Renate Tobies

Felix Klein

Biografien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner Band 50
1981 BSB B. G. Teubner Leipzig
Abschrift und LaTex-Satz: 2023 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

1 Felix Klein (25.4.1849-22.6.1925)

Mit Felix Klein begegnet uns ein bedeutender Mathematiker und zugleich ein hervorragender Wissenschaftsorganisator seiner Zeit.
Er war ein Gelehrter, der nicht nur wichtige mathematische Resultate erzielte, sondern die neuen mathematischen Erkenntnisse in weiten Bevölkerungskreisen, unter den Ingenieuren, Lehrern u. a. zu verbreiten suchte.

Seine Ergebnisse auf dem Gebiet der Geometrie nehmen einen zentralen Platz in der Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts ein. In dieser Zeit war eine ganze Reihe verschiedener, scheinbar divergierender Arbeitsrichtungen der Geometrie entstanden. In seinem berühmten "Erlanger Programm" von 1872 systematisierte Klein diese geometrischen Richtungen mit Hilfe der Gruppentheorie. Sein Einteilungsprinzip konnte er später sogar auf die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins ausdehnen. Außerdem lieferte Klein grundlegende Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen und zur Funktionentheorie.

Das Leben Felix Kleins ist nicht nur für Mathematiker und Mathematikstudenten interessant, sondern zugleich für Techniker, Ingenieure, Lehrer und Schüler. Seine wissenschaftsorganisatorischen Aktivitäten waren außerordentlich vielseitig.
Sie erstreckten sich nicht nur darauf, neue wissenschaftliche Ergebnisse allgemein zugänglich zu machen. Klein suchte im Interesse der angewandten Mathematik enge Beziehungen zur Technik und Industrie. So trat er dem Verein Deutscher Ingenieure bei und begründete die Göttinger Vereinigung für angewandte Physik und Mathematik, eine Vereinigung, die Wissenschaftler und Industrielle engstens verband.

Ebenso aktiv befasste sich Klein mit der Entwicklung des mathematischen Unterrichts. Für die Bestrebungen zur Reform des Mathematikunterrichts am Anfang des 20. Jahrhunderts wurde noch zu seinen Lebzeiten der Begriff "Kleinsche Reform" geprägt.
F. Klein war Präsident der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK).

Das Wirken Kleins an den Universitäten Erlangen, Leipzig und Göttingen und an der Technischen Hochschule München zeichnete sich durch vielfältige studienorganisatorische Leistungen aus. Die Einrichtung des Leipziger Mathematischen Seminars durch

Klein jährt sich im April 1981 zum hundertsten Male. Aus diesem Anlass wurde die vorliegende Biographie verfasst.

Das Hauptanliegen der Darstellung besteht darin, die Formung der Persönlichkeit Kleins durch seine Zeitgenossen, unter den gegebenen gesellschaftlichen Bedingungen und seine aktive Auseinandersetzung mit den entsprechenden Verhältnissen zu verdeutlichen. Um einen unmittelbaren Eindruck von seiner Persönlichkeit zu vermitteln, wurde Klein möglichst oft zitiert. Trotz notwendiger Beschränkungen im Umfang und im fachwissenschaftlichen Detail ging das Bestreben dahin, einen Überblick über alle Seiten seines Lebens und Wirkens zu geben.

Der Abschnitt über die Leipziger Zeit wurde von Fritz König verfasst. Die Autoren danken Prof. Dr. sc. Hans Wußing sowie den weiteren Mathematikhistorikern des Karl-Sudhoff-Instituts Doz. Dr. sc. W. Purkert, Dr. S. Brentjes, Dr. K.-H. Schlote und H.-J. Ilgauds für viele wichtige Hinweise.

Leipzig, im August 1979 Renate Tobies

2 Jugendzeit

Das Geburtsdatum F. Kleins lässt sich leicht merken: Es ergibt sich aus den Quadraten der Primzahlen 5, 2, 43, wie Klein selbst anlässlich seines 71. Geburtstages zum besten gab. Am 25. April 1849 erblickte Felix Christian Klein in der Jägerhofstraße in Düsseldorf das Licht der Welt.

F. Klein wurde in einer bewegten Zeit geboren, am Ende der bürgerlich-demokratischen Revolution Deutschlands von 1848/49.
Nur kurze Zeit nach seiner Geburt, von Anfang Mai bis Ende Juli 1849, fand die letzte große bewaffnete Auseinandersetzung dieser Revolution statt. Große Teile des Volkes erhoben sich zum offenen Aufstand gegen die Konterrevolution. Besonders in den Industriezentren Deutschlands wurden harte Kämpfe geführt.
Die Heimatstadt Kleins, Düsseldorf, war unmittelbar davon betroffen.

Düsseldorf, im Rheinland liegend, gehörte zu einem der bedeutendsten Industriezentren Deutschlands, die sich im Gefolge der Industriellen Revolution herausgebildet hatten. Im preußischen Rheinland rebellierte die Landwehr.

Die Familie Klein stand den Ereignissen mit Unverständnis und Angst gegenüber. Der Vater Caspar Klein war durch seine berufliche Tätigkeit eng mit den regierenden Kreisen verbunden. Als persönlicher Sekretär des Regierungspräsidenten bangte er um die Existenz seiner Familie. Vom Schreiber auf einer Bürgermeisterei über das Amt des Landrentmeisters der Regierungskasse in Düsseldorf hatte er sich zu diesem Posten hinaufgedient.
Mit dem Düsseldorfer Regierungspräsidenten Freiherrn v. Spiegel hatte Caspar Klein in den Revolutionsjahren enge persönliche Beziehungen. Für seine regierungstreue Haltung wurde ihm 1850 der Rote Adler-Orden vierter Klasse verliehen.

2 Geburtshaus Felix Kleins in der Jägerhofstraße in Düsseldorf (In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung, 37 (1928) Abt. 2, 5. 1.)

Zur Zeit von Felix' Geburt hatte die Familie jedoch alles gepackt, um gegebenenfalls fliehen zu können. Die Ereignisse der Revolution berührten die Familie Klein aber nicht unmittelbar. Mitte Juli 1849 wurden die revolutionären Erhebungen zerschlagen; die Konterrevolution erstickte damit die bürgerlich-demokratische Revolution vollends.

Felix Klein, im bürgerlich-patriotischem Sinne erzogen, hat das Wesen dieser Revolution nicht erkannt. Im Jahre 1923 äußerte er sich folgendermaßen über die Zeit seiner Geburt:

"Die Nacht war von dem Donnern der Kanonen erfüllt, mit denen die Barrikaden zerschossen wurden, welche aufrührerische Volksmassen errichtet hatten. Es handelte sich um die letzten Ausläufer der badisch-rheinischen Unruhen gegen Preußen, die sich an die 48er Revolution angeschlossen hatten." [2, S. 11]

Um die Mitte des 19. Jahrhunderts zeichneten sich große Fortschritte auf den Gebieten der Industrie und der Wissenschaft ab. Die Industrielle Revolution, die in Deutschland später als in Großbritannien und Frankreich, nämlich erst um 1830 eingesetzt hatte, durchlief bis zur Revolution 1848/49 ihre erste Phase. In entscheidenden Zweigen der gewerblichen Produktion vollzogen sich technische Umwälzungen.

Mit dem zunehmenden Einsatz von Maschinen erfuhr die Entwicklung der gesellschaftlichen Produktivkräfte einen qualitativen Umschlag. Verbunden damit war ein rascher Aufschwung der mathematischen und der empirisch-experimentellen naturwissenschaftlichen Forschung. Karl Marx und Friedrich Engels schätzten im Revolutionsjahr 1848 ein:

"Die Bourgeoisie hat in ihrer kaum hundertjährigen Klassenherrschaft massenhaftere und kollossalere Produktivkräfte geschaffen als alle vorangegangenen Generationen zusammen. Unterjochung der Naturkräfte, Maschinerie, Anwendung der Chemie auf Industrie und Ackerbau, Dampfschifffahrt, Eisenbahnen, elektrische Telegraphen, Urbarmachung ganzer Weltteile, Schiffbarmachung der Flüsse, ganze aus dem Boden hervorgestampfte Bevölkerungen - welch früheres Jahrhundert ahnte, dass solche Produktionskräfte im Schoß der gesellschaftlichen Arbeit schlummerten." [35, S. 467]

Am Ende der 50er Jahre charakterisierte Marx die Wissenschaft als eine sich entwickelnde unmittelbare Produktivkraft. Zu dieser Zeit waren bedeutende naturwissenschaftliche Resultate erzielt worden. J.R.von Mayer entdeckte den Energieerhaltungssatz, Th. Schwann und M.J. Schleiden begründeten die Zelltheorie.
Ch. Darwin verhalf der Entwicklungslehre zum Durchbruch. J. von Liebig schuf die wissenschaftlichen Grundlagen für den Einsatz chemischer Düngemittel. Mit der Geologie hatte sich eine neue wissenschaftliche Disziplin herausgebildet.

Auch die Mathematik nahm im 19. Jahrhundert einen ungeheuren Aufschwung, Ihre gesellschaftliche Stellung, ihre Ausbildungsformen, das Berufsbild des Mathematikers sowie Inhalt und Methoden der Mathematik erfuhren eine weitreichende Umgestaltung, an denen sich F. Klein maßgeblich beteiligen sollte. Klein konnte auf einer Reihe hervorragender Resultate aufbauen, die auf den Gebieten der Analysis, Algebra und Geometrie erreicht worden waren.

Anknüpfend an französische Ergebnisse und an die überragenden Leistungen von C.F. Gauß trugen vor allem folgende deutsche Mathematiker zu wichtigen Fortschritten in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts bei: A. F. Möbius, J. Plücker, C.G. Jacobi, P.G. L. Dirichlet, H. Graßmann, E. E. Kummer, K. Weierstraß, L. Kronecker, B. Riemann, R. Dedekind, A. Clebsch.

Felix Klein entwickelte sich zu einem der bedeutendsten Vertreter der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Als eine wichtige Voraussetzung für diesen Weg schätzte Klein seine Erziehung im Elternhaus ein. Diese Erziehung war streng und konsequent und führte ihn später zu einem genau eingeteilten und geplanten Arbeitsrhythmus.
Sein Vater, Sohn eines Schmieds und Eisenhändlers aus Voerde im südlichen Westfalen, war ihm darin Vorbild. In seinen autobiographischen Aufzeichnungen von 1923 führte Klein aus, dass er besonders seinem Vater die strenge Lebensführung und das Organisationstalent verdanke. Weiter schrieb F. Klein:

"Ein zäher Wille, nie nachlassender Fleiß, nüchterner Wirklichkeitssinn, unbedingte Zuverlässigkeit und wohlbedachte Sparsamkeit - das sind die althergebrachten Eigenschaften .. ., die auch in meinem Vater unverfälscht verkörpert waren." [2, S. 12]

Auch der Mutter gedachte Klein mit großer Anerkennung. Frau Sophie Elise Klein entstammte einer Aachener Tuchhändlerfamilie.
Ihre geistige Auffassungsgabe übte bedeutenden Einfluss auf ihre Kinder aus. Zur Familie gehörten vier Kinder, zwei Mädchen und zwei Jungen, von denen Felix der ältere war. F. Klein berichtete über seine Mutter:

"Sie war heiterer Natur und von größerer Beweglichkeit der Auffassung als der Vater. Infolgedessen waren ihre vielseitigen Interessen die Hauptquelle geistigen Lebens im Hause, Freilich war mit dieser größeren Regsamkeit auch eine Neigung zu nervöser Erschöpfung verbunden, die mir als Erbteil meiner mütterlichen Herkunft im späteren Leben häufig zu schaffen gemacht hat." [2, S. 12]

Die Mutter erteilte Felix den ersten Unterricht im Lesen, Schreiben und Rechnen, Mit diesen Vorkenntnissen trat er als Sechsjähriger in eine Privatschule ein, die er zweieinhalb Jahre besuchte.
Klein erinnerte sich gern an diese Zeit, da er seinem Lehrer Krumbach die ersten naturwissenschaftlichen Anregungen und Unterweisungen verdankte. Zugleich lobte er die gute Pflege des Kopfrechnens an dieser Anstalt.

Seit dem Herbst 1857 besuchte F. Klein das achtklassige humanistische Gymnasium Düsseldorfs, das auf ein einseitig philologisch-humanistisches Bildungsideal ausgerichtet war. In diesem Unterricht standen solche methodische Prinzipien wie Anschaulichkeit und Anwendung des Stoffes weit im Hintergrund.
Das waren Gesichtspunkte der Unterrichtsgestaltung, die F. Klein später mit Nachdruck verfochten hat. Dennoch hat er die ihm gebotenen schulischen Sachverhalte mit großem Eifer aufgenommen, so dass in seinem Reifezeugnis eingeschätzt werden konnte:

"Mit leichtem und frohem Sinn hat Klein gearbeitet und für den Unterrichtsstoff große Teilnahme bewiesen und in betreff seiner fernen Bestrebungen sehr günstige Erwartungen erregt." [17, S. 149]

Seine Kenntnisse wurden in Deutsch und Religion als befriedigend, in Latein, Griechisch, Französisch, Hebräisch, Mathematik, Geschichte, Geographie und Naturkunde als gut bezeichnet. Die ausführlichen Urteile in Mathematik und Naturkunde lauteten:

"In der Mathematik ist seine Auffassung rasch und sicher, und hat er das Gelernte zur Anwendung durchgehends gleich zur Hand, besitzt also gute Kenntnisse, In der Naturkunde hat er ein recht bestimmtes Wissen von dem im Unterricht Vorgekommenen und drückt sich darüber sehr geläufig, klar und vollständig aus, hat also gute Kenntnisse." [17, S. 149]

Jedoch bot die humanistische Anstalt seinen früh erwachten naturwissenschaftlichen Neigungen kaum neue Anregung. Der Mathematikunterricht trug streng formalen Charakter. Durch seinen Freund und Klassenkameraden Wilhelm Ruer fand F. Klein Zugang zu naturwissenschaftlichen Erkenntnissen.
Der Vater Ruers, ein Apotheker, erläuterte den Jungen einfache chemische und biologische Vorgänge und führte mit ihnen Exkursionen durch. Auf diese Weise erwarb Klein erste chemische, botanische und zoologische Kenntnisse.

Durch die Bekanntschaft mit dem Leiter der kleinen Sternwarte Düsseldorfs, Robert Luther, gewann Klein den Zugang zu einer weiteren naturwissenschaftlichen Disziplin. Luther befasste sich mit der schwierigen Auffindung kleiner Planeten. Er ließ Klein an seinen astronomischen Beobachtungen teilhaben und bezog ihn in gewisser Weise in entsprechende Forschungen ein.
F. Klein nutzte in seiner frühen Jugendzeit alle Möglichkeiten, seinen naturwissenschaftlichen Neigungen nachzugehen. Das erste Lehrbuch, mit welchem er während seiner Schulzeit selbständig gearbeitet haben soll, war ein mehrbändiges mechanisches Werk von J. L. Weisbach. Über seine sonstigen Aktivitäten schrieb Klein selbst:

"Selbstverständlich experimentierte und bastelte ich nach besten Kräften; auch wurden mir durch meinen Vater einige Fabrikbesichtigungen ermöglicht. Hierbei interessierte mich vor allem das Naturwissenschaftliche im weitesten Sinne, vom rein Gedanklichen bis in das virtuos Technische hinein; ..." [2, S. 14]

In einem Industriezentrum Deutschlands aufgewachsen, bildete sich bei Klein bereits in seiner Jugend ein positives Verhältnis zu den Naturwissenschaften und zur Technik heraus. Obwohl er später die mathematische Richtung einschlug, hat er sich stets diese Gesamtsicht bewahrt.

3 Studium, Promotion, Habilitation

Kleins Studienzeit und die Jahre der Qualifizierung waren dadurch gekennzeichnet, dass er mit einer Reihe der hervorragendsten Mathematiker seiner Zeit bis zu seinem 23. Lebensjahr bereits persönlich bekannt wurde. Diese persönlichen Bekanntschaften hatten für ihn entscheidendes Gewicht, sagte er doch selbst:

"Überhaupt habe ich in meinen Studienjahren weit mehr durch den persönlichen Verkehr, wie durch Vorlesungen gelernt." [2, S. 16]

F. Klein hatte das Glück, dass zwei recht bedeutende Mathematiker seine Lehrer waren, J. Plücker und A. Clebsch. Als Vertreter der sich im 19. Jahrhundert in starkem Maße entwickelnden Geometrie wiesen sie Klein in diese Richtung. Das geschah, obwohl Klein mit Studienbeginn besonders physikalische Interessen bekundete, die er bis zu seiner Berufung zum Professor für Mathematik wachhielt und die auch später nie vollkommen versiegten.

Mit 16 1/2 Jahren bezog Klein im Herbst 1865 die Universität in Bonn. Entsprechend seinen Neigungen begann er ein Studium der Mathematik und Naturwissenschaften. Seine Absicht bestand darin, eine möglichst breite Basis für eine spätere Spezialisierung zu schaffen.
So befasste er sich mit Mathematik und Physik, mit Botanik und anderen beschreibenden Naturwissenschaften. Seine Wohnung im Poppelsdorfer Schloss, das zugleich die dortigen naturwissenschaftlichen Sammlungen barg, bot ihm günstige Gelegenheit zu entsprechenden Studien.

Mathematik wurde in Kleins Bonner Zeit vornehmlich von R. Lipschitz gelesen, der aus der Königsberger Schule stammte. Klein, der Lipschitz' wissenschaftliche Leistung erst später erkannte, fühlte sich zu ihm nicht hingezogen, da er nur sehr elementare Vorlesungen bot. Aus diesem Grunde erlahmte sein Interesse an mathematischen Vorlesungen sehr bald.
Er hörte während seiner Bonner Studienzeit nur folgende Mathematikvorlesungen: analytische Geometrie und analytische Mechanik bei Lipschitz, Zahlentheorie, Potentialtheorie und eine "sehr konfuse Differentialrechnung eines Privatdozenten". [11, Bd. 3/9, S. 166]

3 Hauptgebäude der Universität in Bonn (In: Braubach, M.: Geschichte der Universität Bonn. Krefeld 1950, S. 16/17.)

So fehlte ihm vor allem eine Vorlesung über Integralrechnung, was er bald als Mangel seiner mathematischen Allgemeinbildung vermerkte.
Kleins Hauptinteresse galt in Bonn der Physik, die durch Plücker vertreten wurde. Plücker war auf physikalischem Gebiet ebenso bedeutend wie auf mathematischem. Hervorragende Ergebnisse hatte er im Bereich der elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen erzielt.

Plücker vereinigte das mathematische und physikalische Ordinariat in Bonn auf sich, las aber vorwiegend Experimentalphysik. Es war besonders diese Experimentalphysik und die Persönlichkeit Plückers, die den jungen Klein anzogen.
Höhere physikalische Vorlesungen oder ein physikalisches Praktikum besuchte er nicht. Entscheidend war, dass Plücker, der Kleins Interesse und rasche Auffassungsgabe bald erkannt hatte, ihn bereits Ostern 1866 zum Assistenten wählte. Plücker führte Klein nicht nur in Lehraufgaben, sondern auch in seine eigene Forschungstätigkeit ein.
Die Teilnahme an den Lehraufgaben - Klein half, die Vorlesungen in Experimentalphysik vorzubereiten und durchzuführen - bestimmte Kleins Ziel, sich vor allem der Physik zuzuwenden:

"Ich hatte dabei immer die Absicht, mich nach Erlangung der notwendigen mathematisch-naturwissenschaftlichen Kenntnisse auf das Gebiet der Physik zu spezialisieren. Der Plan wurde aber durch eine Kette unvorhergesehener Umstände vereitelt." [2, 5.14]

Klein begegnete Plücker, als sich dieser nach einer langen Phase erfolgreicher physikalischer Forschung wieder der Mathematik zuwandte. In früheren Arbeiten, besonders in den Werken "Analytisch-geometrische Entwicklungen" (2 Bände 1828, 1831) und "System der analytischen Geometrie" (1834), hatte Plücker einen Neuaufbau der analytischen Geometrie vollzogen. Gestützt auf eine aus der Mongeschen Tradition weitergebildete Methode verschmolzen bei Plücker Konstruktion und analytische Formel.
Klein schrieb später über die Geometrie Plückers:

"In der Plückerschen Geometrie wird die bloße Kombination von Gleichungen in geometrische Auffassung übersetzt und rückwärts durch letztere die analytische Operation geleitet. Rechnung wird nach Möglichkeit vermieden, dabei aber eine bis zur Virtuosität gesteigerte Beweglichkeit der inneren Anschauung, der geometrischen Ausdeutung vorliegender analytischer Gleichungen ausgebildet und in reichem Maße verwendet." [7, Bd. 1, S. 122]

Plückers bedeutendste Leistung auf dem Gebiet der Geometrie war die Einführung homogener Koordinaten, insbesondere der Linienkoordinaten.
Als Assistent von Plücker kam Klein unmittelbar mit dessen sogenannter Liniengeometrie in Berührung. Plücker arbeitete zu dieser Zeit an seinem Werk "Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die gerade Linie als Raumelement" und bezog Klein aktiv ein.
F. Klein erläuterte den Wert der Einführung von Linienkoordinaten:

"Die Gleichung der Geraden $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ist in den Koeffizienten u und den Koordinaten x völlig symmetrisch. Plücker fasst nun die x als veränderliche Größen auf,

deren jedes System eine Gerade durch den festgehaltenen Punkt x_1, x_2, x_3 bezeichnet. Er nennt die u_1, u_2, u_3 "Linienkoordinaten"; in ihnen drückt die obenstehende Gleichung das durch den Punkt gehende Strahlenbüschel, d.h. diesen Punkt selber aus. So gut wie ich die lineare Relation als Gleichung einer Geraden in Punktkoordinaten auffassen kann, so berechtigt bin ich auch, die Gleichung eines Punktes in Linienkoordinaten in ihr zu sehen.
Mit diesem Gedanken des beliebigen "Raumelements", das zum Ausgangspunkt der Geometrie gewählt werden kann, ist nun eine völlige Klärung des Poncelet-Gergonneschen Prinzips der Dualität gegeben: Weil die Gleichung für die vereinigte Lage von Punkt und Gerade (im Raume von Punkt und Ebene) in den zweierlei Elementen symmetrisch ist, kann man in allen Sätzen, die auf bloße Verknüpfung der beiden Elemente begründet sind, die beiden Worte vertauschen!" [7, Bd. 1, S. 123 f.]

Durch die Beteiligung an Plückers Werk holte sich Klein das Rüstzeug für seine eigenen geometrischen Arbeiten. Allerdings beanspruchte ihn diese Aufgabe derart, dass er sein Studienziel, sich breite mathematisch-naturwissenschaftliche Grundkenntnisse anzueignen, nicht in vollem Maße realisieren konnte.
Als Plücker im Mai 1868 starb, zu einem Zeitpunkt, als erst ein Teil seines Werkes druckfertig vorlag, wurde Klein noch mehr auf das Gebiet der Liniengeometrie gedrängt.

A. Clebsch, der zu dieser Zeit in Gießen wirkte, übernahm die Herausgabe der Plückerschen "Liniengeometrie". Er übertrug Klein die Aufgabe, den zweiten Teil des Plückerschen Werkes zu vollenden und für den Druck vorzubereiten.
Auf diese Weise kam Klein mit seinem zweiten bedeutenden Lehrer in Berührung. In zahlreichen persönlichen Gesprächen mit Clebsch erhielt Klein vielfältige Anregungen, seine liniengeometrischen Arbeiten zu vertiefen.

Clebsch wies u.a. auf die Dissertation seines Schülers J. Lüroth und die Ergebnisse des Italieners G. Battaglini hin. Battaglini hatte die Theorie der durch eine, zwei oder drei algebraische Gleichungen ersten und zweiten Grades zwischen den Koordinaten der Geraden definierten Gebilde mit moderneren Hilfsmitteln behandelt als Plücker. Klein fand daran anknüpfend ein Thema für seine Dissertation:

"Es wurde mir nicht ganz leicht, von den mehr elementaren Methoden der Plückerschen Darstellung zu dem konsequenten Verfahren der projektiven Koordinaten überzugehen, wie es von Battaglini gehandhabt wurde. Das Studium der Lehrbücher von Salmon-Fiedler und mancher Originalabhandlung half mir über diese Schwierigkeit weg.
Ich bemerkte dann aber bald, dass die von Battaglini zugrunde gelegte kanonische Form der Komplexe zweiten Grades[1] nicht die allgemeine sein konnte. Damit hatte ich das Thema, aus dem ich hoffte, eine Dissertation gestalten zu können, nämlich die Herstellung einer wirklich allgemeinen kanonischen Form." [1, Bd. 1, S. 3]

F. Klein bewältigte diese Aufgabe, indem er die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten nutzte und indem er sich auf eine Arbeit von Weierstraß zur Theorie

[1] "Ein Linienkomplex des n-ten Grades umfasst eine dreifach unendliche Anzahl gerader Linien, welche im Raume in einer solchen Art verteilt sind, dass diejenigen geraden Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, einen Kegel der n-ten Ordnung bilden ..." [1, Bd. 1, S. 11]

der Elementarteiler stützte.
Lipschitz, der Klein in Bonn zu prüfen hatte, hatte ihn auf die noch im Druck befindliche Darstellung von Weierstraß hingewiesen. Diese Beschäftigung mit einer Arbeit des bedeutenden Berliner Gelehrten gab Klein gewiss den entscheidenden Anlass, ein Jahr später seine Studien in Berlin fortzusetzen.

Doch zunächst wandte sich Klein nach Göttingen. Von Neujahr bis Mitte August 1869 studierte er dort bei Clebsch, der zum Winter 1868 von Gießen nach Göttingen berufen worden war. F. Klein verfolgte nun nach seiner Promotion am 12. Dezember 1868 mit Nachdruck das Ziel, breite Grundlagenkenntnisse zu gewinnen und sich nicht eng an eine mathematische Schule zu binden.

In der Königsberger Schule aufgewachsen, hatte sich Clebsch eng an Jacobis Schüler O. Hesse angeschlossen und zugleich bei F. Neumann auf mathematisch-physikalischem Gebiet studiert.
So hatte sich Clebsch zu einem sehr vielseitigen Mathematiker entwickelt, der Einfluss auf Kleins Arbeitsrichtung und Arbeitsweise ausübte.

Clebsch lieferte wichtige Ergebnisse auf den Gebieten der mathematischen Physik (Optik, Hydrodynamik) und Mechanik (allgemeine Theorie der freien Schwingungen fester elastischer Körper, Theorie der Gleichgewichtsbedingungen für Platten). Er befasste sich mit Arbeiten zur Invariantentheorie, Variationsrechnung und der Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Auf all diesen Ergebnissen konnte Klein später maßgeblich aufbauen. Entscheidende Bedeutung hatten jedoch Clebschs Beiträge zur algebraischen Geometrie, wobei er die Tradition von Jacobi und dem Schweizer J. Steiner mit den Arbeiten der Engländer A. Cayley, J. J. Sylvester und des Iren G. Salmon verband.

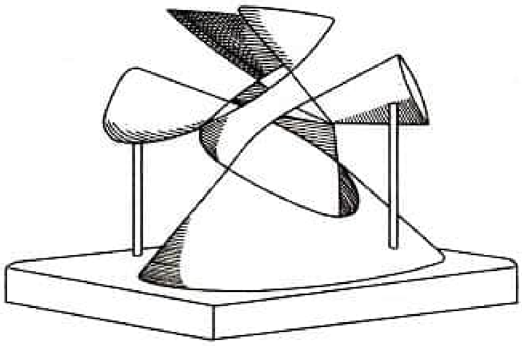
Die Vielseitigkeit seiner Forschungen führte Clebsch zu interessanten Entdeckungen von Übergängen zwischen einzelnen früher heterogen betrachteten mathematischen Gebieten. Das betraf in besonderem Maße die Anwendung der Abelschen Funktionen auf die Geometrie.
Dieses Erkennen von Zusammenhängen übertrug sich in starkem Maße auf Klein und prägte sich bei ihm zur vollendeten Meisterschaft, Das Erfassen übergreifender Probleme war zugleich durch B. Riemann beeinflusst, dessen mathematische Ergebnisse Clebsch seine Schüler lehrte. Mit dem Werk "Theorie der Abelschen Funktionen", welches Clebsch mit seinem Schüler P. Gordan verfasste, wurde ein erfolgreicher Weg für das Eindringen in das Riemannsche Gedankengut gewiesen.
Hier lag der Ursprung für Kleins spätere eingehende Beschäftigung mit Riemanns Arbeiten.

Die Göttinger Studien unter Clebsch waren für Klein eine fruchtbare Zeit tieferen Eindringens in mathematische und mathematisch-physikalische Probleme. Zugleich fühlte er sich zu eigener Aktivität ermutigt:

"Das wichtigste in der Wirksamkeit von Clebsch ist meiner Ansicht nach sein moralischer Einfluss gewesen, indem er es nämlich erreichte, uns neben tiefem wissenschaftlichem

Interesse Vertrauen in die eigene Kraft einzuflößen." [7, Bd. 1, S. 297]

Das Ergebnis war, dass Klein bereits im Juni 1869 in den "Göttinger Nachrichten" eine bedeutende Arbeit "Zur Theorie der Komplexe ersten und zweiten Grades" publizierte. Darin zeigte er u. a. die Beziehungen zwischen der unendlichen Anzahl von Komplexen zweiten Grades und der entsprechenden singulären Fläche von E. E. Kummer. Die 1864 entdeckte "Kummersche Fläche", mit welcher sich Klein auch in weiteren Arbeiten befasste, ist ein kompliziertes Gebilde,



4 Ein Modell der Kummerschen Fläche (In: Katalog mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, Hrsg. v. W. v. Dyck, München 1892, S. 265.)

Die Fläche hängt mit einer Gleichung sechzehnten Grades zusammen. C. Jordan hatte 1868 entdeckt, dass diese Gleichung auf eine Gleichung sechsten Grades und mehrere quadratische reduzierbar ist.
Klein bestätigte dies in seiner Arbeit von 1869 durch geometrische Entwicklungen. So erzielte er bereits mit zwanzig Jahren wichtige mathematische Resultate. In einer relativ kurzen Zeit, bis zum Mai 1869, schloss er auch die Arbeit an dem Plückerschen Werk ab.

Die fruchtbringende wissenschaftliche Tätigkeit unter Clebsch wurde dadurch unterstützt, dass sich unter dessen Leitung eine ganze Reihe hervorragender junger Gelehrter zusammengeschlossen hatte. Zu ihnen gehörten A. von Brill, P. Gordan, F, Lindemann, J. Lüroth und M.Noether, die alle bedeutende Professoren wurden.
Klein pflegte mit ihnen enge wissenschaftliche Beziehungen, die er zu einem großen Teil auch später fortsetzte. Mit A. von Brill beteiligte er sich u. a., angeregt durch Clebsch, an der Gründung des mathematischen Vereins zu Göttingen 1869.

F. Klein hatte seine Orientierung auf Physik noch nicht aus den Augen verloren. In Göttingen empfing er dafür jedoch keine bedeutenden Anregungen. W. Weber, der dieses Fach an der Göttinger Universität vertrat, war kein Anziehungspunkt für ihn. Klein äußerte sich darüber folgendermaßen. Vor der Mathematik

"... trat abermals die Physik in den Hintergrund, obwohl ich bald in das Wilh. Webersche Haus eingeführt wurde. Denn die damals von Webers Schülern betriebene Kleinarbeit, die ohne neue Gesichtspunkte nur das Ziel hatte, ein feststehendes physikalisches Weltbild im einzelnen zu stützen und auszubauen, vermochte in keiner Weise eine Anziehung auf mich auszuüben." [2, S. 15]

Im Sinne seines Strebens nach Erweiterung des Gesichtskreises und nach Kennenlernen anderer mathematischer Schulen wandte sich Klein Ende August 1869 nach Berlin. Mit Weierstraß, der hier eine vorherrschende Stellung einnahm, konnte er sich jedoch nicht recht anfreunden, In seinen späteren Aufzeichnungen schrieb Klein über die Ursachen dafür:

"Nach meinen Erinnerungen ... war Weierstraß' Stellung die einer absoluten Autorität, deren Lehren die Zuhörer hinnahmen als unanfechtbare Norm, oft ohne sie im tieferen Sinn recht aufgefasst zu haben.
Ein Zweifel durfte nicht aufkommen, eine Kontrolle war schon deshalb schwer möglich, da Weierstraß außerordentlich wenig zitierte... seinem Ideal der Lückenlosigkeit nachstrebend, richtete er den Gang so ein, dass er ... nur auf sich selbst zurückzugreifen brauchte." [7, Bd. 1, S. 284]

So besuchte Klein aus Widerspruchsgeist keine Vorlesung von Weierstraß, wenn er es auch spätet bedauerte. Nur eine Vorlesungsreihe über elliptische Funktionen schrieb sich Klein damals ab und drang mit Hilfe seines Studienfreundes L. Kiepert in diese Theorie ein. Später hat Klein diese Vorlesung bei eigenen Arbeiten über diesen Gegenstand oft benutzt.

Zu den wenigen Veranstaltungen, die Klein in Berlin besuchte, gehörte eine Vorlesung über die Theorie der quadratischen Formen bei L. Kronecker. Daneben arbeitete sich Klein in das Gebiet der Zahlentheorie ein. Er suchte ständig den persönlichen Gedankenaustausch und beteiligte sich deshalb aktiv an dem mathematischen Seminar von Kummer und Weierstraß.
Dabei betonte Klein aber, "immer nur eigene Gedanken verfochten" [7, Bd.1, S. 284] zu haben. Ein Ausdruck dafür war ein Seminarvortrag Kleins zu Fragen der nichteuklidischen Geometrie.

In Berlin erfuhr Klein erstmals von den Arbeiten N.I. Lobatschewskis und J. Bolyais. Über diese Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie wurde allerdings nicht in Vorlesungen oder anderen Lehrveranstaltungen vorgetragen. Klein lernte sie von dem Österreicher O. Stolz kennen, der sich bereits habilitiert hatte und in Berlin noch einmal studierte.

Die Originalwerke hat Klein nicht gelesen. Dennoch erkannte er die Beziehungen zwischen Arbeiten des Engländers A. Cayley und der nichteuklidischen Geometrie, die Cayley selbst nicht aufgedeckt hatte. In einem Lehrbuch von Salmon-Fiedler hatte Klein 1869 über die Theorie Cayleys von 1859 gelesen.
Cayley hatte eine allgemeine projektive Maßbestimmung entwickelt, mit deren Hilfe er die Stellung der metrischen Geometrie innerhalb der projektiven Geometrie bestimmte.

Die Verknüpfung dieser projektiven Maßbestimmung Cayleys (vgl. auch S. 32 f.) mit der nichteuklidischen Geometrie vollzog Klein erstmals in einem Berliner Seminarvortrag:

"Im Februar 1870 hielt ich einen Vortrag im Weierstraßschen Seminar über Cayleys Maßbestimmung, den ich mit der Frage schloss, ob hier nicht eine Übereinstimmung mit Lobatschewski vorläge. Ich erhielt jedoch als Antwort, das seien doch wohl ganz

getrennte Gedankenkreise; für die Grundlagen der Geometrie komme wohl vor allen Dingen die Eigenschaft der Geraden in Betracht, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu sein.
Durch diese ablehnende Haltung ließ ich mir imponieren und schob die schon gefasste Idee beiseite." [7, Bd. 1, S. 152]

Möglicherweise ist dieser Zusammenstoß eine Ursache für die spätere Abneigung, die Berliner Mathematiker, besonders Weierstraß, Kronecker und deren Nachfolger, Klein entgegenbrachten.
Diese Mathematiker äußerten sich auch später abfällig über Kleins immer stärker hervortretendes Organisationstalent. Die Abneigung verbanden sie - besonders G. Frobenius - mit blinden Vor- und Fehlurteilen auch hinsichtlich der mathematischen Leistungen von Klein. [Vgl. 25, S. 80, 131]

Kennzeichnend dafür ist auch, dass F. Klein relativ spät, erst im Jahr seiner Emeritierung 1913 zum korrespondierenden Mitglied der Berliner Akademie gewählt wurde.
Zum Zeitpunkt seines Berliner Aufenthaltes erhielt Klein jedoch eine recht positive Beurteilung durch Kummer und Weierstraß:

"Berlin, den 31. Januar 1870
Dr. phil. Felix Klein aus Düsseldorf hat ... an den Übungen des Seminars den lebhaftesten Anteil genommen und hat in demselben mehrere Vorträge gehalten, welche namentlich in formaler Beziehung als ganz ausgezeichnet zu beurteilen sind. Da er auch seine wissenschaftlichen Forschungen mit regem Eifer und unermüdlichem Fleiße, unterstützt durch gutes Talent, betreibt, so steht zu erwarten, dass er als Lehrer der Mathematik wissenschaftlich sich auszeichnen und eine sehr ersprießliche Wirksamkeit ausüben wird.
gez.: Kummer
gez.: Weierstraß" [17, S. 150]

Dieses Gutachten zeigt, dass die Gelehrten um eine objektive Einschätzung der Leistungen bemüht waren. Die Beurteilung wurde, beim Kultusministerium eingereicht und war mit einer Seminarprämie verbunden.

Als wichtigstes Ereignis seiner Berliner Zeit wertete Klein jedoch die Bekanntschaft mit dem Norweger S. Lie, den er Ende Oktober 1869 erstmals im Berliner Mathematischen Verein traf. Klein und Lie entdeckten viele gemeinsame Interessen. Wie Klein mied auch Lie die Vorlesungen von Weierstraß.
Beide hatten von verschiedenen Ausgangspunkten aus über dieselben oder ähnlichen Fragen gearbeitet. So schlossen sich Klein und Lie eng zusammen, zumal sie in Berlin für ihre geometrischen Probleme nur wenig Interesse fanden.

Um stärkere Anregungen für ihre Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der höheren Geometrie zu erhalten und um ihren Gesichtskreis insgesamt zu erweitern, begaben sich Klein und Lie Ende April 1870 nach Paris. Dieser Studienaufenthalt musste zwar wegen des Ausbruches des deutsch-französischen Krieges Mitte Juli 1870 abgebrochen werden, war aber für ihre weitere wissenschaftliche Entwicklung von hohem Wert. Eine anschließend geplante Reise nach England musste wegen des Krieges entfallen.

Dass die deutsche Beamtenschaft zu diesem Zeitpunkt deutlich nationalistisch gesinnt war, bekam Klein zu spüren. Auf Anregung seines Vaters hatte er im Kultusministerium um Empfehlungsschreiben für seine Auslandsreisen gebeten. Als Antwort erhielt er:

"Wir bedürfen keiner französischen oder englischen Mathematik." [2, S. 16]

Klein strebte jedoch danach, alle neuen mathematischen Erkenntnisse in sich aufzunehmen, er hat in späteren Jahren immer wieder auf die Auswertung ausländischer Erfahrungen hingewiesen und Bibliotheken sowie mathematische Lesezimmer mit entsprechenden Publikationen bereichert.

Aus der Berliner Zusammenarbeit von Klein und Lie war eine Arbeit entstanden "Sur une certaine famille de courbes et de surfaces" [Über eine gewisse Familie von Kurven und Oberflächen], die durch M. Chasles der Pariser Akademie zur Aufnahme in die Comptes Rendus vorgelegt wurde.
Auf diese Weise führten sie sich in Paris ein und suchten sofort engen Kontakt zu den jungen französischen Mathematikern, besonders zu dem Algebraiker C. Jordan und zu dem Geometer G. Darboux.

Die damaligen Untersuchungen der Franzosen zu Problemen der metrischen Geometrie, zur Geometrie der reziproken Radien und zur Benutzung des Kugelkreises waren in Deutschland noch unbekannt. Klein und Lie bemerkten die enge Verwandtschaft mit ihren eigenen liniengeometrischen Arbeiten und erhielten dadurch vielfältige Anregungen.

Diese beiden Mathematiker arbeiteten, Zimmer an Zimmer wohnend wie in Berlin, eng zusammen. Höhepunkt dieser gemeinsamen Tätigkeit bildete eine Abhandlung "Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten". Das Entstehen der Grundgedanken zu dieser Abhandlung illustriert ihre schöpferische Zusammenarbeit:

"Ich war - Anfang Juli 1870 - eines Morgens früh aufgestanden und wollte gerade ausgehen, als mich Lie, der noch im Bette lag, in sein Zimmer rief und mir den von ihm in der Nacht gefundenen Zusammenhang der Haupttangentenkurven einer Fläche mit den Krümmungskurven einer anderen Fläche in einer Weise auseinandersetzte, dass ich kein Wort verstand.
(Es handelte sich um die Linienkugeltransformation, aber statt mit Kugeln operierte er halbanschaulich mit geradlinigen Hyperboloiden, die durch einen festen reellen Kegelschnitt gingen.)
Jedenfalls versicherte er mir, dass danach die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche algebraische Kurven 16. Ordnung sein müssten. Am Vormittage kam mir dann, während ich das Conservatoire des Metiers besichtigte, der Gedanke, dass es sich um eben jene Kurven 16. Ordnung handeln müsste, welche schon in... meiner "Theorie der Linienkomplexe ersten und zweiten Grades" aufgetreten waren, und es gelang mir rasch, die... von der Lieschen Transformation unabhängigen geometrischen Betrachtungen durchzuführen.

Als ich am Nachmittage um 4 Uhr nach Hause zurückkam, war Lie ausgegangen, und ich hinterließ ihm eine Zusammenstellung meiner Resultate in einem Briefe." [1, Bd. 1, S. 97]

Dieser rege wissenschaftliche Verkehr wurde unterbrochen, als Frankreich am 14. Juli 1870 Deutschland den Krieg erklärte. Der Deutsch-Französische Krieg von 1870/71 erwuchs aus der prinzipiellen Feindschaft des französischen Bonapartismus gegen die Bildung eines einheitlichen deutschen Nationalstaates.
Dieser Nationalstaat wurde im Verlaufe des Krieges in Form des Kaiserreiches gebildet. Am 18.1.1871 erfolgte in Versailles die Kaiserproklamation des preußischen Königs Wilhelms I. Die Einheit Deutschlands war für die Entwicklung von Wirtschaft und Wissenschaft ein förderliches Moment.
Diese durch den Kompromiss von Bourgeoisie und Adel erzielte Reichseinigung barg jedoch von Beginn an einen reaktionären, militaristischen Charakter, der innenpolitisch auf die Unterdrückung der erstarkenden Arbeiterklasse und außenpolitisch auf die Neuaufteilung der Einflusssphären in der Welt gerichtet war.

F. Klein, in patriotischer Gesinnung erzogen, kehrte im Juli 1870 nach Deutschland zurück und meldete sich als Kriegsfreiwilliger.
Als er aus gesundheitlichen Gründen abgelehnt wurde, widmete er sich weiter mathematischen Studien. Er konnte noch vier Wochen lang ungestört mit Lie mathematisch korrespondieren, bevor er Mitte August 1870 dem Bonner Nothelferkorps beitrat.

Lie, der als Neutraler in Paris zurückgeblieben war, erwuchsen daraus aber ungeahnte Schwierigkeiten. Auf Grund der deutsch geschriebenen Briefe Kleins, in denen die Rede von "Komplexen" und "Kugeln" war, wurde Lie als Spion verhaftet. Erst nach vier Wochen Haft konnte Lie durch Vermittlung von Darboux entlassen werden.

Den harten Anforderungen des Krieges war Klein nicht gewachsen. Mangelhafte Verpflegung und überall herrschende Krankheiten untergruben seine Gesundheit, so dass er bereits Ende September typhuskrank ins Elternhaus transportiert wurde. Klein erholte sich jedoch relativ rasch, so dass er sich bereits am 7. Januar 1871 habilitieren konnte. Dabei kam ihm zugute, dass seine bisherigen Veröffentlichungen, die bedeutende Ergebnisse auf geometrischem Gebiet darstellten, als Habilitationsschrift anerkannt wurden:

"Man ließ die von mir bereits publizierten Arbeiten als Habilitationsschrift gelten. Ich hielt vor der im Hause des Dekans bei Wein und Kuchen versammelten Honorenfakultät (ca. acht Mitglieder), mit am Tische sitzend, einen Vortrag über ein von mir konstruiertes Modell der allgemeinsten Plückerschen Komplexfläche und antwortete dann noch auf einige Fragen, die Clebsch im Anschluss daran an mich richtete." [Nach 11, Bd. 3/9, S. 191]

Kleins Vorliebe für mathematische Modelle, für die sinnfällige Darstellung mathematischer Zusammenhänge, rührte von Plücker her, der diese Anregung durch M.Faraday empfangen hatte. Dieses Interesse war bei Klein gefördert worden, als er 1868 das Modell Ch. Wieners einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden kennengelernt hatte.

Während seines Berliner Aufenthaltes hatte Klein, unterstützt durch seinen Düsseldorfer Freund A. Wenker, der in den astronomischen Werkstätten von Pistor und Martins arbeitete, vier Modelle zur Liniengeometrie (von der Singularitätenfläche und drei Komplexflächen des quadratischen Komplexes) angefertigt.

In Paris hatte Klein weitere Anregungen für die konstruktive Darstellung geometrischer Gebilde erhalten.
Er hatte wiederholt die umfassende Sammlung mathematischer Modelle besucht, die von den Schülern Monges angefertigt und dem Conservatoire des Arts et des Metiers angegliedert worden waren. Hier und bei seinen späteren Besuchen der Technischen Hochschulen in Darmstadt und Karlsruhe erkannte Klein den Umfang der Vorarbeiten, die von der darstellenden Geometrie für die anschauliche Erfassung höherer Raumgebilde bereits geleistet worden waren.

Diese Erkenntnisse und eigene wissenschaftliche Arbeiten auf diesem Gebiet bildeten den Ausgangspunkt dafür, dass er sich an allen seinen Wirkungsstätten um die Einrichtung umfassender Modellsammlungen bemühte und er später im Vorstandsrat des 1903 gegründeten Deutschen Museums für Meisterwerke der Naturwissenschaft und Technik in München mitarbeitete.

Die Zeit nach seiner Habilitation verbrachte Klein 1871/72 als Privatdozent in Göttingen. Er wohnte in einem Haus in der Gronertorstraße, dessen Besitzer nur an Privatdozenten und ältere Studenten vermietete.
In diesem Hause traf sich regelmäßig ein Kreis jüngerer Dozenten, die sich zu einem wissenschaftlichen Kränzchen, "Die Eskimos", zusammengeschlossen hatten. Dazu gehörten neben Klein der Physiker E.Riecke, der Anatom F. S. Merkel, der Philosoph C. Stumpf, der Chemiker B. Tollens, der Mineraloge M.Bauer.
Abends wurde auf dem Zimmer eines der Mitglieder über einen wissenschaftlichen Gegenstand vorgetragen, anschließend im Gasthaus weiter diskutiert. In der Teilnahme an diesen Zusammenkünften äußerte sich Kleins breites wissenschaftliches Interesse.

Seine Lehrtätigkeit in dieser Zeit zeigte außerdem, dass er sich noch immer einen Weg zur Physik offenhielt. Für den Sommer 1871 kündigte er neben einer zweistündigen Vorlesung über höhere Geometrie eine vierstündige Vorlesung über theoretische Optik an.
Zu dieser zuletzt genannten Vorlesung fanden sich neun Hörer ein, was für die damalige Zeit in Göttingen eine beachtliche Zahl war.
Auch im folgenden Semester schwankte Klein noch zwischen Physik und Mathematik. Er las u. a. sechs Wochenstunden über die "Wechselwirkungen der Naturkräfte und das Gesetz von der Erhaltung der Kraft".

Seine Publikationen jedoch, die zu dieser Zeit in rascher Folge erschienen, gehörten der Mathematik an. Sie offenbarten in erster Linie seine fundamentalen Einsichten in die nichteuklidische Geometrie, die er vor allem in ausgedehnten Debatten mit O. Stolz gewonnen hatte.
Diese Erkenntnisse machten den jungen Forscher so bekannt, dass er dreiundzwanzigjährig als ordentlicher Professor der Mathematik nach Erlangen berufen wurde. Die

Berufung erfolgte auf Empfehlung von Clebsch sowie auf Grund eines ausführlichen Gutachtens des Physikers E. von Lommel, Kleins späterem Schwager, im Antrag der Erlanger philosophischen Fakultät an das zuständige Ministerium.
Mit dieser Berufung war Kleins Hinwendung zur Mathematik endgültig entschieden.

4 Professor in Erlangen, Geometrie

Als Klein zum Wintersemester 1872 nach Erlangen berufen wurde, gehörte er bereits zu den bedeutendsten Vertretern der Geometrie des 19. Jahrhunderts.
Seine Leistungen auf dem Gebiet der höheren Geometrie gipfelten in dem sog. "Erlanger Programm", einer im Oktober 1872 niedergelegten Programmschrift, mit welcher der junge Ordinarius sein Amt antrat. Diese Arbeit mit dem Titel "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" beruhte auf Grundideen von Lie und Klein, die Klein zu einem wirkungsvollen Abschluss brachte.

Die Darstellung schlang ein einendes Band um alle verschiedenen Zweige der Geometrie, welche sich bis zu diesem Zeitpunkt herausgebildet hatten. Klein erreichte damit ein lange verfolgtes Ziel:

"Mein Interesse war schon von meiner Bonner Zeit her darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden, äußerlich einander unähnlicher und doch ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. Innerhalb der Geometrie gab es in dieser Hinsicht noch viel für mich zu tun." [1, Bd. 1, S. 52]

Die ungeheure mathematische Produktivität des 19. Jahrhunderts, die sowohl aus den Anforderungen der Industriellen Revolution resultierte als auch durch innerwissenschaftliche Entwicklungen bedingt war, hatte zu einer zunehmenden Spezialisierung mathematischer Disziplinen geführt.
Es gab nur noch wenige Gelehrte, die die Mehrzahl der Gebiete überschauten. Zu diesen gehörten Gauß, Riemann, H. Poincare und auch F. Klein.

Durch die Kenntnis der verschiedensten Gebiete der Mathematik gelang es F. Klein, die neuen, scheinbar divergierenden Arbeitsrichtungen der Geometrie, die neben die antike euklidische Geometrie getreten waren, in ein ordnendes System zu bringen.
Insbesondere musste die nichteuklidische Geometrie eingeordnet werden. Die geometrische Bewegung des 19. Jahrhunderts war von G. Monges mathematischer Schule an der Pariser Ecole polytechnique ausgegangen. Anknüpfend an die darstellende Geometrie bildete sich die projektive Geometrie zur selbständigen Disziplin heraus.

Die Ansätze zur projektiven Geometrie reichen zwar bis in die Antike zurück, und im 17. Jahrhundert wurden wichtige Einzelergebnisse auf diesem Gebiet erzielt, aber der entscheidende Durchbruch gelang erst mit J. V. Poncelet, einem Schüler von Monge. Poncelet legte den Begriff der Zentralprojektion zugrunde und unterschied zwischen "projektiven" und "nichtprojektiven" Eigenschaften von Figuren, d.h. zwischen Eigenschaften, die bei Zentralprojektion stets erhalten bleiben bzw. im allgemeinen zerstört werden.
Von Frankreich aus verbreitete sich die Pflege der projektiven Geometrie in ganz Europa. Die analytischen Hilfsmittel dieser Geometrie wurden vor allem von A. F. Möbius und J. Plücker geschaffen. Auch Clebsch hatte in analytischer Richtung gearbeitet.
Der Schweizer J. Steiner und der deutsche Mathematiker Ch. von Staudt vollende-

ten einen Aufbau der projektiven Geometrie ohne analytische Hilfsmittel (synthetische Richtung).

Klein war mit Hilfe seiner Lehrer und durch den Gedankenaustausch mit anderen Mathematikern tief in die Hauptprobleme der höheren Geometrie seiner Zeit eingedrungen. Dazu gehörten das Klären der Beziehung zwischen projektiver Geometrie und metrischen Verhältnissen, die Erweiterung des traditionellen kartesischen Koordinatenbegriffs, das Problem der Dimension des Raumes und der Beweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie, Klein hat mit wichtigen Ergebnissen zur Lösung dieser Probleme beigetragen. Seine Arbeit auf diesem Gebiet stellte zugleich einen Schritt auf dem Weg zur Systematisierung der Geometrie dar.

Der Aufbau einer rein projektiven Geometrie erforderte die von metrischen Betrachtungen unabhängige Begründung der projektiven Geometrie. Poncelet, Möbius und Steiner hatten noch metrische Betrachtungen beim Aufbau dieser Disziplin herangezogen.
Das für die Definition projektiver Koordinaten entscheidende Doppelverhältnis beruhte noch auf einer metrischen Begriffsbestimmung. Ch. von Staudt, in dessen Ideen Klein mit Hilfe seines Studienfreundes O. Stolz eindrang, wies den entscheidenden Weg.
Es gelang Klein, ohne die Arbeiten von Staudts selbst gelesen zu haben, die Grundgedanken zu erfassen und eine noch bestehende Inkonsequenz zu beseitigen. Er gab als erster die auf dem (metrikfreien) Doppelverhältnis beruhende Definition der projektiven Koordinaten metrikfrei an.

Den Übergang zur beliebig hohen (aber endlichen) Dimension des Raumes vollzogen Mathematiker des 18. und 19. Jahrhunderts schrittweise mit zunehmendem Erfolg. Cayley und Graßmann handhabten um 1846 die entsprechenden Begriffe.
Nachdem Riemann sich in seinen Untersuchungen zur Analysis situs (Topologie) 1854 mit Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen befasst hatte, verwendeten zahlreiche Mathematiker derartige Überlegungen erfolgreich.
Plücker, der mit seiner Liniengeometrie zu ihnen gehörte, hatte Klein besonders beeinflusst, Plücker hatte gezeigt, dass Geraden, Ebenen, Kreise, Kugeln als Elemente (Raumelemente) verwendet werden können, um eine Geometrie darauf zu begründen.
Die Anzahl der Dimensionen einer besonderen Form der Geometrie konnte damit eine beliebige positive ganze Zahl sein, die von der Anzahl der zur Definition des "Elements" notwendigen Parameter abhängt.

Der neue Raumbegriff war jedoch harten Angriffen ausgesetzt, da der mehr als dreidimensionale Raum das allgemeine Vorstellungsvermögen übertraf, Die Angriffe kamen besonders von idealistisch-philosophischer Seite und beruhten vor allem auf den Anschauungen von I. Kant, der den dreidimensionalen Raum als denknotwendig erklärt hatte. Der neue Raumbegriff besaß aber auch mathematische Gegner, u. a. Möbius und Kummer.

Klein war sich der philosophischen Relevanz des Begriffes durchaus bewusst, vertrat aber einen prinzipiell materialistischen Standpunkt, indem er die Möglichkeiten der Mathematik auszuschöpfen versuchte und ihre praktische Beweisbarkeit in der Physik erkannte. In seinen Vorlesungen über die Mathematik im 19. Jahrhundert erklärte er später:

"... hier sind es wieder die Philosophen, die dem Fortschritt der Ideenbildung Schwierigkeiten bereiten aus Mangel an Verständnis für die den mathematischen Theorien eigene immanente Bedeutung und Kraft, welche die Frage nach einer transienten Verwendung zunächst nicht berührt..."
In der Mechanik wurde der R_n als willkommenes Hilfsmittel aufgenommen, um z. B. ein starres System von n Freiheitsgraden mathematisch zu erfassen. In der kinetischen Gastheorie behandelt man gar Räume von $6N$ Dimensionen...
Die fruchtbarste Ausdeutung aber hat die Vorstellung speziell des 4-dimensionalen Raumes in der Mechanik gefunden, indem man den drei Raumkoordinaten x, y, z als vierte "Dimension" die in jeder Relation der Mechanik auftretende Variable t, die Zeit, hinzufügte. Die Bedeutung, die diese zuerst von Lagrange aufgestellte, aber nicht weiter verfolgte Vorstellung in der Physik unserer Tage in der sog. Relativitätstheorie gewonnen hat, ist hinlänglich bekannt." [7, Bd. 1, S. 169 f.]

Insgesamt ist Klein in seinen philosophischen Anschauungen nicht eindeutig festlegbar. In seinen mathematischen Forschungen von einem materialistischen Standpunkt ausgehend, lehnte er philosophische Einmischung und Ausdeutung meist kategorisch ab und äußerte sich vornehmlich in Verbindung mit der Raumanschauung zu entsprechenden Fragen.
Im fortgeschrittenen Alter, beeindruckt von der Relativitätstheorie A. Einsteins, schloss sich Klein einem Aufruf von Einstein und von Vertretern des Empiriokritizismus an, eine "Gesellschaft für positivistische Philosophie" zu gründen.

Einstein neigte in jenen Jahren erkenntnistheoretisch zu den Ansichten des österreichischen Physikers und Philosophen E. Mach und unterstützte dessen Bestrebungen. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass sich Einstein später weitgehend davon löste und im Gegensatz zum Positivismus von der Realität der Welt und deren Erkennbarkeit überzeugt war.

Aus den Diskussionen um die Raumanschauung leitete Klein später die Einteilung der Mathematik in Approximations- und Präzisionsmathematik ab. Er schrieb über die Natur der Raumanschauung:

Man belegt eigentlich zwei verschiedene Erkenntnisquellen mit dieser Bezeichnung: einmal die sinnlich unmittelbare, die empirische Anschauung des Raumes, die wir durch Messen kontrollieren können, dann aber die davon verschiedene idealisierende innere Raumanschauung, man kann vielleicht sagen, die uns innewohnende Idee des Raumes, die über die Ungenauigkeit der sinnlichen Wahrnehmung hinausgeht." [9, T. I, 4. Aufl., S, 38]

Nach einigen Erläuterungen folgerte Klein daraus:

"Gemäß dieser Einteilung unserer Anschauung wird es nahe liegen, auch die Mathematik in zwei Teile zu teilen, die man als Approximations- und Präzisionsmathematik bezeichnet hat." [9, T. I, 4. Aufl., S. 39]

Klein unterschied damit zwischen absoluter und beschränkter Genauigkeit in der Mathematik, zwischen dem "Rechnen mit den reellen Zahlen selbst" und dem "Rechnen mit Näherungswerten".
Er schätzte ein, dass die angewandte Mathematik nur Approximationsmathematik braucht, aber eine exakte Näherungsrechnung nur auf Grundlage der Erkenntnisse der Präzisionsmathematik erfolgen kann.

Klein befasste sich in Publikationen, Vorlesungen und Vorträgen mit diesem Problem, auch unter erkenntnistheoretischem Aspekt. Dabei ging er grundsätzlich von der Erkennbarkeit der Probleme aus. Dies deuten auch seine abschließenden Worte an, die er in einem Vortrag "Grenzfragen der Mathematik und Philosophie" am 14. Oktober 1905 bei den Verhandlungen der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien aussprach:

"Alles ist in Gärung, so auch in der Mathematik. Ich möchte meinen Wunsch dahin aussprechen, dass diese Entwicklung... nicht enden möge mit einem allgemeinen Skeptizismus, sondern mit einem neuen Aufbau." [1, Bd.2, S. 250 f.]

In einem engen Zusammenhang mit dem Problem der Raumanschauung stand die nichteuklidische Geometrie. Im 19. Jahrhundert hatten sich zwei Arten nichteuklidischer Geometrie herausgebildet, die unabhängig voneinander durch Gauß, Lobatschewski und, Bolyai begründete hyperbolische Geometrie und die durch Riemann ausgearbeitete elliptische Geometrie.
Der Unterschied beim axiomatischen Aufbau dieser Geometrien besteht vornehmlich in dem sog. Parallelenaxiom, welches in der euklidischen Geometrie besagt, dass es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt genau eine Parallele gibt. Im Vergleich dazu gilt für die nichteuklidischen Geometrien:

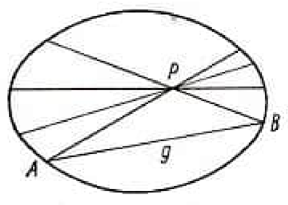
elliptische Geometrie: keine Parallele
parabolische (euklidische) Geometrie: genau eine Parallele,
hyperbolische Geometrie: beliebig viele Parallelen.

Die Bezeichnungen elliptische, parabolische und hyperbolische Geometrie führte Klein ein, als er die nichteuklidische Geometrie in die Theorie von Cayley einordnete. [1, Bd. 1, S. 258] Nachdem Klein die Grundgedanken dazu bereits 1869 in Berlin erfasst hatte, halfen ihm zahlreiche Diskussionen mit O. Stolz, diesen Ansatzpunkt zur Systematisierung der Geometrie 1871 weiter auszubauen.

Klein erreichte mit diesen Arbeiten zugleich eine stärkere Anerkennung der nichteuklidischen Geometrie. Bisher fehlte ein Beweis für die innere Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie.
F. Klein konstruierte ein zweidimensionales Modell der hyperbolischen Geometrie, dem Poincare später ein weiteres hinzufügte.
Durch diese Modelle erwies sich die nichteuklidische Geometrie als widerspruchsfrei, denn andernfalls wäre auch die euklidische Geometrie widersprüchlich.

Kleins Modell zur hyperbolischen Geometrie ersetzte die "Ebene" durch eine Ellipsenfläche, die "Geraden" durch jeden im Innern der Ellipse liegenden Sehnenabschnitt und

jeden "Punkt" durch jeden Punkt im Innern der Ellipse.
Gegeben sind eine Gerade g in der Ellipse mit den "Endpunkten" A und B, die selbst nicht zu den Punkten des Modells gehören, und ein Punkt P außerhalb von g. Dann gibt es durch P zu g beliebig viele "Parallelen". Das sind alle Strecken, die nicht in den Winkelraum des Winkels APB hineinreichen.



5 Zu Kleins ebenem Modell der hyperbolischen Geometrie (In: [32, S. 270])

Diese Ergebnisse legte Klein in zwei Arbeiten "Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" in den "Göttinger Nachrichten" und den "Mathematischen Annalen" 1871 nieder. Unter Verwendung der projektiven Maßbestimmung von A. Cayley ordnete Klein die beiden Arten nichteuklidischer Geometrie in die projektive Geometrie ein. Klein gab seinen Gedankengang wie folgt wieder:

"Es galt nun, diesen Grundgedanken (der Cayleyschen Maßbestimmung - R. T.) im einzelnen durchzudenken und auszuarbeiten, und hier setzte meine eigene Beteiligung an dieser Entwicklung ein. Eine gegebene Aufgabe war es von vornherein, die Cayleysche Maßbestimmung für alle Fälle im einzelnen zu studieren, die man hinsichtlich der Gebilde zweiten Grades vom projektiven Standpunkte aus zu unterscheiden hat. Wenn man bei Gebilden mit reellen Gleichungen bleibt, so sind dies:

a) Eigentliche Flächen zweiten Grades:
1. reell geradlinig (einschaliges Hyperboloid, hyperbolisches Paraboloid),
2. reell nicht geradlinig (Ellipsoid elliptisches Paraboloid, zweischaliges Hyperboloid),
3. imaginär

b) Eigentliche Kurven zweiten Grades:
1. reell (Ellipse, Parabel, Hyperbel),
2. imaginär

c) Punktepaare:
1. reell,
2. imaginär

d) Doppelpunkt

b) 2. gibt die gewöhnliche Metrik, indem man den zugrunde liegenden Kegelschnitt ... als Kugelkreis bezeichnet, Die Fälle a) 2. und 3. führen aber gerade zu den beiden Arten nichteuklidischer Geometrien, welche Gauß, Lobatscheffsky, Bolyai und Riemann unterschieden haben und die aus der gewöhnlichen Geometrie gewonnen werden, je nachdem man die Winkelsumme des Dreiecks kleiner oder größer als π nimmt. Also auch diese Systeme sind jetzt in die projektive Geometrie eingeordnet und verlieren alles Paradoxe." [7, Bd. 1, S. 149 f.]

Diese Einordnung der nichteuklidischen Geometrie in die projektive Geometrie erfolgte auf invariantentheoretischer Grundlage und stellte einen wichtigen Ausgangspunkt für die umfassende Systematisierung der Geometrie im "Erlanger Programm" dar.
Es gab schon vor Klein Ansätze, die verschiedenen geometrischen Arbeitseinrichtungen zu systematisieren. Bereits 1837 hatte der französische Mathematiker Chasles, der Klein und Lie 1870 bei der Kontaktaufnahme mit den französischen Gelehrten behilflich gewesen war, auf die Notwendigkeit dieser Aufgabe hingewiesen.

Aber schon zuvor hatte der deutsche Geometer Möbius eine Leistung vollbracht, die lange Zeit unerkannt blieb. In seinem 1827 erschienenen Buch "Der barycentrische Calcul..." hatte er "geometrische Verwandtschaften" systematisch untersucht.
Bei den geometrischen Verwandtschaften handelt es sich um Transformationen einer geometrischen Figur auf eine andere. Möbius zählte dazu:
Gleichheit (Kongruenz), Ähnlichkeit, Affinität und Kollineation (die allgemeinste Transformation, welche gerade Linien in gerade Linien überführt; d.h. die projektive Transformation).

Diesem Bemühen um die Einheit der Geometrie bei Möbius lagen implizite gruppentheoretische Züge zugrunde. In den Vorlesungen zur Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert von Felix Klein heißt es:

"Wenn auch Moebius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der "Verwandtschaft" ein Äquivalent; Moebius wird dadurch genau zu einem Vorläufer des "Erlanger Programms", [7, Bd. 1, S. 118]

Dabei ist allerdings anzumerken, dass Klein erst nach der Erarbeitung seiner Programmschrift die volle Bedeutung der Arbeiten von Möbius erkannte:

"Im übrigen verweise ich gern noch, indem ich diesen Wiederabdruck des Erlanger Programms abschließe, auf die Arbeiten von Moebius (die ich selbst erst nach ihrem inneren Zusammenhang erfasste, nachdem ich bei der von der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in den Jahren 1885-1887 veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke mitwirken durfte)." [1, Bd.1, S. 497]

Welche Ausgangspunkte seine Erlanger Programmschrift besonders bestimmten, ist aus den folgenden Worten Kleins ersichtlich:

"Ich habe im Herbst 1871 insbesondere daran gearbeitet, die konsequente projektive Denkweise, wie ich sie bei Salmon-Fiedler kennen gelernt habe und Clebsch sie glänzend vertrat, wie sie sich dann wieder in der Nicht-Euklidischen Geometrie bewährt hatte, mit den Entwicklungen von Möbius' baryzentrischem Kalkul und den Grundanschauungen von Hamiltons Quaternionen in klare gegenseitige Beziehung zu setzen. So ist im November 1871 der Grundgedanke meines im Oktober 1872 ausgearbeiteten Erlanger Programms... entstanden." [1, Bd. 1, S. 52]

Zwei algebraische Theorien, Invariantentheorie und Gruppentheorie, bildeten die entscheidende Grundlage für Kleins Arbeiten zur Systematisierung der Geometrie, Dabei hatte er sich zunächst, anknüpfend an die projektive Maßbestimmung Cayleys, auf die

Invariantentheorie gestützt. In weiteren Arbeiten standen Invariantentheorie und Gruppentheorie nebeneinander, was sich in dem Grundproblem seiner Publikationen von 1871/72 ausdrückt:

"Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie." [1, Bd. 1, S. 464]

Im "Erlanger Programm" wurde der Gruppenbegriff schließlich zum entscheidenden ordnenden Prinzip. Um 1870 war die Gruppentheorie relativ weit als mathematische Disziplin durchgebildet.
Die Wurzeln ihrer Herausbildung lagen in der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen sowie in der Entwicklung von Zahlentheorie und Geometrie im 19. Jahrhundert. Bis zum Jahre 1870 wurden im wesentlichen nur Permutationsgruppen betrachtet. Die wichtigsten Erkenntnisse darüber erhielt Klein aus einer Darstellung von C. Jordan, welche dieser gerade 1870 publiziert hatte, als Klein und Lie in Paris weilten.

Die Publikation von Jordan fasste die bis zu diesem Zeitpunkt entstandenen gruppentheoretischen Arbeiten systematisch zusammen. Auf der Grundlage der Theorie der Permutationsgruppen wurden darin algebraische Gleichungen und andere Gleichungstypen ausführlich behandelt. Dieses Werk vermittelte Klein die entscheidenden algebraischen Hilfsmittel, um die Geometrie auf gruppentheoretischer Basis zu klassifizieren.
Der axiomatisch begründete Gruppenbegriff war zu dieser Zeit noch nicht voll ausgeprägt. Er setzte sich erst in den 80er Jahren des 19. Jahrhunderts weitgehend durch.

Klein betrachtete Gruppen von Transformationen im "Erlanger Programm". Jede eindeutige Abbildung der Ebene bzw. des Raumes auf sich ist eine Transformation. Im allgemeinen bildet die Gesamtheit der Transformationen eines Raumes eine Gruppe.
Klein ordnete jeder Gruppe von Transformationen eine Geometrie zu, jeweils diejenige, bei welcher bestimmte geometrische Eigenschaften (wie Orthogonalität, Parallelität) der Figuren erhalten (invariant) bleiben, wenn entsprechende Transformationen ausgeführt werden. Diejenige Gruppe räumlicher Transformationen, deren Transformationen die Gesamtheit der geometrischen Eigenschaften (mit Ausnahme der Lage) eines Gebildes unverändert lassen, nannte Klein "Hauptgruppe". Als allgemeine Problemstellung formulierte er:

"Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörenden Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden." [1, Bd. 1, S. 463]

Auf diese Weise fand Klein ein ordnendes System, in welchem das Verhältnis der verschiedenen geometrischen Arbeitsrichtungen zueinander genau bestimmt werden konnte. Klein ordnete ein: die euklidische und die nichteuklidische Geometrie, die projektive Geometrie, die Liniengeometrie, die Geometrie der reziproken Radien, die Kugelgeometrie von S. Lie und sogar die zu dieser Zeit noch relativ unbekannte Analysis situs (Topologie).

Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Richtungen ergab sich, indem die "Hauptgruppe" durch eine umfassendere Gruppe ersetzt wurde, Dabei bleibt nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten, der zu einer weniger umfassenden geometrischen Richtung gehört. Das heißt, der Übergang zu einer umfassenderen Gruppe entspricht dem Übergang zu einer weniger umfassenden Geometrie.

Für die klassischen euklidischen Geometrien wird dieser Zusammenhang durch das folgende Schema verdeutlicht:

	Bewegungsgruppe	äquiforme Gruppe	affine Gruppe	projektive Gruppe
Lage	zerstört	zerstört	zerstört	zerstört
Größe	erhalten	zerstört	zerstört	zerstört
Orthogonalität	erhalten	erhalten	zerstört	zerstört
Parallelität	erhalten	erhalten	erhalten	zerstört
Teilverhältnis	erhalten	erhalten	erhalten	zerstört
Doppelverhältnis	erhalten	erhalten	erhalten	erhalten
Inzidenz	erhalten	erhalten	erhalten	erhalten
	metrische Geometrie	äquiforme Geometrie	affine Geometrie	projektive Geometrie

Die Tabelle sei an einigen Beispielen kurz erläutert.
Bei der Bewegung einer geometrischen Figur (Verschiebung oder Drehung) wird ihre Lage verändert. Die Länge von Strecken und die Eigenschaft von Geraden, orthogonal zu sein, bleiben dabei erhalten.
Parallele Geraden gehen wieder in parallele Geraden über. Das Teilverhältnis dreier Punkte bzw. das Doppelverhältnis von vier Punkten behält denselben Wert. Bei einer projektiven Abbildung (z.B. bei einer Zentralprojektion) stimmen die Längen in einer Figur mit den entsprechenden Längen der Bildfigur nicht überein. Parallele Geraden können in sich schneidende Geraden übergehen.
Lediglich das Doppelverhältnis von vier Punkten und die Inzidenz bleiben erhalten.

Das "Erlanger Programm" war für Geometrie und Algebra gleichermaßen von hohem Wert. Es stellte eine begriffliche Synthese für die bis dahin getrennten geometrischen Disziplinen dar. Dabei ist an dieser Stelle anzumerken, dass es auch Geometrien gibt, die sich nicht in dieses Programm einordnen lassen.
Das zeigten spätere mathematische Forschungen von E., Cartan, J. A. Schouten und O. Veblen. Dennoch bildete die Arbeit Kleins eine entscheidende Zäsur für die Geometrie des 19. Jahrhunderts.

Die Verwendung des Gruppenbegriffs durch Klein unterstützte die Ansätze strukturellen mathematischen Denkens, die sich gegen Ende des 19. Jahrhunderts herausbildeten. Seine Ergebnisse halfen, die axiomatisch fixierten Voraussetzungen in der Geometrie aufzudecken, die mit H. von Helmholtz und B. Riemann ihren Anfang nahmen.
Klein stand der mengentheoretisch begründeten und axiomatisch aufgebauten Mathematik selbst skeptisch gegenüber.

Das kommt auch in seinen Vorlesungen zur Mathematik des 19. Jahrhunderts zum Ausdruck, in der Mengenlehre, Zahlentheorie und Algebra unzureichend behandelt sind. Dennoch wurde das "Erlanger Programm" zu einem Initiator der axiomatischen Auffassung in der Geometrie, die in Deutschland mit M. Pasch einsetzte und von D. Hilbert

führend vertreten wurde. Der Wert des Programms wurde auch im Ausland rasch erkannt.
Davon zeugen Übersetzungen ins Englische, Französische, Italienische, Polnische, Russische und ins Ungarische.

Neben den bedeutenden wissenschaftlichen Leistungen, die mit Kleins Erlanger Zeit verbunden waren, zeichnete sich diese Schaffensperiode durch vielfältige Bemühungen um einen neu gestalteten mathematischen Lehrbetrieb ab. Klein fand in Erlangen einen außerordentlich unentwickelten mathematischen Unterricht vor.
Die Mathematiker, welche nach von Staudt in Erlangen gewirkt hatten, waren kein Anziehungspunkt für Studenten gewesen.

H. Hankel hatte im Sommer 1868 seine Lehrtätigkeit mit einer Vorlesung über "Populäre Astronomie" begonnen, die nicht das entsprechende Publikum fand. Auch die Lehrveranstaltung des Extraordinarius H. Pfaff zogen nur eine geringe Zahl von Studenten an. Im Sommer 1872 blieb Erlangen ohne mathematischen Lehrbetrieb, da Pfaff gestorben und Hankel einem Ruf nach Tübingen gefolgt war. So hatte Klein einen schweren Beginn in Erlangen:

Als ich an dem dort üblichen Termine, dem 5. November, eine einleitende Vorlesung begann, waren zwei Zuhörer anwesend, von denen ich den einen nur noch selten gesehen habe, während der andere nie wieder gekommen ist.
Hernach ergab sich, dass daneben allerdings noch drei Studierende der Mathematik vorhanden waren. Auf der Bibliothek herrschten vorsündflutliche Verhältnisse. Ich will hier nur angeben, dass Werke wie Eulers Introductio und Lagranges Mecanique analytique fehlten." [Nach 11, Bd.3/9, S. 193]

Durch den frühen Tod von Clebsch am 7. November 1872 - er erlag einem Diphtheritisanfall - sah sich Klein plötzlich vor die große Aufgabe gestellt, das Werk seines Lehrers fortzuführen und dessen Schüler auszubilden. Clebschs Schüler A. Voß und A. Weiler kamen sofort nach Erlangen.
Ihnen folgten weitere, besonders F. Lindemann, der unter Kleins Leitung die Vorlesungen von Clebsch herausgab (Leipzig 1876 und 1891). Auch reifere Mathematiker suchten den Weg zu Klein, so A. Harnack, der Schwede V. Bäcklund und der Norweger E.Holst.

Angeregt durch diese Schüler entfaltete Klein vielfältige Aktivitäten, um den Lehrbetrieb nach seinen Vorstellungen zu gestalten.
In der öffentlichen Antrittsrede vom Dezember 1872 entwickelte er ein ausführliches Programm für die geplante Unterrichtstätigkeit, Die darin enthaltenen Richtlinien blieben für sein späteres umfangreiches Wirken auf organisatorischem Gebiet charakteristisch:

Über den Spezialstudien darf die Einheit aller Wissenschaft und das Ideal einer Gesamtbildung nicht vergessen werden. Daher gehören auch humanistische und mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung zusammen und dürfen nicht in Gegensatz gebracht werden.
Andererseits ist neben der reinen auch die angewandte Mathematik zu pflegen, um

den Zusammenhang mit den angrenzenden Wissensgebieten wie Physik und Technik zu wahren. Ferner muss in der Mathematik neben den logischen Fähigkeiten die Anschauung als gleichberechtigter Faktor und überhaupt die mathematische Phantasie und die aus ihr entspringende Selbsttätigkeit entwickelt werden.
Schließlich hat die Universität auch den vorbereitenden Unterricht in den Schulen zu beachten und daher besonderes Gewicht auf die Ausbildung der Lehramtskandidaten zu legen..." [2, S. 18]

An dieses Unterrichtsprogramm, das die ganze Breite der Gesichtspunkte seiner späteren wissenschaftsorganisatorischen Tätigkeit umfasste, knüpfte Klein konkrete praktische Forderungen:

"Es sind regelmäßig wiederholte Elementarvorlesungen und daneben Spezialvorlesungen für eine kleinere Zahl wissenschaftlich Interessierter abzuhalten, die sich beide auf Übungen und Seminarbetrieb stützen. Daneben müssen Kurse in darstellender Geometrie mit Betonung des zeichnerischen Könnens stattfinden.
Ferner ist ein Lesezimmer mit Präsenzbibliothek einzurichten, welches den Studierenden das Studium der einschlägigen Literatur möglich macht, während ausgedehnte Modellsammlungen für die Ausbildung der mathematischen Anschauung zu sorgen haben." [2, S. 18 f.]

Erste Ansätze dieses Unterrichtsprogramms realisierte Klein bereits in Erlangen. Er beantragte die Gründung eines Mathematischen Seminars. Dank dem Entgegenkommen eines naturwissenschaftlichen Kollegen konnte Klein einen Zeichensaal einrichten.
Darin veranstaltete er Übungen zur darstellenden Geometrie und graphischen Statik. Zugleich brachte er dort eine erste Reihe mathematischer Modelle und Apparate unter, die er von der Pariser Verlagsbuchhandlung Delagrave bezog.

Klein richtete damit die erste größere Sammlung mathematischer Modelle an einer deutschen Universität ein. Zugleich erwarb er erstmals für ein deutsches mathematisches Universitätsinstitut eine Rechenmaschine.
Kleins Vorlesungen in Erlangen dienten vor allem dazu, die ehemaligen Schüler von Clebsch und weitere reifere Mathematikstudenten zu fördern.

So hielt Klein neben Grundlagenvorlesungen mehrere Semester lang Vorlesungen über mathematische Gebiete, die besonders von Clebsch bevorzugt worden waren: Invariantentheorie, projektive Geometrie, Abelsche Funktionen u.a.
Unter Kleins Leitung wurden in Erlangen sechs Dissertationen fertiggestellt, die von seinem geometrischen Einfluss zeugen. Dabei gelang es Klein, die jeweiligen Spezialgebiete seiner Schüler zu erkennen und sie auf den entsprechenden Weg zu führen.
So hatte z.B. A. Weiler als Schüler von W. Fiedler den Gebrauch homogener Koordinaten und das Dualitätsprinzip in Zürich eingehend studiert.

Ihn regte Klein zur systematischen Bearbeitung der Komplexe zweiten Grades an, A. Harnack, der eine gute Analysisausbildung bei F. Minding genossen hatte, wurde von Klein auf Arbeiten zur Verwendung der elliptischen Funktionen in der Geometrie der Kurven dritter Ordnung gelenkt. Mit den Arbeiten seines Schülers L. Wedekind über das komplexe Doppelverhältnis wurde die Theorie des Ikosaeders vorbereitet.

F. Klein dehnte in seiner Erlanger Zeit seine wissenschaftlichen Beziehungen zu ausländischen Mathematikern aus. Hatte der Deutsch-Französische Krieg 1870 einen geplanten Besuch nach Großbritannien verhindert, so nahm er 1873 erstmals persönlichen Kontakt zu englischen Mathematikern auf.
Im September 1873 beteiligte er sich an der Tagung der British Association for the Advancement of Science, die in Bradford stattfand. Seine Aufzeichnungen darüber zeigen, dass er hier eine enge wissenschaftliche Beziehung zu englischen Mathematikern erkannte:

"Ich habe damals die wertvollsten persönlichen Beziehungen nicht nur zu Cayley und Sylvester, sondern namentlich auch zu R. Ball und W. K. Clifford gewonnen. Gleich am ersten Vormittag trug Ball über seine Theorie der Korreziprokalschrauben, Clifford über seine Fläche "vom Krümmungsmaße Null aber endlicher Ausdehnung" vor.
Ich erkannte natürlich sofort, dass es sich bei Ball um meine Theorie der Fundamentalkomplexe, bei Clifford um eine wesentliche Weiterführung meiner Ideen über elliptische Maßbestimmung handele. Eingehende persönliche Besprechungen stellten bald die Beziehung völlig klar und haben auf meine späteren Arbeiten einen nachhaltigen Einfluss geübt." [1, Bd. 1, 5. 241]

Die Verwandtschaft der Denkweise Cliffords mit der von Klein äußerte sich u.a. in dem Begriff "Clifford - Kleinsche Räume", der für gewisse geschlossene euklidische Mannigfaltigkeiten in der nichteuklidischen Geometrie geprägt wurde.

Als Klein 1875 nach München berufen wurde, hatte er mathematische Forschung und Lehrbetrieb in Erlangen vorbildlich entwickelt.
Daran konnten P. Gordan, der im Herbst 1874 von Gießen nach Erlangen kam, sowie M. Noether, der 1875 als Extraordinarius berufen wurde und 1888 das neugeschaffene zweite mathematische Ordinariat in Erlangen erhielt, gut anknüpfen.

Bevor Klein jedoch Erlangen verließ, heiratete er 1875 die Tochter Anna des Erlanger Geschichtsprofessors Karl von Hegel, der seit 1856 eine Professur in Erlangen besaß. K. von Hegel befasste sich mit den mittelalterlichen Stadtverfassungen Italiens, Frankreichs und Deutschlands, gab im Auftrage einer historischen Kommission die Chroniken deutscher Städte sowie die Werke seines bekannten Vaters heraus.

Anna Hegel entstammte einer berühmten Familie.
Ihr Großvater war Georg Wilhelm Friedrich Hegel, einer der bedeutendsten Vertreter der klassischen bürgerlichen deutschen Philosophie.

F. Klein schenkte seiner Braut ein Ballkleid mit mathematischen Ornamenten. Ausgangspunkt für die Wahl der Ornamente stellte eine Arbeit über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche dar, die Klein und Lie in Paris beraten und 1870 gemeinsam publiziert hatten. Die Haupttangentenkurven bilden innerhalb der Systeme der parabolischen Kurven der Fläche Arabesken, die als Ornamente für das Kleid Anna Hegels verwendet wurden. Diese Frau begleitete Felix Klein bis zu seinem Lebensende. Der Ehe entsprangen vier Kinder, drei Töchter und ein Sohn.

5 Lehrtätigkeit an der TH München, Algebra

Als Klein für Ostern 1875 einen Ruf an die Technische Hochschule in München als Nachfolger von O. Hesse erhalten hatte, zögerte er nicht lange. Durch seine Beobachtung am Berliner Gewerbeinstitut während seines Studienaufenthaltes 1869/70 und durch den persönlichen Verkehr mit A. von Brill und R. Sturm, die seit 1869 an der TH Darmstadt Professoren waren, hatte er den praxisbezogenen Lehrbetrieb an den technischen Anstalten schätzen gelernt. So führte er bereits in seiner Erlanger Antrittsrede vom Dezember 1872 aus.

"... dass man den Studierenden der Mathematik ... nur raten kann, die ersten beiden Jahre auf einem Polytechnikum zuzubringen." [Nach 11, Bd. 3/9, S. 150]

Erstmals war noch während der französischen bürgerlichen Revolution 1794 in Paris eine polytechnische Schule geschaffen worden.
Die kapitalistische Wirtschaft erforderte in zunehmendem Maße qualifizierte Fachleute, Ingenieure, die an den bisherigen Lehreinrichtungen nicht ausreichend ausgebildet werden konnten. So entstand nach dem Vorbild der Pariser Ecole polytechnique eine große Anzahl polytechnischer Schulen, welche die Heimstatt der technischen Wissenschaften wurden: 1806 in Prag, 1815 in Wien, 1825 in Karlsruhe, 1827 in München, 1828 in Dresden, 1831 in Hannover, 1832 in Stuttgart, 1860 in Zürich, 1862 in Braunschweig, 1869 in Darmstadt, 1870 in Aachen u. a.

Im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts stiegen die Anforderungen an diese Einrichtungen und eine entsprechende praxisbezogene Lehre und Forschung weiter an.
In dieser Zeit des Übergangs zum Monopolkapitalismus wurden neue Erfindungen und Technologien der Nachrichtentechnik, der Elektrotechnik, der Glasherstellung sowie der Teerfarbenindustrie und anderer Gebiete der organischen Chemie schnell in die Produktion eingeführt.

Die Stahlherstellung wurde durch das Bessemerverfahren, die Thomasbirne und den Siemens-Martin-Ofen revolutioniert, die Werkzeugmaschinen immer mehr spezialisiert. Die Anwendung der Naturwissenschaften wurde zunehmend zu einem Bestandteil der kapitalistischen Produktion, so dass die Ingenieure neben praktischem Wissen auch ausreichende theoretische Kenntnisse besitzen mussten.

Durch seine Tätigkeit an der TH München erreichte F. Klein nähere Beziehungen zur Technik und zu Vertretern der technischen Wissenschaften. Auf der Grundlage seiner bisherigen mathematischen Forschungen drang er vor allem in die geometrischen Disziplinen der Maschinentechnik ein, zu denen die darstellende Geometrie, die graphische Statik und die Kinematik gezählt wurden.
Im Rahmen eines sogenannten Mathematischen Kränzchens gewann Klein Kontakt zu Vertretern der Technik. Regelmäßig sonnabends aller 14 Tage trafen sich Professoren der Technischen Hochschule, um über wissenschaftlich-technische Fragen vorzutragen und zu diskutieren. Dabei stand nicht die einzelne Wissenschaft, sondern das Verhältnis von Wissenschaft und Technik im Mittelpunkt des gemeinsamen Interesses.

Vor allem C. von Linde - bekannt durch sein berühmtes Luftverflüssigungsverfahren von

1895 unter Ausnutzung des Thomson-Joule-Effekts - setzte sich für engere Beziehungen von Mathematik, Physik und Technik ein.
Linde, zu dem Kleins Kontakt besonders eng war, begründete zu diesem Zeitpunkt das zweite staatliche Laboratorium an der TH, eines für theoretische Maschinenlehre, nachdem J. Bauschinger einige Jahre zuvor das erste für Festigkeitslehre eröffnet hatte.
In diesen Beziehungen lag ein wesentlicher Ausgangspunkt für Kleins späteres aktives Eintreten für die Ingenieurwissenschaften, für die angewandten Gebiete der Mathematik und Physik und für enge Kontakte zwischen Universität, Technischer Hochschule und Industrie. Diese spätere Tätigkeit fand im Jahre 1905 mit der Ernennung zum Dr.-Ing. h. c. der TH München ihre entsprechende Würdigung.

Seine Münchener Aktivitäten ab 1875 blieben jedoch in dieser Hinsicht relativ begrenzt. Bei der Annahme der Berufung schwebte Klein vornehmlich folgendes Ziel vor:

"Die praktische Ausbildung nach technischer Seite sollte Hand in Hand mit der theoretisch-wissenschaftlichen Ausbildung gehen, so dass eine einheitliche Gesamtausbildung möglich erschien." [2, S. 19]

Sein Anteil lag dabei vor allem auf der zweiten Seite dieser Gesamtausbildung.
Der Lehrbetrieb in München besaß ein weitaus größeres Ausmaß, als es Klein von Erlangen kannte. Das zeigte sich schon an der Zahl der Zuhörer. Während Klein in Erlangen nie mehr als sieben Zuhörer in einer einzelnen Vorlesung hatte, schrieben sich in München 230 Studenten für seine erste Vorlesung über analytische Geometrie im Sommer 1875 ein.

Das bedurfte neuer Methoden, und gemeinsam mit A. von Brill, der zur gleichen Zeit von Darmstadt nach München berufen worden war, organisierte Klein den mathematischen Lehrbetrieb an dieser Einrichtung neu. Sie gestalteten die mathematische Ausbildung der Ingenieure derart, dass die entsprechende Organisation in München auch nach ihrer Zeit beibehalten und von einer großen Anzahl anderer technischer Hochschulen allmählich übernommen wurde.
Ihr Hauptanliegen bestand darin, bei den Technikern ein grundlegendes mathematisches Verständnis zu erzielen. Dazu vereinigten sie die Reihe von einzelnen Vorlesungen zu einer durch vier Semester geführten Vorlesung über höhere Mathematik, wobei sie auf eine spezielle Vorlesung über analytische Mechanik für Techniker sowie auf. die von Hesse bevorzugten Determinanten und homogenen Koordinaten verzichteten.

Diese Vorlesung begannen Brill und Klein wechselnd jedes Jahr. Daneben kümmerten sie sich selbst - unterstützt durch Assistenten - um die dazugehörigen Übungen, zu welchen sie Übungsblätter ausarbeiteten. Während Klein in Erlangen nur die Aufgabe hatte, einige wenige mathematische Spezialisten auszubilden, erfüllte er in München die Anforderung, einer großen Anzahl von Studenten möglichst breite Grundlagenkenntnisse zu vermitteln.
Daneben bestand aber auch in München die Möglichkeit, mathematische Spezialisten auszubilden.

Die TH München hatte wie nur wenige entsprechende Einrichtungen (Dresden, Zü-

rich) seit den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts das Recht, Lehramtskandidaten für Mathematik während der gesamten Studienzeit auszubilden.
Für diese Studenten hielten Klein und Brill höhere mathematische Vorlesungen und Seminare, um aus dem Kreis der Lehramtskandidaten den Mathematikernachwuchs für die Hochschule zusichern:

"...haben wir dann jeder in seiner Weise höhere Vorlesungen und Seminare für die Lehramtskandidaten, oder sagen wir lieber, da die Rücksicht auf den späteren Beruf ganz zurücktrat, für eigentliche Mathematiker gehalten." [Nach 11, Bd. 3/9, S. 152]

Die besonderen Probleme der Lehrerbildung spielten zu diesem Zeitpunkt bei Klein kaum eine Rolle. Vielmehr war er bestrebt, eine ganze Reihe mathematischer Spezialschüler auf dem Gebiet der mathematischen Forschung zu fördern. Die bekanntesten waren der Italiener L. Bianchi, A. von Braunmühl, W. von Dyck, J. Gierster, F. Meyer und K. Rohn.

In den Spezialvorlesungen wandte sich Klein besonders den Gebieten zu, die er damals bearbeitete. Das waren vor allem geometrisch-algebraische Arbeiten, die schließlich zu Problemen der geometrischen Funktionentheorie führten. F. Klein charakterisierte 1923 seine wissenschaftliche Tätigkeit in München als den Ausgangspunkt für die Mehrzahl seiner späteren Arbeiten:

"So habe ich in München besonders über anschauliche Geometrie der algebraischen Gebilde, über die Theorie der Gleichungen fünften Grades, die sich auf der Ikosaedergruppe aufbauten, über zahlentheoretische Probleme und über die Geometrische Funktionentheorie, insbesondere elliptische Modulfunktionen, gearbeitet. Man sieht aus diesen Angaben, dass ich damals den Grund zu den meisten Untersuchungen gelegt habe, die jetzt in Bd. II und III meiner gesammelten Abhandlungen vereinigt sind. Überhaupt habe ich mich in München nach den Vorbereitungsjahren in Erlangen zur eigentlichen mathematischen Individualität durchgearbeitet." [2, S. 20]

In allen Arbeiten Kleins ist der anschauliche, geometrische Ausgangspunkt spürbar, Das zeigen auch seine algebraischen Arbeiten. Er hatte sich zunächst mit der Gestaltenlehre algebraischer Gebilde befasst und schließlich Arbeiten über endliche Gruppen linearer Substitutionen und ihre Anwendung auf die Lehre von der Auflösung algebraischer Gleichungen in den Mittelpunkt seiner Betrachtung gerückt. Das grundlegende Prinzip, auf welchem diese zuletzt genannten Arbeiten beruhten, gab Klein selbst an.
Es bestand darin, dass

"... algebraische Gebilde, welche durch endliche Gruppen linearer Substitutionen in sich übergehen, infolgedessen leicht übersehbare, ausgezeichnete Eigenschaften haben." [1, Bd. 2, S. 255]

Klein erkannte darin den eigentlichen Ausgangspunkt für eine enge Verbindung der Lehre von der allgemeinen Auflösung algebraischer Gleichungen mit der Invariantentheorie linearer Substitutionen.
Bei diesen Beziehungen spielen die regulären Polyeder (Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder) eine besondere Rolle. F. Klein hat sich vor allem mit dem

Ikosaeder[2] befasst.

Bereits in seinem "Erlanger Programm"aus dem Jahr 1872 deutete er dieses Problem beiläufig an. In den folgenden Jahren erzielte er auf diesem Gebiet der Vereinigung von Geometrie und Algebra wertvolle Resultate. Angeregt wurde Klein durch den engen wissenschaftlichen Kontakt mit dem Algebraiker P. Gordan seit 1874 in Erlangen.
Ihre Bekanntschaft rührte schon von der gemeinsamen Studienzeit bei Clebsch her. Als Klein nach München verzogen war, traf er sich mit Gordan häufig in Eichstädt, einem Ort zwischen Erlangen und München gelegen, um wissenschaftliche Probleme zu diskutieren. Eine weitere Anregung empfing Klein durch eine Korrespondenz mit dem Italiener F.Brioschi, der wie Klein Gleichungen fünften Grades untersuchte.

In einer Darstellung "Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder" (1877) gab Klein den Weg seiner Erkenntnisse an:

"In dem Aufsatze: "Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst" ... (1875) ... bin ich zu einem merkwürdigen Zusammenhange geführt worden, der zwischen dem Ikosaeder und der Theorie der Gleichungen fünften Grades besteht. Indem ich die letztere benutzte, gelang es mir, die Gleichung zwölften Grades, welche in dem dort erläuterten Sinne ein Ikosaeder vorstellt, in quadratische Faktoren zu spalten und also zu lösen.
Bemerkenswert musste schon damals die Leichtigkeit erscheinen, mit der es gelang, gewisse in der Theorie der Gleichungen fünften Grades auftretende Resolventen[3] sechsten und fünften Grades abzuleiten und in ihrem Zusammenhange zu erkennen.
Aber ich bin erst durch Gordan, mit dem ich diese Gegenstände ausführlich besprach, veranlasst worden, die Frage umzukehren und zu versuchen, geradezu die Theorie der Gleichungen fünften Grades aus der Betrachtung des Ikosaeders abzuleiten.
In der Tat gelang es mir - im steten Verkehre mit Gordan - nicht nur sämtliche algebraische Sätze und Resultate, welche Kronecker und Brioschi in dieser Hinsicht - zum Teil ohne Beweis - publiziert haben, aus einer Quelle naturgemäß abzuleiten, sondern ihnen auch neue, und, wie ich glaube, wesentliche Beiträge hinzuzufügen ... es gelingt mir, diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzelquadrate verschwinden, explizite mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu lösen, und dadurch einen neuen Weg zur Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades zu finden." [1, Bd.2, S. 321 f.]

F. Klein erkannte, dass die Ikosaedergleichung eine Galoissche Gleichung darstellt und ihre Galoissche Gruppe mit der Gruppe der Ikosaederdrehungen isomorph ist. Den Untergruppen der Ikosaederdrehungen entsprechend konnte er niedere Resolventen, insbesondere Resolventen fünften Grades konstruieren.
Der Versuch, allgemeine Gleichungen fünften Grades aufzulösen, führte Klein zu einem neuen Gebiet mathematischen Forschens.

Bereits Ruffini und Abel hatten bewiesen, dass Gleichungen fünften Grades nicht in

[2] Regelmäßiges zwanzigflächiges Polyeder mit 12 Ecken.
[3] Resolventen sind Hilfsgleichungen, derer Auflösung auch die Lösung der Ausgangsgleichung (hier die Ikosaedergleichung) liefert, die sich aber einfacher auflösen lassen.

Radikalen, also nicht durch Wurzelschachtelungen, auflösbar sind. F. Klein fand eine Auflösung durch die Anwendung elliptischer, d. h. transzendenter Funktionen.
In mehreren Abhandlungen aus den Jahren 1875 bis 1879 untersuchte Klein Gleichungen fünften und höheren Grades. Dabei entwickelte er eine mit seinem Namen bezeichnete Theorie der algebraischen Gleichungen, die er in seinem späteren Buch "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" (Leipzig 1884) zusammenfasste.

Die Hauptaufgabe der Kleinschen Theorie der algebraischen Gleichung ist also, festzustellen, wann eine Gleichung auf ein Formenproblem zu einer gegebenen Gruppe und damit auf eine gewisse Normalgleichung mit einer zu dieser gegebenen Gruppe isomorphen Galoisgruppe zurückgeführt werden kann. R. Brauer hat später die Kleinsche Theorie mit Hilfe der Algebrentheorie neu begründet und weiter vertieft. [14]

Eine ganze Reihe algebraischer Begriffe ist heute noch nach Klein benannt. So gibt es zum Beispiel den Begriff "Kleinsche Gruppe".
Diese Gruppe gehört in den Bereich der diskontinuierlichen Gruppen, mit denen sich Klein in Absprache mit S. Lie, der sich den kontinuierlichen Gruppen zugewandt hatte, vornehmlich befasste.
Jede diskontinuierliche Gruppe linearer Transformationen, die keine Hauptkreisgruppe ist, heißt "Kleinsche Gruppe". Auch eine spezielle Untergruppe mit vier Elementen in der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$ trägt Kleins Namen.

War Klein zunächst in erster Linie Geometer, dann Geometer und Algebraiker, so wandte er sich nun verstärkt funktionentheoretischen Arbeiten - besonders als Professor für Geometrie in Leipzig - zu.

6 Leipziger Professur für Geometrie, Funktionentheorie

Im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts hatte die Geometrie eine solche Reife und Popularität erlangt, dass man an den Universitäten speziell für diese mathematische Disziplin Professuren einrichtete. Die Leipziger Mathematiker bemühten sich bereits seit dem Tode von A. F.Möbius 1868 um eine angemessene Vertretung dieses Teilgebietes der Mathematik an ihrer Universität.

Die notwendige Unterstützung durch das zuständige Kultusministerium Sachsens in Dresden blieb jedoch zunächst aus. Erst als der Mathematiker O. Schlömilch Mitte der siebziger Jahre vom Dresdener Polytechnikum in das Kultusministerium wechselte, änderte sich die Haltung der sächsischen Regierungsbeamten allmählich.
Wichtigstes Ergebnis dieser veränderten Haltung war die Berufung F. Kleins als Professor für Geometrie zum Wintersemester 1880/81, ein Vorgang, den man in Leipzig wohl kaum noch erwartet hatte.

So formulierten die Leipziger Professoren der Mathematik A.Mayer, C. Neumann, W. Scheibner und K. Von der Mühll in einem Dankschreiben an das sächsische Kultusministerium, sie seien "...aufs Freudigste überrascht worden". [4]
Die Tatsache, dass sich A. Mayer, C. Neumann, K. Von der Mühll und F. Klein an der Herausgabe der "Mathematischen Annalen", einer der damals bedeutendsten mathematischen Fachzeitschriften, beteiligt hatten und sich daher kannten, hat zu dieser Freude beigetragen.

So wechselte Klein bereitwillig an die große und traditionsreiche Universität der Messestadt. Er bezog mit seiner Frau, Sohn und Tochter Luise die zweite Etage eines fünfgeschossigen Hauses in der Sophienstraße 10 (der heutigen Shakespearestraße). Das Haus wurde im zweiten Weltkrieg zerstört.
Die Familie Klein vergrößerte sich in Leipzig um ein weiteres Familienmitglied. Am 11. Juli 1885 wurde die Tochter Sophie Eugenie geboren.

6 Felix Klein während seiner Leipziger Zeit (In: [28, S. 229])

Am 25. Oktober 1880 hielt F. Klein die obligate Antrittsvorlesung an der Leipziger Universität zum Thema "Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen". Darin entwickelte er, ähnlich seiner Erlanger Antrittsrede von 1872, ein weitreichendes organisatorisches und methodisches Programm, das jedoch erst 1895 im Druck erschien.

Ein ungewöhnlich bereitwilliges Entgegenkommen des sächsischen Kultusministeriums machte die Realisierung wichtiger im Programm formulierter Vorhaben möglich. Gleich in den ersten Wochen begann Klein, eine Modellsammlung anzulegen. Und schon am 5. Dezember 1880, kaum zwei Monate nach der Aufnahme seiner neuen Tätigkeit, setzte er sich für die Einrichtung eines Institutes eigens für die Mathematiker, eines "Mathematischen Seminars", ein. Klein hatte hierfür das damals leerstehende "Czermaksche Spektatorium" ausgesucht.
Es war ein amphitheatralischer Bau, der in den Jahren 1870 bis 1872 nach den Vorstellungen des inzwischen verstorbenen Physiologen J. N. Czermak im sogenannten "Czermakschen Garten" (noch heute existiert in Leipzig eine kleine Straße gleichen Namens) errichtet worden war.

Wenige Jahre später, noch bevor Klein nach Leipzig kam, wurde das Gebäude in die Brüderstraße versetzt.
Czermak hatte nur das Institutsgebäude der Universität testamentarisch übergeben, jedoch nicht den Grund und Boden, auf dem es stand. Hauptteil des Baues war das große Auditorium mit etwa 400 Sitzplätzen und 100 Stehplätzen. Hinzu kamen noch einige kleinere Vorzimmer, Kleins Wunsch entsprechend wurde das Auditorium durch Einbau von Tischplatten für mindestens 150 Zuhörer verändert. Die kleineren Räume ließ er zu einem Bibliothekszimmer, einem Sprechzimmer und einem etwa 50 Personen fassenden Raum für Seminarübungen einrichten.

Am 8. April 1881 wurde Klein das Institutsgebäude übergeben, und mit Semesterbeginn am 20. April existierte in Leipzig, wie schon an einer Reihe anderer Universitäten, ein "Mathematisches Seminar", Erster Direktor war Felix Klein.

Diese Neuerung war für die Leipziger Universität sehr notwendig, denn die Zahl der für Mathematik eingeschriebenen Studenten, die 1870 kaum 30 betrug, war um 1875 auf mehr als 100 angestiegen und hatte um 1880 die beachtliche Größe von 190 erreicht.
Einen solchen großbetrieblichen Charakter zeigten auch andere Universitäten. In der Mehrzahl der Fälle sanken die Frequenzen schon gegen Ende der siebziger Jahre bzw. Anfang der achtziger Jahre wieder. In Leipzig trat diese Erscheinung ab 1883 ein.
Im Wintersemester 1881/82 waren in Leipzig 200 Studenten für Mathematik eingeschrieben.

Nicht zuletzt wird Kleins schon damals weithin bekanntes Lehrgeschick zu diesen relativ hohen Zahlen beigetragen haben. Für diese hohen Studentenzahlen erschien aber auch das Czermaksche Spektatorium bald zu klein. F. Klein fand erneut Unterstützung, als er im Januar 1883 weitere Räumlichkeiten für die Mathematiker beantragte. Im sog. "kleinen Fürstenkolleg" in der Ritterstraße erhielten sie eine nach Kleins Vorstellungen eingerichtete Etage, in der ab Herbst 1883 der Studienbetrieb aufgenommen wurde.

Damit hatte F. Klein in Leipzig ein mathematisches Institut aus der Taufe gehoben, das seinerzeit vorbildlich in der Welt war. Neben diesen Aktivitäten baute er in Leipzig eine mathematische Schule auf, aus der allein 16 Dissertationen und 3 Habilitationen hervorgingen.
Die Intensität, mit der Klein in den sechs Jahren seiner Leipziger Tätigkeit wirkte, ist einzigartig. Als Vergleich sei angegeben, dass zuvor, in der Zeit von 1871 bis 1880, unter seiner Anleitung neun Dissertationen entstanden; in den nachfolgenden 27 Jahren seines Wirkens in Göttingen waren es 23. Einige seiner Münchner Schüler waren Klein nach Leipzig gefolgt.

Neben einer großen Anzahl junger Studenten aus Sachsen hörten auch viele Ausländer seine Vorlesungen und waren Teilnehmer seiner Seminare für Fortgeschrittene. Getreu dem Titel "Professor für Geometrie" begann F. Klein in Leipzig die Geometrie zu lehren, und zwar von einem damals sehr modernen Standpunkt aus. In seiner Autobiographie schrieb er dazu:

"Ich habe ... das Wort Geometrie nicht einseitig. .. als Lehre von den räumlichen Objekten, sondern als eine Denkweise aufgefasst, die in allen Gebieten der Mathematik mit Vorteil zur Geltung gebracht werden kann. Ich habe dementsprechend meine Leipziger Professur trotz mannigfachen Widerspruchs mit einer Vorlesung über geometrische Funktionentheorie begonnen, in der ich die Gedanken, die mich in München bewegt hatten, weiterführte.
Ich lebte dabei in dem glücklichen Gefühl, dass ich Riemanns funktionentheoretische Vorstellungen, deren Tragweite sich mir immer mehr erschloss, weiterbilden durfte. An diesen Arbeiten nahmen allmählich immer mehr und mehr begabte junge Mathematiker teil, die aus dem In- und Ausland nach Leipzig gekommen waren.
Das Interesse an unserer gemeinsamen Arbeit wuchs noch stärker, als H. Poincare in Paris, mit dem ich bald in Korrespondenz trat, vom Februar 1881 an parallellaufende Untersuchungen veröffentlichte." [2, S. 20 f.]

So begann 1880/81 eine mathematische Glanzzeit der Leipziger Universität, die von den bedeutsamen mathematischen Forschungen Kleins getragen wurde. Doch nur im Zusammenhang mit seinem pädagogischen und organisatorischen Talent wurde es ihm möglich, in Leipzig eine mathematische Schule von Weltrang aufzubauen.
Aus ihr gingen solche Mathematiker wie K.Rohn, A. Hurwitz, W. von Dyck, O. Staude, F. Schur und E. Study hervor. Aber auch G. Pick, A. Krazer, O. Hölder und D. Hilbert nahmen in unterschiedlichem Umfang an den Kleinschen Vorlesungen und Seminaren teil.

Doch welcher Natur war das mathematische Denken Kleins?
Durch seine Studien im Vorfeld des Erlanger Programms hatte sich ein invariantentheoretisches Denken bei ihm herausgebildet, welches auch für seine Forschungen in der Münchner und Leipziger Zeit charakteristisch war. Das Aufsuchen von mathematischen Objekten (z.B. Funktionen oder geometrische Größen), die bei irgendwelchen bestimmten Transformationen ungeändert bleiben, verbunden mit dem allgemeinen Bestreben Kleins, möglichst viele Gebiete der Mathematik kennenzulernen, führte ihn zu

bedeutenden Erfolgen.

Sein Denken, auch das abstrakteste, zeigte durchweg einen physikalischen und geometrisch-anschaulichen Bezug, was sicherlich in seinem starken physikalischen Interesse begründet lag. An erster Stelle stand bei Klein die Einsicht in das Wesen und in die Methoden einer Theorie, wobei er oftmals den bis in die letzte Einzelheit ausgeführten Beweis anderen überließ.

Kleins mathematische Denkweise war mit der von B. Riemann eng verwandt. Aus diesem Grunde bereitete es Klein - im Gegensatz zu vielen anderen Mathematikern des 19. Jahrhunderts - kaum Schwierigkeiten, Riemanns Schriften zu verstehen. Als Riemann 40jährig starb, war Klein 17 Jahre alt.
Beide sind sich niemals persönlich begegnet, doch gilt Klein, zumindest für das 19. Jahrhundert, als der bedeutendste deutsche Vertreter der Riemannschen Mathematik. Er sei der "...leidenschaftlichste und erfolgreichste Apostel des Riemannschen Geistes..." gewesen, schätzte der spätere Inhaber seines Göttinger Lehrstuhles R. Courant ein." [15, S. 767]

Bereits C. F. Gauß und A. Cauchy hatten wesentliche Beiträge zu einer Theorie der analytischen Funktionen $w = f(z)$ einer komplexen Variablen z geleistet. B. Riemann begründete die Theorie dieser Funktionen, indem er von physikalischen und geometrischen Vorstellungen ausging und den Zusammenhang zwischen einer Theorie komplexer Funktionen und den nach Cauchy und Riemann benannten partiellen Differentialgleichungen herstellte.

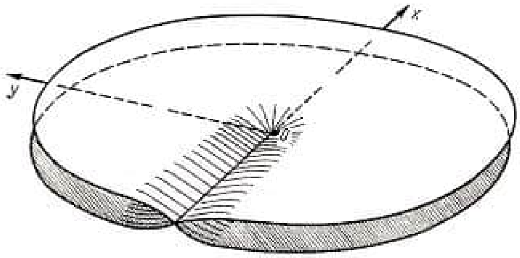
Solche Funktionen haben die Eigenschaft, dass sie winkeltreue Abbildungen im Kleinen vermitteln. Abbildungen dieser Art werden konforme Abbildungen genannt. Die Veranschaulichung dieser Abbildungen erfolgt auf den nach Riemann benannten Flächen. Die Riemannsche Fläche besteht im allereinfachsten Fall für die Funktion $w = \sqrt{z}$ aus zwei übereinander liegenden Ebenen, die längs einer von $z = 0$ ausgehenden Halbgeraden kreuzweise verheftet sind.

F. Klein bewunderte diese Riemannschen Ideen. Von funktionentheoretischen Forschungen in München ausgehend befasste er sich vor allem in Leipzig mit der auf Riemann fußenden sogenannten "Geometrischen Funktionentheorie". Klein erschloss sich die Riemannsche Funktionentheorie von zwei Seiten: auf rein geometrischem Wege und durch algebraische Untersuchungen.

In einer Arbeit von 1873 über Flächen dritter Ordnung und in einer weiteren von 1874 über den Zusammenhang von Flächen benutzte Klein die Vorstellung der Riemannschen Zahlenkugel mit ihrer Erfassung des Unendlichen sowie die Idee der Riemannschen Fläche. Dabei sah er folgende Problematik, wie er zu Beginn seiner zwei Veröffentlichungen zum Thema "Über eine neue Art der Riemannschen Flächen" ausführte:

"Bei der Untersuchung der algebraischen Funktionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener anschauungsmäßiger Hilfsmittel zu bedienen. Man repräsentiert nämlich entweder y und x gleichmäßig als Koordinaten eines Punktes der Ebene, wo dann die reellen Werte derselben allein in Evidenz treten und das Bild der

algebraischen Funktion die algebraische Kurve wird - oder man breitet die komplexen Werte der einen Variablen x über eine Ebene aus und bezeichnet das Funktionsverhältnis zwischen y und x durch die über der Ebene konstruierte Riemannsche Fläche.
Es muss in vielen Beziehungen wünschenswert sein, zwischen den beiden Anschauungsbildern einen Übergang zu besitzen." [1, Bd. 2, S. 89]



7 Riemannsche Fläche der Funktion $w = \sqrt{z}$ (In: Kleine Enzyklopädie. Mathematik, 3. Aufl. Leipzig 1968, S. 740)

Auf diesem Wege gelangte Klein von einem genauen Studium der Riemannschen Fläche zu der geometrischen Interpretation algebraischer Funktionen und ihrer Integrale.

1871 hatte sich Klein bei der Vorbereitung des Erlanger Programms schon mit der Auflösung algebraischer Gleichungen vom geometrischen Gesichtspunkt aus beschäftigt. Zum anderen war die Kreisteilungsgleichung ein wichtiges historisches Vorbild und leitete Klein zur Theorie der regulären Polyeder.
Bis 1874 arbeitete er sich auf der Grundlage des Begriffs der endlichen linearen Substitutionsgruppe in diese Theorie ein. Eine lineare Substitution (heute auch lineare Transformation genannt) der Veränderlichen z wird durch den Ausdruck $\frac{az+b}{cz+d}$ vermittelt, wobei a, b, c, d konstante komplexwertige Größen sind. In einer fast fünfzig Jahre später vorgenommenen Beurteilung dieser Arbeit schrieb Klein selbst:

"Indem ich mir um sie (die regulären Polyeder-Fr. Kö.) eine $(x+iy)$-Kugel herumgelegt dachte, erhielt ich für die Körperecken Gleichungen, deren genauere Untersuchung ich um so lieber begann, als ich den Wunsch hatte, von den mir geläufigen invariantentheoretischen Auffassungen aus zu einer selbständigen Behandlung gleichungstheoretischer Aufgaben vorzudringen.
Die Resultate, die ich erhielt, waren sehr merkwürdig und zeigten, dass ich eine erzführende Ader angeschlagen hatte. Zunächst gelang der Beweis, dass durch meinen Ansatz ohne weiteres die Gesamtheit aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen gegeben sei.
Sodann konnte ich für die Gleichung zwölften Grades, welche durch die Ecken eines der $(x + iy)$-Kugel eingeschriebenen regulären Ikosaeders gegeben ist, ... auch das Vorhandensein von Resolventen sechsten und fünften Grades nachweisen." [1, Bd. 2, S. 255]

Von diesen beiden Ausgangspunkten ist der algebraische besonders bedeutsam, denn Klein verband diese Untersuchungen bald mit dem im 19. Jahrhundert so populären mathematischen Forschungsgebiet der elliptischen Funktionen, um so die Gleichungen fünften Grades aufzulösen.

Diese elliptischen Funktionen haben die Eigenschaft, doppeltperiodisch zu sein, also zwei voneinander unabhängige komplexwertige Perioden ω_1 und ω_2 zu besitzen. Die einfachperiodischen und die elliptischen Funktionen gleichen sich in der Eigenschaft, bei bestimmten linearen Transformationen der unabhängigen Variablen ungeändert zu bleiben.

Eindeutige Funktionen $w = f(z) = f[(az+b)/(cz+d)]$, die bei einer Gruppe linearer Transformationen invariant bleiben, nennt man seit 1890 nach F. Klein "automorphe Funktionen" [2, S. 549].

Von besonderem Interesse waren für Klein die sog. "Modulfunktionen". Das sind solche automorphe Funktionen, die ausschließlich von dem nicht reellen Periodenverhältnis $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängen.
Die Transformationsgruppe ist gegeben durch $\tau \to (a\tau + b)/(c\tau + d)$, mit $ad - bc = 1$.

Kleins Beschäftigung mit der Funktionentheorie erfolgte auf drei Gebieten. Zwischen etwa 1877 bis 1885 entstanden seine Arbeiten über elliptische Funktionen und die damit eng verbundenen Modulfunktionen.
Direkter Anlass hierfür war die Auflösung der im Zusammenhang mit dem Ikosaeder auftretenden Gleichungen fünften Grades durch elliptische Funktionen.

Erstmals war Klein 1869/70 mit der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen bekannt geworden. Den elementaren Modulfunktionen begegnete er in einer Arbeit von H. A. Schwarz über hypergeometrische Reihen, Wesentlich wurde nun bei Klein die Verbindung der Gruppentheorie, wie sie sich im Erlanger Programm darstellte, mit der anschaulichen Riemannschen Funktionstheorie.
Zu diesem geometrisch-gruppentheoretischen Ansatz gelangte er am Beispiel der genannten Funktionen schon in seiner Münchner Zeit.

Von etwa 1886 bis 1890 erstreckten sich die Arbeiten zu den hyperelliptischen und Abelschen Funktionen, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden kann.
Das dritte Gebiet betraf speziell die Riemannsche Funktionentheorie und die Theorie der automorphen Funktionen. Dabei gelangte Klein 1881/82 zu Ergebnissen auf dem Gebiet der "Uniformisierungstheorie", welche er selbst als seine bedeutendste mathematische Leistung wertete. Ein entscheidendes Theorem zu dieser Theorie fand Klein in einem Erholungsurlaub an der Nordsee. Er schrieb selbst darüber:

"Ostern 1882 war ich zur Erholung ... an die Nordsee gereist, und zwar nach Norderney. Ich wollte dort in Ruhe einen zweiten Teil meiner Schrift über Riemann schreiben, ... Ich habe es dort aber nur acht Tage ausgehalten ... In der letzten Nacht vom 22. zum 23. März, die ich wegen Asthmas auf dem Sofa sitzend zubrachte, stand plötzlich um 2 1/2 Uhr das Grenzkreistheorem, ..., vor mir.
Am folgenden Vormittag in dem Postwagen, der damals von Norden bis Emden fuhr, durchdachte ich das, was ich gefunden hatte, noch einmal bis in alle Einzelheiten. Jetzt wusste ich, dass ich ein großes Theorem hatte." [1, Bd. 3, S. 584]

Im fieberhaften, freundschaftlichen Wettstreit mit Poincare hatte Klein als erster dieses Theorem aufgestellt und publiziert. Zwischen Klein und Poincare hatte sich vom

Sommer 1881 bis zum Sommer 1882 ein reger Briefwechsel zu diesen mathematischen Problemen entfaltet.
Gestützt auf die Arbeiten von Riemann sowie insbesondere von Schwarz, Schottky und Hermite entwickelten Klein und Poincare in diesen Jahren die Uniformisierungstheorie. Nachdem Klein das entscheidende Grenzkreistheorem gefunden hatte, musste er jedoch den weiteren Ausbau der Theorie Poincare überlassen. Klein schrieb darüber:

"Meine eigentliche produktive Tätigkeit auf dem Gebiet der theoretischen Mathematik ist 1882 zugrunde gegangen. Alles, was folgte, betrifft, soweit es sich nicht um Ausarbeitungen handelt, nur noch Einzelheiten.
So hatte Poincare freies Feld und veröffentlichte bis 1884 in den Acta Mathematica seine fünf großen Abhandlungen über die neuen Funktionen." [7, Bd. 1, S. 380]

Was war 1882 geschehen? Die Belastungen Kleins waren außerordentlich groß. Neben der mathematischen Forschung musste er eine Vielzahl organisatorischer und pädagogischer Aufgaben bewältigen. Mehrere schwere Asthmaanfälle plagten ihn. Das führte im Herbst 1882 zur Überlastung und zum gesundheitlichen Zusammenbruch.

Im Dezember 1883 erhielt Klein eine Berufung an die John-Hopkins-University in Baltimore (USA) als Nachfolger von J. J. Sylvester. Diese Tatsache gab Klein großen innerlichen Auftrieb, obwohl er die Berufung nach anfänglichem Zögern schließlich ablehnte.
Dafür waren vor allem gesundheitliche und finanzielle Gründe ausschlaggebend. Im Jahre 1886 nahm Klein einen Ruf nach Göttingen an. Doch zuvor sorgte er sich noch selbst um seinen Nachfolger in Leipzig, denn einige Leipziger Professoren wollten seinen Lehrstuhl unbesetzt lassen. So schrieb Klein am 11. November 1885 an den Ministerialdirektor F. Althoff im preußischen Kultusministerium:

"Können Sie glauben, dass man von gewisser Seite mit dem Plane umgeht, die hier in Leipzig bestehenden mathematischen Institute einfach verfallen zu lassen, d. h. meine Stelle nicht wieder zu besetzen ... Ich habe in der That so viele Sorgfalt auf die Entwicklung der genannten Institute gewandt, dass ich dieselben nicht verlassen möchte, ohne mit denselben eine möglichst genaue, lebendige Wirkung erzielt zu haben." [3, Bl. 41 f.]

Durch seine Bemühungen erreichte Klein, dass sein Studienfreund S. Lie sein Nachfolger in Leipzig wurde.

7 Göttinger Zeit, Lehrtätigkeit, wissenschaftsorganisatorische Aufgaben

Die Erinnerungen an das ruhige Leben in einer Kleinstadt und die ausgesprochene Absicht des Berliner Ministerialdirektors Althoff, Göttingen zu einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Zentrum auszubauen, waren die Hauptgründe, die Klein im April 1886 in die Stadt seiner Privatdozentenzeit zurück zogen.
Die damit verknüpften Erwartungen sollten sich - wenn auch mitunter in hartem Ringen und seinen ganzen persönlichen Einsatz erfordernd - schließlich erfüllen.

Von den privaten Verhältnissen in Göttingen war Klein sehr angetan. In einem Brief an Althoff äußerte er sich am 28. Juni 1886:

"Was ich für mich und meine Familie an gemüthlichem Gewinne von der Uebersiedelung nach Göttingen erwartete, hat sich erfüllt, und ich werde mich in dieser Hinsicht gewiss nicht nach Leipzig zurücksehnen!" [3, Bl. 43]

In Leipzig hatte Klein mit seiner Familie mitten im Stadtzentrum gewohnt. In Göttingen bezog er ein zweistöckiges Haus am Rande der Stadt, Wilhelm-Weber-Straße 3. Hier wohnte Klein bis zu seinem Lebensende. Fast alle Universitätsangehörigen lebten in dieser östlichen Stadtgegend, die von Bäumen und Gärten umgeben war, so dass sich ungezwungen auch im privaten Bereich ein sehr enger Kontakt ergab.

Die Universität, 1733 gegründet, bildete den zentralen Punkt der Kleinstadt, Eine Industrie gab es nicht; nur solche Gewerbe waren entstanden, die eine enge Beziehung zur wissenschaftlichen Arbeit hatten.
In starker Wechselwirkung mit den mathematisch-naturwissenschaftlichen Einrichtungen der Universität vermehrten sich vor allem die Werkstätten für wissenschaftlichen Gerätebau. Während es Ende der sechziger Jahre sieben entsprechende Geschäfte mit fünfzig Facharbeitern gab, bestanden um 1900 bereits zwölf Betriebe mit 270 Gehilfen und Lehrlingen.

Die Göttinger Universität besaß eine bemerkenswerte naturwissenschaftliche und mathematische Tradition. Das Entstehen der Universität war mit den Ideen der westeuropäischen Aufklärung verbunden, so dass die Bildungseinrichtung von Beginn an eine progressive innere Struktur erhalten hatte.
Die empirische Naturforschung stand in hohem Ansehen. In Göttingen hatten der Physiker G. Ch. Lichtenberg und der Chemiker J. von Liebig gewirkt, zwei der bedeutendsten Gelehrten ihrer Zeit. Mit Gauß hatte die Mathematik eine hervorragende Stellung erlangt. Mit den Leistungen von G. P. L. Dirichlet und B. Riemann war diese Stellung in Göttingen weiter ausgebaut worden.

F. Klein knüpfte eng an die mathematischen Leistungen seiner Vorgänger an. Neben Riemann regte ihn besonders die vielseitige Tätigkeit von Gauß an, dessen Werk und wissenschaftliches Tagebuch er mit Anmerkungen versehen herausgab. Außerdem sammelte Klein Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß.

Im Jahre 1885 war das bisherige mathematische Ordinariat von M. A. Stern mit dem

Extraordinariat von A. Enneper zu einer ordentlichen Professur vereinigt worden. Die Besetzung dieser Professur beriet der Rat der philosophischen Fakultät der Georg-August-Universität Göttingen im Januar 1885.
Der Rat schlug Felix Klein für diese Stelle vor, um die geometrische Richtung der Mathematik wieder zu fördern. Das geschah trotz des Separatvotums der beiden Professoren, die zu dieser Zeit in Göttingen Mathematik lasen.
Es waren Schwarz, der seit 1875 in Göttingen wirkte, und der theoretische Astronom E. Schering. Klein hatte seine Berufung vor allem den naturwissenschaftlichen Kollegen zu verdanken. Dabei setzte sich besonders sein alter Freund Riecke für ihn ein.

In Göttingen dehnte F. Klein seine Arbeit auf wissenschaftsorganisatorischem Gebiet außerordentlich weit aus. Diese Tätigkeit konnte sich allerdings erst dann voll entfalten, als Schwarz 1892 die Nachfolge von Weierstraß in Berlin antrat.
Da Schwarz bis zu dieser Zeit die Elementarvorlesungen sowie einen Teil der Kursusvorlesungen in Göttingen hielt, blieb Klein zunächst Zeit, frühere wissenschaftliche Arbeiten weiterzuführen bzw. abzuschließen. Er setzte seine Arbeiten zur Funktionentheorie fort und wandte sich verstärkt Problemen der Mechanik und mathematischen Physik zu. Dabei führte er in zunehmendem Maße eine wissenschaftliche Arbeitsweise ein, die er selbst wie folgt bezeichnete:

"Ich beschränkte mich auf Ideen und Richtlinien und überließ die genaue Durchführung und weitere Ausgestaltung den jüngeren Kräften, die mir helfend zu Seite standen." [2, S. 21]

Die grundlegenden Ideen und Richtlinien führte Klein in Vorlesungen aus. Von ihm ausgewählte, geeignete Hörer arbeiteten seine Gedanken weiter aus. Als Ergebnis dieser Tätigkeit entstanden in der Göttinger Zeit acht Bücher und zehn "autographierte Vorlesungshefte", die zugleich die Vielfalt der Kleinschen Lehrtätigkeit in Göttingen ausdrücken.
Die Themen seiner Vorlesungen reichten von Gebieten der reinen Mathematik, wie Algebra, höhere Geometrie, Zahlentheorie, Differential- und Integralrechnung, Funktionentheorie, Theorie der Differentialgleichungen, Differentialgeometrie, Gebieten der angewandten Mathematik, wie Mechanik, Potentialtheorie, Theorie des Kreisels, Hydrodynamik, bis zu Problemen des mathematischen Unterrichts.

Kleins Schüler schätzten seine Vorlesungen als wohldurchdacht, inhaltlich und methodisch gut aufgebaut, versehen mit historischen und persönlichen Bemerkungen sowie mit Beziehungen zu anderen Disziplinen und zur Praxis. So schrieb einer seiner Schüler:

"Wer das Glück gehabt hat, die Vorträge Felix Kleins in ihrem klaren Aufbau und in ihrer vollendeten Schönheit zu hören . .. oder im Seminar im ständigen Gedankenaustausch arbeiten durfte, war hingerissen von der kraftvollen Wirkung, mit der seine Phantasie die Probleme der reinen und angewandten Mathematik in ihrer ganzen Tiefe und Weite durchdrang." [23, S. 1118]

A. Sommerfeld, der bedeutende Resultate auf dem Gebiet der mathematischen Physik erzielte und Kleins Vorlesung zur Theorie des Kreisels zu einer vier Hefte umfassenden

Darstellung (1897 bis 1910) ausbaute, äußerte sich im Jahre 1919 über Kleins Vorlesungen:

"Als ich Oktober 1893 nach Göttingen kam, war die erste Vorlesung, die ich bei Klein hörte, eine solche über die Riemannsche P-Funktion.[4] Wie alle Vorlesungen von Klein, war sie glänzend durchgearbeitet und von plastischem Vortrag.
Klein konnte, was nur wenige Dozenten wagen dürfen, die Zusammenfassung des Vorgetragenen seinen Hörern mehrmals in jeder Stunde in die Feder diktieren, ohne den Anschein der Pedanterie hervorzurufen und ohne sich zu wiederholen ..." [13, S. 300]

Die wissenschaftsorganisatorischen Aktivitäten Kleins in Göttingen können nach drei Gesichtspunkten zusammengefasst werden.
Diese Aktivitäten waren vor allem darauf gerichtet, neue wissenschaftliche Erkenntnisse zu verbreiten, die angewandte Mathematik zu fördern sowie den gesamten mathematischen Unterricht, vom Anfangs- bis zum Hochschulunterricht, umzugestalten.

Mit der Herausgabe der Zeitschrift "Mathematische Annalen" leistete Klein einen wichtigen Beitrag zur Verbreitung wissenschaftlicher Erkenntnisse. Diese Zeitschrift war bereits 1868 von Clebsch und C. Neumann begründet worden.
Klein wirkte seit 1873 in der Redaktion mit und hatte 1876 die verantwortliche Herausgabe übernommen. Die Gestaltung der Zeitschrift war wesentlich durch ihn geprägt worden. Er hatte für die Zusammensetzung eines solchen Redaktionskollegiums gesorgt, dass die wichtigsten mathematischen Gebiete vertreten waren.

Zudem unterstützte er andere Zeitschriften mit Rat und Gewinnung bedeutender in- und ausländischer Autoren, so z. B. die seit 1896 von R. Mehmke herausgegebene "Zeitschrift für Mathematik und Physik", die sich auf Kleins Anregung und durch die Mitwirkung von C. Runge stärker angewandten Problemen zuwandte.
Gleichzeitig hatte F. Klein erkannt, dass das Überschauen der Fülle wissenschaftlicher Forschungsergebnisse neuer Methoden des wissenschaftlichen Austausches bedurfte:

"In dieser überreichen Entwicklung der Einzelforschung ist es auch für den universalsten Kopf nicht mehr möglich, innerlich die Synthese des Ganzen zu vollziehen und nach außen fruchtbar zu machen. An Stelle dieses lebendigen Zusammenhangs entstehen eine gewaltige Literatur - insbesondere Zeitschriften umfassend -, große internationale Kongresse und andere Organisationen, die mit Mühe einen äußeren Zusammenhang aufrechtzuerhalten streben." [7, Bd. 1, S. 4]

Daraus erklärt sich auch sein starkes Interesse und seine aktive Haltung bei der Erarbeitung und Herausgabe solch umfassender Werke wie der "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen" und der "Kultur der Gegenwart".
Gleichzeitig wird Kleins Bemühen verständlich, zahlreiche Gremien für den wissenschaftlichen Gedankenaustausch und die Realisierung seiner Pläne zu nutzen. So begrüßte er 1890 begeistert die erste nationale Vereinigung deutscher Mathematiker und wurde ihr Mitglied.

[4] Es handelt sich dabei um eine durch eine hypergeometrische Reihe definierte Funktion.

Hatte er doch bereits 1868, angeregt durch Clebsch, an einer Zusammenkunft von Mathematikern teilgenommen, die auf eine Deutsche Mathematiker-Vereinigung abzielte. Erst durch die Einflussnahme G. Cantors, dem Begründer der Mengenlehre, war das Vorhaben gelungen.
Klein nahm von Anfang an eine führende Position in dieser Vereinigung ein. Als die Deutsche Mathematiker-Vereinigung auf der Naturforscherversammlung 1894 erstmals öffentlich auftrat, hielt Klein den vielbeachteten Vortrag "Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik".
Dreimal, 1897, 1903 und 1908, war er Vorsitzender dieses Gremiums. Dementsprechend nahm er auch im internationalen Rahmen einen geachteten Platz ein. Klein wurde in das internationale Vorbereitungskomitee des I. Internationalen Mathematikerkongresses 1897 in Zürich gewählt und trat in das Redaktionskollegium der Zeitschrift "L' Enseignement mathematique" (1899) ein.

Kleins Bemühen um den wissenschaftlichen Austausch drückte sich auch in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft aus, die er 1892 mit H. Weber gründete, der anstelle von Schwarz nach Göttingen gekommen war. In dieses Ziel eingeordnet waren auch seine Aktivitäten zum Zusammenschluss von 23 internationalen Akademien der Wissenschaften, der im Sommer 1900 in Paris vollzogen wurde.

Um seine weitreichenden wissenschaftsorganisatorischen Pläne zu realisieren, suchte Klein guten Kontakt zu den staatlichen Institutionen. Er besaß ein enges Verhältnis zum Berliner Kultusministerium, das sich in seiner persönlichen Bekanntschaft mit Althoff und durch seine Mitgliedschaft im preußischen Herrenhaus von 1908 bis 1918 ausdrückte.
Der enge Kontakt zwischen Klein und Althoff begann im März 1885, als Althoff persönlich nach Leipzig reiste, um Klein für Göttingen zu gewinnen. Eine erstmalige Begegnung zwischen ihnen hatte schon am 19. August 1870 im Rahmen der Bonner Nothelfertruppe während des Deutsch-Französischen Krieges stattgefunden.
Durch die immer nähere Bekanntschaft entstand ein enges Verhältnis zwischen Klein und Althoff,
Sie führten seit 1885 einen regen Briefwechsel, der erst mit dem Tode Althoffs 1908 endete. Klein suchte Rat und Unterstützung seiner Pläne, und Althoff setzte sich in zunehmendem Maße für Kleins Vorhaben ein. In seiner autobiographischen Skizze würdigte Klein Althoff ausführlich. Da heißt es u. a.:

"Althoff ist 1882, von Straßburg kommend, als vortragender Rat in das Berliner Ministerium eingetreten. Eine ungewöhnliche Klugheit, eine außerordentliche Arbeitskraft und ein starker Wille, verbunden mit stets reger schaffender Phantasie, erwarben ihm bald einen großen Einfluss weit über seinen engeren Bereich hinaus ...
Alle großen Fortschritte, welche die preußischen Universitäten in den 25 Jahren seiner Tätigkeit im Kultusministerium gemacht haben, gehen auf ihn zurück oder hängen zum mindesten eng mit ihm zusammen. Vor allem aber ist ihm Göttingen zu Dank verpflichtet, da die mit 1892 einsetzende große Entwicklung der mathematischen und physikalischen Errichtungen in erster Linie von ihm herbeigeführt worden ist. [2, S. 24 f.]

8 Mitglieder der Göttinger Mathematischen Gesellschaft 1902. Von links nach rechts, vordere Reihe: Abraham, Schilling, Hilbert, Klein, Schwarzschild, Frau Young, Diestel, Zermelo; zweite Reihe: Fanla, Hansen, C. Müller, Dawney, E. Schmidt, Yoshiye, Epsteen, Fleisher, F. Bernstein; dritte Reihe: Blumenthal, Hamel, H. Müller (In: [28, S. 228])

Im Auftrage Althoffs reiste Klein 1893 anlässlich der Chicagoer Weltausstellung in die USA. Er sollte an dem zur gleichen Zeit stattfindenden Mathematikerkongress teilnehmen.
Klein trat auf diesem Kongress mit einer Begrüßungsrede auf, die er später als einen Wendepunkt in seiner Tätigkeit hin zu organisatorischen Aufgaben einschätzte.

Im Anschluss an diesen Kongress hielt er mehrere Vorlesungen an der Universität in Evanston über die mathematische Entwicklung in Europa. Dabei erwarb er sich hohe Anerkennung, so dass er 1895 eine zweite Vortragsreise zur 150-Jahr-Feier der Universität Princeton unternahm und im Herbst 1896 erneut in die USA reiste.
Hier erhielt Klein Berufungen an die Universität Princeton (1895) und an die Universität Yale, New Haven (1896). Die Ablehnung dieser Berufungen festigte seine Position in Göttingen in hohem Maße.

Durch diese Reisen in die USA empfing Klein vielfältige Anregungen, darunter eine ganze Reihe für die Gestaltung der Lehrtätigkeit an der Göttinger Universität. Klein hatte von Althoff den Auftrag erhalten, das Frauenstudium in Göttingen zu fördern. Die Göttinger Universität erschien hierfür besonders geeignet. Dagegen nahm die Universität in Berlin eine recht konservative Haltung in der Frage des Frauenstudiums ein.

So hatte z.B. S. W. Kowalewskaja, die in Berlin bei Weierstraß studierte, dort nicht promovieren können. Sie promovierte als erste weibliche Mathematikerin 1874 in Göttingen, ohne dass ihre Anwesenheit dabei erforderlich war. Ihr Lehrer Weierstraß hatte dies vermittelt.

Im Auftrage von Althoff bemühte sich nun F. Klein, weibliche Studierende für Göttingen zu finden. Von seiner USA-Reise brachte er 1893 die erste Studentin der Mathematik nach Göttingen.
Es war M. F. Winston, die Tochter eines Chicagoer Arztes, die 1897 bei Klein promovierte. Zur gleichen Zeit begann die Engländerin G. Chisholm ein Mathematikstudium bei Klein, welches sie 1895 mit dem Promotionsergebnis magna cum laude abschloss.

Sie und ihr Ehegatte W. H. Young, die beide später wichtige Beiträge zur Mengenlehre leisteten, blieben mit Klein noch lange Zeit in Verbindung.
Durch Kleins Einfluss kam 1893 auch die Amerikanerin M. E. Maltby nach Göttingen die 1895 bei dem Professor der physikalischen Chemie W. Nernst promovierte.

Nach dem Weggang von Schwarz bildete Klein den führenden Kopf der mathematisch-naturwissenschaftlichen Dozenten in Göttingen. Das wurde durch seine Beziehungen zum preußischen Kultusministerium begünstigt. Ein Ausdruck der hohen Anerkennung Kleins durch dieses Ministerium sind zahlreiche Auszeichnungen.

Im Jahre 1889 erhielt er den Roten Adler-Orden vierter Klasse. 1892 wurde Klein mit dem Roten Adler-Orden dritter Klasse ausgezeichnet. Diese Ehrungen wurden ihm vor allem zuteil, weil er Althoffs Bestrebungen unterstützte, Göttingen zu einem Zentrum der Mathematik und Naturwissenschaften zu entwickeln, und auch einen Ruf nach München ablehnte.
1896 wurde Klein mit dem Titel Geheimer Regierungsrat geehrt, der später auf Geheimen Oberregierungsrat erweitert wurde.

Klein übernahm aber nicht nur deshalb die Führung der Göttinger mathematischen und naturwissenschaftlichen Dozenten. Vielmehr war seine Art der Organisierung des Hochschulunterrichts beispielhaft und weitgehend anerkannt. Klein entwickelte eine wohlüberlegte Arbeitseinteilung und Zusammenarbeit der Dozenten.
In jedem Semester berief er eine Konferenz aller naturwissenschaftlichen Dozenten ein, auf welcher eine Verständigung über die Vorlesungen des nächsten Halbjahres erfolgte. Im Gegensatz zu anderen Hochschuleinrichtungen wurde hier durch exakte Planung gesichert, dass die Anfängervorlesungen in jedem Jahr und die wichtigen Vorlesungen für mittlere Semester im Wechsel alle zwei bis drei Jahre gelesen wurden. Daran beteiligten sich abwechselnd alle Dozenten.

Jeder Studierende der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer erhielt bei der Immatrikulation eine kleine Broschüre mit dem Titel "Ratschläge und Erläuterungen für die Studierenden der Mathematik und Physik", die nach den Vorstellungen von Klein verfasst worden war.
Die Broschüre sollte den Studenten bei der Aufstellung ihres Studienplanes helfen. In einem Brief an Althoff vom 10. Juni 1890 berichtete Klein über einen derartigen Rahmenplan für das Studium der Mathematik und Physik. Dabei regte Klein an, durch einen Ministerialerlass seine Bemühungen zu unterstützen.

Eine wichtige Hilfe für die Studenten war das nach den Vorstellungen von Klein eingerichtete mathematische Lesezimmer. Bemerkenswert ist, dass Klein eigene Zeitschriften und andere Publikationen sowie die ausgearbeiteten Vorlesungen dem Lesezimmer zur Verfügung stellte. Zugleich sorgte er dafür, dass alle Dozenten ihre Vorlesungen zur Einsicht auslegten.
Der mathematisch-physikalische Seminarbetrieb für Studenten höherer Semester an der Universität Göttingen wurde ebenfalls durch Klein geprägt. Ihm lag daran, die jeweils neu berufenen Hochschullehrer mit seinen Vorstellungen vertraut zu machen.

Aus diesem Grunde gestaltete er gemeinsame Seminare mit ihnen, in denen er die Führung übernahm, so z. B. 1895/98 mit Hilbert über Funktionentheorie und konforme Abbildungen sowie über Mechanik, 1904/05 mit L. Prandtl, C. Runge und W. Voigt über Elastizitätstheorie sowie weitere Seminare gemeinsam mit Hilbert und H. Minkowski bzw. mit Prandtl, Runge, E. Wiechert u. a. Die Spezifik der Kleinschen Seminare bestand darin, dass zu Semesterbeginn für jede Zusammenkunft Vorträge der Teilnehmer festgesetzt wurden, die das selbständige Arbeiten in hohem Maße unterstützten.

Nicht immer traf F. Klein mit seinen Bestrebungen auf volles Verständnis, I. Runge schätzte im Zusammenhang mit ihren Ausführungen über C. Runge ein:

"Kleins unermüdliche Aktivität im Dirigieren und Organisieren, seine unerschöpflichen Pläne und sein Geschick in deren Durchführung gehörten zu den markantesten Zügen im Leben der Fakultät. Mit seiner hohen aufrechten Gestalt, dem durchdringenden Blick seiner leuchtenden Augen hatte Felix Klein etwas Königliches an sich, und doch kam es vor, dass seine rastlose Betriebsamkeit gelegentlich etwas zum Spott herausforderte, besonders bei den jüngeren Dozenten und Assistenten, deren Arbeitskraft von ihm nicht geschont wurde, und denen es zuweilen nicht leicht fiel, sich sein Regiment gefallen zu lassen.
Da war es nun vor allem Runge, dem es bald gelang, eine vermittelnde Rolle zu übernehmen. Er war von dem Wert und der Bedeutung der Kleinschen Ideen durchaus überzeugt; aber sein eigenes Auftreten war beweglicher und menschlich ungezwungener ...
Ihm konnte niemand ein "Bonzengehalt" vorwerfen, wie das Scherzwort damals lautete, und so konnte er mit leichter Hand manche Schärfe mildern, die sich zwischen jugendlichem Geltungsdrang und würdevoller Überlegenheit auszubilden drohte." [30, S. 121 f.]

Die Studenten begegneten Klein zumeist mit Ehrfurcht und einer gewissen Distanz. Sie hielten ihn für unnahbar und nannten ihn unter sich den "großen Felix".

9 Eine Festtafel in Kleins Haus mit Paul Gordan (ganz links), Klein (Mitte) und Käthe Hilbert (ganz rechts) [28, S. 232]

Klein opferte jedoch sehr viel Zeit, um die Studenten und jungen Assistenten wissenschaftlich zu fördern. Mit jedem Seminarreferenten sprach er die Disposition genau durch, und nach der Sitzung wurde ein Protokoll darüber angefertigt. Regelmäßig nutzte Klein die Abendstunden zur Besprechung mit jungen Mitarbeitern und Studenten.

Wegen der Vielfalt der vor ihm stehenden Aufgaben gönnte er sich keine Zeit für Vergnügungen. Er zeigte kaum Interesse an ästhetischen, künstlerischen Fragen und soll völlig unmusikalisch gewesen sein.

Bei Festlichkeiten in seinem Haus zog sich Klein meist mit Freunden in sein Arbeitszimmer zurück, um fachliche Probleme zu beraten. Seine Zeit war genau geplant, auf die Minute eingeteilt. Das ging soweit, dass sogar seine Lieblingstochter Elisabeth, genannt Putti, die noch im Hause lebte, einen Termin für ein Gespräch mit ihm verabreden musste.

Kleins unermüdlichem Arbeiten und seinem Organisationstalent ist es in hohem Maße zu danken, dass sich die Göttinger Universität zu einem Zentrum der Mathematik und der Naturwissenschaften entfalten konnte. Dabei spielte seine wohldurchdachte Berufungspolitik eine wesentliche Rolle.

8 Beziehungen zur angewandten Mathematik und Technik

Die Einheit von Wissenschaft und Anwendung war ein Grundprinzip der Lehrtätigkeit Kleins. Bereits in seiner Erlanger Antrittsrede 1872 hatte er den wirklichkeitsfremden und anwendungsfernen Unterricht kritisiert.
Mit seiner Leipziger Antrittsrede 1880 legte er ein Programm für einen entsprechend gestalteten Universitätsunterricht vor. Dieses Programm baute er in Göttingen weiter aus und nahm dessen volle Realisierung in Angriff. Dabei war ihm die umfassende Wirksamkeit von Gauß auf Gebieten der reinen und angewandten Mathematik ein Beispiel:

"... die Aufgabe der Mathematiker an den Universitäten wird es sein, diese Allseitigkeit von Gauß festzuhalten oder auch, wenn sie verloren gegangen sein sollte, sie wieder zu gewinnen! Natürlich nicht so, dass der Einzelne versucht, auf allen Gebieten zu arbeiten, was unmöglich wäre, sondern durch die Cooperation hinreichend zahlreicher Vertreter der verschiedenen Hauptteile unserer Wissenschaft." [10, S. 19]

Es muss hervorgehoben werden, dass Klein nicht die eine oder andere Richtung überbetonte, sondern beide gleichermaßen zu entwickeln trachtete.

"Wir bedürfen (an den Universitäten) einer stark entwickelten reinen Mathematik, weil sie dem ganzen Betriebe festen Halt giebt, etwa wie das Knochengerüst dem Organismus." [10, S. 20]

Hier ordnet sich sein Bemühen um die besten Kräfte auf dem Gebiet der reinen Wissenschaft ein. Die Berufung von D. Hilbert 1895, H. Minkowski 1902, E. Landau 1909 u.a. erfolgten durch Kleins Fürsprache. Dabei ist besonders hervorzuheben, dass sich Klein trotz seiner Zurückhaltung gegenüber der axiomatisch begründeten Mathematik um die besten Gelehrten auf diesem Gebiet - insbesondere um Hilbert - persönlich bemühte.
Klein unterhielt einen engen Kontakt mit diesen Mathematikern, der für die Entwicklung der Mathematik in Göttingen sehr fruchtbar war. So bildete sich zum Beispiel zwischen Klein, Hilbert und Minkowski - später trat Runge hinzu - der Brauch heraus, jeden Donnerstag um drei Uhr einen gemeinsamen Spaziergang auf den "Kehr", zu einem hochgelegenen Gasthaus am Wald zu unternehmen.

Hier wurden alle wissenschaftlichen, organisatorischen und persönlichen Fragen ausführlich beraten. Klein betonte jedoch auch:

"Wir bedürfen aber gleichzeitig einer zu selbständigen Forschungen fortschreitenden angewandten Mathematik, weil sonst der verkehrte und verderbliche Eindruck entsteht, als sei die angewandte Mathematik etwas nur Beiläufiges, Niederes." [10, S. 20 f.]

Diese zuletzt angedeutete Auffassung war unter den Mathematikern des 19. Jahrhunderts weit verbreitet. Kummer sprach von "schmutziger" Mathematik, wenn er angewandte Mathematik meinte. Klein trat solchen Auffassungen mit aller Kraft entgegen. Dabei ging sein Bestreben im Unterschied zu Gauß dahin, nicht nur auf dem Gebiet der Forschung, sondern auch auf dem Gebiet der Lehre reine und angewandte Wissenschaft eng zu verbinden.

Klein wollte die mathematisch-physikalische Forschung stärker an den Problemen der Praxis orientieren. Gleichzeitig sah er die Notwendigkeit, die Ausbildung der Ingenieure auf ein höheres theoretisches Niveau zu heben.

Klein entwickelte eine Reihe von Ideen, um diese Aufgaben zu realisieren. In einer Denkschrift vom 6. Oktober 1888, die er über den Göttinger Universitätskurator an das preußische Kultusministerium richtete, forderte Klein die unmittelbare Verschmelzung von Technischer Hochschule und Universität.
Dieser Wunsch nach einer derart tiefgreifenden Veränderung scheiterte ebenso, wie sein Plan zur Reorganisation der "Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften" zu Göttingen zunächst auf Ablehnung stieß.

Die Göttinger Gesellschaft war 1750 als dritte deutsche Akademie der Wissenschaften gegründet worden und stand in enger Verbindung zur Universität, Reorganisationspläne waren schon von anderer Seite zum preußischen Kultusministerium gelangt. Althoff erbat deshalb ein Gutachten von F. Klein.
Als wesentliche Neuerung schlug Klein vor, die mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse dieser akademischen Gesellschaft auf die angewandten Disziplinen und die Ingenieurwissenschaften zu erweitern. Jedoch erst 1892, vier Jahre später, als Klein eine Berufung nach München in Aussicht gestellt war, ging das preußische Kultusministerium auf seine Vorschläge ein.

Wegen des Widerstandes einer großen Anzahl von Akademiemitgliedern, die als Universitätsangehörige die Aufnahme von Vertretern der Technik ablehnten, konnte Klein nicht alle Vorstellungen realisieren. Insbesondere scheiterte die Aufnahme technischer Disziplinen in die Akademie.

In den neunziger Jahren drängte Klein auf organisatorische Veränderungen, um eine Vereinigung von Mathematik, Physik und Technik zu erzielen. Angeregt durch seinen Aufenthalt in den USA 1893 legte er seine Ideen als "Neues Göttinger Programm" in einer Eingabe an das Kultusministerium dar.
Da Klein erkannt hatte, dass eine Verschmelzung von Technischer Hochschule und Universität nicht zu erreichen war, trat er für die Aufnahme technischer Disziplinen an der Universität ein und legte sogleich einen detaillierten Plan für ein zu errichtendes physikalisch-technisches Institut vor.

Die Erfahrungen in den USA hatten zugleich Kleins Interesse an der Versicherungsmathematik geweckt. Gemeinsame Verhandlungen von Klein, Althoff, Kiepert und dem Göttinger Universitätskurator führten zur Errichtung eines Seminars für Versicherungswissenschaft ab Wintersemester 1895/96.
Der Nationalökonom W.Lexis übernahm als erster dieses Seminar und regte sogleich an, eine Lehrbefähigung für angewandte Mathematik einzuführen. Klein unterstützte diesen Vorschlag und hatte maßgeblichen Anteil daran, dass diese Lehrbefähigung Bestandteil der preußischen Prüfungsordnung für das Lehramt an höheren Schulen ab 1898 wurde.

Klein sah in der Einführung der Lehrbefähigung für angewandte Mathematik eine Mög-

lichkeit, der Realisierung seines Planes näherzukommen, technische Disziplinen an der Universität aufzunehmen. Die Berufung entsprechender Spezialisten allein, die er durch staatliche Unterstützung erreichen konnte, genügte dafür nicht.
Es mussten technische Einrichtungen und Institute geschaffen werden, für welche die staatlichen Mittel begrenzt waren. Klein hatte in den USA gesehen, dass die Wissenschaft an den Universitäten vielfach durch private Spenden und Stiftungen gefördert wurde. So erstrebte er ähnliches für seine Pläne:

"Ich will Kontakt mit der Technik, den die Universitäten auf dem Gebiete der Chemie besitzen, gleicherweise auf dem Gebiet der Physik und Mathematik herstellen und wünsche, dass mir die Technik selbst, in Anbetracht der Vorteile, die sie davon erwarten kann, durch Gewährung von Mitteln zur Durchführung des Planes behilflich sein soll." [18, S. 199]

Obwohl die objektiven Voraussetzungen für ein Zusammenwirken von Wissenschaft, Technik und Industrie gegeben waren, benötigte Klein Jahre, um Verständnis für seine Pläne zu finden. Die Aufnahme technischer Disziplinen an die Universität traf ebenso auf Widerstand wie bei den entsprechenden Plänen für die Akademie.
Die Universitätsangehörigen warfen ihm Verrat an der idealen Wissenschaft vor. Die Techniker fürchteten eine Einengung ihres Arbeitsfeldes, während er bei der Industrie auf Unverständnis und Ablehnung stieß. Die in dieser Zeit entstandenen Industrielaboratorien wurden als rationeller und rentabler eingeschätzt.
Ansonsten wurde Wissenschaftsförderung als Sache des Staates betrachtet.

Um engere Beziehungen zu Vertretern der Technik zu erreichen, trat Klein 1895 als einziger Universitätsprofessor dem Verein Deutscher Ingenieure (VDI) bei, setzte sich für die Verleihung des Doktortitels an Ingenieure und für das Promotionsrecht der Technischen Hochschulen ein.
Mit Vertretern dieses Vereins schloss er 1895 eine Vereinbarung, den sogenannten "Aachener Frieden", der festlegte, die Ingenieurausbildung den Technischen Hochschulen zu überlassen und die zu schaffenden technischen Einrichtungen an Universitäten auf die Bedürfnisse der auszubildenden Mathematiker, Physiker und Lehramtskandidaten abzustimmen.

C. von Linde, der eine führende Position im VDI einnahm und mit dem Klein seit München gut bekannt war, knüpfte nun auch die notwendigen Kontakte zur Industrie, besonders zu dem Chemieindustriellen und Landtagsabgeordneten H. Th. von Böttinger.
Böttinger, Linde und ein Kommerzienrat Krauss aus München stellten Weihnachten 1896 ein Summe von 20000 Mark zur Verfügung, mit deren Hilfe die Abteilung für technische Physik an der Göttinger Universität entstand, die dem physikalischen Institut angegliedert wurde.

Zu dieser Abteilung gehörte ein Maschinenraum mit einem 15-PS-Gasmotor und einer 15 PS starken Dampfmaschine. Das war der Anfang einer ganzen Reihe technischer Einrichtungen, die in der Folgezeit in Göttingen geschaffen wurden. Es war zugleich der Beginn eines Zusammenwirkens von Industriellen und Universitätswissenschaftlern.

Dieses Zusammenwirken nahm mit der Konstituierung der "Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik" am 26. Februar 1898, die 1901 auf Mathematik erweitert wurde, eine feste Form an.
Böttinger übernahm den Vorsitz, und Klein wurde 2. Vorsitzender. Es war die erste Organisation in Deutschland, die Vertreter von Industrie und Universität verband.

Von Beginn an waren z.B. die Nürnberger Maschinen-Aktiengesellschaft und die Elektrizitäts-Aktiengesellschaft sowie die Firma F. Krupp aus Essen dabei.
Durch die Beteiligung dieser finanzkräftigen Kreise entstanden an der Göttinger Universität vor allem folgende Einrichtungen: ein neues Institut für Geophysik 1902, ein Institut für angewandte Elektrizitätslehre 1905 sowie ein Institut für angewandte Mathematik und Mechanik 1905, das einerseits aus den Sammlungen mathematischer Modelle und Instrumente und andererseits aus der 1897 gegründeten Abteilung für technische Physik hervorging.

Die industrielle Unterstützung erfolgte durch Finanzierung sowie durch Schenkung von Materialien, z.B. von Eisen- und Stahlmaterialien zu Versuchszwecken durch die Firma Krupp. Klein war es gelungen, die genannten Institute nicht unter Alleinregie der Vertreter des Kapitals, sondern in enger Bindung an die Göttinger Universität zu errichten. So hatte er selbst wesentlichen Einfluss auf die Forschungsrichtung, auf die Schaffung ordentlicher Professuren und die Berufung entsprechender Wissenschaftler, die vom Kultusministerium genehmigt und bezahlt werden mussten.

Das Bestreben, die Wissenschaft zur Entwicklung der Produktivkräfte einzusetzen, muss zweifellos als progressiv eingeschätzt werden. Dabei schien Klein allerdings jedes Mittel recht zu sein, wenn es nur die Wissenschaft voranbrachte. Seine enge Bindung an Industrie und Militärtechnik wird ihm zu den wirksamen Argumenten verholfen haben. So machte er sich die Auffassung zu eigen, dass es notwendig ist, das Ausland wirtschaftlich und militärisch zu überflügeln. Diese Argumente verwendet er auch, um weitere Forderungen durchzusetzen:

"... die große Sorgfalt, die beispielsweise in England und Amerika dem physikalischen und chemischen (wie auch dem mathematischen) Unterricht neuerdings zugewendet wird, [wird] ausdrücklich damit begründet, dass man hofft, solcherweise die Bevölkerung für den Konkurrenzkampf der Nationen auf dem Gebiete der Industrie und der militärischen Geltung tüchtiger zu machen!
Fürwahr ein wichtiger Grund, ... geeignet, unseren Wünschen bei den maßgebenden Instanzen Gehör zu verschaffen" [vgl. 22, S. 51].

Ähnlich argumentierte Klein, um Aerodynamik und Hydrodynamik in Göttingen zu fördern. Er hatte erreicht, dass vier Göttinger Professoren in den technischen Ausschuss der 1906 gegründeten Berliner "Motorluftschiff-Studiengesellschaft" aufgenommen wurden, neben ihm Prandtl, Runge und Wiechert. Unter Kleins Führung gelang es, eine Modellversuchsanstalt für Luftfahrt in Göttingen zu errichten.
Am 3. Juli 1900 hatte F. Graf von Zeppelin das erste lenkbare Starrluftschiff am Bodensee gestartet. Wissenschaftliche Untersuchungen erhielten dadurch maßgeblichen Auftrieb.

F. Klein setzte sich dafür ein, die wissenschaftlichen Grundlagen für dieses Gebiet in Göttingen weiterzuentwickeln. So strebte er vor allem gemeinsam mit L. Prandtl danach, neben der Aerodynamischen Versuchsanstalt ein großes Forschungsinstitut für Aerodynamik und Hydrodynamik in Göttingen aufzubauen.
Hier zeigte sich ganz deutlich, dass die Realisierung dieses Planes in entscheidendem Maße von den entsprechenden Industriellen abhing, welche die notwendige finanzielle Unterstützung gewähren mussten.

Eine derartige Unterstützung wurde erst dann erteilt, als der unmittelbare Nutzen solcher Forschungen für die Realisierung der expansionistischen Ziele des deutschen Imperialismus offensichtlich war. Der Einfluss von Industrievertretern und Militärtechnikern erstreckte sich auch auf das Verhältnis der Hydrodynamik und Aerodynamik an dem geplanten Institut.
Hatten Klein und Prandtl den Hauptteil der Einrichtung für Hydrodynamische Forschungen vorgesehen, so erhielten sie die finanziellen Mittel nur für die umgekehrte Proportion.

Auf diese Weise entstand ein "Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung" in Göttingen, welches erst nach dem Tode Kleins am 16. Juli 1925 eingeweiht und als Leiter L. Prandtl - dessen Berufung nach Göttingen auch ein Verdienst Kleins war - übergeben wurde.

Da F. Klein seine wissenschaftlichen und wissenschaftsorganisatorischen Pläne auf dem Gebiet der angewandten Mathematik und Mechanik nur mit ausreichender Förderung durch das Monopolkapital realisieren konnte, wurde er zu einem exponierten Verfechter dessen Ziele.
Im Oktober 1914 unterzeichnete er den chauvinistischen Aufruf "An die Kulturwelt!", der gegen die angebliche Lügenpropaganda des Auslands über die Kriegsziele und -führung des imperialistischen Deutschlands gerichtet war. Mit ihm unterschrieben 92 weitere Gelehrte, u.a. E. Fischer, W.Nernst und M. Planck, die sich auf diese Weise mit dem preußischen Militarismus solidarisierten.

Es sei dahingestellt, inwieweit einige Wissenschaftler unter Druck gesetzt worden waren - Klein behauptete später, den Text des Aufrufes selbst gar nicht gekannt zu haben.
Er distanzierte sich nach dem Krieg davon, ohne jedoch öffentlich zu widerrufen, wie seine englische Schülerin G. Young ihn gebeten hatte" [vgl. 26, S. 159 f.].

Für Klein trifft wie für die große Mehrheit der Intelligenz seiner Zeit zu, dass sich hohe Fach- und Spezialkenntnisse mit politischer Blindheit und mit Anfälligkeit gegenüber der reaktionären Ideologie und Politik paarten.

In den Jahren, als Klein um die organisatorische Verbindung von Mathematik, Physik und Technik rang, trat er auch in seinen wissenschaftlichen Arbeiten der Mechanik und mathematischen Physik näher. Damit gelang ihm, was er zu Beginn seiner mathematischen Studien angestrebt hatte, wenn es auch nicht mehr zu einer umfassenden Produktivität auf diesem Gebiet gekommen ist.
So verfasste er Arbeiten über lineare Differentialgleichungen der Physik, speziell Lame-

sche Funktionen, hypergeometrische Funktionen und Oszillationsfragen sowie kleinere Beiträge zur Mechanik. Dabei übten die Darstellungen zur Mechanik nicht geringen Einfluss auf weiterführende Arbeiten aus.
Der Professor für angewandte Mathematik R. von Mises schätzte 1923 ein: Es

"... fällt Klein vor allem das große historische Verdienst zu, der Pflege der Mechanik in Deutschland, besonders durch Heranziehung der englischen Literatur, neuen Anstoß gegeben zu haben." [20, S. 222]

Ausgehend von den Ideen W. Hamiltons und J. C. Maxwells publizierte Klein einige Beiträge.
Besonders hervorzuheben sind seine Arbeiten zur Theorie des Kreisels, die sein Assistent Sommerfeld fortführte und die noch heute als Standardwerk gelten. Die gemeinsam mit seinem Schüler und späteren Professor für technische Mechanik K. Wieghardt erstellte Arbeit "Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten" befasste sich mit dem Problem der Spannungsermittlung an Fachwerken.
Diese Darstellung hatte unmittelbar praktische Bedeutung für die Baustatik, ebenso Kleins Abhandlung "Über Selbstspannungen ebener Diagramme", die den Ausnahmefall des ebenen Fachwerkes behandelte.

Neben diesen und anderen eigenen Arbeiten veranlasste Klein zugleich die deutschen Ausgaben englischer Lehrbücher zur Theorie starrer Körper, zur Hydrodynamik und zur Elastizitätstheorie.

Für die mathematischen Aufgaben der Technik war bereits seit dem 17. und 18. Jahrhundert ein breites Arsenal mathematischer Hilfsmittel entstanden: die Differential- und Integralrechnung, die Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen, die Lehrsätze der Potentialtheorie, der Variationsrechnung, die zahlreichen speziellen Funktionen wie Kreis- und Hyperbelfunktionen, Besselsche und Kugelfunktionen, elliptische Funktionen. Techniker und auch Physiker, meist mit empirischen Fragestellungen befasst, übernahmen diese theoretischen Hilfsmittel als etwas Fertiges, beinahe Abgeschlossenes.

Durch die starke Trennung von Mathematik und Technik waren die nützlichen mathematischen Hilfsmittel jedoch im gewissen Sinne erstarrt, Die mathematischen Lösungen existierten zumeist für idealisierte Zustände, die für die Praxis von unzureichendem Wert waren.
Von Göttingen kam der Anstoß zu modernen Methoden der angewandten Mathematik. Klein, der dieses Problem erkannt hatte, fand besonders in Runge einen Wissenschaftler, der diese Richtung fördern konnte.
Durch Kleins Betreiben erhielt C. Runge 1904 die erste ordentliche Professur für angewandte Mathematik an einer deutschen Universität. Bisher bestand seit 1892 eine auf Veranlassung von Klein eingerichtete außerordentliche Professur für angewandte Mathematik in Göttingen, die als erster A. Schönflies inne hatte. ;

Einige typische Beispiele für diese modernen Methoden der angewandten Mathematik, die besonders von Runge verwendet wurden, waren die streckenweise Integration von gewöhnlichen und die streifenweise Integration von partiellen Differentialgleichungen, das Verfahren der sukzessiven Approximation, die näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen durch Umwandlung in Differenzengleichungen und weitere Behandlung der letzteren sowie direkte Methoden der Variationsrechnung, d.h. das Aufsuchen oder Annähern der Extremalfunktion, ohne auf die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung zurückzugreifen.

Zur Verwendung mathematischer Hilfsmittel in der Praxis diente in hohem Maße die "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen" (erschienen 1898 bis 1935). Dieses umfassende mathematische Werk war 1894 von F. Meyer initiiert worden, erhielt seine sachbezogene Anordnung durch den Schüler Kleins W. von Dyck und verdankte sein Zustandekommen maßgeblich dem mathematischen Weitblick und den organisatorischen Fähigkeiten Felix Kleins.

Im Zusammenhang mit Kleins Wirken für die angewandte Mathematik ist besonders interessant, dass er Herausgeber von Band 4 "Mechanik" (1901 bis 1914) war.
Zugleich war es in erster Linie Klein, der auch für die anderen Bände sorgte, insbesondere die besten Wissenschaftler zur Mitarbeit gewann. Dazu gehörten auch ausländische Gelehrte, u. a. der Schöpfer der klassischen Elektronentheorie H. A. Lorentz aus Leyden, der am Band 5 "Physik" mitarbeitete.

Durch mehrfache größere Reisen nach Großbritannien, Frankreich, Holland, Italien und Österreich stellte Klein engen Kontakt zu den ausländischen Wissenschaftlern und Mitautoren her. Dabei half ihm, dass er mit vielen Gelehrten des Auslands bereits persönlich bekannt war, selbst internationale Anerkennung genoss und sich in Englisch und Französisch ausgezeichnet verständigen konnte.

Kleins enge Beziehungen zu angewandten Disziplinen blieben übrigens auch auf seinen Sohn nicht ohne Wirkung. Klein lenkte ihn ganz bewusst auf einen praktischen Beruf. Er ergriff den Beruf eines Maschineningenieurs. In diesem Zusammenhang sei auch erwähnt, dass seine Tochter Luise 1902 einen Vertreter angewandter Disziplinen heiratete, F. Süchting, Professor für Maschinenkunde und Elektrotechnik an der Bergakademie Clausthal.

9 Förderung des mathematischen Unterrichts

Den Problemen des mathematischen Unterrichts widmete F.Klein Zeit seines Lebens große Aufmerksamkeit. Bereits mit seiner Dissertation hatte er im Dezember 1868 die folgende These verteidigt:

"Es ist wünschenswert, dass neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht der Gymnasien eingeführt werden." [1, Bd. 1, S. 49]

Diese These zielte auf eine seiner grundsätzlichen Forderungen für den höheren Unterricht, die er 1872 in seiner Erlanger Antrittsrede formuliert hatte und auch später ständig vertrat. Entsprechend dem gesicherten wissenschaftlichen Erkenntnisstand wollte er den Unterricht auf ein höheres theoretisches Niveau heben.
Zugleich erhob er aber stets eine zweite Forderung, eine anschauliche, anwendungsbereite, praxisnahe Gestaltung des Unterrichts zu erreichen, ohne die Systematik des Lehrgangs zu verletzen.

Während seiner Göttinger Zeit vertiefte Klein seine diesbezüglichen Auffassungen und setzte sich verstärkt für deren Realisierung ein. Grundlage dafür bildete ein detailliertes Studium der historischen Entwicklung des Mathematikunterrichts, das u. a. seinen Ausdruck in Kleins Aufsatz "Hundert Jahre mathematischer Unterricht" (1904) fand. Zugleich verfolgte Klein aufmerksam die internationale Entwicklung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts.

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts setzte in allen entwickelten kapitalistischen Staaten ein Kampf um die Gleichberechtigung und die Modernisierung des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften ein. Die Gestaltung dieses Unterrichts wurde zum Bestandteil des internationalen Konkurrenzkampfes.
Die herrschenden Kreise erkannten zunehmend, dass ein modern gestalteter mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht langfristig die beste Gewähr bietet, der ausländischen Konkurrenz auf wirtschaftlichem und militärischem Gebiet zu begegnen.

In Deutschland waren die staatlichen Instanzen jedoch nur zögernd bereit, die entsprechenden Konsequenzen durchzusetzen. Die Realschulen waren gegenüber den Gymnasien benachteiligt.
Die Abgänger der Realschulen erhielten nicht die Zulassung für jedes beliebige Studienfach, Die Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften waren den Lehrern der philologischen und historischen Fächer nicht gleichgestellt; sie konnten nicht in höhere Ämter des Schuldienstes aufsteigen. All dies führte zu einem hartnäckigen Kampf der Realschullehrer um ihre Gleichberechtigung.

Eine 1890 zentral einberufene Schulkonferenz sicherte den Abiturienten der Oberrealschulen die Berechtigung für ein Universitätsstudium, brachte aber noch nicht in jedem Fall die gewünschten Veränderungen.
Daraufhin schlossen sich am 5. Oktober 1891 Vertreter des höheren Unterrichts in Braunschweig zu einem "Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, e. V." (Förderverein) zusammen. Sie kämpften darum, die Anerkennung ihrer Fächer und die Gleichstellung ihrer Person mit den Lehrern der phi-

lologischen und historischen Disziplinen zu erreichen.

F. Klein suchte 1894 den Kontakt zu diesem Förderverein und wurde dessen Mitglied. Ausgangspunkt dafür bildete seine Erkenntnis, dass Vertreter der Universität und der höheren Schule zusammenarbeiten müssen, um die Lehrerbildung auf höherem theoretischen Niveau und praxisnaher zu gestalten.
Nach diesen Grundsätzen bildete Klein Lehramtskandidaten für Mathematik an der Universität Göttingen aus. Er hatte ein nicht geringes Interesse an methodischen Fragen des Unterrichts und sorgte aus diesem Grunde dafür, dass in Göttingen der erste Lehrstuhl für "Didaktik der mathematischen Wissenschaften" an einer deutschen Universität eingerichtet wurde.

Zugleich beteiligte sich Klein an der Weiterbildung von Mathematiklehrern höherer Schulen. Zu Beginn der 90er Jahre waren in Berlin, Frankfurt a. M. und Göttingen naturwissenschaftliche Ferienkurse eingerichtet worden, die den bereits in der Praxis tätigen Lehrern moderne naturwissenschaftliche Erkenntnisse vermittelten.
Im Mittelpunkt dieser Kurse standen neue Ergebnisse auf den Gebieten der Elektrizitätslehre, der Elektrotechnik, der organischen Chemie und die Vermittlung experimenteller Fertigkeiten.

Das Verdienst F. Kleins bestand darin, dass er derartige Ferienkurse 1892 erstmals auch für Mathematiklehrer organisierte, In Göttingen fanden sie danach in der Regel aller zwei Jahre, meist unter Kleins Leitung, statt, Klein hielt vor den Lehrern eine Reihe vielbeachteter Vorträge. Daraus entstanden 1900 und 1904 zwei Bücher, die er gemeinsam mit Riecke herausgab.

Der Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hatte geplant, auf seiner Hauptversammlung 1894 in Wiesbaden über Probleme der Ferienkurse zu beraten.
Das war der unmittelbare Anlass für F. Klein, sich an die Mitglieder dieses Vereins zu wenden. In einem Brief an Althoff schrieb er am 18. Mai 1894:

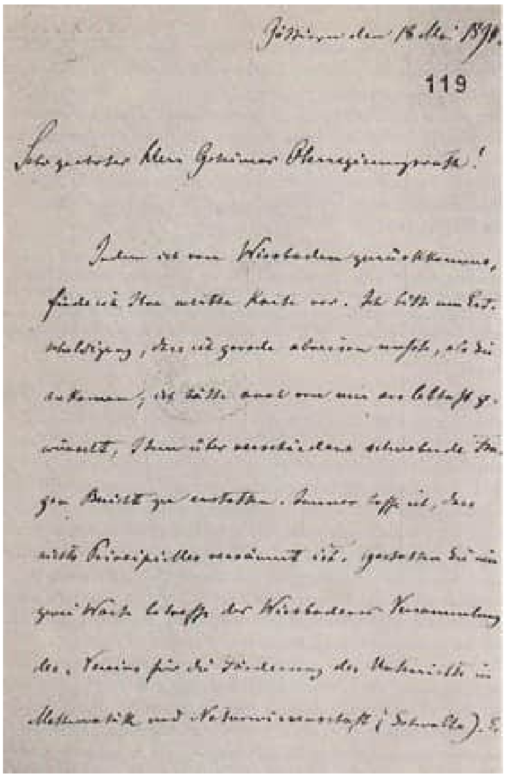
"Es sollte dort (in Wiesbaden - R. T.) über die verschiedenen für die Gymnasiallehrer eingerichteten naturwissenschaftlichen Ferienkurse berichtet werden, wozu man Vertreter von Berlin und Frankfurt a/M herangezogen hatte, während Göttingen so gut wie umgangen schien. Unter diesen Umständen hielten meine Collegen und ich selbst es für aeusserst erwünscht, dass ich hinging und unsere hiesigen Auffassungen und Leistungen zur Geltung brächte." [3, Bl. 119]

Mit seinem ersten Auftreten im Förderverein erreichte Klein einen wichtigen Einfluss auf eine Reihe von Arbeiten dieses Gremiums, zu dessen Ehrenmitglied er 1917 ernannt wurde. Gemäß Kleins Vorschlag fand die nächste Hauptversammlung des Vereins 1895 in Göttingen statt.
Er bestimmte auch den Hauptgegenstand dieser Versammlung. Nach seiner Empfehlung wurden die Beziehungen zwischen Hochschulunterricht und dem Unterricht an den höheren Schulen ausführlich erörtert. Zur Vorbereitung der Versammlung schuf Klein eine Ortsgruppe des Fördervereins in Göttingen und arbeitete selbst das Hauptreferat

aus: "Über den mathematischen Unterricht an der Göttinger Universität im besonderen Hinblicke auf die Bedürfnisse der Lehramtskandidaten".

Da Klein in dieser Zeit hartnäckig um die Ausdehnung angewandter Disziplinen an der Universität kämpfte und um die Einigung mit den Vertretern der Technik rang, suchte er bei den Angehörigen des Fördervereins in erster Linie Verständnis und Unterstützung für eine den praktischen Bedürfnissen besser angepasste Ausbildung. Es ging ihm um das richtige Verhältnis von reiner und angewandter Mathematik in der Lehre.

Das war zugleich ein wichtiges Anliegen des Fördervereins, der diese Thematik in seiner Elberfelder Hauptversammlung 1896 entsprechend Kleins Vorschlag unmittelbar aufgriff. In diesen Aktivitäten lag außerdem ein wichtiger Ansatzpunkt für die bereits erwähnte Einführung der Lehrbefähigung für angewandte Mathematik 1898 in Preußen.


Göttingen den 18 Mai 1894.

119

Hochgeehrter Herr Geheimer Oberregierungsrath!

10 Handschrift Felix Kleins. Aus einem Brief an Althoff vom 18. Mai 1894 (In: [3, BL. 119])

Mit der Hinwendung zu Fragen der Lehrerbildung und des höheren Schulunterrichts wurde Klein in wachsendem Maße zu einer Autorität auf diesem Gebiet. Im Juni 1900 fand in Berlin eine Schulkonferenz zu Fragen des höheren Unterrichts statt, die endgültig die gleichberechtigte Stellung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer herbeiführen sollte.
Althoff lud F. Klein bewusst als Vertreter des mathematischen Unterrichts zu dieser Konferenz. Er rechnete mit Kleins Ansehen in den Kreisen des höheren Schulunterrichts und des Hochschulunterrichts, mit seiner oft gelobten Vortragskunst und seinem mitreißenden Auftreten. In seinen Diskussionsbeiträgen bemühte sich F, Klein vor allem, Verständnis für eine Modernisierung des Mathematikunterrichts zu gewinnen:

"Jeder Sachverständige wird bestätigen, dass man selbst die Grundlinien der wissenschaftlichen Naturerklärung nur verstehen kann, wenn man wenigstens die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung sowie der analytischen Geometrie, - also den sogenannten niederen Teil der höheren Mathematik - kennt. Es hat denn auch immer Lehrer, selbst an humanistischen Gymnasien, gegeben, welche ihre Schüler in einem gewissen Maße in diese Anfangsgründe einführten. Die Frage müsste sein, ob man hierfür nicht allgemein im Lehrplan wenigstens der Realanstalten ausreichenden Raum vorbehalten könnte." [31, S. 154]

Mit dem kaiserlichen Erlass vom 26. November 1900 wurden zwar die drei Arten höherer Schulen formell gleichgestellt, aber die konkreten Forderungen für das Fach Mathematik gingen nicht in die neuen preußischen Lehrpläne von 1901 ein.

Klein ließ jedoch von seinen Forderungen nicht ab, sondern vertrat sie in den folgenden Jahren mit immer stärkerem Nachdruck.
Damit ordnete er sich in die nationalen und internationalen Reformbestrebungen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts insgesamt ein. In Frankreich war 1902 ein zentral verbindlicher Lehrplan für höhere Schulen erschienen, der durchgängig den Funktionsbegriff zugrunde legte und die Anfänge der Differential- und Integralrechnung enthielt.
Bezugnehmend auf diese moderne Gestaltung des Mathematikunterrichts verwies Klein in Vorträgen und Publikationen immer wieder darauf, um auch den mathematischen Unterricht in Deutschland auf ein entsprechendes Niveau zu heben. Insgesamt muss man einschätzen, dass er die vielfältigsten Aktivitäten dazu entwickelte, ohne sein Ziel je voll zu erreichen.

Die 1822 gegründete Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte rückte Fragen des höheren Unterrichts um die Jahrhundertwende stärker in den Mittelpunkt ihres Interesses. Sie folgte damit dem Beispiel entsprechender Vereinigungen in Frankreich und Großbritannien. Ausgangspunkt für die deutsche Naturforschergesellschaft bildete vor allem der Kampf der Biologen um die Wiederanerkennung ihres Faches.

Um den materialistischen Einfluss der Darwinschen Entwicklungslehre einzudämmen, war der Biologieunterricht 1879 aus der Oberstufe aller höheren Schulen verbannt worden. Auf der Naturforscherversammlung 1901 in Hamburg drückten die Biologen ihre Forderungen in Thesen aus.
Klein, der von den Vertretern des Faches Biologie um Unterstützung gebeten worden war, nutzte die günstige Situation, um über die Gesamtheit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer verhandeln zu lassen. Gemäß seinem Antrag befasste sich die Naturforscherversammlung 1904 in Breslau ausführlich mit diesem Thema.

F. Klein hatte mit seinem Antrag Erfolg, weil er mit den Forderungen nach Hebung des theoretischen Niveaus sowie anschaulicher und praxisnaher Gestaltung des Unterrichts sowohl den Interessen der Fachvertreter als auch denen der Vertreter von Technik und Industrie entsprach.
Klein stieß auf Verständnis, weil er nicht Sonderinteressen des Mathematikunterrichts in den Mittelpunkt rückte, sondern die Gesamtheit der mathematisch-naturwissenschaftlichen

Fächer zu entwickeln trachtete.

Aber nicht nur das. Durch mehrere Vorträge vor der Philologenversammlung erreichte Klein sogar eine weitgehende Zustimmung bei den Vertretern der philologischen und historischen Fächer, die der Ausweitung der übrigen Fächer mit Skepsis gegenüberstanden.

F. Klein hielt auf der Breslauer Naturforscherversammlung 1904 eines der vier Hauptreferate. Darin begründete er die notwendigen Maßnahmen für den mathematischen und physikalischen Unterricht.
Zur detaillierten Ausarbeitung aller Veränderungswünsche schlug F. Klein die Bildung einer Unterrichtskommission vor. So entstand ein zwölfköpfiges Gremium, auf dessen Zusammensetzung Klein nicht geringen Einfluss hatte.
Es arbeitete unter der Leitung des Mathematikers A. Gutzmer von 1904 bis 1907 und bestand aus den Vertretern der einzelnen Fachdisziplinen, dem Vorsitzenden des Fördervereins und einem Vertreter des Vereins Deutscher Ingenieure.
F. Klein vertrat die Interessen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in der Breslauer Unterrichtskommission.

Die Tätigkeit dieser Kommission schlug sich in Reformvorschlägen nieder, die auf den Naturforscherversammlungen 1905 in Meran, 1906 in Stuttgart und 1907 in Dresden unterbreitet wurden. Für Kleins Anteil daran ist charakteristisch, dass schon zu seinen Lebzeiten der Begriff "Kleinsche Reform" für diese Reformbestrebungen geprägt wurde.

Kleins Ansichten bestimmten die Vorschläge für den mathematischen und physikalischen Unterricht wesentlich, So erklärte z. B. der Meraner Lehrplan von 1905 die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zum funktionalen Denken als wichtigste Aufgaben des Mathematikunterrichts. Außerdem leitete Klein die Unterkommission für Lehrerbildung.

Die unter seiner Leitung ausgearbeiteten Vorschläge, die er 1907 in Dresden vortrug, widerspiegelten die stärkere Hinwendung zu angewandten Disziplinen. Interessant ist auch, dass es Klein war, der erstmals vorschlug, sich beim Lehrerstudium auf die Kombination von zwei mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern (Mathematik/Physik bzw. Chemie/Biologie) zu konzentrieren.
Hervorzuheben ist weiterhin sein Bemühen um ein Weiterbildungssystem für Lehrer, das von der Einrichtung pädagogischer Seminare an den höheren Schulen bis zu den bereits erprobten Ferienkursen reichte.

Die Mehrzahl der Vorschläge Kleins stieß in der Unterrichtskommission auf breites Verständnis. In einem wichtigen Punkt gelang es ihm jedoch nicht, seine Ansichten voll durchzusetzen. Seine Forderung, die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung im Mathematikunterricht der höheren Schulen zu lehren, wurde nicht von allen unterstützt.
Da sich besonders der Vertreter des höheren Schulunterrichts, der Vorsitzende des Fördervereins F. Pietzker, dagegen wandte, überließ es die Kommission dem einzelnen

Lehrer, entsprechende Stoffgebiete in seinen Unterricht aufzunehmen.
Damit waren kaum durchgreifende Erfolge zu erwarten; aber Klein ließ in seinem Kampf um die Erhöhung des theoretischen Niveaus des mathematischen Unterrichts nicht nach.

In Vorlesungen wandte er sich in dieser Zeit den Problemen des mathematischen Unterrichts zu. Daraus resultierte das dreibändige Werk "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus", welches Klein besonders an die Mathematiklehrer richtete. Im Vorwort zum ersten Teil schrieb er Ende Juni 1908:

"Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge 'über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen', speziell über die 'Organisation des mathematischen Unterrichts' gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn Schimmack zusammen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen.
An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden. Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer - oder auch den reiferen Studenten - Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkt der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen." [9, Teil I, Vorwort, o.S.]

Im Jahre 1908 verstärkte Klein seine Aktivitäten für den mathematischen Unterricht noch mehr.
Im Januar des gleichen Jahres wurde der Deutsche Ausschuss für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU) gegründet, der sich aus Vertretern von mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereinen und Gesellschaften sowie des VDI zusammensetzte. F. Klein übernahm die Leitung des Unterausschusses für Lehrerbildung beim DAMNU.

Das Ziel dieser Vereinigung bestand vornehmlich darin, die von der Breslauer Unterrichtskommission erarbeiteten Vorschläge in die Praxis umzusetzen. Da F. Klein im gleichen Jahr Mitglied des preußischen Herrenhauses als Vertreter der Universität Göttingen wurde, ergab sich für ihn eine größere Möglichkeit, für dieses Ziel zu wirken.
Mit "Herrenhaus" wurde die Erste Kammer des preußischen Landtages bezeichnet. Diese Kammer bildete eine Reihe von Kommissionen. F. Klein setzte sich sofort dafür ein, dass 1908 eine spezielle Unterrichtskommission gebildet wurde, und er übernahm selbst die Funktion des stellvertretenden Vorsitzenden.

Es gelang Klein, die Erprobung von Reformvorschlägen durchzusetzen. Zugleich hatte er maßgeblichen Anteil an den wichtigsten gesetzlichen Veränderungen in Preußen, die Mathematik und Naturwissenschaften betrafen, am Erlass des preußischen Kultusministeriums zur Förderung des biologischen Unterrichts vom 18. März 1908 und an der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens in Preußen vom 18. August 1908.

Interessant ist, dass sich die Unterrichtskommission des preußischen Herrenhauses nicht nur mit Fragen des höheren Unterrichts befasste, sondern u.a. ausführlich Fragen des Volks-, Mittel- und Fortbildungsschulwesens erörterte. Hier zeigte sich, dass die herrschenden Kreise nicht umhin kamen, gewisse Verbesserungen dieses Unterrichts vorzunehmen, um den Anforderungen aus Industrie und Technik gerecht zu werden.

In Verbindung mit seiner Arbeit im DAMNU setzte sich Klein in mehreren Publikationen und Vorträgen auch für eine verbesserte Ausbildung von Volks- und Mittelschullehrern ein, Zugleich forderte er verstärkte finanzielle Aufwendungen für diesen Unterricht. In seiner 1910 gehaltenen Rede "Zur Beratung des Kultusetats im preußischen Herrenhause" führte er aus:

"... der Herr Finanzminister ist nicht sehr geneigt, große Summen für diese Dinge zur Verfügung zu stellen, Ich möchte doch an die Unterrichtsverwaltung die Bitte richten, in dieser Hinsicht nicht zu vorsichtig zu sein, zumal da die Summen, um die es sich hier handelt, verschwindend klein sind gegenüber den 160 Millionen, welche das Volksschulwesen an sich jetzt schon in Anspruch nimmt.
Es kommt mir so vor, als wenn ein Maschinenfabrikant es unterlassen wollte, die richtigen Werkzeugmaschinen anzuschaffen, die ihm ein billigeres und besseres Fabrikat ermöglichen." [5, S. 390]

Dass sich F. Klein in diesen Jahren auch Fragen der Volks- und Mittelschulen zuwandte, mag sicher auch von seinen internationalen Aktivitäten bestimmt worden sein. Der IV. Internationale Mathematiker-Kongress in Rom beschloss am 11.4.1908 die Bildung einer Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK), die vergleichende Untersuchungen der Methoden und Lehrpläne des gesamten mathematischen Unterrichts, vom Anfangs- bis zum Hochschulunterricht, vornahm.

Den Vorsitz sollte ein deutscher Vertreter übernehmen, denn die von der Breslauer Unterrichtskommission ausgearbeiteten Reformvorschläge hatten international breites Aufsehen erregt. Zunächst war Gutzmer, als Vorsitzendem dieser Kommission, dieses Amt angetragen worden.
Dieser lehnte jedoch ab. Er wies in seinem Vortrag in Rom auf die bedeutende Rolle Felix Kleins innerhalb der Reformbestrebungen hin und schlug ihn als Vorsitzenden vor. Dieser Vorschlag fand allseitige Unterstützung. So führte z.B. der ungarische Mathematiker E. Beke aus:

"Im Großen und Ganzen stehen wir alle unter dem Einfluss der Bewegung, welche von Herrn Prof. Klein inauguriert und von der deutschen Commission weiter gefördert wurde" [vgl. 21, S. 20].

So wurde Klein, der in Rom nicht teilnahm, in Abwesenheit zum Vorsitzenden der IMUK bestimmt. Unter seiner Leitung erzielten die Vertreter des Mathematikunterrichts eine recht umfassende Zusammenarbeit. Dagegen scheiterten andere internationale pädagogische Vorhaben an den zunehmend nationalistisch und militaristisch orientierten Erziehungsinteressen der imperialistischen Staaten.
Das Zustandekommen der Zusammenarbeit auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts lag unter anderem darin begründet, dass dieser Unterricht als weitgehend

ideologiefrei angesehen wurde. Seine Auswirkungen auf die Wirtschaft und Industrie zeigten sich nicht so unmittelbar wie beim naturwissenschaftlichen Unterricht.

F. Klein lenkte die vergleichenden Untersuchungen auf Gebiete, die das zeitgemäße Niveau des Mathematikunterrichts bestimmen sollten. Ausdruck dessen war folgende Orientierung des Hauptausschusses der IMUK, dem neben Klein noch der Engländer G. Greenhill als Stellvertreter, der Schweizer H. Fehr als Generalsekretär und seit 1912 der USA-Verteter D, E. Smith angehörten:

Unter den Gegenständen, die gegenwärtig einen Platz in den Lehrplänen verlangen, seien erwähnt die Differential- und Integralrechnung, die analytische Geometrie, gewisse Begriffe aus der darstellenden und projektiven Geometrie, ein Studium der Physik vom mathematischen Standpunkt aus usw. Ferner wird auch die Einführung neuer Gegenstände speziellerer Art oder neuer Fundamentalbegriffe (wie Funktions-, Gruppen-, Mengenbegriff) vorgeschlagen." [Vgl. 21, S. 22]

Bei jährlichen Zusammenkünften von 1910 bis 1914 berieten die Mitglieder der IMUK Probleme der Strenge und Fusion der Methodik des Mathematikunterrichts, des induktiven und deduktiven Vorgehens im geometrischen Unterricht, der methodischen Behandlung des Funktionsbegriffs, der Einführung der Infinitesimalrechnung an höheren Schulen, Fragen der Lehrerbildung. Das waren alles Fragen, mit denen sich Klein selbst ausführlich befasst hatte. So ist es nicht verwunderlich, wenn die Beratungen und Diskussionen stets maßgeblich von seinen Auffassungen geprägt waren.

Wichtigstes Ergebnis der IMUK-Tätigkeit war eine große Anzahl von Publikationen zum Entwicklungsstand des mathematischen Unterrichts, Bis zum Jahre 1920 wurden 187 Bände mit 310 Einzelberichten über 18 Länder von Gelehrten aus diesen Ländern fertiggestellt.
Die Arbeiten des deutschen Unterausschusses der IMUK standen dabei unter der direkten Leitung von Klein und erschienen in den von ihm herausgegebenen "Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland" (1909 bis 1916).

Die Vor- und Nachworte Kleins in diesen Abhandlungen aus den Jahren des 1. Weltkrieges zeigen seine widersprüchliche Haltung zu diesem imperialistischen Krieg. Einerseits bedauerte er die Unterbrechung der internationalen Zusammenarbeit auf wissenschaftlichem Gebiet.
Andererseits wies er mit Nachdruck auf die Notwendigkeit hin, auch den Mathematikunterricht für militaristische Erziehung zu nutzen. Zwar gelangten über die Schweiz weiterhin Berichte nationaler Unterausschüsse nach Deutschland, aber eine wirkliche internationale Zusammenarbeit konnte es in dieser Zeit nicht geben. Die französische Akademie hatte Klein wegen der bereits erwähnten Unterzeichnung des "Aufrufs an die Kulturwelt!" aus ihrer Mitgliederliste gestrichen.

Auf Empfehlung der deutschen Regierung behielt Klein den Vorsitz der IMUK formal bei, um möglicherweise nach dem Krieg die Arbeit fortzusetzen.
Deutschland blieb jedoch Anfang der 20er Jahre relativ isoliert von den internationalen Wissenschaftsbeziehungen. Und erst 1928, nach Kleins Tod, wurde die IMUK auf dem

internationalen Mathematikerkongress in Bologna erneut ins Leben gerufen.

In Deutschland zeichnete sich zu Beginn der 20er Jahre die Tendenz ab, die Anforderungen an den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht zurückzunehmen. Im Interesse einer verstärkten Ideologisierung des Unterrichts erfolgte eine wachsende Orientierung auf die geisteswissenschaftlichen Fächer an den Schulen.
F. Klein wandte sich noch 1924 vom Krankenbett aus in einem öffentlichen Brief gegen derartige Bestrebungen. Auch die Mehrzahl der mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Vereinigungen erhob dagegen öffentlich Protest. Ihr Auftreten scheiterte am Grundwiderspruch imperialistischer Bildungspolitik und Pädagogik.

10 Nach der Emeritierung

Die ständig zunehmende Anzahl der Verpflichtungen zehrte an Kleins Gesundheit. Im Frühherbst eines jeden Jahres reihten sich die Tagungen, an denen er aktiv beteiligt war, in dichter Folge: Naturforscherversammlung, IMUK-Zusammenkunft, DAMNU-Sitzung, Jahresversammlung des Deutschen Museums, Besprechungen zur "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften".
So trat im November 1911 eine so schwere Erschütterung seines körperlichen Zustandes ein, dass er ein ganzes Jahr in einem Sanatorium in Hahnenklee im Harz verbringen musste.

In abgewogenem Maße gestattete ihm der Arzt die Fortführung seiner Arbeiten, so dass er dennoch alle leitenden Fäden in der Hand behielt. Vertreter der Universität sowie der verschiedenen Gremien, denen er vorstand, kamen zu Besprechungen in das Sanatorium.
Zurückgekehrt nach Göttingen nahm Klein den regelmäßigen Lehrbetrieb nicht wieder auf. Ostern 1913 ließ er sich emeritieren. Sein Nachfolger wurde C. Caratheodory.

Als emeritierter Professor war Klein befreit von Lehr- und anderen Verpflichtungen, aber alle Rechte und Privilegien blieben ihm erhalten. Das heißt, nach wie vor lag die Leitung der mathematischen und physikalischen Belange an der Universität in seinen Händen.
Er blieb eine starke Kraft in der philosophischen Fakultät, hatte eine einflussreiche akademische Stimme im preußischen Kultusministerium und repräsentierte die Universität weiterhin bei ihren Verbindungen mit der Industrie. Gemeinsam mit Hilbert machte er noch immer seinen Einfluss geltend, um die besten Gelehrten für Göttingen zu gewinnen, u. a. die Mathematiker R. Courant und H. Weyl, den theoretischen Physiker M. Born und den Experimentalphysiker J. Franck.

In der Göttinger Mathematischen Gesellschaft hielt Klein nach wie vor den von ihm eingeführten Ferienbericht über die wissenschaftlichen und organisatorischen Resultate der zurückliegenden Ferien. In der Deutschen Mathematiker-Vereinigung arbeitete er weiter rege mit, So wirkte er u. a. von 1916 bis 1922 als Preisrichter für den Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften, der 1912 vom damaligen Schatzmeister der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gestiftet worden war, 1000,- M betrug und aller zwei Jahre vergeben wurde.

Der Stifter, Alfred Ackermann-Teubner, hatte sich die erstmalige Verleihung selbst vorbehalten und 1914 Felix Klein mit diesem Preis für seine Arbeiten auf dem Gebiet des mathematischen Unterrichts geehrt. Für diese Auszeichnung war es gewiss nicht unerheblich, dass Klein eine langjährige Zusammenarbeit mit dem Teubner-Verlag verband. In diesem Verlag wurden die autographierten Vorlesungshefte von Klein, die "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", die "C. F. Gauß Werke" und bis 1921 die "Mathematischen Annalen", die "Kultur der Gegenwart" u. a. herausgegeben.

So hatte sich ein enges Verhältnis zwischen Klein und dem Teubner-Verlag entwickelt. Klein sorgte als Preisrichter des Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreises dafür, dass hervorragende Gelehrte für mathematische Arbeiten ausgezeichnet wurden: z.B. Zermelo, Prandtl, Mie und Koebe. Insgesamt entfaltete Klein auch in seinen letzten zwölf Lebensjahren vielfältige Aktivitäten.

Auf wissenschaftlichem Gebiet war diese Zeit für Klein vor allem durch drei wichtige Ergebnisse gekennzeichnet, durch historische Arbeiten über die Mathematik des 19. Jahrhunderts, durch Beiträge zur Einsteinschen Relativitätstheorie sowie durch die Herausgabe seiner eigenen gesammelten mathematischen Abhandlungen.

Mit Vorlesungen, die Klein vor einem kleinen ausgewählten Hörerkreis zunächst noch im Universitätsgebäude, ab Sommer 1916 in seiner Wohnung hielt, bereitete er diese Ergebnisse vor.
Die mathematikhistorischen Arbeiten waren durch den ursprünglichen Plan veranlasst worden, eine größere Darstellung im Rahmen des Werkes "Kultur der Gegenwart" vorzubereiten. Zu Beginn seiner Abhandlung wertete Klein ausführlich die Leistungen von Gauß.

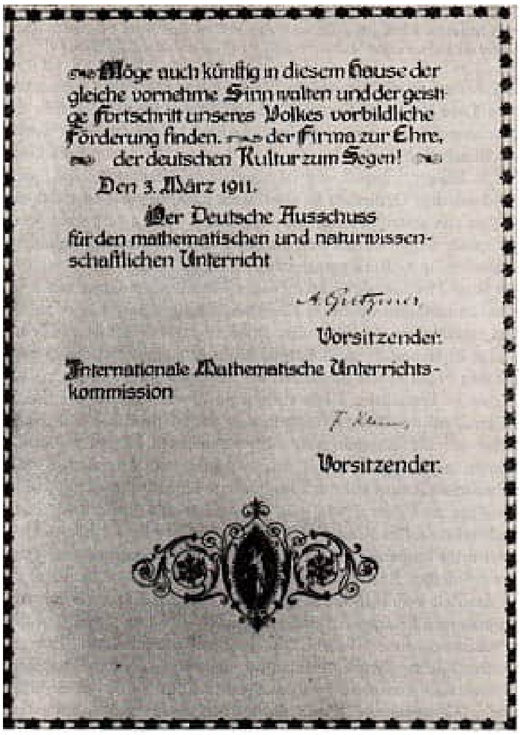
Klein zeichnete die Entwicklung der verschiedenen mathematischen Disziplinen im 19, Jahrhundert, besonders der Geometrie und der Funktionentheorie, sowie die Entfaltung von Mechanik und mathematischer Physik. Wenn auch die historische Darstellung nicht nach allen Seiten hin gleichmäßig abgewogen erscheint, Zahlentheorie, Algebra und Mengenlehre nicht ausreichend berücksichtigt wurden, so stellen diese Vorlesungen doch eine hervorragende mathematikhistorische Leistung dar.


Ein Festtag für Alle, denen die geistigen Güter unseres Volkes am Herzen liegen, ist die Jubelfeier des Hauses

B.G.TEUBNER.

Denn gross und wertvoll ist die Förderung, die nahezu alle Gebiete des geistigen Lebens im Laufe des verflossenen Jahrhunderts durch die umfassende Tätigkeit und den weitschauenden Unternehmungsgeist des Gründers und der späteren Inhaber des Teubnerschen Verlages erfahren haben.

Insbesondere hat sich die Firma seit einem halben Jahrhundert unvergängliche Verdienste um die Hebung des gesamten mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts erworben, und mit feinem Verständnis hat sie die nach Verwirklichung ringenden triebkräftigen


Möge auch künftig in diesem Hause der gleiche vornehme Sinn walten und der geistige Fortschritt unseres Volkes vorbildliche Förderung finden. der Firma zur Ehre, der deutschen Kultur zum Segen!

Den 3. März 1911.

Der Deutsche Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht

Vorsitzender.

Internationale Mathematische Unterrichtskommission

F. Klein

Vorsitzender.

11 1. und 3. Seite der Gratulationsadresse des DAMNU und der IMUK zur Hundertjahrfeier des Teubner-Verlages 1911 (Archiv des Teubner-Verlages Leipzig)

Kleins Ausführungen sind noch heute bei der Einschätzung der inneren Logik der mathematischen Entwicklung des 19. Jahrhunderts eine wichtige Stütze, wenn sich auch verschiedene Angaben als fehlerhaft erwiesen haben. Der damals in Göttingen wirkende Mathematikhistoriker O. Neugebauer schätzte schon 1926 Kleins wissenschaftshistorische Leistung hoch ein:

"Die Frage nach dem Woher und Wohin einer Wissenschaft, nach ihrer Einordnung in den weiteren Kreis unserer Gesamtkultur, wird immer entschiedener gestellt ... Was in diesem Sinne für die Mathematik geschichtliche Betrachtung bedeuten kann, das zeigt, wie kein zweites, das Werk von Felix Klein "Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert"." [127, S. 44]

Diese mathematikhistorischen Vorlesungen erschienen erst nach dem Tode Kleins im Druck. Noch zu seinen Lebzeiten wurden sie aber ausgearbeitet und maschinenschriftlich verbreitet.
Seine Tochter Elisabeth half ihm bei der Ausarbeitung. Sie hatte ihren Gatten R. Staiger, Doktor der Musikwissenschaften und Leiter des akademischen Orchesters in Göttingen, nach kurzer Ehe gleich zu Beginn des ersten Weltkrieges verloren.

Es ist zu bemerken, dass sie später wegen ihrer Loyalität gegenüber ihren vielen jüdischen Freunden, u.a. R.Courant, von den faschistischen Machthabern aus ihrer Position als Direktor eines Mädchengymnasiums in Hildesheim entlassen wurde. F. Klein war dagegen durchaus nicht frei von rassistischen Auffassungen.

In einer englisch gehaltenen Vorlesung in Evanston am 2. 9. 1893 hatte er eine Ansicht vertreten, die den Nazis später gestattete, ihn als einen ihrer geistigen Vorfahren zu betrachten. Klein deutete in dieser Vorlesung an, dass unterschiedliche Raumauffassungen in der Mathematik möglicherweise auf die Zugehörigkeit zu verschiedenen Rassen zurückzuführen seien, wobei er die urgermanische von lateinischen und hebräischen Rassen trennte.
Das hinderte ihn jedoch nicht, jüdische Gelehrte zu fördern, wie z.B. E. Landau und R. Courant, oder auch persönlichen Kontakt mit A. Einstein zu pflegen. Dieses Beispiel zeigt insgesamt ganz deutlich, dass sich Wissenschaftler stets der politischen Relevanz ihrer Äußerungen bewusst sein sollten.

In der Zeit von 1916 bis 1918 befasste sich Klein intensiv mit der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins. Als fast Siebzigjähriger arbeitete er diese Theorie mit einer außerordentlichen Energie durch. Kleins Protokolle, Korrespondenzen, Vortragskonzepte, Notizen und Ausarbeitungen aus dieser Zeit füllten sieben umfangreiche Aktenmappen. Klein führte über seinen Weg dahin selbst aus:

"Poincare und Einstein hatten 1905 die elektrodynamischen Fragen, die mit der Lorentzgruppe zusammenhängen und zur Aufstellung der sogenannten speziellen Relativitätstheorie führen sollten, in den Vordergrund des Interesses gebracht.
In der Erkenntnis, dass hier für den Mathematiker der dankbarste Untersuchungsgegenstand gegeben sei, setzte Minkowski sofort mit der Weiterentwicklung der Gedankenreihen ein. Ich vermag keine Einzelheiten darüber anzugeben, aber erzähle gern, dass er damals Hilbert und mir darüber auf unseren regelmäßigen wöchentlichen Spaziergängen immer wieder eindringliche Vorträge gehalten hat." [1, Bd. 1, S. 413]

"Ich bemerkte natürlich sofort, dass sich auch diese (Untersuchungen der Physiker über Relativitätstheorie - R. T.) aufs beste in die Klassifikationsgedanken von 1872 einordnen, dass mit letzteren sogar die einfachste Art gegeben ist, die neueren physikalischen (oder auch philosophischen) Gedanken mathematisch klarzustellen ... Nach einem ersten Vortrag über die Lorentzgruppe (von 1910) ... habe ich mich in den Jahren 1916 bis 1918 mit den einschlägigen Fragen in eigenen Vorlesungen beschäftigt." [1, Bd. 1, S. 413]

Aus diesen Vorlesungen sind 1918 zwei wichtige Aufsätze "Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie" und "Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt" hervorgegangen.
Damit half Klein, die mathematischen Grundlagen der Einsteinschen Theorien zu vertiefen, insbesondere den Impuls-Energie-Vektor zu beschreiben und den elliptischen Raum der Theorie zugrunde zu legen. Klein erkannte vor allem, dass in der allgemeinen Relativitätstheorie für einen zeitabhängigen Kosmos überhaupt kein allgemeines Energie-Integral existiert.
Einstein hatte in seiner Arbeit zur allgemeinen Relativitätstheorie 1917 nur die Möglichkeit eines sphärischen Raumes gesehen. Klein zeigte:

"Der elliptische Raum ist einfacher als der sphärische, indem sich seine geodätischen Linien schlechtweg als gerade Linien darstellen (die sich, wenn sie sich überhaupt treffen, immer nur in einem Punkte schneiden) ..." [1, Bd. 1, S. 596]

Damit hatte Klein den Bezug zu seinen wichtigen Resultaten auf dem Gebiet der nichteuklidischen Geometrie von 1871 hergestellt.
Die mathematische Vorgeschichte der Einsteinschen Lehre arbeitete Klein gründlich aus. Sie fand ihren Niederschlag im Band 11 der nach seinem Tode herausgegebenen "Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert".

Die Vorbereitung dieser Vorlesungen für den Druck zu seinen Lebzeiten gelang vor allem deshalb nicht mehr, weil ihn ein anderes Vorhaben fesselte. Anlässlich seines goldenen Doktorjubiläums am 12. Dezember 1918 überreichten ihm befreundete Kollegen eine Stiftung mit der Bitte, eine Ausgabe seiner gesammelten mathematischen Abhandlungen vorzubereiten.
Nachdem Klein in dem jungen ukrainischen Mathematiker A. Ostrowski einen Gelehrten gefunden hatte, der gut mit seinen Arbeiten, aber auch mit der Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahren vertraut war, stimmte er diesem Projekt zu.

In Kleins Wohnung fanden viele Beratungen statt, in denen jede Arbeit diskutiert, mit Anmerkungen versehen sowie ihr Entstehen durch autobiographische Bemerkungen erläutert wurde. So hatte er 1923 die Genugtuung, noch die Herausgabe aller drei Bände seiner mathematischen Abhandlungen zu erleben. Dazu trug nicht unwesentlich bei, dass die "Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft" 1921/22 50000 Mark Druckunterstützung gewährte, die im folgenden Jahr noch erweitert wurde. Die inflationäre kapitalistische Entwicklung hatte die Druckkosten rapide in die Höhe getrieben.

Militärisch und ökonomisch geschwächt, bezogen die Exponenten des deutschen Monopolkapitals nach dem 1. Weltkrieg die Wissenschaft stärker in ihre Machtpolitik ein. So entstand am 30. Oktober 1920 die "Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft" als ein zentrales Organ der Forschungslenkung auf Reichsebene, formal außerhalb der Staatsorgane. F. Klein nahm innerhalb dieser Notgemeinschaft eine führende Stellung ein. Bis zum 31. März 1922 wirkte er als Vorsitzender des Fachausschusses V für Mathematik, Astronomie und Geodäsie.

Auf diese Weise half er, wichtigen mathematischen Vorhaben finanzielle Mittel zuzuführen. Neben seinen eigenen Werken wurden unter seiner Leitung die Fortsetzung der "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften", die Herausgabe der Werke von Gauß, die "Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" u. a. unterstützt.

So war F. Klein bis ins hohe Lebensalter außerordentlich aktiv.
Anlässlich seines 75. Geburtstages wurde er vielfältig geehrt. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung und die 1922 gegründete Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik ernannten ihn zum Ehrenmitglied. Die philosophische und die juristische Fakultät der Universität Berlin verlieh ihm den Titel Doctor rerum politicarum honoris causa.
Im Jahre 1924 erhielt Klein außerdem den erstmals vergebenen Ernst-Abbe-Gedächtnispreis, der 1921 durch die Carl-Zeiß-Stiftung zur Förderung der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungsgebiete begründet worden war.

F. Klein konnte zu diesem Zeitpunkt auf ein erfülltes Leben zurückblicken und sah zugleich sein Lebensende nahen. Seit einigen Jahren hatte er jede Reise vermieden, unternahm nur noch regelmäßige Spaziergänge in den seiner Wohnung gegenüberliegenden botanischen Garten. Später fuhr er nur noch im Wagen aus.
Seit seinem 75. Geburtstag, als eine Lähmung der unteren Extremitäten sich mehr und mehr ausbreitete, verließ er das Haus nicht mehr.

12 Gemälde von Max Liebermann aus dem Jahre 1912 (In: [18, S. 179])

Ein Schwindelanfall im November 1924 war der Anlass für ihn, alles für seinen Tod vorauszubestimmen. Er war bereits monatelang ans Bett gefesselt, als er am späten Abend des 22. Juni 1925 im Kreise seiner Angehörigen entschlief. Seine Gattin verstarb zwei Jahre später.

F. Klein hat eine umfangreiche Bibliothek besessen, die jedoch nicht auf deutschem Boden verblieb. Sie wurde von der Universität Jerusalem erworben.
Es gab eine Vielzahl von Nachrufen, Gedächtnisfeiern und Gedenkreden, die von Kleins breitem Wirkungskreis zeugte.
Am Tag nach seinem Tode hielt D.Hilbert eine kleine Ansprache im Kreise seiner Kollegen. Am Grab sprach neben dem Geistlichen C. Runge. Am 31. Juli 1925 fand in der Aula der Göttinger Universität, in der das 1912 von M. Liebermann geschaffene lebensgroße Bild des Verstorbenen aufgestellt worden war, eine offizielle Gedächtnisfeier statt. R. Courant begann seine Gedächtnisrede mit den Worten:

"... eine Epoche in der Geschichte der Mathematik ist abgeschlossen." [15, S. 765]

11 Chronologie

1848/49 Bürgerlich-demokratische Revolution in Deutschland,
1849 Felix Christian Klein wird am 25. April in Düsseldorf geboren.
1857 Eintritt in das humanistische Gymnasium in Düsseldorf,
1865 Beginn des mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiums in Bonn.
1866-68 Vorlesungsassistent bei J. Plücker.
1868 12. Dezember: Promotion zum Dr. phil. bei R. Lipschitz, Bonn.
1869 Januar bis Mitte August: Studium bei A. Clebsch in Göttingen, Gründung des mathematischen Vereins zu Göttingen.
1869/70 August 1869 bis März 1870: Studienaufenthalt in Berlin. April bis Mitte Juli 1870: Studienaufenthalt in Paris.
1870/71 Deutsch-Französischer Krieg. 18. 1. 1871: Kaiserproklamation Wilhelm I. August/September 1870: Angehöriger des Bonner Nothelferkorps. 7. Januar 1871: Habilitation in Göttingen.
1871/72 Privatdozent in Göttingen. Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie.
1872 Berufung zum ordentlichen Professor der Mathematik an der Universität Erlangen zum Wintersemester. Oktober: "Erlanger Programm". Dezember: Erlanger Antrittsrede.
1873 Eintritt in die Redaktion der Zeitschrift "Mathematische Annalen". September: Teilnahme an der Tagung der British Association for the Advancement of Science in Bradford. Teilnahme an der ersten deutschen Mathematikerversammlung.
1875 Heirat mit Anna Hegel. Berufung an die TH München zum Sommersemester.
1876 Übernahme der Hauptredaktion der "Mathematischen Annalen".
1876/77 Mehrere Publikationen über das Ikosaeder, die ihn zur Funktionentheorie führen.
1880 Berufung zum Professor für Geometrie an der Universität Leipzig zum Wintersemester. Antrittsrede "Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen".
1881 8. April: Gründung des Mathematischen Seminars in Leipzig.
1881/82 Publikation bedeutender Arbeiten zur Theorie der automorphen Funktionen im Wettstreit mit H. Poincare. Schwere Erkrankung.
1884 Herausgabe der "Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade",
1886 Berufung an die Universität Göttingen zum Sommersemester.
1891 Beitritt zur Deutschen Mathematiker-Vereinigung - mehrfach Vorsitzender (1897, 1903, 1908).
1892 Begründung der Göttinger Mathematischen Gesellschaft mit H. Weber, Reorganisation der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.
1893-96 Vortragsreisen in den USA.
1895 Beitritt zum Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (Ehrenmitglied 1917). Mitbegründer der "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen",
1895 Beitritt zum Verein Deutscher Ingenieure.
1896 Verleihung des Titels "Geheimer Regierungsrath" durch das preußische Kultusministerium.
1897 Mitglied des Vorbereitungskomitees des I. Internationalen Mathematikerkongresses in Zürich,
1898 28. Februar: Konstituierung der "Göttinger Vereinigung für angewandte Physik". 1901 Erweiterung auf angewandte Mathematik.
1899 Eintritt in das Redaktionskollegium der Zeitschrift "L' Enseignement mathematique".

1904 Konstituierung der "Breslauer Unterrichtskommission" der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte.

1905 Ernennung zum Dr.-Ing. h. c. der TH München,

1906 Berufung in den technischen Ausschuss der Berliner "Motorluftschiff-Studiengesellschaft".

1908 Januar: Gründung des Deutschen Ausschusses für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU). Leiter des Unterausschusses für Lehrerbildung (Ehrenmitglied 1919). Berufung in das preußische Herrenhaus als Vertreter der Universität Göttingen. Übernahme des Vorsitzes der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK).

1909 Wahl in den engeren Vorstandsrat des Deutschen Museums für Meisterwerke der Naturwissenschaft und Technik, München.

1909-16 Herausgabe der "Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland".

1911/12 Aufenthalt im Sanatorium Hahnenklee, Harz, Entstehen des Gemäldes von Max Liebermann.

1913 Ostern: F. Klein lässt sich emeritieren.

1914 Ausbruch des 1. Weltkrieges. Aufruf "An die Kulturwelt!", Auszeichnung mit dem Alfred-Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis.

1914-16 Vorlesungen zur Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.

1916-18 Arbeiten zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins.

1917 Große Sozialistische Oktoberrevolution in Russland.

1918/19 Novemberrevolution. Von November 1918 bis März 1919 regiert in Göttingen ein Arbeiter- und Soldatenrat.

1919-23 Herausgabe seiner "Gesammelten mathematischen Abhandlungen".

1920 30. Oktober: Gründung der "Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft". Vorsitzender des Fachausschusses Mathematik, Astronomie, Geodäsie bis 31. März 1922.

1924 Ernennung zum Ehrenmitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Verleihung des Titels Dr. rer. pol.h.c. durch die Berliner Universität. Auszeichnung mit dem Ernst-Abbe-Gedächtnispreis.

1925 Am 22. Juni verstarb F. Klein nach längerer Krankheit in Göttingen.

12 Literatur (Auswahl)

Schriften Felix Kleins

[1] Klein, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen. Band 1 bis 3. Berlin 1921 bis 1923. (In Bd. 3: Verzeichnis der hauptsächlichsten Veröffentlichungen).

[2] Göttinger Professoren (Lebensbilder von eigener Hand) : Felix Klein, Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen, 5 (1923) 1, S. 11 bis 36.

[3] Zentrales Staatsarchiv Merseburg. Rep. 92. Nachlass Althoff. Briefwechsel zwischen F. Althoff und F. Klein vom 2. 9. 1885 bis 1908.

[4] Universitätsarchiv Leipzig. Personalakte F. Klein,

[5] Klein, F.: Zur Beratung des Kultusetats im preußischen Herrenhause. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 41 (1910) S. 386 bis 390.

[6] Klein, F.: Festrede zum 20. Stiftungstage der Göttinger Vereinigung zur Förderung der Angewandten Physik und Mathematik. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 27 (1918) Abt. 1, 5. 217 bis 228,

[7] Klein, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin, Bd. 1 1926, Bd. 2 1927, Nachauflage, Ausgabe in einem Band. Berlin, Heidelberg, New York 1979.

[8] Klein, F.: Das Erlanger Programm. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. Wußing. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 253. Leipzig 1974.

[9] Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Vorlesungen von F. Klein, Teil I, Wi. 1907/08, Teil II, So. 1908, Ausgearbeitet von Ernst Hellinger. Neudruck mit Zusätzen und Änderungen von Teil I 1911, von Teil II 1913. - Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I, 4. Aufl. 1933; Teil II, 3. Aufl. 1925; Teil III, 3. Aufl. 1928. Nachdruck Berlin 1968.

[10] Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Vorträge, gesammelt von F. Klein und E. Riecke. Leipzig und Berlin 1900.

[11] Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Hrsg. v. F. Klein, 5 Bde. in 9 Teilbänden. Bd, 1, 1909 bis 1913; Bd. 2, 1910 bis 1913; Bd. 3, 1911 bis 1916 Bd. 4, 1910 bis 1915; Bd. 5, 1912 bis 1916.

[12] Kultur der Gegenwart. II. Teil, Abt. 1: Die mathematischen Wissenschaften. Lieferung 1 bis 3. Redaktion F. Klein. Leipzig 1912 bis 1914.

Literatur über Felix Klein

[13] Felix Klein zur Feier seines siebzigsten Geburtstages. Die Naturwissenschaften, 7 (1919) 17, S. 275 bis 317.

[14] Brauer, R.: Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen. Mathematische Annalen, 110 (1934) 4, S. 473 bis 500.

[15] Courant, R.: Felix Klein. Die Naturwissenschaften, 13 (1925) 37, S. 765 bis 772.

[16] Kasdorf, G.: Felix Klein. In: Biographien bedeutender Mathematiker. Eine Sammlung von Biographien. Erarb. v. einem Autorenkollektiv, hrsg. v. Hans Wußing und

Wolfgang Arnold. 2. Aufl. Berlin 1978, S. 466 bis 480.

[17] Lorey, W.: Felix Klein. Leopoldina. Berichte der Kaiserlichen Deutschen Akademie der Naturforscher in Halle, 1 (1926) S. 136 bis 151.

[18] Manegold, K.-H.: Felix Klein als Wissenschaftsorganisator. Technikgeschichte, 35 (1968) 3, S. 177 bis 204.

[19] Manegold, K.-H.: Universität, Technische Hochschule und Industrie. Ein Beitrag zur Emanzipation der Technik im 19. Jahrhundert unter besonderer Berücksichtigung der Bestrebungen Felix Kleins. Berlin 1970,

[20] Mises, R. von: Felix Klein. Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 2. (Buchbesprechung). Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 3 (1923).

[21] Tobies, R.: Zur internationalen wissenschaftsorganisatorischen Tätigkeit von Felix Klein (1849 bis 1925) auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts, Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, 16 (1979) 1, S. 12 bis 29.

[22] Tobies, R.: Zur wissenschaftsorganisatorischen Tätigkeit von Felix Klein im Rahmen der Breslauer Unterrichtskommission. Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin, 16 (1979) 2, S. 50 bis 63.

[23] Weber, M.: Felix Klein. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 69 (1925) 34, S. 1118 bis 1119,

Sonstige Literatur

[24] Benz, U.: Arnold Sommerfeld. Stuttgart 1975.

[25] Biermann, Kurt-R.: Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810 bis 1920. Berlin 1973,

[26] Grattan-Guinness, J.: William Henry and Grace Chisholm Young. Annals of Science, 29 (1972) 2.

[27] Neugebauer, O.: Über Geschichte der Mathematik. Mitteilungen des Universitätsbundes Göttingen, 9 (1927) 1, S. 38 bis 45.

[28] Reid, C.: Hilbert. Berlin, Heidelberg, New York 1976 (engl.).

[29] Reid, C.: Courant. Berlin, Heidelberg, New York 1976 (engl.). Deutsche Übersetzung 1979,

[30] Runge, I.: Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk. Göttingen 1949.

[31] Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin, 6. bis 8. Juni 1900, Halle 1901.

[32] Wußing, H.: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs. Berlin 1969.

[33] Wußing, H.: Zur Entstehungsgeschichte des Erlanger Programmes. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR, (1968) 1, S. 23 bis 40.

[34] Wußing, H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Unter Mitarbeit von S. Brentjes, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote, P. Schreiber, R. Siegmund- Schultze, R. Tobies, J. Wilke, Studienbücherei, Mathematik für Lehrer, Bd. 13, Berlin 1979.

[35] Marx, K, und F.Engels: Werke, Bd. 4. Berlin 1959.