Mathematik

Klasse 12

Unterrichtshilfen

Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 12

Autoren: Dieter Geupel, Alfred Hilbert,
Siegfried Schneider, Sieglinde Schneider

Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Berlin 1981

Verfaßt von einem Autorenkollektiv unter Leitung von Dr. Siegfried Schneider

Autoren:
Dr. Siegfried Schneider – Einleitung
Dr. Siegfried Schneider / Dr. Sieglinde Schneider – Kapitel 1
Dieter Geupel / Dr. Alfred Hilbert – Kapitel 2

Redaktion: Karlheinz Martin

1. Auflage
Lizenz-Nr. 203/1000/81 (E 0021 91-1)
LSV 0645
Zeichnungen: Käthe Hellmes, Heinrich Linkwitz
Einband und typographische Gestaltung: Atelier vwv
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Schrift: 9/10 Times Monotype
Redaktionsschluß: 20. November 1980
Bestell-Nr. 707 443 7
DDR 6,50 M

Inhalt

Stoffabschnitt 1.3

Stoffabschnitt 1.4

Stoffabschnitt 1.5

Stoffabschnitt 1.6

Stoffgebiet 2

Stoffabschnitt 2.1

Stoffabschnitt 2.2

Einleitung

1. Hinweise zum Aufbau und zur Verwendung der Unterrichtshilfen

Die vorliegenden Unterrichtshilfen wurden auf der Grundlage des Lehrplans ausgearbeitet. Alle Aussagen dieses Buches zu der methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts sind nicht verbindlich, sondern stellen Empfehlungen dar.
Im folgenden werden die Funktion und die Art und Weise der Nutzung der Unterrichtshilfen erläutert.
(1) Dem Jahreslehrgang, jedem Stoffgebiet, jedem Stoffabschnitt und einzelnen Themen sind **Vorbemerkungen** vorangestellt. Darin werden die Hauptanliegen, die mit der Behandlung des jeweiligen Stoffes verbunden sind, in knapper Form dargestellt. Der Stoff wird in die Linienführung des Lehrplanes eingeordnet, und es werden wesentliche Ziele der Bildung und Erziehung genannt.
Deshalb beginnt jede richtige Verwendung der Unterrichtshilfen mit dem Studium der jeweiligen Vorbemerkungen.
Ohne Kenntnis des dort Gesagten ist eine richtige Wertung und Einordnung der Einzelhinweise, in denen nicht ständig allgemeine Zielstellungen wiederholt werden, nicht möglich.
In den Vorbemerkungen werden Übersichten über die Struktur des zu vermittelnden Stoffes zur Orientierung für den Lehrer angegeben, die zum Teil aber auch zur Systematisierung im Unterricht eingesetzt werden können.
Die zu einzelnen Stoffabschnitten enthaltenen Leitfragen können zur Zielorientierung über den gesamten Stoffabschnitt hinweg wie auch für die einzelnen Lerneinheiten sowie für Teil- und Gesamtzusammenfassungen verwendet werden.
(2) Zur Unterstützung der Plankontrolle werden Übersichten zur **Jahresstoffverteilung** in Form von Diagrammen vorangestellt (zwei Varianten). Mit ihrer Hilfe kann der Lehrer bestimmen, bis zu welchem Zeitpunkt im Schuljahr etwa die Behandlung der einzelnen Stoffabschnitte abgeschlossen werden sollte.
(3) Die Unterrichtshilfen enthalten einen Abschnitt mit **Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen**. Diese Aufgaben können zur Festigung des Grundwissens und der grundlegenden Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie zur Sicherung des Ausgangsniveaus für die Behandlung neuen Stoffes dienen und beziehen weitgehend auch zurückliegenden Stoff ein. Sie sind nicht den einzelnen Lerneinheiten zugeordnet, damit der Lehrer selbst, entsprechend den Erfordernissen in seiner Klasse, Auswahl, Anordnung und Zeitpunkt des Einsatzes bestimmen kann.
Ein erheblicher Teil der Aufgaben soll lediglich bestimmte Typen charakterisieren, nach denen der Lehrer ohne große Mühe den Erfordernissen in seiner Klasse entsprechend selbst weitere Aufgaben bilden kann.
(4) Zu jedem Stoffgebiet und zu jedem Thema sind **Kontrollaufgaben** bzw. **-fragen** formuliert, häufig geeignete Lehrbuchaufgaben. Damit wird versucht, das am Ende der Behandlung des Stoffgebietes oder des betreffenden Themas zu erreichende Ziel möglichst genau zu kenn-

zeichnen. Es ist dabei zu beachten, daß die Kontrollaufgaben zum Stoffgebiet nicht einfach als Summe der Kontrollaufgaben zu den einzelnen Themen zu betrachten sind. Bei der Behandlung einzelner Themen werden mitunter nur Zwischenziele auf dem Weg zu den umfassenderen Zielen verfolgt, die sich in den Kontrollaufgaben zum Stoff widerspiegeln.
Die Kontrollaufgaben sind in ihrer Zusammenstellung *nicht als Muster für Klassenarbeiten* gedacht, wohl aber können und sollten solche Aufgaben zu Kontrollen verschiedener Form verwendet werden, auch als Hausaufgaben. Des weiteren werden durch die Kontrollaufgaben auch nicht alle Ziele des Lehrplans erfaßt. Ihre Hauptfunktion besteht darin, daß am Grad der Bewältigung solcher Aufgaben durch die Schüler der Lehrer „ablesen" kann, inwieweit vor allem Ziele im Bereich des Wissens und Könnens erreicht wurden.
(5) Zur Steigerung der Anforderungen an die selbständige und schöpferische Arbeit im Prozeß des Eindringens in die Problematik eines Stoffgebiets sollten auch **längerfristige sowie vorbereitende Hausaufgaben** gestellt werden. Dabei sollten auch **Schülervorträge** in die Arbeit einbezogen werden. Auf den Seiten UH 21 und 128f. werden Vorschläge für Schülervorträge in Übersichten angeboten. Dabei ist vermerkt, in welcher Lerneinheit der Vortrag aufgegeben und in welcher Lerneinheit er gehalten werden könnte. In den methodischen Hinweisen wird darauf Bezug genommen.
(6) Für jedes Stoffgebiet ist eine **Stoffverteilung** angegeben. Die dort vermerkten Themen decken sich in Abfolge und Inhalt in der Regel mit den Lerneinheiten des Lehrbuchs. Diese Stoffverteilung ist ebenfalls nur ein möglicher Vorschlag. Sie muß durch den Lehrer in den Zeitablauf des Schuljahres unter Berücksichtigung der Zeit- und Stundenplanung an der eigenen Schule eingeordnet und gegebenenfalls auch inhaltlich ergänzt, abgewandelt oder weiter konkretisiert werden.
(7) **Für jedes Thema** sind **die wesentlichen Ziele** angegeben. Sie kennzeichnen, welcher Zuwachs an Wissen und Können und an Einsichten bei den Schülern erreicht bzw. welche Erkenntnisse erweitert, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten weiter ausgeprägt werden sollen. Auch mit dem Stoff in enger Beziehung stehende Erziehungsziele werden genannt. Allgemeinere Ziele im Bereich der ideologischen Bildung und Erziehung und der Fähigkeitsentwicklung, die nur über einen größeren Zeitraum hinweg erreicht werden können, sind im allgemeinen in den Vorbemerkungen zu den Stoffgebieten und -abschnitten genannt.
(8) Im Anschluß an die Ziele sind **für jedes Thema Schwerpunkte** formuliert, die im Falle mehrerer Stunden auf die einzelnen Stunden aufgeschlüsselt sind.
(9) Die **methodischen Hinweise** sind insgesamt so angelegt, daß sie eine flexible Nutzung erlauben. Sie enthalten keine vollständig dargestellten Stundenabläufe. Sie beziehen sich auf die angegebenen Schwerpunkte, deren Abfolge nicht in jedem Falle notwendigerweise einzuhalten ist. So wird man wohl zu Beginn einer Unterrichtsstunde oder in der ersten Stunde einer Lerneinheit das im Lernprozeß anzustrebende Ziel *formulieren und motivieren*. Die *Sicherung des Ausgangsniveaus* kann aber sowohl vor der Erarbeitung des neuen Stoffes als auch in unmittelbarer Verbindung damit erfolgen. In den Hinweisen wird deshalb z. B. nur gesagt, *was* an Wissen und Können vorausgesetzt werden muß und *wie* man es erneut bereitstellen könnte, aber nicht in jedem Fall, *wann* das im Unterrichtsablauf geschehen sollte. Diese Detailplanung ist vom Lehrer selbst vorzunehmen. Zeitpunkt und Umfang von Hausaufgabenkontrollen, kurzen Leistungskontrollen und dergleichen werden ebenfalls vom Lehrer selbst festgelegt.
Für die *Erarbeitung* sind mitunter logisch aufeinanderfolgende Schritte genannt. Entscheidet man sich für den vorgezeichneten Weg, so sind im allgemeinen auch diese Schritte einzuhalten.
Für die *Festigungsphasen* sind häufig mehrere Möglichkeiten angegeben, aus denen der Lehrer auswählen kann. Die dort genannten Aufgaben können für die auch in der Abiturstufe regelmäßig zu erteilenden *Hausaufgaben* genutzt werden, ohne daß das immer erwähnt wird. Der Lehrer sollte die methodischen Hinweise für die zu behandelnden Themen rechtzeitig lesen, um insbesondere Vorschläge für vorbereitende Hausaufgaben nutzen zu können.

Im Kleindruck eingefügte Bemerkungen beziehen sich meistens auf fachliche Probleme, die jedoch im allgemeinen nicht im Unterricht zu behandeln sind.

(10) Für die **Stoffabschnitte „Übungen und Anwendungen“** findet der Lehrer u. a. Hinweise zur Behandlung bestimmter Aufgabenkomplexe und Aufgabentypen sowie auch einzelner Lehrbuchaufgaben.

2. Zum Mathematikunterricht in Klasse 12

Grundlegende Ziele des Mathematikunterrichts in Klasse 12

Im Mathematikunterricht der Klasse 12 sind drei wesentliche Aufgaben zu bewältigen:

(1) *Fortführung und Abschluß des Analysislehrgangs*

Die Schüler lernen weitere Klassen nichtlinearer Funktionen und deren Differentiation und Integration kennen (LP 50ff.). Zugleich ist das in der Infinitesimalrechnung in Klasse 11 erworbene Wissen und Können zu vertiefen und anzuwenden. Die Schüler sollen nach Abschluß des Analysislehrgangs in der Lage sein,

- Funktionen der behandelten Klassen zu differenzieren und auf Nullstellen, Pole, lokale Extrema und Verhalten im Unendlichen zu untersuchen,
- Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen zu bestimmen und bestimmte Integrale zu berechnen,
- Kenntnisse aus der Infinitesimalrechnung zur Inhaltsberechnung nicht allseitig geradlinig begrenzter Flächen und zum Lösen einfacher Anwendungsaufgaben aus Naturwissenschaft und Technik anzuwenden,
- beim Lösen von Aufgaben Lösungsschritte durch Anwendung behandelter Definitionen und Sätze zu begründen.

(2) *Einführung in die Vektorrechnung und analytische Geometrie*

In einem geschlossenen Lehrgang lernen die Schüler Beispiele für Vektoren und das Rechnen mit Vektoren kennen. Zwar wird der Lehrgang bis hin zur Definition des allgemeinen Vektorraumbegriffes geführt, doch liegt der Schwerpunkt auf dem Kennenlernen eines geeigneten Modells für einen Vektorraum, das die Schüler im weiteren Unterricht zur Lösung von Grundaufgaben der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes verwenden können. Hierbei erfolgt eine Beschränkung auf die analytische Untersuchung von Gerade, Kreis und Kugel (LP 41ff.). Die Schüler sollen nach Abschluß des Stoffgebietes vor allem

- mit Vektoren rechnen,
- Aufgaben, in denen Beziehungen zwischen Geraden oder zwischen Gerade und Kreis in einer Ebene bzw. im Raum auftreten, und
- Anwendungsaufgaben aus Naturwissenschaft und Technik mit Mitteln der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie lösen können.

Auf der Basis einer anschaulichen Behandlung geometrischer Sachverhalte soll dabei das Raumvorstellungsvermögen der Schüler weiterentwickelt werden.

(3) *Gesamtwiederholung zur Vorbereitung auf die Reifeprüfung*

In Klasse 12 sind die Schüler in einem bereits in Klasse 11 einsetzenden, langfristigen Prozeß umfassend auf die Reifeprüfung vorzubereiten und zur Hochschulreife zu führen. Deshalb ist ein Höchstmaß an Selbständigkeit in der Arbeit der Schüler anzustreben. Das Lösen von Aufgaben komplexen Charakters tritt in den Vordergrund. Dabei sollen die

Schüler wesentliche Begriffe, Sätze und Verfahren, die sie im gesamten Mathematiklehrgang kennengelernt haben, wiederholen und anwenden. Das Arbeiten mit mathematischer Literatur, vor allem mit dem Lehrbuch, mit Nachschlagewerken und zusätzlicher Literatur, das Anfertigen von Hausarbeiten (z. B. zu komplexen Aufgaben, für Wiederholungen und Systematisierungen), das Bearbeiten von Aufträgen (im Lehrbuch durch Kreise gekennzeichnet) und das Gestalten von Schülervorträgen sind geeignete Methoden in dieser Klassenstufe. In umfassender Weise wird im Lehrplan auf die Ziele und Aufgaben sowie auf die methodische Gestaltung des Unterrichts in der Abiturstufe orientiert (LP 7 bis 15).

Im Lehrplan (S. 16) wird auf die Möglichkeit verwiesen, die beiden Stoffgebiete in Klasse 12 parallel zueinander zu behandeln.

- Behandelt man die beiden Stoffgebiete *nacheinander*, so hat man den Vorteil geschlossener, konzentrierter Lehrgänge. Es ergibt sich jedoch eine längere Pause vom Ende der Klassenstufe 11 bis zur Wiederaufnahme des Analysislehrganges. Deshalb ist zu empfehlen, das Grundwissen aus der Analysis auch während der Behandlung der Vektorrechnung und analytischen Geometrie ständig zu festigen und zum anderen einen Teil der Stunden, der im Stoffabschnitt 1.6 für Übungen und Anwendungen vorgesehen ist, ans Ende der Behandlung des 2. Stoffgebietes zu verlegen, damit in der unmittelbaren Vorbereitung auf die Reifeprüfung auch hinreichend Zeit für die Festigung des Wissens und Könnens aus der Vektorrechnung und analytischen Geometrie zur Verfügung steht.
- Behandelt man beide Stoffgebiete *teilweise parallel*, so kann der Analysislehrgang ohne längere Unterbrechung wieder aufgenommen werden. Die Festigung des grundlegenden Wissens und Könnens kann rationell betrieben werden. Man sollte bei dieser Variante darauf achten, daß die Behandlung des Stoffabschnitts 2.2 (Logarithmus- und Exponentialfunktion) dennoch möglichst konzentriert erfolgt und daß die Additionstheoreme (Stoffabschnitt 1.4) zur Verfügung stehen, wenn sie in der Analysis benötigt werden (Stoffabschnitt 2.3). Während der Parallelbehandlung sollten dann ca. 2 Std. analytische Geometrie und 3 Std. Analysis wöchentlich betrieben werden (↗ UH 10). Am Ende der Behandlung steht ein größerer Stundenkomplex zur Verfügung, der sich aus den Stoffabschnitten 1.6 und 2.4 ergibt und für Übungen und Anwendungen aus beiden Stoffgebieten und umfassende Wiederholungen genutzt werden kann.

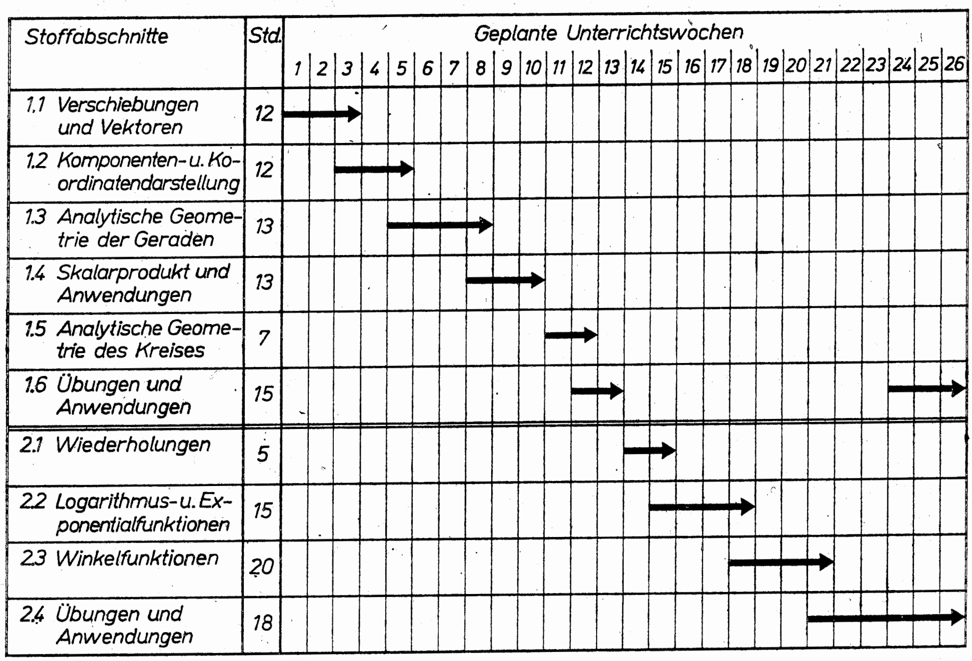
Für beide Varianten wird in der Übersicht zur Jahresstoffverteilung eine Empfehlung gegeben.

Übersicht zur Jahresstoffverteilung

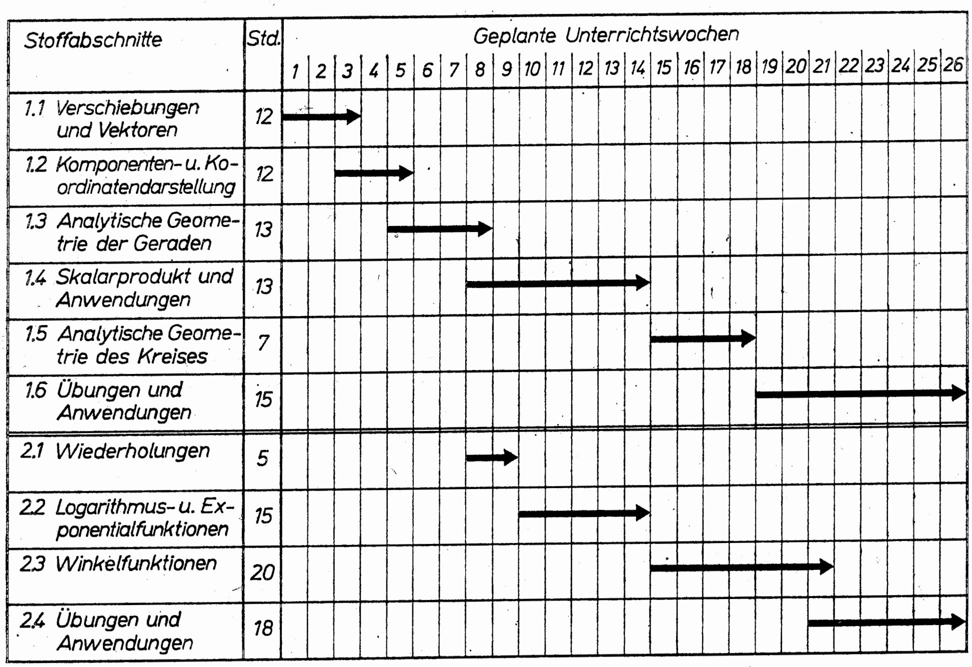
Hinweis: Die folgende Übersicht sollte unter Beachtung der Ferien, des Stundenplanes an der Schule usw. in den jeweiligen konkreten Schuljahresablauf eingeordnet werden. Dazu können zusätzlich Monats- und Wochenangaben eingetragen werden. Eine solche Übersicht kann auch im Fachunterrichtsraum ausgehängt werden.

Jahresstoffverteilung

Variante I: Nacheinanderbehandlung der Stoffgebiete (5 Stunden je Woche)



Variante II: Nebeneinanderbehandlung der Stoffgebiete



Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen

Auch in der Abiturstufe sollten häufig relativ elementare Aufgaben in die Übungen einbezogen werden, wobei eine Verbindung mit komplexen Aufgaben des jeweils zu behandelnden Stoffes anzustreben ist. Zur Nutzung der Aufgaben beachte man die Hinweise, die zum Aufbau und zur Verwendung der Unterrichtshilfen gegeben werden (UH 6).
Im folgenden sind sowohl Aufgaben aus dem Stoff, der bis zum Ende der Klasse 11 behandelt wurde, als auch Aufgaben aus dem Stoff der Klasse 12 erfaßt. Je nachdem, ob die beiden Stoffgebiete in Klasse 12 nacheinander oder teilweise nebeneinander behandelt werden, können die Aufgaben den täglichen Übungen im Rahmen der einzelnen Stoffabschnitte entsprechend zugeordnet werden. Empfohlen wird beim Nacheinander der Behandlung der Stoffgebiete, daß während der Behandlung der Vektorrechnung und analytischen Geometrie Grundaufgaben der Infinitesimalrechnung in die täglichen Übungen einbezogen werden, und beim Behandeln der abschließenden Stoffabschnitte der Analysis ständig einfache Aufgaben der Vektorrechnung und analytischen Geometrie von den Schülern gelöst werden.
Es sollten möglichst viele Aufgaben bei hohem Arbeitstempo im Kopf gelöst werden. Einige Aufgaben können an der Tafel vorgegeben werden. Die Schüler schreiben die Lösung ohne Zwischenrechnung nieder. Andere Aufgaben eignen sich als Hausaufgaben. Man kann auch Komplexe solcher Aufgaben im Klassenraum aushängen und zur selbständigen Festigung dem Schüler empfehlen. In regelmäßigen, relativ kurzen Abständen (z. B. alle zwei Wochen) können verstärkt solche Aufgaben in Übungsstunden einbezogen werden. Die Schüler können sich selbst am Bilden ähnlicher Aufgaben beteiligen.

(1) Rechnen mit Zahlen

1.1 Berechnen Sie!

a) $(+11)^2 - 125 + (-77) - (-5)^3$

b) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot \frac{5}{3}$ **c)** $\left(\frac{35}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2}$

e) $\dfrac{-15{,}3 + 7{,}66 - |-13{,}5|}{\frac{1}{8} - \frac{1}{16}}$ **f)** $\sqrt{\frac{15}{24}} \cdot \sqrt{\frac{9}{25}}$

g) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(+\frac{7}{4}\right) - \left(\frac{25}{81}\right) : \left(-\frac{95}{91}\right)$

1.2 Geben Sie jeweils drei verschiedene rationale Zahlen an, die zwischen den Zahlen

a) 0,456 und 0,457, **b)** $-\frac{1}{5}$ und $-\frac{1}{6}$ liegen!

1.3 Beweisen Sie, daß die Ungleichung $a < \frac{a+b}{2} < b$ für alle rationalen Zahlen a und b mit $a < b$ gilt!

1.4 Ordnen Sie der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

$+1{,}12$; $-\frac{3}{5}$; $+\frac{11}{7}$; $+1{,}1029$; $-\frac{7}{6}$; $-\frac{78}{69}$

1.5 Geben Sie als Dezimalbrüche an!

a) $\frac{3}{15}$ **b)** $\frac{3}{25}$ **c)** $\frac{1}{7}$ **d)** $\frac{7}{12}$

1.6 Ermitteln Sie das k. g. V. von

a) 25; 35; 75, b) 17; 18; 25, c) 9; 15; 21; 25!

1.7 Zerlegen Sie in Primfaktoren!

a) 125 b) 190 c) 1250 d) 863

1.8 Berechnen Sie!

a) $\sqrt{25600}$ b) $\sqrt[3]{27}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt{0{,}09}$

(2) Umformen von Termen mit Variablen

2.1 Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $z - (7z + 8y) - (7y - 2z + 3)$

b) $7r\left[5rs - 2r\left(\frac{1}{2}r - 3r^2s + 5s\right) - 12rs^2\right]$

c) $\frac{1}{3}a + \left(\frac{4}{9}a - \frac{2}{5}b\right) - \left(\frac{5}{27}a + \frac{4}{15}b\right)$

2.2 Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus!

a) $15r^2s^5 - 3r^2s + 45rs^2 - 75r^3s^2$

b) $\frac{5}{6}x^4y^2z^3 - 0{,}75x^2yz^2 + 17xyz^4$

2.3 Multiplizieren Sie aus!

a) $(0{,}65x - 2y^2)\left(13x^4 - \frac{5}{3}y^3\right)$ b) $(2d - 7e^2 + 5f^3)\left(\frac{3}{d^2} + \frac{1}{e} - \frac{7}{f^2}\right)$

c) $(0{,}7b - bc)^2 - (13a + 5b)(13a - 5b) + \left(7c + \frac{1}{3}d\right)^2$

2.4 Schreiben Sie als Produkte!

a) $x^2 + 4x + 4$ b) $\frac{9}{49}s^2 - 0{,}16t^2$ c) $r^2 + 14r + 49$

2.5 Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $(r^4)^5$ b) $(0{,}2m^2n^4)^3$ c) $(xy^2z^3)^{-1}$

d) $\frac{x^7y^5z^3}{x^5y^4z^5}$ e) $\left(\frac{5}{4}x^2 - 3x^{-1}\right)\cdot 0{,}2x^3$

f) $\sqrt[3]{x^4}$ g) $x\sqrt{x^5}$ h) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ i) $\frac{3}{1-\sqrt{x}}$

k) $\sqrt{\frac{16a^2b^3}{25c^4d^6}}$ l) $\sqrt[3]{\frac{27x^5y^4}{64z^9}}$ m) $\sqrt[3]{625m^6}$

2.6 Bestimmen Sie den Wert der folgenden Terme!

a) $a^2 + b^3$ b) $|a| + |b|$ c) $a(b + c)$

für $a = 0{,}7$; $b = +\frac{3}{5}$; $c = -1{,}6$

d) $|a + b|$ e) $|a - b|$ f) $|a \cdot b|$

für $a = 2{,}3$ und $b = -3{,}8$

2.7 Formen Sie die folgenden Terme um, und bestimmen Sie für $n = 4$ den Wert dieser Terme!

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$ b) $\frac{n!}{(n+2)!}$ c) $\frac{(a-2)!}{(n+1)!}$ d) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

(3) Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen

3.1 Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen ($x \in P$)!

a) $6x = 0$ b) $2^x = \frac{1}{16}$ c) $\frac{x+5}{x-2} = 7 \quad (x \neq 2)$

d) $3^x - 5 = 76$ e) $3x^2 - 12x = 15$ f) $\log_2 x = -3$

g) $x^2 - 4 < 0$ h) $|x - 2| < \frac{1}{10}$

i) $x^3 - x = 0$ k) $\cos 3x = -1$

l) $x^2 = x$ m) $x^2 < x$ n) $\frac{1-r}{2} < 4$

o) $3a + 8 < 12 + 2a$ p) $4x + 5 < 13$ q) $\frac{2-x}{10} > 2(x-2)$

3.2 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme!

a) $3x + y = 9$
$\underline{2x - y = -1}$

b) $22a - 4 - z = 0$
$\underline{33a + 3 - 2z = 0}$

c) $x + y = 2$
$\underline{x - y = 1}$

d) $3a + 4b - 6 = 0$
$\underline{27a + 36b - 54 = 0}$

(4) Untersuchen von Funktionen

4.1 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen! Geben Sie den maximalen Definitions- und Wertebereich der Funktionen im Bereich der reellen Zahlen an!

a) $f(x) = 2x + 4$ b) $f(x) = x^{-1}$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

d) $f(x) = 3\sqrt{x} + 0{,}5$ e) $f(x) = x^2 - 4x + 4{,}75$

f) $f(x) = 3 \cdot \cos 2x$ g) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 1$ h) $f(x) = (\lg x) + 1$

i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen der in a) und b) gegebenen Funktionen!

4.2 Geben Sie Intervalle an, in denen die folgenden Funktionen monoton fallen bzw. monoton wachsen!

a) $f(x) = x^2 + x - 6$ b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin 3x$ c) $f(x) = 3^{-x}$

d) $f(x) = |x| - 2$ e) $f(x) = 1{,}5 \cdot \cot x$ f) $f(x) = |\sin x|$

4.3 Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen!

a) $f(x) = x^2 - x - 2$ b) $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 1$

c) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$ d) $f(x) = 2^x - 8$

e) $f(x) = |x| - 3$ f) $f(x) = \cos 4x$

(5) Winkelfunktionen

5.1 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen!

a) $f(x) = \sin 2x$ **b)** $f(x) = \sin 3x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x$

d) $f(x) = \sin \frac{1}{2} x$ **e)** $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin 2x$ **f)** $f(x) = \cos x$

g) $f(x) = \tan x$ **h)** $f(x) = \cot x$ **i)** $f(x) = \tan 2x$

5.2 Umrechnung Gradmaß/Bogenmaß (Tafel oder Rechenstab festlegen)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
x (in Grad)			75	130		178	
x (in Radiant)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{8}$			0,3491		3,3859

5.3 Aufsuchen von Winkelfunktionswerten (Tafel bzw. Rechenstab festlegen)

a) $\sin 61{,}3°$
$\cos 49{,}6°$
$\tan 72{,}5°$
$\cot 9{,}4°$

b) $\sin 1{,}3$
$\cos 0{,}35$
$\tan 0{,}96$
$\cot 1$

c) $\sin(-82{,}5°)$
$\cos(-43{,}6°)$
$\tan(-26{,}1°)$
$\cot(-55{,}5°)$

d) $\sin \frac{\pi}{3}$
$\cos \frac{\pi}{8}$
$\tan \frac{3\pi}{5}$
$\cot \frac{\pi}{6}$

e) $\sin 135{,}2°$
$\cos 172{,}6°$
$\tan 100{,}3°$
$\cot 145{,}1°$

f) $\sin 235{,}2°$
$\cos 318{,}1°$
$\tan 293{,}8°$
$\cot 333{,}3°$

5.4 Ermitteln Sie alle Lösungen x ($x \in P$), für die folgende Gleichungen gelten!

a) $\sin x = 0{,}9150$ **b)** $\cos x = 0{,}3939$ **c)** $\tan x = 2{,}006$

d) $\cot x = 0{,}6273$ **e)** $\sin x = -0{,}3649$ **f)** $\cos x = -0{,}9813$

g) $\tan x = -0{,}5206$ **h)** $\cot x = -4{,}050$

(6) Aufgaben aus der Geometrie

6.1 Ermitteln Sie das Bild eines Dreiecks ABC bei einer Verschiebung, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{AD}$ bestimmt ist, wobei D der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ ist!

6.2 Ermitteln Sie das Bild eines Parallelogramms $ABCD$ bei einer Drehung um A um den Winkel $\alpha = 90°$!

6.3 Ermitteln Sie das Bild eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ bei einer Spiegelung an der durch die Diagonale $\overline{BD}$ bestimmten Geraden!

6.4 Ermitteln Sie das Bild eines Kreises mit dem Radius r bei einer zentrischen Streckung mit dem außerhalb des Kreises gelegenen Streckungszentrum Z und dem Streckungsfaktor $k = 3$!
Vergleichen Sie die Umfänge und Flächeninhalte des Original- und Bildkreises!

6.5 Berechnen Sie den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Längen der Katheten $a = 5{,}0$ cm, $b = 12{,}0$ cm!

6.6 Bestimmen Sie die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen 5-Eck (6-Eck, n-Eck)!

6.7 Berechnen Sie das Volumen einer Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck (Seite $a = 2$) als Grundfläche und der Höhe $h = 2 \cdot \sqrt{3}$!

6.8 In einem Rhombus $ABCD$ sei ein Viereck $EFGH$ eingezeichnet, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten des Rhombus sind. Vergleichen Sie die Flächeninhalte des Rhombus $ABCD$ und des Vierecks $EFGH$! Beweisen Sie Ihre Vermutung!

6.9 Konstruieren Sie zu einem Dreieck ABC den Inkreis und den Umkreis!

6.10 Bestimmen Sie die Länge einer Raumdiagonalen eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c!

6.11 Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} = 12{,}0$ cm, $\overline{AD} = 5{,}0$ cm und $\sphericalangle\, DAB = 50°$. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AC}$ und die Größe des Winkels $\sphericalangle\, DAC$!

(7) Beweisaufgaben (vollständige Induktion)

7.1 Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Summenformeln!

a) $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

7.2 Für welche n sind die folgenden Ungleichungen richtig?

a) $2^n > 2n$ **b)** $2^n > 2n + 1$ **c)** $2^n > n^2$

(8) Aufgaben zur Kombinatorik

8.1 Permutationen

a) Berechnen Sie die Anzahl der verschiedenen neunstelligen Zahlen, deren Ziffern man aus den Grundziffern 1, ..., 9 bilden kann, wenn in keiner dieser Ziffern eine Grundziffer mehr als einmal auftritt!

b) Berechnen Sie die Anzahl der Permutationen von 8 Elementen ohne Wiederholung! Berechnen Sie auch P_7, P_{10}!

c) Wie lautet die 26. Permutation der Elemente a, b, c, d, e in lexikographischer Anordnung?

8.2 Variationen

a) Berechnen Sie die Anzahl der Variationen von 6 Elementen zur 4. Klasse ohne Wiederholung! Berechnen Sie auch V_5^3, V_{10}^6!

b) Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen gibt es, in deren Ziffern die gleiche Grundziffer nicht mehrfach auftritt? (Hinweis: Die mit 0 beginnenden Ziffern sind nicht fünfstellig!)

8.3 Kombinationen

a) Berechnen Sie die Anzahl der Kombinationen von 5 Elementen zur 3. Klasse ohne Wiederholung! Berechnen Sie auch C_{10}^3, C_8^4, C_3^5 (n. l.)!

b) Berechnen Sie $\binom{6}{2}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{4}{2}$!

(9) Grenzwerte von Zahlenfolgen und Funktionen

9.1 Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der nachstehenden Folgen! Untersuchen Sie diese Folgen auf Monotonie und Konvergenz!

a) $\left(\frac{k}{3}\right)$ b) $\left(\frac{2k}{5}\right)$ c) $\left(\frac{7}{3k}\right)$ d) $\left(\frac{5k+3}{k}\right)$ e) $\left(\frac{1}{2^k}\right)$

f) $\left(\frac{3k+3}{k+1}\right)$ g) $\left(\frac{4k+3}{(k+1)^2}\right)$ h) $\left((-1)^k \cdot \frac{2}{k^2}\right)$ i) $\left((-1)^{k+1} \cdot \frac{2k+1}{k}\right)$

k) Bilden Sie zu den Folgen a) und e) die Partialsummenfolgen!

9.2 Ermitteln Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen!

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2x^2 - 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x^2 - 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 5x}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 + 2)$ **e)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^2 + 3}$

(10) Differentiation von Funktionen

10.1 Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung nachstehender Funktionen!

a) $f(x) = x^3 - 2x + 5$ **b)** $f(x) = (x^2 + 3x)(6x - 3)$

c) $f(x) = x^{-2} + \sqrt{x}$ **d)** $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x - 9}$

10.2 Welchen Wert hat die 1. Ableitung der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen?

a) $f(x) = 3x^2; \quad x_0 = 4$ **b)** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2; \quad x_0 = -1$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - 5}; \quad x_0 = 10$ **d)** $f(x) = (3x^2 + 1)^4; \quad x_0 = 2$

10.3 Welchen Anstieg haben die Tangenten an die Graphen folgender Funktionen in den angegebenen Punkten?

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1; \quad P_0(-2; y_0)$ **b)** $f(x) = x^3 + 5; \quad P_0\left(\frac{1}{2}; y_0\right)$

c) $f(x) = x^2 - 5x - 14; \quad P_1(-2; y_1)$ und $P_2(x_2; 0)$

d) Ermitteln Sie die Tangentengleichung bezüglich der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ im Punkt $P_0(0; y_0)$!

(11) Integration von Funktionen

11.1 Geben Sie je zwei Stammfunktionen zu folgenden Funktionen an!

a) $f(x) = 3x - 7$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 1$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ **e)** $f(x) = 2\sqrt{x}$

f) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x}$ **g)** $f(x) = \sqrt{2x - 7}$

11.2 Berechnen Sie die folgenden Integrale!

a) $\int\limits_1^3 x^2 \, dx$ **b)** $\int\limits_3^1 x^2 \, dx$ **c)** $\int\limits_0^7 (x^2 - 2x + 3) \, dx$

d) $\int\limits_0^5 \sqrt{2x + 3} \, dx$ **e)** $2\int\limits_1^2 \sqrt{x} \, dx$ **f)** $\int\limits_{13}^{13} (x - 7)^7 \, dx$

g) $-\int\limits_{-1}^{0} 7(x-2)^2\,dx$ h) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4}{x^3}\,dx$!

11.3 Ermitteln Sie K für **a)** $\int\limits_{1}^{K} 3x\,dx = 12$, **b)** $\int\limits_{0}^{3} Kx^2\,dx = 36$!

(12) Sätze über Zahlenfolgen und Funktionen

12.1 Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.
c) Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
d) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.
e) Jede stetige Funktion ist integrierbar.
Geben Sie eine Begründung, wenn die Aussage wahr ist!
Geben Sie ein Gegenbeispiel an, wenn die Aussage falsch ist!

(13) Vektorrechnung und analytische Geometrie

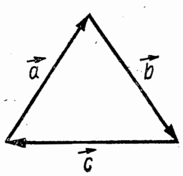
13.1 Veranschaulichen Sie auf Kästchenpapier je zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, für die folgendes gilt, durch Pfeile!

a) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ und $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$
c) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$ und $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
d) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ und $|\vec{a}| < |\vec{b}|$
e) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ und $|\vec{a}| > |\vec{b}|$
f) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ und $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$
g) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
h) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ und $|\vec{a}| \geqq |\vec{b}|$
i) $\vec{a} - 2\vec{b} \neq \vec{o}$
k) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$
l) $3\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$
m) $\vec{a} = 5\vec{b}$
n) $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{a}$
o) $\vec{a} \neq \vec{b}$
p) $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$
q) $\vec{a} \cdot \vec{b} = o$ und $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}\,|\vec{a}|$

13.2 Gegeben ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S. Wieviel Vektoren des Raumes werden durch die Kanten der Pyramide bestimmt?

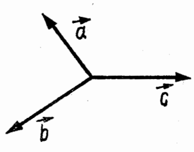
13.3 Bestimmen von Summen, Differenzen und Vielfachen von Vektoren[1]

a) Bild 1



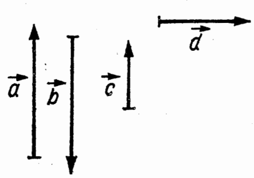
Gesucht: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

b) Bild 2



Gesucht: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

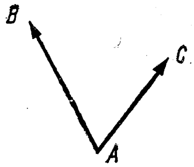
c) Bild 3



Gesucht: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

[1] Es ist zweckmäßig, die Figuren in den Bildern 1 bis 6 auf kariertem Papier vorzugeben, wobei die Anfangs- und Endpunkte der Vektoren auf Gitterpunkten liegen. (Vgl. auch mit den Bildern 7 und 8)

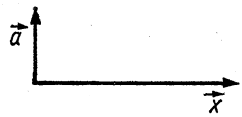
d) Bild 4



Gesucht: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

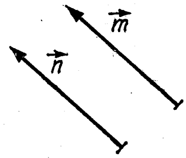
e) Bild 5



Gesucht: $2\vec{a} + \vec{x}$

$\vec{a} - \vec{x}$

f) Bild 6



Gesucht: $\vec{n} - \vec{m}$

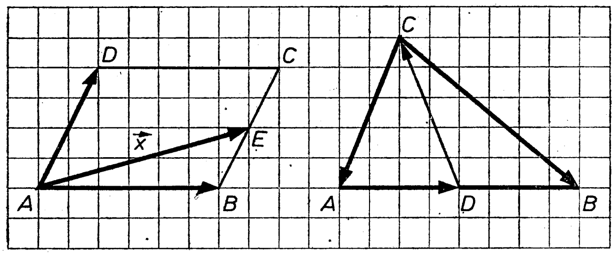
$2\vec{n} - \vec{m}$

g) Bild 7

Drücken Sie $\vec{x}$ mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus!

h) Bild 8 $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$

Drücken Sie $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD}$ mit Hilfe von $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ aus!



Bilder 7 und 8

13.4 Gegeben ist ein Drachenviereck $ABCD$ mit seinen Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ und dem einbeschriebenen Seitenmittenviereck $EFGH$ (↗ Bild 9)

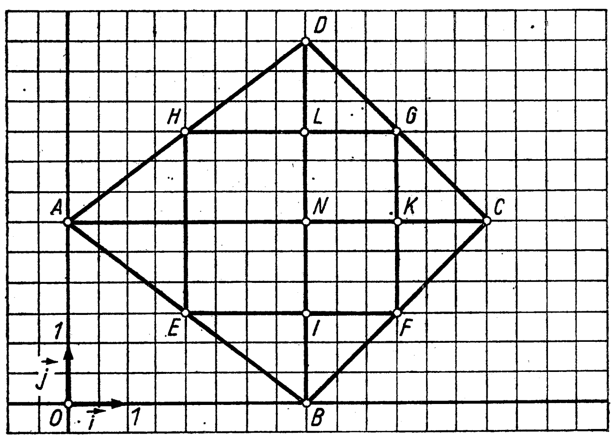


Bild 9

a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren der Punkte A bis N!

b) Berechnen Sie die Skalarprodukte der Vektoren
$\overrightarrow{BF}$ und $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{HN}$, $\overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{IB}$!

c) Ermitteln Sie die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NF}$!

d) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren
$\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AK}$ und $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AH}$ und $\overrightarrow{EO}$!

e) Notieren Sie Gleichungen der Geraden, die durch
$\overrightarrow{HN}$ und K, N und L, A und $\overrightarrow{EN}$ bestimmt sind!

f) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden g und h, die durch folgende Vektoren und Punkte bestimmt sind!

g: $\overrightarrow{HI}$ und B	g: $\overrightarrow{BC}$ und N	g: $\overrightarrow{EN}$ und A
h: $\overrightarrow{OB}$ und A	h: $\overrightarrow{HK}$ und D	h: $\overrightarrow{GK}$ und I

Stoffgebiet 1
Vektorrechnung und analytische Geometrie

Vorbemerkungen

Die hauptsächlichen Zielsetzungen dieses Stoffgebietes sind im Lehrplan ausführlich dargestellt (LP 41). In Stichworten sind dies:
- eine Einführung in die Vektorrechnung,
- Anwendungen der Vektorrechnung im Rahmen der analytischen Geometrie und naturwissenschaftlich-technischer Fragestellungen,
- die Festigung des geometrischen Wissens und Könnens insgesamt.

In Verbindung mit der ersten Zielsetzung steht die Einführung des Vektorbegriffes. Auf die historischen Wurzeln der Vektorrechnung wird im einleitenden Lehrbuchtext zum Stoffgebiet hingewiesen. In der Mathematik versteht man heute unter einem Vektor ein Element eines Vektorraumes, also einer Struktur, die in bekannter Weise axiomatisch bestimmt wird. Denkbar wäre, auch im Unterricht die axiomatische Definition des Vektorraums an den Anfang zu stellen und dann solche Vektorräume näher zu untersuchen, die man später (z. B. in der analytischen Geometrie) verwenden möchte. Dann müßten die Schüler jedoch vorher anhand einfacher Beispiele an strukturelle Betrachtungen und axiomatisches Arbeiten herangeführt worden sein, was im Lehrplan nicht vorgesehen ist. Im Unterricht der Klasse 12 werden deshalb in Anlehnung an die historischen Wurzeln der Vektorrechnung die Schüler mit einem geeigneten Modell für einen Vektorraum vertraut gemacht, das für das Lösen von Aufgaben der analytischen Geometrie verwendet werden kann. Man knüpft an Kenntnisse über Verschiebungen einer Ebene an, überträgt sie auf den dreidimensionalen Raum und benutzt für alle Betrachtungen die anschaulichen Darstellungen durch Pfeile. Diese Pfeile – genauer: *die Klassen* gleich langer und gleichgerichteter Pfeile – werden Vektoren genannt. Erst wenn die Schüler mit Vektoren im gewählten Modell etwas vertraut sind, lernen sie die Definition des Vektorraumes und einige weitere Modelle zur Information kennen. Obwohl die Gefahr besteht, daß durch die Verwendung der Pfeildarstellung sich beim Schüler mit dem Vektorbegriff Eigenschaften verbinden, die keineswegs charakteristisch sind (wie z. B. die Gerichtetheit), erscheint das gewählte Vorgehen berechtigt, da die Schüler vorrangig die Anwendung im Bereich der Geometrie und Mechanik kennenlernen.
Der methodischen Grundlinie folgend ist im gesamten Stoffgebiet größter Wert auf anschauliches Vorgehen zu legen.

Schülervorträge

Die folgende Übersicht enthält Empfehlungen für Schülervorträge, die sich auf das Stoffgebiet „Vektorrechnung und analytische Geometrie“ erstrecken. Die Auswahl ist unter Berücksichtigung der jeweiligen Klassensituation zu treffen.

Thema	Aufgabenstellung in	Vortrag in	Bemerkungen/Literaturhinweise
Zusammenstellen der Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen und zentrischen Streckungen einer Ebene	LE 1/2	LE 1/2	Lit.: Mathematik in Übersichten, S. 144 bis 149 und 215 bis 217; Konsultation erforderlich; Hinweis auf die notwendige Hervorhebung der Eigenschaften der Verschiebungen anhand von Beispielen
Zusammenstellen der Regeln für das Addieren und Subtrahieren von Vektoren und das Multiplizieren eines Vektors mit einer reellen Zahl	LE 7/8	LE 13	Hinweis auf LB 17 bis 28; an Beispielen erläutern lassen; ggf. einige Regeln beweisen lassen (dient der Vorbereitung der allgemeinen Vektorraumdefinition)
Herleitung der (parameterfreien) Zweipunktegleichung einer Geraden	LE 16	LE 16	Hinweis: Die Gleichung unter Verwendung der erarbeiteten Schrittfolge in Analogie zur Herleitung der Punktrichtungsgleichung erarbeiten
Lösen von Systemen linearer Gleichungen (rechnerisch und graphisch)	LE 14	LE 17	Lit.: Mathematik in Übersichten, S. 74 bis 80 (dient der Sicherung des Ausgangsniveaus zur Behandlung der Lagebeziehungen zwischen Geraden einer Ebene)
Systematisieren der Lagebeziehungen zwischen Geraden einer Ebene bzw. des Raumes	LE 18	LE 19	Hinweis auf LB 73 bis 85 (vor allem LB 85)
Erarbeitung der Bedingungen, unter denen für das Skalarprodukt gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ bzw. $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ bzw. $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$	LE 20	LE 20	Hinweis auf LB 89
Definition des Skalarproduktes, Eigenschaften, Anwendungen	LE 20	LE 24	Hinweis auf LB 99/100
Zusammenfassung zu den Gleichungen für Kreis und Kugel; Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade	LE 27	LE 28	Hinweis auf LB 106 bis 116
Vier weitere Vorschläge für Schülervorträge werden zum Stoffabschnitt „1.6. Übungen und Anwendungen“ empfohlen.			

Kontrollaufgaben

Das im Stoffgebiet 1 anzustrebende Niveau im Lösen von Aufgaben wird im folgenden durch einige Kontrollaufgaben gekennzeichnet. Die Schüler sollen in die Lage versetzt werden, diese Aufgaben selbständig zu lösen.

1. LB 122: Nr. 18
2. LB 124: Nr. 40
3. LB 121: Nr. 12c
4. LB 121: Nr. 15
5. LB 124: Nr. 38
6. LB 124: Nr. 36
7. LB 123: Nr. 31

8. Bei einem gemeinsamen Manöver der Streitkräfte der Warschauer Vertragsstaaten ortet eine Radarstation der Küstenüberwachung ein Schiff nacheinander in den Punkten $P_1(30;12;0)$ und $P_2(22;8;0)$. Der Kurs des Schiffes verlaufe geradlinig. Zur Bekämpfung des Schiffes wird von einem Flugzeug aus im Punkt P_3 (10; 7; 3) eine Luft-Boden-Rakete abgeschossen. Die Flugbahn der Rakete wird als geradlinig angenommen. Richtungsvektor dieser Flugbahn ist $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. (Koordinatenangaben in km)[1]
a) Ermitteln Sie je eine Parametergleichung für den Schiffskurs und für die Flugbahn der Rakete!
b) Das Schiff wird von der Rakete im Punkt S getroffen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!
c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Bahn der Rakete und dem Kurs des Schiffes!
d) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hat die Rakete, wenn ihre Flugzeit vom Abschußpunkt bis zum Treffpunkt 7 Sekunden beträgt?

9. In der xy-Ebene ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(2; 3)$ gegeben, der durch den Punkt $P_1(5; 7)$ geht.
a) Berechnen Sie den Radius, und stellen Sie die Gleichung des Kreises auf!
b) Der Kreis schneidet den positiven Teil der x-Achse im Punkt $P_0(x_0; y_0)$. Berechnen Sie x_0!
c) Weisen Sie nach, daß die in P_0 und P_1 an den Kreis gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen!

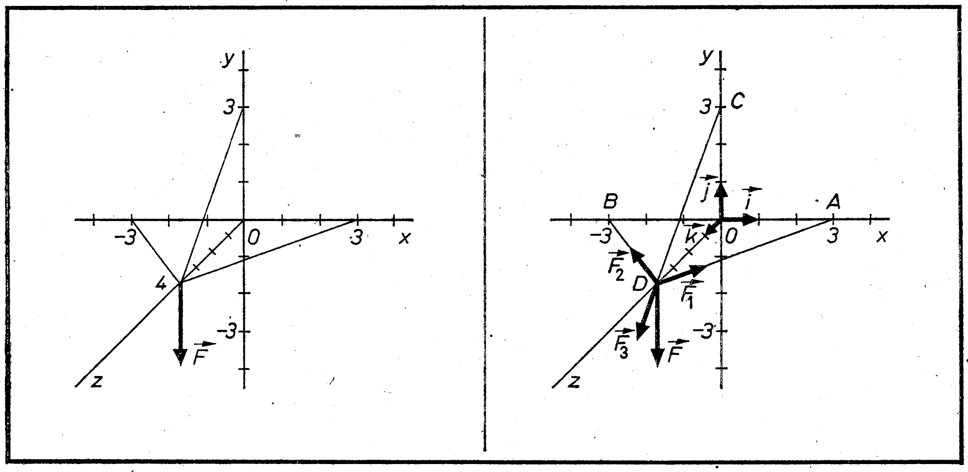
10. Die Grundfläche $ABCD$ einer geraden Pyramide mit der Spitze S ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = \overline{CD} = 8{,}0$ cm, $\overline{BC} = \overline{AD} = 6{,}0$ cm. Die Höhe der Pyramide beträgt 10,0 cm.
a) Der Mittelpunkt M der Seitenkante $\overline{CS}$ wird mit dem Eckpunkt A durch die Strecke s_1 verbunden. Der Mittelpunkt N der Grundkante $\overline{AB}$ wird mit dem Mittelpunkt P von $\overline{DS}$ durch s_2 verbunden. Weisen Sie nach, daß diese beiden Strecken einander schneiden! Wie hoch liegt der Schnittpunkt Q über der Grundfläche? Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Strecken!
b) Untersuchen Sie, ob auch die Strecke s_3, die P mit dem Mittelpunkt R der Grundkante $\overline{BC}$ verbindet, die Strecke s_1 schneidet!
c) Die Gerade, die durch S und Q geht, schneidet die Grundfläche der Pyramide in E. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{SE}$!
d) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle NPR$!
e) Auf der Achse der Pyramide liegt 1,0 cm über der Grundfläche ein Punkt T. Wie weit ist ein Punkt V auf $\overline{AB}$ von A entfernt, wenn $\sphericalangle ATV = 90°$ gelten soll?

[1] Hier wie im Lehrbuch „Mathematik, Klasse 12" (Titel-Nr. 00 12 54) mußte aus technischen Gründen auf die in dieser Schriftart vorgesehenen Typen mit übergesetztem Pfeil zurückgegriffen werden, wobei besonders bei den Buchstaben i und j die Pfeile sehr kurz ausfallen und die Punkte über i und j entfallen.

11. Flugzeugtriebwerke werden an mehreren Punkten aufgehängt. Die Aufhängevorrichtung eines Punktes, die aus drei am Rumpf befestigten Stäben besteht, wird mit einer Gewichtskraft von 1000 N belastet. Welche Druck- bzw. Zugkräfte wirken längs der Stäbe?

a) Zeichnen Sie in die Skizze (↗ Bild 10) die Zerlegung der Gewichtskraft in ihre drei Komponenten ein!

b) Lösen Sie die Aufgabe rechnerisch (Lösung ↗ unten)!



Bilder 10 und 11

Es gilt $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{F}$. (*) (↗ Bild 11)

Wegen $\vec{F_1} \parallel \vec{DA}$ ist $\vec{F_1} = \lambda \vec{DA}$ und analog $\vec{F_2} = \mu \vec{DB}$, $\vec{F_3} = \nu \vec{DC}$.

Setzt man hierin

$$\vec{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und analog } \vec{DB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ein, berücksichtigt man ferner $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix}$, so ergibt (*)

$$\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige skalare Gleichungssystem ergibt

$L = \left\{\left[\frac{500}{3}; \frac{500}{3}; -\frac{1000}{3}\right]\right\}$ und damit für die drei Stabkräfte

$\vec{F_1} = \frac{500}{3}(3\vec{i} - 4\vec{k})$; $|\vec{F_1}| = \frac{2500}{3}$ N, $\vec{F_2} = \frac{500}{3}(-3\vec{i} - 4\vec{k})$; $|\vec{F_2}| = \frac{2500}{3}$ N,

$\vec{F_3} = -\frac{1000}{3}(3\vec{j} - 4\vec{k})$; $|\vec{F_3}| = \frac{5000}{3}$ N.

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 1.1.	Verschiebungen und Vektoren		12 Stunden
1/2 Verschiebungen einer Ebene – Vektoren	2	– Verschiebung einer Ebene – Beschreibung von Verschiebungen durch Mengen geordneter Paare [Originalpunkt; Bildpunkt] und durch Mengen gerichteter Strecken (zwischen Original- u. ihren Bildpunkten bei der Verschiebung) – Verschiebungspfeil; Verschiebungsweite; Verschiebungsrichtung – Eigenschaften von Verschiebungen	– Vektor (Einführung) – Bezeichnungen für Vektoren – gleichgerichtete und entgegengesetzt gerichtete Vektoren – Parallelität von Vektoren – Betrag eines Vektors
3 Vektoren im Raum	1	– Kanten, Flächen- und Raumdiagonalen eines Quaders und anderer ebenflächig begrenzter Körper – Parallelität von Strecken im Raum	– Verschiebungen eines dreidimensionalen Raumes – Vektoren im Raum (Übertragung der für Vektoren einer Ebene getroffenen Festlegungen bezüglich Richtung, Parallelität und Betrag auf Vektoren im Raum)
4 Addition von Vektoren	2	– Nacheinanderausführung von Verschiebungen einer Ebene – Satz: Die Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen ist wieder eine Verschiebung – Addition von Kräften, Gegenkraft	– Nacheinanderausführung von Verschiebungen im Raum – Addition von Vektoren – Summe von Vektoren – Rechengesetze für die Addition von Vektoren – Nullvektor; zum Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzter Vektor $-\vec{a}$ – Addieren von Vektoren (konstruktiv und rechnerisch)
5 Subtraktion von Vektoren	2	– Differenz zweier reeller Zahlen – Der zum Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzte Vektor $-\vec{a}$ – Äquivalente Umformungen von Gleichungen für reelle Zahlen	– Definition der Differenz zweier Vektoren – Regeln für die Subtraktion von Vektoren – Beweise für einige Regeln – Subtrahieren von Vektoren und Umformen von Termen mit Vektoren durch Anwenden der Rechenregeln

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
6 Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl	2	– Regeln für das Multiplizieren reeller Zahlen – Addieren gleichgerichteter und entgegengesetzt gerichteter Vektoren – Vervielfachen von Kräften – Nacheinanderausführen von Verschiebungen – Strahlensätze	– Definition des Produktes eines Vektors mit einer reellen Zahl – Rechenregeln für das Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen – Beweise für einige Regeln – Lösung der Vektorgleichungen $r \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und $x \cdot \vec{a} = \vec{b}$ – Umformen von Termen mit Vektoren durch Anwenden der Rechenregeln
7/8 Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie, Physik und Technik	3	– Dreieck, Trapez, Parallelogramm – Quader, Pyramide – Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften und Geschwindigkeiten – Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck; Sinussatz; Kosinussatz	– Beweise für geometrische Aussagen über ebene oder räumliche Figuren – Aufgaben aus Physik und Technik, in denen Beziehungen zwischen Kräften oder Geschwindigkeiten auftreten
Stoffabschnitt 1.2.		Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren	12 Stunden
9 Komponenten- und Koordinatendarstellung der Vektoren einer Ebene	3	– Rechtwinkliges Koordinatensystem – Darstellung von Punkten im rechtwinkligen Koordinatensystem – Koordinaten eines Punktes – Summe zweier Vektoren – Betrag eines Vektors	– Linearkombination zweier nicht paralleler Vektoren – Basis der Menge der Vektoren einer Ebene – Satz über die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors bezüglich einer Basis – Komponenten und Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis – Einheitsvektor – Orthonormierte Basis $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ – Kartesisches Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ – Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$
10 Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren im Raum	2	– Vektoren im Raum – Schrägriß – Kanten, Seiten und Raumdiagonalen eines Quaders	– Übertragung der für die Ebene eingeführten Begriffe und Bezeichnungen für die Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren auf den Raum – Komplanare und nichtkomplanare Vektoren

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
11 Abstand zweier Punkte; Betrag eines Vektors	2	– Betrag eines Vektors – Abstand zweier Punkte – Länge einer Strecke – Satz des PYTHAGORAS – Dreieck, Parallelogramm – Quadrieren; Quadratwurzelziehen	– Beziehungen zwischen dem Abstand zweier Punkte und den Koordinaten ihrer Ortsvektoren in der Ebene und im Raum – Beziehungen zwischen dem Betrag eines Vektors und seinen Koordinaten bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
12 Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes und dem Betrag seines Ortsvektors; der Winkel zwischen Vektoren	3	– Winkelfunktionen – Bestimmen von Winkelfunktionswerten bzw. Winkeln zu vorgegebenen Funktionswerten – Winkelmaße – Beziehungen zwischen Winkelfunktionen – Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe von Winkelfunktionen – Orientierter und nicht orientierter Winkel – Geographische Koordinaten	– Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes und dem Betrag seines Ortsvektors in einer Ebene und im Raum – Orientierte und nicht orientierte Winkel zwischen zwei Vektoren – Zusammenstellung der erarbeiteten Beziehungen und Vergleich bezüglich Ebene und Raum
13 Vektorräume und Vektoren	2	– Regeln für das Rechnen mit Vektoren – Geordnetes Paar reeller Zahlen – Stetige Funktion – Differenzierbare Funktion – Konvergente Zahlenfolge	– Definition der Begriffe „Vektorraum“ und „Vektor“ – Beispiele für Vektorräume (mit Nachweis) und Gegenbeispiele
Stoffabschnitt 1.3.		Analytische Geometrie der Geraden	13 Stunden
14 Parametergleichungen einer Geraden	2	– Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl – Addition und Subtraktion von Vektoren – Komponentendarstellung von Vektoren (dazu auch verkürzte Schreibweisen, z. B. Spaltenschreibweise)	– Zwei Arten von Parametergleichungen der Geraden: 1. vektorielle Punktrichtungsgleichung; 2. vektorielle Zweipunktegleichung – Aufstellen von Parametergleichungen
15 Parametergleichungen für Strahl und Strecke	1	– Parametergleichungen von Geraden	– Beschreibung von Teilen von Geraden (Punkte, Strecken, Strahlen) durch Beschränkung des Parameters
16 Gleichungen für Geraden einer Ebene	3	– Parametergleichungen von Geraden – Gleichungssysteme mit zwei Variablen	– Parameterfreie Gleichungen von Geraden in einer Ebene; Herleiten der Punktrichtungsgleichung, der Zwei-

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
			punktegleichung und der Normalform der Geradengleichung – Umformen von Geradengleichungen – Beziehungen zwischen den Geradengleichungen
17 Lagebeziehungen von Geraden in einer Ebene und Schnittpunktsberechnungen	2	– Lineare Funktion $y = mx + n$ – Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen – Graphisches Darstellen der Lösungsmenge des Gleichungssystems durch Geraden – Beziehung zwischen der Lösungsmenge des Gleichungssystems und der Lage der Geraden – Parametergleichungen und parameterfreie Geradengleichungen	– Ablesen der Lagebeziehung zweier Geraden aus deren Gleichungen – Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden
18 Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum	2	– Zeichnerische Darstellung von Vektoren im Koordinatensystem – Parametergleichungen von Geraden	– Lagebeziehungen von Geraden im Raum (g schneidet h; g windschief zu h; $g \parallel h$; $g = h$) – Rechnerische Ermittlung der Lagebeziehungen der Geraden und zeichnerische Veranschaulichung
19 Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und den Koordinatenachsen bzw. -ebenen	3	– Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum – Parametergleichungen von Geraden	– Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit drei Variablen – Gleichungen für Koordinatenachsen – Rechnerische Ermittlung der Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und den Koordinatenachsen – Schnittpunktberechnungen – Gleichungen für Koordinatenebenen – Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen – Berechnen der Koordinaten des Schnittpunktes (auch Durchstoßpunkt oder Spurpunkt) von Gerade und Koordinatenebene

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 1.4.		Skalarprodukt und Anwendungen	13 Stunden
20 Das Skalarprodukt zweier Vektoren	1	– Betrag eines Vektors – Kosinus eines Winkels – Quadrantenbeziehungen der Kosinusfunktion – Physikalische Formel für die Berechnung der mechanischen Arbeit	– Definition des Skalarproduktes – Nicht eindeutige Umkehrbarkeit der skalaren Multiplikation – Bedingungen für $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0, \vec{a} \cdot \vec{b} < 0, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
21 Eigenschaften der skalaren Multiplikation von Vektoren	2	– Rechengesetze für die Multiplikation reeller Zahlen sowie für die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl – Definition des Skalarproduktes – Binomische Formeln	– Kommutativgesetz – Distributivgesetz – Assoziativgesetz für Vektoren bezüglich der skalaren Multiplikation gibt es nicht – Assoziativgesetz für die Multiplikation des Skalarproduktes mit einer reellen Zahl – Anwenden der Eigenschaften des Skalarproduktes bei Berechnungen und Beweisen
22 Anwendung des Skalarproduktes beim Beweisen von Sätzen	2	– Definition des Skalarproduktes – Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Vektoren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ – Planimetrische Sätze – Betrag eines Vektors – Addition und Subtraktion von Vektoren	– Beweisen planimetrischer Sätze mit Hilfe des Skalarproduktes, z. B. Satz des PYTHAGORAS, Sätze über Parallelogramme, Satz vom gemeinsamen Schnittpunkt der Höhen im Dreieck, Satz des THALES
23 Die Koordinatendarstellung des Skalarproduktes	2	– Komponentendarstellung von Vektoren (dazu auch verkürzte Schreibweisen, z. B. die Spaltenschreibweise) – Distributivgesetz der skalaren Multiplikation bezüglich der Vektoraddition – Definition des Skalarproduktes – Kosinus eines Winkels	– Herleiten der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes – Formel zur Berechnung des Betrages eines Vektors bei gegebenen Koordinaten – Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren – Anwenden der Formeln bei Berechnungen
24 Der Schnittwinkel zweier Geraden	3	– Definition des Skalarproduktes – Koordinatendarstellung des Skalarproduktes – Betrag eines Vektors – Winkel zwischen zwei Vektoren – Normalform der Geraden-	– Schnittwinkel zweier Geraden – Berechnen der Größe des Schnittwinkels zweier Geraden bei gegebenen vektoriellen Parametergleichungen und bei gegebenen parameterfreien Geradengleichungen

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		gleichung $y = mx + n$ – Schnittpunktsberechnungen (bei zwei Geraden)	– Lösen komplexer Aufgaben – Übersicht über die wesentlichen Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes
25/26 Weitere Anwendungen des Skalarproduktes	2	– Winkelfunktionen (insbesondere Quadranten- und Komplementwinkelbeziehungen) – Definition des Skalarproduktes – Koordinatendarstellung des Skalarproduktes – Physikalische Formeln für Berechnungen von Arbeit, Leistung, Energie (Mechanik)	– Herleiten der Additionstheoreme „$\cos(\alpha - \beta) \ldots$“ und „$\cos(\alpha + \beta) = \ldots$“ mit Hilfe des Skalarproduktes – Herleiten der Additionstheoreme „$\sin(\alpha + \beta) = \ldots$“ und „$\sin(\alpha - \beta) = \ldots$“ – Anwenden der Additionstheoreme beim Lösen goniometrischer Gleichungen – Anwenden des Skalarproduktes beim Lösen physikalischer Aufgaben
Leistungskontrolle	1	Aufgaben zur analytischen Geometrie der Geraden	
Stoffabschnitt 1.5.		**Analytische Geometrie des Kreises**	**7 Stunden**
27 Gleichungen für Kreis und Kugel	3	– Betrag einer reellen Zahl – Binomische Formeln – Quadratische Ergänzung – Funktionsbegriff – Skalarprodukt – Kreis $K(M; r)$	– Gleichungen für einen Kreis in allgemeiner bzw. in Mittelpunktslage in vektorieller und in Koordinatendarstellung – Gleichungen für die Kugel $K(M; r)$ bzw. $K(O; r)$ – Aufstellen von Kreisgleichungen und Nutzen von Kreisgleichungen für das Berechnen von Mittelpunktskoordinaten und der Länge von Radien – Bestimmen von Mittelpunktskoordinaten und Radien aus Kreisgleichungen
28 Kreis und Gerade	4	– Lösen von linearen Gleichungen, quadratischen Gleichungen und Gleichungssystemen aus solchen Gleichungen – Lagebeziehungen zwischen Geraden	– Rechnerische Ermittlung von Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade – Allgemeine und spezielle Tangentengleichung in der vektoriellen und in Koordinatendarstellung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		– Lagebeziehungen von Kreis und Gerade – Sekante, Tangente, Berührungsradius – Tangentenkonstruktion	– Aufstellen und Anwenden von Tangentengleichungen
Stoffabschnitt 1.6.	Übungen und Anwendungen		15 Stunden
Übungen	12	Komplexe Aufgaben zur Anwendung der Vektorrechnung in der analytischen Geometrie, in der Physik und Technik	
Leistungs-kontrollen	3	Die Leistungskontrollen können zum Teil an das Ende der Stoffabschnitte 1.3 bis 1.5 gezogen werden	

Stoffabschnitt 1.1 (12 Std.)
Verschiebungen und Vektoren

Zur Einführung des Vektorbegriffes wird an Kenntnisse der Schüler über Verschiebungen einer Ebene angeknüpft. Da die explizite Behandlung der Verschiebungen jedoch mehrere Jahre zurückliegt, müssen diejenigen Kenntnisse reaktiviert werden, die für die Einführung der vorgesehenen Begriffe nötig sind.
Sodann erfolgt die Übertragung des Verschiebungsbegriffes auf den dreidimensionalen Raum. Zur Veranschaulichung für Verschiebungen werden Elemente von Mengen paralleler, gleich langer und gleich gerichteter Strecken (Pfeile) verwendet. Bei der Einführung in die Vektorrechnung verbleibt man in diesem Modell und nennt diese Mengen von Pfeilen Vektoren. Um den Weg zum allgemeinen Vektorraumbegriff nicht durch zu enge Vorstellungen zu verbauen, kann der Lehrer bereits auf andere Modelle hinweisen. In diesem Stoffabschnitt liegt ein Schwerpunkt auf der Behandlung der Operationen für Vektoren und deren Eigenschaften, die später als konstituierende Eigenschaften in der Definition des Vektorraumes auftreten (↗ LE A 13). Der zweite Schwerpunkt des Stoffabschnittes ist in der Entwicklung erster Fähigkeiten und Fertigkeiten im Rechnen mit Vektoren und Anwenden auf einfache Aufgaben der Geometrie, Physik und Technik zu sehen.
Die folgende Übersicht zeigt die anzueignenden Begriffe und Sätze und deren Anwendungen in ihren Zusammenhängen.

Begriffe		**Sätze und Regeln**		**Anwendungen**
Vektor	(Einf.)			Zeichnerische Darstellung von Vektoren
zueinander parallele Vektoren gleich gerichtete (entgegengesetzt gerichtete) Vektoren Betrag eines Vektors zueinander entgegengesetzte Vektoren	(Einf.) (Einf.) (Einf.) (Einf.)			Vergleichen von Vektoren hinsichtlich Parallelität, Gleichgerichtetheit und Betragsgleichheit
Summe von Vektoren	(Einf.)	Kommutativgesetz Assoziativgesetz	(m. B.) (m. B.)	Addieren von Vektoren
Nullvektor	(Einf.)	Weitere Regeln für die Vektoraddition	(o. B.)	
Differenz zweier Vektoren	(Def.)	Regeln für die Subtraktion von Vektoren	(teils m. B.)	Subtrahieren von Vektoren Anwenden des Addierens und Subtrahierens (Physik, Technik)
Produkt eines Vektors mit einer reellen Zahl	(Def.)	Assoziativgesetz, Distributivgesetze, weitere Regeln für das Multiplizieren eines Vektors mit einer reellen Zahl	(teils m. B.)	Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, verbunden mit dem Addieren und Subtrahieren von Vektoren Lösen von Gleichungen zwischen Vektoren bzw. Beträgen von Vektoren Anwenden bei planimetrischen Beweisaufgaben

Lerneinheit 1/2 **(2 Std.)**

Verschiebungen einer Ebene – Vektoren

LB 5 bis 15

In diesen beiden Unterrichtsstunden werden die Schüler in ein neues Stoffgebiet eingeführt und motiviert. Die Wiederholung der Verschiebungen einer Ebene wird als Ausgangspunkt genutzt, um für Mengen gleich langer und gleich gerichteter Pfeile (Verschiebungspfeile) die Bezeichnung Vektor einzuführen und um bei nachfolgenden Arbeiten mit Vektoren bei Bedarf auf dieses anschauliche Modell zurückgreifen zu können.

Ziele

Die Schüler

- können Beispiele aus Mathematik und Physik nennen, die zur Entwicklung der Vektorrechnung führten,
- können wesentliche Eigenschaften der Verschiebungen darlegen,
- kennen verschiedene Möglichkeiten der Beschreibung von Verschiebungen (geordnete Punktepaare, Verschiebungspfeile, gerichtete Strecken) und zugehörige Bezeichnungen,
- erfassen die zu einer Verschiebung gehörende Menge gleich langer und gleich gerichteter Pfeile als mathematisches Objekt (Pfeilklasse), das ein Vektor genannt wird, und wissen, daß für diese Objekte Rechenoperationen eingeführt werden sollen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung der Behandlung der Vektorrechnung
- Wiederholung von „Verschiebung einer Ebene" (Definition und sich daraus ergebende Eigenschaften)

2. Stunde

- Wiederholung der Darstellungsmöglichkeiten für Verschiebungen
- Einführung von „Vektor" für die einer Verschiebung entsprechende Pfeilklasse und einer praktikablen Bezeichnungstechnik für diese Vektoren einer Ebene und ihrer Repräsentanten
- Übung im Gebrauch des Begriffes „Vektor" und der eingeführten Bezeichnungen

Variante:

Es ist möglich, für die Behandlung der Lerneinheiten A 1/2 drei Stunden zu verwenden. Dann müßte eine Stunde dadurch gewonnen werden, daß man die Addition und Subtraktion von Vektoren (LE A 4 und 5) in insgesamt drei Stunden behandelt. Der Lehrplan verlangt den Beweis nur für einige Regeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Einige Beweise könnten auch im Rahmen der Behandlung der Lerneinheit A 13 geführt werden.

Methodische Hinweise

Motivierung der Behandlung der Vektorrechnung Zunächst sollten die Schüler selbständig eine der folgenden Aufgaben lösen (gegebenenfalls auch beide), deren anschließende Diskussion die Einführung in den neuen Stoff ermöglicht, z. B.
aus der Physik: *Kräftezerlegung:* LB 34, Nr. 1,
aus der Geometrie: *Nacheinanderausführung zweier Verschiebungen.* Geeignet wäre ein Dreieck ABC mit den Koordinaten $A\,(1;\,4)$, $B\,(5;\,3)$, $C\,(3;\,6)$, auf das die Verschiebungen $\overrightarrow{OP_1}$ mit $O\,(0;\,0)$, $P_1\,(4;\,2)$ und $\overrightarrow{OP_2}$ mit $O\,(0;\,0)$, $P_2\,(2;\,-5)$ angewendet werden.
Im Gespräch über die Lösung kann auf Eigenschaften von Kräften bzw. Verschiebungen eingegangen werden (Betrag der Kraft bzw. Verschiebungsweite; Wirkungsrichtung der Kraft bzw. Richtungssinn der Verschiebung; Möglichkeit der „Addition“). Danach kann der Einführungstext (LB 5f.) gelesen werden. Ein Schüler gibt die Grundgedanken wieder.
Variante: Der Lehrer trägt selbst in Anlehnung an den Text wesentliche Gedanken vor und entwickelt die Zielstellung für den Unterricht in den folgenden Stunden.

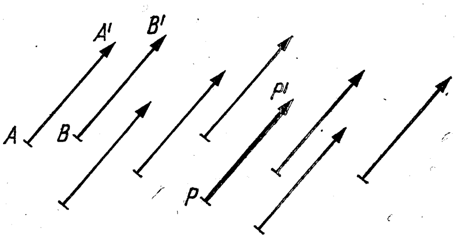
Wiederholung von „Verschiebung einer Ebene“ Hierzu kann ein Schülervortrag eingesetzt werden (UH 21, erstes Thema). Wurde in der Einführung die geometrische Aufgabe gelöst, so können aus den Zeichnungen Eigenschaften von Verschiebungen abgelesen werden. Es empfiehlt sich, noch weitere Punkte P, Q, ... einzuzeichnen und auf sie ebenfalls die gewählten Verschiebungen anzuwenden, denn es geht um die Verschiebung aller Punkte der Ebene.
Eine andere Möglichkeit ist die Untersuchung der in den Lehrbuchbildern A 5 bis A 10 (LB 7f.) dargestellten Abbildungen entsprechend Auftrag A 1 und A 2 (LB 7). Das Vergleichen unterschiedlicher Abbildungen erleichtert (und ermöglicht erst) das Herauslösen der für Verschiebungen charakteristischen Eigenschaften (1) bis (3) (LB 8).
Bemerkung zum Auftrag A 1: In den Lehrbuchbildern A 5, A 6 und A 8 geht es um die Abbildung einer Ebene auf sich, im Lehrbuchbild A 7 um die Abbildung einer Ebene auf eine Gerade g. Mit den Eckpunkten der eingetragenen Figur $ABCD$ werden nur einige Punkte der Ebene ausgewählt. Wäre nur die Abbildung, bestehend aus den geordneten Paaren $[A;\,A']$, $[B;\,B']$, $[C;\,C']$ und $[D;\,D']$, gemeint, so würde das Bild A 7 wie die anderen eine umkehrbar eindeutige Abbildung zeigen. Frage d) kann entfallen oder später zur Vertiefung gestellt werden.
Die Untersuchungsergebnisse können die Schüler tabellarisch erfassen. Dazu kann das Symbol für Gleichgerichtetheit von Strahlen eingeführt werden.

Auftrag	Lehrbuchbilder A 5/A 10	A 6/A 9	A 7	A 8
● A 1a	Geraden- spiegelung	Verschiebung	Senkrechte Parallelprojektion	Zentrische Streckung
● A 1b	eineindeutig	eineindeutig	eindeutig	eineindeutig
● A 1c	kongruent	kongruent	–	ähnlich
● A 2	$AA' \parallel BB'$ $AA' \uparrow\uparrow BB'$ $\overline{AA'} \neq \overline{BB'}$	$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ AA' \parallel BB' \\ (2)\ AA' \uparrow\uparrow BB' \\ (3)\ \overline{AA'} \cong \overline{BB'}\end{array}}$	$AA' \parallel BB'$ $AA' \uparrow\uparrow BB'$ $\overline{AA'} \ncong \overline{BB'}$	$AA' \nparallel BB'$ $AA' \not\uparrow\not\uparrow BB'$ $\overline{AA'} \ncong \overline{BB'}$

Zu beachten ist, daß in der letzten Zeile der Tabelle lediglich Eigenschaften der in den Bildern betrachteten Geraden, Strahlen und Strecken zum Ausdruck kommen, nicht notwendigerweise charakteristische Eigenschaften der betreffenden Abbildungen! So kann bei der Parallelprojektion auch der Fall $PP' \uparrow\downarrow QQ'$ oder bei der zentrischen Streckung der Fall $\overline{PP'} \cong \overline{QQ'}$ auftreten usw. Es muß also noch geprüft werden, ob die sich aus den Lehrbuchbildern A 6 bzw. A 9 ergebenden Eigenschaften charakteristisch für Verschiebungen einer Ebene sind, was in der Tat der Fall ist.
Zur Vertiefung kann die Frage d aus dem Auftrag A 1 (ggf. nur leistungsstarken Schülern) gestellt werden.
Zur weiteren Festigung (auch für Hausaufgaben) werden die Aufgaben 1 und 3 (LB 10f.) empfohlen. In der Aufgabe 3 wäre z. B. für das Lehrbuchbild A 19c nicht nur die Anzahl der mit Hilfe der 4 verschiedenen Punkte A, B, C, D beschreibbaren Verschiebungen anzugeben (12), sondern die Verschiebungen auch selbst: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, ...

Wiederholung der Darstellungsmöglichkeiten für Verschiebungen Im Unterrichtsgespräch können folgende Fragen aufgeworfen werden:
- Warum können Verschiebungen *mit Pfeilen* hinreichend beschrieben werden?
  (Die Eigenschaft (3) in Verbindung mit (1) und (2) legt die Verwendung gleich gerichteter (also auch paralleler) und gleich langer Strecken nahe.)
- Warum reicht *ein Pfeil* zur Beschreibung einer Verschiebung aus?
  (Ein solcher Pfeil kann an jeden beliebigen Punkt P der Ebene angetragen werden. Man erhält in jedem Falle eindeutig den Bildpunkt P' von P bei der betrachteten Verschiebung.)

Übersicht

Darstellung einer Verschiebung einer Ebene	
Verschiebung als Menge geordneter Punktepaare $\{[A; A'], [B; B'], \ldots, [P; P'], \ldots\}$	Veranschaulichung durch eine Menge gleich langer, gleich gerichteter Strecken (Pfeilklasse)  Bild 12
Jedes dieser Punktepaare kann zur Angabe der Verschiebung verwendet werden.	Jeder dieser Pfeile kann zur Angabe der Pfeilklasse verwendet werden.

Gegebenenfalls kann bereits an dieser Stelle der Name Vektor für Pfeilklasse eingeführt werden.

Bemerkung: In den folgenden Unterrichtsstunden wird allg. der Darstellung von Verschiebungen durch Pfeile der Vorzug gegenüber Punktepaaren gegeben, da sie ein weitgehend anschauliches Arbeiten ermöglichen.
Pfeile sind als gerichtete Strecken ihrerseits selbst mathematische Objekte und eigentlich wohl zu unterscheiden von gezeichneten Pfeilen. Die Schüler werden das jedoch selten bewußt unterscheiden,

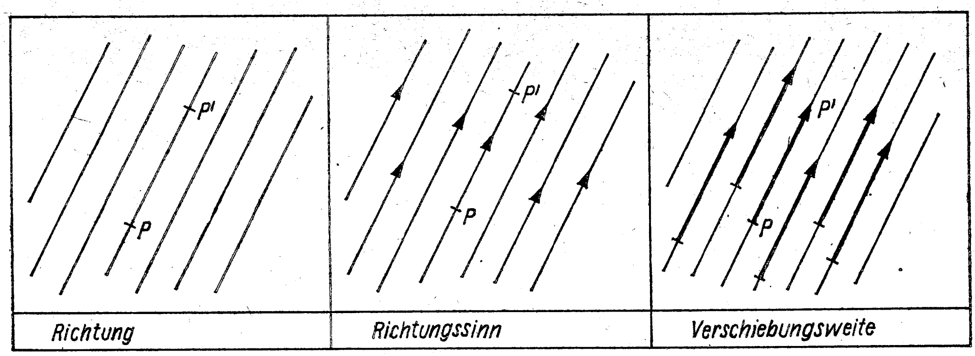


Bild 13

ebensowenig wie sie etwa zwischen einem gezeichneten Dreieck und dem ideellen mathematischen Objekt „Dreieck" bewußt unterscheiden. Im allgemeinen entstehen beim Arbeiten durch das unbewußte Identifizieren von ideellen Objekten mit ihren materiellen Veranschaulichungen auch keine Mißverständnisse.

Zur Veranschaulichung der zu wiederholenden Begriffe „Richtung", „Richtungssinn" und „Verschiebungsweite" (LB 9) kann die Darstellung im Bild 13 gewählt werden. Zur Festigung eignen sich der Auftrag A 3 (LB 10) und die Aufgaben 1 bis 3 (LB 10f.). Eine Übertragung des Lehrbuchbildes A 18 in die Hefte ist nicht erforderlich. Die Koordinaten der Bildpunkte können die Schüler durch „Auszählen" der jeweiligen Verschiebung entsprechend bestimmen.

Einführung von „Vektor" Hierzu wird ein Lehrervortrag empfohlen, in dem folgendes Beachtung finden sollte: Mit Verschiebungen und auch mit Kräften kann man in gewissem Sinne wie mit Zahlen operieren (Nacheinanderausführen von Verschiebungen, Addition von Kräften; evtl. auf Einführungsbeispiele verweisen).
Es hat sich gezeigt, daß verschiedene mathematische Objekte (z. B. Verschiebungen, gewisse Mengen von Paaren reeller Zahlen) und physikalische Größen (z. B. Kräfte, Geschwindigkeiten) hinsichtlich gewisser mit ihnen durchführbarer Operationen und der dafür gültigen Gesetze Gleichartiges aufweisen.
Solche Objekte werden allgemein *Vektoren* genannt. Verschiebungen und Kräfte sind z. B. Vektoren. Um den Begriff „Vektor" erfassen zu können, muß man die mit ihnen ausführbaren Operationen und die dafür gültigen Gesetzmäßigkeiten studieren.

Zielstellung: Wir wollen in den folgenden Stunden eine Art Vektoren genauer kennenlernen und uns Grundlagen der *Vektorrechnung* erarbeiten. Wir werden später die Vektorrechnung vor allem zur Lösung geometrischer Aufgaben verwenden. Als konkrete Objekte zur Einführung in die Vektorrechnung wählen wir deshalb die aus dem Geometrieunterricht bekannten Verschiebungen. Mit Hilfe der Pfeildarstellung können wir die Operationen und ihre Gesetzmäßigkeiten gut veranschaulichen. Wir sprechen dabei künftig stets von Vektoren.

Bemerkung: Natürlich darf man Verschiebungen und Vektoren nicht begrifflich identifizieren, denn es sind Begriffe unterschiedlichen Abstraktionsgrades. Jede Verschiebung oder jede Pfeilklasse ist ein Vektor, aber nicht umgekehrt.

Übung im Gebrauch des Begriffes Vektor und der eingeführten Bezeichnungen Nach inhaltlicher Klärung der Festlegungen über Gleichgerichtetheit und Parallelität von Pfeilen bzw. der durch Pfeile gekennzeichneten Vektoren sowie über den Betrag eines Vektors und nach Einführung der Bezeichnungen sollten die Aufgaben 1, 3 und eventuell auch 7 (LB 15) gelöst werden (weitere Aufgaben in häuslicher Arbeit).

Die Schüler können sich zunächst auch aus dem Lehrbuch die eingeführten Bezeichnungen übersichtlich und mit einer Skizze auf Karopapier verbunden zusammenstellen (Bild 14).

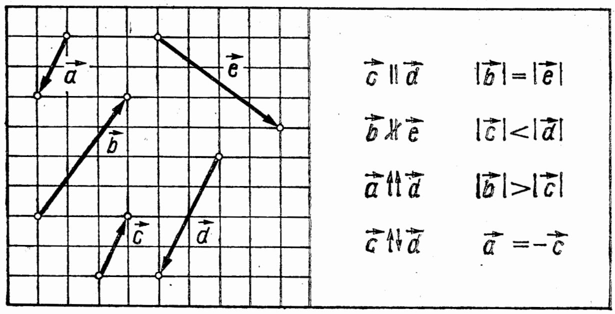


Bild 14

Bemerkung: Neben der im Bild 14 gewählten Bezeichnung für Vektoren trifft man in der Literatur auch die ältere Bezeichnung mit Frakturbuchstaben an. In praktischen Anwendungen wird häufig auch die „schreibmaschinenfreundliche" Bezeichnung $\underline{a}$ benutzt.

Kontrollaufgaben

(1) Was verstehen Sie unter einer Verschiebung einer Ebene?
(2) LB 15: Nr. 5; (3) LB 15: Nr. 7

Lerneinheit 3 **(1 Std.)**
Vektoren im Raum
LB 16 und 17

In dieser Unterrichtsstunde werden Verschiebungen des Raumes behandelt und in Analogie zu den Verschiebungen einer Ebene entsprechende Beziehungen erklärt sowie dafür Bezeichnungen eingeführt (Parallelität, Gleichgerichtetheit usw.). Verschiebungen des Raumes werden ebenfalls Vektoren genannt. Großer Wert ist auf anschauliches Arbeiten zu legen.

Ziele

Die Schüler

- kennen den Begriff der Verschiebung des Raumes als eineindeutige Abbildung des Raumes auf sich,
- erfassen die einer Verschiebung des Raumes entsprechende Pfeilklasse als mathematisches Objekt, das im folgenden Vektor genannt wird,
- können an räumlichen Darstellungen oder Körpermodellen Vektoren im Raum angeben und solche Vektoren bezüglich Parallelität, Gleichgerichtetheit und Größe ihres Betrags vergleichen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung einer Vorstellung von Verschiebungen des Raumes; Kennzeichnung als Vektoren
- Übung im Bestimmen und Vergleichen von Vektoren im Raum

Methodische Hinweise

Erarbeitung Es ist nützlich, die Erarbeitung wie im Beispiel A 3 anhand der Darstellung eines Quaders oder eines Quaderkantenmodells zu beginnen, denn dies ermöglicht, durch Betrachtungen in bestimmten Ebenen zu begründbaren Ergebnissen hinsichtlich einzelner Vektoren im Raum zu kommen. Wenn dabei auch eine straffe Führung des Unterrichtsgespräches zweckmäßig ist, so sollte sie auch auf eine hohe Selbsttätigkeit der Schüler zielen, so daß die Übungen gut vorbereitet sind und möglichst selbständig durchgeführt werden können.

Übung Empfohlen werden die Aufgaben 2, 3, 6 (LB 17). Im Falle der Aufgaben 2 und 3 sollten neben der Angabe der Vektoren, soweit vorhanden, noch Beispiele für gleich gerichtete, entgegengesetzt gerichtete, parallele und nicht parallele Vektoren und für Vektoren mit gleichen und ungleichen Beträgen sowie einander entgegengesetzte Vektoren genannt werden.
Die Aufgaben 4 und 5 tragen nur dann zur Vertiefung des Begriffs des Vektors im Raum bei, wenn sich die Schüler die angelegten Zeichnungen *räumlich vorstellen*, denn die auszuführende Konstruktion vollzieht sich als Verschiebung einer Ebene auf sich! Die Vorstellung kann gegebenenfalls durch eine Darstellung mit Hilfe von Modellen im Raum unterstützt werden (Magnetklapptafel bzw. Raumecke aus Tafeln mit kongruenten Kantenmodellen oder Verwendung von Teilen des Vektorgerätes).

Kontrollaufgaben

(1) LB 117: Nr. 2
(2) Skizzieren Sie einen Quader im Schrägriß!
Nennen Sie mit Hilfe seiner Eckpunkte **a)** 10 Vektoren verschiedener Richtung, **b)** Vektoren, die entgegengesetzt gerichtet sind, **c)** Vektoren, die den gleichen Betrag haben, aber nicht parallel sind!

Lerneinheit 4 **(2 Std.)**
Addition von Vektoren

LB 17 bis 22

In diesen Unterrichtsstunden beginnt die Behandlung der Rechenoperationen für Vektoren und ihrer Eigenschaften. Damit werden schrittweise diejenigen wesentlichen Merkmale erarbeitet, die später in Lerneinheit A 13 zur Definition des Vektorraumes verwendet werden. Dabei wird zwar von dem anschaulichen Beispiel der Verschiebung Gebrauch gemacht (LP 42), aber es werden Eigenschaften erarbeitet, die nicht nur Verschiebungen bzw. den ihnen entsprechenden Pfeilklassen zukommen.

Ziele

Die Schüler
- festigen ihre Kenntnisse über das Nacheinanderausführen von Verschiebungen einer Ebene und das Ermitteln der Gesamtkraft beim Angreifen zweier Kräfte am gleichen Punkt,
- wissen, daß man das Auffinden der Gesamtkraft auch Kräfteaddition nennt und kennen die Addition der eingeführten Vektoren (Pfeilklassen),
- können die Gesetze der Kommutativität und Assoziativität der Addition dieser Vektoren anhand selbstgewählter Beispiele erläutern,
- kennen den Begriff „Nullvektor“,
- können solche Vektoren einer Ebene bzw. des Raumes addieren, die in einem Koordinatensystem durch Pfeile dargestellt oder im Raum durch (gerichtete) Kanten einfacher geometrischer Körper markiert sind.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung der Einführung von Rechenoperationen für Vektoren
- Erarbeitung der Eigenschaften der Addition von Vektoren einer Ebene

2. Stunde
- Einführung der Addition von Vektoren im Raum
- Übung im Addieren von Vektoren

Methodische Hinweise

Motivierung der Einführung von Rechenoperationen für Vektoren Hierzu sollte der Lehrer von Kenntnissen der Schüler ausgehen bzw. durch das Lösen von Aufgaben Kentnisse reaktivieren lassen:

Addition von Kräften; Nacheinanderausführen von Verschiebungen.

Unter Umständen kann auf die Einführungsbeispiele (LE 1/2, UH 33) oder auf die Aufträge A 9 und A 10 (Karopapier!) zurückgegriffen werden.
Das Lösen dieser Aufgaben erfordert Kenntnisse darüber, **wie** überhaupt die geforderten Operationen mit Kräften bzw. Verschiebungen auszuführen sind. Es ist also notwendig, die Operationen eindeutig festzulegen und ihre Eigenschaften zu untersuchen.
Der Lehrer kann Fragen aufwerfen, die in den folgenden Stunden zu beantworten sind.
- Gelten für das Addieren (Nacheinanderausführen) von Verschiebungen gleiche Rechengesetze wie für (reelle) Zahlen?
- Kann man wie bei Zahlen das Addieren von Verschiebungen auch umkehren, also gegebenenfalls von einer Subtraktion von Verschiebungen sprechen?

Der Vergleich zwischen Kräften und Verschiebungen zeigt gewisse Gleichartigkeiten hinsichtlich auszuführender Operationen, die eben gerade ein Grund dafür sind, sie als Vektoren aufzufassen.

Bemerkung: In Auswertung der Aufträge A 9 und A 10 wird im Lehrbuch eine Gegenüberstellung von Kräften und Vektoren (Pfeilklassen) angeführt (LB 18). Bei der Einbeziehung dieser Übersicht ist folgendes zu beachten:
Genaugenommen entsprechen den (in einem Punkt angreifenden) Kräften Repräsentanten der Verschiebungen (der Menge geordneter Punktepaare), etwa einzelne Punktepaare (dargestellt durch Pfeile mit festem Anfangspunkt).
Einer Verschiebung (als unendlicher Menge geordneter Punktepaare) entspricht ein homogenes Kraftfeld (↗ Bild 15). Als Beispiel für ein homogenes Kraftfeld können sich die Schüler das magnetische Kraftfeld im Innern einer langen stromdurchflossenen Spule vorstellen. Jedes Eisenteilchen im Kraftfeld unterliegt dem Einfluß der magnetischen Kräfte, die an jeder Stelle des Feldes gleich sind.

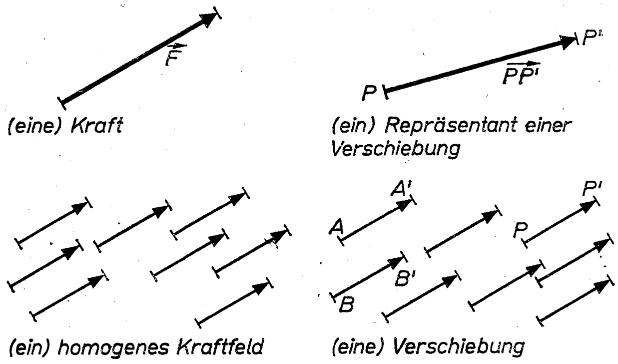


Bild 15

Erarbeitung der Eigenschaften der Addition von Vektoren Fragen, an denen sich die Erarbeitung orientieren kann:

- Nach welcher Vorschrift werden Vektoren addiert?
- Läßt sich die Addition stets ausführen?
- Ist die Summe eindeutig bestimmt?
- Welche Eigenschaften besitzt die Vektoraddition?

Die Betrachtungen können zunächst in einer Ebene vorgenommen oder auch sofort im Raum ausgeführt werden.
Mögliche Schrittfolge:

(1) Den Bildern A 35/36 im Lehrbuch wird die *Vorschrift* entnommen, wie Vektoren (Pfeilklassen) addiert werden.
Bereits hier können verschiedene mögliche Lagen der gewählten Repräsentanten vorgegeben oder von den Schülern gesucht werden. Damit der Endpunkt des Repräsentanten des ersten Vektors mit dem Anfangspunkt des Repräsentanten des zweiten Vektors zusammenfällt, um also die Addition der Vorschrift entsprechend ausführen zu können, muß ggf. ein geeigneter anderer Repräsentant verwendet werden. Dieser Gedanke wird bei Beweisen von Rechenregeln benötigt (Schritt 4, 5). Ein Vergleich mit der Wahl gleichnamiger Brüche, um die Addition zweier gebrochener Zahlen einführen zu können, die durch ungleichnamige Brüche dargestellt sind, erscheint hierbei angebracht.

(2) Die Schüler lösen zur *ersten Festigung* selbständig den Auftrag A 11 (LB 19). Gegebene Vektoren auf Karopapier übertragen!

(3) *Existenz und Eindeutigkeit* der Vektorsumme dürfte den Schülern evident erscheinen. Der Lehrer sollte hierzu die Frage nach der Summe eines Vektors und des zu ihm entgegengesetzten Vektors aufwerfen. Unter Umständen ist sie bereits als ein möglicher Fall im Schritt 1 aufgetreten. Dieser Fall führt zur Einführung des Nullvektors und der entsprechenden Symbolik. Die Regeln 1^+ und 2^+ (LB 20) können formuliert, brauchen aber nicht bewiesen zu werden.

Man kann sie auch erst im Zusammenhang mit der Kommutativität der Vektoraddition aufstellen, weil dort ihre Behandlung noch besser motiviert erscheint (folgender Schritt 4).

(4) Zur Erarbeitung der *Eigenschaften der Vektoraddition* kann zunächst an die Eigenschaften der Addition von (reellen) Zahlen erinnert werden. Danach können zwei Wege beschritten werden (zunächst für die *Kommutativität*):

Variante I

Man gibt eine Skizze vor (↗ Bild 16), „verrät" gewissermaßen sofort die Beweisidee und läßt danach die Regel bei anderen Lagen der Pfeile prüfen. Dann kann man evtl. auf die im Schritt (1) gegebenen oder gefundenen Lagen zurückgreifen und zur Formulierung der Regeln 1^+ und 2^+ gelangen.

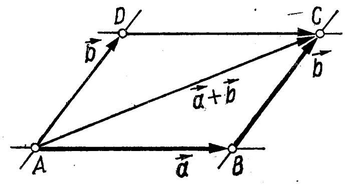


Bild 16

Variante II

Man läßt die Schüler die Addition von Pfeilklassen in verschiedener Lage ausführen (Karopapier) und stellt die Frage, ob die Reihenfolge vertauscht werden kann und wie man ggf. die Kommutativität nachweisen kann (↗ Bild 17). Die Gültigkeit der Kommutativität der Vektoraddition schließt ein, daß $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ auch der Nullvektor sein können (Regel 1^+, LB 20). Der Beweis der Regel (● A 12) erfolgt wiederum dadurch, daß man einen geeigneten Repräsentanten für den Nullvektor wählt.

$$\vec{a} + \vec{o} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \qquad \vec{o} + \vec{a} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

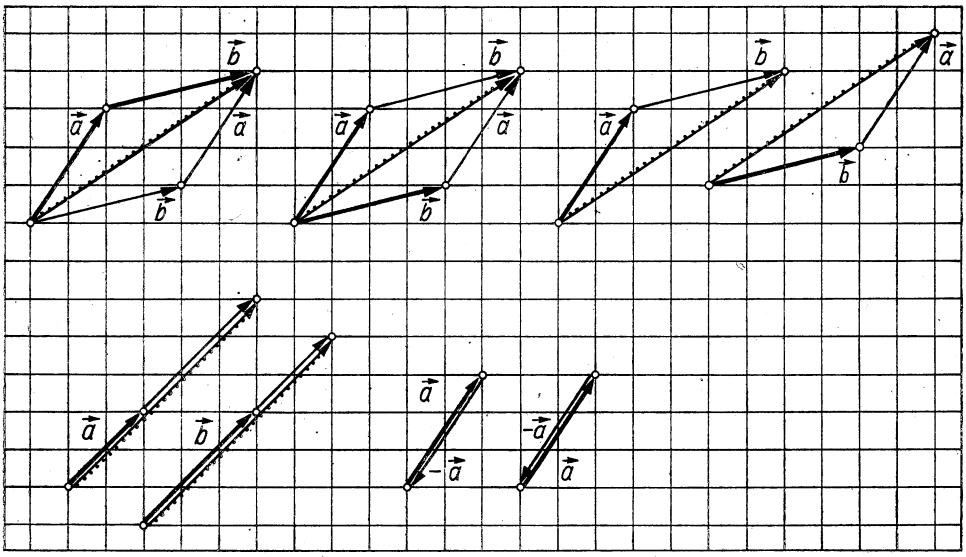


Bild 17

Es bedeuten: starke Pfeile – vorgegebene Repräsentanten; schwache Pfeile – weitere Repräsentanten; gepunkteter Pfeil – Summe

(5) Aus dem Bild 18 ist die Assoziativität der Vektoraddition leicht ersichtlich (an der Tafel mehrfarbig gestalten; eventuell als Klappfolie anlegen).
Zur Veranschaulichung können Pfeile (z. B. des Vektorgerätes) an der Hafttafel verwendet werden.

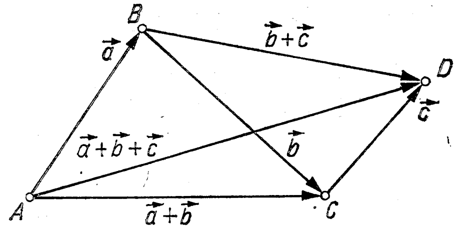


Bild 18 $\quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Hinweis: Gibt man Pfeile so vor, **daß zur** Addition andere Repräsentanten herangezogen werden müssen, so sind *weitere Veranschaulichungspfeile zu benutzen* und nicht die gegebenen Pfeile *mechanisch* an die gewünschte Stelle zu *verschieben* (↗ Bild 19)!

(6) Festigung: LB 21f.; Nr. 1, 2, 3 und 6

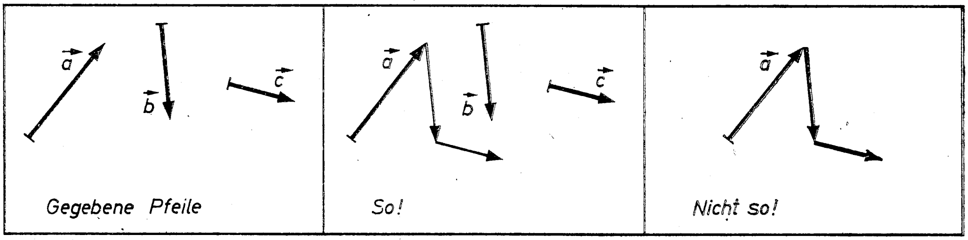


Bild 19

Einführung der Addition von Vektoren im Raum Hierzu sollten Körperkantenmodelle verwendet werden, deren Kanten Vektoren repräsentieren (nicht nur Darstellungen von Körpern in der Zeichenebene benutzen!).
Die Schüler können an solchen Modellen die Eigenschaften der Vektoraddition erläutern sowie selbständig den Auftrag A 13 und das Beispiel A 4 bearbeiten.
Zusammenfassend wird die allgemeine Gültigkeit der Regeln 1^+ bis 4^+ (LB 20) konstatiert, wobei die in 1^+ und 2^+ enthaltenen Sonderfälle bezüglich der Kommutativität in 3^+ eingehen.

Übung im Addieren von Vektoren Eine erste Übung kann anhand der Aufgabe 4 erfolgen. Die Aufgaben 7 und 8 sollten im Unterricht gelöst werden. In der Aufgabe 8 ist nachzuweisen, daß der Pfeil $\overrightarrow{BD}$ mit dem Pfeil $\overrightarrow{AC}$ gleich gerichtet und gleich lang ist. Man erhält (↗ Bild 20):

Die Pfeile $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AC}$ haben
- den gleichen Betrag wegen sws
- die gleiche Richtung wegen

$$\left.\begin{array}{l}\alpha' = 180° - \beta - \gamma' \\ \alpha \;= 180° - \beta - \gamma\end{array}\right\} \gamma = \gamma' \text{ wegen sws}$$

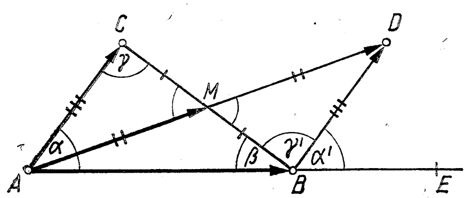


Bild 20

- den gleichen Richtungssinn, weil C und D auf derselben Seite der Geraden AB liegen.

Kontrollaufgaben

(1) LB 22: Nr. 5

(2) Ein Fährboot mit der Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_F$ wird durch die Strömung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ abgetrieben. Über das Boot läuft ein Passagier mit $\vec{v}_P$. Ermitteln Sie dessen Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}_{ges}$ gegenüber der Erdoberfläche (↗ Bild 21)!

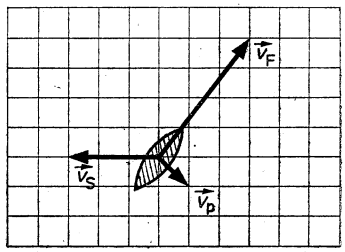


Bild 21

Lerneinheit 5 **(2 Std.)**
Subtraktion von Vektoren

LB 22 bis 25

In Analogie zum Rechnen mit Zahlen wird zur Addition von Vektoren eine Umkehroperation definiert. Hauptanliegen der Lerneinheit sind vielfältige Übungen im Addieren und Subtrahieren von Vektoren.

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß die Vektorgleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ stets genau eine Lösung $\vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$ hat, die Differenz von $\vec{b}$ und $\vec{a}$ genannt wird,
- kennen die Rechenregeln für die Subtraktion von Vektoren,
- können für Vektoren einer Ebene und im Raum Summen und Differenzen bilden bzw. entsprechende Terme und Gleichungen mit Vektoren umformen und vereinfachen bzw. lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung der Einführung einer Umkehroperation zur Addition von Vektoren
- Reaktivierung der Kenntnisse über das Subtrahieren reeller Zahlen und über den zu einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzten Vektor $-\vec{a}$
- Erarbeitung der Definition des Begriffes „Differenz zweier Vektoren" (▶ 1, ● 15, ● 16, ● 17) und der Rechenregeln für das Subtrahieren von Vektoren

2. *Stunde*

- Übung im Addieren und Subtrahieren von Vektoren
- Übung im Umformen von Termen und im Lösen von Gleichungen mit Vektoren

Methodische Hinweise

Motivierung Hierfür eignen sich die drei Fragen auf Seite LB 22f. Auf die erste Frage sollte nicht verzichtet werden, weil man die Analogie zu den reellen Zahlen im folgenden gut verwenden kann. Anstelle der zweiten Frage kann auch eine praktische Aufgabe gestellt werden, z. B. in Verbindung mit dem Lehrbuchbild A 59: Welche Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ muß ein Flugzeug gegenüber der umgebenden Luft entwickeln, wenn es mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ bei einer Windgeschwindigkeit $\vec{v}_2$ das Ziel B anfliegen soll? Geschwindigkeiten sind wie Kräfte gerichtete Größen, so daß damit die Frage nach dem einzuschlagenden Kurs verbunden ist.

Im Rahmen der Motivierung reicht es aus, *eine* solche Aufgabe vorzustellen, um zu begründen, daß nach Wegen gesucht werden muß, um die zweite Komponente einer Resultierenden bestimmen zu können, wenn eine Komponente bekannt ist.

Die Fragestellungen gipfeln in der Frage nach der Lösung einer Vektorgleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ [LB 23, Gleichung (1)].

Bisher war von Vektorgleichungen noch nicht die Rede, obwohl sie schon verwendet wurden und z. B. die Regeln für das Addieren von Vektoren in Form von Gleichungen notiert wurden.

Der Lehrer sollte den Schülern mitteilen, daß z. B. das Bilden der Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Lösen der Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ aufzufassen ist und daß man Vektorgleichungen zum Teil nach gleichen Regeln umformen kann wie Gleichungen mit Zahlen. Das wird benötigt für die Analogiebetrachtung zu den reellen Zahlen bei der Einführung der Subtraktion von Vektoren. Auf Unterschiede im Arbeiten mit Vektorgleichungen gegenüber Zahlengleichungen wird im Zusammenhang mit der Behandlung weiterer Verknüpfungen eingegangen.

Reaktivierung Empfohlen werden

- das Lösen von Gleichungen, die das Subtrahieren erforderlich machen (Kopfrechnen), z. B.

  $x + \frac{3}{4} = 0{,}5;\qquad 10^2 + y = 10^3;\qquad z + (\sqrt{8} - \sqrt{2}) = 0;$

  $a - x = c - (b - a)$

- das Addieren von Vektoren, die zu gegebenen Vektoren entgegengesetzt sind (konstruktiv oder mit Hilfe von Karopapier) z. B. (↗ Bild 22):

  $\vec{a} + (-\vec{c});\qquad \vec{b} + (-\vec{a});$

  $\vec{b} + (-\vec{c});\qquad \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}).$

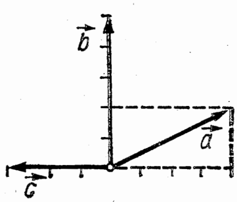


Bild 22

Erarbeitung der Definition des Begriffs „Differenz zweier Vektoren" und der Rechenregeln für das Subtrahieren von Vektoren Hierbei kann in folgenden Schritten vorgegangen werden:

(1) Nach der Reaktivierung wird wieder die Frage nach der Lösung der Gleichung (1) $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ aufgegriffen. Durch Bearbeiten des Auftrags A 15 können sich die Schüler eine anschauliche Vorstellung von einer möglichen Lösung verschaffen (↗ Bild 23).

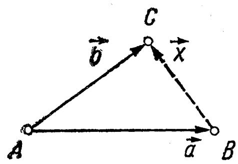


Bild 23

Auf die Sonderfälle $\vec{a} = \vec{o}$ oder $\vec{b} = \vec{o}$ kann vorerst verzichtet werden. Es wird die Frage aufgeworfen, ob es stets zu zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Lösung $\vec{x}$ der Gleichung (1) gibt und ob die Lösung eindeutig bestimmt ist.

(2) Selbständig vergleichen die Schüler im Lehrbuch Seite LB 23 die Lösungen der entsprechenden Gleichungen für Zahlen und Vektoren, bearbeiten den Auftrag A 16, notieren gegebenenfalls an der Tafel oder in den Heften die einzelnen Schritte nebeneinander und begründen jede Umformung der Vektorgleichung inhaltlich.

(3) Durch Bearbeiten des Auftrags A 17 (LB 23) können die Schüler die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (1) nachweisen (im Lehrplan nicht verlangt!).

(4) Die Schüler werden aufgefordert, die Definition A 1 mit Hilfe einer Skizze zu verdeutlichen (↗ Bild 24). Hierzu wird an den ersten Schritt erinnert.
Des weiteren erläutert ein Schüler an der Tafel die Fälle $\vec{a} = \vec{o}$ und $\vec{b} = \vec{o}$.
So wie beim Rechnen mit reellen Zahlen sollten sich die Schüler einprägen, daß das Subtrahieren eines Vektors $\vec{a}$ von einem Vektor $\vec{b}$ stets als Addition des entgegengesetzten Vektors $-\vec{a}$ aufzufassen ist. (Der Nullvektor ist zu sich selbst entgegengesetzt!)

(5) Die Regeln für die Subtraktion von Vektoren sollten sich die Schüler durch Skizzen mit Pfeilen veranschaulichen, z. B. Regel 4⁻ (↗ Bild 25). Beweise zu einigen Regeln, die im Lehrbuch auf Seite LB 24 abgedruckt sind, können von den Schülern selbständig durchgearbeitet (z. B. als Hausarbeit) und vor der Klasse wiedergegeben werden.

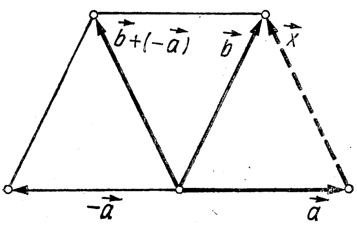


Bild 24

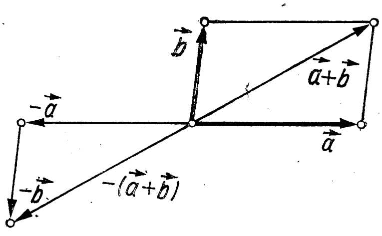


Bild 25

Übung im Addieren und Subtrahieren von Vektoren Hierzu eignen sich die Aufgaben 1, 2, 3 und 6 (LB 24 f.). Für das Addieren kennen die Schüler die Vorschrift, durch geeignete Wahl der Repräsentanten als Anfangspunkt des zweiten Pfeils den Endpunkt des ersten Pfeils zu verwenden. Die Summe der dargestellten Vektoren wird dann durch den Pfeil bestimmt, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten Pfeils verläuft.
Ähnlich könnten sich die Schüler Faustregeln für das Subtrahieren einprägen, z. B.: Anfangspunkte beider Pfeile zusammenlegen; dann weist der Differenzvektor vom Endpunkt des Subtrahenden zum Endpunkt des Minuenden. *Günstiger* ist es aber, die Subtraktion als Addition des entgegengesetzten Vektors aufzufassen.

Für Übungen im Addieren und Subtrahieren von Vektoren im Raum sollten den Schülern zu den Lehrbuchbildern A 41 oder A 42 Aufgaben folgender Art gestellt werden:
- Bestimmen Sie a) $-\vec{b}$, b) $\vec{a} - \vec{c}$, c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$!
- Drücken Sie $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{GA}$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

Übung im Umformen von Termen und im Lösen von Gleichungen Weitgehend selbständig sollten die Schüler die Aufgaben 4 und 5 (LB 24f.) lösen. Die Analogie zum Rechnen mit reellen Zahlen kann dazu führen, daß die Schüler die Umformungen für einfach halten und formal vollziehen. Deshalb muß gefordert werden, daß jeder Schritt mit den erarbeiteten Regeln für das Addieren und Subtrahieren zu begründen ist. Solche Aufgaben sind geeignet, die Schüler zu geistiger Diszipliniertheit zu erziehen. So ist z. B. bei der Lösung der Aufgabe 5c nach der Umformung der Ausgangsgleichung zu $-\vec{x} = \vec{c} - \vec{b}$ nicht etwa die Gleichung auf beiden Seiten mit (-1) zu multiplizieren, weil eine derartige Multiplikation von Zahlen mit Vektoren (bisher) nicht erklärt ist. Vielmehr ist, um den Vektor $\vec{x}$ zu bestimmen, nach Regel 3^- der entgegengesetzte Vektor zu bilden, also

$-(-\vec{x}) = -(\vec{c} - \vec{b})$, woraus sich nach 3^- und 5^-

$\vec{x} = -\vec{c} + \vec{b}$

ergibt.

Im Rahmen dieser Übung kann auch die Aufgabe 7 (LB 25) gelöst werden, ggf. als Zusatzaufgabe für leistungsstarke Schüler. Zunächst sind die möglichen Fälle der Lage der Punkte einschließlich des Zusammenfallens einzelner Punkte (wobei der Nullvektor ins Spiel kommt) zu beachten. Beim Beweis ohne Bezug auf eine bestimmte veranschaulichte Lagebeziehung sind möglichst solche Vektoren einzuführen, daß der Summenvektor leicht bestimmt werden kann, z. B.:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CD} \quad \mid \quad +\overrightarrow{BC} && \text{(um } \overrightarrow{AC} \text{ zu erhalten)}\\
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} &&\\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} && \text{(wegen } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\text{)}\\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} && \text{(wegen } 3^+\text{)}\\
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BD} && \text{(wegen } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}\text{)}\\
\overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{DB} && \text{(wegen } 1^-\text{), was zu beweisen war.}
\end{aligned}$$

Jede Umformung der Gleichung ist also mit Blick auf die zu beweisende Aussage motiviert, jede Termumformung durch Regeln begründet.

Kontrollaufgaben

(1) Bestimmen Sie unter Hinzuziehung des Bildes 26 folgende Vektoren:

a) $\vec{a} - \vec{b}$, b) $\vec{c} - \vec{a}$,

c) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, d) $\vec{b} + \vec{a} - \vec{c}$!

(2) Vereinfachen Sie den Ausdruck

$\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a} + \vec{b})$,

und begründen Sie jeden Schritt!

(3) LB 25: Nr. 5c

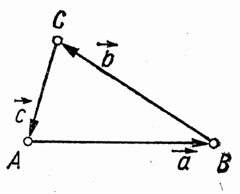


Bild 26

Lerneinheit 6 **(2 Std.)**

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

LB 25 bis 29

Bei der Addition und Subtraktion von Vektoren handelte es sich um Operationen auf der Menge der Vektoren. In diesen beiden Unterrichtsstunden wird eine Verknüpfung von reellen Zahlen mit Vektoren eingeführt, deren Ergebnis wiederum ein Vektor ist. Auf den Unterschied zwischen den bisher erklärten Verknüpfungen und der neu einzuführenden Verknüpfung ist aufmerksam zu machen.

Ziele

Die Schüler

- kennen die Definition des Produktes eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r und können sie anhand von Beispielen erläutern,
- kennen die Regeln für das Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, verstehen die Beweise für einige Regeln und können sie nachvollziehen,
- können Vektoren mit reellen Zahlen multiplizieren, entsprechende Terme umformen und Gleichungen lösen sowie die dazu erforderlichen Schritte begründen,
- wissen, daß für die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen keine Umkehroperation existiert.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Wiederholung von Kenntnissen über das Multiplizieren reeller Zahlen und über das Addieren von gleich gerichteten und entgegengesetzt gerichteten Vektoren
- Einführung der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (▶ A 2, ■ A 5)
- Übung im Multiplizieren von Vektoren der Ebene und im Raum mit reellen Zahlen (● A 18, Aufgaben 1, 2, 4)

2. Stunde

- Erarbeitung der Rechenregeln für die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl [Regeln (1•) bis (7•); ● A 19 bis ● A 25]
- Übung im Anwenden der Regeln (Aufgaben 3, 5, 8)
- Erarbeitung von Lösungen für Vektorgleichungen (Aufgaben 6, 7)

Variante: Es ist möglich, in der 1. Stunde die theoretischen Grundlagen für das Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen zu erarbeiten (Definition, Regeln) und die 2. Stunde ausschließlich der Festigung durch Übung und Vertiefung, einschließlich des selbständigen Beweisens einiger Regeln durch die Schüler, zu widmen. Diese Variante ist wegen der Trennung von Theorievermittlung und Anwendung anspruchsvoller und kommt hochschulgemäßen Formen näher.

Methodische Hinweise

Wiederholung Empfohlen werden

- Übungen im Rechnen mit reellen Zahlen (vgl. „Hinweise für tägliche Übungen ...“, Seite UH 11, Komplex 1); dabei sollten die Rechengesetze für reelle Zahlen, vor allem für das Multiplizieren von reellen Zahlen, wiederholt werden, und
- Übungen im Addieren und Subtrahieren von Vektoren (geometrisch auf Karopapier ausführen).

  Zu ermitteln sind zum Beispiel, bezogen auf das Bild 27:

$\vec{b} + \vec{b}$, $\quad \vec{a} + \vec{b}$,

$\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$, $\quad \vec{a} + \vec{a} + \vec{b}$,

$\vec{a} - \vec{b}$, $\quad \vec{a} + \vec{a} - \vec{b}$.

Zu vergleichen sind

$|\vec{b} + \vec{b}|$ mit $|\vec{b}|$ und

$|\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}|$ mit $|\vec{a}|$.

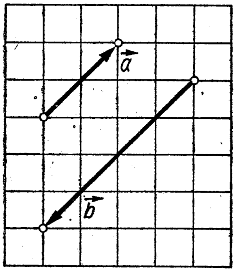


Bild 27

Einführung der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl Anknüpfend an Aufgaben zur Wiederholung kann zunächst eine Schreibweise für das Vervielfachen von Vektoren eingeführt und danach die allgemeine Frage nach einer Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl aufgegriffen werden (LB 25).
Nach der Einführung der Definition A 2 und ihrer Interpretation durch Beispiele (■ A 5) sollte auf die Besonderheit dieser Verknüpfung hingewiesen werden: Es liegt jetzt die Menge der reellen Zahlen und eine Menge von Vektoren vor. Als Ergebnis der Verknüpfung einer reellen Zahl mit einem Vektor wird ein Vektor festgelegt.

1. Bemerkung: Nach moderner mathematischer Auffassung vom Vektorraum liegen zunächst eine beliebige Menge V und ein Körper K vor. V wird genau dann Vektorraum genannt, wenn eine additive Verknüpfung auf V und eine multiplikative Verknüpfung von Elementen des Körpers K mit Elementen der Menge V erklärt sind, die den bekannten Axiomen genügen. Man kann also eigentlich keine Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl erklären. Erst, wenn u. a. eine multiplikative Verknüpfung im genannten Sinne erklärt ist, wird V *Vektorraum* und werden seine Elemente *Vektoren* genannt. Im Unterricht führt man Vektoren anhand eines geeigneten Modells für einen Vektorraum ein. Der Nachweis für die Berechtigung der Bezeichnung „Vektor“ wird erst später erbracht.

2. Bemerkung: Es ist möglich, daß von Schülern beim Vergleich mit dem Rechnen mit reellen Zahlen auch die Frage nach einer Multiplikation zweier Vektoren aufgeworfen wird. In Analogie zur Addition und Subtraktion von Vektoren liegt diese Frage sogar nahe. Hier sollte der Lehrer darauf verweisen, daß es sogar mehrere multiplikative Verknüpfungen von Vektoren gibt und daß im weiteren Unterricht *eine* solche Verknüpfung definiert wird, die allerdings auch ihre Besonderheiten gegenüber der Multiplikation von Zahlen hat. Auf sie wird im Rahmen der analytischen Geometrie eingegangen (Skalarprodukt). Das Vektorprodukt, mit dem je zwei Elementen von V eindeutig ein Element von V zugeordnet wird, ist nicht Unterrichtsgegenstand.

Übung im Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen Empfohlen werden die Aufgaben 1, 2 (Vektoren einer Ebene) und die Aufgabe 4 (Vektoren im Raum). Mit diesen Aufgaben und der Bearbeitung des Auftrags A 18 wird unmittelbar die Behandlung der Rechenregeln vorbereitet.

Erarbeitung der Rechenregeln für die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl Hierzu bieten sich wenigstens zwei Varianten an:

Variante I:

Man folgt dem Lehrbuch, stellt die Regeln im Vergleich zu denen für reelle Zahlen zusammen und läßt danach einige Regeln beweisen oder interpretieren (● A 19 bis A 25). Zu beachten ist, daß den Schülern gerade der Beweis derjenigen Aussagen Schwierigkeiten bereitet und auch als überflüssig erscheint, die von ihnen als Selbstverständlichkeit angesehen werden. Um das Beweisen zu motivieren, sollten die Schüler darauf hingewiesen werden, daß z. B. die Multiplikationszeichen, wenn man sie in Regel (5*) mit aufschreibt, unterschiedliche Bedeutung haben (farbig unterscheiden!). Die Assoziativität ist also keineswegs selbstverständlich.

Variante II:

Man läßt die Schüler über das Betrachten von Beispielen, wie sie u. a. auch in den Aufträgen A 20, A 21 und A 25 enthalten sind, Regeln finden, die denen für das Rechnen mit reellen Zahlen analog sind, wobei auch hier auf die Grenzen von Analogiebetrachtungen hinzuweisen ist. Beweise entfallen dadurch nicht. Die Bearbeitung der Aufträge A 22 und A 23 dient der Vorbereitung des Beweises der Regel (7*) für einen Sonderfall.
Anschließend werden die Regeln zusammengestellt.

Bemerkung: Die Analogiebetrachtung in Variante II zum Rechnen mit reellen Zahlen kann bei den Schülern die Frage aufkommen lassen, ob für das Multiplizieren eines Vektors mit einer reellen Zahl auch ein Kommutativgesetz gilt. Da nur $r\vec{a}$ definiert wurde, ist die Frage gegenstandslos. Auch die Regeln (3*) und (4*) haben nichts mit Kommutativität zu tun, während die Regeln (3) und (4) wegen der Kommutativität der Multiplikation für alle reelle Zahlen (einschließlich 0) als eine Regel gefaßt werden könnten. [Das gleiche gilt für die Regeln (6) und (7).]
In der mathematischen Literatur findet man mitunter auch die Schreibweise $\vec{a}r$. Dann muß aber zuvor geklärt werden, daß darunter das gleiche zu verstehen ist wie unter $r\vec{a}$, und von Kommutativität kann dann ebenfalls nicht gesprochen werden. Vergleichen Sie hierzu auch die Bemerkung zur LE A 21 bezüglich der Nichtassoziativität der skalaren Multiplikation von Vektoren!

Übung im Anwenden der Regeln Bei Termumformungen (Aufgaben 3, 5) ist wieder besonderer Wert auf die Begründung jeder Umformung mit Hilfe der gültigen Regeln zu legen, einschließlich der Regeln für das Addieren und Subtrahieren von Vektoren. Auf Veranschaulichungen sollte verzichtet werden.

Erarbeitung von Lösungen für Vektorgleichungen Mit der Definition A 2 wurde erklärt, was unter der Gleichung $r\vec{a} = \vec{b}$ verstanden werden soll. In Analogie zum Multiplizieren von reellen Zahlen wird die Frage aufgeworfen, ob die Gleichungen

(1) $r\vec{x} = \vec{b}$ und

(2) $x\vec{a} = \vec{b}$

Lösungen besitzen. Selbständig sollten die Schüler die Definition anwenden und die Bedingungen finden, unter denen die Gleichungen lösbar sind. Vor einem formalen Übertragen der von Zahlengleichungen her bekannten Umformungsregeln muß gewarnt werden. So kann die Gleichung (1) nicht durch r dividiert werden. Man kann nur mit $\frac{1}{r}$ multiplizieren, denn nur eine solche Verknüpfung einer reellen Zahl mit einem Vektor ist definiert.
Die Schüler können den Auftrag A 26 bearbeiten, den folgenden Text auf Seite LB 28 studieren und im Ergebnis folgende Übersicht anlegen, die auch als Tafelbild entwickelt werden kann:

$$r\vec{a} = \vec{b}$$

Welche Lösungen haben die Gleichungen (1) und (2)?

(1) $\boxed{r\vec{x} = \vec{b}}$

Nach Definition A 2 muß gelten:

$\vec{x} \parallel \vec{b}$

Für $\vec{b} \neq \vec{o}$ ist

$$\boxed{\vec{x} = \frac{1}{r}\vec{b} \quad (r \neq 0)}$$

Für $r = 0$ hat die Gleichung nur Sinn, wenn $\vec{b} = \vec{o}$. Sie ist dann aber nicht eindeutig lösbar.

(2) $\boxed{x\vec{a} = \vec{b}}$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$

$|x| \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$

Für $\vec{b} \neq \vec{o}$ (und $\vec{a} \neq \vec{o}$) ist

$$x = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \quad \text{für } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b},$$

bzw.

$$x = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \quad \text{für } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

Für $\vec{b} = \vec{o}$ und $\vec{a} \neq \vec{o}$ ist

$$\boxed{x = 0.}$$

Für $\vec{b} = \vec{o}$ und $\vec{a} = \vec{o}$ ist die Gleichung nicht eindeutig lösbar.

Zum leichteren Einprägen kann kurz formuliert werden:
(1) ist stets eindeutig lösbar für $r \neq 0$,
(2) ist stets eindeutig lösbar, wenn

$$\vec{b} \neq \vec{o}, \quad \vec{a} \neq \vec{o} \quad \text{und} \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \text{oder wenn} \quad \vec{b} = \vec{o} \quad \text{und} \quad \vec{a} \neq \vec{o}.$$

Die Betrachtungen können durch Beispiele ergänzt und durch das Lösen von Aufgaben (Nr. 6, 7 und 8) abgeschlossen werden. Die Aufgabe 8 ist algebraisch zu lösen. Die Bedingung $\vec{a} \parallel \vec{a} + \vec{b}$ in Nr. 8a bedeutet $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{o}$ und $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} + \vec{b}$ oder $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} + \vec{b}$, also $\vec{a} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$. Daraus erhält man die Lösung $\vec{b} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}\vec{a}$.

Kontrollaufgaben

(1) Definieren Sie die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl, und wenden Sie die Gesetzmäßigkeiten beim Vereinfachen des Ausdrucks

$$\vec{a} - 2(\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}) - (6\vec{b} + 4\vec{a} - 2\vec{c})$$

an! Begründen Sie die Schritte!

(2) Lösen Sie unter Bezugnahme auf das Bild 28 die folgenden Vektorgleichungen!

$3\vec{x} = \overrightarrow{DG}$ $\qquad x\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{CC}$

$x\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FH}$ $\qquad x\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$

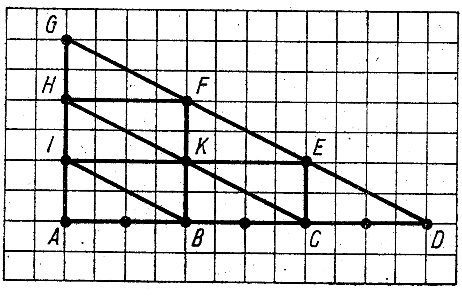


Bild 28

Lerneinheit 7/8 (3 Std.)

Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie, Physik und Technik

LB 29 bis 35

In diesen drei Unterrichtsstunden geht es um *erste* Anwendungen der Vektorrechnung. Die Schüler sollen die bisher erworbenen Kenntnisse komplex beim Lösen von Aufgaben einsetzen. Daraus soll auch eine motivierende Wirkung erwachsen, indem die Schüler erkennen, daß von ihnen z. T. auch schon bekannte Aufgaben mit Hilfe von Vektoren gelöst werden können. Mit der Vektorrechnung lernen sie also ein weiteres mathematisches Instrument zum Lösen bestimmter Aufgaben kennen, wobei sich mitunter mit Hilfe von Vektoren sogar rationellere Lösungen ergeben. Beim Lösen der Aufgaben sollte darauf geachtet werden, daß die Schüler planmäßig vorgehen, den Lösungsweg übersichtlich und sauber darstellen sowie die Lösungsschritte begründen.

Ziele

Die Schüler

- festigen Kenntnisse aus der Planimetrie und der Stereometrie, der Trigonometrie und aus der Mechanik (in Abhängigkeit von den ausgewählten Aufgaben),
- können geometrische Sätze in einfachen Fällen mit Hilfe von Vektoren beweisen,
- können einfache physikalische oder technische Sachverhalte, in denen Beziehungen zwischen Kräften oder Geschwindigkeiten auftreten, mit Hilfe der Vektorrechnung lösen.

Schwerpunkte

- Reaktivierung von Kenntnissen aus der Geometrie
- Übung im Beweisen geometrischer Aussagen (LE A 7)
- Übung im Lösen einfacher Aufgaben aus der Mechanik (LE A 8)

Methodische Hinweise

Für die drei Schwerpunkte wird eine weitgehend selbständige Arbeit der Schüler empfohlen, wobei man mit einfachen geometrischen Beweisaufgaben beginnen und im Anschluß daran zu physikalischen Anwendungen übergehen sollte.

Reaktivierung von Kenntnissen aus der Geometrie Die Reaktivierung kann in der jeweiligen Stunde in Verbindung mit den ausgewählten Beispielen erfolgen. In diesen Stunden sollten auch Aufgaben aus anderen Stoffgebieten gelöst werden, um das grundlegende Wissen und Können der Schüler zu festigen (Verwendung von „Aufgaben für tägliche Übungen…", Seite UH 11ff.).

Übung im Beweisen geometrischer Aussagen (LE A 7) Im Beispiel A 6 (LB 29) wird die gleiche Aussage einmal ohne und einmal mit Hilfe von Vektoren bewiesen. Die Gegenüberstellung der Beweise ist an dieser Stelle nicht das Wesentliche; somit kann auch das Beispiel A 7, das leichter zu überschauen ist, zuerst behandelt werden.
Nach der Behandlung des Beispiels A 7 kann ein Zugang zum Beispiel A 6 bequemer gefunden werden. Empfohlen wird, daß die Schüler den Beweis im Lehrbuch selbständig durcharbeiten und sich danach mit dem Auftrag A 27 (LB 31) beschäftigen. Im Teil a) des Auftrags ist auch zu zeigen, daß $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{AB}$ gilt. Die Teile b) und c) können entsprechend a) erarbeitet werden.
Wird das Beispiel A 6 durchgearbeitet, so ist mit

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}$$

bereits die Beweisidee für das Beispiel A 7, Fall a), gegeben.
Für die Übungsaufgaben sollten u. a. Kenntnisse über die Strahlensätze reaktiviert werden. Die Aufgaben 3 und 5 (LB 31) weisen etwas mehr Schwierigkeiten auf als die Aufgaben 2 und 4. Für die Aufgaben 4 und 5 sollten die Schüler zunächst geeignete Skizzen entwickeln (↗ Bilder 29 und 30):

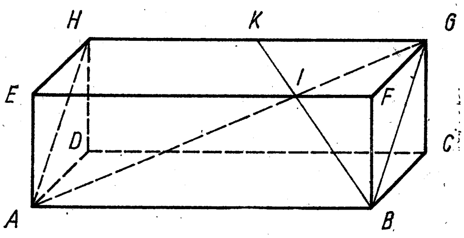
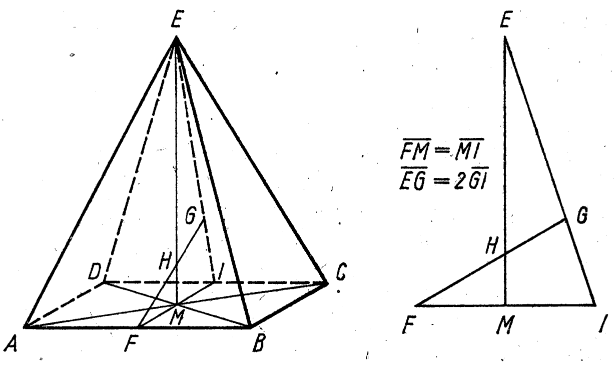


Bild 29



Bilder 30a und b

Aufgabe 4: Durch Fragen können die Schüler angeregt werden, sich Klarheit über die Lage der in der Aufgabe genannten Stücke zu verschaffen.

- In welcher Ebene liegt die Raumdiagonale $\overline{AG}$?
- In welcher Ebene liegt die Gerade durch B und I?
- Wo liegt der Durchstoßpunkt K dieser Geraden durch die Deckfläche $EFGH$?

Die Ebene $ABGH$ kann in einer Tafelskizze farbig markiert werden.

Aufgabe 5: Empfohlen wird eine räumliche Darstellung der Pyramide (Bild 30a), aus der man erkennt, daß die wesentlichen Strecken alle in einer Ebene liegen. Die durch sie gebildete Figur zeichnet man nochmals gesondert (Bild 30b). In einer Fußnote wird auf Seite LB 31 mitgeteilt, daß der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Dreieck im Verhältnis

2:1 teilt. Anstelle dessen können die Schüler vor Lösung der Aufgabe 5 zunächst die Aufgabe 8 (LB 118) gestellt bekommen und sich diese Erkenntnis selbständig erarbeiten. Vielen Schülern hilft es bei solchen Beweisaufgaben, sich die Vektoren als „Wege“ vorzustellen.

Übung im Lösen einfacher Aufgaben aus der Mechanik (LE 8) Kräfte wurden schon mehrfach als Beispiele für Vektoren genannt. Ebenso wie für Pfeilklassen kann man für die an einem Punkt angreifenden Kräfte bzw. Geschwindigkeiten Rechenoperationen einführen, wofür die gleichen Regeln gelten. Außer Kenntnissen über Kräfte und Geschwindigkeiten sollten Kenntnisse aus der Trigonometrie reaktiviert werden (Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck; Sinus- und Kosinussatz u. a.).
Die Schüler sollten weitgehend selbständig Beispiele im Lehrbuch durcharbeiten und die im Anschluß daran formulierten Aufträge lösen, in denen zumeist eine weiterführende oder analoge Aufgabe gestellt wird. Im Unterricht können Schüler die Bearbeitung der Aufträge vortragen und damit nachweisen, inwieweit sie das Beispiel verstanden haben.
Bei allen Aufgaben ist zu beachten, daß die Vektordarstellung vor allem beim Finden des Ansatzes verwendet wird, wobei es i. allg. um das Addieren oder Subtrahieren von Kräften bzw. Geschwindigkeiten geht. Die Berechnungen werden dann mit den Beträgen ausgeführt. Für die Übung ist deshalb das selbständige Finden des Lösungsansatzes durch die Schüler das Hauptziel.

Kontrollaufgaben

(1) LB 31: Nr. 2   (2) LB 118: Nr. 9

Stoffabschnitt 1.2 (12 Std.)
Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren

Im Stoffabschnitt 1.1 wurden ausgehend von Verschiebungen und den sie beschreibenden Pfeilen eine Addition von Vektoren (und eine Subtraktion als Umkehrung dazu) sowie eine Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl erklärt, deren Eigenschaften sich in den Regeln 1^+ bis 4^+ (sowie 1^- bis 5^-) und $1^\bullet$ bis $7^\bullet$ widerspiegeln. Damit wurden die Schüler in ein Modell für einen Vektorraum eingeführt, und im Unterricht kann nun zu einer allgemeinen Definition des Vektorraumes übergegangen werden.
Hauptziel des Stoffabschnittes 1.2 ist die Nutzung geeigneter Bezugssysteme für Vektoren und deren eindeutige Beschreibung durch n-Tupel von Zahlen. Damit werden weitere Voraussetzungen behandelt, um die „Vektorrechnung“ in den folgenden Stoffabschnitten in der analytischen Geometrie anwenden zu können. Man verbleibt dabei weiter im eingeführten Pfeilklassenmodell.
In der folgenden Übersicht sind die einzuführenden Begriffe, die zu behandelnden Sätze und Beziehungen sowie Verfahren zusammengestellt.

Begriffe		Sätze	Anwendungen
Linearkombination zweier nicht paralleler Vektoren ↓	(Einf.)	Satz über die eindeutige Darstellbarkeit eines Vektors als Linearkombination zweier nicht paralleler Vektoren (m. B.)	Zerlegen von Vektoren in zwei Komponenten bei gegebener Basis
Basis der Menge der Vektoren einer Ebene / des Raumes ↓	(Einf.)		
Komponenten eines Vektors bezüglich einer Basis ↓	(Einf.)	Satz über die eindeutige Darstellbarkeit eines Vektors im Raum als Linearkombination dreier nicht komplanarer Vektoren (o. B.)	Zerlegen von Vektoren in drei Komponenten bei gegebener Basis
Einheitsvektor	(Def.)	Zusammenhang zwischen dem Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ und den Koordinaten des Punktes P (o. B.)	
Orthonormierte Basis $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ↓	(Einf.)	Beziehung zwischen den Koordinaten eines Punktes P und dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ in einer Ebene und im Raum (m. B.)	Berechnen des Betrages eines in Koordinatendarstellung gegebenen Vektors
Kartesisches Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$	(Einf.)	Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes P, dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ und dem Winkel $\sphericalangle(\vec{i}; \overrightarrow{OP})$ in einer Ebene (m. B.)	Berechnen der Länge des Abstandes zweier Punkte, die durch ihre Koordinaten gegeben sind
Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$	(Einf.)		
Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP}$ bez. $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ bzw. $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$	(Einf.)		
Winkel zwischen zwei Vektoren	(Einf.)	Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes P, dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ und den Winkeln $\sphericalangle(\vec{k}; \overrightarrow{OP})$ und $\sphericalangle(\vec{i}; x\vec{i}+y\vec{j})$ im Raum (m. B.)	
Vektorraum	(Def.)	Nachweis der Vektorraumeigenschaften für einige Beispiele	
Vektor	(Def.)		

Hinweis auf Varianten der Stoffverteilung im Stoffabschnitt 1.2

Im Lehrbuch wird eine allgemeine Definition des Vektorraumes in der letzten Lerneinheit des Stoffabschnittes (LE A 13) gegeben. Da hierfür keine Kenntnisse über die Komponenten- und Koordinatendarstellung der durch Pfeile beschreibbaren Vektoren erforderlich sind, kann die Definition des Vektorraumes auch unmittelbar im Anschluß an den Stoffabschnitt 1.1 behandelt werden. Danach wendet man sich erneut dem speziellen Vektorraummodell zu, das für die Anwendung in der analytischen Geometrie geeignet ist.
Im Lehrbuch wird bei der Behandlung geeigneter Bezugssysteme für die arithmetische Beschreibung von Vektoren zunächst von der prinzipiellen Möglichkeit der eindeutigen Zerlegung eines Vektors bezüglich einer Basis $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ ausgegangen und auf dieser Grundlage das kartesische Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ eingeführt, also ein deduktives Vorgehen gewählt. Eine andere Variante besteht darin, daß man von den Kenntnissen der Schüler über die Darstellung von Punkten in einem Koordinatensystem und über die Möglichkeit der beliebigen Wahl eines Repräsentanten für einen Vektor ausgeht, Vektoren in einem Koordinatensystem durch geeignete Repräsentanten darstellt und daraus Möglichkeiten für die arithmetische Beschreibung von Vektoren gewinnt. Danach wird dieses Vorgehen begründet. Der zuerst genannte Weg ist theoretisch anspruchsvoller und im Lehrbuch logisch zwingend dargestellt. Die zweite Variante baut in stärkerem Maße auf vorhandenen Kenntnissen auf und schafft zunächst inhaltliche Vorstellungen. Diese Variante wird in der Unterrichtshilfe beschrieben. Sie betrifft nur die LE A 9.

Lerneinheit 9 **(3 Std.)**
Komponenten- und Koordinatendarstellung der Vektoren einer Ebene

LB 36 bis 41

Hauptanliegen ist die Klärung der Existenz von Bezugssystemen (zunächst in einer Ebene), in denen Vektoren durch Zahlenpaare eindeutig beschrieben werden können.

Ziele

Die Schüler

- kennen den Begriff „Linearkombination zweier nicht paralleler Vektoren“ und können Linearkombinationen konstruktiv und rechnerisch ermitteln,
- kennen den Begriff „Basis der Menge der Vektoren einer Ebene“ und den Satz über die Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit eines Vektors bezüglich einer Basis $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ (▶ A 1),
- kennen den Begriff „Kartesisches Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$“ und die Begriffe „Einheitsvektor“ und „orthonormierte Basis“,
- kennen die Begriffe „Komponenten . . .“ und „Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis $\{\vec{a}; \vec{b}\}$“,
- können die Komponenten und Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ angeben und wissen, daß die Zerlegung eindeutig ist,

- kennen den Begriff „Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ eines Punktes P" bezüglich des Koordinatensystems $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$,
- kennen den Begriff „Linearkombination zweier nicht paralleler Vektoren" und können Linearkombinationen konstruktiv und rechnerisch ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung der Nutzung von Bezugssystemen für die Beschreibung von Vektoren durch Zahlen
- Erarbeitung von Möglichkeiten der Darstellung von Vektoren in einem rechtwinkligen Koordinatensystem

2. Stunde

- Einführung der Begriffe, die in Verbindung mit dem kartesischen Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ stehen, und erste Übungen
- Erarbeitung des Satzes über die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors bezüglich einer Basis $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ (▷ A 1)

3. Stunde

- Erarbeitung der Regeln für das Rechnen mit Koordinaten von Vektoren
- Übungen im Bestimmen von Komponenten und Koordinaten von Vektoren bezüglich einer Basis $\{\vec{a}; \vec{b}\}$, insbesondere bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, und im konstruktiven und rechnerischen Ermitteln von Linearkombinationen von Vektoren

Dem Vorschlag der Verteilung der Schwerpunkte folgend sollten

- *in der ersten Stunde* nach der Motivierung eine *gründliche inhaltliche Erarbeitung* der Darstellungsmöglichkeit für Vektoren erfolgen, wobei man weitgehend von den Kenntnissen der Schüler über die Verwendung von rechtwinkligen Koordinatensystemen ausgehen kann,
- *in der zweiten Stunde* alle erforderlichen *Begriffe eingeführt* und die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors nach einer beliebig gegebenen Basis und damit der Komponenten- und Koordinatendarstellung im Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ nachgewiesen werden,
- *in der dritten Stunde* die Regeln für das Rechnen mit Koordinaten von Vektoren erarbeitet und auf vielfältige Weise *gefestigt* werden.

Bei der Wahl dieser Variante ist zu beachten, daß das Vorgehen für die Schüler einfach und leicht verständlich ist, rasch zum Ziel führt (Darstellung von Vektoren in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$), aber die Schüler nur in geringem Maße motiviert werden, danach noch den Nachweis für die Eindeutigkeit der Darstellung eines Vektors bezüglich einer beliebigen Basis $\{\vec{a}; \vec{b}\}$ erbringen zu müssen.

Methodische Hinweise

Motivierung der Nutzung von Bezugssystemen für die Beschreibung von Vektoren durch Zahlen · Die Schüler können selbständig den Abschnitt im Lehrbuch (LB 35) durchlesen und danach die Frage beantworten:

In welcher Weise wurden bisher Vektoren dargestellt bzw. in Aufgaben vorgegeben? (gerichtete Strecken in geometrischen Figuren; Pfeile auf Rasterpapier)

In dieser Phase können Aufgaben aus den bisherigen Lerneinheiten einbezogen werden. In bestimmter Weise ist man dabei stets auf Zeichnungen angewiesen. Nunmehr wird eine Darstellung mit Hilfe von Zahlen gesucht, um auf dem häufig vorteilhafteren algebraischen Wege mit Vektoren operieren zu können.

Erarbeitung von Möglichkeiten der Darstellung von Vektoren in einem rechtwinkligen Koordinatensystem Im Unterrichtsgespräch können folgende Schritte durchlaufen werden:

1. Die Schüler haben in den vorangehenden Klassenstufen vor allem im Zusammenhang mit der Behandlung von Funktionen das rechtwinklige Koordinatensystem als unentbehrliches Hilfsmittel kennengelernt und verwendet. Punkte werden durch geordnete Zahlenpaare in einem Koordinatensystem eindeutig beschrieben. Daran sollte der Lehrer erinnern und die Schüler auffordern, einen Pfeil als Repräsentanten eines Vektors $\vec{p}$, der durch ein geordnetes Punktepaar bestimmt ist, in ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem einzuzeichnen und durch Zahlen zu beschreiben.

Beispiel (↗ Bild 31)

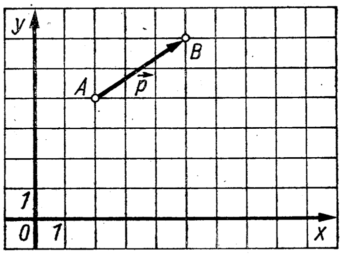


Bild 31

Der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ läßt sich beschreiben durch das geordnete Punktepaar [(2; 4); (5; 6)].

2. Problem: Der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ist nur *ein* Repräsentant. Pfeile, die andere Repräsentanten des gleichen Vektors sind, werden durch andere Punktepaare und somit andere Paare von Zahlenpaaren beschrieben. Läßt sich eine ausgezeichnete Lage finden? Entsprechend Bild 32 sollten die Schüler weitere Repräsentanten des Vektors $\vec{p}$ einzeichnen, sie durch geordnete Zahlenpaare beschreiben und nach einem geeigneten Repräsentanten suchen, für den die Beschreibung relativ einfach wird.
3. Wählt man den im Koordinatenursprung O angesetzten Pfeil, so kann man den Vektor durch das Paar von Zahlenpaaren [(0; 0); (3; 2)] beschreiben.
   Für jeden Vektor läßt sich offenbar ein in O ansetzender Pfeil finden. Der Anfangspunkt O dieser Pfeile würde dann stets durch das Zahlenpaar (0; 0), der Endpunkt P durch das Zahlenpaar $(x_p; y_p)$ beschrieben. Es genügt dann eine Angabe in noch festzulegender Schreibform, die nur die Zahlenwerte des zweiten Zahlenpaars enthält (↗ Bild 33).
4. Anknüpfend an bisherige Kenntnisse der Schüler über das Addieren von Vektoren kann der Vektor $\vec{p}$ als Summe zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgefaßt werden, die durch den Koordinatenursprung O und die Fußpunkte der Lote von P auf die Koordinatenachsen bestimmt sind:
   $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ (↗ Bild 34).
   Bekannt ist den Schülern, daß für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Summe $\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}$ eindeutig bestimmt ist. Offen ist jedoch die Frage, ob die Zerlegung $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ stets eindeutig bestimmt, für $\vec{p}$ also auf diese Weise die Darstellung eindeutig möglich ist.

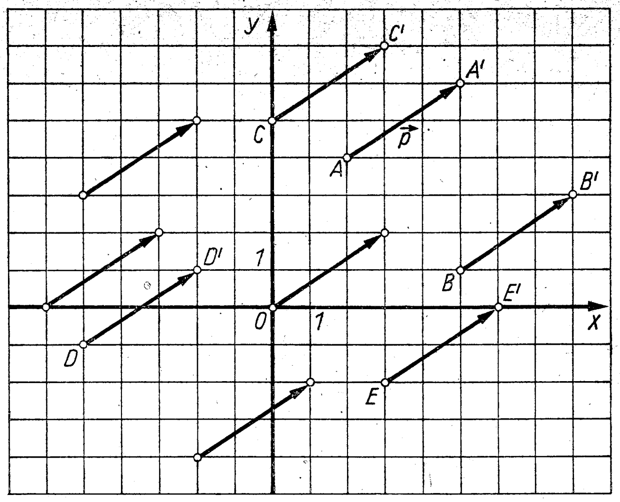


Bild 32

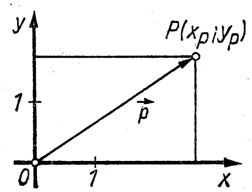


Bild 33

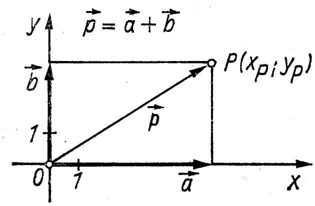


Bild 34

5. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können ihrerseits als Vielfache von Vektoren der Länge 1 aufgefaßt werden, die mit $\vec{i}$ und $\vec{j}$ bezeichnet seien.
   Dann läßt sich $\vec{p}$ darstellen als $\vec{p} = x_p\vec{i} + y_p\vec{j}$ (↗ Bild 35). An dieser Stelle können bereits die Begriffe „Komponenten ..." und „Koordinaten eines Vektors" (bezogen auf das durch O, $\vec{i}$ und $\vec{j}$ bestimmte rechtwinklige Koordinatensystem) eingeführt werden. Es kann auch schon der Zusammenhang zwischen den Koordinaten des durch zwei Punkte M und N bestimmten Vektors $\vec{p}$ und den Koordinaten des in O ansetzenden Repräsentanten von $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ ermittelt werden. (Lehrbuchbilder A 68 und A 69 (LB 38) vergleichen lassen!)

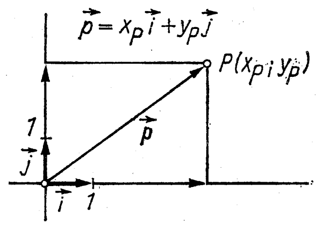


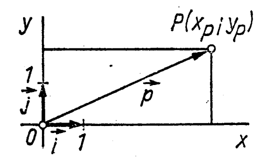
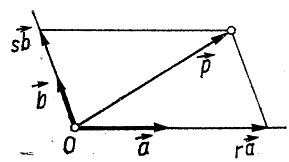
Bild 35

6. Erste Übungen im Angeben von Koordinaten von vorgegebenen Vektoren (Aufgaben 1, 2) und im Einzeichnen von Vektoren nach vorgegebenen Koordinaten in ein Koordinatensystem. Bei Aufgaben der zweiten Art muß nicht notwendigerweise ein Pfeil vom Ursprung aus eingezeichnet werden!

Einführung der Begriffe Nachdem hinreichend inhaltliche Vorstellungen über das Vorgehen beim Beschreiben von Vektoren durch Zahlen geschaffen worden sind, können nun alle zugehörigen Begriffe und Bezeichnungen im Zusammenhang eingeführt und übersichtlich und durch Zeichnungen gestützt zusammengestellt werden.

Wählt man die oben dargestellte Variante, so sollte man sich bei dem nachstehend abgebildeten Tafelbildvorschlag zunächst auf die linke Spalte beschränken. Die verallgemeinerten Begriffe und Beziehungen können ergänzt werden, wenn die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors bezüglich einer beliebigen Basis $\{\vec a, \vec b\}$ (▷ A 1) nachgewiesen wurde.
Wählt man den Lehrbuchweg, so sollte zunächst die rechte Spalte notiert werden. Danach können die Schüler den Auftrag erhalten, die Spezialisierung auf eine orthonormierte Basis selbständig zu ergänzen.

Tafelbild (farbige Kreide verwenden!):

Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren einer Ebene			
$\vec p$ ist zerlegt bezüglich der senkrecht aufeinander stehenden Einheitsvektoren $\vec i$ und $\vec j$		$\vec p$ ist zerlegt bezüglich der nicht parallelen Vektoren $\vec a$ und $\vec b$	
Bild 36		Bild 37	
$\{\vec i; \vec j\}$	orthonormierte Basis	$\{\vec a; \vec b\}$	Basis
$\vec i; \vec j$	orthonormierte Basisvektoren	$\vec a; \vec b$	Basisvektoren
$\vec p = x_p\vec i + y_p\vec j$	Linearkombination von $\vec i$ und $\vec j$	$\vec p = r\vec a + s\vec b$	Linearkombination von $\vec a$ und $\vec b$
$x_p\vec i; y_p\vec j$	Komponenten von $\vec p$ bezüglich $\{\vec i, \vec j\}$	$r\vec a; s\vec b$	Komponenten von $\vec p$ bezüglich $\{\vec a, \vec b\}$
$x_p; y_p$	Koordinaten von $\vec p$ bezüglich $\{\vec i, \vec j\}$	$r; s$	Koordinaten von $\vec p$ bezüglich $\{\vec a, \vec b\}$

Im Lehrbuch werden auf der Seite 37 mehrere Kurzschreibweisen für Vektoren in Koordinatendarstellung genannt. Die Zeilen- bzw. Spaltenschreibweise wird bei Anwendungen in der analytischen Geometrie (↗ Stoffabschnitt 1.3) mit Vorteil verwendet. In der Literatur findet man anstelle der Kurzform $\vec p(x; y)$ auch häufig $\vec p = (x; y)$. Diese Schreibweise ist günstig für das Einsetzen in Vektorgleichungen beim Übergang zu den Koordinaten. Die Spaltenschreibweise ist bei Behandlung des Skalarproduktes ungünstig, da die Schüler keine Kenntnisse über Zeilen- und Spaltenmatrizen sowie über die Matrizenmultiplikation besitzen.

Erarbeitung des Satzes über die Eindeutigkeit der Zerlegung Im vorgeschlagenen Unterrichtsgang wird stillschweigend angenommen, daß eine Zerlegung eines Vektors bezüglich einer gegebenen Basis stets eindeutig möglich sei. Der Nachweis muß jedoch noch erbracht werden. Der Sachverhalt ist im Satz A 1 formuliert.

Damit die Schüler die Beweisnotwendigkeit einsehen, können folgende Betrachtungen angestellt werden (mit Aufgaben verbunden):
Eine reelle Zahl läßt sich auf vielerlei Weise als Summe zweier Zahlen darstellen. Gibt man zwei Zahlen vor, z. B. 2 und 3, so läßt sich die Zahl 7 durch Benutzen von 2 und 3 ebenfalls auf vielerlei Weise darstellen, z. B.

$7 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ oder

$7 = 11 \cdot 2 - 5 \cdot 3$ usw.

Wählt man in einer Ebene drei nicht parallele Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, so läßt sich ein Vektor $\vec{p}$ offenbar auch auf verschiedene Weise als Summe von Vielfachen dieser Vektoren (als Linearkombination) angeben (↗ Beispiel im Bild 38).

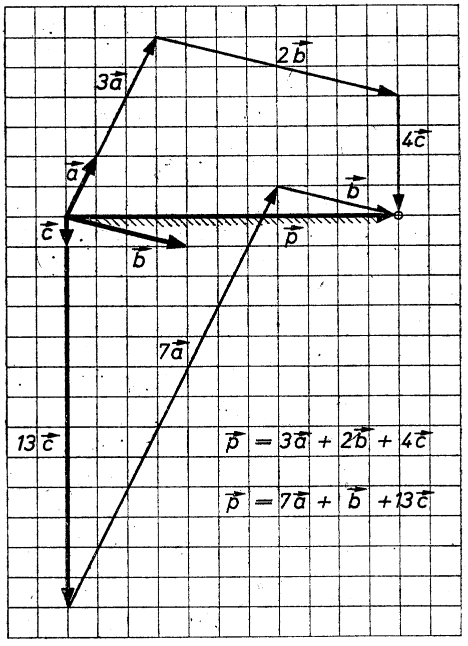


Bild 38

Die selbstverständlich erscheinende Aussage im Satz A 1 wird also keineswegs durch Analogiebetrachtungen zu den Zahlen oder zum Zerlegen von Vektoren in mehr als zwei Vektoren gestützt. Der indirekte Beweis kann von den Schülern im Lehrbuch (LB 36f.) selbständig durchgearbeitet werden.
Im Lehrbuch wird dieser Satz (mit Beweis) nahezu an den Anfang gestellt und damit ein vorwiegend deduktives Vorgehen gewählt. Dabei ergibt sich die Eindeutigkeit der Vektordarstellung im orthonormierten Koordinatensystem als logische Folgerung.

Erarbeitung der Regeln für das Rechnen mit Koordinaten von Vektoren Die Regeln 3. und 4. (LB 40) können von den Schülern selbständig erarbeitet werden, wenn man ihnen folgenden Auftrag (bezogen auf $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$) erteilt:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (3; 1)$ und $\vec{b} = (2; 3)$. Bilden Sie konstruktiv und rechnerisch $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und $3\vec{a}$! Nach welchen Regeln kann man offenbar mit Koordinaten von Vektoren rechnen?

Sowohl diese Regeln als auch die übrigen sollten sich die Schüler gegebenenfalls durch weitere Beispiele, die sich auch auf nicht orthonormierte Basen beziehen, anhand von Skizzen verdeutlichen.

Beispiel (↗ Bild 39)

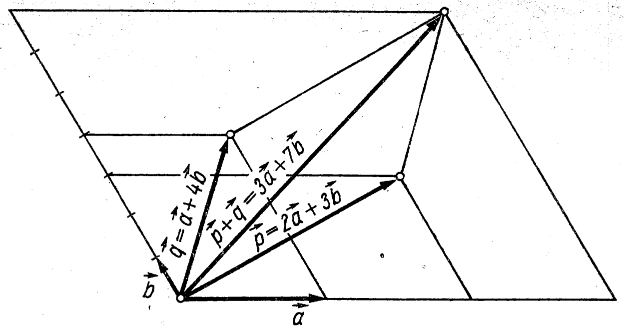


Bild 39

Übungen

- Bestimmen von Komponenten und Koordinaten von Vektoren bezüglich einer Basis $\{\vec{a}, \vec{b}\}$: ■ A 11, ■ A 12 (LB 37f.); ● A 34, ● A 33 (LB 38,36); Aufgaben 3 und 4 (LB 41).
- Bestimmen von Koordinaten für vorgegebene Vektoren und Darstellen von Vektoren, die durch ihre Koordinaten gegeben sind (bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$): ● A 35 sowie Aufgaben 5 und 6.
- Konstruktives und rechnerisches Ermitteln von Linearkombinationen: Aufgabe 6 (LB 41). Als Anleitung kann den Schülern das Beispiel A 14 empfohlen werden.

Kontrollaufgaben

(1) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ (↗ Bild 40)! Lösung: $\vec{p} = (5; 2)$

(2) Bestimmen Sie konstruktiv den Vektor $\vec{p}$, von dem die Komponenten $3\vec{a}$ und $-2\vec{b}$ bezüglich der Basis $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ gegeben sind! (Vorgabe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf Karopapier, ↗ Bild 41)

(3) Bestimmen Sie $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ für $\vec{a} = (7; -4)$, $\vec{b} = (0,5; 1,5)$, $\vec{c} = (18; -3)$! Lösung: $\vec{p} = (-0,5; 2)$

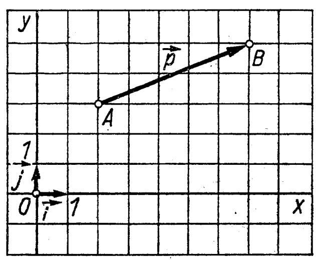


Bild 40

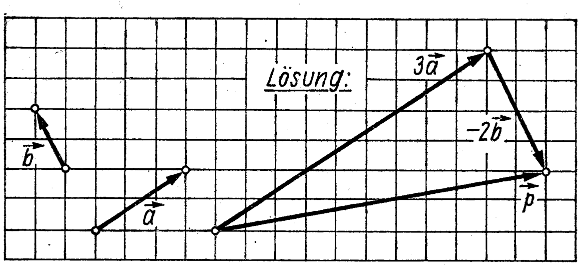


Bild 41

Lerneinheit 10 (2 Std.)
Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren im Raum
LB 41 bis 46

In diesen beiden Unterrichtsstunden werden die Methoden der Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren einer Ebene auf den Raum übertragen. Es treten dem Wesen nach nur analoge Begriffsbildungen auf. Je gründlicher die Begriffe und Verfahren in den Unterrichtsstunden der vorangehenden Lerneinheit angeeignet wurden, desto stärker kann sich der Unterricht nunmehr auf die Schwierigkeiten konzentrieren, die sich bezüglich der räumlichen Vorstellung für die Schüler ergeben. Ein Schwerpunkt der methodischen Arbeit besteht deshalb in der Verwendung geeigneter Mittel zur Veranschaulichung.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß in Analogie zur Komponentendarstellung von Vektoren einer Ebene ein Vektor im Raum eindeutig in Komponenten bezüglich dreier nicht komplanarer Vektoren zerlegt werden kann,
- kennen insbesondere das orthonormierte Koordinatensystem $\{O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ im Raum und
- können die Komponenten und Koordinaten von Vektoren im Raum bezüglich $\{O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bestimmen, sich die Lage von Ortsvektoren, deren Koordinaten gegeben sind, vorstellen und sie darstellen.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Einführung von Linearkombinationen von Vektoren des Raumes und der Begriffe „komplanare ...“ bzw. „nicht komplanare Vektoren“ [● A 38 und Aufgabe 2 (LB 45)]
- Übertragung der Begriffe und Methoden der Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren einer Ebene auf den Raum und erste Übungen [▷ A 2 (LB 42), ■ A 15 (LB 43), ● A 40]

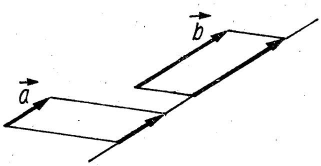
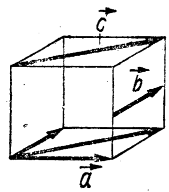
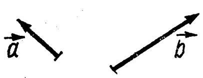
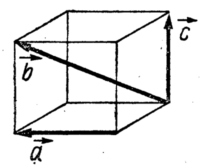
2. Stunde
- Übungen im Bestimmen von Komponenten und Koordinaten von Vektoren im Raum und im Darstellen von Ortsvektoren nach gegebenen Koordinaten in $\{O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (Aufgaben 3 bis 6)
- Zusammenfassung und Gegenüberstellung der Begriffe und Darstellungsformen in Ebene und Raum (LB 44f.)

Methodische Hinweise

Einführung von Linearkombinationen von Vektoren des Raumes Nachdem begründet wurde, daß für Vektoren im Raum in gleicher Weise wie für Vektoren einer Ebene Möglichkeiten gefunden werden müssen, sie mit Zahlen beschreiben zu können, werden an Beispielen Zerlegungen von Vektoren im Raum gebildet. Selbständig sollten die Schüler den Auftrag A 38 bearbeiten. Damit wird auf das Verständnis des Zerlegungssatzes hingearbeitet.

In einer Ebene ließen sich Vektoren stets eindeutig nach zwei nicht parallelen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zerlegen. Für den Raum ist dazu eine Analogiebetrachtung anzustellen, wobei die gegenseitige Lage von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ interessiert. Dazu eignet sich folgende Gegenüberstellung:

Tafelbild (Folie):

Ebene	Raum
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ **parallel**  Bild 42 Es gibt Repräsentanten, die auf ein und derselben Geraden liegen.	$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar**  Bild 43 Es gibt Repräsentanten, die in ein und derselben Ebene liegen.
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ **nicht parallel**  Bild 44 Es gibt keine Repräsentanten, die auf ein und derselben Geraden liegen.	$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **nicht komplanar**  Bild 45 Es gibt keine Repräsentanten, die in ein und derselben Ebene liegen.

Durch farbige Darstellung kann die Anschaulichkeit erhöht werden. Wichtig ist, daß die Schüler die Pfeile in den Abbildungen stets als Repräsentanten der betreffenden Vektoren auffassen. Zur Festigung wird die Aufgabe 2 (LB 45) empfohlen.

Übertragung der Darstellung von Vektoren einer Ebene auf den Raum Zunächst ist der Satz über die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors $\vec{p}$ nach nicht komplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zu formulieren (▷ A 2) und gegebenenfalls an einem Beispiel zu interpretieren (LB 42). In Verbindung damit ist der Begriff Basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ für die Zerlegung von Vektoren

im Raum einzuführen und zu festigen. Den Schülern ist erneut bewußt zu machen, daß die im Zerlegungssatz enthaltene Aussage über die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Vektors im Raum bezüglich einer gegebenen Basis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ die entscheidende Grundlage für die Möglichkeit der Darstellung von Vektoren mit Hilfe von Zahlen-*n*-Tupeln bezüglich eines Koordinatensystems ist.
Unter Verwendung der Lehrbuchbilder A 73 (LB 42) und A 75 (linke Seite) sollten die Schüler selbständig in Analogie zu der für die Darstellung von Vektoren einer Ebene entwickelten Übersicht [↗ 1. Schwerpunkt der 2. Stunde der vorangehenden Lerneinheit (UH 57f)] die entsprechenden Begriffe und Bezeichnungen für die Darstellung von Vektoren im Raum zusammenstellen. Zur Erstfestigung sollten die Schüler das Beispiel A 15 selbständig durcharbeiten und danach den Auftrag A 40.
Neben Abbildungen (im Lehrbuch, an der Tafel usw.) sollten zur Veranschaulichung der Beziehungen im Raum in diesen und den folgenden Unterrichtsstunden vor allem Körperkantenmodelle (möglichst großen Ausmaßes!) verwendet werden, an denen bestimmte Strecken Vektoren darstellen (möglichst haftende Pfeile anbringen, farbige Markierungen vornehmen!). Dazu kann auch das in vielen Schulen vorhandene Vektorgerät eingesetzt werden, wenn es stabil montiert wird. Schließlich leistet auch eine Raumecke im Unterrichtsraum gute Dienste (Ecke links unten vorn als Ursprung), Zeigestöcke kann man zur Veranschaulichung von Vektoren verwenden. Auch die Schüler sollten am Platz Körpermodelle (z. B. aus dem Stereometriebaukasten) oder selbst hergestellte Kantenmodelle (z. B. im Produktionsbetrieb gefertigte) verwenden.

Übungen Die Übungen sollten drei Aufgabenstellungen umfassen.

1. Bestimmen von Komponenten eines Vektors nach einer nicht orthonormierten Basis. Aufgaben 3 und 4 (LB 45); Skizze anfertigen lassen (↗ Bild 46). Den Schülern kann der

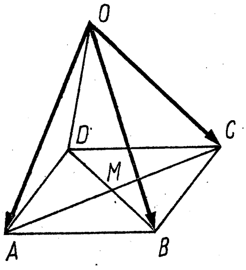


Bild 46

Hinweis gegeben werden, daß bei der Zerlegung eines Vektors nach den Basisvektoren nicht notwendigerweise alle Basisvektoren „gebraucht" werden, z. B. wenn der darzustellende Vektor und zwei Basisvektoren komplanar sind, etwa

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB};$$

ausführlich geschrieben

$$\overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB} + 0 \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Das ist die Analogie zu dem Fall in der Ebene, daß der darzustellende Vektor zu einem der Basisvektoren parallel ist.

2. Darstellen von Ortsvektoren in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Aufgabe 5 (LB 46): Dazu sollen sich die Schüler ein geeignetes Bild eines räumlichen Koordinatensystems anfertigen. Um das Eintragen von Punkten zu erleichtern, sollte man nicht die Kavalierperspektive ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$) verwenden, sondern auf Karopapier eine schräge Parallelprojektion mit $\alpha = 45°$ und $q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ zeichnen; denn dann kann man die Karoeinteilung auch für die Komponente in Richtung der x-Achse verwenden. Um die Bilder überschaubar werden zu lassen, sollten die Einheiten nicht zu klein gewählt (2 cm) und evtl. für jede Darstellung ein neues Koordinatensystem benutzt werden. Die Raumvorstellung wird unterstützt, wenn z. B. die Ortsvektoren als Raumdiagonalen eines Quaders (ggf. als Diagonalen eines Rechteckes) eingezeichnet werden (↗ Bild 47). Bekanntlich

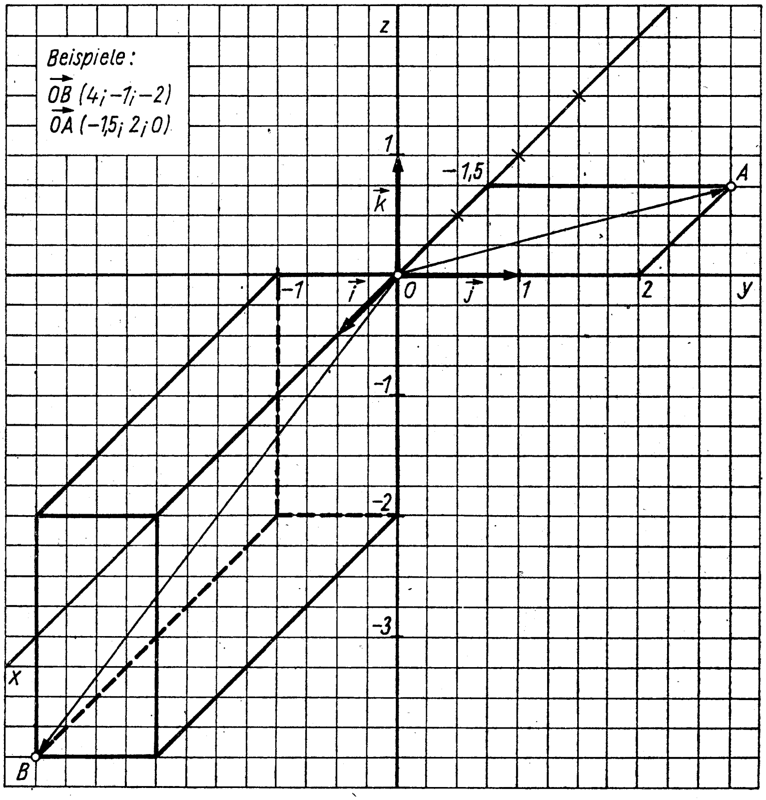


Bild 47

läßt sich ein räumliches Koordinatensystem zur Veranschaulichung auf verschiedene Weise auf ein Blatt zeichnen, und die Darstellungen sind in gleicher Weise verwendbar. Man sollte im Unterricht jedoch diejenige Lage der Basisvektoren bevorzugen, die auch in den Abbildungen im Lehrbuch verwendet wurde. Bei Verwendung der Folie „Räumliches kartesisches Koordinatensystem" (SKUS-Katalog Nr. 06 752 356) ist die veränderte Symbolik zu beachten.

3. Bestimmen von Komponenten und Koordinaten gegebener Ortsvektoren bezüglich $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
   Aufgabe 6 (LB 46): Die Schüler zeichnen einen Quader entsprechend Lehrbuchbild A 74 (LB 43) in ihre Hefte, markieren die Einheiten auf den Achsen und zeichnen die erforderlichen Diagonalen.

Zusammenfassung Hierzu kann die Gegenüberstellung im Lehrbuch (LB 44f.) verwendet werden. Die Schüler interpretieren die allgemeinen Erklärungen und Bezeichnungen durch selbstgewählte Beispiele und Skizzen.

Kontrollaufgaben

(1) Bestimmen Sie im Lehrbuchbild A 72 (LB 41) drei komplanare und drei nicht komplanare Vektoren!

(2) Stellen Sie in einem Koordinatensystem $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ die Vektoren $\overrightarrow{OA} = (4; 2; -3)$ und $\overrightarrow{OB} = (0; -2; 1{,}5)$ dar!

(3) Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\overrightarrow{OM}$ und $\overrightarrow{ON}$ im Lehrbuchbild A 74 (LB 43), wenn M Mittelpunkt von $\overline{EF}$ und N Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist!

(4) Was verstehen Sie unter einer Basis der Menge der Vektoren des Raumes? Begründen Sie, weshalb die Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ in einem orthonormierten Koordinatensystem eine geeignete Basis der Menge der Vektoren des Raumes bilden!

Lerneinheit 11 (2 Std.)
Abstand zweier Punkte; Betrag eines Vektors

LB 46 bis 48

Mit Hilfe ihrer Kenntnisse über den Satz des PYTHAGORAS können die Schüler Längen von Abständen von Punkten einer Ebene ermitteln, die durch ihre Koordinaten gegeben sind. Das Verfahren wird zur Berechnung des Betrages von Vektoren verwendet. Man kann die Betrachtungen auch sofort im Raum durchführen und die Schüler selbständig auf eine Ebene spezialisieren lassen.

Ziele

Die Schüler

- wissen, wie man die Länge des Abstands zweier Punkte aus ihren Koordinaten berechnen kann,
- wissen, daß der Betrag eines Vektors die Länge des Abstandes zweier Punkte ist, durch die ein Repräsentant des Vektors in einem Koordinatensystem angegeben werden kann,
- können Längen von Abständen von Punkten bzw. Beträge von Vektoren in einer Ebene und im Raum berechnen und das Verfahren auf einfache planimetrische und stereometrische Aufgaben anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Formeln für die Berechnung des Abstands zweier Punkte bzw. des Betrages eines Vektors in einer Ebene (● A 41) und im Raum (● A 42)

2. Stunde

– Übungen und Anwendungen

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Formeln für den Abstand zweier Punkte bzw. des Betrages eines Vektors einer Ebene Im allgemeinen dürften alle Voraussetzungen dafür gegeben sein, daß sich die Schüler selbständig die Formeln erarbeiten, wobei etwa in folgenden Schritten vorgegangen werden kann:

(1) SSA: Bearbeiten des Auftrags A 41 (LB 46)
(2) UG: Vergleichen der Resultate
(3) Selbständiges Aufstellen einer allgemeinen Formel für die Berechnung des Abstandes zweier Punkte aus ihren Koordinaten (ohne Verwendung des Lehrbuches)
(4) Selbständiges Arbeiten mit dem Lehrbuch (LB 46)! Vergleichen der gewonnenen Formel mit der Beziehung (4); Durcharbeiten des Abschnittes 1.
(5) Abschließend beantworten die Schüler die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Abstand zweier Punkte und dem Betrag des durch sie bestimmten Vektors sowie nach dem Betrag des Ortsvektors $\overrightarrow{OP} = (x_p; y_p)$.

Auch die Formeln (6) bis (8) für den Raum sollten die Schüler selbständig herleiten (Bearbeitung des Auftrags A 42, LB 47). Hinweis für die Schüler: in zwei Schritten vorgehen wie beim Ermitteln der Länge der Raumdiagonale eines Quaders.
Es ist auch möglich, daß die Schüler sofort selbständig die Formeln für den Raum herleiten und danach für eine Ebene spezialisieren. Die Schüler können auch alle Betrachtungen, die im Lehrbuch auf Seite 46f. für eine Ebene geführt werden, auf den Raum übertragen, in dieser Weise niederschreiben und so ebenfalls zu den Formeln (6) bis (8) gelangen.

Übungen und Anwendungen Bei den Übungen werden zur Veranschaulichung zeichnerische Darstellungen zu Hilfe genommen. Der Sinn der Beschreibung von Vektoren mit Hilfe von Zahlen besteht aber letztlich darin, daß man dadurch mit ihnen rechnen kann und sie nicht immer verbildlichen muß. Diesen Schritt müssen die Schüler gehen, wenn man größere Zahlen für die Koordinaten vorgibt, wodurch sich das zeichnerische Darstellen i. allg. verbietet (wie z. B. in der Aufgabe 4b). Wo es ohne größeren Aufwand möglich ist, sollte dennoch immer wieder auf die Anschauung zurückgegangen werden.
In Verbindung mit dem Lösen der Aufgaben 3 und 4 (LB 47) können Kenntnisse der Schüler über bisher bekannte Verfahren zur Berechnung von Seitenlängen von Dreiecken wiederholt werden. Bisher war das nur möglich, wenn wenigstens drei Stücke (Seiten oder Winkel), darunter wenigstens eine Seitenlänge, gegeben waren (Anwenden trigonometrischer Sätze). Das Berechnen aus den Koordinaten der Eckpunkte muß als ein qualitativ neues Verfahren erkannt werden. Hier lernen die Schüler erste einfache Beispiele analytischer Geometrie kennen. Gegebenenfalls können in Verbindung damit historische Betrachtungen einbezogen werden (Hinweis auf den französischen Mathematiker DESCARTES, vgl. Fußnote LB 43).
Für ein Beispiel (etwa Aufgabe 4c) sollte ebenfalls noch eine Veranschaulichung vorgenommen werden, obwohl sie etwas aufwendiger ist.
Die Aufgabe 5 (LB 47) können die Schüler lediglich durch Berechnung lösen.
Bei der Behandlung der Aufgabe 6 können die Schüler unabhängig von der speziellen Lage des gegebenen Dreiecks im Koordinatensystem eine Skizze verwenden, an der sie sich die zu berechnenden Stücke verdeutlichen (↗ Bild 48).

Zu berechnen ist $|\overrightarrow{AM}|$.
Man kann die Koordinaten des Ortsvektors des Punktes M durch Anwenden der Regeln 3 und 4 (LB 40) aus $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})$ ermitteln und danach den Abstand der Punkte A und M nach (7) berechnen.
Es ist auch möglich, zunächst die Koordinaten von $\overrightarrow{AM}$, z. B. aus

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

oder

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

oder

$$\overrightarrow{AM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

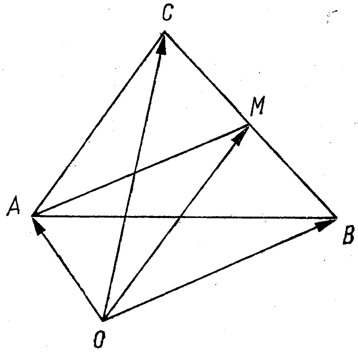


Bild 48

durch Anwenden der Beziehungen (6) (LB 44) und der Regeln 3 und 4 (LB 40) zu berechnen und daraus nach (8) (LB 47) den Betrag $|\overrightarrow{AM}|$ zu bestimmen. Die Schüler sollten angehalten werden, selbständig einen Weg zu finden. Beim Vergleich der Ergebnisse sollten auch die gewählten Wege mit verglichen werden.
Für die Lösung der Aufgabe 7 muß zunächst erarbeitet werden, daß durch $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$ ein Einheitsvektor bestimmt ist, der parallel zu $\vec{a}$ ist.
Die Aufgaben 8 und 9 erfordern umfangreichere Berechnungen. Für die Aufgabe 8 kann eine Skizze angefertigt werden, mit der gleichzeitig eine Hilfe für das Lösen der Aufgabe 9 zur Hand ist.

Kontrollaufgaben

(1) LB 47: Nr. 4b (2) LB 48: Nr. 9c

Lerneinheit 12 (3 Std.)

Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes und dem Betrag seines Ortsvektors; der Winkel zwischen Vektoren

LB 48 bis 54

Die Erarbeitung von Darstellungsmöglichkeiten für Vektoren wird in den folgenden Unterrichtsstunden fortgesetzt. Die Schüler können einen Punkt im Raum durch seine kartesischen Koordinaten beschreiben. Nunmehr soll ein Punkt mit Hilfe des Betrages seines Ortsvektors und bestimmter Winkel zwischen dem Ortsvektor und den Basisvektoren erfaßt werden. Es geht also um den Zusammenhang zwischen diesen „Polarkoordinaten“ und den kartesischen Koordinaten, also um Umrechnungsformeln. Das Motiv liegt auch hier in der Bereitstellung eines geeigneten Instrumentariums für die Anwendung bei der analytischen Behandlung geometrischer Aufgaben und entsprechender Berechnungen vor allem im Stoffabschnitt 1.5. Als spezifische Motivierung bieten sich hier geographische, astronomische wie auch militärtechnische Fragestellungen an.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Beziehungen zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes einerseits und dem Betrag seines Ortsvektors und den Winkeln $\sphericalangle(\vec{k}, \overrightarrow{OP})$ sowie $\sphericalangle(\vec{i}, x\vec{i} + y\vec{j})$ andererseits,
- kennen den Begriff des orientierten und des nicht orientierten Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$,
- können Koordinaten von Punkten, Beträge von Ortsvektoren und Größen von Winkeln zwischen Vektoren mittels der erarbeiteten Beziehungen berechnen sowie die einzelnen Darstellungsformen ineinander umrechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Wiederholung von Kenntnissen über Winkel und Winkelfunktionen (● A 43 und A 44)
- Erarbeitung der Beziehungen (1) zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes einerseits und dem Betrag seines Ortsvektors und des Winkels zwischen dem Ortsvektor und dem Basisvektor $\vec{i}$ andererseits (■ A 16 und A 17; ● A 45)

2. Stunde

- Erarbeitung der entsprechenden Beziehungen (5) im Raum
- Einführung des Begriffs des orientierten und des nicht orientierten Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

3. Stunde

- Übungen zur Bestimmung von Koordinaten von Punkten, Beträgen von Vektoren und Winkeln zwischen Vektoren mittels der Beziehungen (1) und (5); Aufgaben 1 bis 4
- Zusammenfassung zur Komponenten- und Koordinatendarstellung von Vektoren in einer Ebene und im Raum

Varianten zur Verteilung der Schwerpunkte

- Die Einführung des orientierten Winkels zwischen zwei Vektoren kann bereits in Verbindung mit der Erarbeitung der Beziehungen (1) erfolgen.
- Wenn eine der zur Verfügung stehenden Stunden für eine Leistungskontrolle verwendet werden soll, so könnten in der
  ersten Stunde nach der Sicherung des Ausgangsniveaus (Bearbeitung der Aufträge A 43 und A 44 und anderer Aufgaben in häuslicher Arbeit) die Beziehungen (1) erarbeitet, der orientierte und der nicht orientierte Winkel zwischen zwei Vektoren eingeführt und z. B. die Aufgaben 1 und 2 (LB 53) gelöst und in der
  zweiten Stunde die Beziehungen (5) für den Raum erarbeitet und beim Lösen der Aufgaben 4 und 5 (z. T. als Hausaufgaben) angewendet werden.

– Möglich wäre es auch, in der
ersten Stunde die allgemeinen Beziehungen (1) und (5) zu erarbeiten, gegebenenfalls sofort die Beziehungen (5) für den Raum zu gewinnen und (1) daraus als Spezialfall abzuleiten, und in der
zweiten Stunde konzentriert Übungen durchzuführen, gegebenenfalls auch noch in einer weiteren Stunde.

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Neben den Aufträgen A 43 und A 44, mit denen auch bereits auf die Unterscheidung zwischen orientierten und nicht orientierten Winkeln hingeführt wird, sollten den Schülern noch einige Aufgaben gestellt werden, zum Beispiel

- Aufgaben zum Ermitteln von Winkelfunktionswerten $\left[\sin 45°, \cos\frac{\pi}{2}, \sin 150°\right]$,
- Aufgaben zum Bestimmen von Winkeln aus vorgegebenen Winkelfunktionswerten $[\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \cos\beta = 0{,}6]$,
- Aufgaben zur Festigung der Winkeleinheiten[1] (Umrechnungen aus dem Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt),
- Aufgaben zu Beziehungen zwischen Winkelfunktionen $\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha; \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$.

(Vgl. auch „Aufgaben für tägliche Übungen ...", Seite UH 14, Komplex 5)

Erarbeitung der Beziehungen (1) Bereits vor dem Lösen von Aufgaben zur Sicherung des Ausgangsniveaus sollte den Schülern das Ziel genannt werden, weitere Darstellungsmöglichkeiten für Vektoren zu suchen, die für die Anwendung in der analytischen Geometrie gebraucht werden. Es liegt nahe, Winkel in die Darstellungen einzubeziehen, da die gegenseitige Lage z. B. von Seiten, Kanten, Diagonalen in geometrischen Figuren häufig durch die Winkel beschrieben wird, die sie miteinander bilden. Die Beziehungen (1) sollten die Schüler selbständig aus einer Figur ablesen, die an der Tafel oder auf Folie vorgegeben werden kann (↗ Lehrbuchbild A 80, LB 48).
Die Komponentendarstellung des Ortsvektors eines Punktes unter Verwendung trigonometrischer Funktionen wird bei der Herleitung des Additionstheorems für $\cos(\alpha - \beta)$ in LE A 25 benötigt (UH 112f.).
Die Beispiele A 16 und 17 können die Schüler ebenfalls selbständig durcharbeiten und als Anleitung zum Lösen der Aufgaben 1 und 2 (LB 53) verwenden. Wenn der Lehrer diese Aufgaben bereits an dieser Stelle aufgeben will, so muß zuvor noch der Begriff des Winkels zwischen zwei Vektoren eingeführt werden, damit die Schüler alle Angaben der Aufgaben verstehen können.

Hinweis: Der Begriff „Polarkoordinaten" kann zwar im Unterricht erwähnt werden, stellt jedoch kein abfragbares Wissen dar (LP 47).

Erarbeitung der Beziehungen (5) Um auch hierbei die Schüler weitgehend selbständig arbeiten zu lassen, wird folgendes Vorgehen empfohlen:
Zielangabe: In Analogie zu den Gleichungen (1) auf Seite LB 48 sollen entsprechende Gleichungen für den Raum gewonnen werden.
An der Tafel bzw. als Folie wird eine Zeichnung (↗ Bild 49; UH 70) mit der Lage des Vektors $\overrightarrow{OP}$ im Raum vorgegeben.

[1] In diesem Zusammenhang wird besonders auf die im Lehrbuch, Seite 170, enthaltene Fußnote und auf die TGL 31548 „Einheiten physikalischer Größen" verwiesen. Die Handhabung der Winkeleinheiten muß den Schülern gründlich erläutert werden.

Die Raumvorstellung wird unterstützt, wenn der Vektor $\overrightarrow{OP}$ in der Zeichnung als Raumdiagonale in einen Quader eingebettet wird. Eventuell noch einzelne Stücke oder Bezeichnungen farbig hervorheben! Vorerst noch keine weiteren Hilfslinien oder Winkel einzeichnen!

Die Schüler werden zunächst wie folgt orientiert:

- Suchen Sie Winkel, die für Beziehungen zwischen den Koordinaten des Punktes P und dem Betrag seines Ortsvektors verwendet werden können!
- Zeichnen Sie gegebenenfalls Hilfslinien ein!
- Nennen Sie rechtwinklige Dreiecke im Bild! Welche Seiten sind die Katheten, welche ist die Hypotenuse?
- Versuchen Sie, Beziehungen innerhalb solcher Dreiecke aufzustellen, in denen die Koordinaten des Punktes P und der Betrag seines Ortsvektors auftreten!

Die Schüler können hierbei zu verschiedenen Ansätzen gelangen. Entscheidend für diese Phase ist nicht, daß jeder Schüler selbständig sofort die Beziehungen in der gewünschten Form findet, sondern daß er sich beim Bemühen um das Aufstellen von Beziehungen zunächst tief in den Sachverhalt, in die räumlichen Beziehungen hineindenkt.
Im Unterrichtsgespräch wird der Lehrer Richtiges aufgreifen und bezüglich ungeeigneter oder falscher Beziehungen die Schüler auffordern, zu begründen, weshalb ihre Vorschläge überdacht werden müssen.
Zur einheitlichen Orientierung ergänzt der Lehrer nach einem solchen Unterrichtsgespräch die Zeichnung im Bild 49 wie im Bild 50 angegeben.

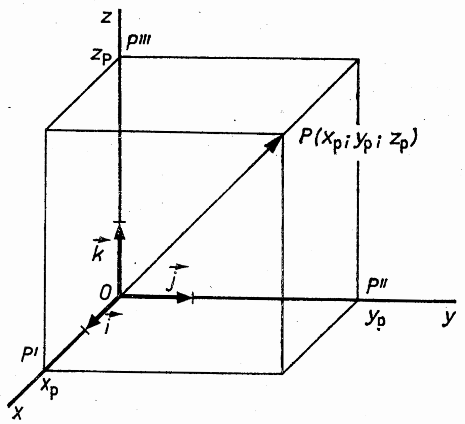


Bild 49

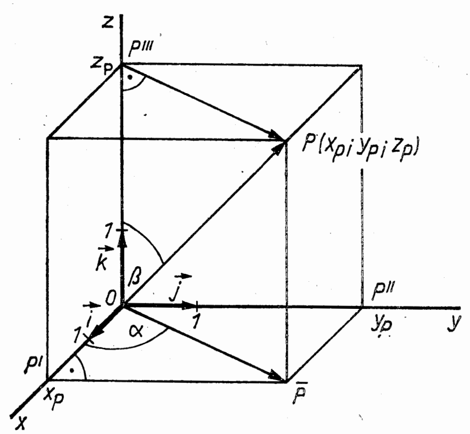


Bild 50

Aufträge an die Schüler:

- Leiten Sie aus dem Dreieck $OP'\bar{P}$ Beziehungen zwischen x_P bzw. y_P und $|\overrightarrow{O\bar{P}}|$ und α ab!
- Leiten Sie aus dem Dreieck OPP''' eine Beziehung zwischen z_P und $|\overrightarrow{P'''P}|$ und β her!

Als Ergebnis entstehen die Beziehungen (4) (LB 50).
Gesucht werden Beziehungen zwischen den Koordinaten von P und dem Betrag seines Ortsvektors. Das ist in (4) vorerst nur für die Koordinate z_P gelungen.

- Versuchen Sie, $|\overrightarrow{O\bar{P}}|$ zu eliminieren, indem sie im Dreieck OPP''' eine Beziehung zwischen $|\overrightarrow{P'''P}| = |\overrightarrow{O\bar{P}}|$, $|\overrightarrow{OP}|$ und β aufstellen und nach $|\overrightarrow{O\bar{P}}|$ auflösen!

– Setzen Sie die gefundene Beziehung in den Beziehungen für x_P und y_P in (4) anstelle von $|\overrightarrow{OP}|$ ein!

Im Ergebnis entstehen die Beziehungen (5).

Einführung der Begriffe „orientierter ...“ und „nicht orientierter Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$“ Die Festlegungen auf Seite LB 51 sind einzuprägen durch Betrachten der Lehrbuchbilder A 86 und das Lösen von Aufgaben etwa folgender Art:
Geben Sie, bezogen auf das Bild A 49 (Würfel auf Seite LB 29), folgende Winkel an!

$\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$; $\sphericalangle (\vec{a}, -\vec{c})$; $\sphericalangle (\overrightarrow{DG}, \overrightarrow{DC})$; $\sphericalangle (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BE})$; $\sphericalangle (\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{EB})$ usw.

Übungen

Hinweise zur Aufgabe 3:
Im Unterricht sollten zur Wiederholung der Kenntnisse aus dem Geographieunterricht und zur Veranschaulichung der Angaben in der Aufgabe ein Globus (gegebenenfalls auch ein Schieferglobus mit Gradnetzteilung) und eine Weltkarte zur Verfügung stehen.
Die Beziehungen (5) sollten in der Form vorliegen, in der die auftretenden Winkel als Winkel zwischen Vektoren gekennzeichnet sind.
Die gegebenen Größen und die Lösungen zu Nr. 3a und Nr. 3b können die Schüler etwa in folgender Tabelle erfassen:

Ort A	Leningrad	Accra	...
geogr. Länge	30° ö. L.	...	
geogr. Breite	60° n. B.		
$\alpha = \sphericalangle (\vec{i}, \overrightarrow{OB})$	30°		
$\beta = \sphericalangle (\vec{k}, \overrightarrow{OA})$	30°		
$\lvert\overrightarrow{OA}\rvert$	6378 km		
x_A	2762 km		
y_A	..		
z_A	..		

Hinweise für die Schüler:

– Beachten Sie, daß α und β nicht orientierte Winkel sind! Warum ist das günstig?
– Beachten Sie, daß in die Rechnung nur Näherungswerte eingehen!

Zusatzaufgabe: Ermitteln Sie die Angaben für Ihren Heimatort!
Zur Beantwortung von Frage 3c) können die Schüler die in der Tabelle erfaßten Polarkoordinaten und die kartesischen Koordinaten miteinander vergleichen. Des weiteren kann darauf verwiesen werden, daß für die ebene Darstellung auf Landkarten nur zwei Dimensionen zur Verfügung stehen.
Hinweise zur Aufgabe 4:
Hierbei kann v_0 zunächst nur als Funktion der Zeit, in der das Geschoß das Flugzeug treffen soll, oder des Weges, den das Flugzeug bis zum Abschuß noch zurückzulegen hat, bestimmt werden. Überlegungen, wie weit das Flugzeug maximal in den Luftraum vordringen darf u. dgl. können angestellt werden. Auf die Idealisierungen ist aufmerksam zu machen (Vernachlässigung des Luftwiderstandes, der Windstärke, der Erdbeschleunigung usw.). Zudem wird die Geschoßgeschwindigkeit i. allg. nicht beliebig verändert werden können. Vielmehr ist der Abschußwinkel entsprechend der Zielsetzung zu finden.

Zusammenfassung Hierzu können die Schüler entweder selbständig die Beziehungen zwischen

- dem Abstand zweier Punkte M und N und dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{MN}$,
- den Koordinaten eines Punktes P und dem Betrag seines Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$,
- den Koordinaten eines Punktes P, dem Betrag seines Ortsvektors $\overrightarrow{OP}$ und Winkeln zwischen Basisvektoren, Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ usw. zusammenstellen (für Ebene und Raum),

oder sie verwenden die Übersicht im Lehrbuch (↗ LB 52) und erläutern die einzelnen Beziehungen durch Beispiele und Skizzen. Dabei werden die Beziehungen in der Ebene erneut als Spezialfälle der Beziehungen im Raum erkannt.

Kontrollaufgaben

(1) Welche Beziehungen bestehen zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes und seinen Polarkoordinaten?

(2) LB 119: Nr. 22 (3) LB 53: Nr. 2d

(4) Ermitteln Sie für die Hauptstadt der DDR die Koordinaten bezüglich des in Aufgabe 3 (LB 53) und Lehrbuchbild A 87 gegebenen kartesischen Koordinatensystems $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$!

Lerneinheit 13 (2 Std.)
Vektorräume und Vektoren
LB 54 bis 57

Im vorangehenden Unterricht, vor allem in den LE A 1 bis 8 wurden anhand von Beispielen für Vektoren wesentliche Eigenschaften des Rechnens mit Vektoren erarbeitet. In der Lerneinheit A 13 werden diese Erkenntnisse verallgemeinert und die Definition des Vektorraumes behandelt. Hierbei sollte die Gelegenheit genutzt werden, das axiomatische Vorgehen in der Mathematik den Schülern verständlich zu machen.

Ziele

Die Schüler
- kennen die Definition der Begriffe „Vektorraum“ und „Vektor“,
- kennen Beispiele für Vektorräume, darunter auch einen solchen, bei dem die Elemente nicht durch Pfeile dargestellt werden können,
- verstehen, wie man von einer gegebenen Menge mathematischer Objekte nachweisen kann, ob sie ein Vektorraum ist, und können einzelne Nachweise nachvollziehen und in einfachen Fällen selbständig führen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Definition des Vektorraumes (▶ A 3) und Wiederholung der Rechenregeln für das Operieren mit Vektoren, die im vorangegangenen Unterricht behandelt wurden

2. Stunde

- Anwendung der Definition auf die Untersuchung verschiedener Mengen mathematischer Objekte [Beispiele ■ A 19 und 20, Aufgaben 1 bis 3 (LB 57)]

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Definition des Vektorraums Zunächst sollten die Schüler den Lehrbuchtext (LB 54f.) durchlesen und wesentliche Gedanken wiedergeben, oder der Lehrer legt die entsprechenden Gedankengänge in einem kurzen Vortrag dar.
Folgendes ist hervorzuheben:

- Vektoren, die bisher behandelt wurden (Verschiebungen einer Ebene bzw. des Raumes, Kräfte, Geschwindigkeiten usw.) haben gewisse Gemeinsamkeiten.
  a) Es liegen bestimmte Elemente einer Menge vor.
  b) Für diese ist eine Addition erklärt, die gewisse Eigenschaften besitzt.
  c) Für die Elemente ist eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert, die bestimmte Eigenschaften hat.

  Mit den Pfeilklassen haben wir uns ein anschauliches Beispiel dafür erarbeitet.
- In der Mathematik wird stets ein hoher Verallgemeinerungsgrad bei den Begriffen angestrebt. Das hat den Vorteil, daß man mit einer relativ knappen Theorie häufig sehr viele unterschiedliche mathematische Objekte sowie verschiedene Anwendungsbereiche erfaßt. Aussagen, die man in einer Theorie mit hohem Verallgemeinerungsgrad gewinnt, gelten dann für alle Modelle, auf die diese Theorie anwendbar ist.
- Obwohl die Vektorrechnung historisch aus geometrischen Betrachtungen (gerichtete Strecken) hervorgegangen ist, ist ihr Anwendungsbereich heute umfassender. Es gibt auch Beispiele für Vektoren, die sich nicht durch Pfeile veranschaulichen lassen.

Beim Betrachten der Definition sollte im Unterrichtsgespräch auf folgendes aufmerksam gemacht werden:

- Es wird nicht zuerst erklärt, was ein Vektor ist, sondern auf einer Menge müssen gewisse Abbildungen definiert sein mit gewissen Eigenschaften [(1°) bis (8°)], damit von einem Vektorraum und dessen Elementen als Vektoren gesprochen werden kann.
- Beim Vergleich der Definition mit den zusammengestellten bisher behandelten Rechenregeln (LB 54) fällt auf, daß in die Definition weit weniger aufgenommen sind (↗ Fußnote LB 55).

Soweit erforderlich, sollte eine Wiederholung der Rechenregeln erfolgen:
Die Schüler lösen z. B. eine Serie einfacher Aufgaben, deren Lösung die Kenntnis der Regeln erfordert. Die Aufgaben sind nicht geordnet. Die Schüler stellen die verwendeten Regeln geordnet zusammen und vergleichen mit dem Lehrbuch (LB 54). Beispiele für eine Aufgabenserie (↗ Bild 51):

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$	$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FD}$	$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$
$-(-\overrightarrow{CH})$	$\overrightarrow{BB} - \overrightarrow{AB}$	$-(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC})$
$0 \cdot \overrightarrow{HC}$	$4 \cdot \overrightarrow{CC}$	$(2 \cdot 3) \cdot \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CC} + \overrightarrow{CH}$	$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{AF}$
$-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CC}$	$(2 + 3) \cdot \overrightarrow{AB}$
$(-1) \cdot \overrightarrow{HC}$	$2(3\overrightarrow{AB})$	$3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE})$

$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) + \overrightarrow{HF}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HF})$

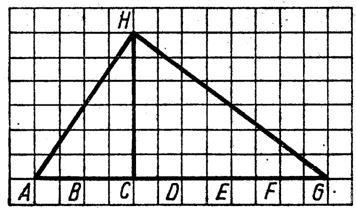


Bild 51

Zur Wiederholung der Regeln kann auch langfristig ein Auftrag erteilt werden (↗ UH 21). In die Wiederholung können auch weitere Aufgaben aus den zurückliegenden Lerneinheiten einbezogen werden, die bisher noch nicht gelöst wurden und zu deren Lösung die Regeln angewendet werden müssen (ggf. auch Beweisaufgaben).

Anwendung der Definition Das selbständige Durcharbeiten von Beispielen und das Untersuchen von Mengen auf die Eigenschaft hin, ein Vektorraum zu sein, birgt große Potenzen für die logische Schulung. Alle Untersuchungen sind der Definition entsprechend nach folgendem Schema zu führen:

1. Es muß eine Menge M mathematischer Objekte gegeben sein.
2. Es muß eine Addition auf der Menge M erklärt sein.
3. Es muß eine Multiplikation der Elemente der Menge M mit reellen Zahlen erklärt sein.
4. Es müssen die Gültigkeit der Regeln (1°) bis (8°) aus Definition A 3 für M und die in 2. und 3. erklärten Operationen nachgewiesen werden.

Zuerst sollte das Beispiel 19 (LB 56) durchgearbeitet werden. Als Veranschaulichung dienen Pfeile, die vom Ursprung eines Koordinatensystems zu den Punkten führen, auf die die Paare reeller Zahlen abgebildet werden. Danach sollte ein Beispiel für einen Vektorraum, dessen Elemente nicht durch Pfeile veranschaulicht werden können, behandelt werden. Empfohlen wird die Aufgabe 1, da hierfür geeignete Voraussetzungen im Analysislehrgang geschaffen wurden. Bei der Erläuterung der Rechenoperationen sollte deutlich gemacht werden, daß die Operation nicht aus der gegebenen Menge herausführt, also beispielsweise die Summe zweier in $\langle a, b\rangle$ stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist.
Das Lösen der Aufgaben bietet ausgezeichnete Möglichkeiten zur Reaktivierung von Kenntnissen aus der Analysis. Da man für die angegebenen Beispiele sicher nicht den Nachweis für alle Regeln führen kann (z. B. aus Zeitgründen), muß man sich im klaren sein, daß damit noch nicht gezeigt ist, daß die betreffende Menge ein Vektorraum ist. In jedem Falle sollte die Existenz der in den Regeln (3°) und (4°) geforderten Elemente gezeigt werden. Auch ein Gegenbeispiel sollte behandelt werden (Aufgabe 3).

Kontrollaufgaben

(1) Was versteht man in der Mathematik unter Vektoren?

(2) Nennen Sie je ein Beispiel für Vektorräume, deren Elemente sich durch Pfeile darstellen bzw. nicht durch Pfeile darstellen lassen!

Stoffabschnitt 1.3 (13 Std.)
Analytische Geometrie der Geraden

In diesem Stoffabschnitt werden bisher erworbene Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie der Geraden angewendet. Die folgende Übersicht macht in knapper Form die Struktur des hier zu behandelnden Stoffes deutlich. Es gibt im wesentlichen drei stoffliche Schwerpunkte in der unterrichtlichen Behandlung:

- Die Erarbeitung von Parametergleichungen der Geraden im Raum,
- die Erarbeitung parameterfreier Geradengleichungen in einer Ebene,
- die Erarbeitung von Lagebeziehungen zwischen Geraden in einer Ebene und im Raum.

Parametergleichungen der Geraden im Raum

Vektorielle Punktrichtungsgleichung	vektorielle Zweipunktegleichung	Parametergleichungen für Strahlen und Strecken
Herleitung		
Ziel: Selbständiges Lösen von Aufgaben		

Parameterfreie Geradengleichungen in der Ebene

Punktrichtungsgleichung	Zweipunktegleichung	Normalform	Allgemeine Geradengleichung
Herleitung			informativ
Ziel: Selbständiges Lösen von Aufgaben			

Lagebeziehungen zwischen Geraden

In der Ebene	Im Raum		
	zueinander	zu Koordinatenachsen	zu Koordinatenebenen
Ziel: Selbständiges Lösen von Aufgaben mit zeichnerischer Veranschaulichung der Lagebeziehung im Koordinatensystem			

Lerneinheit 14 **(2 Std.)**
Parametergleichungen einer Geraden
LB 58 bis 63

Mit dieser Lerneinheit beginnt die Anwendung der Kenntnisse und Fähigkeiten aus der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie der Geraden. Alle Überlegungen werden in bezug auf den dreidimensionalen Raum durchgeführt.

Ziele

Die Schüler
- kennen zwei Formen von Parametergleichungen der Geraden: die vektorielle Punktrichtungsgleichung und die vektorielle Zweipunktegleichung der Geraden,
- können diese Gleichungen herleiten,
- können Parametergleichungen von Geraden aufstellen und überprüfen, ob ein durch seine Koordinaten gegebener Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt.

Schwerpunkte

1. Stunde
- Motivierung des Stoffabschnittes 1.3
- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Herleitung einer vektoriellen Punktrichtungsgleichung der Geraden (erste Form einer Parametergleichung der Geraden)
- Übungen im Aufstellen von Geradengleichungen

2. Stunde
- Herleitung einer vektoriellen Zweipunktegleichung der Geraden
- Übungen im Aufstellen und Umformen von Geradengleichungen

Methodische Hinweise

Motivierung Neben den Bemerkungen auf Seite LB 58 kann zur Motivierung die Aufgabe 7 (LB 82) – Radarstation ortet ein Ziel – eingesetzt werden. Da in dieser Stunde die Mittel zur Lösung der Aufgabe noch nicht zur Verfügung stehen, kann nur eine Klärung des vorliegenden Sachverhalts mittels Skizze erfolgen. Den Schülern wird gesagt, daß im weiteren Unterricht Geradengleichungen und Lagebeziehungen zwischen Geraden behandelt werden, deren Kenntnis die Lösung der gestellten Aufgabe ermöglicht. In der Lerneinheit A 18 „Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum“ (UH 89ff.) sollte die Aufgabe wieder aufgegriffen und gelöst werden.

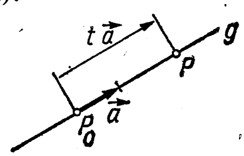
Sicherung des Ausgangsniveaus Für die meisten Schüler wird der Begriff „Parameter" neu sein. Es empfiehlt sich deshalb, diesen Begriff vor der Herleitung der ersten Form einer Parametergleichung der Geraden zu erklären, um den Gedankengang bei der Herleitung nicht durch entsprechende Erläuterungen stören zu müssen. Zur Erklärung des Begriffs „Parameter" werden die Ausführungen auf Seite 58f. des Lehrbuches im Zusammenhang mit Beispiel A 21 empfohlen.

Herleitung einer vektoriellen Punktrichtungsgleichung der Geraden Die Schüler sollten Klarheit darüber erhalten, daß mit der Behandlung dieses Stoffabschnittes eine Anwendung der Vektorrechnung auf die analytische Geometrie erfolgt, und zwar speziell auf die analytische Geometrie der Geraden.
Vor der Herleitung der genannten Gleichung sollte noch einmal herausgearbeitet werden, wodurch eine Gerade bestimmt sein kann: 1. durch einen Punkt und die Richtung der Geraden, 2. durch zwei voneinander verschiedene Punkte der Geraden.
Diese zwei Arten des Bestimmtseins einer Geraden dienen als Grundlage für die Festlegung der Bezeichnungen Punktrichtungs- bzw. Zweipunktegleichung.
Zum besseren Verständnis für die Schüler (besonders für leistungsschwächere) kann zu Beginn der Herleitung einer Parametergleichung der Geraden auf das Koordinatensystem verzichtet werden. Folgendes Vorgehen wird empfohlen:
Zunächst wird davon ausgegangen, daß die Gerade g durch einen Punkt P_0 und die Richtung bestimmt ist. Die Richtung sei festgelegt durch einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{o}$, der als *Richtungsvektor* bezeichnet wird. Für jeden weiteren Punkt P von g gilt (↗ Bild 52):

(1) $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} \quad (-\infty < t < \infty)$.

(Anwendung der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl)

Bild 52



Die Variable t wird *Parameter* genannt, da bei vorgegebenem Richtungsvektor $\vec{a}$ jeder reellen Zahl t ein ganz bestimmter Punkt P der Geraden g zugeordnet ist. Zwischen den Punkten einer Geraden g und dem Parameter t besteht eine eineindeutige Zuordnung.
Bei der Behandlung der folgenden Fallunterscheidungen bezüglich des Parameters t und bei der Interpretation von t als Streckenverhältnis sollten zum besseren Verständnis entsprechende Skizzen verwendet werden (↗ Bild 53):

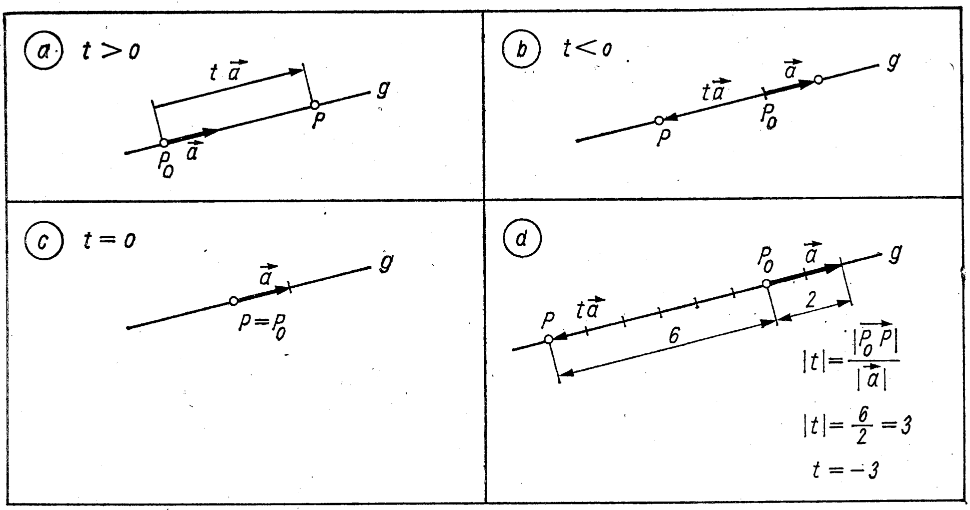


Bild 53

$t > 0$ für $\overrightarrow{P_0P} \uparrow\uparrow \vec{a}$

$t < 0$ für $\overrightarrow{P_0P} \uparrow\downarrow \vec{a}$

$t = 0$ für $P = P_0$

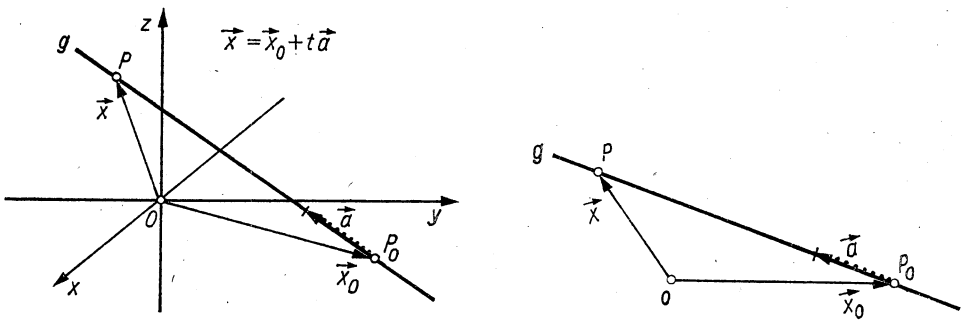
Bild 53d) bringt ein Beispiel für die Interpretation von t als Streckenverhältnis.
Im zwei- wie im dreidimensionalen Raum werden alle Geradenpunkte durch die Verwendung von Ortsvektoren auf den Punkt O bezogen. Aus (1) erhält man dann wegen $\overrightarrow{P_0P} = \vec{x} - \vec{x}_0$ (Bilder 54a und b)

$\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{a}$

oder

(2) $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \; (-\infty < t < \infty)$.

(Anwendung der Addition und Subtraktion von Vektoren)



Bilder 54a und b

Die Gleichung (2) ist eine *vektorielle Punktrichtungsgleichung* der Geraden (erste Form einer Parametergleichung der Geraden).
Im Anschluß an die Herleitung der Parametergleichung sollten noch einmal folgende **Fragen** diskutiert werden:

- Wird durch $\vec{a}$ die Richtung nur **einer** Geraden festgelegt?
- Gibt es für eine Gerade nur **einen** Richtungsvektor?
- Welcher Art ist die Zuordnung zwischen t und den Punkten einer Geraden?

Es kann durchaus schon in dieser Lerneinheit die Frage aufgeworfen werden, was geschieht, wenn der Parameter t beschränkt wird. Die weitere Behandlung dieser Problematik erfolgt in LE 15.

Übungen im Aufstellen von Geradengleichungen Es geht hier zunächst um das Lösen einfacher Aufgaben der folgenden Art:
Gegeben sei eine Gerade g durch einen ihrer Punkte $A(3; 4; 1)$ und einen Richtungsvektor $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.
a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Geraden auf!
b) Liegt der Punkt $P(7; -4; 3)$ auf dieser Geraden?

Lösung:

Zu a)

In die Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$

werden für $\vec{x}_0 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$
und für $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

eingesetzt: $\vec{x} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} + t(2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k})$

Durch Umformung erhält man $\underline{\vec{x} = (3 + 2t)\,\vec{i} + (4 - 4t)\,\vec{j} + (1 + t)\,\vec{k}}$

Vektoren in Kurzschreibweisen:

$$\vec{x} = (3;\, 4;\, 1) + t(2;\, -4;\, 1)$$

$$\vec{x} = (3 + 2t;\, 4 - 4t;\, 1 + t)$$

oder

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ 4 - 4t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

Zu b)

Für jeden Punkt dieser Geraden gilt:

$$x = 3 + 2t$$
$$y = 4 - 4t$$
$$z = 1 + t$$

Wenn für x, y und z die Koordinaten des Punktes P eingesetzt werden und sich jeweils derselbe Wert für t ergibt, gehört der Punkt P zur Geraden.

$$7 = 3 + 2t \qquad \underline{t = 2}$$
$$-4 = 4 - 4t \qquad \underline{t = 2}$$
$$3 = 1 + t \qquad \underline{t = 2}$$

Der Punkt $P(7;\, -4;\, 3)$ ist ein Punkt der Geraden mit der Gleichung

$$\vec{x} = (3 + 2t;\, 4 - 4t;\, 1 + t)$$

Vor der Lösung von Aufgaben wie unter b) sollten die Schüler mehrere Aufgaben zu der Art a) lösen und dabei aus der „Ergebnisgleichung" die Koordinaten x, y und z ablesen. Das erscheint notwendig, um den Lösungsweg für b) schneller zu finden.

Herleitung einer vektoriellen Zweipunktegleichung der Geraden Diese Geradengleichung kann durch den folgenden Auftrag selbständig von den Schülern im Unterricht hergeleitet werden (mit zeichnerischer Darstellung):

> Leiten Sie unter Verwendung der in der vergangenen Stunde erworbenen Kenntnisse eine Parametergleichung von g her für den Fall, daß g durch *zwei ihrer Punkte* P_0 und P_1 gegeben ist ($P_0 \neq P_1$)! (Hinweis: Versuchen Sie, unter den gegebenen Bedingungen einen Richtungsvektor für g zu finden!)

Ist aufgrund der Klassensituation eine selbständige Erarbeitung nicht erfolgversprechend, kann nach genanntem Auftrag die Herleitung auch im Unterrichtsgespräch unter starker

Beteiligung der Schüler erfolgen. Ein Lehrervortrag ist an dieser Stelle eine Unterforderung der Schüler. Bei der Herleitung kommt es für den Schüler darauf an, $\vec{x}_1 - \vec{x}_0$ als Richtungsvektor zu erkennen und anstelle von $\vec{a}$ in die Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ einzusetzen. Das Erkennen der Gleichartigkeit der Punktrichtungsgleichung und der Zweipunktegleichung bezüglich ihrer Struktur ist besonders wichtig, da in einer der nächsten Unterrichtsstunden eine parameterfreie Zweipunktegleichung für eine Gerade in einer Ebene analog zum Vorgehen bei der Punktrichtungsgleichung hergeleitet wird.

Übungen zum Aufstellen und Umformen von Geradengleichungen Zunächst sollten Geradengleichungen im Vordergrund stehen, in denen die Koordinaten der Vektoren von Null verschieden sind (LB 63, Nr. 5). Zu den Aufgaben mit speziellen Geradengleichungen (LB 63) sollte anschließend übergegangen werden. Auch Aufgaben des folgenden Typs sind zu empfehlen:

Welcher Parameterwert gehört zu dem Punkt $A(3; 5; 1)$ auf der Geraden

$\vec{x} = -\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k} + s(12\vec{i} - 9\vec{j} - 15\vec{k})$?

Beim Lösen von Aufgaben sollte ausgehend von der ausführlichen Komponentendarstellung zu kürzeren Schreibweisen übergegangen werden. Empfohlen wird die Zeilen- oder Spaltenschreibweise, die ohne den Begriff „Matrix“ zu nennen, bereits eine Vorbereitung darauf darstellt.

Diese Schreibweisen müssen geübt werden, wenn sie Erleichterungen beim Lösen von Aufgaben bringen sollen. Das gilt insbesondere für spezielle Geradengleichungen der folgenden Form:

$\vec{x} = 6\vec{i} + t\vec{j}$	$(x; y; z) = (6; 0; 0) + t(0; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{x} = 3\vec{k} - t\vec{k}$	$(x; y; z) = (0; 0; 3) + t(0; 0; -1)$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{x} = \vec{i} + t(\vec{j} - \vec{i})$	$(x; y; z) = (1; 0; 0) + t(-1; 1; 0)$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Die Schüler sollten hin und wieder daran erinnert werden, daß es sich hier nur um Kurzschreibweisen handelt, die Gleichung also weiterhin eine Vektorgleichung bleibt.

Kontrollaufgaben:

(1) Stellen Sie eine vektorielle Parametergleichung für die Gerade auf, die durch die Punkte $C(3; -2; 8)$ und $D(1; 7; -1)$ bestimmt ist!

(2) Liegt der Punkt $P(2; 2{,}5; 3{,}5)$ auf der Geraden mit der

Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -2{,}5 \\ 12{,}5 \end{pmatrix}$?

Lösung zu 2: Der Punkt $P(2; 2{,}5; 3{,}5)$ liegt auf g.

Lerneinheit 15 **(1 Std.)**
Parametergleichungen für Strahl und Strecke
LB 63 bis 66

Diese Unterrichtsstunde dient dem Ziel, die Bedeutung des Parameters in der Geradengleichung noch einmal deutlich zu machen. Besonderer Wert sollte dabei der Veranschaulichung beigemessen werden. Die jeweiligen Betrachtungen werden sowohl in der Ebene als auch im Raum durchgeführt.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß bei Beschränkungen für den Parameter durch die Geradengleichung nur Punkte bzw. Teile der Geraden beschrieben werden (Strecken, Strahlen),
- können rechnerisch ermitteln, ob bestimmte Punkte auf entsprechenden Strahlen oder Strecken liegen und mit Hilfe von Zeichnungen das Ergebnis vermuten und im Falle der Ebene sogar kontrollieren.

Schwerpunkte

- Erarbeitung einer Übersicht über Parametergleichungen für Strahlen und Strecken
- Übungen im Aufstellen und Anwenden von Gleichungen für Strahlen und Strecken

Methodische Hinweise

Erarbeitung Den Schülern sollte folgende Frage gestellt werden:

„Was bedeutet die Angabe ($1 \leqq t \leqq 4$) für die Geradengleichung $\vec{x} = (3;\ 4) + t(2;\ 1)$?"

Die Diskussion zu dieser Frage führt in Verbindung mit der zeichnerischen Veranschaulichung zur Erarbeitung der Übersicht auf Seite LB 63f. Wählt man anstelle von r und s die Variablen t_0 und t_1, so wird noch deutlicher auf den Umstand verwiesen, daß es sich um beliebige, aber fest gewählte – mithin einzelnen Punkten zugeordnete – Parameterwerte handelt.

Übungen Für die Untersuchung, ob gegebene Punkte auf einer Strecke oder einem Strahl liegen, kann das Beispiel A 25 (LB 64f.) empfohlen werden. Da aus der zeichnerischen Darstellung sofort ersichtlich ist, daß $P_2(3;\ 0;\ 8)$ nicht auf $\overline{AB}$ liegt, besteht für die rechnerische Ermittlung bei diesem Punkt kein Anreiz. Es sollte deshalb für P_2 besser ein Punkt gewählt werden, der nahezu auf $\overline{AB}$ liegt, z. B. $P_2(2;\ 3;\ 4)$, oder wohl auf g, aber nicht auf $\overline{AB}$ liegt, z. B. $P_2(3{,}3;\ 5{,}5;\ -0{,}9)$. Besonders zu empfehlen wäre der letzte Fall, da hier deutlich wird, daß der ermittelte Parameterwert $t = -0{,}1$ nicht mehr im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ liegt und der Punkt P_2 aus diesem Grund nicht mehr auf $\overline{AB}$ liegen kann. Für die Hausaufgabe sollten die Aufgaben 2 und 4 (LB 66) genutzt werden.

Kontrollaufgaben

LB 66: Nr. 1a bis d

Lerneinheit 16 (3 Std.)
Gleichungen für Geraden einer Ebene

LB 66 bis 73

In dieser Lerneinheit lernen die Schüler parameterfreie Gleichungen der Geraden in einer Ebene kennen. Es besteht die Möglichkeit, die Herleitung der Gleichungen mit Hilfe von Analogiebetrachtungen weitgehend als selbständige Schülerarbeit zu gestalten. In die täglichen Übungen für diese Lerneinheit sollte das Lösen von Gleichungssystemen aufgenommen werden, wobei das Additionsverfahren bevorzugt werden sollte (UH 13, Aufgabe 3.2.). Dabei ist zu berücksichtigen, daß im Lehrplan für die Klassen 9 und 10 vorrangig auf das Einsetzungsverfahren orientiert und auf die beiden anderen Verfahren eventuell nur zur Information eingegangen wurde.

Ziele

Die Schüler

- kennen parameterfreie Geradengleichungen in der xy-Ebene,
- können die Punktrichtungsgleichung, die Zweipunktegleichung und die Normalform der Geradengleichung herleiten,
- können Geradengleichungen in der xy-Ebene aufstellen und umformen,
- kennen Beziehungen zwischen verschiedenen Formen von Geradengleichungen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Herleitung einer (parameterfreien) Punktrichtungsgleichung
- Erarbeitung einer Schrittfolge für die Herleitung einer Punktrichtungsgleichung
- Übungen zum Aufstellen von Punktrichtungsgleichungen

2. Stunde

- Herleitung einer (parameterfreien) Zweipunktegleichung analog zur Herleitung der Punktrichtungsgleichung unter Verwendung der erarbeiteten Schrittfolge
- Herleitung der Normalform der Geradengleichung

3. Stunde

– Übungen zu den behandelten Geradengleichungen und Erarbeitung der Zusammenhänge zwischen ihnen (LB 72)

Methodische Hinweise

Herleitung der Punktrichtungsgleichung Die Einführung parameterfreier Geradengleichungen wird durch die einfachere Handhabung dieser Gleichungen bei Berechnungen motiviert. Für die unterrichtliche Behandlung werden zwei Varianten empfohlen.

Variante 1: Vorgehen wie im Lehrbuch (LB 67). Hier wird zu Beginn der Herleitung einer Punktrichtungsgleichung der Geraden den Schülern die Notwendigkeit einer Fallunterscheidung mitgeteilt.
Variante 2: Ein nicht ganz einfaches Problem für die Schüler bei der Herleitung der genannten Gleichung ist die Fallunterscheidung für a_x. Um diese zu motivieren, wird folgendes Vorgehen empfohlen:
Nach gegebener Problemstellung wird für $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ das entsprechende Gleichungssystem (LB 67) geschrieben. Der Parameter t wird mit Hilfe des Additionsverfahrens eliminiert. Der Vorteil des Additionsverfahrens besteht darin, daß man nicht sofort eine Gleichung mit dem Ausdruck $\frac{a_y}{a_x}$ erhält, sondern eine Gleichung der Form $a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0)$. Da nach der Problemstellung (LB 66) eine Gleichung der Form

$y = mx + n$ oder $Ax + By + C = 0$

angestrebt wird, kann nahegelegt werden, die Gleichung

$a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0)$

nach $y - y_0$ umzustellen. Es muß durch a_x dividiert werden. Das ist ein Motiv dafür, nach den Bedingungen für a_x zu fragen. Das Ergebnis der Diskussion zur Fallunterscheidung für a_x kann folgendermaßen festgehalten werden:

	$a_x \neq 0$	$a_x = 0$
$a_y \neq 0$	$y - y_0 = \frac{a_y}{a_x}(x - x_0)$	$x = x_0$
$a_y = 0$	$y = y_0$	Dieser Fall kann nicht auftreten, weil $\vec{a}$ als Richtungsvektor stets von $\vec{o}$ verschieden ist.

Alle in der Übersicht enthaltenen Gleichungen werden unter Verwendung der Form $a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0)$ gewonnen.
Bei allen hier erwähnten Erörterungen sollte Wert auf die zeichnerische Veranschaulichung gelegt werden.

Erarbeitung einer Schrittfolge für die Herleitung einer (parameterfreien) Punktrichtungsgleichung Unter der Fragestellung „Welcher Weg führte uns zum Ziel?" sollten die wesentlichen Schritte, die bei der Herleitung der Punktrichtungsgleichung gegangen wurden, zusammengetragen werden. Die Erarbeitung könnte zu folgender Schrittfolge führen:

1. Verwendung eines Gleichungssystems als mögliche Darstellung der Beziehungen in der Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$
2. Eliminieren des Parameters t
3. Fallunterscheidung für a_x

Übungen zum Aufstellen von Punktrichtungsgleichungen Hier können die im Lehrbuch enthaltenen Beispiele A 26 bis A 28 (LB 69) zur selbständigen Schülerarbeit genutzt werden. In der *Hausaufgabe* sollten die Schüler die Herleitung der Punktrichtungsgleichung noch einmal durcharbeiten und einige Aufgaben zum Aufstellen von Punktrichtungsgleichungen lösen (LB 73; Nr. 1 bis 4; LB 118: Nr. 13).

Herleitung einer Zweipunktegleichung analog zur Herleitung der Punktrichtungsgleichung Durch einen Auftrag der folgenden Art kann die Herleitung einer Zweipunktegleichung der Geraden in selbständiger Schülerarbeit erfolgen (evtl. Schülervortrag):

> Wenden Sie die in der vorigen Stunde erarbeitete Schrittfolge auf die Parametergleichung
>
> $\vec{x} = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$
>
> zur Herleitung der (parameterfreien) Zweipunktegleichung der Geraden
>
> $(x - x_0)(y_1 - y_0) = (y - y_0)(x_1 - x_0)$
>
> an!

Dieses Vorgehen wird empfohlen, um die Schüler zum selbständigen Führen von Herleitungen unter Nutzung des Analogieprinzips zu befähigen. Die Form

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

läßt sich unter Verwendung der Punktrichtungsgleichung

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

natürlich auch auf kürzestem Weg (LB 67f.) gewinnen.

Herleitung der Normalform der Geradengleichung Diese Herleitung kann von den Schülern durch folgenden Auftrag in der Hausaufgabe erarbeitet werden:

> Stellen Sie mit Hilfe der Punktrichtungsgleichung die Gleichung der Geraden auf, die durch den Punkt $P_0(0; n)$ geht und den Anstieg m hat!
> Stellen Sie die erhaltene Gleichung nach y um!

Bei der Auswertung wird die Normalform als Sonderfall der Punktrichtungsgleichung gekennzeichnet.

Es sollte nicht versäumt werden, auf die Beziehungen zwischen $y = mx + n$ als Gleichung einer linearen Funktion mit dem Definitionsbereich $\{x; x \in P\}$ und dem Wertebereich $\{y; y \in P\}$ und den verschiedenen Formen von Geradengleichungen hinzuweisen. Zu beachten ist, daß $x = 2$ zwar eine Geradengleichung, aber keine Gleichung einer linearen Funktion mit dem hier angegebenen Definitions- und Wertebereich ist.

Übungen zu den behandelten Geradengleichungen und Erarbeitung der Zusammenhänge zwischen ihnen Als Übungsaufgaben werden empfohlen: LB 73: Nr. 6 und 7; LB 118: Nr. 11 und 15. In diesem Zusammenhang wird auch auf die allgemeine Geradengleichung verwiesen. Bemerkt sei, daß ihre Darstellung sowohl in der Form $Ax + By + C = 0$ als auch in der Form $Ax + By = C$ möglich ist. Es ist aber nicht sinnvoll, beide Formen nebeneinander zu verwenden.
Die Zusammenhänge zwischen den Geradengleichungen lassen sich sowohl im Unterrichtsgespräch als auch in der Hausarbeit unter Verwendung der Übersicht auf Seite LB 72 erarbeiten.

Kontrollaufgaben

(1) Schreiben Sie alle Ihnen bekannten Gleichungen für Geraden einer Ebene auf, und leiten Sie eine davon her!

(2) LB 73: Nr. 3a und 6

Lerneinheit 17 (2 Std.)
Lagebeziehungen von Geraden einer Ebene und Schnittpunktsberechnungen

LB 73 bis 77

Für die Behandlung des Stoffes dieser Lerneinheit ist das sichere Beherrschen der Kenntnisse und Fähigkeiten über Geradengleichungen mit dem Ablesen bestimmter charakteristischer Werte aus der Gleichung eine notwendige Voraussetzung. Angeknüpft wird bei der Erarbeitung der Lagebeziehungen von Geraden an die Kenntnisse aus der 9. Klasse, die bei der Behandlung von Gleichungssystemen erworben wurden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die drei Lagebeziehungen zwischen Geraden einer Ebene,
- können aus den Geradengleichungen die jeweilige Lagebeziehung ablesen,
- können für den Fall, daß zwei Geraden einander schneiden, die Koordinaten des Schnittpunktes berechnen.

Schwerpunkte

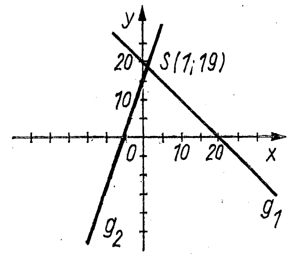
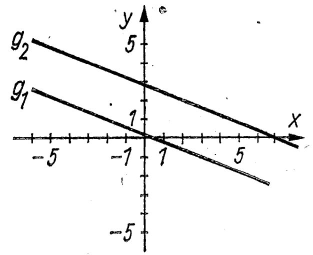
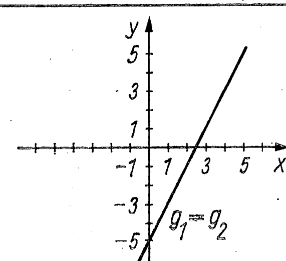
1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus
- Erarbeitung von Kriterien für die Bestimmung der Lagebeziehungen von Geraden einer Ebene aus Geradengleichungen

2. Stunde

- Erarbeitung eines Verfahrens zur Berechnung der Schnittpunktskoordinaten zweier Geraden bei gegebenen Geradengleichungen
- Übung im Berechnen von Schnittpunktskoordinaten

Lösen von Systemen linearer Gleichungen

Gleichungssystem	Umstellen der Gleichungen zur Form $y = mx + n$	graphische Darstellung der Lösungsmenge der Einzelgleichungen	Lage der Geraden und Lösungsmenge des Gleichungssystems
1. Fall: $\text{I} \quad x + y = 20$ $\text{II} \quad 3x - y = -16$	$y = -1x + 20 \qquad g_1$ $y = 3x + 16 \qquad g_2$ unterschiedlicher Anstieg $m_1 \neq m_2$		g_1 und g_2 schneiden einander. Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. $L = L_1 \cap L_2$ $L = \{[1;19]\}$
2. Fall: $\text{I} \quad 5y + 2x = 1$ $\text{II} \quad 5y = -2x + 14$	$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} \qquad g_1$ $y = -\frac{2}{5}x + \frac{14}{5} \qquad g_2$ gleicher Anstieg $m_1 = m_2;\ n_1 \neq n_2$		g_1 und g_2 verlaufen parallel zueinander. Das Gleichungssystem hat keine Lösung. $L = \emptyset$
3. Fall: $\text{I} \quad 6x - 3y = 15$ $\text{II} \quad 2x - y = 5$	$y = 2x - 5 \qquad g_1$ $y = 2x - 5 \qquad g_2$ Gleichungen stimmen überein $m_1 = m_2;\ n_1 = n_2$		g_1 und g_2 sind identisch (fallen zusammen). Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. $L = L_1 = L_2$

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Für die Erarbeitung der Lagebeziehungen zweier Geraden in einer Ebene ist die Reaktivierung des Wissens über das Lösen von Systemen linearer Gleichungen von Bedeutung. Ein Arbeitsblatt oder eine Folie (↗ Bild 55) dient zur Wiederholung der drei möglichen Fälle und zur Beantwortung der Fragen:

> Welche Lage können die den vorgegebenen Gleichungen entsprechenden Graphen (Geraden) einnehmen?
> Welche Charakteristika in den Gleichungen geben über die Lage der Graphen (Geraden) Auskunft?

Zur Behandlung dieser Thematik kann auch ein Schülervortrag vorbereitet werden (Lit.: „Mathematik in Übersichten", Seite 74ff., insbesondere Seite 79).

Erarbeitung von Kriterien Für parameterfreie Geradengleichungen werden die Kriterien für die Beurteilung der gegenseitigen Lage zweier Geraden in einer Ebene aus den Gleichungen heraus bereits in den graphischen Darstellungen des Bildes 55 verdeutlicht. Sie können ergänzt werden durch Kriterien für Geradengleichungen der Form

$Ax + By + C = 0.$

Es gilt nun, die Parametergleichungen zweier Geraden auf derartige Kriterien hin zu untersuchen. Hierzu würde sich wiederum eine Folie eignen (↗ Bild 56; UH 88).

Erarbeitung eines Verfahrens zur Berechnung der Schnittpunktskoordinaten Sind die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden zu berechnen, so sind die gegebenen Geradengleichungen zunächst einmal auf die Existenz eines Schnittpunktes hin zu untersuchen. Die Kriterien dafür wurden bereits erarbeitet.
Die Geraden können gegeben sein:

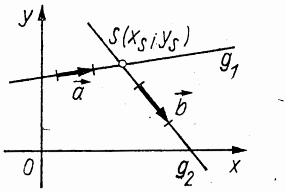
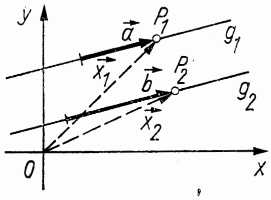
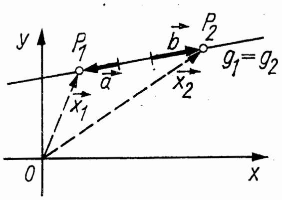
Fall 1: durch zwei parameterfreie Geradengleichungen
Fall 2: durch eine Parametergleichung und durch eine parameterfreie Geradengleichung
Fall 3: durch zwei Parametergleichungen

Existiert ein Schnittpunkt $S(x_S; y_S)$, so müssen die Koordinaten x_S, y_S beide Geradengleichungen erfüllen (da $S \in g_1$ und $S \in g_2$). Für den Fall 1 werden die Koordinaten des Schnittpunktes von g_1 und g_2 durch die Lösung des folgenden Gleichungssystems mit den Variablen x_S und y_S ermittelt (bekannt aus Kl. 9).

$$g_1\colon\ A_1x_S + B_1y_S + C_1 = 0$$
$$g_2\colon\ \underline{A_2x_S + B_2y_S + C_2 = 0}$$

In den Fällen 2 und 3 können die vektoriellen Parametergleichungen in parameterfreie Geradengleichungen übergeführt werden. Dann erfolgt die Berechnung der Schnittpunktskoordinaten wie im Fall 1.
Dieses Vorgehen ist ein Beispiel für ein häufig in der Mathematik angewandtes Prinzip: *das Prinzip der Rückführung neuer Aufgaben auf bereits gelöste.* Das sollte den Schülern deutlich gemacht werden.

Übung im Berechnen von Schnittpunktskoordinaten Bei der Lösung von Aufgaben der Art LB 76, Nr. 1 bis 4, sollte die selbständige Schülerarbeit im Vordergrund stehen, da das Lösen von Gleichungssystemen und die Umwandlung der Parametergleichungen in parameterfreie Geradengleichungen bis zu diesem Zeitpunkt von den Schülern ausreichend sicher beherrscht werden müßte. Bei Aufgaben wie LB 76, Nr. 5 (zur Achsenabschnittsgleichung), Nr. 7 und Nr. 8, sollten nach angemessener Überlegungszeit Diskussionen zum Lösungsweg geführt werden.

Lagebeziehung der Geraden	ablesbare Kriterien für die Bestimmung der Lagebeziehung aus der	
	vektoriellen Parametergleichung	parameterfreien Gleichung
1. Die Geraden schneiden einander im Punkt S: 	$\vec{a} \neq t\vec{b}$	$m_1 \neq m_2$ bzw. $-\frac{A_1}{B_1} \neq -\frac{A_2}{B_2}$ *)
2. Die Geraden sind parallel zueinander: 	$\vec{a} = t\vec{b}$ und $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \neq r\vec{a}$	$m_1 = m_2$ und $n_1 \neq n_2$ bzw. $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ und $-\frac{C_1}{B_1} \neq -\frac{C_2}{B_2}$ *)
3. Die Geraden fallen zusammen; sie sind identisch: 	$\vec{a} = t\vec{b}$ und $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = r\vec{a}$	$m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$ bzw. $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ und $-\frac{C_1}{B_1} = -\frac{C_2}{B_2}$ *)

*) Nach Klärung der Zusammenhänge kann auch übergegangen werden zu $\frac{A_1}{B_1} \neq \frac{A_2}{B_2}, \ldots,$ da diese Form das Ablesen der Lagebeziehung aus der Gleichung erleichtert.
Zugrunde gelegt wurde für die allgemeine Geradengleichung die Form $Ax + By + C = 0$.

Bild 56

Kontrollaufgaben

(1) LB 76: Nr. 1b und 3a

(2) Lesen Sie aus den folgenden Gleichungen die Lagebeziehung zwischen den zugehörigen Geraden ab!

g: $\vec{x} = (3; -4) + s(-2; 5)$ $\quad$ h: $\vec{x} = (1; 6) + t(-1; 2,5)$

Lerneinheit 18 **(2 Std.)**

Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum

LB 77 bis 82

Ziele

Die Schüler

- kennen die vier Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum,
- können in zunehmend selbständiger Arbeit Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum rechnerisch ermitteln,
- besitzen Fertigkeiten im Aufstellen von Parametergleichungen für Geraden, im Berechnen von Schnittpunkten und im Lösen dabei vorkommender Gleichungssysteme.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum
- Rechnerische Ermittlung der Lagebeziehung zweier Geraden

2. Stunde

- Übungen zum rechnerischen Ermitteln der Lagebeziehung zweier Geraden
- Beschreibung einer Geraden im Raum durch ein Gleichungssystem (ohne Parameter)

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum Bei der Behandlung dieser Thematik ist Wert darauf zu legen, durch anschauliches Arbeiten die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens der Schüler zu unterstützen. Das trifft besonders für den Fall zu, wenn die Geraden zueinander windschief[1]) liegen. Zu empfehlen sind für das Demonstrieren der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum Bleistifte oder Stäbchen, aber auch der Einsatz der Maniperm-Klapptafel. Die Erarbeitung der einzelnen Zusammenhänge sollte zu der Übersicht führen, die den Schülern auf Seite LB 79 zur Verfügung steht. Eine gute Hilfe für das Lösen entsprechender Aufgaben ist auch die im Bild 57 (UH 90) dargestellte Übersicht in der Art eines Lösungsalgorithmus.

Rechnerische Ermittlung der Lagebeziehung zweier Geraden Als erste Aufgabe sollte für das im Beispiel A 32 (LB 79) gegebene Geradenpaar der Schnittpunkt an der Tafel ermittelt werden. Dabei lernen die Schüler den Rechengang, der im Lehrbuch etwas ver-

[1] Der Begriff „zueinander windschiefe Geraden" wurde bereits in der 7. Klasse bei der senkrechten Zweitafelprojektion verwendet. Aufgrund des Abstandes von 5 Jahren bis zur Klasse 12 erscheint es gerechtfertigt, diesen Begriff als „einzuführenden Begriff" zu kennzeichnen.

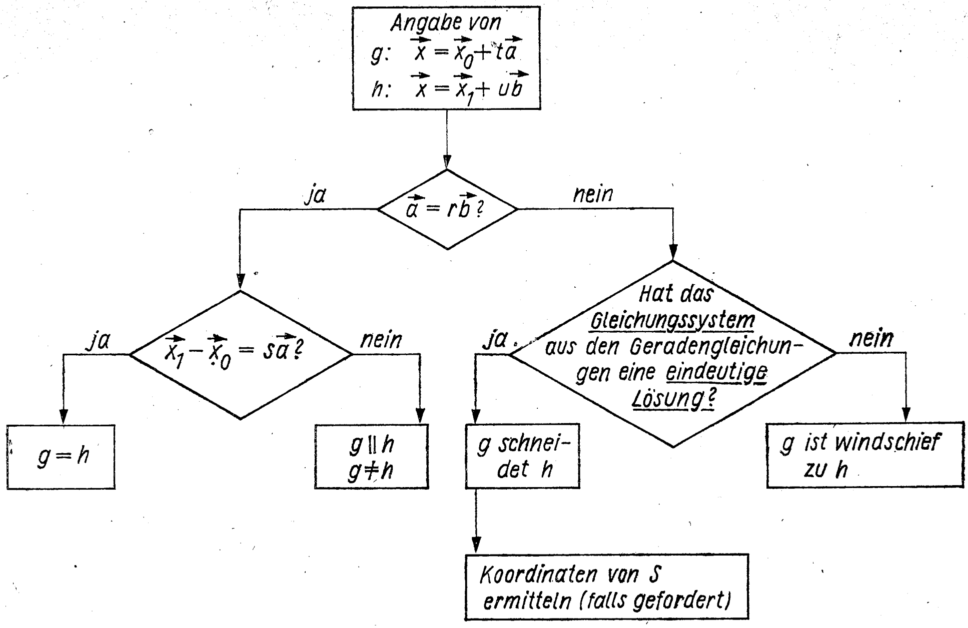


Bild 57

kürzt ist, mit allen Zwischenschritten kennen. Des weiteren sollte unbedingt eine Aufgabe, bei der die beiden Geraden windschief zueinander liegen, gemeinsam besprochen werden, z. B. LB 82, Nr. 9b.
Da die Schüler bei Schnittpunktberechnungen mitunter die beiden Geradengleichungen formal gleichsetzen, ohne über die entsprechenden anschaulichen Vorstellungen zu verfügen, soll zur Klärung dieses Sachverhalts eine Skizze vorgeschlagen werden (↗ Bild 58). Die unterschiedliche Symbolisierung der linken Seiten der Geradengleichungen ($\vec{x}$, $\underline{\vec{x}}$), die normalerweise nicht notwendig ist, wird für den hier angestrebten Zweck ausnahmsweise verwendet.

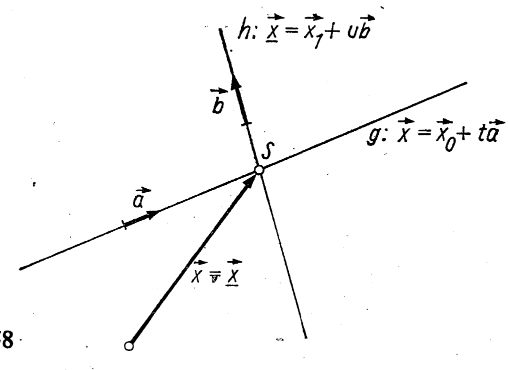


Bild 58

Übungen zum rechnerischen Ermitteln der Lagebeziehung zweier Geraden Für diese Übungen kann eine Auswahl aus den Aufgaben 8, 9 und 7 (LB 82) – zur Motivierung auf Seite UH 76 empfohlen – in der gegebenen Reihenfolge angeraten werden. Zuvor kann das Beispiel A 33 gemeinsam erarbeitet werden. Wichtig ist es auch, eine Auswahl aus den Aufgaben zu treffen, die sich auf das Lehrbuchbild A 114 (LB 82) beziehen. Es handelt sich dabei um die Aufgaben 1 bis 6, von denen auch einige für die Hausarbeit ausgewählt werden sollten.

Beschreibung einer Geraden im Raum durch ein Gleichungssystem (ohne Parameter) Es sollte den Schülern bewußt gemacht werden, daß es nicht möglich ist, eine Gerade im Raum durch eine einzige parameterfreie Gleichung zu beschreiben. Hierfür eignet sich das Beispiel A 34 (LB 80), das im Unterricht in selbständiger Schülerarbeit oder in einer vorbereitenden Hausaufgabe durchgearbeitet werden sollte. Der Erfolg dieser Bemühungen kann mit Hilfe des Auftrags A 64 (LB 81) überprüft werden.

Kontrollaufgaben

(1) LB 82: Nr. 7

(2) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Geraden mit folgenden Gleichungen!

g: $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{k} + s(-\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ $\quad h$: $\vec{x} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + t(-6\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k})$

Lösung: Die Geraden verlaufen windschief zueinander.

Lerneinheit 19 (3 Std.)
Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und den Koordinatenachsen bzw. -ebenen

LB 83 bis 86

In dieser Lerneinheit erfolgt eine relativ breite Anwendung des bisher erworbenen Wissens und Könnens. Voraussetzung für eine zügige Behandlung des neuen Stoffes sind Fertigkeiten im Aufstellen von Parametergleichungen, im Berechnen von Schnittpunkten zweier Geraden im Raum sowie im Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Variablen (Auf diesem Lösungsverfahren baut das Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit drei Variablen auf, das in den Unterrichtsstunden dieser Lerneinheit behandelt wird).

Ziele

Die Schüler

- kennen Gleichungen für die Koordinatenachsen und können Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenachsen rechnerisch ermitteln und gegebenenfalls Schnittpunktberechnungen durchführen,
- kennen die Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen sowie Gleichungen für die Koordinatenebenen,
- können die Koordinaten des Schnittpunkts von Gerade und Ebene unter Verwendung eines linearen Gleichungssystems mit drei Variablen berechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Ermitteln von Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und den Koordinatenachsen
- Erarbeitung eines Lösungsverfahrens für Gleichungssysteme mit drei Variablen

2. Stunde

- Erarbeitung der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen (↗ Übersicht LB 84)
- Rechnerische Ermittlung der Lagebeziehung zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen (■ A 36)

3. Stunde

- Erarbeitung einer Übersicht zur Bestimmung der Lagebeziehung zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen
- Systematisieren der Kenntnisse über Lagebeziehungen von Geraden im Raum und in der Ebene (LB 85)

Methodische Hinweise

Ermitteln von Lagebeziehungen zwischen Geraden des Raumes und den Koordinatenachsen
Die Koordinatenachsen sind spezielle Geraden. Somit können die Lagebeziehungen zwischen Geraden und Koordinatenachsen in der aus LE A 18 bekannten Weise ermittelt werden. Zu Beginn der Behandlung müssen lediglich die Gleichungen für die Koordinatenachsen erarbeitet werden. Bei geschickter Impulsgebung durch den Lehrer können die Schüler die Parametergleichungen und die entsprechenden Gleichungssysteme relativ selbständig finden (z. B. Impuls:
Welche Vektoren können bei den Koordinatenachsen als Richtungsvektoren verwendet werden?)
Das Beispiel A 35 (LB 83) sollte gemeinsam durchgesprochen werden. (Hinweis: Wird dabei der Lösungsalgorithmus auf Seite UH 90 verwendet, so kann nicht nach der im Lehrbuch dargestellten Folge vorgegangen werden.)
Bei jeder der im Rahmen der Festigung zu lösenden Aufgabe sollte der zeichnerischen Darstellung des jeweiligen Sachverhaltes große Aufmerksamkeit gewidmet werden, und zwar vor der rechnerischen Ermittlung zur Äußerung einer Vermutung und nach der Berechnung zur Kontrolle des Ergebnisses. Bei Aufgaben, die sich auf den Raum beziehen, ist die Kontrolle des Ergebnisses durch eine Zeichnung nur begrenzt möglich. Für die Ebene jedoch ist diese Kontrolle sehr zu empfehlen.

Erarbeitung eines Lösungsverfahrens für Gleichungssysteme mit drei Variablen Dieses Lösungsverfahren wird bei der Behandlung der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen benötigt. Im Stoffgebiet „Ungleichungen und Gleichungssysteme“ wurde in der 9. Klasse eventuell schon auf das Lösen derartiger Gleichungssysteme eingegangen. Hier wurde bevorzugt das Einsetzungsverfahren verwendet. Es kann selbstverständlich auch das Additionsverfahren, das die Schüler eventuell bei der Herleitung der Punktrichtungsgleichung nutzten, zur Lösung des Gleichungssystems gewählt werden.

Erarbeitung der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen Bei dieser Erarbeitung sind die Schüler in weitgehend selbständiger Arbeit zu einer Übersicht zu führen, wie sie auf Seite LB 84 zu finden ist.[1]
Aus Gründen der Anschaulichkeit wird für die Erarbeitung der genannten Lagebeziehungen wiederum die Maniperm-Klapptafel empfohlen. Zur rechnerischen Ermittlung der jeweiligen Lagebeziehung müssen dem Schüler die Gleichungen der Koordinatenebenen bekannt sein. Der Lehrplan sieht die ausführliche Behandlung von Gleichungen einer Ebene jedoch nicht vor. Es ist deshalb zu empfehlen, zunächst die xy-Ebene an der Tafel zu skizzieren. Ein beliebiger Punkt P_1 der gewählten Ebene wird festgelegt und in der Form $\vec{x}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ beschrieben. Mit einigen weiteren Punkten wird ebenso verfahren, so daß die Schüler erkennen, daß jeder Punkt der xy-Ebene durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$ beschrieben werden kann bzw. für jeden Punkt der xy-Ebene $z = 0$ gilt. Die Gleichungen der anderen Koordinatenebenen sollten die Schüler dann selbständig angeben können.

Rechnerische Ermittlung der Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen Für eine erste Aufgabe zur rechnerischen Ermittlung der Lagebeziehung zwischen einer Geraden im Raum und einer Koordinatenebene kann das Beispiel A 36 (LB 84) gewählt werden. Als ein Ergebnis, das zu Beginn der folgenden Stunde zur Erarbeitung einer Übersicht verwendet werden kann, sollte dabei herausgestellt werden: Wenn das **Gleichungssystem** aus der Geradengleichung und der Gleichung der Koordinatenebene **eindeutig lösbar** ist, dann **schneidet** die Gerade die Ebene.

Hausaufgabe: LB 86: Nr. 1 und 2

Erarbeitung einer Übersicht Aufgrund der bisher erworbenen Erfahrungen bei der rechnerischen Ermittlung von Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum ist zu erwarten, daß die Schüler in selbständiger Arbeit eine Übersicht der folgenden Art entwerfen können:

Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems aus der Geradengleichung und der Gleichung der Koordinatenebene	Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Koordinatenebene ε
genau eine Lösung	g schneidet ε
unendlich viele Lösungen	g liegt in ε
keine Lösung	$g \parallel \varepsilon$

Eine solche Übersicht hilft den Schülern (insbesondere leistungsschwächeren) bei der rechnerischen Ermittlung der jeweiligen Lagebeziehung erheblich. Zur Übung sollten einige Aufgaben der Nummern 3 und 4 (LB 86) gelöst werden. Besonderer Wert ist dabei auf die Veranschaulichung des Sachverhalts durch eine Zeichnung zu legen.

Systematisieren der Kenntnisse über Lagebeziehungen von Geraden im Raum und in der Ebene Diese Systematisierung kann sowohl im Unterricht als auch in der Hausarbeit vorgenommen werden. Es wäre durchaus denkbar, daß die Schüler eine Art „Belegarbeit" anfertigen, in der, von Geraden in der Ebene angefangen (LE 17) über Geraden im Raum (LE 18) bis hin zu den Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen (LE 19), in Form von Übersichten und kurzen Erläuterungen die Zusammenhänge dargestellt werden. Erfahrungsgemäß ist eine solche Arbeit für jeden Schüler von Gewinn. Eine entsprechende Auswertung muß selbstverständlich folgen. Die Zusammenfassung auf Seite LB 85 sollte auf jeden Fall in die Arbeit einbezogen werden. An die Stelle einer „Belegarbeit" für jeden Schüler kann auch ein von leistungsstarken Schülern erarbeiteter Vortrag treten.

[1] Die Begriffe *Durchstoßpunkt* und *Spurpunkt* für Schnittpunkt sollten aufgrund ihrer Gebräuchlichkeit auch genannt werden.

Kontrollaufgaben

(1) Auftrag A 68a (LB 84) (2) LB 86: Nr. 4a

(3) Nennen Sie eine Gleichung für die xz-Ebene!
Welche Lagebeziehungen zwischen Geraden im Raum und den Koordinatenebenen sind Ihnen bekannt?

Stoffabschnitt 1.4 Skalarprodukt und Anwendungen

(13 Std.)

Dieser Stoffabschnitt leistet einen wesentlichen Beitrag zur Verwirklichung eines der Hauptziele des Stoffgebietes, nämlich zur Befähigung der Schüler zum sicheren Ausführen der Rechenoperationen mit Vektoren und zum inhaltlichen Verstehen der für diese Rechenoperationen gültigen Gesetze (LP 41). Zur Motivierung des zu behandelnden Stoffes sind die Schüler auf die große Anwendungsbreite des Skalarproduktes sowohl innerhalb der Mathematik (z. B. bei der Berechnung der Größe eines Winkels zwischen Vektoren bzw. zwischen Geraden) als auch in Physik und Technik (siehe Übersicht zu LE 26, ↗ UH 114) hinzuweisen.
Im Falle der Additionstheoreme und der Anwendungen des Skalarproduktes in der Physik ist die Ausprägung von Fertigkeiten beim Lösen von Aufgaben nicht vorgesehen.
Für „tägliche Übungen" wird der Aufgabenkomplex 13.4. (UH 18f.) empfohlen.
Die folgende Übersicht soll die Struktur des in diesem Abschnitt zu behandelnden Stoffes deutlich machen.

Skalarprodukt

Definition des Skalarproduktes

Koordinatendarstellung

Eigenschaften des Skalarproduktes

Kommutativität	Distributivität	Assoziativität bezüglich der Multiplikation des Skalarproduktes mit einer reellen Zahl

Assoziativgesetz für die skalare Multiplikation von Vektoren **gilt nicht.**

Übungen im Berechnen von Skalarprodukten mit dem Ziel des zunehmend selbständigen Lösens von Aufgaben.

Anwendungen des Skalarproduktes

Beim Beweisen planimetrischer Sätze	*Bei der Berechnung des Betrages von Vektoren*	*Bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren*	*Bei der Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden*
Ziel: Zunehmende Selbständigkeit beim Führen von Beweisen und beim Lösen von Aufgaben.			

Bei der Herleitung der Additionstheoreme und von Sätzen in der Physik
Ziel: Zeigen der Anwendungsbreite des Skalarproduktes; Fertigkeiten im selbständigen Lösen von Aufgaben werden nicht angestrebt.

Lerneinheit 20
Das Skalarprodukt zweier Vektoren

(1 Std.)

LB 86 bis 90

Ziele

Die Schüler

- kennen die Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren und können Skalarprodukte berechnen,
- wissen, daß die skalare Multiplikation nicht eindeutig umkehrbar ist,
- wissen, unter welchen Bedingungen das Skalarprodukt den Wert Null annimmt, größer als Null oder kleiner als Null ist.

Schwerpunkte

- Erarbeitung der Definition des Skalarproduktes anhand der Formel zur Berechnung der mechanischen Arbeit
- Übungen im Berechnen von Skalarprodukten
- Information über die nicht eindeutige Umkehrbarkeit der skalaren Multiplikation
- Erarbeiten der Bedingungen, unter denen für das Skalarprodukt gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} >$

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Definition des Skalarproduktes Unter Hinzuziehung des Lehrtextes auf Seite LB 86f. wird die Gleichung $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ erarbeitet, die als Motivierung und Einleitung für die Behandlung des Skalarproduktes genutzt wird. Bei der Einführung der Definitionsgleichung

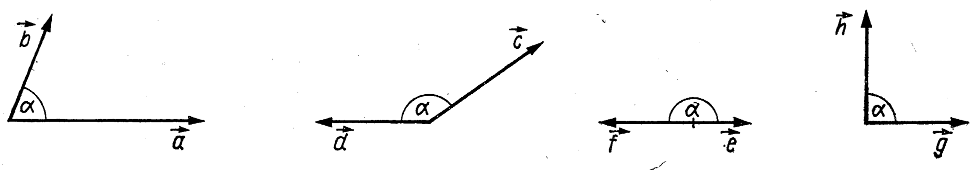
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

sollte den Schülern bewußtgemacht werden, daß es sich im Falle des Winkels $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$ um einen nichtorientierten Winkel handelt, daß deshalb gilt: $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle (\vec{b}, \vec{a})$.
Außerdem sollte auf die Beziehung $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ hingewiesen werden.

Da das Vektorprodukt zweier Vektoren gemäß Lehrplan nicht zu behandeln ist, könnte die Bezeichnung *Skalar*produkt den Schülern dadurch plausibel gemacht werden, daß der Lehrer in einer Bemerkung auf den Umstand verweist, daß es neben dem Skalarprodukt eine weitere Verknüpfung gibt, deren Ergebnis keine Skalare sind.

Übungen im Berechnen von Skalarprodukten Zunächst sollte man sich solchen Aufgaben zuwenden, die im Ergebnis keine Variablen enthalten (LB 90, Nr. 3 und 4). Aufgaben wie im Beispiel A 37 und im Auftrag A 69 (LB 87) sollten folgen. Mancher Schüler wird auf diese Weise zu der Überzeugung geführt, daß das Ergebnis beim Skalarprodukt eine *Zahl* ist. Es könnte z. B. als erste Aufgabe die folgende gewählt werden:

Berechne das Skalarprodukt der in den Bildern 59 bis 62 dargestellten Vektoren!



Bilder 59 bis 62

Die Zeichnungen könnten entweder an der Tafel vorbereitet werden (Winkel und Beträge der Vektoren würden von Schülern gemessen und die Ergebnisse der Skalarprodukte gemeinsam berechnet) oder den Schülern in Form von Arbeitsblättern vorgelegt werden. Dabei könnte auch schon kurz auf Sonderfälle eingegangen werden.

Information über die nicht eindeutige Umkehrbarkeit der skalaren Multiplikation Es ist notwendig, den Schülern mitzuteilen, daß im Gegensatz zur Multiplikation reeller Zahlen die skalare Multiplikation *nicht eindeutig umkehrbar* ist. Die Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{x} = r$ hat unendlich viele Lösungen. Aus dieser Gleichung kann $\vec{x}$ nicht mittels „Division durch $\vec{a}$“ gefunden werden, denn eine solche Rechenoperation läßt sich nicht definieren. Wenn zeitlich die Möglichkeit dazu besteht, kann diese Thematik ausführlicher behandelt werden (siehe LB 87f. „geometrische Interpretation des Skalarproduktes“).

Erarbeiten der Bedingungen, unter denen für das Skalarprodukt gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ Wenn dieser Schwerpunkt hier gesondert aufgeführt wird, dann heißt das nicht, daß die Schüler dazu noch nichts wissen. Bei der Lösung verschiedener Aufgaben haben sie Erkenntnisse gesammelt, die jetzt systematisiert und ergänzt werden sollen. Es kann eine Übersicht gemäß der auf Seite LB 89 oder auch nach folgendem Muster erarbeitet werden[1]:

[1] Bei der Behandlung von Winkeln zwischen zwei Vektoren wurde zum Zweck der eindeutigen Festlegung eines Winkels α eingeschränkt auf $0 < \alpha < \pi$ für den nichtorientierten Winkel. Aus diesem Grund werden Winkel, die größer als 180° sind, in dieser Tabelle nicht berücksichtigt.

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	
$\vec{a} \neq \vec{o}, \vec{b} \neq \vec{o}$ $0° \leqq \alpha < 90°$	$\vec{a} \neq \vec{o}, \vec{b} \neq \vec{o}$ $90° < \alpha \leqq 180°$	$\vec{a} \neq \vec{o}, \vec{b} \neq \vec{o}$ $\alpha = 90°$	$\vec{a} = \vec{o}$ oder $\vec{b} = \vec{o}$

Zu dieser Thematik kann auch ein kurzer Schülervortrag vergeben werden.
Im Anschluß daran wird noch die Beziehung $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ erarbeitet. Als Übungsaufgabe hierzu ist die Aufgabe 5 (LB 90) geeignet. Die Skalarprodukte der Basisvektoren, die hier zu berechnen sind, werden in den folgenden Lerneinheiten benötigt. Bei der Lösung von Übungsaufgaben sollten auch Aufgaben der Art wie in Nr. 6 und 7 (LB 90) beachtet werden.

Kontrollaufgaben

(1) Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$, wenn $\vec{a}^2 = 16$, $\vec{b}^2 = 25$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$!
(Lösung: $\sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \approx 41{,}4°$)

(2) LB 90: Nr. 4a

(3) Nennen Sie die Bedingungen, unter denen gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$!

Lerneinheit 21 **(2 Std.)**
Eigenschaften der skalaren Multiplikation von Vektoren

LB 90 bis 93

Zum Zwecke der Motivierung und Systematisierung sollte in dieser Lerneinheit von den Eigenschaften (oder Rechengesetzen) der Multiplikation von reellen Zahlen ausgegangen werden. Entsprechende Unterschiede, die sich bei den zu untersuchenden Eigenschaften der skalaren Multiplikation gegenüber dem Rechnen mit reellen Zahlen ergeben, prägen sich dann erfahrungsgemäß besser ein.

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß für die skalare Multiplikation das Kommutativ- und das Distributivgesetz gelten und bezüglich der Multiplikation des Skalarproduktes mit einer reellen Zahl auch das Assoziativgesetz,
- wissen, daß es für die skalare Multiplikation von Vektoren kein Assoziativgesetz gibt,
- können den Beweis für die Gültigkeit eines dieser Gesetze selbständig führen,
- können die Eigenschaften des Skalarproduktes bei Berechnungen anwenden.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung
- Überprüfung der Gültigkeit des Kommutativgesetzes
- Nichtgültigkeit des Assoziativgesetzes für die skalare Multiplikation von Vektoren
- Überprüfung der Gültigkeit des Assoziativgesetzes für die Multiplikation des Skalarprodukts mit einer reellen Zahl (1. Teil)

2. Stunde

- Überprüfung der Gültigkeit des Assoziativgesetzes für die Multiplikation des Skalarproduktes mit einer reellen Zahl (2. Teil)
- Mitteilung des Distributivgesetzes
- Anwendung der Eigenschaften des Skalarproduktes

Methodische Hinweise

Motivierung Ein Rückblick auf die Rechengesetze für die Multiplikation reeller Zahlen und auf die Bedeutung, die diese Gesetze für das Lösen von Aufgaben haben, soll die Betrachtung der Eigenschaften des Skalarprodukts notwendig erscheinen lassen. In allen bisher bekannten Zahlenbereichen gelten für die Multiplikation sowohl das Kommutativgesetz als auch das Assoziativ- und Distributivgesetz. Es wird die Frage gestellt, ob diese Gesetze auch für das Skalarprodukt gelten.

Überprüfung der Gültigkeit des Kommutativgesetzes Die Gültigkeit dieses Gesetzes können die Schüler anhand der Definitionsgleichung selbständig überprüfen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \qquad \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|\,|\vec{a}| \cos \sphericalangle (\vec{b}, \vec{a})$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}} \longleftarrow$$

Die Begründung dafür, daß der Schritt

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

aus dem vorhergehenden folgt, ist unbedingt herauszuarbeiten.

Nichtgültigkeit des Assoziativgesetzes für die skalare Multiplikation von Vektoren Die nähere Betrachtung des Terms $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ zeigt, daß eine Überprüfung der Gültigkeit des Assoziativgesetzes eigentlich gegenstandslos ist. Mit einigen Impulsen von seiten des Lehrers kann das auch der Schüler erkennen.

Vorschlag: Betrachten Sie in dem Term $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ den Ausdruck in der Klammer und überlegen Sie, ob auf $\vec{a}$ und $(\vec{b} \cdot \vec{c})$ die Definition des Skalarprodukts angewandt werden kann!
Im Ergebnis der Diskussion zu dieser Frage erkennen die Schüler, daß sowohl $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ als auch $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ sinnlose Terme sind (LB 91) und es deshalb für die skalare Multiplikation zweier Vektoren **kein Assoziativgesetz gibt.**

Würde das Zeichen „·" auch als Zeichen für die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl aufgefaßt, dann wäre (unter der Voraussetzung, daß vorher erklärt wurde $r\vec{a} = \vec{a}r$, siehe auch Bemerkung zur LE A 6, UH 48) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ ein zu $\vec{a}$ paralleler Vektor. Beim Term $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ erhielte man einen zu $\vec{c}$ parallelen Vektor. Eine Gleichheit beider Terme würde nur in Ausnahmefällen vorliegen. Es würde also auch dann kein Assoziativgesetz gelten.

Überprüfung der Gültigkeit des Assoziativgesetzes für die Multiplikation des Skalarproduktes mit einer reellen Zahl Der vollständige Beweis dieses Gesetzes kann sicher nicht mehr in der ersten Unterrichtsstunde erfolgen. Den Nachweis der Gültigkeit des Gesetzes für die Fälle $r > 0$ und $r = 0$ können die Schüler aufgrund der Definition des Skalarproduktes selbständig und relativ schnell erbringen. Für die unterrichtliche Behandlung des Beweises wird eine Teilung empfohlen. Der Fall $r < 0$ kann von den Schülern als Hausaufgabe erledigt werden, wobei die Lehrbuchdarstellung auf Seite LB 91 hinzugezogen wird. Die Auswertung erfolgt dann zu Beginn der folgenden Unterrichtsstunde. Der im Lehrbuch au- Seite LB 91 dargestellte Beweis sollte für ein Tafelbild in folgender Weise aufbereitet werden:

	$r(\vec{a} \cdot \vec{b})$ $= r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$	$(r\vec{a}) \cdot \vec{b}$ $= \lvert r\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (r\vec{a}, \vec{b})$ $= \lvert r\rvert\,\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (r\vec{a}, \vec{b})$
$r > 0$	$r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$	$r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$
$r < 0$	$r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$	$-r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (-\vec{a}, \vec{b})$ $= -r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle [\pi - \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})]$ $= -r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\,[-\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})]$ $= r\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$
$r = 0$	$0(\vec{a} \cdot \vec{b})$ $= 0$	$(0\vec{a}) \cdot \vec{b}$ $= 0$

Die gleichlautenden Terme sollten jeweils farbig herausgehoben werden. Bei der Behandlung des Falles $r < 0$ ist Wert darauf zu legen, daß alle Schüler den Zusammenhang

$$\cos \sphericalangle (-\vec{a}, \vec{b}) = \cos [\pi - \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})] = -\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$$

begreifen. Erklärungen dazu sind durch Zeichnungen zu unterstützen.

Mitteilung des Distributivgesetzes Die Gültigkeit des Distributivgesetzes für die skalare Multiplikation wird den Schülern nur mitgeteilt, nicht bewiesen. Eine Anwendung des Distributivgesetzes erfolgt innerhalb verschiedener Beweisführungen, speziell bei der Herleitung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes (LB 94f.). Die Schüler werden darauf hingewiesen, daß die Kenntnis über die Eigenschaften des Skalarproduktes die Berechnung desselben mitunter erleichtern kann (LB 92) und den vektoriellen Beweis vieler geometrischer Sätze ermöglicht.

Anwendung der Eigenschaften des Skalarproduktes Im Beispiel A 39 (LB 92) werden Berechnungen von Skalarprodukten unter Anwendung der Eigenschaften des Skalarproduktes durchgeführt.
Mit solchen Aufgaben kann begonnen werden. Es ist jedoch darauf zu achten, daß die Lösung von Aufgaben nicht deshalb verkompliziert wird, um recht oft entsprechende Eigenschaften des Skalarproduktes ins Spiel bringen zu können. Wenn den Schülern Rechenerleichterungen in Aussicht gestellt werden, sollten auch solche folgen. Überzeugend dürfte das gelingen im Falle des Beispiels A 39 c) (LB 92):

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} \cdot (4\vec{i} + 6\vec{j}) = (2\vec{i} \cdot 4\vec{i}) + (2\vec{i} \cdot 6\vec{j}) = 2 \cdot 4(\vec{i} \cdot \vec{i}) + 2 \cdot 6(\vec{i} \cdot \vec{j})$$
$$= 8 \cdot 1 + 12 \cdot 0 = 8$$

Vor der Behandlung dieses Beispiels kann im Interesse des zügigen Vorgehens noch einmal an die Skalarprodukte der Basisvektoren erinnert werden.
Auf Seite LB 88f. wurde vorher die Berechnung dieses Skalarprodukts ohne Anwendung der Eigenschaften mit wesentlich größerem Aufwand abgewickelt.
Die Aufgabe 3 (LB 93) verlangt vom Schüler konzentriertes Arbeiten, da es trotz der einfachen Zahlenwerte schnell zu einem Vorzeichenfehler oder zum Vergessen eines Zwischenschrittes bei der Anwendung des Distributivgesetzes kommen kann.
Auf keinen Fall sollten Aufgaben wie Nr. 4 bis Nr. 7 (LB 93) übersprungen werden, da es sich hier zeigt, ob das bisherige Wissen über das Skalarprodukt (insbesondere der Fakt, daß das Skalarprodukt eine reelle Zahl ist) richtig angeeignet wurde.

Kontrollaufgaben

(1) LB 93: Nr. 3a

(2) Ist $(a + b)\vec{a} - b$ ein sinnvoller Term?

(3) Sind für $|\vec{a}| = a$ und $|\vec{b}| = b$ die folgenden Beziehungen richtig? Beweisen Sie Ihre Entscheidung!

a) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

c) $a^2 - b^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$

Lerneinheit 22 (2 Std.)
Anwendung des Skalarproduktes beim Beweisen von Sätzen
LB 93 und 94

Im Vordergrund steht die Entwicklung der Fähigkeit der Schüler, selbständig einen Beweisansatz und weitere Beweisschritte zu finden. Der Grad der Selbständigkeit der Schülertätigkeit und der Grad der Schwierigkeit der zu führenden Beweise sollten dabei nach und nach erhöht werden. Bei der Gestaltung des Unterrichts ist zu beachten, daß Erfolgsgefühle eine große Bedeutung für die Einstellung der Schüler zur weiteren Arbeit haben. Besonderer Wert ist beim selbständigen Führen von Beweisen auf die Erziehung der Schüler zum *beharrlichen* Arbeiten zu legen.

Ziele

Die Schüler
- wissen, daß das Skalarprodukt beim Beweisen planimetrischer Sätze angewandt werden kann,
- können mindestens einen Beweis mit Hilfe des Skalarproduktes selbständig führen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Selbständige Erarbeitung des Beweises zum Satz des PYTHAGORAS anhand des Lehrbuchs
- Erarbeitung des Beweises für Aufgabe 2 (LB 94)

2. Stunde

- Auswertung der Hausaufgabe [Aufgabe 4 (LB 94)]
- Erarbeitung des Beweises für Aufgabe 1 (LB 94)

Methodische Hinweise

Selbständige Erarbeitung des Beweises zum Satz des PYTHAGORAS anhand des Lehrbuchs Der im Lehrbuch Seite LB 93 ausgeführte Beweis ist so aufbereitet, daß eine selbständige Erarbeitung empfohlen werden kann. Das Ziel der Erarbeitung sollte sein, den Beweis anhand einer Skizze vor der Klasse selbständig führen zu können. Dieses Ziel ist vor Beginn der Erarbeitung den Schülern bekanntzugeben.

Erarbeitung des Beweises für Aufgabe 2 (LB 94) Zur weiteren Erhöhung der Selbständigkeit beim Führen von Beweisen mit vektoriellen Mitteln wird empfohlen, diesen Beweis zwar frontal an der Tafel (unter Mitarbeit im Heft), aber unter erhöhter Mitwirkung der Schüler zu führen. Das erfordert geschickte Denkanstöße durch den Lehrer.
Zunächst sollte eine Definition für den Rhombus von den Schülern genannt werden. An einer Skizze ist dann der Sachverhalt zu verdeutlichen (↗ Bild 63).

Was gilt aufgrund der Definition für $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Auf welchen Ausdruck müßte man kommen, um den Satz bewiesen zu haben?

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

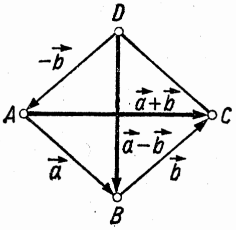


Bild 63

Die hier genannten Schritte können vom Schüler geleistet werden. Bei den weiteren Schritten wird wohl der Lehrer mehr Hinweise geben müssen.

Der zu erreichende Ausdruck enthält ein Skalarprodukt. Wie gelangt man vom Betrag eines Vektors zu einem Skalarprodukt?
Aufgrund der Beziehung $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ folgt aus $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
$\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.
Formen Sie diese Gleichung in Richtung auf den gewünschten Ausdruck um!

$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$

$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ w. z. b. w.

Zum besseren Erkennen von Voraussetzung und Behauptung empfiehlt sich die Umformulierung des Satzes in die „Wenn-so-Form" und die Gliederung in „Voraussetzung – Behauptung – Beweis" bei der schriftlichen Wiedergabe des Beweises.

Hausaufgabe: Beweis der Umkehrung des oben bewiesenen Satzes [Aufgabe 4 (LB 94)].

Bezüglich der Umkehrung von Sätzen ist daran zu arbeiten, daß die Schüler entsprechende Formulierungen selbständig finden lernen.

Auswertung der Hausaufgabe [Aufgabe 4 (LB 94)] Ein Schüler führt den Beweis, der nach der Behandlung der einen Richtung im Unterricht sicher nicht zu schwierig war, an der Tafel vor. Durch eine anschließende Diskussion zu dem Vorgetragenen können noch offene Fragen geklärt werden. Der Lehrer sollte sich über die Qualität der Hausaufgabe (eventuell durch Einsammeln der Aufzeichnungen) Gewißheit verschaffen.

Voraussetzung: In einem Parallelogramm mögen die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
(Das bedeutet: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$.)

Behauptung: Dieses Parallelogramm ist ein Rhombus.
(Das bedeutet: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.)

Beweis:

$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ (nach Voraussetzung)
$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$ (aufgrund der Gültigkeit des Distributivgesetzes der skalaren Multiplikation)
$\vec{a}^2 = \vec{b}^2$
$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ (da $\vec{a}^2 = |\vec{a}|\,|\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2$ bzw. $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$)
$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ w. z. b. w.

Erarbeitung des Beweises für Aufgabe 1 (LB 94) Vor der selbständigen Erarbeitung des Beweises für die Aufgabe 1 sollte der Lehrer eine Beweisfigur (↗ Bild 64) mit entsprechenden Bezeichnungen gemeinsam mit den Schülern erarbeiten. Er erleichtert sich so die Verständigung im Rahmen der Auswertung. (Es sei jedoch erwähnt, daß ein Schüler nicht aufgrund anderer Bezeichnungen unterbewertet werden darf.)

Beweisfigur für Aufgabe 1 (LB 94): Bild 64

Voraussetzung: Die Diagonalen eines Parallelogramms sind gleich lang
($|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$).

Behauptung: Das Parallelogramm ist ein Rechteck ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$).

Beweis:

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$ (nach Voraussetzung)
$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2$ (da $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$)
$\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2$ (aufgrund der Gültigkeit des Distributivgesetzes der skalaren Multiplikation)
$2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\vec{a} \cdot \vec{b}$
$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ w. z. b. w.

Die Aufgabe 3 (LB 94) wird für die Hausarbeit empfohlen.

Beweisfigur für Aufgabe 3 (LB 94): Bild 65

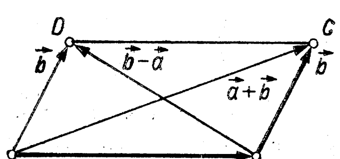


Bild 64

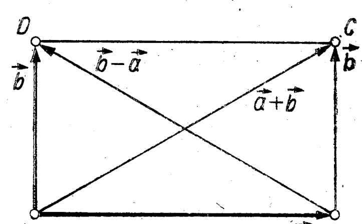


Bild 65

Voraussetzung: Das Parallelogramm ist ein Rechteck ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$).

Behauptung: Die Diagonalen (im Rechteck) sind gleich lang ($|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}|$).

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \underbrace{2\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0} + \vec{b}^2 \\ &2.\ (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b}^2 - \underbrace{2\vec{a} \cdot \vec{b}}_{0} + \vec{a}^2 \end{aligned}\right\} \text{(aufgrund der Gültigkeit des Distributivgesetzes der skalaren Multiplikation)}$$

$2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, da nach Voraussetzung gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Aus 1. und 2. folgt

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2$$
$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 \quad (\text{da } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2)$$
$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn zeitlich die Möglichkeit dazu besteht oder differenziert mit den Schülern gearbeitet wird, können Beweise zu solchen wohlbekannten Sätzen wie zum Satz des THALES, zum Höhensatz, zum Kathetensatz (LB 119, Nr. 20 und 21) in selbständiger Schülerarbeit geführt werden (auch die Aufgabe 5, LB 94, ist möglich).

Kontrollaufgabe

Führen Sie zu einem der behandelten Sätze selbständig den Beweis unter Verwendung des Skalarproduktes!

Lerneinheit 23 (2 Std.)

Die Koordinatendarstellung des Skalarproduktes

LB 94 bis 96

Nach der Herleitung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes bildet das Anwenden desselben auf das Berechnen des Betrags eines Vektors und des Winkels zwischen zwei Vektoren einen Schwerpunkt in diesen Unterrichtsstunden. Dabei steht das selbständige Lösen spezieller Aufgaben (in größerer Anzahl) im Vordergrund. Weitere Anwendungen folgen in den Lerneinheiten A 24 bis A 26.

Ziele

Die Schüler

- können mit Hilfe des Distributivgesetzes und der Skalarprodukte der Basisvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ die Koordinatendarstellung des Skalarproduktes herleiten,
- wissen, wie der Betrag eines Vektors und die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren mit Hilfe der Koordinaten der Vektoren berechnet werden,
- können entsprechende Aufgaben selbständig lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Herleitung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes
- Lösen von Aufgaben
- Anwendung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes auf die Berechnung des Betrags eines Vektors und des Winkels zwischen zwei Vektoren

2. Stunde

- Zusammenfassende Betrachtungen zu den hergeleiteten Formeln
- Lösen von Aufgaben

Methodische Hinweise

Herleitung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes Oft sind Vektoren durch ihre Koordinaten gegeben. Den Schülern wird erläutert, daß es deshalb für die Berechnung des Skalarproduktes günstig ist, eine Form des Skalarproduktes zu finden, die eine Berechnung mittels der Koordinaten der Vektoren ermöglicht.

Wovon könnte man bei der Herleitung einer solchen Form ausgehen?

Vielleicht kommen einige Schüler selbst darauf, die Komponentendarstellung der Vektoren als Ausgangspunkt zu wählen:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \qquad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$

Bei der sich anschließenden Berechnung des Skalarproduktes $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (Anwendung des Distributivgesetzes) arbeiten alle Schüler im Heft und ein Schüler hinter der Tafel, so daß alle im Anschluß eine Vergleichsmöglichkeit erhalten.
Durch eine Zwischenfrage nach dem ersten Schritt wird auf die Bildung des Skalarproduktes von Basisvektoren aufmerksam gemacht:

Bietet die Berechnung der Skalarprodukte von Basisvektoren Möglichkeiten für eine Vereinfachung?

Lösen von Aufgaben Für die Berechnung von Skalarprodukten mittels Koordinatendarstellung ist die Spaltenschreibweise besonders vorteilhaft[1]):

Beispiel: $\vec{a} = (-3;\ -4;\ -3)$, $\vec{b} = (-5;\ 6;\ 4)$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 15 - 24 - 12 = -21$$

Um Fehler zu vermeiden, sollte die folgende falsche Schreibweise diskutiert werden:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix} = -21.$$

[1] Da das Arbeiten mit Matrizen nicht Behandlungsgegenstand ist, kann hier nicht auf die Multiplikation eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor eingegangen werden. Lediglich ein Hinweis auf die andere Schreibweise im späteren Studium wäre möglich.

Anwendung der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes Bei der Behandlung dieses Stundenteils geht es vorerst nur um die Herleitung der Formeln; entsprechende Aufgaben sollten erst in der zweiten Stunde gelöst werden. Bei Zeitmangel kann die Herleitung in der Unterrichtsstunde vorbereitet und die Ausführung für die Hausarbeit aufgetragen werden. Für eine selbständige Schülerarbeit wird der folgende Auftrag erteilt:

„Leiten Sie die Formel für den Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

her, indem Sie von der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes zweier Vektoren für den Fall $\vec{a} = \vec{b}$ ausgehen!"

Auch die Formel für die Berechnung des Winkels (LB 95) kann in selbständiger Schülerarbeit hergeleitet werden:

„Stellen Sie unter Verwendung der Definition des Skalarproduktes und bereits hergeleiteter Beziehungen eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren auf! Die Vektoren sollen dabei durch ihre Koordinaten gegeben sein."

Zusammenfassende Betrachtungen Dieser Schritt am Anfang der zweiten Unterrichtsstunde ist notwendig, um für die folgenden Anforderungen an die Schüler ein gesichertes Ausgangsniveau zu schaffen.
An der Tafel sollte im Zuge einer Wiederholung die folgende Übersicht entstehen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}); \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Lösen von Aufgaben Im folgenden gilt es, die Rechengeschwindigkeit zu erhöhen und somit recht viele Aufgaben in der zur Verfügung stehenden Zeit zu lösen.
Da beim Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren [z. B. Aufgaben 1, 2 und 4 (LB 96)] die Berechnung des Betrages eines Vektors einfließt, sind gesonderte Aufgaben zur Ermittlung des Betrags eines Vektors nicht unbedingt erforderlich. Natürlich entscheidet darüber letztlich die Klassensituation.
Beim Lösen von Aufgaben sollte auf das *rationelle Berechnen* von Termen der Form $\frac{a}{\sqrt{b \cdot c}}$ mit Hilfe des *Rechenstabs* eingegangen werden.
Wichtig sind Aufgaben, in denen Seiten und Winkel geometrischer Figuren zu berechnen sind, z. B. Aufgaben 5, 6 (LB 96). Da die hierbei notwendigen Berechnungen zeitaufwendiger sind, sollten nach einer im Unterricht gelösten Beispielaufgabe solche Aufgaben vorzugsweise als Hausaufgabe gestellt werden. Besonders bei diesen Aufgaben ist auf die übersichtliche Darstellung des Lösungsweges (insbesondere auch an der Tafel) zu achten.

Kontrollaufgaben

(1) Leiten Sie die Koordinatendarstellung des Skalarproduktes her!

(2) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{b} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ und $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$!

Lösung zu (2): $\sphericalangle (\vec{b}, \vec{c}) \approx 131{,}8°$

Lerneinheit 24 (3 Std.)

Der Schnittwinkel zweier Geraden

LB 97 bis 101

Schwerpunkt in diesen Unterrichtsstunden ist wiederum die Befähigung der Schüler zum selbständigen Lösen von Aufgaben. Die hier zu lösenden Aufgaben sind meist komplexer Natur. So geht es beispielsweise neben der Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden (neuer Stoff) um die Bestimmung der gegenseitigen Lage gegebener Geraden und um die Ermittlung der Koordinaten des Schnittpunktes.
Etwa eine Unterrichtsstunde ist für die systematisierende Zusammenfassung der Kenntnisse über das Skalarprodukt vorgesehen.

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß der Schnittwinkel zweier Geraden entweder ein spitzer oder ein rechter Winkel ist,
- können die Größe des Schnittwinkels zweier Geraden selbständig berechnen, unabhängig davon, ob die Geraden durch vektorielle Parametergleichungen oder durch parameterfreie Gleichungen gegeben sind,
- können Gleichungen für Geraden aufstellen, die in einer vorgegebenen Lagebeziehung zu bereits gegebenen Geraden stehen (insbesondere Orthogonalität),
- können im oben genannten Sinne komplexe Aufgaben selbständig lösen,
- kennen die wesentlichen Eigenschaften und Anwendungen des Skalarproduktes.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Berechnungsformel für den Schnittwinkel zweier Geraden
- Einfache Berechnungen (LB 100: Aufgaben 2 oder 3 – nur Schnittwinkel berechnen!)
- Erarbeitung der Formel für die Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden in einer Ebene (gegeben durch die Normalform $y = mx + n$)

2. Stunde

- Einfache Berechnungen zum 3. Schwerpunkt der 1. Stunde
- Lösen von Aufgaben komplexer Art (LB 100; Nr. 2, 3; LB 101: Nr. 4, 7)

3. Stunde

- Zusammenfassung der wesentlichen Kenntnisse über das Skalarprodukt (LB 99f.)

Erarbeitung der Berechnungsformel für den Schnittwinkel
SSA: LB 97 (beginnend mit dem Text nach dem Auftrag A 78 bis zur Tabelle einschließlich)
Nachdem die Schüler wissen, daß als Schnittwinkel zweier Geraden nur ein spitzer oder ein rechter Winkel in Frage kommen kann und daß der Schnittwinkel $\sphericalangle (g, h)$ durch den Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der Geraden ausgedrückt werden kann, ist eine selbständige Entwicklung der gewünschten Berechnungsformel möglich.
Da nur gelten darf $0 \leqq \cos \sphericalangle (g, h) \leqq 1$, ergibt sich $\cos \sphericalangle (g, h) = |\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})|$

bzw. $\boxed{\cos \sphericalangle (g, h) = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \right|}$.

Einfache Berechnungen Es wird vorgeschlagen, nicht sofort mit komplexen Aufgaben zu beginnen. Zunächst soll die neue Berechnungsart geübt werden. Dazu eignen sich die Aufgaben 2a bis c und 3a (LB 100). Allerdings sollte an dieser Stelle lediglich der Schnittwinkel der angegebenen Geraden ermittelt werden.

Erarbeitung der Formel für die Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden in der Ebene (gegeben durch Normalform $y = mx + n$) Bei der Erarbeitung dieser Formel sollte unter Nutzung des Lehrbuchbildes A 126 (LB 98) erläutert werden, daß gewählt werden kann: $\vec{a} = (1; m)$ und $\vec{b} = (1; \bar{m})$.
Möglich wäre auch ein selbständiges Finden der Koordinaten der Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch die Schüler mit Hilfe weniger Impulse des Lehrers.

Empfohlenes Vorgehen: Der Lehrer charakterisiert die Ausgangssituation: Die Geraden sind gegeben durch ihre Gleichungen in der Normalform $y = mx + n$. Zur Bestimmung des Schnittwinkels der Geraden kann jeder beliebige Richtungsvektor der entsprechenden Geraden genutzt werden.
Frage an die Schüler:

Wie können für die Richtungsvektoren Koordinaten unter Verwendung des Anstiegs m der Geraden gefunden werden? (Einsatz des Lehrbuchbildes A 126).

Hier muß der Schüler sich an folgendes erinnern:

$\vec{a} = (a_x, a_y)$

$$m = \frac{a_y}{a_x}$$

Aus dem Lehrbuchbild A 126 ersieht er:

- für $a_x = 1$ gilt $a_y = m$, also $\vec{a} = (1, m)$;
- für $b_x = 1$ gilt $b_y = \bar{m}$, also $\vec{b} = (1, \bar{m})$.

Wenn dieser Zusammenhang verstanden wurde, ist das andere nur noch eine Frage des Einsetzens in die Formel

$$\cos \sphericalangle (g, h) = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \right| = \frac{|1 + m\bar{m}|}{\sqrt{1 + m^2}\sqrt{1 + \bar{m}^2}}.$$

Anschließend werden noch die folgenden Beziehungen diskutiert:

$g \perp h$ gdw. $\bar{m} = -\frac{1}{m}$;

$g \parallel h$ gdw. $\bar{m} = m$.

Für die Hausaufgabe sollten einfache Berechnungen zu Schwerpunkt 2 und vielleicht auch schon zu diesem Schwerpunkt gewählt werden. Für die Hausarbeit und die weiteren Übungen in der folgenden Unterrichtsstunde wird die Aufgabe 6 (LB 101) sowie die folgende Gruppe empfohlen:

Berechnen Sie die Schnittwinkel, die folgende Geraden miteinander bilden!

a) $g\colon 3x - 4y = 11$ b) $g\colon 12x - 5y + 25 = 0$ c) $g\colon 7x - 24y - 33 = 0$

$h\colon 7x - 24y = 33$ $h\colon y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$ $h\colon y = \frac{12}{5}x + 5$

Lösen von Aufgaben komplexer Art

a) Aufgaben, die sowohl die Bestimmung der *Lagebeziehung der Geraden* als auch die Berechnung der Koordinaten des *Schnittpunktes* und der Größe des *Schnittwinkels* der Geraden fordern: Aufgaben 2 und 3 (LB 100)
Hier wie bei allen umfangreichen Aufgaben ist besonders auf eine übersichtliche Darstellung des Lösungsweges zu achten:

Nr. 2a

$g\colon \vec{x} = t(2\vec{i} + 3\vec{j})$

$h\colon \vec{x} = 4\vec{i} - s(2\vec{i} - 3\vec{j})$

Vor der schriftlichen Fixierung des Lösungsweges sollten mit den Schülern die Hauptschritte einschließlich möglicher Rechenkontrollen erarbeitet und begründet werden. Dieses Vorgehen ist bei der Lösung komplexer Aufgaben von besonderem Wert.

(1) *Bestimmen der Lagebeziehung zwischen g und h*

$$\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}2 &= 2u\\ 3 &= -3u\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Es gibt keinen Parameterwert u, der dieses Gleichungssystem erfüllt. Es gilt also $g \nparallel h$. Da beide Geraden in der xy-Ebene liegen, gilt damit:
g und h schneiden einander.

(2) *Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes von g und h*

$$\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-2s\\3s\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}2t &= 4 - 2s\\ 3t &= 3s\end{aligned}$$

$s = t = 1$, eingesetzt in die Gleichung von g oder h, ergibt:

$\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(2; 3)$.
(Zur Kontrolle sollte der Parameterwert auch in die zweite Geradengleichung eingesetzt werden.)

(3) *Berechnung des Schnittwinkels von g und h*

$$\cos \sphericalangle (g, h) = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{4-9}{\sqrt{13}\sqrt{13}}\right| = \left|-\frac{5}{13}\right| \approx 0{,}3846$$

$\sphericalangle (g, h) \approx 67{,}4°$

(4) Da sich die Geraden g und h in einer Ebene befinden, können die Ergebnisse auch zeichnerisch überprüft werden (↗ Bild 66).

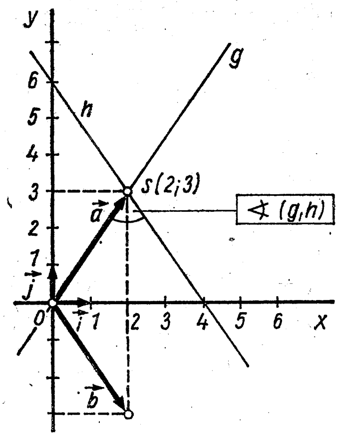


Bild 66

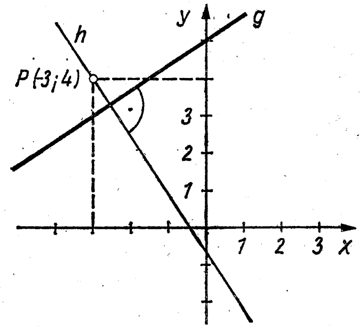


Bild 67

b) Aufgaben zum Aufstellen von Gleichungen für Geraden, die in einer vorgegebenen Lagebeziehung zu bereits gegebenen Geraden stehen: (LB 101: Nr. 7)

Nr. 7a

Gegeben: $P(-3; 4)$

$$g: \quad y = \frac{2}{3}x + 5$$

Gesucht: Gleichung der Geraden h, die durch P geht und auf g senkrecht steht

Zeichnerische Darstellung des Sachverhalts (↗ Bild 67):

Lösung: Die zu g senkrechte Gerade h hat den Anstieg

$$\bar{m} = -\frac{3}{2} \left(\text{da } \bar{m} = -\frac{1}{m}\right).$$

Nun ist noch $\bar{n}$ zu berechnen.
Da die Gerade h durch den Punkt $P(-3; 4)$ gehen soll, muß gelten

$$4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + \bar{n}$$

$$\bar{n} = 4 - \frac{9}{2}$$

$$\bar{n} = -\frac{1}{2}$$

Also gilt für h: $\quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$

Zur zeichnerischen Kontrolle kann h farbig in die Ausgangszeichnung eingetragen werden.

Ähnliche Aufgaben kommen für die Hausarbeit in Betracht. Für die Auswertung in der dritten Unterrichtsstunde empfiehlt es sich, daß einige Schüler aufgefordert werden, die Hausaufgaben auf Folie anzufertigen. Die Folien werden projiziert, und die entsprechenden Schüler verteidigen und begründen ihre Ergebnisse innerhalb einer Diskussion.

Zusammenfassung der wesentlichen Kenntnisse Verbunden mit kleinen repräsentativen Aufgaben sollte eine systematisierende Zusammenfassung der Kenntnisse über das Skalarprodukt erfolgen. Dazu kann die Übersicht auf Seite LB 99 f. genutzt werden. Auch die nachstehende Übersicht ist möglich. Zu dieser Thematik kann auch ein Schülervortrag erarbeitet werden.

Das Skalarprodukt und Anwendungen		
Definition		$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b})$
Eigenschaften	Kommutativgesetz	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
	Distributivgesetz	$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$
	Assoziativgesetz	gibt es nicht
	Assoziativgesetz für die Multiplikation des Skalarproduktes mit einer reellen Zahl	$r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$
Orthogonalitätsbedingung		$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \qquad \bar{m} = -\frac{1}{m}$
Umkehrbarkeit der Operation		nicht eindeutig umkehrbar; $\vec{a} \cdot \vec{x} = r$ ($\vec{a} \neq \vec{o}$; r reelle Zahl); stets unendlich viele Lösungen
Koordinatendarstellung		$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Produkte der Einheitsvektoren		$\begin{array}{c\|ccc} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 1 \end{array}$
Betrag eines Vektors		$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Produkt eines Vektors mit sich selbst		$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$
Winkel zwischen zwei Vektoren		$\cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert}$
Winkel zwischen Geraden g und h		$\cos \sphericalangle (g, h) = \left\lvert \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert} \right\rvert$ $\cos \sphericalangle (g, h) = \frac{\lvert 1 + m\bar{m} \rvert}{\sqrt{1 + m^2}\sqrt{1 + \bar{m}^2}}$

Kontrollaufgaben

(1) LB 100: Nr. 2c; (2) LB 101: Nr. 7b

(3) Nennen Sie die Eigenschaften des Skalarproduktes!

Lerneinheiten 25/26 (2 Std.)

Weitere Anwendungen des Skalarproduktes

LB 101 bis 106

Ziele

Die Schüler

- verstehen die Herleitung des Additionstheorems $\cos(\alpha - \beta) = \ldots$ mit Hilfe des Skalarproduktes,
- können $\cos 2\alpha = \ldots$ und $\sin 2\alpha = \ldots$ herleiten,
- können einfache Anwendungsaufgaben zu Additionstheoremen sowie zu Sachverhalten aus Physik und Technik mit Hilfe des Skalarproduktes lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung und Sicherung des Ausgangsniveaus
- Herleitung der Additionstheoreme für $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ mit Hilfe des Skalarproduktes und Mitteilung der Additionstheoreme für $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$
- Lösen einfacher Aufgaben unter Verwendung von Additionstheoremen

2. Stunde

Lösen einfacher physikalischer Aufgaben unter Anwendung des Skalarproduktes

Methodische Hinweise

Motivierung und Sicherung des Ausgangsniveaus Für die Schüler besteht ein Motiv, sich mit Additionstheoremen der Winkelfunktionen zu befassen, in der Tatsache, daß im folgenden Stoffgebiet bei der Lösung goniometrischer Gleichungen darauf zurückgekommen wird. Den Schülern sollte deutlich gemacht werden, daß die Herleitung der Additionstheoreme mit Hilfe des Skalarproduktes nur *eine* Möglichkeit der Herleitung ist, sich diese hier aber anbietet. Von Wichtigkeit ist die Sicherung des Ausgangsniveaus. Da die Winkelfunktionen in der 10. Klasse behandelt wurden, müssen die für die zu bewältigende Problematik notwendigen Kenntnisse aufgefrischt werden. Das kann in einer vorbereitenden Hausaufgabe geschehen. Besonders gebraucht werden die Kenntnisse über Quadrantenbeziehungen und Komplementwinkelbeziehungen.

Herleitung der Additionstheoreme Der Lehrbuchtext auf Seite LB 101 (beginnend nach dem Auftrag A 80) wird für die Herleitung im Unterricht hinzugezogen. Dabei könnte das Lehrbuchbild A 130 an der Tafel entwickelt und entsprechend der Empfehlung im Bild 68 ergänzt werden.

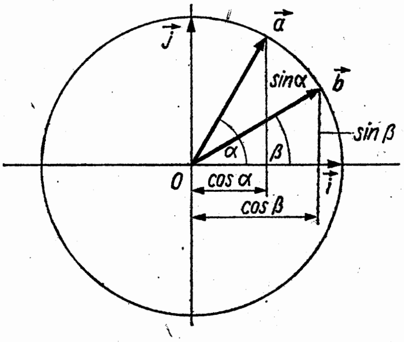


Bild 68

Folgende methodische Schritte werden für die Herleitung des Additionstheorems für $\cos(\alpha - \beta)$ empfohlen:

1. Gesucht ist eine Beziehung (Formel), die es ermöglicht, $\cos(\alpha - \beta)$ durch den cos und sin der einzelnen Winkel auszudrücken.
2. Was ist über den Kosinus eines Winkels bekannt?
   – Der Kosinus eines Winkels ist in einem Kreis mit dem Radius r definiert.
   – Die Funktionswerte der Kosinusfunktion lassen sich besonders einfach im Einheitskreis ermitteln.
3. Nennen Sie die Komponentendarstellung eines beliebigen Ortsvektors $\vec{x}$ und eines Einheitsvektors $\vec{x}_E$ unter Verwendung trigonometrischer Funktionen! ($\vec{x} = \overrightarrow{OP}$)

   $\vec{x} = |\overrightarrow{OP}| \cos\alpha \vec{i} + |\overrightarrow{OP}| \sin\alpha \vec{j}$

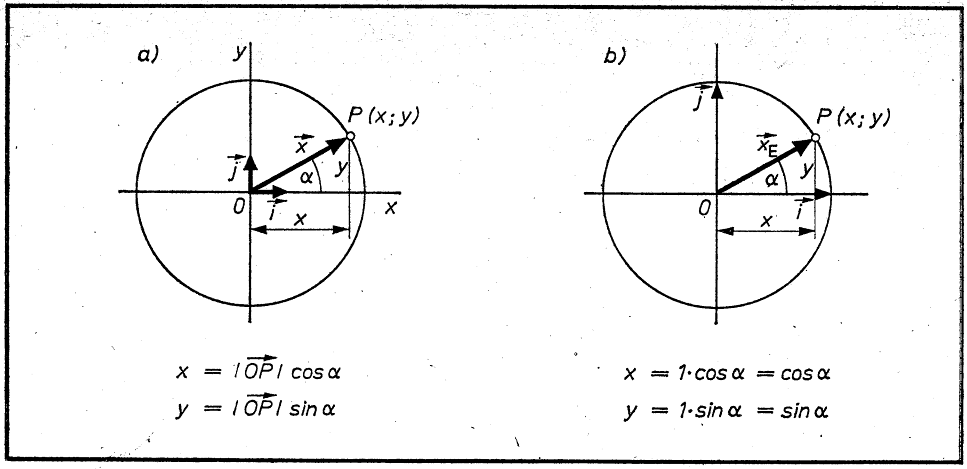
   $\vec{x}_E = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j}$

   Empfohlenes Tafelbild (siehe Seite UH 113, Bild 69)

   Ein Einheitsvektor hat also die Koordinaten $x = \cos\alpha$ und $y = \sin\alpha$.
4. Wir stellen nun zwei Einheitsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Koordinatensystem dar (↗ Bild 68).

   $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$
5. $(\alpha - \beta)$ ist dann der Winkel, den beide Einheitsvektoren *einschließen.* Da beim Skalarprodukt zweier Vektoren der Kosinus des *eingeschlossenen* Winkels eine Rolle spielt, wollen wir versuchen, die gewünschte Formel mit Hilfe des Skalarproduktes zu gewinnen:

   $$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$



Bilder 69a und b

6. Ermitteln Sie das Skalarprodukt mit Hilfe der Spaltenschreibweise!

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Im Verlaufe der Herleitung sollten an geeigneten Stellen (von der Klassensituation abhängig) im Interesse der Zielorientierung folgende Fragen gestellt werden:

1. Welches Ziel verfolgen wir?
2. Was haben wir bereits erreicht?
3. Was ist noch zu tun?

Wird diese Empfehlung nicht beachtet, besteht die Gefahr, daß die Schüler den Überblick verlieren.
Während bei der Herleitung des Additionstheorems für $\cos(\alpha - \beta)$ der Lehrer in stärkerem Maße das Vorgehen erläutern muß, sollten die Schüler bei den Herleitungen für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ selbständig arbeiten (evtl. als Hausaufgabe), da ja lediglich $\beta = \alpha$ gesetzt wird.
Die Formeln der Additionstheoreme für $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ sind den Schülern nur mitzuteilen. Das schließt nicht aus, daß im Rahmen eines differenzierten Unterrichts von leistungsstarken Schülern der Auftrag A 81 (LB 102) zur Herleitung der Additionstheoreme für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$ bearbeitet wird.

Lösen einfacher Aufgaben Zu empfehlen sind die Aufgaben 1 und 3 (LB 103) und ähnliche. Bei den Aufgaben unter Nr. 1 sollte herausgestellt werden, daß bei einer Probe die beiden Seiten der Gleichung aufgrund des sich ergebenden Näherungswertes für α nur annähernd übereinstimmen können.

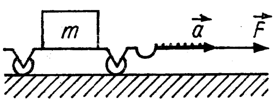
Lösen einfacher physikalischer Aufgaben Bei der Anwendung der Vektorrechnung in der Physik sollte der Mathematiklehrer gut mit dem jeweiligen Physiklehrer der Klasse zusammenarbeiten. Das ist im Interesse der Schüler außerordentlich wichtig. So dient es z. B. dem Anliegen dieser Lerneinheit, wenn nicht nur der Mathematiklehrer Beispiele aus der Physik nutzt, sondern auch der Physiklehrer Aufgaben unter Verwendung der Vektorrechnung lösen läßt. Neben den im Lehrbuch angegebenen Aufgaben (LB 105f) wird der Einsatz einer Übersicht zu „Beispielen zur Anwendung der Vektorrechnung in der Mechanik“ und des Bildes 70 als Folie, Tafelbild oder Arbeitsblatt empfohlen (UH 114). Als Folie kann die genannte Übersicht eingesetzt werden.

Beispiele zur Anwendung der Vektorrechnung in der Mechanik

Längsbewegung		Drehbewegung	
Addition und Subtraktion von Vektoren			
Kräfte	$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$	Drehmomente	$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$
Geschwindigkeiten	$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i$	Winkelgeschwindigkeiten	$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i$
Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar			
Grundgesetz der Längsbewegung	$\vec{F} = m\vec{a}$	Grundgesetz der Drehbewegung	$\vec{M} = J\vec{\alpha}$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{D} = J\vec{\omega}$
Skalarprodukt zweier Vektoren			
Arbeit	$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$	Rotationsarbeit	$W = \vec{M}\cdot\vec{\varphi}$
Translationsenergie	$E_{kin} = \frac{m}{2}\vec{v}^2$	Rotationsenergie	$E_{rot} = \frac{J}{2}\vec{\omega}^2$
Leistung	$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$		

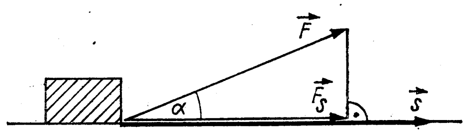
Beispiele aus der Physik zu den Möglichkeiten der Produktbildung in der Vektorrechnung

Grundgesetz der Dynamik



$\vec{F} = m\vec{a}$

mechanische Arbeit



$W = |\vec{F}_S| \cdot |\vec{s}|$

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\alpha$

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\vec{b} = r\vec{a}$

Produkt eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r.
Ergebnis: Vektor

$r = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Skalarprodukt (lies: a Punkt b)

Ergebnis: Zahl (Skalar)

Bild 70

1. zur Motivierung der Vektorrechnung zu Beginn des Stoffgebietes „Vektorrechnung und analytische Geometrie“,
2. nach der Behandlung der einzelnen Operationen mit Vektoren als Darstellung von Anwendungsbeispielen aus der Physik,

3. nach Abschluß des Stoffgebietes „Vektorrechnung und analytische Geometrie" zum Nachweis der Bedeutung der Vektorrechnung für andere Wissenschaften.

Der Einsatz der hier genannten Unterrichtsmittel kann dazu beitragen, die Schüler von den Vorteilen der Vektorrechnung zu überzeugen, ihnen begreiflich zu machen, daß außer der Anwendung in der Mathematik in verschiedenen Naturwissenschaften Kenntnisse über das Rechnen mit Vektoren benötigt werden. Es sollte den Schülern aber auch klar gesagt werden, daß in der Erweiterten Oberschule nur die wesentlichsten Grundlagen der Vektorrechnung vermittelt werden können, auf denen im späteren Studium aufgebaut wird. Nur einige Operationen mit Vektoren können in der allgemeinbildenden Schule behandelt werden (Vektorprodukt, Differentiation und Integration von Vektoren werden nicht behandelt). Das Studium in Physik, Elektrotechnik, Hochfrequenztechnik und Technische Mechanik benötigt z. B. sichere Kenntnisse in der Vektorrechnung.
Bei der Behandlung der Aufgabe 2 (LB 105) ist es zweckmäßig, folgenden Hinweis zu beachten: Zur Klärung des Sachverhalts anhand einer Zeichnung sollte zunächst keine winkeltreue Zeichnung verwendet werden, da aufgrund der geringen Größe maßgebender Winkel das Finden des Lösungsweges (Berechnung der resultierenden Kraft $\vec{F}$ wie auch der Kraft in Wegrichtung $\vec{F}_s$) erschwert werden (↗ Bilder 71 und 72).

Kontrollaufgaben
(1) LB 103: Nr. 1b und 3a; (2) LB 106: Nr. 5

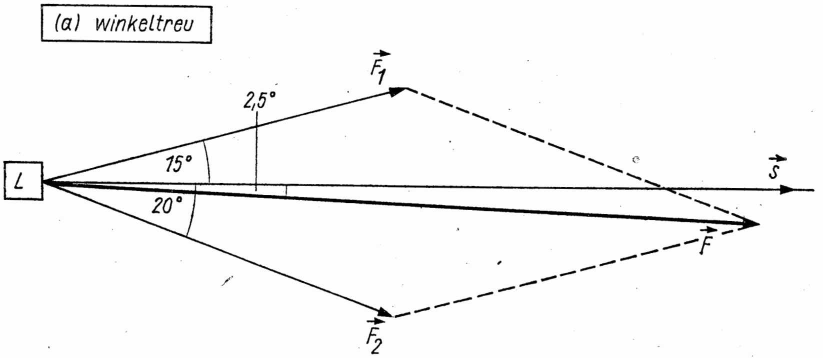


Bild 71

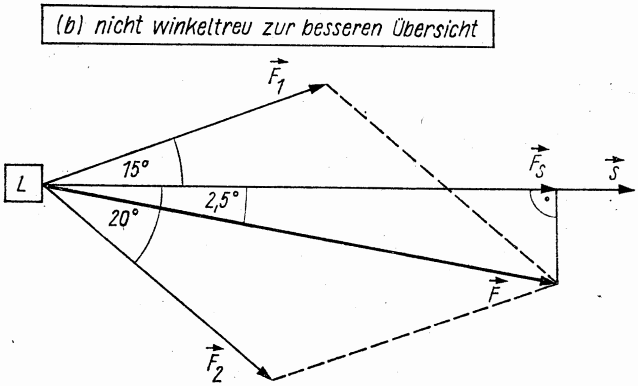


Bild 72

Stoffabschnitt 1.5 (7 Std.)
Analytische Geometrie des Kreises

Die Behandlung des Kreises und von Beziehungen zwischen Kreis und Gerade erfolgt sowohl mit Mitteln der Vektorrechnung als auch mit Hilfe der Koordinatengeometrie. Die Betrachtungen und Berechnungen werden im wesentlichen in einer Ebene durchgeführt. Mit diesem Stoffabschnitt wird die Einführung in die Vektorrechnung und analytische Geometrie abgeschlossen. Daher sollte in größerem Umfang zu komplexen Aufgaben übergegangen werden, zu deren Lösung die Schüler Wissen und Können aus mehreren zurückliegenden Stoffabschnitten anwenden müssen. Selbständiges Arbeiten der Schüler in allen Phasen des Aufgabenlösens von der Wahl des Lösungsweges bis zur Kontrolle ermittelter Lösungen ist anzustreben. Im Stoffabschnitt sind in Verbindung mit der Aneignung des neuen Stoffes vor allem das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen und planimetrische Grundkenntnisse zu festigen. In der folgenden Übersicht sind die zu behandelnden Beziehungen zusammengestellt.

Kreisgleichung Vektorielle u. Koordinatendarstellung; allgemeine und Mittelpunktslage (Kugelgleichung zur Information)	Aufstellen von Kreisgleichungen; Ermitteln von M und r aus gegebenen Gleichungen
Lagebeziehungen zwischen **Kreis und Gerade**	Berechnen von Schnittpunkten von Kreis und Gerade
Tangentengleichung (bezüglich allgemeiner und Mittelpunktslage des Kreises)	Aufstellen von Tangentengleichungen

Lerneinheit 27 (3 Std.)
Gleichungen für Kreis und Kugel
LB 106 bis 111

Bei der Erarbeitung der Kreisgleichungen kann zunächst von der Mittelpunktslage (Kreismittelpunkt M liegt im Ursprung) ausgegangen werden. Danach wird zur allgemeinen Lage des Kreises übergegangen. Damit gelangt man von einfachen Gleichungen zu komplizierteren und hat auch gute Möglichkeiten, die Schüler bei der Erarbeitung der verschiedenen Gleichungen selbständig arbeiten zu lassen. Diesem Weg folgt die Darstellung im Lehrbuch.
Eine andere Möglichkeit besteht darin, sofort von der allgemeinen Lage des Kreises auszugehen und zunächst dazu vielfältige Übungen durchzuführen. Im Zuge der Vertiefung können dann die Schüler selbständig die Gleichungen für die Mittelpunktslage herleiten (Spezialisierung) und auch eine Übertragung der grundlegenden Gleichung $|\overrightarrow{MP}| = r$ auf den Raum (Verallgemeinerung) vornehmen. Dieser Weg wird im folgenden dargestellt.

Ziele

Die Schüler

- kennen die Gleichungen des Kreises in allgemeiner Lage in vektorieller und Koordinatendarstellung,
- können die allgemeinen Gleichungen für den Fall der Mittelpunktslage spezialisieren,
- kennen die Gleichungen für die Kugel in vektorieller und Koordinatendarstellung,
- können Kreisgleichungen zu gegebenen Mittelpunkten und Radien aufstellen; sie können von Punkten feststellen, ob sie auf einem durch eine Gleichung gegebenen Kreis liegen, und sie können die Mittelpunktskoordinaten und Radien aus gegebenen Kreisgleichungen ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Reaktivierung von Kenntnissen über den Kreis sowie den Betrag einer reellen Zahl, über die binomischen Formeln und den Funktionsbegriff (u. a. ● A 84)
- Erarbeitung der Gleichungen für einen Kreis in allgemeiner Lage (Gleichungen (6) bis (9) und (10), Beispiele A 50 bis 52, gegebenenfalls erste Aufgaben)

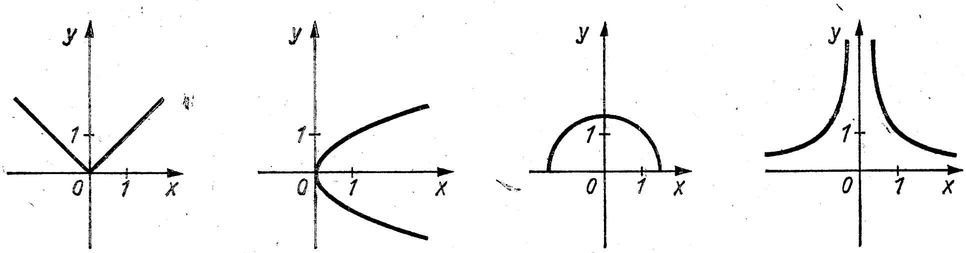
2. Stunde

- Vertiefung der Kenntnisse über die allgemeine Kreisgleichung (Beziehung zu Funktionen; Mittelpunktslage des Kreises; Kugel)

3. Stunde

- Übungen im Aufstellen von Kreisgleichungen und im Ermitteln von Mittelpunktskoordinaten und Radien aus Kreisgleichungen sowie im Lösen komplexer Anwendungsaufgaben

Bemerkung: Der zu reaktivierende Stoff muß nicht notwendigerweise im Komplex in der ersten Stunde behandelt werden. Das kann auch erst dort geschehen, wo unmittelbar der Bezug vorhanden ist. Damit sind bessere Motivierungsmöglichkeiten gegeben.



Bilder 73 bis 76

Sicherung des Ausgangsniveaus Hierzu können Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen (UH 11ff.) und auch der Auftrag A 84 verwendet werden. Rationell kann das erforderliche Wissen und Können realisiert werden, wenn den Schülern eine Folge von Aufgaben, die zum großen Teil im Kopf gelöst werden können, vorgelegt wird, z. B.:

- Bestimmen Sie den Betrag von $-2{,}6$; 38; $\sqrt{(-5)^2}$; a; $-3x$!
- Berechnen Sie $(5 - 3a)^2$; $(2a + 4b)^2$; $(x_1 - x_2)^2$!
- Bilden Sie die quadratische Ergänzung zu $16x^2 + 24x \ldots$; $y^2 - 10y \ldots$!
- Berechnen Sie folgende Skalarprodukte: $\vec{i} \cdot \vec{j}$; $\vec{i} \cdot (-\vec{i})$; $(-\vec{k}) \cdot \vec{j}$!
- Welche der Bilder 73 bis 76 können als Graphen von Funktionen aufgefaßt werden? Beschreiben Sie gegebenenfalls jeweils den Definitionsbereich und den Wertebereich!
- Nennen Sie die Definition des Kreises!

Erarbeitung der Gleichungen für einen Kreis in allgemeiner Lage Zur Motivierung der analytischen Behandlung des Kreises (und der Kugel) können die Schüler Anwendungen in Physik, Astronomie, Geographie, Technik usw. zusammenstellen (Kreisbewegungen, Wellenausbreitung, Planeten- und Satellitenbahnen, Erdkugel u. a.). Dabei wird meistens von idealisierenden Modellvorstellungen ausgegangen. Man kann den Ausblick geben, daß auch kompliziertere Figuren (Ellipsen, Hyperbeln u. a. m.) analytisch behandelt werden können, was jedoch nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts in Klasse 12 ist.

Schrittfolge für die Erarbeitung:

1. Die Schüler sollten zunächst bezüglich einer Skizze (Lehrbuchbild A 135) aufgefordert werden, Beziehungen zwischen dem Ortsvektor eines beliebigen Kreispunktes P, dem Radius r oder dem Radiusvektor $\overrightarrow{MP}$ und dem Ortsvektor des Mittelpunktes M bzw. seinen Koordinaten in Form von Gleichungen aufzuschreiben.
2. Danach sollten die Ergebnisse der Schüler im Unterrichtsgespräch geprüft und die Gleichungen (6) bis (9), LB 108, systematisch auseinander entwickelt werden. Die Schüler sollten das selbständig tun und dazu Impulse erhalten [vgl. LB 108; Übergang von (7) zu (8) durch Anwendung des Skalarproduktes].
   Wichtig ist, daß sich die Schüler die Gleichungen nicht losgelöst voneinander einprägen. (6) ist die allgemeine Grundform. Für Berechnungen wird vor allem (9) benötigt.
3. Erste Übungen in der Art der Aufgaben 1, 2 und 3, 4 (LB 110) schließen sich an. Zuvor kann das Beispiel A 50 durchgearbeitet werden.
4. Durch Ausmultiplizieren der Quadrate in (9) wird die Form (10) entwickelt. Die Schüler sollten die Beispiele A 51, 52 durcharbeiten und je zwei oder drei Gleichungen konstruieren, die als Kreisgleichungen aufgefaßt werden können bzw. keine Kreisgleichungen sind.

Vertiefung der Kenntnisse über die allgemeine Kreisgleichung Die Vertiefung der Kenntnisse sollte in 4 Richtungen erfolgen.

1. Anwendung der Gleichungen in vielfältigen Aufgabenstellungen.
   Folgende Fragen können anhand von Beispielen, die weitgehend von den Schülern selbst gebildet werden sollten, behandelt werden (z. T. evtl. nur Lösungsweg skizzieren; in Hausaufgaben einbeziehen):
   - Gegeben ist ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ und ein Kreis $k(M; r)$. Wie läßt sich feststellen, ob $P_1 \in k$ ist?
   - Lassen sich unter Verwendung der gewonnenen Gleichungen Bedingungen angeben für den Fall $P_1 \notin k$ und P_1
     a) außerhalb b) innerhalb $k(M; r)$ bzw. $k(O; r)$?
   - Gegeben seien $M(a; b)$ und $P_1(x_1; y_1) \in k(M; \overline{MP_1})$; gesucht ist die Kreisgleichung analog (9). Vorüberlegung rein geometrisch; verschiedene Möglichkeiten, r zu ermitteln.

– Gegeben seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ als Endpunkte eines Durchmessers des Kreises $k(M; r)$. Wie lautet die Gleichung des Kreises? (Vorüberlegung rein geometrisch)
– Gegeben seien $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ als Punkte von $k(M; r)$ sowie $M(a; y_M)$ (a fest). Wie lautet die Gleichung des Kreises? (Vorüberlegung rein geometrisch, Lösung über Skalarprodukt)
– Gesucht ist eine Gleichung für einen Kreis, der beide Koordinatenachsen berührt und durch einen gegebenen Punkt $P_0(x_0; y_0)$ geht. (Welche Bedingungen gelten für x_0 und y_0? Wieviel Lösungen gibt es? Skizze anfertigen.)
– Zu begründen ist die Behauptung: Drei Punkte, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen eindeutig einen Kreis.

2. In Analogie zu den bereits für Geradengleichungen (UH 82ff.) vorgenommenen Überlegungen wird die Frage aufgeworfen, ob Gleichungen der Form (9) als Funktionsgleichungen aufgefaßt werden können.
3. Die Schüler erhalten den Auftrag, eine Gleichung für einen Kreis aufzustellen, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Die Gleichungen (1) bis (4), LB 106, werden gewonnen durch Spezialisierung der Gleichungen (6) bis (9), danach wird gegebenenfalls der Auftrag A 86 bearbeitet.
4. Nach Vorbereitung durch das Bearbeiten der Aufträge A 87 und 88 werden durch Verallgemeinerung der Gleichungen für den Kreis in einer Ebene die Kugelgleichungen (LB 109) gewonnen.
   Zur Vertiefung kann folgende Aufgabe gestellt werden: Wieviel Punkte des Raumes sind erforderlich, um eindeutig eine Kugeloberfläche zu bestimmen? Welche Bedingungen müssen diese Punkte erfüllen?
   Kreise im Raum werden nur für den Fall betrachtet, daß sie zu einer von zwei Basisvektoren von $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ gebildeten Ebene parallel liegen. Die Gleichung $|\vec{x}| = r$ kann im Raum nicht als Kreisgleichung interpretiert werden, wenn nicht durch eine zweite Bedingung eine Ebene festgelegt wird.

Übungen Vorwiegend sind Aufgaben zu Kreisen in einer Ebene zu behandeln. Dazu sollte Vielfalt der Fragestellungen und Komplexität der Aufgaben angestrebt werden (z. B. Aufgaben 7 und 8, LB 110).
Zur Vertiefung sind auch einige Aufgaben bezogen auf den Raum zu lösen (z. B. Aufgabe 10 im Vergleich mit Aufgabe 9; Aufgabe 11).

Kontrollaufgaben

(1) Geben Sie eine Gleichung des Kreises in allgemeiner Lage in vektorieller Darstellung an!

(2) LB 110: Nr. 1b; (3) LB 110: Nr. 3b und 5; (4) LB 110: Nr. 8

Lerneinheit 28 **(4 Std.)**

Kreis und Gerade

LB 111 bis 117

Verbunden mit der Wiederholung grundlegenden Wissens und Könnens aus der Geometrie des Kreises und im Lösen von linearen Gleichungen, quadratischen Gleichungen und Gleichungssystemen besteht das Hauptanliegen dieser Lerneinheit im komplexen Einsatz des in den vorangegangenen Stoffabschnitten in der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie der Geraden angeeigneten Wissens und Könnens auf die analytische Behandlung der Lagebeziehungen von Kreis und Gerade (in einer Ebene). Dabei konzentriert sich der Unterricht auf die Beziehungen Kreis – Sekante und Kreis – Tangente.

Ziele

Die Schüler

- festigen Kenntnisse aus der Kreislehre und im Lösen von Gleichungen,
- können die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden berechnen,
- kennen die allgemeinen Tangentengleichungen in vektorieller und Koordinatendarstellung und haben deren Herleitung verstanden,
- können Tangentengleichungen aufstellen und mit ihrer Hilfe weitere Beziehungen zwischen Kreis und Tangente berechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Sicherung des Ausgangsniveaus durch Festigung von Kenntnissen aus der Kreislehre und im Lösen von Gleichungen (● A 90, ● A 91 u. a.)
- Erarbeitung von Beispielen für das Berechnen von Schnittpunkten von Kreisen und Geraden (■ A 53, ● A 92, Aufgaben 1, 2) und Aufstellen von Kreisgleichungen für Kreise, die die Koordinatenachsen berühren (Aufgaben 3, 4)

2. Stunde

- Herleitung der allgemeinen Tangentengleichungen [(24), (25)]
- Übungen im Aufstellen von Tangentengleichungen (■ A 56, ■ A 57, Aufgaben 5, 6)

3. Stunde

- Übungen im Anwenden der Tangentengleichungen (Aufgaben 7, 8 u. a.)

4. Stunde

- Zusammenfassung zur analytischen Geometrie des Kreises (LB 116)

Methodische Hinweise

Sicherung des Ausgangsniveaus Es wird empfohlen, den Schülern zwei Geradengleichungen in Koordinatendarstellung vorzulegen und prüfen zu lassen, welche Lage die beiden Geraden zueinander einnehmen. Dabei werden die möglichen Lagebeziehungen zusammengestellt und wiederholt, wie man gegebenenfalls die Koordinaten eines vorhandenen Schnittpunktes berechnet. Hieraus ergibt sich der Anknüpfungspunkt dafür, analoge Fragen für die Lage eines Kreises und einer Geraden aufzuwerfen.
Dazu werden die Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade zusammengestellt und von den Schülern die Aufträge A 90 und 91 bearbeitet.
Auch die Frage nach der Konstruktion einer Tangente in einem Punkt des Kreises und von einem Punkt außerhalb des Kreises kann aufgeworfen werden.

Erarbeitung von Beispielen Selbständig können die Schüler das Beispiel A 53 (LB 111) im Lehrbuch durcharbeiten und Auftrag A 92 bearbeiten.
Daran sollte sich die Lösung der Aufgaben 1 und 2 anschließen. Im Unterricht wird man nur wenige Beispiele durchrechnen lassen können, weil mitunter größerer Rechenaufwand erforderlich ist. Einige Aufgaben dieser Art sollten als Hausaufgaben gestellt werden.
Steht hinreichend Zeit zur Verfügung, so kann das Beispiel A 54 in Verbindung mit dem Auftrag A 93 durchgearbeitet werden.
Wichtiger wäre aber, zu den Aufgaben 3 und 4 (LB 116) überzugehen, weil damit eine günstige Überleitung zur Herleitung der Tangentengleichungen gegeben ist. Bei beiden Aufgaben sollten die Schüler eine Veranschaulichung im Koordinatensystem vornehmen und dann versuchen, die Aufgaben mit so wenig Aufwand wie möglich zu lösen, auch von vornherein rein geometrisch die Lösbarkeit zu prüfen. In Aufgabe 3 sind die gesuchten Stücke ablesbar.

Herleitung der allgemeinen Tangentengleichungen Mit dem Beispiel A 55 (LB 113) wird im Lehrbuch eine sehr aufwendige Berechnung vorgeführt, die als Motiv verwendet werden kann, nach allgemeinen Lösungen des Problems zu suchen, durch deren Nutzung sich der Aufwand möglicherweise verringert. Empfohlen wird, zwar die Aufgabe aus Beispiel A 55 als Motiv zu verwenden, jedoch sofort die allgemeinen Tangentengleichungen (24) und (25) herzuleiten. Die Beziehung im Beispiel A 55 kann danach beim Durcharbeiten des Beispiels A 57 nochmals im Vergleich betrachtet werden. Die Herleitung sollte der Lehrer vorführen und gegebenenfalls Teilschritte von den Schülern vollziehen lassen. Um die Herleitung für die Schüler durchsichtig genug zu gestalten, müssen die Einzelschritte gut motiviert werden. So ist das Ersetzen des Ausdruckes $\vec{x} - \vec{x}_0$ in (23) durch $(\vec{x} - \vec{x}_M) - (\vec{x}_0 - \vec{x}_M)$ kein Trick, sondern damit begründet, daß dadurch (nach der skalaren Multiplikation) Gebrauch von (22) gemacht werden kann und auf diese Weise der Radius in die Gleichung Eingang findet. Und es ist ja Ziel, eine Beziehung zwischen Mittelpunkt, Radius und dem auf der Tangente liegenden Kreispunkt P_0 herzustellen.
Man verwende an der Tafel eine übersichtliche Skizze!
Die Herleitung der Gleichungen für den Fall, daß der Kreis in Mittelpunktslage vorliegt, können die Schüler selbständig vollziehen (Auftrag A 94).

Übungen im Aufstellen von Tangentengleichungen Mit den Beispielen A 56 und 57 werden gewisse Sonderfälle erfaßt. Empfohlen wird, noch einige einfache Aufgaben nach dem Muster dieser Beispiele von den Schülern lösen zu lassen (keine Sonderlage wählen). Danach sollten die Aufgaben 5 und 6 gelöst werden.
Prinzipien, nach denen die Schüler an das Lösen solcher Aufgaben herangehen sollten (die Prinzipien sind nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge und auch nicht alle bei jeder Aufgabe zu beachten):

- Veranschaulichen Sie sich den Sachverhalt in einem Koordinatensystem! Stellen Sie ggf. mehrere Gleichungen auf, z. B. wenn zwei Koordinaten gesucht sind!

- Verwenden Sie im Text gegebene Gleichungen (in den Aufgaben 3 und 4 sind z. B. die gegebenen Gleichungen Tangentengleichungen)!
- Setzen Sie gegebene Werte in allgemeine Gleichungen ein!
- Substituieren Sie oder führen Sie gegebenenfalls Koeffizientenvergleiche durch!
- Kontrollieren Sie die berechneten Werte in der Zeichnung!

Übungen im Anwenden der Tangentengleichungen Im Mittelpunkt sollten Aufgaben stehen, bei deren Lösung die Schüler ihr Wissen und Können aus der Einführung in die analytische Geometrie im Komplex anwenden können. Dazu eignen sich die Aufgaben 7 und 8.

Zusammenfassung Zu der Übersicht auf Seite LB 116 geben die Schüler Beispiele für die Kreisgleichungen und die Tangentengleichungen an und verdeutlichen die Lage dieser Objekte durch Skizzen. Hierzu kann auch ein Schülervortrag eingesetzt werden (↗ UH 21).

Kontrollaufgaben

(1) Leiten Sie aus der allgemeinen Tangentengleichung

$(\vec{x} - \vec{x}_M) \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_M) = r^2$

die Gleichung in Koordinatendarstellung für den Fall her, daß der Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt!

(2) LB 116: Nr. 2d; (3) LB 117: Nr. 7a

Stoffabschnitt 1.6 (15 Std.)
Übungen und Anwendungen

Die Übungen und Anwendungen dienen dem „Lösen von komplexen Aufgaben aus der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie der Geraden und des Kreises sowie aus deren Anwendungsgebieten ...“ (LP 49/50). Es ist kein neuer Stoff zu erarbeiten, wenngleich das Wissen und Können der Schüler im Prozeß des Lösens vielfältiger Aufgaben z. T. auch vertieft wird. Im Lehrbuch werden für den Stoffabschnitt Aufgaben angeboten (LB 120 bis 126, Aufg. 1 bis 54). Besondere Beachtung sollte komplexen Aufgaben geschenkt werden, also solchen, zu deren Lösung Kenntnisse aus verschiedenen Stoffabschnitten und auch aus vorangehenden Klassenstufen reaktiviert und eingesetzt werden müssen, die aus mehreren Teilaufgaben bestehen und deren Lösung in mehreren, z. T. voneinander abhängigen Schritten vollzogen werden muß. Dabei ist ein hoher Grad an Selbständigkeit der Schüler in allen Phasen des Lösungsprozesses anzustreben. Insbesondere muß die Selbständigkeit auch beim Finden von Lösungsansätzen, beim Entwerfen eines Lösungsplanes, beim Begründen der Lösungsschritte und beim Kontrollieren ermittelter Ergebnisse erreicht werden.
In dieser Weise dienen die Übungen und Anwendungen der Vorbereitung auf die schriftliche und mündliche Reifeprüfung.
Von den zur Verfügung stehenden 15 Stunden sollten etwa 3 Stunden für schriftliche Klassenarbeiten verwendet werden. Je nachdem, ob man die beiden Stoffgebiete in Klasse 12 nacheinander oder parallel behandelt, wird man in unterschiedlicher Weise die inhaltliche Struktur der Übungen und Anwendungen planen (LP 16 und UH 10: „Übersicht zur Jahresstoffverteilung“, zwei Varianten). Da die zeitlichen Proportionen für die Behandlung inhaltlicher Schwerpunkte auch sehr stark von den Ergebnissen des vorausgegangenen Unterrichts und von anderen spezifischen Bedingungen in der jeweiligen Klasse abhängen,

wird die konkrete Planung vom Lehrer selbst geleistet werden müssen. Zur Unterstützung wird im folgenden eine Übersicht über die Lehrbuchaufgaben gegeben. Des weiteren werden mögliche thematische Komplexe vorgeschlagen, methodische Hinweise gegeben und schließlich zu einzelnen Aufgaben Bemerkungen gemacht.

Übersicht über die Lehrbuchaufgaben zum Stoffabschnitt 1.6

Es sind jeweils die Aufgaben zusammengefaßt, zu deren Lösung die Kenntnisse aus dem genannten Stoffabschnitt ausreichen.

Stoffabschnitt	Aufgabennummer	Knappe inhaltliche Charakterisierung
1.1	1, 2, 3	Beweise geometrischer Beziehungen
	4	Arbeiten mit Beträgen von Vektoren
	37, 40, 43–45	Addition von Geschwindigkeiten
1.2	5–8	Koordinaten von Vektoren
	9–12	Flächeninhaltsbestimmungen
	13–15	Dreiecke im Koordinatensystem
	41	Bestimmen von Geschwindigkeiten und Flugrichtungen
	42	Kräfteberechnungen im Raum
1.3	23, 28	Bestimmen von Geradengleichungen
	38	Geradengleichungen, Abstand zweier Punkte
	51, 53, 54	Geradenschnittpunkt, Winkel
1.4	16, 17	Ermittlung von Eckpunktskoordinaten von Körpern (Pyramide, Quader)
	18	Beziehungen in einem gleichschenkligen Dreieck
	19–22	Abstand eines Punktes von einer Geraden; Abstand paralleler Geraden; Orthogonalität von Geraden
	24, 32	komplexe Aufgaben zur Dreiecksberechnung
	27	Orthogonalität von Vektoren (Beweis)
	33	Beweise für Beziehungen im regulären Tetraeder
	36, 53	Geraden, Abstände, Winkel im Raum
	48	Anwendung in der Optik; Winkel
	49, 50	Anwendung Billardspiel; Winkel
1.5	25, 26, 52	Kreis und Gerade
	29–31	In- und Umkreis eines Dreiecks
	34, 35	Gleichungen für Punktmengen (Gerade, Kreis)
	39	Schnittpunkt zweier Kreise
	46	Kugel, Gerade
	47	Kreis, Gerade, Tangenten

Thematische Aufgabenkomplexe

Bei der inhaltlichen Strukturierung der Übungen und Anwendungen und der damit verbundenen Aufgabenauswahl und -anordnung wird empfohlen, für die Mehrzahl der Unterrichtsstunden thematische Komplexe zu bilden, also nicht stoffabschnittsweise zu festigen.[1] Man sollte also des öfteren bis zu Aufgaben vorstoßen, deren Lösung Kenntnisse aus dem Stoffabschnitt 1.5 oder wenigstens 1.4 verlangt. Dennoch sollten auch in diese Übungen Aufgaben einfacher Art zur Festigung des grundlegenden Wissens und Könnens aus zurückliegenden Klassenstufen einbezogen werden (↗ „Aufgaben für tägliche Übungen und Wiederholungen", UH 11ff.). Im folgenden sind einige thematische Aufgabenkomplexe zusammengestellt, die nach verschiedenen Gesichtspunkten (mathematischer Inhalt; Anwendungsbereich) gebildet wurden, weshalb auch einige Aufgaben mehreren Komplexen zugeordnet wurden.

Aufgabenkomplex	Inhaltliche Charakterisierung
a) 1, 22, 27, 32	Beweisaufgaben (Ebene)
b) 2, 3, 27, 33	Beweisaufgaben (Raum)
c) 7, 10, 11, 14, 15, 18, 24, 28, 32	Berechnungen an Dreiecken
d) 8, 9, 10, 12, 13, 53	Berechnungen an Vierecken
e) 9–12, 53	Flächeninhaltsbestimmungen
f) 19–23, 25, 26, 38, 52–54	Geometrie der Geraden
g) 29–31, 34, 35, 39, 52	Geometrie des Kreises
h) 16, 17, 33	Quader, Pyramide, Kugel
i) 36, 42, 46	Anwendungen im Raum
k) 37, 40–45	Geschwindigkeiten und Kräfte
l) 36, 37, 40, 41, 46	Militärwesen – Luftverteidigung
m) 39, 41, 45	Militärwesen – Ballistik
n) 47–51	Physik/Technik

Einerseits sind in den thematischen Komplexen nicht alle Aufgaben erfaßt, andererseits lassen sich den Komplexen noch weitere Aufgaben zuordnen, denn z. B. sind die sachbezogenen Aufgaben der letzten Komplexe auch Anwendungen der Geometrie der Geraden oder des Kreises usw.
Den Komplexen können auch weitere Aufgaben aus den vorangehenden Lerneinheiten des Lehrbuches zugeordnet werden, die im Verlaufe des bisherigen Unterrichts noch nicht gelöst wurden, u. a. auch die weiteren Aufgaben zu den LE 1 bis 28 (LB 117–119).
Neben der Verwendung der Komplexe zur thematischen Gestaltung der Übungs- und Anwendungsstunden bietet sich z. T. auch die Nutzung für größere häusliche Wiederholungsaufgaben, für Systematisierungen und *Schülervorträge* an.

Beispiele:

- Wiederholen Sie Ihre Kenntnisse über die analytische Geometrie des Kreises! Lösen Sie dazu die Aufgaben des Komplexes g) und gegebenenfalls noch andere!
(Langfristige Wiederholungsaufgabe; Hausarbeit)
- Stellen Sie Möglichkeiten der Bestimmung von Flächeninhalten zusammen (bei Vorgabe notwendiger Größen; bei Vorgabe von Eckpunkten mittels Koordinaten; bei Vorgabe von Gleichungen, mit denen Kurven in einem Koordinatensystem beschrieben werden)! Lösen Sie dazu Aufgaben aus dem Komplex e) und gegebenenfalls noch andere!
(Systematisierungsaufgabe)

[1] Damit ergeben sich auch günstigere Möglichkeiten der Zielorientierung und Motivierung in den Übungsstunden.

- Wiederholen und vertiefen Sie Ihre Kenntnisse über Dreiecke!
  Lösen Sie dazu Aufgaben aus dem Komplex c) und gegebenenfalls noch andere! (Langfristige Wiederholungsaufgabe)
- Sprechen Sie über die Eigenschaften des Skalarproduktes!
  Lösen Sie dazu Aufgaben aus der Gruppe 19 bis 22 und gegebenenfalls noch andere! Wählen sie geeignete Aufgaben aus, und begründen Sie die Schritte zu deren Lösung! (Schülerauftrag – Schülervortrag)

Um beim Lösen von komplexen Aufgaben alle erzieherischen Potenzen zu nutzen und um dabei besonders auch Selbständigkeit, Aktivität und Schöpfertum sowie eine kritische Haltung zu eigenen Arbeitsergebnissen weiterzuentwickeln, sollten die Schüler angehalten werden, möglichst bei jeder Aufgabe zu prüfen, ob es verschiedene Lösungswege gibt, wie man die Lösungsschritte mit Hilfe theoretischer Kenntnisse begründen kann und wie man ermittelte Ergebnisse kontrollieren kann. In der Vektorrechnung und analytischen Geometrie ist es häufig möglich, zeichnerische Lösungen rechnerisch zu prüfen bzw. umgekehrt.

Hinweise zu einzelnen Aufgaben

Aufg. 1: Die Aufgabe kann mit Hilfe elementargeometrischer Kenntnisse gelöst werden (Summe und Differenz der Vektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ beschreiben die beiden Diagonalen eines Rechtecks). Man kann die Gleichheit der Beträge aber auch durch skalare Multiplikation von $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$ nachweisen (↗ Bild 77).

Aufg. 2 und 3: Motivierung der Beweisidee: die auf der linken Seite der Gleichungen stehenden Vektoren in Summen zerlegen, in denen die auf der rechten Seite stehenden Vektoren enthalten sind (möglicherweise bilden die restlichen Komponenten den Nullvektor!). Skizzen verwenden!

Aufg. 7 und 8: Impuls für die Schüler: Wählen Sie geeignete Repräsentanten der Vektoren bei der Darstellung im Koordinatensystem!

Aufg. 9: Die Ermittlungen sollten durch Abzählen und/oder Kopfrechnen erfolgen. Bei Nr. 9f kann zunächst Gleichschenkligkeit vermutet bzw. abgelesen („abgezählt") werden. Der Flächeninhalt wird im Kopf bestimmt, ggf. auch hier schon auf die Trapezmethode verweisen (zur Vorbereitung auf Aufg. 10) (↗ Bild 78).

Aufg. 13 bis 15: Man kann die Koordinaten zunächst graphisch zu ermitteln suchen (↗ Bild 79).

Aufg. 24: Komplexe Aufgabe zur analytischen Geometrie der Geraden. Vor dem Berechnen sollten die Schüler den Lösungsweg stichwortartig notieren (ggf. vortragen und begründen, verbunden mit einer Skizze), z. B.

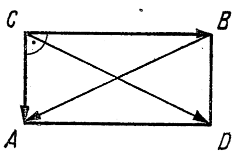


Bild 77

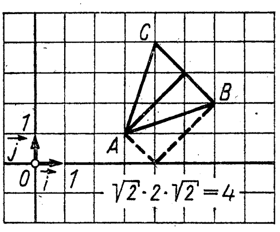


Bild 78

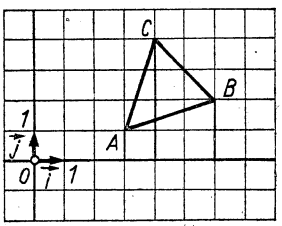


Bild 79

1. Gleichung derjenigen Geraden durch C bestimmen, die auf der gegebenen Geraden senkrecht steht;
2. Schnittpunkt D der beiden Geraden (Basis und Höhe des gleichschenkligen Dreiecks) ermitteln;
3. Abstand $\overline{CD}$ berechnen und dritteln;
4. Einheitsrichtungsvektor $\vec{v}$ der die Basis bestimmenden Geraden berechnen;
5. Koordinaten der Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ berechnen

   $(\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}|\overrightarrow{CD}|\,\vec{v}; \qquad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \frac{1}{3}|\overrightarrow{CD}|\,\vec{v}).$

Aufg. 27, 28, 29, 30: Diese Aufgaben sollten im Komplex in der gegebenen Reihenfolge gelöst werden, weil die Lösung einer Aufgabe Vorleistungen (Grundgedanken) für die folgende bringt.

Aufg. 29–31: Diese Aufgaben können jeweils im Sinne der anderen erweitert werden.

Aufg. 32, 33: Komplexe Aufgaben, deren Lösung zur Erweiterung elementar geometrischer Kenntnisse über das Dreieck bzw. das reguläre Tetraeder (Modell verwenden) führt. Die Beweise sind für spezielle Fälle zu erbringen, können aber auch allgemein geführt werden.

Aufg. 34b, 35: Die Lösungen sollten durch Überlegungen an Darstellungen im Koordinatensystem gefunden werden.

Aufg. 37: Ggf. auch Berechnung ausführen lassen.

Aufg. 43, 44: Auf Idealisierungen und Realitätsgehalt aufmerksam machen. In dieser Beziehung sind diese Aufgaben keine echten praxisbezogenen Aufgaben, zur Übung dennoch geeignet. Das trifft auch auf eine Reihe weiterer Sachaufgaben zu.

Stoffgebiet 2

Weitere Klassen nichtrationaler Funktionen; ihre Differentiation und Integration

Vorbemerkungen

Mit diesem Stoffgebiet wird der in Klasse 11 begonnene Analysislehrgang fortgesetzt und abgeschlossen. Die in Klasse 11 erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten hinsichtlich grundlegender Begriffe, Sätze und Verfahren der Analysis werden zur Untersuchung von Logarithmus-, Exponential- und Winkelfunktionen (insbesondere ihrer Differentiation und Integration) angewendet. Das erfordert zunächst das Reaktivieren und Festigen dieser Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten. Diesem Anliegen dient der Stoffabschnitt 2.1.
Die Behandlung der Stoffabschnitte 2.2 bis 2.4 verfolgt das Ziel, sicheres Wissen und Können im Hinblick auf die genannten Klassen nichtrationaler Funktionen zu entwickeln (wichtige Eigenschaften und Beziehungen, Differentiation und Integration, Anwenden auf inner- und außermathematische Problemstellungen) und zugleich das grundlegende Wissen und Können aus der Analysis insgesamt ständig zu wiederholen, anzuwenden und zu systematisieren (LP 50). Der Stoffabschnitt 2.4 dient insbesondere auch der zielgerichteten Vorbereitung auf die Reifeprüfung.
Entgegen der Arbeitsweise in Klasse 11 werden in den Stoffabschnitten 2.2 und 2.3 die Differentiation und die Integration der entsprechenden Funktionen in enger Wechselbeziehung behandelt.
Dabei sind zunehmend höhere Anforderungen an das selbständige und schöpferische Arbeiten der Schüler zu stellen. Das immer wieder geforderte Anwenden erworbener Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten trägt dazu bei, fachtypische Denk- und Arbeitsweisen bewußtzumachen und dient der Weiterentwicklung des Vermögens, sie überlegt und schöpferisch einzusetzen.
Zur Aktivierung der Schüler und zur Rationalisierung des Unterrichts sollten insbesondere auch *längerfristig* zu bearbeitende *Hausaufgaben* gestellt werden (z. B. durch Aushang im Fachkabinett, eventuell Anregung für außerunterrichtliche Arbeit in Lerngruppen), die dem zielgerichteten Reaktivieren solcher Kenntnisse und Fähigkeiten dienen, die in bestimmten Lerneinheiten benötigt werden. Entsprechende Angaben zu stofflichen Inhalten sind dem Stoffverteilungsplan (Spalte „Zu reaktivierender Stoff“) bzw. den Ausführungen zu den einzelnen Lerneinheiten zu entnehmen.

Schülervorträge

Die folgende Übersicht enthält Vorschläge für Schülervorträge. Die Auswahl ist vom Lehrer unter Berücksichtigung der jeweiligen Klassensituation zu treffen.

Thema	Aufgabenstellung in	Vortrag in	Bemerkungen/ Literaturhinweise
Ermitteln einer Gleichung für eine Tangente an den Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ im Punkt P_0 (● B 1)	LE A 28	LE B 1	
Definition des bestimmten Integrals als gemeinsamer Grenzwert zweier Zahlenfolgen (● B 7)	LE B 1	LE B 3 (1. Std.)	Hinweis auf das Lehrbuch 11; LE D 1 und D 2
Die Existenz des bestimmten Integrals (● B 8, B 9)	LE B 1	LE B 3 (1. Std.)	Hinweis auf das Lehrbuch 11, LE D 3
Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze (● B 3)	LE B 1	LE B 3 (1. Std.)	Wichtig für die Vorbereitung der LE B 4; eventuell auch den Auftrag B 10 einbeziehen und auf Interpretation von Φ als Flächeninhalt eingehen (Bedingungen). Hinweis auf das Lehrbuch 11, LE D 5, bzw. auf den Satz Seite LB 137
Flächeninhaltsberechnung von Punktmengen mittels Integration (● B 11)	LE B 1	LE B 3 (2. Std.)	Hinweis auf das Lehrbuch 11, Seiten 266 bis 268
Existenz und einige Eigenschaften einer Stammfunktion Φ der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$	LE B 4	LE B 5	Als Wiederholung und Zusammenfassung zu LE B 4
Leben und Werk von L. EULER	LE B 4	LE B 6	Hinweis auf Lit. (↗ UH 156; Fußnote)
Das Verfahren der Integration durch lineare Substitution in der Form $\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$	LE B 6	LE B 7 (3. Std.)	Hinweis auf das Lehrbuch 11, LE D 7. Erläuterung an selbst gewähltem Beispiel
Übertragung der Eigenschaften einer Funktion f auf ihre Umkehrfunktion $\bar{f}$ (● B 27)	LE B 6	LE B 8	Hinweis auf das Lehrbuch 11, LE C 11
Zusammenhang zwischen den Ableitungen zueinander inverser Funktionen (● B 29)	LE B 6	LE B 9	Hinweis auf das Lehrbuch 11, LE C 12
Anwendungen von Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Zusammenhängen in Naturwissenschaften und Technik	LE B 9	LE B 11 (1. Std.)	Hinweis auf das Lehrbuch 9, Seiten 145/146 (unter Umständen auch UH Klasse 9, Seite 159)

Thema	Aufgaben-stellung in	Vortrag in	Bemerkungen/ Literaturhinweise
Logarithmus- und Exponentialfunktionen; ihre Differentiation; Integration der Exponentialfunktionen	LE B 4	LE B 11 (2. Std. oder im Stoffabschnitt 2.4.)	Systematisierungsvortrag zu 2.2; Hilfe und Anleitung durch den Lehrer erforderlich
Ermittlung von Funktionswerten von $\tan x$ für $45° < x < 90°$ und von $\cot x$ für $0° < x < 45°$ mit Hilfe des Rechenstabs	LE B 12	LE B 13	
Untersuchung des Monotonieverhaltens einer Funktion mit Hilfe der Differentialrechnung	LE B 15	LE B 16	Hinweis auf ■ B 33 (LB 188)
Wiederholung des Grundwissens über das bestimmte Integral zur Flächeninhaltsberechnung	LE B 18	LE B 19	

Kontrollaufgaben

Zum Stoffabschnitt 2.2:

1. *Aufstellen von Tangentengleichungen:*
   (1) LB 203: Nr. 15; (2) LB 204: Nr. 25a, c
2. *Flächeninhaltsberechnungen:*
   (1) LB 203: Nr. 17b; (2) LB 204: Nr. 29
3. *Kurvendiskussionen:*
   (1) LB 203: Nr. 20a; (2) LB 211: Nr. 25
4. *Extremwertaufgaben:*
   LB 204: Nr. 28a
5. *Anwendungsaufgaben (Sachverhalte aus Naturwissenschaft und Technik):*
   (1) LB 211: Nr. 29; (2) LB 212: Nr. 30
6. *Fragen bzw. Aufgaben zur Theorie:*
   (1) In LE B 4 wurde erarbeitet: Die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\ (x > 0)$ ist eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$.
   Zeigen Sie, wie in Anwendung der Theorie der Differentialrechnung wichtige Eigenschaften von Φ aus dieser Festlegung gefolgert werden können (Nullstellen, Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Monotonie, Existenz von lokalen Extrema)!
   (2) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $y = \ln x$ und $y = e^x$ in ein und dasselbe Koordinatensystem, und erläutern Sie Zusammenhänge zwischen wesentlichen Eigenschaften beider Funktionen!

(3) Leiten Sie die Regel $(e^x)' = e^x$ unter Verwendung der Beziehung $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ und des Zusammenhangs zwischen den Funktionen $y = \ln x$ und $y = e^x$ her!

(4) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen den Funktionen $y = e^x$ bzw. $y = \ln x$ und beliebigen Exponential- bzw. Logarithmusfunktionen!

(5) Zeigen Sie, daß für Funktionen der Form $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ die Beziehung $f'(x) = k \cdot f(x)$ gilt!

Zum Stoffabschnitt 2.3:

1. Differentiation und Integration von Winkelfunktionen

(1) LB 205: Nr. 36d und f; (2) LB 205: Nr. 38a und 39a; (3) LB 205: Nr. 40a und b

2. Aufstellen von Tangentengleichungen

LB 190: Nr. 5a

3. Kurvendiskussionen

LB 194: Nr. 3

4. Extremwertaufgaben

(1) LB 198: Nr. 4; (2) LB 205: Nr. 43

5. Flächeninhaltsberechnungen

(1) LB 216: Nr. 62a; (2) LB 201: Nr. 5

Stoffverteilung

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff
Stoffabschnitt 2.1 Wiederholungen		**5 Stunden**
1 Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen	1	– Berechnen der 1. Ableitung bzw. Ermitteln von Stammfunktionen einer Funktion f – Aufstellen von Tangentengleichungen (Tangente an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0) – Begriffe, Sätze: Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 (geometrische Deutung), Differenzierbarkeit, Regeln für die Differentiation von in Klasse 11 behandelten Funktionen, Stammfunktion (unbestimmtes Integral), Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen
2 Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben	2	– Aufstellen von Tangentengleichungen – Durchführen von Kurvendiskussionen (rationale Funktionen, Wurzelfunktionen), dabei insbesondere auch Lösen von Gleichungen (lineare und quadratische Gleichungen bzw. darauf zurückführbare Gleichungen) – Lösen von Extremwertaufgaben – Begriffe, Sätze: Monotonie und 1. Ableitung einer Funktion f, lokale Extremstellen von f, Nullstellen und Polstellen von f, Verhalten im Unendlichen
3 Integralrechnung, Flächenberechnungen	2	– Berechnen bestimmter Integrale unter Anwendung des Hauptsatzes, dabei auch Verfahren der Integration durch lineare Substitution[1]) – Berechnen des Flächeninhalts von Punktmengen (mit Elementen der Kurvendiskussion) – Begriffe, Sätze: Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ (Definition, Existenz), Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Bestimmtes Integral und Flächeninhalt

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen, ihre Differentiation; Integration der Exponentialfunktionen			**15 Stunden**
4 Eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$	1	– Stammfunktionen – Regeln für die 1. Ableitung bzw. das Ermitteln von Stammfunktionen für Potenzfunktionen	– Existenznachweis und Ermitteln einer Stammfunktion Φ zur Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$

[1] In der Klasse 11 wird nur die Form $\int_{x_1}^{x_2} f(ax + b)\,dx = \left[\frac{1}{a} F(ax + b)\right]_{x_1}^{x_2}$ mit $F' = f$ behandelt.

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		– Beziehung zwischen bestimmtem Integral als Funktion seiner oberen Integrationsgrenze und Stammfunktionen – Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert gewisser Zahlenfolgen	– Näherungsweises Berechnen von Funktionswerten von Φ (■ B 5)
5 Eigenschaften der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$	2	– Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion – Eigenschaften stetiger Funktionen – Bedeutung der 1. Ableitung einer Funktion f für Aussagen über f (Monotonie, lokale Extrema) – Logarithmusfunktionen	– Charakteristische Eigenschaften der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$; Graph von Φ – Die Funktion Φ – eine Logarithmusfunktion (natürliche Logarithmusfunktion, Bezeichnung „ln") – Aufsuchen von Funktionswerten der Funktion ln aus dem Tafelwerk
6 Die Basis der Logarithmusfunktion $y = \ln x$	1	– Begriffe „Potenz", „Logarithmus" – Basis eines Logarithmus – Logarithmusfunktion	– Die irrationale Zahl e (EULERsche Zahl) als Basis von ln – Berechnen von Näherungswerten für e (Beziehung ▷ B 1)
7 Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben, Flächeninhaltsberechnungen	3	– Differentiationsregeln und Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen – Verfahren der Integration durch lineare Substitution – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – Kurvendiskussionen (Arbeitsschritte, Bedingungen) – Bestimmtes Integral und Flächeninhalt – Aufstellen von Tangentengleichungen (Punkt-Richtungs-Gleichung) – Lösen von Gleichungen	– Differenzieren zusammengesetzter Logarithmusfunktionen – Ermitteln von Stammfunktionen für Funktionen der Form $f(x) = \frac{a}{bx + c}$ – Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben, Flächeninhaltsberechnungen (für die genannten Funktionen)
8 Die Umkehrfunktion der Funktion ln	1	– Zueinander inverse Funktionen (Beziehungen, Übertragen von Eigenschaften)	– Die Umkehrfunktion $\bar{\Phi}$ der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \ln x$

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		– Exponentialfunktionen ($y = 2^x$, $y = 10^x$) – Einfache Exponentialgleichungen	– Nachweis, daß $\Phi(x) = e^x$ ist – Eigenschaften der Funktion Φ mit $\Phi(x) = e^x$
9 Differentiation und Integration der Funktion $y = e^x$ und Anwendungen	2	– Satz über 1. Ableitungen zueinander inverser Funktionen – Stammfunktionen (vgl. mit LE 7)	– 1. Ableitung der Funktion $y = e^x$ (▷ B 3) – Ermitteln von Stammfunktionen von $y = e^x$ (▷ B 4) – Differenzieren und Ermitteln von Stammfunktionen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{bx+c}$ – Berechnen bestimmter Integrale über derartige Funktionen – Kurvendiskussionen, Flächeninhaltsberechnungen (für angegebene Funktionen)
10 Beliebige Exponential- und Logarithmusfunktionen	3	– Exponential- und Logarithmusfunktionen (Eigenschaften, Beziehungen) – Begriff „Logarithmus" (vgl. mit LE 7)	– Zusammenhang zwischen $y = e^x$ und beliebigen Exponentialfunktionen (▷ B 5) – Differenzieren bzw. Aufsuchen von Stammfunktionen von $y = a^x$ (▷ B 6, 7) – Zusammenhang zwischen $y = \ln x$ und beliebigen Logarithmusfunktionen (▷ B 8) – Differenzieren von $y = \log_a x$ (▷ B 9) – Lösen verschiedenartiger Aufgaben (bestimmte Integrale, Tangentengleichungen, Extremwertaufgaben)
11 Anwendungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen	2	Physik-Unterricht: Grundgesetz der Mechanik, Beziehung $s = \int v\,dt$, Radioaktiver Zerfall, Luftdruck (↗ Lehrbuch 9, LE E 6)	– Beispiele für Anwendung und Bedeutung von Exponential- und Logarithmusfunktionen in Naturwissenschaft, Technik, Ökonomie – Lösen einiger Anwendungsaufgaben – Zusammenfassung zu 2.2

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
Stoffabschnitt 2.3 Winkelfunktionen, ihre Differentiation und Integration			**20 Stunden**
12 Wiederholung der Eigenschaften von Winkelfunktionen	2	– Bogenmaß eines Winkels – Definition der Winkelfunktionen – Komplementwinkel- und Quadrantenbeziehungen – Periodizität von Winkelfunktionen – Eigenschaften (Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Monotonieverhalten) und Graphen der Winkelfunktionen	
13 Beziehungen zwischen Winkelfunktionen	1	– Sätze: Für alle reellen Zahlen x gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x \cdot \cot x = 1$ $\left(x \neq k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ mit } k \in G\right)$ – Additionstheoreme der Sinus- und Kosinusfunktionen, entsprechende Doppelwinkelformeln	Anwenden der Beziehungen zwischen Winkelfunktionen auf Termumformungen
14 Die Funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ und $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$	2	– Einfluß der Konstanten $a, b \in P$, $a > 0$, $b > 0$, auf den Graph der Sinusfunktion	– Skizzieren von Graphen der Funktionen $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$ mit $a, b, c \in P$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ – Einfluß der Konstanten a, $b \in P$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, auf die Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen – Einfluß der Konstanten c auf die Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen
15 Das Lösen goniometrischer Gleichungen	3	– Lösen quadratischer Gleichungen, von Sonderformen der Gleichungen 3. und höheren Grades – Lösen einfachster goniometrischer Gleichungen (Aufsuchen der Argumente bei vorgegebenen Funktionswerten)	– Lösungsmethoden (an Beispielen) unter Verwendung der Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen für folgende Typen: ● Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion ● Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen desselben Arguments

Thema	Std.	Zu reaktivierender Stoff	Zu erarbeitender Stoff
		– Angabe der Lösungen (im Gradmaß bzw. im Bogenmaß) unter Berücksichtigung der kleinsten Periode	● Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen verschiedenen Arguments – Diskussion verschiedener Lösungsvarianten – Probe
16 Differentiation und Integration der Winkelfunktionen	3	– Schrittfolge für die Untersuchung einer Funktion auf Differenzierbarkeit – Begriff „Ableitung einer Funktion“ – Summen-, Produkt-, Quotienten-, Kettenregel – Aufstellen von Tangentengleichungen – Stammfunktionen einer gegebenen Funktion – Definition des Begriffs „Bestimmtes Integral“	– Differenzierbarkeit der Sinusfunktion und 1. Ableitung der Sinusfunktion – Differentiation der Funktionen cos, tan, cot – Formale Aufgaben zur Differentiation von Winkelfunktionen – Ermitteln einer Gleichung für die Tangente an den Graph einer Winkelfunktion in einem Punkt – Ermitteln von Stammfunktionen von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen – Berechnen bestimmter Integrale über Sinus- bzw. Kosinusfunktionen
17 Kurvendiskussionen	3	– Schrittfolge für die Durchführung von Kurvendiskussionen – Lösen goniometrischer Gleichungen	– Durchführen von Kurvendiskussionen für Winkelfunktionen
18 Extremwertaufgaben	3	– Heuristische Regeln für das Lösen von Extremwertaufgaben – Sätze, die zur Ansatzfindung und für Nebenbedingungen herangezogen werden können	– Finden des Lösungsansatzes bei Extremwertaufgaben, bei denen Winkelfunktionen angewendet werden können – Lösen dieser Extremwertaufgaben
19 Flächeninhaltsberechnungen; Zusammenfassung	3	– Berechnen bestimmter Integrale über Sinus- bzw. Kosinusfunktionen – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	– Anwenden des bestimmten Integrals zur Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen, die durch Graphen von Winkelfunktionen begrenzt werden – Zusammenfassung

Stoffabschnitt 2.4	Übungen und Anwendungen; Wiederholungen Klassenarbeit	14 Stunden 4 Stunden

Stoffabschnitt 2.1 (5 Std.)
Wiederholungen

Das Ziel dieses Stoffabschnitts besteht vorrangig darin, die zur Realisierung der Ziele und Aufgaben der Stoffabschnitte 2.2 und 2.3 erforderlichen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus dem Analysislehrgang der Klasse 11 zu reaktivieren und zu festigen. Das soll vor allem im Prozeß des möglichst selbständigen Lösens von Aufgaben durch die Schüler erfolgen, die das Anwenden grundlegender Begriffe, Sätze und Verfahren verlangen (LP 51 und 53).
Darunter sind zu verstehen

- die *Begriffe* Differenzenquotient, Differentialquotient bzw. erste Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 sowie erste Ableitung einer Funktion f in einem Intervall, Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral, bestimmtes Integral;
- *Sätze* über Differenzierbarkeit und Stetigkeit von Funktionen,
  über Existenz und Ermittlung der 1. Ableitung bzw. von Stammfunktionen gegebener rationaler Funktionen, Potenzfunktionen (mit rationalen Exponenten) und Wurzelfunktionen (damit im Zusammenhang Differentiationsregeln und Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen);
  ferner der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung;
- *Verfahren*
  für Nullstellen-, Extremstellen- und Polstellenberechnung,
  zur Untersuchung von möglichen Definitions- und Wertebereichen (damit im Zusammenhang das Lösen von Extremwertaufgaben bzw. das Durchführen von Kurvendiskussionen),
  für Flächeninhaltsberechnungen und für das Aufstellen von Tangentengleichungen.

Neben dem Lösen von Aufgaben sind auch solche Formen der Schülerarbeit, wie das Halten von Kurzvorträgen (↗ Übersicht UH 128f.) zu bestimmten stofflichen Schwerpunkten, das selbständige Reaktivieren von Kenntnissen mit Hilfe des Lehrbuchs oder das Arbeiten in Lerngruppen unter Leitung eines leistungsstarken Schülers, zu empfehlen. Damit erfolgt zugleich eine systematische Vorbereitung auf die Reifeprüfung, die selbstverständlich auch die Reaktivierung des vor der Klasse 11 behandelten Stoffes notwendig macht (↗ Aufgaben zur Übung und Wiederholung). Die im Stoffverteilungsplan angegebenen Stundenzahlen zu den LE B 1 bis B 3 stellen *eine* Möglichkeit dar. Sie sollten vom Lehrer unter Berücksichtigung der konkreten Situation in der Klasse gegebenenfalls modifiziert werden.
Im Interesse einer rationellen Unterrichtsgestaltung und zur Herausbildung des erforderlichen Wissens und Könnens wird empfohlen, regelmäßig Hausaufgaben sowohl zur Vorbereitung des Unterrichts wie auch zur Festigung des in der Stunde reaktivierten Wissens zu stellen (ggf. auch differenziert). Vorschläge dazu werden in den Ausführungen zu den einzelnen Lerneinheiten gemacht.

Lerneinheit 1 (1 Std.)

Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen

LB 127 bis 129

In dieser Lerneinheit soll das Ausgangsniveau zur Weiterführung des Analysislehrgangs

- durch eine kurze Motivierung der Schüler sowohl zur Behandlung des neuen Stoffgebiets als auch zur Wiederholung der in Klasse 11 erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus der Analysis sowie vor allem
- durch das Lösen von Aufgaben zur Differentiation von rationalen Funktionen und Wurzelfunktionen sowie zum Ermitteln von Stammfunktionen

geschaffen werden, wobei wesentliche (vom Lehrer entsprechend der Klassensituation auszuwählende) Teile der in Klasse 11 erarbeiteten Theorie reaktiviert werden. Das Herausarbeiten der theoretischen Grundlagen wird dann erfolgreicher sein, wenn während der täglichen Übungen bei Behandlung des Stoffgebietes 1 die in Klasse 11 erworbenen Fertigkeiten im Differenzieren dieser Funktionen gefestigt wurden (Verwendung der Komplexe 10 und 11 – UH 16f.).

Ziele

Die Schüler

- haben verstanden, daß die Differentiation und Integration von Logarithmus-, Exponential- und Winkelfunktionen weitere praktische und mathematische Probleme zu lösen ermöglichen,
- können rationale Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten unter bewußter Anwendung der entsprechenden Regeln differenzieren und integrieren,
- kennen jene grundlegenden Begriffe und Sätze aus der Differential- und Integralrechnung, mit denen sie die genannten Regeln begründen und deren Anwendung sie erläutern können.

Schwerpunkte

- Motivierung der Differentiation und Integration weiterer Klassen nichtrationaler Funktionen
- Wiederholung und Anwendung der Regeln zur Differentiation von rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten
- Wiederholung des Ermittelns von Stammfunktionen

Methodische Hinweise

Motivierung der Differentiation und Integration weiterer Klassen nichtrationaler Funktionen Zur Begründung der Notwendigkeit, den in Klasse 11 begonnenen Analysislehrgang fortzusetzen, genügt der Hinweis auf das Unvermögen der Schüler, alle bis zur Klasse 10 behandelten Funktionsklassen differenzieren und integrieren zu können, nicht. In einem kurzen Lehrervortrag können die Schüler auf solche Problemstellungen aufmerksam gemacht werden, wie sie in manchen Anwendungsaufgaben enthalten sind (Beispiele: LB 169f., Nr. 1 und 2; LB 211, Nr. 29; LB 200f., Nr. 3a).
Die Schüler sollten nun darauf orientiert werden, daß eine innermathematische Anwendung des in Klasse 11 in der Analysis Gelernten in den Vordergrund tritt und daß dies ein hohes Maß an selbständig anwendbarem Wissen und Können erfordert.

Wiederholung und Anwendung der Regeln zur Differentiation von rationalen Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten Nach der selbständigen Bearbeitung des Auftrags B 2 (LB 127) können wichtige Grundbegriffe im Unterrichtsgespräch erläutert und einige Differentiationsregeln begründet werden. Es könnten z. B. folgende Fragen gestellt bzw. folgende Aufträge erteilt werden (aus Zeitgründen Auswahl treffen):

- Wie ermittelt man den Anstieg einer Tangente an den Graph einer Funktion f?
- Was versteht man unter der Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 (in einem Intervall I)?
- Erläutern Sie den Begriff „Differenzierbarkeit einer Funktion“!
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit einer Funktion?
- Deuten Sie die 1. Ableitung einer Funktion geometrisch!
- Erläutern Sie die benutzten Differentiationsregeln!

Diese Arbeit wird erleichtert, wenn alle Schüler als vorbereitende Hausaufgabe für diese Stunde den Auftrag B 1 bearbeitet haben; ein Schüler trägt zu Beginn der Wiederholung seine Ausarbeitung vor, die anderen Schüler ergänzen, berichtigen oder stellen Fragen.
Zur Übung während des Unterrichts und als Hausaufgabe kann eine Auswahl aus den Aufgaben 1, 2 und 5 (LB 129) gestellt werden, so daß die Schüler alle bisher erarbeiteten Differentiationsregeln anwenden müssen.

Wiederholung des Aufsuchens von Stammfunktionen Ein Schüler erläutert das Problem der Umkehrung der Differentiation einer Funktion an einem Beispiel [Vorschlag: Eine Aufgabe entsprechend Beispiel B 1 oder B 2 (LB 128)].
Zur Festigung der Ermittlung von Stammfunktionen werden im Unterricht oder als Hausaufgabe einige Aufgaben aus Nr. 3 und 4 (LB 129) gelöst.
Es wird empfohlen, die auf Seite LB 128 angeschnittene Problematik des bestimmten Integrals als Funktion der oberen Grenze (einschließlich des Auftrags B 3) allen Schülern zur Vorbereitung eines Schülervortrags in der LE 3 aufzugeben.

Variante: Es wäre auch möglich, die Wiederholung des Ermittelns von Stammfunktionen am Anfang der LE 3 durchzuführen. Dann steht in dieser Stunde Zeit zur Wiederholung des Tangentenproblems zur Verfügung (↗ 1. Schwerpunkt in LE B 2 Seite UH 139)

Kontrollaufgaben

LB 129: Nr. 2a, c, e; Nr. 5a; Nr. 4c

Lerneinheit 2 **(2 Std.)**

Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben

LB 130 bis B 133

Die Schüler reaktivieren ihre Kenntnisse über das Durchführen von Kurvendiskussionen und das Lösen von Extremwertaufgaben. Sie wiederholen dabei wesentliche theoretische Grundlagen, üben sich im Differenzieren bisher behandelter Funktionsklassen und im Lösen von Gleichungen (2. Grades und Sonderformen höheren Grades, Wurzelgleichungen).

Ziele

Die Schüler

- können eine Gleichung für eine Tangente an den Graph einer Funktion der bisher behandelten Funktionsklassen ermitteln,
- können Kurvendiskussionen für rationale Funktionen und Wurzelfunktionen durchführen, die einzelnen Schritte theoretisch begründen und die dabei auftretenden Gleichungen lösen,
- kennen Arbeitsschritte für das Lösen von Extremwertaufgaben und können damit Extremwertaufgaben lösen, die auf rationale Funktionen, Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten führen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Übungen im Ermitteln einer Gleichung für eine Tangente an den Graph einer Funktion
- Wiederholung und Anwendung der Kenntnisse über die Durchführung von Kurvenuntersuchungen

2. Stunde

- Wiederholung und Anwendung der Kenntnisse über das Lösen von Extremwertaufgaben anhand einer typischen Aufgabe
- Übungen im Finden von Lösungsansätzen

Methodische Hinweise

Übungen im Ermitteln einer Gleichung für eine Tangente an den Graph einer Funktion Durch selbständige Bearbeitung der Aufgabe 7 (LB 129) vertiefen die Schüler ihre theoretischen Einsichten und ihre Fertigkeiten beim Skizzieren der Graphen ganzer rationaler Funktionen. Die Aufgabe 8 (LB 129) kann als Hausaufgabe gestellt werden. Es könnte der Hinweis erforderlich sein, den Definitionsbereich der Wurzelfunktion festzulegen und das Argument x_1 zu ermitteln, für das $f'(x_1) = m$ gilt.

Wiederholung und Anwendung der Kenntnisse über die Durchführung von Kurvenuntersuchungen Das Anliegen des Stoffabschnitts 2.1, durch selbständiges Lösen geeigneter Aufgaben das Theorieverständnis zu vertiefen, kann durch die selbständige Bearbeitung des Auftrags B 4 gut realisiert werden, denn die Schüler werden auf Schwerpunkte bei Kurvendiskussionen orientiert. Wird dieser Auftrag schrittweise bearbeitet, dann kann sofort weiteres Wissen reaktiviert werden, z. B. bei Teilaufgabe a) die Definition von Nullstellen von Funktionen, die Ermittlung von Nullstellen rationaler Funktionen, bei Teilaufgabe d) die Erläuterung des Begriffs „globales Maximum“ bzw. „globales Minimum“, bei Teilaufgabe f) der Inhalt des Zwischenwertsatzes.
Zur Übung könnten die Schüler das Beispiel B 3 (LB 130) ohne Benutzung des Lehrbuchs selbständig bearbeiten. Sie erhalten dadurch die Möglichkeit, nach Bearbeitung dieser Aufgabe ihre Lösung mit der Darstellung im Lehrbuch zu vergleichen. Leistungsstarke Schüler sollten eine Aufgabe aus Nr. 1 und 2 (LB 132f.) lösen.
Als Hausaufgabe wird die Untersuchung einer Wurzelfunktion vorgeschlagen (Aufgabe 1, 2 und 3).

Wiederholen der Kenntnisse über das Lösen von Extremwertaufgaben Da das Lösen von Extremwertaufgaben und besonders das Finden des Lösungsansatzes den Schülern im allgemeinen Schwierigkeiten bereitet, sollte der Auftrag B 6 schrittweise – den Teilaufgaben entsprechend – mit allen Schülern bearbeitet werden. In Teilaufgabe d) werden die Schüler zwar den Satz des PYTHAGORAS als Nebenbedingung erkennen, sie sollen aber auch einsehen, daß es für die Rechnung unzweckmäßig wäre, h durch s und r auszudrücken, weil dann in der Funktion V eine Wurzelfunktion auftritt, deren Differentiation komplizierter als die Differentiation einer ganzen rationalen Funktion ist.

Übungen im Finden von Lösungsansätzen Die Schüler erhalten den Auftrag, den Lösungsansatz für Aufgabe 4 (LB 133) zu finden. Möglicherweise brauchen sie hierfür Hilfe:

- Die Abbrandverluste sind der Größe der Oberfläche der geraden Kreiszylinder proportional. Wie kann die Oberfläche eines Kreiszylinders mathematisch ausgedrückt werden?
- Feststellung: A_0 ist eine Funktion von r und h.
- Welche Beziehung könnte als Nebenbedingung in Betracht gezogen werden?
- Wenn das Volumen aus der Masse der Rohlinge berechnet werden kann, hätte man eine stereometrische Formel als Nebenbedingung gefunden.
- Überlegung, welche Umformung zweckmäßig ist, um den Lösungsansatz (Zielfunktion) als Funktion mit einer Variablen darzustellen.

Die Schüler sollten im Unterrichtsgespräch noch einmal alle diejenigen mathematischen Beziehungen zusammenstellen, die als Nebenbedingungen beim Finden des Lösungsansatzes in Extremwertaufgaben in Klasse 11 in Betracht gezogen werden (z. B. stereometrische Formeln, Formeln zur Flächenberechnung geometrischer Figuren, Satzgruppe des PYTHAGORAS, Strahlensatz, physikalische Formeln).
Als Hausaufgabe könnte die Lösung der begonnenen Aufgabe 4 (LB 133) und die selbständige Lösung der Aufgabe 5 gefordert werden.

Kontrollaufgaben

(1) Kurvendiskussion: LB 133, Nr. 2b, c
(2) Extremwertaufgabe: LB 133, Nr. 4

Lerneinheit 3 (2 Std.)

Integralrechnung; Flächeninhaltsberechnungen

LB 133 bis 136

In Verbindung mit dem Lösen von Aufgaben werden Grundkenntnisse aus der Integralrechnung (insbesondere der Begriff „Bestimmtes Integral", der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Flächeninhalt von Punktmengen) reaktiviert. Die Definition des bestimmten Integrals bzw. die zu ihr führenden Überlegungen (Lehrbuch Kl. 11, LE D 1 und 2) werden in LE B 4 wieder aufgegriffen. Im Hinblick auf die Verwendung in LE B 4 sollte auch der Zusammenhang zwischen dem bestimmten Integral als Funktion seiner oberen Grenze und dem Problem der Ermittlung einer Stammfunktion einer Funktion f wiederholt werden.

Ziele

Die Schüler
- haben ihre Kenntnisse über den Begriff „Bestimmtes Integral" und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung reaktiviert,
- haben ihre Fertigkeiten im Berechnen bestimmter Integrale und des Flächeninhalts ebener Punktmengen gefestigt.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Übung im Berechnen bestimmter Integrale
- Wiederholung des Begriffs „Bestimmtes Integral" und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

2. Stunde

- Übung im Berechnen des Flächeninhalts ebener Punktmengen mittels bestimmter Integrale

Methodische Hinweise

Übung im Berechnen bestimmter Integrale Es empfiehlt sich, daß die Schüler bereits als Hausaufgabe zu dieser Stunde Grundkenntnisse über das bestimmte Integral und seine Berechnung reaktivieren:
LB 133f. einschließlich Beispiel B 4 durcharbeiten lassen; unter Umständen das Lehrbuch Kl. 11 hinzuziehen. Wesentliches stichwortartig als Grundlage für Kurzvorträge zusammenstellen. Am Anfang der Stunde sollten die Schüler zunächst einige bestimmte Integrale berechnen; damit erfolgt zugleich eine gewisse Kontrolle der Hausaufgabe.

Vorschlag: LB 135, Nr. 1a, c und Nr. 2a, b

In der anschließenden Auswertung erläutern und begründen die Schüler ihr Vorgehen. Im Zusammenhang damit lassen sich zwanglos die nachstehend genannten Theoriebestandteile reaktivieren. (Dabei ist zu beachten: Der Begriff und die Existenz des bestimmten Integrals sowie der Hauptsatz sind unbedingt zu wiederholen. Von den übrigen der angegebenen Punkte ist eine Auswahl zu treffen, da nicht zu viel Zeit für Gespräche über theoretische Fragen zur Verfügung steht. Im Mittelpunkt steht das Lösen von Aufgaben).

- Begriff „Bestimmtes Integral" (SV zu ● B 7)
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Grundlage für das rationelle Berechnen bestimmter Integrale
- Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen
- Regel $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$ mit Hilfe der Aufgabe 2a (LB 135) (Erkennen, daß $\cos \pi$ als konstanter Faktor auftritt)
- Unabhängigkeit des bestimmten Integrals von der Wahl der Variablen (Aufgabe 2b)
- Existenz des bestimmten Integrals (● B 8 und ● B 9; eventuell Kurzvortrag); Anführen von Beispielen für Funktionen, die die geforderten Eigenschaften besitzen; unter Umständen Angabe eines Gegenbeispiels (↗ Lehrbuch Kl. 11, Seite 238, ■ D 2)

Berechnen weiterer bestimmter Integrale:
- Aufgaben 2e und 1f (LB 135) (Anwenden des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution.[1] Falls erforderlich, an einem Beispiel ausführlicher wiederholen.)
- Aufgabe 3 (LB 135) (Parameter q ermitteln)

In der Auswertung sollten die Schüler wieder ihr Vorgehen kommentieren.
Bearbeiten des Auftrags B 10 (gegebenenfalls auch in Verbindung mit einem Schülervortrag zum Thema „Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze – LE B 1, ● B 3).
Dabei:

- Ermitteln von $\Phi(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ für $f(t) = t^2$:

$$\Phi(x) = \int_2^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_2^x = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

- Herausstellen, daß $\Phi(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$

  eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ ist

  (Umbenennung der Variablen)
- Berechnen von $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, $\Phi(3)$; anschließend eventuell noch geometrische Interpretation[2]

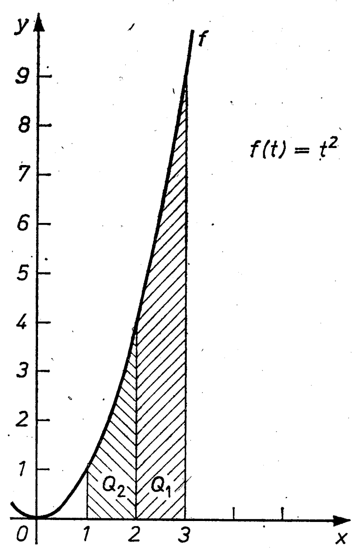


Bild 80

[1] In der Klasse 11 wird nur die spezielle Form

$$\int_{x_1}^{x_2} f(ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{a} F(ax+b)\right]_{x_1}^{x_2}$$ mit $F' = f$ behandelt.

[2] $\Phi(3) = A_1$; A_1 ... Flächeninhalt der Punktmenge Q_1 (↗ Bild 80)

$\Phi(1) = -A_2$; A_2 ... Flächeninhalt der Punktmenge Q_2

$\left(A_2 = \int_1^2 t^2\,dt;\ \text{für } \Phi(1) \text{ gilt aber } \Phi(1) = \int_2^1 t^2\,dt\right)$

bzw. Erklärung dafür, daß $\Phi(1) < 0$ und $\Phi(2) = 0$ gilt, geben (↗ Lehrbuch Kl. 11, Seite 242, Festlegungen (1) und (2))

Die Behandlung des Auftrags B 10 ist sehr zu empfehlen, da dieser Auftrag nochmals auf den bereits in LE B 1 (LB 127) erwähnten und in LE B 4 (LB 137) benötigten Zusammenhang zwischen bestimmten Integralen und Stammfunktionen orientiert.

Übung im Berechnen des Flächeninhalts ebener Punktmengen mittels bestimmter Integrale
Zur Reaktivierung der in Klasse 11 behandelten Fälle sind folgende Möglichkeiten denkbar:

- Erörterung des Auftrags B 11 anhand der Lehrbuchbilder B 3 bis B 6
- SV zu ● B 11 (Vorbereitung als Hausaufgabe)
- SSA: Skizzieren und Erläutern einiger bekannter Fälle an der Tafel ohne Hilfe des Lehrbuches. Dabei: Charakterisieren der einzelnen Fälle; Beschreiben des Rechenganges zur Ermittlung des Flächeninhalts; Nennen der Bedingungen, die dabei zu beachten sind, und Angeben der erforderlichen zusätzlichen Untersuchungen

Es folgt die selbständige Bearbeitung der Aufgaben 7 (Punktmenge teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse) und 8 (Punktmenge von den Graphen zweier Funktionen eingeschlossen).
Die Schüler sollen jeweils die Graphen der Funktionen bzw. die Punktmengen skizzieren. Zur Auswertung kommentieren die Schüler ihr Vorgehen.

Hausaufgaben: (1) ↗ UH 145 (Vorbereitung auf LE B 4); (2) LB 136, Nr. 9

Stoffabschnitt 2.2 (15 Std.)
Logarithmus- und Exponentialfunktionen; ihre Differentiation; Integration der Exponentialfunktionen

Im Stoffabschnitt 2.2 werden Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten aus dem Analysislehrgang der Klasse 11 zur Behandlung der Logarithmus- und Exponentialfunktionen angewendet. Die Schüler haben dabei wieder eine größere „Theoriestrecke" zu bewältigen. Wenn auch an geeigneten Stellen Kenntnisse über Logarithmus- und Exponentialfunktionen aus Kl. 9 reaktiviert und zum Vergleich mit den gewonnenen Resultaten herangezogen werden (darauf orientiert auch der Lehrplan), erfolgt prinzipiell eine Neuerarbeitung dieser Funktionen auf anderem Wege und mit anderen Mitteln und Methoden. Dieser im Lehrplan recht detailliert vorgezeichnete Weg (LP 50/51) wurde gewählt, weil er ausgezeichnete Möglichkeiten bietet, den in Kl. 11 behandelten Stoff zu festigen. Die inhaltliche Linienführung läßt sich durch nachstehende Leitfragen bzw. Schwerpunkte kennzeichnen, auf die in den folgenden Ausführungen Bezug genommen wird (sie sind *nicht* etwa den Schülern im Komplex vorab mitzuteilen, sondern sollten schrittweise in den einzelnen Lerneinheiten zur Zielorientierung verwendet werden):

1. Existiert eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$? — LE B 4
2. Wie erhalten wir eine Stammfunktion von f? — LE B 4
3. Wie können wir Funktionswerte der gefundenen Stammfunktion Φ von f ermitteln? — LE B 4
4. Welche charakteristischen Eigenschaften besitzt die Funktion Φ, die ihre Kennzeichnung als eine Logarithmusfunktion (natürliche Logarithmusfunktion) bestätigen? — LE B 5

5. Welche Basis liegt der natürlichen Logarithmusfunktion zugrunde? LE B 6
6. Wie kann man Näherungswerte für diese Basis (e) erhalten? LE B 6
7. Welche Funktion ist Umkehrfunktion der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \ln x$? LE B 8
8. Welche Zahl ist Basis der Exponentialfunktion $\bar{\Phi}$, die Umkehrfunktion der Funktion Φ ist? LE B 8
9. Welche Eigenschaften der Funktion $y = e^x$ erhält man aus den bekannten Eigenschaften der Funktion $y = \ln x$? LE B 8
10. Wie lautet die 1. Ableitung der Funktion $y = e^x$ bzw. welche Stammfunktionen besitzt die Funktion $y = e^x$? LE B 9
11. Welcher Zusammenhang besteht zwischen beliebigen Exponentialfunktionen und der speziellen Funktion $y = e^x$ bzw. zwischen beliebigen Logarithmusfunktionen und der speziellen Funktion $y = \ln x$ (auch hinsichtlich der Ermittlung der 1. Ableitung bzw. von Stammfunktionen)? LE B 10
12. Anwenden der erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten auf Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben und Flächeninhaltsberechnungen. LE B 7 und 9
13. Anwendungen der Exponential- und Logarithmusfunktionen zur Beschreibung von Zusammenhängen in Natur, Technik und Ökonomie. LE B 11

Hinsichtlich der Eigenschaften der in diesem Stoffabschnitt zu behandelnden Funktionen sowie ihrer Differentiation und Integration (Exponentialfunktionen) ist sicheres Wissen und Können zu entwickeln (LP 50). Hohe Anforderungen sind an die Selbständigkeit der Schüler bei der Erarbeitung und insbesondere bei der Anwendung der neuen Kenntnisse und Fähigkeiten zu stellen. Immer wieder ist den Schülern bewußtzumachen, daß und wie fachtypische Denk- und Arbeitsweisen, die zielgerichtet auf vorhandenem Wissen aufbauen und es nutzen, zu neuen Erkenntnissen führen (besonders LE B 4, 5, 8). An einigen Stellen (LE B 8 und 10) werden auch verbliebene Lücken im streng mathematischen Aufbau bestimmter Stoffgebiete aus früheren Klassenstufen geschlossen (Kl. 9; Potenzen, Potenzgesetze).
Enge Beziehungen bestehen vor allem zu den Stoffgebieten 3 (Differentialrechnung) und 4 (Integralrechnung) der Klasse 11 sowie zum Stoffgebiet 5 (Exponential- und Logarithmusfunktionen; Rechenhilfsmittel) der Klasse 9.

Lerneinheit 4 (1 Std.)

Eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

LB 137 bis 140

Ziele

Die Schüler

– wissen, daß die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(x > 0)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ ist,
– wissen, wie durch Rückgang auf die Definition des bestimmten Integrals Funktionswerte von Φ näherungsweise berechnet werden können, und sie können diese Berechnung für ausgewählte Beispiele ausführen.

Schwerpunkte

- Motivierung zur Aufgabe, eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} \, (x > 0)$ zu ermitteln
- Erarbeitung des Existenznachweises und Ermitteln einer Stammfunktion Φ der Funktion $f(x) = \frac{1}{x} \, (x > 0)$
- Anwenden der Integraldefinition zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten von Φ

Methodische Hinweise

Motivierung Zur Rationalisierung des Stundenablaufs (Zeit!) wird vorgeschlagen, folgende vorbereitende Hausaufgabe zu dieser Stunde zu stellen:

1. Bearbeiten Sie den Auftrag B 12 (LB 137)!
2. a) Untersuchen Sie, ob folgende Aussage wahr ist:
   Jede Funktion f von der Form $f(x) = x^r \, (r \in R)$ besitzt eine Stammfunktion, und diese ist wiederum eine Potenzfunktion.
   b) Begründen Sie Ihre Entscheidung!

In der relativ gründlich vorzunehmenden Auswertung dieser Hausaufgaben wird die bekannte Regel für die Ermittlung von Stammfunktionen für Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^r \, (r \in R)$ wiederholt und festgestellt, daß sie auf $f(x) = x^{-1}$ nicht anwendbar ist. Die Schüler kennen also bisher (auch unter den anderen in Klasse 11 behandelten Funktionen) keine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x} \, (x > 0)$. Diese Erkenntnis bildet das (innermathematische) Motiv für die folgenden Untersuchungen.
Durch einen außermathematischen Sachverhalt läßt sich die Motivierung noch ergänzen:

Die Arbeitsberechnung im p-V-Diagramm bei isothermer Zustandsänderung führt auf ein bestimmtes Integral, zu dessen Auswertung eine Stammfunktion für eine Funktion der angegebenen Art ermittelt werden muß.

$p \cdot V = \text{const.} = c; \; T = \text{const.}$

$$p = \frac{c}{V} \quad \text{bzw.} \quad p = c \cdot \frac{1}{V}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} c \cdot \frac{1}{V} \, \mathrm{d}V = c \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

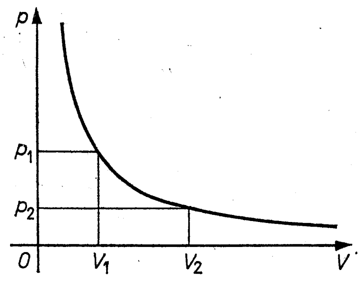


Bild 81

Die Schüler sollten nun aufgefordert werden, selbst Fragen bzw. Probleme zu formulieren, die sich unmittelbar aus dieser Erkenntnis ergeben (Lenkung durch den Lehrer). Das könnte zur Fixierung folgender Fragen an der Tafel führen (Leitfragen 1. und 2., Zielorientierung):

- Existiert überhaupt eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x} \, (x > 0)$?
- Wie erhalten wir (falls sie existiert) eine Stammfunktion von f?

Erarbeitung des Existenznachweises und Ermitteln einer Stammfunktion der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ Die Schüler sollten angeregt werden, nach bekannten Fakten und Zusammenhängen zu suchen, die zur Lösung der gestellten Probleme geeignet erscheinen, und diese anzuwenden, wobei aus Zeitgründen eine relativ starke Führung durch den Lehrer erfolgen sollte. So sollten bei Bedarf Hinweise und Impulse gegeben werden, z. B.:

- Welche Eigenschaft einer Funktion f gewährleistet die Existenz einer Stammfunktion von f (für die 1. Frage)?
- Bekannte Zusammenhänge zwischen bestimmten Integralen und Stammfunktionen gestatten für Funktionen mit der geforderten Eigenschaft die Angabe von Stammfunktionen (für die 2. Frage). Vgl. hierzu mit
  (1) *Lehrbuch, Klasse 11:* LE D 5, Seite 245;
  (2) *Lehrbuch, Klasse 12:* Seite 134, ● 10, und Seite 137, nicht eingerahmter Satz in der Mitte.

Als Ergebnis der Überlegungen zur 1. Frage wird festgehalten:

- Jede stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion.
- Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ ist stetig (Begründung über Differenzierbarkeit von f für alle $x > 0$; Wiederholung des Zusammenhangs zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit).
- Demnach besitzt f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ eine Stammfunktion.

Zur Beantwortung der 2. Frage wird unter Bezug auf den oben unter (2) angeführten Satz auf Seite LB 137 die Aufgabe gestellt:

- Geben Sie (unter Verwendung des wiederholten Satzes) eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ an!

Bei dieser Aufgabe ist natürlich nicht von vornherein die Wahl der Zahl 1 als untere Integrationsgrenze zu erwarten. Diese Festlegung sollte dann vom Lehrer mit der Begründung besonders einfacher Rechnung für diesen Fall mitgeteilt werden (↗ LB 137, Fußnote). Dagegen muß beachtet werden, daß bei den Vorschlägen der Schüler die Bedingung $a > 0$ für die untere Grenze erfüllt sein muß.

Für die weitere Erarbeitung werden zwei Varianten vorgeschlagen:

(1) Die Schüler lesen auf Seite LB 137 den Abschnitt ab Zeile 4 v.u. (Satz im Kasten) bis Seite LB 138, Zeile 6 v.o. (Satz vor der eingerückten Frage), mit dem Ziel durch, die gewonnenen Kenntnisse mit eigenen Worten wiedergeben und begründen zu können. Falls die unter bestimmten Bedingungen (Funktionswerte im betrachteten Intervall nicht negativ; hier noch $x > 1$ beachten) mögliche Interpretation von $\Phi(x)$ in den LE B 1 bzw. B 3 nicht reaktiviert wurde, sollte der Lehrer dazu eine kurze Erläuterung geben.
  - Die Beziehung $\Phi(x) = -A$ für $0 < x < 1$ ist von einem Schüler zu begründen.
  - Ein Schüler sollte den Inhalt des durchgelesenen Textes kurz zusammenfassen. (Welche Aussagen über die Funktion Φ gestatten die bisherigen Betrachtungen?)

(2) Der Sachverhalt im Lehrbuchbild B 7 (LB 138) wird in folgenden Schritten erörtert:
  - Unterscheidung der Fälle $x > 1$ und $0 < x < 1$
  - Interpretation von $\Phi(x)$ für $x > 1$ als Flächeninhalt (Bedingungen beachten!), Angabe von A in Integralschreibweise
  - Beziehung zwischen $\Phi(x)$ und A (Flächeninhalt der Punktmenge unter der Hyperbel

$f(x) = \frac{1}{x}$ in $\langle x; 1\rangle)$ für $0 < x < 1$; Folgerung für Funktionswerte von Φ für $x > 1$ und $0 < x < 1$
– Folgerung für $\Phi(1)$
Auch hier sollte ein Schüler anschließend die gewonnenen Erkenntnisse zusammenfassen.

Tafelbild bzw. Folie[1]

Welche Funktion ist Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$?

Es existiert eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ wegen der Stetigkeit von f.
Sie wird mit Φ bezeichnet, und es gilt:

$$\boxed{\Phi(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0)}$$

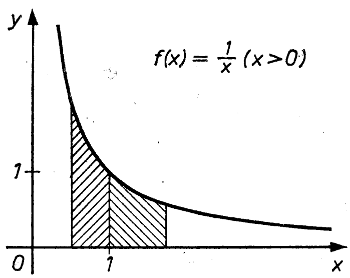


Bild 82

Eigenschaften von Φ:

- $\Phi'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$
  (Definition von Φ)
- $\Phi(x) > 0$ für $x > 1$
- $\Phi(x) < 0$ für $0 < x < 1$
- $\Phi(1) = 0$ $\left(\Phi(1) = \int_1^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 0\right)$

Anwenden der Integraldefinition zur näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten von Φ
Unter Hinweis auf die noch lückenhaften und vagen Vorstellungen über die Funktion Φ (nur ein Funktionswert, nämlich $\Phi(1) = 0$, ist bekannt), wird nun die Leitfrage 3. gestellt:

> Wie können wir Funktionswerte der gefundenen Stammfunktion Φ von $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ berechnen?

Die Schüler könnten dazu wieder selbst Vorschläge machen und deren Realisierbarkeit diskutieren.
Die Betrachtungen münden schließlich (Führung durch den Lehrer) in das Ergebnis, daß zur Berechnung von Funktionswerten von Φ ein Rückgang auf die Integraldefinition erforderlich ist (reaktiviert in LE B 3).
Die Schüler sollten selbständig das Beispiel B 5 durcharbeiten. Auftauchende Fragen werden notiert und am Ende oder, falls erforderlich, sofort geklärt. Fehlt die Zeit hierfür, so sollte das Beispiel gemeinsam durchgearbeitet werden, wobei kurze Phasen als Unterrichts-

[1] Die Anfertigung auf Folie wird im Hinblick auf eine Wiederverwendung in der LE B 5 (Wiederholung) empfohlen.

gespräch gestaltet werden (Begründungen für einzelne Schritte, Beantwortung von Kontrollfragen, Klären von Schülerfragen). Gegebenenfalls kann das Beispiel B 5 auch zu Hause von den Schülern durchgearbeitet werden (Auswertung zu Beginn der Lerneinheit B 5).
Kontrollaufgaben:

- Das Zustandekommen der Teilpunkte erläutern lassen
- Erläuterung von $f(x_i)$ und $f(x_{i-1})$
- Erklären von s_n und S_n

Der Auftrag B 14 (LB 140) kann als Hausaufgabe erteilt werden. Zur Vorbereitung auf die Lerneinheit B 5 ist zu empfehlen, wichtige Eigenschaften bekannter Funktionenklassen zu wiederholen und dabei insbesondere die Potenz- und Logarithmusfunktionen zu berücksichtigen. (Hinweis auf die Übersicht in „Tabellen und Formeln“ und auf den Wissensspeicher „Mathematik in Übersichten“, Seiten 97ff. und 106; Bearbeitung des Auftrags B 15).

Kontrollaufgabe

Nennen Sie das Problem, das in LE B 4 den Ausgangspunkt der Untersuchungen bildete, und erläutern Sie die angestellten Lösungsüberlegungen (Angabe der verwendeten Sätze usw.)!

Bemerkung

Ein relativ einfaches Verfahren, Funktionswerte von Φ näherungsweise zu ermitteln, besteht in der Verwendung von Trapezflächen (↗ Bild 83).
Es ist nicht ausgeschlossen, daß auch Schüler einen solchen oder ähnlichen Vorschlag machen. Man erhält dabei obere Schranken für die betreffenden Funktionswerte. Wie die angeführten Beispiele

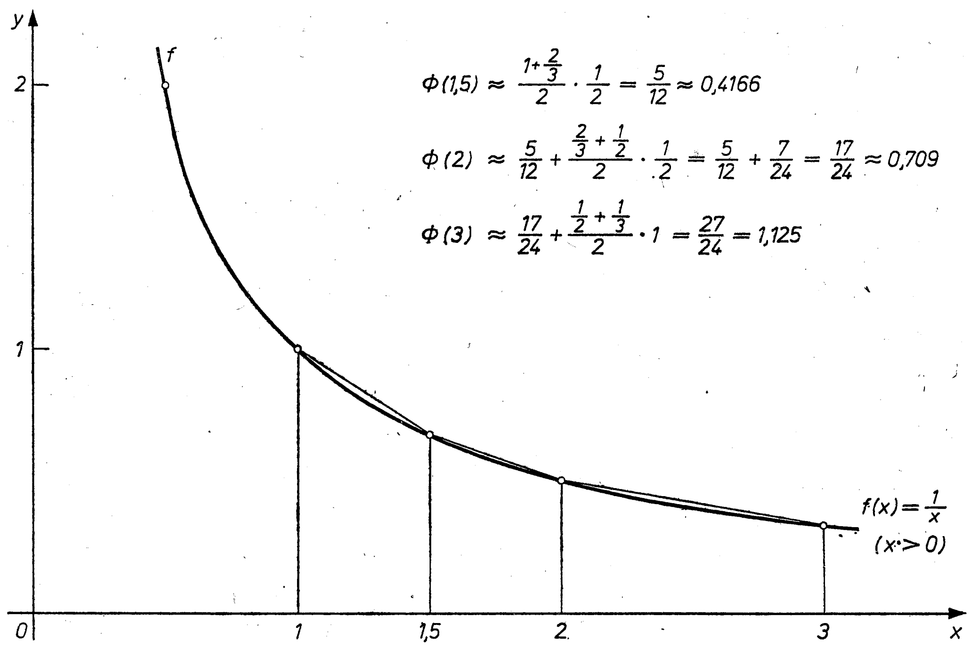


Bild 83

zeigen, ergeben sich durchaus brauchbare Näherungswerte, die sich auch für eine zahlenmäßige Veranschaulichung der in LE B 5 erarbeiteten Beziehung (5) eignen.
Der Lehrer kann u. U. interessierten Schülern empfehlen, auch nach dieser Methode einige Funktionswerte von Φ zu berechnen. Keinesfalls sollte dieses Verfahren die Erörterung des Beispiels B 5 im Unterricht ersetzen, da sonst eine innermathematisch gut zu motivierende Möglichkeit, das Vorgehen zur Gewinnung des Begriffs „Bestimmtes Integral" zu wiederholen, verloren ginge.

Damit erhält man:

$\Phi(1{,}5) + \Phi(2) \approx \Phi(3) = \Phi(1{,}5 \cdot 2)$.

Lerneinheit 5 (2 Std.)

Eigenschaften der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$

LB 140 bis 146

In dieser Lerneinheit werden charakteristische Eigenschaften der Funktion Φ ermittelt, die ihre Kennzeichnung als eine Logarithmusfunktion ermöglichen bzw. bestätigen. Die Erarbeitung erfolgt weitgehend auf der Grundlage von Kenntnissen aus dem Stoffgebiet 3 der Klasse 11 (Differenzierbarkeit – Stetigkeit, Eigenschaften stetiger Funktionen, Bedeutung der 1. Ableitung einer Funktion), die damit weiter gefestigt werden.

Ziele

Die Schüler
- haben weitere charakteristische Eigenschaften der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$ dadurch erkannt, daß sie Kenntnisse aus der Differentialrechnung anwenden,
- wissen, daß Φ eine Logarithmusfunktion ist (natürliche Logarithmusfunktion, Bezeichnung ln),
- können mit Hilfe der Tafel der Funktion $y = \ln x$ Logarithmen bzw. Lösungen der Gleichung $\ln x = a$ ermitteln.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung und Zielstellung zur Suche nach weiteren Eigenschaften der Funktion Φ
- Erarbeitung einiger charakteristischer Eigenschaften der Funktion Φ

2. Stunde – Erarbeitung weiterer Eigenschaften von Φ, Kennzeichnung von Φ als Logarithmusfunktion (natürliche Logarithmusfunktion) – Übung im Aufsuchen von Funktionswerten der Funktion ln in der Tafel und im Lösen von Gleichungen der Form $\ln x = a$

Methodische Hinweise

Motivierung, Zielstellung Um an die Überlegungen in LE B 4 anknüpfen zu können, sollte ein Schüler in einem Kurzvortrag die in LE B 4 gewonnenen Kenntnisse über Existenz und einige Eigenschaften der Funktion Φ darlegen (ggf. auch Auswertung von Beispiel B 5; ↗ UH 147 unten). Günstig wäre es, wenn dazu das Tafelbild auf Seite UH 147 (Bild 82) auf Folie zur Verfügung stünde.

Die Motivierung ergibt sich aus der noch sehr lückenhaften Kenntnis über Eigenschaften von Φ. Man könnte etwa von den Schülern den Graph von Φ skizzieren lassen und sie auffordern, die Funktion Φ in bekannte Funktionsklassen einzuordnen und ihre Entscheidung zu begründen. Dabei wird schnell deutlich werden, daß die bisher gefundenen Aussagen über Φ noch keine klare und eindeutige Festlegung ermöglichen. Das erfordert weitere systematische Untersuchungen der Eigenschaften von Φ (Leitfrage 4., noch ohne Orientierung auf Logarithmusfunktion).

Die Schüler sollten nun zusammenstellen, welche Eigenschaften von Φ von Interesse sein könnten und folglich ermittelt werden müßten (Lenkung und, falls erforderlich, Ergänzung durch den Lehrer). Dabei könnte folgende „Liste" an der Tafel entstehen:

- Nullstellen
- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Monotonie
- Lokale Extrema
- Wertebereich
- Verhalten im Unendlichen bzw. $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x)$
- Graph der Funktion (Skizze)
- Besondere Beziehungen zwischen Funktionswerten an vorgegebenen Stellen (vom Lehrer genannt)

Erarbeitung einiger charakteristischer Eigenschaften von Φ Den Schülern werden folgende Aufgaben gestellt, wobei auch Gruppenarbeit möglich ist (Bearbeitung von jeweils einer oder auch von zwei Teilaufgaben):

1. Zeigen Sie, daß die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(x > 0)$ genau eine Nullstelle hat!
2. Prüfen Sie, ob Φ stetig ist!
3. Zeigen Sie, daß Φ eine streng monoton wachsende Funktion ist!
4. Begründen Sie, daß Φ keine lokalen Extrema hat!

Die Schüler sollten diese Aufgaben möglichst ohne Zuhilfenahme des Lehrbuchtextes (↗ LB 141) bearbeiten. Der Lehrer kann, falls erforderlich, individuell Anleitung geben. Ein Schüler trägt anschließend seine Ergebnisse vor, die Klasse ergänzt und berichtigt gegebenenfalls. Dabei könnte folgende Übersicht an der Tafel entstehen (eventuell auch eine Folie schrittweise abdecken):

	Eigenschaft	Begründung
Nullstelle	Φ hat genau eine Nullstelle $x_0 = 1$	$\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$ $\Phi(x) > 0$ für $x > 1$ $\Phi(x) < 0$ für $0 < x < 1$
Differenzierbarkeit (Grundlage für Aussagen zu nachfolgenden drei Eigenschaften)	Φ ist **differenzierbar** für alle $x > 0$ $\Phi'(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$	Festlegung von Φ als Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$
Stetigkeit	Φ ist eine **stetige** Funktion	Φ ist differenzierbar (oder: Stetigkeit folgt aus Differenzierbarkeit)
Monotonie	Φ **wächst** streng **monoton**	$\Phi'(x) = \frac{1}{x}\ (x > 0)$; $\frac{1}{x} > 0$ für **alle** $x > 0$
Lokale Extrema	Φ hat keine **lokalen** Extrema	Es existiert kein x mit $\Phi'(x) = 0$

Dieses Vorgehen ermöglicht es, den Schülern eindrucksvoll bewußtzumachen, was aus den wenigen in LE B 4 gefundenen Eigenschaften (↗ Tafelbild Seite UH 147) durch Anwendung der Theorie der Differentialrechnung alles gefolgert werden kann.

Variante:
Durcharbeiten von LB 141 oben bis einschließlich (4). Wiedergabe der Eigenschaften (1) bis (4) mit Begründungen durch einen Schüler.

Unter Einbeziehung des Auftrags B 17 (Bedeutung von $\Phi'(x)$ an einzelnen Stellen als Anstieg des Graphen von Φ) wird nun wiederum versucht, auf der Grundlage der bisher erarbeiteten Eigenschaften den Graphen von Φ in seinem ungefähren Verlauf zu skizzieren ($0 < x \leqq 2$). Erneut wird die Frage nach der Einordnung von Φ in bekannte Funktionsklassen gestellt (eventuell „Tabellen u. Formeln", S. 38 bis 40, oder „Mathematik in Übersichten" verwenden, ● B 15 und B 16 mündlich). Als Ergebnis wird die Vermutung formuliert, daß Φ eine Logarithmusfunktion sein könnte.
Die weitere Erarbeitung sollte unter dem Aspekt des Gewinnens zusätzlicher Argumente zugunsten dieser Vermutung erfolgen.

Mit dem Hinweis auf das logarithmische Rechnen (Rechnen mit Hilfe des Rechenstabs) lenkt der Lehrer die Aufmerksamkeit der Schüler auf die Eigenschaft

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (a \neq 1,\ a > 0;\ x_1, x_2 > 0),$$

d. h. auf

$f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

als eine für Logarithmusfunktionen charakteristische Gesetzmäßigkeit. Ihr Nachweis für Φ bedeutet zu zeigen, daß

$\Phi(x_1 \cdot x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$

gilt. Dazu wird vorgeschlagen:

- Durch einen Schüler an der Tafel vorführen lassen oder in einem kurzen Lehrervortrag zeigen, daß auch die Funktion $\Phi(ax)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}\,(x > 0)$ ist.
- Den Auftrag B 16 mündlich bearbeiten lassen.
- Durch alle Schüler den Abschnitt auf Seite LB 142 (von Zeile ... „Jetzt können wir zeigen ..." bis Zeile ... „hat die Eigenschaft (5)") erarbeiten lassen und gegebenenfalls Fragen klären.

Abschließend wird herausgestellt, daß die bisherigen Untersuchungen die Vermutung stützen, daß Φ eine Logarithmusfunktion ist; eventuell Aufgabe 1 (LB 145) lösen. (Vom Inhalt her ist das hier sinnvoll, obwohl im Lehrbuchtext bereits „ln" verwendet wird. Deshalb sollte der Lehrer die Verwendung von Φ anstelle von „ln" anregen.)

Erarbeitung weiterer Eigenschaften von Φ Die Eigenschaften (6) bis (10) sollten gegenüber den bereits erarbeiteten Eigenschaften (1) bis (5) *knapper* behandelt werden. Der Lehrer muß mit Rücksicht auf die Klassensituation selbst entscheiden, ob er eventuell einige Eigenschaften gründlicher behandelt, andere dafür nur erwähnt bzw. mitteilt und ggf. interessierten Schülern Anregungen zu vertiefter Beschäftigung mit diesen Eigenschaften gibt. Die nachstehend gegebenen Vorschläge zur Behandlung der Eigenschaften (6) bis (10) nach der Numerierung des Lehrbuchs können *keinesfalls alle* in gleicher Ausführlichkeit realisiert werden; hier *muß* ausgewählt werden (wiederum ist auch Gruppenarbeit in Betracht zu ziehen):

- Die Eigenschaften (6) und (7) sowie den Auftrag B 18 behandeln;
- ausgehend von $\Phi(x^n) = n \cdot \Phi(x)$ den Nachweis für (8) erbringen;
- die Eigenschaft (9) erarbeiten.

Dabei sollte zumindest teilweise das Lehrbuch genutzt werden. Folgendes Vorgehen ist möglich:

- Mitteilen, daß aus (5) weitere Eigenschaften abgeleitet werden können, die auch z. T. beim logarithmischen Rechnen bzw. beim Umgang mit dem Rechenstab verwendet wurden.
- LB 143 ab (6) bis zum Auftrag B 18 (ausschließlich) durcharbeiten lassen. Anschließendes Wiedergeben des Sachverhaltes auch verbal mit Begründung und eventuell mit analogen Zahlenbeispielen unter Verwendung dekadischer Logarithmen[1].
  Eventuell die Aufgabe 2 auf Seite LB 145 lösen lassen (differenzierte Aufgabenstellung

[1] Zum Beispiel $\Phi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$

entspricht bei Verwendung dekadischer Logarithmen dem Gesetz

$\lg\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \lg x_1 - \lg x_2;$

dementsprechend ist

$\lg\left(\frac{4}{5}\right) = \lg 4 - \lg 5.$

möglich; auch als Hausaufgabe, unter Umständen gezielt für einzelne Schüler, einsetzbar.)

- Schüler formulieren eine Gesetzmäßigkeit aus den Beziehungen $\Phi(x^0)$, $\Phi(x^1)$, $\Phi(x^2)$, ... für beliebige natürliche Zahlen n, und sie bearbeiten eventuell anschließend den Auftrag B 18. (Diese Übung wird empfohlen, falls die Klassensituation eine weitere Vervollkommnung der Fähigkeit im Führen von Beweisen durch vollständige Induktion gebietet; unter Umständen auch als Hausaufgabe.)
- Mitteilen, daß die Eigenschaft

  $\Phi(x^n) = n \cdot \Phi(x)$

  auch für rationale Zahlen n gültig ist ($n = r \in R$):
  $\Phi(x^r) = r \cdot \Phi(x)$ (↗ LB 143, Eigenschaft (8)).
  Je nach Klassensituation kann der Beweis auch entsprechend der Darstellung im Lehrbuch (LB 143) im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden, oder er wird interessierten Schülern zur selbständigen Erarbeitung empfohlen. (Bilden der 1. Ableitung von $G(x) = r \cdot \Phi(x)$ und $F(x) = \Phi(x^r)$ mittels der Kettenregel, Folgerung aus $F'(x) = G'(x)$ unter Anwendung der Kenntnisse über Stammfunktionen.)
- Schüler wiederholen den Auftrag B 17 und werden anschließend aufgefordert, Vermutungen über das Verhalten von Φ bei unbeschränkt wachsendem x und bei Annäherung an die Stelle $x = 0$ zu äußern.
  Durcharbeiten des Abschnitts im Lehrbuch ab LB 143 unten bis LB 144, (10), wobei folgende Hinweise angebracht sind:

  - Wir müssen zeigen, daß für jede *beliebige*, *noch so große* Zahl K Funktionswerte von Φ existieren, die *noch größer* sind als K (Orientierung auf Verwenden einer Ungleichung).
  - Wir benutzen dazu einen bekannten Funktionswert von Φ, nämlich $\Phi(2)$ (↗ ■ B 5, wobei die Angabe in Form der Ungleichung $\Phi(2) > \frac{1}{2}$ genügt und deshalb so gewählt wird, da der geforderte Nachweis inhaltlich auf eine Ungleichung hinausläuft) und die Beziehung (8).
    2^n liefert eine beliebig große Zahl, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird.
  - Erklärung für $\Phi\left(\frac{1}{2^n}\right) = -\Phi(2^n)$ unter Bezugnahme auf (7).
  - An einem Gegenbeispiel könnte auch erläutert werden, daß

    $$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \infty$$

    keine Selbstverständlichkeit ist:

    $$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \left[1 - \frac{1}{x}\right] = 1$$

    (trotz ähnlichen Verlaufs der Graphen von f_1 mit $f_1(t) = \frac{1}{t}$ und f_2 mit $f_2(t) = \frac{1}{t^2}$ für $t > 0$; bloße Anschauung kann trügen!).

Da auch die Eigenschaften (6) bis (10) weitere Argumente zugunsten der Vermutung, daß Φ eine Logarithmusfunktion ist, lieferten, teilt der Lehrer mit:

(1) Die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \int\limits_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $(x > 0)$ ist eine Logarithmusfunktion.

(2) Diese Funktion heißt natürliche Logarithmusfunktion und wird mit ln bezeichnet:

$$\Phi(x) = \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \ (x > 0).$$

Die Schüler sollten das sich nun ergebende neue Problem möglichst selbst erkennen, nämlich die Frage nach der Basis der Funktion ln:

> Die Funktion $y = \ln x$ ist *eine* Logarithmusfunktion. Durch welche Angabe wird eine bestimmte Logarithmusfunktion charakterisiert? (↗ LE B 6)

Abschließend wird der Graph der Funktion $y = \ln x$ (↗ Bild B 11, Seite LB 145) betrachtet (Widerspiegelung erarbeiteter Eigenschaften von Φ; Vergleich mit den Graphen bekannter Logarithmusfunktionen).

Übung im Aufsuchen von Funktionswerten der Funktion ln in der Tafel bzw. im Lösen von Gleichungen der Form ln $x = a$ Der Aufbau und die Handhabung der Tafeln $y = \ln x$ (↗ *Tabellen und Formeln*, Ausgabe 1973, Seiten 22/23 bzw. 18/19) werden erläutert (LV). An einigen Beispielen wird das Ablesen von natürlichen Logarithmen bzw. von Argumenten bei Angabe des Logarithmus ($\ln x = a$) geübt. Nachdem die Aufgaben zunächst so gewählt wurden, daß die geforderten Zahlenwerte der Tafel unmittelbar zu entnehmen sind, sollten dann auch die Logarithmengesetze einbezogen werden.
Beispiel für eine Aufgabenfolge:

$\ln 4$; $\ln 40$; $\ln 400$;	$\ln 17$;
$\ln 4000 = \ln(400 \cdot 10) = \ln 400 + \ln 10$;	$\ln 1{,}7 = \ln(17:10) = \ln 17 - \ln 10$;
$\ln 0{,}4 = \ln(4:10) = \ln 4 - \ln 10$	$\ln 17{,}4 = \ln(174:10) = \ln 174 - \ln 10$

(↗ auch LB 201, Nr. 1 a–h)

Hausaufgaben: LB 146, Nr. 9a, b und 10a; für leistungsstarke Schüler LB 145f., Nr. 3, 4

Kontrollaufgaben

(1) Welche Funktion ist die 1. Ableitung der Funktion $y = \ln x \quad (x > 0)$? Begründen Sie Ihre Aussage!
(2) Woraus wurde gefolgert, daß
   a) die Funktion Φ genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = 1$, besitzt und
   b) die Funktion Φ kein lokales Extremum hat?
(3) Welche Eigenschaft von Φ erwies sich als besonders wesentlich für ihre Kennzeichnung als Logarithmusfunktion?
(4) LB 146; Nr. 6a, c, d; Nr. 8b, c

Lerneinheit 6 (1 Std.)
Die Basis der Logarithmusfunktion $y = \ln x$

LB 146 bis 148

Die noch offene Frage nach der Basis der Funktion $y = \ln x$ wird in dieser Lerneinheit beantwortet, und es wird gezeigt, wie man Näherungswerte für diese Basis berechnen kann. Die Behandlung der dazu dienenden Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n \in N, n > 0)$$

bildet das Hauptanliegen dieser Stunde, die aus Zeitgründen eine straffe Führung durch den Lehrer erfordert.

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß die Basis der Funktion $y = \ln x$ eine irrationale Zahl ist,
- kennen Näherungswerte für die Basis e der Funktion ln und wissen, wie solche Näherungswerte mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden können.

Schwerpunkte

- Wiederholung der Begriffe „Potenz", „Logarithmus" und „Basis"
- Erarbeitung: Basis der Logarithmusfunktion $y = \ln x$, Ermitteln von Näherungswerten für diese Basis
- Übung im Ermitteln von Funktionswerten der Funktion ln für Argumente der Form e^n und
  $e^{\frac{1}{n}}$ $(n \in G)$

Methodische Hinweise

Wiederholung der Begriffe „Potenz" und „Logarithmus" Zum Reaktivieren von Kenntnissen über Potenzen und Logarithmen, die zum besseren Verständnis der Betrachtungen in dieser und auch in den folgenden LE erforderlich sind, wird das Lösen einiger Aufgaben empfohlen (Auswahl durch den Lehrer):

- Berechnen Sie: $3^2 \cdot 3^3$; $(-5)^4$; $\left(\frac{a^8}{a^3}\right)^2$!
- Lösen Sie die Gleichungen: $2^x = 128$; $10^x = 0{,}001$; $\log_2 x = 5$!
- Ermitteln Sie die Logarithmen: $\log_3 81$; $\log_{10} 0{,}001$!
- Schreiben Sie folgende Gleichungen in der Form $\log_a b = c$!

  $2^6 = 64; \quad 5^{-2} = \frac{1}{25}$

- Schreiben Sie folgende Gleichungen in der Form $a^c = b$!

  $\log_2 128 = 7; \quad \log_{10} 0{,}01 = -2; \quad \log_5 1 = 0; \quad \log_2 2 = 1$

In der anschließenden Auswertung (Kommentieren der Lösungen) lassen sich der Potenzbegriff und einige Potenzgesetze sowie die Begriffe „Logarithmus" und „Basis" wiederholen (↗ Lehrbuch *Mathematik Klasse 9*, S. 141; *Mathematik in Übersichten*, S. 105). Insbesondere ist herauszustellen:

- $\log_a b = c$ genau dann, wenn $a^c = b$.
- Für jede Basis $a (a > 0, a \neq 1)$ gilt: $\log_a 1 = 0$ und $\log_a a = 1$.

Erarbeitung (Basis der Funktion $y = \ln x$) Die Erarbeitung dient der Beantwortung der Leitfragen 5. und 6. (↗ UH 144).
Die Antwort auf 5. (Welche Basis liegt der natürlichen Logarithmusfunktion $y = \ln x$ zugrunde?) sollte vom Lehrer unmittelbar mitgeteilt werden:

Die Basis der Funktion $y = \ln x$ ist eine irrationale Zahl, die man mit e bezeichnet und auch EULERsche Zahl nennt; d. h.

$\ln x = \log_e x \ (x > 0)$ bzw.

$\ln e = \log_e e = 1$ (von Schülern angeben lassen!)

$\ln x = c$ ist gleichbedeutend mit $x = e^c$.

Einige Ausführungen zu Leben, Werk und Bedeutung von LEONHARD EULER sind an dieser Stelle angebracht[1], falls es die Zeit erlaubt (eventuell kann eine Wandzeitung gestaltet werden).
Für die Untersuchungen zur Leitfrage 6. (Wie kann man Näherungswerte für die Zahl e finden?) wird folgender Weg vorgeschlagen:
(1) Unter Bezugnahme auf bekannte Näherungswerte für ln 2 und ln 3 (↗ *Tabellen und Formeln*, S. 22) erkennen und begründen die Schüler die Beziehung $2 < e < 3$:

$\ln 2 \approx 0{,}6931$

$\ln 3 \approx 1{,}0986 \qquad \ln 2 < \ln e < \ln 3$

$\ln e = 1 \qquad\qquad 2 < e < 3$

(Monotonie von ln).

(2) Je nach Klassensituation wird die Beziehung ▷ 1 (LB 147) durch den Lehrer oder selbständig durch die Schüler mit Hilfe des Lehrbuchs hergeleitet (LB 147 ab „*Wie kann man Näherungswerte für die Zahl finden*?“ bis LB 148, 1. Zeile „$2{,}59 < e < 2{,}86$“ vor dem Auftrag B 20).
Dabei sind besonders zu beachten:

- Eine klare Zielstellung durch den Lehrer (Finden einer Beziehung, die die Berechnung von e mit beliebiger Genauigkeit ermöglicht. Diese Beziehung hat die Form einer Ungleichung [Einschachtelung von e]).
- Die Befähigung der Schüler zu einer anschaulichen Interpretation der Ungleichung (1) (LB 147, Lehrbuchbild B 14)
- Die Herausbildung der Erkenntnis, daß im Falle der Folge (x_n) sich die Glieder x_n mit wachsendem n mehr und mehr der 1 nähern (anschaulich ausgedrückt: Für $x_n \to 1$ wird die „Einschachtelung“ enger)
- Das Vermitteln der Einsicht,
  daß das „Auseinandernehmen“ der aus (1) folgenden Ungleichung zu (2) und (3) führt und
  daß in der Ungleichung

  $$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (\nearrow \text{ LB 147, Zeile 8 von unten})$$

  wegen $\ln e = 1$ die Zahl 1 durch $\ln e$ ersetzt werden kann, um zu einer Beziehung für e zu gelangen.

[1] *Biographien bedeutender Mathematiker*, Volk und Wissen, Berlin 1978, S. 247ff. Dazu könnte auch ein an der Geschichte interessierter Schüler sprechen (vorbereiteter Kurzvortrag; Literaturhinweise durch den Lehrer). Von EULER wurde herausgearbeitet, daß das Logarithmieren eine zweite Umkehrung des Potenzierens darstellt. Schon mehr als 100 Jahre früher hat E. WRIGHT mit Logarithmen zur Basis e gerechnet (1618).

Auf diese Weise gelangt man zu ▷ 1 und läßt von den Schülern mit Bezug auf die Monotonie der Funktion $y = \ln x$ eine Begründung geben. Ein Zahlenbeispiel sollte sich anschließen; auf die noch relativ schlechte Annäherung bei $n = 10$ sollte hingewiesen werden.
(3) Die Bearbeitung des Auftrags B 20 könnte angeschlossen werden.
(4) Abschließend wird eine gute Abschätzung für e gegeben (LB 148; Ergebnis im Kasten), und es wird auf andere Verfahren zur numerischen Berechnung von e (vgl. Fußnote[1] auf Seite LB 148) verwiesen.

Übung Dazu wird das Lösen einiger Aufgaben aus Nr. 1 (LB 148) vorgeschlagen. Es geht hier um das Anwenden bekannter Logarithmen- und Potenzgesetze unter Beachtung von $\ln e = 1$; z. B.

$\ln e^2 = 2 \ln e = 2; \qquad \ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}.$

Dabei wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

Vorgabe der Aufgaben an der Tafel, schriftliches Lösen durch die Schüler, Auswertung und Begründung.

Kontrollaufgaben

(1) **a)** Auftrag B 19 (LB 147)
b) Geben Sie an, wie man Näherungswerte für e mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen kann!
(2) LB 148: Nr. 2

Lerneinheit 7 **(3 Std.)**
Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben und Flächeninhaltsberechnungen
LB 148 bis 154

Die in den vorangegangenen Lerneinheiten erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten, einschließlich solcher aus dem Analysislehrgang der Klasse 11, werden nun auf Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben und Flächeninhaltsberechnungen angewendet. Im Zusammenhang damit werden Fertigkeiten im Differenzieren von Funktionen, die mit der Logarithmusfunktion zusammengesetzt sind, und im Ermitteln von Stammfunktionen für Funktionen des Typs $y = \dfrac{a}{bx + c}$ entwickelt. Es wird also kaum Neues vermittelt, vielmehr geht es um umfassendes Festigen des Bekannten.

Ziele

Die Schüler
- erwerben Fertigkeiten im Ermitteln der 1. Ableitung bzw. von Stammfunktionen der oben genannten Funktionen,

- festigen ihre Fertigkeiten im zunehmend selbständigen Durchführen von Kurvendiskussionen, im Lösen von Extremwertaufgaben und im Berechnen von Flächeninhalten, insbesondere im Zusammenhang mit den angegebenen Funktionen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Wiederholung wichtiger Regeln für das Ermitteln der 1. Ableitung von Funktionen
- Übung im Differenzieren zusammengesetzter ln-Funktionen; Tangentengleichungen

2. Stunde

- Übung zu Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben

3. Stunde

- Wiederholung der Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen
- Übung im Ermitteln von Stammfunktionen für Funktionen der Form $y = \frac{a}{bx + c}$; Flächeninhaltsberechnungen

Methodische Hinweise

Wiederholung wichtiger Regeln für das Ermitteln der 1. Ableitung einer Funktion Den Schülern könnten in einer frontalen Übung folgende Aufgaben gestellt werden: Berechnen Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \sqrt{x}\,(5x^2 - 3x)$

b) $f(x) = (9x + 7)^5$

c) $f(x) = -\sqrt{7x + 6}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3} \quad (x \neq 3)$

e) $f(x) = \ln x \quad (x > 0)$

f) $f(x) = \ln (2x + 5)$

Diese Aufgaben erfordern das Reaktivieren und Anwenden bekannter Regeln (insbesondere der Kettenregel) der Differentialrechnung, wobei Aufgabe f) einen neuen Aspekt enthält. Bei der anschließenden Auswertung im Unterrichtsgespräch (Kommentieren, Angabe der verwendeten Regeln, zusätzlich evtl. Frage nach Definitionsbereich der angegebenen Funktionen bei a), c) und f) stellen) wird besonders auf die Aufgabe f) eingegangen. Gegebenenfalls ist das Vorgehen bei dieser Aufgabe ausführlicher zu klären, wobei auch das Lehrbuch herangezogen werden kann (■ B 6; LB 148).

Übung im Differenzieren zusammengesetzter Logarithmusfunktionen Zunächst könnte der Auftrag B 21 in zwei Gruppen ($f'(x)$ bzw. $g'(x)$) gelöst werden. Die angegebenen Lösungen ermöglichen den Schülern die Kontrolle der eigenen Arbeitsergebnisse. Wenn erforderlich, werden individuelle Hilfen durch den Lehrer oder durch leistungsstärkere Schüler gegeben. Die Schüler sollten dann weitgehend selbständig Aufgaben aus Nr. 1 und 2 (LB 152f.) lösen

(evtl. auch als „Kopfrechnen" möglich). Beim Lösungsvergleich wird die Begründung des Lösungsweges mit Hinweis auf die verwendeten Regeln gefordert.
Von Bedeutung für die weitere Entwicklung von Fähigkeiten im Beweisen mittels vollständiger Induktion ist die Aufgabe 3. Sie sollte aus Zeitgründen jedoch nicht im Unterricht gelöst, sondern entweder als längerfristig zu erledigende Hausaufgabe gestellt oder zur Bearbeitung in Lernzirkeln empfohlen werden (zur Verdeutlichung sollten die Schüler zunächst die ersten 4 Ableitungen von $f(x) = \ln x$ ermitteln).
Für leistungsstarke Schüler ist die Aufgabe 4 geeignet.
Bevor man sich den Aufgaben 5 und 6, d. h. dem Ermitteln von Tangentengleichungen, zuwendet, sollte man den Auftrag B 23 erörtern (Wiederholung der Bedeutung der 1. Ableitung von f an einer Stelle als Anstieg der Tangente [↗ auch ● B 1; LB 127]). Danach könnten die Aufgaben 5a und eventuell 6 von den Schülern gelöst werden. Der Lösungsweg sollte von den Schülern kommentiert werden.
In Vorbereitung auf die Übung in der 2. Stunde wird die Bearbeitung des Auftrags B 22 (evtl. ergänzt durch weitere analoge Aufgaben) als Hausaufgabe vorgeschlagen.[1]

Übung zu Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben Zum Lösen der Aufgaben 12a, 13a wurden bereits die erforderlichen Kenntnisse und Fähigkeiten in LE B 2 reaktiviert (UH 140). Die im Lehrbuch ausführlich gelösten Beispiele bieten gegebenenfalls weitere Unterstützung (durcharbeiten, übertragen auf analoge Aufgaben). Grundsätzlich sollten die Schüler zunächst versuchen, die Aufgaben ohne weitere Hilfe zu lösen. Wird sie dennoch erforderlich, so wird sie vom Lehrer individuell gegeben, z. B. durch Hinweise auf Beispiele im Lehrbuch. Das Beispiel B 9 eignet sich hierfür sehr gut. Für die Berechnung von Funktionswerten ist die Tafel für $y = \ln x$ in *Tabellen und Formeln* zu nutzen (↗ auch Bemerkung zum Auftrag B 22, Fußnote auf dieser Seite).
Beim Skizzieren der Graphen ist auf die Einhaltung des vorgegebenen Definitionsbereichs zu achten. Die Bearbeitung der genannten Aufgaben kann auch differenziert in Gruppen erfolgen:
1. Gruppe: 12a, 2. Gruppe: 13a
oder
1. Gruppe: Berechnen der Nullstellen und der Funktionswerte an den Intervallgrenzen;
2. Gruppe: Berechnen der lokalen Extrema, jeweils im Wechsel bei 12a und 13a.
Die Graphen werden dann von beiden Gruppen skizziert.
Zum Üben des Lösens einer Extremwertaufgabe ist die Aufgabe 14a (LB 154) geeignet. Um den Sachverhalt besser zu erfassen, sollten die Schüler zunächst die Graphen skizzieren, dann den Lösungsansatz niederschreiben und die Rechnung ausführen.

Hausaufgaben: LB 153f., Nr. 12b oder 14b
Eventuell könnten auch die nachfolgend genannten Aufgaben zur zeitlichen Entlastung der 3. Stunde einbezogen werden.

Wiederholung der Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen Lösen folgender Aufgaben durch die Schüler:
Ermitteln Sie je eine Stammfunktion der Funktionen

a) $f(x) = (3x - 7)^2$, **c)** $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$,

b) $f(x) = -\sqrt{\frac{1}{5}x + 3}$, **d)** $f(x) = \frac{1}{2x + 1} \quad (2x + 1 > 0)$!

[1] Hinweis auf das Anwenden der Äquivalenz von $\ln x = c$ mit $x = e^c$; also z. B.
$\ln x = -2$
$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}1353$ (↗ Tabellen u. Formeln, S. 8 sowie 18).

Bei der Auswertung der Lösungen (Wiederholen des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution in der Form $\int f(ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax + b)$ mit $F' = f$, ↗ LE B 1 bzw. 3 – eventuell als SV) wird insbesondere die Aufgabe d) berücksichtigt, da sie ein neues, mit den vorhandenen Kenntnissen aber lösbares Problem enthält.

Übung (Ermitteln von Stammfunktionen, Flächeninhaltsberechnungen) Unter Bezugnahme auf die Aufgabe c) wird zunächst die Erweiterung der benutzten Regel auf den Fall $x < 0$ vorgenommen (UG oder SSA mit Hilfe der Lehrbuchdarstellung Seite LB 149 von „Aus $(\ln x)' =$ “ bis ▷ 2). Anschließend wird das Beispiel B 7 durchgearbeitet. Dabei soll in Verbindung mit der oben erwähnten Aufgabe d) folgende Erkenntnis herausgebildet werden:

Auch für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2x + 1}$ mit $2x + 1 < 0$ existiert eine Stammfunktion, nämlich

$G(x) = \frac{1}{2}\ln(-(2x + 1))$

oder auch

$G(x) = \frac{1}{2}\ln|2x + 1|$.

Zusammenfassend kann also für $2x + 1 < 0$ und $2x + 1 > 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x + 1} = \frac{1}{2}\ln|2x + 1| + c$$

geschrieben werden, weil die Logarithmusfunktion nur für positive Argumente erklärt ist.

In wiederum möglichst selbständiger Arbeit sollten die Schüler die Aufgaben 8a, b; 9c; 10a und 11a berechnen (konstante Faktoren beachten!).
Für Flächeninhaltsberechnungen werden die Aufgaben 15a und 16b vorgeschlagen. (Dabei sollte man die Graphen bzw. die Punktmengen skizzieren lassen. Hinweis auf mögliche Kontrolle durch Auszählen von Einheitsquadraten.)

Hausaufgaben: LB 153f.: 10c, 11b und 16a, eventuell auch Auftrag B 25 zur Vorbereitung auf die Lerneinheit B 8

Kontrollaufgaben (sämtlich auf den Seiten LB 153 f.

1) 2c und 8c; (2) 15b (Flächeninhaltsberechnungen);
(3) 12b (Kurvendiskussion);
(4) 14b (Extremwertaufgabe)

Lerneinheit 8 (1 Std).
Die Umkehrfunktion der Funktion ln

LB 154 bis 157

In Anwendung des Wissens über zueinander inverse Funktionen wird die Exponentialfunktion $y = e^x$ als Umkehrfunktion von $y = \ln x$ eingeführt, wobei Kenntnisse über die Exponentialfunktionen $y = a^x$ und $y = 10^x$ reaktiviert werden.

Ziele

Die Schüler

- wissen, daß die Umkehrfunktion $\bar{\Phi}$ der Funktion $\Phi(x) = y = \ln x$ eine spezielle Exponentialfunktion mit der EULERschen Zahl e als Basis ist und kennen charakteristische Eigenschaften von $\bar{\Phi}$,
- können Funktionswerte der Exponentialfunktion mit Hilfe der Tafel ermitteln und einfache Exponentialgleichungen lösen.

Schwerpunkte

- Erarbeitung der Funktion $y = e^x$ als Umkehrfunktion zur Funktion $y = \ln x$ und wichtiger Eigenschaften von $y = e^x$
- Festigung (Ermitteln von Näherungswerten für Funktionswerte der Exponentialfunktion und Lösen einfacher Exponentialgleichungen)

Methodische Hinweise

Erarbeitung ($y = e^x$ als Umkehrfunktion zu $y = \ln x$, Eigenschaften von $y = e^x$) Die Betrachtungen in dieser Lerneinheit erfordern Kenntnisse über zueinander inverse Funktionen. Ihre Reaktivierung sollte zweckmäßigerweise in enger Verbindung mit der Erarbeitung, also nicht als eigenständige Phase im Unterricht erfolgen. Die Entscheidung hierfür hängt jedoch von der Klassensituation ab.
Die Schüler bearbeiten zunächst den Auftrag B 25 (LB 154) (auch als Hausaufgabe zu dieser Stunde möglich). Die Auswertung mündet folgerichtig in die Fragen:

- Besitzt auch die Funktion Φ mit $\Phi(x) = \ln x\ (x > 0)$ eine Umkehrfunktion?
- Welche Funktion ist Umkehrfunktion der Funktion Φ mit $\Phi(x) = \ln x\ (x > 0)$? (Leitfrage 7, ↗ Seite UH 144)

Die Schüler sollten eventuell selbst diese Fragen formulieren. (Die Funktion Φ wurde ausführlich untersucht; Verbindung zu den zuvor angestellten Betrachtungen herstellen.)
Die Erarbeitung könnte nun in folgenden Schritten ablaufen:

(1) Schüler beantworten die Frage nach der Existenz einer Umkehrfunktion $\bar{\Phi}$ zu Φ (Begründung fordern; gegebenenfalls Reaktivierung der Bedeutung der auf strenger Monotonie gegründeten Eineindeutigkeit einer Funktion f für die Existenz ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$).
(2) Man wendet sich dann der Leitfrage 7 zu.
Die Vermutung, $\bar{\Phi}$ könnte eine Exponentialfunktion sein, wird über das Skizzieren des Graphen mit der Gleichung $y = x$ in Verbindung mit dem Auftrag B 26 gewonnen.
(3) Die Frage nach der Basis der Exponentialfunktion $\bar{\Phi}$ (Leitfrage 8) sollte von den Schülern aufgeworfen und formuliert werden. (Heranziehen von Kenntnissen über Exponentialfunktionen aus Kl. 9; Impuls: Welche Angabe kennzeichnet eindeutig eine bestimmte Exponentialfunktion?)
Zur Klärung der Frage eignet sich der Lehrbuchabschnitt auf Seite LB 154 (ab: „Wählt man

eine ...“) bis LB 155 („... Da $\bar{\Phi}$ die Umkehrfunktion ..., wenn $x = \ln y$ ist.“), der von den Schülern selbständig durchgearbeitet werden kann. Anschließend werden noch ungeklärte Fragen besprochen. Es ist aber auch ein Lehrervortrag möglich, besonders dann, wenn es sich um eine weniger leistungsstarke Klasse handelt.

Bei diesem 3. Schritt ist besonders zu beachten:

- Die Gleichung $\ln a^r = r \cdot \ln a$ muß durch die Behandlung der Logarithmengesetze (↗ LE B 5) bekannt sein.
- Zur Erläuterung von $\Phi(\ln a^r) = \ldots$ muß vorher verdeutlicht werden, daß $\ln a^r$ für jedes feste r ein Element des Wertebereichs von Φ und damit Element des Definitionsbereichs von $\bar{\Phi}$ ist.
- Die Gleichung

  $$\bar{\Phi}(\ln a^r) = \bar{\Phi}(r \cdot \ln a) = a^r$$

  sollte mit Hilfe des Bildes B 19 auf Seite LB 155 veranschaulicht werden.
- Auf den Charakter der eingerahmten Beziehung auf Seite LB 155 als Definition muß hingewiesen werden und auf ihre Bedeutung muß unbedingt aufmerksam gemacht werden (↗ Fußnote hierzu auf Seite LB 155). Es muß den Schülern also klar werden, daß damit die Potenzen $a^x (a > 0)$ für alle reellen x *definiert* sind, was ein mathematisch wichtiges Ergebnis und ein entscheidender Fortschritt gegenüber dem Stand in Klasse 9 (↗ Lehrbuch Klasse 9, Seiten 139 und 140) ist.
- Die Gleichung

  $$e^x = \bar{\Phi}(x \cdot \ln e) = \bar{\Phi}(x)$$

  soll begründet werden ($\ln e = 1$).

Damit sind wesentliche Erkenntnisse über die Funktion $\bar{\Phi}$ erarbeitet.
Zur Vertiefung sollten die Schüler anhand des an die Tafel skizzierten Graphen von $\bar{\Phi}(x) = e^x$ Eigenschaften von $\bar{\Phi}$ nennen (Leitfrage 9), die sich aus bekannten Eigenschaften von $y = \ln x$ ergeben. Bei der Begründung gilt es, Kenntnisse zu reaktivieren hinsichtlich der Übertragung von Eigenschaften einer Funktion f auf ihre Umkehrfunktion (↗ Auftrag B 27: eventuell SV). Dabei könnte die folgende Tabelle nützlich sein:

Funktion f	**Umkehrfunktion $\bar{f}$ zu f**
Definitionsbereich	Wertebereich
Wertebereich	Definitionsbereich
streng monoton	streng monoton
stetig	stetig
differenzierbar	differenzierbar

Die Schüler sollten aber angehalten werden, den jeweiligen Sachverhalt in sprachlich vollständigen Sätzen zu formulieren, um Mißverständnisse zu vermeiden.
Zum Zwecke der Zusammenfassung könnte die Tabelle auf Seite LB 156 betrachtet werden, wobei die im unteren Teil aufgeführten Beziehungen zwischen Funktionswerten an vorgegebenen Stellen des Definitionsbereichs („Rechengesetze“) den Schwerpunkt bilden sollten.
Das Beispiel B 12 sollte zumindest interessierten Schülern empfohlen werden mit der Anregung, analog die Beziehung für $e^{x_1 - x_2}$ nachzuweisen.

Festigung (Ermitteln von Näherungswerten für Funktionswerte der Exponentialfunktion, Lösen einfacher Exponentialgleichungen) Der Aufbau und die Handhabung der Tafel für die Funktionswerte von $y = e^x$ (↗ *Tabellen und Formeln*, Ausgabe 1973, Seite 18) werden vom Lehrer erläutert. In mündlicher Übung werden einige Aufgaben der auf Seite LB 157 (Nr. 1 bis 4) dargestellten Art gelöst. Einige weitere Aufgaben, z. B. Seite LB 202: Nr. 10 und 11, könnten auch schriftlich erledigt werden.

Hausaufgaben: LB 157, Nr. 5a, b, eventuell auch ● B 28.

Kontrollaufgaben

(1) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $y = \ln x$ und $y = e^x$ in ein und dasselbe Koordinatensystem, und erläutern Sie Zusammenhänge zwischen wesentlichen Eigenschaften beider Funktionen!

(2) LB 203: Nr. 12

Lerneinheit 9 **(2 Std.)**
Differentiation und Integration der Funktion $y = e^x$ und Anwendungen

LB 157 bis 161

Nach der Gewinnung der Ableitung bzw. von Stammfunktionen der Funktion $y = e^x$ werden mit Hilfe bekannter Regeln der Differentialrechnung bzw. des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution Ableitungen und Stammfunktionen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{bx+c}$ ermittelt. Die gewonnenen Fähigkeiten und Fertigkeiten dienen dann zum Lösen von Aufgaben zur Kurvendiskussion bzw. zu Flächeninhaltsberechnungen. Die Theorieteile sollten relativ knapp behandelt werden, um dem Aufgabenlösen breiten Raum zu geben.

Ziele

Die Schüler

- kennen die Ableitung und Stammfunktionen von $y = e^x$,
- erwerben erste Fertigkeiten im Berechnen der Ableitung von Funktionen der Form $y = a \cdot e^{bx+c}$ sowie im Ermitteln von Stammfunktionen derartiger Funktionen,
- erwerben erste Fertigkeiten im weitgehend selbständigen Anwenden ihrer Kenntnisse auf das Berechnen bestimmter Integrale, auf Kurvendiskussionen und auf Flächeninhaltsberechnungen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung des Ermittelns der Ableitung der Funktion $y = e^x$
- Erarbeitung: Ableitung bzw. Stammfunktionen der Funktion $y = e^x$
- Festigung im Ermitteln der Ableitung bzw. von Stammfunktionen zu Funktionen der Form $y = a \cdot e^{bx+c}$, Berechnen bestimmter Integrale

2. Stunde

- Übungen zu Kurvendiskussionen und zu Flächeninhaltsberechnungen

Methodische Hinweise

Motivierung Das Motiv für die Untersuchungen im ersten Teil der Lerneinheit könnte in folgender Weise entwickelt werden:

- Ein Schüler gibt in einem Kurzvortrag einen Überblick der erarbeiteten Eigenschaften von $y = e^x$ (Graph skizzieren, Beziehung zu den Eigenschaften von $y = \ln x$ als Umkehrfunktion hervorheben).
- Die Graphen der Funktionen

  $y = e^{-x}, \qquad y = 2e^x \quad \text{und} \quad y = e^{2x}$

  werden von einigen Schülern an der Tafel skizziert (↗ LB 157, Aufgabe 5; Zusammenhänge mit Bezug auf den Graphen von $y = e^x$ erläutern lassen, ↗ auch ● B 28).
- Es wird die Frage nach dem Anstieg der Tangente an den Graphen von $y = e^x$ in dessen Schnittpunkt mit der y-Achse gestellt (Lösungsvorschläge werden von Schülern entwickelt).
- Die Lösungsüberlegungen führen zu der Einsicht, daß dazu die Ableitung der Funktion $y = e^x$ berechnet werden müßte. Möglicherweise gelangen einzelne Schüler auch bereits zu dem Vorschlag, die Lösung mit Hilfe der Umkehrfunktion $y = \ln x$ von $y = e^x$ zu ermitteln (↗ Bild 84).

$f(x) = \ln x$

$\bar{f}(x) = e^x$

$g(x) = x$

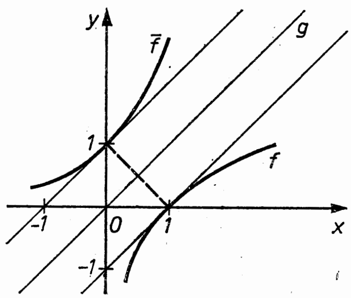


Bild 84

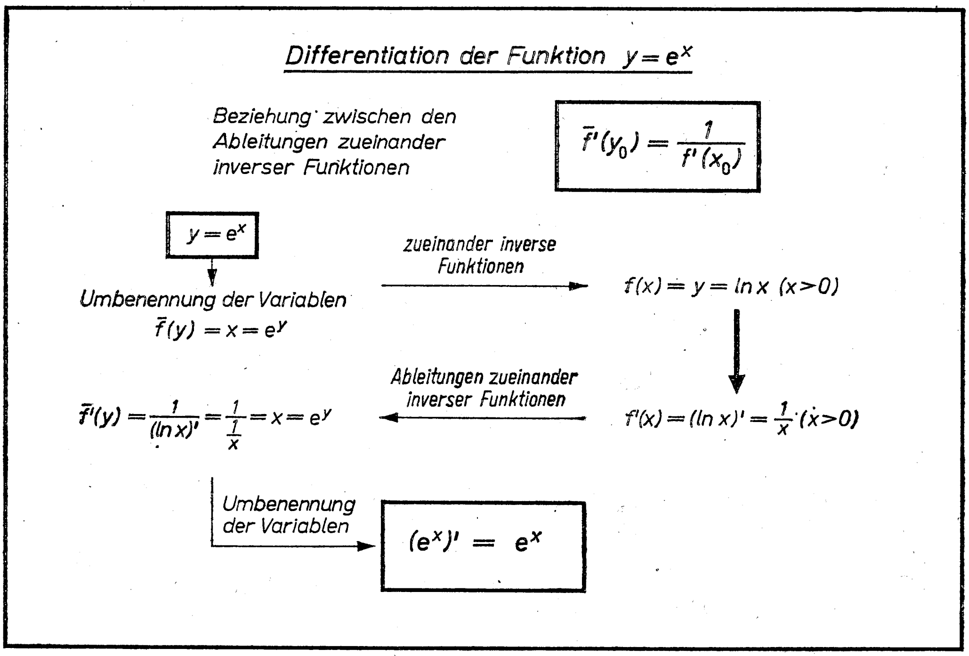
Dieser Vorschlag ließe sich unmittelbar für die nachfolgenden Untersuchungen nutzen.

Die Problem- und Zielstellung werden durch den ersten Teil der Leitfrage 10 erfaßt: „Wie lautet die Ableitung der Funktion $y = e^x$?“

Erarbeitung: Ableitung bzw. Stammfunktionen der Funktion $y = e^x$ Die Schüler werden aufgefordert, Vorschläge zum Lösen des gestellten Problems zu machen. Gegebenenfalls

helfen geeignete Impulse (Nutzen von Bekanntem; Kenntnis der zu $y = e^x$ inversen Funktion, deren Ableitung ebenfalls bekannt ist).
Im Zusammenhang mit dem Auftrag B 29 (SV, Graphen an der Tafel skizzieren lassen; auch UG möglich) wird der Satz über die Ableitungen zueinander inverser Funktionen reaktiviert (LB 157).
Die Schüler werden beauftragt, möglichst selbständig mit Hilfe des genannten Satzes die Ableitung von $y = e^x$ zu bestimmen. Ein Schüler trägt anschließend seine Überlegungen vor.

Variante:
- SSA mit Hilfe von LB 157 ab „In der 11. Klasse ...“ (nach ● 29) bis LB 158, ▷ B 3,
- UG; dabei schrittweise das folgende Tafelbild (Bild 85) entstehen lassen.



Die Frage nach Ableitungen höherer Ordnung bzw. nach Stammfunktionen (zweiter Teil der Leitfrage 10) von $y = e^x$ wird auf der Grundlage von ▷ 3 unter Heranziehung von ▷ 4 geklärt (UG). Dabei sollte der Lehrer hervorheben, daß die mit Hilfe der Beziehungen ▷ 3 und ▷ 4 gefundenen Ergebnisse eine Besonderheit der Funktion $y = e^x$ darstellen.
Nun kann die zur Motivierung genutzte Aufgabe gelöst werden:

$y = e^x; \quad P(0; 1)$

$(e^x)' = e^x$

$e^0 = 1$ (Anstieg der Tangente) bzw. $\alpha = 45°$

Festigung im Ermitteln der 1. Ableitung bzw. von Stammfunktionen zu Funktionen der Form $y = a \cdot e^{bx+c}$; Berechnen bestimmter Integrale Die Schüler durchdenken das Beispiel B 13. Die vorgegebenen Lösungen werden begründet und die verwendeten Differentiationsregeln genannt (● B 30).
Dann lösen die Schüler selbständig Aufgaben aus den Nummern 1, 2 und 4 (LB 160) und kommentieren die Lösungswege (Vorschlag: 1a, b, d; 2a, c, e; 4b).

Falls die Schüler schon vorher über gute Fertigkeiten im Differenzieren verfügen, können der einleitende Auftrag zur Behandlung des Beispiels B 13 und der Auftrag B 30 Schülern mit erhöhtem Festigungsbedarf – gegebenenfalls mit individueller Hilfe durch den Lehrer oder durch leistungsstarke Schüler – vorbehalten bleiben. Als Zusatzaufgabe für leistungsstarke Schüler ist die Aufgabe 3 geeignet.
Des weiteren wird die Lösung der Aufgaben 6a, b, c; 7b, d (LB 160) empfohlen, wobei je nach Leistungsstand der Klasse die gemeinsame Durcharbeit des Beispiels B 14 vorangehen kann.

Hausaufgaben: Weitere Aufgaben aus den Nummern 1, 2, 6 und 7 (LB 160) (unter Umständen differenziert entsprechend dem jeweiligen Festigungsbedarf) sowie die Aufgaben 4c und 9b.

Übung zu Kurvendiskussionen und Flächeninhaltsberechnungen Für die Durchführung der Übungen, bei denen es um eine gründliche Erstaneignung, aber noch nicht um volle Fertigkeitsentwicklung geht, gilt grundsätzlich das bereits zur Lerneinheit 7 Gesagte:

- Die Schüler sollen weitgehend selbständig arbeiten; bei Bedarf kann als Hilfe auf vorgerechnete Beispiele im Lehrbuch zurückgegriffen werden.
- Es kann auch mit differenzierten Aufgabenstellungen gearbeitet werden (die Entscheidung hängt von der Klassensituation ab; eventuell Gruppenarbeit bzw. Betreuung einiger Schüler durch leistungsstarke Schüler vorsehen).
- Lösungswege und -überlegungen sollten von einzelnen Schülern vorgetragen und begründet werden (verwendete Regeln und Sätze, Bedingungen für die Existenz charakteristischer Punkte, Berücksichtigung der Eigenschaften bestimmter Funktionen).

Vorschlag für die Aufgabenauswahl:

- Aufgaben 13a und 14a: Beim Lösen der Gleichungen $f(x) = 0$ bzw. $f'(x) = 0$ beachten, daß $y = e^x$ keine Nullstelle besitzt [↗ auch ■ B 15, Lösungen zu a) und b)]. Nach der Bearbeitung beider Aufgaben empfiehlt sich der Vergleich der Eigenschaften der Funktionen miteinander, desgleichen der Vergleich beider Graphen. Eventuell eine Erklärung für die Unterschiede unter Bezugnahme auf die Funktionsgleichungen erarbeiten. Gruppenarbeit wird empfohlen, wobei eine Gruppe die Aufgabe 13a, die andere die Aufgabe 14a löst (anschließend Auswertung).
- Aufgaben 10 und 11: Dabei Punktmengen skizzieren lassen und auf rationelles Vorgehen mit Hilfe geeigneter Punkte der Graphen achten. Kommentieren des Vorgehens mit Charakterisierung der vorliegenden Fälle.

Kontrollaufgaben

(1) Zeigen Sie, daß $y = ax + 1$ eine Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion $y = e^{ax}$ $(a \in R)$ im Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse darstellt!
(2) LB 161: Nr. 12 und 13b

Lerneinheit 10 (3 Std.)
Beliebige Exponential- und Logarithmusfunktionen
LB 161 bis 165

In dieser Lerneinheit wird der Zusammenhang zwischen beliebigen Exponential- und Logarithmusfunktionen und der speziellen Funktionen $y = e^x$ bzw. $y = \ln x$ erarbeitet. Weitere Schwerpunkte bilden die Differentiation beliebiger Exponential- und Logarithmusfunktionen und das Ermitteln von Stammfunktionen beliebiger Exponentialfunktionen sowie das Anwenden der erworbenen Kenntnisse beim Lösen von Aufgaben.

Ziele

Die Schüler

- kennen die Beziehungen $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ ($a > 0$; $a \neq 1$) und $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ und den Zusammenhang zwischen beliebigen Exponentialfunktionen und der speziellen Funktion $y = e^x$ sowie den Zusammenhang zwischen beliebigen Logarithmusfunktionen und der speziellen Funktion $y = \ln x$,
- können beliebige Exponential- und Logarithmusfunktionen differenzieren sowie Stammfunktionen beliebiger Exponentialfunktionen bestimmen,
- erwerben erste Fertigkeiten beim Anwenden des neuen Wissens zum Lösen innermathematischer Probleme (Berechnen bestimmter Integrale, Tangentengleichungen).

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung, Zielstellung
- Erarbeitung: $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ ($a > 0$; $a \neq 1$), Zusammenhang zwischen $y = e^x$ und beliebigen Exponentialfunktionen, Differenzieren und Ermitteln von Stammfunktionen von $y = a^x$
- Übung im Differenzieren und Ermitteln von Stammfunktionen beliebiger Exponentialfunktionen

2. Stunde

- Erarbeitung: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, Beziehung zwischen der Funktion $y = \ln x$ und beliebigen Logarithmusfunktionen, Differenzieren von $y = \log_a x$
- Festigung der Differentiation beliebiger Logarithmus- und Exponentialfunktionen und das Ermitteln von Stammfunktionen beliebiger Exponentialfunktionen

3. Stunde

Übung: Lösen verschiedener Aufgaben (bestimmte Integrale, Tangentengleichungen, Extremwertaufgaben)

Methodische Hinweise

Motivierung, Zielstellung Lehrervortrag unter Beachtung folgender Gesichtspunkte:

- In den Lerneinheiten B 4 bis B 9 wurden eingehend die Funktionen $y = \ln x$ und die (spezielle) Exponentialfunktion $y = e^x$ untersucht.

- Exponential- und Logarithmusfunktionen sind bereits aus der 9. Klasse bekannt (Schüler nennen Beispiele wie $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = \log_2 x$, $y = \lg x$).
- Wir können aber noch nicht diese und andere beliebige Exponential- und Logarithmusfunktionen differenzieren bzw. Stammfunktionen zu beliebigen Exponentialfunktionen angeben.
- Die vorangegangenen Untersuchungen zeigten immer wieder, daß zielstrebiges Nutzen von Bekanntem das Lösen neuer Probleme ermöglicht (evtl. Beispiele aus LE B 4, B 5, B 8). Es ergeben sich also die Fragen (hier möglichst Schüler einbeziehen!):
  (1) Wie können die erarbeiteten Kenntnisse über die Funktion $y = e^x$ und $y = \ln x$ genutzt werden, um unser Wissen über Eigenschaften beliebiger Exponential- und Logarithmusfunktionen zu vertiefen und insbesondere auf noch offene Fragen (Ableitung bzw. Stammfunktionen dieser Funktionen) eine Antwort zu finden?
  (2) Welcher Zusammenhang besteht zwischen beliebigen Exponentialfunktionen und der speziellen Funktion $y = e^x$ bzw. zwischen beliebigen Logarithmusfunktionen und der speziellen Funktion $y = \ln x$ (Leitfrage 11)?

Erarbeitung von $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ ($a > 0$; $a \neq 1$) und des Zusammenhangs zwischen $y = e^x$ und beliebigen Exponentialfunktionen sowie Differenzieren und Ermitteln von Stammfunktionen von $y = a^x$ In selbständiger Schülerarbeit wird unter Nutzung des Einleitungstextes in LE B 10 (LB 161) bis zur Zeile

„$f(0) = a^0 = e^{0 \cdot \ln a} = e^0 = 1$“

auf Seite LB 162 der Zusammenhang zwischen $y = e^x$ und beliebigen Exponentialfunktionen gewonnen. Dieser Text knüpft unmittelbar an Überlegungen in Lerneinheit B 8 (LB 154ff.) an.

Im Anschluß daran faßt ein Schüler zusammen [Stichpunkte: Beziehung ▷ B 5; Bedeutung von ▷ B 5 anhand eines Beispiels; Forderungen an a (Begründung); Definitions- und Wertebereich von $y = a^x$ (eventuell mit Erläuterung an einem Beispiel)].
Eine **Variante** zur Behandlung der Beziehung ▷ B 5, bei der nicht unmittelbar auf die Lerneinheit B 8 Bezug genommen wird, wäre ein Lehrervortrag unter Einbeziehung der Tafel:

$a^x = b \quad | \ln$ (Logarithmieren einer Gleichung als äquivalente Umformung; ↗ auch LB 163, vor Beziehung ▷ B 8, und LE B 11)

$\ln a^x = \ln b$

$x \cdot \ln a = \ln b = c$

$e^c = b$ (Begriff „Logarithmus“, insbesondere „natürlicher Logarithmus“)

$e^{x \cdot \ln a} = a^x \quad (a > 0; a \neq 1)$

Auf die Möglichkeit, mittels Satz B 5 Potenzgesetze für Potenzen mit reellen Exponenten zu beweisen, sollte mit der Erörterung von Beispiel B 16 unbedingt aufmerksam gemacht werden. (In Klasse 9 wurden die Potenzgesetze lediglich ohne Beweis mitgeteilt, ↗ Lehrbuch Kl. 9, Seite 140. Damit ist nun eine weitere Lücke im mathematischen Wissen der Schüler geschlossen worden.)
Die Regeln für das Differenzieren und Integrieren von $y = a^x$ können von den Schülern in Anwendung bekannter Regeln selbst gefunden werden:

- Begründen Sie, daß jede Exponentialfunktion $y = a^x$ für alle x differenzierbar ist, und ermitteln Sie mit Hilfe der Beziehung $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ ($a > 0$; $a \neq 1$) die Ableitung von $y = a^x$!
- Geben Sie die Ableitung für die Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 10^x$ an!
- Welche Beziehung folgt aus dem gefundenen Ergebnis $[(a^x)' = a^x \ln a]$ für $\int a^x \, dx$?
- Geben Sie je eine Stammfunktion für $f(x) = 2^x$ und $f(x) = 10^x$ an!

Zusammenfassend ist zu betonen, daß die ausführliche Beschäftigung mit den Funktionen $y = \ln x$ und $y = e^x$ sich gelohnt hat, da das erworbene Wissen (mittels ▷ B 5) Aussagen über alle übrigen Exponentialfunktionen ermöglichte (Rationalisierung, Sichtbarwerden von inneren Zusammenhängen).

Übung im Differenzieren und Ermitteln von Stammfunktionen beliebiger Exponentialfunktionen Die Schüler lösen zunächst Aufgaben aus den Nummern 1, 2, 5 und 6 (LB 164) und geben die verwendeten Regeln an [Vorschlag: 1a bis d; 2b, c; 5a, b und 6a bis c]. Im Falle der Aufgaben 5a und b sollte verglichen werden: Exponentialfunktion gegenüber Potenzfunktion. (Eventuell kann man noch eine Aufgabe der Art $f(x) = x^a + a^x$ aufnehmen.) Nach der Behandlung des Auftrags B 33 sind noch die Aufgaben 9a und b zu empfehlen (dabei die Graphen der Funktionen zur Verdeutlichung des Sachverhalts skizzieren lassen und Erläuterung des Ergebnisses aus der Lagebeziehung der beiden Graphen geben).

Erarbeitung: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, Beziehung zwischen der Funktion $y = \ln x$ und beliebigen Logarithmusfunktionen, Differenzieren von $y = \log_a x$ Um an Bekanntes anschließen zu können, werden der Begriff „Logarithmus" und Beziehungen zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen wiederholt. Hierzu werden zunächst folgende Aufgaben gelöst:

(1) LB 163: ● B 34
(2) Skizzieren Sie in jeweils ein Koordinatensystem die Graphen von

$y = e^x$ und $y = \ln x$ sowie $y = 2^x$ und $y = \log_2 x$!

Welche Beziehung besteht jeweils zwischen den genannten Funktionen?

In der sich anschließenden Auswertung ist zu klären:
(1) Die Äquivalenz von $\log_a x = b$ und $a^b = x$ (z. B. ist $\log_2 8 = 3$ äquivalent mit $2^3 = 8$).
(2) $y = e^x$ und $y = \ln x$ bzw. $y = 2^x$ und $y = \log_2 x$

sind Umkehrfunktionen zueinander.
Verallgemeinerung (von Schülern):
Die Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ besitzt als Umkehrfunktion die Logarithmusfunktion $y = \log_a x$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$.

Die Beziehung $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ (↗ Satz B 8) und die Regel für die Ableitung von $y = \log_a x$ (↗ Satz B 9) werden dann mit Hilfe des Lehrbuches erarbeitet (SSA: Text LB 163, beginnend nach dem Auftrag B 35, bis LB 164: „... für jede positive Zahl a mit $a \neq 1$."). Auf Seite LB 163 tritt das Logarithmieren einer Gleichung als äquivalente Umformung auf. Das erfordert gegebenenfalls einen Hinweis des Lehrers (beide Seiten der Gleichung logarithmieren, Anwenden der Logarithmengesetze). Ein Schüler faßt anschließend zusammen (dabei besonders beachten: Forderungen an die Basis a; Definitions- und Wertebereich von $y = \log_a x$). Zur Verdeutlichung werden Zahlenbeispiele betrachtet:

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$ ↗ *Tabellen und Formeln*, Ausgabe 1973, Seite 19

$$\log_{10} x = \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

$$(\lg x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

Zu einer ersten Zusammenfassung kann die Übersicht auf Seite LB 169 herangezogen werden. Sie bringt die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchungen der vorangegangenen Stunden und macht deren Zusammenhang sichtbar (Hinweis auf $\int \frac{1}{x \cdot \ln a}\,\mathrm{d}x$ erforderlich).
Der Vollständigkeit halber kann ergänzend erwähnt werden, daß die Frage nach Stammfunktionen von $y = \ln x$ bzw. $y = \log_a x$ offen bleiben muß, weil ihre Beantwortung die Anwendung eines im Schulunterricht nicht behandelten Integrationsverfahrens erfordert.

Festigung der Differentiation beliebiger Logarithmus- und Exponentialfunktionen und des Ermittelns von Stammfunktionen beliebiger Exponentialfunktionen Die Schüler lösen vor allem Aufgaben, in denen Logarithmusfunktionen zu differenzieren sind. Eingestreut werden aber auch solche Aufgaben, in denen die Ableitung von Exponentialfunktionen zu ermitteln ist oder in denen Stammfunktionen zu Exponentialfunktionen gesucht sind (Vorschlag: Seite LB 164, Nr. 3a; 4a; 3b, c, d; 4d). Weitere Aufgaben zur Auswahl (insbesondere für Hausaufgaben) finden sich auf Seite LB 203, Nr. 21, 22 und 23.
Als weitere Übung ist die Lösung der Aufgabe 11 (LB 165) zu empfehlen, wobei eventuell das Beispiel B 18 (LB 164) als Hilfe genannt wird. Der Sachverhalt der Aufgabe 11 könnte bei der Auswertung anhand einer Skizze erläutert werden. Unter Umständen könnte noch auf die geforderte Stelle im Falle von $f(x) = \log_a x$ geschlossen werden.

Übung: Lösen verschiedener Aufgaben Falls erforderlich (Festigungsbedarf der jeweiligen Klasse beachten), können zunächst einige weitere formale Aufgaben zum Differenzieren von Logarithmus- und Potenzfunktionen bzw. zum Ermitteln von Stammfunktionen von Exponentialfunktionen gerechnet werden (↗ oben angegebene Aufgaben der Seite LB 203). Dabei sollten auch Aufgaben mit Potenzfunktionen eingestreut werden.

Es ist auch möglich, eine schriftliche Leistungskontrolle (10 bis 15 min) durchzuführen. Den Schwerpunkt der Übungen sollten aber vermischte Aufgaben zu verschiedenen Problemen (bestimmte Integrale, Tangentengleichungen, Extremwertaufgaben, Flächeninhaltsberechnungen) bilden, die vom Lehrer entsprechend der Klassensituation auszuwählen sind. Deshalb wird hier lediglich eine Zusammenstellung möglicher Aufgaben zur Auswahl genannt:

- LB 164f., Nr. 7 und 8 (bestimmte Integrale, siehe auch LB 203, Nr. 24)
- LB 165, Nr. 10 (Tangentengleichungen, siehe auch LB 204, Nr. 25, 26)
- LB 165, Nr. 12 (Extremwertaufgabe, siehe auch LB 204, Nr. 28a)
- LB 204, Nr. 29 (Flächeninhaltsberechnung, siehe auch Beispiel B 17)

Die Schüler sollten weitgehend selbständig arbeiten und anschließend ihren Lösungsweg kommentieren.

Kontrollaufgaben

(1) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen den Funktionen $y = e^x$ bzw. $y = \ln x$ und beliebigen Exponential- bzw. Logarithmusfunktionen!
(2) LB 164: ● B 36

Lerneinheit 11 **(2 Std.)**

Anwendungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

LB 165 bis 170

Hiermit wird die Behandlung der Exponential- und Logarithmusfunktionen vorläufig abgeschlossen. Einige ausgewählte Beispiele sollen den Schülern die Bedeutung dieser Funktionen für die Beschreibung von Sachverhalten in Natur, Technik und Ökonomie verdeutlichen.

Ziele

Die Schüler

- kennen einige Sachverhalte aus Natur, Technik und Ökonomie, die durch Exponentialfunktionen bzw. Logarithmusfunktionen beschrieben werden,
- können einfache Anwendungsaufgaben zu diesen Funktionen weitgehend selbständig lösen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung und erste Festigung: Anwendungsbeispiele für Exponential- und Logarithmusfunktionen

2. Stunde

- Übung im Lösen weiterer Anwendungsaufgaben
- Zusammenfassung und Systematisierung zum Stoffabschnitt 2.2

Methodische Hinweise

Erarbeitung und erste Festigung Folgendes Vorgehen ist möglich:

(1) In einem vorbereiteten Schülervortrag (eventuell auch LV) wird auf der Grundlage des Lehrbuches der Klasse 9 (Seiten 145/146) mitgeteilt, daß durch Exponentialfunktionen insbesondere Vorgänge beschrieben werden, bei denen die Änderung einer Größe dem jeweiligen Wert dieser Größe proportional ist. Die Schüler haben diese Tatsache bereits in Klasse 9 kennengelernt (Stoffgebiet 5., LE 6) am Beispiel

- der Abhängigkeit des Luftdruckes von der Gewichtskraft der Luftmassen, die auf die Schicht der Höhe h wirken,
- der Abhängigkeit der Temperaturabnahme in der Zeit Δt von der Temperaturdifferenz zwischen T und T_0,
- der Abhängigkeit der Massenzunahme in der Zeit Δt von der Ausgangsmasse bei biologischen Wachstumsprozessen (↗ Unterrichtshilfen Mathematik, Klasse 9, Seite 159)!

Eine mathematische Begründung konnte dafür in Klasse 9 jedoch nicht gegeben werden, da erforderliche Kenntnisse aus der Differentialrechnung fehlten. Das wird nun nachgeholt (Motivierung, Zielstellung).

(2) Der genannte Sachverhalt wird allgemein durch

$f'(x) \sim f(x)$ bzw. durch $f'(x) = k \cdot f(x)$

beschrieben, wobei $f(x)$ der jeweilige Wert der betreffenden Größe und $f'(x)$ deren Änderung bedeutet. Die angegebenen Beziehungen sollten die Schüler möglichst selbst nennen.

(3) Die Schüler lösen die Aufgabe:
„Weisen Sie nach, daß $f'(x) = k \cdot f(x)$ gilt, wenn $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ ist!"

Tafelbild oder Folie (für Teilzusammenfassung):

Anwendungen der Exponential- und Logarithmusfunktionen

$f(x) = c \cdot e^{kx}$ $(c, k \text{ const.})$

$f'(x) = k \cdot c \cdot e^{kx}$

$f'(x) = k \cdot f(x)$

d. h.: $f'(x) \sim f(x)$ für alle x des Definitionsbereichs

Änderung einer Größe ist direkt proportional dem jeweiligen Wert dieser Größe.

Beispiele: Radioaktiver Zerfall: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Wachstum einer Bakterienkultur: $N(t) = N_0 e^{k \cdot t}$

Atmosphärischer Luftdruck: $p(h) = p_0 e^{-\frac{1}{e}h}$

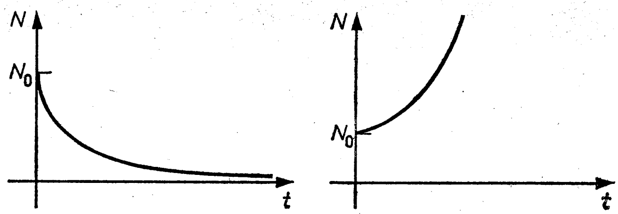
Im Anschluß an diese allgemeineren Überlegungen arbeiten die Schüler das Beispiel B 19 durch.
Empfehlenswerte Schritte:

- Erläutern von $v(t) = v_0 e^{-\frac{c}{m}t}$,
- Skizzieren des Graphen,
- Physikalische Interpretation.

Das Beispiel B 20 kann ebenfalls in selbständiger Arbeit mit Hilfe des Lehrbuches erarbeitet werden (↗ LB 167).
Die Schüler sollten die Abhängigkeit zwischen N und t erläutern und physikalisch interpretieren sowie evtl. eine Skizze anfertigen (● B 39 als HA).
Abschließend wird die Aufgabe 2 (LB 170) gelöst (SSA); eventuell noch k aus den Angaben in a) im Unterrichtsgespräch ermitteln. Im Vergleich zum Beispiel B 20 sollten die Schüler erkennen:

- Im Beispiel B 20 nimmt N mit wachsendem t (exponentiell) ab (Faktor $e^{-\lambda t}$).
- In der Aufgabe 2 liegt (exponentielles) Anwachsen von N in Abhängigkeit von t vor (Faktor e^{kt}, $kt > 0$).

Tafelskizzen:



Bilder 86a und b $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ $(kt > 0)$

Festigung durch Lösen weiterer Anwendungsaufgaben Zur Wiederholung spricht ein Schüler zu den Aufgaben:

- Zeigen Sie, daß für Funktionen der Form $f(x) = c \cdot e^{kx}$ die Beziehung $f'(x) = k \cdot f(x)$ gilt!
- Geben Sie Beispiele für Zusammenhänge in Natur und Technik an, die durch derartige Funktionen beschrieben werden!

Als weitere Festigung wird die gemeinsame Erarbeitung des Beispiels B 21 (LB 168) empfohlen. Dabei kann zur Kontrolle der Übergang von der Zeile

(1) $p(h) = p_0 e^{-\frac{1}{c} \cdot h} \quad (h \geqq 0)$

zur Zeile

$$\lg p(h) = \lg p_0 + \left(-\frac{1}{c} h \cdot \lg e\right)$$

von den Schülern erfragt werden. Die Schüler sollten auch die Gleichung

$$h(p) = \frac{c}{\lg e} \quad (\lg p_0 - \lg p)$$

interpretieren. Der Lehrer sollte gegebenenfalls auf das hier verwendete Logarithmieren einer Gleichung explizit hinweisen (↗ entsprechende Bemerkungen in LE B 10).
Die Aufgabe 1 (LB 169) kann anschließend selbständig von den Schülern gelöst werden. In der Auswertung kommentieren die Schüler ihren Rechengang.
Die Aufgabe 30 (LB 212) wird als Hausaufgabe gestellt oder in die Übungsstunde integriert. Während die Teilaufgabe a von allen Schülern gelöst werden sollte (Beziehung zu Betrachtungen in der 1. Stunde der Lerneinheit B 11 herstellen), wird für b und c die Bearbeitung in zwei Gruppen vorgeschlagen. Um auch das Anwenden des Integrierens an einem Beispiel zu demonstrieren, könnte der in den Ausführungen zur Lerneinheit B 4 (UH 145) skizzierte Sachverhalt aufgegriffen werden (LV oder UG):

Berechnung der bei isothermer Ausdehnung (T = const.) eines Gases verrichteten Arbeit (z. B. des Dampfes in einer Dampfmaschine):

$$W = c \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \quad (V_2 > V_1)$$

$$W = c[\ln V]_{V_1}^{V_2} = c(\ln V_2 - \ln V_1) = c \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Zusammenfassung und Systematisierung zum Stoffabschnitt 2.2 Die Zusammenfassung zum Stoffabschnitt sollte durch einen Systematisierungsvortrag eines Schülers erfolgen. Der Schüler sollte bereits am Anfang der Behandlung des Stoffabschnitts auf seine Aufgabe vorbereitet werden. Der Schüler sollte ferner die Möglichkeit erhalten, sich ggf. mit dem Lehrer zu konsultieren. Die Zusammenfassung auf Seite LB 168f. kann für den Vortrag genutzt werden. Sie gibt etwa die inhaltliche Leitorientierung. Der Schüler sollte aber etwas näher auf folgende Fragen eingehen:

- Wie werden charakteristische Eigenschaften der Funktion $\Phi(x) = \ln x$ gefunden (Anwenden bekannter Sätze aus der Differential- und Integralrechnung)?
- Wie lassen sich wichtige Eigenschaften der Funktion $y = e^x$ aus denen von $y = \ln x$ herleiten?

Die Klasse präzisiert und ergänzt, falls erforderlich.

Zur Vorbereitung auf die Lerneinheit B 12 wird folgende Hausaufgabe empfohlen:

„Wiederholen Sie die Definitionen, Eigenschaften und Graphen der Winkelfunktionen anhand des Wissensspeichers „Mathematik in Übersichten“, S. 109ff., und bearbeiten Sie den Auftrag B 44 (LB 173)!

Zwei Schüler sollten die anzufertigenden Übersichten auf Folien schreiben.

Kontrollaufgaben

(1) LB 203: Nr. 14; (2) LB 211: Nr. 29

Stoffabschnitt 2.3 (20 Std.)
Winkelfunktionen, ihre Differentiation und Integration

In diesem Stoffabschnitt werden die im Analysislehrgang der Klasse 11 erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler zur Behandlung der Winkelfunktionen angewendet. Das erfordert zunächst eine umfassende Reaktivierung, Vertiefung und Erweiterung der in Klasse 10 erarbeiteten Kenntnisse über Winkelfunktionen und eine Wiederholung der im Stoffgebiet 1 der Klasse 12 behandelten Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln der Funktionen sin und cos sowie die Erweiterung der Kenntnisse über das Lösen von einfachen goniometrischen Gleichungen (LE B 12 bis LE B 15). Es ist zu empfehlen, durch tägliche Übungen in vorangehenden Stoffabschnitten die Kenntnisse über Winkelfunktionen anwendungsbereit zu halten.
In diesem Stoffabschnitt haben die Erarbeitung der Ableitungen der Winkelfunktionen, ferner die Ableitung zusammengesetzter und verketteter Funktionen, die Winkelfunktionen enthalten, sowie die Erarbeitung der Integration der Sinus- und Kosinusfunktion zentrale Bedeutung (LE B 16). Um auch hier wieder auf anwendungsbereite Kenntnisse zurückgreifen zu können, sollten die in Klasse 11 erworbenen Differentiationsregeln in den täglichen Übungen während der Behandlung des Stoffgebiets 1 wiederholt werden.
Die neuen Kenntnisse werden bei der Durchführung von Kurvendiskussionen, beim Lösen von Extremwertaufgaben und zu Flächeninhaltsberechnungen von Punktmengen, die durch Graphen von Winkelfunktionen begrenzt werden, angewendet (LE B 17 bis B 19).
Den Schülern sind dabei ihre Kenntnisse über typische Denk- und Arbeitsweisen in der Mathematik und besonders in der Analysis bewußtzumachen. Sie sollen ihr mathematisches Wissen anwenden und selbständig erweitern können. Als grundlegendes Prinzip für die Unterrichtsgestaltung gilt auch in diesem Stoffabschnitt: Nichts soll vom Lehrer vorgeführt

werden, was der Schüler selbst finden kann. Deshalb nehmen selbständige Schülerarbeit, Schülervorträge, kommentierendes Arbeiten und vorbereitende Hausaufgaben einen großen Raum ein. Gerade bei der Wiederholung des umfangreichen Stoffes sollten die Schüler erneut auf die Nutzung von Wissensspeichern und Formelsammlungen orientiert werden.
Fachübergreifende Verbindungen bestehen zur Physik (Schwingungen und Wellen, Extremwertaufgaben). Die im Lehrbuchabschnitt „Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten B 6 bis B 19" aufgeführten Aufgaben sind zur Gestaltung der selbständigen Schülerarbeit im Unterricht mit einzubeziehen.

Lerneinheit 12 (2 Std.)
Wiederholung von Eigenschaften der Winkelfunktionen

LB 170 bis 174

In diesen beiden Wiederholungsstunden werden die Grundkenntnisse der Schüler über Winkelfunktionen, deren Behandlung weit zurückliegt (Klasse 10), in weitgehend selbständiger Arbeit reaktiviert. Dabei sind das Lehrbuch, das Buch „Mathematik in Übersichten" und die Formelsammlung „Tabellen und Formeln" sowohl im Unterricht als auch in häuslicher Arbeit einzusetzen. Im Unterricht werden dann die Kenntnisse schwerpunktmäßig im Unterrichtsgespräch und durch Übungen gefestigt, wobei Inhalt, Aufbau und methodische Gestaltung von dem abhängen, was in der betreffenden Klasse mehr oder weniger intensiv zu reaktivieren ist. Daraus sind dann die Forderungen auch einer gezielten punktuellen Reaktivierung abzuleiten.
Hier besteht auch eine ideale Möglichkeit, langfristige Schüleraufträge schon während der Behandlung des Stoffgebiets 1 oder des Stoffabschnitts 2.2 auf Lerngruppenbasis zu erteilen. Alle Lerngruppen bereiten sich auf die im Wiederholungsplan angegebenen Schwerpunkte (die mit den in den LE B 12 und B 13 angegebenen Schwerpunkten übereinstimmen) vor. Ein Schüler trägt dann seine Ausarbeitung vor; andere Schüler (aus anderen Lerngruppen) ergänzen; der Lehrer stellt vertiefende Zusatzfragen.

Ziele

Die Schüler

- kennen die Definitionen und grundlegende Eigenschaften der Winkelfunktionen,
- können Winkel, die im Gradmaß gegeben sind, im Bogenmaß angeben und umgekehrt,
- können Werte von Winkelfunktionen – auch unter Nutzung von Komplementwinkel- und Quadrantenbeziehungen – zu vorgegebenen Argumenten mit Hilfe des Tafelwerks bzw. des Rechenstabs ermitteln,
- können einfachste goniometrische Gleichungen lösen,
- können die Graphen der Winkelfunktionen skizzieren und die kleinste Periode jeder Winkelfunktion angeben.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung der Behandlung dieses Stoffabschnitts
- Reaktivierung von Grundkenntnissen über Winkelfunktionen
- Übungen zu Umrechnungen von Winkelgrößen aus dem Gradmaß ins Bogenmaß und umgekehrt

2. Stunde

- Reaktivierung der Komplementwinkelbeziehungen und Übungen im Ermitteln von Winkelfunktionswerten für das Intervall $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$
- Reaktivierung der Quadrantenbeziehungen und Übungen im Ermitteln von Winkelfunktionswerten für $x \in \boldsymbol{P}$
- Übungen im Lösen einfachster goniometrischer Gleichungen unter Verwendung der Quadrantenbeziehungen

Methodische Hinweise

Motivierung der Behandlung dieses Stoffabschnitts Von den im Mathematikunterricht bis zur Klasse 10 behandelten Funktionen können inzwischen alle Funktionen von den Schülern differenziert bzw. integriert werden mit Ausnahme der Winkelfunktionen. Daraus könnte der Wunsch nach Untersuchung der Differenzierbarkeit der Winkelfunktionen und nach Kenntnis der Ableitungen bzw. von Stammfunktionen dieser Funktionen als eine innermathematische Motivierung resultieren.
Beispiele für eine außermathematische Motivierung können die Schüler aufgrund ihrer Erfahrungen bei der Behandlung des Lehrgangs Analysis selbst finden:

- eine Extremwertaufgabe, bei der die Zielfunktion eine Winkelfunktion enthält (↗ Aufgaben zur LE B 18),
- eine Kurve, die im Kathodenstrahloszillographen als Veranschaulichung einer elektromagnetischen Schwingung im Physikunterricht sichtbar gemacht wurde.

Aufgrund ihrer Erfahrungen bei der Behandlung der Differential- und Integralrechnung in den Klassen 11 und 12 können die Schüler auch Vorschläge für den einzuschlagenden Weg zur Behandlung der Differentiation und Integration von Winkelfunktionen angeben:

- Wiederholung der Definitionen und von Eigenschaften der Winkelfunktionen;
- Ableitungen der Winkelfunktionen mit Aufsuchen von Stammfunktionen zu Winkelfunktionen;
- Anwendungen der Kenntnisse über Differentiation und Integration von Winkelfunktionen.

Reaktivierung von Grundkenntnissen über Winkelfunktionen Durch die in LE B 11 allen Schülern gestellte vorbereitende Hausaufgabe

> „Wiederholen Sie die Definitionen, Eigenschaften und Graphen der Winkelfunktionen anhand des Wissensspeichers ‚Mathematik in Übersichten' S. 109ff., und bearbeiten Sie den Auftrag B 44 (LB 173)!"

wird abgesichert, daß sich alle Schüler auf das Thema „Winkelfunktionen" einstellen und ihre Kenntnisse wiederholt haben. Es ist vorteilhaft, wenn zwei Schüler die im Auftrag B 44 anzufertigenden Übersichten für die Funktionen cos, tan, cot auf Folien geschrieben haben.

Nun kann ein Schüler die Definitionen der Sinus- und Kosinusfunktionen am Kreis mit dem Radius r und am Einheitskreis erläutern, weitere Schüler können anhand der Folien Eigenschaften der Winkelfunktionen wiederholen. Es muß nicht notwendig der Schüler, der die Folie angefertigt hat, die Erläuterungen geben.
Dabei kristallisieren sich zwei Schwerpunkte zur Vertiefung heraus:

- Die Winkelmessung und Angabe der Winkelgrößen im Gradmaß bzw. im Bogenmaß sowie die Umrechnung der Winkelgrößen aus dem Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt;
- Der Begriff „periodische Funktion",

die zunächst im Unterrichtsgespräch oder durch Bearbeitung der entsprechenden Lehrbuchabschnitte geklärt werden können. Der Umrechnung von Winkelgrößen aus dem Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt ist in einem Übungsteil besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Übungen zu Umrechnungen von Winkelgrößen aus dem Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt Bei der Umrechnung von Winkelgrößen aus dem Gradmaß in das Bogenmaß und umgekehrt sind zunächst solche Winkel zu bevorzugen, die direkt in $a \cdot \pi$ ($a \in R$) angegeben werden können, z. B. ist das Bogenmaß für 30°, 45°, 60°, 15°; 22,5°, 75°, 120° und das Gradmaß für $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{4}{5}\pi, \frac{3}{2}\pi$ im Kopf zu ermitteln.
Dann sollten aber auch Umrechnungen mit Hilfe des Rechenstabs (Proportionaleinstellung) erfolgen, z. B. in einer Tabelle

x (im Gradmaß)	1	57,3	...
x (im Bogenmaß)	0,0175	1	...

Zur Festigung dienen die Aufgaben 1 bis 4 (LB 173).
Als vorbereitende Hausaufgabe sollten die Schüler anhand des Wissensspeichers „Mathematik in Übersichten", Seite 114f., die Komplementwinkelbeziehungen und die Quadrantenbeziehungen wiederholen mit dem Ziel, in der nächsten Stunde in einem Kurzvortrag diese Beziehungen erläutern zu können.

Reaktivierung der Komplementwinkelbeziehungen und Übungen im Ermitteln von Winkelfunktionswerten für das Intervall $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ Aufgrund der vorbereitenden Hausaufgabe erläutert ein Schüler den Auftrag B 42. Dabei sollten die Schüler auch auf die Tafel der speziellen Funktionswerte der Winkelfunktionen im Intervall ⟨0; 90°⟩ (↗ „Tabellen und Formeln", Ausgabe 1973, S. 41) hingewiesen werden.
Für die folgenden Übungen sollte festgelegt werden, ob diese Aufgaben mit Hilfe der Tafel oder mit dem Rechenstab gelöst werden sollen. Hat man sich für die Verwendung des Rechenstabs entschieden, sollten die Schüler auf die Verwendung der ST-Skale zur Ermittlung von Funktionswerten für Winkel von 0,58° bis 5,7° und der T-Skale für Funktionswerte von $\tan x$ für Winkel von 5,7° bis 45° bzw. von $\cot x$ für Winkel von 45° bis 84,3° hingewiesen werden. Es könnte ein Schülervortrag für die LE B 13 vergeben werden, der die Ermittlung der Funktionswerte von $\tan x$ für $45° < x < 90°$ und von $\cot x$ für $0° < x < 45°$ mit Hilfe des Rechenstabs zum Inhalt hat.

In dieser Übung sollten Aufgaben folgender Art gelöst werden:
Ermitteln Sie folgende Funktionswerte mit Hilfe des Rechenstabs!

1. a) sin 36,5° **c)** tan 15°
b) cos 56,4° **d)** cot 78,3°

2. **a)** sin 4,2°
b) cos 88,2°
c) tan 3,7°

3. **a)** sin 0,6
b) cos 1,1
c) tan 0,2
d) cot 0,9

In weiteren Übungen (auch in den folgenden Lerneinheiten) sollten die Schüler Funktionswerte der Winkelfunktionen auch mit Hilfe der Zahlentafel ermitteln.
Es erscheint auch zweckmäßig, die Lösungen einfachster goniometrischer Gleichungen im Intervall $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ von den Schülern ermitteln zu lassen; d. h., zu einem gegebenen Funktionswert das zugehörige Argument im Intervall $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ aufsuchen zu lassen.
Beispiele: a) $\sin x = 0{,}29$, b) $\cos x = 0{,}926$.
Angabe der Winkelgrößen im Bogenmaß.

Reaktivierung der Quadrantenbeziehungen und Übungen im Ermitteln von Winkelfunktionswerten für $x \in P$ Ein weiterer Schüler erläutert aufgrund der vorbereitenden Hausaufgabe (Auftrag B 43) die Quadrantenbeziehungen; in den Ergänzungen sollte unbedingt auf die Übersicht „Quadrantenbeziehungen" im Tafelwerk „Tabellen und Formeln", Ausgabe 1973, S. 41, hingewiesen werden. Die Schüler sollten selbständig eine Auswahl aus den Aufgaben 5 und 6 im Unterricht und den Rest dieser Aufgaben als Hausaufgabe lösen.

Übungen im Lösen einfachster goniometrischer Gleichungen unter Verwendung der Quadrantenbeziehungen Nach der intensiven Beschäftigung mit den Quadrantenbeziehungen im vorangehenden Schwerpunkt sollten die Schüler die umgekehrte Aufgabe, zu gegebenen Funktionswerten die zugehörigen Argumente zu ermitteln, selbständig bearbeiten. Dazu können die Aufgaben 7 und 8 herangezogen werden. Die Lösungen der gegebenen Gleichungen sind unter Berücksichtigung der Periodizität anzugeben. Notfalls können sich die Schüler Hilfe im Beispiel B 22 holen. Es könnte in einer Aufgabe auch einmal der Definitionsbereich eingeschränkt werden.

Kontrollaufgaben

(1) Ermitteln Sie die folgenden Funktionswerte!
a) sin 32,8° **b)** cos 547,3° **c)** sin 2,8 **d)** cos 8,5

(2) Geben Sie alle reellen Zahlen x an, für die gilt:
a) $\sin x = 0{,}8251$, **b)** $\cos x = 1{,}830$ (n. l.),
c) $\tan x = 1{,}806$, **d)** $\cot x = 0{,}2643$!

Lerneinheit 13 **(1 Std.)**
Beziehungen zwischen Winkelfunktionen

LB 174 bis 176

Neben der Reaktivierung einfacher Beziehungen zwischen Winkelfunktionen vertiefen die Schüler ihre Theoriekenntnisse über die Eigenschaften von Winkelfunktionen durch „typische Eigenschaften" der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen.

Ziele

Die Schüler

- kennen weitere Beziehungen zwischen Winkelfunktionswerten bei gleichem Winkel,
- kennen die Additionstheoreme und die Doppelwinkelformeln der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen und können sie in einfachen Fällen zur Umformung von Termen anwenden,
- haben die Charakterisierung der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen durch „typische Eigenschaften" verstanden.

Schwerpunkte

- Reaktivierung der Sätze
  (1) Für alle reellen x gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
  (2) Für alle reellen x mit $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in G$, gilt: $\tan x \cdot \cot x = 1$.
- Reaktivierung der Additionstheoreme und Charakterisierung der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen durch typische Eigenschaften
- Anwendung der Beziehungen zwischen Winkelfunktionen zu Termumformungen

Methodische Hinweise

Reaktivierung der Sätze (1) und (2) Sofern in der Lerneinheit B 12 ein Schülervortrag zum Thema „Die Ermittlung von Funktionswerten von $\tan x$ für $45° < x < 90°$ und $\cot x$ für $0° < x < 45°$ mit Hilfe des Rechenstabs" vergeben wurde, sollte der vortragende Schüler die Stunde mit seinen Ausführungen einleiten.
Die Schüler reaktivieren die Sätze (1) und (2) am zweckmäßigsten durch Bearbeitung der Aufträge B 45 und B 46. Sie sollten hier auf die spätere Anwendung dieser Sätze beim Lösen von goniometrischen Gleichungen hingewiesen werden.

Reaktivierung der Additionstheoreme und Charakterisierung der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen durch typische Eigenschaften Die Schüler können einige Additionstheoreme der Winkelfunktionen durch Lösen der Aufgaben 1a und b reaktivieren; sie nutzen dabei die entsprechende Übersicht in „Tabellen und Formeln", Ausgabe 1973, S. 41.
Die Additionstheoreme $\sin(x_1 - x_2)$ bzw. $\cos(x_1 - x_2)$ erhalten für die Schüler dadurch eine grundlegende Bedeutung, daß sie typische Eigenschaften für die Sinus- bzw. Kosinusfunktionen sind: Zu dieser Erkenntnis können die Schüler durch Studium des Abschnitts LB 175 gelangen. Vor allem sollen sie anschließend den Auftrag B 47 (unter Anleitung) und die Aufgaben 3 und 4 (selbständig, z. T. als Hausaufgabe) bearbeiten.

Anwendung der Beziehungen zwischen Winkelfunktionen zu Termumformungen Eine zweckmäßige Vorbereitung auf das spätere Lösen goniometrischer Gleichungen bieten in diesem Zusammenhang Termumformungen (Aufgabe 5) und Beweisaufgaben (Aufgaben 6 bis 8). Es könnte je eine Aufgabe im Unterrichtsgespräch gelöst werden; weitere Aufgaben könnten die Schüler in Analogie zum Beispiel B 23, z. T. als Hausaufgabe, bearbeiten.

In einer vorbereitenden Hausaufgabe für die folgende Stunde sollen die Schüler den Graph der Funktion $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{1}{2} x$ zeichnen und den Einfluß der Konstanten a und b in $f(x) = a \cdot \sin bx$ klären.

Kontrollaufgaben

LB 204: Nr. 30a, b

Lerneinheit 14 (2 Std.)
Die Funktionen $f(x) = a \cdot \sin (bx + c)$ und $f(x) = a \cdot \cos (bx + c)$

LB 176 bis 181

Die Schüler erweitern ihre in Klasse 10 erworbenen Kenntnisse über das Skizzieren der Graphen der Sinus- bzw. Kosinusfunktionen schrittweise für den Fall $a, b \in P$, $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Ziele

Die Schüler

- kennen den Einfluß der Konstanten a und b ($a, b \in P$ und $a > 0$, $b > 0$) auf den Verlauf von Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin bx$ und können die Graphen dieser Funktionen skizzieren,
- kennen den Einfluß der Konstanten a und b ($a, b \in P$ und $a \neq 0$) auf den Verlauf von Funktionen $f(x) = a \cdot \sin bx$ und $f(x) = a \cdot \cos bx$ und können die Graphen dieser Funktionen skizzieren,
- kennen den Einfluß der Konstanten c mit $c \in P$ und $c \neq 0$ auf den Verlauf von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen und können die Graphen der Funktionen
  $f(x) = \sin (x + c)$ bzw. $f(x) = \cos (x + c)$
  $f(x) = a \cdot \sin (bx + c)$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos (bx + c)$
  skizzieren.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Motivierung des Skizzierens von Graphen der Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin (bx + c)$ durch Sichtbarmachung einer elektromagnetischen Schwingung im Katodenstrahloszillographen

– Wiederholung der Kenntnisse über den Einfluß der Konstanten a, b ($a, b \in P, a > 0, b > 0$) auf den Verlauf von Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin bx$
– Erarbeitung des Einflusses der Konstanten $a, b \in P$ ($a \neq 0, b \neq 0$) auf den Verlauf der Funktionen mit der Gleichung

$f(x) = a \cdot \sin bx$

bzw.

$f(x) = a \cdot \cos bx$

– Übungen im Skizzieren der Graphen der Funktionen

$f(x) = a \cdot \sin bx$

bzw.

$f(x) = a \cdot \cos bx$

mit $a, b \in P$ und $a \neq 0; b \neq 0$

2. Stunde

– Erarbeitung des Einflusses der Konstanten c mit $c \in P$ und $c \neq 0$ auf den Verlauf der Funktionen mit der Gleichung $f(x) = \sin(bx + c)$ bzw. $f(x) = \cos(bx + c)$

Methodische Hinweise

Motivierung des Skizzierens von Graphen der Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ Die Schüler haben im Physikunterricht der Klasse 10, Stoffgebiet „2. Schwingungen“, den Einfluß der Konstanten a einer periodischen Funktion auf die Amplitude und den Einfluß der Konstanten b auf die Frequenz einer Schwingung kennengelernt. Sie kennen den Verlauf einer elektromagnetischen Schwingung vom Bild eines Katodenstrahloszillographen her. Möglicherweise kann dieser Versuch im Mathematikunterricht noch einmal (eventuell von einem Schüler) wiederholt werden (Veränderung der Amplitude bzw. der Frequenz). Damit werden auch Voraussetzungen für eine mathematische Beschreibung solcher Schwingungen erarbeitet, bei denen eine Phasenverschiebung auftritt.

Wiederholung der Kenntnisse über den Einfluß der Konstanten a, b($a, b \in P, a > 0, b > 0$) auf den Verlauf der Funktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin bx$ Da die Schüler in der vorbereitenden Hausaufgabe den Graph der Funktion $f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}x$ gezeichnet haben, können sie auch den Einfluß der Konstanten a, b auf den Verlauf der Funktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin bx$ erläutern. Dazu kann auch eine vom Lehrer selbst angefertigte Folie (↗ Bild 87, UH 182) dienen. Im oberen Teil dieser Folie ist der Einfluß der Konstanten a bzw. b auf die Gestalt der Graphen der Sinusfunktionen dargestellt. Am Beispiel der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin 2x$ sind die einzelnen nacheinander auszuführenden Schritte erläutert.

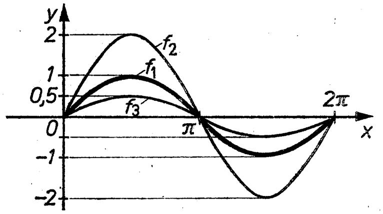
Erarbeitung des Einflusses der Konstanten a, b($a, b \in P, a \neq 0, b \neq 0$) auf den Verlauf der Funktionen mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin bx$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos bx$ Die Schüler kennen aus der Klasse 9 den Einfluß der Konstanten a mit $a < 0$ von den Untersuchungen der quadratischen Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2$. Sie wissen, daß in diesem Falle außer der Dehnung noch eine Spiegelung der Graphen der Funktion an der x-Achse erfolgt.
Den Einfluß der Konstanten b mit $b < 0$ auf den Verlauf der Sinusfunktion sollen die Schüler selbst erkennen. Sie skizzieren dazu die Graphen der Funktionen $f_1(x) = \sin 2x$ (ohne Anfertigung einer Wertetabelle) und $f_2(x) = \sin(-2x)$ (nach Anfertigung einer Wertetabelle) in unterschiedlicher Farbe. Sie erkennen in Analogie zum Einfluß der Konstanten a, daß

Die Graphen der Funktionen $f(x) = a \cdot \sin bx$

$f(x) = a \cdot \sin x$

a bewirkt eine Dehnung in Richtung der y-Achse:

$|a| > 1$: Streckung
$0 < |a| < 1$: Stauchung

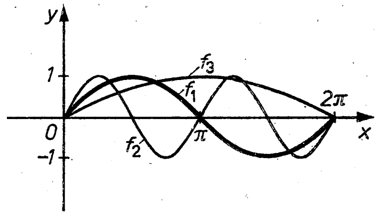


$f_1(x) = \sin x$; $f_2(x) = 2\sin x$; $f_3(x) = \frac{1}{2}\sin x$

$f(x) = \sin bx$

b bewirkt eine Dehnung in Richtung der x-Achse:

$|b| > 1$: Stauchung
$0 < |b| < 1$: Streckung

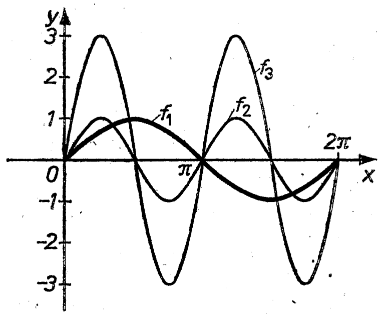


$f_1(x) = \sin x$; $f_2(x) = \sin 2x$; $f_3(x) = \sin \frac{1}{2}x$

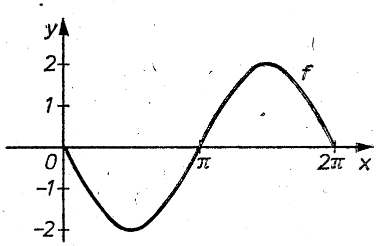
kleinste Periode : $p = \frac{2\pi}{|b|}$

Beispiel : $f(x) = 3 \sin 2x$

Schritte :
$f_1(x) = \sin x$
$f_2(x) = \sin 2x$
$f_3(x) = 3 \sin 2x$

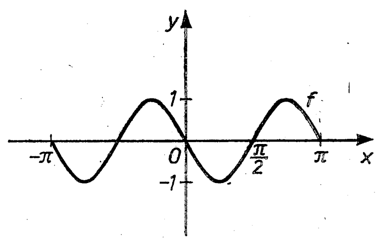


$a<0$: Spiegelung des Graphen der Funktion $g(x) = 2\sin x$ an der x-Achse



$f(x) = -2\sin x$

$b<0$: Spiegelung des Graphen der Funktion $g(x) = \sin 2x$ an der y-Achse



$f(x) = \sin(-2x)$

Bild 87

außer der Dehnung noch eine Spiegelung des Graphen der Sinusfunktion an der y-Achse erfolgt. Nun kann der untere Teil der Folie (↗ Bild 87) ergänzt werden.
Diese Erkenntnisse können nun sofort auf den Verlauf der Kosinusfunktion übertragen werden. (In Klasse 10 wurde der Einfluß der Konstanten a, b mit $a > 0$, $b > 0$ nur am Beispiel der Sinusfunktion untersucht.)

Übungen im Skizzieren der Graphen der Funktionen $f(x) = a \sin bx$ bzw. $f(x) = a \cos bx$ mit $a, b \in P$ und $a \neq 0$, $b \neq 0$ Die Schüler können ihre neuen Kenntnisse beim Skizzieren der Graphen folgender Funktionen in selbständiger Arbeit (z. T. als Hausaufgabe) anwenden:

a) $f(x) = -2 \cdot \sin \frac{1}{3} x$, **b)** $f(x) = -\frac{3}{2} \cdot \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$,

c) $f(x) = 0{,}6 \cdot \cos 2x$, **d)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(-\frac{x}{3}\right)$.

Dabei sollen sie lernen, den Graph einer Sinusfunktion bzw. Kosinusfunktion freihändig zu skizzieren.

Erarbeitung des Einflusses der Konstanten c mit $c \in P$ und $c \neq 0$ auf den Verlauf der Funktionen mit der Gleichung $f(x) = \sin(x + c)$ bzw. $f(x) = \cos(x + c)$ Auch hier sollte auf die in Klasse 9 erworbenen Kenntnisse der Schüler über den Einfluß einer additiven Konstanten im Argument einer quadratischen Funktion $f(x) = (x + d)^2$ zurückgegriffen werden. In Analogie dazu gelangen die Schüler zu der auf Seite LB 177 formulierten Erkenntnis, die in einem Folienbild (↗ Bild 88) (Ergänzung des Bildes 87) festgehalten wird. Die Schüler können diese Feststellung im Auftrag B 50 bestätigen und selbständig die Graphen folgender Funktionen skizzieren:

a) $f(x) = 3 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, **b)** $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

c) $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 1)$, **d)** $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 1)$.

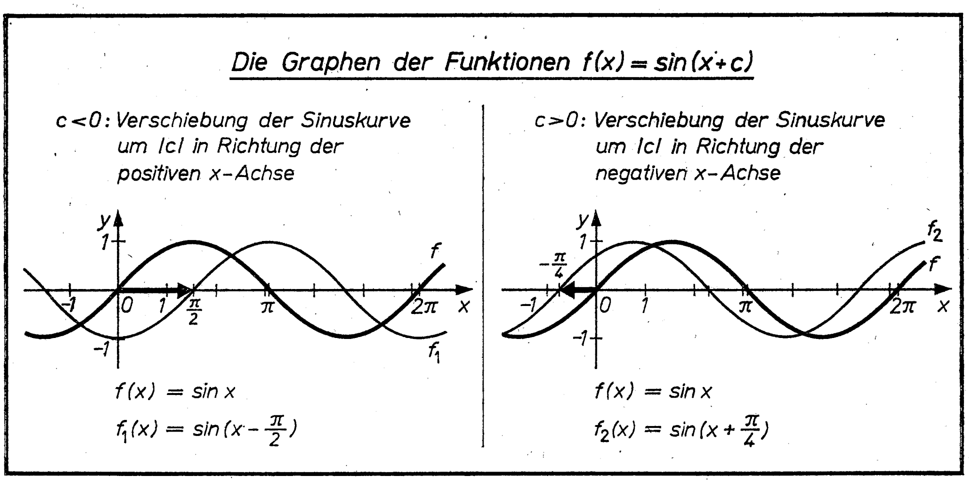


Bild 88

Dabei sollten sie den Term sin $(bx + c)$ zuerst in sin $\left[b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right]$ umformen und die Reihenfolge der Hilfsfunktionen, wie in der Übersicht auf Seite LB 178 angegeben, einhalten.
Die Schüler sollten zu der Einsicht gelangen, daß das Skizzieren der Graphen von Winkelfunktionen bei der weiteren Arbeit (Kurvendiskussion) dringend benötigt wird.
Die Schüler beschäftigen sich dann mit der Frage, welche Veränderungen der kleinsten Periode der Funktionen

$f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ und

$f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$

durch die Konstanten a, b, c bewirkt werden (SSA: LB 178). In Anlehnung an das Beispiel B 24 lösen die Schüler als Hausaufgabe eine Auswahl aus den Aufgaben LB 181, Nr. 1 bis 3. (Bei den Aufgaben 1 c, 2 b und 2 c ist eine Verschiebung der Graphen in Richtung der y-Achse zu beachten.)

Kontrollaufgaben
(1) LB 204: Nr. 31 a, c; (2) LB 181: Nr. 3

Lerneinheit 15 (3 Std.)
Das Lösen goniometrischer Gleichungen
LB 181 bis 185

Für das Lösen von goniometrischen Gleichungen wird eine gesonderte Lerneinheit vorgeschlagen, um eine Häufung von Schwierigkeiten beim späteren Ermitteln der Nullstellen bzw. der Schnittpunktskoordinaten der Graphen von Winkelfunktionen im Zusammenhang mit Kurvendiskussionen zu vermeiden. Den Schülern ist in dieser Lerneinheit als Grundorientierung das Rückführprinzip bewußtzumachen, wie es auf Seite LB 184 als ein Programm heuristischer Art enthalten ist. Dabei festigen die Schüler die in den vorangegangenen Stunden wiederholten Kenntnisse über Winkelfunktionen. Auch in dieser Lerneinheit sind die Schüler weiter daran zu gewöhnen, die von ihnen eingeschlagenen Lösungswege zu erläutern und zu begründen sowie die eigenen Rechnungen zu kontrollieren und die Ergebnisse (durch eine Probe) zu überprüfen.
Die Übungen zur Fertigkeitsentwicklung sollten methodisch abwechslungsreich gestaltet werden, bei der Diskussion der Lösungswege sollten einige „elegante" hervorgehoben werden.
In dieser Lerneinheit kann noch keine abschließende Fertigkeitsentwicklung erreicht werden.

Ziele

Die Schüler
- kennen die in Klasse 11 erarbeiteten Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen und können Gleichungen dieses Typs lösen,

- können Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen beim Lösen goniometrischer Gleichungen anwenden,
- haben erste Fertigkeiten im Lösen goniometrischer Gleichungen der vorgegebenen Typen erworben.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Reaktivierung des Lösens quadratischer Gleichungen und von Sonderformen von Gleichungen höheren Grades; Bereitstellung derjenigen Beziehungen zwischen Winkelfunktionen, die als Rückführungsmittel Bedeutung haben
- Erarbeitung einer Lösungsstrategie für goniometrische Gleichungen
- Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion

2. Stunde

- Übungen im Lösen goniometrischer Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen desselben Arguments

3. Stunde

- Übungen im Lösen goniometrischer Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen verschiedenen Arguments

Methodische Hinweise

Reaktivierung und Bereitstellung Nachdem den Schülern kurz die Notwendigkeit für das Lösen goniometrischer Gleichungen mit der Nullstellenproblematik bei Kurvendiskussionen bzw. Extremwertaufgaben begründet worden ist, wird zunächst das erforderliche Wissen und Können bereitgestellt. In einer täglichen Übung lösen die Schüler Gleichungen der folgenden Typen:

$x^2 + px + q = 0, \quad ax^3 + bx^2 + cx = 0, \quad x^4 + cx^2 + d = 0,$

$\sin x + d = 0$ bzw. $\cos x + d = 0$ mit $|d| \leqq 1$

sowie wahlweise Aufgaben der Gruppen 1 und 2 (LB 185).
Im Unterrichtsgespräch sollten die zur Umformung goniometrischer Gleichungen benötigten Beziehungen zwischen Winkelfunktionen bereitgestellt werden (z. B.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x \cdot \cot x = 1,$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1).$$

Hinweis auf das Tafelwerk „Tabellen und Formeln“, Ausgabe 1973, S. 41

Erarbeitung einer Lösungsstrategie für goniometrische Gleichungen Nachdem eine Aufgabe vom Typ 1 (Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion, ↗ ■ B 25) im Unterrichtsgespräch gelöst wurde, wird den Schülern eine Auswahl aus den Aufgaben 1, 2, 3a und 4a (LB 185)

zur selbständigen Bearbeitung aufgetragen. Bei den folgenden Aufgaben (gleiche Winkelfunktion, aber verschiedene Argumente bzw. quadratische Gleichungen in $\sin x$ ohne Absolutglied) können die Schüler die Rückführungsmittel selbst finden:
Nr. 3d (Doppelwinkelformel),
Nr. 4b (Ausklammern von $\sin x$).
An der Aufgabe des Beispiels B 26 sollte ein Teil des Programms heuristischer Art zur Lösung goniometrischer Gleichungen (LB 184) im Unterrichtsgespräch erarbeitet werden.

Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion Zur selbständigen Arbeit der Schüler oder zur Arbeit in Schülergruppen eignen sich die Aufgaben 4d ($\cos 4x$ durch $\cos 2 \cdot 2x$ darstellen und $2x = \varphi$ setzen) sowie 6b (quadratische Gleichung in $\sin x$) (z. T. als Hausaufgabe). Dabei sollten die Schüler auf die Beachtung der Aufgabenstellung hingewiesen werden.

Sind alle reellen Lösungen der angegebenen Gleichung oder alle Lösungen in einem Intervall, z. B. $\langle 0°; 360° \rangle$, gesucht?

Nach der Aufgabenstellung richtet sich dann auch die Entscheidung, ob die Lösungen im Gradmaß oder im Bogenmaß angegeben werden.
Bei den Beispielen im Lehrbuch wurde eine Überprüfung der Lösungen nicht durchgeführt, weil im Fall von Näherungswerten ein großer Rechenaufwand bei mitunter geringem Nutzen erforderlich wird. Das sollte den Schülern mitgeteilt werden, damit nicht der Eindruck entsteht, das Prinzip der Überprüfung der Lösungen werde vernachlässigt. An dieser Stelle sollte dann um so mehr das sorgfältige Durchdenken und Überprüfen jeder Umformung verlangt werden.

Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen desselbenArguments Am Anfang dieses Schwerpunkts können die Schüler an einfachen Aufgaben das Rückführprinzip selbständig realisieren (für leistungsstarke Schüler sollten Zusatzaufgaben bereitgehalten werden). Es könnten folgende Aufgaben gestellt werden:
Nr. 3b (Ausklammern von $\sin x$),
Nr. 3c und 4c $\left(\tan \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}\right)$.
In der Aufgabe 4c könnte auch $\cos^2 \varphi$ durch $1 - \sin^2 \varphi$ ersetzt werden. Dadurch kann den Schülern verdeutlicht werden, daß die Umformung beim Lösen einer goniometrischen Gleichung nicht eindeutig festgelegt ist.
Nr. 3e und 4e (Ein Produkt zweier Faktoren ist Null)
In einer kommentierenden Bearbeitung der Aufgabe des Beispiels B 27 oder des Auftrags B 52 durch einen Schüler kann das heuristische Programm (LB 184) erneut verdeutlicht werden. Als Zusatzaufgabe könnte der Auftrag B 51 gestellt werden.
Als weitere Aufgaben zur Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen vom Typ 2 dienen die Aufgaben 5b, 5c und 6c, die z. T. als Hausaufgabe gestellt werden können.
An der Aufgabe 5b kann den Schülern der Vorteil einer geschickten Umformung durch Gegenüberstellung zweier Lösungswege verdeutlicht werden:

I. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung

$\sin x \cdot \cos x = 0{,}25$ mit 2, so erhält man

$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0{,}5$. Da

$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ ist, gilt

$$\sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Aus dieser Gleichung können die Lösungen leicht ermittelt werden.

II. Quadriert man die Gleichung $\sin x \cdot \cos x = 0{,}25$ so erhält man

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{16}$$

und mit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{16}$$

bzw.

$$\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{16} = 0.$$

Zur Lösung dieser Gleichung ist ein großer Aufwand erforderlich. Überdies ist diese Gleichung (wegen des Quadrierens) zu der gegebenen Gleichung nicht äquivalent. Durch eine Probe müssen diejenigen Lösungen der letzten Gleichung ausgeschieden werden, die die gegebene Gleichung nicht erfüllen.

Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen mit zwei Winkelfunktionen verschiedenen Arguments Vor dem Lösen goniometrischer Aufgaben vom Typ 3 sollten anhand des heuristischen Programms die Lösungsschritte zusammengetragen werden, die erforderlich sind, die gegebene Gleichung in die einfachste Form zu überführen, aus der das Argument mit Hilfe der Funktionswertetafel bzw. des Rechenstabs zu ermitteln ist. Unter Berücksichtigung der Periodizität erhält man die Lösungen der gegebenen Gleichung. Es ist zweckmäßig, die Aufgabe des Beispiels B 28 im Unterrichtsgespräch oder durch kommentierendes Arbeiten zu lösen und die einzelnen Schritte begründen zu lassen.
Zur selbständigen Bearbeitung durch die Schüler (auch z. T. als Hausaufgabe) dienen der Auftrag B 53 sowie die Aufgaben 5a und 6a. Darüber hinaus sollten auch Aufgaben der Typen 1 und 2, die in den vorangegangenen Stunden noch nicht bearbeitet wurden, gelöst werden. Zur Festigung des Lösens goniometrischer Gleichungen stehen weitere Aufgaben zur Verfügung: LB 204, Nr. 32, 33, 34 (differenzierte Hausaufgabenstellung möglich).
Auf die kurzgefaßte Zusammenfassung zum Lösen goniometrischer Gleichungen (LB 200) sollten die Schüler hingewiesen werden.
Als vorbereitende Hausaufgabe sollten die Schüler die Schrittfolge bei der Untersuchung einer Funktion auf Differenzierbarkeit wiederholen (↗ Lehrbuch, Klasse 11, Zusammenstellung auf Seite 145).

Kontrollaufgaben

LB 204: Nr. 33b und c, 34a

Lerneinheit 16 (3 Std.)
Differentiation und Integration der Winkelfunktionen
LB 185 bis 190

In den nun folgenden Lerneinheiten B 16 bis B 19 lernen die Schüler im Rahmen ihrer Schulausbildung die Differentiation und Integration der letzten zu behandelnden Klasse von Funktionen kennen, und sie wenden anschließend ihr neu erworbenes Wissen auf Kurvendiskussionen, Extremwertprobleme und Flächeninhaltsberechnungen an.

In diesen Lerneinheiten wird gleichzeitig grundlegendes Wissen und Können der Differentialrechnung und Integralrechnung gefestigt, wobei zentrale Begriffsbildungen und grundlegende Verfahren (z. B. beim Ermitteln einer Gleichung der Tangente an den Graph einer Funktion, Flächeninhaltsberechnungen) vor allem in den Übungen angewendet werden.
Die Empfehlungen in den Unterrichtshilfen folgen der Linie, die im Lehrbuch für die Behandlung der Differentiation und Integration der Winkelfunktionen vorgezeichnet wurde. Daneben könnte eine zweite *Variante der Stoffanordnung* darin bestehen, daß die 3. Stunde der LE B 16 (Integration der Sinus- und Kosinusfunktion) unmittelbar vor der LE B 19 eingeschoben wird. Das hätte den Vorteil, daß in der LE B 19 ohne weitere Wiederholung das unbestimmte Integral der Sinus- bzw. Kosinusfunktion zur Flächenberechnung zur Verfügung steht. Als Nachteil müßte in Betracht gezogen werden, daß ein auffälliger Zusammenhang der Ableitung und der Stammfunktionen zu den Funktionen sin und cos nicht genutzt würde.

Ziele

Die Schüler

- wissen, wie die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion hergeleitet wird und kennen die Grenzwerte
  $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ und $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$,
- kennen die Ableitungen der einzelnen Winkelfunktionen und können die Differenzierbarkeit der Funktionen cos, tan, cot beweisen,
- können Winkelfunktionen sowie zusammengesetzte und verkettete Funktionen, die Winkelfunktionen enthalten, differenzieren,
- können Stammfunktionen zu Sinus- bzw. Kosinusfunktionen ermitteln und bestimmte Integrale berechnen.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Erarbeitung der Ableitung der Sinusfunktion
- Festigung durch formale Aufgaben zur Differentiation der Sinusfunktion und durch Aufgaben zum Ermitteln einer Tangentengleichung an den Graph einer Sinusfunktion

2. Stunde

- Erarbeitung der Differenzierbarkeit der Funktionen cos, tan, cot
- Übung durch formale Aufgaben zur Differentiation der Funktionen cos, tan, cot sowie zusammengesetzter und verketteter Funktionen der Winkelfunktionen
- Anwendung der Differentialrechnung zum Ermitteln von Tangentengleichungen an Graphen von Winkelfunktionen und zur Untersuchung des Monotonieverhaltens von Winkelfunktionen

3. Stunde

- Erarbeitung des Aufsuchens von Stammfunktionen zu Sinus- bzw. Kosinusfunktionen
- Übung durch formale Aufgaben zum Ermitteln von Stammfunktionen und zur Berechnung bestimmter Integrale, deren Integrand eine Sinus- bzw. Kosinusfunktion ist.

Methodische Hinweise

Erarbeitung der Ableitung der Sinusfunktion Nach der ausführlichen Wiederholung, Vertiefung und Erweiterung der Kenntnisse der Schüler über Winkelfunktionen in den LE B 12 bis B 15 und nach Bereitstellung von grundlegenden Begriffen und Verfahren durch den folgenden Auftrag

Wiederholen Sie die Begriffe
„f ist differenzierbar an der Stelle x_0" und
„f ist eine differenzierbare Funktion"!

bzw. in der Schrittfolge bei der Untersuchung einer Funktion auf Differenzierbarkeit in der vorbereitenden Hausaufgabe könnten sich im Rahmen von täglichen Übungen einige Aufgaben zur Differentiation von rationalen, Wurzel-, Logarithmus- und Exponentialfunktionen anschließen.
Innerhalb dieser vorbereitenden Übung kann auch der Auftrag B 54 gestellt werden.
Nach der Zielangabe (Untersuchung der Differenzierbarkeit der Sinusfunktion) können die Schüler aufgrund der wiederholten Schrittfolge den Differenzenquotienten von $f(x) = \sin x$ an der Stelle x_0 selbst bilden. Unter Hinweis auf die Aufgabe c im Auftrag B 54 können sie auch den Differenzenquotienten weitgehend selbständig umformen.[1] Das Ermitteln des Grenzwertes für $h \to 0$ könnte je nach der Klassensituation entweder im Unterrichtsgespräch oder durch selbständige Bearbeitung des Lehrbuchabschnitts auf Seite LB 186 erfolgen. Dabei sollten die erforderlichen Berechnungen im Auftrag B 55 in Arbeitsteilung von Schülergruppen ausgeführt werden. Auf die Notwendigkeit der Beweisführung für die mitgeteilten Grenzwerte sind die Schüler ausdrücklich hinzuweisen. (Interessierten Schülern könnte zu $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$ empfohlen werden: „Wissensspeicher Mathematik", Seiten 71/72.)

Festigung durch formale Aufgaben zur Differentiation der Sinusfunktion und durch Aufgaben zum Ermitteln einer Tangentengleichung an den Graph der Sinusfunktion Die erarbeitete Regel für die Differentiation der Sinusfunktion ist sofort an einigen formalen Aufgaben zu festigen, wobei die Regeln für die Differentiation einer Summe, eines Produkts, eines Quotienten von differenzierbaren Funktionen und der Kettenregel für die Differentiation verketteter Funktionen zur Anwendung gelangen [SSA (zum Teil mündlich): ■ B 29 (LB 187), ● B 56 und einige Aufgaben der Nummern 1 und 2 (LB 189f.)].
Für die weitere Festigung (zum Teil als Hausaufgabe) sind vorgesehen:
- die Bearbeitung der Aufgaben 3 und 4 (Ermittlung von Argumenten, für die bestimmte Bedingungen gelten),

[1] Bei der im Lehrbuch vorgeführten Umformung des Differenzenquotienten wird das den Schülern bekannte Additionstheorem für $\sin(\alpha + \beta)$ verwendet. In der Literatur findet man häufig auch die Anwendung der goniometrischen Beziehung für $\sin \alpha - \sin \beta$.

– die Ermittlung einer Gleichung für die Tangente an den Graph einer Sinusfunktion (Beispiel B 30 sowie die Aufgaben 5 und 6).
Hier könnte einem leistungsstarken Schüler das Thema für einen Schülervortrag in der 2. Stunde dieser Lerneinheit gestellt werden: „Beweis, daß die Ableitung einer differenzierbaren periodischen Funktion wieder eine periodische Funktion ist“ (LB 205: Nr. 37*).

Erarbeitung der Differenzierbarkeit der Funktionen cos, tan, cot Die Schüler bringen Vorschläge für die Differentiation der Kosinusfunktion.
Im Unterrichtsgespräch könnten die Vorschläge der Schüler diskutiert werden: Es wäre möglich, auf zur Herleitung der Ableitung der Sinusfunktion analogem Weg zur Ableitung der Kosinusfunktion zu gelangen. Aber unter Nutzung der Komplementwinkelbeziehung $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ist die Ableitung der Kosinusfunktion sehr „bequem“ zu erhalten (Rückführprinzip verdeutlichen!). Die Schüler führen diesen Plan aus.
Unter dem Gesichtspunkt einer abwechslungsreichen methodischen Gestaltung des Unterrichts können die Schüler den Auftrag B 57 bearbeiten, um die Ableitungen der Funktionen tan bzw. cot zu erhalten.

Nun vervollständigen die Schüler ihre aus der Klasse 11 stammende und im Stoffabschnitt 2.2 bei der Differentiation und Integration der Logarithmus- und Exponentialfunktionen der Klasse 12 ergänzte Zusammenstellung der Differentiationsregeln durch Aufnahme der Ableitungen der Winkelfunktionen. Die Schüler suchen auch die Ableitungen der Winkelfunktionen im Tafelwerk „Tabellen und Formeln“, Ausgabe 1973, S. 45, auf.

Übung durch formale Aufgaben zur Differentiation der Funktionen cos, tan, cot sowie zusammengesetzter und verketteter Funktionen der Winkelfunktionen Die Schüler lösen die in den Beispielen B 31 und 32 (2. Ableitung) gegebenen Aufgaben selbständig ohne Benutzung des Lehrbuchs (Kontrollmöglichkeit!). Zur weiteren Übung (auch als Hausaufgaben) dienen LB 190: Nr. 9 und 10 sowie 7 und 8; ferner LB 204f.: Nr. 35 und 36.

Anwendung der Differentialrechnung zum Ermitteln von Tangentengleichungen an Graphen von Winkelfunktionen und zur Untersuchung des Monotonieverhaltens von Winkelfunktionen Die Schüler können selbständig eine Gleichung der Tangente an den Graph von Winkelfunktionen in einem gegebenen Punkt (Aufgaben 11 und 12) ermitteln.
Durch Bearbeitung des Beispiels B 33 im Unterrichtsgespräch oder durch einen Schülervortrag werden die Schüler veranlaßt, einen Zusammenhang zwischen der Monotonie einer Funktion in einem Intervall und der Ableitung dieser Funktion in diesem Intervall zu reaktivieren (Lehrbuch, Klasse 11, Seite 195, Satz C 9). Zur Begründung dieses Satzes könnte der Mittelwertsatz der Differentialrechnung herangezogen werden (Festigung der Grundlagen der Differentialrechnung).

Erarbeitung des Aufsuchens von Stammfunktionen zu Sinus- bzw. Kosinusfunktionen Die Schüler können die Problematik der Umkehrung der Differentiation der Winkelfunktionen selbständig formulieren. Sie bearbeiten den Auftrag B 58 und formulieren bei der Ermittlung von Stammfunktionen der Sinusfunktion:

Die Funktion F mit $F'(x) = -\cos x$ ist eine Stammfunktion von f, gegeben durch $f(x) = \sin x$, weil $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$ ist.

Sie suchen die Grundintegrale $\int \sin x \, dx$ bzw. $\int \cos x \, dx$ im Tafelwerk „Tabellen und Formeln“, Ausgabe 1973, S. 46, auf. Dabei ist die Schülerfrage nach $\int \tan x \, dx$ bzw. $\int \cot x \, dx$ zu erwarten. Die Schüler sollten dann erfahren, daß diese unbestimmten Integrale keine „Grundintegrale“ sind und durch geeignete Substitution berechnet werden können. Es wäre auch möglich, den Schülern die Ergebnisse der Integration zu geben und durch Differenzieren die Richtigkeit bestätigen zu lassen.

Übungen durch formale Aufgaben zum Ermitteln von Stammfunktionen zu Sinus- bzw. Kosinusfunktionen und zur Berechnung bestimmter Integrale, deren Integrand eine Sinus- bzw. Kosinusfunktion ist Die Schüler lösen die Aufgaben 13 und 14 (LB 190) selbständig und begründen die Richtigkeit ihres Ergebnisses durch Differenzieren. Nach der Wiederholung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung berechnen die Schüler mit den Aufgaben 15 und 16 bestimmte Integrale.
Wenn noch Zeit vorhanden ist, können die im Beispiel B 34 gestellten Aufgaben (bestimmtes Integral zur Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen) den Schülern zur selbständigen Bearbeitung gegeben werden als Vorbereitung der in der Lerneinheit B 19 zu behandelnden Flächeninhaltsberechnungen. Darüber hinaus stehen mit Nr. 38 bis 41 (LB 205) weitere formale Aufgaben zur Übung zur Verfügung.

In einer vorbereitenden Hausaufgabe könnten die Schüler die Schrittfolge für die Durchführung von Kurvendiskussionen für die nächste Stunde bereitstellen.

Kontrollaufgaben

(1) LB 204f.: Nr. 36d, f und 35g (Differenzieren von Winkelfunktionen)
(2) LB 190: Nr. 5a (Ermitteln von Tangentengleichungen)
(3) LB 205: Nr. 40b (Berechnen bestimmter Integrale)

Lerneinheit 17 **(3 Std.)**
Kurvendiskussionen

LB 191 bis 194

Die Schüler wenden ihre Kenntnisse über die Differentiation (↗ LE B 16) und das Skizzieren (↗ LE B 14) von Winkelfunktionen bei Kurvendiskussionen an und gewinnen dabei weitere Fähigkeiten. Der Prozeß der Entwicklung von Fertigkeiten im Lösen goniometrischer Gleichungen wird weitergeführt.

Ziele

Die Schüler
- können typische Aufgaben zu Kurvendiskussionen für Winkelfunktionen weitgehend selbständig lösen und die Lösungswege in einer übersichtlichen Niederschrift darstellen,
- können goniometrische Gleichungen, die im Zusammenhang mit Kurvendiskussionen auftreten, lösen.

Schwerpunkte

Für alle drei Stunden

- Festigung der Vorgehensweise bei Kurvendiskussionen
- Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen

1. Stunde

- Übungen zu Kurvendiskussionen für Funktionen, die nur eine Winkelfunktion enthalten (■ B 35)

2. Stunde

- Übung zu Kurvendiskussionen für Winkelfunktionen verschiedener Argumente (■ B 36)

3. Stunde

- Übung zu Kurvendiskussionen für zusammengesetzte Funktionen, die Winkelfunktionen enthalten (■ B 37)

Methodische Hinweise

Festigung der Vorgehensweise bei Kurvendiskussionen Aufgrund der vorbereitenden Hausaufgabe sind die Schüler in der Lage, die einzelnen Schritte, die bei der Durchführung einer Kurvendiskussion zu gehen sind, zu erläutern, zu begründen und auf Winkelfunktionen zu übertragen.
Dabei sollte auf eine mathematisch einwandfreie, übersichtlich gegliederte und saubere Anlage des Lösungsweges und auf die Anfertigung sauberer Skizzen, evtl. durch Berechnung zusätzlicher Funktionswerte, geachtet werden (z. B. Anfertigung einer „Musterlösung" in Beispiel B 36).
Weiterhin sollte darauf geachtet werden, daß die Schüler konzentriert, sicher und zügig arbeiten und sich auch hier bemühen, elementare Fehler beim Rechnen mit Zahlen, beim Lösen von Gleichungen und beim Anwenden der Differentiationsregeln zu vermeiden. Sie sollten das Bedürfnis haben und dazu auch fähig sein, ihre Lösungswege und Ergebnisse zu kontrollieren. Selbst wenn nicht ausdrücklich in der Aufgabenstellung verlangt worden ist, das Extremum nachzuweisen, müssen die Schüler daran gewöhnt sein.
Im Unterricht sind Möglichkeiten zu schaffen, um über Lösungswege zu diskutieren, diese Lösungswege zu kommentieren und zu begründen.

Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen Die in der Lerneinheit B 15 begonnenen Übungen im Lösen komplizierter goniometrischer Gleichungen können hier unter Nutzung des im Lehrbuch auf Seite 184 angegebenen heuristischen Programms weitergeführt werden. Am Ende dieser Lerneinheit sollten die Schüler sichere Fertigkeiten in der Auswahl der Rückführungsmittel und im Lösen goniometrischer Gleichungen der in Lerneinheit B 14 angegebenen Typen besitzen.

Übung zu Kurvendiskussionen für Funktionen, die nur eine Winkelfunktion enthalten. Die Schüler sollten die Aufgabe des Beispiels B 35 selbständig lösen. Sie können „im Bedarfsfalle" sich Rat im Lehrbuch holen. Unbedingt sollten sie nach Beendigung ihrer Arbeit ihre Ergebnisse mit denen des Lehrbuchs vergleichen.
Weitere Aufgaben zur Übung, zum Teil auch als Hausaufgabe: LB 194: Nr. 1 a – c und 2 a, b.

Dabei sollte die Formulierung „skizzieren ... in einem geeigneten Intervall" in der Aufgabenstellung geklärt werden.

Übung zu Kurvendiskussionen für Winkelfunktionen verschiedener Argumente Anhand des Beispiels B 36 sollte eine „Musterlösung" für die Durchführung einer Kurvendiskussion geschaffen werden. Dieses Beispiel verdeutlicht den Schülern die Notwendigkeit, das Extremum nachzuweisen, und zeigt das Vorgehen, wenn eine Entscheidung mit der hinreichenden Bedingung für lokale Extrema nicht getroffen werden kann.

Übung zu Kurvendiskussionen für zusammengesetzte Funktionen, die Winkelfunktionen enthalten Die im Beispiel B 37 gestellte Anwendungsaufgabe sollte im Unterrichtsgespräch gelöst werden. Den sich anschließenden Auftrag B 59 können aber die Schüler selbständig bearbeiten.
Zur weiteren Übung dienen die Aufgabe 4 (analoge Aufgabenstellung zum Beispiel B 37) sowie die Aufgaben 2c, 3 und 5.
Für die folgende Stunde könnte allen Schülern die Bearbeitung des Auftrags B 61 als vorbereitende Hausaufgabe gestellt werden.

Kontrollaufgaben

LB 194: Nr. 1c und 3

Lerneinheit 18 (3 Std.)
Extremwertaufgaben

LB 195 bis 198

Da bei Extremwertaufgaben den Schülern das Auffinden des Lösungsansatzes (mathematische Formulierung der Zielfunktion) größere Schwierigkeiten bereitet, sollte (aus Zeitgründen) in einigen Fällen nur das Auffinden des Lösungsansatzes geübt werden. Hierfür eignen sich besonders die Aufgaben 42 bis 44 (LB 205).

Ziele

Die Schüler

- kennen die Schrittfolge für das Lösen von Extremwertaufgaben und können sie auf Extremwertaufgaben, deren Zielfunktionen Winkelfunktionen sind, anwenden,
- können aus gegebenen Bedingungen einer Aufgabe Zielfunktion und Nebenbedingungen mit Hilfe von Beziehungen zwischen Winkelfunktionen mathematisch formulieren,
- entwickeln ihre Fertigkeiten im Lösen goniometrischer Gleichungen weiter,
- sind von der Notwendigkeit der Kontrolle des Ergebnisses überzeugt, können sie bei den vorgelegten Aufgaben durchführen und formulieren das Ergebnis (unter Angabe der entsprechenden Einheit) in einem Antwortsatz.

Schwerpunkte

> *Für alle drei Stunden*
>
> – Übung im Lösen von Extremwertaufgaben
> – Übung im Finden des Lösungsansatzes
> – Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen

Methodische Hinweise

Übung im Lösen von Extremwertaufgaben Zur Bereitstellung erforderlichen Wissens bearbeiten die Schüler die Aufträge B 60 und 61 (Auftrag 61 als vorbereitende Hausaufgabe gestellt).
Den Schülern ist beim Lösen von Aufgaben wiederholt zu verdeutlichen:

- Beim Aufstellen der Zielfunktion und beim Formulieren der Nebenbedingungen sollten Winkelfunktionen bzw. Beziehungen zwischen Winkelfunktionen Verwendung finden. Auf mögliche andere Lösungswege (z. B. Anwendung von Wurzelfunktionen) sollte hingewiesen werden.
- Das Nachprüfen des Erfülltseins einer hinreichenden Bedingung für die Existenz des Extremums ist unverzichtbarer Bestandteil der Lösung einer Extremwertaufgabe.
- Es ist zu untersuchen, ob das gefundene lokale Extremum auch das gesuchte globale Extremum ist.
- Nach einer Überprüfung ist das Ergebnis in einem Antwortsatz unter Verwendung der Einheit zu formulieren.

Es ist zweckmäßig, alle im Lehrbuch angebotenen Aufgaben zum Lösen von Extremwertaufgaben, die auf Winkelfunktionen führen, zu bearbeiten. Bei einigen Aufgaben ist aus Zeitgründen eine Beschränkung auf das Ansatzfinden geboten. Hierfür wird folgender Weg vorgeschlagen:

(1) Die Aufgabe des Beispiels B 38 (LB 195) wird ausführlich im Unterrichtsgespräch bearbeitet, und alle Einzelheiten werden besprochen. Dabei könnte eine Musterlösung einer Extremwertaufgabe an der Tafel und in den Heften der Schüler entstehen, die als Richtschnur und Maßstab für die selbständige Arbeit im weiteren Unterricht dient. Bei den weiteren Aufgaben sollte sich der Lehrer zunächst davon überzeugen, daß die Schüler überhaupt die Problemstellung verstanden haben (Formulierung der Aufgabe mit eigenen Worten durch die Schüler) und daß sie die Zielfunktion mathematisch richtig formuliert haben. Trotz Anfertigung einer Skizze bereitet es den Schülern oft Schwierigkeiten, die geeigneten Nebenbedingungen zu finden. Mit großer Wahrscheinlichkeit brauchen viele Schüler Hilfe des Lehrers beim Aufstellen der Zielfunktion mit einer Variablen bei der Aufgabe 5 (LB 198).
(2) Die Aufgabe 1 (LB 198) wird von den Schülern selbständig gelöst.
(3) Ohne Benutzung des Lehrbuchs wird die Aufgabe des Beispiels B 39 (LB 196) gelöst. Auf die Einführung der Konstanten K wird hingewiesen. Außerdem wird seitens des Lehrers anhand einer Tafelskizze entsprechend Bild B 43 (LB 196) darauf aufmerksam gemacht, daß wegen $B = f(r, \varphi)$ eine trigonometrische Beziehung am rechtwinkligen Dreieck zur Grundlage genommen werden könnte. Anschließend arbeiten die Schüler selbständig.
(4) Die Aufgabe 3 wird in gleicher Weise wie das Beispiel B 39 von den Schülern selbständig gelöst.

(5) Die Aufgabe 2 kann nach Erarbeitung des Lösungsansatzes im Unterrichtsgespräch von den Schülern selbständig zu Ende geführt werden.

(6) Nach kurzer Erläuterung des physikalischen Sachverhalts lösen die Schüler die Aufgabe 4.

(7) Für die Aufgabe im Auftrag B 62 ist eine Wegleitung in Form von Lösungshinweisen gegeben, so daß die Schüler weitgehend selbständig arbeiten können. Den Schülern sollte überdies empfohlen werden, die Längen der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ im 4. Punkt der Lösungshinweise zu verwenden. Es sei $\overline{AE} = a$, $\overline{BF} = b$.
Dann ist

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}{c_2} = f(x)!$$

Hierbei wäre jedoch keine Winkelfunktion zu differenzieren.

(8) Für die Aufgabe 5 (LB 198) sollten den Schülern die folgenden Hinweise gegeben werden:
Führen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein! Beschreiben Sie die Bewegung des schrägen Wurfs durch

(I) $x = v_0 t \cdot \cos\alpha$

(II) $y = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2$!

Da (II) eine nach unten geöffnete Parabel beschreibt, hat diese Funktion Nullstellen bei

$$t_1 = 0 \text{ (Beginn) und } t_2 = \frac{2v_0}{g} \cdot \sin\alpha.$$

Wird t_2 in (I) eingesetzt, so erhält man

$$x = v_0 \cdot \frac{2v_0}{g} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha = f(\alpha).$$

Nach der Differentiation der Funktion f (für den Schüler ungewohnt: x') können die lokalen Extrema ermittelt werden.

Übung im Finden des Lösungsansatzes

Ein besonderer Schwerpunkt beim Lösen von Extremwertaufgaben ist das Auffinden des Lösungsansatzes (der Zielfunktion mit einer Variablen). Wenn auch bei jeder der oben geplanten Aufgaben ein Lösungsansatz erarbeitet werden muß, so brauchen einige Schüler weitere Zusatzaufgaben (zum Beispiel LB 205: Nr. 42 und 43).
Die Schüler sollten auch in der Hausaufgabe den Lösungsansatz suchen; keinesfalls darf der Unterricht so gestaltet werden, daß die Lösungsansätze im Unterrichtsgespräch, die folgende Rechnung in der Hausaufgabe bewältigt werden.
Die Schüler sollten einmal bei einer Aufgabe zwei mögliche Lösungswege einander gegenüberstellen: (1) Die Zielfunktion wird durch eine Wurzelfunktion verkörpert, (2) die Zielfunktion stellt eine Winkelfunktion dar. Die Schüler sollen dabei erkennen, daß bei Verwendung einer Wurzelfunktion die 2. Ableitung kompliziert zu bilden ist, während bei Verwendung einer Winkelfunktion oft der Ansatz schwieriger zu finden ist. Als Beispiel eignet sich die Aufgabe 43 (LB 205).

Übung im Lösen goniometrischer Gleichungen

Die beim Lösen von Extremwertaufgaben (mit Winkelfunktionen) auftretenden goniometrischen Gleichungen sollten bewußt genutzt werden, um die Fertigkeiten der Schüler im Lösen goniometrischer Gleichungen weiterzuentwickeln (durch Angabe und Begründung der

Rückführungsmittel), so daß die Schüler am Ende dieser Lerneinheit Sicherheit im Lösen goniometrischer Gleichungen der in Lerneinheit B 15 angegebenen Typen besitzen. Dabei sollte auch auf die Durchführung der Probe hingewiesen werden, um die Schüler an die Kontrolle der eigenen Arbeit zu gewöhnen.
Zur häuslichen Vorbereitung auf die Flächeninhaltsberechnung mit Hilfe der Integralrechnung könnte allen Schülern der Auftrag erteilt werden, das Grundwissen über das bestimmte Integral zur Flächeninhaltsberechnung für einen Schülervortrag vorzubereiten.

Kontrollaufgaben

(1) LB 198: Nr. 4; (2) LB 205: Nr. 43

Lerneinheit 19 (3 Std.)
Flächeninhaltsberechnungen
LB 198 bis 201

Zur Flächeninhaltsberechnung von Punktmengen, die durch Graphen von Winkelfunktionen begrenzt werden, sind die in der Lerneinheit B 16 erarbeiteten Kenntnisse der Schüler zu reaktivieren. Das ist dann nicht erforderlich, wenn die in den Vorbemerkungen zur Lerneinheit B 16 dargestellte Variante (UH 188), die 3. Stunde dieser Lerneinheit unmittelbar vor der Lerneinheit B 19 zu behandeln, gewählt wird.
Die 3. Stunde dieser Lerneinheit ist für eine Zusammenfassung des Stoffes aus dem Stoffabschnitt 2.3 vorgesehen und dient der Einordnung dieses Stoffes in den Analysislehrgang der Schüler.

Ziele

Die Schüler

können mit Hilfe der Integralrechnung Flächeninhalte von Punktmengen berechnen, die zum Teil oder vollständig durch Graphen von Winkelfunktionen begrenzt werden.

Schwerpunkte

1. Stunde

- Reaktivierung der theoretischen Grundlagen der Flächeninhaltsberechnung mittels Integralrechnung
- Anwendung der Integralrechnung zur Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen, die vom Graph einer Winkelfunktion, der x-Achse sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden (■ B 40)

2. Stunde

Anwendung der Integralrechnung zur Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen, die durch die Graphen zweier Funktionen (wenigstens eine davon ist eine Winkelfunktion) sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden (■ B 41, B 42)

3. Stunde

Zusammenfassung des Stoffabschnitts 2.3

Methodische Hinweise

Reaktivierung der theoretischen Grundlagen zur Flächeninhaltsberechnung mittels der Integralrechnung Je nach der Klassensituation ist das Grundwissen über das bestimmte Integral (Definition, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) zu wiederholen. Das kann im Unterrichtsgespräch oder durch einen Schülervortrag erfolgen. Wurde die Lerneinheit B 16 wie im Lehrbuch dargestellt behandelt, sollten im Rahmen der täglichen Übungen Stammfunktionen zu gegebenen Sinus- bzw. Kosinusfunktionen ermittelt werden. Anschließend wird die Anwendung des bestimmten Integrals geklärt: Was versteht man unter dem Flächeninhalt einer Punktmenge, die von dem Graph von f, der x-Achse sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird? Welche Lage können diese Punktmengen haben? (Vgl. Zusammenfassung im Lehrbuch 11, Seite 266) Wie erfolgt im einzelnen deren Flächeninhaltsberechnung (Ermittlung von Nullstellen beachten)?

Anwendung der Integralrechnung zur Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen, die vom Graph einer Winkelfunktion, der x-Achse sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden Im Unterrichtsgespräch sollte die Aufgabe des Beispiels B 40 bearbeitet werden. Die Schüler sind auf die erforderliche Untersuchung auf mögliche Nullstellen im Integrationsintervall hinzuweisen. Je nach dem Übungsbedürfnis der Schüler sollten einzelne Aufgaben aus den Nummern 1 und 2 (LB 200) zur differenzierten Unterrichtsgestaltung ausgewählt werden. Die Schüler sollten daran gewöhnt sein, die Ergebnisse ihrer Rechnung zu kontrollieren: Sie sollten beim Aufsuchen der Stammfunktionen durch Differentiation die Richtigkeit überprüfen, sie sollten ihr Ergebnis der Flächeninhaltsberechnung kritisch werten, nicht zuletzt durch Vergleich des Ergebnisses mit der graphischen Darstellung des zu berechnenden Flächeninhalts.

Anwendung der Integralrechnung zur Berechnung des Flächeninhalts von Punktmengen, die durch Graphen zweier Funktionen sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt werden In diesem Schwerpunkt werden zwei Aufgabentypen behandelt:

- Ermitteln der oberen Grenze des bestimmten Integrals bei Vorgabe des Flächeninhalts (■ B 41),
- Berechnung des Flächeninhalts einer Punktmenge, die von den Graphen zweier Funktionen (wenigstens eine davon ist eine Winkelfunktion) sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird (■ B 42).

Bei beiden Aufgabentypen sollte den Schülern zunächst das Problem genannt werden; sie sollen selbst den Ansatz für die Lösung finden. Nach der Begründung des Ansatzes durch einen Schüler sollten alle Schüler die Rechnungen selbständig ausführen.
Weitere Übungsaufgaben für den ersten Typ stellen die Aufgaben 5 und 6 (LB 201), für den zweiten Typ die Aufgaben 3 und 4 (LB 200) sowie die Aufgabe 62 (LB 216) dar, die teils im Unterricht, teils als Hausaufgabe gelöst werden sollten.

Kontrollaufgaben

(1) LB 216: Nr. 62b; (2) LB 201: Nr. 5

Zusammenfassung des Stoffabschnitts 2.3

In dieser Stunde sollte den Schülern der Zuwachs an Wissen und Können rückblickend verdeutlicht werden, der im Stoffabschnitt 2.3 erreicht wurde. Dabei sollte die auf Seite LB 200 befindliche Zusammenfassung genutzt werden. Dazu wird folgender **Vorschlag** unterbreitet:

- *Kurze Übersicht über die behandelten Probleme und deren Lösungsansätze:* Um auch Kurvendiskussionen durchführen, Extremwertaufgaben lösen und Flächeninhalte von Punktmengen berechnen zu können, wenn die dabei auftretenden Funktionen Winkelfunktionen sind, müssen in vielen Fällen die Winkelfunktionen differenziert bzw. integriert werden können.
- *Überblick über richtige fachliche Voraussetzungen für die Differentiation von Winkelfunktionen:* Die von den Schülern genannten Begriffe, Sätze, Verfahren werden im Unterrichtsgespräch erläutert; Beschränkung auf einige wesentliche Gegenstände, jedoch Betonung des Lösens goniometrischer Gleichungen.
- *Rückblick auf die Herleitung der Ableitungen der Winkelfunktionen:* Welche Kenntnisse mußten bereitgestellt werden? Herleitung der Ableitungen der Winkelfunktionen. Umkehrung der Differentialrechnung führte zu Stammfunktionen der Winkelfunktionen. Grundintegrale der Winkelfunktionen.
- *Weitere Übungsaufgaben* zu den Anwendungsgebieten der Differential- und Integralrechnung der Winkelfunktionen.
  Auswahl aus den noch nicht bearbeiteten Aufgaben des Lehrbuches.

Stoffabschnitt 2.4 (14 Std.[1])
Übungen und Anwendungen; Wiederholungen

Das Hauptanliegen dieses Stoffabschnitts besteht im umfassenden Festigen der im Analysislehrgang der Klassen 11 und 12 erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten unter Einbeziehung von Elementen der Kombinatorik und des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion. Die zu lösenden Aufgaben sind überwiegend komplexer Natur. Damit dient der Stoffabschnitt 2.4 insbesondere auch der zielgerichteten Vorbereitung der Schüler auf die Reifeprüfung im Fach Mathematik. (Allerdings darf sich diese Vorbereitung nicht im Trainieren des Lösens bestimmter Aufgabentypen erschöpfen. Auch dem Reaktivieren der Theorie muß die gebührende Aufmerksamkeit gewidmet werden. Wie das in sinnvoller Verbindung mit dem Aufgabenlösen erfolgen kann, wird an Beispielen auf Seite UH 200ff. gezeigt.) Aufgabenauswahl (s. dazu auch LP 52/53) und Unterrichtsgestaltung müssen der jeweiligen Klassensituation Rechnung tragen. Grundsätzlich ist ein hoher Grad an Selbständigkeit der Schüler beim Suchen von Ansätzen und Lösungswegen, beim Lösen, beim Kontrollieren der Ergebnisse und beim Reaktivieren benötigten Wissens anzustreben. Folgendes sollte bei der Planung und Durchführung der Unterrichtsstunden in diesem Stoffabschnitt berücksichtigt werden (s. auch LP 14/15):

[1] 4 Stunden der insgesamt gemäß Lehrplan vorgesehenen 18 Stunden sind für eine Klassenarbeit geplant.

- Die Schüler sollten die gestellten Aufgaben weitgehend selbständig lösen (ein frontales Vorgehen, z. B. das Erarbeiten des Lösungsansatzes im Unterrichtsgespräch, sollte nur in Ausnahmefällen gewählt werden) und dabei auf einwandfreie äußere und mathematisch exakte Form (Zwischenüberschriften, Begründungen, Antwortsätze mit entsprechenden Einheiten) achten.
- Entsprechend dem unterschiedlichen Leistungsvermögen und Festigungsbedarf einzelner Schüler und Schülergruppen sollte der Lehrer Möglichkeiten für differenziertes Arbeiten nutzen.
- Das längerfristige Erteilen von Aufträgen sollte in diesem Stoffabschnitt ganz besonders Beachtung finden. So könnte man zur Reaktivierung bestimmter Stoffelemente Kurzvorträge (als Beispiel eignen sich die Aufträge B 63 bis B 71) vorbereiten lassen (↗ Hinweise auf der Seite UH 200 sowie Kontrollaufgaben unter 6. auf der Seite UH 129). Ferner sollten auch umfangreichere Hausaufgaben gestellt werden.
- Im Rahmen einer Wiederholungsplanung können auch einmal Stoffkomplexe systematisch vorgenommen werden. Hierfür ist auch der Aushang von Wiederholungskomplexen einschließlich einiger Aufgaben im Fachkabinett zu empfehlen. Andererseits sollten in der Endphase der Wiederholung die Schüler in der Lage sein, sich schnell von einer Aufgabe auf eine andere einzustellen.
- Die Gruppenarbeit – eventuell unter Anleitung leistungsstarker Schüler – sollte entsprechend den Bedingungen in der Klasse organisiert werden.
- Stärker als bisher sollte man das Vorgehen beim Aufgabenlösen kommentieren lassen. Die Schüler sind auch anzuhalten, Möglichkeiten der Selbstkontrolle ihrer Arbeitsergebnisse zu nutzen (z. B. Abschätzungen und Überschläge, Vergleich von Funktionswerten an Extremstellen mit benachbarten Funktionswerten, Vergleich grafische Darstellung – Rechnung u. a.).
- Ansatzpunkte für eine erzieherische Wertung (LP 11 f.) bieten beispielsweise die Aufgaben 39, 42, 49, 51 (Rolle der Mathematik in Ökonomie und Militärwesen).

Hinweise zu den Aufgaben

Durch das Aufgabenangebot des Lehrbuchs (LB 205 bis 216) werden die im Lehrplan genannten inhaltlichen Schwerpunkte „abgedeckt". Die folgende Übersicht gibt eine Zuordnung der Aufgaben zu bestimmten inhaltlichen Problemen. Entsprechend dem komplexen Charakter der meisten Aufgaben (mehrere Teilaufgaben zu jeweils unterschiedlichen Problemen) werden einzelne Aufgaben mehrfach angeführt. Nicht besonders erwähnt sind das Lösen von Gleichungen, das im Zusammenhang mit der Bearbeitung von Kurvendiskussionen, Extremwertaufgaben und Flächeninhaltsberechnungen ohnehin in der Regel durchgeführt werden muß, sowie das Ermitteln von Stammfunktionen, das bei Flächeninhaltsberechnungen durch Integration erforderlich ist.

Untersuchung von Zahlenfolgen	1, 2, 3, 4, 15
Aufgaben zur Kombinatorik	54 bis 61
Kurvendiskussionen	5, 6, 13, 16, 17, 19, 20, 22, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 50
Extremwertaufgaben	27, 36 bis 49, 51, 52, 53

Berechnen von Flächeninhalten	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 33, 34, 35, 62
Tangentengleichungen	12, 14, 16, 18, 22, 23, 27, 32, 34, 50
Beweisaufgaben (insbes. Bew. durch vollst. Induktion)	1, 2, 3, 4, 15, 21, 24, 25
Aufgaben zum Stoff von 2.2	2, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 (Anwendungsaufgaben)
Aufgaben zum Stoff von 2.3	31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 49, 51, 52 (Anw. Aufg.)

Die **Aufträge** B 63 bis B 71 eignen sich für vorbereitete Kurzvorträge (möglichst gezielt und differenziert an bestimmte Schüler vergeben, Vorbereitung der mündlichen Reifeprüfung). Die Wertung der gehaltenen Vorträge (Schüler einbeziehen!) sollte neben der fachlichen Richtigkeit und Vollständigkeit auch die sprachliche Gestaltung und den Vortragsstil erfassen. Möglich ist z. T. auch der Einsatz einiger Aufträge für kurze schriftliche Leistungskontrollen (z. B. B 66, 67, 68, 69, 70).
Zu B 63/64 könnte von einem Schüler ein Vortrag vorbereitet und im Zusammenhang mit dem Lösen der Aufgaben 1, 3 und 4 dargeboten werden.
Für B 66 empfiehlt sich u. U. der Hinweis, eine Funktion 3. Grades als Beispiel zu wählen, die sowohl ein lokales Maximum als auch ein lokales Minimum besitzt.
Die Aufträge B 68 bis 71 können zur Festigung von Grundkenntnissen aus der Integralrechnung genutzt werden.

Die Antwort zu B 69 sollte etwa lauten:

Unter dem bestimmten Integral $\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx$ versteht man die reelle Zahl $\frac{4}{3}$, die der *gemeinsame* Grenzwert gewisser Zahlenfolgen ist (deren Bildung sollte kurz erläutert werden, ↗ dazu Lehrbuch 11, Kapitel D).

Zweckmäßig ist die Kopplung der Aufträge B 69 und B 68 bzw. B 70. Die vorliegende Aufgabenstellung läßt sich auch erweitern:

- B 68 Zusammenstellung bekannter Regeln für das Ermitteln von Stammfunktionen und deren Beziehung zu Differentiationsregeln.
- B 70 Herleitung des Hauptsatzes (↗ Lehrbuch 11, Kap. D, ▷ 5); Erläutern des Verfahrens der Integration durch lineare Substitution (anknüpfend an c)).

Zu B 71 kann ein Vortrag gehalten werden im Anschluß an das Lösen einer Aufgabe, die das Berechnen des Flächeninhalts einer Punktmenge fordert (z. B. 10, 11, 12 u. a.). Es sollte ein Überblick über die in Klasse 11 behandelten Fälle gegeben werden (s. dazu entsprechende Übersicht im Lehrbuch, Klasse 11, Seite 266). Ergänzend kann das Gewinnen einiger elementarer Flächeninhaltsformeln mit den Mitteln der Integralrechnung erörtert werden (Rechteck, Trapez, Parallelogramm).
Wegen der Vielzahl der im Lehrbuch zum Abschnitt 2.4 gegebenen Aufgaben können hier nur zu einigen ausgewählten Aufgaben Hinweise erfolgen.

Aufgabe 6:
Die Schüler sollten selbst überlegen, welche Untersuchungen für **a** bzw. **b** erforderlich sind (Nullstellen, lokale Extrema, $f(0)$ und evtl. Berechnen weiterer ausgewählter Funktions-

werte aus dem angegebenen Intervall). Die zu **c**, **d** und **e** erforderlichen Überlegungen sind besonders geeignet, die Kenntnisse der Schüler über die Bedingungen der Existenz lokaler Extrema zu vertiefen. Denkbar wäre auch die Verbindung des Auftrags B 66 mit dem Lösen der Aufgabe 6 (SV zu ● B 66, anschließend Anwenden des reaktivierten Wissens beim Lösen von Aufgabe 6).

Man erhält $x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = -\frac{2b}{3a}$ mit

$f''(x_{E1}) = 2b \neq 0 \quad (b \neq 0)$ bzw. $f''(x_{E2}) = -2b \neq 0$

und damit die Abhängigkeit der Art der Extrema lediglich von b. Die erforderliche Fallunterscheidung ergibt, daß

für $b > 0$ bei x_{E1} ein lokales Minimum und
bei x_{E2} ein lokales Maximum,
für $b < 0$ bei x_{E1} ein lokales Maximum und
bei x_{E2} ein lokales Minimum vorliegt.

(Fehlerquelle beachten: $-2b$ ist nicht notwendig eine negative Zahl! Zum Vergleich Hinweis auf die Ergebnisse bei $b = \frac{3}{4}$ in **a**.)

Aufgabe 17:
In Verbindung mit **a** Wiederholung der Wurzeldefinition.
Beim Skizzieren des Graphen im geforderten Intervall auf dessen Einhaltung achten!
Im Zusammenhang mit **e** könnte der oben genannte Vortrag zu Auftrag B 71 erfolgen.

Aufgabe 18:
Beim Skizzieren des Graphen (es genügen dazu $f(4)$ und $f(13)$, Anwenden der Kenntnisse über Verlauf des Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$) unbedingt auf Einhaltung des gegebenen Intervalls achten. (Insbesondere ist das Skizzieren über $x = 4$ hinaus als Fehler zu kennzeichnen!)
Teilaufgabe **c** könnte als differenzierte Aufgabenstellung für leistungsstärkere Schüler verwendet werden. Allerdings ist zu beachten, daß derartige Teilaufgaben, in denen Koeffizienten als Parameter auftauchen (z. B. 21, 22, 24, 26, 27, 28) nicht nur von diesen Schülern gefordert werden. Auch Schüler, denen das Lösen derartiger Aufgaben noch Schwierigkeiten bereitet, sollten diese bearbeiten, da sie geeignet sind, die Fähigkeiten zum funktionalen Denken, zum Verallgemeinern und zum Erfassen des Wesentlichen zu schulen.

Aufgabe 34:
Bei der Planung des Lösungsweges könnte einmal von der Teilaufgabe **c** ausgegangen werden. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 1 + \sin 2x$ wird skizziert durch Verschiebung des Graphen der Funktion $f_1(x) = \sin 2x$ um die Einheit 1 in Richtung der positiven y-Achse. Nun sollten durch die Bearbeitung der Teilaufgabe **a** die durch Rechnung zu erhaltenden Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f ermittelt (bestätigt) werden.
Auch wenn in der Aufgabenstellung kein ausdrücklicher Hinweis gegeben ist, ist der Nachweis des Erfülltseins einer hinreichenden Bedingung für ein Extremum zu führen.

In der Teilaufgabe **d** sind auf Grund der Aufgabenstellung die Grenzen des bestimmten Integrals 0 und $\frac{3\pi}{4}$.

Es könnte sich die Frage anschließen: Wie müßte die Teilaufgabe **d** formuliert sein, wenn die obere Integrationsgrenze π sein sollte?
In der Teilaufgabe **e** (eine Parameteraufgabe) werden durch Differentiation die Anstiege der Tangenten an den Graph von g in x_1 bzw. x_2 ermittelt ($m_1 = b$, $m_2 = -b$ mit $b > 0$ nach Aufgabenstellung). Aufgrund der Orthogonalitätsbedingung ($m_1 \cdot m_2 = -1$) erhält man für $b = 1$.

Aufgabe 38:
Vor Beginn der Lösung sollten die Schüler einmal schätzen, wie groß das Volumen des Containers sein könnte. Dazu muß man als Einheit für die Längen mm angeben und für b beispielsweise 750 ergänzen. (In diesem Fall ist das Volumen $V \approx 2\ \text{m}^3$.)
In diesem Zusammenhang sind die Schüler daran zu erinnern, daß eine Variable nur zur Bezeichnung entweder einer Größe oder des Zahlenwertes der Größe in ein und demselben Zusammenhang verwendet werden darf. Hier dienen die Variablen zur Bezeichnung der Zahlenwerte von Größen.
In der Teilaufgabe **b** sollten die Schüler auf die Zweckmäßigkeit der Darstellung großer Zahlen mit Hilfe von abgetrennten Zehnerpotenzen hingewiesen werden (Vermeidung von Fehlern!).
Der Inhalt A der trapezförmigen Seitenfläche kann durch

$$A = f(\varphi) = 2 \cdot 10^6 \cdot \sin \varphi(1 + \cos \varphi)$$

als Funktion von φ dargestellt werden. Vorschläge für einen zweckmäßigen Weg zur Bildung der 1. und 2. Ableitung angeben lassen!
Bei der Teilaufgabe **c** ist der Nachweis für das Vorliegen eines Maximums (hinreichende Bedingung) zu führen.

Bemerkung zu Hausaufgaben
Da es ohnehin nicht möglich ist, alle angebotenen Aufgaben[1] im Unterricht zu lösen, sollten einzelne Aufgaben (oder auch Teilaufgaben) als Hausaufgabe (u. U. längerfristig) gestellt werden. Dabei ist in besonderem Maße differenziert vorzugehen, um den für einzelne Schüler und Schülergruppen unterschiedlichen Festigungsbedarf zu berücksichtigen. Zur Kontrolle und individuellen Auswertung können auch leistungsstarke Schüler herangezogen werden (Rückkopplung mit dem Lehrer erforderlich).

[1] Siehe auch „Weitere Aufgaben zu den Lerneinheiten B 6 bis B 19“, LB 201 bis 205.

Literatur

Grundsatzdokumente

[G 1] X. Parteitag der SED, 11. bis 16. April 1981 in Berlin. Bericht des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands an den X. Parteitag der SED. Berichterstatter: Genosse ERICH HONECKER. Dietz Verlag Berlin 1981

[G 2] IX. Parteitag der SED, Berlin, 18. bis 22. Mai 1976. Programm der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands. Dietz Verlag Berlin 1976

[G 3] VIII. Pädagogischer Kongreß der Deutschen Demokratischen Republik vom 18. bis 20. Oktober 1978. Protokoll. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1979

[G 4] Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem. Vom 25. Februar 1965. Gesetzblatt der DDR, I, 1965, Nr. 6

[G 5] Lehrplan Mathematik, Klassen 5 bis 10, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1977 (Titel-Nr. 00 30 18)

[G 6] Lehrplan Mathematik, Abiturstufe, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1979 (Titel-Nr. 00 30 19)

[1] Autorenkollektiv: Mathematik in Übersichten. VWV Berlin 1980 (Titel-Nr. 00 08 09)

[2] Autorenkollektiv: Wissensspeicher Mathematik. VWV Berlin 1979 (Titel-Nr. 00 17 13)

[3] Autorenkollektiv: Tabellen und Formeln. VWV Berlin 1980

[4] Autorenkollektiv unter Leitung von W. WALSCH und K. WEBER: Methodik Mathematikunterricht. VWV Berlin 1975

[5] Biographien bedeutender Mathematiker. Eine Sammlung von Biographien. Erarbeitet von einem Autorenkollektiv, herausgegeben von H. WUSSING und W. ARNOLD. 2. Auflage, VWV, Berlin 1978

[6] BOCK, H./WALSCH, W.: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1975

[7] BREHMER, S./APELT, H.: Analysis II. Differential- und Integralrechnung (Mathematik für Lehrer, Band 5). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974

[8] WALSCH, W.: Zum Beweisen im Mathematikunterricht. VWV, Berlin 1972

[9] STRUIK, D. J.: Abriß der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

[10] Zu Erfahrungen und Problemen des Unterrichts in der Abiturstufe. Von einem Autorenkollektiv unter Leitung von L. KLINGBERG (Beiträge zur Pädagogik; Band 2). VWV, Berlin 1975

Zeitschriftenartikel

[11] AMBERG, D.: Zur Nutzung von Unterrichtsmitteln nach der Überarbeitung der Lehrpläne im Fach Mathematik der Abiturstufe. In "Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 9, S. 505 bis 507

[12] BAMBERGER, H.: Einige Bemerkungen zur Behandlung von Extremwertaufgaben im Unterricht der Abiturstufe. In „Mathematik in der Schule", Jg. 13 (1975), H. 10, S. 573 bis 578

[13] Fein, B.; Mehlhose, K.: Bericht: Fachkonferenz Mathematik für Lehrer der Abiturstufe. In "Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 7/8, S. 430 bis 432

[14] Frank, B.: Hinweise zum Stoffgebiet "Vektorrechnung und analytiche Geométrie" des überarbeiteten Mathematiklehrplans für die Abiturstufe. In "Mathematik in der Schule", Jg. 19 (1981), H. 5, S. 378 bis 395

[15] Kleinau, M.: Über das Festigen in zwei Unterrichtsstunden zum Stoffgebiet „4. Differential- und Integralrechnung und Anwendungen (Fortsetzung)" der Klasse 12. In „Mathematik in der Schule", Jg. 15 (1977), H. 1, S. 48 bis 56

[16] Kleinau, M.: Eine Anwendungsstunde zu Extremwertaufgaben in der Klasse 12. In „Mathematik in der Schule", Jg. 15 (1977), H. 2/3, S. 147 bis 151

[17] Lemke, H.: Stoye, W.: Zur Arbeit mit dem überarbeiteten Lehrplan der Abiturstufe. In "Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 6, S. 302 bis 312

[18] Mahn, G.: Zur Wiederholung der Extremwertkriterien im Mathematikunterricht der Klasse12. In „Mathematik in der Schule", Jg. 13 (1975), H. 7, S. 384 bis 388

[19] Maske, K.: Zur vollen Berücksichtigung des SI im Mathematikunterricht. In „Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 9, S. 453 bis 455

[20] Pruchnewski, H.: Zur Erhöhung der Lebens- und Praxisverbundenheit in der Differentialrechnung. In "Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 10, S. 543 bis 547

[21] Röder, H.: Gedanken zur Ausbildung von Denkvermögen, Phantasie und Schöpfertum in der Abiturstufe als Beitrag zur weiteren Ausprägung des polytechnischen Charakters unserer Oberschule. In "Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 9, S. 471 bis 477

[22] Vockenberg, H.: Zur Einführung überarbeiteter Lehrpläne im Fach Mathematik der Abiturstufe. In "Mathematik in der Schule", Jg. 18 (1980), H. 2/3, S. 108 bis 123

[23] Hinweise des Ministeriums für Volksbildung zur Arbeit mit dem überarbeiteten Lehrplan Mathematik der Abiturstufe. In „Mathematik in der Schule", Jg. 17 (1979), H. 9, S. 496 bis 503

Es ist zu beachten, daß [10], [12], [15], [16], [18] noch vor der Einführung von [G 6] erschienen sind.

Abkürzungen und Zeichen

Def.	Definition
Einf.	Einführung
Fst	Festigung
HA	Hausaufgabe
LB	Lehrbuch (z. B. LB 15 bedeutet: Lehrbuch Seite 15)
LE	Lerneinheit
LP	Lehrplan (z. B. LP 30 bedeutet: Lehrplan Seite 30)
LV	Lehrervortrag
Ma	Mathematik
mB	mit Beweis
oB	ohne Beweis
Ph	Physik
SSA	Selbständige Schülerarbeit
SV	Schülervortrag
UH	Unterrichtshilfen (z. B. UH 25 bedeutet: Unterrichtshilfen Seite 25)
UG	Unterrichtsgespräch
Wdh	Wiederholung
Zus	Zusammenfassung
▶	Definition
▷	Satz
●	Auftrag im Lehrbuch
■	Beispiel
↗	siehe