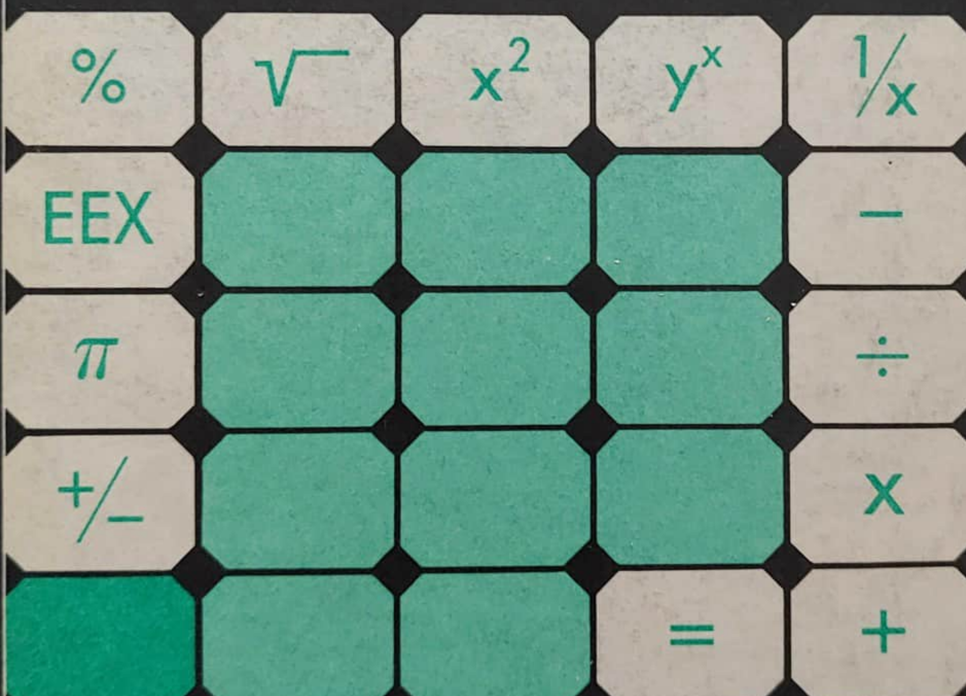
Hans-Günter Friedemann

Arithmetik



ARITHMETIK

Dr. Hans-Günter Friedemann

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1990

Leiter des Autorenkollektivs:
Dr. Hans-Günter Friedemann

Autoren:
Dr. Karin Fischer – Abschnitt 3.2.
Dr. Angelika Franke – Kapitel 1
Dr. Hans-Günter Friedemann – Kapitel 2, 4, 5 und Abschnitte 3.3., 3.4., 3.5.
Dr. Marlies Schönberger – Abschnitt 3.1.
Prof. Dr. sc. Wolfram Türke – Kapitel 5

Arithmetik / Hans-Günter Friedemann [Leiter d. Autorenkollektivs] . – 1. Aufl. – Berlin : Volk u. Wissen, 1990. – 320 S. – (Lehrmaterial Mathematik für die Ausbildung von Lehrern der unteren Klassen ; 3)
NE: Friedemann, Hans-Günter [Mitarb.] ; GT

ISBN 3-06-002528-2

1. Auflage

Lizenz-Nr. 203·1000/90 (E 002528-1)
Printed in the German Democratic Republic
Schrift: 9/10 p Timeless
Gesamtherstellung: Grafischer Großbetrieb Völkerfreundschaft Dresden
Redaktion: Annemarie Mai
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband: Peter Schulz
Typographische Gestaltung: Atelier vwv
Redaktionsschluß: 20. September 1988
LSV 1003
Bestell-Nr. 709 479 6
01680

Inhalt

Vorwort

Dieses Buch wendet sich an Studenten, die den Wunsch haben, den Beruf eines Lehrers für die unteren Klassen zu ergreifen. Demzufolge soll es eine Hilfe sein, theoretische Grundlagen für die spätere Berufstätigkeit zu erwerben bzw. auszubauen. Um den Leser zu aktivieren, wurde – wie auch in den Bänden 1 und 2 – versucht, die Stoffdarbietung problemhaft zu gestalten. Daher nimmt das Lösen von Aufgaben im Sinne eines Widersprüche setzenden, vorantreibenden Elementes einen zentralen Platz ein. Wenn auch meistens zu gestellten Aufgaben Lösungen angegeben werden, ist beabsichtigt, daß der Leser im Regelfall zunächst selbständig einen Lösungsversuch unternimmt. Dabei möge ihn stets ein Gedanke begleiten, den C. F. Gauss in einem Brief an den ungarischen Mathematiker J. Bolyai äußerte.

> Es ist nicht das Wissen,
> sondern das Lernen,
> nicht das Besitzen,
> sondern das Erwerben,
> nicht das Dasein,
> sondern das Hinkommen,
> was den größten Genuß gewährt.

Weil nicht ein streng deduktiver Aufbau bei der Stoffdarbietung angestrebt wurde, erfolgt die kritische Wertung der Stichhaltigkeit verwendeter Begründungen mitunter erst nach Abschluß einer Beweisführung bzw. Argumentation. Das erfordert vom Leser besondere Aufmerksamkeit und die Bereitschaft, sich immer mit vermittelten Denk- und Arbeitsweisen kritisch auseinanderzusetzen, um sich Rechenschaft über Vollständigkeit und Richtigkeit vollzogener Schlußfolgerungen abzulegen.

Den Mitarbeitern des Verlages und den Gutachtern – vor allem Frau Dr. Dürr und Herrn Studienrat Kandale – gebührt Dank für die durch zahlreiche Hinweise und Ratschläge geleistete Hilfe bei der Erarbeitung dieses Lehrbuches.

Die Autoren

1. Grundlegende Betrachtungen über den Bereich der natürlichen Zahlen

Im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts der unteren Klassen steht das Arbeiten mit natürlichen Zahlen. Natürliche Zahlen, deren Eigenschaften, Operationen mit ihnen und Relationen zwischen ihnen werden auf mengentheoretischer Grundlage eingeführt. Anliegen dieses Kapitels ist es, fachtheoretische Grundlagen des Arbeitens mit natürlichen Zahlen zu klären und deren Umsetzung im Unterricht der unteren Klassen zu zeigen.
Dazu sind Fragen aufzuwerfen und zu beantworten wie:

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Mengen und natürlichen Zahlen?
- Wie können Relationen und Operationen in der Menge der natürlichen Zahlen erklärt werden?
- Welche Eigenschaften haben diese Relationen bzw. Operationen in der Menge der natürlichen Zahlen?

1.1. Die Entstehung der Zahlen

Seit wann gibt es Zahlen, und wie begannen die Menschen zu zählen? Die Anfänge des Zählens liegen in der Geschichte der Menschheitsentwicklung weit zurück. In der ständigen Auseinandersetzung mit seiner Umwelt kam der Mensch der Urgesellschaft auch zu ersten mathematischen und astronomischen Kenntnissen. Es gibt Anhaltspunkte, daß erste Zahlzeichen bereits vor etwa 25000 bis 30000 Jahren auftraten. Die Rekonstruktion der Anfänge des Zählens ist sehr schwierig. Altertumsforschungen allein vermögen diesen langwierigen und komplizierten Prozeß nicht zu beschreiben. Anhaltspunkte bieten auch Berichte und Überlieferungen von Forschern über Naturvölker, die in schwer zugänglichen Gebieten oder auf abgelegenen Inselgruppen lebten und deren Entwicklungsstand Zeugnis von zurückliegenden Etappen bei der Herausbildung des Zahlbegriffs und von Bezeichnungssystemen gab. Aber auch bei der Entwicklung der Kinder widerspiegelt sich – wenn auch sehr gerafft und in groben Zügen – ein Teil der Menschheitsentwicklung. Das trifft auch für das Zählen zu.

Schon lange, bevor die Menschen Zahlen kannten, waren sie in der Lage, Mengenvergleiche anzustellen. Solche Vergleiche waren denkbar einfach, indem man Zuordnungen traf, beispielsweise ein Mann – ein Speer usw. Häufig wurden zum Vergleich Elemente einer anderen Menge genutzt. Solche Hilfsmengen waren Steinchen, Muscheln, kleine Holzstäbe u. a. So wurde z. B. für jedes zu zählende Tier einer Herde ein Steinchen in ein Gefäß gelegt. Blieben bei einer Kontrolle Steinchen übrig, wußte man, wieviel Tiere abhanden gekommen waren.
Zum abstrakten Zahlbegriff gelangten die Menschen schrittweise. Anfangs unterschieden sie nur zwischen „viel“ und „wenig“ und „eins“ und „zwei“. Weitere Zahlwörter wurden oft in Abhängigkeit von den gezählten Dingen gebildet. So entstanden für die gleiche Anzahl verschiedener Gegenstände unterschiedliche Zahlwörter. Noch heute gebrauchte Zahlwörter belegen dies. Z. B. bezeichnen die Bewohner der Fidschiinseln im Stillen Ozean 10 Kokosnüsse mit „karo“, 10 Kähne dagegen mit „bole“. Erst allmählich abstrahierte man zum heute geläufigen Zahlbegriff. Einen wesentlichen Schritt stellte dabei die Zuordnung zwischen verschiedenen konkreten Mengen und einer Repräsentationsmenge dar. Dabei spielten die menschlichen Gliedmaße als anschauliche Repräsentationsmengen eine wesentliche Rolle – 5 Finger einer Hand, 10 Finger, 20 Finger und Zehen. Kleinkinder demonstrieren dies unbewußt, wenn sie zählen lernen, indem sie für jeden zu zählenden Gegenstand einen Finger strecken.
Zum Zählen gehörte aber auch die Benennung und die Möglichkeit der Darstellung von Zahlen. Belege, wie die Menschen versuchten, die Ergebnisse ihrer mathematischen Mühen festzuhalten, gibt es aus fernster Vergangenheit. So hat man einen Knochen eines jungen Wolfes gefunden, in den 55 Kerben eingeschnitten waren. Die Kerben sind 25000 bis 30000 Jahre alt und weisen eine Fünferbündelung auf. Derartige Bündelungen lassen sich in vielen Zahlensystemen nachweisen. Meist wurden Fünfer-, Zehner- und Zwanzigerbündelungen vorgenommen. Bild 1 (1.1.) stellt *chinesische Bambusziffern* dar.

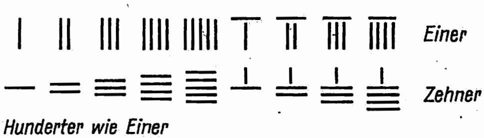


Bild 1 (1.1.)

Als weitere Beispiele der sich entwickelnden, sehr unterschiedlichen Darstellungsformen sollen die *ägyptischen Individualzeichen*, die *römischen Zahlzeichen* und die *indisch-arabische Zahldarstellung* erwähnt werden.
Bei den ägyptischen Individualzeichen (etwa 1700 v. u. Z.) handelt es sich um Bildzeichen – auch *Hieroglyphen* genannt. Jedes Bildzeichen stellt eine Zehnerpotenz dar.

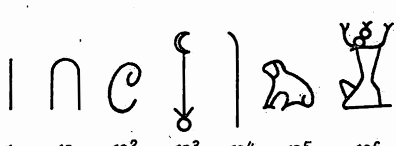


Bild 2 (1.1.)

Die Symbole sind von konkreten Gegenständen abgeleitet. So geht die Hieroglyphe für 1 auf einen Strich oder einen Finger zurück, die für 10 auf ein Hufeisen. Das Symbol für 100 weist auf eine Meßleine hin, das für 1000 erinnert an eine Lotosblume, und 10000 wird durch einen stilisierten Schilfkolben dargestellt. Die Hieroglyphe für 100000 ist von einem Frosch abgeleitet und die der Zahl 1000000 war das Abbild des ägyptischen Gottes des Luftraumes. Die Zahlen wurden durch Addieren gebildet.

Aufgabe 1 (1.1.)
Welche Zahlen sind im Bild 3 (1.1.) a) und b) dargestellt?

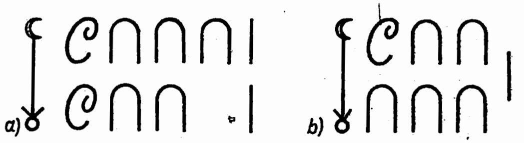


Bild 3 (1.1.)

LÖSUNG
a) 1252 **b)** 1151

Bei der *römischen Zahlenschreibweise* stellt jedes Zeichen ebenfalls einen Summanden dar. Sie ist das bekannteste Beispiel für ein Additionssystem. Es werden sieben Zahlzeichen verwendet.

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Die Zeichen M, C, X und I sind die Grundzeichen; D, L, V sind Hilfszeichen. Um eine übersichtliche und einheitliche Zahldarstellung zu erreichen, wurden diese Zeichen nach bestimmten Regeln zusammengestellt, die mehrmals Veränderungen erfuhren. Diese Regeln sind aber nicht in jedem Fall eindeutig und wurden auch nicht immer konsequent eingehalten. Es gilt:

1. Gleiche Zeichen haben unabhängig von ihrer Stellung in einer Zeichenreihe stets die gleiche Bedeutung.
2. Stehen gleiche Zeichen nebeneinander oder Zeichen größerer Zahlen unmittelbar links von Zeichen kleinerer Zahlen, so sind die Zahlen zu addieren. Es dürfen aber höchstens drei gleiche Grundzeichen und nie zwei Hilfszeichen nebeneinander stehen.
3. Steht ein Zeichen einer kleineren Zahl unmittelbar links von einem Zeichen für eine größere Zahl, so ist die kleinere von der größeren Zahl zu subtrahieren. Dabei ist es nicht zulässig, mehrere Grundzeichen oder ein Hilfszeichen links neben ein Zeichen für eine größere Zahl zu setzen.

Aufgabe 2 (1.1.)

a) Man gebe die Zahlen an, die durch die folgenden Zeichenreihen dargestellt sind. (1) MCMLXXXIV (2) CML (3) MCM

b) Man stelle die Zahlen 1492, 1946 und 2047 durch römische Zahlzeichen dar.

LÖSUNG:
a) (1) 1984; (2) 950; (3) 1900
b) MCDXCII, MCMXLVI, MMXLVII

Das Schreiben von Zahlen in diesem System ist verhältnismäßig einfach. Äußerst kompliziert wurde das Rechnen mit ihnen. Dabei wurden die Finger oder der *Abakus* (Rechenbrett) als Hilfsmittel genutzt.
Erst am Ende des 15. Jahrhunderts, Anfang des 16. Jahrhunderts wurden im europäischen Raum diese ungeeigneten Zahlzeichen durch die *indisch-arabische Zahldarstellung* verdrängt. Die indischen Mathematiker haben mit der Herausbildung des dezimalen Positionssystems eine herausragende wissenschaftliche und kulturelle Leistung vollbracht. Vom 1. Jh. u. Z. an drang das dezimale Positionssystem mit den indischen Ziffern längs der Handelswege relativ rasch von Osten nach Westen vor. Zunächst wurde es fester Bestandteil der arabisch-islamischen Mathematik. In Europa stieß die indisch-arabische Zahlenschreibweise anfangs auf verschiedene Widerstände. Heftig umstritten war die Zahl Null. Sie wurde lange nicht als gleichberechtigte Zahl anerkannt. Es gab Unverständnis dafür, für das Nichts auch noch ein Zeichen einzuführen und davon den Wert der anderen Ziffern abhängig zu machen. Aber die Vorteile beim Rechnen führten – zuerst in den Handelskontoren und Schreibstuben der Kaufleute – zur Durchsetzung der Zahlendarstellung im Stellenwert- oder Positionssystem. Die Ziffern nahmen im Laufe der Entwicklung die Form unserer heutigen Zahlzeichen an. Im Bild 4 (1.1.) sind zu unterschiedlichen Zeiten genutzte Ziffern dargestellt.[1]

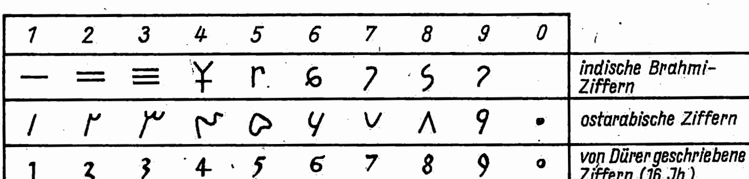


Bild 4 (1.1.)

Mit Hilfe dieser 10 Ziffern können alle Zahlen dargestellt werden. Im Abschnitt 1.6. wird auf Positionssysteme ausführlich eingegangen.
Die Kenntnis über den Ursprung der Zahlen ist für die Begründung unseres wissenschaftlichen Weltbildes sehr wichtig. In alten Sagen und Legenden wurde geschildert, daß Zahlen gleich dem Feuer ein Geschenk der Götter seien. Solche mystischen Deutungen halten der Wirklichkeit natürlich nicht stand. Über den Ursprung der Zahlen äußerte sich FRIEDRICH ENGELS im *„Anti-Dühring"*: „Die Begriffe von Zahl und Figur sind nirgends anders hergekommen als aus der wirklichen Welt. Die zehn Finger, an denen die Menschen zählen, also erste arithmetische Operationen vollziehen gelernt haben, sind alles andere, nur nicht eine freie Schöpfung des

---

[1] Nach H. WUSSING: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1979.

Verstandes. Zum Zählen gehören nicht nur abzählbare Gegenstände, sondern auch schon die Fähigkeit, bei Betrachtung dieser Gegenstände von allen ihren übrigen Eigenschaften abzusehen außer ihrer Zahl – und diese Fähigkeit ist das Ergebnis einer langen, geschichtlichen, erfahrungsmäßigen Entwicklung." Dieser der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie entsprechende Standpunkt weist den Ursprung der Zahlen in der objektiven Realität nach. Ihm stehen idealistische Auffassungen entgegen, die diese Zusammenhänge leugnen. Sie sehen den Zahlbegriff als den Menschen angeboren an. Bekannt ist in diesem Zusammenhang der Ausspruch des deutschen Mathematikers L. Kronecker (1823–1891): „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." Hierzu gehören auch Auffassungen, daß Zahlen eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes seien.
Marx schrieb dazu, daß die Beziehung des Menschen zur Natur von Anfang an keine theoretische, sondern eine praktische, d. h. auf die Tätigkeit orientierte war. Das Studium der Entwicklung des Zahlbegriffs bestätigt die Auffassungen der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie und widerlegt oben angeführte und ähnliche idealistische Theorien.
Mit der Entwicklung des Zahlbegriffs in der Schule – beginnend in der Unterstufe, in den oberen Klassen schrittweise erweiternd – wird ein der marxistisch-leninistischen Philosophie entsprechender Erkenntnisprozeß realisiert. Stets bilden Objekte oder mit ihnen auszuführende Operationen den Ausgangspunkt, um abstrakte Begriffe wie den Zahlbegriff, Operations- und Relationsbegriff zu erarbeiten.

1.2. Der genetische Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen

Die Betrachtungen über die Anfänge des Zählens und Rechnens zeigten, daß die natürlichen Zahlen durch einen Abstraktionsprozeß als Ergebnis der ständigen Auseinandersetzung der Menschen mit der Umwelt entstanden sind. Die Notwendigkeit, in der praktischen Tätigkeit mit Mengen konkreter Gegenstände umzugehen und entscheiden zu müssen, ob zwei Mengen gleich viele Elemente haben, führte bei den Menschen zur Herausbildung des Zahlbegriffs. In der im folgenden zu erarbeitenden Definition des Begriffs „natürliche Zahl" wird versucht, wesentliche Aspekte dieses Entwicklungsprozesses mathematisch zu erfassen und zu beschreiben. Deshalb spricht man von der *genetischen Definition* des Begriffs „natürliche Zahl".[1]
Wir gehen bei unseren Betrachtungen von *endlichen Mengen* aus, deren Elemente beliebige Objekte sind. Man kann diese endlichen Mengen wiederum zu einer Menge zusammenfassen. Da die Elemente der so gebildeten neuen Menge ebenfalls Mengen sind, spricht man von einem *Mengensystem*, und wir bezeichnen es im folgenden mit $\mathfrak{M}$. Von jeweils zwei Mengen des Mengensystems $\mathfrak{M}$ ist zu entscheiden, ob sie gleich viele Elemente haben bzw. ob eine der beiden Mengen mehr oder weniger Elemente als die andere Menge hat. Um diese Entscheidung zu treffen, wird überprüft, ob es eine *eineindeutige Abbildung von* der einen Menge *auf* die an-

[1] Genese (griech.) – Entstehung, Bildung

dere Menge gibt. Ist eine solche Abbildung möglich, haben beide Mengen gleich viele Elemente – die Mengen sind **gleichmächtig.** Gelingt es nur, von einer der beiden Mengen eine eineindeutige Abbildung *in* – nicht aber *auf* – die andere Menge zu erzeugen, dann ist die erste Menge von **niederer Mächtigkeit** als die zweite. Diese Aussage gilt nur für endliche Mengen. Endliche Mengen waren aber die Voraussetzung für unsere Betrachtungen.
Unendliche Mengen sind gerade dadurch charakterisiert, daß sie mindestens einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sind.
Aus der Mengenlehre ist bekannt, daß die Relation „... ist gleichmächtig mit ...“ in einer Menge von Mengen eine Äquivalenzrelation ist, d. h., sie ist in $\mathfrak{M}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. Nach dem Abstraktionsprinzip erzeugt diese Relation eine Klasseneinteilung von $\mathfrak{M}$. Es werden alle zueinander gleichmächtigen endlichen Mengen zu jeweils einer Äquivalenzklasse zusammengefaßt. Jede endliche Menge gehört zu genau einer der so gebildeten Äquivalenzklassen. Wesentliche Eigenschaft aller Elemente ein und derselben Klasse ist also die Gleichmächtigkeit der in ihr enthaltenen Mengen. Es wurde von allen Eigenschaften außer der **Mächtigkeit** der betrachteten Mengen abstrahiert.
Jede solche Klasse nennt man **natürliche Zahl** oder **endliche Kardinalzahl.**[1] Durch die Formulierung *endliche* Kardinalzahl wird betont, daß die Elemente einer natürlichen Zahl *endliche* Mengen sind.

▶ DEFINITION 1 (1.2.)
Es sei M eine beliebige endliche Menge. Die Klasse aller zu M gleichmächtigen Mengen heißt **natürliche Zahl.**

Jede zu einer Klasse gehörende Menge ist ein **Repräsentant** dieser Klasse. Soll zum Ausdruck gebracht werden, daß die Menge M ein Repräsentant der natürlichen Zahl n ist, so schreibt man $n = |M|$.

■ BEISPIEL 1 (1.2.)

Gegeben sind folgende Mengen eines Mengensystems $\mathfrak{M}$, zu dem beliebig viele weitere endliche Mengen gehören.

$$M_1 = \{\triangle; \bigcirc; \circledast\},\ M_2 = \{v; w; x; y; z\}, M_3 = \{\bigcirc; \triangle; \triangleright; \square; \diamond\},$$
$$M_4 = \{\circledcirc; \bigcirc\},\qquad M_5 = \{a; b; c; d; e\}, M_6 = \{r; s; t\},$$
$$M_7 = \{\alpha; \beta; \gamma\},\quad M_8 = \{P; Q\},\quad M_9 = \{A; B\},\quad M_{10} = \{\blacktriangle; \triangle\}$$

Die Bildung von Klassen zueinander gleichmächtiger Mengen führt zu der im Bild 1 (1.2.) dargestellten Einteilung.
Jede dieser Klassen ist eine natürliche Zahl. Da alle Mengen einer Klasse als Repräsentanten gleichberechtigt sind, könnte ebensogut formuliert werden $n_1 = |M_8|$ oder $n_1 = |M_9|$ oder $n_1 = |M_{10}|$.

---

[1] Kardinalzahl (lat.) – Grundzahl

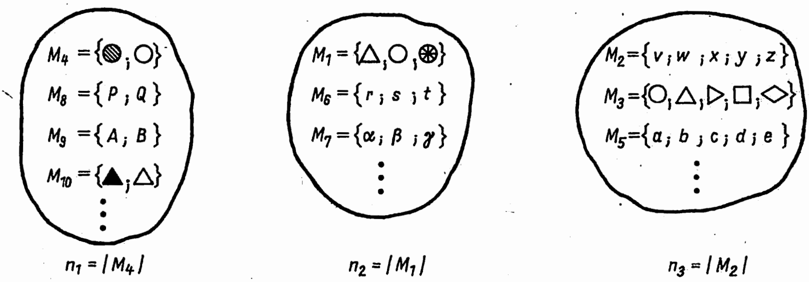


Bild 1 (1.2.)

Es ist sinnvoll, die leere Menge als endliche Menge zu betrachten. Sie ist damit ebenfalls Repräsentant einer natürlichen Zahl. Während die Kardinalzahl der leeren Menge nur einen einzigen Repräsentanten hat – es gibt zur leeren Menge keine von ihr verschiedene gleichmächtige Menge –, enthalten alle anderen Klassen unendlich viele Repräsentanten.
Werden bei einer Begriffsbildung entsprechend dem Abstraktionsprozeß zueinander äquivalente Elemente zu einer Klasse zusammengefaßt, dann erfolgt in der Mathematik häufig die Zuordnung von Zeichen, d. h. von Symbolen oder Begriffswörtern. Welche Klasse könnte für unsere Betrachtungen auf Grund bestimmter Besonderheiten der Ausgangspunkt für die Festlegung von Zeichen sein? Die leere Menge hat keine echte Teilmenge, eine Menge von niederer Mächtigkeit als die leere Menge gibt es nicht. Damit ist ein Motiv gegeben, die Klasse $|\emptyset|$ als die natürliche Zahl auszuzeichnen, die den Anfang bildet. Sie erhält das Zeichen „0" bzw. „Null".

► **DEFINITION 2 (1.2.)**
$|\emptyset| = 0$

Von der Zahl Null, also der leeren Menge als Repräsentant ausgehend, versuchen wir nun, schrittweise Bezeichnungen für die anderen natürlichen Zahlen festzulegen.
Dazu bilden wir eine Folge von Mengen:

$\emptyset \cup \{a\} = \{a\} = E$;
$E \cup \{\beta\} = \{a; \beta\} = Z$, wobei $\beta \notin E$;
$Z \cup \{\gamma\} = \{a; \beta; \gamma\} = D$, wobei $\gamma \notin Z$
usw.

Die Mengen E, Z, D ... repräsentieren Klassen zueinander gleichmächtiger endlicher Mengen. Den in der angegebenen Reihenfolge entstehenden Klassen $|E|$, $|Z|$, $|D|$ usw. ordnen wir die Ziffern 1, 2, 3, ... bzw. die Zahlwörter eins, zwei, drei ... zu. Ihre Repräsentanten sind Einermengen, Zweiermengen, Dreiermengen ...
Aus den Klassen wird eine neue Menge gebildet – **die Menge N der natürlichen Zahlen.** Als Variable für natürliche Zahlen benutzt man in der Regel kleine lateini-

sche Buchstaben, die gegebenenfalls mit Indizes versehen werden können: a, b, c ... bzw. n_1, n_2, n_3, ...
Schon im Vorschulalter sammeln Kinder vielfältige Erfahrungen im Umgang mit Zahlen. Sie begegnen ihnen dabei unter verschiedenen Aspekten, so z. B. als Anzahlen (12 Murmeln, 7 Tage ...), als Ordinalzahlen (der 5. Geburtstag, die 3. Seite eines Buches ...) oder als Maßzahlen von Größen (5 km, 2,50 M ...). Definition 1 (1.2.) präzisiert den Anzahlbegriff, der für die Entwicklung des Zahlbegriffs bei Kindern eine besondere Bedeutung hat. Will man den Ordinalzahlaspekt in den Vordergrund rücken, muß man von geordneten endlichen Mengen ausgehen. Ordinalzahlen kennzeichnen die Stellung von Elementen in einer solchen geordneten Menge. Auf die Präzisierung des Ordinalzahlbegriffs soll hier nicht eingegangen werden. Wir zeigen nun anhand eines Beispiels aus dem Mathematikunterricht der Klasse 1, wie die theoretischen Grundlagen das methodische Vorgehen bei der Einführung der natürlichen Zahlen bestimmen. Das Bild 2 (1.2.) zeigt Darstellungen aus dem Lehrbuch der Klasse 1, die das Erfassen der natürlichen Zahl 3 unterstützen sollen.

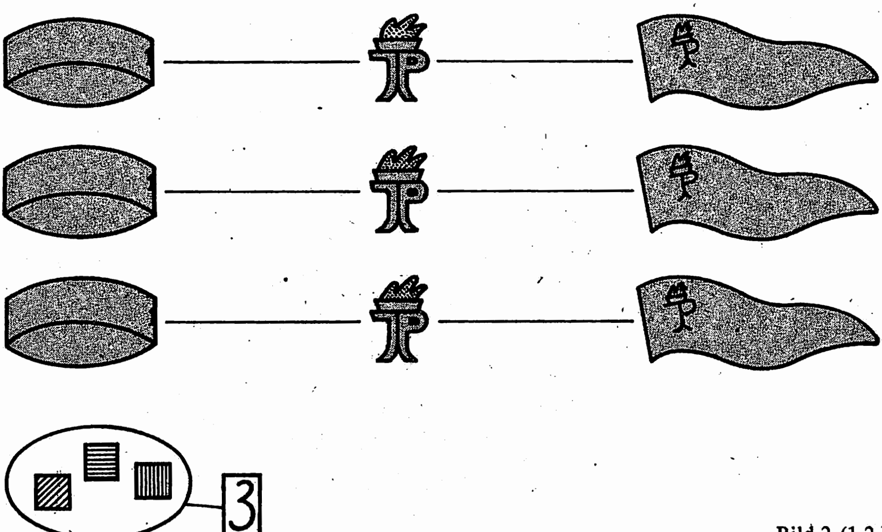


Bild 2 (1.2.)

Vorgegeben sind Mengen. Es wird festgestellt, daß die Mengen gleich viele Elemente haben. Um diese Erkenntnis zu fördern, sind zum Teil graphische Zuordnungen von Elementen verdeutlicht. Jedem Element der einen Menge wird genau ein Element der anderen Menge zugeordnet und umgekehrt. Von den unterschiedlichen Merkmalen der Objekte wie Farbe, Form, Größe u. a. wird abstrahiert. Als gemeinsame Eigenschaft aller dargestellten Mengen wird hervorgehoben, daß sie gleich viele Elemente haben. Im Mathematikunterricht der unteren Klassen darf diese Feststellung aber auch durch Abzählen der Elemente getroffen werden. Der

Leser beachte, daß man dies aber aus fachtheoretischer Sicht bei Gewinnung des Zahlbegriffs über endliche Mengen nicht zulassen darf, da das Zählen den Zahlbegriff bereits voraussetzt. Für alle Mengen, die diese gemeinsame Eigenschaft haben, wird die natürliche Zahl 3 eingeführt. Es wird ihr eine Ziffer bzw. ein Zahlwort zugeordnet. Die Schüler werden auf diese Weise befähigt, endliche Mengen als Repräsentanten natürlicher Zahlen aufzufassen. Sie erfassen intuitiv, daß jede natürliche Zahl durch verschiedene Mengen mit gleich vielen Elementen repräsentiert werden kann. Das Arbeiten mit Repräsentanten ist ein wesentliches methodisches Mittel im Unterricht der unteren Klassen. Anschaulichkeit, Einfachheit und mathematische Exaktheit sind bei einem entsprechenden Arbeiten mit Mengen gleichermaßen gewährleistet.
Zum Abschluß dieses Abschnitts stellen wir in einer Übersicht die Schritte eines Abstraktionsprozesses allgemein und in ihrer Anwendung auf die Erzeugung natürlicher Zahlen und der Menge der natürlichen Zahlen dar.

Abstraktionsprozeß	Abstraktionsprozeß zur Bildung der Menge der natürlichen Zahlen
1. Vorgabe einer Ausgangsmenge	Menge aller endlichen Mengen, deren Elemente beliebige Objekte sind (Mengensystem $\mathfrak{M}$)
2. Erklären einer Äquivalenzrelation in der Ausgangsmenge	Gleichmächtigkeit im System $\mathfrak{M}$ der endlichen Mengen
3. Zusammenfassen aller zueinander äquivalenten Elemente der Ausgangsmenge zu jeweils einer Äquivalenzklasse (In der Regel erfolgt eine Bezeichnung der Klassen.)	Bilden von Äquivalenzklassen zueinander gleichmächtiger endlicher Mengen Jede Klasse aller zu einer endlichen Menge M gleichmächtigen Mengen heißt **natürliche Zahl.**
4. Von der Ausgangsmenge wird zur Menge der Klassen übergegangen. (Bezeichnung dieser neuen Menge)	Vom System $\mathfrak{M}$ aller endlichen Mengen wird zur Menge der Klassen übergegangen. Menge N der natürlichen Zahlen

Übungen 1.2.

1. Gegeben sind
$M_1 = \{$ ○; △; ⊛ $\}$, $M_2 = \{$ ◍; ○ $\}$, $M_3 = \{$ △; ○; □; ◇ $\}$,
$M_4 = \{$ ◇; ◈; ◇; ⬙; ⌽; ⊖ $\}$.
Welche natürlichen Zahlen werden durch M_1, M_2, M_3, M_4 repräsentiert? Geben Sie jeweils zwei andere Repräsentanten für die betrachteten Klassen an!

2. Geben Sie eine mathematische Begründung für die Einführung der natürlichen Zahl 4 im Lehrbuch der Klasse 1!

1.3. Relationen in der Menge der natürlichen Zahlen

Für den Arithmetikunterricht in den unteren Klassen sind die Relationen „*a* ist Nachfolger von *b*", „*a* ist gleich *b*" und „*a* ist kleiner als *b*" in der Menge der natürlichen Zahlen von großer Bedeutung. Wir wissen, daß jede natürliche Zahl durch endliche Mengen repräsentiert werden kann. Dies wird zur Definition der genannten Relationen in *N* genutzt. Dabei wird auf Begriffe der Mengenlehre zurückgegriffen. Wenden wir uns zunächst der Definition der *Kleinerrelation in N* zu. Der Lehrplan der Klasse 1 fordert ein Vergleichen von Zahlen nach dem Vergleichen entsprechender Mengen. Dieses Vorgehen basiert auf den im folgenden dargestellten fachtheoretischen Grundlagen.

Aufgabe 1 (1.3.)
Es sind Mengen *A, B* und *C* gegeben (vgl. Bild 1 (1.3.)).
Welche Beziehungen bestehen zwischen den Mengen *A* und *B, B* und *C, A* und *C*?

LÖSUNG
$A \sim B$; $B \subset C$
A ist mit einer echten Teilmenge von *C* gleichmächtig.
A ist von niederer Mächtigkeit als *C*.

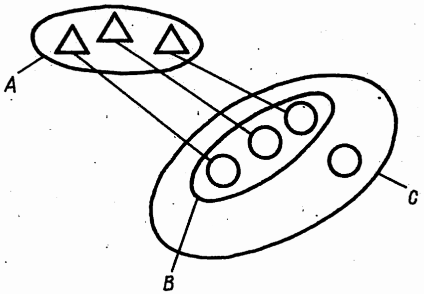


Bild 1 (1.3.)

Beziehungen zwischen endlichen Mengen, wie sie bei der Lösung von Aufgabe 1 (1.3.) erkannt wurden, werden zur Definition der Kleinerrelation in N genutzt.

▶ DEFINITION 1 (1.3.)
a und *b* seien natürliche Zahlen.
a* ist kleiner als *b genau dann, wenn es einen Repräsentanten von *a* gibt, der mit einer echten Teilmenge eines Repräsentanten von *b* gleichmächtig ist.

Zeichen für „*a* ist kleiner als *b*": $a < b$.

Wenn *a* kleiner als *b* ist, so ist *b* größer als *a*.

■ BEISPIEL 1 (1.3.)
Es ist zu zeigen, daß $2 < 4$ ist.
Man geht zu Repräsentanten der Zahlen 2 und 4 über. (Bild 2 (1.3.))
Es ist $|A| = 2$ und $|B| = 4$.
$A \sim B^*$ und $B^* \subset B$. Es gibt eine eineindeutige Abbildung von *A* auf eine echte Teilmenge von *B*. Es lassen sich stets endlich viele solche Teilmengen B^* finden. Also ist $2 < 4$.

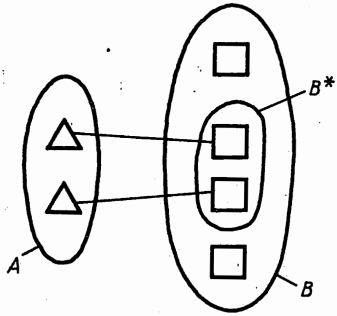


Bild 2 (1.3.)

Die Definition der Kleinerrelation wurde mit Hilfe von Repräsentanten vorgenommen. Wir wissen, daß es für jede von Null verschiedene natürliche Zahl unendlich viele Repräsentanten gibt. Definition 1 (1.3.) ist nur dann sinnvoll, wenn die Entscheidung, ob $a < b$ ist oder nicht, nicht von der Wahl der Repräsentanten für a und b abhängt. Man spricht dann von der **Repräsentantenunabhängigkeit** der so definierten Kleinerrelation. Sie wird im folgenden bewiesen. Bild 3 (1.3.) bezieht sich auf die im Beispiel 1 (1.3.) betrachteten Zahlen 2 und 4 und soll die beim Beweis angestellten Überlegungen veranschaulichen.

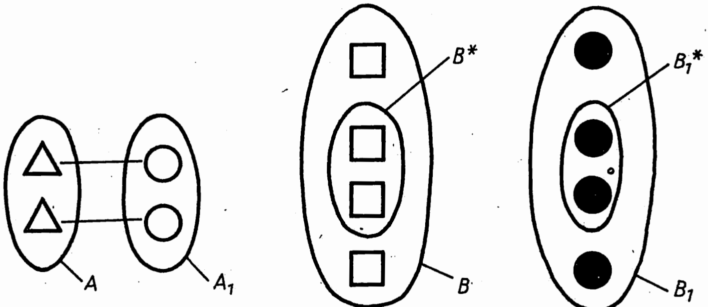


Bild 3 (1.3.)

Voraussetzung:
Es sei $a = |A|$ und $b = |B|$, und es gebe eine eineindeutige Abbildung von A auf eine echte Teilmenge B^* von B. A_1 sei ein weiterer Repräsentant von a und B_1 ein weiterer Repräsentant von b.
Behauptung:
Es gibt eine eineindeutige Abbildung von A_1 auf eine echte Teilmenge B_1^* von B_1.
Beweis:
Nach Voraussetzung ist $A \sim A_1$, $B \sim B_1$ und $A \sim B^*$.
Aus $A \sim A_1$ und $A \sim B^*$ folgt wegen der Symmetrie und der Transitivität der Gleichmächtigkeit von Mengen

$$A_1 \sim B^*.$$

Wegen $B \sim B_1$ gibt es eine eineindeutige Abbildung von B auf B_1. Dabei hat jedes Element aus B^* wegen $B^* \subset B$ genau ein Bild in B_1. Die Menge dieser Bilder sei B_1^*. Dann ist

$$B_1^* \subset B_1.$$

Weil die Abbildung von B auf B_1 eineindeutig ist, ist die Abbildung von B^* auf B_1^* ebenfalls eineindeutig. Somit folgt

$$B^* \sim B_1^*.$$

Aus $B^* \sim B_1^*$ und $A_1 \sim B^*$ folgt

$$A_1 \sim B_1^*$$

(wegen der Transitivität der Gleichmächtigkeit von Mengen), d. h., A_1 ist mit einer echten Teilmenge von B_1 gleichmächtig, w. z. b. w.
Damit ist Definition 1 (1.3.) gerechtfertigt. Die Entscheidung über $a < b$ ist repräsentantenunabhängig.

Aufgabe 2 (1.3.)
Man zeige mit Hilfe von Definition 1 (1.3.) die Wahrheit der Aussagen
a) $0 < 3$
b) 4 ist nicht kleiner als 2.

LÖSUNG
a) $|\emptyset| = 0$; $|M| = 3$; $M = \{ \bullet; \blacktriangle; \blacksquare \}$
Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge und echte Teilmenge jeder nichtleeren Menge, also gilt $\emptyset \subset M$. Auf Grund der Reflexivität der Relation „... ist gleichmächtig mit ...“ in $\mathfrak{M}$ gilt $\emptyset \sim \emptyset$. Also ist $0 < 3$.

b) $|A| = 4$ $\quad A = \{a; b; c; d\}$
$|B| = 2$ $\quad B = \{x; y\}$
Es ist zu zeigen, daß es keine echte Teilmenge von B gibt, die mit A gleichmächtig ist.
Echte Teilmengen von B sind nur die Mengen $\{x\}$, $\{y\}$ und die leere Menge. Keine von ihnen ist gleichmächtig mit A.

Verallgemeinernd stellen wir fest, daß für beliebige natürliche Zahlen a, b entschieden werden kann, ob a kleiner ist als b oder nicht. Damit entsteht in der Menge $N \times N$ geordneter Paare natürlicher Zahlen eine Teilmenge R, die alle jene geordneten Paare (a, b) enthält, für die $a < b$ gilt. Diese Menge R ist die Kleinerrelation in N.
Wir untersuchen, welche Eigenschaften die Kleinerrelation in N hat. Unter Verwendung von Definition 1 (1.3.) sollen die Gedanken dargelegt werden, die einem Beweis zugrunde liegen.

> 1. Für alle natürlichen Zahlen a gilt:
> $a \not< a$. (Lies: a ist nicht kleiner als a.)
> (Irreflexivität der Kleinerrelation in N)

Es sei A ein beliebiger Repräsentant der natürlichen Zahl a. Da A als Repräsentant einer natürlichen Zahl eine endliche Menge ist, kann A niemals zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sein. Das entspricht dem uns vertrauten Sachverhalt, daß keine natürliche Zahl kleiner als sie selbst sein kann.

> 2. Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
> wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.
> (Transitivität der Kleinerrelation in N)

Aufgabe 3 (1.3.)
Man veranschauliche die Transitivität der Kleinerrelation in N an einem konkreten Beispiel und beweise die Wahrheit der Einzelaussage.

LÖSUNG
Es sei $a = 2$, $b = 4$ und $c = 5$.
Entsprechend der Prämisse der Aussage muß A gleichmächtig mit einer echten Teilmenge von B sein und B wiederum gleichmächtig mit einer echten Teilmenge von C. Dann gibt es aber auch eine echte Teilmenge von C, die mit A gleichmächtig ist. Das ist gleichbedeutend mit $a < c$.

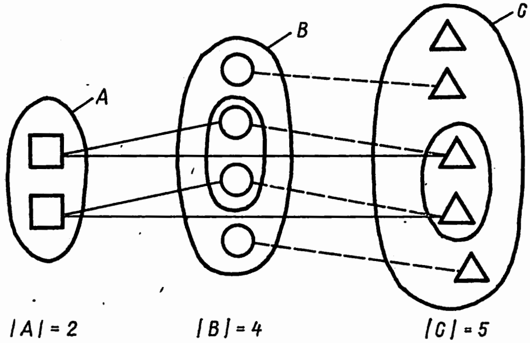


Bild 4 (1.3.)

> 3. Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt stets genau einer der drei Fälle:
> $a < b$
> $b < a$
> $a = b$.
> (Trichotomie der Kleinerrelation in N)

Die Mengen A und B seien Repräsentanten der natürlichen Zahlen a bzw. b, also $|A| = a$ und $|B| = b$. Zwei endliche Mengen sind entweder gleichmächtig, oder genau eine von ihnen ist von niederer Mächtigkeit als die andere. Für A und B gilt also genau einer der *drei Fälle*:

1. Es gibt eine eineindeutige Abbildung von A auf eine echte Teilmenge von B.
2. Es gibt eine eineindeutige Abbildung von B auf eine echte Teilmenge von A.
3. Es gibt eine eineindeutige Abbildung von A auf B.

Dementsprechend gilt stets
entweder $a < b$
oder $b < a$
oder $a = b$. D. h., es kann niemals mehr als ein Fall zutreffen, und es ist unmöglich, daß keiner der Fälle zutrifft.

▷ SATZ 1 (1.3.)
Die Kleinerrelation in N ist eine irreflexive Ordnungsrelation.

Durch die Kleinerrelation kann in der Menge N der natürlichen Zahlen eine Ordnung hergestellt werden. Da die leere Menge keine echte Teilmenge hat, ist Null die kleinste natürliche Zahl. Sind die Zahlen so geordnet, daß vor einer beliebigen Zahl in der Folge nur solche Zahlen stehen, die kleiner sind als diese Zahl – also in der Reihenfolge 0; 1; 2; 3; … aufgeführt –, sagt man, sie sind in der *natürlichen Reihenfolge* gegeben.
Wir wenden uns nun der *Gleichheitsrelation in N* zu. Sie muß nicht definiert werden, denn aus der Definition der Gleichheit von Äquivalenzklassen (vgl. Band I) und der genetischen Definition der natürlichen Zahlen folgt Satz 2 (1.3.).

▷ SATZ 2 (1.3.)
Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt:
a **ist gleich** b genau dann, wenn es Repräsentanten A von a und B von b mit $A \sim B$ gibt.

Zeichen für „a ist gleich b": $\boldsymbol{a = b}$.

Auf einen Beweis von Satz 2 (1.3.) verzichten wir.

Aufgabe 4 (1.3.)
Es sind die Eigenschaften der Relation „… ist gleich …" in N anzugeben.

LÖSUNG
Die Relation ist in N reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Die Gleichheitsrelation in N ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge N kann bezüglich der Gleichheitsrelation in Klassen eingeteilt werden. Jede solche Klasse ist eine Einermenge. Der Leser mache sich anhand geeigneter Beispiele im Lehrbuch der Klasse 1 bewußt, daß die Erarbeitung der Gleichheitsrelation auf Satz 2 (1.3.) basiert.

Eine weitere, für die Arbeit in den unteren Klassen bedeutsame, zweistellige Relation in N ist die *Relation „b ist Nachfolger von a“*. Im Lehrbuch der Klasse 1 finden wir Darstellungen wie im Bild 5 (1.3.).

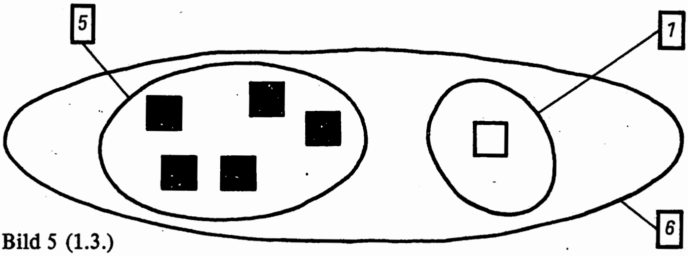


Bild 5 (1.3.)

Auf Grund derartiger Beispiele wird im Unterricht der Klasse 1 erarbeitet, daß 6 der Nachfolger von 5 ist.
Wir definieren:

▶ DEFINITION 2 (1.3.)
a und b seien natürliche Zahlen.
b* ist Nachfolger von *a genau dann, wenn es einen Repräsentanten B von b gibt, der gleichmächtig ist mit der Vereinigungsmenge eines Repräsentanten A von a und einer zu A elementfremden Einermenge.

Zeichen für „b ist Nachfolger von a“: $\boldsymbol{b = a'}$.

Zur Rechtfertigung von Definition 2 (1.3.) ist wieder wie bei Definition 1 (1.3.) der Nachweis zu erbringen, daß die so definierte *Nachfolgerrelation* repräsentantenunabhängig ist. Darauf verzichten wir.

Aufgabe 5 (1.3.)
Es ist zu begründen, daß 5 nicht Nachfolger von 3 ist.

LÖSUNG
$|A| = 3 \qquad A = \{a; b; c\}$
$A \cup \{d\} = \{a; b; c; d\}$
Die entsprechend den in der Definition gestellten Bedingungen gebildete Vereinigungsmenge von A mit einer Einermenge $\{d\}$, $d \notin A$, ist kein Repräsentant von 5.
Es wird deutlich, daß mit a' stets der unmittelbare Nachfolger einer natürlichen Zahl a gemeint ist.

Aufgabe 6 (1.3.)
Es sind folgende Fragen zu beantworten:
a) Hat jede natürliche Zahl einen Nachfolger?
b) Ist jede natürliche Zahl Nachfolger einer natürlichen Zahl?
c) Kann eine natürliche Zahl verschiedene Nachfolger haben?

LÖSUNG

a) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
Die Vereinigung eines Repräsentanten A einer beliebigen natürlichen Zahl a mit einer zu A elementfremden Einermenge C ist wieder eine endliche Menge und damit Repräsentant eines Nachfolgers a' von a.

b) Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
Ein Repräsentant des Nachfolgers einer natürlichen Zahl muß mindestens ein Element enthalten. Da Null durch die leere Menge repräsentiert wird, ist dies nicht gegeben.

c) Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
Wir beweisen diese Aussage indirekt.
Wir nehmen an, a_1' und a_2' seien Nachfolger der natürlichen Zahl $a = |A|$.
Wir müssen nun zeigen, daß $a_1' = a_2'$ ist.
C_1 und C_2 sind zu A elementfremde Einermengen und $|A \cup C_1| = a_1'$, $|A \cup C_2| = a_2'$.
Aus $A \sim A$ und $C_1 \sim C_2$ folgt
$(A \cup C_1) \sim (A \cup C_2)$.
Damit gilt $a_1' = a_2'$.
Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist eindeutig bestimmt.

Zu jeder natürlichen Zahl kann ein Nachfolger gebildet werden. Dieses Verfahren läßt sich unbegrenzt fortsetzen. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine unendliche Menge. Sie ist einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig, beispielsweise der Menge der geraden natürlichen Zahlen. Es läßt sich eine eineindeutige Abbildung von N auf die Menge der geraden natürlichen Zahlen angeben, indem jeder natürlichen Zahl n die Zahl $2n$ zugeordnet wird.

Aufgabe 7 (1.3.)
Man entscheide, welche der dem Leser bekannten Relationseigenschaften die Nachfolgerrelation in N hat.

LÖSUNG
Die Nachfolgerrelation in N ist irreflexiv.
Sie ist weder transitiv noch trichotom und auch nicht symmetrisch. Die Begründung dieser Aussagen soll der Leser selbständig geben.

Zusammenfassung

Die Menge N **der natürlichen Zahlen** ist eine unendliche Menge. Sie kann mit Hilfe von Repräsentanten schrittweise aufgebaut werden, indem, mit Null beginnend, zu jeder natürlichen Zahl der Nachfolger gebildet wird. Jede natürliche Zahl hat in dieser Folge genau einen Nachfolger. Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl. Jede natürliche Zahl ist nur sich selbst gleich, kann aber auf unterschiedliche Weise repräsentiert werden. Durch die Kleinerrelation ist die Menge N der natürlichen Zahlen irreflexiv geordnet. Null ist die kleinste natürliche Zahl.

1.4. Operationen in der Menge der natürlichen Zahlen

Ein Hauptziel des Mathematikunterrichts in den unteren Klassen ist das Entwickeln von Fertigkeiten im Rechnen mit natürlichen Zahlen. Deshalb steht im Mittelpunkt des Arithmetikunterrichts die Herausbildung sicheren, dauerhaften und anwendungsbereiten Könnens bei der Lösung von Aufgaben der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Um die Unterrichtsarbeit so gestalten zu können, daß die durch die Lehrpläne gestellten Ziele erfüllt werden, muß der Lehrer die fachlichen Voraussetzungen sicher beherrschen. Deshalb sollen durch nachfolgende Betrachtungen die fachtheoretischen Grundlagen für die Behandlung der Grundrechenoperationen geklärt werden. Das in der Oberschule erworbene Wissen über Rechenoperationen und deren Eigenschaften soll systematisiert, ausgebaut und zum Lösen von Aufgaben eingesetzt werden.
Im Unterricht der Unterstufe ist besonders zu beachten, daß anschaulich vorgegangen wird, die Erfahrungen aus dem Lebensbereich der Kinder einbezogen werden und die Kinder mit Freude und Erfolg die gestellten Aufgaben erfüllen können. Dieses Grundanliegen kann durch die mengentheoretische Fundierung des Zahlbegriffs und eine darauf basierende Einführung der Rechenoperationen verwirklicht werden.

1.4.1. Addition natürlicher Zahlen

Grundlegend für das Vorgehen bei der Einführung der Grundrechenoperationen in den unteren Klassen ist die mengentheoretische Definition dieser Operationen. Rechenoperationen in der Menge der natürlichen Zahlen werden mengentheoretisch definiert, indem man jeweils zu Repräsentanten – also endlichen Mengen – übergeht und Operationen mit diesen Mengen zugrunde legt. Die Addition natürlicher Zahlen läßt sich auf die Vereinigung von Mengen zurückführen. Es wird zunächst geklärt, wie man die Summe zweier natürlicher Zahlen bildet. Danach kann definiert werden, was man unter Addition natürlicher Zahlen versteht. Dabei muß abgesichert sein, daß das Ergebnis, das natürlichen Zahlen bei einer Operation zugeordnet wird, eindeutig bestimmt ist. Wir definieren:

▶ DEFINITION 1 (1.4.1.)
a und b seien natürliche Zahlen, die durch die elementfremden Mengen A und B repräsentiert werden.
Eine natürliche Zahl c heißt **Summe der natürlichen Zahlen a und b** genau dann, wenn $A \cup B$ ein Repräsentant von c ist.
Die natürlichen Zahlen a und b heißen Summanden von c.

Zeichen für die „Summe von a und b": $\boldsymbol{a+b}$.
$a = |A|$ und $b = |B|$
$c \underset{\text{def}}{=} |A \cup B|$ mit $A \cap B = \emptyset$

■ BEISPIEL 1 (1.4.1)
Im Lehrbuch der Klasse 1 wird erläutert, wie man die Summe der Zahlen 2 und 3 bildet.
Für die Zahlen 2 und 3 wurde jeweils ein Repräsentant gewählt. Die gewählten Mengen sind disjunkt. Die Vereinigungsmenge dieser beiden Mengen ist ein Repräsentant der Summe der Zahlen 2 und 3.

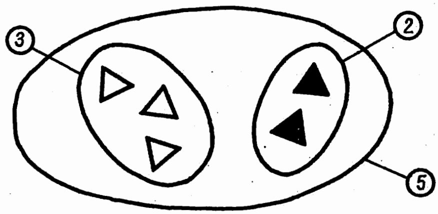


Bild 1 (1.4.1.)

Aufgabe 1 (1.4.1.)
Begründen Sie, warum man zur Summenbildung elementfremde Repräsentanten der Summanden braucht! Nutzen Sie zur Bildung der Summe 3 + 2 beispielsweise die Repräsentanten

$A_1 = \{a; b; c\}$ und $B_1 = \{a; b\}$,
$A_2 = \{a; b; c\}$ und $B_2 = \{c; d\}$,
$A_3 = \{a; b; c\}$ und $B_3 = \{e, f\}$!

LÖSUNG
Die Wahl von nicht elementfremden Repräsentanten führt zu verschiedenen Ergebnissen bei gleichen Summanden. So z. B.

$|A_1 \cup B_1| = 3$,
$|A_2 \cup B_2| = 4$,
$|A_3 \cup B_3| = 5$.

Um Eindeutigkeit bei der Summenbildung zu sichern, ist es notwendig, elementfremde Repräsentanten zu wählen.

Wir stellen uns nun die folgenden beiden Fragen:
- Gibt es zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen *a* und *b* *stets* eine Summe?
- Ist die Summe zweier natürlicher Zahlen *eindeutig* bestimmt?

Die Klärung dieser Fragen ist bei der Untersuchung von Operationen stets wichtig, und wir werden sie analog bei den anderen zu behandelnden Operationen stellen.
Zur Beantwortung der ersten Frage überlegen wir:
Jede natürliche Zahl kann durch mindestens eine endliche Menge repräsentiert werden. Es lassen sich immer Repräsentanten angeben, die elementfremd sind. Die leere Menge ist zu jeder endlichen Menge disjunkt. Die Vereinigung zweier endlicher Mengen ist wieder eine endliche Menge und damit Repräsentant einer natürlichen Zahl, die Summe von *a* und *b* ist. Zu beliebigen natürlichen Zahlen *a* und *b* existiert demnach stets eine Summe.

Beantworten wir die zweite Frage. Die Lösung von Aufgabe 1 (1.4.1.) zeigt, daß die Wahl von elementfremden Repräsentanten für die Summanden eine notwendige Bedingung ist, um eindeutig eine Summe zu bestimmen. Es sind aber weitere Überlegungen notwendig. Unter anderem ist zu zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend für die Eindeutigkeit der Summe ist. Bei der Definition der Summe wurde auf Repräsentanten zurückgegriffen. Wie bereits im Abschnitt 1.3. für die Relationen in N gezeigt wurde, muß abgesichert werden, daß die Summe von der Wahl der Repräsentanten für die Summanden unabhängig ist. Gelingt es nachzuweisen, daß sich bei jeder Wahl von zulässigen Repräsentanten für die Summanden stets dieselbe Zahl als Summe ergibt, folgt daraus die Eindeutigkeit der Summenbildung. Wir zeigen die einem Beweis zugrunde liegenden Überlegungen:
Geht man von den Repräsentanten A_1 für die natürliche Zahl a und B_1 für die natürliche Zahl b zu den Repräsentanten A_2 bzw. B_2 über, gilt $A_1 \sim A_2$ und $B_1 \sim B_2$. Die Mengen sind so zu wählen, daß $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ und $A_2 \cap B_2 = \emptyset$ gilt. Es ist zu zeigen, daß $(A_1 \cup B_1) \sim (A_2 \cup B_2)$ ist. Wir verdeutlichen dies an den Mengen

$$A_1 = \{a_1; \ldots; a_n\}, \qquad B_1 = \{b_1; \ldots; b_m\}.$$
$$A_2 = \{c_1; \ldots; c_n\}, \qquad B_2 = \{d_1; \ldots; d_m\}.$$

Eine mögliche eineindeutige Abbildung von $A_1 \cup B_1$ auf $A_2 \cup B_2$ wird durch die Pfeile angedeutet:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 \cup B_1 = & \{a_1; & \ldots; & a_n, & b_1; & \ldots; & b_m\} \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A_2 \cup B_2 = & \{c_1; & \ldots; & c_n, & d_1; & \ldots; & d_m\}. \end{array}$$

Gleichmächtige Mengen repräsentieren ein und dieselbe natürliche Zahl. Die Bildung der Summe ist repräsentantenunabhängig.

▷ **SATZ 1 (1.4.1.)**
Die Summe natürlicher Zahlen existiert stets und ist eindeutig bestimmt.

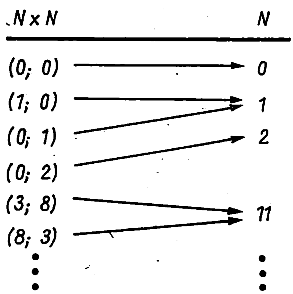
Aufgabe 2 (1.4.1.)
Man untersuche, wie im Lehrbuch der Klasse 1 die Repräsentantenunabhängigkeit bei der Berechnung von Summen wie beispielsweise $3 + 1 = 4$ Beachtung findet.

LÖSUNG
Summen werden bei der Einführung nicht nur aus der einmaligen Veranschaulichung durch entsprechende Mengen bestimmt, sondern es werden verschiedene Repräsentanten genutzt.

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Summenbildung und der Addition natürlicher Zahlen? Unsere Überlegungen zeigten, daß von zwei natürlichen Zahlen stets die Summe gebildet werden kann. Ordnet man nun jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen seine Summe zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N. Diese Abbildung heißt Addition in N. Sie ist eine zweistellige Operation in der Menge der natürlichen Zahlen.

> **DEFINITION 2 (1.4.1.)**
> Diejenige eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N, die jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen seine Summe zuordnet, heißt **Addition in *N*.**

Die Addition in N läßt sich wie folgt veranschaulichen.



Da der Definitionsbereich der Abbildung *gleich* $N \times N$ ist, sagt man:
Die Addition in N ist eine **unbeschränkt ausführbare Operation.** Da jede natürliche Zahl auch als Summe zweier natürlicher Zahlen auftritt, liegt mit der Addition auch eine Abbildung von $N \times N$ *auf* N vor.

Bild 2 (1.4.1.)

Aufgabe 3 (1.4.1.)
Schüler einer 4. Klasse rechnen mit einer „Rechenmaschine“, die zu gegebenen Zahlen a und b die Summe ausrechnet und das Ergebnis auf einem Papierstreifen, wie im Bild 3 (a) (1.4.1.) vorgegeben, ausdruckt.

a) Auf Bild 3 (b) (1.4.1.) sind sowohl Eingabe- als auch Ausgabestreifen lückenhaft. Man stelle die Aufgaben in einer Tabelle zusammen.

b) Welche Eigenschaften der Addition sind erkennbar?

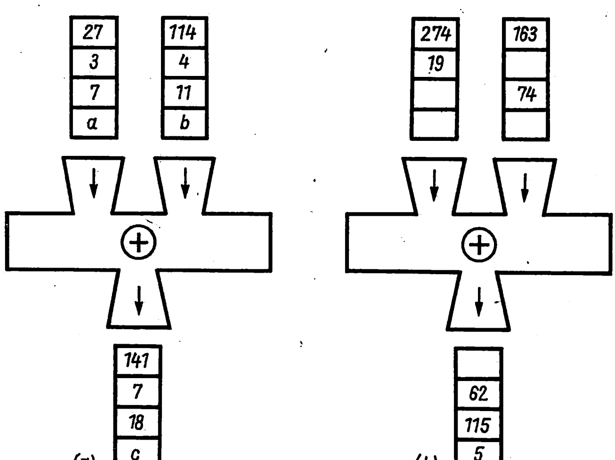


Bild 3 (1.4.1.)

LÖSUNG

a)

a	b	$a+b$
274	163	437
19	43	62
41	74	115
0; 1; 2; 3; 4; 5	5; 4; 3; 2; 1; 0	5

b) Sind beide Summanden gegeben, ist die Summe eindeutig bestimmt. Sind die Summe und ein Summand gegeben, ist der andere Summand eindeutig bestimmt, falls er in N existiert. Ist nur die Summe gegeben, so sind die beiden Summanden nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 4 (1.4.1.)
In der Klasse 1 wird der Nachfolger einer natürlichen Zahl auch durch Addition von 1 gewonnen. Beispielsweise

$5 + 1 = 6$. Der Nachfolger von 5 ist 6.

Man begründe diesen Zusammenhang.

LÖSUNG

Man erhält einen Repräsentanten des Nachfolgers einer natürlichen Zahl a, indem man einen Repräsentanten A von a mit einer zu A disjunkten Einermenge vereinigt. Das entspricht nach der Definition der Summe zweier natürlicher Zahlen der Addition von 1 zu a. Man vergleiche entsprechende Darstellungen im Lehrbuch der Klasse 1.

Sichere inhaltliche Vorstellungen von den Rechenoperationen gewinnt man insbesondere durch die Untersuchung ihrer Eigenschaften. Wenden wir uns deshalb der Frage zu, welche – für den Unterricht der unteren Klassen bedeutsamen – Eigenschaften für die Addition in N gelten.
Unmittelbar aus dem uns bekannten *Gesetz der Kommutativität der Vereinigung von Mengen* folgt Satz 2 (1.4.1.).

▷ SATZ 2 (1.4.1.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
$a + b = b + a$.

(Gesetz der Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen)

Wir beweisen Satz 2 (1.4.1.) durch einen direkten Beweis.

Voraussetzung:
a und b seien beliebige natürliche Zahlen. Es sei A ein Repräsentant von a und B ein Repräsentant von b, wobei $A \cap B = \emptyset$ ist.

Behauptung:

$$a + b = b + a$$

Beweis:

Nach der Definition der Summe natürlicher Zahlen gilt

$$a + b = |A \cup B| \text{ mit } A \cap B = \emptyset$$

$$b + a = |B \cup A|, \text{ und es ist } A \cap B = B \cap A = \emptyset.$$

Auf Grund der Kommutativität der Vereinigung von Mengen gilt

$$A \cup B = B \cup A.$$

Daraus folgt

$$(A \cup B) \sim (B \cup A).$$

Zueinander gleichmächtige endliche Mengen repräsentieren dieselbe natürliche Zahl, also

$$|A \cup B| = |B \cup A|.$$

Auf Grund der Definition der Summe natürlicher Zahlen gilt $a + b = b + a$.
Weil diese Beziehung für beliebige natürliche Zahlen a und b gilt, gilt sie für alle natürlichen Zahlen, w. z. b. w.

Häufig ist es notwendig, auch mehr als zwei Zahlen zu addieren. Da die Summe zweier natürlicher Zahlen eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl ist, kann man diese wieder als einen Summanden auffassen und eine weitere Zahl addieren. **Das Gesetz der Assoziativität der Addition in N** trifft eine Aussage über die Reihenfolge der zu bildenden Summen.

▷

> SATZ 3 (1.4.1.)
> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
> $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Schüler der unteren Klassen wenden das Gesetz der Assoziativität beispielsweise beim Rechnen in Teilschritten an oder, um Rechenvorteile zu nutzen.

■ BEISPIEL 2 (1.4.1.)

a) Die Summe $26 + 25 + 4$ kann unter Nutzung der Kommutativität und der Assoziativität der Addition in N vorteilhaft berechnet werden, indem man wie folgt vorgeht:
$(26 + 4) + 25 = 30 + 25 = 55$.

b) Summen wie $32 + 21$ werden in Klasse 2 auf der Grundlage folgender Überlegung errechnet:
$32 + 21 = 32 + 20 + 1$
$32 + 20 = 52$
$52 + 1 = 53$

Durch die Gültigkeit des Assoziativgesetzes ist es möglich, bei der Addition von drei oder auch mehr Summanden die Klammern wegzulassen und die Summen in der Form $a + b + c$ zu schreiben.

Aufgabe 5 (1.4.1.)
Man beweise

$$(4+3)+2=4+(3+2)$$

durch entsprechendes Arbeiten mit Repräsentanten.

LÖSUNG
Es seien $|A|=4$, $|B|=3$ und $|C|=2$, wobei die Repräsentanten paarweise elementfremd gewählt werden. Beispielsweise:

$$A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$$
$$B=\{e;\ f;\ g\}$$
$$C=\{h;\ i\}$$

$(A \cup B) \cup C=\{a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g;\ h;\ i\}$ ist Repräsentant der Summe $(4+3)+2$.
$A \cup (B \cup C)=\{a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g;\ h;\ i\}$ ist Repräsentant der Summe $4+(3+2)$.
Es ist $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$ und damit gilt

$$(A \cup B) \cup C \sim A \cup (B \cup C).$$

Beide Mengen repräsentieren die natürliche Zahl 9.

Auf einen Beweis des Gesetzes der Assoziativität der Addition in N verzichten wir.
Die im folgenden zu erarbeitenden weiteren Eigenschaften der Addition in N rechtfertigen u. a. das in der Unterstufe häufig genutzte Prinzip des Zurückführens neuer auf bereits bekannte Aufgaben. Beispielsweise wenden die Schüler der Klasse 2 ihre Kenntnisse der Grundaufgaben[1] an, wenn sie berechnen:

$$6+2=8$$
$$16+2=18$$
$$26+2=28.$$

Grundlage ist das **Gesetz der Monotonie der Addition bezüglich der Gleichheitsrelation.**

▷ SATZ 4 (1.4.1.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Wenn $a=b$ ist, so ist $a+c=b+c$.

Der Leser verdeutliche sich, daß auch die Umkehrung von Satz 4 (1.4.1.) gilt. Analog zu Satz 4 (1.4.1.) gilt das **Gesetz der Monotonie der Addition bezüglich der Kleinerrelation.**

▷ SATZ 5 (1.4.1.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Wenn $a<b$ ist, so ist $a+c<b+c$.

[1] Grundaufgaben der Addition sind alle Additionsaufgaben mit genau zwei einstelligen Summanden.

■ BEISPIEL 3 (1.4.1.)

Schüler der 2. Klasse nutzen den im Satz 5 (1.4.1.) formulierten Zusammenhang beispielsweise zur Lösung der folgenden Aufgabe:
Vergleiche!
24 und 46
24 + 6 und 46 + 6
24 + 30 und 46 + 30

Aufgabe 6 (1.4.1.)
Es ist zu überprüfen, ob in N die Addition bezüglich der Nachfolgerrelation monoton ist.

LÖSUNG
Zu betrachten ist über N die Aussageform:
Wenn a Nachfolger von b ist, so ist $a + c$ Nachfolger von $b + c$.
Einem Beweis liegen folgende Überlegungen zugrunde. Es ist $a = b + 1$. Dann ist nach Satz 3 (1.4.1.) $a + c = (b + 1) + c$, also ist $a + c = (b + c) + 1$ auf Grund der Kommutativität und der Assoziativität der Addition in N. Es gilt das Gesetz der Monotonie der Addition bezüglich der Nachfolgerrelation.

Eine Möglichkeit, sich Eigenschaften von Operationen zu verdeutlichen, ist das Aufstellen von *Verknüpfungstafeln*, wie im folgenden für die Addition dargestellt.

+	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
0	0	1	2	3	4	5	6	•	•	•
1	1	2	3	4	5	6	7	•	•	•
2	2	3	4	5	6	7	8	•	•	•
3	3	4	5	6	7	8	9	•	•	•
4	4	5	6	7	8	9	10	•	•	•
5	5	6	7	8	9	10	11	•	•	•
6	6	7	8	9	10	11	12	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

→ Eingangszeile
Eingangsspalte
Hauptdiagonale

Bild 4 (1.4.1.)

Beispielsweise zeigt sich die Kommutativität der Addition in N in der Symmetrie der Tafel bezüglich der eingezeichneten Hauptdiagonalen. Aus dem Vergleich der

Eingangsspalte mit der 1. Spalte bzw. der Eingangszeile mit der 1. Zeile im Tafelinneren lassen sich die folgenden Aussagen vermuten, die der Leser selbständig beweisen sollte.

▷ SATZ 6 (1.4.1.)
Für alle natürlichen Zahlen a gilt:
$a + 0 = a \quad 0 + a = a.$

Weitere Zeilen und Spalten, die mit den Tafeleingängen übereinstimmen, gibt es nicht; d. h. aus $a + x = a$ folgt $x = 0$. Man sagt: Null ist das **neutrale Element bezüglich der Addition in** N.

Ebenfalls aus der Tafel ersichtlich ist der folgende Zusammenhang:

▷ SATZ 7 (1.4.1.)
Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt:
Wenn $a + b = 0$, so $a = 0$ und $b = 0$.

Abschließend werden in Aufgabe 7 (1.4.1.) zwei Kryptogramme gegeben, zu deren Lösung Kenntnisse über die Addition natürlicher Zahlen anzuwenden sind. Die Buchstaben sind jeweils durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ähnliche Aufgaben der Unterhaltungsmathematik bereiten vielen Schülern Freude, regen zur Beschäftigung mit der Mathematik an und haben oft einen tiefen mathematischen Hintergrund. Man sollte sich nicht mit einer gefundenen Lösung zufriedengeben, sondern versuchen, alle Lösungen zu ermitteln.

Aufgabe 7 (1.4.1.)
Es sind alle Lösungen anzugeben für die Kryptogramme

a)
```
  HAUS
 +HAUS
 -----
 STADT
```

b)
```
   ELF
 +EINS
 -----
 SUMME
```

LÖSUNG

a) Eine Lösung findet man z. B. folgendermaßen:
S = 1 (Die Summe zweier vierstelliger Zahlen ist kleiner als 20000; der Übertrag bei H + H kann nur 1 sein.)
T = 2, H = 6
A = 0 (Es käme auch A = 9 bei einem Übertrag von 1 für U + U in Frage, denn 9 + 9 + 1 = 19. Dann müßte T = H + H + 1 sein, was wegen T = 2 entfällt.)
U = 4 (Andere Belegungen führen entweder zu Überträgen oder zu Ziffern für D, die bereits für andere Buchstaben eingesetzt wurden.)

$$
\begin{array}{r}
D = 8 \\
6041 \\
+\ 6041 \\
\hline
12082
\end{array}
$$
ist die einzige Lösung.

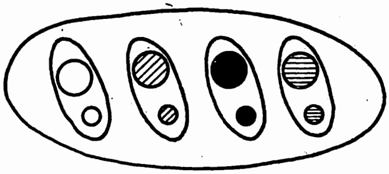
b) Die Aufgabe hat genau 4 Lösungen, für die aber stets S = 1, E = 9, U = 0 und F = 8 ist.

$$
\begin{array}{r}
928 \\
+\ 9631 \\
\hline
10559
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
938 \\
+\ 9621 \\
\hline
10559
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
948 \\
+\ 9721 \\
\hline
10669
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
928 \\
+\ 9741 \\
\hline
10669
\end{array}
$$

1.4.2. *Multiplikation natürlicher Zahlen*

Will man eine mengentheoretische Definition des Produkts zweier natürlicher Zahlen *a* und *b* geben, so hat man für die meisten Aufgaben zwei Möglichkeiten. Dies soll zunächst an Beispielen gezeigt werden.

■ BEISPIEL 1 (1.4.2.)



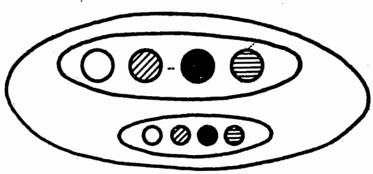


Bild 1 (1.4.2.)

Die Produktbildung $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8$ wird auf die Addition gleicher Summanden zurückgeführt.

Dem im Beispiel 1 (1.4.2.) gewählten Vorgehen liegt die Vereinigung gleichmächtiger, elementfremder Mengen zugrunde. Auf diese Weise lassen sich jedoch die Produkte $1 \cdot 1$, $a \cdot 0$ und $0 \cdot a$ nicht interpretieren.
Die zweite Möglichkeit soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

■ BEISPIEL 2 (1.4.2.)
Zwei Mädchen einer Mannschaft wollen gegen eine Mannschaft von drei Jungen Federball spielen.
Wie viele Spiele müssen ausgetragen werden, wenn jedes Mädchen gegen jeden der drei Jungen spielen soll? – Es entstehen 6 Paare von jeweils zwei Kindern, die sich als Spielpartner gegenüberstehen.

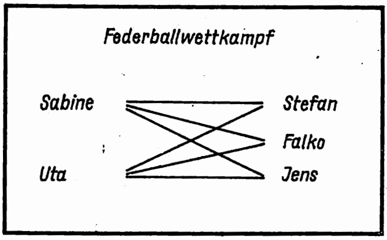


Bild 2 (1.4.2.)

Diesem Vorgehen liegt die folgende Definition zugrunde.

▶ **DEFINITION 1 (1.4.2.)**
a und b seien natürliche Zahlen, die durch die Mengen A und B repräsentiert werden.
Eine natürliche Zahl c heißt **Produkt der natürlichen Zahlen a und b** genau dann, wenn $A \times B$ ein Repräsentant von c ist.
Die natürlichen Zahlen a und b heißen Faktoren von c.

Zeichen für das „Produkt von a und b“: $\boldsymbol{a \cdot b}$.

$a = |A|$ und $b = |B|$

$c \underset{\text{def}}{=} |A \times B|$

Aufgabe 1 (1.4.2.)
Man zeige unter Nutzung der Definition 1 (1.4.2.), daß $3 \cdot 2 = 6$ und $4 \cdot 0 = 0$ ist.

LÖSUNG

a) Es ist $A = \{a; b; c\}$ und $B = \{x; y\}$.
$A \times B = \{(a, x); (b, x); (c, x); (a, y); (b, y); (c, y)\}$
Diese Menge ist ein Repräsentant der Zahl 6, und damit ist
$3 \cdot 2 = 6$.

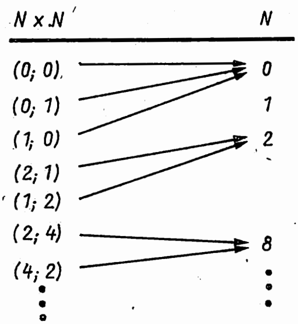
b) Für 4 wählen wir beispielsweise den Repräsentanten
$M = \{ \triangle; \blacktriangle; \triangle; \triangle \}$.
Repräsentant von 0 ist die leere Menge.
$M \times \emptyset = \emptyset$
Hieraus folgt $4 \cdot 0 = 0$.

Beantworten wir nun die folgenden Fragen, die im vorigen Abschnitt auch für die Summenbildung gestellt wurden:

– Gibt es zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen *stets* ein Produkt?
– Ist das Produkt zweier natürlicher Zahlen *eindeutig* bestimmt?

Zur Klärung der ersten Frage überlegen wir:
Zu jeder natürlichen Zahl läßt sich eine endliche Menge als Repräsentant angeben. Die Produktmenge zweier endlicher Mengen kann immer gebildet werden und ist stets wieder eine endliche Menge. Sie repräsentiert demnach eine natürliche Zahl. Es gibt also zu beliebigen natürlichen Zahlen stets ein Produkt. Zur Beantwortung der zweiten Frage ist zu klären, ob die Produktbildung von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist. Das Produkt $3 \cdot 2$ wurde im Beispiel 1 (1.4.2.) und in Aufgabe 1 (1.4.1.) durch Rückführung auf Repräsentanten berechnet. Im Beispiel 1 geschah dies durch wiederholte Addition derselben natürlichen Zahl. Die Summenbildung ist aber, wie wir wissen, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten für die Summanden. In Aufgabe 1 wurde mit Definition 1 (1.4.2.) gearbeitet. Der Leser überlege sich, wie man die Repräsentantenunabhängigkeit des nach Definition 1 gebildeten Produkts beweisen kann. Wir verzichten auf die Darstellung des Beweises und formulieren den folgenden Satz.

▷ **SATZ 1 (1.4.2.)**
Das Produkt natürlicher Zahlen existiert stets und ist eindeutig bestimmt.



Ordnet man jedem geordneten Paar von natürlichen Zahlen sein Produkt zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N (Bild 3 (1.4.2.)). Diese Abbildung heißt Multiplikation in N. Sie ist also eine zweistellige Operation in N.

Bild 3 (1.4.2.)

▶ **DEFINITION 2 (1.4.2.)**
Diejenige eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N, die jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen sein Produkt zuordnet, heißt **Multiplikation in *N*.**

Da der Definitionsbereich der Multiplikation in N gleich $N \times N$ ist, sagt man: Die Multiplikation in N ist eine **unbeschränkt ausführbare Operation.**
Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die für den Unterricht der unteren Klassen wichtigen Eigenschaften der Multiplikation in N zu erschließen.

Aufgabe 2 (1.4.2.)
Es ist eine Multiplikationstafel aufzustellen, deren Eingangszeile und Eingangsspalte jeweils die natürlichen Zahlen von 0 bis 6 enthalten. Welche Eigenschaften der Multiplikation in der Menge der gegebenen Zahlen lassen sich aus der Tafel entnehmen und damit deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen vermuten?

LÖSUNG
(Vgl. Multiplikationstafel)

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	8	10	12
3	0	3	6	9	12	15	18
4	0	4	8	12	16	20	24
5	0	5	10	15	20	25	30
6	0	6	12	18	24	30	36

Vermutungen: Die Multiplikation in N ist kommutativ. 1 ist das neutrale Element der Multiplikation. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ist allgemeingültig in N.
Diese aus der Tafel ablesbaren und einige weitere Eigenschaften sollen mengentheoretisch begründet werden. Aufgabe 3 (1.4.2.) soll an Zusammenhänge erinnern, die uns aus der Mengenlehre bekannt und dazu zu nutzen sind.

Aufgabe 3 (1.4.2.)
Gegeben sind die Mengen

$$A = \{1, 2; 3\}$$
$$B = \{a; b\}.$$

Es ist zu entscheiden, ob $A \times B = B \times A$ ist.

LÖSUNG

$$A \times B = \{(1; a); (1; b); (2; a); (2; b); (3; a); (3; b)\}$$
$$B \times A = \{(a; 1); (a; 2); (a; 3); (b; 1); (b; 2); (b; 3)\}$$

Also ist $A \times B \neq B \times A$.

Die Lösung der Aufgabe 3 (1.4.2.) bestätigt den aus der Mengenlehre bekannten Zusammenhang, daß die Produktmenge $A \times B$ im allgemeinen von $B \times A$ verschieden ist. Ergibt sich daraus ein Widerspruch zu der uns vertrauten Kommutativität der Multiplikation in N? Nein, denn sind a und b natürliche Zahlen mit den Repräsentanten A bzw. B, so folgt aus $(A \times B) \sim (B \times A)$, daß $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Nicht die Gleichheit der Produktmengen, sondern ihre Gleichmächtigkeit ist notwendig für die Kommutativität der Multiplikation in N. Daß für A und B in Aufgabe 3 (1.4.2.) $(A \times B) \sim (B \times A)$ ist, läßt sich aus der Lösung ablesen und durch folgende Überlegung allgemein begründen:
Wenn ein geordnetes Paar (α, β) Element der Menge $A \times B$ ist, so ist (β, α) ein Element von $B \times A$ und umgekehrt. Es ist dementsprechend leicht, eine eineindeutige Abbildung von $A \times B$ auf $B \times A$ anzugeben. Also repräsentieren $A \times B$ und $B \times A$ ein und dieselbe natürliche Zahl. Damit ist das **Gesetz der Kommutativität der Multiplikation in N** bewiesen.

▷ **SATZ 1 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
$a \cdot b = b \cdot a$.

Ebenfalls ist aus der Mengenlehre bekannt, daß für alle Mengen A, B, C gilt:

$$(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C).$$

Sind nun A, B, C Repräsentanten für natürliche Zahlen a, b, c, dann sind $(A \times B) \times C$ ein Repräsentant von $(a \cdot b) \cdot c$ und $A \times (B \times C)$ ein Repräsentant von $a \cdot (b \cdot c)$.

Diese Überlegungen sind grundlegend für einen Beweis des **Gesetzes der Assoziativität der Multiplikation in N**. Auf eine ausführliche Darstellung des Beweises verzichten wir.

▷ **SATZ 2 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Durch die Assoziativität der Multiplikation in N ist es möglich, die Multiplikation von mehr als zwei Zahlen auf die Multiplikation von zwei Zahlen zurückzuführen. In welcher Reihenfolge die Produkte zweier Zahlen gebildet werden, spielt dabei keine Rolle.
Für die Addition wurde u. a. festgestellt, daß aus $a < b$ stets $a + c < b + c$ folgt. Ob für die Multiplikation ein analoges Gesetz gilt, soll durch die Lösung der folgenden Aufgabe beantwortet werden.

Aufgabe 4 (1.4.2.)
Man prüfe und begründe, ob die Multiplikation in N monoton bezüglich der Kleinerrelation ist.

LÖSUNG
Wenn $3 < 5$, so $3 \cdot 5 < 5 \cdot 5$,
wenn $2 < 7$, so $2 \cdot 3 < 7 \cdot 3$,
wenn $0 < 4$, so $0 \cdot 2 < 4 \cdot 2$
sind wahre Aussagen, aber
wenn $3 < 5$, so $3 \cdot 0 < 5 \cdot 0$
ist eine falsche Aussage.

Verallgemeinernd begründen wir. Wenn $a < b$ ist, so ist ein Repräsentant A von a von niederer Mächtigkeit als ein Repräsentant B von b. Die Produktmenge $A \times C$ ist demnach von niederer Mächtigkeit als $B \times C$, falls $C \neq \emptyset$ ist. Es gilt das Gesetz **der Monotonie der Multiplikation bezüglich der Kleinerrelation.**

▷ **SATZ 3 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Wenn $a < b$ und $c \neq 0$ ist, so ist $a \cdot c < b \cdot c$.

Gleichermaßen gilt das **Gesetz der Monotonie der Multiplikation bezüglich der Gleichheitsrelation.**

▷ **SATZ 4 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Wenn $a = b$ ist, so ist $a \cdot c = b \cdot c$.

Falls c ungleich Null ist, gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

▷ **SATZ 5 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Wenn $a \cdot c = b \cdot c$ und $c \neq 0$ ist, so ist $a = b$.

Der Leser beachte, daß diese Gesetze bereits ab Klasse 1 Anwendung finden, etwa bei der Lösung bzw. Begründung folgender Aufgaben.

■ BEISPIEL 2 (1.4.2.)

Setze das richtige Zeichen ein!

a) $3 \cdot 5 \quad 4 \cdot 5$
$2 \cdot 8 \quad 2 \cdot 7$

b) $3 \cdot 5 \quad 6 \cdot 5$, denn $3 \quad 6$
$5 \cdot 10 \quad 7 \cdot 10$, denn $5 \quad 7$

Aufgabe 5 (1.4.2.)
Es ist zu untersuchen, ob die Multiplikation bezüglich der Nachfolgerrelation monoton ist.

LÖSUNG
3 ist Nachfolger von 2. $3 \cdot 4$ ist nicht Nachfolger von $2 \cdot 4$.
Dieses Beispiel beweist, daß die Multiplikation bezüglich der Nachfolgerrelation nicht monoton ist. Der Leser mache sich erneut bewußt, daß bereits ein Gegenbeispiel ausreicht, um zu zeigen, daß eine Allaussage nicht wahr ist.

Die zur Lösung von Aufgabe 2 (1.4.2.) aufgestellte Multiplikationstafel ließ die Vermutung zu, daß 1 das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist. Den Beweis führe der Leser als Übungsaufgabe. Dazu ist folgende Aussage zu beweisen:

▷ **SATZ 6 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a gilt:
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Es ist weiterhin zu zeigen, daß es genau ein neutrales Element der Multiplikation gibt, d. h. aus $a \cdot x = a$ folgt $x = 1$. Für die Addition wurde 0 als neutrales Element erkannt. Auch für die Multiplikation mit 0 lassen sich Besonderheiten feststellen, die ebenfalls in der Multiplikationstafel zum Ausdruck kommen. Der Beweis der folgenden Aussage sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

▷ **SATZ 7 (1.4.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a gilt:
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Auf Grund dieses Sachverhaltes nennt man Null das **absorbierende Element bezüglich der Multiplikation in N.**

▷

> SATZ 8 (1.4.2.)
> Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
> Wenn $a \cdot b = 0$ ist, so ist $a = 0$ oder $b = 0$.

Bisher haben wir Eigenschaften untersucht, die sich auf jeweils nur eine Operation bezogen. Wenn man nur addiert oder nur multipliziert, braucht man dank der Kommutativität und der Assoziativität die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren nicht zu berücksichtigen, unabhängig davon, wie viele Summanden bzw. Faktoren vorhanden sind. Was ist aber zu beachten, wenn in einer Aufgabe sowohl zu multiplizieren als auch zu addieren ist?
Bei der Berechnung von $6 + 3 \cdot 8$ wären – ohne eine Vereinbarung über die Reihenfolge der Operationen – die Ergebnisse

$$6 + 3 \cdot 8 = 9 \cdot 8 = 72$$

oder

$$6 + 3 \cdot 8 = 6 + 24 = 30 \text{ möglich.}$$

Um auch bei derartigen Aufgaben die Eindeutigkeit der Ergebnisse abzusichern, wird eine Festlegung über die Reihenfolge der auszuführenden Operationen getroffen. Die Multiplikation ist stets vor der Addition auszuführen, falls nicht durch Klammern eine andere Reihenfolge vorgeschrieben ist. Ein wichtiges Gesetz für das Berechnen von Termen, in denen Produkte und Summen vorkommen, ist das **Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition.**

▷

> SATZ 9 (1.4.2.)
> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
> $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Betrachtet man die Gleichungen von links nach rechts, heißt ein entsprechendes Vorgehen „Ausmultiplizieren“, anderenfalls „Ausklammern“.

■ BEISPIEL 3 (1.4.2.)

Eine Veranschaulichung des Gesetzes der Distributivität liefert folgende Darstellung (vgl. Lehrbuch Klasse 4).

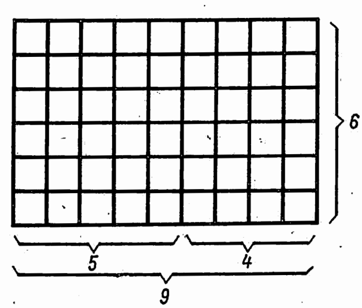


Bild 4 (1.4.2.)

Aufgabe 6 (1.4.2.)
Ist auch die Addition distributiv bezüglich der Multiplikation?

LÖSUNG
Es ist zu überprüfen, ob für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

Setzt man $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, so ergibt sich $17 = 35$.
Das ist eine falsche Aussage, also ist die Addition nicht distributiv bezüglich der Multiplikation. Es gibt dennoch Zahlen a, b, c, für die sich eine wahre Aussage ergibt:

$$0 + (3 \cdot 5) = (0 + 3) \cdot (0 + 5)$$
$$15 = 15.$$

Das Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition wird im Unterricht der unteren Klassen bewußt genutzt. So werden in Klasse 2 noch unbekannte Produkte berechnet, indem auf bereits bekannte Summen und Produkte zurückgegriffen wird. Beispielsweise $7 \cdot 7 = (5 + 2) \cdot 7$ oder $7 \cdot 7 = (6 + 1) \cdot 7$.
Im Abschnitt 1.6. wird gezeigt werden, daß das Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition eine der Grundlagen für das schriftliche Verfahren der Multiplikation ist.

1.4.3. Subtraktion natürlicher Zahlen

Aus den Betrachtungen zur Addition und Multiplikation wurde folgendes Vorgehen bei der mengentheoretischen Definition von Rechenoperationen in N deutlich:

- Es wird eine Vorschrift gegeben, wie man die Summe bzw. das Produkt natürlicher Zahlen mittels Repräsentanten zu bilden hat.
- Es wird eine eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N definiert, indem man jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen seine Summe bzw. sein Produkt zuordnet.

Dementsprechend ist in diesem Abschnitt die Definition der Differenz natürlicher Zahlen und darauf aufbauend der Subtraktion in N zu erarbeiten. Beispiele sollen die Umsetzung im Unterricht der unteren Klassen aufzeigen.

▶ DEFINITION 1 (1.4.3.)
Es seien a und b natürliche Zahlen, die durch die Mengen A und B repräsentiert werden, wobei B eine Teilmenge von A ist.
Eine natürliche Zahl c heißt **Differenz der natürlichen Zahlen *a* und *b*** genau dann, wenn $A \setminus B$ ein Repräsentant von c ist.
a heißt Minuend, b Subtrahend von c.

Zeichen für die „Differenz von a und b": $\boldsymbol{a - b}$.

$$a = |A| \quad \text{und} \quad b = |B| \quad \text{mit} \quad B \subseteq A \qquad c \underset{\text{Df}}{=} |A \setminus B|$$

Für die Repräsentanten wird in der Definition 1 (1.4.3.) gefordert, daß $B \subseteqq A$ gilt. Warum ist diese Bedingung notwendig? Beispiel 1 (1.4.3.) soll die Beantwortung dieser Frage erleichtern.

■ BEISPIEL 1 (1.4.3.)

Die Aufgabe 5 − 3 ist auf mengentheoretischer Grundlage zu lösen. Wird die Forderung $B \subseteqq A$ für die Repräsentanten mißachtet, können verschiedene Ergebnisse auftreten. Es sei

$A = \{a; b; c; d; e\}$ ein Repräsentant von 5. Für 3 werden die Repräsentanten B_1, B_2, B_3 gewählt.

(1) $B_1 = \{\alpha; \beta; \gamma\}$

$A \setminus B_1 = \{a; b; c; d; e\}; \quad |A \setminus B_1| = 5$

(2) $B_2 = \{a; \alpha; \beta\}$

$A \setminus B_2 = \{b; c; d; e\}; \quad |A \setminus B_2| = 4$

(3) $B_3 = \{a; b; \gamma\}$

$A \setminus B_3 = \{c; d; e\}; \quad |A \setminus B_3| = 3$

Bei dieser Wahl der Repräsentanten ist nicht abgesichert, daß Paaren natürlicher Zahlen *eindeutig* eine Differenz zugeordnet wird. Wählt man dagegen Dreiermengen, die Teilmengen von A sind, als Repräsentanten, ergibt sich stets eine Zweiermenge als Differenzmenge.

Aufgabe 1 (1.4.3.)

Unter welchen Bedingungen existieren für natürliche Zahlen a und b Repräsentanten A bzw. B mit $B \subseteqq A$?

LÖSUNG

Repräsentanten A und B mit $B \subseteqq A$ existieren genau dann, wenn $a = b$ oder $b < a$ ist.

Analog dem Vorgehen bei Summe und Produkt ist ferner zu zeigen, daß die Differenz entsprechend der gegebenen Definition eindeutig bestimmt ist. Dem Leser ist bekannt, daß dazu die Repräsentantenunabhängigkeit der Differenzbildung nachzuweisen ist. Dieser Nachweis sollte als Übungsaufgabe selbständig erarbeitet werden. Er gibt die Berechtigung für die Definition der Subtraktion in N.

▶ DEFINITION 2 (1.4.3.)

Diejenige eindeutige Abbildung aus $N \times N$ in N, die allen geordneten Paaren natürlicher Zahlen, deren Differenz existiert, diese Differenz zuordnet, heißt **Subtraktion in N.**

Die Subtraktion in N ist eine **beschränkt ausführbare** oder **partielle Operation.** Es gibt Paare natürlicher Zahlen, denen in N keine Differenz zugeordnet werden kann. Eine Differenz existiert nur, wenn der Minuend größer oder gleich dem Subtrahenden ist.

Aufgabe 2 (1.4.3.)
Es ist eine Subtraktionstafel aufzustellen, deren Eingangszeile und Eingangsspalte die natürlichen Zahlen von 0 bis 6 enthalten.
Welche Eigenschaften der Subtraktion lassen sich am Aufbau der Tafel erkennen?

LÖSUNG

In der Tafel bleiben Felder leer. Die Subtraktion ist nicht stets ausführbar. Die Ergebnisse im Tafelinneren sind nicht symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen angeordnet. Die Subtraktion in N ist nicht kommutativ. Differenzen $a - b$ und $b - a$ existieren nur, wenn $a = b$ ist.

−	0	1	2	3	4	5	6
0	0						
1	1	0					
2	2	1	0				
3	3	2	1	0			
4	4	3	2	1	0		
5	5	4	3	2	1	0	
6	6	5	4	3	2	1	0

In jedem Feld der Hauptdiagonalen steht die Zahl 0; stets gilt
$$a - a = 0.$$
Die erste Spalte stimmt mit der Eingangsspalte überein; stets gilt
$$a - 0 = a.$$
Es gibt keine zur Eingangszeile gleiche Zeile.

Wir stellen verallgemeinernd fest:

▷ **SATZ 1 (1.4.3.)**
Für alle natürlichen Zahlen a gilt:
$a - a = 0$ und $a - 0 = a$.

Die Aussageform $0 - a = a$ ist in N erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

Aufgabe 3 (1.4.3.)
Schüler einer vierten Klasse haben den Auftrag, die Ergebnisse zu vergleichen, die die im Bild 1 (1.4.3.) dargestellten Rechenmaschinen ausdrucken. Welche Erkenntnis sollen sie aus dem Vergleich gewinnen?

LÖSUNG
Die Subtraktion in N ist nicht assoziativ.
Bei Subtraktionsaufgaben ist die Reihenfolge, die durch Klammern vorgegeben

wird, stets einzuhalten, bzw. es sind die Differenzen schrittweise von links nach rechts zu berechnen.

Beispielsweise $8 - 5 - 2 = (8 - 5) - 2 = 3 - 2 = 1$
bzw. $8 - (5 - 2) = 8 - 3 = 5$.

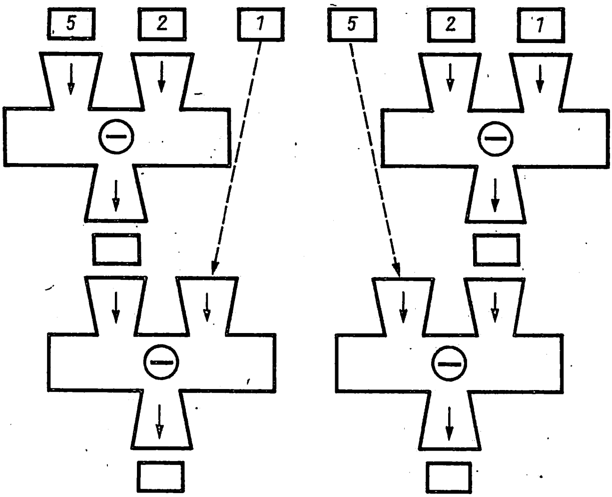


Bild 1 (1.4.3.)

Aufgabe 4 (1.4.3.)
Anhand von Beispielen ist eine Vermutung über die Distributivität der Multiplikation bezüglich der Subtraktion aufzustellen.

LÖSUNG
Beispiele wie $(78 - 13) \cdot 5 = 78 \cdot 5 - 13 \cdot 5$ usw. lassen vermuten, daß das Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Subtraktion gilt, wenn die Differenzen existieren.

Auf einen Beweis der im Ergebnis von Aufgabe 4 (1.4.3.) aufgestellten Vermutung verzichten wir und formulieren den folgenden Satz.

▷ SATZ 2 (1.4.3.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
(1) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, falls $b \geqq c$ und
(2) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, falls $a \geqq b$.

(Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Subtraktion)

Weiterhin gelten die Gesetze der Monotonie der Subtraktion bezüglich der Gleichheits- und der Kleinerrelation.

▷ SATZ 3 (1.4.3.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c mit $a \geqq c$ und $b \geqq c$ gilt:
Wenn $a = b$ ist, so ist $a - c = b - c$.

▷ SATZ 4 (1.4.3.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c mit $a \geqq c$ und $b \geqq c$ gilt:
Wenn $a < b$ ist, so ist $a - c < b - c$.

Für Satz 3 (1.4.3.) werden die Beweisgedanken dargelegt. Der Beweis des Satzes 4 (1.4.3.) wird dem Leser überlassen.
Da $a = b$ ist, können a und b durch ein und dieselbe Menge A repräsentiert werden. C repräsentiert c, wobei C so gewählt werden muß, daß $C \subseteqq A$ ist. Daraus folgt, daß $A \setminus C = A \setminus C$ und damit $a - c = a - c$ ist.
Wir wenden uns nun einem anderen Aspekt der Untersuchung von Operationen zu. Dazu ist einführend folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe 5 (1.4.3.)

a) Aus einer Additionstafel für natürliche Zahlen sind die Lösungen der folgenden Gleichungen zu entnehmen.

$3 + x = 4 \qquad 2 + x = 8 \qquad x + 4 = 7 \qquad x + 5 = 10$

$y + 3 = 4 \qquad y + 2 = 8 \qquad 4 + y = 7 \qquad 5 + y = 10$

b) Wo sind die Lösungen von Gleichungen der Form

$a + x = b$ bzw. $y + a = b$ $(a \in N, b \in N, x \in N, y \in N)$

in einer Additionstafel abzulesen?

c) a, b seien fest vorgegebene natürliche Zahlen. Welcher Zusammenhang zwischen x und y ergibt sich aus den Gleichungen unter b)?

d) Es sind die Differenzen

$4 - 3, 8 - 2, 7 - 4, 10 - 5$

zu berechnen, und es ist ein Zusammenhang zu den unter a) gelösten Gleichungen herzustellen.

+	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	1	2	3	4	5	6	...
1	1	2	3	4	5	6	7	...
2	2	3	4	5	6	7	8	...
3	3	4	5	6	7	8	9	...
4	4	5	6	7	8	9	10	...
5	5	6	7	8	9	10	11	...
6	6	7	8	9	10	11	12	...
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	

LÖSUNG

a) $x = 1$ und $y = 1$
$x = 6$ und $y = 6$
$x = 3$ und $y = 3$
$x = 5$ und $y = 5$

b) Es ist vom gegebenen Summanden a in der Eingangsspalte auszugehen bis zum Feld, in dem die gegebene

Summe b steht. In der Eingangszeile im Feld über b steht der gesuchte Summand x. Bei $y + a = b$ ist entsprechend vorzugehen, wobei a in der Eingangszeile steht.[1]

c) Bei gleichen Belegungen für a und b gilt $x = y$. Dies ist durch die Kommutativität der Addition in N gewährleistet.

d) Die Lösungen der Gleichungen $3 + x = 4$ bzw. $y + 3 = 4$ können auch durch das Berechnen der Differenzen $x = 4 - 3$ bzw. $y = 4 - 3$ ermittelt werden. Entsprechendes gilt für die anderen Gleichungen.

Verallgemeinernd kann folgender Satz formuliert werden.

▷

> SATZ 5 (1.4.3.)
> Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
> $a - b = c$ genau dann, wenn $c + b = a$ ist.

Die Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition natürlicher Zahlen. Bereits in Klasse 1 wissen die Schüler, daß man zu Additionsaufgaben Subtraktionsaufgaben bilden kann. Beispielsweise:

$$5 + 2 = 7 \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \; 7 - 2 = 5 \\ \longrightarrow \; 7 - 5 = 2 \end{array}$$

Auf Grund der Kommutativität der Addition sind zu einer Additionsaufgabe zwei Subtraktionsaufgaben möglich. Auf den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion wird im Abschnitt 1.4.5. nochmals eingegangen.

1.4.4. Division natürlicher Zahlen

Auch die Einführung des Quotienten natürlicher Zahlen erfolgt im Unterricht der unteren Klassen wie die Erarbeitung von Summe, Differenz und Produkt auf mengentheoretischer Grundlage. Neben dieser mengentheoretischen Deutung des Quotienten wird in verstärktem Maße auch der Zusammenhang zwischen Operationen und deren Umkehroperationen genutzt, um inhaltliches Verständnis für die Division in N bei den Schülern zu erreichen. Es ist möglich, die Division als Umkehroperation der Multiplikation zu definieren, ohne mengentheoretische Bezüge zu nutzen. Damit gehen aber Vorteile anschaulichen Arbeitens verloren, und die beim Lösen von Anwendungsaufgaben notwendigen inhaltlichen Vorstellungen über die Division und den Quotienten von natürlichen Zahlen können sich so nur schwer herausbilden. Deshalb werden bei der Unterrichtsarbeit beide Aspekte berücksichtigt und die Wege kombiniert.

---

1) Wenn a größer als b ist, findet man bei diesem Vorgehen kein Feld, in dem b steht. D. h., daß eine Lösung der betrachteten Aufgabe in N nicht existiert.

Wir gehen in diesem Abschnitt von Beispielen aus dem Unterricht der unteren Klassen aus und werden den mathematischen Hintergrund dieses Vorgehens erörtern.

■ BEISPIEL 1 (1.4.4.)

Im Unterricht der Klasse 2 kann für die Berechnung des Quotienten $10:2$ durch folgende Aufgaben inhaltliches Verständnis angebahnt werden:

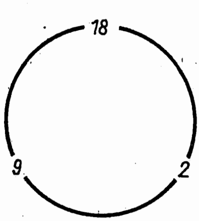
a) 10 Briefmarken werden an zwei Kinder gleichmäßig verteilt. Wie viele Marken erhält jedes Kind?
Die Ausgangsmenge wird zerlegt in 2 disjunkte Teilmengen mit je 5 Elementen.
Jedes Kind erhält 5 Marken; also $10:2=5$.

b) Mehrere Kinder teilen 10 Briefmarken so unter sich auf, daß jedes Kind 2 Marken erhält. Wie viele Kinder erhalten Briefmarken?
Die Ausgangsmenge wird in disjunkte Zweiermengen zerlegt. Es entstehen fünf Teilmengen.
Fünf Kinder erhalten Marken; also $10:2=5$.

Bei der Erarbeitung der Division durch die Zahl 2 – wie im Beispiel 1 (1.4.4.) gezeigt – wird vom Zerlegen von Mengen ausgegangen. Dabei gibt es zwei Zerlegungsmöglichkeiten:

1. Zerlegen einer Menge in zwei gleichmächtige disjunkte Teilmengen (Verteilen).
2. Zerlegen einer Menge in disjunkte Teilmengen mit je 2 Elementen (Aufteilen).

Neben diesen inhaltlichen Vorstellungen, die vor allem beim Lösen von Anwendungsaufgaben eine wichtige Rolle spielen, wird im Unterricht der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division in N genutzt, um Quotienten zu berechnen. Beispielsweise enthält das Lehrbuch der Klasse 2 Darstellungen wie folgt:



$9\cdot 2=18$ $\quad 18:9=2$

$2\cdot 9=18$ $\quad 18:2=9$

Bild 1 (1.4.4.)

Quotienten wie $27:3=9$ lernt der Schüler auf Grund der Gleichung $9\cdot 3=27$ zu berechnen, ohne dabei auf Mengenzerlegungen zurückzugreifen. Der hierbei genutzte Zusammenhang wird mengentheoretisch durch folgende Definition erfaßt:

▶ **DEFINITION 1 (1.4.4.)**
a und b seien natürliche Zahlen mit $b \neq 0$, die durch die Mengen A und B repräsentiert werden.
Eine natürliche Zahl c heißt **Quotient der natürlichen Zahlen *a* und *b*** genau dann, wenn c von einer Menge C repräsentiert wird, für die $(B \times C) \sim A$ ist.
a heißt Dividend, b Divisor von c.

Zeichen für den „Quotienten von a und b“: $\boldsymbol{a : b}$.
$a = |A|$ und $b = |B|$
$c \underset{\text{def}}{=} |C|$ mit $(B \times C) \sim A$

Der Leser überlege sich, wie man die Repräsentantenunabhängigkeit der nach Definition 1 (1.4.4.) gebildeten Quotienten beweisen kann.
Die gegebene Definition macht deutlich, daß im Falle $b \neq 0$ genau dann $a : b = c$ gilt, wenn $b \cdot c = a$ ist. Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation in N. Wenn $b \cdot c = a$ ist, sagt man auch „a ist Vielfaches von b“ bzw. „b ist Teiler von a“. Diese Relation in N steht im Mittelpunkt der Betrachtungen im Kapitel 2.

Aufgabe 1 (1.4.4.)
Es ist zu begründen, warum in Definition 1 (1.4.4.) zu fordern ist, daß der Divisor eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.

LÖSUNG
1. Wir betrachten den Fall, daß $a \neq 0$ und $b = 0$ ist. Es ist $b = |\emptyset|$ und es sei $a = |A|$ mit $A \neq \emptyset$. Gesucht wird eine Menge C mit $(\emptyset \times C) \sim A$. Eine solche Menge C gibt es nicht, denn für alle Mengen C ist $(\emptyset \times C) = \emptyset$; $a : 0$ existiert nicht.
2. Für den Fall $a = 0$ und $b = 0$ ist der Quotient $a : b$ nicht eindeutig bestimmt. Es ist $a = |\emptyset|$ und $b = |\emptyset|$. Anzugeben ist eine Menge C mit $(\emptyset \times C) \sim \emptyset$. Das gilt für jede Menge C. Um Eindeutigkeit bei der Quotientenbildung zu erreichen, muß $0 : 0$ als Quotient ausgeschlossen werden.

Wir wissen, daß nicht für alle Paare natürlicher Zahlen ein Quotient berechnet werden kann. Anhand der Definition 1 (1.4.4.) soll erläutert werden, unter welchen Bedingungen für a und b mit $b \neq 0$ ein Quotient existiert. Vorbereitend löse man Aufgabe 2 (1.4.4.).

Aufgabe 2 (1.4.4.)
Unter Nutzung von Definition 1 (1.4.4.) ist zu zeigen, daß die Quotienten $4 : 8$ und $4 : 3$ in N nicht existieren.

LÖSUNG
a) $4 : 8$ $A = \{$ ○; ⊜; ◍; ⊙ $\}$ und $B = \{$ □; ■; ▥; ▤; ▨; ⊡; ⊠; ⊠ $\}$
Gesucht wird eine Menge C mit $(B \times C) \sim A$.

Ist $C = \emptyset$, wird $B \times C = \emptyset$. C erfüllt die obenstehende Bedingung nicht. Wählt man für C eine Einermenge, beispielsweise $C = \{*\}$, enthält die Menge $B \times C$ 8 geordnete Paare als Elemente. Jede andere Menge C mit mehr als einem Element führt zu einer Menge $B \times C$ mit mehr als 8 Elementen. $B \times C$ wird nie gleichmächtig zu A. Es gibt keinen Quotienten $4:8$ in N.

b) $4:3$ $\quad A = \{a; b; c; d\}$ und $B = \{e; f; g\}$
Für welche Menge C ist $(B \times C) \sim A$? Für $C = \{h\}$ hat $B \times C$ weniger Elemente als A. Für $C = \{h; i\}$ hat $B \times C$ mehr Elemente als A. Keine Menge C erfüllt die geforderte Bedingung; es gibt keinen Quotienten $4:3$ in N.

Verallgemeinernd ergeben sich folgende Fälle:

1. Fall: $a = 0$ und $b \neq 0$
Es ist $a = |\emptyset|$ und es sei $b = |B|$. Gesucht wird eine Menge C mit $(B \times C) \sim \emptyset$.
Diese Beziehung ist genau dann erfüllt, wenn $C = \emptyset$ ist. Daraus folgt: $0:b$ ist eindeutig bestimmt, und es ist $0:b = 0$, wenn $b \neq 0$ ist.

2. Fall: $a \neq 0$ und $b \neq 0$

a) $a < b$
Es sei $a = |A|$ und $b = |B|$. Für welche C ist $(B \times C) \sim A$? Da $A \neq \emptyset$ ist, muß auch $C \neq \emptyset$ sein. Wegen $a < b$ enthält A weniger Elemente als B. $B \times C$ enthält für alle $C\,(C \neq \emptyset)$ mindestens so viele Elemente wie B. $(B \times C) \sim A$ ist nicht erfüllbar; ein Quotient existiert für diesen Fall nicht.

b) $a \geqq b$
Für $a = |A|$ und $b = |B|$ ist $(B \times C) \sim A$ erfüllbar, wenn (1) A in b paarweise disjunkte Teilmengen mit je c Elementen zerlegbar ist oder (2) A in c paarweise disjunkte Teilmengen mit je b Elementen zerlegt werden kann.

Fall **b)** führt auf die zwei verschiedenen inhaltlichen Deutungen des Quotienten, die im Beispiel 1 (1.4.4.) aufgezeigt wurden. Das ist einerseits das sogenannte Verteilen mittels Zerlegung einer Menge in eine vorgegebene Anzahl gleichmächtiger disjunkter Teilmengen und andererseits das sogenannte Aufteilen mittels Zerlegung einer Menge in disjunkte Teilmengen mit vorgegebener Anzahl der Elemente. Wir formulieren folgenden Satz, ohne ihn hier beweisen zu können:

▷

SATZ 1 (1.4.4.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b mit $b \neq 0$ gilt:
(1) $a:b = c$ genau dann, wenn es eine Zerlegung eines Repräsentanten A von a in b paarweise disjunkte Teilmengen mit je c Elementen gibt.
(2) $a:b = c$ genau dann, wenn es eine Zerlegung eines Repräsentanten A von a in c paarweise disjunkte Teilmengen mit je b Elementen gibt.

■ BEISPIEL 2 (1.4.4.)

$8:4=2$

Es sei $8=|A|$; $A=\{$ ○; ●; ◍; ⊗; △; ▲; ◬; ◬ $\}$.

Es gibt eine Zerlegung von A in 4 disjunkte Teilmengen mit je 2 Elementen, beispielsweise

$T_1=\{$ ○; △ $\}$, $T_2=\{$ ●; ▲ $\}$, $T_3=\{$ ◍; ◬ $\}$, $T_4=\{$ ⊗; ◬ $\}$.

Es gibt eine Zerlegung von A in 2 disjunkte Teilmengen mit je 4 Elementen, etwa

$S_1=\{$ ○; ●; ◍; ⊗ $\}$, $S_2=\{$ △; ▲; ◬; ◬ $\}$.

Falls C eine beliebige Zweiermenge ist und $4=|B|$, gilt $(B\times C)\sim A$.

Ordnet man jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen, deren Quotient existiert, diesen Quotienten zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung aus $N\times N$ in N. Diese Abbildung heißt Division in N.

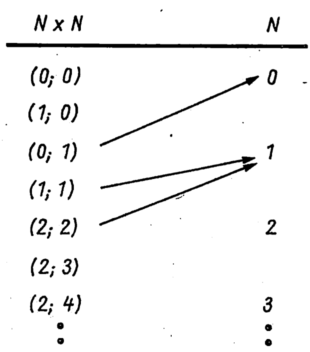


Bild 2 (1.4.4.)

▶ **DEFINITION 2 (1.4.4.)**

Diejenige eindeutige Abbildung aus $N\times N$ in N, die allen geordneten Paaren natürlicher Zahlen, deren Quotient existiert, diesen Quotienten zuordnet, heißt **Division in** N.

Die Division in N ist eine beschränkt ausführbare zweistellige Operation. Ihr Definitionsbereich ergibt sich aus den Überlegungen zur Existenz von $a:b$ in N, die Satz 2 (1.4.4.) zusammenfassend wiedergibt.

▷ **SATZ 2 (1.4.4.)**

Für alle natürlichen Zahlen a, b mit $b\neq 0$ gilt:

$a:b$ existiert und ist eindeutig bestimmt genau dann, wenn a ein Vielfaches von b ist.

Aufgabe 3 (1.4.4.)
Es ist eine Divisionstafel aufzustellen, deren Eingangszeile und Eingangsspalte jeweils die natürlichen Zahlen von 0 bis 6 enthalten. Welche Eigenschaften der Division in N lassen sich aus dieser Tafel entnehmen?

LÖSUNG

:	0	1	2	3	4	5	6
0		0	0	0	0	0	0
1		1					
2		2	1				
3		3		1			
4		4	2		1		
5		5				1	
6		6	3	2			1

Die Division ist nicht stets ausführbar. Es bleiben Felder leer.
Die Division in N ist nicht kommutativ. Es liegt keine Symmetrie bezüglich der Hauptdiagonalen vor. Es ist $a : b = b : a$ genau dann, wenn $a = b$ ist.
In jedem Feld der Hauptdiagonalen steht die Zahl 1; stets gilt

$$a : a = 1.$$

Es gibt eine mit der Eingangsspalte übereinstimmende Spalte; stets gilt

$$a : 1 = a.$$

Es gibt keine zur Eingangszeile gleiche Zeile.
Die erste Spalte ist leer. Quotienten $a : 0$ existieren nicht. Verallgemeinernd kann formuliert werden:

▷

> SATZ 3 (1.4.4.)
> Für alle natürlichen Zahlen a gilt:
> $a : a = 1$, falls $a \neq 0$ ist und
> $a : 1 = a$.

Die Aussageform $1 : a = a$ ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

Aufgabe 4 (1.4.4.)
Ausgehend von Beispielen ist eine Vermutung über die Distributivität der Division bezüglich der Addition bzw. der Subtraktion aufzustellen.

LÖSUNG
Es ist zu überprüfen, ob die Aussageformen
(1) $a:(b+c)=a:b+a:c$; (2) $a:(b-c)=a:b-a:c$ bzw.
(3) $(a+b):c=a:c+b:c$; (4) $(a-b):c=a:c-b:c$
über der Menge der natürlichen Zahlen allgemeingültig sind. Dazu vergleichen wir die folgenden Terme:

T_1	T_2	$T_1 = T_2$
$12:(4+2)$	$12:4+12:2$	falsch
$12:(4-2)$	$12:4-12:2$	falsch
$(9+15):3$	$9:3+15:3$	wahr
$(14-6):2$	$14:2-\ 6:2$	wahr

Die Beispiele beweisen, daß die Aussageformen (1) und (2) nicht allgemeingültig sind. Es ist zu vermuten, daß die Aussageformen (3) und (4) über N allgemeingültig sind, falls alle auftretenden Differenzen und Quotienten existieren. Auf den Beweis der Allgemeingültigkeit wird hier verzichtet.

▷ SATZ 4 (1.4.4.)
Für alle natürlichen Zahlen *a, b, c* gilt:
$(a+b):c=a:c+b:c$ und
$(a-b):c=a:c-b:c$,
falls die Differenzen und Quotienten existieren.

Man spricht vom **Gesetz der rechtsseitigen Distributivität der Division bezüglich der Addition** bzw. **bezüglich der Subtraktion.** Damit wird zum Ausdruck gebracht, daß man nicht schlechthin von Distributivität sprechen kann, weil die Aussageformen $a:(b+c)=a:b+a:c$ und
$a:(b-c)=a:b-a:c$ über N nicht allgemeingültig sind.
Abschließend geben wir die Gesetze der Monotonie der Division bezüglich der Kleiner- und der Gleichheitsrelation an.

▷ SATZ 5 (1.4.4.)
Für alle natürlichen Zahlen *a, b, c* ($c \neq 0$) gilt:
Wenn $a = b$ ist, so ist $a:c=b:c$, falls die Quotienten existieren.

▷ SATZ 6 (1.4.4.)
Für alle natürlichen Zahlen *a, b, c*, ($c \neq 0$) gilt:
Wenn $a < b$ ist, so ist $a:c<b:c$, falls die Quotienten existieren.

In den Abschnitten 1.4.1. bis 1.4.4. wurden die Grundrechenoperationen in N durch Rückführung auf Operationen mit Repräsentanten definiert. Die methodische Aufbereitung der in den unteren Klassen zu vermittelnden mathematischen Inhalte auf dieser Grundlage sichert eine anschauliche, den Schülern gut verständliche und fachlich exakte Unterrichtsarbeit.

1.4.5. Einige Betrachtungen zum Begriff der Operation in einer Menge

In diesem Abschnitt werden bei der Behandlung der Grundrechenoperationen in N gewonnene Erkenntnisse verallgemeinert. Die Einbeziehung weiterer uns bekannter Operationen soll helfen, das Wissen aus dem Mathematikunterricht der Oberschule und den zuvor in der Ausbildung behandelten Themen bezüglich der Operationen zu systematisieren.

Aufgabe 1 (1.4.5.)
Auf mengentheoretischer Grundlage wurden die vier Grundrechenoperationen in N definiert. Was ist allen vier Operationen in N gemeinsam? Wodurch unterscheiden sie sich?

LÖSUNG
Es wird jeweils zwei natürlichen Zahlen a und b höchstens eine natürliche Zahl c zugeordnet. Die Grundrechenoperationen in N sind eindeutige Abbildungen aus $N \times N$ in N. Es handelt sich um zweistellige Operationen in N.
Die Operationen unterscheiden sich durch die Vorschrift, wie die beiden Zahlen a und b zu verknüpfen sind, ob a und b jeweils ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt oder ihr Quotient zuzuordnen ist.
Die Operationen haben unterschiedliche Eigenschaften.

Sehen wir uns einige weitere bekannte Operationen an.

■ BEISPIEL 1 (1.4.5.)

(1) $\{a; b\} \cup \{c\} = \{a; b; c\}$
$\{1; 2\} \cap \{3\} = \emptyset$
$\{7; 4; 0\} \setminus \{0\} = \{7; 4\}$
Für die Operationen Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen gilt, daß jeweils zwei gegebenen Mengen genau eine Menge zugeordnet wird.

(2) Bei der Multiplikation gebrochener Zahlen wird mittels der Definition des Produkts
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad (b \neq 0;\ d \neq 0)$$
zwei gebrochenen Zahlen eindeutig eine gebrochene Zahl zugeordnet.

Die Beispiele legen nahe, den Begriff einer zweistelligen Operation in einer Menge M folgendermaßen zu definieren:

> DEFINITION 1 (1.4.5.)
> Es sei M eine nichtleere Menge. Jede eindeutige Abbildung aus $M \times M$ in M heißt **zweistellige Operation in** M.[1)]

Es sei $\circ$ eine zweistellige Operation in einer Menge M. Wird einem geordneten Paar $(a; b)$ von Elementen der Menge M durch die Abbildung $\circ$ das Element c der Menge M zugeordnet, so schreibt man $a \circ b = c$ (gelesen „a Operation b").

Aufgabe 2 (1.4.5.)
Wodurch wird der Abbildungscharakter einer Operation Schülern der Klasse 4 im Lehrbuch verdeutlicht?

LÖSUNG
Der Abbildungscharakter von Operationen wird u. a. durch Darstellungen wie im Bild 1 (1.4.5.) hervorgehoben.

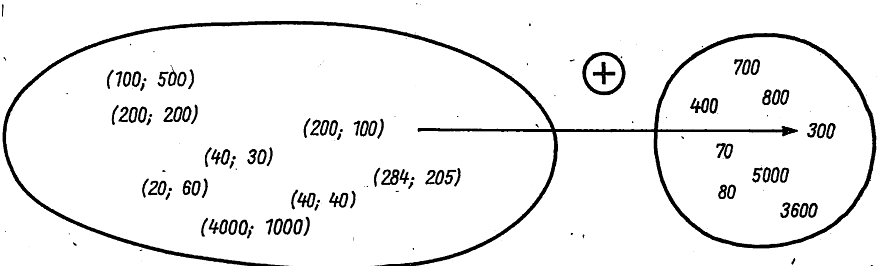


Bild 1 (1.4.5.)

Aufgabe 3 (1.4.5.)
Es ist zu natürlichen Zahlen a und b das arithmetische Mittel zu bilden, d. h.

$$a \circ b = \frac{a+b}{2}$$

Liegt mit dem Bilden des arithmetischen Mittels zweier natürlicher Zahlen eine zweistellige Operation in N vor?

LÖSUNG

a	2	3	5	17	33
b	8	7	4	25	21
$a \circ b$	5	5	–	21	27

---

1) Da wir uns vorwiegend mit zweistelligen Operationen in einer Menge M beschäftigen werden, sprechen wir künftig mitunter nur von Operationen (in M).

Zwei natürlichen Zahlen wird eine natürliche Zahl $c = \frac{a+b}{2}$ zugeordnet. Es gibt in N höchstens eine derartige Zahl c zu a und b.
Es liegt eine eindeutige Abbildung aus $N \times N$ in N, also eine zweistellige Operation in N vor.

Aufgabe 4 (1.4.5.)
$a \bigcirc b = c$ soll bedeuten, daß c zwischen a und b liegt. Man bestimme in der Menge $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ für die Paare (1;3), (2;3), (2;5), (4;4), (7;3) die zugehörigen Zahlen c.

Warum liegt keine Operation in M vor?

LÖSUNG

a	1	2	2	4	7
b	3	3	5	4	3
$a \bigcirc b$	2	–	3; 4	–	4; 5; 6

Die Abbildung ist nicht eindeutig. Man erhält nicht für jedes Paar $(a; b)$ höchstens ein Ergebnis.

Neben zweistelligen Operationen sind uns eine Reihe von **einstelligen Operationen in einer Menge M** bekannt. Von einer einstelligen Operation in einer Menge M spricht man, wenn durch eine eindeutige Abbildung jedem Element von M höchstens ein Element aus M zugeordnet wird; also eine eindeutige Abbildung aus M in M vorliegt.

So sind uns u. a. folgende Beispiele für einstellige Operationen bekannt:

■ BEISPIEL 2 (1.4.5.)

(1) Bildung des Nachfolgers a' zu einer natürlichen Zahl a
(2) Verdoppeln einer Zahl in der Menge der reellen Zahlen
(3) Bildung des Komplements einer Menge M bezüglich eines Grundbereiches
(4) Bildung der Negation einer Aussage in der Menge der Aussagen

Wenden wir uns nun der Frage nach den Eigenschaften einer Operation in einer Menge M zu. Beim Vergleich von Rechenoperationen – beispielsweise von Addition und Subtraktion in N – fällt auf, daß es zwar zu allen Paaren natürlicher Zahlen eine Summe gibt, aber nicht immer eine Differenz existiert. Demgemäß ist es bei einer zweistelligen Operation von Bedeutung, über deren Ausführbarkeit zu entscheiden.

> DEFINITION 2 (1.4.5.).
> Eine zweistellige Operation in M ist **unbeschränkt ausführbar** genau dann, wenn die Operation eine Abbildung von $M \times M$ in M ist.

Unbeschränkt ausführbare Operationen werden in mathematischen Fachbüchern häufig als volle oder **algebraische Operationen** bezeichnet. Bei unbeschränkt ausführbaren Operationen in M ist der Definitionsbereich gleich $M \times M$. Bei einer beschränkt ausführbaren Operation in M kann es Elemente $(a; b) \in M \times M$ geben, denen kein Element $b \in M$ als Ergebnis zugeordnet wird. Als beschränkt ausführbare Operationen haben wir in den zuvor behandelten Abschnitten die Subtraktion in N und die Division in N charakterisiert. Zu beachten ist, daß die Schüler in den unteren Klassen die Operationen in N nur in endlichen Teilmengen der Menge N kennenlernen. In diesem Fall sind auch die Addition und die Multiplikation beschränkt ausführbare Operationen. Beispielsweise ist die Summe zweier einstelliger Zahlen nicht stets eine einstellige Zahl.

Aufgabe 5 (1.4.5.)
Es ist zu entscheiden, ob die folgenden Operationen in den betrachteten Mengen unbeschränkt ausführbar sind:

(1) $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ in N;[1]
(2) $a \circ b = a + b$ in der Menge N_G der geraden natürlichen Zahlen;
(3) $M_1 \circ M_2 = M_1 \setminus M_2$ in der Menge $\mathfrak{M}_e$ aller endlichen Mengen;
(4) $a \circ b = (a, b)$[2] in der Menge T aller Teiler von 12;
(5) $a \circ b = [a, b]$[3] in N;
(6) $a \circ b = a\%$ von b in der Menge der gebrochenen Zahlen Z.

LÖSUNG
(1) Beschränkt ausführbare Operation in N; beispielsweise hat das Paar (3; 4) in N kein Element $\frac{a+b}{2}$ als Bild;
(2) unbeschränkt ausführbare Operation in N_G; die Summe zweier gerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl;
(3) unbeschränkt ausführbare Operation in $\mathfrak{M}_e$; die Differenz zweier endlicher Mengen ist stets eine endliche Menge;
(4) unbeschränkt ausführbare Operation in T; der größte gemeinsame Teiler zweier Elemente von $T = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ ist stets ein Element von T;

---

[1] Das Gleichheitszeichen ist hier und im folgenden oft im Sinne einer Wertzuweisung verwendet. So wird zum Beispiel der allgemein durch $\circ$ angegebenen Operation eine spezielle Operation zugewiesen.
[2] (a,b) bedeutet größter gemeinsamer Teiler von a und b.
[3] $[a,b]$ bedeutet kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b.

(5) unbeschränkt ausführbare Operation in N; das kleinste gemeinsame Vielfache zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl;

(6) unbeschränkt ausführbare Operation in Z; durch $a \circ b = \frac{a \cdot b}{100}$ wird jedem geordneten Paar gebrochener Zahlen eindeutig eine gebrochene Zahl zugeordnet.

Eine weitere Eigenschaft einer zweistelligen Operation, mit der die Schüler der unteren Klassen vertraut gemacht werden, ist die Kommutativität einer Operation.

► DEFINITION 3 (1.4.5.)
Eine zweistellige Operation ($\circ$) in einer Menge M ist **kommutativ** genau dann, wenn für alle $a \in M$ und $b \in M$ gilt:
$a \circ b = b \circ a$.

Für die Addition und die Multiplikation in N wurde die Gültigkeit dieser Eigenschaft bewiesen.

Aufgabe 6 (1.4.5.)
Es sind weitere Beispiele für kommutative Operationen zu geben.

LÖSUNG (Beispiele)
Konjunktion, Alternative, Äquivalenz in der Menge der Aussagen;
Durchschnitt, Vereinigung in einem Mengensystem $\mathfrak{M}$;
Multiplikation gebrochener Zahlen;
Bilden des arithmetischen Mittels natürlicher Zahlen

Aufgabe 7 (1.4.5.)

$$a \circ b = a\% \text{ von } b$$

Man berechne 20% von 80 und 80% von 20 und entscheide, ob die gemäß $a \circ b$ in der Menge der gebrochenen Zahlen gegebene Operation kommutativ ist!

LÖSUNG
20% von 80 = 16; 80% von 20 = 16

$$a \circ b = \frac{a \cdot b}{100} \qquad b \circ a = \frac{b \cdot a}{100}$$

Wegen der Kommutativität der Multiplikation gebrochener Zahlen liegt eine kommutative Operation vor.

Aufgabe 8 (1.4.5.)

$$a \circ b = a^b \text{ in } N$$

Ist diese Operation kommutativ?

LÖSUNG
$3^4 = 4^3$ ist eine falsche Aussage. Die Operation ist nicht kommutativ.

Bei der Untersuchung der Kommutativität einer Operation ist zu prüfen, ob stets $a \circ b = b \circ a$ gilt. Damit ergibt sich für beschränkt ausführbare Operationen in einer Menge M folgendes Problem. Um über die Gleichheit von $a \circ b$ und $b \circ a$ entscheiden zu können, muß sowohl $a \circ b$ als auch $b \circ a$ in M existieren. Das ist aber bei beschränkt ausführbaren Operationen oft nicht erfüllt. Man müßte deshalb verlangen:
Wenn $a \circ b \in M$, so $b \circ a \in M$ und $a \circ b = b \circ a$ für alle $a \in M$ und $b \in M$.

■ BEISPIEL 3 (1.4.5.)

(1) Für die Subraktion in N gilt: $(a - b) \in N$ und $(b - a) \in N$ genau dann, wenn $a = b$. So ist $(4 - 3) \in \mathrm{N}$, aber $(3 - 4) \notin \mathrm{N}$.
Die Subtraktion ist nicht kommutativ. Diese Erkenntnis konnten wir bereits der Strukturtafel entnehmen.

(2) Dagegen ist mit $\frac{a+b}{2}$ stets auch $\frac{b+a}{2}$ Element von N für natürliche Zahlen a und b. Das Bilden des arithmetischen Mittels ist in N eine beschränkt ausführbare, kommutative Operation.

▶ DEFINITION 4 (1.4.5.)
Eine Operation ($\circ$) in einer Menge M ist **assoziativ** genau dann, wenn für alle $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$ gilt:
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Während bei assoziativen Operationen die Operanden beliebig zusammengefaßt und dann verknüpft werden können, muß man bei einer nicht assoziativen Operation stets die Festlegung beachten, daß – sofern keine Klammern gesetzt sind – die Verknüpfungen schrittweise von links nach rechts ausgeführt werden. So ist $9 - 5 - 3 = (9 - 5) - 3 = 1$, aber $9 - (5 - 3) = 7$

Aufgabe 9 (1.4.5.)
Es ist zu entscheiden, ob das Bilden des arithmetischen Mittels in N eine assoziative Operation ist.

LÖSUNG

a	b	c	$(a \circ b) \circ c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$	$a \circ (b \circ c) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2}$
8	4	16	11	9
4	8	4	5	5
8	0	4	4	5
14	34	26	25	22

Diese Beispiele beweisen, daß die Operation nicht assoziativ ist.

Die bisher betrachteten Eigenschaften von zweistelligen Operationen beziehen sich ausschließlich auf eine Operation. Die folgende Gesetzmäßigkeit betrifft die Verknüpfung zweier Operationen in einer Menge M. Um die Operationen unterscheiden zu können, werden sie mit $\circ_1$ bzw. $\circ_2$ bezeichnet.

▶ DEFINITION 5 (1.4.5.)
In einer Menge M seien eine zweistellige Operation ($\circ_1$) und eine zweistellige Operation ($\circ_2$) definiert. Die Operation ($\circ_1$) ist **distributiv bezüglich der Operation** ($\circ_2$) genau dann, wenn für alle $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$ gilt:
$a \circ_1 (b \circ_2 c) = (a \circ_1 b) \circ_2 (a \circ_1 c)$ und
$(a \circ_2 b) \circ_1 c = (a \circ_1 c) \circ_2 (b \circ_1 c)$.

Beispielsweise sind die in der folgenden Tabelle angeführten Operationen $\circ_1$ distributiv bezüglich der Operationen $\circ_2$. Ist nur eine der beiden in der Definition geforderten Gleichungen in M allgemeingültig, spricht man einschränkend von **rechts-** bzw. **linksseitiger Distributivität.** Bei der Division in N bezüglich der Addition und der Subtraktion trat dieser Fall auf.

Operation ($\circ_1$)		Operation ($\circ_2$)	
Multiplikation in N	($\cdot$)	Addition in N	($+$)
Multiplikation in N	($\cdot$)	Subtraktion in N	($-$)
Konjunktion	($\wedge$)	Alternative	($\vee$)
Alternative	($\vee$)	Konjunktion	($\wedge$)
Vereinigung	($\cup$)	Durchschnitt	($\cap$)
Durchschnitt	($\cap$)	Vereinigung	($\cup$)

Durch folgende Aufgabe sollen weitere Operationseigenschaften erkannt werden.

Aufgabe 10 (1.4.5.)
Man stelle jeweils eine Operationstafel für $a \circ b = (a, b)$ und $a \circ b = [a, b]$ in der Menge $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ auf. Welche Eigenschaften der Operationen sind aus dem Vergleich der 1. Zeile mit der Eingangszeile bzw. der 1. Spalte mit der Eingangsspalte abzulesen?

LÖSUNG
(Vgl. Operationstafeln auf S. 59)
Für alle $a \in M$ gilt: $(1, a) = (a, 1) = 1$.
1 ist **absorbierendes Element** bezüglich der Bildung des größten gemeinsamen Teilers in M.
Für alle $a \in M$ gilt: $[1, a] = [a, 1] = a$.
1 ist **neutrales Element** bezüglich der Bildung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen in M.

(a, b)	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

[a, b]	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	–	4	–
3	3	–	3	–	–
4	4	4	–	4	–
5	5	–	–	–	5

Wir definieren:

▶ DEFINITION 6 (1.4.5.)
Ein Element a einer Menge M heißt **absorbierendes Element bezüglich einer in M definierten Operation** ($\circ$) genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt $a \circ x = x \circ a = a$.

▶ DEFINITION 7 (1.4.5.)
Ein Element n einer Menge M heißt **neutrales Element bezüglich einer in M definierten Operation** ($\circ$) genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt:
$x \circ n = n \circ x = x$.

Beispielsweise haben wir 0 als absorbierendes Element und 1 als neutrales Element bezüglich der Multiplikation in N erkannt. Bezüglich der Addition in N ist 0 neutrales Element, ein absorbierendes Element gibt es bezüglich der Addition in N nicht.
In der Menge der ganzen Zahlen Z gibt es bezüglich der Addition das neutrale Element 0 und darüber hinaus zu jeder Zahl a einen Summanden so, daß die Summe gleich dem neutralen Element 0 ist. Wir definieren:

▶ DEFINITION 8 (1.4.5.)
Es sei n neutrales Element einer in einer Menge M definierten Operation ($\circ$).
Ein Element $\bar{a}$ heißt **inverses Element von a bezüglich der Operation** ($\circ$) genau dann, wenn gilt
$a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = n$.

Wenden wir uns nun der Frage des Zusammenhangs zwischen Operationen und deren Umkehroperationen zu. Wir wissen, daß es bei einer zweistelligen Operation $\circ$

in einer Menge M zu zwei Elementen a, b von M höchstens ein $c \in M$ mit $a \circ b = c$ gibt. Gibt es aber zu gegebenen Elementen a, b einer Menge M auch höchstens ein $x \in M$ mit $a \circ x = b$ bzw. ein $y \in M$ mit $y \circ a = b$? Untersuchungen der Lösbarkeit von Gleichungen dieser Form sind Ausgangspunkt zur Klärung des Zusammenhangs zwischen Operationen und Umkehroperationen.

Wenn eine Gleichung der Form $a \circ x = b$ bzw. $y \circ a = b$, wobei a, b, x, y Elemente einer Menge M sind, in M höchstens eine Lösung hat, so ist das gleichbedeutend mit:

Aus $a \circ x_1 = b$ und $a \circ x_2 = b$ folgt $x_1 = x_2$

bzw.

aus $y_1 \circ a = b$ und $y_2 \circ a = b$ folgt $y_1 = y_2$.

Läßt sich das für eine Operation in M beweisen, kann man Abbildungen definieren, bei denen geordneten Paaren (a, b) eindeutig ein x mit $a \circ x = b$ bzw. ein y mit $y \circ a = b$ zugeordnet wird. Diese eindeutigen Abbildungen stellen jeweils eine zweistellige Operation in M dar – die Umkehroperationen zu einer gegebenen Operation. Zu einer zweistelligen Operation kann es also zwei Umkehroperationen geben. Bei allen kommutativen Operationen ist $x = y$, und es gibt höchstens eine Umkehroperation.

Betrachten wir als Beispiel die uns vertraute *Addition in N*. Da die Addition in N kommutativ ist, genügt es nachzuweisen, daß $a \circ x = b$ in N höchstens eine Lösung hat.

Der Beweis, daß für beliebige natürliche Zahlen a, b, x_1, x_2 aus $a + x_1 = b$ und

$a + x_2 = b$

$x_1 = x_2$

folgt, läßt sich durch folgende Überlegungen erbringen:

Wir nehmen an, es sei $x_1 \neq x_2$ und zwar $x_1 < x_2$, was keine Beschränkung der Allgemeingültigkeit bedeutet. Wegen der Monotonie der Addition bezüglich der Kleinerrelation und der Kommutativität der Addition in N gilt $a + x_1 < a + x_2$. Das widerspricht aber der Voraussetzung $a + x_1 = a + x_2 = b$. Folglich ist die Annahme $x_1 \neq x_2$ falsch, d. h. $x_1 = x_2$.

Es gibt genau eine Umkehroperation der Addition in N, nämlich die *Subtraktion*. Bild 2 (1.4.5.) veranschaulicht die entsprechende Abbildung aus $N \times N$ in N.

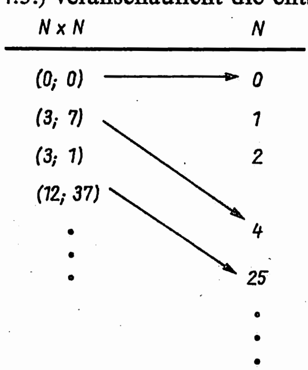


Bild 2 (1.4.5.)

Fragen wir nun nach Umkehroperationen der Subtraktion in N.
Ausgangspunkt sind die beiden Gleichungen
$a - x = b$ und $y - a = b$ $(a \in N, b \in N, x \in N, y \in N)$.
Offensichtlich hat jede dieser beiden Gleichungen in N höchstens eine Lösung, was wir nicht beweisen wollen. Beispielsweise gilt für

$3 - x = 1$	$x = 2$;	$y - 3 = 1$	$y = 4$;
$7 - x = 2$	$x = 5$;	$y - 7 = 2$	$y = 9$;
$12 - x = 15$	in N nicht lösbar;	$y - 12 = 15$	$y = 27$;
$7 - x = 0$	$x = 7$;	$y - 7 = 0$	$y = 7$.

Da die Subtraktion in N nicht kommutativ ist, sind die Bilder x bzw. y bei gleichen Urbildern (a, b) voneinander verschieden, außer für $b = 0$. Es gibt zwei Umkehroperationen der Subtraktion in N entsprechend den im Bild 3 (1.4.5.) dargestellten Abbildungen.

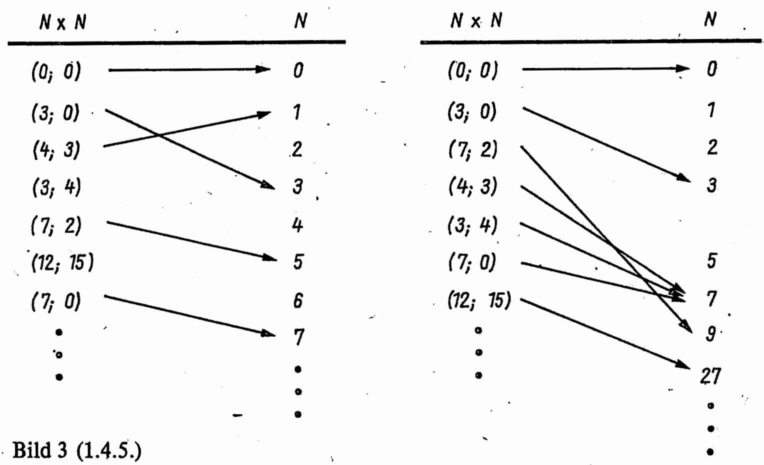


Bild 3 (1.4.5.)

Eine der beiden Umkehroperationen der Subtraktion in N ist die Addition in N, die zweite ist die Subtraktion in N. Demzufolge ist es falsch, von der Addition als *der* Umkehroperation der Subtraktion zu sprechen. Der Sachverhalt wird auch dadurch deutlich, daß sich zu Gleichungen der Art $a - b = c$ eine Gleichung $a - c = b$ und eine Gleichung $c + b = a$ bilden lassen. Entsprechend lernen Schüler der Unterstufe, daß sich zu einer Subtraktionsaufgabe sowohl eine Additions- als auch eine Subtraktionsaufgabe bilden läßt:

$$7 - 2 = 5 \quad \begin{cases} \rightarrow 7 - 5 = 2 \\ \rightarrow 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

bzw., daß aus $7 - x = 2$ $\quad x = 7 - 2$
und aus $\quad x - 7 = 2$ $\quad x = 7 + 2$ folgt.

Durch Aufgabe 11 (1.4.5.) soll die Frage beantwortet werden, ob es zu jeder kommutativen Operation eine Umkehroperation gibt.

Aufgabe 11 (1.4.5.)
Gibt es eine Umkehroperation zur Bildung des Durchschnitts von Mengen in einem Mengensystem $\mathfrak{M}$?

LÖSUNG
Aus $\{a; b; c\} \cap X = \{a\}$ folgt

$$X = \{a\} \text{ oder } X = \{a; d; e\} \text{ oder } X = \{a; e; f; g\} \text{ usw.}$$

Gleichungen der Form $M_1 \cap X = M_2$ haben nicht höchstens eine Lösung. Das Bilden des Durchschnitts ist demnach eine zweistellige kommutative Operation, zu der es keine Umkehroperation gibt.

Wir haben erkannt, daß es zu zweistelligen Operationen Umkehroperationen geben kann. Umkehroperationen zu unbeschränkt ausführbaren Operationen können beschränkt ausführbare Operationen sein. Ziel von Zahlenbereichserweiterungen ist es, Zahlenbereiche zu konstruieren, in denen weitere Operationen unbeschränkt ausführbar sind.

Übungen 1.4.

1. Man zeige mit Hilfe der angegebenen Definitionen für Summe, Produkt, Differenz und Quotient natürlicher Zahlen, daß $3 + 4 = 7$, $3 \cdot 3 = 9$, $8 - 5 = 3$ und $6:2 = 3$ ist.

2. Es ist zu begründen, daß für beliebige $a \in N$ und $x \in N$ gilt:
Aus $a + x = a$ folgt $x = 0$.

3. Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen a gilt:
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
und
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

4. Welche der folgenden Aussageformen sind über N allgemeingültig, welche sind erfüllbar bzw. nicht erfüllbar?
$a : 1 = a$
$a - 0 = a$
$1 : a = a$
$0 - a = a$

5. Man zeige die Repräsentantenunabhängigkeit der Differenzbildung natürlicher Zahlen.

6. Es ist anschaulich unter Nutzung von Repräsentanten zu zeigen, daß die Subtraktion bezüglich der Kleinerrelation in N monoton ist.

7. Man kläre den Zusammenhang zwischen einer Operation und deren Umkehroperationen am Beispiel von Multiplikation und Division in N.

8. Es ist zu untersuchen, ob es bezüglich des Durchschnitts und der Vereinigung von Mengen in der Menge aller endlichen Mengen neutrale, absorbierende bzw. inverse Elemente gibt.

9. Man gebe für die Kryptogramme alle Lösungen an.

$$\begin{array}{r} \text{VIER} \\ +\ \text{VIER} \\ \hline \text{ACHT} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & \text{ABCDE} \\ + & \text{BCDE} \\ + & \text{CDE} \\ + & \text{DE} \\ + & \text{E} \\ \hline & \text{AAAAA} \end{array} \qquad \begin{array}{lr} & \text{MATHE} \\ + & \text{MEIN} \\ \hline & \text{HOBBY} \end{array}$$

10. Es sind die Sternchen so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen.

$$\begin{array}{l} \underline{6{*}\cdot{*}{*}{*}} \\ {*}{*} \\ \quad{*}{*} \\ \underline{\qquad{*}{*}} \\ {*}{*}{*}6 \end{array} \qquad \begin{array}{l} {*}3{*}:9=5{*} \\ \underline{{*}{*}} \\ \quad{*}{*} \\ \quad\underline{{*}1} \\ \qquad 0 \end{array}$$

1.5. Peanosche Axiome und das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Der Zahlbegriff ist einer der ältesten Begriffe, den das menschliche Denken hervorgebracht hat. Einige Gedanken zu dem langwierigen und komplizierten Prozeß der Entwicklung der Zahlen wurden im Abschnitt 1.1. dargelegt. Die im Abschnitt 1.2. gegebene Definition des Begriffs „natürliche Zahl" auf mengentheoretischer Grundlage spiegelt einige Aspekte des historisch gewachsenen Zahlbegriffs wider und ermöglicht die Definition von Operationen und Relationen in N mit Hilfe von endlichen Mengen als Repräsentanten natürlicher Zahlen. Im Unterricht wird aber nicht nur auf dieser mengentheoretischen Grundlage, sondern es wird auch auf der Basis des in diesem Abschnitt behandelten **axiomatischen** oder **logisch-deduktiven Aufbaus** der Theorie der natürlichen Zahlen gearbeitet. Was versteht man unter dem axiomatischen Aufbau einer Theorie? Diese Frage soll zunächst beantwortet werden. Ein axiomatischer Aufbau einer Theorie setzt einen gewissen Entwicklungsstand der entsprechenden Wissenschaft voraus; ist also erst auf einer ganz bestimmten Stufe der historischen Entwicklung möglich. In die Fülle vorliegender Begriffe und Aussagen soll eine Ordnung nach bestimmten Gesichtspunkten gebracht werden. Es wird versucht, jeden Begriff durch eine Definition auf bereits definierte Begriffe zurückzuführen und jeden Satz zu beweisen. Das ist aber unmöglich. Denn um einen Satz zu beweisen, muß auf bereits bewiesene Sätze zurückgegriffen werden. Zum Beweis dieser Sätze werden abermals Sätze benötigt und so fort. Auf diese Weise entsteht eine endlose Kette von Beweisen, oder in den Beweisen treten die zu beweisenden Sätze wieder als Voraussetzungen auf. Für die Zurückführung von Begriffen auf andere Begriffe mittels Definitionen gelten analoge Überlegungen. Deshalb werden einige Begriffe und Aussagen an den Anfang gestellt, die nicht definiert bzw. nicht bewiesen werden. Sie werden Grundbegriffe

bzw. Axiome genannt. Ein **Grundbegriff** einer Theorie ist ein Begriff, der in dem betrachteten Aufbau der Theorie nicht definiert wird.
Ein **Axiom** wollen wir als eine wahre Aussage über Grundbegriffe der Theorie auffassen; die Wahrheit der Aussage wird in dem betrachteten Aufbau nicht bewiesen.
Es ist möglich, daß verschiedene Theorien zu einem mathematischen Gebiet vorliegen. Dabei kann es auftreten, daß ein und dieselbe mathematische Aussage in eine Theorie als Satz eingeht und bei einem anderen Vorgehen als Axiom auftritt. Das hängt von der Stellung dieser Aussage in dem betrachteten Aufbau der Theorie ab. Ebenso kann ein Begriff, der in einem bestimmten Aufbau definiert ist, bei einem anderen Vorgehen Grundbegriff sein. Logisch-deduktives Vorgehen heißt, von Grundbegriffen und Axiomen ausgehend, systematisch Begriffe und Sätze der Theorie zu definieren bzw. zu beweisen. Wir können das mit einem aufzuspannenden Netz vergleichen und schematisch wie folgt darstellen.

$$\begin{tikzcd} \text{Grundbegriffe} \arrow[r, "\text{Definitionen}"'] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Begriffe} \arrow[r, dashed] \arrow[d, leftrightarrow] & {} \\ \text{Axiome} \arrow[r, "\text{Beweise}"'] & \text{Sätze} \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd}$$

Zusammenfassend kann das Wesen des axiomatisch-deduktiven Vorgehens folgendermaßen charakterisiert werden:

1. Alle Grundbegriffe – einschließlich der Grundrelationen – der zu axiomatisierenden Theorie sind anzugeben, und jeder weitere Begriff ist durch Definition auf diese zurückzuführen.
2. Gegeben wird eine endliche Anzahl Axiome, und es wird angestrebt, alle weiteren wahren Aussagen der Theorie und nur solche daraus abzuleiten.

Die Gesamtheit der Axiome bildet ein Axiomensystem dieser Theorie. Von einem solchen System verlangt man, daß es *widerspruchsfrei* ist; d. h., es darf nicht möglich sein, daß sowohl eine Aussage als auch deren Negation beweisbar sind. Ein Axiomensystem sollte *vollständig* sein. Jede Aussage, die in diese Theorie eingeordnet werden kann, oder deren Negation sollten beweisbar sein. Das gelingt aber nicht immer. Es gibt eine Reihe von Vermutungen, für die bis heute kein Beweis, aber auch keine Widerlegung durch ein Gegenbeispiel gelang. Es kann vorkommen, daß sich unter den Axiomen einige befinden, die sich aus anderen herleiten lassen. Sie können damit als Axiome gestrichen und als Sätze in die Theorie aufgenommen werden. Dann spricht man davon, daß das Axiomensystem *unabhängig* ist.
Für die natürlichen Zahlen wurde von dem italienischen Mathematiker G. Peano (1858–1932) ein Axiomensystem angegeben. Dieses **Peanosche Axiomensystem** soll im folgenden dargestellt und der Inhalt der Axiome erschlossen werden. An einigen Beispielen wird gezeigt werden, wie daraus weitere Aussagen und Begriffe ableitbar sind. Aber es sollen nicht alle aus dem genetischen Aufbau von N bekannten Zusammenhänge und Begriffe erörtert werden.
Das Peanosche Axiomensystem enthält fünf Axiome mit den Grundbegriffen „Null“, „natürliche Zahl“ und „... ist Nachfolger von ...“ als eine Grundrelation.

Peanosches Axiomensystem

P I: Null ist eine natürliche Zahl.
P II: Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n'.
P III: Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
P IV: Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
P V: Jede Menge M von natürlichen Zahlen, die
1. die Zahl 0 und
2. mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' enthält,
umfaßt alle natürlichen Zahlen.

Für die als endliche Kardinalzahlen eingeführten natürlichen Zahlen 0; 1; 2; 3; ... mit $0' = 1$; $1' = 2$ usw. gelten diese fünf Aussagen. Aber auch für die Elemente der Menge der geraden Zahlen 0; 2; 4; 6; ... trifft dies zu. Es folgt dann aus den Peanoschen Axiomen $0' = 2$, $2' = 4$, $4' = 6$ usw. Man sagt deshalb, daß die Menge der natürlichen Zahlen bzw. die Menge der geraden natürlichen Zahlen *Modelle* des Peanoschen Axiomensystems sind. Ein weiteres Modell wird genutzt, wenn im Unterricht der unteren Klassen mit einem Zahlenstrahl gearbeitet wird, um Eigenschaften natürlicher Zahlen, von Relationen und Operationen in N zu veranschaulichen. Bezieht man nämlich die Peanoschen Axiome auf Punkte, die auf einem Strahl – beginnend mit seinem Anfangspunkt – abstandsgleich gewählt werden, so entsteht eine Folge von Punkten mit analogen Eigenschaften wie die der natürlichen Zahlen. Auf Grund dessen können natürliche Zahlen durch äquidistante Punkte auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden. Die Darstellung von Zahlen durch Punkte nutzen wir nun auch in Aufgabe 1 (1.5.). Ihre Lösung soll helfen, den Inhalt und die Bedeutung der Peanoschen Axiome P I bis P IV weiter zu erschließen. (Auf P V gehen wir danach näher ein.)

Aufgabe 1 (1.5.)
Welche der Axiome P I bis P IV werden von den im Bild 1 (1.5.) (vgl. S. 66) dargestellten Modellen erfüllt?

LÖSUNG
a) P I, P III, P IV
b) P I, P III, P IV
c) P I, P II, P IV
d) P I, P II, P IV
e) P I, P II, P III
f) P I, P II, P III
g) P I, P II, P III, P IV

Alle uns bekannten Aussagen über natürliche Zahlen lassen sich auf die Peanoschen Axiome zurückführen. Dabei spielt P V – das auch Induktionsaxiom genannt wird – eine besondere Rolle. Es liefert die Grundlage für ein Beweisverfahren – das **Beweisverfahren der vollständigen Induktion.** Dieses Verfahren kann genutzt werden, um die Allgemeingültigkeit von Aussageformen über natürliche

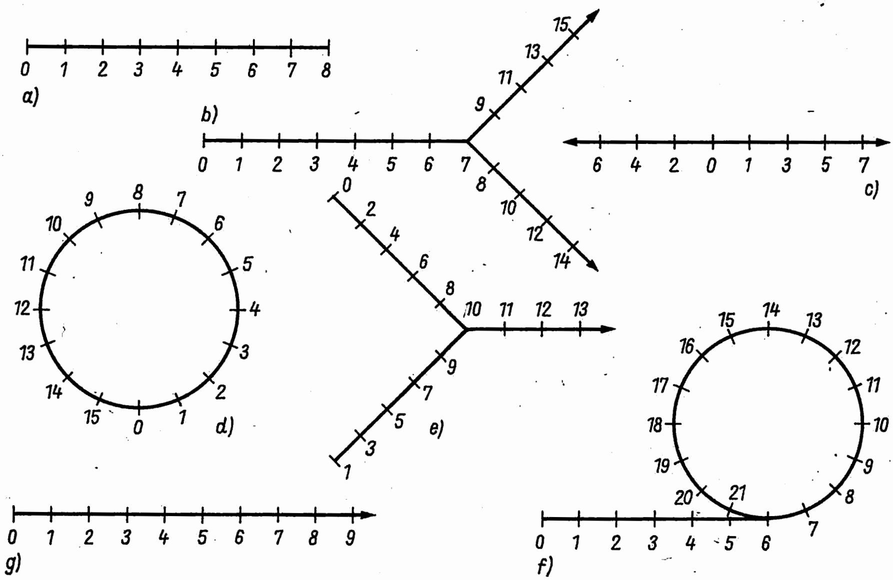


Bild 1 (1.5.)

Zahlen nachzuweisen. Die Rechtfertigung dafür wird durch den folgenden Satz gegeben.

▷

> SATZ 1 (1.5.)
> Jede Aussage
> „Für alle natürlichen Zahlen n gilt H (n)"
> ist wahr, wenn
> 1. H (0) wahr ist und
> 2. für eine beliebige natürliche Zahl k aus der Wahrheit von H (k) die Wahrheit von H (k') folgt.
>
> (Rechtfertigungssatz für Beweise durch vollständige Induktion)

Zum Beweis von Satz 1 (1.5.) gehen wir davon aus, daß H (n) eine Aussageform über natürliche Zahlen ist, für die die Voraussetzungen 1. und 2. des Satzes 1 erfüllt sind. M sei die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen, für die H (n) zu einer wahren Aussage wird. Nach 1. ist H (0) wahr und damit $0 \in M$. Auf Grund von 2. gehört mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger zu M. Daher enthält M nach P V alle natürlichen Zahlen. Also ist „Für alle n gilt H (n)" eine wahre Aussage.

---

1) Nach H. Steinhaus: *Kaleidoskop der Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

Um das inhaltliche Verständnis für Beweise nach dem Prinzip der vollständigen Induktion zu erleichtern, betrachten wir zunächst ein Beispiel.[1] (Fußnote vgl. S. 66)

■ BEISPIEL 1 (1.5.)

Es sei eine Reihe Dominosteine so aufgestellt, daß das Umfallen eines Steines das Umfallen des nächsten Steines zur Folge hat (Bild 2 (1.5.)).

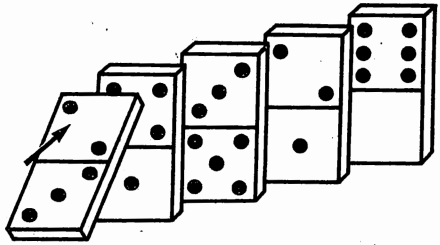


Bild 2 (1.5.)

Wenn nun tatsächlich der erste Stein umgeworfen wird, kann man schließen, daß alle Steine umfallen.
Es wird deutlich, daß zweierlei abgesichert sein muß, damit tatsächlich alle Steine umfallen:
1. Der erste Stein wird umgestoßen.
2. Jeder fallende Stein wirft den nächsten um.
Ist nur eine der beiden Bedingungen erfüllt, ist die Aussage, daß alle Steine umfallen, falsch. Falls beispielsweise an Stelle des ersten Steines der fünfte umgestoßen wird und die zweite Bedingung erfüllt ist, werden alle hinter dem fünften Stein stehenden umfallen. Falls 2. nicht erfüllt ist, gilt die Aussage nur für eine gewisse Anzahl von Steinen. (Vgl. Bild 3 (1.5.))

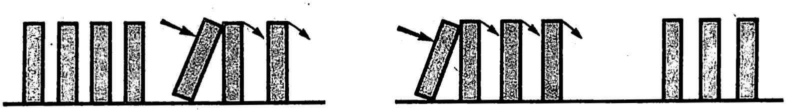


Bild 3 (1.5.)

Durch Beispiel 1 (1.5.) wurde der Grundgedanke des Rechtfertigungssatzes für Beweise durch vollständige Induktion deutlich. Die Überlegungen bezogen sich aber auf eine endliche Menge. Das Prinzip der vollständigen Induktion ermöglicht es, Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen, die für alle oder unendlich viele natürliche Zahlen wahr sind.
Entsprechend Satz 1 (1.5.) ist ein Beweis durch vollständige Induktion in zwei Schritten zu führen:

1. Induktionsanfang
Es ist nachzuweisen, daß H (0) wahr ist.

2. Induktionsschritt
Es wird bewiesen, daß aus der Wahrheit von H (k) die Wahrheit von H (k') für eine beliebige natürliche Zahl k folgt.

Wenn beide Schritte erfolgreich absolviert wurden, kann im **Induktionsschluß** auf die Wahrheit von H (n) für alle natürlichen Zahlen n geschlossen werden.
Um den Induktionsschritt übersichtlich darstellen zu können, gliedert man 2. in

Induktionsvoraussetzung:
Es wird vorausgesetzt, daß die zu untersuchende Vermutung für eine natürliche Zahl k gilt. Man formuliert H (k).

Induktionsbehauptung:
Es wird behauptet, daß die zu untersuchende Vermutung für den Nachfolger k' von k gilt. Man formuliert H (k').

Induktionsbeweis:
Beweis, daß aus der Wahrheit von H (k) die Wahrheit von H (k') folgt.

Wenden wir nun an einem Beispiel das Beweisverfahren der vollständigen Induktion an. Zur zu beweisenden Vermutung soll die folgende Aufgabe führen.

Aufgabe 2 (1.5.)
Es ist eine Vermutung über die Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge M in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente von M aufzustellen.

LÖSUNG

Anzahl der Elemente in M (n)	Anzahl der Teilmengen (t_n)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

Vermutung: Die Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge mit n Elementen ergibt sich durch $t_n = 2^n$.
Wie läßt sich dieser Zusammenhang beweisen? Sollte man weitere Beispiele untersuchen? Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, ist es unmöglich, die Wahrheit der Aussage durch die Untersuchung von Beispielen zu beweisen. Aber folgendes läßt sich leicht überlegen: Wie ändert sich die Anzahl der Teilmengen, wenn man von k Elementen der Menge zu $(k + 1)$ Elementen – also einem Element mehr – übergeht? Die Anzahl der Teilmengen verdoppelt sich dabei. Man überlege sich, daß alle bisher angegebenen Teilmengen wieder auftreten. Jede dieser Teilmengen vereinigt mit der Einermenge, die das hinzugekommene Element enthält,

tritt nun nochmals als Teilmenge auf. Z. B. hat die Menge $M = \{a; b; c\}$ die Teilmengen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, $\{a; b; c\}$, $\emptyset$. Kommt ein Element d dazu, also $M^* = \{a; b; c; d\}$, ergeben sich neben den schon angegebenen Teilmengen die folgenden: $\{a; d\}$, $\{b; d\}$, $\{c; d\}$, $\{a; b; d\}$, $\{a; c; d\}$, $\{b; c; d\}$, $\{a; b; c; d\}$, $\{d\}$. Wenn es also stimmt, daß eine Menge mit k Elementen 2^k Teilmengen hat, dann hat eine Menge mit $(k+1)$ Elementen $2 \cdot 2^k$ Teilmengen. Es gilt $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. Nun haben wir aber nachgewiesen, daß beispielsweise für $n = 3$ tatsächlich 2^3 Teilmengen existieren. Also gilt für $n = 4$, daß es 2^4 Teilmengen gibt. Wenden wir diesen Gedankengang fortlaufend auf alle weiteren Zahlen an, kann man zu jeder beliebigen Zahl gelangen. Jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ erfüllt die Aussageform. Als Ausgangspunkt haben wir uns auf $n = 3$ bezogen. In der Regel wird man aber von der kleinsten natürlichen Zahl n ausgehen, die die Aussageform erfüllt, also in diesem Beispiel von der Null. Stellen wir nun die bei diesem ersten Beispiel ausführlich dargelegten Beweisgedanken in der für Beweise durch vollständige Induktion üblichen Form dar.

Voraussetzung:
t_n ist die Anzahl der Teilmengen einer endlichen Menge M mit n Elementen, n ist eine beliebige natürliche Zahl.

Behauptung:
$t_n = 2^n$

Beweis:

1. Induktionsanfang
Für $n = 0$ ist die Vermutung richtig, denn wenn $M = \emptyset$ ist, so gibt es eine Teilmenge und

$$t_0 = 2^0 = 1.$$

2. Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl k gelte die Vermutung:

$$t_k = 2^k.$$

Induktionsbehauptung: Die Vermutung ist auch für die natürliche Zahl $(k+1)$ richtig. Das heißt:

$$t_{k+1} = 2^{k+1}.$$

Induktionsbeweis: Nach der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$t_k = 2^k.$$

Geht man zu $(k+1)$ Elementen über, verdoppelt sich die Anzahl der Teilmengen, also

$$t_{k+1} = 2 \cdot 2^k.$$

Durch Anwendung eines Potenzgesetzes folgt:

$$t_{k+1} = 2^{k+1},$$

w. z. b. w.

Weil die Schritte 1. und 2. erfolgreich absolviert wurden, können wir schließen:

$t_0 = 2^0$ (Induktionsanfang)

Aus $t_0 = 2^0$ folgt $t_1 = 2^1$ (Induktionsschritt).

Aus $t_1 = 2^1$ folgt $t_2 = 2^2$ (Induktionsschritt).

usw.
Demnach gilt für alle natürlichen Zahlen n:

$$t_n = 2^n.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß beim Induktionsanfang nicht notwendigerweise die Zahl 0 für n eingesetzt werden muß. Wählt man eine von 0 verschiedene natürliche Zahl n_0, zeigt, daß $\mathsf{H}(n_0)$ gilt, und führt den Induktionsschritt aus, dann ist gezeigt, daß die Aussageform für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ gilt. In der Regel wird beim Induktionsanfang die kleinste natürliche Zahl n gewählt, für die $\mathsf{H}(n)$ wahr wird.
Dem Leser wird empfohlen, die folgende aus der Kombinatorik bekannte Aussage durch vollständige Induktion zu beweisen: Die Anzahl P_n der Permutationen ohne Wiederholung von n Elementen ist $P_n = n!$. (Vgl. Band I)
Zu Beginn dieses Abschnitts wurden einige Aussagen zum axiomatischen Aufbau einer Theorie gemacht. Das axiomatische Vorgehen wurde auch als *logisch-deduktives* Vorgehen bezeichnet. Als Beweisverfahren haben wir das Verfahren der vollständigen Induktion kennengelernt. „Induktion – Deduktion" – welche Bedeutung hat dieses Begriffspaar in der Mathematik? Unter *Induktion* versteht man die Gewinnung von Erkenntnissen aus der Beobachtung zahlreicher Einzelerscheinungen bzw. durch Verallgemeinerung vorliegender Erfahrungen. Diese Methode hat in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften große Bedeutung. Auch in der Mathematik hat diese Art der Erkenntnisgewinnung ihren Platz. Sie führt aber im allgemeinen nicht zu einem Satz, sondern höchstens zu einer Vermutung, wie beispielsweise unser Vorgehen in Aufgabe 2 (1.5.). Um zu schlußfolgern, daß der vermutete Zusammenhang für jede beliebige natürliche Zahl gilt, ist ein deduktiver Beweis erforderlich, was durch Beispiel 2 (1.5.) unterstrichen werden soll.

■ BEISPIEL 2 (1.5.)

Für alle natürlichen Zahlen n, die kleiner als 40 sind, ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl. Das könnte zu der Vermutung führen, daß $n^2 + n + 41$ für alle natürlichen Zahlen eine Primzahl ist. Aber für $n = 40$ ist $n^2 + n + 41 = 1681 = 41 \cdot 41$, also keine Primzahl.

Bei der *Deduktion* werden neue Erkenntnisse auf logischem Wege aus bereits bekannten allgemeinen Zusammenhängen abgeleitet. Ein deduktiver Beweis führt eine Behauptung ausschließlich mit Hilfe logischer Mittel auf bereits bewiesene Aussagen oder Axiome zurück. Das ist beim Beweisverfahren durch vollständige Induktion gesichert. Die vollständige Induktion ist eine deduktive Beweismethode – trotz des Wortes „Induktion" in der Bezeichnung.
Bisher noch ungeklärt ist die wichtige Frage, wie mit den durch die Peanoschen

Axiome charakterisierten natürlichen Zahlen gerechnet werden kann. Addition und Multiplikation werden jeweils durch zwei Rekursionsgleichungen[1] definiert.

▶ DEFINITION 1 (1.5.)
Eine Operation heißt **Addition in *N*** genau dann, wenn sie für beliebige natürliche Zahlen a und b den Rekursionsgleichungen
A 1: $a + 0 = a$
A 2: $a + b' = (a + b)'$ genügt.

Diese Definition bedarf jedoch einer grundsätzlichen Rechtfertigung. Es ist nachzuweisen, daß es überhaupt eine Operation gibt, die den Rekursionsgleichungen genügt, und wenn das der Fall ist, daß es nur *eine* derartige Operation gibt. Wir verzichten sowohl auf den Existenz- als auch auf den Eindeutigkeitsbeweis.

Aufgabe 3 (1.5.)
Es ist unter Nutzung der Rekursionsgleichungen A 1 und A 2 zu zeigen, daß $a' = a + 1$ ist.

LÖSUNG
$a' = (a + 0)'$ (A 1) $a' = a + 0'$ (A 2) $a' = a + 1$

Im Unterricht der Klasse 1 werden die Zahlen von 6 bis 10 durch wiederholte Nachfolgerbildung eingeführt. Dabei nutzt man den in Aufgabe 3 (1.5.) aufgezeigten Zusammenhang.
Die Definition der Addition durch die genannten Rekursionsgleichungen ist ein Beispiel für eine sogenannte **induktive Definition.** Ist nämlich a eine beliebige natürliche Zahl, so legt A 1 $a + 0$ fest. A 2 definiert $a + b'$ unter der Bedingung, daß $a + b$ bereits festgelegt ist. So läßt sich schrittweise jede Additionsaufgabe lösen.

■ BEISPIEL 3 (1.5.)
Es ist $3 + 4$ zu berechnen.
$3 + 0 = 3$
$3 + 1 = 3 + 0' = (3 + 0)' = 3' = 4$
$3 + 2 = 3 + 1' = (3 + 1)' = 4' = 5$
$3 + 3 = 3 + 2' = (3 + 2)' = 5' = 6$
$3 + 4 = 3 + 3' = (3 + 3)' = 6' = 7$

Damit ist ein Addieren durch Weiterzählen begründet. Kinder, die Rechenstäbchen nutzen und z. B. $3 + 5$ berechnen, indem sie zu 3 fünfmal 1 addieren, bedienen sich dieser Methode. Die für die Addition geltenden Gesetze wurden im Abschnitt 1.4.1. zusammengestellt. Für eine Auswahl der dort genannten Sätze soll beispielgebend der Beweis dargestellt werden.

---

1) rekursiv – bis zu bekannten Anfangswerten zurückgehend

▷

SATZ 2 (1.5.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) + c = a + (b + c)$.

Wir zeigen, wie ein Beweis durch vollständige Induktion geführt werden kann. Es ist sinnvoll, ihn über c zu führen. Das heißt, a und b werden als beliebige, aber feste natürliche Zahlen angenommen, und es wird nachgewiesen, daß die Aussageform für alle natürlichen Zahlen c zu einer wahren Aussage wird.

Voraussetzung:
a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen.

Behauptung:
$(a + b) + c = a + (b + c)$

Beweis:

1. Induktionsanfang
Für $c = 0$ ist die Vermutung richtig, denn

$$(a + b) + 0 = a + (b + 0)$$
$$a + b = a + b \qquad \text{(A 1)}$$

2. Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl k gelte die Vermutung:

$$(a + b) + k = a + (b + k).$$

Induktionsbehauptung: Die Vermutung ist auch für den Nachfolger k' von k richtig. Das heißt:

$$(a + b) + k' = a + (b + k').$$

Induktionsbeweis:

$$(a + b) + k = a + (b + k) \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$
$$[(a + b) + k]' = [a + (b + k)]' \qquad \text{(P II)}$$
$$(a + b) + k' = a + (b + k)' \qquad \text{(A 2)}$$
$$(a + b) + k' = a + (b + k') \qquad \text{(A 2),}$$

w. z. b. w.

Da die Schritte 1. und 2. erfolgreich absolviert wurden, gilt für alle natürlichen Zahlen a, b, c:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Aufgabe 4 (1.5.)
Man untersuche, ob aus der Rekursionsgleichung A 1: $a + 0 = a$ folgt, daß Null neutrales Element in N bezüglich der Addition ist.

LÖSUNG
Allein aus A 1 darf nicht geschlossen werden, daß Null neutrales Element bezüglich der Addition ist. Es ist zu beachten, daß die Kommutativität der Addition in diesem Aufbau der Theorie noch nicht bewiesen ist und demzufolge nicht zur Be-

gründung herangezogen werden darf. Es ist zu zeigen, daß für jede beliebige natürliche Zahl a auch $0 + a = a$ ist, was der Leser als Übungsaufgabe beweisen sollte.

Wenden wir uns nun der induktiven Definition der Multiplikation zu.

▶ DEFINITION 2 (1.5.)
Eine Operation heißt **Multiplikation in *N*** genau dann, wenn sie für beliebige natürliche Zahlen a und b den Rekursionsgleichungen
M 1: $a \cdot 0 = 0$
M 2: $a \cdot b' = a \cdot b + a$
genügt.

Ebenso wie bei der Definition der Addition verzichten wir auf einen Beweis, daß es genau eine zweistellige Operation in N gibt, die den Rekursionsgleichungen M 1 und M 2 genügt.

■ BEISPIEL 4 (1.5.)
Es ist $3 \cdot 2$ zu berechnen.
$3 \cdot 0 = 0$ (M 1)
$3 \cdot 1 = 3 \cdot 0' = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ (M 2)
$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$ (M 2)

Das Berechnen von Produkten setzt also voraus, daß bereits Summen gebildet werden können.
Immer dann, wenn die Multiplikation als wiederholte Addition aufgefaßt wird, arbeitet man auf der Grundlage dieser Definition.
Mittels vollständiger Induktion sind auch alle uns bekannten Sätze über die Multiplikation zu beweisen. Ohne deren Beweise auszuführen, betrachten wir sie ebenso wie die Gesetze für die Addition als bewiesen und wenden uns den Operationen Subtraktion und Division in N zu.
Die Subtraktion und die Division in N werden nicht durch Rekursionsgleichungen erklärt, sondern als Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation. Wir beziehen uns dabei auf die Ausführungen im Abschnitt 1.4.5. Dort wurde gezeigt, durch welche Überlegungen der Beweis zu erbringen ist, daß es genau eine Umkehroperation zur Addition bzw. zur Multiplikation in N gibt und damit die folgenden Definitionen gerechtfertigt sind. Wir verzichten darauf, diese Beweise auf der Basis der in diesem Abschnitt gegebenen Definitionen von Addition und Multiplikation zu führen.

▶ DEFINITION 3 (1.5.)
Diejenige Abbildung aus $N \times N$ in N, die jedem geordneten Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen höchstens eine natürliche Zahl c mit $c + b = a$ zuordnet, heißt **Subtraktion in *N*.**

Analog gilt für die Division in N:

▶ **DEFINITION 4 (1.5.)**
Diejenige Abbildung aus $N \times N$ in N, die jedem geordneten Paar $(a; b)$ natürlicher Zahlen, für das $b \neq 0$ gilt, höchstens eine natürliche Zahl c mit $c \cdot b = a$ zuordnet, heißt **Division in** $\boldsymbol{N}$.

Folgendes Beispiel bestätigt die bereits im Abschnitt 1.4.4. gewonnene Erkenntnis über die Existenz eines Quotienten in N.

■ BEISPIEL 5 (1.5.)
Die Gleichungen
$3 \cdot x = 7$ und $0 \cdot x = 7$
sind in N nicht lösbar; ein Quotient $7:3$ bzw. $7:0$ existiert nicht.
Die Gleichungen
$3 \cdot x = 6$ und $3 \cdot x = 0$
sind in N eindeutig lösbar; $6:3 = 2$ und $0:3 = 0$.
Die Gleichung
$0 \cdot x = 0$
ist in N nicht eindeutig lösbar, denn jede natürliche Zahl x erfüllt die Aussageform; ein Quotient $0:0$ ist ausgeschlossen.

Die Definition der Kleinerrelation in N erfolgt unter Rückgriff auf die nun bereits bekannte Addition natürlicher Zahlen.

▶ **DEFINITION 5 (1.5.)**
a und b seien natürliche Zahlen.
a ist kleiner als b genau dann, wenn eine natürliche Zahl n mit $n \neq 0$ existiert, so daß $a + n = b$ ist.

Die so definierte Kleinerrelation ist in der Menge der natürlichen Zahlen irreflexiv, transitiv und trichotom. Mit dem *Beweis der Transitivität der Kleinerrelation* in der Menge der natürlichen Zahlen soll abschließend exemplarisch gezeigt werden, wie der Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen auf der Basis der Peanoschen Axiome fortgesetzt werden kann.

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt:
Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$.

(Transitivität der Kleinerrelation in N)

Voraussetzung:
a, b und c seien natürliche Zahlen, $a < b$ und $b < c$.

Behauptung:
$a < c$

Beweis:
Aus $a < b$ folgt wegen der Definition der Kleinerrelation in N die Existenz eines n_1 mit
(1) $a + n_1 = b$, $n_1 \neq 0$ und $n_1 \in N$.
Aus $b < c$ folgt die Existenz eines n_2 mit
(2) $b + n_2 = c$, $n_2 \neq 0$ und $n_2 \in N$.
Setzt man in (2) für b die Summe $a + n_1$ ein, so erhält man
(3) $(a + n_1) + n_2 = c$.
Wegen der uneingeschränkten und eindeutigen Ausführbarkeit der Addition in N gibt es ein n_3 mit $n_1 + n_2 = n_3$. Aus $n_1 \neq 0$ und $n_2 \neq 0$ ergibt sich auf Grund der Definition der Addition in N $n_3 \neq 0$ und damit
(4) $a + n_3 = c$, $n_3 \neq 0$ und $n_3 \in N$.
Daraus folgt wegen der Definition der Kleinerrelation
(5) $a < c$, w. z. b. w.

Damit schließen wir die Betrachtungen zum Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen ab. Obwohl das Vorgehen auf der Basis der Peanoschen Axiome nur an wenigen Beispielen erläutert wurde, lassen sich wesentliche Aspekte dieses Weges erkennen. Der Unterricht in den unteren Klassen ist sowohl durch die im genetischen als auch die im axiomatischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen behandelten Inhalte fachtheoretisch begründet.

Übungen 1.5.

1. Es ist zu zeigen, daß die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen mit $0' = 3, 3' = 6, 6' = 9, \ldots$ ein Modell des Peanoschen Axiomensystems ist.
2. Man beweise mittels vollständiger Induktion: „Für alle natürlichen Zahlen n gilt $2^n > n$."
3. Es ist die Anzahl der Diagonalen in einem (ebenen) n-Eck zu ermitteln und die gefundene Formel mittels vollständiger Induktion zu beweisen.
4. Auf der Grundlage der induktiven Definition von Addition und Multiplikation in N ist $2 + 5$ und $2 \cdot 4$ zu berechnen.
5. Man beweise das Gesetz der Monotonie der Kleinerrelation bezüglich der Addition in N.

1.6. Darstellung natürlicher Zahlen in Positionssystemen

Im Abschnitt 1.1. haben wir erkannt, daß Gegenstände, Eigenschaften und Beziehungen der Realität – also **Objekte** und Sachverhalte – den Ausgangspunkt zur Entstehung von Zahlen bildeten. Zahlen sind begrifflicher Natur. Sie sind die abstrakte Widerspiegelung bestimmter Eigenschaften der Realität und damit ein **Abbild** der Realität, das nur in unserem Bewußtsein existiert. Ziffern sind vereinbarte **Zeichen** zur Darstellung von Zahlen. Alles, was man schreibt oder spricht, sind Zeichen. Rechnen dagegen kann man nur mit Zahlen. Im Abschnitt 1.6. wird nun der theoretische Hintergrund für die heute gebräuchliche Darstellung von Zahlen behandelt. Wir wissen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Nun ist es aber unmöglich, immer neue Zahlzeichen und Zahlwörter zu finden. So ergibt sich das Problem, aus einem Vorrat an Grundzeichen – der, wie in 1.1. gezeigt, in den einzelnen Kulturkreisen und historischen Epochen sehr unterschiedlich war – durch Zusammensetzungen neue Zeichen zu bilden. In der gesellschaftlichen Praxis bewähren sich Bezeichnungssysteme, die garantieren, daß

- sich die Ziffern schnell und bequem schreiben lassen,
- auch Zeichen für beliebig große Zahlen geschrieben werden können,
- möglichst effektiv gerechnet werden kann.

Diesen Forderungen entsprechen die heute gebräuchlichen Positionssysteme. Vertraut ist uns das **dekadische Positionssystem.** Die ersten zehn natürlichen Zahlen werden durch die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bezeichnet. Die Anzahl 10 dieser individuellen Zahlzeichen ist die Basis dieses Positionssystems. Mit den zehn Ziffern kann durch Zusammensetzungen jede natürliche Zahl auf eindeutige Weise dargestellt werden. Das Fundament dazu bilden arithmetische Zusammenhänge. Jede Zahl ist in Summen zerlegbar, deren Summanden Vielfache von Potenzen der Basis sind.

■ BEISPIEL 1 (1.6.)

$$3435 = \mathbf{3}\cdot 1000 + \mathbf{4}\cdot 100 + \mathbf{3}\cdot 10 + \mathbf{5}\cdot 1 = \mathbf{3}\cdot 10^3 + \mathbf{4}\cdot 10^2 + \mathbf{3}\cdot 10^1 + \mathbf{5}\cdot 10^0$$
$$302 = \mathbf{3}\cdot 10^2 + \mathbf{0}\cdot 10^1 + \mathbf{2}\cdot 10^0$$

Wir betrachten die hervorgehobenen Faktoren – die Koeffizienten der Potenzen von 10. Die ihnen zugeordneten Ziffern treten in der Zifferndarstellung der Zahl auf. Durch ihre Stellung (Position) in der Darstellung wird deutlich, zu welcher Zehnerpotenz der durch sie bezeichnete Faktor gehört. Am weitesten links steht die Ziffer des Faktors der größten Zehnerpotenz. Eine natürliche Zahl n kann durch eine endliche Folge von Ziffern dargestellt werden:

$$z_k z_{k-1} \ldots z_3 z_2 z_1 z_0 .$$

Diese Darstellung ist eine abkürzende Schreibweise für

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

wobei z_i die Ziffer der Zahl a_i ist ($i = 0, \ldots, k$). Die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_k$ sind Zahlen von 0 bis 9 mit $a_k \neq 0$ für $k > 0$.

Das dekadische Positionssystem mit der Basis 10 hat sich im praktischen Gebrauch international durchgesetzt. Aber auch jede andere natürliche Zahl $m > 1$ kann als Basis gewählt werden. Die Rechtfertigung gibt folgender Satz.

▷

> SATZ 1 (1.6.)
> Jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ läßt sich bei gegebener Basis $m \geqq 2$ $(m \in N)$ in der Form
> $n = a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} + \ldots + a_1 m^1 + a_0 m^0$ angeben.
> Die Koeffizienten a_k; a_{k-1}; ...; a_1; a_0 sind eindeutig bestimmte natürliche Zahlen, wobei $k \geqq 0$;
> $0 < a_k \leqq m - 1$ und $0 \leqq a_i \leqq m - 1$ für
> $i = 0; 1; \ldots; (k-1)$ sind.

Es ergibt sich die Ziffernfolge $z_k z_{k-1} \ldots z_1 z_0$, wobei z_i die Ziffer der Zahl a_i $(i = 0, \ldots, k)$ ist. Es werden m individuelle Zahlzeichen für die Zahlen von 0 bis $m - 1$ benötigt. Wir vereinbaren die Schreibweise $[z_k z_{k-1} \ldots z_0]_m$ für die Zifferndarstellung einer Zahl im System mit der Basis m. Für jede natürliche Zahl gibt es bei gegebener Basis m genau eine Zifferndarstellung.
Beispiel 2 (1.6.) zeigt nun, wie eine in einem Positionssystem mit der Basis m dargestellte Zahl im dekadischen Positionssystem angegeben werden kann.

■ BEISPIEL 2 (1.6.)

$[10000111]_2 = [135]_{10}$, denn

$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 4 + 2 + 1 = 135$$

$[2314]_5 = [334]_{10}$, denn

$$2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 334$$

Beispiel 2 (1.6.) läßt erkennen, daß die in einem Positionssystem mit der Basis m dargestellte Zahl als Summe von Vielfachen der Basispotenzen anzugeben ist und die geforderten Operationen auszuführen sind. Die errechnete Summe ist im dekadischen Positionssystem zu schreiben. Stellen wir uns nun das umgekehrte Problem. Eine im dekadischen Positionssystem gegebene Zahl ist in einem Positionssystem mit von 10 verschiedener Basis darzustellen.

■ BEISPIEL 3 (1.6.)

Es ist die Zahl 29 im Positionssystem mit der Basis 2 darzustellen. Dazu ist 29 in Summen von Vielfachen von Zweierpotenzen zu zerlegen. Wir überlegen folgendermaßen: Die höchste Potenz von 2, die kleiner oder gleich 29 ist, ist $2^4 = 16$, was ein Vergleich mit der Folge der Zweierpotenzen zeigt. Man erhält $29 = 1 \cdot 16 + 13$. In gleicher Weise ist der Summand 13 zu zerlegen in $13 = 1 \cdot 8 + 5$ usw. Es ist zu beachten, daß in der Zerlegung die Vielfachen aller Potenzen von 2, die kleiner oder gleich 29 sind, auftreten müssen; auch für den Fall, daß sie Null sind.

$$
\begin{array}{l}
29 = 1 \cdot 16 + 13 \\
\qquad 13 = 1 \cdot 8 + 5 \\
\qquad\qquad 5 = 1 \cdot 4 + 1 \\
\qquad\qquad\qquad 1 = 0 \cdot 2 + 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1 = 1 \cdot 1 + 0
\end{array}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
29 &= 1 \cdot 2^4 + 13 \\
13 &= 1 \cdot 2^3 + 5 \\
5 &= 1 \cdot 2^2 + 1 \\
1 &= 0 \cdot 2^1 + 1 \\
1 &= 1 \cdot 2^0 + 0
\end{aligned}
$$

Folge der Stellenwerte

Folge der Ziffern

$$29 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$[29]_{10} = [11101]_2$$

Das Positionssystem mit der Basis 2 wird auch **Dual-** oder **Binärsystem** genannt. In diesem System werden nur zwei Ziffern – 0 und 1 – benötigt. Die Dualdarstellungen von Zahlen sind deshalb sehr einfach. Allerdings werden wesentlich mehr Stellen benötigt als für die Darstellung gleicher Zahlen im dekadischen Positionssystem. Die einzige einzuprägende Grundaufgabe der Addition in diesem System ist $[1]_2 + [1]_2 = [10]_2$. Alles andere folgt aus arithmetischen Zusammenhängen. Die spezifischen Vorteile des Dualsystems werden in der Rechentechnik genutzt. Bauelemente elektronischer Rechenanlagen können nur zwischen zwei Zuständen unterscheiden; es gelangt ein elektrischer Impuls zu ihnen oder nicht. Diesen beiden Zuständen werden die Zahlen 1 bzw. 0 zugeordnet.

Das folgende Beispiel soll auf Probleme hinweisen, die bei einer Basis $m > 10$ auftreten. An dem im Beispiel 3 (1.6.) demonstrierten Vorgehen zum Finden der Zifferndarstellung ändert sich nichts. Nur muß man beispielsweise für $m = 12$ über 12 verschiedene individuelle Zahlzeichen für die Zahlen von 0 bis 11 verfügen können – beispielsweise die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Z, E.

Aufgabe 1 (1.6.)

Es ist die Zahl 167 im Positionssystem mit der Basis 12 darzustellen.

LÖSUNG

$12^0 = 1$,	$167 = 1 \cdot 144 + 23$	$167 = 1 \cdot 12^2 + 23$
$12^1 = 12$	$23 = 1 \cdot 12 + 11$	$23 = 1 \cdot 12^1 + 11$
$12^2 = 144$	$11 = E \cdot 1 + 0$	$11 = E \cdot 12^0 + 0$
$12^3 = 1728$	$[167]_{10} = [11E]_{12}$	
$\vdots$		

Im Unterricht der Klasse 3 werden schriftliche Rechenverfahren behandelt. Grundlage dafür sind die Darstellung von Zahlen in Positionssystemen und für die Operationen in N geltende Gesetze.

Aufgabe 2 (1.6.)
Zur Berechnung der Summe 531 + 427 mit Hilfe des schriftlichen Verfahrens der Addition werden die Faktoren gleicher Zehnerpotenzen untereinander geschrieben und von rechts beginnend addiert. Man begründe dieses Vorgehen.

LÖSUNG
1. $531 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
   $427 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
2. $531 + 427 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$
3. $531 + 427 = 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^0$
   (Gesetz der Kommutativität und der Assoziativität der Addition in N)
4. $531 + 427 = (5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2) + (3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1) + (1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^0)$
   (Gesetz der Assoziativität der Addition in N)
5. $531 + 427 = (5 + 4) \cdot 10^2 + (3 + 2) \cdot 10^1 + (1 + 7) \cdot 10^0$
   (Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition in N)
6. $531 + 427 = 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
   Also folgt
   $531 + 427 = 958.$

■ BEISPIEL 4 (1.6.)

$$\begin{array}{r} 531 \\ +397 \\ \hline 928 \end{array}$$

Der Koeffizient von 10^1 ergibt sich aus $9 + 3 = 12$.
$12 \cdot 10^1 = (10 + 2) \cdot 10^1 = 10 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$.
Es entsteht ein Übertrag 1, der an der nächsten Stelle zu addieren ist.

Beispiel 4 (1.6.) zeigt, daß sich ein an der nächsten Stelle zu addierender Übertrag auf Grund der Beziehung $10 \cdot 10^k = 1 \cdot 10^{k+1}$ für alle natürlichen Zahlen k ergibt.
Durch analoge Überlegungen läßt sich das schriftliche Verfahren der Multiplikation begründen.
Die Nutzung der schriftlichen Rechenverfahren erlaubt ein rationelles, sicheres und schnelles Rechnen. Von besonderer Bedeutung für die Schüler der unteren Klassen ist dabei Sicherheit im Lösen, Übertragen und Anwenden der Grundaufgaben.
Welche Problemstellungen ergeben sich bei der Anwendung schriftlicher Verfahren, wenn die natürlichen Zahlen in Positionssystemen mit von 10 verschiedener Basis dargestellt sind? Durch einige Beispiele soll abschließend ein Einblick gegeben werden.

Aufgabe 3 (1.6.)
Man stelle die Grundaufgaben der Addition und der Multiplikation in N jeweils in einer Tafel zusammen
a) für das Positionssystem mit der Basis 5,
b) für das Dualsystem.

LÖSUNG

a) $m = 5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Exemplarisch zeigen wir die Überlegungen zur Berechnung der Summe $4 + 3 = 12$.

$$\begin{aligned} 4 + 3 &= 4 + 1 + 2 \\ &= 10 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Multiplikationstafel beispielsweise ergibt sich unter Nutzung der induktiven Definition der Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 0 &= 0 \\ 4 \cdot 1 &= 4 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4 \\ 4 \cdot 2 &= 4 \cdot 1 + 4 = 4 + 4 = 13 \\ 4 \cdot 3 &= 4 \cdot 2 + 4 = 13 + 4 = 22 \\ 4 \cdot 4 &= 4 \cdot 3 + 4 = 22 + 4 = 31 \end{aligned}$$

b) $m = 2$

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Wir erkennen, daß die Anzahl der Grundaufgaben von der gewählten Basis abhängig ist. Wir nutzen nun die in Aufgabe 3 (1.6.) zusammengestellten Grundaufgaben zum Lösen von Aufgaben mit Hilfe schriftlicher Verfahren.

■ BEISPIEL 5 (1.6.)

Im Positionssystem mit der Basis $m = 2$ ist die Summe

$$\begin{array}{r} 10110 \\ +\quad 1110 \\ \hline 100100 \end{array}$$

berechnet.

Um die auszuführenden Rechenschritte zu erläutern, schreiben wir die zu lösenden Teilaufgaben auf. Es werden die hinzuschreibenden Ziffern der Teilergebnisse einmal und die zu berücksichtigenden Überträge zweimal unterstrichen.

$$
\begin{array}{rc|c|llll}
0+0 & & & & & & \underline{0} \\
1+1 & & & = 10 & = & 10 + & \underline{0} \\
1+1+ & & 1 & = 11 & = & 10 + & \underline{1} \\
1+0+ & & 1 & = 10 & = & 10 + & \underline{0} \\
1+ & & 1 & = 10 & = & 10 + & \underline{0} \\
 & & 1 & = & & & \underline{1} \\
\end{array}
$$

$\uparrow$

Übertrag

Aufgabe 4 (1.6.)
Es ist das Produkt $283 \cdot 4$ mit Hilfe des schriftlichen Verfahrens zu berechnen. Das uns vertraute Vorgehen bei der Darstellung der Faktoren im dekadischen Positionssystem ist zu übertragen für den Fall, daß die Faktoren im Positionssystem der Basis 5 dargestellt sind.

LÖSUNG
$[283]_{10} = [2113]_5$
$[4]_{10} = [4]_5$

$m = 10$	$m = 5$
$283 \cdot 4$	$2113 \cdot 4$
1132	14012

$$[1132]_{10} = [14012]_5$$

Analog zum Beispiel 5 (1.6.) werden die Lösungsschritte verdeutlicht.

$$
\begin{array}{r|c|llll}
4 \cdot 3 & & = 12 & = & 10 + & \underline{2} \\
4 \cdot 8 + & 1 & = 33 & = & 30 + & \underline{3} \\
4 \cdot 2 + & 3 & = 11 & = & 10 + & \underline{1} \\
 & 1 & = & & & \underline{1} \\
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|c|llll}
4 \cdot 3 & & = 22 & = & 20 + & \underline{2} \\
4 \cdot 1 + & 2 & = 11 & = & 10 + & \underline{1} \\
4 \cdot 1 + & 1 & = 10 & = & 10 + & \underline{0} \\
4 \cdot 2 + & 1 & = 14 & = & 10 + & \underline{4} \\
 & 1 & = & & & \underline{1} \\
\end{array}
$$

$\uparrow$ Übertrag $\qquad\qquad$ $\uparrow$ Übertrag

Durch die Ausführungen im Abschnitt 1.6. wurden die theoretischen Grundlagen für die Schreibweise von Zahlen in Positionssystemen geklärt. Die Beispiele und Aufgaben sollten u. a. die Bedeutung für die Arbeit in den unteren Klassen und darüber hinaus verdeutlichen.

2. Teilbarkeit natürlicher Zahlen

Nachdem wir beim Aufbau des Bereiches der natürlichen Zahlen insbesondere Grundrechenoperationen und deren Eigenschaften sowie einige Relationen in dieser Menge betrachteten, wollen wir die bisher gewonnenen Erkenntnisse über natürliche Zahlen vertiefen. Dazu befassen wir uns mit der Teilbarkeitsrelation in der Menge der natürlichen Zahlen und mit Primzahlen. Neben dem Ausbau bereits früher erworbener Kenntnisse steht eine aktive Nutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten zur Lösung von Aufgaben und zur Beweisführung im Vordergrund.

2.1. Teilbarkeitsrelation in der Menge der natürlichen Zahlen

Uwe soll die Anzahl der natürlichen Zahlen von 0 bis 500 ermitteln, die den Teiler 6 haben. Das Ergebnis findet er, indem er 500 durch 6 dividiert und den ganzzahligen Anteil des Quotienten (83) berücksichtigt. Er ist der Meinung, daß es von 0 bis 500 genau 83 Zahlen mit dem Teiler 6 gibt. Ist dieses Ergebnis richtig?
Nein! Uwe beachtete nicht, daß 6 auch ein Teiler von 0 ist. Aus der Definition der Teilerrelation in N geht hervor, weshalb dies der Fall ist.[1]

▶ DEFINITION 1 (2.1.)
a und *b* seien natürliche Zahlen.
a **ist Teiler von** ***b*** genau dann, wenn eine natürliche Zahl *c* existiert, so daß $a \cdot c = b$ ist.

Zeichen für „*a* ist Teiler von *b*“: $\mathbf{a|b}$.

---

[1] Weil die Teilerrelation auch in der Menge der ganzen Zahlen betrachtet werden könnte, beachte man, daß die folgenden Definitionen und Aussagen nur für den Bereich der natürlichen Zahlen formuliert sind. Sie haben im allgemeinen auch im Bereich der ganzen Zahlen Gültigkeit. Es bedarf dann mitunter einiger Erweiterungen oder Nuancierungen.

Statt „a ist Teiler von b" sagt man auch:
b ist Vielfaches von a.
b hat den Teiler a.
b ist teilbar durch a. (Wir fordern aber in diesem Fall, daß a ungleich Null ist.)

■ BEISPIEL 1 (2.1.)

(1) $6|0$, denn $6 \cdot 0 = 0$.
(2) $0|0$, denn $0 \cdot 0 = 0$.
(3) $4|12$, denn $4 \cdot 3 = 12$.

■ BEISPIEL 2 (2.1.)

(1) 2 ist Teiler von 8.
8 ist Vielfaches von 2.
8 hat den Teiler 2.
8 ist teilbar durch 2.
(2) 4 ist kein Teiler von 26. ($4 \nmid 26$)
26 ist kein Vielfaches von 4.
26 hat nicht den Teiler 4.
26 ist nicht durch 4 teilbar.
Begründung: Die Gleichung $4 \cdot c = 26$ ist in der Menge der natürlichen Zahlen nicht lösbar.

Aufgabe 1 (2.1.)
Man gebe alle natürlichen Zahlen an, die Teiler von 12 (15, 1, 7, 60) sind.

LÖSUNG

Teiler von **12**: 1, 2, 3, 4, 6, 12; Teiler von **15**: 1, 3, 5, 15; Teiler von **1**: 1; Teiler von **7**: 1, 7; Teiler von **60**: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Analysiert man die Lösung der Aufgabe 1 (2.1.), so gelangt man zu den Vermutungen:
(1) Jede natürliche Zahl hat sich selbst zum Teiler.
(2) Jede natürliche Zahl hat den Teiler 1.

Wir wollen die Richtigkeit der unter (1) aufgestellten Vermutung beweisen. Dazu betrachten wir eine beliebige natürliche Zahl a und zeigen, daß a Teiler von a ist.

Voraussetzung:
a sei eine beliebige natürliche Zahl.

Behauptung:
$a|a$

Beweis:
Es ist $a \cdot 1 = a$ (nach Definition der Multiplikation in N). Hieraus folgt nach Definition 1 (2.1.): $a|a$, w. z. b. w.
Der Beweis für Vermutung (2) kann analog geführt werden.

▷

> SATZ 1 (2.1.)
> Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $a \mid a$.

▷

> SATZ 2 (2.1.)
> Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $1 \mid a$.

Der Inhalt der oben besprochenen Sätze gibt Anlaß zu folgender Definition:

▶

> DEFINITION 2 (2.1.)
> a und b seien natürliche Zahlen.
> (1) ***a* ist trivialer Teiler von *b*** genau dann, wenn $a = 1$ oder $a = b$ ist.
> (2) ***a* ist nichttrivialer Teiler von *b*** genau dann, wenn a Teiler von b und $a \neq 1$ und $a \neq b$ ist.

Es gibt natürliche Zahlen, die nur triviale Teiler haben (vgl. Aufgabe 1 (2.1.)).

Von einer natürlichen Zahl wird festgestellt, daß sie ein Teiler der von Null verschiedenen natürlichen Zahl b ist. Es existiert demnach eine natürliche Zahl a, für die $a \cdot c = b$ gilt. Welche Beziehung besteht zwischen c und b?
c ist ein Teiler von b. Es existiert eine natürliche Zahl a, die mit c multipliziert b ergibt. Aus der Existenz der Beziehung $a \cdot c = b$ folgt also: a ist Teiler von b, und c ist Teiler von b. Man nennt c den **zu *a* komplementären Teiler von *b*.**

▶

> DEFINITION 3 (2.1.)
> a, b und c seien natürliche Zahlen.
> ***c* ist komplementärer Teiler zu *a* von *b*** genau dann, wenn $a \cdot c = b$ ist.

Die Relation „c ist komplementärer Teiler zu a" ist in der Menge aller Teiler einer Zahl b symmetrisch. Deshalb kann man auch sagen: a und c sind einander komplementäre Teiler von b.

Aufgabe 2 (2.1.)
Man gebe alle Teiler von 18 (111, 121) an und kennzeichne einander komplementäre Teiler von 18 (111, 121).

LÖSUNG
T_{18} sei die Menge aller Teiler von 18.

$$T_{18} = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

einander komplementäre Teiler von 18

2 ist komplementärer Teiler zu 9 von 18.
9 ist komplementärer Teiler zu 2 von 18.
...
T_{111} sei die Menge aller Teiler von 111.

$$T_{111} = \{1; 3; 37; 111\}$$

einander komplementäre Teiler von 111

T_{121} sei die Menge aller Teiler von 121.

$$T_{121} = \{1; 11; 121\}$$

einander komplementäre Teiler von 121

11 ist zu sich selbst komplementärer Teiler von 121.

Aufgabe 3 (2.1.)
Man begründe, weshalb die Summe aller Teiler einer natürlichen Zahl a ($a \neq 0$) nicht gleich $a + 2$ sein kann.

LÖSUNG
Ist $a = 1$, so ist auch die Summe der Teiler von a gleich 1.
Die Zahl a hat für $a > 1$ auf jeden Fall die Teiler 1 und a. Deren Summe ist $a + 1$. Hat a keinen weiteren Teiler, so kann die Summe der Teiler von a nicht $a + 2$ sein. Hat a einen weiteren Teiler, so ist dieser mindestens gleich 2, und die Summe aller Teiler von a mindestens gleich $a + 3$.

Bisher ermittelten wir die Teiler einer Zahl oder die Art ihrer Teiler. Auch die Betrachtung der Anzahl der Teiler einer Zahl enthält interessante Gesichtspunkte.

Aufgabe 4 (2.1.)
Man ermittle für die natürlichen Zahlen von 1 bis 20 jeweils die Anzahl ihrer Teiler.

LÖSUNG

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Teiler von a	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl der Teiler von a	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6

Aufgabe 5 (2.1.)

a) Die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 20 soll durch die Äquivalenzrelation „*a* hat dieselbe Anzahl Teiler wie *b*“ in Teilmengen (Äquivalenzklassen) zerlegt werden.

b) Es sind – wenn möglich – zu jeder der in der Lösung von 5a) auftretenden Äquivalenzklassen zwei weitere Elemente zu finden, wenn die Zerlegung in N ausgeführt wird.

LÖSUNG

a) $K_1 = \{1\}$
$K_2 = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$
$K_3 = \{4; 9\}$
$K_4 = \{6; 8; 10; 14; 15\}$
$K_5 = \{16\}$
$K_6 = \{12; 18; 20\}$

b) Zu K_1 kann kein weiteres Element gefunden werden. Die Zahl 1 ist die einzige natürliche Zahl, die genau einen Teiler hat.
Für K_2 bis K_6 geben wir als weitere Elemente an:
$23 \in K_2$, $29 \in K_2$
$25 \in K_3$, $49 \in K_3$
$21 \in K_4$, $22 \in K_4$
$81 \in K_5$, $225 \in K_5$
$28 \in K_6$, $44 \in K_6$

Die Lösung der Aufgabe 5 (2.1.) soll Grundlage der Aufgabe 6 (2.1.) sein.

Aufgabe 6 (2.1.)

a) Welche Besonderheit kann man erkennen, wenn man die Äquivalenzklasse mit dem Element 2 (die Äquivalenzklasse mit dem Element 4 bzw. mit dem Element 16) betrachtet?

b) Es ist die kleinste natürliche Zahl anzugeben, die genau 7 (8) Teiler hat.

LÖSUNG

a) 2 ist Element von K_2, der Klasse aller natürlichen Zahlen (von 1 bis 20) mit genau 2 Teilern. K_2 enthält nur Primzahlen.
Diese Tatsache läßt sich nutzen, um eine *Primzahl* als natürliche Zahl mit genau 2 Teilern zu charakterisieren (vgl. S. 108).

4 ist Element von K_3. K_3 enthält nur Quadratzahlen von Primzahlen.
Das läßt sich in folgender Weise begründen:
Eine Zahl a, die in K_3 enthalten ist, hat genau drei Teiler. Dazu gehören zunächst die trivialen Teiler 1 und a. Da a noch genau einen weiteren Teiler t hat, muß dieser folgende Bedingungen erfüllen:
t ist zu sich komplementärer Teiler von a.
Es gilt folglich: $t \cdot t = a$

a ist also eine Quadratzahl. t ist auch eine Primzahl. Wäre t keine Primzahl, so hätte t wenigstens einen nichttrivialen Teiler t_1, der aber auch Teiler von a sein müßte. Damit hätte a aber wenigstens 4 Teiler. Das steht im Widerspruch zu den Ausgangsbedingungen.

16 ist Element von K_5. K_5 enthält nur 4. Potenzen von Primzahlen.
Eine Begründung dafür könnte in Analogie zu den oben dargelegten Gedankengängen erfolgen. Sie wird aber an späterer Stelle wesentlich leichter fallen (vgl. S. 112).

b) Die kleinste Zahl a, die genau 7 Teiler hat, ist die Zahl 64. Begründung: Ein Teiler von a muß zu sich selbst Komplementärteiler bezüglich a sein. Deshalb ist a eine Quadratzahl. a ist aber nicht Quadratzahl einer Primzahl, weil a sonst zu K_3 gehören würde.
Die kleinste Zahl a, die genau 8 Teiler hat, ist die Zahl 24.

Zur Begründung der Lösung von Aufgabe 6a (2.1.) benutzten wir ein Argument, dessen Richtigkeit hier noch nicht näher untersucht wurde. Wir folgerten, daß wegen $t_1 \mid t$ und $t \mid a$ auch $t_1 \mid a$ gilt. Deshalb dient die Aufgabe 7 (2.1.) dazu, einige wesentliche Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation in N festzustellen und deren Richtigkeit zu begründen.

Aufgabe 7 (2.1.)
Welche Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation lassen sich aus dem Graphen (der Relationstafel) über die Teilbarkeitsbeziehungen in der Menge {1; 2; 3; 4; 6; 12} ablesen?

LÖSUNG

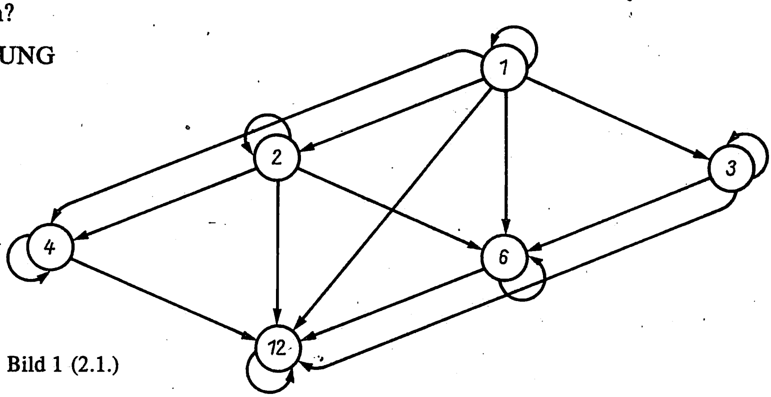


Bild 1 (2.1.)

a \ b	1	2	3	4	6	12
1	×	×	×	×	×	×
2		×		×	×	×

a \ b	1	2	3	4	6	12
3			×		×	×
4				×		×
6					×	×
12						×

(1) Aus den Darstellungen wird ersichtlich, daß jedes Element der betrachteten Menge mit sich selbst in Relation steht. Das ist auch durch Satz 1 (2.1.) gesichert. *Die Teilbarkeitsrelation ist in N reflexiv.*

(2) Aus der Tatsache, daß ein gerichteter Graph verwendet wurde und zum Beispiel ein Pfeil von 2 zu 12 führt (aber nicht umgekehrt), folgt: *Die Teilbarkeitsrelation ist in N nicht symmetrisch.*

(3) Da weder 2 in Relation mit 3 steht noch 3 mit 2 in Relation steht und auch $2 \neq 3$ ist, folgt: *Die Teilbarkeitsrelation ist in N nicht trichotom.*

(4) Weil stets, wenn von a ein Pfeil zu b und von b ein Pfeil zu c führt, ein Pfeil direkt von a zu c geht, folgt: *Die Teilbarkeitsrelation ist in N vermutlich transitiv.*

Wir beweisen nun die Richtigkeit der unter (4) angegebenen *Vermutung.*

Voraussetzung:
a, b und c seien natürliche Zahlen; $a|b$ und $b|c$.

Behauptung:
$a|c$

Beweis:
Wegen $a|b$ gibt es (nach Definition der Teilbarkeitsrelation) eine natürliche Zahl n_1 mit

(1) $\quad a \cdot n_1 = b,$

und wegen $b|c$ existiert eine natürliche Zahl n_2 mit

(2) $\quad b \cdot n_2 = c.$

Also ist

(3) $\quad c = (a \cdot n_1) \cdot n_2$

und wegen der Assoziativität der Multiplikation in N

(4) $\quad c = a \cdot (n_1 \cdot n_2).$

Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl. Somit gibt es eine natürliche Zahl n_3 ($n_3 = n_1 \cdot n_2$) mit

(5) $\quad c = a \cdot n_3.$

Nach Definition der Teilbarkeitsrelation besagt (5):

$a|c,$ w. z. b. w.

▷ SATZ 3 (2.1.)
Die Teilbarkeitsrelation ist in der Menge der natürlichen Zahlen transitiv.

Die Teilbarkeitsrelation in N muß sorgfältig von der Division in N unterschieden werden. Das ist notwendig, weil mitunter von Lernenden diese Begriffe als synonyme Begriffe angesehen werden. Zwischen beiden Begriffen gibt es enge Beziehungen, aber auch bedeutende Unterschiede. Eine wesentliche Gemeinsamkeit zeigt sich zum Beispiel bei der Begründung der Wahrheit der Aussagen $2|6$ und $6:2=3$:

$2|6$, denn $2\cdot 3 = 6$.
$6:2=3$, denn $3\cdot 2=6$.

Die Begründung erfolgt jeweils unter Rückgriff auf die Multiplikation in N. Dennoch darf man die Teilbarkeitsrelation in N und die Division in N nicht gleichsetzen. Die *Teilbarkeitsrelation in N* ist eine *zweistellige Relation.* Teilbarkeitsuntersuchungen beziehen sich somit stets auf Paare natürlicher Zahlen.
Die *Division in N* ist eine *zweistellige Operation,* die gewissen Paaren natürlicher Zahlen eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl (ihren Quotienten) zuordnet.
Der Leser verdeutliche sich einen weiteren Unterschied zwischen der Teilbarkeitsrelation in N und der Division in N durch die Lösung der Aufgabe 8 (2.1.).

Aufgabe 8 (2.1.)
a) Für welche natürlichen Zahlen a gilt: $a|0$?
b) Für welche natürlichen Zahlen a gilt: $0:a=0$?

LÖSUNG
a)

▷ SATZ 4 (2.1.)
Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $a|0$.

Begründung: Stets gilt $a\cdot 0 = 0$ und damit wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation $a|0$. Insbesondere gilt: $0|0$.

b) $0:a=0$ gilt nur, wenn $a \neq 0$ ist, denn $0:0$ ist nicht definiert.

Der Unterschied zwischen der Teilbarkeitsrelation und der Division wird insbesondere für das Paar (0, 0) deutlich.

$0|0$ *ist eine wahre Aussage.*
$0:0$ *ist nicht erklärt.*

Wir verallgemeinern die bisher angestellten Betrachtungen: a, b und n seien natürliche Zahlen.

(1) Wenn der Quotient $b:a$ in N existiert, so gilt $a|b$.
Begründung:
Aus $b:a=n$ folgt $a\cdot n=b$, d. h. $a|b$.

(2) Aus $a|b$ folgt nur dann $b : a = n$, wenn a ungleich Null ist.
Begründung:
Aus $a|b$ folgt: Es gibt eine natürliche Zahl n mit $a \cdot n = b$. Aber nur für $a \neq 0$ folgt hieraus $b : a = n$.

Das Erfülltsein von $b : a = n$ ist eine hinreichende Bedingung für $a|b$. Sie ist aber keine notwendige Bedingung dafür, wie das Beispiel $0|0$ zeigt. Umgekehrt ist das Erfülltsein von $a|b$ eine notwendige (aber keine hinreichende) Bedingung für die Existenz des Quotienten $b : a$ in N.
Wir sahen, daß bezüglich der Zahl Null wesentliche Unterschiede zwischen Teilbarkeitsrelation in N und Division in N bestehen. Die für alle anderen natürlichen Zahlen bestehenden engen Analogien zwischen der Teilbarkeitsrelation in N und der Division in N sind Ursache ihrer oft anzutreffenden Identifizierung.

2.2. Sätze über die Teilbarkeit natürlicher Zahlen und über die Division mit Rest

Eine beliebte Übungsform, die Kinder der Unterstufe zu intensiver Arbeit anregt, ist das „Federspannen“. Ausgangspunkt ist eine Darstellung, wie sie Bild 1 (2.2.) zeigt. Die Kinder rechnen so lange nach Vorschrift, bis eventuell eine nicht lösbare Aufgabe entsteht.
Manchmal führt diese Übungsform zu einer Kette von Aufgaben, die stets lösbar sind (vgl. Bild 2 (2.2.)).

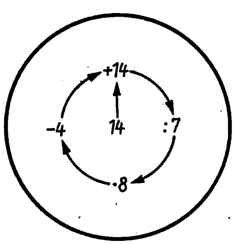


Bild 1 (2.2.)

$$\begin{aligned}
14 + 14 &= 28\\
28 : 7 &= 4\\
4 \cdot 8 &= 32\\
32 - 4 &= 28\\
28 + 14 &= 42\\
42 : 7 &= 6\\
6 \cdot 8 &= 48\\
48 - 4 &= 44\\
44 + 14 &= 58\\
58 : 7 &= \text{nicht lösbar}
\end{aligned}$$

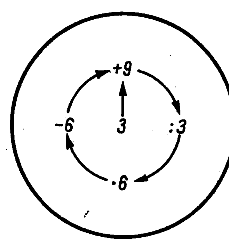
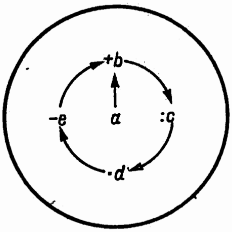


Bild 2 (2.2.)

Aufgabe 1 (2.2.)
Man begründe, weshalb die zu Bild 2 (2.2.) gehörenden Aufgaben stets lösbar sein müssen.

LÖSUNG
Wir überlegen, was bei einem „Umlauf“ passiert. Kritisch sind die Stellen, an denen eine Subtraktionsaufgabe oder eine Divisionsaufgabe zu lösen ist, denn nur dort ist Nichtlösbarkeit möglich. Unser Augenmerk soll hier lediglich darauf gelenkt werden, ob jemals eine nicht lösbare Divisionsaufgabe auftreten kann. Zur Beschreibung der Aufgabenkette für den allgemeinen Fall verwenden wir Variablen (vgl. Bild 3 (2.2.)):



$$\begin{aligned} a + b &= x_1 \\ x_1 : c &= x_2 \\ x_2 \cdot d &= x_3 \\ x_3 - e &= x_4 \\ x_4 + b &= x_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bild 3 (2.2.)

Da im konkreten Beispiel (vgl. Bild 2 (2.2.)) der Divisor c gleich 3 ist, muß untersucht werden, ob der jeweilige Dividend ein Vielfaches von 3 (c) ist.
Anhand der Bilder (Bild 2 (2.2.) und Bild 3 (2.2.)) ergibt sich:

(1) $3 \mid a$ und $3 \mid b$, deshalb gilt: $3 \mid a + b$, d. h. $3 \mid x_1$.
(2) Da 3 Teiler von x_1 ist, ist $x_1 : c$ in N lösbar, d. h. $x_2 \in N$.
(3) $3 \mid d$, deshalb gilt: $3 \mid d \cdot x_2$, d. h. $3 \mid x_3$.
(4) $3 \mid x_3$ und $3 \mid e$, deshalb gilt: $3 \mid x_3 - e$, d. h. $3 \mid x_4$.

Der in (4) vollzogene Schluß ist aber nur richtig, wenn die Differenz $x_3 - e$ in N überhaupt existiert. Das ist im konkreten Beispiel der Fall. Wann das im verallgemeinerten Beispiel so ist, wird hier nicht untersucht.

(5) $3 \mid x_4$ und $3 \mid b$, deshalb gilt: $3 \mid x_4 + b$, d. h. $3 \mid x_5$.
⋮

Die Division durch 3 wird demzufolge bei dieser Aufgabenfolge stets ausführbar sein.

In der soeben erfolgten Argumentation wurden einige wichtige Teilbarkeitsaussagen benutzt, die wir nun festhalten:

▷ **SATZ 1 (2.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b und t gilt:
Wenn $t \mid a$ und $t \mid b$, so $t \mid a + b$.[1)]

▷ **SATZ 2 (2.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b und t gilt:
Wenn $t \mid a$, so $t \mid a \cdot b$.

---

1) In einer Zeichenreihe, wie $t \mid a + b$, kann auf das Setzen von Klammern verzichtet werden. Sie hat nur einen Sinn, wenn man sie so interpretiert, daß t ein Teiler von $a + b$ ist. Eine Interpretation als $(t \mid a) + b$ kann nicht sinnvoll sein, weil $t \mid a$ keine Zahl bezeichnet.

▷ SATZ 3 (2.2.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b und t gilt:
Wenn $t|a$ und $t|b$ und $a \geqq b$, so $t|a-b$.

Diese Sätze werden schon im Mathematikunterricht der Unterstufe indirekt verwendet. Im Lehrbuch der Klasse 3 gibt es Aufgaben der Art:
(1) 39 : 3, 92 : 4, ...
(2) Durch welche einstelligen Zahlen sind die Zahlen 36 (24, 42, 64, 16) teilbar?

Die Kinder können die Lösung zur Aufgabe (1) folgendermaßen finden:

Schreibweise	Überlegungen der Kinder
$\underline{39:3=13}$	$39 = 30 + 9$
$(30+9):3$	$30 : 3 = 10$
$30:3+9:3$	$9 : 3 = 3$

Der Dividend wird hierbei so in eine Summe zerlegt, daß jeder ihrer Summanden ein Vielfaches des Divisors ist.

Aufgabe 2 (2.2.)
Es gilt zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen a, b und t gilt: Wenn $t|a$ und $t|b$, so $t|a+b$.

LÖSUNG

Voraussetzung:
a, b und t seien natürliche Zahlen; $t|a$ und $t|b$.

Behauptung:
$t|a+b$

Beweis:

Allgemeine Beschreibung	*Konkrete Ausführung*
1. Von den in der Voraussetzung angegebenen Teilbarkeitsbeziehungen wird zu einer Gleichung übergegangen. Dabei wendet man die Definition der Teilbarkeitsrelation an.	Aus $t|a$ folgt wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation: Es gibt eine natürliche Zahl t_1 mit (1) $t \cdot t_1 = a$. Aus $t|b$ folgt: Es gibt eine natürliche Zahl t_2 mit (2) $t \cdot t_2 = b$.
2. Die erhaltenen Gleichungen werden äquivalent umgeformt. Das Ziel besteht darin, eine Gleichung zu erhalten, welche die in der Behauptung ausgedrückte Teilbarkeitsbeziehung wiedergibt.	Somit ist (3) $t \cdot t_1 + t \cdot t_2 = a + b$. (4) $t \cdot (t_1 + t_2) = a + b$. Die Summe von zwei natürlichen Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl. Also gibt es ein n ($n \in N$, $n = t_1 + t_2$) mit (5) $t \cdot n = a + b$.

3. Durch Anwendung der Definition der Teilbarkeitsrelation erfolgt eine Umwandlung der Gleichung in eine Teilbarkeitsbeziehung.

Aus (5) folgt wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation

(6) $t \mid a + b$, w. z. b. w.

Die drei beschriebenen Schritte nutzt man häufig in analoger Weise bei Beweisführungen am Anfang eines mathematischen Teilgebietes. Um in ihm die Wahrheit einer Aussage zu beweisen, erfolgt oft durch Verwendung einer Definition eine Zurückführung auf ein bekanntes mathematisches Gebiet (1. Schritt). Im bekannten Bereich werden Umformungen vorgenommen (2. Schritt). Durch Verwendung derselben Definition erfolgt schließlich wieder der Übergang zum neuen Gebiet (3. Schritt). Der Leser verdeutliche sich dies, indem er Beweisführungen des Abschnittes 1.4. unter diesem Gesichtspunkt analysiert.

Der Beweis der Sätze 2 (2.2.) und 3 (2.2.) kann in Analogie zum Beweis von Satz 1 (2.2.) geführt werden.
Wir kehren noch einmal zum eingangs beschriebenen „Federspannen" zurück. An 10. Stelle (vgl. Bild 1 (2.2.)) muß dividiert werden. Diese Division durch 7 ist nicht ausführbar, denn 58 ist kein Vielfaches von 7. Das kann man schon im 9. Schritt erkennen, ohne die Addition auszuführen. Die Summe kann deshalb nicht durch 7 teilbar sein, weil einer der Summanden durch 7 teilbar ist, der andere aber nicht.

Es gilt folgender Satz:

▷ **SATZ 4 (2.2.)**
Für alle natürlichen Zahlen a, b und t gilt:
Wenn $t \mid a$ und $t \nmid b$, so $t \nmid a + b$.

Der Beweis des Satzes 4 (2.2.) kann indirekt geführt werden.

Voraussetzung:
a, b und t seien beliebige natürliche Zahlen;
$t \mid a$ und $t \nmid b$.

Behauptung:
$t \nmid a + b$

Beweis (indirekt)
Annahme: $t \mid a + b$
Aus $t \mid a + b$ und $t \mid a$ folgt unter Ausnutzung von Satz 3 (2.2.):
$t \mid (a + b) - a$, d. h.
$t \mid b$.
Hiermit liegt ein Widerspruch zur Voraussetzung vor.
Die Annahme ist demnach falsch, d. h.
$t \nmid a + b$,
w. z. b. w.

Auf ähnliche Weise läßt sich der folgende Satz beweisen:

▷

> SATZ 5 (2.2.)
> Für alle natürlichen Zahlen a, b und t gilt:
> (1) Wenn $t \mid a$ und $t \nmid b$ und $a > b$, so $t \nmid a - b$.
> (2) Wenn $t \nmid a$ und $t \mid b$ und $a > b$, so $t \nmid a - b$.

Aufgabe 3 (2.2.)
Es ist jeweils ein Zahlenpaar (x, y) anzugeben, für das gilt:

a) $6 \mid x$, $6 \mid y$ und $6 \mid x + y$;
b) $6 \mid x$, $6 \mid y$ und $6 \nmid x + y$;
c) $6 \mid x$, $6 \nmid y$ und $6 \nmid x + y$;
d) $6 \nmid x$, $6 \nmid y$ und $6 \nmid x + y$;
e) $6 \nmid x$, $6 \nmid y$ und $6 \mid x + y$;
f) $6 \mid x$, $6 \nmid y$ und $6 \mid x + y$.

LÖSUNG (Beispiele)
a) (6; 12)
b) Es gibt kein Zahlenpaar, das diese Bedingungen erfüllt.
c) (36; 11)
d) (13; 15)
e) (13; 17)
f) Es gibt kein Zahlenpaar, das diese Bedingungen erfüllt.

Beim „Federspannen“ wurde anhand der Aufgabe $58:7$ erneut deutlich, daß die Division in der Menge der natürlichen Zahlen nur beschränkt ausführbar ist. Nur durch Zahlenbereichserweiterungen kann die unbeschränkte Ausführbarkeit der Division gesichert werden.
In der Menge der natürlichen Zahlen läßt sich 58 mit Rest durch 7 dividieren.
Die Division mit Rest lernen bereits Schüler der Klasse 3 durch die Arbeit mit entsprechenden Beispielen kennen.

Schreibweise in Klasse 3	Schreibweise mit Variablen
$\underline{58}:7 = 8$ Rest 2 *oder* $58 = 7 \cdot 8 + 2$	$\underline{a}:b = q$ Rest r (a, b, q und r sind natürliche Zahlen, $r < b$, $b \neq 0$) *oder* $a = b \cdot q + r$

Man beachte, daß bezüglich r eine Einschränkung erfolgt. Dadurch wird erreicht, daß bei vorgegebenem a und b ($b \neq 0$) die Zahlen q und r eindeutig bestimmt sind.

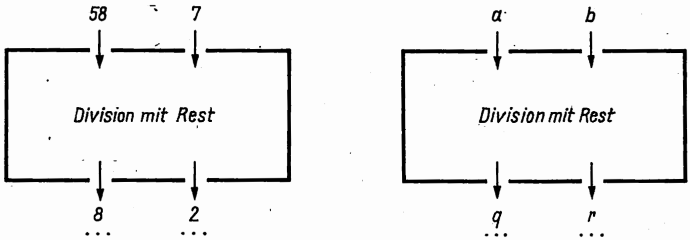


Bild 4 (2.2.)

▷ SATZ 6 (2.2.)
Zu je zwei natürlichen Zahlen a und b ($b \neq 0$) existieren genau zwei natürliche Zahlen q und r, so daß $a = b \cdot q + r \quad (r < b)$ ist.

Wegen der Gültigkeit von Satz 6 (2.2.) kann man die Division mit Rest in der Menge der natürlichen Zahlen in folgender Weise definieren:

▶ DEFINITION 1 (2.2.)
a, b, q und r seien natürliche Zahlen.
Es gelte $b \neq 0$.
Diejenige Abbildung von $N \times (N \setminus \{0\})$ in $N \times N$ heißt **Division mit Rest in N**, die jedem geordneten Paar (a, b) von natürlichen Zahlen (mit $b \neq 0$) dasjenige Paar (q, r) von natürlichen Zahlen zuordnet, für das gilt:
$a = b \cdot q + r$ und $r < b$.

■ BEISPIEL 1 (2.2.)

a	b	$a = b \cdot q + r$
17	3	$17 = 3 \cdot 5 + 2$
8	4	$8 = 4 \cdot 2 + 0$
4	8	$4 = 8 \cdot 0 + 4$
43	7	$43 = 7 \cdot 6 + 1$
0	9	$0 = 9 \cdot 0 + 0$
19	3	$19 = 3 \cdot 6 + 1$

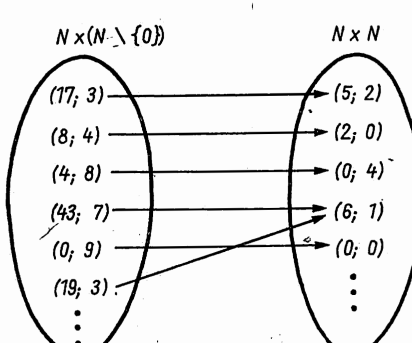


Bild 5 (2.2.)

Das Beispiel verdeutlicht, daß der Rest Null sein kann.
Für den Fall, daß $b \neq 0$ ist, gilt:
$b \mid a$ genau dann, wenn sich a durch b mit dem Rest 0 dividieren läßt.

Aufgabe 4 (2.2.)

a) Man beschreibe mit Variablen diejenigen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 4 (3, 2, 5) lassen.

b) Durch welche Aussageform läßt sich die Menge $M = \{5, 13, 21, 29, 37, 45, 53\}$ beschreiben?

LÖSUNG

a) Eine Zahl, die die genannte Bedingung erfüllt, kann folgendermaßen dargestellt werden:

$a \cdot 7 + 4 \quad (a \in N) \qquad (a \cdot 7 + 3$
$a \cdot 7 + 2$
$a \cdot 7 + 5)$

b) $M = \{x : x = 8 \cdot a + 5$ und $a \in N$ und $a \leqq 6\}$

Aufgabe 5 (2.2.)

Man untersuche und begründe, ob folgende Aussageformen in der Menge der natürlichen Zahlen allgemeingültig sind.

a) Wenn a bei Division durch b den Rest r läßt, so läßt $a + 1$ bei Division durch b den Rest $r + 1$.

b) Wenn a größer als c ist, so ist der Rest r_a, den a bei Division durch b läßt, größer als der Rest r_c, den c bei Division durch b läßt.

c) Wenn a größer ist als c und bei der Division durch b denselben Rest läßt wie c bei der Division durch b, dann ist b Teiler von $a - c$.

LÖSUNG

In a) und b) sind keine allgemeingültigen Aussageformen angegeben. Das zeigen Gegenbeispiele. Die in c) angeführte Aussageform ist allgemeingültig.

▷ SATZ 7 (2.2.)
a, b und c seien natürliche Zahlen.
a sei größer oder gleich c.
Wenn a und c bei Division durch b denselben Rest lassen, so ist b Teiler von $a - c$.

Der Leser verdeutliche sich, weshalb im Satz 7 (2.2.) die Forderung gestellt ist, daß a größer oder gleich c ist, und führe den Beweis des Satzes selbständig aus.

Beispiel 2 (2.2.) und die folgenden Aufgaben sollen dem Leser einige typische Denkweisen und Beweismethoden aus der Zahlentheorie demonstrieren.

■ BEISPIEL 2 (2.2.)
Es ist zu beweisen, daß von je drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine den Teiler 3 hat.

Zur Lösung des Problems bieten sich mehrere Wege an. Zwei davon folgen.

Voraussetzung:
a, $a+1$, $a+2$ sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Behauptung:
$3 \mid a$ oder $3 \mid a+1$ oder $3 \mid a+2$

Beweis:
1. Weg
Wegen Definition 1 (2.2.) ist a in folgender Weise darstellbar:
$$a = b \cdot q + r \quad (r < b).$$
Wählen wir für b die Zahl 3 (weil für a bzw. $a+1$ bzw. $a+2$ die Teilbarkeit durch 3 untersucht werden soll) erhalten wir:
$$a = 3 \cdot q + r \quad (r < 3).$$
1. Fall: Für $r = 0$ folgt $a = 3q$ und damit $3 \mid a$.
2. Fall: Für $r = 1$ folgt $a + 2 = 3q + 3$ und damit $3 \mid a + 2$.
3. Fall: Für $r = 2$ folgt $a + 1 = 3q + 3$ und damit $3 \mid a + 1$.
Weil einer der drei Fälle mit Sicherheit eintreten muß, ist die Behauptung bewiesen.
Von je drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist eine durch 3 *teilbar.*

Wir werden im 2. Lösungsweg einen wichtigen Schluß – den *Dirichletschen Schubfachschluß*[1] – verwenden. Er besagt: Wenn man n Objekte auf weniger als n Schubfächer verteilt, so befinden sich in wenigstens einem Schubfach mindestens zwei der zu verteilenden Objekte.

2. Weg
Die Beweisführung erfolgt jetzt indirekt.
Annahme: Von den Zahlen a, $a+1$, $a+2$ ist keine durch 3 teilbar.
Aus der Annahme folgt, daß weder a noch $a+1$ noch $a+2$ bei Division durch 3 den Rest 0 lassen. Demnach kommen nur die Reste 1 oder 2 in Frage. Da wir 3 Zahlen – Objekte – haben (a, $a+1$, $a+2$), aber nur zwei mögliche Reste (2 und 1) – Schubfächer –, lassen zwei dieser Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest. Sie sind in demselben Schubfach. Die Differenz von der größeren und der kleineren dieser beiden Zahlen ist dann durch 3 teilbar (vgl. Satz 7 (2.2.)). Weil diese Differenz aber nur 1 oder 2 sein kann ($(a+2) - a = 2$, $(a+2) - (a+1) = 1$, $(a+1) - a = 1$), muß gelten: $3 \mid 1$ oder $3 \mid 2$. Das ist ein Widerspruch. Die Richtigkeit der eingangs formulierten Aussage ist damit bestätigt.
Der Leser überlege sich, ob infolge der geführten Beweise folgende Aussage wahr ist:
Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar.

Aufgabe 6 (2.2.)
a, *b* und *c* seien drei beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
a ist eine gerade Zahl.

---

1) Dirichlet (1805 bis 1859) – deutscher Mathematiker.

Jens behauptet, daß unter diesen Bedingungen das Produkt $a \cdot b \cdot c$ durch 16 teilbar ist. Er argumentiert folgendermaßen:

(1) a ist eine gerade Zahl, folglich gilt: $2 \mid a$.
(2) Wenn a eine gerade Zahl ist, so ist auch c eine gerade Zahl. Es gilt also: $2 \mid c$.
(3) Eine von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist durch 4 teilbar. Demnach gilt: $4 \mid a$ *oder* $4 \mid c$.
(4) Wegen (1), (2) und (3) ist $a \cdot b \cdot c$ insgesamt durch $2 \cdot 2 \cdot 4$ teilbar.

a) Ist die Behauptung richtig?
b) Ist die Argumentation stichhaltig?

LÖSUNG
Die Behauptung ist sicher nicht richtig. Das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 4$ erfüllt die Voraussetzungen. Es ist aber nicht durch 16 teilbar.
Die Argumentation kann demnach nicht stichhaltig sein.
Begründung:
Es gelte etwa $4 \mid a$. Daraus folgt $2 \mid a$, denn die Teilbarkeit einer Zahl durch 4 ist eine hinreichende Bedingung für ihre Teilbarkeit durch 2 (vgl. Bild 6 (2.2.)).
Aus $2 \mid a$ und $4 \mid a$ läßt sich demnach *nicht schlußfolgern*, daß $2 \cdot 4$ Teiler von a ist.

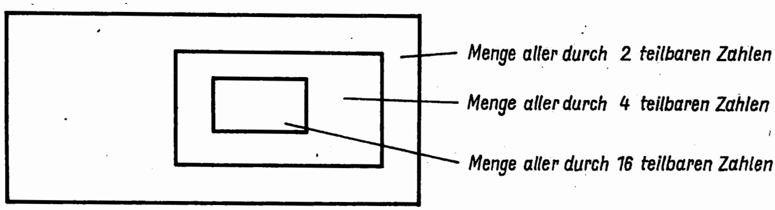


Bild 6 (2.2.)

> *Für beliebige natürliche Zahlen a, b* und *c gilt nicht:* Wenn $a \mid c$ und $b \mid c$, so $a \cdot b \mid c$.

Sind a und b Primzahlen, ist das anders (was hier nicht bewiesen werden kann).

> Ist c eine natürliche Zahl und sind *p und q Primzahlen*, so gilt:
> *Wenn $p \mid c$ und $q \mid c$, so $p \cdot q \mid c$.*

Diese Gesetzmäßigkeit kann beim Lösen der folgenden Aufgabe genutzt werden.

Aufgabe 7 (2.2.)
Man beweise: Das Produkt dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 6 teilbar.

LÖSUNG
Voraussetzung:
a, $a + 1$, $a + 2$ sind (aufeinanderfolgende) natürliche Zahlen.

Behauptung:
$6 \mid a(a+1)(a+2)$

Beweis:
Wenn gezeigt werden kann, daß das Produkt $a(a+1)(a+2)$ durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist der erforderliche Nachweis erbracht.

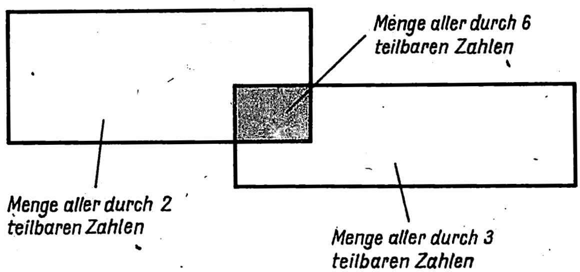


Bild 7 (2.2.)

(1) Es ist zu zeigen: $3 \mid a(a+1)(a+2)$.
Aus Beispiel 2 (2.2.) folgt, daß eine der Zahlen a, $a+1$, $a+2$ durch 3 teilbar ist. Deshalb gilt:

$$3 \mid a(a+1)(a+2).$$

(2) Es ist noch zu zeigen: $2 \mid a(a+1)(a+2)$.
Betrachten wir nur die unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen a und $a+1$. Eine dieser Zahlen ist eine gerade Zahl und somit durch 2 teilbar. Es gilt:

$$2 \mid a \text{ oder } 2 \mid a+1.$$

Damit ist 2 ein Teiler des Produktes $a(a+1)$ und erst recht ein Teiler von $a(a+1)(a+2)$.
Aus (1) und (2) ergibt sich die Richtigkeit der zu beweisenden Aussage.

Aufgabe 8 (2.2.)
Man beweise: Die Differenz zwischen der 3. Potenz einer natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ und n ist durch 6 teilbar.

LÖSUNG

Voraussetzung:
n ist eine natürliche Zahl; $n \neq 0$.

Behauptung:
$6 \mid n^3 - n$

Beweis:
Wir zerlegen $n^3 - n$ in ein Produkt und beweisen dann die Teilbarkeit dieses Produkts durch 6 oder durch Teiler von 6.

$$n^3 - n = n\underbrace{(n^2-1) = n(n+1)(n-1)}_{\text{Binomische Formel}}$$

$n-1$, n, $n+1$ sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Das Produkt solcher Zahlen ist durch 6 teilbar (vgl. Aufgabe 7 (2.2.)), w. z. b. w.

Aufgabe 9 (2.2.)
Es ist zu beweisen, daß die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 9 teilbar ist.

LÖSUNG

Voraussetzung:
$a-1$, a, $a+1$ sind natürliche Zahlen.

Behauptung:
$9 \mid (a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$

Beweis:
Für die Darstellung der drei aufeinanderfolgenden Zahlen wurde hier eine andere Schreibweise gewählt als in den vorangegangenen Aufgaben. Der Vorteil dieser Darstellung wird offensichtlich, wenn man den Term $(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$ vereinfacht.

$$\begin{aligned}(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1\\ &= 3a^3 + 6a\\ &= 3a(a^2+2)\end{aligned}$$

3 ist Teiler von $3a(a^2+2)$, denn $3 \mid 3$.
Wenn außerdem 3 Teiler von $a(a^2+2)$ ist, so ist $3a(a^2+2)$ durch 9 teilbar.
Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $a = 3n \ (n \in N)$
Es folgt sofort $3 \mid a$ und damit $9 \mid 3a(a^2+2)$.

2. Fall: $a = 3n+1 \ (n \in N)$
Wir setzen $3n+1$ für a in a^2+2 ein:
$(3n+1)^2 + 2 = 9n^2 + 6n + 1 + 2 = 9n^2 + 6n + 3$
$3 \mid 9n^2 + 6n + 3$
Also gilt: 3 ist ein Teiler von a^2+2, und somit ist 9 ein Teiler von $3a(a^2+2)$.

3. Fall: $a = 3n+2 \ (n \in N)$
Wir setzen ein:
$$\begin{aligned}a^2 + 2 = (3n+2)^2 + 2 &= 9n^2 + 12n + 4 + 2\\ &= 9n^2 + 12n + 6\end{aligned}$$
3 ist Teiler dieser Summe.
Also gilt: 3 ist ein Teiler von a^2+2, und somit ist 9 ein Teiler von $3a(a^2+2)$.

Da nur diese drei Fälle eintreten können, denn bei Division durch 3 läßt eine natürliche Zahl entweder den Rest 0 (1. Fall) oder den Rest 1 (2. Fall) oder den Rest 2 (3. Fall), ist der Beweis abgeschlossen. Es wurde gezeigt, daß 9 stets Teiler von $3a(a^2+2)$ ist, gleich welcher Fall eintritt.

Im Beispiel 2 (2.2.) und mit den Aufgaben 4 (2.2.) bis 9 (2.2.) wurden unterschiedliche Lösungsvarianten für Aufgaben dargestellt, in denen es um Teilbarkeitsprobleme geht. Ein wichtiges Beweismittel fand bisher noch nicht Beachtung. Teilbarkeitsaussagen können oft durch die *Anwendung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion* bewiesen werden. Gerade für die Aufgabe 10 (2.2.) bietet sich dieses Verfahren an, während die anderen bisher besprochenen Herangehensweisen versagen oder zu aufwendig sind.

Aufgabe 10 (2.2.)
Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl 4 ein Teiler von $5^n + 7$ ist.

LÖSUNG

Voraussetzung:
n ist eine natürliche Zahl.

Behauptung:
$4 \mid 5^n + 7$

Beweis:
1. Induktionsanfang
Für $n = 0$ ist die Vermutung richtig, denn

$5^0 + 7 = 1 + 7 = 8$, und 4 ist Teiler von 8.

Es gilt demnach: $4 \mid 5^0 + 7$.
2. Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung: Für die natürliche Zahl k gelte die Vermutung. Das heißt:

$$4 \mid 5^k + 7.$$

Induktionsbehauptung: Die Vermutung ist auch für die natürliche Zahl $k + 1$ richtig. Das heißt:

$$4 \mid 5^{k+1} + 7.$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 7 &= 5 \cdot 5^k + 7 \\ &= (4 + 1) \cdot 5^k + 7 \\ &= 4 \cdot 5^k + 5^k + 7 \end{aligned}$$

Es gilt: $4 \mid 4 \cdot 5^k$ und $4 \mid 5^k + 7$ (Induktionsvoraussetzung).
Folglich gilt: $4 \mid 4 \cdot 5^k + 5^k + 7$.
Das bedeutet: $4 \mid 5^{k+1} + 7$, w. z. b. w.
Weil die Schritte 1. und 2. erfolgreich absolviert wurden, können wir schließen:

$4 \mid 5^0 + 7$ (Induktionsanfang)
Aus $4 \mid 5^0 + 7$ folgt $4 \mid 5^1 + 7$. (Induktionsschritt)

Aus $4 \mid 5^1 + 7$ folgt $4 \mid 5^2 + 7$. (Induktionsschritt)

usw.

Demnach gilt für alle natürlichen Zahlen n:

$$4 \mid 5^n + 7.$$

2.3. Teilbarkeitsregeln

Wir stellen uns die Aufgabe, alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10 zu finden, die Teiler von 2520 sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} 2520 &= 1 \cdot 2520 = 2 \cdot 1260 = 3 \cdot 840 = 4 \cdot 630 \\ &= 5 \cdot 504 = 6 \cdot 420 = 7 \cdot 360 = 8 \cdot 315 = 9 \cdot 280 \\ &= 10 \cdot 252 \end{aligned}$$

Alle natürlichen Zahlen von 1 bis 10 sind demnach Teiler von 2520. Die Zahl 2520 ist die kleinste natürliche Zahl (außer 0), die diese Eigenschaft hat.

Wenn man prüfen möchte, ob die Zahl b ein Teiler der Zahl a ist, kann man oft rationell vorgehen, indem man Teilbarkeitsregeln anwendet. Für jede natürliche Zahl b läßt sich wenigstens eine Teilbarkeitsregel angeben. Einfach und vorteilhaft sind insbesondere Regeln für die Teilbarkeit einer Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 und 11. Dagegen ist eine Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 7 relativ aufwendig.

Für die Ableitung von Teilbarkeitsregeln ist es von Vorteil, wenn man von der Darstellung einer natürlichen Zahl a im dekadischen Positionssystem ausgeht. Das heißt, a wird als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen dargestellt.

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

n ist eine natürliche Zahl.

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ sind natürliche Zahlen von 0 bis 9.

a_n ist von 0 verschieden, wenn $n > 0$ ist.

Will man feststellen, ob a durch b teilbar ist, schreibt man a als Summe zweier Zahlen (zum Beispiel s und r). s und r werden so gewählt, daß s mit Sicherheit durch b teilbar ist. Ist nun auch r durch b teilbar, so ist a durch b teilbar (vgl. Satz 1 (2.2.)).

Unter Nutzung dieser Vorgehensweise wird eine Regel für die **Teilbarkeit einer Zahl *a* durch 2 (5, 10)** abgeleitet.

Wir stellen nur den Weg zur Ableitung einer Regel dar, die angibt, unter welchen Bedingungen eine Zahl durch 2 teilbar ist. Regeln für die Teilbarkeit einer Zahl durch 5 bzw. 10 lassen sich durch analoge Überlegungen finden.

$$a = \underbrace{a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1}_{s} + \underbrace{a_0}_{r}$$

(n und $a_n, \ldots, a_0$ erfüllen die eben aufgeführten Bedingungen.)

Zur Ableitung der Teilbarkeitsregel ist nur der Summand a_0 interessant. s ist offensichtlich durch 2 teilbar, weil jeder Summand dieser Summe den Faktor 10 enthält, der durch 2 teilbar ist.

Das bedeutet:

(1) Wenn a_0 durch 2 teilbar ist, so ist a durch 2 teilbar.

(2) Wenn a durch 2 teilbar ist, so ist a_0 durch 2 teilbar.

Folglich ist a durch 2 teilbar genau dann, wenn a_0 durch 2 teilbar ist.

▷ SATZ 1 (2.3.)
Eine natürliche Zahl ist durch 2 (5, 10) teilbar genau dann, wenn die durch ihre letzte Stelle bestimmte Zahl durch 2 (5, 10) teilbar ist.

■ BEISPIEL 1 (2.3.)
$2 \mid 10084$, denn $2 \mid 4$.
$2 \mid 93560$, denn $2 \mid 0$.
$2 \nmid 93561$, denn $2 \nmid 1$.
$5 \mid 1085$, denn $5 \mid 5$.

Der Leser untersuche, welche Gemeinsamkeit bzw. welcher Unterschied zwischen der Formulierung einer Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 2 (5, 10) in diesem Lehrbuch und im Lehrbuch der Klasse 4 besteht.

Aussagen über die **Teilbarkeit einer Zahl *a* durch 8 und 4** lassen sich ähnlich finden wie die oben betrachteten Teilbarkeitsaussagen. s ist jetzt so zu wählen, daß mit Sicherheit gilt $8 \mid s$ $(4 \mid s)$.
Zerlegung von a für die Untersuchung, ob a durch 8 teilbar ist:
$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$
(Für n und $a_n, \ldots, a_0$ gelten die auf Seite 102 genannten Bedingungen.)

$$a = \underbrace{a_n \cdot 10^{n-3} \cdot 10^3 + a_{n-1} \cdot 10^{n-4} \cdot 10^3 + \ldots + a_4 \cdot 10 \cdot 10^3 + a_3 \cdot 10^3}_{s}$$

$$+ \underbrace{a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0}_{r}$$

Die Summe s ist durch 8 teilbar, weil jeder ihrer Summanden den Faktor 10^3 enthält und 8 ein Teiler von 10^3 ist.
Das bedeutet:
a ist durch 8 teilbar genau dann, wenn $(a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$ durch 8 teilbar ist.
Eine Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 4 findet man in analoger Weise.
r ist dabei $a_1 \cdot 10 + a_0$.

▷ SATZ 2 (2.3.)
Eine wenigstens $\begin{bmatrix}\text{dreistellige}\\ \text{zweistellige}\end{bmatrix}$ Zahl ist durch $\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ teilbar genau dann, wenn die durch ihre letzten $\begin{bmatrix}\text{drei}\\ \text{zwei}\end{bmatrix}$ Stellen bestimmte Zahl durch $\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$ teilbar ist.

BEISPIEL 2 (2.3.)
$8 \mid 135448$, denn $8 \mid 448$.
$4 \mid 234356$, denn $4 \mid 56$.
$8 \mid 10024$, denn $8 \mid 24$.
$8 \nmid 10124$, denn $8 \nmid 124$.

Um eine Aussage über die Teilbarkeit einer Zahl a durch 9 (3) zu erhalten, muß die Zerlegung dieser Zahl etwas anders als bei den bisherigen Zahlen vorgenommen werden, weil 9 nicht Teiler einer Zehnerpotenz ist.
Es läßt sich jedoch feststellen:
Die Zahl 9 ist Teiler jeder um 1 verminderten Zehnerpotenz, deren Exponent eine natürliche Zahl ist.

$9 \mid 10^0 - 1$
$9 \mid 10^1 - 1$
$9 \mid 10^2 - 1$ usw.

▷ SATZ 3 (2.3.)
Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $9 \mid 10^n - 1$.

Die Wahrheit dieser Aussage kann mittels des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion nachgewiesen werden. Wir nutzen eine andere Beweismethode. Wir legen zunächst ihren Kerngedanken dar:
Der *Beweis* wird *indirekt* geführt.

1. Schritt
Es wird angenommen, daß für wenigstens ein n der im Satz angegebene Sachverhalt nicht gilt. Unter den Zahlen, die diese Eigenschaft haben, muß ein kleinstes Element (etwa n_0) existieren. Das heißt, daß für alle n, die kleiner als n_0 sind, der Satz gilt.

2. Schritt
Aus der Annahme (1. Schritt) wird ein Widerspruch abgeleitet. Man weist nach, daß es ein n ($n < n_0$) gibt, für das der Satz nicht gilt.

Für $n = 0$ ist der Satz richtig, denn $9 \mid 10^0 - 1$. Wir beschränken uns deshalb in der weiteren Beweisführung auf solche n, die größer als Null sind.

Voraussetzung:
n ist eine natürliche Zahl; $n > 0$.

Behauptung:
$9 \mid 10^n - 1$

Beweis (indirekt):

1. Schritt
Annahme: Für mindestens eine natürliche Zahl n ($n > 0$) gilt: $9 \nmid 10^n - 1$.

Die kleinste natürliche Zahl n, für die diese Annahme zutrifft, sei n_0 $(n_0 > 0)$.
Laut Annahme gilt dann:

$$9 \nmid 10^{n_0} - 1 \text{ und}$$
$$9 \mid 10^n - 1 \text{ für } n < n_0.$$

2. Schritt

Da $10^{n_0} - 1$ nicht durch 9 teilbar ist, ist auch $10^{n_0} - 1 - 9$ nicht durch 9 teilbar (vgl. Satz 5 (2.2.)).

$$10^{n_0} - 1 - 9 = 10^{n_0} - 10$$
$$= 10\,(10^{n_0 - 1} - 1)$$

Es gilt:

$$9 \nmid 10\,(10^{n_0 - 1} - 1),$$

das heißt:

$$9 \nmid 10\,(10^{n_1} - 1) \text{ mit } n_1 = n_0 - 1, \text{ also } n_1 < n_0.$$

Dazu ergibt sich ein Widerspruch:
$10^{n_1} - 1$ muß durch 9 teilbar sein, weil $10^{n_0} - 1$ die kleinste Differenz dieser Art sein sollte, die nicht durch 9 teilbar ist.
Wenn aber gilt $9 \mid 10^{n_1} - 1$, so gilt auch $9 \mid 10\,(10^{n_1} - 1)$. Das ist ein Widerspruch.
Die Annahme ist falsch.
Satz 3 (2.3.) ist eine wahre Aussage, w. z. b. w.

Wir leiten nun eine Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 (3) ab. Dazu gehen wir wieder von der Darstellung einer natürlichen Zahl im dekadischen Positionssystem aus.
$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$
(Für n und $a_n, \ldots, a_0$ gelten die oben angegebenen Bedingungen.)

$$a = \underbrace{a_n\,(10^n - 1) + a_{n-1}\,(10^{n-1} - 1) + \ldots + a_2\,(10^2 - 1) + a_1\,(10^1 - 1)}_{s}$$
$$\underbrace{+\,a_n \quad + a_{n-1} \quad + \ldots + a_2 \quad + a_1 \quad + a_0}_{r}$$

s ist durch 9 teilbar, denn jeder Summand dieser Summe hat den Teiler 9, weil die Differenzen $10^n - 1, 10^{n-1} - 1, \ldots, 10^2 - 1, 10^1 - 1$ stets durch 9 teilbar sind.
$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ ist bei der vorgenommenen Zerlegung von a die *Quersumme von a.*
Wenn die Quersumme von a durch 9 teilbar ist, so ist a durch 9 teilbar und umgekehrt.
Die Ableitung einer Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 3 erfolgt auf demselben Weg. Da s in der Zerlegung von a durch 9 teilbar ist, ist s erst recht durch 3 teilbar.
Damit a den Teiler 3 hat, muß die Quersumme von a durch 3 teilbar sein und umgekehrt.

▷ **SATZ 4 (2.3.)**
Eine natürliche Zahl ist durch 9 (3) teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme durch 9 (3) teilbar ist.

■ BEISPIEL 3 (2.3.)
$9 \mid 87255$, denn $9 \mid 8+7+2+5+5$ $(9 \mid 27)$.
$9 \nmid 87254$, denn $9 \nmid 8+7+2+5+4$ $(9 \nmid 26)$.

Aufgabe 1 (2.3.)
Für welche Ziffern x, y bezeichnet $z = \overline{2x3y4}$ eine durch 36 teilbare fünfstellige Zahl?[1]

LÖSUNG
Wenn 36 Teiler von z sein soll, muß z durch 4 und 9 teilbar sein.[2] Nutzen wir Teilbarkeitsregeln, so ergeben sich zwei Bedingungen:
(1) $4 \mid \overline{y4}$
(2) $9 \mid 2+x+3+y+4$.
Wir stellen eine Tabelle auf und berücksichtigen zunächst alle y-Werte, die (1) erfüllen. Unter dieser Voraussetzung ermitteln wir alle x-Werte, die (2) erfüllen.

y, für die gilt $4 \mid z$	0	2	4	6	8
Quersumme von z (mit diesem y)	$9+x$	$11+x$	$13+x$	$15+x$	$17+x$
x, für die gilt $9 \mid z$	0; 9	7	5	3	1
Quersumme von z	9; 18	18	18	18	18

Die Zahlen 20304, 29304, 27324, 25344, 23364 und 21384 erfüllen die geforderten Bedingungen.

Aufgabe 2 (2.3.)
Es ist jede vierstellige natürliche Zahl mit der Quersumme 33 anzugeben, deren Vorgänger den Teiler 4 hat.

---

1) Der Querstrich über der Zeichenfolge gibt an, daß eine Ziffernddarstellung und kein Produkt gemeint ist.

2) Exakt müßte es heißen: 36 ist ein Teiler der durch z bezeichneten Zahl. Im Interesse einer flüssigen Sprechweise identifizieren wir hier und später mitunter Zahl und Zahlzeichen, wenn aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, ob eine Zahl oder ihr Zeichen gemeint ist.

LÖSUNG

Zunächst wird die Zahl 33 in 4 Summanden zerlegt, damit wir wissen, welche Ziffern zur Darstellung der vierstelligen Zahl verwendet werden dürfen.

$$33 = 9 + 9 + 9 + 6$$
$$33 = 9 + 9 + 8 + 7$$
$$33 = 9 + 8 + 8 + 8$$

Wir bilden nun vierstellige Zahlen. Der Leser überlege, weshalb in der folgenden Tabelle für a nur ungerade Zahlen betrachtet werden.

a	Vorgänger von a	Ist der Vorgänger von a durch 4 teilbar?
9969	9968	ja
9699	9698	nein
6999	6998	nein
9987	9986	nein
9897	9896	ja
9879	9878	nein
9789	9788	ja
8997	8996	ja
8979	8978	nein
8799	8798	nein
7989	7988	ja
7899	7898	nein
8889	8888	ja

Übungen 2.3.

1. Unter ausschließlicher Verwendung der Ziffern 3, 4, 5 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden, die durch 4 teilbar sind.

2. Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 40 so aufgeschrieben, daß $z = 123 \ldots 383940$ entsteht. Durch welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ist z teilbar?

3. Man gebe die größte und die kleinste sechsstellige Zahl an, die durch 12 teilbar ist und zu deren Darstellung genau die Ziffern 0, 1, 4, 5, 6, 8 verwendet werden.

4. Wie viele Stellen hat eine durch 9 teilbare Zahl mindestens, wenn in ihrer Darstellung nur die Ziffern 1, 2 oder 4 auftreten?
   a) 1, 2 und 4 treten jeweils mindestens einmal auf, aber nicht unbedingt in gleicher Anzahl.
   b) 1, 2 und 4 treten mit gleicher Häufigkeit auf.

5. Kann z ($z = \overline{12xxx4}$) durch 18 teilbar sein, wenn für x jeweils gleiche Ziffern aus der Menge M einzusetzen sind ($M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$)?

2.4. Zahlenzerlegungen

1985 fand sich in den Tagesmeldungen unserer Presse folgende Mitteilung:
Die höchste Primzahl, die bisher entdeckt wurde, haben Wissenschaftler in Houston (USA – Bundesstaat Texas) mit Hilfe eines neuen Datenverarbeitungssystems gefunden. Die Zahl lautet $2^{216091} - 1$ und würde, hintereinander geschrieben, zwei Zeitungsseiten füllen.[1)]
Warum ist diese Mitteilung berichtenswert? Welche Rolle spielen Primzahlen in der Mathematik? Weshalb befassen sich Zahlentheoretiker immer wieder mit Primzahlen?
Wir wollen Antworten auf diese Fragen geben.
Zunächst definieren wir den Begriff Primzahl und nutzen dabei eine mit Aufgabe 6 (2.1.) a) gewonnene Erkenntnis.

▶ DEFINITION 1 (2.4.)
Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat.

Man beachte: Die Zahl 1 ist keine Primzahl, denn 1 hat genau einen Teiler.
Jede Primzahl und auch die Zahl 1 heißt **unzerlegbare Zahl**. Jede natürliche Zahl, die größer als 1 und keine Primzahl ist, heißt **zusammengesetzte Zahl**.

■ BEISPIEL 1 (2.4.)
907 ist eine unzerlegbare Zahl, denn 907 ist eine Primzahl.
634 ist eine zusammengesetzte Zahl, denn 634 ist keine Primzahl ($634 = 2 \cdot 317$), und 634 ist größer als 1. 634 läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen.

Wir beschäftigen uns nunmehr mit Produkten von Primzahlen.

Aufgabe 1 (2.4.)
Zu einer Familie gehören sechs Personen (Vater, Mutter, zwei Töchter und zwei Söhne). Multipliziert man die Zahlen miteinander, die jeweils das Lebensalter der weiblichen Familienmitglieder in vollen Jahren angeben, so erhält man die Zahl 5291. Für die männlichen Familienmitglieder ist das entsprechende Produkt 3913. Unter den Kindern der Familie befindet sich ein Zwillingspaar.
Sind die Zwillinge von gleichem Geschlecht?

---

1) In *„Kleine Enzyklopädie Mathematik“* (Ausgabe 1965) wird als größte damals bekannte Primzahl $2^{2281} - 1$ genannt. Das ist eine Zahl, die im dekadischen Positionssystem mit 687 Ziffern anzugeben ist. Die neu gefundene Primzahl wäre mit über 65000 Ziffern darzustellen. Diese Entwicklung zeigt, in welche Dimensionen man durch die Nutzung moderner Rechentechnik vordringen kann.

LÖSUNG
Wir zerlegen die Zahlen 5291 und 3913 in Produkte von Primzahlen.

$$5291 = 11 \cdot 13 \cdot 37$$
$$3913 = 7 \cdot 13 \cdot 43$$

Aus dieser Zerlegung ist ersichtlich, daß die Zwillinge unterschiedlichen Geschlechts sind. Sie sind 13 Jahre alt. Bei einer anderen Zerlegung von 5291 in ein Produkt mit 3 Faktoren ergibt sich keine Lösung der Aufgabe. Ein Faktor des Produkts wäre 1. Die Mutter hätte also ein einjähriges Kind, obwohl sie selbst älter als 140 Jahre sein müßte.

Die Lösung dieser Aufgabe ist u. a. deshalb möglich, weil wir 5291 und 3913 eindeutig in ein Produkt von drei Primzahlen zerlegen können.
Es scheint selbstverständlich zu sein, daß eine zusammengesetzte Zahl im Bereich der natürlichen Zahlen stets eindeutig in ein Produkt von Primzahlen zerlegbar ist. Zu dieser Überzeugung gelangen wir, weil wir im Mathematikunterricht immer in dieser Weise arbeiten und dabei nie Widersprüche auftreten. Deshalb ist diese Erkenntnis aber noch keine Selbstverständlichkeit. Für die Zahlentheoretiker ist sie eine Erkenntnis von fundamentaler Bedeutung. Es gibt „Zahlensysteme", in denen eine eindeutige Zerlegung einer Zahl in ein Produkt von „Primzahlen" nicht existiert. Man denke auch daran, daß eine Zerlegung einer natürlichen Zahl in eine Summe von Primzahlen schon in einfachen Fällen nicht eindeutig ist.

■ BEISPIEL 2 (2.4.)

$$\mathit{6} = 2 + 2 + 2 = \mathit{3} + \mathit{3}$$
$$\mathit{8} = 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 3 + 3 = \mathit{3} + \mathit{5}$$
$$\mathit{9} = 2 + 2 + 2 + 3 = 2 + 2 + 5 = \mathit{2} + \mathit{7} = 3 + 3 + 3$$
$$\mathit{10} = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 3 + 3 = 2 + 3 + 5 = \mathit{3} + \mathit{7} = \mathit{5} + \mathit{5}$$

Im Beispiel fällt auf, daß jede der geraden Zahlen wenigstens eine Zerlegung in eine Summe von zwei ungeraden Primzahlen zuläßt. Für die Zahl 4 geht das nicht. Es besteht aber die Vermutung, daß für jede Zahl n ($n \geqq 6$), die gerade ist, wenigstens eine Zerlegung in eine Summe zweier ungerader Primzahlen existiert (*Goldbachsches Problem*[1)]). Die Richtigkeit dieser Vermutung konnte bisher nicht bewiesen werden, obwohl beim Beweisversuch schon beachtliche Teilerfolge erzielt wurden. Wir fassen das Resultat der Überlegungen im Satz 1 (2.4.) zusammen.

▷ SATZ 1 (2.4.)
(Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie)
Jede zusammengesetzte natürliche Zahl läßt sich eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) als Produkt von Primzahlen darstellen.

---

1) GOLDBACH, CHRISTIAN (1690 bis 1764) – Mathematiker in St. Petersburg und Moskau

■ BEISPIEL 3 (2.4.)

$684 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$

$121 = 11 \cdot 11$

Der Fundamentalsatz enthält eine *Existenzaussage* und eine *Eindeutigkeitsaussage.* In diesem Satz kommt zum Ausdruck:

(1) Für jede zusammengesetzte Zahl gibt es eine Zerlegung in ein Produkt von Primzahlen.

(2) Diese Zerlegung ist eindeutig, wenn man von der Reihenfolge der Faktoren absieht.

Der Leser verdeutliche sich, welche Konsequenzen sich hinsichtlich der im Fundamentalsatz formulierten Aussage ergeben würden, wenn die Zahl 1 eine Primzahl wäre.

Oft wird der Fundamentalsatz folgendermaßen formuliert:

Jede natürliche Zahl n ($n \geqq 2$) läßt sich (abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Man faßt bei dieser Formulierung die Darstellung einer Primzahl durch sich selbst (zum Beispiel $5 = 5$ oder $19 = 19$) als Produkt auf, weil eine weitere Zerlegung einer Primzahl in ein Produkt von Primzahlen nicht möglich ist.

Die Gewinnung der Darstellung einer natürlichen Zahl n als Produkt von Primzahlen erfolgt schrittweise. Man ermittelt zunächst einen von 1 verschiedenen Teiler von n und untersucht, ob dieser Teiler und der zu ihm komplementäre Teiler von n weiter zerlegbar sind. Die Teilbarkeitsregeln können dabei nützlich sein.

■ BEISPIEL 4 (2.4.)

$184 = 4 \cdot 46 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 = 2^3 \cdot 23$

$20\,895 = 5 \cdot 4179 = 5 \cdot 3 \cdot 1393 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 199$

Als Verallgemeinerung dieser Darstellung ergibt sich für eine natürliche Zahl n ($n > 1$):

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}\,.$$

Dabei sind $p_1, p_2, \ldots, p_k$ Primzahlen mit $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$. Die Exponenten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sind natürliche Zahlen. Sie geben an, wie oft die entsprechende Primzahl in der Darstellung von n auftritt.

Diese Art der Darstellung einer natürlichen Zahl n heißt **kanonische Darstellung von *n*.**

■ BEISPIEL 5 (2.4.)

$184 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^1$

Aus verständlichen Gründen schreibt man im allgemeinen dafür:

$184 = 2^3 \cdot 23^1 = 2^3 \cdot 23$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Wir greifen ein schon früher betrachtetes Problem auf (vgl. Aufg. 4, 5, 6 (2.1.)).

Aufgabe 2 (2.4.)
Welche und wie viele Teiler hat die Zahl 184 (20895)?

LÖSUNG
Teiler von 184: 1, 2, 2^2, 2^3, 23, $2 \cdot 23$, $2^2 \cdot 23$, $2^3 \cdot 23$.
Die Zahl 184 hat 8 natürliche Zahlen zum Teiler.
Teiler von 20895:

1, 3, 5, 7, 199, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $3 \cdot 199$, $5 \cdot 7$, $5 \cdot 199$, $7 \cdot 199$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 199$, $3 \cdot 7 \cdot 199$, $5 \cdot 7 \cdot 199$, $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 199$

Die Zahl 20895 hat 16 natürliche Zahlen zum Teiler.

Mittels der kanonischen Darstellung der Zahl 20895 findet man bei systematischem Vorgehen alle Teiler dieser Zahl relativ mühelos.
Die Anzahl der Teiler einer Zahl n läßt sich aus den folgenden Darstellungen recht anschaulich ermitteln (vgl. Bild 1 (2.4.) und Bild 2 (2.4.)).

$n = 184 = 2^3 \cdot 23$

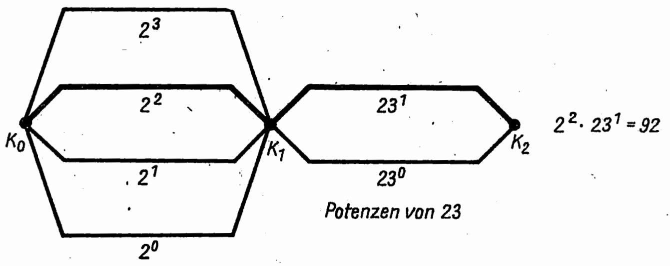


Bild 1 (2.4.)

$n = 20895 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 199$

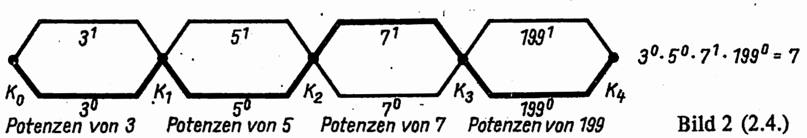


Bild 2 (2.4.)

Interpretation der Darstellung:
Man folgt (zum Beispiel im Bild 1 (2.4.)) einem Linienzug von K_0 nach K_2, ohne einen dieser Punkte mehrfach zu durchlaufen. Es wird das Produkt der Zahlen gebildet, die den durchlaufenden Kanten des Graphen zugeordnet sind. So erhält man stets einen Teiler der Zahl 184.
Wenn man alle möglichen Wege von K_0 nach K_2 erfaßt, erhält man auf diese Weise alle natürlichen Zahlen, die Teiler von 184 sind.
Der hervorgehobene Linienzug kennzeichnet im Bild 1 (2.4.) die Zahl $92 = 4 \cdot 23$ als Teiler von 184. Im Bild 2 (2.4.) gibt der entsprechende Linienzug 7 als Teiler von 20895 an.

Interessierte Leser können sich mit der Verallgemeinerung dieser Betrachtungsweise für eine natürliche Zahl n ($n > 1$) auseinandersetzen.

$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$

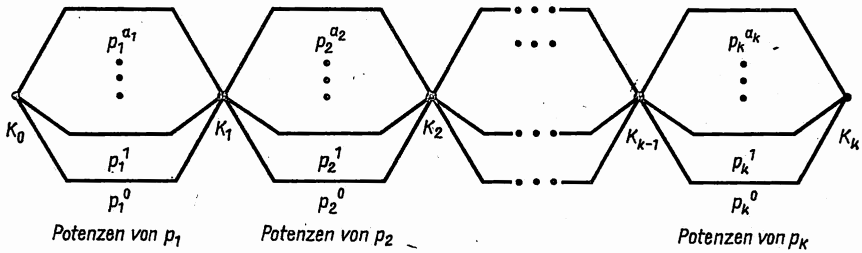


Bild 3 (2.4.)

Von K_0 bis K_1 gibt es $a_1 + 1$ Wege. Diesen Wegen ist jeweils genau ein Element der Menge $M_1 = \{p_1^0, p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^{a_1}\}$ zugeordnet.
Von K_1 bis K_2 gibt es $a_2 + 1$ Wege. Diesen Wegen ist jeweils genau ein Element der Menge $M_2 = \{p_2^0, p_2^1, p_2^2, \ldots, p_2^{a_2}\}$ zugeordnet.
Schließlich ist den $a_k + 1$ Wegen von K_{k-1} nach K_k jeweils genau ein Element der Menge $M_k = \{p_k^0, p_k^1, p_k^2, \ldots, p_k^{a_k}\}$ zugeordnet.
Aus dem Angebot von Wegen zwischen zwei benachbarten Knoten des Graphen muß man jeweils genau einen wählen, um den Bedingungen entsprechend einen Weg von K_0 nach K_k zu erhalten.
Für die Anzahl dieser Wege und damit für die Anzahl der Teiler von n folgt demnach:

$$\binom{a_1+1}{1} \cdot \binom{a_2+1}{1} \cdot \ldots \cdot \binom{a_k+1}{1} = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$$

Für jede natürliche Zahl n mit $n > 1$ gilt: Wenn $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ die kanonische Darstellung von n ist, so ist die Anzahl $A(n)$ der Teiler von n $A(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$.

Die Darstellung aller Teiler einer Zahl kann für einfache Fälle auch in der in den Bildern 4 (2.4.) und 5 (2.4.) angegebenen Weise erfolgen.

In diesem Zusammenhang wird klar, wie man einen Graphen anlegen kann, der die Teiler einer Zahl n enthält. Ein solcher Graph unterstützt die Anschauung aber nur dann, wenn in der kanonischen Zerlegung von n höchstens drei verschiedene Primzahlen auftreten.

Teiler von 184

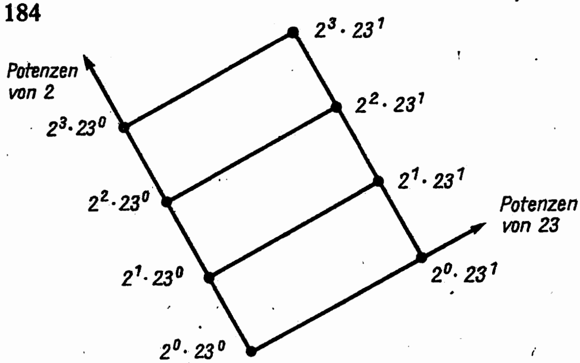


Bild 4 (2.4.)

Teiler von 60

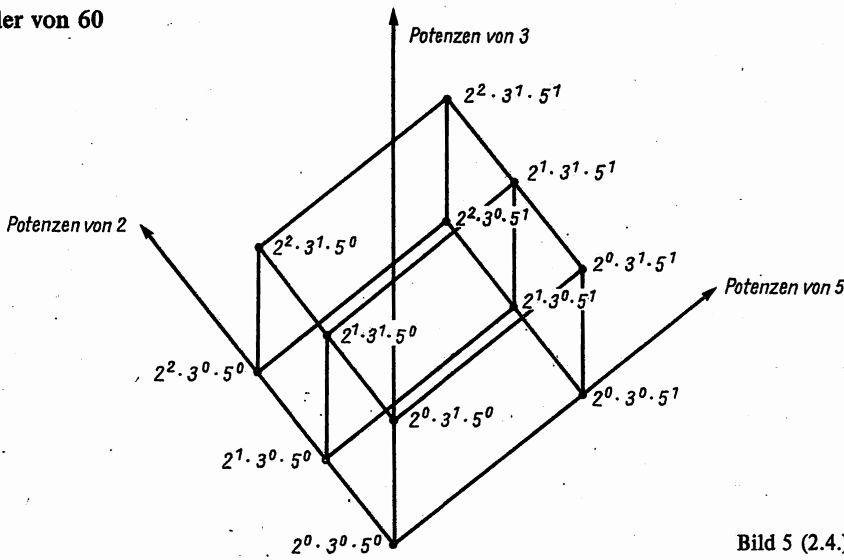


Bild 5 (2.4.)

Aufgabe 3 (2.4.)
Man gebe die kleinste natürliche Zahl an, die genau 11 Teiler hat.

LÖSUNG
$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ sei die kanonische Darstellung von n, und es sei $A(n) = 11$.
Die Anzahl der Teiler von n ist eine Primzahl.
Weiter ist nach den obigen Überlegungen

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1) = 11.$$

Daraus folgt, weil 11 nicht zerlegbar ist, daß genau eine der Summen $a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_k + 1$ gleich 11 ist.
Die anderen Summen sind dann gleich 1.

Weil die kleinste Zahl mit genannten Eigenschaften gesucht ist, muß gelten $p_1 = 2$ und damit $a_1 + 1 = 11$.
Das bedeutet:

$$a_1 = 10 \text{ und } a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$$

Wir erhalten:

$$n = 2^{10}$$

$2^{10} = 1024$ ist die kleinste natürliche Zahl, die genau 11 Teiler hat.

Wenn man die kanonische Darstellung einer Zahl a finden will, muß man a schrittweise durch seine Primteiler (das sind die Teiler von a, die Primzahlen sind) dividieren. Von dem dabei jeweils auftretenden Quotienten ist zu entscheiden, ob er selbst Primzahl ist oder nicht.
Wie kann man feststellen, ob eine Zahl Primzahl ist?
Diese Frage stellten sich schon die Mathematiker des Altertums, indem sie nach der Gesetzmäßigkeit der Verteilung der Primzahlen in der Menge der natürlichen Zahlen suchten. Das erwies sich insofern als ein schwieriges Problem, weil manchmal die nächste ungerade Zahl, die auf eine ungerade Primzahl folgt, wieder eine Primzahl ist (z. B.: 17 und 19, 881 und 883). Zwei derartige Primzahlen werden **Primzahlzwillinge** genannt. Die Lücke zwischen zwei Primzahlen kann sehr groß sein. Man betrachte dazu die unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 + 2 = 100! + 2 \\ n_2 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 + 3 = 100! + 3 \\ n_3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 + 4 = 100! + 4 \\ &\vdots \\ n_{99} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 + 100 = 100! + 100 \end{aligned}$$

Keine dieser Zahlen ist eine Primzahl, denn

$$\begin{aligned} &2 \mid n_1, \\ &3 \mid n_2, \\ &\vdots \\ &100 \mid n_{99}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise kann man auch 1000 oder 1000000000 unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen finden, von denen keine eine Primzahl ist.
Nach dem griechischen Mathematiker ERATOSTHENES VON KYRENE (etwa 276 bis etwa 194 v. u. Z.) ist die folgende Methode zur Auffindung von Primzahlen benannt (Sieb des Eratosthenes).
Zur Ermittlung aller Primzahlen von 2 bis a geht man so vor:

- Die natürlichen Zahlen von 2 bis a werden notiert. 2 ist die kleinste Primzahl.
- Alle Zahlen von 3 bis a werden gestrichen, wenn sie durch 2 teilbar sind. Die kleinste der auf diese Weise übriggebliebenen Zahlen ist die Zahl 3. Sie ist eine Primzahl.
- Von allen verbliebenen Zahlen, die größer als 3 sind, werden die durch 3 teilbaren gestrichen usw.
- Zahlen, die bei diesem Vorgehen nicht gestrichen wurden, sind Primzahlen.

■ **BEISPIEL 6 (2.4.)**

Ermittlung aller Primzahlen von 2 bis 40:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~

$\diagdown$: Erste Streichung
$\diagup$: Zweite Streichung
—: Dritte Streichung

Es erhebt sich sofort die Frage, wie lange man dieses Verfahren fortsetzen muß, um alle Primzahlen bis a mit Sicherheit ausgesondert zu haben. Die Antwort ergibt sich durch folgende Überlegungen:

a sei eine zusammengesetzte Zahl.
Die kleinste Primzahl, die Teiler von a ist, sei p.
t sei der komplementäre Teiler zu p von a.
Es gilt:
$$p \cdot t = a.$$
Da p der kleinste von 1 verschiedene Teiler von a ist, gilt:
$$p \leqq t.$$
Wir schätzen ab:
$$p \cdot p \leqq p \cdot t = a.$$
Folglich gilt:
$$p^2 \leqq a.$$

▷ **SATZ 2 (2.4.)**
Der kleinste nichttriviale Teiler einer zusammengesetzten Zahl a ist eine Primzahl, deren Quadrat kleiner oder gleich a ist.

Folgerung aus Satz 2 (2.4.):
Will man von einer Zahl a ($a > 1$) entscheiden, ob sie Primzahl ist oder nicht, so muß man die Primzahlen p mit $p^2 \leqq a$ kennen. Gibt es unter ihnen keinen Teiler von a, dann ist a eine Primzahl.

a sei eine vorgegebene natürliche Zahl.
Das Vorgehen zur Ermittlung aller Primzahlen p (mit $p \leqq a$) wird im Bild 6 (2.4.) durch ein Flußdiagramm beschrieben.
(Bild 6 (2.4.) vgl. S. 116)

Aufgabe 4 (2.4.)
Man gebe jeweils die größte Primzahl p an, deren Vielfache zu streichen sind (p wird aber nicht gestrichen), um alle Primzahlen von 2 bis 200 (500, 1000, 1000000) zu erhalten.

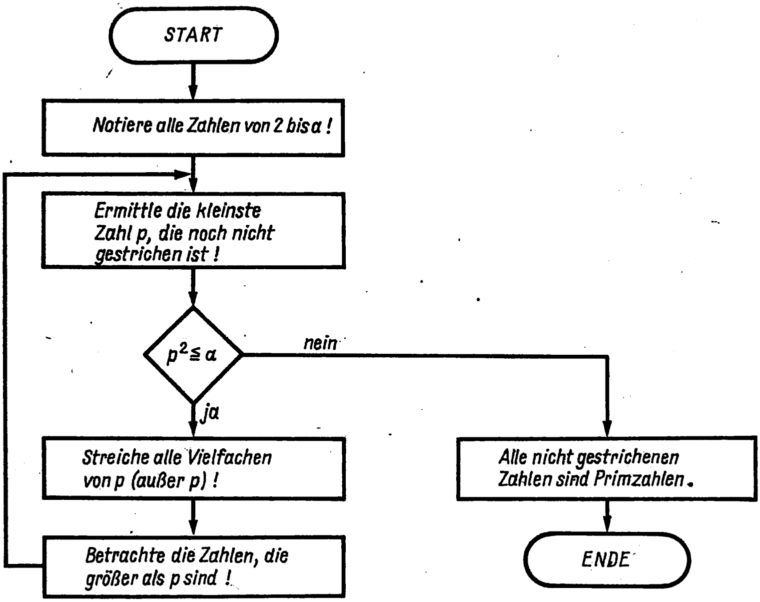


Bild 6 (2.4.)

LÖSUNG

a	p
200	13
500	19
1000	31
1000000	997

Aufgabe 5 (2.4.)
Man prüfe und begründe, ob 931 (471, 1037, 383) eine Primzahl ist.

LÖSUNG
931 ist keine Primzahl.
Begründung: 29 ist die größte Primzahl p, die $p^2 \leqq 931$ erfüllt. Es ist zu untersuchen, ob eine der Primzahlen von 2 bis 29 Teiler von 931 ist.

p	2	3	5	7	...	29
Ist p ein Teiler von 931?	nein	nein	nein	ja	...	

Die Untersuchung kann mit $p = 7$ abgeschlossen werden, weil feststeht, daß 7 ein Teiler von 931 ist.

471 ist keine Primzahl.
Begründung: Die Quersumme von 471 ist 12. Deshalb ist 471 durch 3 teilbar.

1037 ist keine Primzahl.
Begründung: 31 ist die größte Primzahl p, die $p^2 \leqq 1037$ erfüllt.
Es ist zu untersuchen, ob eine der Primzahlen von 2 bis 31 Teiler von 1037 ist.

p	2	3	5	7	11	13	17
Ist p ein Teiler von 1037?	nein	nein	nein	nein	nein	nein	ja

1037 ist durch 17 teilbar.

383 ist eine Primzahl.
Begründung: 19 ist die größte Primzahl p, die $p^2 \leqq 383$ erfüllt.
Es ist zu untersuchen, ob eine der Primzahlen von 2 bis 19 Teiler von 383 ist.

p	2	3	5	7	11	13	17	19
Ist p ein Teiler von 383?	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein	nein

Für die Verteilung der Primzahlen in N läßt sich feststellen:

Natürliche Zahlen bis n	Anzahl der Primzahlen bis n	Prozentualer Anteil der Primzahlen bis n
100	25	25 %
1000	168	16,8 %
10000	1229	12,3 %
100000	9592	9,6 %
1000000	78498	7,8 %
1000000000	50847479	5,1 %

Der prozentuale Anteil der Primzahlen wird gegenüber dem prozentualen Anteil der zusammengesetzten Zahlen immer kleiner, je mehr natürliche Zahlen betrachtet werden. Wir hatten schon erkannt, daß man beliebig viele aufeinanderfolgende natürliche Zahlen angeben kann, die keine Primzahlen sind und daß die größte bis 1985 bekannte Primzahl $2^{216091} - 1$ ist. Heißt das, daß es nur endlich viele Primzahlen gibt, daß ab einer gewissen Zahl in der Folge der natürlichen Zahlen nur noch zusammengesetzte Zahlen auftreten können?

Die Antwort auf diese Frage heißt „nein". Sie ist schon lange bekannt. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Die Richtigkeit dieser Antwort folgt daraus, daß sich zu jeder Menge von endlich vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ immer noch eine weitere Primzahl finden läßt, die nicht in dieser Menge enthalten ist.
Begründung: $p_1, \ldots, p_k$ seien endlich viele Primzahlen. Wir betrachten die natürliche Zahl a, die Nachfolger des Produktes der Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ ist.

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

Es gilt: $p_1 \nmid a$, denn p_1 ist Teiler des Produktes $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, aber p_1 ist kein Teiler von 1 (vgl. Satz 4 (2.2.)).

$p_2 \nmid a$ (Die Begründung entspricht der eben gegebenen.)

Auch für die weiteren endlich vielen Primzahlen p_3 bis p_k lassen sich analoge Überlegungen anstellen. Daraus ergibt sich, daß a durch keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ teilbar ist.
Das heißt:
Entweder
(1) a ist eine von $p_1, p_2, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahl,
oder
(2) a ist eine zusammengesetzte Zahl und hat folglich eine Primzahl p zum Teiler, die sich (wegen oben angestellter Überlegungen) von $p_1, p_2, \ldots, p_k$ unterscheidet.

In beiden Fällen ergibt sich, daß man zu endlich vielen Primzahlen immer noch eine weitere finden kann. Das bedeutet, daß es nicht nur endlich viele Primzahlen geben kann.

▷ SATZ 3 (2.4.)
Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Wir haben mit unseren Überlegungen die Existenz unendlich vieler Primzahlen gezeigt. Damit ist aber nicht gesagt, daß es ein Verfahren zur (vollständigen) Ermittlung von Primzahlen gibt. Es ist bei Existenzbeweisen oft der Fall, daß sie die Existenz bestimmter Elemente bestätigen, ohne einen Weg zu deren (vollständiger) Ermittlung zu eröffnen.

Beispiel 7 (2.4.) zeigt, daß beide in der Begründung betrachteten Fälle auftreten.

■ BEISPIEL 7 (2.4.)

$a = 2 \cdot 3 + 1 = 7$	7 ist eine Primzahl.
$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$	31 ist eine Primzahl.
$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$	211 ist eine Primzahl.
$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$	2311 ist eine Primzahl.
$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$	30031 ist keine Primzahl.
	59 ist eine Primzahl.
	509 ist eine Primzahl.

Die Wichtigkeit des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie wird durch die nachfolgenden Betrachtungen zum größten gemeinsamen Teiler und zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen natürlicher Zahlen untermauert.

Aufgabe 6 (2.4.)
Eine Haltestelle wird von zwei unterschiedlichen Buslinien bedient. Die Busse der ersten Linie fahren im Abstand von 15 Minuten. Die Busse der zweiten Linie fahren im Abstand von 18 Minuten. Laut Fahrplan fahren um 10.00 Uhr Busse beider Linien ab.
Nach wie vielen Minuten fahren fahrplangemäß wieder Busse beider Linien gleichzeitig an dieser Haltestelle ab?

LÖSUNG
Man bildet Vielfache der Zahlen 15 und 18 und stellt fest, welches kleinste Vielfache beiden Zahlen gemeinsam ist.

Vielfache von 15	15		30		45		60		75	90	...
Vielfache von 18		18		36		54		72		90	...

Nach 90 Minuten fahren wieder Busse beider Linien an dieser Haltestelle ab.

Die Ermittlung des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* und des *größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen* ist u. a. für die Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche von Bedeutung.

▶ DEFINITION 2 (2.4.)
a und b seien natürliche Zahlen.
Eine natürliche Zahl v heißt **gemeinsames Vielfaches von a und b** genau dann, wenn a und b Teiler von v sind.

▶ DEFINITION 3 (2.4.)
a und b seien natürliche Zahlen.
Eine natürliche Zahl m heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b** genau dann, wenn m ein gemeinsames Vielfaches von a und b und jedes gemeinsame Vielfache von a und b Vielfaches von m ist.

Zeichen für das „kleinste gemeinsame Vielfache von a und b“:
$\mathbf{[a, b] = m}$.

■ BEISPIEL 8 (2.4.)

(1) Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 6 und 8:
V ist die Menge der gemeinsamen Vielfachen von 6 und 8.
$V = \{0, 24, 48, 72, \ldots\}$
Zu V gehören alle natürlichen Zahlen x, die $x = 24 \cdot n$ ($n \in N$) erfüllen.
$[6, 8] = 24$
0 ist wegen Definition 2 (2.4.) nicht das kleinste gemeinsame Vielfache von 6 und 8, weil jedes gemeinsame Vielfache von 6 und 8 auch Vielfaches von [6, 8] sein muß. 48 ist aber zum Beispiel kein Vielfaches von 0.

(2) b sei eine beliebige natürliche Zahl.
$[0, b] = [b, 0] = 0$

(3) $[12, 15] \neq 120$, denn 60 ist gemeinsames Vielfaches von 12 und 15. 60 ist aber kein Vielfaches von 120.

Aufgabe 7 (2.4.)
Ein Rechteck mit einer Seitenlänge von 165 mm bzw. 275 mm soll mit möglichst wenigen (einander kongruenten) Quadraten vollständig ausgelegt werden.
Wie viele Quadrate benötigt man dazu?

LÖSUNG
Damit eine vollständige Auslegung des Rechtecks garantiert ist, muß die Maßzahl der Länge einer Quadratseite Teiler von 165 und Teiler von 275 sein.

Teiler von 165	1	3	5	11	15		33	55	165	
Teiler von 275	1		5	11		25		55		275

Mit Quadraten, deren Seitenlänge 1 mm, 5 mm, 11 mm oder 55 mm beträgt, kann das Rechteck vollständig ausgelegt werden. Jede der Zahlen 1, 5, 11 und 55 ist Teiler von 165 und 275.
Wir sagen: 1, 5, 11 und 55 sind **gemeinsame Teiler von 165 und 275**.
Weil die Anzahl der Quadrate zur Auslegung des Rechtecks möglichst klein sein soll, sind Quadrate mit einer Seitenlänge von 55 mm zu wählen. 15 Quadrate dieser Art werden zur Lösung des Problems benötigt.

▶ DEFINITION 4 (2.4.)
a und b seien natürliche Zahlen.
Eine natürliche Zahl t heißt **gemeinsamer Teiler von a und b** genau dann, wenn t Teiler von a und Teiler von b ist.

So wie in Aufgabe 7 (2.4.) muß man oft gemeinsame Teiler zweier Zahlen ermitteln. Meistens interessiert dann der größte dieser gemeinsamen Teiler.

DEFINITION 5 (2.4.)
a und *b* seien natürliche Zahlen.
Eine natürliche Zahl ***d*** heißt **größter gemeinsamer Teiler von *a* und *b*** genau dann, wenn *d* gemeinsamer Teiler von *a* und *b* ist und wenn für alle gemeinsamen Teiler *t* von *a* und *b* gilt, daß sie Teiler von *d* sind.

Zeichen für den „größten gemeinsamen Teiler von *a* und *b*":
$(a, b) = d$.

BEISPIEL 9 (2.4.)

$(15, 36) = 3$		
$(81, 56) = 1$		
$(0, 5)$	$= 5$	Jede natürliche Zahl ist Teiler von 0. 5 hat die Teiler 1 und 5. Die gemeinsamen Teiler von 0 und 5 sind die Zahlen 1 und 5.
$(0, 0)$	$= 0$	Jede natürliche Zahl ist Teiler von 0.

Wenn der größte gemeinsame Teiler zweier voneinander verschiedener Zahlen *a* und *b* die Zahl 1 ist, so sagt man:

a **ist teilerfremd zu** *b* oder auch *a* **ist relativ prim zu** *b*.

Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen und der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen sind jeweils eindeutig bestimmt. Die eindeutige Bestimmtheit des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen *a* und *b* ergibt sich aus folgender Überlegung:

(1) $(0, 0) = 0$
(2) Sind *a* und *b* nicht beide 0, haben sie wenigstens den gemeinsamen Teiler 1. *a* und *b* haben endlich viele Teiler gemeinsam. Einer davon muß der größte sein (denn in einer Menge von endlich vielen Zahlen gibt es stets eine größte). Man kann ihn ermitteln, indem man die Teiler der Größe nach ordnet.

In den Aufgaben 6 (2.4.) und 7 (2.4.) wurde jeweils ein Weg zur Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bzw. des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen dargestellt. Die dabei gewählte Vorgehensweise orientiert sich deutlich an den entsprechenden Definitionen. Sie ist aber nicht rationell. Ein effektiveres Verfahren ergibt sich, wenn man die kanonische Darstellung von Zahlen nutzt.

Man bestimmt den **größten gemeinsamen Teiler** der von Null verschiedenen Zahlen *x* und *y*, indem man
- von ihrer kanonischen Darstellung ausgeht und
- von jeder dabei auftretenden Primzahl die Potenz mit dem kleinsten Exponenten wählt und
- das Produkt dieser ausgewählten Potenzen bildet.

Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers von	
28 und 36	x und y ($x \neq 0$, $y \neq 0$)
$28 = 2^2 \cdot 7^1$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $(28, 36) = 2^2 = 4$	$x = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ $y = p_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k}$ $(x, y) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(a_k, b_k)}$
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$ $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 0$ $\min(a_1, b_1) = \min(2, 2) = 2$ $\min(a_2, b_2) = \min(0, 2) = 0$ $\min(a_3, b_3) = \min(1, 0) = 0$	$p_1, \ldots, p_k$ sind die ersten k Primzahlen. $\left.\begin{matrix} a_1, \ldots, a_k \\ b_1, \ldots, b_k \end{matrix}\right\}$ sind natürliche Zahlen. Sie sind 0, wenn die zugehörige Primzahl in der kanonischen Zerlegung von x bzw. y gar nicht auftritt. $\min(a_i, b_i) = \begin{cases} a_i & \text{für } a_i \leqq b_i \\ b_i & \text{für } b_i < a_i \end{cases}$ $1 \leqq i \leqq k$, $i \in N$

Das eben beschriebene Verfahren ist auch anwendbar, wenn man von mehr als zwei natürlichen Zahlen den größten gemeinsamen Teiler errechnen möchte.
Weshalb erhält man mit diesem Verfahren den größten gemeinsamen Teiler d von x und y?
Gäbe es eine Zahl d_1, die größer als d ist und ebenfalls gemeinsamer Teiler von x und y wäre, so enthielte ihre kanonische Darstellung eine Potenz $p_i^{c_i}$ mit $c_i > \min(a_i, b_i)$.
Diese Potenz wäre größer als $p_i^{a_i}$ oder $p_i^{b_i}$. Das bedeutete aber, daß d_1 kein Teiler von x oder y sein könnte, also auch kein gemeinsamer Teiler dieser beiden Zahlen sein kann.

Ermittlung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von	
28 und 36	x und y ($x \neq 0$, $y \neq 0$)
$28 = 2^2 \cdot 7^1$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $[28, 36] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 252$	$x = p_i^{a_i} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ $y = p_1^{b_i} \cdot \ldots \cdot p_k^{b_k}$ $[x, y] = p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(a_k, b_k)}$
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$ $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 0$ $\max(a_1, b_1) = \max(2, 2) = 2$ $\max(a_2, b_2) = \max(0, 2) = 2$ $\max(a_3, b_3) = \max(1, 0) = 1$	$p_1, \ldots, p_k$ sind die ersten k Primzahlen. $\left.\begin{matrix} a_1, \ldots, a_k \\ b_1, \ldots, b_k \end{matrix}\right\}$ sind natürliche Zahlen. Sie sind 0, wenn die zugehörige Primzahl in der kanonischen Zerlegung von x bzw. y nicht auftritt. $\max(a_i, b_i) = \begin{cases} a_i & \text{für } a_i \geqq b_i \\ b_i & \text{für } b_i > a_i \end{cases}$ $1 \leqq i \leqq k$, $i \in N$

Man ermittelt das **kleinste gemeinsame Vielfache** der von Null verschiedenen Zahlen x und y, indem man
- von ihrer kanonischen Darstellung ausgeht und
- von jeder dabei auftretenden Primzahl die Potenz mit dem größten Exponenten wählt und
- das Produkt dieser ausgewählten Potenzen bildet.

Das beschriebene Vorgehen ist in entsprechender Weise anwendbar, wenn von mehr als zwei natürlichen Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache errechnet werden soll.
Weshalb erhält man auf dem genannten Weg das kleinste gemeinsame Vielfache m ($m \neq 0$) von x und y?
Gäbe es eine Zahl m_1 ($m_1 \neq 0$), die kleiner als m und ebenfalls gemeinsames Vielfaches von x und y wäre, so enthielte ihre kanonische Darstellung eine Potenz $p_i^{c_i}$ mit $c_i < \max(a_i, b_i)$. Diese Potenz wäre demnach kleiner als $p_i^{a_i}$ oder $p_i^{b_i}$. Das bedeutet aber, daß m_1 kein Vielfaches von x oder y sein könnte, also auch kein gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen sein kann.
Zwischen dem größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen und ihrem kleinsten gemeinsamen Vielfachen besteht eine Beziehung, die empirisch aus folgender Übersicht abgeleitet werden kann.

a	b	(a, b)	$[a, b]$	$a \cdot b$
6	24	6	24	144
8	9	1	72	72
11	11	11	11	121
24	20	4	120	480
18	12	6	36	216
11	9	1	99	99
6	8	2	24	48
1	1	1	1	1
0	7	7	0	0
0	0	0	0	0

Für die Zahlen in dieser Übersicht gilt stets:

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$$

Daß diese Beziehung nicht zufällig, sondern gesetzmäßig gilt, kann man nachweisen, indem man von der kanonischen Darstellung der Zahlen a und b ausgeht.[1] Aus

[1] Weil sich die kanonische Darstellung auf natürliche Zahlen n ($n > 1$) bezieht, müssen allerdings noch folgende Sonderfälle beachtet werden:
(1) $a = 1$ und $b = 1$
(2) $a = 0$ und $b \in N$ bzw. $b = 0$ und $a \in N$.

dieser Darstellung erkennt man auch, daß diese Beziehung nicht gilt, wenn man mehr als zwei Zahlen betrachtet.

▷ SATZ 4 (2.4.)
Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt:
$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

Aufgabe 8 (2.4.)
In einem Ferienlager sind weniger als 100 Kinder. Treten sie in Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfer- oder Sechserreihen zum Appell an, bleibt stets ein Kind übrig. Wie viele Kinder sind in diesem Ferienlager?

LÖSUNG
Die Anzahl der Kinder sei k.
Offensichtlich läßt k bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1. Das kleinste gemeinsame Vielfache v der Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 läßt bei Division durch eine dieser Zahlen immer den Rest 0. Addiert man zu v (oder einem Vielfachen von v) 1, so erhält man eine Zahl, die bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 den Rest 1 läßt.

$$\begin{aligned}
2 &= 2 \\
3 &= \quad 3 \\
4 &= 2^2 \\
5 &= \qquad 5 \\
6 &= 2 \cdot 3 \\
\hline
[2, 3, 4, 5, 6] &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60
\end{aligned}$$

Die Zahlen 61, 121, 181, ..., $60n + 1$ ($n \in N$, $n \geqq 1$) erfüllen zunächst die genannte Bedingung hinsichtlich des Restes. Nur die Zahl 61 kommt jedoch als Lösung der Aufgabe in Betracht, da im Lager weniger als 100 Kinder sind.
Im Ferienlager sind 61 Kinder.

Für große Zahlen ist es recht mühsam, mittels der kanonischen Darstellung den größten gemeinsamen Teiler oder das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen zu finden. Es gibt ein Verfahren, das relativ schnell zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen führt. Es fußt auf der Division mit Rest. Unter Ausnutzung der im Satz 4 (2.4.) festgehaltenen Gesetzmäßigkeit ist es auch zur Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen geeignet. Das Verfahren heißt **Euklidischer Algorithmus**.

■ BEISPIEL 10 (2.4.)
Es soll der größte gemeinsame Teiler von 2784 und 864 errechnet werden.

$$\begin{aligned}
2784 &= 3 \cdot 864 + 192 \\
864 &= 4 \cdot 192 + 96 \\
192 &= 2 \cdot 96 \\
(2784, 864) &= 96
\end{aligned}$$

Wir erläutern das Vorgehen an zwei beliebig gewählten natürlichen Zahlen a und b. a sei größer oder gleich b, und b sei ungleich Null.
Es werden nacheinander folgende Divisionen mit Rest ausgeführt:

(1)	$a = q_1 \cdot b + r_1$	$0 \leqq r_1 < b$
(2)	$b = q_2 \cdot r_1 + r_2$	$0 \leqq r_2 < r_1$
(3)	$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$	$0 \leqq r_3 < r_2$
	$\vdots$	$\vdots$
(n)	$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n$	$0 \leqq r_n < r_{n-1}$

Die Divisionen mit Rest werden solange ausgeführt, bis erstmalig der Rest Null auftritt. Das sei im $(n + 1)$ten Schritt der Fall.

$(n + 1) \quad r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n$

Der letzte von Null verschiedene Rest ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.

$$(a, b) = r_n$$

Begründung:

1. Die Reste werden immer kleiner $(r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n)$. Deshalb muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen, etwa nach dem n-ten Schritt.
2. $r_n | a$ und $r_n | b$.
   Das bedeutet: r_n ist ein gemeinsamer Teiler von a und b.
   Begründung: Wir gehen von den oben stehenden $n + 1$ Gleichungen aus und betrachten sie der Reihe nach, bei $(n + 1)$ beginnend.
   Aus Gleichung $(n + 1)$ folgt wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation in der Menge der natürlichen Zahlen:
   (1*) $\quad r_n | r_{n-1}$
   Aus Gleichung (n) und (1*) ergibt sich:
   (2*) $\quad r_n | r_{n-2}$,
   denn r_n ist Teiler der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (n).
   Deshalb muß die Zahl r_{n-2}, die auf der linken Seite dieser Gleichung steht, ebenfalls den Teiler r_n haben.
   Die Überlegung, die zu (2*) führte, wenden wir nun in entsprechender Weise auf alle weiteren Gleichungen an. Wir erhalten schließlich:
   $$r_n | a \quad \text{und} \quad r_n | b.$$
3. r_n ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.
   Begründung: Der größte gemeinsame Teiler von a und b sei d. Wir betrachten die Gleichungen (1) bis $(n + 1)$, bei (1) beginnend.
   Aus (1) folgt wegen $d | a$ und $d | b$:
   (1**) $\quad d | r_1$.
   Aus (2) und (1**) folgt:
   (2**) $\quad d | r_2$.
   Diese Überlegung wird entsprechend für die folgenden Gleichungen angestellt. Wir erhalten schließlich:
   $$d | r_n.$$
   d ist der größte gemeinsame Teiler von a und b. r_n ist gemeinsamer Teiler von a und b. Weil außerdem d Teiler von r_n ist, muß d gleich r_n sein.

Wenn man den Euklidischen Algorithmus benutzt, vollzieht man bis zum Abbruch des Verfahrens immer wieder dieselben Schritte.

1. Schritt
Man dividiere die (größere) Zahl a durch b und nenne den Rest r.

2. Schritt
Man entscheide, ob r gleich Null ist.

1. Fall: r ist gleich Null.
Es gilt: $(a, b) = b$

2. Fall: r ist ungleich Null.
Man aktualisiere (ersetze) die Plätze, an denen im 1. Schritt a und b standen, in folgender Weise und führe dann wieder den 1. Schritt aus:
a wird durch b ersetzt;
b wird durch r ersetzt.

Wie diese Schritte nacheinander zu absolvieren sind, zeigt Bild 7 (2.4.).

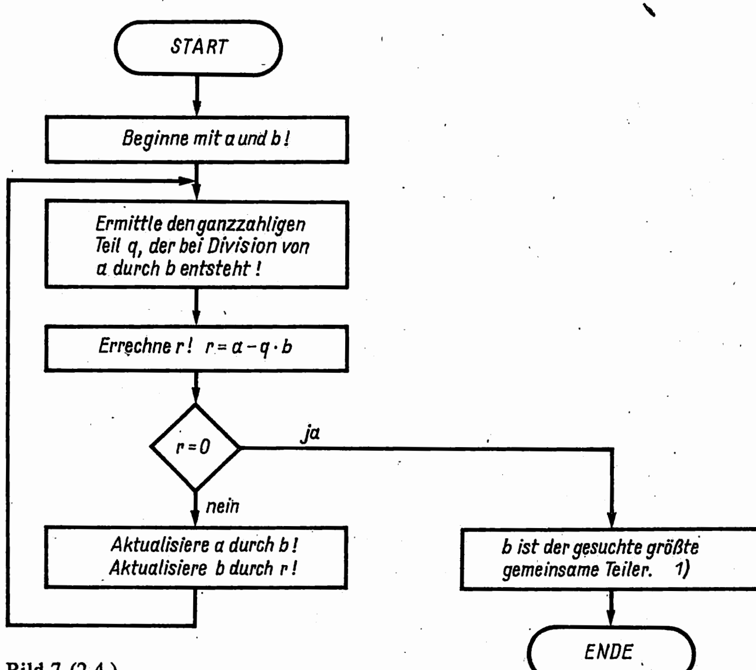


Bild 7 (2.4.)

---

1) Man beachte, daß in diesem Feld letztlich nicht unbedingt b steht, sondern der aktualisierte Wert für b.
Man verdeutliche sich, daß der Ablauf des Verfahrens auch dann zum Ziel führt, wenn $a < b$ ist.

Wir betrachten abschließend noch ein Beispiel und geben dabei rechts eine verkürzte Darstellung des Verfahrens an. Die Pfeile verdeutlichen, in welcher Weise jeweils die Aktualisierung von a und b vorzunehmen ist.

■ BEISPIEL 11 (2.4.)

Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler von 7576 und 6591.

$$7576 = 1 \cdot 6591 + 985$$
$$6591 = 6 \cdot 985 + 681$$
$$985 = 1 \cdot 681 + 304$$
$$681 = 2 \cdot 304 + 73$$
$$304 = 4 \cdot 73 + 12$$
$$73 = 6 \cdot 12 + 1$$
$$12 = 12 \cdot 1$$

a	b	r
7576	6591	985
6591	985	681
985	681	304
681	304	73
304	73	12
73	12	1
12	1	

Die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen wird besonders rationell, wenn man einen Taschenrechner nutzt und in einer Tabelle nur noch die aktuellen Werte von a, b und r festhält.

In Aufgabe 8 (2.4.) wurde das kleinste gemeinsame Vielfache von fünf Zahlen errechnet. Die Errechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen oder des größten gemeinsamen Teilers von mehr als zwei Zahlen kann auf die Berechnung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen bzw. des größten gemeinsamen Teilers von zwei Zahlen zurückgeführt werden.

Das sichern die Sätze 5 (2.4.) und 6 (2.4.).

▷ **SATZ 5 (2.4.)**

Für den größten gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt stets:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \big((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\big).$$

■ BEISPIEL 12 (2.4.)

$(36, 48, 16) = \big((36, 48), 16\big) = (12, 16) = 4$

$(36, 48, 16, 24) = \big((36, 48, 16), 24\big) = (4, 24) = 4$

In einem Baumdiagramm, das von oben nach unten zu lesen ist, spiegelt sich dieses Vorgehen folgendermaßen wider (vgl. Bild 8 (2.4.)). Im Bild 9 (2.4.) wird noch eine weitere Möglichkeit des Vorgehens angegeben.

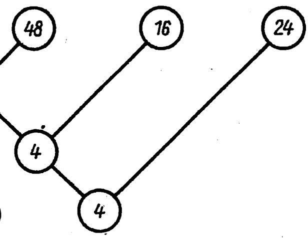


Bild 8 (2.4.)

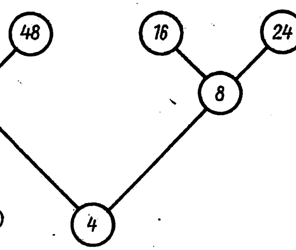


Bild 9 (2.4.)

▷ **SATZ 6 (2.4.)**
Für das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gilt stets:
$\left[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\right] = \big[[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n\big].$

■ BEISPIEL 13 (2.4.)

$[36, 48, 16] = \big[[36, 48], 16\big] = [144, 16] = 144$

$[36, 48, 16, 24] = \big[[36, 48, 16], 24\big] = [144, 24] = 144$

In einem von oben nach unten zu lesenden Baumdiagramm (vgl. Bild 10 (2.4.)) wird dieses Vorgehen nochmals dargestellt. Bild 11 (2.4.) zeigt eine andere Vorgehensweise.

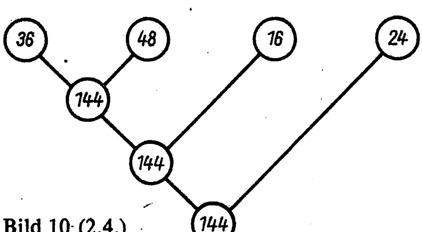


Bild 10 (2.4.)

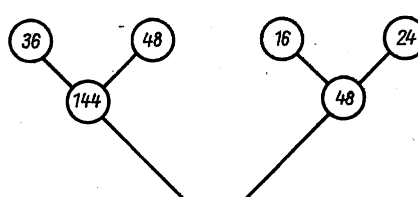


Bild 11 (2.4.)

Übungen 2.4.

1. Es sind alle Zahlen bis einschließlich 200 zu nennen, die genau 8 Teiler haben.

2. Man ermittle alle Primzahlzwillinge bis 250.

3. a) Durch welche Zahl ist die Summe von Primzahlzwillingen vermutlich immer teilbar, falls diese Summe größer als 10 ist?
   b) Die Richtigkeit der unter a) aufgestellten Vermutung ist zu beweisen.

4. Welche der Zahlen $2^2 - 1, 2^3 - 1, 2^4 - 1, \ldots, 2^{10} - 1$ sind Primzahlen?

5. Für welche natürlichen Zahlen n $(1 \leqq n \leqq 10)$ ist $z = n^2 + n + 5$ eine Primzahl?

6. Das abgebildete Rechteck ist so in deckungsgleiche Vielecke zu zerlegen, daß das Produkt der in jedem Vieleck angegebenen Zahlen 525 ist.

5	3	5	5	7	3
7	3	5	7	5	5
7	3	5	7	5	5
5	3	5	5	7	3

7. a und b seien natürliche Zahlen und es gelte:
   $a > b$, $b \neq 0$ und $(a, b) = d$.
   Ist es möglich, daß $d > a - b$ ist? (Begründung!)

8. Es soll die kleinste natürliche Zahl a angegeben werden, die folgende Eigenschaften hat:
   (1) a läßt bei Division durch 3 den Rest 2.
   (2) a läßt bei Division durch 4 den Rest 3.

3. Betrachtungen zum Bereich der reellen Zahlen

3.1. Erweiterung von Zahlenbereichen

Da im Arithmetikunterricht der Oberschule in den Klassen 1 bis 4 fast ausschließlich mit natürlichen Zahlen gearbeitet wird, wurden der Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen und Relationen und Operationen in dieser Menge im 1. Kapitel dieses Buches umfassend dargestellt.
Mit dem Abschnitt 3.1. wird das Ziel verfolgt, dem Leser einen Überblick über die Erweiterung von Zahlenbereichen zu geben, um bereits aus der Oberschule vorhandene Kenntnisse zu reaktivieren und über fachliche Grundlagen zu informieren. Dabei wird kein geschlossener Aufbau der einzelnen Zahlenbereiche angestrebt.
Zahlenbereiche werden erweitert mit dem Ziel, bestimmte Rechenoperationen uneingeschränkt ausführen bzw. bestimmte Gleichungen im neu konstruierten Zahlenbereich uneingeschränkt lösen zu können.

Aufgabe 1 (3.1.)

a) Verschaffen Sie sich einen Überblick über die Ausführbarkeit der Rechenoperationen im Zahlenbereich der natürlichen Zahlen!

b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen im Grundbereich der natürlichen Zahlen!
(1) $8x - 22 = 250$ (2) $82 + 2a = 24$ (3) $5 \cdot (3y + 19) = 728$
(4) $21b - 54 = 72$ (5) $3(x+2)(2x-3) = 3(x-2)$

LÖSUNG:

b) Durch äquivalentes Umformen gelangt man zu folgenden Gleichungen, aus denen die Lösungsmenge leicht ablesbar ist:
(1) $x = 34$; $L = \{34\}$ (2) $41 + a = 12$; $L = \emptyset$
(3) $15y = 633$; $L = \emptyset$ (4) $b = 6$; $L = \{6\}$ (5) $x^2 = 2$; $L = \emptyset$.

3.1.1. Der Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen

Während die Operationen Addition und Multiplikation in N uneingeschränkt ausführbar sind, läßt sich im Bereich der natürlichen Zahlen nicht jede Subtraktions- und nicht jede Divisionsaufgabe lösen. Damit die Differenz bzw. der Quotient in N existieren, müssen für den Minuenden und Subtrahenden bzw. für den Dividenden und Divisor bestimmte Bedingungen erfüllt sein.

Zahlreiche Aufgaben der Praxis machen es jedoch erforderlich, diese einschränkenden Bedingungen zu beseitigen.
Um alle Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ ($a \in N$, $b \in N$, $a \neq 0$) bzw. $a + x = b$ ($a \in N$, $b \in N$) (vgl. Aufgabe 1 (3.1.)) lösen zu können, ist es erforderlich, den Bereich der natürlichen Zahlen zu einem Zahlenbereich zu erweitern, in dem die Division und die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar sind.

Dieses Ziel soll schrittweise erreicht werden:
Weg 1:
1. Neben der uneingeschränkten Ausführbarkeit der Addition und Multiplikation wird die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Division verlangt (mit Ausnahme der Division durch 0) (vgl. Aufgabe 1 (1.4.4.)). Man erhält den Bereich Q_+ der gebrochenen Zahlen.
2. Der Bereich Q_+ wird dann so erweitert, daß neben der Addition, Multiplikation und Division (Divisor ungleich Null) auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar ist. Man erhält den Bereich Q der rationalen Zahlen.
3. Eine Erweiterung des Bereichs Q der rationalen Zahlen zum Bereich R der reellen Zahlen erfolgt u. a., um alle Gleichungen der Form $x^n = a$ ($a > 0$, $n \in N$, $n \geqq 2$) lösen zu können (vgl. (5) in Aufgabe 1 (3.1.)).

Es ist jedoch auch möglich, das o. g. Ziel wie folgt zu erreichen:
Weg 2:
1. Neben der uneingeschränkten Ausführbarkeit der Addition und Multiplikation wird die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion gefordert. Man gelangt zum Bereich Z der ganzen Zahlen.
2. Der Bereich Z wird dann so erweitert, daß neben der Addition, Multiplikation und Subtraktion auch die Division (Divisor ungleich 0) uneingeschränkt ausführbar ist. Man erhält den Bereich Q der rationalen Zahlen.
3. analog zu Weg 1

Der *Weg 1* folgt der historischen Entwicklung der Zahlenbereiche und ist identisch mit der Reihenfolge der Zahlenbereichserweiterungen im Mathematiklehrgang unserer Schule.
Der *Weg 2* ist in der mathematischen Fachliteratur häufig zu finden. Er orientiert sich an der Stufenfolge der Rechenoperationen Addition – Multiplikation und löst auch das Problem der uneingeschränkten Ausführbarkeit der zugehörigen Umkehroperationen in dieser Reihenfolge.

In unseren Mathematiklehrplänen ist der Weg 1 zu finden, denn die Kinder kommen in ihrer Umwelt viel eher mit solchen Sachverhalten in Berührung, die die Einführung gebrochener Zahlen und das Rechnen mit ihnen erfordern, als mit solchen, die zu den ganzen Zahlen führen. Der so gewählte Weg hat außerdem den Vorteil, daß relativ frühzeitig ein dichter Zahlenbereich (vgl. Definition 5 (3.1.1.)) zur Verfügung steht. Dadurch sind in einer verhältnismäßig frühen Etappe des Mathematikunterrichts die für die polytechnische Bildung und Erziehung der Schüler notwendigen Anwendungen möglich.

Im folgenden wird für den weiteren Aufbau der Zahlenbereiche der Weg 1 in Analogie zum Vorgehen in der Schule beschritten.

Mit jeder *Zahlenbereichserweiterung* werden folgende *Ziele* verfolgt:

1. Der neu konstruierte Zahlenbereich „umfaßt“ den vorliegenden Zahlenbereich, d. h., der vorliegende Zahlenbereich ist eine echte Teilmenge des neu konstruierten Zahlenbereichs.[1)]
2. Im neu konstruierten Zahlenbereich lassen sich die Grundrechenoperationen und die Ordnungsrelationen so definieren, daß alle bisherigen Rechengesetze erhalten bleiben.[2)]
3. Gewisse Unzulänglichkeiten des vorhandenen Zahlenbereichs sind im neu konstruierten Zahlenbereich beseitigt (mindestens eine weitere Operation ist uneingeschränkt ausführbar).

Bei der Angabe von Größen (z. B. beim Messen) oder bei der Angabe von Warenmengen (z. B. beim Verteilen oder Aufteilen einer Warenmenge) reichen die natürlichen Zahlen nicht aus. Im täglichen Leben benutzt man Brüche, um Teile eines Ganzen – einer Menge, den Zahlenwert einer Größe usw. – anzugeben.
Was ist ein Bruch?
Dem Leser ist bekannt, daß ein Bruch ein geordnetes Paar $(a; b)$ von natürlichen Zahlen a, b mit $b \neq 0$ ist; a heißt Zähler, b heißt Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$.

Im Mathematiklehrgang unserer Schule werden Brüche der Form $\frac{a}{1}$ $(a \in N)$ von Anfang an mit den natürlichen Zahlen a identifiziert.

Aufgabe 1 (3.1.1.)

Wolfgang soll 3 Flaschen Milch zu je $\frac{1}{2}$ l Inhalt holen. Es sind jedoch nur Flaschen zu $\frac{1}{4}$ l da. Was kann er tun?

LÖSUNG

Wolfgang kann 6 Flaschen zu $\frac{1}{4}$ l kaufen, denn $\frac{3}{2}\,\mathrm{l} = \frac{6}{4}\,\mathrm{l}$.

---

1) Erweiterung eines Zahlenbereichs wird auch so verstanden, daß es im neu konstruierten Zahlenbereich eine echte Teilmenge gibt derart, daß jedem Element des vorliegenden Zahlenbereichs genau ein Element dieser Teilmenge zugeordnet werden kann und umgekehrt. Dabei wird gefordert, daß sich die Elemente der echten Teilmenge des neu konstruierten Zahlenbereichs bezüglich der neu definierten Rechenoperationen und Ordnungsrelationen genauso verhalten wie die ihnen zugeordneten Elemente des vorliegenden Zahlenbereichs. Die echte Teilmenge des neu konstruierten Zahlenbereichs wird dann durch den vorliegenden Zahlenbereich ersetzt.

2) Bei allen Zahlenbereichserweiterungen findet das Permanenzprinzip Anwendung: „Es ist ein von Hankel formuliertes heuristisches Prinzip, die Gültigkeit eines aus Analogie vermuteten Gesetzes dadurch zu erreichen, daß man den Begriff, auf den es angewendet wird, passend erweitert.“ (Gellert, W./Kästner, H./Neuber, S.: *Lexikon der Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1985, S. 425)

Mit der Aufgabe 1 (3.1.1.) wird deutlich, daß voneinander verschiedene Brüche gleiche Bruchteile einer Größe beschreiben können.

Die Brüche $\frac{3}{2}$ und $\frac{6}{4}$ gehen durch *Erweitern* oder *Kürzen* auseinander hervor, d. h., Zähler und Nenner werden mit einer von Null verschiedenen natürlichen Zahl multipliziert bzw. durch eine solche dividiert. Beide Brüche sind gleich groß. Sie repräsentieren dieselbe gebrochene Zahl.

Die Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen läßt sich in Analogie zur Menge N der natürlichen Zahlen über einen Abstraktionsprozeß konstruieren. Als Ausgangsmenge wählt man die Produktmenge $N \times (N \setminus \{0\})$, die alle Brüche $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ enthält.

In der Menge aller Brüche, die man mit B bezeichnen kann, wird eine Äquivalenzrelation, die **Quotientengleichheit**, definiert.

▶ DEFINITION 1 (3.1.1.)

$\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ seien Brüche mit $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, $d \in N$ und $b \neq 0$ und $d \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ ist **quotientengleich** zu $\frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d = c \cdot b$ gilt.

■ BEISPIEL 1 (3.1.1.)

$\frac{10}{14}$ ist quotientengleich zu $\frac{15}{21}$, denn $10 \cdot 21 = 15 \cdot 14$.

$\frac{9}{6}$ ist *nicht* quotientengleich zu $\frac{8}{5}$, denn $5 \cdot 9 \neq 8 \cdot 6$.

$\frac{2}{3}$ ist quotientengleich zu $\frac{16}{24}$, denn $2 \cdot 24 = 16 \cdot 3$.

Aufgabe 2 (3.1.1.)

Beweisen Sie, daß die Quotientengleichheit in der Menge $N \times (N \setminus \{0\})$ eine Äquivalenzrelation ist!

LÖSUNG:

Es ist zu zeigen, daß die Quotientengleichheit in $N \times (N \setminus \{0\})$ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Es wird nur der Beweis für die Transitivität der Relation in der betrachteten Menge dargestellt.

Voraussetzung:

Es seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ beliebige Brüche aus der Menge $N \times (N \setminus \{0\})$, und $\frac{a}{b}$ ist quotientengleich zu $\frac{c}{d}$, und $\frac{c}{d}$ ist quotientengleich zu $\frac{e}{f}$.

Behauptung:

$\frac{a}{b}$ ist quotientengleich zu $\frac{e}{f}$.

Beweis:

Nach der Voraussetzung und der Definition der Quotientengleichheit gilt
(1) $a \cdot d = c \cdot b$ und
(2) $c \cdot f = e \cdot d$ mit $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, $d \in N$, $e \in N$, $f \in N$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$.
Aus (1) folgt durch Multiplikation mit e und f:
(3) $a \cdot d \cdot e \cdot f = c \cdot b \cdot e \cdot f$,
(4) $a \cdot f \cdot e \cdot d = e \cdot b \cdot c \cdot f$
und wegen (2) und Satz 5 (1.4.4.)
(5) $a \cdot f = e \cdot b$.
Nach der Definition der Quotientengleichheit folgt
(6) $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$.
Da die Transitivität für beliebige Brüche gilt, gilt sie auch für alle Brüche der Menge $N \times (N \setminus \{0\})$, w. z. b. w.

Durch diese Äquivalenzrelation wird nach dem Hauptsatz über Äquivalenzrelationen die Menge der Brüche B in paarweise elementfremde nichtleere Teilmengen B_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ zerlegt, deren Vereinigungsmenge wieder die Ausgangsmenge ist.
Jede solche Teilmenge ist eine Äquivalenzklasse und heißt **gebrochene Zahl.**

▶ DEFINITION 2 (3.1.1.)
Die Klasse aller zu einem vorgegebenen Bruch quotientengleichen Brüche heißt **gebrochene Zahl.**

Die Menge aller dieser Klassen bildet die *Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen.*
Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ gehört zu genau einer Äquivalenzklasse, die mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet werden kann, und bestimmt diese eindeutig. Es kann deshalb jeder Bruch als Repräsentant seiner Klasse genutzt werden.

Aufgabe 3 (3.1.1.)
Wenden Sie die allgemeinen Schritte des Abstraktionsprozesses (vgl. S. 16) auf die Gewinnung von „gebrochene Zahl" und die Menge der gebrochenen Zahlen an!

LÖSUNG:
1. Vorgabe der Ausgangsmenge
$B = N \times (N \setminus \{0\})$
$$B = \left\{\frac{8}{4}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{6}{15}; \frac{12}{30}; \frac{6}{3}; \frac{15}{35}; \frac{3}{4}; \frac{10}{5}; \frac{9}{12}; \frac{200}{500}; \frac{6}{14}; \frac{30}{40}; \frac{12}{28}; \frac{6}{8}; \frac{2}{1}; \ldots\right\}$$

2. Erklären der Äquivalenzrelation
   In B wird die Relation „... ist quotientengleich zu ...“ erklärt.
3. Bilden von Äquivalenzklassen zueinander quotientengleicher Brüche

$$B_1 = \left\{\frac{2}{5}; \frac{6}{15}; \frac{12}{30}; \frac{200}{500}; \ldots\right\}$$
$$B_2 = \left\{\frac{3}{7}; \frac{15}{35}; \frac{6}{14}; \frac{12}{28}; \ldots\right\}$$
$$B_3 = \left\{\frac{3}{4}; \frac{9}{12}; \frac{30}{40}; \frac{6}{8}; \ldots\right\}$$
$$B_4 = \left\{\frac{8}{4}; \frac{6}{3}; \frac{10}{5}; \frac{2}{1}; \ldots\right\}$$
$$\vdots$$
$$B_n = \{\ldots\}$$
$$\vdots$$

4. Von der Ausgangsmenge $B = N \times (N \setminus \{0\})$ wird zur Menge der Klassen übergegangen, zur Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen.

$$Q_+ = \left\{\ldots, \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{3}{4}; \frac{2}{1}; \ldots\right\}$$

Im Unterschied zur Eindeutigkeit der Bezeichnung der natürlichen Zahlen gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Bezeichnung einer gebrochenen Zahl. Es gilt jedoch die Vereinbarung, daß man zur Bezeichnung einer gebrochenen Zahl denjenigen Bruch aus der Klasse wählt, bei dem Zähler und Nenner teilerfremd sind. Ungeachtet der Gleichheit der Symbolik muß der unterschiedliche Begriffsinhalt der Begriffe „Bruch“ und „gebrochene Zahl“ beachtet werden. Während ein *Bruch* ein Repräsentant einer gebrochenen Zahl ist, ist eine *gebrochene Zahl* eine Klasse quotientengleicher geordneter Paare natürlicher Zahlen, deren 2. Glied ungleich Null ist, also eine Klasse quotientengleicher Brüche.
Im täglichen Sprachgebrauch sagt man statt: „... die gebrochene Zahl, die durch den Bruch $\frac{3}{4}$ repräsentiert wird, ...“ einfacher: „... die gebrochene Zahl $\frac{3}{4}$ ...“.

Aufgabe 4 (3.1.1.)
Es ist festzustellen, welche der folgenden Brüche zu ein und derselben Äquivalenzklasse gehören und damit dieselbe gebrochene Zahl repräsentieren.

$$\frac{5}{3}, \frac{2}{9}, \frac{15}{9}, \frac{3}{6}, \frac{1}{2}, \frac{10}{45}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{20}{90}, \frac{50}{225}, \frac{4}{8}, \frac{10}{20}, \frac{25}{15}, \frac{2}{4}, \frac{50}{100}, \frac{10}{6}$$

LÖSUNG

Die Brüche $\frac{5}{3}, \frac{15}{9}, \frac{25}{15}, \frac{10}{6}$ sind quotientengleich, denn

$$5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 \text{ bzw.}$$
$$5 \cdot 15 = 25 \cdot 3 \text{ bzw.}$$
$$5 \cdot 6 = 10 \cdot 3 \text{ bzw.}$$
$$15 \cdot 15 = 25 \cdot 9$$
$$\vdots$$

Sie gehören zu der gebrochenen Zahl, die mit $\frac{5}{3}$ bezeichnet werden kann.

Zur gebrochenen Zahl $\frac{1}{2}$ gehören die Brüche

$\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{4}{8}, \frac{10}{20}, \frac{2}{4}, \frac{50}{100}$.

Zur gebrochenen Zahl $\frac{2}{9}$ gehören die Brüche $\frac{2}{9}, \frac{10}{45}, \frac{20}{90}, \frac{50}{225}$.

Stellt man die gegebenen Brüche auf dem Zahlenstrahl dar, so ist jedem Bruch genau ein Punkt des Zahlenstrahls zugeordnet. Alle Brüche, die auf denselben Punkt des Zahlenstrahls abgebildet werden, bezeichnen dieselbe gebrochene Zahl.

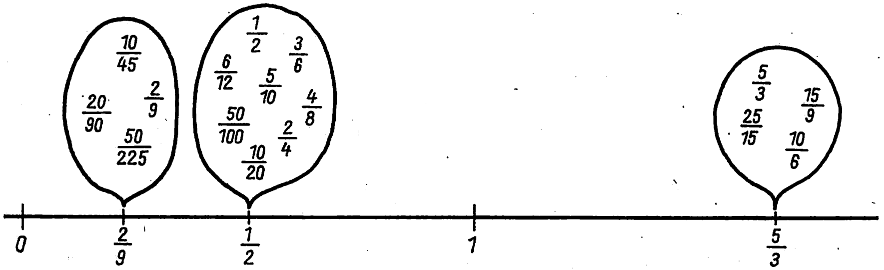


Bild 1 (3.1.1.)

▷

> SATZ 1 (3.1.1.)
>
> Ein Bruch $\frac{a}{b}$ ($a \in N$, $b \in N$; $b \neq 0$) ist zu einem Bruch $\frac{c}{d}$ ($c \in N$, $d \in N$, $d \neq 0$) quotientengleich genau dann, wenn $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen.

Der Leser verdeutliche sich den im Satz 1 (3.1.1.) formulierten Zusammenhang durch Anwendung der folgenden Definition.

▶

> DEFINITION 3 (3.1.1.)
>
> Es seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ($a \in N, b \in N, c \in N, d \in N, b \neq 0, d \neq 0$) beliebige Brüche.
>
> $\frac{c}{d}$ geht aus $\frac{a}{b}$ durch Kürzen oder Erweitern hervor genau dann, wenn es ein $k \in N$ und ein $l \in N$ ($k \neq 0$; $l \neq 0$) gibt mit $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{c \cdot l}{d \cdot l}$.

Anmerkung: Geht $\frac{c}{d}$ $(c \in N, d \in N, d \neq 0)$ allein durch Erweitern aus $\frac{a}{b}$ $(a \in N, b \in N, b \neq 0)$ hervor, so ist $l = 1$.

Geht dagegen $\frac{c}{d}$ allein durch Kürzen aus $\frac{a}{b}$ hervor, ist $k = 1$.

Anderenfalls muß man, um von $\frac{a}{b}$ zu $\frac{c}{d}$ zu gelangen, $\frac{a}{b}$ mit k erweitern und anschließend durch l kürzen.

Aufgabe 5 (3.1.1.)

(1) Man gebe alle Brüche an, die die gleiche gebrochene Zahl wie $\frac{5}{11}$ darstellen und deren Nenner eine zweistellige Zahl ist.

(2) Können folgende Brüche die gleiche gebrochene Zahl darstellen:
- a) ein Bruch mit dem Nenner 2 und ein Bruch mit dem Nenner 3,
- b) ein echter und ein unechter Bruch,
- c) zwei Brüche mit gleichem Zähler (außer 0) und verschiedenen Nennern,
- d) ein Bruch, dessen Zähler um 3 größer ist als sein Nenner, und ein Bruch, dessen Zähler um 4 größer ist als sein Nenner,
- e) zwei verschiedene gleichnamige Brüche?

Die jeweilige Entscheidung ist zu begründen.

LÖSUNG

(1) $\frac{10}{22}, \frac{15}{33}, \frac{20}{44}, \frac{25}{55}, \frac{30}{66}, \frac{35}{77}, \frac{40}{88}, \frac{45}{99}$

(2) a) Ja, denn $\frac{0}{2} = \frac{0}{3}$.

b) Nein, denn bei echten Brüchen ist der Zähler stets kleiner als der Nenner, während bei unechten Brüchen der Zähler größer als der Nenner ist.

c) Nein, denn Brüche mit verschiedenen Nennern und gleichem Zähler (außer 0) gehören zu verschiedenen gebrochenen Zahlen.
Das läßt sich wie folgt beweisen:

Voraussetzung:

$\frac{m}{a}, \frac{m}{b}$ $(m \in N, a \in N, b \in N, m \neq 0, a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

Behauptung:

$\frac{m}{a} \neq \frac{m}{b}$

Beweis (indirekt):
Annahme:

(1) $\frac{m}{a} = \frac{m}{b}$

Nach der Definition „... ist quotientengleich zu ...“ folgt aus (1)

(2) $m \cdot b = m \cdot a$ und nach Division durch m $(m \neq 0)$
(3) $b = a$.
Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Annahme falsch und die Behauptung wahr.

d) Ja, denn $\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$.

e) Nein, denn zwei gleichnamige Brüche müssen auch den gleichen Zähler haben, wenn sie dieselbe gebrochene Zahl darstellen sollen.

Die Ordnung und die Rechenoperationen werden in der Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen mit Hilfe der Brüche und unter Nutzung der Definitionen für die Ordnung und die Operationen für natürliche Zahlen erklärt.
So läßt sich beispielsweise die Kleinerrelation in Q_+ unter Verwendung von Brüchen, also von Repräsentanten für gebrochene Zahlen, wie folgt definieren:

▶ **DEFINITION 4 (3.1.1.)**
Es sei $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ ein beliebiger Repräsentant der gebrochenen Zahl $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ $(d \neq 0)$ ein beliebiger Repräsentant der gebrochenen Zahl $\frac{c}{d}$.
Die gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$ ist **kleiner** als die gebrochene Zahl $\frac{c}{d}$ genau dann, wenn $a \cdot d < c \cdot b$ gilt.

Es ist zu beachten, daß die Repräsentanten für die gebrochenen Zahlen $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ und $\frac{c}{d}$ $(d \neq 0)$ beliebig gewählt wurden.
Damit ist nicht abgesichert, daß sich die definierte Relation bei der Auswahl anderer Repräsentanten nicht ändert. Deshalb ist der Nachweis erforderlich, daß die so definierte Ordnungsrelation von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist, auf den an dieser Stelle jedoch verzichtet wird.
Die Definition 4 (3.1.1.) führt mit dem Vergleich der Produkte $a \cdot d$ und $c \cdot b$ auf die Kleinerrelation in der Menge N der natürlichen Zahlen zurück, denn a, b, c, d sind natürliche Zahlen mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$.
Es läßt sich beweisen, daß auch die Kleinerrelation in der Menge der gebrochenen Zahlen Q_+ irreflexiv, transitiv und trichotom ist. Damit ist sie wie in der Menge N der natürlichen Zahlen eine irreflexive Ordnungsrelation.
Der Leser führe den Nachweis selbständig.

Aufgabe 6 (3.1.1.)
Es sind folgende gebrochene Zahlen bezüglich ihrer Größe zu vergleichen:

a) $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{8}$ b) $\frac{8}{15}$ und $\frac{6}{11}$ c) $\frac{13}{2}$ und $\frac{52}{8}$

d) $\frac{11}{12}$ und $\frac{23}{24}$ e) $\frac{5}{1}$ und $\frac{18}{2}$

LÖSUNG

a) $\frac{3}{7} < \frac{5}{8}$, denn $3 \cdot 8 < 5 \cdot 7$
b) $\frac{8}{15} < \frac{6}{11}$, denn $8 \cdot 11 < 6 \cdot 15$
c) $\frac{13}{2} = \frac{52}{8}$, denn $13 \cdot 8 = 52 \cdot 2$
d) $\frac{11}{12} < \frac{23}{24}$, denn $11 \cdot 24 < 23 \cdot 12$
e) $\frac{5}{1} < \frac{18}{2}$, denn $5 \cdot 2 < 18 \cdot 1$

Während jede natürliche Zahl genau einen Nachfolger hat, besitzt keine gebrochene Zahl einen unmittelbaren Nachfolger. In der Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen gibt es zwischen zwei voneinander verschiedenen Zahlen stets eine weitere gebrochene Zahl. Man sagt, die Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen ist bezüglich der in ihr erklärten Ordnungsrelation überall dicht.

▶ DEFINITION 5 (3.1.1.)
Ein Zahlenbereich Z ist bezüglich der in ihm erklärten Ordnungsrelation **überall dicht** genau dann, wenn es zu zwei beliebigen Zahlen a, b ($a < b$, $a \in Z$, $b \in Z$) stets eine Zahl $c \in Z$ gibt, für die gilt $a < c < b$.

Die Operationen in Q_+ werden ebenfalls mit Hilfe von Repräsentanten für gebrochene Zahlen definiert.

Bei der Untersuchung der Operationseigenschaften kann festgestellt werden, daß die Addition und die Multiplikation genau wie in N auch in Q_+ uneingeschränkt und eindeutig ausführbar, assoziativ und kommutativ sind und daß auch für gebrochene Zahlen das Monotoniegesetz der Addition und der Multiplikation bezüglich der Ordnung gelten. Darüber hinaus kann im Bereich der gebrochenen Zahlen uneingeschränkt dividiert werden (außer durch Null).

Im Ergebnis der Untersuchungen wird u. a. deutlich, daß sich die Menge der natürlichen Zahlen N und eine echte Teilmenge der Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen, die Menge aller gebrochenen Zahlen $\frac{n}{1}$ mit $n \in N$, die man mit N_+ bezeichnen kann, eineindeutig aufeinander abbilden lassen.

Menge N der natürlichen Zahlen	0	1	2	3	4	5	6	...	n
Menge N_+ der gebrochenen Zahlen $\frac{n}{1}$ mit $n \in N$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	...	$\frac{n}{1}$

Das Ordnen der gebrochenen Zahlen der Form $\frac{n}{1}$ $(n \in N)$ und das Rechnen mit ihnen erfolgt analog zum Ordnen der natürlichen Zahlen bzw. zum Rechnen mit natürlichen Zahlen.

Deshalb soll zwischen der Menge N_+ und der Menge N nicht mehr unterschieden werden. Die Menge N_+ wird durch die Menge N ersetzt, so daß die Menge N der natürlichen Zahlen eine echte Teilmenge der Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen ist. Man sagt, N ist eingebettet in Q_+.

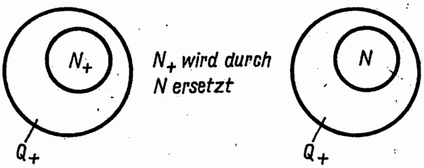


Bild 2 (3.1.1.)

Der Abstraktionsprozeß zur Gewinnung des Begriffs „gebrochene Zahl" verdeutlicht einerseits, daß den gemeinen Brüchen $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ eine gewisse Priorität vor den Dezimalbrüchen zukommt. Andererseits haben gerade die Dezimalbrüche für das tägliche Leben, für Wissenschaft und Technik eine vorrangige Bedeutung. Es ist dem Leser bekannt, daß Brüche, deren Nenner in der Form 10^n mit $n \in N \setminus \{0\}$ dargestellt werden können, Zehnerbrüche heißen und daß man Zehnerbrüche in dezimaler Schreibweise angeben kann. Es bleibt zu untersuchen, ob es für jede beliebige gebrochene Zahl $z = \frac{a}{b}$ mit $a < b$ stets einen Repräsentanten gibt, dessen Nenner ein Zehnerbruch ist.

▷ **SATZ 2 (3.1.1.)**

> Es sei $z \in Q_+$ und $\frac{a}{b}$ ein beliebiger Repräsentant von z.
>
> Es gibt einen Repräsentanten $\frac{c}{d}$ von z mit $d = 10^n$ $(n \in N \setminus \{0\})$ genau dann, wenn $b = 2^p \cdot 5^q$ $(p \in N, q \in N)$.

Auf einen Beweis von Satz 2 (3.1.1.) wird verzichtet.

■ **BEISPIEL 2 (3.1.1.)**

(1) $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ist ein Repräsentant von z_1, wobei $4 = 2^2 \cdot 5^0$. Also gibt es einen Repräsentanten $\frac{c}{d}$ von z_1, dessen Nenner eine Zehnerpotenz mit natürlichem Exponenten ist.

$\frac{c}{d} = \frac{75}{100}$ oder $\frac{c}{d} = \frac{750}{1000}$ oder ...

Damit gilt: $z_1 = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = \ldots$

Man schreibt als Dezimalbruch $z_1 = 0{,}75$ oder $z_1 = 0{,}750$ oder ...

(2) $\frac{31}{140}$ ist ein Repräsentant von z_2, wobei $140 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. Da neben 2 und 5 auch 7 in der Zerlegung des Nenners als Primfaktor auftritt, existiert kein Repräsentant von z_2, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ist.

Es kann jedoch zu jedem gemeinen Bruch ein *Dezimalbruch* angegeben werden, der die gleiche gebrochene Zahl bezeichnet. Dabei faßt man den Bruch $\frac{a}{b}$ $(a \in N,\ b \in N,\ b \neq 0)$ als Quotient $a : b$ auf und ermittelt den Dezimalbruch durch Anwendung des bekannten Divisionsalgorithmus.

■ BEISPIEL 3 (3.1.1.)

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$

$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

$\frac{31}{140} = 31 : 140 = 0{,}22\overline{142857}$

$\frac{5}{7} = 5 : 7 = 0{,}\overline{714285}$

▶ **DEFINITION 6 (3.1.1.)**
Die Darstellung einer gebrochenen Zahl heißt **Dezimalbruch** genau dann, wenn sie in dezimaler Schreibweise erfolgt.

Der Leser verdeutliche sich, wann ein Dezimalbruch endlich und wann er (unendlich) periodisch ist.
Während jede gebrochene Zahl, entstanden als Klasse quotientengleicher geordneter Paare natürlicher Zahlen bzw. als Klasse solcher Brüche, die sich durch Erweitern oder Kürzen auseinander erzeugen lassen, in der Schreibweise gemeiner Brüche keine eindeutige Darstellung hat, besitzt jede gebrochene Zahl als endlicher oder periodischer Dezimalbruch in einem vorgegebenen Positionssystem eine eindeutige Darstellung.

3.1.2. *Der Zahlenbereich der rationalen Zahlen*

Auf dem Weg zur Konstruktion des Zahlenbereichs R der reellen Zahlen wurde der erste Schritt getan. Neben der Addition und der Multiplikation ist auch die Division (Divisor ungleich Null) im Zahlenbereich Q_+ der gebrochenen Zahlen uneingeschränkt ausführbar, so daß jede Gleichung der Form $a \cdot x = b$ ($a \in Q_+$, $b \in Q_+$, $a \neq 0$) lösbar ist.
Um jedoch auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführen zu können, d. h. jede Gleichung der Form $a + x = b$ ($a \in Q_+$, $b \in Q_+$) soll lösbar sein, ist die Erweiterung des Bereichs Q_+ der gebrochenen Zahlen zum Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen erforderlich. Die Zahlenbereichserweiterung ist so vorzunehmen, daß sie den auf Seite 130f. angegebenen Zielen genügt.
In Analogie zur Gewinnung der Begriffe „natürliche Zahl" und „gebrochene Zahl" läßt sich auch der Begriff „rationale Zahl" durch Anwendung des Abstraktionsprinzips definieren.
Da jede Subtraktionsaufgabe im Bereich Q der rationalen Zahlen lösbar sein soll, wählt man als Ausgangsmenge die Menge aller geordneten Paare $(a; b)$ gebrochener Zahlen a und b, also die Produktmenge $Q_+ \times Q_+$, und schreibt diese Paare als Differenzen $(a - b)$ mit $a \in Q_+$ und $b \in Q_+$.
In der Menge der Differenzen gebrochener Zahlen, die mit D bezeichnet werden kann, wird die Äquivalenzrelation **Differenzengleichheit** definiert.

▶ DEFINITION 1 (3.1.2.)
$(a - b)$ und $(c - d)$ seien Differenzen gebrochener Zahlen aus D.
$(a - b)$ **ist differenzengleich zu** $(c - d)$ genau dann, wenn
$a + d = c + b$ gilt.

Die Differenzengleichheit bewirkt in der Menge $Q_+ \times Q_+$ eine Äquivalenzklassenbildung. Jede solche Äquivalenzklasse heißt **rationale Zahl.**

▶ DEFINITION 2 (3.1.2.)
Jede Klasse differenzengleicher geordneter Paare gebrochener Zahlen heißt **rationale Zahl.**

Die Menge aller dieser Klassen ist die *Menge Q der rationalen Zahlen.*
Für jede Klasse von Differenzen, also für jede rationale Zahl, ist eine geeignete Bezeichnungsweise zu vereinbaren.
Die rationale Zahl r, in der die Differenz $(a - 0)$ vorkommt, wird mit $+a$ (gelesen: plus a) bezeichnet. r heißt *positive rationale Zahl.*
Die rationale Zahl r, in der die Differenz $(0 - a)$ vorkommt, wird mit $-a$ (gelesen: minus a) bezeichnet. r heißt *negative rationale Zahl.*
Die rationale Zahl r, in der die Differenz $(0 - 0)$ vorkommt, wird mit 0 (Null) be-

zeichnet. r heißt *rationale Zahl Null.*
(Hierbei ist a eine Variable für eine gebrochene Zahl.)
Jede rationale Zahl r läßt sich eindeutig als vorzeichenbehafteter endlicher oder periodischer Dezimalbruch darstellen. Ein Vorzeichen wird bei der rationalen Zahl 0 und einer positiven rationalen Zahl im allgemeinen nicht geschrieben. Eine rationale Zahl r heißt *nichtnegativ*, wenn $r \geqq 0$ ist.

Aufgabe 1 (3.1.2.)

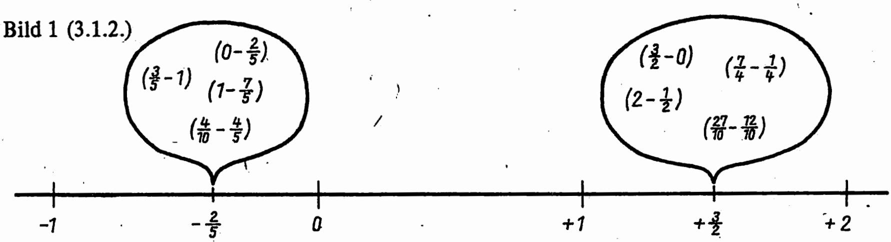
Den rationalen Zahlen $-\frac{2}{5}$ und $+\frac{3}{2}$ ist je ein Punkt der Zahlengeraden zuzuordnen. Man gebe zu jeder dieser Zahlen drei Differenzen an, die auf denselben Punkt der Zahlengeraden abgebildet werden wie die angegebene Zahl.

LÖSUNG

Differenzen können durch Streckenabtragung veranschaulicht werden. Um auch Differenzen $a - b$ mit $a < b$ Punkte zuordnen zu können, wird statt des Zahlenstrahls eine Zahlengerade verwendet.

Die rationale Zahl $-\frac{2}{5}$ enthält als Klasse alle Differenzen gebrochener Zahlen, die zu $(0 - \frac{2}{5})$ differenzengleich sind. Zur rationalen Zahl $+\frac{3}{2}$ gehören alle Differenzen gebrochener Zahlen, die zu $(\frac{3}{2} - 0)$ differenzengleich sind.

Bild 1 (3.1.2.)



In der Menge Q der rationalen Zahlen gibt es eine echte Teilmenge, die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen, die mit Q^+ bezeichnet werden kann, deren Elemente sich eineindeutig den gebrochenen Zahlen zuordnen lassen, so daß sich die nichtnegativen rationalen Zahlen bezüglich der Kleinerrelation und der Grundrechenoperationen genauso verhalten wie die gebrochenen Zahlen.
Die Menge Q^+ der nichtnegativen rationalen Zahlen kann deshalb durch die Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen ersetzt werden. Somit wird Q_+ eine echte Teilmenge von Q.

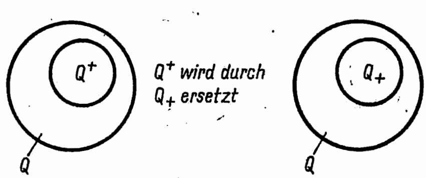


Bild 2 (3.1.2.)

Eine weitere Möglichkeit, den Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen zu konstruieren, ist die *Symmetrisierung*. Dabei wird die Menge der gebrochenen Zahlen Q_+ mit einer zu Q_+ gleichmächtigen Menge Q_- von mathematischen Objekten vereinigt. Der Durchschnitt der Mengen Q_+ und Q_- ist die gebrochene Zahl 0.
Um Differenzen gebrochener Zahlen mit Hilfe von Streckenabtragungen darstellen zu können, wird der Zahlenstrahl an einer Geraden g, die senkrecht zum Zahlenstrahl ist und durch den Punkt 0 des Zahlenstrahls geht, gespiegelt, so daß man eine *Zahlengerade* erhält.

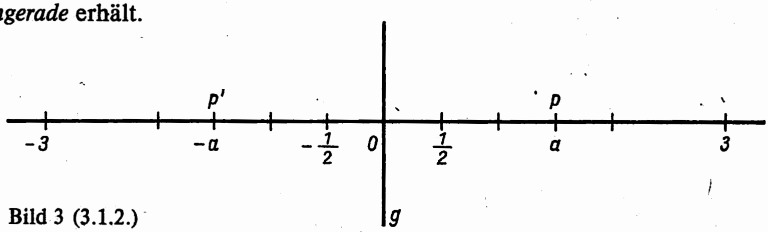


Bild 3 (3.1.2.)

Wird einem Punkt P der Zahlengeraden die gebrochene Zahl a zugeordnet, so wird dem Bildpunkt von P, dem Punkt P', bei dieser Spiegelung die Zahl $-a$ zugeordnet.
Jeder gebrochenen Zahl kann genau ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet werden. Durch Spiegelung an der Geraden g erhält man zu jedem Punkt genau einen Bildpunkt.
Jedem Bildpunkt wird eine Zahl zugeordnet, die sich von der entsprechenden gebrochenen Zahl durch das Vorzeichen „−“ (minus) unterscheidet.
Die so gewonnenen neuen Zahlen, die auf der Zahlengeraden links vom Punkt 0 liegen, werden **negative Zahlen** genannt. Auf der Zahlengeraden kann jetzt jeder Differenz gebrochener Zahlen durch Streckenabtragung genau ein Punkt zugeordnet werden.

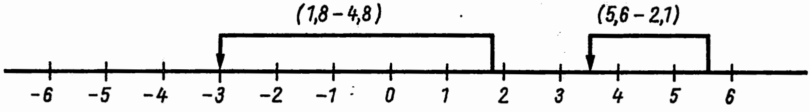


Bild 4 (3.1.2.)

Die Menge $Q = Q_- \cup Q_+$ enthält zwei Arten von Elementen, die negativen Zahlen und die gebrochenen Zahlen.

▶ DEFINITION 3 (3.1.2.)
Die Vereinigungsmenge der Menge Q_+ der gebrochenen Zahlen und der Menge Q_- der negativen Zahlen ist die Menge der **rationalen Zahlen**. Die Menge der rationalen Zahlen wird mit dem Symbol Q bezeichnet.

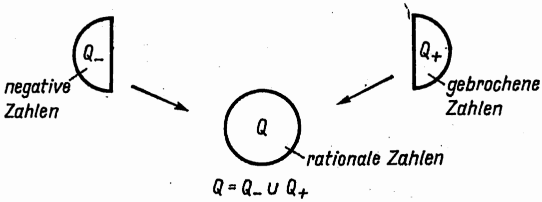


Bild 5 (3.1.2.)

Im Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen ist neben der Addition, Multiplikation und Division (Divisor ungleich Null) auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.

Aufgabe 2 (3.1.2.)
Berechnen Sie die Werte folgender Terme!
Beachten Sie dabei die besondere Bedeutung des Zeichens „−“!

a) $-13{,}2 + (-17{,}1) + 13{,}2$
b) $-3{,}7 - 5{,}8 + 0{,}7 + (-0{,}8)$
c) $-\frac{3}{7} + \frac{4}{7} + (-\frac{2}{14})$
d) $-7{,}4 + 3{,}6 - 0 + 7{,}4$
e) $3{,}4 - (-1{,}6) + (-4{,}2)$
f) $-\frac{1}{2} - (-0{,}2) + 0{,}6$
g) $-\frac{1}{3} - \frac{3}{11} + \frac{2}{3} + \frac{3}{11}$
h) $-((-2{,}7) - (-3{,}5) + 8{,}2)$

LÖSUNG
a) $-17{,}1$ **b)** $-9{,}6$ **c)** 0 **d)** $3{,}6$
e) $0{,}8$ **f)** $0{,}3$ **g)** $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ **h)** $-9{,}0$

Aufgabe 3 (3.1.2.)
Es sind mindestens fünf rationale Zahlen anzugeben, die größer als $-\frac{1}{2}$ und kleiner als $-\frac{2}{5}$ sind.
Wie viele rationale Zahlen sind größer als $-\frac{1}{2}$ und kleiner als $-\frac{2}{5}$?

LÖSUNG
Folgende rationale Zahlen sind größer als $-\frac{1}{2}$ und kleiner als $-\frac{2}{5}$:

$$-\frac{21}{50}, -\frac{11}{25}, -\frac{9}{20}, -\frac{23}{50}, -\frac{12}{25}.$$

Es lassen sich beliebig viele rationale Zahlen angeben, die größer als $-\frac{1}{2}$ und kleiner als $-\frac{2}{5}$ sind.

Der Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen ist bezüglich der in ihm erklärten Ordnungsrelation genau wie der Zahlenbereich Q_+ der gebrochenen Zahlen überall dicht (vgl. Definition 5 (3.1.1.)).

3.1.3. Der Zahlenbereich der reellen Zahlen

Obwohl die rationalen Zahlen überall dicht liegen, füllen sie die Zahlengerade nicht vollständig aus, d. h., es gibt auf der Zahlengeraden Punkte, denen keine rationale Zahl zugeordnet werden kann. So entspricht zum Beispiel dem Punkt P im Bild 1 (3.1.3.) keine rationale Zahl, denn für die Länge der Strecke b gilt: $b^2 = 1^2 + 1^2$ bzw. $b = \sqrt{2}$.

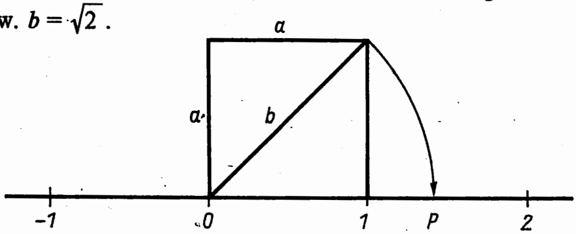


Bild 1 (3.1.3.)

▷ **SATZ 1 (3.1.3.)**
Es gibt keine rationale Zahl z, für die $z^2 = 2$ gilt.

Der Beweis dieser Aussage wird indirekt geführt.

Voraussetzung:

Es sei $z = \frac{a}{b}$ $(a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0)$ eine beliebige rationale Zahl.

Behauptung:

$\frac{a}{b}$ ist nicht Lösung von $z^2 = 2$.

Beweis (indirekt):

Annahme: Es gibt eine rationale Zahl $z = \frac{a}{b}$ $(a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0)$, für die $z^2 = 2$ gilt.

Für $z = \frac{a}{b}$ $(a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq 0)$ gilt dann

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \text{ bzw. } a^2 = 2 \cdot b^2.$$

Die natürlichen Zahlen a^2 und $2b^2$ lassen sich in Primfaktoren zerlegen. Der Primfaktor 2 soll m-mal ($m = 0, 1, 2, \ldots$) in der Primfaktorzerlegung von a und n-mal ($n = 0, 1, 2, \ldots$) in der Primfaktorzerlegung von b vorkommen. Dann tritt der Primfaktor 2 auf der linken Seite der Gleichung $a^2 = 2b^2$ $2m$-mal und auf der rechten Seite $(2n + 1)$-mal auf. Da aber $2m$ eine gerade Zahl und $2n + 1$ eine ungerade Zahl ist, tritt der Primfaktor 2 in den Primfaktorzerlegungen von a^2 und $2b^2$ in verschiedener Anzahl auf. Das ist aber nicht möglich, weil sich jede natürliche Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegen läßt. Damit ist die Annahme falsch und die Behauptung wahr, w. z. b. w.

Im Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen hat also nicht jede Gleichung der Form $x^n = a$ $(a > 0, n \in N, n \geqq 2)$ eine Lösung. Um allen Punkten der Zahlengeraden genau eine Zahl zuordnen zu können und jede Gleichung der Form $x^n = a$ $(a > 0, n \in N, n \geqq 2)$ lösen zu können, wird der Zahlenbereich Q der rationalen Zahlen zum **Zahlenbereich *R* der reellen Zahlen** erweitert.
Aus Bild 1 (3.1.3.) geht hervor, daß dem Punkt P die Zahl $\sqrt{2}$ zugeordnet werden kann. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl (vgl. Satz 1 (3.1.3.)). Man kann aber feststellen, daß $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 (oder wie man auch sagt im *abgeschlossenen Intervall* $\langle 1;2\rangle$) liegt. Da die rationalen Zahlen überall dicht liegen, ist es möglich, beliebig viele weitere Intervalle $\langle m; n\rangle$ zu finden, für die gilt, daß $\sqrt{2}$ zwischen m und n liegt und für die $n - m$, die *Intervallänge*, immer kleiner wird. Ist dabei die Bedingung erfüllt, daß jedes Intervall das nachfolgende Intervall umfaßt, so spricht man von einer *Intervallschachtelung.*

■ BEISPIEL 1 (3.1.3.)

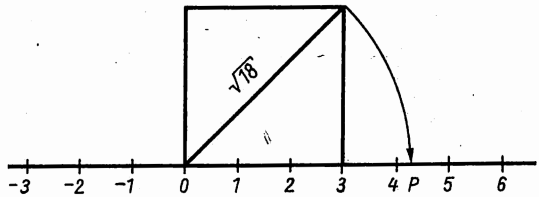


Bild 2 (3.1.3.)

Der auf der Zahlengeraden dargestellte Punkt P kann durch beliebig viele Intervalle eingeschachtelt werden.

P liegt im Intervall	Länge des Intervalls	Begründung
$\langle 4; 5\rangle$	1	$4 < \sqrt{18} < 5$
$\langle 4{,}2; 4{,}3\rangle$	0,1	$4{,}2 < \sqrt{18} < 4{,}3$
$\langle 4{,}24; 4{,}25\rangle$	0,01	$4{,}24 < \sqrt{18} < 4{,}25$
$\langle 4{,}242; 4{,}243\rangle$	0,001	$4{,}242 < \sqrt{18} < 4{,}243$
$\langle 4{,}2426; 4{,}2427\rangle$	0,0001	$4{,}2426 < \sqrt{18} < 4{,}2427$
$\langle 4{,}24264; 4{,}24265\rangle$	0,00001	$4{,}24264 < \sqrt{18} < 4{,}24265$
usw.	usw.	usw.

Ein Überprüfen der Begründung ist leicht mit dem Taschenrechner möglich, indem man die Zahlen, welche die Intervallgrenzen angeben, quadriert.
Man erhält eine Folge ineinanderliegender oder ineinandergeschachtelter Intervalle, deren Längen stets kleiner werden. Alle Intervalle enthalten als gemeinsamen Punkt den Punkt P.

Alle Intervallschachtelungen, die ein und denselben Punkt der Zahlengeraden bestimmen, heißen *äquivalente Intervallschachtelungen.* Alle zu einer gegebenen Intervallschachtelung äquivalenten Intervallschachtelungen werden zu einer Klasse zusammengefaßt.

▶ DEFINITION 1 (3.1.3.)
Jede Klasse äquivalenter Intervallschachtelungen heißt **reelle Zahl.**

Die Menge der reellen Zahlen wird mit R bezeichnet.
Wird durch eine Intervallschachtelung eine rationale Zahl bestimmt, so heißt diese Klasse **rationale reelle Zahl.**
Alle anderen Klassen werden **irrationale reelle Zahlen** genannt.
Die im Beispiel 1 (3.1.3.) bestimmte Zahl $\sqrt{18}$ ist eine **irrationale Zahl.** Sie kann durch einen unendlichen nichtperiodischen Dezimalbruch dargestellt werden (vgl. Beispiel 2b) (3.1.3.)).

▶ DEFINITION 2 (3.1.3.)
Jeder unendliche nichtperiodische Dezimalbruch heißt **irrationale Zahl.**

Die Menge der irrationalen Zahlen wird mit I bezeichnet.
Die fortgesetzte Zehnteilung des Intervalls bei der Intervallschachtelung ermöglicht die Darstellung *jeder* reellen Zahl als *unendlichen Dezimalbruch,* da endliche Dezimalbrüche auch als unendliche Dezimalbrüche mit der Periode „0“ geschrieben werden können.

■ BEISPIEL 2 (3.1.3.)

a) Darstellung rationaler Zahlen als unendliche periodische Dezimalbrüche:

$$2{,}7 = 2{,}7000 \ldots = 2{,}7\overline{0} \qquad -\frac{2}{3} = -0{,}6666 \ldots = -0{,}\overline{6}$$

b) Darstellung irrationaler Zahlen als unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots \qquad \sqrt{18} = 4{,}242640687 \ldots \qquad \pi = 3{,}141592653 \ldots$$

Wenn Dezimalbrüche mit der Periode „0" und der Periode „9" die gleiche Zahl bestimmen, wird die Neunerperiode bei der Angabe eines Dezimalbruchs ausgeschlossen. So bezeichnen z. B. die unendlichen Dezimalbrüche $4{,}2\overline{9}$ und $4{,}3\overline{0}$ dieselbe reelle Zahl 4,30.
Durch die Vereinbarung, die Neunerperiode auszuschließen, wird gewährleistet, daß die Bezeichnung einer reellen Zahl durch einen unendlichen Dezimalbruch eindeutig ist und daß jedem Punkt der Zahlengeraden eineindeutig eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.

▶ DEFINITION 3 (3.1.3.)
Ein unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode heißt **reelle Zahl.**

▶ DEFINITION 4 (3.1.3.)
Die Vereinigungsmenge der Menge Q der rationalen Zahlen und der Menge I der irrationalen Zahlen ist die Menge der **reellen Zahlen.** Die Menge der reellen Zahlen wird mit dem Symbol R bezeichnet.

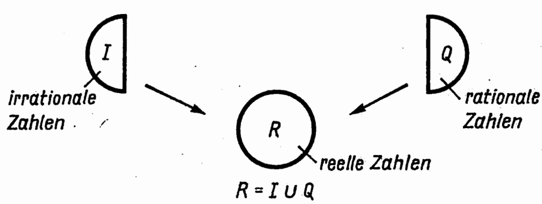


Bild 3 (3.1.3.)

Im Zahlenbereich R der reellen Zahlen lassen sich die eingangs angeführten Probleme lösen.
Um jedoch auch Gleichungen der Form $x^n = a$ für $a < 0$, $n \in N \setminus \{0\}$ uneingeschränkt lösen zu können, ist die Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen zum Bereich der komplexen Zahlen nötig. Auf die Darstellung dieser Zahlenbereichserweiterung soll hier jedoch verzichtet werden.

Übungen 3.1.

1. a) Geben Sie zu jedem der folgenden Brüche mindestens drei weitere an, die dieselbe gebrochene Zahl repräsentieren!
$\frac{2}{7}$; $\frac{15}{36}$; $\frac{50}{42}$; $\frac{625}{125}$; $\frac{11}{98}$; $\frac{18}{324}$; $\frac{24}{9}$; $\frac{5}{32}$
   b) Schreiben Sie jeden der gegebenen gemeinen Brüche aus a) als Dezimalbruch!

2. Weisen Sie nach, daß die Kleinerrelation in $M = \left\{\frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right\}$ die Eigenschaften irreflexiv, transitiv und trichotom hat!

3. Stellen Sie fest, ob die folgenden geordneten Paare $(a; b) \in Q_+ \times Q_+$ differenzengleich sind!

- $(5; 3)$ und $(7; 5)$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ und $\left(2; \frac{1}{2}\right)$
- $\left(6; \frac{5}{2}\right)$ und $\left(4; \frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ und $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

4. Beweisen Sie, daß die Differenzengleichheit in $Q_+ \times Q_+$ eine Äquivalenzrelation ist!

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungen!

	Lösungsmenge in			
	N	Q_+	Q	R
$H_1(x)$: $2x + 3 = 4$ $H_2(x)$: $3x + 4 = 2$ $H_3(x)$: $x + 9 = 9$ $H_4(x)$: $2x^2 + 8 = 12$ $H_5(x)$: $x^2 + 7 = 5$				

3.2. Näherungswerte

In der gesellschaftlichen Praxis sind der Genauigkeit bei der Angabe von Zahlen oder Größen Grenzen gesetzt. Es ist nicht immer notwendig und auch nicht immer zweckmäßig, *höchste Genauigkeit* zu fordern. Messungen zum Beispiel lassen sich nie absolut genau durchführen. Die Genauigkeit hängt von der Präzision des verwendeten Meßinstruments und von den Fertigkeiten des Messenden ab. Deshalb arbeitet man beim Lösen praktischer Probleme häufig mit *Näherungswerten.* Dabei hat man es immer mit der Frage nach der sinnvollen Genauigkeit der verwendeten Werte zu tun.
Man überdenke folgende Beispiele unter dem Aspekt der sinnvollen Genauigkeit der Angaben.

■ BEISPIEL 1 (3.2.)
Die Angabe der Masse erfolgt bei vielen Erzeugnissen so:
Würfelzucker 500 g ± 10 g; Mehlmischung 485 g ± 5 g;
Chillies 20 g ± 1,5 g.

■ BEISPIEL 2 (3.2.)
Statistisches zu einer Halbserie der Fußballoberliga:
Anzahl verkaufter Karten: 817050 (8979 pro Spiel);
Tore: 224 (2,46 pro Spiel)

■ BEISPIEL 3 (3.2.)

Arne (A) und Gerd (G) nutzen ihre Taschenrechner (SR 1) zu einem kleinen Rechenvergleich.
Sie lösen die Aufgabe
$\sqrt{\sqrt[3]{625}}$ nach verschiedenen Rechenablaufplänen:

(A) 625 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ Ergebnis: 2.9240178

(G) 625 $\boxed{y^x}$ 6 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ Ergebnis: 2.92402

■ BEISPIEL 4 (3.2.)

In Gesprächen oder in Berichten über verschiedene Sachverhalte des täglichen Lebens treten u. a. Formulierungen dieser Art auf:

(1) Das Auto verbraucht etwa 7,8 Liter Benzin für 100 Kilometer.
(2) Im Kino waren mindestens 450 Besucher.
(3) Für die Wanderstrecke benötigt man höchstens drei Stunden.
(4) Die Brigade arbeitete ca. 15 Wochen an dem Exponat.
(5) Der Arbeitseinsatz erbrachte ungefähr 1000 Mark Nutzen.
(6) Es sind 15 Stadtverordnete zu wählen.
(7) Ein Drittel der Strecke von 1748 Kilometern legte die Reisegruppe im Flugzeug zurück.
(8) Auf der Welt leben vier Milliarden Menschen.

Schon in den unteren Klassen werden die Schüler an das Arbeiten mit Näherungswerten herangeführt. Das erfordert vom Lehrer entsprechende fachtheoretische Kenntnisse und Sicherheit, um methodisch erfolgreich arbeiten zu können. Das in den unteren Klassen erreichte Niveau in der Arbeit mit Näherungswerten beeinflußt zunehmend das inhaltliche Verstehen der Verwendung von Rechenhilfsmitteln, insbesondere des Taschenrechners. Gerade in diesem Zusammenhang gewinnt richtiges Arbeiten mit Näherungswerten an Bedeutung. Wir wollen uns deshalb der Beantwortung folgender Fragen zuwenden und dabei stets eigenes Können im Arbeiten mit Näherungswerten festigen.
Was sind Näherungswerte?
Wie erhält man Näherungswerte?
Was ist beim Verwenden von Näherungswerten zu berücksichtigen?
Die Vielschichtigkeit der Beispiele 1 bis 4 verdeutlicht, daß es günstig ist, den Begriff „Näherungswert“ durch Merkmale zu charakterisieren, ohne ihn zu definieren.

1. Jeder Näherungswert ist eine Zahl oder eine Größe.
2. Jede Angabe eines Näherungswertes verlangt die Bestimmung von Grenzen, in denen jeder genauere Näherungswert oder der genaue Wert mit Sicherheit liegt.
3. Jede Zahl oder Größe kann beliebig viele Näherungswerte haben.

Darüber hinaus gilt für die Arbeit mit Näherungswerten:

- Zahlen werden durch Näherungswerte ersetzt, wenn eine genaue Zahlenangabe nicht möglich ist bzw. kein gesellschaftliches Bedürfnis oder mathematisches Erfordernis vorliegt.
- Jede Verwendung von Näherungswerten führt wieder zu Näherungswerten.
- Bei der Arbeit mit Näherungswerten wird das Zeichen „≈" mit den Sprechweisen „ist angenähert gleich", „ist rund" verwendet.

Bezogen auf die in den Beispielen 1 bis 4 verwendeten Angaben sind u. a.
817050; 224; 625; 15
keine Näherungswerte.
Die bisherige Betrachtung von Beispielen zeigt, daß es günstig ist, Näherungswerte mit Hilfe von natürlichen Zahlen oder Dezimalbrüchen anzugeben, weil

- Rechnen in der Praxis vorwiegend in dezimaler Darstellung erfolgt,
- elektronische Rechenhilfsmittel fast nur Zahlen in dezimaler Darstellung anzeigen,
- sich bei der Arbeit mit Zahlen in dezimaler Darstellung Regeln zur sinnvoll genauen Resultatsbestimmung relativ leicht ableiten lassen.

Es gibt verschiedene Verfahren, durch die Näherungswerte gewonnen werden. Auf einige, die auch schon in den unteren Klassen Verwendung finden, wird im folgenden eingegangen.

Ein erstes gebräuchliches Verfahren ist das **Überschlagen.**

> Beim **Überschlag** werden Zahlen so vereinfacht, daß durch mündliches Rechnen ein Näherungswert für einen Termwert ermittelt werden kann.

Das durch ausführliche Rechnung ermittelte Ergebnis kann mit dem durch Überschlag berechneten Näherungswert hinsichtlich richtiger Größenordnung kontrolliert werden.

Aufgabe 1 (3.2.)
Man führe jeweils einen Überschlag durch und vergleiche die Ergebnisse stets mit dem Näherungswert des Überschlages. Es sollte der SR 1 verwendet werden.

(1) $142 \cdot 6{,}3 : 0{,}4$	(6) $0{,}0478 \cdot 4{,}78 : 0{,}478$
(2) $8793 \cdot 24$	(7) 148 % von 37095 km^2
(3) $97853 : 428$	(8) $\frac{56{,}3 - 12}{8{,}5}$
(4) $76058 + 4927 \cdot 75$	(9) 4,8 % von 932 M
(5) $(830{,}14 + 0{,}75 - 697{,}82) : 18$	(10) $\frac{2}{7}$ von 573 t

LÖSUNG (Beispiele)

	(1)	(3)	(5)	(6)	(8)
Überschlag	2200	200	5	0,5	5
Ergebnis (SR 1)	2236,5	228,62851	7,3927778	0,478	5,2117647

Durch die unterschiedliche Wahl von Näherungswerten ergeben sich teilweise recht große Abweichungen zwischen dem Ergebnis des Überschlags und dem Ergebnis der genauen Rechnung. Man verdeutliche sich dies noch einmal an (1) und (8).

Mögliche Überschläge:

(1) $100 \cdot 6 : 0{,}4$; $\quad 150 \cdot 60 : 5$; $\quad 100 \cdot 60 : 6$

(8) $\dfrac{60-10}{10}$; $\quad \dfrac{52-12}{8}$

Für die Grundrechenoperationen sollte man wissen, wie man durch geeignetes Vorgehen sichern kann, daß der Überschlag in der Größenordnung des Ergebnisses bleibt.

■ BEISPIEL 5 (3.2.)

(1) $19 \cdot 0{,}28 \cdot 15 \cdot 12$ → $20 \cdot 0{,}1 \cdot 10 \cdot 10 = 200$
→ $20 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 10 = 4000$

(2) $90{,}69 : 1{,}5$ → $90 : 2 = 45$
→ $100 : 1 = 100$

Vergrößert oder verkleinert man Zahlen beim Überschlag relativ willkürlich, so können sich in der Größenordnung Abweichungen zum tatsächlichen Ergebnis ergeben. Es ist deshalb günstig, so zu verfahren:

> Wenn ein Faktor verkleinert (vergrößert) wird, sollte der andere Faktor vergrößert (verkleinert) werden.
> Wenn der Dividend verkleinert (vergrößert) wird, sollte der Divisor auch verkleinert (vergrößert) werden.

Das Ausführen von Überschlägen (Überschlagen) gehört zu den groben Verfahren der Bestimmung von Näherungswerten. Es dient der Kontrolle der Größenordnung der Ergebnisse durch mündliches Rechnen bei schriftlichen Rechenverfahren oder beim Arbeiten mit Rechenhilfsmitteln.

Das Ausführen von Überschlägen ist auch vom Zahlenverständnis und vom Rechenkönnen des betreffenden Menschen abhängig.

Ein zweites gebräuchliches Verfahren zur Ermittlung von Näherungswerten ist das Runden.
Dabei wird nach folgenden *Regeln* (Rundungsregeln) verfahren:

(1) Es wird immer auf ein Vielfaches einer bestimmten Zehnerpotenz (k-te Stelle; von links nach rechts gezählt) gerundet.[1)]
(2) Steht an der $(k+1)$ten Stelle
- eine der Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird *abgerundet*, d. h., diese und die folgenden Ziffern werden jeweils durch 0 ersetzt, und die vorangehende Ziffernfolge bleibt unverändert.
- eine der Ziffern 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird *aufgerundet*, d. h., diese und die folgenden Ziffern werden jeweils durch 0 ersetzt, und die k-te Stelle wird um 1 erhöht.

Im Mathematiklehrbuch der Klasse 4 wird eine schematische Übersicht als Gedächtnisstütze für die Schüler gegeben. Sie verdeutlicht für das Runden wesentliche Fakten, die im folgenden auch erfaßt sind.

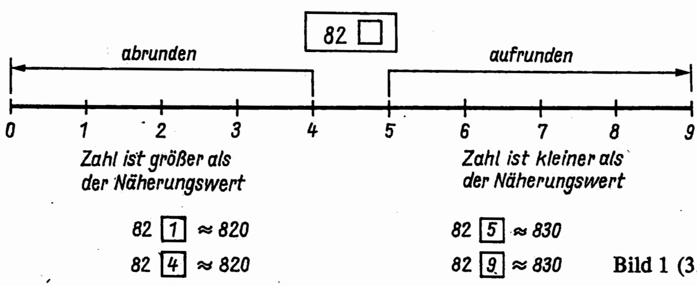


Bild 1 (3.2.)

■ BEISPIEL 6 (3.2.)

(1) $4\overset{\downarrow}{8}25 \approx 4800$; $\overset{\downarrow}{6}7865 \approx 70000$;

$6\overset{\downarrow}{4}500 \approx 65000$; $6\overset{\downarrow}{0}518 \approx 61000$

(2) Arne rundet $2\overset{\downarrow}{4},47$ in mehreren Schritten so:
$24,47 \approx 24,5$ $24,5 \approx 25$

Gerd rundet in einem Schritt: $2\overset{\downarrow}{4},47 \approx 24$

Damit beim Runden gegebenenfalls nicht unterschiedliche Ergebnisse entstehen, ist möglichst *in einem Schritt* zu *runden.*

[1)] Ein Pfeil (↓) kennzeichnet als methodisches Hilfsmittel ggf. die Stelle, auf die gerundet werden soll.

Die genannten Rundungsregeln gelten für Wissenschaft und Technik. Bei einigen praktischen Problemen wird teilweise anders verfahren, z. B. bei Tarifberechnungen für Verkehrsmittel, im Geld- und Finanzwesen sowie bei Materialberechnungen.

Aufgabe 2 (3.2.)
Man ermittle „Rundungsfehler", die jeweilige Stelle, auf die gerundet wurde und ggf. Ursachen von Fehlern in folgender Darstellung einer Schülerrechnung.

(1) $38493 \approx 38400$
(2) $708796 \approx 70900$
(3) $82500 \approx 82000$
(4) $15876 \text{ kg} \approx 15 \text{ t}$
(5) $36{,}5 \text{ cm} \approx 360 \text{ mm}$
(6) $8706 \text{ Pf} \approx 100 \text{ M}$

LÖSUNG (Beispiele)
(1) $38493 \approx 38500$
(4) $15876 \text{ kg} \approx 16 \text{ t}$

Aufgabe 3 (3.2.)
(1) Man bestimme alle natürlichen Zahlen, die beim Runden auf Vielfache von 10 den Näherungswert 4360 haben.
(2) Welches ist die kleinste (größte) Streckenlänge in Zentimetern, die beim Abrunden (Aufrunden) 86 m ergibt?

LÖSUNG (Beispiele)
(1) 4355, 4356, ..., 4363, 4364
(2) 8601 cm (8599 cm)

Die Verwendung von Näherungswerten, die durch Runden entstanden sind, findet auch Anwendung bei der Arbeit mit verschiedenen Diagrammen. So werden für die Darstellung von Sachverhalten oft gerundete Zahlen verwendet und beim Lesen von Diagrammen ebenfalls Näherungswerte genutzt.
Man verdeutliche sich diesen Zusammenhang an den Bildern 2 (3.2.) bis 4 (3.2.).

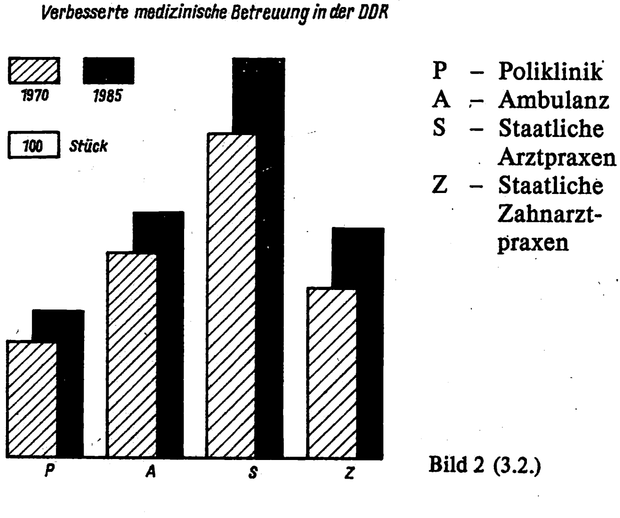
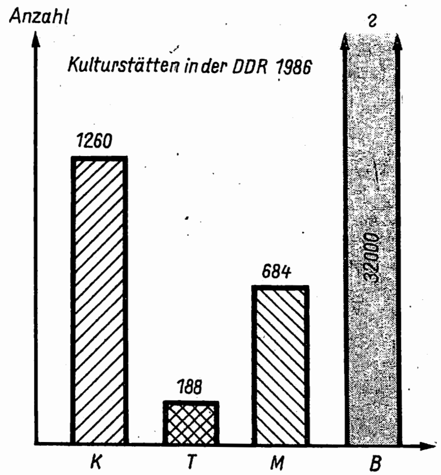
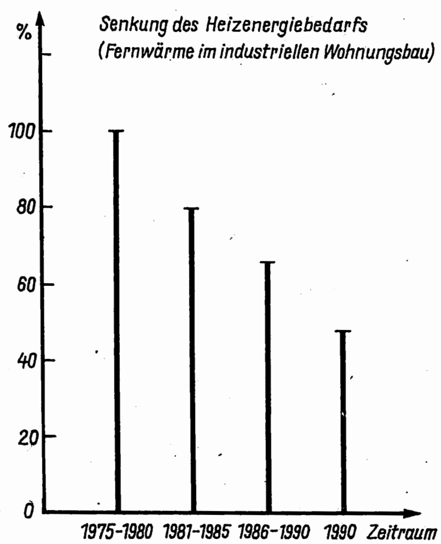


Bild 2 (3.2.)



K – Kultur- und Klubhäuser
T – Theaterspielplätze
M – Museen
B – Bibliotheken

Bild 3 (3.2.)



(Als Äquivalent für die Einsparung von 1990 zu 1985 gelten 8 Mill. Tonnen Rohbraunkohle.)

Bild 4 (3.2.)

Der Leser verdeutliche sich die folgenden zwei Sachverhalte gegebenenfalls an geeigneten Diagrammen (Streckendiagramm, Kreisdiagramm):

(1) In unserer Republik gab es 1986 etwa 23080 Hausclubs, 5970 Dorfclubs und 9550 Jugendclubs.

(2) Das Territorium der DDR hat eine Gesamtfläche von 108200 km^2, davon sind 6241090 ha LNF, 2801200 ha Wald und 126900 ha Gewässer.

Zwei weitere Möglichkeiten, Näherungswerte speziell für Größen zu ermitteln, ergeben sich durch **Messen** und **Schätzen** von Größen.

Beim **Messen** wird durch Vergleichen mit einer festgelegten Einheit mit Hilfe eines Meßinstrumentes einer Größe ein Näherungswert zugeordnet.

Beim **Schätzen** wird ohne Verwendung von Meßinstrumenten, unter Bezugnahme auf „Erfahrungswerte“, einer Größe ein Näherungswert zugeordnet.

Die Arbeit mit Größen in den unteren Klassen schafft durch das Kennenlernen von (wichtigen) Einheiten der Qualitäten „Länge“, „Masse“, „Zeit“ und „Geld“ wesentliche Voraussetzungen für weiterführende Betrachtungen in den nachfolgenden Klassenstufen. In enger Verbindung zur Praxis wird durch Einprägen von Repräsentanten das inhaltliche Verstehen unterstützt, das für Schätzen, Messen, Umrechnen von Größenangaben sowie das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben notwendig ist.

■ BEISPIEL 7 (3.2.)

Repräsentant	Größe
1 Tintenpatrone 1 kleines Brot 1 PKW Trabant (vollbesetzt)	1 g 1 kg 1 t
Tafellineal	1 m
1 Atemzug Wanderung (4 km)	1 s 1 h
1 Brötchen	5 Pf

Aufgabe 4 (3.2.)
Der Leser überlege sich weitere geeignete Repräsentanten für Größen, die man in vielfältigen Zusammenhängen verwenden kann.

LÖSUNG (Beispiel)
Ein Einpfennigstück ist 1 mm hoch und hat eine Masse von 1 g. Eine Strecke von 1 km kann man in 10 min (1 min) durchlaufen (durchfahren).

Durch die bisher gezeigten Verfahren wurde gegebenen Zahlen stets genau ein Näherungswert zugeordnet. Es ist aber auch möglich und notwendig zu ermitteln, zwischen welchen Näherungswerten eine Zahl liegt, und sich an diese Zahl „von beiden Seiten" anzunähern. In solchen Fällen reicht es aus, für den genauen Wert durch Abschätzung von unten und von oben ein möglichst kleines Intervall anzugeben, in dem der genaue Wert liegt.

■ BEISPIEL 8 (3.2.)

(1) Mehlmischung 485 g ± 5 g bedeutet: $480\text{ g} \leqq 485\text{ g} \leqq 490\text{ g}$.

(2)
$$4{,}2 \leqq \sqrt{18} \leqq 4{,}3$$
$$4{,}24 \leqq \sqrt{18} \leqq 4{,}25$$
$$4{,}242 \leqq \sqrt{18} \leqq 4{,}243$$
$$\sqrt{18} \approx 4{,}24$$

(3) ARCHIMEDES[1] ermittelte einen Näherungswert für π durch Abschätzungen. Er beschrieb einem Kreis ein regelmäßiges 96eck ein bzw. um. Wenn U_i (U_a) der Umfang des einbeschriebenen (umbeschriebenen) 96ecks ist, gilt:

$$U_i < 2\pi r < U_a$$
$$\frac{U_i}{2r} < \pi < \frac{U_a}{2r}.$$

ARCHIMEDES fand:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Das bedeutet:

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1428.$$

Heute kann π genauer bestimmt werden. Der SR 1 zeigt zum Beispiel für π den Näherungswert 3,1415927 an. Für die meisten praktischen Berechnungen reicht es aus, wenn man für π die Zahl 3,14 verwendet.

▶ DEFINITION 1 (3.2.)

Das Zuordnen von zwei Näherungswerten m_1 und m_2 zu einer Zahl m heißt Abschätzen von m genau dann, wenn gilt: $m_1 \leqq m \leqq m_2$.

m_1 ist *untere Schranke beim Abschätzen von m.*

m_2 ist *obere Schranke beim Abschätzen von m.*

Abschätzungen lassen sich günstig mittels Ungleichungen oder auf einer Zahlengeraden darstellen.

[1] ARCHIMEDES VON SYRAKUS (etwa 287 bis etwa 212 v. u. Z.) – griechischer Mathematiker und Physiker

■ BEISPIEL 9 (3.2.)

Für die Zahl $\sqrt{2}$ wird der entsprechende Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet.

$1{,}4 \leqq \sqrt{2} \leqq 1{,}5$

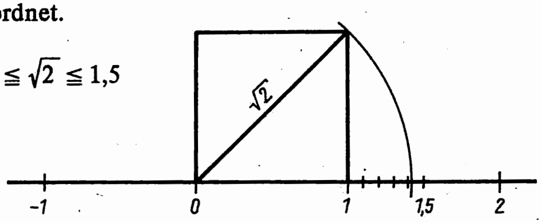


Bild 5 (3.2.)

Der Leser ermittle eine Abschätzung für die gebrochene Zahl $\frac{17}{7}$ und verdeutliche dies am entsprechend ausgewählten Abschnitt der Zahlengeraden.

Aufgabe 5 (3.2.)
Welche Masse könnte die Waage anzeigen, wenn 50 Pakete Würfelzucker (Beispiel 1 (3.2.)) aufgelegt werden? Man gebe eine untere und eine obere Schranke an.

LÖSUNG
Die Masse von 50 Paketen Würfelzucker liegt zwischen $50 \cdot 490$ g und $50 \cdot 510$ g.
untere Schranke: 24500 g = 24,5 kg
obere Schranke: 25500 g = 25,5 kg

Aufgabe 6 (3.2.)
Man versuche eine Abschätzung für π durch Einbeschreibung (Umbeschreibung) eines regelmäßigen 6ecks in (um) einen Kreis.
Beim Arbeiten mit Näherungswerten kommt es auch darauf an, die Einsicht zu entwickeln, daß ein Näherungswert stets an Stelle eines Intervalls steht, in dem jeder genauere Näherungswert oder ein existierender genauer Wert liegt. Beim Rechnen mit Näherungswerten sind solche Abschätzungen sehr nützlich, um das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben.

■ BEISPIEL 10 (3.2.)

Für ein Zimmer werden 4,25 m Länge und 3,17 m Breite gemessen. Die Berechnung der Fläche (SR 1) kann wie folgt vorgenommen werden:

Untere Schranke des Produkts	Überschlag/„genaue Berechnung" des Produkts	Obere Schranke des Produkts
	$4 \cdot 3 = 12$	
$4{,}245 \cdot 3{,}165$ 13,435425	$4{,}25 \cdot 3{,}17$ 13,4725	$4{,}255 \cdot 3{,}175$ 13,509625

Länge: 4,245 m $\leqq$ 4,25 m $\leqq$ 4,255 m
Breite: 3,165 m $\leqq$ 3,17 m $\leqq$ 3,175 m

Der Vergleich der Produkte ergibt eine Abweichung in der ersten Stelle nach dem Komma. Es ist also sinnvoll, das Ergebnis mit $A = 13{,}5\ \mathrm{m}^2$ anzugeben.

Bei Betrachtung des Beispiels 10 (3.2.) stellt sich dem Leser die Frage, warum u. a. für 4,25 die Schranken 4,245 und 4,255 angegeben wurden. Man ermittle jeweils die Differenzen zwischen diesen Zahlen. Es wird unterschieden, ob mit Näherungswerten oder den genauen Werten gerechnet wird. Damit kommen wir zu einem weiteren, für die Arbeit mit Näherungswerten wesentlichen Gebiet, der **Fehlerrechnung.**

In der Mathematik wird der Begriff „Fehler“ als Differenz zwischen Näherungswert und genauem Wert inhaltlich exakt gefaßt.

▶ DEFINITION 2 (3.2.)
ε ist der **absolute Fehler eines Näherungswertes** a **bezüglich einer Zahl** x genau dann, wenn ε die Differenz zwischen a und x ist.
$\varepsilon = a - x$
($|\varepsilon| = |a - x|$ ist der Betrag des absoluten Fehlers.)
δ ist der **relative Fehler eines Näherungswertes** a **bezüglich einer Zahl** x genau dann, wenn δ das Verhältnis $\left|\frac{a-x}{x}\right|$ ist.

$$\delta = \left|\frac{a-x}{x}\right| \quad (x \neq 0)$$

Mit Hilfe der Fehlerrechnung ermittelt man den Genauigkeitsgrad eines einzelnen Näherungswertes oder eines Ergebnisses von Rechenoperationen mit Näherungswerten. Dabei ist es erforderlich, folgenden Fragen nachzugehen:
Wie ist ein Näherungswert entstanden?
Wie groß ist die Abweichung gegenüber dem genauen Wert?

Dazu unterscheidet man verschiedene Betrachtungsmöglichkeiten:
- Sind zum genauen Wert mehrere Näherungswerte bekannt, so vergleicht man die *Beträge der absoluten Fehler.* Je kleiner der Betrag des absoluten Fehlers, desto besser ist der entsprechende Näherungswert.
- Ist nur ein Näherungswert, aber nicht der genaue Wert bekannt, kann man den absoluten Fehler nicht bestimmen. Man gibt dann sinnvollerweise eine *Schranke für den absoluten Fehler* an mit
  $x = a \pm \Delta a$ oder $a - \Delta a \leqq x \leqq a + \Delta a$.
  Ist diese Schranke für den absoluten Fehler nicht angegeben, so wird vorausgesetzt, daß die Schranke für den absoluten Fehler nicht größer als 0,5 Einheiten des Stellenwertes der letzten angegebenen Ziffer ist.

Damit wissen wir, welche Ziffern eines Näherungswertes zuverlässig sind.

▶ DEFINITION 3 (3.2.)
Alle Ziffern eines Näherungswertes sind **zuverlässige Ziffern** genau dann, wenn der absolute Fehler dieses Näherungswertes höchstens eine halbe Einheit des Stellenwertes der letzten mitgeteilten Ziffer beträgt.[1)]

■ BEISPIEL 11 (3.2.)

Zahl	4398	7,403
Näherungswert	4400	7
Absoluter Fehler	2	−0,403
Relativer Fehler	0,0004575	0,054437

■ BEISPIEL 12 (3.2.)

Näherungswert m	Betrag des absoluten Fehlers	Schranken m_1	m_2	Anzahl zuverlässiger Ziffern
23 km	|0,5|	22,5 …	23,5	2
23,0 km	|0,05|	22,95 …	23,05	3
0,23 km	|0,005|	0,225 …	0,235	2
1500 g	|0,5|	1499,5 …	1500,5	4

■ BEISPIEL 13 (3.2.)

Näherungswert	Zuverlässige Ziffern	Anzahl zuverlässiger Ziffern
14 kg	1; 4	2
14,5 mg	1; 4; 5	3
14,71 m	1; 4; 7; 1	4
14000 km	1; 4	2
14000 m	1; 4; 0; 0; 0	5

1) Die Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer werden dabei nicht mitgezählt.

In der Praxis ist es oft zweckmäßig, bei Sachverhalten Näherungswerte zu wählen, die einerseits größer als die genaue Zahl sind (Materialverbrauch u. ä.), andererseits kleiner als die genaue Zahl sind (Durchschnitt der Anzahl der Tore, vgl. Beispiel 2 (3.2.) u. ä.).
Bei statistischen Angaben ist es auch günstig, durch abwechselndes Verwenden kleinerer (größerer) Näherungswerte ein möglichst reales Bild widerzuspiegeln.

■ BEISPIEL 14 (3.2.)

Mit einer Schwebebahn, die 42 Fahrgäste faßt, wollen an einem Ferientag 315 Personen auf einen 1240 m hohen Berg fahren. Wie viele Fahrten sind dafür mit vollbesetzter Bahn notwendig? Wie viele Plätze bleiben dann bei der Restfahrt leer?
Ein Schüler der Klasse 4 stellt die Lösung der Aufgabe so dar:
Höhe des Berges: 1240 m
Anzahl der Plätze: 42
Anzahl der Personen: 315
Überschlag: $300 : 30 = 10$

$$
\begin{array}{l}
\quad 315 : 42 = 7 \\
\quad \underline{294} \\
\text{R}\ \ 21 \\
\quad 42 - 21 = 21
\end{array}
$$

Es sind sieben Fahrten mit vollbesetzter Bahn notwendig. Bei der achten Fahrt bleibt die Hälfte der Plätze frei.

■ BEISPIEL 15 (3.2.)

Bei einem Würfel wurde eine Kantenlänge von 4,8 cm gemessen. Wie groß sind Volumen und Oberfläche dieses Würfels?
$a = 4{,}8\ \text{cm} \qquad V = a^3 \qquad O = 6 \cdot a^2$
$4{,}75\ \text{cm} \leqq 4{,}8\ \text{cm} \leqq 4{,}85\ \text{cm}$
Die Verwendung des gegebenen Näherungswertes ergibt:
$V = 110{,}592\ \text{cm}^2 \qquad O = 138{,}24\ \text{cm}^2$
Rechnet man mit der kleinsten oberen und größten unteren Schranke, so erhält man:
$V \approx 107{,}172\ \text{cm}^3 \qquad O \approx 135{,}375\ \text{cm}^2$
$V \approx 114{,}084\ \text{cm}^3 \qquad O \approx 141{,}135\ \text{cm}^2$
Das Volumen des Würfels liegt zwischen 107 cm³ und 115 cm³. Ist nun als Ergebnis 108 cm³, 109 cm³, ..., 113 cm² oder etwa 115 cm³ zu nehmen?

Beispiel 15 (3.2.) verdeutlicht, daß es nicht notwendig und nicht zweckmäßig ist, bei der Verwendung von Näherungswerten so aufwendig und genau rechnen zu wollen. Ein Vergleich der jeweiligen Ergebnisse zeigt, daß die Angabe des Volumens mit 111 cm³ und der Oberfläche mit 138 cm² durchaus richtig und sinnvoll ist.

Bedeutungsvoll ist beim Rechnen mit Näherungswerten, welche Ziffern eines Ergebnisses zuverlässig sind. Es können drei einfache „Faustregeln“ genutzt werden:

Regel 1
Ermittlung der zuverlässigen Ziffern bei *Addition (Subtraktion)* von Näherungswerten:
Man suche den Näherungswert heraus, bei dem die letzte zuverlässige Ziffer am weitesten links steht.
Man runde die Summe oder die Differenz auf diese Stelle.

Regel 2
Ermittlung der zuverlässigen Ziffern bei *Multiplikation (Division)* von Näherungswerten:
Man suche den Näherungswert mit der geringsten Anzahl zuverlässiger Ziffern heraus.
Man runde das Produkt oder den Quotienten auf diese Anzahl von Ziffern.
(Dabei werden die Nullen vor der ersten von Null verschiedenen Ziffer nicht mitgezählt.)

■ BEISPIEL 16 (3.2.)

a	*b*	*a* + *b*	*a* − *b*
0,041 kg	0,31 kg	0,351 kg ≈ 0,35 kg	− 0,269 kg ≈ −0,27 kg
0,28 cm	0,3 cm	0,58 cm ≈ 0,6 cm	− 0,02 cm ≈ 0 cm
28,45	7,03	35,48 = 35,48	21,42 = 21,42
9,24	0,5	9,74 ≈ 9,7	8,74 ≈ 8,7

■ BEISPIEL 17 (3.2.)

a	*b*	*a* · *b*	*a* : *b*
19,3 m	12 m	231,6 m^2 ≈ 230 m^2	1,608333 ≈ 1,6
0,041 t	0,31	0,1271 t ≈ 0,13 t	0,13225 t ≈ 0,13 t
34,26	8,4	287784 ≈ 290	4,0785714 ≈ 4,1
788	45	35460 ≈ 35000	17,511111 ≈ 18

Es kann weiterhin unnötiger Rechenaufwand vermieden werden und trotzdem eine den gegebenen Zahlen entsprechende sinnvolle Genauigkeit erreicht werden, wenn man bei Operationen, in denen mindestens ein Näherungswert verwendet wird, eine zusätzliche Regel nutzt.

■ BEISPIEL 18 (3.2.)

$$\begin{array}{r} 386{,}02\ \text{m} \\ +\ 27{,}18\ \text{m} \\ +\ 4{,}6\ \ \text{m} \\ +\ 193\ \ \ \ \text{m} \\ \hline 610{,}80\ \text{m} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 386{,}0\ \text{m} \\ +\ 27{,}2\ \text{m} \\ +\ 4{,}6\ \text{m} \\ +\ 193\ \ \ \text{m} \\ \hline 610{,}8\ \text{m} \\ \approx 611\ \text{m} \end{array}$$

Ü: $4 \cdot 3 = 12$

$4{,}281 \cdot 3{,}17 = 13{,}57077$

$4{,}28 \cdot 3{,}17 = 13{,}5676$

$\approx 13{,}57$

Regel 3
In allen Zwischenergebnissen ist jeweils eine Stelle mehr beizubehalten, als die Regeln 1 oder 2 angeben.

■ BEISPIEL 19 (3.2.)

Man ermittle das Produkt von $2{,}\overline{45}$ und $2{,}\overline{4}$.

Jeder Faktor hat zwei zuverlässige Ziffern:	Jeder Faktor hat drei zuverlässige Ziffern:
$2{,}\overline{45} \cdot 2{,}\overline{4}$	$2{,}\overline{45} \cdot 2{,}\overline{4}$
$2{,}5 \cdot 2{,}4 = 6$	$2{,}45 \cdot 2{,}44 = 5{,}9780 \approx 5{,}98$

aber einfacher:

$2{,}\overline{45} = \frac{27}{11};\ 2{,}\overline{4} = \frac{22}{9}$ $\qquad \frac{27 \cdot 22}{11 \cdot 9} = 6$

Es ist gegebenenfalls günstiger, mit gemeinen Brüchen zu arbeiten.

Aufgabe 7 (3.2.)
Das Grundstück, auf dem ein Eigenheim mit den Seitenlängen von 8,1 m und 7,6 m errichtet werden soll, hat einen Flächeninhalt von etwa 320 m². Man ermittle den prozentualen Anteil der Fläche, auf der das Haus stehen soll, bezogen auf die Grundstücksfläche.

LÖSUNG

$a = 8{,}1\ \text{m}$ $\qquad A = a \cdot b$

$b = 7{,}6\ \text{m}$ $\qquad A = 8{,}1\ \text{m} \cdot 7{,}6\ \text{m}$

$G = 320\ \text{m}^2$ $\qquad A = 61{,}56\ \text{m}^2$

Im Zwischenergebnis wird (nach Regel 3) $61{,}6\ \text{m}^2$ beibehalten.

$$p = \frac{61{,}6 \cdot 100}{320\ \text{m}^2} = 19{,}25$$

Im Endergebnis genügen (nach Regel 2) zwei zuverlässige Ziffern. Die Grundfläche des Hauses nimmt etwa 19% des Baugrundstücks ein.

Wie die Aufgaben zeigen, gibt es verschiedene Verfahren bei der Ermittlung von Näherungswerten. Bei *groben Näherungsverfahren*, zu denen man Überschlagen, grobes Abschätzen oder Schätzen zählen kann, versucht man, die Größenordnung eines Resultats zu ermitteln. Bei *feinen Näherungsverfahren*, denen man Zählen, Run-

den, feines Abschätzen, Messen und Ziffernzählung zuordnen kann, versucht man das Resultat „genauer" zu fixieren, also nicht nur die Größenordnung.
Bei der Nutzung der verschiedenen Verfahren kommt es immer wieder auch darauf an, *sinnvolle Genauigkeit* zu erreichen.
Diese hängt ab von:
(1) der Genauigkeit der gegebenen Zahlen – Aufgabe 7 (3.2.)
(2) Genauigkeitsforderungen expliziter Art – Beispiel 19 (3.2.)
(3) der Genauigkeit der verwendeten Rechenhilfsmittel – Aufgabe 1 (3.2.)
(4) Genauigkeitsforderungen des Sachverhaltes – Beispiel 15 (3.2.).
Erste Schritte bei der Erziehung zu sinnvoller Genauigkeit sind schon in der Unterstufe auszuführen. Daneben ist Vertrautheit im Umgang mit Näherungswerten durch regelmäßige Kontrolle von Rechenergebnissen durch Überschlagen oder Überprüfen des Ergebnisses am Sachverhalt anzustreben.

■ BEISPIEL 20 (3.2.)

Genauere Einordnung eines Ergebnisses

Ein Hühnerei hat im Durchschnitt eine Masse von 60 Gramm. Wie viele LKW mit 5 Tonnen Ladekapazität wären notwendig, um die Masse Eier einer Jahresproduktion von etwa 180 Millionen Stück zu transportieren? Man schätze außerdem die Länge der Strecke, die entstehen würde, wenn die Eier aneinandergelegt würden. Die Länge eines Eies wird mit 5,5 cm angenommen.

Ü: $\frac{200000000 \cdot 50}{1000000} = 10000 \qquad 10000 : 5 = 2000$

Es sind etwa 2000 LKW erforderlich.

Ü: $200000000 \cdot 6 = 1200000000$

$1200000000 \text{ cm} = 12000 \text{ km}$

Die Strecke ergäbe etwa 12000 km.

■ BEISPIEL 21 (3.2.)

Kontrolle eines Ergebnisses

(1) $486 \cdot 732 = 351378$

Das Produkt könnte richtig berechnet sein, denn $500 \cdot 700 = 350000$, aber $2 \cdot 6 \neq 18$. Es liegt ein Rechenfehler vor. Das Produkt ist falsch berechnet. Es sei dem Leser überlassen, die Fehlerursache und das richtige Ergebnis zu bestimmen.

(2) $726 \cdot 408 = 29628$

Das Produkt kann nicht richtig berechnet sein, denn $700 \cdot 400 = 280000$. Es sei dem Leser überlassen, die Fehlerursache und das richtige Ergebnis zu bestimmen.

(3) Bei Sach- und Anwendungsaufgaben sollte immer, unabhängig vom Überschlag und vom gewählten Lösungsweg, überprüft werden, ob das Ergebnis auf die Realität bezogen richtig und sinnvoll ist. Gerade bei der Verwendung von Größen mit verschiedenen Einheiten werden hierbei noch viele Fehler begangen.

Schüler unterschiedlicher Klassenstufen lösen die Aufgabe: „In unserer Republik werden pro Kopf der Bevölkerung rund 72 kg Obst im Jahr verbraucht. Wieviel Tonnen Obst sind das für eine Großstadt wie Karl-Marx-Stadt mit etwa 323000 Einwohnern im Jahr?"

Schüler der Klasse 4:

$300000 \cdot 70 = 2100000$

$$
\begin{array}{r}
\underline{323000 \cdot 72} \\
2261000 \\
\underline{646000} \\
23256000
\end{array}
$$

Es sind 2325000 t.

Schüler der Klasse 5:

$300000 \cdot 0{,}1 = 30000$

$323000 \cdot 0{,}072$ t

$323 \cdot 72$ t $= 23256$ t

$$
\begin{array}{r}
\underline{323 \cdot 72} \\
2261 \\
\underline{646} \\
23256
\end{array}
$$

Es werden 23256 t Obst verbraucht.

Der Leser vergleiche die Schülerlösungen, analysiere Fehlerursachen und überlege, ob die angegebene Genauigkeit sinnvoll ist.

Zum sicheren Arbeiten mit Näherungswerten gehört auch eine sinnvolle Genauigkeit bei der Angabe von Meßergebnissen. Von Klasse 1 an müssen dazu die notwendigen Einsichten und Voraussetzungen gesichert werden.

■ BEISPIEL 22 (3.2.)

Ein Schüler der Klasse 1 mißt die Länge einer Strecke „in vollen cm". Für die Messung mit dem Lineal ist für diese Klassenstufe die Angabe 7 cm korrekt. Damit gilt:

$6{,}5 \text{ cm} \leqq 7 \text{ cm} \leqq 7{,}5 \text{ cm}$.

Ein Schüler der Klasse 2 mißt schon in „vollen mm". Für die Messung mit dem Lineal ist ab dieser Klassenstufe die Angabe 7 cm oder 70 mm korrekt. Damit gilt:

$69{,}5 \text{ mm} \leqq 70 \text{ mm} \leqq 70{,}5 \text{ mm}$.

Bei Zeichnungen und Messungen im Geometrie- oder Werkunterricht der unteren Klassen genügt eine Genauigkeit (sinnvoll) von ± 1 mm.

Der Leser wird bei analogen Überlegungen für die Arbeit mit Größen der Qualität Masse, Zeit, Geld, Fläche oder Volumen feststellen, daß die Notwendigkeit feiner Messungen (unter Verwendung kleinerer Einheiten und präziser Meßinstrumente) vor allem vom Sachverhalt bestimmt wird.

Für das Lösen von Sach- oder Anwendungsaufgaben mit Näherungswerten empfiehlt sich das folgende *Schema*:

(1)	*Analyse der Aufgabe:* Gegebenes, Gesuchtes, Skizze, Ansatz	(2)	*grobe Näherungsverfahren:* Überschlagen, Abschätzen, Schätzen

(3) *Berechnung mit erforderlicher Genauigkeit:* Entscheidung über genaue Zahlen oder Näherungswerte, feine Näherungsverfahren	(4) *Nebenrechnung:*
(5) *Vergleich:* (3) und (4) Lösungswege, sinnvolle Genauigkeit, Sachverhalt	
(6) *Abschluß der Aufgabe:* Antwort	

■ BEISPIEL 23 (3.2.)

Der Umfang des Dreiecks ABC wird mit 8,23 dm angegeben. Die Länge der Seite a beträgt 3,4 dm und die Länge der Seite b beträgt 1,26 dm. Man ermittle die Länge der Seite c dieses Dreiecks.

(1) *Geg.:* *Dreieck ABC*
$u = 8{,}23$ dm
$a = 3{,}4$ dm
$b = 1{,}26$ dm
Ges.: c

(2) $c \approx 8$ dm $- 3$ dm $- 1$ dm
$c \approx 4$ dm

(3) $c = 8{,}23$ dm $- 3{,}4$ dm $- 1{,}26$ dm
$c = 3{,}57$ dm

(4)
$$\begin{array}{r} 8{,}23 \text{ dm} \\ -\,3{,}4 \text{ dm} \\ \underline{-\,1{,}26 \text{ dm}} \\ 3{,}57 \text{ dm} \end{array}$$

(5) 3,6 dm $\approx$ 4 dm. Die Größenordnung des Ergebnisses stimmt. Die Länge könnte richtig ermittelt worden sein.

(6) Die Länge der Seite c des Dreiecks ABC beträgt 3,6 dm.

Der Leser begründe diese Lösungsschritte theoretisch.

Übungen (3.2.)

1. Man runde jeweils auf drei zuverlässige Ziffern.
4,335; 3387; 14,609; 0,02689; 1,449; 855599

2. Zwischen welchen Zahlen liegt x, wenn alle Ziffern der für x angegebenen Näherungswerte zuverlässig sind? x-Werte: 4,05; 780,0; 3409; 0,04785; 780; 78

3. Man ermittle den absoluten Fehler für folgende Angaben:
Höhe des Tschomolungma: 8848 m $\approx$ 8800 m
Meerestiefe von Witjas II: 11022 m $\approx$ 11000 m

4. Man gebe für $\frac{17}{7}$ einen Näherungswert mit 1 (2; 3; 4) zuverlässigen Ziffern an.

3.3. Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Systemen von Gleichungen durch Verwendung von Umformungsregeln

In diesem Abschnitt werden Kenntnisse bezüglich des Lösens von Gleichungen und Ungleichungen wiederholt, systematisiert und vertieft. Besonderer Wert wird auf bewußte Anwendung erarbeiteter Regeln gelegt. Der Abschnitt kann weitestgehend im Selbststudium bewältigt werden.

3.3.1. Begriffe und Regeln

Im Mathematiklehrgang der Klassen 1 bis 10 werden schon ab Klasse 1 *Gleichungen* und *Ungleichungen* gelöst. Sogar *Gleichungssysteme* und *Ungleichungssysteme* gehören zum Lehrstoff in den unteren Klassen. Im Lehrbuch der Klasse 4 finden wir Aufgaben der folgenden Art:

■ BEISPIEL 1 (3.3.1.)

a) Löse die Gleichungen! Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Zahlen.
$3000 + a = 7000$
$a - b = 2000$

b) Welche Vielfachen von 10000 erfüllen die Ungleichung $20000 + x < 50000$ und die Ungleichung $70000 - x < 60000$?

Es geht im folgenden u. a. um die Beantwortung der Fragen:
Was ist eine Gleichung?
Was ist eine Ungleichung?
Was heißt es, eine Gleichung zu lösen?
Wie lösen Schüler der unteren Klassen Gleichungen (Ungleichungen)?
Auf die zuletzt gestellte Frage wird u. a. im Abschnitt 3.5. eingegangen. Die anderen Fragen und weitere beantworten wir, indem wesentliche Festlegungen und Aussagen hierzu zusammengetragen werden.
Grundbausteine von Gleichungen oder Ungleichungen sind *Terme.* Wir geben Beispiele für Terme an.

■ BEISPIEL 2 (3.3.1.)

$T_1: 5$ $\qquad T_2: x$ $\qquad T_3: 5 + x$

$T_4: \dfrac{3}{x-5}$ $\qquad T_5: 3\,(5 + x) - y$ $\qquad T_6: |x + 3y|$

$T_7: 13 + 0{,}75$ $\qquad (x \in R, y \in R)$

Belegt man x durch 4, so bezeichnet T_4 die Zahl -3.

$$\frac{3}{4-5} = -3$$

Wir sagen: Der Wert des Terms T_4 für $x = 4$ ist -3.

Der Wert des Terms T_4 existiert nicht für $x = 5$, denn $\frac{3}{5-5}$ ist nicht definiert.
Wir sagen: Der Term T_4 ist für $x = 5$ nicht definiert.

▶ **DEFINITION 1 (3.3.1.)**
T_1 und T_2 seien Terme.
Eine Zeichenreihe der Form $T_1 = T_2$ heißt **Gleichung**. Jede Zeichenreihe der Form $T_1 < T_2$, $T_1 \leqq T_2$, $T_1 > T_2$, $T_1 \geqq T_2$, $T_1 \neq T_2$ heißt **Ungleichung**.

T_1 nennen wir *linke Seite der Gleichung* (Ungleichung).
T_2 nennen wir *rechte Seite der Gleichung* (Ungleichung).

■ BEISPIEL 3 (3.3.1.)

(1) $4 + 1 = 6$		(2) $4 + 1 < a$	$(a \in N)$
(3) $91 - f \geqq 88$	$(f \in N)$	(4) $x^2 > x$	$(x \in R)$
(5) $7 + 4 \neq 10$		(6) $x + 2y = 3z$	$(x \in R, y \in R, z \in R)$

Enthält eine Gleichung (Ungleichung) keine Variable, so ist sie entweder eine wahre oder eine falsche Aussage.[1)]
Uns interessieren vor allem Gleichungen (Ungleichungen), die freie Variable enthalten. Derartige Gleichungen (Ungleichungen) sind Aussageformen.

Alle Zahlen (alle geordneten Paare von Zahlen, alle geordneten Tripel von Zahlen, ...), die eine Gleichung (Ungleichung) in eine Aussage überführen, bilden den **Lösungsgrundbereich der Gleichung (Lösungsgrundbereich der Ungleichung)** (Zeichen: L_G). Dabei dürfen die Variablen jeweils nur durch Elemente der vorgegebenen Variablengrundbereiche belegt werden.

Hat eine Gleichung n Variable ($n \in N$, $n > 0$), so sind die Elemente des Lösungsgrundbereiches der Gleichung geordnete n-Tupel von Zahlen.

---

1) Es gibt in der Literatur unterschiedliche Auffassungen bezüglich des Begriffes Aussage (als sprachliches bzw. gedankliches Gebilde). Für die Arbeit im Bereich der elementaren Mathematik ist es meistens unerheblich, welche dieser Auffassungen verwendet wird. Denken und Sprache bilden ohnehin eine Einheit. In der mathematischen Literatur (insbesondere in den Lehrbüchern der Klassen 6 bis 10) werden Gleichungen (Ungleichungen) im oben angegebenen Sinn definiert und als Aussagen bzw. Aussageformen angesehen.

Ein Element des Lösungsgrundbereiches einer Gleichung (Ungleichung) heißt **Lösung der Gleichung (Lösung der Ungleichung)** genau dann, wenn es die Gleichung (Ungleichung) in eine wahre Aussage überführt.
Die Menge aller Lösungen einer Gleichung (Ungleichung) heißt **Lösungsmenge der Gleichung (Lösungsmenge der Ungleichung)** (Zeichen: L).

■ BEISPIEL 4 (3.3.1.)

(1) $91 - f \geqq 88 \quad (f \in N)$

$L_G = N$

$f = 0$ ist eine Lösung dieser Ungleichung, denn 0 ist ein Element von L_G, und $91 - 0 \geqq 88$ ist eine wahre Aussage.
$f = -1$ ist keine Lösung dieser Ungleichung, obwohl $91 - (-1) \geqq 88$ eine wahre Aussage ist. Die Zahl -1 ist aber kein Element von L_G.
Die Lösungsmenge der Ungleichung $91 - f \geqq 88$ ist (im vorgegebenen Lösungsgrundbereich der Ungleichung) $L = \{0; 1; 2; 3\}$.

(2) $91 - f \geqq 88 \quad (f \in R)$

$L_G = R$

Die Lösungsmenge der Ungleichung enthält alle reellen Zahlen, die kleiner oder gleich 3 sind.

(3) $x + 2y = 3z \quad (x \in Z, y \in Z, z \in Z)$

$L_G = Z \times Z \times Z$

Das Tripel (10; 4; 6) ist eine Lösung dieser Gleichung. Die Lösungsmenge der Gleichung enthält unendlich viele geordnete Tripel ganzer Zahlen. Dennoch ist L ungleich L_G. L enthält alle Tripel $(x; y, z)$, in denen y und z beliebige ganze Zahlen sind, aber $x = 3z - 2y$ ist.

(4) $x^2 + 1 < 0 \quad (x \in R)$

$L_G = R$

Die Lösungsmenge dieser Ungleichung ist die leere Menge. Die Gleichung ist in der Menge der reellen Zahlen nicht lösbar.

(5) $a + b = b + a \quad (a \in R, b \in R)$

$L_G = R \times R$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist identisch mit dem Lösungsgrundbereich der Gleichung, denn die Aussageform wird bei jeder Belegung durch ein geordnetes Paar reeller Zahlen zu einer wahren Aussage.

(6) $\frac{1}{x} > 0 \quad (x \in R)$

$L_G = R \setminus \{0\}$ (Der Term $\frac{1}{x}$ ist für $x = 0$ nicht definiert.) Die Lösungsmenge dieser Ungleichung enthält alle positiven reellen Zahlen.

Vereinbarung: Für die weiteren Darstellungen im Abschnitt 3.3. vereinbaren wir, daß eine Variable als Variablengrundbereich stets die Menge der reellen Zahlen hat, falls keine gegenteiligen Einschränkungen erfolgen.

Wie findet man die *Lösung(en)* einer Gleichung (Ungleichung)?
Eine *erste Möglichkeit* ergibt sich durch *inhaltliche Überlegungen.* Das ist die Methode, mit der Schüler der Klassen 1 bis 5 Gleichungen (Ungleichungen) lösen.
Da inhaltliche Betrachtungen nicht nur beim Lösen von Gleichungen möglich und vorteilhaft sind, beschäftigen wir uns damit ausführlich im Abschnitt 3.5.
Eine *zweite Möglichkeit* ergibt sich dadurch, daß man von einer Gleichung (Ungleichung) zu einer ihr äquivalenten Gleichung (Ungleichung) in einem betrachteten Lösungsgrundbereich übergeht, deren Lösung(en) einfacher zu ermitteln ist (sind).
Wir sprechen in diesem Zusammenhang von einer **äquivalenten Umformung** einer Gleichung (Ungleichung).

> Eine Gleichung (Ungleichung) **ist äquivalent zu** einer Gleichung (Ungleichung) **bezüglich eines (vorgegebenen) Lösungsgrundbereiches** genau dann, wenn beide Gleichungen (Ungleichungen) in diesem Lösungsgrundbereich ein und dieselbe Lösungsmenge haben.[1]

■ BEISPIEL 5 (3.3.1.)

(1) Die Gleichung $3x - 3 = 1$ ist äquivalent zur Gleichung $3x = 4$ bezüglich R.

(2) Die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ist äquivalent zur Gleichung $x = 1$ bezüglich N.

(3) Die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ ist nicht äquivalent zur Gleichung $x = 1$ bezüglich Z.

(4) Die Ungleichung $3x < 8$ ist äquivalent zur Ungleichung $x < 3$ bezüglich N.

(5) Die Ungleichung $3x < 8$ ist nicht äquivalent zur Ungleichung $x < 3$ bezüglich R.

Die Grundlage für Regeln zur äquivalenten Umformung von Gleichungen (Ungleichungen) bilden u. a. die Monotoniegesetze der Rechenoperationen bezüglich der Gleichheitsrelation (Kleinerrelation). Die Beispiele 6 (3.3.1.) bis 8 (3.3.1.) und Aufgabe 1 (3.3.1.) sollen Probleme verdeutlichen, die beim Umformen von Gleichungen (Ungleichungen) auftreten können.

Zunächst wird ein von LIETZMANN dargestellter Trugschluß untersucht.

■ BEISPIEL 6 (3.3.1.)

Voraussetzung:
a ist eine beliebige reelle Zahl.

Behauptung:
Die Zahl a ist gleich ihrem Doppelten. ($a = 2a$)

---

[1] Oft sagt man auch nur: Gleichung (1) ist äquivalent zu Gleichung (2).

Begründung:

(1) $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$

Gleichung (1) ist in R eine allgemeingültige Aussageform. Die linke Seite der Gleichung wird durch Anwendung einer binomischen Formel umgeformt.

(2) $(a - a)(a + a) = a^2 - a^2$

Auf der rechten Seite der Gleichung (2) wird a ausgeklammert.

(3) $(a - a)(a + a) = a(a - a)$

Beide Gleichungsseiten werden durch $(a - a)$ dividiert.

(4) $a + a = a$

(5) $2a = a$

Gleichung (5) ist offensichtlich nicht äquivalent zur Gleichung (1) bezüglich R, denn die Gleichung (5) ist in R nicht allgemeingültig.

Wo steckt der Fehler?

Der Fehler steckt im Übergang von Gleichung (3) zu Gleichung (4). Es wurde durch $(a - a)$ – also durch die Zahl Null – dividiert.

Vorsicht ist auch bei der Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Term, der Variable enthält, geboten.

■ BEISPIEL 7 (3.3.1.)

(1) $x = 3$

(2) $x \cdot x = 3x$

(3) $x^2 = 3x$

Gleichung (1) hat die Lösungsmenge $L = \{3\}$.

Gleichung (3) hat die Lösungsmenge $L = \{0; 3\}$.

Die beiden Gleichungen sind einander nicht äquivalent bezüglich R.

Aufgabe 1 (3.3.1.)

Peter gibt als Lösungsmenge der Gleichung $x^2 - 3x = x - 3$ $(x \in R)$ die Menge mit dem Element 1 an ($L = \{1\}$). Seine Entscheidung basiert auf der Umformung:

(1) $x^2 - 3x = x - 3$

(2) $x(x - 3) = x - 3 \quad | : (x - 3) \quad (x \neq 3)$

(Damit $x - 3 \neq 0$ ist, muß $x \neq 3$ sein.)

(3) $x = 1$

$L = \{1\}$

Hat Peter die Lösungsmenge der Gleichung richtig ermittelt?

LÖSUNG

Nein!

Es gibt eine weitere Zahl, die Lösung der Gleichung ist. Um den eingeschlagenen Rechenweg ausführen zu können, wurde gefordert, daß x ungleich 3 ist. Das ist zunächst eine willkürliche Festlegung. Man muß sich deshalb davon überzeugen, ob eine auf diese Weise vorübergehend aus dem Rechengang ausgeschlossene Zahl auch Lösung der betrachteten Gleichung ist oder nicht, weil sonst die Gleichungen in unterschiedlichen Lösungsgrundbereichen betrachtet werden. Durch Einsetzen in (1) erkennen wir, daß 3 tatsächlich eine Lösung der Gleichung ist, denn 3 ist ein Element des Lösungsgrundbereiches der Gleichung (1), und die Aussage $3^2 - 3 \cdot 3 = 3 - 3$ ist wahr.

■ BEISPIEL 8 (3.3.1.)

(1) $0 < \frac{3x-1}{2x+1} \quad \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$

Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit $(2x + 1)$.

(2) $0 < 3x - 1$

(3) $1 < 3x$

(4) $\frac{1}{3} < x$

Ungleichung (1) ist nicht äquivalent zur Ungleichung (4) bezüglich R. Die Zahl -2 ist eine Lösung der Ungleichung (1), nicht aber von Ungleichung (4). Es wurde offensichtlich nicht äquivalent umgeformt. Der Fehler liegt im Übergang von (1) zu (2). Die beiden Seiten der Ungleichung (1) wurden mit $2x + 1$ multipliziert. Je nachdem, welche Zahl man für x einsetzt, kann $2x + 1$ für eine positive oder negative Zahl stehen. Für diese Fälle gelten aber unterschiedliche Monotoniegesetze.

> Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:
> Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $a \cdot c < b \cdot c$.
> Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:
> Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $a \cdot c > b \cdot c$.

Die eben betrachteten Beispiele warnen vor Fehlern bei der Umformung von Gleichungen (Ungleichungen).
Wir geben nunmehr eine *Übersicht* von Möglichkeiten *zur äquivalenten Umformung* von Gleichungen (Ungleichungen) an:

1. *Umformungen, die auf einer Seite einer Gleichung (Ungleichung) ausführbar sind:* (U bedeutet Umformung.)

(U 1)	Auflösen von Klammern	(U 4)	Erweitern von Brüchen
(U 2)	Ausklammern	(U 5)	Ordnen
(U 3)	Kürzen von Brüchen	(U 6)	Zusammenfassen

Bei (U 3) bzw. (U 4) ist zu beachten:
Man muß ausschließen, daß mit Null gekürzt oder erweitert wird. Das gilt insbesondere dann, wenn man mit einem Term kürzt oder erweitert, der Variable enthält. Der Term darf bei keiner Variablenbelegung den Wert Null annehmen, sonst treten eventuell die in den Beispielen 7 (3.3.1.) und 8 (3.3.1.) angesprochenen Probleme auf.
Die Regeln (U 1) bis (U 6) basieren auf entsprechenden Operationseigenschaften. Es ist nützlich, sich zu überlegen, welche Gesetze eine Grundlage dieser Umformungsmöglichkeiten sein können. Die Grundlage für

(U 5) bilden zum Beispiel entsprechende Kommutativgesetze und Assoziativgesetze.

Für die Regeln (U 1) bis (U 6) und auch für die folgenden Regeln gilt, daß sie im Bereich der reellen Zahlen anwendbar sind. Weil manche Operationen in einem anderen Zahlenbereich nur beschränkt ausführbar sind (etwa die Subtraktion in N), muß man stets prüfen, ob eine Umformungsregel anwendbar ist, falls man nicht im Bereich der reellen Zahlen rechnet.

In der zweiten Gruppe von Umformungsregeln bilden Eigenschaften von Operationen bezüglich der Gleichheits- oder Kleinerrelation die Grundlage. Deshalb sind die Umformungen stets auf beiden Seiten der Gleichung (Ungleichung) auszuführen.

2. *Umformungen, die nur auf beiden Seiten einer Gleichung (Ungleichung) ausgeführt werden dürfen:*

(U 7) Vertauschen der beiden Seiten einer Gleichung

$$3x + 7 = 3 - x$$
$$3 - x = 3x + 7$$

(U 8) Vertauschen der beiden Seiten einer Ungleichung bei gleichzeitiger Umkehrung des Relationszeichens

$$3x + 7 < 3 - x$$
$$3 - x > 3x + 7$$

(U 9) Addition oder Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten einer Gleichung (Ungleichung).

Für (U 9) bis (U 12) ist zu beachten, daß nur dann eine äquivalente Umformung erfolgt, wenn ein verwendeter Term für den gesamten Lösungsgrundbereich der betrachteten Gleichung (Ungleichung) definiert ist. Ist dies nicht der Fall, können die in Aufgabe (3.3.1.) angesprochenen Probleme auftreten.

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 3 - x \quad &| +x \\ 4x + 7 &= 3 \quad &| -7 \\ 4x &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 7 &< 3 - x \quad &| +x \\ 4x + 7 &< 3 \quad &| -7 \\ 4x &< -4 \end{aligned}$$

(U 10) Multiplikation (Division) mit ein und demselben (durch ein und denselben) Term auf beiden Seiten einer Gleichung. Enthält der Term keine Variablen, muß sein Wert ungleich 0 sein. Enthält er Variable, darf bei keiner Belegung derselben der Wert des Terms 0 sein.

$$\begin{aligned} 4x &= -4 \quad | :4 \\ x &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{3}{x} &= 7 \quad | \cdot x \quad (x \neq 0) \\ 3 &= 7x \end{aligned}$$

(U 11) Multiplikation (Division) mit ein und demselben (durch ein und denselben) Term auf beiden Seiten einer Ungleichung.
Enthält der Term keine Variablen, muß sein Wert eine positive Zahl sein. Enthält er Variable, muß bei jeder Belegung derselben sein Wert eine positive Zahl sein.

$$\begin{aligned} 4x &< -4 \quad | :4 \\ x &< -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x(4 + x) &< 3\,(4 + x) \quad | :(4 + x) \qquad (4 + x) > 0 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

(U 12) Multiplikation (Division) mit ein und demselben (durch ein und denselben) Term auf beiden Seiten einer Ungleichung bei gleichzeitiger Umkehrung des Relationszeichens. Enthält der Term keine Variablen, muß sein Wert eine negative Zahl sein. Enthält er Variable, muß bei jeder Belegung derselben sein Wert eine negative Zahl sein.

$$\begin{array}{lll} 4x < -4 & \mid :(-4) & \\ -x > 1 & \mid (-1) & \\ x < -1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} x \cdot (4+x) < 3 \cdot (4+x) & \mid :(4+x) \qquad (4+x) < 0 \\ \\ x \quad > 3 & \end{array}$$

Werden Umformungen im Sinne von (U 1) bis (U 12) oder weiterer entsprechender Regeln vorgenommen, ist eine Probe (aus theoretischer Sicht) nicht erforderlich. Da bei den Umformungen Rechenfehler auftreten können oder manchmal Operationen nicht auf beiden Seiten einer Gleichung (Ungleichung) ausgeführt werden, obwohl dies erforderlich wäre, sollte man auf eine Probe im Sinne einer *Rechenkontrolle* nicht verzichten. Es ist auch zu empfehlen, daß im Prozeß des Lösens einer Aufgabe erreichte Zwischenergebnisse einer kritischen Prüfung unterzogen werden. Bei der Durchführung der Probe behandelt man beide Seiten der Gleichung (Ungleichung) für sich, bis der Wahrheitswert einer entsprechenden Gleichheits- bzw. Ungleichheitsaussage eindeutig feststellbar ist.
Da Ungleichungen oft unendlich viele Lösungen haben, führt man mitunter nur eine Stichprobe durch. Das heißt, man prüft, ob eine vermutliche Lösung der Ungleichung diese in eine wahre Aussage überführt.[1)]

3.3.2. *Lineare Gleichungen und Ungleichungen*

▶ **DEFINITION 1 (3.3.2.)**
a und b seien fest vorgegebene reelle Zahlen ($a \neq 0$). x sei eine reelle Zahl.
Eine Gleichung (Ungleichung) heißt **lineare Gleichung mit genau einer Variablen x (lineare Ungleichung mit genau einer Variablen x)** genau dann, wenn sie durch äquivalente Umformungen in die Form $ax + b = 0$ ($ax + b < 0$ bzw. $ax + b > 0$ oder $ax + b \leqq 0$ bzw. $ax + b \geqq 0$) überführt werden kann.

■ BEISPIEL 1 (3.3.2.)

	Ausgangsform	*Übergang zur Form $ax + b = 0$ ($ax + b \leqq 0$; $ax + b < 0$)*
(1)	$3x + 6 = -9$	$3x + 15 = 0$
(2)	$4x^2 + 2x - 5 = (2x + 1)^2$	$4x^2 + 2x - 5 = 4x^2 + 4x + 1$
		$-2x + (-6) = 0$

---

1) Wir lassen mitunter die Probe weg, insbesondere dann, wenn für eine Aufgabe mehrere Lösungswege angegeben werden.

(3) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+2}{x+5}$ $(x \neq -3, x \neq -5)$ $\quad (x+1)(x+5) = (x+2)(x+3)$

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + 6$$
$$x + (-1) = 0$$

(4) $6(x+1) \leqq 3x + 2$

$$6x + 6 \leqq 3x + 2$$
$$3x + 4 \leqq 0$$

(5) $\frac{x+3}{4} < \frac{2x-6}{3}$

$$3\,(x+3) < 4\,(2x-6)$$
$$3x + 9 < 8x - 24$$
$$-5x + 33 < 0$$

(6) $\frac{x+4}{2x-3} < 1 \quad \left(x \neq \frac{3}{2}\right)$

Der Übergang zur Form $ax + b < 0$ ist hier komplizierter als in den anderen Beispielen, weil eine Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit $(2x-3)$ nur unter Beachtung weiterer Voraussetzungen möglich ist (vgl. (U 11), (U 12)). Wir stellen eine mögliche Vorgehensweise weiter unten dar.

Falls eine lineare Gleichung $ax + b = 0$ überhaupt eine Lösung in einem vorgegebenen Lösungsgrundbereich hat, ist diese eindeutig bestimmt. Man findet sie, indem man die Ausgangsgleichung durch Anwendung von (U 9) und (U 10) äquivalent umformt.

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 &&\Big|\ -b \\ ax &= -b &&\Big|\ :a \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$(L_G = R)$
(*a* ist vereinbarungsgemäß ungleich Null.)

Probe:
$$\begin{aligned} a\left(-\frac{b}{a}\right) + b &\ \Big|\ 0 \\ -b + b &\ \Big|\ 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$ [1)]

$$L = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Eine Lösung für eine Ungleichung $ax + b < 0$ kann durch Anwendung von (U 9), (U 11) bzw. (U 12) gefunden werden, falls überhaupt eine Lösung existiert.

$$\begin{aligned} ax + b &< 0 &&\Big|\ -b \\ ax &< -b \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt sind beide Seiten der Ungleichung durch a ($a \neq 0$) zu dividieren. Es muß wegen (U 11) bzw. (U 12) in unterschiedlicher Weise vorgegangen werden, je nachdem, ob *a* Variable für eine positive oder negative Zahl ist.

[1)] Der Trennstrich soll verdeutlichen, daß beide Seiten der Gleichung für sich umzuformen sind.

1. Fall: $a > 0$

$$ax < -b \quad | : a$$
$$x < -\frac{b}{a}$$

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen, die kleiner als $-\frac{b}{a}$ sind.

2. Fall: $a < 0$

$$ax < -b \quad | : a$$
$$x > -\frac{b}{a}$$

Die Lösungsmenge enthält alle reellen Zahlen, die größer als $-\frac{b}{a}$ sind.

■ BEISPIEL 2 (3.3.2.)

$3x + 6 < 0$
$3x < -6$
$x < -2$

Stichprobe:

$x = -10$
$3\,(-10) + 6 \mid 0$
$-24 < 0$

Wir erhalten eine wahre Aussage. Die Zahl -10 ist eine Lösung der betrachteten Ungleichung.

Eine Stichprobe kann sich auch auf Elemente beziehen, die vermutlich keine Lösungen der Ungleichung sind.

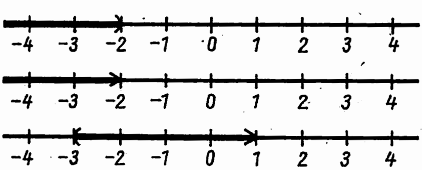
$x = 1$
$3 \cdot 1 + 6 \mid 0$
$9 < 0$

Wir erhalten eine falsche Aussage. Die Zahl 1 ist keine Lösung der betrachteten Ungleichung.

Die Lösungsmenge der Ungleichung können wir in unterschiedlicher Weise angeben:

$L = \{x \in R : x < -2\}$ oder
$L = (-\infty; -2)$.

$(-\infty; -2)$ bedeutet: Menge aller reellen Zahlen, die kleiner als -2 sind.
Die runde Klammer neben -2 zeigt an, daß -2 selbst nicht zur Menge gehört.
Wenn angezeigt werden soll, daß eine Zahl (noch) zur Menge gehört, wird eine spitze Klammer gesetzt.
$(-\infty; -2\rangle$ bedeutet: Menge aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich -2 sind.
Auch zur Darstellung einer Menge reeller Zahlen auf einer Zahlengeraden kann man runde und spitze Klammern in gleicher Bedeutung verwenden.



$(-\infty; -2)$

$(-\infty; -2\rangle$

$(-3; 1\rangle$ bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen, die größer als -3 und kleiner oder gleich 1 sind.

Bild 1 (3.3.2.)

Aufgabe 1 (3.3.2.)
Es sind alle positiven reellen Zahlen zu ermitteln, für die gilt:
Die Differenz aus dem Siebenfachen und dem Dreifachen einer Zahl ist kleiner als die um 5 vergrößerte Zahl.

LÖSUNG

x sei eine Zahl, die genannte Bedingungen erfüllt.

$$7x - 3x < x + 5$$
$$4x < x + 5$$
$$x < \frac{5}{3}$$

Stichprobe:

$x = 1$
Die Differenz aus dem Siebenfachen und dem Dreifachen von 1 ist 4.
Vergrößert man 1 um 5, so erhält man 6.
4 ist kleiner als 6.

Alle positiven reellen Zahlen, die kleiner als $\frac{5}{3}$ sind, erfüllen die genannten Bedingungen.

Wir wenden uns nun dem Problem des Lösens der Ungleichung
$\frac{x+4}{2x-3} < 1$ mit $L_G = R \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ zu (vgl. Beispiel 1 (3.3.2.)).
Um diese Ungleichung in der Form $ax + b < 0$ zu erhalten, müssen beide Seiten der Ungleichung mit $(2x - 3)$ multipliziert werden. Wir erinnern uns daran, daß dabei (U 11) und (U 12) zu beachten sind. Die Multiplikation kann deshalb nur ausgeführt werden, wenn gilt:

$2x - 3 > 0$ (1. Fall) *oder* $2x - 3 < 0$ (2. Fall)

1. Fall:

$$2x - 3 > 0$$
$$2x > 3$$
$$x > \frac{3}{2}$$

Wir lösen die Ungleichung $\frac{x+4}{2x-3} < 1$ unter der Bedingung, daß $x > \frac{3}{2}$ ist.

$$\frac{x+4}{2x-3} < 1 \quad | \cdot (2x-3)$$

Wegen (U 11) erhalten wir:

$$\begin{array}{rl|l} x + 4 < & 2x - 3 & -x \\ 4 < & x - 3 & +3 \\ 7 < & x & \end{array}$$

Wir ermittelten $7 < x$ unter der Bedingung, daß auch $x > \frac{3}{2}$ ist. Damit sind alle reellen Zahlen Lösung der Ungleichung, für die gilt:

$$\frac{3}{2} < x \textit{ und } 7 < x.$$

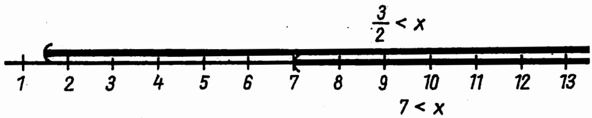


Bild 2 (3.3.2.)

$$L_1 = \left\{ x \in R: \frac{3}{2} < x \text{ und } 7 < x \right\} = \{x \in R: 7 < x\}$$

$$L_1 = (7; \infty)$$

2. Fall:

$$2x - 3 < 0$$
$$2x < 3$$
$$x < \frac{3}{2}$$

Wir lösen die Ungleichung $\frac{x+4}{2x-3} < 1$ unter der Bedingung, daß $x < \frac{3}{2}$ ist.

$$\frac{x+4}{2x-3} < 1 \quad | \cdot (2x-3)$$

Wegen (U 12) folgt:

$$\begin{aligned} x + 4 &> 2x - 3 \quad &|-x \\ 4 &> x - 3 \quad &|+3 \\ 7 &> x \end{aligned}$$

Wir ermittelten $7 > x$ unter der Bedingung $x < \frac{3}{2}$.

Damit sind alle reellen Zahlen Lösung der Ungleichung, für die gilt:

$$x < \frac{3}{2} \text{ und } x < 7.$$

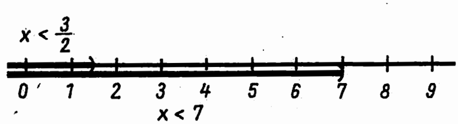


Bild 3 (3.3.2.)

$$L_2 = \left\{ x \in R: x < \frac{3}{2} \text{ und } x < 7 \right\} = \left\{ x \in R: x < \frac{3}{2} \right\}$$

$$L_2 = \left(-\infty; \frac{3}{2} \right)$$

Weil der erste *oder* der zweite Fall eintritt, ist jede Zahl eine Lösung der Ungleichung $\frac{x+4}{2x-3} < 1$, wenn sie in L_1 oder in L_2 enthalten ist. Das bedeutet aber, daß die Lösungsmenge dieser Ungleichung die Vereinigungsmenge von L_1 und L_2 ist.

$$L = L_1 \cup L_2 = L_2 \cup L_1$$

$$L = \left\{ x \in R: x < \frac{3}{2} \text{ oder } x > 7 \right\}$$

$$L = \left(-\infty; \frac{3}{2} \right) \cup (7; \infty)$$

Aufgabe 2 (3.3.2.)

Man löse die Ungleichung $\frac{2x-4}{3x+3} < 0 \; (x \neq -1)$ und führe eine Stichprobe durch.

LÖSUNG

1. Fall:

$$3x+3>0$$
$$x>-1$$
$$\frac{2x-4}{3x+3}<0 \quad \Big| \cdot (3x+3)$$
$$2x-4<0$$
$$x<2$$
$$L_1 = \{x \in R:\ -1 < x \text{ und } x < 2\}$$
$$L_1 = (-1; 2)$$

2. Fall:

$$3x+3<0$$
$$x<-1$$
$$\frac{2x-4}{3x+3}<0 \quad \Big| \cdot (3x+3)$$
$$2x-4>0$$
$$x>2$$
$$L_2 = \{x \in R: x < -1 \text{ und } 2 < x\} = \emptyset$$

Stichprobe:

$$x=0 \quad \frac{2\cdot 0-4}{3\cdot 0+3} \;\Big|\; 0$$
$$-\frac{4}{3}<0$$

Die Zahl Null ist eine Lösung der Ungleichung.

$$x=3 \quad \frac{2\cdot 3-4}{3\cdot 3+3} \;\Big|\; 0$$
$$\frac{1}{6}<0$$

Wir erhalten eine falsche Aussage. Die Zahl 3 ist keine Lösung der Ungleichung. Das Ergebnis der Stichprobe läßt vermuten, daß L_1 und L_2 richtig ermittelt wurden.

$$L = L_1 \cup L_2 = (-1; 2)$$

3.3.3. *Systeme linearer Gleichungen*

Durch Gleichungen lassen sich in vielen Fällen in der Praxis bestehende Bedingungen und Beziehungen mit der Sprache der Mathematik erfassen bzw. ausdrücken. Zur mathematischen Darstellung komplizierter Bedingungsgefüge ist oftmals die Angabe mehrerer Gleichungen notwendig, die für alle zu erfüllenden Bedingungen stehen. Wir sprechen dann von einem **Gleichungssystem.**

> Ein **System linearer Gleichungen** besteht aus mehreren linearen Gleichungen. Diese sind dadurch miteinander verbunden, daß Lösungen zu finden sind, die jede dieser Gleichungen erfüllen. Ein geordnetes Zahlenpaar (ein geordnetes Zahlentripel, ...), das Lösung aller Gleichungen eines Systems ist, heißt **Lösung des Gleichungssystems.**

Wir betrachten zunächst Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen. Das Lösen eines solchen Systems läßt sich auf das Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen zurückführen. In den Beispielen 1 (3.3.3.) bis 3 (3.3.3.) werden dafür drei unterschiedliche Lösungswege dargestellt.

■ BEISPIEL 1 (3.3.3.)

Eine LPG bewirtschaftet 960 Hektar Feld und Wiese. Die Wiesenfläche ist um 40 Hektar kleiner als ein Viertel der Feldfläche. Wie groß ist die Fläche der Felder dieser LPG? Wie groß ist die Wiesenfläche?

Größe der Feldfläche (in Hektar): x
Größe der Wiesenfläche (in Hektar): y
(1) $x + y = 960$
(2) $\frac{1}{4} \cdot x = y + 40$
Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem **Einsetzverfahren.** Dazu wird eine der beiden Gleichungen nach einer Variablen aufgelöst. Der Term, der dieser Variablen gleich ist, wird in der anderen Gleichung für diese Variable *eingesetzt.* Man erhält eine Gleichung mit einer Variablen.
Wir stellen Gleichung (2) nach x um:
(3) $x = 4y + 160$
Durch Einsetzen in Gleichung (1) erhält man:
(4) $4y + 160 + y = 960$
(5) $5y + 160 \quad = 960$
(6) $\quad y = 160$
Aus Gleichung (3) ergibt sich mit (6):
(7) $x = 4 \cdot 160 + 160$
(8) $x = 800$
Die *Probe* wird anhand der Aufgabenstellung durchgeführt.
Die Feld- bzw. Wiesenfläche beträgt 800 Hektar bzw. 160 Hektar. Das sind insgesamt 960 Hektar.
200 Hektar sind ein Viertel der Feldfläche. Die Wiesenfläche ist mit 160 Hektar um 40 Hektar kleiner als ein Viertel der Feldfläche. Die LPG bewirtschaftet 800 Hektar Feldfläche und 160 Hektar Wiesenfläche.

■ BEISPIEL 2 (3.3.3.)

(1) $x + y = 960$
(2) $\frac{1}{4}x \quad = y + 40$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mittels des **Gleichsetzverfahrens.** Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen aufgelöst. Die Terme, die dieser Variablen entsprechen, werden *gleichgesetzt.*

Der Leser erkennt, daß das Gleichsetzverfahren eine Modifizierung des Einsetzverfahrens ist, denn jetzt werden vor dem Einsetzen die Gleichungen lediglich nach derselben Variablen aufgelöst.

(3) $x = 960 - y$
(4) $x = 4\,(y + 40)$
(5) $960 - y = 4\,(y + 40)$
(6) $800 = 5y$
(7) $160 = y$
(8) $x = 960 - 160$
(9) $x = 800$

Das geordnete Paar (800; 160) ist Lösung des Gleichungssystems.
$L = \{(800;\,160)\}$

■ BEISPIEL 3 (3.3.3.)

(1) $3x + 2y = 8$
(2) $2x - 6y = 9$

Wir lösen dieses Gleichungssystem nach dem **Additionsverfahren.** Durch geeignete äquivalente Umformungen der beiden Gleichungen erreicht man, daß die Koeffizienten einer Variablen denselben Betrag haben und daß vor diesen Koeffizienten entweder voneinander verschiedene Vorzeichen oder voneinander verschiedene Zeichen der Operationen Addition bzw. Subtraktion stehen. Durch Addition der linken bzw. rechten Seiten der in dieser Weise veränderten Gleichungen wird eine Variable *eliminiert* (ausgeschaltet). Es entsteht eine Gleichung mit *einer* Variablen.

(1) $3x + 2y = 8 \quad | \cdot 3$
(2) $2x - 6y = 9$

(1') $9x + 6y = 24$
(2) $2x - 6y = 9$

Durch Addition der linken und rechten Seiten der Gleichungen (1') und (2) erhält man:

(3) $11x = 33$
(4) $x = 3$

Aus (2) folgt:

(5) $2 \cdot 3 - 6y = 9$
(6) $y = -\frac{1}{2}$

Probe:

(1) $3 \cdot 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \;\Big|\; 8$
$9 - 1 = 8$

$$(2)\quad 2\cdot 3 - 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \;\Big|\; 9$$
$$6 + 3 = 9$$

$$L = \left\{\left(3, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Die erläuterten Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Variablen sind auch beim Lösen linearer Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen anwendbar. Besonders rationell ist dabei eine Verallgemeinerung des Additionsverfahrens (Gauß'sches Eliminierungsverfahren).

■ BEISPIEL 4 (3.3.3.)

$$\begin{array}{ll}
(1) & x + 2y - z = 1 \\
(2) & 2x + 2y - z = -1 \\
(3) & -x + y - z = 4
\end{array}$$

Wir lösen das System in folgender Weise:
Eine Gleichung des Systems (im Beispiel Gleichung (1)) wird festgehalten. Im Sinne des Additionsverfahrens wird aus den beiden anderen Gleichungen ein und dieselbe Variable eliminiert (im Beispiel x). Als Bezugsgleichung für diese beiden Gleichungen (im Beispiel (2) und (3)) gilt jeweils die festgehaltene Gleichung (im Beispiel (1)).

$$\begin{array}{ll|l|l}
(1) & x + 2y - z = 1 & \cdot 2 & \cdot 1 \\
(2) & 2x + 2y - z = -1 & \cdot(-1)\downarrow & \\
(3) & -x + y - z = 4 & & \cdot 1\downarrow
\end{array}$$ [1)]

$$\begin{array}{ll|l}
(1) & x + 2y - z = 1 & \\
(2') & 2y - z = 3 & \cdot 3 \\
(3') & 3y - 2z = 5 & \cdot(-2)\downarrow
\end{array}$$

Nun gehen wir in entsprechender Weise vor. Dabei sind aber nur noch die Gleichungen (2′) und (3′) von Interesse.

$$\begin{array}{ll}
(1) & x + 2y - z = 1 \\
(2') & 2y - z = 3 \\
(3'') & z = -1
\end{array}$$

Wie z zu belegen ist, damit eine wahre Aussage vorliegt, kann in (3″) unmittelbar abgelesen werden. Die Ermittlung entsprechender Belegungen für x und y ist auch kein Problem. Wir setzen für z in (2′) die Zahl -1 ein:

$$\begin{array}{ll}
(4) & 2y - (-1) = 3 \\
(5) & y = 1
\end{array}$$

---

1) Ein Pfeil gibt an, daß die einander entsprechenden Seiten der gekennzeichneten Gleichungen zu addieren sind, nachdem die angegebenen Operationen (im Beispiel Multiplikation beider Seiten der Gleichung (1) mit 2 und Multiplikation beider Seiten der Gleichung (2) mit -1) ausgeführt wurden.

Durch Einsetzen in (1) ergibt sich:
(6) $x + 2 \cdot 1 - (-1) = \ \ 1$
(7) $x = -2$
Prüft man, ob ein errechnetes Ergebnis Lösung eines Gleichungssystem ist, muß man *alle Ausgangsgleichungen* in die Überprüfung einbeziehen.
Probe:
(1) $-2 + 2 \cdot 1 - (-1) \mid 1$
$1 = 1$
(2) $2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 - (-1) \mid -1$
$-1 = -1$
(3) $-(-2) + 1 - (-1) \mid 4$
$4 = 4$

$L = \{(-2; 1; -1)\}$

In den Beispielen 1 (3.3.3.) bis 4 (3.3.3.) erhielten wir für die untersuchten Gleichungssysteme stets *genau eine Lösung.* Das ist nicht immer so.

Das folgende Gleichungssystem hat *keine Lösung. Die Gleichungen widersprechen sich.*
(1) $3x - 6y = \ \ 4$
(2) $1{,}5x - 3y = -6$
Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (2) mit 2, ist der Widerspruch offensichtlich.
(1) $3x - 6y = \ \ 4$
(2') $3x - 6y = -12$
Falls man den Widerspruch nicht gleich bemerkt und das System nach einem der dargestellten Verfahren lösen will, erhält man im Laufe des Lösungsprozesses eine falsche Aussage.

Es ist auch möglich, daß ein Gleichungssystem *unendlich viele Lösungen* hat. *Die Gleichungen sind voneinander linear abhängig.*

(1) $\frac{1}{2}x + \ \ y = 2$

(2) $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y = \frac{8}{3}$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (1) mit 4 und die Seiten der Gleichung (2) mit 3, erkennt man, daß beide Gleichungen zu derselben Gleichung (und damit untereinander) äquivalent sind.
(1') $2x + 4y = 8$
(2') $2x + 4y = 8$
Falls man die lineare Abhängigkeit dieser Gleichungen zunächst nicht erkennt, erhält man bei einem Lösungsversuch eine wahre Aussage. Sie ist Kennzeichen der bestehenden Abhängigkeit. Da im vorliegenden Fall nur eine (unabhängige) Gleichung gegeben ist, erhalten wir für das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

(1) $\frac{1}{2}x + y = 2$

(3) $y = 2 - \frac{1}{2}x$

x ist frei wählbar.
Als Lösungsmenge erhält man:

$$L = \left\{(x; y) : y = 2 - \frac{1}{2}x \text{ und } x \in R\right\}$$

> Ein System linearer Gleichungen mit zwei Variablen hat in $R \times R$ *genau eine Lösung*, wenn die Gleichungen des Systems voneinander linear unabhängig und widerspruchsfrei sind. Es hat *keine Lösung*, wenn sich die Gleichungen widersprechen. Es hat *unendlich viele Lösungen*, wenn die Gleichungen voneinander linear abhängig sind.

Übungen 3.3.

1. Es soll geprüft werden, ob die beiden Gleichungen (Ungleichungen) im Bereich der reellen Zahlen jeweils einander äquivalent sind.
Gegebenenfalls ist der Fehler anzugeben, wenn angenommen wird, daß die zweite Gleichung (Ungleichung) durch „äquivalente Umformung" aus der ersten abgeleitet wurde.

a)	$\frac{x}{5} - \frac{3x}{4} = 2$	$-\frac{19}{20}x = 2$
b)	$\frac{x}{9} + \frac{x}{3} = 2$	$4x = 18$
c)	$(x-3)(x-4) = 3x - 12$	$x - 3 = 3$
d)	$-3 - \frac{x}{2} + 5 > 2x$	$\frac{5}{2}x < 2$
e)	$\frac{x-3}{x+4} < 16 \quad (x \neq -4)$	$(x-3) < 16(x+4)$

2. Wo steckt der Fehler?
Für die reellen Zahlen a und b gelte $a < b$. Es existiert dann eine positive Zahl c mit
(1) $a + c = b$.
Beide Seiten der Gleichung (1) werden mit $(b - a)$ multipliziert.
(2) $(a + c)(b - a) = b(b - a)$
(3) $ab + bc - aa - ac = bb - ba$
(4) $ab - aa - ac = bb - ba - bc$
(5) $a(b - a - c) = b(b - a - c)$
(6) $a = b$

3.4. Graphisches Lösen von Systemen linearer Gleichungen und Ungleichungen; lineare Optimierung

Neben dem rechnerischen Lösen eines Systems von Gleichungen oder Ungleichungen existiert die Möglichkeit des graphischen Lösens. Insbesondere für das Lösen von Systemen linearer Ungleichungen ist dieses Verfahren von Bedeutung, weil man die im allgemeinen unendlich vielen Lösungen eines solchen Systems dann sehr anschaulich darstellen kann. Das gilt allerdings nur für den Fall, daß das System linearer Ungleichungen höchstens zwei Variable enthält. Das graphische Lösen eines Systems linearer Ungleichungen bildet u. a. die Grundlage für ein Verfahren zur Untersuchung einfacher Probleme der linearen Optimierung.
Soll ein System von zwei linearen Gleichungen graphisch gelöst werden, stellt man die Lösungen jeder der beiden Gleichungen in ein und demselben Koordinatensystem dar. Wenn die Lösungsgrundmenge die Menge $R \times R$ ist, erhält man die Bilder zweier Geraden. Lösungen des Gleichungssystems sind diejenigen Paare reeller Zahlen, die beide Gleichungen erfüllen. In der graphischen Darstellung entsprechen ihnen die Koordinaten der Punkte, die auf jeder der beiden Geraden liegen. Meistens erhält man durch die graphische Lösungsmethode eine Näherungslösung.

■ BEISPIEL 1 (3.4.)

(1) $3x + 2y = 8$

(2) $2x - 6y = 9$

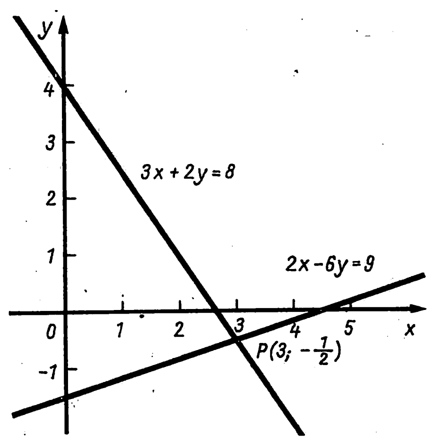


Bild 1 (3.4.)

Das geordnete Paar $\left(3; -\frac{1}{2}\right)$ ist Lösung des Gleichungssystems.

Um die beiden Geraden zeichnen zu können, muß man die Funktionsgleichung nicht unbedingt erst in der Normalform $y = mx + n$ darstellen. Es ist nicht schwer, von einer gegebenen Funktionsgleichung zum Bild der Funktion überzugehen. Man ermittelt dazu am einfachsten die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden mit der y-Achse ($x = 0$) bzw. mit der x-Achse ($y = 0$).

BEISPIEL 2 (3.4.)

(1) $3x - 6y = 4$

(2) $\frac{3}{2}x - 3y = 2$

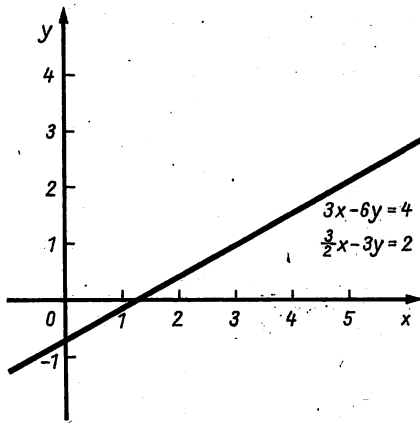


Bild 2 (3.4.)

Die Geraden haben alle Punkte gemeinsam. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

BEISPIEL 3 (3.4.)

(1) $3x - 6y = 3$

(2) $\frac{3}{2}x - 3y = -6$

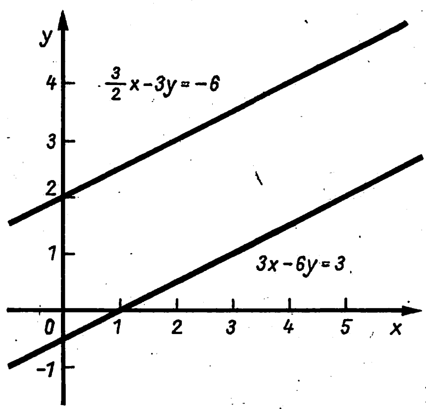


Bild 3 (3.4.)

Die Geraden haben keinen Punkt gemeinsam. Es gibt keine Lösung.

Zur Darstellung der Lösungen einer linearen Ungleichung mit einer Variablen verwendeten wir mehrfach eine Zahlengerade.

BEISPIEL 4 (3.4.)

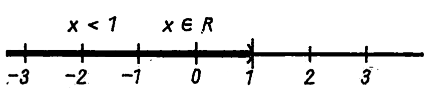


Bild 4 (3.4.)

Die graphische Darstellung aller Lösungen einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen kann mit Hilfe eines Koordinatensystems in einer Ebene erfolgen.

Wir erinnern uns: Alle Paare reeller Zahlen, welche die Gleichung $3x + 2y = 8$ erfüllen, sind durch die Punkte der entsprechenden Geraden g in einem Koordinatensystem darstellbar (vgl. Bild 5 (3.4.)). Jede Gerade zerlegt eine Ebene, in der sie liegt, in Halbebenen. Die Koordinaten der Punkte der in Bild 5 (3.4.) schraffiert dargestellten offenen Halbebene erfüllen die Ungleichung $3x + 2y > 8$.

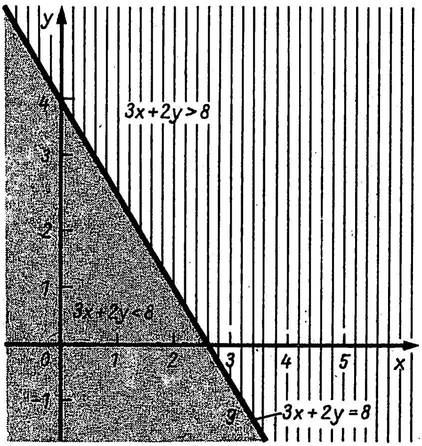


Bild 5 (3.4.)

Begründung:
Zur Geraden g im Bild 5 (3.4.) gehört die Funktionsgleichung $y = -\frac{3}{2}x + 4$.
Denkt man sich zu g alle parallelen Geraden gezeichnet, die der Funktionsgleichung $y = -\frac{3}{2}x + 4 + a$ ($a \in R$, $a > 0$) genügen, decken diese die schraffiert gezeichnete Halbebene ab. Aus $y = -\frac{3}{2}x + 4 + a$ folgt $2y + 3x = 8 + 2a$.
Weil a größer als 0 ist, können wir abschätzen: $2y + 3x > 8$.
Durch analoge Überlegungen ergibt sich, daß die Koordinaten der Punkte, die im Bild 5 (3.4.) in der nicht schraffiert dargestellten offenen Halbebene liegen, die Ungleichung $2y + 3x < 8$ erfüllen.

a, b und c seien reelle Zahlen. a und b seien nicht beide Null.
Die *graphische Darstellung* aller Lösungen von $ax + by = c$ ($x \in R, y \in R$) in einem Koordinatensystem ist eine Gerade g.
Die *graphische Darstellung* aller Lösungen von $\left\{\begin{bmatrix} ax + by > c \\ ax + by < c \end{bmatrix}\right\}$ ist eine durch g bestimmte offene Halbebene.
Die *graphische Darstellung* aller Lösungen von $\left\{\begin{bmatrix} ax + by \geqq c \\ ax + by \leqq c \end{bmatrix}\right\}$ ist eine durch g bestimmte Halbebene.

Aufgabe 1 (3.4.)

Man stelle die Lösungen der Ungleichungen in ein und demselben Koordinatensystem dar.

a) $2x - 4y > 9 \quad (x \in R,\ y \in R)$

b) $3x + 4y < 8 \quad (x \in R,\ y \in R)$

LÖSUNG

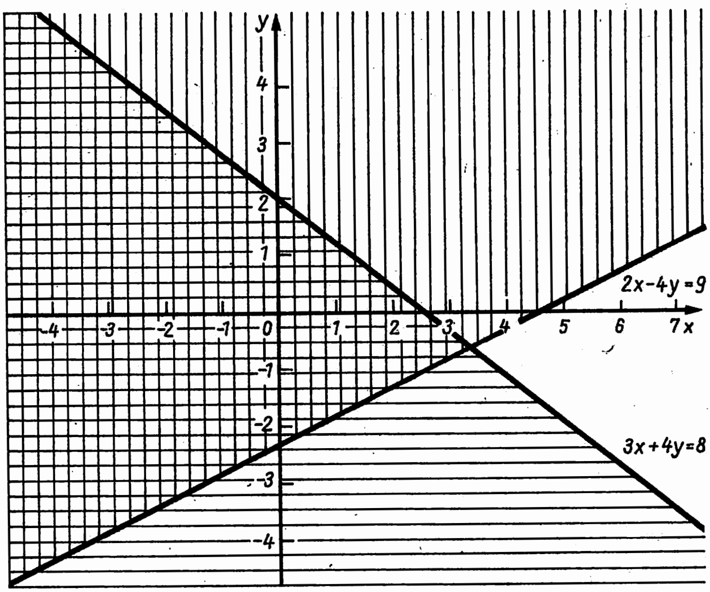


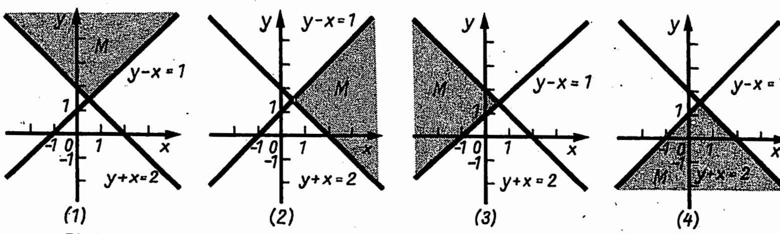
Bild 6 (3.4.)

Die durch Schraffur senkrecht zur x-Achse gekennzeichnete offene Halbebene enthält alle Punkte, deren Koordinaten (1) $2x - 4y > 9$ erfüllen.
Die durch Schraffur waagerecht zur x-Achse gekennzeichnete offene Halbebene enthält alle Punkte, deren Koordinaten (2) $3x + 4y < 8$ erfüllen.
Der durch doppelte Schraffur gekennzeichnete Teil der Ebene enthält alle Punkte, deren Koordinaten die Ungleichungen (1) *und* (2) erfüllen. Die Koordinaten jedes dieser Punkte sind eine Lösung des aus den Ungleichungen (1) und (2) bestehenden Systems von Ungleichungen.

Ein **System linearer Ungleichungen** besteht aus mehreren linearen Ungleichungen. Diese sind dadurch miteinander verbunden, daß Lösungen zu finden sind, die jede dieser Ungleichungen erfüllen.
Ein geordnetes Zahlenpaar (ein geordnetes Zahlentripel, ...), das Lösung aller Ungleichungen eines Systems ist, heißt **Lösung des Ungleichungssystems.**

■ BEISPIEL 5 (3.4.)

In einer graphischen Darstellung geben wir die offene Punktmenge M an, welche jeweils die Lösungsmenge folgender Systeme linearer Ungleichungen kennzeichnet.



Die begrenzenden Halbgeraden gehören nicht zu M

Bild 7 (3.4.)

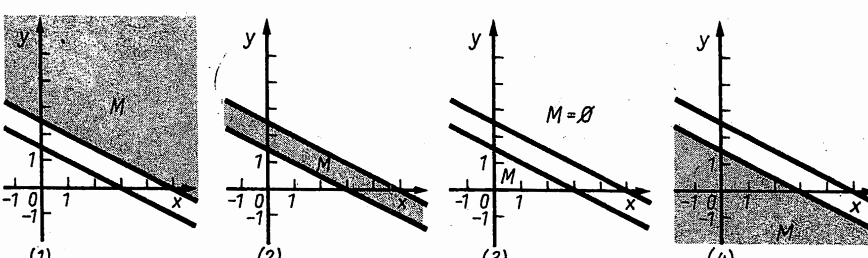
(1) $y+x>2$, $y-x>1$ (2) $y+x>2$, $y-x<1$ (3) $y+x<2$, $y-x>1$ (4) $y+x<2$, $y-x<1$

Der Leser überlege sich, welche Veränderung in der graphischen Darstellung vorzunehmen ist, falls in den genannten Systemen von Ungleichungen das Zeichen < durch das Zeichen ≦ und das Zeichen > durch das Zeichen ≧ ersetzt wird.

Aufgabe 2 (3.4.)
Die jeweilige Lösungsmenge M der folgenden Systeme linearer Ungleichungen ist graphisch darzustellen.

(1) $2y+x \geqq 3$, $2y+x \geqq 5$ (2) $2y+x \geqq 3$, $2y+x \leqq 5$ (3) $2y+x \leqq 3$, $2y+x \geqq 5$ (4) $2y+x \leqq 3$, $2y+x \leqq 5$

LÖSUNG



Bei (1) und (4) gehört die begrenzende Gerade zu M
Bei (2) gehören die begrenzenden Geraden zu M

Bild 8 (3.4.)

Aufgabe 3 (3.4.)
Es ist ein System linearer Ungleichungen anzugeben, dessen Lösungen im Bild 6 (3.4.) durch die Punkte folgender Teile der Ebene charakterisiert sind.

a) Ausschließlich waagerecht zur x-Achse schraffierter Teil der Ebene (ohne begrenzende Halbgeraden)
b) Ausschließlich senkrecht zur x-Achse schraffierter Teil der Ebene (ohne begrenzende Halbgeraden)
c) Nicht schraffierter Teil der Ebene (einschließlich begrenzende Halbgeraden)

LÖSUNG

a) $2x - 4y < 9 \quad (x \in R,\ y \in R)$
$3x + 4y < 8$

b) $2x - 4y > 9 \quad (x \in R,\ y \in R)$
$3x + 4y > 8$

c) $2x - 4y \leqq 9 \quad (x \in R,\ y \in R)$
$3x + 4y \geqq 8$

Auch die Menge aller Punkte eines Quadranten des Koordinatensystems kann durch ein System zweier linearer Ungleichungen beschrieben werden.

■ BEISPIEL 6 (3.4.)

Das System

(1) $x \geqq 0 \quad (x \in R)$
(2) $y \geqq 0 \quad (y \in R)$

beschreibt alle Punkte des ersten Quadranten eines Koordinatensystems (einschließlich der begrenzenden Halbgeraden).
In einer etwas ausführlicheren Form hat dieses System von Ungleichungen die Gestalt:

(1) $x + 0 \cdot y \geqq 0$
(2) $0 \cdot x + y \geqq 0$

Wir wenden die eben erarbeiteten Erkenntnisse zur Lösung des Beispiels 7 (3.4.) an.

■ BEISPIEL 7 (3.4.)

Ein Betrieb bietet freie Maschinenkapazitäten an. Maschine 1 steht mit 120 und Maschine 2 mit 100 Zeiteinheiten zur Verfügung. Die Interessenten schlagen die Nutzung der Maschinen zur Herstellung von Erzeugnissen der Sorten A und B vor.
Zur Produktion eines Erzeugnisses der Sorte A werden auf Maschine 1 jeweils 6 und zur anschließenden Bearbeitung auf Maschine 2 je 2 Zeiteinheiten benötigt.
Für ein Erzeugnis der Sorte B benötigt man auf der 1. Maschine 4 Zeiteinheiten und für die anschließende Bearbeitung auf der 2. Maschine 5 Zeiteinheiten.
Wie viele Erzeugnisse jeder Art können hergestellt werden?
Wir fassen die Angaben in einer Tabelle zusammen.

Nummer der Maschine	Notwendige Maschinenzeiteinheiten je Erzeugnis der Sorte A	Sorte B	Zur Verfügung stehende Maschinenzeiteinheiten
1	6	4	120
2	2	5	100
Anzahl der erzeugten Produkte	x	y	

Weil x Erzeugnisse der Sorte A und y Erzeugnisse der Sorte B hergestellt werden, ergeben sich folgende Maschinenbelastungszeiten:
Belastungszeit der Maschine 1: $6x + 4y$
Belastungszeit der Maschine 2: $2x + 5y$
Die Belastungszeiten dürfen den verfügbaren Fonds nicht überschreiten. Daraus folgt:
(1) $6x + 4y \leqq 120$
(2) $2x + 5y \leqq 100$
Die Anzahl der erzeugten Produkte ist jeweils eine natürliche Zahl. Deshalb erhalten wir die zusätzlichen Bedingungen:
(3) $x \geqq 0$ $(x \in N)$
(4) $y \geqq 0$ $(y \in N)$
Die Lösungen dieses Systems von vier linearen Ungleichungen stellen wir im Bild 9 (3.4.) dar (vgl. S. 193).
Die Koordinaten der Punkte des hervorgehobenen Gebiets (einschließlich der Begrenzung) sind Lösungen des Ungleichungssystems in $R \times R$. Weil durch die Bedingungen $x \in N$ und $y \in N$ eine Einschränkung des Lösungsgrundbereiches des Systems auf $N \times N$ erfolgt, dürfen wir nur Punkte beachten, deren Koordinaten natürliche Zahlen sind.[1)]
Wir geben einige Lösungen an:

Nummer der Lösung	x	y	Gesamtbearbeitungszeiteinheiten auf Maschine 1 $(6x + 4y)$	Maschine 2 $(2x + 5y)$
1	0	0	0	0
2	0	11	44	55
3	12	12	120	84
4	18	3	120	69
5	2	18	84	94

1) Punkte, deren Koordinaten ganze Zahlen sind, nennen wir Gitterpunkte.

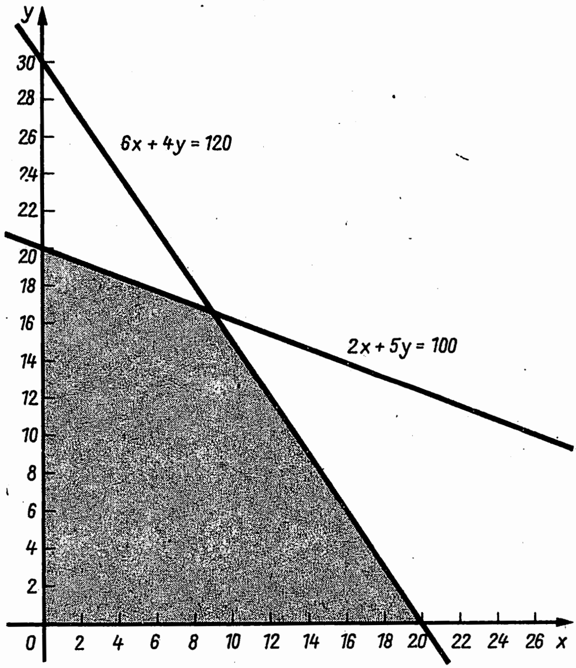


Bild 9 (3.4.)

Lösung 1 bedeutet, daß keines der Produkte A bzw. B hergestellt wird. Lösung 3 ermöglicht eine recht gute Ausnutzung der Maschinenzeit.
Die Erfassung der mehr als 250 geordneten Paare, die Lösung des Systems von Ungleichungen sind, ist recht aufwendig und wenig sinnvoll. In der Praxis ist die Frage nach der Anzahl der von jeder Sorte herzustellenden Erzeugnisse mindestens noch mit einer anderen Frage gekoppelt. Es ist die Frage, welcher Gewinn sich bei einer derartigen Produktion erzielen läßt.
Nehmen wir an, daß der Betrieb pro Erzeugnis der Sorte A einen Gewinn von 15 und pro Erzeugnis der Sorte B einen Gewinn von 25 Geldeinheiten (GE) erzielt. Für die angegebenen Lösungsbeispiele ergibt sich dann als Gewinn:

Nummer der Lösung	x	y	Erzielter Gewinn in GE
1	0	0	0
2	0	11	275
3	12	12	480
4	18	3	345
5	2	18	480

Von den fünf betrachteten Lösungen bringen die 3. und 5. den größten Gewinn. Gibt es aber vielleicht noch eine gewinnträchtigere Lösung? Diese Fragestellung ist typisch für die Optimierung von Wirtschaftsprozessen. Bei Einhaltung bestimmter Parameter soll diejenige der möglichen Lösungen gefunden werden, die maximalen Nutzen verspricht. Ein Problem der Optimierung besteht auch darin, ein bestimmtes Ergebnis mit minimalem Aufwand zu erhalten.

Von einem Problem der **linearen Optimierung** sprechen wir, wenn das Maximum oder das Minimum einer linearen Funktion (**Zielfunktion**), die von n Variablen abhängt, zu bestimmen ist und bezüglich dieser Variablen bestehende Bedingungen (**Nebenbedingungen**) durch lineare Gleichungen oder Ungleichungen beschreibbar sind.

Aufgabe 4 (3.4.)
Wie kann für Beispiel 7 (3.4.) die (oder eine) optimale Lösung gefunden werden? Ist dazu die Untersuchung aller potentiellen Lösungen notwendig?
(Es wird angenommen, daß 15 GE je Erzeugnis der Sorte A und 25 GE je Erzeugnis der Sorte B erzielt werden.)

LÖSUNG
Sicher müssen wir nicht alle Lösungen untersuchen und den damit verbundenen Gewinn errechnen. Es ist klar, daß von den Lösungen (16; 0), (16; 1), (16; 2), (16; 3), (16; 4), (16; 5), (16; 6) die letzte den meisten Gewinn verspricht. Haben wir also einen x-Wert festgehalten, ist der maximal mögliche y-Wert zu wählen. Auf diese Weise müßten wir in unserem Beispiel immerhin noch 21 unterschiedliche Lösungen untersuchen [(0; 20), (1; 19), ..., (20; 0)]. Wir ersparen uns hier eine genauere Untersuchung dieser 21 Möglichkeiten.

Wir entwickeln ein Verfahren, das im allgemeinen recht schnell zur Ermittlung einer optimalen Lösung einer gestellten Aufgabe führt, ohne daß dabei sehr viele potentielle Lösungen einer genaueren Untersuchung unterzogen werden müssen. Das Ziel unserer Betrachtungen besteht dabei in erster Linie darin, Verständnis für Fragen der Optimierung und dazu nutzbare mathematische Methoden anzubahnen. Praxisrelevante Aufgaben der linearen Optimierung erfordern im allgemeinen einen hohen rechnerischen Aufwand, der von uns hier nicht vollzogen werden kann.
Wir modifizieren Beispiel 7 (3.4.) in der schon angegebenen Weise.

■ BEISPIEL 8 (3.4.)

Ein Betrieb bietet freie Maschinenkapazitäten an. Maschine 1 steht mit 120 und Maschine 2 mit 100 Zeiteinheiten zur Verfügung. Die Interessenten schlagen die Nutzung der Maschinen zur Herstellung von Erzeugnissen der Sorte A und der Sorte B vor. Zur Produktion eines Erzeugnisses der Sorte A werden auf Maschine 1 jeweils 6 und zur anschließenden Bearbeitung auf Maschine 2 je 2 Zeiteinheiten benötigt. Für ein Erzeug-

nis der Sorte B dauert die Bearbeitung auf der 1. Maschine 4 und anschließend auf der 2. Maschine 5 Zeiteinheiten.
Die Herstellung eines Erzeugnisses der Sorte A bringt einen Gewinn von 15 Geldeinheiten, während ein Erzeugnis der Sorte B 25 Geldeinheiten Gewinn bringt.
Wie viele Erzeugnisse jeder Sorte sind zu produzieren, um einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen?

Nummer der Maschine	Notwendige Maschinenzeiteinheiten je Erzeugnis der Sorte A	Sorte B	Verfügbare Maschinenzeiteinheiten
1	6	4	120
2	2	5	100
Anzahl der hergestellten Produkte	x	y	
Erzielter Gewinn (in GE je Produkt)	15	25	

Den Gewinn z errechnet man durch
$z = 15x + 25y.$
Ziel ist es, unter Beachtung der angegebenen Bedingungen diejenigen Stellen herauszufinden, an denen diese Funktion ihren größten Wert annimmt. Wir nennen sie deshalb Zielfunktion. Um auszudrücken, daß ein Maximum erreicht werden soll, schreiben wir:
$z = 15x + 25y \rightarrow \max.!$
Uns interessiert nicht, wann diese Funktion schlechthin einen maximalen Wert annimmt, sondern es interessiert der maximale Wert bei Einhaltung aller angeführten Bedingungen, der *Nebenbedingungen.*
Als Nebenbedingungen ergeben sich:
(1) $6x + 4y \leqq 120$
(2) $2x + 5y \leqq 100$
(3) $x \geqq 0 \quad (x \in N)$
(4) $y \geqq 0 \quad (y \in N)$
Die graphische Darstellung der Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems ist uns bereits vom Beispiel 7 (3.4.) bekannt.
Gesucht ist nun ein Paar $(x; y)$, das maximalen Gewinn verspricht. Dazu ist es notwendig, daß man aus der graphischen Darstellung den Gewinn ablesen kann.
Wir betrachten zunächst alle Produktionspläne, die gleichen Gewinn erbringen (zum Beispiel 275 GE).

Wegen $z = 275$ folgt aus der Gleichung der Zielfunktion

$$275 = 15x + 25y$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 11.$$

Alle möglichen Wertepaare, die dieser Gleichung genügen, charakterisieren eine Produktionsvariante mit einem Gewinn von 275 GE. Wir zeichnen die durch die Gleichung $y = -\frac{3}{5}x + 11$ bestimmte Gerade in ein Koordinatensystem ein und ermitteln, welche Punkte der Geraden Lösungen des Systems von Ungleichungen mit den Ungleichungen (1), (2), (3) und (4) liefern (vgl. Bild 10 (3.4.)). (Man beachte dabei, daß wegen $x \in N$ und $y \in N$ nur die entsprechenden Gitterpunkte zu berücksichtigen sind.)

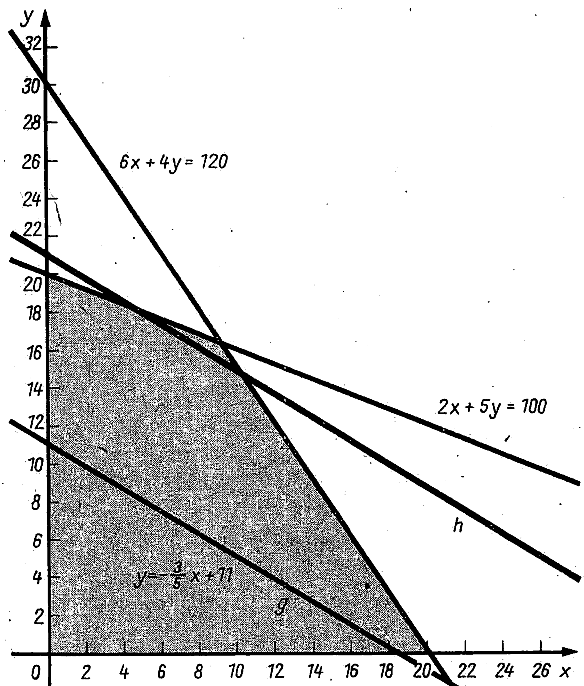


Bild 10 (3.4.)

Unter anderem erfüllen die Koordinaten der Punkte (0; 11), (5; 8) und (15; 3) alle Nebenbedingungen und die speziell gewählte Zielfunktion.

Wir untersuchen nun den allgemeinen Fall.

Ein beliebiger (konstanter) Gewinn sei z_0.

Es gilt:

$$z_0 = 15x + 25y \qquad y = -\frac{3}{5}x + \frac{z_0}{25}$$

Für jeden Wert von z_0 beschreibt $y = -\frac{3}{5}x + \frac{z_0}{25}$ eine Gerade. Alle diese Geraden haben gleichen Anstieg. Er wird durch den Koeffizienten von x in den entsprechenden Funktionsgleichungen charakterisiert $\left(-\frac{3}{5}\right)$.
Diese Geraden sind einander paarweise parallel. Je größer z_0 ist, desto weiter ist der Schnittpunkt einer solchen Geraden g (mit der y-Achse) vom Koordinatenursprung entfernt (und umgekehrt). Um ein geordnetes Paar zu ermitteln, das den größten Gewinn verspricht, wird g so weit wie möglich vom Koordinatenursprung weg verschoben. Wir erhalten eine Gerade h. Diese muß aber wenigstens einen Punkt mit der durch die Nebenbedingungen bestimmten Punktmenge gemeinsam haben.
In unserem Beispiel geht h durch die Punkte mit den Koordinaten (10; 15) und (5; 18) (vgl. Bild 10 (3.4.)).
Der Gewinn ist maximal, wenn 10 Produkte der Sorte A und 15 Produkte der Sorte B hergestellt werden. Er beträgt 525 Geldeinheiten. Dieser Gewinn ist auch realisierbar, wenn 5 Produkte der Sorte A und 18 Produkte der Sorte B hergestellt werden.

1. Variante

(1)	$6 \cdot 10 + 4 \cdot 15 = 120$	$120 \leqq 120$
(2)	$2 \cdot 10 + 5 \cdot 15 = 95$	$95 \leqq 100$
(3)		$10 \geqq 0$
(4)		$15 \geqq 0$

2. Variante

(1)	$6 \cdot 5 + 4 \cdot 18 = 102$	$102 \leqq 120$
(2)	$2 \cdot 5 + 5 \cdot 18 = 100$	$100 \leqq 100$
(3)		$5 \geqq 0$
(4)		$18 \geqq 0$

Wir betrachten abschließend noch Probleme der Minimierung von Kosten.

■ BEISPIEL 9 (3.4.)

Ein Betrieb soll 200 Stück eines Erzeugnisses herstellen. Dafür stehen ihm zwei Maschinensysteme zur Verfügung, die ein derartiges Erzeugnis nacheinander bearbeiten. Die Maschinensysteme können nach zwei unterschiedlichen Technologien arbeiten und jeweils das Produkt vollständig herstellen.
Wieviel Stück sind nach jeder Technologie herzustellen, wenn die Selbstkosten minimal sein sollen?
Die entsprechenden Daten sind der Tabelle auf Seite 198 zu entnehmen.

Anzahl der nach Technologie A hergestellten Erzeugnisse: x
Anzahl der nach Technologie B hergestellten Erzeugnisse: $200 - x$

Nummer des Maschinensystems	Notwendige Arbeitszeiteinh. zur Herstellung eines Erzeugnisses		Verfügbare Maschinenzeiteinheiten
	Technologie A	Technologie B	
1	2	3	550
2	5	3	750
Selbstkosten (in GE je Stück)	20	28	

Zielfunktion: $20 \cdot x + 28(200 - x) = z \rightarrow \text{min.!}$

$$5600 - 8x \quad = z \rightarrow \text{min.!}$$

Je größer x ist, desto geringer werden die Selbstkosten. Bei maximaler Stückzahl x sind sie minimal.

Welche Nebenbedingungen bestehen für x infolge benötigter und verfügbarer Maschinenzeiten?

(1) $2x + 3(200 - x) \leqq 550$

(2) $5x + 3(200 - x) \leqq 750$

(3) $x \geqq 0 \quad (x \in N)$

Aus (1) folgt:

(4) $-x + 600 \leqq 550$

(5) $x \geqq 50$

Aus (2) folgt:

(6) $2x + 600 \leqq 750$

(7) $x \leqq 75$

Für x gilt somit:

(8) $50 \leqq x \leqq 75$

Für $x = 75$ nimmt die Zielfunktion einen minimalen Wert an.

Wenn 75 Stück des Erzeugnisses nach Technologie A und 125 nach Technologie B produziert werden, sind die Selbstkosten minimal. Sie betragen 5000 Geldeinheiten.

Wir prüfen, ob die verfügbaren Maschinenzeiten eingehalten werden.

Maschinensystem 1:

$2 \cdot 75 + 3 \cdot 125 = 525 \qquad 525 \leqq 550$

Maschinensystem 2:

$5 \cdot 75 + 3 \cdot 125 = 750 \qquad 750 \leqq 750$

Aufgabe 5 (3.4.)

Für die Belieferung der Baustellen A und B mit Sand eignen sich die Sandgruben I und II. Baustelle A benötigt 600 m³. Baustelle B 1000 m³ Sand. Sandgrube I kann 800 m³ und Sandgrube II kann 900 m³ bereitstellen.

Die Transportkosten betragen
von Sandgrube I zur Baustelle A – 20 M je Kubikmeter;
von Sandgrube I zur Baustelle B – 25 M je Kubikmeter;
von Sandgrube II zur Baustelle A – 27 M je Kubikmeter;
von Sandgrube II zur Baustelle B – 35 M je Kubikmeter.

Wie muß die Belieferung erfolgen, damit die Transportkosten minimal sind?

LÖSUNG

	Baustelle A	Baustelle B	Mögliche Liefermenge
Sandgrube I liefert an	x	y	800
Sandgrube II liefert an	$600-x$	$1000-y$	900
Transportkosten	$20x+27(600-x)$	$25y+35(1000-y)$	

(Die Zahlenangaben beziehen sich auf Kubikmeter bzw. Mark.)
Zielfunktion:

$$20x+27\,(600-x)+25y+35\,(1000-y)=z \rightarrow \text{min.!}$$
$$-7x-10y+51200=z \rightarrow \text{min.!}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x+y &\leqq 800 \\ 600-x+1000-y &\leqq 900 \qquad (x+y\geqq 700) \\ x &\geqq 0 \\ x &\leqq 600 \\ y &\geqq 0 \\ y &\leqq 1000 \end{aligned}$$

Aus der Zielfunktion folgt, daß für konstante Transportkosten z_0 gilt:

$$y=-\frac{7}{10}x+\underbrace{5120-\frac{z_0}{10}}$$
$$y=-\frac{7}{10}x+\qquad n$$

Wird z_0 kleiner, das heißt die Transportkosten sinken, wächst n. Die Transportkosten sind also minimal, wenn die durch die angegebene Funktionsgleichung beschriebene Gerade die y-Achse so schneidet, daß der Schnittpunkt einen möglichst großen Abstand vom Koordinatenursprung hat.

Aus der Darstellung ist zu entnehmen, daß die Transportkosten für $x=0$ und $y=800$ minimal sind.

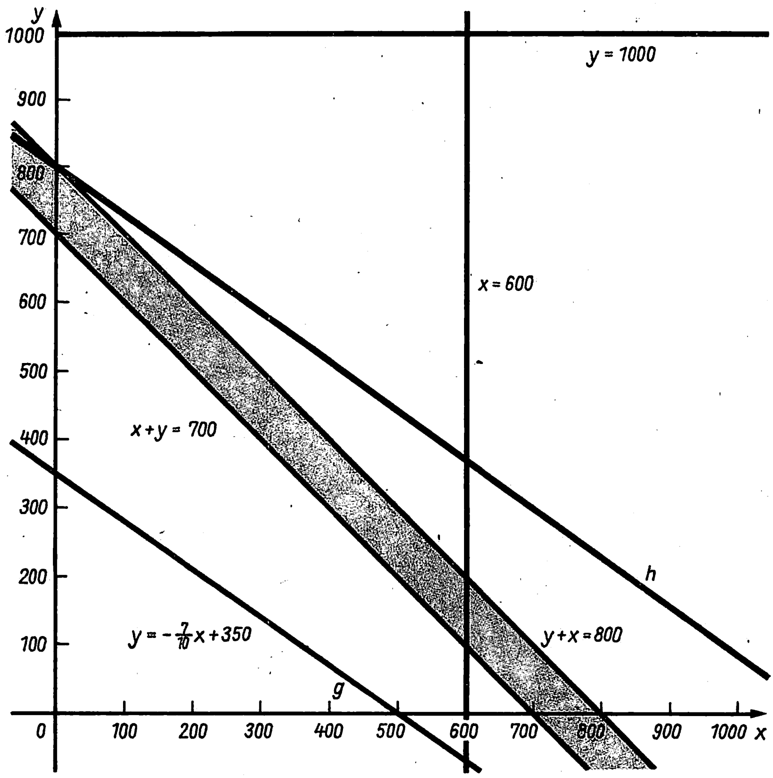


Bild 11 (3.4.)

Sandgrube I liefert an Baustelle B 800 m³ Sand.
Sandgrube II liefert an Baustelle A 600 m³ und an Baustelle B 200 m³ Sand.
Daraus ergeben sich als Transportkosten:

$$\begin{aligned}600 \cdot 27 + 800 \cdot 25 + 200 \cdot 35 &= 16200 + 20000 + 7000\\ &= 43200\end{aligned}$$

Die minimalen Transportkosten betragen 43200 Mark.

Abschließend sei betont, daß nicht für jedes Problem genau eine optimale Lösung existiert. Es zeigte sich bereits im Beispiel 8 (3.4.), daß mitunter mehrere optimale Lösungen möglich sind. Es kann aber auch gar keine (optimale) Lösung existieren. Das ist der Fall, wenn sich Nebenbedingungen widersprechen.

Übungen 3.4.

1. Man beschreibe die Dreiecks- und Vierecksflächen im Bild 12 (3.4.) jeweils durch ein System linearer Ungleichungen.

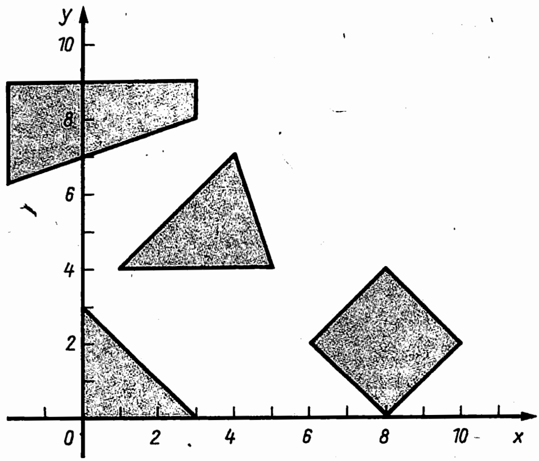


Bild 12 (3.4.)

2. In einem Großbetrieb werden zwei Baubrigaden zum Bau von Garagen eingesetzt. Dabei werden zwei Typen von Garagen gebaut. Es stehen vier verschiedene Baumaterialien zur Verfügung. Aus einer Tabelle kann der Brigadier die vorhandenen und notwendigen Fonds an Baumaterialien ablesen.

Materialsorte	Benötigtes Material für		Materialfonds
	Typ A	Typ B	
1	4	6	120
2	6	4	100
3	2	5	100
4	2	0	50

Es ist festzustellen, wie viele Garagen die beiden Brigaden optimal fertigstellen können.

3.5. Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen beim Lösen von Aufgaben

Im Abschnitt 3.5. greifen wir Gedanken auf, die immanenter Bestandteil aller Abschnitte unserer drei Lehrbücher sind. In konzentrierter Form sollen einige Aussagen zu Bedeutung und Möglichkeiten inhaltlichen Arbeitens dargelegt werden. Wenn auch im folgenden Beispiele und Aufgaben aus der Arithmetik gewählt werden, sind die Ausführungen nicht ausschließlich spezifisch für die Arithmetik oder die Mathematik überhaupt. Deshalb ist die Anwendung hier gewonnener oder verdichteter Erkenntnisse auch außerhalb des Faches Mathematik empfehlenswert.
Die Betonung des Einbeziehens inhaltlicher Überlegungen in den Aufgabenlösungsprozeß in diesem Abschnitt bedeutet nicht, daß inhaltliches Vorgehen dem algorithmischen Vorgehen entgegengestellt werden soll. Häufig sind inhaltliche und algorithmische Vorgehensweisen eng miteinander verknüpft. Im Lösungsprozeß ist jeweils zu entscheiden, welche Lösungsschritte durch welche Vorgehensweise besonders effektiv ausführbar sind.
Für die Berufspraxis eines Lehrers der unteren Klassen ist das Einbeziehen inhaltlicher Überlegungen in den Aufgabenlösungsprozeß deshalb von Bedeutung, weil diese Vorgehensweise in den unteren Klassen sehr oft anzutreffen ist.

3.5.1. *Einige Grundgedanken zur Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen beim Lösen von Aufgaben*

Im Abschnitt 3.3. wurden grundlegende Methoden zur Lösung linearer Gleichungen und Ungleichungen sowie linearer Gleichungssysteme betrachtet. Kernstück bildeten dabei die Umformungsregeln. Durch ihre Anwendung ist es möglich, für eine Klasse gleichartiger Aufgaben ein einheitliches Lösungsverfahren zu erarbeiten. Es ist effektiv, wenn man eine ganze Klasse von Aufgaben nach einem bekannten Verfahren lösen kann. Das bedeutet aber nicht, daß die Anwendung eines solchen Lösungsverfahrens für jede Aufgabe der betreffenden Klasse rationell ist.

■ BEISPIEL 1 (3.5.1.)
Welche reellen Zahlen erfüllen $(2x-4)(x-3)=0$? Zum Lösen dieser quadratischen Gleichung benötigt man kein allgemeines Lösungsverfahren oder die Lösungsformel. Das Produkt ist Null, wenn wenigstens einer der Faktoren Null ist. Folglich gilt:
$2x-4=0$ oder $x-3=0$
und damit $L=\{2; 3\}$.

■ BEISPIEL 2 (3.5.1.)
Für Ungleichungen der Art $\frac{ax+b}{cx+d} > e$ benutzten wir im Abschnitt 3.3. ein dort entwickeltes einheitliches Lösungsverfahren. Für den Sonderfall

$\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ kann man durch inhaltliche Überlegungen sofort zu den beiden Fallunterscheidungen gelangen.

Unter welchen Bedingungen ist $\frac{ax+b}{cx+d}$ positiv?

1. Fall: $ax + b > 0$ *und* $cx + d > 0$
2. Fall: $ax + b < 0$ *und* $cx + d < 0$

Ein Lösungsverfahren, das für eine Klasse von Aufgaben anwendbar ist, ist nicht für jede Aufgabe dieser Klasse effektiv.
Bei der Lösungsfindung sollten deshalb stets Möglichkeiten zur Verkürzung eines Lösungsverfahrens gesucht bzw. beachtet werden. Eine Verkürzung ist häufig durch inhaltliche Betrachtungen möglich.

■ BEISPIEL 3 (3.5.1.)
Eine zweistellige Zahl hat die Quersumme 10. Vertauscht man ihre Ziffern, so ergibt sich dadurch eine um 36 kleinere Zahl. Wie heißt die ursprünglich betrachtete Zahl?

1. LÖSUNGSWEG
Eine zweistellige Zahl ist in der Form $10a + b$ darstellbar ($0 < a \leqq 9, 0 \leqq b \leqq 9, a \in N, b \in N$).
Es gilt:
(1) $a + b = 10$
(2) $10a + b = 10b + a + 36$
Durch äquivalente Umformungen erhält man:
(1) $a + b = 10 \quad | \cdot 9$
(2') $9a - 9b = 36$
(3) $18a = 126$
(4) $a = 7$
(5) $b = 3$
Die betrachtete Zahl heißt 73.

2. LÖSUNGSWEG
Zweistellige Zahlen mit der Quersumme 10 sind:
19, 28, 37, 46, 55,
91, 82, 73, 64
$91 - 19 = 72$
$82 - 28 = 54$
$\boxed{73 - 37 = 36}$ Die betrachtete Zahl heißt 73.
$64 - 46 = 18$
$55 - 55 = 0$
Offensichtlich ist der 2. Lösungsweg einfacher als der erste. Der 2. Lösungsweg kann von Schülern der Klasse 4 schon inhaltlich erfaßt werden.

Zur Realisierung des 1. Lösungsweges benötigt man Kenntnisse aus dem Mathematikunterricht der Klasse 9.

Inhaltliche Betrachtungen eignen sich u. a. besonders dann beim Lösen von Aufgaben, wenn als Lösung relativ wenige und einfache Elemente in Frage kommen oder wenn durch entsprechende Überlegungen das Feld der potentiellen Lösungen wesentlich eingeschränkt werden kann.

■ BEISPIEL 4 (3.5.1.)

Auf die Frage nach seinem Lebensalter sagte Herr M.: „Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl.“
Herr M. ist älter als 18 und jünger als 100 Jahre.
Können die Angaben von Herrn M. zutreffen?
Wenn ja, wie alt ist Herr M.?

1. LÖSUNGSWEG

(1) $z = 10a + b \; (1 \leqq a \leqq 9, 0 \leqq b \leqq 9, a \in N, b \in N)$

Die Quersumme von z sei q.

(2) $q = a + b$

(3) $3q = z$

(4) $3(a + b) = 10a + b$

(5) $3a + 3b = 10a + b$

(6) $2b = 7a$

7 ist Teiler von $7a$ und deshalb auch Teiler von $2b$. Wegen $0 \leqq b \leqq 9$ und $(2; 7) = 1$[1] gilt:

(7) $b = 7$

Aus (7) und (6) ergibt sich:

(8) $a = 2$

Herr M. ist 27 Jahre alt.

2. LÖSUNGSWEG

Wegen (1) $z \leqq 99$ gilt (2) $q \leqq 18$. (q ist die Quersumme von z.)

(3) $3q \geqq 19$, denn Herr M. ist älter als 18 Jahre.

Hieraus folgt:

(4) $q \geqq 7$

(5) $7 \leqq q \leqq 18$

Weil z durch 3 teilbar ist, ist q durch 3 teilbar. Wegen (5) ergibt sich dann
$q = 9$ oder
$q = 12$ oder
$q = 15$ oder
$q = 18$.

[1] Das bedeutet: Größter gemeinsamer Teiler von 2 und 7 ist 1 (vgl. Kapitel 2).

q	$z(=3q)$	Quersumme von z	Bemerkung
9	27	9	Lösung
12	36	9	Widerspruch
15	45	9	Widerspruch
18	54	9	Widerspruch

Herr M. ist 27 Jahre alt.

3. LÖSUNGSWEG
q sei die Quersumme von z.
Wir finden die Bedingungen:
(1) z ist eine zweistellige Zahl.
(2) q ist als Quersumme einer zweistelligen Zahl höchstens 18.
(3) Weil q ein Drittel von z ist, gilt $3q = z$.
Aus (2) und (3) folgt:
(4) $z = 3q$
$3q \leqq 3 \cdot 18 = 54$
(5) Weil z durch 3 teilbar ist, muß q auch durch 3 teilbar sein ($q = 3c$ und $c \in N$).
(6) Aus $z = 3q$ und $q = 3c$ folgt $z = 9c$. z ist demnach durch 9 teilbar.
Als potentielle Lösungen kommen deshalb nur die Zahlen 27, 36, 45 und 54 in Frage.

z	q	$z = 3q$?
27	9	ja
36	9	nein
45	9	nein
54	9	nein

Die Angaben von Herrn M. treffen zu. Er ist 27 Jahre alt.
Der 3. Lösungsweg hätte nach der Feststellung (6) auch anders fortgesetzt werden können. Wegen $9 \mid z$ folgt $9 \mid q$. Außer für $z = 99$ muß q dann stets genau 9 sein. Aus $z = 3q$ folgt sofort $z = 27$.
Es wäre auch als Vorgehensweise denkbar, daß man alle durch 3 teilbaren Zahlen zwischen 18 und 100 untersucht und feststellt, welche dieser Zahlen bei Division durch 3 die Quersumme ergibt.

In den Beispielen 3 (3.5.1.) und 4 (3.5.1.) wurde als Lösung eine zweistellige natürliche Zahl gesucht. Es gibt in den Lösungswegen für beide Aufgaben deshalb auch einige gleichartige Gedankengänge. Insgesamt unterscheiden sich die Lösungswege aber in der Art der angestellten Überlegungen erheblich. Das ist eine Besonderheit des Lösens von Aufgaben unter Einbeziehung inhaltlicher Betrachtungen. Selbst für das Lösen ein und derselben Aufgabe, das zeigt insbesondere Beispiel 4 (3.5.1.), sind unterschiedliche Herangehensweisen möglich.

> Die Einbeziehung *inhaltlicher Betrachtungen* führt im allgemeinen zu keinem einheitlichen Lösungsvorgehen bei Aufgaben derselben Art oder bei ein und derselben Aufgabe.

Beim Lösen einer Aufgabe müssen wir uns drei Fragen vorlegen:
1. Gibt es Lösungen?
2. Welche und wie viele Lösungen gibt es?
3. Wie findet man die Lösungen?

Arbeitet man *algorithmisch*, ist die Beantwortung dieser Fragen mit der Auswahl und Realisierung eines adäquaten Lösungsverfahrens prinzipiell gesichert. Werden inhaltliche Betrachtungen zum Lösen einer Aufgabe genutzt, können die Wege der Lösungsfindung sehr unterschiedlich sein. Die Lösungsmenge für ein und dieselbe Aufgabe ist dennoch eindeutig bestimmt. Die Frage, ob mit einem gewählten Lösungsweg alle Lösungen der untersuchten Aufgabe gefunden wurden, ist deshalb von besonderer Bedeutung.

> Es ist kritisch zu werten, ob mit einem gewählten Lösungsweg alle Lösungen einer Aufgabe ermittelt werden können oder ermittelt wurden.

Das äquivalente Umformen von Gleichungen ist im allgemeinen mathematisch so anspruchsvoll, daß es im Mathematikunterricht der unteren Klassen nicht zum Lösen von Gleichungen (Ungleichungen) anwendbar ist. Dennoch werden bereits ab Klasse 1 Gleichungen und Ungleichungen gelöst. Das geschieht durch inhaltliche Betrachtungen. Sie helfen, Flexibilität, Phantasie und Initiative beim Schüler herauszubilden und das notwendige Verständnis für die ab Klasse 6 einsetzenden äquivalenten Umformungen zu schaffen.
Es ist aber auch möglich, daß es zum Lösen einer Aufgabe eines bestimmten Typs kein einheitliches Lösungsverfahren gibt. Das gilt zum Beispiel für Gleichungen fünften Grades ($ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$).[1)]

> *Inhaltliche Betrachtungen* sind beim Lösen von Aufgaben geeignet und notwendig, wenn kein einheitliches Lösungsverfahren existiert oder bekannt ist oder wenn ein einheitliches Lösungsverfahren zu kompliziert ist.

---

1) Es gibt hierfür allerdings Lösungsverfahren, die zu beliebig guten Näherungslösungen führen.

Aufgabe 1 (3.5.1.)
Wie alt ist der Busfahrer?
Wie lang ist sein Bus (in vollen Metern gerechnet)?
Wie viele Kinder hat er?
Es ist bekannt, daß das Produkt dieser drei natürlichen Zahlen zwischen 2700 und 2800 liegt. Der Busfahrer hat nicht nur Söhne. Das Produkt des Zahlenwertes der Buslänge und der Anzahl der Kinder ist um zwei kleiner als die Anzahl der Lebensjahre des Busfahrers.

LÖSUNG
Alter des Busfahrers: a
Anzahl der Kinder: k
Länge des Busses (in Metern): l

$$2700 < a \cdot k \cdot l < 2800$$
$$2700 < a(a-2) < 2800$$

Die Faktoren a und $a-2$ unterscheiden sich nur um zwei. Weil ihr Produkt zwischen 2700 und 2800 liegen muß, können wir folgendermaßen abschätzen:

$a \cdot a > a(a-2)$, und wenn $a = 50$ ist, so ist $a \cdot a = 2500$.

Deshalb muß a wenigstens 51 sein.

a	$a-2$	$a(a-2)$
51	49	2499
52	50	2600
53	51	2703
54	52	2808

Nur $a = 53$ erfüllt die geforderten Bedingungen. Wegen $k \cdot l = 51$ gilt:

$k = 1$ und $l = 51$ oder
$k = 3$ und $l = 17$ oder
$k = 17$ und $l = 3$ oder
$k = 51$ und $l = 1$.

Die erste Möglichkeit scheidet aus, weil der Busfahrer mehrere Kinder hat. Die Länge des Busses ist ebenfalls nicht real. Das gilt auch für die dritte und vierte Möglichkeit. Der Busfahrer ist 53 Jahre alt. Er hat drei Kinder. Sein Bus ist 17 Meter lang.

Aus den bisherigen Überlegungen geht hervor, daß es nicht möglich sein wird, für einen Typ von Aufgaben zu sagen, wie er unter Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen zu lösen ist. Jede Aufgabe stellt neue und andere Anforderungen an den Ideenreichtum des Lösers. Die Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen in den Aufgabenlösungsprozeß eröffnet damit wertvolle Möglichkeiten, Variabilität des Denkens zu fordern und zu fördern.
Das Ziel unserer weiteren Darstellungen besteht darin, einige wichtige Arbeitsweisen aufzuzeigen und anzuwenden, die zum Lösen von Aufgaben nützlich sein kön-

nen. Es soll damit weiter präzisiert werden, was unter Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen in den Aufgabenlösungsprozeß zu verstehen ist. Vollständigkeit hinsichtlich der Möglichkeiten inhaltlicher Betrachtungen kann nicht angestrebt werden. Wenn auch in einzelnen Teilabschnitten besondere Arbeitsweisen hervorgehoben werden, ist zu beachten, daß zum Lösen einer Aufgabe meistens sehr unterschiedliche Methoden des inhaltlichen Lösens anzuwenden sind.

3.5.2. *Einige Möglichkeiten der Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen beim Lösen von Aufgaben*

A Probieren

Eine Aufgabe kann gelöst werden, indem man probiert. Ob man dabei schnell ein Ergebnis findet, hängt meistens stark vom Zufall ab. Diese Vorgehensweise ist im allgemeinen uneffektiv, wenn man nicht zielgerichtet vorgeht. Sie kann mit vielen Irrwegen verbunden sein. Das Probieren ist insbesondere dann ungeeignet, wenn die Angabe aller Lösungen einer Aufgabe gefordert ist. Es ist zum Beispiel wenig befriedigend, wenn man beim Probieren keine Lösung findet. Das kann nämlich daran liegen, daß man „ungeschickt" probierte oder daß die betrachtete Aufgabe gar nicht lösbar ist. Was bleibt, ist Unsicherheit.

Wird nur eine mögliche Lösung einer Aufgabe gefordert oder soll man prüfen, ob ein Element Lösung einer Aufgabe ist (im Sinne einer Probe), ist das Probieren ein ernst zu nehmendes Lösungsverfahren.

Wir geben einige Beispiele aus dem Mathematikunterricht der unteren Klassen an.

■ BEISPIEL 1 (3.5.2.)

a) Ist x Lösung der Ungleichung $2100 < 1300 + x$?

x	700	900	800	1200	5500	400	3400
	nein						

b) Welche der Zahlen 0, 2, 5, 9 erfüllen die Gleichungen?

(1) $3a = 27$

(2) $a + a = a \cdot a$

(3) $2a = 15 - a$

(Der Leser überlege sich, weshalb 0 oder 2 oder eine andere gerade Zahl niemals Gleichung (3) erfüllen können.)

c) Ersetze das Zeichen ✱ jeweils durch Ziffern! Es soll eine richtig gelöste Aufgabe entstehen.

$$\begin{array}{r} 8\ast5 \\ +\ \ast3\ast \\ \hline 1027 \end{array}$$

d) Ergänze die Tabelle!

a	Ist a teilbar durch 4	5	7
64	ja		
56			
170			
7			

Für c) im Beispiel 1 (3.5.2.) zeigt sich die Problematik des „blinden" Probierens in aller Deutlichkeit. Falls man für das erste Sternchen im zweiten Summanden die Ziffer Null nicht zuläßt, sind immerhin 900 unterschiedliche Belegungen möglich. Von diesen führt genau eine zu einer richtig gelösten Aufgabe. Es ist deshalb auch daran gedacht, daß ein Schüler der Klasse 3 diese Aufgabe löst, indem er seine Kenntnisse über die Addition nutzt.

Beispiel 3 (3.5.1.) lösten wir weitestgehend durch Probieren (2. Lösungsweg). Dabei wurde aber zunächst das „Probierfeld" stark eingeschränkt.

B Zielgerichtetes Probieren
Aufgabe b) im Beispiel 1 (3.5.2.) wird durch Probieren gelöst. Eine Änderung der Aufgabenstellung (vgl. Beispiel 2 (3.5.2.)) erfordert eine andere Lösungsstrategie. Da alle möglichen Lösungen angegeben werden sollen, muß man planmäßig vorgehen.

■ BEISPIEL 2 (3.5.2.)
Für welche natürlichen Zahlen a gilt $a + a = a \cdot a$?

a	$a + a$	$a \cdot a$	$a + a = a \cdot a$?
0	0	0	ja
1	2	1	nein
2	4	4	ja
3	6	9	nein
4	8	16	nein
5	10	25	nein
⋮	⋮	⋮	⋮

Es ist leicht einzusehen, daß sich außer $a = 0$ und $a = 2$ keine weitere Lösung finden läßt. Die Richtigkeit dessen muß aber begründet werden. Erst dann ist eine Aufgabe vollständig gelöst. Die Begründung ist in unserem Beispiel bereits Schülern der unteren Klasse möglich, wenn sie daran denken, daß beispielsweise $6 \cdot 6$ gleichbedeutend mit $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ ist usw.

Beim zielgerichteten Probieren (systematischen Probieren) werden die potentiellen Lösungen in einer geeigneten Reihenfolge überprüft. Deshalb ist es zur Lösungsfindung und -darstellung meistens von Vorteil, wenn man eine Tabelle nutzt.
Für Beispiel 2 (3.5.2.) war das zielgerichtete Probieren nur einer der möglichen Lösungswege. Es kann aber mitunter zum einzig möglichen Lösungsweg werden.

■ BEISPIEL 3 (3.5.2.)

Man gebe alle natürlichen Zahlen n ($n \leqq 35$) an, für die $n^2 + n + 41$ eine Primzahl ist.

Gerade mit der Einführung moderner Rechentechnik erhält das Lösen von Aufgaben durch zielgerichtetes Probieren eine besondere Bedeutung. Ein Rechner arbeitet sehr schnell. Er kann, was einem Menschen nicht in dem Maße möglich ist, in kurzer Zeit sehr viele „Proben" durchführen. So wurde zum Beispiel für das *Vierfarbenproblem*[1)], dessen Lösung den Mathematikern über viele Jahrzehnte hinweg nicht gelang, ein Lösungsversuch unternommen, indem ein Computer sehr viele zu untersuchende Einzelfälle überprüfte. Natürlich war bis zum Computereinsatz eine umfangreiche inhaltliche Arbeit nötig, um die zu untersuchenden Einzelfälle erst einmal festzulegen und nachzuweisen, daß damit das Problem einer vollständigen Lösung zugeführt werden kann. Dieser Lösungsversuch gilt allerdings noch nicht als abgesichert.

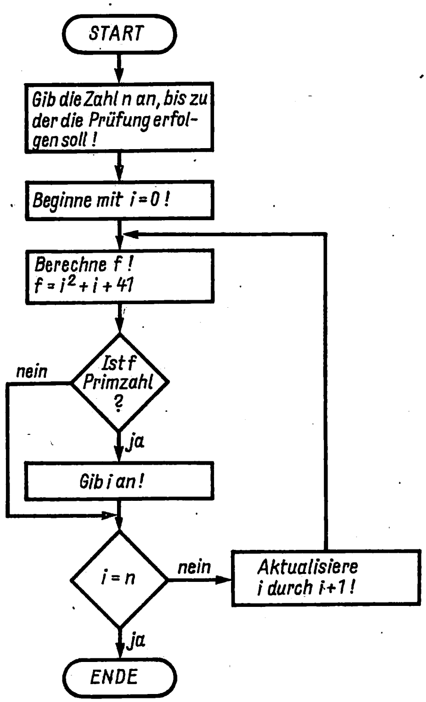


Bild 1 (3.5.2.)

1) Ist es möglich, die Länder einer jeden Landkarte so mit vier Farben zu färben, daß sich niemals zwei Länder mit gleicher Farbe längs eines gemeinsamen Grenzstückes berühren?

Das im Beispiel 3 (3.5.2.) angegebene Problem löst bereits ein Heimcomputer bei entsprechender Programmierung „im Handumdrehen“! Bild 1 (3.5.2.) gibt einen Programmablaufplan an, der Grundlage eines solchen Computerprogramms sein könnte. Er entspricht aber auch der Handlungsweise eines Lösers, der sich keines Computers bedient.

Aufgabe 1 (3.5.2.)
In die Felder des Quadrates (vgl. Bild 2 (3.5.2.)) sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so eingetragen werden, daß die Summe der Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder Diagonale des Quadrates gleich 15 ist. (Sind die genannten Bedingungen erfüllt, so spricht man von einem *magischen Quadrat.*)

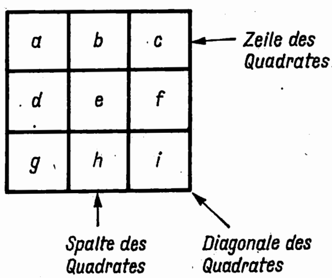


Bild 2 (3.5.2.)

LÖSUNG
Zielgerichtetes Probieren ist möglich, aber unter Umständen recht langwierig. Es ist besser, das „Probierfeld“ zunächst einzuschränken. Wir überlegen deshalb erst einmal, welche drei Summanden jeweils die Summe 15 ergeben.

$9 + 5 + 1 = 15$
$9 + 4 + 2 = 15$
$8 + 6 + 1 = 15$
$8 + 5 + 2 = 15$
$8 + 4 + 3 = 15$
$7 + 6 + 2 = 15$
$7 + 5 + 3 = 15$
$6 + 5 + 4 = 15$

Die Reihenfolge der Summanden ist in unserem Beispiel zunächst uninteressant. Deshalb gibt es keine weiteren Zerlegungen der Zahl 15 unter den genannten Bedingungen.
Betrachten wir die Felder des Quadrates. Das Feld e trägt zu vier verschiedenen Summenbildungen bei (Zeile, Spalte, Diagonale, Diagonale).
Die einzige Zahl, die in den oben angegebenen Zerlegungen viermal auftritt, ist die Zahl 5.
Es gilt demnach $e = 5$.
Die Felder a, c, g, i tragen zu drei verschiedenen Summenbildungen bei (Zeile, Spalte, Diagonale). Sie sind deshalb in geeigneter Weise durch 8, 6, 4 und 2 zu belegen.

Wählen wir etwa $a = 8$, so ist $i = 2$.
Für $c = 4$ folgt $g = 6$, und für $c = 6$ folgt $g = 4$.
Welche der beiden Möglichkeiten gewählt wird, ist für die Lösungsfindung unerheblich.
Wir erhalten eine Zwischenlösung, wie sie Bild 3 (3.5.2.) zeigt, und ergänzen dann ohne Probleme zu Bild 4 (3.5.2.).

8		4
	5	
6		2

Bild 3 (3.5.2.)

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Bild 4 (3.5.2.)

Weshalb ist es unerheblich, ob $c = 4$ und $g = 6$ oder $c = 6$ und $g = 4$ ist?
Im Zusammenhang mit magischen Quadraten und (ähnlich gelagerten Aufgaben) betrachtet man zwei Lösungen als gleich, wenn sie durch Drehungen des Quadrates um den Diagonalschnittpunkt oder Spiegelungen des Quadrates an einer seiner Symmetrieachsen oder Zusammensetzungen dieser Bewegungen auseinander hervorgehen. Man kann sich davon überzeugen, daß Aufgabe 1 (3.5.2.) unter diesen Bedingungen genau eine Lösung hat. Dazu muß nur die Stellung der Zahlen 8, 6, 4 und 2 untersucht werden, da alle anderen Eintragungen eindeutig daraus folgen.
Der Leser überlege sich, wie im Bild 5 (3.5.2.) (2) bis (8) auf (1) zurückgeführt werden können.

8		4
	5	
6		2

(1)

8		6
	5	
4		2

(2)

6		8
	5	
2		4

(3)

4		8
	5	
2		6

(4)

2		6
	5	
4		8

(5)

2		4
	5	
6		8

(6)

4		2
	5	
8		6

(7)

6		2
	5	
8		4

(8)

Bild 5 (3.5.2.)

Das zielgerichtete Probieren ist eine wichtige Methode, die von Schülern unterer Klassen genutzt wird. Beispiel 4 (3.5.2.) gibt dazu geeignete Aufgaben an.

■ BEISPIEL 4 (3.5.2.)

a) Zerlege!

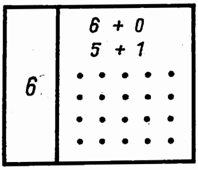


Bild 6 (3.5.2.)

b) Löse!
$8 + a < 12$

c) Bilde dreistellige Zahlen mit den Ziffern 1, 2 und 3! Keine dieser Ziffern darf mehrfach auftreten.

d) Nenne alle Zahlen a und b, welche beide Gleichungen erfüllen! ($a, b \in N$)
$a + b = 12$
$a \cdot b = 20$

e) In einem Bus befinden sich 16 Personen. Es sind dreimal so viele Frauen wie Männer. Die übrigen sind Kinder. Wie viele Männer, Frauen und Kinder könnten das sein?

Aufgabe 2 (3.5.2.)
Welche natürlichen Zahlen erfüllen die Gleichung $6 + a = 72 : a$?

1. LÖSUNGSWEG
Durch äquivalente Umformungen erhält man eine quadratische Gleichung, die dann zu lösen ist.

2. LÖSUNGSWEG
a ist eine natürliche Zahl. Folglich ist $6 + a$ ebenfalls eine natürliche Zahl. Deshalb muß a ein Teiler von 72 sein.

Potentielle Lösungen der Gleichung sind dann 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

a	$6 + a$	$72 : a$	$6 + a = 72 : a$?
1	7	72	nein
2	8	36	nein
3	9	24	nein
4	10	18	nein
6	12	12	ja
8	14	9	nein
Da mit wachsendem a auch $6 + a$ wächst und $72 : a$ kleiner wird, kann es keine weiteren Lösungen geben.			

6 ist die einzige natürliche Zahl, die $6 + a = 72 : a$ erfüllt.

C Fallunterscheidung

Die Durchführung einer Fallunterscheidung ähnelt dem Vorgehen beim zielgerichteten Probieren. Durch eine Beschränkung auf wesentliche Bedingungen erfolgt bei einer Fallunterscheidung aber eine Zusammenfassung vieler Einzelfälle, so daß das Vorgehen rationeller sein kann als beim zielgerichteten Probieren. Zur Ermittlung der wesentlichen Bedingungen müssen entsprechende inhaltliche Betrachtungen angestellt werden. Wir erkannten beispielsweise im Zusammenhang mit dem Lösen einer Ungleichung der Art $\frac{3x+4}{2x-3} > 4$, daß nur zwei Fälle wesentlich sind:

1. Fall: $2x - 3 > 0$
2. Fall: $2x - 3 < 0$

Es ist zu beachten, daß eine Aufgabe mittels Fallunterscheidung nur dann vollständig gelöst ist, wenn alle Fälle und die sich daraus ergebenden Konsequenzen untersucht wurden. Es ist möglich, daß sich ein Fall wiederum in mehrere Fälle aufgliedert.

■ BEISPIEL 5 (3.5.2.)

Es ist zu zeigen, daß es keine dreistellige natürliche Zahl x gibt, aus der man nach dem Vertauschen der ersten mit der dritten Ziffer eine natürliche Zahl y erhält, die viermal so groß wie x ist.

Annahme: Es gibt eine Zahl x, welche die genannten Bedingungen erfüllt.

$$x = 100a + 10b + c \qquad (0 < a \leqq 9,\quad 0 \leqq b \leqq 9,\quad 0 \leqq c \leqq 9,\quad a \in N,\ b \in N,\quad c \in N)$$

$$4x = 100c + 10b + a$$

$$4x = 4(100a + 10b + c) = 100c + 10b + a = y$$

Es ist $a \leqq 2$, sonst ergibt sich keine dreistellige Zahl.

1. Fall: $a = 1$

$$4(100 + 10b + c) = 100c + 10b + 1$$
$$399 = 96c - 30b$$

Diese Gleichung hat in der Menge der natürlichen Zahlen keine Lösung. Auf der rechten Seite der Gleichung steht eine gerade Zahl, auf der linken Seite aber eine ungerade Zahl.

2. Fall: $a = 2$

$$4(200 + 10b + c) = 100c + 10b + 2$$
$$798 = 96c - 30b$$

Für $30b$ erhält man eine Zahl, deren letzte Ziffer 0 ist. Dann muß $96c$ eine Zahl sein, deren letzte Ziffer 8 ist. Das gilt nur für $c = 3$ oder $c = 8$. Für diese Zahlen ist aber $96c - 30b$ stets kleiner als 798 $(96 \cdot 8 = 768)$.

Beide Fälle – und sie waren die einzig möglichen – führen zu einem Widerspruch.

Die Annahme ist demnach falsch. Es gibt keine Zahl, die die genannten Bedingungen erfüllt.

Beispiel 5 (3.5.2.) enthält neben der Fallunterscheidung noch viele inhaltliche Überlegungen, die für die Beweisführung wichtig sind. Der Leser versuche, diese Überlegungen zu erfassen und zu verallgemeinern. (Beispiel: Die Differenz gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.) Eine solche Rückschau kann wertvolle Impulse für das Lösen anderer Aufgaben vermitteln. Deshalb sollte man sie sich zur Gewohnheit werden lassen.
Nützlich ist auch die Überlegung, durch welche Änderung von Bedingungen in einer Aufgabe sich die Schlußkette verändert.
Daraus ergeben sich weitere ähnliche Probleme. Was ändert sich beispielsweise an der eben vollzogenen Beweisführung, wenn man fordert, daß y doppelt so groß wie x ist? Gibt es unter den in der Aufgabe genannten Bedingungen überhaupt ein (von 1 verschiedenes) Vielfaches von x, das gleich y ist? Sind die Bedingungen erfüllbar, wenn x und y vierstellige Zahlen sind?

Aufgabe 3 (3.5.2.)
Man beweise:
Wenn die Summe von vier natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

1. LÖSUNGSWEG

Voraussetzung:
a, b, c und d seien natürliche Zahlen.
$a + b + c + d$ ist eine ungerade Zahl.

Behauptung:
$a \cdot b \cdot c \cdot d$ ist eine gerade Zahl.

Beweis:
1. Fall: Keine der vier Zahlen ist eine gerade Zahl.

$$\begin{aligned} a &= 2m+1 \quad && (m \in N)\\ b &= 2n+1 && (n \in N)\\ c &= 2p+1 && (p \in N)\\ d &= 2q+1 && (q \in N) \end{aligned}$$

Die Summe dieser vier Zahlen ist eine gerade Zahl. Das widerspricht den Voraussetzungen. Damit scheidet dieser Fall aus den weiteren Betrachtungen aus.

2. Fall: Genau eine der vier Zahlen (etwa a) ist eine gerade Zahl.

$$\begin{aligned} a &= 2m \quad && (m \in N)\\ b &= 2n+1 && (n \in N)\\ c &= 2p+1 && (p \in N)\\ d &= 2q+1 && (q \in N) \end{aligned}$$

Die Summe dieser vier Zahlen ist eine ungerade Zahl. Das Produkt ist eine gerade Zahl, weil es den Faktor 2 enthält.

3. Fall: Genau zwei der vier Zahlen (etwa a und b) sind gerade Zahlen.
Dann ist die Summe dieser Zahlen eine gerade Zahl. Der 3. Fall scheidet (mit analoger Begründung zum 1. Fall) aus der Betrachtung aus.

4. Fall: Genau drei der vier Zahlen (etwa a, b und c) sind gerade Zahlen.
Die Summe dieser Zahlen ist dann eine ungerade Zahl, das Produkt ist eine gerade Zahl (Begründung wie im 2. Fall).

5. Fall: Alle vier Zahlen sind gerade Zahlen. Dieser Fall scheidet aus (Begründung wie im 1. Fall).
Einige der zu untersuchenden Fälle lassen sich auf bereits erörterte Fälle zurückführen. Daraus ergibt sich die Frage, ob man die Zahl der zu untersuchenden Fälle nicht reduzieren kann.

2. LÖSUNGSWEG

Voraussetzung:
a, b, c, d seien natürliche Zahlen.
$a + b + c + d$ ist eine ungerade Zahl.

Behauptung:
$a \cdot b \cdot c \cdot d$ ist eine gerade Zahl.

Beweis:
1. Fall: Keine der vier Zahlen ist gerade.

$$\begin{aligned} a &= 2m + 1 && (m \in N) \\ b &= 2n + 1 && (n \in N) \\ c &= 2p + 1 && (p \in N) \\ d &= 2q + 1 && (q \in N) \\ a + b + c + d &= 2(m + n + p + q) + 4 \end{aligned}$$

Diese Summe ist eine gerade Zahl. Damit ist eine der Voraussetzungen nicht erfüllt. Dieser Fall scheidet aus.

2. Fall: Wenigstens eine der vier Zahlen ist eine gerade Zahl. a sei eine gerade Zahl.

Wenn a eine gerade Zahl ist, kann es auch vorkommen, daß die Voraussetzung der zu beweisenden Implikation nicht erfüllt ist (z. B. $a = 8$, $b = 6$, $d = 3$). Das hat aber keinen Einfluß auf die Gültigkeit der angestellten Überlegungen, weil es uns gelingt nachzuweisen, daß im 2. Fall die Behauptung (das Hinterglied der Implikation) und damit die Implikation selbst erfüllt ist.

$$\begin{aligned} a &= 2n && (n \in N) \\ a \cdot b \cdot c \cdot d &= 2n \cdot b \cdot c \cdot d \end{aligned}$$

Dieses Produkt enthält den Faktor 2 und ist deshalb eine gerade Zahl.
Schließlich kann man, falls man indirekt vorgeht, das Problem sogar auf die Betrachtung eines einzigen Falles (Fall 1) reduzieren. Aus der Annahme, daß $a \cdot b \cdot c \cdot d$ eine ungerade Zahl ist, folgt, daß keiner der Faktoren eine gerade Zahl sein kann. Die weitere Beweisführung erfolgt nunmehr wie im Fall 1 dargestellt.

Aufgabe 4 (3.5.2)
Man gebe eine vollständige Fallunterscheidung an, die zur Lösung der folgenden Aufgabe führt.

Es sind alle n-stelligen natürlichen Zahlen z zu ermitteln, welche die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:

(1) Zur Darstellung von z wird keine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 mehrfach verwendet.

(2) n ist Teiler von z.

(3) n ist gleich der Hälfte der Quersumme von z.

LÖSUNG

Die Quersumme von z sei q.

Wegen (3) ergibt sich, daß n größer oder gleich 2 ist. Durch die mit (1) gegebene Einschränkung kann n nicht größer als 10 sein. Demnach ist wegen (3) q nicht größer als 20.

Es gilt $\quad 0+1+2+3+4+5=15 \leqq 20$

und $\quad 0+1+2+3+4+5+6=21>20.$

Deshalb ist n höchstens eine sechsstellige Zahl, denn schon eine siebenstellige Zahl hat unter den angegebenen Bedingungen eine Quersumme, die größer als 20 ist.

Es sind somit höchstens die Fälle $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$ und $n=6$ zu untersuchen.

Daß der Fall $n=6$ eintreten kann, läßt sich allerdings sofort ausschließen. Jede sechsstellige Zahl hat unter den angegebenen Bedingungen mindestens die Quersumme 15 $(0+1+2+3+4+5)$. Das steht im Widerspruch zu $q=12$.

D Vorwärtsarbeiten

Beim Vorwärtsarbeiten werden aus dem Gegebenen (den Voraussetzungen) unter Einbeziehung von Definitionen und Sätzen Schlußfolgerungen gezogen, so daß man gegebenenfalls über Teilziele zum Ziel (dem Gesuchten, der Behauptung) gelangt.

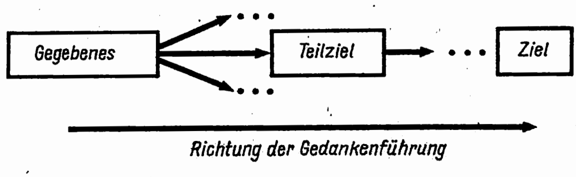


Bild 7 (3.5.2.)

■ BEISPIEL 6 (3.5.2.)

Es ist zu beweisen:

Wenn n eine natürliche Zahl ist ($n \geqq 1$), so gilt

$2 \mid (n-1)^2 + (n+1)^2$.

Voraussetzung:

n ist eine natürliche Zahl.

n ist größer oder gleich 1.

Behauptung:

$2 \mid (n-1)^2 + (n+1)^2$

Beweis:
$(n-1)^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2$
$(n-1)^2 + (n+1)^2 = 2(n^2+1)$
2 ist ein Teiler von $2(n^2+1)$. Demnach gilt:
$2 \mid (n-1)^2 + (n+1)^2$, w. z. b. w.

Aufgabe 5 (3.5.2.)
Ein Güterzug, der um 7.00 Uhr von A abfährt und durchschnittlich 60 Kilometer je Stunde zurücklegt, kommt gleichzeitig mit einem Schnellzug, der 8.30 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 Kilometern je Stunde in A abfährt, in B an.
Wie groß ist die Entfernung von A nach B?

1. LÖSUNGSWEG
Bei Aufgaben dieser Art ist es günstig, in einer Tabelle die wesentlichen Angaben des Aufgabentextes zu erfassen. Auch die einzuführenden Variablen geben wir in der Tabelle an.

	Güterzug	Schnellzug
Weg (in km)	s	s
Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$)	60	80
Fahrzeit (in h)	$t + \frac{3}{2}$	t

(1) $s = 60\left(t + \frac{3}{2}\right)$ (2) $s = 80 \cdot t$

(3) $t = \frac{s}{80}$

(4) $s = 60\left(\frac{s}{80} + \frac{3}{2}\right)$

(5) $s = \frac{3}{4}s + 90$

(6) $s = 360$

Die Entfernung vom Ort A bis zum Ort B beträgt 360 Kilometer.

2. LÖSUNGSWEG
Der Güterzug legt bis 8.30 Uhr einen Weg von 90 Kilometern zurück. Von diesem Vorsprung des Güterzuges holt der Schnellzug je Stunde 20 Kilometer auf. Nach $4\frac{1}{2}$ Stunden hat er den Güterzug eingeholt. Er legt dabei 360 Kilometer zurück. Das ist die Entfernung von A nach B.

Viele Aufgaben lassen sich durch Vorwärtsarbeiten lösen. Die Angabe des Lösungsweges für eine gestellte Aufgabe, insbesondere für eine Beweisaufgabe, deutet häufig auf Vorwärtsarbeiten hin. Das heißt aber nicht, daß der Lösungsweg auch durch Vorwärtsarbeiten gefunden wurde. Das Vorwärtsarbeiten ist nicht immer effektiv, weil zwar der Ausgangspunkt (das Gegebene, die Voraussetzungen) und das Ziel (das Gesuchte, die Behauptung) klar sind, nicht aber die Zwischenschritte, die zum Ziel führen. Das hat manchmal Irrwege oder „Sackgassen" zur Folge. Deshalb kann zur Lösungsfindung auch Rückwärtsarbeiten nützlich sein.

E Rückwärtsarbeiten

Beim Rückwärtsarbeiten geht man vom zu erreichenden Ziel (dem Gesuchten, der Behauptung) aus. Es werden Bedingungen gesucht, aus denen unmittelbar auf das im Ziel Angegebene geschlußfolgert werden kann. Die Bedingungen, die man dabei nutzt, müssen letztlich aus den gegebenen Anfangsbedingungen ableitbar sein.

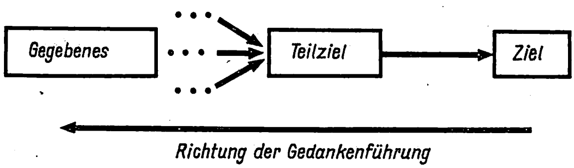


Bild 8 (3.5.2.)

■ BEISPIEL 7 (3.5.2.)

Mathias hat drei Kästchen, jedes enthält eine Anzahl von Kugeln. Er legt aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden anderen Kästchen so viele Kugeln hinein, wie jeweils schon darin sind. Dann legt er aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie nun jeweils darin liegen. Schließlich legt er aus dem dritten Kästchen in jedes der beiden anderen so viele Kugeln, wie zur Zeit jeweils darin sind. Danach stellt er fest, daß in jedem der Kästchen genau 72 Kugeln sind.
Wie viele Kugeln enthielt jedes Kästchen ursprünglich?
Wir arbeiten rückwärts, indem wir uns nacheinander überlegen, wie viele Kugeln nach der dritten Verteilung, nach der zweiten Verteilung, nach der ersten Verteilung und zu Beginn in den Kästchen waren.

	Anzahl der Kugeln im			
	1. Kästchen	2. Kästchen	3. Kästchen	Summe
nach der 3. Verteilung	72	72	72	216
nach der 2. Verteilung	36	36	144	216
nach der 1. Verteilung	18	126	72	216
am Anfang	117	63	36	216

Wenn beim Übergang von der zweiten zur dritten Verteilung in das erste und zweite Kästchen jeweils so viele Kugeln gelegt werden, wie schon darin sind, verdoppelt sich deren Anzahl. Arbeiten wir rückwärts, müssen wir deshalb die Anzahl der nach der dritten Verteilung in diesen Kästchen enthaltenen Kugeln halbieren, um die Anzahl der Kugeln in diesen Kästchen nach der zweiten Verteilung zu erfassen.
Der Leser verdeutliche sich den Vorteil des Rückwärtsarbeitens an diesem Beispiel, indem er versucht, dieses Problem durch Vorwärtsarbeiten zu lösen (z. B. durch Aufstellen einer Gleichung).
Die im Beispiel 7 (3.5.2.) gestellte Aufgabe läßt sich verallgemeinern. Alle Bedingungen werden zunächst beibehalten. Es wird lediglich gefordert, daß nach der dritten Verteilung in jedem Kästchen a Kugeln liegen.

	Anzahl der Kugeln im			
	1. Kästchen	2. Kästchen	3. Kästchen	Summe
nach der 3. Verteilung	a	a	a	$3a$
nach der 2. Verteilung	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$2a$	$3a$
nach der 1. Verteilung	$\frac{a}{4}$	$\frac{7}{4}a$	a	$3a$
am Anfang	$\frac{13}{8}a$	$\frac{7}{8}a$	$\frac{a}{2}$	$3a$

Aus dem Ergebnis läßt sich auch sofort eine Lösbarkeitsbedingung für diese Aufgabe ablesen. Sie ist nur lösbar, wenn a eine durch 8 teilbare Zahl ist.

Aufgabe 6 (3.5.2.)
Zwei Metallwürfel mit der Kantenlänge a_1 bzw. a_2 werden zu einem neuen Würfel umgegossen. Wie groß ist die Oberfläche dieses neuen Würfels?

LÖSUNG
Wir kleiden unsere Überlegungen in die Form von Fragen (F) und Antworten (A):

F 1:	Woraus läßt sich die Oberfläche des neuen Würfels berechnen?	A 1:	Aus der Kantenlänge a des Würfels kann man seine Oberfläche berechnen.
F 2:	Wie erhält man a?	A 2:	Wenn das Volumen V des neuen Würfels bekannt ist, kann man a ermitteln.
F 3:	Woraus ergibt sich V?	A 3:	V ist die Summe der Volumina V_1 und V_2 der beiden Metallwürfel.
F 4:	Wie erhält man V_1 und V_2?	A 4:	V_1 und V_2 erhält man mit Hilfe von a_1 und a_2.

Mit der Beantwortung der Fragen ist noch nicht die Lösung gefunden. Der Lösungsweg liegt aber auf der Hand. Wenn man die in den Antworten A 4, A 3, A 2 und A 1 angesprochenen Berechnungen (in der oben angegebenen Reihenfolge) ausführt, erhält man die Lösung. *Den Lösungsweg finden wir durch Rückwärtsarbeiten. Die Ausführung und Darstellung des Lösungsweges entspricht dem Vorwärtsarbeiten.*

$$V_1 = a_1^3 \qquad\qquad V_2 = a_2^3$$

$$V = a_1^3 + a_2^3$$

$$a = \sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3}$$

$$O = 6 \cdot \left(\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3}\right)^2$$

Oftmals werden beide Methoden (Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten) in einem Lösungsweg miteinander verzahnt.

Aufgabe 7 (3.5.2.)
Vater und Sohn sind jetzt zusammen 80 Jahre alt. Vor vier Jahren war der Vater gerade dreimal so alt wie der Sohn. Wie alt ist jetzt jeder?

LÖSUNG
Vor vier Jahren waren Vater und Sohn zusammen 72 Jahre alt. Der Vater war dreimal so alt wie der Sohn.

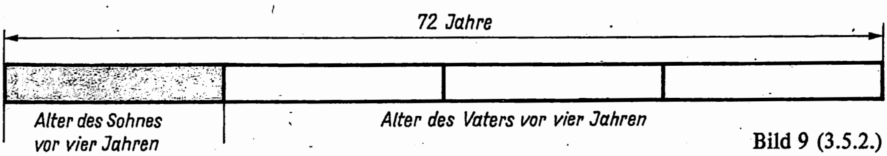


Bild 9 (3.5.2.)

Der Sohn war vor vier Jahren 18 Jahre und der Vater 54 Jahre alt.
Jetzt ist der Sohn 22 Jahre und der Vater 58 Jahre alt.

F Nutzung von Operationseigenschaften
Zum inhaltlichen Lösen von Aufgaben können insbesondere Beziehungen, die zwischen Operationen bestehen, genutzt werden. So wird bereits in der Klasse 1 die Beziehung der Addition zur Subtraktion herausgearbeitet und beim Aufgabenlösen ebenso verwendet wie bekannte Gesetze bezüglich der Rechenoperationen.

■ BEISPIEL 8 (3.5.2.)

a) Zu Additionsaufgaben kann man Subtraktionsaufgaben bilden.

$$5 + 2 = 7 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 7 - 2 = 5 \\ 7 - 5 = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{l} 12 - 7 \\ \hline 7 + \boxed{5} = 12 \\ \hline 12 - 7 = \ \ 5 \end{array}$$

c)

$8 + 5 = 13$	$13 - 5 = 8$
$5 + 8 = 13$	$13 - 8 = 5$

[1]

■ BEISPIEL 9 (3.5.2.)

(1) $75 + a = 79$

Für die Schüler der unteren Klassen gibt es mehrere Wege zur Lösung dieser Aufgabe.

1. Weg: Man muß eine Zahl finden, die zu 75 addiert 79 ergibt.

$75 + 4 = 79$
$a = 4$

a kann dadurch gefunden werden, daß man ausgehend von 75 weiterzählt.

2. Weg: Es wird eine Beziehung zur Subtraktion hergestellt. Diese Beziehung wird seit dem Beginn der Klasse 1 ständig gefestigt und genutzt (vgl. Beispiel 8 (3.5.2.) a)).

$79 - 75 = 4$
$a = 4$

a kann gefunden werden, indem man ausgehend von 79 zurückzählt.

3. Weg: Rückführung auf eine Grundaufgabe

$75 + a = 79$
$5 + 4 = 9$
$75 + 4 = 79$
$a = 4$

(2) $79 - a = 75$

1. Weg: Man muß eine Zahl finden, die von 79 zu subtrahieren ist, damit die Differenz 75 beträgt. a kann ermittelt werden, indem ausgehend von 79 zurückgezählt wird.

Zum *2. Weg*: Die Begründung des 2. Weges ist hier besonders schwierig, weil ausgenutzt werden muß, daß die Subtraktion eine Umkehrung der Subtraktion ist. Die Gefahr, daß eine formale Umformung erfolgt, ist deshalb in diesem Zusammenhang sehr groß.

$a = 79 - 75$

(3) $a - 75 = 4$

Zum *1. Weg:* Der 1. Weg ist hier umständlicher als der 2. Weg. Man müßte zunächst erkennen, daß a größer als 75 ist. Nun könnte man ausgehend von 75 weiterzählen und die Aufgaben $76 - 75$, $77 - 75$ usw. lösen, bis man als Differenz 4 erhält.

2. Weg: $a - 75$ ist 4. Also ist a um 4 größer als 75. Danach ist a gleich $75 + 4$.

---

[1] Durch diese Zusammenstellung soll die inhaltliche Zusammengehörigkeit der vier Gleichungen betont werden. Aus der Darstellung soll nicht der Eindruck entstehen, daß zur Kontrolle einer Additionsaufgabe eine Subtraktionsaufgabe herangezogen wird.

Betrachtet man jeweils den zweiten Weg, so scheint (äußerlich gesehen) eine äquivalente Umformung vorzuliegen. Das ist aber nicht der Fall. Die Erläuterung des 2. Weges in (3) zeigt deutlich, daß der Rechnung inhaltliche Überlegungen vorangehen, daß die formale Aufgabe zur Findung des Lösungsweges zunächst in eine Textaufgabe umgewandelt wird.
Auch das Beispiel 10 (3.5.2.) zeigt diese Problematik noch einmal deutlich. Es wird in ihm auch ersichtlich, in welcher Weise das inhaltliche Lösen auf die Arbeit mit Umformungsregeln vorbereitet.

■ BEISPIEL 10 (3.5.2.)

1. Weg:

Darstellung des Lösungsweges	Mögliche Argumentation bei der Lösungsfindung
$(32 + a) \cdot 2 = 80$	Die linke Seite der Gleichung ist ein Produkt aus zwei Faktoren.
$[40 \cdot 2 = 80]$ [1]	Welche Zahl muß man mit 2 multiplizieren, um 80 zu erhalten?
$32 + a = 40$	Die linke Seite der Gleichung ist eine Summe. Der zweite Summand ist noch nicht bekannt.
$[32 + 8 = 40]$ [1]	Welche Zahl muß man zu 32 addieren, um 40 zu erhalten?
$a = 8$	

2. Weg:

Darstellung des Lösungsweges	Mögliche Argumentation bei der Lösungsfindung
$(32 + a) \cdot 2 = 80$	Die linke Seite der Gleichung ist ein Produkt aus zwei Faktoren. Der eine Faktor ist eine Summe.
$32 + a = 80 : 2$	Diesen Faktor kann man ermitteln, wenn man 80 durch 2 dividiert.
$32 + a = 40$	Die linke Seite der Gleichung ist eine Summe. Ein Summand ist 32. Der andere Summand ist noch nicht bekannt.
$a = 40 - 32$	Den zweiten Summanden kann man errechnen, wenn man von 40 die Zahl 32 subtrahiert.
$a = \ \ 8$	

[1] Die Klammer bedeutet, daß dieser Schritt in der Darstellung entfallen kann.

Wendet man Rechengesetze an, kann der Anfang des 1. oder 2. Weges auch anders gestaltet werden:

$$\begin{aligned}(32 + a) \cdot 2 &= 80\\ 32 \cdot 2 + a \cdot 2 &= 80\\ 64 + a \cdot 2 &= 80\end{aligned}$$

Wir folgerten aus $32 + a = 40$ und $32 + 8 = 40$, daß $a = 8$ ist. Diese Folgerung ist möglich, weil bekannt ist, daß eine Aufgabe wie $32 + a$ eindeutig lösbar ist (sofern sie überhaupt lösbar ist). Man muß aber bei einer solchen Schlußfolgerung vorsichtig sein und ihre Berechtigung prüfen.

■ BEISPIEL 11 (3.5.2.)

Aus $(32 + a) \cdot 2 = 80$ und $40 \cdot 2 = 80$ kann man folgern, daß $32 + a = 40$ ist.
Aus $a \cdot x = 2 \cdot x$ darf man nicht folgern, daß $a = 2$ ist. ($a \in R$, $x \in R$)
(Der Leser begründe dies.)

Zum inhaltlichen Lösen von Aufgaben ist die Nutzung bekannter Gesetzmäßigkeiten bedeutsam.

■ BEISPIEL 12 (3.5.2.)

(1)

$$\begin{aligned}6x + 5 &< 29\\ 6x + 5 &< 24 + 5\\ 6x &< 24\\ 6x &< 6 \cdot 4\\ x &< 4\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}3x + 4 &= 2x + 12\\ 2x + x + 4 &= 2x + 4 + 8\\ x &= 8\end{aligned}$$

Der Leser verdeutliche sich, welche Gesetze jeweils genutzt wurden.

Aufgabe 8 (3.5.2.)

In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{ccccc} AB & : & C & = & D\\ - & & \cdot & & +\\ B & + & A & = & D\\ \hline AE & - & C & = & F\end{array}$$

LÖSUNG

Die Aufgabe enthält sechs Gleichungen.

(1)	$AB : C = D$	(4)	$AB - B = AE$
(2)	$B + A = D$	(5)	$C \cdot A = C$
(3)	$AE - C = F$	(6)	$D + D = F$

- Falls eine Lösung existiert, folgt aus (3) $A = 1$. (Wenn die Differenz einer zweistelligen Zahl und einer einstelligen Zahl eine einstellige Zahl ist, so ist die zweistellige Zahl kleiner als 20.)[1)]
- Aus (4) folgt $E = 0$.
  (Die Differenz zweier Zahlen, deren letzte Ziffer übereinstimmt, hat an der letzten Stelle die Ziffer 0.)
- Aus (6) ergibt sich, daß F eine gerade Zahl und D kleiner als 5 ist.
  Wegen $10 - C = F$ ist dann auch C eine gerade Zahl.
  (Wenn der Minuend und die Differenz gerade Zahlen sind, ist der Subtrahend ebenfalls eine gerade Zahl.)
- Weil C eine gerade Zahl ist, folgt aus (1), daß B eine gerade Zahl ist. Wegen $E = 0$ ist B größer oder gleich 2. (Ist der Divisor eine gerade Zahl und der Quotient eine natürliche Zahl, kann der Dividend keine ungerade Zahl sein.)
- Wegen (2) muß D eine ungerade Zahl sein.
  (Die Summe einer geraden Zahl *(B)* und einer ungeraden Zahl *(A)* ist eine ungerade Zahl.)
  D ist größer oder gleich 3 $(B + A = D)$. Wegen $D < 5$ folgt $D = 3$.
- Weiter folgt $B = 2$ und (wegen (6)) $F = 6$.
- Schließlich ist wegen (3) $C = 4$.

Weil jeder Schritt zwingend aus den vorangegangenen Schritten folgte und keine Fallunterscheidung notwendig wurde, kann keine weitere Lösung existieren.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & : & 4 & = & 3 \\ - & & \cdot & & + \\ 2 & + & 1 & = & 3 \\ \hline 10 & - & 4 & = & 6 \end{array}$$

Die Einbeziehung inhaltlicher Überlegungen beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen ist nicht nur für Schüler der unteren Klassen bedeutsam. Das zeigte nicht zuletzt Aufgabe 8 (3.5.2.). Beispiel 13 (3.5.2.) verdeutlicht, daß wir mitunter auch zum Lösen formaler Aufgaben inhaltliche Betrachtungen benötigen.

■ BEISPIEL 13 (3.5.2.)

(Es wird jeweils nur der Lösungsweg angegeben. Der Leser verschaffe sich über genutzte Beziehungen selbst Klarheit.)

(1) Welche x erfüllen $2^{x+3} = 512$?

$$2^{x+3} = 2^9$$
$$x + 3 = 9$$
$$x = 6$$

(2) Für welche x gilt $|6x + 12| = 3$?

$$\begin{array}{rcl} |3| = 3 & \text{oder} & |-3| = 3 \\ 6x + 12 = 3 & \text{oder} & 6x + 12 = -3 \\ x = -\frac{3}{2} & \text{oder} & x = -\frac{5}{2} \end{array}$$

---

1) In Klammern werden einige Begründungen in verallgemeinerter Form angegeben.

(3) Für welche x gilt $3^{x-2} < 81$?

$3^{x-2} < 3^4$

$x - 2 < 4$

$x < 6$

(4) Für welches n gilt $(n+4)! = 720$? $(n \in N)$

$(n+4)! = 6!$

$n + 4 = 6$

$n = 2$

Es wurde mehrfach betont, daß wir nur einige Möglichkeiten inhaltlichen Arbeitens beim Aufgabenlösen darstellen können. Deutlich zeigte sich in den Beispielen und Aufgaben auch, daß die betrachteten Vorgehensweisen nur selten in reiner Form anwendbar sind. Am Schluß dieses Abschnitts werden nun noch zwei Aufgaben formuliert, die erfahrungsgemäß meistens fehlerhaft gelöst werden oder zu deren Lösungsweg kein Zugang gefunden wird. Diese Aufgaben sind verblüffend einfach zu lösen, wenn man sich auf das Wesentliche konzentriert.

Aufgabe 9 (3.5.2.)

Die Städte A und B haben voneinander eine Entfernung von 80 Kilometern. Von A aus fährt 11.00 Uhr ein Radfahrer (a) mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $18\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ nach B ab. Gleichzeitig startet in B ein Radfahrer (b) mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $22\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ in Richtung der Stadt A. Ein mit beiden befreundeter Motorradfahrer (m) fährt gleichzeitig mit a von A aus nach B ab. Als er b begegnet, kehrt er sofort um. In gleicher Weise verhält er sich bei erneuter Begegnung mit a. Auf diese Weise pendelt er zwischen a und b bis zu deren Begegnung hin und her. Er fährt durchschnittlich $60\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.
Wie lang ist der Weg, den der Motorradfahrer vom Start bis zur Begegnung der Radfahrer zurücklegt?

Aufgabe 10 (3.5.2.)

In einem Glas befindet sich Wein. In einem gleichartigen Glas ist Wasser enthalten. Die Volumina beider Flüssigkeiten sind gleich. Aus dem Wasserglas wird ein Eßlöffel Wasser entnommen und in den Wein gegeben. Nachdem gut umgerührt wurde, wird ein gleichvoller Eßlöffel des Gemisches entnommen und in das Wasser geschüttet.
Es wird vorausgesetzt, daß bei den Mischvorgängen kein Tropfen Flüssigkeit verlorengeht.
Befindet sich nun mehr Wasser im Weinglas als Wein im Wasserglas?

Dem Leser soll nicht die Freude am Lösen der Aufgaben genommen werden. Deshalb erfolgt keine Lösungsdarstellung. Für die Lösungsfindung ist bei beiden Aufgaben wichtig, daß man sich vom konkreten zeitlichen Ablauf der Handlungen und damit dem Handlungsvollzug nicht auf einen Irrweg lenken läßt. Folgende Fragen umreißen den Kern des jeweiligen Problems und können als Lösungsimpulse dienen:

Aufgabe 9 (3.5.2.):
Wie lange ist der Motorradfahrer unterwegs?
Aufgabe 10 (3.5.2.):
Befindet sich nach Abschluß der auszuführenden Handlung im Wasserglas ebensoviel Flüssigkeit wie zu Beginn?
Wodurch wurde fehlendes Wasser im Wasserglas ersetzt?

Übungen 3.5.2.

Wenn möglich, sind für die Aufgaben unterschiedliche (rationelle) Lösungswege anzugeben.

1. Dividiert man eine zweistellige natürliche Zahl n durch ihre Quersumme, so erhält man 6 Rest 1.
   Welche Zahlen n erfüllen diese Bedingung?

2. Es sind alle natürlichen Zahlen x, y und z mit $x \leqq y \leqq z$ zu ermitteln, für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist.
   (1) $x + y + z = 24$
   (2) $x \cdot y \cdot z = 204$

3. Das Produkt von drei unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 941094.
   Wie heißen diese drei Zahlen?

4. Petra wurde nach ihrem Alter gefragt. Sie antwortete: „Wenn man von der Zahl meiner Lebensjahre 2 subtrahiert, die Differenz durch 4 dividiert und den Quotienten in die 3. Potenz erhebt, so erhält man nach Verdreifachung dieser Potenz 192."
   Wie alt ist Petra?

5. Für welche Zahlen a und x gilt $a^x \geqq 2^{3x}$? ($a \in R$, $x \in N$)

6. Jemand kauft beim Buchhändler ein Buch für 16 Mark und bezahlt mit einem Hundertmarkschein. Der Buchhändler kann nicht herausgeben, deshalb wechselt er das Geld beim benachbarten Blumenverkäufer und gibt dem Kunden das Buch und 84 Mark Wechselgeld. Nach einer Stunde bringt der Blumenverkäufer den Hundertmarkschein zum Buchhändler zurück, weil der Geldschein ungültig ist. Der Buchhändler nimmt den Geldschein zurück und übergibt dem Blumenhändler zwei gültige Fünfzigmarkscheine.
   Welchen Verlust hatte der Buchhändler insgesamt?

7. Für welche natürlichen Zahlen a gilt
   $6\,(a^a + 10) \leqq 800000000$?

4. Die Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen

In diesem Kapitel werden Zahlen- und Relationseigenschaften, die vor allem im Kapitel 2 behandelt wurden, aufgegriffen, angewendet und zum Teil aus einem erweiterten Blickwinkel betrachtet. Es sollen auch vertiefende Überlegungen zum Operationsbegriff erfolgen.
Die erarbeiteten Erkenntnisse werden wiederum zur Lösung von Aufgaben genutzt.

Der Leser beachte, daß im Kapitel 2 festgehaltene Sätze und Definitionen für den Bereich der natürlichen Zahlen formuliert wurden. Im allgemeinen sind sie ohne Schwierigkeiten auf den Bereich der ganzen Zahlen übertragbar. Wir machen in diesen Fällen ohne weiteren Hinweis von den möglichen Erweiterungen Gebrauch. Manchmal bedarf es – außer der Ersetzung des Begriffswortes „natürliche Zahl“ durch das Begriffswort „ganze Zahl“ – einiger Modifizierungen. Sie betreffen vor allem die Sätze 3 (2.2.) und 6 (2.2.).

Modifizierung von Satz 3 (2.2.):
Für alle ganzen Zahlen a, b und t gilt:
Wenn $t|a$ und $t|b$, so $t|a-b$.
(Hier fällt die Bedingung $a \geqq b$ weg, weil in der Menge der ganzen Zahlen die Subtraktion stets ausführbar ist.)

In entsprechender Weise erfolgt die Modifizierung von Satz 6 (2.2.).
Modifizierung von Satz 6 (2.2.):
Zu je zwei ganzen Zahlen a und b ($b \neq 0$) existieren genau zwei ganze Zahlen q und r, so daß $a = b \cdot q + r$ ($0 \leqq r < |b|$) gilt. (Die Forderung, daß r nicht negativ ist, ist notwendig, damit die Division mit Rest in Z eindeutig ausführbar ist.)

4.1. Die Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen und ihre Eigenschaften

Aufgabe 1 (4.1.)
Das Bild 1 (4.1.) zeigt ein Hunderterblatt, wie es die Schüler der Klassen 1 und 2 nutzen. Man betrachte die Zahlen, die jeweils in einer Spalte (etwa der hervorgehobenen) eingetragen werden könnten.
Welche Feststellungen über Zusammenhänge zwischen den Zahlen einer (oder zweier verschiedener) Spalte(n) sind möglich?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		23							
							38		
41			44		46		48	49	
	52					57			
			64		66				
				75				79	80
						97			100

Bild 1 (4.1.)

LÖSUNG

Feststellungen (F):

F 1: Alle Zahlen, die in ein und derselben Spalte des Hunderterblattes stehen, lassen bei Division durch 10 denselben Rest.

F 2: Die Differenz zweier Zahlen, die in ein und derselben Spalte des Hunderterblattes stehen, ist stets durch 10 teilbar.

F 3: Wenn man eine Zahl aus einer Spalte A des Hunderterblattes zu einer Zahl aus einer Spalte B des Hunderterblattes addiert, erhält man stets eine Zahl aus einer Spalte C (eines gegebenenfalls „erweiterten Hunderterblattes"[1]).

■ BEISPIEL 1 (4.1.)

$57+5=62$	$43+4=47$
$67+15=82$	$83+24=107$
$7+5=12$	$3+4=7$
$57+65=122$	$33+24=57$

Für einen konkreten Fall kann F 3 folgendermaßen formuliert werden:
Wenn man zu einer natürlichen Zahl, deren Dezimaldarstellung auf die Ziffer 7 endet, eine natürliche Zahl addiert, deren Dezimaldarstellung auf die Ziffer 5 endet, so erhält man eine natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung auf die Ziffer 2 endet.

Aufgabe 2 (4.1.)
Die Menge der ganzen Zahlen wird in ähnlicher Weise wie beim Hunderterblatt in einer Tafel, die nur aus vier Spalten besteht, erfaßt (vgl. Bild 2 (4.1.)).

⋮	⋮	⋮	⋮
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4
−3	−2	−1	0
−7	−6	−5	−4
−11	−10	−9	−8
⋮	⋮	⋮	⋮

Bild 2 (4.1.)

Man prüfe, ob die Feststellungen F 1, F 2 und F 3 in entsprechender Weise gelten.

LÖSUNG
Die Feststellungen F 1, F 2 und F 3 gelten hier ebenfalls, wenn man entsprechend die Zahl 10 durch die Zahl 4 ersetzt. F 1 wäre zum Beispiel nun so zu formulieren:
Alle Zahlen, die in ein und derselben Spalte der Tafel stehen, lassen bei Division durch 4 denselben Rest.

Es läßt sich vermuten, daß die Feststellungen F 1, F 2 und F 3 nicht zufälliger Natur sind. Wir untersuchen das später. Wegen Feststellung F 1 können wir die Zah-

[1] Die Anzahl der Spalten wird nicht verändert, aber es dürfen in die Spalten auch Zahlen eingetragen werden, die größer als 100 sind.

len, die jeweils in ein und derselben Spalte angegeben sind, in folgender Weise durch Variable darstellen (vgl. Bild 3 (4.1.) und Bild 4 (4.1.)).

1	2	…	10
11	12	…	20
21	22	…	30
⋮	⋮		⋮
91	92	…	100
$10n+1$	$10n+2$		$10(n+1)$
	$(n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\})$		

Bild 3 (4.1.)

⋮	⋮	⋮	⋮
5	6	7	8
1	2	3	4
−3	−2	−1	0
−7	−6	−5	−4
⋮	⋮	⋮	⋮
$4g+1$	$4g+2$	$4g+3$	$4(g+1)$
		$(g \in Z)$	

Bild 4 (4.1.)

Zwei Zahlen, die im Bild 4 (4.1.) in ein und derselben Spalte dargestellt sind, lassen bei Division durch 4 denselben Rest. Diese gemeinsame Eigenschaft der betreffenden Zahlen führt uns auf folgende Definition.

▶ DEFINITION 1 (4.1.)
a und *b* seien ganze Zahlen, *m* sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
a* ist kongruent zu *b* modulo *m genau dann, wenn *a* und *b* bei Division durch *m* denselben Rest lassen.

Zeichen für „*a* ist kongruent zu *b* modulo *m*“: $\boldsymbol{a \equiv b\ (m)}$.

■ **BEISPIEL 2 (4.1.)**

a) $4 \equiv 18\ (2)$ 4 ist kongruent zu 18 modulo 2.
(Begründung: $4 = 2 \cdot 2 + \mathit{0}$ und
$18 = 2 \cdot 9 + \mathit{0}$)

$16 \equiv -9\ (5)$ 16 ist kongruent zu −9 modulo 5.
(Begründung: $16 = 5 \cdot 3 + \mathit{1}$
$-9 = 5 \cdot (-2) + \mathit{1}$)

$18 \not\equiv 15\ (7)$ 18 ist nicht kongruent (inkongruent) zu 15 modulo 7.
(Begründung: $18 = 7 \cdot 2 + \mathit{4}$
$15 = 7 \cdot 2 + \mathit{1}$)

b) Wählt man die ganze Zahl −3, so ist jede Zahl zu −3 kongruent modulo 4, die mit −3 in ein und derselben Spalte des Bildes 4 (4.1.) angegeben ist.

Zur Definition der Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen hätten wir auch die Verallgemeinerung der Feststellung F 2 nutzen können.

▷ SATZ 1 (4.1.)
a und b seien ganze Zahlen, m sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
Es gilt stets: $a \equiv b\ (m)$ genau dann, wenn $m \mid a - b$.

Wir wollen die Richtigkeit dieses Satzes beweisen. Da er die Struktur einer Äquivalenz hat, ist es möglich, den Beweis in zwei Schritte zu zerlegen. Wir zeigen zunächst, daß unter den genannten Voraussetzungen folgende Implikation gilt:

(1) Wenn $a \equiv b\,(m)$, so $m \mid a - b$.

Anschließend ist noch nachzuweisen, daß auch die Umkehrung von (1) gilt:

(2) Wenn $m \mid a - b$, so $a \equiv b\,(m)$.

Aus der Gültigkeit beider Implikationen kann auf die Gültigkeit der zu beweisenden Äquivalenz geschlossen werden.

Beweis für (1):

Voraussetzung:
a und b sind ganze Zahlen. m ist eine natürliche Zahl.
$m \neq 0$
$a \equiv b\,(m)$

Behauptung:
$m \mid a - b$

Beweis:
Aus $a \equiv b\ (m)$ folgt wegen der Definition der Kongruenzrelation, daß es ganze Zahlen c_1 und c_2 und eine natürliche Zahl r_1 gibt, für die gilt:

(1) $a = m \cdot c_1 + r_1 \quad (r_1 < m)$
(2) $b = m \cdot c_2 + r_1$

Aus (1) und (2) erhält man:

(3) $a - b = m \cdot c_1 + r_1 - (m \cdot c_2 + r_1)$
(4) $a - b = m \cdot c_1 + r_1 - m \cdot c_2 - r_1$
(5) $a - b = m \cdot (c_1 - c_2)$

Hieraus folgt wegen der uneingeschränkt ausführbaren Subtraktion in der Menge der ganzen Zahlen, daß es eine ganze Zahl c_3 gibt, für die gilt:

(6) $a - b = m \cdot c_3$

Aus (6) folgt wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation in Z:

(7) $m \mid a - b$, w. z. b. w.

Beweis für (2):

Voraussetzung:
a und b sind ganze Zahlen. m ist eine natürliche Zahl.
$m \neq 0$
$m \mid a - b$

Behauptung:
$a \equiv b \ (m)$

Beweis:
Aus $m \mid a - b$ folgt wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation in der Menge der ganzen Zahlen, daß eine Zahl c existiert, für die gilt:
(1) $a - b = m \cdot c \quad (c \in Z)$
(2) $a = m \cdot c + b$
b lasse bei Division durch m den Rest r. Das heißt:
Es gibt eine ganze Zahl q und eine natürliche Zahl r mit:
(3) $b = m \cdot q + r \quad (0 \leqq r < m)$
Wir ersetzen in (2) b durch $m \cdot q + r$ und erhalten:
(4) $a = m \cdot c + m \cdot q + r$
(5) $a = m \cdot \underbrace{(c + q)} + r$
(6) $a = m \cdot c_1 \quad + r \quad (c_1 \in Z)$
Hieraus ist ersichtlich, daß a bei Division durch m denselben Rest läßt wie b (vgl. (6) und (3)). Folglich ist a kongruent zu b modulo m.
(7) $a \equiv b \ (m)$, w. z. b. w.
Ausgehend von Satz 1 (4.1.) ergibt sich eine wichtige Folgerung. Sie sichert die Möglichkeit des Übergangs von der Kongruenzrelation zur Gleichheitsrelation und umgekehrt.

▷ SATZ 2 (4.1.)
a und b seien ganze Zahlen. m sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
Es gilt stets: $a \equiv b \ (m)$ genau dann, wenn es eine ganze Zahl k gibt, so daß $a = b + m \cdot k$ gilt.

Begründung: $a \equiv b \ (m)$ ist wegen Satz 1 (4.1.) gleichbedeutend mit
(1) $m \mid a - b$.
(1) ist wegen der Definition der Teilbarkeitsrelation gleichbedeutend damit, daß es eine ganze Zahl k gibt, so daß
(2) $m \cdot k = a - b$ gilt.
Das heißt:
Es gibt eine ganze Zahl k, so daß gilt:
(3) $a = b + m \cdot k$.

■ BEISPIEL 3 (4.1.)
(1) $2 \equiv -8 \ (5)$, das heißt: $2 = -8 + 5 \cdot 2$.
(2) $17 \equiv 1 \ (4)$, das heißt: $17 = 1 + 4 \cdot 4$.
(3) $17 \not\equiv 3 \ (4)$, das heißt: Es gibt keine ganze Zahl k, so daß gilt:
$17 = 3 + 4 \cdot k$.
(4) $-11 = -71 + 6 \cdot 10$, das heißt: $-11 \equiv -71 \ (6)$.

Wir betrachten nochmals Bild 4 (4.1.) und fassen Zahlen, die jeweils in ein und derselben Spalte angegeben sind, zu einer Menge zusammen. Es ist ersichtlich, daß damit eine Zerlegung der Menge der ganzen Zahlen in Teilmengen erfolgte. Nachstehend genannte Bedingungen sind erfüllt:

(1) Keine der Teilmengen ist leer.
(2) Je zwei voneinander verschiedene Teilmengen haben kein Element gemeinsam.
(3) Die Vereinigung aller Teilmengen ist die Menge der ganzen Zahlen.

Das bedeutet, daß der vorliegenden Aufspaltung der Menge der ganzen Zahlen in Teilmengen eine Äquivalenzrelation zugrunde liegt.

▷ SATZ 3 (4.1.)
Die Kongruenzrelation ist in der Menge der ganzen Zahlen eine Äquivalenzrelation.

Der Beweis von Satz 3 (4.1.) gliedert sich in *drei Schritte.* Es ist zu zeigen, daß die Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beweis der Reflexivität der Kongruenzrelation in Z:

Voraussetzung:
a sei eine beliebige ganze Zahl.
m ist eine natürliche Zahl.
$m \neq 0$

Behauptung:
$a \equiv a \ (m)$

Beweis:
Für alle m gilt: $m \mid 0$
Folglich gilt: $m \mid a - a$
Das bedeutet wegen Satz 1 (4.1.):
$a \equiv a \ (m)$,
w. z. b. w.

Beweis der Symmetrie der Kongruenzrelation in Z:

Voraussetzung:
a und b seien beliebige ganze Zahlen.
m ist eine natürliche Zahl.
$m \neq 0$
$a \equiv b \ (m)$

Behauptung:
$b \equiv a \ (m)$

Beweis:
Aus $a \equiv b \ (m)$ ergibt sich:
(1) $m \mid a - b$
Es existiert ein g mit:
(2) $m \cdot g = a - b \quad (g \in Z)$
(3) $-m \cdot g = -(a - b)$
(4) $m \cdot (-g) = b - a \quad (-g \in Z)$
(5) $m \mid b - a$
(6) $b \equiv a \ (m)$, w. z. b. w.

Beweis der Transitivität der Kongruenzrelation in Z:

Voraussetzung:
a, b und c seien beliebige ganze Zahlen.
m ist eine natürliche Zahl.
$m \neq 0$
$a \equiv b \ (m)$
$b \equiv c \ (m)$

Behauptung:
$a \equiv c \ (m)$

Beweis:
Aus $a \equiv b \ (m)$ folgt wegen Satz 1 (4.1.):
(1) $m \mid a - b$
Aus $b \equiv c \ (m)$ folgt ebenso:
(2) $m \mid b - c$
Wenn m Teiler von zwei Zahlen ist, so ist m auch Teiler der Summe dieser Zahlen.
Das wenden wir auf (1) und (2) an. Wir erhalten:
(3) $m \mid (a - b) + (b - c)$
(4) $m \mid a - c$
Das heißt:
(5) $a \equiv c \ (m)$, w. z. b. w.

Anmerkung: Nachdem wir erkannten, daß die Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen symmetrisch ist, dürfen wir auch so sprechen:
a und b sind einander kongruent modulo m.

Übungen 4.1.

1. Welche der Zahlen 6, −13, 81, 12, −35 und 84 sind einander kongruent modulo 7 (3; 5)?

2. Es ist ein Relationsgraph für die Kongruenzrelation in der Menge A modulo 3 zu zeichnen.
   a) $A = \{x \in N\colon\ 0 \leqq x \leqq 10\}$
   b) $A = \{x \in Z\colon\ x = k^2 \text{ und } k \in N \text{ und } k \leqq 10\}$

3. Man begründe die einzelnen Beweisschritte des Beweises zu Satz 3 (4.1.) (2. Teil – Symmetrie).

4. Man forme in Gleichungen um.
$6 \equiv -8\ (7)$ $\quad 27 \equiv -37\ (8)$ $\quad -43 \equiv 14\ (3)$

4.2. Restklassen modulo *m*

Wir erkannten, daß die Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen eine Äquivalenzrelation ist. Daher können wir unter Verwendung dieser Relation einen Abstraktionsprozeß führen, der eine Zerlegung von Z in Äquivalenzklassen zur Folge hat. Eine solche Äquivalenzklasse heißt **Restklasse modulo *m*.**

▶ DEFINITION 1 (4.2.)
Eine Menge ganzer Zahlen heißt **Restklasse modulo *m*** genau dann, wenn sie alle ganzen Zahlen enthält, die modulo m einander kongruent sind.

Zur Kennzeichnung einer Restklasse modulo m vereinbaren wir folgende Symbolik: $[a]_m$.

Zu $[a]_m$ gehören alle ganzen Zahlen, die zu a kongruent modulo m sind.
a ist ein Repräsentant der Restklasse $[a]_m$.

$$[a]_m = \{b \in Z:\ a \equiv b\ (m)\}.$$

Jede Zahl aus $[a]_m$ ist Repräsentant dieser Restklasse. Es gilt: $[a]_m = [b]_m$ genau dann, wenn $a \equiv b\ (m)$.

■ BEISPIEL 1 (4.2.)

a) In jeder Spalte des Bildes 4 (4.1.) sind diejenigen Elemente angegeben, die zu einer Restklasse modulo 4 gehören.

b) In jeder Spalte des Bildes 3 (4.1.) sind diejenigen Elemente angegeben, die zu einer Restklasse modulo 10 gehören.
(Die Ausgangsmenge enthält hier aber nur die natürlichen Zahlen von 1 bis 100.)

Aufgabe 1 (4.2.)
Man gebe in Z alle Restklassen modulo 5 an.

LÖSUNG

$[0]_5 = \{\ldots; -15; -10; -5; 0; 5; 10; \ldots\} = \{b \in Z:\ 0 \equiv b\ (5)\}$
$[1]_5 = \{\ldots; -14; -9; -4; 1; 6; 11; \ldots\} = \{b \in Z:\ 1 \equiv b\ (5)\}$
$[2]_5 = \{\ldots; -13; -8; -3; 2; 7; 12; \ldots\} = \{b \in Z:\ 2 \equiv b\ (5)\}$
$[3]_5 = \{\ldots; -12; -7; -2; 3; 8; 13; \ldots\} = \{b \in Z:\ 3 \equiv b\ (5)\}$
$[4]_5 = \{\ldots; -11; -6; -1; 4; 9; 14; \ldots\} = \{b \in Z:\ 4 \equiv b\ (5)\}$

Die Restklasse $[0]_5$ hätte auch durch $[-10]_5$ oder $[405]_5$ oder auch noch durch die Verwendung anderer Repräsentanten angegeben werden können.
Eine Restklasse modulo m ist durch die Angabe eines einzigen Repräsentanten eindeutig bestimmt.
Eine Menge A, die genau einen Repräsentanten jeder Restklasse modulo m enthält, heißt *vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen modulo m.* Da es bezüglich des Moduls m genau m Restklassen gibt, muß A genau m Repräsentanten enthalten. Im allgemeinen wählt man als Repräsentanten einer Restklasse die kleinste nichtnegative Zahl. Ein entsprechendes Repräsentantensystem für die Menge aller Restklassen modulo m ist dann die Menge $A = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

Aufgabe 2 (4.2.)
Man unterscheide für folgende Beispiele aus dem Lehrstoff der Klasse 3, zu welchen Definitionen oder Sätzen der in 4.1. bzw. 4.2. betrachteten Problematik vorbereitende Überlegungen angestellt werden.

a) Bestimme je fünf Zahlen, die beim Dividieren durch 5 den Rest 4 lassen!
b) – Berechne die Differenz zweier benachbarter Zahlen jeder der Folgen (1), (2) und (3)!
   – Berechne zu jeder Folge fünf weitere Zahlen!
   – Dividiere jede Zahl der Folge durch die Differenz zweier benachbarter Zahlen!
   (1) 10, 18, 26, ...
   (2) 38, 34, 30, ...
   (3) 13, 22, 31, ...
c) Dividiere die Zahlen 15, 16, 17, ..., 30 durch 5!
   Welche Zahlen treten als Rest auf, wenn man durch 5 dividiert?

LÖSUNG
a) Es sollen Repräsentanten der Restklasse $[4]_5$ angegeben werden. Der Begriff „Restklasse modulo m“ wird inhaltlich vorbereitet.
b) Es wird die Erkenntnis angebahnt, daß die Differenz zweier Zahlen ein und derselben Restklasse durch den Modul teilbar ist (Parenthese 3 und 1).
   (Hier liegt ein Spezialfall vor. Weil benachbarte Zahlen betrachtet werden, ist die Differenz gleich dem Modul.)
c) Es erfolgt eine inhaltliche Vorbereitung auf den Begriff (vollständiges) „Repräsentantensystem“.

Aufgabe 3 (4.2.)
Claudia und Mathias vereinbaren ein Spiel. Jeder schreibt unabhängig vom Spielpartner eine ganze Zahl auf. Anschließend wird das Produkt dieser Zahlen gebildet. Wenn es durch 6 teilbar ist, erhält Claudia einen Punkt. Ist das Produkt nicht durch 6 teilbar, bekommt Mathias einen Punkt. Wer zuerst fünf Punkte hat, ist Sieger.
Ist das Spiel gerecht?
(Wir nennen ein Spiel gerecht, wenn bei Einhaltung der Spielregeln kein Partner bevorzugt den Sieg erringen kann.)

LÖSUNG

Wenn man nicht gründlich genug überlegt, kann man bei dieser Aufgabe schnell zu einer falschen Lösung gelangen.
Es scheint offensichtlich zu sein, daß man viel häufiger eine nicht durch 6 teilbare Zahl erhält als eine durch 6 teilbare, wenn man auf angegebene Weise ein Produkt errechnet. Mathias müßte demnach bevorzugt sein. Diese Feststellung ist nur zutreffend, wenn man davon ausgeht, daß die miteinander zu multiplizierenden Zahlen zufällig ausgewählt werden (etwa durch Benutzung eines Würfels).
In Wirklichkeit ist Claudia bevorzugt. Wenn sie jeweils eine durch 6 teilbare Zahl notiert, ist ihr stets der Gewinnpunkt sicher.
Das Spiel ist ungerecht.
Wird das Spiel nun gerecht, wenn keiner der Partner eine durch 6 teilbare Zahl notieren darf und die übrigen Regeln beibehalten werden?
Man kann sich fragen, ob das Problem überhaupt entscheidbar ist, weil unendlich viele Produkte ganzer Zahlen gebildet werden können.
Wir werden sehen, daß das Problem sogar recht einfach zu lösen ist, und erkennen dabei einen entscheidenden Vorteil, den die Arbeit mit Restklassen modulo *m* mit sich bringt. Es erfolgt eine Reduzierung der Betrachtung unendlich vieler Elemente (Zahlen) auf eine Untersuchung endlich vieler Elemente (Restklassen).
Für die Beurteilung des Spiels interessieren nämlich gar nicht die zu bildenden Produkte an sich, sondern nur die Tatsache, ob sie bei Division durch 6 den Rest 0 (Claudia gewinnt) oder einen anderen Rest (Mathias gewinnt) lassen. Wir untersuchen deshalb nicht die Zahlen, die von Claudia oder Mathias notiert werden, sondern die Restklassen nach dem Modul 6, deren Elemente sie sind.

Bevor wir eine Bewertung des abgeänderten Spiels vornehmen können, müssen einige generelle Überlegungen zur Arbeit mit Restklassen erfolgen.

■ BEISPIEL 2 (4.2.)

Claudia notiert eine Zahl a, die Element der Restklasse $[5]_6$ ist.
Mathias notiert eine Zahl b, die Element der Restklasse $[4]_6$ ist.
Welcher Restklasse modulo 6 gehört das Produkt $a \cdot b$ an?
Weil a ein Element von $[5]_6$ ist, kann a folgendermaßen dargestellt werden:

$$a = 6g + 5 \qquad (g \in Z)$$

Für b gibt es eine Darstellung der Form:

$$b = 6k + 4 \qquad (k \in Z)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (6g+5)(6k+4) \\ &= 36gk + 30k + 24g + 20 \\ &= 36gk + 30k + 24g + 18 + 2 \\ &= \underbrace{6\,(6gk + 5k + 4g + 3)} \;\; + 2 \\ &= \qquad\quad 6 \cdot h \qquad\qquad + 2 \quad (h \in Z) \end{aligned}$$

$a \cdot b$ ist demnach ein Element von $[2]_6$.

Weil wir beliebige Repräsentanten der Restklassen $[5]_6$ bzw. $[4]_6$ verwendeten, gilt stets:
Bildet man das Produkt einer Zahl aus der Restklasse $[5]_6$ und einer Zahl aus der Restklasse $[4]_6$, so erhält man eine Zahl aus der Restklasse $[2]_6$.

Dieses Beispiel zeigt uns, daß man in der Menge der Restklassen modulo m ebenso Rechenoperationen erklären kann, wie das von Zahlenmengen bekannt ist.
Wir werden Multiplikation und Addition in der Menge von Restklassen modulo m erklären und auch die Zeichen $\cdot$ und $+$ verwenden. Diese Zeichen haben hier aber eine andere Bedeutung als beim Rechnen mit Zahlen.

▶ DEFINITION 2 (4.2.)
$[a \cdot b]_m$ **heißt Produkt von** $[a]_m$ **und** $[b]_m$.

Zeichen: $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$

Man beachte: In der Zeichenreihe $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$ steht der Punkt links als Zeichen für die Multiplikation von Restklassen modulo m. Der Punkt rechts steht als Zeichen für die Multiplikation von Zahlen.
Ein Produkt von Restklassen modulo m wird gebildet, indem man das Produkt entsprechender Repräsentanten errechnet und ermittelt, zu welcher Restklasse modulo m dieses Produkt gehört. Wir wollen, gestützt auf den Begriff „Produkt von Restklassen modulo m“, die Multiplikation von Restklassen modulo m erklären. Dazu ist es wichtig, zu wissen, ob ein Produkt zweier Restklassen modulo m stets existiert und eindeutig bestimmt ist.
Daß ein Produkt von Restklassen modulo m stets existiert, ist durch folgende Überlegungen nachweisbar:

(1) Jede Restklasse modulo m enthält wenigstens einen Repräsentanten (eine ganze Zahl).
(2) Das Produkt zweier Repräsentanten existiert immer, denn es ist bekannt, daß die Multiplikation in der Menge der ganzen Zahlen unbeschränkt ausführbar ist. Das Produkt zweier Repräsentanten ist eine ganze Zahl.
(3) Jede ganze Zahl gehört zu genau einer Restklasse modulo m. So auch das Produkt der Repräsentanten.
(4) Diese Restklasse modulo m ist ein Produkt der beiden Restklassen modulo m, von denen wir ausgingen.

■ BEISPIEL 3 (4.2.)

$[3]_7 \cdot [6]_7 = x$

(1) $3 \in [3]_7$
$13 \in [6]_7$

(2) $3 \cdot 13 = 39$

(3) $39 \in [4]_7$

(4) $x = [4]_7$ $\qquad [3]_7 \cdot [6]_7 = [4]_7$

Eindeutige Bestimmtheit eines Produktes heißt, daß die Wahl der Repräsentanten ohne Einfluß auf das Ergebnis ist. Die eindeutige Bestimmtheit eines solchen Produktes (d. h. die Unabhängigkeit von der Wahl der Repräsentanten) läßt sich beweisen.

Voraussetzung:

$a_1 \in [a]_m$, $a_2 \in [a]_m$
$b_1 \in [b]_m$, $b_2 \in [b]_m$

Behauptung:
Die Produkte $a_1 \cdot b_1$ und $a_2 \cdot b_2$ repräsentieren dieselbe Restklasse modulo m, d. h.

$$a_1 \cdot b_1 \equiv a_2 \cdot b_2 \ (m).$$

Beweis:
Es existieren ganze Zahlen q_1, q_2, p_1, p_2 und natürliche Zahlen r_1 und r_2, so daß sich aus den Voraussetzungen ergibt:

(1) $a_1 = q_1 \cdot m + r_1 \quad (0 \leqq r_1 < m)$
(2) $a_2 = q_2 \cdot m + r_1$
(3) $b_1 = p_1 \cdot m + r_2 \quad (0 \leqq r_2 < m)$
(4) $b_2 = p_2 \cdot m + r_2$
Es folgt:
(5) $a_1 \cdot b_1 = (q_1 \cdot m + r_1)(p_1 \cdot m + r_2)$
(6) $a_1 \cdot b_1 = \underbrace{m(q_1 m p_1 + r_1 p_1 + q_1 r_2)} + r_1 r_2$
(7) $a_1 \cdot b_1 = \qquad m \cdot z_1 \qquad + r_1 r_2 \quad (z_1 \in Z)$
(8) $a_2 \cdot b_2 = (q_2 \cdot m + r_1)(p_2 \cdot m + r_2)$
(9) $a_2 \cdot b_2 = \underbrace{m(q_2 m p_2 + r_1 p_2 + q_2 r_2)} + r_1 r_2$
(10) $a_2 \cdot b_2 = \qquad m \cdot z_2 \qquad + r_1 r_2 \quad (z_2 \in Z)$

Weil die Multiplikation in Z eindeutig ausführbar und insbesondere $r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot r_2$ ist, folgt aus (7) und (10):

(11) $a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = m(z_1 - z_2)$
(12) $a_1 \cdot b_1 \equiv a_2 \cdot b_2 \ (m)$,
w. z. b. w.

▷ **SATZ 1 (4.2.)**
Ein Produkt zweier Restklassen modulo m existiert immer und ist eindeutig bestimmt.

Wir definieren nun die Multiplikation in der Menge der Restklassen modulo m. Diese Definition unterscheidet sich inhaltlich von einer entsprechenden Definition der Multiplikation in einer Menge von Zahlen nur dadurch, daß hier eben keine Zahlen, sondern Restklassen betrachtet werden.

> **DEFINITION 3 (4.2.)**
> $\mathfrak{R}_m$ sei die Menge der Restklassen modulo m.
> Diejenige eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}_m \times \mathfrak{R}_m$ in $\mathfrak{R}_m$, die jedem geordneten Paar von Restklassen modulo m sein Produkt zuordnet, heißt **Multiplikation in $\mathfrak{R}_m$.**

BEISPIEL 4 (4.2.)

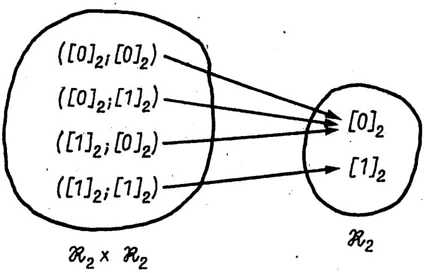


Bild 1 (4.2.)

Verknüpfungstafel für die Multiplikation in der Menge der Restklassen modulo 2

$\cdot$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[0]_2$
$[1]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$

Bild 2 (4.2.)

Kehren wir nun zu der Fragestellung, ob das abgeänderte Spiel zwischen Claudia und Mathias gerecht ist, zurück. Wir erfassen dazu in einer Verknüpfungstafel alle Fälle, die auftreten können, wenn man Restklassen modulo 6 miteinander multipliziert (vgl. Bild 3 (4.2.)).

$\cdot$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$
$[1]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[2]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$
$[4]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$
$[5]_6$	$[0]_6$	$[5]_6$	$[4]_6$	$[3]_6$	$[2]_6$	$[1]_6$

Bild 3 (4.2.)

·	0	1	2	3	4	5	...
0	0	0	0	0	0	0	...
1	0	1	2	3	4	5	...
2	0	2	4	6	8	10	...
3	0	3	6	9	12	15	...
4	0	4	8	12	16	20	...
5	0	5	10	15	20	25	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Bild 4 (4.2.)

$[5]_6 \cdot [2]_6 = [4]_6$,
denn $5 \cdot 2 = 10$
und $10 \in [4]_6$.

$[3]_6 \cdot [4]_6 = [0]_6$,
denn $3 \cdot 4 = 12$
und $12 \in [0]_6$.

Aus der Verknüpfungstafel erkennen wir (die erste Zeile und die erste Spalte dürfen aber infolge der Spielregeländerung nicht betrachtet werden), daß das Spiel jetzt für Claudia ungerecht ist. Sie kann nur in 4 von 25 Fällen einen Punkt erzielen, falls die Zahlen zufällig ausgewählt werden. Sie würde den Punkt erhalten, wenn das Produkt der Zahlen ein Element von $[0]_6$ ist. Wählt Mathias eine Zahl aus der Restklasse $[1]_6$ oder $[5]_6$, kann Claudia nie gewinnen. In den Zeilen und Spalten mit dem Eingangswert $[1]_6$ bzw. $[5]_6$ steht nie $[0]_6$ (außer an der hier nicht zu beachtenden ersten Stelle).
Aus der Verknüpfungstafel kann man verschiedene Eigenschaften der betrachteten Operation oder einzelner Elemente bezüglich dieser Operation ablesen.
Beweise für die Richtigkeit bestehender Gesetzmäßigkeiten sind prinzipiell nicht schwierig, weil das Produkt von Restklassen modulo m durch Zurückführung auf das Produkt ganzer Zahlen definiert wurde.

■ BEISPIEL 5 (4.2.)

Die Multiplikation ist in der Menge der Restklassen modulo m kommutativ.

Voraussetzung:
$[a]_m \in \mathfrak{R}_m$
$[b]_m \in \mathfrak{R}_m$

Behauptung:
$[a]_m \cdot [b]_m = [b]_m \cdot [a]_m$

Beweis:
Nach Definition 2 (4.2.) ist
(1) $[a]_m \cdot [b]_m = [a \cdot b]_m$ und (2) $[b]_m \cdot [a]_m = [b \cdot a]_m$.
Weil für die ganzen Zahlen a und b gilt $a \cdot b = b \cdot a$, folgt
(3) $[a \cdot b]_m = [b \cdot a]_m$, w. z. b. w.

Beim Vergleich der Verknüpfungstafeln (vgl. Bild 3 (4.2.) und Bild 4 (4.2.)) können wir Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Multiplikation in der Menge von Restklassen modulo m und der Multiplikation in der Menge der natürlichen Zahlen feststellen.

Multiplikation in der Menge der Restklassen modulo m	Multiplikation in der Menge der natürlichen Zahlen
Die Multiplikation ist in der betrachteten Menge stets eindeutig ausführbar. (In der Verknüpfungstafel steht im Schnitt jeder Zeile und Spalte genau ein Element.) Die Multiplikation ist in der betrachteten Menge kommutativ. (In der Verknüpfungstafel sind die Ergebnisse bezüglich der hervorgehobenen Diagonalen symmetrisch angeordnet.)	
Stets gilt: $[a]_m \cdot [b]_m = [b]_m \cdot [a]_m$ $[3]_6 \cdot [4]_6 = [4]_6 \cdot [3]_6$	*Stets gilt:* $a \cdot b = b \cdot a$ $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$
Die Multiplikation ist in der betrachteten Menge assoziativ. (Das kann man nicht unmittelbar aus der Verknüpfungstafel ablesen.)	
Stets gilt: $[a]_m \cdot ([b]_m \cdot [c]_m) = ([a]_m \cdot [b]_m) \cdot [c]_m$ $[3]_6 \cdot ([4]_6 \cdot [2]_6) = ([3]_6 \cdot [4]_6) \cdot [2]_6$	*Stets gilt:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ $3 \cdot (4 \cdot 2) = (3 \cdot 4) \cdot 2$
Es gibt ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation in der betrachteten Menge. (In der ersten Zeile bzw. Spalte der Verknüpfungstafel wiederholen sich die in den Zeilen- bzw. Spalteneingängen stehenden Elemente.)	
Stets gilt: $[a]_m \cdot [1]_m = [1]_m \cdot [a]_m = [a]_m$	*Stets gilt:* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Es gibt ein absorbierendes Element bezüglich der Multiplikation in der betrachteten Menge. (In der ersten Zeile bzw. Spalte der Verknüpfungstafel steht stets $[0]_6$ bzw. 0).	
Stets gilt: $[0]_m \cdot [a]_m = [a]_m \cdot [0]_m = [0]_m$	*Stets gilt:* $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

Die Multiplikation ist in der Menge der Restklassen modulo m nicht immer kürzbar, selbst wenn man vom absorbierenden Element absieht. (In manchen Zeilen und Spalten der Verknüpfungstafel treten manche Elemente mehrfach auf.)	Die Multiplikation ist in der Menge der natürlichen Zahlen stets kürzbar, wenn man vom absorbierenden Element absieht. (In keiner Zeile und Spalte der Verknüpfungstafel, abgesehen von der ersten, tritt ein Element mehrfach auf.)
Aus $[a]_m \cdot [x]_m = [a]_m \cdot [y]_m$ ($[a]_m \neq [0]_m$) folgt nicht immer $[x]_m = [y]_m$. Aus $[3]_6 \cdot [1]_6 = [3]_6 \cdot [5]_6$ folgt nicht $[1]_6 = [5]_6$.	Aus $a \cdot x = a \cdot y$ ($a \neq 0$) folgt immer $x = y$. Aus $x \cdot a = y \cdot a$ ($a \neq 0$) folgt immer $x = y$.

Wir sehen, daß zwischen den betrachteten Operationen viele Übereinstimmungen bestehen. Wenn der Modul m eine Primzahl ist, besteht diese Übereinstimmung sogar noch hinsichtlich der Kürzbarkeit.
Wir können auch in der Menge der Restklassen modulo m die Addition definieren. Wir hatten schon eine Gesetzmäßigkeit der Addition von Restklassen modulo 10 in der Feststellung F 3 (vgl. S. 229) angesprochen.

▶ DEFINITION 4 (4.2.)
$[a+b]_m$ heißt **Summe von $[a]_m$ und $[b]_m$.**

Zeichen: $[a]_m + [b]_m = [a+b]_m$

■ BEISPIEL 6 (4.2.)

$$[3]_6 + [2]_6 = [3+2]_6 = [5]_6$$

$$[3]_6 + [8]_6 = [3+8]_6 = [11]_6 = [5]_6$$

▷ SATZ 2 (4.2.)
Eine Summe zweier Restklassen modulo m existiert immer und ist eindeutig bestimmt.

▶ DEFINITION 5 (4.2.)
$\mathfrak{R}_m$ sei die Menge von Restklassen modulo m.
Diejenige eindeutige Abbildung von $\mathfrak{R}_m \times \mathfrak{R}_m$ in $\mathfrak{R}_m$, die jedem geordneten Paar von Restklassen modulo m ihre Summe zuordnet, heißt **Addition in $\mathfrak{R}_m$.**

■ BEISPIEL 7 (4.2.)

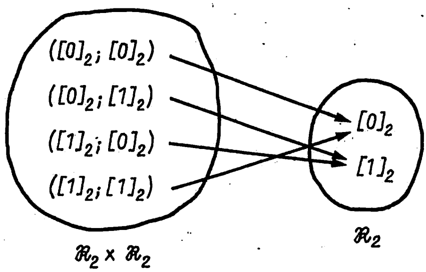


Bild 5 (4.2.)

Verknüpfungstafel für die Addition in der Menge der Restklassen modulo 2

+	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[1]_2$	$[1]_2$	$[0]_2$

Bild 6 (4.2.)

Aufgabe 4 (4.2.)
Es ist eine Verknüpfungstafel für die Addition in der Menge der Restklassen modulo 6 aufzustellen.
Ausgehend von dieser Verknüpfungstafel sind Vermutungen über die Eigenschaften dieser Operation zu gewinnen. Die gewonnenen Vermutungen sind mit Eigenschaften der Addition in der Menge der natürlichen Zahlen zu vergleichen.

LÖSUNG

+	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[1]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$
$[5]_6$	$[5]_6$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$

Bild 7 (4.2.)

+	0	1	2	3	4	5	...
0	0	1	2	3	4	5	...
1	1	2	3	4	5	6	...
2	2	3	4	5	6	7	...
3	3	4	5	6	7	8	...
4	4	5	6	7	8	9	...
5	5	6	7	8	9	10	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Bild 8 (4.2.)

Addition in der Menge der Restklassen modulo m	Addition in der Menge der natürlichen Zahlen
Die Addition ist in der betrachteten Menge stets eindeutig ausführbar.	
Die Addition ist in der betrachteten Menge kommutativ.	
Die Addition ist in der betrachteten Menge assoziativ.	
Die Addition ist in der betrachteten Menge eine kürzbare Operation.	
Bezüglich der Addition existiert in der betrachteten Menge ein neutrales Element.	
Stets gilt: $[0]_m + [a]_m = [a]_m + [0]_m = [a]_m$	*Stets gilt:* $0 + a = a + 0 = a$
Es gibt für jedes $[a]_m$ und $[b]_m$ ein $[x]_m$ bzw. $[y]_m$, so daß gilt: $[a]_m + [x]_m = [b]_m$ $[y]_m + [a]_m = [b]_m$	*Es gibt nicht für jede* natürliche Zahl a und b ein x bzw. y, so daß gilt: $a + x = b$ $y + a = b$
Aus $[y]_6 + [3]_6 = [2]_6$ folgt $[y]_6 = [5]_6$ Man findet $[y]_6$, indem man zur Spalte mit dem Eingangswert $[3]_6$ den Eingangswert derjenigen Zeile sucht, so daß im Schnitt dieser Zeile und Spalte $[2]_6$ steht.	$y + 3 = 2$ ist in der Menge der natürlichen Zahlen nicht lösbar.

Abschließend sei bemerkt, daß in der Menge der Restklassen modulo m die Multiplikation hinsichtlich der Addition distributiv ist.

■ BEISPIEL 8 (4.2.)

$$
\begin{aligned}
[3]_6 \cdot ([2]_6 + [5]_6) &= [3]_6 \cdot [2]_6 + [3]_6 \cdot [5]_6 \\
[3]_6 \cdot \quad [1]_6 &= \quad [0]_6 \quad + \quad [3]_6 \\
[3]_6 &= [3]_6
\end{aligned}
$$

Übungen 4.2.

1. Ist die Menge $A = \{-98; -40; -38; -22; 13; 60; 87; 96\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen modulo 6?
2. Man erkläre, weshalb in der Verknüpfungstafel (vgl. Bild 3 (4.2.)) in manchen Zeilen und Spalten ausschließlich Restklassen auftreten, deren Repräsentanten gerade Zahlen sind.
3. In wie vielen von 20 Fällen wird das Produkt (die Summe) zweier willkürlich gewählter ganzer Zahlen eine gerade Zahl sein?
   a) Man ermittle ein Ergebnis, indem 20 Beispiele betrachtet werden.
   b) Man formuliere eine Vermutung und begründe sie theoretisch (z. B. durch Auswertung einer entsprechenden Verknüpfungstafel).
4. Es gibt Wege von A nach B, für die die Summe der 5 Zahlen, die auf einem dieser Wege „liegen“, 500 ist.
   Es sind alle derartigen Wege auf möglichst rationelle Weise zu finden.

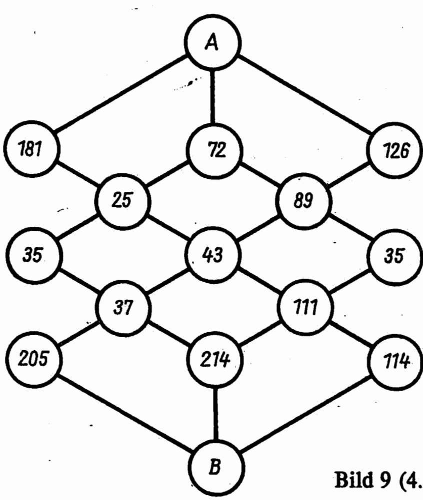


Bild 9 (4.2.)

4.3. Kongruenzen

Wir stellten im vorangegangenen Abschnitt fest, daß das Rechnen in der Menge der natürlichen Zahlen und in der Menge der Restklassen modulo m viele Gemeinsamkeiten aufweist. Ebenso gibt es viele Ähnlichkeiten bezüglich des äquivalenten Umformens von Kongruenzen und Gleichungen.[1] Einige wichtige Sätze über das Umformen von Kongruenzen werden vorgestellt. Der interessierte Leser sollte sich auch mit angegebenen Beweisführungen oder Begründungen befassen. Eine Auseinandersetzung mit den angeführten Beispielen und der Zusammenfassung auf Seite 253 kann ausreichende Grundlage für das Umformen von Kongruenzen sein. Zunächst definieren wir aber den Begriff „Kongruenz modulo m".

▶ DEFINITION 1 (4.3.)
m sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl. T_1 und T_2 seien Terme, die in der Menge der ganzen Zahlen definiert sind und deren Wert stets eine ganze Zahl ist.
Eine Zeichenreihe der Form $T_1 \equiv T_2\ (m)$ heißt **Kongruenz modulo m**.[2]

Kongruenzen sind Aussagen oder Aussageformen.

■ BEISPIEL 1 (4.3.)

(1) $28 + 3 - 10 \equiv 3 + 5\ (7)$ (falsche Aussage)

(2) $3x \equiv 2\ (5)\ (x \in Z)$ (erfüllbare Aussageform in Z)

(3) $a^2 + 2a \equiv 5\ (2)\ (a \in Z)$ (erfüllbare Aussageform in Z)

(4) Mit $1{,}5x + 12 \equiv 4\ (6)\ (x \in Z)$ liegt keine Kongruenz modulo 6 vor, weil der Wert von $1{,}5x + 12$ nicht bei jeder möglichen Belegung von x eine ganze Zahl ist.

Uns interessieren vor allem Kongruenzen der Form $ax \equiv b\ (m)\ (x \in Z, m \neq 0)$. Eine solche Kongruenz modulo m heißt **lineare Kongruenz modulo m**.

▷ SATZ 1 (4.3.)
a, b, c und d seien ganze Zahlen.
m sei eine von Null verschiedene Zahl.
Stets gilt:
Wenn $a \equiv b\,(m)$ und $c \equiv d\,(m)$, so $a + c \equiv b + d\,(m)$.

---

1) Die Begriffe „Lösen einer Gleichung" und „äquivalentes Umformen von Gleichungen" u. ä. sind in entsprechender Weise auf Kongruenzen übertragbar. So sind insbesondere zwei Kongruenzen einander äquivalent, wenn sie über demselben Grundbereich definiert sind und auch dieselbe Lösungsmenge haben.

2) Wir sprechen kurz: Kongruenz.

■ BEISPIEL 2 (4.3.)

(1) Wenn $3 \equiv -7\ (5)$
und $19 \equiv 34\ (5)$,
so $3 + 19 \equiv -7 + 34\ (5)$.
$\left(22 \equiv 27\ (5)\right)$

(2) Wenn $43 \equiv 13\ (10)$
und $-40 \equiv -10\ (10)$,
so $43 + (-40) \equiv 13 + (-10)\ (10)$.
$\left(3 \equiv 3\ (10)\right)$

Wir beweisen Satz 1 (4.3.):

Voraussetzung:
a, b, c und d seien ganze Zahlen.
m sei eine natürliche Zahl. m ist ungleich Null.
$a \equiv b\,(m) \qquad c \equiv d\,(m)$

Behauptung:
$a + c \equiv b + d\,(m)$

Beweis:

$a \equiv b\,(m)$ bedeutet	(1) $m \mid a - b$.
$c \equiv d\,(m)$ bedeutet	(2) $m \mid c - d$.
Aus (1) und (2) folgt:	(3) $m \mid (a - b) + (c - d)$
	(4) $m \mid (a + c) - (b + d)$.
Wegen Satz 1. (4.1.) gilt:	(5) $a + c \equiv b + d\,(m)$,
	w. z. b. w.

Aus Satz 1 (4.3.) lassen sich sofort zwei weitere Aussagen gewinnen.
Wenn man in Satz 1 (4.3.) für die Bedingung $c = d\,(m)$ die speziellere Bedingung $c \equiv c\,(m)$ wählt, so erhält man eine Aussage über die Monotonie der Addition bezüglich der Kongruenzrelation. In der Formulierung von Satz 2 (4.3.) brauchen wir die Bedingung $c \equiv c\,(m)$ gar nicht aufzunehmen, da diese wegen der Reflexivität der Kongruenzrelation in der Menge der ganzen Zahlen immer erfüllt ist.

▷

> SATZ 2 (4.3.)
> a, b und c seien ganze Zahlen.
> m sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
> *Stets gilt:*
> Wenn $a \equiv b\,(m)$, so $a + c \equiv b + c\,(m)$.

■ BEISPIEL 3 (4.3.)

(1) Wenn $7 \equiv 3\ (4)$,
so $7 + 8 \equiv 3 + 8\ (4)$.
$\left(15 \equiv 11\ (4)\right)$

(2) Wenn $-8 \equiv 12\ (5)$,
so $-8 + (-6) \equiv 12 + (-6)\ (5)$.
$\left((-14) \equiv 6\ (5)\right)$

Man kann sehr einfach zeigen, daß auch die *Umkehrung von Satz 2 (4.3.)* gilt:
Setzt man voraus, daß $a + c \equiv b + c\,(m)$ ist,
folgt wegen $-c \equiv -c\,(m)$ bei Anwendung des Satzes 1 (4.3.)
$a \equiv b\,(m)$.

▷

> SATZ 3 (4.3.)
> *a, b* und *c* seien ganze Zahlen.
> *m* sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
> *Stets gilt:*
> Wenn $a + c \equiv b + c\,(m)$, so $a \equiv b\,(m)$.

Die Sätze 1 (4.3.) bis 3 (4.3.) entsprechen ähnlichen Sätzen beim Umformen von Gleichungen. Das ist beim Satz 4 (4.3.) nicht der Fall. Wir leiten diesen Satz ab, indem wir in Satz 1 (4.3.) die Bedingung $c \equiv d\,(m)$ durch die speziellere Bedingung $m \cdot k \equiv 0$ (m) ersetzen. Hierbei ist k eine ganze Zahl. Da $m \cdot k \equiv 0$ (m) immer gilt, lassen wir diese Bedingung in der Formulierung von Satz 4 (4.3.) weg.

▷

> SATZ 4 (4.3.)
> *a, b* und *k* seien ganze Zahlen.
> *m* sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
> *Stets gilt:*
> Wenn $a \equiv b\,(m)$, so $a + mk \equiv b\,(m)$.

Der Leser überlege sich, daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt.
Satz 4 (4.3.) besagt:
Man darf auf einer Seite einer Kongruenz ein Vielfaches des Moduls addieren und erhält dann eine äquivalente Kongruenz.

■ BEISPIEL 4 (4.3.)

(1) Wenn $5 \equiv 1$ (4),
so $5 + 20 \equiv 1$ (4).
$(25 \equiv 1$ (4))

(2) Wenn $18 \equiv 6$ (4),
so $18 + (-20) \equiv 6$ (4).
$(-2 \equiv 6$ (4))

▷

> SATZ 5 (4.3.)
> *a, b, c* und *d* seien ganze Zahlen.
> *m* sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
> *Stets gilt:*
> Wenn $a \equiv b\,(m)$ und $c \equiv d\,(m)$, so $a \cdot c \equiv b \cdot d\,(m)$.

■ BEISPIEL 5 (4.3.)

(1) Wenn $5 \equiv 3 \ (2)$
und $8 \equiv -2 \ (2)$,
so $5 \cdot 8 \equiv 3 \cdot (-2) \ (2)$.
$(40 \equiv -6 \ (2))$

(2) Wenn $38 \equiv -11 \ (7)$
und $0 \equiv 7 \ (7)$,
so $38 \cdot 0 \equiv (-11) \cdot 7 \ (7)$.
$(0 \equiv -77 \ (7))$

Aus Satz 5 (4.3.) läßt sich (auf gleiche Weise wie bei der Ableitung von Satz 2 (4.3.) aus Satz 1 (4.3.)) Satz 6 (4.3.) gewinnen.

▷ SATZ 6 (4.3.)
a, b und *c* seien ganze Zahlen.
m sei eine von Null verschiedene natürliche Zahl.
Stets gilt:
Wenn $a \equiv b\,(m)$, so $a \cdot c \equiv b \cdot c\,(m)$.

Es ist zu beachten, daß Satz 6 (4.3.) nur aussagt, daß eine Kongruenz aus einer anderen folgt. Diese Kongruenzen müssen einander nicht äquivalent sein.

■ BEISPIEL 6 (4.3.)

(1)	Aus $7 \equiv 3 \ (5)$		(falsche Aussage)
	folgt $7 \cdot 10 \equiv 3 \cdot 10 \ (5)$		(wahre Aussage)
(2)	Aus $x \equiv 3 \ (5)$		(erfüllbare, nicht allgemeingültige Aussageform in *Z*)
	folgt $5 \cdot x \equiv 5 \cdot 3 \ (5)$		(allgemeingültige Aussageform in *Z*)

Ähnliche Probleme sind vom Arbeiten mit Gleichungen bekannt.

■ BEISPIEL 7 (4.3.)

(1)	$7 = 3$	(falsche Aussage)
	$7 \cdot 0 = 3 \cdot 0$	(wahre Aussage)
(2)	$x = 3 \ (x \in N)$	(erfüllbare, nicht allgemeingültige Aussageform in *N*)
	$x \cdot 0 = 3 \cdot 0$	(allgemeingültige Aussageform in *N*)

Die Probleme resultieren daraus, daß 0 bei der Multiplikation von Zahlen und $[0]_m$ bei der Multiplikation von Restklassen modulo *m* absorbierende Elemente sind. Deshalb ist die Multiplikation beider Seiten einer Kongruenz mit einer Zahl, die nicht zum Modul teilerfremd ist, zu unterlassen, damit man nicht u. a. als Ergebnis mehrerer Rechenschritte eine Multiplikation mit einem Vielfachen des Moduls vornimmt.

Würde man zum Beispiel die Multiplikation der beiden Seiten einer Kongruenz mit einem von 1 verschiedenen Teiler des Moduls zulassen, könnte bei Anwendung von Satz 7 (4.3.) ein Problem der folgenden Art entstehen:

(1) $x \equiv 3\ (4)$

Multiplikation beider Seiten der Kongruenz mit 2:

(2) $2x \equiv 6\ (4)$

Division beider Seiten der Kongruenz und des Moduls durch 2:

(3) $x \equiv 3\ (2)$

Die Kongruenzen (1) und (3) sind einander nicht äquivalent.

Wenn man beide Seiten einer Kongruenz durch eine ganze Zahl dividiert, ist Vorsicht geboten. Die Rechenregeln sind nicht analog denen bezüglich der äquivalenten Umformung von Gleichungen.
Beispiel 8 (4.3.) belegt das.

■ BEISPIEL 8 (4.3.)

$8 \equiv 4\ (4)$,
aber
$8:4 \not\equiv 4:4\ \ (4)$
$(2 \not\equiv 1\ \ (4))$

▷ **SATZ 7 (4.3.)**

a und b seien ganze Zahlen.
m und c seien von Null verschiedene natürliche Zahlen.

(1) *Stets gilt:*
Wenn $a \equiv b\,(m)$ und $c|a$ und $c|b$ und $(c, m) = 1$, so $a:c \equiv b:c\,(m)$.

(2) *Stets gilt:*
Wenn $a \equiv b\,(m)$ und $c|a$ und $c|b$ und $c|m$, so $a:c \equiv b:c\,(m:c)$.

■ BEISPIEL 9 (4.3.)

(1) $35 \equiv 15\ (4)$
$5|35$ und $5|15$ und $(5,4) = 1$
Es gilt:
$35:5 \equiv 15:5\ \ (4)$
$(7 \equiv 3\ (4))$

(2) $18 \equiv 14\ \ (4)$
$2|18$ und $2|14$ und $2|4$
Es gilt:
$18:2 \equiv 14:2\ (4:2)$
$(9 \equiv 7\ (2))$

Als Spezialfall von Satz 5 (4.3.) ($a = c$ und $b = d$) ergibt sich bei mehrfacher Anwendung dieses Satzes eine Aussage zum Potenzieren von Kongruenzen.

▷

> SATZ 8 (4.3.)
> a und b seien ganze Zahlen.
> m und n seien von Null verschiedene natürliche Zahlen.
> *Stets gilt:*
> Wenn $a \equiv b\,(m)$, so $a^n \equiv b^n\,(m)$.

■ BEISPIEL 10 (4.3.)

Wenn $11 \equiv -3 \;(7)$,
so $11^3 \equiv (-3)^3 \;(7)$.
$\left(1331 \equiv -27 \;(7)\right)$

Zusammenfassung

Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen können im allgemeinen in analoger Weise auf das äquivalente Umformen von Kongruenzen übertragen werden. Hinsichtlich folgender Gesichtspunkte gilt es, Abweichungen oder Besonderheiten gegenüber dem äquivalenten Umformen von Gleichungen zu beachten:

- Beim äquivalenten Umformen von Kongruenzen ist es möglich, ein Vielfaches des Moduls auf einer Seite der Kongruenz zu addieren bzw. zu subtrahieren („einseitige Addition" bzw. „einseitige Subtraktion").
- Die Multiplikation beider Seiten einer Kongruenz mit einer Zahl ist nur erlaubt, wenn diese zum Modul teilerfremd ist.
- Man kann beide Seiten einer Kongruenz durch eine von Null verschiedene Zahl dividieren, wenn diese zum Modul teilerfremd, aber Teiler der beiden Seiten der Kongruenz ist.
- Man kann beide Seiten einer Kongruenz und den Modul durch eine von Null verschiedene Zahl dividieren, die Teiler des Moduls und der beiden Seiten der Kongruenz ist.

Nachdem uns nun wichtige Regeln für das äquivalente Umformen von Kongruenzen bekannt sind, wollen wir uns dem Problem zuwenden, eine Kongruenz zu lösen, die eine Variable enthält.

Aufgabe 1 (4.3.)
Welche ganzen Zahlen x erfüllen $7x \equiv 13\;(5)$?

1. LÖSUNGSWEG
Für das Lösen von Kongruenzen mit einer Variablen bietet sich zielgerichtetes Probieren an, denn es kommen nur die Elemente von endlich vielen Restklassen als mögliche Lösung einer Kongruenz in Frage.
Bezüglich des Moduls 5 existieren 5 Restklassen. Als Repräsentantensystem wäh-

len wir $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Falls die vorgegebene Kongruenz überhaupt eine Lösung hat, muß ein Element von A Lösung der Kongruenz sein.

x	$7x \equiv 13\ (5)$	Wahrheitswert
0	$7 \cdot 0 \equiv 13\ (5)$	falsch
1	$7 \cdot 1 \equiv 13\ (5)$	falsch
2	$7 \cdot 2 \equiv 13\ (5)$	falsch
3	$7 \cdot 3 \equiv 13\ (5)$	falsch
4	$7 \cdot 4 \equiv 13\ (5)$	wahr

Die Zahl 4 ist eine Lösung der Kongruenz $7x \equiv 13\ (5)$. Wir müssen aber bedenken, daß die Zahl 4 hier als Repräsentant einer Restklasse, der Restklasse $[4]_5$ verwendet wurde und daß jedes Element von $[4]_5$ Lösung von $7x \equiv 13\ (5)$ ist. Man kann sich davon leicht überzeugen:

$$7 \cdot (-11) \equiv 13\ (5), \text{ denn } -77 \equiv 13\ (5).$$
$$7 \cdot 9 \equiv 13\ (5), \text{ denn } 63 \equiv 13\ (5).$$

Jede Zahl der Restklasse $[4]_5$ ist eine Lösung der Kongruenz $7x \equiv 13\ (5)$.

2. LÖSUNGSWEG

Wir lösen die Kongruenz durch Anwendung der in diesem Abschnitt erarbeiteten Sätze, indem wir den Koeffizienten der Variablen auf 1 reduzieren.

1. Variante

(1) $7x \equiv 13\ (5)$
(2) $7x \cdot 3 \equiv 13 \cdot 3\ (5)$
(3) $21x \equiv 39\ (5)$

Wir wenden Satz 4 (4.3.) an:

(4) $21x - 20x \equiv 39\ (5)$
(5) $x \equiv 39 - 35\ (5)$
(6) $x \equiv 4\ (5)$

Aus (6) folgt, daß jede ganze Zahl, die kongruent zu 4 nach dem Modul 5 ist, eine Lösung von $7x \equiv 13\ (5)$ ist. Die Menge aller Zahlen, die kongruent zu 4 modulo 5 sind, ist aber die Restklasse $[4]_5$.

Die Lösungsmenge L der Kongruenz kann auch in folgender Weise festgehalten werden: $L = \{x \in Z : x = 4 + 5k \textit{ und } k \in Z\}$

2. Variante

Durch „einseitige Addition oder Subtraktion" kann zunächst die Kongruenz so verändert werden, daß auftretende Zahlen möglichst klein sind.

(1) $7x \equiv 13\ (5)$
(2) $7x - 5x \equiv 13 - 10\ (5)$
(3) $2x \equiv 3\ (5)$

Mögliche Fortsetzungen des Lösungsweges:

(4)	$3 \cdot 2x \equiv 3 \cdot 3\ (5)$	(4)	$2x \equiv 8\ (5)$
(5)	$6x \equiv 9\ (5)$	(5)	$x \equiv 4\ (5)$
(6)	$x \equiv 9\ (5)$		
(7)	$x \equiv 4\ (5)$		

Aufgabe 2 (4.3.)
Welche ganzen Zahlen x erfüllen $2x \equiv 5\ (4)$?

LÖSUNG

x	$2x \equiv 5\ (4)$	Wahrheitswert
0	$2 \cdot 0 \equiv 5\ (4)$	falsch
1	$2 \cdot 1 \equiv 5\ (4)$	falsch
2	$2 \cdot 2 \equiv 5\ (4)$	falsch
3	$2 \cdot 3 \equiv 5\ (4)$	falsch

Es gibt keine ganze Zahl, die Lösung der Kongruenz $2x \equiv 5\ (4)$ ist.
Warum wir hier keine Lösung erhalten, wird sofort klar, wenn wir für die Kongruenz die gleichwertige Darstellung $2x = 5 + 4k\ (k \in Z)$ wählen. Auf der linken Seite der Gleichung steht immer eine gerade, auf der rechten aber eine ungerade Zahl.

Aufgabe 3 (4.3.)
Welche ganzen Zahlen erfüllen $6x \equiv 2\ (4)$?

1. LÖSUNGSWEG

x	$6 \cdot x \equiv 2\ (4)$	Wahrheitswert
0	$6 \cdot 0 \equiv 2\ (4)$	falsch
1	$6 \cdot 1 \equiv 2\ (4)$	wahr
2	$6 \cdot 2 \equiv 2\ (4)$	falsch
3	$6 \cdot 3 \equiv 2\ (4)$	wahr

Wir erhalten die Elemente der Restklassen $[1]_4$ und $[3]_4$ als Lösungen.

$$L = [1]_4 \cup [3]_4$$

Es wird ersichtlich, daß man das zielgerichtete Probieren nicht abbrechen darf, wenn eine Lösung gefunden wurde und die Aufgabe darin besteht, nicht nur eine, sondern alle Lösungen einer Aufgabe zu finden.

2. LÖSUNGSWEG

$6 \cdot x \equiv 2\ (4)$

$2|6$ und $2|2$ und $2|4$.

Also gilt: $3 \cdot x \equiv 1\ (2)$

$x \equiv 1\ (2)$

$L = [1]_2$

Der Leser überzeuge sich davon, daß die Mengen $[1]_4 \cup [3]_4$ und $[1]_2$ identisch sind. Man beschreibe diese Mengen verbal.
Zur Orientierung sei mitgeteilt, daß eine Kongruenz $ax \equiv b\,(m)$ stets lösbar ist, wenn a und m die Zahl 1 als größten gemeinsamen Teiler haben.

Übungen 4.3.

1. Gilt $7^3 \equiv 2\ (5)$ $(8^4 \equiv 1\ (4),\ 8^3 \equiv 2\ (6),\ 5^4 \equiv 3\ (7))$?

2. Es sind jeweils alle Lösungen zu ermitteln.
   a) $3 \cdot x \equiv 6\ (7)\ (x \in Z)$
   b) $-2 \cdot x \equiv 3\ (5)\ (x \in Z)$
   c) $17 \cdot x \equiv 6\ (7)\ (x \in Z)$

3. Man beschreibe, wie durch Anwendung der Sätze 1 (4.3.) bis 7 (4.3.) die zuerst genannte Kongruenz in die an zweiter Stelle stehende überführt werden kann.
   a) $3 \cdot x \equiv 4\ (5)$ $\quad 12 \cdot x \equiv 16\ (5)$ $\quad (x \in Z)$
   b) $3 \cdot x \equiv 4\ (5)$ $\quad 12 \cdot x \equiv -4\ (5)$ $\quad (x \in Z)$
   c) $4 \cdot x \equiv 5\ (7)$ $\quad x \equiv 45\ (7)$ $\quad (x \in Z)$
   d) $2 \cdot x \equiv 3\ (9)$ $\quad x \equiv 6\ (9)$ $\quad (x \in Z)$

4.4. Lösung ausgewählter Aufgaben mittels Kongruenzen

Es sollen einige Möglichkeiten zur Nutzung von Kongruenzen aufgezeigt werden. Manche der genannten Aufgaben lassen sich auch ohne Verwendung von Kongruenzen lösen, jedoch gestalten sich die Lösungswege bei Einsatz von Kongruenzen mitunter besonders einfach. Schließlich wird sich an einigen Beispielen zeigen, daß manchmal verdeckt mit Kongruenzen gearbeitet wird.
Wegen der engen Beziehung, die zwischen der Kongruenzrelation und der Teilbarkeitsrelation in der Menge der ganzen Zahlen besteht (vgl. Satz 1 (4.1.)), können Kongruenzen vor allem auch dann erfolgreich genutzt werden, wenn *Teilbarkeitsuntersuchungen* durchzuführen sind. Unter Rückgriff auf Kongruenzen lassen sich insbesondere Teilbarkeitsregeln mit relativ geringem Aufwand ableiten bzw. beweisen. Das soll anhand der Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 gezeigt werden.
Zur Ableitung dieser Regel gehen wir (wie bei der Ableitung von Regeln für die Teilbarkeit einer Zahl durch 2, 3, 4, 5, 8, 9 bzw. 10) von der Dezimaldarstellung einer natürlichen Zahl a aus und nutzen dabei:

(1) Für alle natürlichen Zahlen a und b ($b \neq 0$) gilt:
$a \mid b \Leftrightarrow b \equiv 0\ (a)$.

(2) Für alle ganzen Zahlen x und y bedeutet $x \equiv y\ (m)$, daß x und y bei Division durch m denselben Rest lassen.
Das heißt, x und y sind entweder beide durch m teilbar, oder sie sind es beide nicht.
Wir können damit die Untersuchung, ob x durch m teilbar ist, auf die Untersuchung verlagern, ob y durch m teilbar ist.

Wann ist eine natürliche Zahl a durch 11 teilbar?
Wir untersuchen zunächst die Teilbarkeit der Zahl 72919 durch 11 und versuchen, diese Zahl in eine Summe von zwei Zahlen (z. B. s und r) zu zerlegen. s und r werden so gewählt, daß s mit Sicherheit durch 11 teilbar ist. Die Zerlegung soll auf andere Beispiele in analoger Weise übertragbar sein.

$$\begin{aligned} 72919 &= 7 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 9 \\ &= 7 \cdot (9999 + 1) + 2 \cdot (1001 - 1) + 9 \cdot (99 + 1) + 1 \cdot (11 - 1) + 9 \\ &= \underbrace{7 \cdot 9999 + 2 \cdot 1001 + 9 \cdot 99 + 1 \cdot 11}_{s} + \underbrace{7 - 2 + 9 - 1 + 9}_{r} \end{aligned}$$

Der erste Summand (s) ist durch 11 teilbar.
Der zweite Summand (r) – die *alternierende Quersumme* von 72919 – ist 22 und damit auch durch 11 teilbar.
Deshalb ist 72919 durch 11 teilbar.

Zum Zwecke der Verallgemeinerung zeigen wir zunächst, daß die vorgenommene Zerlegung der Zehnerpotenzen stets zu einer durch 11 teilbaren Zahl und einem Rest von 1 oder -1 führt.

$$\begin{array}{rlrl} 1 \equiv & 1\ (11) & 10^0 \equiv & 1\ (11) \\ 10 \equiv & 11-1\ (11) & 10^1 \equiv & -1\ (11) \\ 100 \equiv & 99+1\ (11) & 10^2 \equiv & 1\ (11) \\ 1000 \equiv & 1001-1\ (11) & 10^3 \equiv & -1\ (11) \end{array}$$

▷ **SATZ 1 (4.4.)**
Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $10^n \equiv (-1)^n\ (11)$.

Aufgabe 1 (4.4.)
Es soll der Beweis für Satz 1 (4.4.) erbracht werden. (*Hinweis:* Man nütze das Verfahren der vollständigen Induktion.)

LÖSUNG

Voraussetzung:
n ist eine natürliche Zahl.

Behauptung:
$10^n \equiv (-1)^n\ (11)$

Beweis:

1. Induktionsanfang

Für $n = 0$ ist die Vermutung richtig, denn

$10^0 \equiv (-1)^0 \ (11)$

$(1 \equiv \quad 1 \ (11))$

2. Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung: Für die natürliche Zahl k gelte

$$10^k \equiv (-1)^k \ (11).$$

Induktionsbehauptung: Auch für die natürliche Zahl $k + 1$ gilt:

$$10^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \ (11).$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} 10^k &\equiv (-1)^k \ (11) \\ 10^1 &\equiv -1 \quad (11) \\ 10^k \cdot 10^1 &\equiv (-1)^k \cdot (-1) \ (11) \\ 10^{k+1} &\equiv (-1)^{k+1} \ (11) \end{aligned}$$

Da die Schritte 1. und 2. mit Erfolg vollzogen wurden, gilt für alle natürlichen Zahlen n:

$$10^n \equiv (-1)^n \ (11), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nunmehr leiten wir eine *Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 11* ab.

a sei eine beliebige natürliche Zahl. Für a existiert eine Dezimaldarstellung folgender Form:

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

(n ist eine natürliche Zahl. $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sind natürliche Zahlen von 0 bis 9. a_n soll von Null verschieden sein, falls $n > 0$ ist.)

$$\begin{array}{llll} \text{Aus } 10^n & \equiv (-1)^n \ (11) & \text{folgt } a_n \cdot 10^n & \equiv a_n \cdot (-1)^n \ (11). \\ \text{Aus } 10^{n-1} & \equiv (-1)^{n-1} \ (11) & \text{folgt } a_{n-1} \cdot 10^{n-1} & \equiv a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} \ (11). \\ \vdots & & \vdots & \\ \text{Aus } 10^2 & \equiv (-1)^2 \ (11) & \text{folgt } a_2 \cdot 10^2 & \equiv a_2 \cdot (-1)^2 \ (11). \\ \text{Aus } 10^1 & \equiv (-1)^1 \ (11) & \text{folgt } a_1 \cdot 10^1 & \equiv a_1 \cdot (-1)^1 \ (11). \\ \text{Aus } 10^0 & \equiv (-1)^0 \ (11) & \text{folgt } a_0 \cdot 10^0 & \equiv a_0 \cdot (-1)^0 \ (11). \end{array}$$

Durch Addition der linken bzw. rechten Seiten der rechts stehenden Kongruenzen erhalten wir:

$$a \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_n \cdot (-1)^n \ (11)$$

($a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_n \cdot (-1)^n$ heißt *alternierende Quersumme von a.*)

Wegen (2) (vgl. S. 257) können wird die Untersuchung der Zahl a hinsichtlich ihrer Teilbarkeit durch 11 durchführen, indem wir die alternierende Quersumme von a hinsichtlich der Teilbarkeit durch 11 untersuchen.

Wir nutzen außerdem (1) (vgl. S. 257). Damit folgt:

Gilt $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n \cdot (-1)^n \equiv 0 \ (11)$,

so gilt damit $\qquad a \equiv 0 \ (11)$.

Das bedeutet aber, daß a durch 11 teilbar ist.

▷ SATZ 2 (4.4.)
Eine natürliche Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

■ BEISPIEL 1 (4.4.)

(1) Ist 3782 durch 11 teilbar?
$2-8+7-3=-2$
11 ist kein Teiler von -2. Folglich ist 11 kein Teiler von 3782.

(2) Ist 3762 durch 11 teilbar?
$2-6+7-3=0$
11 ist ein Teiler von 0. Folglich ist 11 ein Teiler von 3762.

Aufgabe 2 (4.4.)
Für welche natürlichen Zahlen a gilt: $10 \mid a^2 - a$?

1. LÖSUNGSWEG
Es soll gelten: $10 \mid a^2 - a$.
Wir wandeln $a^2 - a$ in ein Produkt um.

$$a^2 - a = a \cdot (a-1)$$

$a-1$ und a sind aufeinanderfolgende ganze bzw. – falls $a \neq 0$ ist – natürliche Zahlen. Eine von ihnen ist deshalb durch 2 teilbar. Wenn $a-1$ oder a durch 5 teilbar ist, so ist $a^2 - a$ durch 10 teilbar.
1. Fall: $5 \mid a-1$
Wegen der Regel für die Teilbarkeit einer Zahl durch 5 muß die Dezimaldarstellung von $a-1$ auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Das heißt, a endet auf die Ziffer 1 oder 6.
2. Fall: $5 \mid a$
Die Dezimaldarstellung von a muß auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Wir erhalten somit:
Genau dann, wenn die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl a auf die Ziffer 0, 1, 5 oder 6 endet, hat $a^2 - a$ den Teiler 10.

2. LÖSUNGSWEG
Wenn $10 \mid a^2 - a$ und $z = a^2 - a$, so muß die Dezimaldarstellung von z auf die Ziffer 0 enden. Das ist genau dann der Fall, wenn a^2 und a bei Division durch 10 denselben Rest lassen oder wenn (anders gesagt) die Dezimaldarstellung von a^2 und a mit derselben Ziffer endet.
Wir setzen $a = 10x + y$. $(x \in N, y \in N;\ 0 \leqq y \leqq 9)$
Es ergibt sich:

$$a^2 = (10x+y)^2$$
$$a^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$$
$$a^2 = 10 \cdot \underbrace{(10x^2 + 2xy)} + y^2$$
$$a^2 = 10 \cdot \qquad v \qquad + y^2$$

a^2 und a lassen bei Division durch 10 denselben Rest, wenn y^2 und y bei dieser Division denselben Rest lassen.[1)]
Wir erfassen alle möglichen Fälle:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Wenn y gleich 0, 1, 5 oder 6 ist, d. h., wenn die Dezimaldarstellung von a auf eine dieser Ziffern endet, ist $a^2 - a$ durch 10 teilbar.
Wir nutzten bei der Lösungsfindung die auch schon an anderer Stelle mehrfach verwendete Erkenntnis:
Die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung des Quadrates (der n-ten Potenz) einer Zahl a ist nur davon abhängig, auf welche Ziffer die Dezimaldarstellung von a endet.
Wir waren uns bei Nutzung dieser Erkenntnis nicht unbedingt bewußt, daß dabei mit Kongruenzen modulo 10 gearbeitet wird. Mit der Andeutung des 3. Lösungsweges soll die Anwendung von Kongruenzen bei derartigen Überlegungen explizit Ausdruck finden.

3. LÖSUNGSWEG
$10 \mid a^2 - a$ ist gleichbedeutend mit $a^2 \equiv a\,(10)$.
Wir setzen $a = 10x + y$. ($x \in N, y \in N, 0 \leqq y \leqq 9$)
Dann ist

$$(10x + y)^2 \equiv 10x + y\,(10)$$

$$100x^2 + 20xy + y^2 \equiv 10x + y\,(10).$$

Durch „einseitige Subtraktion“ werden Vielfache des Moduls eliminiert.

$$y^2 \equiv y\,(10)$$

Nun kann der Lösungsweg analog zum 2. Lösungsweg fortgesetzt werden (Tabelle).

y	y^2	$y^2 \equiv y\ (10)$	Wahrheitswert
0	0	$0^2 \equiv 0\ (10)$	wahr
1	1	$1^2 \equiv 1\ (10)$	wahr
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
9	81	$9^2 \equiv 9\ (10)$	falsch

1) Der Leser beachte, daß durch die angestellten Überlegungen die notwendige Untersuchung aller natürlichen Zahlen a auf die Betrachtung der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 reduziert wurde.

Untersuchen wir ein anderes Problem. Der Taschenrechner SR 1 gibt für 8^8 die Zahl 16777200 an. Es ist offensichtlich, daß diese Zahl gerundet wurde.
Berechnet man diese Potenz mit dem Taschenrechner in folgender Weise, erhält man als letzte Ziffer eine 6:
$8^8 = (2^3)^8 = 2^{24} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^4 = 1024 \cdot 1024 \cdot 16 = 16777216.$
Wie heißt nun die letzte Ziffer von 8^8 wirklich?
Wir müssen untersuchen, welchen Rest 8^8 bei Division durch 10 läßt.

$8^1 \equiv 8\ (10)$ $\qquad$ $8^5 \equiv 8\ (10)$

$8^2 \equiv 4\ (10)\ \left(8^2 \equiv 64\ (10)\right)$ $\qquad$ $8^6 \equiv 4\ (10)$

$8^3 \equiv 2\ (10)\ \left(8^3 \equiv 4 \cdot 8\ (10),\ 8^3 \equiv 32\ (10)\right)$ $\qquad$ $8^7 \equiv 2\ (10)$

$8^4 \equiv 6\ (10)$ $\qquad$ $8^8 \equiv 6\ (10)$

Die Dezimaldarstellung von 8^8 endet auf die Ziffer 6.
Aber auch 18^8, 28^8 usw. enden auf diese Ziffer, denn $18 \equiv 8\ (10)$ und folglich $18^8 \equiv 8^8\ (10)$. Der Vorteil des Arbeitens mit Kongruenzen wird hier sehr deutlich, weil mit einer Lösung einer Aufgabe eine Lösung von Aufgaben ein und derselben Klasse vorliegt. Interessant ist, daß sich Zyklen ergeben, in denen sich eine Wiederholung der letzten Ziffer einstellt. Diese Zyklen sind relativ kurz. Das zeigt sich auch in der folgenden Tabelle. Die dort eingetragenen Zahlen können analog zum eben erläuterten Vorgehen errechnet werden. Wir demonstrieren das mit Beispiel 2 (4.4.).

■ BEISPIEL 2 (4.4.)

$a \equiv 7\ (10)$
$a^2 \equiv 9\ (10)\ (a \cdot a \equiv 7 \cdot 7\ (10),\ a^2 \equiv 49\ (10))$
$a^3 \equiv 3\ (10)\ (a^2 \cdot a \equiv 9 \cdot 7\ (10),\ a^3 \equiv 63\ (10))$
$a^4 \equiv 1\ (10)\ (a^3 \cdot a \equiv 3 \cdot 7\ (10),\ a^4 \equiv 21\ (10))$

a läßt bei Division durch 10 den Rest	a^2 läßt bei Division durch 10 den Rest	a^3 läßt bei Division durch 10 den Rest	a^4 läßt bei Division durch 10 den Rest	a^5 läßt bei Division durch 10 den Rest
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	8	6	2
3	9	7	1	3
4	6	4	6	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	9	3	1	3
8	4	2	6	8
9	1	9	1	9

Die Tabelle zeigt: Ein Zyklus umfaßt hier 1, 2 oder 4 Elemente. Für die Zahlen, die Lösung der Aufgabe 2 (4.4.) sind, umfaßt der Zyklus ein Element. Jede Potenz dieser Zahlen endet auf dieselbe Ziffer, wenn der Exponent eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.

Aufgabe 3 (4.4.)

a) Weshalb müssen sich Zyklen ergeben, wenn man untersucht, welche Reste die Potenzen a^n $(a \in N)$ bei Division durch 10 lassen?
(*n* durchläuft die Folge der natürlichen Zahlen bei 1 beginnend.)

b) Wie viele Elemente kann ein Zyklus höchstens enthalten, wenn an die Stelle der Zahl 10 die natürliche Zahl m $(m \neq 0)$ tritt?

LÖSUNG

a) Bei Division der unendlich vielen Potenzen von a durch die Zahl 10 sind maximal 10 verschiedene Reste möglich (0, 1, 2, ..., 9). Es muß deshalb unweigerlich dazu kommen, daß unterschiedliche Potenzen von a bei Division durch 10 denselben Rest lassen (Dirichletscher Schubfachschluß).
Es sei etwa $a^k \equiv a^h\ (10)$. $(k \in N,\ h \in N,\ k \neq h)$
Daraus folgt
$a^k \cdot a \equiv a^h \cdot a\ (10)$
usw.

b) Es sind m verschiedene Reste möglich. Verallgemeinert man die unter a) angegebenen Überlegungen, wird deutlich, daß ein Zyklus höchstens m Elemente umfassen kann.

Ausgehend von der Tabelle auf S. 261 soll eine weitere Aufgabe gelöst werden.

Aufgabe 4 (4.4.)

Man gebe alle natürlichen Zahlen n $(n \neq 0)$ an, für die gilt:

$$10 \mid a^n - a \quad (a \in N).$$

LÖSUNG

Bei a^5 liegen erstmalig dieselben Endziffern vor wie bei a. Das ist verständlich, weil die Zyklen 1, 2 oder 4 Elemente umfassen. Das kleinste gemeinsame Vielfache dieser drei Zahlen ist die Zahl 4.

Es gilt demnach:

$$10 \mid a^5 - a \text{ oder } a^5 \equiv a\ (10).$$
$$10 \mid a^9 - a \text{ oder } a^9 \equiv a\ (10).$$

Wir vermuten:

$$10 \mid a^{4k+1} - a \text{ oder } a^{4k+1} \equiv a\ (10) \quad (k \in N).$$

(Auf einen Beweis dieser Vermutung durch vollständige Induktion verzichten wir.)

Bisher untersuchten wir vorwiegend, welchen Rest eine natürliche Zahl a bei Division durch 10 läßt. An die Stelle des Divisors 10 kann auch jede andere von Null verschiedene natürliche Zahl treten.

Wir erfassen in einer Tabelle die Reste, die bei der Division der Zahlen a, a^2, a^3 durch 6 entstehen können.

a läßt bei Division durch 6 den Rest	a^2 läßt bei Division durch 6 den Rest	a^3 läßt bei Division durch 6 den Rest
0	0	0
1	1	1
2	4	2
3	3	3
4	4	4
5	1	5

$$a \equiv a^3\ (6)$$
$$a^3 \equiv a\ (6)$$
$$6 \mid a^3 - a$$

Wir erhalten auf eine völlig neue Art eine Bestätigung der schon früher bewiesenen Behauptung, daß für jede natürliche Zahl a die Zahl 6 ein Teiler von $a^3 - a$ ist (vgl. Aufgabe 8 (2.2.)).

Ausgehend von der Betrachtung der Reste, die bei Division bestimmter ganzer Zahlen durch ganze Zahlen auftreten, lassen sich viele einfache zahlentheoretische Aufgaben stellen bzw. lösen. Einige anregende *Beispiele* seien genannt:

1. Für welche natürlichen Zahlen a gilt:
   $10 \mid a^2 + a$?
2. Für welche natürlichen Zahlen a gilt:
   $6 \mid 3 \cdot a^2 + 2 \cdot a$?
3. Gibt es eine natürliche Zahl a, für die gilt:
   $6 \nmid a$ und $6 \mid a^3 + a^2 + a$?
4. Weshalb kann 100 392 nicht das Quadrat einer ganzen Zahl sein?
5. Man beweise:
   Die Summe der Quadratzahlen von $10a$, $10a+1$, $10a+2$, $10a+3$ und $10a+4$ $(a \in N)$ ist stets durch 10 teilbar.

Wir wollen nun überlegen, auf welche Ziffer die Darstellung der Primzahl $2^{216091} - 1$ endet.
Wir berücksichtigen dazu zunächst nur die Zahl 2^{216091} und zerlegen diese Potenz so in ein Produkt, daß für die Faktoren der Rest bei Division durch 10 einfach errechnet werden kann.
Es gilt: $2^4 \equiv 6\ (10)$.
Wir hatten erkannt (vgl. Tabelle S. 261), daß sich die 6 als letzte Ziffer ständig reproduziert, wenn die n-te Potenz von 6 dargestellt wird $(n \in N,\ n \neq 0)$. Deshalb ergibt sich:

$$2^{216088} = 2^{54022 \cdot 4} = (2^4)^{54022}$$
$$2^4 \equiv 6 \ (10)$$
$$(2^4)^{54022} \equiv 6^{54022} \ (10)$$
$$2^{216088} \equiv 6 \ (10)$$
$$2^{216088} \cdot 2^3 \equiv 6 \cdot 2^3 \ (10)$$
$$2^{216091} \equiv 8 \ (10)$$
$$2^{216091} - 1 \equiv 7 \ (10)$$

Die Primzahl $2^{216091} - 1$ endet auf die Ziffer 7.

Aufgabe 5 (4.4.)
Uwe hat acht quadratische Zettel. Einige davon zerschneidet er in je sechs quadratische Teile.[1] Manche der so erhaltenen Stücke zerschneidet er ebenfalls in je sechs quadratische Teile usw. Kann Uwe auf diese Weise genau 100 quadratische Teile erhalten?

LÖSUNG
Wenn Uwe zwei Zettel zerschneidet, erhält er daraus 12 quadratische Teile.
Wenn Uwe drei Zettel zerschneidet, erhält er daraus 18 quadratische Teile.
Wenn Uwe a Zettel zerschneidet, erhält er daraus $6 \cdot a$ quadratische Teile.
Die Anzahl der quadratischen Teile erhöht sich um 10, um 15 bzw. um $5 \cdot a$ Stück.
Wie viele Zettel Uwe auch immer zerschneidet, die Gesamtzahl der quadratischen Teile ändert sich um ein Vielfaches von 5. Die Anzahl der quadratischen Teile, die Uwe jeweils hat, gehört immer zur selben Restklasse modulo 5. Es ist $8 \in [3]_5$ und $100 \in [0]_5$, also kann Uwe auf diese Weise niemals genau 100 quadratische Zettel erhalten.

Verwandt mit den eben erläuterten Überlegungen ist die Strategie eines Spiels, das sich zur intensiven Übungsgestaltung für den Mathematikunterricht der Unterstufe eignet. Es gehört zu den „Nimm"-Spielen.
A und *B* vereinbaren ein Spiel mit den folgenden Regeln:

		Beispiel:
(1)	*A* nennt eine natürliche Zahl *a* von 1 bis 10	8
(2)	*B* addiert zu *a* eine natürliche Zahl *b* von 1 bis 10	$8 + 7 = 15$
(3)	*A* addiert zur Summe von *a* und *b* eine natürliche Zahl von 1 bis 10 usw.	$15 + 3 = 18$

Wer auf diese Weise zuerst als Summe 100 erhält, ist Sieger.

Aufgabe 6 (4.4.)
Wie muß *A* spielen, damit er mit Sicherheit gewinnt?[2]
(*Hinweis:* Man nutze zur Erarbeitung der Strategie das Rückwärtsarbeiten.)

---

[1] Diese Teile müssen nicht einander kongruent sein.
[2] Für die Schüler der unteren Klassen ist die Durchführung des Spiels und nicht die Erörterung dieser Frage gedacht.

LÖSUNG
Man kann es als Spieler stets so einrichten (außer A zu Beginn), daß die Summe der vom Gegner gewählten und der nachfolgend selbst genannten Zahl 11 ist.
Daraus folgt:
Wer zuerst 89 sagt, kann auch zuerst 100 nennen.
Wer zuerst 78 sagt, kann auch zuerst 89 nennen.
⋮
Wer zuerst 1 sagt, kann auch zuerst 12 nennen.
Spieler A gewinnt, wenn er mit 1 beginnt und dann immer darauf achtet, daß er die strategisch wichtigen Zahlen zuerst nennt. Es sind dies die Zahlen 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 und 100. Diese Zahlen gehören alle zur Restklasse $[1]_{11}$.

Übungen 4.4.

1. Man beweise unter Nutzung von Kongruenzen
   a) Satz 3 (2.3.),
   b) die Regel für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 9 (vgl. Satz 4 (2.3.)).
2. Man gebe alle natürlichen Zahlen a ($a \leqq 100$) an, für die gilt:
   $10 \mid a^3 + a$.
3. Für welches kleinste x ($x \in N$, $x \neq 0$) gilt
   $10 \mid 16^x - 12^x$?
4. Welche Zahlen sind für das „Nimm“-Spiel (vgl. S. 264) strategisch wichtig, wenn der Spieler verliert (gewinnt), der zuerst (wenigstens) 99 sagt?
5. A und B nehmen von einem Häufchen mit 30 Rechenstäbchen abwechselnd 1, 2, 3, 4 oder 5 Stäbchen weg. Wer das letzte Stäbchen nehmen kann, ist Sieger.
   Zu welcher Restklasse gehören die strategisch wichtigen Zahlen dieses Spiels?

4.5. Kongruenzen und diophantische Gleichungen

In diesem Abschnitt steht die Betrachtung diophantischer Gleichungen[1] im Vordergrund. Gleichungen dieser Art wurden von uns schon mehrfach gelöst (z. B. im Zusammenhang mit Kryptogrammen). Dabei bildeten inhaltliche Betrachtungen die Lösungsgrundlage. Neben dieser Lösungsvariante werden nun weitere vorgestellt, die u. a. von Kongruenzen Gebrauch machen.
Zunächst klären wir den Begriff „diophantische Gleichung“. Wir beziehen uns in der Definition nur auf eine Klasse dieser Gleichungen.

---

[1] Diese besondere Art von Gleichungen ist nach dem Mathematiker DIOPHANTOS VON ALEXANDRIA benannt.

▶ DEFINITION 1 (4.5.)
Eine Gleichung heißt **lineare diophantische Gleichung mit zwei Variablen** (x und y) genau dann, wenn sie sich durch äquivalente Umformungen auf die Form $ax + by = c$ ($a \in Z$, $b \in Z$, $c \in Z$, $x \in Z$, $y \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$) bringen läßt.

Anmerkung zur Definition: Da wir nur lineare diophantische Gleichungen lösen werden, lassen wir künftig das Attribut „linear" weg.

■ BEISPIEL 1 (4.5.)

(1) $3x + 5y = 7 \ (x \in Z, y \in Z)$

(2) $-6x + 3y = -8 \ (x \in Z, y \in Z)$

(3) $e + f = 5 \ (e \in Z, f \in Z)$

(4) $\frac{1}{2}x + 4y = 3 \ (x \in Z, y \in Z)$

Einfache diophantische Gleichungen werden schon ab Klasse 1 im Mathematikunterricht gelöst, indem alle Zerlegungen einer Zahl in eine Summe mit zwei Summanden gesucht werden.

■ BEISPIEL 2 (4.5.)

$5 = 0 + 5$
$5 = 1 + 4$
$5 = 2 + 3$
$5 = 3 + 2$
$5 = 4 + 1$
$5 = 5 + 0$

Hierbei erfolgen Einschränkungen, indem nur im Bereich der natürlichen Zahlen operiert wird. Die betreffende Aufgabe wird auch nicht immer in Form einer diophantischen Gleichung (etwa $e + f = 5$) gegeben.

Die Schüler der unteren Klassen lösen diophantische Gleichungen durch zielgerichtetes Probieren. Das sei an einer einfachen Aufgabe erläutert, die in Klasse 4 behandelt werden kann.

Aufgabe 1 (4.5.)
Eine Reisegruppe besteht aus 16 Personen. Es sind doppelt soviel Frauen wie Männer in der Reisegruppe, die übrigen Personen sind Kinder.
Wie viele Kinder reisen in dieser Gruppe mit?
Lothar behauptet: „Es sind drei Männer, sechs Frauen und sieben Kinder."
Margitta meint: „Es sind vier Kinder."

a) Wer hat recht, Lothar oder Margitta?
b) Können in der Gruppe auch zehn Kinder (drei Kinder) sein?

LÖSUNG

Anzahl der Männer m	Anzahl der Frauen $f = 2m$	Anzahl der Kinder k	Anzahl der Personen insgesamt $m + f + k$
1	2	13	16
2	4	10	16
3	6	7	16
4	8	4	16
5	10	1	16
6	12		größer als 16

Es zeigt sich, daß Lothar recht haben kann. Aber auch Margittas Aussage kann wahr sein. Es ist ebenso möglich, daß zehn Kinder an der Wanderung teilnehmen. Unter den genannten Bedingungen ist keine Teilnahme von genau drei Kindern möglich. Letzteres kann man sofort erkennen, wenn man die dem Sachverhalt entsprechende Gleichung $3m + k = 16$ aufstellt und untersucht.[1] Hätte k nämlich den Teiler 3, so hätte auch $3m + k$ diesen Teiler. 16 ist aber kein Vielfaches von 3, und somit kann keine Gleichheit bestehen.

Letztgenannte Überlegung führt uns zum Problem, daß eine diophantische Gleichung durchaus nicht immer lösbar sein muß. Das ist zum Beispiel für die Gleichung $-6x + 3y = -8$ $(x \in Z, y \in Z)$ der Fall.

Eine lösbare diophantische Gleichung hat in der Menge der ganzen Zahlen stets unendlich viele Lösungen. Der Leser überlege sich, weshalb eine diophantische Gleichung $ax + by = c$, in der a, b und c Zeichen für natürliche Zahlen sind, niemals in der Menge der natürlichen Zahlen unendlich viele Lösungen haben kann.

Die Anzahl der Lösungen einer diophantischen Gleichung wird meistens erheblich eingeschränkt, wenn der Gleichung ein Sachverhalt zugrunde liegt. In solchen Fällen lohnt sich das Lösen diophantischer Gleichungen oft, indem man zielgerichtet probiert.

Aufgabe 2 (4.5.)

Man prüfe (eventuell durch zielgerichtetes Probieren), welche der folgenden diophantischen Gleichungen Lösungen haben.

$$\left.\begin{array}{lrcr}
(1) & 3x - 2y & = & 15 \\
(2) & 2x + 4y & = & -17 \\
(3) & 4x + 6y & = & 18 \\
(4) & -12x + 16y & = & 26 \\
(5) & 3x + 4y & = & 7 \\
(6) & 12x + 16y & = & 28
\end{array}\right\} \quad (x \in Z, y \in Z)$$

[1] Die Angabe einer solchen Gleichung kann von Kindern der Klasse 4 nicht verlangt werden.

LÖSUNG

Gleichung (1) hat Lösungen (z. B. (3; −3), (5; 0), (7; 3)).

Gleichung (2) hat keine Lösungen.

Begründung: Für gegebene x und y ist die linke Seite von (2) eine gerade Zahl. −17 ist jedoch eine ungerade Zahl.

Gleichung (3) hat Lösungen (z. B. (0; 3), (−3; 5), (3; 1)).

Gleichung (4) hat keine Lösungen.

Begründung: Die linke Seite von (4) ist für beliebige Zahlen x und y ein Vielfaches von 4. 26 ist aber kein Vielfaches von 4.

Gleichung (5) hat Lösungen (z. B. (1; 1), (−3; 4)).

Gleichung (6) hat Lösungen, denn Gleichung (6) ist zur Gleichung (5) äquivalent.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 4\cdot(3x + 4y) &= 4\cdot 7 \\ 12x + 16y &= 28 \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß immer dann keine Lösung vorliegt, wenn die eine Seite der Gleichung durch eine Zahl teilbar ist, die nicht Teiler der anderen Seite der Gleichung ist. Als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von $ax + by = c$ ergibt sich: Jeder gemeinsame Teiler von a und b muß ein Teiler von c sein. Das gilt insbesondere für den größten gemeinsamen Teiler von a und b.

Die eben genannte Bedingung ist auch hinreichend für die Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.

▷ SATZ 1 (4.5.)

Eine diophantische Gleichung $ax + by = c$ ist in der Menge der ganzen Zahlen lösbar genau dann, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b ein Teiler von c ist.

■ BEISPIEL 3 (4.5.)

(1) $3x - 4y = 9 \quad (x \in Z, y \in Z)$

$(3, 4) = 1$ und $1 \mid 9$

Diese diophantische Gleichung ist in Z lösbar.

(2) $12x + 16y = 26 \quad (x \in Z, y \in Z)$

$(12, 16) = 4$ und $4 \nmid 26$

Diese diophantische Gleichung ist in Z nicht lösbar.

(3) $36x + 14y = -18 \quad (x \in Z, y \in Z)$

$(36, 14) = 2$ und $2 \mid -18$

Diese diophantische Gleichung ist in Z lösbar. (Vor dem Lösen dieser Gleichung empfiehlt es sich, beide Seiten der Gleichung durch den größten gemeinsamen Teiler von 36 und 14 zu dividieren. Man erhält dann die zu (3) äquivalente Gleichung $18x + 7y = -9$.)

Anhand der Aufgabe 3 (4.5.) werden nun drei *Lösungsvarianten* diskutiert. Die erste Variante (zielgerichtetes Probieren) ist bereits bekannt.

Aufgabe 3 (4.5.)
Für Leistungsstipendien in Höhe von 150 Mark, 100 Mark bzw. 60 Mark werden an einer Fachschule mit etwa 300 Studenten monatlich 7400 Mark ausgegeben. Die Zahl der Studenten, die 60 Mark erhalten, ist genau fünfmal so groß wie die Anzahl der Studenten, die 100 Mark erhalten. Wie viele Studenten dieser Fachschule erhalten 150 Mark, 100 Mark bzw. 60 Mark Leistungsstipendium?

LÖSUNG
Anzahl der Studenten mit 150 Mark Leistungsstipendium: x
Anzahl der Studenten mit 100 Mark Leistungsstipendium: y
Anzahl der Studenten mit 60 Mark Leistungsstipendium: $5y$

$$\begin{aligned} 150x + 100y + 60 \cdot 5y &= 7400 \\ 150x + 400y &= 7400 \\ 3x + 8y &= 148 \end{aligned}$$

$$(3, 8) = 1 \text{ und } 1 \mid 148$$

Diese diophantische Gleichung ist lösbar.

1. LÖSUNGSVARIANTE
Bevor wir zielgerichtet probieren, sollen einige Überlegungen dazu verhelfen, möglichst rationell probieren zu können. Wir werden in die Gleichung $3x + 8y = 148$ für x ganze Zahlen einsetzen und die zugehörigen y ermitteln. Durch den Sachverhalt ergibt sich, daß x größer als 0 sein muß. Es lohnt sich nicht, mit $x = 1$ beginnend, die Folge der natürlichen Zahlen zu durchlaufen. Aus der Gleichung kann man bereits ablesen, daß sich niemals eine Lösung der Gleichung ergeben kann, wenn x eine ungerade Zahl ist. Man kann sogar feststellen, daß x den Teiler 4 haben muß, weil gilt $4 \mid 148$ und $4 \mid 8y$. Das zielgerichtete Probieren ist zu beenden, wenn man für y nur noch negative Zahlen erhält.

x	$3x$	$8y$	y
4	12	136	17
8	24	124	nicht lösbar
12	36	112	14
16	48	100	nicht lösbar
20	60	88	11
24	72	76	nicht lösbar
28	84	64	8
32	96	52	nicht lösbar
36	108	40	5
40	120	28	nicht lösbar
44	132	16	2
48	144	4	nicht lösbar
52	156	−8	−1

Für die Verteilung des Leistungsstipendiums ergeben sich folgende Möglichkeiten:

Anzahl der Studenten mit		
150 M	100 M	60 M
4	17	85
12	14	70
20	11	55
28	8	40
36	5	25
44	2	10

Auf die Probe, die in der üblichen Weise durchgeführt werden kann, wird hier verzichtet.

Interessieren wir uns für alle Lösungen der diophantischen Gleichung $3x + 8y = 148$ ohne Berücksichtigung des Sachverhaltes, können x und y auch negative ganze Zahlen sein. Zu den bereits angegebenen Lösungen erhalten wir noch weitere.

$L = \{\ldots;\ (-12; 23);\ (-4; 20);\ (4; 17);\ (12; 14);\ (20; 11);\ (28; 8);\ (36; 5);\ (44; 2);\ (52; -1);\ (60; -4);\ \ldots\}$

Es ist ersichtlich, daß die Werte für x aus den Lösungspaaren in der Restklasse $[4]_8$ und die zugehörigen Werte für y in der Restklasse $[2]_3$ liegen.

Für ein Element aus $[4]_8$ gilt: $x = 8k + 4 \quad (k \in Z)$.

Wir setzen für x den Term $8k + 4$ in die Gleichung $3x + 8y = 148$ ein:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (8k + 4) + 8y &= 148 \\ 24k + 12 + 8y &= 148 \\ 8y &= -24k + 136 \\ y &= -3k + 17 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung $3x + 8y = 148$ ist somit:

$$L = \{(x, y)\colon\ x = 8k + 4 \wedge y = -3k + 17 \wedge k \in Z\}.$$

Damit wurde eine Möglichkeit gefunden, die unendlich vielen Lösungen dieser diophantischen Gleichung anzugeben, ohne daß alle Lösungen systematisch erfaßt werden müssen.

Markant ist, daß der Koeffizient von k in $x = 8k + 4$ dem Koeffizienten von y in der Gleichung $3x + 8y = 148$ entspricht. Der Koeffizient von k in $y = -3k + 17$ entspricht wiederum gerade (abgesehen vom Vorzeichen) dem Koeffizienten von x in $3x + 8y = 148$. Das ist kein Zufall. Folgende Überlegungen bestätigen das.

2. LÖSUNGSVARIANTE[1]

Wir gehen von $ax + by = c$ $(a \in Z,\ b \in Z,\ c \in Z,\ x \in Z,\ y \in Z,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$ aus.

- Die Gleichung sei lösbar, und es gelte $(a, b) = 1$.

---

[1] In der 2. und 3. Lösungsvariante untersuchen wir nur noch die Lösungen der diophantischen Gleichung $3x + 8y = 148$. Auf den eingangs angesprochenen Sachverhalt gehen wir nicht mehr ein.

(Wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b ungleich 1 ist, wird zunächst jede Seite der Gleichung durch diesen größten gemeinsamen Teiler dividiert.)

- (x_0, y_0) sei eine (durch Probieren gefundene) Lösung von $ax + by = c$.

Es gilt deshalb: $ax_0 + by_0 = c$

Aus (1) $ax + by = c$

und (2) $ax_0 + by_0 = c$

folgt (3) $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

(4) $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$

Wegen $(a, b) = 1$ muß b ein Teiler von $x - x_0$ sein.

(5) $b \mid x - x_0$

Es gibt ein k mit:

(6) $x - x_0 = b \cdot k \quad (k \in Z)$

(7) $x = x_0 + b \cdot k$

Wir setzen (7) in (1) ein.

(8) $a(x_0 + b \cdot k) + by = c$

(9) $ax_0 + abk + by = c$

(10) $abk + by = c - ax_0$

Wegen (2) können wir $c - ax_0$ durch by_0 ersetzen.

(11) $abk + by = by_0$

(12) $ak + y = y_0$

(13) $y = y_0 - a \cdot k$

Die Gleichungen (7) und (13) bestätigen die im Zusammenhang mit der ersten Lösungsvariante geäußerte Vermutung.

Beim Lösen einer diophantischen Gleichung nach der zweiten Lösungsmethode muß man nicht alle der eben beschriebenen Schritte nachvollziehen. Man kann nach Ermittlung von (x_0, y_0) die Gleichungen (7) und (13) im Sinne einer Lösungsformel handhaben. Für die von uns untersuchte Aufgabe gestaltet sich dann der Lösungsweg folgendermaßen:

$3x + 8y = 148 \quad (x \in Z, y \in Z)$

$(3, 8) = 1$ und $1 \mid 148$

Die Gleichung ist lösbar.

$x_0 = 4$ und $y_0 = 17$ (x_0 und y_0 wurden durch Probieren gefunden.)

$(3 \cdot 4 + 8 \cdot 17 = 148)$

$x = 4 + 8k \quad (k \in Z)$ (Vgl. mit (7).)

$y = 17 - 3k$ (Vgl. mit (13).)

$L = \{(x, y)\colon\ x = 4 + 8k \wedge y = 17 - 3k \wedge k \in Z\}$.

3. LÖSUNGSVARIANTE

Wir rechnen mit Kongruenzen.

(1) $3x + 8y = 148 \quad (x \in Z, y \in Z)$.

Diese Gleichung ist (wie bereits festgestellt) lösbar.

Da $3x + 8y$ und 148 gleich sind, gilt auch:

$3x + 8y \equiv 148 \ (m) \quad (m \in N, m \neq 0)$

Bei Division durch m müssen nämlich $3x + 8y$ und 148 infolge der bestehenden Gleichheit denselben Rest lassen. Das bedeutet aber nach Definition (4.1.), daß $3x + 8y$ und 148 modulo m einander kongruent sind.
Wir wählen als Modul m nicht eine beliebige natürliche Zahl, sondern den Betrag des Koeffizienten von x oder y. Dadurch läßt sich diese Kongruenz auf eine Kongruenz mit einer Variablen reduzieren (vgl. Satz 4 (4.3.) bzw. die Umkehrung dieses Satzes). Es ist in den meisten Fällen von Vorteil, wenn man dafür den kleineren der beiden möglichen Beträge wählt.

(2) $3x + 8y \equiv 148 \ (3)$

(3) $8y \equiv 148 \ (3)$

Wir lösen diese Kongruenz.

(4) $2y \equiv 148 \ (3)$

(5) $y \equiv 74 \ (3)$

(6) $y \equiv 2 \ (3)$

Wir gehen wieder zu einer Gleichung über.

(7) $y = 2 + 3k \ (k \in Z)$

Durch Einsetzen von (7) in (1) erhalten wir x.

(8) $3x + 8(2 + 3k) = 148$

(9) $3x + 16 + 24k = 148$

(10) $x = 44 - 8k$

$L = \{(x, y)\colon\ x = 44 - 8k \wedge y = 2 + 3k \wedge k \in Z\}$

Vergleicht man die in den drei Varianten erhaltenen Lösungsmengen, ergeben sich äußerlich Unterschiede, weil für x bzw. y mitunter voneinander verschiedene Bedingungen angegeben wurden. Das liegt daran, daß die Restklassen $[4]_8$ und $[2]_3$ (wie Restklassen überhaupt) auf unterschiedliche Weise durch Terme beschrieben werden können. Die gefundenen Lösungsmengen sind gleich.
Wir betrachten abschließend noch ein Beispiel.

■ BEISPIEL 4 (4.5.)

Die diophantische Gleichung $-12x - 16y = 36$ soll gelöst werden.
$(-12; -16) = 4$ und $4 \mid 36$
Die Gleichung ist lösbar.
Zunächst wird die Gleichung umgeformt, indem beide Seiten der Gleichung durch 4 dividiert werden.

$$-12x - 16y = 36$$
$$-3x - 4y = 9$$
$$-3x - 4y \equiv 9 \ (3)$$
$$-4y \equiv 0 \ (3)$$
$$y \equiv 0 \ (3)$$
$$y \equiv 3k \ (k \in Z)$$
$$-12x - 16 \cdot 3k = 36$$
$$-12x = 36 + 48k$$
$$x = -3 - 4k$$

$L = \{(x, y)\colon\ x = -3 - 4k \wedge y = 3k \wedge k \in Z\}$

5. Zahlenfolgen

Mit Folgen wird bereits im Mathematikunterricht der unteren Klassen in vielfältiger Weise gearbeitet. Wir denken zum Beispiel an die „Multiplikationsfolgen" (der 2 usw.). Die Arbeit mit Zahlenfolgen hat besondere Bedeutung, weil damit einfache, aber oft wesentliche Zusammenhänge von Zahlen oder Gesetzmäßigkeiten für Zahlen betrachtet bzw. erfaßt werden können. Deshalb wird ein wichtiges Anliegen für die Behandlung von Zahlenfolgen sein, zur selbständigen Entdeckung solcher Gesetzmäßigkeiten anzuregen oder sie zu beschreiben. Das dient der Entwicklung des funktionalen Denkens. Deshalb sollen auch diesbezügliche Anregungen für die Arbeit im Mathematikunterricht der unteren Klassen oder für die außerunterrichtliche Arbeit angedeutet werden. Das Führen von Beweisen, insbesondere von Beweisen mittels vollständiger Induktion, wird geübt.

5.1. Einige Grundlagen

In der Umgangssprache sagt man anstelle von „Folge" oft „Reihe", zum Beispiel „Stuhlreihe", „Zeichenreihe", „Rangreihe" usw., auch „Reihenfolge". Das entspricht aber im wesentlichen dem Begriff „Folge" in der Fachsprache der Mathematik.
Das Begriffswort „Reihe" hat in der Mathematik eine andere Bedeutung. Zahlenfolgen werden im allgemeinen (und auch schon im Mathematikunterricht der unteren Klassen) folgendermaßen angegeben:
80, 120, 160, 200, 240, 280, ...
60, 130, 200, 270, ...
4, 8, 12, 16, ..., 40
Um die mathematische Grundlage des Begriffes „Zahlenfolge" zu erkennen, ist eher eine Veranschaulichung geeignet, wie man sie bei der Erarbeitung oder Festigung der Multiplikation, zum Beispiel mit der Zahl 4, in Klasse 2 verwenden kann.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \end{array}$$

Auch in den folgenden Beispielen bedienen wir uns dieser Darstellungsart.

■ BEISPIEL 1 (5.1.)

(1) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \ldots & 4n & \ldots \end{array}$

(2) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2{,}5 & 5 & 7{,}5 & 10 & 12{,}5 & 15 \end{array}$

(3) $\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 40 & 35 & 30 & 25 & \ldots & 45-5n \end{array}$

(4) $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{1} & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{4} & \sqrt{5} & \ldots & \sqrt{n} \end{array}$

(5) $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3{,}1 & 3{,}14 & 3{,}141 & 3{,}1415 \end{array}$

$\Bigg\}$ $(n \in N,\ n \geqq 1)$

Die Beispiele zeigen:
Zahlenfolgen sind Funktionen. Natürlichen Zahlen (außer Null) wird genau eine reelle Zahl zugeordnet. Wir erkennen außerdem, daß die natürlichen Zahlen, die den Definitionsbereich einer Zahlenfolge bilden, nach der Kleinerrelation geordnet sind. Es wird auch keine natürliche Zahl „übersprungen". Wenn zum Beispiel die Zahl 10 Element des Definitionsbereiches einer Folge ist, so sind auch 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 Elemente des Definitionsbereiches dieser Folge.
Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen.

► DEFINITION 1 (5.1.)
Eine Funktion heißt **Zahlenfolge** genau dann, wenn ihr Definitionsbereich eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen ist. Der Definitionsbereich enthält mit einer natürlichen Zahl n auch jede natürliche Zahl, die kleiner als n ist (außer Null). Der Wertebereich dieser Funktion ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen.
Jedes Element des Wertebereichs einer Zahlenfolge heißt Glied der Zahlenfolge (kurz: Glied).[1]

---

1) Manchmal schließt man die Zahl 0 in den Definitionsbereich einer Zahlenfolge mit ein. Das bringt inhaltlich keine wesentlichen Änderungen mit sich. Für die Arbeit im Mathematikunterricht der unteren Klassen ist es zweckmäßig, die Zahl 0 aus dem Definitionsbereich einer Folge auszuschließen.

Wir sagen im folgenden anstelle von Zahlenfolge oft Folge, weil wir auf Folgen, die keine Zahlenfolgen sind, zum Beispiel Figurenfolgen, nicht eingehen.

▶ **DEFINITION 2 (5.1.)**
Eine Zahlenfolge ist **endlich** genau dann, wenn ihr Definitionsbereich eine endliche Teilmenge von N ist.

▶ **DEFINITION 3 (5.1.)**
Eine Zahlenfolge ist **unendlich** genau dann, wenn ihr Definitionsbereich die Menge $N \setminus \{0\}$ ist.

Folgen lassen sich – wie jede Funktion – in vielfältiger Weise beschreiben:

- verbal
- als Menge geordneter Paare
- durch eine Wertetafel
- durch ein VENN-Diagramm
- als Graph in einem Koordinatensystem
- durch Angabe einer Abbildungsvorschrift in Gestalt einer Funktionsgleichung.

Aufgabe 1 (5.1.)
Im Bild 1 (5.1.) ist eine Folge graphisch dargestellt. Man gebe für sie weitere Beschreibungsmöglichkeiten an.

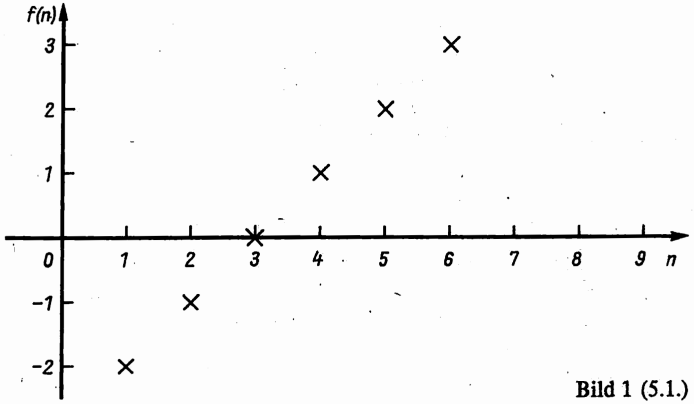


Bild 1 (5.1.)

LÖSUNG

- Die Folge hat 6 Glieder.
  Einer natürlichen Zahl n $(0 < n \leqq 6)$ wird die um 3 kleinere natürliche Zahl zugeordnet.

– $F = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$

–

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	−2	−1	0	1	2	3

–

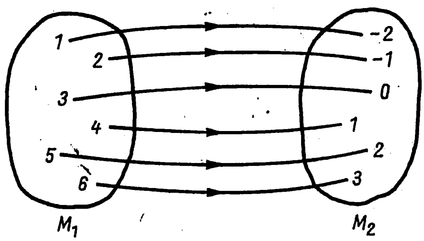


Bild 2 (5.1.)

– $f(n) = n - 3,\ n \in N$ und $1 \leqq n \leqq 6$

Diesen Beschreibungsmöglichkeiten wird speziell bei Zahlenfolgen die eingangs erwähnte Möglichkeit vorgezogen: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$
bzw. verallgemeinert $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$
Das heißt, es werden nur die Funktionswerte angegeben. Die Nummer eines Folgegliedes ergibt sich aus der Stellung bei der Aufzählung der Funktionswerte.
Wir interpretieren die Schreibweise $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ folgendermaßen:
a_1 ist dasjenige Glied der Folge, das der Zahl 1 zugeordnet wurde (a_1 ist das erste Glied der Folge).
a_2 ist dasjenige Glied der Folge, das der Zahl 2 zugeordnet wurde (a_2 ist das zweite Glied der Folge) usw.

Wir vereinbaren:

- Eine endliche Folge wird allgemein so dargestellt:
  $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$
- Eine unendliche Folge wird allgemein so dargestellt:
  $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ oder
  $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots$
- Wir bezeichnen eine Folge mit dem Symbol (a_n).

▶ DEFINITION 4 (5.1.)
n sei ein Element des Definitionsbereiches einer Folge (a_n).
- a_1 heißt Anfangsglied von (a_n). $(n \geqq 1)$
- a_n heißt n-tes Glied von (a_n). $(n \geqq 1)$
- $\left.\begin{matrix} a_{n-1} \\ a_n \end{matrix}\right\}$ heißt $\left\{\begin{matrix} \text{Vorgänger von } a_n \\ \text{Nachfolger von } a_{n-1} \end{matrix}\right\}$ in (a_n). $(n > 1)$
- Je zwei Glieder a_{n-1} und a_n von (a_n) sind in (a_n) benachbart. $(n > 1)$

Zahlenfolgen begegnen uns auch im Mathematikunterricht der unteren Klassen sehr oft.

■ BEISPIEL 2 (5.1.)

(1)
$376 + 22 = 398$
$373 + 25 = 398$
$370 + 28 = 398$
$367 + 31 = 398$

(2)
$18 + 4 = 22$
$22 + 4 = 26$
$22 + 8 = 30$
$26 + 8 = 34$

(3)
$76 - 8 = 68$
$68 - 10 = 58$
$58 - 12 = 46$
$46 - 14 = 32$
$32 - 16 = 16$

(4)
$3 \cdot 2 = 6$
$6 \cdot 2 = 12$
$12 \cdot 2 = 24$
$24 \cdot 2 = 48$
$48 \cdot 2 = 96$

Wir fassen die Summanden, Minuenden, Subtrahenden usw. einer Aufgabenserie (von oben nach unten geordnet) jeweils als Glieder einer Zahlenfolge auf. Es sind hierbei viele interessante Entdeckungen auch schon für den Schüler der unteren Klassen möglich. Solche Aufgabenstellungen eignen sich u. a. für eine inhaltliche Differenzierung im Mathematikunterricht.

Aufgabe 2 (5.1.)
Die im Beispiel 2 (5.1.) gegebenen Zahlenfolgen sind zu analysieren. Bestehende Regelmäßigkeiten oder funktionale Zusammenhänge sollen beschrieben werden.

LÖSUNG (Beispiele)
(Die Glieder einer betrachteten Folge werden immer von oben nach unten geordnet.)

(1)
- Der erste Summand wird immer kleiner.
- Der erste Summand verkleinert sich jeweils um 3.
- Der zweite Summand wird immer größer.
- Der zweite Summand vergrößert sich jeweils um 3.
- Die Summe ändert sich nicht. Sie ist konstant.
  (Die Summe bleibt unverändert, weil der erste Summand um dieselbe Zahl verkleinert wird, um die der zweite Summand vergrößert wird.)

(2)
- Der erste Summand wird größer, oder er bleibt gleich. Er wird keinesfalls kleiner.
- Der zweite Summand wird größer, oder er bleibt gleich. Er wird keinesfalls kleiner.
- Die Summe verändert sich stets um 4.
  (Weil sich immer genau einer der Summanden um 4 vergrößert, vergrößert sich jeweils die Summe um 4.)

(3)
- Der Minuend wird immer kleiner.
- Der Subtrahend wird stets um 2 größer.
- Der Minuend wird nicht um dieselbe Zahl vermindert.

(4) – Der erste Faktor und das Produkt werden immer größer.
– Der zweite Faktor bleibt gleich.
– Der erste Faktor ist jeweils das Doppelte des vorangegangenen Faktors.
– Jedes Produkt ist das Doppelte des vorangegangenen Produkts.

Einige der in der Lösung angesprochenen Eigenschaften treten bei vielen Zahlenfolgen auf. Wir wollen sie deshalb definieren.

▶ DEFINITION 5 (5.1.)
n ($n > 1$) sei ein Element des Definitionsbereiches einer Folge (a_n).
- (a_n) ist **konstant** genau dann, wenn für jedes n gilt:
  $$a_{n-1} = a_n.$$
- Eine Folge (a_n) ist **monoton** $\left\{\begin{matrix}\textbf{wachsend}\\ \textbf{fallend}\end{matrix}\right\}$ genau dann, wenn für jedes n gilt:
  $$\left\{\begin{matrix} a_{n-1} \leqq a_n \\ a_n \leqq a_{n-1} \end{matrix}\right\}.$$
- (a_n) ist **alternierend** genau dann, wenn das Produkt benachbarter Glieder von (a_n) jeweils negativ ist.
- (a_n) heißt **arithmetische Folge** (erster Ordnung) genau dann, wenn es eine (von n unabhängige) Zahl d ($d \neq 0$) gibt, so daß für jedes n gilt:
  $$a_n = a_{n-1} + d.$$
- (a_n) heißt **geometrische Folge** genau dann, wenn es eine (von n unabhängige) Zahl q ($q \neq 0$) gibt, so daß für jedes n gilt:
  $$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

■ BEISPIEL 3 (5.1.)

(1) 18, 22, 22, 26 ist eine monoton wachsende Folge.
(2) 24, 22, 20, 18 ist eine monoton fallende arithmetische Folge.
(3) 398, 398, 398 ist eine konstante Folge.
(4) 2, −4, 6, −8, 10, −12 ist eine alternierende Folge.
(5) −2, 4, −6, 8, −10, 12 ist eine alternierende Folge.
(6) 18, 22, 19, 23, 20 ist keine monoton wachsende oder fallende Folge. Sie ist auch nicht alternierend.
(7) 3, 12, 48, 192, … ist eine monoton wachsende geometrische Folge.

5.2. Bildungsgesetz

Wir haben eine Folge als eine Funktion f, also als eine Menge geordneter Paare $(n; f(n))$ definiert. Für manche Folgen (a_n) läßt sich eine Abbildungsvorschrift in Gestalt einer Funktionsgleichung angeben. Wir sprechen dann von einer **Bildungsvorschrift** oder einem **Bildungsgesetz von** (a_n). Falls ein solches Bildungsgesetz existiert, nennen wir das n-te Glied von (a_n) auch **allgemeines Glied von** (a_n).
Die Ermittlung eines Bildungsgesetzes einer Folge, falls ein solches existiert, kann für die Arbeit mit der betreffenden Folge von Nutzen sein. Deshalb wollen wir uns diesem Problem zuwenden. Dabei ist zu beachten:

(1) Da man unendliche Folgen nicht durch vollständige Angabe ihrer Glieder festlegen kann, ist es in diesem Falle von großem Wert, wenn man ein Bildungsgesetz der betreffenden Folge kennt. Es erlaubt, zu jeder natürlichen Zahl n $(n \neq 0)$ das zugehörige Glied der Folge zu berechnen.

(2) Wir nehmen an, eine Folge (a_n) sei wie folgt notiert: $(a_n) = 2, 4, 6, 8, \ldots$
Aus den drei Punkten geht hervor, daß (a_n) unendlich sein soll. Wie aber die Glieder der Folge für $n = 5, 6, 7, \ldots$ heißen, wissen wir nicht. Man hüte sich davor, etwa anzunehmen, daß „es so weitergehen" muß, daß also 10, 12, 14 usw. folgen. (a_n) könnte zum Beispiel auch so ergänzt werden:
$(a_n) = 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 4, 6, 8, \ldots$ oder
$(a_n) = 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 10, 12, \ldots$
Auch hier gibt es wieder beliebig viele Möglichkeiten der Fortsetzung.
Als Warnung soll auch noch Beispiel 1 (5.2.) dienen.

■ BEISPIEL 1 (5.2.)

Wir betrachten die Anzahl der Lagemöglichkeiten von n paarweise voneinander verschiedenen Geraden einer Ebene.

Anzahl der Geraden	1	2	3	4	5
Anzahl der Lagemöglichkeiten	1	2	4	8	?

Man vermutet wohl zunächst, daß für 5 Geraden 16 Lagemöglichkeiten bestehen. Das ist aber nicht der Fall. Es sind 18 Lagemöglichkeiten. Der Leser versuche, diese Lagemöglichkeiten zu finden oder vergleiche mit Band 2 dieser Lehrbuchreihe.

(3) Eine endliche Folge kann man prinzipiell gliedweise angeben. Bei einer großen Anzahl von Gliedern einer endlichen Folge ist das aber unrationell.

(4) Wenn zum Definitionsbereich einer Folge alle natürlichen Zahlen von 1 bis n gehören, muß das Bildungsgesetz für jede dieser Zahlen einen wohlbestimmten Funktionswert haben. Eine Zuordnungsvorschrift der Art $f(n) = \frac{1}{n-2}$ kann deshalb nicht Bildungsgesetz einer Zahlenfolge sein, weil $f(2)$ nicht existiert.

(5) Nicht für jede Zahlenfolge kann ein Bildungsgesetz angegeben werden. Das ist oft bei empirisch gewonnenen Daten der Fall (Produktionsangaben eines Betriebes in einem bestimmten Zeitraum, Anzahl der Geburten in verschiedenen Krankenhäusern innerhalb einer Woche).

Unser Ziel ist darauf gerichtet, das n-te Glied a_n einer Folge (a_n) möglichst einfach darzustellen. Durch das allgemeine Glied a_n einer Folge (a_n) ist diese eindeutig bestimmt. Ist (a_n) endlich, muß allerdings der Definitionsbereich in geeigneter Weise eingeschränkt werden, etwa $n = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Wir betrachten im weiteren nur Folgen, für die eine Bildungsvorschrift gegeben ist oder aus anderen Angaben über die betreffende Folge abgeleitet werden kann. Eine Bildungsvorschrift muß für jedes n aus dem Definitionsbereich einer betrachteten Folge angeben, wie man das zugehörige Glied der Folge berechnen kann. Sie kann in rekursiver oder expliziter Form gegeben sein. Wir sprechen dann von einem rekursiven oder expliziten Bildungsgesetz.

▶ DEFINITION 1 (5.2.)

- Für eine Folge (a_n) liegt ein rekursives Bildungsgesetz vor genau dann, wenn
  (1) das Glied a_1 angegeben ist und
  (2) vorgeschrieben ist, wie man für ein beliebiges n $(n > 1)$ das Folgenglied a_n aus dem Folgenglied a_{n-1} berechnen kann.
- Für eine Folge (a_n) liegt ein explizites Bildungsgesetz vor genau dann, wenn die Berechnung eines beliebigen Gliedes a_n der Folge allein mit Hilfe von n durch eine Funktionsgleichung beschrieben ist.

Es gibt Folgen, für die man das Bildungsgesetz sowohl rekursiv als auch explizit angeben kann.

■ BEISPIEL 2 (5.2.)

Wir geben für die Folge (a_n) der geraden natürlichen Zahlen ein Bildungsgesetz an:

- rekursiv: $a_1 = 0,\ a_n = a_{n-1} + 2 \quad (n \in N, n > 1)$
- explizit: $a_n = 2n - 2 \quad (n \in N, n \geq 1)$

$(a_n) = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n - 2, \ldots$

■ BEISPIEL 3 (5.2.)

Wir geben für die Folge (a_n) der Potenzen von 2 das Bildungsgesetz an:
- rekursiv: $a_1 = 2$, $a_n = 2a_{n-1}$ $(n \in N, n > 1)$
- explizit: $a_n = 2^n$ $(n \in N, n \geqq 1)$

Eine Bildungsvorschrift in expliziter Form ist gegenüber einer solchen in rekursiver Form von Vorteil. Will man etwa das 30. Glied der Folge im Beispiel 3 (5.2.) ermitteln, muß man bei Nutzung der rekursiven Form des Bildungsgesetzes zunächst a_2, a_3, ..., a_{29} errechnen. Durch Verwendung des Bildungsgesetzes in expliziter Form kann das 30. Glied der Folge sofort ermittelt werden. Man muß dazu lediglich in $a_n = 2^n$ für n die Zahl 30 einsetzen.
Mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion läßt sich überprüfen, ob ein Bildungsgesetz in rekursiver Form und ein solches in expliziter Form dieselbe Folge liefern.

■ BEISPIEL 4 (5.2.)

Es ist zu zeigen, daß die rekursive Bildungsvorschrift
$a_1 = 3$,
$a_n = a_{n-1} + 4$ $(n \in N, n > 1)$
und die explizite Bildungsvorschrift
$b_n = 4n - 1$ $(n \in N, n \geqq 1)$
dieselbe Zahlenfolge beschreiben.
Der *Beweis* erfolgt durch vollständige Induktion.

1. Induktionsanfang
Für $n = 1$ gilt:
$b_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3 = a_1$.

2. Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl k soll gelten, daß beide Bildungsgesetze dieselbe Folge kennzeichnen.
$b_k = 4k - 1 = a_k$
Induktionsbehauptung: Auch für $k + 1$ kennzeichnen beide Bildungsgesetze dieselbe Folge.
$b_{k+1} = 4k + 3 = a_{k+1}$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 4(k+1) - 1 \\ &= 4k + 4 - 1 \\ &= 4k - 1 + 4 \\ &= a_k + 4 \\ &= a_{k+1} \end{aligned}$$

Da die Schritte 1 und 2 erfolgreich vollzogen wurden, gilt für alle natürlichen Zahlen n $(n \geqq 1)$, daß beide Bildungsvorschriften dieselbe Zahlenfolge beschreiben.

Welche Möglichkeiten gibt es, für eine gegebene Folge mit unbekanntem Bildungsgesetz eine Bildungsvorschrift zu ermitteln? Die Beachtung folgender Hinweise kann dazu von Vorteil sein.

Zur Ermittlung des Bildungsgesetzes einer Folge kann es nützlich sein,

(1) bestehende Beziehungen zwischen benachbarten Gliedern dieser Folge zu erfassen und zu beschreiben (das ist auch dadurch möglich, daß man versucht, das nächste Glied der Folge zu bestimmen),
(2) beschriebene Beziehungen in eine Rekursionsformel umzusetzen,
(3) ausgehend von einer Rekursionsformel, eine explizite Darstellung zu finden,
(4) das Monotonieverhalten zu untersuchen,
(5) festzustellen, ob eine arithmetische oder geometrische Folge vorliegt,
(6) zu ermitteln, ob sich die Glieder der Folge in gleicher Weise als Summe von Zahlen (als Produkt von Zahlen, ...) darstellen lassen und ob diese Darstellung verallgemeinert werden kann,
(7) daran zu denken, daß die Glieder einer arithmetischen Folge von ganzen Zahlen zu ein und derselben Restklasse modulo d gehören (d ist dabei der absolute Betrag der Differenz zweier benachbarter Glieder der Folge).

Überlegungen im Sinne von (1) sind bereits in *Klasse 3* üblich. Davon zeugen Aufgabenstellungen der folgenden Art:
Berechne die Differenz zwischen den benachbarten Zahlen jeder Folge und gib fünf weitere Zahlen an!
a) 90, 140, 190, ...
b) 70, 150, 230, ...

■ BEISPIEL 5 (5.2.)

Für die Folge (a_n) der ungeraden natürlichen Zahlen soll ein Bildungsgesetz gefunden werden.
Es gilt: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$ usw.

LÖSUNGSWEG

Wir überlegen uns: 1, 3, 5, 7, ... ist eine Folge. Die Differenz benachbarter Glieder ist stets 2.

$d = a_n - a_{n-1} = 2$ $\quad (n > 1)$

$a_n = a_{n-1} + 2$ $\quad$ Diese Gleichung liefert zusammen mit $a_1 = 1$ eine rekursive Bildungsvorschrift.

Wir nutzen die rekursive Bildungsvorschrift, um eine explizite zu finden.

Aus $a_1 = 1$ erhält man $a_2 = 1 + 2$
$= 1 + 1 \cdot 2.$

Aus $a_2 = 1 + 2$ erhält man $a_3 = 1 + 2 + 2$
$= 1 + 2 \cdot 2.$

Aus $a_3 = 1 + 2 + 2$ erhält man $a_4 = 1 + 2 + 2 + 2$
$= 1 + 3 \cdot 2$.

Wir erkennen:
Das 4. Glied der Folge erhält man, wenn man die Differenz d ($d = 2$) zum ersten Glied der Folge dreimal addiert. Das 3. Glied der Folge erhält man, indem man die Differenz d zum 1. Glied der Folge zweimal addiert.
Vermutlich erhält man das n-te Glied der Folge, indem man die Differenz d zum 1. Glied $(n-1)$mal addiert.

Aufgabe 1 (5.2.)
Man gebe jeweils ein Bildungsgesetz in expliziter Form an.
a) (a_n) ist die Folge der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen mit $a_1 = 3$.
b) (b_n) ist die Folge der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen mit $b_1 = 0$.
c) (c_n) ist die Folge aller natürlichen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen.

LÖSUNG
Man kann wie im Beispiel 5 (5.2.) vorgehen. Wir wollen aber mit der Lösung der Aufgaben einen weiteren Impuls geben, wie man mitunter ein Bildungsgesetz finden kann.
a) $(a_n) = 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$ usw.
$a_1 = 3 \cdot 1$
$a_2 = 3 \cdot 2$
$a_3 = 3 \cdot 3$
Es gilt: $a_n = 3 \cdot n$
b) Da $b_1 = 0$ ist, gilt:
$(b_n) = 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$
Wir vergleichen die Folgen (a_n) und (b_n) miteinander.
$(a_n) = 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$
$(b_n) = 0, 3, 6, 9, 12, \ldots$
Einander entsprechende Glieder sind in (b_n) um 3 kleiner als in (a_n). Deshalb gilt: $b_n = 3n - 3$ oder $b_n = 3(n-1)$.
c) Der Vergleich der Folge mit einer anderen Folge, deren Bildungsgesetz bereits bekannt ist, führt auch hier schnell zum Ziel.
$(a_n) = 3, 6, 9, 12, \ldots, 3n, \ldots$
$(c_n) = 1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$

> Ein Bildungsgesetz einer Folge kann manchmal ermittelt werden, indem man diese Folge mit einer anderen Folge vergleicht, deren Bildungsgesetz bereits bekannt oder einfach zu ermitteln ist.

Wir kehren jetzt die Aufgabenstellung von Aufgabe 1 (5.2.) um.

Aufgabe 2 (5.2.)
Die durch das Bildungsgesetz gegebene Folge ist jeweils verbal zu beschreiben.
a) $a_n = 4n$
b) $a_n = 4n + 1$
c) $a_n = 4n - 3$

LÖSUNG
a) Folge der durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen mit dem Anfangsglied $a_1 = 4$.
b) Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 1 lassen. Die Folge hat das Anfangsglied $a_1 = 5$.
c) Folge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 1 lassen. Die Folge hat das Anfangsglied $a_1 = 1$.

Es werden noch einige Beispiele für arithmetische Folgen gegeben. Aus den jeweils vorgegebenen fünf Gliedern soll das n-te Glied ermittelt werden. Wir setzen voraus, daß sich die Glieder der Folge in der durch die Angabe der ersten Glieder angedeuteten Weise fortsetzen.

Aufgabe 3 (5.2.)
Es sind Bildungsgesetze für die Folgen zu ermitteln.
a) $(a_n) = 1, 6, 11, 16, 21, \ldots$
b) $(b_n) = 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \ldots$
c) $(c_n) = 1, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, 4, \ldots$
d) $(d_n) = -2, -4, -6, -8, -10, \ldots$
e) $(e_n) = 4, 1, -2, -5, -8, \ldots$

LÖSUNG
a) $a_n = 5n - 4$
b) Man stellt alle Glieder der Folge als Bruch mit dem Nenner 3 dar. Nun erkennt man, daß die Zahlen in den Zählern der Brüche eine Folge ungerader natürlicher Zahlen bilden.
$$(b_n) = \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \frac{11}{3}, \ldots$$
$$b_n = \frac{2n+1}{3}$$
c) Man kann analog zu b) vorgehen. Der Nenner ist jeweils 4.
$$c_n = \frac{3n+1}{4}$$
d) $d_n = -2n$
e) $e_n = -3n + 7$

Wir haben anhand einiger Beispiele für arithmetische Folgen jeweils deren n-tes Glied bestimmt. Dabei nahmen wir nach der Angabe der ersten Glieder stets an, daß es „so weitergehen soll", daß die betreffende Gesetzmäßigkeit die Folge eindeutig beschreibt. Dieses Vorgehen haben wir geübt, ohne uns zu fragen, ob das erlaubt ist. Wir werden dies nun legitimieren.

Aus Definition 5 (5.1.) folgt zunächst:

- Eine arithmetische Folge ist monoton wachsend genau dann, wenn $d > 0$ ist. Sie ist monoton fallend genau dann, wenn $d < 0$ ist.
- Eine arithmetische Folge ist durch ihr Anfangsglied a_1 und die konstante Differenz $d = a_n - a_{n-1}$ eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \end{aligned}$$

(Man vergleiche auch mit Beispiel 5 (5.2.).)

Man beweise durch vollständige Induktion, daß jede arithmetische Folge (a_n) durch das explizite Bildungsgesetz
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ beschrieben wird.

1. Induktionsanfang
Für n = 1 gilt $a_1 = a_1 + (1-1) \cdot d$.

2. Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl k soll gelten:
$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d.$$
Induktionsbehauptung: Auch für die natürliche Zahl $k+1$ soll gelten:
$$a_{k+1} = a_1 + k \cdot d.$$
Induktionsbeweis: Wegen der Definition des Begriffs arithmetische Folge gilt:
$$a_{k+1} = a_k + d.$$
Wir ersetzen a_k entsprechend der Induktionsvoraussetzung durch
$$a_1 + (k-1) \cdot d.$$
$$a_{k+1} = a_1 + (k-1) \cdot d + d = a_1 + k \cdot d$$
Wir können schlußfolgern, daß für alle natürlichen Zahlen n ($n \geqq 1$) das angegebene Bildungsgesetz das n-te Glied einer arithmetischen Folge liefert.

▷

> SATZ 1 (5.2.)
> Für jede arithmetische Folge (a_n) gilt:
> $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$.

Aus diesem Satz folgt:
Eine arithmetische Folge ist bereits durch die Angabe zweier ihrer Glieder eindeu-

tig bestimmt.[1] Auch die Angabe eines Gliedes der Folge und der Differenz d genügen zur eindeutigen Kennzeichnung einer arithmetischen Folge.

■ BEISPIEL 6 (5.2.)

Von einer arithmetischen Folge (a_n) sind $a_3 = 16$ und $a_7 = 36$ gegeben. Wie heißt das Bildungsgesetz dieser Folge?

$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot d$, also $36 = a_1 + 6 \cdot d$.
$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d$, also $16 = a_1 + 2 \cdot d$.
Hieraus folgt $d = 5$ und $a_1 = 6$.
Die Folge hat das Bildungsgesetz
$a_n = 6 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 1$.

Aufgabe 4 (5.2.)
Man gebe ein explizites Bildungsgesetz einer arithmetischen Folge (a_n) an, für die gilt $a_{10} = 13$ und $d = 7$.

LÖSUNG

$a_{10} = a_1 + 9d$, also $13 = a_1 + 9 \cdot 7$.

Daraus folgt $a_1 = -50$.
Die Folge hat das Bildungsgesetz

$a_n = -50 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 57$.

Interessierte Leser können sich mit der Aufgabe 5 (5.2.) befassen. Ihre Lösung gibt Aufschluß darüber, weshalb wir bestimmte Folgen arithmetische Folgen nennen.

Aufgabe 5 (5.2.)
Für eine arithmetische Folge (a_n) gilt: $a_n = 3 + 5n$.

a) Man zeige: $a_9 = \frac{1}{2}(a_8 + a_{10})$.

b) Man beweise: $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$.

c) Gilt das in b) Bewiesene für alle arithmetischen Folgen?

LÖSUNG

a)
$$a_8 = 3 + 5 \cdot 8 = 43$$
$$a_9 = 3 + 5 \cdot 9 = 48$$
$$a_{10} = 3 + 5 \cdot 10 = 53$$
$$\frac{1}{2}(43 + 53) = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$$

b)
$$a_{n-1} = 3 + 5(n-1) = 5n - 2$$
$$a_n = 3 + 5n$$
$$a_{n+1} = 3 + 5(n+1) = 5n + 8$$

---

[1] Es muß dabei bekannt sein, um die wievielten Glieder der Folge es sich handelt.

$$\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(5n - 2 + 5n + 8) =$$
$$\frac{1}{2}(10n + 6) = 5n + 3 = a_n$$

c) Ja.
Wir wenden Satz 1 (5.2.) an.
$a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$
$a_n \;\;= a_1 + (n-1)d$
$a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$
$$\frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_1 + (n-2)d + a_1 + n \cdot d)$$
$$= \frac{1}{2}(2a_1 + 2nd - 2d)$$
$$= a_1 + nd - d$$
$$= a_1 + (n-1)d = a_n, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Weil ein Glied der Folge arithmetisches Mittel der beiden benachbarten Glieder ist, wurde der Name „arithmetische Folge“ eingeführt.

▷ SATZ 2 (5.2.)
Für jede arithmetische Folge gilt:
$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \quad (n \in N, n > 1).$$

Wir wollen nun ein explizites Bildungsgesetz für eine Folge angeben, deren Glieder sich als Produkte von zwei Faktoren darstellen lassen, so daß die Folgen der ersten (zweiten) Faktoren der Produkte arithmetische Folgen sind.

■ BEISPIEL 7 (5.2.)
Die ersten fünf Glieder einer Folge seien 0, 2, 6, 12, 20. Das Anfangsglied 0 zu betrachten, ist zunächst wenig sinnvoll, wohl aber die Betrachtung der anderen Glieder im Zusammenhang. Wir bemerken etwa $6 = 2 \cdot 3, 12 = 3 \cdot 4$ und fragen uns, ob sich diese Faktorenzerlegung in gleicher Weise fortsetzen läßt.
Wir stellen fest:
$0 = 0 \cdot 1, 2 = 1 \cdot 2, 6 = 2 \cdot 3, 12 = 3 \cdot 4, 20 = 4 \cdot 5.$
Wir setzen voraus, daß die weiteren Glieder ebenso gebildet werden, also $30 = 5 \cdot 6, 42 = 6 \cdot 7$ usw. Man erhält:
$(a_n) = 0 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots, (n-1) \cdot n, \ldots$
$a_n = n^2 - n = (n-1) \cdot n$ vermittelt Einblick in eine andere Möglichkeit, ein Bildungsgesetz von (a_n) zu finden: Man subtrahiere jeweils von der

n-ten Quadratzahl die Zahl n, also: $1^2 - 1 = 0$, $2^2 - 2 = 2$, $3^2 - 3 = 6$, $4^2 - 4 = 12$, $5^2 - 5 = 20$ usw. (vgl. Bild 1 (5.2.)).

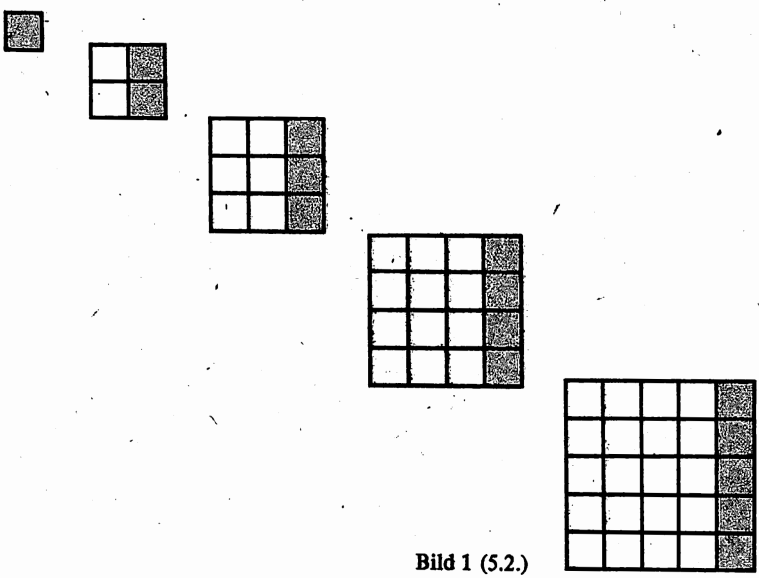


Bild 1 (5.2.)

Aufgabe 6 (5.2.)
Die ersten fünf Glieder einer Folge sind 3, 15, 35, 63, 99. Man finde das Bildungsgesetz dieser Folge.

LÖSUNG

$$3 = 1 \cdot 3;\ 15 = 3 \cdot 5;\ 35 = 5 \cdot 7;\ 63 = 7 \cdot 9;\ 99 = 9 \cdot 11$$

Die Glieder der Folge lassen sich jeweils in ein Produkt mit zwei Faktoren zerlegen. Die ersten Faktoren jedes Produktes bilden die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen. Der zweite Faktor eines dieser Produkte ist jeweils genau um 2 größer als der erste Faktor dieses Produktes. Also gilt (falls man diese Gesetzmäßigkeit weiter zugrunde legt):

$$(a_n) = 3, 15, 35, 63, 99, \dots, (2n - 1)(2n + 1), \dots$$

$a_n = (2n - 1)(2n + 1) = 4n^2 - 1$ vermittelt Einblick in eine etwas andere Möglichkeit, das Bildungsgesetz für (a_n) zu finden:

$$4 \cdot 1^2 - 1 = 3,\ 4 \cdot 2^2 - 1 = 15,\ 4 \cdot 3^2 - 1 = 35 \text{ usw.}$$

Man kann auch bei der Betrachtung der fünf vorgegebenen Glieder feststellen, daß sich bei Addition von 1 zu jedem Glied eine gerade Quadratzahl ergibt:

$$3 + 1 = 2^2,\ 15 + 1 = 16 = 4^2,\ 35 + 1 = 36 = 6^2,$$
$$63 + 1 = 64 = 8^2,\ 99 + 1 = 100 = 10^2 \text{ usw.}$$

Man kann also das Bildungsgesetz von (a_n) explizit noch anders formulieren:

$$a_n = (2n)^2 - 1.$$

Aufgabe 7 (5.2.)
Für die Folge (a_n) ist ein Bildungsgesetz zu ermitteln. Die durch die ersten Glieder angedeutete Gesetzmäßigkeit soll weiter zugrunde gelegt werden.

$$(a_n) = 2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$$

LÖSUNG
Eine rekursive Darstellung des Bildungsgesetzes ist relativ leicht zu erkennen:

$$a_1 = 2, \; a_n = a_{n-1} \cdot 5 \quad (n > 1).$$

Daraus leiten wir ein explizites Bildungsgesetz ab.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 &&= 2 \cdot 5^0 \\ a_2 &= 2 \cdot 5 &&= 2 \cdot 5^1 \\ a_3 &= (2 \cdot 5) \cdot 5 &&= 2 \cdot 5^2 \\ a_4 &= (2 \cdot 5^2) \cdot 5 &&= 2 \cdot 5^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vermutung:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 5 = 2 \cdot 5^{n-1}$$

Schon aus der rekursiven Darstellung ergibt sich:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 5.$$

Das heißt, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge konstant ist. Sie ist eine geometrische Folge.

Will man ein explizites Bildungsgesetz für eine geometrische Folge ermitteln, kann man so wie in Aufgabe 7 (5.2.) vorgehen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Beschreibung des allgemeinen Gliedes einer geometrischen Folge ergibt sich wieder durch Anwendung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion.

▷ SATZ 3 (5.2.)
Für jede geometrische Folge (a_n) gilt:
$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$.

Im Gegensatz zu einer arithmetischen Folge ist eine geometrische Folge durch die Angabe zweier ihrer Glieder im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

BEISPIEL 8 (5.2.)
Von einer geometrischen Folge ist bekannt:
$a_3 = 54 \qquad a_5 = 486$

$$a_5 : a_3 = (a_1 \cdot q^4) : (a_1 \cdot q^2)$$
$$= q^2$$
$$486 : 54 = q^2$$
$$9 = q^2$$
$q_1 = 3$, $q_2 = -3$

Wegen $a_3 = a_1 \cdot q^2$ erhalten wir:

$a_1 = a_3 : q^2 = 54 : 9 = 6$

Damit sind unter den angegebenen Bedingungen die Bildungsgesetze

(1) $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$ und

(2) $a_n = 6 \cdot (-3)^{n-1}$ möglich.

(1) ist das Bildungsgesetz der monoton wachsenden Folge
$(a_n) = 6, 18, 54, \ldots$

(2) ist das Bildungsgesetz der alternierenden Folge
$(a_n) = 6, -18, 54, \ldots$

Aus diesem Beispiel wird bereits ersichtlich, welche Bedeutung q für die Charakterisierung einer geometrischen Folge hat. Wir halten, ohne eine Begründung zu geben, fest:

(1) Es sei $q > 0$.
Dann sind drei Fälle zu unterscheiden:
- (a) $q = 1$
  (a_n) ist konstant.
- (b) $q > 1$
  Wenn $a_1 > 0$ ist, dann ist (a_n) monoton wachsend.
  Wenn $a_1 < 0$ ist, dann ist (a_n) monoton fallend.
- (c) $q < 1$
  Wenn $a_1 > 0$ ist, dann ist (a_n) monoton fallend.
  Wenn $a_1 < 0$ ist, dann ist (a_n) monoton wachsend.

(2) Es sei $q < 0$.
Dann ist (a_n) alternierend.

■ BEISPIEL 9 (5.2.)

a) $(a_n) = 3, 9, 27, \ldots, 3^n \quad a_1 = 3, q = 3$
monoton wachsende geometrische Folge

b) $(a_n) = \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \quad a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{4}$
monoton fallende geometrische Folge

c) $(a_n) = -2, -6, -18, \ldots, (-2)\,(3^{n-1}), \ldots \quad a_1 = -2, q = 3$
monoton fallende geometrische Folge

Bei der quantitativen Erfassung praktischer Sachverhalte treten häufig geometrische Folgen auf (z. B. radioaktiver Zerfall chemischer Elemente oder Vermehrung von Bakterien innerhalb bestimmter Zeiteinheiten, Zinseszinsrechnungen).

Eine Besonderheit geometrischer Folgen besteht darin, daß mitunter ab einer gewissen Stelle die Glieder sprunghaft größer werden. Die folgende Tabelle und die Aufgabe sollen hiervon einen Eindruck vermitteln helfen.

$$\begin{aligned}
2^0 &= 1\\
2^1 &= 2\\
2^2 &= 4\\
2^3 &= 8\\
2^4 &= 16\\
2^5 &= 32\\
2^6 &= 64\\
2^7 &= 128\\
2^8 &= 256\\
2^9 &= 512\\
2^{10} &= 1024\\
&\vdots\\
2^{20} &= 1048576\\
&\vdots\\
2^{30} &= 1073741824
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (5.2.)
Eine Bakterienkultur vermehre sich so, daß nach einer Zeiteinheit die vierfache Anzahl Bakterien vorhanden ist. Wie viele Bakterien sind nach 2 (6, 10) Zeiteinheiten vorhanden?

LÖSUNG
Es sind die Glieder einer geometrischen Folge (a_n) zu ermitteln. a_1 setzen wir 1; q ist 4. Zu berechnen sind a_3 (a_7, a_{11}). a_3 gibt die Anzahl der Bakterien nach zwei Zeiteinheiten an.

$$\begin{aligned}
a_3 &= 1 \cdot 4^2 = 16\\
a_7 &= 1 \cdot 4^6 = 4096\\
a_{11} &= 1 \cdot 4^{10} \approx 1050000
\end{aligned}$$

Nach 2 (6, 10) Zeiteinheiten ist eine 16fache (4096fache, etwa 1050000fache) Anzahl Bakterien vorhanden.

Um die Schlagartigkeit des Anwachsens einer geometrischen Folge unter bestimmten Bedingungen zu verdeutlichen, geben wir noch ein einprägsames Beispiel an. Weitere interessante Beispiele findet man bei PERELMANN: *Unterhaltsame Aufgaben und Versuche* (vgl. [35]).

■ BEISPIEL 10 (5.2.)

Faltet man ein genügend großes Stück Papier mehrfach, so bildet der Zahlenwert der Dicke dieser gefalteten Papierschicht ein Glied einer geometrischen Folge mit dem Quotienten 2. Unter der Annahme, daß das Papier 0,1 mm dick ist und 40 mal gefaltet werden soll, erhält man $a_{41} = 0{,}1\ \text{mm} \cdot 2^{40}$. Das sind etwa 109951 km. Das ist fast ein Drittel der Entfernung Erde–Mond.

Nicht nur die Unterschätzung des manchmal raschen Anwachsens einer geometrischen Folge ist eine Fehlerquelle im Umgang mit solchen Folgen. Mitunter kommt es auch zu falschen Schlüssen im Zusammenhang mit geometrischen Folgen, wovor das folgende Beispiel warnen soll.

■ BEISPIEL 11 (5.2.)

Ein Betrieb soll in den kommenden fünf Jahren durch umfangreiche Maßnahmen der Intensivierung seinen Produktionsumfang jährlich um 20% gegenüber dem jeweils im Vorjahr erreichten Umfang steigern.
Wie hoch ist dieser Produktionsumfang nach fünf Jahren, wenn man den diesjährigen mit 100% ansetzt?
Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man denken, daß sich nach Ablauf von fünf Jahren der Produktionsumfang genau verdoppelt hat. Es liegt ja eine jährliche Steigerung um 20% vor, und $5 \cdot 20$ ist 100. Dieser Schluß ist falsch. Er berücksichtigt nicht, daß für die 20%ige Steigerung stets der im Vorjahr erreichte Stand Grundlage ist. Deshalb muß der im Vorjahr erreichte Produktionszuwachs *auch* um 20% gesteigert werden. (Das Mitsteigern des Zuwachses ist übrigens auch der Grund für schnelles Anwachsen mancher geometrischer Folgen.)
Zur Lösung des Problems ist eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 100$ und dem Quotienten 1,2 zu untersuchen. Steigerung der Produktion *um* 20% bedeutet Steigerung *auf* das 1,2fache.

Produktionsumfang	
anfangs	100
nach dem 1. Jahr	$100 \cdot 1{,}2 = 120$
nach dem 2. Jahr	$120 \cdot 1{,}2 = 144$
nach dem 3. Jahr	$144 \cdot 1{,}2 = 172{,}8$
nach dem 4. Jahr	$172{,}8 \cdot 1{,}2 \approx 207{,}4$
nach dem 5. Jahr	$207{,}4 \cdot 1{,}2 \approx 249$

Es ist demnach geplant, den Produktionsumfang fast auf das 2,5fache des diesjährigen Umfangs zu steigern.

Eine Verallgemeinerung der in Beispiel 11 (5.2.) dargelegten Problematik führt zu einer Gleichung für die Berechnung von *Zinseszinsen.*
Anfangswert: a
Prozentuale Steigerung bezogen auf den Vorjahresstand: p
Erreichter Wert nach n Jahren: a_n

$$a_1 = a + \frac{p}{100} \cdot a \quad = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$
$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100} \cdot a_1 = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$
$$a_3 = a_2 + \frac{p}{100} \cdot a_2 = a_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Die Unterschiedlichkeit des „Zuwachses“ einer arithmetischen und einer geometrischen Folge verdeutlicht Bild 2 (5.2.).

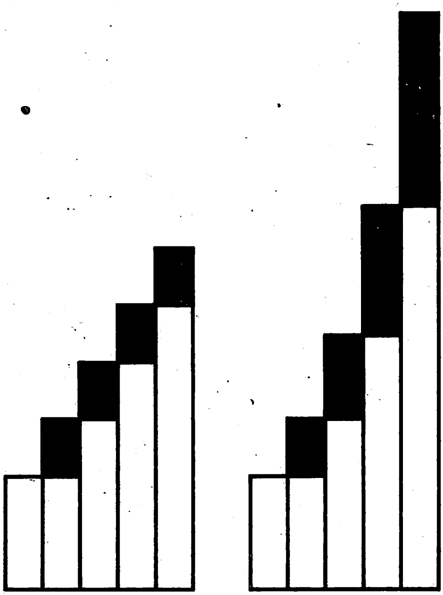


Bild 2 (5.2.)

Wir betrachten noch die *Fibonaccische Zahlenfolge.*[1)]

$$(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Für diese Folge gibt es ein rekursives Bildungsgesetz:

(1) $a_1 = 1,\ a_2 = 1$

(2) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \qquad (n \in N,\ n \geqq 1)$

Wir bemerken, daß wir in diesem Zusammenhang Definition 1 (5.2.) etwas modifizieren müssen. Wir haben a_1 und a_2 angegeben und bestimmen a_{n+2} aus seinem Vorgänger a_{n+1} und dessen Vorgänger a_n.

---

1) FIBONACCI – italienischer Mathematiker um 1200 u. Z.

Es ist möglich, auch ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge anzugeben:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Es gibt eine interessante Beziehung zu Binominalkoeffizienten. Wir notieren die Binominalkoeffizienten in der Rechteckform.

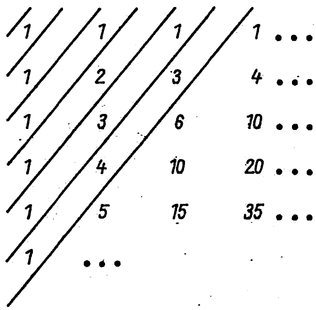


Bild 3 (5.2.)

Addiert man die in einem der hervorgehobenen Streifen enthaltenen Binominalkoeffizienten, so erhält man die Fibonaccische Zahlenfolge.
Die Fibonaccische Folge hat noch andere interessante Eigenschaften und spielt auch in der Naturwissenschaft eine Rolle. Beispielsweise verzweigen sich die Äste eines Baumes gewöhnlich nach dieser Folge. Im zweiten Jahr hat das Bäumchen zwei Äste, im dritten Jahr erhöht sich die Anzahl seiner Äste normalerweise auf drei, im vierten Jahr auf fünf usw.
Weitere Eigenschaften der Fibonaccischen Folge werden in dem Buch *„Köpfchen, Köpfchen!"* von Kordemski (vgl. [26]) erläutert.

Zum Abschluß dieses Abschnittes stellen wir ein reizvolles Spiel vor. Es ist unter dem Namen „Turm von Hanoi" bekannt und durchaus schon für die außerunterrichtliche Arbeit in den unteren Klassen geeignet. Dieses Spiel wurde 1883 von dem französischen Mathematiker Lucas in den Handel gebracht.
Bild 4 (5.2.) zeigt ein Brett mit drei Holzpflöcken und fünf durchbohrten, zylindrischen, verschieden großen Scheiben. Die Aufgabe besteht darin, alle der Größe nach auf Pflock A angeordneten Scheiben von Pflock A auf Pflock B unter folgenden drei Bedingungen zu übertragen:

(1) Es darf in einem Schritt immer nur eine Scheibe von einem Pflock genommen und auf einen anderen gelegt werden.
(2) Es darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen.
(3) Es dürfen alle drei Pflöcke benutzt werden.

Diese Aufgabe ist mit beliebig vielen Scheiben lösbar. Nach einigem Probieren dürfte man zweierlei bemerken:

- Bild 5 (5.2.) zeigt eine notwendige Zwischenstellung für das Umsetzen von mindestens fünf Scheiben.
- Es gibt eine Minimalzahl a_n von Schritten.

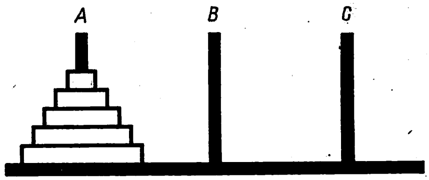


Bild 4 (5.2.)

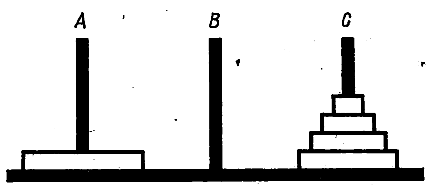


Bild 5 (5.2.)

Aufgabe 9 (5.2.)
Es ist die minimale Anzahl der auszuführenden Schritte anzugeben, wenn beim „Turm von Hanoi" 1 (2, 3, 4, 5) Scheibe(n) umzulegen ist (sind).
Es soll eine Vermutung bezüglich der minimalen Schrittzahl bei n Scheiben aufgestellt werden.

LÖSUNG

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	7	15	31

Für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ überschaut man die Problematik vielleicht noch, auch wenn keine Systematik erkannt wurde. In den weiteren Fällen dürfte das schon schwierig werden. Um die minimale Schrittzahl für $n = 5$ zu ermitteln, müßte man zu folgender Erkenntnis gelangen:
Damit die größte Scheibe des Turms umgelegt werden kann, muß die im Bild 5 (5.2.) dargestellte Situation vorliegen:
- Auf einem Pflock liegt keine Scheibe.
- Auf einem anderen Pflock liegt nur die größte Scheibe.
- Auf dem letzten Pflock ist der Turm aus den übrigen Scheiben aufgebaut.

Ab- und Aufbau des Turms von $(n + 1)$ Scheiben bedeutet deshalb:
- Umbau eines Turms von n Scheiben, die auf der größten Scheibe liegen.
- Umlegen der größten Scheibe.
- Umbau eines Turms von n Scheiben, so daß sie auf der größten Scheibe liegen.

Für die Anzahl der durchzuführenden Schritte ergibt sich deshalb eine Rekursionsformel.

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$$

Es ist möglich, für die Anzahl der Schritte ein explizites Bildungsgesetz anzugeben:

$$a_n = 2^n - 1$$

Die Richtigkeit dieses Bildungsgesetzes ist mittels vollständiger Induktion beweisbar.

Übungen 5.2.

1. Man gebe ein explizites Bildungsgesetz der Folge (a_n) an, die durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = (n+1)\, a_n$ $(n \in N, n \geqq 1)$ bestimmt ist.

2. Man ermittle ein Bildungsgesetz für die Folge (a_n). Es sollen außerdem Bildungsgesetze für weitere Folgen gefunden werden, die aus der Darstellung entnommen werden können (vgl. Bild 6 (5.2.)).
(*Hinweis:* Man vergleiche eine ausgewählte Folge mit (a_n).)

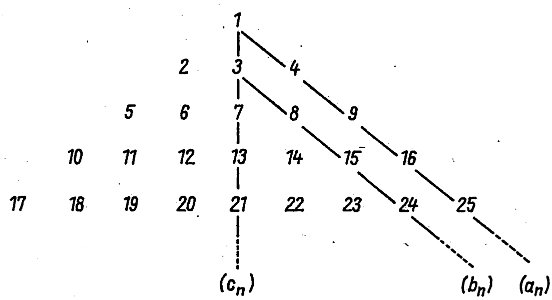


Bild 6 (5.2.)

3. Von welcher Art sind die im Bild 7 (5.2.) gekennzeichneten Folgen?
Man gebe jeweils ein Bildungsgesetz an.
In welcher Beziehung steht (b_n) zu (a_n) ((c_n) zu (b_n))?

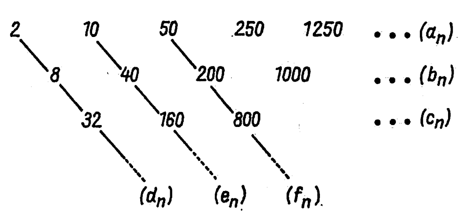


Bild 7 (5.2.)

4. Bei einem Umlaufprozeß (Abfüller – Kunde – Abfüller) gehen 10% der verwendeten Flaschen durch Verschleiß oder Nichtrückgabe verloren.
Nach wie vielen Umläufen sind nur noch 60% der Flaschen des Anfangsbestandes vorhanden?
Nach dem wievielten Umlauf ist theoretisch nur noch eine von ursprünglich 100 Flaschen übrig?

5.3. Bildungsgesetze spezieller Folgen und Zahlenbeziehungen

Es entspricht praktischen Erfordernissen, Daten zu sammeln und zu verarbeiten. Insbesondere spielen Daten in Gestalt von Zahlen eine Rolle. Häufig ist die Summierung von Zahlen notwendig.

■ BEISPIEL 1 (5.3.)
Wir halten die Anzahl der Geburten in einem Krankenhaus im Laufe von jeweils einer Woche in einer Tabelle fest.

Woche	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl der Geburten	12	20	22	19	17	24	21

Woche	8	9	10	11	12	13
Anzahl der Geburten	20	20	22	16	17	21

Es liegt eine Zahlenfolge vor. Jeder Woche (des 1. Quartals) wurde die Anzahl der Geburten zugeordnet. Für statistische Zwecke interessiert zum Beispiel die Anzahl der Geburten in einem Quartal oder in einem Jahr. Deshalb muß die Summe der Glieder von Folgen gebildet werden.

Quartal	1	2	3	4
Anzahl der Geburten	251	247	261	236

Die errechneten Summen gehören ebenfalls zu einer Zahlenfolge – zu einer sogenannten „Summenfolge“. Es ist unschwer einzusehen, daß auch eine derartige Summenfolge Ausgangspunkt einer weiteren Summenfolge (höherer Ordnung) sein kann.

Für mathematische Betrachtungen ist es ebenfalls in vielen Fällen erforderlich, die Summe der Glieder einer Folge zu bilden. Dabei kann man im allgemeinen nicht so vorgehen, daß man die Glieder der Folge nacheinander addiert. Denn es sind entweder sehr viele Glieder zu addieren, oder es wird für eine variabel gehaltene Anzahl von Gliedern einer Folge die Summe gesucht.
Im Beispiel 2 (5.3.) beschreiben wir eine typische Vorgehensweise zur Lösung dieses Problems.

■ **BEISPIEL 2 (5.3.)**

Es ist $(a_n) = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots$ die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen, also eine arithmetische Folge, gegeben.
Wir bilden mit den Gliedern von (a_n) Summen. Das Ziel wird darin bestehen, für die Folge der errechneten Summen ein Bildungsgesetz zu erkennen. Da auch schon für Schüler der unteren Klassen eine wichtige und zugleich reizvolle Aufgabe darin besteht, bestimmte Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, bemühen wir uns stets um Anschaulichkeit.

Nummer des Gliedes	Folge, deren Summe zu bilden ist (a_n)	Summenfolge (s_n)
1	1 ○	○ 1
2	3 ○ ○ ○	● ○ $1 + 3 = 4$ ○ ○
3	5 ○ ○ ○ ○ ○	● ● ○ $1 + 3 + 5 = 9$ ● ● ○ ○ ○ ○
⋮	⋮	⋮
n	Bildungsgesetz $a_n = 2n - 1$	Vermutetes Bildungsgesetz $s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$

Wir vermuten:
Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist gleich der n-ten Quadratzahl ($n \in N$, $n \geqq 1$). Die Richtigkeit dieser Vermutung wird durch vollständige Induktion bestätigt.

1. Induktionsanfang
Für $n = 1$ gilt:
$s_1 = 1^2 = 1 = a_1$.

2. Induktionsschritt
Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl k kann die Summe der ersten k ungeraden natürlichen Zahlen mit dem vermuteten Bildungsgesetz berechnet werden:
$s_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2$.
Induktionsbehauptung: Auch die Summe der ersten $k + 1$ ungeraden natürlichen Zahlen kann mit dem vermuteten Bildungsgesetz ermittelt werden:
$s_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Induktionsbeweis: Wir gehen von der „linken Seite" der Induktionsbehauptung aus und fassen die ersten k Summanden zusammen.

$$s_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)}_{s_k} + (2k+1)$$

$$s_{k+1} = s_k + (2k+1)$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung darf s_k durch k^2 ersetzt werden.

$$s_{k+1} = k^2 + 2k + 1$$

Die auf der „rechten Seite" stehende Summe kann durch Nutzung einer binomischen Formel umgeformt werden.

$$s_{k+1} = (k+1)^2$$

Da die Schritte 1 und 2 mit Erfolg vollzogen wurden, gilt für alle natürlichen Zahlen n ($n \geqq 1$), daß das vermutete Bildungsgesetz gültig ist.

Wir verallgemeinern die im Beispiel 2 (5.3.) verwendete Schreibweise. Der Buchstabe s soll an „Summe" erinnern.

$$\begin{array}{lll}
a_1 & & = s_1 \\
a_1 + a_2 & = s_1 + a_2 & = s_2 \\
a_1 + a_2 + a_3 & = s_2 + a_3 & = s_3 \\
 & \vdots & \\
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k & = s_{k-1} + a_k & = s_k \\
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} & = s_k + a_{k+1} & = s_{k+1}
\end{array}$$

▶ **DEFINITION 1 (5.3.)**
Die Summe $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ der ersten n Glieder der Folge (a_n) heißt **n-te Partialsumme von (a_n).**
(pars, lat.: Teil)
Die Folge (s_n) der Partialsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ heißt **die zu (a_n) gehörende Reihe.**

Für Beispiel 2 (5.3.) gilt also: Die Folge der ersten n Quadratzahlen ist die zur Folge der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gehörende Reihe.

Aufgabe 1 (5.3.)
Für die Reihe, die zur Folge $(a_n) = 12, 18, 30, \ldots, 12 + 3n(n-1)$ gehört, gelangen A und B zu unterschiedlichen Vermutungen bezüglich des Bildungsgesetzes:

A		***B***	
$s_1 = 12$	$= 6 \cdot 1 + 6$	$s_1 = 12$	$= 1 \cdot 11 + 1$
$s_2 = 12 + 18$	$= 6 \cdot 4 + 6$	$s_2 = 12 + 18$	$= 2 \cdot 11 + 8$
$s_3 = 12 + 18 + 30$	$= 6 \cdot 9 + 6$	$s_3 = 12 + 18 + 30$	$= 3 \cdot 11 + 27$
$\vdots$		$\vdots$	
Vermutung: $s_n = 6 \cdot n^2 + 6$		Vermutung: $s_n = n \cdot 11 + n^3$	

Man entscheide, ob eine der Vermutungen richtig ist.

LÖSUNG
Zur Entscheidungsfindung wählen wir das Verfahren der vollständigen Induktion und untersuchen zunächst die von A geäußerte Vermutung.

1. Induktionsanfang
Für $n = 1$ gilt:

$$s_1 = 6 \cdot 1^2 + 6 = 12 = a_1.$$

2. Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung: Die von A geäußerte Vermutung gelte für eine natürliche Zahl k.

$$s_k = 6 \cdot k^2 + 6$$

Induktionsbehauptung: Die von A geäußerte Vermutung gilt auch für eine natürliche Zahl $k + 1$.

$$s_{k+1} = 6(k+1)^2 + 6$$
$$= 6k^2 + 12k + 12$$

Induktionsbeweis:

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

Wir ersetzen s_k durch $6k^2 + 6$:

$$s_{k+1} = 6k^2 + 6 + a_{k+1}$$

a_{k+1} wird konkretisiert:

$$s_{k+1} = 6k^2 + 6 + 12 + 3(k+1)(k+1-1)$$
$$s_{k+1} = 6k^2 + 6 + 12 + 3(k+1)\,k$$
$$s_{k+1} = 6k^2 + 18 + 3k^2 + 3k$$
$$s_{k+1} = 9k^2 + 3k + 18$$
$$s_{k+1} = \underline{6k^2 + 12k + 12} + 3k^2 - 9k + 6$$

Der unterstrichene Teil der letzten Gleichung stimmt mit der rechten Seite der Induktionsbehauptung überein. Aber nur, wenn $3k^2 - 9k + 6$ gleich Null ist, bestätigt die Beweisführung die von A aufgestellte Vermutung. Da $3k^2 - 9k + 6$ nicht für eine beliebige natürliche Zahl k Null wird, ist die von A geäußerte Vermutung falsch.[1)]

Wir prüfen nun die von B geäußerte Vermutung.

1. Induktionsanfang
Für $n = 1$ gilt:

$$s_1 = 1 \cdot 11 + 1^3 = 12 = a_1.$$

2. Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung: Die von B aufgestellte Vermutung gelte für eine natürliche Zahl k.

$$s_k = k \cdot 11 + k^3$$

---

1) Der Leser überlege sich, wie man zu diesem Resultat auch ohne Verwendung der vollständigen Induktion gelangt. Unser Ziel bestand darin, zu zeigen, daß der Versuch eines Induktionsbeweises auch negativ ausgehen kann.

Induktionsbehauptung: Die von B geäußerte Vermutung gilt auch für eine natürliche Zahl $k+1$.

$$s_{k+1} = (k+1) \cdot 11 + (k+1)^3$$
$$s_{k+1} = 11k + 11 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$
$$s_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 14k + 12$$

Induktionsbeweis:

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$
$$s_{k+1} = (k \cdot 11 + k^3) + \big(12 + 3(k+1)k\big)$$
$$s_{k+1} = 11k + k^3 + 12 + 3k^2 + 3k$$
$$s_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 14k + 12$$

Es liegt Übereinstimmung mit der Induktionsbehauptung vor.
Da die Schritte 1 und 2 mit Erfolg vollzogen wurden, gilt die von B aufgestellte Vermutung für alle natürlichen Zahlen n $(n \geqq 1)$.
Von einer Folge von Partialsummen kann man auf die in der Definition 1 (5.3.) erklärte Art immer wieder eine neue Folge (höherer Ordnung) bilden. Wir veranschaulichen dies und notieren jeweils das Bildungsgesetz in expliziter Form.

■ BEISPIEL 3 (5.3.)

$$(a_n) = 4, \quad 7, \quad 10, \ \ldots, \ 3n+1, \ \ldots$$

$$(s_n) = 4, \quad 11, \quad 21, \ \ldots, \ \frac{n(3n+5)}{2}, \ \ldots$$

$$(s'_n) = 4, \quad 15, \quad 36, \ \ldots, \ \frac{n(n+1)(n+3)}{2}, \ \ldots$$

Die erste (zweite, ..., k-te) Partialsumme einer arithmetischen Folge (erster Ordnung) ist eine arithmetische Folge zweiter (dritter, ..., $(k+1)$-ter) Ordnung.

Die Folge der (ersten n) $\left\{\begin{matrix} \text{Quadratzahlen } 1, 4, \ldots, n^2, \ldots \\ \text{Kubikzahlen } 1, 8, \ldots, n^3, \ldots \end{matrix}\right\}$

ist eine arithmetische Folge $\left\{\begin{matrix} \text{zweiter} \\ \text{dritter} \end{matrix}\right\}$ Ordnung.

	1 4 9 16 25	1 8 27 64 125
1. Differenzenfolge:	3 5 7 9	7 19 37 61
2. Differenzenfolge:	2 2 2	12 18 24
3. Differenzenfolge:		6 6

Die k-te Differenzenfolge einer arithmetischen Folge k-ter Ordnung ist eine konstante Folge, deren Glieder ungleich Null sind.

Eine Grundlage für die Ermittlung eines nicht unmittelbar zu erkennenden Bildungsgesetzes einer arithmetischen Folge höherer Ordnung ist die Bestimmung der n-ten Partialsumme

- der ersten n natürlichen Zahlen,
- der ersten n Quadratzahlen und
- der ersten n Kubikzahlen.

Wir untersuchen zunächst die sechste Partialsumme der arithmetischen Folge $(a_n) = -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots, 3n-4, \ldots$

$$s_6 = -1 + 2 + 5 + 8 + 11 + 14 \text{ oder}$$
$$s_6 = 14 + 11 + 8 + 5 + 2 + (-1)$$

Durch Addition der linken bzw. rechten Seiten der Gleichungen erhält man:

$$2s_6 = 6 \cdot 13$$
$$s_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13 = 39.$$

Bei einer beliebigen arithmetischen Folge gehen wir auch so vor.

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$$

Durch Addition der linken bzw. rechten Seiten der Gleichungen ergibt sich:

$$2s_n = n(a_1 + a_n),$$

denn die n-te Partialsumme von (a_n) besteht aus n Summanden. Demnach gilt:

▷ **SATZ 1 (5.3.)**
Für jede arithmetische Folge (a_n) gilt:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Satz 1 (5.3.) können wir uns anhand von Bild 1 (5.3.) veranschaulichen. Faßt man die Glieder von (a_n) als Zahlenwerte von Flächeninhalten von Rechtecken mit ei-

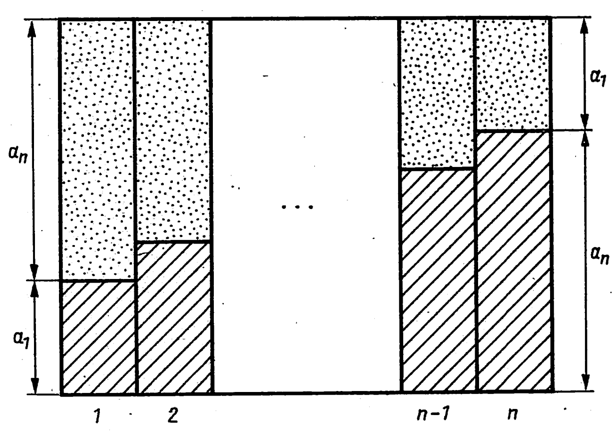


Bild 1 (5.3.)

ner Breite des Zahlenwertes 1 auf, so ist s_n der Zahlenwert des Flächeninhalts einer treppenförmigen Fläche. Diese kann durch umgekehrtes Aufsetzen einer ebensolchen Fläche zur Fläche eines Rechtecks mit einem Inhalt des Zahlenwertes $2s_n$ ergänzt werden. Die Zahlenwerte der Längen der Rechteckseiten sind n bzw. $(a_1 + a_n)$. Satz 1 (5.3.) kann zur Lösung der Aufgabe 2 (5.3.) genutzt werden.

Aufgabe 2 (5.3.)
Wie groß ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n?

LÖSUNG
Die Folge $(a_n) = 1, 2, 3, \ldots, n$ ist eine arithmetische Folge. Das erste Glied ist 1, und das n-te Glied ist n. Indem wir in Satz 1 (5.3.) diese speziellen Werte einsetzen, erhalten wir:

$$s_n = \frac{n}{2}(1 + n).$$

▷

> SATZ 2 (5.3.)
> Für die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n gilt:
> $$s_n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

Der Inhalt dieses Satzes läßt sich ebenfalls recht anschaulich darstellen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n(n + 1)$$

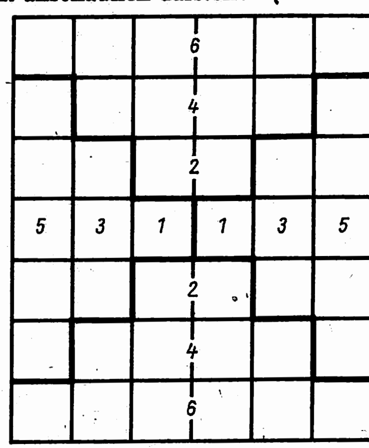


Bild 2 (5.3.)

Über Gauß wird in diesem Zusammenhang berichtet, daß er mit etwa neun oder zehn Jahren in der Schule die Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte. Er löste die Aufgabe innerhalb kurzer Zeit auf folgende Weise:
$1 + 2 + \ldots + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$
Er entdeckte also auf diese Art das Prinzip der Summenformel für die arithmetische Reihe.

Manchmal führen kombinatorische Aufgabenstellungen zu Summen arithmetischer Folgen. Anhand eines Beispiels wollen wir einen solchen Zusammenhang betrachten.

■ BEISPIEL 4 (5.3.)

An einem Schachturnier beteiligen sich 6 Spieler. Jeder soll gegen jeden genau einmal spielen.
Wie viele Spiele sind dazu notwendig?
Spieler 6 spielt gegen Spieler 5, 4, 3, 2 und 1. – 5 Spiele
Spieler 5 spielt gegen Spieler 4, 3, 2 und 1. – 4 Spiele
Spieler 4 spielt gegen Spieler 3, 2 und 1. – 3 Spiele
Spieler 3 spielt gegen Spieler 2 und 1. – 2 Spiele
Spieler 2 spielt gegen Spieler 1. – 1 Spiel
Insgesamt sind $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ Spiele durchzuführen. Das sind 15 Spiele.

Bild 3 (5.3.) veranschaulicht den Sachverhalt aus Beispiel 4 (5.3.) graphisch. Die Punkte stehen für die Spieler. Eine Verbindungsstrecke bedeutet, daß zwischen den Personen, die durch die Begrenzungspunkte der Strecke gekennzeichnet sind, ein Spiel auszutragen ist.

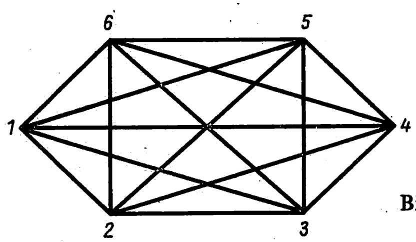


Bild 3 (5.3.)

Da das Bild 3 (5.3.) relativ abstrakt ist, kann man Punkte und Strecken in dieser Darstellung auch inhaltlich anders interpretieren. In jedem Fall sind aber aus einer Menge von 6 Elementen je 2 auszuwählen.

Sind aus einer Menge mit n Elementen 2 Elemente auszuwählen, gibt es $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten. Wenn wir im Beispiel die Anzahl der Schachspieler auf n erhöhen und dieselben Überlegungen wie oben anstellen, so ergibt sich:

Nummer des Spielers	Nummern der (noch verbleibenden) Gegenspieler	Anzahl der (noch) auszutragenden Spiele
n	$n-1, n-2, \dots, 2, 1$	$n-1$
$n-1$	$n-2, \dots, 2, 1$	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	2, 1	2
2	1	1

Das sind $1 + 2 + \ldots (n-2) + (n-1)$ Spiele.
Wir wenden Satz 2 (5.3.) an.

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-1)}{2}\bigl(1 + (n-1)\bigr) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Laut Definition der Binominalkoeffizienten ist

$$\binom{n}{2} = \frac{(n-1)\cdot n}{2}.$$

Nachdem wir unterschiedliche Überlegungen im Zusammenhang mit der Folge der natürlichen Zahlen anstellten, wenden wir uns der Folge der Quadratzahlen natürlicher Zahlen zu.

Aufgabe 3 (5.3.)
Für welche natürliche Zahl n ist $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ fünfmal so groß wie $1 + 2 + 3 + \ldots + n$?

LÖSUNG
Wir probieren zielgerichtet.

$$n = 1 \quad 1^2 \neq 5 \cdot 1$$
$$n = 2 \quad 1^2 + 2^2 \neq 5 \cdot (1+2)$$
$$n = 3 \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 \neq 5 \cdot (1+2+3)$$

Auch für $n = 4$, $n = 5$ und $n = 6$ ergeben sich falsche Aussagen.

$$n = 7 \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$$
$$5 \cdot (1+2+3+4+5+6+7) = 140$$

Wenn n größer oder gleich 8 ist, kann es keine Lösung der Aufgabe geben. Gehen wir von der Darstellung aus, die für $n = 7$ gewählt wurde. Zu beiden Seiten der oberen Gleichung muß man n^2 addieren und zu beiden Seiten der unteren Gleichung $5n$, wenn man zum nächsten Fall übergeht.
Wenn $n \geqq 8$ ist, gilt aber stets $n^2 > 5n$.
Die einzige Lösung der Aufgabe ist $n = 7$.

Bei Kenntnis eines Bildungsgesetzes für die zu $(a_n) = 1^2, 2^2, \ldots, n^2$ gehörende Reihe läßt sich die Aufgabe rationeller lösen.
Eine Möglichkeit zur Errechnung von $s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ bietet sich durch den Vergleich mit zwei anderen Folgen.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	…
$1+2+3+\ldots+n$	1	3	6	10	15	…
$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$	1	5	14	30	55	…
$\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}$	$1=\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$3=\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	…

Es gilt: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(1+n)$.

Es gilt vermutlich: $\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2n+1}{3}$

Deshalb gilt vermutlich:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Der Beweis kann wieder mit dem Verfahren der vollständigen Induktion erbracht werden. Wir verzichten hier auf die Beweisführung und halten fest:

▷

> SATZ 3 (5.3.)
> Für die Summe der ersten n Quadratzahlen ($n \in N$, $n \geqq 1$) gilt:
> $s_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Diese Formel soll verbal beschrieben werden. Sie läßt sich so auch besser einprägen.

- Erster Faktor: n-te natürliche Zahl (zum Beispiel 6),
- zweiter Faktor: $(n+1)$-te natürliche Zahl (zum Beispiel 7),
- dritter Faktor: Summe der ersten beiden Faktoren (also 13),
- Division des Produkts durch 6. (Wir kürzen und erhalten als Summe der ersten 6 Quadratzahlen $7 \cdot 13 = 91$.)

Wir ermitteln nun die Summe der ersten n Kubikzahlen. Es gilt:

$$1^3=1=1^2$$
$$1^3+2^3=9=(1+2)^2$$
$$1^3+2^3+3^3=36=(1+2+3)^2$$

Wir vermuten:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

und erhalten $\left(\text{wegen } 1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(1+n)\right)$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2.$$

Auch hier verzichten wir auf einen Induktionsbeweis.

▷

> SATZ 4 (5.3.)
> Für die Summe der ersten n Kubikzahlen ($n \in N$, $n \geqq 1$) gilt:
> $s_n=\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$.

Der Inhalt des Satzes läßt sich wiederum geometrisch deuten (vgl. Bild 4 (5.3.)).

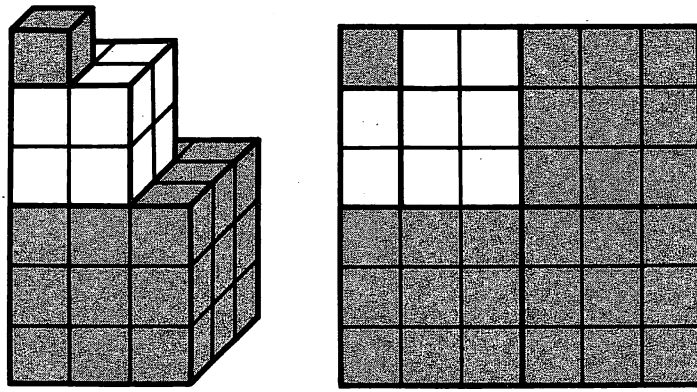


Bild 4 (5.3.)

Ein „Einzelwürfel“, 8 zu einem größeren Würfel zusammengesetzte „Einzelwürfel“ und 27 zu einem größeren Würfel zusammengesetzte „Einzelwürfel“ lassen sich zu einer quadratischen Platte mit 36 „Einzelwürfeln“ zusammensetzen.

Interessant ist, daß man die „Parkettierung“ im eben angegebenen Sinn weiterführen kann, indem man jeweils eine jede Schicht des neu hinzukommenden größeren Würfels am schon vorhandenen Parkett ansetzt. Das geht ohne Probleme, wenn eine solche Schicht n Einzelwürfel enthält und n eine ungerade Zahl ist. Ist n eine gerade Zahl, muß eine der Schichten halbiert werden.

Weitere interessante Beziehungen ergeben sich, wenn wir eine solche „Parkettfläche“ in der durch Bild 5 (5.3.) dargestellten Weise zerlegen.

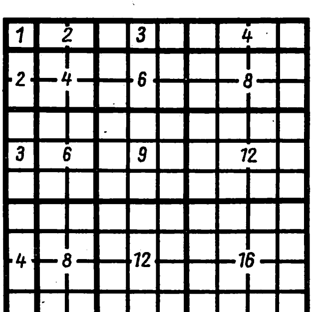


Bild 5 (5.3.)

Die im Bild 5 (5.3.) angegebenen Zahlen entsprechen der Anzahl der Einheitsquadrate, die ein hervorgehobenes Rechteck enthält. Wir veranschaulichen dadurch die Multiplikation natürlicher Zahlen, denn ein Rechteck, in das zum Beispiel die

Zahl 12 eingetragen wurde, hat Seiten, die 3 bzw. 4 Einheiten lang sind. Diese Möglichkeit zur Veranschaulichung der Multiplikation natürlicher Zahlen wird in den unteren Klassen häufig genutzt.

Wir gehen jetzt zu einer *Multiplikationstafel* über (Bild 6 (5.3.)). Bei ihrer Interpretation sollte immer wieder zur Veranschaulichung Bild 5 (5.3.) mit einbezogen werden.

$\bullet$	1	2	3	4	5	6	…	n
1	1	2	3	4	5	6	…	n
2	2	4	6	8	10	12	…	$2n$
3	3	6	9	12	15	18	…	$3n$
4	4	8	12	16	20	24	…	$4n$
5	5	10	15	20	25	30	…	$5n$
6	6	12	18	24	30	36	…	$6n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n	n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	…	$n \cdot n$

Bild 6 (5.3.)

Bezüglich der Multiplikationstafel ist feststellbar:

(1) Die Summe der Zahlen in einem Quadrat, das die Zahl 1 enthält, ist eine Quadratzahl.
(Im hervorgehobenen Quadrat ist die Summe 36. Die Richtigkeit der Feststellung (1) läßt sich anschaulich mit Bild 5 (5.3.) verdeutlichen.)

(2) Die Summe der Zahlen in einem gleichschenkligen „Rechtwinkelhaken" ist eine Kubikzahl.
(Im hervorgehobenen Rechtwinkelhaken ist diese Summe 64.)

Betrachtet man das Quadrat, das durch Zusammensetzung des hervorgehobenen Quadrates und des Rechtwinkelhakens entsteht, so ist die Summe der Zahlen in diesem (laut (1)) eine Quadratzahl (100). Demnach ist die zum Rechtwinkelhaken gehörende Kubikzahl (64) als Differenz zweier Quadratzahlen (nämlich 100 und 36) darstellbar. Diese Feststellung ist auch in ihrer Verallgemeinerung richtig.

(3) Jede Kubikzahl (einer natürlichen Zahl) ist als Differenz von zwei Quadratzahlen (natürlicher Zahlen) darstellbar.

Für die Richtigkeit der Feststellung (1) erbringen wir nunmehr den Nachweis.

Wir betrachten einen Ausschnitt aus der Multiplikationstafel:

Die auf den rechten Seiten der Gleichungen stehenden Summen addieren wir und erhalten s'_n. Dabei ist s'_n die Summe aller Zahlen im quadratischen Ausschnitt der Multiplikationstafel mit den „Eckwerten" $1 \cdot 1$, $n \cdot 1$, $n \cdot n$, $1 \cdot n$.

					Summe der Zahlen in einer Zeile
$1\cdot 1$	$1\cdot 2$	$1\cdot 3$	$\ldots$	$1\cdot n$	$1\cdot(1+2+3+\ldots+n)=\frac{n}{2}(n+1)$
$2\cdot 1$	$2\cdot 2$	$2\cdot 3$	$\ldots$	$2\cdot n$	$2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=2\cdot\frac{n}{2}(n+1)$
$3\cdot 1$	$3\cdot 2$	$3\cdot 3$	$\ldots$	$3\cdot n$	$3\cdot(1+2+3+\ldots+n)=3\cdot\frac{n}{2}(n+1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$n\cdot 1$	$n\cdot 2$	$n\cdot 3$	$\ldots$	$n\cdot n$	$n\cdot(1+2+3+\ldots+n)=n\cdot\frac{n}{2}(n+1)$

$$s'_n = 1\cdot\frac{n}{2}\cdot(n+1)+2\cdot\frac{n}{2}\cdot(n+1)+\ldots+n\cdot\frac{n}{2}\cdot(n+1)$$

Wir klammern $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ aus und erhalten:

$$s'_n = \frac{n}{2}\cdot(n+1)(1+2+\ldots+n)$$

$$s'_n = \frac{n}{2}\cdot(n+1)\cdot\frac{n}{2}(n+1)$$

$$s'_n = \left[\frac{n}{2}\cdot(n+1)\right]^2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Für viele Folgen kann man das Bildungsgesetz der zugehörigen Reihe finden, indem man auf die bekannten Beziehungen

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}\cdot(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n}{2}\cdot(n+1)\right]^2 \text{ zurückgeht.}$$

Wie das geschehen kann, zeigt Beispiel 5 (5.3.).

■ BEISPIEL 5 (5.3.)

$(a_n) = 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$

Da (a_n) eine arithmetische Folge ist, findet man für die zugehörige Reihe durch Anwendung von Satz 1 (5.3.)

$(s_n) = 2, 6, 12, \ldots, \frac{n}{2}(2+2n), \ldots$ oder

$s_n = n\,(n+1)$

$\quad = n^2+n.$

Nun soll das Bildungsgesetz der zu (s_n) gehörenden Reihe ermittelt werden.

$(s_n) = 2, 6, 12, \ldots, n^2+n, \ldots$

Zunächst zerlegen wir die Glieder dieser Folge der Struktur des Bildungsgesetzes entsprechend.

$(s_n) = 1^2 + 1,\ 2^2 + 2,\ 3^2 + 3,\ \ldots,\ n^2 + n,\ \ldots$

Wir gehen zur n-ten Partialsumme dieser Folge über.

$s'_n = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + \ldots + (n^2 + n)$

$s'_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

Durch Verwendung der bekannten Summenformel erhalten wir:

$$s'_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n}{2}(n+1)$$

$$s'_n = n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2}\right) = n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + \frac{3}{6}\right)$$

$$s'_n = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Damit ist ein Bildungsgesetz für die Folge (s'_n) gefunden.

$$(s'_n) = 2,\ 8,\ 20,\ \ldots,\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3},\ \ldots$$

Wir untersuchten vielfältige Beziehungen zwischen Zahlen durch Betrachtung von Folgen oder Reihen. Mögliche geometrische Deutungen bzw. Veranschaulichungen fanden dabei Augenmerk. Ohne Kommentar folgen drei Beispiele. Eine Begründung der damit angesprochenen Beziehungen sollte der Leser selbst vornehmen.

■ BEISPIEL 6 (5.3.)

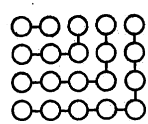
$2 = 2 = 1 \cdot 2 = 1^2 + 1$

$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3 = 2^2 + 2$

$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4 = 3^2 + 3$

$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5 = 4^2 + 4$

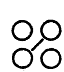
$\vdots$



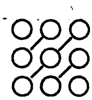
■ BEISPIEL 7 (5.3.)

$1 = 1 = 1^2$

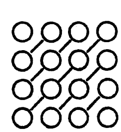
$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$



$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$



$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$



$\vdots$

■ BEISPIEL 8 (5.3.)

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3+5 &= 2^3 \\ 7+9+11 &= 3^3 \\ 13+15+17+19 &= 4^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$ (vgl. Bild 7 (5.3.))

(Der erste Summand in der n-ten Zeile heißt $n^2 - n + 1$. Der n-te (letzte) Summand der n-ten Zeile heißt $n^2 + n - 1$.)

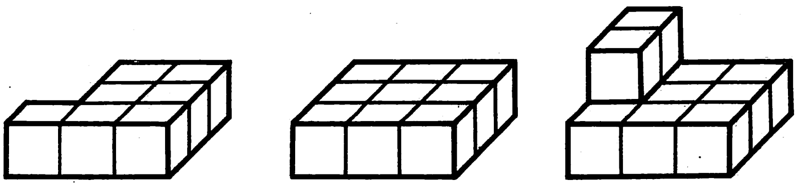


Bild 7 (5.3.)

Wir wenden uns mit Aufgabe 4 (5.3.) erneut einem Problem der Summenbildung zu.

Aufgabe 4 (5.3.)
An einem Fußballwettbewerb, der im K.-o.-System (mit Hin- und Rückspiel) ausgetragen wird, beteiligen sich 32 Mannschaften.
Wie viele Spiele sind bis zur Ermittlung des Siegers notwendig?

LÖSUNG

Nummer der Runde	1	2	3	4	5
Anzahl der Spiele in dieser Runde	32	16	8	4	2

$32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 62$ Es sind 62 Spiele auszutragen.

Wir bemerken, daß die Anzahl der Spiele in den einzelnen Runden Glieder einer geometrischen Folge sind. Zur Lösung der Aufgabe mußte die Summe der Glieder einer geometrischen Folge errechnet werden. Es drängt sich die Frage auf, ob es, – in Analogie zur Bildung der Summe einer arithmetischen Folge – zur Berechnung der Summe der Glieder einer geometrischen Folge auch eine „Summenformel" gibt.
Es gibt eine solche Summenformel.
Zur Bestimmung der n-ten Partialsumme einer geometrischen Folge gehen wir in folgender Weise vor:
Auf Grund von Satz 3 (5.2.) gilt:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}.$$

Multipliziert man die Seiten dieser Gleichung mit q, so erhält man:

$$s_n \cdot q = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Subtrahiert man die linke und die rechte Seite der ersten Gleichung von den entsprechenden Seiten der zweiten Gleichung, so erhält man:

$$s_n \cdot q - s_n = a_1 q^n - a_1$$

$$s_n(q-1) = a_1(q^n - 1).$$

Für $q \neq 1$ findet man:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

▷ SATZ 5 (5.3.)
Für jede geometrische Folge (a_n) mit $q \neq 1$ gilt:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (n \in N,\ n \geqq 1).$$

Aufgabe 5 (5.3.)
Jemand möge zwei Bekannten eine Neuigkeit erzählen, die diese wiederum je zwei bisher noch nicht informierten Personen weitererzählen usw. Nehmen wir an, daß dies unter entsprechenden technischen Bedingungen jeweils innerhalb der nächsten Viertelstunde geschieht.
Wie viele Menschen wären unter diesen Bedingungen nach fünf Stunden von der Neuigkeit informiert?

LÖSUNG
Es ist die Summe der Glieder einer geometrischen Folge zu bilden. Das erste Glied der Folge ist 1, denn zunächst kennt nur eine Person die Neuigkeit. Das zweite Glied ist 2 und das dritte 4. Nach fünf Stunden ist 20mal eine Viertelstunde vergangen. Deshalb ist das letzte Glied dieser Folge a_{21}.
Es muß s_{21} ermittelt werden.

$$s_{21} = 1 \cdot \frac{2^{21} - 1}{2 - 1} = 2097151$$

Nach fünf Stunden wäre also immerhin schon etwa der 8. Teil der Bevölkerung der DDR informiert.

Eines der bekanntesten Probleme, das im Zusammenhang mit der Summe von Gliedern einer geometrischen Folge steht, behandeln wir im folgenden Beispiel.

■ BEISPIEL 9 (5.3.)

Der Sage nach forderte der indische König SHERAN den Erfinder des Schachspiels SESSA auf, irgendeinen Wunsch zur Belohnung für diese Erfindung zu äußern. SESSA erbat ein Weizenkorn auf das erste Feld eines Schachbretts, zwei Weizenkörner auf das zweite, vier auf das dritte usw. bis zum letzten Feld immer doppelt so viel wie auf das vorhergehende.

Die Annahme, daß dieser Wunsch bescheiden sei, konnte dem König widerlegt werden: $s_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$
Das sind fast 18,5 Trillionen ($18{,}5 \cdot 10^{18}$) Weizenkörner.

Diese Zahl nimmt sich recht bescheiden aus, wenn man sie mit anderen Zahlen vergleicht, die aus den unterschiedlichsten Bereichen bekannt sind:
Loschmidtsche Zahl $6{,}025 \cdot 10^{23}$
Erdmasse etwa $5{,}979 \cdot 10^{27}$ g
Der Schultaschenrechner SR 1 zeigt als größte Zahl an
$9{,}9999999 \cdot 10^{99}$.
Dennoch ist $18{,}5 \cdot 10^{18}$ ein wahrer „Zahlenriese". Wir wollen uns das verdeutlichen. Auch in der Zusammenarbeit mit Kindern ist es wichtig, eine Vorstellung von der Größe verwendeter Zahlen zu schaffen.
1000 Weizenkörner haben etwa eine Masse von 50 g. 20000000 Weizenkörner haben dann eine Masse von einer Tonne. Die von SESSA geforderte Weizenmenge hätte also eine Masse von zirka $9{,}2 \cdot 10^{11}$ Tonnen. Das sind 920 Milliarden Tonnen Weizen. Man denke sich diese Weizenmenge gleichmäßig auf dem Territorium der DDR ausgestreut. Wie hoch würde der Weizen liegen, wenn ein Kubikmeter ungefähr 0,75 Tonnen Weizen enthalten kann?
Die kapitalistische Werbung bedient sich mitunter der von Laien nicht durchschauten Tatsache des schnellen Anwachsens geometrischer Folgen bzw. zugehöriger Reihen. Es wird auf ein Produkt – sagen wir 50% – Preisnachlaß gegeben, wenn man für dieses Produkt 10 neue Käufer wirbt. Auch den neuen Käufern wird zu gleichen Bedingungen Rabatt gewährt. Bei genauer Betrachtung ist unschwer zu erkennen, daß nur relativ wenige Käufer den Vorzug des Rabatts erlangen können, weil der Markt bald gesättigt ist. Der erzielte Preisnachlaß ist auch kein Geschenk an den Kunden, denn um ihn zu erlangen, stellte er sich in den Dienst einer Firma und warb für deren Produkte.
Es ist nicht immer so, daß eine geometrische Folge oder die zugehörige Reihe ins Unermeßliche wächst. Wir betrachten dazu folgende Aufgabe.

Aufgabe 6 (5.3.)

Gegeben ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 4$ und $q = \frac{1}{2}$. Die Summe der ersten 5 (10; 20) Glieder dieser Folge soll berechnet werden.

LÖSUNG

$$s_5 = 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} \approx 7{,}75$$

$s_{10} \approx 7{,}99$
$s_{20} \approx 7{,}99999$

Man kann sich der Mühe unterziehen und Partialsummen dieser Folge für größere Werte von n errechnen. Das Ergebnis wird stets etwas kleiner als 8 sein. Die Ursa-

che liegt darin, daß sich $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ mit wachsendem n immer mehr dem Wert 0 nähert und damit für große n vernachlässigt werden darf:
$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0{,}001$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0{,}000\,001$.
Die Summe der untersuchten Folge übersteigt deshalb niemals die Zahl 8.
Bedient man sich bei diesen Berechnungen eines Taschenrechners SR 1, zeigt dieser ab einem gewissen n für s_n die Zahl 8 an. Ab welchem n gilt das?

Durch Verallgemeinerung der eben dargestellten Überlegungen finden wir, daß man in gewissen Fällen auch für unendliche geometrische Folgen eine „Summe" finden kann. Falls nämlich $|q| < 1$ ist, erhält man s überraschend einfach nach der Formel $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.
Gilt $|q| \geqq 1$ und $a_1 \neq 0$, so hat die betreffende geometrische Folge keine Summe.

■ BEISPIEL 10 (5.3.)

Mit Hilfe eines Trugschlusses wollte ZENON (griechischer Philosoph um 550 v. u. Z.) die Unzulänglichkeit mathematischer Überlegungen nachweisen. Der Trugschluß besteht in folgender Überlegung:
ACHILLES (griechischer Held des Trojanischen Krieges, berühmt als schneller Läufer), in Zeichen A, kann eine Schildkröte, in Zeichen S, niemals einholen, geschweige denn überholen, obwohl A zehnmal so schnell wie S laufen möge. Hat S etwa einen Vorsprung von 100 m vor A, so ist S um 10 m weitergekrochen, wenn A die 100 m zurückgelegt hat usw. S behält also, so schlußfolgerte ZENON, ständig einen, wenn auch schließlich sehr kleinen Vorsprung vor A. Da dies der Erfahrung widerspricht, sei das mathematische Denken fehlerhaft, meinte ZENON.
Man kann berechnen, daß bzw. wo ACHILLES die Schildkröte ein- bzw. überholt:

$$s = \frac{100}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1000}{9} = 111\frac{1}{9}$$

A erreicht die Schildkröte in demjenigen Augenblick, in welchem er $111\frac{1}{9}$ m zurückgelegt hat.

Es ist zu beachten, daß der logische Gehalt dieses Trugschlusses etwas tiefer liegt. Richtig ist nämlich, daß in allen Zeitpunkten, in denen A den jeweils letzten Platz von S erreicht hat, S nicht mehr dort ist. A erreicht S also unbegrenzt oft nicht. „Unbegrenzt oft nicht" und „nie" sind aber nicht bedeutungsgleich. „Unbegrenzt oft nicht" enthält ein Urteil über beliebig viele, sich in einem begrenzten Zeitraum häufende Zeitpunkte. „Nie" bedeutet eine Verneinung in bezug auf den als unbegrenzt beurteilten Zeitablauf.

Literatur

Abkürzungen: VWV – Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
MSch – Zeitschrift „Mathematik in der Schule“, VWV

[1] ARNOLD, W.; WUSSING, H. (Hrsg.): *Biographien bedeutender Mathematiker.* VWV 1989 (4. ergänzte und bearbeitete Auflage).

[2] ASSER, G.: *Grundbegriffe der Mathematik.* Mathematik für Lehrer, Band 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.

[3] Autorenkollektiv: *Enzyklopädie der Elementarmathematik.* Band 1, Arithmetik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1977.

[4] Autorenkollektiv: *Kleine Enzyklopädie, Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965.

[5] Autorenkollektiv: *Lexikon der Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1979.

[6a] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 1.* VWV 1988.
[6b] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 2.* VWV 1988.
[6c] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 3.* VWV 1988.
[6d] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 4.* VWV 1988.
[6e] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 5.* VWV 1988.
[6f] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 6.* VWV 1988.
[6g] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7.* VWV 1988.
[6h] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 8.* VWV 1988.
[6i] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9.* VWV 1988.
[6k] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 10.* VWV 1988.
[6l] Autorenkollektiv: *Mathematik, Lehrbuch für Klasse 11.* VWV 1987.

[7] Autorenkollektiv: *Einführung in die mathematische Logik – Einführung in die Mengenlehre – Aufbau der Zahlenbereiche.* VWV 1973.

[8] BOLCHOWITINOW, V. N./KOLTOWOI, B. I./LAGOWSKI, I. K.: *Spaß für freie Stunden.* Verlag Mir, Moskau (o. J.). Verlag für die Frau, Leipzig.

[9] ENGELS, F.: *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft.* Ausgewählte Werke Marx/Engels in sechs Bänden, Dietz Verlag, Berlin 1972.

[10] FANGHÄNEL, G./VOCKENBERG, H.: *Arbeit mit Mengen.* VWV 1983.

[11] FEHRINGER, K.: *Näherungsrechnen, Gleichungen, Ungleichungen.* VWV 1983.

[12] FLADE, L.: *Nutzung von Taschenrechnern ab Klasse 7 – Konsequenzen für den Mathematikunterricht der Mittelstufe.* MSch 24 (1986) 4.

[13] FLADE, L.: *Ein Jahr elektronischer Taschenrechner im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Probleme.* MSch 24 (1986) 7/8.

[14] FLADE, L.: *Eine Frage zum Stoffabschnitt „2.6. Einige Grundbegriffe der Fehlerrechnung", Klasse 7.* MSch 23 (1985) 9.

[15] GÄBLER, J.: *Mathematik und Leben.* Band I. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1961.

[16] GELLERT, W./KÄSTNER, H./NEUBER, S.: *Lexikon der Mathematik.* VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1985.

[17] GLADE, H./MANTEUFFEL, K.: *Am Anfang stand der Abakus.* Urania-Verlag, Leipzig/Jena/Berlin 1973.

[18] GÖRKE, L./ILLGNER, K./LORENZ, G./PIETZSCH, G./REHM, M.: *Rund um die Mathematik.* Der Kinderbuchverlag, Berlin 1968.

[19] GÖRKE, L.: *Mengen, Relationen, Funktionen.* VWV 1973.

[20] HILBERT, A. (Herausgeber): *Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 5 bis 8.* VWV 1982.

[21] HILBERT, A.: *Mathematik.* VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987.

[22] ILSE, D.: *Gedanken zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts aus der Sicht des strukturellen Arbeitens.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math.-Nat. R. XXXIV, Heft 7 (1985).

[23] KADEN, F.: *Kleine Geschichte der Mathematik.* Der Kinderbuchverlag, Berlin 1985.

[24] KÄSTNER, H./GÖTHNER, P.: *Algebra – aller Anfang ist leicht.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.

[25] KLEINFELD, G.: *Übungen für junge Mathematiker. Teil 3 Ungleichungen.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1969.

[26] KORDEMSKI, B. A.: *Köpfchen, Köpfchen! Mathematik zur Unterhaltung.* Urania-Verlag, Leipzig/Jena/Berlin 1963.

[27] KOROWKIN, P. P.: *Ungleichungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965.

[28] LEHMANN, E.: *Übungen für junge Mathematiker. Teil 1 Zahlentheorie.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968.

[29] LEHMANN, I.: *Ist die Subtraktion eine Operation?* MSch 19 (1981) 2/3.

[30] LEHMANN, I./SCHULZ, W.: *Kapriolen der Null – 0 durch 0.* MSch 19 (1981) 4.

[31] Lietzmann, W.: *Wo steckt der Fehler?* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1963.

[32] Marx, S./Krinke, E./Türke, W.: *Elementare Zahlentheorie – Gleichungen und Ungleichungen – Zahlenfolgen und Kombinatorik.* VWV 1974.

[33] Miller, M.: *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979.

[34] Natanson, I. P.: *Summierung unendlich kleiner Größen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.

[35] Perelmann, J. I.: *Unterhaltsame Aufgaben und Versuche.* Verlag Mir, Moskau (o. J.).

[36] Perelmann, J. I.: *Unterhaltsame Algebra.* VWV 1965.

[37] Pietzsch, G./Rehm, M.: *Zum Stand und zu den Möglichkeiten innerer Differenzierung im Mathematikunterricht.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math.-Nat. R. XXXIV, Heft 7 (1985).

[38] Pietzsch, G.: *Zur Behandlung der gebrochenen Zahlen im Unterricht.* VWV 1985.

[39] Renyi, A.: *Tagebuch über die Informationstheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982.

[40] Rusza, I.: *Die Begriffswelt der Mathematik.* VWV 1976.

[41] Schramm, G.: *Rechenspiele in der Unterstufe.* VWV 1984.

[42] Schülerzeitschrift alpha. VWV, Jahrgänge 1967 bis 1986.

[43] Sominski, I. S.: *Die Methode der vollständigen Induktion.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

[44] Struick, D. J.: *Abriß der Geschichte der Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965.

[45] Walsch, W./Weber, K.: *Methodik Mathematikunterricht.* VWV 1975.

[46] Walsch, W. (Herausgeber): *Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10.* VWV 1981.

[47] Winogradow, I. M.: *Elemente der Zahlentheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.

[48] Worobjow, N. N.: *Die Fibonaccischen Zahlen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

[49] Vyšin, J.: *Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1972.

Bildnachweis: Bildarchiv Volk und Wissen, 2. Umschlagseite

Register