögen durch die erste Zuleitung q_1 l/min und durch die zweite Zuleitung q_2 l/min zufließen. Das Volumen des Wasserbehälters ist V l. Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\begin{aligned} q_1 a + q_2 a &= V \\ q_1 b + q_2 c &= Vm, \end{aligned} \qquad (1)$$

und

$$q_1 x = q_2 y = V,$$

daraus

$q_1 = \frac{V}{x}$; $q_2 = \frac{V}{y}$. Durch Einsetzen von $q_1 = \frac{V}{x}$ und $q_2 = \frac{V}{y}$ in (1) und nach der Umformung erhalten wir:

$$\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1$$

$$\frac{b}{x} + \frac{c}{y} = m$$

Durch Einführung der Substitution $\frac{1}{x} = t$, $\frac{1}{y} = z$ erhalten wir das System:

$$\begin{aligned} at + az &= 1 \\ bt + cz &= m \end{aligned} \Rightarrow t = \frac{am - c}{a(b-c)}; \quad z = \frac{b - am}{a(b-c)}$$

$$x = a \cdot \frac{b-c}{am-c}; \quad y = a \cdot \frac{b-c}{b-am}$$

Diskussion: Für die Parameter a, b, c und m gilt: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ und $m > 0$. Aus der Realität der Aufgabe resultiert, daß x und y Zahlen mit positivem Vorzeichen sein müssen, daher

$$\begin{aligned} &b - c > 0 \Rightarrow \quad b > c \\ &am - c > 0 \Rightarrow am > c \quad \Rightarrow c < am < b \\ &b - am > 0 \Rightarrow \quad b > am \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &b - c < 0 \Rightarrow \quad b < c \\ &am - c < 0 \Rightarrow am < c \quad \Rightarrow b < am < c \\ &b - am < 0 \Rightarrow \quad b < am \end{aligned}$$

Spezielle Werte: Wenn $a = 80$ min, $b = 10$ min, $c = 12$ min und $m = \frac{2}{15}$, so ist

$$x = \frac{a(b-c)}{am-c} = \frac{80(10-12)}{80 \cdot \frac{2}{15} - 12}\,\text{min} = 120\,\text{min}$$

$$y = \frac{a(b-c)}{b-am} = \frac{80(10-12)}{10 - 80 \cdot \frac{2}{15}}\,\text{min} = 240\,\text{min}$$

Antwort: Der Wasserbehälter füllt sich durch die erste Zuleitung in 2 h und durch die zweite Zuleitung in 4 h.

3.4. Grafische Lösung von Systemen zweier linearer Gleichungen

274. In einem Behälter befindet sich 1 hl Wasser, in einem anderen sind 5 hl Wasser. In jeder Stunde fließen in den ersten Behälter 3 hl und in den zweiten Behälter 2 hl Wasser zu. Nach welcher Zeit sind die Wassermengen in beiden Behältern gleich groß? Bestimmen Sie die Wassermenge.

Lösung: Es mögen in x h die Wassermengen in beiden Behältern gleich sein. Die Wassermenge bezeichnen wir mit y hl. In x h fließen in den ersten Behälter $3x$ hl und in den zweiten $2x$ hl Wasser nach. Dann befinden sich im ersten Behälter:

$$y \text{ hl} = (3x + 1) \text{ hl} \tag{1}$$

und in dem zweiten Behälter:

$$y \text{ hl} = (2x + 5) \text{ hl} \tag{2}$$

Weiterhin konstruieren wir die Abhängigkeitskennlinien (Geraden), die durch die Gln. (1) und (2) bestimmt sind (Bild 27). Die Kennlinie der ersten Abhängigkeit zeichnen

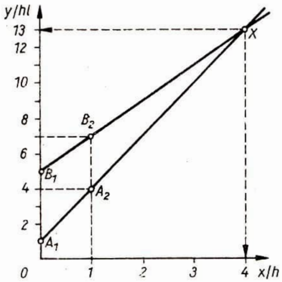

Bild 27

wir mit Hilfe der Koordinaten von zwei Punkten ein, die zwei konkrete Zustände bestimmen, und zwar A_1 (0; 1) und A_2 (1; 4). Die Kennlinie der zweiten Abhängigkeit zeichnen wir entsprechend aus den Punkten B_1 (0; 5) und B_2 (1; 7). Die gemeinsame Lösung der Gln. (1) und (2) ist $x = 4$ und $y = 13$, die die Schnittpunktkoordinaten der gegebenen Geraden darstellen.

Antwort: Die Wassermengen in beiden Behältern sind in 4 h gleich groß, und demnach sind in den Behältern je 13 hl Wasser enthalten.

275. Auf einer LPG setzte man für das Mähen des Getreides auf einem Schlag eine Kombine und einen Selbstbinder ein. Am ersten Tag arbeitete man 5 h auf beiden Maschinen, wobei 8 ha Getreide gemäht wurden. Am zweiten Tag arbeitete man auf der Kombine 3 h und setzte den Selbstbinder 6 h ein, zusammen mähte man 6 ha Getreide. Welches sind die Stundenleistungen der Maschine?

Lösung: Möge die Stundenleistung der Kombine x ha/h und die des Selbstbinders y ha/h sein. In 5 h mähte man mit der Kombine $5x$ ha und mit dem Selbstbinder $5y$ ha, zusammen mähten sie 8 ha, also

$$5x + 5y = 8 \Rightarrow y = -x + 1{,}6 \tag{1}$$

Analog resultiert aus der zweiten Gleichung

$$3x + 6y = 6 \Rightarrow y = -0{,}5x + 1 \tag{2}$$

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Bild 28) konstruieren wir die Kennlinien

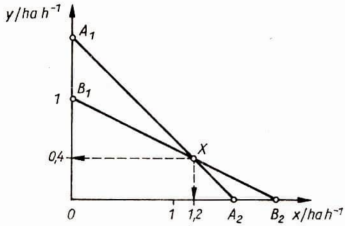

Bild 28

der Gln. (1) und (2). Der Aufgabe werden nur gerecht $x > 0$, $y > 0$, es reicht also aus, die Strecken a_1 und a_2 zu zeichnen, die im I. Quadranten liegen. Die Strecke a_1 konstruieren wir mit Hilfe der Punkte A_1 (0; 1,6) und A_2 (1,6; 0) und die Strecke a_2 mit Hilfe der Punkte B_1 (0; 1), B_2 (2; 0). Die

Lösung des Gleichungssystems

$$5x + 5y = 8$$
$$3x + 6y = 6$$

ergibt sich grafisch durch die Ordinaten der Strecken a_1 und a_2, also

$$x = 1{,}2; \quad y = 0{,}4$$

Antwort: Die Kombine arbeitet mit einer Stundenleistung von 1,2 ha/h und der Selbstbinder mit einer Stundenleistung von 0,4 ha/h.

276. Ein Zug fährt an einem stehenden Beobachter in 8 s und an einem Bahnsteig, der 400 m lang ist, in 33 s vorbei. Bestimmen Sie die Länge des Zuges und seine Geschwindigkeit.

Lösung: Wir zeichnen uns zunächst die Bewegungskennlinie des Zuges (Bild 29). Als

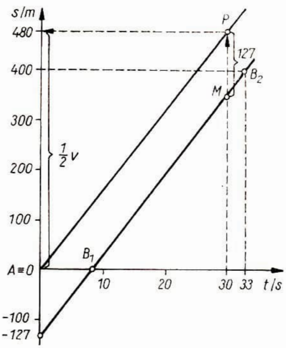

Bild 29

Anfangszustand A der Bewegung der Lokomotive wollen wir ihre Ankunft vor dem Bahnsteig A (0; 0) wählen.
Für die Bewegung des Zugendes haben wir zwei Bewegungszustände; in der Zeit $t = 8$ s befindet sich das Zugende dort, wo sich zu Beginn die Lokomotive befand, also B_1 (8; 0), und in der Zeit $t = 33$ s verläßt das Ende des Zuges den Bahnsteig, also B_2 (33; 400). Die Bewegungskennlinie des Zugendes können wir nun bereits zeichnen, und die Bewegungskennlinie der Lokomotive verläuft dazu parallel und mit ihrer Spitze durch P. Die Zuglänge ist $\overline{PM} = 127$ m, und aus der Weglänge für eine Zeit von 30 s gleich 480 m erhalten wir die Geschwindigkeit von 960 m $\times$ min^{-1} = 16 m s^{-1}.

Lösung mit Hilfe einer Gleichung: Die Länge des Zuges bezeichnen wir mit x und seine Geschwindigkeit mit v. Die seiner Länge entsprechende Strecke legt er in 8 s zurück, also

$$x = 8v \tag{1}$$

Die der Länge des Bahnsteigs und die seiner Länge entsprechende Strecke zusammen legt er in 33 s zurück, also

$$400 + x = 33v \tag{2}$$

Aus der Gl. (1) setzen wir für x in die zweite ein und erhalten:

$$v = 16,$$

dann ist

$$x = 128$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Zuges ist 16 m s^{-1}, und seine Länge beträgt 128 m.

277. Der erste Setzer einer Druckerei arbeitete auf Bestellung 9 h, dann jedoch teilte man die Arbeit einem zweiten Setzer zu, der sie in 4 h 48 min beendete. Wenn beide Setzer gleichzeitig gearbeitet hätten, würden sie die Arbeit in 6 h 40 min ausgeführt haben. Wie lange hätten der erste und wie lange der zweite Setzer für die Arbeit benötigt, wenn sie allein gearbeitet hätten?

Lösung: Die Arbeit, die ein Setzer ausführte, gleicht der Leistung in 1 h, multipliziert mit der Zahl der Arbeitsstunden. Daher können wir die vom Setzer ausgeführte Arbeit durch den Inhalt eines Rechtecks veranschaulichen, dessen Basis der Leistung in 1 h und dessen Höhe der Anzahl der Arbeitsstunden entspricht (Bild 30). Die Strecke $\overline{AB}$ veranschaulicht die Stundenleistung des ersten Setzers, die Strecke $\overline{BC}$ die des zweiten Setzers. Es ist also $(\overline{AB} + \overline{BC})$ die Summe ihrer Leistungen. Die Strecke $\overline{AC}$ zeichnen wir mit Hilfe der Maßeinheit für die Leistung. Der Punkt B kann vorläufig nicht festgelegt werden, weil wir das Verhältnis zwischen den Leistungen der Setzer nicht kennen. In den

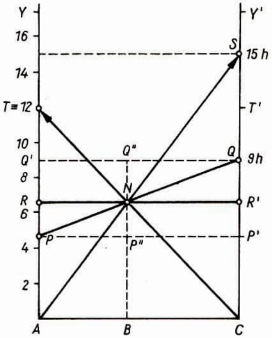

Bild 30

Punkten A und C konstruieren wir die Senkrechten AY und CY' zur Geraden AC und tragen auf ihnen im gewählten Maßstab die Zeit auf. $\overline{AP} \triangleq 4$ h 48 min, $\overline{CQ} \triangleq 9$ h, $\overline{AR} = \overline{CR'} \triangleq 6$ h 40 min. Dann verbinden wir den Punkt P mit dem Punkt Q und den Punkt R mit dem Punkt R' durch Geraden. Den Schnittpunkt der Geraden PQ und RR' bezeichnen wir mit N. Der Fußpunkt des vom Punkt N auf die Gerade AC gefällten Lotes ist der gesuchte Punkt B. Der Inhalt des Rechtecks $ACRR'$ ist gleich der Summe der Inhalte der Rechtecke mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AQ'} = \overline{CQ}$ und $\overline{BC}$, $\overline{CP'} = \overline{AP}$, was aus der Flächengleichheit der Rechtecke $RNQ''Q'$ und $P''P'R'N$ folgt. Der Schnittpunkt S der Geraden CY' gibt uns die Zeit an, in der der erste Setzer die gesamte Arbeit allein ausführen würde. Der Schnittpunkt T der Geraden CN mit der Geraden AY gibt das gleiche für den zweiten Setzer an.

Nachweis der Richtigkeit der Darstellung: Es genügt nachzuweisen, daß der Inhalt des Rechtecks $ACR'R$ gleich ist dem Inhalt des Rechtecks, dessen Seiten die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CS}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{AT}$ sind.

$$\triangle ACS \sim \triangle ABN$$

Daraus folgt:

$$\overline{CS} : \overline{AC} = \overline{BN} : \overline{AB}$$

$$\overline{CS} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{BN}$$

Antwort: Der erste Setzer benötigt für die Ausführung der Gesamtarbeit 15 h und der zweite Setzer nur 12 h.

278. Wieviel Kilogramm Kupfer und Zink sind in 124,5 kg Messing enthalten? Die Dichte des Kupfers ist 8,9 g/cm³, die des Zinks 7,1 g/cm³ und die des Messings 8,3 g/cm³

Lösung: Die Masse ist direkt proportional dem Volumen, wir erhalten also für die Massen folgende Gleichungen. Für das Kupfer gilt: $y = 8{,}9x$, für das Zink $y = 7{,}1x$ und für das Messing $y = 8{,}3x$, wobei x das Volumen in dm³ und y die entsprechende Masse in kg darstellen.

Die Gerade a ist die Kennlinie der Gleichung $y = 7{,}1x$, die Gerade b die der Gleichung $y = 8{,}9x$ und die Gerade v die der Gleichung $y = 8{,}3x$ (Bild 31). Wenn wir feststellen

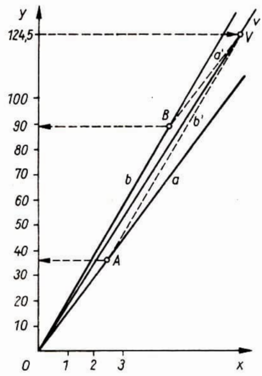

Bild 31

wollen, wieviel Kupfer und Zink in 124,5 kg Messing enthalten sind, müssen wir durch den Punkt 124,5 auf der y-Achse die Parallele zur x-Achse zeichnen, die die Gerade v im Punkt V schneidet. Durch den Punkt V zeichnen wir die Gerade $a' \parallel a$, die die Gerade b im Punkt B schneidet, und dessen zweite Ordinate zeigt die gesuchte Masse des Kupfers an. Analog konstruieren wir durch den Punkt V die Gerade $b' \parallel b$, die die Gerade a im Punkt A schneidet und dessen zweite Ordinate die gesuchte Zinkmasse angibt.

Antwort: In 124,5 kg Messing sind 89 kg Kupfer und 35,5 kg Zink enthalten.

279. Die Ortschaft A ist 200 km von der Ortschaft B entfernt. Ein Zug fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km h^{-1} von der Ortschaft A nach B ab, der in der von A 100 km entfernten Ortschaft C 30 min aufgehalten wurde. Eine Stunde später fuhr von der Ortschaft B nach A ein Zug mit der gleichen Geschwindigkeit ab, der nach einer Stunde 45 min lang aufgehalten wurde. Wann und wo fuhren die Züge aneinander vorbei?

Lösung: Im Koordinatensystem zeichnen wir die Kennlinien der Strecken beider Züge (Bild 32). Die Streckenkennlinien des von der Ortschaft A abgehenden Zuges zeichnen wir mit Hilfe der bekannten Bewegungszustände, und zwar mit Hilfe der Punkte O (0; 0), A_1 (1; 50), A_2 (2; 100), A_3 (2,5: 100). Die Streckenkennlinie des von der Ortschaft B abgefahrenen Zuges zeichnen wir mit Hilfe der durch die Punkte B_1 (1; 200), B_2 (2; 150) und B_3 (2,75; 150) bestimmten Bewegungszustände ein. Auf dem Bild schneiden sich die Geraden a' und b' im Punkt V, dessen Ordinaten die gesuchten Größen angeben.

Antwort: Die Züge passieren einander 3 h 9 min nach Abfahrt des ersten Zuges beim Kilometer 132. (Führen Sie die Kontrollrechnung durch.)

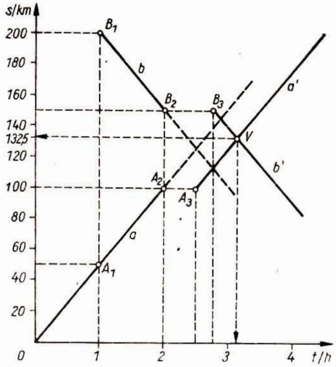

Bild 32

280. Durch Mischen von 30%igem und 80%igem Spiritus gewinnen wir 7,5 l 50%igen Spiritus. Welche Menge des ersten und welche Menge des zweiten Spiritus ist dazu erforderlich?

Lösung: Wenn wir es mit 80%igem Spiritus zu tun haben, dann ist die Abhängigkeit vom reinen Spiritus durch die Gleichung $y = 80x$ gegeben, wobei x das Volumen darstellt. Analog ist für den 30%igen und 50%igen Spiritus die Abhängigkeit durch die Gleichungen $y = 30x$ und $y = 50x$ gegeben. In allen Fällen geht es um eine direkte Proportionalität. Die Kennlinien der gegebenen Abhängigkeiten

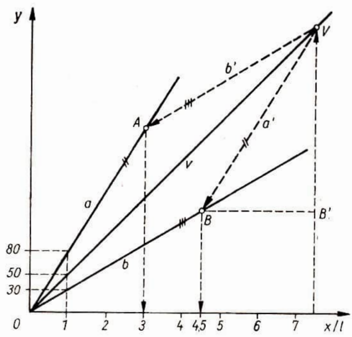

Bild 33

sind die vom Ausgangspunkt des Koordinatensystems ausgehenden Geraden (Bild 33). Die Kennlinie der Abhängigkeit $y = 80x$ ist die Gerade a, die Kennlinie der Abhängigkeit $y = 30x$ ist die Gerade b, und die Kennlinie der Abhängigkeit $y = 50x$ ist die Gerade v. Alle auf dem Bild dargestellten Kennlinien sind mit Hilfe von Ordinatenpaaren für $x = 1$ gezeichnet. Wir sollen 7,5 l 50%igen Spiritus gewinnen. Zu diesem Zweck zeichnen wir durch den Punkt (7,5; 0) auf der x-Achse die zur y-Achse parallel verlaufende Gerade, die die Gerade v im Punkt V schneidet. Durch diesen Punkt ziehen wir die Gerade $a' \parallel a$, die die Gerade b im Punkt B schneidet. Ebenso zeichnen wir durch den Punkt V die Gerade $b' \parallel b$, die die Gerade a im Punkt A schneidet. Die anderen Ordinaten der Punkte A und B bestimmen die gesuchten Mengen. Der Beweis für diese Zeichnung folgt aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle OCA$ und $\triangle BB'V$.

Antwort: Es sind 4,5 l 30%iger und 3 l 80%iger Spiritus erforderlich.

281. Ein Reisender fuhr zunächst mit dem Fahrrad mit einer Geschwindigkeit von 15 km h^{-1}, dann mit dem Personenzug bei einer Reisegeschwindigkeit von 40 km h^{-1}, und anschließend reiste er im Schnellzug mit einer Geschwindigkeit von 60 km h^{-1}. Mit jedem der vorgenannten Verkehrsmittel reiste er gleich lange und legte insgesamt 230 km zurück. Wieviel Kilometer reiste er mit jedem Verkehrsmittel, und wie lange reiste er?

Lösung: Die Abhängigkeit der Strecke von der Zeit ist für die angegebenen Verkehrsmittel durch nachstehende Gleichungen gegeben:

$$s_1 = 15\ \text{km h}^{-1} \cdot t_1 \qquad (1)$$

$$s_2 = 40\ \text{km h}^{-1} \cdot t_2 \qquad (2)$$

$$s_3 = 60\ \text{km h}^{-1} \cdot t_3 \qquad (3)$$

Die gezeichneten Kennlinien der gegebenen Gleichungen sind die Geraden a_1, a_2 und a_3 (Bild 34). Da der Reisende insgesamt 230 km zurücklegte, zeichnen wir durch den Punkt (0; 230) auf der s-Achse die Parallele zur

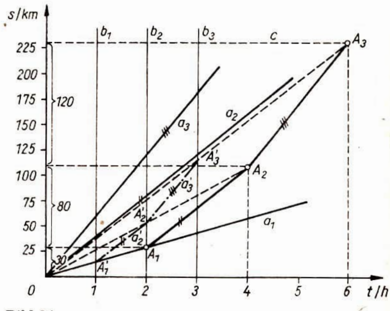

Bild 34

t-Achse. Die Zeitabschnitte bei der Reise mit den gesamten Verkehrsmitteln sind gleich, daher können wir drei in gleichem Abstand voneinander entfernte Parallelen zur s-Achse so zeichnen, damit die Entfernung zwischen ihnen selbst gleich ist, und wir bezeichnen diese Parallelen mit b_1, b_2 und b_3. Die Gerade a_1 schneidet die Gerade b_1 im Punkt A_1'. Ausgehend von diesem Punkt ziehen wir die Gerade $a_2' \parallel a_2$, die die Gerade b_2 im Punkt A_2' schneidet. Ausgehend von diesem Punkt konstruieren wir wiederum die Gerade $a_3' \parallel a_3$, die die Gerade b_3 im Punkt A_3' schneidet. Wir müssen nun noch eine Vergrößerung vornehmen. Wir nutzen die gleiche Lage gegenüber dem Ursprung O in der Form, daß dem Punkt A_3' der Punkt A_3 auf der Geraden c entspricht. Der Strecke $\overline{A_2'A_3'}$ entspricht in der Gleichlage die Strecke $\overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_2'A_3'}$; analog entspricht der Strecke $\overline{A_1'A_2'}$ die Strecke $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_1'A_2'}$. Der Punkt A_3 hat die Koordinaten $t = 6$, $s = 230$. Das bedeutet, daß die Reise 6 h dauerte. Von den Punkten A_1 und A_2 zeichnen wir die Parallelen zur t-Achse, die die s-Achse in den Ordinaten 30 und 110 schneiden.

Antwort: Der Reisende war 6 h unterwegs, und zwar reiste er 30 km auf dem Fahrrad, (110 − 30) km = 80 km mit dem Personenzug und (230 − 110) km = 120 km im Schnellzug.

3.5. Übungen

282. Suchen Sie eine solche zweistellige Zahl, die, wenn wir sie in umgekehrter Reihenfolge schreiben, eine um 27 kleinere als die ursprüngliche Zahl ergibt. Die Summe der Ziffern ist 13.

283. Für 15 M kaufte Paul 30- und 60-Pf-Briefmarken. Von den ersteren waren es 5 mehr als von den anderen. Wieviel Briefmarken von welcher Sorte kaufte Paul?

284. Ein Werkstoff W besteht aus einem Volumenteil des Materials B und drei Volumenteilen des Materials A. Der Werkstoff hat eine Masse von 209 g. Die Dichte des Materials A verhält sich zu der des Materials B wie 5:4. Wie groß sind die Massen des Materials A und B?

285. Auf der Rennstrecke des „Schleizer Dreiecks" mit der Länge von 7650 m fahren zwei Motorräder mit einer solchen Geschwindigkeit, daß sie sich alle 3 min treffen, wenn sie einander entgegengesetzt fahren. Sie holen sich dagegen alle 15 min ein, wenn sie in der gleichen Richtung fahren. Berechnen Sie ihre Geschwindigkeiten.

286. Zerlegen Sie die Zahl 5797 so in eine Summe zweier Summanden, daß ein Summand am Ende eine Null hat, wobei wir bei Weglassen derselben den zweiten Summanden erhalten.

287. Ein Hase ist 80 seiner Sprünge von einem Hund entfernt. Während der Hase drei Sprünge macht, führt der Hund nur zwei aus, jedoch überwindet der Hund mit einem seiner Sätze die gleiche Entfernung wie der Hase mit zwei Sätzen. Wieviel Sprünge macht der Hase, bevor ihn der Hund einholt?

288. Eine 11,5 km lange Straße von A nach B verläuft am Fuße eines Hügels, dann über eine Ebene und schließlich bergab. Ein Fußgänger legte den Weg von A nach B in 2 h 54 min zurück, der Rückweg dauerte 3 h 6 min. Die Geschwindigkeit des Fußgängers betrug bergan 3 km h^{-1}, über die ebene Strecke 4 km h^{-1} und bergab 5 km h^{-1}. Wie lang ist der Weg über die ebene Teilstrecke?

289. Zwei Arbeiter sollen in 18 Tagen eine Arbeit beenden. Nach 15 Tagen erkrankte einer der Arbeiter und der zweite beendete die Arbeit in weiteren 7,5 Tagen allein. In wieviel Tagen hätte jeder allein die Arbeit ausgeführt?

290. Messing setzt sich aus Kupfer und Zink zusammen. Wieviel Kupfer und Zink sind in 145,8 kg Messing enthalten, wenn scheinbar 89 kg in Wasser voll eingetauchtes Kupfer um 10 kg, 7,1 kg Zink um 1 kg und 145,8 kg Messing um 18 kg leichter werden?

291. Friedrich ist 72 Jahre alt. Er ist eineinhalb mal so alt, wie Erwin damals war, als Friedrich so alt war, wie Erwin heute ist. Wie alt ist Erwin?

292. Bei der Auszahlung einer Nachzahlung irrte sich der Kassierer und zahlte anstelle von Pfennigen die gleiche Anzahl von Mark und anstelle von Mark Pfennige aus. Nachdem man von der ausgezahlten Summe 5 Pf wegnahm, verblieb genau noch soviel, wie ausgezahlt werden sollte. Wie groß war die Nachzahlung?

293. Wenn wir 8 kg Grassamen der ersten Sorte mit 12 kg Samen der zweiten Sorte mischen, erhalten wir ein Gemisch zu einem Preis von 7,60 M je 1 kg. Wenn wir umgekehrt 12 kg der ersten Sorte mit 8 kg der zweiten Sorte mischen, erhalten wir ein Gemisch zu einem Preis von 8,40 M je 1 kg. Wieviel kostet ein Kilogramm jeder Sorte?

294. Ein Flugzeug legt eine Strecke von 300 km gegen Wind in 1 h 40 min und die gleiche Strecke mit (Rücken-)Wind in 1 h 15 min zurück. Wie hoch ist die Geschwindigkeit des Flugzeuges, und wie stark ist der Wind?

295. In zwei Mischgefäßen befindet sich eine Flüssigkeit. Wenn man 6 Gläser aus dem ersten Gefäß in das zweite umschöpft, befindet sich in beiden Gefäßen die gleiche Menge. Wenn man aus dem zweiten Gefäß 4 Gläser in das erste umschöpft, befindet sich im ersten Gefäß die doppelte Menge des zweiten Gefäßes. Wieviel Gläser sind in den einzelnen Gefäßen?

296. 638 g 78%ige Schwefelsäure entstanden durch das Mischen von 97,9%iger mit 66%iger Säure. Welche Menge wurde von der 66%igen und welche von der 97,9%igen Säure verwendet?

297. Zwei parallelgeschaltete Widerstände R_1 und R_2, von denen der erste dreimal so groß ist wie der zweite, liefern einen resultierenden Widerstand $R = 3{,}75\ \Omega$. Berechnen Sie diese.

298. Wie kann man 50 l Flüssigkeit in 6- und 7-Liter-Gefäße abfüllen, wenn diese voll gefüllt werden sollen?

299. Ein Schüler kaufte 5 gleiche Hefte und 7 gleiche Bleistifte, für die er 3,80 M bezahlte. Wie teuer ist ein Heft und ein Bleistift, wenn der Bleistift doppelt so teuer ist wie ein Heft?

300. Ein Theaterglas ist 14 cm lang und soll auf das Fünffache vergrößern. Welche Brennweite müssen das Okular und Objektiv haben?

301. Wenn wir die längere Seite eines Rechtecks um a cm verlängern und die kürzere um b cm verkürzen, dann vergrößert sich der Inhalt um 49 cm². Wenn wir die längere Seite um b cm verlängern und die kürzere um a cm verkürzen, dann verringert sich der Inhalt des Rechtecks um 25 cm². Berechnen Sie die Seiten des Rechtecks.

302. Wir haben zwei Eier der gleichen Sorte, jedoch unterschiedlicher Größe. Ohne Zerschlagen des Eies ist die annähernde Masse ihrer Schale zu bestimmen. Welche Messungen, Wägeverfahren und Berechnungen müssen wir dabei ausführen? Die Dicke der Schale beider Eier können wir als gleich annehmen.

303. In wieviel Tagen kann jeder der drei Arbeiter eine bestimmte Arbeit ausführen, wenn sie der erste und zweite Arbeiter in c Tagen, der zweite und dritte in a Tagen und der dritte und erste in b Tagen ausführen können?

304. Das Gemisch, das a g eines ersten Gases und b g eines zweiten Gases enthält, hat eine Dichte ϱ_1 g/cm³; und ein Gemisch, das c g des ersten Gases und d g des zweiten Gases enthält, hat eine Dichte von ϱ_2 g/cm³. Berechnen Sie die Dichten beider Gase.

4. Quadratische Gleichungen - Lösen von Textaufgaben mit Hilfe quadratischer Gleichungen

Eine **quadratische Gleichung** ist eine algebraische Gleichung von der Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

wobei $a \neq 0$.
Der Term ax^2 wird als **quadratisches,** bx als **lineares** und c als **absolutes Glied** bezeichnet.

1. Wenn in einer Gleichung wie (1) $c = 0$ ist, dann wird die Gleichung als **quadratische Gleichung ohne absoluten Term** (ohne absolutes Glied) bezeichnet und nimmt die Form an:

$$ax^2 + bx = 0 \qquad (2)$$

Die Gl. (2) können wir zu der Form

$$x(ax + b) = 0$$

umwandeln.[1]
Die Lösung der Gl. (2) ist einmal $x = 0$ und zum anderen die Lösung der linearen Gleichung $ax + b = 0$, die, wie wir bereits wissen, $x = -\frac{b}{a}$ ist. Die Gl. (2) hat also zwei Lösungen (Wurzeln), von denen die eine gleich Null und die andere verschieden von Null ist (unter der Voraussetzung, daß $b \neq 0$).

2. Wenn in der Gl. (1) $b = 0$ ist, dann heißt diese **rein quadratisch** und hat die Form

$$ax^2 + c = 0 \qquad (3)$$

Da $a \neq 0$ ist, können wir aus der Gl. (3) berechnen

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Der Bruch $-\frac{c}{a}$ kann ein positives und ein negatives Vorzeichen haben oder gleich Null sein.

a) Wenn $-\frac{c}{a} > 0$ ist, so sind die Wurzeln (Lösungen):

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

b) Ist $-\frac{c}{a} < 0$, so hat die Gl. (3) im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung. (Im Bereich der komplexen Zahlen hat sie jedoch folgende Wurzeln:

$$x_1 = \mathrm{i}\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{c}{a}}\bigg)$$

c) Ist $-\frac{c}{a} = 0$, so ist $c = 0$. Die Gl. (3) verliert das absolute Glied (Term) und ändert ihre Form in

$$x^2 = 0$$

Dieser Gleichung entspricht nur die Wurzel (Lösung)[2]

$$x = 0$$

[1] Wir benutzen den Satz: Wenn ein Produkt gleich Null ist, dann kann jeder Faktor Null sein.

[2] Es liegt hier eine Doppellösung vor, z. B. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. In der Lösungsmenge erscheint nur $L = \{0\}$ (nicht zu verwechseln mit der leeren Menge). Nach der Mengendefinition wird ja die Wohlunterschiedenheit der Elemente gefordert. Entsprechendes gilt für (3) in der allg. Form.

3. Eine quadratische Gleichung in der **allgemeinen Form**

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$

hat die Wurzeln (Lösungen):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{4}$$

wobei

$$D = b^2 - 4ac \tag{5}$$

D heißt Diskriminante der quadratischen Gleichung; von ihr hängt die Lösung der quadratischen Gleichung ab.

1. Ist $D > 0$, so hat die Gl. (1) zwei verschiedene reelle Wurzeln, die durch die Beziehung (4) gegeben sind.

2. Ist $D = 0$, so hat die Gl. (1) eine reelle Doppellösung $x = -\frac{b}{2a}$. (S. 110)

3. Ist $D < 0$, so hat die Gl. (1) zwei konjugiert komplexe Wurzeln der Form:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \tag{6}$$

(grafisch entsprechen dem keine Schnittpunkte mit der x-Achse)

Beispiel 1. Lösen Sie die quadratische Gleichung

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Lösung: Im gegebenen Fall sind $a = 1$, $b = -5$ und $c = 4$.

$D = 25 - 16 = 9$

Es handelt sich um den Fall 1, da $D > 0$. Wir verwenden die Formeln (5) und (4):

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2}, \quad x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2}, \quad x_2 = 1$$

Beispiel 2. Lösen Sie die Gleichung:

$3x^2 - 4x + 3 = 0$

Hier gibt es zwei Möglichkeiten der Lösung: Entweder man stellt zunächst die sogenannte Normalform her (Koeffizient von x^2 ist 1) und benutzt dann die in jedem Tafelwerk angegebene Lösungsformel bzw. die „Methode der quadratischen Ergänzung" in folgender Weise:

$$x^2 - \frac{4}{3}x = -1$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = -1 + \frac{4}{9} = -\frac{5}{9}$$

und damit kleiner als 0, oder man bestimmt wie im vorigen Beispiel die Diskriminante auf Grund von $a = 3$, $b = -4$ und $c = 3$ zu $D = 16 - 36 = -20$. Es handelt sich um den Fall 3, da $D < 0$. Laut Formel (6) ergibt sich:

$$x_1 = \frac{4 + i\sqrt{20}}{6}, \quad x_1 = \frac{2 + i\sqrt{5}}{3}$$

$$x_2 = \frac{4 - i\sqrt{20}}{6}, \quad x_2 = \frac{2 - i\sqrt{5}}{3}$$

Beispiel 3. Lösen Sie die Gleichung:

$x^2 - 10x + 25 = 0$

Lösung: Im vorliegenden Fall handelt es sich um die Werte $a = 1$, $b = -10$ und $c = 25$.

$D = 100 - 4 \cdot 25 = 0$

Es liegt der Fall 2 vor, da $D = 0$.

Einige Textaufgaben führen zu quadratischen Gleichungen. Solche Aufgaben lösen wir, indem wir nach Aufstellen der Gleichung die Wurzeln der entstandenen quadratischen Gleichung berechnen. Solche Gleichungen können zwei verschiedene Wurzeln haben, von denen beide, nur eine oder keine Wurzel die quadratische Gleichung der Textaufgabe erfüllen.

Es ist daher stets zu untersuchen, ob die gesuchte Wurzel die Forderungen der gegebenen Textaufgabe erfüllt (logische Probe).

Nichtrationale Gleichungen: Gleichungen, in denen Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen auftreten, die eine Unbekannte enthalten, bezeichnen wir als **irrationale Gleichung.** So ist z. B. die Gleichung

$$\sqrt{x + 7} = 5 - x$$

eine irrationale Gleichung (Wurzelgleichung). Diese Gleichungen lösen wir in der Weise, daß wir zunächst durch Umformen die Wurzeln beseitigen und die Gleichungen weiter nach bekannten Verfahren lösen.

Die Wurzeln können wir so beseitigen, daß wir einmal oder mehrmals beide Seiten der Gleichung quadrieren und sie somit in eine rationale Gleichung umwandeln. Die Ursprungsgleichung muß mit der nach dem Wurzelziehen entstandenen Gleichung nicht äquivalent sein. Die Gleichung, die wir nach dem Quadrieren erhalten, hat alle Wurzeln, die auch die Ursprungsgleichung hatte; sie kann aber auch noch weitere Wurzeln aufweisen. Daher müssen wir uns davon überzeugen, ob die berechneten Wurzeln der gegebenen Gleichung gerecht werden, also ist in diesem Fall die Probe unbedingter Bestandteil der Lösung.

Beispiel: Lösen Sie die Gleichung:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5 \qquad \text{(a)}$$

Nach dem ersten Quadrieren und Umformen erhalten wir die Gleichung:

$$2\sqrt{2x^2+5x+3} = 21 - 3x,$$

nach dem zweiten Quadrieren:

$$4(2x^2+5x+3) = (21-3x)^2$$

und nach der Umformung die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 146x + 429 = 0$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist:

$$D = 146^2 - 4 \cdot 429 = 19600,$$

daher hat die Gleichung zwei reelle Wurzeln, und zwar

$$x_1 = \frac{146+140}{2} = 143, \quad x_2 = \frac{146-140}{2} = 3$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die Wurzel $x_1 = 143$ der Gl. (a) nicht gerecht wird. Die Wurzel $x_2 = 3$ wird der Gl. (a) gerecht. Also ist die Lösungsmenge unserer Wurzelgleichung $L = \{3\}$.

Systeme von Gleichungen, von denen die eine linear und die andere quadratisch ist

Bei der Lösung des Systems einer linearen und quadratischen Gleichung gehen wir so vor, daß wir aus der linearen Gleichung eine Unbekannte mit Hilfe der anderen ausdrücken (Substitution) und in die quadratische Gleichung einsetzen. Diese lösen wir, wobei wir generell zwei Wurzeln erhalten und zu jeder aus der linearen Gleichung die Wurzel (Lösung) der zweiten Unbekannten berechnen. Die Probe ist unumgänglich.

4.1. Quadratische Gleichungen

305. Die Summe zweier Zahlen ist $1\frac{1}{6}$ und die Summe ihrer Reziprokwerte ist $3\frac{1}{2}$. Um welche beiden Zahlen handelt es sich?

Lösung: Wenn wir eine der Zahlen mit x bezeichnen, so wird die andere $\left(\frac{7}{6} - x\right)$ sein. Der reziproke Wert der ersten ist $\frac{1}{x}$ und der der zweiten $\frac{1}{\frac{7}{6} - x}$ oder $\frac{6}{7-6x}$. Aus der Aufgabe folgt:

$$\frac{1}{x} + \frac{6}{7-6x} = \frac{7}{2} \qquad \left(x \neq 0,\ x \neq \frac{7}{6}\right)$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit dem k g V (kleinstes gemeinsames Vielfaches) oder mit $2x(7-6x)$, so erhalten wir:

$$2(7-6x) + 12x = 7x(7-6x)$$

$$42x^2 - 49x + 14 = 0$$

$$6x^2 - 7x + 2 = 0 \quad (a = 6, b = -7; c = 2)$$

Nach der Gl. (5) folgt:

$$D = 49 - 48 = 1, \quad \sqrt{D} = 1$$

$$x_1 = \frac{7+1}{12} = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{7-1}{12} = \frac{1}{2}$$

Die Aufgabe hat zwei Lösungen.

Antwort: Die erste Zahl ist $\frac{2}{3}$, die zweite $\frac{1}{2}$ und umgekehrt.

306. Eine LPG besitzt zwei Traktoren mit unterschiedlicher Leistung. Der Traktor A pflügt ein bestimmtes Feld 6 h schneller als der Traktor B. Wenn beide Traktoren gemeinsam arbeiten, pflügen sie das gleiche

Feld in 4 h. In wieviel Stunden würde der Traktor B allein das gleiche Feld pflügen?

Lösung: Der Traktor B pflügt das Feld in x h, der Traktor A in $(x - 6)$ h, und gemeinsam pflügen sie es in 4 h. In 1 h pflügt der Traktor B $\frac{1}{x}$ des Feldes, der Traktor A $\frac{1}{x-6}$ des Feldes, und beide gemeinsam pflügen in 1 h $\frac{1}{4}$ des Feldes. Aus diesen Angaben können wir entsprechend dem Aufgabentext folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{4} \quad (x \neq 0,\ x \neq 6)$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen $4x(x - 6)$, so erhalten wir:

$$4(x - 6) + 4x = x(x - 6)$$

$$4x - 24 + 4x = x^2 - 6x$$

$$x^2 - 14x + 24 = 0 \ (a = 1, b = -14, c = 24)$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{196 - 96}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2}$$

Dann sind

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 2.$$

Der Aufgabe wird nur die erste Lösung gerecht. Der zweite Wert erfüllt sie nicht, da, würde der Traktor B das gegebene Feld in 2 h pflügen, der Traktor A das gleiche Feld in einer um 6 h kürzeren Zeit, d. h. in minus 4 h pflügen müßte, was widersinnig ist.

Antwort: Der Traktor B pflügt das gegebene Feld in 12 h.

307. Eine Klasse sollte für eine Theatervorstellung 90 M sammeln. Da 5 Schüler ihren Betrag nicht bezahlen konnten, einigte man sich, daß jeder der übrigen Schüler 60 Pf mehr bezahlt. Wieviel Schüler waren in der Klasse?

Lösung:

lfd. Nr.	Gesamtsumme	Anzahl d. Schüler	Beitrag eines Schülers	Gleichung
1	90	x	$\frac{90}{x}$	$x \cdot \frac{90}{x} = 90$
2	90	$x - 5$	$\frac{90}{x} + 0{,}6$	$(x - 5) \times \left(\frac{90}{x} + 0{,}6\right) = 90$

Die folgende Gleichung lösen wir durch sukzessive Umformungen:

$$(x - 5)\left(\frac{90}{x} + 0{,}6\right) = 90$$

$$(x - 5)\left(\frac{90 + 0{,}6x}{x}\right) = 90$$

$$(x - 5)(90 + 0{,}6x) = 90x$$

$$90x + 0{,}6x^2 - 450 - 3x = 90x$$

$$0{,}6x^2 - 3x - 450 = 0 \ \Big| \cdot \frac{10}{3}$$

$$2x^2 - 10x - 1500 = 0$$

$$(a = 2,\ b = -10,\ c = -1500)$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1500)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 12000}}{4} = \frac{10 \pm 110}{4}$$

$x_1 = 30, \quad x_2 = -25$ (nicht brauchbar)

Antwort: In der Klasse waren 30 Schüler.

308. Wir haben für 130 M Ware gekauft, wobei der Preis für 1 kg Ware um 3 M höher ist als die Anzahl der Kilogramm Ware. Wieviel Kilogramm Ware haben wir gekauft?

Lösung: Ist die Anzahl der Kilogramm x, so ist der Preis für 1 kg $(x + 3)$ M, also kostet die gesamte Ware in M:

$$x(x + 3) = 130$$

$$x^2 + 3x - 130 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1(-130)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+520}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 23}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3+23}{2} = 10 \\ \dfrac{-3-23}{2} = -13 \end{cases}$$

$x_1 = 10 \qquad x_2 = -13$ (nicht brauchbar)

Antwort: Wir kauften 10 kg Ware.

Probe: Wenn 1 kg 13 M kostete, dann bezahlten wir für 10 kg 130 M.

309. Eine Stange aus Stahl soll eine Zugkraft von 150800 N aufnehmen. Welchen Durchmesser muß der Kreisquerschnitt bei zulässiger Zugbelastung von 12000 N/cm² aufweisen?

Lösung: Den Radius des Querschnitts der Zugstange bezeichnen wir mit x, dann wird der Inhalt des Querschnitts πr^2. Für die Belastung gilt:

$$12000 \cdot \pi r^2 = 150800$$

d. h.,

$$r^2 = \frac{1508}{120\pi}$$

Als Lösung der rein quadratischen Gleichung erhalten wir $r_1 = 2$, $r_2 = -2$ (nicht brauchbar).

Antwort: Der Durchmesser der Zugstange ist dann 4 cm.

310. Ein Vater hinterließ nach seinem Tode seinen Kindern 14400 M. Nach kurzer Zeit verstarben aber zwei der Kinder. Infolgedessen bekamen die übrigen Kinder 1200 M mehr, als sie sonst bekommen hätten. Wieviel Kinder hinterließ der Vater?

Lösung: Die Anzahl der Kinder möge nach dem Tode des Vaters x sein, dann hätte jedes Kind $\frac{14400}{x}$ M erhalten. Nach dem Ableben zweier Kinder verblieben $(x-2)$ Kinder, daher entfielen auf jedes von ihnen $\frac{14400}{(x-2)}$ M.

Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\frac{14400}{x-2} = \frac{14400}{x} + 1200$$

$$14400x = 14400x - 14400 \cdot 2 + 1200(x-2)\,x$$

$$1200x^2 - 2400x - 28800 = 0$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (24)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2}$$

$x_1 = 6, \quad x_2 = -4$ (nicht brauchbar)

Antwort: Der Vater hinterließ 6 Kinder.

311. Eine LPG lagerte sich für den Winter 210 t Silage ein. Da außerplanmäßig 10 Stück Vieh eingekauft wurden, verringerte sich der Silageanteil je Stück Vieh um eine halbe Tonne. Wieviel Tonnen Silage waren ursprünglich je Stück Vieh geplant?

Lösung: Die ursprünglich geplante Menge je Stück Vieh ist x t Silage. Die ursprüngliche Anzahl der Tiere ist $\frac{210}{x}$. Wenn man zehn Stück dazu kaufte, verringerte sich der Silageanteil auf $(x - 0{,}5)$, d. h., man verfügt über $\frac{210}{x-0{,}5}$ Stück Vieh. Zwischen der ursprünglichen Stückzahl und der Stückzahl nach dem zusätzlichen Kauf gilt die Beziehung

$$\frac{210}{x-0{,}5} = \frac{210}{x} + 10$$

Nach Beseitigung des Nenners und nach Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$2x^2 - x - 21 = 0,$$

deren Lösung ist:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{4} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3{,}5 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

Unserer Aufgabe wird nur die Wurzel $x_1 = 3{,}5$ gerecht.

Antwort: Ursprünglich waren je Stück Vieh 3,5 t Silage geplant.

312. Wenn der Preis eines Kilogramm Salz der Anzahl der Dekagramm[1] Salz gleich wäre, die man für eine Krone kaufen kann, welches wäre dann der Preis eines Kilogramm Salz?

Lösung: Den Preis eines Kilogramm Salz bezeichnen wir mit x Kčs. Für 1 Kčs würden wir $\frac{100}{x}$ Dekagramm Salz kaufen. Aus der Bedingung der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\frac{100}{x} = x$$

$$100 = x^2$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

$x_1 = 10$, $x_2 = -10$ (nicht brauchbar)

Antwort: 1 kg Salz kostete 10 Kčs.

313. Berechnen Sie den Durchmesser eines Kupferdrahtes mit einer Länge von $l = 1{,}25$ m und einem Widerstand $R = 0{,}012\ \Omega$, wenn der spezifische Widerstand des Kupfers $\varrho = 0{,}017\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$ ist.

Lösung: Wir verwenden die Formel für den Widerstand

$$R = \varrho\,\frac{l}{A},$$

wobei

ϱ der spezifische Widerstand (in Ω mm²/m),
l die Länge des Drahtes (in m),
A der Querschnitt des Drahtes (in mm²) ist.

Nach Einsetzen und Umformen erhalten wir:

$$0{,}012 = 0{,}017 \cdot \frac{1{,}25}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$d^2 - 2{,}256 = 0$$

$$d^2 = 2{,}256 \Rightarrow d_{1,2} = \pm\sqrt{2{,}256} = \pm 1{,}5$$

$d_1 = 1{,}5$, $d_2 = -1{,}5$ (nicht brauchbar)

Antwort: Der Durchmesser des Kupferdrahtes ist annähernd 1,5 mm.

314. Wenn wir an einem 1 m langen Kupferdraht den Querschnitt um 1 mm² verringern, vergrößert sich sein Widerstand um $0{,}000\,85\ \Omega$. Berechnen Sie den Durchmesser des Drahtes, wenn $\varrho = 0{,}017\ \Omega\ \text{mm}^2/\text{m}$.

Lösung: Aus der Formel des vorhergehenden Beispiels und aus den Bedingungen der Aufgabe erhalten wir zwei Gleichungen für R und A, und zwar:

$$R = \varrho\,\frac{1}{A} \Rightarrow R = \frac{0{,}017}{A}$$

$$R + 0{,}00085 = 0{,}017\,\frac{1}{A-1}$$

$$\frac{0{,}017}{A} + 0{,}00085 = \frac{0{,}017}{A-1}\ \Big|\cdot 1000 \cdot A \times (A-1)$$

$$(A-1)\cdot 17 + A(A-1)\cdot 0{,}85 = 17A$$

Nach der Umformung wird:

$$A^2 - A - 20 = 0$$

$$A_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm 9}{2} \begin{cases} 5 \\ -4 \end{cases}$$

$A_1 = 5$, $A_2 = -4$ (nicht brauchbar)

Den Durchmesser d berechnen wir aus der Formel $A = \pi\frac{d^2}{4}$

$$5 = \pi\cdot\frac{d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{5\cdot 4}{\pi}} = \sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2{,}52$$

Antwort: Der Durchmesser des Drahtes ist 2,52 mm.

315. Die Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 534. Welches sind die Zahlen?

Lösung: Wenn wir die erste der gesuchten aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit n bezeichnen, so ist die zweite $(n+1)$, die dritte $(n+2)$ und die vierte $(n+3)$. Über ihre Quadrate gilt:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 534$$

[1] 1 Dekagramm (1 dag = 10 g) ist in Ungarn, Polen, der ČSSR und anderen Ländern gebräuchlich.

Nach dem Umformen erhalten wir:

$n^2 + 3n - 130 = 0$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung sind die Wurzeln:

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 130}}{2} \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -13 \\ (-13 \notin N) \end{cases}$$

Unserer Aufgabe wird jedoch nur die Lösung $n = 10$ gerecht.

Antwort: Die gesuchten natürlichen Zahlen sind 10, 11, 12 und 13.

316. Ein Bauer verkaufte auf dem Markt eine bestimmte Anzahl von Kilogramm Äpfel für 25 M. Wenn er 5 kg mehr und jedes Kilogramm für 50 Pf billiger verkauft hätte, wäre die gleiche Geldsumme als Erlös zusammengekommen. Berechnen Sie, wieviel Kilogramm Äpfel er verkaufte und wie hoch der Preis für 1 kg war.

Lösung: Die Anzahl der Kilogramm Äpfel, die er verkaufte, wollen wir mit x bezeichnen. Dann wird der Preis für 1 kg $\frac{25}{x}$ M. Hätte er 5 kg mehr verkauft, so hätte er $(x + 5)$ kg verkauft, und der Preis für jedes Kilogramm wäre um $\frac{1}{2}$ M niedriger, oder $\frac{25}{x+5}$. Durch das Einbeziehen in die Gleichung erhalten wir:

$$\frac{25}{x} = \frac{25}{x+5} + \frac{1}{2}$$

Durch die Umformung erhalten wir dann folgende Gleichung:

$x^2 + 5x - 250 = 0$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 250}}{2} \begin{cases} x_1 \approx 13{,}5 \\ x_2 \approx -18{,}5 \end{cases}$$

Unserer Aufgabe wird nur die Wurzel mit positivem Vorzeichen $x_1 = 13{,}5$ gerecht.

Antwort: Der Bauer verkaufte 13,5 kg Äpfel zu etwa 1,95 M/kg.

317. Die Breite eines Rechtecks beträgt 78% seiner Länge. Der Inhalt ist 48 cm². Berechnen Sie die Abmessungen des Rechtecks.

Lösung: Die Länge des Rechtecks bezeichnen wir mit x cm, dann ist seine Breite $\frac{78x}{100}$ cm. Aus der Aufgabe folgt:

$$x \cdot \frac{78x}{100} = 48 \Rightarrow x^2 - \frac{800}{13} = 0$$

$$x_1 = 4\sqrt{\frac{50}{13}}, \quad x_2 = -4\sqrt{\frac{50}{13}}$$

Der Aufgabe wird die Wurzel $4\sqrt{\frac{50}{13}}$ gerecht, da eine Länge stets positiv ist.

Antwort: Die Länge des Rechtecks ist $4\sqrt{\frac{50}{13}}$ cm (d. h. 7,8 cm), die Breite $\frac{2}{5}\sqrt{234}$ cm (bzw. 6,13 cm).

318. Der Sechszylindermotor eines Autos hat ein Volumen (Hubraum) aller 6 Zylinder von 7412 cm³. Sein Hub beträgt 130 mm. Wie groß ist der Zylinderdurchmesser (in mm)?

Lösung: Das Volumen eines Zylinders ist $7412 \text{ cm}^3 : 6 = 1235{,}3 \text{ cm}^3$, das Volumen eines Zylinders $V = \pi r^2 h$, und der Zylinderhub beträgt $h = 130$ mm.

$$r^2 = \frac{V}{\pi \cdot h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$$

Durch Einsetzen für

$V = 1235{,}3 \text{ cm}^3 = 1\,235\,300 \text{ mm}^3$

$h = 130$ mm,

erhalten wir:

$r = 55 \text{ mm} \Rightarrow d = 110 \text{ mm}$

Antwort: Der Zylinderdurchmesser beträgt 110 mm.

319. Eine Gruppe von Arbeitern soll für einen gemeinsamen 3-Tages-Ausflug 720 M bezahlen. Wären sie drei weniger, so müßte jeder 40 M mehr bezahlen. Wieviel waren sie?

Lösung: Die Anzahl der Arbeiter bezeichnen wir mit x, dann bezahlt jeder $\frac{720}{x}$ M. Verringert sich ihre Anzahl um drei, so bezahlt jeder $\frac{720}{x-3}$ M, was 40 M mehr ist als $\frac{720}{x}$ M, also

$$\frac{720}{x-3} = \frac{720}{x} + 40$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit dem Ausdruck $x(x-3)$, so erhalten wir:

$$720x = 720(x-3) + 40x(x-3)$$

und nach Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 216}}{2} \Rightarrow x_1 = 9,$$

$x_2 = -6$ (nicht brauchbar)
$x = 9$ ist die Lösung der Aufgabe.

Antwort: Es waren 9 Arbeiter.

320. Aus einem an einem 120 m langen Seil befestigten Ballon wurde ein Gegenstand senkrecht auf die Erde abgeworfen und fiel in einer Entfernung von 10 m von der Stelle herunter, an der der Ballon befestigt war. Wie hoch war der Ballon?

Lösung: Die Höhe des Ballons kennzeichnen wir mit x. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$120^2 = 10^2 + x^2$$

Das ist eine rein quadratische Gleichung, deren Wurzeln sind:

$x_1 \approx 119{,}5$ und
$x_2 \approx -119{,}5$ (unbrauchbar)

Antwort: Der Ballon ist annähernd 119,5 m hoch.

321. Zwei Wege kreuzen sich unter einem rechten Winkel. Auf einem fährt ein Lkw mit einer Geschwindigkeit von 40 km h^{-1}, auf dem anderen Weg ein Pkw mit einer Geschwindigkeit von 80 km h^{-1}. In welcher Zeit werden die Autos 50 km voneinander entfernt sein, wenn sie gleichzeitig von der Kreuzung abgefahren sind?

Lösung: Die gesuchte Zeit wollen wir mit x h bezeichnen. Die zurückgelegten Strecken auf beiden Wegen und die Entfernung zwischen den Autos bestimmen ein rechtwinkliges Dreieck. Für seine Seiten gilt der Satz des Pythagoras. Die Katheten sind $40x$ km und $80x$ km sowie die Hypotenuse 50 km, also

$$(80x)^2 + (40x)^2 = 50^2$$

Die Lösung der Gleichung ist:

$$x^2 = \frac{50^2}{80^2 + 40^2} \Rightarrow x_1 = 0{,}56,$$

$x_2 = -0{,}56$ (sinnwidrig)

Es muß nun noch eine Umrechnung in Minuten vorgenommen werden.

Antwort: Die Autos werden nach 33 min 36 s voneinander 50 km entfernt sein.

322. Die Besatzung eines Luftschiffes warf aus einer Höhe von 1962 m einen Teil des Ballastes ab. Wie lange fiel der Ballast zur Erde? (Der Luftwiderstand bleibe unberücksichtigt.)

Lösung: Die Strecke des freien Falles wird nach der Formel

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

berechnet. $s = 1962$ m und $g = 9{,}8$ m s^{-2}, also

$$1962 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 t^2$$

$$t^2 = \frac{1962}{4{,}9}$$

$t_1 \approx 20$, $t_2 \approx -20$ (nicht brauchbar)

Antwort: Der Ballast fiel 20 s lang.

323. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten in einem Verhältnis von 5:12 zueinander stehen, hat eine Hypotenuse von 26 m Länge. Welche Länge weisen die Katheten auf?

Lösung: Wir bezeichnen die Länge der Katheten des Dreiecks mit a m und b m.

$$a : b = 5 : 12$$

$$a = \frac{5}{12} b \qquad (1)$$

Durch die Anwendung des Satzes des Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$) erhalten wir:

$$\frac{25}{144} b^2 + b^2 = 26^2$$

$$25b^2 + 144b^2 = 26^2 \cdot 144$$

$$169b^2 = 26^2 \cdot 12^2$$

$$b^2 = \frac{12^2 \cdot 26^2}{13^2}$$

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{12^2 \cdot 26^2}{13^2}} \begin{cases} = \dfrac{12 \cdot 26}{13} = 24 \\ = -24 \end{cases}$$

(-24 wird nicht gerecht, da es eine Zahl mit negativem Vorzeichen ist)
Durch Einsetzen für b in die Gl. (1) errechnen wir, $a = 10$.

Antwort: Die eine Kathete ist 10 m, die andere Kathete 24 m lang.

324. Auf einer Treppe in einer Höhe von 3,5 m würde sich die Anzahl der Stufen um 10 erhöhen, wenn man die Höhe einer jeden Stufe um 4 cm verringerte. Wieviel Stufen hat die Treppe?

Lösung: Mit x kennzeichnen wir die Stufenzahl. Jede hat eine Höhe von $\frac{350}{x}$. Vergrößern wir die Stufenzahl um 10, werden es $(x + 10)$ sein, die Höhe jeder Stufe wird jedoch $\left(\frac{350}{x} - 4\right)$ cm. Die Höhe der Treppe änderte sich bei einer Änderung der Stufenhöhe nicht, also

$$(x + 10)\left(\frac{350}{x} - 4\right) = 350$$

Nach der Umformung $x^2 + 10x - 874 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 874}}{2} \begin{cases} x_1 \approx 25 \\ x_2 \approx -35 \end{cases}$$

(-35 wird nicht gerecht)

Antwort: Die Treppe hat 25 Stufen.

325. Drei parallelgeschaltete Widerstände, von denen zwei gleich groß sind und der dritte $10\,\Omega$ kleiner ist, liefern einen resultierenden Widerstand $R = 5\,\Omega$. Berechnen Sie die Widerstände.

Lösung: Über die Widerstände gilt entsprechend der Aufgabe:

$$R_1 = R_2 = x,\ R_3 = x - 10$$

Für parallelgeschaltete Widerstände gilt:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 10}$$

Nach Einsetzen für R erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x - 10}$$

und nach Beseitigung des Bruches die Gleichung $x^2 - 25x + 100 = 0$. Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 400}}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

Unserer Aufgabe wird die Wurzel $x_1 = 5$ nicht gerecht, denn der dritte Widerstand kann ja keinen negativen Widerstand haben.

Antwort: Der Widerstand $R_1 = R_2$ ist $20\,\Omega$ und der Widerstand R_3 beträgt $10\,\Omega$.

326. Aus einem Metallzylinder ($d = 28$ cm, $h = 40$ cm) soll ein Kegelstumpf mit der gleichen Grundfläche und Höhe, jedoch mit halbem Volumen gefertigt werden (Bild 35).

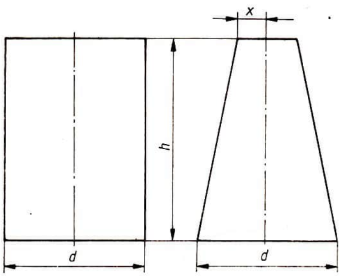

Bild 35

Welches ist der Durchmesser der (kleineren) Deckfläche?

Lösung: Den Durchmesser der (größeren) Grundfläche wollen wir mit d und den der (kleineren) Deckfläche mit $2x$ bezeichnen. Das Volumen des Zylinders ist $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h$, das Volumen des Kegelstumpfes:

$$\frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2+\frac{d}{2}\cdot x+x^2\right]$$

Aus der Aufgabe folgt, daß die Hälfte des Zylindervolumens gleich ist dem Volumen des Kegelstumpfes,
also

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h=\frac{1}{3}\pi h\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2+\frac{d}{2}\cdot x+x^2\right]$$

Nach dem Umformen und Einsetzen für d erhalten wir die Gleichung:

$$x^2+14x-98=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{196-4\cdot 1(-98)}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{-14\pm\sqrt{196+392}}{2}=\frac{-14\pm\sqrt{588}}{2}$$

$$=\frac{-14\pm 24{,}2}{2}$$

$x_1\approx 5{,}1,\quad x_2\approx -19{,}1$ (unbrauchbar)

Antwort: Der Durchmesser der Deckfläche ist $2x\approx 10{,}2$ cm.

327. Aus einem Gefäß mit dem Inhalt a ($=40$ l), das mit Spiritus gefüllt ist, haben wir einen bestimmten Teil des Spiritus abgegossen und Wasser in das Gefäß zugefüllt. Dann gossen wir erneut die gleiche Menge des Gemisches ab und füllten wiederum Wasser in das Gefäß zu, wobei im Gefäß b ($=10$ l) Spiritus verblieben. Wieviel Liter Flüssigkeit haben wir jedes Mal abgegossen?

Lösung: Den Bruch, der den Teil des Ganzen bei jedem Abgießen zum Ausdruck bringt, kennzeichnen wir mit x. Nach dem ersten Abgießen blieb im Gefäß die Menge Spiritus

$$a-ax=a(1-x)$$

Nach dem zweiten Abgießen blieb im Gefäß b zurück, daher ist:

$$a(1-x)-a(1-x)\,x=a(1-x)^2$$

$$a(1-x)^2=b$$

$$1-x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$x=1\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Da x kleiner als 1 sein muß, gilt:

$$x=1-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Antwort: Wir gossen jedesmal $ax=a-\sqrt{ab}$, d. h. 20 l ab.

328. Berechnen Sie die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem die Höhe das Dreieck in zwei Teile mit Flächeninhalten teilt, die im Verhältnis von 1 : 5 stehen (Bild 36).

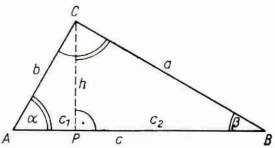

Bild 36

Lösung:

$$A_{\triangle APC}=\frac{c_1h}{2}\qquad A_{\triangle PBC}=\frac{c_2h}{2}$$

$$\frac{c_1h}{2}:\frac{c_2h}{2}=1:5$$

$$c_1:c_2=1:5\Rightarrow c_2=5c_1$$

$$h^2=c_1c_2\qquad\left(\tan\alpha=\frac{h}{c_1}\Rightarrow h=c_1\tan\alpha\right)$$
$$h^2=5c_1{}^2$$

$$c_1{}^2\tan^2\alpha=5c_1{}^2$$

$$\tan^2\alpha-5=0,\ \tan\alpha_1=2{,}2361$$
$$\alpha_1\approx 65{,}9^\circ$$

$$\tan\alpha_2=-2{,}2361$$
$$\alpha_2>90^\circ \text{ (unbrauchbar)}$$

Unserer Aufgabe wird die Lösung $\alpha_1\approx 65{,}9^\circ$ gerecht.

Antwort: Im gegebenen Dreieck sind $\alpha = 65{,}9°$ und $\beta = 24{,}1°$.

329. Durch ein Rohr wird ein Bassin in einer um 2 h längeren Zeit und durch ein anderes in 4,5 h längerer Zeit gefüllt, als durch beide Rohre gleichzeitig. In wieviel Stunden kann das Bassin durch jedes Rohr gesondert gefüllt werden?

Lösung: Möge das Bassin durch beide Rohre in x h gefüllt werden. Durch das eine Rohr wird es in $(x + 2)$ h, durch das andere in $(x + 4{,}5)$ h gefüllt. In 1 h fließt durch das eine Rohr $\frac{1}{x+2}$ in das Bassin, durch das andere $\frac{1}{x+4{,}5}$ und durch beide Rohre gleichzeitig $\frac{1}{x}$ Wasser zu. Also

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+4{,}5} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -3 \text{ (sinnwidrig)}$$

Antwort: Durch das eine Rohr füllt sich das Bassin in 5 h, durch das andere in 7,5 h.

330. Eine Zugstange mit Kreisprofil (Bild 37) mit einem Durchmesser $D = 20$ mm wird

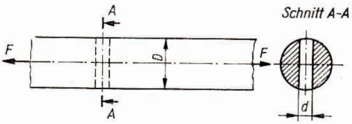

Bild 37

durch die Kraft $F = 18500$ N belastet. Das Material der Zugstange kann mit der zulässigen Zugbelastung $\sigma_{\text{Zzul}} = 8400\,\text{N/cm}^2$ belastet werden. Eine wie große Bohrung mit dem Durchmesser d kann in die Zugstange gebohrt werden, damit die Bedingung einer sicheren Zugfestigkeit $F = A \cdot \sigma_{\text{Zzul}}$ eingehalten wird?

Lösung: Der Querschnitt A ist $\frac{\pi D^2}{4} - Dd$, was auch aus dem Bild ersichtlich wird. Durch die Lösung des Gleichungssystems:

$$F = A \cdot \sigma_{\text{Zzul}}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} - Dd \text{ (Näherungsrechnung)}$$

mit den Unbekannten A und d erhalten wir nach Substitution der rechten Seite der zweiten Gleichung für A in die erste Gleichung die Beziehung $F = \left(\frac{\pi D^2}{4} - Dd\right) \cdot \sigma_{\text{Zzul}}$, woraus wir dann $d = \frac{\pi D}{4} - \frac{F}{D \cdot \sigma_{\text{Zzul}}}$ bestimmen. Nach Einsetzen erhalten wir $d = 0{,}47$ cm.

Antwort: In die Zugstange kann eine Bohrung von 4,7 mm gebohrt werden.

331. Durch die Verlängerung einer Seite eines Quadrates vergrößerte sich sein Inhalt um 10,25%. Um wieviel Prozent wurde die Seite des Quadrates verlängert?

Lösung: Möge die Seite des Quadrates a und nach der Verlängerung $(a + x)$ sein; der Prozentsatz ist dann:

$$p = \frac{100(a+x)}{a} = 100\,\frac{a+x}{a} \qquad (1)$$

Der Inhalt a^2 entspricht 100%, nach der Vergrößerung sind $(a + x)^2 = 110{,}25\%$, oder

$$\frac{a^2}{(a+x)^2} = \frac{100}{110{,}25} \Rightarrow \frac{a+x}{a} = \frac{\sqrt{110{,}25}}{10}$$

Nach Einsetzen in die Beziehung (1) erhalten wir:

$$p = 100 \cdot \frac{\sqrt{110{,}25}}{10}$$

$$p^2 - 11025 = 0$$

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{11025}$$

$$p_1 = 105\%$$

Antwort: Die Seite des Quadrats wurde um 5% verlängert.

332. Der Zähler eines Bruches ist um 3 kleiner als der Nenner. Wenn wir zu diesem Bruch den Kehrwert dieses Bruches addieren, erhalten wir den Bruch $\frac{149}{70}$. Ermitteln Sie den ursprünglichen Bruch.

Lösung: Wenn wir den Zähler des gegebenen Bruches mit x bezeichnen, dann ist der Nenner $(x + 3)$. Der gegebene Bruch ist $\frac{x}{x+3}$ und sein Kehrwert $\frac{x+3}{x}$. Es gilt also:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x+3}{x} = \frac{149}{70}$$

Nach der Umformung erhalten wir die Gleichung:

$$x^2 + 3x - 70 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 280}}{2}$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -10$$

Antwort: Der ursprüngliche Bruch ist $\frac{7}{7+3} = \frac{7}{10}$ oder $\frac{-10}{-10+3} = \frac{-10}{-7}$ mit dem Wert $\frac{10}{7}$.

333. Ein Motorboot legte in 22 min eine Strecke von 12 km zurück, und zwar einmal stromaufwärts und das zweite Mal stromabwärts. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Bootes, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 100 m min^{-1} beträgt.

Lösung: Die Geschwindigkeit des Bootes im ruhigen Wasser ist x km min^{-1}, stromabwärts $(x + 0{,}1)$ km min^{-1} und stromaufwärts $(x - 0{,}1)$ km min^{-1}. Das Boot fuhr stromabwärts $\frac{12}{x + 0{,}1}$ min und stromaufwärts $\frac{12}{x - 0{,}1}$ min, zusammen 22 min, also

$$\frac{12}{x + 0{,}1} + \frac{12}{x - 0{,}1} = 22$$

Nach der Umformung erhalten wir die Gleichung

$$11x^2 - 12x + 0{,}11 = 0$$

deren Lösung ist:

$$x_1 = 1{,}1, \quad x_2 = \frac{-10}{110} \quad \text{(wird nicht gerecht)}$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Bootes ist 1,1 km min^{-1} = 66 km h^{-1}.

334. Einige Arbeiter bekamen im Vierteljahr 10000 M Lohn. Einer von ihnen bekam 1000 M, der zweite bekam 500 M mehr als der erste, der dritte bekam 500 M mehr als der zweite usw. Wieviel Arbeiter waren es?

Lösung: Mit x bezeichnen wir die Anzahl der Arbeiter. Ihre Löhne bilden eine arithmetische Folge, deren erstes Glied $a_1 = 1000$ und deren Differenz konstant $d = 500$ ist.
Der x-te Arbeiter erhält $a_x = a_1 + (x - 1)\,d$, d. h.,

$$a_x = 1000 + (x - 1)\,500$$

Die Summe der Terme der arithmetischen Folge in unserem Fall beträgt 10000, über die folgende Beziehung gilt:

$$S_x = \frac{1}{2}\,x(a_1 + a_x)$$

d. h.,

$$10000 = \frac{1}{2}\,x\{1000 + [1000 + (x - 1)\,500]\}$$

Nach der Umformung finden wir:

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2}$$

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = -8 \text{ (nicht brauchbar)}$$

Antwort: Es waren 5 Arbeiter, die zusammen 10000 M erhielten.

335. Die Raumdiagonale eines Quaders ist 100 cm lang. Seine Höhe ist dreimal so groß wie die Breite und doppelt so groß wie die Länge. Welches sind die Abmessungen des Quaders?

Lösung: Die Länge des Quaders bezeichnen wir mit a, die Breite mit b und die Höhe mit c. Für die Höhe gilt:

$$\begin{aligned} c &= 2a \\ c &= 3b \end{aligned} \qquad (1)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$2a = 3b \Rightarrow a = \frac{3}{2}\,b \qquad (2)$$

Für die Diagonale des Quaders gilt:

$a^2 + b^2 + c^2 = u^2$,

wobei

$$u = 100$$

Nach Einsetzen erhalten wir die Gleichung:

$$\left(\frac{3}{2}\,b\right)^2 + b^2 + (3b)^2 = 10000$$

$49b^2 = 40000$

$b_{1,2} = \dfrac{\pm 200}{7}$, der Aufgabe wird nur $b > 0$ gerecht.

Aus der Beziehung (1) und (2) folgt:

$$a = \frac{300}{7},\ b = \frac{200}{7},\ c = \frac{600}{7}$$

Antwort: Der gegebene Quader hat die Abmessungen $\dfrac{300}{7}$ cm, $\dfrac{200}{7}$ cm und $\dfrac{600}{7}$ cm.

336. Berechnen Sie die Innenwinkel im rechtwinkligen Dreieck, wenn die Länge der einen Kathete das arithmetische Mittel[1] der Längen der zweiten Kathete und der Hypotenuse darstellt (Bild 38).

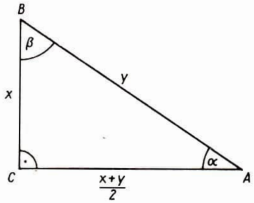

Bild 38

Lösung: Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$x^2 + \frac{(x + y)^2}{4} = y^2, \text{ für } \sin\alpha = \frac{x}{y}$$

$\Rightarrow x = y \sin\alpha$

$$y^2 \sin^2\alpha + \frac{(y \sin\alpha + y)^2}{4} = y^2$$

[1] Das arithmetische Mittel (auch Durchschnitt) zweier Zahlen p und q ist definiert als $\dfrac{p + q}{2}$.

Nach dem Umformen erhalten wir:

$5 \sin^2\alpha + 2 \sin\alpha - 3 = 0$

$\sin\alpha_1 = 0{,}6,\ \sin\alpha_2 = -1$

Der Aufgabe wird gerecht: $\sin\alpha_1 = 0{,}6 \Rightarrow$
$\alpha = 36{,}9°$
$\beta = 53{,}1°$

Antwort: Im gegebenen rechtwinkligen Dreieck sind $\alpha = 36{,}9°$ und $\beta = 53{,}1°$.

337. Ein Tourist soll in einer vorgegebenen Zeit von der Ortschaft A nach der Ortschaft B gehen, die s km von A entfernt liegt. Als er die Hälfte des Weges zurückgelegt hatte, stellte er fest, daß er 2 h zu spät kommt, wenn er mit der gleichen Geschwindigkeit weitergeht. Der Tourist beschloß daher, sich 1 h auszuruhen und dann seine Geschwindigkeit um v km h^{-1} zu erhöhen. Er erreicht in der geplanten Zeit die Ortschaft B. Mit welcher Geschwindigkeit ging anfangs der Tourist?

Lösung: Die gesuchte Geschwindigkeit wollen wir mit x km h^{-1} und die geplante Zeit mit t h kennzeichnen; dann folgt aus der Aufgabenstellung:

$$\frac{s}{x} = t + 2 \qquad (1)$$

$$\frac{\frac{s}{2}}{x} + 1 + \frac{\frac{s}{2}}{x + v} = t \qquad (2)$$

daraus wird

$$\frac{s - 2x}{x} = t \qquad (1)$$

$$\frac{s}{2x} + 1 + \frac{s}{2(x + v)} = t \qquad (2)$$

Setzen wir die rechten Seiten der Gleichungen gleich, so entsteht eine Gleichung mit einer Unbekannten:

$$\frac{s - 2x}{x} = \frac{s}{2x} + 1 + \frac{s}{2(x + v)}$$

Nach der Umformung:

$6x^2 + 6xv - sv = 0$

$$x_1 = \frac{-3v + \sqrt{3v(3v + 2s)}}{6},$$

$$x_2 = \frac{-3v - \sqrt{3v(3v + 2s)}}{6}$$

Die Lösung x_2 wird unserer Aufgabe nicht gerecht (für die möglichen Werte von v und s bekäme x_2 negatives Vorzeichen). Der Tourist ging zu Beginn mit der Geschwindigkeit

$$\frac{-3v + \sqrt{3v(3v + 2s}}{6}$$

Spezielle Werte: Für $s = 45$ km, $v = 2$ km h^{-1} ist $x = 3$ km h^{-1}.

Antwort: Der Tourist ging zu Beginn mit einer Geschwindigkeit von 3 km h^{-1}.

338. Wir kauften für 210 M Ware, deren Preis je 1 kg 1 M höher ist als der Preis der Ware einer anderen Sorte, von der wir für 156 M eingekauft haben. Von der Ware der ersten Sorte waren es 3 kg mehr als von der zweiten Sorte. Wieviel Kilogramm Ware jeder Sorte haben wir gekauft?

Lösung: Wir haben x kg der zweiten Sorte gekauft, d. h., von der ersten Sorte kauften wir $(x + 3)$ kg. Der Preis für 1 kg Ware der zweiten Sorte ist $\frac{156}{x}$ M, der der ersten Sorte $\frac{210}{x+3}$ M. Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\frac{210}{x+3} - 1 = \frac{156}{x}$$

Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 - 51x + 468 = 0$$

deren Wurzeln sind:

$$x_{1,2} = \frac{51 \pm \sqrt{51^2 - 4 \cdot 468}}{2} \begin{cases} x_1 = 39 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

Antwort: Wir kauften 39 kg oder 12 kg Ware der zweiten Sorte, deren Preis 4 M oder 13 M war; wir kauften 42 kg oder 15 kg Ware der ersten Sorte und ihr Preis war 5 M oder 14 M. Beachten Sie bitte, daß sich aus den Angaben der Aufgabe keine **eindeutige** Lösung ergibt! Beide Fälle sind möglich.

339. Die Gesamtkapazität zweier parallelgeschalteter Kondensatoren ist $C_1 = 16$ pF. Die Kapazität der gleichen in Reihe geschalteten Kondensatoren ist $C_2 = 1{,}75$ pF. Berechnen Sie die Kapazität der einzelnen Kondensatoren.

Lösung: Die Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren wollen wir mit x pF und y pF bezeichnen. Für Parallelschaltung von Kondensatoren gilt:

$$C_1 = x + y \tag{1}$$

und für die Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{oder} \quad C_2 = \frac{xy}{x+y} \tag{2}$$

Aus den Gln. (1) und (2) folgt:

$$yx = C_1C_2, \quad x + y = C_1$$

Die unbekannten Kapazitäten x und y sind also die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - C_1x + C_1C_2 = 0$$

Nach Einsetzen für C_1 und C_2 finden wir:

$$x^2 - 16x + 28 = 0$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind:

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 28}}{2}$$

$$x_1 = 14, \quad x_2 = 2$$

Für $x_1 = 14$ ist $y_1 = 2$ und für $x_2 = 2$ und $y_2 = 14$.

Antwort: Die Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren sind 14 pF und 2 pF.

340. Von zwei Brigaden führt die eine eine bestimmte Arbeit in 10 h kürzerer Zeit aus als die andere. Arbeiteten beide Brigaden gemeinsam, so würden sie die Arbeit in 12 h ausführen. In welcher Zeit würde jede Brigade allein die Arbeit bewältigen?

Lösung: Die erste Brigade wäre mit der Arbeit W in x h, die zweite in $(x + 10)$ h fertig. Die erste Brigade erledigt in einer Stunde $\frac{W}{x}$, die zweite $\frac{W}{x+10}$ und gemeinsam $\frac{W}{12}$.

$$\frac{W}{x} + \frac{W}{x+10} = \frac{W}{12}$$

Nach Multiplikation der gesamten Gleichung mit $\frac{1}{W}$ und nach der Umformung erhalten wir:

$$x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$D = 14^2 + 4 \cdot 120 = 676$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm 26}{2} \qquad \sqrt{D} = \sqrt{676} = 26$$

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = -6$$

Die Gleichung hat zwei Wurzeln, unserer Aufgabenstellung jedoch wird nur die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen $x_1 = 20$ gerecht.

Antwort: Die erste Brigade wäre in 20 h, die zweite in 30 h mit der Arbeit fertig.

341. Vergrößern wir den Winkel von 60° um den spitzen Winkel α, so ist der Sinus dieses vergrößerten Winkels doppelt so groß wie der Sinus eines Winkels, der um α kleiner als 60° ist.

Lösung: Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\sin(60° + \alpha) = 2 \sin(60° - \alpha)$$

$$4 \sin^2 \alpha - 1 = 0$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\underset{\text{spitz}}{\alpha_1 = 30°}, \quad \underbrace{\alpha_1' = 150°, \alpha_2 = 300°, \alpha_2' = 210°}_{\text{nicht spitze Winkel}}$$

Antwort: Der gesuchte spitze Winkel ist $\alpha = 30°$.

342. Zwei Frauen vom Lande brachten zusammen 100 Eier auf den Markt, die eine mehr als die andere. Beide nahmen gleich viel Geld ein. Die erste sagte zur zweiten: „Hätte ich deine Eier verkauft, so hätte ich 15 Groschen eingenommen." Die zweite antwortete: „Hätte ich deine Eier verkauft, so hätte ich $6\frac{2}{3}$ Groschen eingenommen." Wieviel Eier hatte jede? (Aufgabe von Leonhard Euler)[1]

Lösung: Die erste hatte x Eier, die zweite $(100 - x)$. Hätte die erste $(100 - x)$ Eier verkauft, so hätte sie 15 Groschen eingenommen, d. h., ein Ei kostet bei der ersten $\frac{15}{100 - x}$ Groschen und bei der zweiten

$$\frac{6\frac{2}{3}}{x} \text{ Groschen} = \frac{20}{3x} \text{ Groschen.}$$

Einnahmen der ersten (in Groschen):

$$x \frac{15}{100 - x} = \frac{15x}{100 - x}$$

Einnahmen der zweiten (in Groschen):

$$(100 - x) \frac{20}{3x} = \frac{20(100 - x)}{3x}$$

Beide nahmen gleich viel ein, also

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$x^2 + 160x - 8000 = 0$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung sind die Wurzeln:

$$x_{1,2} = \frac{-160 \pm \sqrt{160^2 + 4 \cdot 8000}}{2}$$

$$x_1 = 40$$

$$x_1 = -200$$

Die Wurzel mit dem negativen Vorzeichen hat für unsere Aufgabe keine Bedeutung.

Antwort: Die erste Frau hatte 40 Eier, die zweite 60 Eier.

343. Zwei Verkäuferinnen hatten zusammen 100 kg Äpfel zu verkaufen. Sie verkauften sie nicht zum gleichen Preis, erhielten jedoch beide die gleiche Geldsumme. Hätte die erste genau soviel verkauft wie die zweite, so hätte sie 90 M erhalten; hätte die zweite genau soviel verkauft wie die erste, so hätte sie 40 M erhalten. Wieviel Kilogramm Äpfel hatte jede?

Lösung: Die erste Verkäuferin hatte x kg, die zweite $(100 - x)$ kg. Hätte die erste Verkäuferin genau soviel verkauft wie die zweite, d. h. $(100 - x)$ kg, so hätte sie für 1 kg

[1] Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, 1707 bis 1783.

Äpfel $\frac{90}{100-x}$ M bekommen; hätte die zweite genau soviel verkauft wie die erste, d. h. x kg, so hätte sie für 1 kg Äpfel $\frac{40}{x}$ M bekommen. Da die erste tatsächlich x kg Äpfel für $\frac{90}{100-x}$ M je Kilogramm und die zweite $(100-x)$ kg für $\frac{40}{x}$ M je Kilogramm verkaufte, können wir entsprechend der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{90x}{100-x} = \frac{40(100-x)}{x}$$

schreiben, um nach der Umformung

$x^2 + 160x - 8000 = 0 \Rightarrow x_1 = 40;$

$x_2 = -200$ (unbrauchbar)
zu finden.

Antwort: Die erste Verkäuferin hatte 40 kg, die zweite 60 kg. Überlegen Sie, für wieviel Mark je Kilogramm die Äpfel verkauft wurden.

344. In einem Faß sind 64 l reiner Spiritus. Wir gießen aus dem Faß eine bestimmte Menge des Spiritus ab und ersetzen diese durch Wasser. Vom Gemisch, das wir, wie oben beschrieben, gewonnen haben, gießen wir die gleiche Menge wie im vorausgegangenen Fall ab und gießen erneut Wasser hinzu. Das Gemisch enthält jetzt 49 l reinen Spiritus. Welche Menge reinen Spiritus haben wir das erste und das zweite Mal entnommen?

Lösung: Die dem Faß beim ersten Mal entnommene Spiritusmenge kennzeichnen wir mit x l. Wenn wir anstelle des entnommenen Spiritus Wasser zugießen, sind im Faß $(64-x)$ l Spiritus und x l Wasser. Im Faß werden also wieder 64 l Gemisch sein. Entnehmen wir dem Faß x l Gemisch, so verbleiben im Faß 49 l Spiritus. Nach dem ersten Prozeß enthalten 64 l Gemisch $(64-x)$ l reinen Spiritus, oder in 1 l ist $\frac{64-x}{64}$ l reiner Spiritus enthalten. Da nach dem ersten Prozeß $(64-x)$ l reiner Spiritus übrigblieb, nach dem zweiten Prozeß $\left[(64-x) - \frac{(64-x)x}{64}\right]$ l oder nach diesen beiden Prozessen 49 l reiner Spiritus übrigblieben, ist also

$$(64-x) - \frac{(64-x)x}{64} = 49$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$x^2 - 128x + 960 = 0$

$x_1 = 120, \quad x_2 = 8$

Der Aufgabe wird die Wurzel $x_2 = 8$ gerecht.

Antwort: Das erste Mal wurden aus dem Faß 8 l und das zweite Mal 7 l reiner Spiritus abgegossen.

345. Die Absolventen der Reifeprüfung reichten sich gegenseitig die Hände (jeder jedem einmal). Ein Mathematiker errechnete, daß sich 78mal die Hände gereicht wurden. Wieviel Absolventen haben sich gegenseitig gratuliert?

Lösung: Die Anzahl der Absolventen kennzeichnen wir mit x. Jeder der x Gratulanten gab $(x-1)$-mal die Hand. Das bedeutet, daß insgesamt $x(x-1)$ Händedrücke[1] erfolgt sein müssen; man muß jedoch berücksichtigen, daß, wenn z. B. der Absolvent A dem Absolventen B die Hand reicht, in der gleichen Zeit auch der Absolvent B dem Absolventen A ebenfalls die Hand drückt. Diese beiden gegenseitigen Handschläge sind als einer zu betrachten. Daher ist die Anzahl der gezählten Handschläge halb so groß wie $x(x-1)$, also

$\binom{x}{2}$ oder

$$\frac{x(x-1)}{2} = 78$$

$x^2 - x - 156 = 0$

$x_1 = 13, \quad x_2 = -12$ (unbrauchbar)

Antwort: Die Gratulation fand unter 13 Absolventen statt.

[1] Dafür benutzt man auch das Symbol eines Binomialkoeffizienten, $\binom{x}{2} \cdot 2$, gelesen: x über 2 mal 2.

346. Ein Gefäß in Form eines Kegelstumpfes (Bild 39) hat einen oberen Durchmesser von 3 dm und eine Höhe von ebenfalls 3 dm; es soll ein Volumen von 15 dm³ haben. Welches ist der Durchmesser des Bodens?

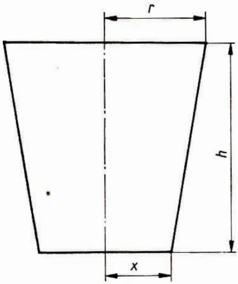

Bild 39

Lösung: Den Radius der Deckfläche kennzeichnen wir mit r, den der kleineren mit x. Aus der Formel für das Volumen eines Kegelstumpfes berechnen wir x.

$$V = \frac{1}{3}\,h(r^2 + rx + x^2)$$

$$15 = \frac{1}{3}\cdot 3(1{,}5^2 + 1{,}5x + x^2)$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$x^2 + 1{,}5x - 2{,}25 = 0$$

Der Aufgabe wird $x \approx 1$ gerecht.

Antwort: Der Durchmesser des Bodens ist $2x \approx 2$ dm.

347. Ein Schüler las ein Buch mit 480 Seiten so durch, daß er jeden Tag die gleiche Anzahl von Seiten las. Hätte er jeden Tag 16 Seiten mehr gelesen, so hätte er das Buch 5 Tage früher durchgelesen. Wieviel Tage las der Schüler an dem Buch?

Lösung: Die Anzahl der an einem Tag gelesenen Seiten wollen wir mit x kennzeichnen. Die Gesamtzahl der für das Lesen von 480 Seiten erforderlichen Tage ist $\frac{480}{x}$. Aus der Aufgabe erhalten wir die Gleichung

$$\frac{480}{x} = \frac{480}{x+16} + 5 \qquad (1)$$

Wir wollen nun die Gleichung (1) mit dem Produkt $x(x+16)$ multiplizieren. Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 + 16x - 1\,536 = 0,$$

deren Wurzeln $x_1 = 32$, $x_2 = -48$ sind. Unserer Aufgabe wird nur die Wurzel $x_1 = 32$ gerecht. Somit ist $\frac{480}{32} = 15$ die Anzahl der für das Lesen des Buches erforderlichen Tage.

Antwort: Der Schüler las das Buch in 15 Tagen durch.

348. Zwei Pumpen leeren aus einem Tankwagen in 3,75 h das darin enthaltene Öl. Mit der ersten Pumpe würde der Tankwagen 4 h schneller geleert als mit der zweiten Pumpe. In welcher Zeit wird der Tankwagen von jeder Pumpe allein geleert?

Lösung: Beide Pumpen leeren den Tankwagen in 3,75 h. Mit der zweiten Pumpe würde der Tankwagen in x h und mit der ersten in $(x-4)$ h geleert. In 1 h erfolgt mit der ersten Pumpe $\frac{1}{x-4}$ der Leerung, mit der zweiten Pumpe $\frac{1}{x}$ und mit beiden Pumpen $\frac{1}{3{,}75}$ der Leerung. Wir erhalten somit die Gleichung

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3{,}75}$$

und nach der Umformung

$$x^2 - 11{,}5x + 15 = 0$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = \frac{3}{2} \text{ (wird nicht gerecht)}^1$$

Antwort: Mit der ersten Pumpe wird der Tankwagen in 6 h und mit der zweiten in 10 h geleert.

349. Der eine von zwei Skiläufern legte eine Strecke von 36 km in einer um $\frac{1}{2}$ h kürzeren

[1] Aus $x_2 = 1{,}5$ würde $x - 4 = -2{,}5$ folgen.

Zeit als der zweite Skiläufer zurück. Die Geschwindigkeit des ersten war um 1 km h^{-1} höher als die des zweiten. Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten beider Skiläufer.

Lösung: Der zweite Skiläufer legte die 36 km in x h und der erste in $(x - 0{,}5)$ Stunden zurück. In einer Stunde legte der zweite Skiläufer $\frac{36}{x}$ km und der erste $\frac{36}{x - 0{,}5}$ km zurück. Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$\frac{36}{x - 0{,}5} - 1 = \frac{36}{x}$$

Nach der Umformung:

$$x^2 - 0{,}5x - 18 = 0$$

$x_1 = 4{,}5$; $x_2 = -4$ (scheidet aus)

Antwort: Die Geschwindigkeit des zweiten Skiläufers betrug 8 km h^{-1} und die des ersten 9 km h^{-1}.

350. Ein Arbeiter benötigt für die Fertigstellung eines Aggregats 4 h länger, ein anderer benötigt 9 h länger als bei gemeinsamer Anfertigung. In welcher Zeit fertigt jeder das Aggregat allein?

Lösung: Beide Arbeiter fertigen das Aggregat in x h, der erste Arbeiter allein in $(x + 4)$ h und der zweite allein in $(x + 9)$ h. In einer Stunde führen beide Arbeiter zusammen $\frac{1}{x}$ der Arbeit aus, der erste Arbeiter $\frac{1}{x + 4}$ und der zweite $\frac{1}{x + 9}$ der Arbeit.

Daraus erhalten wir dann die Gleichung:

$$\frac{1}{x + 4} + \frac{1}{x + 9} = \frac{1}{x}$$

Nach der Umformung:

$$x^2 - 36 = 0$$

$x_1 = 6$, $x_2 = -6$ (unbrauchbar)

Antwort: Der erste Arbeiter allein fertigt das Aggregat in 10 h und der zweite in 15 h.

351. Welches Vieleck hat 42 Diagonalen mehr als Seiten?

Lösung: Die Formel für die Berechnung der Anzahl von Diagonalen im n-Eck ist:

$$x = \frac{1}{2}\, n(n - 1) - n = \frac{n(n - 3)}{2} \qquad (1)$$

Die Anzahl der Diagonalen sei x, die Anzahl der Seiten sei n, dann ist:

$$x = n + 42$$

Nach Einsetzen in (1) erhalten wir:

$$n + 42 = \frac{n(n - 3)}{2}$$

und nach der Umformung:

$$n^2 - 5n - 84 = 0$$

$n_1 = 12$, $n_2 = -7$ (wird dem Problem nicht gerecht)

Antwort: Ein 12-Eck hat 42 Diagonalen mehr als Seiten.

352. Beim Zusammennieten von Blechen wird z. B. die Forderung erhoben, daß der Querschnitt des einen genieteten Bleches zwischen zwei Nieten gleich dem Nietquerschnitt ist. Ermitteln Sie den Nietdurchmesser, wenn die Blechdicke $s = 10$ und der Achsabstand der Niete $t = 45$ sind.

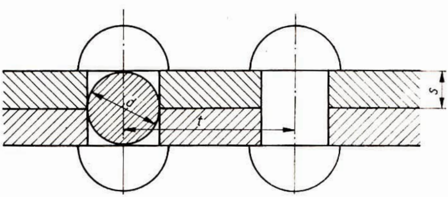

Bild 40

Lösung: Aus der Forderung der Aufgabenstellung und aus Bild 40 folgt:

$$(t - d)s = \frac{\pi d^2}{4}$$

Nach dem Umformen und Einsetzen erhalten wir:

$$d^2 + 12{,}42d - 573{,}24 = 0$$

Unserer Aufgabe wird die Wurzel $d \approx 18{,}4$ gerecht.

Antwort: Der Nietdurchmesser ist $d \approx 18{,}4$, gewählt $d = 19$ mm. (Alle Längenangaben beziehen sich auf die Einheit mm.)

353. Zwei Dampfer verkehren auf einer 5 km langen Strecke. Der erste fährt 5 min später ab als der zweite, jedoch gelangen sie gleichzeitig an das Ziel, da der zweite Dampfer in der Stunde 3 km mehr zurücklegt als der erste. Welches ist die Geschwindigkeit beider Dampfer?

Lösung: Der zweite Dampfer legt die 5 km lange Strecke in x h mit der Geschwindigkeit $\frac{5}{x}$ km h^{-1}, der erste Dampfer in $\left(x + \frac{1}{12}\right)$ h mit der Geschwindigkeit $\left(\frac{5}{x + \frac{1}{12}}\right)$ km h^{-1} zurück.

Aus der Aufgabe erhalten wir dann die Gleichung:

$$\frac{5}{x + \frac{1}{12}} + 3 = \frac{5}{x}$$

Als Auflösung der quadratischen Gleichung

$$36x^2 + 3x - 5 = 0,$$

die zunächst in die Normalform gebracht werden muß, finden wir:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{30}{72} \text{ (unbrauchbar)}$$

Antwort: Der erste Dampfer fuhr mit einer Geschwindigkeit von 12 km h^{-1} und der zweite von 15 km h^{-1}.

354. Einer von zwei Betrieben kann eine bestimmte Lieferung 4 Tage schneller erfüllen als der andere. Bei gemeinsamer Arbeit würden beide Betriebe in 35 Tagen das Sechsfache der Lieferung erreichen. In welcher Zeit würde jeder Betrieb die Gesamtlieferung allein leisten?

Lösung: Der zweite Betrieb würde die Gesamtlieferung in x Tagen, der erste in $(x - 4)$ Tagen und beide Betriebe gemeinsam würden in 35 Tagen sechsmal so große Lieferungen vollbringen. Der Arbeitsumfang je 1 Tag beträgt für den ersten Betrieb $\frac{1}{x - 4}$, für den zweiten $\frac{1}{x}$. Der Arbeitsumfang im Zeitraum von 35 Tagen beträgt für den ersten Betrieb $\frac{35}{x - 4}$ und für den zweiten $\frac{35}{x}$. Aus diesen Bedingungen folgt die Gleichung:

$$\frac{35}{x - 4} + \frac{35}{x} = 6$$

Nach der Umformung ist:

$$3x^2 - 47x + 70 = 0$$

$$x_1 = 14, \quad x_2 = \frac{5}{3} \text{ (unbrauchbar)}$$

Antwort: Der erste Betrieb würde die Gesamtlieferung in 10 Tagen und der zweite in 14 Tagen schaffen.

355. Vergrößern wir die eine Seite eines Quadrates um 2 cm und die andere um 5 cm, so entsteht ein Rechteck, dessen Inhalt um 80% größer ist als der Inhalt des ursprünglichen Quadrates. Welches war die Länge der Seite des Quadrates?

Lösung: Die Länge der Seite des Quadrates kennzeichnen wir mit x cm, dann sind die Abmessungen des Rechtecks $(x + 2)$ cm und $(x + 5)$ cm. Der Inhalt des Quadrates ist x^2 cm^2 und der des Rechteckes $(x + 2) \times (x + 5)$ cm^2. Zwischen ihnen gilt die Gleichung:

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + \frac{80}{100} x^2$$

Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$4x^2 - 35x - 50 = 0,$$

deren Lösungen

$x_1 = 10$ und $x_2 = -\frac{10}{8}$ sind.

Dem geometrischen Problem wird nur die Wurzel $x_1 = 10$ gerecht.

Antwort: Die Länge der Seite des Quadrates war 10 cm.

356. Welcher Strom durchfließt einen Stromkreis, wenn wir ermittelt haben, daß eine Änderung des Widerstandes um $+10\,\Omega$ bei der unveränderten Spannung $U = 120$ V ein Absinken des Stromes um 1 A verursacht?

Lösung mit Hilfe einer Gleichung: Entsprechend dem Ohmschen Gesetz gilt:

$U = R \cdot I$

In unserem Fall ist

$$U = (I - 1)(R + 10) \qquad (1)$$

Weiterhin gilt

$$R = \frac{120}{I} \qquad (2)$$

Nach Einsetzen von (2) in (1) ist:

$$120 = (I - 1)\left(\frac{120}{I} + 10\right),$$

und nach der Umformung erhalten wir:

$I^2 - I - 12 = 0$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind 4 und -3. Unserer Sachlage wird nur die Wurzel 4 gerecht.

Antwort: Durch den Stromkreis fließt ein Strom von 4 A, und der ursprüngliche Widerstand war $30\,\Omega$.

Grafische Lösung: Die grafische Lösung der quadratischen Gleichung $I^2 - I - 12 = 0$ führen wir mit Hilfe der Bilder zweier Funktionen durch, und zwar:

$$y = I^2 \text{ (Parabelkurve)} \qquad (1)$$

und

$$y = I + 12 \text{ (Gerade)} \qquad (2)$$

Die Schnittpunktkoordinaten $(I_1; y_1)$ beider Kennlinien erfüllen die Gleichungen:

$y_1 = I_1^2, \qquad y_1 = I_1 + 12$

$I_1^2 = I_1 + 12$

Ebenso erfüllt I_1 die Gleichung

$I^2 - I - 12 = 0$

Die Abszisse I_1 des Schnittpunktes ist die Wurzel der vorliegenden Gleichung (Bild 41).

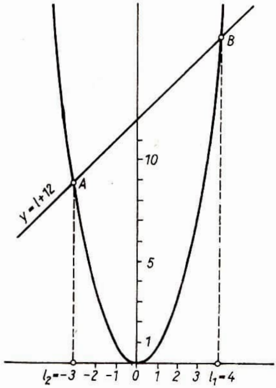

Bild 41

Für die Konstruktion der Geraden und Parabel verwendet man gewöhnlich einzelne Punkte, deren Abszissen und Ordinaten wir in nachstehender Wertetafel angeben. Für die Gerade (2):

g:

I	0	2
y	12	14

Für die Parabel:

p:

I	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9	16

Die Gerade schneidet die Parabel in den Punkten A und B, deren Abszissen die Wurzeln der Gleichung

$I^2 - I - 12 = 0$

sind, von denen der Textaufgabe nur die Wurzel $I_1 = 4$ gerecht wird.

357. Ein Schwimmer legt in einem Fluß 480 m stromabwärts und auch stromaufwärts zusammen in 12 min 30 s zurück. Die Eigengeschwindigkeit des Schwimmers beträgt 80 m min^{-1}. Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers?

Lösung: Der Schwimmer legte 480 m stromabwärts und stromaufwärts in 12,5 min zurück, die Geschwindigkeit des Schwimmers beträgt 80 m min^{-1}, und die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers ist x m min^{-1}. Die Geschwindigkeit des Schwimmers stromabwärts beträgt $(x + 80)$ m min^{-1}, stromaufwärts $(80 - x)$ m min^{-1}. Die für das Schwimmen stromabwärts benötigte Zeit ist $\frac{480}{x + 80}$ min, stromaufwärts $\frac{480}{80 - x}$ min und die Gesamtzeit beträgt 12,5 min, woraus dann die Gleichung

$$\frac{480}{x + 80} + \frac{480}{80 - x} = 12{,}5$$

folgt. Nach der Umformung ist:

$$x^2 - 256 = 0$$

$$x_1 = 16, \quad x_2 = -16 \text{ (unbrauchbar)}$$

Antwort: Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers ist 16 m min^{-1}.
Der Schwimmer benötigt übrigens stromabwärts nur 5 min, stromaufwärts dagegen 7 min 30 s.

358. Zwei Autobusse fuhren gleichzeitig aus einer Siedlung in Richtung einer anderen Siedlung. Die Entfernung zwischen beiden Siedlungen betrug 36 km. Der erste Autobus gelangte 15 min früher an den Bestimmungsort als der zweite, dessen Geschwindigkeit 2 km h^{-1} niedriger war. Berechnen Sie die Geschwindigkeit eines jeden Autobusses.

Lösung: Die Geschwindigkeit der Busse bezeichnen wir mit x km h^{-1} und $(x - 2)$ kmh^{-1}. Die Zeit, in der der erste Autobus die Strecke von 36 km zurücklegte, ist $\frac{36}{x}$ h, und die Zeit, in der der zweite Autobus die gleiche Strecke zurücklegte, ist $\frac{36}{x - 2}$ h. Aus der Aufgabe folgt dann:

$$\frac{36}{x} + \frac{1}{4} = \frac{36}{x - 2}$$

$$x^2 - 2x - 288 = 0$$

$$x_1 = 18 \quad x_2 = -16 \text{ (unbrauchbar)}$$

Antwort: Die (Reise-)Geschwindigkeit[1] des ersten Autobusses ist 18 km h^{-1}, die des zweiten 16 km h^{-1}.

359. Gießen wir zwei Lösungen, von denen die erste 0,8 kg und die zweite 0,6 kg wasserfreie H_2SO_4 enthält, zusammen, so gewinnen wir 10 kg neue H_2SO_4-Lösung. Berechnen Sie die Masse der ersten und zweiten Lösung im Gemisch, wenn uns bekannt ist, daß in der ersten Lösung 10% mehr wasserfreie Schwefelsäure enthalten ist.

Lösung: Die Masse der ersten Lösung wollen wir mit x kg bezeichnen. Dann ist die Masse der zweiten Lösung $(10 - x)$ kg. Der prozentuale Anteil der Schwefelsäure der ersten Lösung im Gemisch ist $\frac{0{,}8 \cdot 100}{x}$, der der zweiten $\frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x}$. Aus der Aufgabe folgt:

$$\frac{0{,}8 \cdot 100}{x} - \frac{0{,}6 \cdot 100}{10 - x} = 10$$

$$x^2 - 24x + 80 = 0$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 20$$

Als Lösung der Aufgabe ist nur $x = 4$ anzuerkennen, denn in der ersten Menge kann nicht mehr als in der Mischung sein.

Antwort: Von der ersten Lösung waren es 4 kg und von der zweiten 6 kg.

360. Die Differenz zweier Seiten eines Rechtecks ist 6 cm. Der Inhalt beträgt 160 cm^2. Berechnen Sie die Längen der Seiten.

Lösung: Die Länge der kürzeren Seite wollen wir mit x cm bezeichnen. Die längere Seite sei $(x + 6)$ cm lang. Als Formel für den Inhalt

[1] Unter „Reisegeschwindigkeit" versteht man den Quotienten aus zurückgelegtem Weg und benötigter Zeit unter Einbeziehung der Wartezeiten usw.

des Rechtecks erhalten wir:

$x(x + 6) = 160$

$x^2 + 6x - 160 = 0$

$x_1 = 10, \quad x_2 = -16$ (unbrauchbar)

Antwort: Die eine Seite des Rechtecks ist 10 cm, die andere 16 cm.

361. Zwei Arbeiter können eine bestimmte Arbeit in 12 Tagen ausführen. Wie lange müßte jeder der beiden arbeiten, um diese Arbeit allein auszuführen? Der zweite Arbeiter arbeitet nach einer alten Methode und benötigt für die Arbeit 10 Tage länger als der erste Arbeiter, der durch einen Neuerervorschlag die erforderliche Zeit verkürzte.

Lösung: Die gesamte Arbeit bezeichnen wir mit A. Möge der erste Arbeiter allein die Arbeit in x Tagen und der zweite in $(x + 10)$ Tagen ausführen. Der erste Arbeiter führt an einem Tag $\frac{A}{x}$, der zweite $\frac{A}{x+10}$ der Arbeit aus. In zwölf Tagen gemeinsamer Arbeit vollbringt der erste $\frac{A}{x} \cdot 12$, der zweite $\frac{A}{x+10} \cdot 12$. Aus der Aufgabe folgt:

$$\frac{A}{x} \cdot 12 + \frac{A}{x+10} \cdot 12 = A$$

Nach Multiplikation der Gleichung mit $\frac{x(x+10)}{A}$ und nach Umformung finden wir:

$x^2 - 14x - 120 = 0$

Lösungen der quadratischen Gleichung sind:

$x_1 = 20, \quad x_2 = -6$ (unbrauchbar)

Antwort: Der erste Arbeiter würde die gesamte Arbeit in 20 Tagen, der zweite in 30 Tagen ausführen.

362. Erhöhen wir die Geschwindigkeit eines Zuges um 9 km h^{-1}, so legt dieser die Strecke von 180 km 40 min schneller zurück als vordem. In welcher Zeit legte der Zug diese Strecke bei der ursprünglichen Geschwindigkeit zurück?

Lösung: Wenn die ursprüngliche Geschwindigkeit des Zuges x km h^{-1} betrug, beträgt die erhöhte Geschwindigkeit $(x + 9)$ km h^{-1}. Die ursprüngliche Zeit, in der dieser die Strecke von 180 km zurücklegte, ist $\frac{180}{x}$ h, die neue Zeit (bei Geschwindigkeitserhöhung) ist $\frac{180}{x+9}$ h. Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\frac{180}{x} - \frac{2}{3} = \frac{180}{x+9}$$

Nach der Umformung wird:

$x^2 + 9x - 2430 = 0$

gelöst mit:

$x_1 = 45, \quad x_2 = -54$ (unbrauchbar)

Antwort: Der Zug legte bei der ursprünglichen Geschwindigkeit von 45 km h^{-1} die Strecke von 180 km in 4 h zurück.

363. In einem elektrischen Stromkreis sind ein Verbraucher und ein ohmscher Widerstand in Reihe geschaltet, der Beziehung $RI^2 + EI = 600$ V wird genügt, wobei $R = 2\,\Omega$, $E = 110$ V.
Berechnen Sie die Stromstärke I.

Lösung: Nach Einsetzen in die Beziehung $RI^2 + EI = 600$ V erhalten wir:

$2 \cdot I^2 + 110 \cdot I = 600$

$I^2 + 55I - 300 = 0$

$I_1 = 5, \quad I_2 = -60$ (scheidet aus)

Antwort: Die elektrische Stromstärke beträgt 5 A.

364. Die Schüler einer Klasse kauften für ihren Lehrer zum Lehrertag ein Buch für 42 M. Alle haben dafür den gleichen Anteil bezahlt. Wären in der Klasse 7 Schüler weniger, so hätte jeder 50 Pf mehr bezahlen müssen. Wieviel Schüler waren es?

Lösung: Die Anzahl der Schüler in der Klasse bezeichnen wir mit x, d. h. daß jeder $\frac{42}{x}$ M bezahlte. Wären es 7 weniger gewesen, d. h. $(x - 7)$, so hätte jeder $\frac{42}{x-7}$ M bezahlt, was 0,50 M mehr ist, also

$$\frac{42}{x} + 0{,}5 = \frac{42}{x-7}$$

$$x^2 - 7x - 588 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 588}}{2} \quad \begin{matrix} x_1 = 28 \\ x_2 = -21 \end{matrix}$$

(nicht verwendbar)

Antwort: In der Klasse waren 28 Schüler.

365. Ein Automobilwerk erfüllte die Lieferung von 480 Autos in der Form, das es täglich die gleiche Anzahl von Autos herstellte. Hätte es täglich 16 Autos mehr hergestellt, so hätte es die Bestellung 5 Tage früher als geplant erfüllt. In wieviel Tagen wird der Betrieb die Lieferung erfüllen?

Lösung: Das Werk stellt an einem Tag x Autos her. Die Anzahl der Tage, die für die Erfüllung der Bestellung erforderlich werden, ist $\frac{480}{x}$. Die Anzahl der für die Ausführung der Bestellung erforderlichen Tage ist, bei Steigerung der Produktion um täglich 16 Autos, $\frac{480}{x+16}$. Aus der Aufgabe folgt weiter:

$$\frac{480}{x} - \frac{480}{x+16} = 5$$

$$x^2 + 16x - 1536 = 0$$

$$x_1 = 32,\ x_2 = -48 \text{ (unbrauchbar)}$$

Der gegebenen Aufgabe wird nur die Lösung $x = 32$ gerecht. Das entspricht $\frac{480}{32} =$ 15 Tage.

Antwort: Der Betrieb erfüllt seine Lieferung in 15 Tagen.

366. Teilen Sie eine Strecke von der Länge a in zwei Teilstrecken so, daß das Verhältnis der kleineren Teilstrecke zur größeren das gleiche ist wie das Verhältnis der größeren Teilstrecke zur Gesamtstrecke (wir sprechen davon, daß wir die Strecke im Verhältnis des „Goldenen Schnitts" teilen).[1]

Lösung: Möge x die Länge der größeren Teilstrecke sein, dann hat die kleinere die Länge $(a - x)$. Für die Teilstrecken und die Gesamtstrecke gilt entsprechend der Aufgabe:

$$(a - x) : x = x : a$$

oder

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir:

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right), \quad x_2 = \frac{a}{2}\left(-\sqrt{5} - 1\right)$$

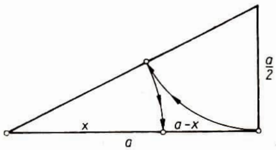

Bild 42

Unserer Aufgabe wird nur die Wurzel x_1 gerecht. Für die Konstruktion (Bild 42) verwenden wir das wie folgt umgeformte x_1:

$$x_1 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

(Bei Bild 42 handelt es sich um eine Konstruktionsanleitung.)

367. Auf einem Gut sollten bis zu einer bestimmten Zeit 200 ha Feld bestellt werden. Da man jedoch täglich 5 ha mehr als geplant säte, beendete man die Aussaat 2 Tage vorfristig. In wieviel Tagen war man mit der Arbeit fertig?

Lösung: Die Anzahl der benötigten Tage für die Aussaat wollen wir mit x bezeichnen; planmäßig sollte man also die Aussaat in $(x + 2)$ Tagen beenden. Man säte täglich $\frac{200}{x}$

[1] Der „Goldene Schnitt" wurde im Mittelalter als besonders ästhetisch empfunden, z. B. in der Malerei und Architektur. Es bestehen enge Beziehungen zum regulären Zehneck.

aus, was 5 ha mehr bedeutet als $\frac{200}{x+2}$.
Aus der Aufgabe erhalten wir die Gleichung

$$\frac{200}{x} = \frac{100}{x+2} + 5,$$

die nach der Umformung die Form

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$

annimmt. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$x_1 = 8,\ x_2 = -10.$$

Antwort: Auf dem Gut war man in 8 Tagen mit der Arbeit fertig.

368. Die Kantenlängen zweier Würfel unterscheiden sich um 2 cm, jedoch beträgt die Differenz ihrer Volumen 728 cm³. Berechnen Sie die Kantenlängen der Würfel.

Lösung: Die Abmessung des einen Würfels bezeichnen wir mit x cm, dann ist die Abmessung des anderen $(x + 2)$ cm. Für die Volumen gilt:

$$(x + 2)^3 - x^3 = 728$$

Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

Die Wurzeln sind $x_1 = 10$, $x_2 = -12$ (unbrauchbar)

Antwort: Der eine Würfel hat eine Kantenlänge von 10 cm und der andere von 12 cm.

369. Bei einem Schießwettkampf erreichte eine Mannschaft 480 Punkte. Als die Mannschaft ein zweites Mal am Wettkampf teilnahm, hatte sie zwei Schützen mehr, wobei jeder Schütze durchschnittlich 10 Punkte mehr erreichte. Das zweite Mal erreichte die Mannschaft 700 Punkte. Wieviel Schützen waren ursprünglich am Start, und wieviel Punkte erkämpfte durchschnittlich ein Schütze der Mannschaft?

Lösung: Mit x bezeichnen wir die ursprüngliche Anzahl der Schützen. Beim ersten Wettkampf erreichte jeder Schütze $\frac{480}{x}$ Punkte durchschnittlich, beim zweiten Wettkampf jedoch erkämpfte jeder 10 Punkte mehr oder $\left(\frac{480}{x} + 10\right)$; es waren $(x + 2)$ Schützen und zusammen erkämpften sie 700 Punkte, d. h.

$$\left(\frac{480}{x} + 10\right)(x + 2) = 700$$

Nach der Umformung erhalten wir:

$$x^2 - 20x + 96 = 0$$

$$x_1 = 12 \quad \text{und} \quad x_2 = 8$$

Antwort: Ursprünglich waren es 12 Schützen (oder 8 Schützen), von denen jeder 40 Punkte (bzw. 60 Punkte) erreichte. Die Bedingungen der Aufgabe werden in beiden Fällen erfüllt.

370. Erhöht ein Flugzeug seine Geschwindigkeit um 24 km h⁻¹, so verkürzt sich die Flugzeit auf einer 480 km langen Strecke um 5 min. Wie hoch war die ursprüngliche Geschwindigkeit des Flugzeuges?

Lösung: Mit x km h^{-1} bezeichnen wir die ursprüngliche Geschwindigkeit des Flugzeuges. Die Zeit, in der es die Gesamtstrecke zurücklegte, ist $\frac{480}{x}$ h. Die neue Geschwindigkeit ist $(x + 24)$ km h^{-1} und die neue Zeit beträgt $\frac{480}{x+24}$ h. Sie ist um $\frac{1}{12}$ h kürzer als die ursprüngliche, also

$$\frac{480}{x} = \frac{480}{x+24} + \frac{1}{12} \tag{1}$$

Multiplizieren wir die Gl. (1) mit $12x(x + 24)$, so erhalten wir nach der Umformung die quadratische Gleichung

$$x^2 + 24x - 138\,240 = 0,$$

deren Wurzeln $x_1 = 360$ und $x_2 = -384$ sind (letztere scheidet aus).

Antwort: Die ursprüngliche Geschwindigkeit beträgt 360 km h^{-1}.

371. Ein Käufer kaufte Ware zweier Sorten: der ersten für 150 M und der zweiten für 120 M. Von der Ware der zweiten Sorte waren es 3 kg mehr als von der ersten, wobei die Ware der zweiten Sorte um 4,50 M billiger war. Wieviel Ware jeder Sorte kaufte er?

Lösung: Bezeichnen wir die Menge der ersten Warensorte mit x kg, so ist die der zweiten Warensorte $(x + 3)$ kg. Der Preis der Ware der ersten Sorte ist $\frac{150}{x}$ M, der der zweiten Sorte $\frac{120}{x+3}$ M, was 4,5 M weniger ist als $\frac{150}{x}$ M, also

$$\frac{150}{x} = \frac{120}{x+3} + 4{,}5$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $x(x + 3)$. Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$$3x^2 - 11x - 300 = 0,$$

deren Wurzeln $x_1 = 12$ und $x_2 = -\frac{56}{6}$ (nicht verwendbar) sind.

Antwort: Der Käufer kaufte 12 kg Ware der ersten Sorte und 15 kg Ware der zweiten Sorte.

372. Verkleidet wird ein Pfeiler, dessen Querschnitt 30 cm $\times$ 40 cm ist. Die Inhalte des Querschnittes des Pfeilers und des Querschnittes der Verkleidung stehen im Verhältnis 5:1 zueinander. Wie dick ist die Verkleidung?

Lösung: Der Inhalt des Pfeilerquerschnittes ist $A = 30 \cdot 40\ \text{cm}^2$. Bezeichnen wir die Dicke der Verkleidung mit x cm, so ist der Inhalt des Querschnittes der Verkleidung in cm²

$$A' = (30 + 2x)(40 + 2x) - 30 \cdot 40$$

und über die Inhalte gilt:

$$A : A' = 5:1$$

oder

$$30 \cdot 40 : [(30 + 2x)(40 + 2x) - 30 \cdot 40] = 5:1,$$

woraus wir nach Umformung für x die quadratische Gleichung

$$x^2 + 35x - 60 = 0$$

erhalten, deren Wurzeln $x_1 \approx 1{,}63$, $x_2 \approx -36{,}63$ (unbrauchbar) sind.

Antwort: Die Verkleidung hat eine Dicke von 1,6 cm.

373. Die Resultierende zweier senkrecht zueinander gerichteter Kräfte ist 340 N. Welches sind die beiden Kräfte, wenn die eine 140 N größer ist als die andere?

Lösung: Ergänzen wir beide senkrecht aufeinander wirkenden Kräfte zu einem Kräfteparallelogramm, so erhalten wir ein Rechteck, wobei die Länge der Diagonalen gleich der Größe der resultierenden Kraft ist.
Bezeichnen wir die eine Kraftgröße mit x N, so hat die andere Kraft die Größe $(x + 140)$ N. Für das rechtwinklige Dreieck gilt:

$$x^2 + (x + 140)^2 = 340^2$$

Nach der Umformung erhalten wir die Gleichung

$$x^2 + 140x - 48000 = 0$$

mit der Lösung $x_1 = 160$ und $x_2 = -300$ (nicht verwertbar).

Antwort: Die eine Kraft ist 160 N und die andere 300 N.[1]

374. Ein Rechteck hat eine Länge, die um 2 cm größer ist als die Breite. Vergrößern wir jede seiner Seiten um 10 cm, so beträgt der Inhalt des vergrößerten Rechteckes 1224 cm². Berechnen Sie die Abmessungen des urspünglichen Rechteckes.

Lösung: Die Breite des Rechteckes ist x cm, die Länge $(x + 2)$ cm. Aus der Aufgabe erhalten wir nach der Formel für den Inhalt eines Rechteckes:

$$(x + 10)(x + 12) = 1224$$

Nach Umformung wird

$$x^2 + 22x - 1104 = 0 \Rightarrow x_1 = 24,\quad x_2 = -46 \text{ (scheidet aus)}$$

Antwort: Die Seiten des Rechteckes sind 24 cm und 26 cm.

375. Zwei Fußgänger gingen gleichzeitig von den Ortschaften A und B einander entgegen.

---

[1] Zuweilen ist der auszuscheidende Wert gleich der von der gesuchten Variablen abhängigen Größe, aber mit anderem Vorzeichen. Vor Verwechslungen hüte man sich.

Der erste legte in 1 h 2 km mehr zurück als der zweite und kam 3 h früher in der Ortschaft B an. Die Entfernung zwischen den Ortschaften A und B beträgt 36 km. Mit welcher Geschwindigkeit ging jeder der beiden Fußgänger?

Lösung: Die Geschwindigkeit des zweiten Fußgängers wollen wir mit x km h^{-1} bezeichnen, dann ist die Geschwindigkeit des ersten $(x + 2)$ km h^{-1}. Der erste legte die Strecke von A nach B in $\frac{36}{x+2}$ h und der zweite von B nach A in $\frac{36}{x}$ h zurück, was um 3 h länger ist als $\frac{36}{x+2}$ h, also

$$\frac{36}{x+2} = \frac{36}{x} - 3$$

Nach Umformung erhalten wir die Gleichung

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -6$ (scheidet aus).

Antwort: Der erste Fußgänger ging mit einer Geschwindigkeit von 6 km h^{-1} und der zweite von 4 km h^{-1}

376. Aufgabe von Bézout[1] (18. Jh.). Ein Kaufmann kaufte ein Pferd und verkaufte es nach einer bestimmten Zeit für 24 Pistolen. Dabei büßte er soviel Prozent ein, wie ihn das Pferd Pistolen gekostet hat. Für wieviel Pistolen kaufte er das Pferd?

Lösung: Die Anzahl der Pistolen, für die er das Pferd kaufte, wollen wir mit x kennzeichnen. Wenn er das Pferd für 24 Pistolen verkaufte, büßte er $(x - 24)$ Pistolen ein, und zwar sind das x% von x, d. h.

$$x - 24 = \frac{x}{100} \cdot x$$

Nach der Umformung ist

$$x^2 - 100x + 2400 = 0$$

Die Wurzeln sind $x_1 = 60$, $x_2 = 40$.

[1] Étienne Bézout, 1730 bis 1783, frz. Mathematiker, Spezialgebiet: Algebraische Geometrie.

Antwort: Der Kaufmann kaufte das Pferd entweder für 60 oder für 40 Pistolen. (2 Lösungen)

377. Die Sehne eines Kreises (Bild 43) hat vom Kreismittelpunkt eine Entfernung von 8 cm und ist um 2 cm länger als der Kreisradius. Berechnen Sie den Kreisradius.

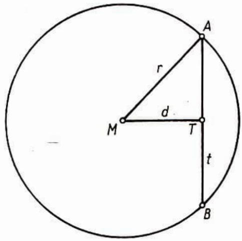

Bild 43

Lösung: Möge der Kreisradius r lang sein, dann ist die Länge der Sehne $\overline{AB} = t = r + 2$ cm, $d = 8$ cm. Aus dem rechtwinkligen Dreieck AMT folgt

$$r^2 = d^2 + \left(\frac{r+2}{2}\right)^2$$

$$r^2 = 64 + \frac{r^2 + 4r + 4}{4}$$

Nach der Umformung gilt

$$3r^2 - 4r - 260 = 0$$

Die Wurzeln der Gleichung sind $r_1 = 10$ und $r_2 = -\frac{26}{3}$ (unbrauchbar)

Antwort: Der Kreisradius ist 10 cm.

378. Im Bild 44 ist ein Stangenkopf dargestellt. In dem verbreiterten Kopfteil (zylindrisch mit dem Durchmesser D) ist eine Öffnung mit rechteckigem Querschnitt (s. Bild 44) eingearbeitet, die einen Keil zur Befestigung der Stange aufnehmen soll. Die eigentliche Stange hat den Durchmesser d. Die Öffnung hat eine Breite $s = 0{,}25\ d$. Aus Gründen der Belastbarkeit des Stangenkopfes muß gefordert werden, daß der Flächeninhalt des Querschnittes des verbleibenden Kopfteils gleich dem Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes sein muß. (Inhalt der schraffierten Flächen soll gleich sein.)

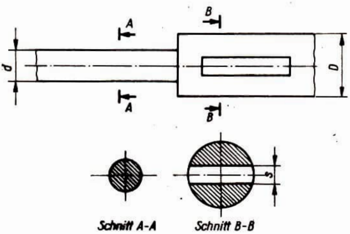

Bild 44

Lösung: Im Schnitt $B-B$ betrachten wir in Bild 44 die ausgesparte Fläche vereinfacht als Rechteck mit den Seiten D und s. Dann finden wir für die gleichzusetzenden Flächen die Gleichung

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} - Ds$$

$$\pi D^2 - 4Ds - \pi d^2 = 0 \Rightarrow D = 1{,}21\ d$$

Antwort: Der Durchmesser des Kopfes beträgt 1,21 d.

379. Ein Gärtner kaufte für 720 M Bäumchen. Wäre jedes Bäumchen 2 M billiger, so hätte der Gärtner für das gleiche Geld 5 Stück mehr bekommen. Wieviel Bäumchen hat er gekauft?

Lösung: Die Anzahl der Bäumchen sei x, ihr Preis beträgt 720 M, der Preis eines Bäumchens $\frac{720}{x}$ M. Dann folgt aus der Aufgabe die Gleichung

$$\frac{720}{x} - 2 = \frac{720}{x+5}$$

$$720(x+5) - 2x(x+5) = 720\,x$$

$$-2x^2 - 10x + 3600 = 0$$

Nach den entsprechenden Umformungen erhalten wir:

$$x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$x_1 = 40,\quad x_2 = -45$ (scheidet aus)

Antwort: Der Gärtner kaufte 40 Bäumchen.

380. In einem Traktorenwerk sollten in einer bestimmten Zeit 120 Traktoren hergestellt werden. Nach Erfüllung der Hälfte des Auftrages hatte sich die Produktion so vervollkommnet, daß die Tagesleistung um einen Traktor gesteigert werden konnte. Aus diesem Grunde konnte man das gestellte Ziel 5 Tage früher erreichen. In wieviel Tagen sollte ursprünglich der Auftrag erfüllt werden?

Lösung: Ursprünglich sollte man den Auftrag in x Tagen erfüllen. An einem Tag sollte man demnach $\frac{120}{x}$ Traktoren herstellen. Nach Fertigstellung der Hälfte des Auftrages stellte man täglich $\left(\frac{120}{x} + 1\right)$ Traktoren her, und zwar in der Zeit von $\left(\frac{x}{2} - 5\right)$ Tagen, da sich die Zeit für die Fertigung der zweiten Hälfte des Auftrages um 5 Tage verkürzte. Die Anzahl der in der zweiten Hälfte hergestellten Traktoren ist also

$$\left(\frac{120}{x} + 1\right)\left(\frac{x}{2} - 5\right) = \frac{120}{2}$$

$$\frac{120 + x}{x} \cdot \frac{x - 10}{2} = \frac{120}{2} \cdot 2x$$

$$(120 + x)(x - 10) = 120x$$

$$x^2 - 10x - 1200 = 0$$

Die Wurzeln sind $x_1 = 40$, $x_2 = -30$ (unbrauchbar).

Antwort: Der Auftrag sollte ursprünglich in 40 Tagen erfüllt werden.

381. Im Jahre 1845 fragte jemand bei der Geburtstagsfeier das Geburtstagskind, welches Jahr seines Lebens es feiere, worauf dieses antwortete: „Wenn ich mein Alter vor 15 Jahren mit meinem Alter in 15 Jahren multipliziere, erhalte ich das Jahr meiner Geburt." Wie alt war das Geburtstagskind?

Lösung: Möge das Alter des Geburtstagskindes x sein; vor 15 Jahren war es $(x - 15)$ Jahre und in 15 Jahren wird es $(x + 15)$ Jahre sein, und das Geburtsjahr des Geburtstagskindes ist $(1845 - x)$. Wir erhalten die Gleichung

$$(x - 15)(x + 15) = 1845 - x$$
$$x^2 + x - 2070 = 0$$

Die Wurzeln sind $x_1 = 45$, $x_2 = -46$ (unbrauchbar)

Antwort: Das Geburtstagskind war 45 Jahre alt und sein Geburtsjahr war 1800.

382. Zwei Schülergruppen wetteiferten beim Sammeln von Altstoffen. Die eine sammelte 480 kg und die andere, in der 2 Schüler mehr waren, 700 kg, was je Schüler 10 kg mehr war als in der ersten Gruppe. Wieviel Schüler waren in jeder Gruppe, und wieviel Kilogramm sammelte jeder Schüler?

Lösung: In der ersten Gruppe sammelten x Schüler 480 kg; je Schüler entfielen $\frac{480}{x}$ kg. In der zweiten Gruppe waren $(x + 2)$ Schüler, und sie sammelten 700 kg; auf 1 Schüler entfielen $\frac{700}{(x+2)}$ kg. Aus der Aufgabe erhalten wir die Gleichung

$$\frac{480}{x} + 10 = \frac{700}{x + 2}$$
$$480(x + 2) + 10(x + 2)x = 700x$$
$$x^2 - 20x + 96 = 0 \Rightarrow x_1 = 12, \quad x_2 = 8$$

Antwort: Zwei Antworten sind möglich.

a) Für $x_1 = 12$: In der ersten Gruppe waren 12 Schüler, jeder sammelte 40 kg Altstoffe, in der zweiten Gruppe waren 14 Schüler, von denen jeder 50 kg Altstoffe sammelte.

b) Für $x_2 = 8$: In der ersten Gruppe waren 8 Schüler, von denen jeder 60 kg Altstoffe sammelte, in der zweiten Gruppe waren 10 Schüler, von denen jeder 70 kg Altstoffe sammelte.

383. Die Bevölkerungszahl einer Stadt stieg innerhalb von 2 Jahren von 20000 auf 22050 an. Berechnen Sie den Prozentsatz des jährlichen Bevölkerungszuwachses unter der Voraussetzung, daß der Jahreszuwachs prozentual gleichbleibt.

Lösung: Den Jahreszuwachs berechnen wir aus der Formel

$$P_n = P_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, \tag{1}$$

wobei P_n die Bevölkerungszahl am Ende des n-ten Jahres, P_0 den Anfangsstand der Bevölkerungszahl, p den jährlichen prozentualen Zuwachs und n die Anzahl der Jahre darstellen. Demnach sind $P_2 = 22050$ Einwohner, $P_0 = 20000$ Einwohner, $n = 2$ Jahre. Nach Einsetzen in die Beziehung (1) erhalten wir:

$$22050 = 20000\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$
$$22050 = 2(100 + p)^2$$
$$p^2 + 200p - 1025 = 0$$
$$p_1 = 5, \quad p_2 = -205$$

Für uns ist die Wurzel $p_1 = 5\%$ interessant.

Antwort: Der jährliche Bevölkerungszuwachs betrug 5%.

384. Verlängern wir die eine Seite eines Quadrates um 4 Einheiten und verkürzen wir gleichzeitig die andere Seite um 2 Einheiten, so entsteht ein Rechteck, dessen Inhalt um 12% größer ist als der des gegebenen Quadrates. Berechnen Sie die Größe der Seite des Quadrates.

Lösung: Die Seite des Quadrates ist xE, sein Inhalt x^2E^2. Die Seiten des neuen Rechteckes werden $(x + 4)$ E und $(x - 2)$ E, sein Inhalt $(x + 4)(x - 2)$ E^2 sein. Dieser ist um 12% größer als der Inhalt des gegebenen Quadrates, oder $\left(x^2 + \frac{12}{100}x^2\right)$ E^2. Daraus folgt:

$$(x + 4)(x - 2) = x^2 + \frac{12}{100}x^2$$

Nach der Umformung entsteht

$$3x^2 - 50x + 200 = 0 \Rightarrow x_1 = 10, \quad x_2 = \frac{20}{3}$$

Antwort: Die Seite des Quadrates ist 10 oder $\frac{20}{3}$ Einheiten

Diskussion: Die gesuchten Seiten des Quadrates müssen größer als 2 sein (damit man sie um 2 verkürzen kann). Also kann man beide Wurzeln als Lösung der gestellten Aufgabe betrachten. Tatsächlich ist für $x = 10$ der Inhalt des Quadrates $x^2 = 100$. Das Rechteck hat dann die Abmessungen 14 und 8 Längeneinheiten und den Inhalt $14 \cdot 8 = 112$ Flächeneinheiten, was nun $\frac{12}{100}$ von 100 oder 12 Flächeneinheiten mehr ist als 100. Für $x = \frac{20}{3}$ ist der Inhalt des Quadrates $\frac{400}{9}$; das Rechteck hat die Abmessungen $\frac{32}{3}$ E und $\frac{14}{3}$ E und den Inhalt von $\frac{32}{3} \cdot \frac{14}{3} = \frac{448}{9}$ Flächeneinheiten, was $\frac{12}{100}$ von $\frac{400}{9}$ FE oder $\frac{48}{9}$ Flächeneinheiten mehr ist als $\frac{400}{9}$ FE.

385. Der Transport einer Tonne Fracht von der Ortschaft M nach der Ortschaft N mit der Eisenbahn ist b Pf teurer als auf dem Wasserweg. Wieviel Tonnen Last können per Eisenbahn von M nach N für S M transportiert werden, wenn man auf dem Wasserweg für die gleiche Summe k t mehr als per Eisenbahn befördern kann?

Lösung: Wenn wir die Last, die per Eisenbahn transportiert wird, mit x t bezeichnen, dann ist die auf dem Wasserweg beförderte Frachtmenge $(x + k)$ t. Die Beförderung einer Tonne Fracht per Eisenbahn kostet $\frac{S}{x}$ M und auf dem Wasserweg $\frac{S}{x+k}$ M, was $\frac{b}{100}$ M weniger ist, also

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{x+k} + \frac{b}{100}$$

Nach Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung für die Unbekannte x:

$$bx^2 + bkx - 100kS = 0$$

Die Lösung mit positivem Vorzeichen vor der Wurzel $x = \frac{-bk + \sqrt{b^2k^2 + 400\,bkS}}{2b}$ ist auch Lösung der Aufgabe. x hat ein positives Vorzeichen, da b, k und S ein positives Vorzeichen haben, und über sie gilt:

$$b^2k^2 = +400bkS > b^2k^2$$

Zahlenmäßige Untersuchung: Möge $b = 75$ $k = 300$, $S = 6750$ sein, so erhalten wir $x = 1500$.

Antwort: Für S M können per Eisenbahn

$$\frac{-bk + \sqrt{b^2k^2 + 400\,bkS}}{2b}\ \text{t}$$

Fracht und auf dem Wasserweg

$$\frac{bk + \sqrt{b^2k^2 + 400\,bkS}}{2b}\ \text{t Fracht befördert}$$

werden.

Für 6750 M befördern wir per Eisenbahn 1500 t und auf dem Wasserweg 1800 t Fracht.

386. Auf zwei Masten, die 50 m voneinander entfernt stehen, befinden sich aufeinander gerichtete Lautsprecher. Auf dem linken Mast befinden sich zwei, auf dem rechten drei Lautsprecher, wobei alle gleich stark sind. Wo müssen wir auf der Verbindungslinie der Masten zwischen ihnen stehen, um gleich deutlich von beiden Seiten zu hören?

Lösung: Wenn wir unsere Entfernung vom linken Mast mit x m bezeichnen, dann befinden wir uns vom rechten Mast in einer Entfernung von $(50 - x)$ m. Die Lautstärke nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Daher gilt:

$$\frac{x^2}{(50 - x)^2} = \frac{2}{3},$$

und nach Umformung erhalten wir:

$$x^2 + 200x - 5000 = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $x_1 = 22{,}5$, $x_2 = -222{,}5$. Unserer Aufgabe wird nur $x_1 = 22{,}5$ gerecht.

Antwort: Wir müssen auf der Verbindungslinie beider Masten 22,5 m vom linken Mast entfernt stehen.

Anmerkung: Die Wurzel mit negativem Vorzeichen würde eine Entfernung links vom linken Mast bedeuten (und zwar auf der Verlängerung der Verbindungslinie beider Masten).

387. Einige Arbeiter wurden beauftragt, $a(= 100)$ t Getreide auszuladen. Da $b(= 10)$ Arbeiter mehr zur Arbeit erschienen, brauchte jeder Arbeiter $c(= 5)$ t weniger auszuladen. Wieviel Arbeiter waren bei der Einlagerung des Getreides beschäftigt?

Lösung: Die Anzahl der mit dem Ausladen beschäftigten Arbeiter bezeichnen wir mit x. Die ursprüngliche Anzahl der Arbeiter war $(x - b)$. Ein Arbeiter mußte $\frac{a}{x-b}$ t Getreide ausladen. Da b Arbeiter mehr zur Arbeit kamen, lud jeder Arbeiter $\frac{a}{x}$ t Getreide aus. Aus der Aufgabe folgt:

$$\frac{a}{x-b} - \frac{a}{x} = c$$

$$ax - a(x - b) = cx(x - b)$$

$$ax - ax + ab = cx^2 - bcx$$

$$cx^2 - bcx - ab = 0$$

$$x_1 = \frac{bc + \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c}$$

$$= \frac{10 \cdot 5 + \sqrt{100 \cdot 25 + 4 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{50 + \sqrt{22\,500}}{10} = \frac{50 + 150}{10} = 20$$

($x_2 < 0$ unbrauchbar)

(Die Lösung $x_2 = \frac{bc - \sqrt{b^2c^2 + 4abc}}{2c}$ hat ein negatives Vorzeichen, weil a, b und c positiv und der Ausdruck $bc - \sqrt{b^2c^2 + abc}$ negativ sind, denn $b^2c^2 < b^2c^2 + 4abc$.)

Antwort: Mit der Getreideeinlagerung waren 20 Arbeiter beschäftigt.

388. Von zwei Bahnhöfen, die s (in km) voneinander entfernt sind, fuhren zwei Züge so einander entgegen, daß sie sich auf der halben Strecke trafen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit eines jeden Zuges, wenn der erste Zug eine Stunde früher mit einer um a km h^{-1} niedrigeren Geschwindigkeit als die des zweiten Zuges abgeschickt wurde.

Lösung: Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des zweiten Zuges mit x km h^{-1}, so ist die Geschwindigkeit des ersten $(x - a)$ km h^{-1}. Die Hälfte der Strecke legt der erste Zug in $\frac{\frac{s}{2}}{x-a}$ h und der zweite in $\frac{\frac{s}{2}}{x}$ h zurück. Die Zeit $\frac{\frac{s}{2}}{x-a}$ h ist um 1 h länger als $\frac{\frac{s}{2}}{x}$ h, also

$$\frac{s}{2(x-a)} = \frac{s}{2x} + 1$$

Multiplizieren wir die gesamte Gleichung mit $2x(x - a)$, so erhalten wir nach Umformung für die Unbekannte x die quadratische Gleichung

$$2x^2 - 2ax - sa = 0$$

Die positive Lösung $x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2sa}}{2}$ ist auch zugleich Lösung der Aufgabe.
Bei $s = 240$ km ergibt sich $a = 20$ km h^{-1}. Die Geschwindigkeit des zweiten Zuges ist 60 km h^{-1} und die des ersten Zuges 40 km h^{-1}.

Antwort: Der zweite Zug hatte eine Geschwindigkeit von

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 2sa}}{2} \text{ km h}^{-1},$$

und der erste Zug hatte eine Geschwindigkeit von

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 + 2sa}}{2} \text{ km h}^{-1}.$$

389. Eugen kaufte für 400 M Stoff. Wenn er das Meter für 1 M hätte billiger kaufen können, so hätte er für die gleiche Summe 20 m Stoff mehr bekommen. Wieviel Meter kaufte er?

Lösung: Möge die Meterzahl x sein, dann beträgt der Preis eines Meters $\frac{400}{x}$ M. Im zweiten Fall ist $(x + 20)$ die Meterzahl, und ein Meter kostet $\frac{400}{x+20}$ M, wobei dieser Wert $\left(\frac{400}{x} - 1\right)$ M gleicht. Daher wird

$$\frac{400}{x+20} = \frac{400}{x} - 1$$

$$400x = 400(x + 20) - x^2 - 20x$$

$$x^2 + 20x - 8000 = 0$$

$$x_1 = 80, \quad x_2 = -100 \text{ (nicht brauchbar)}$$

Antwort: Eugen kaufte 80 m Stoff.

390. Zwei Touristen begaben sich von zwei Orten aus einander entgegen auf den Weg. Als sie sich trafen, hatte der erste 12 km mehr zurückgelegt als der zweite. Indem sie ihren Weg mit der ursprünglichen Geschwindigkeit fortsetzten, kam der erste nach 9 Tagen und der zweite nach 12 Tagen vom Zeitpunkt ihres Zusammentreffens an das Ziel. Berechnen Sie die Entfernung zwischen den in Betracht gezogenen Orten.

Lösung: Die Entfernung zwischen den beiden Ortschaften wollen wir mit s km kennzeichnen. Die Zeit, in der der erste Tourist die gesamte Strecke zurücklegt, ist x h, für den zweiten y h. Bis zum Zeitpunkt des Zusammentreffens legte der erste die Entfernung $\left(\frac{s}{2} + 6\right)$ km mit der Geschwindigkeit $\frac{s}{x}$ km h^{-1} in der Zeit $\frac{\frac{s}{2}+6}{\frac{s}{x}}$ h, der zweite die Entfernung $\left(\frac{s}{2} - 6\right)$ km mit der Geschwindigkeit $\frac{s}{y}$ km h^{-1} in der Zeit $\frac{\frac{s}{2}-6}{\frac{s}{y}}$ h zurück. Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{\frac{s}{2}+6}{\frac{s}{x}} = \frac{\frac{s}{2}-6}{\frac{s}{y}}, \text{ woraus } s = \frac{-12(x+y)}{x-y} \qquad (1)$$

Aus der Aufgabe folgt weiterhin:

$$\frac{\frac{s}{2}+6}{\frac{s}{x}} + 9 = x, \text{ und damit } x = \frac{-18s}{12-s} \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{s}{2}-6}{\frac{s}{y}} + 16 = y, \text{ ferner } y = \frac{32s}{s+12} \qquad (3)$$

Nach Einsetzen von (2) und (3) für x und y in (1) und nach Umformung erhalten wir:

$$7s^2 - 600s + 1008 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \begin{cases} 84 \\ \frac{12}{7} \text{ (unbrauchbar)} \end{cases}$$

Antwort: Die Ortschaften sind 84 km voneinander entfernt.

391. Berechnen Sie die Abhängigkeit des Preises c eines laufenden Meters einer Welle vom Durchmesser d, wenn 1 kg der Welle a M kostet und 1 dm² bearbeiteter Fläche b M. Aus dieser Abhängigkeit berechnen Sie den Durchmesser d, wenn $a = 4$ M, $c = 240$ M, $\varrho = 7{,}85$ kg/dm³ und $b = 5$ M.

Lösung: Der Preis c setzt sich aus dem Preis für die Masse eines laufenden Meters, d. h. $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 10\varrho a$, und dem Preis für seine Bearbeitung, d. h. $(\pi d \cdot 10 \cdot b)$, zusammen, wobei $\left[\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 10\right]$ dm³ das Volumen und $(\pi d \cdot 10)$ dm² den Wellenmantel darstellen. Wir erhalten somit die Gleichung

$$c = \pi\frac{d^2}{4} \cdot 10\varrho a + \pi d \cdot 10 \cdot b$$

und nach der Umformung

$$d^2 + \frac{4b}{\varrho a} \cdot d - \frac{4c}{10\pi \cdot \varrho a} = 0$$

Nach Einsetzen und weiterer Umformung wird

$$d^2 + 0{,}638d - 0{,}974 = 0 \Rightarrow d = 0{,}72$$

Antwort: Der Durchmesser der Welle ist unter den angegebenen Bedingungen annähernd 72 mm.

392. In zwei gleichen 30-Liter-Gefäßen befanden sich zusammen 30 l Spiritus. Das erste Gefäß wurde aufgefüllt, und zwar wurde Wasser hinzugegossen, und das zweite Gefäß wurde danach mit dem entstandenen Gemisch aufgefüllt. Schließlich wurden 12 l des neuen Gemisches aus dem zweiten in das erste Gefäß umgegossen. Wieviel Spiritus war ursprünglich in jedem Gefäß, wenn sich im zweiten Gefäß schließlich 2 l Spiritus weniger befanden als im ersten?

Lösung: Wir nehmen an, daß sich im ersten Gefäß x l Spiritus befanden, dann waren im zweiten $(30 - x)$ l. Nach Hinzugießen von Wasser in das erste Gefäß waren in jedem Liter des entstandenen Gemisches $\frac{x}{30}$ l Spiritus und $\left(1 - \frac{x}{30}\right)$ l Wasser enthalten. Nach dem Umgießen aus dem ersten Gefäß in das zweite waren im zweiten $\left(30 - x + \frac{x}{30}x\right)$ l Spiritus und $\left[\left(1 - \frac{x}{30}\right)x\right]$ l Wasser enthalten. In einem Liter sind hier

$$\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] \text{ l Spiritus}$$

enthalten. Nach dem Umgießen von 12 l dieses Gemisches in das erste Gefäß waren darin

$$\left\{12\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + \frac{x}{30}(30 - x)\right\} \text{ l Spiritus}$$

und im zweiten Gefäß

$$18\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] \text{ l Spiritus enthalten.}$$

Entsprechend der Bedingung ergibt sich:

$$18\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + 2 = 12\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + x - \frac{x^2}{30},$$

woraus wir nach dem Umformen finden:

$$x^2 + 30x + 200 = 0 \Rightarrow x_1 = 20, \quad x_2 = 10$$

Antwort: Im ersten Gefäß waren also 10 l und im zweiten 20 l, oder 20 l im ersten und 10 l im zweiten enthalten.

393. Ein Betrieb will für 100000 M Rohstoffe einkaufen. Er hat zwei Angebote, von denen das erste um p M für 1 kg billiger ist als das zweite. Wenn er billiger einkauft, kann er k kg mehr Rohstoffe kaufen. Wie hoch ist der Preis für 1 kg bei den einzelnen Angeboten?

Lösung: Es möge das erste Angebot $(x - p)$ M für 1 kg, das zweite x M für 1 kg sein. Die Anzahl der Kilogramm, die der Betrieb beim ersten Angebot einkauft, ist durch die Beziehung $\frac{100000}{x-p}$, bei der zweiten Offerte durch die Beziehung $\frac{100000}{x}$ gegeben. Aus der Aufgabe folgt:

$$\frac{100000}{x-p} - \frac{100000}{x} = k$$

$$kx^2 - kpx - 100000p = 0$$

$$x_1 = \frac{kp + \sqrt{k^2p^2 + 400000\,pk}}{2k}$$

$$x_2 = \frac{kp - \sqrt{k^2p^2 + 400000\,pk}}{2k}$$

Eine der Lösungen hat ein negatives Vorzeichen; es gilt

$$x_1x_2 < 0$$

Der Aufgabe wird die Wurzel

$$x_1 = \frac{pk + \sqrt{p^2k^2 + 400000\,pk}}{2k}$$

gerecht.

Antwort: Der Preis für 1 kg Rohstoff beträgt beim ersten Angebot:

$$\left[\frac{pk + \sqrt{p^2k^2 + 400000pk}}{2k} - p\right] \text{M} = \frac{-pk + \sqrt{p^2k^2 + 400000pk}}{2k} \text{M}$$

und beim zweiten Angebot:

$$\frac{pk + \sqrt{p^2k^2 + 400000pk}}{2k} \text{ M}.$$

394. In einer Werkskantine kaufte man für s M einige Kilogramm Ware. Wenn jedes Kilogramm m M mehr kostete, hätte man für die gleiche Summe n kg weniger kaufen können. Wieviel Kilogramm Ware kaufte man ein?

Lösung: Die gesuchte Anzahl der Kilogramm Ware wollen wir mit x bezeichnen. Jedes Kilogramm Ware kostete t M. Aus der ersten Bedingung $s = xt$ und der zweiten Bedingung $s = (x - n)(t + m)$ erhalten wir:

$$s = xt \Rightarrow t = \frac{s}{x}$$

$$s = (x - n)(t + m)$$

$$s = (x - n)\left(\frac{s}{x} + m\right) \Rightarrow mx^2 - mnx - ns = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{mn \pm \sqrt{m^2n^2 + 4mns}}{2m}$$

Es muß $x > 0$ sein, also

$$x_1 = \frac{mn + \sqrt{m^2n^2 + 4mns}}{2m} \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{mn - \sqrt{m^2n^2 + 4mns}}{2m} < 0$$

weil $\left(mn - \sqrt{m^2n^2 + 4mns}\right) < 0$.
Zahlenmäßig: Es sei $s = 30$ M, $m = 5$ M und $n = 3$ kg. Damit ist

$$x_1 = \frac{5 \cdot 3 + \sqrt{5^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 30}}{2 \cdot 5} \text{kg} = 6 \text{ kg}$$

Antwort: Die Menge der gekauften Ware wird durch die Beziehung (1) ausgedrückt.

4.2. Nichtrationale Gleichungen

395. Vergrößern wir eine unbekannte Zahl um 7 und ziehen wir die Quadratwurzel aus dieser so gebildeten Zahl, so erhalten wir eine Zahl, die um 5 kleiner ist als die ursprüngliche Zahl. Berechnen Sie die unbekannte Zahl.

Lösung: Die unbekannte Zahl ist x, die um 7 vergrößerte ist $(x + 7)$, ihre Quadratwurzel ist $\sqrt{x + 7}$. Aus der Aufgabe folgt weiter:

$$\sqrt{x + 7} = x - 5, \quad x + 7 \geqq 0 \Rightarrow x \geqq -7$$

und

$$x - 5 \geqq 0 \Rightarrow x \geqq 5$$

Den Ungleichungen wird $x \geqq 5$, der Gleichung aber nur $x > 5$ gerecht, da für $x = 5$ die rechte Seite gleich Null und die linke Seite ungleich Null ist. Nachdem man die Gleichung zum Quadrat erhoben hat, folgt:

$$x + 7 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2}$$

$x_1 = 9$,

$x_2 = 2$ (widerspricht der Bedingung $x \geqq 5$)

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 9.

396. Welcher Strom I fließt durch einen Widerstandsdraht von $R = 8\,\Omega$, wenn in 60 s die Wärmemenge $W = 4940$ J entwickelt wird?

Lösung: Aus der Formel für die Wärmemenge folgt:

$$W = UIt = I^2Rt \quad (I > 0) \Rightarrow I = \sqrt{\frac{W}{Rt}}$$

$$I = \sqrt{\frac{4940 \text{ J}}{8\,\Omega \cdot 60 \text{ s}}} = \sqrt{10{,}3 \text{ A}^2} = 3{,}2 \text{ A}$$

Antwort: Durch den Widerstandsdraht fließt ein Strom von 3,2 A.

397. Die eine Seite eines Rechteckes ist um 3 kürzer als die andere (Bild 45), und seine Diagonale ist um $\sqrt{2}$ kürzer als die Diagonale des über der längeren Seite konstruierten Quadrates. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechteckes.

Lösung: Die Seiten des Rechteckes sind x und $(x - 3)$; die Diagonale des Rechteckes mit diesen Seiten ist $\sqrt{x^2 + (x - 3)^2} = u$, $x > 3$, die Diagonale des Quadrates mit der längeren Seite ist: $\sqrt{x^2 + x^2} = u$.

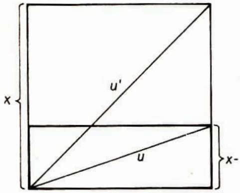

Bild 45

Aus der Aufgabe folgt die Gleichung:

$$\sqrt{x^2 + (x-3)^2} = \sqrt{x^2 + x^2} - \sqrt{2},$$

und nach Umformung (Quadrieren, Ordnen) wird:

$$x^2 + (x-3)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{2x^2} \cdot \sqrt{2} + 2$$
$$x^2 + x^2 - 6x + 9 = 2x^2 - 4x + 2$$
$$2x = 7$$
$$x = \frac{7}{2}$$

Antwort: Die Abmessungen des Rechteckes sind $\frac{7}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

398. Wie hoch muß ein Ballonpilot über der Mitte des Ladogasees aufsteigen, um beide Ufer, die 210 km voneinander entfernt sind, zugleich sehen zu können?

Lösung: Im rechtwinkligen Dreieck (Bild 46) OVM gilt nach dem Satz des Pythagoras:

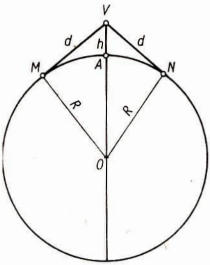

Bild 46

$d^2 + R^2 = (R+h)^2$, woraus folgt:

$$d^2 = h(2R + h) \tag{1}$$

Nun ist aber h sehr klein im Vergleich mit $2R$. Daher genügt es, anstelle von $(2R + h)$ nur $2R$ zu schreiben. Dann geht die Beziehung (1) in die Form

$$d^2 = 2Rh$$
$$d = \sqrt{2Rh},\ h > 0 \tag{2}$$

über. Die Bogenlänge MA (b) weicht geringfügig von der Länge d ab, dieser Unterschied kann aber vernachlässigt werden. Die Höhe h, in die der Pilot aufsteigen muß, berechnen wir nach (2):

$$h = \frac{d^2}{2R}$$

Wenn der Ballonpilot von beiden Ufern des Sees gleich weit entfernt sein wird, dann ist $d = 105$ km. R möge auf 6400 km gerundet sein.
Dann ist:

$$h = \frac{11\,025}{12\,800}\,\text{km} = 0{,}86\ \text{km}$$

Antwort: Der Pilot muß in eine Höhe von 860 m aufsteigen.

399. Berechnen Sie die Zahl, die folgende Eigenschaften aufweist: wenn sie um 3 erhöht und ein anderes Mal um 1 verkleinert wird, so ist das geometrische Mittel beider auf diese Weise entstandenen Zahlen um $\frac{1}{2}$ größer als die Zahl selbst.

Lösung: Zunächst seien drei Begriffe erläutert. Für die Zahlen x_i heißt (einfaches) arithmetisches Mittel:

$$\bar{x}_a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

(einfaches) harmonisches Mittel

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

(einfaches) geometrisches Mittel[1]

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Die gesuchte Zahl ist x, die um 3 erhöhte $(x + 3)$, die um 1 verringerte $(x - 1)$, das geometrische Mittel der erhöhten und verringerten Zahl ist $\sqrt{(x+3)(x-1)}$. Aus der Aufgabe folgt die Gleichung

$$\sqrt{(x+3)(x-1)} = x + \frac{1}{2}$$

Quadriert:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

oder:

$$2x - 3 = x + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{13}{4}$$

Probe:

$$\sqrt{\left(\frac{13}{4} + 3\right)\left(\frac{13}{4} - 1\right)} = \frac{15}{4} \,\Bigg|\, \frac{13}{4} + \frac{1}{4} = 3{,}5$$

Antwort: Die gesuchte Zahl ist $\frac{13}{4}$.

400. Auf jedem Schenkel eines rechten Winkels (Bild 47) befindet sich ein vom Scheitelpunkt 52 cm entfernter Punkt. Beide Punkte mögen sich gleichmäßig auf den Schenkeln des Winkels in Richtung zum Scheitel bewegen. Der erste mit der Geschwindigkeit $c_1 = 4 \text{ cm s}^{-1}$, der zweite mit $c_2 = 8 \text{ cm s}^{-1}$. Nach wieviel Sekunden wird die Entfernung der Punkte $d = 26$ cm betragen?

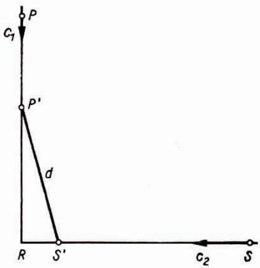

Bild 47

Lösung:

$$d = \sqrt{\overline{RP'}^2 + \overline{RS'}^2}$$

$$\overline{SS'} = c_2 t \qquad (\overline{RP} = \overline{RS} = 52)$$

$$\overline{PP'} = c_1 t$$

$$\overline{RP'} = 52 - c_1 t$$

$$\overline{RS'} = 52 - c_2 t$$

$$d = \sqrt{(52 - c_1 t)^2 + (52 - c_2 t)^2}, \quad t > 0$$

Nach dem Quadrieren erhalten wir aus der nichtrationalen Gleichung:

$$t^2(c_1^2 + c_2^2) - t(104c_1 + 104c_2) + 5408 - d^2 = 0$$

Jetzt werden die Werte für c_1, c_2 und d eingesetzt. Es folgt daraus:

$$20t^2 - 312t + 1183 = 0$$

$$t_1 = \frac{91}{10}; \quad t_2 = \frac{13}{2}$$

Antwort: Die Punkte werden sich in $\frac{91}{10}$ s oder $\frac{13}{2}$ s 26 cm voneinander entfernt befinden.

Anmerkung: In der Zeit t_1 gelangt der zweite Punkt auf den dem Halbstrahl RS entgegengesetzt gerichteten Halbstrahl. Man überzeuge sich davon, indem man die Strekken $\overline{SS'}$ und $\overline{PP'}$ ausrechnet.

401. Welchen Strom kann man von der Sekundärspule eines Netztransformators abnehmen, wenn der Transformator bei einer Spannung von 1000 V an der Sekundärspule Strom liefert und der Querschnitt des Eisenkerns 7 cm² beträgt?

Lösung: Der Querschnitt des Eisenkerns ist annähernd gleich der Wurzel aus dem Produkt der Spannung U an der Sekundärspule

[1] In einer arithmetischen Zahlenfolge ist ein Glied das arithmetische Mittel aus Vorgänger und Nachfolger. In einer geometrischen Zahlenfolge ist ein Glied geometrisches Mittel aus Vorgänger und Nachfolger.

und dem Strom I, der durch die Spule fließt. Aus dieser Beziehung

$$A = k\sqrt{UI}, \quad \text{wobei } k = 1\,\frac{\text{cm}^2}{\sqrt{W}}$$

folgt:

$$I = \frac{A^2}{Uk^2}$$

$$I = \frac{49}{1000}\text{ A} = 0{,}049\text{ A} \approx 50\text{ mA}$$

Antwort: Von der Sekundärspule kann ein Strom von 50 mA abgenommen werden.

402. Die Größen der Seiten eines Dreieckes sind (in Zentimetern) durch drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen ausgedrückt. Der Inhalt dieses Dreieckes ist 84 cm². Berechnen Sie die Seiten des Dreieckes.

Lösung: Die Länge der kürzesten Seite a bezeichnen wir mit $(x - 1)$ cm, die Länge von b sei x cm, und die Länge der längsten Seite ist $(x + 1)$ cm. Der Umfang des Dreieckes ist:[1]

$$2s = x - 1 + x + x + 1 = 3x$$

Für den halben Umfang gilt:

$$s = \frac{3x}{2}$$

Entsprechend der Dreiecksformel von Heron[2] ist der Flächeninhalt des Dreieckes:

$$A = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \tag{1}$$

Die einzelnen Differenzen drücken wir mit Hilfe der Unbekannten x aus.

$$s - a = \frac{3x}{2} - (x - 1) = \frac{3x - 2x + 2}{2} = \frac{x+2}{2}$$

$$s - b = \frac{3x}{2} - x = \frac{3x - 2x}{2} = \frac{x}{2}$$

[1] Mit s bezeichnet man in der Regel den halben Umfang $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

[2] Heron von Alexandria, griech. Mathematiker um 100 v. u. Z.

$$s - c = \frac{3x}{2} - (x + 1) = \frac{3x - 2x - 2}{2} = \frac{x-2}{2}$$

Setzen wir nun in (1) ein:

$$\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x-2}{2}} = 84 \tag{2}$$

Nach dem Quadrieren entsteht die quadratische Gleichung

$$\frac{3x^2(x^2-4)}{16} = 7056$$

$$x^4 - 4x^2 - 37632 = 0 \tag{3}$$

Aus der Substitution $x^2 = y$ folgt

$$y^2 - 4y - 37632 = 0,$$

deren Wurzeln $y_1 = -192$ und $y_2 = 196$ sind.
Wir wollen nun in die Substitutionsgleichung $y = x^2$ einsetzen:

für $y = -192$ ist $x^2 = -192$
(nicht brauchbar, kein reelles x erfüllt die Gleichung)

für $y = 196$ ist $x^2 = 196 \Rightarrow x_1 = 14$,
$x_2 = -14$ (nicht brauchbar)

Antwort: Die Lösungen der Seiten des gegebenen Dreiecks sind 13 cm, 14 cm, 15 cm.

Probe: $2s = 42$, $s = 21$, $s - a = 21 - 13 = 8$, $s - b = 21 - 14 = 7$, $s - c = 21 - 15 = 6$, $A = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$.

403. Von der Ortschaft A aus begibt sich ein Läufer auf die Strecke nach der Ortschaft B und zur gleichen Zeit von der Ortschaft B nach A ein anderer Läufer. Beide treffen sich nach 8 h. Die Entfernung zwischen den Ortschaften $\overline{AB} \approx 176$ km. Wie hoch ist die Geschwindigkeit beider Läufer, wenn einer der beiden 1 h mehr Zeit für das Zurücklegen von 60 km benötigt als der andere?

Lösung: Die Geschwindigkeit des ersten Läufers ist x km h^{-1} und die des zweiten y km h^{-1}. In 8 h legte der erste eine Strecke von $8x$ km, der zweite von $8y$ km zurück, also

$$8x + 8y = 176 \tag{1}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt die Gleichung

$$\frac{60}{x} + 1 = \frac{60}{y} \tag{2}$$

Nach der Zusammenfassung von (1) und (2) erhalten wir:

$$x^2 - 98x - 1320 = 0$$

$x_1 = 12$, $x_2 = -110$ (unbrauchbar)

Nach Einsetzen für $x = 12$ in (1) ermitteln wir, daß $y = 10$ ist.

Antwort: Die Geschwindigkeit des ersten Läufers betrug $12\ \mathrm{km\ h^{-1}}$, die des zweiten $10\ \mathrm{km\ h^{-1}}$.

404. Nach dem Fallenlassen eines Steines in einen Abgrund war der Aufschlag auf den Boden nach 12 s zu hören. Wie tief ist der Abgrund? ($g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$, Schallgeschwindigkeit in der Luft $c \approx 330\ \mathrm{m/s}$)

Lösung: In der Zeit von 12 s ist auch die Zeit t_1 des Steinfalls und die Zeit t_2, in der der Schall zu uns gelangt, nachdem der Stein auf den Grund der Schlucht aufgeschlagen ist, enthalten. Oder

$$12 = t_1 + t_2 \tag{2}$$

Der Abgrund hat eine Tiefe $h = \left(\frac{1}{2} g t_1^2\right)$, was gleich ist der Bahn des Steines beim freien Fall. Der Weg des Schalles ist $h = ct_2$ (gleichförmige geradlinige Bewegung). Aus diesen Beziehungen folgt

$$t_1 = \frac{2h}{g}, \quad t_2 = \frac{h}{c}$$

und nach Einsetzen in (1) sowie nach Umformung erhalten wir:

$$12 = \frac{2h}{g} + \frac{h}{c}, \qquad (h > 0)$$

$$h^2 g - h(24gc + 2c^2) + 144c^2 g = 0$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte finden wir:

$$h^2 - 29\,700h + 15\,681\,600 = 0$$

$$h \approx 581$$

Antwort: Der Abgrund ist annähernd 580 m tief.

405. Wir befestigen eine 12 m lange Schnur so an zwei Pfählen, daß das eine Ende 2 m tiefer als das andere befestigt ist (Bild 48a).

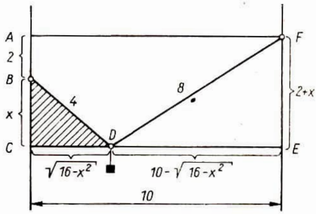

Bild 48 a

Der Abstand zwischen den Pfählen beträgt 10 m. In $\frac{1}{3}$ der Länge der Schnur, von der Stelle der niedrigeren Befestigung an gerechnet, hängen wir einen Körper an. Um wieviel niedriger wird die Stelle der Körperbefestigung als die Stelle der niedrigeren Befestigung der Schnur am Pfahl sein?

Lösung:

a) Die gesuchte Entfernung $\overline{BC}$ wollen wir mit x kennzeichnen. Dann ist $\overline{CD} = \sqrt{16 - x^2}$ (Satz des Pythagoras für das Dreieck BCD)

$$\overline{EF} = 2 + x, \quad \overline{DE} = 10 - \sqrt{16 - x^2}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck DEF erhalten wir durch die Anwendung des Satzes des Pythagoras:

$$8^2 = (2 + x)^2 + \left(10 - \sqrt{16 - x^2}\right)^2$$

$$64 = 4 + 4x + x^2 + 100 - 20\sqrt{16 - x^2} + 16 - x^2$$

$$20\sqrt{16 - x^2} - 4x - 56 = 0 \mid :4$$

$$5\sqrt{16 - x^2} - x - 14 = 0$$

$$5\sqrt{16 - x^2} = 14 + x \mid (\ )^2$$

$$25(16 - x^2) = 196 + 28x + x^2$$

$$26x^2 + 28x - 204 = 0 \mid :2$$

$$13x^2 + 14x - 102 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 4 \cdot 13 \cdot 102}}{26}$$

$$= \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 5304}}{26}$$

$$= \frac{-14 \pm \sqrt{5500}}{26} = \frac{-14 \pm 74{,}2}{26}$$

$$x_1 = \frac{60{,}2}{26} = 2{,}32,$$

$x_2 = -3{,}4$ (unbrauchbar)

b) Die Berechnung der gesuchten Entfernung können wir auch nach Bild 48b vornehmen.

$$\sqrt{8^2 - (2 + x)^2} + \sqrt{4^2 - x^2} = 10$$

$$\sqrt{8^2 - (2 + x)^2} = 10 - \sqrt{4^2 - x^2} \mid (\;)^2$$

$$8^2 - (2 + x)^2 = 100 - 20\sqrt{4^2 - x^2} + 4^2 - x$$

$$64 - 4 - 4x - x^2$$

$$= 100 - 20\sqrt{16 - x^2} + 16 - x^2$$

$$60 - 4x = 116 - 20\sqrt{16 - x^2} \mid :4$$

$$15 - x = 29 - 5\sqrt{16 - x^2}$$

$$5\sqrt{16 - x^2} = 14 + x$$

Wir haben wie vorher eine nichtrationale Gleichung erhalten; sie führt zu den gleichen Ergebnissen.

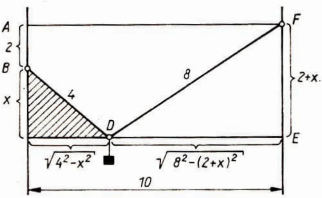

Bild 48b

Probe:

$$\sqrt{8^2 - (2 + 2{,}32)^2} + \sqrt{4^2 - 2{,}32^2}$$

$$= \sqrt{64 - 18{,}7} + \sqrt{11{,}6} = 6{,}7 + 3{,}3 = 10$$

Antwort: Die Stelle der Gewichtsaufhängung befindet sich 2,32 m unter der Stelle der niedrigeren Befestigung der Schnur am Pfahl.

4.3. Gleichungssysteme, bei denen eine Gleichung linear und die andere quadratisch ist

406. Die Differenz zweier Zahlen ist 48, die Differenz ihrer arithmetischen und geometrischen Mittel beträgt 18. Um welche Zahlen handelt es sich?

Lösung: Die gesuchten Zahlen sind x und y. Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist $\frac{x + y}{2}$ und das geometrische Mittel $\sqrt{xy}$.

Aus den Bedingungen folgt dann

$$x - y = 48 \Rightarrow x = 48 + y \qquad (1)$$

$$\frac{x - y}{2} - \sqrt{xy} = 18 \qquad (2)$$

Durch Substitution erhalten wir:

$$\frac{48 + y + y}{2} - \sqrt{(48 + y)\,y} = 18$$

$$24 + y - 18 = \sqrt{(48 + y)\,y}$$

$$x + 6 = \sqrt{(48 + y)\,y} \mid (\;)^2$$

$$y^2 + 12y + 36 = 48y + y^2$$

$$y = 1$$

Nach Einsetzen in (1) ermitteln wir, daß $x = 49$ ist.

Antwort: Die gesuchten Zahlen sind 49 und 1.

407. Zwei Kondensatoren haben, wenn sie parallel geschaltet sind, eine Kapazität von 16 pF, und wenn sie in Reihenschaltung angeordnet sind, eine Kapazität von 1,75 pF (Bild 49). Berechnen Sie die Kapazitäten beider Kondensatoren.

Lösung: Die Kapazität des einen Kondensators kennzeichnen wir mit x pF und die des anderen mit y pF.

a) Bei Reihenschaltung gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1{,}75}$$

b) Bei Parallelschaltung gilt:

$x + y = 16$

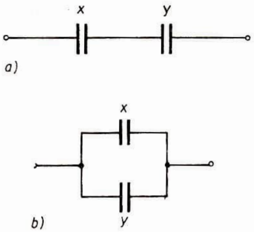

Bild 49

Wir finden also folgendes Gleichungssystem:

$$1{,}75y + 1{,}75x = xy \tag{1}$$

$$x = 16 - y \tag{2}$$

Nach Einsetzen für x aus (2) in (1) erhalten wir:

$$y^2 - 16y + 28 = 0$$

$$y_1 = 14, \quad y_2 = 2,$$

wir finden

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 14$$

Anmerkung: Es handelt sich um eine symmetrische Gleichung, in der wir die Unbekannten vertauschen können.

Antwort: Die Kapazität des einen Kondensators ist 14 pF, die des anderen 2 pF.

408. Der Umfang eines Rechteckes ist zehnmal so lang wie die Differenz seiner beiden Seiten. Der Inhalt ist um 144 dm² größer als die Differenz der Quadrate beider Seiten. Berechnen Sie die Abmessungen des Rechteckes.

Lösung: Die Abmessungen des Rechteckes kennzeichnen wir mit x dm und y dm $(x > y)$[1]. Der Umfang ist $2(x + y)$ dm, der Inhalt xy dm². Entsprechend der Aufgabe ist

$$2(x + y) = 10(x - y) \tag{1}$$

$$xy = x^2 - y^2 + 144 \tag{2}$$

[1] Wir können das frei wählen.

Aus (1) drücken wir x aus und setzen für x in (2) ein, für y erhalten wir die rein quadratische Gleichung

$$y^2 = 576,$$

aus der wir finden

$$y_{1,2} = \pm 24$$

Für unsere Aufgabe hat nur die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen $y = 24$ einen Sinn, dann ist $x = 36$.

Antwort: Die Abmessungen des Rechteckes sind 36 dm und 24 dm.

409. Mit zwei Maschinen kann die gesamte Getreideernte einer LPG in 4 Tagen durchgeführt werden. Wenn die Hälfte der Ernte mit der einen Maschine und der Rest mit der anderen ausgeführt würde, dauerte die Ernte 9 Tage. In wieviel Tagen würde die gesamte Ernte mit jeder Maschine gesondert erledigt?

Lösung: Mit der ersten Maschine wird die Ernte in x Tagen, mit der zweiten in y Tagen erledigt. Wenn beide gleichzeitig arbeiten, dann dauert die Arbeit 4 Tage. Mit der ersten Maschine wird an einem Tag $\frac{1}{x}$ der Ernte, mit der zweiten $\frac{1}{y}$ der Ernte und mit beiden gleichzeitig $\frac{1}{4}$ der Ernte geschafft. Aus dieser Betrachtung folgt die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \tag{1}$$

Die halbe Ernte kann mit der ersten Maschine in $\frac{x}{2}$ Tagen, mit der zweiten in $\frac{y}{2}$ Tagen, also gemeinsam in 9 Tagen erledigt werden, d. h.,

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 9 \tag{2}$$

Nach Umformung erhalten wir das Gleichungssystem:

$$4x + 4y = xy \tag{1'}$$

$$x + y = 18 \tag{2'}$$

Aus der Gl. (1') setzen wir x in (2') ein und erhalten die quadratische Gleichung

$$y^2 - 18y + 72 = 0,$$

deren Wurzeln $y_1 = 12$ und $y_2 = 6$ sind. Dann finden wir aus (2') $x_1 = 6$ bzw. $x_2 = 12$.

Antwort: Die gesamte Ernte kann mit der ersten Maschine in 6 Tagen und mit der zweiten in 12 Tagen durchgeführt werden.[1]

410. Ein Festessen, an dem doppelt soviel Männer wie Frauen teilnahmen, kostete 1584 M. Jeder Mann bezahlte achtmal soviel Pfennige, wie es Männer waren und jede Frau zwölfmal soviel Pfennige, wie es Frauen waren. Wieviel Männer und Frauen nahmen an dem Festessen teil?

Lösung: Die Anzahl der Männer kennzeichnen wir mit x und die der Frauen mit y. Jeder Mann bezahlte $8x$ Pf, also bezahlten x Männer $8x \cdot x = 8x^2$ Pf. Jede Frau bezahlte $12y$ Pf, also bezahlten y Frauen $12y^2$ Pf.
Wir erhalten das Gleichungssystem:

$$x = 2y \qquad (1)$$

$$8x^2 + 12y^2 = 158400 \qquad (2)$$

Daraus erhalten wir:

$$44y^2 = 158400$$

$$y_{1,2} = \pm 60,$$

und nach Einsetzen in (1) wird:

$$x_{1,2} = \pm 120$$

Unserer Aufgabe werden nur positive Werte, also $x = 120$ und $y = 60$ gerecht.

Antwort: Am Festessen nahmen 120 Männer und 60 Frauen teil.

411. Eine rechteckige Stütze aus Fichtenholz soll eine Druckkraft von 163200 N aufnehmen. Die Seiten des Querschnittes stehen im Verhältnis $b:h = 3:4$ zueinander. Welche Abmessungen muß der Querschnitt aufweisen, wenn die zulässige Belastung des Nadelholzes 850 N/cm² beträgt?

Lösung: Wenn die Abmessungen des Querschnittes b und h sind, dann ist die auf diesen Querschnitt wirkende Druckkraft

$$b \cdot h \cdot 850\ \mathrm{N/cm^2}$$

und diese muß gleich 163200 N sein, d. h.,

$$850\, bh = 163200.$$

Weiterhin gilt über die Seiten des Querschnittes:

$$b:h = 3:4$$

oder

$$4b = 3h$$

Die Lösung des Gleichungssystems:

$$3h = 4b$$

$$85bh = 16320$$

liefert uns:

$$b = 12 \quad \text{und} \quad h = 16$$

Antwort: Der Querschnitt hat die Abmessungen 12 cm und 16 cm.

412. Eine LPG bewirtschaftete 300 ha Boden. Wenn sie für eine Arbeit 3 Traktoren mehr zur Verfügung hätte, hätte sie die Arbeit 6 Tage früher abschließen können. Wieviel Traktoren hatte sie, wenn jeder Traktor 15 ha täglich bearbeitet?

Lösung: Die LPG hat x Traktoren und arbeitet y Tage. Sie bearbeitet täglich mit jedem Traktor 15 ha, dann ist

$$15 \cdot xy = 300 \qquad (1)$$

Hätte die LPG $(x + 3)$ Traktoren, so würde sie $(y - 6)$ Tage arbeiten und bearbeitete bei der Tagesnorm von 15 ha

$$15(x + 3)(y - 6) = 300 \qquad (2)$$

Nach Umformungen der Gln. (1) und (2) erhalten wir das Gleichungssystem

$$xy = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{x} \qquad (1')$$

$$xy + 3y - 6x - 18 = 20 \qquad (2')$$

[1] Ein Vertauschen der beiden Lösungen bedeutet nur ein Auswechseln der Numerierung der beiden Maschinen.

Wir setzen y in die Gl. (2′) ein und erhalten nach Umformung

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$x_1 = 2$, $x_2 = -5$ (erfüllt die Aufgabenstellung nicht)
Für $x = 2$ ist aus (1′) $y = 10$.

Antwort: Die LPG verfügt über zwei Traktoren und muß 10 Tage arbeiten. Wenn sie 5 Traktoren hätte, brauchte sie nur 4 Tage zu arbeiten.

413. Zwei Vielecke haben zusammen 24 Seiten und 109 Diagonalen. Wieviel Ecken hat jedes von ihnen?

Lösung: Das erste Vieleck hat x Seiten und $\frac{1}{2}x(x-3)$[1] Diagonalen; das zweite Vieleck hat y Seiten und $\frac{1}{2}y(x-3)$ Diagonalen. Daraus folgt das Gleichungssystem:

$$x + y = 24$$

$$\frac{1}{2}x(x-3) + \frac{1}{2}y(y-3) = 109$$

$$x + y = 24 \qquad (1)$$

$$x^2 - 3x + y^2 - 3y = 218 \qquad (2)$$

Wir setzen x in (2) ein und erhalten:

$$y^2 - 24y + 143 = 0,$$

deren Lösungen

$$y_1 = 11, \quad y_2 = 13$$

sind. Nach Einsetzen in (1) wird:

$$x_1 = 13, \quad x_2 = 11.$$

Antwort: Das erste Vieleck hat 13 und das zweite 11 Ecken.

414. Das Produkt der Ziffern einer zweistelligen Zahl ist gleich der doppelten Summe ihrer Ziffern. Subtrahieren wir von der gesuchten Zahl 27, so erhalten wir die mit den gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge, geschriebene Zahl. Ermitteln Sie die Zahl.

Lösung: Die Zehner bezeichnen wir mit x und die Einer mit y. Entsprechend der Aufgabe gilt:

$$xy = 2(x + y)$$

Die mit Hilfe der Ziffern geschriebene gesuchte Zahl bedeutet $(10x + y)$, die „umgekehrte" Zahl ist $(10y + x)$, und ihre Differenz beträgt 27 oder

$$(10x + y) - (10y + x) = 27$$

Wir finden somit folgendes Gleichungssystem:

$$xy = 2(x + y) \qquad (1)$$

$$x - y = 3 \qquad (2)$$

Nach dem Finden des Ausdruckes von y aus (2) und nach Einsetzen in (1) erhalten wir für die Unbekannte x die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 1$$

Nur die Wurzel $x = 6$ wird unserer Aufgabe gerecht, dann ist $y = 3$.

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 63.

415. Zwei in Reihe geschaltete Rheostaten weisen einen Gesamtwiderstand von 250 Ω und bei Parallelschaltung von 40 Ω auf (Bild 50). Berechnen Sie beide Widerstände.

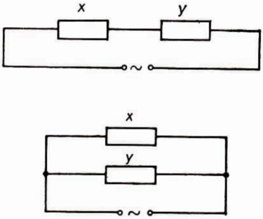

Bild 50

Lösung: Einer der Widerstände sei $x\,\Omega$, der andere $y\,\Omega$. Bei Reihenschaltung (Hintereinanderschaltung) gilt für die Widerstände:

$$x + y = 250 \qquad (1)$$

[1] Ein konvexes n-Eck hat stets n Seiten und $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

und bei Parallelschaltung (Nebeneinanderschaltung):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \qquad (2)$$

Nach der Umformung erhalten wir das Gleichungssystem:

$$x + y = 250$$

$$40y + 40x = xy \qquad (2')$$

Aus (1) bestimmen wir x und setzen es in (2′) ein:

$$y^2 - 250y + 10000 = 0,$$

aus der folgt, daß $y_1 = 200$, $y_2 = 50$. Weiter folgt:

$$x_1 = 50, \quad x_2 = 200.$$

Antwort: Der eine Widerstand mißt 50 Ω und der andere 200 Ω.

416. Zwei Arbeiter sind mit der gleichen Arbeit beschäftigt. Von Beginn an arbeitete der erste ein Drittel der Zeit ab, die der zweite für die Ausführung der gesamten Arbeit benötigte, dann arbeitete jedoch der zweite ein Drittel der Zeit ab, die der erste für die Ausführung der gesamten Arbeit benötigte. Es zeigte sich, daß sie $\frac{13}{18}$ der gesamten Arbeit ableisteten. Ermitteln Sie, wieviel Zeit jeder Arbeiter einzeln für die Ausführung der Arbeit benötigt, wenn sie gemeinsam die Arbeit in $3\frac{3}{5}$ h beenden können.

Lösung: Die Arbeit bezeichnen wir mit W. Mögen x h und y h die vom ersten und zweiten Arbeiter für die Ausführung der Arbeit im „Alleingang" benötigten Zeiten sein. Der erste Arbeiter führt in 1 Stunde $\frac{W}{x}$ der Arbeit aus, der zweite $\frac{W}{y}$. Gemeinsam erfüllen sie in einer Stunde $\frac{W}{3\frac{3}{5}}$ der Arbeit. Daraus wird

$$\frac{W}{x} + \frac{W}{y} = \frac{W}{3\frac{3}{5}} \qquad (1)$$

Entsprechend der Aufgabe leistete der erste Arbeiter $\frac{y}{3}$ h und der zweite $\frac{x}{3}$ h ab. Der vom ersten Arbeiter in 1 h geleistete Arbeitsumfang ist $\frac{W}{\frac{y}{3}}$, in x h damit $\frac{W}{\frac{y}{3}} \cdot x$; der zweite Arbeiter leistet in 1 h $\frac{W}{\frac{x}{3}}$, in y h somit $\frac{W}{\frac{x}{3}} \cdot y$ der Arbeit.

Es ist also

$$\frac{W}{\frac{y}{3}} \cdot x + \frac{W}{\frac{x}{3}} \cdot y = \frac{13}{18} W \qquad (2)$$

Nach Umformung erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$x^2 + y^2 = \frac{13}{6} xy$$

$$x + y = \frac{5}{18} xy$$

Als Lösung des gegebenen Gleichungssystems erhalten wir:

$$x_1 = 6, \quad y_1 = 9$$

$$x_2 = 9, \quad y_2 = 6$$

Antwort: Der erste Arbeiter würde die Arbeit in 6 h und der zweite in 9 h, oder der erste in 9 h und der zweite in 6 h ausführen.

417. Zwei unbekannte Beträge ergeben zusammen 10000 Mark. Die Prozentsätze jedes Betrags sind gleich $\frac{1}{1000}$ desselben, und die Gesamtsumme der Jahreszinsen beträgt 580 M. Um welche Beträge handelt es sich?

Lösung: Der erste Betrag kann zweckmäßig mit $1000x$ und der zweite mit $1000y$ angegeben werden, dann ist

$$1000x + 1000y = 10000 \quad \Big| \cdot \frac{1}{1000}$$

$$x + y = 10 \qquad (1)$$

Die Prozentsätze des ersten Betrages sind $\frac{1\,000x}{1\,000} = x$, des zweiten $\frac{1\,000y}{1\,000} = y$. Die Jahreszinsen vom ersten Betrag sind $\left(1\,000x \cdot \frac{x}{100}\right) = 10x^2$ und vom zweiten Betrag $\left(1\,000y \cdot \frac{y}{100}\right) = 10y^2$. Aus der Aufgabenstellung folgt:

$$10x^2 + 10y^2 = 580 \;\Big|\cdot \frac{1}{10}$$

$$x^2 + y^2 = 58 \qquad (2)$$

Lösen wir nun das Gleichungssystem:

$$x + y = 10 \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 58 \qquad (2)$$

Aus (1) finden wir den Ausdruck für x ($x = 10 - y$), setzen für x in (2) ein und erhalten:

$$(10 - y)^2 + y^2 = 58$$

$$100 - 20y + y^2 + y^2 = 58$$

$$2y^2 - 20y + 42 = 0 \;\Big|\cdot \frac{1}{2}$$

$$y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

$$y_1 = 7, \quad y_2 = 3$$

Wenn $y_1 = 7$, so ist $x_1 = 3$,
wenn $y_2 = 3$, so ist $x_2 = 7$.

Antwort: Die gesuchten Beträge sind 7000 M und 3000 M.

418. Die Mittelpunkte der Seiten eines Rechteckes mit einem Umfang von 28 cm sind die Eckpunkte eines Rhombus mit der Seite von 5 cm (Bild 51). Welche Abmessungen hat das Rechteck?

Lösung: Die Seitenlängen des Rechtecks sind x cm und y cm, die Seite des Rhombus ist $s = 5$ cm, der Umfang des Rechteckes $2(x + y)$ cm.

Aus der Aufgabe folgt:

$$2(x + y) = 28 \Rightarrow x = 14 - y \qquad (1)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = s^2 \qquad (2)$$

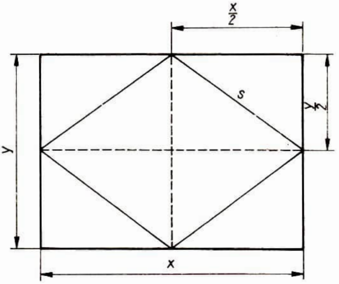

Bild 51

Nach Umformung erhalten wir:

$$y^2 - 14y + 48 = 0$$

$$y_1 = 8, \quad y_2 = 6$$

Nach Einsetzen für y_1 und y_2 in (1) finden wir $x_1 = 6$ und $x_2 = 8$.

Antwort: Die Abmessungen des Rechteckes sind 8 cm und 6 cm.

419. Es fährt ein Personenzug von Bratislava[1] nach Liptovský Mikuláš[2] (280 km). 2 h nach seiner Abfahrt fährt auf der gleichen Strecke ein Schnellzug mit einer um 30 km h^{-1} höheren Geschwindigkeit als der Personenzug ab und kommt in Liptovský Mikuláš 1 h vor dessen Ankunft an. Berechnen Sie ihre Geschwindigkeiten und die Stelle des Überholvorgangs.

Lösung: Möge die Geschwindigkeit des Personenzuges x km h^{-1}, die des Schnellzuges y km h^{-1} sein. Die Strecke von 280 km legt der Personenzug in $\frac{280}{x}$ h, der Schnellzug in

[1] Stadt an der Donau in der ČSSR
[2] Stadt zwischen Niederer und Hoher Tatra

$\frac{280}{y}$ h zurück. Die Gesamtfahrzeit des Schnellzuges ist 3 h kürzer als die des Personenzuges. Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$x = y + 30$ (Geschwindigkeitsgleichung)

$\frac{280}{x} = \frac{280}{y} - 3$ (Zeitgleichung)

Nach der Umformung der zweiten Gleichung erhalten wir das System

$$x = y + 30 \tag{1}$$

$$280y = 280x - 3xy \tag{2}$$

Wir wollen für x aus (1) in (2) einsetzen und erhalten:

$$y^2 + 30y - 2800 = 0 \tag{2'}$$

$$y_{1\,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot 2800}}{2}$$

$y_1 = 40, \quad y_2 = -70$ (unreal)

Aus (1) ist für $y = 40$ dann $x = 70$.
Bei der Berechnung der Stelle des Überholens gehen wir von der Gleichung aus, die die Beziehung zum Ausdruck bringt, daß die von beiden Zügen zurückgelegten Strecken gleich sind und die Fahrzeit des Schnellzuges um 2 h kürzer ist. Möge t h die Fahrzeit des Personenzuges bis zum Zeitpunkt des Überholens sein, dann ist

$$s = x(t - 2) \tag{3}$$

$$s = yt \tag{4}$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten der Gln. (3) und (4) folgt:

$$x(t-2) = yt$$

$$70(t-2) = 40t \Rightarrow t = \frac{14}{3}$$

Demnach gilt für die Strecke s

$$s = yt = 40\,\frac{14}{3} = 187$$

Antwort: Die Geschwindigkeit des Personenzuges war $40\ \text{km h}^{-1}$, die des D-Zuges $70\ \text{km h}^{-1}$. Der D-Zug überholte den Personenzug in 187 km Entfernung von Bratislava.

420. Zwei Punkte auf den Schenkeln eines rechten Winkels haben einen gegenseitigen Abstand von 15 Einheiten. Wenn sich der eine Punkt um 1 zum Scheitel hinbewegt und der andere um 3 vom Scheitel wegbewegt, beträgt ihr Abstand 17. Bestimmen Sie den ursprünglichen Abstand der Punkte vom Scheitel.

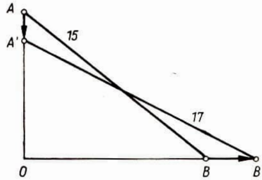

Bild 52

Lösung: Wir wollen wie folgt bezeichnen: $\overline{AO} = y$, $\overline{A'O} = y - 1$, $\overline{BO} = x$, $\overline{B'O} = x + 3$. Durch die Anwendung des Satzes des Pythagoras auf die Dreiecke AOB, $A'OB'$ erhalten wir das Gleichungssystem:

$$x^2 + y^2 = 15^2 \tag{1}$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 17^2 \tag{2}$$

Aus der Gl. (2) folgt

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = 279 \tag{2'}$$

Nach Einsetzen von x^2 aus (1) in (2′) und nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung

$5y^2 + 27y - 648 = 0$

$y_1 = 9, \quad y_1 = -14{,}4$ (unbrauchbar).

Für $y = 9$ finden wir aus (1):

$x^2 = 225 - 81$

$x^2 = 144$

$x_1 = 12, \quad x_2 = -12$ (unbrauchbar)

Antwort: Der Punkt A war 9, der Punkt B 12 Einheiten vom Scheitel O entfernt.

421. Ein Feld von der Form eines Rechteckes, das einen Flächeninhalt von $2400\ \text{m}^2$ aufweist,

ist mit einem 200 m langen Drahtzaun eingefaßt. Ermitteln Sie die Länge und Breite des Feldes.

Lösung: Die Breite des Feldes wollen wir mit x m, die Länge mit y m bezeichnen. Aus der Aufgabe folgt dann

$$xy = 2400$$
$$2(x + y) = 200$$

Durch die Lösung des gegebenen Systems erhalten wir:

$$x_1 = 60, \quad y_1 = 40$$
$$x_2 = 40, \quad y_2 = 60$$

Antwort: Die Länge des Feldes beträgt 60 m, die Breite 40 m.

422. Die Größen zweier Kräfte, die unter einem rechten Winkel zueinander einwirken (Bild 53), stehen im Verhältnis von 8:15 zueinander; ihre Resultierende ist eine Kraft $F_R = 340$ N. Bestimmen Sie die Größe beider Komponenten.

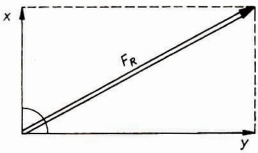

Bild 53

Lösung: Es möge die eine Kraft x N und die andere y N betragen. Gehen wir von der Bedingung der Aufgabe aus, so erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$
$$x^2 + y^2 = 340^2$$

Als Lösung des vorliegenden Systems erhalten wir:

$$y_1 = 300, \quad y_2 = -300$$
$$x_1 = 160, \quad x_2 = -160$$

Der Aufgabe wird das Wurzelpaar $[x_1, y_1]$ gerecht.

Antwort: Die erste Kraft hat eine Größe von 160 N und die zweite von 300 N.

423. Zwei Arbeiter arbeiteten die gleiche Anzahl von Tagen. Hätte der erste einen Tag weniger und der zweite 7 Tage weniger gearbeitet, so hätte der erste 720 M und der zweite 648 M verdient. Hätte umgekehrt der erste 7 Tage weniger und der zweite einen Tag weniger gearbeitet, so hätte der zweite 324 M mehr verdient als der erste. Wieviel haben beide tatsächlich verdient?

Lösung: Mögen die Arbeiter p Tage gearbeitet, der erste x M und der zweite y M verdient haben.
Aus Angaben zu der Aufgabenstellung erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (p-1)\frac{x}{p} &= 720 \\ (p-7)\frac{y}{p} &= 648 \qquad (1) \\ (p-1)\frac{y}{p} - (p-7)\frac{x}{p} &= 324 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt

$$\frac{p-1}{p} = \frac{720}{x}, \quad \frac{p-7}{p} = \frac{648}{y}$$

Nach Einsetzen in die dritte Gleichung

$$720\frac{y}{x} - 648\frac{x}{y} = 324,$$

nach Multiplikation der Gleichung mit der Zahl $\frac{1}{36} \cdot \frac{y}{x}$ und nach der Umformung erhalten wir:

$$20\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9\left(\frac{y}{x}\right) - 18 = 0$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1440}}{40}$$

$$= \frac{9 \pm 39}{40} \begin{cases} \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{4} \text{ (unbrauchbar)} \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{6}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5}x$$

Teilen wir das zweite Gleichungssystem (1) durch die erste Gleichung und ersetzen gleichzeitig $\frac{y}{x}$ durch den berechneten Wert, so erhalten wir:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{p-7}{p-1} = \frac{648}{720} \Rightarrow \frac{p-7}{p-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow p = 25,$$

also ist $x = 750$ und $y = 900$.

Antwort: Der erste Arbeiter verdiente tatsächlich 750 M und der zweite 900 M.

424. Eine Strecke von der Länge a ist so in zwei Teile unterteilt, daß die Länge des einen Teils das geometrische Mittel der Länge der gesamten Strecke und der Länge des zweiten Teils darstellt. Berechnen Sie die Länge beider Teile.

Lösung: Möge der eine Teil der Strecke x cm, der zweite Teil y cm und das geometrische Mittel $x = \sqrt{ay}$ sein. Aus der Aufgabe erhalten wir nachstehendes Gleichungssystem:

$$x + y = a$$
$$x^2 = ay$$

Als Lösung erhalten wir:

$$y_1 = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}; \quad y_2 = \frac{3a - a\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right); \quad x_2 = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

Der Aufgabe wird das Wurzelpaar x_2, y_2 gerecht.

Antwort: Die Länge der einen Teilstrecke ist $\frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$ und die der anderen $\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$. (Vgl. auch Aufg. 366.)

425. Der eine von zwei Betrieben kann einen bestimmten Auftrag 4 Tage früher erfüllen als der andere. Bei gemeinsamer Arbeit würden beide Betriebe innerhalb von 24 Tagen das Fünffache der Bestellung erfüllen. In welcher Zeit würde jeder Betrieb den Gesamtauftrag ausführen?

Lösung: Den Auftrag kennzeichnen wir mit Q. Möge der eine Betrieb den Gesamtauftrag in x Tagen und der andere in y Tagen erfüllen. An einem Tag führt ein Betrieb $\frac{Q}{x}$ des Auftrages aus, in 24 Tagen $\frac{Q}{x} \cdot 24$; der andere Betrieb erfüllt an einem Tag $\frac{Q}{y}$ des Auftrages, in 24 Tagen $\frac{Q}{y} \cdot 24$. Bei Gemeinschaftsarbeit leisten sie $5Q$ in 24 Tagen. Aus der Aufgabe folgt:

$$x - y = 4$$
$$\frac{Q}{x}\,24 + \frac{Q}{y}\,24 = 5Q$$

Nach der Umformung finden wir:

$$x - y = 4$$
$$24x + 24y = 5xy$$

Als Lösung des gegebenen Systems erhalten wir:

$$y_1 = 8, \quad y_2 = -2{,}4$$
$$x_1 = 12, \quad x_2 = 1{,}6$$

Unserer Aufgabe wird nur das Wurzelpaar x_1, y_1 gerecht.

Antwort: Der eine Betrieb würde den Auftrag in 12 Tagen, der andere in 8 Tagen erfüllen.

426. Die Summe der Ziffern einer dreistelligen Zahl ist 11, die Summe der Quadrate dieser Ziffern ist 45. Subtrahieren wir von der gesuchten Zahl 198, so erhalten wir eine Zahl, in der sich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge befinden. Um welche Zahl handelt es sich?

Lösung: Die Hunderterziffer bezeichnen wir mit x, die Zehnerstelle mit y und die Einerstelle mit z.
Für diese Ziffern gilt entsprechend den Bedingungen:

$$x + y + z = 11$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 45$$

Die durch diese drei Ziffern gegebene Zahl kann in folgender Form geschrieben werden:

$$(100x + 10y + z)$$

Subtrahieren wir von dieser 198, so erhalten wir die Zahl

$$(100z + 10y + x)$$

oder

$$(100x + 10y + z) - 198 = 100z + 10y + x$$

Nach Umformung wird

$$x - z = 2$$

Als Lösung des Systems

$$x + y + z = 11$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 45$$
$$x - z = 2$$

erhalten wir $x = 4$, $y = 5$ und $z = 2$.

Antwort: Die gesuchte Zahl ist 452.

427. In einem Kinosaal befinden sich n $(= 400)$ Stühle, die in Reihen mit gleicher Anzahl der Stühle angeordnet sind. Fügen wir in jeder Reihe $p (= 4)$ Stühle hinzu, so verringert sich die Anzahl der Reihen um $m (= 5)$, wenn die Anzahl der Plätze im Kinosaal unverändert bleibt. Wieviel Reihen gibt es, und wieviel Stühle befinden sich in jeder Reihe?

Lösung: In jeder Reihe befinden sich x Stühle. Die Anzahl der Reihen im Kinosaal ist y. Auf der Grundlage der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$xy = n \qquad (1)$$
$$(x + p)(y - m) = n \qquad (2)$$

Aus (1) berechnen wir x, setzen es in (2) ein und erhalten die quadratische Gleichung:

$$py^2 - pmy - mn = 0$$

Daraus finden wir

$$y_{1,2} = \frac{pm \pm \sqrt{p^2m^2 + 4pmn}}{2p}$$

Dann wird:

$$x_{1,2} = \frac{2pm}{pm \pm \sqrt{p^2m^2 + 4pmn}}$$

Die Lösung des gegebenen Systems ist

a) $x_1 > 0$, $y_1 > 0 \ldots$ wird unserer Aufgabe gerecht,

b) $x_2 < 0$, $y_2 < 0 \ldots$ wird unserer Aufgabe nicht gerecht.

Zahlenwertmäßig ergibt sich

$$x_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 400}{4 \cdot 5 + \sqrt{16 \cdot 25 + 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 400}} = \frac{3200}{20 + 180} = 16$$

$$y_1 = \frac{4 \cdot 5 + \sqrt{16 \cdot 25 + 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 400}}{2 \cdot 4} = \frac{20 + 180}{8} = 25$$

Antwort: Im Kinosaal sind 25 Reihen, und in jeder Reihe befinden sich 16 Stühle.

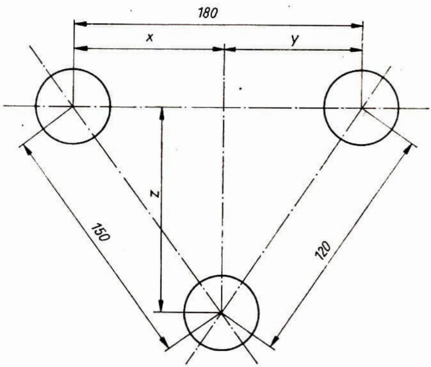

Bild 54

428. Drei Kreise nehmen die in Bild 54 veranschaulichte Lage ein. Berechnen Sie die Maße x, y und z.

Lösung:

$$x + y = 180 \tag{1}$$

$$x^2 + z^2 = 150^2 \tag{2}$$

$$y^2 + z^2 = 120^2 \tag{3}$$

Aus (1) finden wir den Ausdruck für x und setzen in (2) ein, wobei wir wie folgt erhalten:

$$(180 - y)^2 + z^2 = 150^2$$

$$180^2 - 2 \cdot 180y + y^2 + z^2 = 150^2 \tag{2'}$$

In (2') setzen wir für $y^2 + z^2$ die Zahl 120^2 aus (3) ein und finden

$$180^2 - 2 \cdot 180y + 120^2 = 150^2,$$

woraus

$$y = 67{,}5$$

folgt.
Nach Einsetzen für y aus (1) berechnen wir

$$x = 112{,}5\,.$$

und erhalten

$$z = 99{,}2$$

Antwort: Die Maße sind $x = 112{,}5$; $y = 67{,}5$ und $z = 99{,}2$.

4.4. Übungen

429. In einer LPG hat man im Frühjahr 960 ha Feld zu bewirtschaften. Wegen langanhaltender Frühjahrsfröste verspäteten sich die Arbeiten um 6 Tage. Die Traktoristen verpflichteten sich jedoch, täglich 8 ha mehr zu bearbeiten, als sie nach dem ursprünglichen Plan zu bearbeiten hatten und beenden die Arbeiten bis zum Plantermin. Wieviel ha hatten sie ursprünglich an einem Tag zu bearbeiten?

430. Schüler arbeiteten in den Schulferien. Für eine bestimmte Arbeit sollten sie einen Lohn von 480 M bekommen. Ihrer Gruppe wurden drei weitere Schüler zugeteilt, und somit erhielt jeder Schüler 8 M weniger Lohn, als ursprünglich auf ihn entfallen wären. Wieviel Schüler gehörten zur Gruppe?

431. Teilen Sie die Zahl 56 so in zwei Teile, daß deren Produkt 748 ist.

432. Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers eines Flusses beträgt 25 m/min. Ein Ruderer ruderte 4,8 km stromab und anschließend in umgekehrter Richtung 1,2 km stromauf. Für das Zurücklegen der angegebenen Gesamtstrecke benötigte er 100 min. Wie hoch war die Eigengeschwindigkeit des Ruderers?

433. Von zwei Brigaden führt die erste eine bestimmte Arbeit in einer um 10 h kürzeren Zeit als die zweite aus. Arbeiteten sie zusammen, würden sie diese Arbeit in 12 h erledigen. In welcher Zeit würde jede Brigade allein diese Arbeit ausführen?

434. Welche zwei benachbarten natürlichen Zahlen weisen die Eigenschaft auf, daß die Differenz ihrer Quadrate gleich 15 ist?

435. Bestimmen Sie die Tiefe eines Brunnens, wenn man einen fallengelassenen Stein nach 4 s darin aufprallen hört?

436. Eine Gelenkverbindung kann mit der Kraft F entsprechend der Gleichung der Zugfestigkeit $F = b(a - d)\,\sigma_{\text{zul}}$ und entsprechend der Gleichung der Abscherfestigkeit $F = 1{,}5\,\frac{\pi d^2}{4}\,\tau_{\text{zul}}$ belastet werden.

Berechnen Sie den Durchmesser des Zapfens d, wenn die Breite des Bandes $a = 80$ mm, die Dicke $b = 30$ mm, die zulässige Zugbelastung $\sigma_{\text{zul}} = 60\ \text{N/mm}^2$ und die Scherspannung $\tau_{\text{zul}} = 40\ \text{N/mm}^2$ beträgt.

437. In einer Buchhandlung verkaufte man für 150 M Exemplare eines bestimmten Buches. Hätte man für die gleiche Summe andere Bücher um eine Mark teurer verkauft, wären davon vier weniger verkauft worden. Wieviel Exemplare des erstgenannten Buches verkaufte man?

438. Von der Kreuzung zweier Wege, die sich unter einem rechten Winkel schneiden, bewegen sich zwei Fahrzeuge gleichzeitig von der Kreuzung in senkrecht zueinander stehenden Richtungen weg, und zwar mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Nach welcher Zeit werden sie sich in einer Entfernung von 850 m voneinander befinden, wenn ihre Geschwindigkeiten $v_1 = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ und $v_2 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sind?

439. Wir haben einige gleich große Kugeln. Man kann sie zu einem Quadrat oder regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieck zusammenlegen. Es ist die Anzahl der Kugeln zu ermitteln, wenn uns bekannt ist, daß bei der Anordnung zu einem Dreieck auf der Seite dieses Dreiecks 2 Kugeln mehr vorhanden sein werden als auf der Seite des Quadrates bei der Anordnung zu einem Quadrat. Es wird angenommen, daß die Kugeln nicht nur auf dem Umfang, sondern auch im inneren Teil des Dreieckes oder des Quadrates gelegt werden.

440. Bei der Untersuchung des Benzinverbrauchs zweier Verbrennungsmotoren gleicher Leistung haben wir errechnet, daß der eine 600 l Benzin und der andere, der 2 h weniger betrieben wurde, 384 l verbraucht hatte. Hätte der erste Motor in der Stunde soviel Benzin verbraucht wie der zweite und der zweite soviel wie der erste, so wäre während der gleichen Betriebsdauer der Benzinverbrauch beider Motoren gleich hoch gewesen. Wieviel Benzin verbraucht jeder Motor in einer Stunde?

441. Ein Lkw fuhr um Mitternacht von der Ortschaft A nach der Ortschaft B ab. Auf der gleichen Strecke fuhr ein Pkw um t_1 Uhr von B nach A ab. Um t_2 Uhr trafen sie sich. Der Pkw gelangte r Stunden später ans Ziel als der Lkw. Nach Erledigung ihrer Aufträge kehrten sie zurück. Den Heimweg traten sie gleichzeitig an. Wann kehrten sie nach Hause zurück? (Zahlenwertmäßig: $t_1 = 2$ Uhr 40 min, $t_2 = 4$ Uhr, $r = 40$ min, $t_3 = 14$ Uhr.)

442. Wie hoch muß ein Flugzeugpilot aufsteigen, um in einem Umkreis von 50 km sehen zu können?

443. Der Gesamtwiderstand zweier Leiter beträgt bei Reihenschaltung 8 kΩ und bei Parallelschaltung 1,5 kΩ. Bestimmen Sie den Widerstand eines jeden Leiters.

444. Ein Rechteck hat einen Inhalt von 6084 FE. Seine Länge ist um 65 LE größer als die Breite. Welches sind seine Abmessungen? (FE Flächeneinheit, LE Längeneinheit)

445. Ein Läufer gelangt von der Ortschaft A nach B in 14 h. Ein anderer Läufer macht sich nach dem ersten von A nach B zu dem Zeitpunkt auf den Weg, wenn sich der erste bereits 10 km von A befindet. Ans Ziel gelangen beide gleichzeitig, wobei der zweite die Strecke von 20 km $\frac{1}{2}$ h schneller als der erste zurücklegt. Wie groß ist die Entfernung zwischen den beiden Ortschaften A und B?

446. Eine LPG hat 200 ha Land zu besäen. Erfüllt man täglich 5 ha über den Plan, so beendet man die Aussaat 2 Tage früher. In welcher Zeit beendet man die Aussaat?

447. Finden Sie vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen, für die die Summe der Quadrate der ersten drei Zahlen gleich ist dem Quadrat der um vier vergrößerten vierten Zahl.

448. Zwei Maurer, von denen der zweite anderthalb Tage später zu arbeiten beginnt als der erste, können eine Mauer in 7 Tagen fertigstellen. Arbeitete jeder für sich, so würde der erste Maurer für die Beendigung der Arbeit 3 Tage länger benötigen als der zweite. In wieviel Tagen stellt jeder der beiden die Mauer her?

5. Lösen von Textaufgaben mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen

Sehr oft kommt es vor, daß in Textaufgaben, Gleichungen oder Ungleichungen die angegebenen Werte zahlenmäßig unbestimmt sind und mit Buchstaben gekennzeichnet werden, für die wir beliebige Zahlen wählen können. Dabei sind uns allerdings oft durch verschiedene Bedingungen Grenzen gesetzt, die aus der praktischen Bedeutung dieser Zahlen folgen. Diese Bedingungen werden in der Regel durch Ungleichungen ausgedrückt. Bei der Lösung solcher Aufgaben können wir uns nicht damit zufriedengeben, daß wir die Aufgabe nur formell lösen, sondern wir müssen ermitteln, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um die Aufgabe zu lösen und wieviel Lösungen es in dem gegebenen Fall gibt. Im vorliegenden Abschnitt liegen Aufgaben vor, bei deren Lösung Gleichungen und Ungleichungen oder nur Ungleichungen auftreten und in denen außer den gegebenen Zahlen eine oder mehrere Unbekannte vorhanden sind. Einige Aufgaben davon führen zu quadratischen Gleichungen. Ziel dieses Abschnitts ist es, darauf hinzuweisen, wie Ungleichungen bei der Lösung von Textaufgaben als Grenzbedingungen auftreten.[1]

Hier wird vorausgesetzt, daß der Leser lineare Ungleichungen, quadratische Ungleichungen und Systeme von Ungleichungen lösen kann. Nachstehend führen wir einige Grundgesetze über die Lösung von Ungleichungen an:

1. Multiplizieren wir beide Seiten einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, so wechselt das Ungleichheitszeichen in das umgekehrte.

2. Die eine Seite einer quadratischen Ungleichung kann (im allgemeinen) in ein Produkt zweier linearer Faktoren (a, b) umgeformt werden, wobei folgende Fälle eintreten können:

a) $ab > 0$, wenn $a > 0$ und gleichzeitig $b > 0$, oder wenn $a < 0$ und gleichzeitig $b < 0$.

b) $ab < 0$, wenn $a > 0$ und gleichzeitig $b < 0$ oder wenn $b < 0$ und gleichzeitig $b > 0$

3. Ungleichungen mit Brüchen, in der Form $\frac{a}{b} > 0$ oder $\frac{a}{b} < 0$ ausgedrückt, werden analog durch Fallunterscheidung gelöst.

Eine Ungleichung lösen wir im allgemeinen so, daß wir an ihrer Stelle eine ihr äquivalente Ungleichung schreiben. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis wir endlich eine Ungleichung erhalten, aus der alle Lösungen direkt zu erkennen sind.

Beispiel 1: Wir sollen folgende Ungleichung lösen:

$$2x - 3 > 7 - 3x$$

Addieren wir auf beiden Seiten den Ausdruck $(3x + 3)$, so erhalten wir die Ungleichung $2x + 3x > 7 + 3$, oder

$$5x > 10,$$

die der gegebenen Ungleichung äquivalent ist. Manchmal sprechen wir davon, daß

[1] Ungleichungen treten z. B. häufig in Untersuchungen der Linearoptimierung als Nebenbedingungen auf.

Terme einer Ungleichung „von der einen auf die andere Seite mit umgekehrten Vorzeichen"[1] übertragen werden, analog zur Lösung von Gleichungen. Multiplizieren wir beide Seiten der letzten Ungleichung mit der positiven Zahl $\frac{1}{5}$, so erhalten wir die Ungleichung:

$x > 2,$

die ihr und damit auch der gegebenen Ungleichung äquivalent ist. Aus der letzten Ungleichung ist unmittelbar zur erkennen, daß die Lösung jede Zahl > 2 erfaßt.

Manchmal suchen wir solche Zahlen, die gleichzeitig zwei oder mehreren Ungleichungen gerecht werden. Dann sprechen wir von einem **System der Ungleichungen,** und die gefundenen Zahlen bezeichnen wir als die Lösungen (zuweilen auch Wurzeln) des gegebenen Systems.

Beispiel 2: Um die Lösung des Systems der Ungleichungen

$$2x - 3 < 3x - 2 \qquad (1)$$

$$5x + 2 < 2x + 5 \qquad (2)$$

zu finden, lösen wir die Ungleichungen (1) und (2) selbständig. Aus (1) folgt $x > -1$ und aus (2) $x < 1$. Beide Ungleichungen zusammen erfüllen also alle diejenigen Zahlen x, die einerseits größer sind als -1 und andererseits gleichzeitig kleiner sind als 1, d. h. über die gilt:

$$-1 < x < 1 \quad \text{oder} \quad x \in (-1; +1)$$[2]

Bei der Lösung quadratischer Ungleichungen und Ungleichungen mit Brüchen gehen wir entsprechend der Bemerkungen 2 und 3 vor.

449. Die eine Seite eines Dreieckes ist 3 cm lang. Die Differenz zwischen den Größen der anderen beiden Seiten beträgt 1 cm. Berechnen Sie die Seiten dieses Dreiecks, wenn ihre Größen durch natürliche Zahlen gegeben sind.

Lösung: Wir kennzeichnen die Seiten des Dreiecks mit a, b und c. Möge $a = 3$ cm, $b > c$ sein, dann ist $b - c = 1 \Rightarrow b = 1 + c$. Entsprechend der Eigenschaft der Seiten des Dreieckes gilt (Dreiecksungleichung):

$b + c > 3,$

wenn wir die Beziehung $b = 1 + c$ anwenden, wobei $c > 1$ ist, dann ist $b > 2$. Es handelt sich nur um ganze Zahlen, also können folgende Fälle eintreten:

$$\begin{array}{l} (3;\ 3;\ 2) \\ (3;\ 4;\ 3) \\ (3;\ 5;\ 4) \\ \text{usw.} \end{array} \qquad (1)$$

Antwort: Die Seiten des Dreieckes weisen die in der Beziehung (1) angegebenen Größen auf.

450. Wieviel Gramm reinen Spiritus muß man m g einer p-%igen Jod-Spiritus-Lösung zugeben, um eine Lösung zu gewinnen, deren Konzentration nicht geringer ist als p_1% $(p_1 < p)$?

Lösung: Die Menge des reinen Spiritus bezeichnen wir mit x g. Der prozentuale Ausdruck der Lösung ist durch das Verhältnis der Menge des reinen Mediums (0,01 pm) g zur Gesamtmenge beider Medien $(m + x)$ g, die in der Lösung enthalten sind, gegeben. Daher gilt

$$\frac{0{,}01\ pm}{m + x} \geqq 0{,}01\ p_1 \qquad (1)$$

Da $m > 0$, $x > 0$ sind, ist auch $(m + x) > 0$. Multiplizieren wir nun die Ungleichung (1) mit dem positiven Ausdruck $(m + x)$ und dividieren sie gleichzeitig durch die Zahl 0,01, so erhalten wir die Ungleichung

$$pm \geqq p_1(m + x)$$

$$pm \geqq p_1 m + p_1 x$$

$$pm - p_1 m \geqq p_1 x$$

$$m(p - p_1) \geqq p_1 x$$

$$x \leqq \frac{m(p - p_1)}{p_1} \qquad (2)$$

[1] Auf das Unschöne dieser Ausdrucksweise wurde bereits hingewiesen.

[2] Mengenschreibweise von Intervallen; $\in$ heißt: Element der Menge oder des Intervalls ...
In Mengenschreibweise heißt das:
$M_1 = (-1; \infty)$, $M_2 = (-\infty; 1)$; $L = M_1 \cap M_2 = (-1; +1)$.

Antwort: Die in Gramm ausgedrückte Menge reinen Spiritus, die der Jod-Spiritus-Lösung zugegeben werden muß, wird durch die Beziehung (2) bestimmt.

451. Führen Sie eine Festigkeitskontrolle des Zapfens einer Blechschere aus, wenn Ihnen bekannt ist, daß auf den Zapfen die Kraft $F = 800$ N (Scherkraft) einwirkt. Der Durchmesser des Zapfens ist $d = 10$ mm und die zulässige Scherspannung $\tau_{zul} = 5500$ N/cm². Die Bedingung einer sicheren Festigkeit bei Scherbeanspruchung ist $F < A\tau_{zul}$, wobei A der Zapfenquerschnitt ist.

Lösung: Der Zapfenquerschnitt ist $A = \frac{\pi d^2}{4}$, so daß die Ungleichung die Form annimmt:

$$F < \frac{\pi d^2}{4}\,\tau_{zul}$$

Antwort: Wenn wir in diese Ungleichung die entsprechenden Werte einsetzen, so ist $800\text{ N} < 4320\text{ N}$, was bestätigt, daß der Scherzapfen der Krafteinwirkung standhält.

452. Ein mit Wasser gefülltes Faß hat eine Masse von 120 kg. Gießen wir daraus 75% des Wassers ab, so beträgt die Masse a kg. Wie groß ist die Masse des Fasses und des in ihm befindlichen Wassers?

Lösung: Das Wasser habe x kg Masse und das Faß $(120 - x)$ kg. Nach Abgießen von $\frac{3}{4}$ des Wassers wird das Faß mit dem Wasser $\left(\frac{x}{4} + 120 - x\right)$ kg Masse haben und das sollen a kg sein. Wir finden also:

$$\frac{1}{4}x + 120 - x = a$$

$$x = \frac{4}{3}(120 - a)$$

Antwort: Das Wasser hatte $\frac{4}{3}(120 - a)$ kg Masse und das leere Faß $\left[120 - \frac{4}{3}(120 - a)\right]$ kg $= \left(120 - 160 + \frac{4}{3}a\right)$ kg $= \left(\frac{4}{3}a - 40\right)$ kg.

Diskussion: Beide Zahlen müssen ein positives Vorzeichen aufweisen. Daher ist $a < 120$, $\frac{4}{3}a > 40 \Rightarrow a > 30$. Die Aufgabe hat eine Lösung für $30 < a < 120$. Zahlenmäßig ist: Für $a = 42$ hat das Faß 16 kg und das darin befindliche Wasser 104 kg Masse.

453. Die durchschnittliche Masse und das durchschnittliche Volumen eines erwachsenen Menschen mögen p kg und V (in dm³) sein. Ermitteln Sie, wieviel Korkplatten mit einem Volumen von V_1 (in dm³) für einen Rettungsgürtel erforderlich werden, der bei seinem vollständigen Eintauchen mindestens f% des Volumens des Betreffenden über dem Wasserspiegel hält. Die Dichte des Korks beträgt 0,2 kg/dm³.

Lösung: Damit ein Körper im Wasser schwimmt, muß $F > G$ sein (Archimedisches Prinzip), wobei $F = V\varrho g$ den Auftrieb (Kraft) darstellt, der auf einen Körper senkrecht aufwärts wirkt, G das Gewicht des Körpers und $\varrho = 1$ kg/dm³ die Dichte des Wassers. x sei die Anzahl der Korkplatten. Das Volumen der Korkplatten wird durch die Beziehung $V_1 x$, das des eingetauchten Schwimmers durch $(V - 0{,}01fV) = (1 - 0{,}01f)\,V$ bestimmt. Die Masse der Korkplatten beträgt $0{,}2 \cdot V_1 x$ kg, die des Schwimmers p kg.

$$F = V\varrho g = [V_1 x + (1 - 0{,}01f)\,V] \cdot \varrho g$$

$$G = (0{,}2V_1 x + p)\,g$$

Die Aufgabe führt zu der Ungleichung:

$$[V_1 x + (1 - 0{,}01f)\,V]\,\varrho g \geqq (0{,}2V_1 x + p)\,g$$

Daraus wird:

$$x \geqq \frac{100p - (100 - f)\,V\varrho}{100V_1\varrho - 20V_1} \tag{1}$$

Spezielle Werte: $p = 70$ kg, $V = 72$ dm³, $V_1 = 0{,}4$ dm³ und $f = 50\%$. Dann gilt:

$$x \geqq \frac{100 \cdot 70 - (100 - 50) \cdot 72 \cdot 1}{100 \cdot 0{,}4 \cdot 1 - 20 \cdot 0{,}4} = 106{,}25$$

d. h., $x > 106$.

Antwort: Die Anzahl der Korkplatten wird durch die Beziehung (1) ausgedrückt.

454. Eine Ortschaft erstreckt sich am Ufer eines Flusses entlang. In welcher Entfernung vom Ort stromaufwärts muß eine Stelle für den Strand ausgesucht werden, damit die Hin- und Rückfahrt mit einem Motorboot maximal t min dauert (ohne Rücksicht auf Halte an Anlegestellen), wenn die Eigengeschwindigkeit des Bootes v(km h^{-1}) und die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses v_1 (km h^{-1}) ($v > v_1$) ist.

Lösung: Die gesuchte Entfernung vom Ort zum Strand sei x km. Die Zeit, die das Boot für das Zurücklegen der Strecke vom Ort zum Strand benötigt, ist $\frac{x}{v - v_1}$ min, die Rückfahrt dauert $\frac{x}{v + v_1}$ min. Aus der Bedingung der Aufgabe erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{x}{v + v_1} + \frac{x}{v - v_1} = 1 \qquad (1)$$

$$x \leqq \frac{t(v^2 - v_1{}^2)}{2v}$$

Für $t = 30$ min, $v = 1$ km h^{-1} und $v_1 = 0{,}4$ km h^{-1} gilt:

$$x \leqq \frac{30(1^2 - 0{,}4^2)}{2 \cdot 1} = 5 \quad \text{oder} \quad x \leqq 5$$

Antwort: Die gesuchte Entfernung vom Ort zum Strand muß die Ungleichung (1) erfüllen.

455. Die Grube A ist s km von der Grube B entfernt (Bild 55). Die Förderkosten für 1 t

Bild 55

Kohle belaufen sich in der Grube A auf q M und in der Grube B auf p% mehr. Für welche zwischen den Gruben A und B befindlichen Stellen ist die aus der Grube B transportierte Kohle billiger als die aus der Grube A geförderte, wenn sich der Transport von 1 t über eine Entfernung von 1 km auf n M beläuft?

Lösung: Die Entfernung des gesuchten Ortes C von der Grube B möge x km sein. Die Kosten für die in der Grube B geförderte Kohle sind $\frac{q}{100}(100 + p)$ M. Der Transport der Kohle aus der Grube B kostet über eine Entfernung von x km nx M. Ausgehend von der Bedingung erhalten wir die Ungleichung:

$$\frac{q}{100}(100 + p) + nx < q + (m - x)\,n \qquad (1)$$

Da $x \geqq 0$ sein muß, finden wir nach Umformung der Ungleichung (1):

$$0 \leqq x < \frac{100sn - qp}{200n} \qquad (2)$$

Antwort: Die Entfernung des gesuchten Ortes von der Grube B muß die Ungleichung (2) erfüllen.

456. Eine LPG hat 5000 ha Boden in einer Zeit zu pflügen, die 200 h nicht überschreitet. Das Pflügen soll mit einem Fünfscharpflug bis in eine Tiefe von 35 cm erfolgen, wobei die Angriffsbreite eines Schar 40 cm beträgt. Wieviel Traktoren mit einer Leistung von 45 kW sind für die Erfüllung der Aufgabe erforderlich, wenn der Festigkeitsfaktor des Bodens 12 N/cm^2 beträgt?

Lösung: Die Anzahl der notwendigen Traktoren bezeichnen wir mit x, die für das Pflügen von 5000 ha notwendige Arbeit mit W. Aus der Aufgabe folgt die Ungleichung:

$$x \cdot 45 \cdot 10^3 \text{ Nm/s} \cdot 3600 \text{ s/h} \cdot 200 \text{ h} \geqq W \qquad (1)$$

Der Pflug arbeitet in einer Breite von $5 \cdot 0{,}40$ m $= 2$ m, folglich ist (wegen 1 ha $= 10000$ m^2) $\frac{10000 \text{ m}^2}{2 \text{ m}} = 5000$ m. Die zum Pflügen von 1 ha unter den gegebenen Bedingungen vom Fünfscharpflug verrichtete Arbeit ist also gegeben durch:

$$5000 \cdot 2 \cdot 0{,}35 \cdot 120000 \text{ Nm}$$

d. h., $35 \cdot 12 \cdot 10^6$ Nm. Der Ausdruck $5000 \times 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}35 = 5000 \cdot 2 \cdot 0{,}35$ ist das Volumen des Bodens in m^3, den der Fünfscharpflug umpflügen soll. Der Festigkeitsfaktor beträgt 120000 N/m^2. Dann ist die für das Pflügen von 5000 ha Boden erforderliche Gesamtarbeit:

$$W = 5000 \cdot 35 \cdot 12 \cdot 10^6 \text{ Nm},$$

d. h.,

$$W = 6 \cdot 35 \cdot 10^{10} \text{ Nm}$$

Schließlich erhalten wir nach Einsetzen in (1):

$$45 \cdot 72 \cdot 10^7 x \geqq 6 \cdot 35 \cdot 10^{10}$$

$$x \geqq 65$$

Antwort: Für die Ausführung des Pflügens sind mindestens 65 Traktoren erforderlich.

457. Verschmutztes Getreide enthält $k\%$ Schmutzstoffe. Nach jedem Reinigungsvorgang verringert sich die Menge an Schmutzstoffen um $q\%$, wobei sich die Menge des reinen Getreides nicht ändert. Wie oft muß das Getreide gereinigt werden, damit sich seine Verschmutzung auf $f\%$ verringert? $(f < q)$.

Lösung: Die Anzahl der Reinigungsvorgänge bezeichnen wir mit n. Die Menge des verschmutzten Getreides ist Q kg. Diese Menge Q kg verschmutzten Getreides enthält $\frac{Q}{100}k$ kg Schmutzstoffe und $\frac{Q(100-k)}{100}$ kg reines Getreide. Im Reinigungsprozeß ändert sich die Menge des reinen Getreides nicht, und die Menge der Schmutzstoffe verringert sich. Nach dem ersten Reinigungsgang verringert sich die Menge der Schmutzstoffe um $\left(\frac{Qk}{100} \cdot \frac{q}{100}\right)$ kg, und es verbleiben nur $\left(\frac{Qk}{100} - \frac{Qk}{100} \cdot \frac{q}{100}\right)$ kg, d. h. $\left[\frac{Qk}{100}\left(\frac{100-q}{100}\right)\right]$ kg Schmutzstoffe. Nach dem zweiten Reinigungsgang verbleiben $\left[\frac{Qk}{100} \frac{(100-q)}{100} - \frac{Qk}{100} \cdot \frac{(100-q)}{100} \cdot \frac{q}{100}\right]$ kg, d. h. $\frac{Qk}{100} \times \left(\frac{100-q}{100}\right)^2$ kg Schmutzstoffe im Getreide. Analog verbleiben nach dem n-ten Reinigungsgang $\frac{Qk}{100}\left(\frac{100-p}{100}\right)^n$ kg Schmutzstoffe im Getreide.

Die Gesamtmenge des Getreides nach dem n-ten Reinigungsgang ist also:

$$\left[\frac{Qk}{100}\left(\frac{100-q}{100}\right)^n + \frac{Q(100-k)}{100}\right] \text{kg}$$

In Übereinstimmung mit den Bedingungen aus der Aufgabe erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{\frac{Qk}{100}\left(\frac{100-q}{100}\right)^n}{\frac{Qk}{100}\left(\frac{100-q}{100}\right)^n + \frac{Q(100-k)}{100}} \leqq \frac{f}{100} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{100-q}{100}\right)^n \leqq \frac{f(100-k)}{k(100-f)} \qquad (2)$$

Durch Logarithmieren von (2) erhalten wir:

$$n \lg \frac{100-q}{100} \leqq \lg \frac{f(100-q)}{k(100-f)}$$

Der Ausdruck

$$\frac{100-q}{100} < 1 \Rightarrow \lg \frac{100-q}{100} < 0$$

wird:

$$n \geqq \frac{\lg \frac{f(100-k)}{k(100-f)}}{\lg \frac{100-q}{100}} \qquad (3)$$

Zahlenbeispiel: Für $k = 28\%$, $q = 5\%$ und $f = 3\%$ erhalten wir:

$$n \geqq \frac{\lg \frac{3(100-28)}{28(100-3)}}{\lg \frac{100-5}{100}} \quad \text{oder } n > 50$$

Antwort: Die Anzahl der Reinigungsgänge ist durch die Beziehung (3) gegeben.

458. Wenn ein Traktorist an einem Tag 2 ha über den Plan pflügte, so schaffte er es, in 9 Tagen mehr als 84 ha zu pflügen. Pflügte er 1 ha je Tag unter dem Plan, so pflügte er in 12 Tagen maximal 84 ha. Wieviel ha muß er durchschnittlich täglich pflügen?

Lösung: Die Anzahl der für 1 Tag geplanten Hektar bezeichnen wir mit x. Pflügt er an einem Tag $(x + 2)$ ha, so pflügt er an 9 **Tagen**

$9(x+2)$ ha, und das sollen entsprechend der Aufgabenstellung über 84 ha sein, also

$$9(x+2) > 84 \tag{1}$$

Pflügt er an einem Tag $(x-1)$ ha, so schafft er dann in 12 Tagen $12(x-1)$ ha, und das soll maximal den Wert von 84 ha annehmen, also

$$12(x-1) \leqq 84 \tag{2}$$

Als Lösung der Ungleichung (1) finden wir $x > 7\frac{1}{3}$ und als Lösung der Ungleichung (2) $x \leqq 8$. Beiden Ungleichungen werden diejenigen x-Werte gerecht, für die gilt:

$$7\frac{1}{3} < x \leqq 8$$

Antwort: Täglich waren mehr als $7\frac{1}{3}$ ha, aber höchstens 8 ha geplant.

459. Der Zähler eines Bruches ist 3 kleiner als der Nenner. Addieren wir zum Zähler und Nenner 2, so wird der Bruch größer als $\frac{1}{2}$; subtrahieren wir in Zähler und Nenner 1, so wird er kleiner als $\frac{1}{3}$. Ermitteln Sie den Bruch.

Lösung: Bezeichnen wir den Nenner des Bruches mit x, so wird der Zähler des Bruches $(x-3)$, und der gesuchte Bruch heißt $\frac{x-3}{x}$. Addieren wir zum Zähler und Nenner 2, so wird

$$\frac{x-1}{x+2} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

Subtrahieren wir vom Zähler und Nenner 1, so wird

$$\frac{x-4}{x-1} < \frac{1}{3} \tag{2}$$

Der Ungleichung (1) werden alle diejenigen x-Werte gerecht, für die gilt:

a) $x > 4$ oder b) $x < -2$ (3)

Der Ungleichung (2) werden aber nur alle die x-Werte gerecht, für die gilt:

c) $1 < x < 5{,}5$ (4)

Die x-Werte, die nun die durch die Ungleichungen (3) und (4) (Bild 56) gegebenen Bedingungen erfüllen, sind durch

$$4 < x < 5{,}5$$

bestimmt. (b) und c) lassen sich dagegen nicht gleichzeitig erfüllen.)

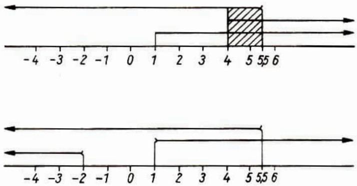

Bild 56

Antwort: Der gesuchte Bruch ist größer als $\frac{1}{4}$ und kleiner als $\frac{5}{11}$ $\left(\text{eigentlich } \frac{2{,}5}{5{,}5}\right)$.

460. Eine Zinkwanne, die 20 kg Masse hat, enthält 120 l Wasser mit einer Temperatur von 15 °C. Wieviel Liter Wasser mit einer Temperatur von 80 °C muß man hinzugießen, damit die Wassertemperatur in der Wanne größer oder gleich 30 °C oder kleiner oder gleich 40 °C ist. (Die spezifische Wärmekapazität des Zinks beträgt 0,389 kJ/(kg K).)

Lösung: Die Wassermenge, die hinzugegossen werden muß, wollen wir mit x l kennzeichnen. Ausgehend vom Vergleich der Wärmemengen (Austausch) erhalten wir folgendes System von Ungleichungen:

$$20 \cdot 15 \cdot 0{,}389 + 120 \cdot 15 + 80x \leqq 20 \cdot 30 \cdot 0{,}389 + (120 + x)\,30$$

$$20 \cdot 15 \cdot 0{,}389 + 120 \cdot 15 + 80x \leqq 20 \cdot 40 \cdot 0{,}389 + (120 + x)\,40,$$

woraus wir finden:

$$38{,}33 \leqq x \leqq 79{,}86 \tag{1}$$

Antwort: Die Wassermenge, die in die Wanne hinzugegossen werden muß, wird durch die Ungleichung (1) bestimmt.

461. In welchem Bereich ändert sich die Geschwindigkeit eines Körpers, der sich geradlinig gleichförmig bewegt, wenn bekannt ist, daß bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit um 3 m s^{-1} der Körper den Weg von 630 m schneller zurücklegt, wobei die Differenz zwischen den Zeiten (bei ursprünglicher und neuer Geschwindigkeit) nicht kleiner als 1 s und nicht größer als 4 min 30 s ist?

Lösung: Die Geschwindigkeit des Körpers bezeichnen wir mit v, die Zeit, in der der Körper den Weg von 630 m zurücklegt, ist $\frac{630 \text{ m}}{v}$, die Zeit bei der Geschwindigkeit $v + 3 \text{ m s}^{-1}$ ist $\frac{630 \text{ m}}{v + 3 \text{ m s}^{-1}}$. Entsprechend der Aufgabe gilt:

$$\frac{630}{v} - \frac{630}{v+3} \geqq 1$$

und

$$\frac{630}{v} - \frac{630}{v+3} \leqq 280$$

Durch die Lösung dieses Systems erhalten wir die Ungleichung:

$$1{,}5 \leqq v \leqq 42 \tag{1}$$

Antwort: Die Geschwindigkeit v des Körpers ändert sich in den durch die Beziehung (1) bestimmten Grenzen.

462. Wir mischen die Menge von 10 l 13 °C warmem Wasser mit 12,5 l wärmerem Wasser so, damit die gesamte Wassermenge eine Temperatur aufweist, die über 25 °C und unter 30 °C liegt. Welche Temperatur muß das zugeschüttete Wasser haben?

Lösung: Wir bezeichnen die Temperatur des zugegebenen Wassers mit x °C. Die Richmannsche Regel liefert dann die Gleichung:

$$m_1 t_1 + m_2 x = (m_1 + m_2)\, t \Rightarrow \frac{m_1 t_1 + m_2 x}{m_1 + m_2} = t$$

Dann erhalten wir das folgende System von Ungleichungen:

$$\frac{10 \cdot 13 + 12{,}5x}{22{,}5} > 25 \tag{1}$$

$$\frac{10 \cdot 13 + 12{,}5x}{22{,}5} < 30 \tag{2}$$

Als Lösung der Ungleichung (1) finden wir $x > 34{,}6$ und der Ungleichung (2) $x < 43{,}6$. Dann ist die Lösung des Systems:

$$34{,}6\,°\text{C} < x < 43{,}6\,°\text{C} \tag{3}$$

Antwort: Die Temperatur x des zugegebenen Wassers erfüllt die Beziehung (3).

463. Der Umfang eines Rechteckes ist $2\,s$ cm. Vergrößern wir die eine Abmessung um 1 cm, die andere um 5 cm, so vergrößert sich der Inhalt um 200 cm². Berechnen Sie die Abmessungen des Rechteckes.

Lösung: Die Breite des Rechteckes bezeichnen wir mit x cm, die Länge mit y cm, dann wird sein Umfang $2(x + y)$ cm und der Inhalt xy cm². Aus der Aufgabe erhalten wir das Gleichungssystem:

$$2(x + y) = 2s$$

$$(x + 1)\,(y + 5) = xy + 200$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\,(195 - s) \\ y = \frac{5}{4}\,(s - 39), \end{array}$$

wobei für s gelten muß:

$$39 < s < 195 \tag{1}$$

Antwort: Die Breite des Rechteckes ist $\frac{1}{4}\,(195 - s)$ cm, die Länge $\frac{5}{4}\,(s - 39)$ cm unter Berücksichtigung von (1).

464. In einer Wanne, in der wir Stahlteile mit einer Temperatur von 850 °C härten sollten, befand sich 6 °C warmes Wasser. Wie groß muß die Wassermenge und die Menge der Stahlteile in Kilogramm sein, damit danach die durchschnittliche Temperatur des Wassers über 50 °C und unter 70 °C liegt?

Lösung: Die Wassermenge kennzeichnen wir mit x kg und die Menge der eingetauchten

Stahlteile mit y kg. Wir erhalten dann folgendes System von Ungleichungen:

$$6 \cdot 4{,}18x + 0{,}50 \cdot 850y$$
$$> 50 \cdot 4{,}18x + 0{,}50 \cdot 50y$$
$$6 \cdot 4{,}18x + 0{,}50 \cdot 850y$$
$$< 70 \cdot 4{,}18x + 0{,}50 \cdot 70y$$

wobei die spezifische Wärmekapazität des Wassers 4,18 kJ/(kgK) und die des Stahls 0,50 kJ/(kg K) ist. Als Lösung des Systems erhalten wir:

$$0{,}46 < y < 0{,}69 \tag{1}$$

Im Sinn der Aufgabe muß gelten:

$$0 < x < \infty \tag{2}$$

Aus der Beziehung (1) folgt, daß jedem x-Wert aus dem Intervall (2) unendlich viele zulässige y_n-Werte entsprechen, die durch folgendes Intervall gegeben sind:

$$0{,}46x_n < y_n < 0{,}69x_n \tag{3}$$

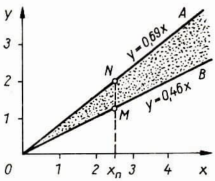

Bild 57

Wäre die Wassermenge $x = 100$ kg, dann ist die Menge y der zu härtenden Teile durch die Ungleichung

$$46 < y < 69$$

gegeben. Die gestellte Aufgabe wird im Bild 57 geometrisch dargestellt. Wie aus dem Bild ersichtlich, werden den Bedingungen der Aufgabe die Koordinaten jedes beliebigen Punktes gerecht, der sich innerhalb des durch die Geraden $y = 0{,}46x$ und $y = 0{,}69x$ gebildeten Winkels AOB befindet.[1]

[1] In der Optimierung spricht man von einem *Simplex* (zulässigen Bereich).

Das Intervall (3) stellt geometrisch die Strecke $\overline{MN}$ dar, wobei die Randpunkte M $[x_n; 0{,}46x_n]$ und N $[x_n; 0{,}69x_n]$ nicht mehr zur Strecke $\overline{MN}$ gehören.

465. Ein verankerter Ballon C schwebt in einer Höhe von 1400 m über dem Erdboden (Bild 58). In der Nähe des Ballons sprangen

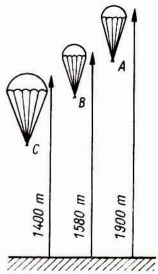

Bild 58

zwei Fallschirmspringer gleichzeitig bei automatischer Öffnung des Fallschirms ab. Der Fallschirmspringer A sprang aus einer Höhe von 1900 m und der Fallschirmspringer B aus der Höhe von 1580 m. Der Fallschirmspringer A fiel anfangs mit einer Geschwindigkeit von etwa 4 m s^{-1} und der Fallschirmspringer B mit etwa 4,5 m s^{-1}. Nach welcher Zeit (gerechnet vom Zeitpunkt seines Absprunges) wird der Fallschirmspringer A noch über und der Fallschirmspringer B schon unter dem Ballon C sein, wobei der Abstand des Fallschirmspringers B vom Ballon größer sein soll als der Abstand des Fallschirmspringers A vom Ballon?

Lösung: Es sei x die erfragte Zeit (gerechnet vom Zeitpunkt des Absprunges beider Fallschirmspringer). Die Aufgabe führt zu folgendem System von Ungleichungen:

$$1900 - 4x > 1400$$
$$1580 - 4{,}5x < 1400$$
$$1400 - (1580 - 4{,}5x) > (1900 - 4x) - 1400$$
$$80 < x < 125 \tag{1}$$

Antwort: Die gesuchte Zeit für die beiden Fallschirmspringer ist durch die Beziehung (1) gegeben.

466. Die Kapazität einer Drehmaschine A betrage p Teile je Stunde. Es werden außerdem noch zwei weitere Drehmaschinen B und C eingesetzt, die die gleichen Teile fertigen werden wie die Maschine A, wobei die Forderung gestellt wird, daß die Kapazität der Maschine B mindestens so groß ist wie $m\%$ der Gesamtkapazität der Maschinen A und C, und die Kapazität der Maschine C nicht unter $n\%$ der Gesamtkapazität der Maschinen A und B liegt. Wieviel Teile fertigt man mit der Maschine B und wieviel mit C in der Stunde?

Lösung: Die Anzahl der von der Maschine B gefertigten Teile möge x und der Anteil der auf C gefertigten Teile y sein. Aus der Aufgabe folgt dann:

$$x \geqq \frac{m(p+y)}{100} \tag{1}$$

$$y \geqq \frac{n(p+x)}{100} \tag{2}$$

Als Lösung dieses Systems erhalten wir:

$$\frac{n(p+x)}{100} \leqq y \leqq \frac{100x - mp}{m} \tag{3}$$

Nach Einsetzen von (2) in (1) finden wir:

$$x \geqq \frac{mp(n+100)}{10000 - mn} \tag{4}$$

Für $p = 1000$ Teile je Stunde, $m = 80\%$ und $n = 64\%$ erhalten wir:

$$\frac{64(10000 + x)}{100} \leqq y \leqq \frac{5(x - 800)}{4},$$

wobei $x \geqq 2689$ Teile je Stunde. Nehmen wir für x z. B. 3000 Teile an, so finden wir:

$$2560 \leqq y \leqq 2750$$

Probe: Möge z. B. $y = 2600$ Teile je Stunde sein. Dann ist:

$$\frac{3000}{1000 + 2600}\,100\% = 89\% > 80\%$$

$$\frac{2600}{1000 + 3000}\,100\% = 65\% > 64\%$$

Antwort: Die Anzahl der Teile, die auf der Drehmaschine C in der Stunde gefertigt werden, ist durch die Ungleichung (3) und die Anzahl der auf der Drehmaschine B gefertigten Teile durch die Ungleichung (4) gegeben.

467. Wir kauften bei einem Ausflug in die ČSSR für unsere Reisegruppe für 50 Kčs 100 Stück Obst. Die Melonen kosteten 5 Kčs, die Äpfel 1 Kčs und die Birnen 10 Heller[1] das Stück. Wieviel Stück jeder Sorte waren es?

Lösung: Die Anzahl der Melonen bezeichnen wir mit x, die der Äpfel mit y und die der Birnen mit z. Entsprechend der Aufgabenstellung gilt:

$$500x + 100y + 10z = 5000$$
$$x + y + z = 100$$

Nach Kürzung der ersten Gleichung und Subtraktion von der zweiten erhalten wir:

$$49x + 9y = 400,$$

woraus dann wird:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1-x)}{9}$$
$$= 44 - 5x + 4t$$

Hierbei ist $t = \dfrac{1-x}{9}$; daraus wird $x = 1 - 9t$ $= 1 - 9t$ und $y = 39 + 49t$.
x und y müssen ganze Zahlen mit positivem Vorzeichen sein, es muß gelten:

$$1 - 9t > 0 \quad \text{und genauso} \quad 39 + 49t > 0$$

Dann wird jedoch:

$$-\frac{39}{49} < t < \frac{1}{9}, \text{ also ist } t = 0.$$

Dann finden wir:

$$x = 1,\ y = 39,\ z = 60.$$

Antwort: Wir kauften 1 Melone, 39 Äpfel und 60 Birnen.

468. Wir haben Bruchstücke zweier Sorten einer Nickellegierung mit einem Nickel-

[1] 100 Heller = 1 Kčs (Währung der ČSSR)

gehalt von 20% und 40% vorliegen. Wieviel Tonnen jeder Sorte müssen wir nehmen, um eine Legierung zu gewinnen, die mindestens 25% und maximal 30% Nickel enthält?

Lösung: Es sei x bzw. y die gesuchte Anzahl Tonnen der 20%igen und 40%igen Nickellegierung. Die Aufgabe führt zu einem System zweier Ungleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\frac{0{,}2x + 0{,}4y}{x + y} \geqq 0{,}25 \tag{1}$$

$$\frac{0{,}2x + 0{,}4y}{x + y} \leqq 0{,}30 \tag{2}$$

Aus der Aufgabenstellung gilt $x > 0$, $y > 0$, und es gilt sogar $(x + y) > 0$. Bei Multiplikation der Ungleichungen (1) und (2) mit der positiven Zahl $(x + y)$ ändert sich das Ungleichheitszeichen nicht.
Die Ungleichung (1) nimmt folgende Form an:

$$0{,}2x + 0{,}4y \geqq 0{,}25(x + y) \mid \cdot 100$$

$$20x + 40y \geqq 25x + 25y \tag{1'}$$

$$15y \geqq 5x$$

$$y \geqq \frac{1}{3}x$$

Analog bekommt die Ungleichung (2) die Form:

$$0{,}2x + 0{,}4y \leqq 0{,}30(x + y) \mid \cdot 100$$

$$20x + 40y \leqq 30x + 30y \tag{2'}$$

$$10y \leqq 10x$$

$$y \leqq x$$

Die Lösung des Systems der Ungleichungen (1) und (2) ist durch die Ungleichungen (1′) und (2′) gegeben, also

$$\frac{1}{3}x \leqq y \leqq x \tag{3}$$

Aus der Aufgabe folgt, daß x dem Intervall angehört:

$$x \in (0; \infty) \tag{4}$$

oder

$$0 < x < \infty$$

Aus den Ungleichungen (1) und (2) folgt, daß jedem x_n-Wert aus dem Intervall (3) unendlich viele y_n-Werte entsprechen, die durch das Intervall

$$\frac{1}{3}x_n \leqq y_n \leqq x_n \tag{5}$$

bestimmt werden.
Geometrisch ist die Aufgabe im Bild 59 gelöst. Wie aus dem Bild ersichtlich, werden

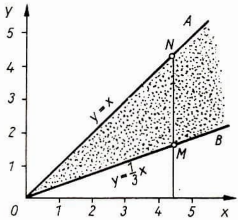

Bild 59

die Bedingungen der Aufgabe durch die Koordinaten aller der Punkte der Ebene erfüllt, die innerhalb des durch die Geraden $y = \frac{1}{3}x$ und $y = x$ begrenzten Fläche des I. Quadranten liegen, allerdings außer dem Ursprung des Koordinatensystems. Das Intervall $\frac{1}{3}x_n \leqq y_n \leqq x_n$ ist im Bild durch die Gerade MN dargestellt.

Beispiel: Die Menge der 20% Nickel enthaltenen Legierung sei 15 t. Dann wird die Menge der Legierung mit einem Nickelgehalt von 40%, die für die Legierung erforderlich wird, durch folgendes Intervall bestimmt:

$$5 \leqq y \leqq 15$$

Antwort: Die gesuchte Legierungsmenge wird durch die Ungleichungen (3) und (4) bestimmt.

469. Aus drei Weinsorten, deren Preis je Liter der Reihe nach a, b und c M ist, sollen wir n l eines Gemisches zubereiten, wobei wir von der ersten und zweiten Sorte zusammen soviel nehmen wie von der dritten

Sorte, und der Preis für 1 l Gemisch d M beträgt. Wieviel Liter müssen wir von jeder Weinsorte nehmen? Ermitteln Sie die Bedingungen der Lösbarkeit.

Lösung: Nehmen wir von den einzelnen Weinsorten x, y und z l, so folgt aus den Bedingungen das Gleichungssystem:

$$x + y + z = n \tag{1}$$

$$x + y = z \tag{2}$$

$$ax + by + cz = dn \tag{3}$$

Aus den Gln. (1) und (2) ist $z = \frac{n}{2}$, dann folgt aus (2):

$$x + y = \frac{n}{2} \tag{4}$$

Aus der Gl. (3) folgt:

$$ax + by = dn - \frac{cn}{2} = \frac{n(2sd - c)}{2} \tag{5}$$

In der Gl. (5) setzen wir $a \neq b$ voraus, dann erhalten wir aus dem Gleichungssystem (4) und (5) durch Multiplikation der Gl. (4) mit der Zahl b und Subtraktion der Gl. (4) von Gl. (5):

$$x = \frac{n(2d - c - b)}{2(a - b)}$$

$$y = \frac{n}{2} - x = \frac{n(a + c - 2d)}{2(a - b)}$$

Beispiel: Mögen $a = 4{,}50$ M, $b = 2{,}50$ M, $c = 7$ M, $n = 8$ l und $d = 5$ M sein.
Dann wird

$$x = \frac{8(2 \cdot 5 - 7 - 2{,}5)}{2(4{,}5 - 2{,}5)} = 1$$

$$y = \frac{8(4{,}5 + 7 - 10)}{2(4{,}5 - 2{,}5)} = 3, \qquad z = \frac{8}{2} = 4$$

Antwort: Von der ersten Weinsorte müssen wir $\frac{n(2d - c - b)}{2(a - b)}$ l, von der zweiten $\frac{n(a + c - 2d)}{2(a - b)}$ l und von der dritten Sorte $\frac{n}{2}$ l nehmen.

Diskussion: Setzen wir $a > b$ voraus, dann muß gelten, wenn x und y Zahlen mit positivem Vorzeichen sein sollen:

$$b + c < 2d < a + c \quad \text{oder} \quad \frac{b + c}{2} < d < \frac{a + c}{2}$$

Im Falle, daß $a = b$ ist, aber $2d \neq b + c$ oder $2d \neq a + c$ (wenn $a = b, b + c = a + c$), ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Es hat unendlich viele Lösungen, wenn

$$a = b \quad \text{und} \quad b + c = 2d$$

oder

$$a = b \quad \text{und} \quad a + c = 2d$$

470. Ein gerader Gang mit einer Länge $a = 20$ m wird von drei Glühlampen beleuchtet, die geradlinig in einer Höhe $h = 4$ m über dem Fußboden angeordnet sind (Bild 60). Zwei Glühlampen sind an beiden Enden des Ganges angeordnet und weisen die gleiche

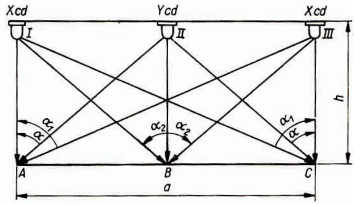

Bild 60

Lichtstärke auf. Die dritte ist in der Mitte des Ganges angeordnet. Berechnen Sie, welche Lichtstärke jede von ihnen aufweisen muß, damit an den Endpunkten des Ganges die Beleuchtungsstärke mindestens 8 lx und in der Mitte maximal 10 lx garantiert sind.

Lösung: Möge die Lichtstärke der Glühlampen an den Enden des Ganges x cd (Candela) und die der mittleren Glühlampe y cd sein. Entsprechend der Beziehung für die Beleuchtungsstärke (Lambertsches Gesetz) $E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha$, wobei E die Beleuchtungsstärke in Lux ist, I die Lichtstärke in Candela, r die Entfernung in Metern von der Lichtquelle zum beleuchteten Punkt auf der Fläche und α der Einfallswinkel des Lichtstrahls. Die Beleuchtungsstärke E im Punkt A von der ersten Glühlampe ist $\frac{x}{h^2}$. Die Beleuchtungsstärke E im Punkt A von der dritten Glühlampe ist:

$$\frac{x}{h^2 + a^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}$$

Die Beleuchtungsstärke E im Punkt A von der zweiten Glühlampe ist:

$$\frac{y}{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

Analog gilt das auch im Punkt C.
Die Beleuchtungsstärke E im Punkt B von der ersten und dritten Glühlampe beträgt:

$$\frac{2x}{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2}}$$

Die Beleuchtungsstärke E im Punkt B von der zweiten Glühlampe ist $\frac{y}{h^2}$. Nach der Aufgabenstellung erhalten wir:

$$\frac{x}{h^2} + \frac{x}{h^2 + a^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} + \frac{y}{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \geqq 8 \qquad (1)$$

$$\frac{2x}{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{y}{h^2} \leqq 10$$

$$x > 0; \quad y > 0$$

Setzen wir für $a = 20$ m und $h = 4$ m in (1) ein und formen um, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &0{,}063x + 0{,}003y \geqq 8 \\ &0{,}006x + 0{,}063y \leqq 10 \qquad (2) \\ &y > 0 \\ &x > 0 \end{aligned}$$

Als Lösung des Systems (2) ermitteln wir:

$$\begin{aligned} &127 > x > 120 \\ &\frac{10000 - 6x}{63} > y > \frac{8000 - 63x}{3} \qquad (3) \end{aligned}$$

Beispiel: Es sei $x = 125$ cd. Dann finden wir auf der Grundlage der Ungleichung (3):

$$\frac{10000 - 750}{63}\ \text{cd} > y > \frac{8000 - 7875}{3}\ \text{cd}$$

d. h.,

$$146{,}7\ \text{cd} > y > 41{,}7\ \text{cd}$$

Antwort: Die Lichtstärke der Glühlampen ist durch die Ungleichung (3) gegeben.

Probe: $y = 140$ cd und $x = 125$ cd. Wir setzen in (2) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 0{,}063 \cdot 125 + 0{,}003 \cdot 140 &= 7{,}875 + 0{,}420 \\ &= 8{,}295 > 8\ \text{lx} \\ 0{,}006 \cdot 125 + 0{,}063 \cdot 140 &= 0{,}75 + 8{,}82 \\ &= 9{,}57 < 10\ \text{lx} \end{aligned}$$

471. Welche konvexen n-Ecke haben mindestens doppelt soviel Diagonalen wie Seiten?

Lösung: Die Anzahl der Diagonalen eines konvexen n-Eckes kann durch

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

ausgedrückt werden. Es gilt also die Ungleichung:

$$\frac{n(n-3)}{2} \geqq 2n \qquad (1)$$

Nach entsprechender Umformung erhalten wir die Ungleichung:

$$n(n-3) \geqq 4n$$

Da die Zahl n positiv ist, können wir beide Seiten der Ungleichung durch die Zahl n dividieren und erhalten:

$$n - 3 \geqq 4 \quad \text{oder} \quad n \geqq 7$$

Antwort: Die gesuchten n-Ecke haben mindestens sieben Seiten.

472. Die Entfernung zwischen den beiden Ortschaften A und B beträgt 100 km. Von der Ortschaft A fahren in Richtung nach der Ortschaft B gleichzeitig zwei Mopeds ab. Die Geschwindigkeit des ersten ist $10\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ höher als die des zweiten. Das erste Moped hielt auf der Strecke 50 min lang. In welchem Bereich muß die Geschwindigkeit des ersten Mopeds liegen, wenn es nicht später als das zweite Moped nach B gelangen soll?

Lösung: Wir bezeichnen die Geschwindigkeit des ersten Mopeds mit v, die Geschwindigkeit des zweiten ist dann $v - 10\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. Das erste Moped gelangte von der Ortschaft A nach der Ortschaft B ohne Halten in der Zeit $\frac{100\ \mathrm{km}}{v}$, mit Zwischenaufenthalt legt es diesen Weg in der Zeit $\frac{100\ \mathrm{km}}{v} + \frac{50}{60}\ \mathrm{h}$ zurück, und diese darf nicht über der Zeit $\frac{100\ \mathrm{km}}{v - 10\ \mathrm{km\,h^{-1}}}$ liegen, in der das zweite Moped die Strecke von A nach B zurücklegt, also

$$\frac{100}{v} + \frac{5}{6} \leqq \frac{100}{v - 10} \quad (v - 10 > 0)$$

Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Ungleichung:

$$v^2 - 10v - 1200 \leqq 0 \Rightarrow -30 < v \leqq 40$$

Jedoch ist

$$v - 10 > 0 \Rightarrow v > 10,$$

weil das zweite Moped eine positive Geschwindigkeit haben muß. Also kommt für unsere Aufgabe nur der Bereich

$$10 < v \leqq 40 \quad \text{oder} \quad v \in (10; 40]$$

in Frage.

Antwort: Die Geschwindigkeit des ersten Mopeds müßte größer als $10\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ und kleiner oder gleich $40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ sein.

473. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist um 2 LE länger als die andere. Wie lang muß sie (mindestens) sein, wenn die Hypotenuse länger als 10 LE sein soll?

Lösung: Die Katheten des Dreiecks sind x und $(x + 2)$; aus dem Satz des Pythagoras folgt:

$$x^2 + (x + 2)^2 > 10^2$$

$$x^2 + 2x - 48 > 0$$

$$(x + 8)(x - 6) > 0$$

a) $x + 8 > 0 \Rightarrow x > -8$, $x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6$ $\Rightarrow x > 6$

b) $x + 8 < 0 \Rightarrow x < -8$, $x - 6 < 0 \Rightarrow x < 6$ $\Rightarrow x < -8$ (entspricht nicht unserer Aufgabe)

Antwort: Die Kathete muß größer sein als 6 LE.

474. Die Spareinlage A M wurde zu $p\%$ Zinsen bei einer Sparkasse eingezahlt. Am Ende eines jeden Jahres hebt der Einzahler B M ab. Nach wieviel Jahren, vom Zeitpunkt des Einzahlens an, wird der verbleibende Rest höher als $3A$ M oder gleich $3A$ M sein?

Lösung: Am Ende des ersten Jahres stieg der Einlagebetrag um $\frac{Ap}{100}$ M an, jedoch hob der Einzahler B M ab. Zu Beginn des zweiten Jahres betrug die Spareinlage:

$$A\left(1 + \frac{p}{100}\right) - B$$

Am Ende des zweiten Jahres betrug die Spareinlage:

$$A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - B\left[1 + \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]$$

und am Ende des n-ten Jahres betrug der Einlagebetrag:

$$\frac{Ap - 100B}{p}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{100B}{p}$$

Es ist die Aufgabe gestellt, solch ein n zu ermitteln, damit

$$\frac{Ap - 100B}{p}\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \frac{100B}{p} \geqq 3A$$

Die Lösung ist:

$$n \geqq \frac{\lg(3Ap - 100B) - \lg(Ap - 100B)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \qquad (1)$$

Die Aufgabe hat nur dann einen Sinn, wenn $Ap > 100B$.

Antwort: Die gesuchte Anzahl der Jahre muß die Beziehung (1) erfüllen.

475. Es soll ein Eisenbahngleiskörper (Bild 61) aufgeschüttet werden, der l m lang sein und im Querschnitt die Form eines gleichschenkligen Trapezes mit einer unteren

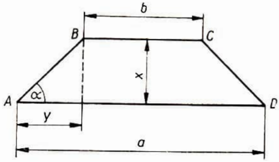

Bild 61

Grundlinie von a m und einer oberen Breite größer oder gleich b m aufweisen soll. Der Neigungswinkel ist α. Wie hoch muß die Aufschüttung werden, damit die Menge der Erdmassen im Bahnkörper größer oder gleich V_0 und kleiner oder gleich V_1 ist?

Lösung: Die Höhe der Aufschüttung bezeichnen wir mit x m. Aus den Bedingungen folgt:

$$\begin{aligned} & x > 0 \\ & a > \overline{BC} \geqq b \\ & V_0 \leqq V \leqq V_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

$V = \dfrac{a + \overline{BC}}{2} \cdot xl$ (Volumen des Prismas, dessen Grundfläche das gleichschenklige Trapez ist).

$\cot\alpha = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = x\cot\alpha$, $\begin{aligned}\overline{BC} &= a - 2y \\ \overline{BC} &= a - 2x\cot\alpha\end{aligned}$

Dann nimmt das System (1) folgende Form an:

$$\begin{aligned} & x > 0 \\ & a - 2x\cot\alpha \geqq b \\ & x^2 l\cot\alpha - xla + V \leqq 0 \\ & x^2 l\cot\alpha - xla + V_1 \geqq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Als Lösung des Systems (2) erhalten wir:

$$\frac{la - \sqrt{l^2a^2 - 4lV\cot\alpha}}{2l\cot\alpha} \leqq x \qquad (3a)$$

$$\leqq \frac{la - \sqrt{l^2a^2 - 4lV_1\cot\alpha}}{2l\cot\alpha} \qquad (3b)$$

$$x \leqq \frac{a-b}{2\cot\alpha}$$

Aus (3) folgt:

$$\frac{a-b}{2\cot\alpha} > \frac{la - \sqrt{l^2a^2 - 4lV_1\cot\alpha}}{2l\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{l(a^2-b^2)}{4\cot\alpha} > V_1$$

Die Aufgabe hat dann nur ein sinnvolles Ergebnis, wenn

$$V_0 < V_1 < \frac{l(a^2-b^2)}{4\cot\alpha} \qquad (4)$$

Beispiel: Es sei $l = 100$ m, $a = 5$ m, $b = 2$ m, $\alpha = 45°$, $V_0 = 400$ m^3 und $V_1 = 500$ m^3. Aus (3) finden wir

$1 \leqq x \leqq 1{,}38$ aus (3a)

$400 < 500 < \dfrac{100(5^2 - 2^2)}{4\cot 45°} = 525$ aus (4)

Antwort: Die Höhe der Aufschüttung wird durch die Beziehung (3) bestimmt.

5.1. Übungen

476. Auf dem einen Haufen sind a t und auf einem anderen Haufen sind b t Kohle. Täglich vergrößert sich jeder Haufen um d t Kohle. In wieviel Tagen wird auf dem ersten Haufen n-mal soviel Kohle sein als auf dem zweiten Haufen?
Wählen Sie sich für d und n bestimmte Zahlen.

477. Wieviel Umdrehungen n in der Sekunde muß eine Schleifscheibe mit dem Durchmesser $d = 200$ mm ausführen, wenn die Schleifgeschwindigkeit v nicht über 30 m s^{-1} liegen soll, also $v \leqq 30$ m s^{-1}?

478. Welche konvexen Vielecke haben mehr Diagonalen als Seiten?

479. Die eine Seite eines rechteckigen Gartens ist um m länger als die andere. Legen wir innerhalb des Gartens entlang des Zaunes einen Weg mit der Breite a an, so verkleinert sich der Inhalt der Anbaufläche um P. Wie lang sind die Seiten des Gartens?

480. Ein Radfahrer fuhr mit der Geschwindigkeit v von der Ortschaft A nach der Ortschaft B ab, die 60 km von A entfernt liegt. Auf dem Rückweg fuhr er mit der gleichen Geschwindigkeit. Nach einer Wegstunde legte er eine Pause von 20 min ein, und nach der Pause erhöhte er die Geschwindigkeit um 4 km h^{-1}. In welchem Bereich liegt die ursprüngliche Geschwindigkeit des Radfahrers, wenn uns bekannt ist, daß er für den Weg von B nach A länger brauchte als von A nach B?

6. Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

Als **Exponentialgleichungen** bezeichnen wir solche Gleichungen, bei denen eine Unbekannte im Exponenten auftritt.
Exponentialgleichungen kann man auf zwei Arten lösen. Entweder:

1. Wir wenden den Lehrsatz an: **Sind zwei Potenzen mit gleicher** Basis (positive und von eins verschiedene) **gleich groß, so sind auch ihre Exponenten gleich.** Wir erheben also zur Lösung die Terme auf beiden Seiten der Gleichung in Potenzen mit gleicher Basis, dann vergleichen wir die Exponenten.

Beispiel 1. Wir wollen folgende Gleichung lösen:

$$36^x = \frac{1}{216}$$

Wir formen beide Seiten zu der Potenz mit dem Basiswert 6 um, also

$$6^{2x} = \frac{1}{6^3},$$

woraus dann wird

$$6^{2x} = 6^{-3}$$

Wir wollen nun die Exponenten vergleichen:

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2},$$

was die Lösung der gegebenen Exponentialgleichung darstellt. Oder:

2. **Wir logarithmieren[1] beide Seiten der Exponentialgleichung (geeignete Basis, da aus der Gleichheit zweier positiver Zahlen die Gleichheit ihrer Logarithmen folgt).**

Beispiel 2. Wir lösen folgende Gleichung:

$$5^{3x-4} \cdot 3^{x+5} = 4$$

Wir logarithmieren mit der Basis 10 und erhalten:

$$(3x - 4) \lg 5 + (x + 5) \lg 3 = \lg 4$$

Nach Multiplikation und Umformung ist:

$$x = \frac{\lg 4 + 4 \lg 5 - 5 \lg 3}{3 \lg 5 + \lg 3}$$

Die Werte von x berechnen wir mit Hilfe logarithmischer Tafeln. Als **logarithmische Gleichungen** bezeichnen wir solche Gleichungen, in denen Logarithmen von Ausdrücken mit einer Unbekannten auftreten. Auch für logarithmische Gleichungen bieten sich zwei Lösungsverfahren an.

Entweder:

1. **Wir formen so um, daß auf beiden Seiten der Gleichung Logarithmen (gleiche Basis, positiv und verschieden von eins) stehen und vergleichen. Aus der Gleichheit der Logarithmen folgt nämlich die Gleichheit der logarithmierten Ausdrücke.**

---

[1] Beim Logarithmieren werden alle Werte in Basishöhe zu ihren Logarithmen. Die Rechenarten werden eine Stufe zurückgesetzt.

Beispiel 3. Wir lösen folgende Gleichung:

$$\log_a (x + 1) + \log_a (x - 2) = \log_a 18,$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 2$$

Unter Anwendung der Logarithmengesetze folgt:

$$\log_a (x + 1)(x - 2) = \log_a 18$$

Also erhalten wir die Gleichung:

$$(x + 1)(x - 2) = 18$$

Nach der Umformung erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 - x - 20 = 0,$$

als deren Lösung wir erhalten:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -4$$

Unserer Aufgabe wird nur $x = 5$ gerecht.

Anmerkung: Es ist stets die Probe erforderlich.

Oder:

2. Mit den Regeln über das Logarithmieren machen wir den Logarithmus des Ausdruckes mit der Unbekannten auf der einen Seite der Gleichung selbständig und delogarithmieren[1] beide Seiten.

Beispiel 4. Wir lösen folgende Gleichung:

$$\log_a x^2 + \log_a 8x = \log_a x + 1$$

Zunächst erhalten wir, wenn wir die Regeln über das Rechnen mit Logarithmen zur Anwendung bringen:

$$2 \log_a x + \log_a 8 + \log_a x = \log_a x + 1$$

Daraus berechnen wir $\log_a x$, also

$$\log_a x = \frac{1}{2}(1 - \log_a 8)$$

[1] Delogarithmieren heißt: Wir schreiben auf beiden Seiten anstelle von $\log_a b$ auf: $a^{\log_a b}$, was gleich b ist.

Durch das Delogarithmieren errechnen wir:

$$a^{\log_a x} = a^{\frac{1}{2}(1 - \log_a 8)}$$

$$x = a^{0,5 - 0,5 \log_a 8}$$

Handelt es sich um den dekadischen Logarithmus $a = 10$ ($\log_{10} = \lg$), so ergibt sich $x = 1{,}118$.

481. Wir haben 3 g eines radioaktiven Elements mit einer Halbwertszeit von 7 Jahren und 24 g eines anderen radioaktiven Elements. Welches ist die Halbwertszeit T_2 des zweiten Elementes, wenn sich ihre Mengen nach 21 Jahren gleichen?

Lösung: Für den radioaktiven Zerfall gilt die Beziehung:

$$m_1 = m_{01} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_1}}$$

wobei m_{01} die Masse, T_1 die Halbwertszeit, t die Zerfallszeit, m_1 die Masse nach dem Zerfall darstellen.

Für das zweite Element gilt:

$$m_2 = m_{02} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_2}}$$

Da nach dem Zerfall ihre Mengen gleich groß sind, gilt:

$$3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{7}} = 24 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{T_2}}$$

Nach der Umformung finden wir:

$$\frac{24}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21(T_2 - 7)}{7T_2}},$$

und daraus wird dann:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3(T_2 - 7)}{T_2}}$$

Nach dem Vergleich der Exponenten wird:

$$3(T_2 - 7) = -3T_2$$

$$T_2 = 3{,}5$$

Antwort: Die Halbwertszeit des zweiten Elements beträgt 3,5 Jahre.

482. Die Höhe eines Berges in Metern wird aus der Formel

$$h = 18400 \text{ m} (\lg p_0 - \lg p_h) \text{ berechnet,} \tag{1}$$

wobei p_0 und p_h die Luftdrücke am Fuße und auf der Spitze des Berges darstellen. Wie hoch ist der Luftdruck auf dem Gipfel, wenn die Höhe des Berges 680,8 m und der Luftdruck am Fuße des Berges $p_0 = 986{,}6$ mbar betragen (reduziert auf 0 °C)?

Lösung: In der Formel ist p_h unbekannt. Wir formen sie wie folgt um:

$$\frac{h}{18400\ \text{m}} = \lg p_0 - \lg p_h,$$

also

$$\lg p_h = \lg p_0 - \frac{h}{18400\ \text{m}}$$

Nach Einsetzen für p_0 erhalten wir:

$$\lg p_h = \lg 986{,}6 - \frac{680{,}8}{18400}$$

$$\begin{aligned} \lg p_h &= 2{,}99414 - \frac{680{,}8}{18400} \\ &= 2{,}9941 - 0{,}0370 \\ &= 2{,}9571 \end{aligned}$$

Nach der Antilogarithmierung (Delogarithmierung) finden wir

$$p_h = 905{,}9$$

Antwort: Der Luftdruck auf dem Gipfel des Berges beträgt 905,9 mbar.

483. Welche Reibungszahl μ wird auf einer Reibungstrommel erforderlich, damit ein Gewicht $G = 5500$ N mit der Kraft $F = 2300$ N gehalten wird, wenn der Umschlingungswinkel $\alpha = 180°$ beträgt? ($F = G\,\mathrm{e}^{-\mu\alpha}$, wobei α im Bogenmaß anzugeben, hier $\alpha = \pi$, und e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.)

Lösung: Aus der Beziehung

$$F = G\,\mathrm{e}^{-\mu\alpha} \tag{1}$$

ist μ zu ermitteln. Es muß die Exponentialgleichung gelöst werden. Wir wollen den natürlichen Logarithmus der linken und rechten Seite bestimmen, also

$$\ln F = \ln G - \mu\alpha \cdot \ln \mathrm{e}^{1},$$

oder

$$\ln F = \ln G - \mu\alpha$$

Daraus wird:

$$\mu\alpha = \ln G - \ln F$$

Dann ist

$$\mu = \frac{\ln G - \ln F}{\alpha}$$

Nach Einsetzen für G, F und $\alpha = 3{,}14$ erhalten wir:

$$\mu = \frac{\ln 5500 - \ln 2300}{3{,}14}$$

In den Tabellen suchen wir die Werte der natürlichen Logarithmen heraus und erhalten:

$$\mu \approx 0{,}28$$

Antwort: Die gesuchte Reibungszahl ist $\mu \approx 0{,}28$.

484. Der Bürger C gibt am Ende jeden Jahres von seiner Spareinlage, z. B. zu 3% verzinst, 90 M je tausend Mark aus. In welcher Zeit verbraucht er den Sparbetrag?

Lösung: Das möge in t Jahren der Fall sein. Die Spareinlage ist für einen längeren Zeitraum zu 3% Zinsen eingezahlt worden. Also erhöht sich jede eingezahlte Mark auf 1,03 M. Jeder Tausender wächst auf $1000 \cdot 1{,}03$ M an. In t Jahren wächst jeder Tausender auf $1000 \cdot 1{,}03^t$ M an. In t Jahren hebt der Sparbuchinhaber die Summe ab:

$$\begin{aligned} &90 \cdot 1{,}03 + 90 \cdot 1{,}03^2 + 90 \cdot 1{,}03^3 + \cdots \\ &+ 90 \cdot 1{,}03^t = \frac{90 \cdot 1{,}03(1{,}03^t - 1)}{0{,}03} \end{aligned}$$

Da die Spareinlage zusammen mit den Zinsen nach t Jahren vollständig abgehoben sein wird, erhalten wir die Gleichung:

$$1000 \cdot 1{,}03^t = \frac{90 \cdot 1{,}03\,(1{,}03^t - 1)}{0{,}03}$$

Daraus folgt:

$$1{,}03^t = \frac{309}{209}$$

[1] Man beachte: $\ln \mathrm{e} = 1$ und $\mathrm{e}^{\ln a} = a$

Durch Logarithmieren erhalten wir:

$$t \lg 1{,}03 = \lg 309 - \lg 209$$

$$t = \frac{\lg 309 - \lg 209}{\lg 1{,}03}$$

$$t = 13{,}2$$

Antwort: Der Bürger C verbraucht die Spareinlage in etwa $13\frac{1}{5}$ Jahren.

485. Welchen Druck p entwickelt der Dampf des Äthylens C_2H_4 bei der Temperatur $t = -110\,°C$? (Zwischen dem Dampf gesättigter Kohlenwasserstoffe und ihrer Temperatur besteht die empirisch abgeleitete Beziehung, die sog. **Augustsche Gleichung**,

$$\lg p = A - \frac{B}{t + 273},$$

wobei A und B zwei von der Art der vorliegenden Verbindung abhängige Konstanten darstellen. In unserem Fall ist $A = 7{,}245$, $B = 739$.)

Lösung: Entsprechend der Augustschen Gleichung gilt:

$$\lg p = A - \frac{B}{t + 273}$$

Nach Einsetzen für A und B erhalten wir:

$$\lg p = 7{,}245 - \frac{739}{-110 + 273}$$

$$\lg p = 2{,}7113$$

Als Numerus lesen wir ab:

$$p = 514{,}4$$

Antwort: Der gesuchte Druck des Äthylendampfes ist $p = 514{,}4$ Torr $= 685{,}8$ mbar.

486. Wenn wir einen Kondensator aufladen und von der Stromquelle trennen, wird seine Spannung durch die Wirkung des Ableitwiderstandes allmählich absinken (Bild 62). Berechnen Sie, in welcher Zeit t die Spannung mit einer Größe $U = 500$ V an einem Kondensator mit der Kapazität $C = 1\ \mu$F auf den halben Wert absinkt, wenn wir voraussetzen, daß der Ableitwiderstand $R = 300\ \text{M}\Omega$ beträgt.

Lösung: Die Gleichung

$$U_C = U\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

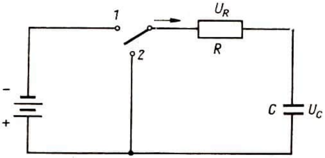

Bild 62

gibt die Größe der Spannung U_C bei der Entladung des Kondensators an, τ ist die Zeitkonstante, die gleich RC ist. In unserem Fall sinkt die Spannung in der Zeit t auf den halben Wert ab, so daß ist:

$$U_C = U\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}\,U$$

oder

$$U\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{1}{2}\,U$$

und nach Kürzen (Division durch $U \neq 0$):

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2}$$

Nach dem Logarithmieren (Basis e) und dem Umformen ergibt sich:

$$\ln e^{-\frac{t}{\tau}} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-\frac{t}{\tau} \ln e = \ln \frac{1}{2}$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln \frac{1}{2}$$

$$t = -\tau \ln \frac{1}{2}$$

Nach Einsetzen für τ und Umformen finden wir

$$t = RC \ln 2$$

Nach Einsetzen für R und C wird:

$$t = 3 \cdot 10^8\,\Omega \cdot 10^{-6}\,\text{F} \cdot \ln 2$$

$$t = 207\ \text{s}$$

Antwort: Die Spannung sinkt in 207 s auf den halben Wert ab.

487. Welche Dicke (in cm) müßte eine Wasserschicht aufweisen, damit die Intensität I_0 der einfallenden Strahlung mit einer Wellenlänge von 1 μm $= 10^{-6}$ m beim Durchdringen der Schicht bis auf ein Zehntel absinkt?

Lösung: Wir bezeichnen die gesuchte Dicke mit t. Entsprechend dem Lambertschen Gesetz steht die Intensität I_t der die Wasserschicht durchdringenden Strahlung mit der Intensität I_0 der einfallenden Strahlung durch die Beziehung

$$I_t = I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad (1)$$

im Zusammenhang, wobei $\alpha = 0{,}43$ cm^{-1} den Absorptionskoeffizienten des Wassers darstellt. In unserem Fall gilt für die Intensität der durchgedrungenen Strahlung I_t:

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{10}$$

Aus (1) folgt:

$$\frac{I_t}{I_0} = \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

oder

$$\mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{1}{10}$$

Durch die weitere Unformung erhalten wir:

$$\lg \mathrm{e}^{-\alpha t} = \lg \frac{1}{10}$$

$$-\alpha t \lg \mathrm{e} = -1$$

$$t = \frac{1}{\alpha \lg \mathrm{e}}$$

Nach Einsetzen wird:

$$t = \frac{1\ \mathrm{cm}}{0{,}43\ \lg \mathrm{e}} = 5{,}35\ \mathrm{cm}$$

Antwort: Die Wasserschicht muß eine Dicke von 5,35 cm aufweisen.

488. Wieviel Prozent des Lichtes durchdringt einen Wald bis zu der Tiefe von 10 m, wenn auf jedem Quadratmeter 1 Baum wächst und der Durchmesser der Stämme in Augenhöhe im Durchschnitt 0,10 m beträgt? Es gilt die Gleichung:

$$\lg \frac{i}{i_0} = 0{,}43\ NDl \qquad (1)$$

wobei i die Teilmenge des Lichts, die in den Wald hineindringt, von der ursprünglichen Lichtmenge i_0 darstellt. N ist die Anzahl der Bäume auf 1 m^2, D der Durchmesser der Baumstämme in Augenhöhe und l der Weg, den ein Lichtbündel durch den Wald zurücklegt.

Lösung: Die hier angegebene logarithmische Gl. (1) ergibt nach Einsetzen:

$$\lg \frac{i}{i_0} = -0{,}43 \cdot 1 \cdot 0{,}10 \cdot 10$$

$$\lg \frac{i}{i_0} = -0{,}43$$

$$\frac{i}{i_0} = 0{,}37$$

Antwort: In den Wald dringen also nur 37% der ursprünglichen Lichtmenge ein.

489. Ein Gleichstrommagnet weist eine Induktivität $L = 20$ H und den ohmschen Widerstand $R = 100\ \Omega$ auf. In welcher Zeit t erreicht die Stromstärke 99% ihres Grundwertes?

Lösung: Die Abhängigkeit der Stromstärke I von der Zeit wird durch nachstehende Gleichung gegeben:

$$I = I_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

wobei I_∞ die Stärke des Grundstromes und $\tau\left(\frac{L}{R}\right)$ eine Zeitkonstante darstellen. Wir suchen die Zeit t unter der Voraussetzung, daß $I = 0{,}99 I_\infty$. Es gilt also:

$$I = 0{,}99 \cdot I_\infty = I_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Daraus wird dann:

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

Nach Logarithmieren ist:

$$\frac{t}{\tau} = -\ln 0{,}01$$

Setzen wir $\tau = \frac{L}{R}$ ein, so erhalten wir:

$$t = -\frac{L}{R} \ln 0{,}01$$

$$t = -\frac{20}{100} (-4{,}6) = 0{,}96$$

Antwort: In der Zeit $t = 0{,}96$ s erreicht die Stromstärke 99% ihres Grundwertes.

490. Wenn der normale Luftdruck auf dem Meeresspiegel 1013,25 mbar beträgt, wie hoch ist dann der normale Luftdruck auf der Lomnitzer Spitze (Lomnický štít)?[1]

Lösung: Der Luftdruck nimmt mit ansteigender Höhe (bei gleicher Temperatur) um etwa 1,2% je 100 m Höhe ab. Wir bezeichnen den Luftdruck in der Höhe 0 mit p_0, den Luftdruck in der Höhe $(n \cdot 100)$ m mit p_n. Es gilt:

$$p_n = p_0 r^n, \quad \text{mit} \quad r = 1 - \frac{1{,}2}{100}$$

Der Luftdruck auf der Lomnitzer Spitze, die etwa 2600 m hoch ist, beträgt:

$$p_{26} = p_0 r^{26} = 1013{,}25 \cdot 0{,}988^{26}$$

$$\lg p_{26} = \lg 1013{,}25 + 26 \lg 0{,}988$$

$$\lg p_{26} = 2{,}8694 \Rightarrow p_{26} \approx 740$$

Antwort: Der normale Luftdruck auf dem Gipfel der Lomnitzer Spitze beträgt annähernd 740 mbar.

491. a) Um wieviel Prozent erhöht sich im Verlaufe eines Fünfjahrplanes die Produktion, wenn sie jährlich um 10% gesteigert wird?

b) Um wieviel Prozent muß jährlich die Produktion gesteigert werden, damit sie sich im Verlaufe des Fünfjahrplanes verdoppelt?

Lösung:

a) Die Jahresproduktion, mit der wir den Fünfjahrplan beginnen, wollen wir mit a_0 und die Produktion im fünften Jahr mit a_5 bezeichnen.

[1] Zweithöchste Erhebung der Hohen Tatra

Es gilt:

$$a_5 = a_0 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = a_0 \cdot 1{,}1^5 = a_0 \cdot 1{,}61051$$

und daraus:

$$\frac{a^5}{a_0} = 1{,}61051$$

Antwort: Im Verlaufe des Fünfjahrplanes erhöht sich die Produktion um 61,1%.

b) Den Quotienten der geometrischen Folge bezeichnen wir mit q. Es gilt $a_5 = 2a_0$, weiterhin $a_5 = a_0 q^5$. Daraus folgt die Gleichung:

$$a_0 q^5 = 2a_0$$

Da $a_0 \neq 0$, dann ist

$$q^5 = 2$$

$$5 \lg q = \lg 2$$

$$\lg q = \frac{1}{5} \lg 2 = \frac{1}{5} \cdot 0{,}3010 = 0{,}0602$$

$$q = 1{,}149$$

Antwort: Die Produktion muß sich jedes Jahr um rund 14,9% erhöhen.

492. Das Papierformat A0[1] stellt ein Rechteck dar; dessen Breite und Länge stehen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ zueinander, der Inhalt beträgt 1 m². Berechnen Sie die Breite und Länge dieses Rechteckes in Millimetern.

Lösung: Die Breite des Rechteckes in Metern bezeichnen wir mit x m, dann ist seine Länge $x\sqrt{2}$ m. Der Flächeninhalt des Rechteckes beträgt 1 m², demnach ist $x^2\sqrt{2} = 1$, oder

$$x^2\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx \sqrt{0{,}7071} \approx 0{,}841$$

Die logarithmische Lösung ist hier zeitaufwendiger.

[1] Die folgenden Formate A1, A2 usw. entstehen durch Halbieren der Blätter.

Aus der Aufgabe folgt:

$$x : y = 1 : \sqrt{2}$$
$$y = \sqrt{2}\,x$$

Daher gilt:

$$y = \sqrt{2} \cdot 0{,}841$$
$$\approx 1{,}189$$

Antwort: Das Format A0 hat daher die standardisierten Maße 841 mm × 1189 mm.

493. Welche Länge hat die Kante eines vollen Eisenwürfels, dessen Masse 1 kg ausmacht? (Die Dichte des Eisens bei normaler Temperatur beträgt etwa 7,85 g/cm³.)

Lösung: Die gesuchte Kantenlänge bezeichnen wir mit x. Die Masse des Würfels wird durch die Beziehung $m = V\varrho$ (V ist das Volumen des Würfels, ϱ die Dichte) bestimmt.

$$1\,000 = x^3 \cdot 7{,}85$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{1\,000}{7{,}85}}$$
$$x \approx 5{,}032$$

Antwort: Die gesuchte Länge der Kante des Würfels ist annähernd 5 cm.

494. Ein auf die Erde fallender Ball springt bis auf $\frac{2}{3}$ der Höhe zurück, aus der er fallengelassen wurde.
Nach wieviel Rückstoßvorgängen erreicht er die Höhe von 1,6 m, wenn er aus 8,1 m Höhe fällt?

Lösung: Nach dem ersten Aufprall erreicht der Ball die Höhe von $8{,}1 \cdot \frac{2}{3}$ m, nach dem zweiten Rückprall die Höhe von $8{,}1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ m usw. Nach dem n-ten Rückprall erreicht der Ball die Höhe $8{,}1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ m. Aus der Aufgabe folgt:

$$8{,}1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1{,}6$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1{,}6}{8{,}1} = \frac{16}{81}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \qquad (1)$$

In der Exponentialgleichung (1) ist die Basis dieselbe, daher müssen sich auch die Exponenten gleichen, d. h.,

$$n = 4$$

Antwort: Der Ball erreicht die Höhe von 1,6 m erst nach 4 Rückprallvorgängen.

495. Am Anfangspunkt einer Telefonleitung liegt die Spannung $U_1 = 1{,}1$ V, am Ende der Leitung $U_2 = 40$ mV an. Ermitteln Sie Dämpfung des Übertragungssystems in Neper und Dezibel.

Lösung:

a) Die Dämpfung in Neper berechnen wir aus der Beziehung

$$e^b = \frac{U_1}{U_2}$$

(e ist die Basis der natürlichen Logarithmen.) Daraus wird

$$b \ln e = \ln U_1 - \ln U_2$$

oder

$$b = \ln 1{,}1 - \ln 0{,}04 = \ln 27{,}5$$
$$b = 3{,}314$$

Die Dämpfung beträgt 3,314 Neper.

b) Die Dämpfung in Dezibel berechnen wir aus der Beziehung

$$10^{0{,}1b} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2$$

Wenn wir beide Seiten logarithmieren, Basis 10, so erhalten wir:

$$0{,}1b = 2(\lg 1{,}1 - \lg 0{,}04)$$
$$b = 28{,}786$$

Die Dämpfung beträgt 28,786 db.

Antwort: Die Dämpfung beträgt 3,314 Neper oder 28,786 Dezibel.

496. Wir waschen Rohsalz, wobei wir jedes Mal neues sauberes Wasser verwenden. Die anfängliche Pulpe enthält a kg Wasser und m kg Salz je Kilogramm Wasser. Bei jedem Waschvorgang mischen wir die Pulpe sorgfältig mit frischem Wasser, von dem wir b kg hinzugeben, und dann lassen wir die Lösung sich stabilisieren, gießen sie ab, und in der Pulpe verbleiben stets a kg Wasser. Wieviel aufeinanderfolgende Waschvorgänge müssen wir vornehmen, um c kg herausgelöstes Salz zu gewinnen?

Lösung: Die Konzentration der Lösung ist nach dem ersten Waschvorgang $\alpha_1 = \left(\frac{a}{a+b}\right)m$, nach dem zweiten $\alpha_2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 m$, nach dem x-ten Waschvorgang $\alpha_x = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x m$.

Die Gesamtmenge des durch das Waschen mit Wasser gewonnenen Salzes ist:

$$c = b\alpha_1 + b\alpha_2 + b\alpha_3 + \cdots + b\alpha_x$$
$$= \left[\frac{a}{a+b} + \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+b}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{a}{a+b}\right)^x\right] bm$$

Daraus erhalten wir die Exponentialgleichung

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^x = 1 - \frac{c}{am}$$
$$x \lg\left(\frac{a}{a+b}\right) = \lg\left(1 - \frac{c}{am}\right)$$
$$x = \frac{\lg\left(1 - \frac{c}{am}\right)}{\lg\left(\frac{a}{a+b}\right)}$$

Antwort: Es müssen $x = \frac{\lg\left(1 - \frac{c}{am}\right)}{\lg\left(\frac{a}{a+b}\right)}$ aufeinanderfolgende Waschvorgänge vorgenommen werden.

497. Die Bevölkerung eines Gebietes wächst jedes Jahr um $\frac{1}{80}$ an. In wieviel Jahren steigt die Bevölkerungszahl dieser Gegend auf das Doppelte?

Lösung: Möge N die Bevölkerungszahl zum gegenwärtigen Zeitpunkt sein. Die Bevölkerungszahl am Ende des ersten Jahres danach wird durch die Beziehung

$$N + \frac{N}{80} = N\left(1 + \frac{1}{80}\right)$$

bestimmt. Die Bevölkerungszahl am Ende des zweiten Jahres ist

$$N\left(1 + \frac{1}{80}\right) + \frac{N\left(1 + \frac{1}{80}\right)}{80}$$
$$= \left(N + \frac{N}{80}\right)\left(1 + \frac{1}{80}\right)$$
$$= N\left(1 + \frac{1}{80}\right)\left(1 + \frac{1}{80}\right) = N\left(1 + \frac{1}{80}\right)^2,$$

am Ende des dritten Jahres $N\left(1 + \frac{1}{80}\right)^3$ usw.

Am Ende des n-ten Jahres wird:

$$N\left(1 + \frac{1}{80}\right)^n$$

Aus der Aufgabe folgt

$$N\left(1 + \frac{1}{80}\right)^n = 2N$$
$$\left(1 + \frac{1}{80}\right)^n = 2$$
$$n \lg\left(1 + \frac{1}{80}\right) = \lg 2$$
$$n = \frac{\lg 2}{\lg\left(1 + \frac{1}{80}\right)} = \frac{\lg 2}{\lg 81 - \lg 80}$$
$$n \approx 56$$

Antwort: Die Bevölkerungszahl wächst in 56 Jahren auf das Doppelte an.

498. Ein Erz enthielt ursprünglich m_0 g Uran je Tonne. Infolge des radioaktiven Zerfalls verblieben darin m g je Tonne. Ermitteln Sie das Alter des Erzes, wenn die Halbwertszeit T Jahre beträgt.

Lösung: Da sich die ursprüngliche Uranmenge um die Hälfte verringerte und dieser Zerfall nach dem Gesetz der Exponentialfunktion verläuft, folgt aus der Beziehung $a = y_0 a^x$ die

Gleichung $\frac{1}{2} y_0 = y_0 a^T$. Daraus erhalten wir dann $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$.

Wenn wir das Alter des Erzes mit x Jahren bezeichnen, wird die gesuchte Exponentialgleichung die Form

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T}}$$

annehmen.
Nach Logarithmieren beider Seiten erhalten wir:

$$\lg m = \lg m_0 + \frac{x}{T} \lg \left(\frac{1}{2}\right),$$

woraus wird

$$x = \frac{T(\lg m_0 - \lg m)}{\lg 2}$$

Antwort: Das Alter des Erzes ist

$$x = \frac{T(\lg m_0 - \lg m)}{\lg 2}.$$

499. Von m mg eines Radiumisotops verblieben nach t min radioaktiven Zerfalls n mg. Berechnen Sie die Halbwertszeit T des Radiums in Minuten.

Lösung:

a) Der Zerfall des Radiums ist durch die Beziehung

$$n = m \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \qquad (1)$$

gegeben. Durch Logarithmieren der Gleichung ermitteln wir T.

$$\lg n - \lg m = -\frac{t}{T} \lg 2 \qquad (2)$$

Aus der Gl. (2) folgt:

$$T = \frac{t \lg 2}{\lg m - \lg n}$$

wertmäßig: $m = 8$ mg, $t = 40$ min, $n = 2$ mg.

$$T = \frac{40 \lg 2}{\lg 8 - \lg 2} = \frac{40 \lg 2}{2 \lg 2} = 20$$

b) Die Aufgabe können wir auch als Exponentialgleichung lösen. Nach Einsetzen in (1) erhalten wir dann:

$$2 = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{T}}$$

$2^1 = 2^{3-\frac{40}{T}}$ (links und rechts gleiche Basis)

$$1 = 3 - \frac{40}{T}$$

$$T = 20$$

Antwort: Die Halbwertszeit beträgt 20 min.

500. Wie oft muß man ein Seil um eine Eisentrommel wickeln, damit die Kraft F_1 die Last F hält (Bild 63)?

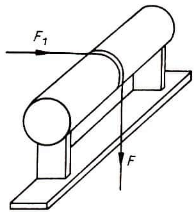

Bild 63

Lösung: Die Abhängigkeit zwischen der Kraft und der Last ist durch die Beziehung

$$F = F_1 \cdot 5^n \qquad (1)$$

gegeben. (F_1 stellt die Kraft dar, die die Last hält, F ist das Gewicht der Last und n die Anzahl der Wicklungen um die Trommel.)
Aus der Gl. (1) erhalten wir durch Logarithmieren:

$$\lg F = n \lg 5 + \lg F_1$$

$$n = \frac{\lg F - \lg F_1}{\lg 5}$$

Beispiel: $F = 2500$ N, $F_1 = 100$ N

$$n = \frac{\lg 2500 - \lg 100}{\lg 5}$$

$$n = 2$$

b) Die Aufgabe können wir auch als Exponentialgleichung lösen. Nach Einsetzen in (1) erhalten wir:

$$250 = 10 \cdot 5^n$$
$$25 = 5^n$$
$$5^2 = 5^n$$
$$n = 2$$

Antwort: Das Seil wird zweimal um die Trommel gewickelt.

6.1. Übungen

501. Beim Heben einer Last mit einem gewöhnlichen Flaschenzug gilt die Gleichung $F = \frac{F_Q}{\eta} \cdot \frac{1 - \eta}{1 - \eta^n}$. Berechnen Sie, bei welchem n (n Anzahl der Rollen) wir die Last $F_Q = 966$ N mit der Kraft $F = 300$ N und bei einem Wirkungsgrad $\eta = 0{,}92$ heben können.

502. Vor Jahren waren im Wald 10000 Bäume und jetzt sind es 15600. In wieviel Jahren stieg die Anzahl der Bäume in der angegebenen Weise, wenn der Jahreszuwachs 10% betrug?

503. Zu Beginn des radioaktiven Zerfalls hatte man 1 mg eines Radiumisotops. Nach wieviel Minuten verbleiben davon 0,125 g, wenn dessen Halbwertszeit $T = 3$ min beträgt?

Ergebnisse zu den Übungen

In eckigen Klammern ist nach dem Ergebnis die Gleichung (Ungleichung), das Gleichungssystem (Ungleichungssystem) der gelösten Aufgabe angegeben.

146. Zahl 5; $[5x - 20 = x]$.

147. 0,25%; $\left[x = \frac{100p}{100 - p}\right]$.

148. Aus Leder $x = 3$, aus Kunstleder 5; $[70x + 20(8 - x) = 310]$.

149. 8 l Wasser mit einer Temperatur von 100 °C und 28 l Wasser von 10 °C; $[70x = 20(36 - x)]$.

150. 15 kg zu 50 M und 5 kg zu 70 M; $[50x + (20 - x)\,70 = 20 \cdot 55]$.

151. 100 m; $\left[l = \frac{R \cdot A}{\varrho}\right]$.

152. 44 kg; $\left[x = \frac{a(100 - q)}{100 - p}\right]$.

153. 12 und 63; $\left[\frac{3}{4}x = \frac{1}{7}(75 - x)\right]$.

154. 25 cm und 70 cm; $[x + 3x - 5 = 95]$.

155. 6 Tage; $\left[\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right)x = 1\right]$.

156. 24 zu 9 M und 12 zu 12 M; $[9x + 12(36 - x) = 360]$.

157. 48 Männer und 16 Frauen; $\left[x - 8 = 5\left(\frac{x}{3} - 8\right)\right]$.

158. 14 km h^{-1} und 25 km h^{-1}; $[3x + 3(x + 11) = 117]$.

159. $\frac{3}{8}$; $\left[\frac{x + 2}{x + 7} = \frac{1}{2}\right]$.

160. 1,83 m; $\left[h = h' + 0{,}10,\ h' = \frac{10}{a^2}\right]$.

161. Aus Eisen von 192°, aus Kupfer von 168°; $\left[\frac{\pi r^2}{360}xh \cdot 7{,}85 = \frac{\pi r^2}{360}(360 - x)\,h \cdot 8{,}93\right]$.

162. Geschwindigkeit von 60 km h^{-1}, Entfernung 390 km; $\left[x\frac{13}{2} = (x - 10)\,\frac{39}{5}\right]$

163. Nach 7 Monaten; $[600 \cdot 12 + 150x = 7950]$.

164. Nach $4\frac{4}{5}$ Tagen; $\left[\frac{P}{8}x + \frac{P}{12}x = P\right]$.

165. 30°, 60°, 90°; [Gehen Sie davon aus, daß die Summe der Innenwinkel des Dreieckes 180° beträgt.]

166. 7,2 m; $\left[\frac{x}{6} = 1{,}2\right]$.

167. 36 kg; $[x + 6x = 42]$.

168. 135 Schüler; $\left[\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{2x}{9} + 33 = x\right]$.

282. 85; $[x + y = 13;\ \ 10x + y = 10y + x + 27]$.

283. 16 und 11; $[x = y + 5;\ 30x + 60y = 1500]$.

284. 165 g Material A und 44 g Material B; $[x + y = 209;\ x = 3{,}75y]$.

285. 1530 m min^{-1}; 1020 m min^{-1}; $[3(x + y) = 7650;\ 15(x - y) = 7650]$.

286. 5270 und 527; $[x + y = 5797;\ x = 10y]$.

287. 240; $\left[y = \frac{4}{3}x;\ y = 80 + x\right]$

288. 4 km; $\left[\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{11{,}5 - (x + y)}{5} = \frac{174}{60};\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{11{,}5 - (x + y)}{3} = \frac{186}{60}\right]$.

289. Der erste in 30, der zweite in 45 Tagen; $\left[\frac{15}{x} + \frac{22{,}5}{y} = 1;\ \frac{18}{x} + \frac{18}{y} = 1\right]$.

290. 89 kg Kupfer und 56,8 kg Zink; $[x + y = 18;\ 8{,}9x + 7{,}1y = 145{,}8]$.

291. 48 Jahre; $[72 - y = x;\ 72 = 3(x - y)]$.

292. 31,63 M; $\left[y = \frac{5 + 199x}{18}\right]$

293. 10 und 6; $[8x + 12y = (8 + 12) \cdot 7{,}6;\ 12x + 8y = (8 + 12) \cdot 8{,}4]$.

294. Die Geschwindigkeit des Flugzeuges ist 210 km h^{-1}, die des Windes 30 km h^{-1}; $[100x - 100y = 300;\ 75x + 75y = 300]$.

295. 36 und 24; $[x - 6 = y + 6;\ x + 4 = 2(y - 4)]$.

296. 240 und 398; $\left[x + y = 638;\ \frac{x}{100} \cdot 99{,}7 + \frac{y}{100} \cdot 66 = \frac{638}{100} \cdot 78\right]$.

297. $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$; $\left[\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2};\ R_1 = 3R_2\right]$.

298. 61 sechsmal; 71 zweimal; $[6x + 7y = 50]$.

299. Das Heft kostete 0,20 M, der Bleistift 0,40 M; $[y = 2x;\ 5x + 7y = 3{,}80]$.

300. 17,5 cm und 3,5 cm; $[f_1 - f_2 = 14;\ f_1 = 5f_2]$.

301. Die eine Seite des Rechteckes ist $\frac{b(ab + 49) - (ab - 25)}{a^2 - b^2}$, die andere $\frac{a(ab + 49) - b(ab - 25)}{a^2 - b^2}$; $[(x + a)(y - b) = xy + 49;\ (x + b)(y - a) = xy - 25]$.

302. $\frac{m_2 \cdot a^3 - m_1 \cdot b^3}{b^2(a - b)}$ g und $\frac{m_2 \cdot a^3 - m_1 \cdot b^3}{a^2(a - b)}$ g, wobei a, b die Längen der großen Achse jedes Eies und m_1, m_2 die Massen sind; $[x:y = a^2:b^2$, $(m_1 - x):(m_2 - y) = a^3:b^3$, wobei x, y die Massen der Schalen des ersten und zweiten Eies darstellen].

303. Der erste Arbeiter führt die Arbeit in $\frac{2abc}{ab - bc + ca}$, der zweite in $\frac{2abc}{ab + bc - ca}$ und der dritte in $\frac{2abc}{-ab + bc + ca}$ Tagen aus; $\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{c};\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a};\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}\right]$.

304. Die Dichten beider Gase sind $\frac{(ad - bc)\,pq}{(a + b)\,dq - (c + d)\,bp}$ g cm^{-3} und $\frac{(ad - bc)\,pq}{(c + d)\,ap - (a + b)\,cq}$ g cm^{-3} $\left[\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{a + b}{p};\ \frac{c}{x} + \frac{d}{y} = \frac{c + d}{q}\right]$.

429. 32 ha; $\left[\frac{960}{x} - \frac{960}{x + 8} = 6\right]$.

430. 12 Schüler; $\left[\frac{480}{x} - 8 = \frac{480}{x + 8}\right]$.

431. 34 und 22; $[x(56 - x) = 748]$.

432. 55 m min^{-1} $\left[\frac{4800}{x + 25} + \frac{1200}{x - 25} = 100\right]$.

433. Die eine in 20 h und die andere in 30 h; $\left[\frac{12}{x} + \frac{12}{x + 10} = 1\right]$.

434. 7 und 8; $[(x + 1)^2 - x^2 = 15]$.

435. Etwa 72 m; $\left[t_1 + t_2 = 4;\ \frac{g}{2}\, t_1 = ct_2\right]$.

436. $d = 39{,}4$ mm; $[d^2 + 38{,}2d - 3060 = 0]$.

437. Diese Aufgabe hat keine ganzzahlige Lösung; $\left[\frac{150}{x} + 1 = \frac{150}{x - 4}\right]$.

438. 50 s; $[v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2;\ s = vt]$.

439. 36 Kugeln; $[1 + 2 + 3 + \cdots + (x + 2) = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0]$.

440. 60 l und 48 l; $\left[\frac{600}{x}\,(x - 2) = \frac{384}{x - 2} \cdot x\right]$.

441. Beide Autos gelangten um 16 h 24 min zu Hause an. $\left[\frac{v_1(x - t_3)}{v_2} - \frac{v_2(x - t_3)}{v_1} = t_1 - r\right.$, wobei v_1 die Geschwindigkeit des Pkw und v_2 die des Lkw ist$]$.

442. 200 m; $[d = \sqrt{2Rh}$, h ist die Höhe des Beobachters vom Terrain und R der Erdradius$]$.

443. $R_1 = 2\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 6\ \mathrm{k\Omega}$; $\left[R_1 + R_2 = 8\ \mathrm{k\Omega},\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{3}\ \mathrm{k\Omega}\right]$.

444. Die Länge beträgt 117 LE, die Breite 52 LE; $[x(x + 65) = 6084]$.

445. 70 km; $\left[\frac{280}{x} = \frac{280}{x + 10} + \frac{1}{2}\right]$.

446. Sie planten, täglich 20 ha zu bearbeiten, und die Arbeit würde 10 Tage dauern. Bei Terminverkürzung beenden sie die Aussaat in 8 Tagen; $\left[\frac{200}{x + 5} + 2 = \frac{200}{x}\right]$.

447. 2, 3, 4, 5; $[x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + 4]$.

448. 11 und 14 Tage; $\left[\left(\frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x}\right) \cdot 5\,\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{x + 3}\right) \cdot 1\,\frac{1}{2} = 1\right]$.

476. $\frac{bn - a}{d(1 - n)}$ Tage; $[a + dx = n(b + dx)]$.

477. Für die Geschwindigkeit gilt die Beziehung $v \leqq \pi\, dn$, dann ist $n \leqq 48\ \mathrm{s}^{-1}$.

478. $n > 5$; $\left[\frac{1}{2}\, n(n - 3) > n\right]$.

479. $\frac{P + 4a^2 + 2am}{4a}$, $\frac{P + 4a^2 - 2am}{4a}$, für $P > 4a^2 + 2am$; $[x - y = m,\ xy - (x - 2a)\,(y - 2a) = P]$.

480. $0 < v \leqq 20$; $\left[1 + \frac{60 - v}{v + 4} + \frac{1}{3} \leqq \frac{60}{v},\ v > 0\right]$.

501. $n = 4$.

502. Etwa 4,7 Jahre; $\left[P_n = P_0\left(1 + \frac{1}{10}\right)^n\right]$.

503. $t = 9$ min; $\left[\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}\right]$.

Literaturhinweise

Die zahlreichen Quellenangaben sind in der Originalausgabe enthalten und hier aus Platzgründen weggelassen worden.
Zur Wiederholung und Vertiefung der theoretischen Grundlagen werden folgende Titel empfohlen:

Lehrgang der Elementarmathematik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag

Höfner/Wittwer: Wiederholungsprogramm Elementarmathematik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag

Das Buch enthält über 500 Text- bzw. Sachaufgaben mit Ansatz und Lösungen aus der Mathematik, überwiegend der Klassenstufen 8 bis 10. Die Thematik der Aufgaben wurde größtenteils der technischen Praxis und den Naturwissenschaften entlehnt, zum Teil handelt es sich um Unterhaltungsmathematik. Etwa die Hälfte der Beispiele ist detailliert gelöst, wobei die Autoren alle Varianten mathematischer Verfahren im Wechsel so folgen lassen, daß sich der Leser über die entsprechenden mathematischen Lösungsverfahren aus verschiedener Sicht informieren kann. Bei etwa einem Drittel der Beispiele sind nur die Hauptabschnitte der Lösung angegeben. Der Rest besteht aus Aufgaben, deren Ergebnisse am Ende des Buches zusammengestellt sind.
Das Buch ist für Schüler an Oberschulen und Hörer an Volkshochschulen, Teilnehmer an Wiederholungslehrgängen und Studenten an Fachschulen bestimmt. Die Lehrer finden darin eine Fülle von durchgerechneten Beispielen für die Unterrichtsvorbereitung.
Für Eltern ist dieses Buch geeignet, verlorengegangene Kenntnisse wieder aufzufrischen, damit sie ihren Kindern bei Hausaufgaben helfen können.