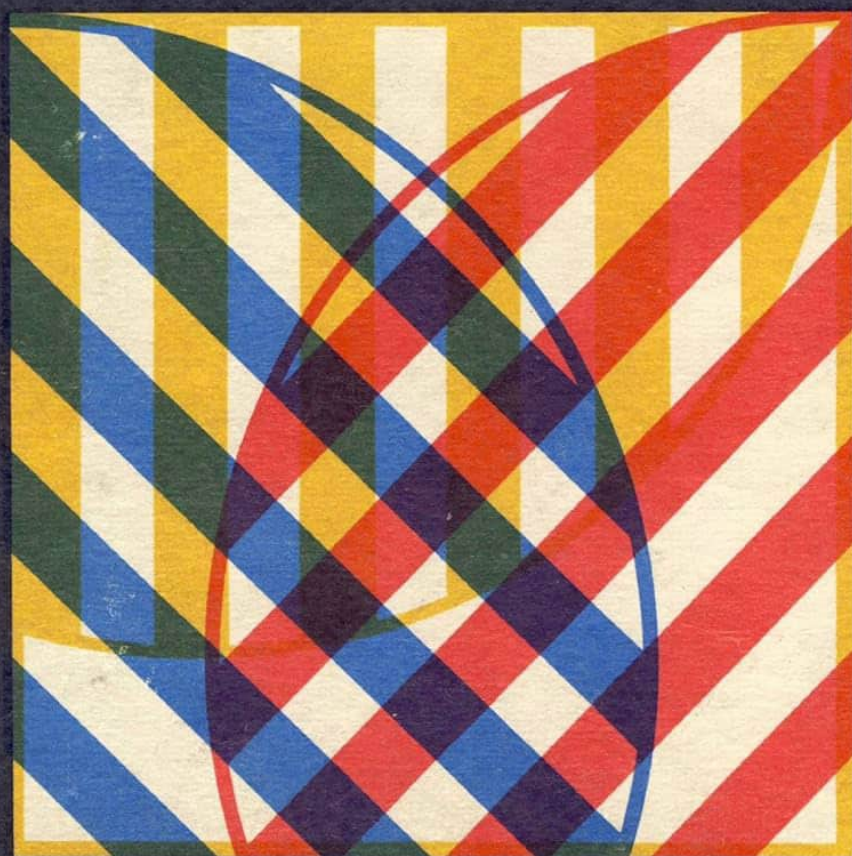


Autorenkollektiv

Elementare
Zahlentheorie
Gleichungen
Kombinatorik



Suse Marx	Elementare Zahlentheorie
Erhard Krinke	Gleichungen und Ungleichungen
Wolfram Türke	Zahlenfolgen und Kombinatorik



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1974

Dieses Buch wurde unter der wissenschaftlichen Betreuung durch Prof. Dr. sc. Werner Walsch entwickelt.

Autoren:

Suse Marx	Teil A (1. bis 3.) Teil C (9.7.)
Erhard Krinke	Teil B (4. bis 6.) Teil C (7. bis 9.6.)
Dr. Wolfram Türke	Teil D (10. bis 12.) Teil E (13. bis 16.)

Redaktion: Heinz Junge

1. Auflage

Lizenz Nr. 203 1000/73 (E)

LSV 1003

Zeichnungen: Heinz Grothmann

Einband: Atelier vvv, Gerhard Neitzke

Typographische Gestaltung: Atelier vvv

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei »Gottfried Wilhelm Leibniz«,

445 Gräfenhainichen/DDR · 4209

Schrift: 10/12p Extended Monotype

Redaktionsschluß: 17.9.1973

Bestell-Nr. 706 730 9

Das vorliegende Buch soll einerseits als Lehrmaterial für die Ausbildung an Instituten für Lehrerbildung der Deutschen Demokratischen Republik Verwendung finden, zum anderen soll es den Lehrern der unteren Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule, aber auch den Fachlehrern für Mathematik eine Hilfe sein, sowohl für die Arbeit im Fachunterricht als auch für die persönliche Qualifizierung.

Es schließt an das Buch „Einführung in die mathematische Logik – Einführung in die Mengenlehre – Aufbau der Zahlenbereiche“ [4] an und bietet dem Leser die Möglichkeit, seine bereits erworbenen Kenntnisse aus der mathematischen Logik, der Mengenlehre und dem Aufbau der Zahlenbereiche anzuwenden und weiter zu vervollkommen. Einschließlich der beiden Bände „Fachtheoretische Grundlagen des Geometrieunterrichts und methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung“ [33] liegt nunmehr ein geschlossenes Lehrbuchwerk aller im „Studienprogramm für die Ausbildung von Lehrern für die unteren Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule im Fach Mathematik“ [34] geforderten Stoffgebiete vor.

Das Buch gliedert sich in die folgenden fünf Teile.

- A Elementare Zahlentheorie
- B Gleichungen und Ungleichungen
- C Funktionen
- D Zahlenfolgen
- E Kombinatorik

Im Teil A sollen uns besonders die grundlegenden Probleme der elementaren Zahlentheorie interessieren, die die Besonderheiten dieses Teilgebietes der Mathematik verdeutlichen, aber auch eine direkte Verbindung zum Mathema-

tikunterricht der Schule ermöglichen. In erster Linie sind es Fragen der Teilbarkeit ganzer Zahlen, die untersucht werden, wobei in diesem Zusammenhang der Begriff der Primzahl eine außerordentlich große Rolle spielt. Unter Einbeziehung der Teilbarkeitslehre werden Zahlenkongruenzen und Restklassen betrachtet.

Im Teil B erfolgt eine komplexe Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen auf der Grundlage der Begriffe „Aussage“ und „Aussageform“. Gleichungen und Ungleichungen mit mindestens einer Variablen werden als spezielle Aussageformen aufgefaßt. Dabei werden zunächst grundlegende Begriffe eingeführt, die sowohl für Gleichungen als auch für Ungleichungen angewendet werden. Anschließend erfolgt die Behandlung spezieller Probleme unter bewußter Bezugnahme auf die in den Stoffgebieten „Logik“ und „Mengenlehre“ bereitgestellten Grundlagen.

Im Teil C werden lineare Funktionen behandelt. Dabei werden insbesondere auch Zusammenhänge zu den in Teil B untersuchten Problemen aufgezeigt.

Die Teile D und E stellen eine Anwendung der Mengenlehre, insbesondere der Abbildungstheorie, dar und sollen den Leser anregen, in der unterrichtlichen und außerunterrichtlichen Arbeit in Mathematik in bisher wenig bekannter Weise wirksam zu werden. Deshalb sind die Anwendungsbeispiele vorwiegend der Erlebniswelt der Schüler entnommen.

Im Teil D sollen neben einigen grundlegenden Begriffen weitere notwendige Einsichten in Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen vermittelt werden.

Im Teil E soll der Zusammenhang zwischen induktivem und deduktivem Herangehen an ein Problem verdeutlicht und der Leser angeregt werden, Fragestellungen der Kombinatorik als Unterrichtsprinzip zu erfassen und anzuwenden.

Unser besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. sc. WERNER WALSCH, Leiter des Bereichs Methodik an der Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle, der uns viele wertvolle Hinweise und Ratschläge für die endgültige Abfassung des Buches gegeben hat.

Die Autoren

Vorwort

Teil A: Elementare Zahlentheorie

1.	<i>Zur Struktur des Bereiches der ganzen Zahlen</i>	10
2.	<i>Teilbarkeit ganzer Zahlen</i>	12
2.1.	Teilerrelation	12
2.1.1.	Definitionen und Sätze	12
2.1.2.	Arten der Teiler	21
2.2.	Primzahlen	22
2.2.1.	Definitionen und Sätze	23
2.2.2.	Verteilung der Primzahlen	27
2.3.	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	29
2.3.1.	Größter gemeinsamer Teiler	29
2.3.2.	Kleinstes gemeinsames Vielfaches	34
2.3.3.	EUKLIDISCHER ALGORITHMUS	37
3.	<i>Zahlenkongruenzen und Restklassen</i>	44
3.1.	Kongruenz modulo m in G und Restklassen	44
3.1.1.	Definitionen und Sätze	44
3.1.2.	Operationen in der Menge der Restklassen modulo m	49
3.2.	Strukturbetrachtungen	52
3.2.1.	Restklassenring $G/(m)$	52
3.2.2.	Prime Restklassen	55
3.3.	Anwendungen des Rechnens mit Kongruenzen	59

Teil B: Gleichungen und Ungleichungen

4.	<i>Einige wesentliche Begriffe und Verfahren</i>	70
4.1.	Vorbereitende Begriffe	70
4.2.	Gleichungen und Ungleichungen mit mindestens einer Variablen	72
5.	<i>Gleichungen</i>	84
5.1.	Gleichungen mit genau einer Variablen	84
5.1.1.	Vorbemerkungen	84
5.1.2.	Lineare Gleichungen	85
5.2.	Gleichungen mit mehr als einer Variablen	98
5.2.1.	Vorbemerkungen	98
5.2.2.	Lineare Gleichungen mit zwei Variablen	100
5.2.3.	Diophantische Gleichungen mit zwei Variablen	103
5.2.4.	Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen	107
5.2.5.	Systeme von m linearen Gleichungen mit n Variablen	120
6.	<i>Ungleichungen</i>	130
6.1.	Ungleichungen mit genau einer Variablen	130
6.1.1.	Vorbemerkungen	130
6.1.2.	Ungleichungen vom Typ $ax + b < 0$	131
6.1.3.	Ungleichungen vom Typ $\frac{ax + b}{cx + d} < 0$	135
6.1.4.	Einfache Systeme von zwei linearen Ungleichungen mit genau einer Variablen	143
6.2.	Lineare Ungleichungen mit genau zwei Variablen	146

Teil C: Funktionen

7.	<i>Einige wesentliche Begriffe</i>	150
7.1.	Der Funktionsbegriff	150
7.2.	Möglichkeiten der Angabe von Funktionen	154
8.	<i>Lineare Funktionen</i>	158
8.1.	Definition der linearen Funktion	158
8.2.	Die linearen Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = mx$ ($m \neq 0$)	158
8.3.	Die linearen Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = mx + n$	161
8.4.	Verfahren zum Ermitteln des Bildes einer linearen Funktion	164
8.5.	Verfahren zum Ermitteln der Funktionsgleichung einer linearen Funktion	167
8.6.	Abhängigkeit des Bildes einer linearen Funktion vom Definitionsbereich	173
8.7.	Die inverse Funktion einer linearen Funktion	175

9.	<i>Verfahren der graphischen Lösung von Gleichungen und Ungleichungen</i>	181
9.1.	Vorbemerkungen	181
9.2.	Graphische Lösung linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen mit genau einer Variablen	181
9.3.	Graphische Lösung von Systemen linearer Ungleichungen mit genau einer Variablen	185
9.4.	Graphische Lösung linearer Gleichungen mit genau zwei Variablen	187
9.5.	Graphische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit genau zwei Variablen	189
9.6.	Graphische Lösung von linearen Ungleichungen und von Systemen linearer Ungleichungen mit höchstens zwei Variablen	191
9.7.	Lineare Optimierung	195
9.7.1.	Begriff der linearen Optimierung	195
9.7.2.	Graphische Lösung einfacher Aufgaben der linearen Optimierung	197

Teil D: Zahlenfolgen

10.	<i>Einige grundlegende Begriffe und Eigenschaften</i>	210
11.	<i>Arithmetische Folgen</i>	226
11.1.	Arithmetische Folgen erster Ordnung	226
11.2.	Arithmetische Folgen höherer Ordnung	232
11.3.	Binomialkoeffizienten als Glieder arithmetischer Folgen	239
12.	<i>Geometrische Folgen</i>	254

Teil E: Kombinatorik

13.	<i>Gegenstand und Ziel der Kombinatorik</i>	262
14.	<i>Arten und Klassen von Komplexionen</i>	266
14.1.	Beispiele und Definitionen	266
14.2.	Lösungsalgorithmus für einfache Aufgaben der Kombinatorik	278
14.3.	Empirische Lösung von einfachen Aufgaben der Kombinatorik	281
14.4.	Lösungsformeln für die Grundaufgaben der Kombinatorik	286
15.	<i>Zusammenhänge zwischen einzelnen Arten und Klassen von Komplexionen</i>	298
15.1.	Zusammenhänge mengentheoretischer und funktionaler Art	298
15.2.	Ausblick auf weiterführende Fragestellungen	305
15.3.	Einige spezielle Formeln	313

16.	<i>Ausgewählte Aufgabenbeispiele der Kombinatorik</i>	317
16.1.	Komplexionen von Personen und ihnen gegebenenfalls zuzuordnender Objekte	317
16.2.	Komplexionen bei Spielen	319
16.3.	Komplexionen von Grundziffern und Buchstaben	323
16.4.	Komplexionen von Objekten verschiedener Bereiche	326
	Literaturverzeichnis	330
	Sachverzeichnis	333

Die elementare Zahlentheorie beschäftigt sich im wesentlichen mit **Eigenschaften ganzer Zahlen** und mit **Beziehungen** zwischen ihnen.

Es erscheint daher angebracht, die für die weiteren Betrachtungen wichtigen Sätze über ganze Zahlen in einer Übersicht zusammenzustellen. Dabei lassen sich zugleich Aussagen über die Struktur der Menge G der ganzen Zahlen treffen.

Auf Beweise verzichten wir in diesem Teil. Dem interessierten Leser empfehlen wir, den Aufbau des Bereiches G der ganzen Zahlen in Anlehnung an den Aufbau des Bereiches R der rationalen Zahlen vorzunehmen und dabei die hier formulierten Sätze zu beweisen.

Aus der Übersicht auf Seite 11 ist zu entnehmen, daß G einen **kommutativen Ring** bildet.

Nun gilt aber noch der folgende Satz.

SATZ 9 (1.):

In G existiert ein eindeutig bestimmtes Einselement e mit der Eigenschaft

$$e \cdot g = g \cdot e = g$$

für alle $g \in G$.

Damit ist der für die folgenden Betrachtungen benötigte Grundbereich sogar ein **kommutativer Ring mit Einselement**.

Sätze		Strukturen	
1 (1.)	Die Addition ordnet je zwei Elementen g_1, g_2 genau ein Element g_3 zu. $\forall g_1, \forall g_2 \exists !! g_3; g_1 + g_2 = g_3$	Modul	Kommutativer Ring
2 (1.)	Die Addition ist assoziativ. $\forall g_1, \forall g_2, \forall g_3; g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$		
3 (1.)	$\forall g_1, \forall g_2 \exists !! g_3; g_2 + g_3 = g_1$		
4 (1.)	Die Addition ist kommutativ. $\forall g_1, \forall g_2; g_1 + g_2 = g_2 + g_1$		
5 (1.)	Die Multiplikation ordnet je zwei Elementen g_1, g_2 genau ein Element g_3 zu. $\forall g_1, \forall g_2 \exists !! g_3; g_1 \cdot g_2 = g_3$	Abelsche Halbgruppe	
6 (1.)	Die Multiplikation ist assoziativ. $\forall g_1, \forall g_2, \forall g_3; g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$		
7 (1.)	Die Multiplikation ist kommutativ. $\forall g_1, \forall g_2; g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$		
8 (1.)	Es gilt das Distributivgesetz. $\forall g_1, \forall g_2, \forall g_3;$ $(g_1 + g_2) g_3 = g_1 \cdot g_3 + g_2 \cdot g_3$ und $g_1 (g_2 + g_3) = g_1 \cdot g_2 + g_1 \cdot g_3$		

2.1. Teilerrelation

2.1.1. Definitionen und Sätze

Wir betrachten zunächst bei vorgegebenen ganzen Zahlen a und b die Gleichung

$$b \cdot x = a$$

für $b \neq 0$.

Diese Gleichung ist in R stets lösbar, da die Division in R uneingeschränkt ausführbar ist. In G dagegen hat die Gleichung höchstens eine Lösung, das heißt, es gibt geordnete Paare $[a; b]$ ganzer Zahlen, für die es ein $c \in G$ gibt, das diese Gleichung erfüllt. In einem solchen Fall nennt man a durch b teilbar.

DEFINITION 1 (2.1.1.):

Eine ganze Zahl b heißt **Teiler** einer ganzen Zahl a genau dann, wenn es eine ganze Zahl x gibt mit $a = b \cdot x$.

In Zeichen: $b \mid a$

Man sagt auch: „ a ist ein Vielfaches von b “.

Ist b kein Teiler von a , dann schreibt man: $b \nmid a$.

Schließt man $b = 0$ aus, dann lassen sich an Stelle von „ b ist ein Teiler von a “ folgende Formulierungen treffen:

„ a ist teilbar durch b “

„ b geht in a auf“

Es sei $a \neq 0$, und es gelte $b \mid a$. Dann muß es nach Definition 1 (2.1.1.) eine Zahl $x \in G$ mit $a = b \cdot x$ geben.

Es ist in diesem Fall a das x -fache von b , aber auch das b -fache von x . Damit gilt auch $x \mid a$.

Wir nennen x den **Komplementärteiler** von b bezüglich a (\nearrow [1], S. 2).⁴ In diesem Zusammenhang sei noch auf den Unterschied zwischen $a : b$ und $b \mid a$ hingewiesen.

Während es sich bei $a : b$ um einen **Term** handelt, der nur unter der Bedingung $b \neq 0$ definiert ist, stellt $b \mid a$ eine **Aussageform** dar, die beispielsweise bei der Belegung $a = 0$ und $b = 0$ die wahre Aussage $0 \mid 0$ liefert.

Bereits im Unterricht der unteren Klassen finden die Begriffe „Teiler“ und „Vielfaches“ Anwendung.

BEISPIEL 1 (2.1.1.):

„Bilde von 100 bis 1000 alle *Vielfachen* von 100!“

„Welche Zahl muß man zum *Fünffachen* von 957 addieren, um 7230 zu erhalten?“

„Schreibe die *Vielfachen* von 2 auf, die zwischen 3 und 11 liegen!“

„Sind die folgenden Zahlen durch 5 *teilbar*?

15, 17, 25, 41, 45“

„Durch welche Zahlen ist 12 *teilbar*?“

„Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

Wenn a und b *Vielfache* von c sind und c größer als 0 ist, dann ist $(a + b) : c = a : c + b : c$.“

Diese wenigen Beispiele für die Verwendung der Begriffe „Teiler“ und „Vielfaches“ sollen zunächst genügen.

An geeigneten Stellen werden wir weitere Beispiele dieser Art in unsere Betrachtungen einbeziehen.

Beispiel 2 (2.1.1.) zeigt Anwendungen der Definition des Begriffes „Teiler“ (Definition 1 (2.1.1.)).

BEISPIEL 2 (2.1.1.):

a) $12 \mid 288$, denn $\exists x; 12 \cdot x = 288$, nämlich $x = 24$. Also $12 \mid 288$, denn $12 \cdot 24 = 288$.

24 ist der *Komplementärteiler* von 12 bezüglich 288.

288 ist das *24-fache* von 12.

288 ist ein *Vielfaches* von 12.

⁴ Die Formulierungen einiger Definitionen bzw. Sätze und Beweisgedanken in den Teilen 2. und 3. lehnen sich zum Teil an solche aus den Arbeiten [14], [24], [25], [27], [85], [36], [37] an. Darüber hinaus ist die dort verwendete Symbolik in zahlreichen anderen entsprechenden Veröffentlichungen üblich.

2.1.

b) $13 \nmid 288$, denn $\nexists x; 13 \cdot x = 288$.

c) $10 \mid 200$, denn $10 \cdot 20 = 200$.
 200 ist ein *Vielfaches* von 10.
 200 ist das *20-fache* von 10.

d) $10 \mid 0$, denn $10 \cdot 0 = 0$.
 0 ist ein *Vielfaches* von 10.
 0 ist das *0-fache* von 10.

e) $10 \mid 10$, denn $10 \cdot 1 = 10$.
 10 ist ein *Vielfaches* von 10.
 10 ist das *Einfache* von 10.
 Das *Einfache*, aber auch das *Nullfache* einer Zahl sind *Vielfache* dieser Zahl.

f) Schreibe alle Zahlen von 3 bis 30 auf, die durch 3 teilbar sind! (Klasse 3)
 Die Lösungsmenge entspricht der Menge
 $M_1 = \{a; a \in \mathbb{N} \text{ und } 3 \leq a \leq 30 \text{ und } 3 \mid a\} = \{3, 6, 9, \dots, 27, 30\}$
 Man liest: M_1 ist die Menge aller a , für die gilt:
 a ist ein Element der Menge der natürlichen Zahlen und
 $3 \leq a \leq 30$ und $3 \mid a$.

g) Welche Zahlen zwischen 5 und 25 sind durch 3 teilbar? (Klasse 3)
 Die Lösungsmenge entspricht der Menge
 $M_2 = \{b; b \in \mathbb{N} \text{ und } 5 < b < 25 \text{ und } 3 \mid b\}$
 $= \{6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$

h) Man untersuche folgende Aussageformen auf Allgemeingültigkeit in G !
 Wenn eine Zahl durch 12 teilbar ist, dann ist sie auch durch 4 teilbar.
 Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 12 teilbar.

i) Man gebe eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß eine Zahl durch 12 teilbar ist!

Wir betrachten nun Sätze, die sich aus der Definition der Teilerrelation (\nearrow Definition 1 (2.1.1.)) ableiten lassen.

SATZ 1 (2.1.1.):

$$\forall a; a \mid a,$$

denn $a \cdot 1 = a$ ist allgemeingültig. (nach Satz 9 (1.))

SATZ 2 (2.1.1.):

$$\forall a; a \mid 0,$$

denn $a \cdot 0 = 0$ ist allgemeingültig.

SATZ 3 (2.1.1.):

$$\forall a, \forall b, \forall c; a \mid b \wedge b \mid c \rightarrow a \mid c.$$

Voraussetzung: Es seien a, b, c beliebige ganze Zahlen, $a | b \wedge b | c$.

Behauptung: $a | c$

Beweis:

Sei $a | b$ und $b | c$.

Dann gibt es ein c_1 mit $a \cdot c_1 = b$ und ein c_2 mit $b \cdot c_2 = c$ (nach Definition 1 (2.1.1.)).

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$a \cdot c_1 \cdot c_2 = c.$$

Da c_1 und c_2 ganze Zahlen sind, ist auch $c_1 \cdot c_2$ eine ganze Zahl. Bezeichnen wir diese mit z , so erhalten wir $a \cdot z = c$. Das bedeutet, daß $a | c$ gilt, was der Konklusion entspricht, q. e. d.

SATZ 4 (2.1.1.):

$$\forall a, \forall b, \forall c, \forall d; a | b \wedge c | d \rightarrow a \cdot c | b \cdot d.$$

Voraussetzung: Es seien a, b, c, d beliebige ganze Zahlen, $a | b \wedge c | d$.

Behauptung: $a \cdot c | b \cdot d$

Beweis:

Sei $a | b$ und $c | d$.

Dann gibt es ein x mit $a \cdot x = b$ und ein y mit $c \cdot y = d$ (nach Definition 1 (2.1.1.)).

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$a \cdot x \cdot c \cdot y = b \cdot d$$

bzw. $a \cdot c \cdot (x \cdot y) = b \cdot d.$

Da x und y ganze Zahlen sind, ist auch $x \cdot y$ ganzzahlig. Bezeichnen wir $x \cdot y$ mit z , so erhalten wir

$$a \cdot c \cdot z = b \cdot d.$$

Das bedeutet, daß nach Definition 1 (2.1.1.) $a \cdot c | b \cdot d$ gilt, was der Konklusion entspricht, q. e. d.

Die Tabelle auf Seite 16 soll den Leser in die Lage versetzen, selbständig Gesetzmäßigkeiten zu erkennen.

Man fülle die Kästchen in der Tabelle mit „ja“ oder „nein“ aus! Man gebe die darin enthaltenen Gesetzmäßigkeiten

a) im Wortlaut, b) in formalisierter Form an!

Man beweise die gefundenen Sätze!

Der zweite Summand ist zunächst durch 5 teilbar. Es muß noch nachgewiesen werden, daß

$$6 \mid k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1)$$

ist.

$$k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1) = k(k-1)(k+1)(k+2) + 3k(k+1)$$

$$6 \mid k(k-1)(k+1)(k+2) \quad (\text{nach Satz 7 (2.1.1.)})$$

$$2 \mid k(k+1) \quad (\text{nach Satz 6 (2.1.1.)})$$

Somit ist $6 \mid 3k(k+1)$.

$$\text{Es ist } 30 \mid (k+1)^5 - (k+1), \quad \text{q. e. d.}$$

Folgende Sätze können vom Leser selbständig bewiesen werden.

Für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ ist das Produkt $(n-1)(n+1)(n+3)$ durch 3 teilbar.

Für alle ungeraden Zahlen ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar.

Für beliebiges natürliches n ist $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar.

Die Summe der dritten Potenzen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist durch 3 teilbar.

Es ist ohne weiteres möglich, Schüler der unteren Klassen durch geeignete Übungen zu den Erkenntnissen zu führen, die in den Sätzen 1 (2.1.1.), 2 (2.1.1.) und 4 (2.1.1.) bis 6 (2.1.1.) festgehalten sind.

DEFINITION 2 (2.1.1.):

Die ganzen Zahlen a und a^* heißen assoziiert zu einander genau dann, wenn sie sich nur um $+1$ oder -1 als Faktor unterscheiden.

In Zeichen: $a \cong a^*$

Man nennt $+1$ und -1 die Einheiten von G (\nearrow [1], S. 5).

Ist $a \cong a^*$, so gilt nach Definition 2 (2.1.1.)

$$a = (+1) \cdot a^* \quad \text{oder} \quad a = (-1) \cdot a^*$$

$$\text{bzw.} \quad a^* = (+1) \cdot a \quad \text{oder} \quad a^* = (-1) \cdot a.$$

Nach Definition 1 (2.1.1.) folgt daraus

$$a \mid a^* \quad \text{und} \quad a^* \mid a.$$

Setzen wir umgekehrt die Gültigkeit von $a \mid a^*$ und von $a^* \mid a$ voraus, so erhalten wir

$$a = c_1 \cdot a^* \quad \text{und} \quad a^* = c_2 \cdot a.$$

Daraus folgt:

$$a = c_1 \cdot c_2 \cdot a,$$

$$c_1 \cdot c_2 = 1,$$

$$\text{d. h.:} \quad c_1 \mid 1 \quad \text{und} \quad c_2 \mid 1.$$

Daraus folgt aber

$$c_1 = +1 \text{ und } c_2 = +1$$

oder $c_1 = -1 \text{ und } c_2 = -1.$

Somit sind c_1 und c_2 Einheiten von G , und wir erhalten

$$a \cong a^*.$$

BEISPIEL 3 (2.1.1.):

a) $5 \cong 5$, denn $5 = (+1)(+5)$

b) $5 \cong -5$, denn $5 = (-1)(-5)$ und $(-5) = 5 \cdot (-1)$

Wir untersuchen die **Eigenschaften** der unter Definition 2 (2.1.1.) definierten Relation $R = \{[a, b]; a \cong b\}$.

R ist reflexiv.

$$a \cong a, \text{ denn } a \cdot 1 = a \quad (\text{nach Satz 9 (1.)})$$

R ist symmetrisch.

$$a \cong b \rightarrow b \cong a$$

Beweis:

Es sei $a \cong b$.

(nach Voraussetzung)

Dann gilt $a = b$ oder $a = -b$.

(nach Definition 2 (2.1.1.))

1. Fall: $a = b$

Daraus folgt nach der Symmetrie der Gleichheit

$$b = a.$$

2. Fall: $a = -b \quad | \cdot -1$

$$-a = b$$

und nach der Symmetrie der Gleichheit

$$b = -a$$

Aus dem 1. und 2. Fall folgt

$$b = a \vee b = -a.$$

Das entspricht der Konklusion,

q. e. d.

R ist transitiv.

$$a \cong b \wedge b \cong c \rightarrow a \cong c$$

Beweis:

Es seien $a \cong b \wedge b \cong c$.

(nach Voraussetzung)

Dann gilt $(a = b \vee a = -b) \wedge (b = c \vee b = -c)$.

(nach Definition 2 (2.1.1.))

2.1.

Daraus folgt

$$(a = b \wedge b = c) \vee (a = b \wedge b = -c) \vee (a = -b \wedge b = c) \\ \vee (a = -b \wedge b = -c).$$

1. Fall: $a = b \wedge b = c$

Daraus folgt

$$a = c.$$

2. Fall: $a = b \wedge b = -c$

Daraus folgt

$$a = -c.$$

3. Fall: $a = -b \wedge b = c$

Daraus folgt

$$a = -c.$$

4. Fall: $a = -b \wedge b = -c$

Daraus folgt

$$a = c.$$

Aus den vier Fällen folgt

$$a = c \text{ oder } a = -c.$$

Das entspricht der Konklusion,

q. e. d.

Die Relation R über G ist eine Äquivalenzrelation und bewirkt eine Einteilung von G in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen, d. h. in Äquivalenzklassen assoziierter Elemente.

Die Klassen sind:

$$\{0\}, \{-1, +1\}, \{-2, +2\}, \dots$$

Beziehen wir die Klasseneinteilung von G in die Teilbarkeitsbetrachtungen ein, dann können wir sagen, daß jede Teilbarkeitsaussage richtig bleibt, wenn man $a \in G$ und $b \in G$ durch zu ihnen assoziierte Elemente ersetzt. Das heißt, gilt $a | b$, so gilt auch:

$$-a | b, a | -b \text{ und } -a | -b.$$

Es reicht daher aus, die Teilbarkeitsbetrachtungen für nichtnegative ganze Zahlen anzustellen, da ja die Klassen der zueinander assoziierten Elemente von G bekannt sind und man sofort alle Teiler von a kennt.

BEISPIEL 4 (2.1.1.):

$$+3 | +12$$

Daraus läßt sich ableiten, daß

$$-3 | +12 \text{ und } +3 | -12 \text{ und } -3 | -12$$

ist.

2.1.2.

Arten der Teiler

Es sei $a \neq 0$.

DEFINITION 1 (2.1.2.):

t heißt **trivialer Teiler** eines Elements a genau dann, wenn

$t \cong 1$ oder $t \cong a$.

Alle zu a assoziierten Elemente und alle Einheiten von G sind triviale Teiler von a .

Die Teiler von a , auf die Definition 1 (2.1.2.) nicht zutrifft, heißen **nichttriviale Teiler** von a .

DEFINITION 2 (2.1.2.):

b heißt **echter Teiler** von a genau dann, wenn

$b \mid a$ und $a \nmid b$.

In Zeichen: $b \parallel a$

Ist $a \neq 1$, dann gilt stets $1 \parallel a$.

SATZ 1 (2.1.2.):

Jede ganze Zahl $a \neq 0$ besitzt nur endlich viele Teiler.

Um Satz 1 (2.1.2.) *beweisen* zu können, müssen wir den **Betrag einer ganzen Zahl** definieren.

DEFINITION 3 (2.1.2.):

Es sei a eine beliebige ganze Zahl.

Es soll für den **Betrag von a** (in Zeichen $|a|$) gelten

$$|a| \stackrel{\text{Def}}{=} \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Dabei ist $-a$ die zu a entgegengesetzte Zahl.

Beweis von Satz 1 (2.1.2.):

Es sei $a \neq 0$ und b ein beliebiger Teiler von a .

Es gilt:

$$a = g \cdot b.$$

(nach Definition 1 (2.1.1.))

Daraus folgt:

$$|a| = |g| \cdot |b|.$$

Für $|g|$ unterscheiden wir *zwei Fälle*:

a) $|g| = 1$, es ergibt sich $|b| = |a|$.

b) $|g| > 1$, es ergibt sich $|b| = 1 \cdot |b| < |g| \cdot |b| = |a|$ und damit $|b| < |a|$.

Es gilt also stets:

$$|b| \leq |a|.$$

Da $|b|$ und $|a|$ positive ganze Zahlen sind, gibt es aber nur endlich viele Zahlen b mit $|b| \leq |a|$, also auch nur endlich viele Teiler von a , q. e. d.

Damit haben wir auch Satz 2 (2.1.2.) bewiesen.

SATZ 2 (2.1.2.):

Es sei a eine von Null verschiedene ganze Zahl.

Dann ist der Absolutbetrag jedes Teilers von a kleiner oder höchstens gleich dem Absolutbetrag von a .

BEISPIEL 1 (2.1.2.):

$$a = 12$$

Die Teiler von 12 sind:

$$\begin{array}{l} \text{Unechte Teiler} \\ \text{Echte Teiler} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \pm 12 \\ \pm 1 \\ \pm 2 \\ \pm 3 \\ \pm 4 \\ \pm 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Triviale Teiler} \\ \text{Nichttriviale Teiler} \end{array}$$

$$M = \{b; b \in \mathcal{G} \text{ und } b \mid 12\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

In der Unterstufe könnte man beispielsweise formulieren:

Gib alle die Zahlen an, von denen 12 eine Vielfaches ist!

Die in Teil 2.1.1. gewonnene Erkenntnis, daß man Teilbarkeitsbetrachtungen nur für nichtnegative ganze Zahlen anzustellen braucht, um Teilbarkeitsaussagen für ganze Zahlen treffen zu können, wollen wir in den folgenden Teilen nutzen.

Wir vereinbaren daher, daß die Variablen immer dann natürliche Zahlen bezeichnen, wenn der Grundbereich nicht extra angegeben ist.

2.2.1.

Definitionen und Sätze

DEFINITION 1 (2.2.1.):

„Eine von Null und Eins verschiedene natürliche Zahl p heißt genau dann **Primzahl**, wenn sie nur triviale Teiler hat.“

Primzahlen spielen eine wichtige Rolle bei der **Zerlegung natürlicher Zahlen in Faktoren**.

Fertigkeiten im Zerlegen natürlicher Zahlen in **Primfaktoren** werden beispielsweise beim Ermitteln des Hauptnenners vorausgesetzt.

DEFINITION 2 (2.2.1.):

Eine von Null verschiedene Zahl c heißt **unzerlegbar** in N genau dann, wenn aus $c = a \cdot b$ stets folgt $a = 1$ und $b = c$ oder $a = c$ und $b = 1$.

BEISPIEL 1 (2.2.1.):

Wir überprüfen einige natürliche Zahlen.

a) $1 = 1 \cdot 1$

Eine andere Zerlegung in N gibt es nicht.

Damit ist 1 *unzerlegbar* in N .

b) $7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7$

Eine andere Möglichkeit gibt es in N nicht.

Daher ist 7 *unzerlegbar* in N .

c) $10 = 1 \cdot 10 = 5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$

10 ist *zerlegbar* in N .

Schon die wenigen Beispiele in Beispiel 1 (2.2.1.) lassen vermuten, daß nur die **Primzahlen** und die **Zahl 1** unzerlegbar in N sind.

SATZ 1 (2.2.1.):

Eine von Null verschiedene Zahl c ist genau dann unzerlegbar in N , wenn $c = 1$ oder eine Primzahl ist.

Um diesen Satz zu *beweisen*, zerlegen wir die Äquivalenz in zwei Implikationen.

(1) Wenn c unzerlegbar in N ist, dann ist $c = 1$ oder Primzahl.

(2) Wenn $c = 1$ oder Primzahl ist, dann ist c unzerlegbar in N .

Beweis der Implikation (1):

Voraussetzung: c ist unzerlegbar in N .

2.2.

Daraus folgt: Jeder Teiler von c ist entweder 1 oder c .
Das trifft aber nur auf die Zahl 1 und die Primzahlen zu.

Beweis der Implikation (2):

Voraussetzung: $c = 1$ oder c ist Primzahl.

a) Es sei $c = 1$.

Dann folgt aus $c = a \cdot b$:

$$a = 1 \text{ und } b = 1.$$

Daraus folgt:

c ist *unzerlegbar*. (nach Definition 2 (2.2.1.))

b) Es sei c Primzahl.

Dann folgt aus $c = a \cdot b$:

Die Teiler können nur 1 oder c sein. (nach Definition 1 (2.2.1.))

Das bedeutet, daß wir *drei Fälle* unterscheiden müssen.

1. *Fall*: $a = 1$ und $b = 1$

Das ist unmöglich, da daraus $c = 1$ folgen würde.

(Widerspruch zu Definition 1 (2.2.1.))

2. *Fall*: $c = a$ und $c = b$

Daraus folgt aber für $c = a \cdot b$:

$$c = c \cdot c.$$

Daraus folgt

$$c = 1.$$

(Widerspruch zu Definition 1 (2.2.1.))

3. *Fall*: $a = c$ und $b = 1$ oder $a = 1$ und $b = c$

Das ist aber gerade die Bedingung für die *Unzerlegbarkeit*.

Aus der Gültigkeit beider Implikationen schließen wir auf die Gültigkeit der vorgegebenen Äquivalenz, q. e. d.

SATZ 2 (2.2.1.):

Jede natürliche Zahl a mit $a > 1$ hat wenigstens eine Primzahl als Teiler.

Der **Fundamentalsatz** der elementaren Zahlentheorie findet bereits in der Schulmathematik Anwendung. Er wird dort allerdings nicht bewiesen.

SATZ 3 (2.2.1.)

(Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie für N):

Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig als Produkt

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r$$

von Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_r schreiben.

Der Beweis trivial erscheinender Sätze ist oftmals recht schwierig. Ein Beispiel dafür ist der Beweis von Satz 3 (2.2.1.). Der Beweis dieses Satzes erfordert den Beweis der *Existenz* einer solchen Darstellung und den Beweis der *Eindeutigkeit* der Zerlegung in Primfaktoren.

Der folgende Beweis ist zu finden in [35], S. 228, aber auch in [14], S. 406. Der Eindeutigkeitsbeweis stammt aus [27], S. 5.

Beweis von Satz 3 (2.2.1.):

1. Existenzbeweis

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl $n > 1$.

Es gibt eine Primzahl p_1 , so daß gilt:

$$p_1 \mid n. \quad (\text{nach Satz 2 (2.2.1.)})$$

$$n = p_1 \cdot q_1 \quad \text{und} \quad q_1 \mid n$$

$$\text{mit } q_1 \geq 1 \quad \text{und} \quad q_1 \leq n. \quad (\text{nach Definition 1 (2.1.1.)})$$

Ist $q_1 = 1$, dann ist n selbst Primzahl.

Ist $q_1 > 1$, dann läßt sich auf q_1 Satz 2 (2.2.1.) anwenden.

Es gibt also eine Primzahl p_2 ,

$$q_1 = p_2 \cdot q_2 \quad \text{und} \quad p_2 \mid q_1 \quad \text{und} \quad q_2 \leq q_1 \quad \text{und} \quad q_2 \geq 1.$$

Für n erhält man

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot q_2.$$

Ist $q_2 = 1$, so erhält n die Darstellung

$$n = p_1 \cdot p_2.$$

Für $q_2 > 1$ verfahren wir in gleicher Weise wie bisher. Da aber $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \dots$, bricht die Entwicklung nach endlich vielen Schritten, beispielsweise nach r Schritten, ab. Es ist dann $q_r = 1$. Für n ergibt sich dann die Darstellung

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \quad \text{und} \quad r \geq 1.$$

Die p_s ($s = 1, 2, \dots, r$) sind Primzahlen, die nicht notwendig voneinander verschieden sind.

Damit ist die Existenz einer Zerlegung eines beliebigen Elementes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ gesichert, q. e. d.

2. Eindeutigkeitsbeweis (nach ZERMELO)

Es muß nun gezeigt werden, daß die gefundene Zerlegung von n eindeutig ist. Wenn die Eindeutigkeit nicht allgemein gelten würde, so müßte es eine kleinste Zahl $n > 1$ geben, die mindestens zwei verschiedene Zerlegungen besäße.

Angenommen, n wäre ein solche Zahl.

Dann könnten wir bilden:

1. Zerlegung: $n = p_1 \cdot q$;

wobei p_1 der kleinste in n auftretende Primfaktor sein soll;
 $q < n$.

Da n die kleinste natürliche Zahl mit mindestens zwei Zerlegungen sein soll, muß q eindeutig zerlegbar sein.

Eine zweite Zerlegung von n , in der der Primfaktor p_1 vorkommt, kann es nicht geben, denn aus $n = p_1 \cdot q$ und $n = p_1 \cdot b$ folgt $q = b$.

Damit wären beide Zerlegungen identisch.

2. Zerlegung: $n = p \cdot k$;

es muß $p > p_1$ sein, da p_1 der kleinste in n auftretende Primfaktor sein sollte.

Betrachten wir die Zahl $n' = n - p_1 k$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der 1. Zerlegung

$$(*) \quad n' = p_1 \cdot q - p_1 \cdot k = p_1 (q - k)$$

und unter Berücksichtigung der 2. Zerlegung

$$(**) \quad n' = p \cdot k - p_1 \cdot k = k (p - p_1).$$

Offenbar ist $n' < n$, damit ist n' eindeutig zerlegbar.

Wir betrachten die Gleichung (**).

Nach (*) ist $p_1 \mid n'$; es ist aber $p_1 \nmid k$, denn wäre $p_1 \mid k$, dann würde die zweite Zerlegung p_1 als Primfaktor haben, was aber nicht möglich ist, wie wir oben bereits festgestellt haben. Es muß also $p_1 \mid (p - p_1)$ sein.

Es ist dann

$$p_1 \cdot t = p - p_1 \quad (\text{nach Definition 1 (2.1.1.)})$$

$$p_1 \cdot t + p_1 = p$$

$$p_1 (t + 1) = p$$

Damit wäre $p_1 \mid p$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht, nach der p Primzahl und $p \neq p_1$ sein sollte.

Es kann daher höchstens eine Zerlegung geben, q. e. d.

Damit ist Satz 3 (2.2.1.) vollständig bewiesen.

Im Existenzbeweis des Fundamentalsatzes wurde gezeigt, daß sich jedes Element n aus N , das weder Null noch Eins ist, als Produkt endlich vieler nicht notwendig verschiedener Primzahlen darstellen läßt.

Übersichtlicher wird die Produktdarstellung von n , wenn man die mehrfach auftretenden Primfaktoren zu Primzahlpotenzen zusammenfaßt und gleichzeitig die Primzahlpotenzen nach der Größe ihrer Basis ordnet. Dabei soll

$$p_1 < p_2 < p_3 \dots < p_r$$

sein.

Man erhält auf diese Weise die **kanonische Zerlegung** von n , die lautet:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}.$$

Die p_ϱ für $\varrho = 1, \dots, r$ sind die in der Zerlegung von n vorkommenden voneinander verschiedenen Primfaktoren. Die $\alpha_\varrho \geq 1$ für $\varrho = 1, \dots, r$ sind natürliche Zahlen, die angeben, wie oft p_ϱ in der Zerlegung von n als Faktor auftritt.

BEISPIEL 2 (2.2.1.):

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{Kanonische Zerlegung: } 60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

$$p_1 = 2 \quad \alpha_1 = 2$$

$$p_2 = 3 \quad \alpha_2 = 1$$

$$p_3 = 5 \quad \alpha_3 = 1$$

2.2.2.

Verteilung der Primzahlen

Wir betrachten zunächst die Folge der Primzahlen im Zahlenraum von 0 bis 40:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.$$

Wir erkennen kein Bildungsgesetz in der Verteilung der Primzahlen.

Außer 2 und 3 findet man kein weiteres Paar $[a; b]$ von Primzahlen, in dem b der (unmittelbare) Nachfolger von a ist.

Weiterhin ist 2 die einzige gerade Primzahl.

Untersucht man die Folge der Primzahlen $\{p\}$ im Zahlenraum bis 100, so stellt man fest, daß es zwischen 0 und 30 genau zehn Primzahlen gibt und zwischen 70 und 100 nur sechs.

Untersucht man die Folge der natürlichen Zahlen $\{n\}$ nach Primzahlen, so stellt sich heraus, daß mit wachsendem n Primzahlen immer seltener auftreten. Man könnte meinen, von einer bestimmten Zahl an gäbe es keine Primzahlen mehr. Das ist jedoch ein Irrtum, denn es gilt Satz 1 (2.2.2.).

SATZ 1 (2.2.2.):

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis:

Wir führen ihn indirekt.

Annahme: Es gibt endlich viele Primzahlen; sie seien mit $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ bezeichnet.

Wir bilden dann die natürliche Zahl

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Keine der Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_n ist ein Teiler von a . Also kann a entweder eine Primzahl sein, die dann von p_1, p_2, \dots, p_n verschieden wäre, oder eine Primzahl als Teiler haben, die ebenfalls von p_1, p_2, \dots, p_n verschieden sein müßte.

Beides steht im *Widerpruch zur Annahme*, daß es außer p_1, p_2, \dots, p_n keine weiteren Primzahlen gibt. Es können daher mit p_1, p_2, \dots, p_n nicht alle Primzahlen erfaßt sein, q. e. d.

Schon im Altertum interessierte die Mathematiker ein Verfahren, mit dessen Hilfe sich feststellen läßt, ob eine natürliche Zahl a , die kleiner als eine gegebene natürliche Zahl n ist, Primzahl ist oder nicht.

Mit Hilfe des „Siebes des ERATOSTHENES“ wollen wir die Primzahlen im Zahlenraum von 2 bis 50 erfassen.

Zu diesem Zweck sind zunächst alle Zahlen von 2 bis 50 aufzuschreiben.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Danach sind der Reihe nach alle Zahlen zu streichen, die 2 als echten Teiler haben. Mit den Zahlen 3, 5, 7 wird in gleicher Weise verfahren. Da wir nur den Bereich der natürlichen Zahlen, die kleiner als 50 sind, betrachtet haben, können wir das Verfahren schon abbrechen, da alle Zahlen, die 11, 13, 17, 19 usw. als echte Teiler haben, bereits gestrichen wurden. Im „Sieb“ bleiben tatsächlich nur die Primzahlen zurück.

Wollen wir feststellen, ob eine natürliche Zahl a Primzahl ist, so genügt es, die Teilbarkeit durch alle Primzahlen, die kleiner oder höchstens gleich \sqrt{a} sind, zu untersuchen.

Gibt es einen solchen Primteiler, dann ist a eine zusammengesetzte Zahl. Gibt es keinen, dann ist a Primzahl.

Gilt nämlich für eine natürliche Zahl a

$$a = p \cdot a_1, \text{ wobei } p \leq a_1 \text{ sein soll,}$$

dann ist $a = p \cdot a_1 \geq p^2$,

also $\sqrt{a} \geq p$.

Das heißt, in der Zerlegung von a muß ein Primfaktor vorkommen, der kleiner oder gleich \sqrt{a} ist.

Sollen alle Primzahlen unterhalb einer gegebenen Zahl a ermittelt werden, dann sind alle die Zahlen zu streichen, die p_1, p_2, \dots, p_n als echte Teiler haben. Dabei ist p_n die größte Primzahl, die kleiner oder höchstens gleich \sqrt{a} ist.

BEISPIEL 1 (2.2.2.):

a) Es sind die Primzahlen im Zahlenraum von 2 bis 200 zu ermitteln.

$13 < \sqrt{200} < 17$, also ist $p_n = 13$.

Es sind alle die Zahlen zu streichen, die 2, 3, 5, 7, 11, 13 als echte Teiler haben. Übrig bleiben die Primzahlen.

b) Es ist festzustellen, ob 241 Primzahl ist.

$13 < \sqrt{241}$, aber $\sqrt{241} < 17$.

Es ist die Teilbarkeit durch 2, 3, 5, 7, 11, 13 zu untersuchen. Man erhält:
 $2 \nmid 241$, $3 \nmid 241$, $5 \nmid 241$, $7 \nmid 241$, $11 \nmid 241$, $13 \nmid 241$.

Damit ist 241 Primzahl.

Schon die wenigen Beispiele lassen erkennen, daß dieses Verfahren immer aufwendiger wird, je größer die Zahlen sind, von denen festgestellt werden soll, ob sie Primzahlen sind. Für unsere Aufgabenstellungen ist es jedoch ausreichend.

2.3.

Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

Die im Teil 2.3. zu behandelnden wichtigen Begriffe der elementaren Zahlentheorie spielen bereits im Mathematikunterricht der Schule eine große Rolle.

2.3.1.

Größter gemeinsamer Teiler

DEFINITION 1 (2.3.1.):

Eine natürliche Zahl t heißt **gemeinsamer Teiler** der natürlichen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n genau dann, wenn t Teiler von a_1, a_2, \dots, a_n ist.

DEFINITION 2 (2.3.1.):

Eine natürliche Zahl d heißt **größter gemeinsamer Teiler** der natürlichen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n genau

dann, wenn d gemeinsamer Teiler von a_1, a_2, \dots, a_n ist und für alle gemeinsamen Teiler t von a_1, a_2, \dots, a_n gilt, daß sie auch Teiler von d sind.

Wir haben nun zu zeigen, daß genau eine solche natürliche Zahl d existiert, die Definition 2 (2.3.1.) erfüllt.

Den *Existenzbeweis* führen wir im Teil 2.3.3.

Die *Eindeutigkeit* von d zeigen wir wie folgt:

Wir nehmen an, d^* sei neben d ebenfalls größter gemeinsamer Teiler von a_1, a_2, \dots, a_n .

Als gemeinsamer Teiler kann d^* an die Stelle von t in Definition 2 (2.3.1.) treten, und es gilt $d^* \mid d$. Analog gilt $d \mid d^*$.

Aus $d^* \mid d$ und $d \mid d^*$ folgt $d \cong d^*$.

Da d und d^* natürliche Zahlen sind, gilt $d = d^*$, q. e. d.

Wir bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler (g. g. T.) von a_1, a_2, \dots, a_n mit

$$d = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

DEFINITION 3 (2.3.1.):

Die natürlichen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n heißen **teilerfremd** genau dann, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler Eins ist.

In Zeichen: $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$

SATZ 1 (2.3.1.):

a sei eine natürliche Zahl mit $a > 1$, die die Darstellung

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

hat (die p_i für $i = 1, 2, \dots, r$ sind Primzahlen).

t ist genau dann Teiler von a , wenn sich t in der Form

$$t = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \text{ mit}$$

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1$$

$$0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2$$

.....

$$0 \leq \beta_r \leq \alpha_r$$

darstellen läßt.

Beweis (\nearrow [14], S. 408):

a) Wir zeigen, daß jede Zahl

$$t = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \text{ mit } 0 \leq \beta_e \leq \alpha_e \text{ für } e = 1, \dots, r$$

ein Teiler von a ist.

Zur Begründung unterscheiden wir *drei Fälle*.

1. *Fall*: Ist $\beta_e = 0$, so gilt $1 \mid p_e^{\alpha_e}$.

Das ist stets erfüllt.

2. *Fall*: Ist $\beta_e = \alpha_e$, so gilt $p_e^{\alpha_e} \mid p_e^{\alpha_e}$.

Das ist stets erfüllt.

(nach Satz 1 (2.1.1.))

3. *Fall*: Ist $\beta_e < \alpha_e$, dann gibt es ein β_e^* , so daß gilt

$$\beta_e + \beta_e^* = \alpha_e \text{ und } \beta_e^* \neq 0.$$

$$\text{Dann gilt } p_e^{\beta_e} \mid p_e^{\alpha_e}, \text{ denn } p_e^{\beta_e} \cdot p_e^{\beta_e^*} = p_e^{\alpha_e}.$$

Es handelt sich in diesem Fall um einen *echten* Teiler. In den beiden ersten Fällen handelte es sich um *triviale* Teiler.

Aus diesen drei Fällen folgt zunächst

$$p_e^{\beta_e} \mid p_e^{\alpha_e} \text{ für jedes } e = 1, \dots, r.$$

Aus $p_1^{\beta_1} \mid p_1^{\alpha_1}$ und $p_2^{\beta_2} \mid p_2^{\alpha_2}$ und \dots und $p_r^{\beta_r} \mid p_r^{\alpha_r}$ folgt aber

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \mid p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}.$$

Es gilt nämlich

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_1^{\delta_1} = p_1^{\alpha_1}$$

$$\text{und } p_2^{\beta_2} \cdot p_2^{\delta_2} = p_2^{\alpha_2}$$

.....

$$\text{und } p_r^{\beta_r} \cdot p_r^{\delta_r} = p_r^{\alpha_r} \text{ mit } \beta_e + \delta_e = \alpha_e.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \cdot p_1^{\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\delta_r} \\ &= p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}. \end{aligned}$$

Das Produkt aus den natürlichen Zahlen $p_1^{\delta_1}, p_2^{\delta_2}, \dots, p_r^{\delta_r}$ ist wieder eine natürliche Zahl, diese nennen wir g .

Dann gilt

$$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \cdot g = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

$$\text{oder } t \cdot g = a.$$

Das bedeutet aber $t \mid a$ und entspricht der Behauptung.

b) Nun zeigen wir, daß sich jeder Teiler t von a stets in der Form

$$t = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$$

mit $0 \leq \beta_\varrho \leq \alpha_\varrho$ mit $\varrho = 1, \dots, r$ darstellen läßt.

Ist $t \mid a$, so gilt

$$t \cdot a_1 = a, \quad (\text{nach Definition 1 (2.1.1.)})$$

wobei $t \leq a$ ist.

Damit sind die Exponenten in der Darstellung von a nicht kleiner als die Exponenten der Primfaktoren in der Darstellung von t . Es muß sein

$$t = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \text{ mit } 0 \leq \beta_\varrho = \alpha_\varrho \text{ für } \varrho = 1, \dots, r, \quad \text{q. e. d.}$$

BEISPIEL 1 (2.3.1.):

Es sind alle Teiler von 120 zu ermitteln.

Die kanonische Darstellung lautet:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Jeder Teiler t von 120 läßt sich in der Form

$$t = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \quad (*)$$

darstellen, und jede solche Darstellung bezeichnet auch einen Teiler von 120.

Dabei ist: $0 \leq \beta_1 \leq 3$

$$0 \leq \beta_2 \leq 1$$

$$0 \leq \beta_3 \leq 1.$$

Wir erhalten die Menge T aller Teiler von 120, indem wir β_1 , β_2 und β_3 unabhängig voneinander die Werte

$$\beta_1 = 0, 1, 2, 3; \quad \beta_2 = 0, 1; \quad \beta_3 = 0, 1$$

durchlaufen lassen und jeweils in (*) einsetzen.

$$T = \{1, 2, 3, 5, 4, 8, 6, 12, 24, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120\}$$

Damit haben wir uns die Voraussetzung für ein Verfahren zur **Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers** geschaffen.

Es seien a_1, a_2, \dots, a_n von Null und Eins verschiedene natürliche Zahlen.

Eine Darstellung dieser Zahlen sei (\nearrow [14], S. 409f.)

$$a_1 = p_1^{\alpha_{11}} \cdot p_2^{\alpha_{12}} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_{1r}}$$

$$a_2 = p_1^{\alpha_{21}} \cdot p_2^{\alpha_{22}} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_{2r}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = p_1^{\alpha_{n1}} \cdot p_2^{\alpha_{n2}} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_{nr}}$$

Die $\alpha_{\eta\varrho}$ ($\varrho = 1, \dots, r$; $\eta = 1, \dots, n$) sind natürliche Zahlen, die nur dann 0 sind, wenn p_ϱ in der Zerlegung von a_1, a_2, \dots, a_n nicht vorkommt.

Ein gemeinsamer Teiler t von a_1, a_2, \dots, a_n muß dann eine Darstellung

$$t = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$$

haben, wobei für $\varrho = 1, \dots, r$ gelten

$$(1) \quad 0 \leq \gamma_\varrho \leq \alpha_{1\varrho}$$

$$(2) \quad 0 \leq \gamma_\varrho \leq \alpha_{2\varrho}$$

.....

$$(n) \quad 0 \leq \gamma_\varrho \leq \alpha_{n\varrho}$$

Aus (1) folgt $t \mid a_1$, aus (2) folgt $t \mid a_2, \dots$, aus (n) folgt $t \mid a_n$.

Wir suchen nun den größten gemeinsamen Teiler d von a_1, a_2, \dots, a_n .

Man erhält für $d = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r}$, wobei γ_ϱ jeweils das Minimum von $\alpha_{1\varrho}, \alpha_{2\varrho}, \dots, \alpha_{n\varrho}$ ist für jedes $\varrho = 1, \dots, r$.

$$\gamma_\varrho = \min(\alpha_{1\varrho}, \alpha_{2\varrho}, \dots, \alpha_{n\varrho})$$

Jeder andere gemeinsame Teiler t von a_1, a_2, \dots, a_n hat die Form

$$t^* = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r},$$

wobei $\gamma_\varrho \leq \min(\alpha_{1\varrho}, \alpha_{2\varrho}, \dots, \alpha_{n\varrho})$ für jedes $\varrho = 1, \dots, r$ ist. Dabei gilt für wenigstens einen Wert von ϱ nur das Kleiner-Zeichen; anderenfalls wäre $t = d$.

BEISPIEL 2 (2.3.1.):

Zu ermitteln ist $d = (1190, 672, 3200)$.

$$1190 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 17^1$$

$$672 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 17^0$$

$$3200 = 2^7 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 17^0$$

$$d = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot 7^{\gamma_4} \cdot 17^{\gamma_5}$$

$$\gamma_1 = \min(1, 5, 7) = 1$$

$$\gamma_2 = \min(0, 1, 0) = 0$$

$$\gamma_3 = \min(1, 0, 2) = 0$$

$$\gamma_4 = \min(1, 1, 0) = 0$$

$$\gamma_5 = \min(1, 0, 0) = 0$$

$$d = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 17^0 = 2$$

$$d = (1190, 672, 3200)$$

$$d = 2$$

Weitere Übungsbeispiele bilde der Leser selbst.

Angewendet wird dieses Verfahren u. a. beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache f der Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n bezeichnen wir im weiteren Verlauf mit

$$f = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Für den Fall $a_1 = 0$ oder $a_2 = 0$ oder ... oder $a_n = 0$ setzen wir

$$f = [a_1, a_2, \dots, a_n] = 0.$$

BEISPIEL 1 (2.3.2.):

Zu ermitteln ist $f = [63, 18, 14]$.

$$63 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

$$18 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^0$$

$$14 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 7^1$$

$$f = 2^{\delta_1} \cdot 3^{\delta_2} \cdot 7^{\delta_3} \quad \delta_1 = \max(0, 1, 1) = 1$$

$$\delta_2 = \max(2, 2, 0) = 2$$

$$\delta_3 = \max(1, 0, 1) = 1$$

$$f = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1 = 126$$

Dieses Verfahren wird zum Beispiel beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen zum Ermitteln des Hauptnenners angewendet.

Der Zusammenhang zwischen dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier natürlicher Zahlen wird in Satz 1 (2.3.2.) formuliert. Damit ist es möglich, aus der Kenntnis des g. g. T. sehr schnell das kleinste gemeinsame Vielfache (k. g. V.) zu ermitteln und umgekehrt.

SATZ 1 (2.3.2.):

Das Produkt zweier von Null verschiedener natürlicher Zahlen ist gleich dem Produkt aus dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen und dem größten gemeinsamen Teiler dieser Zahlen.

In Zeichen: $a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b)$ für $a \neq 0$
und $b \neq 0$

Beweis:

Es seien a, b beliebige von Null verschiedene natürliche Zahlen.

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

$$b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$$

α_i und β_i , $i = 1, 2, \dots, r$, sind natürliche Zahlen, die nur dann Null sind, wenn p_i in der Zerlegung nicht auftritt.

2.3.

Es ist

$$a \cdot b = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r + \beta_r}.$$

Es ist aber

$$(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r} \text{ mit } \gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \text{ und}$$

$$[a, b] = p_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\delta_r} \text{ mit } \delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i).$$

Das heißt aber, daß

$$[a, b] (a, b) = p_1^{\delta_1 + \gamma_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\delta_r + \gamma_r} \quad \text{und}$$

$$\delta_i + \gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \beta_i).$$

Betrachten wir den Term

$$\max(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \beta_i),$$

so ergeben sich dafür folgende Möglichkeiten:

1. Ist $\alpha_i = \beta_i$, dann erhält man $\alpha_i + \beta_i$.

Falls $\alpha_i \neq \beta_i$, ist das Ergebnis dennoch dasselbe, denn:

2. Ist α_i das Maximum, dann ist β_i das Minimum der beiden Zahlen.

Man erhält $\alpha_i + \beta_i$.

3. Ist β_i das Maximum, dann ist α_i das Minimum der beiden Zahlen.

Man erhält ebenfalls $\alpha_i + \beta_i$.

Daher gilt

$$\delta_i + \gamma_i = \alpha_i + \beta_i,$$

das heißt:

$$a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b),$$

q. e. d.

BEISPIEL 2 (2.3.2.):

$$a = 36; b = 60$$

$$a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0; b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

$$(36, 60) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$$

$$[36, 60] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 180$$

$$36 \cdot 60 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$$

$$[36, 60] \cdot (36, 60) = 2^{2+2} \cdot 3^{2+1} \cdot 5^{1+0} = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$$

SATZ 2 (2.3.2.):

Sind zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen teilerfremd, dann ist das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen gleich ihrem Produkt.

Beweis:

$$\text{Man erhält: } a \cdot b = [a \cdot b] \cdot 1 = [a \cdot b]$$

(nach Satz 1 (2.3.2.)), q. e. d.

Die Sätze 3 (2.3.2.) und 4 (2.3.2.) seien *ohne Beweis* genannt.

SATZ 3 (2. 3. 2.):

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$(0, n) = n, (1, n) \neq 1 \text{ und } [1, n] = n.$$

SATZ 4 (2.3.2.):

Für alle natürlichen Zahlen a, b und c gilt:

Wenn $(a, b) = 1$ und $b \mid a \cdot c$, so $b \mid c$.

2.3.3.

EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

SATZ 1 (2.3.3.):

Zu je zwei Elementen a und $b \neq 0$ aus G existieren stets zwei eindeutig bestimmte Elemente q und r aus G , die der Relation

$$a = b \cdot q + r \text{ mit } 0 \leq r < b$$

genügen.

q bezeichnet man als **Quotienten** und r als **Rest** bei der **Division mit Rest** von a durch b .

(↗ [25], S. 137; [27], S. 11; [36], S. 88; [37], S. 23)

Beweis:

Auf den *Existenzbeweis* wird verzichtet.

Beweis der Eindeutigkeit von q und r . (↗ [14], S. 402; [37], S. 23)

Es seien a, b beliebige ganze Zahlen mit $b \neq 0$.

Annahme: Es gibt zwei Darstellungen

$$a = b \cdot q_1 + r_1 \text{ mit } 0 \leq r_1 < |b|$$

und
$$a = b \cdot q_2 + r_2 \text{ mit } 0 \leq r_2 < |b|.$$

Daraus folgt

$$b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot q_2 + r_2. \text{ (nach der Symmetrie und Transitivität der Gleichheit ganzer Zahlen)}$$

Daraus folgt weiter

$$b \cdot q_1 - b \cdot q_2 = r_2 - r_1,$$

das heißt: $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1.$ (nach dem Distributivgesetz)

Das bedeutet:

$$b \mid r_2 - r_1.$$

Außerdem gilt auf Grund von $0 \leq r_1 < |b|$ und $0 \leq r_2 < |b|$:

$$|r_2 - r_1| < |b|,$$

denn der Betrag der Differenz zweier nichtnegativer Zahlen ist nicht größer als die größte der beiden Zahlen.

Wäre $r_2 - r_1 \neq 0$, so würde wegen $b \mid r_2 - r_1$ folgen:

$$|r_2 - r_1| \geq b.$$

Das steht aber im Widerspruch zu $|r_2 - r_1| < b$.

Es muß daher $r_2 - r_1 = 0$ sein, das heißt:

$$r_2 = r_1.$$

Da $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, folgt aus $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 = 0$ die Gleichung $q_1 - q_2 = 0$, das heißt:

$$q_1 = q_2.$$

Das bedeutet aber, daß die beiden Darstellungen sich nicht unterscheiden, q und r sind durch a und b eindeutig bestimmt, q. e. d.

Die Division mit Rest wird im Unterricht der Klasse 2 vorbereitet und in Klasse 3 eingeführt.

So sind entsprechend [25; Klasse 3] Übungen zur Teilbarkeit mit Hilfe von Tabellen durchzuführen, in denen die Schüler zu entscheiden haben, ob eine Zahl a durch eine Zahl b teilbar ist oder nicht.

Die Entscheidungen sind mündlich zu begründen, z. B.:

7 ist nicht durch 3 teilbar, denn $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Es wird der Begriff „Rest“ eingeführt und verwendet.

Übungsaufgaben aus [6; Klasse 3] lauten dazu:

Führe die Division mit Rest aus!

$3 : 2, 7 : 4, 17 : 4, 29 : 3$

Worin liegt nun der Unterschied zwischen **Division** und **Division mit Rest**?

Die *Division* als Umkehrung der Multiplikation ist in G nicht uneingeschränkt ausführbar. Die *Division* ist eine eindeutige Abbildung aus $G \times G \setminus \{0\}$ auf G . Dabei wird jedem geordneten Paar $[a; b] \in G \times G \setminus \{0\}$ mit $b \mid a$ genau ein c aus G zugeordnet, so daß gilt:

$$b \cdot c = a.$$

Die *Division mit Rest* ist in G stets ausführbar.

Also $r_n | r_{n-1}, r_n | r_{n-2}, \dots, r_n | r_1, r_n | b, r_n | a$.

Damit ist r_n gemeinsamer Teiler von $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, b, a$.

Nun ist noch zu zeigen, daß jeder gemeinsame Teiler von a und b auch Teiler von r_n ist.

t sei ein beliebiger Teiler von a und b .

Liest man die Gleichungen von oben nach unten, so gilt

$$t | r_1,$$

denn aus $t | b$ und $t | b \cdot q_0 + r_1$ folgt $t | r_1$.

Es gilt

$$t \cdot x = b \quad \text{und} \quad t \cdot y = b \cdot q_0 + r_1. \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

Daraus folgt:

$$t \cdot y = t \cdot x \cdot q_0 + r_1.$$

Das ist aber

$$t(y - x \cdot q_0) = r_1 \quad \text{und damit} \quad t | r_1.$$

Weiter gilt:

$$t | r_2, t | r_3, \dots, t | r_n,$$

was sich in gleicher Weise beweisen läßt.

Damit ist gezeigt, daß

$$r_n = (a, b),$$

q. e. d.

BEISPIEL 1 (2.3.3.):

$$d = (158\ 185, 208\ 182)$$

$$208\ 182 = 158\ 185 \cdot 1 + 49\ 997$$

$$158\ 185 = 49\ 997 \cdot 3 + 8\ 194$$

$$49\ 997 = 8\ 194 \cdot 6 + 833$$

$$8\ 194 = 833 \cdot 9 + 697$$

$$833 = 697 \cdot 1 + 136$$

$$697 = 136 \cdot 5 + 17$$

$$136 = 17 \cdot 8 + 0$$

17 ist der letzte von Null verschiedene Rest und damit der größte gemeinsame Teiler von 158 185 und 208 182.

$$17 = (158\ 185, 208\ 182)$$

Außerdem gilt:

$$17 | 136, 17 | 697, 17 | 833, 17 | 8194, 17 | 49\ 997.$$

Für dieses Zahlenpaar zeigt sich deutlich der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber der Zerlegung in Primfaktoren, wie sie in Teil 2.2.1. (↗ 23 ff.) erfolgte.

Der Leser überzeuge sich durch Rechnen selber davon.

BEISPIEL 2 (2.3.3.):

$$d = (174527, 123445)$$

$$174527 = 123445 \cdot 1 + 51082$$

$$123445 = 51081 \cdot 2 + 21281$$

$$51082 = 21281 \cdot 2 + 8520$$

$$21281 = 8520 \cdot 2 + 4241$$

$$8520 = 4241 \cdot 2 + 38$$

$$4241 = 38 \cdot 111 + 23$$

$$38 = 23 \cdot 1 + 15$$

$$23 = 15 \cdot 1 + 8$$

$$15 = 8 \cdot 1 + 7$$

$$8 = 7 \cdot 1 + 1$$

$$7 = 1 \cdot 7 + 0$$

Die beiden Zahlen 174527 und 123445 sind *teilerfremd* ($d = 1$).

Es könnte die Frage auftauchen, wie man vorzugehen hat, wenn der g. g. T. von einer positiven und einer negativen oder zwei negativen Zahlen ermittelt werden soll.

Wir erinnern uns daran, daß Teilbarkeitsaussagen Aussagen über Klassen zueinander assoziierter Elemente sind.

Somit können wir uns bei den praktischen Rechnungen auf natürliche Zahlen beschränken, d. h.:

Ist $d = (a, b)$ bekannt, so kennen wir auch $d_1 = (-a, b)$, $d_2 = (a, -b)$, $d_3 = (-a, -b)$.

Eine weitere Frage könnte lauten:

Wie ermittelt man mit Hilfe des EUKLIDischen Algorithmus den g. g. T. von mehr als zwei Zahlen?

SATZ 2 (2.3.3.):

Für den größten gemeinsamen Teiler gilt:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Beweis:

Es seien $d^* = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ und $d = (d^*, a_n)$. Damit ist $d \mid a_n$ und $d \mid d^*$. Es gilt aber auch wegen $d^* \mid a_1, \dots, d^* \mid a_{n-1}$:

$$d \mid a_1, \dots, d \mid a_{n-1}.$$

Außerdem gilt für jeden gemeinsamen Teiler t von a_1, a_2, \dots, a_n :

$$t \mid d^* \text{ und } t \mid a_n, \text{ also } t \mid d.$$

Damit ist $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

q. e. d.

BEISPIEL 3 (2.3.3.):

$$d = (45087, 24510, 437)$$

$$d^* = (45087, 24510) \quad \text{und} \quad d = (d^*, 437)$$

$$\text{oder} \quad d = ((45087, 24510), 437)$$

$$45087 = 24510 \cdot 1 + 20577$$

$$24510 = 20577 \cdot 1 + 3933$$

$$20577 = 3933 \cdot 5 + 912$$

$$3933 = 912 \cdot 4 + 285$$

$$912 = 285 \cdot 3 + 57$$

$$285 = 57 \cdot 5 + 0 \quad d^* = 57$$

$$d = (57, 437)$$

$$437 = 57 \cdot 7 + 38$$

$$57 = 38 \cdot 1 + 19$$

$$38 = 19 \cdot 2 + 0$$

$$d = 19$$

Mit Hilfe des EUKLIDISCHEN Algorithmus läßt sich ein weiterer wichtiger Satz über den g.g.T. von a und b mit $b \neq 0$ herleiten.

SATZ 3 (2.3.3.):

Zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen a und b gibt es stets zwei ganze Zahlen x und y , so daß gilt
 $(a, b) = ax + by$.

$(a, b) = ax + by$ nennt man **Linearkombination** des größten gemeinsamen Teilers von a und b aus a und b .

Beweis:

Ausgehend vom EUKLIDISCHEN Algorithmus

$$a = bq_0 + r_1 \quad \text{mit} \quad r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2 \quad \text{mit} \quad r_2 < r_1$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n \quad \text{mit} \quad r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_nq_n + 0$$

erhält man beim Lesen von oben nach unten r_1 als Linearkombination von a und b .

$$r_1 = a - b \cdot q_0$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man r_2 ebenfalls als Linearkombination von a und b .

$$r_2 = b - r_1q_1$$

$$r_2 = b - q_1(a - b \cdot q_0)$$

$$r_2 = -q_1 \cdot a + b(1 + q_0q_1)$$

Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Die vorletzte Gleichung liefert dann r_n , den g.g.T. von a und b als Linearkombination von a und b . q.e.d.

BEISPIEL 4 (2.3.3.):

Es ist $d = (49, 84)$ in der Form $d = 49x + 84y$ mit $x, y \in G$ darzustellen.

a) Ermitteln von d nach dem EUKLIDISCHEN Algorithmus

$$84 = 49 \cdot 1 + 35$$

$$49 = 35 \cdot 1 + 14$$

$$35 = 14 \cdot 2 + 7$$

$$14 = 7 \cdot 2 + 0 \quad d = 7$$

b) Darstellen von 7 als Linearkombination aus 49 und 84

Wir formen um:

$$35 = 84 - 49$$

$$14 = 49 - 35$$

$$7 = 35 - 14 \cdot 2$$

35 ist Linearkombination von 84 und 49.

Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir:

14 als Linearkombination von 84 und 49.

$$14 = 49 - (84 - 49) = -84 + 49 \cdot 2$$

Nach Einsetzen der ersten und zweiten Gleichung in die dritte erhalten wir:
7 als Linearkombination von 84 und 49.

$$7 = (84 - 49) - (-84 + 49 \cdot 2) \cdot 2 = 84 - 49 + 2 \cdot 84 - 49 \cdot 4$$

$$7 = 84 \cdot 3 + 49 \cdot (-5)$$

Wir erhalten: $x = -5$ und $y = 3$.

Mit der Gültigkeit von Satz 3 (2.3.3.) haben wir uns in die Lage versetzt, folgenden Satz zu beweisen, der bereits beim Beweis des Fundamentalsatzes (\nearrow 24ff., Satz 3 (2.2.1.)) Anwendung fand.

SATZ 4 (2.3.3.):

Ist eine Primzahl p Teiler eines Produktes zweier natürlicher Zahlen a und b , dann ist sie Teiler von wenigstens einem dieser Faktoren.

Der Satz läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$\forall p \forall a \forall b; p \mid a \cdot b \rightarrow p \mid a \vee p \mid b.$$

(Hier wird p als Variable für Primzahlen verwendet.)

Diesem ist äquivalent

$$\forall p \forall a \forall b; p \mid a \cdot b \wedge p \nmid b \rightarrow p \mid a.$$

Mit Hilfe einer Wahrheitswertetabelle überprüfe der Leser die logische Äquivalenz.

Beweis von Satz 4 (2.3.3.):

Voraussetzung: $p \mid a \cdot b \wedge p \nmid b$

Wegen $p \nmid b$ folgt: p und b sind teilerfremd, das heißt,

$$(p, b) = 1.$$

Es gibt ein x und ein y aus G , so daß gilt:

$$1 = p \cdot x + b \cdot y$$

(nach Satz 3 (2.3.3.))

Nach Multiplikation mit a folgt: $a = p \cdot a \cdot x + b \cdot a \cdot y$.

Nach Voraussetzung gilt aber

$$p \mid b \cdot a \quad \text{und damit} \quad p \mid b \cdot a \cdot y,$$

außerdem gilt

$$p \mid p \quad \text{und damit} \quad p \mid p \cdot a \cdot x.$$

Aus $p \mid b \cdot a \cdot y$ und $p \mid p \cdot a \cdot x$ folgt aber

$$p \mid a,$$

q.e.d.

3.1. Kongruenz modulo m in G und Restklassen

Die Untersuchungen in Teil 3.1. beziehen sich auf den Bereich der ganzen Zahlen. Sie bauen auf der *Lehre von der Teilbarkeit ganzer Zahlen* (↗ Teil 2.) auf.

3.1.1. Definitionen und Sätze

DEFINITION 1 (3.1.1.):

Es seien a, b, m ganze Zahlen mit $m > 0$.

Dann heißt a kongruent b modulo m genau dann, wenn

$$m \mid a - b.$$

In Zeichen: $a \equiv b \pmod{m}$ oder

$$a \equiv b \pmod{m}$$

(↗ [1], S. 41)

Wie wir wissen, ist $m \mid a - b$ gleichbedeutend damit, daß es eine ganze Zahl g gibt, für die gilt:

$$a - b = g \cdot m.$$

Davon werden wir im folgenden oft Gebrauch machen.

Gilt die Kongruenz nicht, dann schreibt man: $a \not\equiv b \pmod{m}$.

BEISPIEL 1 (3.1.1.):

a) $2 \equiv 7 \pmod{5}$, denn $5 \mid 2 - 7$

b) $2 \equiv \bar{2} \pmod{5}$, denn $5 \mid 2 - 2$

c) $2 \not\equiv 8 \pmod{5}$, denn $5 \nmid 2 - 8$

d) $-3 \equiv 2 \pmod{5}$, denn $5 \mid -3 - 2$

Betrachten wir die durch $a \equiv b \pmod m$ beschriebene Kongruenz in G , so zeigt sich, daß diese Relation für jede ganze Zahl $m > 0$ eine Äquivalenzrelation ist.

Begründung:

Es sei m eine feste positive ganze Zahl.

Dann gilt:

(1) Die Relation ist *reflexiv*.

Es gilt $a \equiv a \pmod m$, denn $a - a = 0$ und $m \mid 0$.

(2) Sie ist *symmetrisch*.

Aus $a \equiv b \pmod m$ folgt $b \equiv a \pmod m$.

Nach Definition 1 (3.1.1.) gibt es ein g mit $a - b = g \cdot m$; dann gilt aber auch:

$$b - a = (-g) \cdot m.$$

Das entspricht der Konklusion.

(3) Sie ist *transitiv*.

Aus $a \equiv b \pmod m$ und $b \equiv c \pmod m$ folgt $a \equiv c \pmod m$.

Es gibt Zahlen g_1 und g_2 , so daß gilt:

$$a - b = g_1 \cdot m$$

$$b - c = g_2 \cdot m$$

(nach Voraussetzung)

Daraus folgt:

$$a - b + b - c = (g_1 + g_2) m,$$

das heißt: $a - c = (g_1 + g_2) m$.

Die Summe zweier ganzer Zahlen g_1, g_2 ist wieder eine ganze Zahl.

Diese nennen wir g_3 .

Es gilt dann $a - c = g_3 \cdot m$.

Das bedeutet aber $a \equiv c \pmod m$ und entspricht der Konklusion.

Die Kongruenz modulo m bewirkt in G eine **Klasseneinteilung**. Man nennt diese Klassen **Restklassen mod m** .

Mit $[a]_m$ bezeichnen wir die Restklasse mod m , die die ganze Zahl a enthält. Alle die ganzen Zahlen, die zu a kongruent nach dem Modul m sind, gehören in ein und dieselbe Restklasse.

$$[a]_m = \{b; b \in G \wedge b \equiv a \pmod m\}$$

Zwei Restklassen $[a]_m$ und $[b]_m$ sind genau dann einander gleich, wenn ihre Elemente zueinander kongruent nach dem Modul m sind, das heißt:

$$[a]_m = [b]_m \leftrightarrow a \equiv b \pmod m.$$

Beispiel 2 (3.1.1.) zeigt eine Klasseneinteilung von G mod m .

3.1.

BEISPIEL 2 (3.1.1.):

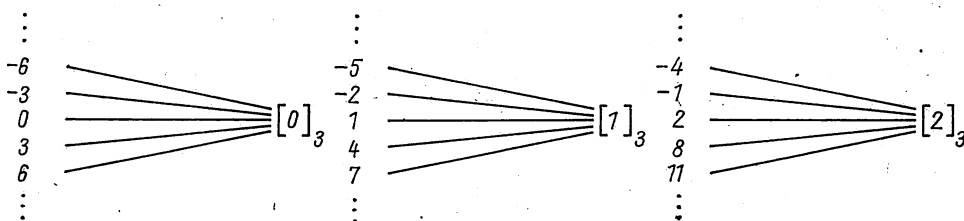
Wir wählen $m = 3$, untersuchen also die Relation

$$a \equiv b \pmod{3}.$$

Wir erhalten drei Restklassen, nämlich $[0]_3$, $[1]_3$, $[2]_3$ (Bild 46/1).

Es handelt sich hierbei um eine eindeutige Abbildung von G auf die Menge der Restklassen mod 3.

Ausgehend von der unendlichen Menge G erhalten wir endlich viele Klassen. Jede Klasse enthält aber unendlich viele ganze Zahlen als Elemente.



46/1

BEISPIEL 3 (3.1.1.):

Es sei $a \equiv b \pmod{10}$.

Es entstehen 10 Restklassen:

$$[0]_{10}, [1]_{10}, [2]_{10}, [3]_{10}, [4]_{10}, [5]_{10}, [6]_{10}, [7]_{10}, [8]_{10}, [9]_{10}$$

Die Elemente der Restklassen mod 10 lassen sich sehr schnell ermitteln, da nur die letzte Grundziffer der ganzen Zahlen ausschlaggebend ist.

So gilt:

$$13 \in [3]_{10}, \text{ weil } 13 \equiv 3 \pmod{10};$$

$$25 \in [5]_{10}, \text{ weil } 25 \equiv 5 \pmod{10} \quad \text{usw.}$$

Die Beispiele 2 (3.1.1.) und 3 (3.1.1.) lassen vermuten, daß es zu jedem Modul m jeweils m Restklassen gibt, und zwar die Restklassen

$$[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m.$$

Der Beweis von Satz 1 (3.1.1.) wird unsere Vermutung bestätigen und gleichzeitig die Bezeichnung „Restklasse“ motivieren.

SATZ 1 (3.1.1.):

Es gilt $a \equiv b \pmod{m}$ genau dann, wenn a und b bei der Division mit Rest durch m den gleichen Rest r mit $0 \leq r < m$ lassen.

Daraus folgt:

Es gibt genau m Restklassen mod m , nämlich die Restklassen

$$[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m.$$

(↗ [27], S. 2)

Die Zahlen $0, 1, \dots, m-1$ bilden ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen mod m , das auch kleinstes nichtnegatives Repräsentantensystem genannt wird.

Beweis von Satz 1 (3.1.1.):

Wir zerlegen die Äquivalenz in zwei Implikationen.

1. *Implikation* (in Kurzfassung):

Wenn $a \equiv b \pmod{m}$, so lassen a und b den gleichen Rest r .

Nach Voraussetzung gilt $a \equiv b \pmod{m}$, d. h., es gibt eine Zahl g mit

$$a - b = g \cdot m.$$

Läßt nun a bei Division durch m den Rest r , gilt also

$$(*) \quad a = q \cdot m + r$$

und setzt man die Voraussetzung in (*) ein, so ergibt sich

$$q \cdot m + r - b = g \cdot m$$

und damit

$$b = q \cdot m - g \cdot m + r$$

oder $b = (q - g)m + r$,

d. h., auch b läßt bei Division durch m den Rest r ,

q. e. d.

2. *Implikation* (in Kurzfassung):

Wenn a und b bei Division durch m den gleichen Rest r lassen, dann ist $a \equiv b \pmod{m}$.

Es gilt $a = q_1 \cdot m + r$

und $b = q_2 \cdot m + r$ mit $0 \leq r < m$.

(nach Voraussetzung)

Daraus folgt

$$a - b = q_1 \cdot m - q_2 \cdot m,$$

also $a - b = (q_1 - q_2) \cdot m$.

Das bedeutet nach Definition 1 (3.1.1.)

$$a \equiv b \pmod{m},$$

q. e. d.

3.1.

Die Elemente der Restklasse $[0]_m$ lassen sich in der Form $mx + 0$ darstellen.
Die Elemente der Restklasse $[1]_m$ lassen sich in der Form $mx + 1$ darstellen.
.....
Die Elemente der Restklasse $[m - 1]_m$ lassen sich in der Form $mx + (m - 1)$ darstellen.

Die Restklasse $[0]_m$ enthält demnach alle die ganzen Zahlen a , die bei Division durch m den Rest 0 lassen, das heißt aber, m ist ein Teiler dieser Zahlen.

$$\begin{aligned} [0]_m &= \{a; a \in G \wedge a \equiv 0 \pmod{m}\} \\ &= \{a; a \in G \wedge m \mid a\} \end{aligned}$$

Wir können daher für $a \equiv 0 \pmod{m}$ als gleichwertige Darstellung $m \mid a$ verwenden.

Vorbereitende Übungen zu der angeführten Thematik sind bereits im Lehrstoff des Mathematikunterrichts der Unterstufe enthalten. Das soll an einigen Beispielen aus dem Unterricht in Klasse 3 gezeigt werden.

BEISPIEL 4 (3.1.1.):

- Ermittle je fünf Zahlen, die beim Dividieren durch 5 den Rest 4 lassen, durch 10 den Rest 7 lassen, durch 8 den Rest 3 lassen, durch 3 den Rest 2 lassen!
- Dividiere die Zahlen 15, 16, 17, ..., 30 durch 5!
Welche Zahlen treten als Reste auf?
Welcher Rest kann auftreten, wenn man durch 2, 3, 6, 7 dividiert?

In Beispiel 5 (3.1.1.) finden wir Anwendungen des Satzes 1 (3.1.1.).

BEISPIEL 5 (3.1.1.):

- Wir haben nachgewiesen, daß $-3 \equiv 2 \pmod{5}$ gilt.
Es muß nach Satz 1 (3.1.1.) -3 bei Division durch 5 den gleichen Rest r mit $0 \leq r < 5$ lassen wie 2.
 $2 = 0 \cdot 5 + 2$
 $-3 = (-1) \cdot 5 + 2$
Der Rest ist in beiden Fällen 2.
- $23 \equiv 17 \pmod{3}$, denn $23 = 7 \cdot 3 + 2$ und $17 = 5 \cdot 3 + 2$.
Es gilt aber auch
 $23 \equiv -1 \pmod{3}$, denn $23 = 7 \cdot 3 + 2$ und $-1 = (-1) \cdot 3 + 2$.

Weitere Beispiele bilde der Leser selber.

Die Kongruenz mod m kann als eine Gleichheit bis auf Vielfache von m oder als eine Restgleichheit bei Division durch m betrachtet werden.

3.1.2.

Operationen in der Menge der Restklassen modulo m

Bevor wir in der Menge der Restklassen mod m die Operationen *Addition* und *Multiplikation* erklären, wollen wir uns zwei Sätzen zuwenden, die die Grundlage dafür bilden und auch im weiteren Verlauf vielfach Anwendung finden.

SATZ 1 (3.1.2.):

Aus $a \equiv a_1 \pmod{m}$ und $b \equiv b_1 \pmod{m}$ folgt
 $a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod{m}$.

Beweis:

Es gibt zwei ganze Zahlen g_1, g_2 , so daß gilt:

$$a = a_1 + g_1 \cdot m$$

$$b = b_1 + g_2 \cdot m \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

Daraus folgt

$$a + b = a_1 + b_1 + (g_1 + g_2) m.$$

Die Summe der beiden ganzen Zahlen g_1, g_2 ist wieder eine ganze Zahl, die wir g_3 nennen.

Es gilt dann:

$$a + b = a_1 + b_1 + g_3 \cdot m.$$

Das bedeutet aber:

$$a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod{m}$$

und entspricht der Konklusion,

q. e. d.

SATZ 2 (3.1.2.):

Aus $a \equiv a_1 \pmod{m}$ und $b \equiv b_1 \pmod{m}$ folgt:
 $a \cdot b \equiv a_1 \cdot b_1 \pmod{m}$.

Beweis:

Es gibt zwei ganze Zahlen g_1, g_2 , so daß gilt:

$$a = a_1 + g_1 \cdot m$$

$$b = b_1 + g_2 \cdot m \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

Daraus folgt:

$$a \cdot b = (a_1 + g_1 m) (b_1 + g_2 m).$$

Das ist aber:

$$a \cdot b = a_1 b_1 + (a_1 g_2 + b_1 g_1 + g_1 g_2 m) m.$$

$(a_1 g_2 + b_1 g_1 + g_1 g_2 m)$ m ist eine ganze Zahl, die wir g_3 nennen.
Es gilt dann:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + g_3 \cdot m,$$

das bedeutet aber:

$$a \cdot b \equiv a_1 \cdot b_1 \pmod{m}$$

und entspricht der Konklusion,

q. e. d.

Wenden wir die Äquivalenz

$$[a]_m = [b]_m \text{ genau dann, wenn } a \equiv b \pmod{m}$$

(↗ 45) auf die Sätze 1 (3.1.2.) und 2 (3.1.2.) an, dann erhalten wir folgende Folgerungsaussagen über Restklassen.

Aus $[a]_m = [a_1]_m$ und $[b]_m = [b_1]_m$ folgt:

$$[a + b]_m = [a_1 + b_1]_m.$$

Aus $[a]_m = [a_1]_m$ und $[b]_m = [b_1]_m$ folgt:

$$[a \cdot b]_m = [a_1 \cdot b_1]_m.$$

Damit sind wir in der Lage, in der Menge der Restklassen mod m die Operationen **Addition** und **Multiplikation** zu erklären.

DEFINITION 1 (3.1.2.):

Mit der **Summe**

$$[a]_m + [b]_m =_{\text{Def}} [a + b]_m$$

ist eine eindeutige Abbildung von der Menge aller geordneten Paare der Restklassen mod m auf die Menge der Restklassen mod m gegeben.

Diese eindeutige Abbildung nennen wir **Addition**.

DEFINITION 2 (3.1.2.):

Mit dem **Produkt**

$$[a]_m \cdot [b]_m =_{\text{Def}} [a \cdot b]_m$$

ist eine eindeutige Abbildung von der Menge aller geordneten Paare der Restklassen mod m auf die Menge der Restklassen mod m gegeben.

Diese eindeutige Abbildung nennen wir **Multiplikation**.

Bei der Addition und Multiplikation von Restklassen bedient man sich der Addition und Multiplikation ganzer Zahlen.

Es ist bedeutungslos, welche Repräsentanten der vorgegebenen Restklassen additiv bzw. multiplikativ verknüpft werden. Das Ergebnis bleibt das gleiche.

BEISPIEL 1 (3.1.2.):

$$\text{a) } [1]_3 + [2]_3 = [1 + 2]_3 = [3]_3 = [0]_3$$

$$\text{b) } [4]_6 + [1]_6 = [4 + 1]_6 = [5]_6$$

$$[10]_6 + [7]_6 = [10 + 7]_6 = [17]_6 = [5]_6$$

$$\text{c) } [2]_5 \cdot [3]_5 = [2 \cdot 3]_5 = [6]_5 = [1]_5$$

$$[-3]_5 \cdot [-2]_5 = [6]_5 = [1]_5$$

Addition und Multiplikation von Restklassen sind **kommutativ** und **assoziativ**.

Es gelten folgende Sätze, zu deren Beweis die Sätze 4 (1.), 2 (1.), 7 (1.) und 6 (1.) herangezogen werden.

SATZ 3 (3.1.2.):

$$[a]_m + [b]_m = [b]_m + [a]_m$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [a]_m + [b]_m &= [a + b]_m && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \\ &= [b + a]_m && \text{(nach Satz 4 (1.))} \\ &= [b]_m + [a]_m && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \end{aligned}$$

q. e. d.

SATZ 4 (3.1.2.):

$$[a]_m + ([b]_m + [c]_m) = ([a]_m + [b]_m) + [c]_m$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [a]_m + ([b]_m + [c]_m) &= [a]_m + [b + c]_m && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \\ &= [a + (b + c)]_m && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \\ &= [(a + b) + c]_m && \text{(nach Satz 2 (1.))} \\ &= ([a]_m + [b]_m) + [c]_m && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \end{aligned}$$

q. e. d.

SATZ 5 (3.1.2.):

$$[a]_m \cdot [b]_m = [b]_m \cdot [a]_m$$

3.2.

Beweis:

$$\begin{aligned} [a]_m \cdot [b]_m &= [a \cdot b]_m && \text{(nach Definition 2 (3.1.2.))} \\ &= [b \cdot a]_m && \text{(nach Satz 7 (1.))} \\ &= [b]_m \cdot [a]_m && \text{(nach Definition 2 (3.1.2.))} \end{aligned}$$

q. e. d.

Satz 6 (3.1.2.) *beweise* der Leser selber.

SATZ 6 (3.1.2.):

$$[a]_m \cdot ([b]_m \cdot [c]_m) = ([a]_m \cdot [b]_m) \cdot [c]_m$$

SATZ 7 (3.1.2.):

$$[a]_m \cdot ([b]_m + [c]_m) = [a \cdot b]_m + [a \cdot c]_m$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [a]_m \cdot ([b]_m + [c]_m) &= [a]_m \cdot ([b + c]_m) && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \\ &= [a \cdot (b + c)]_m && \text{(nach Definition 2 (3.1.2.))} \\ &= [a \cdot b + a \cdot c]_m && \text{(nach Satz 8 (1.))} \\ &= [a \cdot b]_m + [a \cdot c]_m && \text{(nach Definition 1 (3.1.2.))} \end{aligned}$$

q. e. d.

3.2.

Strukturbetrachtungen

3.2.1.

Restklassenring $G/(m)$

SATZ 1 (3.2.1.):

Die Menge der m Restklassen mod m bildet mit der erklärten Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselement, den Restklassenring von G mod m .

In Zeichen: $G/(m)$

Beweis:

A I Die Addition ordnet je zwei Restklassen $[a]_m$ und $[b]_m$ die Restklasse $[a + b]_m$ eindeutig zu.

A II Die Addition ist *assoziativ*.

$$[a]_m + ([b]_m + [c]_m) = ([a]_m + [b]_m) + [c]_m \quad (\text{nach Satz 4 (3.1.2.)})$$

A III₁ In der Menge der m Restklassen mod m existiert genau ein *Nullelement*, die Restklasse $[0]_m$.

Es gilt:

$$[a]_m + [0]_m = [a + 0]_m = [a]_m.$$

A III₂ In der Menge der m Restklassen existiert zu jeder Restklasse $[a]_m$ genau eine *entgegengesetzte Restklasse*, nämlich $[-a]_m$.

Es gilt:

$$[a]_m + [-a]_m = [0]_m.$$

A IV Die Addition ist *kommutativ*.

$$[a]_m + [b]_m = [b]_m + [a]_m \quad (\text{nach Satz 3 (3.1.2.)})$$

M I Die Multiplikation ordnet je zwei Restklassen $[a]_m$ und $[b]_m$ die Restklasse $[a \cdot b]_m$ *eindeutig* zu.

M II Die Multiplikation ist *assoziativ*.

$$[a]_m \cdot ([b]_m \cdot [c]_m) = ([a]_m \cdot [b]_m) \cdot [c]_m \quad (\text{nach Satz 6 (3.1.2.)})$$

D Addition und Multiplikation sind *distributiv* verknüpft.

$$[a]_m ([b]_m + [c]_m) = [a \cdot b]_m + [a \cdot c]_m \quad (\text{nach Satz 7 (3.1.2.)})$$

M IV Die Multiplikation ist *kommutativ*.

$$[a]_m \cdot [b]_m = [b]_m \cdot [a]_m \quad (\text{nach Satz 5 (3.1.2.)})$$

Außerdem gilt:

MIII₁ In der Menge der m Restklassen mod m existiert ein eindeutig bestimmtes *Einselement*, die Restklasse $[1]_m$.

Es gilt:

$$[a]_m \cdot [1]_m = [a \cdot 1]_m = [a]_m, \quad \text{q. e. d.}$$

In diesem Ring, der nur aus endlich vielen Elementen besteht, lassen sich die Operationen sehr einfach ausführen, da man nur mit den Repräsentanten, also mit ganzen Zahlen, rechnet.

Mit Hilfe von **Strukturtafeln** für die Addition und Multiplikation des Restklassenrings $G/(m)$ läßt sich das sehr übersichtlich darstellen.

An Beispielen wollen wir uns davon überzeugen.

BEISPIEL 1 (3.2.1.):

Wir wählen die Restklassenringe $G/(3)$ und $G/(8)$.

Wir vereinbaren, daß in die Strukturtafel nicht die Restklassen, sondern nur deren kleinste nichtnegative Repräsentanten geschrieben werden.

$G/(3)$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

54/1

Aus der *Strukturtafel der Addition* (Bild 54/1) geht hervor, daß die Restklasse $[2]_3$ die zur Restklasse $[1]_3$ entgegengesetzte Restklasse ist und umgekehrt, denn es gilt:

$$[1]_3 + [2]_3 = [2]_3 + [1]_3 = [0]_3.$$

Dabei ist $[2]_3 = [-1]_3$, da $2 \equiv -1 \pmod{3}$

und $[1]_3 = [-2]_3$, da $1 \equiv -2 \pmod{3}$.

Aus der *Strukturtafel der Multiplikation* (Bild 54/1) ist zu entnehmen, daß nur die Multiplikation mit der Restklasse $[0]_3$ die Restklasse $[0]_3$ ergibt.

An der *Symmetrie bezüglich der eingezeichneten Diagonalen* kann man die *Kommutativität der Operationen* erkennen.

 $G/(8)$

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

•	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

54/2

Wie auch für $G/(3)$ lassen beide Tafeln für $G/(8)$ erkennen, daß sowohl Addition als auch Multiplikation nicht aus der Menge herausführen (Bild 54/2).

Im Gegensatz zum vorangegangenen Beispiel ergibt hier nicht nur die Multiplikation mit der Restklasse $[0]_8$ die Restklasse $[0]_8$, sondern z. B. auch $[4]_8 \cdot [2]_8 = [0]_8$. Man sagt, in der Menge existieren *Nullteiler*.

DEFINITION 1 (3.2.1.):

Ein Element a aus einem Ring \mathfrak{R} heißt **Nullteiler**, wenn in \mathfrak{R} wenigstens ein Element $b \neq 0$ existiert mit

$$a \cdot b = b \cdot a = 0.$$

Nach Definition 1 (3.2.1.) ist das Nullelement $[0]_8$ (\nearrow Beispiel 1 (3.2.1.)) auf jeden Fall Nullteiler, aber auch die Restklassen $[4]_8$, $[2]_8$, $[6]_8$.

DEFINITION 2 (3.2.1.):

Ein Ring, der außer dem Nullelement keine weiteren Nullteiler enthält, heißt **nullteilerfrei**.

Nullteilerfreie Ringe sind beispielsweise $G/(3)$ (\nearrow Beispiel 1 (3.2.1.)), aber auch die Menge der ganzen Zahlen G .

3.2.2.*Prime Restklassen*

Bei $G/(3)$ (\nearrow Beispiel 1 (3.2.1.)) handelt es sich nicht nur um einen Ring, sondern sogar um einen **Körper**.

Um jedoch allgemeingültige Aussagen treffen zu können, müssen zunächst weitere Untersuchungen über $G/(m)$ angestellt werden.

SATZ 1 (3.2.2.):

Alle Elemente einer Restklasse $[a]_m$ haben mit m den gleichen größten gemeinsamen Teiler.

Voraussetzung: $a \equiv a^* \pmod{m}$

Behauptung: $(a, m) = (a^*, m)$

Beweis:

Es sei $d = (a, m)$ und $d^* = (a^*, m)$.

Damit gilt $d \mid a$ und $d \mid m$.

Außerdem gilt:

$$a - a^* = g \cdot m$$

oder
$$a^* = a - g \cdot m$$

(nach Definition 1 (3.1.1.))

Daraus folgt $d \mid a^*$.

Es ist demnach d gemeinsamer Teiler von a^* und m und d^* größter gemeinsamer Teiler von a^* und m .

3.2.

Nach Definition des g. g. T. ist jeder gemeinsame Teiler der Elemente a^* und m auch Teiler des g. g. T. von a^* und m .

Das heißt, aus $d \mid a^*$ und $d \mid m$ und $d^* = (a^*, m)$ folgt:

$$d \mid d^* .$$

Es ist aber auch $d^* \mid a^*$ und $d^* \mid m$, außerdem $a = a^* + g \cdot m$.

Daraus folgt: $d^* \mid a$.

Aus $d^* \mid a$ und $d^* \mid m$ und $d = (a, m)$ folgt:

$$d^* \mid d .$$

Aus $d \mid d^*$ und $d^* \mid d$ folgt aber $d \cong d^*$.

Da aber d und d^* positive ganze Zahlen sind, erhält man:

$$d = d^* ,$$

q. e. d.

DEFINITION 1 (3.2.2.):

$[a]_m$ heißt **prime Restklasse** genau dann, wenn $[a]_m$ eine Restklasse ist und a und m teilerfremd sind.

BEISPIEL 1 (3.2.2.):

a) Prime Restklassen sind:

$[1]_3$ und $[2]_3$, denn $(1, 3) = 1$ und $(2, 3) = 1$.

b) Die Elemente der Restklasse $[0]_3$ haben mit 3 den g. g. T. 3, daher ist $[0]_3$ keine prime Restklasse.

c) Prime Restklassen sind auch:

$[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8$.

d) Die Restklassen $[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8$ sind keine primen Restklassen, denn $(0, 8) = 8, (2, 8) = 2, (4, 8) = 4$ und $(6, 8) = 2$.

Wir betrachten nun die *Strukturtafeln der primen Restklassen mod 3 und mod 8 bezüglich der Multiplikation* (Bild 56/1).

Die definierte Multiplikation ist in den vorgegebenen Mengen uneingeschränkt ausführbar. Es zeigt sich weiterhin, daß keine Nullteiler existieren.

Prime Restklassen mod 3

•	1	2
1	1	2
2	2	1

Prime Restklassen mod 8

•	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

56/1

Zu jeder Restklasse $[a]_m$ gibt es genau eine Restklasse $[x]_m$, so daß gilt:

$$[a]_m \cdot [x]_m = [1]_m.$$

DEFINITION 2 (3.2.2.):

$[a^*]_m$ heißt **inverses Element** zu $[a]_m$ genau dann, wenn

$$[a^*]_m \cdot [a]_m = [1]_m.$$

Das zu $[a]_m$ inverse Element bezeichnen wir mit $[a]_m^{-1}$.

Die *Kommutativität* ist wieder an der Symmetrie bezüglich der eingezeichneten Diagonalen zu erkennen.

In jeder dieser Mengen existiert ein eindeutig bestimmtes *Einselement* $[1]_3$ bzw. $[1]_8$.

Die *Assoziativität* gilt nach Satz 6 (3.1.2.).

Damit ist gezeigt, daß sowohl die primen Restklassen mod 8 als auch die primen Restklassen mod 3 bezüglich der in $G/(m)$ definierten Multiplikation eine **Gruppe** bilden.

Bezüglich der Addition sind die Gruppeneigenschaften nicht erfüllt, da die Addition nicht uneingeschränkt ausführbar ist.

Zum Beispiel gilt $[1]_3 + [2]_3 = [0]_3$, jedoch $[0]_3$ ist keine prime Restklasse.

$[5]_8 + [1]_8 = [6]_8$, auch $[6]_8$ ist keine prime Restklasse.

SATZ 2 (3.2.2.):

Die primen Restklassen mod m bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, die prime Restklassengruppe mod m .

Beweis:

M I Die Multiplikation *führt nicht* aus der Menge *heraus*. Sind $[a]_m$ und $[b]_m$ prime Restklassen mod m , so ist auch $[a \cdot b]_m$ eine prime Restklasse, denn aus $(a, m) = 1$ und $(b, m) = 1$ folgt $(a \cdot b, m) = 1$.

M II Die Multiplikation ist *assoziativ*.

$$[a]_m ([b]_m \cdot [c]_m) = ([a]_m \cdot [b]_m) [c]_m \quad (\text{nach Satz 6 (3.1.2.)})$$

M III₁ Es existiert ein eindeutig bestimmtes *Einselement* $[1]_m$.

$[1]_m$ ist prime Restklasse, denn $(1, m) = 1$.

M-III₂ Es existiert zu jeder primen Restklasse eine inverse prime Restklasse.

q. e. d.

3.2.

Wir beweisen nun den unter M III₂ (↗ Beweis von Satz 2 (3.2.2.)) formulierten Satz.

Voraussetzung: $[a]_m$ sei eine prime Restklasse.

Behauptung: Zu $[a]_m$ existiert ein Inverses, das wiederum prime Restklasse ist.

Beweis:

Zunächst zeigen wir, daß $[a]_m$ in $G/(m)$ ein inverses Element hat.

Wir zeigen, daß es eine Restklasse $[x]_m$ gibt, die

$$[a]_m \cdot [x]_m = [1]_m$$

erfüllt.

Es ist $(a, m) = 1$.

(nach Voraussetzung)

Das kann man als Linearkombination aus a und m in der Form $1 = ax + my$ darstellen.

(nach Satz 3 (2.3.3.))

Das entspricht der Behauptung

$$[a]_m \cdot [x]_m = [1]_m.$$

Damit hat $[a]_m$ in $G/(m)$ ein inverses Element,

q. e. d.

Es wäre nun noch zu zeigen, daß $[x]_m$ eine prime Restklasse ist.

Wir haben damit die Voraussetzung geschaffen, um die den Teil 3.2.2. einleitende Vermutung (↗ 55) zu verallgemeinern.

SATZ 3 (3.2.2.):

Der Restklassenring $G/(m)$ ist genau dann ein Körper, wenn der Modul m eine Primzahl ist. Ist m keine Primzahl, dann enthält der Ring $G/(m)$ mit $m > 1$ Nullteiler.

(↗ [24, S. 52])

Beweis:

Es sei $m = p$ Primzahl.

Die Restklassen $[a]_p$ mit $a = 1, \dots, p-1$ sind prime Restklassen. Diese bilden eine multiplikative Gruppe.

(nach Satz 2 (3.2.2.))

$G/(p)$ bildet einen Ring.

(nach Satz 1 (3.2.1.))

Damit bildet $G/(p)$ einen Körper,

q. e. d.

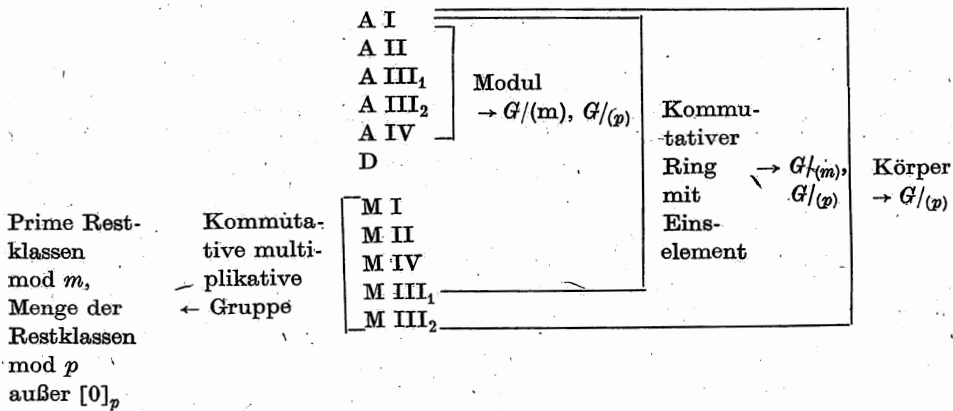
Ist m keine Primzahl, so hat m mindestens einen nichttrivialen Teiler t mit $0 < t < m$.

Es ist dann $[t]_m$ mit $(t, m) = t$ keine prime Restklasse, sondern Nullteiler in $G/(m)$.

In diesem Fall ist $G/(m)$ kein Körper.

Es folgt eine Übersicht über die Strukturen der Menge der Restklassen mod m .

Strukturen der Menge der Restklassen mod m



3.3.

Anwendungen des Rechnens mit Kongruenzen

In Teil 3.3. wollen wir uns auf einfache Anwendungen der Kongruenzrechnung beschränken und besonders solche Beispiele betrachten, die im Mathematikunterricht der Schule auftreten. Dazu gehören beispielsweise die *Teilbarkeitsregeln*.

Teilbarkeitsregeln

Wir gehen davon aus, daß sich jede natürliche Zahl a als Summe von Vielfachen der Zehnerpotenzen darstellen läßt.

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

Die a_i mit $i = 0, 1, \dots, n$ sind natürliche Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 9$.

Die in Teil 3.1.1. gewonnene Erkenntnis, daß $m \mid a$ dem Ausdruck $a \equiv 0 \pmod{m}$ gleichwertig ist, wollen wir bei der Herleitung der Teilbarkeitsregeln nutzen.

Jede Zehnerpotenz ist nach einem Modul m kongruent einem Rest r .

$$10^0 \equiv r_0 \pmod{m}$$

$$10^1 \equiv r_1 \pmod{m}$$

$$10^2 \equiv r_2 \pmod{m}$$

$$10^n \equiv r_n \pmod{m}$$

3.3.

Dann ist

$$\begin{aligned} a_0 10^0 &\equiv a_0 r_0 \pmod{m} \\ a_1 10^1 &\equiv a_1 r_1 \pmod{m} \\ \dots &\dots \\ a_n 10^n &\equiv a_n r_n \pmod{m} \end{aligned} \quad (\text{nach Satz 2 (3.1.2.)})$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} &(a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0 10^0) \\ &\equiv (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0 r_0) \pmod{m} \end{aligned} \quad (\text{nach Satz 1 (3.1.2.)})$$

oder $(*) a \equiv (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0 r_0) \pmod{m}.$

SATZ 1 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beweis:

$$10^0 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$10^1 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$10^2 \equiv 1 \pmod{9}$$

Wir behaupten, daß $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und führen den *Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion.*

1. Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn $10^0 \equiv 1 \pmod{9}.$

2. Induktionsschritt: Wir zeigen, daß aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $n = k$, also $10^k \equiv 1 \pmod{9}.$

Induktionsbehauptung: Die Behauptung ist auch für $n = k + 1$ richtig, also $10^{k+1} \equiv 1 \pmod{9}.$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$10^k \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10 \pmod{9} \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung und Satz 2 (3.1.2.)})$$

$$10^{k+1} \equiv 10 \pmod{9}$$

Da aber $10 \equiv 1 \pmod{9}$, gilt

$$10^{k+1} \equiv 1 \pmod{9}.$$

Das entspricht der Induktionsbehauptung.

Schlußfolgerung: $10^n \equiv 1 \pmod{9}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}.$

Setzen wir unser Ergebnis in (*) (\nearrow 60) ein, so ergibt sich für a :

$$a \equiv (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \pmod{9}.$$

Dabei ist $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ die Quersumme von a .

Gilt nun

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \equiv 0 \pmod{9},$$

dann ist a durch 9 teilbar; gilt dagegen

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \not\equiv 0 \pmod{9},$$

dann ist a nicht durch 9 teilbar,

q. e. d.

SATZ 2 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Der *Beweis* von Satz 2 (3.3.) erfolgt analog dem Beweis von Satz 1 (3.3.).

SATZ 3 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Grundziffer eine durch 2 teilbare Zahl darstellt.

Beweis:

$$10^0 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$10^1 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$10^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$10^n \equiv 0 \pmod{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denn alle Zehnerpotenzen außer 10^0 sind gerade Zahlen und damit Elemente der Restklasse $[0]_2$.

Eingesetzt in (*) (\nearrow 60) ergibt sich für a

$$a \equiv (a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 1) \pmod{2}$$

$$a \equiv a_0 \pmod{2}.$$

Gilt nun $a_0 \equiv 0 \pmod{2}$, dann ist a durch 2 teilbar; gilt dagegen

$$a_0 \not\equiv 0 \pmod{2},$$

dann ist a nicht durch 2 teilbar,

q. e. d.

SATZ 4 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Grundziffer 0 ist.

SATZ 5 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Grundziffer 0 oder 5 ist.

Die Sätze 4 (3.3.) und 5 (3.3.) *beweise* der Leser selber.

SATZ 6 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 8 teilbar, wenn die durch die letzten drei Grundziffern in der vorgegebenen Reihenfolge dargestellte Zahl durch 8 teilbar ist.

Beweis:

$$10^0 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$10^1 \equiv 2 \pmod{8}$$

$$10^2 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$10^3 \equiv 0 \pmod{8}$$

$$10^n \equiv 0 \pmod{8} \text{ für alle } n \geq 3$$

Den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion führe der Leser analog dem Beweis von Satz 1 (3.3.).

Wir erhalten

$$a \equiv (a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_2 \cdot 4 + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 1) \pmod{8}.$$

Aus Zweckmäßigkeitsgründen und in Analogie zum vorgegebenen Satz sind die zu 2 bzw. 4 kongruenten Elemente 10 bzw. 100 einzusetzen.

$$a \equiv (a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0) \pmod{8}$$

Gilt nun

$$a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv 0 \pmod{8},$$

dann ist a durch 8 teilbar; gilt dagegen

$$a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 \not\equiv 0 \pmod{8},$$

dann ist a *nicht* durch 8 teilbar,

q. e. d.

SATZ 7 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die durch die letzten zwei Grundziffern in der vorgegebenen Reihenfolge dargestellte Zahl durch 4 teilbar ist.

Auf den *Beweis* wird verzichtet.

SATZ 8 (3.3.):

Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} 10^0 &\equiv 1 \pmod{11} \\ 10^1 &\equiv 10 \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11} \\ 10^2 &\equiv 1 \pmod{11} \\ 10^3 &\equiv 10 \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11} \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und führen den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion.

1. *Induktionsanfang:* Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn $10^0 \equiv (-1)^0 \pmod{11}$, da $10^0 = (-1)^0 = 1$.

2. *Induktionsschritt:* Wir zeigen, daß aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $n = k$, also $10^k \equiv (-1)^k \pmod{11}$.

Induktionsbehauptung: Die Behauptung gilt auch für $n = k + 1$, also $10^{k+1} \equiv (-1)^{k+1} \pmod{11}$.

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned} 10^k \cdot 10 &\equiv (-1)^k \cdot 10 \pmod{11} \\ 10^{k+1} &\equiv (-1)^k \cdot 10 \pmod{11} \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned} 10 &\equiv (-1) \pmod{11}, \text{ gilt} \\ 10^{k+1} &\equiv (-1)^{k+1} \pmod{11}. \end{aligned}$$

Das entspricht der Induktionsbehauptung.

Schlußfolgerung:

$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11} \text{ gilt für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Eingesetzt in (*) (\nearrow 60) erhalten wir

$$a \equiv (a_n (-1)^n + a_{n-1} (-1)^{n-1} + \dots + (-a_3) + a_2 - a_1 + a_0) \pmod{11}.$$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$ ist die alternierende Quersumme von a . Gilt nun

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \equiv 0 \pmod{11},$$

dann ist n durch 11 teilbar; gilt dagegen

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (1)^n a_n \equiv 0 \pmod{11},$$

dann ist a nicht durch 11 teilbar,

q. e. d.

Neuner- und Elferprobe

In Satz 1 (3.3.) stellten wir fest, daß die Zahl a in dieselbe Restklasse gehört wie ihre Quersumme nach dem Modul 9, d. h., Zahl und Quersumme lassen bei Division durch 9 denselben Rest. Wir nennen ihn **Neunerrest**.

Ebenfalls erkannten wir, daß die Zahl a und ihre alternierende Quersumme nach dem Modul 11 in dieselbe Restklasse gehören. Zahl und alternierende Quersumme lassen bei Division durch 11 denselben Rest. Diesen nennen wir **Elferrest**.

Wir setzen *ohne Beweis* voraus, daß der **Neunerrest (Elferrest) einer Summe gleich der Summe der Neunerreste (Elferreste) der Summanden** ist.

Damit sind wir in der Lage, durchgeführte *Additionen* in gewisser Hinsicht zu überprüfen. Die Rechenproben nennen wir **Neunerrestprobe** bzw. **Elferrestprobe**.

Ist das Ergebnis einer Additionsaufgabe richtig ermittelt, dann muß der Neunerrest (Elferrest) der Summe gleich der Summe der Neunerreste (Elferreste) der Summanden sein.

Diese Implikation läßt sich jedoch nicht umkehren, da bei Übereinstimmung der Neunerreste bzw. der Elferreste das Ergebnis nicht notwendig richtig sein muß, da beispielsweise eine veränderte Reihenfolge der Ziffern zur gleichen Quersumme führt bzw. zur gleichen alternierenden Quersumme führen kann. Trotzdem liefern uns diese Rechenproben die Möglichkeit, gewisse Fehler zu finden.

BEISPIEL 1 (3.3.):

$$\begin{aligned} 237 &\equiv 12 \pmod{9} \\ 3986 &\equiv 26 \pmod{9} \\ 172 &\equiv 10 \pmod{9} \\ \underline{85413} &\equiv 21 \pmod{9} \\ 89808 &\equiv 33 \pmod{9} \end{aligned}$$

$$[3]_9 + [8]_9 + [1]_9 + [3]_9 = [15]_9 = [6]_9$$

Die Summe gehört ebenfalls in die Restklasse $[6]_9$, denn $33 \equiv 6 \pmod{9}$.

$$\begin{aligned} 237 &\equiv 6 \pmod{11} \\ 3986 &\equiv 4 \pmod{11} \\ 172 &\equiv -4 \pmod{11} \\ \underline{85413} &\equiv 9 \pmod{11} \\ 89808 &\equiv 15 \pmod{11} \end{aligned}$$

$$[6]_{11} + [4]_{11} + [-4]_{11} + [9]_{11} = [15]_{11} = [4]_{11}$$

Auch hier wurde wieder Übereinstimmung erzielt.

Da sowohl bei Anwendung der Neunerrestprobe als auch der Elferrestprobe die Ergebnisse übereinstimmen, ist mit einiger Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die Addition richtig ausgeführt wurde.

In gleicher Weise läßt sich die Neuner- und Elferrestprobe bei *Multiplikationen* anwenden.

Es ist der Neunerrest (Elferrest) eines Produktes gleich dem Produkt der Neunerreste (Elferreste) der Faktoren.

BEISPIEL 2 (3.3.):

$$235 \cdot 37 \cdot 29 = 252155$$

$$252155 \equiv 2 \pmod{11}, \text{ d. h. Element der Restklasse } [2]_{11}$$

$$235 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$37 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$29 \equiv 7 \pmod{11}$$

$$[4]_{11} \cdot [4]_{11} \cdot [7]_{11} = [112]_{11} = [2]_{11}$$

$$252155 \equiv 2 \pmod{9}, \text{ d. h. Element der Restklasse } [2]_9$$

$$235 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$37 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$29 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$[1]_9 \cdot [1]_9 \cdot [2]_9 = [2]_9$$

Auch hier können wir mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die Multiplikation richtig ausgeführt wurde, da wir sowohl nach der Neunerrestprobe als auch nach der Elferrestprobe Übereinstimmung in den Ergebnissen erzielten.

Weitere Beispiele zur Anwendung des Rechnens mit Kongruenzen

BEISPIEL 3 (3.3.):

Auf welche Ziffer enden die Zahlen

a) 6^{312} ; b) 7^{1000} ; c) 3^{50} ; d) 8^{23} ?

Lösung: Ermittelt man die Restklassen nach dem Modul 10, so stehen stets die ganzen Zahlen in einer Restklasse, die mit derselben Ziffer enden.

Zu a):

$$6 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^2 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^3 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$6^n \equiv 6 \pmod{10} \text{ für jede beliebige natürliche Zahl } n \neq 0$$

Daher ist auch $6^{312} \equiv 6 \pmod{10}$, d. h., 6^{312} ist Element der Restklasse $[6]_{10}$. Die letzte Ziffer von 6^{312} ist 6.

Zu b):

$$7 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$7^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$(*) 7^{4n} \equiv 1 \pmod{10} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Den *Beweis* mit Hilfe der vollständigen Induktion führe der Leser selber.

$$7^{1000} = 7^{4 \cdot 250}$$

$$7^{1000} \equiv 7^{4 \cdot 250} \pmod{10}$$

$$7^{4 \cdot 250} \equiv 1 \pmod{10}$$

(nach (*))

Daraus folgt

$$7^{1000} \equiv 1 \pmod{10}.$$

7¹⁰⁰⁰ ist Element der Restklasse [1]₁₀.Die letzte Ziffer von 7¹⁰⁰⁰ ist 1.

Zu c):

$$3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$(*) 3^{4n} \equiv 1 \pmod{10} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Das läßt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion *beweisen*.

$$3^{50} = 3^{4 \cdot 12 + 2}$$

$$3^{50} \equiv 3^{4 \cdot 12} \cdot 3^2 \pmod{10}$$

$$3^{4 \cdot 12} \equiv 1 \pmod{10}$$

(nach (*))

Deshalb gilt

$$3^{4 \cdot 12} \cdot 3^2 \equiv 3^2 \pmod{10}$$

(nach Satz 2 (3.1.2.))

und damit $3^{50} \equiv 3^2 \pmod{10}$.Die letzte Ziffer von 3⁵⁰ ist 9.

Zu d):

$$8 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$8^5 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$8^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$8^6 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$8^3 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$8^7 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$8^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$8^8 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$8^{23} = 8^{4 \cdot 5 + 3}$$

$$8^{23} \equiv 8^{4 \cdot 5 + 3} \pmod{10}$$

Aus $8^4 \equiv 6 \pmod{10}$ folgt

$$8^{4 \cdot 5} \equiv 6^5 \pmod{10}.$$

Daher ist

$$8^{23} \equiv 6^5 \cdot 8^3 \pmod{10}.$$

Da aber $6^5 \equiv 6 \pmod{10}$ und $8^3 \equiv 2 \pmod{10}$, gilt

$$8^{23} \equiv 6 \cdot 2 \pmod{10}.$$

Wir erhalten

$$8^{23} \equiv 2 \pmod{10}.$$

Die letzte Ziffer von 8^{23} ist 2.

BEISPIEL 4 (3.3.):

In welche Restklasse gehört 2^{100} nach dem Modul

a) 3; b) 13?

Zu a):

$$2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{3} \text{ f\u00fcr alle } n \in \mathbb{N}$$

$$2^{100} = 2^{2 \cdot 50}$$

Aus $2^{100} \equiv 2^{2 \cdot 50} \pmod{3}$ und $2^{2 \cdot 50} \equiv 1 \pmod{3}$ folgt

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{3}.$$

2^{100} ist Element der Restklasse $[1]_3$.

Zu b):

$$2 \equiv 2 \pmod{13} \quad 2^7 \equiv 11 \pmod{13}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{13} \quad 2^8 \equiv 9 \pmod{13}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{13} \quad 2^9 \equiv 5 \pmod{13}$$

$$2^4 \equiv 3 \pmod{13} \quad 2^{10} \equiv 10 \pmod{13}$$

$$2^5 \equiv 6 \pmod{13} \quad 2^{11} \equiv 7 \pmod{13}$$

$$2^6 \equiv 12 \pmod{13} \quad 2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$2^{100} = 2^{12 \cdot 8 + 4}$$

$$2^{100} \equiv 2^{12 \cdot 8} \cdot 2^4 \pmod{13}$$

$$2^{100} \equiv 2^4 \pmod{13}, \text{ da } 2^{12 \cdot 8} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$2^4 \equiv 3 \pmod{13} \text{ und damit}$$

$$2^{100} \equiv 3 \pmod{13}$$

2^{100} ist Element der Restklasse $[3]_{13}$.

BEISPIEL 5 (3.3.):

In welche Restklasse mod 9 geh\u00f6rt

$$236 \cdot 25 + 5^{22} \cdot 82567 + 1234890?$$

3.3.

$$\begin{aligned}236 \cdot 25 + 5^{22} \cdot 82567 + 1234890 &\equiv (2 \cdot 7 + 5^4 + 2) \pmod{9} \\ &\equiv (5 + 4 + 2) \pmod{9} \\ &\equiv 11 \pmod{9} \\ &\equiv 2 \pmod{9}\end{aligned}$$

Die Summe gehört in die Restklasse $[2]_9$.

BEISPIEL 6 (3.3.):

Ist $a = 2359 \cdot 26 + 4^{12} \cdot 1317 + 598732$ durch 6 teilbar?

$$\begin{aligned}2359 \cdot 26 + 4^{12} \cdot 1317 + 598732 &\equiv (1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1) \pmod{3} \\ &\equiv 3 \pmod{3} \\ &\equiv 0 \pmod{3}\end{aligned}$$

Das ist gleichwertig der Darstellung $3 \mid a$.

Außerdem ist $2 \mid a$, denn

$$\begin{aligned}2359 \cdot 26 + 4^{12} \cdot 1317 + 598732 &\equiv (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0) \pmod{2} \\ &\equiv 0 \pmod{2}.\end{aligned}$$

Aus $3 \mid a$ und $2 \mid a$ folgt aber $6 \mid a$.



Im Mathematikunterricht der Schule nimmt die Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen eine wichtige Stellung ein. Wir werden im Teil 4. auf der Grundlage der Kenntnisse aus den Stoffgebieten „Einführung in die mathematische Logik“ und „Einführung in die Mengenlehre“ (\nearrow [4]) vor allem diejenigen Typen von Gleichungen und Ungleichungen untersuchen, die bereits im Mathematikunterricht der Unterstufe behandelt werden.

4.1.

Vorbereitende Begriffe

Die an den Anfang gestellten Definitionen oder Erläuterungen einiger grundlegender Begriffe dienen dem Ziel, die Begriffe „Gleichung“ und „Ungleichung“ definieren zu können. Auf eine ausführliche Betrachtung jener Begriffe soll an dieser Stelle verzichtet werden. Man findet dazu entsprechende Ausführungen im Lehrbuch [4]. Dort werden im Teil 2.1. die Begriffe „Term“, „Variable“ und „Konstante“ eingeführt. Wir benutzen den Begriff „Term“ als Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen.

Im Beispiel 1 (4.1.) treten Zeichenreihen auf, die Variable, Konstante, Relationszeichen, Operationszeichen und technische Zeichen enthalten.

BEISPIEL 1 (4.1.):

$$(1) 3 + < \left(\sqrt{\frac{3}{4}} = \right. \quad (2) 3 + 4 \cdot x$$

$$(3) x^2 + (y - \sqrt{4}) \quad (4) 5 \cdot a > 0$$

$$(5) 3 \cdot (4x + 5) - 7 = 2x + \frac{1}{2} \quad (6) (3 + 7) \cdot 5$$

$$(7) 4 \cdot + \sqrt{\quad} : \frac{1}{2}$$

Im folgenden interessieren uns solche Zeichenreihen, die man als **Terme** bezeichnet.

Der Begriff „Term“ soll hier nicht explizit definiert werden. Wir begnügen uns mit der Beschreibung und Erläuterung der wesentlichsten Eigenschaften von Termen. Dazu werden *Kriterien* formuliert, die es uns ermöglichen zu entscheiden, ob eine Zeichenreihe ein Term ist oder nicht.

1. Kriterium: Wenn eine Zeichenreihe Relationszeichen enthält, so ist die Zeichenreihe kein Term.

Damit sind die in Beispiel 1 (4.1.) angegebenen Zeichenreihen (1), (4) und (5) keine Terme.

2. Kriterium: Wenn eine Zeichenreihe, die keine Variable enthält, eine eindeutig bestimmte Zahl aus einem Zahlenbereich bezeichnet, so ist diese Zeichenreihe ein Term.

Man nennt diese Zahl den **Wert des Terms**.

Die Zeichenreihen (6) und (7) enthalten weder Variable noch Relationszeichen. Für (6) erhält man nach Anwendung entsprechender Rechengesetze als Wert die Zahl 50. Damit ist Zeichenreihe (6) ein Term.

Der Zeichenreihe (7) läßt sich kein Wert zuordnen.

3. Kriterium: Wenn eine Zeichenreihe, die mindestens eine Variable enthält, durch Belegung aller auftretenden Variablen mit Bezeichnungen geeigneter Elemente aus einem gewählten Zahlenbereich einen eindeutig bestimmten Wert annimmt, so ist diese Zeichenreihe ein Term.

Es sei $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein Term, der die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n enthält, B sei ein geeigneter Individuenbereich. Dann versteht man unter einer **Belegung** eine Abbildung, die jeder Variablen x_1, \dots, x_n ein Element aus dem betreffenden Individuenbereich B zuordnet.

Terme, die Variable enthalten, kann man mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnen. In Klammern gibt man die im Term auftretenden Variablen an.

Die Zeichenreihen (2) und (3) enthalten keine Relationszeichen, aber Variable. Bei Belegung von x mit 2 in der Zeichenreihe (2) ergibt sich als Wert 11.

Man schreibt: $T(x) = 3 + 4 \cdot x$

$$\text{bzw. } T(2) = 11.$$

In der Zeichenreihe (3) können die Variablen durch geordnete Paare $[x_1; y_1]$, z. B. durch $[1; 2]$, belegt werden, und man erhält in diesem Fall als Wert 1.

4.2.

Man schreibt entsprechend: $T(x, y) = x^2 + (y - \sqrt{4})$ bzw. $T(1; 2) = 1$.
Damit sind die Zeichenreihen (2) und (3) Terme.

BEISPIEL 2 (4.1.):

$$(1) T_1(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{mit } x \in P$$

$$(2) T_2(x, y) = \frac{2x}{x-y} \quad \text{mit } x \in P, y \in P$$

Die Zeichenreihen $\frac{1}{x-1}$ und $\frac{2x}{x-y}$ erfüllen das 1. und das 3. Kriterium.

Zu beachten ist, daß es für die Variablen beider Terme Belegungen gibt, für die die Terme keinen eindeutig bestimmten Wert haben.

Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn man in $T_1(x)$ die Variable x mit 1 und in $T_2(x, y)$ mit geordneten Paaren $[x; y]$, für die $x = y$ ist, belegt.

Solche Überlegungen rechtfertigen die Definition 1 (4.1.).

DEFINITION 1 (4.1.):

Es sei ein Term $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gegeben.

Dann heißt die Menge D aller geordneten n -Tupel

$[a_1; a_2; \dots; a_n] \in M \times M \times \dots \times M = M^n$,

für die $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ einen jeweils eindeutig bestimmten Wert annimmt, der **Definitionsbereich des Terms** $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Im Sinne der Definition 1 (4.1.) wäre der Definitionsbereich D_1 von T_1 (↗ Beispiel 2 (4.1.))

$$D_1 = \{x; x \in P \wedge x \neq 1\}.$$

Für $T_2(x, y)$ erhält man

$$D_2 = \{[x; y]; [x; y] \in P \times P \wedge x \neq y\}.$$

4.2.

Gleichungen und Ungleichungen mit mindestens einer Variablen

DEFINITION 1 (4.2.):

Sind T_1 und T_2 Terme, so heißt der Ausdruck

$$T_1 = T_2$$

eine **Gleichung**.

Dagegen werden die Ausdrücke

$T_1 < T_2$; $T_1 \leq T_2$; $T_1 > T_2$; $T_1 \geq T_2$; $T_1 \neq T_2$
als **Ungleichungen** bezeichnet.

BEISPIEL 1 (4.2.):

Wir betrachten Gleichungen bzw. Ungleichungen, die den Lehrbüchern für Mathematik der Unterstufe entnommen sind (↗ [6]).

- | | |
|--------------------------|------------|
| (1) $4 + 1 = 5$ | (Klasse 1) |
| (2) $7 > 5$ | (Klasse 1) |
| (3) $4 < 3$ | (Klasse 1) |
| (4) $5 - x < 7$ | (Klasse 1) |
| (5) $2 \cdot a = 18$ | (Klasse 2) |
| (6) $3y < 17$ | (Klasse 2) |
| (7) $91 - f > 89$ | (Klasse 3) |
| (8) $(80 + 40) : 3 = 40$ | (Klasse 3) |
| (9) $y - 70 = 280$ | (Klasse 3) |

In Beispiel 1 (4.2.) treten Gleichungen bzw. Ungleichungen auf, die entweder keine oder genau eine Variable enthalten.

Aus Definition 1 (4.2.) ergibt sich allgemein:

Eine Gleichung bzw. Ungleichung enthält genau dann keine (mindestens eine) Variable, wenn die in der Gleichung bzw. Ungleichung auftretenden Terme keine (mindestens eine) Variable enthalten.

Für Gleichungen bzw. Ungleichungen, die keine Variable enthalten (↗ Beispiel 1 (4.2.); (1), (2), (3), (8)) kann ein Wahrheitswert angegeben werden.

Es handelt sich also um **spezielle Aussagen**¹, die man entsprechend als **Gleichheitsaussagen** bzw. **Ungleichheitsaussagen** bezeichnet.

Gleichungen bzw. Ungleichungen, die mindestens eine Variable enthalten (↗ Beispiel 1 (4.2.); (4), (5), (6), (7), (9)), können durch Belegung aller in dieser Gleichung bzw. Ungleichung auftretenden Variablen mit Bezeichnungen von Elementen aus einem vorgegebenen Individuenbereich in eine Aussage überführt werden.

Sie stellen also **Aussageformen**² dar.

Zusammenfassend kann man formulieren:

Eine Gleichung bzw. Ungleichung ist entweder eine Aussage oder eine Aussageform.

¹ Aussagen sind sinnvolle sprachliche Gebilde, die „entweder wahr oder falsch sind.“ (↗ [4; 25])

² „Ein sprachliches Gebilde, das (mindestens eine) freie Variable (↗ [4; 27]) enthält und zu einer Aussage wird, wenn man alle auftretenden Variablen durch Objektbezeichnungen des Individuenbereiches ersetzt, nennt man Aussageform.“ [4; 27, Definition 1 (2.3.)]

Im folgenden interessieren vor allem die **Gleichungen bzw. Ungleichungen**, die **Aussageformen** sind, die also mindestens eine Variable enthalten.

Spricht man bei Aussageformen allgemein vom Individuenbereich, so führen wir bei Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mindestens einer Variablen den Begriff „Grundbereich“ ein.

DEFINITION 2 (4.2.):

Ein Zahlenbereich heißt **Grundbereich** einer Gleichung bzw. Ungleichung mit mindestens einer Variablen genau dann, wenn dieser Zahlenbereich der Individuenbereich für die in der Gleichung bzw. Ungleichung auftretenden Variablen ist.

Durch Belegen der Variablen einer Gleichung bzw. Ungleichung mit Bezeichnungen von geeigneten Elementen aus einem vorgegebenen Grundbereich wird diese Gleichung bzw. Ungleichung in eine *Aussage* überführt.

Von praktischem Interesse sind vor allem die Belegungen, die zu einer *wahren Aussage* führen.

DEFINITION 3 (4.2.):

Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit mindestens einer Variablen heißt **in einem Grundbereich**

- a) **erfüllbar** genau dann, wenn es mindestens eine Belegung der Variablen gibt, die die Gleichung bzw. Ungleichung in eine wahre Aussage überführt;
- b) **allgemeingültig** genau dann, wenn jede mögliche Belegung der Variablen die Gleichung bzw. Ungleichung in eine wahre Aussage überführt;
- c) **unerfüllbar** genau dann, wenn es keine Belegung der Variablen gibt, die die Gleichung bzw. Ungleichung in eine wahre Aussage überführt.

An einigen einfachen Aussageformen soll die Abhängigkeit der in Definition 3 (4.2.) erklärten Eigenschaften vom Grundbereich bestätigt werden.

BEISPIEL 2 (4.2.):

(1) $x + 3 = 7$

(2) $5 - x = 8$

Gleichung ist erfüllbar in N, G, R, P .

Gleichung ist unerfüllbar in N .

Gleichung ist erfüllbar in G, R, P .

(3) $x + 1 > 0$

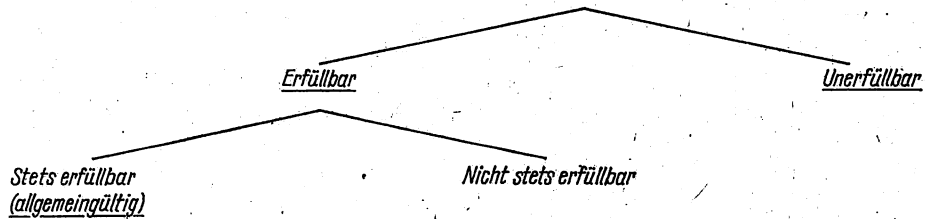
Ungleichung ist allgemeingültig in N .Ungleichung ist erfüllbar, aber nicht allgemeingültig in G, R, P .

(4) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Gleichung ist allgemeingültig in N, G, R, P .

(5) $3 + x > x + 4$

Ungleichung ist unerfüllbar in N, G, R, P .

75/1

Gleichungen bzw. Ungleichungen mit mindestens
einer Variablen (in einem vorgegebenen Grundbereich)

Die Darstellungen in den Bildern 75/1 und 75/2 bringen den Zusammenhang zwischen den in Definition 3 (4.2.) erklärten Begriffen zum Ausdruck.

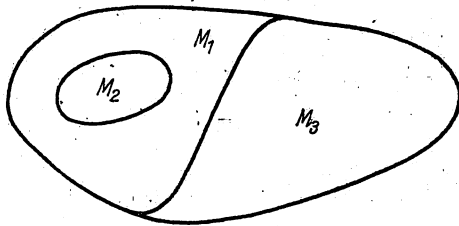
Es seien

M_1 die Menge aller in einem vorgegebenen, nicht leeren Grundbereich erfüllbaren Gleichungen bzw. Ungleichungen (M_1 enthalte mindestens zwei Elemente),

M_2 die Menge aller in diesem Grundbereich allgemeingültigen Gleichungen bzw. Ungleichungen und

M_3 die Menge aller in diesem Grundbereich unerfüllbaren Gleichungen bzw. Ungleichungen.

Dann läßt sich obiger Zusammenhang durch ein Mengendiagramm erfassen (Bild 75/2).



75/2

Es gelten also folgende Mengenbeziehungen.

$$M_2 \subset M_1$$

$$M_1 \cap M_3 = \emptyset$$

$$M_2 \cap M_3 = \emptyset$$

DEFINITION 4 (4.2.):

Es sei $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Gleichung bzw. Ungleichung mit den Variablen x_1, x_2, \dots, x_n und B ein Grundbereich für diese Variablen.

Dann nennt man eine

Teilmenge L_G der Menge $B \times B \times \dots \times B = B^n$ einen **Lösungsgrundbereich** der Gleichung bzw. Ungleichung genau dann, wenn jedes geordnete n -Tupel

$$[a_1; a_2; \dots; a_n] \in L_G$$

die gegebene Gleichung bzw. Ungleichung in eine (wahre oder falsche) Aussage überführt.

Bemerkung: Für $n = 1$, d. h. für Gleichungen bzw. Ungleichungen mit genau einer Variablen, ist der Lösungsgrundbereich L_G eine Teilmenge des Grundbereiches B ($L_G \subseteq B$).

Die Festlegung des Lösungsgrundbereiches einer Gleichung bzw. Ungleichung kann unter verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen.

1. *Bedingungen, die sich aus den Definitionsbereichen der jeweiligen Terme ergeben.*

Als Grundbereich für die Ungleichung

$$\frac{x+3}{x-4} < \frac{x+1}{x+2}$$

wäre der Bereich der rationalen Zahlen (R) möglich.

R kann jedoch nicht als Lösungsgrundbereich benutzt werden, da nicht jede Belegung der Variablen mit Zahlen aus R zu einer Aussage führt.

Belegt man x mit 4 bzw. mit -2 , ist der linke Term der Ungleichung bzw. der rechte Term der Ungleichung nicht definiert. Der größtmögliche Lösungsgrundbereich bezüglich des Grundbereiches R wäre also

$$L_G = \{x; x \in R \wedge x \neq 4 \wedge x \neq -2\}.$$

Für die Gleichung

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{2}, \quad (\text{Grundbereich sei } P)$$

ist auf Grund analoger Überlegungen

$$L_G = \{[x; y]; [x; y] \in P \times P \wedge x \neq y\}$$

der größtmögliche Grundbereich bezüglich P .

2. Bedingungen, die sich aus einer speziellen Aufgabenstellung ergeben

Mit Hilfe der Gleichung $a^2 = d^2 - b^2$ kann aus den Maßzahlen der Längen der Diagonalen eines Rechtecks und einer Rechteckseite die Maßzahl der anderen Rechteckseite ermittelt werden. Ein geeigneter Lösungsgrundbereich wäre

$$L_G = \{[a; d; b]; [a; d; b] \in P \times P \times P \wedge a > 0 \wedge d > 0 \wedge b > 0\}.$$

Mitunter genügt es, Gleichungen bzw. Ungleichungen in gewissen Intervallen zu betrachten.

Man löse die Ungleichung $2x + 3 < 10$ im Bereich der natürlichen Zahlen im Intervall $3 \leq x \leq 5$.

Durch das gegebene Intervall wird hier der Lösungsgrundbereich festgelegt.

Es gilt: $L_G = \{x; x \in N \wedge 3 \leq x \leq 5\}$.

Bemerkung: Wird im folgenden der Lösungsgrundbereich einer Gleichung bzw. Ungleichung $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nicht angegeben und liegen keine Einschränkungen vor, die sich aus den Definitionsbereichen der jeweiligen Terme ergeben, so möge der Lösungsgrundbereich stets mit der Menge $B \times B \times \dots \times B = B^n$ (B sei Grundbereich der Gleichung bzw. Ungleichung) übereinstimmen.

DEFINITION 5 (4.2.):

Es sei $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Gleichung bzw. Ungleichung, die die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n enthält, und B ein Grundbereich für diese Variablen.

Dann heißt jedes geordnete n -Tupel

$$[a_1; a_2; \dots; a_n] \in B \times B \times \dots \times B = B^n,$$

das die Gleichung bzw. Ungleichung in eine wahre Aussage überführt und im vorgegebenen Lösungsgrundbereich der Gleichung bzw. Ungleichung liegt, eine Lösung der Gleichung bzw. Ungleichung bezüglich des vorgegebenen Lösungsgrundbereiches.

BEISPIEL 3 (4.2.):

Der Grundbereich für die Variablen in den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen möge G sein.

- (1) $x + 4 < 1$ und $L_G = \{x; x \in G\}$
 (2) $x - y = 5$ und $L_G = \{[x; y]; [x; y] \in G \times G\}$
 (3) $x_1 + x_2 + x_3 < 0$ und $L_G = \{[x_1; x_2; x_3]; [x_1; x_2; x_3] \in G \times G \times G\}$

Im Sinne von Definition 5 (4.2.) ist dann zum Beispiel

— 4 eine Lösung von Ungleichung (1), $[6; 1]$ eine Lösung von Gleichung (2), $[1; 2; -4]$ eine Lösung von Ungleichung (3),

denn diese Belegungen überführen die Aussageformen in wahre Aussagen und sind in dem angegebenen Lösungsgrundbereich enthalten.

DEFINITION 6 (4.2.):

Unter der Lösungsmenge einer Gleichung bzw. Ungleichung bezüglich eines vorgegebenen Lösungsgrundbereiches versteht man die Menge aller Lösungen der Gleichung bzw. Ungleichung in diesem Lösungsgrundbereich.

Bemerkung: Lösungsmengen können elementweise oder mit Hilfe einer Aussageform angegeben werden.

BEISPIEL 4 (4.2.):

Man gebe die Lösungsmenge der Ungleichung $x + 5 < 9$ im Bereich N an. Aus der Aufgabenstellung ergibt sich hier:

$$B = \{x; x \in N\} \text{ und } L_G = B.$$

Man findet leicht, daß alle natürlichen Zahlen kleiner als 4 die Ungleichung in eine wahre Aussage überführen.

$$(1) L = \{0, 1, 2, 3\}$$

oder: (2) $L = \{x; x \in N \wedge x < 4\}$ ~

Es ist sogar möglich, die Lösungsmenge unmittelbar mit Hilfe der in der Aufgabenstellung enthaltenen Ungleichung anzugeben.

$$(3) L = \{x; x \in N \wedge x + 5 < 9\}$$

Die Darstellung der Lösungsmenge unter Benutzung der gegebenen Aussageform erschwert jedoch im allgemeinen die elementweise Angabe, die sich aus Darstellung (2) leichter gewinnen läßt.

Man betrachte die Beispiele 5 (4.2.) und 6 (4.2.) besonders unter dem Aspekt der Abhängigkeit der Lösungsmenge vom gewählten Lösungsgrundbereich.

BEISPIEL 5 (4.2.):

	Gleichung bzw. Ungleichung	Grundbereich B	Lösungsgrundbereich L_G	Lösungsmenge L
(1)	$x + 1 < 5$	N	N	$\{0, 1, 2, 3\}$
(2)	$x + 1 < 5$	N	$\{x; x \in N \wedge x < 3\}$	$\{0, 1, 2\}$
(3)	$x + 1 < 5$	G	G	$\{3, 2, 1, 0, -1, \dots\}$
(4)	$2x^2 + x - 1 = 0$	R	R	$\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$
(5)	$2x^2 + x - 1 = 0$	G	G	$\{-1\}$
(6)	$2x^2 + x - 1 = 0$	N	N	\emptyset

Die Gleichungen bzw. Ungleichungen (1), (2), (4), (5) und (6) liefern endliche Lösungsmengen (Gleichung (6) speziell die leere Menge), während die Lösungsmenge von (3) eine unendliche Menge ist.

Im Zusammenhang mit Definition 3 (4.2.) kann man feststellen:

Eine Gleichung bzw. Ungleichung mit mindestens einer Variablen ist in einem Grundbereich B unerfüllbar genau dann, wenn die Lösungsmenge bezüglich jedes Lösungsgrundbereiches

$$L_G \subseteq B \times B \times \dots \times B = B^n$$

gleich der leeren Menge ist.

Die Lösungen der bisher betrachteten Gleichungen bzw. Ungleichungen konnten leicht durch systematisches Probieren gefunden werden. Die nun folgenden Begriffsbildungen sind notwendig, um Lösungsverfahren allgemeiner Art betrachten zu können.

DEFINITION 7 (4.2.):

Zwei Gleichungen bzw. Ungleichungen heißen bezüglich eines vorgegebenen Lösungsgrundbereiches **äquivalent** genau dann, wenn sie in diesem Lösungsgrundbereich ein und dieselbe Lösungsmenge haben.

BEISPIEL 6 (4.2.):

Ungleichung/Gleichung	B	L_G	L
(1) $x + 1 = 5$	N	N	$\{4\}$
(2) $2x + 3 = 11$	N	N	$\{4\}$
(3) $x = 4$	N	N	$\{4\}$
(4) $x + 3 < 6$	N	N	$\{0, 1, 2\}$
(5) $2x < 6$	N	N	$\{0, 1, 2\}$
(6) $x < 3$	N	N	$\{0, 1, 2\}$

Nach Definition 7 (4.2.) sind die Gleichungen (1), (2), (3) in N äquivalent, ebenso die Ungleichungen (4), (5) und (6).

Vergleichen wir (2) und (3), so können wir feststellen, daß sich die Lösungsmenge von $x = 4$ leichter ermitteln läßt als die der Gleichung $2x + 3 = 11$.

Das Problem wird also im folgenden darin bestehen, zu einer vorgegebenen Gleichung bzw. Ungleichung eine bezüglich ein und desselben Lösungsgrund-

bereichs äquivalente Gleichung bzw. Ungleichung zu finden, für die die Lösungsmenge leicht angegeben werden kann.

Ist gesichert, daß beide Gleichungen bzw. Ungleichungen äquivalent sind, so ist damit auch die Lösungsmenge der gegebenen Gleichung bzw. Ungleichung ermittelt.

SATZ 1 (4.2.):

Die Äquivalenz von Gleichungen bzw. Ungleichungen bezüglich eines vorgegebenen Lösungsgrundbereiches ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Es muß gezeigt werden, daß die charakteristischen Eigenschaften von Äquivalenzrelationen (*Reflexivität, Symmetrie, Transitivität*) für die betrachtete Relation zutreffen.

Nach Definition 7 (4.2.) sind zwei Gleichungen bzw. Ungleichungen genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge haben.

Da die Gleichheit von Mengen eine Äquivalenzrelation ist, stellt auch die Äquivalenz von Gleichungen bzw. Ungleichungen bezüglich eines Lösungsgrundbereiches eine Äquivalenzrelation dar, q. e. d.

Unser Lösungsverfahren wird darin bestehen, eine gegebene Gleichung bzw. Ungleichung so umzuformen, daß die dadurch entstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen zur gegebenen Gleichung bzw. Ungleichung äquivalent sind. Dieses Verfahren ist so lange zielgerichtet fortzusetzen, bis man eine Gleichung bzw. Ungleichung erhält, für die sich die Lösungsmenge leicht angeben läßt. Für diese Art von Umformungen einer Gleichung bzw. Ungleichung führen wir den in Definition 8 (4.2.) erklärten Begriff ein.

DEFINITION 8 (4.2.):

Jede Umformung einer Gleichung bzw. Ungleichung, die zu keiner Veränderung der Lösungsmenge der Gleichung bzw. Ungleichung im vorgegebenen Lösungsgrundbereich führt, heißt eine **äquivalente Umformung der Gleichung bzw. Ungleichung.**

Wir betrachten jetzt die *wesentlichsten äquivalenten Umformungen* von Gleichungen bzw. Ungleichungen.

1. *Umformungen, die mit einzelnen Termen der Gleichung bzw. Ungleichung vorgenommen werden.*

Dazu gehören

- a) Auflösen von Klammern
- b) Ausklammern
- c) Kürzen und Erweitern von Brüchen¹
- d) Anwenden der Kommutativgesetze der Addition und Multiplikation in den verschiedenen Zahlenbereichen
- e) Zusammenfassen von Termen (Addition, Multiplikation, ...)

2. *Umformungen*, die an den *beiden Termen* der Gleichung bzw. Ungleichung gleichzeitig vorgenommen werden

Dazu gehören die Umformungen, die mit Hilfe der Monotoniegesetze begründet werden können.

Bemerkung: Bei den folgenden Betrachtungen von Ungleichungen wird nur das Relationszeichen $<$ benutzt. Entsprechende Aussagen gelten auch für die Relationszeichen \leq , $>$ und \geq .

- a) Addieren bzw. Subtrahieren eines für alle in der Gleichung bzw. Ungleichung zugelassenen Belegungen definierten Terms T zu bzw. von beiden Termen einer Gleichung bzw. Ungleichung

$$\text{So sind } T_1 + T = T_2 + T$$

$$\text{und } T_1 - T = T_2 - T$$

$$\text{zu } T_1 = T_2$$

äquivalent.

Ebenso sind auch

$$T_1 + T < T_2 + T$$

$$\text{und } T_1 - T < T_2 - T$$

$$\text{zu } T_1 < T_2$$

äquivalent.

Die Begründung ergibt sich aus den Monotoniegesetzen der Addition bezüglich der Gleichheits- bzw. der Kleinerrelation. Es gilt für alle reellen Zahlen a, b, c :

$$(1) a = b \rightarrow a + c = b + c$$

$$(2) a < b \rightarrow a + c < b + c$$

- b) Multiplizieren bzw. Dividieren beider Terme einer Gleichung mit einem bzw. durch einen Term, der bei allen in der Gleichung zugelassenen Belegungen von Null verschiedene Werte annimmt.

¹ Kürzungs- bzw. Erweiterungsfaktoren dürfen nur *Zahlen* sein. Ein „Kürzen“ oder „Erweitern“ mit Termen, die Variable enthalten, stellt im allgemeinen keine äquivalente Umformung dar.

Unter diesen Voraussetzungen sind für $T \neq 0$

$$T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$$

und $\frac{T_1}{T} = \frac{T_2}{T}$ zu $T_1 = T_2$ äquivalent.

Die Begründung liefert zum Teil das Monotoniegesetz der Multiplikation bezüglich der Gleichheitsrelation.

Es gilt für alle reellen Zahlen a, b, c :

$$a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

Später wird gezeigt, daß die Division bzw. Multiplikation der Terme einer Gleichung bzw. Ungleichung mit einem bzw. durch einen Term, der bei einer Belegung den Wert Null annehmen kann, zu einer Veränderung der Lösungsmenge führt.

- c) Multiplizieren bzw. Dividieren beider Terme einer Ungleichung mit einem bzw. durch einen Term, der bei allen in der Ungleichung zugelassenen Belegungen positive Werte annimmt

Unter diesen Voraussetzungen sind für $T > 0$

$$T_1 \cdot T < T_2 \cdot T$$

und $\frac{T_1}{T} < \frac{T_2}{T}$ zu $T_1 < T_2$ äquivalent.

Zur Begründung wird das Monotoniegesetz der Multiplikation bezüglich der Kleinerrelation verwendet.

Es gilt für alle reellen Zahlen a, b, c :

$$a < b \wedge c > 0 \rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

- d) Multiplizieren bzw. Dividieren beider Terme einer Ungleichung mit einem bzw. durch einen Term, der bei allen in der Ungleichung zugelassenen Belegungen negative Werte annimmt, und Ersetzen des in der Ungleichung auftretenden Relationszeichens durch das „umgekehrte“ Relationszeichen (d. h.: $<$ durch $>$, \leq durch \geq , $>$ durch $<$, \geq durch \leq)

Unter diesen Voraussetzungen sind für $T < 0$

$$T_1 \cdot T > T_2 \cdot T$$

und $\frac{T_1}{T} > \frac{T_2}{T}$ zu $T_1 < T_2$ äquivalent.

3. Vertauschen der beiden Terme einer Gleichung bzw. Ungleichung

- a) Vertauschen der beiden Terme einer Gleichung

Es ist $T_1 = T_2$ äquivalent zu $T_2 = T_1$.

Das ergibt sich aus der Symmetrieeigenschaft der Gleichheitsrelation für reelle Zahlen.

- b) Vertauschen der beiden Terme einer Ungleichung und Ersetzen des Relationszeichens durch das entgegengesetzte Relationszeichen im oben angegebenen Sinne

Es ist $T_1 < T_2$ äquivalent zu $T_2 > T_1$.

In Beispiel 7 (4.2.) wollen wir einige Umformungen anwenden.

BEISPIEL 7 (4.2.):

Man löse die Ungleichung

$$4 - \frac{7-3x}{5} < 3 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2}$$

im Bereich der ganzen Zahlen, wobei $L_G = G$ sei.

1. *Multiplizieren* der Ungleichung (d. h. beider Terme der Ungleichung) mit 10 im Sinne von Umformung 2.c)

$$4 \cdot 10 - \frac{10(7-3x)}{5} < 3 \cdot 10 - \frac{10(3-7x)}{10} + \frac{10(x+1)}{2}$$

2. *Kürzen* (1.c)) und *Zusammenfassen* (1.f))

$$40 - 2(7-3x) < 30 - (3-7x) + 5(x+1)$$

3. *Auflösen von Klammern* (1.a))

$$40 - 14 + 6x < 30 - 3 + 7x + 5x + 5$$

4. *Zusammenfassen* (1.f))

$$26 + 6x < 32 + 12x$$

5. *Addieren von* $-12x$ (2.a))

$$26 - 6x < 32$$

6. *Addieren von* -26 (2.a))

$$-6x < 6$$

7. *Dividieren durch* -6 (2.c))

$$x > -1$$

Da nur äquivalente Umformungen ausgeführt wurden, haben die Ungleichungen 1. bis 7. im vorgegebenen Lösungsgrundbereich ein und dieselbe Lösungsmenge.

Die Lösungsmenge $L = \{0, 1, 2, \dots\}$ der Ungleichung $x > -1$ stimmt mit der Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung überein.

Also ist $L = \{0, 1, 2, \dots\}$

bzw. $L = \{x, x \in G \wedge x > -1\}$

die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung im Bereich der ganzen Zahlen.

5.1. Gleichungen mit genau einer Variablen

5.1.1. Vorbemerkungen

In den in Teil 4. betrachteten Beispielen traten Gleichungen auf, die sich unterscheiden in bezug auf

- die Anzahl der auftretenden Variablen,
- den größten Exponenten der Potenzen der Variablen,
- die Art der Lösungsmenge.

Diese drei Gesichtspunkte geben die Möglichkeit, Gleichungstypen zu systematisieren. Auf den dritten oben genannten Aspekt soll hier nicht näher eingegangen werden. Es sei auf Definition 3 (4.2.) und die sich dort anschließenden Bemerkungen verwiesen.

Je nach der *Anzahl der* in der Gleichung auftretenden *Variablen* unterscheiden wir Gleichungen mit genau einer Variablen, zwei Variablen, ..., n Variablen ($n \in \mathbb{N}$).

Der *größte Exponent der* in der Gleichung auftretenden *Potenzen der Variablen* wird zur Definition des Begriffes „Grad einer Gleichung“ benutzt.

DEFINITION 1 (5.1.1.):

Eine Gleichung heißt eine **Gleichung n -ten Grades mit genau einer Variablen** genau dann, wenn sie durch äquivalente Umformungen in die Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit $a_n \neq 0$

gebracht werden kann.

BEISPIEL 1 (5.1.1.):

- (1) $3x - 4 = 0$ Gleichung 1. Grades mit genau einer Variablen
- (2) $4x^2 + 3x - 2 = 0$ Gleichung 2. Grades mit genau einer Variablen
- (3) $4x_1^3 + 3x_1^2 + x_1 + 5 = 0$ Gleichung 3. Grades mit genau einer Variablen

Bei der Behandlung *spezieller Gleichungen* betrachten wir folgende Probleme.

- Spezielle äquivalente Umformungen und nicht äquivalente Umformungen
- Arten der Lösungsmengen
- Abhängigkeit der Lösungsmenge von der Vorgabe des Lösungsgrundbereiches
- Angabe spezieller Lösungsverfahren

5.1.2.

Lineare Gleichungen

Aus Definition 1 (5.1.1.) ergibt sich für den Fall $n = 1$ Definition 1 (5.1.2.).

DEFINITION 1 (5.1.2.):

Eine Gleichung heißt eine **lineare Gleichung** (oder Gleichung 1. Grades) mit genau einer Variablen genau dann, wenn sie durch äquivalente Umformung in die Form

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0; a, b, x \in P)$$

gebracht werden kann.

BEISPIEL 1 (5.1.2.):

- (1) $5x + 3 = 0$ (2) $3x - 2 = 7$ (3) $3x + 5 = 2x - 7$
- (4) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$ (5) $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$ (6) $x^2 + 3x - 4 = (x+1)^2$

Die in Beispiel 1 (5.1.2.) angegebenen Gleichungen (5) und (6) weisen auf die Notwendigkeit hin, den Begriff „Lineare Gleichung“ so wie in Definition 1 (5.1.2.) zu definieren.

Während Gleichung (1) die in dieser Definition geforderte Form hat, sind bei den anderen Gleichungen äquivalente Umformungen notwendig, um den Grad der Gleichung angeben zu können. Dabei zeigt sich, daß lediglich Gleichung (5) durch äquivalente Umformungen nicht in die Form $ax + b = 0$ gebracht werden kann.

5.1.

Die Gleichungen (5) und (6) machen deutlich, daß es im allgemeinen nicht ausreicht, die Potenz mit höchstem Exponenten in einer gegebenen Gleichung zu betrachten, um eine wahre Aussage über den Grad der Gleichung formulieren zu können. Obwohl in Gleichung (6) die Variable in der 2. Potenz auftritt, ist die Gleichung nach Definition 1 (5.1.2.) linear. Gleichung (5) liefert ein Gegenbeispiel; sie ist nicht linear.

Wir wenden uns jetzt den *Lösungsmengen* zu, die bei Gleichungen mit genau einer Variablen auftreten können.

SATZ 1 (5.1.2.):

Eine lineare Gleichung

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

mit genau einer Variablen hat in einem Lösungsgrundbereich entweder *keine Lösung* oder *genau eine Lösung*.

Beweis:

$$(1) \quad ax + b = 0 \quad (a \neq 0; a, b \in P)$$

ist eine lineare Gleichung mit genau einer Variablen, und L_G sei ein vorgegebener Lösungsgrundbereich.

Addiert man zu beiden Termen der Gleichung (1) $-b$, so erhält man

$$(2) \quad ax = -b.$$

Die Division durch a ist stets ausführbar, da $a \neq 0$ vorausgesetzt wird, und liefert

$$(3) \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Die durchgeführten Umformungen sind nach den Ausführungen in Teil 4.2. äquivalente Umformungen. Damit hat Gleichung (3) dieselbe Lösungsmenge wie Gleichung (1).

Der Term $-\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$) stellt für jede Belegung von a und b eine eindeutig bestimmte reelle Zahl dar.

Trivialerweise ergeben sich genau zwei Möglichkeiten.

$$\text{a) } -\frac{b}{a} \in L_G \quad \text{b) } -\frac{b}{a} \notin L_G$$

Im Fall a) hat die lineare Gleichung (1) *genau eine Lösung*, d. h. $L = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.

Im Fall b) existiert *keine Lösung* im vorgegebenen Lösungsgrundbereich, d. h. $L = \emptyset$. q.e.d.

Beim äquivalenten Umformen gegebener Gleichungen ist es möglich, eine Gleichung der Form

$$(1) \quad ax + b = 0 \quad \text{mit } a = 0$$

zu erhalten.

Diese Gleichung stellt nach Definition 1 (5.1.2.) keine lineare Gleichung dar.

Wir ermitteln die Lösungsmenge von Gleichung (1).

Es sei $L_G = M$ ein vorgegebener Lösungsgrundbereich und $b \in P$.

Gleichung (1) ist äquivalent zu

$$(2) \quad 0 \cdot x + b = 0$$

und $(3) \quad b = 0.$

Gleichung (3) ist im Fall $b \neq 0$ eine falsche Aussage. Das bedeutet, bei jeder Belegung der Variablen x in Gleichung (1) entsteht für $b \neq 0$ stets eine falsche Aussage. Also ist in diesem Fall $L = \emptyset$.

Für den Fall $b = 0$ ist Gleichung (3) stets wahr. Das heißt, bei jeder Belegung wird Gleichung (1) in eine wahre Aussage überführt. Die Lösungsmenge stimmt hier mit dem Lösungsgrundbereich überein, also $L = \{x; x \in L_G\}$.

Die Aussage von Satz 1 (5.1.2.) und die zuletzt gewonnenen Erkenntnisse können im Satz 2 (5.1.2.) zusammengefaßt werden.

SATZ 2 (5.1.2.):

Eine Gleichung der Form

$$ax + b = 0 \quad (a, b \in P)$$

hat in einem Lösungsgrundbereich L_G (L_G möge mehr als ein Element enthalten)

- a) entweder *keine Lösung*,
d. h., die Gleichung ist in diesem Lösungsgrundbereich unerfüllbar;
- b) oder *genau eine Lösung*,
d. h., die Gleichung ist in diesem Lösungsgrundbereich erfüllbar;
- c) oder die Lösungsmenge stimmt mit dem Lösungsgrundbereich überein,
d. h., die Gleichung ist in diesem Lösungsgrundbereich *allgemeingültig*.

5.1.

BEISPIEL 2 (5.1.2.):

Man gebe die Lösungsmenge der Gleichungen in bezug auf $L_G = \{x; x \in N\}$ an.

(1) $5x + 1 = 3x + 7$

Äquivalente Umformungen liefern die Gleichung $x = 3$.

Also $L = \{3\}$

(2) $5x + 7 = 3x + 1$

Man erhält mit Hilfe äquivalenter Umformungen die Gleichung $x = -3$.

Also $L = \emptyset$, da $-3 \notin L_G$

(3) $5x + 1 = 5x + 7$

Äquivalente Umformungen ergeben die Gleichung $1 = 7$.

Also $L = \emptyset$, da jede Belegung der Variablen zu einer falschen Aussage führt.

(4) $5x + 1 = 5x + 1$

Subtraktion von $5x$ von beiden Termen liefert $1 = 1$.

Also $L = L_G$, da jede Belegung der Variablen mit Elementbezeichnungen aus dem Lösungsgrundbereich zu einer wahren Aussage führt.

Wir benutzen die Gleichungen (2), (3) und (4) aus Beispiel 2 (5.1.2.) als Ausgangspunkt für *einige weitere Bemerkungen zur Abhängigkeit der Lösungsmenge vom vorgegebenen Lösungsgrundbereich*.

Die Lösungsmenge von Gleichung (2) ist im vorgegebenen Lösungsgrundbereich gleich der *leeren Menge*.

In jedem Lösungsgrundbereich, der die Zahl -3 enthält, hat jedoch Gleichung (2) *genau eine Lösung*.

Die Art der Lösungsmenge ist hier also vom Lösungsgrundbereich abhängig, während die Vorgabe des Lösungsgrundbereiches auf die Lösungsmenge von Gleichung (3) keinen Einfluß hat. Unabhängig von der Wahl des Lösungsgrundbereiches entsteht stets eine falsche Aussage. Die Gleichung ist also *in keinem Lösungsgrundbereich erfüllbar*.

Die durch äquivalente Umformung aus Gleichung (4) entstandene wahre Aussage ist ebenfalls nicht vom Lösungsgrundbereich abhängig. Diese Gleichung ist *in jedem Lösungsgrundbereich allgemeingültig*.

BEISPIEL 3 (5.1.2.):

Gegeben sei der Grundbereich G und ein Lösungsgrundbereich

$$L_G = \{x; x \in G \wedge -3 \leq x \leq 5\}.$$

Man gebe Gleichungen an, die im Lösungsgrundbereich genau eine Lösung haben und äquivalent sind.

Es sei $L_1 = \{-2\}$.

Dann ist L_1 Lösungsmenge von

$$(1) x = -2,$$

aber auch von

$$(2) 3x = -6$$

und

$$(3) 3x + 7 = 1,$$

da die Multiplikation mit 3 und die Addition von $+7$ äquivalente Umformungen sind.

Aber auch

$$(4) x(x+5) = -2(x+5)$$

ist eine zu Gleichung (1) im Lösungsgrundbereich äquivalente Gleichung, da $(x+5)$ für kein Element aus dem Lösungsgrundbereich den Wert Null annimmt.

Das gilt analog für

$$(5) \frac{x}{x-6} = \frac{-2}{x-6}.$$

Da die Division durch Null nicht erklärt ist, erscheint die Einschränkung $T \neq 0$ im Fall der Division (\nearrow 81 f.) gerechtfertigt.

Die Notwendigkeit der Forderung $T \neq 0$ im Fall der Multiplikation der beiden Terme einer Gleichung soll in den Beispielen 4 (5.1.2.) und 5 (5.1.2.) gezeigt werden.

Bemerkung: Diese Einschränkung folgt nicht aus dem Monotoniegesetz der Multiplikation bezüglich der Gleichheitsrelation reeller Zahlen.

BEISPIEL 4 (5.1.2.):

Gegeben sei die Gleichung

$$(1) x + 1 = 3 \quad \text{mit } B = G \text{ und } L_G = B.$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $L_1 = \{2\}$.

Multipliziert man Gleichung (1) mit $(x+1)$, dann erhält man

$$(2) (x+1)(x+1) = 3(x+1).$$

Belegt man x mit 2, so entsteht eine wahre Aussage. Ebenso führt aber auch die Belegung von x mit -1 zu einer wahren Aussage. Die Lösungsmenge von Gleichung (2) ist $L_2 = \{-1; 2\}$. Die Multiplikation der Gleichung (1) mit $(x+1)$ führte also zu einer Veränderung der Lösungsmenge, es wurde eine nichtäquivalente Umformung durchgeführt.

5.1.

BEISPIEL 5 (5.1.2.):

Gegeben sei die Gleichung

$$(1) \quad x + 1 = x + 2 \quad \text{mit } B = G \text{ und } L_G = B.$$

Diese Gleichung hat im Lösungsgrundbereich keine Lösung, da die Addition von $-x$ zu beiden Termen der Gleichung auf eine falsche Aussage führt.

Also $L_1 = \emptyset$.

Multiplizieren wir Gleichung (1) mit dem Term $T(x) = (x - 2)$, der im vorgegebenen Lösungsgrundbereich den Wert Null annehmen kann, so erhält man die Gleichung

$$(2) \quad (x + 1)(x - 2) = (x + 2)(x - 2).$$

Formen wir äquivalent um, so entsteht zunächst

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 4$$

und weiter

$$-x + 2 = 0$$

bzw. $x = 2$.

Also gilt $L_2 = \{2\}$.

Die Beispiele 4 (5.1.2.) und 5 (5.1.2.) lassen folgende Verallgemeinerung als gerechtfertigt erscheinen.

SATZ 4 (5.1.2.):

Es seien

$$(1) \quad T_1(x) = T_2(x)$$

eine Gleichung mit genau einer Variablen,

L_1 die Lösungsmenge dieser Gleichung in einem vorgegebenen Lösungsgrundbereich und

$T_3(x)$ ein Term, der nur bei der Belegung der Variablen mit $a \in L_G$ den Wert Null annimmt und bei allen anderen Belegungen verschieden von Null ist.

Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$(2) \quad T_1(x) \cdot T_3(x) = T_2(x) \cdot T_3(x)$$

gleich der Menge $L = L_1 \cup \{a\}$.

Bemerkung: Man betrachte nochmals die Beispiele 4 (5.1.2.) und 5 (5.1.2.):

Es gilt für Beispiel 4 (4.3.2.): $L_2 = L_1 \cup \{-1\} = \{-1; 2\}$

und für Beispiel 5 (4.3.2.): $L_2 = L_1 \cup \{2\} = \{2\}$.

Beweis von Satz 4 (5.1.2.):

Wir zeigen zunächst, daß sowohl alle Elemente b_i ($i = 1, 2, \dots, n$; n Anzahl der Lösungen von Gleichung (1)) der Menge L_1 als auch das Element a Lösungen der Gleichung

$$(2) \quad T_1(x) \cdot T_3(x) = T_2(x) \cdot T_3(x)$$

sind.

Belegt man x mit a , so wird

$$T_3(a) = 0, \quad (\text{nach Voraussetzung})$$

und damit ist

$$T_1(a) \cdot 0 = T_2(a) \cdot 0$$

eine wahre Aussage, unabhängig davon, welche Werte T_1 und T_2 bei der Belegung der Variablen mit a annehmen.

Ferner gilt $a \in L$.

(nach Voraussetzung $a \in L_a$)

Belegt man die Variablen der Gleichung (2) mit Elementen b_i der Menge L_1 , so ist

$$T_1(b_i) = T_2(b_i)$$

eine wahre Aussage.

(nach Voraussetzung)

Also kann T_1 durch T_2 ersetzt werden, und man erhält mit

$$T_1(b_i) \cdot T_3(b_i) = T_2(b_i) \cdot T_3(b_i)$$

eine wahre Aussage.

Also gilt: $b_i \in L$, d. h., $L_1 \subseteq L$.

Aus $L_1 \subseteq L$ und $a \in L$ folgt $L_1 \cup \{a\} \subseteq L$.

Wir weisen im folgenden nach, daß alle Elemente c_i ($i = 1, 2, \dots, n$; n Anzahl der Lösungen von Gleichung (2)) der Menge L in $L_1 \cup \{a\}$ enthalten sind.

Aus Gleichung (2) erhält man durch äquivalente Umformung zunächst

$$(3) \quad T_1(x) \cdot T_3(x) - T_2(x) \cdot T_3(x) = 0$$

und weiter

$$(4) \quad T_3(x) (T_1(x) - T_2(x)) = 0.$$

Ein Element c ist genau dann eine Lösung von Gleichung (4), wenn bei Belegung der Variablen x mit c der Term $T_3(x)$ oder der Term $(T_1(x) - T_2(x))$ den Wert Null annimmt.

Eine Belegung der Variablen x mit Elementen c_i der Menge L führt also dazu, daß $T_3(x)$ oder $T_1(x) - T_2(x)$ den Wert Null haben, d. h., die Elemente c_i sind Lösungen der Gleichung

$$(4) \quad T_3(x) = 0$$

5.1.

oder $(5) T_1(x) - T_2(x) = 0$.

Die Elemente c_i sind demnach in der Lösungsmenge L_4 der Gleichung (4) oder in der Lösungsmenge L_5 der Gleichung (5) enthalten, d. h.:

$$c_i \in L_4 \vee c_i \in L_5$$

bzw. $c_i \in L_4 \cup L_5$.

Da Gleichung (5) und Gleichung (1) äquivalent sind, gilt

$$L_5 = L_1,$$

und außerdem ist

$$L_4 = \{a\}.$$

Also $c_i \in L_1 \cup \{a\}$.

Daraus folgt

$$L \subseteq L_1 \cup \{a\}.$$

Aus $L \subseteq L_1 \cup \{a\}$ und $L_1 \cup \{a\} \subseteq L$ ergibt sich $L = L_1 \cup \{a\}$,
q.e.d.

BEISPIEL 6 (5.1.2.):

Man ermittle die Lösungsmenge

$$L = \{x; x \in G \wedge \frac{2x-6}{x-3} = 1\}.$$

Als umfangreichster Lösungsgrundbereich bezüglich G^1 kann hier

$$L_G = \{x; x \in G \wedge x \neq 3\}$$

gewählt werden.

Multipliziert man die gegebene Gleichung $\frac{2x-6}{x-3} = 1$ mit $(x-3)$, so erhält man

$$2x - 6 = x - 3.$$

Der Term $(x-3)$ kann bei Belegung von x mit 3 den Wert Null annehmen. Das Element 3 gehört aber nicht zum Lösungsgrundbereich; folglich ist die durchgeführte Umformung in diesem Lösungsgrundbereich eine äquivalente Umformung.

Weitere Umformungen führen zu

$$x = 3.$$

Eine Belegung von x mit 3 überführt die Gleichung $x = 3$ in eine wahre Aus-

¹ Unter „umfangreichster Lösungsgrundbereich bezüglich G “ verstehen wir denjenigen Lösungsgrundbereich, der alle möglichen Lösungsgrundbereiche bezüglich G als Teilmengen enthält.

sage. Da die Zahl 3 nicht im Lösungsgrundbereich liegt, erhält man als Lösungsmenge der gegebenen Gleichung

$$L = \emptyset.$$

BEISPIEL 7 (5.1.2.):

Bei einer Stockschere hat der Hebelarm für die Handkraft F_1 die Länge $l_1 = 550$ mm. Der Rundstahl wird so eingelegt, daß der Hebelarm für die Schneidekraft F_2 die Länge $l_2 = 50$ mm hat.

Bei welcher Handkraft ist die Schneidekraft um 100 kp größer als die Handkraft?

Mit den hier gegebenen Bezeichnungen kann das Hebelgesetz in der Form

$$(1) \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

notiert werden.

Die Maßzahl x der Handkraft F_1 ist die Lösung der Gleichung

$$(2) \frac{x}{x + 100} = \frac{50}{550},$$

wobei wir als Einheit kp erhalten.

Ein geeigneter Lösungsgrundbereich ist $L_G = \{x; x \in P \wedge x > 0\}$.

In diesem Lösungsgrundbereich ist die Multiplikation von Gleichung (2) mit $550(x + 100)$ eine äquivalente Umformung.

Wir erhalten

$$(3) 550x = 50(x + 100)$$

und weiter $11x = x + 100$,

also $x = 10$,

d. h., $L = \{10\}$.

Die Schneidekraft F_2 ist demnach genau dann um 100 kp größer als die Handkraft F_1 , wenn F_1 eine Größe von 10 kp hat. Dann ergibt sich die Schneidekraft 110 kp.

BEISPIEL 8 (5.1.2.):

Gegeben sei die Gleichung

$$(1) 3(x - 3) = 5(x - 3)$$

im Grundbereich G mit $L_G = G$.

Wir multiplizieren aus und erhalten aus (1) die Gleichung

$$(2) 3x - 9 = 5x - 15$$

und weiter (3) $6 = 2x$,

5.1.

also (4) $x = 3$, d. h., $L_1 = \{3\}$.

Die Division von Gleichung (1) durch $(x - 3)$ ist im gegebenen Lösungsgrundbereich nicht möglich, dagegen aber in $L_G = \{x; x \in G \wedge x \neq 3\}$.

Dann erhalten wir aus (1) die Gleichung

$$(5) \quad 3 = 5,$$

für die gilt: $L_2 = \emptyset$.

Diese Division führt also zu einer Veränderung der Lösungsmenge der Art, daß gilt:

$$L_2 = L_1 \setminus \{3\}.$$

Hier liegt die folgende Verallgemeinerung nahe.

SATZ 5 (5.1.2.):

Es seien

$$(1) \quad T_1(x) = T_2(x)$$

eine Gleichung mit genau einer Variablen, L_1 die Lösungsmenge dieser Gleichung in einem vorgegebenen Lösungsgrundbereich L_G und $T_3(x)$ ein Term, der nur bei der Belegung der Variablen x mit $a \in L_G$ den Wert Null annimmt und bei allen anderen Belegungen von Null verschieden ist. Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$(2) \quad \frac{T_1(x)}{T_3(x)} = \frac{T_2(x)}{T_3(x)}$$

gleich der Menge

$$L = L_1 \setminus \{a\}.$$

Beweis:

Es muß gezeigt werden, daß das Element a nicht als Lösung von Gleichung (2) auftreten kann.

Die Division der Gleichung (1) durch $T_3(x)$ ist im vorgegebenen Lösungsgrundbereich L_G nicht zulässig.

Gleichung (1) kann nur dann durch $T_3(x)$ dividiert werden, wenn das Element a aus dem Lösungsgrundbereich ausgeschlossen wird. Damit kann a trivialerweise nicht mehr als Lösung von Gleichung (2) auftreten.

In den Beispielen 9 (5.1.2.) und 10 (5.1.2.) wollen wir uns mit Verfahren der rechnerischen Lösung von linearen Gleichungen mit genau einer Variablen beschäftigen.

Die bisher betrachteten einfachen Beispiele zeigen, daß die Angabe der Lösungsmenge dann besonders einfach ist, wenn die lineare Gleichung die Form $x = a$ hat.

Falls $a \in L_G$ ist, erhält man als Lösungsmenge $L = \{a\}$.

Um eine Gleichung dieser Form zu erhalten, geht man im allgemeinen in folgenden Schritten vor.

1. *Schritt:* Man lege, falls nicht vorgegeben, den Lösungsgrundbereich so groß wie möglich fest.
2. *Schritt:* Falls in der Gleichung Brüche auftreten, multipliziere man die Gleichung mit dem Hauptnenner dieser Brüche.
3. *Schritt:* Man beseitige vorhandene Klammern durch Anwenden des Distributivgesetzes.
4. *Schritt:* Man vereinfache die beiden Terme der Gleichung durch Zusammenfassen der Summanden, die die Variable enthalten, bzw. der Summanden, die die Variable nicht enthalten.
5. *Schritt:* Man addiere einen Term, der die Variable enthält, zu beiden Termen der Gleichung, so daß die Variable in einem Term der Gleichung nicht mehr auftritt.
6. *Schritt:* Man addiere einen Term, der die Variable nicht enthält, zu beiden Termen der Gleichung, so daß der eine Term der Gleichung die Variable enthält, der andere Term der Gleichung die Variable nicht enthält.
7. *Schritt:* Man dividiere beide Terme der Gleichung durch den Koeffizienten der Variablen, falls dieser ungleich Null ist.
8. *Schritt:* Man gebe die Lösungsmenge bezüglich des vorgegebenen Lösungsgrundbereiches an.

BEISPIEL 9 (5.1.2.):

Man löse die Gleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{5}{8} \quad (\text{der Grundbereich sei } G).$$

Bezüglich der oben angegebenen Schritte ergibt sich hier:

1. *Schritt:* Als größtmöglicher Lösungsgrundbereich bezüglich G kann gewählt werden

$$L_G = \{x; x \in G \wedge x \neq -1\}.$$

2. *Schritt:* Der Hauptnenner der in der Gleichung auftretenden Brüche ist $8(x+1)$.

Da $x \neq -1$, ist die Multiplikation mit $8(x+1)$ im gewählten Lösungsgrundbereich eine äquivalente Umformung. Es ergibt sich

$$\frac{8(x+1)}{2} + \frac{2 \cdot 8(x+1)}{x+1} - \frac{8(x+1)}{2(x+1)} = \frac{8(x+1)}{x+1} + \frac{5 \cdot 8(x+1)}{8}$$

Daraus erhält man $4(x+1) + 16 - 4 = 8 + 5(x+1)$.

3. Schritt: $4x + 4 + 16 - 4 = 8 + 5x + 5$

4. Schritt: $4x + 16 = 5x + 13$

5. Schritt: Will man erreichen, daß im rechten Term der Gleichung die Variable nicht mehr enthalten ist, so muß $-5x$ addiert werden.

$$-x + 16 = 13$$

6. Schritt: Man addiert -16 :

$$-x = -3.$$

7. Schritt: Man dividiert durch -1 :

$$x = 3.$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $L = \{3\}$.

8. Schritt: Da die Gleichung $x = 3$ zu der gegebenen Gleichung im Lösungsbereich äquivalent ist, kann die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ebenfalls angegeben werden.

Es ist $L = \{3\}$.

Beim Lösen weiterer Gleichungen (und später auch Ungleichungen) verzichten wir auf die explizite Angabe der einzelnen Schritte.

Wir begnügen uns zunächst mit einer kurzen Darstellung, in der wir die auszuführenden Operationen rechts neben der Gleichung festhalten.

Später verzichten wir auch darauf.

BEISPIEL 10 (5.1.2.):

Man gebe die Menge

$$L = \left\{ x; x \in P \wedge -1 < x < 4 \wedge \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{3}{x} \right\}$$

elementweise an.

Aus der Aussageform ergeben sich hier

$$B = P \text{ und } L_G = \{x; x \in P \wedge -1 < x < 4 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1\}.$$

Eine mögliche kurze Darstellung der äquivalenten Umformung ist folgende.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} = \frac{3}{x} \quad | \cdot x(x-1)$$

$$x - 2 = 3(x-1)$$

$$x - 2 = 3x - 3 \quad | -3x$$

$$\begin{array}{rcl} -2x - 2 = -3 & | + 2 \\ -2x = -1 & | : (-2) \\ x = \frac{1}{2} & & \end{array}$$

Es ist $\frac{1}{2} \in L_G$, also gilt: $L = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Da bei den äquivalenten Umformungen Rechenfehler auftreten können, ist es zweckmäßig, die Richtigkeit der Lösungen zu überprüfen.

Eine Belegung der Variablen einer Gleichung bzw. Ungleichung ist genau dann eine Lösung dieser Gleichung in einem Lösungsgrundbereich, wenn diese Belegung im Lösungsgrundbereich enthalten ist und die Gleichung in eine wahre Aussage überführt. Es genügt also, die Variablen der Gleichung bzw. Ungleichung mit „lösungsverdächtigen“ Elementen zu belegen.

Erhält man eine wahre Aussage, so ist die gefundene Belegung eine Lösung der gegebenen Gleichung bzw. Ungleichung. Erhält man eine falsche Aussage, so ist diese Belegung keine Lösung. Man bezeichnet dieses Verfahren der Überprüfung der Lösungen als „Probe“.

Wir führen die Probe für Beispiel 10 (5.1.2.) aus.

Belegt man im linken Term $T_1(x)$ der Gleichung die Variable x mit $\frac{1}{2}$, so ergibt sich

$$T_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}$$

und weiter

$$T_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

bzw. $T_1\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 8, \quad \text{also } T_1\left(\frac{1}{2}\right) = 6.$

Belegt man im rechten Term $T_2(x)$ die Variable x mit $\frac{1}{2}$, so erhält man

$$T_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\frac{1}{2}}$$

also $T_2\left(\frac{1}{2}\right) = 6.$

Vergleichen wir $T_1\left(\frac{1}{2}\right)$ und $T_2\left(\frac{1}{2}\right)$, so entsteht mit $T_1\left(\frac{1}{2}\right) = T_2\left(\frac{1}{2}\right)$

eine wahre Aussage, d. h., $\frac{1}{2}$ ist eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Gleichungen mit mehr als einer Variablen

Vorbemerkungen

In Teil 5.2. untersuchen wir Gleichungen mit mehr als einer Variablen. Dabei beschränken wir uns auf Gleichungen, in denen die Variablen nur in der ersten Potenz auftreten.

DEFINITION 1 (5.2.1.):

Eine Gleichung heißt eine **lineare Gleichung mit n Variablen** genau dann, wenn sie durch äquivalente Umformungen in die Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = b$$

($a_i \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$)

gebracht werden kann.

Sei die Menge B ein Grundbereich einer linearen Gleichung mit n Variablen, so ist nach Definition 7 (4.2.) eine mögliche Lösungsgrundmenge stets Teilmenge der Produktmenge $B \times B \times \dots \times B = B^n$.

Die Anzahl der „Faktoren“ dieser Produktmenge entspricht der Anzahl der Variablen in der gegebenen Gleichung.

Jedes geordnete n -Tupel aus einer solchen Lösungsgrundmenge, das die gegebene Gleichung in eine wahre Aussage überführt, ist nach Definition 8 (4.2.) und Definition 9 (4.2.) ein Element der Lösungsmenge der gegebenen Gleichung bezüglich des vorgegebenen Lösungsbereiches.

SATZ 1 (5.2.1.):

Es seien

$$(1) a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

($a_i \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$)

eine lineare Gleichung mit n Variablen in einem Grundbereich B und

$$L_G = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

eine vorgegebene Lösungsgrundmenge mit

$$L_G \subseteq B \times B \times \dots \times B.$$

Dann gibt es zu $(n - 1)$ beliebig vorgegebenen Elementen

$$c_1 \in M_1, c_2 \in M_2, \dots, c_{n-1} \in M_{n-1}$$

höchstens ein Element c_n , so daß das geordnete n -Tupel

$$[c_1; c_2; \dots; c_{n-1}; c_n]$$

eine Lösung der gegebenen Gleichung bezüglich des Lösungsgrundbereiches ist.

Beweis:

Belegt man die Variablen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} unter Beachtung der Indizes mit den vorgegebenen Elementen c_1, c_2, \dots, c_{n-1} , so stellt der Term

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{n-1} c_{n-1}$$

eine eindeutig bestimmte Zahl d dar.

Damit kann Gleichung (1) nach erfolgter Belegung in der Form

$$(2) \quad d + a_n x_n = b \quad (a_n \neq 0)$$

geschrieben werden.

Gleichung (2) ist eine lineare Gleichung mit genau einer Variablen. Äquivalent zu (2) ist

$$x_n = \frac{b - d}{a_n}.$$

Wenn $\frac{b - d}{a_n} \in M_n$, so stellt $\frac{b - d}{a_n}$ das eindeutig bestimmte Element c_n dar.

Gilt $\frac{b - d}{a_n} \notin M_n$, so gibt es kein Element c_n der geforderten Art. q.e.d.

Folgerung: Eine lineare Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ ($a_i \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$) mit n Variablen hat im Lösungsgrundbereich der reellen Zahlen unendlich viele Lösungen.

Die Gültigkeit der Aussage ergibt sich daraus, daß für jede beliebige Belegung der Variablen x_1, x_2, \dots, x_{n-1} (wovon es unendlich viele gibt) gilt:

$$\frac{b - d}{a_n} \in P.$$

5.2.

BEISPIEL 1 (5.2.1.):

Man gebe eine Lösung der Gleichung

$$(1) \quad 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5$$

bezüglich P an.

Der Lösungsgrundbereich sei $L_G = P \times \dots \times P = P^5$.

Wir geben uns zunächst im Sinne von Satz 1 (5.2.1.) vier beliebige reelle Zahlen vor, z. B. $c_1 = -1$; $c_2 = 2$; $c_3 = 0$; $c_4 = -2$.

Nach entsprechender Belegung der Variablen x_1, \dots, x_4 erhält man aus (1)

$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3x_5 = 5 \quad \text{bzw.}$$

$$(2) \quad -3 + 3x_5 = 5.$$

Äquivalente Umformung liefert

$$x_5 = \frac{5 + 3}{3}$$

$$x_5 = \frac{8}{3}.$$

Damit ist die Lösungsmenge von Gleichung (2) $L = \left\{ \begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

Nach Satz 1 (5.2.1.) ist das geordnete Zahlentupel

$$\left[-1; 2; 0; -2; \frac{8}{3} \right]$$

eine Lösung der Gleichung (1).

5.2.2.

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

Aus Definition 1 (5.2.1.) ergibt sich für den Fall $n = 2$ Definition 1 (5.2.2.).

DEFINITION 1 (5.2.2.):

Eine Gleichung heißt eine **lineare Gleichung mit zwei Variablen** genau dann, wenn sie durch äquivalente Umformungen in die Form

$$ax + by = c \quad (a, b \neq 0)$$

gebracht werden kann.

Bemerkung: Die Elemente der Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen sind geordnete Zahlenpaare. Die Lösungsgrundmenge ist eine Produktmenge $M_1 \times M_2 \subseteq B \times B$, wobei B der Grundbereich der gegebenen Gleichung ist.

SATZ 1 (5.2.2.):

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen

$$(1) \quad ax + by = c \quad (a, b \neq 0; a, b, c \in P)$$

hat in $L_G = P \times P$ unendlich viele Lösungen.

Beweis:

Belegt man zum Beispiel die Variable x mit einer beliebigen reellen Zahl r , so ist stets

$$ar \in P.$$

Formt man die Gleichung (1) äquivalent um, so entsteht $y = \frac{c - ar}{b}$.

Aus $ar \in P$ folgt

$$c - ar \in P$$

und weiter

$$\frac{c - ar}{b} \in P.$$

Also gilt $\left[r; \frac{c - ar}{b} \right] \in P \times P$ für alle reellen Zahlen r .

Das heißt, es gibt unendlich viele geordnete Paare aus $P \times P$, die Lösungen der vorgegebenen Gleichung sind, q. e. d.

An den Beispielen 1 (5.2.2.) bis 4 (5.2.2.) wollen wir zeigen, welche *Arten von Lösungsmengen* bei einer linearen Gleichung mit zwei Variablen im Bereich der natürlichen Zahlen auftreten können.

BEISPIEL 1 (5.2.2.):

Man gebe die Lösungsmenge der Gleichung $6x + 2y = 11$ bezüglich $L_G = N \times N$ an.

Im Sinne von Satz 1 (5.2.1.) belegt man die Variable x mit $0, 1, 2, 3, \dots$ und ermittelt eine mögliche zugehörige Belegung für y .

Dann erhält man

a) bei Belegung von x mit 0:

$$6 \cdot 0 + 2y = 11, \text{ d. h. } y = \frac{11}{2}.$$

Es ist $\frac{11}{2} \notin N$, also $\left[0; \frac{11}{2} \right] \notin N \times N$.

b) bei Belegung von x mit 1:

$$6 \cdot 1 + 2y = 11, \text{ d. h. } y = \frac{11 - 6}{2} \text{ bzw. } y = \frac{5}{2}.$$

Es ist $\left[1; \frac{5}{2}\right] \notin N \times N$.

c) bei Belegung von x mit 2:

$$6 \cdot 2 + 2y = 11, \text{ d. h. } y = \frac{11 - 12}{2} \text{ bzw. } y = -\frac{1}{2}.$$

Es ist $\left[2; -\frac{1}{2}\right] \notin N \times N$.

Jede Belegung von x mit einem Element $x > 2$ liefert stets $y < 0$.
Damit gilt: $L = \emptyset$.

BEISPIEL 2 (5.2.2.):

Man gebe die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 2y = 12$ bezüglich $L_G = N \times N$ an.

Man erhält nach dem Verfahren im Beispiel 1 (5.2.2.)

$$L = \{[0;6], [2;3], [4;0]\}.$$

BEISPIEL 3 (5.2.2.):

Man gebe die Lösungsmenge der Gleichung $3x - 2y = 12$ bezüglich $L_G = N \times N$ an.

Die Lösungsmenge dieser Gleichung enthält unendlich viele Elemente.

Es ergibt sich

$$L = \{[4;0], [6;3], [8;6], [10;9], \dots\}$$

und, mit Hilfe einer Aussageform angegeben,

$$L = \left\{ [x;y]; [x;y] \in N \times N \wedge y = \frac{3x - 12}{2} \right\}.$$

Das auf Satz 1 (5.2.1.) beruhende Verfahren der rechnerischen Ermittlung der Lösungen einer Gleichung mit n Variablen wird bereits im Mathematikunterricht der Unterstufe benutzt. Das Beispiel 4 (5.2.2.) ist [6; Klasse 2] entnommen.

BEISPIEL 4 (5.2.2.):

Es ist die Gleichung $x + y = 3$ vorgegeben.

Man gehe von der Frage aus:

Wie groß ist y , wenn $x = 0$,
 wenn $x = 1$,
 wenn $x = 2$,
 wenn $x = 3$?

Diese Aufgabenstellung entspricht dem Problem, eine vorgegebene lineare Gleichung mit zwei Variablen in $L_G = N \times N$ zu lösen.

Mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln kann die Lösungsmenge mit

$$L = \{[0;3], [1;2], [2;1], [3;0]\}$$

angegeben werden.

5.2.3.

Diophantische Gleichungen mit zwei Variablen

In Teil 5.2.3. wollen wir ein Lösungsverfahren für diophantische Gleichungen mit zwei Variablen angeben.

DEFINITION 1 (5.2.3.):

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen

$$ax + by = c \quad (a \cdot b \neq 0)$$

heißt eine **diophantische Gleichung mit zwei Variablen** genau dann, wenn a, b, c ganze Zahlen sind und der Lösungsgrundbereich $G \times G$ ist.

Es kommt also darauf an, alle ganzzahligen Lösungen einer Gleichung

$$ax + by = c \quad \text{mit } a, b, c \in G \text{ und } a, b \neq 0$$

zu ermitteln.

Wir erinnern an dieser Stelle an Satz 1 (5.2.2.), den wir hier vereinfacht wiedergeben.

SATZ 1 (5.2.3.):

Eine diophantische Gleichung

$$ax + by = c$$

hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn der größte gemeinsame Teiler von a und b auch ein Teiler von c ist.

BEISPIEL 1 (5.2.3.):

In [6; Klasse 2] finden wir die Gleichung

$$(1) \quad a + b = 4.$$

5.2.

Die Schüler ermitteln durch systematisches Probieren im Bereich der natürlichen Zahlen die Lösungen und tragen sie in eine Tabelle ein.

a	b	$a + b$
0	4	4
1	3	4
2	2	4
3	1	4
4	0	4

Wir fassen die gegebene Gleichung als eine diophantische Gleichung auf, suchen also alle ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung.

Zu Gleichung (1) äquivalent ist die Gleichung

$$(2) a = 4 - b.$$

Das Problem besteht darin, alle ganzen Zahlen b zu finden, für die a ebenfalls eine ganze Zahl ist.

In diesem Fall gilt

$$\forall b: b \in G \rightarrow (4 - b) \in G.$$

Wir geben die Lösungsmenge L an.

$$L = \{[a; b]; a = 4 - b \wedge b \in G\}$$

BEISPIEL 2 (5.2.3.):

Man löse die diophantische Gleichung

$$(1) 15x + 17y = 18.$$

Man löst Gleichung (1) nach einer der beiden Variablen auf. Dann entsteht z. B.

$$(2) x = \frac{18 - 17y}{15}.$$

Jetzt führt man die Division $(18 - 17y) : 15$ aus und erhält

$$\frac{18 - 17y}{15} = 1 - y + \frac{3 - 2y}{15}.$$

Damit ist die Gleichung

$$(3) x = 1 - y + \frac{3 - 2y}{15}$$

zur Gleichung (2) äquivalent.

Man sucht alle ganzen Zahlen y , für die x ebenfalls eine ganze Zahl wird, d. h.,

man muß y so bestimmen, daß

$$(4) \frac{3 - 2y}{15} = n_1 \text{ und } n_1 \in G \text{ ist.}$$

Aus (4) ergibt sich

$$(5) y = \frac{3 - 15n_1}{2}.$$

Man führt die Division $(3 - 15n_1) : 2$ aus und erhält

$$(6) y = 1 - 7n_1 + \frac{1 - n_1}{2}.$$

Es ist y sicher dann eine ganze Zahl, wenn $\frac{1 - n_1}{2} = n_2$ und $n_2 \in G$.

Daraus ergibt sich

$$n_1 = 1 - 2n_2.$$

Man setzt $1 - 2n_2$ für n_1 in Gleichung (5) ein. Dann ist

$$y = \frac{3 - 15(1 - 2n_2)}{2}$$

$$y = -6 + 15n_2$$

Setzt man $-6 + 15n_2$ in Gleichung (2) für y ein, so ergibt sich

$$x = \frac{18 - 17(-6 + 15n_2)}{15}$$

$$x = 8 - 17n_2$$

Wenn $n_2 \in G$, so $x \in G \wedge y \in G$.

Als Lösungsmenge L von Gleichung (1) erhält man

$$L = \{[x; y]; x = 8 - 17n_2 \wedge y = -6 + 15n_2 \wedge n_2 \in G\}.$$

Wir geben einige Elemente der Lösungsmenge in einer Tabelle an.

n_2	x	y	$[x; y]$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
- 2	42	- 36	[42; - 36]
- 1	25	- 21	[25; - 21]
0	8	- 6	[8; - 6]
1	- 9	9	[- 9; 9]
2	- 28	24	[- 28; 24]
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

BEISPIEL 3 (5.2.3.):

Auf einer Tafelwaage sollen 270 g eines Stoffes abgewogen werden. Es stehen nur Massestücke zu 20 g und 50 g zur Verfügung. Wir bezeichnen mit x die Anzahl der zu einer Wägung benutzten 20-g-Massestücke und mit y die Anzahl der 50-g-Massestücke.

Dann wird durch die Gleichung

$$x \cdot 20 \text{ g} + y \cdot 50 \text{ g} = 270 \text{ g}$$

der Sachverhalt wiedergegeben.

Das Problem besteht im Lösen der diophantischen Gleichung

$$20x + 50y = 270.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung

$$2x + 5y = 27.$$

Auflösen nach x liefert

$$x = \frac{27 - 5y}{2}.$$

Nach Division erhalten wir

$$x = 13 - 2y_1 + \frac{1 - y_1}{2}.$$

Es sei $\frac{1 - y_1}{2} = n_1$ und $n_1 \in G$, d. h.

$$y_1 = 1 - 2n_1.$$

Einsetzen liefert

$$x = \frac{27 - 5(1 - 2n_1)}{2} = 11 + 5n_1.$$

Also gilt stets: Wenn $n_1 \in G \rightarrow y \in G \wedge x \in G$, d. h.

$$L = \{[x;y] : x = 11 + 5n_1 \wedge y = 1 - 2n_1 \wedge n_1 \in G\}.$$

Wir benutzen eine Tabelle, (\nearrow 107) um einige Elemente dieser Lösungsmenge anzugeben.

Die gegebene diophantische Gleichung hat also unendlich viele Lösungen.

Welche Möglichkeit zur Wägung benutzt wird, hängt u. a. von der Anzahl der vorhandenen Massestücke ab.

Bemerkung: Die Vorzeichen sind wie folgt zu interpretieren,

Positives Vorzeichen bedeutet, daß die Wägestücke auf der Schale liegen, auf der die zu bestimmende Masse nicht liegt.

Negatives Vorzeichen heißt, die entsprechende Anzahl von Wägestücken liegt auf der Schale, auf der auch das zu wägende Massestück liegt.

n_1	x	y	$[x; y]$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
- 3	- 4	7	[- 4; 7]
- 2	1	5	[1; 5]
- 1	6	3	[6; 3]
0	11	1	[11; 1]
1	16	- 1	[16; - 1]
2	21	- 3	[21; - 3]
3	26	- 5	[26; - 5]
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

5.2.4.

Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen.

In Teil 5.2.4. wollen wir uns auf die Untersuchung von Systemen linearer Gleichungen mit zwei Variablen beschränken.

Die hier erläuterten Begriffe und einige wesentliche Aussagen sollen in Teil 5.2.5. verallgemeinert werden.

DEFINITION 1 (5.2.4.):

Ein System der Form

$$H_1(x, y)$$

$$H_2(x, y)$$

heißt ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen genau dann, wenn die Aussageformen $H_1(x, y)$ und $H_2(x, y)$ lineare Gleichungen mit höchstens zwei Variablen sind.

Man schreibt im allgemeinen:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$(a_i, b_i, c_i \in P; i = 1, 2)$$

Das Problem besteht im folgenden darin, Lösungen solcher Systeme von Gleichungen zu ermitteln.

Dazu definieren wir zunächst einige wesentliche Begriffe.

DEFINITION 2 (5.2.4.):

Unter dem **Lösungsgrundbereich** L_G eines Systems von **linearen Gleichungen mit zwei Variablen** versteht man die Menge aller geordneten Paare

$$\{d; e\} \in B \times B,$$

für die bei Belegung der Variablen x mit d und der Variablen y mit e sowohl die eine als auch die andere Gleichung des Systems in eine (wahre oder falsche) Aussage überführt wird.

DEFINITION 3 (5.2.4.):

Ein geordnetes Zahlenpaar $\{d; e\}$ heißt eine **Lösung eines Systems linearer Gleichungen**

$$H_1(x, y)$$

$$H_2(x, y)$$

genau dann, wenn die Belegung der Variablen x mit d und der Variablen y mit e sowohl die eine als auch die andere Gleichung des Systems in eine wahre Aussage überführt und $\{d; e\} \in L_G$ ist.

DEFINITION 4 (5.2.4.):

Unter der **Lösungsmenge eines Gleichungssystems** bezüglich eines vorgegebenen Lösungsgrundbereiches versteht man die Menge aller Lösungen dieses Systems in diesem Lösungsgrundbereich.

BEISPIEL 1 (5.2.4.):

Man ermittle die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$(1) \quad x + 2y = 6$$

$$(2) \quad 3x + 2y = 14, \text{ wobei } L_G = N \times N.$$

Man gibt zunächst die Lösungsmengen der beiden Gleichungen in bezug auf den vorgegebenen Lösungsgrundbereich an.

$$\text{Es gilt: } L_1 = \{[x; y] : [x; y] \in N \times N \wedge x + 2y = 6\}$$

bzw. elementweise

$$L_1 = \{[0; 3], [2; 2], [4; 1], [6; 0]\}$$

$$\text{und } L_2 = \{[x; y] : [x; y] \in N \times N \wedge 3x + 2y = 14\}$$

bzw. elementweise

$$L_2 = \{[0; 7], [2; 4], [4; 1]\}.$$

Nach Definition 3 (5.2.4.) ist das geordnete Paar $[4; 1]$ eine Lösung dieses Gleichungssystems, da $[4; 1]$ eine Lösung beider Gleichungen des Systems ist. Da es kein weiteres Element dieser Art gibt, ist die Lösungsmenge des Systems

$$L = \{[4; 1]\}.$$

SATZ 1 (5.2.4.):

Wenn

L_1 die Lösungsmenge einer linearen Gleichung

$H_1(x, y)$ mit genau zwei Variablen bezüglich eines Lösungsgrundbereiches $L_G^{(1)}$ und

L_2 die Lösungsmenge einer linearen Gleichung

$H_2(x, y)$ mit genau zwei Variablen bezüglich eines Lösungsgrundbereiches $L_G^{(2)}$ ist,

so ist die Lösungsmenge L des Gleichungssystems

$$H_1(x, y)$$

$$H_2(x, y)$$

bezüglich L_G gleich der Durchschnittsmenge von L_1 und L_2 , also

$$L = L_1 \cap L_2.$$

Beweis:

Nach Definition 3 (5.2.4.) enthält die Lösungsmenge eines Gleichungssystems alle die geordneten Paare, die beide Gleichungen in eine wahre Aussage überführen. Das ist aber nach der Definition der Durchschnittsmenge die Menge

$$L_1 \cap L_2.$$

Weiter folgt aus $L_1 \subseteq L_G^{(1)}$ und $L_2 \subseteq L_G^{(2)}$

$$L_1 \cap L_2 \subseteq L_G^{(1)} \cap L_G^{(2)},$$

also $L \subseteq L_G$.

Bemerkung: Die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems kann nach Satz 1 (5.2.4.) durch

$$L = \{[x; y] : [x; y] \in L_G \wedge H_1(x, y) \wedge H_2(x, y)\}$$

dargestellt werden.

DEFINITION 5 (5.2.4.):

Zwei Systeme linearer Gleichungen mit den gleichen Variablen heißen in einem Lösungsgrundbereich äquivalent genau dann, wenn sie in diesem Lösungsgrundbereich ein und dieselbe Lösungsmenge haben.

Wir betrachten einige der wesentlichsten Möglichkeiten, zu einem vorgegebenen Gleichungssystem ein dazu äquivalentes Gleichungssystem zu gewinnen.

1. *Umformungen einzelner Gleichungen des Systems, ohne Benutzung anderer Gleichungen des Systems*

Es gilt:

Jede Gleichung eines Gleichungssystems kann durch eine Gleichung ersetzt werden, die bezüglich des vorgegebenen Lösungsgrundbereiches dieselbe Lösungsmenge besitzt.

Das heißt, jede Gleichung kann im vorgegebenen Lösungsgrundbereich äquivalent umgeformt werden.

2. *Umformungen unter Benutzung mehrerer Gleichungen des Systems*

Es gilt:

a) Die Gleichungen eines Systems können miteinander vertauscht werden.

b) Jede Gleichung eines Systems kann durch eine Gleichung ersetzt werden, die dadurch entsteht, daß man ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung¹ des Systems zu der betrachteten addiert.

Das Ziel der Umformungen von Gleichungssystemen besteht darin, ein solches System zu erhalten, für das die Lösungsmenge leicht angegeben werden kann.

Zunächst folgen einige Bemerkungen zu leicht lösbaren Systemen.

BEISPIEL 2 (5.2.4.) [6; Klasse 2]:

Berechne b !

Es ist (1) $a = 5$

$$(2) b = a + 3$$

Wir fassen beide Gleichungen als ein Gleichungssystem in $N \times N$ auf und fragen nach allen geordneten Paaren $[a; b]$, die beide Gleichungen erfüllen.

Zu Gleichung (1) ist die Gleichung

$$a + 0 \cdot b = 5$$

äquivalent.

Wir erkennen, daß b mit jeder natürlichen Zahl belegt werden kann, und erhalten als Lösungsmenge von Gleichung (1)

$$L_1 = \{[5; 0], [5; 1], [5; 2], [5; 3], \dots, [5; 8], \dots\}.$$

¹ Unter einem Vielfachen einer Gleichung wollen wir eine Gleichung verstehen, die durch Multiplikation einer gegebenen Gleichung mit einer von Null verschiedenen reellen Zahl entsteht.

Für die Lösungsmenge von Gleichung (2) ergibt sich

$$L_2 = \{[0; 3], [1; 4], [2; 5], [3; 6], [4; 7], [5; 8], [6; 9], \dots\}.$$

Damit ist die Lösung des Systems

$$L = L_1 \cap L_2 = \{[5; 8]\}.$$

Auf dieses umständliche Verfahren hätten wir verzichten können, da aus Gleichung (1) folgt, daß nur solche geordneten Paare als Lösung des Systems in Frage kommen, für die das erste Element 5 ist.

Belegen wir in Gleichung (2) a mit 5, so ergibt sich für $a + 3$ der Wert 8.

Also erfüllt $[5; 8]$ Gleichung (2), aber auch Gleichung (1), d. h., die Lösungsmenge des Systems ist

$$L = \{[5; 8]\}.$$

Aus Beispiel 2 (5.2.4.) entnehmen wir, daß ein System mit zwei Variablen sicher dann leicht lösbar ist, wenn eine der auftretenden Gleichungen genau eine Variable enthält.

Das Problem besteht also darin, ein gegebenes Gleichungssystem so umzuformen, daß ein äquivalentes Gleichungssystem entsteht, in dem eine Gleichung genau eine Variable enthält.

BEISPIEL 3 (5.2.4.):

Man löse das Gleichungssystem

$$(1) \quad 2x - 3y = 1$$

$$3x - 4y = 2$$

im Lösungsgrundbereich $N \times N$.

Man multipliziert die erste Gleichung des Systems (1) mit 3 und die zweite Gleichung mit -2 . Dann entsteht das System

$$(2) \quad 6x - 9y = 3$$

$$-6x + 8y = -4.$$

Es sei L_1 die Lösungsmenge von System (1) und L_2 die Lösungsmenge von System (2).

Da die durchgeführten Umformungen die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen nicht verändert haben, gilt auch

$$L_1 = L_2,$$

d. h. $[x; y] \in L_1 \leftrightarrow [x; y] \in L_2$.

Man addiert die beiden Gleichungen des Systems (2) und erhält die Gleichung

$$(3) \quad 0 \cdot x - y = -1.$$

(Man beachte: Gleichung (3) folgt aus dem System (2), die Umkehrung gilt nicht.)

5.2.

Es sei L_3 die Lösungsmenge dieser Gleichung.

Dann gilt

$$[x; y] \in L_2 \rightarrow [x; y] \in L_3$$

bzw. $[x; y] \in L_1 \rightarrow [x; y] \in L_3,$

also $L_1 \subseteq L_3.$

Das heißt: Ein geordnetes Paar $[x; y]$ kann nur dann eine Lösung des Systems (1) sein, wenn es eine Lösung von Gleichung (3) ist.

Wir geben L_3 in $N \times N$ elementweise an:

$$L_3 = \{[0; 1], [1; 1], [2; 1], [3; 1], \dots\}.$$

Es können somit nur solche geordneten Paare Lösung von (1) sein, in denen das zweite Element 1 ist. Damit besteht das Problem nur noch darin, solche Belegungen für x zu ermitteln, die zusammen mit der Belegung von y mit 1 ein geordnetes Paar bilden, das beide Gleichungen des Systems (1) erfüllt. Man belegt in beiden Gleichungen von (1) y mit 1 und erhält

$$2x - 3 \cdot 1 = 1$$

und $3x - 4 \cdot 1 = 2.$

Daraus ergibt sich für beide Gleichungen jeweils

$$x = 2.$$

Wenn man y mit 1 belegt, kommt somit für x nur die Belegung mit 2 in Frage.

Also erfüllt nur das geordnete Paar $[2; 1]$ beide Gleichungen des Systems (1), d. h.

$$L_1 = \{[2; 1]\}.$$

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich, daß die folgenden Systeme ein und dieselbe Lösungsmenge haben.

$$(1) \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 3x - 4y &= 2 \end{aligned}$$

$$(1') \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 0x - y &= -1 \end{aligned}$$

$$(1'') \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ -y &= -1 \end{aligned}$$

Das in Beispiel 3 (5.2.4.) angewandte Verfahren zum Ermitteln der Lösungsmenge eines Gleichungssystems wird **Verfahren der gleichen Koeffizienten** (auch **Additionsverfahren**) genannt.

Das Ziel besteht darin, ein System der Form (1'') zu erhalten.

BEISPIEL 4 (5.2.4.):

Man löse das Gleichungssystem

$$(1) \quad 3x + 2y = 5$$

$$(2) \quad 4x + 7y = -2$$

in $L_G = G \times G$.

Das Ziel besteht darin, die Gleichungen mit solchen Faktoren zu multiplizieren, daß sich die Koeffizienten einer Variablen nur in bezug auf das Vorzeichen unterscheiden.

Im vorgegebenen Beispiel könnte man Gleichung (1) mit 7 und Gleichung (2) mit 2 multiplizieren, dann erhält man als Koeffizienten der Variablen y in Gleichung (1) 14 und in Gleichung (2) -14 .

Wir wählen eine zweite Möglichkeit und multiplizieren Gleichung (1) mit 4 und Gleichung (2) mit -3 , dann entsteht:

$$(1') \quad 12x + 8y = 20$$

$$(2') \quad -12x - 21y = 6$$

Wir addieren Gleichung (1') und Gleichung (2') und ersetzen Gleichung (2) im gegebenen System durch die so entstehende Gleichung.

Dann ergibt sich

$$(1'') \quad 3x + 2y = 5$$

$$(2'') \quad -13y = 26$$

Gleichung (2'') liefert

$$y = -2.$$

Wir setzen -2 für y in Gleichung (1'') ein und erhalten

$$3x - 4 = 5,$$

$$\text{d. h.} \quad x = 3.$$

Die Lösungsmenge des gegebenen Systems ist

$$L = \{[3; -2]\}.$$

Wir betrachten jetzt die *Arten von Lösungsmengen*, die bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen auftreten können.

SATZ 2 (5.2.4.):

Es sei

$$H_1(x, y)$$

$$H_2(x, y)$$

ein System linearer Gleichungen und

$L_G = B \times B$ der Lösungsgrundbereich des Systems.

Dann gibt es

- a) entweder *genau ein* geordnetes Zahlenpaar, das Lösung des Gleichungssystems bezüglich des Lösungsgrundbereiches ist;
- b) oder *kein* geordnetes Zahlenpaar, das Lösung des Gleichungssystems bezüglich des Lösungsgrundbereiches ist,
- c) oder die Lösungsmenge des Gleichungssystems bezüglich des Lösungsgrundbereiches ist gleich der Lösungsmenge von $H_1(x, y)$ und gleich der Lösungsmenge von $H_2(x, y)$ bezüglich des Lösungsgrundbereiches.

Beweis:

Es seien

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ein lineares Gleichungssystem und

$L_G = B \times B$ der Lösungsgrundbereich des Systems.

Man wendet das Verfahren der gleichen Koeffizienten an und erhält aus

$$\begin{array}{l} (1) \ a_1 x + b_1 y = c_1 \\ (2) \ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot a_2 \\ \cdot (-a_1) \end{array} \right. \downarrow^1$$

das System

$$(3) \ a_1 a_2 x + b_1 a_2 y = a_2 c_1$$

$$(4) \ -a_1 a_2 x - a_1 b_2 y = -a_1 c_2$$

Addition von (3) und (4) liefert

$$(5) \ (b_1 a_2 - a_1 b_2) y = a_2 c_1 - a_1 c_2.$$

1. Fall: $b_1 a_2 - a_1 b_2 \neq 0$

Dann ergibt sich

$$(6) \ y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{b_1 a_2 - a_1 b_2}.$$

Der rechte Term sei hier mit q bezeichnet.

Wenn $q \notin B$, so $L = \emptyset$.

Wir belegen y in (1) mit q . Es entsteht:

$$a_1 x + b_1 q = c_1$$

und weiter, falls $a_1 \neq 0$,

¹ Gleichung (1) wird mit a_2 und Gleichung (2) mit $-a_1$ multipliziert. Anschließend werden beide Gleichungen addiert.

$$(7) x = \frac{c_1 - b_1 q}{a_1}.$$

Der rechte Term von (7) sei mit p bezeichnet. Ist $p \in B$, so $L \neq \emptyset$. Die Terme p und q stellen eindeutig bestimmte reelle Zahlen dar, so daß, falls $[p; q] \in L_G$ ist, die Lösungsmenge genau dieses Element enthält.

Wir fassen zusammen:

Wenn $[p; q] \in L_G$, so $L = \{[p; q]\}$,

wenn $[p; q] \notin L_G$, so $L = \emptyset$.

Das heißt: Das System hat in diesem Fall *höchstens eine* Lösung.

2. Fall: $b_1 a_2 - a_1 b_2 = 0$

a) $a_2 c_1 - a_1 c_2 \neq 0$

Dann gibt es keine Belegung für y , die Gleichung (5) in eine wahre Aussage überführt.

Das heißt: Unabhängig von L_G gilt:

$$L = \emptyset.$$

b) $a_2 c_1 - a_1 c_2 = 0$

Dann überführt jede Belegung von y Gleichung (5) in eine wahre Aussage.

Das Gleichungssystem

$$(1) a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$(8) \quad 0 \cdot y = 0$$

ist in diesem Falle zu dem gegebenen Gleichungssystem äquivalent.

Da die Lösungsmenge des Systems, das aus den Gleichungen (1) und (8) besteht, der Lösungsmenge von Gleichung (1) entspricht, ist die Lösungsmenge des vorgegebenen Systems

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

gleich der Lösungsmenge von Gleichung (1),

d. h., es gilt:

$$L = L_1.$$

In analoger Weise erhält man ebenfalls $L = L_2$, also ist in diesem Fall

$$L = L_1 = L_2.$$

Bemerkung: Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, wenn L_1 und L_2 unendliche Mengen sind.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen, so gilt:

5.2.

Entweder $L = \emptyset$ oder $L = \{[p; q]\}$ oder $L = E_1 = L_2,$

q. e. d.

BEISPIEL 5 (5.2.4.):

Man löse das Gleichungssystem

(1) $3x_1 + 4x_2 = 18$

(2) $2x_1 + 3x_2 = 13$

in $L_G = G \times G$.Es ist hier $b_1a_2 - a_1b_2 = -1$.Damit hat das System nach Satz 2 (5.2.4.) *höchstens eine* Lösung in L_G .

Wir wenden das Verfahren der gleichen Koeffizienten an.

$$\begin{array}{l} (1) \ 3x_1 + 4x_2 = 18 \\ (2) \ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{array} \right. \downarrow$$

Man erhält

(3) $6x_1 + 8x_2 = 36$

(4) $-6x_1 - 9x_2 = -39$

Addition von (3) und (4) liefert

(5) $-x_2 = -3,$

und damit entsteht

(6) $3x_1 + 4x_2 = 18$

(7) $x_2 = 3$

Einsetzen von (7) in (6) ergibt

$3x_1 + 12 = 18$

bzw. $x_1 = 2.$

Wegen $2 \in G$ und $-3 \in G$ ist

$L = \{[2; -3]\}.$

BEISPIEL 6 (5.2.4.):

Man löse das Gleichungssystem

(1) $3x_1 + 4x_2 = 18$

(2) $6x_1 + 8x_2 = 10$

in $L_G = N \times N$.Es ist hier $b_1a_2 - a_1b_2 = 0$ und $a_2c_1 - a_1c_2 = 78.$

Damit hat das Gleichungssystem nach Satz 2 (5.2.4.) *keine Lösung*.

Wir wenden trotzdem das Lösungsverfahren an, um zu erkennen, welche Besonderheit in diesem Falle auftritt.

Man erhält aus

$$\begin{array}{l} (1) \ 3x_1 + 4x_2 = 18 \\ (2) \ 6x_1 + 8x_2 = 10 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \downarrow$$

das System

$$(3) \ -6x_1 - 8x_2 = -36$$

$$(4) \ 6x_1 + 8x_2 = 10.$$

Addition von (3) und (4) liefert

$$(5) \ 0 = -26.$$

Das ist eine falsche Aussage. Man sagt in diesem Fall:

Die Gleichungen des Systems stehen zueinander im Widerspruch.

BEISPIEL 7 (5.2.4.):

Man löse das Gleichungssystem

$$(1) \ x_1 + 2x_2 = 6$$

$$(2) \ 2x_1 + 4x_2 = 12$$

in $L_G = N \times N$.

$$\text{Es ist hier } b_1 a_2 - a_1 b_2 = 0$$

$$\text{bzw. } a_2 c_1 - a_1 c_2 = 0.$$

Damit stimmt nach Satz 2 (5.2.4.) die Lösungsmenge des Gleichungssystems mit den Lösungen jeder einzelnen Gleichung überein. In unserem Beispiel ist Gleichung (2) das Zweifache von Gleichung (1). Damit haben beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge.

Man sagt in diesem Fall:

Die beiden Gleichungen des Systems sind voneinander abhängig.

Die Lösungsmenge ist

$$L = \{[0; 3], [2; 2], [4; 1], [6; 0]\}.$$

BEISPIEL 8 (5.2.4.):

Man löse das System

$$(1) \ 2x - 3y = 4$$

$$(2) \ 6x + 2y = 1$$

in $L_G = G \times G$.

$$\text{Es ist hier } b_1 a_2 - a_1 b_2 = -22.$$

Damit hat das System nach Satz 2 (5.2.4.) *höchstens eine* Lösung im Lösungsbereich.

Man erhält aus

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x - 3y = 4 \\ (2) \quad 6x + 2y = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 1 \end{array} \right. \downarrow$$

das System

$$\begin{array}{l} (3) \quad -6x + 9y = -12 \\ (4) \quad 6x + 2y = 1. \end{array}$$

Addition von (3) und (4) liefert

$$11y = -11.$$

Es ergibt sich das System

$$\begin{array}{l} (5) \quad 2x - 3y = 4 \\ (6) \quad y = -1. \end{array}$$

Nach Einsetzen von (6) in (5) erhält man

$$2x + 3 = 4,$$

$$\text{d. h. } x = \frac{1}{2}.$$

Wegen $\left[\frac{1}{2}; -1 \right] \notin G \times G$ gilt

$$L = \emptyset.$$

BEISPIEL 9 (5.2.4.):

Wieviel Tonnen Stahl mit 0,5% Kohlenstoffgehalt und wieviel Tonnen Grauguß mit 2,5% Kohlenstoffgehalt ergeben zusammengesmolzen 12 t mit 1,45% Kohlenstoffgehalt?

Es sei x die Maßzahl der Masse des Stahls und y die Maßzahl der Masse des Graugusses.

$$\text{Dann ist } xt + yt = 12 \text{ t}$$

$$\text{bzw. } x + y = 12.$$

Bezüglich des Kohlenstoffgehaltes gilt

$$xt \cdot \frac{5}{1000} + yt \cdot \frac{25}{1000} = 12 \text{ t} \cdot \frac{145}{10000}$$

$$\text{bzw. } 50x + 250y = 1740.$$

Der Sachverhalt kann also durch folgendes System linearer Gleichungen dargestellt werden.

$$(1) \quad x + y = 12$$

$$(2) \quad 5x + 25y = 174$$

Daraus ergibt sich

$$(1)' \quad -5x - 5y = -60$$

$$(2) \quad 5x + 25y = 174$$

$$-5x - 5y = -60$$

$$20y = 114$$

Damit ist $y = 5,7$.

Einsetzen in (1) liefert

$$x = 6,3.$$

Also $L = \{[6,3 ; 5,7]\}$

Das heißt auf den gegebenen Sachverhalt bezogen:

6,3 t Stahl (0,5% Kohlenstoffgehalt) und 5,7 t Grauguß (2,5% Kohlenstoffgehalt) ergeben 12 t mit 1,45% Kohlenstoffgehalt.

BEISPIEL 10 (5.2.4.) [6; Klasse 2]:

Setze die für a und b errechneten Zahlen in die dritte Gleichung ein!

Überprüfe damit, ob du a und b richtig errechnet hast!

$$(1) \quad 37 + a = 52$$

$$(2) \quad 68 + b = 94$$

$$(3) \quad a + b = 41$$

Es wird hier vorausgesetzt, daß die Lösung des Gleichungssystems, das aus Gleichung (1) und (2) besteht, auch Lösung von Gleichung (3) ist. Damit müßte es möglich sein, Gleichung (3) durch äquivalente Umformungen aus Gleichung (1) und Gleichung (2) zu erhalten.

Wir addieren Gleichung (1) und (2). Es entsteht

$$37 + 68 + a + b = 52 + 94$$

$$\text{bzw.} \quad a + b = 52 + 94 - 37 - 68,$$

$$\text{d. h.} \quad a + b = 41.$$

Gleichung (3) ergibt sich also aus den Gleichungen (1) und (2). Damit ist Gleichung (3) zur eindeutigen Angabe der Lösungsmenge nicht erforderlich.

Wir sagen in diesem Fall, daß das System

$$(1) \quad 37 + a = 52$$

$$(2) \quad 68 + b = 94$$

$$(3) \quad a + b = 41$$

überbestimmt ist.

Zwei der gegebenen Gleichungen reichen zur eindeutigen Ermittlung der Lösungsmenge aus.

Es ist hier $L = \{[15; 26]\}$.

5.2.5.

Systeme von m linearen Gleichungen mit n Variablen

Nach den Betrachtungen spezieller Systeme linearer Gleichungen (\nearrow Teil 5.2.4.) untersuchen wir in Teil 5.2.5. den allgemeinen Fall.

DEFINITION 1 (5.2.5.):

Unter einem **System von m linearen Gleichungen mit n Variablen** versteht man ein System der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Dabei heißen die reellen Zahlen

$$a_{i,k} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n)$$

die **Koeffizienten** und die reellen Zahlen b_i die **absoluten Glieder** des Gleichungssystems.

Die Definitionen der Begriffe „Lösungsgrundbereich“ und „Lösung“ ergeben sich als Verallgemeinerungen aus den Definitionen 2 (5.2.4.) bzw. 3 (5.2.4.) (\nearrow 108).

DEFINITION 2 (5.2.5.):

Unter dem **Lösungsgrundbereich L_G** eines linearen Gleichungssystems von m Gleichungen und n Variablen versteht man die Menge aller geordneten n -Tupel

$$[a_1; a_2; \dots; a_n] \in B^n,$$

für die bei Belegung der Variablen

$$x_1 \text{ mit } a_1, x_2 \text{ mit } a_2, \dots, x_n \text{ mit } a_n$$

jede der m Gleichungen in eine (wahre oder falsche) Aussage überführt wird.

DEFINITION 3 (5.2.5.):

Ein geordnetes n -Tupel

$$[a_1; a_2; \dots; a_n]$$

heißt eine **Lösung** eines linearen Gleichungssystems

von m Gleichungen und n Variablen genau dann,
wenn die Belegung der Variablen
 x_1 mit a_1, x_2 mit a_2, \dots, x_n mit a_n
jede der m Gleichungen des Systems in eine wahre
Aussage überführt und,
 $[a_1; a_2; \dots; a_n] \in L_G$.

Die Definition des Begriffs „Lösungsmenge“ entspricht der Definition
4 (5.2.4.) (\nearrow 108).

Wir verallgemeinern Satz 1 (5.2.4.) (\nearrow 109).

SATZ 1 (5.2.5.):

Sind

L_1, L_2, \dots, L_m

die Lösungsmengen der m Gleichungen eines Systems
von m linearen Gleichungen mit jeweils genau n
Variablen bezüglich der Lösungsgrundbereiche

$L_G^{(1)}, L_G^{(2)}, \dots, L_G^{(m)}$,

so ist die Lösungsmenge des Systems bezüglich

$L_G = L_G^{(1)} \cap L_G^{(2)} \cap \dots \cap L_G^{(m)}$

gleich der Menge

$L = L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_m$.

Der *Beweis* kann analog zum Beweis von Satz 1 (5.2.4.) geführt werden.

Wir gehen zunächst von einem leicht lösbaren Gleichungssystem aus.

BEISPIEL 1(5.2.5.)

Man löse das Gleichungssystem

$$(1) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$(2) \quad 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1$$

$$(3) \quad 11x_3 + 9x_4 = -16$$

$$(4) \quad 12x_4 = -36$$

im Lösungsgrundbereich $L_G = P \times P \times P \times P$.

Man bezeichnet diese Form des Gleichungssystems als **Dreiecksform**.

Aus Gleichung (4) folgt

$$x_4 = -3.$$

Wir belegen in den Gleichungen (1), (2), (3) die Variable x_4 mit -3 und erhalten zunächst aus Gleichung (3)

$$x_3 = 1.$$

Nach Belegung von x_3 mit 1 in den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich aus Gleichung (2)

$$x_2 = 2.$$

Wir belegen in Gleichung (1) x_2 mit 2. Es entsteht

$$x_1 = -1.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist somit

$$L = \{[-1; 2; 1; -3]\}.$$

Ein Gleichungssystem ist also sicher dann leicht lösbar, wenn es in Dreiecksform gegeben ist.

Das Problem besteht im folgenden darin, ein vorgegebenes System linearer Gleichungen in ein System in Dreiecksform zu transformieren, das dieselbe Lösungsmenge wie das vorgegebene System hat.

Dieses Verfahren wird das GAUSSsche *Eliminierungsverfahren* genannt.

Das in Teil 5.2.4. betrachtete Verfahren der gleichen Koeffizienten (\nearrow 112) entspricht einer solchen Transformation in Dreiecksform.

Wir setzen im folgenden voraus, daß die in Teil 5.2.4. angegebenen äquivalenten Umformungen von Gleichungssystemen auch im allgemeinen Fall (m Gleichungen, n Variable) angewendet werden können.

Gegeben sei ein System von m linearen Gleichungen mit n Variablen.

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 (2) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 (3) \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
 \dots \\
 (m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{cccc}
 -a_{21} & -a_{31} & & -a_{m1} \\
 a_{11} & & & \\
 & a_{11} & & \\
 & & \dots & \\
 & & & a_{11} \\
 & & & & a_{11}
 \end{array} \right.$$

Wir nehmen an, daß alle Koeffizienten a_{1k} ($k = 1, 2, \dots, n$) in Gleichung (1) von Null verschieden sind (anderenfalls vertauschen wir die Gleichungen des Systems, so daß die erste Gleichung diese Bedingung erfüllt), und führen die rechts neben dem System gekennzeichneten Umformungen aus. Es entsteht ein System der Form:

5.2.

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots & \\
 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \\
 &0 = b_{r+1} \\
 &\dots \\
 &0 = b_m
 \end{aligned}$$

in dem die Koeffizienten $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ von Null verschieden sind. /

Es gilt allgemein:

Die Lösungsmenge L_I des gegebenen Gleichungssystems ist Teilmenge der Lösungsmengen jeder Gleichung des zuletzt angegebenen Systems.

Im folgenden verzichten wir auf die Angabe der Terme, in denen der Koeffizient der Variablen Null ist, wollen aber weiterhin die entstehenden Gleichungen als Gleichungen mit n Variablen auffassen. Das hat zur Folge, daß die Elemente der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen des Systems stets geordnete n -Tupel sind.

DEFINITION 4 (5.2.5.):

Die Zahl r , die angibt, wieviel Gleichungen in dem auf Dreiecksform transformierten System noch mindestens eine Variable enthalten, heißt der **Rang des Gleichungssystems** genau dann, wenn das Gleichungssystem lösbar ist.

Das gegebene Gleichungssystem ist sicher dann *nicht* lösbar, wenn in dem auf Dreiecksform transformierten System mindestens eine der Zahlen b_{r+1}, \dots, b_m von Null verschieden ist.

Wir betrachten weiter den Fall, daß alle Zahlen b_{r+1}, \dots, b_m gleich Null sind, können also die letzten, trivialen Gleichungen weglassen. Dann hat das System die Form, die es auch im Falle $r = m$ haben würde.

Es sind *zwei Fälle* zu unterscheiden.

1. Fall: $r = n$,

d. h., die Anzahl der Gleichungen, die noch mindestens eine Variable enthalten, entspricht der Anzahl der Variablen des gegebenen Systems.

Das System hat in diesem Fall die Gestalt:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(2) \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$(r) \quad a_{rn}x_n = b_r$$

Falls wir vereinbarungsgemäß jede Gleichung als Gleichung mit n Variablen auffassen, gilt:

$$L_I \subseteq L_1, L_I \subseteq L_2, \dots, L_I \subseteq L_r.$$

Aus Gleichung (r) ergibt sich das n -te Element der geordneten n -Tupel, die Lösung des Systems (I) sind.

Mit Hilfe dieses Elementes kann aus Gleichung (r - 1) das (n - 1)-te Element der n -Tupel ermittelt werden, die Lösung von (I) sind.

Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man alle n Elemente der Lösungstupel erhalten hat.

BEISPIEL 2 (5.2.5.):

Man löse das folgende System in $L_G = P \times P \times P$.

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2) \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ (3) \quad -x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ (4) \quad 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 4 \\ -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{array} \right.$$

Wir eliminieren zunächst in der angegebenen Weise x_1 aus den Gleichungen (2), (3), (4) und erhalten

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2') \quad 2x_2 - x_3 = 3 \\ (3') \quad 3x_2 - 2x_3 = 5 \\ (4') \quad 4x_2 - 2x_3 = 6 \end{array} \left| \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -2 & \\ & -1 \end{array} \right.$$

Daraus ergibt sich

$$(1) \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$(2') \quad 2x_2 - x_3 = 3$$

$$(3'') \quad x_3 = -1$$

$$(4'') \quad 0 = 0$$

Gleichung (4'') kann weggelassen werden. Es ist hier $r = n = 3$. Aus dem letzten System erhält man als Lösungsmenge

$$L = \{[-2; 1; -1]\}.$$

2. Fall: $r < n$,

d. h., die Anzahl der Gleichungen, die noch mindestens eine Variable enthalten, ist kleiner als die Anzahl der Variablen des gegebenen Systems.

Das Gleichungssystem hat dann die Form:

$$(1) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(2) \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$(r) \quad a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r$$

Dabei ist hier außer a_{11} , a_{22} , ..., a_{rr} ungleich Null mindestens einer der Koeffizienten $a_{r,r+1}$, ..., a_{rn} von Null verschieden.

Aus Gleichung (r) ergibt sich

$$a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n$$

und weiter
$$x_r = \frac{1}{a_{rr}}(b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n).$$

Wir können die Belegungen für x_{r+1}, \dots, x_n frei wählen und erhalten daraus jeweils eine Belegung für x_r . Man nennt aus diesem Grund x_{r+1}, \dots, x_n die **freien Parameter** der Lösung. Im allgemeinen verwendet man zur Bezeichnung dieser Parameter den Buchstaben „t“.

Die Anzahl der Parameter entspricht der Differenz $n - r$.

Wir setzen hier

$$x_{r+1} = t_1$$

$$x_{r+2} = t_2$$

...

$$x_n = t_{n-r}$$

Damit ist
$$x_r = \frac{1}{a_{rr}}(b_r - a_{r,r+1}t_1 - \dots - a_{rn}t_{n-r}).$$

Wir setzen den rechten Term dieser Gleichung für x_r in die Gleichung (r - 1) ein und können so x_{r-1} mit Hilfe der freien Parameter darstellen. Schrittweises Einsetzen liefert die Parameterdarstellungen für x_1, x_2, \dots, x_{r-2} .

BEISPIEL 3 (5.2.5.):

Man löse das Gleichungssystem in $L_G = P \times P \times P$.

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 3y - 2z = 0 \\ (2) \quad 6x + 3y - 4z = -2 \\ (3) \quad 4x - 9y + z = -5 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ \end{array} \right. \begin{array}{c} 2 \\ \\ -1 \end{array} \right.$$

Nach Elimination von x aus Gleichung (2) und (3) ergibt sich

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x - 3y - 2z = 0 \\ (2') \quad 6y - 2z = 2 \\ (3') \quad 15y - 5z = 5 \end{array} \left| \begin{array}{l} 5 \\ -2 \end{array} \right. \downarrow$$

Daraus erhält man

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 3y - 2z = 0 \\ (2') \quad 6y - 2z = 2 \\ (3'') \quad 0 = 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x + 3y - 2z = 0 \\ (2') \quad 6y - 2z = 2 \end{array}$$

Es ist hier $r = 2$ und $n - r = 1$, d. h., es kann ein Parameter frei gewählt werden.

Man setzt $z = t$. Dann ergibt sich aus (2')

$$6y - 2t = 2$$

bzw.
$$y = \frac{1+t}{3}.$$

Aus Gleichung (1) erhält man zunächst

$$2x + 3 \left(\frac{1+t}{3} \right) - 2t = 0$$

und damit

$$x = \frac{t-1}{2}.$$

Die Lösungsmenge des gegebenen Systems ist also

$$L = \left\{ [x; y; z]: x = \frac{t-1}{2} \wedge y = \frac{t+1}{3} \wedge z = t \wedge t \in P \right\}.$$

Man erkennt, daß diese Menge unendlich viele Zahlentripel enthält.

BEISPIEL 4 (5.2.5.):

Man löse in $L_G = P \times P \times P \times P$:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ (2) \quad 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -1 \\ (3) \quad -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right. \downarrow$$

Es ist hier $m = 3$ und $n = 4$. Da stets $r \leq m$, wird also mindestens ein Parameter frei wählbar sein.

Die angegebenen Umformungen führen auf das System

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ (2') \quad -6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -3 \\ (3') \quad -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ 2 \\ -3 \end{array} \right. \downarrow$$

Daraus entsteht

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ (2'') \quad -6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -3 \\ (3'') \quad 0 = 0 \end{array}$$

Wegen $r = 2$ ist $n - r = 2$, d. h., zwei Parameter sind frei wählbar. Es sei $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$. Dann ergibt sich aus (2'')

$$x_2 = \frac{t_1 + t_2 + 1}{2}$$

Aus (1) erhält man

$$x_1 = 2t_1 - 3t_2 - 1.$$

Damit ist $L = \{[x_1, x_2, x_3, x_4]:$

$$x_1 = 2t_1 - 3t_2 - 1 \wedge x_2 = \frac{t_1 + t_2 + 1}{2} \wedge x_3 = t_1 \wedge x_4 = t_2 \wedge t_1 \in P \wedge t_2 \in P\}.$$

BEISPIEL 5 (5.2.5.):

Man löse in $L_G = P \times P \times P \times P$:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ (2) \quad -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3 \\ (3) \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ (4) \quad x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ \\ -1 \end{array} \right. \downarrow \begin{array}{l} 2 \\ \\ -1 \\ -1 \end{array} \downarrow \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ -1 \end{array} \downarrow$$

Man erhält mit Hilfe der angegebenen Umformungen:

$$\begin{array}{l} (1) \quad x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ (2') \quad -4x_2 + x_4 = 5 \\ (3') \quad -10x_2 - x_3 + 6x_4 = 8 \\ (4') \quad -6x_2 + 3x_4 = 6 \end{array}$$

Da Gleichung (2') weniger als drei Variable enthält, vertauschen wir Gleichung (2') und (3'). Es entsteht:

$$(1) x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$

$$(3') -10x_2 - x_3 + 6x_4 = 8$$

$$(2') -4x_2 + x_4 = 5$$

$$(4') -6x_2 + 3x_4 = 6$$

Durch Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition ergibt sich daraus:

$$\begin{array}{l} (1) x_1 + x_3 - 3x_2 + 2x_4 = 4 \\ (3') -x_3 - 10x_2 + 6x_4 = 8 \\ (2') -4x_2 + x_4 = 5 \\ (4') -6x_2 + 3x_4 = 6 \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \\ 3 \\ -2 \end{array} \right. \downarrow$$

Es entsteht ein System in Dreiecksform:

$$(1) x_1 + x_3 - 3x_2 + 2x_4 = 4$$

$$(3') -x_3 - 10x_2 + 6x_4 = 8$$

$$(2') -4x_2 + x_4 = 5$$

$$(4'') -3x_4 = 3$$

Daraus erhält man

$$L = \left\{ \left[\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 1; -1 \right] \right\}.$$

Zusammenfassung

Ein System von m linearen Gleichungen und n Variablen ist genau dann lösbar, wenn nach Transformation auf Dreiecksform neben Gleichungen, die mindestens eine Variable enthalten, höchstens noch Identitäten der Form $0 = 0$ auftreten.

Die Zahl $n - r$ gibt an, wieviel Parameter frei gewählt werden können.

6.1.

Ungleichungen mit genau einer Variablen

6.1.1.

Vorbemerkungen

Die für die Betrachtungen in Teil 6.1. notwendigen Begriffe und wesentlichen Zusammenhänge wurden in Teil 4.2. bereitgestellt. Wir wenden die sowohl für Gleichungen als auch für Ungleichungen erklärten Begriffe im Sinne der dort formulierten Definitionen an.

Bereits in Klasse 1 geht es beim Vergleichen von Zahlen um die Gewinnung wahrer Ungleichheitsaussagen. Die Lösung der Aufgabe „Man setze zwischen die Zahlen 3 und 5 das richtige Relationszeichen“ führt auf die Ungleichungen

$$5 > 3 \text{ bzw. } 3 < 5.$$

Ebenfalls in Klasse 1 wird gefordert, alle die Zahlen a zu bestimmen, für die $5 + a < 9$ gilt. Es ist also die Lösungsmenge der Ungleichung

$$5 + a < 9$$

im Bereich der natürlichen Zahlen zu ermitteln.

In [6; Klasse 2] finden wir Ungleichungen der Form

$$y \cdot 4 < 11.$$

Die Beantwortung der Frage „Welche Zahlen liegen zwischen 38 und 41?“ führt auf die Lösung eines einfachen Ungleichungssystems:

$$38 < x < 41.$$

Zur Angabe der Lösungsmengen bevorzugt man im Unterricht in den unteren Klassen im allgemeinen die Darstellung in Tabellen.

Wir befassen uns in Teil 6.1. mit einigen *speziellen Typen von Ungleichungen*. Diese Ungleichungen sollen höchstens eine Variable enthalten.

Es werden *Lösungsverfahren* für die einzelnen Typen von Ungleichungen erläutert und Zusammenhänge zwischen *Lösungsmenge*, *Lösungsgrundbereich* und *Grundbereich* untersucht.

Bei der Betrachtung von Lösungsverfahren werden wir im allgemeinen von Ungleichungen ausgehen, in denen das Zeichen „ $<$ “ auftritt. Aussagen über Ungleichungen mit anderen Relationszeichen gelten entsprechend.

Da die Ungleichungen höchstens eine Variable enthalten sollen, ist die Lösungsmenge stets eine Teilmenge des Grundbereiches.

6.1.2.

Ungleichungen vom Typ $ax + b < 0$

DEFINITION 1 (6.1.2.):

Eine Ungleichung der Form

$$ax + b < 0 \quad (a \neq 0)$$

heißt eine **lineare Ungleichung mit genau einer Variablen**.

Wir untersuchen zunächst die **Abhängigkeit der Lösungsmenge der Ungleichung $ax + b < 0$ von den Zahlen a und b** .

Es möge gelten $L_G \subseteq P$ und $a, b \in P$.

1. Fall: $a = 0$

Dann gilt:

Die Ungleichung $ax + b < 0$ hat

a) keine Lösung, falls $b \geq 0$,

b) unendlich viele Lösungen, falls $b < 0$.

Begründung:

Aus $ax + b < 0$ entsteht für $a = 0$: $b < 0$.

Die Aussage ist wahr genau dann, wenn $b < 0$.

Das heißt:

Im Fall a) gibt es keine Belegung für x , die die Ungleichung $0 \cdot x + b < 0$ in eine wahre Aussage überführt.

Im Fall b) überführt jede Zahl des Lösungsgrundbereiches die Ungleichung $0 \cdot x + b < 0$ in eine wahre Aussage.

6.1.

2. Fall: $a > 0$

Dann gilt: Die Lösungsmenge der Ungleichung $ax + b < 0$ enthält alle die Zahlen des Lösungsgrundbereiches, die kleiner als $-\frac{b}{a}$ sind.

Begründung:

Aus $ax + b < 0$ ergibt sich durch äquivalente Umformung $ax < -b$ und weiter $x < -\frac{b}{a}$.

(Da $a > 0$, bleibt das Relationszeichen erhalten.)

$$\text{Dann ist } L = \left\{ x; x \in L_G \wedge x < -\frac{b}{a} \right\}.$$

3. Fall: $a < 0$

Dann gilt:

Die Lösungsmenge der Ungleichung $ax + b < 0$ enthält alle die Zahlen des Lösungsgrundbereiches, die größer als $-\frac{b}{a}$ sind.

Begründung:

Aus $ax + b < 0$ erhält man zunächst $ax < -b$ und weiter $x > -\frac{b}{a}$.

(Da $a < 0$, muß das Relationszeichen $<$ durch $>$ ersetzt werden.)

$$\text{Dann ist } L = \left\{ x; x \in L_G \wedge x > -\frac{b}{a} \right\}.$$

Wir stellen die möglichen Lösungsmengen der Ungleichung $ax + b < 0$ in einer Übersicht zusammen.

	$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
$a = 0$	$L = \emptyset$	$L = L_G$	$L = \emptyset$
$a < 0$	$L = \{x; x \in L_G \wedge x > 0\}$	$L = \left\{ x; x \in L_G \wedge x > -\frac{b}{a} \right\}$	
$a > 0$	$L = \{x; x \in L_G \wedge x < 0\}$	$L = \left\{ x; x \in L_G \wedge x < -\frac{b}{a} \right\}$	

Die Abhängigkeit der Lösungsmenge vom Lösungsgrundbereich geht ebenfalls aus dieser Übersicht hervor.

Enthält zum Beispiel der Lösungsgrundbereich im Fall $a > 0$ und $b = 0$ nur positive Zahlen, dann gilt hier $L = \emptyset$.

BEISPIEL 1 (6.1.2.):

Gegeben sei die Ungleichung $4x - 12 < 0$.

Man gebe die Lösungsmenge an, wenn

$$(1) L_G = N$$

$$(2) L_G = \{x; x \in G \wedge -2 \leq x \leq 5\}$$

$$(3) L_G = G$$

$$(4) L_G = \{x; x \in P \wedge -2 \leq x \leq 5\}$$

$$(5) L_G = P$$

Wir formen $4x - 12 < 0$ äquivalent um und erhalten die Ungleichung $x < 3$.

Es sind:

$$L_1 = \{x; x \in N \wedge x < 3\} = \{0, 1, 2\}$$

$$L_2 = \{x; x \in G \wedge x < 3 \wedge -2 \leq x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$L_3 = \{x; x \in G \wedge x < 3\} = \{2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots\}$$

$$L_4 = \{x; x \in P \wedge x < 3 \wedge -2 \leq x \leq 5\}$$

$$L_5 = \{x; x \in P \wedge x < 3\}$$

Treten in einer Ungleichung umfangreiche Terme auf, so wenden wir das in Teil 4.2. angegebene Verfahren an (\nearrow 81 ff.).

BEISPIEL 2 (6.1.2.):

Man löse die Ungleichung

$$(1) \frac{6(2x+1)}{5} - \frac{2(x-5)}{5} < \frac{7(8-2x)}{5} + \frac{8}{5},$$

wobei $L_G = \{x; x \in G \wedge x > -3\}$.

Aus (1) erhält man nach Multiplikation mit 5

$$(2) 6(2x+1) - 2(x-5) < 7(8-2x) + 8.$$

Auflösen der Klammern ergibt

$$(3) 12x + 6 - 2x + 10 < 56 - 14x + 8.$$

Zusammenfassen:

$$(4) 10x + 16 < 64 - 14x$$

Addition von $14x$ und -16 :

$$(5) 24x < 48$$

Division durch 24:

$$(6) x < 2$$

Damit ist $L = \{x; x \in G \wedge x < 2 \wedge x > -3\}$

bzw. $L = \{x; x \in L_G \wedge x < 2\}$

und elementweise

$$L = \{-2; -1; 0; 1\}.$$

Die Lösungsmenge von Ungleichung (6) im Beispiel 2 (6.1.2.) stimmt dann und nur dann mit der Lösungsmenge von Ungleichung (1) überein, wenn die durchgeführten Umformungen äquivalente Umformungen sind.

Da beim Umformen Rechenfehler möglich sind, empfiehlt es sich zu überprüfen, ob die ermittelte Menge die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung ist.

Bemerkungen zur Probe:

1. Verfahren:

Die Bestätigung, daß ein Element Lösung einer Ungleichung ist, erfolgt wie bei allen Aussageformen durch **Belegung der Variablen** mit diesem Element.

2. Verfahren:

Bei Ungleichungen treten vor allem dann Schwierigkeiten auf, wenn die Lösungsmenge unendlich viele Elemente enthält. In solchen Fällen kann man eine Überprüfung mit Hilfe von **Stichproben** durchführen.

In Beispiel 2 (6.1.2.) könnte man die Variable zunächst mit $-2, -1, 0, 1$ belegen, um zu bestätigen, daß diese Elemente zur Lösungsmenge gehören.

Um zu prüfen, ob kein weiteres Element der Lösungsgrundmenge die Ungleichung in eine wahre Aussage überführt, setzt man die kleinste ganze Zahl,

für die $x < 2$ nicht gilt, also 2, ein. Es entsteht $\frac{36}{5} < \frac{36}{5}$, eine falsche Aussage,

d. h., $2 \notin L$.

So zu verfahren, ist allerdings nur bei linearen Ungleichungen möglich.

3. Verfahren:

Eine andere Möglichkeit der Probe besteht darin, daß man die Zahlen der Lösungsmenge mit Hilfe einer Summe darstellt.

Für die Elemente der Lösungsmenge in Beispiel 2 (6.1.2.) erhält man

$$x \in L_G \leftrightarrow x = 2 + p \wedge p < 0 \wedge p \in G.$$

Man belegt zunächst im linken Term $T_1(x)$ der gegebenen Ungleichung x mit $2 + p$.

Dann ergibt sich:

$$T_1(2 + p) = \frac{6(2(2 + p) + 1)}{5} - \frac{2(2 + p - 5)}{5}$$

und weiter $T_1(2 + p) = \frac{6(5 + 2p) - 2(p - 3)}{5}$,

d. h. $T_1(2 + p) = \frac{36 + 10p}{5}$.

Für den rechten Term $T_2(x)$ erhält man

$$T_2(2 + p) = \frac{7(8 - 2(2 + p))}{5} + \frac{8}{5}$$

und weiter $T_2(2 + p) = \frac{36 - 6p}{5}$.

Man vergleicht $T_1(2 + p)$ und $T_2(2 + p)$. Es sei

$$\frac{36 + 10p}{5} < \frac{36 - 6p}{5}$$

und damit $10p < -6p$.

Wenn $p < 0$, ergibt sich daraus

$$10 > -6, \text{ d. h. eine wahre Aussage.}$$

Es ist also

$$T_1(2 + p) < T_2(2 + p)$$

genau dann, wenn $p < 0$ ist.

Damit ist, wegen $x = 2 + p$,

$$T_1(x) < T_2(x)$$

genau dann, wenn $x < 2$ ist.

6.1.3. *Ungleichungen vom Typ $\frac{ax + b}{cx + d} < 0$*

Um auf die Besonderheiten hinzuweisen, beginnen wir mit einem Beispiel.

BEISPIEL 1 (6.1.3.):

Man löse die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{6}{x} < 0,$$

wobei $L_G = \{x; x \in P \wedge x \neq 0\}$.

Diese Ungleichung ist vom Typ $\frac{ax + b}{cx + d} < 0$, hier $a = d = 0$, $b = 6$, $c = 1$.

6.1.

Wir multiplizieren Ungleichung (1) mit x^4 und erhalten

$$(2) \quad 6 < 0,$$

d. h., für Ungleichung (2) gilt:

$$L_2 = \emptyset.$$

Unter der Voraussetzung, daß eine äquivalente Umformung durchgeführt worden ist, gilt dann auch

$$L_1 = \emptyset.$$

Das erweist sich aber als falsch. Belegt man zum Beispiel x mit -1 , so entsteht mit $-6 < 0$ eine wahre Aussage.

Das heißt: Ungleichung (1) besitzt sicher mindestens eine Lösung, also

$$L_1 \neq \emptyset.$$

Damit kann die durchgeführte Umformung keine äquivalente Umformung gewesen sein.

Wir erinnern an die in Teil 4.2. gegebenen Regeln für äquivalente Umformungen (\nearrow 81 ff.).

Daraus ergibt sich, daß die in Beispiel 1 (6.1.3.) durchgeführte Multiplikation der Terme der Ungleichung mit x nur dann eine äquivalente Umformung ist, wenn $x > 0$ vorausgesetzt wird. Das heißt: Ungleichung (2) ist zu Ungleichung (1) nur äquivalent, wenn $x > 0$ ist. Also hat Ungleichung (1) lediglich für alle positiven Zahlen keine Lösung.

Über die Lösungsmenge im Bereich der negativen reellen Zahlen kann noch keine Aussage gemacht werden. Nehmen wir an, es sei $x < 0$.

Dann liefert die Multiplikation von Ungleichung (1) mit x :

$$(3) \quad 6 > 0.$$

Das ist eine wahre Aussage, die allerdings nur dann entsteht, wenn $x < 0$ vorausgesetzt wird.

Das heißt: Alle Zahlen $x < 0$ überführen Ungleichung (1) in eine wahre Aussage.

Somit gilt: $L_1 = \{x; x \in P \wedge x < 0\}$.

Dieses Beispiel zeigt die Notwendigkeit, eine *Fallunterscheidung* durchzuführen, falls die Variable im Nenner auftritt.

BEISPIEL 2 (6.1.3.):

Man löse die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{x+1}{x-4} < 0,$$

* Es wird sich zeigen, daß außer $x \neq 0$ noch eine weitere Bedingung notwendig ist.

wobei $L_G = \{x; x \in G \wedge x \neq 4\}$.

(Wir bezeichnen im folgenden den Hauptnenner stets mit h .)

1. Fall: $h > 0$.

Es gilt $x - 4 > 0$ genau dann, wenn $x > 4$.

Also $h > 0$ genau dann, wenn $x > 4$.

Der Lösungsgrundbereich $L_G^{(1)}$ ist damit in diesem Fall:

$$L_G^{(1)} = \{x; x \in G \wedge x > 4\}.$$

Dann liefert die Multiplikation von Ungleichung (1) mit $(x - 4)$

$$(2) \quad x + 1 < 0.$$

Daraus ergibt sich

$$(3) \quad x < -1.$$

Das heißt: Alle Zahlen, die kleiner als -1 sind und die im Lösungsgrundbereich $L_G^{(1)}$ enthalten sind, sind Lösungen der Ungleichung.

Wir schreiben

$$L_1 = \{x; x \in G \wedge [x < -1 \wedge x > 4]\}.$$

Da es keine ganze Zahl gibt, die die Aussageform $(x < -1 \wedge x > 4)$ in eine wahre Aussage überführt, gilt:

$$L_1 = \emptyset.$$

2. Fall: $h < 0$

Es ist $x - 4 < 0$ genau dann, wenn $x < 4$.

Also $h < 0$ genau dann, wenn $x < 4$ und damit

$$L_G^{(2)} = \{x; x \in G \wedge x < 4\}.$$

Die Multiplikation von Ungleichung (1) mit $(x - 4)$ liefert unter dieser Bedingung

$$(4) \quad x + 1 > 0.$$

Dann erhält man

$$(5) \quad x > -1.$$

Das heißt: Alle Zahlen, die größer als -1 sind und im Lösungsgrundbereich $L_G^{(2)}$ enthalten sind, sind Lösungen der Ungleichung.

Wir schreiben

$$L_2 = \{x; x \in G \wedge x > -1 \wedge x < 4\}$$

bzw.
$$L_2 = \{x; x \in G \wedge -1 < x < 4\}.$$

Für den Lösungsgrundbereich L_G der gegebenen Ungleichung gilt

$$L_G = L_G^{(1)} \cup L_G^{(2)}.$$

Die Lösungsmenge L der Ungleichung (1) im vorgegebenen Lösungsgrundbereich L_G enthält dann alle die Elemente, die Lösungen der Ungleichung in $L_G^{(1)}$ oder $L_G^{(2)}$ sind, also

$$L = L_1 \cup L_2,$$

d. h. hier $L = L_2$,

also $L = \{0, 1, 2, 3\}$.

Wir untersuchen jetzt allgemein die Abhängigkeit der Lösungsmenge der Ungleichung

$$(1) \frac{ax + b}{cx + d} < 0 \quad (a, b, c, d \in P \text{ und } L_G = P)$$

von den Zahlen a, b, c, d .

Der Fall $c = 0$ und $d = 0$ kann sofort ausgeschlossen werden. Ebenso verzichten wir auf die Betrachtung für $c = 0$ und $d \neq 0$, denn das liefert mit $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d} < 0$ eine Ungleichung vom Typ $ax + b < 0$.

Es sei also stets $c \neq 0$ und $d \neq 0$.

1. Fall: $h > 0$

Es gilt: $cx + d > 0$ genau dann, wenn

a) $x > -\frac{d}{c}$ und $c > 0$,

b) $x < -\frac{d}{c}$ und $c < 0$.

Dann liefert die Multiplikation von Ungleichung (1) mit $(cx + d)$

$$(2) \quad ax + b < 0.$$

Das ist eine Ungleichung, die in Teil 6.1.2. betrachtet wurde. Die Abhängigkeit der Lösungsmenge von den Zahlen a und b ist dort dargestellt. Das heißt: Alle Zahlen, die die Ungleichung $ax + b < 0$ und die Bedingung $cx + d > 0$ erfüllen, sind Lösungen der Ungleichung (1). Damit kann die Lösungsmenge für den 1. Fall dargestellt werden.

Es ist $L_1 = \{x; x \in P \wedge ax + b < 0 \wedge cx + d > 0\}$.

2. Fall: $h < 0$

Es gilt: $cx + d < 0$ genau dann, wenn

a) $x < -\frac{d}{c}$ und $c > 0$,

$$b) \quad x > -\frac{d}{c} \text{ und } c < 0.$$

Die Multiplikation von Ungleichung (1) mit $cx + d < 0$ liefert in diesem Fall

$$(3) \quad ax + b > 0.$$

Ungleichung (3) ist wieder vom bereits betrachteten Typ. Das heißt: Alle Zahlen, die die Ungleichung $ax + b > 0$ und die Bedingung $cx + d < 0$ erfüllen, sind Lösung der Ungleichung (1). Damit kann die Lösungsmenge für den 2. Fall dargestellt werden.

$$\text{Es ist} \quad L_2 = \{x; x \in P \wedge ax + b > 0 \wedge cx + d < 0\}.$$

Die Lösungsmenge L im vorgegebenen Lösungsgrundbereich ergibt sich als Vereinigungsmenge von L_1 und L_2 . Es ist

$$L = L_1 \cup L_2,$$

$$d. h. \quad L = \{x; x \in P \wedge [(ax + b < 0 \wedge cx + d > 0) \vee (ax + b > 0 \wedge cx + d < 0)]\}.$$

Diese Lösungsmenge erhält man auch, wenn man folgendes Verfahren anwendet.

Die Lösungsmenge von

$$(1) \quad \frac{ax + b}{cx + d} < 0 \quad (c \neq 0)$$

zu ermitteln, heißt, alle Belegungen für x anzugeben, für die der Bruch $\frac{ax + b}{cx + d}$ negativ wird.

Ein Bruch $\frac{A}{B}$ ist genau dann negativ, wenn

$$A > 0 \wedge B < 0 \text{ oder } A < 0 \wedge B > 0.$$

Zur Lösungsmenge von (1) gehören also alle x , für die

$$ax + b > 0 \wedge cx + d < 0 \text{ oder } ax + b < 0 \wedge cx + d > 0.$$

Das ist aber die Menge

$$L = \{x; x \in P \wedge [(ax + b > 0 \wedge cx + d < 0) \vee (ax + b < 0 \wedge cx + d > 0)]\}.$$

Bemerkung: Dieses Verfahren ist sicher nur dann zweckmäßig, wenn die Ungleichung die Form $\frac{ax + b}{cx + d} < 0$ hat (↑ Beispiel 3 (6.1.3.)).

Ist die Ungleichung nicht in dieser Form gegeben, so würde eine Umformung in diese Gestalt mehr Aufwand erfordern als die Anwendung des zuerst erläuterten Verfahrens (↑ Beispiel 4 (6.1.3.)).

6.1.

BEISPIEL 3 (6.1.3.):

Man löse die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{x-1}{-x+2} < 0,$$

wobei $L_G = \{x; x \in P \wedge x \neq 2\}$.

1. Fall: $h > 0$

Es ist $h > 0$ genau dann, wenn $x < 2$.

Dann ergibt sich aus (1) $x - 1 < 0$ und daraus $x < 1$.

Also $L_1 = \{x; x \in P \wedge x < 1 \wedge x < 2\}$,

d. h. $L_1 = \{x; x \in P \wedge x < 1\}$.

2. Fall: $h < 0$

Es ist $h < 0$ genau dann, wenn $x > 2$.

Aus (1) erhält man jetzt $x - 1 > 0$ bzw. $x > 1$.

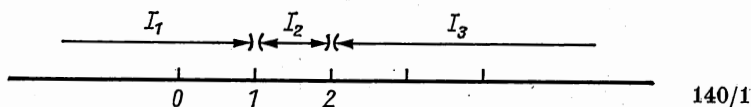
Also $L_2 = \{x; x \in P \wedge x > 1 \wedge x > 2\}$,

d. h. $L_2 = \{x; x \in P \wedge x > 2\}$.

Aus $L = L_1 \cup L_2$ entsteht hier

$$L = \{x; x \in P \wedge [x < 1 \vee x > 2]\}.$$

Wir führen zunächst die *Überprüfung mit Hilfe von Stichproben* durch. Dazu veranschaulichen wir die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden (Bild 140/1).



Zur Probe wählen wir aus jedem der Intervalle I_1 , I_2 und I_3 je eine Zahl. Weiterhin belegen wir die Variable mit 1 bzw. 2. Dann darf für die Belegung mit 1 bzw. 2 und einer Zahl aus I_2 keine wahre Aussage entstehen, während Belegungen aus I_1 und I_3 zu wahren Aussagen führen müssen.

Wir erläutern an diesem Beispiel noch das dritte Verfahren der Probe (↗ 134).

1. Fall: $x < 1$,

d. h. $x = 1 + p \wedge p < 0 \wedge p \in P$.

Man erhält

$$T_1(p+1) = \frac{p+1-1}{-p-1+2}$$

$$T_1(p+1) = \frac{p}{1-p}$$

Der Nenner dieses Bruches ist für $p < 0$ positiv, der Zähler für $p < 0$ negativ, also gilt für alle reellen Zahlen

$$p < 0 \rightarrow \frac{p}{1-p} < 0.$$

Also $T_1(p+1) < 0$.

Wegen $x = 1 + p$ ergibt sich daraus: Wenn $x < 1$, so $T_1(x) < 0$.

Das heißt: Jede reelle Zahl kleiner als 1 ist Lösung der vorgegebenen Ungleichung.

2. Fall: $x > 2$,

d. h. $x = 2 + p \wedge p > 0 \wedge p \in P$.

Man erhält

$$T_1(p+2) = \frac{2+p-1}{-2-p+2}$$

$$T_1(p+2) = \frac{p+1}{-p}$$

Hier gilt für alle reellen Zahlen:

$$p > 0 \rightarrow \frac{p+1}{-p} < 0.$$

Also $T_1(p+2) < 0$.

Wegen $x = 2 + p$ gilt dann auch: Wenn $x > 2$, so $T_1(x) < 0$.

Das heißt: Jede reelle Zahl größer als 2 ist Lösung der vorgegebenen Ungleichung.

Aus beiden Fällen folgt:

Jede reelle Zahl x mit $1 < x < 2$ ist Lösung der Ungleichung.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, in dem die Ungleichung nicht unmittelbar

vom Typ $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ ist.

BEISPIEL 4 (6.1.3.):

Man löse die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{2x+3}{x+1} < \frac{x+4}{x+1} + 1,$$

wobei der Grundbereich P ist.

Als größtmöglicher Lösungsgrundbereich bezüglich P ergibt sich

$$L_G = \{x; x \in P \wedge x \neq -1\}.$$

6.1.

Mit Hilfe geeigneter Umformungen wäre es möglich, die gegebene Ungleichung in die Form $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ zu bringen.

Wir ermitteln die Lösungsmenge jedoch nach demselben Verfahren wie bei Gleichungen, berücksichtigen lediglich die Fallunterscheidungen.

1. Fall: $h > 0$

Es ist $h > 0$ genau dann, wenn $x > -1$.

Daraus ergibt sich zunächst

$$2x + 3 < x + 4 + x + 1$$

und weiter

$$2x + 3 < 2x + 5,$$

also

$$3 < 5.$$

Das heißt: Alle Zahlen, die den Bedingungen des 1. Falles genügen, erfüllen die Ungleichung.

Es ist $L_1 = \{x; x \in P \wedge x > -1\}$.

2. Fall: $h < 0$

Es ist $h < 0$ genau dann, wenn $x < -1$.

Man erhält aus (1)

$$2x + 3 > x + 4 + x + 1$$

bzw.

$$3 > 5.$$

Das heißt: Es gibt keine Zahl kleiner als -1 , die die Ungleichung erfüllt.

Also $L_2 = \emptyset$.

Aus $L = L_1 \cup L_2$ ergibt sich hier $L = L_1$, d. h.

$$L = \{x; x \in P \wedge x > -1\}.$$

BEISPIEL 5 (6.1.3.):

Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks 30 min. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solches Werkstück in 20 min anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 h dauern.

Wie groß müßte die Anzahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Es sei a die Anzahl der herzustellenden Werkstücke.

Zur Herstellung von a Werkstücken ohne Vorrichtung wird eine Zeit von $a \cdot \frac{1}{2}$ h benötigt, mit Vorrichtung nur $a \cdot \frac{1}{3}$ h zusätzlich 4 h Fertigungszeit für die Vorrichtung.

Eine Zeitersparnis tritt dann ein, wenn die Zeit $\left(a \cdot \frac{1}{3} + 4\right)$ h kürzer ist als $a \cdot \frac{1}{2}$ h. Also ist folgende Ungleichung zu lösen.

$$\frac{a}{3} + 4 < \frac{a}{2}.$$

Äquivalente Umformung liefert $4 < \frac{a}{6}$ und weiter $a > 24$.

Das heißt: Wenn mehr als 24 Werkstücke hergestellt werden sollen (also mindestens 25), bringt der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis.

6.1.4.

*Einfache Systeme von zwei linearen Ungleichungen
mit genau einer Variablen*

Im Mathematikunterricht der Unterstufe werden Ungleichungen wie

$$(1) 40 < x \cdot 10 < 70$$

betrachtet.

Diese sogenannte „fortlaufende“ Ungleichung stellt lediglich eine andere Schreibweise für das Ungleichungssystem

$$40 < x \cdot 10$$

$$x \cdot 10 < 70$$

dar, d. h., dieses Ungleichungssystem hat dieselbe Lösungsmenge wie die gegebene Ungleichung (1).

Wir formulieren in Teil 6.1.4. einige allgemeine Aussagen zu einfachen Ungleichungssystemen.

Die Begriffsbildungen führen wir in analoger Weise wie bei den in Teil 5.2.3. betrachteten Gleichungssystemen durch.

DEFINITION 1 (6.1.4.)

Ein System der Form

$$(1) H_1(x)$$

$$(2) H_2(x)$$

heißt ein **System von zwei Ungleichungen mit genau einer Variablen genau dann**, wenn $H_1(x)$ und $H_2(x)$ Ungleichungen mit genau einer Variablen sind.

Die Begriffe „Lösungsgrundbereich eines Ungleichungssystems“ und „Lösungsmenge eines Ungleichungssystems“ verwenden wir entsprechend den Definitionen 2 (5.2.3.) bzw. 4 (5.2.3.).

DEFINITION 2 (6.1.4.):

Eine Zahl heißt eine Lösung eines Ungleichungssystems mit genau einer Variablen genau dann, wenn diese Zahl eine Lösung jeder Ungleichung des Systems und im Lösungsgrundbereich des Systems enthalten ist.

Mit Hilfe einer Satz 1 (5.2.3.) entsprechenden Aussage über die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems ergibt sich mit

$$L = \{x; x \in L_G \wedge H_1(x) \wedge H_2(x)\}$$

eine Möglichkeit, die Lösungsmenge eines Ungleichungssystems darzustellen.

BEISPIEL 1 (6.1.4.):

Man löse das Ungleichungssystem

$$(1) \quad 2x - 9 < 1$$

$$(2) \quad -3x + 5 < 2$$

in $L_G = G$.

Man ermittelt zunächst die Lösungsmenge L_1 von Ungleichung (1).

Aus $2x - 9 < 1$ erhält man $2x < 10$ und damit $x < 5$,

$$\text{d. h.} \quad L_1 = \{x; x \in G \wedge x < 5\} = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; \dots\}.$$

Für die Lösungsmenge L_2 von Ungleichung (2) ergibt sich aus $-3x + 5 < 2$

zunächst $-3x < -3$ und weiter $x > 1$,

$$\text{also} \quad L_2 = \{x; x \in G \wedge x > 1\} = \{2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Aus $L = L_1 \cap L_2$ folgt hier

$$L = \{x; x \in G \wedge x < 5\} \cap \{x; x \in G \wedge x > 1\}$$

$$L = \{x; x \in G \wedge x < 5 \wedge x > 1\}$$

$$L = \{x; x \in G \wedge 1 < x < 5\} = \{2; 3; 4\}$$

Ein Ungleichungssystem mit genau einer Variablen hat in $L_G = P$ genau dann keine Lösung, wenn der Durchschnitt der Lösungsmengen der Ungleichungen gleich der leeren Menge ist.

Im Fall $L_G \subset P$ kann das System auch dann keine Lösung besitzen, wenn die zu wahren Aussagen führenden Belegungen nicht im Lösungsgrundbereich enthalten sind.

BEISPIEL 2 (6.1.4.):

Man löse das Ungleichungssystem

$$(1) \quad \frac{x+3}{2} < \frac{5}{4}$$

$$(2) \quad \frac{5x-7}{5} > -1$$

in $L_G = P$.

Aus Ungleichung (1) ergibt sich

$$2x + 6 < 5$$

$$x < -\frac{1}{2},$$

also
$$L_1 = \left\{ x; x \in P \wedge x < -\frac{1}{2} \right\}.$$

Aus Ungleichung (2) erhalten wir

$$5x - 7 > -5$$

$$x > \frac{2}{5},$$

also
$$L_2 = \left\{ x; x \in P \wedge x > \frac{2}{5} \right\}.$$

Dann ist
$$L = \left\{ x; x \in P \wedge x < -\frac{1}{2} \wedge x > \frac{2}{5} \right\}.$$

Da es keine reelle Zahl gibt, für die $\left(x < -\frac{1}{2} \wedge x > \frac{2}{5}\right)$ zu einer wahren Aussage wird, gilt

$$L = \emptyset.$$

BEISPIEL 3 (6.1.4.):

3 l 70%ige Säure sind mit 12%iger Säure zu mischen, so daß eine Flüssigkeit entsteht, die weniger als 30% und mehr als 20% Säure enthält.

Wieviel Liter 12%iger Säure kann man zusetzen?

Dieser Sachverhalt kann durch folgende Ungleichungen erfaßt werden.

$$(1) \quad 3 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{12}{100} < (3+x) \cdot \frac{30}{100}$$

$$(2) \quad 3 \cdot \frac{70}{100} + x \cdot \frac{12}{100} > (3+x) \cdot \frac{20}{100},$$

wobei der Lösungsgrundbereich $L_G = \{x; x \in P \wedge x > 0\}$ ist.

6.2.

Mit Hilfe äquivalenter Umformungen ergibt sich

aus (1) $x > \frac{20}{3}$ und aus (2) $x < \frac{75}{4}$.

Also ist $L = \left\{ x; x \in P \wedge \frac{20}{3} < x < \frac{75}{4} \right\}$.

Das heißt: Es müssen mehr als $6\frac{2}{3}$ l, aber weniger als $18\frac{3}{4}$ l 12%iger Säure zugesetzt werden.

6.2.

Lineare Ungleichungen mit genau zwei Variablen

Wir erinnern uns an die Behandlung linearer Gleichungen mit mehr als einer Variablen und definieren entsprechend (↗ Teil 5.2.).

DEFINITION 1 (6.2.):

Eine Ungleichung heißt eine **lineare Ungleichung mit n Variablen** genau dann, wenn sie durch äquivalente Umformungen in die Form

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b \neq 0$ ($a_i \neq 0$)
gebracht werden kann.

Lösungen einer solchen Ungleichung sind nach Definition 6(4.2.) alle geordneten n -Tupel aus einem vorgegebenen Lösungsgrundbereich, die die Ungleichung in eine wahre Aussage überführen.

SATZ 1 (6.2.):

Wenn

(1) $ax + by + c < 0$ ($a \cdot b \neq 0$)

eine lineare Ungleichung mit zwei Variablen und $L_G = P \times P$ ist, so hat die Ungleichung (1) stets *unendlich viele Lösungen*.

Beweis:

Man belegt zum Beispiel die Variable x mit einer beliebigen, aber festen reellen Zahl r . Dann erhält man aus (1)

(2) $ar + by + c < 0$ bzw.

(3) $by < -c - ar$

und wegen $b \neq 0$ entweder

$$(4) \quad y < \frac{-c-ar}{b}, \text{ wenn } b > 0 \text{ oder}$$

$$(5) \quad y > \frac{-c-ar}{b}, \text{ wenn } b < 0.$$

Es ist $\frac{-c-ar}{b}$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Jedes geordnete Paar aus $P \times P$, dessen erstes Element r ist und dessen zweites Element (4) oder (5) erfüllt, ist eine Lösung der gegebenen Ungleichung (1). Da es unendlich viele reelle Zahlen gibt, die (4) oder (5) erfüllen, hat die gegebene Ungleichung *unendlich viele Lösungen*.

Das folgt auch daraus, daß es zu jedem $r \in P$ mindestens ein y gibt, das (4) oder (5) in eine wahre Aussage überführt, q. e. d.

BEISPIEL 1 (6.2.):

Man gebe Elemente der Lösungsmenge der Ungleichung

$$(1) \quad 2x + 3y - 5 < 0$$

in bezug auf $L_G = P \times P$ an.

Man belegt z. B. x mit 1, dann ergibt sich aus (1): $y < 1$.

Das heißt: Alle geordneten Paare $[1; y] \in P \times P$, für die y kleiner als 1 ist, gehören zur Lösungsmenge dieser Ungleichung.

BEISPIEL 2 (6.2.):

Man ermittle die Lösungsmenge der Ungleichung

$$(1) \quad 3x + 2y - 8 < 0$$

in $L_G = N \times N$.

Man formt die gegebene Ungleichung äquivalent um und erhält

$$(2) \quad y < -\frac{3}{2}x + 4.$$

Das Problem besteht darin, alle natürlichen Zahlen x anzugeben, für die y ebenfalls eine natürliche Zahl wird.

Für $x = 0$ ergibt sich aus (2) $y < 4$.

Das heißt: Alle geordneten Paare, deren erstes Element gleich Null und deren zweites Element eine natürliche Zahl kleiner als 4 ist, gehören zur Lösungsmenge von (1) in $N \times N$.

In analoger Weise ermittelt man hier die anderen Elemente der Lösungsmenge.

6.2.

Wenn $x = 0$, so $y < 4$, d. h. $\{[0; 0], [0; 1], [0; 2], [0; 3]\} \subset L$.

Wenn $x = 1$, so $y < \frac{5}{2}$, d. h. $\{[1; 0], [1; 1], [1; 2]\} \subset L$.

Wenn $x = 2$, so $y < 1$, d. h. $[2; 0] \in L$.

Wenn $x = 3$, so $y < -\frac{1}{2}$.

Also ergibt sich:

$$L = \{[0; 0], [0; 1], [0; 2], [0; 3], [1; 0], [1; 1], [1; 2], [2; 0]\}.$$

Der Leser beachte, daß dieses Verfahren nur im Falle spezieller Lösungsgrundbereiche zum Ziele führt.

Bemerkung: Ungleichungen mit mehreren Variablen spielen bei der Behandlung von Optimierungsproblemen eine Rolle (↗ Teil 9.7.).

Wir bauen in Teil 7. unsere Ausführungen auf dem **Abbildungsbegriff** auf, so wie er in [4], in den Teilen 9.1. bis 9.3. auf den Seiten 151 bis 162, dargestellt ist.

7.1

Der Funktionsbegriff**DEFINITION 1 (7.1.):**

Eine Abbildung F heißt eine **Funktion** genau dann, wenn diese Abbildung eindeutig ist.

(↗ [4; 162])

Funktionen sind spezielle Abbildungen.

Wir führen für diese Abbildungen weitere Begriffe ein.

DEFINITION 2 (7.1.):

Der **Vorbereich** einer Funktion f heißt der **Definitionsbereich** von f , der **Nachbereich** von f heißt **Wertebereich** von f .

In Zeichen: $D(f)$ bzw. $W(f)$

Bemerkung: Eine Funktion f ist eine eindeutige Abbildung von $D(f)$ auf $W(f)$.

Wir formulieren einige einfache Kriterien.

- (1) Wenn eine Abbildung $f \subseteq A \times B$ mit Hilfe von Zuordnungspfeilen gegeben ist, so ist sie genau dann eine Funktion, wenn von jedem Element von A höchstens ein Pfeil ausgeht.
- (2) Wenn eine Abbildung $f \subseteq A \times B$ als Menge von geordneten Paaren elementweise gegeben ist, so ist sie genau dann eine Funktion, wenn jedes Element von A höchstens einmal in einem geordneten Paar von f an erster Stelle auftritt.
- (3) Wenn das Bild einer Abbildung f als Menge von Punkten in einem Koordinatensystem gegeben ist, so ist f genau dann eine Funktion, wenn es nicht zwei Punkte mit ein und derselben x -Koordinate gibt.¹

BEISPIEL 1 (7.1.):

Man entscheide, welche der Abbildungen F_1 bis F_6 Funktionen sind.

F_1 (Bild 151/1)

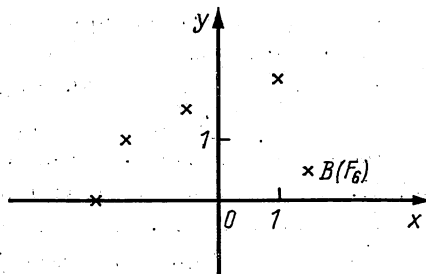
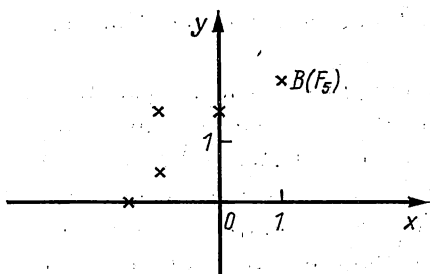
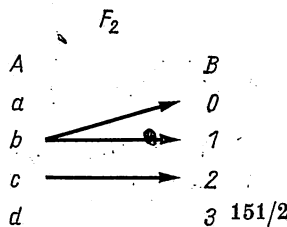
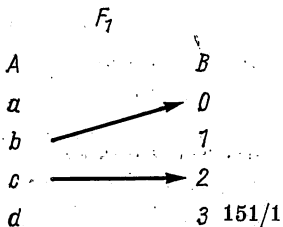
F_2 (Bild 151/2)

$F_3 = \{[1; 3], [2; 4], [3; 5], [4; 6], [4; 7], [5; 8]\}$

$F_4 = \{[0; 0], [1; 1], [2; 4], [3; 9]\}$

F_5 (Bild 151/3)

F_6 (Bild 151/4)



¹ Wir setzen im folgenden stets voraus, daß der Definitionsbereich von f auf der x -Achse und der Wertebereich von f auf der y -Achse dargestellt werden.

Mit Hilfe der angegebenen Kriterien findet man, daß nur F_1, F_4, F_6 Funktionen sind.

DEFINITION 3 (7.1.):

Es sei $f \subseteq A \times B$ eine Funktion.

Dann heißt f^{-1} die zu f inverse Funktion (Umkehrfunktion von f) genau dann, wenn f^{-1} die zu f inverse Abbildung und f^{-1} eine Funktion ist.

(↗ [4; 164])

SATZ 1 (7.1.):

Die inverse Abbildung f^{-1} einer Funktion f ist genau dann die inverse Funktion von f , wenn f eine eindeutige Abbildung ist.

Beweis:

Es gilt:

- (1) Wenn f und f^{-1} Funktionen sind, so ist sowohl f als auch f^{-1} eine eindeutige Abbildung, und damit ist f eineindeutig.
- (2) Wenn f eine eineindeutige Abbildung ist, so ist auch f^{-1} eine eineindeutige Abbildung. Das ist hinreichend dafür, daß f^{-1} eine Funktion ist.

Bemerkung: Zu jeder Funktion f kann die inverse Abbildung angegeben werden, aber nicht jede Funktion hat eine zu ihr inverse Funktion.

Wir betrachten jetzt⁹ Möglichkeiten der Bildung der inversen Funktion f^{-1} zu einer gegebenen Funktion f (f sei eine eineindeutige Abbildung).

- (1) Wenn eine Funktion f mit Hilfe von Zuordnungspfeilen gegeben ist, so erhält man die Darstellung der inversen Funktion f^{-1} durch Umkehrung des Richtungssinnes aller Pfeile.
- (2) Wenn eine Funktion f als Menge geordneter Paare elementweise gegeben ist, so erhält man die elementweise Angabe der inversen Funktion f^{-1} , indem man in jedem geordneten Paar von f die Elemente vertauscht.
- (3) Wenn die graphische Darstellung einer Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben ist, so erhält man die graphische Darstellung der inversen Funktion f^{-1} als Menge von Punkten, die dadurch entsteht, daß man bei jedem Bildpunkt von f die Koordinaten vertauscht, bzw. durch Spiegelung des Bildes von f an der durch die Gleichung $y = x$ bestimmten Geraden (↗ 177, Satz 2 (8.7.)).

BEISPIEL 2 (7.1.):

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f = \{[-3; 0], [-2; 1], [0; 1], [1; 2], [3; 2]\}.$$

Für das Bild B von f gilt (Bild 153/1):

$$B(f) = \{P_1(-3; 0), P_2(-2; 1), P_3(0; 1), P_4(1; 2), P_5(3; 2)\}.$$

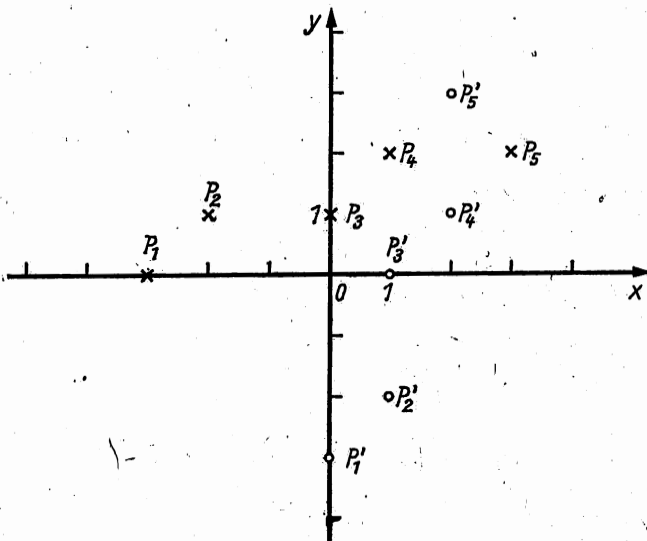
Es ist dann

$$B(f^{-1}) = \{P'_1(0; -3), P'_2(1; -2), P'_3(1; 0), P'_4(2; 1), P'_5(2; 3)\}$$

bzw.

$$f^{-1} = \{[0; -3], [1; -2], [1; 0], [2; 1], [2; 3]\}.$$

Es ist f^{-1} die zu f inverse Abbildung, aber nicht die inverse Funktion von f .



153/1

Wir betrachten im folgenden nur solche Funktionen, bei denen sowohl der Definitionsbereich als auch der Wertebereich Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind.

Weiterhin beschränken wir uns auf Funktionen, für die es möglich ist, die Zuordnungsvorschrift mit Hilfe einer Gleichung anzugeben.

BEISPIEL 3 (7.1.):

Eine Funktion f sei als Menge geordneter Paare elementweise gegeben.

$$\text{Es ist } f = \{[0; 0], [1; 1], [2; 4], [3; 9], [4; 16], [5; 25]\}$$

$$\text{und damit } D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$W(f) = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\},$$

wobei $D(f) \subseteq P$ und $W(f) \subseteq P$.

Wir können hier die Zuordnungsvorschrift in Worten formulieren: Jeder natürlichen Zahl kleiner als 6 wird ihr Quadrat zugeordnet.

Sei x ein Zeichen für ein beliebiges Element aus dem Definitionsbereich, so erhalten wir durch die Gleichung

$$y = x^2$$

das zugehörige Element y des Wertebereiches von f . Wir sind damit in der Lage, die gegebene Menge f mit Hilfe einer Aussageform anzugeben.

Es ist z. B.

$$f = \{[x; y]; [x; y] \in N \times N \wedge y = x^2 \wedge 0 \leq x \leq 5\}$$

oder $f = \{[x; y]; y = x^2 \wedge x \in N \wedge 0 \leq x \leq 5\}$

oder $f = \{[x; y]; y = x^2 \wedge x \in D(f)\}$,

wenn $D(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Man bezeichnet die Gleichung $y = x^2$ als den **analytischen Ausdruck der Funktion** bzw. als **Funktionsgleichung**.

DEFINITION 4 (7.1.):

Es sei f eine Funktion.

Dann heißt eine Zahl x eine **Nullstelle** der Funktion f genau dann, wenn $[x; 0] \in f$.

BEISPIEL 4 (7.1.):

Gegeben sei die Funktion

$$f = \{[0; 3], [1; 0], [2; -1], [3; 0], [4; 3]\}.$$

Diese Funktion hat zwei Nullstellen, da es zwei geordnete Paare gibt, deren zweites Element den Wert Null hat.

Es ist $x_1 = 1$ eine Nullstelle, denn $[1; 0] \in f$.

Es ist $x_2 = 3$ eine Nullstelle, denn $[3; 0] \in f$.

Möglichkeiten der Angabe von Funktionen

Aus den Definitionen der Begriffe „Funktion“ (↗ Teil 7.1.) und „Abbildung“ (↗ [4; 156ff.]) folgt, daß Funktionen Mengen geordneter Paare sind. Eine Menge ist dann eindeutig bestimmt, wenn ihre Elemente gegeben sind.

Wir fordern demzufolge von einer eindeutigen Darstellung einer Funktion, daß es möglich ist, aus dieser Darstellung die Elemente der Funktion eindeutig zu ermitteln.

(1) Angabe einer Funktion als Menge geordneter Paare**a) Elementweise Darstellung**

Hier sind die Elemente der Funktion explizit vorgegeben. Die Forderung wird also trivialerweise erfüllt.

BEISPIEL 1 (7.2.):

$$f_1 = \{[0; 0], [1; 2], [2; 4], [3; 6]\}$$

b) Darstellung mit Hilfe einer Aussageform

Wir ermitteln eine Aussageform, so daß die Erfüllungsmenge dieser Aussageform die Menge aller geordneten Paare ist, die zur Funktion gehören.

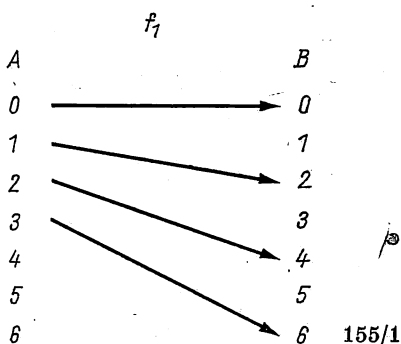
BEISPIEL 2 (7.2.):

$$f_1 = \{[x; y]; y = 2x \wedge x \leq 3 \wedge x \in N\}$$

Die Aussageform ist hier eine Konjunktion aus der Funktionsgleichung $y = 2x$, der Ungleichung $x \leq 3$ und der Elementbeziehung $x \in N$.

(2) Angabe einer Funktion mit Hilfe von Zuordnungspfeilen

Aus einer solchen Darstellung (\nearrow Bild 155/1) kann man leicht die Menge der geordneten Paare ermitteln.

**(3) Angabe einer Funktion mit Hilfe einer Wertetabelle**

Man verzichtet bei solchen Darstellungen auf die Zuordnungspfeile und ordnet die Elemente tabellarisch an.

Auch aus einer Tabelle kann man sofort die elementweise Angabe der Funktion f_1 gewinnen.

BEISPIEL 3 (7.2.):

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

(4) Angabe einer Funktion mit Hilfe einer Zuordnungsvorschrift und durch Angabe des Definitionsbereichs

Man erhält die Menge der geordneten Paare einer Funktion f_1 als Lösungsmenge der Gleichung $y = f_1(x)$ im Lösungsgrundbereich L_G unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches von f_1 .

BEISPIEL 4 (7.2.):

Die Darstellung der Funktion f_1 durch

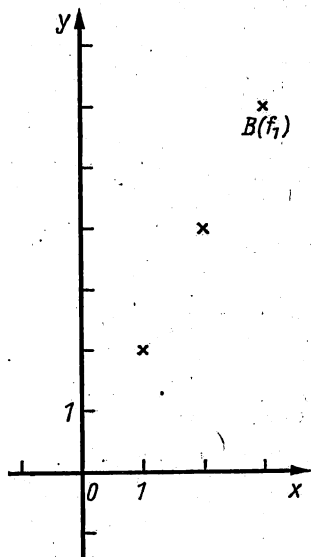
$$y = f_1(x) = 2x \quad (y \text{ gleich } f_1 \text{ von } x) \quad \text{und}$$

$$D(f_1) = \{x; x \in N \wedge x \leq 3\}$$

enthält die Aussageformen, die auch im Beispiel 2 (7.2.) auftreten. Es ist

$$L = \{[x; y]; [x; y] \in N \times N \wedge y = 2x \wedge x \leq 3\}.$$

(5) Angabe einer Funktion mit Hilfe einer graphischen Darstellung



BEISPIEL 5 (7.2.):

Die graphische Darstellung der Funktion f_1 ist $B(f_1)$ (Bild 156/1).

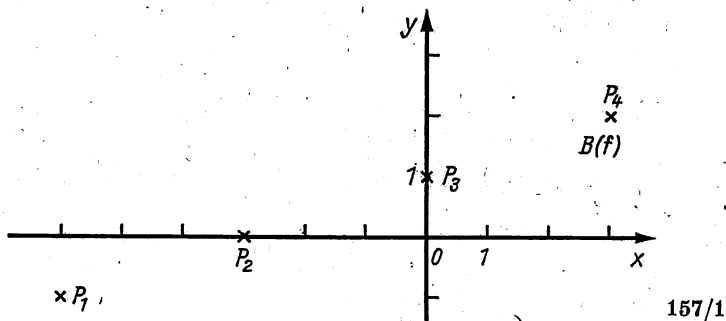
Es gilt: $P(x; y) \in B(f_1) \leftrightarrow [x; y] \in f_1$.

Damit erhält man aus der graphischen Darstellung der Funktion die elementweise Darstellung.

Bemerkung: Die Darstellungen (1a), (2) und (3) können, falls die gegebene Funktion aus unendlich vielen geordneten Paaren besteht, nur dazu verwendet werden, um einige Elemente zu kennzeichnen.

BEISPIEL 6 (7.2.):

Gegeben sei die graphische Darstellung einer Funktion f (↗ Bild 157/1).



$$B(f) = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

Aus den Koordinaten der Bildpunkte von f erhält man mit

$$f = \{[-6; -1], [-3; 0], [0; 1], [3; 2]\}$$

die elementweise Angabe der Funktion. Daraus ergeben sich

$$D(f) = \{-6; -3; 0; 3\} \quad \text{und} \quad W(f) = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Die Funktionsgleichung gewinnt man zunächst durch Probieren. Hier ist

$$y = \frac{1}{3}x + 1.$$

Damit kann die Funktion als Menge mit Hilfe einer Aussageform angegeben werden.

$$f = \left\{ [x; y]; [x; y] \in G \times G \wedge y = \frac{1}{3}x + 1 \wedge -6 \leq x \leq 3 \right\}$$

Die Wertetabelle und die Darstellung mit Zuordnungspfeilen ergeben sich unmittelbar aus der elementweisen Angabe der Funktion.

8.1. Definition der linearen Funktion

Vereinbarungsgemäß betrachten wir nur solche Funktionen, die sich mit Hilfe einer Funktionsgleichung angeben lassen. Eine Möglichkeit, diese Funktionen zu klassifizieren, besteht darin, die Funktionsgleichung als klassifizierendes Merkmal zu benutzen.

DEFINITION 1 (8.1.):

Eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch äquivalente Umformungen in die Form

$$y = mx + n \quad (m, n \in P \text{ und } m \neq 0)$$

gebracht werden kann, heißt eine **lineare Funktion**.

Bemerkung: Man bezeichnet die Form der Funktionsgleichung, in der ein Term nur aus der Variablen y besteht und der andere Term der Funktionsgleichung die Variable y nicht enthält, als die **explizite Darstellung** der Funktionsgleichung. Anderenfalls spricht man von einer **impliziten Darstellung** der Funktionsgleichung.

8.2. Die linearen Funktionen mit der Funktionsgleichung

$$y = mx \quad (m \neq 0)$$

Wir formulieren zunächst eine Aussage über Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = mx$.

SATZ 1 (8.2.):

Das Bild einer linearen Funktion f mit der Gleichung $y = mx$ und dem Definitionsbereich $D(f) = P$ ist eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems.

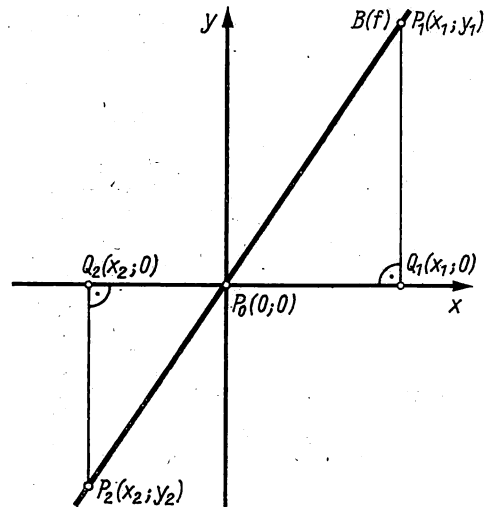
Beweis:

Das Bild der Funktion f mit der Gleichung $y = mx$ und $D(f) = P$ besteht aus den Punkten einer Ebene, deren Koordinaten die Gleichung $y = mx$ im Bereich der reellen Zahlen in eine wahre Aussage überführen.

Die Koordinaten des Punktes $P_0(0; 0)$ erfüllen diese Gleichung, denn es ist $0 = m \cdot 0$ für alle $m \in P$.

Für die Koordinaten aller anderen Punkte des Bildes von f ist das Verhältnis von Ordinate und Abszisse konstant, da aus der Funktionsgleichung $y = mx$ für $x \neq 0$ folgt

$$m = \frac{y}{x} \quad (\nearrow \text{Bild 159/1}).$$



Es sei $P_1(x_1; y_1)$ ein Punkt des Bildes von f , das heißt, die Koordinaten von P_1 erfüllen die Gleichung $y = mx$. Also gilt

$$m = \frac{y_1}{x_1}.$$

Mit Hilfe des Strahlensatzes ergibt sich für die Koordinaten eines beliebigen Punktes $P_2(x_2; y_2)$, der auf der durch P_0 und P_1 eindeutig bestimmten Geraden g liegt, stets

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Es gilt also auch

$$m = \frac{y_2}{x_2}.$$

Somit erfüllen die Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Geraden g die Funktionsgleichung $y = mx$.

Für jeden Punkt, der nicht auf g liegt, gilt

$$\text{entweder } \frac{s}{r} > 0 \text{ oder } \frac{s}{r} < 0.$$

Das Bild einer Funktion f mit der Gleichung $y = mx$ und $D(f) = P$ ist also eine Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems, q. e. d.

DEFINITION 1 (8.2.):

Es seien f eine Funktion mit der Gleichung $y = mx$ und dem Definitionsbereich $D(f) = P$ und g die Bildgerade dieser Funktion.

Dann heißt der Koeffizient m in der Gleichung $y = mx$ der **Anstieg** der Bildgeraden und der **Winkel** α (mit $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ und $\alpha \neq 0$), den Bildgerade und positiver Teil der x -Achse miteinander bilden, **Steigungswinkel** der Geraden.

Zwischen Anstieg und Steigungswinkel des Bildes einer Funktion f mit der Gleichung $y = mx$ und $D(f) = P$ existiert ein Zusammenhang.

Es ergeben sich die in der folgenden Übersicht enthaltenen Möglichkeiten.

m	α
$1 < m$	$45^\circ < \alpha < 90^\circ$
$m = 1$	$\alpha = 45^\circ$
$0 < m < 1$	$0^\circ < \alpha < 45^\circ$
$-1 < m < 0$	$-45^\circ < \alpha < 0^\circ$
$m = -1$	$\alpha = -45^\circ$
$m < -1$	$-90^\circ < \alpha < -45^\circ$

DEFINITION 2 (8.2.):

Eine Gerade heißt **steigend** genau dann, wenn sie mindestens durch den I. und III. Quadranten geht, **fallend** genau dann, wenn sie mindestens durch den II. und IV. Quadranten geht.

SATZ 2 (8.2.):

Eine Gerade *steigt*, wenn in der zugehörigen Funktionsgleichung $y = mx$ der Anstieg m größer als Null ist, sie *fällt*, wenn der Anstieg m kleiner als Null ist.

Diesen Satz beweise der Leser selber.

BEISPIEL 1 (8.2.):

In Lehrbuch [6; Klasse 3, 83] finden wir als Aufgabe 5.

Berechne die Produkte $1 \cdot 11$, $2 \cdot 11$ bis $10 \cdot 11$!

Dieser Sachverhalt kann durch eine Funktionsgleichung der Form $y = mx$ erfaßt werden.

Belegt man in der Gleichung $y = 11x$ die Variable x mit den Zahlen 1, 2, ..., 10, so erhält man jeweils das gesuchte Produkt.

In der Darstellung

$$f = \{[1; 11], [2; 22], [3; 33], \dots, [10; 110]\}$$

wird der Zusammenhang zwischen dem zweiten Faktor und dem Produkt mit Hilfe geordneter Paare angegeben. Benutzen wir die Funktionsgleichung zur Angabe, so entsteht

$$f = \{[x; y]; [x; y] \in N \times N \wedge y = 11x \wedge 1 \leq x \leq 10\}.$$

8.3.

Die linearen Funktionen mit der Funktionsgleichung

$$y = mx + n$$

Nach der Betrachtung von Funktionen mit der Gleichung $y = mx + n$ und $n = 0$, $m \in P$ untersuchen wir in Teil 8.3. Funktionen mit der Gleichung $y = mx + n$ und $m \in P$, $n \in P$, $m \neq 0$.

SATZ 1 (8.3.):

Das Bild einer linearen Funktion f mit der Gleichung $y = mx + n$ und dem Definitionsbereich $D(f) = P$ ist eine Gerade, die die y -Achse des Koordinatensystems im Punkt $P(0; n)$ schneidet.

Beweis:

Der Punkt $P(0; n)$ ist sicher ein Punkt des Bildes der Funktion f , denn seine Koordinaten erfüllen die zugehörige Funktionsgleichung.

Es gilt:

Wenn $x = 0$ und $y = n$, so ist $n = m \cdot 0 + n$ eine wahre Aussage für alle $m, n \in P$.

Seien $B(f_1)$ das Bild der Funktion f_1 mit der Gleichung $y = mx$ (mit $D(f_1) = P$) und $B(f_2)$ das Bild der Funktion mit der Gleichung $y = mx + n$ (mit $D(f_2) = P$).

Wir vergleichen die y -Koordinate eines Punktes $P_1 \in B(f_1)$ mit der y -Koordinate eines Punktes $P_2 \in B(f_2)$, der dieselbe x -Koordinate wie P_1 haben möge.

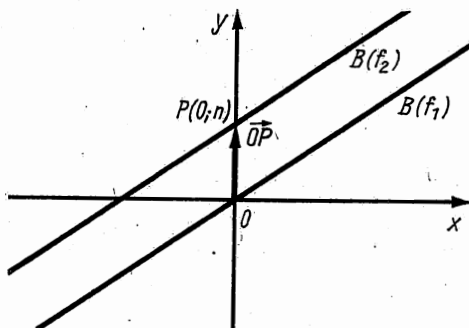
Dann gilt für alle entsprechenden Bildpunkte:

Wenn $P_1(x_1, y_1) \in B(f_1)$, so $P_2(x_1, y_1 + n) \in B(f_2)$.

Wir erhalten somit das Bild $B(f_2)$ durch Verschiebung des Bildes $B(f_1)$ längs der y -Achse mit dem Verschiebungspfeil \overrightarrow{OP} (\nearrow Bild 162/1).

Da das Bild von f_1 eine Gerade ist, folgt, daß auch das Bild der Funktion mit der Gleichung $y = mx + n$ ($D(f) = P$) eine Gerade ist, q. e. d.

Bemerkung: Die Begriffe „Anstieg“ und „Steigungswinkel“ benutzen wir in entsprechender Weise auch für die Bilder der linearen Funktionen mit der Gleichung $y = mx + n$.



162/1

FOLGERUNG aus SATZ 1 (8.3.):

Das Bild einer linearen Funktion f mit der Gleichung $y = mx + n$ ($D(f) = P$) schneidet den positiven Teil der y -Achse genau dann, wenn $n > 0$ ist.

Es schneidet den negativen Teil der y -Achse genau dann, wenn $n < 0$ ist.

Es geht durch den Koordinatenursprung genau dann, wenn $n = 0$ ist.

BEISPIEL 1 (8.3.):

In Lehrbuch [6; Klasse 1, 62] finden wir die Möglichkeit, einen einfachen Sachverhalt mit Hilfe einer linearen Funktion zu beschreiben. Im Teil „Die Zahlen von 11 bis 20“ wird von der Gleichung $b = 10 + a$ ausgegangen.

Wir fassen diese Gleichung als eine Funktionsgleichung auf. Der Definitionsbereich ist $D = \{a; a \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq a \leq 10\}$.

Dann ist $f = \{[a; b]; [a; b] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge b = 10 + a \wedge 1 \leq a \leq 10\}$.

SATZ 2 (8.3.):

Die lineare Funktion f mit der Gleichung

$y = mx + n$ hat im Definitionsbereich $D(f) = P$ genau eine Nullstelle.

Beweis:

Nach Definition 4 (7.1.) ist eine Nullstelle einer Funktion ein solches Element des Definitionsbereichs, für das der zugehörige Funktionswert Null wird.

Belegt man y in der Funktionsgleichung $y = mx + n$ mit Null, so entsteht eine lineare Gleichung mit einer Variablen.

$$(1) 0 = mx + n$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind in bezug auf den Lösungsgrundbereich $D(f)$ die Nullstellen der Funktion mit der Gleichung $y = mx + n$.

Wenn $m \neq 0$, so erhält man aus Gleichung (1):

$$x = -\frac{n}{m},$$

d. h.: Es gibt genau eine Nullstelle, nämlich $-\frac{n}{m}$, q. e. d.

Bemerkung: Nullstellen von Funktionen können auch aus dem Bild der Funktion ermittelt werden.

Es gilt: Eine Nullstelle einer Funktion ist die Abszisse eines der Punkte des Bildes der Funktion, die auf der x -Achse des Koordinatensystems liegen.

BEISPIEL 2 (8.3.):

Man ermittle die Nullstellen der Funktionen mit den Gleichungen

$$y = f_1(x) = 2x - 4$$

$$y = f_2(x) = \frac{1}{2}x$$

$$y = f_3(x) = 3$$

und dem Definitionsbereich P .

Belegt man y jeweils mit Null, so erhält man aus

a) $0 = 2x - 4$ für x den Wert 2, also $x_0(f_1) = 2$,

8.4.

$$b) 0 = \frac{1}{2}x \quad \text{für } x \text{ den Wert } 0, \text{ also } x_0(f_2) = 0.$$

Aus

$$c) 0 = 3 \quad \text{folgt: } f_3 \text{ hat keine Nullstelle.}$$

8.4.

Verfahren zum Ermitteln des Bildes einer linearen Funktion

Nach Satz 1 (8.3.) ist das Bild einer linearen Funktion f mit $D(f) = P$ eine Gerade.

Da eine Gerade durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt ist, kommt es beim Ermitteln des Bildes einer linearen Funktion darauf an, zwei geeignete Punkte dieser Geraden zu bestimmen.

1. Möglichkeit

Ein Punkt P ist genau dann ein Punkt des Bildes einer Funktion wenn seine **Koordinaten die Funktionsgleichung dieser Funktion erfüllen.**

Wir fassen diese Funktionsgleichung als eine lineare Gleichung mit zwei Variablen auf, belegen die Variable x nacheinander mit zwei verschiedenen Zahlen a_1 bzw. a_2 und ermitteln die zugehörigen Belegungen für die Variable y . Diese mögen b_1 bzw. b_2 sein. Dann sind $P_1(a_1, b_1)$ und $P_2(a_2, b_2)$ Punkte des Bildes der Funktion.

Man gibt die entsprechenden Zahlenpaare im allgemeinen in einer Wertetabelle an.

x	a_1	a_2
y	b_1	b_2

Bemerkung: Zur Kontrolle kann man ein weiteres geordnetes Paar (a_3, b_3) ermitteln. Notwendige Bedingung dafür, daß P_1, P_2 und P_3 Bildpunkte von f sind, ist ihre Lage auf ein und derselben Geraden.

BEISPIEL 1 (8.4.):

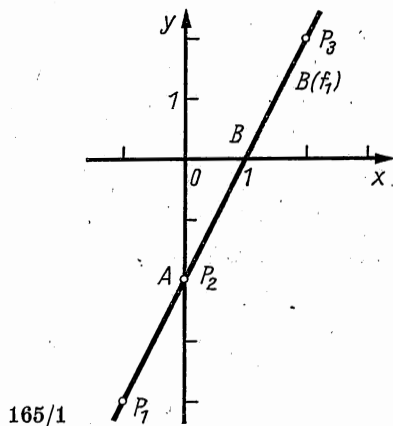
Man zeichne das Bild der Funktion f_1 mit der Gleichung

$$y = 2x - 2 \text{ und } D(f_1) = P.$$

Wir wählen folgende Wertetabelle.

x	- 1	0	2
y	- 4	- 2	2

Daraus ermitteln wir das Bild von f_1
(↗ Bild 165/1).



2. Möglichkeit

Jede Gerade, die nicht parallel zur x -Achse ist, schneidet sowohl die x -Achse als auch die y -Achse in jeweils genau einem Punkt. Das Ermitteln der Koordinaten dieser Punkte ist insofern einfach, da für beide Punkte je eine **Koordinate Null** ist.

Der Schnittpunkt P_1 mit der y -Achse ergibt sich nach Satz 1 (8.3.) unmittelbar aus der gegebenen Funktionsgleichung $y = mx + n$ als $P_1(0; n)$.

Den Schnittpunkt P_2 mit der x -Achse erhält man, indem man die Nullstelle x_0 der Funktion berechnet, als

$$P_2\left(-\frac{n}{m}; 0\right).$$

Bezogen auf Beispiel 1 (8.4.) ergeben sich aus $y = 2x - 2$ die Punkte $A(0; -2)$ und $B(1; 0)$.

3. Möglichkeit

Das Bild der Funktion soll mit Hilfe eines **Steigungsdreiecks** ermittelt werden.

DEFINITION 1 (8.4.):

Es seien $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zwei verschiedene Punkte einer Geraden, mit $y_1 < y_2$.

Dann heißt das Dreieck, das durch die Parallele zur x -Achse durch P_1 , die Parallele zur y -Achse durch P_2 und die gegebene Gerade bestimmt ist, ein **Steigungsdreieck** der Geraden.

Es sei $B(f)$ das Bild einer Funktion f mit der Gleichung $y = mx + n$. Dann ergibt sich aus Bild 166/1

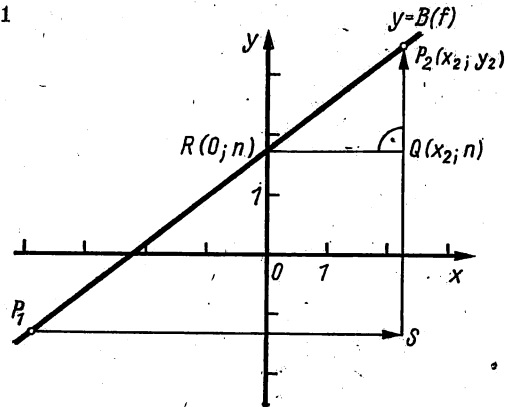
$$(1) m = \frac{y_2 - n}{x_2}$$

und mit Hilfe des Strahlensatzes

$$(2) \frac{y_2 - n}{x_2} = \frac{l(\overrightarrow{SP_2})}{l(\overrightarrow{P_1S})}$$

Aus (1) und (2) erhält man

$$(3) m = \frac{l(\overrightarrow{SP_2})^1}{l(\overrightarrow{P_1S})}$$



Bemerkung: In Gleichung (3) gibt der Zähler des Bruches die Maßzahl der Länge der gerichteten Strecke an, die parallel zur y -Achse verläuft, der Nenner die Maßzahl der Länge der gerichteten Strecke, die parallel zur x -Achse liegt.

Wenn die Funktionsgleichung $y = mx + n$ einer linearen Funktion f gegeben ist, so erhält man aus dem Anstieg m das Verhältnis der Maßzahlen der Katheten eines Steigungsdreiecks der Bildgeraden von f .

Ein solches Steigungsdreieck reicht nicht aus, um die Gerade eindeutig ermitteln zu können. Dazu ist zusätzlich ein Punkt P notwendig, der sicher ein Punkt der Bildgeraden ist.

Wir wählen einen Punkt, dessen Koordinaten sich sofort aus der Funktionsgleichung ablesen lassen, nämlich $P(0; n)$. Das Steigungsdreieck wird also stets so gezeichnet, daß P_1 oder P_2 Punkte der y -Achse sind.

Weiter legen wir in Übereinstimmung mit Gleichung (5) fest: Es habe $\overrightarrow{P_1S}$ stets denselben Richtungssinn wie die x -Achse. Dann gilt:

Wenn $m > 0$, so sind $\overrightarrow{SP_2}$ und y -Achse gleich gerichtet:

Wenn $m < 0$, so haben $\overrightarrow{SP_2}$ und y -Achse entgegengesetzten Richtungssinn.

BEISPIEL 2 (8.4.):

Man zeichne die Bilder der Funktionen mit den Gleichungen

$$y = f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

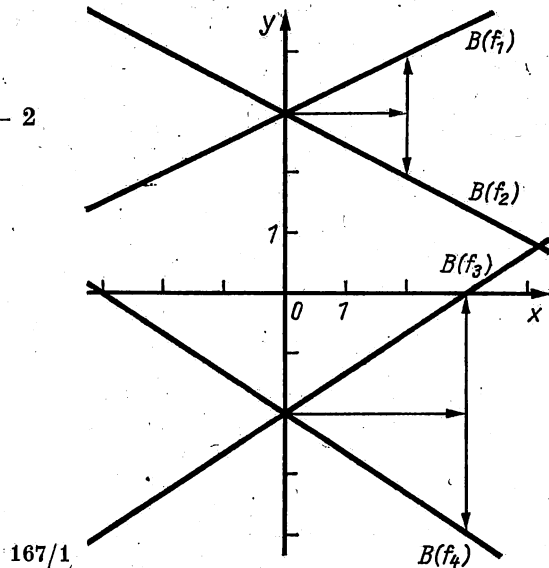
$$y = f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

¹ Wir fassen diese Strecken als gerichtete Strecken auf und legen fest: Eine zu einer Koordinatenachse parallele Strecke heißt positiv gerichtet genau dann, wenn ihr Richtungssinn mit dem Richtungssinn der Achse übereinstimmt, negativ gerichtet genau dann, wenn ihr Richtungssinn dem Richtungssinn der Achse entgegengesetzt ist.

$$y = f_3(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

$$y = f_4(x) = -\frac{2}{3}x - 2$$

mit $D(f_i) = P$.



Wir erläutern zwei Beispiele ausführlich (↗ Bild 167/1).

- (1) Aus $y = f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3$ folgt $P(0; 3) \in B(f_1)$ und $m = \frac{1}{2}$.

Es muß also ein Steigungsdreieck ermittelt werden, dessen einer Eckpunkt $P(0; 3)$ ist, dessen Katheten positiv gerichtet sind und deren Maßzahlen ein Verhältnis 1 : 2 haben.

- (2) Aus $y = f_4(x) = -\frac{2}{3}x - 2$ folgt $P(0; -2) \in B(f_4)$ und $m = -\frac{2}{3}$.

Es muß hier ein Steigungsdreieck gezeichnet werden, dessen einer Eckpunkt $P(0; -2)$ ist, dessen Katheten unterschiedlich gerichtet sind und deren Maßzahlen im Verhältnis 2 : 3 stehen.

8.5.

Verfahren zum Ermitteln der Funktionsgleichung einer linearen Funktion

Wir betrachten in Teil 8.5. Verfahren, die es ermöglichen, bei vorgegebenem Bild einer linearen Funktion die zugehörige Funktionsgleichung zu ermitteln. Dabei stellen wir drei Möglichkeiten dar.

1. Möglichkeit

Wenn zum Beispiel $P_1(-6; -1)$ und $P_2(3; 2)$ zwei verschiedene Punkte einer Geraden $g = B(f)$ sind, so kann man mit Hilfe der Koordinaten dieser

8.5.

Punkte die zugehörige Funktionsgleichung $y = mx + n$ in eine wahre Aussage überführen. Es muß also gelten:

$$(1) \quad -1 = -6m + n$$

$$(2) \quad 2 = 3m + n$$

Man faßt beide Gleichungen als ein System linearer Gleichungen auf und ermittelt alle $[m; n]$, die Lösungen dieses Systems sind.

Dann ergibt sich zunächst

$$-3 = -9m$$

und weiter $m = \frac{1}{3}$:

Einsetzen in (2) liefert $n = 1$.

Es gibt also genau eine Funktionsgleichung:

$$y = \frac{1}{3}x + 1.$$

Wir verallgemeinern dieses Verfahren.

Es seien $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ zwei verschiedene Punkte einer Geraden $g = B(f)$. Dann kann man mit Hilfe ihrer Koordinaten die zugehörige Funktionsgleichung $y = mx + n$ in eine wahre Aussage überführen.

Es muß also gelten:

$$(1) \quad y_1 = mx_1 + n$$

$$(2) \quad y_2 = mx_2 + n$$

Man subtrahiert Gleichung (2) von Gleichung (1) und erhält

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2)m$$

bzw. $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$

wenn $x_1 \neq x_2.$

Bemerkung: Die Bedingung $x_1 \neq x_2$ ist erfüllt genau dann, wenn $P_1 \neq P_2$.

Man setzt den Term $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ für m in Gleichung (1) ein,

Es ergibt sich

$$y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 + n$$

und weiter

$$n = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1.$$

Setzt man in die Gleichung $y = mx + n$ die für m und n ermittelten Terme ein, so entsteht die Gleichung

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1.$$

Addition von $-y_1$ und entsprechendes Ausklammern liefern

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1).$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (\text{mit } x \neq x_1 \text{ und } x_1 \neq x_2).$$

Bemerkung: Man bezeichnet diese Gleichung in der analytischen Geometrie als **Zweipunktgleichung einer Geraden**.

BEISPIEL 1 (8.5):

Gegeben sei das Bild $B(f_1)$ einer linearen Funktion f_1 (\nearrow Bild 169/1).

Wir geben uns zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 der Geraden vor und ermitteln ihre Koordinaten.

Es gelten hier $P_1(-2; 2)$

und $P_2(2; -4)$.

Wir setzen die Koordinaten dieser Punkte in die Zweipunktgleichung ein und erhalten

$$(1) \quad \frac{y - 2}{x + 2} = -\frac{6}{4} \quad (\text{mit } x \neq -2).$$

Das ist eine implizite Form der gesuchten Funktionsgleichung.

Als explizite Form ergibt sich zunächst

$$(2) \quad y = -\frac{3}{2}x - 1 \quad (\text{mit } x \neq -2).$$

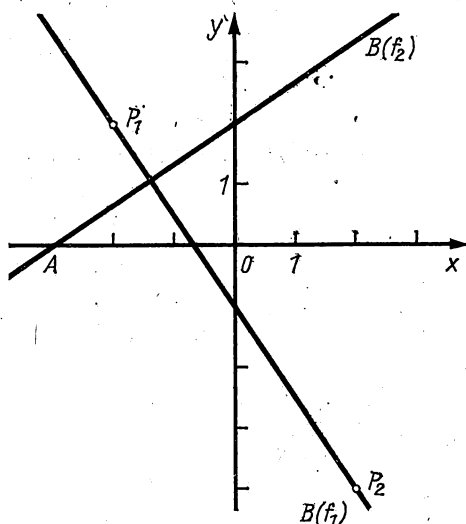
Die Gleichungen (1) und (2) sind für alle $x \neq -2$ einander äquivalent.

Da $P_1(-2; 2)$ sicher ein Punkt des Bildes der Funktion ist, können wir nachträglich in Gleichung (2) für x die Belegung -2 zulassen.

Damit ist

$$(3) \quad y = -\frac{3}{2}x - 1$$

die Funktionsgleichung der Funktion f_1 .



169/1

2. Möglichkeit

Die Zweipunktgleichung nimmt eine einfache Form an, wenn man die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen des Koordinatensystems in diese Gleichung einsetzt.

Es seien $A(a; 0)$ der Schnittpunkt der Geraden mit der x -Achse und $B(0; b)$ der Schnittpunkt mit der y -Achse.

Es ergeben sich

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{0 - b}{a - 0} \quad (\text{mit } x \neq a)$$

und weiter

$$\frac{y}{x - a} = -\frac{b}{a}$$

Daraus entsteht

$$a y = a b - b x$$

bzw. $b x + a y = a b.$

Die Division durch ab (mit $a \cdot b \neq 0$) liefert

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Bemerkung: Diese Gleichung wird als **Abschnittsgleichung einer Geraden** bezeichnet, da die Zahl a bzw. b die Maßzahlen der Längen der Streckenabschnitte angeben, die auf der x -Achse bzw. y -Achse zwischen Ursprung des Koordinatensystems und Schnittpunkt der Geraden mit den Achsen entstehen.

BEISPIEL 2 (8.5.):

Gegeben sei das Bild $B(f_2)$ einer linearen Funktion f_2 .

Es sind hier $a = -3$ und $b = 2$.

Wir setzen in die Abschnittsgleichung ein und erhalten eine implizite Form der Funktionsgleichung

$$-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

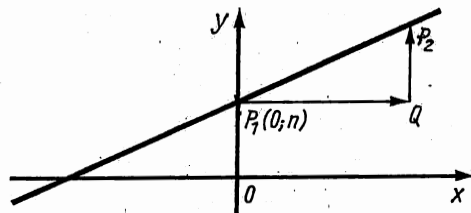
Daraus ergeben sich

$$-2x + 3y = 6$$

und weiter

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

als explizite Form der Funktionsgleichung.



3. Möglichkeit

Man benutzt ein Steigungsdreieck der gegebenen Geraden, um die Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Funktion zu ermitteln (↗ Bild 170/1).

1. Schritt: Man zeichnet ein Steigungsdreieck, so daß dessen einer Eckpunkt der Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse ist.
2. Schritt: Man ermittelt n aus den Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden mit der y -Achse.
3. Schritt: Man ermittelt das Vorzeichen von m .

Das Vorzeichen von m kann mit Hilfe der Strecke $\overrightarrow{QP_2}$ ermittelt werden (↗ Erläuterungen zur 3. Möglichkeit in Teil 8.4.).

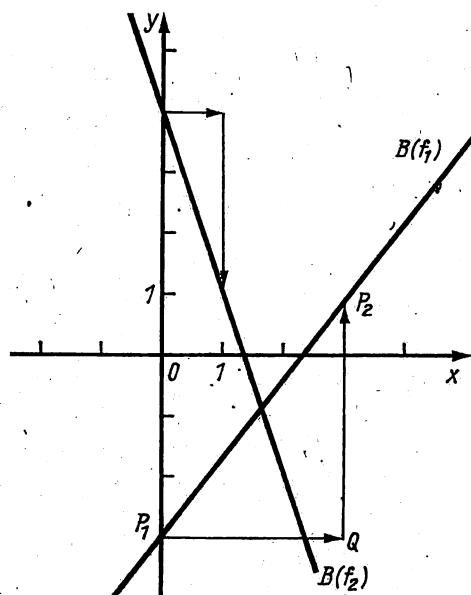
Es ergibt sich ebenfalls aus dem Verlauf der Geraden (steigend oder fallend).

4. Schritt: Man ermittelt m .

Man liest aus dem Steigungsdreieck das Verhältnis der Maßzahlen der Katheten ab. Es ist

$$m = \frac{l(\overrightarrow{QP_2})}{l(\overrightarrow{P_1Q})}$$

5. Schritt: Man gibt die Funktionsgleichung an.



171/1

BEISPIEL 3 (8.5.):

Gegeben seien die Bilder von zwei linearen Funktionen. Man ermittle die zugehörigen Funktionsgleichungen.

Wir erläutern ein Beispiel ausführlich (↗ Bild 171/1).

1. Man betrachtet das Dreieck $\triangle P_1QP_2$. (Man wähle P_2 so, daß seine Koordinaten ganzzahlig sind.)
2. Aus $P_1(0; -3)$ folgt $n = -3$.
3. Da $B(f_1)$ eine steigende Gerade ist, gilt $m > 0$.

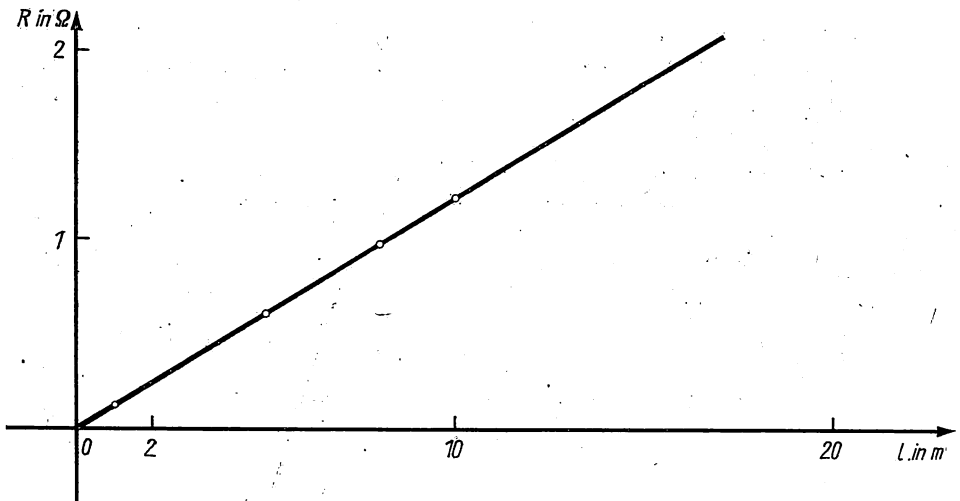
8.5.

4. Aus $\frac{l(\overrightarrow{QP_2})}{l(\overrightarrow{P_1Q})} = \frac{4}{3}$ ergibt sich $m = \frac{4}{3}$.

5. Man erhält somit die Funktionsgleichung der linearen Funktion f_1 .

$$y = \frac{4}{3}x - 3$$

Weiter ist $y = f_2(x) = -3x + 4$.



172/1

BEISPIEL 4 (8.5.):

Zur Untersuchung der Abhängigkeit des Widerstandes eines Drahtes (Material und Querschnitt sind nicht bekannt) wird eine Meßreihe aufgestellt, die folgende Werte liefert (↗ Bild 172/1).

l in m	1	5	8	10
R in Ω	0,13	0,60	1,00	1,22

Man trägt die entsprechenden Bildpunkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Man erkennt, daß diese Punkte näherungsweise auf einer Geraden liegen. Mit Hilfe des angegebenen Verfahrens kann man die Funktionsgleichung ermitteln.

Es ist $m = \frac{0,6}{5}$, also $m = 0,12$.

Damit erhält man

$$f = \{[l; R] ; R = 0,12 \cdot l \wedge l \in P \wedge l > 0\}.$$

172

Mit Hilfe der ermittelten Funktionsgleichung kann man zu jeder Länge des gegebenen Drahtes den Widerstand berechnen.

Man beachte, daß dieses Verfahren nur Näherungscharakter besitzt. Auf eine Fehlerbetrachtung soll hier nicht eingegangen werden.

8.6.

Abhängigkeit des Bildes einer linearen Funktion vom Definitionsbereich

Wir untersuchen lineare Funktionen in verschiedenen Definitionsbereichen. Dazu betrachten wir einige Beispiele.

BEISPIEL 1 (8.6.):

Gegeben seien die Funktionsgleichung $y = x - 2$ und die Definitionsbereiche $D(f_1) = N$, $D(f_2) = G$, $D(f_3) = P$.

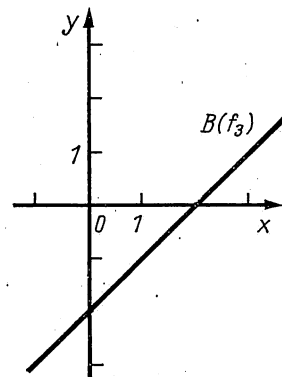
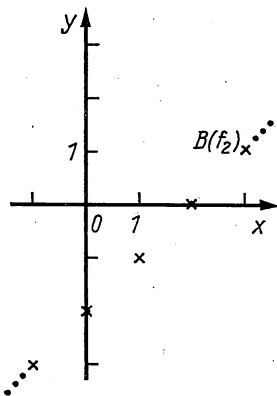
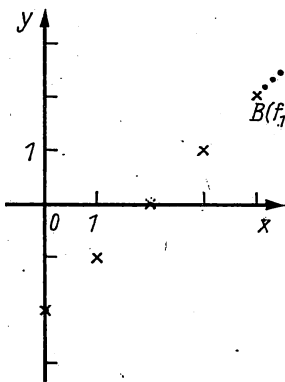
Dann ergeben sich für die Funktionen folgende Darstellungen.

$$f_1 = \{[x; y]; y = x - 2 \wedge x \in N\}$$

$$f_2 = \{[x; y]; y = x - 2 \wedge x \in G\}$$

$$f_3 = \{[x; y]; y = x - 2 \wedge x \in P\}$$

Wir betrachten $B(f_1)$, $B(f_2)$ und $B(f_3)$ in Bild 173/1.



173/1

Das Bild der Funktion f_3 ist eine Gerade mit der Gleichung

$$y = x - 2.$$

Die Bilder von f_1 und f_2 sind diskrete Punktmengen, deren Elemente Punkte dieser Geraden sind.

BEISPIEL 2 (8.6.):

Gegeben seien die Funktionsgleichung $y = x + 1$ und die Definitionsbereiche

$$D(f_1) = \{x; x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\},$$

$$D(f_2) = \{x; x \in \mathbb{G} \wedge x < 4\},$$

$$D(f_3) = \{x; x \in \mathbb{P} \wedge x < 4\}.$$

Es sind $f_1 = \{[x; y]; y = x + 1 \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\},$

$$f_2 = \{[x; y]; y = x + 1 \wedge x \in \mathbb{G} \wedge x < 4\},$$

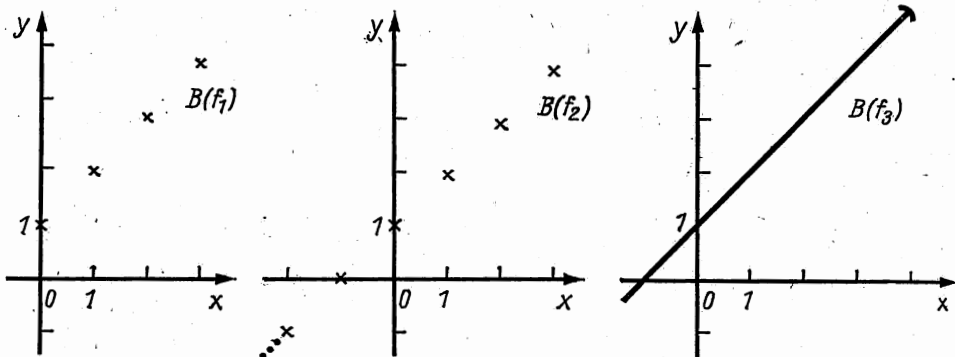
$$f_3 = \{[x; y]; y = x + 1 \wedge x \in \mathbb{P} \wedge x < 4\}.$$

Als Bilder der Funktionen erhalten wir (\nearrow Bild 174/1):

$B(f_1)$ ist eine Menge endlich vieler diskreter Punkte, die auf der durch die Gleichung $y = x + 1$ bestimmten Geraden liegen.

$B(f_2)$ enthält unendlich viele diskrete Punkte.

Zu $B(f_3)$ gehören alle die Punkte der durch die Gleichung $y = x + 1$ bestimmten Geraden, für deren x -Koordinate $x < 4$ gilt. Die graphische Darstellung von f_3 ist also eine Halbgerade.



174/1

BEISPIEL 3 (8.6.):

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1 = \{[x; y]; y = x - 1 \wedge +1 \leq x \leq 3 \wedge x \in \mathbb{N}\},$$

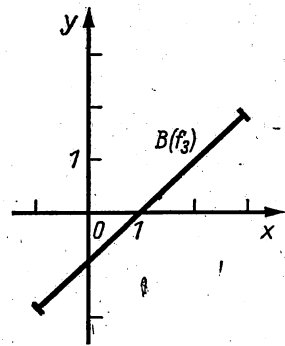
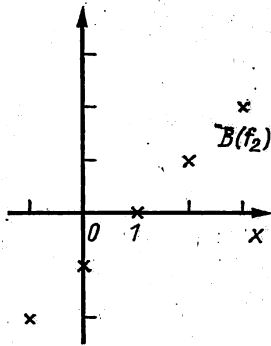
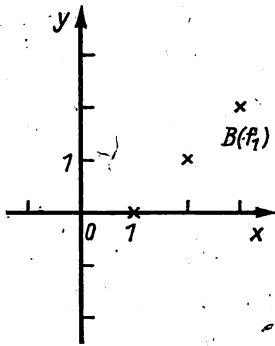
$$f_2 = \{[x; y]; y = x - 1 \wedge -1 \leq x \leq 3 \wedge x \in \mathbb{G}\},$$

$$f_3 = \{[x; y]; y = x - 1 \wedge -1 \leq x \leq 3 \wedge x \in \mathbb{P}\}.$$

Wir betrachten die Bilder dieser Funktionen (\nearrow Bild 175/1).

Die Bilder von f_1 und f_2 sind endliche Punktmenge.

Das Bild von f_3 ist eine Strecke, deren Punkte auf der durch die Gleichung $y = x - 1$ bestimmten Geraden liegen.



175/1

Zusammenfassung

1. Die **Bilder linearer Funktionen** sind stets **Punktmen**gen, deren Elemente Punkte der durch die Funktionsgleichung bestimmten Geraden sind.
2. Das Bild einer linearen Funktion besteht aus **endlich vielen Punkten**, wenn der Definitionsbereich eine endliche Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen oder der ganzen Zahlen ist.
3. Das Bild einer linearen Funktion besteht aus **unendlich vielen diskreten Punkten**, wenn der Definitionsbereich eine unendliche Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen oder der ganzen Zahlen ist.
4. Es seien a und b (mit $a \neq b$) zwei beliebige, aber feste reelle Zahlen. Dann gilt:

Das Bild einer Funktion f ist

- a) eine **Strecke** genau dann, wenn $D(f) = \{x; x \in P \wedge a \leq x \leq b\}$,
- b) ein **Strahl** genau dann, wenn $D(f) = \{x; x \in P \wedge (x \geq a, x \leq a, x \geq b, x \leq b)\}$,
- c) eine **Gerade** genau dann, wenn $D(f) = \{x; x \in P\}$.

8.7.

Die inverse Funktion einer linearen Funktion

Wir gehen von einem Beispiel aus.

BEISPIEL 1 (8.7.):

Gegeben sei die Funktion

$$f = \{[x; y]; [x; y] \in G \times G \wedge y = \frac{1}{2}x + 1 \wedge -4 \leq x \leq 4\}.$$

Daraus erhält man als elementweise Darstellung von f :

$$f = \{[-4; -1], [-2; 0], [0; 1], [2; 2], [4; 3]\}.$$

Wir bilden die inverse Abbildung von f .

Es ist

$$f^{-1} = \{[-4; -4], [0; -2], [1; 0], [2; 2], [3; 4]\}$$

eine eindeutige Abbildung, also ist f^{-1} die inverse Funktion von f . Durch Probieren finden wir die zugehörige Funktionsgleichung $y = 2x - 2$ von f^{-1} . Damit kann f^{-1} als Menge mit Hilfe einer Aussageform angegeben werden.

Man erhält

$$f^{-1} = \{[x; y]; [x; y] \in G \times G \wedge y = 2x - 2 \wedge -1 \leq x \leq 3\}.$$

Wir suchen nach einer Möglichkeit, die Funktionsgleichung der inversen Funktion f^{-1} aus der Funktionsgleichung der Funktion f zu ermitteln.

Bei der elementweisen Angabe der Funktionen werden in jedem geordneten Paar $[a; b] \in f$ Bild und Original vertauscht, um die Elemente der inversen Funktion f^{-1} zu erhalten.

In der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$ sind x das Zeichen für ein beliebiges Original von f und y das Zeichen für das zugehörige Bild.

Wir vertauschen in der Funktionsgleichung von f die Zeichen für Bild und Original und erhalten die Gleichung

$$x = \frac{1}{2}y + 1$$

als eine implizite Form der Funktionsgleichung von f^{-1} . Daraus ergibt sich die explizite Form der Funktionsgleichung von f^{-1} .

$$y = 2x - 2$$

Diese Gleichung entspricht der durch Probieren gefundenen.

Wir vereinbaren, daß im folgenden stets mit x die unabhängige Variable und mit y die abhängige Variable bezeichnet werden.

SATZ 1 (8.7.):

Wenn

$$y = mx + n \quad (m \neq 0)$$

die Funktionsgleichung einer linearen Funktion f ist, so ist stets

$$x = my + n \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{1}{m}x - \frac{n}{m}$$

die Funktionsgleichung der zu f inversen Funktion f^{-1} .

Beweis:

1. Es sei $[a; b]$ ein beliebiges Element von f .

Dann muß gezeigt werden, daß $[b; a]$ die Gleichung $y = \frac{1}{m}x - \frac{n}{m}$ erfüllt.

Wenn $[a; b] \in f$, so ist $b = m \cdot a + n$ eine wahre Aussage.

Wir belegen in $y = \frac{1}{m}x - \frac{n}{m}$ die Variablen x mit b und y mit a .

Es entsteht

$$(1) \quad a = \frac{1}{m}b - \frac{n}{m}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit m liefert

$$am = b - n.$$

$$(2) \quad b = am + n$$

Das ist aber für alle $[a; b] \in f$ eine wahre Aussage.

Damit ist auch Gleichung (1) eine wahre Aussage.

Belegt man demnach in der Gleichung $y = \frac{1}{m}x - \frac{n}{m}$ die Variablen x mit b und y mit a , so entsteht eine wahre Aussage, d. h.:

$$[b; a] \in f^{-1} \text{ erfüllt die Gleichung } y = \frac{1}{m}x - \frac{n}{m}.$$

2. Es sei $[c; d] \in f^{-1}$.

Dann muß gezeigt werden, daß $[d; c]$ die Gleichung $y = mx + n$ erfüllt.

Das kann man analog zu 1. beweisen, q. e. d.

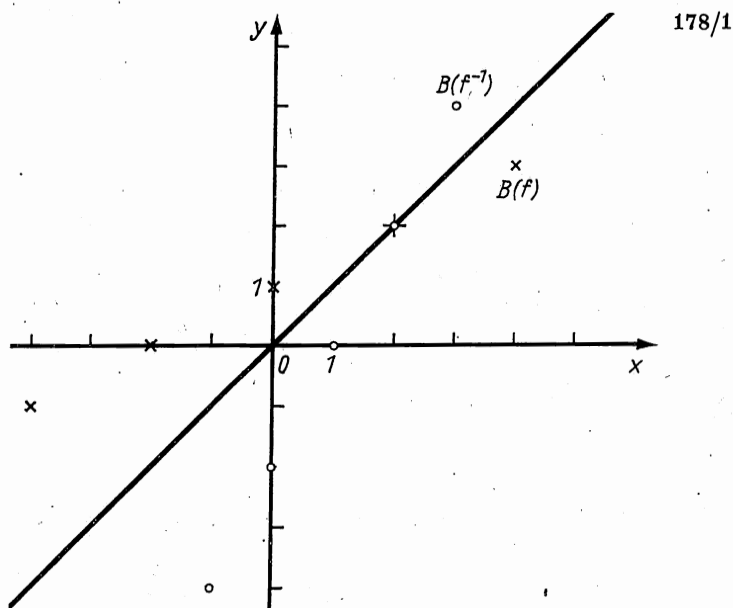
Wir betrachten das Bild der im Beispiel 1 (8.7.) gegebenen Funktion f (\nearrow Bild 178/1).

Das Bild von f ist eine Menge, die aus fünf Punkten besteht. Nach der in Teil 7.2. erläuterten Möglichkeit (3) (\nearrow 155) erhalten wir das Bild der inversen Funktion f^{-1} .

Wir erkennen nach Einzeichnen der durch die Gleichung $y = x$ bestimmten Geraden, daß das Bild von f^{-1} durch Spiegelung von $B(f)$ an dieser Geraden entsteht.

SATZ 2 (8.7.):

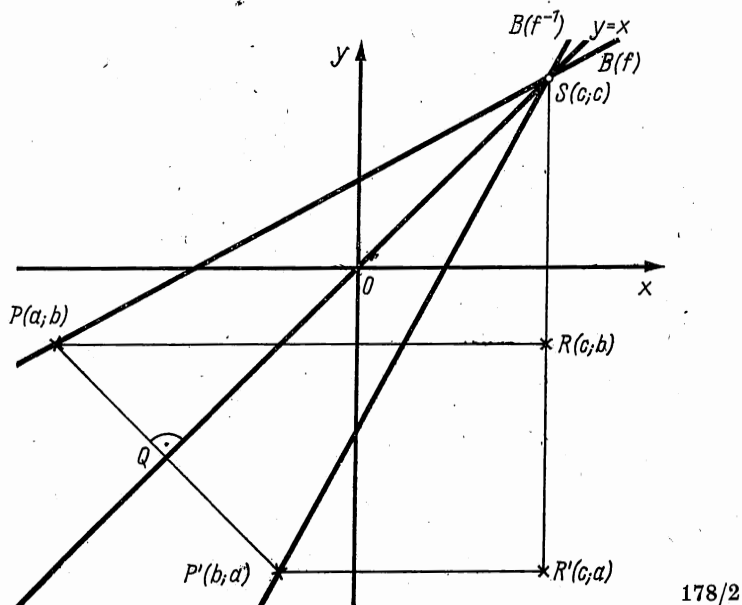
Das Bild der zu einer Funktion f inversen Funktion f^{-1} ist eine Punktmenge, die durch Spiegelung von $B(f)$ an der durch die Gleichung $y = x$ bestimmten Geraden entsteht.



Beweis:

Es muß gezeigt werden, daß der Abstand eines beliebigen Punktes $P(a, b) \in B(f)$ von der durch die Gleichung $y = x$ bestimmten Geraden gleich dem Abstand des Punktes $P'(b, a) \in B(f^{-1})$ von dieser Geraden ist.

Mit den im Bild 178/2 angegebenen Bezeichnungen gilt für beliebige S :



- (1) $l(\overline{PR}) = c - a$ und $l(\overline{SR'}) = c - a$, also $\overline{PR} \cong \overline{SR'}$
 (2) $l(\overline{SR}) = c - b$ und $l(\overline{P'R'}) = c - b$, also $\overline{SR} \cong \overline{P'R'}$
 (3) $\sphericalangle PRS \cong \sphericalangle P'R'S$

Aus (1), (2) und (3) folgt die Kongruenz von $\triangle PRS$ und $\triangle P'R'S$, und damit gilt auch:

$$(4) \quad \overline{PS} \cong \overline{P'S}.$$

Nach (4) liegt S auf der Symmetrieachse von $\overline{PP'}$. Also gilt: $\overline{PP'}$ steht senkrecht auf der Geraden mit der Gleichung $y = x$, und es gilt:

$$(5) \quad \sphericalangle PQS \cong \sphericalangle SQP'.$$

Aus (5) und (4) folgt, da \overline{QS} gemeinsame Seite von $\triangle PQS$ und $\triangle SQP'$ ist, die Kongruenz dieser Dreiecke. Also ist auch $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q}$, q. e. d.

Wir erläutern abschließend ein Beispiel, in dem die wesentlichsten der bisher behandelten Probleme auftreten.

BEISPIEL 3 (8.7.):

Der Definitionsbereich D einer linearen Funktion $f_1 \subset G \times G$ mit der Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{2}x + 1$ sei $D(f_1) = \{x; x \in G \wedge -6 \leq x \leq 6\}$.

Als elementweise Darstellung von f_1 erhält man:

$$f_1 = \{[-6; 4], [-4; 3], [-2; 2], [0; 1], [2; 0], [4; -1], [6; -2]\}.$$

Daraus ergeben sich:

$$D(f_1) = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$$

$$W(f_1) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

Wir wollen f_1 und f_1^{-1} als Mengen mit Hilfe von Aussageformen angeben.

$$f_1 = \{[x; y]; [x; y] \in G \times G \wedge y = -\frac{1}{2}x + 1 \wedge -6 \leq x \leq 6\}.$$

Aus $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ergibt sich durch Vertauschen der Variablen

$$x = -\frac{1}{2}y + 1,$$

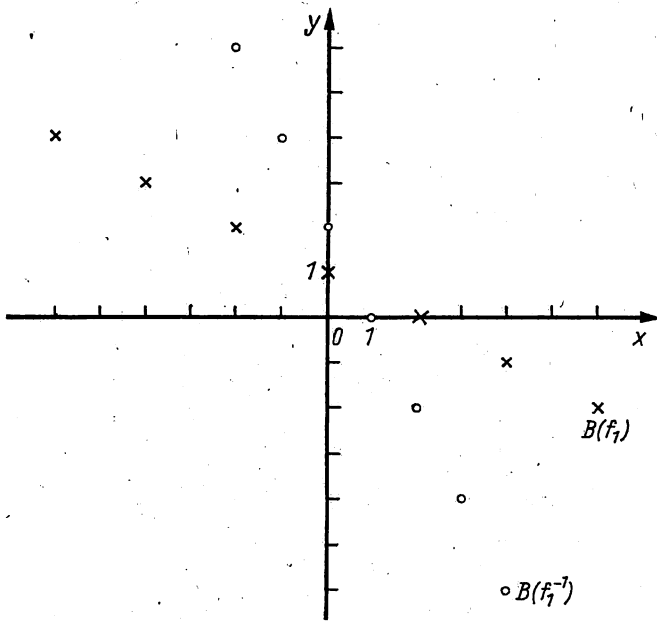
eine implizite Form der Funktionsgleichung von f^{-1} .

Es folgt $y = -2x + 2$.

Weiter ist $D(f_1^{-1}) = W(f_1)$ und damit

$$f^{-1} = \{[x; y]; [x; y] \in G \times G \wedge y = -2x + 2 \wedge -2 \leq x \leq 4\}.$$

8.7.



180/1

Wir ermitteln die Bilder von f_1 und f_1^{-1} (Bild 180/1).

$B(f_1)$ und $B(f_1^{-1})$ können z. B. mit Hilfe von Steigungsdreiecken gezeichnet werden.

Aus $y = -\frac{1}{2}x + 1$ entsteht für $y = 0$ die Gleichung

$$-\frac{1}{2}x + 1 = 0.$$

Daraus ergibt sich $x_0 = 2$ als Nullstelle von f_1 .

Die Nullstelle von f_1^{-1} erhalten wir in analoger Weise. Es ist $x_0(f_1^{-1}) = 1$.

9.1.

Vorbemerkungen

Wir betrachten im Teil 9. Verfahren, die es ermöglichen, die Lösungsmenge einer Aussageform mit Hilfe von Bildern linearer Funktionen zu ermitteln.

Der zeitliche Aufwand wird im allgemeinen größer als beim rechnerischen Ermitteln der Lösungsmenge sein.

Die graphische Methode bietet den Vorteil der Anschaulichkeit und gibt oft die Möglichkeit, Zusammenhänge leichter zu erkennen.

Ein anderer Gesichtspunkt beim graphischen Lösen von Aussageformen kann das Überprüfen rechnerisch gewonnener Ergebnisse sein.

Wir werden in Teil 9. zu einigen der in Teil 8. behandelten Aussageformen graphische Lösungsverfahren angeben.

9.2.

**Graphische Lösung linearer Gleichungen bzw.
Ungleichungen mit genau einer Variablen**

Es seien die Bilder zweier linearer Funktionen f_1 und f_2 mit den Funktionsgleichungen

$$y = f_1(x) = m_1x + n_1$$

und $y = f_2(x) = m_2x + n_2$

mit $D(f_{1,2}) = P$ gegeben. Die Zahl x_0 sei Nullstelle beider Funktionen. Weiter möge $m_1 > 0$ und $m_2 < 0$ gelten (↗ Bild 182/1).

Wir untersuchen einen Zusammenhang zwischen den Abszissen und den Ordinaten der Punkte der Funktionsbilder.

Es gilt:

- (1) Die Ordinate des Bildpunktes ist Null genau dann, wenn die Abszisse gleich x_0 ist.

Kurz: $y = 0$ genau dann, wenn $x = x_0$.

- (2) Die Ordinate des Bildpunktes ist größer als Null genau dann, wenn die Abszisse größer als x_0 und $m > 0$ ist oder die Abszisse kleiner als x_0 und $m < 0$ ist.

Kurz: $y > 0$ genau dann, wenn entweder $x > x_0$ und $m > 0$
oder $x < x_0$ und $m < 0$.

- (3) Entsprechend ist

$y < 0$ genau dann, wenn entweder $x < x_0$ und $m > 0$
oder $x > x_0$ und $m < 0$.

Das Erkennen dieser Zusammenhänge ist notwendig, um mit Hilfe des Bildes einer geeigneten linearen Funktion die Lösungsmenge einer linearen Gleichung bzw. Ungleichung mit genau einer Variablen angeben zu können.

BEISPIEL 1 (9.2.):

Man löse die Gleichung $\frac{1}{2}x + 1 = 0$ graphisch ($L_G = P$).

Wir versuchen zunächst, eine geeignete Funktionsgleichung einer linearen Funktion zu ermitteln. Dazu setzen wir den Term $\frac{1}{2}x + 1$ gleich y . Es entsteht also die Gleichung

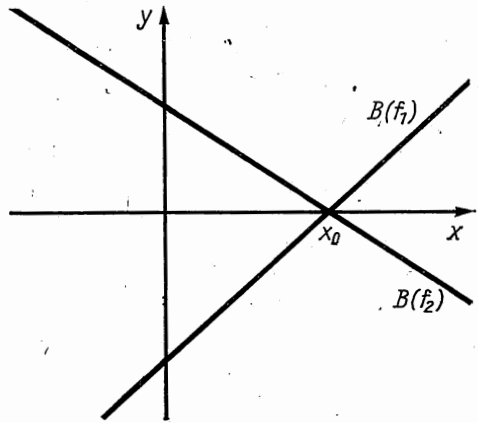
$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Diese lineare Gleichung mit zwei Variablen fassen wir als Funktionsgleichung einer linearen Funktion f_1 auf.

Wir wählen $D(f_1) = P$. Dann ist

$$f_1 = \left\{ [x; y]; y = \frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in P \right\}.$$

Es ist das Bild dieser Funktion zu zeichnen (↗ Bild 183/1).



Die Menge aller x zu ermitteln, die die Gleichung $\frac{1}{2}x + 1 = 0$ in eine wahre Aussage überführen, ist gleichbedeutend damit, die Menge aller Abszissen der Punkte des Bildes der Funktion f_1 zu ermitteln, für die die Ordinate den Wert Null annimmt.

Es gilt hier:

$$y = 0 \text{ genau dann, wenn } x = -2.$$

Wir ersetzen y durch $\frac{1}{2}x + 1$. Also ist

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \text{ genau dann, wenn } x = -2.$$

Folglich ergibt sich $L = \{-2\}$ als Lösungsmenge der gegebenen Gleichung.

Bemerkung: Da die graphischen Lösungsverfahren lediglich Näherungslösungen liefern (Zeichengenauigkeiten, Ablesungenauigkeiten), ist eine Überprüfung der gefundenen „lösungsverdächtigen“ Belegungen notwendig. Der Leser führe die Probe in diesem Beispiel und den folgenden Beispielen selbstständig durch.

BEISPIEL 2 (9.2.):

Man löse die Ungleichung $\frac{1}{2}x + 1 < 0$ graphisch ($L_G = P$).

Man erhält eine geeignete Funktionsgleichung, indem man den Term $\frac{1}{2}x + 1$ gleich y setzt. Man betrachtet das Bild der Funktion

$$f_2 = \left\{ [x; y]; y = \frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in P \right\}.$$

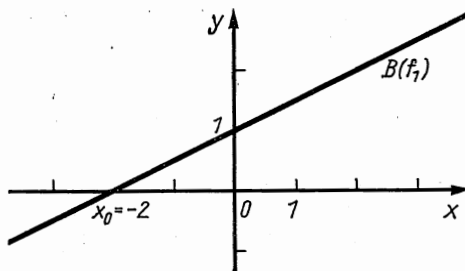
Diese Funktion stimmt mit der in Beispiel 1 (9.2.) gebildeten Funktion f_1 überein.

Die Menge aller x zu ermitteln, die die Ungleichung $\frac{1}{2}x + 1 < 0$ erfüllen, ist gleichbedeutend damit, die Menge aller Abszissen der Punkte des Bildes der Funktion f_2 zu ermitteln, für die die Ordinate kleiner als Null ist.

Es ist $y < 0$ genau dann, wenn $x < -2$ ist.

Man ersetzt y durch $\frac{1}{2}x + 1$. Somit gilt:

$$\frac{1}{2}x + 1 < 0 \text{ genau dann, wenn } x < -2.$$



9.2.

Wie sich durch eine Probe nachweisen läßt, erhält man als Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung

$$L = \{x; x \in P \wedge x < -2\}.$$

Wir verallgemeinern dieses Verfahren.

Gegeben seien die Gleichungen $ax + b = 0$ bzw. die Ungleichung $ax + b < 0$, wobei $a \neq 0$ und $L_G = P$.

1. Schritt: *Ermitteln einer geeigneten Funktionsgleichung*

Man setze den Term $ax + b$ gleich y . Damit entsteht die Gleichung

$$y = ax + b.$$

2. Schritt: *Angeben der Funktion*

Es ist

$$f = \{[x; y]; y = ax + b \wedge x \in P\}.$$

3. Schritt: *Zeichnen des Bildes der Funktion und Ablesen der Nullstelle x_0*

4. Schritt: *Angeben der Lösungsmenge*

Die Lösungsmenge der Gleichung ist

$$L = \{x; x \in L_G \wedge x = x_0\}.$$

Als Lösungsmenge der Ungleichung erhält man

$$L = \{x; x \in L_G \wedge x < x_0\}, \text{ falls } a > 0 \text{ bzw.}$$

$$L = \{x; x \in L_G \wedge x > x_0\}, \text{ falls } a < 0.$$

BEISPIEL 3 (9.2.):

Man löse die Ungleichung $-\frac{1}{2}x + 1 > 0$ graphisch für die folgenden Grundbereiche der Variablen.

(1) $L_G = P$

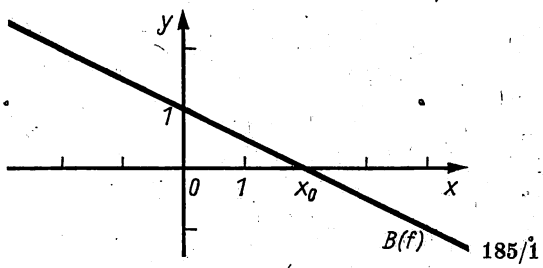
(2) $L_G = \{x; x \in P \wedge x > 3\}$

(3) $L_G = G$

(4) $L_G = N$

Unabhängig von den vorgegebenen Lösungsgrundbereichen erhält man die Funktion

$$f = \left\{ [x; y]; y = -\frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in P \right\}.$$



Aus dem Bild der Funktion (\nearrow Bild 185/1) kann man ermitteln

$$x_0 = 2.$$

Dann sind die Lösungsmengen:

$$L_1 = \{x; x \in P \wedge x < 2\}$$

$$L_2 = \{x; x \in P \wedge x > 3 \wedge x < 2\} = \emptyset$$

$$L_3 = \{x; x \in G \wedge x < 2\} = \{1; 0; -1; -2; \dots\}$$

$$L_4 = \{x; x \in N \wedge x < 2\} = \{1; 0\}$$

9.3. Graphische Lösung von Systemen linearer Ungleichungen mit genau einer Variablen

Wir benutzen zur graphischen Lösung von Systemen linearer Ungleichungen das in Teil 7.1. erläuterte Verfahren, um die Lösungsmenge jeder einzelnen Ungleichung des Systems zu ermitteln.

Die Lösungsmenge des Systems ergibt sich nach Satz 1 (6.1.4.) als Durchschnitt der Lösungsmengen der Ungleichungen des Systems.

BEISPIEL 1 (9.3.):

Man löse das Ungleichungssystem

a) $\frac{2}{3}x + 2 > 0$

$$-2x + 2 > 0$$

graphisch, wobei $L_G = P$ sei.

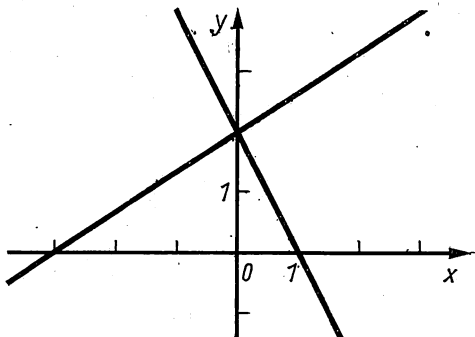
Wir setzen sowohl $\frac{2}{3}x + 2$ als auch $-2x + 2$ gleich y und erhalten die Gleichungen

$$y = \frac{2}{3}x + 2 \text{ und } y = -2x + 2.$$

Damit ergeben sich die Funktionen

$$f_1 = \left\{ [x; y]; y = \frac{2}{3}x + 2 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_2 = \left\{ [x; y]; y = -2x + 2 \wedge x \in P \right\}$$



186/1

Mit Hilfe der graphischen Darstellung (↗ Bild 186/1) kann ermittelt werden:

$$L_1 = \{x; x \in P \wedge x > -3\}$$

$$L_2 = \{x; x \in P \wedge x < 1\}$$

Also ergibt sich wegen $L = L_1 \cap L_2$ als Lösungsmenge des gegebenen Ungleichungssystems

$$L = \{x; x \in P \wedge (-3 < x < 1)\}.$$

Die Lösungsmengen der Systeme

$$\text{b) } \frac{2}{3}x + 2 < 0 \quad \text{c) } \frac{2}{3}x + 2 > 0 \quad \text{d) } \frac{2}{3}x + 2 < 0$$

$$-2x + 2 < 0 \quad -2x + 2 < 0 \quad -2x + 2 > 0$$

($L_G = P$) erhalten wir aus derselben graphischen Darstellung.

$$\text{b) } L = \{x; x \in P \wedge x < -3\} \cap \{x; x \in P \wedge x > 1\} = \emptyset$$

$$\text{c) } L = \{x; x \in P \wedge x > -3\} \cap \{x; x \in P \wedge x > 1\} = \{x; x \in P \wedge x > 1\}$$

$$\text{d) } L = \{x; x \in P \wedge x < -3\} \cap \{x; x \in P \wedge x < 1\} = \{x; x \in P \wedge x < -3\}$$

9.4.

Graphische Lösung linearer Gleichungen mit genau zwei Variablen

BEISPIEL 1 (9.4.):

Man löse die Gleichung $x + 2y = -2$ graphisch, wobei $L_G = P \times P$ sei.

Wir fassen diese lineare Gleichung mit zwei Variablen als eine in impliziter Form gegebene Funktionsgleichung einer linearen Funktion f auf. Der Definitionsbereich von f sei P .

Als explizite Form der Funktionsgleichung ergibt sich

$$y = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Es ist $f = \left\{ [x; y]; y = -\frac{1}{2}x - 1 \wedge x \in P \right\}.$

Dann gilt:

Die Koordinaten der Bildpunkte von f erfüllen die zugehörige Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{2}x - 1$ und damit auch die gegebene Gleichung $x + 2y = -2$.

Folglich ist $L = \{[x; y]; [x; y] \in L_G \wedge [x; y] \in f\}.$

Bemerkung: Mit Hilfe des Bildes der Funktion f ist man in der Lage, Elemente der Lösungsmenge graphisch zu ermitteln. Dieses Verfahren ist zur Lösung diophantischer Gleichungen mit zwei Variablen besonders geeignet.

BEISPIEL 2 (9.4.):

Man löse die diophantische Gleichung $2x - 3y = -6$, wobei $-10 \leq x \leq 7$ sei.

Als explizite Form der Funktionsgleichung erhält man

$$y = \frac{2}{3}x + 2.$$

Dann ist $f_1 = \left\{ [x; y]; y = \frac{2}{3}x + 2 \wedge x \in P \right\}$ (Bild 188/1).

Zur Lösungsmenge der diophantischen Gleichung gehören nur die geordneten Paare, die Bildpunkten mit ganzzahligen Koordinaten entsprechen und für deren erstes Element x gilt: $-10 \leq x \leq 7$.

Also ist $L = \{[x; y]; [x; y] \in f_1 \wedge [x; y] \in G \times G \wedge -10 \leq x \leq 7\},$

d.h. $L = \{[-9; -4], [-6; -2], [-3; 0], [0; 2], [3; 4], [6; 6]\},$

was durch Probe bestätigt werden muß.

BEISPIEL 3 (9.4.):

Zu einer Reihenschaltung von Widerständen¹ stehen Widerstände von 40Ω und 60Ω zur Verfügung. Der Gesamtwiderstand soll 600Ω betragen. Welche Möglichkeiten der Schaltung gibt es?

Wir versuchen zunächst, diesen Sachverhalt durch eine Gleichung zu erfassen. Es seien x die Anzahl der Widerstände zu 40Ω und y die Anzahl der Widerstände zu 60Ω . Dann gilt:

$$x \cdot 40 \Omega + y \cdot 60 \Omega = 600 \Omega \quad \text{bzw.}$$

$$40x + 60y = 600.$$

Das Problem besteht also darin, alle geordneten Paare $[x; y]$ zu ermitteln, die diese Gleichung erfüllen, wobei sich die Bedingungen $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$ aus dem Sachverhalt ergeben.

Als explizite Form erhalten wir die Gleichung

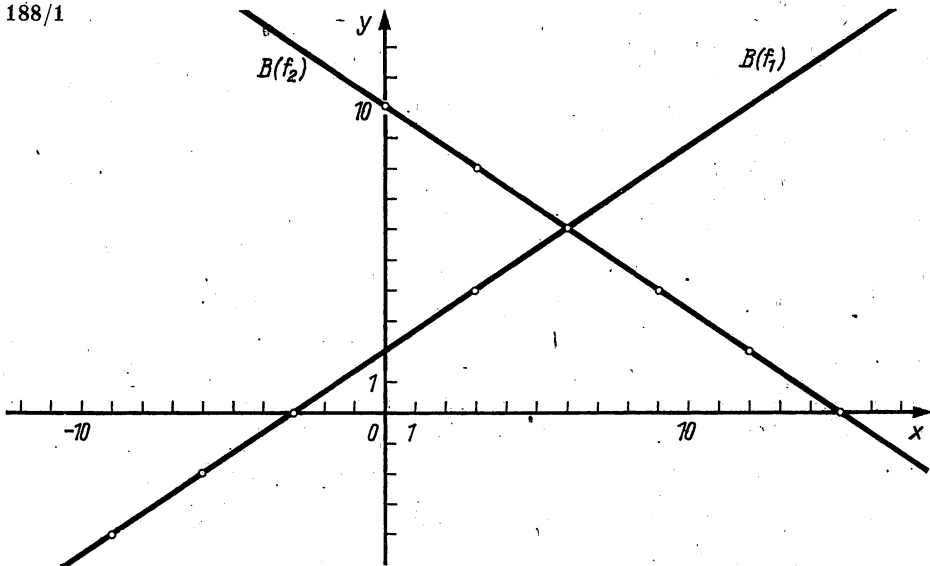
$$y = -\frac{2}{3}x + 10.$$

Damit ist $f_2 = \left\{ [x; y] ; y = -\frac{2}{3}x + 10 \wedge x \in \mathbb{P} \right\}$.

Aus dem Bild von f_2 (\nearrow Bild 188/1) ergibt sich als Lösungsmenge L der diophantischen Gleichung $40x + 60y = 600$ bezüglich $L_G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Menge

$$L = \{[0; 10], [3; 8], [6; 6], [9; 4], [12; 2], [15; 0]\}.$$

188/1



¹ Wenn R_G der Gesamtwiderstand und $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ die Einzelwiderstände sind, so gilt bei Reihenschaltung $R_G = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$.

Die Lösung des gegebenen Sachverhaltes erfassen wir durch eine Tabelle.

Anzahl der Widerstände zu 40 Ω	0	3	6	9	12	15
Anzahl der Widerstände zu 60 Ω	10	8	6	4	2	0

9.5.

Graphische Lösung von Systemen linearer Gleichungen mit genau zwei Variablen

Gegeben seien ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen und ein Lösungsgrundbereich L_G .

Dann gilt:

Wenn f_1 und f_2 zwei Funktionen sind, deren Funktionsgleichungen den Gleichungen des Systems äquivalent sind, so ist die Lösungsmenge L des Gleichungssystems gleich der Menge $f_1 \cap f_2$, falls $f_1 \cap f_2 \subseteq L_G$.

Begründung: Die Menge $f_1 \cap f_2$ enthält alle geordneten Paare, die sowohl die Funktionsgleichung von f_1 als auch die von f_2 erfüllen. Da diese Funktionsgleichungen zu den Gleichungen des gegebenen Systems äquivalent sind, umfaßt $f_1 \cap f_2$ die Menge aller geordneten Paare, die Lösung des Gleichungssystems sind.

Es seien g_1 das Bild von f_1 und g_2 das Bild von f_2 .

Dann ist das Bild von $f_1 \cap f_2$ die Menge aller Punkte, die sowohl auf g_1 als auch auf g_2 liegen.

Für die zwei Geraden $g_1 = B(f_1)$ und $g_2 = B(f_2)$ gibt es in der Ebene *drei Lagemöglichkeiten*.

1. Fall: g_1 und g_2 haben genau einen Punkt gemeinsam, d. h., g_1 und g_2 schneiden einander in genau einem Punkt $P(x_1; y_1)$.
Dann gilt für die Lösungsmenge des Systems:
 $L = \{[x_1; y_1]\}$, falls $[x_1; y_1] \in L_G$.
2. Fall: g_1 und g_2 haben keinen Punkt gemeinsam, d. h., g_1 und g_2 sind verschiedene Geraden, die parallel zueinander sind.
Dann ist $L = \emptyset$.
3. Fall: g_1 und g_2 haben alle Punkte gemeinsam, d. h., g_1 und g_2 fallen zusammen.
Dann ist $L = \{[x; y]; [x; y] \in L_G \wedge [x; y] \in f_1\}$.

9.5.

BEISPIEL 1 (9.5.):

Man löse die folgenden Gleichungssysteme.

a) (1) $x - 4y + 8 = 0$

(2) $3x - 2y - 6 = 0$

im Lösungsgrundbereich $L_G = P \times P$

b) (3) $2x + y + 1 = 0$

(4) $2x - 3y + 9 = 0$

im Lösungsgrundbereich $L_G = G \times G$

1. Schritt: Ermitteln der expliziten Form der Funktionsgleichungen

(1) $y = \frac{1}{4}x + 2$

(3) $y = -2x - 1$

(2) $y = \frac{3}{2}x - 3$

(4) $y = \frac{2}{3}x + 3$

2. Schritt: Angeben der Funktionen

$$f_1 = \left\{ [x; y]; y = \frac{1}{4}x + 2 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_2 = \left\{ [x; y]; y = \frac{3}{2}x - 3 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_3 = \left\{ [x; y]; y = -2x - 1 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_4 = \left\{ [x; y]; y = \frac{2}{3}x + 3 \wedge x \in P \right\}$$

3. Schritt: Zeichnen der Bilder der Funktionen (\nearrow Bild 191/1)

4. Schritt: Angeben der Lösungsmenge

Es gilt $f_1 \cap f_2 = \{[4; 3]\}$.

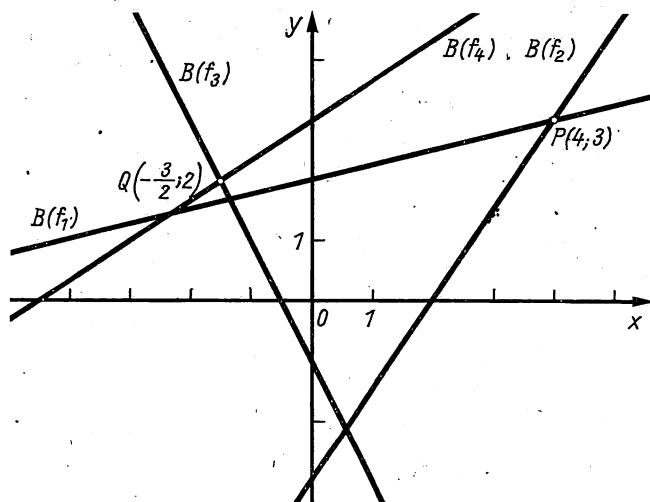
Damit erhält man als Lösungsmenge des Gleichungssystems a):

$$L = \{[4; 3]\}.$$

Weiter ist $f_3 \cap f_4 = \left\{ \left[-\frac{3}{2}; 2 \right] \right\}$.

Wegen $\left[-\frac{3}{2}; 2 \right] \notin L_G$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems b):

$$L = \emptyset.$$



191/1

9.6. **Graphische Lösung von linearen Ungleichungen und von Systemen linearer Ungleichungen mit höchstens zwei Variablen**

Gegeben sei eine lineare Gleichung der Form

$$ax + by = c$$

mit $b \neq 0$ und $L_G = P \times P$.

Wir fassen diese Gleichung als die implizite Form einer Funktionsgleichung einer linearen Funktion f auf und ermitteln die explizite Form.

Es ergibt sich

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Das Bild der Funktion

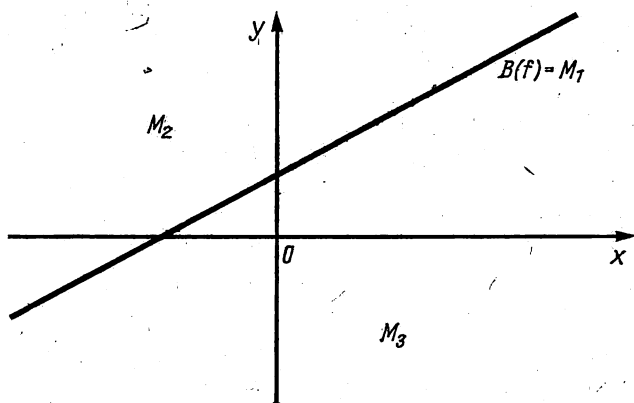
$$f = \left\{ [x; y]; y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \wedge x \in P \right\}$$

liefert eine Klasseneinteilung der Menge aller Punkte eines Koordinatensystems in drei Punktmenge (↗ Bild 192/1).

Es ist

M_1 die Menge aller Punkte, die auf der Geraden liegen,

M_2 die Menge aller Punkte, die in der „oberen“ Halbebene bezüglich $B(f)$ liegen,



192/1

M_3 die Menge aller Punkte, die in der „unteren“ Halbebene bezüglich $B(f)$ liegen.

Das heißt, es ist:

$$M_1 = \left\{ P(x; y); y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \wedge x \in P \right\}$$

$$M_2 = \left\{ P(x; y); y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \wedge x \in P \right\}$$

$$M_3 = \left\{ P(x; y); y < -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \wedge x \in P \right\}$$

Die Koordinaten der Punkte, die zu M_1 gehören, haben wir bereits in Teil 9.4. zur graphischen Lösung linearer Gleichungen mit zwei Variablen benutzt.

Die Koordinaten der Punkte der Mengen M_2 und M_3 ermöglichen, die Lösungsmengen linearer Ungleichungen mit zwei Variablen graphisch zu ermitteln.

BEISPIEL 1 (9.6.):

Man veranschauliche die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen im Lösungsgrundbereich $L_G = P \times P$.

(1) $2x - y < 2$

(2) $3x + 4y < 12$

(3) $y \geq -3$

Wir formen die Ungleichungen zunächst nach y um. Es entstehen aus den Ungleichungen (1) bzw. (2):

(1') $y > 2x - 2$

(2') $y < -\frac{3}{4}x + 3$

Die in diesen Ungleichungen auftretenden Relationszeichen ersetzen wir jeweils durch das Gleichheitszeichen.

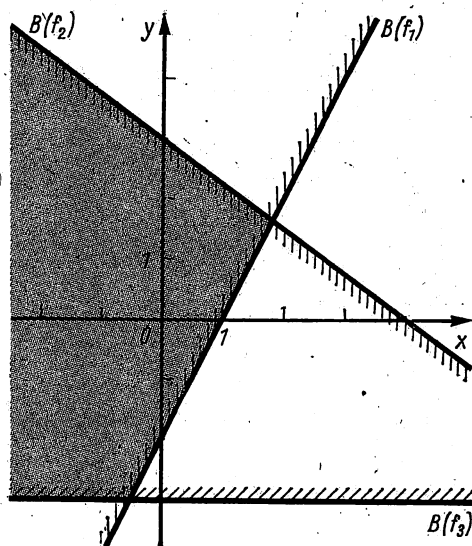
Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$(1'') \quad y = 2x - 2$$

$$(2'') \quad y = -\frac{3}{4}x + 3$$

$$(3'') \quad y = -3$$

Diese Gleichungen fassen wir als Funktionsgleichungen auf. Wir betrachten die Bilder der Funktionen (↗ Bild 193/1).



193/1

$$f_1 = \{[x; y]; y = 2x - 2 \wedge x \in P\}$$

$$f_2 = \left\{ [x; y]; y = -\frac{3}{4}x + 3 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_3 = \{[x; y]; y = -3 \wedge x \in P\}.$$

Die Lösungsmenge von Ungleichung (1) bzw. (1') wird durch die Menge der Punkte veranschaulicht, die bezüglich des Bildes $B(f_1)$ in der „oberen“ Halbebene liegen.

Die Lösungsmenge von Ungleichung (2) bzw. (2') wird durch die Menge der Punkte veranschaulicht, die „unterhalb“ von $B(f_2)$ liegen.

Die Veranschaulichung der Lösungsmenge von Ungleichung (3) ist die Menge aller Punkte, die „oberhalb“ von $B(f_3)$ oder *auf* $B(f_3)$ liegen.

Aus der graphischen Darstellung können wir entnehmen, daß es Punkte gibt, deren Koordinaten mehr als eine der gegebenen Ungleichungen in eine wahre Aussage überführen.

So erfüllen z. B. die Koordinaten aller Punkte, die „unterhalb“ von $B(f_2)$ und „oberhalb“ von $B(f_1)$ liegen, sowohl Ungleichung (1) als auch Ungleichung (2). Wir können diese Punktmenge als Veranschaulichung der Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$(1) \quad 2x - y < 2$$

$$(2) \quad 3x + 4y < 12$$

betrachten.

BEISPIEL 2 (9.6.):

Man veranschauliche die Lösungsmenge des folgenden Systems von Ungleichungen im Lösungsgrundbereich $L_G = P \times P$.

$$(1) \quad 3x - 2y > -10$$

$$(2) \quad -x + 2y > -2$$

$$(3) \quad 3x + y < 3$$

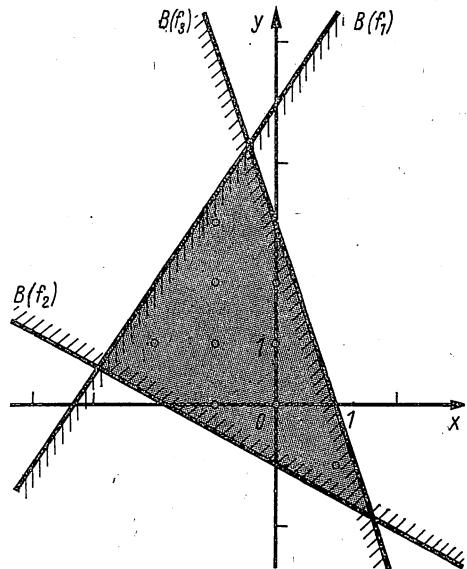
Für den Lösungsgrundbereich $G \times G$ gebe man die Lösungsmenge elementweise an.

Aus den gegebenen Ungleichungen des Systems erhalten wir nach dem in Beispiel 1 (9.6.) erläuterten Verfahren die Funktionsgleichungen:

$$(1') \quad y = \frac{3}{2}x + 5$$

$$(2') \quad y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$(3') \quad y = -3x + 3$$



194/1

Also sind die Bilder der folgenden Funktionen zu zeichnen (Bild 194/1).

$$f_1 = \left\{ [x; y]; y = \frac{3}{2}x + 5 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_2 = \left\{ [x; y]; y = -\frac{1}{2}x - 1 \wedge x \in P \right\}$$

$$f_3 = \{ [x; y]; y = -3x + 3 \wedge x \in P \}$$

Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems bezüglich $P \times P$ wird durch die Menge aller inneren Punkte des durch die Bilder der Funktionen bestimmten Dreiecks veranschaulicht.

Die Menge aller inneren Punkte dieses Dreiecks mit ganzzahligen Koordinaten ist die Veranschaulichung der Lösungsmenge in bezug auf $L_G = G \times G$. In diesem Fall ergibt sich

$$L = \{ [-2; 1], [-1; 0], [-1; 1], [-1; 2], [-1; 3], [0; 0], [0; 1], [0; 2], [1; -1] \}.$$

Die Probe sei wieder dem Leser überlassen.

Im Teil 9.7. wollen wir uns mit **Grundgedanken der linearen Optimierung** befassen.

Dabei beschränken wir uns in der Anwendung auf einfache **Optimierungsprobleme mit zwei Variablen** bzw. auf solche, die sich auf zwei Variable zurückführen lassen. Außerdem werden wir die Lösungen nur auf graphischem Wege ermitteln.

Voraussetzung für die Bewältigung dieser Aufgaben sind Fertigkeiten im Darstellen linearer Funktionen, im Veranschaulichen von Lösungsmengen von Ungleichungen vom Typ $y \geq mx + n$ bzw. $y \leq mx + n$, im Ermitteln des Durchschnitts von Mengen und im Berechnen von Funktionswerten bei gegebenen Argumenten.

Die Tätigkeit in vielen Lebensbereichen der Gesellschaft, zum Beispiel in der Volkswirtschaft, erfordert eine Vielzahl von Entscheidungen. Dabei sollen jedoch *nicht irgendwelche* Entscheidungen getroffen werden, sondern solche, die der Erfüllung der gestellten Aufgaben in hohem Maße dienen.

Es geht also darum, **optimale Entscheidungen** zu treffen.

Man kann zum Beispiel einen optimalen Produktionsplan aufstellen mit dem Ziel,

- a) die Produktionskapazität **maximal** auszulasten und
- b) bei den Kosten ein **Minimum** einzuhalten.

Es ist in jedem Falle nötig, genau festzulegen, in welcher Hinsicht der Plan optimal sein soll, d. h., es ist die Angabe des jeweiligen **Optimalkriteriums** erforderlich. Kriterien dieser Art sind z. B. Gewinn, Kosten, Kapazitätsauslastung, Materialausnutzung.

Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß diese und die folgenden Betrachtungen in allen Wirtschaftszweigen immer mehr Anwendung finden.

Die weiteren Darlegungen erfordern zunächst die Erläuterung einiger wesentlicher Begriffe.

Als erster sei der Begriff **Optimierung** genannt. Darunter wollen wir das Festlegen solcher Maßnahmen verstehen, die das Erreichen eines vorgegebenen Zieles unter Berücksichtigung der vorhandenen Bedingungen garantieren.

Bedingungen, die auf das Ziel Einfluß nehmen, nennen wir **einschränkende Bedingungen**.

Von **linearer Optimierung** sprechen wir dann, wenn sowohl die einschränkenden Bedingungen als auch das Ziel in Form linearer Beziehungen dargestellt werden können.

Um einen optimalen Plan mit Hilfe der linearen Optimierung aufzustellen, ist eine exakte Formulierung der **Optimierungsaufgabe** erforderlich.

Diese besteht

- a) aus dem *Ziel*, das durch die Optimierung erreicht werden soll,
- b) aus den *einschränkenden Bedingungen*.

Der Formulierung der Optimierungsaufgabe muß eine umfangreiche analytische Tätigkeit vorausgehen, denn von der Festlegung des Zieles und dem exakten Erfassen derjenigen Bedingungen, die die für die Entscheidung wesentlichen Einflüsse darstellen, hängt letzten Endes die Anwendbarkeit des errechneten Ergebnisses ab. Sind Ziel und einschränkende Bedingungen den ökonomischen Anforderungen entsprechend formuliert, so sind damit Voraussetzungen für die erfolgreiche Anwendung des errechneten Ergebnisses gegeben.

Um die Optimierungsaufgabe graphisch oder rechnerisch lösen zu können, muß man das dargestellte Problem in die Sprache der Mathematik übertragen. Das erfolgt mit Hilfe eines **mathematischen Modells**. In ihm werden alle mathematischen Beziehungen, die für ein gegebenes Optimierungsproblem benötigt werden, zusammengefaßt.

Ein mathematisches Modell besteht nur aus linearen Gleichungen bzw. Ungleichungen, wenn es sich um lineare Optimierung handelt.

Ein mathematisches Modell untergliedert sich in

- a) *Zielfunktion*: Das ist eine lineare Funktion, die das Ziel, für das der Plan optimal gestaltet werden soll, angibt.
- b) *Nebenbedingungen*: Sie unterteilen sich in die *einschränkenden Bedingungen* und die *Nichtnegativitätsbedingungen*.

Auch die Nebenbedingungen werden mit Hilfe linearer Gleichungen bzw. Ungleichungen dargestellt. Von „Nichtnegativitätsbedingungen“ spricht man deshalb, weil in den Lösungen keine negativen Werte auftreten dürfen.

Wir betrachten zunächst die allgemeinen Formen mathematischer Modelle.

Allgemeine Form des mathematischen Modells einer Maximum-Minimum-Aufgabe

- a) *Zielfunktion*

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max. (\min.)$$

Die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n sind so zu wählen, daß der Wert der Zielfunktion zum Maximum (Minimum) wird.

b) Nebenbedingungen

Einschränkende Bedingungen:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Die a_{ij} können **Aufwandskoeffizienten** oder **Einsatzkoeffizienten** sein.Es wird z. B. der i -te Aufwand zum j -ten Kostenträger erfaßt (z. B. Aufwand an Material der Art i für eine Einheit der Art j).Die absoluten Glieder b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) geben den maximal bzw. minimal vorhandenen Gesamtaufwand der Art i an.*Nichtnegativitätsbedingungen*

$$x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

Welche Vorteile bietet ein mathematisches Modell?

Es liefert eine übersichtliche Beschreibung ökonomischer Zusammenhänge.

Es gibt an, welche Daten für den Entscheidungsprozeß zu erfassen sind.

Es deckt Beziehungen zwischen den verschiedenen Seiten des Problems auf, die oftmals in einer Wortdarstellung wenig in Erscheinung treten.

Es ermöglicht die Anwendung mathematischer Methoden bei der Lösung ökonomischer Probleme.

9.7.2.

*Graphische Lösung einfacher Aufgaben
der linearen Optimierung***Maximum-Aufgabe**

Wir gehen davon aus, daß für einen gegebenen Sachverhalt folgendes mathematische Modell aufgestellt wurde, das wir graphisch zu lösen haben.

Zielfunktion: $z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max.$ *Nebenbedingungen:**Einschränkende Bedingungen:*

$$4x_1 + x_2 \leq 36 \quad \text{I}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 24 \quad \text{II}$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 36 \quad \text{III}$$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{IV}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{V}$$

Wir lösen zunächst die Ungleichungen, wenn möglich, nach x_2 auf, um das Ungleichungssystem I, II, ..., V in Anlehnung an die Ausführungen zu Ungleichungssystemen (↗ Teil 6.1.4.) graphisch lösen zu können. Als L_G wählen wir $P \times P$.

Nebenbedingungen:

$$x_2 \leq 36 - 4x_1 \quad \text{I}'$$

$$x_2 \leq 8 - \frac{1}{3}x_1 \quad \text{II}'$$

$$x_2 \leq 12 - x_1 \quad \text{III}'$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{IV}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{V}$$

Betrachten wir die Abbildungen (Bild 199/1)

$$f_1 = \{[x_1; x_2]; x_2 \leq -4x_1 + 36\},$$

$$f_2 = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 \leq -\frac{1}{3}x_1 + 8 \right\},$$

$$f_3 = \{[x_1; x_2]; x_2 \leq -x_1 + 12\},$$

$$f_4 = \{[x_1; x_2]; x_1 \geq 0\},$$

$$f_5 = \{[x_1; x_2]; x_2 \geq 0\},$$

so ist

$$f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap f_4 \cap f_5$$

die Erfüllungsmenge der Nebenbedingungen.

Diese Durchschnittsmenge ermitteln wir graphisch.

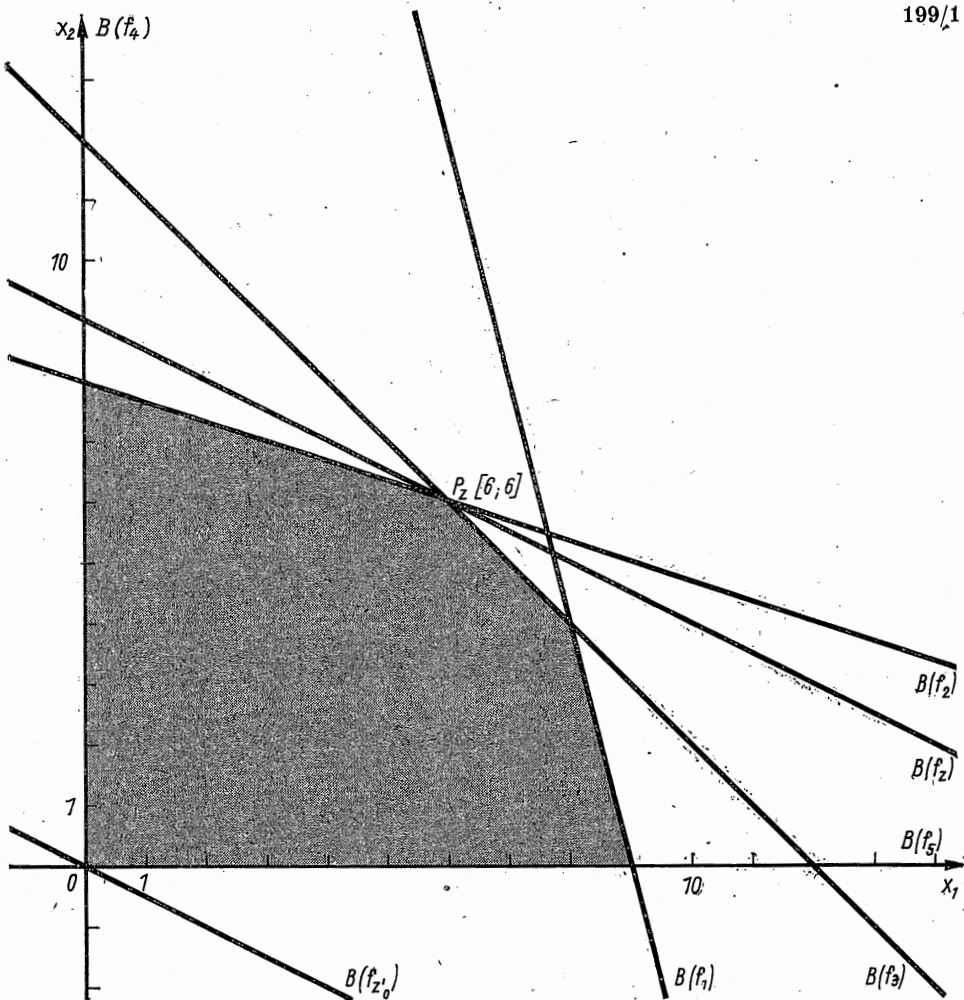
Wir stellen die Abbildungen f_1 bis f_5 in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar.

Die Rasterfläche einschließlich ihres Randes im Bild 199/1 stellt die Erfüllungsmenge der Nebenbedingungen und damit die Menge der zulässigen Lösungen des Optimierungsproblems dar.

Es gilt, daraus die optimale Lösung zu ermitteln.

Wir wenden uns deshalb der Zielfunktion $z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \max.$ zu und lösen nach x_2 auf. Wir erhalten

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{z}{40}.$$



Wir betrachten nun das Bild von

$$f_{z'} = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{z'}{40} \right\}$$

mit konstantem z' .

Die Gerade schneidet die x_2 -Achse bei $\frac{z'}{40}$. Für $z' = 0$ geht sie durch den Koordinatenursprung. Diese Gerade zeichnen wir ein und bezeichnen sie mit $B(f_{z'_0})$. Verändern wir z' , so erhalten wir jeweils eine Parallele zu $B(f_{z'_0})$. Aus der Menge der Parallelen wählen wir die aus, deren Schnittpunkt mit der x_2 -Achse möglichst weit vom Koordinatenursprung entfernt ist und die mindestens ein Element der zulässigen Lösungen enthält, denn das absolute Glied

$\frac{z'}{40}$ der zugehörigen Funktion nimmt in diesem Falle den größtmöglichen Wert an, d. h. aber auch, daß z' den größtmöglichen Wert hat. Das entspricht der Forderung nach einem maximalen Ergebnis. Diese Bedingung erfüllt die Parallele zu $B(f'_2)$ durch $P_z[6; 6]$, die wir mit $B(f_2)$ bezeichnen.

Die Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 6$ liefern den maximalen Wert für z .

$$z = 20 \cdot 6 + 40 \cdot 6 = 360$$

Greifen wir aus der Menge der zulässigen Lösungen heraus z. B.

$$x_1 = 8, x_2 = 4, \text{ so ist } z = 20 \cdot 8 + 40 \cdot 4 = 320;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 8, \text{ so ist } z = 20 \cdot 0 + 40 \cdot 8 = 320;$$

$$x_1 = 9, x_2 = 0, \text{ so ist } z = 20 \cdot 9 + 40 \cdot 0 = 180.$$

Man überzeuge sich an weiteren Beispielen, daß das ermittelte Maximum von keinem weiteren Paar $[x_1; x_2]$ der Menge der zulässigen Lösungen erreicht wird. f_z läßt sich jetzt ebenfalls angeben in der Form

$$f_z = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 9 \right\}.$$

Minimum-Aufgabe

Auch hier sei wiederum das mathematische Modell vorgegeben.

Zielfunktion: $z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min.$

Nebenbedingungen:

Einschränkende Bedingungen:

$$5x_1 + 2x_2 \geq 10 \quad \text{I}$$

$$2x_1 + 10x_2 \geq 20 \quad \text{II}$$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{III}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{IV}$$

Auflösen nach x_2 :

$$x_2 \geq -\frac{5}{2}x_1 + 5 \quad \text{I}'$$

$$x_2 \geq -\frac{1}{5}x_1 + 2 \quad \text{II}'$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{III}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{IV}$$

Für die Zielfunktion ergibt sich:

$$x_2 = -3x_1 + z \text{ und } z \rightarrow \min.$$

Wir ermitteln wiederum graphisch die zulässigen Lösungen unter Verwendung von

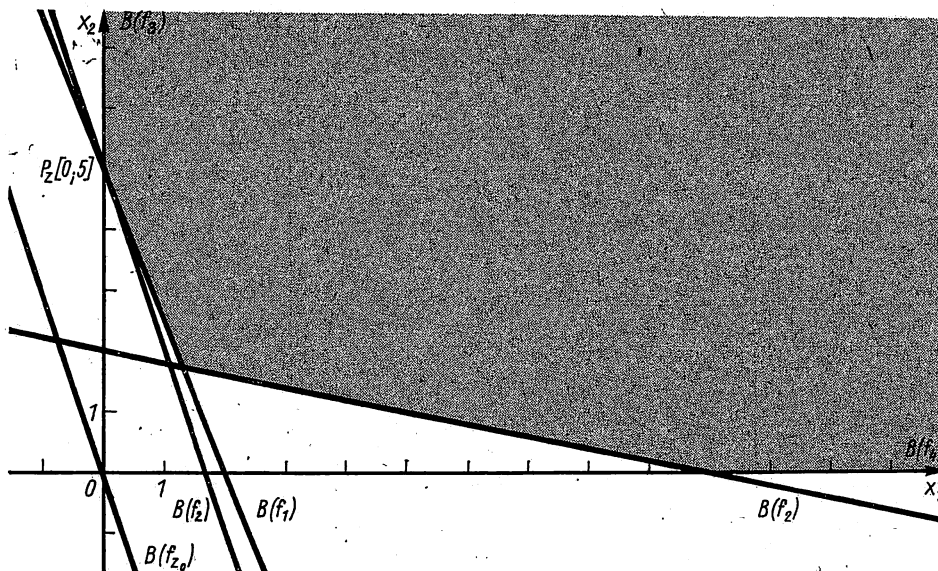
$$f_1 = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 \geq -\frac{5}{2}x_1 + 5 \right\}$$

$$f_2 = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 \geq -\frac{1}{5}x_1 + 2 \right\}$$

$$f_3 = \{ [x_1; x_2]; x_1 \geq 0 \}$$

$$f_4 = \{ [x_1; x_2]; x_2 \geq 0 \}$$

Die zulässigen Lösungen sind im Bild 201/1 – wie in der vorangegangenen Aufgabe – durch die Rasterfläche und die Randpunkte dargestellt.



201/1

Analog der Maximum-Aufgabe betrachten wir das Bild von

$$f_{z'} = \{ [x_1; x_2]; x = -3x_1 + z' \}$$

mit konstantem z' .

Die Gerade schneidet die x_2 -Achse bei z' .

Wir zeichnen das Bild der Funktion für $z' = 0$ ein und bezeichnen es mit $B(f_{z_0})$.

Verändern wir z' , so erhalten wir jeweils eine Parallele zu $B(f_{z_0})$.

9.7.

Aus der Menge der Parallelen zu $B(f_{z_0})$ wählen wir die aus, deren Schnittpunkt mit der x_2 -Achse möglichst nahe am Koordinatenursprung liegt, die aber mindestens einen Lösungspunkt enthält. z' nimmt in diesem Falle den kleinsten möglichen Wert an. Das entspricht aber gerade der Forderung nach einem Minimum.

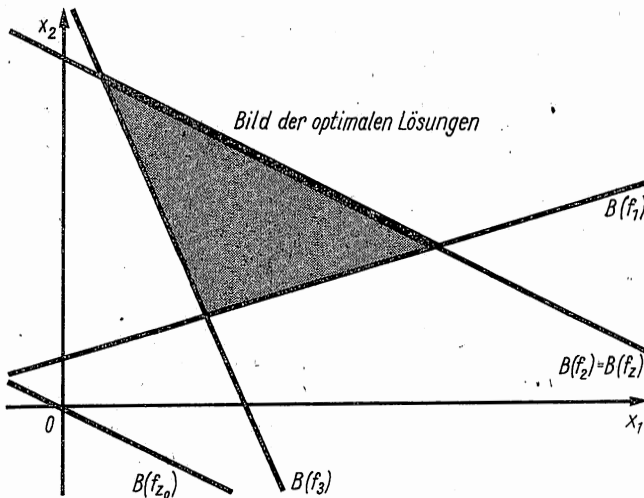
In diesem Beispiel ist es die Gerade durch $P_z [0; 5]$, die mit $B(f_z)$ bezeichnet ist.

Die optimale Lösung $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$ liefert den minimalen Zielfunktionswert

$$z = 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Bevor wir uns den Anwendungsaufgaben zuwenden, wollen wir uns einige *spezielle Fälle*, die bei der *linearen Optimierung* auftreten können, ansehen.

Es ist z. B. möglich, daß die Richtung der Geraden der Zielfunktion mit der Richtung der Geraden einer einschränkenden Bedingung zusammenfällt (Bild 202/1). Dann gibt es keine eindeutig bestimmte optimale Lösung, sondern alle erfaßten Randpunkte stellen eine optimale Lösung dar.

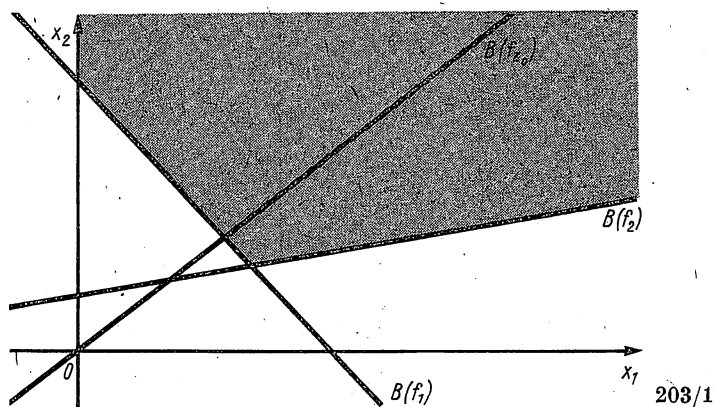


202/1

Weiterhin ist es möglich, daß es keine maximale Lösung, sondern nur zulässige Lösungen gibt (Bild 203/1); denn betrachten wir alle Parallelen zu $B(f_{z'})$, so erkennen wir, daß in jedem Falle unendlich viele zulässige Lösungen erfaßt werden, daß jedoch keine optimale Lösung existiert.

BEISPIEL 1 (9.7.2.):

Einem Betrieb stehen für die Herstellung von zwei unterschiedlichen Erzeugnissen drei verschiedene Materialien zur Verfügung, vom Material M_1 50 E



(Einheit), vom Material M_2 72 E und vom Material M_3 48 E. Für die Herstellung einer Längeneinheit (LE) des Erzeugnisses P_1 werden 5 Einheiten vom Material M_1 und 3 E vom Material M_3 benötigt. Für die Herstellung einer Längeneinheit des Erzeugnisses P_2 werden vom Material M_2 6 E und vom Material M_3 3 E gebraucht. Beim Verkauf einer Längeneinheit des Erzeugnisses P_1 wird ein Gewinn von 40 GE (Geldeinheiten), beim Verkauf einer Längeneinheit des Erzeugnisses P_2 ein Gewinn von 80 GE erzielt. Wieviel Längeneinheiten muß man von den einzelnen Erzeugnissen herstellen, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

Zunächst ist es ratsam, die Daten in einer Tabelle zusammenzustellen.

Material	Benötigte Materialmengen (E) je LE des Erzeugnisses		Materialfonds (E)
	P_1	P_2	
M_1	5	0	50
M_2	0	6	72
M_3	3	3	48
Gewinn je Einheit des Erzeugnisses in GE	40	80	

Aufstellen des mathematischen Modells

Zielfunktion: $z = 40 x_1 + 80 x_2 \rightarrow \max.$

Nebenbedingungen:

Einschränkende Bedingungen:

$$5 x_1 \leq 50$$

$$6 x_2 \leq 72$$

$$3 x_1 + 3 x_2 \leq 48$$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Wir lösen nach x_2 auf und erhalten:

$$x_1 \leq 10 \quad \text{I}$$

$$x_2 \leq 12 \quad \text{II}$$

$$x_2 \leq -x_1 + 16 \quad \text{III}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{IV}$$

$$x_2 \geq 0 \quad \text{V}$$

und für die Zielfunktion

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{z}{80}$$

In Anwendung der Ergebnisse des Teiles 6.1.4. ermitteln wir die Erfüllungsmenge des Ungleichungssystems I, II, ..., V.

Dazu stellen wir zunächst die Abbildungen

$$f_1 = \{[x_1; x_2]; x_1 \leq 10\},$$

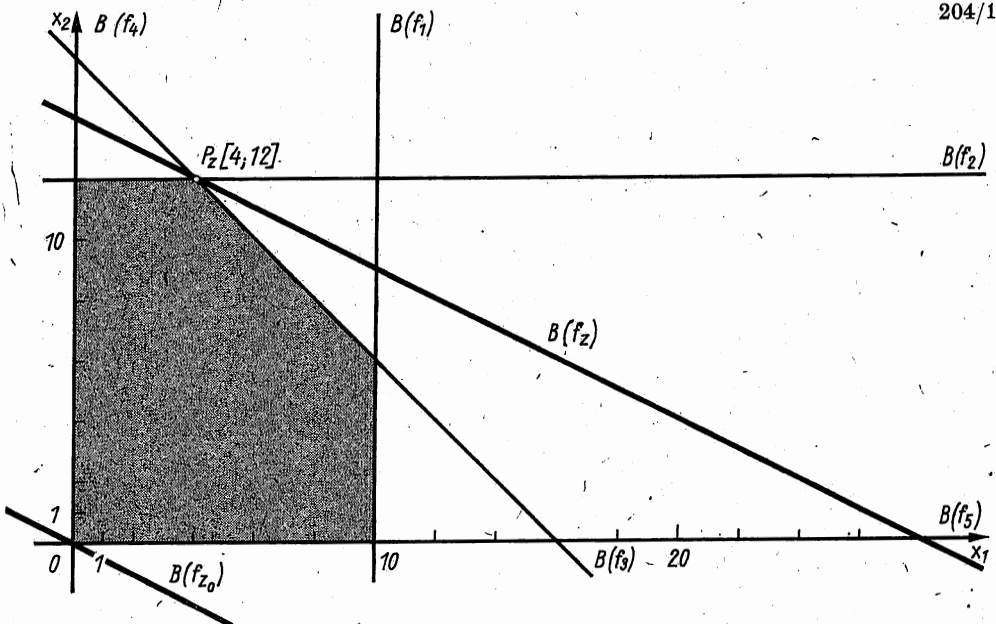
$$f_2 = \{[x_1; x_2]; x_2 \leq 12\},$$

$$f_3 = \{[x_1; x_2]; x_2 \leq -x_1 + 16\},$$

$$f_4 = \{[x_1; x_2]; x_1 \geq 0\},$$

$$f_5 = \{[x_1; x_2]; x_2 \geq 0\},$$

dar (Bild 204/1).



Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems wird durch die Rasterfläche und deren Rand veranschaulicht. Es ist der Bereich der zulässigen Lösungen. Um zur optimalen Lösung zu kommen, zeichnen wir zunächst das Bild der Funktion

$$f_z = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{z'}{80} \right\} \text{ mit } z' = 0.$$

Das Bild der Zielfunktion mit $z > 0$ ist eine Parallele zu dieser Geraden, die mindestens ein Element der zulässigen Lösungen enthält. Dieses Element ist P_z .

Es sind also 4 LE vom Erzeugnis P_1 und 12 LE vom Erzeugnis P_2 herzustellen, um den höchstmöglichen Gewinn zu erzielen. Er beträgt

$$(40 \cdot 4 + 80 \cdot 12) \text{ GE} = 1120 \text{ GE}.$$

Im Beispiel 2 (9.7.2.) handelt es sich um ein Optimierungsproblem mit drei Variablen, das sich auf ein Problem mit zwei Variablen zurückführen läßt.

BEISPIEL 2 (9.7.2.):

Ein Betrieb soll insgesamt 300 Stück eines Erzeugnisses herstellen. Dafür stehen ihm drei Technologien und drei Maschinen zur Verfügung. Wieviel Stück sind nach jeder Technologie herzustellen, wenn die Selbstkosten der Produktion minimal sein sollen? Die erforderlichen Daten sind der Tabelle zu entnehmen.

Maschine	Direkter Arbeitszeitaufwand für die Technologien in Std. · Stck. ⁻¹			Maschinenzeitfonds in Std.
	T_1	T_2	T_3	
M_1	3	2	1	600
M_2	4	0	2	640
M_3	2	5	0	600
Selbstkosten in M · Stck. ⁻¹	15	40	30	

Das mathematische Modell dazu lautet:

Zielfunktion: $z = 15x_1 + 40x_2 + 30x_3 \rightarrow \min.$

Dabei sind

x_1 die Anzahl der Erzeugnisse, die nach T_1 ,

x_2 die Anzahl der Erzeugnisse, die nach T_2 ,

x_3 die Anzahl der Erzeugnisse, die nach T_3

hergestellt werden.

Nebenbedingungen:

Einschränkende Bedingungen:

Hierbei ist zu beachten, daß der Maschinenzeitfonds nicht überschritten werden darf. Deshalb erhalten wir, obwohl es sich um eine Minimum-Aufgabe handelt, folgendes System von Ungleichungen und Gleichungen.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 600 \quad \text{I}$$

$$4x_1 + 2x_3 \leq 640 \quad \text{II}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 600 \quad \text{III}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300$$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

Da $x_3 = 300 - x_1 - x_2$ ist, lauten die Nebenbedingungen wie folgt.

$$2x_1 + x_2 \leq 300 \quad \text{I}$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 40 \quad \text{II}$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 600 \quad \text{III}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$300 - x_1 - x_2 \geq 0$$

Für die Zielfunktion ergibt sich

$$z = 15x_1 + 40x_2 + 30(300 - x_1 - x_2) \rightarrow \min.$$

$$z = -15x_1 + 10x_2 + 9000 \rightarrow \min.$$

Um die Erfüllungsmengen der Ungleichungen graphisch darstellen zu können, lösen wir nach x_2 auf. Wir erhalten:

$$x_2 \leq 300 - 2x_1 \quad \text{I}$$

$$x_2 \geq -20 + x_1 \quad \text{II}$$

$$x_2 \leq 120 - \frac{2}{5}x_1 \quad \text{III}$$

$$x_1 \geq 0 \quad \text{IV}$$

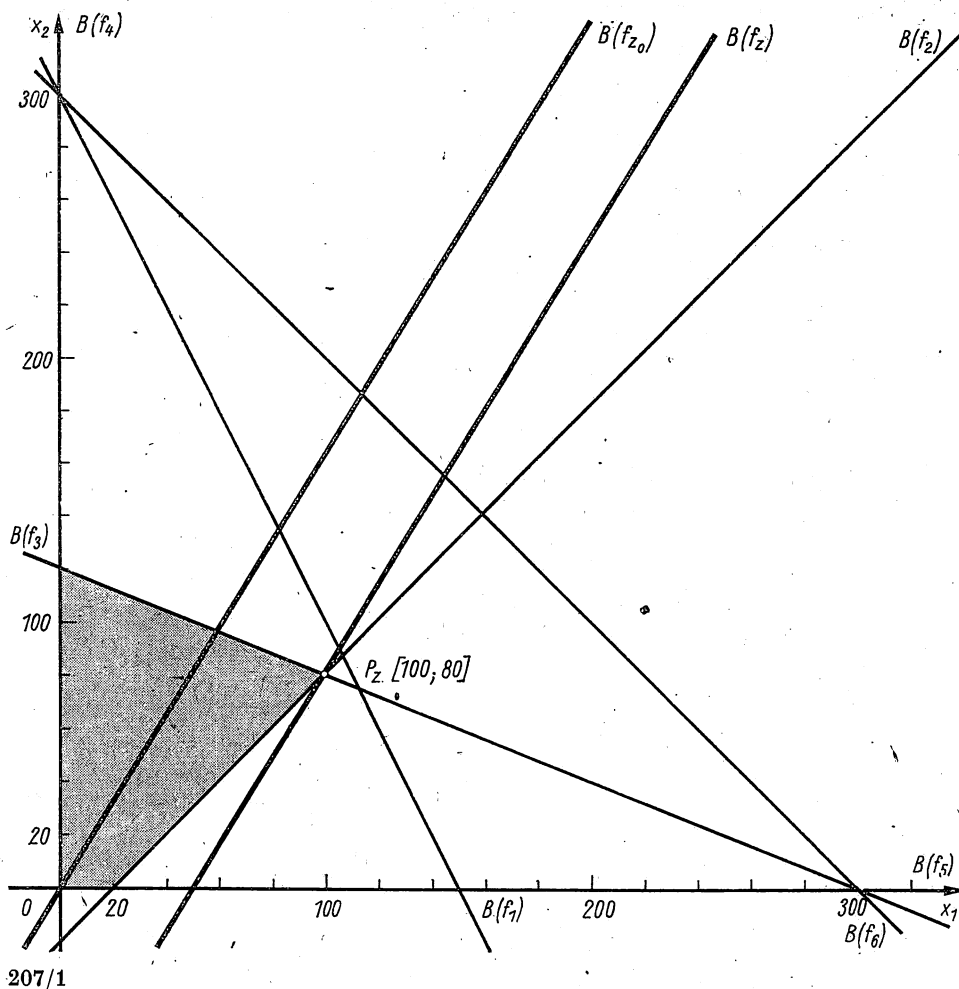
$$x_2 \geq 0 \quad \text{V}$$

$$x_2 \leq 300 - x_1 \quad \text{VI}$$

und für die Zielfunktion:

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{z - 9000}{10}$$

Entsprechend den vorangegangenen Beispielen ergibt sich Bild 207/1.



$$f_1 = \{[x_1; x_2]; x_2 \leq 300 - 2x_1\}$$

$$f_2 = \{[x_1; x_2]; x_2 \geq -20 + x_1\}$$

$$f_3 = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 \leq 120 - \frac{2}{5}x_1 \right\}$$

$$f_4 = \{[x_1; x_2]; x_1 \geq 0\}$$

$$f_5 = \{[x_1; x_2]; x_2 \geq 0\}$$

$$f_6 = \{[x_1; x_2]; x_2 \leq 300 - x_1\}$$

Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems I, II, ..., VI über $P \times P$ wird durch die Rasterfläche und deren Rand veranschaulicht. Es werden damit zulässige Lösungen angegeben. Die optimale Lösung, die in unserem Falle das Minimum ist, ist wiederum in dieser Menge zu suchen.

Wir zeichnen daher das Bild der Funktion

$$f_z = \left\{ [x_1; x_2]; x_2 = \frac{3}{2} x_1 \right\}$$

ein.

Der Anstieg des Bildes dieser Funktion stimmt mit dem des Bildes der Zielfunktion überein. Die Gerade geht durch den Bereich der zulässigen Lösungen, das heißt, es gibt Lösungen, die die Zielfunktion erfüllen, wobei die Optimalitätsforderung noch nicht erfüllt wird. Um auch das zu gewährleisten, zeichnen wir zu $B(f_z)$ eine Parallele, die durch einen Eckpunkt des Vierecks geht und die x_2 -Achse möglichst nahe dem Koordinatenursprung schneidet. Diese Forderung erfüllt die Parallele zu $B(f_z)$ durch P_z . Wir bezeichnen sie mit $B(f_z)$ und meinen damit das Bild der Zielfunktion.

Die Koordinaten von P_z liefern uns die Lösung der Optimierungsaufgabe. Wir erhalten

$$x_1 = 100$$

$$x_2 = 80$$

und aus $x_1 + x_2 + x_3 = 300$

$$x_3 = 120$$

und damit

$$z = 15 \cdot 100 + 40 \cdot 80 + 30 \cdot 120$$

$$z = 8 \cdot 300.$$

Bei Herstellung der errechneten Stückzahlen nach den angegebenen Technologien liegen die Selbstkosten bei 8300 M.

Der Begriff „Folge“ spielt in der Mathematik und auch bereits im Mathematikunterricht der unteren Klassen eine wichtige Rolle.

In der Umgangssprache sagt man an Stelle von „Folge“ oft „Reihe“. Man spricht zum Beispiel von einer „Stuhlreihe“, einer „Zeichenreihe“, einer „Rangreihe“ usw., auch von einer bestimmten „Reihenfolge“. Das ist aber im wesentlichen in der Fachsprache der Mathematik der Inhalt des Begriffs „Folge“. Das Begriffswort „Reihe“ hat in der Fachsprache der Mathematik eine andere Bedeutung.

Es ist üblich, die Menge aller Folgen als (echte) Teilmenge aller Funktionen, also aller eindeutigen Abbildungen, aufzufassen. Wir definieren demnach eine Folge als spezielle Funktion.

DEFINITION 1 (10.):

Eine **Folge** ist eine Funktion, das heißt eine Menge geordneter Paare $[n; f(n)]$, deren Definitionsbereich eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen ist.

Die Elemente $f(n)$ des Wertebereichs der Folge f heißen **Glieder der Folge**.

Man symbolisiert die Glieder einer Folge (oft) mit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

und die Folge selbst mit (a_n) .

$a_n = f(n)$ heißt **n -tes Glied von (a_n)** oder **allgemeines Glied von (a_n)** .

Die jeweils vorgegebene Abbildungsvorschrift, nach der jedem Element des Definitionsbereichs von f eindeutig ein Element des Wertebereichs von f zugeordnet ist, heißt **Bildungsvorschrift** oder **Bildungsgesetz von (a_n)** . Genau dann, wenn das Bildungsgesetz von (a_n) als Gleichung ($a_n = f(n)$) dargestellt ist, sagt man, daß es in **expliziter Form** gegeben ist.

DEFINITION 2 (10.):

Eine Folge f heißt **Zahlenfolge** genau dann, wenn deren Wertebereich eine Menge von Zahlen ist.

Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, sagt man an Stelle von „Zahlenfolge“ oft nur kurz „Folge“.

Auf Folgen, die keine Zahlenfolgen sind, zum Beispiel „Punktfolgen“, „Figurenfolgen“ oder „Funktionsfolgen“, gehen wir hier nicht ein.

BEISPIEL 1 (10.):

$$\left\{ [7; 6], \left[2; \frac{1}{2} \right], [4; -1], [5; 6] \right\} \quad (1)$$

Es liegt eine (viergliedrige) Folge in ausführlicher Schreibweise vor. Obwohl die „Reihenfolge“ (umgangssprachlich gebraucht) der geordneten Paare beliebig ist, kann man für die Glieder dieser Folge die Anordnung

$$\frac{1}{2}, -1, 6, 6 \quad (2)$$

wählen, weil für die Elemente des Definitionsbereichs dieser Folge gilt:

$$2 < 4 < 5 < 7.$$

Darstellung (2) in Beispiel 1 (10.) bringt zum Ausdruck, daß hier zum Beispiel diejenige natürliche Zahl, der das Glied $\frac{1}{2}$ der Folge zugeordnet ist, kleiner ist als jene, der das Glied -1 der Folge zugeordnet ist.

Darstellung (2) gibt nicht an, um welche natürlichen Zahlen es sich beim Definitionsbereich der Folge handelt. Das ist meistens uninteressant; wichtig ist die Angabe der Glieder einer Folge und deren Anordnung. Deshalb wählt man im allgemeinen als Definitionsbereich einer Folge eine mit 1 beginnende Menge aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen. Dann ist a_1 (das erste Glied der Folge) der 1, a_2 (das zweite Glied der Folge) der 2 usw. zugeordnet. Danach kann Darstellung (2) als (übliche) Kurzdarstellung von (1) gelten.

Mitunter wählt man als Definitionsbereich einer Folge eine mit 0 beginnende Menge aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen und bezeichnet die Glieder der Folge dann mit a_0, a_1, a_2 usw.

Die Menge $\left\{ [7; 6], \left[2; \frac{1}{2} \right], [2; -1], [5; 6] \right\}$ ist kein Beispiel für eine Folge,

weil dem Element 2 des Definitionsbereichs die Elemente $\frac{1}{2}$ und -1 des Wertebereichs zugeordnet sind.

Die durch die Kleinerbeziehung geordnete Menge der reellen Zahlen ist keine Folge; denn es gibt keine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge der reellen Zahlen auf die Menge der natürlichen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen ist von *höherer Mächtigkeit* (\nearrow [4]; 181) als die Menge der natürlichen Zahlen. Sollen die Elemente einer (unendlichen) Menge Glieder einer Folge sein, so muß diese Menge *abzählbar* (\nearrow [4]; 180) sein.

DEFINITION 3 (10.):

Eine Folge f ist **unendlich** genau dann, wenn der Definitionsbereich von f die Menge der natürlichen Zahlen bzw. eine ihrer unendlichen Teilmengen ist.

Eine Folge f ist **endlich** genau dann, wenn der Definitionsbereich von f eine endliche Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen ist.

Mitunter wird eine Folge von vornherein als unendliche Folge verstanden; dann entfällt allerdings eine Unterscheidung zwischen endlichen und unendlichen Folgen. Unter dieser Voraussetzung wird eine endliche Folge **Folgenabschnitt** oder kurz **Abschnitt (von f)** genannt. Wir gehen hierauf nicht weiter ein.

Eine unendliche Folge kann gliedweise wie folgt dargestellt werden:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

DEFINITION 4 (10.):

a_1 heißt **Anfangsglied** von (a_n) ; a_{n-1} heißt (unmittelbarer) **Vorgänger** von a_n ; a_{n+1} heißt (unmittelbarer) **Nachfolger** von a_n ; a_{n-1} und a_n (bzw. a_n und a_{n+1}) heißen **benachbarte Glieder** oder **aufeinanderfolgende Glieder** von (a_n) , ($n > 1$).

Wenn (a_n) endlich ist, so bezeichnet n die **Anzahl der Glieder** von (a_n) , und a_n heißt **Endglied** von (a_n) .

Jedes Glied a_n einer unendlichen Folge bestimmt deren Zerlegung in eine endliche Folge $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ und in eine unendliche Folge $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$. Soll eine unendliche Folge (gliedweise) dargestellt werden, so ist eine Vorschrift anzugeben, mit deren Hilfe man jedes Glied der Folge eindeutig bestimmen kann. Endlich viele Glieder einer Folge können beliebig (auf unendlich viele Arten) zu einer unendlichen Folge ergänzt werden.

BEISPIEL 2 (10.):

Beispiele für unendliche Folgen:

- a) $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$ oder $(2n)$
 b) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$ oder $\left(\frac{n+1}{n}\right)$
 c) $0, 2, 6, 12, \dots, n(n-1), \dots$ oder $(n(n-1))$
 bzw. $(n^2 - n)$

Wir nehmen an, Folge a) in Beispiel 2 (10.) sei wie folgt notiert:

$$(a_n) = 2, 4, 6, 8, \dots$$

Hieraus ist nicht mit Sicherheit zu ersehen, welche weiteren Glieder von (a_n) folgen.

Auf die Zahlen 2, 4, 6, 8 könnten beispielsweise folgen

- a) nur noch Einsen,
 b) die Zahlen 1, 3, 5, 7, nun die nächsten vier geraden Zahlen, dann die nächsten vier ungeraden Zahlen und dies abwechselnd so weiter,
 c) an 5., 10., 15., ..., $5n$ -ter Stelle jeweils 1; und im übrigen wird die Folge der geraden Zahlen fortgesetzt.

Das Bildungsgesetz einer unendlichen Folge ist nicht immer leicht erkennbar bzw. auf einfache Weise zu ermitteln oder anzugeben (\nearrow Beispiel 3 (10.) Folge c)).

Eine Folge, für die bisher kein Bildungsgesetz gefunden worden ist, ist die Folge der Primzahlen.

Wir beschränken uns des weiteren im wesentlichen auf solche unendlichen Folgen, deren Bildungsgesetz relativ einfach zu erkennen und explizit darstellbar ist. Die von uns bei Aufgabenstellungen verwendete Formulierung, ein möglichst einfaches Bildungsgesetz für (a_n) zu ermitteln, soll also heißen, daß für die angegebenen Glieder der Folge lediglich ein allgemeines Glied gefunden werden soll.Zur Übung ermittle man für die nachstehenden Zahlenfolgen ein möglichst einfaches Bildungsgesetz und drücke es durch eine Gleichung aus. Darauf gestützt sind die Glieder a_6 bis a_{10} von (a_n) zu berechnen.

- | | |
|---|------------------------------|
| 1. $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ | 6. $2, 6, 10, 14, 18, \dots$ |
| 2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ | 7. $1, 6, 11, 16, 21, \dots$ |
| 3. $3, 6, 9, 12, 15, \dots$ | 8. $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ |
| 4. $1, 4, 7, 10, 13, \dots$ | 9. $1, 3, 9, 27, 81, \dots$ |
| 5. $2, 5, 8, 11, 14, \dots$ | 10. $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ |

Bei endlichen Folgen kann auf die Angabe von a_n verzichtet werden, wenn man sämtliche Glieder dieser Folge notiert. Prinzipiell ist das bei endlichen Folgen immer möglich, bei einer großen Anzahl von Gliedern einer Folge praktisch aber schwierig bzw. umständlich. Bei einer endlichen Folge lassen sich für a_n unendlich viele verschiedene analytische Ausdrücke angeben, wie ohne Beweis vermerkt sei.

Wir haben bisher Folgen betrachtet, bei denen es relativ einfach ist, deren Bildungsgesetz explizit darzustellen.

Bei den Folgen in Beispiel 3 (10.) ist das schwieriger. Ebenso, wie wir verschiedene Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion kennengelernt haben, können wir auch das Bildungsgesetz einer Folge unterschiedlich formulieren. Der Leser versuche, das Bildungsgesetz der drei Folgen in Beispiel 3 (10.) mit eigenen Worten zu beschreiben.

BEISPIEL 3 (10.):

- a) 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, ...
 b) -1, -3, -4, -7, -11, -18, -29, -47, ...
 c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

DEFINITION 5 (10):

Das Bildungsgesetz von (a_n) ist rekursiv¹ dargestellt genau dann, wenn

1. $a_1 = f(1)$ gegeben ist und
2. jedes Glied a_{n+1} aus seinem Vorgänger a_n (bzw. anderen vorangehenden Gliedern dieser Folge) zu ermitteln ist.

Definition 5 (10.) erfüllt die Bedingungen der induktiven Definition.

In den Folgen in Beispiel 3 (10.) muß man zunächst jeweils a_1 und a_2 angeben, um dann den Induktions- bzw. Rekursionsschritt darstellen zu können.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } a_1 = 2, \quad a_2 = 7 \\ \text{b) } a_1 = -1, \quad a_2 = -3 \\ \text{c) } a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \end{array} \right\} a_{n+1} = a_{n-1} + a_n \quad (n \geq 2)$$

Die in Beispiel 3 (10.) dargestellte Folge c) heißt FIBONACCISCHE Folge (FIBONACCI, italienischer Mathematiker, 1175 bis 1250).

Sie hat eine Anzahl interessanter Eigenschaften und spielt auch in den Naturwissenschaften eine Rolle. Beispielsweise verzweigen sich die Äste eines Baumes gewöhnlich nach dieser Folge:

Im zweiten Jahr hat das Bäumchen 2 Äste, im dritten Jahr erhöht sich die Anzahl von dessen Ästen normalerweise auf 3, im vierten Jahr auf 5 usw.

¹ recurrere (lat.) - zurücklaufen

Ohne Beweis sei vermerkt, daß für die FIBONACCISCHE Folge zum Beispiel die unter (1) bis (4) genannten Beziehungen gelten.

$$(1) a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$$

$$(2) a_{n+m} = a_{n-1} a_m + a_n a_{m+1}$$

$$(3) a_{2n} = (a_{n+1} + a_{n-1})(a_{n+1} - a_{n-1}) + a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2$$

$$(4) a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Zur weiteren Arbeit mit Folgen müssen noch einige Begriffe definiert werden.

DEFINITION 6 (10.):

(a_n) ist monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ genau dann,

wenn für jedes n gilt: $\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{cases}$

(a_n) ist insbesondere **streng (echt oder eigentlich)**

monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ genau dann,

wenn für jedes n gilt: $\begin{cases} a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \end{cases}$

DEFINITION 7 (10.):

(a_n) ist **konstant** genau dann, wenn für jedes n gilt:
 $a_n = a_{n+1}$.

DEFINITION 8 (10.):

(a_n) ist **alternierend** genau dann, wenn kein Glied von (a_n) gleich Null ist und je zwei benachbarte Glieder von (a_n) verschiedene Vorzeichen haben.

BEISPIEL 4 (10.):

a) $-3, 6, -9, 12, -15, \dots, (-1)^n \cdot 3n, \dots$

oder

$$((-1)^n \cdot 3n)$$

b) $3, -6, 9, -12, 15, \dots, (-1)^{n+1} \cdot 3n, \dots$

oder

$$((-1)^{n+1} \cdot 3n)$$

Vergleichen wir etwa die Folgen in den Übungsaufgaben 1. und 2. (\nearrow 213) miteinander, so können wir feststellen, daß beide Folgen monoton wachsend sind; denn für alle $n > 0$ gilt:

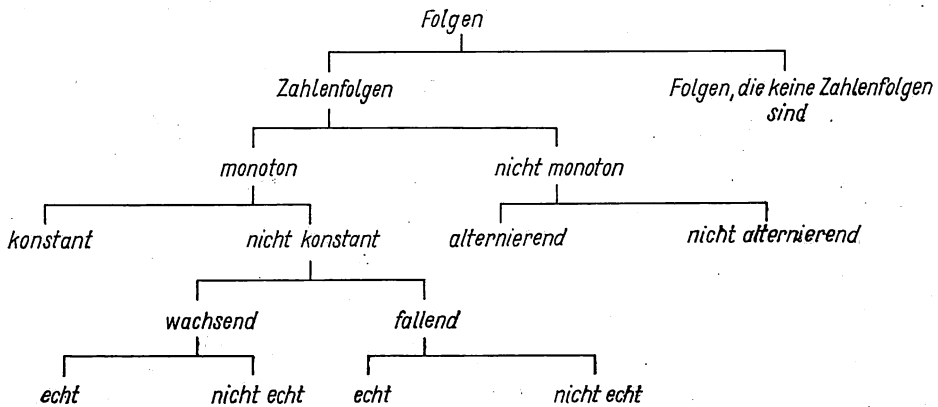
10.

1. $a_{n+1} - a_n = [2(n+1) - 1] - (2n - 1) = 2 > 0;$

2.
$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n^2 + 2n + 1) - (n^2 + 2n)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Einige Zusammenhänge zwischen Begriffen, die wir in Teil 10. definiert haben, sind in Bild 216/1 schematisch dargestellt.



216/1

DEFINITION 9 (10.):

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

heißt **n-te Partialsumme**¹ von (a_n) .

Unter der zu (a_n) gehörenden **Reihe** versteht man die Folge ihrer Partialsummen

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots = (s_n).$$

Bevor wir ein Beispiel betrachten, soll ein neues Symbol eingeführt werden, das eine Kurzdarstellung von Summen ermöglicht. Man setzt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

und liest: „Summe über a_j für alle j von 1 bis n .“

Der griechische Buchstabe Σ (großes Sigma) heißt **Summenzeichen**, a_j **allgemeines Glied der Summe**, j **Summationsbuchstabe** oder **Summationsindex**, 1 untere, n obere (Summations-)Grenze.

¹ pars (lat.) – Teil

BEISPIEL 5 (10.):

$$\text{a) } \sum_{j=1}^5 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\text{b) } \sum_{j=1}^4 2^j = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

$$\text{c) } \sum_{j=1}^3 \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2} + \frac{(-1)^4}{3} = \frac{5}{6}$$

Die untere (Summations-)Grenze braucht nicht immer 1 zu sein, sie kann eine beliebige ganze Zahl (nicht größer als die obere (Summations-)Grenze) sein.

Es gilt also zunächst für $m < n$

$$\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$

Falls $m = n$ ist, wird vereinbart

$$\sum_{j=m}^n a_j = a_n.$$

Falls das allgemeine Glied der Summe vom Summationsindex unabhängig ist, gilt

$$\sum_{j=m}^n a = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{(n-m+1) \text{ Summanden}}$$

$$\text{also } \sum_{j=m}^n a = (n - m + 1) a.$$

Der Leser bestätige selbst die Gültigkeit folgender *Formeln*:

1. In einer Summe kann man den Summationsbuchstaben beliebig wählen:

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^n a_i.$$

2. Es gilt

$$\sum_{j=1}^n c a_j = c \sum_{j=1}^n a_j.$$

3. Es gilt

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^m a_j + \sum_{j=m+1}^n a_j \quad \text{für } 1 \leq m \leq n.$$

4. Es gilt

$$\sum_{j=1}^n (a_j + b_j) = \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j.$$

5. Es gilt für $m \leq n$ folgende Transformationsformel.

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$$

In Definition 9 (10.) hatten wir festgestellt, daß zu einer Folge (a_n) eine Folge von Partialsummen (s_n) , eine Reihe, gebildet werden kann. Es gilt also:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{j=1}^1 a_j = s_1 \\ a_1 + a_2 &= \sum_{j=1}^2 a_j = s_2 = s_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= \sum_{j=1}^3 a_j = s_3 = s_2 + a_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= \sum_{j=1}^n a_j = s_n = s_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

BEISPIEL 6 (10):

Es sei $(a_n) = (2n - 1)$, also die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen, gegeben: $1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots$

Als Folge der Partialsummen von (a_n) erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2, \\ 1 + 3 &= 4 = 2^2, \\ 1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2, \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2 \text{ usw.,} \end{aligned}$$

so daß wir die Gültigkeit von $s_n = \sum_{j=1}^n (2j - 1) = n^2$ vermuten.

Die Richtigkeit dieser Vermutung wollen wir mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion bestätigen.

(1) *Induktionsanfang:* Wir setzen $n = 1$.

$$\text{Dann ist } s_1 = \sum_{j=1}^1 (2j - 1) = 1 = 1^2.$$

(2) *Induktionsschritt:* Wir haben folgendes zu zeigen:

Wenn unsere Vermutung für n gilt, so gilt sie auch für $n + 1$. Das heißt, wenn $s_n = n^2$ ist, dann ist $s_{n+1} = (n + 1)^2$.

Es ist also eine Implikation zu beweisen.

Voraussetzung: $s_n = n^2$

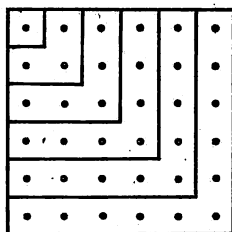
Behauptung: $s_{n+1} = (n + 1)^2$

Beweis: $s_n + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$

$s_n + (2n + 1) = s_{n+1}$, also gilt

$s_{n+1} = (n + 1)^2$,

q. e. d.



219/1

Die in Beispiel 6 (10.) erörterte Gesetzmäßigkeit kann man sich mit Hilfe eines Quadrats veranschaulichen, dessen Fläche in rechtwinklig angeordnete Kästchen- bzw. Punktreihen eingeteilt ist (Bild 219/1).

Bewußtes Betrachten einer Folge natürlicher Zahlen mit dem Ziel, bestimmte Gesetzmäßigkeiten zu bemerken, ist bereits für Schüler der unteren Klassen eine wichtige und zugleich reizvolle Aufgabe. Das Ergebnis von Beispiel 6 (10.), daß die Folge der Partialsummen der Folge der ersten n ungeraden (natürlichen) Zahlen die Folge der ersten n Quadratzahlen ist, kann bereits ein Schüler der Unterstufe finden und als Vermutung formulieren.

Dem Leser werden im folgenden weitere Beispiele und Aufgaben zur Übung dieser Arbeitsweise vorgelegt. Die Aufgabenstellung soll jeweils aus vier Teilen bestehen.

BEISPIEL 7 (10.):

Gegeben sei die Folge $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$

- Man ermittle ein möglichst einfaches Bildungsgesetz für (a_n) und gebe es in expliziter Form an.
- Man ermittle s_1, s_2, s_3, s_4 .
- Man formuliere (als Vermutung) ein Bildungsgesetz für (s_n) .
- Man bestätige die Richtigkeit dieser Vermutung.

Zu a)

Bei Aufgaben dieser Art führt mitunter eine systematische Zerlegung der vorgegebenen Zahlen in 2, 3, ... Faktoren zum Ergebnis.

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 3}, \quad a_2 = \frac{1}{3 \cdot 5}, \quad a_3 = \frac{1}{5 \cdot 7}, \quad a_4 = \frac{1}{7 \cdot 9}, \dots$$

Nun muß man zwischen den Indizes n von a_n und den übrigen Zahlen entsprechend vergleichen, um die Zuordnungsvorschrift zu finden. Wir erhalten

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4n^2-1}$$

10.

Zu b)

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{3}$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{14 + 1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

$$s_4 = s_3 + a_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7 \cdot 9} = \frac{27 + 1}{7 \cdot 9} = \frac{4}{9}$$

Zu c)

$$s_n = \frac{n}{2n + 1}$$

Zu d)

(1) *Induktionsanfang*: Falls $n = 1$ ist, gilt $s_1 = \frac{1}{3}$.

(2) *Induktionsschritt*:

$$\text{Voraussetzung: } s_n = \frac{n}{2n + 1}$$

$$\text{Behauptung: } s_{n+1} = \frac{n + 1}{2n + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } s_{n+1} &= \frac{n}{2n + 1} + \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n + 1)(2n + 3)} \\ &= \frac{(n + 1)(2n + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)} \\ &= \frac{n + 1}{2n + 3}, \end{aligned}$$

q. e. d.

BEISPIEL 8 (10.):

Gegeben sei die Folge 6, 24, 60, 120, ...

$$\text{a) } a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad a_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad a_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5, \\ a_4 = 4 \cdot 5 \cdot 6, \quad \dots, \quad a_n = n(n + 1)(n + 2)$$

$$\text{b) } s_1 = 6, \quad s_2 = 30, \quad s_3 = 90, \quad s_4 = 210$$

c) Mitunter führt außer der in Beispiel 7 (10.) genannten Faktorenerlegung eine Quotientenbildung zum Ziel.

$$s_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}, \quad s_2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4}, \quad s_3 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{4}$$

$$s_4 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4}, \quad \dots, \quad s_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

d) (1) Falls $n = 1$ ist, gilt $s_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

(2) *Voraussetzung:* $s_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Behauptung: $s_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

Beweis:
$$s_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}, \quad \text{q. e. d.}$$

Hier führte – wie oft bei solchen Aufgaben – eine Faktorenerlegung nach folgender Regel ans Ziel: Aus den (beiden) Summanden klammere man Gemeinsames im Zähler (hier also $(n+1)(n+2)(n+3)$) und den Hauptnenner (hier also 4) aus. Die verbleibende 1 des zweiten Summanden ist „auf den Hauptnenner zu bringen“.

Wir empfehlen dem Leser, jeweils das Bildungsgesetz für die Folgen

1. 1, 2, 4, 8, 16, ...
2. 1, 3, 9, 27, 81, ...
3. 1, k , k^2 , k^3 , k^4 , ... ($k \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$)

analog den Beispielen 7 (10.) und 8 (10.) zu ermitteln.

Die folgenden Beispiele 9 (10.) und 10 (10.) sollen zeigen, daß das Ermitteln von nur zwei bzw. drei Gliedern einer Folge zum Finden ihres Bildungsgesetzes nicht genügt. In beiden Beispielen könnte man annehmen, es gelte $(a_n) = (2n)$, was sich aber widerlegen läßt.

BEISPIEL 9 (10.):

In einer Ebene seien n Geraden gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind und keine drei einen gemeinsamen Punkt haben. In wie viele Teile a_n wird die Ebene durch diese Geraden zerlegt?

Wir stellen einige Ergebnisse (übersichtlich) zusammen:

n	1	2	3	4	5
a_n	2	4	7	11	16

Das Bildungsgesetz von (a_n) kann man wie folgt finden:

Wenn man zu den n Geraden eine weitere, eine $(n + 1)$ -te Gerade hinzunimmt, so schneidet diese (der Aufgabenstellung entsprechend) die n gegebenen Geraden und zerlegt die Ebene in $(n + 1)$ Teile. Wir vermuten, daß

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

gilt, und beweisen dies durch vollständige Induktion.

(1) Falls $n = 1$ ist, gilt $a_1 = 2$.

(2) *Voraussetzung:* $a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

$$\text{Behauptung: } a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } a_{n+1} &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1, \end{aligned}$$

q. e. d.

Der Leser überlege selbst, in wie viele Teile eine Ebene durch n Geraden zerlegt wird, die alle durch ein und denselben Punkt gehen (Beweis).

BEISPIEL 10 (10.):

Es seien n Ebenen gegeben, die durch ein und denselben Punkt gehen. Dabei sollen keine drei Ebenen eine gemeinsame Gerade haben. In wie viele Teile a_n wird der Raum durch diese Ebenen zerlegt?

Wir stellen wieder einige Ergebnisse (übersichtlich) zusammen.

n	1	2	3	4	5
a_n	2	4	8	14	22

Das Bildungsgesetz von (a_n) kann man wie folgt finden:

Wenn man zu den n Ebenen eine weitere, eine $(n + 1)$ -te Ebene hinzunimmt, so erhöht sich die Anzahl der Teile des Raumes um $2n$. Wir vermuten, daß

$$a_n = n(n-1) + 2 = n^2 - n + 2$$

gilt, und beweisen dies durch vollständige Induktion.

(1) Falls $n = 1$ ist, gilt $a_1 = 2$.

(2) *Voraussetzung:* $a_n = n(n - 1) + 2$

Behauptung: $a_{n+1} = (n + 1)n + 2$

Beweis: $a_{n+1} = n(n - 1) + 2 + 2n$

$$= n^2 + n + 2$$

$$= n(n + 1) + 2,$$

q. e. d.

Die im Anschluß an Definition 9 (10.) durchgeführten Betrachtungen haben gezeigt, daß man durch Bilden von Partialsummen einer Folge zu einer neuen Folge gelangt. Offenbar kann man von einer Folge von Partialsummen immer wieder eine neue Folge bilden. Dies legt den Gedanken nahe, auch Folgen von Differenzen zu bilden.

Geht man von einer Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

zu der Folge

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots, a_{n+1} - a_n, \dots$$

über, so nennt man diese die (**erste**) **Differenzenfolge** von (a_n) und bezeichnet ihre Glieder mit

$$\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3, \dots, \Delta a_n, \dots$$

Der griechische Buchstabe Δ (großes Delta) wird oft als Zeichen für „Differenz“ benutzt. Man setzt also allgemein

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Bildet man von (Δa_n) ebenso die Differenzenfolge, so erhält man die **zweite Differenzenfolge** von (a_n) und bezeichnet ihre Glieder mit

$$\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \Delta^2 a_3, \dots, \Delta^2 a_n, \dots$$

Man setzt also allgemein

$$\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

DEFINITION 10 (10.):

Unter der **k -ten Differenzenfolge** von (a_n) versteht man die Folge

$$(\Delta^k a_n) = (\Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n),$$

wobei $k = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$

und $\Delta^1 a_n = \Delta a_n$ sowie $\Delta^0 a_n = a_n$ sind.

BEISPIEL 11 (10.):

$$\begin{aligned}
 (a_n) &= 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336 \\
 (\Delta a_n) &= 5, 14, 30, 55, 91, 140 \\
 (\Delta^2 a_n) &= 9, 16, 25, 36, 49 \\
 (\Delta^3 a_n) &= 7, 9, 11, 13 \\
 (\Delta^4 a_n) &= 2, 2, 2
 \end{aligned}$$

In Beispiel 11 (10.) sind die Zahlen so notiert, daß die Zahl, die dem Glied $\Delta^k a_n$ entspricht, jeweils unter denjenigen Zahlen steht, die den Gliedern $\Delta^{k-1} a_{n+1}$, $\Delta^{k-1} a_n$ entsprechen.

$(\Delta^4 a_3)$ ist ein Beispiel für eine konstante Folge (\nearrow Definition 7 (10.)). $(\Delta^3 a_n)$ hat die konstante Differenz $d = 2$. Solche Folgen sind uns schon oft begegnet, zum Beispiel die Folge der natürlichen Zahlen und die in der Unterstufe zu lehrenden „Einmaleinsfolgen“. Wir werden Folgen mit einer konstanten Differenz in Teil 11.1. behandeln.

Abschließend soll noch die „Fakultätsfunktion“, die wir für unsere weitere Arbeit benötigen, definiert werden. Es handelt sich hierbei um ein Beispiel für eine induktive Definition (\nearrow Definition 5 (10.)).

DEFINITION 11 (10.):

Die Funktion, die aus allen Paaren $[n; n!]$ besteht ($n!$ liest man „ n -Fakultät“), heißt **Fakultätsfunktion** und ist diejenige Funktion f , für die gilt:

1. $f(0) = 1$,
2. $f(n+1) = (n+1)f(n)$ für alle $n \in N$.

Nach Definition 1 (10.) ist die Fakultätsfunktion eine Folge, für die nach Definition 11 (10.) gilt:

$$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2! = 6, 4! = 4 \cdot 3! = 24, 5! = 5 \cdot 4! = 120, \dots, (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Ist von den n -Faktoren $1, 2, 3, \dots, n$ lediglich das Produkt aus den letzten m Faktoren zu bilden, so ist $n!$ durch das Produkt aller Faktoren von 1 bis $(n-m)$ zu dividieren, und man erhält die in Satz 1 (10.) formulierte Aussage.

SATZ 1 (10.):

Für jedes m und für jedes n mit $m \leq n$ gilt:

$$\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1).$$

Der griechische Buchstabe Π (großes Pi) wird, entsprechend Σ für „Summe“, als Produktzeichen benutzt und ermöglicht eine Kurzdarstellung von Produkten.

Man setzt

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{j=1}^n a_j$$

und liest: „Produkt über a_j für alle j von 1 bis n .“

Man schreibt also zum Beispiel

$$\prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

11.1.

Arithmetische Folgen erster Ordnung

DEFINITION 1 (11.1.):

(a_n) heißt arithmetische Folge (erster Ordnung) genau dann, wenn es eine (von $n = 1, 2, 3, \dots$ unabhängige) Zahl $d \neq 0$ derart gibt, daß für jedes n gilt:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß eine arithmetische Folge

(streng) monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ ist genau dann, wenn $d \left\{ \begin{array}{l} > \\ < \end{array} \right\} 0$ ist.

BEISPIEL 1 (11.1.):

a) $(a_n) = 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots; d = 2$

b) $(a_n) = 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}, \dots; d = \frac{1}{2}$

c) $(a_n) = 3, 1, -1, -3, \dots, -2n + 5, \dots; d = -2$

Aus Definition 1 (11.1.) folgt weiter, daß eine arithmetische Folge (a_n) durch ihr Anfangsglied a_1 und die konstante Differenz $d = a_{n+1} - a_n$ bestimmt ist.

Es gilt nämlich

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

.....

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Die Richtigkeit dieser expliziten Darstellung des Bildungsgesetzes arithmetischer Folgen ergibt sich durch Anwendung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion.

(1) Falls $n = 1$ ist, gilt $a_1 = a_1$.

(2) *Voraussetzung:* $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Behauptung: $a_{n+1} = a_1 + nd$

Beweis: $a_{n+1} = a_1 + (n - 1)d + d = a_1 + nd,$

q. e. d.

Es gilt also

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + nd,$$

woraus folgt

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

bzw. $a_1 = a_n - (n - 1)d.$

SATZ 1 (11.1.):

Für jede arithmetische Folge (a_n) gilt:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Der Leser erwerbe sich Sicherheit im Ermitteln des n -ten Gliedes einer arithmetischen Folge (erster Ordnung) (\nearrow 221, Folgen 1. bis 3.). Man stelle sich selbst weitere derartige Aufgaben.

Aus Satz 1 (11.1.) folgt:

Eine arithmetische Folge (a_n) ist bereits durch die Angabe zweier Glieder von (a_n) eindeutig festgelegt.

BEISPIEL 2 (11.1.):

Von einer arithmetischen Folge (a_n) seien $a_3 = 16$ und $a_7 = 36$ gegeben. Wie heißt diese Folge?

$$a_1 + (7 - 1)d = a_7, \text{ also } a_1 + 6d = 36$$

$$a_1 + (3 - 1)d = a_3, \text{ also } a_1 + 2d = 16$$

Hieraus folgt $d = 5$ und $a_1 = 6$.

Die Folge heißt also $(a_n) = (5n + 1)$.

Die n -te Partialsumme s_n einer arithmetischen Folge (a_n) kann man auf folgende zwei Arten darstellen:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + [a_1 + (n - 1)d]$$

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + [a_n - (n - 1)d]$$

11.1.

Durch Addition beider Gleichungen erhält man $2s_n = n(a_1 + a_n)$; denn die n -te Partialsumme von (a_n) besteht aus n Summanden.

Es gilt also folgender Satz.

SATZ 2 (11.1.):

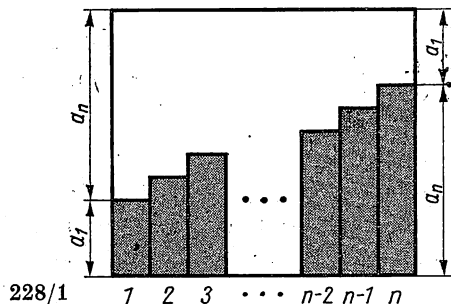
Für jede arithmetische Folge (a_n) gilt:

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Satz 2 (11.1.) kann man sich wie in Bild 228/1 veranschaulichen. Faßt man die Glieder von (a_n) als Maßzahlen von Flächeninhalten von Rechtecken mit einer Breite der Maßzahl 1 auf, so ist s_n die Maßzahl des Flächeninhalts einer treppenförmigen Figur (in Bild 228/1 gerastert), die man durch umgekehrtes Aufsetzen einer ebensolchen Fläche zur Fläche eines Rechtecks mit einem Inhalt der Maßzahl $2s_n$, einer Höhe der Maßzahl $a_1 + a_n$ und einer Breite der Maßzahl n ergänzen kann.

Es gilt also

$$2s_n = n(a_1 + a_n).$$



GAUSS hat bereits als Neunjähriger diese Formel angewendet. Es wird berichtet, daß er seinen Lehrer nach dessen Forderung an die Schüler, die Summe aller Zahlen von 1 bis 100 zu ermitteln, unmittelbar danach mit dem richtigen Ergebnis überraschte. GAUSS hatte sich überlegt, daß 101 als Summe von 1 und 100, von 2 und 99, von 3 und 98, \dots , von 50 und 51 insgesamt 50mal auftritt, also $50 \cdot 101 = 5050$ ist.

Die beiden Gleichungen in den Sätzen 1 (11.1.) und 2. (11.1.) sind unabhängig voneinander und widerspruchsfrei. Sind demnach die Belegungen von drei der fünf Variablen bekannt, so kann man die Belegungen der zwei übrigen Variablen (von wenigen noch zu erörternden Ausnahmen abgesehen) eindeutig ermitteln. Die Anzahl der Berechnungsfälle stimmt mit der Anzahl der Möglichkeiten, aus fünf Variablen zwei bzw. drei auszuwählen, überein. Wir wollen alle Berechnungsfälle und damit deren Anzahl ermitteln, indem wir die fünf Variablen notieren, systematisch je zwei auswählen und die übrigen drei in der gewählten Anordnung belassen:

$$a_1, a_n, d, n, s_n.$$

Mögliche Berechnungsfälle:

	Gesucht	Gegeben		Gesucht	Gegeben
1.	a_1, a_n	d, n, s_n	6.	a_n, n	a_1, d, s_n
2.	a_1, d	a_n, n, s_n	7.	a_n, s_n	a_1, d, n
3.	a_1, n	a_n, d, s_n	8.	d, n	a_1, a_n, s_n
4.	a_1, s_n	a_n, d, n	9.	d, s_n	a_1, a_n, n
5.	a_n, d	a_1, n, s_n	10.	n, s_n	a_1, a_n, d

Bei den oben genannten Ausnahmen handelt es sich um die Berechnungsfälle 3. und 6., weil diese auf quadratische Gleichungen führen (warum?); alle anderen Berechnungsfälle führen auf lineare Gleichungen.

Dem Leser seien einige Übungen folgender Art empfohlen:

Gegeben sei etwa die Folge

$$10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80.$$

Es gilt $a_1 = 10, a_n = 80, d = 5, n = 15, s_n = 675$.

Nun kann man einige Berechnungsfälle durchführen, wobei stets eine Selbstkontrolle möglich ist.

BEISPIEL 3 (11.1.):

Von einer arithmetischen Folge (a_n) seien $a_n = 80, d = 5, s_n = 675$. Man ermittle a_1 und n .

$$80 = a_1 + (n - 1) \cdot 5 \quad (\text{I})$$

$$675 = \frac{a_1 + 80}{2} \cdot n \quad (\text{II})$$

$$1350 = a_1 n + 80 n \quad (\text{II}_1)$$

$$80 = a_1 + 5 n - 5 \quad (\text{I}_1)$$

$$a_1 = 85 - 5 n \quad (\text{I}_2)$$

Wir setzen (I_2) in (II_1) ein.

$$1350 = 85 n - 5 n^2 + 80 n \quad (\text{III})$$

$$5 n^2 - 165 n + 1350 = 0 \quad (\text{III}_1)$$

$$n^2 - 33 n + 270 = 0 \quad (\text{III}_2)$$

Aus (III_2) folgt (nach dem VIETASchen Wurzelsatz unmittelbar)

$$n_1 = 15, n_2 = 18$$

und wegen (I_2)

$$a_{1,1} = 10, a_{1,2} = -5.$$

11.1.

Die erste Lösung führt zu der vorgegebenen Folge, die zweite zu der Folge
 $-5, 0, 5, 10, \dots, 80$.

Der Leser kann sich davon überzeugen, daß der Berechnungsfall 6. zu $n_1 = 15$ und $n_2 = -18$ führt. Da das zweite Ergebnis hier sinnlos ist, erhält man schließlich wieder (eindeutig) die oben vorgegebene Folge.

SATZ 3 (11.1.):

Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Satz 3 (11.1.) kann als unmittelbare Folgerung von Satz 2 (11.1.) aufgefaßt werden, wenn man $a_1 = 1$ und $a_n = n$ setzt.

Für die praktische Anwendung von Satz 3 (11.1.) ist es wichtig, die Struktur der Formel zu erfassen.

1. Man notiere die n -te natürliche Zahl.
2. Man multipliziere diese mit deren Nachfolger.
3. Man dividiere das Produkt beider Zahlen durch 2.

Soll also zum Beispiel die Summe aller natürlichen Zahlen bis $n-3$ bzw. bis $n+2$ ermittelt werden, so gilt entsprechend

$$s_{n-3} = \frac{(n-3)(n-2)}{2} \quad \text{bzw.} \quad s_{n+2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

SATZ 4 (11.1.):

Für die Summe aller natürlichen Zahlen von m bis n ($m \leq n$) gilt:

$$\sum_{j=m}^n j = \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}.$$

Beweis: Es ist zweimal Satz 3 (11.1.) anzuwenden.

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^n j &= \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^{m-1} j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} \\ &= \frac{n^2 + n - m^2 + m}{2} \\ &= \frac{(n+m)(n-m) + (n+m)}{2} \\ &= \frac{(n+m)(n-m+1)}{2}, \end{aligned}$$

q. e. d.

SATZ 5 (11.1.):

Jedes Glied einer arithmetischen Folge ist das arithmetische Mittel von dessen beiden benachbarten Gliedern.

Voraussetzung: (a_n) sei eine arithmetische Folge.

Behauptung:
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Beweis: $a_{n-1} = a_n - d, a_{n+1} = a_n + d,$

durch Addition beider Gleichungen folgt

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2 a_n$$

und hieraus die Behauptung,

q. e. d.

Damit erklärt sich der Name „arithmetische Folge“.

Mitunter wird die Aufgabe gestellt, zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Folge n Zahlen derart einzuschalten (zu interpolieren), daß eine neue arithmetische Folge mit d' als Differenz entsteht.

Wir betrachten der Einfachheit halber nur a_1 und $a_2 = a_1 + d$ der gegebenen arithmetischen Folge. Das allgemeine Glied der gesuchten arithmetischen Folge bezeichnen wir mit x_n . Es gilt

$$\begin{array}{ccc} a_1, & & a_1 + d, \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \end{array}$$

wobei also $a_1 = x_1$ ist. Das erste zu interpolierende Glied von (x_n) heißt dann x_2 , das zweite x_3, \dots , das n -te x_{n+1} . Es gilt demnach $a_1 + d = x_{n+2}$ und weiter

$$a_1 + d = x_1 + [(n + 2) - 1] d',$$

wegen $a_1 = x_1$

$$d = (n + 1) d'$$

und schließlich

$$d' = \frac{d}{n + 1}.$$

BEISPIEL 4 (11.1.):

Zwischen je zwei Glieder der arithmetischen Folge $(a_3) = 2, 14, 26$ sollen je drei Zahlen derart interpoliert werden, daß wieder eine arithmetische Folge entsteht. Wie heißt diese Folge?

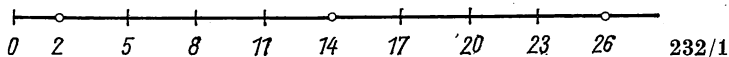
11.2.

Es gilt $d = 12$ und $n = 3$, also

$$d' = \frac{12}{3 + 1} = 3.$$

Die neue Folge heißt demnach

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 (Bild 232/1).



11.2.

Arithmetische Folgen höherer Ordnung

DEFINITION 1 (11.2.):

(a_n) heißt **arithmetische Folge k -ter Ordnung** genau dann, wenn deren k -te Differenzenfolge konstant, aber verschieden von Null ist.

In Beispiel 11 (10.) (\nearrow 224) ist (a_n) eine arithmetische Folge vierter Ordnung. Am gleichen Beispiel kann man sich die folgenden Erklärungen veranschaulichen.

Aus Definition 1 (11.2.) ergibt sich, daß die r -te Differenzenfolge einer arithmetischen Folge p -ter Ordnung selbst eine arithmetische Folge $(p - r)$ -ter Ordnung ist, falls $1 \leq r \leq p - 1$ ist. Wenn umgekehrt die r -te Differenzenfolge von (a_n) eine arithmetische Folge s -ter Ordnung ist, so ist (a_n) eine arithmetische Folge $(r + s)$ -ter Ordnung.

Die in Teil 11.1. behandelten arithmetischen Folgen kann man genauer arithmetische Folgen erster Ordnung nennen. Eine konstante Folge, deren Glieder ungleich Null sind, kann man auch **arithmetische Folge nullter Ordnung** nennen.

$(a_n) = (n^k)$ ist ein Beispiel für eine arithmetische Folge k -ter Ordnung.

$(a_n) = (n^2)$, die Folge der Quadratzahlen, ist eine arithmetische Folge zweiter Ordnung, $(a_n) = (n^3)$, die Folge der Kubikzahlen, eine arithmetische Folge dritter Ordnung. Die folgenden Beispiele 1 (11.2.) und 2 (11.2.) sollen zeigen,

wie man Einblick in die Strukturen von $\sum_{j=1}^n j^2$ bzw. $\sum_{j=1}^n j^3$ erhalten kann.

BEISPIEL 1 (11.2.):

Es gilt $1^2 = 1, 1 + 2^2 = 5, 5 + 3^2 = 14, 14 + 4^2 = 30, 30 + 5^2 = 55,$

$$55 + 6^2 = 91.$$

Nun führt ein Vergleich mit einer bekannten Folge und eine anschließende Quotientenbildung weiter, wie aus folgender Übersicht hervorgeht.

n	1	2	3	4	5	6	...
$1 + 2 + 3 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	...
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	...
$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$	$1 = \frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$3 = \frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$...

Hieraus ergibt sich als Vermutung

$$\frac{\sum_{j=1}^n j^2}{\sum_{j=1}^n j} = \frac{2n+1}{3}$$

und wegen $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Man beweise die Richtigkeit der Lösung von Beispiel 1 (11.2) durch vollständige Induktion.

SATZ 1 (11.2.):

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Man kann die Struktur der Summenformel in Satz 1 (11.2.) wie folgt beschreiben:

Erster Faktor: n -te natürliche Zahl,

zweiter Faktor: $(n+1)$ -te natürliche Zahl,

dritter Faktor: Summe der ersten beiden Faktoren,

Division des Produkts durch 6.

BEISPIEL 2 (11.2.):

Es gilt $1^3 = 1, 1 + 2^3 = 9, 9 + 3^3 = 36, 36 + 4^3 = 100,$

$100 + 5^3 = 225, 225 + 6^3 = 441.$

11.2.

Hieraus ergibt sich als Vermutung

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Man beweise die Richtigkeit der Lösung von Beispiel 2 (12.2.) durch vollständige Induktion.

SATZ 2 (11.2.):

Für die Summe der ersten n Kubikzahlen gilt:

$$s_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Man vergleiche Satz 2 (11.2.) mit Satz 3 (11.1.).

Die Sätze 3 (11.1.), 1 (11.2.) und 2 (11.2.) kann man weitgehend unabhängig von den bisherigen Darlegungen in Teil D herleiten.

Man benutzt sukzessiv die Formeln

$$(1+j)^2 = 1 + 2j + j^2,$$

$$(1+j)^3 = 1 + 3j + 3j^2 + j^3,$$

$$(1+j)^4 = 1 + 4j + 6j^2 + 4j^3 + j^4,$$

um die genannten Sätze der Reihe nach herzuleiten.

Als Beispiel soll Satz 1 (11.2.) unter der Annahme der Gültigkeit von Satz 3 (11.1.) nach dieser Methode entwickelt werden. Eine entsprechende Bearbeitung der beiden anderen Sätze kann dem Leser überlassen bleiben.

BEISPIEL 3 (11.2.):

Man ermittle den Wert der Summe $\sum_{j=1}^n j^2$.

Es gilt $(1+j)^3 = 1 + 3j + 3j^2 + j^3$,

und man belegt j der Reihe nach mit $0, 1, 2, \dots, n-1, n$. Man erhält

$j = 0$	$1^3 = 1 + 3 \cdot 0$	$+ 3 \cdot 0^2$	$+ 0^3$
$j = 1$	$2^3 = 1 + 3 \cdot 1$	$+ 3 \cdot 1^2$	$+ 1^3$
$j = 2$	$3^3 = 1 + 3 \cdot 2$	$+ 3 \cdot 2^2$	$+ 2^3$
$j = 3$	$4^3 = 1 + 3 \cdot 3$	$+ 3 \cdot 3^2$	$+ 3^3$
.....			
$j = n-1$	$n^3 = 1 + 3 \cdot (n-1)$	$+ 3 \cdot (n-1)^2$	$+ (n-1)^3$
$j = n$	$(1+n)^3 = 1 + 3 \cdot n$	$+ 3 \cdot n^2$	$+ n^3$

Bei der Addition der Werte der Terme auf den linken und rechten Seiten dieser Gleichungen verbleibt links $(1+n)^3$; denn die Summe der übrigen Zahlen links vom Gleichheitszeichen ist gleich der Summe der jeweils ganz rechts stehenden Kubikzahlen.

Man erhält also

$$(1+n)^3 = \sum_{j=0}^n 1 + \sum_{j=0}^n 3j + \sum_{j=0}^n 3j^2$$

$$\sum_{j=0}^n 3j^2 = (1+n^3) - \sum_{j=0}^n 1 - \sum_{j=0}^n 3j.$$

Wegen $\sum_{j=0}^n 1 = n+1$ und $\sum_{j=0}^n 3j = 3 \sum_{j=0}^n j = \frac{3}{2} n(n+1)$ folgt

$$3 \sum_{j=0}^n j^2 = (1+n^3) - (n+1) - \frac{3}{2} n(n+1)$$

$$3 \sum_{j=0}^n j^2 = (n+1) \left(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3n}{2} \right)$$

$$3 \sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)}{2} (2n+1)$$

$$\sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mit Hilfe der Sätze 3 (11.1.), 1 (11.2.) und 2 (11.2.) ist es mitunter möglich, Strukturen von Partialsummen von Folgen rascher zu ermitteln, als das durch Probieren möglich ist. Übrigens entfällt dann auch die Anwendung des dort noch notwendigen Beweisverfahrens der vollständigen Induktion. Man vergleiche das etwa mit Beispiel 8 (10.), Teil c) († 220f.).

BEISPIEL 4 (11.2.):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j(j+1)(j+2) &= \sum_{j=1}^n j^3 + 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 2 \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n^2+n+4n+2+4)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \end{aligned}$$

Die Beispiele 5 (11.2.) und 6 (11.2.) sollen zeigen, daß man auf diese Weise auch zu weiteren Formeln und Einsichten gelangen kann.

BEISPIEL 5 (11.2.):

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 &= \sum_{j=1}^n (2j)^2 \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6} \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2n+1}{6} (2n+2) \cdot 2n \\
&= \frac{2n+1}{6} [(2n+1)^2 - 1^2] \\
&= \frac{1}{6} [(2n+1)^3 - (2n+1)] \quad (**)
\end{aligned}$$

BEISPIEL 6 (11.2.):

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 &= \sum_{j=1}^n (2j-1)^2 = \sum_{j=1}^n (4j^2 - 4j + 1) \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n \\
&= \frac{n}{3} (4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3) \\
&= \frac{n}{3} (4n^2 - 1) \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \\
&= \frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6} \quad (*)
\end{aligned}$$

Aus $\frac{n}{3} (4n^2 - 1)$ ergibt sich auch

$$\frac{2n}{6} [(2n)^2 - 1^2] = \frac{1}{6} [(2n)^3 - 2n] \quad (**)$$

Man beachte die Ähnlichkeit der in den Beispielen 5 (11.2.) und 6 (11.2.) jeweils mit (*) bzw. (**) bezeichneten Formeln.

Aus den Darlegungen in den Teilen 11.1. und 11.2. ergeben sich interessante Einsichten in Eigenschaften und Zusammenhänge natürlicher Zahlen, von denen einige im folgenden – zum Teil ohne Kommentar – genannt seien. Man bemühe sich in jedem Fall um eine exakte Begründung.

Überblick über einige Eigenschaften von Folgen natürlicher Zahlen

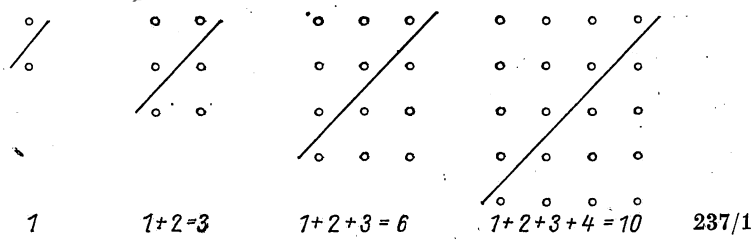
$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 &= 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \\
1 + 2 &= 3 = 1 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \\
1 + 2 + 3 &= 6 = 2 \cdot 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}
\end{aligned}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 2 \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = 5 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$

.....

(Bild 237/1)



$$2. \quad 1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

.....

(Bild 219/1)

$$3. \quad 2 = 2 = 1 \cdot 2 = 1^2 + 1$$

$$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3 = 2^2 + 2$$

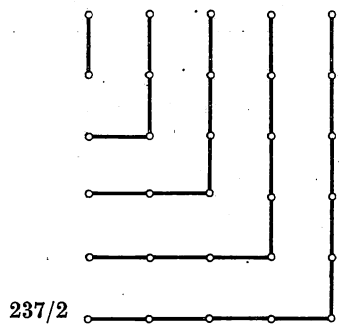
$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4 = 3^2 + 3$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5 = 4^2 + 4$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = 5 \cdot 6 = 5^2 + 5$$

.....

(Bild 237/2)



$$4. \quad 1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

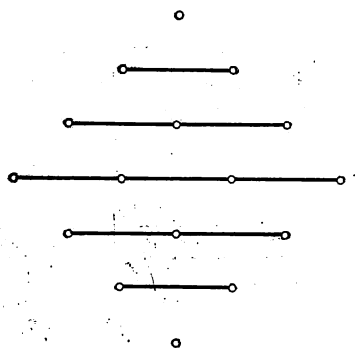
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 = 5^2$$

.....

$$2 \sum_{j=1}^{n-1} j + n = n(n-1) + n = n^2 \quad (\text{Bild 237/3})$$



11.2.

$$\begin{aligned}
 5. \quad 1^3 &= 1 \\
 2^3 &= 3 + 5 \\
 3^3 &= 7 + 9 + 11 \\
 4^3 &= 13 + 15 + 17 + 19 \\
 5^3 &= 21 + 23 + 25 + 27 + 29 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Die n -te Zeile beginnt mit

$$a_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} 2j = n^2 - n + 1.$$

Die Summe der Zahlen jeder Zeile beträgt

$$s_n = (n^2 - n + 1)n + \frac{n-1}{2} \cdot 2,$$

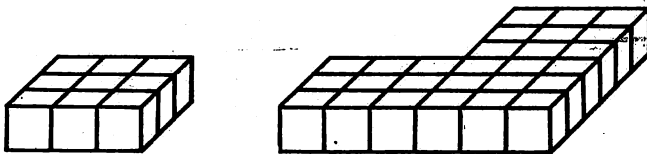
woraus $s_n = n^3$ folgt.

$$\begin{aligned}
 6. \quad 1^2 &= 1^3 \\
 (1 + 2)^2 &= 1^3 + 2^3 \\
 (1 + 2 + 3)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 \\
 (1 + 2 + 3 + 4)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \\
 (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Aus mehreren Würfeln von fortlaufender Kantenlänge der Maßzahlen 1, 2, 3, ... läßt sich stets ein volles einschichtiges quadratisches Parkett auslegen.

$$\begin{aligned}
 7. \quad 1^3 &= 1^2 - 0^2 \\
 2^3 &= (1 + 2)^2 - 1^2 \\
 3^3 &= (1 + 2 + 3)^2 - (1 + 2)^2 \\
 4^3 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2 - (1 + 2 + 3)^2 \\
 5^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 - (1 + 2 + 3 + 4)^2 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Jede Kubikzahl ist gleich der Differenz zweier Quadratzahlen. Man kann einen aus Einzelwürfeln gebildeten Würfel stets in ein einschichtiges Parkett von der Form eines gleichschenkligen „Rechtwinkelhakens“ auslegen (Bild 238/1).



$$3^3 = 6^2 - 3^2$$

238/1

8. Die folgende Multiplikationstabelle enthält ebenfalls interessante Beziehungen.

1	2	3	4	5	6	...	n
2	4	6	8	10	12	...	$2n$
3	6	9	12	15	18	...	$3n$
4	8	12	16	20	24	...	$4n$
5	10	15	20	25	30	...	$5n$
6	12	18	24	30	36	...	$6n$
.....							
n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$...	n^2

- (1) Das Produkt aus einer beliebigen Zahl der ersten Zeile und einer beliebigen Zahl der ersten Spalte steht im Schnittpunkt der Zeile und der Spalte, in der die Faktoren stehen.
- (2) In der Anordnung oben ist d die Summe der Zahlen in einem beliebigen Quadrat, das die 1 enthält, eine Quadratzahl.

Beispiel: $1 + 2 + 3 + 2 + 4 + 6 + 3 + 6 + 9$
 $= 36 = 6^2$
 $= (1 + 2 + 3)^2$

Allgemein gilt:

$$\sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 2j + \dots + \sum_{j=1}^n nj = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

- (3) Jedes der in (2) erwähnten Quadrate wird durch Anlegen eines „Rechtwinkelhakens“ gebildet. Die Summe der Zahlen in einem beliebigen „Rechtwinkelhaken“ ist eine Kubikzahl.

Beispiel: $3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27 = 3^3$

Allgemein gilt

$$2 \sum_{j=1}^{n-1} nj + n^2 = n^3.$$

- (4) Die in (2) genannten Quadrate bestehen jeweils aus $1, 2, 3, \dots, n$ „Rechtwinkelhaken“. Hieraus folgt anschaulich erneut

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

11.3.

Binomialkoeffizienten als Glieder arithmetischer Folgen

Die in Teil 11.3. zu behandelnden arithmetischen Folgen sollen an Hand eines Beispiels eingeführt werden, das als Aufgabe in der ersten Stufe einer Mathematikolympiade für Klasse 6 gestellt war.

Die Zahlenordnung (a) betrachten wir als Grundlage für die Untersuchung einiger arithmetischer Folgen, die wir unter anderem in Teil E benötigen. Zwischen den Zahlen in (a) bestehen mehrere interessante Beziehungen.

1. Die Zahlen in entsprechenden Zeilen (waagerechten Reihen) und Spalten (senkrechten Reihen) stimmen überein.
2. In Zeile 1 bzw. Spalte 1 stehen nur Einsen.
Jede in einer anderen Zeile bzw. Spalte befindliche Zahl ist die Summe aus denjenigen beiden Zahlen, die unmittelbar davor- bzw. darüberstehen.
3. Jede nicht in der ersten Zeile bzw. Spalte befindliche Zahl ist die Summe derjenigen Zahlen, die in der Zeile darüber bzw. in der Spalte davor bis zu eben dieser Zahl stehen.
4. Die Zahlen in der $(m + 1)$ -ten Zeile bzw. Spalte bilden eine mit 1 beginnende arithmetische Folge m -ter Ordnung ($m \geq 0$).

Die Lösung von Beispiel 1 (11.3.) kann man schneller durch Multiplizieren und Dividieren ermitteln, wenn man eine Regel hierfür kennt. Um eine solche zu finden, ist es zunächst zweckmäßig, jede Zahl der dritten Zeile von Darstellung (a) mit 2 und der vierten Zeile mit 6 zu multiplizieren. Man erhält

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 6, & 12, & 20, & 30, & 42 \text{ bzw.} \\ 6, & 24, & 60, & 120, & 210, & 336. \end{array}$$

Die jetzt in der ersten Zeile stehenden Zahlen sind die Produkte von jeweils zwei, die in der zweiten Zeile stehenden Zahlen die Produkte von jeweils drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Um nun wieder die Zahlen der Anordnung (a) zu erhalten, müssen die durch Multiplikation erhaltenen Zahlen der ersten Zeile jeweils durch $2 = 1 \cdot 2$ und die der zweiten Zeile jeweils durch $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ dividiert werden.

Wir führen folgende Symbole ein.

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{3}{3}, \text{ gelesen „3 über 3“; } \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{4}{3}, \text{ gelesen „4 über 3“;}$$

$$\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \binom{2}{2}, \text{ gelesen „2 über 2“; } \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \binom{3}{2}, \text{ gelesen „3 über 2“ usw.}$$

DEFINITION 1 (11.3.):

Unter einem **Binomialkoeffizienten** versteht man einen Ausdruck der Form $\binom{n}{m}$, gelesen „ n über m “, für den gilt

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!},$$

wobei m und n Variable für natürliche Zahlen sind.

11.3.

Es wäre sogar möglich, n als Variable für eine beliebige reelle Zahl aufzufassen; für unsere Zwecke genügt aber die in Definition 1 (11.3.) getroffene Festlegung.

SATZ 1 (11.3.):

Für jedes n gilt:

$$\binom{n}{1} = n.$$

Der *Beweis* von Satz 1 (11.3.) folgt sofort aus Definition 1 (11.3.), wenn man $m = 1$ setzt:

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = n, \quad \text{q. e. d.}$$

SATZ 2 (11.3.):

Für jedes n gilt:

$$\binom{n}{n} = 1.$$

Der *Beweis* von Satz 2 (11.3.) folgt ebenfalls unmittelbar aus Definition 1 (11.3.), wenn man $m = n$ setzt:

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 1}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \text{q. e. d.}$$

SATZ 3 (11.3.):

Wenn m größer als n ist, also $m = n + k$ ist ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$), so gilt für jedes n und für jedes k :

$$\binom{n}{n+k} = 0.$$

Der *Beweis* von Satz 3 (11.3.) ergibt sich wieder aus Definition 1 (11.3.); denn im Zähler tritt unter diesen Bedingungen der Faktor Null auf, q. e. d.

BEISPIEL 2 (11.3.):

$$\text{a) } \binom{3}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 0 \quad \text{b) } \binom{n}{n+1} = 0$$

Aus Satz 1 (10.) und Definition 1 (11.3.) folgt unmittelbar Satz 4 (11.3.).

SATZ 4 (11.3.):Für jedes m und für jedes n mit $m \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Falls $m = 0$ ist, folgt hieraus $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$. Außerdem setzt man $\binom{0}{0} = 1$.

Ersetzt man in Satz 4 (11.3.) m durch $n - m$, so erhält man

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

also wieder den Wert desjenigen Terms, der die rechte Seite der Gleichung in Satz 4 (11.3.) bildet. Hieraus folgt Satz 5 (11.3.).

SATZ 5 (11.3.) (Symmetriegesetz der Binomialkoeffizienten):Für jedes m und für jedes n mit $m \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

BEISPIEL 3 (11.3.):

$$\binom{9}{9} = \binom{9}{0} = 1 \qquad \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36 \qquad \binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$$

$$\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9 \qquad \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

Die im Ergebnis von Beispiel 1 (11.3.) erhaltene „Zahlenanordnung in Rechtecksform“ kann man nun wie folgt darstellen.

$$\begin{array}{cccccccc}
 \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \binom{4}{0} & \binom{5}{0} & \dots & \\
 \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & \binom{5}{1} & \binom{6}{1} & \dots & \\
 \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \binom{5}{2} & \binom{6}{2} & \binom{7}{2} & \dots & \\
 \binom{3}{3} & \binom{4}{3} & \binom{5}{3} & \binom{6}{3} & \binom{7}{3} & \binom{8}{3} & \dots & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots &
 \end{array} \tag{b}$$

11.3.

Darstellung (b) gestattet eine rasche Lösung von Aufgaben der Art von Beispiel 1 (11.3.):

Es sei n Variable für die Anzahl der Buchstaben ($n = 9$) und m Variable für die Anzahl der Zeilen ($m = 4$). Dann gibt es $\binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten (hier also $\binom{8}{3}$), um das betreffende Wort zu lesen.

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 7 = 56$ ist sogar eine Kopfrechenaufgabe.

Man überlege sich, welche der in Beispiel 1 (11.3.) genannten Beziehungen bisher bestätigt worden sind.

Beziehung 2. findet in Satz 6 (11.3.) ihre Begründung.

SATZ 6 (11.3.) (Additionstheorem der Binomialkoeffizienten):

Für jedes m und für jedes n mit $m \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \quad (\text{nach Satz 4 (11.3.)}) \\ &= \frac{n!(m+1) + n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} \\ &= \frac{n!(m+1+n-m)}{(m+1)!(n-m)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{m+1} &= \frac{(n+1)!}{(m+1)![(n+1)-(m+1)]!} \quad (\text{nach Satz 4 (11.3.)}) \\ &= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Um auch Beziehung 3. in Beispiel 1 (11.3.) (\nearrow 240) als Gesetz formulieren zu können, soll zunächst die Addition aller in Darstellung (b) (\nearrow 243) in einer Spalte befindlichen Binomialkoeffizienten betrachtet werden.

SATZ 7 (11.3.):Für jedes m und für jedes n gilt:

$$\sum_{j=0}^n \binom{m+j}{j} = \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} \\ + \dots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}.$$

Der *Beweis* von Satz 7 (11.3.) ist durch vollständige Induktion über n zu erbringen. Da er für ein beliebiges m geführt wird, gilt die Behauptung dann für jedes m .

(1) *Induktionsanfang*: Setzt man $n = 0$, so gilt

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1.$$

(2) *Induktionsschritt*:

Voraussetzung:

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}$$

Behauptung:

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{m+n}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} \\ = \binom{m+n+2}{n+1}$$

Beweis:

Addiert man in der Voraussetzung beiderseits $\binom{m+n+1}{n+1}$, so erhält man

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \binom{m+n}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} \\ = \binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1}.$$

Nach Satz 6 (11.3.) gilt weiter

$$\binom{m+n+1}{n} + \binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n+2}{n+1},$$

q. e. d.

BEISPIEL 4 (11.3.):

Man veranschauliche sich den Inhalt von Satz 7 (11.3.) an Hand der Zahlendarstellungen (b) und (a), etwa für $m = 2$ und $n = 3$.

$$\text{Es gilt: } \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

In der Zahlenanordnung (b) stehen die Binomialkoeffizienten $\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \dots, \binom{2m}{m}$ in der sogenannten Hauptdiagonalen dieses „Zahlenrechtecks“. Nach Satz 5 (11.3.) darf man die Zahlenanordnung (b) an ihrer Hauptdiagonalen derart spiegeln, daß die k -te Zeile in die k -te Spalte übergeht und umgekehrt, ohne daß sich an der Zahlenanordnung (a) etwas ändert. In der Formel von Satz 7 (11.3.) darf also nach Satz 5 (11.3.) für die in den Binomialkoeffizienten untenstehende Zahl links jeweils m und rechts $m + 1$ geschrieben werden:

$$\sum_{j=0}^n \binom{m+j}{m} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{m+n}{m}$$

$$= \binom{m+n+1}{m+1} \quad (1)$$

Formel (1) läßt sich einfacher darstellen, wenn man n durch $n - m$ ersetzt, wobei $m \leq n$ ist:

$$\sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j}{m} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{n}{m}$$

$$= \binom{n+1}{m+1} \quad (2)$$

BEISPIEL 5 (11.3.):

Man betrachte die Formeln (1) und (2) an Hand der Zahlendarstellungen (b) und (a).

Für $m = 2$ und $n = 5$ erhält man nach Formel (2)

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$$

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

Für $m = 1$ erhält man aus Formel (2) – unabhängig von den Überlegungen in Teil 11.2. – die Formel für die *Summe der ersten n natürlichen Zahlen* in einer besonders einfachen Darstellung:

$$\sum_{j=0}^n j = \binom{n+1}{2}$$

Setzt man in Formel (2) $n = k + m - 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{m+j}{m} &= \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{k+m-1}{m} \\ &= \binom{k+m}{m+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Setzt man in Formel (3) $k = n$, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m+j}{m} &= \sum_{j=1}^n \binom{m+j-1}{m} \\ &= \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{n+m-1}{m} \\ &= \binom{n+m}{m+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \binom{n+m-j}{m} &= \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m} + \dots + \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m} \\ &= \binom{n+m}{m+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

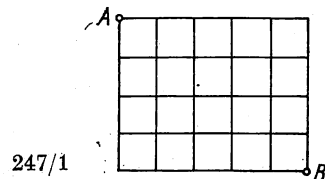
Man beachte, daß die Formeln (1) bis (5) lediglich verschiedene Darstellungsformen ein und desselben mathematischen Sachverhalts sind, der sich anschaulich an Hand der Zahlendarstellungen (a) oder auch (b) wie folgt beschreiben läßt:

Man addiere in der m -ten Zeile, von vorn beginnend, alle Zahlen bis zu einer gewünschten Zahl, etwa p . Die Summe dieser Zahlen ist dann unmittelbar unter p , in der $(m+1)$ -ten Zeile, abzulesen.

Beziehung 5. (↗ Beispiel 1 (11.3.)) folgt aus den Beziehungen 1. bis 4., wobei m , das wir allgemein als Variable für die in einem Binomialkoeffizienten untenstehende Zahl gewählt haben, die Ordnung der in der betreffenden Zeile stehenden arithmetischen Folge angibt (↗ Zahlendarstellung (b)).

Der Leser überlege, auf welche bzw. wie viele Arten man entlang der Gitterlinien in Bild 247/1 kürzestmöglich von A nach B gelangen kann (nur waagerechte Striche nach rechts und senkrechte Striche nach unten sind erlaubt) und vergleiche diese Überlegungen mit den vorstehenden Ausführungen.

Manchmal ist es zweckmäßiger, die Zahlenanordnungen (a) bzw. (b) in „Dreiecksform“ zu bringen:



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & (d) \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Die mit (c) bzw. (d) bezeichnete Darstellung heißt PASCALSches Dreieck (PASCAL, franz. Mathematiker, 1623 bis 1662).

Aus der Arithmetik sind die binomischen Formeln bekannt. Zum Beispiel gilt für je zwei beliebige reelle Zahlen a und b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Man erkennt, daß die Zahlen der Darstellung (c) in den binomischen Formeln als Koeffizienten von

$$a^{n-j}b^j \quad (n \leq 4, j \leq 4, n, j \in \mathbb{N})$$

aufzutreten. Dieses Ergebnis kann man wie folgt verallgemeinern.

SATZ 8 (11.3.) (Binomischer Satz):

Für je zwei beliebige reelle Zahlen a und b und für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\
 &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \\
 &\quad + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.
 \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz 8 (11.3.) läßt sich durch vollständige Induktion über n erbringen.

(1) *Induktionsanfang:* Falls $n = 1$ ist, gilt $(a + b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$.

(2) *Induktionsschritt:*

$$\begin{aligned} \text{Voraussetzung: } (a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Behauptung: } (a + b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b \\ &\quad + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) \\ &= \left[\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n \right] (a + b) \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a b^n \\ &\quad + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n \\ &\quad + \binom{n}{n} b^{n+1} \end{aligned}$$

Durch Addition der untereinanderstehenden Summanden erhält man unter Verwendung des Additionstheorems der Binomialkoeffizienten (Satz 6 (11.3.))

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Nach Satz 4 (11.3.) kann man $\binom{n}{0}$ durch $\binom{n+1}{0}$ und nach Satz 2 (11.3.)

$\binom{n}{n}$ durch $\binom{n+1}{n+1}$ ersetzen, so daß die Behauptung gilt, q. e. d.

Aus Satz 8 (11.3.) ergeben sich einige weitere Einsichten.

1. Für $a = b = 1$ folgt

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

11.3.

2. Für $a = 1$ und $b = -1$ folgt

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

3. Aus den Folgerungen 1. und 2. ergibt sich durch Addition

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}.$$

4. Aus den Folgerungen 1. und 2. ergibt sich durch Subtraktion

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

In den Folgerungen 3. und 4. braucht man die linksstehende Summe nur so weit fortzusetzen, wie ihre Glieder von Null verschieden sind.

BEISPIEL 6 (11.3.):

Man veranschauliche sich die Folgerungen 1. bis 4. an Hand des PASCALSchen Dreiecks etwa für $n = 4$.

$$1. \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

$$2. \binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

$$3. \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + 6 + 1 = 8 = 2^3$$

$$4. \binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8 = 2^3$$

Analog zu Beispiel 1 (11.3.) kann man folgende Aufgabe stellen.

BEISPIEL 7 (11.3.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, „SCHULE“ in der folgenden Anordnung zu lesen, ohne dabei Reihen zu überspringen?

S
C C
H H H
U U U U
L L L L L
E E E E E E

Verfährt man beim Lösen dieser Aufgabe wie in Beispiel 1 (11.3.), so erhält man an Stelle der Buchstaben die Zahlen des PASCALSchen Dreiecks und schließlich als Summe der Zahlen auf der letzten Zeile nach Satz 8 (11.3.), Folgerung 1,

$$2^5 = 32.$$

Man kann also „SCHULE“ auf 32 Arten lesen.

Auf Grund des binomischen Satzes kann man eine Rekursionsformel für die Summe der ersten n Potenzzahlen $\left(\sum_{j=1}^n j^m, m \in \mathbb{N}\right)$ herleiten.

Nach Satz 8 (11.3.) gilt für jede natürliche Zahl k :

$$0^k = (1-1)^k = 1^k - \binom{k}{1} 1^{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \cdot 1 + (-1)^k \cdot 1$$

$$1^k = (2-1)^k = 2^k - \binom{k}{1} 2^{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \cdot 2 + (-1)^k \cdot 1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(n-1)^k = (n-1)^k = n^k - \binom{k}{1} n^{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} \cdot n + (-1)^k \cdot 1$$

Wir setzen: $s_1 = 1 + 2 + \dots + n$

$$s_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$\dots \dots \dots$

$$s_{k-1} = 1^{k-1} + 2^{k-1} + \dots + n^{k-1}$$

Wir addieren die obigen Gleichungen und erhalten

$$0^k + 1^k + \dots + (n-1)^k$$

$$= 1^k + 2^k + \dots + n^k - \binom{k}{1} s_{k-1} + \binom{k}{2} s_{k-2} + \dots$$

$$+ (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} s_1 + (-1)^k n.$$

Wegen

$$\binom{k}{1} = k, \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}, \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}, \dots, \binom{k}{k-1} = k$$

folgt

$$n^k - k s_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} s_{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6} s_{k-3} + \dots$$

$$+ (-1)^{k-1} k s_1 + (-1)^k n = 0$$

$$\circ s_{k-1} = \frac{1}{k} \left(n^k + \frac{k(k-1)}{2} s_{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6} s_{k-3} + \dots \right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1} k s_1 + (-1)^k n \right).$$

Wir erhalten demnach für

$$k=2: s_1 = \frac{1}{2} (n^2 + (-1)^2 n) = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\begin{aligned} k=3: s_2 &= \frac{1}{3} (n^3 + 3s_1 - n) = \frac{1}{3} \left(n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= \frac{n}{6} (2n^2 + 3(n+1) - 2) = \frac{n}{6} (2n^2 + 3n + 1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Man kann durch Nachrechnen bestätigen, daß man für $k=4$ erneut $s_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ erhält. Für $k=5$ ergibt sich dann

$$s_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

wovon man sich ebenfalls durch Nachrechnen überzeugen kann.

SATZ 9 (11.3.):

Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ und für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j^{k-1} = s_{k-1} &= \frac{1}{k} \left(n^k + \frac{k(k-1)}{2} s_{k-2} \right. \\ &\quad - \frac{k(k-1)(k-2)}{6} s_{k-3} + \dots \\ &\quad \left. + (-1)^{k-1} k s_1 + (-1)^k n \right). \end{aligned}$$

In Anwendung von Satz 9 (11.3.) und Verallgemeinerung der Zahlendarstellung (a) (\nearrow 240) sind wir prinzipiell in der Lage, das n -te Glied einer arithmetischen Folge m -ter Ordnung anzugeben. Man braucht nur, jeweils unter Beibehaltung des ersten Gliedes der betreffenden Folge, deren einzelne Differenzenfolgen zu bestimmen und von ihnen anschließend entsprechend die n -ten Partialsummen zu bilden.

BEISPIEL 8 (11.3.):

Gegeben sei die arithmetische Folge 4. Ordnung

$$4, 19, 55, 125, \dots$$

Man ermittle deren n -tes Glied.

Durch sukzessive Differenzenbildung gelangt man von unten nach oben zu folgender Darstellung:

4	7	10	13
4	11	21	34
4	15	36	70
4	19	55	125

1. Für die arithmetische Folge erster Ordnung 4, 7, 10, 13, ... gilt $a_n = 3n + 1$.
2. Bildet man von (a_n) die n -te Partialsumme, so erhält man das n -te Glied der arithmetischen Folge zweiter Ordnung

4, 11, 21, 34, ...

Es gilt also

$$\sum_{j=1}^n (3j + 1) = \frac{3n(n+1)}{2} + n = \frac{n}{2}(3n + 5).$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \sum_{j=1}^n \frac{j}{2} (3j + 5) &= \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{5}{2} \sum_{j=1}^n j \\
 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{5}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{12} (6n + 3 + 15) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+3)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)(j+3)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^3 + 2 \sum_{j=1}^n j^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^n j \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{24} [3n(n+1) + 8(2n+1) + 18] \\
 &= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 + 19n + 26) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+13)}{24}
 \end{aligned}$$

Man vergleiche die Darlegungen dieses Teiles mit denen in Teil 11.1.

DEFINITION 1 (12.):

(a_n) heißt **geometrische Folge** genau dann, wenn es eine von n unabhängige Zahl $q \neq 0$ derart gibt, daß für jedes n gilt:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (a_1 \neq 0).$$

BEISPIEL 1 (12.):

$$\text{a) } (a_n) = 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots; \quad q = 2$$

$$\text{b) } (a_n) = \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}, \dots; \quad q = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } (a_n) = -2, -6, -18, -54, \dots, (-2) \cdot 3^{n-1}, \dots; \quad q = 3$$

Um festzustellen, ob eine geometrische Folge (a_n) monoton wachsend oder fallend ist oder etwa eine andere Eigenschaft hat, müssen q und a_n (bzw. a_1) untersucht werden.

Man kann die Ergebnisse wie folgt zusammenstellen:

1. $q > 0$

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $q > 1$

Wenn $a_1 \begin{cases} > \\ < \end{cases} 0$ ist, so ist (a_n) (streng) monoton $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$.

b) $q = 1$
 (a_n) ist konstant.

c) $q < 1$

Wenn $a_1 \begin{cases} > \\ < \end{cases} 0$ ist, so ist (a_n) (streng) monoton $\begin{cases} \text{fallend} \\ \text{wachsend} \end{cases}$.

2. $q < 0$

(a_n) ist alternierend.

Aus Definition 1 (12.) folgt weiter, daß eine geometrische Folge (a_n) durch ihr Anfangsglied a_1 und den konstanten Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ bestimmt ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_1 q^2 \\ a_4 &= a_1 q^3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= a_1 q^{n-1}. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser expliziten Darstellung des Bildungsgesetzes geometrischer Folgen ergibt sich wieder durch Anwendung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion, was dem Leser unter Beachtung der Analogie zu Teil 11.1. überlassen bleiben kann.

SATZ 1 (12.):

Für jede geometrische Folge (a_n) gilt:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad (a_1 \neq 0).$$

Eine geometrische Folge (a_n) ist durch die Angabe zweier Glieder von (a_n) im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Man kann sich davon überzeugen, daß eine dem Beispiel 4 (11.1.) entsprechende Aufgabe auf eine Gleichung höheren Grades in q führen kann.

Die n -te Partialsumme s_n von (a_n) kann wie folgt entwickelt werden.

Es gilt etwa

$$s_4 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3$$

$$s_4 = a_1 (1 + q + q^2 + q^3)$$

$$s_4 = a_1 \frac{q^4 - 1}{q - 1}$$

(↗ 221, Folgen 1. bis 3.)

SATZ 2 (12.):

Für jede geometrische Folge (a_n) mit $q \neq 1$ gilt:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ bzw. } s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Man überlege sich, wann man zweckmäßigerweise die erste und wann die zweite Gleichung anwenden wird.

Beweis von Satz 2 (12.) (durch vollständige Induktion):

(1) *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ gilt $s_1 = a_1$.

(2) *Induktionsschritt*:

Voraussetzung: $s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Behauptung: $s_{n+1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n \\ &= \frac{a_1 q^n}{q - 1} - \frac{a_1}{q - 1} + \frac{a_1 q^n (q - 1)}{q - 1} \\ &= \frac{a_1 q^n (1 + q - 1) - a_1}{q - 1} \\ &= a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \end{aligned}$$

q. e. d.

Analog zu den entsprechenden Bemerkungen in Teil 11.1. gibt es hier ebenfalls zehn Berechnungsfälle, die allerdings zum Teil schwieriger sind als dort, weil man auch Gleichungen höheren Grades oder Exponentialgleichungen zu lösen hat.

Es seien einige Übungen folgender Art empfohlen:

Gegeben sei etwa die Folge 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Es gilt also $a_1 = 2$, $a_n = 1024$, $q = 2$, $n = 10$, $s_n = 2046$.

Nun kann man einige Berechnungsfälle durchführen, wobei stets eine Selbstkontrolle möglich ist.

Es sei auf den Unterschied zwischen q^{n-1} und $q^n - 1$ verwiesen, dessen Nichtbeachtung zu fehlerhafter Rechnung führt.

$$(\sim \forall q \forall n: q^{n-1} = q^n - 1 \text{ äq } \exists q \exists n: q^{n-1} \neq q^n - 1)$$

BEISPIEL 2 (12.):

In einer geometrischen Folge (a_1) seien $a_1 = 2$, $a_n = 1024$ und $s_n = 2046$.

Man ermittle q und n .

$$1024 = 2 q^{n-1} \rightarrow 512 = q^{n-1} \rightarrow q^n = 512 q \quad (*)$$

$$2046 = 2 \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow 1023 = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{und wegen } (*)$$

$$1023 = \frac{512q - 1}{q - 1} \rightarrow 511q = 1022 \rightarrow q = 2 \rightarrow n = 10$$

SATZ 3 (12.):

Jedes Glied einer geometrischen Folge ist das **geometrische Mittel** von dessen beiden benachbarten Gliedern.

Hieraus erklärt sich der Name „geometrische Folge“.

Der *Beweis* von Satz 3 (12.) ist analog dem Beweis von Satz 5 (11.1.) zu führen und kann dem Leser überlassen bleiben.

Gelegentlich wird auch für eine geometrische Folge mit dem Quotienten q die Aufgabe gestellt, zwischen je zwei ihrer Glieder n Zahlen derart zu interpolieren, daß eine neue geometrische Folge mit q' als Quotient entsteht. Entsprechend den in Teil 11.1. angestellten Überlegungen (\nearrow 231) erhält man

$$q' = \sqrt[n+1]{q}.$$

Auf Grund des Bildungsgesetzes geometrischer Folgen erhält man für $a_1 > 0$ und $q > 1$ relativ schnell große Zahlen, wie man das nicht immer erwartet.

Die folgende Tabelle aller Zweierpotenzen von 2^0 bis 2^{32} soll einen Eindruck hiervon vermitteln helfen.

$2^0 = 1$	$2^{11} = 2048$	$2^{22} = 4194304$
$2^1 = 2$	$2^{12} = 4096$	$2^{23} = 8388608$
$2^2 = 4$	$2^{13} = 8192$	$2^{24} = 16777216$
$2^3 = 8$	$2^{14} = 16384$	$2^{25} = 33554432$
$2^4 = 16$	$2^{15} = 32768$	$2^{26} = 67108864$
$2^5 = 32$	$2^{16} = 65536$	$2^{27} = 134217728$
$2^6 = 64$	$2^{17} = 131072$	$2^{28} = 268435456$
$2^7 = 128$	$2^{18} = 262144$	$2^{29} = 536870912$
$2^8 = 256$	$2^{19} = 524288$	$2^{30} = 1073741824$
$2^9 = 512$	$2^{20} = 1048576$	$2^{31} = 2147483648$
$2^{10} = 1024$	$2^{21} = 2097152$	$2^{32} = 4294967296$

BEISPIEL 3 (12.):

Jemand möge zwei Bekannten eine Neuigkeit erzählen, die diese wieder je zwei bisher nicht informierten Personen weitererzählen usw. Nehmen wir an,

daß dies unter entsprechenden technischen Bedingungen jeweils innerhalb der nächsten Viertelstunde geschieht, so kann man aus der oben stehenden Tabelle zum Beispiel folgendes ablesen:

Nach etwa 6 Stunden wäre die gesamte Bevölkerung der DDR, nach etwa 8 Stunden die gesamte Erdbevölkerung informiert.

BEISPIEL 4 (12.):

Der Sage nach forderte der indische König SHERAN den Erfinder des Schachspiels SESSA auf, irgendeinen Wunsch zur Belohnung für diese Erfindung zu äußern. SESSA erbat ein Weizenkorn auf das erste Feld eines Schachbretts, zwei Weizenkörner auf das zweite, vier auf das dritte usw. bis zum letzten Feld. Die Annahme, daß dieser Wunsch bescheiden sei, konnte dem König widerlegt werden:

$$s_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Das sind 18 Trillionen 446 Billiarden 744 Billionen 73 Milliarden 709 Millionen 551 Tausend 615 Weizenkörner. Diese Zahl entspricht etwa dem 6000fachen der heutigen jährlichen Weltproduktion von Weizen.

BEISPIEL 5 (12.):

Faltet man ein genügend großes Stück Papier mehrfach, so bildet die Dicke dieser gefalteten Papierschicht die Summe einer geometrischen Folge mit dem Quotienten 2. Unter der Annahme, daß das Stück Papier 0,1 mm dick ist und 40mal gefaltet werden soll, erhält man $0,1 \text{ mm} \cdot 2^{40} \approx 109951 \text{ km}$, also fast ein Drittel der Entfernung Erde–Mond.

Bisher haben wir nur Summen von endlich vielen Gliedern einer Folge gebildet. Summen von unendlich vielen Gliedern einer Folge haben wir nicht definiert.

Durch Überlegungen, die hier nicht dargelegt werden können, kann man in gewissen Fällen auch für **unendliche** geometrische Folgen eine „Summe“ s finden. Falls nämlich $|q| < 1$ ist, erhält man s überraschend einfach nach der Formel

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Gilt dagegen $|q| \geq 1$ und $a_1 \neq 0$, so hat die betreffende unendliche geometrische Folge keine Summe.

BEISPIEL 6 (12.):

Mit Hilfe eines Trugschlusses wollte ZENON (griech. Philosoph. um 550 v. u. Z.) die Unzulänglichkeit mathematischer Untersuchungen nachweisen.

Der Trugschluß besteht (unter Verwendung heutiger Maße) in folgender Überlegung:

ACHILLES (griech. Held des Trojanischen Krieges, berühmt als schneller Läufer, in Zeichen A) kann eine Schildkröte, in Zeichen S, niemals einholen, geschweige denn überholen, obwohl A zehnmal so schnell wie S läuft. Hat S etwa einen Vorsprung von 100 m vor A, so ist S um 10 m weitergekröchen, wenn A die 100 m zurückgelegt hat usw. S behält also (so schlußfolgerte ZENON) ständig einen, wenn auch schließlich sehr kleinen Vorsprung vor A. Da dies der Erfahrung widerspricht, ist das mathematische Denken fehlerhaft.

Man kann zunächst berechnen, daß bzw. wo ACHILLES die Schildkröte einholt.

$$s = \frac{100}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1000}{9} = 111 \frac{1}{9}$$

A erreicht S in dem Augenblick, in dem er $111 \frac{1}{9}$ m bzw. S $11 \frac{1}{9}$ m zurückgelegt hat.

Hierbei ist allerdings zu beachten, daß der logische Gehalt dieses Trugschlusses etwas tiefer liegt. Richtig ist nämlich, daß in allen Zeitpunkten, in denen A den jeweils letzten Platz von S erreicht hat, S nicht mehr dort ist. A erreicht also S unbegrenzt oft nicht. „Unbegrenzt oft nicht“ und „nie“ sind aber nicht synonym (bedeutungsgleich). „Unbegrenzt oft nicht“ enthält hier ein (verneinendes) Urteil über beliebige viele, sich in einem begrenzten Zeitraum häufende Zeitpunkte. „Nie“ bedeutet eine Verneinung in bezug auf den als unbegrenzt beurteilten Zeitablauf.

Jemand urteilt beispielsweise auch falsch, wenn er etwa sagt: „Mein Freund wird mich niemals besuchen, denn ich habe schon unzählige Male auf die Uhr geschaut.“

Übersicht über einige wichtige Zahlbeziehungen

(Aufgaben des sogenannten kleinen Einmaleins sind nicht erfaßt.)

4 = 2 ²	30 = 2 · 15
8 = 2 ³	32 = 2 ⁵ = 2 · 16
9 = 3 ²	33 = 3 · 11
16 = 2 ⁴ = 4 ²	34 = 2 · 17
22 = 2 · 11	36 = 6 ² = 3 · 12 = 2 · 18
24 = 2 · 12	38 = 2 · 19
25 = 5 ²	39 = 3 · 13
26 = 2 · 13	42 = 3 · 14
27 = 3 ³	44 = 4 · 11
28 = 2 · 14	45 = 3 · 15

48 =	4 · 12 = 3 · 16
49 =	7 ²
51 =	3 · 17
52 =	4 · 13
54 =	3 · 18
55 =	5 · 11
56 =	4 · 14
57 =	3 · 19
60 =	5 · 12 = 4 · 15
64 =	2 ⁶ = 4 ³
=	8 ² = 4 · 16
65 =	5 · 13
66 =	6 · 11
68 =	4 · 17
70 =	5 · 14
72 =	6 · 12 = 4 · 18
75 =	5 · 15
76 =	4 · 19
77 =	7 · 11
78 =	6 · 13
80 =	5 · 16
81 =	3 ⁴ = 9 ²
84 =	7 · 12 = 6 · 14
85 =	5 · 17
88 =	8 · 11
90 =	6 · 15 = 5 · 18
91 =	7 · 13
95 =	5 · 19
96 =	8 · 12 = 6 · 16
98 =	7 · 14
99 =	9 · 11
100 =	10 ²
102 =	6 · 17
104 =	8 · 13
105 =	7 · 15
108 =	9 · 12 = 6 · 18
110 =	10 · 11
111 =	3 · 37
112 =	8 · 14 = 7 · 16
114 =	6 · 19
117 =	9 · 13
119 =	7 · 17
120 =	10 · 12 = 8 · 15
121 =	11 ²
125 =	5 ³
126 =	9 · 14 = 7 · 18
128 =	2 ⁷ = 8 · 16
130 =	10 · 13
133 =	7 · 19
135 =	9 · 15
136 =	8 · 17
140 =	10 · 14
143 =	11 · 13
144 =	12 ² = 9 · 16 = 8 · 18
150 =	10 · 15
152 =	8 · 19
153 =	9 · 17
160 =	10 · 16
162 =	9 · 18
169 =	13 ²
170 =	10 · 17
171 =	9 · 19
180 =	10 · 18
190 =	10 · 19
196 =	14 ²
216 =	6 ³
222 =	6 · 37
225 =	15 ²
243 =	3 ⁵
256 =	2 ⁸ = 16 ²
289 =	17 ²
324 =	18 ²
333 =	9 · 37
343 =	7 ³
361 =	19 ²
400 =	20 ²
441 =	21 ²
484 =	22 ²
512 =	2 ⁹ = 8 ³
529 =	23 ²
576 =	24 ²
625 =	25 ²
676 =	26 ²
729 =	3 ⁶ = 9 ³ = 27 ²
784 =	28 ²
841 =	29 ²
900 =	30 ²
961 =	31 ²
1001 =	7 · 11 · 13
1024 =	2 ¹⁰ = 32 ²

Die **Kombinatorik** ist ein Gebiet der Mathematik, das sich mit Problemen der Anordnung oder der Auswahl von bestimmten Objekten aus verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit oder unseres Denkens beschäftigt.

Wir beschränken uns von vornherein auf endliche Mengen. Man kann den Gegenstand der Kombinatorik nach SACHS bzw. FLACHSMEYER wie folgt beschreiben:

„Kombinatorik ist die Theorie der endlichen Mengen.“ [32]

„Zur Kombinatorik zählen alle interessanten Fragen über endliche Mengen.“ [18]

In der Kombinatorik werden zum Beispiel folgende Aufgaben behandelt.

BEISPIEL 1 (13.):

Welche bzw. wie viele dreistellige Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3 zusammenstellen, wenn jede Grundziffer jeweils genau einmal vorkommen soll?

Lösung: 123, 132, 213, 231, 312, 321; also 6 Ziffern v.

BEISPIEL 2 (13.):

Welche bzw. wie viele zweistellige Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3 zusammenstellen, wenn jede Grundziffer auch mehrmals vorkommen darf?

Lösung: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33; also 9 Ziffern v.

BEISPIEL 3 (13.):

Von den fünf Schülern Armin, Brigitte, Christine, Dieter und Elke sollen zwei Schüler für gute Leistungen ausgezeichnet werden.

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

Lösung: Wir bezeichnen die Schüler mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vornamen: A, B, C, D, E . Nun lassen sich die einzelnen Möglichkeiten wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{l} AB \quad BC \quad DC \quad DE \\ AC \quad BD \quad CE \\ AD \quad BE \\ AE \end{array}$$

Es gibt also 10 Möglichkeiten.

Wir bemerken, daß man bei der Lösung zum Beispiel an Stelle von AB auch BA hätte angeben können. Man darf in diesem Falle nur nicht AB und BA notieren, weil ja beide Darstellungen die gleiche Delegation bedeuten.

Vergleichen wir die zehn Möglichkeiten miteinander, so können wir feststellen, daß jeder Schüler viermal ausgewählt werden kann.

Die Beispiele 1 (13.) bis 3 (13.) erhellen bereits einige für eine mögliche Einteilung von Aufgaben der Kombinatorik wichtige Gesichtspunkte:

1. Entweder werden alle Elemente der jeweils gegebenen Mengen (Grundziffern, Buchstaben, ...) für die Zusammenstellungen benutzt (Beispiel 1 (13.)) oder nicht (Beispiele 2 (13.) und 3 (13.)).
2. Entweder dürfen sich hierbei Elemente wiederholen (Beispiel 2 (13.)) oder nicht (Beispiele 1 (13.) und 3 (13.)).
3. Entweder ist bei den Zusammenstellungen die Anordnung bzw. die Reihenfolge der Elemente zu berücksichtigen (Beispiel 1 (13.) und 2 (13.)) oder nicht (Beispiel 3 (13.)).

Diese Beispiele sollen aber auch einige erzieherische Absichten verdeutlichen, die wir bei der Behandlung dieses Stoffgebietes verfolgen.

Bei praktischen und theoretischen Aufgabenstellungen muß man oft die Frage beantworten, welche bzw. wie viele Möglichkeiten es für deren Lösung gibt. Dies zu erkennen, sollten wir die Schüler bereits von der Unterstufe an planmäßig lehren.

Solange jemand eine ihm gestellte Aufgabe noch nicht völlig überschaut, wird er sie häufig durch Probieren zu lösen versuchen. Entscheidend hierbei ist, dies systematisch zu tun. Die Schüler hierzu zu befähigen, ist ein wesentliches Moment der Bildung und Erziehung, das bei Aufgabenstellungen der Kombinatorik notwendigerweise im Mittelpunkt der Betrachtungen steht.

Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten ist Voraussetzung dafür, richtige Entscheidungen treffen zu können; das heißt mit anderen Worten, eine Alternative zunächst einmal vollständig zu erfassen, um daraus durch Fallunterscheidung weiterzuschließen.

CHINTSCHIN äußert sich ausführlich zu dieser Problematik und stellt fest, daß die Forderung nach der Durchführung vollständiger Fallunterscheidungen, nach der Berücksichtigung aller möglichen Arten der zu untersuchenden Situation, ein notwendiger Bestandteil nicht nur des mathematischen, sondern jeglichen richtigen Denkens ist. „Eine Argumentation, in der nicht alle bestehenden Möglichkeiten berücksichtigt werden, läßt immer Raum für berechnete Einwände und kann deshalb nicht als vollwertig anerkannt werden . . .“ [1]

Gelingt es nicht, eine dem Problem innewohnende Systematik zu erkennen, so ist es, abgesehen von leicht überschaubaren Fällen, nur selten oder durch Zufall möglich, diese Aufgabe zu lösen. Die Anerziehung der für ein solches bewußtes Suchen erforderlichen gedanklichen Disziplin ist mit Hilfe von Aufgabenstellungen der Kombinatorik besonders gut möglich. Außerdem lehren wir hierbei Methoden des Denkens, wie sie für die Mathematik wesentlich sind:

Ein schwierigerer und noch nicht übersehbarer Sachverhalt wird auf einen einfacheren und schon bekannten zurückgeführt. Wir hätten etwa in Beispiel 3 (13.) ebensogut die Auswahl der beiden Schüler der Reihe nach zunächst aus zwei, dann aus drei, schließlich aus vier und dann erst aus fünf oder auch noch mehr Schülern vornehmen können.

Man kann also die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten durch Ermitteln und Anwenden einer geeigneten Systematik sukzessiv vergrößern, um Einblick in vorhandene Gesetzmäßigkeiten zu erlangen.

Hierbei ist es zweckmäßig, sich geeigneter Übersichten zu bedienen. In Beispiel 3 (13.) findet man die Zahlen der Darstellung (a), Zeile 3 (↗ 240) wieder. Auf einer solchen Grundlage sind Verallgemeinerungen möglich.

Wir werden im folgenden Zusammenhänge verschiedener Art erkennen und erörtern.

1. Wir werden mengentheoretische Zusammenhänge zunächst durch verschiedene Abbildungsvorgänge verdeutlichen (↗ Teile 14.1. und 15.1.) und schließlich mit Hilfe von VENN-Diagrammen einen Ausblick auf einige weiterführende Fragestellungen der Kombinatorik geben (↗ Teil 15.2.).
2. Wir werden funktionale Zusammenhänge untersuchen und Formeln für die Anzahlbestimmung verschiedener Grundaufgaben der Kombinatorik entwickeln (↗ Teile 14.2. bis 14.4. und 15.1.).
3. Wir werden Zusammenhänge innerhalb unseres Erfahrungsbereichs durch eine geeignete Gliederung von Sachaufgaben (↗ Teil 16.) verdeutlichen, wobei wir bei deren Auswahl den kindlichen Erlebnisbereich besonders berücksichtigen.

Die mathematische Zielsetzung der Kombinatorik ist durch folgende zwei Hauptaufgaben gekennzeichnet:

1. Es ist festzustellen, *welche Möglichkeiten* es gibt, Elemente einer endlichen Menge nach bestimmten Bedingungen auszuwählen oder anzuordnen.
2. Es ist festzustellen, *wie viele Möglichkeiten* es dafür insgesamt gibt.

Die Kombinatorik ist für eine ganze Anzahl moderner mathematischer und technischer Disziplinen bedeutsam (z. B. Graphentheorie, Lineare Optimierung, Informationstheorie, Nachrichtentechnik).

Bevor wir den Begriff „Komplexion“ (↗ Definition 1 (14.1.)) präzisieren, genügt es, das Begriffswort als Fremdwort für eine Auswahl- oder Anordnungsweise aufzufassen.

Wir werden in Teil 14.1. zunächst an Hand eines mehrfach zu variierenden Beispiels (↗ Beispiele 1 (14.1.) bis 6 (14.1.)) Definitionen grundlegender Begriffe der Kombinatorik erarbeiten.

Dann werden wir einen Lösungsalgorithmus für einfache Aufgaben der Kombinatorik erörtern (↗ Teil 14.2.) und schließlich Lösungsformeln für die Grundaufgaben der Kombinatorik entwickeln (↗ Teile 14.3. und 14.4.).

14.1.

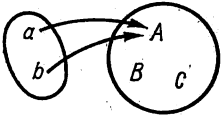
Beispiele und Definitionen

BEISPIEL 1 (14.1.):

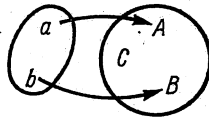
Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei zu unterscheidende Preise (etwa Bücher mit verschiedenen Titeln) an drei Schüler so zu verteilen, daß ein Schüler (wie etwa bei einem Sportwettkampf) auch beide (mehrere) Preise bekommen kann und alle Preise tatsächlich vergeben werden?

Wir bezeichnen die beiden Preise mit a und b , die Menge der Preise mit M , also $M = \{a, b\}$. Weiterhin bezeichnen wir die drei Schüler mit A, B, C , die Menge der Schüler mit N , also $N = \{A, B, C\}$. Dann können wir uns zur Lösung der Abbildungsschemata bedienen, wie sie zur Veranschaulichung von Relationen zwischen zwei endlichen Mengen üblich sind, und erhalten die Verteilungen, wie sie etwa in Bild 267/1 dargestellt sind.

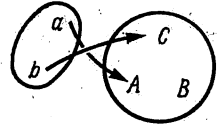
1.



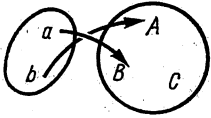
2.



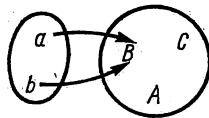
3.



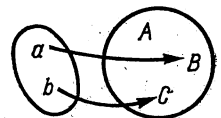
4.



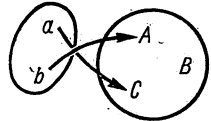
5.



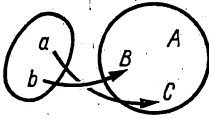
6.



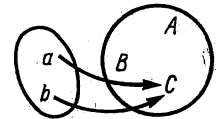
7.



8.



9.



267/1

Es gibt demnach unter den hier gegebenen Bedingungen neun verschiedene Möglichkeiten der Preisverteilung.

Die in Bild 267/1 gewählte Art der Veranschaulichung ist nicht besonders übersichtlich, weil bei der Darstellung der Elemente beider Mengen keine bestimmte Reihenfolge eingehalten wurde. Bisher haben wir diesbezüglich auch noch keine Überlegungen angestellt. Wir wissen, daß eine Menge von der Reihenfolge ihrer Elemente unabhängig ist. Es ist für das Ergebnis tatsächlich gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Preise verteilt werden: ob also zum Beispiel erst a an C und dann b an A oder erst b an A und dann a an C gegeben wird (↗ Bild 267/1, Fall 7.). Es liegt jeweils die gleiche Abbildung vor. Man kann jede Preisverteilung als eindeutige Abbildung (von) der endlichen Menge M in die endliche Menge N auffassen. Wir bezeichnen nun auch allgemein zwei endliche Mengen mit M und N und präzisieren den Begriff „Komplexion“.

DEFINITION 1 (14.1.):

Eine eindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M in eine endliche Menge N heißt **Komplexion**.

Bei der Veranschaulichung von Komplexionen kann man sich im Vergleich zu Bild 267/1 einfacherer Methoden bedienen, denen aber auch weitergehende Überlegungen zugrunde liegen.

Wir wenden zwei Sätze der Mengenlehre an, die wir hier ohne Beweis wiedergeben.

SATZ 1 (14.1.):

Zu jeder endlichen Menge M gibt es eine Relation R , die M ordnet.

SATZ 2 (14.1.):

Alle geordneten endlichen Mengen $[M; R]$ sind zu einem Abschnitt $A(n)$ der Folge der natürlichen Zahlen gleichmächtig.

Alle zu einem bestimmten Abschnitt $A(n)$ gleichmächtigen geordneten Mengen $[M; R]$ sind dem durch die übliche Kleinerbeziehung für natürliche Zahlen geordneten Abschnitt $A(n)$ ähnlich und daher auch untereinander ähnlich.

In Beispiel 1 (14.1.) kann man sich die Mengen M und N derart geordnet denken, daß für die Buchstaben deren alphabetische Reihenfolge gilt. Nach Satz 2 (14.1.) sind dann bezüglich der jeweils festgelegten Ordnungsrelation folgende Isomorphismen möglich, wobei $M' = \{1, 2\}$ und $N' = \{1, 2, 3\}$ seien.

$$\begin{array}{c} \underline{[M; R] \sim [M'; <]} \\ a \leftrightarrow 1 \\ b \leftrightarrow 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \underline{[N; R] \sim [N'; <]} \\ A \leftrightarrow 1 \\ B \leftrightarrow 2 \\ C \leftrightarrow 3 \end{array}$$

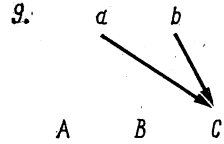
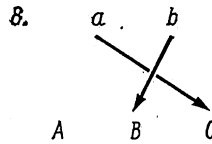
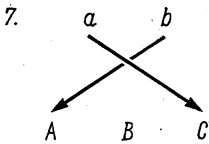
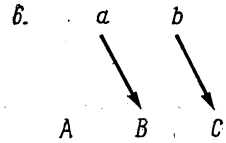
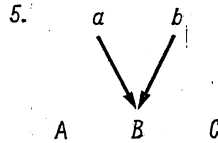
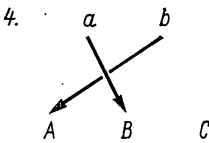
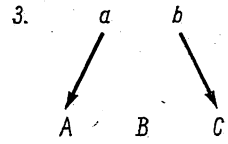
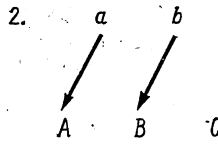
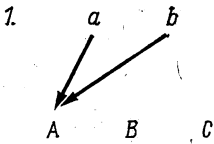
Anschaulich heißt das, daß wir in Beispiel 1 (14.1.) die beiden Preise auch entsprechend mit 1 bzw. 2 und die drei Schüler entsprechend mit 1, 2 bzw. 3 hätten bezeichnen können.

DEFINITION 2 (14.1.):

Ist eine Menge von (natürlichen) Zahlen nach der Kleinerbeziehung bzw. eine Menge von Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge geordnet, so nennt man eine solche Anordnung der Elemente einer dieser Mengen deren **natürliche Anordnung**.

Ein Element einer dieser Mengen heißt **höheres** oder **niedrigeres Element einer Menge** je nachdem, ob es in deren natürlicher Anordnung hinter oder vor einem anderen Element der betreffenden Menge steht.

Unter der Voraussetzung, daß die Elemente von M und N in deren natürlicher Anordnung gegeben sind, ist die in Bild 269/1 gezeigte vereinfachte Darstellung von Bild 267/1 möglich.



269/1

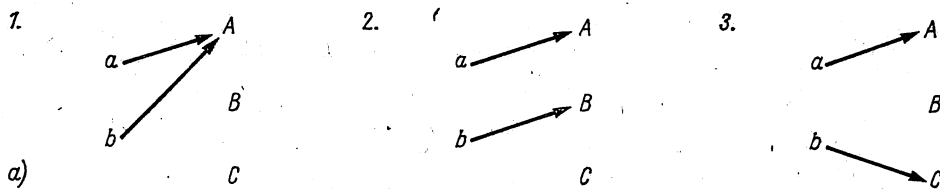
Natürliche Anordnung der Elemente von M und N vorausgesetzt, kann man Bild 269/1 auch wie folgt darstellen:

- | | | |
|---------|---------|---------|
| 1. AA | 2. AB | 3. AC |
| 4. BA | 5. BB | 6. BC |
| 7. CA | 8. CB | 9. CC |

Man vergleiche die Entwicklung dieser Kurzform mit der entsprechenden Darstellung von Folgen (\nearrow 10. (2)). In beiden Fällen können wir uns durch bestimmte Forderungen an diejenige Menge, aus (bzw. von) der abgebildet wird, auf die Angabe der Elemente des Nachbereichs der betreffenden Abbildung beschränken. Allerdings geht hierbei die anschauliche Deutung der Vorstellung verloren, daß sowohl Folgen als auch Komplexionen Abbildungen, insbesondere sogar Funktionen sind.

Wir haben in den Schemata in Bild 269/1 die Elemente von M jeweils oben, die von N jeweils unten angeordnet. Wir hätten ebensogut andere Formen wählen können, zum Beispiel die in Bild 270/1 jeweils für die ersten drei Komplexionen angegebenen. Wir haben bereits durch die Numerierung der einzelnen Komplexionen zum Ausdruck gebracht, daß diese ebenso wie die Elemente der betreffenden Mengen geordnet sind. Aus der Kurzdarstellung in Bild 269/1 ist zu ersehen, daß je zwei dieser Komplexionen wie in einem Wörterbuch aufeinander folgen. Zwei derart geordnete Komplexionen heißen **lexikographisch geordnet**.

14.1.

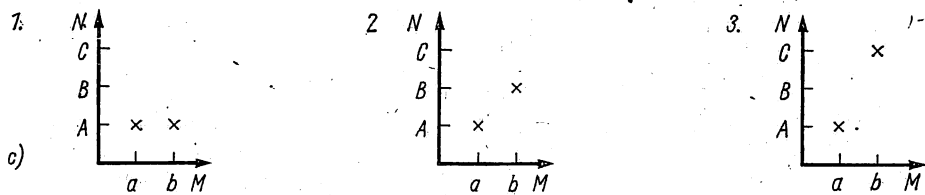


b)

	a	b
A	×	×
B		
C		

	a	b
A	×	
B		×
C		

	a	b
A	×	
B		
C		×



270/1

Wir haben im Anschluß an Satz 2 (14.1.) festgestellt, daß $[M; R] \leftrightarrow [M'; <]$ und $[N; R] \sim [N'; <]$ ist. In Beispiel 1 (14.1.) gilt weiterhin $M' \subset N'$. Es wäre ebenso möglich, daß $M' = N'$ oder $M' \supset N'$ ist, wobei M' und N' zunächst als Zeichen für Abschnitte der Folge der natürlichen Zahlen aufgefaßt werden können, aber auch als Zeichen für beliebige endliche Mengen, für die $M' \subset N'$ oder $M' = N'$ oder $M' \supset N'$ gelten muß. Dann kann Definition 1 (14.1.) wie folgt modifiziert werden.

DEFINITION 1' (14.1.):

Es seien M' und N' endliche Mengen, für die $M' \subset N'$ oder $M' = N'$ oder $M' \supset N'$ ist.

Eine eindeutige Abbildung von M' in N' heißt dann **Komplexion**.

Für die praktische Arbeit mit Komplexionen ist es lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit, welche der beiden Definitionen 1 (14.1.) oder 1' (14.1.) man bevorzugt. Wir haben bei unseren Darstellungen Definition 1 (14.1.) angewendet. Wir hätten ebensogut etwa die Preise mit 1 und 2, die Schüler mit 1, 2 und 3 bezeichnen und uns damit auf Definition 1' (14.1.) stützen können.

Für die weitere Arbeit ist es erforderlich, aus der Menge aller Komplexionen nach den in Teil 13. genannten Gesichtspunkten bestimmte Teilmengen auszuwählen und diese mit geeigneten Begriffswörtern zu versehen. Unter dieser Zielstellung ist es üblich, an Stelle von „Komplexion“ auch „Variation mit Wiederholung“ zu sagen.

Wir verwenden also „Komplexion“ und „Variation mit Wiederholung“ als Synonyme (bedeutungsgleiche Wörter).

Nun verändern wir Beispiel 1 (14.1.), um einen Sonderfall von Variationen mit Wiederholung zu erörtern.

BEISPIEL 2 (14.1.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, drei zu unterscheidende Preise an drei Schüler so zu verteilen, daß ein Schüler auch mehrere Preise bekommen kann und alle Preise tatsächlich vergeben werden?

Wir setzen für die Menge der Preise $M = \{a, b, c\}$ und für die Menge der Schüler $N = \{A, B, C\}$. Unter der Voraussetzung, daß die Elemente von M und N in deren natürlicher Anordnung gegeben sind, erhalten wir analog zu Bild 269/1 das Bild 272/1. In Kurzform:

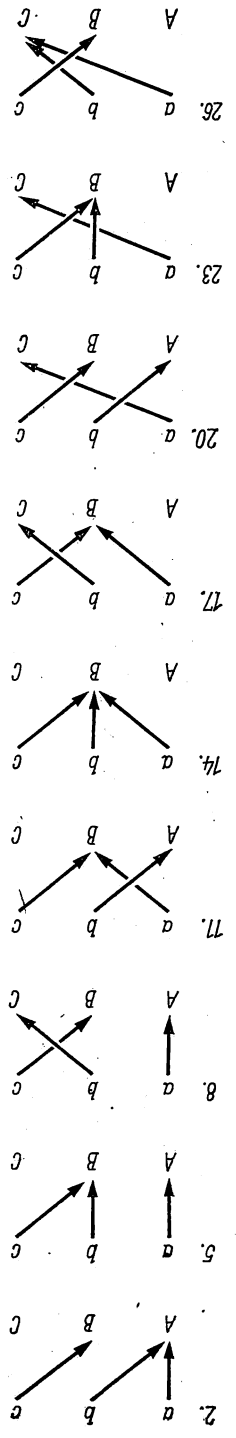
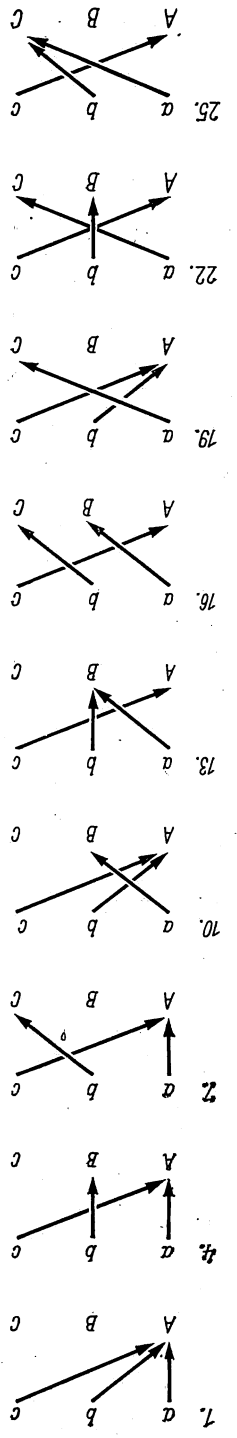
- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1. AAA | 2. AAB | 3. AAC |
| 4. ABA | 5. ABB | 6. ABC |
| 7. ACA | 8. ACB | 9. ACC |
| 10. BAA | 11. BAB | 12. BAC |
| 13. BBA | 14. BBB | 15. BBC |
| 16. BCA | 17. BCB | 18. BCC |
| 19. CAA | 20. CAB | 21. CAC |
| 22. CBA | 23. CBB | 24. CBC |
| 25. CCA | 26. CCB | 27. CCC |

Die hier möglichen 27 Variationen mit Wiederholung sind lexikographisch geordnet.

Wir bezeichnen nun die Anzahl der Elemente von M mit m , die Anzahl der Elemente von N mit n , setzen also $Z(M) = m$ und $Z(N) = n$. In Beispiel 2 (14.1.) gilt $m = n$.

DEFINITION 3 (14.1.):

Eine eindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M in eine endliche Menge N heißt **Permutation mit Wiederholung** genau dann, wenn $m = n$ ist, wobei $m = Z(M)$ und $n = Z(N)$ ist.



Unter Beachtung der Vorbemerkungen zu Definition 1' (14.1.) formulieren wir entsprechend für den Fall $M' = N'$ folgende Definition.

DEFINITION 3' (14.1.):

Eine eindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M' in sich heißt **Permutation mit Wiederholung**.

Wir variieren Beispiel 1 (14.1.) erneut.

BEISPIEL 3 (14.1.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei zu unterscheidende Preise an drei Schüler so zu verteilen, daß ein Schüler (etwa für besondere Leistungen zum Schuljahresende) höchstens einen Preis bekommen kann und alle Preise tatsächlich vergeben werden?

Man überlegt sich, daß dann in den Schemata der Bilder 267/1 oder 269/1 bzw. in der folgenden Kurzdarstellung die Komplexionen 1, 5 und 9 wegfallen, somit also sechs Möglichkeiten der Preisverteilung verbleiben.

Diese Komplexionen heißen auch Variationen ohne Wiederholung.

DEFINITION 4 (14.1.):

Eine eineindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M in eine endliche Menge N heißt **Variation ohne Wiederholung**.

Die in Definition 4 (14.1.) erhobene Forderung nach Eineindeutigkeit ist nur zu erfüllen, wenn die Anzahl der Elemente von M höchstens gleich der von N ist, wenn also $m \leq n$ ist.

Unter Beachtung der Vorbemerkungen zu Definition 1' (14.1.) formulieren wir entsprechend für den Fall $M' \subseteq N'$ folgende Definition.

DEFINITION 4' (14.1.):

Eine eineindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M' in eine endliche Menge N' heißt **Variation ohne Wiederholung**.

Wir variieren Beispiel 3 (14.1.) im Sinne von Beispiel 2 (14.1.).

BEISPIEL 4 (14.1.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, drei zu unterscheidende Preise an drei Schüler so zu verteilen, daß ein Schüler höchstens einen Preis bekommen kann und alle Preise tatsächlich vergeben werden?

14.1.

In diesem Fall müssen die Preise so verteilt werden, daß jeder Schüler genau einen Preis erhält.

In den Schemata des Bildes 272/1 bzw. der folgenden Kurzform verbleiben jetzt nur noch die Komplexionen 6, 8, 12, 16, 20, 22; alle anderen fallen weg. Es gibt also sechs Möglichkeiten der Preisverteilung.

Für die nun zu definierende Komplexionsart haben wir auch Beispiel 1 (13.) kennengelernt.

DEFINITION 5 (14.1.):

Eine eindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M auf eine endliche Menge N heißt **Permutation ohne Wiederholung**.

Die in Definition 5 (14.1.) erhobene Forderung nach Eineindeutigkeit ist nur zu erfüllen, wenn die Anzahl der Elemente von M gleich der von N ist, wenn also $m = n$ ist.

Unter Beachtung der Vorbemerkungen zu Definition 1' (14.1.) formulieren wir entsprechend für den Fall $M' = N'$ folgende Definition.

DEFINITION 5' (14.1.):

Eine eindeutige Abbildung von einer endlichen Menge M' auf sich heißt **Permutation ohne Wiederholung**.

Für Permutationen ohne Wiederholung, die unter anderem für die Gruppentheorie von Bedeutung sind, wollen wir noch den Begriff „Inversion“ definieren.

DEFINITION 6 (14.1.):

Zwei Elemente des Nachbereichs einer Permutation ohne Wiederholung bilden eine **Inversion** genau dann, wenn sie in der zu deren natürlichen Anordnung entgegengesetzten Reihenfolge stehen.

DEFINITION 7 (14.1.):

Eine **Permutation ohne Wiederholung** ist **gerade** oder **ungerade**, je nachdem die Anzahl ihrer Inversionen gerade oder ungerade ist.

Wir untersuchen diesbezüglich Beispiel 1 (13.).

Permutationen	Inversionen	Anzahl der Inversionen	Art der Permutation
123	—	0	gerade
132	3/2	1	ungerade
213	2/1	1	ungerade
231	2/1, 3/1	2	gerade
312	3/1, 3/2	2	gerade
321	3/2, 3/1, 2/1	3	ungerade

Wir variieren nun Beispiel 1 (14.1.) erneut.

BEISPIEL 5 (14.1.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei nicht zu unterscheidende Preise (etwa zwei Exemplare ein und desselben Buches) an drei Schüler so zu verteilen, daß ein Schüler auch beide (mehrere) Preise bekommen kann und alle Preise tatsächlich vergeben werden?

In den Schemata der Bilder 267/1 oder 269/1 bzw. in der folgenden Kurzdarstellung sind jetzt die folgenden Komplexionen nicht mehr zu unterscheiden: 2 und 4, 3 und 7, 6 und 8. Zusammen mit den Komplexionen 1, 5 und 9 ergeben sich demnach sechs Möglichkeiten der Preisverteilung.

Diese Überlegungen lassen es sinnvoll erscheinen, in der Menge aller Komplexionen eine Klasseneinteilung durch folgende Forderung festzulegen:

Zwei eindeutige Abbildungen von einer endlichen Menge M in eine endliche Menge N (zwei Komplexionen bzw. Variationen mit Wiederholung) sollen derselben Klasse angehören genau dann, wenn jedes Element von N jeweils die gleiche Anzahl von Urbildern in M hat.

Aus dieser Festlegung und aus der Definition des Begriffs „Klasseneinteilung“ folgt unmittelbar, daß die in dieser Definition genannten Bedingungen tatsächlich erfüllt sind.

Zur Feststellung der einzelnen Klassen in Beispiel 5 (14.1.) brauchen wir in den Bildern 267/1 bzw. 269/1 nur für jedes Element von N die Anzahl der Pfeilspitzen zu bestimmen.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
<i>A</i>	2	1	1	1	0	0	1	0	0
<i>B</i>	0	1	0	1	2	1	0	1	0
<i>C</i>	0	0	1	0	0	1	1	1	2

Diese Ziffernanordnungen repräsentieren sechs verschiedene Klassen von Komplexionen:

200, 110, 101, 020, 011, 002.

Wir variieren abschließend Beispiel 2 (14.1.) im Sinne von Beispiel 5 (14.1.).

BEISPIEL 6 (14.1.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei nicht zu unterscheidende Preise an drei Schüler so zu verteilen, daß ein Schüler höchstens einen Preis bekommen kann und alle Preise tatsächlich vergeben werden?

Da nun in den Schemata der Bilder 267/1 oder 269/1 die (als Klassen gedeuteten) Komplexionen 1, 5 und 9 wegfallen, verbleiben drei Möglichkeiten der Preisverteilung, drei Klassen, die man durch die jeweils nicht zu unterscheidenden Komplexionen 2 oder 4, 3 oder 7 sowie 6 oder 8 repräsentieren kann.

Nunmehr sind folgende Definitionen verständlich.

DEFINITION 8 (14.1.):

Eine **Kombination mit Wiederholung** ist eine Klasse eindeutiger Abbildungen von einer endlichen Menge M in eine endliche Menge N , wobei eine Klasse jeweils von genau denjenigen Komplexionen gebildet wird, bei denen jedes Element von N jeweils die gleiche Anzahl von Urbildern in M hat.

DEFINITION 9 (14.1.):

Eine **Kombination ohne Wiederholung** ist eine Klasse eineindeutiger Abbildungen von einer endlichen Menge M in eine endliche Menge N , wobei eine Klasse jeweils von genau denjenigen Komplexionen gebildet wird, bei denen jedes Element von N jeweils die gleiche Anzahl von Urbildern in M hat.

Unter Beachtung von Satz 2 (14.1.) kann man die Definitionen 8' (14.1.) und 9' (14.1.) entsprechend den Definitionen 1' (14.1.) und 4' (14.1.) formulieren, was dem Leser überlassen bleiben soll.

Wir haben also Kombinationen (mit bzw. ohne Wiederholung) als Klassen von Variationen (mit bzw. ohne Wiederholung) gedeutet.

Bekanntlich kann eine beliebige Klasse durch jedes ihrer Elemente repräsentiert werden. Denkt man sich die Komplexionen einer Klasse jeweils lexiko-

graphisch geordnet, so werden wir für deren Repräsentation stets die niedrigste Komplexion auswählen. Das ist unter anderem deshalb zweckmäßig, weil diese der einzige Repräsentant der Klasse ist, bei dessen zeichnerischer Darstellung entsprechend den Bildern 269/1 oder 272/1 die Zuordnungspfeile einander nicht schneiden. Für die praktische Arbeit ist das besonders vorteilhaft. Im Anschluß an Bild 269/1 ist es demnach möglich, für die Kurzdarstellung der Lösungen der Beispiele 5 (14.1.) und 6 (14.1.) folgende Form zu wählen:

Beispiel 5 (14.1.): AA, AB, AC, BB, BC, CC

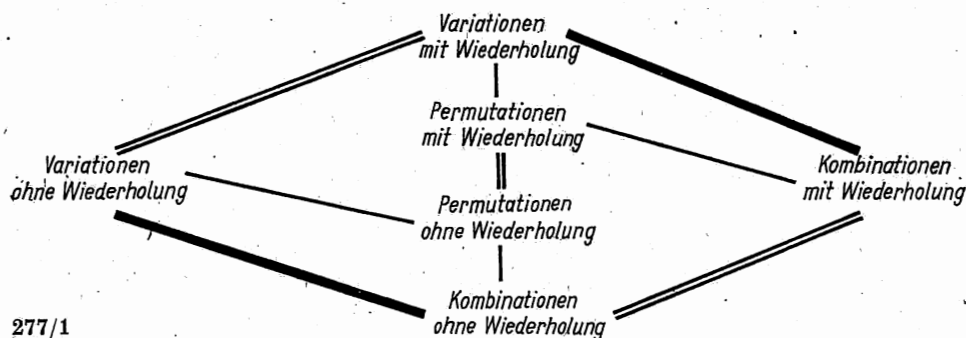
Beispiel 6 (14.1.): AB, AC, BC

In Beispiel 3 (13.), das wir als ein weiteres Beispiel für eine Menge von Kombinationen ohne Wiederholung erkennen, ist bei der Lösung ebenfalls diese Darstellungsform angewendet worden.

Zur Übung gebe man unter den eben erklärten Bedingungen an Hand von Bild 272/1

1. alle Kombinationen mit Wiederholung,
 2. alle Kombinationen ohne Wiederholung.
- an. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils?

Man kann sich Zusammenhänge, die zwischen den einzelnen Arten und Klassen von Komplexionen bestehen, etwa durch den in Bild 277/1 dargestellten Graphen veranschaulichen.



Variationen mit Wiederholung sind die allgemeinste, Repräsentanten von Kombinationen ohne Wiederholung die speziellste Art von Komplexionen. Die doppelt gezeichneten „Wege“ sollen verdeutlichen, daß jede (Klasse von) Komplexion(en) ohne Wiederholung eine spezielle (Klasse von) Komplexion(en) mit Wiederholung der betreffenden Art ist. Bei Variationen ohne Wiederholung erheben wir die Forderung nach Eineindeutigkeit der Abbildung, Kombinationen (mit bzw. ohne Wiederholung) fassen wir als Klassen von Varia-

tionen (mit bzw. ohne Wiederholung) auf (stark gezeichnete „Wege“ in Bild 277/1), die wir uns in Bild 277/1 aus der Zeichenebene herausgehoben denken können.

Damit sind die in Teil 13. unter 2. und 3. genannten Gesichtspunkte für eine mögliche Einteilung von Aufgaben der Kombinatorik berücksichtigt.

Da Permutationen gleichermaßen in Variationen und Kombinationen „eingebettet“ gedacht werden können, wäre es möglich, auf den Begriff „Permutation“ zu verzichten. Wir werden aber sehen, daß dies aus methodischen und auch aus fachlichen und historischen Gründen (Permutationsgruppen) unzumutbar wäre. Bei der Deutung von Bild 277/1 ist zu beachten, daß die dünn gezeichneten „Nebenwege“ nur unter der Bedingung gangbar sind, daß $m = n$ ist (↗ Beispiele 2 (14.1.) und 4 (14.1.)). Wir werden aber weiterhin sehen, daß diese „Nebenwege“ keinesfalls uninteressant sind (↗ Teil 15.1.).

Lösungsalgorithmus für einfache Aufgaben der Kombinatorik

Die Ergebnisse von Teil 14.1. lassen sich für ein praktisches Verfahren zur Lösung einfacher Aufgaben der Kombinatorik zu einem Lösungsplan zusammenfassen, den wir zunächst lediglich nennen und dann mit Hilfe von Beispielen erörtern.

Wir beantworten die Fragen „Welche Möglichkeiten gibt es?“ und „Wie viele Möglichkeiten gibt es?“. (Zu (1) bis (3) ↗ Bilder 269/1 oder 272/1)

(1) Welches sind die zwei Mengen?

(2) Welche Menge steht (im Abbildungsschema) oben?

Es muß von *jedem* Element der Menge genau ein Pfeil ausgehen.

Welche Menge steht (im Abbildungsschema) unten?

Es dürfen Elemente der Menge „freibleiben“.

(Wir bezeichnen die obenstehende Menge mit M , die untenstehende Menge mit N .)

(3) Welche Zuordnungen sind möglich?

a) Dürfen Pfeile einander schneiden?

Ja – mit Berücksichtigung der Anordnung – Variationen

Nein – ohne Berücksichtigung der Anordnung – Kombinationen

b) Dürfen zu einem untenstehenden Element der Menge mehrere Pfeile führen?

Ja – mit Wiederholung

Nein – ohne Wiederholung

BEISPIEL 1 (14.2.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, k Personen auf p Plätze zu verteilen, falls jeder Person genau ein Platz und jedem Platz höchstens eine Person zugeordnet wird?

Man veranschauliche sich zunächst denkbare Sitzverteilungen, wenn die Nebenbedingung („falls . . .“) fehlte (zum Beispiel könnte eine Person zwei Plätze einnehmen – zwei Personen könnten auf einem Platz sitzen – einige Personen finden keinen Platz, weil alle Plätze besetzt sind).

Dem vorliegenden Text entsprechend, ist die Aufgabe nur lösbar, wenn $k \leq p$ ist. Wir verfolgen nun den Lösungsplan.

- (1) Menge der Personen, Menge der Plätze (nicht etwa die Menge der gesuchten Möglichkeiten der Platzverteilung – warum?)
- (2) Es sollen jeweils alle Personen sitzen, während Plätze freibleiben können:
 M ist die Menge der Personen, N die der Plätze.
- (3) a) Ja; denn wenn zwei Personen ihre Plätze wechseln, ergibt sich eine andere Platzverteilung.
Es liegt ein Variationsproblem vor.
- b) Nein; denn auf einem Platz soll höchstens eine Person sitzen.
Es liegt ein Problem von Variationen ohne Wiederholung vor, das insbesondere im Falle von $k = p$ auch ein Problem von Permutationen ohne Wiederholung ist. Man kann dann im Aufgabentext „höchstens“ durch „genau“ ersetzen.

BEISPIEL 2 (14.2.):

Wie oft klingen die Gläser, wenn bei einer Tischrunde von n Personen je zwei Personen genau einmal anstoßen?

Diese Aufgabe ist nur sinnvoll, falls $n \geq 2$ ist.

- (1) Menge der Personen (oder Gläser), Zweiermenge (derer, die jeweils miteinander anstoßen)
- (2) Nicht alle Personen können zugleich miteinander anstoßen, sondern jeweils nur paarweise.
 M ist eine Zweiermenge, N die Menge der Personen.
- (3) a) Nein; denn für die Lösung der Aufgabe ist es gleichgültig, ob etwa A mit B oder B mit A anstößt.
Es liegt ein Kombinationsproblem vor.
- b) Nein; eine Person kann nicht mit sich selbst anstoßen. Es liegt ein Problem von Kombinationen ohne Wiederholung vor.

Die Beispiele 1 (14.2.) und 2 (14.2.) könnten zu dem vorschnellen Schluß veranlassen, daß in den Schemata jeweils diejenige Menge oben stehen muß, die

höchstens so viele Elemente wie die andere hat. Das ist nur bei Problemen von Komplexionen ohne Wiederholung der Fall. Selbst wenn man bereits etwas Übung im Lösen von Aufgaben der Kombinatorik hat, erfordert ein Problem von Komplexionen mit Wiederholung besondere Überlegung.

BEISPIEL 3 (14. 2.):

Ein Sicherheitsschloß öffnet sich nur, wenn man r mit je b Buchstaben versehene Ringe auf ein bestimmtes Kennwort einstellt. Welche bzw. wie viele Ringeinstellungen sind möglich?

- (1) Menge der Buchstaben (eines Ringes), Menge der Ringe
- (2) Jeder Ring zeigt bei der Bildung eines Kennwortes einen Buchstaben; dabei wird aber nicht jeder Buchstabe zugleich verwendet.

M ist die Menge der Ringe, N die der Buchstaben (eines Ringes).

- (3) a) Ja; denn eine etwaige Vertauschung zweier Ringe hat im allgemeinen ein anderes Kennwort zur Folge. Es liegt ein Variationsproblem vor.
- b) Ja; denn jeder Ring kann etwa auf den (angenommenerweise) ersten Buchstaben eingestellt werden.

Es liegt ein Problem von Variationen mit Wiederholung vor, das insbesondere im Falle von $r = b$ auch ein Problem von Permutationen mit Wiederholung ist.

BEISPIEL 4 (14.2.):

Auf welche bzw. wie viele Arten können sich s nicht zu unterscheidende Spatzen auf b Bäume verteilen?

- (1) Menge der Spatzen, Menge der Bäume
- (2) Jeder Spatz soll Platz finden, aber dazu werden nicht immer alle Bäume benötigt.

M ist die Menge der Spatzen, N die der Bäume.

- (3) a) Nein; denn wenn zwei auf verschiedenen Bäumen sitzende Spatzen ihre Plätze wechseln, sind die Platzverteilungen nicht zu unterscheiden. Es liegt ein Kombinationsproblem vor.
- b) Ja; denn auf einem Baum können mehrere Spatzen sitzen. Es liegt ein Problem von Kombinationen mit Wiederholung vor.

Hätten wir in Beispiel 4 (14.2.) s zu unterscheidende Spatzen unter im übrigen gleichen Bedingungen angenommen, so hätte die Frage (3) a) mit „ja“ beantwortet werden müssen; es hätte ein Problem von Variationen mit Wiederholung vorgelegen.

Empirische Lösung von einfachen Aufgaben der Kombinatorik

Systematisches Probieren beim Lösen einfacher Aufgaben der Kombinatorik führt zur Einsicht in bestehende funktionale Zusammenhänge (↗ Teil 13.).

Wir bedienen uns hierbei am besten geeigneter Übersichten in Tabellenform zu je vier Spalten.

In die erste Spalte tragen wir $Z(M) = m$, in die zweite $Z(N) = n$ ein, wobei wir zweckmäßigerweise zunächst $m = n = 2$ setzen, dann $m = 2$ beibehalten und $n = 3$ und danach $n = 4$ setzen. Dann setzen wir $m = 3$ und variieren n erneut. Eventuell wiederholen wir das für $m = 4$. In den meisten Fällen genügt das bereits, um einen Zusammenhang zu erkennen.

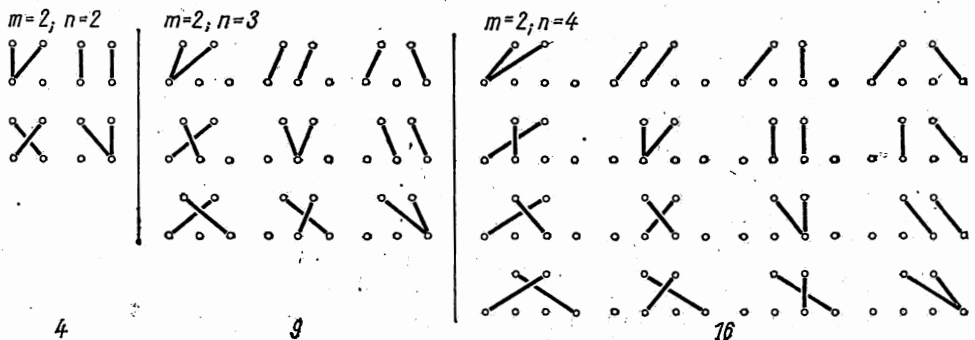
In der dritten Spalte notieren wir jeweils die Anzahl der ermittelten Möglichkeiten.

Die vierte Spalte wird zuletzt ausgefüllt und dient zunächst dazu, durch geeignete Rechenoperationen einen Zusammenhang zwischen jeweils entsprechenden Zahlen der ersten beiden Spalten und denen der dritten Spalte zu finden und diesen allgemein als „vermutete Gesetzmäßigkeit“ zu formulieren. Hierbei helfen uns oft Ergebnisse der Teile 10. und 11.3. (Fakultäten und Binomialkoeffizienten).

Wir verfolgen diese Darlegungen an Hand der Beispiele 1 (14.1.), 3 (14.1.), 5 (14.1.) und 6 (14.1.), die wir jetzt insofern verallgemeinern wollen, als wir die Anzahl der Preise mit m und die der Kinder mit n bezeichnen. Wir wenden die Abbildungsschemata an, wobei wir nun die Elemente beider Mengen zum Beispiel nur noch als kleine Kreise oder Punkte darstellen, auf die Pfeilspitzen verzichten, aber natürlich die Systematik beachten, auf die wir bei der Betrachtung der Bilder 281/1 und 282/1 eingehen.

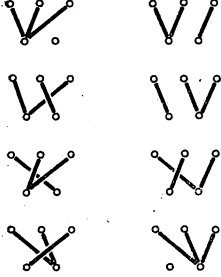
BEISPIEL 1 (14.3.) (↗ Beispiel 1 (14.1.)):

Problem von Variationen mit Wiederholung:



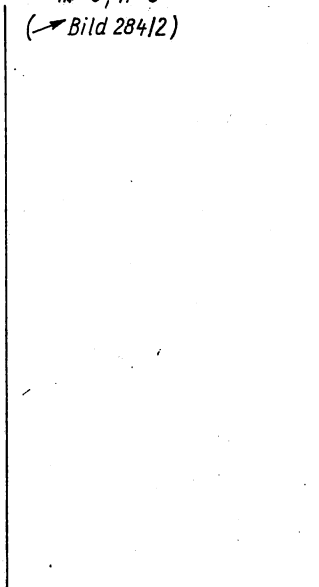
14.3.

$m=3, n=2$



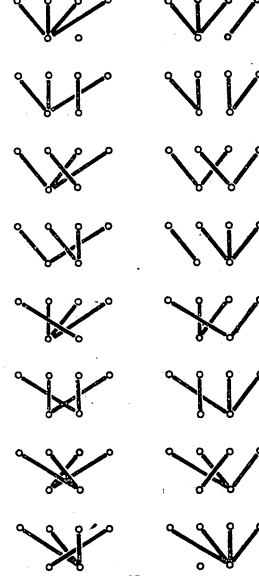
8

$m=3, n=3$
(→ Bild 284/2)



27

$m=4, n=2$



16

282/1

Die Ergebnisse der Bilder 281/1 und 282/1 tragen wir in folgende Übersicht ein.

Anzahl der Preise			Möglichkeiten	Vermutete Gesetzmäßigkeit
Kinder				
2	2		4	2^2
2	3		9	3^2
2	4		16	4^2
⋮	⋮		⋮	⋮
3	2		8	2^3
3	3		27	3^3
⋮	⋮		⋮	⋮
4	2		16	2^4
⋮	⋮		⋮	⋮
m	n			n^m

Wir erklären die in den Bildern 281/1 und 282/1 beachtete Systematik an Hand des Beispiels $m = 4, n = 2$.

1. Alle vier Striche führen zum ersten Element von N .

2. Der letzte Strich wandert vom ersten Element von N unter Beibehaltung der anderen Striche, bis er zum letzten Element von N führt. Dann beginnen wir eine neue Zeile.
3. Der vorletzte Strich wandert vom ersten Element von N unter Beibehaltung der anderen Striche um ein Element von N weiter. Für den letzten Strich gilt nun wieder das unter 2. Gesagte, bis schließlich der vorletzte und der letzte Strich zum letzten Element von N führen.
4. Nun wiederholt sich das unter 3. Gesagte für den drittletzten Strich usw., bis schließlich alle Striche zum letzten Element von N führen.

BEISPIEL 2 (14.3.) (↗ Beispiel 3 (14.1.)):

Problem von Variationen ohne Wiederholung ($m \leq n$):

In Bild 284/1 sind nur die Fälle $m = 2, n = 2$ und $m = 2, n = 3$ dargestellt. Die Darstellung der übrigen Fälle überlassen wir dem Leser.

Wir erhalten folgende Übersicht.

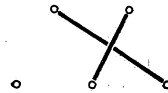
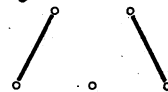
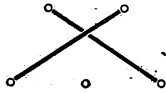
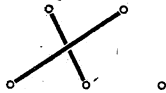
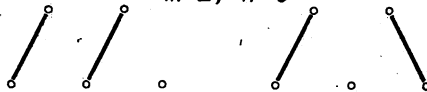
Anzahl der			Vermutete Gesetzmäßigkeit
Preise	Kinder	Möglichkeiten	
2	2	2	$2 \cdot 1 = \binom{2}{2} \cdot 2!$
2	3	6	$3 \cdot 2 = \binom{3}{2} \cdot 2!$
2	4	12	$4 \cdot 3 = \binom{4}{2} \cdot 2!$
⋮	⋮	⋮	⋮
3	3	6	$3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{3}{3} \cdot 3!$
3	4	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 = \binom{4}{3} \cdot 3!$
⋮	⋮	⋮	⋮
4	4	24	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{4}{4} \cdot 4!$
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
m	n		$\binom{n}{m} \cdot m!$

14.3.

$m=2; n=2$

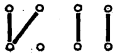


$m=2; n=3$



284/1

$m=2, n=2$



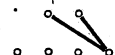
3

$m=2, n=3$



6

$m=2, n=4$



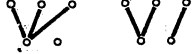
10

$1+2=3$

$1+2+3=6$

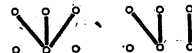
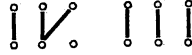
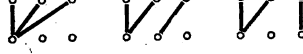
$1+2+3+4=10$

$m=3, n=2$



4

$m=3, n=3$



10

$1+3=4$

$1+3+6=10$

284/2

BEISPIEL 3 (14.3.) (↗ Beispiel 5 (14.1.)):

Problem von Kombinationen mit Wiederholung:

Bild 284/2 zeigt durch die sich ergebende Anordnung der Abbildungsschemata, daß es sich hier um Folgen von Binomialkoeffizienten handelt (↗ Teil 11.3., (a) und (b)). Die Darstellung der Fälle $m = 4$, $n = 2$ und $m = 2$, $n = 3$ überlassen wir dem Leser.

Wir erhalten folgende Übersicht.

Anzahl der Preise		Kinder	Möglichkeiten	Vermutete Gesetzmäßigkeit
2	2	3		$\binom{3}{2} = \binom{2+2-1}{2}$
2	3	6		$\binom{4}{2} = \binom{3+2-1}{2}$
2	4	10		$\binom{5}{2} = \binom{4+2-1}{2}$
⋮	⋮	⋮		⋮
3	2	4		$\binom{4}{3} = \binom{2+3-1}{3}$
3	3	10		$\binom{5}{3} = \binom{3+3-1}{3}$
⋮	⋮	⋮		⋮
4	2	5		$\binom{5}{4} = \binom{2+4-1}{4}$
4	3	15		$\binom{6}{4} = \binom{3+4-1}{4}$
⋮	⋮	⋮		⋮
m	n			$\binom{n+m-1}{m}$

BEISPIEL 4 (14.3.) (↗ Beispiel 6 (14.1.)):

Problem von Kombinationen ohne Wiederholung ($m \leq n$):

Man möge die entsprechenden Abbildungsschemata selbst darstellen.

14.4.

Wir erhalten folgende Übersicht.

Anzahl der Preise		Kinder	Möglichkeiten	Vermutete Gesetzmäßigkeit
2	2		1	$\binom{2}{2}$
2	3		3	$\binom{3}{2}$
2	4		6	$\binom{4}{2}$
⋮	⋮		⋮	⋮
3	3		1	$\binom{3}{3}$
3	4		5	$\binom{4}{3}$
3	5		10	$\binom{5}{3}$
⋮	⋮		⋮	⋮
4	4		1	$\binom{4}{4}$
4	5		5	$\binom{5}{4}$
⋮	⋮		⋮	⋮
m	n			$\binom{n}{m}$

Die in den Beispielen 1 (14.3.) bis 4 (14.3.) erörterten Probleme nennen wir *Grundaufgaben der Kombinatorik*.

14.4.

Lösungsformeln für die Grundaufgaben der Kombinatorik

Wenn wir im folgenden oft kurz von „Elementen einer Variation“ sprechen, so meinen wir stets die in der Kurzdarstellung der betreffenden Variation befindlichen Elemente, also die Elemente des Nachbereichs der Variation.

DEFINITION 1 (14.4.):

Es sei m Variable für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M und n Variable für die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge N . Dann heißt jede eindeutige Abbildung von M in N **Variation von n verschiedenen Elementen zur Klasse m .**

Entsprechendes gilt für Kombinationen.

Unter Beachtung von Beispiel 1 (14.1.) und Beispiel 1 (14.3.) formulieren wir folgenden Satz.

SATZ 1 (14.4.):

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur Klasse m ist

$${}^wV_n^{(m)} = n^m.$$

Zum besseren Verständnis des Beweises von Satz 1 (14.4.) betrachten wir eine Menge als gegeben, und zwar $N = \{a, b\}$, also $n = 2$, und in einer Übersicht geeignet dargestellt.

Anzahl der zu variierenden Elemente	Ermittelte Variationen	Anzahl der Variationen
$m = 1$	$a \quad b$	${}^wV_2^{(1)} = 2$
$m = 2$	$aa \quad ba$ $ab \quad bb$	${}^wV_2^{(2)} = 4$
$m = 3$	$aaa \quad baa$ $aab \quad bab$ $aba \quad bba$ $abb \quad bbb$	${}^wV_2^{(3)} = 8$

Die hier gewählte Systematik besteht darin, jeder Variation nacheinander jedes der beiden gegebenen Elemente hinzuzufügen. Demnach verdoppelt sich jeweils die Anzahl der Variationen beim Übergang zu einer um 1 höheren Klasse.

Der *Beweis* von Satz 1 (14.4.) erfolgt durch vollständige Induktion über m . Da er für ein beliebiges n geführt wird, gilt die Formel dann für jedes n .

(1) *Induktionsanfang:*

Die Behauptung ist richtig für $m = 1$; denn es gilt ${}^wV_n^{(1)} = n^1$.

(2) *Induktionsschritt:*

Voraussetzung: ${}^wV_n^{(m)} = n^m$

Behauptung: ${}^wV_n^{(m+1)} = n^{m+1}$

Beweis:

Wir denken uns zunächst alle nach Voraussetzung vorhandenen ${}^wV_n^{(m)} = n^m$ Variationen hingeschrieben. Fügt man nun jeder der n^m Variationen am Ende jedes der gegebenen n Elemente hinzu, so erhält man jede der ${}^wV_n^{(m+1)}$ Variationen genau einmal. Es gilt ${}^wV_n^{(m+1)} = n^m \cdot n = n^{m+1}$, q. e. d.

Unter Beachtung von Beispiel 3 (14.1.) und Beispiel 2 (14.3.) formulieren wir folgenden Satz.

SATZ 2 (14.4.):

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur Klasse m ist

$$V_n^{(m)} = \binom{n}{m} \cdot m!$$

$$= n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1),$$

wobei nach Definition 4 (14.1.) $m \leq n$ ist.

Zum besseren Verständnis des Beweises von Satz 2 (14.4.) betrachten wir zunächst wieder eine Menge als gegeben, und zwar $N = \{a, b, c, d\}$, also $n = 4$, und in einer Übersicht geeignet dargestellt.

Anzahl der zu variierenden Elemente	Ermittelte Variationen	Anzahl der Variationen
$m = 1$	$a \quad b \quad c \quad d$	$V_4^{(1)} = 4$
$m = 2$	$ab \quad ba \quad ca \quad da$ $ac \quad bc \quad cb \quad db$ $ad \quad bd \quad cd \quad dc$	$V_4^{(2)} = 12$
$m = 3$	$abc \quad bac \quad cab \quad dab$ $abd \quad bad \quad cad \quad dac$ $acb \quad bca \quad cba \quad dba$ $acd \quad bcd \quad cbd \quad dbc$ $adb \quad bda \quad cda \quad dca$ $adc \quad bdc \quad cdb \quad dc b$	$V_4^{(3)} = 24$

Hier wurde folgende Systematik beachtet:

Die Variationen von vier Elementen zur Klasse 2 erhält man, wenn man zu den Variationen zur Klasse 1 als zweites Element jedes der $4 - 1 = 3$ anderen Elemente hinzunimmt.

Daraus folgt

$$V_4^{(2)} = 4 \cdot 3 = 12.$$

Entsprechend ist bei den Variationen zur Klasse 3 zu verfahren. Zu den Variationen zur Klasse 2 wird je eines der $4 - 2 = 2$ in ihnen nicht enthaltenen Elemente hinzugefügt. Daraus folgt

$$V_4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Wird nun noch das jeweils fehlende vierte Element hinzugenommen, so erhält man entsprechend die Variationen zur Klasse 4.

$$V_4^{(4)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Der *Beweis* von Satz 2 (14.4.) erfolgt wieder durch vollständige Induktion über m .

(1) *Induktionsanfang:*

Die Behauptung ist richtig für $m = 1$; denn es gilt $V_n^{(1)} = n$.

(2) *Induktionsschritt:*

Voraussetzung: $V_n^{(m)} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$

Behauptung: $V_n^{(m+1)} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)(n-m)$

Beweis:

Wählt man aus den möglichen Variationen ohne Wiederholung der n Elemente zur Klasse m eine beliebige Variation aus, so kommen in dieser Variation m der gegebenen Elemente vor. $(n-m)$ Elemente sind in dieser Variation nicht enthalten. Man denke sich die ausgewählte Variation $(n-m)$ -mal aufgeschrieben und jeder dieser Variationen am Ende ein weiteres Element aus der Menge der zunächst nicht vertretenen $(n-m)$ Elemente hinzugefügt, so daß damit alle $(n-m)$ Elemente erfaßt werden. Die so entstandenen $(n-m)$ Variationen zur Klasse $(m+1)$ sind verschieden, weil sie alle mit verschiedenen Elementen enden.

Verfährt man gleichermaßen mit allen Variationen zur Klasse m , so gilt

$$V_n^{(m+1)} = V_n^{(m)} \cdot (n-m),$$

und unter Berücksichtigung der Voraussetzung

$$V_n^{(m+1)} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)(n-m), \quad \text{q. e. d.}$$

Aus Satz 2 (14.4.) folgt für $m = n$

$$V_n^{(n)} = \binom{n}{n} \cdot n! = n!.$$

SATZ 3 (14.4.):

Die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung von n verschiedenen Elementen ist

$$P_n = n!$$

Dem interessierten Leser sei mitgeteilt, daß sich Satz 3 (14.4.) auch unabhängig von Satz 2 (14.4.) beweisen läßt.

Wir betrachten zunächst folgende Übersicht.

Anzahl der gegebenen Elemente	Gegebene Elemente	Ermittelte Permutationen	Anzahl der Permutationen
$n = 1$	a	a	$P_1 = 1$
$n = 2$	a, b	$ba \quad ab$	$P_2 = 2$
$n = 3$	a, b, c	$cba \quad bca \quad bac$ $cab \quad acb \quad abc$	$P_3 = 6$
$n = 4$	a, b, c, d	$dcba \quad cdba \quad cbda \quad cbad$ $dbca \quad bdca \quad bcda \quad bcad$ $dbac \quad bdac \quad badc \quad bacd$ $dacb \quad cdab \quad cadb \quad cabd$ $dacb \quad adcb \quad acdb \quad acbd$ $dabc \quad adbc \quad abdc \quad abcd$	$P_4 = 24$

Hier wurde folgende Systematik beachtet:

Es wird in jeder der P_n Permutationen das neu hinzukommende $(n + 1)$ -te Element

erstens vor das erste,
zweitens vor das zweite,
drittens vor das dritte,
.....
 n -tens vor das n -te und
 $(n + 1)$ -tens hinter das n -te Element

gesetzt.

Der *Beweis* von Satz 3 (14.4.) erfolgt durch vollständige Induktion und kann dem Leser überlassen bleiben.

Anleitung:

In jeder der P_n Permutationen von n verschiedenen Elementen kann das $(n + 1)$ -te Element vor das erste, vor das zweite, . . . , vor das n -te und hinter das n -te Element gesetzt werden. Dadurch entstehen aus jeder Permutation

der n verschiedenen Elemente $(n + 1)$ Permutationen mit $(n + 1)$ verschiedenen Elementen.

Im Anschluß an Bild 272/1 haben wir in Kurzform 27 Variationen mit Wiederholung von drei verschiedenen Elementen zur Klasse 3 angegeben, die man auch als Permutationen mit Wiederholung ansehen kann. In den Permutationen 1, 14, 27 stimmen jeweils alle drei Elemente überein. Die Permutationen 6, 8, 12, 16, 20 und 22 sind insbesondere diejenigen ohne Wiederholung; die übrigen 6 mal 3 Permutationen sind dadurch gekennzeichnet, daß von den drei Elementen jeweils genau zwei übereinstimmen.

SATZ 4 (14.4.):

Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von n Elementen, unter denen sich eine Menge von n_1 gleichen, eine zweite Menge von n_2 gleichen, ..., eine r -te Menge von n_r gleichen Elementen mit

$$\sum_{j=1}^r n_j = n \text{ befinden, ist}$$

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

Wir erörtern den *Beweis* von Satz 4 (14.4.) zunächst an Hand von Beispiel 1 (14.4.).

BEISPIEL 1 (14.4.):

Es soll die Anzahl $P_5^{(3,2)}$ der Permutationen der Elemente a, a, a, b, b ermittelt werden.

Eine beliebige dieser Permutationen ist

$$b \ a \ b \ a \ a.$$

Wir fügen an die Elemente a unterschiedliche Indizes.

$$b \ a_1 \ b \ a_2 \ a_3$$

Durch Vertauschen der Elemente a_1, a_2, a_3 erhalten wir die Permutationen:

$$b \ a_1 \ b \ a_2 \ a_3, \quad b \ a_2 \ b \ a_1 \ a_3, \quad b \ a_3 \ b \ a_1 \ a_2, \\ b \ a_1 \ b \ a_3 \ a_2, \quad b \ a_2 \ b \ a_3 \ a_2, \quad b \ a_3 \ b \ a_2 \ a_1.$$

In jeder dieser 3! Permutationen steht das Element b an erster bzw. an dritter Stelle. Denken wir uns alle möglichen verschiedenen Permutationen der Elemente a, a, a, b, b aufgeschrieben und die Elemente a unterschiedlich indiziert, so entstehen durch Permutation der a_1, a_2, a_3 insgesamt $P_5^{(3,2)} \cdot 3!$ Permutationen.

14.4.

Nun wenden wir die gleichen Überlegungen auf die $P_5^{(3,2)} \cdot 3! 2!$ Permutationen an, indem wir in diesen Permutationen die Elemente b unterschiedlich indizieren. Durch Permutation der Elemente b_1, b_2 entstehen $P_5^{(3,2)} \cdot 3! 2!$ Permutationen.

Da durch die Indizierung aber alle Elemente verschieden sind, gilt die Beziehung

$$P_5^{(3,2)} \cdot 3! 2! = P_5.$$

Wegen $P_5 = 5!$ folgt hieraus

$$P_5^{(3,2)} = \frac{5!}{3! 2!}.$$

Den *Beweis* von Satz 4 (14.4.) kann man wie folgt führen:

Es seien n Elemente

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_{n_1}; \underbrace{b, b, \dots, b}_{n_2}; \underbrace{c, c, \dots, c}_{n_3}; \dots; \underbrace{k, k, \dots, k}_{n_r} \text{ mit } \sum_{j=1}^r n_j = n$$

gegeben.

Werden die Elemente a einer beliebigen dieser Permutationen unterschiedlich indiziert, so entstehen durch Vertauschung der a_1, a_2, \dots, a_{n_1} insgesamt $n_1!$ Permutationen, in denen die Elemente b, c, \dots, k ihre Plätze behalten. Geschieht das mit jeder Permutation der gegebenen n Elemente, so erhält man

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \cdot n_1!$$

Permutationen.

Werden in diesen $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \cdot n_1!$ Permutationen die Elemente b unterschiedlich indiziert, so entstehen durch Vertauschung der Elemente b_1, b_2, \dots, b_{n_2} insgesamt

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \cdot n_1! n_2!$$

Permutationen.

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf die Elemente c erhält man hieraus

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \cdot n_1! n_2! n_3!$$

Permutationen.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man schließlich

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \cdot n_1! n_2! n_3! \cdot \dots \cdot n_r! = P_n = n!$$

Permutationen; denn durch die Indizierung sind alle n Elemente voneinander verschieden.

Hieraus folgt

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \quad \text{q. e. d.}$$

Unter Beachtung von Beispiel 5 (14.1.) und Beispiel 3 (14.3.) formulieren wir folgenden Satz.

SATZ 5 (14.4.):

Die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur Klasse m ist

$${}^w K_n^{(m)} = \binom{n+m-1}{m}.$$

Zum besseren Verständnis des *Beweises* von Satz 5 (14.4.) betrachten wir zunächst wieder eine Menge als gegeben, und zwar $N = \{a, b, c, d\}$, also $n = 4$, und in einer Übersicht geeignet dargestellt.

Anzahl der zu kombinierenden Elemente	Ermittelte Kombinationen mit Wiederholung	Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung.
$m = 1$	$a \quad b \quad c \quad d$	${}^w K_4^{(1)} = 4$
$m = 2$	aa $ab \quad bb$ $ac \quad bc \quad cc$ $ad \quad bd \quad cd \quad dd$	${}^w K_4^{(2)} = 10$
$m = 3$	aaa aab aac aad $abb \quad bbb$ $abc \quad bbc$ $abd \quad bbd$ $acc \quad bcc \quad ccc$ $acd \quad bcd \quad ccd$ $add \quad bdd \quad cdd \quad ddd$	${}^w K_4^{(3)} = 20$

Die bestehende Gesetzmäßigkeit ist sofort zu erkennen, wenn man Teil 12.3., (a) (↗ 240) oder (b) (↗ 243), beachtet. Man findet die hier ermittelten Ergebnisse dort in Spalte bzw. Zeile $n = 4$.

Wird jeweils im Zähler der Binomialkoeffizienten noch die bezüglich m bestehende Regelmäßigkeit berücksichtigt, so ergibt sich

$${}^w K_4^{(1)} = 4 = \binom{4}{1} = \binom{4+1-1}{1},$$

$${}^w K_4^{(2)} = 10 = \binom{5}{2} = \binom{4+2-1}{2},$$

$${}^w K_4^{(3)} = 20 = \binom{6}{3} = \binom{4+3-1}{3}.$$

Der Beweis von Satz 5 (14.4.) erfolgt wieder durch vollständige Induktion über m .

(1) *Induktionsanfang:*

Die Behauptung ist richtig für $m = 1$; denn es gilt

$${}^w K_n^{(1)} = \binom{n+1-1}{1} = \binom{n}{1} = n.$$

(2) *Induktionsschritt:*

$$\text{Voraussetzung: } {}^w K_n^{(m)} = \binom{n+m-1}{m}$$

$$\text{Behauptung: } {}^w K_n^{(m+1)} = \binom{n+m}{m+1}$$

Beweis:

Um ${}^w K_n^{(m+1)}$ zu ermitteln, faßt man jeweils diejenigen Kombinationen der Klasse $(m+1)$ zusammen, die mit dem gleichen Element beginnen.

Erstens sind alle und nur die Kombinationen zu bilden, die mit a beginnen.

Auf a folgen alle und nur die Kombinationen zur Klasse m , nach Voraus-

setzung also $\binom{n+m-1}{m}$ Kombinationen.

Zweitens bildet man alle und nur die Kombinationen, die mit b beginnen.

Auf b folgen alle und nur die Kombinationen, die sich noch aus den ver-

bliebenen $(n-1)$ Elementen bilden lassen; denn a fällt ja weg. Das sind

$\binom{(n-1)+m-1}{m} = \binom{n+m-2}{m}$ Kombinationen.

Dieses Verfahren ist fortzusetzen, bis man

n -tens $\binom{n+m-n}{m} = \binom{m}{m}$, also genau eine Kombination erhält,

die mit dem n -ten Element beginnt. Es gilt demnach

$$\begin{aligned} {}^w K_n^{(m+1)} &= \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m} + \dots + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{j=1}^m \binom{n+m-j}{m}. \end{aligned}$$

Wegen Teil 11.3., (5) (↗ 247), gilt

$${}^w K_n^{(m+1)} = \binom{n+m}{m+1}, \quad \text{q. e. d.}$$

Unter Beachtung von Beispiel 6 (14.1.) und Beispiel 4 (14.3.) formulieren wir folgenden Satz.

SATZ 6 (14.4.):

Die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur Klasse m ist

$$K_n^{(m)} = \binom{n}{m},$$

wobei $m \leq n$ ist.

Beweis:

Satz 6 (14.4.) folgt aus Satz 2 (14.4.). Von den $V_n^{(m)} = \binom{n}{m} \cdot m!$ Variationen

ohne Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur Klasse m bilden alle und nur diejenigen Komplexionen genau eine Klasse, die die gleichen Elemente in unterschiedlicher Reihenfolge enthalten.

Weil sich aber m verschiedene Elemente auf $m!$ verschiedene Arten permutieren lassen, erhält man

$$K_n^{(m)} = \frac{V_n^{(m)}}{m!} = \binom{n}{m}, \quad \text{q. e. d.}$$

BEISPIEL 2 (14.4.) (↗ Beispiel 1 (14.2.)):

Es gibt $V_p^{(k)} = \binom{p}{k} k!$ Möglichkeiten.

Falls $k = p$ ist, gibt es insbesondere $P_p = p!$ Möglichkeiten.

BEISPIEL 3 (14.4.) (↗ Beispiel 2 (14.2.)):

Die Gläser klingen $K_n^{(2)} = \binom{n}{2}$ mal.

Man beachte, daß wir diesen Sachverhalt dreifach interpretieren können.

1. „Additive“ Deutung

- | | |
|-------------------------------------|------|
| a) B stößt mit A an: | 1mal |
| C stößt mit B und A an: | 2mal |
| D stößt mit C , B und A an: | 3mal |
| | |

Die n -te Person stößt mit $(n - 1)$ Personen an: $(n - 1)$ mal

Ergebnis: $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$

b) A stößt mit B, C, D, E, \dots und der n -ten Person an: $(n - 1)$ mal

B stößt mit C, D, E, \dots und der n -ten Person an: $(n - 2)$ mal

C stößt mit D, E, \dots und der n -ten Person an: $(n - 3)$ mal

.....

Die $(n - 1)$ -te Person stößt mit der n -ten an: 1mal

Ergebnis: $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1$

2. „Multiplikative“ Deutung

Wenn jede der n Personen mit jeder der übrigen $(n - 1)$ Personen genau einmal anstößt, so hat jedes Personenpaar zweimal angestoßen. Das Produkt aus n und $(n - 1)$ ist also durch 2 zu dividieren.

Ergebnis: $\frac{n(n - 1)}{2}$

3. „Kombinatorische“ Deutung

Aus n Personen sind je zwei auszuwählen.

Ergebnis: $\binom{n}{2}$

Insgesamt gilt also

$$K_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n-1} = \frac{n(n - 1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

BEISPIEL 4 (14.4.) (↗ Beispiel 3 (14.2.)):

Jetzt wird die Vorbemerkung zu Beispiel 3 (14.2.) besonders deutlich: Gibt es r^b oder b^r Möglichkeiten?

Es gibt ${}^w V_b^{(r)} = b^r$ Ringeinstellungen.

BEISPIEL 5 (14.4.) (↗ Beispiel 4 (14.2.)):

Die „Spatzenaufgabe“ ist ebenfalls geeignet, die Vorbemerkung zu Beispiel 3 (14.2.) zu verdeutlichen. Der unbefangene Leser ist nämlich eher geneigt, die Spatzen und nicht die Bäume zu kombinieren bzw. zu variieren. Nach Beispiel 4 (14.2.), Ergebnis (2), ist aber letzteres richtig.

Wir verdeutlichen dies nochmals an Hand einer anderen Übersicht für $s = 3$ Spatzen a, b, c und $b = 2$ Bäume A, B .

Nummer der Sitzordnung	Anordnung der Spatzen		Variation der Bäume
	Baum A	Baum B	
1.	$a b c$	—	$A A A$
2.	$a b$	c	$A A B$
3.	$a c$	b	$A B A$
4.	a	$b c$	$A B B$
5.	$b c$	a	$B A A$
6.	b	$a c$	$B A B$
7.	c	$a b$	$B B A$
8.	—	$a b c$	$B B B$

Fassen wir die Spatzen als nicht zu unterscheiden auf, so bilden die folgenden Sitzordnungen jeweils eine Klasse:

1. 1
2. 2, 3, 5
3. 4, 6, 7
4. 8

Es gibt also ${}^w K_b^{(s)} = \binom{b+s-1}{s}$ Möglichkeiten, s nicht zu unterscheidende Spatzen bzw. ${}^w V_b^{(s)} = b^s$ Möglichkeiten, s zu unterscheidende Spatzen auf b Bäume zu verteilen.

Wir werden nun einige zwischen Komplexionen bestehende Zusammenhänge erörtern, soweit sie sich aus den bisherigen Betrachtungen ergeben, und mit Hilfe der Mengenlehre auf weiterführende Fragestellungen und einige spezielle Formeln der Kombinatorik hinweisen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt werden.

Bild 277/1 verdeutlicht Zusammenhänge, die aus den Definitionen in Teil 14.1. unmittelbar hervorgehen. In den Teilen 14.2. bis 14.4. wurden Zusammenhänge bisher nur angedeutet. Wir werden nun versuchen, eine Synthese vorzunehmen.

Jede (Klasse von) Komplexion(en) ohne Wiederholung ist ein Sonderfall der jeweils betreffenden (Klasse von) Komplexion(en) mit Wiederholung; denn jede eindeutige Abbildung von einer Menge M in eine Menge N ist eine spezielle eindeutige Abbildung von M in N . Die Menge aller (Klassen von) Komplexionen ohne Wiederholung ist eine Teilmenge der Menge der (Klassen von) Komplexionen mit Wiederholung der betreffenden Art. Rechnerisch ist das lediglich insofern interessant, als für Variationen von n verschiedenen Elementen zur Klasse 2 gilt:

$${}^wV_n^{(2)} - n = V_n^{(2)}$$

$$n^2 - n = n(n - 1)$$

Setzt man in $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$ mit $\sum_{j=1}^r n_j = n$

$n_1 = n_2 = \dots = n_r = 1$, so geht diese Formel über in $P_n = n!$.

Jede Kombination ist eine Klasse von Variationen. Denkt man sich die Menge aller Kombinationen mit (ohne) Wiederholung einer bestimmten Art durch eines ihrer vollständigen Repräsentantensysteme dargestellt, so ist dieses eine Teilmenge der Menge aller Variationen mit (ohne) Wiederholung der betreffenden Art.

Jede Permutation von n verschiedenen Elementen ist eine Variation von n verschiedenen Elementen zur Klasse n . Der zahlenmäßige Zusammenhang zwischen Variationen und Permutationen ohne Wiederholung wird formelmäßig unmittelbar deutlich:

$$V_n^{(n)} = \binom{n}{n} \cdot n! = n! = P_n.$$

Zwischen Variationen und Permutationen mit Wiederholung läßt sich nicht ohne weiteres ein zahlenmäßiger Zusammenhang angeben, weil Variationen mit Wiederholung von n verschiedenen Elementen in derselben Klasse verschiedene Anzahlen gleicher Elemente enthalten. Aus diesem Grunde ist es nicht möglich, die Zahl der jeweils vorhandenen Permutationen allgemein anzugeben. Man muß diese Zahlen von Fall zu Fall ermitteln. Man veranschauliche sich mit Hilfe der Vorbemerkung zu Satz 4 (14.4.) den Inhalt der folgenden, Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2^2 &= \frac{2!}{2!} \cdot \binom{2}{1} + \frac{2!}{1!1!} \cdot \binom{2}{2} \\ &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^3 &= \frac{3!}{3!} \cdot \binom{3}{1} + \left(\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!} \right) \cdot \binom{3}{2} + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot \binom{3}{3} \\ &= 1 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \\ &= 3 + 18 + 6 \\ &= 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^4 &= \frac{4!}{4!} \cdot \binom{4}{1} + \left(\frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} \right) \cdot \binom{4}{2} \\ &\quad + \left(\frac{4!}{1!1!2!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{2!1!1!} \right) \cdot \binom{4}{3} + \frac{4!}{1!1!1!1!} \cdot \binom{4}{4} \end{aligned}$$

15.1.

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot 4 + (4 + 6 + 4) \cdot 6 + (12 + 12 + 12) \cdot 4 + 24 \cdot 1 \\
 &= 4 + 84 + 144 + 24 \\
 &= 256
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5^5 &= \frac{5!}{5!} \cdot \binom{5}{1} + \left(\frac{5!}{1!4!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} \right) \cdot \binom{5}{2} \\
 &+ \left(\frac{5!}{1!1!3!} + \frac{5!}{1!3!1!} + \frac{5!}{3!1!1!} + \frac{5!}{1!2!2!} + \frac{5!}{2!1!2!} + \frac{5!}{2!1!1!} \right) \cdot \binom{5}{3} \\
 &+ \left(\frac{5!}{1!1!1!2!} + \frac{5!}{1!1!2!1!} + \frac{5!}{1!2!1!1!} + \frac{5!}{2!1!1!1!} \right) \cdot \binom{5}{4} \\
 &+ \frac{5!}{1!1!1!1!1!} \cdot \binom{5}{5} \\
 &= 1 \cdot 5 + (5 + 5 + 10 + 10) \cdot 10 + (20 + 20 + 20 + 30 + 30 + 30) \cdot 10 \\
 &+ (60 + 60 + 60 + 60) \cdot 5 + 120 \cdot 1 \\
 &= 5 + 300 + 1500 + 1200 + 120 \\
 &= 3125
 \end{aligned}$$

Der unmittelbare Zusammenhang zwischen Kombinationen ohne Wiederholung und Permutationen mit Wiederholung, den man etwa an Hand der Beispiele für mehrfache Lesbarkeit (\nearrow 240, 250f.) verfolgen kann, verdient besonderes Interesse.

Es gilt für $\sum_{j=1}^n n_j = n$

$$\begin{aligned}
 P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} \\
 &= \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r},
 \end{aligned} \tag{1}$$

wobei der letzte Binomialkoeffizient wegen $\binom{n_r}{n_r} = 1$ weggelassen werden kann.

Dieser Zusammenhang zeigt, daß zwei in der Praxis unterschiedliche Betrachtungsweisen zum gleichen Ergebnis führen können.

BEISPIEL 1 (15.1.):

9 Schüler einer Klasse sollen in 3 Brigaden zu je 2, 3 bzw. 4 Schülern eingeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

1. Auffassung:

Von den 9 Schülern sollen je 2, 3 bzw. 4 Schüler ein und derselben Brigade angehören. Es gibt

$$P_9^{(2,3,4)} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$$

Möglichkeiten.

2. Auffassung:

Wir fragen, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus 9 Schülern zunächst 2 und von den verbleibenden 7 Schülern dann noch 3 auszuwählen.

Es gibt

$$K_9^{(2)} \cdot K_7^{(3)} = \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 1260$$

Möglichkeiten.

Wir hätten zum Beispiel ebensogut fragen können, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus 9 Schülern zunächst 4 und von den verbleibenden 5 Schülern dann noch 2 auszuwählen.

Es gibt

$$K_9^{(4)} \cdot K_5^{(2)} = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2} = 1260$$

Möglichkeiten.

Die Tatsache, daß die Reihenfolge des mehrfachen Auswählens beliebig ist und zum gleichen Ergebnis führt, folgt aus der Kommutativität und der Assoziativität der Multiplikation. Es gilt zum Beispiel:

$$\frac{9!}{2!3!4!} = \frac{9!}{4!2!3!}$$

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{2}$$

Jedes Problem von Permutationen mit Wiederholung kann als Nacheinanderausführung von Kombinationen ohne Wiederholung in dem dargelegten Sinn aufgefaßt werden.

In Beispiel 1 (15.1.) haben wir nacheinander jeweils eine unterschiedliche Anzahl von Schülern ausgewählt. Werden gleiche Anzahlen ausgewählt, so sind Zusatzbedingungen zu beachten. Wir veranschaulichen die Problematik zunächst an Hand von Beispiel 2 (15.1.).

BEISPIEL 2 (15.1.):6 Schüler A, B, C, D, E, F sollen

a) in 2 Brigaden zu je 2 bzw. 4 Schülern,

b) in 2 Brigaden zu je 3 Schülern,

c) in 3 Brigaden zu je 2 Schülern

aufgeteilt werden. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils hierfür?

Ist eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen (\nearrow 302, Übersicht)?

a)	b)	c)
$AB \quad CDEF$	$ABC \quad DEF$	$AB \quad CD \quad EF$
$AC \quad BDEF$	$ABD \quad CEF$	$AB \quad CE \quad DF$
$AD \quad BCEF$	$ABE \quad CDF$	$AB \quad CF \quad DE$
$AE \quad BCDF$	$ABF \quad CDE$	$AC \quad BD \quad EF$
$AF \quad BCDE$	$ACD \quad BEF$	$AC \quad BE \quad DF$
	$ACE \quad BDF$	$AC \quad BF \quad DE$
$BC \quad ADEF$	$ACF \quad BDE$	$AD \quad BC \quad EF$
$BD \quad ACEF$	$ADE \quad BCF$	$AD \quad BE \quad CF$
$BE \quad ACDF$	$ADF \quad BCE$	$AD \quad BF \quad CE$
$BF \quad ACDE$	$AEF \quad BCD$	$AE \quad BC \quad DF$
		$AE \quad BD \quad CF$
$CD \quad ABEE$		$AE \quad BF \quad CD$
$CE \quad ABDF$		$AF \quad BC \quad DE$
$CF \quad ABDE$		$AF \quad BD \quad CE$
		$AF \quad BE \quad CD$
$DE \quad ABCF$		
$DF \quad ABCE$		
$EF \quad ABCD$		

Man sollte zunächst in Fall a) nicht einfach nach der Auswahl der zwei Schüler für die erste Brigade die jeweils verbleibenden vier Schüler als zur zweiten Brigade gehörend betrachten, sondern vielmehr übungshalber diese Auswahl, von unten beginnend, ebenfalls systematisch durchführen. Es wird die auf dem Symmetriegesetz der Binomialkoeffizienten (\nearrow Satz 5 (11.3.)) beruhende „Rückläufigkeit“ der Buchstaben der zweiten Brigade deutlich. Wir erhalten also folgende Lösungen:

$$a) P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2!4!} = K_6^{(2)} = K_6^{(4)} = \binom{6}{2} = 15$$

$$b) P_6^{(3,3)} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{1}{2!} = K_6^{(3)} \cdot \frac{1}{2!} = \binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2!} = 10$$

$$c) P_6^{(2,2,2)} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{6!}{2!2!2!} \cdot \frac{1}{3!} = K_6^{(2)} \cdot K_4^{(2)} \cdot \frac{1}{3!} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{3!} = 15$$

Bei einer Aufteilung von Schülern in n Brigaden mit gleicher Schülerzahl ist also noch durch $n!$ zu dividieren.

Wir behandeln nun die Problematik allgemein.

BEISPIEL 3 (15.1.):

n Schüler einer Klasse sollen in r Brigaden zu je n_1, n_2, \dots, n_r Schülern eingeteilt werden, wobei $\sum_{j=1}^r n_j = n$, $r \leq n$ ist und die n_j nicht notwendigerweise voneinander verschieden zu sein brauchen. Die Anzahl der jeweils untereinander gleichen n_j werde mit p_1, p_2, \dots, p_k bezeichnet, wobei $\sum_{i=1}^k p_i = r$ und $k \leq r$ ist. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten der Brigadenbildung gibt es? Man erhält

$$P = P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^k p_i!} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^r n_j!} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^k p_i!} \quad (*)$$

Möglichkeiten.

Falls die p_i sämtlich gleich 1, also die n_j alle voneinander verschieden sind, geht Formel (*) über in

$$P = P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^r n_j!} \quad (**)$$

BEISPIEL 4 (15.1.):

Es sollen n zu unterscheidende Geschenke zu n_1, n_2, \dots, n_r Stück an r Kinder verteilt werden. Im übrigen gelten analog die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Beispiel 3 (15.1.). Welche bzw. wie viele Geschenkverteilungen sind möglich?

Während in Beispiel 3 (15.1.) die Anordnung der Brigaden unbeachtet blieb, weil sie praktisch keine Rolle spielt, ist hier die Anordnung der Kinder noch zu berücksichtigen. Es ist ja nicht gleichgültig, welches Geschenk ein Kind erhält.

Formel (*) in Beispiel 3 (15.1.) braucht zur Berechnung der Anzahl dieser Möglichkeiten nur noch mit $r!$ multipliziert zu werden.

Zu den Beispielen 3 (15.1.) und 4 (15.1.) sei schließlich bemerkt, daß die Frage, die Anordnung der jeweiligen Teilmengen zu berücksichtigen oder nicht, jedesmal besonderer Überlegung bedarf.

15.1.

Wir haben dargelegt: Unter bestimmten Bedingungen besteht ein Zusammenhang zwischen Kombinationen ohne Wiederholung und Permutationen mit Wiederholung. Entsprechend verhält es sich mit Kombinationen ohne Wiederholung und Variationen mit Wiederholung. Gemäß Satz 8 (11.3.), Folgerung 1, gilt

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n.$$

Nach den Sätzen 1 (14.4.) und 6 (14.4.) gilt demnach

$$\sum_{j=0}^n K_n^{(j)} = {}^wV_2^{(n)}.$$

BEISPIEL 5 (15.1.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, beim Kegelspiel insgesamt 0, 1, 2, . . . , 9 (nicht zu unterscheidende) Kegel auf die vorgesehenen 9 Felder zu stellen?

1. Auffassung: Behandlung als Problem von Kombinationen ohne Wiederholung

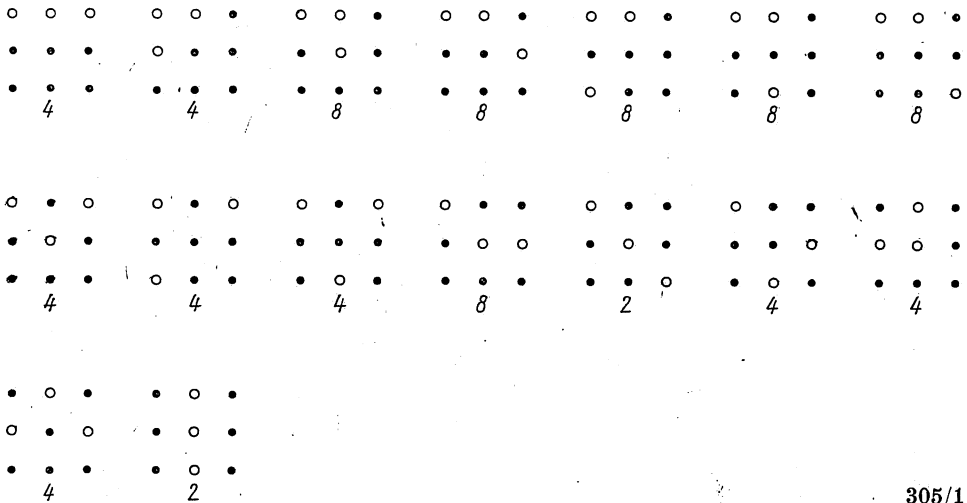
Die Menge der Kegel wird in die Menge der Felder abgebildet: Man beantwortet also die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge von 9 Elementen nacheinander 0, 1, 2, 3, . . . , 9 Elemente auszuwählen.

Anzahl der Kegel	Binomialkoeffizienten	Anzahl der Möglichkeiten
0	$\binom{9}{0}$	1 ¹
1	$\binom{9}{1}$	9
2	$\binom{9}{2}$	36
3	$\binom{9}{3}$	84
4	$\binom{9}{4}$	126
5	$\binom{9}{5} = \binom{9}{4}$	126
6	$\binom{9}{6} = \binom{9}{3}$	84
7	$\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$	36
8	$\binom{9}{8} = \binom{9}{1}$	9
9	$\binom{9}{9} = \binom{9}{0}$	1

¹ Das „leere“ Kegelbild

Es gibt insgesamt 512 Möglichkeiten.

Diese Aufgabe kann zu interessanten Symmetriebetrachtungen veranlassen. Da ein Quadrat acht Symmetrielagen hat, gehen bei den Deckabbildungen einige der Kegelbilder ineinander über. Bild 305/1 zeigt als Beispiel die 16 voneinander „wesentlich verschiedenen“ Aufstellungen von 3 Kegeln. Die Zahl unter jedem Kegelbild gibt an, wie viele Kegelaufstellungen jeweils durch Deckabbildungen möglich sind.



2. Auffassung: Behandlung als Problem von Variationen mit Wiederholung

Die Menge der Felder wird in die Zweiermenge „besetzt“ – „frei“ abgebildet. Es ist also die Anzahl der Variationen mit Wiederholung von 2 verschiedenen Elementen zur Klasse 9 zu bestimmen. Man erhält ${}^wV_2^{(9)} = 2^9 = 512$ Möglichkeiten.

15.2.

Ausblick auf weiterführende Fragestellungen der Kombinatorik¹

Wir erörtern zunächst das kombinatorische Element beim Veranschaulichen von Mengen mit Hilfe von EULER-Diagrammen (EULER-Kreisen) bzw. VENN-Diagrammen.

¹ In Teil 15.2. hat der Autor Anregungen verarbeitet, die ihm von VARGA, T., Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, vermittelt wurden.

Die Fläche eines EULER-Kreises zerlegt das Flächenstück, in dem dieser Kreis liegt, in zwei Gebiete. Betrachtet man das Innere der Kreisfläche als eine Menge M , so ist die Menge der nicht im Inneren dieser Kreisfläche liegenden Punkte die Komplementärmenge \bar{M} von M .

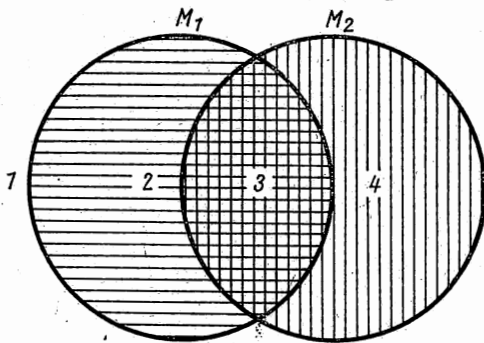
Sind zwei Mengen M_1 und M_2 gegeben, so ist die in Bild 306/1 dargestellte Form der Veranschaulichung (zwei einander schneidende (EULER-)Kreise) üblich. Das Flächenstück, in dem Bild 306/1 liegt, zerfällt in vier Gebiete, die man wie folgt charakterisieren kann:

$$\text{Gebiet 1} - \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$$

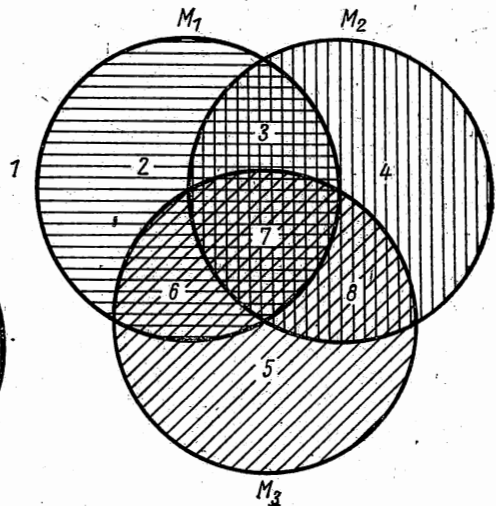
$$\text{Gebiet 2} - M_1 \cap \bar{M}_2$$

$$\text{Gebiet 3} - M_1 \cap M_2$$

$$\text{Gebiet 4} - \bar{M}_1 \cap M_2$$



306/1



306/2

Aus Bild 306/2 entnehmen wir entsprechend:

$$\text{Gebiet 1} - \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3$$

$$\text{Gebiet 5} - \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3$$

$$\text{Gebiet 2} - M_1 \cap \bar{M}_2 \cap \bar{M}_3$$

$$\text{Gebiet 6} - M_1 \cap \bar{M}_2 \cap M_3$$

$$\text{Gebiet 3} - M_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3$$

$$\text{Gebiet 7} - M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

$$\text{Gebiet 4} - \bar{M}_1 \cap M_2 \cap \bar{M}_3$$

$$\text{Gebiet 8} - \bar{M}_1 \cap M_2 \cap M_3$$

Es geht um folgendes kombinatorische Problem:

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es,

- eine Menge M ;
- zwei Mengen M_1, M_2 ;
- drei Mengen M_1, M_2, M_3 ;
- vier Mengen M_1, M_2, M_3, M_4

in eine Zweiermenge abzubilden?

Anschaulich heißt das festzustellen, welche bzw. wie viele Möglichkeiten es gibt, jeweils den (das Zeichen \bar{M} für die Komplementärmenge von M charakterisierenden) Querstrich zu setzen oder nicht.

Wir erhalten folgende Lösungen:

$$a) \sum_{j=0}^1 K_1^{(j)} = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} = 2^1 = {}^wV_2^{(1)} = 2$$

$$b) \sum_{j=0}^2 K_2^{(j)} = \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} = 2^2 = {}^wV_2^{(2)} = 4$$

$$c) \sum_{j=0}^3 K_3^{(j)} = \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} = 2^3 = {}^wV_2^{(3)} = 8$$

$$d) \sum_{j=0}^4 K_4^{(j)} = \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} = 2^4 = {}^wV_2^{(4)} = 16$$

Im Fall d) benötigen wir zur Veranschaulichung

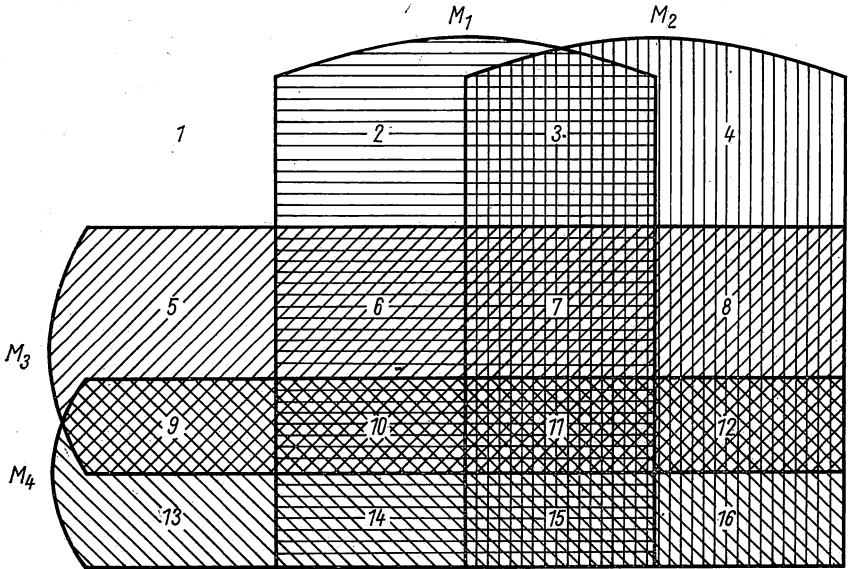
- 1 Gebiet mit nullfacher,
- 4 Gebiete mit einfacher,
- 6 Gebiete mit zweifacher,
- 4 Gebiete mit dreifacher,
- 1 Gebiet mit vierfacher „Überdeckung“.

Man überzeuge sich selbst davon, daß die Flächen von 4 (EULER-) Kreisen maximal 14 derartige Gebiete erzeugen (welche Gebiete fehlen?). Deshalb deformieren wir die EULER-Kreise geeignet und wählen zur Veranschaulichung das in Bild 308/1 dargestellte VENN-Diagramm, aus dem wir folgendes entnehmen.

Gebiet	Darstellung	Gebiet	Darstellung
1	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4$	9	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4$
2	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4$	10	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap M_4$
3	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4$	11	$M_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$
4	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4$	12	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$
5	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4$	13	$\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$
6	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4$	14	$M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$
7	$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \overline{M}_4$	15	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$
8	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4$	16	$\overline{M}_1 \cap M_2 \cap \overline{M}_3 \cap M_4$

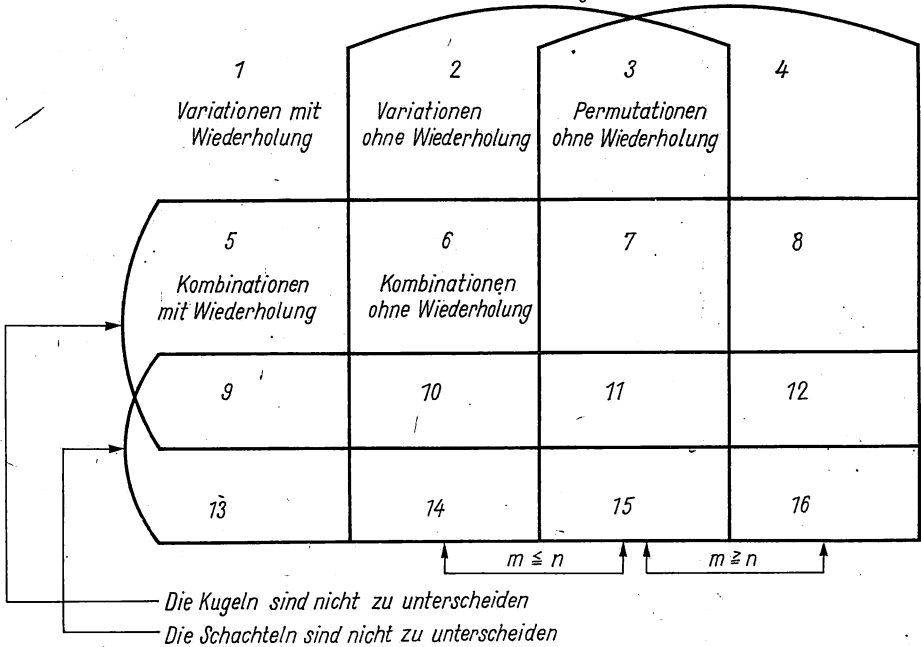
- Gebiet 1: 4 mal „quer“ – nullfache Überdeckung: 1
 Gebiete 2, 4, 5, 13: 3 mal „quer“ – einfache Überdeckung: 4
 Gebiete 3, 6, 8, 9, 14, 16: 2 mal „quer“ – zweifache Überdeckung: 6
 Gebiete 7, 10, 12, 15: 1 mal „quer“ – dreifache Überdeckung: 4
 Gebiet 11: 0 mal „quer“ – vierfache Überdeckung: 1

Summe: 16



308/1

In jeder Schachtel befindet sich
höchstens mindestens
eine Kugel



308/2

Man überlege, warum es 4 einstellige und 16 zweistellige Wahrheitsfunktionen gibt.

Um einige weitere Fragestellungen zu ermöglichen, knüpfen wir an die Folge der Beispiele in Teil 14.1. an.

Jetzt sollen m Kugeln in n Schachteln gesteckt werden. Man kann die Problematik unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachten.

1. In jeder Schachtel befindet sich höchstens eine Kugel.
In jeder Schachtel befindet sich nicht höchstens eine Kugel (also mehr als eine Kugel).
2. In jeder Schachtel befindet sich mindestens eine Kugel.
In jeder Schachtel befindet sich nicht mindestens eine Kugel (also keine Kugel).
3. Die Kugeln sind nicht zu unterscheiden.
Die Kugeln sind zu unterscheiden.
4. Die Schachteln sind nicht zu unterscheiden.
Die Schachteln sind zu unterscheiden.

Diese einzelnen Möglichkeiten können unterschiedlich miteinander kombiniert sein und auf ähnliche Weise, wie das Bild 308/1 zeigt, dargestellt werden (Bild 308/2).

Wir fassen die 16 möglichen Fälle, unter den jeweils genannten Bedingungen m Kugeln n Schachteln zuzuordnen, in geeigneten Übersichten zusammen, die wir empirisch ermitteln.

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64
3	3	9	27	81	243	729
4	4	16	64	256	4 ⁵	4 ⁶
5	5	25	125	625	5 ⁵	5 ⁶
6	6	36	216	6 ⁴	6 ⁵	6 ⁶

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	6	6	0	0	0
4	4	12	24	24	0	0
5	5	20	60	120	120	0
6	6	30	120	360	720	720

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	2	0	0	0	0
3	0	0	6	0	0	0
4	0	0	0	24	0	0
5	0	0	0	0	120	0
6	0	0	0	0	0	720

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	2	6	14	30	62
3	0	0	6	36	150	540
4	0	0	0	24	240	1560
5	0	0	0	0	120	1800
6	0	0	0	0	0	720

5. $n \backslash m$	1	1	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	10	15	21	28
4	4	10	20	35	56	84
5	5	15	35	70	126	210
6	6	21	56	126	252	462

6. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	6	4	1	0	0
5	5	10	10	5	1	0
6	6	15	20	15	6	1

7. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

8. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	3	4	5
3	0	0	1	3	6	10
4	0	0	0	1	4	10
5	0	0	0	0	1	5
6	0	0	0	0	0	1

9. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	3	3	4
3	1	2	3	4	5	7
4	1	2	3	5	6	9
5	1	2	3	5	7	10
6	1	2	3	5	7	11

10. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0
5	1	1	1	1	1	0
6	1	1	1	1	1	1

11. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

12. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	3
3	0	0	1	1	2	3
4	0	0	0	1	1	2
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

13. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	9
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16	32
3	1	2	5	14	41	122
4	1	2	5	15	51	187
5	1	2	5	15	52	202
6	1	2	5	15	52	203

14. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0
5	1	1	1	1	1	0
6	1	1	1	1	1	1

15. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

16. $n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	7	15	31
3	0	0	1	6	25	90
4	0	0	0	1	10	65
5	0	0	0	0	1	15
6	0	0	0	0	0	1

Einige der bisher erörterten Arten bzw. Klassen von Komplexionen finden wir wieder.

Fall 1: Variationen mit Wiederholung

Fall 2: Variationen ohne Wiederholung

Fall 3: Permutationen ohne Wiederholung

Fall 5: Kombinationen mit Wiederholung

Fall 6: Kombinationen ohne Wiederholung

Permutationen mit Wiederholung nehmen im Aufbau der Kombinatorik eine gewisse Sonderstellung ein und können in das hier dargelegte System nicht eingeordnet werden.

Wir verweisen zunächst nochmals auf Kombinationen:

Es sei (wie bisher) M die in N eindeutig abzubildende Menge. Dann setzt das Vorliegen von Kombinationen notwendigerweise voraus, daß die Elemente von M zu unterscheiden und die Elemente von N nicht zu unterscheiden sind (und nicht etwa umgekehrt, daß die Elemente von M nicht zu unterscheiden und die Elemente von N zu unterscheiden sind) (\nearrow Teil 14.2.).

Wir erörtern lediglich noch die *Fälle* 4., 8. und 16.

In den Fällen 4. und 16. ist die Anzahl der verschiedenen Abbildungen von einer Menge mit m verschiedenen Elementen auf eine Menge mit n verschiedenen Elementen zu ermitteln, wobei in Fall 4. die Anordnung der n Elemente zu berücksichtigen ist, in Fall 16. nicht.

In Fall 4. gibt es

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

Möglichkeiten, in Fall 16.

$$\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$$

Möglichkeiten, wie ohne Beweis mitgeteilt sei.

BEISPIEL 1 (15.2.):

5 Kraftfahrer sollen mit 3 PKW gleichzeitig zu einem Einsatzort fahren. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die PKW zu besetzen, wenn

- a) die PKW als zu unterscheiden,
 b) die PKW als nicht zu unterscheiden
 angenommen werden?

Lösung:

a) Es gibt $3^5 - \binom{3}{1} \cdot 2^5 + \binom{3}{2} \cdot 1^5 = 150$ Möglichkeiten.

b) Es gibt $\frac{1}{3!} \cdot 150 = 25$ Möglichkeiten.

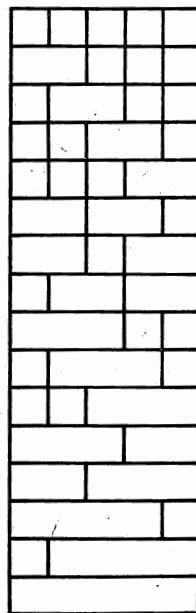
In Fall a) gibt es $\binom{m-1}{n-1}$ Möglichkeiten, wobei $m \geq n$ sein muß, wie ebenfalls ohne Beweis mitgeteilt sei.

BEISPIEL 2 (15.2.):

Welche bzw. wie viele verschiedene n -gliedrige Summendarstellungen ermöglicht eine natürliche Zahl m , wobei die Anordnung der Summanden berücksichtigt werden soll?

Wir erörtern anschaulich alle derartigen Zerlegungen der Zahl 5 (Bild 312/1).

Zerlegung	Anzahl der Zerlegungen	
		Summanden
1 + 1 + 1 + 1 + 1	1	5
2 + 1 + 1 + 1 1 + 2 + 1 + 1 1 + 1 + 2 + 1 1 + 1 + 1 + 2	4	4
2 + 2 + 1 2 + 1 + 2 1 + 2 + 2 3 + 1 + 1 1 + 3 + 1 1 + 1 + 3	6	3
3 + 2 2 + 3 4 + 1 1 + 4	4	2
5	1	1



312/1

Insgesamt sind das 16 Zerlegungen.

Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es 2^{m-1} verschiedene Summandendarstellungen durch natürliche Zahlen, wobei die Anordnung der Summanden berücksichtigt ist (↗ 299f. die Gleichungen für $n = 2, 3, 4, 5$).

Die Übersichten 1. bis 16. (↗ 309ff.) beinhalten zum Teil komplizierte Zusammenhänge, aber auch solche, die bereits erörtert wurden.

Aus den Übersichten 6. und 8. lassen sich zum Beispiel durch geeignete Summenbildung diagonal angeordneter Zahlen die Werte des Nachbereichs der FIBONACCISCHEN Zahlenfolge entwickeln (↗ Beispiele 10 (10.)).

15.3.

Einige spezielle Formeln

Für eine Anzahl Anwendungen von Variationen oder Kombinationen ist die Beantwortung dreier Fragen von Bedeutung, die durch einfache Überlegungen zu strukturentsprechenden Formeln führt.

Wie viele Kombinationen bzw. Variationen ohne bzw. mit Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur Klasse m enthalten

1. k vorgegebene Elemente ($0 \leq k \leq m$),
2. keines von k vorgegebenen Elementen ($0 \leq k \leq n$),
3. mindestens eines von k vorgegebenen Elementen ($0 \leq k \leq n$)?

Bevor wir die Ergebnisse übersichtlich zusammenstellen, beantworten wir diese Fragen für Kombinationen ohne Wiederholung an Hand von Beispielen.

BEISPIEL 1 (15.3.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Schüler aus 7 Schülern A, B, C, D, E, F, G derart für eine Delegation auszuwählen, daß 2 bestimmte Schüler, etwa F und G , der Delegation auf jeden Fall angehören?

Lösung:

Obwohl die Lösung sehr nahe liegt, wollen wir zunächst übersichtlich alle möglichen Delegationen ermitteln und diejenigen durch (\times) kennzeichnen, die F und G enthalten.

$ABCD$ (\circ)	$ABEF$	$ACEG$	$BCDF$	$BDFG$ (\times)
$ABCE$ (\circ)	$ABEG$	$ACFG$ (\times)	$BCDG$	$BEFG$ (\times)
$ABCF$	$ABFG$ (\times)	$ADEF$	$BCEF$	$CDEF$
$ABCG$	$ACDE$ (\circ)	$ADEG$	$BCEG$	$CDEG$
$ABDE$ (\circ)	$ACDF$	$ADFG$ (\times)	$BCFG$ (\times)	$CDFG$ (\times)
$ABDF$	$ACDG$	$AEEG$ (\times)	$BDEF$	$CEFG$ (\times)
$ABDG$	$ACEF$	$BCDE$ (\odot)	$BDEG$	$DEFG$ (\times)

Damit ist bereits ein numerisches Verfahren festgelegt. Aus den Schülern A, B, C, D, E, F, G sondert man F und G aus und ermittelt die Anzahl der Möglichkeiten, aus den $7 - 2 = 5$ Schülern A, B, C, D, E eine Delegation aus $4 - 2 = 2$ Schülern zusammenzustellen. Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten:

$$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$$

Genau diesen Delegationen können die Schüler F und G zugeordnet werden.

Diese Lösung kann man verallgemeinern:

Man sondert aus den n gegebenen Elementen die k bestimmten Elemente aus und kombiniert die übrigbleibenden $(n - k)$ Elemente zur Klasse $(m - k)$. Nun fügt man jeder der so erhaltenen Kombinationen die zuerst ausgesonderten k Elemente hinzu und erhält alle und nur die Kombinationen von n verschiedenen Elementen zur Klasse m mit den k bestimmten Elementen.

BEISPIEL 2 (15.3.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Schüler aus 7 Schülern A, B, C, D, E, F, G derart für eine Delegation auszuwählen, daß 2 bestimmte Schüler, etwa F und G , von der Delegierung ausgeschlossen sind?

Lösung:

In der Zusammenstellung aller möglichen Delegationen (\nearrow 313) sind die hier geforderten mit (\circ) gekennzeichnet. Numerisch heißt das: Werden F und G ausgeschlossen, so verbleiben noch $7 - 2 = 5$ Schüler, nämlich $A, B,$

C, D, E , aus denen 4 auszuwählen sind. Es gibt also $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ Möglichkeiten.

Allgemein heißt das, daß die Anzahl der Kombinationen von $(n - k)$ verschiedenen Elementen zur Klasse m zu ermitteln ist.

BEISPIEL 3 (15.3.):

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Schüler aus 7 Schülern A, B, C, D, E, F, G derart für eine Delegation auszuwählen, daß mindestens einer von 2 bestimmten Schülern, etwa F oder G , der Delegation angehört?

Lösung:

In der Zusammenstellung aller möglichen Delegationen (\nearrow 313) erhalten wir genau diejenigen Delegationen, die nicht mit (\circ) gekennzeichnet sind. Das Ergebnis folgt also unmittelbar aus dem von Beispiel 2 (15.3.). Von den

$\binom{7}{4} = 35$ Möglichkeiten, aus 7 Schülern 4 Schüler auszuwählen, entfallen genau

die in Beispiel 2 (15.3.) ermittelten Möglichkeiten, so daß in $\binom{7}{4} - \binom{5}{4} = 30$

Delegationen F oder G vertreten sind.

Allgemein gilt, daß man die gesuchte Anzahl von Kombinationen erhält, wenn man von sämtlichen $\binom{n}{m}$ Kombinationen diejenigen $\binom{n-k}{m}$ Kombinationen wegläßt, die keines der k Elemente enthalten.

Die Zurückführung von Beispiel 3 (15.3.) auf Beispiel 2 (15.3.) ist für derartige Fragestellungen (zum Beispiel auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) wesentlich.

Die entsprechenden Überlegungen für Kombinationen mit Wiederholung und Variationen ohne bzw. mit Wiederholung überlassen wir dem Leser.

Die Ergebnisse seien wie folgt übersichtlich zusammengestellt.

	1.	2.	3.
Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung	$\binom{n-k}{m-k}$	$\binom{n-k}{m}$	$\binom{n}{m} - \binom{n-k}{m}$
Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung	$\binom{n+m-1-k}{m-k}$	$\binom{n+m-1-k}{m}$	$\binom{n+m-1}{m} - \binom{n+m-1-k}{m}$
Anzahl der Variationen ohne Wiederholung	$\binom{n-k}{m-k} \cdot m!$	$\binom{n-k}{m} \cdot m!$	$\left[\binom{n}{m} - \binom{n-k}{m} \right] \cdot m!$
Anzahl der Variationen mit Wiederholung	—	$(n-k)^m$	$n^m - (n-k)^m$

Frage 1 (\nearrow 313) läßt sich für Variationen mit Wiederholung nicht mit Hilfe einer Formel beantworten, weil Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen und Variationen mit Wiederholung von n Elementen in derselben Klasse verschiedene Anzahlen gleicher Elemente enthalten, so daß es nicht möglich ist, die Zahl der notwendigen Permutationen allgemein anzugeben. Die gesuchten Zahlen müssen deshalb von Fall zu Fall ermittelt werden.

Für Anwendungen von Permutationen ohne Wiederholung ist es gelegentlich notwendig zu fragen, in wie vielen Permutationen von n Elementen k ($k \leq n$) vorgeschriebene Elemente

1. in einer bestimmten vorgegebenen Reihenfolge nebeneinander stehen oder
2. in beliebiger Reihenfolge nebeneinander stehen oder
3. an k im einzelnen bestimmten Stellen stehen.

15.3.

Man veranschauliche sich diese Aufgabenstellungen an Hand einiger selbstgewählter Zahlenbeispiele.

Lösungen:

1. Man betrachte die k Elemente als einen Block, so daß jetzt $(n - k + 1)$ Elemente vorhanden sind. Die gesuchte Zahl der Permutationen beträgt

$$P_{n-k+1} = (n - k + 1)! .$$

2. Die Elemente des unter 1. genannten Blocks lassen sich auf $k!$ Arten permutieren. Entsprechend 1. gilt

$$P_{k,n} = P_k \cdot P_{n-k+1} = k! (n - k + 1)! .$$

3. Die k Elemente sind nicht mit zu permutieren. Es gilt

$$P_{n-k} = (n - k)! .$$

In Teil 16. erörtern wir eine Anzahl von Beispielen, die nach bestimmten Sachgebieten und nicht etwa nach den einzelnen Komplexionsarten gegliedert sind. Wir wollen damit in jedem Falle eine aus der Praxis resultierende Problemerkennung sichern, die notwendige Bedingung für die Anwendung einer Formel ist. Außerdem soll damit angedeutet werden, daß für die unterrichtliche und die außerunterrichtliche Arbeit mit Schülern der unteren Klassen hier eine Vielfalt in der Schulpraxis noch nicht erschlossener Reserven liegt, die im Sinne des Teiles 13. anwendbar sind. Die hier ausgewählten Beispiele sind weitgehend dem Erfahrungsbereich der Schüler entnommen.

Kommentare sollen zur selbständigen Lösungsfindung befähigen, so daß nicht alle Ergebnisse explizit ausgewiesen werden. Der Leser versäume nicht, allgemein formulierte Beispiele zu konkretisieren, also etwa Variable geeignet zu belegen.

16.1.

Komplexionen von Personen und ihnen gegebenenfalls zuzuordnender Objekte

1. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, p Personen derart auf p Plätze zu verteilen, daß jeder Person genau ein Platz und umgekehrt zugeordnet wird? (↗ Beispiel 1 (14.2.))
2. p Personen sollen unter den in Beispiel 1. genannten Bedingungen auf p Plätze wie folgt verteilt werden:

16.1.

- a) q Personen ($q \leq p$) sollen in einer festgelegten Reihenfolge nebeneinander sitzen.
 - b) q Personen ($q \leq p$) sollen in beliebiger Reihenfolge nebeneinander sitzen.
 - c) q Personen ($q \leq p$) sollen q vorgeschriebene Plätze einnehmen.
- Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils hierfür?
Falls $p = 6$ und $q = 3$ ist, gibt es
a) 24, b) 144, c) 6 Möglichkeiten.

3. $p = p_1 + p_2$ Personen mögen derart auf $p = p_1 + p_2$ Plätze verteilt werden, daß jeder Person genau ein Platz und umgekehrt zugeordnet wird, wobei entsprechend etwa p_1 Personen auf p_1 an einem ersten Tisch stehende Stühle und p_2 Personen auf p_2 an einem zweiten Tisch stehende Stühle zu sitzen kommen sollen. Es darf nicht von einem Tisch zum anderen „hinübergewechselt“ werden.

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür?

Dieses Beispiel kann analog für beliebige viele Tische formuliert werden.

Falls $p_1 = 3$ und $p_2 = 2$ ist, gibt es 12 (nicht etwa 8) Möglichkeiten.

4. Aus einer Gruppe von n_1 Jungen und n_2 Mädchen sollen m_1 Jungen und m_2 Mädchen für eine Delegation ausgewählt werden ($m_1 \leq n_1$; $m_2 \leq n_2$). Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es?

Falls $n_1 = 4$, $m_1 = 2$, $n_2 = 5$ und $m_2 = 2$ ist, gibt es 60 Möglichkeiten.

5. Aus einer Gruppe von n_1 Schülern sollen zunächst n_2 und anschließend von den verbliebenen nochmals n_3 ausgewählt werden ($n_1 \geq n_2 + n_3$).

Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es?

Falls $n_1 = 7$, $n_2 = 2$ und $n_3 = 3$ ist, gibt es 210 Möglichkeiten.

6. Auf wie viele Arten kann man die 11 Spieler einer Fußballmannschaft als Stürmer, Läufer, Verteidiger und Tormann aufstellen?

Man überlege sich verschiedene Möglichkeiten eines Ansatzes.

In den Beispielen 1. bis 6. ist die Anzahl der Elemente der zu betrachtenden Mengen ($Z(M) = m$ und $Z(N) = n$) gegeben, die Anzahl der Komplexionen dagegen gesucht.

Beispiel 7. demonstriert eine der prinzipiell möglichen Umkehrungen solcher Aufgaben, nämlich $Z(N) = n$ aus den beiden anderen Zahlen zu ermitteln (↗ Beispiele 6. (16.4.) und 7. (16.4.)). Hieraus ergeben sich für den Leser Anregungen, selbständig weitere Aufgaben zu formulieren und zu lösen.

7. Bei einer Feier stoßen je zwei der Anwesenden genau einmal miteinander an. Die Gläser erklingen 120mal. Als es zum Tanzen geht, sagt jemand: „Wenn jeder Herr mit jeder Dame tanzt, so können wir insgesamt 60 verschiedene Paare bilden.“

Wie viele Damen und wie viele Herren sind anwesend, wenn es mehr Damen als Herren sind?

Aus $K_n^{(2)} = \binom{n}{2} = 120$ folgt eindeutig $n = 16$; denn eine negative Anzahl von Personen ist sinnlos. Wir bezeichnen die Anzahl der Herren mit h , die der Damen mit d und erhalten aus $d + h = 16$ und $dh = 60$ wegen $d > h$ eindeutig $d = 10$ und $h = 6$.

16.2.

Komplexionen bei Spielen

1. Welche bzw. wie viele unterschiedliche Würfe sind mit m Würfeln unter den im folgenden genannten Bedingungen möglich?

(1) Die Würfel sollen zu unterscheiden (also etwa verschiedenfarbig) sein.

(2) Die Würfel sollen nicht zu unterscheiden sein.

(a) Die Augenzahlen dürfen sich wiederholen.

(b) Die Augenzahlen sind sämtlich voneinander verschieden ($m \leq 6$).

Falls $m = 2$ ist, gibt es

(1a) 36; (1b) 30; (2a) 21; (2b) 15

unterschiedliche Würfe.

2. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, mit n zu unterscheidenden Würfeln n_1 -mal die Augenzahl a_1 , n_2 -mal die Augenzahl a_2 , ..., n_r -mal die Augenzahl a_r zu würfeln, wobei $r \leq 6$, $\sum_{j=1}^r n_j = n$ und $1 \leq a_r \leq 6$ ist?

$$\begin{aligned} \text{Es gibt } P &= P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \\ &= \binom{n}{n_1} \cdot \binom{n - n_1}{n_2} \cdot \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{n - n_1 - \dots - n_{r-1}}{n_r} \end{aligned}$$

Möglichkeiten.

3. Ein beliebtes Spiel, etwa zur Festlegung einer durch Los zu ermittelnden Entscheidung, besteht darin, Münzen hochzuwerfen und festzustellen, welche Seite beim Auftreffen nach oben zeigt. Je nachdem, ob „Zahl-

(zeichnen)“ oder „Wappen“ gewählt wurde, gilt das Spiel als gewonnen bzw. verloren.

- (a) Welche bzw. wie viele verschiedene Würfe sind mit k zu unterscheidenden Münzen möglich?
 (b) Welche bzw. wie viele verschiedene Würfe sind mit k nicht zu unterscheidenden Münzen möglich?

Falls $k = 3$ ist, gibt es

(a) 8; (b) 4

Möglichkeiten.

4. Welche bzw. wie viele Steine enthält ein Dominospiel, bei dem die Zahlbilder von 0 bis n gehen?

Ein Dominospiel, bei dem die Zahlbilder von 0 bis 6 gehen, enthält 28 Steine.

5. Auf welche bzw. wie viele Arten lassen sich m_1 weiße und m_2 schwarze Steine auf $n \leq 64$ Schachbrettfeldern aufstellen, wenn $m_1 + m_2 \leq n$?

Für die m_1 weißen Steine gibt es

$$K_n^{(m_1)} = \binom{n}{m_1}$$

Möglichkeiten. Für die m_2 schwarzen Steine verbleiben noch $(n - m_1)$ Felder, also

$$K_{n-m_1}^{(m_2)} = \binom{n-m_1}{m_2}$$

Möglichkeiten. Insgesamt erhält man demnach

$$K_n^{(m_1)} K_{n-m_1}^{(m_2)} = \binom{n}{m_1} \binom{n-m_1}{m_2}$$

Möglichkeiten. m_1 und m_2 sind miteinander vertauschbar. Man kann das Problem auch als Ermittlung einer Anzahl von Permutationen mit Wiederholung auffassen, wenn man die Anzahl der nicht besetzten Felder mit beachtet, und erhält

$$P_n^{(m_1, m_2, n-m_1-m_2)} = \frac{n!}{m_1! m_2! (n-m_1-m_2)!}$$

Möglichkeiten.

6. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, n Spielkarten zu je n_1, n_2, \dots, n_r an r Personen zu verteilen?

Die weiteren Bedingungen sind den Beispielen 3 (15.3.) und 4 (15.3.) zu

entnehmen. Hier ist die Fragestellung insofern zu präzisieren, als zunächst nicht ohne weiteres zu entscheiden ist, ob die Anordnung der (im allgemeinen anzahlgleichen) Kartengruppen berücksichtigt werden soll oder nicht. Interessieren lediglich die Möglichkeiten einer Kartenverteilung, so ist die Anordnung der Kartengruppen gleichgültig. Beim Skat-spiel sind also zum Beispiel

$$P_{32}^{(10, 10, 10, 2)} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{32!}{10! 10! 10! 2!} \cdot \frac{1}{3!}$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. } K_{32}^{(10)} K_{22}^{(10)} K_{12}^{(10)} \cdot \frac{1}{3!} &= \binom{32}{10} \binom{22}{10} \binom{12}{10} \cdot \frac{1}{3!} \\ &= 458\ 882\ 401\ 417\ 440 \end{aligned}$$

Kartenverteilungen möglich.

Um einen Begriff von der Größe dieser Zahl zu vermitteln, sei folgendes bemerkt:

Wenn von einer Million Menschen jeder ununterbrochen Tag und Nacht arbeitete und je Minute die 32 Karten wie vorgeschrieben verteilte, so würden hierfür etwa 1000 Jahre benötigt.

Um die Zahl der möglichen Skatspiele zu errechnen, muß noch die Anordnung der Kartengruppen berücksichtigt werden. Die Anzahl der möglichen Kartenverteilungen braucht nur noch mit $3! = 6$ multipliziert zu werden. Wir stellen wiederum fest, daß man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man von der Verteilung der beiden „im Skat liegenden“ Karten ausgeht.

$$K_{32}^{(10)} K_{22}^{(10)} K_{12}^{(10)} = K_{32}^{(2)} K_{30}^{(10)} K_{20}^{(10)}$$

$$\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = \binom{32}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}$$

7. Welche bzw. wie viele Tipmöglichkeiten gibt es bei einem Fußballtoto mit 12 Spielen?

Für zwei Spiele gibt es neun Möglichkeiten.

8. Welche bzw. wie viele Tipmöglichkeiten gibt es bei einem Zahlenlotto 5 aus 90 bzw. 6 aus 49?

Die Lösung sei zunächst dem Leser überlassen.

Man nehme nun an, daß jeweils genau so viele Tipscheine vorliegen mögen, wie soeben ermittelt wurden.

Wie viele Tipscheine mit (6), 5, 4, 3, 2, 1, 0 richtigen Zahlen gibt es dann jeweils insgesamt?

Man kann sich das, etwa am Beispiel eines Zweiertips bei 5 aus 90 dargestellt, wie folgt überlegen:

Von den fünf Treffern wurden zwei getippt; das ergibt

$$K_5^{(2)} = \binom{5}{2}$$

Möglichkeiten.

Von den $90 - 5 = 85$ nicht gezogenen Zahlen stehen jeweils noch 3 auf dem Tipschein; das ergibt

$$K_{85}^{(3)} = \binom{85}{3}$$

Möglichkeiten.

Da jeder der $K_5^{(2)}$ „richtigen“ mit jedem der $K_{85}^{(3)}$ „falschen“ Tips kombiniert werden kann, ergeben sich

$$K_5^{(2)} K_{85}^{(3)} = \binom{5}{2} \binom{85}{3}$$

Zweiertips.

Addiert man sämtliche Tipmöglichkeiten jeder Art einschließlich der Anzahl derjenigen Tips, die keinen einzigen Treffer enthalten, so ergibt sich die bei der ursprünglichen Aufgabenstellung (↗ Beispiel 7.) ermittelte Gesamtzahl.

Die Ergebnisse seien zusammengestellt.

Art der Tips	5 aus 90	6 aus 49
Sechsertips	—	$\binom{6}{6} \binom{43}{0} = 1$
Fünfertips	$\binom{5}{5} \binom{85}{0} = 1$	$\binom{6}{5} \binom{43}{1} = 258$
Vierertips	$\binom{5}{4} \binom{85}{1} = 425$	$\binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545$
Dreiertips	$\binom{5}{3} \binom{85}{2} = 35700$	$\binom{6}{3} \binom{43}{3} = 246820$
Zweiertips	$\binom{5}{2} \binom{85}{3} = 987700$	$\binom{6}{2} \binom{43}{4} = 1851150$
Einertips	$\binom{5}{1} \binom{85}{4} = 10123925$	$\binom{6}{1} \binom{43}{5} = 5775588$
Fehltyps	$\binom{5}{0} \binom{85}{5} = 32801517$	$\binom{6}{0} \binom{43}{6} = 6096454$
Summe	$\binom{90}{5} = 43949268$	$\binom{49}{6} = 13983816$

Wir erörtern am Beispiel 6, aus 49 noch das Problem der sogenannten Zusatzzahl.

Die Zusatzzahl wird stets als siebente Zahl gezogen und ist nur für diejenigen Gewinner von Interesse, die einen Fünftertip haben. „Fünf Richtige mit Zusatzzahl“ sind gewonnen, wenn außer den fünf „richtigen“ Zahlen die Zusatzzahl als sechste Zahl richtig getippt wurde. Die Zusatzzahl ist von den sechs ursprünglichen Tips stets einer der „falschen“. Ist er der richtige, so gibt es $\binom{6}{5} \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten. Ist er es nicht, so gibt es $\binom{6}{5} \cdot 42 = 252$ Möglichkeiten. Insgesamt erhält man wieder $6 + 252 = 258$ Möglichkeiten.

16.3.

Komplexionen von Grundziffern und Buchstaben

Da Grundziffern und Buchstaben zur Symbolisierung von Komplexionen dienen, können die meisten Beispiele dieses Teiles sachbezogen unterschiedlich interpretiert werden.

1. Welche bzw. wie viele m -stellige Ziffern lassen sich aus n Grundziffern ohne Verwendung der Null bilden ($n \leq 9$)? Wenn eindeutige Lösbarkeit verlangt wird, ist eine Zusatzangabe erforderlich.
 - a) Grundziffern dürfen sich wiederholen.
 - b) Grundziffern dürfen sich nicht wiederholen. Dann gilt $m \leq n$.

Es ergeben sich die Lösungen

$$a) {}^wV_n^{(m)} = n^m,$$

$$b) V_n^{(m)} = \binom{n}{m} \cdot m!.$$

Wenn $m = n$ ist, erhält man Permutationen.

Sie sind in Fall a) durch folgende Formulierung gekennzeichnet:

Welche bzw. wie viele n -stellige Ziffern lassen sich bilden, wenn n_1, n_2, \dots, n_r

Grundziffern übereinstimmen, wobei $r \leq 9$ und $\sum_{j=1}^r n_j = n$ ist? (n braucht

natürlich jetzt keiner Einschränkung unterworfen zu werden.)

Man erhält

$$P = P_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

$$= \binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \binom{n - n_1 - n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{n - n_1 - \dots - n_{r-1}}{n_r}$$

Möglichkeiten.

In Fall b) erhält man $P_n = n!$ Möglichkeiten.

2. Man ermittle die Summe aller Zahlen, deren n -stellige Ziffern durch Permutation von n verschiedenen Grundziffern ohne Verwendung der Null gebildet werden können ($n \leq 9$).

Lösung:

Wir bezeichnen die Grundziffern etwa mit a_1, a_2, \dots, a_9 . Jede Grundziffer erscheint an jeder Stelle der Ziffer $(n-1)!$ -mal. Die Summe der „Einer“, „Zehner“, ... beträgt jeweils $(a_1 + a_2 + \dots + a_9) (n-1)!$. Berücksichtigt man nun noch jeweils den Stellenwert, so gilt

$$s = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (n-1)! \cdot (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}).$$

Wegen Satz 2 (12.) kann der letzte Faktor dieses Produkts durch $\frac{10^n - 1}{9}$

ersetzt werden.

3. Man ermittle die Summe aller Zahlen, deren m -stellige Ziffern aus $n \leq 9$ Grundziffern ohne Verwendung der Null gebildet werden können, wenn sich diese Grundziffern wiederholen dürfen.

Lösung:

Unter Verwendung der in Beispiel 2. angestellten Überlegungen erhält man

$$s = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot n^{m-1} \cdot \frac{10^m - 1}{9}.$$

Den bisher stets ausgeschlossenen Fall der Verwendung der Grundziffer 0 wollen wir in Beispiel 4. allgemein behandeln.

4. Welche bzw. wie viele m -stellige Ziffern lassen sich aus n Grundziffern bilden, wobei mindestens einmal die Null vorkommen soll ($n \leq 10$)?

Es sei hier der im allgemeinen übliche Fall behandelt, daß die Null als erste Stelle einer Ziffer nicht geschrieben wird. Die weitere Gliederung erfolgt entsprechend Beispiel 1. Man erhält die *Lösungen*:

$$\text{a) } {}^w V_n^{(m)} - {}^w V_n^{(m-1)} = n^m - n^{m-1} = (n-1) n^{m-1}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V_n^{(m)} - V_{n-1}^{(m-1)} &= \binom{n}{m} m! - \binom{n-1}{m-1} (m-1)! \\ &= (n-1)^2 (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \end{aligned}$$

Denkt man sich nämlich die möglichen Ziffern jeweils in $(n-1)$ Spalten, mit 1, 2, ..., $(n-1)$ beginnend, angeordnet, so stehen in jeder Spalte in Fall a) n^{m-1} , in Fall b) dagegen wegen der auszuschließenden Wiederholung nur $\binom{n-1}{m-1} (m-1)!$ Ziffern.

Ist insbesondere $m = n$, so liegen Permutationen vor. Für Fall a) sei die Aufgabe wie folgt formuliert:

Welche bzw. wie viele n -stellige Ziffern lassen sich bilden, wenn n_1 die Anzahl der Nullen bezeichnet und im übrigen n_2, n_3, \dots, n_r andere Grundziffern übereinstimmen, wobei $r \leq 10$ und $\sum_{j=1}^r n_j = n$ ist? (n braucht hier wieder keiner Einschränkung unterworfen zu werden.)

Es ergeben sich

$$\begin{aligned} P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} &= P_{n-1}^{(n_1-1, n_2, \dots, n_r)} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} - \frac{(n-1)!}{(n_1-1)! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} \\ &= \frac{(n-n_1)(n-1)!}{n_1! n_2! \cdot \dots \cdot n_r!} \end{aligned}$$

Möglichkeiten.

In Fall b) erhält man

$$P_n - P_{n-1} = n! - (n-1)! = (n-1)(n-1)!$$

Möglichkeiten.

Die Überlegungen, wie die Beispiele 2. und 3. unter Verwendung der Null zu modifizieren sind, überlassen wir dem Leser.

Einige der in diesem Teil bisher erörterten Beispiele lassen sich auf Buchstaben oder Buchstabengruppen (Silben) übertragen, wobei die Einschränkung bezüglich n , entsprechend dem zugrundeliegenden Alphabet, abzuändern ist. Dürfen einzelne Buchstaben am Wortanfang nicht erscheinen, so ist wie in Beispiel 4. mit der Null zu verfahren.

5. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m_1 Konsonanten und m_2 Vokale aus einem Alphabet von n_1 Konsonanten und n_2 Vokalen zu voneinander verschiedenen Wörtern zusammensetzen ($m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2$)? Es gibt

$$K_{n_1}^{(m_1)} K_{n_2}^{(m_2)} P_{m_1+m_2} = \binom{n_1}{m_1} \binom{n_2}{m_2} (m_1 + m_2)!$$

Möglichkeiten.

In diesem Teil sollen noch einige für die Kombinatorik typische Probleme aus verschiedenen Bereichen erörtert werden, die im wesentlichen der Erfahrungswelt der Schüler entsprechen.

1. Sämtliche Arten von Komplexionen lassen sich mit Hilfe bestimmter Farbgestaltungsübungen (auf Gitterpapier, zum Beispiel in den Rechenheften) darstellen. Einige Beispiele seien genannt.
 - 1.1. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, jedes von m nebeneinanderliegenden Kästchen mit genau einer von n Farben zu kennzeichnen?
 - 1.2. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, auf m vorgesehene Stellen jeweils genau ein Stäbchen zu legen, wenn die Stäbchen in n Farben, im übrigen aber nicht zu unterscheiden, zur Verfügung stehen?
 - 1.3. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m -streifige Fahnen aus n Farben zusammenzustellen? Die „Streifen“ mögen einander paarweise kongruent sein und entweder waagerecht oder senkrecht aneinandergefügt werden. Dabei soll zunächst von den praktischen Gegebenheiten her m bezüglich n keinerlei Einschränkung unterworfen sein, insbesondere sollen in den Beispielen 1.2. und 1.3. genügend Stäbchen bzw. Streifen jeder der n Farben zur Verfügung stehen.

Dann sind diese Beispiele etwa im Sinne des Beispiels 1. (16.2.) nach Farbverschiedenheit und -wiederholungen zu präzisieren bzw. auch lediglich auf den Permutationsfall zu beschränken.

2. Auch in Verbindung zur Musik sind alle Arten von Komplexionen zu veranschaulichen und durch geeignete Methoden (Notennamen, Grundziffern, Jale) optisch, akustisch oder motorisch darzustellen. Der Einfachheit halber mögen stets gleiche Tonlänge und gleiches Tempo vorausgesetzt werden. Variationen (bzw. Permutationen) erhält man dann zum Beispiel durch Tonfolgen, Kombinationen durch Akkorde, wobei hier der Wiederholungsfall etwa bei mehrstimmigen Sätzen erscheint.

Wir überlassen es dem Leser, die Ausführungen unter 1. und 2. seinen Interessen entsprechend zu konkretisieren.

3. Anwendungen von Zeichenkomplexionen ergeben sich beim Morsealphabet und bei der Blindenschrift.
 - 3.1. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, Punkte oder Striche nach der Art des Morsealphabets zusammenzustellen, wenn für eine Komplexion höchstens m Elemente verwendet werden dürfen?

Es gibt $\sum_{j=1}^m {}^wV_2^{(j)} = \sum_{j=1}^m 2^j$ Möglichkeiten.

- 3.2. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m Punkte nach der Art der Blindenschrift auf n Stellen eines bestimmten Schemas zu verteilen, wenn m jeweils alle Werte von 1 bis n annehmen darf?

Es gibt $\sum_{j=1}^n K_n^{(j)} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}$ Möglichkeiten, für $n = 6$ also 63.

Soll auch $m = 0$ zugelassen werden, erhält man

$$\sum_{j=0}^n K_n^{(j)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = {}^wV_2^{(n)} = 2^n$$

Möglichkeiten.

- 4.1. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, m verschiedene Briefe in n zu unterscheidende Umschläge zu stecken, wobei $m \leq n$ ist und jedem Brief genau ein Umschlag und jedem Umschlag höchstens ein Brief zugeordnet werden soll?

Wir überlassen die Lösung dem Leser.

- 4.2. Jemand hat an 4 Empfänger je einen Brief und auch die Adressen auf 4 Umschläge geschrieben. Welche bzw. wie viele Möglichkeiten gibt es, die 4 Briefe derart in die 4 Umschläge zu stecken, daß kein einziger Brief in den für ihn bestimmten Umschlag zu liegen kommt? Dabei soll jeder Brief jeweils genau einem Umschlag und umgekehrt zugeordnet werden. Zur Lösung kann man zunächst alle 24 Permutationen angeben und dann alle und nur diejenigen aussondern, bei denen mindestens ein Element den ihm in natürlicher Anordnung zukommenden „Platz“ einnimmt. Im vorliegenden Fall verbleiben 9 Möglichkeiten.

Aus einer solchen Übersicht sind auch noch andere interessante Einsichten anschaulich zu gewinnen. So ist es dem Text dieses Beispiels zufolge nicht möglich, daß genau ein Brief in den nicht für ihn bestimmten Umschlag gesteckt werden kann.

- 5.1. Welche bzw. wie viele Verbindungsgeraden sind zwischen $n \geq 2$ Punkten einer Ebene höchstens möglich, wenn keine drei Punkte auf ein und derselben Geraden liegen?
- 5.2. Das zu 5.1. (bezüglich der projektiven Ebene) duale Problem heißt: In welchen bzw. in wie vielen Punkten einer Ebene können $n \geq 2$ Geraden einander höchstens schneiden? Es dürfen dabei weder drei Geraden durch genau einen Punkt gehen noch zwei Geraden einander parallel sein.

Läßt man die Zusatzbedingungen weg, so sind folgende Überlegungen möglich.

In *Fall 5.1.* mögen von den gegebenen Punkten n_1 auf einer ersten Geraden, n_2 auf einer zweiten und schließlich n_r auf einer r -ten Geraden liegen, wobei jedes der $n_j \geq 3$, $r \leq \frac{n}{3}$, $r \leq \frac{n-1}{3}$ oder $r \leq \frac{n-2}{3}$ ist, je nachdem, ob $n \equiv 0 \pmod{3}$, $n \equiv 1 \pmod{3}$ oder $n \equiv 2 \pmod{3}$ und $\sum_{j=1}^r n_j \leq n$ ist. Dann erhält man

$$K_n^{(2)} - \sum_{j=1}^r K_{n_j}^{(2)} + r = \binom{n}{2} - \sum_{j=1}^r \binom{n_j}{2} + r \quad (1)$$

Verbindungsgeraden.

In *Fall 5.2.* ist Formel (1) ebenfalls anzuwenden, sofern man annimmt, daß durch einen ersten Punkt n_1 Geraden, einen zweiten n_2 und schließlich einen r -ten Punkt n_r Geraden gehen.

Es möge s die Anzahl etwa vorhandener Parallelengeradenbüschel bezeichnen, wobei $s \leq \frac{n}{2}$ bzw. $s \leq \frac{n-1}{2}$ ist, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Ein erstes Parallelengeradenbüschel enthalte p_1 , ein zweites p_2 und endlich das s -te Parallelengeradenbüschel p_s Geraden, wobei $\sum_{i=1}^s p_i \leq n$ ist. Die Anzahl der Schnittpunkte ergibt sich nach der Formel

$$K_n^{(2)} - \sum_{i=1}^s K_{p_i}^{(2)} = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{p_i}{2}. \quad (2)$$

Zur allgemeinen Lösung des Beispiels 5.2. sind die Formeln (1) und (2) wie folgt zu kombinieren:

$$K_n^{(2)} - \sum_{i=1}^s K_{p_i}^{(2)} - \sum_{j=1}^r K_{n_j}^{(2)} + r = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{p_i}{2} - \sum_{j=1}^r \binom{n_j}{2} + r.$$

6. Auf einer Eisenbahn-Nebenlinie wurden mehrere neu errichtete Bahnhöfe in Betrieb genommen. Für alle Stationen dieser Linie sollten neue Fahrkartensätze für den Personenverkehr auf dieser Strecke gedruckt werden, so daß auf jeder Station dieser Linie Fahrkarten für jede schon vorhandene und neu hinzukommende Station dieser Linie vorhanden sein sollten. Es waren 38 Fahrkartensätze zusätzlich zu drucken.

Wie viele Bahnhöfe lagen an dieser Nebenlinie, und wie viele waren neu gebaut worden?

Nach den gegebenen Bedingungen lagen bisher $k \geq 2$ Bahnhöfe an dieser Linie; $n \geq 2$ Bahnhöfe waren neu gebaut worden.

Demnach gilt:

$$\left(k \cdot n + \binom{n}{2}\right) \cdot 2 = 38$$

$$n(n + 2k - 1) = 38,$$

woraus eindeutig $n = 2$ und $k = 9$ folgen.

7. In der Umgebung eines Erholungsortes sollen k Wanderwege durch je $m = 2$ farbige, einander parallele Striche gekennzeichnet werden. Es ist jeweils die kleinstmögliche Anzahl n der benötigten Farben unter folgenden Bedingungen zu ermitteln:

7.1. Die Reihenfolge der Striche ist zu beachten, und beide dürfen von gleicher Farbe sein. Es gilt ${}^wV_n^{(2)} = n^2 \geq k$, also $n \geq \sqrt{k}$.

Hier und in den Beispielen 7.2. bis 7.4. gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn sich für n eine natürliche Zahl ergibt; in allen anderen Fällen gilt das Größerzeichen. Dann aber ist auf die nächsthöhere natürliche Zahl aufzurunden.

7.2. Die Reihenfolge der Striche ist zu beachten, und nicht beide dürfen von gleicher Farbe sein. Es gilt $V_n^{(2)} = n(n - 1) \geq k$, also

$$n_1 \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + k}, \quad n_2 \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + k}.$$

Hier und in den Beispielen 7.3. und 7.4. ist für $k > 0$ die Diskriminante $D > \frac{1}{2}$, so daß jeweils die zweite Lösung der quadratischen (Un-)Gleichungen außerhalb des Bereichs der natürlichen Zahlen liegt und deshalb für dieses Problem bedeutungslos ist. Sie wird nicht mehr angegeben.

7.3. Die Reihenfolge der Striche ist beliebig, und beide dürfen von gleicher Farbe sein.

Es gilt ${}^wK_n^{(2)} = \binom{n+1}{2} \geq k$, also

$$n \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2k}.$$

7.4. Die Reihenfolge der Striche ist beliebig, und nicht beide dürfen von gleicher Farbe sein.

Es gilt $K_n^{(2)} = \binom{n}{2} \geq k$ also

$$n \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2k}.$$

Literaturverzeichnis

- [1] ALEXANDROFF, MARKUSCHEWITSCH, CHINTSCHIN: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I, Arithmetik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.
- [2] ASSER, G.: Einführung in die höhere Mathematik, 1. Teil, Lehrbrief für das Fernstudium der Oberstufenlehrer. Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam, 1955.
- [3] Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis, 10. bis 12. Schuljahr. Volk und Wissen Verlags GmbH, Berlin, Leipzig 1948.
- [4] Autorenkollektiv: Einführung in die mathematische Logik – Einführung in die Mengenlehre – Aufbau der Zahlbereiche. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972.
- [5] Autorenkollektiv: Kleine Enzyklopädie Mathematik, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965.
- [6] Autorenkollektiv: Mathematik, Lehrbücher für die Klassen 1 bis 12. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968 bis 1971.
- [7] Autorenkollektiv: Probleme des Mathematikunterrichts. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965.
- [8] BELKNER, CHR., H. BELKNER: Einführung in die Mathematik. Lehrbrief für das Fernstudium der Lehrer an der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule. Hausdruck der Pädagogischen Hochschule Potsdam, 1959.
- [9] BREHMER: Analytische Geometrie und lineare Algebra, 2. Teil, Lehrbriefe. Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam, 1963.
- [10] BREHMER/APELT: Einführung in die Analysis, Teil 1, Lehrbriefe. Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam, 1970.

- [11] BURROW, THAMM: Zur Behandlung der Probleme der linearen Optimierung. In: *Mathematik in der Schule*, Jahrgang 1963, Heft 3, Seite 184.
- [12] DIETZ: Gleichungen und Ungleichungen. In: *Mathematik in der Schule*. Jahrgang 1963, Heft 2, Seite 108.
- [13] DIETZ: Über die Bedeutung logischer Verknüpfungen bei der Lösung von quadratischen Gleichungen und Gleichungssystemen. In: *Mathematik in der Schule*. Jahrgang 1963, Heft 3, Seite 174.
- [14] DÜRR, CHR.: Einige wichtige Begriffe und Sätze aus der elementaren Zahlentheorie. In: *Mathematik in der Schule*, Jahrgang 1965, Heft 4, Seite 273, Heft 6, Seite 401.
- [15] DYNKIN, USPENSKI: Mathematische Unterhaltungen II, Aufgaben aus der Zahlentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.
- [16] FEKETE, Z.: *Kombinatorika*. Állami Nyomda, Budapest 1954.
- [17] FLACHSMEYER, J.: *Kombinatorik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969.
- [18] GÄBLER: *Mathematik und Leben, Arithmetik—Algebra—Geometrie*. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1959.
- [19] GÖRKE, L.: *Mengen—Relationen—Funktionen*. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965.
- [20] JUNG: *Einführung in die Zahlentheorie*. Fachbuchverlag GmbH, Leipzig 1952.
- [21] KOLOSOW, A. A.: *Kreuz und quer durch die Mathematik (Übersetzung aus dem Russischen)*. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1963.
- [22] KORDEMSKI, B. A.: *Köpfchen, Köpfchen (Übersetzung aus dem Russischen)*. Urania-Verlag, Leipzig, Jena, Berlin 1963.
- [23] Lehrpläne: *Mathematik*. Lehrpläne für die Klassen 1 bis 12. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967 bis 1971.
- [24] LUGOWSKI/WEINERT: *Einführung in die Algebra, Arithmetik und Zahlentheorie*, 4. Teil, Lehrbrief. Herausgegeben von der Fachkommission Mathematik, 1964.
- [25] LUGOWSKI/WEINERT: *Grundzüge der Algebra*. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek, G. B. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966 (Teil I), 1958 (Teil II).
- [26] v. MANGOLDT-KNOPF: *Einführung in die höhere Mathematik*, Band 1. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1951.
- [27] NEISS: *Einführung in die Zahlentheorie*. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1952.
- [28] PIEPER: *Die p -adischen Zahlen*, Teil 1. In: *Mathematik in der Schule*, Jahrgang 1972, Heft 8/9, Seite 449.
- [29] PLACKMEYER, F., LÜDERS, R.: *Anleitung für das Studium und die Lehrveranstaltungen des Faches Mathematik*. Herausgeber: IfL Berlin, Zentrale Abteilung für das Fernstudium der Erzieher und Kindergärtnerinnen.

- [30] SACHS, H.: Gedanken zur Entwicklung der Theorie der endlichen Graphen. In: *Mathematik in der Schule*, Jahrgang 1970, Heft 3, Seite 183.
- [31] STARKE/TÜRKE: *Fachtheoretische Grundlagen des Geometrieunterrichts und methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung Volk und Wissen* Volkseigener Verlag, Berlin 1972 (Band 1), 1974 (Band 2).
- [32] Studienprogramm für die Ausbildung von Lehrern für die unteren Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule im Fach Mathematik vom Mai 1972.
- [33] TÜRKE, W.: Die Entwicklung von Formen des mathematischen Denkens in der Unterstufe anhand kombinatorischer Aufgaben unter besonderer Berücksichtigung von Fallunterscheidungen. Dissertation: Philosophische Fakultät der Martin-Luther-Universität, Halle 1968.
- [34] WALSCH, W.: Zur Realisierung der Leitlinie Beweisen. In: *Mathematik in der Schule*, Jahrgang 1972, Heft 2, Seite 90.
- [35] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.
- [36] LENZ, H.: *Grundlagen der Elementarmathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
- [37] WOROBJOW, N. N.: *Teilbarkeitskriterien*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- [38] GÜNDEL, B.: *Pythagoras in Urlaub*. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main, Berlin, Bonn 1959.
- [39] Modelle für den Mathematikunterricht in der Grundschule, verfaßt von Mitgliedern der Association of Teachers of Mathematics. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1970.
- [40] WELLNITZ, K.: *Kombinatorik*. Verlag Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1964.

- Abbildung 150
- ABELsche Halbgruppe 11
- Abschnitt 212
 - Folgen- 212
- Addition
 - stheorem der Binomial- 244
 - koeffizienten
 - sverfahren 112
 - von Restklassen 50
 - Assoziativität der – von Restklassen 51
 - Kommutativität der – von Restklassen 51
- Äquivalente Umformung 80
- Äquivalenzrelation 20, 45
- Allgemeingültigkeit 74
- Anstieg 160
- Assoziativität 18
 - der Addition von Restklassen 51
 - der Multiplikation von Restklassen 52
- Aufgabe
 - Maximum- 197
 - Minimum- 200
 - Optimierungs- 196
- Aussage 73
 - form 73
 - Gleichheits- 73
 - Ungleichheits- 73
- Bedingungen
 - Einschränkende – 195
 - Neben- 196
 - Nichtnegativitäts- 196
- Beleg 71, 134
- Betrag einer ganzen Zahl 21
- Bildungsgesetz 210
 - Rekursives – 214
- Bildungsvorschrift 210
- Binomischer Satz 248
- Darstellung
 - Explizite – 158
 - Graphische – 156
 - Implizite – 158
- Definitionsbereich
 - einer Funktion 150
 - eines Terms 72
- Distributivität 52
- Division 38
 - mit Rest 37, 38
- Dreieck
 - sform 121
 - PASCALSches – 248
 - Steigungs- 165
- Einheit 18
- Einteilung 20
 - Klassen- 45
- Element
 - Äquivalenzklassen assoziierter -e 20
 - Assoziierte -e 20
 - Eins- 10
 - einer Restklasse 45
 - Höheres – 268
 - Inverses – 57
 - Niedrigeres – 268
- Entgegengesetzte Zahl 21
- Erfüllbarkeit 74

Euklidischer Algorithmus 39
Explizite Form 210

Fakultät 224
Folge 210

Alternierende - 215
Arithmetische - 226, 232
Arithmetische - nullter Ordnung 232
Differenzen- 223
Endliche - 212
Fibonacci'sche - 214
-nabschnitt 212
Geometrische - 254
Glieder einer - 210
Konstante - 215
Monoton wachsende (fallende) - 215
Streng (echt oder eigentlich) monoton
wachsende (fallende) - 215
Unendliche - 212
Unendliche geometrische - 259
Zahlen- 211

Fundamentalsatz der elementaren Zahlen-
theorie für N 24

Funktion 150
Analytischer Ausdruck einer - 154
Definitionsbereich einer - 150
Fakultäts- 224
-sgleichung 154
Inverse - 152
Lineare - 158
Umkehr- 152
Wertebereich einer - 150
Ziel- 196

Geordnete Paare 155

Gerade
Fallende - 160
Steigende - 160

Gleichheit
-saussage 73
- von Restklassen 45
Rest- 48
Un-saussage 73

Gleichung 72
Abschnitts- 170
Äquivalente -en 79
Äquivalente Systeme linearer -en 109
Äquivalente Un-en 79
Diophantische - mit zwei Variablen
113
Einander widersprechende -en 117
Funktions- 154
- n -ten Grades 84
Lineare - mit genau einer Variablen 85

Lineare - mit n Variablen 98
Lineare - mit zwei Variablen 100
Lineare Un- mit genau einer Variablen
131

Lineare Un- mit n Variablen 146
Lösbarkeit diophantischer -en 103
Lösung eines -ssystems 108
Lösung eines Un-ssystems 144
Lösungen linearer Un-en 146
Lösungsmenge eines -ssystems 108
System-von m linearen -en mit n Varia-
blen 120, 129
System von zwei linearen -en mit zwei
Variablen 107, 108
System von zwei Un-en mit genau einer
Variablen 143
Un- 73
Un-ssystem 143
Voneinander abhängige -en 117
Zweipunkte- 169

Glieder
Absolutes - 120
Allgemeines - einer Folge 210
Allgemeines - einer Summe 216
Anfangs- 212
Anzahl der -er 212
Aufeinanderfolgende -er 212
Benachbarte -er 212
End- 212
- einer Folge 210
 n -tes - 210

Grenze
Obere (Summations)- 216
Untere (Summations)- 216
Grundbereich 74
Lösungs- 76, 108, 120
Gruppe 57
Prime Restklassen- 57

Hauptdiagonale 246

Interpolation 231
Inversion 274

Kanonische Zerlegung 27
Koeffizient 120
Additionstheorem der Binomial-en 244
Aufwands- 197
Binomial- 241
Einsatz- 197
Symmetriegesetz der Binomial-en 243
Verfahren der gleichen -en 112
Körper 55

- Kombination**
 – mit Wiederholung 276, 293
 – ohne Wiederholung 276, 295
- Kombinatorik** 262
- Kommutativität**
 – der Addition von Restklassen 51
 – der Multiplikation von Restklassen 52
- Komplexion** 267, 270
- Kongruenz modulo m in G** 44
- Konstante** 70
- Lexikographische Anordnung** 269
- Linearkombination** 42
- Lösung** 77, 108, 120
 Arten von -smengen 113
 – eines Ungleichungssystems 144
 -en linearer Ungleichungen 146
 -sgrundbereich 76, 108, 120
 -smenge 78, 108, 121
 -sverfahren 79
- Mathematisches Modell** 196
 Allgemeine Form eines -s 196
 Aufstellen eines -s 203
- Menge**
 Arten von Lösungs-n 113
 Lösungs- 78, 108, 121
 Paarweise disjunkte nichtleere Teil-n 20
- Mittel**
 Arithmetische – 231
 Geometrisches – 257
- Modul** 11, 46
- Multiplikation**
 Assoziativität der – von Restklassen 52
 Kommutativität der – von Restklassen 51
 – von Restklassen 50
- Nachfolger** 212
- Natürliche Anordnung** 270
- Neunerprobe** 64
- Neunerrest** 64
- Neunerrestprobe** 64
- Null**
 -stelle 154, 163
 -teiler 55
 -teilerfreier Ring 55
- Optimalkriterium** 195
- Optimierung** 195
 Lineare – 196
 -saufgabe 196
- Permutation**
 Gerade – 274
 – mit Wiederholung 271, 273, 291
 – ohne Wiederholung 274, 290
 Ungerade – 274
- Primfaktor** 23
- Primzahl** 23, 27
- Probe** 134
 Elfer- 64
 Elferrest- 64
 Neuner- 64
 Neunerrest- 64
- Quotient ganzer Zahlen** 37
- Rang** 124
- Rechtecksform** 240
- Reflexivität** 19
- Reihe** 216
- Relation** 19
 Äquivalenz- 20
- Rest** 37
 Division mit – 37
 Elfer- 64
 Elfer-probe 64
 Neuner- 64
 Neuner-probe 64
- Restklasse** 45
 Addition von -n, 50
 Assoziativität der Addition von -n 51
 Assoziativität der Multiplikation von -n 52
 Element einer – 45
 Gleichheit von -n 45
 Kommutativität der Addition von -n 51
 Kommutativität der Multiplikation von -n 51
 Multiplikation von -n 50
 Prime – 56
 Prime -ngruppe 57
 Produkt von -n 50
 – modulo m 45
 -nring 52
- Ring**
 Kommutativer – 10, 11
 Nullteilerfreier – 55
 Restklassen- 52
- Steigungswinkel** 160
- Strukturtafel** 53
- Summation**
 Obere -sgrenze 216
 -sbuchstabe 216
 -sindex 216
 Untere -sgrenze 216

Summe

Allgemeines Glied einer — 216

Partial- 216

- aller natürlichen Zahlen 230
- der ersten n Kubikzahlen 234
- der ersten n natürlichen Zahlen 230
- der ersten n Potenzzahlen 251
- der ersten n Quadratzahlen 233
- nzeichen 216

Symmetrie 19

-gesetz der Binomialkoeffizienten 243

System

Äquivalente -e linearer Gleichungen 109

Kleinstes nichtnegatives Repräsentanten- 47

Lösung eines Gleichungs-s 108

Lösung eines Ungleichungs-s 144

Repräsentanten- 47

— von m linearen Gleichungen mit n Variablen 120

— von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen 107

— von zwei Ungleichungen mit genau einer Variablen 143

Überbestimmtes — 119

Ungleichungs- 143

Vollständiges Repräsentanten- 47

Teilbarkeit 12

— durch 2 61

— durch 3 61

— durch 4 62

— durch 5 61

— durch 8 62

— durch 9 60

— durch 10 61

— durch 11 62

-regeln 59

Teiler 12, 30

Echter — 21

Gemeinsamer — 29

Größter gemeinsamer — 29

Komplementär- 13

Nichttrivialer — 21

Null- 55

Null-freier Ring 55

-fremdheit 30

Trivialer — 21

Term 71

Definitionsbereich eines -s 72

Wert eines -s 71

Transitivität 19

Unzerlegbarkeit 23

Variable 70

Belegung einer -n 134

Diophantische Gleichung mit zwei -n 103

Lineare Gleichung mit n -n 98

Lineare Gleichung mit zwei -n 100

Lineare Ungleichung mit genau einer -n 131

Lineare Ungleichung mit n -n 146

System von m linearen Gleichungen mit n -n 120

System von zwei linearen Gleichungen mit zwei -n 107

System von zwei Ungleichungen mit genau einer -n 143

Variation

— mit Wiederholung 271, 287

— ohne Wiederholung 273, 288

— von n verschiedenen Elementen zur Klasse m 287

Verfahren

Additions- 112

Gaußssches Eliminierungs- 122

Lösungs- 79

— der gleichen Koeffizienten 112

Vielfaches 12

Gemeinsames — 34

Kleinstes gemeinsames — 34

Vorgänger 212

Wertebereich einer Funktion 150

Wertetabelle 155

Zerlegung in Faktoren 23

Zuordnungspfeil 155

Zuordnungsvorschrift 155