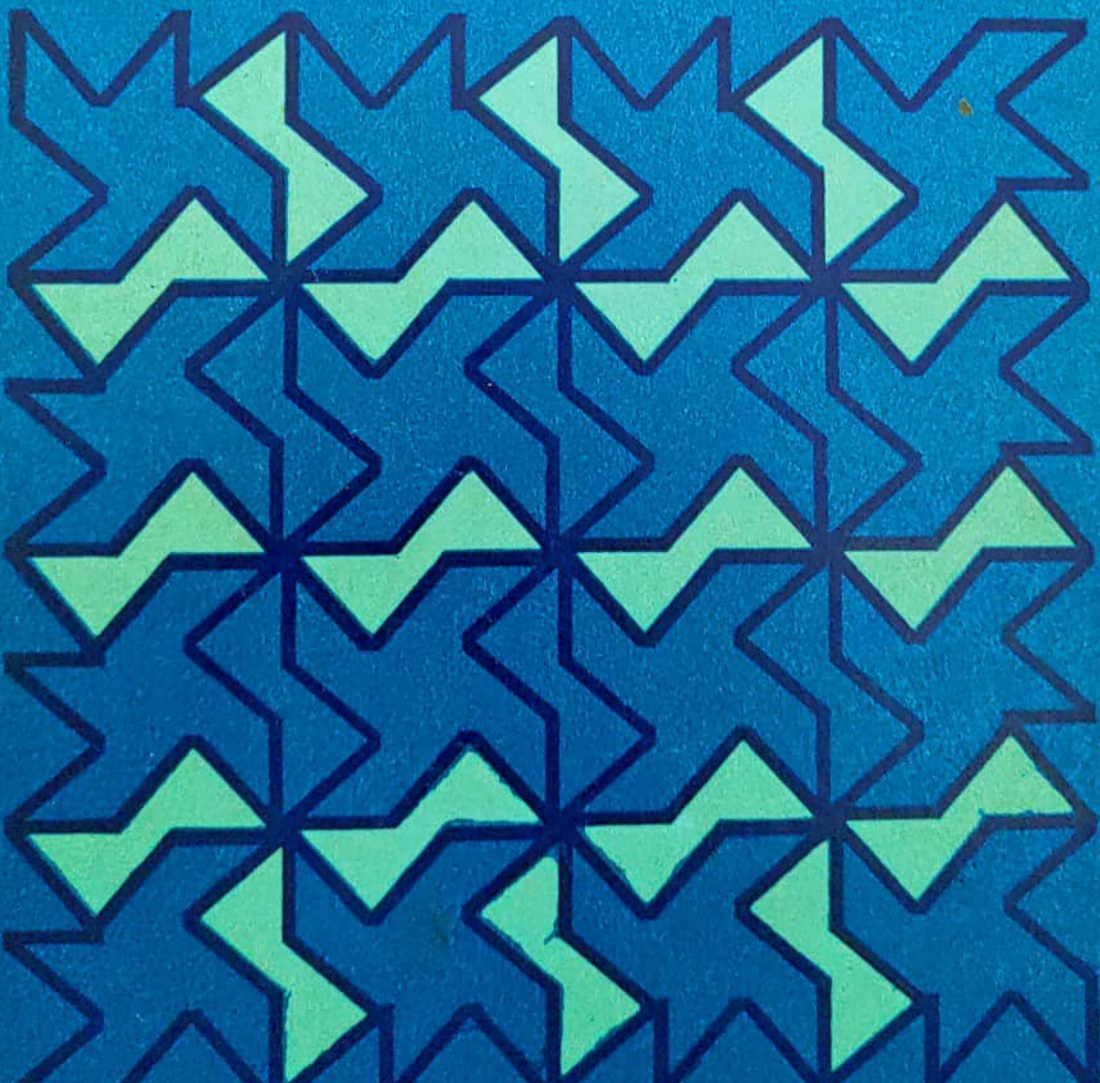
Werner Walsch

# Zum Beweisen im Mathematikunterricht



# Zum Beweisen im Mathematikunterricht

Prof. Dr. Werner Walsch

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1972

Autor: Prof. Dr. Werner Walsch
Ordentlicher Professor an der Sektion Mathematik der
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Korrespondierendes Mitglied der Akademie
der Pädagogischen Wissenschaften der DDR

1. Auflage
Lizenz Nr. 203 · 1000/72 (E)
ES 10 C
Redaktion: Siegmar Kubicek
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband: Atelier vwv, Wolfgang Lorenz
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, Bad Langensalza
Schrift: 9/11 Extended Monotype
Redaktionsschluß: 1. Oktober 1971
Bestell-Nr. 00 21 76-1
Preis 8,00

# Inhaltsverzeichnis

# Vorwort

Es ist ein wichtiges Ziel unserer sozialistischen Schule, die heranwachsende Generation mit einer guten mathematischen Allgemeinbildung auszurüsten. Dazu ist es notwendig, den Schülern neben der Kenntnis gewisser mathematischer Begriffe, Sätze und Lösungsverfahren auch richtige Vorstellungen darüber zu vermitteln, welche Stellung dem *Beweisen* in der Mathematik zukommt. Diese Forderung ergibt sich aus verschiedenen Überlegungen, vor allem aber aus dem Charakter der Mathematik selbst. In ihr ist der deduktive Beweis die einzig mögliche Form der Erkenntnissicherung. Dabei ist noch zu beachten, daß sich der Gehalt einer mathematischen Theorie nicht nur in ihren Definitionen, Sätzen und Algorithmen ausdrückt, sondern zu einem erheblichen Teil auch in den Gedankengängen, die in den *Beweisen* enthalten sind. Insofern ist das Beweisen einer mathematischen Aussage ein genauso wesentlicher Bestandteil der Mathematik wie die betreffende Aussage selbst. Nicht selten waren bzw. sind bei mathematischen Entdeckungen die Beweisgedanken sogar bedeutsamer und fruchtbarer als der neue Satz.

Die Vermittlung einer guten mathematischen Allgemeinbildung ist untrennbar mit der Entwicklung geistiger Fähigkeiten bei unseren Schülern verbunden. Kenntnisaneignung und Fähigkeitsentwicklung bilden im Unterrichtsprozeß eine dialektische Einheit. Dabei kommt im Mathematikunterricht dem Beweisen eine große Bedeutung zu. Die Herausbildung entsprechender Fähigkeiten — Begründen, Folgern, Widerlegen usw. — ist nicht nur für ein tieferes Verständnis des mathematischen Schulstoffs und als Voraussetzung für ein späteres, erfolgreiches Weiterlernen auf dem Gebiet der Mathematik sehr wesentlich, sondern hat darüber hinaus auch fachübergreifende Aspekte. Durch die Entwicklung von Fähigkeiten im Beweisen trägt der Mathematikunterricht dazu bei, die Schüler zu sachlichem und logisch richtigem Argumentieren zu befähigen, sie logische Zusammenhänge erkennen zu lassen und sie gegen Irrationalismus und Mystik zu wappnen. Somit besitzt das Beweisen auch eine große Bedeutung für die weltanschauliche Erziehung und Bildung der Schüler unserer polytechnischen Oberschulen.

Von unserem Mathematikunterricht ist deshalb zu verlangen,

- daß er den Schülern Klarheit darüber verschafft, was als Erkenntnissicherung in der Mathematik anerkannt wird und was nicht,
- daß er die Schüler in die Lage versetzt, vorgeführte bzw. in der Literatur angegebene mathematische Beweise wirklich zu verstehen und ihre Stichhaltigkeit zu beurteilen,

— daß er die Schüler befähigt, einfache mathematische Beweise selbständig durchzuführen.

All das erfordert unter anderem auch, daß die Schüler lernen, zwischen Definitionen und Sätzen zu unterscheiden, in einem Satz Voraussetzung und Behauptung voneinander zu trennen, logische Schlüsse zu ziehen und dergleichen mehr.

Man findet entsprechende Forderungen schon seit langem in unseren Mathematiklehrplänen, und in den Mathematiklehrbüchern der Mittel- und Oberstufe wurde und wird dem auch Rechnung getragen: sie enthalten nicht nur Sätze, Aufgaben und Regeln, sondern auch eine Vielzahl von Beweisen und Beweisaufgaben. Lange Zeit aber glaubte oder hoffte man zumindest, die Schüler würden Verständnis für mathematische Beweise allein durch die Tatsache erwerben, daß Beweise im Unterricht vorkommen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die angestrebten Bildungsziele auf dem Gebiet des Beweisens im allgemeinen nur dann erreicht werden können, wenn man sie im Mathematikunterricht direkt ins Auge faßt und bewußt ansteuert. Das heißt mit anderen Worten: die Entwicklung von Einsichten und Fähigkeiten auf dem Gebiet des Beweisens muß zielgerichtet und systematisch erfolgen. Deshalb ist das Beweisen in unserem gegenwärtigen Lehrplan auch noch stärker akzentuiert als in früheren Plänen: es wird als eine der Leitlinien ausgewiesen, wobei für jede Klassenstufe klare Zielvorgaben formuliert sind. Daraus erwachsen für alle Mathematik unterrichtenden Lehrer gewisse Anforderungen:

— Erstens müssen sie selbst die nötige Einsicht in das Wesen mathematischer Beweise besitzen;
— zweitens müssen ihnen die psychologischen Bedingungen klar sein, die das Verstehen mathematischer Beweise bzw. das Lösen von Beweisaufgaben erst ermöglichen;
— drittens schließlich müssen sie fähig sein, auf der Grundlage dieser Kenntnisse den Unterricht so zu gestalten, daß die Schüler Schritt für Schritt mit dieser wichtigen Seite der Mathematik vertraut werden.

Die in den folgenden Kapiteln dargelegten theoretischen Grundlagen, praktischen Erfahrungen, Untersuchungsergebnisse und Empfehlungen sollen helfen, zumindest einen Teil der Fragen zu beantworten, vor die sich jeder Mathematik unterrichtende Lehrer gestellt sieht, wenn er auf dem Gebiet des Beweisens gute Unterrichtserfolge erzielen will.

Aus dieser mit dem vorliegenden Buch verfolgten Absicht ergibt sich, an wen es sich in erster Linie wendet: an alle Lehrer, die an allgemeinbildenden Schulen, an Berufs- oder an Fachschulen Mathematik unterrichten, sowie an alle Lehrerstudenten, die das Fach Mathematik studieren. Vielleicht kann es auch Kollegen an Lehrerausbildungseinrichtungen manche Anregung für ihre Lehrtätigkeit geben.

WERNER WALSCH

# 1. Einige mathematische Grundlagen

Wir wollen uns für unsere Überlegungen zunächst ein hinreichendes mathematisches Fundament schaffen. Es soll der Selbstverständigung darüber dienen, was man in der Mathematik unter dem Begriff „Beweis" zu verstehen hat und in welcher Beziehung dieser Begriff zu solchen Redeweisen wie „Aus ... folgt ...", „Aus ... ist ... ableitbar", „Daraus kann man schließen ..." steht, die im Zusammenhang mit Beweisführungen häufig auftreten. Klarheit über den genauen Sinn dieser Begriffe und Redeweisen ist — wie schon im Vorwort angedeutet wurde — eine notwendige Voraussetzung, um im Mathematikunterricht bei den Schülern Verständnis für mathematische Beweisführungen erreichen zu können.
Der Zielsetzung dieses Buches folgend, soll dabei der Blick stets auf die für den *Schulunterricht* wesentlichen Fragen gerichtet bleiben. Wir wollen deshalb an Hand von Beispielen — vorwiegend aus dem Schulstoff — einige Begriffe, Einsichten und Kenntnisse gewinnen, die uns ein tieferes Verstehen der im Unterricht durchzuführenden Beweise ermöglichen sollen.

## 1.1. Aussagen und Aussageformen

Als Grundlage für alle weiteren Überlegungen wollen wir uns zunächst über einige Begriffe und Zusammenhänge verständigen, die sich im wesentlichen um die Begriffe „Aussage“ und „Aussageform“ gruppieren.

### 1.1.1. Aussagen

In Anlehnung an SEGETH[1]) vereinbaren wir, unter einer *Aussage* die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts zu verstehen, die mit Hilfe einer natürlichen oder auch einer künstlichen Sprache übermittelt bzw. fixiert werden kann.

*Beispiele für mathematische Aussagen:*

1) Die Sinusfunktion ist periodisch.
2) Alle Primzahlen sind ungerade.
3) $12 \cdot 25 < 15 \cdot 25$
4) Für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt: Wenn $a|c$ und $b|c$, dann $a \cdot b|c$.
5) Im Bereich der rationalen Zahlen ist die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Es gilt der

*Satz der Zweiwertigkeit:*

**Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.**

Die Aussagen in unseren Beispielen 1, 3 und 5 sind wahre, die in den Beispielen 2 und 4 hingegen sind falsche Aussagen.

### 1.1.2. Aussageformen

Neben Aussagen werden uns im folgenden vor allem Aussageformen interessieren. *Aussageformen* unterscheiden sich von Aussagen vor allem dadurch, daß sie in ihrer sprachlichen Darstellung *freie Variable*[2]) enthalten. (Als Variable werden in der Regel kleine Buchstaben benutzt.)

1) SEGETH, W.: *Elementare Logik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967, S. 36.
2) Wir sprechen von „freien Variablen“ zur Unterscheidung von „gebundenen Variablen“, auf die wir auch noch eingehen werden.

*Beispiele für mathematische Aussageformen:*

6) $5 \cdot x - 9 = 12$
7) $a > b$
8) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
9) $m$ ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aussageformen haben jedoch nur dann einen inhaltlichen Sinn, wenn für die in ihnen vorkommenden Variablen ein *Grundbereich* festgelegt ist. (Man spricht auch zuweilen vom *Variabilitätsbereich* oder von einem *Individuenbereich.*) Es handelt sich dabei um Mengen, deren Elemente an die Stelle der freien Variablen in den Aussageformen treten können. (Genau genommen können wir nur die Bezeichnung des jeweiligen Elements an die Stelle der freien Variablen setzen, doch wollen wir hier der Kürze wegen auf diese Unterscheidung nicht weiter achten, zumal auch kaum Mißverständnisse zu befürchten sind.)
In unseren Beispielen wären folgende Festlegungen des jeweiligen Grundbereichs möglich:
Im Beispiel 6 rationale Zahlen (für $x$);
im Beispiel 7 gebrochene Zahlen (für $a$ und $b$);
im Beispiel 8 reelle Zahlen für $a$ und $b$, natürliche Zahlen (größer als Null) für $n$;
im Beispiel 9 natürliche Zahlen (für $m$).
Ersetzt man in einer Aussageform alle freien Variablen durch Elemente der jeweiligen Grundbereiche, so entsteht aus der Aussageform eine wahre oder eine falsche *Aussage*.
Jede solche Ersetzung der freien Variablen einer Aussageform durch Elemente der jeweiligen Grundbereiche nennt man eine *Variableninterpretation*. (Man spricht auch von einer *Belegung der Variablen.*)

*Beispiele für Variableninterpretationen* (an Hand der Aussageformen in den Beispielen 6 bis 9):

| | | |
|---|---|---|
| 6)* | $5 \cdot \frac{21}{5} - 9 = 12$ | (wahre Aussage) |
| 7)* | $\frac{8}{7} > \frac{4}{3}$ | (falsche Aussage) |
| 8)* | $10^3 \cdot 7^3 = (10 \cdot 7)^3$ | (wahre Aussage) |
| 9)* | 15 ist Quadrat einer natürlichen Zahl. | (falsche Aussage) |

Aussageformen sind weder wahr noch falsch. Sie können jedoch erfüllbar oder nicht erfüllbar sein. Man bezeichnet eine Aussageform genau dann als *erfüllbar* über einem Grundbereich $G$, wenn es wenigstens eine Variableninterpretation über $G$ gibt, die die Aussageform in eine *wahre* Aussage überführt.[1]) (Die Aussageformen in den Beispielen 6 bis 9 sind über den oben angegebenen Grundbereichen alle erfüllbar.)
Die Bezugnahme auf einen Grundbereich $G$ ist wichtig, weil die Erfüllbarkeit im allgemeinen von der Wahl des Grundbereichs abhängt. Beispielsweise ist die

[1]) Vgl. NAAS, J. — H. L. SCHMID: *Mathematisches Wörterbuch, Band I*, S. 460f.; Akademie-Verlag Berlin — B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1961.

Aussageform im Beispiel 6 im Bereich der *rationalen* Zahlen erfüllbar (wir können für $x$ die Zahl $\frac{21}{5}$ einsetzen und erhalten so eine wahre Aussage), im Bereich der *natürlichen* Zahlen aber nicht erfüllbar (es gibt keine natürliche Zahl, die wir für $x$ einsetzen könnten, so daß eine wahre Aussage entstehen würde).
Falls eine Variableninterpretation eine Aussageform in eine *wahre* Aussage überführt, sagen wir, daß diese Interpretation die Aussageform *erfüllt*. Man nennt diese Variableninterpretation dann ein *Modell*[1]) der gegebenen Aussageform.
Wird eine Aussageform durch *jede* Variableninterpretation über einem Grundbereich $G$ erfüllt, so nennt man die Aussageform *allgemeingültig* über $G$. (Im Beispiel 8 haben wir eine allgemeingültige Aussageform vorliegen.)

### 1.1.3. Variable

Bei unseren bisherigen Überlegungen haben wir nur solche Aussageformen betrachtet, die *Individuenvariable* enthalten. (In den Beispielen 6 bis 9 traten nur Variable für *Zahlen* auf.) Darüber hinaus können in Aussageformen aber auch Variable für Eigenschaften bzw. Mengen, für Relationen, für Operationen oder für Funktionen auftreten. Da Eigenschaften, Relationen, Operationen und Funktionen aus mengentheoretischer Sicht bestimmte Gemeinsamkeiten aufzuweisen haben, ist es gerechtfertigt, die entsprechenden Variablen einheitlich als *Prädikatenvariable* zu bezeichnen. (Sie werden gewöhnlich durch große Buchstaben, zuweilen aber auch durch andere Symbole dargestellt.)

*Beispiele:*

| | | |
|---|---|---|
| 10) | $a R b$ | $R$ ist Variable für zweistellige Relationen |
| 11) | $P(x)$ | $P$ ist Variable für Eigenschaften |
| 12) | $a \circ b = b \circ a$ | $\circ$ ist Variable für zweistellige Operationen |
| 13) | $f(x) = f(-x)$ | $f$ ist Variable für Funktionen |

Um aus solchen Aussageformen wieder Aussagen zu bilden, können die Individuenvariablen durch Elemente eines vorgegebenen Grundbereichs und die Prädikatenvariablen durch Eigenschaften, Relationen, Funktionen oder Operationen ersetzt werden, die in diesem Grundbereich erklärt sind. (Die Belegung der Prädikatenvariablen muß natürlich „passend" sein: *Variable für Relationen* müssen durch spezielle *Relationen* ersetzt werden, *Variable für Funktionen* durch bestimmte *Funktionen* usw.)
Wählen wir in den Beispielen 10 bis 12 einmal die natürlichen Zahlen als Grundbereich.
Für $R$ könnten wir dann unter anderem einsetzen: $<$; teilt; ist Vorgänger von; ist Vielfaches von usw.
Für $P$ könnten wir einsetzen: ist Primzahl; ist gerade; ist Quadratzahl; ist eine Zehnerpotenz usw.
Für $\circ$ könnten wir einsetzen: $+$; $\cdot$; hoch (im Sinne von $a^b$) usw. Wir bekämen dann beispielsweise folgende Aussagen:

[1]) Vgl. a. a. O., Band II, S. 185.

*Beispiele:*

10)* 8 ist Vorgänger von 9 (wahr)
11)* 10 ist Primzahl (falsch)
12)* $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ (wahr)

Im Beispiel 13 könnten wir die reellen Zahlen als Grundbereich wählen. Für $f$ wären beliebige eindeutige Zuordnungsvorschriften einsetzbar, z. B.: sin; $\sqrt{\ }$; zum Quadrat; ein Drittel von usw.
*Aussagen* würden entstehen, wenn man dann auch noch für $x$ bestimmte Zahlen einsetzt.

*Beispiel:*

13)* $\sin \frac{\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (falsch)

Wir sprechen auch bei den Beispielen 10 bis 13 von Variableninterpretationen und benutzen die Begriffe „erfüllbar", „allgemeingültig" und „Modell" im wesentlichen in dem gleichen Sinne, wie sie weiter oben erklärt worden sind.

## 1.1.4. Variablenbindung

In mathematischen Formulierungen kommen Variable nicht nur als *freie Variable* vor, sondern wir finden auch Variable, die zum Beispiel durch Redeweisen wie „für alle", „es gibt ein" oder ähnlich *quantifiziert* und damit *gebunden* sind.

*Beispiele für gebundene Variable:*

14) Für alle $a$ gilt: $a \cdot 1 = a$
15) Zu jeder Zahl $a$ gibt es eine Zahl $b$, so daß gilt: $a < b$
16) Zu jeder Zahl $x$ gibt es höchstens eine Zahl $y$, so daß gilt: $x \cdot y = 1$
17) Es gibt eine Zahl $x$, so daß gilt: $3 < x < 4$

Alle in den Beispielen 14 bis 17 vorkommenden Variablen sind *gebunden.* Wir haben es hier also nicht mit Aussageformen zu tun, sondern mit Aussagen. Allerdings muß auch hier der Grundbereich für die Variablen feststehen, sonst sind die Formulierungen inhaltsleer. Wählen wir in allen vier Fällen als Grundbereich die Menge der rationalen Zahlen, so stellen die Beispiele 14 bis 17 sämtlich *wahre* Aussagen dar. Hätten wir dagegen die natürlichen Zahlen als Grundbereich gewählt, so wären nur die Aussagen in den Beispielen 14 bis 16 wahr, die Aussage im Beispiel 17 wäre dagegen falsch.
Wir können uns die Aussagen in den Beispielen 14 bis 17 in zwei Schritten entstanden denken:
Zuerst lagen Aussageformen vor — nämlich $a \cdot 1 = a$, $a < b$, $x \cdot y = 1$, $3 < x < 4$ — die dann durch Quantifizierung aller freien Variablen in Aussagen übergegangen sind.
Wir kennen damit nunmehr zwei Möglichkeiten, aus Aussageformen Aussagen zu gewinnen:

Erstens die Belegung aller freien Variablen und
zweitens die Quantifizierung aller freien Variablen.
(Man kann natürlich auch *einige* freie Variable belegen und die übrigen quantifizieren. Es ist aber *nicht* möglich, für *gebundene* Variable irgendwelche Elemente einzusetzen. Man bekäme sonst ganz sinnlose Redeweisen.)

## 1.1.5. Ausdrücke

Damit wir bei unseren folgenden Überlegungen nicht immer zwischen Aussageformen und Aussagen unterscheiden müssen, wollen wir für beide Begriffe einen Oberbegriff einführen und kurz von „Ausdrücken" sprechen. *Ausdrücke* sind also Aussagen oder Aussageformen.[1]) Dagegen sind beispielsweise

$$(a + b)^2, \qquad \frac{x^2 - y^2}{x + y}, \qquad \sqrt[n]{p \cdot (q - 1)} \quad \text{o. ä.}$$

*keine* Ausdrücke in unserem Sinne, obwohl man sie in der mathematischen Literatur oder auch im Unterricht zuweilen so bezeichnet. Wir verwenden in diesem Zusammenhang stets den Begriff „Term", wie es auch unser Mathematiklehrplan vorsieht.
Zur Erleichterung der Darstellungsweise wollen wir verabreden, *beliebige* Ausdrücke durch große Buchstaben — z. B. $A$, $B$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{H}_0$, $\mathsf{H}_1, \ldots$ — zu symbolisieren. Soll hervorgehoben werden, daß der Ausdruck beispielsweise die freie Individuenvariable $x$ enthält, so wollen wir das durch die Schreibweise $\mathsf{H}(x)$ andeuten. Die Quantifizierung einer solchen Variablen drücken wir dann kurz durch $\forall\, x\, \mathsf{H}(x)$ — für alle $x$ gilt $\mathsf{H}(x)$ — bzw. durch $\exists\, x\, \mathsf{H}(x)$ — es gibt ein $x$, für das $\mathsf{H}(x)$ gilt — aus.

## 1.1.6. Aussagenfunktionen

Es ist bekannt, daß man aus vorliegenden Ausdrücken $A$, $B$ mit Hilfe gewisser Bindewörter neue Ausdrücke aufbauen kann: $A$ und $B$; $A$ oder $B$; entweder $A$ oder $B$; weder $A$ noch $B$; wenn $A$, so $B$; $A$ genau dann, wenn $B$ usw. Wir haben es hier mit zweistelligen *Aussagenfunktionen* zu tun: Zwei gegebenen Aussagen (bzw. Aussageformen) wird eindeutig eine neue Aussage (bzw. Aussageform) zugeordnet.[2]) Dabei ist für Aussagen festzustellen, daß die Wahrheit bzw. Falschheit der neuen Aussage nur von der Wahrheit bzw. Falschheit der vorgegebenen Aussagen abhängt und nicht vom speziellen Inhalt der Aussagen. So entspricht jeder zweistelligen Aussagenfunktion eine zweistellige *Wahrheitsfunktion*, die jedem geordneten Paar von Wahrheitswerten eindeutig einen Wahrheitswert („wahr" bzw. „falsch") zuordnet.
Neben den zweistelligen Aussagenfunktionen interessiert uns noch eine einstellige. Sie ordnet jedem Ausdruck $A$ seine Verneinung „nicht $A$" zu. Ihr entspricht auch eine einstellige Wahrheitsfunktion.

[1]) Für eine genauere Definition, die im Zusammenhang mit dem Aufbau formalisierter mathematischer Theorien möglich ist, verweisen wir auf NAAS, J. — H. L. SCHMIDT: a. a. O., *Band I*, S. 120f.
[2]) Vgl. ASSER, G.: *Einführung in die mathematische Logik — Teil 1.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959, S. 3ff.

Wir wollen hier darauf verzichten, die Werteverläufe aller interessierenden Wahrheitsfunktionen anzugeben.[1]) Es sei jedoch — als Vorbereitung für spätere Überlegungen — daran erinnert, daß eine Aussage der Form „Wenn $A$, so $B$“ auf jeden Fall wahr ist, sobald $A$ falsch ist. Damit hängt zusammen, daß beispielsweise die Aussageform

„Wenn $x^2 < 0$ ist, dann ist $x \cdot 0 = x$“

im Bereich der reellen Zahlen *allgemeingültig* ist. Welche reelle Zahl wir für $x$ auch einsetzen, stets entsteht dabei aus „$x^2 < 0$“ eine *falsche* Aussage. Es ist dann ganz gleichgültig, ob durch die Einsetzung aus „$x \cdot 0 = x$“ eine wahre oder eine falsche Aussage wird — die *Gesamt*aussage ist in jedem Fall wahr, die ursprüngliche Aussageform also allgemeingültig.
An dieser Stelle wollen wir noch eine weitere Vereinbarung treffen, die die Übersichtlichkeit mancher Darstellungen in den folgenden Abschnitten erhöhen soll. Wir werden gelegentlich zur Hervorhebung der logischen Struktur von Ausdrücken einige in der mathematischen Logik übliche Symbole verwenden, und zwar: „$\sim$“ für „nicht“, „$\wedge$“ für „und“ (im Sinne der logischen Konjunktion), „$\vee$“ für „oder“, „$\rightarrow$“ für „wenn — so“ und „$\leftrightarrow$“ für „genau dann, wenn“. In diesem Zusammenhang benutzen wir dann häufig auch kleine Buchstaben als Symbole für die logisch nicht weiter zerlegten Bestandteile der betreffenden Ausdrücke.

*Beispiel:*

18) Wenn $a$ eine Primzahl ist und es gilt $a|b \cdot c$, dann ist $a|b$ oder $a|c$.
Formalisiert geschrieben:
$P(a) \wedge a|b \cdot c \rightarrow a|b \vee a|c$
Logische Struktur: $p \wedge q \rightarrow r \vee s$

## 1.1.7. Logische Identitäten

Von besonderem Interesse sind für uns Ausdrücke, die ihrer Struktur nach logische Identitäten darstellen. (Man spricht in diesem Zusammenhang zuweilen auch von *Sätzen der Logik.*)
*Logische Identitäten* sind dadurch ausgezeichnet, daß sie unabhängig von ihrem Inhalt — nur auf Grund ihrer logischen Struktur — bei jeder beliebigen Variableninterpretation zu wahren Aussagen werden. Viele dieser Sätze haben große Bedeutung für das logische Schließen, auf das wir später noch ausführlich eingehen wollen.

### Aussagenlogische Identitäten

Wir wollen zunächst einige aussagenlogische Identitäten angeben.

*Beispiele für aussagenlogische Identitäten:*

19) $A \vee \sim A$ — Satz vom ausgeschlossenen Dritten
20) $\sim (A \wedge \sim A)$ — Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch
21) $[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$ — Satz vom Kettenschluß
22) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$ — Satz der Kontraposition

[1]) Siehe a. a. O., S. 7.

Weitere aussagenlogische Identitäten können dem Buch von ASSER entnommen werden.[1])

Bei Kenntnis der Wahrheitsfunktionen ist es nicht schwierig, von einem vorgelegten Ausdruck zu entscheiden, ob er eine aussagenlogische Identität ist oder nicht. Wir wollen das am Beispiel 22 vorführen:

Jeder der Ausdrücke $A$ bzw. $B$ kann bei einer Variableninterpretation zu einer *wahren* oder zu einer *falschen* Aussage werden. Daraus ergeben sich insgesamt vier Möglichkeiten der Zuordnung von Wahrheitswerten. Wir können in Tabellenform angeben, welche Wahrheitswerte bei jeder dieser vier Möglichkeiten den einzelnen Teilausdrücken und dem gesamten Ausdruck zugeordnet sind (nach den Zuordnungsvorschriften der entsprechenden Wahrheitsfunktionen):

| $A$ | $B$ | $\sim A$ | $\sim B$ | $A \to B$ | $\sim B \to \sim A$ | $(A \to B) \to (\sim B \to \sim A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | F | F | W | W | W |
| W | F | F | W | F | F | W |
| F | W | W | F | W | W | W |
| F | F | W | W | W | W | W |

Tabelle 1

Wie man aus der letzten Spalte der Tabelle ersieht, wird dem Gesamtausdruck in jedem Fall der Wahrheitswert W („wahr") zugeordnet, er ist also tatsächlich eine aussagenlogische Identität.

### Prädikatenlogische Identitäten

Berücksichtigt man bei der Untersuchung eines Ausdrucks nicht nur seine aussagenlogische Struktur — seinen Aufbau aus einzelnen Ausdrücken mit Hilfe von Aussagenfunktionen — sondern auch eventuelle Quantifizierungen von Variablen, dann findet man weitere Identitäten. (Wir setzen hier und im folgenden stets das Gegebensein eines nicht leeren Grundbereichs voraus.)

*Beispiele:*

23) $\sim \forall x\, \mathsf{H}(x) \to \exists x\, [\sim \mathsf{H}(x)]$
Das bedeutet: Wenn nicht jedes $x$ den Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ erfüllt, dann gibt es wenigstens ein $x$, das den Ausdruck „nicht $\mathsf{H}(x)$" erfüllt.

24) $\sim \exists x\, \mathsf{H}(x) \leftrightarrow \forall x\, [\sim \mathsf{H}(x)]$
Das bedeutet: Wenn es kein $x$ gibt, das den Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ erfüllt, dann erfüllt jedes $x$ den Ausdruck $\sim \mathsf{H}(x)$ — und umgekehrt.

25) $\forall x\, [\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)] \to \forall x\, \mathsf{H}_1(x) \wedge \forall x\, \mathsf{H}_2(x)$
Das bedeutet: Wenn für jedes $x$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$ gilt, dann gilt für jedes $x$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1(x)$ und für jedes $x$ auch der Ausdruck $\mathsf{H}_2(x)$.

Man spricht hier von *prädikatenlogischen Identitäten.*[2])

[1]) Siehe a. a. O., S. 27ff.

[2]) Weitere Beispiele findet man bei W. SEGETH: *Elementare Logik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967, S. 126ff.

Es ist zu beachten, daß jeder Ausdruck, der eine aussagenlogische Identität darstellt, auch eine prädikatenlogische Identität ist. Die Umkehrung dieses Satzes gilt dagegen nicht, wie die Beispiele 23 bis 25 zeigen. So hat das Beispiel 25 die aussagenlogische Struktur $A \rightarrow (B \wedge C)$. Das ist *keine* aussagenlogische Identität, wie man leicht nachprüfen kann. Der Ausdruck wird zum Beispiel *falsch*, wenn $A$ wahr ist und $B$ und $C$ beide falsch sind. Man macht sich aber ebenso leicht klar, daß Beispiel 25 auf Grund seiner speziellen *prädikatenlogischen* Struktur doch eine Identität darstellt, daß also beispielsweise der eben erwähnte Fall ($A$ wahr, $B$ und $C$ falsch) bei dem Ausdruck im Beispiel 25 gar nicht eintreten kann. Am deutlichsten wird das vielleicht, wenn wir einmal für $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ spezielle Ausdrücke einsetzen.

$\mathsf{H}_1(x)$: $x$ ist ungerade

$\mathsf{H}_2(x)$: $x < 10$

Der Ausdruck im Beispiel 25 besagt dann:

Wenn alle Zahlen eines vorgegebenen Grundbereichs ungerade *und* kleiner als 10 sind, dann sind alle Zahlen dieses Grundbereichs ungerade und alle Zahlen desselben Grundbereichs sind auch kleiner als 10.

Bei der Erörterung der aussagenlogischen Identitäten haben wir ein einfaches Verfahren kennengelernt, mit dessen Hilfe man leicht nachprüfen kann, ob ein Ausdruck eine aussagenlogische Identität ist. Für prädikatenlogische Identitäten gibt es das in dieser allgemeinen Form dagegen nicht.

## 1.2. Der Folgerungsbegriff

### 1.2.1. Definition des Folgerungsbegriffs

In mathematischen Veröffentlichungen oder in mathematischen Vorträgen stoßen wir sehr oft auf Redeweisen wie „Daraus folgt . . .“ oder ähnlich.

*Beispiele:*

26) „Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a \cdot b > 0$.“

27) „Aus der Tatsache, daß $a$ eine gerade Zahl ist, folgt, daß auch $a^2$ eine gerade Zahl ist.“

28) „$2|x$ und $3|x$. Daraus folgt: $6|x$.“

Analysieren wir einmal diese Beispiele.

Als erstes wäre festzustellen, daß man sie durch einfache Umformulierungen alle in die Form des Beispiels 26 bringen kann, das in allgemeiner Fassung lautet:

„Aus $A$ folgt $B$“

Hierbei stehen $A$ und $B$ für gewisse mathematische Ausdrücke. Im Beispiel 27 entspricht $A$ der Ausdruck „$a$ ist eine gerade Zahl“ und $B$ der Ausdruck „$a^2$ ist eine gerade Zahl“. Entsprechend steht für $A$ im Beispiel 28 der Ausdruck „$2|x$ und $3|x$“, für $B$ dann „$6|x$“.

Man nennt in diesem Zusammenhang den Ausdruck $A$ oft *Voraussetzung* und den Ausdruck $B$ *Behauptung*.

Alle für $A$ bzw. $B$ stehenden Ausdrücke sind hier *Aussageformen.* Durch die Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" wird also eine *Beziehung zwischen Aussageformen* zum Ausdruck gebracht, es wird etwas *über Aussageformen ausgesagt.*
Die Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" ist also nicht etwa völlig gleichbedeutend mit dem Ausdruck „Wenn $A$, so $B$". Wir wollen beide Formulierungen einmal an Hand des Beispiels 26 gegenüberstellen ($a$ und $b$ seien dabei Variable für reelle Zahlen):

*Beispiele:*

26a) Aus „$a > 0$ und $b > 0$" folgt „$a \cdot b > 0$".
26b) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ ist, dann ist $a \cdot b > 0$.

In der Formulierung 26b ist von gewissen Beziehungen zwischen *Zahlen* die Rede, während in der Formulierung 26a eben ein Zusammenhang zwischen *Aussageformen* ausgedrückt wird — durch die Anführungsstriche soll das noch deutlicher hervorgehoben werden.
Es ist natürlich nicht so, daß beide Formulierungen gar nichts miteinander zu tun hätten. Zwischen ihnen besteht vielmehr ein wichtiger Zusammenhang, auf den wir an späterer Stelle noch eingehen werden.
Um nun die Bedeutung der Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" zu präzisieren, überlegen wir uns am besten, in welchen Fällen wir sie für zutreffend halten und wann nicht. Dazu können wir wieder das Beispiel 26 heranziehen.
Offenbar ist die Redeweise

(1) „Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a \cdot b > 0$"

*zutreffend.*
Die Umkehrung des Ausdrucks (1)

„Aus $a \cdot b > 0$ folgt $a > 0$ und $b > 0$"

ist dagegen *nicht richtig.*
Wir setzen beispielsweise $a = -3$ und $b = -2$. Dann wird „$a \cdot b > 0$" zu der *wahren* Aussage „$(-3) \cdot (-2) > 0$". Dagegen wird „$a > 0$ und $b > 0$" zu der *falschen* Aussage „$(-3) > 0$ und $(-2) > 0$".
*Allgemein kann man feststellen:*
Wenn es möglich ist, für die freien Variablen der Aussageformen $A$ und $B$ Bezeichnungen von Elementen des jeweiligen Grundbereichs so einzusetzen, daß $A$ zu einer wahren und $B$ zugleich zu einer falschen Aussage wird, dann ist die Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" sicher *nicht* berechtigt. Man spricht nur dann davon, daß *$B$ aus $A$ folgt, wenn $B$ immer wahr wird, sofern $A$ wahr ist.* Die Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" ist also Ausdruck dafür, daß mit $A$ stets auch $B$ wahr ist. Wir können das auch wie folgt ausdrücken:
Aus $A$ folgt $B$ nur dann, wenn jede Variableninterpretation, die $A$ erfüllt, auch $B$ erfüllt.
Die bisherigen Überlegungen führen uns zu einer

*Definition der Folgerungsbeziehung:*

**Aus der Aussageform $A$ folgt die Aussageform $B$ genau dann, wenn jede Variableninterpretation, die $A$ erfüllt, auch $B$ erfüllt.**

Oder kürzer:

**Aus $A$ folgt $B$ genau dann, wenn jedes Modell von $A$ auch ein Modell von $B$ ist.**[1])

Wir wollen diese Definition noch etwas genauer betrachten.
Überlegen wir zunächst, ob die gegebene Definition hinreichend klar und unmißverständlich ist. Das hängt offenbar von der Beantwortung der Frage ab, wie weit die in der Definition verwendeten Begriffe selbst genau definiert sind. Dazu muß gesagt werden, daß wir uns hier zum Teil mit propädeutischen Erläuterungen begnügt haben, einerseits, um den Umfang dieses Kapitels nicht über Gebühr auszudehnen, zum anderen aber auch auf Grund der Zielstellung dieses Kapitels, die eine weitere Präzisierung nicht unbedingt erforderlich erscheinen läßt. Immerhin müssen wir uns aber klar sein, daß solche Begriffe wie „Aussageform", „Variableninterpretation" und auch der Begriff des Erfülltseins einer Aussageform hier nicht in voller Schärfe definiert worden sind und auch nicht definiert werden können, weil das nur im Rahmen eines formalisierten Aufbaus klar abgegrenzter mathematischer Teildisziplinen möglich ist.
Trotz dieser Einschränkungen hinsichtlich der erreichten Präzision werden wir mit der gegebenen Definition des Folgerungsbegriffs die für unser Anliegen wesentlichen Fragestellungen klären können.

### 1.2.2. Konsequenzen aus der Definition

Betrachten wir nun einige einfache Konsequenzen, die sich aus der Definition ergeben.

**a)** Falls $B$ eine über einem bestimmten Grundbereich *allgemeingültige* Aussageform ist, so kann bezüglich dieses Grundbereichs gesagt werden, daß $B$ aus *jeder* Aussageform $A$ folgt; denn $B$ wird von *jeder* Variableninterpretation erfüllt, also auch von jenen, die $A$ erfüllen. Zum Beispiel ist im Bereich der rationalen Zahlen „$a \cdot b = b \cdot a$" allgemeingültig. Es ist damit trivialerweise richtig, wenn man etwa sagt: „Aus $5 < x$ folgt $a \cdot b = b \cdot a$."
Dieses Beispiel mag auf den ersten Blick etwas seltsam erscheinen, da in der Voraussetzung „$5 < x$" andere Variable auftreten als in der Behauptung „$a \cdot b = b \cdot a$". Man fragt sich, wieso eine Variableninterpretation, die „$5 < x$" erfüllt, auch „$a \cdot b = b \cdot a$" erfüllen kann. Um das zu verstehen, muß noch etwas zum Begriff „Variableninterpretation" gesagt werden. Wir haben dabei bisher immer nur an die Belegung der in einer Aussageform wirklich *vorkommenden* freien Variablen gedacht. Diese Auffassung ist aber zu eng. Man faßt die Definition deshalb gewöhnlich so, daß durch eine Variableninterpretation stets *allen* in der betreffenden Theorie benutzten Variablen ein Element des jeweiligen Grundbereichs zugeordnet wird. Für unser Beispiel bedeutet das:

[1]) Vgl. NAAS, J. – H. L. SCHMID: *Mathematisches Wörterbuch, Band I.* Akademie-Verlag Berlin – B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1961, S. 219 und 547.

Eine Variableninterpretation, die die Aussageform „$5 < x$" erfüllen soll, muß der Variablen $x$ irgend eine rationale Zahl zuordnen, die größer als 5 ist, während gleichzeitig den Variablen $a$ und $b$ irgendwelche beliebigen rationalen Zahlen zugeordnet werden können. Eine solche Variableninterpretation erfüllt dann aber stets auch die Aussageform „$a \cdot b = b \cdot a$", weil diese ja im Bereich der rationalen Zahlen allgemeingültig ist. Nach der Definition des Folgerungsbegriffs ist also die Redeweise „Aus $5 < x$ folgt $a \cdot b = b \cdot a$" berechtigt.

**b)** Falls $A$ eine über einem gewissen Grundbereich nicht erfüllbare Aussageform ist, so kann bezüglich dieses Grundbereichs gesagt werden, daß *jede* Aussageform $B$ aus $A$ folgt.
Wir wollen uns das an Beispielen klar machen. Dazu nehmen wir die reellen Zahlen als Grundbereich und untersuchen folgende Redeweisen:

(1) „Aus $a + 1 = a$ folgt $a^2 \geqq 0$".
(2) „Aus $a + 1 = a$ folgt $a^2 = -1$".
(3) „Aus $a + 1 = a$ folgt $a < 5$".

Diese Redeweisen wären *unzutreffend*, wenn es *wenigstens eine* reelle Zahl geben würde, die die Aussageform „$a + 1 = a$" *erfüllt* und die gleichzeitig die Aussageform „$a^2 \geqq 0$ bzw. „$a^2 = -1$" bzw. „$a < 5$" *nicht erfüllt.* (Vgl. die Diskussion des Beispiels 26 im Abschnitt 1.2.1, S. 18!)
Nun ist aber die Aussageform „$a + 1 = a$" *nicht erfüllbar*, d. h., *es gibt keine* reelle Zahl, die man für $a$ einsetzen könnte, so daß „$a + 1 = a$" zu einer wahren Aussage würde. Es kann deshalb gar nicht vorkommen, daß irgend eine reelle Zahl die Aussageform „$a + 1 = a$" *erfüllt* und gleichzeitig die Aussageform „$a^2 \geqq 0$" bzw. „$a^2 = -1$" bzw. „$a < 5$" *nicht erfüllt.*
Das bedeutet aber, daß die Redeweisen (1) bis (3) alle *richtig* sind; denn *jede* reelle Zahl, die „$a + 1 = a$" erfüllt, erfüllt gewiß auch „$a^2 \geqq 0$" bzw. „$a^2 = -1$" bzw. „$a < 5$". Dabei spielt es offenbar gar keine Rolle, daß „$a^2 \geqq 0$" allgemeingültig ist, daß „$a^2 = -1$" nicht erfüllbar und daß „$a < 5$" zwar erfüllbar, aber nicht allgemeingültig ist; denn diese drei Aussageformen haben unsere Überlegungen überhaupt nicht beeinflußt. Wir können also mit jeder *beliebigen* Aussageform $B$ formulieren: „Aus $a + 1 = a$ folgt $B$". Nach der Definition des Folgerungsbegriffs (↗ 18f.) ist — wie wir eben gesehen haben — *jede* solche Formulierung *richtig.*

**c)** Es ist unmittelbar klar, daß stets gilt:

Aus $A$ folgt $A$

Ebenso selbstverständlich ist auch, daß aus einer Konjunktion $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ jedes einzelne Glied der Konjunktion folgt, daß also stets gilt:

Aus $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ folgt $A_i$ (mit $1 \leqq i \leqq n$)

Es muß ja jedes Modell der Konjunktion immer auch ein Modell jedes einzelnen Konjunktionsglieds sein; denn eine Konjunktion von Aussagen ist nur dann wahr, wenn jede einzelne Aussage wahr ist, z. B.: Aus „$x < 5$ und $x > 3$" folgt „$x > 3$".
Die Fälle a), b) und c) sind Trivialfälle und mathematisch gesehen im Grunde

uninteressant. Die angeführten Beispiele haben das sicher auch deutlich gemacht. Trotzdem sollten sie hier erwähnt werden, weil sie dazu beitragen können, ein klares Bild vom Folgerungsbegriff zu gewinnen.

**d)** Wesentlich bedeutsamer als die unter a), b) und c) angeführten Konsequenzen aus der Definition des Folgerungsbegriffs ist sein Zusammenhang mit der Implikation. Es gilt nämlich der

*Satz:*

**Aus $A$ folgt $B$ genau dann, wenn die Implikation $A \rightarrow B$ allgemeingültig ist.**

*Beweis:*

Angenommen, $B$ folgt aus $A$. Das bedeutet nach Definition, daß jede Belegung der Variablen, die $A$ erfüllt, auch $B$ erfüllt. Dann ist aber auch die Implikation „Wenn $A$, so $B$" allgemeingültig; denn es gibt offenbar keine Variableninterpretation, die $A$ in eine wahre und zugleich $B$ in eine falsche Aussage überführt, so daß „Wenn $A$, so $B$" insgesamt falsch würde. (In allen anderen Fällen — $A$ wahr und $B$ wahr bzw. $A$ falsch und $B$ wahr bzw. $A$ falsch und $B$ falsch — wird aber die Implikation „Wenn $A$, so $B$" bekanntlich wahr.)
Sei nun umgekehrt die Implikation „Wenn $A$, so $B$" allgemeingültig. Das ist nur möglich, wenn jede Belegung der Variablen, die $A$ erfüllt, stets auch $B$ erfüllt. Das heißt aber, daß $B$ aus $A$ folgt, w. z. b. w.

Dieser Satz rechtfertigt etwas die in der Mathematik häufig zu beobachtende Praxis, die Formulierungen „Wenn $A$, so $B$" und „Aus $A$ folgt $B$" als gleichberechtigt oder gleichwertig zu betrachten, obwohl ja die Folgerungsrelation inhaltlich etwas anderes ist als die Implikation.

## 1.2.3. Der Folgerungsbegriff im Zusammenhang mit Axiomensystemen

Unsere bisherigen Überlegungen zum Folgerungsbegriff ließen die Frage offen, ob die gewonnene Definition wirklich all das erfaßt, was mit der Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" in der Mathematik gemeint wird. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir einige weitere Beispiele untersuchen.
Wenn man mathematische Veröffentlichungen liest, findet man neben Redeweisen der schon betrachteten Art — etwa „Aus $x > 3$ und $y > 5$ folgt $x + y > 8$" — auch etwas anders geartete, in denen der Folgerungsbegriff vorkommt.

*Beispiele:*

29) „Aus den PEANOschen Axiomen folgt, daß zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen auch voneinander verschiedene Nachfolger besitzen."

30) „Aus den Gruppenaxiomen folgt, daß es zu je zwei Elementen $a$ und $b$ der Gruppe stets genau ein Element $x$ in der Gruppe gibt, so daß $a$ verknüpft mit $x$ gleich $b$ ist."

Welche Unterschiede und welche Gemeinsamkeiten weisen diese Beispiele im Vergleich zu unseren früher betrachteten auf?
Zunächst ist festzustellen, daß die jeweiligen Voraussetzungen jetzt aus *mehreren* Ausdrücken bestehen. So würde etwa das Beispiel 29 in allgemeiner Fassung lauten:

„Aus $\{P_1, P_2, \ldots, P_5\}$ folgt $B$".
(Dabei soll mit $\{P_1, P_2, \ldots, P_5\}$ die Menge der fünf PEANOschen Axiome gemeint sein.)

Ähnlich ist es mit dem Beispiel 30. Trotzdem ist damit kein wesentlicher Unterschied zu unseren früheren Beispielen gegeben. Man braucht sich nämlich die Axiome nur konjunktiv verknüpft zu denken, um wieder den ursprünglichen Fall zu bekommen, z. B.:

„Aus $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_5)$ folgt $B$"

hat wieder die Form

„Aus $A$ folgt $B$".

Etwas problematischer ist dagegen ein anderer Punkt. In der Definition des Folgerungsbegriffs (↗ 18f.) ist ausdrücklich von Aussageformen die Rede. Sind die PEANOschen Axiome oder die Gruppenaxiome eigentlich Aussageformen? Sind es nicht vielmehr Aussagen?
Greifen wir irgend ein Axiom — etwa aus der Gruppentheorie — heraus und betrachten es etwas näher:

Es gibt in $G$ ein Element $n$, so daß für jedes $a$ aus $G$ gilt: $a \circ n = n \circ a = a$.
(Hierbei soll „$\circ$" das Zeichen für eine Verknüpfung sein, bezüglich der die Menge $G$ eine Gruppe bildet.)

In diesem Axiom sind $a$ und $n$ *gebundene* Variable (durch „es gibt ein" bzw. „für jedes"). Trotzdem haben wir es nicht mit einer Aussage zu tun, da erstens die freie Variable $G$ auftritt (als Variable für *Mengen*) und zweitens auch das Zeichen für die Verknüpfung eine freie Variable ist — natürlich keine Variable für Elemente von $G$, sondern eine Variable für zweistellige Operationen über der Menge $G$, also eine Prädikatenvariable (↗ 12f., Abschnitt 1.1.3.).
Das angeführte Axiom ist demnach eine *Aussageform*. Sie wird zu einer Aussage, wenn für „$G$" die Bezeichnung einer bestimmten Menge und für „$\circ$" das Zeichen für eine bestimmte zweistellige Operation in dieser Menge eingesetzt wird. Ist die entstandene Aussage wahr, so sagen wir wieder, daß die vorgenommene Variableninterpretation die Aussageform erfüllt, im anderen Falle, daß sie sie nicht erfüllt.
Setzen wir zum Beispiel fest, daß „$G$" die Menge der ganzen Zahlen bezeichnen soll, und ersetzen „$\circ$" durch das Zeichen für die übliche Addition ganzer Zahlen, so wird das Axiom zu einer wahren Aussage; denn es gibt ja tatsächlich eine ganze Zahl $n$, für die stets gilt, daß $a + n = n + a = a$ ist, nämlich die Zahl Null.
Würden wir dagegen unter „$G$" die Menge aller geraden ganzen Zahlen verstehen und „$\circ$" durch das Zeichen für die übliche Multiplikation ersetzen, so ginge das Axiom in eine falsche Aussage über, nämlich:

„Es gibt eine gerade Zahl $n$, so daß für alle geraden Zahlen $a$ gilt: $a \cdot n = n \cdot a = a$“.
(Eine solche gerade Zahl $n$ gibt es aber nicht.)

Ähnlich wie in den früheren Beispielen bezeichnen wir jede Variableninterpretation, die das Axiom erfüllt, als ein *Modell* dieses Axioms, und jede Variableninterpretation, die *alle Gruppenaxiome* in wahre Aussagen überführt, als ein *Modell dieses Axiomensystems*. Die Redeweise „Aus den Gruppenaxiomen folgt ...“ befindet sich somit in Übereinstimmung mit der Definition des Folgerungsbegriffs. Sie besagt: Jedes Modell des Axiomensystems der Gruppentheorie ist auch ein Modell des als Folgerung angegebenen Ausdrucks.
Gelten die angestellten Überlegungen aber auch für das Beispiel 29 (↗ 21)?
Nehmen wir ein Axiom aus dem PEANOschen System, etwa das folgende:

Für jede natürliche Zahl $a$ und jede natürliche Zahl $b$ gilt:
Wenn der Nachfolger von $a$ gleich dem Nachfolger von $b$ ist, so ist $a = b$.

Dieses Axiom wird gewöhnlich als *Aussage* aufgefaßt, da es anscheinend keine freien Variablen enthält. Diese Deutung ist aber nur dann richtig, wenn man schon an ein bestimmtes *Modell* denkt, etwa an die natürlichen Zahlen als endliche Kardinalzahlen und die für sie erklärte Nachfolgerrelation. Löst man sich dagegen von diesem Modell — was psychologisch zunächst nicht ganz leicht ist, weil man die natürlichen Zahlen sozusagen von Kindheit an in dieser Form kennt — dann bleibt folgender Sachverhalt übrig:

Für jedes Element $a$ aus einer Menge $M$ und für jedes Element $b$ aus $M$ gilt:
Wenn $f(a) = f(b)$ ist, so ist $a = b$.

Hier treten nun doch freie Variable auf, nämlich $M$ als Variable für eine Menge und $f$ als Variable für eine Funktion über der Menge $M$. Wir haben es also mit einer *Aussageform* zu tun.
Diese Aussageform wird zu einer *wahren Aussage*, wenn wir für $M$ die Menge $N$ der natürlichen Zahlen und für $f$ die Funktion „Nachfolger von“ einsetzen.
Denken wir uns aber einmal eine *andere* Interpretation aus. Wir setzen für die Variable $M$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen — bezeichnet durch $R^*$ — und für $f$ die Funktion „$\sqrt{\ }$“ ein. Dann wird diese Aussageform ebenfalls zu einer Aussage, nämlich:

Für jedes Element $a$ aus $R^*$ und für jedes Element $b$ aus $R^*$ gilt:
Wenn $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ist, so ist $a = b$.

Diese Aussage ist *wahr*. Die angegebene Variableninterpretation ist also *ebenfalls* ein Modell dieses PEANOschen Axioms. Allerdings werden *andere* PEANOsche Axiome durch diese Interpretation *nicht* erfüllt. Betrachten wir zum Beispiel das folgende Axiom:

Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht Nachfolger irgend einer natürlichen Zahl ist.

Als Aussageform aufgefaßt lautet dieses Axiom:

Es gibt ein Element $a$ in $M$, so daß für kein Element $b$ aus $M$ gilt: $f(b) = a$.

Bei der neuen Interpretation erhalten wir daraus die Aussage:

„Es gibt eine Zahl $a$ in $R^*$, so daß für keine Zahl $b$ aus $R^*$ gilt: $\sqrt{b} = a$“.

Diese Aussage ist aber *falsch*; denn bekanntlich existiert zu *jeder* nichtnegativen reellen Zahl $a$ eine Zahl $b$, so daß $a = \sqrt{b}$ ist. Man braucht ja nur $b = a^2$ zu setzen. Die Interpretation $R^*$ für $M$ und $\sqrt{\ }$ für $f$ ist also zwar ein Modell für das zuerst betrachtete PEANOsche Axiom, sie ist aber *kein* Modell für das PEANOsche Axiomen*system*, denn dazu müßte sie *alle* PEANOschen Axiome erfüllen.

*Zusammenfassend können wir sagen:*

Auch bei Berücksichtigung der Beispiele 29 und 30 (↗ 21) ist es nicht notwendig, die anfangs entwickelte Definition des Folgerungsbegriffs abzuändern. Es ist nur zu beachten, daß die Axiome als *Aussageformen* aufzufassen sind.

Zu letzterem ist ein kleiner Nachtrag am Platze. Wir wollen uns noch einmal besinnen, was beim „Übergang“ von der Aussage zur Aussageform bei jenen als Beispielen herangezogenen Axiomen aus dem PEANOschen System gewissermaßen zur Variablen wurde und was seine feste Bedeutung beibehielt. Wir finden:

a) Alle logischen Redeweisen behielten ihre Bedeutung („für jedes“, „wenn — so“, „es gibt ein“);
b) die Identitätsrelation „=“ blieb fest;
c) die Elementbeziehung ($a \in M$) wurde immer in demselben festen Sinne gebraucht.

Dagegen verloren ihre feste Interpretation:

d) der Begriff „natürliche Zahl“;
e) der Begriff „Nachfolger“.

Ganz entsprechend ist es bei Axiomen vieler anderer Theorien, sobald sie als Aussageformen aufgefaßt werden: neben Individuenvariablen erscheinen in ihnen für alle die jeweilige Theorie charakterisierenden Eigenschaften und Relationen *Variable*, während die logischen Bestandteile, die Identität und die Elementbeziehung stets ihre feste Bedeutung behalten.

## 1.2.4. Der Folgerungsbegriff für Aussagen

Es wäre zu fragen, ob die Redeweise „Aus $A$ folgt $B$“ vielleicht doch noch in Zusammenhängen vorkommt, die wir durch unsere bisherigen Beispiele nicht erfaßt haben. Das ist aber nicht der Fall. Wenn $A$ und $B$ Aussageformen sind, ist die Definition des Folgerungsbegriffs unmittelbar anwendbar, sind es dagegen Aussagen, so hat man sich von der zugrunde liegenden speziellen Interpretation zu lösen und die Ausdrücke eben doch als Aussageformen aufzufassen. Einige weitere Beispiele mögen das noch etwas deutlicher machen.

*Beispiel:*

31) Aus „Nicht für jeden Wert von $x$ ist $3x^2 - 1 \geqq 0$“
folgt „Es gibt wenigstens einen $x$-Wert, für den nicht $3x^2 - 1 \geqq 0$ ist.“
Die Richtigkeit dieser Feststellung kann man einsehen, wenn man auf Aussageformen zurück geht. Sie können wie folgt formuliert werden:
1) „Nicht für jedes $x$ gilt $\mathsf{H}(x)$“
und

2) „Es gibt ein $x$, für das $\mathsf{H}(x)$ nicht gilt".
(Hierbei bedeutet $\mathsf{H}(x)$ irgend eine Aussageform, in der $x$ nur als freie Individuenvariable vorkommt, ↗ 14, Abschnitt 1.1.5.)

Unter Benutzung der in den Abschnitten 1.1.5. (↗ 14) und 1.1.6. (↗ 14 ff.) eingeführten Ausdrucksmittel kann man kürzer schreiben:
(1') $\sim \forall\, x\, \mathsf{H}(x)$ bzw. (2') $\exists\, x\, [\sim \mathsf{H}(x)]$
Für jeden nicht leeren Individuenbereich gilt, daß $\exists\, x\, [\sim \mathsf{H}(x)]$ aus $\sim \forall\, x\, \mathsf{H}(x)$ folgt, denn die Implikation $\sim \forall\, x\, \mathsf{H}(x) \rightarrow \exists\, x\, [\sim \mathsf{H}(x)]$ ist allgemeingültig oder — wie man in diesem Falle sagt — eine logische Identität (↗ 15 ff., Abschnitt 1.1.7.). Die im Beispiel 31 angegebene Folgerung ist also zutreffend.

Allgemein ergibt sich aus der Definition des Folgerungsbegriffs und dem im Abschnitt 1.2.2. (↗ 21) angeführten Satz, daß „Aus $A$ folgt $B$" *stets* zutrifft, wenn die Implikation $A \rightarrow B$ eine logische Identität ist. Dazu noch ein Beispiel.

*Beispiel:*
32) Aus „Wenn das Dreieck $ABC$ bei $A$ einen rechten Winkel besitzt, so gilt für die Dreiecksseiten $a, b, c$ die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2$"
folgt „Wenn für die Dreiecksseiten $a, b, c$ gilt $a^2 \neq b^2 + c^2$, so besitzt das Dreieck $ABC$ bei $A$ keinen rechten Winkel".
Diese Folgerung ist einfach deshalb zutreffend, weil Aussageformen der Struktur „$p \rightarrow q$" bzw. „$\sim q \rightarrow \sim p$" zugrunde liegen und der Ausdruck $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ eine logische Identität ist. (↗ 15, Beispiel 22)

Allerdings ist es nicht so, daß „Aus $A$ folgt $B$" *nur* dann zutrifft, wenn $A \rightarrow B$ eine logische Identität ist. Die logischen Identitäten liegen gerade *solchen* Folgerungen zugrunde, die in *jedem nichtleeren Individuenbereich* gelten. Wir haben aber gleich am Beginn dieses Kapitels Beispiele kennengelernt, in denen die Redeweise „Aus $A$ folgt $B$" ganz legitim benutzt wurde, *ohne* daß $A \rightarrow B$ eine logische Identität war. In diesen Fällen lagen Folgerungen vor, die nur *innerhalb bestimmter mathematischer Theorien* Gültigkeit haben. So ist es auch mit dem folgenden Beispiel.

*Beispiel:*
33) Aus „$3|165$ und $5|165$" folgt „$15|165$".
Diesem Beispiel liegt keine logische Identität zugrunde, trotzdem betrachtet man die Folgerung als zutreffend, weil sie auf einer im Bereich der natürlichen Zahlen allgemeingültigen Aussageform beruht, nämlich:
Wenn $a$ ein Teiler von $c$ und $b$ ein Teiler von $c$ ist, so ist auch das kleinste gemeinsame Vielfache von $a$ und $b$ ein Teiler von $c$.

Es wird nun deutlich geworden sein, in welchem Sinne man bei Aussagen — wir wollen sie zur Unterscheidung von Aussageformen hier mit $A^*$ bzw. $B^*$ kennzeichnen — die Redeweise „Aus $A^*$ folgt $B^*$" zu verstehen hat. Man betrachtet sie — allgemein gesagt — dann als zutreffend, wenn $A^*$ und $B^*$ aus gewissen Aussageformen $A$ bzw. $B$ durch Belegung der Variablen hervorgegangen sind, wobei für diese Aussageformen in unserem ursprünglichen Sinne gilt, daß $B$ aus $A$ folgt.
Bei dieser Auffassungsweise gilt für Aussagen $A^*$ und $B^*$ der

*Satz:*

**Wenn $B^*$ aus $A^*$ folgt, so ist die Implikation $A^* \to B^*$ wahr.**

*Beweis:*

Angenommen, $B^*$ folgt aus $A^*$. Dann müssen nach der eben gegebenen Erklärung $A^*$ und $B^*$ aus Aussageformen $A$ und $B$ hervorgegangen sein, für die gilt, daß $B$ aus $A$ folgt. Dann ist nach dem im Abschnitt 1.2.2. angeführten Satz (↗ 21) $A \to B$ allgemeingültig und somit $A^* \to B^*$ wahr, w. z. b. w.

Durch diesen Satz wird der Zusammenhang zwischen dem Folgerungsbegriff und der Implikation für den Fall angegeben, daß *Aussagen* durch „Aus ... folgt ...“ miteinander verknüpft werden. Es ist zu beachten, daß hier — im Gegensatz zu Aussageformen — die Umkehrung des Satzes *nicht* gilt: Wenn $A^* \to B^*$ wahr ist, braucht nicht $B^*$ aus $A^*$ zu folgen. Man sieht das am besten an einem einfachen Beispiel ein.

*Beispiel:*

34) Gegeben sei: „Wenn $2 < 6$, so ist 2 ein Teiler von 6“.
Diese Implikation ist *wahr*, weil sowohl $2 < 6$ als auch $2|6$ wahre Aussagen sind. Man würde es aber kaum akzeptieren, wenn jemand sagt: „Aus $2 < 6$ folgt $2|6$“.
In der Tat ist es für die zugrunde liegenden Aussageformen $a < b$ bzw. $a|b$ *nicht* richtig, daß aus $a < b$ folgt $a|b$. Oder anders ausgedrückt: Die Implikation „Wenn $a < b$, so $a|b$“ ist nicht allgemeingültig.

## 1.2.5. Das Gewinnen von Folgerungen

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man feststellen kann, ob aus einer Aussageform $A$ die Aussageform $B$ folgt. Dabei interessieren uns in erster Linie die Fälle, bei denen $A$ erfüllbar und $B$ verschieden von $A$ ist. Eine ähnliche Frage ist auch: Wie *findet* man zu einer Aussageform $A$ weitere Aussageformen, die aus $A$ folgen?

Die Definition des Folgerungsbegriffs hilft uns hier nicht weiter. Sie legt zwar fest, was „Aus $A$ folgt $B$“ *bedeuten* soll, liefert aber keine allgemein anwendbare Methode, mit der man irgendwie *entscheiden* kann, ob tatsächlich $B$ aus $A$ folgt, oder mit der man wirklich Folgerungen aus $A$ *gewinnen* kann. Das liegt daran, daß es im allgemeinen gar nicht möglich ist, die Vielfalt aller Modelle einer Aussageform $A$ zu untersuchen. Wenn wir also die durch die beiden Fragen gestellten Probleme lösen wollen, müssen wir uns auf Verfahren orientieren, die *ohne* die Betrachtung spezieller *Modelle* auskommen — d. h. *ohne inhaltliche Deutung* der vorkommenden Ausdrücke.

Bevor wir weitere Überlegungen anstellen, wollen wir die Fragestellung noch etwas präzisieren. Es geht um folgende Dinge:

1. Gibt es Verfahren, um aus gegebenen Aussageformen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ weitere Aussageformen zu gewinnen, die aus $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ folgen?

2. Gibt es Verfahren, um von einer gegebenen Aussageform $B$ feststellen zu können, ob sie aus gegebenen Aussageformen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ folgt?

Wenden wir uns der ersten Frage zu. Sie verlangt anzugeben, wie man von gegebenen Aussageformen ausgehend weitere, daraus folgende gewinnen kann. Da es hierbei — wie schon erwähnt — nicht möglich ist, sich auf inhaltliche Deutungen zu stützen, kann es nur darum gehen, gewisse Regeln zu finden, nach denen man sich zu richten hat. Diese Regeln müssen folgende Bedingungen erfüllen:

1. Sie dürfen sich nicht auf inhaltliche Deutungen der vorkommenden Ausdrücke beziehen, sondern nur auf deren formale, logische *Struktur*.
2. Wenn mit Hilfe der erwähnten Regeln ein Ausdruck $B$ aus Ausdrücken $A_1, \ldots, A_n$ gewonnen worden ist, so muß sicher sein, daß $B$ aus $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *folgt*.

Aus der Definition des Folgerungsbegriffs (↗ 18f.) ergibt sich insbesondere: Wenn die Audsrücke $A_1, \ldots, A_n$ sämtlich allgemeingültig sind, dann muß auch $B$ allgemeingültig sein.

3. Das System der Regeln muß überschaubar sein, d. h., es muß stets in endlich vielen Schritten nachgeprüft werden können, ob ein bestimmtes Vorgehen den gegebenen Regeln entspricht oder nicht.

Regeln, die die Bedingungen 1. bis 3. erfüllen, bezeichnet man als *Schlußregeln*[1]), das mit ihrer Hilfe erfolgende Übergehen von gegebenen Ausdrücken zu weiteren nennt man *Schließen*[2]). Ist das Schließen auf ein bestimmtes Ziel gerichtet (auf das Gewinnen eines bestimmten Endergebnisses), so nennt man es *Beweisen* (oder auch *Herleiten* bzw. *Ableiten*). Halten wir nun fest:

1. Das Gewinnen von Aussageformen, die aus gegebenen Aussageformen folgen, geschieht durch Anwenden der Schlußregeln auf die gegebenen Ausdrücke. (Selbstverständlich ist damit *nicht* garantiert, daß man auch zu mathematisch *bedeutungsvollen* Folgerungen gelangt.)
2. Wenn es gelingt, eine gegebene Aussageform $B$ mit Hilfe von Schlußregeln in endlich vielen Schritten aus gegebenen Aussageformen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *herzuleiten*, dann ist dadurch *entschieden*, daß $B$ aus $\{A_1, \ldots, A_n\}$ folgt bzw. daß $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ allgemeingültig ist.

## 1.3. Das Beweisen

### 1.3.1. Definition des Begriffs „Beweis"

Die eben angestellten Überlegungen haben uns zu den Begriffen „Schlußregel", „Schließen" und „Beweisen" geführt und gleichzeitig die Voraussetzungen dafür geschaffen, eine Definition für die Beweisbarkeit eines Ausdrucks wie auch für den Begriff „Beweis" selbst angeben zu können.

*Definition:*

**Aus einer Menge $X$ von Ausdrücken ist ein Ausdruck $\mathsf{H}$ *beweisbar* (oder *ableitbar*) genau dann, wenn er ein Element von $X$ ist oder durch alleinige**

[1]) Vgl. Naas, J. — H. L. Schmid: *Mathematisches Wörterbuch, Band II.* A. a. O., S. 549.
[2]) Vgl. Klaua, D.: *Allgemeine Mengenlehre.* Akademie-Verlag, Berlin 1964, S. 25ff.

**Anwendung der vorgegebenen Schlußregeln in endlich vielen Schritten aus Elementen von $X$ gewonnen werden kann.**[1])

Beweisen ist in diesem Sinne eine rein formale Angelegenheit. Es wird dabei nur auf die Struktur aller vorkommenden Ausdrücke Bezug genommen, nicht auf deren Inhalt. Entsprechend wird auch der Begriff „Beweis" erklärt.

*Definition:*

**Ein *Beweis* für einen Ausdruck H ist eine endliche Folge von Ausdrücken $H_1, H_2, \ldots, H_n, H$ (mit H selbst an letzter Stelle), wobei für jeden solchen Ausdruck gilt, daß er zur Menge $X$ der vorgegebenen Ausdrücke gehört oder aus in der Folge vorangehenden Ausdrücken durch Anwendung einer Schlußregel hervorgeht.**[1])

Auf diese Definitionen sind wir vor allem durch die vorangegangenen *theoretischen* Überlegungen geführt worden. Es bleiben nun wieder einige Fragen zu klären.
Zunächst ist zu prüfen, ob durch die angegebenen Definitionen auch wirklich die übliche mathematische *Praxis* hinsichtlich des Beweisens erfaßt wird.
Zur Beantwortung dieser und weiterer Fragen wird es zweckmäßig sein, wenigstens einige einfache mathematische Beweise genau zu analysieren.
Bestimmte Dinge können aber jetzt schon gesagt werden:

a) Damit die für den Begriff „Beweis" gegebene Definition überhaupt brauchbar wird, muß man voraussetzen, daß stets in endlich vielen Schritten *entscheidbar* sein soll, ob ein Ausdruck zur Menge $X$ der vorgegebenen Ausdrücke gehört oder nicht bzw. ob eine benutzte Schlußweise einer der vorgegebenen Schlußregeln entspricht oder nicht. Die *zweite* Bedingung hatten wir schon genannt — wir sprachen von der „Überschaubarkeit" des zugrunde gelegten Systems von Schlußregeln — die *erste* ist aber genau so wesentlich, wenn man zu einem vernünftigen Beweisbarkeitsbegriff kommen will. Nur wenn *beide* Bedingungen erfüllt sind, kann man in endlich vielen Schritten *entscheiden*, ob eine Folge von Ausdrücken ein Beweis ist oder nicht. Ohne die Eigenschaft der Entscheidbarkeit wäre ein Beweisbarkeitsbegriff von vornherein unbrauchbar.

b) Unsere Erklärungen und Überlegungen beziehen sich hier stets auf „fertige" Beweise, auf schon vorliegende Schlußketten. Unsere Definition des Begriffs „Beweis" gibt keinerlei Auskunft darüber, *wie* man Beweise zu speziellen Sätzen *findet*.

c) Der formale, nicht an spezielle Inhalte gebundene Charakter von Beweisen wird in der üblichen mathematischen Praxis nur stellenweise deutlich sichtbar. Vor allem beim *Suchen* nach einem Beweis, aber auch bei seiner mündlichen oder schriftlichen Wiedergabe hat man sehr häufig nicht nur die Struktur der vorkommenden Ausdrücke im Auge, sondern man läßt sich auch mehr oder weniger stark von inhaltlichen Vorstellungen leiten. Das heißt mit anderen Worten, daß man beim Beweisen oft ein bestimmtes festes Modell der jeweiligen Ausdrucksmenge $X$ vor Augen hat. Derartige Modellvorstellungen

[1]) Vgl. NAAS, J. — H. L. SCHMID: *Mathematisches Wörterbuch, Band I.* A. a. O., S. 13 und 197f.

können das Auffinden und auch das Verstehen von Beweisen sehr erleichtern. Es wäre ganz abwegig, darauf etwa zu verzichten. Man muß nur sicherstellen, daß der Beweis auch unabhängig von der speziellen Modellvorstellung Gültigkeit besitzt. Es dürfen also insbesonders keine Eigenschaften des speziellen Modells benutzt werden, die durch die Ausdrucksmenge $X$ gar nicht gegeben sind. (Was dabei als „gegeben" angesehen werden darf und was nicht, hängt u. a. natürlich davon ab, welche Bestandteile der Ausdrücke von $X$ als *Variable* — Individuenvariable bzw. Prädikatenvariable — aufzufassen sind und welche als *Konstanten* zu gelten haben. Man vergleiche dazu die Analyse der Beispiele 29 und 30 im Abschnitt 1.2.3., ↗ 21f.) Insofern ist das Beweisen trotz der Orientierung an Modellvorstellungen eben doch eine formale, nicht auf einen speziellen Inhalt bezogene Angelegenheit — ganz unabhängig davon, ob bzw. wie weit der formale Charakter von Beweisführungen auch bewußt erkannt wird.

Eine weitere Frage, die sich im Zusammenhang mit den anfangs gegebenen Definitionen ergibt, betrifft die *Schlußregeln.* Von ihnen ist jetzt schon viel die Rede gewesen, wir haben uns auch überlegt, welche Anforderungen an sie zu stellen sind, aber wir haben noch keine Schlußregel wirklich *angegeben.* Diesem Problem wollen wir uns nunmehr zuwenden.

## 1.3.2. Schlußregeln

In Anlehnung an unser Vorgehen bei der Erläuterung des Folgerungsbegriffs (↗ 17ff.) wollen wir auch diesmal verschiedene Beispiele betrachten — es wird sich um Beispiele von mathematischen Schlußweisen handeln — und dabei die benutzten Schlußregeln herauspräparieren.

*Beispiel:*

35) Im Mathematikunterricht lernen die Schüler folgenden Satz kennen:
„Alle natürlichen Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind selbst durch 3 teilbar."
Nehmen wir an, ein Schüler untersucht nun die Zahl 78432. Er findet, daß ihre Quersumme 24 ist. Da sie durch 3 teilbar ist, schließt er: 78432 ist eine durch 3 teilbare Zahl.

Welche *Schlußregeln* werden bei einer solchen Überlegung benutzt?
Um sie deutlich zu machen, wollen wir den obigen Satz zunächst etwas umformulieren, und zwar wie folgt:

„Für alle natürlichen Zahlen $a$ gilt: wenn die Quersumme von $a$ durch 3 teilbar ist, dann ist auch $a$ selbst durch 3 teilbar."

Der Schüler vollzieht *drei* Schlüsse:
*Erstens:* Da der angegebene Zusammenhang für alle natürlichen Zahlen gilt, muß er auch für eine *beliebige* natürliche Zahl $x$ gelten. Das heißt, es muß auch folgendes richtig sein:

Wenn die Quersumme von $x$ durch 3 teilbar ist, dann ist auch $x$ selbst durch 3 teilbar.

*Zweitens:* Da $x$ eine *beliebige* natürliche Zahl bedeutet, kann man für $x$ sicher auch die Zahl 78432 einsetzen. Es muß demnach gelten:

Wenn die Quersumme von 78432 durch 3 teilbar ist, dann ist auch 78432 selbst durch 3 teilbar.

*Drittens:*

Da die Quersumme von 78432 *tatsächlich* durch 3 teilbar ist, muß auch 78432 selbst durch 3 teilbar sein.

Lösen wir uns vom speziellen Inhalt der Schlüsse, dann werden die *Schlußregeln*, nach denen vorgegangen wurde, deutlich.
Die *zuerst* benutzte Schlußregel kann wie folgt formuliert werden:

Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck „Für jedes $a$ gilt $\mathsf{H}(a)$" beweisbar ist, dann ist für ein *beliebiges* Element $x$ der Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ aus der Menge $X$ beweisbar.[1])
Mit anderen Worten:
Wenn man einen Satz der Form „Für jedes $a$ gilt $\mathsf{H}(a)$" bewiesen hat (dabei soll $\mathsf{H}(a)$ wieder irgend einen Ausdruck bezeichnen, in dem die Variable $a$ nur frei vorkommt), dann gilt auch der Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ als bewiesen, in dem $x$ als freie Variable für die Elemente des jeweiligen Grundbereichs anzusehen ist.

Man spricht in diesem Zusammenhang gewöhnlich vom *Schluß aus einer Allaussage.* In symbolischer Darstellungsweise kann man diese Regel auch wie folgt angeben:

$$\frac{\forall\, a\, \mathsf{H}(a)}{\mathsf{H}(x)}$$

Dabei steht oberhalb des Strichs der Ausdruck, aus dem geschlossen wird, und unterhalb des Strichs der Ausdruck, auf den geschlossen wird.
Die im zweiten Schritt benutzte Schlußregel läßt sich — schon etwas verallgemeinert — so formulieren:

Wenn für ein beliebiges Element $x$ der Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ aus einer Menge $X$ von Ausdrücken beweisbar ist, dann ist der Ausdruck $\mathsf{H}(T)$ aus der Menge $X$ beweisbar, der aus $\mathsf{H}(x)$ dadurch hervorgeht, daß die Variable $x$ in $\mathsf{H}(x)$ an allen Stellen durch den Term $T$ (der in unserem Falle die Ziffer 78432 ist) ersetzt wird.

In Kurzdarstellung:

$$\frac{\mathsf{H}(x)}{\mathsf{H}(T)}$$

(Falls der Term $T$ selbst Individuenvariable enthält, ist zu beachten, daß sie von in $\mathsf{H}(x)$ eventuell vorkommenden gebundenen Variablen *verschieden* sein müssen.)

Man bezeichnet diese Schlußregel als *Regel für die Termeinsetzung.*

[1]) Wir setzen dabei natürlich wieder voraus, daß für die Variablen $a$ und $x$ ein nicht leerer Grundbereich $G$ vorgegeben ist — vgl. auch Abschnitt 1.1.2., ↗ 10ff.

Die im *dritten* Schritt benutzte Schlußregel kann wie folgt formuliert werden:

Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck „Wenn $H_1$, so $H_2$" beweisbar ist und aus der Menge $X$ auch $H_1$ beweisbar ist, dann ist $H_2$ aus der Menge $X$ beweisbar.

In symbolischer Schreibweise:

$$\frac{\begin{array}{c} H_1 \rightarrow H_2 \\ H_1 \end{array}}{H_2}$$

Man spricht hier vom *Schluß aus einer Implikation* bzw. von der *Abtrennungsregel.* Wir wollen die Frage aufwerfen, ob die Schlußregeln, zu denen wir durch die Untersuchung des Beispiels 35 gelangt sind, auch jene *Bedingungen* erfüllen, die wir im Abschnitt 1.2.5. (↗ 26f.) formuliert haben.

Unmittelbar klar ist, daß die Schlußregeln sich nicht auf inhaltliche Deutungen stützen, sondern nur auf die logische Struktur der Ausdrücke. Es bleibt zu prüfen, ob man bei Anwendung dieser Schlußregeln stets nur zu solchen Ausdrücken gelangt, die aus den jeweils vorgegebenen Ausdrücken folgen.

Betrachten wir als erstes den Schluß aus einer Allaussage. Die Frage lautet: Wir schließen aus $\forall\, a\, H(a)$ auf $H(x)$, aber *folgt* $H(x)$ auch aus $\forall\, a\, H(a)$?

Auf Grund des im Abschnitt 1.2.2. (↗ 21) bewiesenen Satzes können wir dafür auch fragen: Ist der Ausdruck $\forall\, a\, H(a) \rightarrow H(x)$ allgemeingültig?

Das ist aber offensichtlich der Fall, denn es kann keine Variableninterpretation über einem Grundbereich $G$ geben, die $\forall\, a\, H(a)$ *erfüllt* und $H(x)$ zugleich *nicht erfüllt.* (Würde für irgend ein spezielles $x$ der Ausdruck $H(x)$ falsch, so wäre auch $\forall\, a\, H(a)$ — d. h. ja „Für *jedes* $a$ gilt $H(a)$" — falsch.) Also können wir feststellen: Aus $\forall\, a\, H(a)$ ist $H(x)$ *ableitbar* und zugleich folgt auch $H(x)$ aus $\forall\, a\, H(a)$.

Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß auch $H(T)$ aus $H(x)$ folgt, sofern $H(x)$ für *beliebige* $x$ gilt (Termeinsetzung).

$H(x)$ ist dann nämlich *allgemeingültig* (wird also von jeder Variableninterpretation erfüllt), und somit ist auch $H(T)$ allgemeingültig (falls $T$ Variable enthält) bzw. wahr (falls $T$ ein festes Element aus dem Grundbereich bezeichnet). Auf jeden Fall ist $H(x) \rightarrow H(T)$ dann allgemeingültig, d. h. aber, daß $H(T)$ unter den angegebenen Bedingungen aus $H(x)$ folgt. (Die Bedingung, daß $H(x)$ für *beliebige* $x$ gelten soll, ist übrigens sehr wesentlich! Hat man nämlich einen Ausdruck $H(x)$, bei dem das *nicht* der Fall ist, so führt eine Termeinsetzung keineswegs immer zu einem Ausdruck, der aus $H(x)$ folgt, z. B.: Setzt man in dem Ausdruck „$x < 5$" für $x$ den Term $2\,a$ ein, so erhält man „$2\,a < 5$", und es ist offensichtlich, daß „$2\,a < 5$" *nicht* aus „$x < 5$" folgt.)

Betrachten wir nun die Abtrennungsregel. Es ist wieder zu fragen, ob $H_2$ aus $H_1 \rightarrow H_2$ und $H_1$ *folgt* bzw. ob der Ausdruck $[(H_1 \rightarrow H_2) \wedge H_1] \rightarrow H_2$ allgemeingültig ist.

Auch diese Frage ist zu bejahen; denn der Ausdruck $[(H_1 \rightarrow H_2) \wedge H_1] \rightarrow H_2$ ist eine *aussagenlogische Identität,* d. h., bei jeder Ersetzung der Variablen $H_1$ und $H_2$ durch spezielle (wahre oder falsche) Aussagen wird die entstehende Gesamtaussage wahr (↗ 15ff; Abschnitt 1.1.7.).

Wir können also wieder feststellen: Aus $\mathsf{H}_1 \to \mathsf{H}_2$ und $\mathsf{H}_1$ ist $\mathsf{H}_2$ *ableitbar* (mit Hilfe der Abtrennungsregel) und zugleich *folgt* auch $\mathsf{H}_2$ aus $\mathsf{H}_1 \to \mathsf{H}_2$ und $\mathsf{H}_1$.

*Beispiel:*

36) Es soll folgender Satz bewiesen werden:
„Für alle reellen Zahlen $a$ gilt: wenn $a > 1$ ist, so ist $a^2 > 1$."
Man kann den Beweis wie folgt führen:
a) Sei $a$ eine beliebige reelle Zahl, die größer als 1 ist, also $a > 1$.
b) Aus einer Ungleichung der Form $u > v$ kann für nicht negative $w$ stets $u + w > v$ gefolgert werden. Es gilt in unserem Fall also auch $a + a(a - 1) > 1$; denn da $a > 1$, ist $a(a - 1)$ auf jeden Fall positiv.
c) Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt $a^2 > 1$. Damit ist für alle reellen Zahlen gezeigt: wenn $a > 1$ ist, so ist auch $a^2 > 1$.

Wir wollen die Analyse dieses Beweises hier noch nicht vollständig durchführen. Das soll einem späteren Abschnitt (↗ 47ff.) vorbehalten bleiben. Vorläufig begnügen wir uns damit, zwei weitere Schlußregeln herauszuarbeiten, die in dem Beweis benutzt worden sind.

1. Um die Aussage „*Für alle* reellen Zahlen $a$ gilt: . . ." zu beweisen, wurde sie für *irgend eine beliebige* Zahl $a$ bewiesen. Man hat also folgende Schlußregel benutzt:

   Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken für ein *beliebiges* Element $x$ des Grundbereichs $G$ der Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ beweisbar ist, dann ist der Ausdruck „Für jedes $a$ gilt $\mathsf{H}(a)$" beweisbar.[1])

   In Kurzdarstellung:

$$\frac{\mathsf{H}(x)}{\forall\, a\, \mathsf{H}(a)}$$

Man spricht hier vom *Schluß auf eine Allaussage.*

2. Um die Implikation „Wenn $a > 1$, so ist $a^2 > 1$" zu beweisen, wurde *angenommen,* die in der Implikation enthaltene Voraussetzung „$a > 1$" sei *erfüllt.* Dann wurde unter Heranziehung verschiedener Hilfsmittel weiter geschlossen, bis man zur Behauptung „$a^2 > 1$" gelangte, und daraufhin wurde die Implikation „Wenn $a > 1$, so ist $a^2 > 1$" als bewiesen angesehen.

   Es ist also folgende Schlußregel benutzt worden:

   Wenn durch Hinzunahme des Ausdrucks $\mathsf{H}_1$ zu einer Menge $X$ von Ausdrücken aus der dadurch entstandenen Menge $X \cup \{\mathsf{H}_1\}$[2]) der Ausdruck $\mathsf{H}_2$ beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1 \to \mathsf{H}_2$ beweisbar.

Man nennt das den *Schluß auf eine Implikation.* (Eine Kurzdarstellung dieser Regel in der bisher immer angegebenen Art wäre hier und auch bei einigen der noch folgenden Schlußregeln etwas umständlich. Wir wollen deshalb darauf verzichten.)

[1]) Zur deutlichen Unterscheidung wurde hier die freie Variable mit $x$ und die gebundene Variable mit $a$ bezeichnet. Im Beispiel haben wir – in Anlehnung an die übliche Praxis – gleich mit $a$ als freier Variabler gearbeitet, da Mißverständnisse nicht zu befürchten waren und der Variablengrundbereich für $x$ und für $a$ derselbe ist.

[2]) Diese Schreibweise bezeichnet die Vereinigungsmenge aus der Menge $X$ und der Menge $\{\mathsf{H}_1\}$. Mit $\{\mathsf{H}_1\}$ ist die Menge gemeint, die als einziges Element $\mathsf{H}_1$ enthält.

Es sei gleich noch auf eine Konsequenz aus dieser Schlußregel aufmerksam gemacht: Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken ein Ausdruck $\mathsf{H}$ beweisbar ist, dann ist stets auch der Ausdruck $\mathsf{H}_0 \rightarrow \mathsf{H}$ aus $X$ beweisbar, wobei $\mathsf{H}_0$ irgend ein *beliebiger* Ausdruck der jeweils betrachteten mathematischen Teildisziplin sein kann.

Da nämlich $\mathsf{H}$ schon aus $X$ allein beweisbar ist, muß $\mathsf{H}$ auch aus $X \cup \{\mathsf{H}_0\}$ beweisbar sein, und damit ist nach der eben formulierten Schlußregel aus der Ausdrucksmenge $X$ auch der Ausdruck $\mathsf{H}_0 \rightarrow \mathsf{H}$ beweisbar. Allerdings muß gesagt werden, daß die mathematisch interessanten und bedeutsamen Ausdrücke der Form $\mathsf{H}_0 \rightarrow \mathsf{H}$ im allgemeinen die sind, bei denen der Ausdruck $\mathsf{H}$ aus $X \cup \{\mathsf{H}_0\}$ *beweisbar*, aus $X$ allein aber *nicht beweisbar* ist. (Am Rande sei hier erwähnt, daß es aber auch ein echtes mathematisches *Problem* sein kann, ob ein Ausdruck $\mathsf{H}$, der aus $X \cup \{\mathsf{H}_0\}$ hergeleitet worden ist, schon aus $X$ allein beweisbar ist. So war es beispielsweise lange Zeit unklar, ob geometrische Sätze, die unter Voraussetzung des Parallelenaxioms hergeleitet worden waren, auch *ohne* Benutzung dieses Axioms beweisbar wären.)

Auch bei den eben gewonnenen Schlußregeln wäre zu fragen, ob sie in dem schon erklärten Sinne „zulässig" sind. Da es daran aber kaum Zweifel geben dürfte und wir außerdem bei anderen Schlußregeln schon gesehen haben, wie entsprechende Überlegungen im Prinzip verlaufen, wollen wir hier und auch bei den folgenden Beispielen auf den Nachweis der Zulässigkeit verzichten.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß das *Schließen auf eine Implikation* an das Erfülltsein gewisser Bedingungen geknüpft ist, die die *Einsetzungsregel* betreffen. Eine einfache Überlegung an Hand des Beispiels 36 (↗ 32) soll deutlich machen, was gemeint ist:

Aus $X \cup \{a > 1\}$ war „$a^2 > 1$" beweisbar. Würde man jetzt in $a$ *einsetzen* — etwa die Variable $b$ — so wäre aus $X \cup \{a > 1\}$ der Ausdruck „$b^2 > 1$" und damit aus $X$ die Implikation „Wenn $a > 1$, so ist $b^2 > 1$" beweisbar, die *nicht allgemeingültig* ist, wie man sofort sieht.

Damit hätten wir also aus *wahren* bzw. *allgemeingültigen* Ausdrücken einen *nicht allgemeingültigen* Ausdruck hergeleitet. Das kann man aber nicht zulassen, es widerspricht der im Abschnitt 1.2.5. (↗ 27) aufgestellten 2. Bedingung.

Der Fehler beruht offenbar darauf, daß in dem Ausdruck „$a^2 > 1$" für die Variable $a$ der Term $b$ eingesetzt wurde (nach der Regel der Termeinsetzung, ↗ 30), obwohl die Variable $a$ auch in dem Ausdruck „$a > 1$" vorkommt, *aus dem* der Ausdruck „$a^2 > 1$" *hergeleitet* worden ist.

So etwas muß also ausgeschlossen werden, und zwar nicht nur bei Individuenvariablen, für die wir uns das eben überlegt haben, sondern auch bei eventuell vorkommenden Prädikatenvariablen.

Vielleicht ist jetzt der Eindruck entstanden, daß man beim Schließen auf eine Implikation leicht Fehler machen kann, ohne es zu bemerken. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Die im Zusammenhang mit dem Schließen auf eine Implikation bestehenden Einschränkungen für das Einsetzen in Variable werden bei Beweisführungen eigentlich von jedem einigermaßen Sachkundigen beachtet, auch wenn er die oben dargelegte Problematik gar nicht explizit kennt. Es geht ja einfach darum, daß man im Laufe eines Beweises nicht ohne weiteres in Variable einsetzen darf, die durch ihr Auftreten in den Voraussetzungen eine bestimmte, festgelegte Bedeutung erhalten haben. Diese Bedingung wird aber — wie schon gesagt — kaum mißachtet.

*Beispiel:*

37) Es soll gezeigt werden, daß die Gleichung $x^3 + 4x^2 + 2x + 8 = 0$ wenigstens eine reelle Lösung besitzt. Man kann die zu beweisende Behauptung auch wie folgt formulieren:
„Es gibt wenigstens eine reelle Zahl $x$, für die gilt: $x^3 + 4x^2 + 2x + 8 = 0$."
Nehmen wir an, daß zwei verschiedenen Schülern der Beweis dieser Behauptung als Aufgabe gestellt worden ist.
*Schüler A* argumentiert so: „Ich habe durch Probieren gefunden, daß für $x = -4$ die Gleichung erfüllt ist. Damit ist die Behauptung bewiesen."
*Schüler B* schließt dagegen wie folgt: „Nehmen wir an, es gäbe *keine* reelle Zahl $x$, die die Gleichung $x^3 + 4x^2 + 2x + 8 = 0$ erfüllt. Das wäre gleichbedeutend damit, daß die ganzrationale Funktion $y = x^3 + 4x^2 + 2x + 8$ keine Nullstelle besäße, im Widerspruch zu dem Satz, daß jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades stets wenigstens eine reelle Nullstelle besitzt. Unsere Annahme ist demnach falsch und die Behauptung somit bewiesen."

Suchen wir wieder einige Schlußregeln, die in diesem Beispiel benutzt worden sind.
*Schüler A* konnte die Existenzaussage („Es gibt wenigstens ein ...") dadurch beweisen, daß er ein Element *angegeben* hat, durch das die Gleichung erfüllt wird. Er benutzte also folgende Schlußregel:

> Wenn sich ein Element $x$ *angeben* läßt, für das der Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ aus einer Menge $X$ von Ausdrücken beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\exists\, a\ \mathsf{H}(a)$ (das bedeutet „Es gibt ein $a$, für das $\mathsf{H}(a)$ gilt") beweisbar.

Man spricht dabei vom *Schluß auf eine Existenzaussage.*
*Schüler B* hat die Verneinung der zu beweisenden Behauptung als Voraussetzung benutzt, daraus einen Widerspruch hergeleitet und dann geschlossen, daß die Verneinung der Behauptung nicht gelten kann und somit also die ursprüngliche Behauptung richtig sein muß.
Bei diesem Vorgehen wird zunächst folgende Schlußregel angewendet:

> Wenn aus einer Ausdrucksmenge $X' = X \cup \{\mathsf{H}\}$ ein Widerspruch [1]) hergeleitet werden kann, dann ist aus $X$ der Ausdruck „nicht $\mathsf{H}$" beweisbar.

Man nennt diese Schlußregel *Schluß auf eine Negation* und bezeichnet einen Beweis bei Anwendung dieser Schlußweise gewöhnlich als *indirekten Beweis.*
In unserem Beispiel wurde ein schon *verneinter* Ausdruck ($\sim\mathsf{H}$) zu den sonstigen Voraussetzungen hinzugenommen. Nach der eben formulierten Schlußregel ergibt sich dann zunächst ein doppelt verneinter Ausdruck: $\sim(\sim\mathsf{H})$. Von ihm wurde dann auf $\mathsf{H}$ geschlossen. Es ist also noch folgende Schlußregel benutzt worden:

> Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck $\sim(\sim\mathsf{H})$ beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}$ beweisbar.

[1]) Von einem Widerspruch sprechen wir, wenn aus $X'$ ein Ausdruck $\mathsf{H}_0$ und außerdem auch die Verneinung von $\mathsf{H}_0$ ableitbar ist.

In Kurzfassung:

$$\frac{\sim(\sim \mathsf{H})}{\mathsf{H}}$$

Diese Schlußregel nennt man *Schluß aus einer Negation.*

*Beispiel:*

38) Nehmen wir an, es soll bewiesen werden:
„Ein Produkt $a \cdot b$ von natürlichen Zahlen ist genau dann durch eine Primzahl $p$ teilbar, wenn wenigstens einer der Faktoren des Produkts durch $p$ teilbar ist."
In formalisierter Schreibweise sieht der Satz — wenn man voraussetzt, daß $p$ eine Primzahl ist — so aus:
„$p \mid (a \cdot b) \leftrightarrow p \mid a \vee p \mid b$"
Der Beweis, den wir jetzt nicht im einzelnen durchführen wollen, müßte in zwei Hauptschritten erfolgen:
*Erstens* wäre zu zeigen:
„Wenn die Primzahl $p$ ein Teiler von $a \cdot b$ ist, dann ist $p$ ein Teiler von $a$ oder ein Teiler von $b$."
*Zweitens* müßte bewiesen werden:
„Wenn die Primzahl $p$ ein Teiler von $a$ oder ein Teiler von $b$ ist, dann ist $p$ ein Teiler von $a \cdot b$."

Für den Beweis des Satzes im Beispiel 38 müßte also folgende Schlußregel benutzt werden:

Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck „Wenn $\mathsf{H}_1$, so $\mathsf{H}_2$" beweisbar ist und aus $X$ auch der Ausdruck „Wenn $\mathsf{H}_2$, so $\mathsf{H}_1$" beweisbar ist, so ist aus $X$ der Ausdruck „$\mathsf{H}_1$ genau dann, wenn $\mathsf{H}_2$" beweisbar.
In kurzer Darstellungsweise:

$$\frac{\begin{array}{l}\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2 \\ \mathsf{H}_2 \rightarrow \mathsf{H}_1\end{array}}{\mathsf{H}_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_2}$$

Man nennt diese Schlußregel *Schluß auf eine Äquivalenz.*
Ohne Untersuchung eines neuen Beispiels sei bemerkt, daß man auch von der Umkehrung dieser Schlußregel Gebrauch macht, vom *Schluß aus einer Äquivalenz*:

Wenn aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_2$ beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2$ und auch der Ausdruck $\mathsf{H}_2 \rightarrow \mathsf{H}_1$ beweisbar.

*Beispiel:*

39) Wir wollen uns überlegen, wie man folgenden Satz beweisen könnte:
„Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl läßt bei Division durch 3 stets den Rest 1."
Wir gehen zum Beweis davon aus, daß $a$ eine nicht durch 3 teilbare natürliche Zahl sein soll. Dann muß sich $a$ in der Form $3x + 1$ oder in der Form $3y + 2$ darstellen lassen, wobei $x$ und $y$ ebenfalls natürliche Zahlen (zu denen wir auch die Null rechnen) sind. Es muß also gelten $a = 3x + 1$ oder $a = 3y + 2$.
Im ersten Fall ist $a^2 = 9x^2 + 6x + 1$ bzw. $a^2 = 3 \cdot (3x^2 + 2x) + 1$. Wie man aus dieser Darstellung sieht, läßt $a^2$ bei Division durch 3 den Rest 1.

Im zweiten Fall ist $a^2 = 9y^2 + 12y + 4$ bzw. $a^2 = 3 \cdot (3y^2 + 4y + 1) + 1$.
Auch hier läßt also $a^2$ bei Division durch 3 den Rest 1.
Damit ist der Satz bewiesen.

Wir finden in Beispiel 39 eine Schlußweise, die uns in den bisherigen Beispielen noch nicht begegnet ist. Analysieren wir dazu wieder etwas den vorgelegten Beweis:
Da auf eine Implikation geschlossen werden muß, wurde zunächst das Vorderglied der Implikation — die Voraussetzung „$a$ ist nicht durch 3 teilbar" — zu den sonstigen Voraussetzungen hinzugenommen. Das ist uns nicht mehr neu. Nun wurde aus den Voraussetzungen auf die Alternative „$a = 3x + 1$ oder $a = 3y + 2$" geschlossen. Dann folgte eine *Fallunterscheidung*: Erst wurde $a = 3x + 1$ als Voraussetzung angenommen und daraus die zu beweisende Behauptung — also „$a^2$ läßt bei Division durch 3 den Rest 1" — hergeleitet, und dann wurde die gleiche Behauptung auch unter der anderen Voraussetzung $a = 3y + 2$ bewiesen. Nach all dem wurde schließlich gesagt, daß der Satz damit bewiesen ist.
Die für uns *neue* Schlußregel lautet demnach folgendermaßen:

> Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck „$\mathsf{H}_1$ oder $\mathsf{H}_2$" beweisbar ist und wenn aus $X \cup \{\mathsf{H}_1\}$ der Ausdruck $\mathsf{H}$ beweisbar ist und wenn auch aus $X \cup \{\mathsf{H}_2\}$ der Ausdruck $\mathsf{H}$ beweisbar ist, dann ist $\mathsf{H}$ aus $X$ beweisbar.

Man nennt diese Schlußregel *Schluß aus einer Alternative* und spricht bei seiner Benutzung gewöhnlich von einem *Beweis durch Fallunterscheidung*. Im übrigen ist diese Schlußweise nicht auf genau zwei Alternativglieder beschränkt; sie läßt sich auf mehr als zwei Alternativglieder verallgemeinern.
Um Mißverständnissen vorzubeugen, die sich aus der Verquickung des *Schließens auf eine Implikation* und des *Schließens aus einer Alternative* in unserem Beispiel ergeben können, sollen die entsprechenden Beweisschritte noch einmal deutlich gemacht werden:
$X$ sei die Menge der Voraussetzungen, die in unserem Beweis benutzt, aber nicht ausdrücklich genannt wurden. Aus $X \cup \{3 \nmid a\}$ [1] wurde auf „$a = 3x + 1$ oder $a = 3y + 2$" geschlossen. Dann wurde aus $X \cup \{3 \nmid a\} \cup \{a = 3x + 1\}$ auf „$a^2 \equiv 1 \bmod 3$" [2] geschlossen, anschließend aus $X \cup \{a \nmid 3\} \cup \{a = 3y + 2\}$ ebenfalls auf „$a^2 \equiv 1 \bmod 3$". Daraus ergab sich, daß „$a^2 \equiv 1 \bmod 3$" aus $X \cup \{3 \nmid a\}$ beweisbar ist (Schluß aus einer Alternative), und *daraus* schließlich schlossen wir, daß aus $X$ unser Satz „Wenn $3 \nmid a$, so $a^2 \equiv 1 \bmod 3$" bewiesen ist (Schluß auf eine Implikation).

*Beispiel:*

40) Ein geometrischer Satz lautet:
„Wenn die Strecke $\overline{AB}$ durch eine zentrische Streckung auf die Strecke $\overline{CD}$ abgebildet werden kann, dann liegen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ auf zueinander parallelen Geraden."

[1] „$3 \nmid a$" bedeutet „$a$ ist nicht durch 3 teilbar".
[2] Kurze Schreibweise für „$a^2$ läßt bei Division durch 3 den Rest 1".

Daraus kann man schließen:
„Wenn die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ nicht auf zueinander parallelen Geraden liegen, dann kann $\overline{AB}$ nicht durch eine zentrische Streckung auf $\overline{CD}$ abgebildet werden.“

Diese in Beispiel 40 vorgeführte Schlußweise wird in der Mathematik immer wieder benutzt.
Ihr liegt folgende Schlußregel zugrunde:

Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck „Wenn $\mathsf{H}_1$, so $\mathsf{H}_2$“ beweisbar ist, so ist aus $X$ der Ausdruck „Wenn nicht $\mathsf{H}_2$, so nicht $\mathsf{H}_1$“ beweisbar.

Man spricht hier vom *Kontrapositionsschluß.* Er kann in Kurzdarstellung wie folgt angegeben werden:

$$\frac{\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2}{\sim \mathsf{H}_2 \rightarrow \sim \mathsf{H}_1}$$

***Beispiel:***

41) Es soll bewiesen werden, daß die Summe entgegengesetzt liegender Winkel an geschnittenen Parallelen 180° beträgt. An Hand von Bild 1 kann das wie folgt geschehen:
(1) $\alpha = \gamma$, da $\alpha$ und $\gamma$ ein Stufenwinkelpaar an parallelen Geraden bilden;
(2) $\gamma + \beta = 180°$, da $\gamma$ und $\beta$ ein Nebenwinkelpaar bilden.
Aus (1) und (2) ergibt sich:
(3) $\alpha + \beta = 180°$, w. z. b. w.

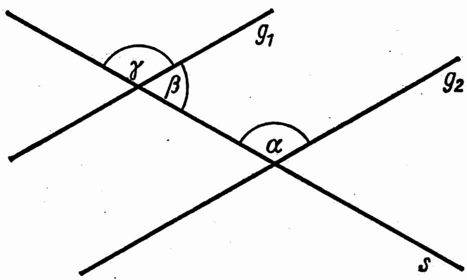



Bild 1

Beim Übergang von (1) und (2) zu (3) wurde ein Schluß benutzt, der in den bisherigen Beispielen noch nicht aufgetreten ist. Die entsprechende Schlußregel kann wie folgt formuliert werden:

Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck $a = b$ beweisbar ist und wenn aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}(a)$ beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}(b)$ beweisbar.

Diese Schlußregel beruht auf einem Satz über die Identität. Er besagt, daß man in einem Ausdruck eine Variable durch eine andere, die das *Gleiche* wie die ursprüngliche bezeichnet, ersetzen kann. Die Anwendbarkeit der Schlußregel im Beispiel 41 beruht übrigens unter anderem darauf, daß man $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ in den Gleichungen (1) bis (3) stillschweigend nicht als Variable für *Winkel* (also für geometrische Gebilde) ansieht, sondern als Variable für die *Winkelgrößen.* Als *Winkel* sind ja $\alpha$ und $\gamma$ gar nicht gleich, sie sind nur *gleich groß*. Streng genommen müßte man das in der Schreibweise zum Ausdruck bringen. Da aber gewöhnlich aus dem Zusammenhang hervorgeht, was jeweils gemeint ist, begnügt man sich der Einfachheit wegen mit der hier benutzten Darstellungsart.

*Beispiel:*

42) Betrachten wir einen Beweis für den Satz:
„Wenn $a$ eine ungerade natürliche Zahl ist, dann ist auch $a^2$ eine ungerade Zahl."
Man nimmt für den Beweis zunächst an, $a$ sei tatsächlich eine ungerade Zahl. Das ist nach Definition gleichbedeutend damit, daß es eine natürliche Zahl $n$ gibt, für die $a = 2n + 1$ gilt. Daraus gewinnt man durch Quadrieren $a^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 \cdot (2n^2 + 2n) + 1$. Demnach gibt es also auch eine Zahl $m$, für die $a^2 = 2m + 1$ gilt — nämlich $m = 2n^2 + 2n$ — und somit ist bewiesen, daß auch $a^2$ eine ungerade Zahl ist.

Neben uns schon bekannten Schlußregeln (Schluß auf eine Implikation, Schluß auf eine Existenzaussage) kommt in diesem Beweis eine Schlußweise vor, die wir uns bisher noch nicht bewußt gemacht haben. Es ist der *Schluß aus einer Existenzaussage.* Wir haben ihn benutzt, indem wir von dem Ausdruck

„Es gibt eine Zahl $n$, für die $a = 2n + 1$ gilt"

sofort zu

$a = 2n + 1$

übergegangen sind, wobei wir stillschweigend vorausgesetzt haben, daß $n$ *tatsächlich* eine derartige Zahl ist. Diese Schlußweise tritt in der Mathematik relativ häufig auf. Um die benutzte Schlußregel deutlicher hervortreten zu lassen, wäre es allerdings besser, nicht gleich mit der Variablen $n$ weiter zu arbeiten. Man würde dann schließen:

„*Es gibt* eine Zahl $n$, für die $a = 2n + 1$ gilt. *Sei* nun $p$ eine solche Zahl, gelte also $a = 2p + 1$. Daraus ergibt sich ..."

Wir können diese Schlußregel wie folgt allgemein formulieren:

Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken der Ausdruck „Es gibt ein $a$, für das $\mathsf{H}(a)$ gilt" beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}(x)$ beweisbar, wobei $x$ ein Element bezeichnet, für das $\mathsf{H}(x)$ gilt.

Bei Benutzung dieser Schlußregel muß man sich im allgemeinen die für $x$ angegebene Bedingung für den weiteren Beweis *merken.* Es ist insbesondere nicht möglich, für $x$ wie für eine beliebige freie Variable irgendeinen Term einzusetzen. Man könnte sonst beispielsweise aus der wahren Aussage

„Es gibt ein $n$, für das $2n + 1 = 13$ gilt"

durch Übergang zu

$2p + 1 = 13$

und anschließende Termeinsetzung — etwa für $p$ die Ziffer 3 — auf den Ausdruck

$7 = 13$

schließen, der ja offensichtlich *falsch* ist. Der Fehler kommt eben dadurch zustande, daß gewissermaßen „vergessen" wurde, was $p$ bedeuten soll, nämlich jene als existierend vorausgesetzte Zahl, die $2p + 1 = 13$ zu einer wahren Aussage macht. Das ist hier $p = 6$.

Es ist also zu beachten: Beim Übergang von $\exists a\, \mathsf{H}(a)$ zu $\mathsf{H}(x)$ nach der oben angegebenen Schlußregel ist die Variable $x$ von den in $\mathsf{H}$ vorkommenden freien Variablen und Konstanten *abhängig* und kann nicht beliebig belegt oder umbenannt werden. Man nennt $x$ in einem solchen Zusammenhang zuweilen auch eine „markierte" Variable.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß der uns schon bekannte Schluß auf eine Existenzaussage im Beispiel 42 äußerlich etwas anders aussieht als im Beispiel 37 (↗ 34).

Während dort eine *bestimmte Zahl* genannt wurde, die die betreffende Bedingung erfüllte, haben wir diesmal eine *Variable* (nämlich $m$) angegeben. Wir *wissen* aber von ihr — aus den vorangegangenen Überlegungen — daß sie stets ein Element bezeichnet, das die verlangte Eigenschaft besitzt, und somit ist auch in diesem Fall der Schluß auf eine Existenzaussage gerechtfertigt.

Wir wollen die Untersuchung von Beispielen nun abbrechen. Es wäre zwar leicht möglich, noch weitere Schlußweisen zu finden und entsprechende Regeln zu formulieren, aber gerade deshalb dürfte es sinnvoller sein, sich jetzt die Frage vorzulegen, ob man nicht zu einer Übersicht über die in der Mathematik benutzten Schlußregeln gelangen kann.

### 1.3.3. Systeme von Schlußregeln

Im Abschnitt 1.2.5. (↗ 27) hatten wir drei Bedingungen genannt, die wir an Schlußregeln stellen wollten. Eine dieser Bedingungen verlangte, das System der Schlußregeln müsse „überschaubar" sein. Nun haben wir aus den im vorigen Abschnitt betrachteten Beispielen bisher zwar schon 14 Schlußregeln gewonnen, trotzdem können wir noch nicht sagen, daß wir damit ein *System* von Schlußregeln besitzen. Es ist nämlich noch offen, ob man in der Mathematik mit diesen 14 Schlußregeln wirklich *auskommt*, oder ob man nicht doch noch andere benötigt. Daß man noch weitere Schlußregeln *angeben* kann, ist oben schon angedeutet worden; das muß aber nicht bedeuten, daß man auch wirklich noch weitere Schlußregeln *braucht*. Es wäre ja immerhin denkbar, daß man Beweise, in denen wieder neue Schlußregeln auftreten, durch andere Beweise ersetzen kann, in denen nur die von uns schon gefundenen Schlußregeln vorkommen. Man könnte natürlich auch fragen, ob nicht schon von unseren 14 Schlußregeln einige *entbehrlich* sind. Die Beantwortung dieser zweiten Frage ist für unser Anliegen aber nicht so bedeutsam wie die Klärung des zuerst genannten Problems.

In der mathematischen Grundlagenforschung sind verschiedene Systeme von Schlußregeln untersucht worden.[1]) Wir wollen uns hier — der Zielsetzung dieses

[1]) Siehe z. B. SCHRÖTER, K.: *Theorie des logischen Schließens*. In: „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik", Band 1 (1955).

Kapitels entsprechend — damit begnügen, nur *ein* System von Schlußregeln anzugeben.
Dabei entscheiden wir uns für die sog. *Regeln des natürlichen Schließens*[1]), die für den Mathematikunterricht besonders relevant sind. Bevor wir sie angeben, wollen wir aber zunächst jene Überlegungen darstellen, die diesem System zugrunde liegen.
Wie wir wissen, geht es beim Beweisen darum, *aus* gewissen Voraussetzungen *auf* gewisse Behauptungen zu schließen. Dabei dürfen die Schlußregeln — wie wir uns klar gemacht haben — nicht auf den *Inhalt* der vorkommenden Ausdrücke Bezug nehmen, sondern nur auf deren *logische Struktur*. Nun ist es aber bekanntlich so, daß die logische Struktur mathematischer Ausdrücke im Grunde gar nicht sehr vielfältig ist: es kommen Negationen von Ausdrücken vor, Konjunktionen, Alternativen, Implikationen und Äquivalenzen sowie Quantifizierungen von Variablen. Da diese Verknüpfungen bzw. Quantifizierungen sowohl bei den jeweiligen Voraussetzungen als auch bei den Behauptungen vorkommen können, benötigt man also für jede logische Verknüpfung bzw. für jede Quantifizierung *zwei Regeln*: eine Regel, die besagt, wie man *aus* einem Ausdruck mit einer bestimmten logischen Struktur schließt, und eine Regel, die besagt, wie man *auf* einen Ausdruck mit der betreffenden logischen Struktur schließt. Daneben benötigt man noch eine Termeinsetzungsregel und eine Regel für die Umbenennung gebundener Variabler.

*Somit sind also folgende Schlußregeln erforderlich:*

(1) *Schluß auf eine Negation*
Im Abschnitt 1.3.2. (↗ 34, Beispiel 37) haben wir den Schluß auf eine Negation bereits kennengelernt. Deshalb geben wir hier nur eine Kurzfassung dieser Regel an:

> Wenn aus $X \cup \{\mathsf{H}\}$ ein Widerspruch ableitbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\sim\mathsf{H}$ ableitbar.

Man kann also die Negation eines Ausdrucks dadurch beweisen, daß aus dem nicht verneinten Ausdruck — zusammen mit den sonstigen Voraussetzungen — ein Widerspruch hergeleitet wird.

(2) *Schluß aus einer Negation*

$$\frac{\sim(\sim \mathsf{H})}{\mathsf{H}}$$

Diese Regel kennen wir ebenfalls schon (↗ 34f., Abschnitt 1.3.2., Beispiel 37)

(3) *Schluß auf eine Konjunktion*

$$\frac{\begin{array}{c}\mathsf{H}_1\\ \mathsf{H}_2\end{array}}{\mathsf{H}_1 \wedge \mathsf{H}_2}$$

[1]) Vgl. HOMAGK, F.: *Das natürliche Schließen in formalen mathematischen Theorien.* In: „Mathematik in der Schule“, 6 (1968), Heft 11.

Diese Schlußregel besagt:
Wenn aus einer Menge $X$ von Ausdrücken $\mathsf{H}_1$ beweisbar und auch $\mathsf{H}_2$ beweisbar ist, dann ist aus $X$ die Konjunktion „$\mathsf{H}_1$ und $\mathsf{H}_2$" beweisbar.
Das heißt mit anderen Worten:
Um eine Konjunktion zu beweisen, muß jedes Glied der Konjunktion einzeln bewiesen werden.

(4) *Schluß aus einer Konjunktion*

Wenn aus $X$ die Konjunktion „$\mathsf{H}_1$ und $\mathsf{H}_2$" beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1$ und auch der Ausdruck $\mathsf{H}_2$ beweisbar.

(5) *Schluß auf eine Alternative*

$$\frac{\mathsf{H}_1}{\mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2}$$

Diese Regel besagt:
Wenn aus $X$ der Ausdruck $\mathsf{H}_1$ beweisbar ist, dann ist aus $X$ der Ausdruck „$\mathsf{H}_1$ oder $\mathsf{H}_2$" beweisbar.
Das bedeutet also:
Für den Beweis einer Alternative genügt es, wenigstens ein Alternativglied zu beweisen.

(6) *Schluß aus einer Alternative*

Diese Regel haben wir im Abschnitt 1.3.2. (↗ 35f., Beispiel 39) bereits angegeben (es handelt sich um sog. Beweise durch Fallunterscheidung). Sie soll deshalb hier wieder nur in einer Kurzfassung erscheinen:

Wenn aus $X$ ableitbar $\mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2$
und aus $X \cup \{\mathsf{H}_1\}$ ableitbar $\mathsf{H}$
und aus $X \cup \{\mathsf{H}_2\}$ ableitbar $\mathsf{H}$,
so ist aus $X$ ableitbar $\mathsf{H}$.

(7) *Schluß auf eine Implikation*

Auch diese Regel ist uns schon bekannt (↗ 32f., Abschnitt 1.3.2., Beispiel 36).
Sie lautet:

Wenn aus $X \cup \{\mathsf{H}_1\}$ ableitbar $\mathsf{H}_2$,
so ist aus $X$ ableitbar $\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2$.

Das heißt also:
Um eine Implikation zu beweisen, wird das Vorderglied der Implikation zu den sonstigen Voraussetzungen hinzu genommen und daraus dann das Hinterglied der Implikation hergeleitet.

(8) *Schluß aus einer Implikation*

Das ist die uns schon bekannte *Abtrennungsregel:*

$$\begin{array}{c} \mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2 \\ \mathsf{H}_1 \\ \hline \mathsf{H}_2 \end{array}$$

(↗ 29ff., Abschnitt 1.3.2., Beispiel 35)

(9) *Schluß auf eine Äquivalenz*

$$\frac{\begin{array}{c}H_1 \rightarrow H_2\\ H_2 \rightarrow H_1\end{array}}{H_1 \leftrightarrow H_2}$$

Wir kennen diese Regel bereits aus dem Abschnitt 1.3.2. (↗ 35, Beispiel 38). Sie besagt:
Eine Äquivalenz beweist man, indem man eine Implikation und die zugehörige Umkehrung beweist.

(10) *Schluß aus einer Äquivalenz*
Diese Regel ist im Anschluß an das Beispiel 38 im Abschnitt 1.3.2. (↗ 35) bereits mitgeteilt worden. Sie lautet:

Wenn aus $X$ ableitbar $H_1 \leftrightarrow H_2$,
so ist aus $X$ ableitbar $H_1 \rightarrow H_2$
und auch ableitbar $H_2 \rightarrow H_1$.

(11) *Schluß auf „Für alle ... gilt“*

$$\frac{H(x)}{\forall\, a\, H(a)}$$

Wir haben diese Regel im Abschnitt 1.3.2. (↗ 32, Beispiel 36) kennengelernt und dort vom „Schluß auf eine Allaussage“ gesprochen. (Diese Redeweise ist etwas ungenau, denn $\forall\, a\, H(a)$ braucht natürlich nicht unbedingt eine Aussage zu bezeichnen. Es können im Ausdruck $H(a)$ neben $a$ noch andere freie Variable vorkommen.)
Diese Schlußregel besagt:
Um die Gültigkeit eines Ausdrucks für *alle* Elemente des jeweiligen Grundbereichs zu beweisen, führt man den Beweis für ein *beliebiges* Element des Grundbereichs durch.

(12) *Schluß aus „Für alle ... gilt“*

$$\frac{\forall\, a\, H(a)}{H(x)}$$

Diese Schlußregel kennen wir bereits aus dem Beispiel 35 des Abschnitts 1.3.2. (↗ 29f.).

(13) *Schluß auf „Es gibt ein ...“*
Diese Schlußregel trat im Beispiel 37 (↗ 34) und auch im Beispiel 38 (↗ 35) des Abschnitts 1.3.2. auf. Sie lautet:

Wenn man ein Element $x$ angeben kann, so daß aus $X$ ableitbar ist $H(x)$, dann ist aus $X$ ableitbar $\exists\, a\, H(a)$.

(Die anfangs benutzte Redeweise „Schluß auf eine Existenzaussage“ ist nicht immer treffend; die Bemerkung zu (11) gilt sinngemäß auch hier.)
Nach dieser Schlußregel kann man also auf die *Existenz* eines Elements,

das eine gewisse Bedingung erfüllt, sicher dann schließen, wenn man ein derartiges Element *angegeben* hat. (Häufig werden Existenzbeweise aber auch *indirekt* geführt, wobei man die hier angegebenen Schlußregeln (1) und (2) benutzt.)

(14) *Schluß aus „Es gibt ein ...“*
Wir haben diese Schlußregel im Abschnitt 1.3.2. im Zusammenhang mit Beispiel 42 (↗ 38) bereits kennengelernt. Sie lautet:

> Wenn aus $X$ ableitbar ist $\exists\, a\, \mathsf{H}(a)$, dann ist aus $X$ ableitbar $\mathsf{H}(x)$, wobei $x$ ein Element bezeichnet, für das $\mathsf{H}(x)$ gilt.

(15) *Termeinsetzung*

$$\frac{\mathsf{H}(a)}{\mathsf{H}(T)}$$

Diese Schlußregel kennen wir aus dem Beispiel 35 des Abschnitts 1.3.2. (↗ 30). Dort war bereits erwähnt worden, was bei ihrer Anwendung zu beachten ist: In $T$ darf keine Variable vorkommen, die in $\mathsf{H}(a)$ schon als gebundene Variable auftritt. Sonst könnte man nämlich beispielsweise von dem allgemeingültigen Ausdruck
„Es gibt eine natürliche Zahl $x$, die größer ist als die natürliche Zahl $a$“
durch Termeinsetzung ($x + 1$ für $a$) auf den Ausdruck
„Es gibt eine natürliche Zahl $x$, die größer ist als die natürliche Zahl $x + 1$“
schließen, der offensichtlich falsch ist.

(16) *Umbenennung gebundener Variabler*
Diese Regel haben wir noch nicht erwähnt. Sie besagt:

> Man kann gebundene Variable umbenennen, sofern dabei beachtet wird, daß die neue Variable in dem bisherigen Ausdruck noch nicht vorkommt.

So ist es beispielsweise möglich, von dem allgemeingültigen Ausdruck
„Es gibt eine natürliche Zahl $b$, die Nachfolger der natürlichen Zahl $a$ ist“
durch gebundene Umbenennung zu
„Es gibt eine natürliche Zahl $x$, die Nachfolger der natürlichen Zahl $a$ ist“
überzugehen.
Dagegen ist es nicht zulässig, die gebundene Variable $b$ in $a$ umzubenennen; denn das würde zu dem Ausdruck
„Es gibt eine natürliche Zahl $a$, die Nachfolger von $a$ ist“
führen, der bekanntlich falsch ist.
Ebenso kann man beispielsweise nicht von dem Ausdruck
„Zu jeder natürlichen Zahl $a$ gibt es eine Zahl $b$, so daß $b$ Nachfolger von $a$ ist“
zu der Redeweise
„Zu jeder natürlichen Zahl $a$ gibt es eine Zahl $a$, so daß $a$ Nachfolger von $a$ ist“
übergehen, die überhaupt kein sinnvoller Ausdruck mehr ist.

Man benötigt die Umbenennung gebundener Variabler im wesentlichen aus beweis*technischen* Gründen.

### 1.3.4. Benutzung logischer Sätze beim Schließen

Durch die Analyse von Beispielen haben wir im Abschnitt 1.3.2. (↗ 29ff.) eine Reihe von Schlußregeln gefunden, die fast alle im Abschnitt 1.3.3. (↗ 39ff.) als „Regeln des natürlichen Schließens“ noch einmal genannt worden sind. Zwei Schlußregeln, die aus unseren Beispielen stammten, traten aber nicht wieder auf. Es handelt sich um den Kontrapositionsschluß (↗ 36f, Beispiel 40) und um eine mit der Identität zusammenhängende Schlußweise (↗ 37f., Beispiel 41). Das deutet auf die Tatsache hin, daß man sich beim üblichen mathematischen Schließen nicht auf die im Abschnitt 1.3.3. angeführten Regeln des natürlichen Schließens beschränkt, sondern ganz allgemein *Sätze der Logik* und *Sätze über die Identität* zur Grundlage von Schlußregeln macht. (Der Vorteil einer solchen Verfahrensweise besteht in erster Linie darin, daß die Beweise dadurch im allgemeinen *kürzer* werden als bei alleiniger Benutzung der Regeln des natürlichen Schließens.)

*Betrachten wir einige Schlußregeln, die man aus Sätzen der Logik oder aus Sätzen über die Identität gewinnt:*

(1) *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*

Da der Ausdruck $\mathsf{H} \vee \sim \mathsf{H}$ logisch allgemeingültig ist, kann stets aus jedem beliebigen Ausdruck $\mathsf{H}_0$ auf ihn geschlossen werden.
Wir bekommen also die Schlußregel:

$$\frac{\mathsf{H}_0}{\mathsf{H} \vee \sim \mathsf{H}}$$

(2) *Satz vom Kettenschluß*

Der Ausdruck $[(\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2) \wedge (\mathsf{H}_2 \rightarrow \mathsf{H}_3)] \rightarrow (\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_3)$ ist ebenfalls logisch allgemeingültig (eine *logische Identität*, wie man auch sagt).
Auf ihm beruht folgende Schlußregel:

$$\begin{array}{c} \mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2 \\ \mathsf{H}_2 \rightarrow \mathsf{H}_3 \\ \hline \mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_3 \end{array}$$

(3) *Satz von der Prämissenverbindung*

Aus dem allgemeingültigen Ausdruck

$$[\mathsf{H}_1 \rightarrow (\mathsf{H}_2 \rightarrow \mathsf{H}_3)] \rightarrow [(\mathsf{H}_1 \wedge \mathsf{H}_2) \rightarrow \mathsf{H}_3]$$

ergibt sich die Schlußregel

$$\frac{\mathsf{H}_1 \rightarrow (\mathsf{H}_2 \rightarrow \mathsf{H}_3)}{(\mathsf{H}_1 \wedge \mathsf{H}_2) \rightarrow \mathsf{H}_3}$$

(4) *Kontraposition*
Neben der im Abschnitt 1.3.2. (↗ 36f., Beispiel 40) schon angegebenen Regel kann auch benutzt werden:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2 \\ \sim \mathsf{H}_2\end{array}}{\sim \mathsf{H}_1}$$

Der Ausdruck

$$[(\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2) \wedge \sim \mathsf{H}_2] \rightarrow \sim \mathsf{H}_1$$

ist nämlich ebenfalls eine logische Identität.

(5) De Morgan*sche Regeln*
Man kann schließen

a) $\dfrac{\sim (\mathsf{H}_1 \wedge \mathsf{H}_2)}{\sim \mathsf{H}_1 \vee \sim \mathsf{H}_2}$ bzw. b) $\dfrac{\sim (\mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2)}{\sim \mathsf{H}_1 \wedge \sim \mathsf{H}_2}$

Die entsprechenden allgemeingültigen Ausdrücke können nach dem Muster der eben genannten Schlußregeln leicht angegeben werden.

(6) *Sätze über Verneinung quantifizierter Ausdrücke*
Auf diesen Sätzen beruhen u. a. folgende Schlußregeln:

a) $\dfrac{\sim \forall\, a\, \mathsf{H}(a)}{\exists\, a\, [\sim \mathsf{H}(a)]}$ bzw. b) $\dfrac{\sim \exists\, a\, \mathsf{H}(a)}{\forall\, a\, [\sim \mathsf{H}(a)]}$

(7) *Sätze über Quantifikatorenverteilung*
Auf ihnen beruht u. a. die Schlußregel

$$\frac{\exists\, a\, [\mathsf{H}_1(a) \wedge \mathsf{H}_2(a)]}{\exists\, a\, \mathsf{H}_1(a) \wedge \exists\, a\, \mathsf{H}_2(a)}$$

(8) Leibniz*sches Ersetzbarkeitstheorem*
Wenn $a = b$ ist, so kann $a$ in einem beliebigen Ausdruck $\mathsf{H}(a)$ an einigen oder auch an allen Stellen, an denen $a$ frei vorkommt, durch $b$ ersetzt werden. (Man drückt das symbolisch durch $\mathsf{H}(a||b)$ aus.)
Als Schlußregel erhält man in Kurzschreibweise:

$$\frac{a = b}{\mathsf{H}(a) \leftrightarrow \mathsf{H}(a||b)}$$

Diese acht Schlußregeln sollen genügen, auch wenn keineswegs alle für das Führen von Beweisen gebräuchlichen und in diesem Sinne wichtigen Sätze der Logik bzw. der Identität hier genannt worden sind. Es dürfte aber deutlich geworden sein, auf welche Weise diese Sätze zur Grundlage von Schlußregeln werden können. Man macht sich auch leicht klar, daß die so gewonnenen Schlußregeln alle „zulässig" sind (vgl. unsere entsprechenden Überlegungen im Abschnitt 1.3.2.):
Wenn ein Ausdruck der Form $\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2$ *allgemeingültig* ist, dann *folgt* $\mathsf{H}_2$ aus $\mathsf{H}_1$ (nach dem im Abschnitt 1.2.2. angegebenen Satz, ↗ 21), und damit ist der Übergang von $\mathsf{H}_1$ zu $\mathsf{H}_2$ als Schlußregel gerechtfertigt.

(Das Beispiel 35 (↗ 29) wird durch diese Überlegung mit erfaßt. Der entsprechenden Schlußregel liegt die Implikation $H_0 \rightarrow (H \vee \sim H)$ zugrunde, die allgemeingültig ist.)

Das System der Schlußregeln wird durch die Benutzung von logischen Sätzen und von Sätzen über die Identität sehr weit ausgedehnt, und es drängt sich die Frage auf, ob es noch „überschaubar" bleibt.

Die Antwort darauf lautet:

Es ist stets nach einem einheitlichen Verfahren in endlich vielen Schritten nachprüfbar, ob ein Ausdruck der Form $H_1 \rightarrow H_2$ aussagenlogisch allgemeingültig, d. h. eine aussagenlogische Identität ist. Wir haben dieses Verfahren im Abschnitt 1.1.7. bereits an den Beispielen 21 und 22 (↗ 15) vorgeführt. Wenn wir von einem Ausdruck der Form $H_1 \rightarrow H_2$ nach diesem Verfahren feststellen können, daß er aussagenlogisch allgemeingültig (eine Identität) ist, dann sind wir fertig. Die zugehörige Schlußregel ist dann *zulässig*. Ist der untersuchte Ausdruck dagegen *aussagenlogisch nicht* allgemeingültig, dann muß nachgeprüft werden, ob der Ausdruck vielleicht trotzdem *prädikatenlogisch* allgemeingültig ist.[1]) Dafür gibt es im allgemeinen aber *kein* Entscheidungsverfahren, das unabhängig von der Art des speziellen Ausdrucks in immer gleicher Weise angewandt zum Ziele führt. Man muß vielmehr einen vom jeweiligen Ausdruck abhängenden Beweis führen, um seine Allgemeingültigkeit zu sichern. Wenn das gelingt — oder bereits früher gelungen ist — ist die Zulässigkeit der entsprechenden Schlußregeln nachgewiesen.

Das oben erwähnte Entscheidungsverfahren für die aussagenlogische Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks beruht im wesentlichen darauf, daß alle aussagenlogisch nicht weiter zerlegbaren Bestandteile eines Ausdrucks als Variable für Wahrheitswerte aufgefaßt werden. Ein einfaches Beispiel soll das veranschaulichen:

Wir schließen aus

„Wenn $|a| < 1$ ist, dann ist $a^2 < 1$"

und

„Es ist nicht $a^2 < 1$" (kurz: $a^2 \geqq 1$)

auf

„Es ist nicht $|a| < 1$" (kurz: $|a| \geqq 1$)

Diesem Schluß liegt folgender Ausdruck zugrunde:

„Wenn gilt: wenn $|a| < 1$ ist, so ist $a^2 < 1$, und es ist nicht $a^2 < 1$, dann ist nicht $|a| < 1$".

Führt man für die aussagenlogisch nicht weiter zerlegbaren Bestandteile dieses Ausdrucks Wahrheitswertvariable ein, so erhält man in formalisierter Schreibweise:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

Die Variablen dieses Ausdrucks können auf genau vier verschiedene Arten mit Wahrheitswerten belegt werden.

Wie man nachprüfen kann, ist dem Ausdruck bei jeder dieser vier Belegungen der

[1]) Wie wir wissen, ist jeder prädikatenlogische Ausdruck, der aussagenlogisch allgemeingültig ist, auch prädikatenlogisch allgemeingültig. Die Umkehrung gilt dagegen nicht. (Vgl. ↗ 15ff., Abschnitt 1.1.7.).

Wahrheitswert W zugeordnet, er ist also aussagenlogisch allgemeingültig. Damit ist die in unserem Beispiel angewandte Schlußweise als zulässig erkannt.

Als Fazit unserer Überlegungen in den Abschnitten 1.3.2. bis 1.3.4. kann festgestellt werden, daß wir nunmehr eine gewisse Übersicht über die in der Mathematik benutzten Schlußregeln gewonnen haben. Als Ergänzung ist noch hinzuzufügen, daß man die Schlußregeln auch als *Folgerungsregeln* bezeichnen kann, da ihre Anwendung von vorgegebenen Ausdrücken stets auf Ausdrücke führt, die aus den ersteren *folgen* — wir haben uns das in einigen Fällen ausdrücklich klar gemacht. Es ist also durchaus gerechtfertigt, beim Schließen die Redeweise „Daraus folgt..." zu benutzen.

## 1.3.5. Logische Analyse einiger Beweise

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir aus Beispielen von Beweisführungen einzelne Schlußweisen herausgelöst und die ihnen zugrunde liegenden Schlußregeln formuliert. Wir wollen nun einige Beweise *vollständig* analysieren und sie in jene Form bringen, die der im Abschnitt 1.3.1. gegebenen Definition (↗ 27f.) entspricht: sie sollen als endliche Folgen von Ausdrücken erscheinen, und wir wollen jeden einzelnen Beweisschritt durch Angabe der jeweils benutzten Schlußregel rechtfertigen.[1])

*Beispiel:*

43) Im Abschnitt 1.3.2. ist als Beispiel 36 (↗ 32f.) der Beweis zu folgendem Satz untersucht worden:

„Für alle reellen Zahlen $a$ gilt: wenn $a > 1$ ist, so ist $a^2 > 1$."

Dabei haben wir festgestellt, daß die Regel des Schließens auf „Für alle ... gilt" und die Regel des Schließens auf eine Implikation in dem Beweis benutzt worden sind. Damit war der Beweis aber keineswegs vollständig analysiert. Die Schlußregeln, die uns von „$a > 1$" schließlich zu „$a^2 > 1$" geführt haben, sind bei unserer ersten Betrachtung noch im Dunkeln geblieben. Wenn wir *jeden* Beweisschritt durch Angabe der entsprechenden Schlußregel begründen wollen, bekommt der Beweis etwa folgendes Aussehen:[2])

| | |
|---|---|
| (1) $a > 1$ | nach Voraussetzung; |
| (2) $\forall a \, \forall b \, \forall c \, (a > b \land c \geqq 0 \to$ $\to a + c > b)$ | bewiesener Satz; |
| (3) $\forall b \, \forall c \, (a > b \land c \geqq 0 \to a + c > b)$ | |
| (4) $\forall c \, (a > b \land c \geqq 0 \to a + c > b)$ | |
| (5) $a > b \land c \geqq 0 \to a + c > b$ | folgt schrittweise aus (2) über (3) und (4) durch dreimalige Anwendung des Schließens aus „Für alle ... gilt"; |
| (6) $a > 1 \land a \cdot (a - 1) \geqq 0 \to$ $\to a + a \cdot (a - 1) > 1$ | folgt aus (5) durch Termeinsetzung: 1 für $b$ und $a \cdot (a - 1)$ für $c$; |

[1]) Das volle Erfassen der weitgehend formalisierten Beweisdarstellungen ist für das Verständnis der nachfolgenden Ausführungen nicht unbedingt notwendig.

[2]) Der Kürze und Übersichtlichkeit wegen verwenden wir hier eine weitgehend formalisierte Schreibweise. Die inhaltlichen Bedeutungen der logischen Zeichen seien zur Erleichterung des Lesens noch einmal genannt: $\forall$: für jedes; $\land$: und; $\lor$: oder; $\to$: wenn — so; $\leftrightarrow$: genau dann, wenn.

| | |
|---|---|
| (7) $\forall a\,[a > 1 \rightarrow a \cdot (a-1) > 0]$ | bewiesener Satz; |
| (8) $a > 1 \rightarrow a \cdot (a-1) > 0$ | folgt aus (7) durch Schluß aus „Für alle ... gilt“; |
| (9) $a \cdot (a-1) > 0$ | folgt aus (1) und (8) durch Schluß aus einer Implikation; |
| (10) $a \cdot (a-1) > 0 \vee a \cdot (a-1) = 0$ (kurz: $a \cdot (a-1) \geqq 0$) | folgt aus (9) durch Schluß auf eine Alternative; |
| (11) $a > 1 \wedge a \cdot (a-1) \geqq 0$ | folgt aus (1) und (10) durch Schluß auf eine Konjunktion; |
| (12) $a + a \cdot (a-1) > 1$ | folgt aus (6) und (11) durch Schluß aus einer Implikation; |
| (13) $\forall a\,[a + a \cdot (a-1) = a^2]$ | bewiesener Satz; |
| (14) $a + a \cdot (a-1) = a^2$ | folgt aus (13) durch Schluß aus „Für alle ... gilt“; |
| (15) $x = y \rightarrow (x > 1 \leftrightarrow y > 1)$ | bewiesener Satz (Spezialfall des LEIBNIZschen Ersetzbarkeitstheorems); |
| (16) $a + a \cdot (a-1) = a^2 \rightarrow$ $\rightarrow [a + a \cdot (a-1) > 1 \leftrightarrow a^2 > 1]$ | folgt aus (15) durch Termeinsetzung: $a + a \cdot (a-1)$ für $x$ und $a^2$ für $y$; |
| (17) $a + a \cdot (a-1) > 1 \leftrightarrow a^2 > 1$ | folgt aus (14) und (16) durch Schluß aus einer Implikation; |
| (18) $a + a \cdot (a-1) > 1 \rightarrow a^2 > 1$ | folgt aus (17) durch Schluß aus einer Äquivalenz; |
| (19) $a^2 > 1$ | folgt aus (12) und (18) durch Schluß aus einer Implikation; |
| (20) $a > 1 \rightarrow a^2 > 1$ | folgt aus (19) unter Berücksichtigung von (1) durch Schluß auf eine Implikation; |
| (21) $\forall a\,(a > 1 \rightarrow a^2 > 1)$ | folgt aus (20) durch Schluß auf „Für alle ... gilt“. |

In der letzten Zeile steht der als Beispiel gewählte Satz (in formalisierter Schreibweise), der damit bewiesen ist.

Schon aus diesem Beispiel können wir einige *Erkenntnisse* gewinnen:

1. Am auffälligsten ist sicher die Tatsache, daß der hier angegebene Beweis *wesentlich* länger ist als der, den wir im Abschnitt 1.3.2. zu dem gleichen Satz geführt haben (↗ 32). Das liegt daran, daß man bei Beweisführungen in der Regel gar nicht alle Einzelschlüsse explizit angibt. Verschiedene der in dem hier vorgeführten Beweis enthaltenen Einzelschlüsse werden vielmehr *zusammengefaßt* und erscheinen dann als *ein* Schritt im Beweis. Dagegen ist auch nichts einzuwenden — im Gegenteil, es wäre außerordentlich langweilig und lästig, wenn man jeden mathematischen Beweis so ausführlich aufschreiben müßte, wie wir es eben getan haben. Wesentlich ist aber die Tatsache, daß man es im Prinzip *könnte*, daß man *komplexe* Beweisschritte stets in ihre Einzelteile *zerlegen* kann, sofern das aus irgend einem Grunde wünschenswert erscheint.
2. Wenn man nachprüft, an welcher Stelle ein bestimmter Ausdruck in unserem Beweis erscheint und an welcher Stelle er für das Weiterschließen benutzt wird, dann ist bald zu erkennen, daß die Reihenfolge der Ausdrücke auch etwas anders hätte sein können. Beispielsweise wäre es durchaus möglich gewesen, den Ausdruck „$a > 1$“, der in unserem Beweis am Anfang steht, in Zeile (8)

einzuführen; denn erst beim Schließen auf Zeile (9) wird er tatsächlich benötigt. Natürlich ist die Reihenfolge der Ausdrücke nicht gänzlich gleichgültig, aber in gewissen Grenzen sind Umordnungen durchaus möglich. Das liegt daran, daß die logische *Struktur* unseres Beweises gewissermaßen nicht linear, sondern *verzweigt* ist. Man sieht das sehr deutlich, wenn man die Struktur des Beweises durch einen gerichteten Graphen veranschaulicht (Bild 2). Den Anfangspunkten entsprechen die für den Beweis als Voraussetzungen benutzten Ausdrücke (1),

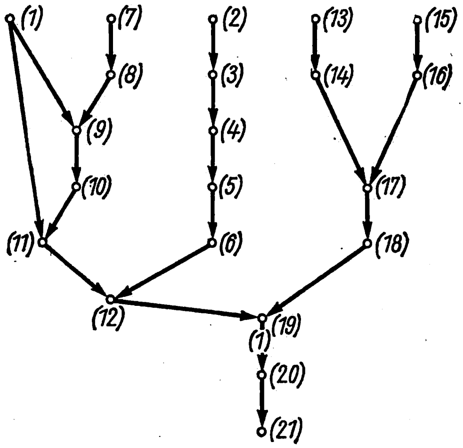



Bild 2

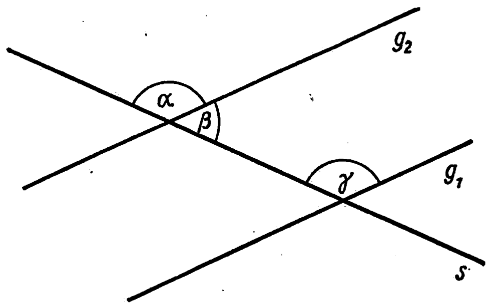



Bild 3

(2), (7), (13) und (15), dem Fortschreiten in Pfeilrichtung entspricht das Schließen im Beweis, und dem Endpunkt entspricht der bewiesene Satz. Aus Bild 2 ist zu erkennen, daß man beim Notieren des Beweises beispielsweise auch mit dem Ausdruck (15) beginnen könnte oder mit dem Ausdruck (7) oder (2) oder (13). Es gibt also recht unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten für die einzelnen Ausdrücke des Beweises.

3. Die Variabilität des Beweises bezieht sich aber nicht nur auf die Anordnung der einzelnen Ausdrücke. Man macht sich leicht klar, daß der Beweis zumindest in einigen Abschnitten anders aussehen würde, wenn wir andere Voraussetzungen benutzt hätten. So wäre es beispielsweise denkbar, den Ausdruck (7) nicht einfach als bewiesenen Satz vorauszusetzen, sondern ihn aus anderen Sätzen erst herzuleiten. Das würde bedeuten, daß zu unserem Beweis noch etwas hinzu käme, allerdings ohne das schon Vorhandene zu ändern. Man könnte aber auch an Stelle von Ausdruck (2) einen anderen Satz als schon bewiesen voraussetzen, etwa: „Für alle positiven Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ gilt: wenn $a > b$ ist und $c > d$, dann ist $a \cdot c > b \cdot d$."
Man schließt dann von $a > 1$ auf $a \cdot a > 1 \cdot 1$ und damit auf $a^2 > 1$ und bekommt bei diesem Vorgehen einen ganz anderen Beweis für diesen Satz.

*Beispiel:*

44) Wir wollen einen weiteren Beweis aus dem Abschnitt 1.3.2. noch einmal aufgreifen (↗ 37). Es soll in derselben ausführlichen Form wie im Beispiel 43 gezeigt werden, daß die Summe entgegengesetzt liegender Winkel an geschnit-

tenen Parallelen 180° beträgt. (Wir stützen uns bei der Beweisführung hinsichtlich der Bezeichnungen auf Bild 3.)

Die zu beweisende Behauptung lautet also:

„Wenn $g_1 \| g_2$, so ist $\gamma + \beta = 180°$".

Der Beweis kann wie folgt geführt werden:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $g_1 \| g_2$ | nach Voraussetzung; |
| (2) | $\alpha$ und $\gamma$ bilden ein Stufenwinkelpaar. | nach Voraussetzung; |
| (3) | $g_1 \| g_2$ und $\alpha$ und $\gamma$ bilden ein Stufenwinkelpaar. | (1), (2) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (4) | Wenn $g_1 \| g_2$ und $\alpha$ und $\gamma$ bilden ein Stufenwinkelpaar, so ist $\alpha = \gamma$. | bewiesener Satz; |
| (5) | $\alpha = \gamma$ | (3), (4) — Schluß aus einer Implikation (Abtrennungsregel); |
| (6) | $\alpha$ und $\beta$ bilden ein Nebenwinkelpaar. | nach Voraussetzung; |
| (7) | Wenn $\alpha$ und $\beta$ ein Nebenwinkelpaar bilden, so ist $\alpha + \beta = 180°$. | bewiesener Satz; |
| (8) | $\alpha + \beta = 180°$ | (6), (7) — Abtrennungsregel; |
| (9) | $\alpha = \gamma$ und $\alpha + \beta = 180°$ | (5), (8) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (10) | Wenn $\alpha = \gamma$ und $\alpha + \beta = 180°$, so ist $\gamma + \beta = 180°$. | bewiesener Satz; |
| (11) | $\gamma + \beta = 180°$ | (9), (10) — Abtrennungsregel; |
| (12) | Wenn $g_1 \| g_2$, so ist $\gamma + \beta = 180°$, w. z. b. w. | Schluß auf eine Implikation |

Neben den Erkenntnissen 1. bis 3., die wir schon aus unserem Beispiel 43 gewonnen haben und die durch das Beispiel 44 nur bestätigt werden, bekommen wir hier auch eine vierte Einsicht.

4. Es handelt sich um die Rolle, die der in Bild 3 dargestellten Beweisfigur in diesem Beweis zukommt. Durch sie werden nämlich einige Voraussetzungen immanent gegeben, die im Beweis selbst nicht explizit genannt sind, wohl aber stillschweigend benutzt werden, z. B.: $g_1$ ist von $g_2$ verschieden, $s$ schneidet $g_1$ und $g_2$, $\beta$ und $\gamma$ bilden ein Paar entgegengesetzt liegender Winkel und ähnliches. Im Prinzip wäre es durchaus möglich, auf die Beweisfigur zu verzichten. Dann müßten aber alle für den Beweis benutzten Lagebeziehungen, die sonst aus der Figur hervorgehen, sprachlich richtig formuliert und als Voraussetzungen explizit in den Beweis aufgenommen werden. Wir haben das hier nicht getan — einmal, um nicht noch mehr von der üblichen Praxis des Beweisens abzuweichen, die bei geometrischen Problemen eben durch Verwenden derartiger Beweisfiguren gekennzeichnet ist, zum anderen, damit der Beweis trotz der starken Aufgliederung noch „lesbar" bleibt; denn ein Verzicht auf die Beweisfigur würde den Beweis recht unübersichtlich werden lassen.

*Beispiel:*

45) Schließlich wollen wir noch einen etwas umfangreichen Beweis darstellen, der im Abschnitt 1.3.2. (↗ 35) ebenfalls schon erwähnt worden ist. Es geht um den Beweis des Satzes:

„Für alle natürlichen Zahlen $a, b, p$ gilt:
wenn $p$ eine Primzahl ist, dann teilt $p$ das Produkt $a \cdot b$ genau dann, wenn $p$ die Zahl $a$ teilt oder die Zahl $b$ teilt.“
In formalisierter Schreibweise:

$$\forall a \, \forall b \, \forall p \, [P(p) \rightarrow (p|a \cdot b \leftrightarrow p|a \vee p|b)]$$

(Hierbei soll $P(p)$ bedeuten: $p$ ist Primzahl. Außerdem werden noch folgende Abkürzungen benutzt: $p \nmid a$ — $p$ teilt nicht $a$; $(p, a)$ — größter gemeinsamer Teiler von $p$ und $a$.)
Der Beweis kann wie folgt geführt werden:

*Teil I*

| | |
|---|---|
| (1) $P(p)$ | nach Voraussetzung; |
| (2) $p\|a \cdot b \wedge p \nmid a$ | als Voraussetzung; |
| (3) $p \nmid a$ | aus (2) — Schluß aus einer Konjunktion; |
| (4) $P(p) \wedge p \nmid a$ | aus (1), (3) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (5) $P(p) \wedge p \nmid a \rightarrow (a, p) = 1$ | bewiesener Satz; |
| (6) $(a, p) = 1$ | aus (4), (5) — Schluß aus einer Implikation; |
| (7) $\forall a \, \forall b \, (a\|a \cdot b)$ | bewiesener Satz; |
| (8) $\forall b (a\|a \cdot b)$ | aus (7) — Schluß aus „Für alle . . . gilt“; |
| (9) $a\|a \cdot b$ | aus (8) — Schluß aus „Für alle . . . gilt“; |
| (10) $p\|a \cdot b$ | aus (2) — Schluß aus einer Konjunktion; |
| (11) $a\|a \cdot b \wedge p\|a \cdot b$ | aus (9), (10) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (12) $(a, p) = 1 \wedge a\|a \cdot b \wedge p\|a \cdot b$ | aus (6), (11) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (13) $\forall a \, \forall b \, \forall c \, [(a, c) = 1 \wedge a\|a \cdot b \wedge$ $\wedge \, c\|a \cdot b \rightarrow a \cdot c\|a \cdot b]$ | bewiesener Satz; |
| (14) $\forall a \, \forall b \, \forall p \, [(a, p) = 1 \wedge a\|a \cdot b \wedge$ $\wedge \, p\|a \cdot b \rightarrow a \cdot p\|a \cdot b]$ | aus (13) — gebundene Umbenennung; |
| (15) $\forall b \, \forall p \, [(a, p) = 1 \wedge a\|a \cdot b \wedge$ $\wedge \, p\|a \cdot b \rightarrow a \cdot p\|a \cdot b]$ | aus (14) — Schluß aus „Für alle . . . gilt“; |
| (16) $\forall p \, [(a, p) = 1 \wedge a\|a \cdot b \wedge$ $\wedge \, p\|a \cdot b \rightarrow a \cdot p\|a \cdot b]$ | aus (15) — wie eben; |
| (17) $(a, p) = 1 \wedge a\|a \cdot b \wedge$ $\wedge \, p\|a \cdot b \rightarrow a \cdot p\|a \cdot b$ | aus (16) — wie eben; |
| (18) $a \cdot p\|a \cdot b$ | aus (12), (17) — Schluß aus einer Implikation; |
| (19) $\forall a \, \forall b \, \forall c \, (a \cdot c\|a \cdot b \leftrightarrow c\|b)$ | bewiesener Satz; |
| (20) $\forall a \, \forall b \, \forall p \, (a \cdot p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|b)$ | aus (19) — gebundene Umbenennung; |
| (21) $\forall b \, \forall p \, (a \cdot p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|b)$ | aus (20) — Schluß aus „Für alle . . . gilt“; |
| (22) $\forall p \, (a \cdot p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|b)$ | aus (21) — wie eben; |
| (23) $a \cdot p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|b$ | aus (22) — wie eben; |
| (24) $a \cdot p\|a \cdot b \rightarrow p\|b$ | aus (23) — Schluß aus einer Äquivalenz; |

| | |
|---|---|
| (25) $p\|b$ | aus (18), (24) — Schluß aus einer Implikation; |
| (26) $p\|a \cdot b \wedge p \nmid a \rightarrow p\|b$ | aus (25) — Schluß auf eine Implikation unter Berücksichtigung von (2); |
| (27) $p\|a \cdot b \rightarrow p\|a \vee p\|b$ | aus (26) — Schluß nach dem logischen Satz: $[(A \wedge \sim B) \rightarrow C] \rightarrow [A \rightarrow (B \vee C)]$; |

*Teil II*

| | |
|---|---|
| (28) $p\|a$ | als Voraussetzung; |
| (29) $\exists x\,(a = p \cdot x)$ | aus (28) — Ersetzung von „$p\|a$" durch den nach Definition äquivalenten Ausdruck „$\exists x\,(a = p \cdot x)$"; |
| (30) $a \underset{y}{=} p \cdot c$ | aus (29) — Schluß aus „Es gibt ein"; |
| (31) $\forall a \forall b \forall c \forall p\,(a = p \cdot c \rightarrow$ $\rightarrow a \cdot b = p \cdot c \cdot b)$ | bewiesener Satz; |
| (32) $\forall b \forall c \forall p\,(a = p \cdot c \rightarrow$ $\rightarrow a \cdot b = p \cdot c \cdot b)$ | Schluß aus „Für alle ... gilt"; |
| (33) $\forall c \forall p\,(a = p \cdot c \rightarrow a \cdot b =$ $= p \cdot c \cdot b)$ | Schluß aus „Für alle ... gilt"; |
| (34) $\forall p\,(a = p \cdot c \rightarrow a \cdot b = p \cdot c \cdot b)$ | Schluß aus „Für alle ... gilt"; |
| (35) $a = p \cdot c \rightarrow a \cdot b = p \cdot c \cdot b$ | Schluß aus „Für alle ... gilt"; |
| (36) $a \cdot b = p \cdot c \cdot b$ | aus (30), (35) — Schluß aus einer Implikation; |
| (37) $\forall c \forall b \exists m\,(c \cdot b = m)$ | bewiesener Satz; |
| (38) $\forall b \exists m\,(c \cdot b = m)$ | aus (37) bzw. (38) — Schluß aus „Für alle ... gilt"; |
| (39) $\exists m\,(c \cdot b = m)$ | |
| (40) $c \cdot b = q$ | aus (39) — Schluß aus „Es gibt ein"; |
| (41) $c \cdot b = q \wedge a \cdot b = p \cdot c \cdot b$ | aus (36), (40) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (42) $c \cdot b = q \wedge a \cdot b = p \cdot c \cdot b \rightarrow$ $\rightarrow a \cdot b = p \cdot q$ | bewiesener Satz; |
| (43) $a \cdot b = p \cdot q$ | aus (41), (42) — Schluß aus einer Implikation; |
| (44) $\exists y\,(a \cdot b = p \cdot y)$ | aus (43) — Schluß auf „Es gibt ein"; |
| (45) $p\|a \cdot b$ | aus (44) — Ersetzung durch den nach Definition äquivalenten Ausdruck; |
| (46) $p\|a \rightarrow p\|a \cdot b$ | aus (45) — Schluß auf eine Implikation — unter Berücksichtigung von (28); |

*Teil III*

(47) $p|b$ als Voraussetzung;

Ganz entsprechend wie im Teil II gelangt man zu

(48) $p|b \rightarrow p|a \cdot b$

*Teil IV*

| | |
|---|---|
| (49) $(p\|a \rightarrow p\|a \cdot b) \wedge (p\|b \rightarrow p\|a \cdot b)$ | Aus (46), (48) — Schluß auf eine Konjunktion; |
| (50) $p\|a \vee p\|b \rightarrow p\|a \cdot b$ | aus (49) — Schluß nach dem logischen Satz: $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$; |

*Teil V*

| | |
|---|---|
| (51) $p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|a \vee p\|b$ | aus (27), (50) — Schluß auf eine Äquivalenz; |
| (52) $P(p) \rightarrow (p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|a \vee p\|b)$ | aus (51) — Schluß auf eine Implikation — unter Berücksichtigung von (1); |
| (53) $\forall p\,[P(p) \rightarrow (p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|a \vee p\|b)$ | aus (52) — Schluß auf „Für alle ... gilt"; |
| (54) $\forall b\, \forall p\,[P(p) \rightarrow$ $\rightarrow (p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|a \vee p\|b)]$ | aus (53) — wie eben; |
| (55) $\forall a\, \forall b\, \forall p\,[P(p) \rightarrow$ $\rightarrow (p\|a \cdot b \leftrightarrow p\|a \vee p\|b)]$ | aus (54) — wie eben. |

Die letzte Zeile ist unsere Behauptung, der Beweis ist damit beendet.

*Bemerkungen zum Beispiel 45:*

a) Die Gliederung des Beweises in die Teile I bis V wäre nicht unbedingt notwendig gewesen. Sie ist hier erfolgt, um seine Grobstruktur etwas hervortreten zu lassen. Wir wollen sie noch einmal überblicken:
Im Teil I wird unter der Voraussetzung, daß $p$ eine Primzahl ist, die Implikation
„Wenn $p|a \cdot b$ ist, so ist $p|a$ oder $p|b$"
bewiesen.
In den Teilen II bis IV wird die Umkehrung dieser Implikation hergeleitet, also
„Wenn $p|a$ oder $p|b$ ist, dann ist $p|a \cdot b$".
Dabei bringt der Teil II die Herleitung von
„Wenn $p|a$, so $p|a \cdot b$",
der Teil III entsprechend
„Wenn $p|b$, so $p|a \cdot b$"
und Teil IV schließlich die Zusammenfassung zu dem obigen Ausdruck.
Im Teil V wird aus den beiden Implikationen die Äquivalenz
„$p|a \cdot b$ genau dann, wenn $p|a$ oder $p|b$"
gewonnen, die Voraussetzung „$p$ ist eine Primzahl" wird in den Ausdruck aufgenommen, und durch Generalisierung aller Variablen gewinnt man schließlich die zu beweisende Behauptung.

b) In dem Beweis wird an zwei Stellen — beim Übergang zu (29) bzw. (45) — eine Schlußweise benutzt, die in den bisherigen Beispielen noch nicht aufgetreten war. Sie beruht ebenfalls auf einem Satz der Logik, auf dem sogenannten *Ersetzbarkeitstheorem.* Es besagt im wesentlichen, daß zueinander äquivalente Ausdrücke nach Belieben gegenseitig ersetzt werden können. (Zur Präzisierung dieses Satzes müßte natürlich genau erklärt werden, wann zwei Ausdrücke „zueinander äquivalent" genannt werden. Wir wollen das hier aber nicht weiter verfolgen, sondern begnügen uns mit der Feststellung, daß in unserem Falle Äquivalenz vorliegt; denn der Ausdruck „$a|b$" wird ja gewöhnlich durch „$\exists\, c\,(b = a \cdot c)$" *definiert.* Beide Ausdrücke bedeuten also *nach Definition* das gleiche.)

# 2. Einige psychologische Voraussetzungen

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die sachliche Richtigkeit und die logische Klarheit der Erläuterung mathematischer Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren im Unterricht zwar notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingungen für das Verstehen dieser Sachverhalte durch Schüler darstellen. Das trifft auch auf Beweisführungen zu. Damit Schüler mathematische Beweise verstehen oder gegebenenfalls selbst durchführen können, müssen auch verschiedene psychologische Voraussetzungen erfüllt sein, die sowohl den Entwicklungsstand der Schüler als auch die Gestaltung des Mathematikunterrichts betreffen. Wir haben bereits im Vorwort darauf hingewiesen, daß jeder Mathematik unterrichtende Lehrer neben dem notwendigen mathematischen Verständnis auch Klarheit über diese psychologischen Bedingungen besitzen sollte, um die Schüler möglichst erfolgreich in das Beweisen mathematischer Aussagen einführen zu können. Deshalb sollen im folgenden einige der wichtigsten psychologischen Aspekte, die bei Beweisführungen von Bedeutung sind, kurz erörtert werden.

In dem hier gegebenen Rahmen ist es natürlich nicht möglich, die ganze Vielfalt und Komplexität psychologischer Zusammenhänge deutlich werden zu lassen. Wir beschränken uns bewußt auf wenige Fragen, die im Hinblick auf das Beweisen besonders wesentlich sein dürften, ohne dabei die entsprechenden psychologischen Grundlagen systematisch und umfassend darzulegen. So wollen wir beispielsweise nicht besonders darauf eingehen, daß die geistige Entwicklung nur als eine Komponente der gesamten Persönlichkeitsentwicklung verstanden werden kann, daß Denkleistungen nicht nur von intellektuellen Fähigkeiten abhängen, sondern auch von anderen Persönlichkeitsqualitäten, daß das Lernen durch vielfältige innere und äußere Bedingungen beeinflußt wird und dergleichen mehr. In all diesen Fragen verweisen wir auf die psychologische Fachliteratur[1]).

Trotz der genannten Beschränkungen werden wir aber in den folgenden Darlegungen bereits zu Aussagen gelangen, die für die methodische Gestaltung des Unterrichts bedeutsam sind.

[1]) Vgl. z. B. Erlebach, Ihlefeld, Zehner: *Psychologie für Lehrer und Erzieher.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970.

## 2.1. Zum entwicklungspsychologischen Aspekt

Selbstverständlich können Schüler mathematische Beweise erst dann verstehen, wenn sie als Ergebnis ihrer Auseinandersetzung mit der Umwelt — bedingt vor allem durch die Vorschulerziehung und später durch den Schulunterricht — ein bestimmtes geistiges Niveau erreicht haben. Mathematische Beweisführungen setzen psychologisch gesehen einmal die Fähigkeit zu schlußfolgerndem Denken und zum anderen die Fähigkeit zum Operieren mit abstrakten Begriffen voraus. In psychologischen Darstellungen der Entwicklung des Denkens findet man — trotz unterschiedlicher theoretischer Grundkonzeptionen — relativ übereinstimmende Aussagen darüber, in welchem Alter Schüler die genannten Fähigkeiten erwerben.

Schlußfolgerungen treten danach schon sehr früh auf. Sie sind bereits im Vorschulalter zu beobachten, wenn auch nicht in solchen Formen, die für die wissenschaftliche Erkenntnisgewinnung charakteristisch sind. Im frühen Schulalter nimmt die Fähigkeit, Schlußfolgerungen zu ziehen, beträchtlich zu und entwickelt sich auch in der folgenden Zeit ständig weiter.[1]) Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Kinder im frühen Schulalter vorerst nur zu solchen Schlußfolgerungen fähig sind, die sich auf anschauliche Gegebenheiten beziehen. Die Fähigkeit zu abstraktem Denken entwickelt sich etwa um das elfte Lebensjahr. „Mit dem Übergang zur Mittelstufe bildet sich das theoretische Denken heraus. Es unterscheidet sich vom empirischen Denken dadurch, daß das Kind im Bereich abstrakter Sachverhalte zu denken vermag. Die Voraussetzung dafür ist das umfassende Kennenlernen der Wirklichkeit und die Ausbildung des Wissenssystems, das verallgemeinerte Erfahrungen auf höherem Niveau umfaßt."[2])

In diesem Zusammenhang müssen jedoch noch einige Tatsachen beachtet werden:

a) In der psychologischen Literatur wird stets hervorgehoben, daß alle Altersangaben in der Entwicklungspsychologie nur ungefähre Mittelwerte darstellen, von denen es zum Teil erhebliche individuelle Abweichungen gibt. „Manches jüngere Schulkind denkt bereits abstrakt, und Schüler der Mittelstufe denken mitunter noch situativ."[3]) Man kann also durchaus in den Klassen der Unter-

[1]) Siehe z. B. CLAUSS, G. — H. HIEBSCH: *Kinderpsychologie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1961, S. 268.
RUBINSTEIN, S. L.: *Grundlagen der allgemeinen Psychologie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958, S. 481 und 496.

[2]) ERLEBACH, IHLEFELD, ZEHNER: *Psychologie für Lehrer und Erzieher.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 200f.

[3]) A. a. O., S. 291.

stufe Schüler finden, die durch ein schon sehr gut entwickeltes Abstraktionsvermögen und durch besondere Fähigkeiten im logischen Schließen auffallen. Genauso kennt aber wohl jeder Mathematiklehrer auch Schüler der mittleren oder höheren Klassen, denen Abstraktionsleistungen und logisches Schließen schwer fallen.

b) Der Übergang zum abstrakten, formalen Denken vollzieht sich nicht für alle Denkbereiche gleichzeitig. Es ist auch nicht so, daß die Kinder nach Erreichen dieser Stufe in der Denkentwicklung immer und auf allen Gebieten die gleiche Denkhaltung zeigen. Man kann vielmehr von einer Koexistenz unterschiedlicher Denkstile sprechen. Die jeweilige Denkhaltung hängt vom Inhalt des Denkens ab — oder genauer: vom Grade der Vertrautheit mit dem Inhalt. Dabei wird der Arithmetik von verschiedenen Psychologen eine besondere Bedeutung beigemessen. Die Schüler gelangen auf diesem Gebiet zuerst zu abstrakten Formen des Denkens.[1])

c) Die Abhängigkeit der jeweiligen Denkhaltung vom Inhalt des Denkens ist auch noch in einer etwas anderen Hinsicht zu verstehen. So haben beispielsweise Untersuchungen von Reinhard Gullasch[2]) mit Schülern der Klassenstufe 7 gezeigt, daß bei steigendem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ein Rückfall auf niedrigere Niveaustufen des Denkens eintreten kann.
Auch Erlebach, Ihlefeld und Zehner weisen auf diese Erscheinung hin: „Je nach dem Schwierigkeitsgrad des Denkinhalts in aktuellen Situationen können beim gleichen Schüler verschiedene Niveaustufen des Denkens nebeneinander auftreten.“[3])

d) Eine weitere Besonderheit in der Denkentwicklung besteht darin, daß der ständige Umgang mit zunächst als schwierig empfundenen abstrakten Begriffen diese allmählich — psychologisch gesehen — immer vertrauter und „greifbarer“ erscheinen läßt. So sind zum Beispiel die natürlichen Zahlen abstrakte Gebilde (als Klassen jeweils gleichmächtiger endlicher Mengen — man spricht zuweilen direkt von Abstraktionsklassen) und das Operieren mit ihnen fällt Vorschulkindern oder Schulanfängern im allgemeinen zunächst schwerer als das Umgehen mit konkreten Mengen. In der Mittel- und Oberstufe kann es dagegen eine wirkliche Erleichterung für die Schüler bedeuten, wenn etwa in dem Term $a \cdot (b + c)$ für die Variablen $a$, $b$ und $c$ natürliche Zahlen eingesetzt werden. Die „Schwierigkeit“ abstrakter Begriffe und Operationen ist also zum Teil durch ihre anfängliche Fremdheit bedingt. Durch den Unterricht wird der Bereich des Bekannten und Vertrauten auch auf höhere Abstraktionsstufen ausgedehnt, so daß die Schüler dann ohne besondere Schwierigkeiten mit immer abstrakteren Begriffen operieren können.

e) Verschiedene Beobachtungen im Mathematikunterricht weisen darauf hin, daß auch *nach* dem Erreichen einer gewissen abstrakt-logischen Stufe in der Denkentwicklung bestimmte Schlußweisen den Schülern *größere* Schwierigkeiten be-

[1]) Siehe z. B. Rubinstein, S. L.: *Grundlagen der allgemeinen Psychologie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958, S. 500.

[2]) Gullasch, R.: *Analyse und Synthese bei individuellen Unterschieden in den mathematischen Fähigkeiten — untersucht an Schülern 7. Klassen.* Dissertation, Berlin 1967.

[3]) Erlebach, Ihlefeld, Zehner: A. a. O., S. 291.

reiten als andere und daß manche logischen Schlüsse von vielen Schülern zunächst kaum vollzogen werden können, obwohl diese Schüler mit dem vorliegenden Denkmaterial durchaus vertraut sind. So kann man beispielsweise manchmal feststellen, daß die Anwendung eines (richtig verstandenen!) allgemeinen Satzes auf einen speziellen Fall (vgl. etwa Beispiel 35, ↗ 29) Schülern der Klassenstufe 7 kaum nennenswerte Schwierigkeiten bereitet, während ihnen andererseits die zum Beweis einer Implikation notwendige Schlußweise gänzlich fremd ist. Das heißt mit anderen Worten: Es ist durchaus möglich, daß Schüler das Schließen aus einer Allaussage, das Schließen aus einer Implikation (also die Abtrennungsregel), die Termeinsetzung und eventuell weitere Schlußweisen gut beherrschen und ohne große Schwierigkeiten vollziehen, während ihnen gleichzeitig *andere* Schlußweisen (z. B. das Schließen auf eine Implikation) noch ganz unbekannt und nicht vollziehbar sein können. Hinzu kommt, daß Schüler nicht selten *richtige* Schlußweisen, die sie relativ häufig anwenden, nicht deutlich genug von ähnlich aussehenden, aber *falschen* Schlußweisen unterscheiden können und dadurch zuweilen Fehler begehen. So wird zum Beispiel neben dem richtigen Kontrapositionsschluß „Wenn $B$ aus $A$ folgt und $B$ nicht gilt, dann gilt auch $A$ nicht" — kurz: $[(A \to B) \wedge \sim B] \to \sim A$ — zuweilen auch nach dem Schema „Wenn $B$ aus $A$ folgt und $A$ nicht gilt, dann gilt auch $B$ nicht" — kurz: $[(A \to B) \wedge \sim A] \to \sim B$ — geschlossen, das zwar eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Kontrapositionsschluß besitzt, aber dennoch keine logisch zulässige Schlußweise darstellt.
Man kann also nicht erwarten, daß die Schüler mit dem Erreichen der abstrakt-logischen Stufe in der Denkentwicklung automatisch auch die Logik bewußt — oder zumindest intuitiv — beherrschen. Es ist vielmehr so, daß die Schüler sich *schrittweise* die verschiedenen logischen Schlußweisen *aneignen*, wobei dem Unterricht als dem Hauptfeld der Entwicklung des logischen Denkens erstrangige Bedeutung zukommt.

f) Es ist eine bekannte Tatsache, daß frühere psychologische Untersuchungen zur Denkentwicklung häufig nur feststellen konnten, wie diese sich unter den jeweils gegebenen gesellschaftlichen Bedingungen vollzieht. Dabei blieb natürlich die Frage offen, wie und in welchem Maße durch eine Veränderung dieser Bedingungen — insbesondere durch eine Veränderung des Schulunterrichts als eines für die Denkentwicklung zweifellos sehr wesentlichen Faktors — die Entwicklung des Denkens der Schüler positiv beeinflußt werden kann. Seit einigen Jahren werden gerade in dieser Richtung in vielen Ländern Versuche unternommen, die sehr häufig auch mit den Bemühungen um eine Modernisierung des Mathematikunterrichts verknüpft sind. Unsere eigenen Erfahrungen aus derartigen Versuchen (Erprobung unseres Mathematiklehrplans) besagen, daß Schüler merklich früher zu abstrakt-logischen Gedankengängen und zu bestimmten Schlußweisen fähig sein können, als bisher im allgemeinen angenommen wurde. So sind zum Beispiel im Schuljahr 1967/68 in den am Versuch beteiligten Klassen der Klassenstufe 4 einfache Sätze der Teilbarkeitslehre mit den Schülern erarbeitet, allgemein formuliert und auch allgemein — unter Benutzung von Variablen — *bewiesen* worden. Dabei haben Schüler zum Teil die als Hilfe gedachten Beweise für *spezielle Zahlenbeispiele* von sich aus über-

sprungen und sind sofort zur Formulierung der einzelnen Beweisschritte mit Hilfe von Variablen übergegangen.
Selbstverständlich erfolgte die Beweisführung unter Anleitung des Lehrers, die sehr lebendige und verständnisvolle Mitarbeit der Schüler zeigte aber, daß sie keineswegs prinzipiell überfordert waren — im Gegensatz zu früheren Auffassungen, nach denen man allgemeine Beweisführungen im Unterricht erst ab Klasse 6 für sinnvoll hielt. Solche Schülerleistungen sind möglich, wenn die Gestaltung des Mathematikunterrichts vom ersten Schuljahr an sowohl inhaltlich als auch psychologisch und methodisch gut durchdacht durchgeführt wird. Es würde hier allerdings zu weit führen, diese gesamte Vorarbeit näher erläutern zu wollen, zu der das gründliche Vertrautmachen der Schüler mit der Definition der Teilbarkeitsrelation im Bereich der natürlichen Zahlen ebenso gehört wie die Entwicklung des nötigen Verständnisses für Variable und einer hinreichenden Sicherheit im Umgang mit ihnen, die Gewöhnung der Schüler an das Begründen von Aussagen, an einfache Formen des Schließens usw.

Die Konsequenzen, die sich aus den Darlegungen zum entwicklungspsychologischen Aspekt für das Führen von Beweisen im Mathematikunterricht ergeben, sind folgende:
Schon ab Klasse 1 sind von den Schülern einfache Begründungen und Schlußfolgerungen zu verlangen, sofern diese sich auf anschaulich faßbare oder den Schülern inhaltlich gut vertraute Sachverhalte beziehen. Dabei müssen die Anforderungen im Laufe der Zeit so erhöht werden, daß am Beginn von Klasse 6 die Schüler in das mathematische Beweisen eingeführt werden können.

## 2.2. Zum denkpsychologischen Aspekt

Aus der Vielfalt der Bedingungen, die für eine erfolgreiche Denktätigkeit von Bedeutung sind, sollen hier nur einige hervorgehoben werden, die für die Bewältigung mathematischer Beweisaufgaben durch Schüler besonders wesentlich sein dürften.
Eine wichtige Voraussetzung für das Ingangkommen eines Denkprozesses ist das Vorhandensein und Bewußtwerden einer Problemsituation. Rubinstein formuliert das wie folgt: „Der Mensch fängt an zu denken, wenn er das Bedürfnis hat, etwas zu verstehen. Das Denken beginnt normalerweise mit einem Problem oder mit einer Frage, mit einer Verwunderung oder einer Verlegenheit, mit einem Widerspruch. Diese Problemsituation führt dazu, daß ein Denkprozeß eingeleitet wird.“[1])
Das bedeutet: die Frage nach dem Beweis einer mathematischen Aussage ist für die Schüler anfangs nur sinnvoll, wenn sie den Inhalt der Aussage nicht als von vornherein selbstverständlich ansehen. Erst auf einer späteren Stufe ist es möglich, die Problemsituation nicht aus der Aussage selbst zu entwickeln, sondern aus der Frage nach dem logischen Zusammenhang der vorliegenden Aussage mit anderen Aussagen.

[1]) Rubinstein, S. L.: *Grundlagen der allgemeinen Psychologie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1958, S. 434–435.

Das Wecken des Beweisbedürfnisses für einen bestimmten Satz kann aber nicht nur dann schwierig werden, wenn die betreffende Behauptung einen den Schülern evident erscheinenden Sachverhalt ausdrückt. Da man vor dem Beweisen eines Satzes diesen im allgemeinen erst als Vermutung im Unterricht gewinnen muß, besteht immer die Gefahr, daß die dazu angestellten Überlegungen und Handlungen auf die Schüler schon so überzeugend wirken, daß sie dadurch keine Notwendigkeit mehr für einen Beweis des neuen Satzes sehen. Besonders groß ist diese Gefahr bei Schülern, die noch sehr an induktive Formen der Erkenntnisgewinnung gewöhnt sind und die wenig zwischen Plausibilitätsbetrachtungen einerseits und exaktem mathematischem Schließen andererseits unterscheiden können.
Gerade bei der *Einführung* der Schüler in das Beweisen mathematischer Aussagen ist deshalb darauf zu achten, daß den Schülern die Unzulänglichkeit induktiver Methoden oder die von Plausibilitätsbetrachtungen für die Erkenntnissicherung in der Mathematik bewußt wird und daß sie lernen, zwischen Vermutungen und gesicherten Aussagen zu unterscheiden.
Ist bei den Schülern eine klare Erkenntnis der Problemsituation erreicht, so können sie sich der Lösungssuche — hier also der Suche nach einem Beweis — zuwenden. Dabei haben sie mehr oder weniger große Schwierigkeiten zu überwinden, die einerseits in der Aufgabe selbst liegen, andererseits aber auch von der Disponibilität des bisher erworbenen Wissens und von seinem Abstraktionsgrad — von seiner mehr oder weniger starken Bindung an unwesentliche Gegebenheiten — abhängen können. Auf den letztgenannten Umstand hat bereits K. Duncker aufmerksam gemacht.[1])

Am Beispiel des Axioms von Pasch zeigt er, wie eine zu stark anschauungsgebundene Vorstellung vom Inhalt dieses Axioms zu einem Hindernis werden kann, wenn die Benutzbarkeit des Axioms für eine bestimmte Beweisführung erkannt werden soll.

Obwohl das Axiom von Pasch in unserem Geometrieunterricht nicht explizit auftritt, wollen wir die darauf beruhenden Ausführungen von Duncker wegen ihrer prinzipiellen Bedeutung etwas näher betrachten.
Man kann das Axiom von Pasch wie folgt formulieren:

> In einer Ebene seien gegeben ein Dreieck $ABC$ und eine Gerade $g$, die durch keinen der Punkte $A$, $B$ oder $C$ geht. Dann gilt: wenn $g$ eine Seite des Dreiecks $ABC$ schneidet, dann schneidet sie auch noch genau eine weitere Seite des Dreiecks.

Der Inhalt dieses Axioms wird durch Bild 4 veranschaulicht.
K. Duncker betrachtet nun folgende Aufgabe:

> Gegeben seien in einer Ebene zwei verschiedene, nicht parallele Geraden $g$ und $h$, deren Schnittpunkt $A$ sein möge, und auf $h$ zwei weitere Punkte $P_1$ und $P_2$, wobei $A$ zwischen $P_1$ und $P_2$ liegen soll. Es ist zu beweisen, daß jeder Punkt $P$, der weder auf $g$ noch auf $h$ liegt, entweder mit $P_1$ oder mit $P_2$ durch eine Strecke verbunden werden kann, die die Gerade $g$ nicht schneidet (Bild 5).

[1]) Duncker, K.: *Zur Psychologie des produktiven Denkens.* Springer Verlag, Berlin 1935, S. 125ff.

Der verlangte Beweis läßt sich mit Hilfe des Axioms von PASCH recht einfach führen: Durch die Punkte $P$, $P_1$, $P_2$ ist stets ein Dreieck gegeben ($P$ soll ja nicht auf $h$ liegen!), dessen eine Seite (nämlich $P_1P_2$) durch die Gerade $g$ geschnitten wird. Dabei geht $g$ durch keinen Eckpunkt des Dreiecks ($A$ liegt zwischen $P_1$

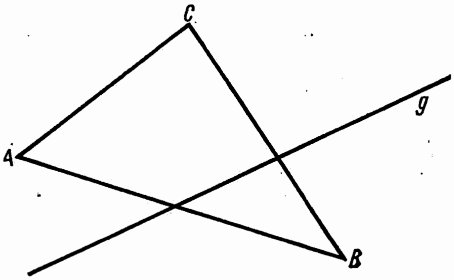



Bild 4

und $P_2$ und $P$ liegt nicht auf $g$). Also schneidet $g$ nach dem Axiom von PASCH noch genau eine weitere Seite des Dreiecks. Das heißt aber, daß entweder $\overline{PP_1}$ oder $\overline{PP_2}$ *nicht* von $g$ geschnitten wird, w. z. b. w.
DUNCKER macht darauf aufmerksam, daß der verlangte Beweis relativ leicht zu bewältigen ist, wenn man *schon weiß*, daß das Axiom von PASCH herangezogen werden muß.

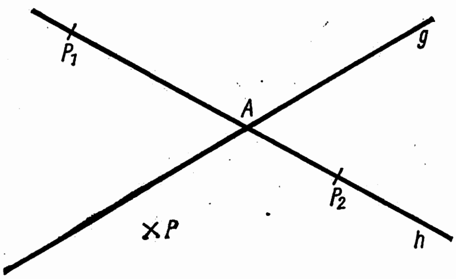



Bild 5

Ist das aber zunächst *nicht* bekannt, dann stellt die Aufgabe doch einige Anforderungen an das Denken. Das liegt daran, daß die anschauliche Repräsentation und Auffassungsweise des Axioms von PASCH einerseits und der Beweisaufgabe andererseits sich in einigen Punkten deutlich unterscheiden, so daß es keineswegs einfach ist, in den anschaulichen Gegebenheiten der Beweisaufgabe die des Axioms von PASCH wiederzuentdecken bzw. die eine Auffassungsweise in die andere überzuführen. Während nämlich durch die Formulierung des Axioms von PASCH primär ein Dreieck, das von einer Geraden durchquert wird, als anschauliche Gegebenheit hervortritt, werden die Bedingungen der Aufgabe vor allem durch *zwei einander* *schneidende* Geraden anschaulich repräsentiert, zu denen noch ein Punkt außerhalb der beiden Geraden hinzukommt. Erst wenn man auch die beiden Verbindungsstrecken $\overline{PP_1}$ und $\overline{PP_2}$ einzeichnet (Bild 6), nähert man sich den anschaulichen Gegebenheiten des Axioms von PASCH. Aber auch jetzt kann es auf Grund der Entstehung der Figur noch psychologische Barrieren für die Anwendung des Axioms von PASCH geben: Die Strecke $\overline{P_1P_2}$ hat mehr den Charakter eines *primär* existierenden Elements (als Teil der Geraden $h$), während $\overline{PP_1}$ und $\overline{PP_2}$ als nachträglich eingezeichnete Verbindungsstrecken mehr *sekundärer* Natur sind. Um auf das Axiom von PASCH zurückgreifen zu können, müssen alle drei Strecken *gleichrangig* als Seiten des Dreiecks $PP_1P_2$ gesehen werden. DUNCKER spricht in diesem Zusammenhang davon, daß zur Lösung der Aufgabe ein *Umstrukturieren* der anschaulichen Gegebenheiten notwendig ist. Abschließend zu dem hier wiedergegebenen Beispiel von DUNCKER wollen wir uns aber klar machen, daß die geschilderten Schwierigkeiten der Beweisaufgabe um so geringer werden dürften, je weniger ein Bearbeiter der Aufgabe an eine bestimmte Formulierung und eine daran geknüpfte feste anschauliche Deutung des Axioms von PASCH gebunden ist, und je mehr er auch in der Lage ist, die Bedingungen der Aufgabe in unterschiedlicher Weise auszudrücken und zu interpretieren. Er wird dann leichter die Berührungspunkte der Aufgabe mit dem Axiom von PASCH erkennen. In *beiden* Fällen handelt es sich ja doch um *Anordnungsbeziehungen* (ausgedrückt durch „liegt zwischen“) von Punkten auf verschiedenen Geraden.

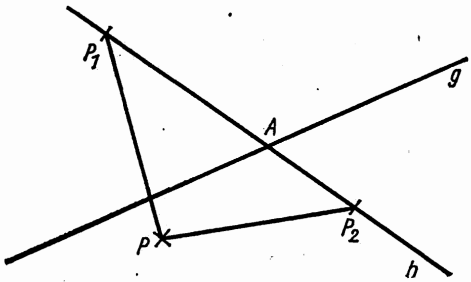


Bild 6

In dem Axiom von PASCH wird festgestellt:

> Liegt unter den schon erwähnten Voraussetzungen ein Punkt von $g$ etwa zwischen $A$ und $C$ (↗ 61, Bild 4), dann liegt auch ein Punkt von $g$ entweder zwischen $A$ und $B$ oder zwischen $B$ und $C$.[1]

Die Formulierung der Aufgabe besagt:

> Der Punkt $A$ von $g$ wird als zwischen $P_1$ und $P_2$ liegend vorausgesetzt (↗ 61, Bild 5), und nach der zu beweisenden Behauptung — in etwas anderer Sprechweise — liegt ein Punkt von $g$ entweder zwischen $P$ und $P_1$ oder zwischen $P$ und $P_2$.

[1]) Es sei bemerkt, daß die Redeweise „$P$ liegt zwischen $A$ und $B$“ stets mit zum Ausdruck bringt, daß $P$, $A$ und $B$ auf ein und derselben Geraden liegen.

Wie man sieht, ist zwischen diesen beiden Formulierungen kaum noch ein Unterschied erkennbar.

Das Problem der mehr oder weniger starken Gebundenheit des Denkmaterials an feste Formulierungen oder weitgehend starre Vorstellungen wird auch in dem folgenden Beispiel deutlich, das aus der Arbeit eines mathematischen Zirkels von Schülern der Klassenstufe 8 stammt.

Gegeben sei die in Bild 7 dargestellte Figur, die folgende Voraussetzungen erfüllen soll:

(1) $\overline{AD} \cong \overline{AB}$; (2) $\overline{AD} \cong \overline{BD}$; (3) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

Es ist zu beweisen, daß die Summe der Winkel $ADB$ und $ACB$ genau 90° beträgt.

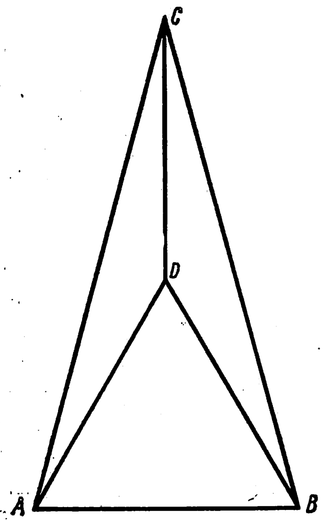


Bild 7

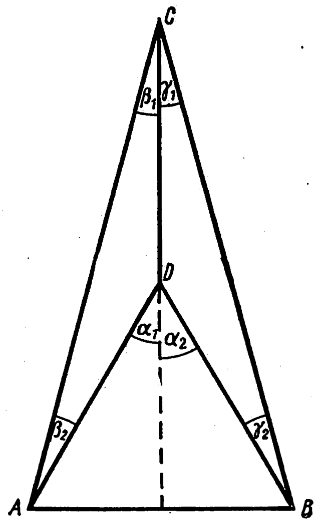


Bild 8

Die Teilnehmer der Arbeitsgemeinschaft bewältigten diese Aufgabe mit unterschiedlichem Erfolg. Die meisten entdeckten richtig, daß $\sphericalangle\ ADB = 60°$ gilt, da das Dreieck $ABD$ nach den gegebenen Voraussetzungen gleichseitig ist. Sofern die Schüler weitere Schritte im Beweis durchführten, gingen sie alle im wesentlichen folgenden Weg (Bild 8):

Durch die Verlängerung von $CD$ über $D$ hinaus wird der Winkel $ADB$ in die beiden Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zerlegt. Es gilt $\alpha_1 + \alpha_2 = 60°$.

Da die Dreiecke $ADC$ und $CDB$ nach den gegebenen Voraussetzungen gleichschenklig sind, gilt $\beta_1 = \beta_2$ und $\gamma_1 = \gamma_2$.

Nach dem Satz über die Außenwinkel am Dreieck ergibt sich $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 = 2\,\beta_1$ und $\alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 = 2\,\gamma_1$.

Somit folgt aus $\alpha_1 + \alpha_2 = 60°$ die Gleichung $2\,\beta_1 + 2\,\gamma_1 = 60°$ und daraus $\beta_1 + \gamma_1 = 30°$.

Daraus ergibt sich, daß die Summe der Winkel $ADB$ und $ACB$ genau 90° beträgt, w. z. b. w.

Kein Schüler kam jedoch auf den Gedanken, den Beweis nach der Feststellung „$\sphericalangle ADB = 60°$“ kürzer wie folgt weiter zu führen:
Nach den gegebenen Voraussetzungen liegen die Punkte $A$, $B$ und $C$ auf ein und demselben Kreis mit $D$ als Mittelpunkt. Die Winkel $ACB$ bzw. $ADB$ sind Peripherie- bzw. Zentriwinkel über dem gleichen Bogen $\widehat{AB}$. Also ist $\sphericalangle ACB = 30°$ (halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel), und die Summe der beiden Winkel beträgt somit 90°, w. z. b. w.
Der hier benutzte Satz über Peripherie- und Zentriwinkel war allen an der Arbeitsgemeinschaft teilnehmenden Schülern aus dem Mathematikunterricht bekannt. Trotzdem wurde er von ihnen nicht herangezogen. Die Ursache dafür dürfte mit großer Wahrscheinlichkeit darin zu suchen sein, daß in der gegebenen Figur der Kreis um $D$ durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ nicht eingezeichnet war und daß der Begriff „Kreis“ in der Formulierung der Aufgabe nicht explizit auftrat, sondern daß die Bedingung „$A$, $B$ und $C$ liegen auf ein und demselben Kreis um $D$“ durch die Angabe einiger Streckenkongruenzen gegeben wurde. Diese an sich unwesentlichen Abweichungen der Figur und der sprachlichen Formulierungen von der in unseren Mathematiklehrbüchern üblichen Formulierung und Veranschaulichung zum Satz über Peripherie- und Zentriwinkel reichten aus, um ihn für die Lösung der vorgelegten Aufgabe nicht ins Auge zu fassen.
Die Schlußfolgerungen, die sich für die Unterrichtsführung ergeben, sind ziemlich klar und seit längerem bekannt: Der Mathematiklehrer muß bestrebt sein, bei der Vermittlung von mathematischen Kenntnissen (Begriffen, Sätzen usw.) einseitige Fixierungen bestimmter Formulierungen, bestimmter Vorstellungen usw. zu verhindern. Das beginnt mit dem Vermeiden von „Standardfiguren“ in der Geometrie, mit dem Wechsel in der Wahl von Variablen in arithmetischen Zusammenhängen, muß sich aber auch auf unterschiedliche anschauliche Deutbarkeit mathematischer Sätze — soweit diese möglich ist — sowie auf deren unterschiedliche Formulierung erstrecken. Diese Forderungen sind natürlich nicht nur im Hinblick auf Beweisaufgaben von Bedeutung, sondern auch für die Lösung anderer Arten von mathematischen Aufgaben.

*Zusammenfassend läßt sich sagen:*

Das Verständnis mathematischer Beweisführungen sowie die Fähigkeit zu derartigen Beweisführungen hängen unter anderem ab vom Vorhandensein und Bewußtwerden einer echten Problemsituation, von der Einsicht in die Unzulänglichkeit von Betrachtungen, die sich in erster Linie auf die Sinneswahrnehmung stützen oder die nur induktive Schlußweisen benutzen, sowie von der Verfügbarkeit und Flexibilität des erworbenen mathematischen Wissens.

## 2.3. Zum lernpsychologischen Aspekt

Als letzten, aber keineswegs unwesentlichen Punkt unserer psychologischen Vorüberlegungen wollen wir die mit dem Führen von Beweisen im Mathematikunterricht zusammenhängende lernpsychologische Problematik etwas näher betrachten. Der *lernpsychologische* Aspekt spielt insofern eine Rolle, als die Behandlung von

Beweisen im Mathematikunterricht das Ziel haben muß, die Schüler das Führen von Beweisen zu lehren. Es geht im Unterricht nicht in erster Linie darum, daß die Schüler einzelne, bestimmte Beweise lernen, sondern sie sollen das *Beweisen* lernen. Das können sie allerdings nur, indem sie sich mit einzelnen, bestimmten Beweisen befassen. Hier erhebt sich eine Frage, die in der Psychologie als Transfer-Problem in vielen Zusammenhängen auftritt: Kann man überhaupt erwarten, daß die Schüler durch die Beschäftigung mit einzelnen Beweisen das Beweisen lernen? Führt die Beschäftigung mit einzelnen Beweisen dazu, daß die Schüler mit der Zeit immer besser in der Lage sind, auch selbständig neue Beweisaufgaben lösen zu können?

Die Psychologie gibt auf diese Frage eine für unser Problem sehr bedeutsame Antwort. Es konnte nachgewiesen werden, daß dem *Sinnerfassen*, dem *Verstehen* des Stoffs für das Lernen große Bedeutung zukommt.[1]) Personen, die das Lösen bestimmter Aufgaben inhaltlich *verstanden* haben, bewältigen neue, strukturell ähnliche Aufgaben wesentlich besser als solche Personen, die die Aufgabenlösungen nur auswendig lernen.

Für uns heißt das, daß wir vor allem dann einen zufriedenstellenden Lerneffekt bei den Schülern erwarten können, wenn sie die Beweise, mit denen sie im Mathematikunterricht in Berührung kommen, wirklich verstehen. Darüber hinaus ist aber zu berücksichtigen, daß auch noch andere Bedingungen für das Zustandekommen eines Lernerfolgs von Bedeutung sind.

Insbesondere muß ein ausreichendes Maß an aktiver Hinwendung der Schüler zum Lerngegenstand vorhanden sein. Dieser Punkt führt uns auf eine andere zentrale Frage der Lernpsychologie, auf das Motivationsproblem. Wir wollen dazu keine ins Detail gehenden Überlegungen anstellen, sondern nur festhalten: Man kann bei den Schülern nur dann einen Lernerfolg erwarten, wenn es gelingt, die notwendigen Triebkräfte in ihnen hervorzurufen, die zu einer aktiven Auseinandersetzung der Schüler mit Beweisen (und mit dem Beweisen) führen. Dabei ist es nicht gleichgültig, welche Motive in erster Linie wirksam werden — Interesse an der Sache, Freude am Nachdenken, am Knobeln, Streben nach guten Zensuren, Angst vor schlechten Zensuren o. a. — doch soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden, da es uns zu weit vom Thema abführen würde. Man müßte dabei z. B. bedenken, daß das Streben nach guten Zensuren wiederum sehr unterschiedlich motiviert werden kann usw.

Als Ergebnis sei also zunächst festgestellt:

Die Entwicklung der Fähigkeit, mathematische Beweise führen zu können, ist nur durch *einsichtiges* Lernen an Hand spezieller Beweise möglich. Es ist dagegen wenig erfolgversprechend, einzelne Beweise von Schülern auswendig lernen zu lassen, weil damit das nötige Sinnverständnis nicht garantiert werden kann, das zum Erlernen des Beweisens erforderlich ist.

Mit diesen Feststellungen ist natürlich noch nicht die Frage beantwortet, *wie* einsichtiges Lernen bei den Schülern erreicht werden kann. Man findet in der psychologischen Literatur verschiedene Ansätze zur Klärung dieses Problems Für den

[1]) Vgl. Erlebach, Ihlefeld, Zehner: A. a. O., S. 127ff.

Unterricht dürften dabei vor allem jene Gedanken recht fruchtbar sein, von denen Galperin und seine Mitarbeiter ausgehen.[1])
Sie stützen sich auf die bekannte Tatsache, daß Fähigkeiten einerseits eine Voraussetzung für bestimmte Tätigkeiten darstellen, daß sie andererseits aber auch durch diese Tätigkeiten entwickelt werden. Galperin orientiert seine Untersuchungen an der Frage, *welche Tätigkeiten* (welche Handlungen) ein Lernender in *welcher Reihenfolge* vollziehen muß, um bestimmte Begriffe zu bilden, um bestimmte Operationen zu beherrschen oder bestimmte Fähigkeiten zu erwerben. Dabei unterscheidet er verschiedene *Stufen*:[2])

- *Materielle Handlungen* (Umgehen mit konkreten Gegenständen) als Ursprung jedes geistigen Prozesses;
- sogenannte *materialisierte Handlungen* (Umgehen nicht mit konkreten Objekten, sondern mit materiellen *Stellvertretern* oder auch *Zeichen* für die Objekte — mit Abbildungen, Skizzen, Modellen, Beschreibungen, Namen);
- *sprachliche Handlungen* (als Widerspiegelung materieller und materialisierter Handlungen mit dem Ziel der Mitteilung an andere);
- *Handlungen mit Hilfe der „äußeren Sprache für sich“* (wobei das Sprechen nicht mehr primär der Mitteilung dient, sondern als Mittel des Denkens erscheint, als Verfahren, an der jeweiligen Aufgabe gedanklich zu arbeiten);
- *innere Handlungen* (auf der Basis einer „inneren Sprache“, die im Vergleich zur äußeren Sprache eine verkürzte, fragmentarische Form aufweist und im allgemeinen nicht mehr selbständiger Gegenstand des Bewußtseins ist, so daß sich scheinbar ein „reines Denken“ — ohne sprachliche Form — vollzieht).

Galperin weist in diesem Zusammenhang auf folgende Umstände hin:

1. Beim Lösen von Aufgaben kann die Gesamthandlung aus Elementen *unterschiedlicher* Niveaustufen aufgebaut sein — je nachdem, in welchem Grad die einzelnen Teilhandlungen vom Lösenden bereits beherrscht werden, wie weit sie schon automatisiert sind.
2. Mit der materiellen oder materialisierten Form der Handlung (als Grundlage für höhere Stufen) kann nur dann das angestrebte Ziel im Lernprozeß erreicht werden, wenn die Handlung einerseits hinreichend in einzelne, leicht zu verfolgende Einzelschritte *aufgegliedert* wird, und wenn sie andererseits genügend *verallgemeinert* — also von speziellen Besonderheiten der jeweiligen Aufgabe abgehoben — erscheint.
3. Jede zielgerichtete menschliche Handlung stellt eine Einheit von sogenannter *Arbeitshandlung* (auf die Lösung der Aufgabe gerichtet) und *Kontrollhandlung* (auf die Überprüfung einzelner Schritte wie auch der gesamten Arbeitshandlung gerichtet) dar. Auch die Kontrollhandlung durchläuft verschiedene Stufen, aber nicht unbedingt synchron mit der Arbeitshandlung. Sie kann bereits auf dem Niveau einer „inneren Handlung“ ablaufen, während die Arbeitshandlung sich noch auf der materiellen Ebene oder in der sogenannten „materialisierten Form“ vollzieht.

[1]) Vgl. z. B.: a) *Probleme der Lerntheorie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1966.
b) *Untersuchungen des Denkens in der sowjetischen Psychologie.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967.
[2]) Vgl.: *Probleme der Lerntheorie.* A. a. O., S. 36ff.

Leider gibt es bisher keine speziellen empirischen Untersuchungen zu der Frage, wie das Lernen des Beweisens unter Berücksichtigung der eben skizzierten Grundauffassungen GALPERINS im Mathematikunterricht zu organisieren ist. Einige Schlußfolgerungen lassen sich aber doch (deduktiv) gewinnen:

a) Zunächst dürfte klar sein, daß die Stufe der *materiellen* Handlungen für das Lernen des Beweisens nur *mittelbar* von Bedeutung ist. Sie spielt zwar eine wichtige Rolle beim Vertrautwerden der Schüler mit gewissen mathematischen Begriffen und Operationen, die ihrerseits in Beweisführungen auftreten können, das Beweisen selbst vollzieht sich aber nicht in der materiellen Ebene. Berücksichtigt man die von uns gegebene Definition des Begriffs „Beweis" (↗ 27 f.), so wäre Beweisen im Sinne Galperins als eine Form *materialisierter Handlungen* aufzufassen; denn Beweisen bedeutet nach dieser Definition *Umformen von Ausdrücken* (Zeichenreihen) *nach gewissen Regeln* (den Schlußregeln). Es ist aber zu bedenken, daß durch die erwähnte Definition die tatsächliche Praxis des Beweisens nicht ganz erfaßt wird. Im Unterricht erscheinen Beweisführungen ja nicht allein als Umformungen von Zeichenreihen, sondern im allgemeinen als relativ komplexe Tätigkeiten, in denen neben dem Operieren mit Zeichenreihen (Formeln u. ä.) und evtl. Arbeiten an Skizzen auch *sprachliche Handlungen* (z. B. Umformulieren von Bedingungen u. ä.) und sogenannte *innere Handlungen* (z. B. beim Schließen) integriert sein können. Beweisen kann sich also mit Ausnahme der materiellen Ebene auf allen Handlungsstufen vollziehen, wobei es im allgemeinen so sein wird, daß bei einer speziellen Beweisführung gewisse Elemente (Schritte) als *materialisierte* Handlungen, andere Elemente als *sprachliche* und wieder andere als *innere* Handlungen ablaufen werden.

b) Es ist offensichtlich, daß das Verständnis von Beweisführungen durch Schüler bzw. ihre Fähigkeit zu selbständigem Beweisen unter anderem davon abhängt, wie weit sie die auftretenden Handlungen auch auf der entsprechenden Stufe *vollziehen* können. Es ist Aufgabe des Lehrers, einerseits die entsprechenden Anforderungen den vorhandenen Fähigkeiten der Schüler *anzupassen*, andererseits aber auch zielstrebig an der *Weiterentwicklung* dieser Fähigkeiten zu arbeiten. Das bedeutet:
   - Entwicklung der Sicherheit im Umgang mit formalisierten Ausdrücken;
   - allmähliche Reduzierung der Anzahl von Einzelschritten bei Umformungen und anderen Operationen im Sinne einer Verkürzung und Automatisierung der Handlung[1]);
   - Schulung des sprachlichen Ausdrucksvermögens wie auch der Fähigkeit, an sprachlichen Formulierungen zu arbeiten;
   - Steigerung des Beherrschungsgrades verschiedener — insbesondere auch logischer — Operationen bis auf das Niveau innerer Handlungen und ähnliches.

   Das Erreichen dieser einzelnen Zielsetzungen ist wiederum nur möglich, wenn entsprechende *Tätigkeiten* im Unterricht organisiert werden, wenn man den Schülern also entsprechende Aufgaben dazu stellt.

c) Von besonderer Bedeutung für die Entwicklung von Fähigkeiten auf dem Gebiet des Beweisens dürfte schließlich der Gedanke sein, daß komplexe Handlungen,

[1]) Vgl.: *Probleme der Lerntheorie.* A. a. O., S. 40f.

wie es Beweisführungen im allgemeinen sind, zunächst in kleinere, für die Schüler leicht zu verfolgende Einzelschritte aufgegliedert werden — natürlich ohne dabei die Aufgabe als Ganzes aus dem Auge zu verlieren. Erst wenn die Schüler bestimmte Teilschritte sicher beherrschen, können in der Gesamthandlung *Zusammenfassungen* solcher Teilschritte und damit *Verkürzungen* im Handlungsablauf vorgenommen werden. (Es sei hier vermerkt, daß die Beachtung dieses allgemeinen Prinzips bei den Schulversuchen zur Entwicklung neuer Mathematiklehrpläne in den Jahren 1964 bis 1969 mit zur Erreichung von sehr guten Erfolgen beigetragen hat.)
Wir wollen diesen Gedanken jedoch nicht falsch verstehen: Die Aufgliederung von Beweisführungen in Einzelschritte, von der hier die Rede ist, wird im allgemeinen nicht mit jener analysierten Form von Beweisen identisch sein, wie sie in den Beispielen des Abschnitts 1.3.5. (↗ 47ff.) dargestellt worden ist. Dort sind nämlich Beweisschritte, die *psychologisch* von Schülern wohl als nicht zerlegbar angesehen werden, aus rein *logischen* Gründen (Zurückführung auf bestimmte Schlußregeln) zum Teil noch stark untergliedert worden. (Man vergleiche nur noch einmal die „normalen" Beweise mit den „analysierten"!)
Im Unterricht würde man mit einer derartigen Aufgliederung, die die psychologischen Aspekte außer acht läßt, den Schülern das Lernen des Beweisens nicht erleichtern, sondern im Gegenteil nahezu unmöglich machen. Wenn also von einer Aufgliederung des Beweisens in Einzelschritte gesprochen wird, so ist das im *psychologischen* Sinne zu verstehen.
Solche Einzelschritte können dann sein:

— Das Entwickeln einer Beweisfigur;
— das Notieren der speziellen Voraussetzungen;
— das Aufstellen eines „Beweisplans";
— das schriftliche Fixieren jedes einzelnen Beweisschrittes (im Rahmen der üblichen Gepflogenheiten, nicht in der oben erwähnten „analysierten Form");
— die explizite Angabe der Begründung bei gewissen Umformungen oder Teilschritten und ähnliches.

***Fassen wir die wichtigsten Ergebnisse unserer psychologischen Vorüberlegungen noch einmal kurz zusammen:***

Die Schüler können nur dann das Beweisen lernen, wenn sie die im Mathematikunterricht behandelten Beweise wirklich verstehen. Ein solches Verständnis kann aber nur erreicht werden, wenn einerseits eine aktive Hinwendung der Schüler zur jeweiligen Beweisaufgabe erzielt wird — wenn also durch eine gute Motivation genügend starke Triebkräfte für die Bewältigung der Aufgabe bei den Schülern geweckt werden und sie sich den Beweis durch aktive geistige Tätigkeit tatsächlich aneignen, nicht etwa nur memorieren — und wenn andererseits auch die nötigen intellektuellen Voraussetzungen (z. B. Fähigkeiten im logischen Schließen, Einsicht in die Unzulänglichkeit gewisser empirischer Verfahren für die mathematische Erkenntnissicherung, Fertigkeiten im Umformen mathematischer Ausdrücke, Verständnis mathematischer Begriffe) gegeben sind. Solange diese Vorbedingungen nicht erfüllt sind, kann auch durch eine Vielzahl von Beweisführungen im Unterricht kein befriedigender Lerneffekt erreicht werden.

# 3. Einige methodische Probleme des Beweisens im Unterricht

Nachdem wir uns in den vorangegangenen Kapiteln mit den wichtigsten mathematischen und psychologischen Grundlagen des Beweisens vertraut gemacht haben, wollen wir uns nun — ausgehend von den bereits gewonnenen Einsichten — mit einer Reihe methodischer Probleme befassen, vor die sich jeder Mathematiklehrer gestellt sieht, wenn er seine Schüler in das Beweisen mathematischer Aussagen einführen oder wenn er ihre Fähigkeiten im Beweisen weiterentwickeln will. In Anbetracht der Vielgestaltigkeit und der Fülle der Fragen, die dabei auftreten können, ist es uns hier nicht möglich, alle Probleme zu erfassen und zu beantworten. Wir werden uns deshalb von vornherein auf eine *Auswahl* beschränken, von der wir aber annehmen dürfen, daß sie zumindest die wichtigsten Fragestellungen erfaßt.

## 3.1. Besonderheiten der unterrichtlichen Behandlung von Beweisen

Unser erstes Ziel soll sein, einige Besonderheiten herauszuarbeiten, die das Beweisen im Unterricht im Vergleich zu der im Abschnitt 1.3.1. gegebenen Definition (↗ 27f.) oder auch im Vergleich zu der sonst in der Mathematik üblichen Praxis aufweist.

### 3.1.1. Inhaltliche Orientiertheit

Nach der eben erwähnten Definition ist Beweisen lediglich ein Umformen von gewissen Zeichenreihen (Ausdrücken) nach bestimmten Regeln, also eine ganz formale Angelegenheit. Wie wir uns schon früher überlegt haben, tritt dieser formale Charakter des Beweisens in der üblichen mathematischen Praxis jedoch nur stellenweise deutlich hervor. Im allgemeinen hat man bei Beweisführungen nicht nur die formale Struktur, sondern darüber hinaus eine ganz bestimmte inhaltliche Interpretation der vorkommenden Ausdrücke im Auge.
Das trifft insbesondere auch auf die Behandlung von Beweisen im *Unterricht* zu. Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, daß diese Praxis nicht als ein Mangel der Unterrichtsgestaltung aufzufassen ist. Die Orientierung am *Inhalt* stellt vielmehr gerade einen wesentlichen Faktor für das Verständnis der Beweise durch die Schüler dar. Trotzdem bleibt natürlich festzuhalten, daß diese inhaltliche Orientiertheit des Beweisens im Unterricht eine Besonderheit darstellt, die in der Definition des Begriffs „Beweis", wie wir sie im Abschnitt 1.3.1. kennengelernt haben, nicht enthalten ist.

### 3.1.2. Schließen ohne Angabe der Regeln

Eine andere Besonderheit, durch die das Beweisen im Mathematikunterricht gekennzeichnet ist, besteht darin, daß jene *Umformungsregeln*, von denen in der Definition des Begriffs „Beweis" die Rede ist — die Schlußregeln also — im allgemeinen beim Beweisen überhaupt nicht genannt und auch sonst nicht besonders betrachtet werden. Auch diese Besonderheit hat der Unterricht mit der in der Mathematik üblichen Praxis gemeinsam. Es fragt sich allerdings, ob hier nicht doch ein Mangel des Unterrichts vorliegt. Man verläßt sich im allgemeinen darauf, daß die Schüler das logische *Schließen* ganz von selbst und ohne besondere Belehrungen von vornherein richtig machen oder es zumindest doch ganz „nebenbei“ lernen werden. Verschiedene Untersuchungen, die von uns durchgeführt worden sind, haben aber gezeigt, daß manche Schlußweisen den Schülern auch in Klasse 10 noch Schwierigkeiten bereiten können, wenn man sie ihnen nie erläutert und bewußt gemacht hat. Vor allem wurde sichtbar, daß Schüler häufig nicht klar zwischen richtigen (zulässigen) Schlußweisen einerseits und fehlerhaften (unzulässigen) Schlüssen andererseits unterscheiden können, so lange man mit ihnen nicht darüber gesprochen hat. Dadurch kommt es zu Fehlern beim selbständigen Schließen bzw. zum Nichterkennen der Fehlerhaftigkeit von unzulässigen Schlußweisen anderer.

Es wäre allerdings aus psychologischen und auch anderen Gründen sicher abzulehnen, den Schülern im Zusammenhang mit der Einführung in das Beweisen einen Katalog von Schlußregeln zu geben (oder ihn mit ihnen zu erarbeiten) und dann bei allen Beweisschritten von den Schülern die Angabe der entsprechenden Regel (bzw. des entsprechenden logischen Satzes) zu verlangen. Das völlige Übergehen der Schlußregeln ist aber offenbar ebenfalls nicht zweckmäßig. Es wäre vielmehr wünschenswert, einerseits gewisse häufig benutzte Schlußregeln (z. B. die Abtrennungsregel, das Schließen auf eine Implikation, das Schließen auf eine Allaussage) den Schülern im Laufe des Unterrichts auch *bewußt* zu machen und sie andererseits auf die *Fehlerhaftigkeit* bestimmter Schlußweisen — z. B. beim Schließen nach dem Schema $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ oder nach dem Schema $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$ — aufmerksam zu machen. Wie und wann das am besten zu geschehen hat, bedarf allerdings noch einiger Untersuchungen.

Deshalb enthält unser gegenwärtiger Lehrplan auch nur wenig detaillierte Forderungen in dieser Beziehung. Explizit sind folgende Punkte in ihm ausgewiesen:

a) Bekanntmachen der Schüler mit dem indirekten Beweisverfahren (Klasse 8)[1]), dem ja im wesentlichen das Schließen auf eine Negation zugrunde liegt;

b) Orientierung der Schüler auf die Notwendigkeit vollständiger Fallunterscheidungen an geeigneten Beispielen ab Klassenstufe 9[2]), wobei im Grunde das Schließen aus einer Alternative berührt wird (ohne diesen Begriff direkt zu verwenden);

c) Einführung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion in Klasse 11[3]), bei dessen Erläuterung das Schließen auf eine Implikation sowie auf eine Konjunktion geklärt werden muß (allerdings wieder ohne Benutzung dieser Termini).

Es wäre somit eine Abweichung vom gegenwärtig gültigen Lehrplan, wollte man im Unterricht weitere Schlußregeln direkt zum Gegenstand der Betrachtungen machen oder gar formalisierte Darstellungen derselben einführen. Durchaus im Sinne unseres Lehrplans ist es jedoch, auch andere als die unter a) bis c) genannten Schlußweisen allmählich im Unterricht „sichtbar“ werden zu lassen, indem an Hand verschiedener Inhalte bestimmte gleichartige Formulierungen beim Schlie-

[1]) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 11.
[2]) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 9 und 10.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 10.
[3]) *Lehrplan für Mathematik — Erweiterte Oberschule — Klassen 11 und 12.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 8.

ßen und Beweisen benutzt und durch Betonung hervorgehoben werden. Das sieht dann beispielsweise so aus:

> „Die Behauptung besagt etwas über *alle* Sehnen-Tangenten-Winkel. Wir *beweisen* sie, indem wir *einen beliebigen* Sehnen-Tangenten-Winkel betrachten."

Oder:

> „Wir haben zu zeigen: *Wenn* die beiden Dreiecke in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, *dann* sind sie kongruent. *Wir nehmen nun an*, daß die Dreiecke *tatsächlich* in den genannten Stücken übereinstimmen. Dann ..."

Durch dieses Vorgehen können die wichtigsten Schlußweisen den Schülern allmählich vertraut gemacht werden, ohne über diese Schlußweisen direkt sprechen zu müssen.
Selbstverständlich liegt es ebenfalls im Sinne unseres Lehrplans, fehlerhafte Schlußweisen bei ihrem Auftreten durch Gegenbeispiele zu widerlegen.

### 3.1.3. Komplexheit von Beweisschritten

Die Frage der Schlußregeln führt uns noch zu einer weiteren Besonderheit des Beweisens im Mathematikunterricht, auf die wir auch schon einmal (im Abschnitt 1.3.5., ↗ 47ff.) kurz eingegangen sind. Es ist die Tatsache, daß bei der in der Mathematik und auch im Mathematikunterricht üblichen Praxis des Beweisens häufig mehrere Einzelschlüsse zu einem Schritt zusammengefaßt werden. Dieses Vorgehen ist gerade auch im Unterricht sinnvoll und notwendig, weil sonst schon recht einfache Beweise viel zu lang und für die Schüler gar nicht mehr überschaubar sein würden. Dabei bleibt aber die Frage offen, ob die Schüler nicht auch gelegentlich dadurch Verständnisschwierigkeiten bei Beweisen haben können, daß in manchen Beweisschritten zu viele Einzelschlüsse zusammengefaßt sind und ein solcher Beweisschritt insgesamt zu groß wird.
Wir sehen uns also bei Beweisführungen im Unterricht einem methodischen Problem gegenüber, das auch in anderen Zusammenhängen auftritt: Es ist die Frage nach *optimalen Schrittgrößen*. Bis jetzt können in dieser Hinsicht noch keine Angaben gemacht werden, da entsprechende Untersuchungen fehlen. Dennoch lassen sich einige Orientierungen geben:

a) Die Schrittgröße, die bei Beweisführungen im Unterricht einzuhalten ist, hängt sicherlich vom *Entwicklungsstand der Schüler*, von der *Sicherheit ihrer Kenntnisse* und von der *Variabilität ihres Denkens* ab. Wir müssen also bei der Vorbereitung unseres Unterrichts prüfen, was wir den Schülern zumuten können.
So wird beispielsweise zu überlegen sein, welche der beiden folgenden Darstellungen beim Beweis des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes (wir betrachten hier nur den einfachsten der drei Fälle) besser geeignet erscheint — und zwar im Hinblick auf die jeweilige konkrete Klassensituation:

**Relativ umfangreiche Schrittgrößen**

Da $\alpha$ ein Außenwinkel am gleichschenkligen Dreieck $AMC$ ist (Bild 9), gilt $\alpha = 2 \cdot \beta$, w. z. b. w.

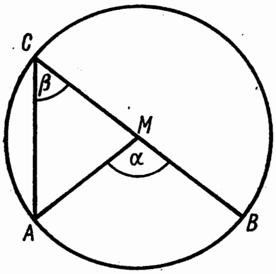



Bild 9

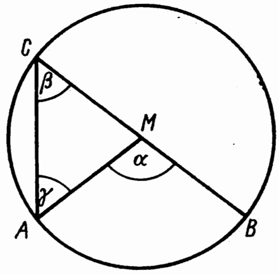



Bild 10

**Relativ kleine Schrittgrößen**

I. Da $\alpha$ Außenwinkel am Dreieck $AMC$ ist (Bild 10), gilt

(I) $\alpha = \beta + \gamma$.

II. Da $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ (beide Strecken sind Radien im Kreis), ist $\triangle\ AMC$ gleichschenklig;

III. aus der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $AMC$ folgt $\beta = \gamma$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich groß);

IV. also können wir in der Gleichung (I) $\gamma$ durch $\beta$ ersetzen und erhalten $\alpha = \beta + \beta$

oder $\alpha = 2 \cdot \beta$, w. z. b. w.

Ähnliche Überlegungen sind notwendig, um beispielsweise zu entscheiden, ob in der Herleitung des Kosinussatzes von der Gleichung

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2$$

in *einem* Schritt zu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q$$

übergegangen wird, oder ob als zusätzlicher Zwischenschritt noch die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q + q^2 - q^2$$

explizit geschrieben wird.

Bei oberflächlicher Betrachtung dieser Problematik könnte man vielleicht zu dem Schluß kommen, daß es auf jeden Fall sicherer ist, kleinere Schrittgrößen zu wählen, damit alle Schüler dem Beweisgang folgen können. Man muß aber berücksichtigen, daß das Verkleinern der Schrittgrößen den Beweis insgesamt verlängert und ihn gerade dadurch für die Schüler eventuell unübersichtlicher werden läßt. Außerdem besteht auch die Gefahr, die Schüler zu langweilen, wenn man einen Gedankengang in Einzelschritte auflöst, den sie insgesamt längst erfaßt haben oder der ihnen aus vorangegangenen Überlegungen wohlvertraut ist.

b) Neben dem Entwicklungsstand der Schüler ist für die Wahl der Schrittgröße in Beweisführungen auch die jeweilige *didaktische Situation* von Bedeutung. So wird es beispielsweise bei der *Erarbeitung* eines Beweises im Unterricht im allgemeinen darauf ankommen, alle für ein volles Verständnis notwendigen Schritte zu fixieren. Für eine zusammenfassende *Wiederholung* genügt es dagegen oft, nur die Hauptschritte — den „roten Faden" des Ganzen — herauszustellen. Letzteres könnte — um noch einmal die Herleitung des Kosinussatzes (für spitzwinklige Dreiecke) aufzugreifen — beispielsweise so aussehen:
Nach dem Satz von PYTHAGORAS kann man die Höhe $h_c$ auf zwei Arten ausdrücken (Bild 11):

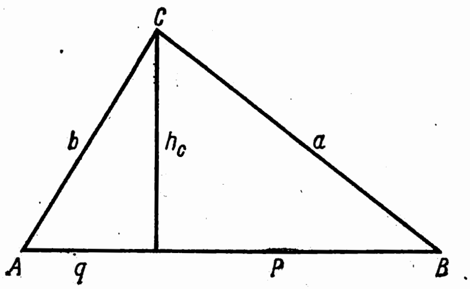



Bild 11

$$h_c^2 = a^2 - p^2 \qquad \text{bzw.} \qquad h_c^2 = b^2 - q^2$$

Daraus folgt durch Gleichsetzen

$$a^2 - p^2 = b^2 - q^2 \,.$$

Nach mehreren Umformungen erhält man daraus unter Benutzung von $p = c - q$ die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,q;$$

daraus bekommt man durch Einsetzen von $b \cdot \cos\alpha$ für $q$ schließlich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cdot \cos\alpha \,.$$

Sicherlich lassen sich noch weitere Faktoren nennen, die die Schrittgröße bei Beweisführungen beeinflussen können. Es ist hier aber nicht möglich, eine vollständige Bedingungsanalyse vorzunehmen. Wir wollten lediglich die Problematik deutlich machen und einige Lösungsansätze aufweisen, die in weiteren Untersuchungen fortgeführt werden könnten.

### 3.1.4. Fehlen einer strengen Axiomatik

In vielen Darstellungen mathematischer Teilgebiete wird dem Beweisen eine große Bedeutung beigemessen: man verlangt, daß zu jedem Satz ein Beweis angegeben wird, sofern es sich nicht um einen Satz handelt, den man stillschwei-

gend als gültig voraussetzt. Besonders deutlich wird das beim *axiomatischen* Aufbau mathematischer Theorien, bei dem man die Sätze, von denen man ausgeht, explizit angibt — als Axiomensystem — und bei dem man alle weiteren Sätze streng deduktiv herleitet, d. h. also aus den Axiomen und schon bewiesenen Sätzen — unter eventueller Zuhilfenahme von Definitionen — *beweist.* Der Mathematik*unterricht* unterscheidet sich von einem solchen Vorgehen sehr wesentlich, und dadurch kommt auch dem Beweisen im Unterricht eine etwas andere Bedeutung zu als beim axiomatischen Aufbau mathematischer Theorien.
Im Gegensatz zum axiomatischen Aufbau mathematischer Theorien ist es im Unterricht in der Regel so, daß zunächst (in den unteren Klassen) viele Sätze anschaulich und auf induktivem Wege gewonnen werden. Darunter sind viele Sätze, die man zur Grundlegung eines axiomatisch-deduktiven Aufbaus der betreffenden Theorie gar nicht als Axiom benötigen würde. Umgekehrt werden im Unterricht manche „selbstverständlichen" Sätze, die bei streng deduktivem Vorgehen unentbehrlich sind, gar nicht explizit formuliert. Auf dieser vom axiomatischen Standpunkt aus gesehen sehr unvollkommenen Grundlage beginnt man dann, im Unterricht einzelne Beweise zu führen. Nebenher werden aber auch weiterhin in anschaulicher oder induktiver Form neue Sätze gewonnen, die selbst nicht bewiesen, wohl aber bei späteren Beweisen benutzt werden.
Man könnte fragen, ob die Beweise, die in der Schule durchgeführt werden, in Anbetracht dieser Situation nicht von vornherein wertlos sind. Das ist jedoch nicht der Fall: In der im Abschnitt 1.3.1. gegebenen Definition des Begriffs „Beweis" (↗ 27f.) wird nicht verlangt, daß die Ausdrucksmenge $X$, aus der abgeleitet wird, ein Axiomensystem sein muß. Es ist für das Beweisen auch nicht erforderlich, daß $X$ nur solche Ausdrücke enthält, die aus einem vorgegebenen (zu $X$ gehörigen) Axiomensystem selbst schon abgeleitet worden sind. Beweisführungen im Rahmen eines mathematischen Teilgebiets setzen nicht unbedingt dessen axiomatischen Aufbau voraus. Wenn man von irgendwelchen Ausdrücken $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_n$ in logisch richtiger Weise (d. h. unter Anwendung der üblichen Schlußregeln und logischen Sätze) zu einem neuen Ausdruck $\mathsf{H}$ gelangt, so ist das ein vollwertiger Beweis, und man hat gezeigt, daß $\mathsf{H}$ aus $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_n$ folgt. Die Korrektheit dieses Beweises hängt nicht davon ab, ob die Ausdrücke $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_n$ selbst schon bewiesen sind. Man muß nur beachten, daß die *Wahrheit* oder *Allgemeingültigkeit* von $\mathsf{H}$ natürlich nur dann durch den Beweis gesichert ist, wenn die Wahrheit oder Allgemeingültigkeit von $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_n$ feststeht.
Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß Beweisführungen im Unterricht trotz des Fehlens eines strengen axiomatisch-deduktiven Aufbaus nicht nur der Entwicklung gewisser Fähigkeiten der Schüler dienen, sondern durchaus auch einen mathematischen Sinn haben. Durch die Beweise werden nämlich logische Zusammenhänge zwischen verschiedenen Sätzen oder Satzgruppen der jeweils betrachteten Disziplinen sichtbar gemacht. Das Erfassen dieser Zusammenhänge ist für die Schüler mindestens genau so wichtig wie das Verständnis der Sätze selbst.

## 3.2. Beurteilung von Schülerleistungen im Beweisen

Wenn man bei den Schülern Verständnis für mathematische Beweise entwickeln und sie zum Wiedergeben sowie zum selbständigen Führen von Beweisen befähigen will — und das ist ja ein Ziel unseres Mathematikunterrichts — dann ist es notwendig, den Schülern auch ihren Fähigkeiten angemessene *Beweisaufgaben* zu stellen. Damit erhebt sich für uns die Frage, wie — nach welchen Kriterien und Gesichtspunkten — Schülerleistungen auf dem Gebiet des Beweisens zu beurteilen und zu bewerten sind. Wir wollen uns jetzt diesem Problem zuwenden.

### 3.2.1. Möglichkeiten der Beurteilung von Schülerleistungen im Beweisen

Jedem Mathematiklehrer sind verschiedene Verfahren bekannt, um schriftlich vorliegende oder auch mündlich vorgetragene, von Schülern stammende Darlegungen mathematischen Inhalts zu beurteilen bzw. zu bewerten. Ob das mehr quantitativ mit Hilfe einer Punktbewertung, durch Erteilen einer Zensur, durch eine qualitative Kennzeichnung oder in noch einer anderen Form geschieht — stets geht es darum, Schülerleistungen eindeutig bestimmte Urteile zuzuordnen. Dabei strebt man im allgemeinen danach, die Zuordnungsvorschrift — man kann auch von einer *Bewertungsfunktion* sprechen — so festzulegen, daß eine möglichst *objektive* Beurteilung zustande kommt. Das bedeutet: das einer bestimmten Schülerleistung durch die Bewertungsfunktion zugeordnete Urteil soll nur von der Schülerleistung selbst und nicht auch noch von anderen Faktoren (insbesondere vom Urteilenden) abhängen. Wie weit diese Forderung im konkreten Fall wirklich erfüllt werden kann bzw. muß, hängt von mancherlei Umständen, insbesondere aber von der jeweiligen pädagogischen Zielsetzung ab. Sie bestimmt unter anderem auch, ob eine relativ globale und grobe Beurteilung der Schülerleistungen ausreicht oder ob eine sehr differenzierte, viele Einzelheiten berücksichtigende Einschätzung erforderlich ist. Wie man leicht einsieht, kann die Objektivität der Beurteilung durch eine globale Betrachtungsweise erleichtert, mit wachsender Differenziertheit der Urteile dagegen erschwert werden.
Ausgehend von den eben angestellten allgemeinen Überlegungen wollen wir uns nun Möglichkeiten der Beurteilung von Schülerleistungen im *Beweisen* zuwenden und dabei insbesondere auf die Frage der Objektivität und auf das Problem der Differenziertheit der Urteile eingehen.

a) Verhältnismäßig einfach (zumindest innerhalb des Schulstoffs, von dem hier ja nur die Rede ist) wird die Beurteilung von Schülerleistungen im Beweisen (von Beweisversuchen, wie wir kurz sagen wollen), wenn man sich nur auf die Urteile „richtig" und „falsch" beschränkt — wenn also der Nachbereich unserer Bewertungsfunktion nur aus den Größen r und f besteht. In diesem Falle kann man eine weitgehende Objektivität der Beurteilung erreichen; denn ob ein von einem Schüler dargestellter Beweis richtig ist oder nicht, hängt vorwiegend von dieser Darstellung selbst und nur sehr wenig von subjektiven Meinungen und Deutungen ab. Allerdings steht diesem Vorteil der Nachteil gegenüber, daß die Beurteilung wenig differenziert ist. Das trifft sowohl auf die Bewertung „f" zu — zwischen falschen Beweisversuchen können erhebliche qualitative Unterschiede bestehen — als auch auf die Bewertung „r" — ein richtiger Beweisversuch kann umständlich oder elegant, lang oder kurz, nach vielen oder wenigen Irrtümern geglückt sein usw. Wenn man diese Unterschiede durch die Beurteilung mit erfassen und zum Ausdruck bringen will — und das dürfte bei der Arbeit mit Schülern, die das Beweisen ja *lernen* sollen, im allgemeinen angebracht sein —, muß man die Beschränkung auf nur zwei mögliche Urteile (r bzw. f) fallen lassen.

**b)** Ein Verfahren, das im Mathematikunterricht bei Leistungsbeurteilungen sehr häufig benutzt wird, ist die *Punktbewertung*. Sie kann auch auf Beweisversuche angewandt werden. Da man die zu einem bestimmten Beweis gehörige Höchstpunktzahl $p$ (mit $p > 1$; denn für $p = 1$ hat man wieder den eben unter a) besprochenen Fall) willkürlich festlegen kann, ist eine beliebige Differenzierung der Urteile möglich. Allerdings wird die Wahrung einer hinreichenden Objektivität der Beurteilung mit wachsendem $p$ immer schwieriger, sofern jede Zahl zwischen 0 und $p$ als Bewertung auftreten kann — sofern mit wachsendem $p$ also auch wirklich eine wachsende Differenziertheit verbunden ist. Trotzdem ist die Methode der Punktbewertung für viele Zwecke brauchbar, sofern man $p$ einerseits groß genug wählt, um eine hinreichend differenzierte Beurteilung zu ermöglichen (etwa durch Zuordnung von Punkten zu bestimmten Einzelschritten im Beweisgang), $p$ andererseits aber klein genug hält, um die Erteilung oder Nichterteilung von einzelnen Punkten noch einigermaßen objektiv entscheiden zu können.

Das Kennzeichnende der Punktbewertung ist, daß die Urteile rein quantitativer Natur sind. Dieser Umstand ist in mancher Hinsicht vorteilhaft (z. B. dann, wenn die Punktbewertung als Grundlage für die Erteilung von Zensuren benutzt wird), für manche pädagogischen Zielsetzungen ist es aber doch angebracht, neben quantitativen Gesichtspunkten auch qualitative zu berücksichtigen (vor allem bei der Analyse von Fehlleistungen der Schüler als einer Grundlage für die methodische Planung des weiteren Unterrichts).

**c)** *Qualitative Wertungen* erfordern im allgemeinen ein *Worturteil*: die Leistung wird dabei durch einige kurze Sätze charakterisiert. Wenn man mit dieser Methode aber nicht nur wenige Beweisversuche einzuschätzen hat, sondern eine größere Anzahl — eventuell auch noch zu verschiedenen Zeitpunkten —, dann besteht die Gefahr, daß die Objektivität der Urteile zu stark eingeschränkt wird. Es kommt dann leicht vor, daß gewisse Gesichtspunkte beim Beurteilen nicht durchgängig beachtet werden, daß zufällig auftretende Besonderheiten das jeweilige Urteil zu stark beeinflussen usw. Um diese Nachteile zu vermeiden, ist es angebracht, die für die Beurteilung wesentlichen Gesichtspunkte vorher *festzulegen* — etwa in Form von *Fragen*, so daß jeder zu beurteilende Beweisversuch mit Hilfe dieser Fragen analysiert und durch die Gesamtheit der Antworten auf die Fragen eingeschätzt werden kann. Für gewisse Zwecke — besonders für wissenschaftliche Untersuchungen — kann es nützlich sein, diese Methode so weit aus-

zubauen, daß die Beurteilung der Beweisversuche nach einem fest vorgegebenen *Algorithmus* erfolgt, der zu *normierten Worturteilen* führt[1]).
Auf jeden Fall ist es möglich, mit Hilfe eines festgelegten Systems von Fragen zu recht differenzierten und trotzdem hinreichend objektiven Einschätzungen der Beweisversuche zu gelangen. Da man die qualitative Beurteilung außerdem auch noch mit einer quantitativen Bewertung koppeln kann, sind Auswertungen der Schülerleistungen und Vergleiche durchführbar, die man mit den unter a) bzw. b) dargestellten Beurteilungsmethoden nicht anstellen könnte. Dafür ist aber eben die Methode c) zeitaufwendiger als die Methode a) bzw. b).

### 3.2.2. Gesichtspunkte für eine qualitative Beurteilung von Beweisversuchen

Wir wollen uns mit der im vorigen Abschnitt unter c) aufgeführten Beurteilungsmethode von Beweisversuchen etwas genauer befassen, weil sie einmal die umfassendste ist und zum anderen auch einer Reihe von Analysen und Vergleichen zugrunde liegt, denen wir uns in den folgenden Abschnitten zuwenden wollen.
Im Mittelpunkt soll jenes *System von Fragen* stehen, von dem im vorigen Abschnitt bereits die Rede war und mit dessen Hilfe Beweisversuche analysiert bzw. beurteilt werden können. Dazu muß vorausgeschickt werden, daß diese Fragen nicht nur aus theoretischen Erwägungen resultieren, sondern auch aus empirischen Untersuchungen in den Klassenstufen 6 bis 8, bei denen sie sich als wesentlich und der konkreten Situation angemessen herauskristallisiert haben. Wenden wir uns nun den einzelnen Fragen zu.

a) Bei einer der schon erwähnten empirischen Untersuchungen ist Schülern der Klassenstufe 7 die Aufgabe gestellt worden, an Hand von Bild 12 folgenden Satz zu beweisen:

> „Die Summe entgegengesetzt liegender Winkel an geschnittenen Parallelen beträgt 180°."

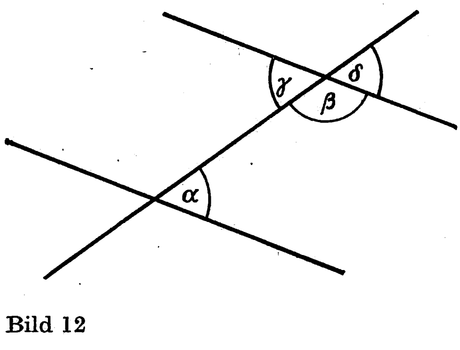



Bild 12

[1]) Ein Beispiel für einen derartigen Algorithmus ist enthalten in: Walsch, W.: *Eine Methode zur differenzierten Erfassung von Schülerleistungen im Beweisen mathematischer Aussagen.* In: „Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Halle", XVII, 1968, G, H. 1.

Von den am Versuch beteiligten Schülern gaben einige eine Lösung ab, die in keinem sinnvollen Zusammenhang mit der Aufgabenstellung stand. Dabei wurde ein sinnvoller Zusammenhang dann als nicht gegeben angesehen, wenn die in dem zu beweisenden Satz vorkommenden Begriffe und Beziehungen in der Schülerarbeit gar nicht auftraten, sondern statt dessen andere Darlegungen darin zu finden waren. Ein Beispiel für eine solche Schülerarbeit sei hier wiedergegeben: „$\gamma + \beta$ sind zwei Nebenwinkel. $\alpha$ und $\delta$ sind zwei Stufenwinkel. Also ist $\delta = \gamma$“.

Das tatsächliche Auftreten solcher und ähnlicher Beweisversuche erfordert, daß wir bei der Beurteilung von Schülerleistungen im Beweisen als erstes die Frage stellen müssen:

**$F_1$ — Ist ein sinnvoller Zusammenhang mit der Aufgabenstellung erkennbar?**

Nur wenn diese Frage mit „ja“ beantwortet werden kann, ist es angebracht, den Beweisversuch weiter zu analysieren und die Leistung des Schülers genauer zu charakterisieren. Lautet die Antwort dagegen „nein“, muß man wohl auf ein weitgehendes Unverständnis der Aufgabenstellung durch den Schüler schließen. Es hat dann zumeist keinen Zweck, den Beweisversuch näher zu untersuchen, es sei denn, es soll ermittelt werden, welche falschen Vorstellungen oder Begriffsbildungen bzw. Lücken in den Kenntnissen den Schüler gehindert haben könnten, die gestellte Aufgabe richtig zu erfassen.

**b)** Ein charakteristisches sprachliches Merkmal von Beweisen, wie sie in mathematischen Büchern oder in mathematischen Vorträgen dargeboten werden, ist das relativ häufige Auftreten der Redeweisen „denn“, „weil“, „also ist“, „daraus folgt“, „deshalb gilt“ und ähnlicher Formulierungen, die das *Schließen* und das *Begründen* einzelner Beweisschritte zum Ausdruck bringen. Von der *Definition* des Begriffs „Beweis“ (↗ 28) her gesehen sind diese Redeweisen zwar völlig überflüssig — und man findet auch in der mathematischen Literatur Beweise, die nur aus einer Folge von Ausdrücken ohne jeden „verbindenden“ Text bestehen — für das *Verständnis* eines Beweises spielen die mit den oben genannten Redeweisen zusammenhängenden Erläuterungen aber doch eine mehr oder weniger große Rolle. In der Schule — und dort insbesondere in den mittleren Klassenstufen, deren Schüler das Beweisen erst *lernen* sollen — ist es auf jeden Fall notwendig, *Begründungen* für einzelne Beweisschritte zu geben (eingeleitet durch „denn“, „weil“ o. ä.) und ebenso das *Schließen* sprachlich sichtbar werden zu lassen (durch „also ist“, „daraus folgt“ usw.). Diese Forderung wird in den Lehrbüchern und von den Lehrern weitgehend erfüllt. Wenn dennoch in Schülerarbeiten die genannten Redeweisen gänzlich fehlen — wie wir das z. B. in dem schon erwähnten Versuch verschiedentlich beobachten konnten —, dann liegt der Verdacht sehr nahe, daß die betreffenden Schüler den Charakter der an sie gestellten Aufgabe — nämlich etwas zu beweisen — noch nicht richtig verstanden haben. (Es kann hier Ausnahmen geben — vor allem in höheren Klassen bei Beweisen, in denen nur arithmetische Umformungen von Ausdrücken vorkommen, zu denen Schüler zuweilen keinen Text hinzufügen — im allgemeinen dürfte der Verdacht aber zutreffen.)

Es ist deshalb angebracht, bei der Beurteilung von Beweisversuchen die Frage zu stellen:

**$F_2$ — Werden begründende und schlußfolgernde Formulierungen gebraucht?**

Kann diese Frage mit „ja“ beantwortet werden, dann ist eine weitere Analyse der Schülerarbeit sinnvoll, lautet die Antwort dagegen „nein“ — handelt es sich bei dem Beweisversuch also lediglich um eine Aneinanderreihung (Aufzählung) von richtigen oder auch falschen Sätzen ohne logische Verbindung —, dann ist eine weitergehende Einschätzung der Schülerarbeit im allgemeinen nicht angebracht, weil man von einem Schüler, der die Aufgabenstellung nicht richtig verstanden hat, kaum beurteilenswerte Lösungsschritte erwarten kann.
Zur Verdeutlichung des bisher Gesagten soll hier eine Schülerarbeit wiedergegeben werden, in der begründende bzw. schlußfolgernde Formulierungen fehlen und die schon dadurch auf ein Nichtverstehen des Charakters der Aufgabe durch den Schüler schließen läßt.
Von den Schülern einer Klasse 7 wurde verlangt, folgenden Satz zu beweisen:

> „Wenn zwei Sehnen eines Kreises gleich lang sind, so haben sie gleichen Abstand vom Mittelpunkt des Kreises.“

Dazu wurde ihnen eine Beweisskizze vorgegeben (Bild 13). Die uns interessierende Schülerarbeit hat folgenden Inhalt:

„Der Kreis ist ein Vollwinkel. Die Winkelsumme beträgt 360°. Die Sehnen haben die gleiche Symmetrieachse, die gleichzeitig der Radius ist. Diese schneiden sich im Punkt $M$. Der Punkt $M$ ist der Mittelpunkt des Kreises. Die beiden entstandenen Dreiecke sind kongruent. Die Länge der beiden Schenkel des Winkels $\alpha$ und des Winkels $\gamma$ sind gleichzeitig der Radius.“

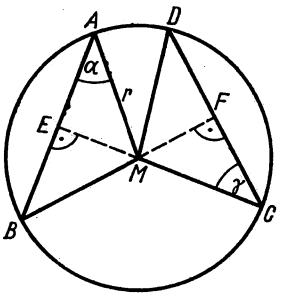



Bild 13

Wie man sieht, werden nur einzelne Sachverhalte mehr oder weniger richtig wiedergegeben, ohne daß irgend ein logischer Zusammenhang zum Ausdruck gebracht wird.

c) Wenn die Fragen $F_1$ und $F_2$ bei der Beurteilung eines Beweisversuchs positiv beantwortet werden können — wenn wir es also mit einer Arbeit zu tun haben, die zumindest auf ein Verständnis der Aufgabenstellung durch den betreffenden Schüler schließen läßt —, kann eine genauere Analyse des Beweisversuchs erfolgen. Dabei ist es naheliegend, mit folgender Frage zu beginnen:

**$F_3$ — Enthält der Beweisversuch nur Richtiges?**

Die Antwort ist im allgemeinen relativ leicht zu finden, da es hierbei nur darum geht, die Wahrheitswerte der in der Schülerarbeit enthaltenen mathematischen Aussagen festzustellen und die Zulässigkeit der benutzten Schlüsse zu überprüfen. Beides ist im Bereich des mathematischen Schulstoffs nicht schwierig.

**d)** Die weiteren Fragen, die zur Beurteilung des Beweisversuchs zu stellen sind, hängen nun davon ab, wie die Antwort auf die Frage $F_3$ ausfällt.
Nehmen wir als erstes an, die Antwort auf die Frage $F_3$ lautet „nein". Das bedeutet, daß im Beweisversuch Fehler (jedenfalls mindestens ein Fehler) enthalten sind.

Sie können
(1) rein sachlicher Art sein (Benutzung falscher Sätze),
(2) rein logischer Art (Verwendung unzulässiger Schlußweisen), oder es können
(3) sachliche *und* logische Fehler
vorkommen. Die genaue Zuordnung des zu beurteilenden Beweisversuchs zu einer dieser drei Möglichkeiten erhält man durch Beantwortung folgender Fragen:

**$F_4$ — Sind die Fehler nur sachlicher Art?**

Lautet die Antwort „ja", dann liegt Fall (1) vor. Wenn die Antwort „nein" heißt, muß weiter gefragt werden:

**$F_5$ — Sind die Fehler nur logischer Art?**

Die Antwort „ja" liefert nun den Fall (2), die Antwort „nein" liefert den Fall (3). Man muß nun allerdings fragen, ob die Ermittlung der Fehlerart tatsächlich immer so einfach ist, wie das hier aussieht. Kann man wirklich immer genau entscheiden, ob ein Fehler sachlicher oder logischer Natur ist? Und ist diese Unterscheidung überhaupt wichtig genug, um sich darum zu bemühen?
Die zweite Frage ist relativ leicht zu beantworten: Wenn es nur darauf ankommt, die *Korrektheit* eines Beweises zu überprüfen, ist es ziemlich gleichgültig, ob ein darin entdeckter Fehler sachlicher oder logischer Art ist. In jedem Fall ist der Beweis als unkorrekt abzulehnen. Wenn wir dagegen mit der Überprüfung eine *pädagogische* Zielsetzung verfolgen — und darum geht es uns ja bei unseren Überlegungen —, dann ist es sehr wichtig, die Art eines Fehlers zu bestimmen; denn je genauer der Lehrer einen Fehler erkennt, um so zielgerichteter kann dann die Hilfe für den Lernenden gestaltet werden.

In der pädagogischen Praxis ist in dieser Beziehung noch viel zu oft eine ziemlich undifferenzierte Betrachtungsweise anzutreffen. Gerade im Zusammenhang mit Beweisführungen spricht man fast immer nur von *logischen* Fehlern, auch wenn die Schlußweisen richtig und die Fehler rein sachlicher Natur sind. Damit verbaut man sich natürlich zum Teil die Möglichkeiten zu einer der Fehlleistung angemessenen Hilfe für den Schüler.
Die tatsächliche Entscheidung, um welche Fehlerart es sich handelt, ist allerdings nicht immer ganz leicht und zuweilen sogar ohne zusätzliche Befragung des Schülers, der den Fehler gemacht hat, überhaupt nicht möglich. Dazu ein Beispiel:
Bei der im Februar 1969 durchgeführten Bezirksolympiade Junger Mathematiker ist für die Klassenstufe 11/12 eine Aufgabe gestellt worden, in der es um eine dreiseitige Pyramide ging, die einer Kugel einbeschrieben sein sollte. Einige Teilnehmer des Bezirkes Halle machten bei der Lösung der Aufgabe (deren genauer Inhalt hier unwesentlich ist) einen Fehler, indem sie sinngemäß schrieben:

„Eine Grundkante der Pyramide muß durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sonst kann die Grundfläche kein rechtwinkliges Dreieck sein."

Die Art dieses Fehlers kann zunächst nicht eindeutig bestimmt werden, weil es zumindest zwei Möglichkeiten gibt:

1. Die Schüler können von der Ansicht ausgegangen sein, daß die Grundfläche der der Kugel einbeschriebenen dreiseitigen Pyramide *nur dann* ein rechtwinkliges Dreieck ist, wenn eine Grundkante der Pyramide durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Diese Meinung ist *sachlich falsch*, die daraus gezogene Schlußfolgerung (siehe oben) wurde dann aber in *logisch richtiger* Weise gewonnen. In diesem Falle wäre der Fehler also rein sachlicher Art.

2. Es ist aber auch möglich, daß die Schüler von dem richtigen Satz ausgegangen sind:

   „Wenn eine Grundkante der der Kugel einbeschriebenen dreiseitigen Pyramide durch den Mittelpunkt der Kugel geht, dann ist die Grundfläche der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck."

Aus diesem Satz und der Annahme, daß *keine* Grundkante durch den Kugelmittelpunkt geht, können die Schüler dann darauf geschlossen haben, daß die Grundfläche unter dieser Bedingung auch kein rechtwinkliges Dreieck sein kann.
Der Fehler wäre hier rein logischer Art, da aus einem richtigen Satz, der die Struktur $p \rightarrow q$ hat, und der Annahme $\sim p$ in logisch unzulässiger Weise auf $\sim q$ geschlossen wurde.

Das Beispiel zeigt, daß in manchen Fällen die schriftlich fixierte Schülerleistung allein nicht ausreicht, um die Art eines Fehlers eindeutig festzustellen.
Am Rande sei hier erwähnt, daß in unserem konkreten Fall die Entscheidung bei manchen Schülerarbeiten doch gelang, weil sie zusätzliche Erläuterungen enthielten, etwa in folgendem Sinne:

„Wenn man die Grundfläche der Pyramide vom Kugelmittelpunkt weg ‚nach oben' oder ‚nach unten' bewegt, dann geht die Rechtwinkligkeit des Dreiecks verloren."

Damit war ziemlich klar, daß diese Schüler von einem falschen Satz ausgegangen waren — möglicherweise verursacht durch ein mangelhaftes räumliches Vorstellungsvermögen —, daß also unser Fall 1 eingetreten war.

e) Wenn die Antwort auf die Frage $F_3$ bei der Beurteilung eines Beweisversuchs *positiv* ausfällt, d. h. „Ja“ lautet, werden die eben diskutierten Fragen nach der Art des Fehlers hinfällig. Trotzdem ist eine weitere Analyse angebracht, weil ein Beweisversuch, der nur Richtiges enthält, keineswegs schon eine einwandfreie Lösung der gestellten Beweisaufgabe sein muß. Es ist vielmehr zu prüfen, ob die Lösung *vollständig* ist, d. h. keine Lücken oder allzu großen Gedankensprünge aufweist. Andererseits ist auch von Interesse, ob der Beweisversuch nur solche Schritte enthält, die — unter Berücksichtigung des eingeschlagenen Wegs — *notwendig* sind, oder ob darin auch ganz überflüssige Darlegungen gemacht werden.

Somit sind also zwei Fragen zu stellen:

**$F_6$ — Enthält der Beweisversuch alle notwendigen Schritte?**

Und:

**$F_7$ — Enthält der Beweisversuch nur notwendige Schritte?**

Die Antworten auf beide Fragen lassen Rückschlüsse über den Stand der Fähigkeiten des jeweiligen Schülers im Beweisen wie auch über den Grad seines Verständnisses für Beweisführungen zu.

f) In den anfangs schon erwähnten empirischen Untersuchungen wurde bei einer Reihe von Schülerarbeiten ein Mangel festgestellt, der besondere Beachtung verdient:
Es fehlte in diesen Arbeiten der für mathematische Beweisführungen charakteristische „Schlußsatz“, der mit der jeweils zu beweisenden Behauptung identisch ist und der gewöhnlich durch die Redeweise „Also ist ...“ oder „Somit gilt ...“ oder ähnlich eingeleitet und oft durch die Bemerkung „... was zu beweisen war“ abgeschlossen wird. Natürlich könnte man solche Beweisversuche einfach als unvollständig kennzeichnen, da sie nicht alle notwendigen Schritte enthalten. Für eine genaue Analyse der Schülerleistungen dürfte es aber doch notwendig sein, bei der Beurteilung von Beweisversuchen zwischen Lücken im Gedankengang und dem Fehlen des „Schlußsatzes“ zu unterscheiden. Während ersteres nämlich im allgemeinen durch ein unzureichendes Eindringen der betreffenden Schüler in die spezielle Beweisaufgabe, in die speziellen sachlichen oder logischen Zusammenhänge verursacht ist, deutet ein Fehlen des „Schlußsatzes“ unter gewissen Umständen auf prinzipielle Mängel im Verständnis der Aufgabenstellung hin. Beweisversuche ohne „Schlußsatz“ lassen in bestimmten Fällen vermuten, daß die betreffenden Schüler sich über das zu erreichende Ziel nicht klar sind, daß sie nicht voll verstanden haben, was von ihnen verlangt wird. Diese Vermutung ist vor allem dann gerechtfertigt, wenn das Fehlen des „Schlußsatzes“ nicht als natürliche Folge anderer Mängel des Beweisversuchs angesehen werden

kann. Wenn z. B. ein Schüler bei einer Beweisaufgabe über erste Versuche nicht hinauskommt, ist das Fehlen des „Schlußsatzes“ ganz normal und braucht nicht durch prinzipielle Unklarheiten über das Ziel der Aufgabe bedingt zu sein. Wenn er dagegen in richtiger (oder auch fehlerhafter!) Weise die Aufgabe bearbeitet hat und dann kurz vor dem Ende abbricht, ohne jenen letzten Schritt zu gehen, liegt eventuell doch eine ungenügende Zielklarheit des Schülers vor.
Es ist also gerechtfertigt, bei der Beurteilung von Schülerleistungen im Beweisen mathematischer Aussagen zu fragen:

**$F_8$ — Enthält der Beweisversuch einen „Schlußsatz“?**

Über mögliche Schlußfolgerungen, die sich aus der Antwort „Nein“ ergeben können, haben wir uns eben verständigt. Es ist aber noch zu überlegen, ob wir die Antwort „Ja“ in jedem Falle als *positives* Element der Gesamtbeurteilung ansehen können. Das ist jedoch nicht immer ohne weiteres möglich. So kamen bei den empirischen Untersuchungen zum Beispiel Schülerarbeiten vor, die sogenannte „Gewaltlösungen“ darstellten. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß an weitgehend fehlerhafte oder für die Beweisführung unbrauchbare Ausführungen ohne sachliche Motivation die zu beweisende Behauptung als „Schlußsatz“ einfach angefügt wurde.
Zwei Beispiele für solche Schülerarbeiten seien hier wiedergegeben.

*Beispiele:*

1) An Hand der in Bild 14 wiedergegebenen Beweisfigur sollte gezeigt werden, daß Außenwinkel am Dreieck stets so groß sind wie die Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel, daß also im vorliegenden Fall $\gamma_1 = \alpha + \beta$ gilt.
   Eine Schülerin (Klassenstufe 7) schrieb:
   „$\gamma_1 = \alpha + \beta$, weil $\gamma$ sich ja nicht verändern kann. $\gamma$ bleibt $\gamma$. Also muß $\alpha + \beta$ so groß sein wie $\gamma_1$.“
2) Die Schüler sollten beweisen, daß die Summe entgegengesetzt liegender Winkel an geschnittenen Parallelen stets 180° beträgt. Die Beweisfigur (Bild 15) war vorgegeben.

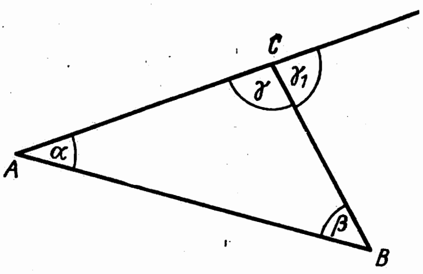


Bild 14

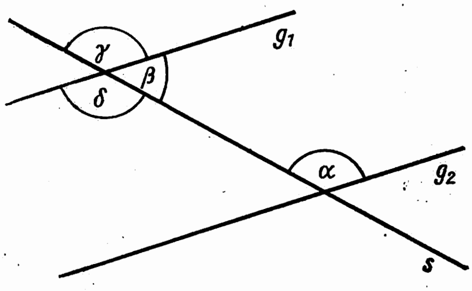


Bild 15

Ein Schüler (ebenfalls Klassenstufe 7) gab folgenden Beweisversuch ab:
„$\alpha = \gamma$, weil es Stufenwinkel sind.
$\gamma = \beta$, weil es Nebenwinkel sind.
Also ist $\alpha + \beta = 180°$.“

Bei diesen und ähnlichen Arbeiten wird die positive Antwort auf die Frage nach einem „Schlußsatz" natürlich stark entwertet durch die negativen Einschätzungen hinsichtlich anderer Beurteilungsgesichtspunkte (z. B. logische bzw. sachliche Richtigkeit, Vollständigkeit u. ä.).
Genauso wenig positiv ist das Vorhandensein eines „Schlußsatzes" in einem Beweisversuch einzuschätzen, wenn dieser „Schlußsatz" mit der zu beweisenden Behauptung überhaupt nicht übereinstimmt. Auch das kam bei den schon mehrfach erwähnten empirischen Untersuchungen vor.
Betrachten wir auch dazu zwei Beispiele von Schülerarbeiten.

*Beispiele:*

3) Der Beweisversuch eines Schülers (Klassenstufe 7) zu dem oben schon erwähnten Satz über Außenwinkel am Dreieck lautete (Bild 14):
„$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, weil Innenwinkel zusammen 180° ergeben.
$\gamma_1 + \gamma = 180°$, weil Nebenwinkel 180° ergeben. Es ist $\gamma_1 + \alpha + \beta = 180°$."

4) Ein anderer Schüler (auch Klassenstufe 7) gab als Beweis für den ebenfalls vorhin schon erwähnten Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen folgendes an (Bild 15):
„$\gamma = \delta$, weil Scheitelwinkel gleich sind. $\delta = \alpha$, weil Wechselwinkel gleich groß sind. Also ist $\alpha = \beta$."

In diesen und ähnlichen Fällen muß man wohl annehmen, daß die Schüler die gestellte Beweisaufgabe noch nicht richtig verstanden und insbesondere das zu erreichende Ziel nicht erfaßt haben.
Es genügt somit nicht, nur das Vorhandensein eines „Schlußsatzes" in den Beweisversuchen zu prüfen, sondern es ist gegebenenfalls auch zu fragen:

**$F_9$ — Stimmt der „Schlußsatz" mit der zu beweisenden Behauptung überein?**

Die Beantwortung dieser Frage kann, wie wir gesehen haben, wichtige Rückschlüsse auf das Verständnis der Schüler für mathematische Beweisführungen ermöglichen.

g) Wir wollen zu dem in den Punkten a) bis f) entwickelten System von Fragen nun noch eine letzte hinzufügen, die sich auch in den praktischen Versuchen als notwendig erwiesen hat. Es geht dabei darum, vor allem für solche Beweisversuche, die keine sachlichen oder logischen Fehler enthalten, zu einer hinreichenden Differenzierung der Beurteilungen zu gelangen. Das wird u. a. ermöglicht durch die Frage:

**$F_{10}$ — Ist die Darstellung mathematisch und sprachlich korrekt?**

Um keine Mißverständnisse hervorzurufen, sei hierzu ausdrücklich betont, daß die Frage sich nicht auf die Korrektheit von Schlüssen oder auf die Richtigkeit von Aussagen bezieht (dazu dienen die Fragen $F_3$, $F_4$ und $F_5$), sondern ausschließlich auf die Korrektheit der *Darstellung*, also auf den richtigen Gebrauch mathematischer Symbole, auf den sprachlichen Ausdruck und ähnliches. Natürlich kann es Fälle geben, wo man nicht so leicht zu entscheiden vermag, ob etwas zwar richtig gemeint und nur schlecht ausgedrückt oder ob es tatsächlich falsch ist. Großzügigkeit im Beurteilen — etwa nach der Maxime „in dubio pro reo" — ist dann im allgemeinen nicht angebracht; denn die Schüler sollen durch den Mathematikunterricht ja gerade dazu erzogen werden, sich klar und präzise auszudrücken. Andererseits wäre es aber nicht sinnvoll (weder psychologisch noch für das Gewinnen einer möglichst objektiven Einschätzung), solche Mängel in Beweisversuchen, die offensichtlich nur die Darstellung betreffen, als sachliche oder logische Fehler zu werten.

Vielleicht kann das folgende Beispiel einer Schülerarbeit noch deutlicher zeigen, was gemeint ist, wenn wir von einer *unkorrekten Darstellung* sprechen. Es handelt sich um einen Beweis, der — abgesehen von Mängeln in der Darstellung — richtig und vollständig ist.

Die Arbeit stammt von einer Schülerin der Klassenstufe 7. Es handelt sich wieder um den Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen (Bild 15). Die Schülerin schrieb:

„$\beta + \delta =$ Nebenwinkel, betragen zusammen 180°.
$\delta + \alpha =$ Wechselwinkel, sind gleich groß.

Also betragen $\alpha + \beta$ 180°."

Die Mängel beruhen hier vor allem darauf, daß die mathematischen Symbole „+" bzw. „=" als Abkürzungen für die Wörter „und" bzw. „sind" benutzt wurden. Das war offensichtlich eine Folge des damals noch nicht modernisierten Unterrichts der Unterstufe, in dem Gleichungen wie $3 + 5 = 8$ gewöhnlich als „Drei und Fünf sind Acht" gelesen wurden.

Natürlich findet man in Schülerarbeiten auch noch andere Darstellungsmängel, so z. B. falsche Verwendung von Fachtermini, Nichtbeherrschen bestimmter Wendungen der mathematischen Fachsprache, ungenaue Formulierungen u. ä. Das Erfassen und anschließende Korrigieren dieser Erscheinungen, die natürlich nicht nur bei Beweisversuchen auftreten, ist auf jeden Fall notwendig.

### 3.2.3. Zur praktischen Durchführung des Beurteilens

In den empirischen Untersuchungen hat sich gezeigt, daß durch die Fragen $F_1$ bis $F_{10}$ die wichtigsten Gesichtspunkte für eine qualitative Beurteilung von Beweisversuchen erfaßt werden, sofern wir die Phase der *Einführung* der Schüler in das Beweisen im Auge haben. In höheren Klassenstufen, von deren Schülern dann schon etwas umfangreichere Beweisführungen verlangt werden, wird das System von Fragen etwas abzuändern oder zu ergänzen sein. Während z. B. die Fragen $F_1$ und $F_2$ (↗ 79, 80) allmählich überflüssig werden dürften, wird es mehr und mehr notwendig sein, die Fragen $F_3$ bis $F_7$ (↗ 81, 83) so zu ergänzen, daß Fehler oder Lücken in den Beweisversuchen genau *lokalisiert* werden können. Das Beurteilungs*prinzip* — Überprüfen der Beweisversuche an Hand vorher festgelegter Fragen — kann aber auch in oberen Klassenstufen angewandt werden.

Durch die Erläuterungen im Abschnitt 3.2.2. (↗ 78ff.) ist vielleicht der Eindruck entstanden, daß das Beurteilen von Beweisversuchen mit Hilfe der Fragen $F_1$ bis $F_{10}$ ziemlich kompliziert und umständlich sei. Bei der praktischen Durchführung stellt man aber bald fest, daß es wesentlich einfacher verläuft, als das hier bei der Beschreibung des Beurteilungsprinzips scheinen mag. Man braucht sich dazu nur vor Augen zu halten, daß $F_1$ bis $F_{10}$ sämtlich Entscheidungsfragen sind, die im allgemeinen leicht mit „Ja" oder „Nein" beantwortet werden können, und daß außerdem jeweils nur einige (maximal acht) dieser zehn Fragen wirklich zu beantworten sind, wie man dem Schema im Bild 16 entnehmen kann. (Das Bild gibt eine Übersicht, in welcher Reihenfolge die Fragen $F_1$ bis $F_{10}$ bei der Beurteilung logisch aufeinander folgen.)

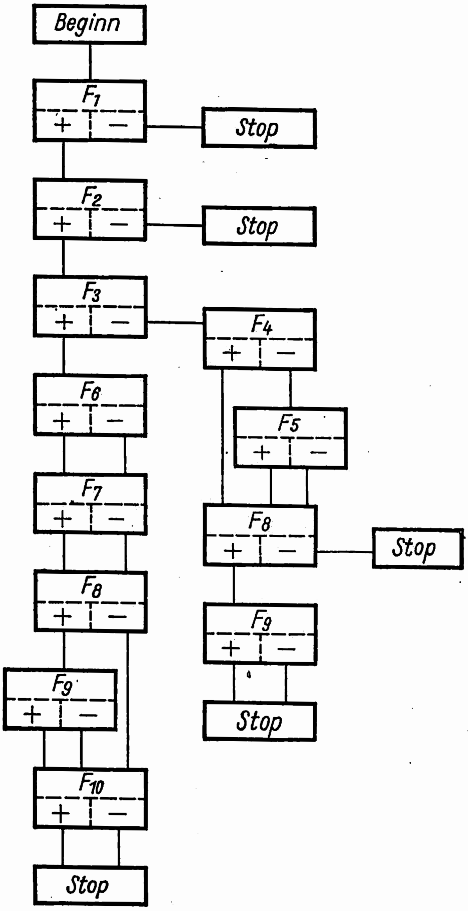



Bild 16

Das Ergebnis des Überprüfens von Beweisversuchen mit Hilfe der Fragen $F_1$ bis $F_{10}$ kann man in Form kurzer Worturteile festhalten. Einige Beispiele dafür seien genannt:

- In begründender Form abgefaßt — enthält logische Fehler — „Schlußsatz“ stimmt mit der Behauptung überein.
- Sachlich und logisch richtig — alle notwendigen Schritte vorhanden — keine überflüssigen Darlegungen — Darstellung teilweise unkorrekt.
- Keine Begründungen oder Schlußfolgerungen — nur Aufzählung von (richtigen) Fakten.
- In begründender Form abgefaßt — keine Fehler — enthält nur notwendige Schritte, ist aber lückenhaft — richtiger „Schlußsatz“ vorhanden — Darstellung korrekt.

Selbstverständlich ist es möglich, diese qualitativen Einschätzungen mit einer Punktbewertung zu koppeln, um auf diese Weise auch eine Grundlage für die Zensierung zu haben. Bei den empirischen Untersuchungen, von denen hier schon mehrfach die Rede war, ist allerdings keine von der jeweiligen Beweisaufgabe abhängige Punktbewertung benutzt worden, sondern es erfolgte eine Einordnung jedes Beweisversuchs in genau eine von drei sogenannten „Leistungsgruppen“. Da wir bei der Angabe von Versuchsergebnissen auf diese Leistungsgruppen wieder zu sprechen kommen werden, ist es zweckmäßig, sie hier etwas genauer zu charakterisieren. Die „Zuordnungsvorschrift“ war wie folgt festgelegt:

- In die Leistungsgruppe III kamen genau die Beweisversuche, die keinen sinnvollen Ansatz zeigten oder nur Aufzählungen darstellten oder Fehler (vor allem logischer Art) enthielten oder einen falschen „Schlußsatz“ aufwiesen.
- In die Leistungsgruppe II kamen genau die Beweisversuche, die zwar im wesentlichen ohne Fehler, aber doch mit Mängeln behaftet waren, z. B. Lücken im Gedankengang, Darlegung überflüssiger Dinge, fehlender „Schlußsatz“ u. ä.
- In die Leistungsgruppe I kamen die gelungenen Beweisversuche, die höchstens in der Schreib- oder Ausdrucksweise gewisse Unkorrektheiten enthielten.

Durch die Einordnung der Beweisversuche in diese Leistungsgruppen waren in den empirischen Untersuchungen neben qualitativen auch quantitative Vergleiche — beispielsweise mit den Mathematikzensuren der Schüler — möglich.

## 3.3. Beweisleistungen von Schülern der Klassenstufe 7 nach der früheren Unterrichtspraxis

Wir haben uns schon im Abschnitt 2.1. (↗ 56ff.) mit der Frage beschäftigt, in welchem Alter die Schüler durch den vorangegangenen Erziehungs- und Bildungsprozeß jene Fähigkeiten erworben haben, die für eine erfolgreiche Behandlung von Beweisführungen im Mathematikunterricht vorhanden sein müssen. Wie wir gesehen haben, war es nur schwer möglich, eine genaue Antwort auf diese Frage zu geben. Immerhin ist deutlich geworden, daß nach den bisher vorliegenden psychologischen Erkenntnissen etwa bei zwölf- bis dreizehnjährigen Schülern jener Stand in der Denkentwicklung vorausgesetzt werden kann, der sie prinzipiell zum Verstehen und auch zum Führen mathematischer Beweise befähigt. Dieser Sachlage tragen auch — mehr oder weniger ausgeprägt — seit langem unsere Lehrpläne und Lehrbücher Rechnung, die Beweisführungen im Mathematik-

unterricht ab Klasse 6 vorsehen. Uns interessiert nun vor allem, zu welchen Ergebnissen die in den genannten Materialien gegebene Orientierung bei der früheren Unterrichtspraxis geführt hat.
Im folgenden soll über einige empirische Untersuchungen berichtet werden, die im Schuljahr 1962/63 in Klassenstufe 7 durchgeführt worden sind. Es ging dabei um das *Wiedergeben* von im Unterricht behandelten Beweisen durch Schüler, um das *selbständige Führen* von Beweisen sowie um die *Entwicklung der Schülerleistungen* im Führen von Beweisen während des siebenten Schuljahrs.
Bevor wir uns den durchgeführten Versuchen zuwenden, ist noch eine Vorbemerkung am Platze. Sie betrifft die Relevanz der aus dem Schuljahr 1962/63 stammenden Ergebnisse, die schon relativ weit zurückliegen und die deshalb in Anbetracht der raschen Entwicklung vieler Faktoren unseres Mathematikunterrichts von manchem vielleicht als überholt angesehen werden könnten. Wir müssen selbstverständlich berücksichtigen, daß in der Zeit nach dem „Mathematikbeschluß" (Dezember 1962) bedeutende Veränderungen vor sich gegangen sind. Wir besitzen inzwischen ein neues Lehrplanwerk und moderne Lehrbücher, die Lehrer haben sich in Weiterbildungskursen systematisch qualifiziert und in wachsendem Maße verbessert sich die Ausstattung unserer Schulen mit Unterrichtsmitteln.
Es ist somit klar, daß die damals gefundenen Resultate keine Charakterisierung unserer jetzigen Situation darstellen können. Trotzdem ist es sinnvoll, sich damit zu befassen, weil sie in verschiedener Hinsicht von Interesse sind:
— Erstens führen uns diese Versuchsergebnisse zu Schlußfolgerungen, die für die Gestaltung unseres gegenwärtigen Mathematikunterrichts von großer Bedeutung sind;
— zweitens geben sie ein Muster für ähnliche Versuche, mit denen man die Leistungen der Schüler im Beweisen erfassen kann;
— drittens liefern sie Grundlagen für einen Vergleich der früheren mit den gegenwärtigen Unterrichtsergebnissen hinsichtlich des Beweisens und schaffen somit
— viertens eine Möglichkeit, die inzwischen erfolgte Entwicklung auf einem wichtigen Teilgebiet des Mathematikunterrichts einschätzen zu können.
— Vor allem aber führen uns die damaligen Versuchsergebnisse zu einem tieferen Verständnis vieler Festlegungen unseres gegenwärtigen Lehrplans, die ja nicht zuletzt aus der Notwendigkeit heraus getroffen worden sind, frühere Mängel unseres Mathematikunterrichts wirksam überwinden zu helfen.

### 3.3.1. Wiedergeben eines Beweises

Wir betrachten zunächst einen Versuch, der am Beginn des Schuljahrs 1962/63 in fünf Klassen der Klassenstufe 7 durchgeführt worden ist. Es ging dabei um das Erfassen der Schülerleistungen im Wiedergeben eines Beweises. Die Versuchsklassen wiesen keine Besonderheiten gegenüber anderen Klassen derselben Klassenstufe auf. Klassenfrequenz, Lernhaltung und Leistungsvermögen entsprachen den Gegebenheiten, die man damals in der Mehrzahl der Schulen antreffen konnte.

Es wurde jeweils eine Unterrichtsstunde benutzt. (Rein stofflich ging es dabei um Dinge, die im damaligen Lehrplan der Klasse 6 enthalten und den Schülern somit nicht ganz neu waren.) Die Stunde begann mit Wiederholungsfragen zur Dreieckslehre: Arten von Dreiecken, Innenwinkel, Satz über die Summe der Innenwinkel, Begriff des Außenwinkels (an entsprechenden Zeichnungen erklärt). Daran anschließend wurde auf den Satz eingegangen, daß ein Außenwinkel am Dreieck stets so groß ist wie die Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel. Es schloß sich die Zielstellung an, diesen Satz zu beweisen. Gewöhnlich kam daraufhin von Schülern zunächst der Vorschlag, an der inzwischen angefertigten Tafelzeichnung die entsprechenden Winkel auszumessen. Nachdem die Unzulänglichkeit dieser Methode durch ein Unterrichtsgespräch klargestellt worden war, folgte an der Tafel die eigentliche Beweisführung, wobei die Schüler durch den Versuchsleiter im allgemeinen stark gelenkt werden mußten.
Trotzdem hatten viele Schüler noch besondere Schwierigkeiten beim letzten Beweisschritt, wo aus

(1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und

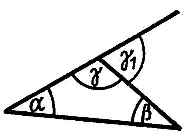
(2) $\gamma_1 + \gamma = 180°$ auf

$$\alpha + \beta = \gamma_1$$

geschlossen werden mußte. Es fiel diesen Schülern offenbar sehr schwer, die Gleichungen (1) und (2) in der Strukturierung

$$\square + \bigcirc = * \quad \text{und} \quad \triangle + \bigcirc = *$$

zu sehen. Erst der Einsatz von farbiger Kreide, besondere Betonung in der Sprechweise und die direkte Aufforderung, $\alpha + \beta$ und $\gamma_1$ miteinander zu vergleichen, ließen die Schüler schließlich die letzte Schlußfolgerung finden.
Das bis dahin entstandene Tafelbild gibt Bild 17 wieder.



*Behauptung:* $\alpha + \beta = \gamma_1$

*Beweis:* (1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, weil Innenwinkel im Dreieck zusammen 180° betragen.

(2) $\gamma_1 + \gamma = 180°$, weil Nebenwinkel zusammen 180° betragen.

Also ist $\alpha + \beta = \gamma_1$.

Bild 17

Nach einer Wiederholung des Gedankengangs wurde das Tafelbild mit Ausnahme der Beweisfigur gelöscht.
Die Schüler erhielten nun die Aufgabe, den soeben erarbeiteten Beweis schriftlich wiederzugeben. In der Regel standen ihnen dazu noch etwa 15 Minuten bis zum Schluß der Stunde zur Verfügung.
Einige Beispiele von Schülerarbeiten sollen hier wiedergegeben werden:

– „Die Innenwinkel betragen im Dreieck zusammen 180°. Die Nebenwinkel $\gamma_1 + \gamma$ betragen auch zusammen 180°. Also muß $\gamma_1$ genauso groß sein wie $\alpha + \beta$."

— „Wenn wir den Winkelmesser nehmen, $\alpha + \beta$ messen, dann $\gamma_1$ messen, so kommen wir zu demselben Ergebnis.“
— „$\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Die Innenwinkel sind zusammen $180°$. $\gamma$ und $\gamma_1$ sind Stufenwinkel. Sie ergeben immer zusammen $180°$. $\gamma_1 + \gamma = 180°$.“
— „$\alpha + \beta + \gamma$ ergeben zusammen $180°$, weil die Innenwinkel zusammen $180°$ ergeben. In $\gamma_1$, dem Außenwinkel, ist $\alpha$ und $\beta$ enthalten. Es ergibt sich also $\gamma_1 = \alpha + \beta$. Ein Nebenwinkel ergibt $180°$. $\gamma_1$ und $\gamma$ sind ein Nebenwinkel. Also ergibt sich: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.“

Die Beurteilung der Schülerarbeiten erfolgte im Prinzip so, wie es in den Abschnitten 3.2.2. (↗ 78ff.) und 3.2.3. (↗ 86f.) dargestellt worden ist.
Die dort geschilderte Einteilung in Leistungsgruppen führte im vorliegenden Fall zu folgender Verteilung:

| Leistungsgruppe | I | II | III | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| Prozentsatz | 27 | 8 | 65 | 100 |

Tabelle 1

Das Ergebnis war in Anbetracht des relativ geringen Schwierigkeitsgrads der Aufgabe ziemlich schlecht. Es macht deutlich, wie schwer es den Schülern fiel, selbst einen so einfachen Beweis in mathematisch einwandfreier Form wiederzugeben. Die Mehrzahl der Schüler war offenbar nicht in der Lage, den Beweisgedanken klar zu erfassen und den Beweis aus dieser Einsicht heraus zu reproduzieren.
Selbst die einwandfreien Beweiswiedergaben lassen nicht unbedingt auf ein wirkliches Verständnis schließen.
Verschiedene Schüler erklärten nach dem Versuch freimütig, sie hätten den Beweis aus dem Gedächtnis wiedergegeben, ohne ihn wirklich verstanden zu haben. Der letztgenannte Umstand — nämlich die Möglichkeit, den Beweis bzw. Teile des Beweises im Grunde uneinsichtig und nur auf das Gedächtnis gestützt zu reproduzieren — schränkt die Aussagekraft des Versuchs bezüglich der gelungenen Beweiswiedergaben natürlich ein. Trotzdem ist das Gesamtergebnis aufschlußreich, zeigt es doch, wie wenig die Mehrzahl der damals erfaßten Schüler mit einer Beweisaufgabe anzufangen wußte.

## 3.3.2. Selbständiges Führen von Beweisen

Am Beginn und gegen Ende des Schuljahrs 1962/63 wurden in sechs Klassen der Klassenstufe 7 (dazu gehörten die fünf bereits erwähnten Versuchsklassen sowie eine weitere Klasse) Versuche durchgeführt, mit denen die Leistungen der Schüler im selbständigen Führen eines Beweises erfaßt werden sollten. Für jeden dieser Versuche ist jeweils eine Unterrichtsstunde benutzt worden. Um zu erreichen, daß die Ergebnisse möglichst wenig von Bedingungen beeinflußt wurden, die mit der Fähigkeit zum selbständigen Führen eines Beweises nicht unmittelbar zusammenhängen, wurden in der Anlage der Versuchsstunden folgende Forderungen berücksichtigt:

1. Alle für den jeweiligen Beweis erforderlichen Kenntnisse sind in einer dem Lösen der Beweisaufgabe unmittelbar (in der gleichen Stunde) vorangehenden Wiederholung bereitzustellen, um eine Beeinträchtigung der Schülerleistungen durch eventuell vorhandene Wissenslücken zu vermeiden.
2. Bevor den Schülern die Beweisaufgabe gestellt wird, ist mit ihnen gemeinsam ein Beweis zu erarbeiten, der dem dann von ihnen verlangten sehr ähnlich ist, damit ihnen sowohl die Anlage des Beweises allgemein wie auch das Finden des speziellen Beweises erleichtert wird. Diese Hilfe soll der Möglichkeit entgegen wirken, daß Schüler die Beweisaufgabe nur deshalb nicht bewältigen können, weil sie mit der schriftlichen Anlage des Beweises nicht zurecht kommen oder weil sie überhaupt keinen geeigneten Beweisgedanken finden.

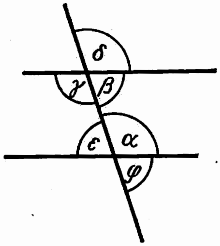
## Zum Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen

Bei den Versuchen, die in den ersten Wochen des Schuljahrs durchgeführt wurden ging es um den Beweis des Satzes, daß die Summe von entgegengesetzt liegenden Winkeln an geschnittenen Parallelen 180° beträgt. Dieser Satz gehörte zum Lehrplanstoff der Klasse 6. Die entsprechenden Unterrichtsstunden verliefen in den sechs beteiligten Klassen im wesentlichen gleichartig:
Jede der Stunden begann mit einer Wiederholung über parallele Geraden und über Winkel an geschnittenen Parallelen. An Hand eines entsprechenden Tafelbilds wurden die Begriffe „Stufenwinkel“, „Wechselwinkel“, „entgegengesetzt liegende Winkel“, aber auch „Nebenwinkel“ und „Scheitelwinkel“ noch einmal erklärt. Die Schüler wurden dann aufgefordert, ihr Wissen über diese Winkel mitzuteilen.

Sie brachten (in unterschiedlicher Reihenfolge):

(1) Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich groß.
(2) Die Summe von Nebenwinkeln ist stets 180°.
(3) Scheitelwinkel sind gleich groß.
(4) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich groß.
(5) Die Summe zweier entgegengesetzt liegender Winkel an geschnittenen Parallelen ist stets 180°.

Aus diesen Sätzen, die in kurzer Form an der Tafel notiert wurden, ist dann zunächst der Satz (4) herausgegriffen und in einem Unterrichtsgespräch bewiesen worden. Im Anschluß an den Beweis zum Satz (4) wurde der Satz (5) betrachtet. Die Schüler erhielten jetzt die Aufgabe, ihn selbständig zu beweisen. Bevor sie damit begannen, wurde die zu beweisende Behauptung aber noch in gemeinsamer Arbeit in die Form einer Gleichung gebracht. Außerdem erhielten die Schüler den Hinweis, daß sie wie beim Beweis zu Satz (4) unter Benutzung der bereits feststehenden (an der Tafel notierten) Sätze die Behauptung herleiten sollen. Zur Erleichterung der Aufgabe blieb das bis dahin entstandene Tafelbild (Bild 18) stehen.




Stufenwinkel sind gleich groß;
Scheitelwinkel sind gleich groß;
Die Summe von Nebenwinkeln beträgt 180°.

*Behauptung:* Wechselwinkel sind gleich groß: $\alpha = \gamma$

*Beweis:* $\alpha = \delta$, weil Stufenwinkel gleich groß sind;
$\delta = \gamma$, weil Scheitelwinkel gleich groß sind.

Also ist $\alpha = \gamma$.

*Behauptung:* Die Summe entgegengesetzt liegender Winkel ist 180°:
$\alpha + \beta = 180°$

*Beweis:*

Bild 18

Für die Bearbeitung der Beweisaufgabe stand den Schülern jeweils der Rest der Unterrichtsstunde — das waren etwa 15 Minuten — zur Verfügung.
Bevor wir uns die Ergebnisse ansehen, wollen wir noch festhalten, daß die Sätze (4) und (5) in sehr ähnlicher Weise bewiesen werden können: an Stelle der beim Beweis von Satz (4) benutzten Scheitelwinkelgleichheit ist im Beweis von Satz (5) lediglich der Satz über Nebenwinkel heranzuziehen. Der Schwierigkeitsgrad der den Schülern gestellten Beweisaufgabe war also objektiv gesehen relativ niedrig.
Betrachten wir nun einige Beispiele von Beweisversuchen der Schüler. Dabei wollen wir auch immer einen Blick auf die Halbjahreszensur (HZ) des betreffenden Schülers im Fach Mathematik werfen, um seine Leistung bei der Beweisaufgabe mit seinen sonstigen Leistungen vergleichen zu können.

1) „$\alpha = \gamma$, denn Wechselwinkel sind gleich groß;
$\gamma + \beta = 180°$, denn Nebenwinkel sind zusammen 180°.
Also ist $\alpha + \beta = 180°$, denn wir können $\alpha$ für $\gamma$ einsetzen, weil beide gleich sind.“ (HZ: 1)

2) „$\delta = \gamma$, weil Scheitelwinkel gleich sind. $\gamma = \alpha$, weil Wechselwinkel gleich groß sind. Also ist $\alpha = \beta$.“ (HZ: 3)

3) „$\delta + \beta$ sind Nebenwinkel und betragen 180°. $\alpha + \varphi$ sind auch Nebenwinkel und betragen 180°. Also müssen $\alpha + \beta$ auch 180° betragen.“ (HZ: 2)

4) „Entgegengesetzt liegende Winkel kann man mit Nebenwinkeln vergleichen. Und Nebenwinkel ergeben zusammen 180°. Also ergibt sich $\alpha + \beta = 180°$.“ (HZ: 2)

Insgesamt gesehen ergab sich folgendes Bild:
Nur 21 Schüler (12%) lieferten im wesentlichen richtige Beweise ab. Die restlichen Arbeiten waren lückenhaft oder enthielten Fehler verschiedener Art. So wurde zum Beispiel häufig die zu beweisende Behauptung als Begründung für sich selbst benutzt, verschiedene Schüler hielten sich starr an den vorher besprochenen Beweis des Satzes über Wechselwinkel und kamen so zu logischen Gewaltlösungen oder auch zu Schlußsätzen, die mit der Behauptung nicht übereinstimmten.

Die schon erläuterte Einteilung in Leistungsgruppen (↗ 88) führte zu folgender Übersicht:

| Leistungsgruppe | I | II | III | Σ |
|---|---|---|---|---|
| Prozentsatz | 12 | 11 | 77 | 100 |

Tabelle 2

Die Ergebnisse dieses Versuchs zeigen, daß es den Schülern offenbar recht schwerfiel, die gestellte Beweisaufgabe zu bewältigen. Vergegenwärtigen wir uns noch einmal, welcher Art die Anforderungen eigentlich waren:
Von den Schülern wurde verlangt, gegebene Elemente (mathematische Sätze) in geeigneter Weise miteinander zu einem Beweis für die ebenfalls gegebene Behauptung zu verknüpfen. Sie hatten also eine Menge zunächst beziehungslos nebeneinander stehender Aussagen in eine bestimmte logische Ordnung zu bringen.
Wenn viele Schüler an der Beweisaufgabe scheiterten, so lag es also nicht daran, daß ihnen irgendein Satz zum Beweis fehlte, denn alle notwendigen Sätze standen an der Tafel. Es lag auch kaum daran, daß das Problem zu umfangreich bzw. zu unübersichtlich war, denn es waren nur zwei ganz einfache Sätze heranzuziehen. Das Versagen vieler Schüler lag vielmehr im wesentlichen darin, daß sie die wenigen für den Beweis notwendigen logischen Verknüpfungen der Sätze nicht fanden bzw. nicht schriftlich einwandfrei wiedergeben konnten. Die Ursachen dafür sind jedoch nicht nur — oder vielleicht nicht einmal in erster Linie — in einem unzureichenden Entwicklungsstand des logischen Denkens zu suchen. Nach dem im Kapitel 2. (↗ 55ff.) Gesagten muß vielmehr damit gerechnet werden, daß auch mangelnde Vertrautheit mit den hier auftretenden mathematischen Sachverhalten eine Reihe von Schülern daran gehindert hat, die Beweisaufgabe erfolgreich zu lösen.

Nun weiß natürlich jeder, der sich etwas mit Mathematik beschäftigt hat, daß das Finden eines Beweises auch dann unter Umständen sehr schwierig sein kann, wenn alle für den Beweis notwendigen Sätze angegeben sind. Hätte man nur diesen einen Versuch durchgeführt, so wäre die Möglichkeit offen geblieben, daß den Schülern vielleicht nur das *Finden* eines Beweises (oder eventuell gerade *dieses* Beweises) besondere Schwierigkeiten bereitete. Der im Abschnitt 3.3.1. (↗ 89f.) geschilderte Versuch zur *Wiedergabe* eines vorgeführten Beweises (zum Satz über Außenwinkel am Dreieck) hat aber trotz seiner etwas besseren Ergebnisse gezeigt, daß die Schüler auch dann noch große Schwierigkeiten hatten, einige wenige Sätze in logisch richtiger Weise untereinander zu einem Beweis für einen anderen Satz zu verknüpfen, wenn der Gedankengang ihnen vorher mitgeteilt worden war.

Wäre bei der selbständigen Beweisführung die Mehrzahl der Schüler nur am Finden des Beweisgedankens gescheitert, so hätten die Ergebnisse bei der Beweiswiedergabe doch sehr viel besser sein müssen.

Aus den Äußerungen verschiedener Schüler nach der Durchführung der Versuche ging hervor, daß derartige Anforderungen erstmalig an sie gestellt worden waren. Das kann bis zu einem gewissen Grade die große Anzahl unbefriedigender Leistungen erklären.
Nach dem damals gültigen Lehrplan waren die Schüler im Verlauf der Klasse 7 mit einer ganzen Reihe von Sätzen und auch mit den zugehörigen Beweisen vertraut zu machen. Man fragt sich natürlich, welchen Einfluß das auf die Entwicklung ihrer Fähigkeit hatte, selbständig einfache Beweise durchzuführen. Betrachten wir deshalb jene Ergebnisse, die gegen Ende des Schuljahrs 1962/63 in den sechs Versuchsklassen gewonnen wurden.

## Zum Satz des Thales

Die neuen Versuche wurden so angelegt, daß sie in möglichst vielen Bedingungen den Versuchen am Beginn des Schuljahrs entsprachen. Dadurch war es möglich, die Schülerleistungen vom Beginn und vom Ende des Schuljahrs miteinander zu vergleichen. Aus verschiedenen Überlegungen heraus fiel die Wahl auf den Satz des Thales. Sein Beweis ist zwar etwas länger als der zum Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen, doch gleichen sich die einzelnen Schritte in beiden Beweisen sehr stark.
Die Unterrichtsstunden verliefen im wesentlichen wie folgt: Am Beginn stand eine Wiederholung, in deren Verlauf alle wesentlichen Fakten zusammengestellt wurden, die für die später geforderte Lösung der Beweisaufgabe notwendig waren.
Danach wurde die Wiederholung auf den Satz gelenkt, daß ein Zentriwinkel im Kreis stets doppelt so groß ist wie ein über dem gleichen Kreisbogen stehender Peripheriewinkel. Es folgte die Aufforderung, diesen Satz für eine spezielle Lage des Peripheriewinkels zu beweisen. Dazu wurde die im Bild 19 wiedergegebene

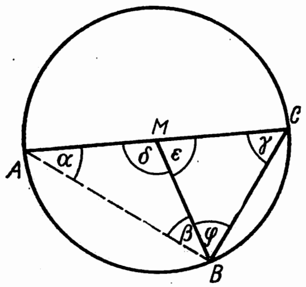


Bild 19

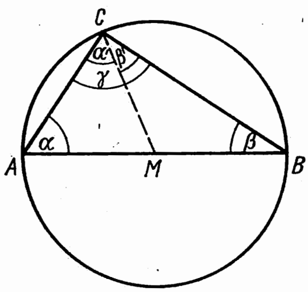


Bild 20

Beweisfigur an die Tafel gezeichnet. Gemeinsam mit den Schülern ist dann folgender Beweis erarbeitet und an der Tafel notiert worden:

*Behauptung:* $\delta = 2 \cdot \gamma$

*Beweis:* (1) $\varphi + \gamma + \varepsilon = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck)
(2) $\varphi = \gamma$ weil Dreieck $CMB$ gleichschenklig ist;
also gilt

(3) $2 \cdot \gamma + \varepsilon = 180°$.

Außerdem ist

(4) $\delta + \varepsilon = 180°$, weil $\delta$ und $\varepsilon$ Nebenwinkel sind.

Also ist $\delta = 2 \cdot \gamma$, w. z. b. w.

(Dieser Beweis blieb an der Tafel stehen.)

In Fortführung der Wiederholung wurde nunmehr der Satz des THALES erfragt. Daran knüpfte sich die Beweisaufgabe für die Schüler. Zur Erleichterung zeichnete der Versuchsleiter eine Beweisfigur an die Tafel (Bild 20). Als Behauptung wurde notiert:

$\gamma = 90°$.

Außerdem erhielten die Schüler noch folgende Hinweise:

„Alle für den Beweis benötigten Sätze stehen an der Tafel, ein Muster einer ähnlichen Beweisführung ebenfalls. Betrachtet die Dreiecke $AMC$ und $CMB$! Denkt daran, daß $\gamma = \alpha' + \beta'$ ist!"

Für die Bearbeitung der Aufgabe, die gleiche oder ähnliche Überlegungen und Schlußweisen erforderte wie der vorher erarbeitete Beweis, hatten die Schüler etwa 20 Minuten Zeit zur Verfügung.
Sehen wir uns zunächst wieder einige Schülerarbeiten an. Zur Orientierung ist hier die Jahresendzensur (EZ) des jeweiligen Schülers im Fach Mathematik mit angegeben.

1) „Dreieck $AMC$ ist gleichschenklig; Dreieck $BMC$ ist gleichschenklig. $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$
$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180°$.
Also ist $2 \cdot \alpha' + 2 \cdot \beta' = 180°$; $\alpha' + \beta' = 90°$.
Also ist $\gamma = 90°$." (EZ: 1)

2) „Die Dreiecke $AMC$ und $BMC$ sind gleichschenklig.
$\beta = \beta'$; $\alpha + \beta = 90°$.
Wenn $\alpha + \beta$ 90° sind, so muß auch $\gamma$ 90° sein." (EZ: 1)

3) „Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Sehne. Da die Strecke $\overline{CB}$ senkrecht auf der Sehne liegt, so muß auch der Winkel $\gamma$ 90° betragen." (EZ: 2)

4) „$\alpha + \beta + \gamma = 180°$; $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$;
wenn $\gamma = 90°$, so sind $\alpha + \beta = 90°$.
$\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$, darum $\alpha' + \beta' = 90°$;
wenn $\alpha' + \beta = \gamma$, so $\gamma = 90°$." (EZ: 2)

Als Gesamtergebnis war festzustellen:

13 Schüler (7%) führten den Beweis im wesentlichen richtig durch. Die restlichen Arbeiten waren lückenhaft bzw. enthielten Fehler sachlicher oder logischer Art. Einige Schüler führten Schlußsätze an, die mit der Behauptung nicht übereinstimmten.

Die Einordnung der Beweisversuche in Leistungsgruppen ergab folgendes Bild:

| Leistungsgruppe | I | II | III | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| Prozentsatz | 7 | 11 | 82 | 100 |

Tabelle 3

Zusammenfassend ist zu sagen, daß auch der Versuch am Ende des siebenten Schuljahrs ein recht schlechtes Resultat gebracht hat. Wir wollen aber nicht bei einer so globalen Feststellung stehen bleiben, sondern die Ergebnisse der Versuche noch etwas genauer analysieren, um einige Schlußfolgerungen ziehen zu können.

### 3.3.3. Vergleich der Beweisleistungen vom Beginn und vom Ende des siebenten Schuljahrs

Ein Ziel der im vorigen Abschnitt geschilderten Versuche bestand darin, gewisse Aufschlüsse über die Entwicklung der Schülerleistungen im Beweisen während des siebenten Schuljahrs zu gewinnen. Es ging also unter anderem um die Frage, ob die Schüler am Ende des siebenten Schuljahrs besser als zu seinem Beginn in der Lage sind, einfache mathematische Beweise zu führen.
Eine Gegenüberstellung der Resultate zeigt, daß die Leistungen der Schüler am Ende des Schuljahrs sogar ein wenig schlechter aussahen als zu seinem Beginn. (Wahrscheinlich hat sich der etwas größere Umfang des am Ende des Schuljahrs verlangten Beweises in dieser Richtung ausgewirkt.) Eine Kontrolle mit Hilfe der Chi-Quadrat-Probe[1]) läßt aber erkennen, daß der Unterschied zwischen den beiden Leistungsverteilungen statistisch nicht signifikant ist. Es wäre demnach falsch, von einer Verschlechterung der Schülerleistungen zu sprechen. Von einer Verbesserung kann jedoch erst recht nicht die Rede sein.
Allerdings erhebt sich die Frage, ob eventuell deutliche Veränderungen in den Schülerleistungen erkennbar werden, wenn man die Beweisversuche unter ganz speziellen Gesichtspunkten betrachtet. Wir haben dazu eine genauere Analyse durchgeführt und folgende Fragen untersucht:

a) Wie groß war in den Beweisversuchen die Anzahl derjenigen Schüler, die keinen oder nur einen ganz geringfügigen Ansatz zur Lösung der jeweiligen Beweisaufgabe erkennen ließen?
b) Wie entwickelte sich im Laufe der Klasse 7 die Einsicht, daß das bloße Aufzählen von Fakten ohne logische Verknüpfung keinen Beweis ergeben kann?
c) Haben die Schüler in Klasse 7 gelernt, daß zu einem Beweis eine abschließende Feststellung — der schon charakterisierte „Schlußsatz“ — gehört?
d) Ist allen Schülern klar geworden, daß jener „Schlußsatz“ mit der zu beweisenden Behauptung übereinstimmen muß?

[1]) Vgl. etwa: Clauss, G., H. Ebner: *Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967, S. 195ff.



7 [00 21 761]

e) Konnte in Klasse 7 die Anzahl der in Beweisversuchen auftretenden logischen Fehler gesenkt werden?

Wir wollen hier darauf verzichten, jede dieser Fragen einzeln zu diskutieren und die Antworten mit statistisch ausgewerteten empirischen Daten zu belegen.[1]) Als zusammenfassende Feststellung ergab sich:
Auch bei einer isolierten Betrachtung einzelner, spezieller Mängel in den Schülerarbeiten war am Ende des siebenten Schuljahrs keine statistisch gesicherte Verbesserung der Leistungen gegenüber dem Schuljahrsbeginn festzustellen. Das heißt mit anderen Worten, daß der im Untersuchungszeitraum in den Versuchsklassen erteilte Mathematikunterricht keine erkennbaren Auswirkungen auf die Fähigkeit der Schüler besaß, einfache mathematische Beweise zu führen. Da nun aber weder die ausgewählten Versuchsklassen besonders leistungsschwach waren noch die Unterrichtsgestaltung sich wesentlich von der damals allgemein üblichen unterschied, muß angenommen werden, daß diese Feststellung nicht nur auf die sechs Versuchsklassen zutrifft, sondern auch auf die Mehrzahl aller anderen siebenten Klassen dieser Zeit.
In einer der Versuchsklassen war das Bild am Ende des siebenten Schuljahrs allerdings etwas anders. Dort waren 12 von 29 Beweisversuchen zum Satz des Thales in die Leistungsgruppe II einzuordnen — wesentlich mehr, als nach dem allgemeinen Ergebnis und auch nach dem Leistungsstand dieser Klasse erwartet werden konnte. Es handelte sich dabei vorwiegend um Schülerarbeiten, die keine direkten Fehler enthielten, sondern lückenhaft waren.
Wie eine nachträgliche Befragung der in den Versuchsklassen unterrichtenden Lehrer ergab, war in der fraglichen Klasse — abweichend von den anderen — von den Schülern im Laufe des Schuljahrs verlangt worden, einige Beweise auswendig zu lernen. Darunter war auch ein Beweis zum Satz des Thales. Anscheinend ist es einigen Schülern dieser Klasse dann am Ende des Schuljahrs gelungen, mehr oder weniger große Teile des Beweises aus dem Gedächtnis zu reproduzieren. Sie waren jedoch nicht in der Lage, die Lücken in ihrem Beweisgang zu erkennen und durch selbständiges Überlegen zu schließen. Das deutet aber nach den im Kapitel 2. skizzierten psychologischen Erkenntnissen darauf hin, daß diese Schüler den Beweis im Grunde nicht verstanden haben. Er wurde von ihnen ähnlich wie eine Folge sinnloser Silben auswendig gelernt. Die im Vergleich zu den anderen Versuchsklassen relativ hohe Zahl von Arbeiten der Leistungsgruppe II kann somit nicht als echter Erfolg gewertet werden.

### 3.3.4. Vergleich der Beweisleistungen mit den Mathematikzensuren der Schüler

Bisher wurden die Versuchsergebnisse nur für sich betrachtet. Das reicht aber noch nicht aus, um die tatsächlichen Verhältnisse hinreichend genau wiederzugeben. Man muß auch die Beziehungen zwischen den Versuchsergebnissen und

[1]) Vgl. dazu Walsch, W.: *Methodische Probleme bei der Einführung der Schüler in das Beweisen mathematischer Aussagen.* Habilitationsschrift, Halle 1966.

den Leistungen der Schüler im sonstigen Mathematikunterricht berücksichtigen. Um diese Beziehungen quantitativ erfassen zu können, stützten wir uns einerseits auf die Einordnung der Schülerarbeiten in die Leistungsgruppen und andererseits auf die Halbjahres- bzw. Endzensuren im Fach Mathematik vom Januar bzw. Juni 1963. Dazu muß bemerkt werden, daß die Ergebnisse der Beweisversuche keinen Einfluß auf die Zensuren der Schüler hatten.
Die Tabellen 4 und 5 geben darüber Auskunft, welche Leistungen die Schüler der einzelnen Zensurengruppen in den Beweisversuchen erreicht haben. Dabei bezieht sich die Tabelle 4 auf den Versuch vom Schuljahrsbeginn und die Halbjahreszensuren, die Tabelle 5 auf den Versuch zum Schuljahrsende und die Jahresendzensuren.

| LG | HZ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| I | 2 | 9 | 10 | 0 | 0 | 21 |
| II | 0 | 8 | 5 | 3 | 1 | 17 |
| III | 1 | 22 | 39 | 50 | 20 | 132 |
| Σ | 3 | 39 | 54 | 53 | 21 | 170 |

Tabelle 4

| LG | EZ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| I | 3 | 8 | 2 | 0 | 0 | 13 |
| II | 1 | 6 | 8 | 4 | 0 | 19 |
| III | 2 | 28 | 47 | 54 | 12 | 143 |
| Σ | 6 | 42 | 57 | 58 | 12 | 175 |

Tabelle 5

Aus den Tabellen ist ersichtlich, daß Schüler mit nicht befriedigenden Mathematikzensuren (4 oder 5) bei den Beweisversuchen fast ausschließlich nur die Leistungsgruppe III erreicht haben, während die Beweisversuche der Leistungsgruppe I nur von solchen Schülern stammen, die gute oder zumindest befriedigende Mathematikzensuren aufzuweisen haben. Das zeigt, daß ein Zusammenhang zwischen Mathematikzensuren und Beweisleistungen vorhanden ist. Allerdings muß beachtet werden, daß auch eine ganze Reihe von Schülern mit guten Mathematikzensuren bei den Beweisaufgaben vollkommen versagt haben.
Das bedeutet: Die schlechten Leistungen der Schüler bei den Beweisversuchen lassen sich nicht damit erklären, daß die an dem Versuch Beteiligten auch sonst im Mathematikunterricht schlechte Leistungen zeigen, sondern weisen eindeutig darauf hin, daß den Schülern die gestellten Beweisaufgaben besondere Schwierigkeiten bereitet haben.

### 3.3.5. Ursachen für Fehlleistungen

Wie wir gesehen haben, waren die Ergebnisse der im Schuljahr 1962/63 durchgeführten Versuche nicht gut. Als besonders unerfreulich muß dabei die Tatsache bezeichnet werden, daß die Leistungen der Schüler im Beweisen während des siebenten Schuljahrs nicht besser geworden sind, obwohl der damals gültige Lehrplan für die Klasse 7 eine ganze Reihe von Beweisführungen vorsah, die in den Versuchsklassen auch behandelt worden sind.

Worin bestanden die Ursachen für die schlechten Resultate?
Aus der Durchsicht und Auswertung der Schülerarbeiten, aus Berichten von Lehrern wie auch aus Hospitationen ergaben sich folgende *Erkenntnisse*:

1. Eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Schülern hatte mehr oder weniger große Unklarheiten im Verständnis der im Mathematikunterricht eingeführten und benutzten Begriffe. Das traf zum Teil auch auf solche Schüler zu, deren Leistungen im Fach Mathematik mit „gut" oder besser zensiert wurden. Oft waren gute Zensuren nur Ausdruck für die sichere Beherrschung einiger Algorithmen.
   Begriffliche Unklarheiten wirken sich naturgemäß negativ auf das Verständnis von Aussagen aus, die mit Hilfe dieser Begriffe gebildet werden. Ohne klares Erfassen einer Aussage ist deren Beweis aber von vornherein eine kaum lösbare Aufgabe.
2. Vielen Schülern — auch leistungsstarken — fehlten häufig Kenntnisse (bzw. diese waren nicht aktualisiert), die zur Begründung einzelner Beweisschritte gebraucht wurden.
3. Die sprachliche Ausdrucksweise einer ganzen Reihe von Schülern war so unbeholfen, daß ihre teilweise richtig gemeinten Ausführungen objektiv gesehen als falsch gewertet werden mußten. Das traf vor allem auch auf den Gebrauch der mathematischen Symbolik zu.
4. In der im Untersuchungszeitraum vorherrschenden Gestaltung des Mathematikunterrichts gab es bis zur Klasse 7 keine zielstrebige Ausbildung der Schüler im Begründen, Schließen, Folgern und Beweisen. So waren die Schüler häufig nicht in der Lage, selbständig Schlüsse zu ziehen. Die Schüler waren in Klasse 7 praktisch Anfänger im Beweisen mathematischer Aussagen. Für Anfänger waren die meisten der im Stoff dieser Klasse auftretenden Beweise aber bereits viel zu komplex und umfangreich. Der größte Teil der Schüler verstand sie dadurch nur unvollkommen oder überhaupt nicht, und der Bildungseffekt war demgemäß — wie wir gesehen haben — praktisch gleich Null.

## 3.3.6. Schlußfolgerungen

Die Schlußfolgerungen, die zu ziehen waren, liegen damit auf der Hand:

a) Da ein positiver Zusammenhang zwischen dem allgemeinen mathematischen Bildungsstand der Schüler (ausgedrückt durch die Mathematikzensuren) und ihrer Fähigkeit, einfache mathematische Beweise zu führen, besteht, war zu erwarten, daß eine allgemeine Niveauerhöhung der mathematischen Ausbildung der Schüler auch positive Auswirkungen auf ihr Verständnis für mathematische Beweisführungen zur Folge hat. Diese Niveauerhöhung mußte vor allem auf die Klarheit der Begriffsbildung, die Sicherheit der Kenntnisse und die Beherrschung der mathematischen Ausdrucksmittel gerichtet sein. Eine Erweiterung des Umfangs der Kenntnisse war in diesem Zusammenhang kaum erforderlich.
   Die in den vergangenen Jahren bei uns auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts durchgeführten Maßnahmen zielten bekanntlich auf eine solche allge-

meine Niveauerhöhung der mathematischen Ausbildung ab. Darauf orientierten bereits der „Mathematikbeschluß“[1]), und unser gegenwärtiger Mathematiklehrplan entspricht den in diesem Dokument erhobenen Forderungen.

b) Da eine nicht unerhebliche Anzahl von Schülern, die gute oder sehr gute Mathematikzensuren aufwiesen, bei Beweisaufgaben vollständig versagten, mußte auch angenommen werden, daß die Bewertung der Schülerleistungen im Fach Mathematik den Zielen und Aufgaben dieses Unterrichtsfaches der sozialistischen Oberschule nicht immer ganz angemessen war. Es ist notwendig, daß die Erhöhung des Niveaus der mathematischen Ausbildung der Schüler Hand in Hand geht mit einer angemessenen Beurteilung ihrer Leistungen. In den Mathematikzensuren müssen mindestens folgende Leistungskomponenten erfaßt werden:
- Beherrschung mathematischer Fertigkeiten (z. B. Rechnen, Umgang mit Tafeln und Tabellen, Umstellen von Gleichungen, Grundkonstruktionen u. ä.)
- Mathematische Kenntnisse (Sätze, Regeln, Algorithmen u. ä.)
- Mathematische Fähigkeiten (z. B. Aufstellen und Begründen von Vermutungen, Gedankenführung bei Problemlösungen, vollständige Determination u. ä.)

Oft schien vor allem der letzte Punkt bei der Beurteilung der Schülerleistungen zu wenig beachtet worden zu sein. Natürlich ist es nicht immer ganz einfach, diese drei Komponenten sauber zu trennen, zumal im Laufe des Unterrichts auch Verschiebungen erfolgen — beispielsweise streben wir ja direkt an, daß das Lösen quadratischer Gleichungen für die Schüler aus einem mathematischen Problem, das sie durch Überlegen und Nachdenken bewältigen, zu einer Fertigkeit wird, die sich auf die Kenntnis eines entsprechenden Lösungsalgorithmus stützt. Ungeachtet der Schwierigkeiten muß man jedoch bestrebt sein, die Schülerleistungen möglichst differenziert und vollständig zu erfassen.
Unser gegenwärtiger Lehrplan erleichtert die Lösung dieses Problems dadurch, daß jeweils im Abschnitt „Ziele und Aufgaben“ das in den einzelnen Klassenstufen zu erreichende Niveau im Wissen und Können der Schüler exakt angegeben ist, wobei sowohl Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten als auch Verhaltensweisen erfaßt werden. Da die Schülerleistungen stets an diesen Lehrplanzielen zu messen sind, wird jeder Lehrer auf eine komplexe Leistungsbeurteilung orientiert.

c) Es ist dringend erforderlich, die sprachliche Ausdrucksfähigkeit der Schüler wesentlich zu verbessern. Neben einer sorgfältigeren Erarbeitung und Klärung der benutzten mathematischen Begriffe verlangt das aber auch entsprechende Übungen im Mathematikunterricht. Wenn man sich ein beliebiges Mathematikbuch ansieht, so findet man darin gewöhnlich nicht nur formalisierte Ausdrücke unter Verwendung spezieller Zeichen, sondern auch Text: Aussagen, Erläuterungen, logische Verknüpfungen usw. Betrachtete man dagegen noch vor wenigen Jahren Schülerhefte für das Fach Mathematik, so fiel häufig das

[1]) Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962 — veröffentlicht u. a. in „Mathematik und Physik in der Schule“, 10 (1963), Heft 2.

weitgehende Fehlen von Text auf. Vor allem fand man kaum Erläuterungen, Begründungen, logische Verknüpfungen und dergleichen. Das war ein äußeres Zeichen dafür, daß die Schulung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit unserer Schüler im Mathematikunterricht vielfach zu wenig beachtet worden ist.

Unser gegenwärtiger Mathematiklehrplan trägt dazu bei, die früheren Mängel auf dem Gebiet der sprachlichen Schulung überwinden bzw. vermeiden zu helfen, indem er jeden Lehrer von Klasse 1 an auf diese wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts orientiert. Das drückt sich unter anderem in folgenden Forderungen aus:

„Eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts besteht in der Entwicklung der sprachlichen Bildung der Schüler. Die Schüler sind zu befähigen, die mathematische Terminologie und Symbolik sowie gewisse fachspezifische und logische Redeweisen ... zu verstehen und zur Beschreibung mathematischer ... Sachverhalte anzuwenden ...“[1])

Diese allgemeine Zielsetzung wird für die einzelnen Klassenstufen präzisiert, so daß im Mathematikunterricht eine zielstrebige sprachliche Schulung auf der Grundlage des Lehrplans erfolgen kann. (Allerdings bleibt noch viel zu tun, um diese wichtige Lehrplanforderung wirklich in allen Klassen zu realisieren — wie sich ebenfalls an Schülerheften häufig erkennen läßt.)

d) Neben den bisher genannten Schlußfolgerungen, die sich auf die allgemeine Gestaltung des Mathematikunterrichts beziehen, ergab sich aus den Untersuchungen aber auch die spezielle Forderung, die Schüler an das Verständnis mathematischer Beweise anders als früher heranzuführen:

Es erwies sich als notwendig, den Schülern mathematische Beweise an Hand einfacherer Beispiele als den im Stoff der damaligen Klasse 7 auftretenden nahezubringen. Der Beginn brauchte dann aber nicht erst in Klasse 6 oder 7 zu liegen. Es erschien vielmehr angebracht — und die im Kapitel 2 (↗ 55ff.) angeführten allgemein-psychologischen Erkenntnisse zeigen auch die Möglichkeit dazu — schon von Klasse 1 ab die Schüler zielstrebig an das Begründen mathematischer Aussagen zu gewöhnen.

Mit der Herausarbeitung der Leitlinie „Beweisen“ entspricht unser gegenwärtiger Mathematiklehrplan diesen Überlegungen.[2]) Er macht einerseits deutlich, daß die Fähigkeit, Beweise verstehen, wiedergeben und schließlich selbständig führen zu können, von großer Bedeutung für die mathematische Bildung der Schüler ist, und gibt andererseits eine klare Orientierung, in welchen Etappen und an welchen Stoffgebieten diese Fähigkeit zu entwickeln ist. Dabei sind im wesentlichen drei Phasen zu unterscheiden:

1. Die Vorbereitung auf das Führen von Beweisen durch vielfältige Formen des Begründens und Argumentierens in den Klassen 1 bis 5;[3])

[1]) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 9 und 10.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 11.

[2]) Vgl.: *Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 11.

[3]) Vgl. z. B.: a) *Lehrpläne Deutsch und Mathematik — Klasse 3.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 132.
b) *Lehrplan Mathematik — Klasse 4.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 10.

2. die explizite Einführung der Schüler in das Beweisen, die das Erläutern der Begriffe „Definition", „Satz", „Beweis" mit einschließt, in Klasse 6;[1])
3. die schrittweise Entwicklung von Fähigkeiten im Verstehen, Wiedergeben und im selbständigen Führen von Beweisen ab Klasse 6, wobei der Lehrplan ein deutlich erkennbares System steigender Anforderungen enthält.[2])

Wir werden an späterer Stelle auf diese Stufenfolge wieder zurückkommen.

### 3.3.7. Die Einstellung der Schüler zu Beweisaufgaben im früheren Mathematikunterricht

Bei der Durchführung der Versuche am Ende des Schuljahrs 1962/63 wurden verschiedentlich spontane Äußerungen einzelner Schüler laut, die eine deutliche Ablehnung von Beweisaufgaben erkennen ließen. Um ein genaueres Bild von der Einstellung der Schüler zu diesen Aufgaben zu bekommen, ist daraufhin eine Befragung durchgeführt worden, bei der sowohl die Schüler der sechs Versuchsklassen als auch Schüler von Kontrollklassen erfaßt wurden. Durch diese Befragung sollte geklärt werden, welche Einstellung die Schüler zu Beweisaufgaben haben, ob die Durchführung der Versuche bzw. die Leistung der Schüler in den Versuchen einen Einfluß auf ihre diesbezügliche Meinung hatte und wie die Schüler ihre Einstellung begründen.
Die Schüler wurden nicht unmittelbar und ausschließlich nach ihrer Haltung gegenüber Beweisaufgaben befragt, sondern bekamen folgenden Fragebogen zur Beantwortung vorgelegt:

*Name:* *Klasse:* *Schule:*

1. Was machst Du im Mathematikunterricht besonders gern?
   a) Kopfrechnen
   b) Schriftliches Rechnen (Aufgaben ohne Text)
   c) Lösen von Textaufgaben (Aus der Prozentrechnung? Aus der Gleichungslehre? Oder aus anderen Gebieten?)
   d) Lösen von Gleichungen (ohne Text)
   e) Geometrische Konstruktionen
   f) Beweisen von Lehrsätzen
   g) Geometrische Berechnungen (Flächeninhalt, Volumen usw.)
   h) Andere, hier nicht aufgezählte Arbeiten (welche?)
2. Warum machst Du die von Dir genannten Dinge gern?
3. Was machst Du im Mathematikunterricht nicht gern?
4. Warum nicht?

Die unter a) bis h) angeführten Beispiele waren einerseits als Hilfe zum Verstehen der Fragestellung durch die Schüler gedacht, bewirkten andererseits aber gleichzeitig eine weitgehende Normierung der Schülerantworten, wodurch die spätere Auswertung erleichtert worden ist. Es kam im übrigen nicht darauf an, unbe-

[1]) Vgl.: *Lehrplan für Mathematik – Klassen 6 bis 8.* A. a. O., S. 22.
[2]) Vgl.: a) *Lehrplan für Mathematik – Klassen 6 bis 8.* A. a. O., S. 8 und 9.
b) *Lehrplan für Mathematik – Klassen 9 und 10.* A. a. O., S. 10.
c) *Lehrplan für Mathematik – Erweiterte Oberschulen – Klassen 11 und 12.* A. a. O., S. 8.

dingt alle im Mathematikunterricht vorkommenden Tätigkeiten zu erfassen. Genau so wenig war es notwendig, daß die angeführten Beispiele irgend eine logische Ordnung besaßen. Von Interesse für unsere Untersuchungen war in erster Linie der Punkt f), alles andere diente im Grunde nur als notwendiges Beiwerk.
Die Schüler erhielten für das Beantworten des Fragebogens den Hinweis, daß sowohl auf Frage 1 als auch auf Frage 3 eine beliebige Anzahl von Tätigkeiten genannt werden können (einschließlich der Antworten „alles" bzw. „nichts"). Ferner erfuhren die Schüler, daß sie die als Beispiele genannten Punkte a) bis g) keineswegs entweder im positiven oder im negativen Sinne anführen mußten. Es war durchaus zulässig, eine beliebige Anzahl der Punkte a) bis g) weder als beliebt noch als unbeliebt zu benennen.
Betrachten wir zunächst das Ergebnis der Befragung aus den Versuchsklassen, in denen insgesamt 166 Schüler erfaßt wurden. Die Tabelle 6 gibt den entsprechenden Überblick.

| | a | b | c | d | e | f | g | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^+$ % | 46 | 64 | 24 | 63 | 35 | 4 | 36 | |
| $n^-$ % | 13 | 6 | 26 | 8 | 29 | 63 | 35 | |

Tabelle 6

Hierbei bedeuten a) bis g) die entsprechenden Tätigkeiten, die im Fragebogen angeführt waren. In der mit „$n^+$" bezeichneten Zeile ist angegeben, welcher Prozentsatz aller Schüler die einzelnen Tätigkeiten als „beliebt" genannt hat, in der mit „$n^-$" bezeichneten Zeile stehen die entsprechenden Prozentsätze negativer Nennungen.
Der Punkt h) ist in der Tabelle nicht mit aufgenommen worden, weil die hierzu erfolgten Antworten der Schüler natürlich unterschiedlich sind. Wir brauchen sie hier nicht weiter zu betrachten.
Aus der Tabelle 6 ist zu erkennen, daß das Beweisen — Punkt f) — im Gegensatz zu allen anderen Tätigkeiten sehr häufig abgelehnt und nur selten als beliebt angegeben wurde.

Welche Gründe führten die Schüler dafür an?
Zunächst war aus ihren Antworten zu erkennen, daß sie vor allem an Beweisaufgaben gedacht haben — weniger an die gemeinsame Erarbeitung von Beweisen im Unterricht. Ansonsten waren die Begründungen in der Formulierung zwar unterschiedlich, im Inhalt aber vielfach übereinstimmend. Als häufigster Grund für die Ablehnung des Beweisens trat das Nichtkönnen auf — in verschiedener Weise ausgedrückt: „Ich kann es nicht"; „Ich weiß immer nicht, wo ich anfangen soll"; „Es ist zu kompliziert"; „Es ist undurchsichtig" u. ä. Daneben wurde aber auch angegeben: „Es ist zu langweilig"; „Es macht keinen Spaß"; „Man muß zu viel überlegen". Als zustimmende Begründungen wurden angeführt: „Es macht Spaß"; „Es gibt etwas zum Denken".
Zum Vergleich seien hier einmal die Begründungen angeführt, die von den Schülern hinsichtlich ihrer Einstellung zum Punkt d) — Lösen von Gleichungen —

angegeben wurden, also zu einer deutlich positiv betonten Tätigkeit. Bei den zustimmenden Begründungen überwog die Feststellung, daß es leicht geht — wieder in verschiedener Weise ausgedrückt: „Die Gleichungen sind leicht“; „Sie lassen sich schnell ausrechnen“; „Ich kann es gut“; „Es ist leichter als anderes“ u. ä.
Daneben trat auf: „Man braucht es im späteren Leben“; „Man braucht nicht zu knobeln bzw. nicht zu überlegen“. Ablehnende Stellungnahmen gab es zu diesem Punkt nur wenige. Als Begründungen wurden dazu genannt: „Ich habe es nicht verstanden“; „Es fällt mir schwer“; „Es macht keinen Spaß“.
Die starke Ablehnung der Beweisaufgaben resultierte also offensichtlich aus der Tatsache, daß die große Mehrheit der Schüler diese Aufgaben auf Grund der unzureichenden Vorarbeit in den vorangegangenen Klassenstufen nicht bewältigen konnte und sich dessen auch recht gut bewußt war. Selbst von jenen Schülern, deren Arbeiten in die Leistungsgruppen II oder I eingeordnet werden konnten, fühlten sich viele recht unsicher und lehnten die Beweisaufgaben ab.
Wie war die Situation in anderen Klassen?
Betrachten wir dazu die Ergebnisse der Befragung in drei Kontrollklassen, in denen Beweise nur in der damals üblichen Art im Unterricht erarbeitet, von den Schülern aber nicht verlangt worden waren.

Die Tabelle 7 gibt eine Übersicht über die Ergebnisse.

| | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^+$ % | 62 | 93 | 40 | 71 | 65 | 33 | 58 |
| $n^-$ % | 20 | 4 | 40 | 9 | 25 | 36 | 27 |

Tabelle 7

Betrachten wir vor allem wieder den uns interessierenden Punkt f) — das Beweisen. In den Versuchsklassen wurde es vorwiegend abgelehnt und nur von wenigen als beliebt bezeichnet, in den Kontrollklassen sind Beliebtheit und Ablehnung etwa gleich oft vertreten. Der Unterschied zwischen beiden Schülergruppen ist sehr deutlich.
Auch die Begründungen der Schüler sahen in den Kontrollklassen anders aus. Während die Schüler der Versuchsklassen ihre Ablehnung des Beweisens vor allem mit Nichtkönnen motiviert hatten, trat dieses Argument in den Kontrollklassen nur einmal auf. Hier wurde statt dessen vorwiegend gesagt: „Es ist langweilig und macht keinen Spaß.“

Die Ergebnisse der Befragung (einschließlich der von den Schülern angegebenen Begründungen) bestätigten noch einmal die schon auf Grund der Beweisversuche getroffene Feststellung, daß die in Klasse 7 zum normalen Mathematikstoff gehörenden Beweise im allgemeinen zu schwierig waren, um bei den bis dahin praktisch unvorbereiteten Schülern Fähigkeiten im Beweisen entwickeln zu können. Verlangte man von den Schülern trotzdem entsprechende Leistungen, so überforderte man sie und erzeugte nur eine starke Abneigung gegen mathematische Beweisführungen. Es ist klar, daß eine solche negative Haltung der Schüler

auch spätere Versuche, sie mit dem Beweisen vertraut zu machen, ungünstig beeinflussen kann. Man muß also darauf bedacht sein, eine Überforderung der Schüler zu vermeiden. Bei der früher vorherrschenden Gestaltung der Beweisführung im Mathematikunterricht in Klasse 7 war diese Bedingung (keine Überforderung der Schüler) durchaus erfüllt, wie die Ergebnisse der Befragung in den Kontrollklassen und vor allem die dort gegebenen Begründungen gezeigt haben. Es wurde aber dabei — wie die Beweisversuche ergeben haben — kein positiver Bildungseffekt erreicht.
Unser gegenwärtiger Mathematiklehrplan bietet gute Voraussetzungen dafür, eine Überforderung der Schüler im Hinblick auf Beweisführungen zu vermeiden und trotzdem — oder gerade dadurch — ihr Verständnis für Beweise und ihre Fähigkeiten im Führen von Beweisen zu entwickeln. Dabei ist besonders zu beachten, daß der Gefahr der Überforderung der Schüler nicht etwa durch ein zeitliches Hinausschieben von Beweisführungen begegnet wird. Ein solcher Weg wäre keine Lösung, sondern würde das Problem nur noch verschärfen: in höheren Klassenstufen werden die zu behandelnden mathematischen Gegenstände einschließlich der zugehörigen Beweisführungen im allgemeinen immer komplizierter, so daß bis dahin unvorbereitete Schüler immer weniger Chancen hätten, Fähigkeiten im Beweisen zu erwerben. Es würde außerdem immer schwieriger, den Schülern gegenüber die Beweisnotwendigkeit zu motivieren, nachdem sie sich daran gewöhnt hätten, „daß es auch ohne Beweisen geht". Schließlich muß noch bedacht werden, daß die Entwicklung von Fähigkeiten stets ein langfristiger Prozeß ist. Wir würden uns selbst ungünstige Bedingungen schaffen, wenn wir nicht schon von Klasse 1 an — wie es in unserem Lehrplan fixiert ist — zielstrebig auf das Verstehen, Wiedergeben und Führen von Beweisen hinarbeiten wollten.
Das Problem eventueller Überforderungen der Schüler kann also nur so gelöst werden, daß wir die Möglichkeiten jeder Klassenstufe voll nutzen und dadurch optimale Voraussetzungen für die Bewältigung der schrittweise steigenden Anforderungen schaffen.

## 3.4. Schritte zur Entwicklung von Fähigkeiten im Beweisen

Wir wollen uns nunmehr der Frage zuwenden, was man im Unterricht tun muß, um die Schüler schrittweise in das Beweisen mathematischer Aussagen einzuführen und allmählich entsprechende Fähigkeiten bei ihnen zu entwickeln.
Verschiedene Teilantworten auf diese Frage sind bereits im Kapitel 2. (↗ 55ff.) sowie in den Abschnitten 3.2. (↗ 76ff.) und 3.3. (↗ 88ff.) gegeben worden. Es ist aber notwendig, sich die wichtigsten Aspekte des Problems zusammenhängend vor Augen zu führen und dabei nach Möglichkeit zu einer Art „Stufenprogramm" für die Einführung der Schüler in das Beweisen mathematischer Aussagen zu gelangen.

Zunächst sind zwei Vorbemerkungen am Platze:

a) Im Abschnitt 3.3.6. (↗ 100ff.) ist bereits darauf hingewiesen worden, daß die Bemühungen um eine Verbesserung der Schülerleistungen im Beweisen mathematischer Aussagen einerseits auf die Erhöhung des allgemeinen Niveaus der mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten der Schüler gerichtet sein müssen (Klarheit in der Begriffsbildung, sprachliche Schulung einschließlich der Beherrschung der mathematischen Terminologie u. ä.), andererseits aber auch auf die Schaffung spezieller Voraussetzungen für das Verständnis mathematischer Beweise bei den Schülern. Im Interesse einer inhaltlichen und auch umfangsmäßigen Begrenzung unserer Überlegungen wollen wir uns hier im wesentlichen nur mit dem zuletzt genannten Problem der Schaffung spezieller Voraussetzungen befassen.

b) Es ist bekannt, daß der Unterricht ein sehr komplexer Prozeß ist und daß der Unterrichtserfolg von sehr vielen Faktoren abhängt. Wir wollen uns hier nur mit einigen dieser Faktoren beschäftigen. Deshalb werden unsere Ergebnisse auch nur den Charakter von notwendigen Bedingungen für einen guten Unterrichtserfolg auf dem Gebiet des Beweisens haben. Wir können nicht erwarten, daß die Beachtung und Berücksichtigung unserer Resultate im Unterricht in jedem Falle schon hinreichend für das Eintreten entsprechender Erfolge sein muß. Hier spielen nicht nur die oben erwähnten Fragen des allgemeinen Niveaus der Schülerkenntnisse mit eine Rolle, sondern darüber hinaus auch die didaktische Gestaltung des Unterrichts, das Lehrer-Schüler-Verhältnis, die Arbeitsatmosphäre in der jeweiligen Klasse und vieles andere mehr. Trotz dieser Einschränkungen — deren wir uns stets bewußt bleiben wollen — dürften die folgenden Überlegungen doch von Nutzen sein.

### 3.4.1. Propädeutik des Beweisens in den unteren Klassen

Eine der wichtigsten Schlußfolgerungen aus den im Abschnitt 3.3. (↗ 88ff.) geschilderten Versuchen der Jahre 1962/63 war die Forderung, die Schüler schon von Klasse 1 an zielstrebig auf das Beweisen vorzubereiten. Das ist möglich, indem man sie von Anfang an daran gewöhnt, ihre Aussagen zu begründen, sachlich zu argumentieren und dabei eine kritische und selbstkritische Haltung einzunehmen. Es kann festgestellt werden, daß die neuen Lehrpläne und Lehrbücher dieser Forderung entsprechen und daß auch in der Unterrichtspraxis unserer Schulen das Begründen, Argumentieren und kritische Werten schon von Klasse 1 ab zu einem wesentlichen Prinzip des Mathematikunterrichts geworden ist. In Übereinstimmung mit den Erkenntnissen der Psychologie (vgl. Kapitel 2., ↗ 55ff.) stützt man sich dabei anfangs auf materielle Handlungen (Arbeiten mit Stäbchen, Plättchen oder ähnlichem Material), bevor zu abstrakteren Denkoperationen übergegangen wird.
Es dürfte wohl überflüssig sein, das unterrichtliche Vorgehen hier in allen Einzelheiten zu beschreiben, da es den Mathematiklehrbüchern und den zugehörigen Unterrichtshilfen entnommen werden kann. Einige Beispiele von Begründungen und Argumentationen aus dem Mathematikunterricht der unteren Klassen wollen wir dennoch betrachten, um deutlich zu machen, in welchem Verhältnis diese Begründungen zum eigentlichen Beweisen stehen und inwiefern sie somit als eine Propädeutik des Beweisens betrachtet werden können.

a) Schon in Klasse 1 treten Aufgaben folgender Art auf:
Setze zwischen die Zahlen 6 und 9 das richtige Zeichen ($<$, $>$ oder $=$) und begründe deine Antwort!

Die schriftliche Lösung sieht dann etwa so aus:

$6 < 9$, denn $6 + 3 = 9$.

Von den Schülern wird erwartet, daß sie hierzu als weitergehende Begründung demonstrieren und möglichst auch erklären können (sinngemäß):

Ich habe sechs blaue und neun rote Stäbchen.
Wenn ich blaue und rote Stäbchen paarweise zusammen lege, bleiben rote Stäbchen übrig. Ich habe also weniger blaue Stäbchen als rote. Wenn ich aber noch drei blaue Stäbchen dazu nehme, habe ich genauso viel blaue Stäbchen wie rote.

Die Begründung des Urteils „$6 < 9$" stützt sich hier also auf Handlungen in der materiellen Ebene, auf das Operieren mit konkreten Mengen. Später gelingt es den Schülern dann auch, nur mit Zahlen (also eine Abstraktionsstufe höher) zu arbeiten und (sinngemäß) wie folgt zu argumentieren:

$6 < 9$, denn man muß zu 6 noch eine Zahl addieren, nämlich die Zahl 3, um 9 zu erhalten: $6 + 3 = 9$.

Diese Begründung stützt sich eigentlich auf die (in Klasse 1 gewöhnlich nicht explizit formulierte) Definition der Kleinerbeziehung für natürliche Zahlen:

$a < b \underset{\text{Def.}}{=}$ Es gibt eine von Null verschiedene Zahl $c$, so daß gilt: $a + c = b$

Im vorliegenden Fall wird ein solches $c$ angegeben (nämlich die 3) und dann aus der damit bewiesenen Gültigkeit von $\exists\, c\, (c \neq 0 \wedge 6 + c = 9)$ auf $6 < 9$ geschlossen.

Es ist zwar kaum anzunehmen, daß den Schülern in Klasse 1 diese Schlußweisen bewußt werden. Aber darum geht es uns hier auch gar nicht. Wir wollten uns lediglich klar machen, welche Vorstufen oder welche Elemente des Beweisens an dieser Stelle schon immanent in der Begründung enthalten sind, nämlich:

— Das Zurückgehen auf eine Definition;
— die Ersetzung von freien Variablen (als Zeichen für beliebige Zahlen) durch spezielle Werte;
— das Schließen auf eine Existenzaussage durch Angabe eines entsprechenden Elements;
— das Schließen aus einer Implikation
[aus „$\exists\, c\, (c \neq 0 \wedge 6 + c = 9) \rightarrow 6 < 9$"
und „$\exists\, c\, (c \neq 0 \wedge 6 + c = 9)$"
auf „$6 < 9$"]

Selbstverständlich erscheinen diese einzelnen Elemente in der Begründung nur in stark verkürzter und ineinander verflochtener Form, wie wir das für das Beweisen allgemein schon festgestellt haben.

b) Eine Aufgabenstellung, die der vorigen ähnelt, ist folgende:
Setze zwischen die Produkte $768 \cdot 39$ und $768 \cdot 42$ das richtige Zeichen

($<$, $=$ oder $>$), ohne die Produkte auszurechnen! Begründe deine Antwort!

Als Lösung gilt dann etwa:

$768 \cdot 39 < 768 \cdot 42$, denn $39 < 42$.

Natürlich ist das nur eine Kurzform der Begründung. Die Schüler müssen in der Lage sein, diese Kurzform ungefähr in folgender Weise näher zu erläutern:

Wir wissen, daß $a \cdot b$ kleiner ist als $a \cdot c$, wenn $b < c$ und $a \neq 0$ ist. Ein solcher Fall liegt hier vor: $a = 768$, $b = 39$ und $c = 42$. $39 < 42$, also ist $768 \cdot 39 < 768 \cdot 42$.

Es ist sehr wichtig, daß die Schüler bei Aufgaben dieser (und auch anderer) Art immer wieder einmal aufgefordert werden, eine ausführliche Begründung zu geben. Wird das versäumt — beschränkt man sich also nur auf die oben angegebene Kurzform — so wird das Begründen leicht zu einem inhaltsleeren Formalismus. Die Schüler vergessen, worauf man sich eigentlich stützt, und es kann dann leicht geschehen, daß sie falsche Analogieschlüsse ziehen, etwa:

$9036:12 < 9036:18$, denn $12 < 18$.

Wenn wir uns wieder überlegen, welche Gedankengänge in der oben angegebenen Begründung enthalten sind, so finden wir:

— Das Stützen auf einen Satz (Monotoniegesetz für die Multiplikation natürlicher Zahlen);
— die Anwendung des Satzes auf spezielle Zahlen (Schließen aus „Für alle gilt . . .“ mit Ersetzung der Variablen durch Zahlen);
— die Benutzung der Abtrennungsregel (Schließen aus einer Implikation).

**c)** Weitgehend die gleichen Schlußweisen wie in den Beispielen a) und b) treten auf, wenn Schüler ihr Vorgehen bei folgender Rechnung begründen sollen:

$3 \cdot 26 = 26 \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$

Auch hier werden Sätze (Kommutativgesetz der Multiplikation, Distributivgesetz) auf spezielle Zahlen angewandt.

**d)** Ähnlich ist es auch bei folgender Aufgabe:

Ermittle alle natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $128 + 3 \cdot x < 146$ erfüllen!

Man findet zunächst, daß $3 \cdot x < 18$ sein muß, weil für $3 \cdot x \geqq 18$ die Summe $128 + 3 \cdot x$ gleich oder größer als 146 wird (nach dem Monotoniegesetz der Addition). Daraus ergibt sich, daß $x < 6$ sein muß, weil für $x \geqq 6$ das Produkt $3 \cdot x$ größer oder gleich 18 wäre (nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation).

**e)** Ein neuer Aspekt tritt bei folgender Frage auf:

Ist 89 eine Primzahl?

Um diese Frage zu beantworten, müssen die Schüler sich zunächst die Definition des Begriffs „Primzahl“ vergegenwärtigen. Daraus ergibt sich dann die Aufgabe, die Zahl 89 auf echte Teiler zu untersuchen. Das kann zwar — je nach den Vorkenntnissen der Schüler — in unterschiedlicher Weise geschehen, wird aber doch irgendwie auf die Betrachtung aller in Frage kommenden Zahlen hinauslaufen. Da dies nur endlich viele sind (es genügt bekanntlich, die Zahl 89 auf Teilbarkeit durch 2, 3, 5 und 7 zu untersuchen), kann durch unmittelbares Überprüfen jeder einzelnen dieser Zahlen eine Aussage über alle getroffen werden, nämlich:

Keine Zahl ist echter Teiler von 89.
(Das bedeutet ja: Alle Zahlen sind nicht echte Teiler von 89.)

Daraus ergibt sich dann als Antwort auf die anfangs gestellte Frage: 89 ist eine Primzahl.
Hier wird also zur Begründung u. a. das Schließen auf eine Allaussage herangezogen, allerdings für den Fall, daß nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht kommen.

f) Ein weiterer neuer Gesichtspunkt ergibt sich bei Aufgaben wie der folgenden:
„Jede natürliche Zahl hat einen unmittelbaren Vorgänger".
Ist diese Aussage wahr oder falsch? Begründe dein Urteil!

Die Antwort fällt den Schülern der Unterstufe im allgemeinen nicht schwer:
Diese Aussage ist falsch, denn die Null besitzt keinen Vorgänger.
Mit dieser Antwort zeigen die Schüler, daß sie folgendes erfaßt haben (ohne es unbedingt schon allgemein erklären bzw. formulieren zu können):

Eine Allaussage ist widerlegt, wenn man wenigstens ein Gegenbeispiel angeben kann.

Hier steckt folgende in der Mathematik gebräuchliche Auffassung des Begriffs „widerlegen" dahinter:

Eine Aussage $\mathsf{H}$ gilt genau dann als widerlegt, wenn die Negation von $\mathsf{H}$ bewiesen ist.

Die Negation unserer oben angegebenen Aussage lautet:
„Es gibt wenigstens eine natürliche Zahl, die keinen unmittelbaren Vorgänger besitzt."

Diese Existenzaussage kann durch Angabe einer derartigen Zahl — es ist die Zahl Null — bewiesen und die ursprüngliche Aussage damit widerlegt werden.
Es sei hier am Rande vermerkt, daß in der Alltagspraxis eine Aussage nicht selten schon dann als widerlegt angesehen wird, wenn man die für sie gegebene Begründung (den Beweis) entkräftet hat. Das genügt aber eben nicht: die betreffende Aussage wird dadurch zwar zu einer unbewiesenen Behauptung, aber wirklich widerlegt ist sie erst, wenn ihr logisches Gegenteil bewiesen wurde.

g) Als letztes Beispiel wollen wir folgende Aufgabe betrachten:

Dem Punkt $A$ sei der Punkt $A'$ und dem Punkt $B$ der Punkt $B'$ zugeordnet (Bild 21).
Ist diese Zuordnung eine Verschiebung?

Die Antwort auf diese Frage bereitet den Schülern im allgemeinen keine Schwierigkeiten:

Es kann keine Verschiebung sein, denn die Verbindungsgeraden $AA'$ und $BB'$ sind nicht parallel zueinander.

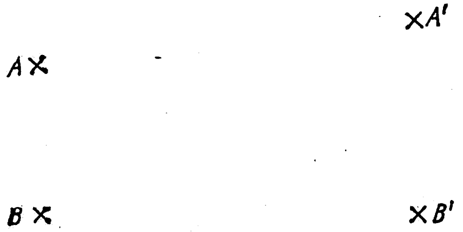



Bild 21

Analysiert man diese Antwort, so zeigt sich, daß ihr ein Kontrapositionsschluß zugrunde liegt:

Wenn es eine Verschiebung wäre, müßten die Verbindungsgeraden zueinander parallel sein. Das ist aber nicht der Fall. Also ist die gegebene Zuordnung keine Verschiebung.

Allerdings darf man nicht ohne weiteres annehmen, daß wirklich alle Schüler die Antwort auf diesem Abstraktionsniveau finden. Im Gegenteil: durch das vorgegebene Bild trägt die Aufgabe stark anschaulichen Charakter. Es ist naheliegend, daß die Schüler ihre Antwort unmittelbar an diesem Bild „ablesen", indem sie sie mit anschaulichen Vorstellungen von Verschiebungen vergleichen, die sie im vorangegangenen Unterricht kennengelernt haben.

Diese Beispiele sollen genügen. Sie führen uns zu einigen *Einsichten über die Propädeutik des Beweisens*, die wir festhalten wollen:

1. Die Hauptaufgabe der Propädeutik auf dem Gebiet des Beweisens liegt darin, die Schüler an die Notwendigkeit des Begründens mathematischer Aussagen zu gewöhnen.
2. In Abhängigkeit von der Denkentwicklung der Kinder (↗ 59ff.) stützt sich das Begründen zunächst auf materielle Handlungen (vgl. Beispiel 1, ↗ 108), in zunehmendem Maße aber auch auf sogenannte materialisierte Handlungen — auf das Arbeiten an Abbildungen, auf das Operieren mit bestimmten Zahlen u. ä. — die dann mehr und mehr durch abstrakt-logische Operationen ergänzt bzw. auch abgelöst werden.
3. Der Unterschied zwischen dem Begründen und dem Beweisen ist nicht im Grad der mathematischen Strenge zu suchen. Begründungen, die vom mathematischen oder logischen Standpunkt aus gesehen nicht stichhaltig sind, werden auch in den unteren Klassen (in der Phase der Propädeutik des Beweisens) nicht akzeptiert. Es zeigt sich vielmehr, daß das Begründen von Anfang an ein Beweisen von Aussagen ist, allerdings — und das ist der Unterschied zu den in den mittleren und höheren Klassen geführten „eigentlichen" Beweisen — handelt es sich in den unteren Klassen ausschließlich um den Beweis von

Aussagen über einzelne Objekte oder um den direkten Beweis von Existenzialaussagen. Der Schritt von der sogenannten Propädeutik zum „eigentlichen" Beweisen wird getan, sobald Beweise für Universalaussagen oder indirekte Beweise für Existenzialaussagen im Unterricht geführt werden.

4. Eine gut aufgebaute Propädeutik des Beweisens (in dem oben erläuterten Sinne) ermöglicht es, die Schüler bis zum Beginn des „eigentlichen" Beweisens mit verschiedenen Prinzipien, Gedankengängen und Schlußweisen vertraut zu machen, die bei Beweisführungen immer wieder benötigt werden. Es handelt sich dabei, wie unsere Beispiele gezeigt haben, vor allem
   — um die Gewohnheit, sich bei Begründungen auf Definitionen oder Sätze zu stützen;
   — um die Einsicht, daß eine Universalaussage durch ein einziges Gegenbeispiel widerlegt werden kann;
   — um das Verständnis der logischen Äquivalenz von
     $\sim \forall\, a\, \mathsf{H}(a)$ mit $\exists\, a \sim \mathsf{H}(a)$ bzw. von
     $\sim \exists\, a\, \mathsf{H}(a)$ mit $\forall\, a \sim \mathsf{H}(a)$;
   — um das Schließen aus Universalaussagen auf spezielle Beispiele;
   — um den Gebrauch der Abtrennungsregel beim Schließen;
   — um die Anwendung des Kontrapositionsschlusses beim Widerlegen von Behauptungen;
   — um den Beweis von Existenzialaussagen durch unmittelbare Angabe eines entsprechenden Elements;
   — um das Schließen auf Universalaussagen im Falle endlich vieler Elemente durch Überprüfung aller Möglichkeiten.

   Selbstverständlich werden diese Schlußweisen in den unteren Klassen nicht selbst zum Gegenstand der Betrachtungen gemacht, sondern nur im Zusammenhang mit dem Begründen verschiedenster Aussagen oder Verfahrensweisen immanent geübt. Die Schüler sollen das Begründen lernen, ohne über das Begründen direkt belehrt zu werden.

### 3.4.2. Unterscheidung von Definitionen und Sätzen

Mit dem Schritt von der Propädeutik des Beweisens zum „eigentlichen" Beweisen entsteht die Frage, ob dieser Übergang im Unterricht fließend und für die Schüler fast unmerklich gestaltet werden soll, oder ob es zweckmäßiger ist, einen deutlich sichtbaren Einschnitt zu machen und mit den Schülern bestimmte Fragen, die mit dem Beweisen zusammenhängen, direkt zu besprechen. Eine dieser Fragen ist die Abgrenzung derjenigen sprachlichen Gebilde, die ihrem Charakter nach einen Beweis erfordern (also der sog. Sätze), von anderen sprachlichen Gebilden, bei denen die Frage nach einem Beweis unangemessen ist (hier sind vor allem Definitionen gemeint, aber auch Terme, Algorithmen, Aussageformen).
Feststehen dürfte auf jeden Fall, daß ein echtes Verständnis von Beweisführungen bei den Schülern nur erzielt werden kann, wenn sie vor allem den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen erfaßt haben. Solange beides für die Schüler nur den Charakter sogenannter „Merksätze" besitzt (wie es in älteren Lehrbüchern

oft hieß), muß unklar bleiben, warum in manchen Fällen ein Beweis geführt wird, in anderen aber nicht. Nun wäre es natürlich denkbar, daß die Schüler diesen Unterschied im Laufe des Mathematikunterrichts erfassen, auch wenn sie nicht speziell darüber belehrt worden sind. Das scheint aber nur in sehr begrenztem Maße der Fall zu sein, wie die Ergebnisse von Untersuchungen zeigen, die innerhalb eines Zeitraums von mehreren Jahren (1964 bis 1966) gewonnen worden sind. Wir wollen uns die Anlage dieser Erhebungen und einige Resultate etwas genauer ansehen.

### Ergebnisse von Befragungen

Das Gemeinsame aller Versuche bestand darin, daß den beteiligten Schülern Ausdrücke (hier im Sinne von beliebigen sprachlichen Gebilden gemeint, nicht nur auf Aussagen oder Aussageformen beschränkt) vorgelegt wurden, von denen sie jeweils entscheiden sollten, ob es sich um mathematische Behauptungen (um Sätze) handelt, die demnach bewiesen werden müssen, oder ob ein Beweis nicht erforderlich ist. Den Schülern wurde sinngemäß erklärt:
„Ihr sollt von jedem einzelnen Ausdruck, der euch vorgelegt wird, entscheiden, ob er eine mathematische Behauptung darstellt, die man begründen bzw. beweisen muß. Dabei geht es nicht darum, ob ihr vielleicht schon einmal einen Beweis dafür durchgeführt habt und ihn deshalb nicht noch einmal zu führen braucht, sondern nur darum, ob überhaupt ein Beweis erforderlich ist oder nicht. Antwortet jeweils nur mit ‚ja', ‚nein' oder auch mit ‚ich weiß nicht' (falls ihr euch nicht entscheiden wollt). Wenn ihr könnt, begründet eure Ansicht."
Diese Aufgabenstellung berücksichtigt den Umstand, daß zum Zeitpunkt der Versuchsdurchführung in der Regel keine systematische Einführung der Begriffe „Satz", „Definition", „Term", „Beweis" im Unterricht erfolgte. Es war deshalb auch nicht möglich, die Schüler direkt zu fragen, welche der vorgelegten Ausdrücke Sätze darstellen, welche Ausdrücke Definitionen waren usw. Durch die Frage nach der Beweisnotwendigkeit konnte aber doch weitgehend geklärt werden, ob die Schüler auch ohne explizite unterrichtliche Behandlung der Problematik wesentliche Unterschiede zwischen Definitionen und Sätzen erfaßt hatten. Die Auswahl der Ausdrücke ist so erfolgt, daß sowohl arithmetische als auch geometrische Sachverhalte, sowohl Sätze als auch Definitionen, Terme und Aussageformen auftraten.
Im einzelnen handelte es sich um folgende Ausdrücke:

(1) In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich 180°.

(2) Ein Parallelogramm ist ein Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten zueinander parallel sind.

(3) Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.

(4) $(2a + 3b - 4c) \cdot 5y$

(5) $5x - 16 = 19$

(6) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(7) $a^2 = a \cdot a$

(8) Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.

Es sei hier eingefügt, daß die den Schülern vorgelegte Aufgabenstellung streng genommen etwas unvollständig war. Ob ein sprachlicher Ausdruck ein mathematischer Satz ist, der eines Beweises bedarf, hängt nicht nur von diesem Ausdruck allein ab, sondern auch davon, welche Aussagen als Axiome benutzt werden, wie die Definitionen für vorkommende Begriffe lauten usw. Man kann die Frage nach der Beweisnotwendigkeit also eigentlich nur dann eindeutig beantworten, wenn man sich auf einen ganz bestimmten deduktiven Aufbau der entsprechenden mathematischen Disziplin bezieht. Dieser Bezug ist in den Versuchen nicht ausdrücklich angegeben worden, war aber doch insofern vorhanden, als stillschweigend der im damaligen Mathematikunterricht übliche Aufbau des Stoffs als Grundlage für die Beantwortung der Fragen angesehen wurde. Danach sind nur die Ausdrücke (1), (3), (6) und (8) Sätze (also zu beweisen). Bei den übrigen Ausdrücken handelt es sich um Definitionen — (2) und auch (7), um einen Term (4) und um eine Gleichung mit einer Variablen (5), also um Dinge, bei denen die Frage nach einem Beweis von vornherein unangemessen ist.
Eine erste Erhebung ist 1964 in acht Klassen der Klassenstufe 8 durchgeführt worden. Es wurden dabei insgesamt 231 Schüler erfaßt. Die Tabelle 8 gibt einen quantitativen Überblick über das Versuchsergebnis. Die erste Zeile der Tabelle enthält die Nummern der einzelnen Ausdrücke und die nächste Zeile die Prozentsätze an richtigen Antworten (wobei eben bei den Nummern 1, 3, 6 und 8 die Antwort „ja" richtig war, bei den Nummern 2, 4, 5 und 7 dagegen die Antwort „nein" als richtig gezählt wurde).

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *r* % | 57 | 70 | 47 | 56 | 24 | 39 | 77 | 48 |

Tabelle 8

Wie die Tabelle zeigt, herrschte bei vielen Schülern Unklarheit und Unsicherheit in der Beantwortung der gestellten Fragen. Das zeigen auch die Begründungen der Schüler (nur 8% aller richtigen Entscheidungen sind richtig begründet worden):

Zu (1) Satz über die Innenwinkel des Dreiecks (Richtige Antwort: ja)
„Ja; eine Behauptung muß bewiesen werden."
„Ja; die Winkel $\alpha + \beta$ betragen je 45° und der Winkel $\gamma$ 90°."
„Nein; beträgt die Summe nicht 180°, so ist es kein Dreieck."

Zu (2) Definition des Parallelogramms (Richtige Antwort: nein)
„Ja; wenn sie parallel zueinander verlaufen, müssen sie gleich sein."
„Nein; sonst wäre es kein Parallelogramm."

Zu (3) Satz über Wechselwinkel (Richtige Antwort: ja)
„Nein; da bei geschnittenen Parallelen die Wechselwinkel stets gleich groß sind, erübrigt sich ein Beweis."

Zu (4) Term (Richtige Antwort: nein)
„Ja; Beweis an Hand der binomischen Formel."
„Nein; weil nichts behauptet wurde."

Zu (5) Gleichung mit einer Variablen (Richtige Antwort: nein)
„Nein; Gleichungen haben auf beiden Seiten den gleichen Wert."
„Nein; Bestimmungsgleichung."
„Ja; man muß beweisen, ob wirklich 19 herauskommt."

Zu (6) Binomische Formel (Richtige Antwort: ja)
„Nein; festgelegte Formel."
„Ja; zu einer Formel braucht man immer einen Beweis."

Zu (7) Definition $a^2 = a \cdot a$ (Richtige Antwort: nein)
„Ja; denn ich kann sagen, daß $a \cdot a$ vielleicht $2a$ ergibt."
„Nein; denn $a^2$ bedeutet $a \cdot a$."
„Nein; Flächenformel für das Quadrat."

Zu (8) Teilbarkeitsregel für die 3 (Richtige Antwort: ja)
„Nein; Merkregel."
„Ja; man kann nicht behaupten, was nicht bewiesen ist."

Diese Auswahl von Schülermeinungen zeigt, daß der damals übliche Mathematikunterricht bis zum Ende der Klasse 8 kaum zu zufriedenstellenden Resultaten in der Klärung so wichtiger Fragen wie der Unterscheidung von Definitionen und Sätzen und der Beweisnotwendigkeit geführt hat.
Diese Einschätzung wird erhärtet durch die Ergebnisse einer zweiten Untersuchung, die VOIGT (damals Fachberater für Mathematik im Kreis Sangerhausen) 1965 durchgeführt hat.[1] Er legte in ebenfalls acht Klassen der Klassenstufe 8 den Schülern im wesentlichen dieselben Aufgaben vor, die schon im ersten Versuch benutzt worden waren. Bei dieser zweiten Erhebung wurden 228 Schüler erfaßt. Das Ergebnis gibt Tabelle 9 wieder:

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ % | 59 | 69 | 75 | 50 | 25 | 52 | 61 | 58 |

Tabelle 9

Wie man sieht, stimmen diese Werte weitgehend mit denen der Tabelle 8 überein.
Um festzustellen, wie weit die Resultate dieser Versuche von der Klassenstufe abhängen, ist 1966 eine neue Erhebung durchgeführt worden, wobei insgesamt 757 Schüler der Klassenstufen 6 bis 11 erfaßt worden sind. Dabei zeigten sich zwar gewisse Unterschiede in den Ergebnissen zu einzelnen Aufgaben, insgesamt gesehen waren die Leistungen aber in allen Klassenstufen nahezu gleich. Die Prozentsätze der Gesamtzahlen richtiger Schülerantworten wichen in allen Klassenstufen nur wenig vom Durchschnitt (57%) ab.

[1]) VOIGT: *Auswertung einer Untersuchung über das Beweisen bei Schülern 8. Klassen.* (Unveröffentlichtes Manuskript).

*Die Ergebnisse aller Erhebungen zeigten:*

Ohne direktes unterrichtliches Eingehen auf den Unterschied zwischen einem Satz und einer Definition gelingt es den Schülern im allgemeinen nicht, über diese Frage hinreichende Klarheit zu erlangen.
Mit dieser Feststellung ist natürlich noch nichts darüber ausgesagt, ob eine direkte Behandlung der Thematik im Mathematikunterricht zufriedenstellende Resultate liefert. Wir wollen hier deshalb noch einige weiterführende Versuche darstellen, die uns darüber Aufschluß geben können, was im Unterricht erreicht werden kann.

## Erfahrungen aus Unterrichtsversuchen

Zunächst soll die Fortsetzung des zuletzt geschilderten Versuchs aus dem Jahr 1966 betrachtet werden. Damals sind die Mathematiklehrer der durch den Test erfaßten Klassen über das Gesamtergebnis informiert und mehrere von ihnen gebeten worden, in ihrem weiteren Unterricht den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen stärker als bisher zu beachten und hervortreten zu lassen. Das sollte an Hand des laut Lehrplan zu behandelnden Stoffs geschehen, ohne eine selbständige Stoffeinheit — etwa mit der Überschrift „Definitionen und Sätze" — einzufügen. Nähere Hinweise sind den Lehrern nicht gegeben worden.
Gegen Ende des Schuljahrs sind 392 Schülern jener Lehrer dann erneut acht Ausdrücke vorgelegt worden, von denen sie entscheiden sollten, ob sie einen Beweis erfordern oder nicht. Die Auswahl der Ausdrücke erfolgte nach denselben Prinzipien wie im ersten Versuch.
Das Ergebnis der neuen Befragung ließ keine generelle Verbesserung der Schülerleistungen in der Beurteilung der Beweisnotwendigkeit erkennen. Einigen Zunahmen in der Zahl richtiger Antworten bei bestimmten Ausdrücken standen verschiedene Rückgänge bei anderen Ausdrücken gegenüber, so daß das Ergebnis im ganzen gesehen kaum befriedigen konnte. Es blieb festzustellen, daß die im Versuch angewandte Methode (die ja nur in dem Appell an die Lehrer bestand, im künftigen Unterricht den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen deutlicher hervortreten zu lassen) zwar gewisse Teilerfolge gebracht hatte, daß sie aber nicht geeignet war, die bei den Schülern vorhandenen Wissenslücken und Unklarheiten umfassend und in kurzer Zeit zu beseitigen.
Ein wesentlich günstigeres Resultat lieferte dagegen ein Versuch, der 1964 mit Schülern der Klassenstufe 8 durchgeführt worden ist. Mit diesen Schülern ist im Rahmen eines mathematischen Zirkels die Unterscheidung von Sätzen, Definitionen, Termen usw. direkt besprochen worden, nachdem vorher schon mehrere Sätze bewiesen und auch Definitionen eingeführt worden waren. Die Behandlung der Frage begann damit, daß den Schülern einige Ausdrücke diktiert wurden, u. a.:

(1) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.

(2) Ein Rechteck ist ein Viereck, in dem alle vier Winkel 90° betragen.

(3) $(x - y)^2 : (x + y)^2$

Sie erhielten dazu als „Hausaufgabe" die Aufforderung:

> „Überprüfe, welche dieser Ausdrücke Behauptungen darstellen, die man beweisen müßte!"

Es wurde noch erläutert, daß es hierbei nicht darum geht, welche Behauptungen im Unterricht oder im Zirkel eventuell schon einmal bewiesen worden sind — so daß sie nun keines Beweises mehr bedürfen —, sondern nur darum, welcher der drei Ausdrücke im Prinzip einen Beweis erfordert, unabhängig davon, ob ihn die Schüler kennen oder nicht.
Bei der nächsten Zusammenkunft sind die Schülermeinungen dann diskutiert worden, wobei besonders darauf geachtet wurde, daß die Schüler ihre Ansichten auch begründeten. Beim Ausdruck (2) machte sich dabei ein längeres Verweilen notwendig:
Einige Schüler neigten dazu, (2) als zu beweisende Behauptung anzusehen. Es zeigte sich, daß diese Schüler zwar eine anschauliche Vorstellung davon hatten, was ein Rechteck ist, aber zunächst keine Definition dafür angeben konnten. Es entwickelte sich eine Diskussion, in deren Verlauf geklärt wurde, daß (2) ein zu beweisender Satz sein kann, wenn der Begriff des Rechtecks beispielsweise als Parallelogramm, in dem ein Winkel 90° beträgt, definiert ist.
Im weiteren Verlauf wurden den Schülern noch andere „Ausdrücke" vorgelegt, deren Charakter (Satz, Definition o. a.) sie bestimmen sollten. Auf zwei dieser Ausdrücke wollen wir hier noch etwas eingehen.

(4) $3x - 7 = 29$

Dieses Beispiel löste eine längere Diskussion aus, da die Schüler zunächst recht unterschiedliche Auffassungen vertraten. Einige hielten (4) für einen Rechenausdruck („man kann es ausrechnen"), andere nannten (4) eine Gleichung, konnten aber nicht sagen, ob sie bewiesen werden muß oder nicht, wieder andere enthielten sich überhaupt der Stimme. Ein Schüler bezeichnete (4) schließlich als zu beweisende Behauptung.

Er begründete seine Meinung wie folgt:

> „Es wird doch behauptet, daß das Produkt von 3 und $x$ vermindert um 7 gleich 29 ist."

Auf die Frage:

> „Und ist diese Behauptung denn richtig?"

gab es erneut Unsicherheit unter den Schülern. Sie kamen dann zu der Ansicht:

> „Nein, zumindest nicht immer."

Daraus schlossen sie:

> „Also wird man es wohl auch nicht allgemein beweisen können."

Ein anderer Schüler kam dem wirklichen Sachverhalt schon recht nahe, als er erklärte:

> „Wenn jemand sagt, ‚es gilt für jedes $x$', könnte man ihm beweisen, daß er unrecht hat."

Hieran anknüpfend wurde den Schülern dann erläutert, daß (4) keine Behauptung darstellt. Erst wenn „Für jedes $x$“ oder „Es gibt ein $x$“ dazugesagt wird, handelt es sich um Aussagen, die falsch bzw. wahr sind und dann auch widerlegt bzw. bewiesen werden können.

(5) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie kongruent.

Hier gab es ebenfalls unterschiedliche Auffassungen. Einige Schüler waren der Ansicht, daß (5) eine Definition sei. Andere Schüler bezeichneten (5) als Satz. Es wurde geklärt, daß „kongruent“ im Unterricht als „deckungsgleich“ definiert worden war (Übereinstimmung in allen Stücken) und (5) somit eine zu beweisende Behauptung darstellt.

Nach der Diskussion über die Beispiele wurden die Schüler aufgefordert, selbst Ausdrücke zu nennen und dazu jeweils anzugeben, ob es sich um Sätze, Definitionen oder anderes handelt und ob ein Beweis dazu erforderlich ist. Die Schüler haben hierbei weitgehend richtige Antworten gegeben.

In den weiteren Zusammenkünften des Zirkels ist auf den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen (vor allem im Hinblick auf deren Beweisnotwendigkeit) gelegentlich noch eingegangen worden, ohne allerdings längere Zeit dafür aufzuwenden.

Anschließend haben dann die Zirkelteilnehmer an dem schon weiter oben geschilderten Test (↗ 115f.) teilgenommen, der gerade in jenen Klassen durchgeführt worden ist, denen die Zirkelteilnehmer als Schüler angehörten. (Die Ergebnisse der Zirkelteilnehmer sind in den oben gemachten Angaben allerdings nicht enthalten.) Dadurch war es möglich, den Erfolg der im Zirkel durchgeführten Belehrungen an den Testergebnissen klar abzulesen; denn im normalen Mathematikunterricht waren die Zirkelteilnehmer von den gleichen Lehrern unterrichtet worden wie die übrigen befragten Schüler. Zur Gegenüberstellung der Ergebnisse wollen wir jetzt aber nur diejenigen Schüler als Vergleichsgruppe heranziehen, die am Ende des Schuljahres 1963/64 im Fach Mathematik eine Eins oder eine Zwei erhielten, ohne jedoch an dem erwähnten Zirkel teilgenommen zu haben. Diese Einschränkung ist angebracht, weil es sich auch bei den Zirkelteilnehmern um Schüler handelte, die in Mathematik mit Eins oder Zwei zensiert waren. (Man könnte hier vielleicht einwenden, daß diese beiden Schülergruppen trotzdem nicht voll vergleichbar sind, weil die Teilnahme an einem Mathematikzirkel gewöhnlich nicht nur durch gute Leistungen in diesem Fach bedingt ist, sondern auch noch besonderes Interesse und Vorliebe für Mathematik voraussetzt. Es war aber so, daß viele Schüler aus der Vergleichsgruppe nur deshalb nicht an dem Zirkel teilgenommen hatten, weil sie zeitlich verhindert waren — durch fakultativen Sprachunterricht, durch Training in Sportgemeinschaften und ähnliches. Insofern ist die Gegenüberstellung beider Gruppen durchaus gerechtfertigt.) Die Tabelle 10 gibt eine Übersicht über die Ergebnisse. Sie enthält in der ersten Zeile die Nummern der den Schülern vorgelegten Ausdrücke (die Ausdrücke selbst sind bei der Darstellung des ersten Versuchs schon angegeben worden) und darunter die zugehörigen Werte von $r\%$ für die Schüler der Vergleichsgruppe (V) bzw. für die Zirkelteilnehmer (Z).

| Nr. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r % | V | 62 | 67 | 45 | 58 | 16 | 47 | 75 | 56 |
| | Z | 87 | 93 | 67 | 73 | 60 | 60 | 93 | 73 |

Tabelle 10

Wie man sieht, haben die Zirkelteilnehmer bei jedem einzelnen Ausdruck besser abgeschnitten als die Schüler der Vergleichsgruppe, deren Ergebnis sich übrigens nur wenig von dem der Gesamtpopulation unterscheidet. Natürlich ist dann auch insgesamt gesehen das Ergebnis der Zirkelteilnehmer besser als das der Vergleichsgruppe. Der Leistungsunterschied wird aber erst dann voll sichtbar, wenn man auch die zu den Entscheidungen abgegebenen Begründungen berücksichtigt. Dabei zeigt sich: In der Vergleichsgruppe waren nur 9% der richtigen Antworten richtig begründet, während die Zirkelteilnehmer 55% ihrer richtigen Antworten auch richtig begründeten.

*Man kann also feststellen:*

Die im Zirkel durchgeführte spezielle Belehrung hat trotz des geringen Zeitaufwands dazu geführt, daß die betreffenden Schüler wesentlich besser als zensurenmäßig gleich beurteilte Schüler in der Lage waren, die Beweisnotwendigkeit vorgelegter Ausdrücke zu beurteilen und entsprechend zu begründen.
Damit ist gezeigt, daß die insgesamt wenig befriedigenden Ergebnisse der in den Jahren 1964 bis 1966 durchgeführten Befragungen nicht durch ein prinzipiell zu hohes Anforderungsniveau bedingt waren, sondern daß sie auf Versäumnisse des damaligen Mathematikunterrichts zurückzuführen sind. Gleichzeitig ist durch die hier dargestellten Versuche deutlich geworden, auf welchem Wege den Schülern die notwendige Klarheit über den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen vermittelt werden kann:
*Erstens* muß das Thema „Definitionen und Sätze“ im Unterricht gründlich besprochen werden.
*Zweitens* ist es erforderlich, die bei der ersten Einführung vermittelten Kenntnisse zu festigen und zu vertiefen, indem man einerseits zum Lehrplanstoff gehörige Definitionen immer wieder deutlich als solche bewußt macht und andererseits bei den vorkommenden Sätzen klar die Beweisnotwendigkeit herausarbeitet — und zwar auch dann, wenn die Beweisführung selbst im Unterricht nicht vorgesehen ist.
*Drittens* ist es angebracht, sich durch gelegentliche Kontrollen — etwa in der Art der weiter vorn beschriebenen Tests (↗ 115f.) — zu vergewissern, wie weit die Schüler den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen verstanden haben und in der Lage sind, die Frage nach der Beweisnotwendigkeit richtig zu entscheiden.

*Unser gegenwärtiger Lehrplan enthält die Konsequenzen aus den Ergebnissen der geschilderten Versuche:*

*Erstens* sieht er die Einführung der Begriffe „Definition“ und „Satz“ am Beginn der Klasse 6 vor — verbunden mit den nötigen Erläuterungen über den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen;

*zweitens* enthält er genaue Angaben, zu welchen Begriffen im Unterricht Definitionen zu erarbeiten bzw. zu welchen Sätzen Beweise zu führen sind; und
*drittens* verlangt er ausdrücklich, daß die Beweisnotwendigkeit auch bei jenen Sätzen bewußt zu machen ist, die im Unterricht nicht bewiesen werden.[1])
Es könnte noch die Frage aufgeworfen werden, ob die Einführung der Begriffe „Definition" und „Satz" gerade in Klasse 6 am zweckmäßigsten ist. Dazu muß man sagen, daß es von der Sache her gesehen nur eine sinnvolle Möglichkeit gibt: die Behandlung muß beim Übergang von der Propädeutik des Beweisens zum „eigentlichen" Beweisen erfolgen, weil damit — wie schon anfangs festgestellt wurde — bei den Schülern eine notwendige Voraussetzung für das Verständnis von Beweisen geschaffen werden soll. Das bedeutet aber — unter Berücksichtigung der Gesamtanlage unseres Lehrplans — daß dieses Thema am Beginn von Klasse 6 besprochen werden muß. Natürlich wirft das die Frage auf, wie die Behandlung im Unterricht gestaltet werden kann, damit die Schüler auch die angestrebten Einsichten gewinnen. Eine Übertragung der in dem Zirkel mit Schülern der Klassenstufe 8 angewandten Methoden ist sicher nicht ohne weiteres möglich. Es liegen aber inzwischen auch Erfahrungen aus dem Unterricht in Klassenstufe 6 vor. Hier sind vor allem die umfangreichen Untersuchungen zu nennen, die E. Fuhrmann in der Zeit von 1965 bis 1968 — also bereits vor Einführung des neuen Lehrplans — angestellt hat.[2]) Darüber hinaus ist 1969 in zwei Klassen ein kleinerer Versuch durchgeführt worden, um auf der Grundlage des neuen Lehrplans eine mögliche Variante der Unterrichtsgestaltung zu erproben. Über diesen Versuch soll hier berichtet werden. Sein Ziel bestand darin, den Schülern im Laufe von drei Unterrichtsstunden erste Kenntnisse und Einsichten über den Unterschied zwischen Definitionen und Sätzen zu vermitteln und ihnen außerdem die Notwendigkeit des Beweisens von Sätzen vor Augen zu führen.
Entsprechend der Thematik dieses Abschnitts wollen wir uns hier nur dem ersten Teilziel zuwenden. Auf das Problem der Beweisnotwendigkeit kommen wir im nächsten Abschnitt noch zurück.

**Die erste Unterrichtsstunde des Versuchs:**

Die erste Stunde begann mit einer mündlichen Wiederholung von Kenntnissen über natürliche und über gebrochene Zahlen. Die Fragestellung an die Schüler war zunächst relativ unbestimmt:

„Was wißt ihr von natürlichen Zahlen?"

Dadurch wurde erreicht, daß die Schüler recht unterschiedliche Kenntnisse reproduzierten. Manches davon wurde vom Lehrer nicht weiter verfolgt, anderes wurde an der Tafel notiert, und zu manchen Punkten wurden den Schülern auch Zusatzfragen gestellt, um beispielsweise auf Themen hinzulenken, die noch nicht berührt worden waren. Das sah (etwas verkürzt und in schon korrigierter Form dargestellt) so aus:

[1]) Siehe z. B.: *Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* A. a. O., S. 11.
[2]) Fuhrmann, E.: *Untersuchungen zum Definieren im Mathematikunterricht der Mittelstufe — vorgenommen am Stoffkomplex „Zahlenbereichserweiterungen".* Dissertation, Berlin 1968.

*Schüler:* Unter den natürlichen Zahlen gibt es auch Primzahlen.

*Lehrer:* Ja, und was sind Primzahlen?

*Schüler:* Primzahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind. Die 1 zählt man aber nicht zu den Primzahlen.

*Lehrer* — schreibt die Antwort an die Tafel und fragt dann weiter: Wie haben wir geschrieben, wenn wir ausdrücken wollten, daß eine Zahl Teiler einer anderen Zahl ist?

*Schüler:* Wir haben geschrieben $a \mid b$.

*Lehrer:* Was bedeutet das eigentlich, $a \mid b$?

*Schüler:* $a \mid b$ bedeutet, daß es eine Zahl $x$ gibt, so daß $b = a \cdot x$ gilt.

*Lehrer* — notiert auch diese Antwort an der Tafel.

So entstand schließlich ein Tafelbild, das verschiedene Schülerantworten enthielt. Diese Antworten waren aber so angeschrieben worden, daß sie zwei deutlich getrennte Gruppen bildeten. Zu der einen Gruppe gehörten u. a.:

„Primzahlen sind natürliche Zahlen (mit Ausnahme der 1), die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind."
„$a \mid b$ bedeutet: es gibt eine natürliche Zahl $x$, so daß $b = a \cdot x$ gilt."
„Man nennt $n$ genau dann eine gerade Zahl, wenn $n$ durch 2 teilbar ist."

Zu der anderen Gruppe gehörten u. a. folgende Antworten:

„Null ist die kleinste natürliche Zahl."
„Wenn $a|b$ und $a|c$ ist, so ist $a|(b + c)$."
„Jede Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, ist selbst durch 3 teilbar."

Nun wurden die Schüler aufgefordert, die beiden Gruppen von Antworten näher zu betrachten, um einerseits Gemeinsamkeiten der Antworten innerhalb jeder Gruppe und andererseits Unterschiede zwischen Antworten verschiedener Gruppen zu finden. In dieser Phase des Unterrichts waren verschiedene Hilfsfragen und Impulse des Lehrers notwendig, um die Schüler auf das Wesentliche hinzulenken.

Zum Beispiel:

*Lehrer:* Was erfährt man eigentlich, wenn man die Antworten der ersten Gruppe liest?

*Schüler:* Man erfährt, was eine Primzahl ist und was $a|b$ bedeutet und was eine gerade Zahl ist ...

*Lehrer:* Ja, es wird uns also durch diese Antworten etwas erklärt. Ist das auch bei den Antworten der zweiten Gruppe so?

*Schüler:* Nein, eigentlich nicht. Da wird zum Beispiel gesagt, daß $a|(b + c)$ ist, wenn $a|b$ und auch $a|c$ ist, aber was $a|b$ bedeutet, wird nicht erklärt, das muß man schon wissen.

So wurde schließlich herausgearbeitet:
Die Antworten der ersten Gruppe sind Erklärungen oder — wie man in der Mathematik sagt — Definitionen, die Antworten der zweiten Gruppe sind Aussagen.
Die Schüler schrieben in ihr Heft als Überschrift „Definitionen und Aussagen", darunter „Beispiele für Definitionen" und trugen dann einige der an der Tafel stehenden Definitionen in ihr Heft ein. Darunter notierten sie:

„In der Mathematik wird durch Definitionen genau erklärt oder festgelegt, was man unter bestimmten Begriffen oder Redeweisen zu verstehen hat."

Nach einer kurzen Diskussion zum Thema „Aussagen", in deren Verlauf vom Lehrer auch einfache Beispiele von falschen Aussagen gebracht und von den Schülern erörtert wurden, vervollständigten die Schüler ihre Notizen im Heft wie folgt:

„Beispiele für Aussagen"
(einige Aussagen wurden notiert)
„Aussagen sind entweder wahr oder falsch."

Den Abschluß der Stunde bildete eine mündliche Übung: den Schülern wurden fünf Ausdrücke vorgelegt, von denen sie entscheiden sollten, ob es Definitionen oder Aussagen waren. Im letzteren Falle wurde dann jeweils noch kurz diskutiert, ob die betreffende Aussage wahr oder falsch war. Es handelte sich um folgende Ausdrücke:

Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
$3765 + 1412 = 5177$
$10^3$ bedeutet $10 \cdot 10 \cdot 10$.
Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.
Man nennt $\frac{a}{b}$ genau dann einen unechten Bruch, wenn $a > b$ oder $a = b$ ist.

**Die zweite Unterrichtsstunde:**

Am Beginn der zweiten Stunde erfolgte zunächst eine kurze Wiederholung der Begriffe „Definition" und „Aussage" mit Angabe entsprechender Beispiele durch die Schüler. Als Ergänzung dazu wurde dann an Hand von zwei Beispielen deutlich gemacht, daß neben Definitionen und Aussagen noch vielerlei andere sprachliche Gebilde in der Mathematik vorkommen. Das erste Beispiel war ein Term: $18 \cdot 9 - 12$; das zweite Beispiel war eine Aussageform: $21 + 4 \cdot x < 31$. Ohne diese beiden Begriffe zu nennen, ist lediglich festgestellt worden, daß wir es in beiden Fällen weder mit einer Definition noch mit einer Aussage zu tun haben: es wird nämlich nichts erklärt und auch nichts behauptet — man kann beides nicht als wahr oder als falsch bezeichnen.
Nach dieser insgesamt gesehen sehr kurzen Einführung der Begriffe „Definition" und „Aussage" folgte bereits in dieser Stunde eine Leistungskontrolle. Den Schülern wurden zehn Ausdrücke vorgelegt, von denen sie jeweils entscheiden sollten, ob es sich um Definitionen oder Aussagen handelte. Bei den als Aussagen bezeichneten Ausdrücken sollten die Schüler außerdem zu entscheiden versuchen, ob sie wahr oder falsch sind.

*Den Schülern wurden folgende Ausdrücke vorgelegt:*

(1) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.

(2) $\frac{m}{n}$ bezeichnet man genau dann als einen echten Bruch, wenn $m < n$ ist.

(3) „$a$ ist ein Vielfaches von $b$" bedeutet: Es gibt eine von Null verschiedene natürliche Zahl $n$, so daß $a = n \cdot b$ ist.

(4) Für alle natürlichen Zahlen gilt: wenn $a|(b \cdot c)$, so $a|b$ oder $a|c$.

(5) Der Vorgänger von 300 ist 299.

(6) Quadratzahlen sind natürliche Zahlen, die sich als ein Produkt von zwei gleichen Faktoren darstellen lassen.

(7) Es gilt stets: wenn $a|b$, so $a|(b \cdot c)$.

(8) Alle Primzahlen sind ungerade.

(9) Der Nachfolger von 7000 ist 8000.

(10) Unter einer Strecke $\overline{AB}$ versteht man die Menge aller Punkte, die zwischen $A$ und $B$ liegen, einschließlich der Punkte $A$ und $B$ selbst.

Das Ergebnis dieser Leistungskontrolle zeigt Tabelle 11:

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ % | 91 | 79 | 75 | 59 | 91 | 66 | 67 | 88 | 95 | 75 |

Tabelle 11

Angesichts der geringen Zeit, die bis zur Leistungskontrolle für die Erarbeitung der Begriffe „Definition" und „Aussage" aufgewandt worden war, kann dieses Resultat schon als recht zufriedenstellend bezeichnet werden. (Die relativ niedrigen Werte von $r$ % bei den Ausdrücken (4), (6) und (7) waren vor allem darauf zurückzuführen, daß ein Teil der Schüler Schwierigkeiten im inhaltlichen Erfassen dieser Dinge hatte und dadurch die geforderte Entscheidung nicht richtig treffen konnte.)
Die Fortsetzung der Stunde verlief wie folgt:
Zunächst wurden in mündlicher Arbeit die richtigen Antworten zu den Ausdrücken (1) bis (10) genannt und begründet.
Anschließend hatten die Schüler unter der Überschrift „Wir untersuchen Definitionen" die bei den Ausdrücken (1) bis (10) vorkommenden Definitionen in ihr Heft einzutragen — also (2), (3), (6) und (10). Sie erhielten dazu den Auftrag:

> „Unterstreiche rot, was durch die Definition erklärt wird. Unterstreiche grün, wodurch es erklärt wird. Gib zu jeder Definition zwei verschiedene Beispiele an!"

Diese Übung, mit der das Verständnis für Definitionen vertieft und gefestigt werden sollte, ist von den Schülern weitgehend selbständig und richtig ausgeführt worden. Eine kleine Schwierigkeit trat nur bei (3) auf: Die meisten Schüler hatten zwar in richtiger Weise „$a$ ist ein Vielfaches von $b$" rot unterstrichen, dann aber nur die Gleichung „$a = n \cdot b$" grün gekennzeichnet. Es bedurfte erst einer kleinen Diskussion, um sie darauf hinzulenken, daß die Redeweise „Es gibt eine von Null verschiedene Zahl $n$, so daß . . ." ebenfalls grün zu unterstreichen ist.

Die Hausaufgabe zur nächsten Stunde lautete:

„Gib Definitionen für: a) $x$ ist ungerade; b) $x$ und $y$ sind teilerfremd; c) Straßenbahn.“

Das Ergebnis der Hausaufgabe war recht positiv. Es kam zwar verschiedentlich vor, daß Schüler unzulängliche Definitionen formuliert hatten — etwa „Die Straßenbahn ist ein Fahrzeug zur Personenbeförderung“ (zu weite Fassung der Definition) oder „$x$ und $y$ sind teilerfremd bedeutet, daß $x$ und $y$ keine gemeinsamen Teiler besitzen“ (zu enge Fassung) —, aber im allgemeinen hatten sie doch Definitionsversuche gemacht und nicht einfach Aussagen über die zu definierenden Objekte bzw. Relationen formuliert.

Aus all dem wird deutlich, daß es ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist, den Schülern in Klasse 6 erste Kenntnisse und Einsichten über Definitionen und Aussagen zu vermitteln und damit die entsprechenden Forderungen unseres Lehrplans zu erfüllen. Selbstverständlich müssen diese Kenntnisse durch den weiteren Mathematikunterricht angereichert, vertieft und gefestigt werden, damit sie nicht wieder verloren gehen. Dabei kommt es darauf an, den Schülern schrittweise klarzumachen:

— Durch eine Definition wird etwas erklärt oder festgelegt. Definitionen kann man nicht beweisen, sie sind weder wahr noch falsch. Es ist allerdings oft angebracht, Definitionen zu rechtfertigen: als zweckmäßig, sinnvoll, möglich u. ä.

— Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Sie müssen in der Mathematik stets bewiesen werden, sofern man sie nicht als Axiom benutzt.

## 3.4.3. Motivierung des Beweisens

Im vorigen Abschnitt spielte das Problem der Beweisnotwendigkeit bei der Unterscheidung von Definitionen und Aussagen bereits eine große Rolle. Wir haben dort aber die meisten der damit zusammenhängenden Fragen absichtlich noch zurückgestellt, weil es sicher zweckmäßig sein dürfte, eine so wichtige Problematik in einem gesonderten Abschnitt zu behandeln. Das soll nunmehr geschehen.

Es ist bereits im Abschnitt 2.2. (↗ 59ff.) darauf hingewiesen worden, daß das Führen von Beweisen den Schülern motiviert werden muß. Dabei reicht es sicherlich nicht aus, sich als Lehrer nur auf die in der Mathematik übliche Praxis zu berufen, wonach Aussagen eben zu beweisen sind. Zur Erreichung wirklichen Verständnisses ist es vielmehr notwendig, die Motivierung aus der Sache heraus zu entwickeln. Dazu ist im wesentlichen zweierlei erforderlich.

1. Der zu beweisende Satz muß so beschaffen bzw. so an die Schüler herangetragen worden sein, daß sie seine Gültigkeit nicht von vornherein als völlig sicher und evident empfinden. Er muß als eine — vielleicht wahrscheinliche, aber eben doch nicht sichere — Vermutung vor ihnen stehen.
2. Die Schüler müssen sich darüber klar sein, daß das Überprüfen einzelner Beispiele prinzipiell nicht ausreicht, um eine allgemeine Aussage (die sich auf alle Elemente eines bestimmten Bereichs bezieht) zu beweisen. (Der im Mathematik-

unterricht selten vorkommende Fall eines endlichen Grundbereichs soll hier nicht mit betrachtet werden.)

Wir wollen uns zuerst der zweiten Bedingung zuwenden, weil sie grundlegend ist für alles weitere: Ohne Einsicht in die Tatsache, daß man mit Hilfe der unvollständigen Induktion keine allgemeine Aussage beweisen kann, werden die Schüler immer wieder Schwierigkeiten haben, Beweisen zu folgen und deren Notwendigkeit zu verstehen. Diese Schwierigkeiten treten auch dann auf, wenn die Schüler schon an das Begründen von Aussagen gewöhnt sind. Sie sehen dann zwar ein, daß ein Beweis erforderlich ist, halten ihn aber für erbracht, sobald einige Einzelfälle überprüft worden sind. Diese Meinung ändert sich im allgemeinen auch kaum, nachdem im Unterricht eine Reihe von Beweisen geführt worden ist.

Wir wollen uns dazu wieder einige Versuchsergebnisse aus den Jahren 1964 bis 1966 ansehen, die im wesentlichen in den gleichen Klassen gewonnen worden sind, von denen im Abschnitt 3.4.2. (↗ 112ff.) bereits die Rede war.

### Ergebnisse von Befragungen

Die Anlage der Versuche war in allen beteiligten Klassen gleich: Den Schülern wurden an der Tafel vier „Beweise" vorgeführt, deren Stichhaltigkeit sie beurteilen sollten. Dabei ging es nicht um das Auffinden versteckter Lücken im Beweisgang, um das Erkennen verborgener Zirkelschlüsse oder um andere, nicht offen sichtbare Fehler, sondern um die Einschätzung des Messens und der unvollständigen Induktion durch die Schüler, d. h. um offensichtlich unmathematische Methoden der Erkenntnissicherung. Die Schüler erhielten dazu sinngemäß folgende Erläuterung:

> „Euch werden jetzt Beweise zu einigen Lehrsätzen vorgeführt. Ihr sollt von jedem Beweis beurteilen, ob er in Ordnung ist oder nicht. Begründet nach Möglichkeit euer Urteil!"

*Die „Beweisführungen" sahen wie folgt aus:*

(1) *Behauptung:* In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich 180°.
*Beweis:* Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck $ABC$. Die Innenwinkel nennen wir $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$. Wir messen diese Winkel und finden
$\alpha = \ldots\ldots, \quad \beta = \ldots\ldots, \quad \gamma = \ldots\ldots$
(Die Werte waren in den einzelnen Klassen natürlich unterschiedlich, wurden vom jeweiligen Lehrer aber nötigenfalls so „korrigiert", daß die Summe 180° betrug.) Da in der Behauptung von der Summe der Winkel gesprochen wird, addieren wir die gemessenen Werte. Wir finden:
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$, w. z. b. w.

(2) *Behauptung:* Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind stets gleich groß.
*Beweis:* Wir zeichnen zunächst eine Skizze (Bild 22). Es soll $g_1 \| g_2$ sein. Dann ist $\alpha = \beta$, weil $\alpha$ und $\beta$ ein Stufenwinkelpaar bilden. Außerdem gilt $\beta = \gamma$, weil $\beta$ und $\gamma$ ein Scheitelwinkelpaar bilden. Wenn $\alpha = \beta$ und $\beta = \gamma$ ist, so muß auch $\alpha = \gamma$ sein, w. z. b. w.

(3) *Behauptung:* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
*Beweis:* $(a + b)^2$ ist nach Definition dasselbe wie $(a + b) \cdot (a + b)$. Multipliziert

man aus, so ergibt sich $(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + a\,b + a\,b + b^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$, w. z. b. w.

(4) *Behauptung:* Wenn die Quersumme einer natürlichen Zahl durch 3 teilbar ist, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.

*Beweis:* Wir beginnen mit einstelligen Zahlen. Sie stimmen mit ihrer Quersumme direkt überein, so daß die Behauptung in diesem Falle selbstverständlich ist. Untersuchen wir jetzt eine zweistellige Zahl, etwa 72. Die Quersumme 9 ist durch 3 teilbar, die Zahl selbst ebenfalls: $72:3 = 24$. Versuchen wir eine dreistellige Zahl, beispielsweise 219. Die Quersumme ist 12, also durch 3 teilbar, die Zahl selbst ebenfalls: $219:3 = 73$. Zum Schluß überprüfen wir noch eine vielstellige Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, etwa 624588. Auch hier finden wir, daß die Zahl selbst dann ebenfalls durch 3 teilbar ist: $624588:3 = 208196$. Wir stellen somit fest: wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist, so ist es auch die Zahl selbst, w. z. b. w.

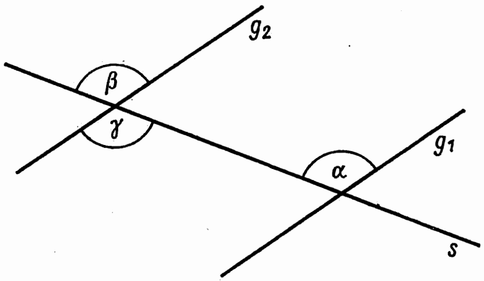



Bild 22

Betrachten wir die Versuchsergebnisse zunächst rein quantitativ. Die Tabelle 12 gibt die Resultate eines ersten Tests an, der im Jahre 1964 in acht Klassen der Klassenstufe 8 mit insgesamt 231 Schülern durchgeführt worden ist.

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $r$ % | 32 | 79 | 92 | 27 |

Tabelle 12

Wie man sieht, wurden die untauglichen „Beweise“ (1) und (4) von einer relativ hohen Anzahl von Schülern nicht als unzulänglich erkannt. Das bedeutet, daß nicht wenige der damals befragten Schüler die Nachprüfung allgemeiner Aussagen an Einzelbeispielen für ausreichend hielten. Allgemein überwog eine recht unkritische Haltung der Schüler gegenüber Beweisführungen. Das wurde besonders deutlich bei jenen Schülern (34%), die alle vier vorgeführten Beweise ausnahmslos für richtig hielten.

Um einen Eindruck davon zu vermitteln, wie die Schüler ihre Entscheidungen damals zu begründen versucht haben, wollen wir einige Beispiele von Schülerurteilen mit zugehörigen Begründungen betrachten. (In Klammern ist die Jahresendzensur des jeweiligen Schülers im Fach Mathematik angegeben.)

Zu (1) „Beweis“ des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck:
„Ja (der Beweis ist in Ordnung), weil sich die Winkelsumme von 180° ergeben hat.“ (EZ: 3)
„Ja — vorausgesetzt, der Winkelmesser ist in Ordnung.“ (EZ: 2)
„Nein (der Beweis ist nicht in Ordnung), man kann für den Beweis kein beliebiges Dreieck nehmen.“ (EZ: 3)
„Nein, es könnte ein Sonderfall sein.“ (EZ: 3)

Zu (4) „Beweis“ des Teilbarkeitssatzes:
„Ja, die Ergebnisse haben bewiesen, daß es so ist.“ (EZ: 2)
„Ja, weil der Beweis leicht zu führen ist.“ (EZ: 4)
„Nein, es ist mir zu einfach.“ (EZ: 1)
„Nein, z. B. die Quersumme von 7 ist nicht durch 3 teilbar, oder die Quersumme von 184 ist nicht durch 3 teilbar.“ (EZ: 1)
„Nein, es können Einzelfälle sein.“ (EZ: 2)

Die Beispiele machen deutlich, daß der Mehrzahl der Schüler noch viele Voraussetzungen für das Verständnis mathematischer Beweise fehlten. Wie aus den Begründungen hervorgeht, hielten beispielsweise manche Schüler einen Beweis schon dann für richtig, wenn sich am Schluß eine Übereinstimmung mit der Behauptung ergibt. Für andere war die Verständlichkeit das maßgebende Kriterium. Eine Unklarheit ganz besonderer Art lag bei jenen Schülern vor, die den Beweis (4) nicht ablehnten, weil nur probiert wurde, sondern weil sie die Implikation nicht verstanden hatten und ihnen auch die zum Beweis von Implikationen benutzte Schlußregel offenbar fremd war. Sie betrachteten den Beweis als unzulänglich, weil sie die zu beweisende Behauptung nicht richtig verstanden hatten. Ihnen war nicht klar, daß darin über Zahlen, deren Quersumme nicht durch 3 teilbar ist, überhaupt nichts ausgesagt wird und daß diese Zahlen deshalb beim Beweis gar nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Hier wird also deutlich, daß dem richtigen Erfassen von Implikationen im Mathematikunterricht große Aufmerksamkeit geschenkt werden muß und die entsprechenden Festlegungen unseres Lehrplans sorgfältig zu beachten sind.
Wenden wir uns noch kurz den Beweisen (2) und (3) zu. Hier interessieren vor allem die Begründungen für ablehnende Stellungnahmen.

Zu (2) Beweis des Satzes über Wechselwinkel:
„Nein, die Winkel sind nicht nachgemessen worden.“ (EZ:2)
„Nein, in dem Beweis kommen zwei andere Lehrsätze vor, die auch erst bewiesen werden müssen.“ (EZ:1)

Zu (3) Beweis der binomischen Formel:
„Nein, Rechnen ist kein Beweis.“ (EZ:1)

Wie man sieht, beruhten die Ablehnungen der richtigen Beweise zum Teil auf falschen Vorstellungen, zum Teil aber auch auf Überlegungen, die durchaus akzeptabel waren.
Wie schon bei den Versuchen zur Beurteilung der Beweisnotwendigkeit (vgl. Abschnitt 3.4.2., ↗ 112ff.) sind auch die hier angegebenen Ergebnisse durch weitere Untersuchungen im wesentlichen bestätigt worden.

So hat VOIGT (Sangerhausen) in den von ihm befragten Klassen (Klassenstufe 8, 228 Schüler) im Jahr 1965 folgende Resultate gewonnen[1]):

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $r$ % | 45 | 78 | 69 | 39 |

Tabelle 13

Im Jahr 1966 wurde die gleiche Erhebung noch in den Klassenstufen 6 bis 11 durchgeführt, wobei insgesamt 567 Schüler erfaßt worden sind.
Die Resultate glichen im wesentlichen jenen aus den vorangegangenen Versuchen, waren in höheren Klassenstufen aber doch etwas besser als in niedrigeren. (Trotzdem wurde beispielsweise der „Beweis" zu (4) in den Klassenstufen 9 bis 11 nur von 52% aller befragten Schüler zurückgewiesen.)

*Zusammenfassend kann festgestellt werden,* daß der damalige Mathematikunterricht nur ungenügend dazu beigetragen hat, bei den Schülern Klarheit über die in der Mathematik üblichen Methoden der Erkenntnissicherung zu schaffen. Insbesondere war vielen Schülern unbekannt, daß man in der Mathematik mit unvollständiger Induktion (Messen und Probieren an Einzelfällen) keine allgemeinen Aussagen beweisen kann.
Unser gegenwärtiger Mathematiklehrplan orientiert sehr nachdrücklich auf die Schaffung entsprechender Einsichten bei den Schülern. So heißt es zum Beispiel: „Sie erkennen, daß der Beweis für einen Satz nicht durch die Untersuchung einiger Beispiele erbracht werden kann . . ."[2])

## Erfahrungen aus Unterrichtsversuchen

Die soeben geschilderten Erhebungen sind in ähnlicher Weise wie die im Abschnitt 3.4.2. (↗ 112ff.) dargestellten Untersuchungen durch Versuche ergänzt worden, die darauf abzielten, die Schüler in die hier aufgeworfene Problematik einzuführen und ihnen die erforderlichen Einsichten zu vermitteln.
Einer dieser Versuche bestand wieder nur darin, daß die Lehrer in einigen der im Jahr 1966 befragten Klassen dem Problem der Stichhaltigkeit von Beweisführungen etwas mehr Aufmerksamkeit widmeten und die Schüler bei passenden Gelegenheiten auf die Unbrauchbarkeit des Messens und Probierens für die mathematische Erkenntnissicherung hinwiesen. Danach wurde in diesen Klassen eine neue Befragung durchgeführt. Dabei hatten die Schüler erneut „Beweise" zu beurteilen, die ihnen vorgeführt wurden.
Es zeigte sich, daß schon durch wenige Hinweise eine deutliche Verbesserung der Schülerleistungen erzielt werden konnte. Während bei der ersten Befragung nur 37% der Schüler das Messen und das Probieren als Beweis abgelehnt hatten,

[1]) VOIGT: *Auswertung einer Untersuchung über das Beweisen bei Schülern 8. Klassen.* (Unveröffentlichtes Manuskript)
[2]) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 11.

erkannten nach den im Unterricht gegebenen Hinweisen 75% der Schüler die Untauglichkeit solcher „Beweise“.

*Man kann daraus schließen:* Die in den ersten Versuchen festgestellte Vielzahl von Fehlurteilen bei der Einschätzung von Beweisen war in erster Linie darauf zurückzuführen, daß die Klärung dieser Dinge im damaligen Mathematikunterricht weitgehend versäumt worden war. Es erfordert jedoch nur relativ geringe Mühe und wenig Zeit, um den Schülern die notwendigen Einsichten zu vermitteln.
Zu diesem Schluß führten auch Versuche mit Schülern der Klassenstufe 8 im Rahmen eines Mathematikzirkels, der 1964 arbeitete. In diesem Zirkel sind im Zusammenhang mit Beweisführungen einige Betrachtungen über den Wert bzw. Unwert des Messens und des Probierens für die mathematische Erkenntnissicherung angestellt worden. Das hatte zur Folge, daß die Zirkelteilnehmer (Z) schon im ersten Test bei der Einschätzung von Beweisen erheblich sicherer urteilten als eine zensurenmäßig gleich gute, aber nicht speziell belehrte Vergleichsgruppe (V). Die entsprechenden Ergebnisse sind der Tabelle 14 zu entnehmen, wobei noch zu erwähnen ist, daß mit den Nummern 1 bis 4 die auf den Seiten 125/126 angegebenen Beweise gemeint sind.

| Nr. | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| r % | Z | 80 | 93 | 87 | 73 |
| | V | 38 | 85 | 97 | 38 |

Tabelle 14

Von besonderer Bedeutung ist hierbei wieder, daß die Zirkelteilnehmer nicht nur weitgehend richtige Entscheidungen getroffen haben, sondern daß sie diese auch treffend begründen konnten: 91% der richtigen Antworten zu den Beweisen von (1) und (4) waren auch richtig begründet.

*Fassen wir zusammen:*

Die Unklarheiten vieler Schüler hinsichtlich der Methoden zur mathematischen Erkenntnissicherung waren nicht auf mangelnde geistige Voraussetzungen, sondern auf Versäumnisse des Mathematikunterrichts zurückzuführen. Diese Versäumnisse bestanden dabei nicht in erster Linie darin, daß im Unterricht etwa keine exakten Beweise vorgeführt worden wären. Der Mangel war vielmehr der, daß induktive Methoden herangezogen wurden (was in vielen didaktischen Situationen notwendig ist), ohne jemals deutlich hervorgehoben zu haben, daß diese Methoden zwar zu *Vermutungen* führen können, für die *Sicherung* von Erkenntnissen aber ungeeignet sind. Im Gegenteil — oft wurde induktiven Methoden durch die Art der Unterrichtsgestaltung eine große psychologische Überzeugungskraft verliehen, so daß die Mehrzahl der Schüler immer wieder in der Ansicht bestärkt wurde, ein induktives Vorgehen sei nicht nur für die Erkenntnisfindung, sondern auch für die Erkenntnissicherung vollkommen ausreichend.



9 [00 21 76]

**Vorschläge für die Unterrichtsgestaltung**

Am Beginn dieses Abschnitts sind Forderungen genannt worden (↗ 124f.), die erfüllt werden müssen, wenn eine sachgerechte Motivierung des Beweisens im Unterricht gelingen soll: Die Schüler müssen den jeweils zu beweisenden Satz als zunächst ungesicherte Vermutung verstehen und gleichzeitig wissen, daß man Allaussagen nicht durch Überprüfung einzelner Beispiele beweisen kann.
Es erhebt sich nun folgende Frage: Wie kann man im Unterricht — vor allem bei der ersten Einführung der Schüler in das Beweisen — vorgehen, um die genannten Forderungen zu erfüllen?
In älteren methodischen Veröffentlichungen wurde hierzu häufig empfohlen, bei den Schülern eine gewisse Skepsis gegenüber ihren eigenen Sinneseindrücken (vor allem den optischen) zu entwickeln und ihnen andererseits die Unbrauchbarkeit des Messens für die mathematische Erkenntnissicherung klarzumachen. Dazu wurden einerseits optische Täuschungen herangezogen[1]), zum anderen sind die Schüler auf die jeder Zeichnung bzw. Messung anhaftenden Ungenauigkeiten hingewiesen worden.
Diese Art der Motivierung des Beweisens ist in verschiedener Hinsicht unzulänglich:
Erstens bezieht sich diese Motivierung nur auf geometrische Sachverhalte, da man sich in der Arithmetik ja sowieso kaum auf die optische Anschauung oder das Messen stützen kann. Dieser Mangel ist im früheren Unterricht allerdings nicht hervorgetreten, weil damals fast ausschließlich nur geometrische Sätze bewiesen worden sind, während die Schüler in der Arithmetik, in der Gleichungslehre und bei der Behandlung von Funktionen gewöhnlich keinen Beweis kennengelernt haben. Uns liegt sehr viel daran, diesen schädlichen methodischen Dualismus zu überwinden und den Schülern deutlich zu machen, daß jeder mathematische Satz einen Beweis erfordert, nicht nur die geometrischen Sätze. Damit erhebt sich aber auch die Notwendigkeit, die Motivierung des Beweisens nicht nur auf den Bereich der Geometrie einzuengen.
Zweitens zielt jene Motivierung viel zu wenig auf den Hauptgrund der mathematischen Beweisnotwendigkeit, nämlich auf die Tatsache, daß Aussagen über alle Elemente einer gewissen (gewöhnlich unendlichen) Menge prinzipiell nicht durch das Überprüfen einiger Einzelbeispiele — und Zeichnen bzw. Messen ist ja stets ein Arbeiten am einzelnen speziellen Fall — bewiesen werden können. Dieser Mangel an der Motivierung ist nicht allzu gravierend, so lange es in den zu beweisenden Sätzen um anschaulich leicht darstellbare, geometrische Sachverhalte geht. Es ist klar: da man durch Zeichnen oder Messen nicht einmal für einen speziellen Fall die Gültigkeit einer solchen Aussage sicher nachprüfen kann, ist mit diesen Mitteln erst recht kein allgemeiner Beweis möglich. Sobald jedoch beispielsweise arithmetische Sätze betrachtet werden, liegen die Dinge anders: man kann deren Gültigkeit für Einzelfälle gewöhnlich exakt nachweisen.
Die Schüler müssen aber verstehen, daß damit trotzdem kein allgemeiner Beweis erbracht werden kann. Eine gute Motivierung des Beweisens muß vor allem auf die Erzeugung dieser Einsicht gerichtet sein.

[1]) Vgl. z. B. W. Lietzmann: *Wo steckt der Fehler?* B. G. Teubner, Leipzig 1952, S. 15ff.

Drittens schließlich ist festzustellen, daß das Argumentieren mit der Möglichkeit optischer Täuschungen bzw. mit der Unvermeidlichkeit von Meßfehlern aus einem noch tiefer liegenden Grunde sogar bedenklich werden kann:
Mathematische Aussagen beziehen sich auf abstrakte mathematische Begriffe, die in manchen Fällen zwar durch Zeichnungen oder andere materielle Gebilde veranschaulicht werden können, die aber mit diesen Veranschaulichungen nicht identisch sind. Das Operieren (Messen oder dgl.) an Zeichnungen oder Modellen kann also schon deshalb nicht als Beweis für einen mathematischen Satz angesehen werden, weil in einem solchen Satz von diesen konkreten materiellen Gebilden gar nicht die Rede ist, sondern — wie gesagt — von abstrakten mathematischen Begriffen. Die Wahrheitssicherung muß deshalb mit spezifisch mathematischen Methoden — durch einen mathematischen Beweis — erfolgen. Diese Feststellung ist nicht etwa ein Widerspruch zu unserem marxistischen Wahrheitsbegriff, der die Praxis als entscheidendes Kriterium der Wahrheit einschließt. Die Mathematik als Ganzes muß ihre Bestätigung selbstverständlich in der Praxis und durch die Praxis erfahren. Es ist jedoch abwegig und auch philosophisch falsch, jeden einzelnen mathematischen Satz in der Praxis überprüfen zu wollen.
In diesem Zusammenhang muß auch darauf aufmerksam gemacht werden, daß in Klasse 6 — also zur gleichen Zeit, in der wir die Schüler an das Beweisen mathematischer Sätze heranführen — der Unterricht im Fach Physik beginnt. In diesem Fach spielt das Messen eine große Rolle, und zwar nicht nur zur Erkenntnisfindung, sondern auch als Mittel der Erkenntnissicherung. Es wäre somit ganz falsch, den Schülern gerade in dieser Zeit im Fach Mathematik das Vertrauen in ihre Beobachtungsfähigkeit und in den Wert von Meßergebnissen zu nehmen. Wenn wir also im Mathematikunterricht gegen das Messen als Methode der Erkenntnissicherung argumentieren, dann dürfen wir nicht die Unzuverlässigkeit des Messens in den Vordergrund stellen, sondern — neben dem Hinweis auf die Unvollständigkeit, falls es sich um Allaussagen handelt — vor allem die Tatsache, daß wir durch das Messen die mathematischen Objekte gar nicht erfassen können. (Im Fach Physik liegen die Dinge eben anders: viele physikalische Größen sind ihrer Natur nach Messungen zugänglich.)
Es ist übrigens interessant, daß die Schüler bei den im vorangegangenen Teilabschnitt geschilderten Versuchen den geometrischen Scheinbeweis (1) (↗ 125) doch etwas häufiger als unzulänglich erkannten als den arithmetischen Scheinbeweis (4). Es spiegelt sich darin die damalige Unterrichtspraxis wider: Das Messen wurde noch mehr oder weniger häufig als nicht beweiskräftig herausgestellt, auf die Unzulänglichkeit der unvollständigen Induktion ist aber nur sehr selten eingegangen worden.
Wie kann der Unterricht also gestaltet werden, um eine genügend starke und zugleich treffende Motivierung des Beweisens zu gewährleisten?

Betrachten wir zunächst die Einführung der Schüler in das Beweisen.

Bei Versuchen, die von 1967 bis 1969 in zwei Klassen im Rahmen der Erprobung der neuen Lehrpläne durchgeführt worden sind, hat sich die Anwendung folgender Prinzipien bewährt:

1. Die Einführung der Schüler in das Beweisen von Sätzen erfolgt an arithmetischen Sachverhalten (Teilbarkeitslehre).
2. Die Unbrauchbarkeit der Überprüfung von Einzelbeispielen für die Sicherung von Allaussagen wird vor dem ersten im Unterricht zu führenden Beweis deutlich gemacht und auch bei späteren Gelegenheiten herausgestellt, bis diese Einsicht fester Besitz der Schüler geworden ist.
3. Die Erarbeitung der Sätze wird so gestaltet, daß sie zugleich ein Motiv für die Beweisführung liefert.

Diese Prinzipien liegen auch unserem gegenwärtigen Lehrplan zugrunde: Die erste Einführung in das Beweisen ist im Stoffabschnitt „Teilbarkeitssätze" vorgesehen, wobei vorher die Motivierung der Beweisnotwendigkeit gefordert wird. Etwas später wird die Beweisproblematik im Stoffabschnitt „Beziehungen zwischen Winkeln" erneut aufgegriffen und dann in den Stoffabschnitten „Dreiecke" bzw. „Vierecke und Vielecke" weiter verfolgt, wobei die Frage der Motivierung erneut zu stellen ist. Selbstverständlich kann der Lehrplan nicht für jeden einzelnen Satz festlegen, wie er zu erarbeiten ist, um der Forderung nach überzeugender Motivierung eines zugehörigen Beweises gerecht zu werden. Daß dieses Prinzip aber zu beachten ist, ergibt sich aus einer ganzen Reihe von Lehrplanformulierungen, zum Beispiel auch aus folgender:
„Durch die Erörterung der Beweisnotwendigkeit mathematischer Aussagen ... trägt der Mathematikunterricht zur Schulung des Denkvermögens und zur Entwicklung einer kritischen Denkhaltung bei."[1])
Wir wollen uns an Beispielen etwas genauer ansehen, wie diese Prinzipien bei der Lehrplanerprobung konkret beachtet worden sind.
Obwohl dabei die Schüler bereits in Klasse 4 erstmalig an das Beweisen herangeführt worden sind, können die folgenden Ausführungen durchaus für die Unterrichtsgestaltung in Klasse 6 genutzt werden.
Der Satz, zu dem die Schüler in den Versuchen erstmals einen Beweis kennenlernen sollten, lautete:

Für alle natürlichen Zahlen gilt: wenn $a|b$ und $a|c$ ist, so ist auch $a|(b+c)$.

Aus der Berücksichtigung der Prinzipien 2 und 3 ergaben sich folgende Vorüberlegungen:
Die Erarbeitung des Satzes muß so geschehen, daß er zunächst nur als Vermutung ausgesprochen werden kann. Das gelingt am besten, wenn er durch die Betrachtung von Zahlenbeispielen gewonnen wird. Damit die Schüler aber diese Betrachtung von Einzelbeispielen nicht schon als hinreichende Bestätigung des Satzes auffassen, ist es notwendig, ihnen vorher an einer inhaltlich ähnlichen, aber falschen Vermutung die Unzulänglichkeit der Untersuchung von Einzelfällen vor Augen zu führen.
Im Versuch wurde deshalb mit den Schülern als erstes eine sogenannte „Ja-Nein-Tabelle" (Tabellen dieser Art waren den Schülern im Prinzip bekannt) erarbeitet, die wie folgt angelegt war:

[1]) *Lehrplan für Mathematik – Klassen 6 bis 8.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 12f.

| $a$ | $b$ | $c$ | $b + c$ | $a\|(b + c)$ | $a\|b$ | $a\|c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 18 | 12 | 30 | ja | ja | ja |
| 5 | 55 | 35 | 90 | ja | ja | ja |
| 8 | 24 | 40 | 64 | ja | ja | ja |

Dabei sind die Werte für $a$, $b$ und $c$ jeweils vom Lehrer vorgegeben worden, während die Eintragungen in den übrigen Spalten durch die Schüler erfolgten. Entscheidend war, daß durch eine geschickte Auswahl der Werte für $a$, $b$ und $c$ (etwa wie in der Tabelle angegeben) die Schüler bei der nachfolgenden Betrachtung der letzten drei Spalten zu folgender Vermutung geführt wurden:

Wenn $a|(b + c)$ ist, so ist auch $a|b$ und $a|c$.

Nun folgte die Frage: Ist das wirklich immer so?
Können wir nach den Beispielen unserer Tabelle ganz sicher sein, daß stets — für alle Zahlen — gilt: „Wenn $a|(b + c)$, so $a|b$ und $a|c$.“? Oder findet jemand ein Gegenbeispiel?
Es ist wichtig — und war für den weiteren Fortgang des Unterrichts sogar nützlich — daß zunächst eine ganze Reihe von Schülern dazu neigte, diese Vermutung als allgemeingültig anzusehen. Die Aufforderung, Gegenbeispiele zu suchen, führte bei den Schülern zu unterschiedlichen Resultaten. Einige fanden nur Beispiele der in der Tabelle schon enthaltenen Art, andere gaben „scheinbare“ Gegenbeispiele an, manche Schüler fanden aber auch treffende Gegenbeispiele — etwa $a = 6$; $b = 21$; $c = 9$ — und argumentierten dazu völlig richtig: „Es gilt zwar $6|(21 + 9)$, aber $6|21$ ist falsch und $6|9$ ist auch falsch. Die Vermutung wird also nicht für alle Zahlen bestätigt.“
Ein gewisses Problem waren die schon erwähnten „scheinbaren“ Gegenbeispiele: einige Schüler nannten solche Werte für $a$, $b$ und $c$, bei denen $a \mid (b + c)$ falsch wurde — etwa $a = 12$, $b = 35$, $c = 26$ — und argumentierten dann: „Die Vermutung gilt nicht immer, denn es ist z. B. 12 kein Teiler von $35 + 26$ und auch kein Teiler von 35 und auch kein Teiler von 26.“

Hinter diesem Irrtum der Schüler steckte im Grunde ein unzureichendes Verständnis der Implikation (nämlich ihre unbewußte Verwechslung mit der Konjunktion). Es wäre aber eine ganz unangebrachte Häufung von Problemen gewesen, mit den Schülern an dieser Stelle etwa explizit über die Implikation zu sprechen. Statt dessen ist den Schülern nur erklärt worden, daß Beispiele, bei denen $a \mid (b + c)$ nicht gilt, die Vermutung nicht widerlegen, denn darin wird ja nur etwas für den Fall ausgesagt, daß $a \mid (b + c)$ gilt, nämlich: Wenn $a \mid (b + c)$ gilt, dann muß auch $a \mid b$ und $a \mid c$ gelten.

Als Fazit dieser Überlegungen wurde festgehalten:

Wenn man durch eine Reihe von Zahlenbeispielen zu einer Vermutung gelangt, so kann man noch nicht sagen, ob diese Vermutung wirklich für alle Zahlen gilt. Es kann nämlich sein, daß man bei weiterem Suchen auf Beispiele trifft, für die die Vermutung nicht gilt.

Der Unterricht wurde nun mit der Arbeit an einer neuen Ja-Nein-Tabelle fortgesetzt, die folgendes Aussehen hatte:

| $a$ | $b$ | $c$ | $a \mid b$ | $a \mid c$ | $b + c$ | $a \mid (b + c)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 36 | 18 | ja | ja | 54 | ja |
| 4 | 12 | 28 | ja | ja | 40 | ja |

Die Schüler gelangten nach mehreren Beispielen zu der Vermutung:

Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, so $a \mid (b + c)$.

Nun setzte wieder eine Diskussion zu der Frage ein, ob diese Vermutung wohl für alle Zahlen gelten wird. Manche Schüler waren durch die Beispiele schon von ihrer allgemeinen Gültigkeit überzeugt. Andere wiesen aber auf die vorige Vermutung hin, die sich als falsch herausgestellt hatte, obwohl sie zunächst auch durch eine Reihe von Beispielen bestätigt zu werden schien. Die Schüler versuchten deshalb wieder, ein Gegenbeispiel zu finden. Als ihnen das nicht gelang, neigten sie doch bald zu der voreiligen Feststellung: Die Aussage gilt für alle Zahlen. Jetzt war es günstig, den Schülern sagen zu können: „Bei der vorigen Vermutung haben manche von Euch ein Gegenbeispiel gefunden, andere aber nicht. Vielleicht sind wir jetzt alle nicht geschickt genug, um ein Gegenbeispiel zu finden? Vielleicht müßten wir es mit viel größeren Zahlen versuchen? Wir können jedenfalls nicht sicher sein, ob unsere Vermutung wirklich für alle Zahlen gilt. Mit Probieren kommen wir da nicht weiter, weil wir so ja nie alle Zahlen erfassen können. Wir müssen versuchen, unsere Vermutung anders zu beweisen, und zwar so, daß wir dann wirklich mit Sicherheit sagen können: Die Aussage gilt für alle Zahlen."

Wir wollen an dieser Stelle die Versuchsbeschreibung zunächst abbrechen, da es uns hier nur um das Problem der Motivierung geht und nicht um die Beweisführung selbst. Es muß aber noch folgendes ergänzt werden:

Man darf nicht erwarten, daß eine einmalige Belehrung der Schüler in der hier dargestellten oder einer ähnlichen Form ausreicht, um bei ihnen ein für allemal Klarheit zu schaffen. Es ist vielmehr notwendig, im folgenden Unterricht immer wieder darauf zurückzukommen, bis das Verständnis sich hinreichend vertieft und gefestigt hat. (In den oben erwähnten Versuchsklassen ist dieses Prinzip damals nicht hinreichend beachtet worden, und so kam es, daß mit diesen Schülern am Beginn von Klasse 6 die gleiche Problematik in fast derselben Weise noch einmal erörtert und geklärt werden mußte.)

Wenn der Unterricht bei den Schülern prinzipielle Klarheit darüber geschaffen hat, daß Vermutungen und Behauptungen in der Mathematik bewiesen werden müssen, und die Schüler auch wissen, daß die Untersuchung von Einzelbeispielen als Beweis nicht ausreicht, bekommt die Motivierung von Beweisführungen im Unterricht eine etwas andere Funktion und zum Teil auch ein etwas anderes Aussehen.

Während es nämlich bei der Einführung der Schüler in das Beweisen vornehmlich darum geht, bestimmte grundlegende Einsichten zu erzeugen und Verständnis für das Beweisen überhaupt zu schaffen, steht später in erster Linie die Weckung von Interesse für den gerade zu führenden speziellen Beweis im Vordergrund. Damit bekommt das vorn genannte Prinzip 3 (↗ 132) eine besonders große und zum Teil neue Bedeutung: Die Erarbeitung des zu beweisenden Satzes muß nach Möglichkeit so angelegt werden, daß er den Schülern zunächst als keineswegs selbstverständliche, vielleicht sogar unerwartete Vermutung entgegen tritt. Dadurch ist es nicht nur möglich, die Schüler für den Satz selbst zu interessieren, sondern auch für dessen Beweis, der dann wirklich als Erkenntnissicherung erlebt wird und nicht nur als eine Art mathematische „Pflichtübung“.

Die Verwirklichung dieses Prinzips ist zwar nicht immer möglich, gelingt häufig aber doch, wenn man sich genügend darum bemüht. Besonders wertvolle Anregungen sind dazu u. a. von F. DUŠEK gegeben worden.[1]) Ihm geht es vor allem darum, die Schüler nicht mit dem Beweis von Behauptungen zu langweilen, an deren Richtigkeit sie kaum noch zweifeln. Er macht seine Gedanken an Beispielen deutlich, von denen eines hier wiedergegeben werden soll[2]):

> „Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit der Diagonale $BD$ und den Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{AQ}$, wobei $P$ und $Q$ die Mittelpunkte der Seiten $BC$ bzw. $CD$ sind (Bild 23). Die Schnittpunkte von $\overline{AP}$ bzw. $\overline{AQ}$ mit der Diagonalen $BD$ werden mit $X$ bzw. $Y$ bezeichnet.“

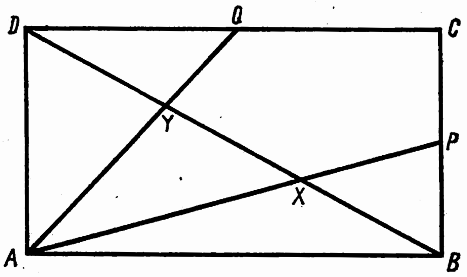



Bild 23

DUŠEK stellt nun zwei Aufgaben gegenüber. Bei der ersten wird verlangt:

> „Es ist zu beweisen, daß die Abschnitte $\overline{BX}$, $\overline{XY}$ und $\overline{YD}$ alle gleich lang sind.“

Die zweite dagegen lautet:

> „Es ist zu entscheiden, welcher der Abschnitte $\overline{BX}$, $\overline{XY}$ und $\overline{YD}$ am größten ist.“

Die erste Fassung ist methodisch wesentlich ungünstiger als die zweite, bei der die Schüler in einer ersten, vorwiegend experimentellen Phase der Arbeit die Vermutung selbst finden können, und zwar eine Vermutung, die nach der Aufgabenstellung gar nicht so ohne weiteres zu erwarten ist. Nach einem solchen Anfangs-

[1]) DUŠEK, F.: *Zur Methodik des Beweisens.* In: „Mathematik in der Schule“, (6) 1968, Heft 8.
[2]) A. a. O., S. 628f.

erfolg sind die Schüler viel eher an der weiteren Arbeit — d. h. am Beweis ihrer Vermutung — interessiert, als wenn von vornherein alles vorgegeben und nur der Beweis verlangt wird.
Die Gedanken von Dušek lassen sich auf viele Beispiele übertragen, die unmittelbar zum Mathematiklehrstoff unserer Schule gehören, etwa:

1) Die Schüler werden aufgefordert, ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck zu zeichnen. Dabei wird wiederholt: In spitzwinkligen Dreiecken sind alle Winkel kleiner als 90°, in rechtwinkligen Dreiecken ist ein Winkel gleich 90°, in stumpfwinkligen Dreiecken ist ein Winkel größer als 90°. Nun folgt die *Aufgabenstellung*:
   In welchem Dreieck ist die Summe der Winkel am größten?
   Die anschließende Diskussion der Schülermessungen führt dann zu der *Vermutung*:
   Die Summe der Winkel ist möglicherweise in allen Dreiecken gleich, und zwar beträgt sie anscheinend stets 180°.

2) Es werden Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen eines Kreises untersucht. Die *Aufgabe* dazu kann lauten:
   Bei welcher Lage ist der Peripheriewinkel am größten?

3) Die Schüler zeichnen ein gleichseitiges, ein gleichschenkliges (aber nicht gleichseitiges) und ein ungleichseitiges Dreieck. Dann bekommen sie den *Auftrag*:
   Konstruiert in jedem der Dreiecke alle drei Winkelhalbierenden und stellt fest, welche Form das durch die gegenseitigen Schnittpunkte der Winkelhalbierenden gebildete Dreieck hat!

4) Mit Hilfe einer Wertetabelle wird die Funktion $y = \sqrt{x}$ etwa im Bereich $0 \leqq x < 20$ graphisch dargestellt. Das Bild erweckt leicht den *Eindruck*, als sei diese Funktion nach oben beschränkt (Bild 24). Die Schüler erhalten deshalb die *Aufgabe*:

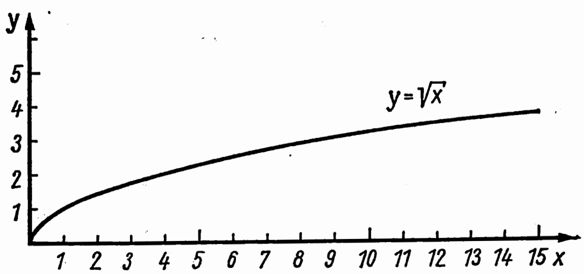



Bild 24

   Stellt fest, ob $y = 15$ eine obere Schranke für diese Funktion darstellt! Wenn nicht, so versucht, eine obere Schranke zu finden!

Diese Beispiele sollen genügen, da sie hinreichend zeigen, wie die Beweismotivierung hier angelegt ist: Die jeweilige Fragestellung ist durchaus naheliegend, führt die Schüler aber durch weitgehend selbständige Tätigkeit zu einer Vermutung, die sie zunächst nicht erwartet haben und deren Beweis ihnen deshalb notwendiger erscheint, als wenn sie den zu beweisenden Satz schon fertig vorgelegt bekommen hätten.

Aber wie schon gesagt: dieses Vorgehen ist nicht immer möglich, und es wäre auch einseitig, es nur so versuchen zu wollen. Das Finden mathematischer Sätze erfolgt im Unterricht auch auf anderen Wegen, und damit hängt zusammen, daß auch für die Motivierung der Beweisnotwendigkeit noch andere Aspekte beachtet werden müssen. Einige weitere Beispiele sollen das deutlich machen:

5) Die Schüler lernen im Unterricht den Satz kennen:

„Wenn $x_1$ und $x_2$ Lösungen der Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ sind, so gilt $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$."

Es kann nun die Frage aufgeworfen werden, ob man auf Grund dieses Satzes die Möglichkeit hat, bei quadratischen Gleichungen eine neue Form der Probe anzuwenden, nämlich: Von zwei gefundenen Werten $x_1$, $x_2$ wird die Summe und das Produkt gebildet. Stimmen diese Zahlen mit $-p$ und $q$ überein, so werden $x_1$, $x_2$ als Lösungen anerkannt.

Zur richtigen Beantwortung der Frage im Beispiel 5 ist erstens die Einsicht notwendig, daß man sich bei dieser Art der Probe nicht auf den oben angegebenen Satz stützt, sondern auf seine Umkehrung:

„Wenn $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$ ist, dann sind $x_1$ und $x_2$ Lösungen der Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$."

Es muß zweitens klar sein, daß ein Satz und seine Umkehrung nicht dasselbe besagen — eine Erkenntnis, die man keineswegs als von vornherein einleuchtend und gegeben ansehen darf. Zumindest vor einigen Jahren war die Mehrzahl der Schüler noch der festen Meinung, Satz und Umkehrung würden dasselbe ausdrücken![1])

Drittens müssen die Schüler schließlich verstehen: da die Umkehrung einen neuen, selbständigen Satz darstellt, ist auch ein eigener Beweis für sie notwendig; sie ist nicht durch den Beweis des Satzes selbst schon mitbewiesen.

Als Beweismotivation erscheint hier also die Überlegung:

Wir wollen die Umkehrung eines Satzes benutzen, dazu müssen wir sie aber erst zu beweisen versuchen. Ohne Beweis können wir nicht sicher sein, ob die Umkehrung wirklich gilt.

6) Als Ergebnis der im Beispiel 4 (↗ 136) angedeuteten Überlegungen finden die Schüler:

„Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist nach oben nicht beschränkt."

Bei der graphischen Darstellung weiterer Wurzelfunktionen — etwa $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ — finden die Schüler, daß die Graphen dieser Funktionen für $x > 1$ alle unterhalb der zu $y = \sqrt{x}$ gehörigen Kurve verlaufen, und zwar werden die Kurven immer „flacher", je größer der Wurzelexponent ist. Dieses Verhalten

[1]) Vgl. Bock, H.; Walsch, W.: *Logik und Mathematikunterricht.* In: „Wissenschaftliche Beiträge der Martin-Luther-Universität Halle", 1966/6 (E2) und 1967/17 (E4).

rechtfertigt die Frage, ob nicht doch von einem gewissen $n$ ab alle Funktionen der Form $y = \sqrt[n]{x}$ nach oben beschränkt sind. Die weitere Untersuchung führt die Schüler zu dem Satz:

„Jede Funktion der Form $y = \sqrt[n]{x}$ ist nach oben nicht beschränkt."

Neben schon früher gefundenen Beweismotiven tritt im Beispiel 6 die Überlegung auf: Der neue Satz ist eine Verallgemeinerung einer schon bekannten Tatsache. Solche Verallgemeinerungen sind erst gesichert, wenn man sie bewiesen hat.
Vielleicht erweckt dieses Beispiel den Eindruck, als läge das Verallgemeinern von Sätzen schon außerhalb des Lehrplanstoffs und als wäre das entsprechende Beweismotiv somit für den Unterricht nicht bedeutsam. Das stimmt natürlich nicht! Erstens bedarf es nur einer kleinen Umformulierung, um die Einordnung unseres Beispiels in den Stoff der Klasse 11 zu erkennen, etwa: „Jede Folge der Form $\sqrt[n]{a_m}$ mit $a_m \to \infty$ (wobei $n$ eine feste natürliche Zahl größer als 1 bedeutet) ist nach oben nicht beschränkt."
Zweitens lassen sich auch aus dem Stoff anderer Klassen entsprechende Beispiele angeben, etwa die verschiedenen Potenzgesetze, die zunächst für natürliche Exponenten gewonnen und die dann schrittweise verallgemeinert werden.
Allen bisherigen Beispielen war gemeinsam, daß die Schüler zuerst den Satz gefunden haben (als Vermutung), der dann anschließend zu beweisen war.
Vielfach tritt im Unterricht aber auch eine andere Reihenfolge auf: ausgehend von einer Problemstellung werden aus gegebenen Voraussetzungen Schlüsse gezogen, die schließlich zu einem neuen Satz führen, der damit dann schon bewiesen ist. So kann man beispielsweise aus dem Kathetensatz den Satz des PYTHAGORAS beim Suchen nach weiteren Zusammenhängen zwischen den Größen in rechtwinkligen Dreiecken gewinnen, man findet den Sinussatz und den Kosinussatz bei der Untersuchung beliebiger Dreiecke hinsichtlich der Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln und dergleichen mehr. Es ist klar, daß bei solchen Herleitungen (man benutzt diesen Ausdruck zuweilen, um alle hier genannten Beweisführungen von den bisher betrachteten zu unterscheiden) die Frage nach einer Beweismotivierung entfällt. Sie kann allerdings wieder bedeutsam werden, wenn bei der Herleitung Voraussetzungen benutzt worden sind, von denen man sich noch befreien möchte — z. B. die Spitzwinkligkeit des Dreiecks bei der Gewinnung des Sinussatzes. Der Wunsch nach Verallgemeinerung des gefundenen Satzes zieht dann die Notwendigkeit nach sich, für die noch nicht betrachteten Fälle Beweise zu führen.
Als letzte, aber keineswegs unbedeutende Möglichkeit zur Motivierung von Beweisführungen sei nun schließlich noch eine genannt, die schon ab Klasse 6 mehr und mehr an Bedeutung gewinnt. Der jeweils zu beweisende Satz steht dabei gar nicht im Mittelpunkt des Interesses — er ist nicht selten auch von seiner mathematischen Bedeutsamkeit her gesehen relativ belanglos —, sondern es geht in erster Linie um die Frage, *wie* man diesen Satz beweisen kann. Im Vordergrund steht also das Gewinnen von Fähigkeiten und Fertigkeiten, und darauf orientiert dann auch die zu den entsprechenden Beweisaufgaben gehörige Motivierung.
Die Notwendigkeit solcher Beweisübungen ergibt sich aus unserem Lehrplan, der verlangt, daß die Schüler die Fähigkeit erwerben sollen, einfache Beweise selb-

ständig zu führen. Wir haben uns schon an früherer Stelle klar gemacht, daß diese Fähigkeit sich nur entwickeln kann, wenn die Schüler das Beweisen ausreichend üben können. Für solche Übungen sind aber die meisten Beweise zu den im Lehrplan ausgewiesenen Sätzen kaum geeignet, weil sie gewöhnlich zu umfangreich und zu schwierig sind. In den Lehrbüchern findet man jedoch genügend Beweisaufgaben, die für solche Übungen vorgesehen sind. Aus der Vielzahl der Beispiele seien nur die folgenden genannt:

7) Gegeben ist die im Bild 25 dargestellte Figur mit der Voraussetzung $\gamma \cong \delta$. Es ist zu beweisen, daß $\beta \cong \varepsilon$ gilt.[1])

8) „Zeichne in einen Kreis einen Durchmesser und eine Sehne, die auf diesem Durchmesser senkrecht steht! Beweise, daß der Durchmesser die Sehne halbiert!“[2])

9) Es ist zu beweisen, daß die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 3 teilbar ist.[3])

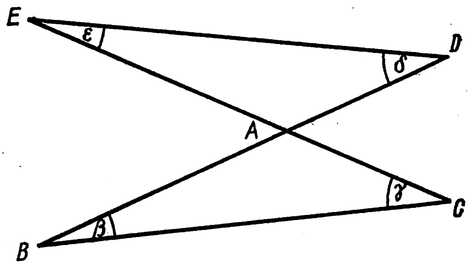



Bild 25

Bei diesen und ähnlichen Aufgaben werden wir im Unterricht nicht nach speziellen Motivierungen für jedes einzelne Beispiel suchen, sondern wir sagen unseren Schülern, daß es darum geht, das Beweisen zu üben — genau so, wie wir ihnen beispielsweise bei der Behandlung der gebrochenen Zahlen auch nicht jede einzelne Rechenaufgabe motivieren, sondern unsere entsprechenden Forderungen häufig allein mit der Notwendigkeit des Übens begründen.

### 3.4.4. Erlernen wichtiger Schlußweisen

Bei unseren Überlegungen, was im Unterricht getan werden kann, um die Schüler zum Führen mathematischer Beweise zu befähigen, kommen wir jetzt zu einem Punkt, an den mancher in diesem Zusammenhang vielleicht zu allererst gedacht haben mag und der uns auch an früheren Stellen (z. B. im Abschnitt 1.3.2., ↗ 29ff., und im Abschnitt 2.1., ↗ 56ff.) schon beschäftigt hat: Das Verstehen bzw. Führen von Beweisen erfordert die Fähigkeit, logische Schlüsse verstehen bzw.

[1]) *Mathematik – Lehrbuch für Klasse 6.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 191, Nr. 73.
[2]) *Mathematik – Lehrbuch für Klasse 7.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 179, Nr. 16.
[3]) *Mathematik – Lehrbuch für Klasse 9.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970, S. 179, Nr. 204b

vollziehen zu können. Wir hatten uns bereits klar gemacht (siehe die Abschnitte 2.1., ↗ 56ff., und 2.3., ↗ 64ff.), daß diese Fähigkeit nicht einfach als gegeben vorausgesetzt werden kann (auch nicht in mittleren und höheren Klassen), sondern daß sie von den Schülern schrittweise erworben werden muß. Wir können hier darauf verzichten, auf die damit zusammenhängenden Probleme noch einmal ausführlich einzugehen, möchten aber doch noch einige Punkte hervorheben, die bisher nicht zusammenhängend besprochen worden sind.
Wie wir im Abschnitt 3.1.3. (↗ 72ff.) schon festgestellt haben, sind die in den Beweisen im Mathematikunterricht auftretenden Schlußweisen zum Teil recht komplexer Natur. Das hat zur Folge, daß keineswegs alle in den Abschnitten 1.3.2. (↗ 29ff.), 1.3.3. (↗ 39ff.) und 1.3.4. (↗ 44ff.) angeführten Schlußregeln gleiche Relevanz für die Unterrichtsgestaltung haben. So tritt zum Beispiel das Schließen aus einer Negation, das Schließen aus einer Konjunktion oder das Schließen auf eine Alternative bei Beweisführungen kaum explizit in Erscheinung, während andererseits das Schließen auf eine Implikation oder auf „für jedes" sehr häufig deutlich sichtbar benutzt wird. Es ist also naheliegend zu fragen, welche Schlußweisen so wichtig sind, daß die Schüler sie im Laufe des Unterrichts allmählich bewußt lernen müssen, und welche man andererseits bei einer so gezielten Belehrung nicht zu berücksichtigen braucht, weil sie zu selbstverständlich sind oder bei Beweisen im Schulstoff kaum in Erscheinung treten. Dabei sei hier noch einmal betont, daß es nicht um das Auswendiglernen von Regeln geht, sondern um ein bewußtes Hervorheben und ein dadurch bewirktes Erlernen bestimmter Schlußweisen in dem Sinne, wie wir es im Abschnitt 3.1.2. (↗ 70ff.) bereits angedeutet haben.
Eine erste Teilantwort ist hierzu bereits gegeben worden: im Abschnitt 3.4.1. (↗ 107ff.) haben wir dargestellt, welche Schlußweisen die Schüler in der Phase der Propädeutik des Beweisens lernen können. Wie müssen diese ersten Einsichten und Fähigkeiten — die bei den Schülern nicht wieder in Vergessenheit geraten dürfen — im Laufe der weiteren Jahre ergänzt werden, um die Ziele unseres Lehrplans zu erreichen? Wenn wir an die im Mathematikunterricht zu beweisenden Sätze und an die hierbei zu entwickelnden Fähigkeiten der Schüler denken, so erscheinen vor allem folgende Punkte wichtig:

1. Die Schüler müssen lernen, daß man eine Behauptung, die sich auf alle Elemente einer Menge bezieht, beweisen kann, indem man sie für ein beliebiges Element dieser Menge nachweist (Schluß auf „für jedes").

Diese Einsicht muß bereits in Klasse 6 entwickelt werden, weil die Schüler sonst kaum einen der folgenden Beweise verstehen können. Dabei kommt es zunächst darauf an, die Schüler an die Verwendung von Variablen in Beweisen heranzuführen. In den schon mehrmals erwähnten Versuchen zur Erprobung unseres gegenwärtigen Lehrplans sind wir u. a. folgendermaßen vorgegangen:
Nachdem geklärt war, daß durch Überprüfung einzelner Beispiele kein allgemeiner Satz bewiesen werden kann, es aber auch nicht möglich ist, alle Fälle einzeln zu untersuchen (wegen der Unendlichkeit des Bereichs, von dem die Rede ist), wurde eine Methode gesucht, mit der man alle möglichen Fälle zugleich erfaßt. Den Schülern wurde an Beispielen erläutert, daß die Verwendung von Variablen eine

solche Methode darstellt. Das sah so aus, daß wir die Beweisführung für ein spezielles Zahlenbeispiel dem allgemeinen Beweis gegenüberstellten.

*Satz:* Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar.

| *Beweis für eine feste Zahl* | *Allgemeiner Beweis* |
|---|---|
| Wir betrachten die Zahl 28. 28 ist durch 4 teilbar. | Wir betrachten eine beliebige Zahl $a$, die durch 4 teilbar sein soll. |
| Das bedeutet: Es gibt eine Zahl $x$ — nämlich die Zahl 7 — so daß gilt: | Dann gibt es eine Zahl $x$, so daß gilt: |
| $4 \cdot x = 28 \quad (4 \cdot 7 = 28)$ | $4 \cdot x = a$ |
| Dafür können wir auch schreiben: | Dafür können wir auch schreiben: |
| $2 \cdot 2 \cdot x = 28 \quad (2 \cdot 2 \cdot 7 = 28)$ | $2 \cdot 2 \cdot x = a$ |
| $2 \cdot x$ ist auch eine natürliche Zahl — in unserem Falle ist es die Zahl 14 — wir nennen sie $y$. | $2 \cdot x$ ist auch eine natürliche Zahl — wir nennen sie $y$. |
| Wir können also schreiben: | Wir können also schreiben: |
| $2 \cdot y = 28$ | $2 \cdot y = a$ |
| Das bedeutet aber: 28 ist auch durch 2 teilbar. | Das bedeutet aber: $a$ ist auch durch 2 teilbar. |

Den Schülern wurde erklärt: „Links“ haben wir den Satz nur für die Zahl 28 bewiesen. „Rechts“ ist der gleiche Beweisgang für irgendeine beliebige durch 4 teilbare Zahl $a$ angegeben. Da wir uns für $a$ jede durch 4 teilbare natürliche Zahl eingesetzt denken können, haben wir damit die Gültigkeit des Satzes für alle natürlichen Zahlen nachgewiesen.
(Natürlich steckt hier noch eine gewisse Schwierigkeit, die wir im Unterricht übergangen haben:

Wieso ist der Satz für alle Zahlen bewiesen, obwohl wir doch nur die durch 4 teilbaren Zahlen betrachtet haben?

Das hängt mit der Tatsache zusammen, daß eine Implikation stets wahr ist, wenn ihr Vorderglied falsch ist. Auf diese Problematik sind wir aber nicht eingegangen.)
Durch Wiederholung dieser Argumentation an weiteren Beispielen festigt sich allmählich die Einsicht in die Bedeutung, die Variable in Beweisführungen haben. (Man muß dazu nicht immer wieder den Beweis wie oben angegeben „doppelt“ führen, es genügen entsprechende Bemerkungen.)
Beim Übergang zu geometrischen Beweisen und der damit zusammenhängenden Benutzung von Beweisfiguren ist dann zu erklären, daß wir auch hier den Beweis allgemein führen müssen. Das bedeutet jetzt unter anderem:

Es dürfen nur jene Eigenschaften und Beziehungen im Beweis benutzt werden, die durch die Voraussetzungen gegeben sind, während zufällige Besonderheiten der Beweisfigur nicht in den Beweis eingehen dürfen. (Auf die Probleme, die damit verbunden sind, werden wir an späterer Stelle noch einmal zurückkommen.)

2. Die Schüler müssen lernen, daß man einen Satz der Form $H_1 \rightarrow H_2$ (eine Implikation also) beweisen kann, indem man $H_1$ als gegeben ansieht (als

Voraussetzung betrachtet) und daraus — eventuell unter Zuhilfenahme weiterer Sätze — auf $H_2$ schließt (Schluß auf eine Implikation).

Auch diese Einsicht ist bereits ab Klasse 6 zu entwickeln. Spätestens bei der Behandlung der Umkehrung von Sätzen, die der Lehrplan in Klasse 6 vorsieht (im Stoffabschnitt „Beziehungen zwischen Winkeln"), ist die Gliederung in „Voraussetzung" und „Behauptung" herauszuarbeiten. In den folgenden Beweisen erleben die Schüler immer wieder, daß von der Voraussetzung ausgegangen wird und mit dem Erreichen der Behauptung der Beweis endet. Diese Grundtatsache ist somit in Klasse 6 auch bewußt zu machen.

3. Die Schüler müssen lernen, daß bei Beweisen zuweilen Fallunterscheidungen notwendig sind. Diesem Vorgehen liegt das Schließen aus einer Alternative zugrunde.

Wie schon an früherer Stelle erwähnt, wird die bewußte Hervorhebung von Fallunterscheidungen vom Lehrplan ab Klasse 9 gefordert. Das schließt selbstverständlich nicht aus, daß auch in früheren Klassenstufen schon Fallunterscheidungen im Mathematikunterricht vorgenommen werden. Sie treten zum Beispiel in Zuordnungsvorschriften auf (bei der Spiegelung an einer Geraden — Klasse 5 — unterscheiden wir Punkte, die nicht auf dieser Geraden liegen, und die Punkte der Geraden selbst; bei der Definition des absoluten Betrags einer rationalen Zahl $a$ — Klasse 7 — unterscheiden wir die Fälle $a \geqq 0$ und $a < 0$), wir finden Fallunterscheidungen bei der Erörterung möglicher Lagebeziehungen geometrischer Gebilde (zwei Geraden im Raum — im Zusammenhang mit der senkrechten Zweitafelprojektion in Klasse 7; Kreis und Gerade in der Ebene — ebenfalls in Klasse 7), und auch in Beweisen bzw. in Plausibilitätsbetrachtungen kommen Fallunterscheidungen vor (etwa bei der Erörterung des Satzes über die Teilbarkeit durch 5 in Klasse 6). In all diesen Fällen wird aber nicht verlangt, das Prinzip der vollständigen Fallunterscheidung direkt bewußt zu machen. Das ist nach unserem Lehrplan erst ab Klasse 9 vorgesehen.

4. Die Schüler müssen das Vorgehen bei indirekten Beweisführungen lernen, dem das Schließen auf eine Negation zugrunde liegt.

Wie wir wissen, sieht der Lehrplan die Einführung in das indirekte Beweisverfahren für die Klasse 8 vor. Auch hier ist aber festzustellen, daß indirekte Schlußweisen im Mathematikunterricht nicht erst in Klasse 8 auftreten. Beispielsweise wird der Satz über das Senkrechtstehen von Kreistangente und Berührungsradius in Klasse 7 indirekt bewiesen — allerdings noch ohne explizite Hervorhebung und Erläuterung dieses Beweisverfahrens.

5. Als weitere spezielle Beweismethode lernen die Schüler in Klasse 11 die vollständige Induktion kennen, in der jedoch keine prinzipiell neuen Schlußweisen auftreten, sondern nur bekannte Schlußweisen im Zusammenhang mit einem speziellen Satz (Satz der vollständigen Induktion).

6. Die Schüler müssen schließlich von Klasse 6 an lernen, jeden einzelnen Beweisschritt zu begründen, indem sie sich auf schon bekannte Sätze oder Definitionen stützen. Diese Begründungen beruhen sehr häufig auf der Benutzung der Abtrennungsregel, ohne daß diese allerdings deutlich hervortritt. Es ist deshalb auch nicht notwendig, sie in diesem Zusammenhang

explizit im Unterricht herauszuarbeiten. Natürlich treten auch noch andere Schlußweisen auf (z. B. die Termeinsetzung, die gegenseitige Ersetzbarkeit äquivalenter Terme oder auch äquivalenter Ausdrücke), aber diese Schlußweisen erscheinen so selbstverständlich, daß sie im allgemeinen keiner besonderen Erläuterung bedürfen.

Um möglichen Mißverständnissen vorzubeugen, muß nun aber deutlich betont werden:
Wenn es in den Punkten 1 bis 6 immer heißt „Die Schüler müssen lernen ...“, so bedeutet das keineswegs, daß ihnen innerhalb kurzer Zeit in konzentrierter Form diese allgemeinen Einsichten zu vermitteln sind. Im Gegenteil — wenn man wirklich Erfolg haben und nicht nur ein paar formale Kenntnisse bei den Schülern erzielen will, ist es notwendig, vorsichtig zu Werke zu gehen und folgende Grundsätze unseres Lehrplans zu beachten:

a) Die Vermittlung der allgemeinen Einsichten, das Bewußtmachen der Schlußweisen erfolgt nicht abstrakt, sondern an passend ausgewählten, relativ leicht überschaubaren Beispielen.
b) Die Aufmerksamkeit der Schüler wird dabei im allgemeinen jeweils nur auf eine Schlußweise gelenkt, nicht gleich auf alle, die an dem betreffenden Beispiel erkennbar wären.
c) Bei der Fixierung gewonnener Erkenntnisse ist nur so weit von formalisierten Darstellungsweisen Gebrauch zu machen, wie es für das Verständnis der Sache unbedingt notwendig erscheint.

Es dürfte in diesem Zusammenhang nicht unwichtig sein, den Grundsatz a) noch etwas näher zu erläutern, und zwar vor allem im Hinblick auf die Forderungen, die die auszuwählenden Beispiele erfüllen müssen. Was meinen wir mit „passend ausgewählt“ und „relativ leicht überschaubar“?
Wenden wir uns zunächst der zweiten Forderung zu. Sie bedeutet
erstens, daß die in den Beispielen auftretenden mathematischen Begriffe den Schülern vertraut sein müssen, und
zweitens, daß die betrachteten Beispiele weder von der Sache noch von der sprachlichen Darstellung her übermäßig kompliziert sein dürfen.
Wenn die Schüler nämlich Schwierigkeiten haben, die in den auftretenden Sätzen gegebenen Sachverhalte zu verstehen, fällt es ihnen erst recht schwer, mit diesen Sätzen zusammenhängende Schlußweisen zu erfassen. Was hierbei als „kompliziert“ zu bezeichnen ist, kann man allerdings nicht allgemein festlegen. Es hängt von der jeweiligen Klassenstufe ebenso ab wie vom Leistungsstand der Klasse, von der Qualität des bisherigen Mathematikunterrichts und noch manchen anderen Faktoren.
Was bedeutet nun die erste Forderung?
Erstens natürlich — das ist fast trivial —, daß wir für die Hervorhebung einer bestimmten Schlußweise solche Beispiele wählen, an denen diese Schlußweise auch deutlich sichtbar gemacht werden kann.
Zweitens aber — und damit kommen wir zu einem zentralen Punkt —, daß die sprachliche Formulierung der auftretenden Sätze es ohne besondere Schwierigkeiten ermöglicht, deren logische Struktur zu erkennen. Das ist notwendig, damit

die Schüler die Zusammenhänge zwischen der logischen Struktur der auftretenden Sätze einerseits und den benutzten Schlußregeln andererseits erfassen können (vgl. Abschnitt 1.3.3., ↗ 39ff.). Ohne Einsicht in diese Zusammenhänge muß das Verständnis der Schüler für Beweisführungen oberflächlich bleiben, und es fehlt ihnen dann auch die Möglichkeit, zielgerichtet an die selbständige Lösung von Beweisaufgaben heranzugehen.
Wir wollen uns diese Gedanken an wenigen Beispielen noch etwas verdeutlichen.

1) Viele Sätze aus dem Schulstoff sind ihrer logischen Struktur nach *Implikationen*. Die sprachlichen Fassungen dieser Sätze lassen deren logische Struktur aber nicht immer in gleicher Weise deutlich erkennen. Für die Schüler können sich daraus Schwierigkeiten im Verstehen von Beweisen solcher Sätze (bzw. im selbständigen Finden von Beweismöglichkeiten) ergeben, weil sie deshalb unter Umständen nicht erkennen, wie der Satz in Voraussetzung und Behauptung gegliedert werden kann. Am einfachsten sind in dieser Beziehung Formulierungen mit „Wenn ..., so ...“, etwa:

> „*Wenn* in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, *so* ist das Parallelogramm ein Rhombus.“[1])

Etwas schwieriger, aber auch noch gut überschaubar, ist die Gliederung in Voraussetzung und Behauptung bei folgender Formulierung:

> „Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.“[2])

Problematisch kann es dagegen bei folgenden Sätzen werden, in denen Voraussetzung und Behauptung nicht mehr einfach durch „wenn — so“ miteinander verknüpft (und gleichzeitig voneinander abgegrenzt) sind:

> „Ein Quotient rationaler Zahlen, in dem Dividend und Divisor gleiches Vorzeichen haben, ist gleich dem Quotienten der Beträge.“[3])
> „Die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen ist 0.“[4])
> „Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.“[5])
> „Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, so sind sie kongruent, falls der Scheitel des einen nicht im Innern oder auf einem Schenkel des anderen Winkels liegt.“[6])

Im Unterricht bevorzugen wir die Formulierung von Sätzen mit Hilfe von „wenn — so“, um Schwierigkeiten im Erkennen von Voraussetzung und Behauptung zu vermeiden. Es wäre allerdings wirklichkeitsfremd, stets und ausschließlich die „wenn — so“-Form benutzen zu wollen.
Erstens kommen in der mathematischen Literatur die verschiedensten Formulierungen vor. Diesen objektiven Tatbestand muß man im Unterricht berücksich-

[1]) *Kompendium der Mathematik.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 251.
[2]) A. a. O., S. 273.
[3]) A. a. O., S. 66.
[4]) A. a. O., S. 62.
[5]) A. a. O., S. 234.
[6]) A. a. O., S. 231.

tigen. Es wäre schädlich, durch eine zu starke Normierung der im Unterricht verwendeten Sprechweisen eine ungerechtfertigte Kluft zwischen „Schulmathematik" und mathematischer Wissenschaft zu schaffen.

Zweitens zeigt sich, daß manche Sätze lang, schwerfällig und dadurch auch schlechter verständlich werden, wenn man sie mit Macht in eine „wenn — so"-Formulierung bringt.

Der Ausweg ist in anderer Richtung zu suchen, nämlich in der allmählichen Befähigung der Schüler, auch bei komplizierten sprachlichen Formulierungen den jeweiligen Satz in Voraussetzung und Behauptung gliedern zu können. Das erfordert natürlich auch entsprechende Erläuterungen und Übungen. Man kann sich nicht darauf verlassen, daß eine solche Fähigkeit bei allen Schülern spontan entsteht.

Gleichzeitig muß dabei aber auch darauf geachtet werden, daß durch das Aufgliedern der Sätze in Voraussetzung und Behauptung keine falschen Vorstellungen darüber entstehen, was eigentlich bewiesen werden soll. Wir wollen uns das an einem der oben angeführten Sätze etwas deutlich machen, etwa an dem Satz:

> „Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber."

Bei einer Aufgliederung in Voraussetzung und Behauptung können wir folgende Formulierung wählen:

> *Voraussetzung:* Seien $a$ und $b$ zwei Seiten eines Dreiecks, $\alpha$ der der Seite $a$ und $\beta$ der der Seite $b$ gegenüberliegende Winkel, und gelte $a > b$.
> *Behauptung:* $\alpha > \beta$

Der im „Kompendium der Mathematik" dazu geführte Beweis endet mit der Feststellung

> „Wegen ... ist $\alpha > \beta$."[1])

Die Angabe „$\alpha > \beta$" als „Behauptung" und der Schlußsatz des zugehörigen Beweises können dazu verleiten, den Zusammenhang von Voraussetzung und Behauptung zu übersehen und zu glauben, es sei allein um den Beweis der Aussage „$\alpha > \beta$" gegangen.

Die Gefahr eines solchen Irrtums ist natürlich nicht auf das hier dargestellte Beispiel beschränkt, sondern sie besteht generell beim Schließen auf eine Implikation. Darauf hat auch Neigenfind bereits hingewiesen.[2]) Er hebt die Notwendigkeit hervor, bei der Aufgliederung eines Satzes in Voraussetzung und Behauptung (zum Zwecke des Beweises) den Satz als Ganzes nicht aus dem Auge zu verlieren und sich stets darüber klar zu sein, daß der ganze Satz bewiesen wird und nicht nur ein Teil desselben. Neigenfind bemängelt mit Recht, daß die Bezeichnung „Behauptung" in diesem Zusammenhang nicht sehr glücklich ist, denn die eigentlich zu beweisende Behauptung ist eben der ganze Satz. Es dürfte aber nicht angebracht sein, die in der Mathematik allgemein verbreiteten Begriffe „Voraussetzung" und „Behauptung" im Unterricht in einem anderen Sinne oder gar nicht verwenden zu wollen.

[1]) *Kompendium der Mathematik.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 234.
[2]) Neigenfind, F.: *Zur Methodik des Beweisens und Herleitens mathematischer Aussagen im Unterricht.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1961, S. 166f.

Wichtig ist jedoch, die Schüler bei der Einführung in das Beweisen richtig zu orientieren. Dazu ist es notwendig, den Beweis nicht immer mit dem Erreichen der Behauptung durch die Worte „was zu beweisen war“ zu beenden, sondern am Schluß noch einmal den ganzen Satz zu formulieren. Auf unser obiges Beispiel angewandt, würde das etwa so aussehen:

„. . . Wegen . . . ist $\alpha > \beta$. Damit haben wir gezeigt:
Wenn die Seite $a$ größer als die Seite $b$ ist, dann gilt für die Winkel, die diesen Seiten gegenüberliegen, die gleiche Beziehung (d. h., dann ist $\alpha > \beta$).“

Halten wir also fest:
Für die Einführung in den Beweis von Implikationen (d. h. für das erste Bewußtmachen des Schließens auf eine Implikation) ist es angebracht, mit Hilfe von „wenn — so“ formulierte Sätze als Beispiele zu benutzen. An ihnen ist die Zerlegung in Voraussetzung und Behauptung zu demonstrieren und das grundsätzliche Vorgehen zu klären, das darin besteht, die Voraussetzung als gültig anzusehen und von ihr ausgehend über mehr oder weniger viele Zwischenschritte auf die Behauptung zu schließen. Später lernen die Schüler auch in komplizierteren Sätzen Voraussetzung und Behauptung zu unterscheiden und den Beweis entsprechend aufzubauen.

2) Eine große Zahl von Sätzen aus dem Schulstoff sagen etwas über *alle* Elemente einer gewissen Menge aus. Diese Quantifizierung tritt in den sprachlichen Formulierungen jedoch oft noch weniger deutlich hervor als die Struktur der Implikation. Zwar findet man genügend Sätze, in denen die Redeweisen „jedes“ oder „alle“ explizit enthalten sind, etwa „Jedes gleichschenklige Dreieck besitzt eine Symmetrieachse.“[1])
Aber daneben gibt es auch viele Sätze, in denen diese Quantifizierung nicht oder anders ausgedrückt wird. So findet man:

„Wenn $a|b$ oder $a|c$, so $a|b \cdot c$.“[2])

Gemeint ist hier:

„Für alle Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt: wenn . . .“

Oder:

„Die Summe der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°.“[3])

Man meint mit „eines Dreiecks“ weder ein ganz bestimmtes Dreieck noch will man damit ausdrücken, daß es wenigstens ein solches Dreieck gibt, sondern die Redeweise bedeutet „. . . eines jeden beliebigen Dreiecks . . .“
Ähnlich ist es mit dem Satz:

„Zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent.“[4])

Auch hier geht es nicht um zwei ganz bestimmte Peripheriewinkel oder darum, daß es genau zwei Peripheriewinkel über demselben Bogen gibt, die kongruent

[1]) *Kompendium der Mathematik.* A. a. O., S. 235.
[2]) A. a. O., S. 26.
[3]) A. a. O., S. 234.
[4]) A. a. O., S. 256.

sind, sondern der eigentliche Sinn des Satzes ist:

> „Je zwei beliebige — das heißt alle — Peripheriewinkel über demselben Bogen sind kongruent.“

Insgesamt kann man feststellen, daß die Quantifizierung „alle“ oft nur durch Verwendung des unbestimmten Artikels ausgedrückt oder auch gänzlich weggelassen wird. Für das Verständnis von Beweisführungen durch Schließen auf „für jedes“ — Nachweis für ein beliebiges Element des Grundbereichs — ist es natürlich wieder wichtig, daß die Schüler die vorliegende Quantifizierung erkennen und verstehen. Auch das erfordert Erläuterungen und Übungen, genau wie das schon erwähnte Aufgliedern in Voraussetzung und Behauptung, und auch hier wird man mit einfachen Fällen beginnen, in denen Formulierungen wie „alle“, „jede“, „stets“, „beliebige“ in den Sätzen explizit enthalten sind, bevor man dazu übergeht, schwierigere Fälle zu betrachten und die betreffenden Sätze gegebenenfalls umzuformulieren.

In unserem Lehrplan wird bereits für die Klasse 3 auf die Benutzung und Klärung der Redeweise „für alle“ orientiert. Es heißt dort:

„... Verwendung von Variablen und der Sprechweise ‚für alle‘ ... Dabei ist den Schülern in geeigneter Weise ... verständlich zu machen, wann man von einem mit Variablen formulierten Zusammenhang sagen darf, daß er für alle Fälle zutrifft.“[1])

Aus der Tatsache, daß im Lehrplan für Klasse 8 noch einmal das Einführen der Redeweise „für alle ... gilt“ verlangt wird[2]), darf also nicht der Schluß gezogen werden, daß diese Art der Quantifizierung vorher im Unterricht nicht vorkommt, sie tritt vielmehr sehr häufig auf, auch schon in der Unterstufe. Es geht in Klasse 8 nicht um eine erste Einführung, sondern um ein bewußtes Hervorheben der Redeweise „für alle ... gilt“, um ihre Gegenüberstellung zu „es gibt ..., so daß gilt“ und die damit verbundene Systematisierung und Vertiefung der Schülerkenntnisse.

Das Erlernen wichtiger Schlußweisen in dem hier skizzierten Sinne wäre nur ein halber Erfolg, wenn es nicht gleichzeitig ergänzt würde durch die Vermittlung von Einsichten über die Unzulässigkeit gewisser Schlüsse, die man in der „Alltagslogik“ nicht selten antrifft und die auch von Schülern zuweilen benutzt werden. (Wir sind auf dieses Problem schon einmal im Abschnitt 2.1., ↗ 56, kurz eingegangen.) Es handelt sich hier vor allem um Schlußweisen, die durch folgende Schlußschemata gekennzeichnet werden können:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2\\ \sim \mathsf{H}_1\end{array}}{\sim \mathsf{H}_2}, \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathsf{H}_1 \rightarrow \mathsf{H}_2\\ \mathsf{H}_2\end{array}}{\mathsf{H}_1},$$

$$\frac{\exists\, a\ \mathsf{H}(a)}{\forall\, a\ \mathsf{H}(a)}, \qquad \frac{\sim (\mathsf{H}_1 \vee \mathsf{H}_2)}{\sim \mathsf{H}_1 \vee \sim \mathsf{H}_2},$$

$$\frac{\sim (\mathsf{H}_1 \wedge \mathsf{H}_2)}{\sim \mathsf{H}_1 \wedge \sim \mathsf{H}_2}, \qquad \frac{\sim \forall\, a\ \mathsf{H}(a)}{\exists\, a\ \mathsf{H}(a)}.$$

1) *Lehrpläne Deutsch und Mathematik, Klasse 3.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 144.
2) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 50.

Die Klärung der Fehlerhaftigkeit solcher und anderer Schlüsse soll natürlich nicht in einer Art „Kurs“ erfolgen (etwa unter der Überschrift „Wie darf man nicht schließen“), sondern an Beispielen. Meistens bietet sich dazu die Gelegenheit, wenn Schüler entsprechende Fehler machen. Es ist aber auch möglich, fehlerhafte Schlüsse den Schülern vorzulegen, von ihnen beurteilen zu lassen und die Angelegenheit auf diese Weise zu klären. In diesem Zusammenhang sollte den Schülern deutlich werden:
Eine Schlußweise wird in der Mathematik nur dann akzeptiert, wenn sie stets von wahren Aussagen wieder zu wahren Aussagen führt. Man kann eine Schlußweise deshalb nicht dadurch rechtfertigen, daß man an Hand eines Beispiels auf ein richtiges Schlußresultat verweist. Wenn derselbe Schluß bei einem anderen Beispiel von wahren Aussagen zu einer falschen Aussage führt, ist er generell unbrauchbar.

### 3.4.5. Wiedergeben von Beweisen

Es ist eine Erkenntnis der marxistischen Psychologie, daß man eine Sache vor allem dann lernt, wenn man sie praktiziert. Für unseren Fall heißt das: Die Schüler lernen das Beweisen am besten, indem sie beweisen. Mit anderen Worten: Um die Schüler zu befähigen, mathematische Beweise zu führen, muß man ihnen auch entsprechende Aufgaben erteilen.

Es ist klar, daß das nicht unvorbereitet geschehen darf, weil man sonst nichts oder nur das Gegenteil dessen erreicht, was man eigentlich erreichen wollte (siehe die Abschnitte 2.3., ↗ 64ff., und 3.3., ↗ 88ff.). Und es ist ebenso klar, daß man nur wenig erreicht, wenn Beweise zwar im Unterricht besprochen, aber nie von den Schülern selbst durchgeführt werden. Beweisaufgaben müssen — nach entsprechender Vorbereitung, wie sie hier in den Abschnitten 3.4.1. bis 3.4.4. (↗ 107ff.) charakterisiert worden ist — genauso zum Mathematikunterricht gehören, wie etwa Konstruktionsaufgaben, Sachaufgaben, Berechnungen und dergleichen mehr. Selbstverständlich gilt dabei dasselbe Prinzip wie bei allen Aufgaben, die wir den Schülern stellen: die Anforderungen müssen allmählich und schrittweise gesteigert werden. Man darf vor allen Dingen am Anfang nicht zu viel verlangen, sonst organisiert man nur eine Serie von Mißerfolgserlebnissen und erzeugt eine ablehnende Haltung der Schüler gegenüber Beweisaufgaben (↗ 103, Abschnitt 3.3.7.). Leider ist die Gefahr des Überforderns der Schüler gerade bei Beweisaufgaben recht groß. Das liegt daran, daß selbst relativ einfache und kurze Beweise von den Schülern eine ziemlich komplexe Leistung erfordern.

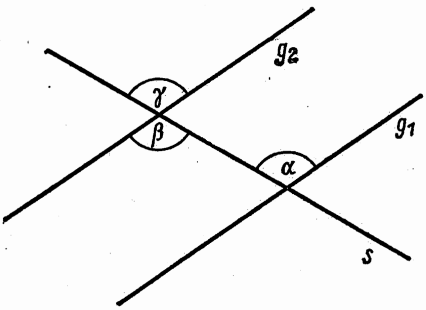
Sehen wir uns dazu die Ergebnisse eines kleinen Versuchs an. Er wurde im Jahr 1969 in zwei Klassen der Klassenstufe 6 durchgeführt. Diese Klassen hatten vom ersten Schuljahr an durch ihre Einbeziehung in die Lehrplanerprobung und die damit verbundene regelmäßige Weiterbildung und Betreuung der Lehrkräfte einen sehr guten Mathematikunterricht genossen, in dem insbesondere auch die systematische Vorbereitung der Schüler auf das Beweisen berücksichtigt worden war (↗ 107ff., Abschnitte 3.4.1. bis 3.4.4.). Der Versuch war fast genauso aufgebaut wie die in den Jahren 1962 und 1963 in der Klassenstufe 7 durchgeführten Tests (↗ 88ff., Abschnitt 3.3.), nur mit dem Unterschied, daß es sich damals für die Schüler inhaltlich um Wiederholungen handelte, während es diesmal um für die Schüler neuen Stoff ging.

Nun zur Versuchsbeschreibung:

Die erste Versuchsstunde enthielt zunächst eine kurze Wiederholung der Begriffe „Scheitelwinkel", „Nebenwinkel" und „Stufenwinkel" sowie der entsprechenden Sätze, die in vorangegangenen Stunden eingeführt worden waren. Es folgte dann die Einführung des Begriffs „Wechselwinkel" an geschnittenen Geraden $g_1$ und $g_2$ und die Erarbeitung des Satzes:

„Wenn $g_1 \| g_2$ ist und $\alpha$; $\beta$ ein Wechselwinkelpaar bilden, dann ist $\alpha \cong \beta$."

Dieser Satz, der mit Hilfe von Messungen als Vermutung gewonnen worden war, ist dann in gemeinsamer Arbeit mit den Schülern bewiesen worden. Dabei entstand das im Bild 26 wiedergegebene Tafelbild.




*Satz:* Wenn $g_1 \| g_2$ ist und $\alpha$; $\beta$ ein Wechselwinkelpaar bilden, dann ist $\alpha \cong \beta$.

*Beweis:* (1) $\alpha \cong \gamma$, denn sie bilden ein Stufenwinkelpaar an Parallelen;
(2) $\gamma \cong \beta$, denn sie bilden ein Scheitelwinkelpaar;
(3) Also gilt: $\alpha \cong \beta$

Bild 26

Anschließend wurde der Beweis abgewischt, der Satz und die Beweisfigur aber stehengelassen. Die Schüler erhielten den Auftrag, den Beweis noch einmal selbständig durchzuführen.

Das Ergebnis zeigt die Tabelle 15, wobei mit I, II und III die im Abschnitt 3.2.3. (↗ 88) charakterisierten Leistungsgruppen gemeint sind.

| | I | II | III | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| Prozentsatz der Schülerzahl: $n$ % | 35 | 43 | 22 | 100 |

Tabelle 15

Die zweite Versuchsstunde (am folgenden Tag) begann mit der Besprechung der Beweisaufgabe vom Vortag. Der Beweis wurde noch einmal erarbeitet, wobei die häufigsten Schülerfehler genannt und diskutiert worden sind. Das waren vor allem:

- Das Fehlen von Begründungen zu den Beweiszeilen (1) bzw. (2);
- die Unvollständigkeit der Begründung zur Beweiszeile (1) — man stützte sich auf die Stufenwinkelbeziehung zwischen $\alpha$ und $\gamma$, vergaß aber, die Parallelität von $g_1$ und $g_2$ zu erwähnen;
- die Einleitung von Begründungen mit „wenn" statt mit „denn" oder „weil" oder „da";
- das Auftreten der Beweiszeile (3) im Sinne einer weiteren Feststellung, ohne deutliche Charakterisierung von (3) als Folgerung aus (1) und (2).

Dieser Besprechung schloß sich eine kurze Übung im Schließen an, die die Bewältigung der nachfolgenden Beweisaufgabe erleichtern sollte. Dazu sind folgende Schlüsse gezogen und an der Tafel in Kurzform fixiert worden:

„Wenn $a < b$ gilt und $a = x$ ist, so gilt $x < b$."

Kurz: $$\begin{array}{c} a < b \\ a = x \\ \hline x < b \end{array}$$

Entsprechend dann:

$$\begin{array}{c} a \mid 60 \\ a = b \\ \hline b \mid 60 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x - y = 5 \\ y = z \\ \hline x - z = 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + y = 10 \\ y = z \\ \hline x + z = 10 \end{array}$$

Wie man sieht, ging es in jedem Falle um die Anwendung des LEIBNIZschen Ersetzbarkeitstheorems (Gleiches kann nach Belieben gegenseitig ersetzt werden), das auch in der vorgesehenen Beweisaufgabe heranzuziehen war. (Aus $\gamma + \beta = 180°$ und $\alpha = \gamma$ ist auf $\alpha + \beta = 180°$ zu schließen.)
Es folgte nun die Erarbeitung des Satzes:

„Wenn $g_1 \| g_2$ ist und $\alpha$; $\beta$ ein Paar entgegengesetzt liegender Winkel bilden, dann ist $\alpha + \beta = 180°$."

Anschließend erhielten die Schüler den Auftrag, den Satz an Hand der im Bild 27 dargestellten Beweisfigur selbständig zu beweisen. Die Leistung der Schüler bei dieser Aufgabe ist aus der Tabelle 16 zu erkennen.

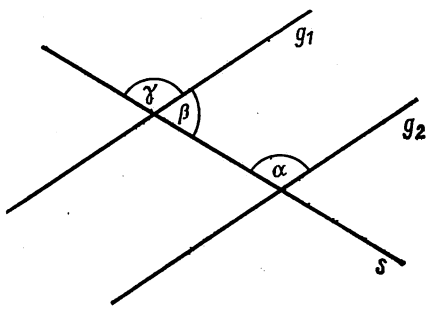



Bild 27

| | I | II | III | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| $n\%$ | 20 | 18 | 62 | 100 |

Tabelle 16

Was zeigt dieser Versuch?

*Erstens:* Die im Vergleich zum früheren Mathematikunterricht wesentlich bessere Vorbereitung der Schüler auf das Beweisen führte bereits in der Klassenstufe 6 zu deutlich besseren Leistungen, als sie 1962 in der Klassenstufe 7 anzutreffen waren (↗ 88, Abschnitt 3.3.). Besonders auffallend ist dabei noch, daß bei den neuen Versuchen der Anteil jener Schülerarbeiten, die kaum ein Verständnis für die Aufgabenstellung erkennen lassen, deutlich geringer war als in den Versuchen von 1962.

So enthalten beispielsweise bei der selbständigen Beweisführung (zum Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen) nur 8% der Arbeiten keine begründenden oder schlußfolgernden Formulierungen („weil", „denn", „also" u. dgl.) — gegenüber 34% im Jahre 1962. Untersucht man die Schülerarbeiten auf das Vorhandensein des richtigen „Schlußsatzes" — das ja auch mit Aufschluß darüber gibt, wie weit die Aufgabenstellung verstanden worden ist —, so zeigt sich, daß bei dem neuen Versuch zur selbständigen Beweisführung zwar noch 37% der Schülerarbeiten keinen „Schlußsatz" aufwiesen oder einen unpassenden (meist „$\alpha \cong \beta$"), daß dieser Anteil aber trotzdem deutlich geringer war als im Jahre 1962, wo er 60% betrug. (In diesen Zahlen sind jene Arbeiten auch mit enthalten, die überhaupt keinen oder nur einen geringen Beweisansatz erkennen lassen.)

*Zweitens:* Auch die gegenüber früher weitaus bessere Vorbereitung der Schüler auf das Beweisen reicht noch nicht aus, um schon am Beginn von Klasse 6 von der Mehrzahl der Schüler gute Leistungen im Wiedergeben oder selbständigen Führen von Beweisen erwarten zu können.

*Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus diesen Erkenntnissen für eine lehrplangerechte Unterrichtsgestaltung?*

Trotz aller Vorarbeiten müssen die Schüler in Klasse 6 das Beweisen erst lernen. Dafür sind aber vollständige Beweisaufgaben — auch wenn es sich nur um Beweiswiedergaben handelt — schon zu komplex und für eine ganze Reihe von Schülern zu schwierig. Sie können deshalb allein an Hand solcher Aufgaben das Beweisen nicht lernen, auch dann nicht, wenn man ihnen immer wieder derartige Aufgaben stellt (↗ 64, Abschnitt 2.3.). Es ist vielmehr notwendig, das Führen von Beweisen in einfachere Teilhandlungen zu zerlegen und zunächst diese von den Schülern erlernen zu lassen. Dabei ist es dann möglich, die Anforderungen schrittweise zu steigern, bis man vollständige Beweise von den Schülern verlangen kann.

Allerdings sollte beachtet werden, daß bei der Bewältigung von Beweisaufgaben individuelle Leistungsunterschiede der Schüler sichtbar werden und zu berücksichtigen sind. Es bietet sich hier ein weites Feld für die Förderung besonders begabter Schüler, denen man bald auch schwierigere Beweisaufgaben stellen kann, wobei nicht nur an den Unterricht zu denken ist, sondern auch an die Betätigung in mathematischen Arbeitsgemeinschaften, an das Lösen von Wettbewerbsaufgaben (etwa aus der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha“) und ähnliches. (Selbstverständlich sind auch alle anderen Schüler durch differenzierte Aufgabenstellungen optimal zu fördern.)

Wie kann die Aufgliederung des Beweisens in einzeln erlernbare Teilhandlungen nun aussehen, wenn wir zunächst an das verständnisvolle Erfassen und Wiedergeben von Beweisen denken, das der Lehrplan für die Klasse 6 fordert?

Eine Möglichkeit, auf die u. a. auch H. König und H. Römer hingewiesen haben[1]) und die in verschiedener Weise variiert werden kann, besteht darin, den Schülern Beweise vorzulegen (durch vorbereitete Tafelbilder oder mit Hilfe von Arbeitsblättern), die irgendwelche Lücken enthalten. Die Schüler erhalten dann die Aufgabe, diese Lücken auszufüllen. Die Beweise, die man dazu in Klasse 6 heranzieht, sollten den Schülern aus dem vorangegangenen Unterricht bekannt sein. Später — ab Klasse 7 — wird man aber auch dazu übergehen, den Schülern Beweise vorzulegen, die ihnen neu sind.

Die Lücken, von denen hier die Rede ist, können unterschiedlicher Art sein: Eine erste Form wäre, daß der zu ergänzende Beweis zwar alle notwendigen Schritte enthält, daß aber einige oder auch alle Begründungen der einzelnen Schritte fehlen. Ein Beispiel für eine derartige „Beweisaufgabe“ wäre folgendes

*Satz:*
In jedem Parallelogramm werden die Diagonalen durch ihren Schnittpunkt halbiert.

*Beweis:*
Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt $S$ (Bild 28).

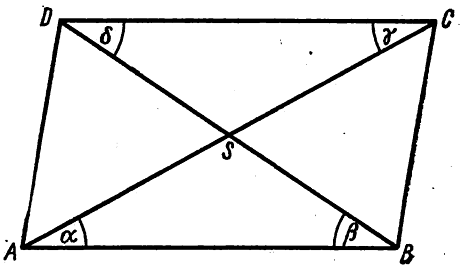



Bild 28

Dann gilt:
(1) $\alpha \cong \gamma$, denn ...
(2) $\beta \cong \delta$, denn ...
(3) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, denn ...

[1]) König, H., Römer, H.: *Zur Einführung in das Beweisen in Klasse 6.* Manuskriptdruck der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, 1969.

Also ist
(4) $\Delta\, ABS \cong \Delta\, CDS$, weil ...
Daraus folgt
(5) $\overline{BS} \cong \overline{DS}$ und $\overline{AS} \cong \overline{CS}$, denn ...
Das bedeutet aber, daß durch $S$ die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ halbiert werden, w. z. b. w.

Eine andere Form der „lückenhaften Beweise" wäre durch das Weglassen einzelner Beweisschritte zu erreichen. Das könnte — an dem gleichen Beispiel wie oben dargestellt — etwa so aussehen:

(1) $\alpha \cong \gamma$, denn $\alpha; \gamma$ sind ein Wechselwinkelpaar an geschnittenen Parallelen;
(2) ...
(3) ...
Also ist
(4) $\Delta\, ABS \cong \Delta\, CDS$, weil ...
Daraus folgt
(5) ...
Das bedeutet, daß ...

Es ist sicher schon zu sehen, wie vielfältig man diese „Lückenmethode" variieren und wie man damit auch den Schwierigkeitsgrad solcher Aufgaben verändern kann, bis schließlich auch vollständige Beweiswiedergaben von den Schülern bewältigt werden. Aber auch diese lassen sich in ihrem Schwierigkeitsgrad noch beeinflussen, je nachdem, ob die Schüler bestimmte Anfangsorientierungen erhalten oder nicht. Es ist dabei vor allem zu prüfen, ob der Satz, dessen Beweis die Schüler wiedergeben sollen, deutlich in Voraussetzung und Behauptung gegliedert wird oder nicht. Bei unserem obigen Beispiel ist es noch nicht geschehen. Es hätte sonst wie folgt beginnen müssen:

*Voraussetzung:* $ABCD$ ist ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt $S$.
*Behauptung:* $S$ halbiert die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.
*Beweis:* (1) $\alpha \cong \gamma$, denn ...
usw.

Offensichtlich ist die dem Schüler vorgegebene Orientierung größer, wenn der zu beweisende Satz schon in Voraussetzung und Behauptung gegliedert ist, als wenn der Schüler diese Gliederung selbst vornehmen muß. Bei vorgegebener Aufgliederung ist von vornherein klar, wovon auszugehen ist, und es ist auch klar, was am Ende des Beweises erreicht sein soll. Enthält der Lückentext dagegen keine Zerlegung des Satzes in Voraussetzung und Behauptung, dann sind die Anforderungen an die Schüler schon etwas höher. Natürlich sollen sie auch diese etwas höheren Anforderungen später bewältigen, aber es wäre falsch, von vornherein damit zu beginnen.

Stellen wir nun zusammen, was die Schüler durch das Lösen von Beweisaufgaben dieser ersten Art — Verstehen und Wiedergeben von Beweisen — lernen sollen und auch können:

1. Sie lernen den allgemeinen Aufbau mathematischer Beweise kennen: das Ausgehen von gewissen Voraussetzungen und das schrittweise Weiterschließen bis zur Behauptung.
2. Sie lernen das Begründen der Einzelschritte im Beweis und eignen sich bestimmte, häufig benutzte Schlußweisen an (↗ 139ff., Abschnitt 3.4.4.).
3. Sie lernen, Implikationen in Voraussetzung und Behauptung zu gliedern.
4. Sie lernen, wie man Beweise in übersichtlicher und sprachlich klarer Form schriftlich darstellen kann.
5. Sie festigen bei den Beweiswiedergaben ihre sonstigen mathematischen Kenntnisse (Begriffe, Sätze, Algorithmen), indem sie sie bei Begründungen, beim Schließen bzw. bei Umformungen anwenden.
6. Sie dringen durch das Verständnis der Beweise tiefer in die mathematischen Zusammenhänge ein und lernen, daß die mathematischen Begriffe und Sätze nicht beziehungslos nebeneinander stehen, sondern in vielfältiger Weise miteinander verbunden sind.

### 3.4.6. Selbständiges Führen von Beweisen

Die im vorigen Abschnitt dargestellten Möglichkeiten der Gestaltung von Beweisaufgaben (Ausfüllen von „Lücken") führen bei allmählicher Steigerung des Schwierigkeitsgrads schließlich dazu, von den Schülern das selbständige Finden und Führen von Beweisen zu fordern, wie der Lehrplan es ab Klasse 7 verlangt. Wir gehen dabei davon aus, daß das Finden und selbständige Führen mathematischer Beweise erlernbar ist. Die Voraussetzungen, die dazu erfüllt sein müssen, haben wir uns klar gemacht — vgl. Kapitel 2. (↗ 55ff.) sowie die Abschnitte 3.4.1. bis 3.4.5. (↗ 148ff.). Es ist natürlich klar, daß nicht alle Schüler auf diesem Gebiet zu gleich hohen Leistungen gelangen werden. Jedoch muß erreicht werden, daß alle Schüler die Lehrplananforderungen erfüllen:

— „. . . bis zum Abschluß von Klasse 8 . . . einfache Beweise weitgehend selbständig führen können"[1];
— „In den Klassen 9 und 10 ist das Beweisverständnis so zu entwickeln, daß die Schüler . . . einfache Beweise selbständig führen können."[2]

Darüber hinaus werden wir unser Augenmerk natürlich auch darauf zu richten haben, daß die Zahl der Schüler zunimmt, die schwierigere Beweisaufgaben — etwa mit Olympiadeniveau — selbständig meistern können.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie man das Finden und Führen von Beweisen lernen kann.

Die Antwort auf diese Frage ergibt sich aus allgemeineren, nicht nur auf das Beweisen gerichteten Überlegungen. Sie zielen darauf ab, Wege zur Entwicklung von Fähigkeiten im Lösen solcher mathematischer Probleme zu finden, die selbständiges, produktives Denken erfordern und nicht durch bloße Anwendung bekannter Algorithmen bewältigt werden können.

[1]) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 6 bis 8.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, S. 11.
[2]) *Lehrplan für Mathematik — Klassen 9 und 10.* Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1969, S. 10.

Einige grundlegende Resultate dieser Überlegungen, wie sie vor allem in den Schriften von G. POLYA[1]) zu finden sind, können wie folgt zusammengefaßt werden:
Die Entwicklung von Fähigkeiten im Lösen mathematischer Probleme erfordert die Aneignung einer guten (d. h. möglichst oft und möglichst rasch zum Ziel führenden) Suchstrategie, die im allgemeinen als Folge von Fragen bzw. von Impulsen fixiert werden kann. Diese Fragen bzw. Impulse zielen darauf ab, dem Suchen nach der Lösung des jeweiligen Problems eine gewisse Systematik zu geben und dem Suchenden dadurch das Finden von Lösungsideen zu erleichtern.
In die gleiche Richtung gehen auch die im Abschnitt 2.3. (↗ 64ff.) angeführten Überlegungen GALPERINS, die u. a. von A. DIETZ aufgegriffen und speziell für den Mathematikunterricht weiterentwickelt worden sind. Im Vordergrund steht dabei die Vermittlung bzw. Aneignung sogenannter Orientierungsgrundlagen, die den Schülern die Lösung mathematischer Probleme ermöglichen bzw. erleichtern können.[2])
Selbstverständlich bietet das Arbeiten nach einer Orientierungsgrundlage bzw. Suchstrategie keine Garantie dafür, zu jeder beliebigen Aufgabe eine Lösung zu finden. Man kann aber erwarten, daß die Erfolgsaussichten bei einem durch eine solche Strategie gelenkten Vorgehen größer sind als bei einem relativ planlosen Probieren oder einem vorwiegend passiven Warten auf Lösungsideen.

Welcher Art sind nun die Fragen bzw. Impulse, die zu einer Orientierungsgrundlage oder Suchstrategie gehören können? Sie lassen sich in *vier Gruppen* einteilen:

Eine *erste Gruppe* von Fragen bzw. Impulsen ist darauf gerichtet, ein *volles Verstehen der gegebenen Aufgabe* zu sichern. Dazu ist es erforderlich, die Aufgabenstellung zu analysieren. (Wir wollen uns hier — unserem Anliegen entsprechend — nur auf Beweisaufgaben beziehen.) Das kann geschehen, indem man sich folgende Fragen zur Beantwortung vorlegt bzw. folgenden Impulsen nachgeht:
— Überprüfe, ob du alle vorkommenden Begriffe und Redeweisen verstehst!
— Informiere dich über unbekannte Termini!
— Kann man den zu beweisenden Satz in Voraussetzung und Behauptung gliedern?
  Wenn ja: Wie lauten die im Satz enthaltenen Voraussetzungen? Wie lautet die Behauptung des Satzes?
— Läßt sich der im Satz gegebene Sachverhalt zeichnerisch darstellen?
  Wenn ja: Fertige eine Skizze an! Führe passende Bezeichnungen ein!
— Wie kann man den zu beweisenden Satz noch ausdrücken? Gib zu ihm äquivalente Formulierungen an!

[1]) Vgl. z. B. POLYA, G.: *Schule des Denkens.* Francke Verlag, Bern 1949.
POLYA, G.: *Mathematik und plausibles Schließen.* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1962.
POLYA, G.: *Die Heuristik.* In: „Der Mathematikunterricht", Heft 1/1964.
[2]) DIETZ, A.: a) *Beiträge zur Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts, 2. Teil,* S. 15ff.
b) *Zur Weiterentwicklung der unterrichtsmethodischen Grundlagen der Mathematikausbildung in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule,* S. 83ff. (Lehrbriefe für das Fernstudium der Lehrer, herausgegeben von der Fachkommission Mathematik, 1969)

Eine *zweite Gruppe* von Fragen bzw. Impulsen zielt darauf ab, sich eine *Übersicht über Hilfsmittel für den Beweis* zu verschaffen. Dazu sind folgende Fragen bzw. Impulse geeignet:

— Hast du schon eine ähnliche Aufgabe gelöst?
  Wenn ja: Erinnere dich, wie du dabei vorgegangen bist!
— Kennst du Sätze, die gleiche oder ähnliche Voraussetzungen enthalten wie der zu beweisende Satz?
— Kennst du Sätze, die die gleiche oder eine ähnliche Behauptung enthalten wie der zu beweisende Satz?
— Erinnere dich an die Definitionen der vorkommenden Begriffe!
— Wenn eine Skizze möglich war: Welche Hilfslinien könnten nützlich sein, damit bekannte Sätze anwendbar werden?

Eine *dritte Gruppe* von Fragen bzw. Impulsen soll dem unmittelbaren *Finden des Beweises* dienen. Dazu kann gehören:

— Was folgt aus den gegebenen Voraussetzungen?
— Woraus könnte die Behauptung direkt folgen?
— Untersuche Spezialfälle des Satzes!
— Was würde aus der negierten Behauptung folgen?
— Löse eventuelle Hilfsaufgaben!
— Suche Beziehungen zwischen Folgerungen aus Voraussetzungen und hinreichenden Bedingungen für die Behauptung!
— Sind in den bisherigen Überlegungen schon alle Voraussetzungen benutzt worden?
— Verfolge einen Gedanken so lange, bis er zum Ziel geführt hat oder seine Unbrauchbarkeit deutlich zu sehen ist! In letzterem Falle scheue dich nicht, noch einmal ganz von vorn anzufangen!

Eine *vierte Gruppe* von Fragen bzw. Impulsen soll schließlich die *Kontrolle des Beweises* gewährleisten. Sie enthält deshalb folgende Punkte:

— Prüfe jeden Beweisschritt auf seine Berechtigung nach! Welcher Satz rechtfertigt den Schritt?
— Ist die Schlußweise zulässig?
— Sind alle möglichen Fälle berücksichtigt? Müssen bestimmte Fälle ausgeschlossen werden?

Mit diesen vier Gruppen von Fragen ist eine mögliche Suchstrategie für das Lösen von Beweisaufgaben angegeben. Sie ist selbstverständlich nicht die einzige. Man könnte z. B. noch Fragen bzw. Impulse hinzufügen, um die Strategie noch genauer den unterschiedlichsten Situationen anzupassen, vor die man sich beim Lösen von Beweisaufgaben gestellt sehen kann. Es ist aber auch denkbar, verschiedene relativ spezielle Fragen oder Impulse wegzulassen und sie durch globalere zu ersetzen, so daß gewissermaßen nur die Hauptgedanken der Suchstrategie explizit angegeben werden. In jedem Fall dürften jedoch die oben charakterisierten vier Gruppen von Fragen bzw. Impulsen hervortreten, da sie durch gene-

relle Aspekte bzw. Notwendigkeiten bedingt sind: Man wird stets von einer *Situationsanalyse* auszugehen haben (erste Gruppe), eine *Materialanalyse* vornehmen (zweite Gruppe), sich eine *Lösung* erarbeiten (dritte Gruppe) und diese einer *Kontrolle* unterziehen (vierte Gruppe).
Um eventuelle Mißverständnisse auszuschließen, sei betont, daß die Anwendung einer Suchstrategie nicht als einmaliges, lineares „Abarbeiten" der vorgegebenen Folge von Fragen bzw. Impulsen zu verstehen ist. Das Suchen nach einem Beweis kann mehr oder weniger kompliziert verlaufen, und es kann dabei notwendig oder nützlich sein, auf bestimmte Fragen oder Impulse mehrfach zurückzukommen, um sie dann — in Abhängigkeit von der jeweiligen Situation — in unterschiedlicher Weise zu beantworten bzw. zu befolgen.
Wir wollen uns jetzt an einem Beispiel ansehen, wie mit Hilfe der oben angegebenen Suchstrategie eine Beweisaufgabe tatsächlich gelöst worden ist. Die Wiedergabe des Lösungsprozesses ist hier zwar etwas vereinfacht und gekürzt, enthält jedoch alle wesentlichen Schritte des wirklichen Vorgehens. Die aus der Suchstrategie verwendeten Fragen und Impulse werden nicht mit angegeben, um die Darstellung nicht zu überladen. Sie können ohnehin unschwer aus dem Lösungsgang rekonstruiert werden. Die Aufgabe ist im Oktober 1968 bei einem mathematischen Schülerwettbewerb an der Universität in Budapest gestellt worden.

Die *Aufgabe* lautet:

> In einer Ebene seien eine Gerade $g$ und ein Kreis $k$ mit dem Radius $n$ Längeneinheiten gegeben, wobei $n$ eine natürliche Zahl sein soll. Werden in den Kreis $4 \cdot n$ Einheitsstrecken eingezeichnet, so gibt es stets eine zu $g$ senkrechte oder eine zu $g$ parallele Sehne des Kreises $k$, die mit wenigstens zwei der Einheitsstrecken gemeinsame Punkte besitzt. Man beweise diese Aussage.

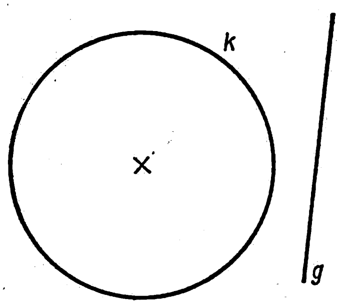


Bild 29

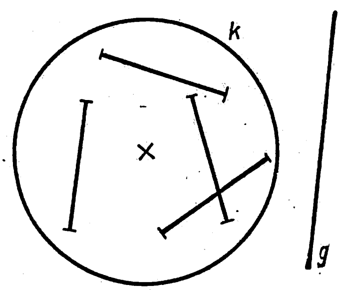


Bild 30

*Lösungsprozeß:*

Wir untersuchen zunächst die Gegebenheiten. Dazu zeichnen wir eine Skizze (Bild 29). Da $g$ beliebig ist und offenbar nur als Repräsentant einer Richtung benötigt wird, kann $g$ außerhalb von $k$ verlaufen. Vor dem Einzeichnen von Einheitsstrecken in den Kreis zögern wir. Es gibt eine unüberschaubare Vielfalt von Möglichkeiten; denn in der Aufgabe sind keinerlei Voraussetzungen über die Lage der Strecken in $k$ enthalten. Betrachten wir deshalb zunächst den einfachsten Fall, nämlich $n = 1$. Wir können dann eine Skizze zeichnen (Bild 30). Für den gezeichneten Fall ergibt sich die Behauptung des zu beweisenden Satzes unmittelbar aus der Tatsache, daß zwei der Einheitsstrecken einander schneiden. Jede Sehne durch diesen Schnittpunkt — also auch eine zu $g$ senkrechte beispielsweise — hätte so mit wenigstens zwei der Strecken gemeinsame Punkte.

Aber die Strecken brauchen einander natürlich nicht zu schneiden. Trotzdem — so besagt der Satz — gibt es dann immer eine Sehne (senkrecht zu $g$ oder parallel zu $g$), die ... usw. Warum eigentlich „senkrecht oder parallel" ?

In unserer Skizze (Bild 30) könnte man sowohl eine zu $g$ senkrechte als auch eine zu $g$ parallele Sehne zeichnen, die beide die Bedingung erfüllen würden. Das ist aber offenbar nicht immer so. Wenn wir die Strecken zum Beispiel so wie im Bild 31 zeichnen, trifft keine zu $g$ parallele Sehne mehr als höchstens eine der Strecken. Aber

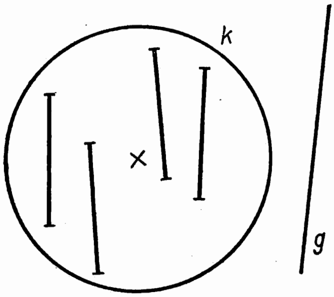



Bild 31

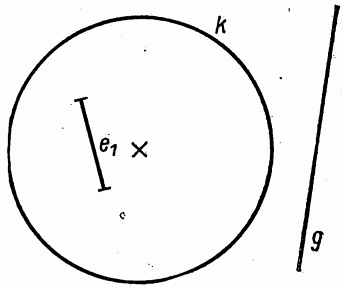



Bild 32

dafür gibt es viele zu $g$ senkrechte Sehnen, die mit wenigstens zwei Strecken gemeinsame Punkte haben. Wir sind geneigt, das ganze Problem als Spiel aufzufassen: Spieler A darf in dem Kreis mit dem Radius $n$ nach Belieben $4 \cdot n$ Einheitsstrecken einzeichnen, Spieler B darf danach in $k$ eine Sehne einzeichnen, die aber parallel zu $g$ oder senkrecht zu $g$ sein muß. Findet B eine derartige Sehne, die mit wenigstens zwei Einheitsstrecken gemeinsame Punkte besitzt, so hat A verloren. Kann B eine solche Sehne nicht zeichnen, so hat A gewonnen. Der Satz besagt nun, daß A immer verlieren muß. Das liegt offenbar daran — wir haben es schon bei unseren Skizzen bemerkt —, daß in $k$ nicht genügend „Platz" für die Einheitsstrecken ist. Aber was heißt hier „Platz" ?

Identifizieren wir uns einmal mit dem Spieler A. Wir wollen schrittweise vorgehen und genau darauf achten, woran wir scheitern. Beginnen wir zunächst mit einer Einheitsstrecke $e_1$ (Bild 32). Für die Lage der Strecke $e_2$ haben wir dann noch viele Möglichkeiten, aber sie darf sicher nicht so sein, daß B eine „Gewinnsehne" zeichnen kann. Das heißt mit anderen Worten: für $e_2$ sind zwei streifenförmige Gebiete in $k$ als „gesperrt" anzusehen, nämlich jene Gebiete, die von zu $g$ senkrechten bzw. parallelen Geraden durch die Endpunkte von $e_1$ begrenzt werden (Bild 33). Nach dem Einzeichnen von $e_2$ sind für $e_3$ zwei weitere Streifen gesperrt — usw. Die Behauptung des Satzes besagt nun, daß nach dem Einzeichnen aller $4 \cdot n$ Strecken wenigstens zwei „Parallelstreifen" oder mindestens zwei „Orthogonalstreifen" gemeinsame Punkte besitzen müssen. Anders ausgedrückt: die Summe der Parallelstreifenbreiten muß größer oder gleich dem Kreisdurchmesser $2 \cdot n$ sein oder die Summe der Orthogonalstreifenbreiten muß größer oder gleich $2 \cdot n$ sein. Nun hängt aber die Breite eines

Streifens offensichtlich davon ab, welchen Winkel die Einheitsstrecke mit der Richtung $g$ bildet. Wir finden (Bild 34)

$$b_0 = \cos\alpha,\ b_p = \sin\alpha, \text{ wobei für } \alpha \text{ stets } 0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} \text{ gilt.}$$

Damit bekommt die Behauptung unseres Satzes folgende Gestalt:

$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_{4n} \geqq 2n$$

oder

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_{4n} \geqq 2n$$

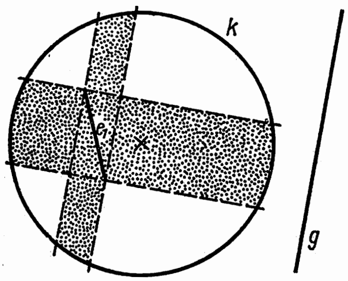



Bild 33

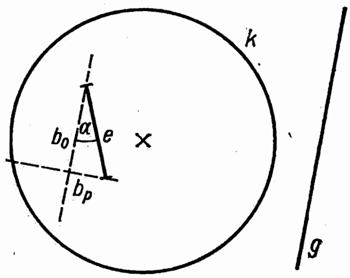



Bild 34

Wir haben nun das schwer überschaubare geometrische Problem auf eine arithmetische Fragestellung zurückgeführt. Das erscheint uns als ein Fortschritt, obwohl wir noch nicht recht sehen, wie wir die Alternative der beiden Ungleichungen beweisen können. Wir denken zunächst an vollständige Induktion, stellen aber bald fest, daß schon der Beweis für $n = 1$ nicht einfacher erscheint als der Beweis für beliebiges $n$. Nun probieren wir es indirekt. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann müßte gelten:

$$\sum_{\nu=1}^{4n} \sin\alpha_\nu < 2\cdot n \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{4n} \cos\alpha_\nu < 2\cdot n$$

Da die Ungleichungen jetzt konjunktiv verknüpft sind, könnte man sie zu einer zusammenfassen:

$$\sum_{\nu=1}^{4n} (\sin\alpha_\nu + \cos\alpha_\nu) < 4\cdot n$$

Diese Form erscheint uns zugänglicher als die vorige, weil wir es nun nicht mehr mit $4\cdot n$ beliebigen Sinus- bzw. Kosinuswerten zu tun haben, sondern mit Summen von Sinus- und Kosinuswerten jeweils gleicher Winkel.

Wir müßten nachweisen, daß die Ungleichung nicht gelten kann. Dazu wäre es gut, eine Abschätzung für $\sin\alpha + \cos\alpha$ im Intervall $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ zu finden. Wenn wir zeigen könnten, daß $\sin\alpha + \cos\alpha$ nie kleiner als 1 werden kann, wären wir fertig, denn das würde bedeuten, daß die letzte Ungleichung nicht stimmen kann. Ein Blick auf unsere Skizze (Bild 34) bringt dann plötzlich die Lösung:

Es gilt stets

$$b_p + b_0 \geqq e \text{ (Dreiecksungleichung), d. h.}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha \geqq 1\,.$$

Damit ist

$$\sum_{\nu=1}^{4n} (\sin \alpha_\nu + \cos \alpha_\nu) \geqq 4 \cdot n$$

im Widerspruch zur vorigen Ungleichung. Unsere Annahme ist also falsch, die Behauptung damit bewiesen.

Kommen wir jetzt auf den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen zurück. Wir hatten festgestellt, daß es zur Entwicklung von Fähigkeiten im Finden und Führen mathematischer Beweise angebracht ist, die Schüler mit einer entsprechenden Suchstrategie auszurüsten und sie dazu zu erziehen, an die Lösung von Beweisaufgaben aktiv und planmäßig — gelenkt durch die betreffende Suchstrategie — heranzugehen. Die Frage ist, wie dieses Ziel im Unterricht erreicht werden kann.

Die einfachste und direkteste Methode wäre, den Schülern eine Suchstrategie — d. h. also ein System von bestimmten Fragen bzw. Impulsen — einfach zu geben, eventuell noch mit der Forderung verbunden, sich die Fragen und Impulse gut einzuprägen. Es ist aber mehr als zweifelhaft, ob man mit diesem Vorgehen Erfolg haben würde. Vor allem jene Schüler, die mit Beweisführungen noch wenig vertraut sind und nur geringe Erfahrungen im Beweisen besitzen, würden mit einer solchen Suchstrategie zunächst kaum etwas anfangen können: viele Fragen bzw. Impulse müßten ihnen unmotiviert erscheinen, und häufig würden sie auch gar nicht in der Lage sein, sich die Fragen richtig zu beantworten bzw. den Impulsen zu folgen.

Wesentlich erfolgversprechender erscheint deshalb ein anderer Weg, nämlich die allmähliche Herausarbeitung einer Suchstrategie im Zusammenhang mit dem Lösen von Beweisaufgaben. Die Suchstrategie kristallisiert sich dabei als ein Teil jener Erfahrungen heraus, die die Schüler bei Beweisführungen im Laufe der Zeit gewinnen. Natürlich geschieht das nicht automatisch, sondern erfordert bewußte, zielgerichtete Maßnahmen des Lehrers. Er muß sein methodisches Vorgehen bei der Behandlung von Beweisen im Unterricht so gestalten, daß die Fremdsteuerung der Schülertätigkeit (durch Fragen bzw. Impulse des Lehrers) in zunehmendem Maße von der Selbststeuerung (durch eigene Überlegungen der Schüler) abgelöst werden kann. Dazu ist zweierlei notwendig: Erstens müssen die Hilfen, die der Lehrer den Schülern bei Beweisführungen zuteil werden läßt, „gute“ Hilfen sein. Das bedeutet, daß die von ihm gestellten Fragen bzw. seine Impulse den Schülern sinnvoll und vor allem motiviert erscheinen müssen. Die Schüler sollen nicht einfach Schritt für Schritt durch den Beweis geführt werden — sie können dann zwar sehen, daß alles richtig ist, verstehen aber kaum, wie man selbst auf einen Beweis kommen kann. Es ist vielmehr notwendig, ihnen solche Anregungen zu geben, die ihnen ein mehr oder weniger selbständiges Finden der Beweisidee ermöglichen. Das bedeutet, daß in den Anregungen und Hilfen des Lehrers jene Fragen und Impulse eine große Rolle spielen müssen, die wir als Bestandteile unserer oben angegebenen Suchstrategie schon kennen gelernt haben.

Zweitens ist den Schülern im Laufe der Zeit auch bewußt zu machen, daß diese Fragestellungen und Impulse des Lehrers bei der Erarbeitung von Beweisen immer

wieder auftreten. Die Schüler sollen sich diese Fragen und Impulse mehr und mehr zu eigen machen, um in zunehmendem Maße selbständig Beweise führen zu können. Mit anderen Worten: die Schüler eignen sich allmählich eine Suchstrategie für das Finden von Beweisen an.
Zur Verdeutlichung der hier dargelegten methodischen Grundgedanken dürfte es nützlich sein, an einem speziellen Beweis eine „gute" und eine „schlechte" Lehrerführung gegenüber zu stellen. Die Beispiele stammen aus Hospitationen bei Lehrerstudenten. Es handelt sich jedoch nicht um wörtliche Unterrichtsprotokolle, sondern um gekürzte, idealisierte und nur auf das Wesentliche beschränkte Wiedergaben.

*Folgender Satz war zu beweisen:*

> Wenn der Scheitelpunkt $C$ eines Winkels $ACB$ (Bild 35) nicht auf dem um $M$ gezeichneten Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ liegt, so ist $ACB$ kein rechter Winkel. (Umkehrung des Satzes von THALES)

## „Schlechte" Unterrichtsführung

*Lehrer:* Wir betrachten zunächst den Fall, daß $C$ außerhalb des Kreises liegt. Als erstes verbinden wir $M$ mit $C$. Den Schnittpunkt dieser Linie mit dem Kreis bezeichnen wir mit $C_0$. Außerdem verbinden wir $C_0$ mit $A$ und mit $B$ (Bild 36).
Was ist $AC_0M$ für ein Winkel in bezug auf das Dreieck $AC_0C$?

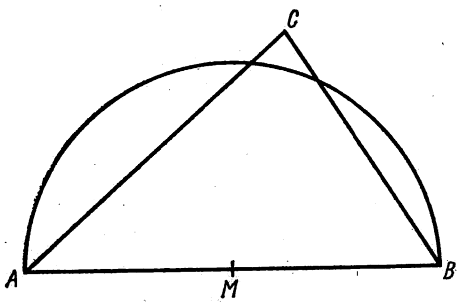



Bild 35

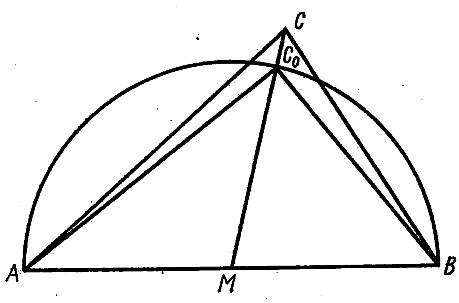



Bild 36

*Schüler:* Es ist ein Außenwinkel dieses Dreiecks.

*Lehrer:* Was wissen wir über Außenwinkel?

*Schüler:* Sie sind stets gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

*Lehrer:* Was können wir daraus entnehmen, wenn wir die Winkel $AC_0M$ und $ACC_0$ vergleichen?

*Schüler:* Es muß $\sphericalangle ACC_0 < \sphericalangle AC_0M$ sein.

*Lehrer:* Was ergibt sich nach der gleichen Überlegung, wenn wir die Winkel $MC_0B$ und $C_0CB$ vergleichen?

*Schüler:* Es ist $\sphericalangle C_0CB < \sphericalangle MC_0B$.

*Lehrer:* Was können wir dann über die Winkel $ACB$ und $AC_0B$ sagen, die sich aus den eben betrachteten Winkeln zusammensetzen?

*Schüler:* Es muß $\sphericalangle ACB < \sphericalangle AC_0B$ sein.

*Lehrer:* Wie groß ist aber der Winkel $AC_0B$?

*Schüler:* Dieser Winkel beträgt 90°, nach dem Satz des THALES.

*Lehrer:* Richtig, also ist $\sphericalangle ACB < 90°$, d. h., es ist kein rechter Winkel, w. z. b. w.

(Auf die Wiedergabe des Beweises für den Fall, daß $C$ innerhalb des Kreises liegt, können wir hier verzichten.)

Das hier dargestellte Vorgehen ist zwar rein sachlich in Ordnung, methodisch aber dennoch sehr fragwürdig. Die wichtigsten Einwände sind folgende:

a) Die Einzeichnung der Hilfslinien erfolgt ganz unmotiviert. Es ist zunächst nicht zu sehen, wozu überhaupt Hilfslinien notwendig sind bzw. weshalb gerade diese gezeichnet werden. (Man könnte ja vielleicht auch von $C$ das Lot auf $AB$ fällen?)

b) Die Frage nach den Außenwinkeln hat für Schüler, die den hier angesteuerten Beweisgedanken nicht schon entdeckt haben, scheinbar gar nichts mit der eigentlichen Aufgabenstellung zu tun. Es muß ihnen völlig unklar bleiben, wie man in diesem Zusammenhang auf eine derartige Frage kommen kann.

c) Die Nützlichkeit aller Einzelschritte wird erst nachträglich, am Ende des Beweises, für die Schüler sichtbar, während sie vorher kaum erkennen können, welche Funktion jeder Einzelschritt im Beweisganzen hat und wie weit es noch bis zum Ziel sein könnte.

Betrachten wir nun einen Weg, der diese Mängel nicht enthält.

## „Gute“ Unterrichtsführung

*Lehrer:* Zeichnet zuerst eine Figur zu dem Satz!

*Schüler:* führen den Auftrag aus

*Lehrer:* Welche Möglichkeiten habt ihr für die Lage von $C$ gefunden?

*Schüler:* $C$ kann außerhalb oder auch innerhalb des Kreises liegen, aber nicht auf dem Kreis.

*Lehrer:* Gut. Untersuchen wir zuerst den Fall, daß $C$ außerhalb des Kreises liegt. Was haben wir in diesem Fall eigentlich zu beweisen?

*Schüler:* Wir haben zu beweisen, daß $ACB$ kein rechter Winkel sein kann, wenn $C$ außerhalb des Kreises liegt.

*Lehrer:* Was heißt das überhaupt — kein rechter Winkel?

*Schüler:* Der Winkel $ACB$ müßte ein stumpfer oder ein spitzer Winkel sein!

*Lehrer:* Richtig. Wie könnte man das noch ausdrücken?

*Schüler:* Der Winkel müßte größer als 90° sein oder kleiner als 90°.

*Lehrer:* Gut. Welcher dieser beiden Fälle trifft vermutlich zu? Betrachtet eure Zeichnungen, bei denen $C$ außerhalb des Kreises liegt!

*Schüler:* Man kann vermuten, daß der Winkel $ACB$ kleiner als 90° ist.

*Lehrer:* Ja, und nun müssen wir versuchen, diese Vermutung zu beweisen. Welche Sätze könnten uns dabei vielleicht helfen? Beachtet beim Überlegen, daß in der Behauptung etwas über einen Winkel ausgesagt wird!

*Schüler:* Möglicherweise müssen wir andere Sätze über Winkel benutzen.

*Lehrer:* Das ist eine nützliche Idee! Welche Sätze über Winkel kennen wir denn schon?

*Schüler:* Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen, über Scheitelwinkel, über Nebenwinkel, über Innenwinkel im Dreieck, über Außenwinkel am Dreieck, über Peripherie- und Zentriwinkel im Kreis.

*Lehrer:* Ja, aber nun wollen wir wieder unsere Zeichnungen betrachten (Bild 35) und an unsere Vermutung denken, die zu beweisen ist. Welche der genannten Sätze könnten uns dann nützen?

*Schüler:* bringen keine weiterführenden Gedanken.

*Lehrer:* Vielleicht müßten wir erst Hilfslinien einzeichnen, um unsere bekannten Sätze anwenden zu können?

*Schüler:* schlagen vor, durch $C$ eine Parallele zu $AB$ zu zeichnen; andere wollen $C$ mit $M$ verbinden.
Als Begründungen führen sie an: durch die Parallele zu $AB$ entstehen Stufenwinkelpaare, Wechselwinkelpaare usw.; durch die Verbindung von $C$ mit $M$ entstehen bei $M$ Nebenwinkel. Die Hilfslinien werden eingezeichnet.

*Lehrer:* Schaut euch noch einmal die Vermutung an! Wir wollen beweisen, daß der Winkel $ACB$ kleiner als 90° ist, also kleiner als ein rechter Winkel.
Haben wir in unserer Zeichnung einen rechten Winkel, mit dem wir den Winkel $ACB$ vergleichen könnten?

*Schüler:* Nein, aber wenn wir einen Peripheriewinkel über $AB$ zeichnen, dann hätten wir einen rechten Winkel.

*Lehrer:* Gut, aber wir wollen nicht irgend einen Peripheriewinkel einzeichnen, sondern ihn so legen, daß er möglichst einfach mit dem Winkel $ACB$ verglichen werden kann.

*Schüler:* machen zwei Vorschläge; einige wählen den Schnittpunkt von $CM$ mit dem Kreis als Scheitelpunkt (Bild 36), andere nehmen den Schnittpunkt von $AC$ mit dem Kreis als Scheitelpunkt (siehe Bild 37). Beide Vorschläge werden an der Tafel realisiert.

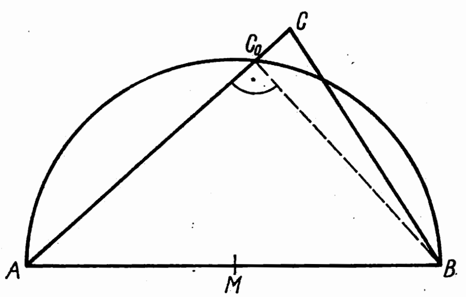



Bild 37

*Lehrer:* Können wir unsere Vermutung jetzt beweisen?

*Schüler:* Ja, nun ist es ganz einfach. $BC_0$ steht senkrecht auf $AC$ (Bild 37), also ist $BCC_0$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei $C_0$. Dann muß aber der Winkel bei $C$ kleiner als 90° sein, und das wollten wir ja zeigen.

*Schüler:* Man kann es auch noch anders begründen. Die Dreiecke $ABC_0$ und $ABC$ (Bild 37) haben den Winkel bei $A$ gemeinsam. Der Winkel bei $B$ ist im zweiten Dreieck größer als im ersten — weil ja die gegenüberliegende Seite länger geworden ist —, also muß der Winkel bei $C$ kleiner als der Winkel bei $C_0$ sein, denn die Summe aller drei Winkel ist ja stets 180°.

*Lehrer:* Das ist alles richtig. Wir sind damit eigentlich fertig, aber vielleicht können wir schnell noch überlegen, ob uns der Beweis auch an der anderen Zeichnung (Bild 36) gelungen wäre?

*Schüler:* Es geht auch, aber etwas umständlicher. Man muß zuerst die Dreiecke $AMC$ und $AMC_0$ betrachten. Da sieht man, daß $\sphericalangle ACM < \sphericalangle AC_0M$ ist — der Winkel bei $M$ ist in beiden Dreiecken der gleiche, der Winkel bei $A$ ist im ersten Dreieck größer als im zweiten, also ist der Winkel bei $C$ kleiner als der bei $C_0$. Dann muß man dasselbe noch für die Dreiecke $BCM$ und $BC_0M$ feststellen, und daraus ergibt sich dann unsere Behauptung.

Der Beweis für den Fall, daß $C$ innerhalb des Kreises liegt, wurde von den Schülern sofort gefunden. Sie benutzten dazu eine Skizze, wie sie im Bild 38 wiedergegeben ist.

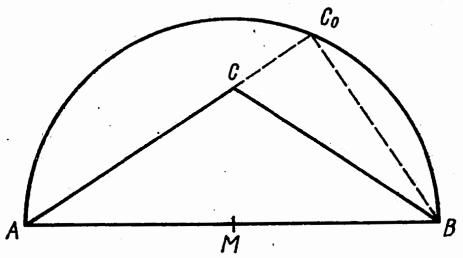



Bild 38

Die Vorzüge dieser zweiten Unterrichtsführung dürften auf der Hand liegen:

a) Den Schülern wird kein von vornherein feststehender Beweisgedanke aufgedrängt, sondern sie werden angeregt, selbst eine Lösung zu suchen.

b) Die meisten Hilfen des Lehrers sind bei aller Bezogenheit auf die vorliegende Aufgabe doch so allgemein formuliert, daß sie auch auf andere Situationen übertragen und von den Schülern im Laufe der Zeit als Suchstrategie erfaßt werden können. (Gemeint sind solche Impulse bzw. Fragen wie: Zeichne eine Figur! Welche Möglichkeiten gibt es? — Was ist eigentlich zu beweisen? — Was heißt das überhaupt? — Wie könnte man das noch ausdrücken? — Was vermuten wir? — Welche Sätze könnten uns helfen? — Was besagt die Behauptung? — Vielleicht müssen wir Hilfslinien zeichnen? usw.)

c) Durch die gründliche Auseinandersetzung mit dem Problem können die Schüler wesentliche Schritte des Beweises selbst finden. An die Stelle hilflosen Staunens über den Beweis (wie bei der zuerst wiedergegebenen „schlechten" Unterrichtsführung) tritt ein Erfolgserlebnis und — auf die Dauer gesehen — der Erwerb von Erfahrungen im Lösen von Beweisaufgaben.

Ein Einwand wird häufig aber doch gegen die hier skizzierte „gute“ Unterrichtsführung vorgebracht, nämlich der Hinweis, daß eine „gute“ Beweisführung im Unterricht deutlich mehr Zeit kostet als eine „schlechte“ und man deshalb aus Zeitmangel gewöhnlich nicht den „guten“ Weg gehen kann. Richtig ist daran, daß eine die Selbständigkeit der Schüler fördernde Beweiserarbeitung im Unterricht tatsächlich meistens länger dauert als ein sehr stark durch den Lehrer gelenktes Vorgehen. Man sieht das an unserem Beispiel schon rein äußerlich — die zweite Darstellung ist merklich umfangreicher als die erste. Trotzdem wäre es völlig falsch, aus angeblichem Zeitmangel auf ein methodisch vernünftiges Arbeiten zu verzichten. Wir dürfen nie vergessen, was der Lehrplan in erster Linie fordert. Sollen die Schüler im Unterricht möglichst viele Beweise kennen lernen? Nein, das ist nicht das Hauptziel. Es geht vor allem darum, daß die Schüler das Beweisen lernen! Für die Erreichung dieses Zieles ist es sicher nicht gleichgültig, wie viele Beweise im Unterricht behandelt werden. Deshalb schreibt der Lehrplan auch bestimmte Beweisführungen direkt vor. An erster Stelle steht aber immer die Forderung nach größtmöglicher Einsicht der Schüler in die Beweisführung. Wir haben das bereits im Abschnitt 2.3. (↗ 64ff.) begründet und auch im Abschnitt 3.3.3. (↗ 97ff.) gesehen, daß bei Mißachtung dieser Forderung praktisch kein Lernerfolg erzielt wird und die für Beweisführungen verwendete Unterrichtszeit dann nahezu nutzlos vertan ist.

*Fassen wir zusammen*, welche Möglichkeiten und Aufgaben in dem gesamten Abschnitt 3.4. für die Verwirklichung der Leitlinie „Beweisen“ zusammengestellt worden sind:

1. Von Klasse 1 an werden die Schüler dazu angehalten, ihre Aussagen zu begründen und ihr mathematisches Vorgehen beim Lösen von Aufgaben zu rechtfertigen. Diese Forderung bleibt für den gesamten Mathematikunterricht in allen Klassenstufen bestehen.
2. In Klasse 6 werden die Schüler in das Beweisen mathematischer Aussagen explizit eingeführt. Dazu muß ihnen der Unterschied zwischen Definitionen, Sätzen und anderen „Ausdrücken“ der Mathematik deutlich gemacht werden, sie müssen von der Notwendigkeit des Beweisens überzeugt werden und die Unbrauchbarkeit empirischer Methoden für die mathematische Erkenntnissicherung erkennen. Alle diese Einsichten und Kenntnisse müssen im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts gefestigt werden, bis sie zum sicheren geistigen Besitz der Schüler geworden sind.
3. Nach dieser grundsätzlichen Klärung werden im Unterricht (bis zur Klasse 12) immer wieder Beweise erarbeitet. Dabei sollen die Schüler die äußere Anlage und den Aufbau von Beweisen ebenso lernen wie bestimmte wichtige Schlußweisen und das heuristische Herangehen an Beweisaufgaben.
4. Parallel zur Erarbeitung von Beweisen im Unterricht werden den Schülern in den entsprechenden Klassenstufen auch Beweisaufgaben gestellt, die dem Leistungsvermögen der Schüler angemessen sind. Dabei treten auf:
   — teilweise oder vollständige Wiedergaben von Beweisen, die im Unterricht besprochen worden sind;

- teilweise oder vollständige Erarbeitung von Beweisen aus Lehrbüchern oder nach speziellem Arbeitsmaterial;
- selbständiges Beweisen vorgegebener oder selbst zu findender Sätze, Rechtfertigen von Aufgabenlösungen verschiedenster Art (Konstruktionsaufgaben, Lösungen von Gleichungen oder Ungleichungen usw.).

Bei konsequenter Berücksichtigung der Punkte 1 bis 4 werden Erfolge im Unterricht nicht ausbleiben.

## 3.5. Zur Überwindung einzelner Hemmnisse für die Bewältigung von Beweisaufgaben

Der Zielsetzung des vorigen Abschnitts 3.4. entsprechend, haben wir uns dort in erster Linie mit der Frage beschäftigt, welche Hauptforderungen der Unterricht erfüllen muß, um die Schüler mit dem Beweisen mathematischer Aussagen vertraut zu machen. Dabei sind wir absichtlich nicht auf solche Schwierigkeiten eingegangen, die für das Beweisen in speziellen Stoffgebieten charakteristisch sind oder die bei bestimmten Arten von Beweisen auftreten können. Zur Abrundung und Ergänzung unserer bisherigen Überlegungen dürfte es aber doch nützlich sein, wenigstens auf einige dieser Probleme noch einzugehen. (Eine erschöpfende Diskussion aller bei Beweisführungen im Unterricht möglichen Schwierigkeiten ist natürlich nicht möglich.) Unser Anliegen ist dabei — wie schon im Abschnitt 3.4. — die Herausarbeitung notwendiger Bedingungen für die Erreichung guter Unterrichtserfolge auf dem Gebiet des Beweisens.
Wir stützen uns bei den folgenden Darlegungen zwar in erster Linie auf Erfahrungen, die in mathematischen Arbeitsgemeinschaften mit Schülern der Klassenstufe 8 gewonnen worden sind, die daraus abzuleitenden Schlußfolgerungen gelten aber uneingeschränkt auch für den Mathematikunterricht, zielen sie doch darauf ab, bestimmte Hemmnisse beiseite zu räumen, die der Bewältigung von Beweisaufgaben durch Schüler im Wege stehen können.

### 3.5.1. Schwierigkeiten bei arithmetischen Beweisaufgaben

Eine erste Gruppe von Beweisaufgaben, auf die wir eingehen wollen, ist arithmetischer Natur. Wir beschränken uns dabei auf relativ einfache Beispiele, an denen dennoch bestimmte Probleme schon sichtbar werden. Es handelt sich um Beweise zu Sätzen wie:

(1) Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist durch 4 teilbar.
(2) Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar.
(3) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
(4) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.
(5) Wenn die Summe aus vier natürlichen Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

(6) Wenn drei beliebige, nicht durch 3 teilbare natürliche Zahlen gegeben sind, so ist entweder ihre Summe oder die Summe zweier dieser Zahlen durch 3 teilbar.
(7) Bildet man zu zwei beliebigen natürlichen Zahlen die Summe, die Differenz und das Produkt, so ist wenigstens eine dieser drei Zahlen durch 3 teilbar.
(8) Die Differenz der Quadrate zweier beliebiger gerader Zahlen ist durch 4 teilbar.
(9) Die Summe der Quadrate zweier beliebiger ungerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar.
(10) Kann die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine Quadratzahl sein?
(11) Wenn zum Quadrat einer natürlichen Zahl die Zahl selbst addiert wird, so erhält man das Produkt der gegebenen Zahl mit der darauffolgenden Zahl.
(12) Was erhält man, wenn vom Quadrat einer natürlichen Zahl die Zahl selbst subtrahiert wird?
(13) Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wird die erste mit der zweiten und die zweite mit der dritten multipliziert. Beweise,
 — daß die Summe dieser Produkte gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl ist, und
 — daß die Differenz dieser Produkte gleich dem Doppelten der mittleren Zahl ist!

Beim Lösen dieser und ähnlicher Aufgaben traten unter anderem folgende Schwierigkeiten auf:

a) Die Schüler waren zum Teil nicht in der Lage, die im Aufgabentext gegebenen Sachverhalte richtig mit Hilfe von geeigneten Termen auszudrücken. Das machte sich vor allem bei den Aufgaben (1) bis (4) und (8) bis (13) bemerkbar. So wurde z. B. als Ausdruck für eine beliebige gerade Zahl der Term $n + 2$ benutzt, für eine beliebige ungerade Zahl wurde $3 \cdot m$ geschrieben, das Quadrat einer beliebigen geraden Zahl wurde durch $2 \cdot n^2$ bzw. auch durch $4 \cdot n$ ausgedrückt, zur Bezeichnung des doppelten Quadrats einer beliebigen Zahl wurde $n^4$ herangezogen, in dem zur Aufgabe (13) gehörigen Term $n \cdot (n + 1) + {}$ ${} + (n + 1) \cdot (n + 2)$ wurde das Setzen der Klammern vergessen oder die Kennzeichnung von drei beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen wurde einfach durch $a$, $b$, $c$ bzw. auch durch $a_1$, $a_2$, $a_3$ versucht.
b) Es gab eine Reihe von Fehlern beim Umformen von Termen. So wurde z. B. der Term $(2m + 1) \cdot (2n + 1)$ in $4mn + 1$ umgewandelt, für $(2n + 1)^2$ ist von manchen Schülern $4n^2 + 1$ gesetzt worden, andere kamen beim Ausklammern nicht weiter und dergleichen mehr.

Die Folge solcher Schwierigkeiten war, daß die betreffenden Schüler manche Beweisaufgaben nicht lösen konnten, obwohl sie völlig richtige Vorstellungen davon hatten, was Beweisen bedeutet und auch wußten, wie sie im vorliegenden Fall vorzugehen hatten. Diese Schüler scheiterten also nicht an prinzipiellen Unklarheiten über das Beweisen, sondern daran, daß sie im Umgang mit Termen unsicher waren.
Ähnliche Schwierigkeiten müssen bei Beweisführungen in jedem mathematischen Teilgebiet auftreten, wenn die Schüler mit den in diesem Gebiet benutzten mathematischen Ausdrucksmitteln nicht genügend vertraut sind. Zur Vermeidung oder Überwindung solcher Schwierigkeiten ist dabei stets zweierlei notwendig: einmal die Schaffung eines klaren inhaltlichen Verständnisses der mathematischen Aus-

drücke, zum anderen aber auch die Entwicklung von Fertigkeiten im formalen Operieren mit den Ausdrücken.
Für den Bereich, aus dem die oben angeführten Beispiele (1) bis (13) stammen, heißt das:
Die Schüler müssen wissen,
- was die auftretenden Variablen bedeuten,
- wie bestimmte inhaltliche Bedingungen (gerade Zahl, ungerade Zahl, Quadrat einer geraden Zahl, aufeinanderfolgende Zahlen u. ä.) mit Hilfe von Termen ausgedrückt werden können,
- und sie müssen auch in der Lage sein, Terme äquivalent umzuformen (ausmultiplizieren, ausklammern, zusammenfassen usw.).

Es ist klar, daß diese Fähigkeiten sich nicht von selbst einstellen. Sie müssen durch entsprechende Aufgabenstellungen im Unterricht entwickelt werden. Lehrplan und Lehrbücher geben dazu bereits die nötige Orientierung. Uns kommt es hier nur darauf an, daß die Übungen im Umgang mit Termen nicht als Selbstzweck angesehen werden, sondern unter anderem auch als notwendige Vorbereitung auf entsprechende Beweisführungen.
Neben den unter a) und b) genannten Schwierigkeiten trat gelegentlich noch ein anderes Problem auf. Es zeigte sich nämlich, daß einzelne Schüler bei Beweisen zu manchen der Behauptungen (1) bis (13) nicht sahen, worin eigentlich der Beweis bestanden hatte. Bei ihnen war der Eindruck entstanden, die Behauptung sei nur immer wieder anders ausgedrückt, aber eigentlich nicht bewiesen worden. Wie sich herausstellte, war dieser Irrtum vor allem durch eine etwas ungeschickte äußere Darstellung mancher Beweise verursacht worden. Beispielsweise war beim Beweis der Behauptung (13) folgende Schreibweise benutzt worden:

$$\begin{aligned}(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1) &\overset{?}{=} 2\cdot n^2\\ n^2-n+n^2+n &\overset{?}{=} 2\cdot n^2\\ 2\cdot n^2 &= 2\cdot n^2\end{aligned}$$

Das in der Behauptung vorkommende Gleichheitszeichen war also mit einem Fragezeichen versehen und wurde im Beweisgang nicht benutzt. Die linke Seite der Gleichung wurde äquivalent umgeformt, bis auf beiden Seiten der gleiche Term stand. Dieses an sich einwandfreie Vorgehen wurde von manchen Schülern aber eben doch nicht richtig durchschaut. Als wesentlich günstiger erwies sich dann folgende Darstellungsweise:

*Behauptung:* $(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)=2\,n^2$

*Beweis:*
$$\begin{aligned}&(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1)\\ &=n^2-n+n^2+n\\ &=2\cdot n^2\end{aligned}$$

Diese Darstellungsweise erleichterte den Schülern das Verständnis und verleitet auch nicht so stark wie die erste Darstellungsart dazu, beim Beweis etwa von der Behauptung auszugehen und sich zufrieden zu geben, sobald man nach einigen

Schritten zu einem offensichtlich allgemeingültigen Ausdruck gelangt ist. Ein Beispiel für ein solches fehlerhaftes Vorgehen wäre etwa der „Beweis" von

„Für alle positiven Zahlen $a, b$

gilt: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$"

durch die Folgerungskette

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a\,b} \geqq 2$$

$$a^2 + b^2 \geqq 2\,a\,b$$

$$a^2 - 2\,a\,b + b^2 \geqq 0$$

$$(a - b)^2 \geqq 0$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich allgemeingültig, aber daraus kann man natürlich nicht auf die Gültigkeit der Behauptung schließen, denn das wäre ein Schluß nach dem Schema

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ q \end{array}}{p}$$

und dieser Schluß ist bekanntlich unzulässig.

Eine ganz andere Frage ist, daß man durch ein solches Ausgehen von der Behauptung eventuell einen Beweis finden kann, indem man versucht, von einem als allgemeingültig bekannten Ausdruck, der aus der Behauptung folgte, auf die Behauptung zurück zu schließen. In dem obigen Beispiel ist das möglich.

Der Beweis sieht dann so aus:

Es seien $a$ und $b$ beliebige positive Zahlen.

Dann gilt stets

$(a - b)^2 \geqq 0$ — das Quadrat einer Zahl ist nie kleiner als Null;

daraus folgt

$a^2 - 2\,a\,b + b^2 \geqq 0 \qquad | + 2\,a\,b$

$a^2 + b^2 \geqq 2\,a\,b \qquad | : a\,b$ (ausführbar, da $a \neq 0$ und $b \neq 0$)

$\frac{a^2 + b^2}{a\,b} \geqq 2$, also $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$, w. z. b.w.

Wir sehen jedenfalls — und darauf kam es uns hier nur an —, daß die Darstellung von Beweisen für ihr Verständnis und auch für die Vermeidung von Fehlern eine nicht geringe Bedeutung besitzt.

### 3.5.2. Schwierigkeiten bei geometrischen Beweisaufgaben

Wir wollen nun einige Beweisaufgaben betrachten, in denen es um geometrische Sachverhalte geht. Die Arbeit mit Schülern hat gezeigt, daß hier eine Fehlerquelle existiert, die gar nicht so leicht zu beseitigen ist. Es handelt sich um störende Einflüsse der Anschauung auf die Beweisführung, die durch manche Beweisfiguren hervorgerufen werden.
Sehen wir uns dazu

*Beispiele von Beweisaufgaben an:*

(1) In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.
Beweise, daß diese Sehnen stets gleich lang sind! (Bild 39)

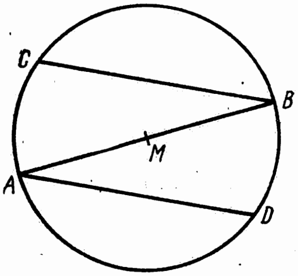



Bild 39

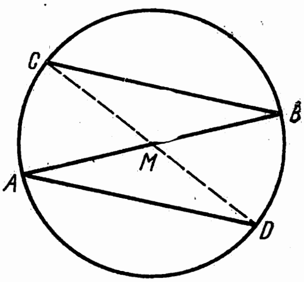



Bild 40

Der Beweis bereitete den Schülern erhebliche Schwierigkeiten. Sie brachten zwar genügend Vorschläge, die auch durchaus zielstrebig waren, achteten dabei aber fast gar nicht darauf, wirklich nur die in der Aufgabenstellung gegebenen Voraussetzungen zu benutzen. So wurde unter anderem von den Schülern gebracht:

„$\overline{CD}$ geht durch $M$" (das wurde nicht explizit formuliert, sondern die Beweisfigur wurde einfach so angelegt)
„$\sphericalangle\, AMD = \sphericalangle\, CMB$"
„$\Delta\, ADM$ liegt symmetrisch zu $\Delta\, BCM$."

Fragte man die Schüler nach den Begründungen für diese und ähnliche Behauptungen, so kam in der Regel als Antwort: „Das sieht man doch!"
Die Schwierigkeit bestand also bei dieser Aufgabe für die Schüler vor allem darin, sich bei jedem Schritt klar zu machen, ob sich dieser Schritt auf früher bewiesene Sätze bzw. auf die angegebenen Voraussetzungen oder nur auf die Anschauung stützt.

Der Vollständigkeit wegen sei ein Beweis des Satzes hier angedeutet:

Wir zeichnen die Radien $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ ein (Bild 40). Die entstandenen gleichschenkligen Dreiecke $ADM$ und $BCM$ stimmen in zwei Seiten überein. Außerdem gilt $\sphericalangle\, MAD \cong \sphericalangle\, MBC$ (Wechselwinkel an geschnittenen

Parallelen). Daraus und aus der Gleichschenkligkeit folgt die Übereinstimmung der Dreiecke auch in den übrigen Winkeln. Es gilt also $\triangle ADM \cong \triangle BCM$, und somit ist gezeigt, daß die Sehnen $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind.

Wesentlich leichter fiel den Schülern folgende Aufgabe:

(2) Gegeben ist die im Bild 41 wiedergegebene Figur mit $g \| h$. Die Winkel $\alpha$ und $\beta$ seien bekannt. Wie groß ist $\gamma$? Beweise deine Behauptung!

Hier gab es praktisch keinen „störenden" Einfluß der Anschauung. Mehrere Schüler fanden völlig selbständig einen Beweis für die Behauptung $\gamma = \alpha + \beta$ wobei ihre Beweisgedanken durchaus unterschiedlich waren.

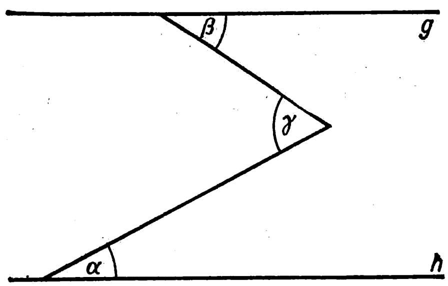



Bild 41

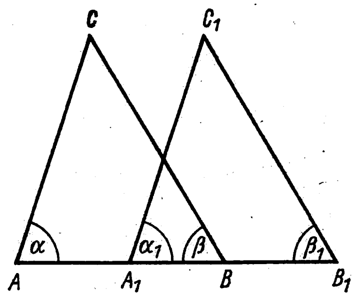



Bild 42

Ganz anders sah es dagegen wieder bei folgender Aufgabe aus:

(3) Gegeben sind folgende Voraussetzungen:

$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$; $m(\overline{AB_1}) = 20$ cm;

$m(\overline{AB}) = 12$ cm; $A$, $A_1$, $B$ und $B_1$ liegen auf einer Geraden. (Bild 42)

Die Frage lautet: Wie groß ist $m(\overline{CC_1})$?

Die Lösung $m(\overline{CC_1}) = 8$ cm wurde von den Schülern schnell gefunden. Es machte ihnen jedoch Schwierigkeiten, die Begründung für dieses Resultat lückenlos zu erbringen.
So konnten sie z. B. nicht genau sagen, nach welchem Satz aus $\beta = \beta_1$ bzw. $\alpha = \alpha_1$ die Parallelität von $\overline{CB}$ und $\overline{C_1B_1}$ bzw. von $\overline{CA}$ und $\overline{C_1A_1}$ folgt. Zunächst gaben sie als Begründung an:

„Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind doch stets gleich groß!"

Es bedurfte erst einer Diskussion, bis sie erkannten, daß man hier gerade die Umkehrung dieses Satzes benötigt. Es wurde auch nicht deutlich gesagt, daß man erst aus $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$ und $\overline{BC} \| \overline{B_1C_1}$ schließen kann, daß $BB_1C_1C$ ein Parallelogramm und damit $\overline{CC_1} \cong \overline{BB_1}$ ist. Die Schüler gaben zunächst nur eine der beiden Bedingungen an. Auf Befragen äußerten sie dann in der Regel, daß die andere doch selbstverständlich bzw. offensichtlich sei.

Ähnliche Probleme gab es auch bei folgender Aufgabe:

(4) Gegeben sei (Bild 43): $\overline{AE} \cong \overline{BE} \cong \overline{AB}$; $\overline{DE} \perp \overline{AB}$; $\overline{EC} \cong \overline{AB}$. Es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle\, AEB + \sphericalangle\, ACB = 90°$ ist.

Wir sind auf diese Aufgabe in anderem Zusammenhang schon einmal eingegangen (↗ 59ff., Abschnitt 2.2.) und brauchen die dort angestellten Überlegungen hier nicht zu wiederholen. Es gibt jedoch noch einige andere Dinge zu dieser Aufgabe zu bemerken.

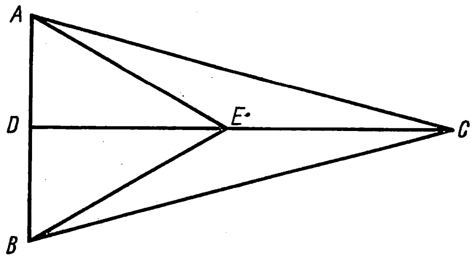


Bild 43

Die Lösungen der Schüler waren im Prinzip richtig angelegt. In allen Arbeiten gab es jedoch Lücken. So wurde z. B. stets in irgend einer Form benutzt, daß $\overline{DE}$ bzw. $\overline{EC}$ den Winkel $AEB$ bzw. $ACB$ halbiert, ohne daß diese Tatsache begründet worden wäre. Wir haben es hier wieder mit der Erscheinung zu tun, daß ein scheinbar offensichtlicher Sachverhalt einfach als feststehend angenommen wird, ohne ihn durch Rückgang auf die Voraussetzungen bzw. auf schon bewiesene Sätze zu sichern.

So wurde in manchen Arbeiten ohne Begründung benutzt, daß $\overline{ED}$ den Winkel $AEB$ halbiert und daß der Winkel $ECB$ halb so groß ist wie der Winkel $ACB$. Ein Schüler stellte ohne Erläuterung fest: „Der Winkel $DEB$ beträgt 30°". An einer anderen Stelle erklärte er: „Winkel $ACB$ ist 30° groß, denn die Winkel $ACE$ und $ECB$ sind durch die Strecke $\overline{DC}$ geteilt." Das ist natürlich keine stichhaltige Begründung. Auch in einem anderen Beweis hieß es ohne Erklärung: „$\overline{ED}$ ist die Winkelhalbierende von $AEB$." Interessanterweise wurde dann aber die Halbierung des Winkels $ACB$ durch $\overline{EC}$ nicht einfach benutzt, sondern nacheinander bewiesen, daß $\sphericalangle\, ECA = 15°$ und $\sphericalangle\, ECB = 15°$ ist. Dabei spielte aber nun noch eine weitere Voraussetzung eine wesentliche Rolle, die in der Aufgabenstellung gar nicht genannt worden war. Es wurde nämlich — übrigens von allen Schülern — benutzt, daß die Punkte $C$, $D$ und $E$ auf ein und derselben Geraden liegen. Man kann hier eigentlich nicht von einer Lücke in der Beweisführung sprechen, denn dieser Sachverhalt läßt sich aus den übrigen Voraussetzungen gar nicht folgern. Er wurde einfach unbewußt als zusätzliche Voraussetzung verwendet. Zweifellos ist diese Einengung des Problems durch die Anlage der Beweisfigur, die den Schülern gegeben wurde, stark begünstigt worden. Es zeigte sich jedenfalls erneut, wie schwer es den Schülern fiel, nur die explizit genannten Voraussetzungen zu benutzen. Obwohl darauf bei den vorhergegan-

genen Gelegenheiten bereits mehrfach hingewiesen worden war, gelang es den Schülern nicht, sich wirklich alle Voraussetzungen bewußt zu machen, die sie bei ihrem Beweis benutzten, und diese Voraussetzungen dann daraufhin zu überprüfen, ob sie sich aus der Aufgabenstellung ergaben oder nur rein anschaulich der Beweisfigur entnommen waren.
Möglicherweise hat diese Erscheinung tiefere Ursachen:
Im Mathematikunterricht — insbesondere in der Geometrie — werden als Axiome viele Sätze benutzt, die anschaulich so evident sind, daß man sie gar nicht erst formuliert und sie sich somit auch nicht als benutzte Voraussetzungen bewußt macht (↗ 74ff., Abschnitt 3.1.4.). Damit begünstigt man natürlich etwas die eben beschriebenen Mängel. Es dürfte aber sehr schwer sein, im Unterricht eine lückenlose axiomatische Begründung der Geometrie zu geben.
Wir wollen wieder versuchen, an die eben geschilderten Erfahrungen einige *Schlußfolgerungen* zu knüpfen:
Am wichtigsten dürfte die Feststellung sein, daß bei geometrischen Beweisführungen die Gefahr von Scheinbeweisen für die Schüler offenbar besonders groß ist, und zwar auch dann noch, wenn sie verstanden haben, daß durch unvollständige Induktion bzw. durch Ausmessen von Winkeln oder Strecken nichts bewiesen werden kann. In den Versuchen hat sich gezeigt, daß es den Schülern außerordentlich schwer fiel, gewisse Sachverhalte, die in der Beweisfigur scheinbar offensichtlich zu erkennen waren, doch zunächst in Zweifel zu ziehen und nach einer Begründung dafür zu suchen. Diese Schwierigkeit wurde auch kaum geringer, nachdem den Schülern wiederholt Lücken in ihren Beweisführungen nachgewiesen worden waren und sie sich bemühten, solche Fehler nicht wieder zu machen. Trotzdem benutzten die Schüler (beeinflußt durch eine Beweisfigur) immer wieder Voraussetzungen, über deren Gültigkeit sie sich gar keine Rechenschaft abgelegt hatten. Die in dieser Hinsicht durchgeführte Arbeit hat nicht ausgereicht, die Kritikfähigkeit der Schüler so weit zu entwickeln, daß sie rein anschaulich Erfaßtes in jedem Falle von logisch gesicherten Kenntnissen zu trennen vermocht hätten. Wahrscheinlich ist eine schnelle Entwicklung dieser Fähigkeit auch gar nicht zu erwarten. Es bedarf vermutlich einer jahrelangen, den gesamten Geometrieunterricht durchziehenden Kleinarbeit, um dieses Ziel zu erreichen. Dazu wird es u. a. sicher notwendig sein, bei geometrischen Beweisaufgaben eine entsprechende Figur öfter von den Schülern anfertigen zu lassen, anstatt sie ihnen zu geben. Bei der Entwicklung einer solchen Figur kann dann Schritt für Schritt überprüft werden, was durch die Voraussetzungen gesichert ist und was nicht. Aber dieses Verfahren ist natürlich nicht immer anwendbar, wenn man nicht sehr umständliche und lange Formulierungen bei einer Reihe von Aufgaben in Kauf nehmen will. Die Schüler müssen auch mit gegebenen Beweisfiguren arbeiten und dabei lernen, was auf Grund der angegebenen Voraussetzungen so und nur so sein muß und was eventuell auch anders aussehen könnte.
Abschließend wäre hierzu noch zu bemerken, daß das Problem der Benutzung nicht gegebener Voraussetzungen bzw. des Weglassens notwendiger Begründungen natürlich auch bei Beweisführungen in anderen Stoffgebieten auftreten kann, nämlich immer dann, wenn Dinge für selbstverständlich gehalten werden, die es in Wirklichkeit gar nicht sind. Es ist deshalb nicht nur eine Aufgabe des Geometrie-

unterrichts, sondern des gesamten Unterrichts in Mathematik, bei den Schülern die Fähigkeit zum kritischen Durchdenken von Begründungen und Beweisführungen zu entwickeln. Die Erreichung dieses Ziels ist dabei keineswegs nur für die Arbeit auf mathematischem Gebiet bedeutsam, sondern stellt einen wesentlichen Beitrag des Mathematikunterrichts für die Realisierung genereller Zielsetzungen unserer Schule dar; denn Genauigkeit und Strenge in Begründungen und Argumentationen sind auf allen Gebieten außerordentlich wichtig.

### 3.5.3. Schwierigkeiten bei Beweisführungen mit Hilfe der vollständigen Induktion

Wenden wir uns zum Schluß unserer Diskussion über Hemmnisse, die der Bewältigung von Beweisaufgaben im Wege stehen können, der vollständigen Induktion zu. Nach den bisher vorliegenden Erfahrungen können an folgenden Stellen Schwierigkeiten auftreten:

a) Beim Finden bzw. Formulieren der zu beweisenden Behauptungen;
b) beim Verständnis des Prinzips der vollständigen Induktion;
c) beim Anwenden dieses Prinzips auf den jeweiligen Fall;
d) bei notwendigen Umformungen von Termen oder Ausdrücken im Beweisgang.

Wir wollen die Punkte a) bis d) im Zusammenhang mit einem Beispiel diskutieren. Es handelt sich um eine Aufgabe, die im Oktober 1968 bei einem mathematischen Schülerwettbewerb an der Universität Budapest gestellt worden ist. Sie lautet:

> Es ist zu beweisen, daß es keine unendliche Folge $\{a_n\}$ gibt, deren Glieder folgende Bedingungen erfüllen:
>
> 1. Alle $a_n$ sind natürliche Zahlen;
> 2. die Zahlen $a_n$ sind nicht alle gleich;
> 3. für $n \geqq 2$ ist jedes $a_n$ harmonisches Mittel von $a_{n-1}$ und $a_{n+1}$, d. h.
>
> $$a_n = \frac{2\,a_{n-1} \cdot a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}}.$$

Beim Betrachten dieser Aufgabe ist zunächst kaum zu sehen, daß zu ihrer Lösung ein Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion notwendig sein könnte. Man kommt erst nach einer ganzen Reihe von Vorüberlegungen zu dieser Feststellung. Es sind dies — kurz gefaßt — folgende Überlegungen:

> Nehmen wir an, daß es doch eine unendliche Folge $\{a_n\}$ gibt, deren Glieder die Bedingungen 1. bis 3. erfüllen. Dann wäre
>
> (1) $a_{n+1} = \dfrac{a_n \cdot a_{n-1}}{2\,a_{n-1} - a_n}$ für jedes $n \geqq 2$ — das folgt aus Bedingung 3. durch Umformung;
>
> (2) $a_1 > 0$ — das ergibt sich aus den Bedingungen 1., 3. und der Forderung nach Unendlichkeit;
>
> (3) $a_n < a_{n+1}$ für jedes $n$ — das folgt aus den Bedingungen 1., 2. und 3., ebenfalls unter Berücksichtigung der Forderung nach Unendlichkeit;

(4) $a_2 = a_1 + d$ mit $d > 0$ — das ergibt sich unmittelbar aus (3).

Berechnet man nun einige weitere Glieder der als existent angenommenen Folge, so gelangt man zu der Vermutung

(5) $a_n = \dfrac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 2) \cdot d}$ für jedes $n \geqq 2$

Die Gültigkeit dieser Vermutung würde bedeuten, daß unsere Annahme falsch sein muß; denn der für $a_n$ angegebene Bruch besitzt einen konstanten Zähler und kann deshalb unmöglich für jedes beliebige $n$ eine natürliche Zahl darstellen. Um die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen, würde es also nun ausreichen, die Vermutung (5) zu beweisen, und dafür bietet sich natürlich die vollständige Induktion an.

Unser Beispiel zeigt, daß beim Lösen einer Beweisaufgabe mitunter viel Mühe aufgewandt werden muß, ehe man an eine Stelle gelangt, die den Einsatz der vollständigen Induktion überhaupt erst ermöglicht. Selbstverständlich tritt dieser Fall nicht immer auf, aber es ist eben auch nicht so, daß die Aufgabenstellung stets von vornherein erkennen läßt, ob die vollständige Induktion anzuwenden ist oder nicht.

Die Überwindung von Schwierigkeiten beim Finden und Formulieren der zu beweisenden Behauptung erfordert vor allem heuristische Fähigkeiten. Im Abschnitt 3.4.6. (↗ 154ff.) haben wir uns darüber bereits einige Klarheit verschafft, so daß es nicht notwendig ist, hier noch einmal darauf einzugehen.

Kommen wir nun zu dem oben genannten Punkt b (↗ 174), d. h. zum Verständnis des Prinzips der vollständigen Induktion. Dieses Verständnis muß natürlich vorhanden sein, wenn man entsprechende Beweise verstehen oder gar selbst führen will. Nach den bisher vorliegenden Erfahrungen und Untersuchungen scheint es nicht allzu problematisch zu sein, Schülern etwa schon ab Klasse 8 dieses Prinzip plausibel zu machen. Man kann dazu anschauliche Hilfsmittel verwenden, wie sie z. B. H. STEINHAUS dargestellt hat.[1] Er benutzt eine geordnete Reihe von Plättchen, die so aufgestellt werden, daß das Umfallen irgend eines Plättchens stets auch das Umfallen des nächsten zur Folge hat (mit Ausnahme des letzten natürlich). Aus diesem Sachverhalt und dem tatsächlichen Umfallen des ersten Plättchens kann man schließen — und bei einem Versuch mit den Plättchen auch direkt sehen —, daß alle Plättchen umfallen.

Bis hierhin gab es bei Versuchen mit Schülern[2] gewöhnlich keine Schwierigkeiten. Sie traten aber meistens auf, wenn weitergehende Fragen gestellt wurden. Es zeigte sich, daß manche Schüler meinten, man könne allein aus dem Satz

> „Wenn ein beliebiges Plättchen umgestoßen wird, so fällt auch das nächste um“

auf das Umfallen aller Plättchen schließen, „falls das beliebige Plättchen gerade das erste ist“, wie sie sagten. Erst nachdem an anderen Beispielen geklärt worden war, was eine Implikation genau besagt, verstanden sie, daß man aus dem obigen

[1]) STEINHAUS, H.: *Kaleidoskop der Mathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, S. 46.

[2]) Vgl. z. B. WALSCH, W.: *Können vierzehnjährige Schüler die vollständige Induktion verstehen?* In: „Mathematik in der Schule“, (3) 1965, Heft 6.

Satz allein nicht auf das Umfallen irgendwelcher Plättchen schließen kann. Nach dieser Klärung waren die Schüler dann aber in der Lage, das Prinzip der vollständigen Induktion richtig zu erläutern.
Man kann erwarten, daß die — relativ leicht überwindbaren — Schwierigkeiten im Verstehen des Prinzips der vollständigen Induktion immer weniger auftreten werden, je mehr die Schüler von vornherein ein richtiges Verständnis solcher Sätze erwerben, die als Implikationen formuliert sind.
Es ist aber leider so, daß das Verständnis des Prinzips der vollständigen Induktion noch nicht hinreichend ist, um Beweise mit Hilfe der vollständigen Induktion wirklich führen zu können. Die oben (↗ 174) unter c) genannten Schwierigkeiten treten durchaus selbständig auf und sind nicht mit den unter b) genannten identisch. Das ist auch leicht einzusehen. Das Erfassen des Prinzips erfordert nur, folgenden Satz zu verstehen:

> Wenn der Ausdruck $\mathsf{H}(a)$ gilt und aus der Gültigkeit von $\mathsf{H}(n)$ mit $n \geqq a$ die Gültigkeit von $\mathsf{H}(n + 1)$ folgt, so gilt $\mathsf{H}(n)$ für jedes $n$, das größer oder gleich $a$ ist.

Das Anwenden dieses Prinzips — also das Führen eines Beweises — verlangt dagegen:
— Den Beweis von $\mathsf{H}(a)$;
— den Beweis von $\mathsf{H}(n) \rightarrow \mathsf{H}(n + 1)$ für $n \geqq a$, wobei also auf eine Implikation zu schließen ist;
— das Ziehen der Schlußfolgerung $\forall n\, \mathsf{H}(n)$ für $n \geqq a$ durch Anwendung der Abtrennungsregel.
Das Beweisen ist also offensichtlich wesentlich komplizierter als das bloße Verstehen des Prinzips der vollständigen Induktion.
Die Schwierigkeit trat bei Versuchen vor allem immer wieder dadurch hervor, daß Schüler mit dem zweiten Beweisschritt — dem sogenannten Induktionsschritt — nicht zurecht kamen. Die dabei anzuwendende Schlußregel war ihnen oft fremd, und auch nach entsprechenden Übungen kamen immer wieder Fehler vor. Es fiel den Schülern schwer, genau zu formulieren, was bewiesen werden sollte. So wurde von den Schülern beispielsweise gesagt:

> „Wir müssen die Formel erst für 1 und dann für $n + 1$ beweisen."
> „Wir wissen, daß die Formel für $n$ gilt, jetzt müssen wir zeigen, daß sie auch für $n + 1$ gilt."

Unser Lehrplan verlangt für Klasse 11, daß die Schüler Induktionsbeweise führen können. Eventuell auftretende Schwierigkeiten der eben beschriebenen Art dürften sich in dem Maße verringern lassen, wie es gelingt, die Schüler schon vor der Behandlung der vollständigen Induktion mit dem Schließen auf eine Implikation vertraut zu machen (↗ 139ff., Abschnitt 3.4.4.).
Ein letztes Hindernis — oben als Punkt d (↗ 174) angeführt — kann nun noch auftreten, wenn der Beweis von $\mathsf{H}(n) \rightarrow \mathsf{H}(n + 1)$ durchgeführt werden soll. Betrachten wir dazu noch einmal unser Beispiel (↗ 174), das übrigens durch einen etwas modifizierten Induktionsschluß zu beweisen ist, wie gleich gezeigt werden soll.

Der Beweis von

$$a_n = \frac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 2) \cdot d}$$

für den Anfangswert $n = 2$ ist sehr einfach. Man bekommt sofort

$$a_2 = a_1 + d$$

und erkennt die Richtigkeit dieser Gleichung unmittelbar durch Vergleich mit (4) (↗ 175). Man bekommt für $n = 2$ außerdem

$$a_3 = \frac{a_2 \cdot a_1}{2\,a_1 - a_2}$$

nach der vorn angegebenen Gleichung (1) (↗ 174). Daraus folgt durch Einsetzen von $a_1 + d$ für $a_2$ dann

$$a_3 = \frac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - d},$$

also die Gültigkeit der Vermutung (5) für $n = 3$.
Im zweiten Schritt hat man nun zu zeigen, daß aus der Gültigkeit von

$$a_n = \frac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 2) \cdot d}$$

und

$$a_{n+1} = \frac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 1) \cdot d}$$

für $n \geqq 2$ die Gültigkeit von

$$a_{n+2} = \frac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - n \cdot d}$$

folgt. Dazu ist nach dem oben angegebenen Ausdruck (1) folgender Quotient zu bilden:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} \cdot a_n}{2\,a_n - a_{n+1}} = \frac{\dfrac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 1) \cdot d} \cdot \dfrac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 2) \cdot d}}{\dfrac{2\,a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 2) \cdot d} - \dfrac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - (n - 1) \cdot d}}$$

Es gehört offensichtlich doch schon eine gewisse Fertigkeit im Umformen von Termen dazu, um diesen Bruch schließlich in

$$\frac{a_1 \cdot (a_1 + d)}{a_1 - n \cdot d}$$

umzuwandeln. Dabei muß gesagt werden, daß bei anderen Induktionsbeweisen noch wesentlich kompliziertere Termumwandlungen nötig werden können. Um hier nicht zu scheitern, müssen jene Fertigkeiten im formalen Operieren entwickelt werden, auf die wir im Abschnitt 3.5.1. (↗ 166ff.) hingewiesen haben.

# Schlußbemerkungen

Wir haben uns am Anfang dieses Buches das Ziel gesetzt, eine Reihe von Fragen zu klären, die im Zusammenhang mit Beweisführungen in unserem Mathematikunterricht auftreten. Dabei sind wir davon ausgegangen, daß das Beweisen nicht nur ein wichtiges Element der Mathematik ist, sondern daß logisch richtiges Begründen, Argumentieren und Folgern zu den wesentlichen Merkmalen jedes wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens gehören. Es ist deshalb zur Erreichung der unserer sozialistischen Schule gesteckten hohen Ziele notwendig, die Schüler gründlich in das Beweisen mathematischer Aussagen einzuführen und entsprechende Fähigkeiten bei ihnen zu entwickeln. Die in den vorangegangenen Kapiteln dazu dargelegten Gedanken brauchen hier nicht noch einmal angedeutet zu werden. Wir wollen aber noch einmal hervorheben, daß mit isolierten Einzelmaßnahmen kaum nennenswerte Erfolge zu erreichen sind. Das Bemühen um gute Leistungen der Schüler auf dem Gebiet des Beweisens wird nur dann voll wirksam werden, wenn es einbezogen ist in das ständige Streben nach einem in jeder Hinsicht modern gestalteten Mathematikunterricht, in dem der Aneignung und Beherrschung von bestimmten Algorithmen ebensolcher Wert beigemessen wird wie der Herausbildung klarer Begriffe, der Vermittlung grundlegender Kenntnisse und Einsichten, der Erziehung zu schöpferischem und richtigem Denken und der Entwicklung sozialistischer Überzeugungen und Verhaltensweisen bei den Schülern.

In diesem Sinne möchten wir das Anliegen dieses Buches eingeordnet wissen.