LILLY GÖRKE

# MENGEN RELATIONEN FUNKTIONEN

Prof. Dr. Lilly Görke

# MENGEN RELATIONEN FUNKTIONEN

Stark bearbeitete und erweiterte Nachauflage

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin
1973

Lizenz Nr. 203-1000/71 (SN)
Redaktion: Ingrid Fabian, Karlheinz Martin
Einband: Herbert Lemme
Zeichnungen: Heinrich Linkwitz
Typographische Gestaltung: Atelier vwv, Wolfgang Lorenz
Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei »Gottfried Wilhelm Leibniz«,
445 Gräfenhainichen/DDR • 3813
Schrift: 9/11 Didot-Antiqua Monotype
Printed in the German Democratic Republic
Redaktionsschluß: 15. November 1971
Titel-Nr. 00 25 09-1
Preis: 14,50

INHALTSVERZEICHNIS


Vorwort . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1. Einige logische Grundlagen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.1. Aussagen, Aussageformen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.2. Gewinn neuer Aussagen aus gegebenen Aussagen, Aussageverbindungen . 17
1.2.1. Die Verneinung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
1.2.2. Die Konjunktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
1.2.3. Die Alternative . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
1.2.4. Die Disjunktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
1.2.5. Die Implikation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
1.2.6. Die Äquivalenz . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
1.3. Über das Begründen von mathematischen Aussagen . . . . . . . . . . 24
1.4. Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26

2. Mengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

2.1. Der Mengenbegriff . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
2.2. Teilmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
2.3. Komplementärmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.4. Mengen im Mathematikunterricht . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2.5. Operationen mit Mengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
2.5.1. Durchschnitt von Mengen . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
2.5.2. Vereinigungsmenge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
2.5.3. Differenzmenge . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.6. Etwas aus der Mengenalgebra . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
2.7. Gesetze der Differenzbildung . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.8. Mengen verschiedener Stufen . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
2.9. Geordnete Paare, Kreuzprodukt . . . . . . . . . . . . . . . . 56
2.10. Antinomien der Mengenlehre . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
2.11. Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

**3.** Relationen . . . . . . . . . . . . 68

3.1. Der Relationsbegriff . . . . . . . . . . . . 68
3.2. Mehrstellige Relationen . . . . . . . . . . . . 90
3.3. Eigenschaften zweistelliger Relationen . . . . . . . . . . . . 93
3.3.1. Reflexivität . . . . . . . . . . . . 93
3.3.2. Transitivität . . . . . . . . . . . . 95
3.3.3. Symmetrie . . . . . . . . . . . . 96
3.4. Ordnungsrelationen . . . . . . . . . . . . 98
3.5. Äquivalenzrelationen . . . . . . . . . . . . 102
3.6. Aufgaben . . . . . . . . . . . . 112

**4.** Abbildungen, Funktionen . . . . . . . . . . . . 117

4.1. Abbildung von Mengen, der Funktionsbegriff . . . . . . . . . . . . 117
4.2. Umkehrung von Abbildungen . . . . . . . . . . . . 124
4.3. „Zahl-Zahl"-Funktionen . . . . . . . . . . . . 125
4.4. Eigenschaften von Funktionen . . . . . . . . . . . . 136
4.4.1. Umkehrbarkeit . . . . . . . . . . . . 136
4.4.2. Periodizität . . . . . . . . . . . . 136
4.4.3. Monotonie . . . . . . . . . . . . 140
4.4.4. Beschränktheit . . . . . . . . . . . . 142
4.4.5. Stetigkeit . . . . . . . . . . . . 142
4.5. Verkettung von Abbildungen . . . . . . . . . . . . 149
4.6. Zusammensetzung von Funktionen . . . . . . . . . . . . 151
4.7. Transformationen der Ebene . . . . . . . . . . . . 156
4.7.1. Translation . . . . . . . . . . . . 158
4.7.2. Rotation . . . . . . . . . . . . 159
4.7.3. Axiale Symmetrie . . . . . . . . . . . . 161
4.8. Umkehrung von Funktionen . . . . . . . . . . . . 166
4.9. Geregelte Mengen, Isomorphie . . . . . . . . . . . . 171
4.10. Aufgaben . . . . . . . . . . . . 178

**5.** Aufbau der Zahlenbereiche . . . . . . . . . . . . 182

5.1. Natürliche Zahlen – Mengentheoretischer Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen . . . . . . . . . . . . 183
5.1.1. Mengenvergleich, Kardinalzahlen . . . . . . . . . . . . 183
5.1.2. Endliche Mengen . . . . . . . . . . . . 186
5.1.3. Die Nachfolgerrelation für natürliche Zahlen . . . . . . . . . . . . 190
5.1.4. Ordnung . . . . . . . . . . . . 193
5.1.5. Rechenoperationen . . . . . . . . . . . . 196
5.2. Natürliche Zahlen – Axiomatischer Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen . . . . . . . . . . . . 202
5.2.1. Rechenoperationen . . . . . . . . . . . . 206
5.2.2. Ordnung . . . . . . . . . . . . 209
5.2.3. Rechenoperationen verschiedener Stufen . . . . . . . . . . . . 211
5.3. Gebrochene Zahlen . . . . . . . . . . . . 212
5.3.1. Paare natürlicher Zahlen . . . . . . . . . . . . 215
5.3.2. Quotientengleichheit . . . . . . . . . . . . 215

5.3.3. Einführung einer Ordnung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216
5.3.4. Rechenoperationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218
5.4. Rationale Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 225
5.4.1. Paare gebrochener Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226
5.4.2. Differenzengleichheit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227
5.4.3. Ordnung der rationalen Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228
5.4.4. Rechenoperationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230
5.4.5. Monotoniegesetze in $R$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 234
5.5. Reelle Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 237
5.5.1. Allgemeines . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 237
5.5.2. Intervallschachtelung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 243
5.5.3. Fundamentalfolgen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 246
5.5.4. Reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247
5.5.5. Erzeugung der reellen Zahlen durch Schnitte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249
5.5.6. Axiomatische Methode . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250
5.6. Komplexe Zahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 255
5.6.1. Rechenoperationen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257
5.7. Rückblick . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 259
5.8. Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 261

6. Vergleich unendlicher Mengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 264
6.1. Kardinalzahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 267
6.1.1. Rechnen mit Kardinalzahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 292
6.2. Ordinalzahlen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 293
6.2.1. Ähnlichkeit von geordneten unendlichen Mengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 296
6.2.2. Ordnungstypen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 298
6.2.3. Summe von Ordnungstypen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 299
6.2.4. Wohlordnung, Ordnungszahl . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 301
6.3. Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 309

7. Anwendungen von Mengen im Schulstoff . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 311
7.1. Anwendungen in der Gleichungslehre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 311
7.1.1. Lösen von Gleichungen und Ungleichungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 313
7.1.2. Identitäten . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 320
7.1.3. Unerfüllbare Gleichungen und Ungleichungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 321
7.1.4. Äquivalente Umformungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 324
7.2. Punktmengen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 329
7.3. Weitere Anwendungen von Mengen und Relationen im Schulunterricht . 338
7.4. Aufgaben . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 340

8. Lösungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 342
Literaturverzeichnis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 384
Sachwortverzeichnis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 387

# VORWORT

Die erste Fassung des Buches „Mengen, Relationen, Funktionen“, die im Jahre 1965 erschien, hatte die Aufgabe, den Lehrern bei der Aneignung moderner Gesichtspunkte für die Grundlegung der Mathematik zu helfen; denn nach der Annahme des Beschlusses „Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR“ durch das ZK der SED und den Ministerrat der DDR am 17. Dezember 1962 war neue Fachliteratur für die Lehrer dringend erforderlich. Das Buch *Mengen, Relationen, Funktionen* sollte besonders den Unterstufenlehrer umfassend, in leicht lesbarer Diktion mit der für die Schule neuen mathematischen Konzeption vertrautmachen. Die schnelle Verbreitung, die dieses Buch erfahren hatte, dokumentierte anschaulich, wie wichtig eine Veröffentlichung zu dieser Thematik war. Das Buch wurde in der Lehrerausbildung in der Deutschen Demokratischen Republik verwendet und ist auch in einigen anderen Ländern verbreitet worden. Dabei hat sich gezeigt, daß es auch im nichtpädagogischen Bereich eine Hilfe bei der mathematischen Aus- und Weiterbildung zu leisten vermag: Die in diesem Buch versuchte Einführung in die Sprache der modernen Mathematik *ohne Voraussetzung besonderer Schulkenntnisse* kann vor allem solchen Menschen den Zugang zur Mathematik erleichtern, die einen Unterricht genossen haben, der mehr Rechen- als Mathematikunterricht war, oder einen solchen, der den Stoff durch die traditionelle Auffassung teils eingeengt, teils mißverständlich darbot.
In den folgenden Nachdrucken waren aus technischen Gründen nur geringfügige Änderungen möglich, obwohl eine Überarbeitung auf Grund der neuen Lehrpläne, die in den Jahren 1968 bis 1971 eingeführt wurden, und auf Grund von Anregungen zur effektiveren Gestaltung des Buches, die in Leserzuschriften zum Ausdruck gebracht wurden, wünschenswert gewesen wäre.
Die nunmehr vorliegende Neubearbeitung mit dem gleichen Titel ist eine erweiterte und verbesserte Darstellung des Themenkreises, die aber nach wie vor in erster Linie das Informationsbedürfnis des Lehrers der unteren Klassen berücksichtigt. Ihm soll ein Überblick über die neuartigen mathematischen Grundlagen des gesamten Schulstoffes geboten werden. Dazu gehört vor allem ein Einblick in die Problematik der

Mengenlehre und in die Grundlagen der Analysis. Inhalt und Form des Buches, die sich offenbar bewährt haben, blieben im wesentlichen erhalten. Es will kein systematisch aufgebautes Lehrbuch sein. Zwar stützen sich im theoretischen Teil die Ausführungen auf Vorangegangenes, jedoch treten in den Beispielen oft Begriffe auf, die erst später systematisch behandelt werden, z. B. Zahlen, unendliche Mengen, geometrische Abbildungen. Die dadurch notwendigen Wiederholungen von Erklärungen sind meines Erachtens für das Verständnis von Vorteil, zumal sie meistens von einem neuen Standpunkt aus erfolgen. Viele Beweise werden nur angedeutet, an einem Beispiel erläutert oder ganz fortgelassen. Mit Hilfe von Kleindruck sind die Textstellen gekennzeichnet, die der Leser überspringen kann, ohne daß das Verständnis für das Nachfolgende beeinträchtigt wird. Um mathematisch weniger geschulten Lesern die Definitionen näher zu bringen, wird nach Möglichkeit von vielseitig ausgewählten und zum Teil im Unterricht verwendbaren Beispielen ausgegangen. Auch finden sich gelegentlich Hinweise auf die methodische Behandlung eines Unterrichtsgegenstandes. Dennoch kann das Buch nicht den Anspruch erheben, einen Leitfaden für die unterrichtliche Aufbereitung des Lehrplanstoffes zu geben.

Jedes Kapitel wird mit Kontrollaufgaben abgeschlossen, deren Lösungen der Leser im 8. Kapitel findet. Schwerere Aufgaben und Textstellen sowie solche, die Vorkenntnisse aus dem Stoff höherer Klassen voraussetzen, sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet. Inhalts- und Sachwortverzeichnis, die die Orientierung erleichtern sollen, befinden sich am Anfang bzw. am Ende des Buches. Die im Text in eckigen Klammern aufttretenden Ziffern verweisen auf die am Schluß des Buches aufgeführte Literatur.

Neu ist die Voranstellung der in den weiteren Kapiteln benutzten Ausführungen über Aussagen und Aussagenverbindungen sowie der Bemerkungen über den Aufbau einer mathematischen Theorie, die bisher im Anhang standen. Sie bilden jetzt den Inhalt des ersten Kapitels.

Die folgenden beiden Kapitel, die Mengen bzw. Relationen behandeln, sind kaum verändert worden. Relationen, die ja selbst spezielle Mengen sind, werden für das Verständnis des Funktionsbegriffs, speziell der geometrischen Abbildung, und des Zahlbegriffs benötigt. Aus den Relationen heben sich durch ihre besonderen Eigenschaften Ordnungs- und Äquivalenzrelationen heraus. Sie haben für den Schulstoff große Bedeutung und werden daher ausführlich behandelt.

Abbildungen von Mengen, die Gegenstand des vierten Kapitels sind, führen auf den Funktionsbegriff. Dieses Kapitel ist durch die Darstellung einiger wichtiger Eigenschaften von Funktionen (Beschränktheit, Monotonie, Periodizität, Stetigkeit) erweitert und durch kleine Umstellungen und Erläuterungen lesbarer gestaltet worden. Der Isomorphiebegriff erhielt durch Beispiele aus dem Stoff höherer Klassen mehr Gewicht.

Kapitel fünf enthält den genetischen Aufbau der Zahlenbereiche bis zum Bereich der komplexen Zahlen. Auf diesem Gebiet liegen wohl die größten Veränderungen des jetzt gültigen Lehrplans gegenüber dem traditionellen Unterricht. Hier kommt in der Begriffsbildung und in der Konsequenz, mit der die logische Reihenfolge der einzelnen Schritte eingehalten wird, die neue Denkweise besonders stark zum Ausdruck. Obwohl der mathematische Sachverhalt in den Lehrbüchern der einzelnen Klassen dargestellt und in verschiedenen Artikeln unserer Fachpresse erläutert wird, scheint mir ein derartiges Kapitel im Rahmen dieses Buches unerläßlich. Ganz abgesehen von der mathematischen, der erkenntnistheoretischen, der pädagogischen Bedeutung des Zahlbegriffs als solchem, verlangt seine Erarbeitung die ständige Anwendung von Mengen und Relationen und trägt dadurch zum Verständnis und zur Festigung dieser Begriffe bei. In diesem Kapitel werden verschiedene Wege des Aufbaus skizziert. Bei den natürlichen und bei den reellen Zahlen werden mehrere Möglichkeiten der Einführung gezeigt. Dies soll dem Lehrer, der vielleicht an verschiedenartigen Kursen teilgenommen oder sich mit Fachliteratur beschäftigt hat, zu einem besseren Überblick verhelfen und ihn zum Studium weiterführender Literatur anregen. Das Prinzip der vollständigen Induktion darf bei einer Abhandlung der natürlichen Zahlen nicht fehlen. Es gehört heute zu dem mathematischen Bildungsgut, das auch dem Unterstufenlehrer bekannt sein muß.

Das Kapitel über unendliche Mengen steht an der Grenze der für den Unterricht erforderlichen mathematischen Kenntnisse. Der Vergleich unendlicher Mengen, der zu einer Abstufung des Unendlichen führt, ist aber gut geeignet, die Ergiebigkeit mengentheoretischer Arbeitsweisen zu zeigen und die Kenntnisse über Mengen abzurunden. Dabei ergeben sich tiefere Einblicke in Besonderheiten unserer Zahlenbereiche. Die Beschäftigung mit dem Unendlichen eröffnet ferner philosophische Aspekte, durch die manche oft anzutreffenden verschwommenen Vorstellungen zurechtgerückt werden können. Von dieser Seite her sind auch, wie Zuschriften zeigen, philosophisch interessierte Nichtmathematiker an den Mengenbegriff herangeführt worden. Schließlich bietet dieses Kapitel Stoff für Arbeitsgemeinschaften mit interessierten Schülern.

Den Inhalt des letzten Kapitels bilden weitere Anwendungen von Mengen und Relationen im Schulstoff, vor allem in der Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen. Dieses Gebiet, das im Unterricht eng mit der Behandlung entsprechender Funktionen verbunden wird, ist durch die konsequente Anwendung der Variablen und des Mengenbegriffs sehr viel klarer und einfacher geworden als nach den früheren Lehrplänen.

Wenn das Buch den Leser zum Studium weiterer Literatur anregt und wenn es den Lehrer dazu veranlaßt, seinen Unterricht noch tiefer zu durchdenken, so hat es seinen Zweck erfüllt. Für alle Vorschläge, wie dies noch besser erreicht werden kann, bin ich dankbar.

Dem im früheren Vorwort ausgesprochenen Dank an meine Mitarbeiter, insbesondere an die Herren Dr. Lorenz und Dr. Ilgner, möchte ich nunmehr den an alle Leser hinzufügen, die mir zustimmende oder kritische Stellungnahmen zukommen ließen. Besonders gilt das für Herrn Dr. Harry Apelt, Professor an der Pädagogischen Hochschule Potsdam, und für Frau Ingeborg Lehmann, Fachberaterin im Kreis Königs Wusterhausen. Ihre ausführlichen Gutachten haben mir bei der Überarbeitung des Buches sehr geholfen.

*Lilly Görke*

# 1. EINIGE LOGISCHE GRUNDLAGEN

## 1.1. Aussagen, Aussageformen

Der Mathematiker muß seine Erkenntnisse zwecks Kommunikation und weiterer Verarbeitung sprachlich formulieren. Zwar hängt der Erkenntnisprozeß selbst nicht unbedingt davon ab. Zunächst bestehen die behaupteten Zusammenhänge, oder sie bestehen nicht, unabhängig davon, ob sie vom Bewußtsein des Menschen erfaßt, geschweige denn formuliert werden. Dem Erfassungsprozeß seinerseits haftet oft eine intuitive Komponente an. Jeder, der sich schon einmal intensiv mit der Lösung eines mathematischen Problems beschäftigt hat, weiß von einer Art vorwissenschaftlichen Denkens: Erinnerungen tauchen auf, vage Vermutungen werden aufgeworfen, verschiedene Wege probeweise ins Auge gefaßt, ehe durch Prüfungen der einzelnen Vermutungen und der verschiedenen Wege bis hin zur ausgefeilten sprachlichen Formulierung die Lösung heranreift. Wie weit schon im vorwissenschaftlichen Denken mehr oder weniger bewußt sprachliche Kategorien wirksam sind, wird von Psychologen und Philosophen untersucht und steht hier nicht zur Debatte. Auf alle Fälle ist schließlich eine sprachliche Formulierung in Form von mündlichen oder schriftlichen Aussagen erforderlich. Diese bedient sich verschiedener Laute bzw. Zeichen, je nachdem, ob die Wiedergabe schriftlich oder mündlich erfolgt. Jede Wissenschaft verwendet solche Zeichen (Buchstaben, Ziffern), deren Anzahl sie noch für ihre speziellen Zwecke um typische Zeichen vermehrt, in der Mathematik z. B. durch „$=$“, „$<$“, „$\cong$“, „$+$“ usw. Eine Folge solcher Zeichen oder Laute ist aber nur dann zweckdienlich, wenn jeder die Zeichen bzw. Laute in gleicher Weise versteht: Ein gedrucktes, handgeschriebenes, fotografiertes „$a$“ muß als der bekannte erste Buchstabe des Alphabets, eine „1“ als das Zeichen für die erste natürliche Zahl (↑ S. 203), ein Komma als das bekannte Interpunktionszeichen aufgefaßt werden. Auf den hier unbewußt vollzogenen Abstraktionsprozeß wird in Kapitel 3 (S. 105 f.) näher eingegangen werden.
Durch Aneinanderfügen solcher Zeichen (Laute) werden Zeichenreihen (Lautfolgen) gebildet, die zur Formulierung von Aussagen benutzt werden. Natürlich ist nicht jede Zeichen-(Laut)-Folge dazu brauchbar. So kann etwa die Reihe „$,A(x=,$“ keine Aussage ausdrücken. Die Zeichenreihen müssen vielmehr nach gewissen syntaktischen Regeln gebildet sein. Jedem Lehrer sind einige dieser zum Teil technischen Regeln

bekannt: Eine geöffnete Klammer muß auch geschlossen werden, da die Klammer der Zusammenfassung mehrerer Glieder dient, ein Komma kann weder als erstes, noch als letztes Glied einer Zeichenreihe auftreten usw. Bei Zusammensetzung von Ausdrücken braucht man Klammern verschiedener Art, die das Ganze eventuell unübersichtlich machen würden. So hat man gewisse Regeln aufgestellt, die eine Einsparung von Klammern ermöglichen: Anstelle von $(a \cdot b) + c$ oder $(a:b) + c$ darf geschrieben werden $ab + c$ bzw. $a:b + c$. Soll anders gerechnet werden, so müssen Klammern gesetzt werden: $a(b + c)$ bzw. $a:(b + c)$. In der mathematischen Logik wird auf induktivem Wege ein ausreichendes System von Regeln aufgestellt, das in jedem Fall die Entscheidung darüber ermöglicht, ob eine vorgelegte Zeichenreihe sinnvoll ist oder nicht. Ein Beispiel für solch induktives Vorgehen findet der Leser in Kapitel 6 in der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition für Mengen.
Sinnvolle Zeichenreihen verwendet der Mathematiker zur Formulierung seiner Aussagen. Jede Aussage drückt einen entweder real bestehenden oder einen nur vermuteten, in der Realität möglicherweise nicht bestehenden Sachverhalt aus. Deshalb wird zwischen wahren und falschen Aussagen unterschieden. So ist die Aussage „am 18. Oktober 1971 stieg das Thermometer in Berlin auf 18°" wahr, weil die Temperatur an diesem Tag in Berlin in der Tat bis zu 18° betrug; die Aussage, daß es an diesem Tag in Berlin geregnet habe, ist falsch, weil es damals in Berlin trocken blieb. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch. Damit ist nicht gesagt, daß sich die Wahrheit oder Falschheit einer Aussage immer nachweisen lassen muß. Ob es z. B. drei von 0 verschiedene Zahlen gibt, die, für $a$, $b$, $c$ in $a^{112807} + b^{112807} = c^{112807}$ eingesetzt, auf eine wahre Aussage führen, können wir gegenwärtig noch nicht entscheiden.[1] Dennoch ist die Aussage, die entsteht, wenn wir eine Einsetzung vornehmen, entweder richtig oder falsch, und das können wir sogar nachprüfen.

---

**Zusammenfassung:**
**Die Erkenntnisse der Mathematik werden in Aussagen formuliert. Diese werden in Zeichen-(Laut-)Folgen niedergelegt, die nach bestimmten Regeln gebildet sind. Jede Aussage drückt einen Sachverhalt aus, der entweder in der Realität besteht oder nicht. Je nachdem wird die Aussage als wahr oder falsch bezeichnet.**

---

Es sollen jetzt einige Sätze oder Formeln analysiert werden, die in mathematischen Büchern oder in Schülerarbeiten vorkommen könnten.

a) 3 ist eine Primzahl. Kurz geschrieben: $P(3)$.

b) $4 = \frac{8}{2}$

c) Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt: Wenn $n$ Primzahl und $n$ größer als 2 ist, so ist $n$ ungerade.

d) $5 > 8$

[1] Hier liegt ein Spezialfall der sog. FERMATschen Vermutung vor: Es gibt für natürliche Zahlen $n > 2$ keine Tripel natürlicher Zahlen $a$, $b$, $c$, für die $a^n + b^n = c^n$ ist. Für viele $n$ ist diese Vermutung bereits bewiesen, aber noch nicht für alle.

e) Es gibt keine natürliche Zahl $n$, für die gilt: $n$ ist gerade und $n$ ist Primzahl.
f) 3 teilt 6, kurz geschrieben: $3 \mid 6$.

Diese Aussagen, von denen a), b), c), f) richtig, d) und e) falsch sind, können in grammatischer oder in logischer Weise analysiert werden. Dabei stellen sich Gemeinsamkeiten, aber auch Unterschiede heraus. In a) ist 3 sowohl in grammatischer als auch in logischer Beziehung Subjekt, desgleichen 4 in b) und 3 in f). In b) ist aber $\frac{8}{2}$ grammatisch gesehen Prädikatsnomen, 6 in f) Akkusativobjekt. In der Logik werden aber $\frac{8}{2}$ und 6 gleichfalls als Subjekte bezeichnet. In a) ist grammatisch und logisch „ist eine Primzahl" Prädikat. Auch „ist gerade" (e), „ist ungerade" (c) sind Prädikate, die einem Subjekt zukommen können oder nicht. Die Aussagen c) und e) sind zusammengesetzte Sätze, in der Grammatik Satzgefüge von teilweise neben-, teilweise untergeordneten Sätzen. Logisch gesehen sind aber die Bestandteile der Aussagen c) und e) keine Aussagen mehr, denn „$n$ ist Primzahl", „$n$ ist gerade", „$n$ ist ungerade" sind weder wahr noch falsch. Erst wenn für $n$ irgendeine natürliche Zahl eingesetzt wird, entstehen daraus wahre oder falsche Aussagen. Man nennt $n$ eine **Variable.** Unter einer Variablen versteht man ein Zeichen, für das ein beliebiges Individuum aus einem vorher verabredeten Bereich eingesetzt werden kann. Solche sprachlichen Ausdrücke wie „$n$ ist gerade", „$n$ ist Primzahl", die weder wahr noch falsch sind, heißen **Aussageformen.**
Weitere Beispiele für Aussageformen:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $x + 3 = 5$ | 3) $x < 3$ | 5) $y = x^2$ |
| 2) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ | 4) $x \cdot y = 12$ | 6) $f(3,4) = 12$ |

All diese Aussageformen gehen in wahre oder falsche Aussagen über, wenn für die Variablen Einsetzungen wie eben beschrieben vorgenommen werden. Zum Beispiel geht 1) in eine wahre Aussage über, wenn für $x$ die Zahl 2 eingesetzt wird, bei jeder anderen Einsetzung aber wird 1) falsch. Setzt man in 2) für $a$ oder für $b$ die Zahl 0 ein, so wird 2) eine wahre Aussage, in allen anderen Fällen eine falsche. Die Aussageform 4) wird wahr, wenn für das Paar $[x, y]$ eines der Paare [1, 12], [2, 6], [3, 4], [4, 3], [6, 2], [12, 1] eingesetzt wird. (Es wurde jedes Mal der Bereich der natürlichen Zahlen zugrunde gelegt.) Die Form $y = x^2$ wird, wenn der Bereich der reellen Zahlen gewählt wird, durch Einsetzung unendlich vieler Paare $[x, y]$ zu einer wahren Aussage, z. B. durch [2, 4], [10, 100], $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right]$, aber z. B. nicht durch [5, 10]. In 6) tritt $f$ als Zeichen für eine Rechenoperation auf. Setzen wir dafür die Addition ein, so entsteht $3 + 4 = 12$, eine falsche Aussage. Setzen wir die Multiplikation ein, so entsteht $3 \cdot 4 = 12$, eine wahre Aussage. In 1) bis 5) treten Variable für Zahlen auf. Das in 6) stehende Zeichen $f$ ist dagegen eine Variable für eine Funktion.

Aussageformen treten nicht nur in der Mathematik auf. „Er ist nicht zu Hause" ist auch eine Aussageform, die erst dann zu einer wahren oder falschen Aussage wird, wenn für „er" eine männliche Person eingesetzt wird. Allerdings ergibt sich meist aus dem Zusammenhang, welche Person gemeint ist, so daß man dann doch von Aussagen reden kann.

Sehen wir uns noch einmal die Aussagen c) und e) an. Sie zeigen, daß Aussageformen wie „$n$ ist eine Primzahl", „$n > 2$" nicht nur durch Ersetzung der Variablen $n$ durch eine

### 1.2.1. *Die Verneinung*

Die Aussage $\overline{p}$ ist wahr genau dann, wenn $p$ eine falsche Aussage ist, und $\overline{p}$ ist falsch genau dann, wenn $p$ eine wahre Aussage ist. Die Verneinung von $\overline{p}$, also $\overline{\overline{p}}$, stimmt wieder mit $p$ überein, $\overline{\overline{p}} = p$. Im folgenden sollen die beiden Prädikate *wahr*, *falsch* als *Wahrheitswerte* bezeichnet werden. Dann kann man formulieren: Beim Übergang von $p$ zu $\overline{p}$ ändert sich der Wahrheitswert. Die Wahrheitswerte von $p$ und $\overline{p}$ können also in folgender Tabelle zusammengestellt werden:

| $p$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| $\overline{p}$ | falsch | wahr |

Das Nichtzutreffen einer Aussage kann auf verschiedene Weisen ausgedrückt werden. Ist $p$ z. B. die Aussage „$3 = 5$", so wird die Verneinung oft ausgedrückt durch „$3 \neq 5$"; bedeutet $p$ die Aussage „3 teilt 12", geschrieben $3 \mid 12$, so kann $\overline{p}$ geschrieben werden als $3 \nmid 12$.

Die Verneinung einer Allaussage führt auf eine Existenzaussage; ist $p$ z. B. der Satz „Alle gleichschenkligen Dreiecke sind gleichseitig" (falsche Aussage), so bedeutet $\overline{p}$: „Es gibt mindestens ein gleichschenkliges Dreieck, das nicht gleichseitig ist" (richtige Existenzaussage). Umgekehrt führt die Verneinung einer Existenzaussage auf eine Allaussage. Bedeutet $p$ z. B.: „Es gibt mindestens eine gerade Primzahl" (richtige Existenzaussage, da 2 eine gerade Primzahl ist), so bedeutet $\overline{p}$: „Alle Primzahlen sind ungerade" (falsche Allaussage).

In den folgenden Abschnitten werden Verbindungen von zwei oder mehr Aussagen untersucht, sog. *Aussagefunktionen.*

### 1.2.2. *Die Konjunktion*

Häufig tritt im täglichen Leben wie auch in den Wissenschaften die Verbindung zweier Aussagen $p$, $q$ durch das Bindewort *und* auf, z. B. $p$: „Ich habe den Zug verpaßt", $q$: „Der nächste Zug hatte Verspätung".

Die Aussage **$p$ und $q$** (**Konjunktion**) ist genau dann wahr, wenn sowohl $p$ als auch $q$ wahr ist. Wird etwa als Entschuldigung für eine Verspätung angeführt: „Ich habe den Zug verpaßt, und der nächste Zug hatte Verspätung", und stimmt nur $p$, nicht aber $q$, so ist die zusammengesetzte Aussage unwahr und damit eine schlechte Entschuldigung.

Die neue Aussage $p$ *und* $q$ werde mit $\mathsf{H}$ bezeichnet, dann hängt die Wahrheit von $\mathsf{H}$ von der Wahrheit der Aussagen $p$ und $q$ ab. Wir stellen diese Abhängigkeit in einem Schema dar, bei dem die Wahrheitswerte von $p$ in einer Spalte (senkrecht), die von $q$ in einer Zeile (waagerecht) aufgeschrieben werden. In die leeren Felder der so entstehenden Tabelle werden die entsprechenden Wahrheitswerte von $\mathsf{H}$ eingetragen.

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | | |
| falsch | | |

Dieses Schema findet auch bei den weiteren Aussageverbindungen Verwendung. Für die Konjunktion hat es folgende Form:

H bedeutet $p$ *und* $q$

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | wahr | falsch |
| falsch | falsch | falsch |

In der 2. Zeile, 1. Spalte kann z. B. abgelesen werden, daß H falsch ist, wenn $p$ falsch und $q$ wahr ist. Von den vier möglichen Fällen ergibt sich nur in einem Fall die Wahrheit von H.

### 1.2.3. *Die Alternative*

Eine gleichfalls sehr häufige Aussagenverbindung stellt **$p$ oder $q$** (**Alternative**) dar. Hierunter wird in der Mathematik nicht das ausschließende *entweder – oder* verstanden, das man beim Münzenspiel „Zahl oder Bild“ meint. Vielmehr ist die zusammengesetzte Aussage H ($p$ oder $q$) wahr genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen $p$, $q$ wahr ist. Bedeutet z. B. $p$ die Aussage $\frac{3}{4} < \frac{6}{8}$, $q$ die Aussage $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, so kann H geschrieben werden in der Form $\frac{3}{4} \leqq \frac{6}{8}$ (gelesen „$\frac{3}{4}$ ist kleiner oder gleich $\frac{6}{8}$“).
Diese Aussage ist wahr, da $q$ wahr ist.
Die Wahrheitswertetafel für H hat jetzt folgende Form:

H bedeutet $p$ *oder* $q$

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | wahr | wahr |
| falsch | wahr | falsch |

Nur an einer Stelle des Schemas steht „falsch“, nämlich dort, wo sowohl $p$ als auch $q$ falsch ist. Bedeutet $p$ zum Beispiel die Aussage: „Ich habe meiner Mutter deinen Brief gegeben“, $q$ die Aussage: „Meine Mutter hat deinen Brief nicht gelesen“, und ist die Alternative $p$ *oder* $q$ wahr, so ist mindestens eine der beiden Aussagen wahr; sie können auch beide wahr sein. Die Alternative ist dann und nur dann falsch, wenn $p$ und $q$ beide falsch sind, d. h.: „Ich habe meiner Mutter deinen Brief nicht gegeben" und „Meine Mutter hat deinen Brief gelesen". (Sie könnte ihn ja von anderer Seite erhalten haben.) Häufig wird die Alternative zur Verbindung der Größer- (Kleiner-)Beziehung mit der Gleichheit benutzt. Bedeutet $p$ die falsche Aussage $\frac{1}{2} > \frac{3}{4}$; $q$ die gleichfalls falsche Aussage $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, so ist die Alternative $\frac{1}{2} \geqq \frac{3}{4}$ falsch. Umgekehrt folgt aus der Falschheit einer Alternative $a \geqq b$, daß $a$ weder größer noch gleich $b$ ist, also $a < b$. Die Verneinung einer Alternative führt immer auf eine Konjunktion: $\overline{p \textit{ oder } q}$ bedeutet also $\overline{p}$ *und* $\overline{q}$.

Aufgabe 3

### 1.2.4. *Die Disjunktion*

Das ausschließende *oder*, deutlicher das *entweder-oder*, stellt eine andere Aussagenverbindung dar, die als *Disjunktion* bezeichnet wird. Diese Aussage **entweder $p$ oder $q$** ist genau dann wahr, wenn eine der beiden Aussagen $p$, $q$ wahr, die andere falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie falsch. Der Sprachgebrauch in der Mathematik stimmt hier mit dem der Umgangssprache überein. Die Wahrheitswertetafel hat die Form:

H bedeutet *entweder p oder q*

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | falsch | wahr |
| falsch | wahr | falsch |

Die zusammengesetzte Aussage H ist in zwei Fällen wahr, in den anderen beiden Fällen falsch.

### 1.2.5. *Die Implikation*

Die Aussagenverbindung **aus $p$ folgt $q$ (Implikation)** tritt uns in der Kriminalliteratur häufig entgegen, z. B.: „Wenn der Täter aus dem Fenster gesprungen ist, so müssen auf der Erde Fußspuren sein", oder: „Aus der Aussage des Zeugen folgt, daß die Angaben des Verdächtigen über sein Alibi falsch sind". Auch der Mathematiklehrer benutzt die Implikation häufig im Mathematikunterricht und verwendet dafür verschiedene Ausdrücke: „wenn $p$, so $q$", „aus $p$ folgt $q$", „$p$ ist richtig, also (demnach, mithin, demgemäß) gilt auch $q$", „$p$ impliziert $q$". Für all diese Ausdrucksweisen wird geschrieben $p \Rightarrow q$.

Der Gebrauch der Implikation in der Mathematik verlangt eine nähere Erläuterung. Der Mathematiker präzisiert diese Aussagenverbindung dahin, daß die Implikation

nur in einem Fall falsch ist, wenn nämlich $p$ wahr, $q$ aber falsch ist. Diese Festsetzung hat sich in der mathematischen Praxis durchaus bewährt. Viele Lernende, die sich um die Mathematik bemühen, stoßen hier auf Schwierigkeiten. Bedeutet $p$ z. B. den – offenbar falschen – Satz „Der Mond besteht aus weißem Käse", $q$ den falschen Satz „$2+2=5$", so ist die Implikation „Wenn der Mond aus weißem Käse besteht, dann ist $2+2=5$" eine wahre Aussage! Solche etwas überspitzten Beispiele haben viel Staub aufgewirbelt. Wir wollen uns an Hand eines weniger absurden Beispiels überlegen, daß der mathematische Sprachgebrauch gar nicht so stark von dem der Umgangssprache abweicht.
Zwei Freunde $A$ und $B$ verabreden sich zu einem Besuch im Strandbad. Jeder verspricht: „Wenn Sonntag schönes Wetter ist, bin ich um 10 Uhr am Eingang des Strandbades". Aussage $p$ ist demnach: „Sonntag ist schönes Wetter", Aussage $q$: „Ich bin um 10 Uhr am Eingang des Strandbades". Wann hat $A$ (oder $B$) sein Versprechen gebrochen? Doch offenbar nur dann, wenn er am Sonntag trotz des schönen Wetters nicht zu der verabredeten Zeit am Eingang des Strandbades ist. Wenn er dagegen trotz schlechten Wetters kommt, ist offenbar die Verabredung eingehalten. Natürlich ist sie auch eingehalten, wenn einer oder beide bei schlechtem Wetter nicht erscheinen. Genau in dieser Weise wird die Implikation in der Mathematik gehandhabt.
Die Wahrheitswertetafel für H hat also folgende Gestalt:

H bedeutet *aus p folgt q*

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | wahr | falsch |
| falsch | wahr | wahr |

In dieser Fassung hat sich die Implikation in der Mathematik bewährt, und es liegt kein Grund dazu vor, wegen einiger absurder Beispiele außerhalb der Mathematik ihre Wahrheitswertetafel zu ändern. Auf die in diesem Sinn erklärte Implikation werden sich im folgenden viele Beweise stützen.
Auch an Hand der Wahrheitswertetafel kann man sich überlegen, daß nur in der ersten Zeile der zweiten Spalte „falsch" stehen kann: Die in der ersten Zeile des Schemas stehenden Wahrheitswerte „wahr" – „falsch" wird niemand bestreiten. Fraglich ist nur die zweite Zeile. Wir untersuchen die Fälle:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | wahr | falsch | b) | wahr | falsch | c) wahr | falsch |
| | falsch | falsch | | wahr | falsch | falsch | wahr |

*Fall a)* Diese Wahrheitswertetafel gehört zu der Konjunktion *p und q*. Das ist aber eine andere Aussagenverbindung als *aus p folgt q*. In *p und q* sind die beiden Aussagen $p$, $q$ vertauschbar, in *aus p folgt q* nicht. Zum Beispiel folgt für jede natürliche Zahl $n$ aus „4 ist Teiler von $n$" „2 ist Teiler von $n$", aber das Umgekehrte gilt nicht für jedes $n$. Dieser Fall kommt also nicht als Wahrheitswertetafel der Implikation in Frage.
*Fall b)* In diesem Fall wäre die Implikation zugleich mit dem Nachsatz $q$ wahr bzw. falsch. Der Vordersatz könnte beliebig, wahr oder falsch, sein, die Wahrheit der Implikation hinge nicht von ihm ab. Das kann aber nicht der Sinn der Implikation sein.

*Fall c)* Diese Wahrheitswertetafel gehört zu einer anderen Aussagenverbindung, die unter 1.2.6. erörtert werden wird: *p ist äquivalent mit q.* Die Äquivalenz von Aussagen bedeutet, daß beide zugleich entweder wahr oder falsch sind. Das ist dasselbe, als wenn man schreiben würde, *aus p folgt q*, und *aus q folgt p*. Das ist natürlich, wie das Beispiel „aus *4 teilt n* folgt *2 teilt n*" zeigt, nicht gleichbedeutend mit der gewöhnlichen Implikation *aus p folgt q*.
Es bleibt also nur die oben angegebene Form der Wahrheitswertetafel

| | |
|---|---|
| wahr | falsch |
| wahr | wahr |

übrig.
Die Implikation wird bei jedem mathematischen Beweis gebraucht. Dabei ist $p$ die Voraussetzung, $q$ die Behauptung. Ist der Nachweis *aus p folgt q* gelungen, so sagt man auch: $p$ ist eine hinreichende Bedingung für $q$, denn das Erfülltsein der Voraussetzung $p$ reicht – wenn der Beweis schlüssig ist – hin, um die in der Behauptung $q$ enthaltene Aussage zu sichern. Außerdem kann man auch sagen: $q$ ist eine notwendige Bedingung für $p$, denn wenn $q$ nicht gilt, kann auch $p$ nicht richtig sein, weil ja die Richtigkeit von $p$ die von $q$ nach sich zieht.[1]

### 1.2.6. *Die Äquivalenz*

Als letzte Aussagenverbindung soll die Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Aussagen behandelt werden. Gleichwertige Aussagen sind schon verschiedentlich vorgekommen: $\overline{\overline{p}}$ ist gleichwertig mit $p$, $\overline{p \text{ oder } q}$ gleichwertig mit $\overline{p}$ *und* $\overline{q}$. Die Aussagenverbindung *p äquivalent q* bedeutet, daß $p$ und $q$ zugleich wahr bzw. zugleich falsch sind. Die Äquivalenz der beiden Aussagen wird auch ausgedrückt in der Form: *p genau dann, wenn q*, was gleichbedeutend ist mit: *Aus p folgt q*, und *aus q folgt p*. Als Kurzschreibweise verwenden wir dafür den Doppelpfeil: $p \Leftrightarrow q$. Die Aussagen $p$ und $q$ können dabei vertauscht werden. Dann und nur dann, wenn $p$ und $q$ äquivalente Aussagen sind, ist der Satz (*Aus p folgt q*) umkehrbar. Der Leser mache sich dies an folgenden Beispielen klar: Es sei $n$ eine natürliche Zahl. Satz $p$ bedeute: $3 \mid n$ (gelesen: 3 teilt $n$), Satz $q$ bedeute: Die Quersumme von $n$ ist durch 3 teilbar. Die Sätze $p$ und $q$ sind äquivalent: Die Zahl $n$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
Noch ein Beispiel aus der Geometrie: Die Geraden $g_1$ und $g_2$ werden durch eine Gerade $s$ in den Punkten $S_1$ und $S_2$ geschnitten. Die dort entstehenden Winkel in entsprechender

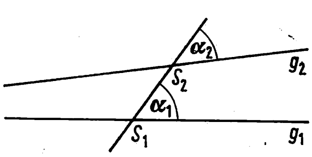


Bild 1.1.

[1] Vergleiche das über die Kontraposition auf Seite 23 Ausgeführte.

Lage seien $\alpha_1$ und $\alpha_2$ (Bild 1.1.). Satz $p$ bedeute: $g_1 \parallel g_2$, Satz $q$ bedeute: $\alpha_1 = \alpha_2$. Die Implikation $p \Rightarrow q$ ist der bekannte Stufenwinkelsatz, die Implikation $q \Rightarrow p$ ist seine gleichfalls richtige Umkehrung. Die Aussagen $p$ und $q$ sind äquivalent.
Die Wahrheitswertetafel der Äquivalenz hat folgende Form:

H bedeutet $p$ *ist äquivalent zu* $q$

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | wahr | falsch |
| falsch | falsch | wahr |

Im folgenden sei noch ein Beispiel angeführt, das in der Mathematik für die Technik des Beweisens wichtig ist. Eine bestimmte Implikation $p \Rightarrow q$ wird oft durch *Kontraposition* bewiesen: Man nimmt an, die Behauptung $q$ wäre falsch, und schließt daraus, daß die Voraussetzung $p$ falsch ist. Allgemein gilt, daß $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ und $p \Rightarrow q$ äquivalente Aussagen sind. Ziehen wir zur Veranschaulichung folgendes Beispiel heran:
$p$ bedeute „4 ist Teiler einer Zahl $n$", also $4 \mid n$;
$q$ bedeute „2 ist Teiler von $n$", also $2 \mid n$. Es gilt $p \Rightarrow q$.
Der Satz $\overline{q}$ bedeutet, daß $n$ ungerade ist, $\overline{p}$ bedeutet, daß $4 \nmid n$ (gelesen: 4 teilt nicht $n$). Die Implikation $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ ist richtig. In der Tat kann keine ungerade Zahl durch 4 teilbar sein.

* Um allgemein zu zeigen, daß $p \Rightarrow q$ und $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ äquivalente Aussagen sind, werde die erste Implikation mit $H_1$, die zweite mit $H_2$ bezeichnet.

$H_1$ bedeutet $p \Rightarrow q$

| $p$ \ $q$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | wahr | falsch |
| falsch | wahr | wahr |

$H_2$ bedeutet $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

| $\overline{q}$ \ $\overline{p}$ | wahr | falsch |
|---|---|---|
| wahr | wahr | falsch |
| falsch | wahr | wahr |

Es ist zu zeigen, daß die Aussagen $H_1$ und $H_2$ zugleich wahr bzw. falsch sind. Dazu braucht man nur im rechts stehenden Schema die einzelnen Stellen durchzuprüfen. In der ersten Zeile steht an erster Stelle *wahr*. Das bedeutet: Wenn $\overline{q}$ wahr (also $q$ falsch) und $\overline{p}$ wahr (also $p$ falsch) ist, dann ist $H_2$ wahr. Somit ist $H_2$ wahr, wenn $p$ und $q$ falsch sind. Dann ist aber auch $H_1$ wahr (↑ linkes Schema!). – An zweiter Stelle steht in der ersten Zeile des rechten Schemas *falsch*. Also ist $H_2$ falsch, wenn $\overline{q}$ wahr (also $q$ falsch) und $\overline{p}$ falsch (also $p$ wahr) ist; das heißt: $H_2$ ist falsch, wenn $p$ wahr, aber $q$ falsch ist. Auch in diesem Fall hat Aussage $H_1$ denselben Wahrheitswert wie $H_2$, nämlich falsch. – An erster Stelle der zweiten Zeile im rechten Schema steht *wahr*, d. h., $H_2$ ist wahr, wenn $\overline{p}$ wahr, aber $\overline{q}$ falsch ist. Also ist $H_2$ wahr, wenn $p$ falsch, $q$ aber wahr ist. In diesem Fall ist auch $H_1$ wahr (↑ linkes Schema!). – Schließlich bleibt das zweite Glied der zweiten Zeile zu untersuchen. Die Aussage $H_2$ ist wahr, wenn $\overline{p}$ und $\overline{q}$ falsch, also $p$ und $q$ beide wahr sind. Dann ist auch $\mathsf{H}_1$ wahr. In allen Fällen, wo $\mathsf{H}_2$ wahr bzw. falsch ist, gilt dies auch für $\mathsf{H}_1$. Die Aussagen $\mathsf{H}_1$ und $\mathsf{H}_2$ sind in der Tat äquivalent.

**Zusammenfassung:**
**Aus Aussagen $p$, $q$, ... können durch Aussagefunktionen neue Aussagen gebildet werden. Ihre Wahrheit hängt nur von der Wahrheit, nicht von der inhaltlichen Bedeutung von $p$, $q$, ... ab. Die einfachste Aussagefunktion ist die Verneinung $\overline{p}$ einer Aussage $p$. Die Aussage $\overline{p}$ ist wahr, wenn $p$ falsch ist und falsch, wenn $p$ wahr ist. Durch die Aussagefunktionen Konjunktion, Alternative, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz werden aus einfachen Aussagen $p$, $q$ zusammengesetzte Aussagen $\mathsf{H}$ gebildet. In welcher Weise die Wahrheit von $\mathsf{H}$ von der Wahrheit oder der Falschheit der Aussagen $p$, $q$ abhängt, wird durch die Wahrheitswertetafeln angegeben.**

Damit seien die Betrachtungen über Aussagen und Verbindungen von Aussagen abgeschlossen. Anwendungen auf Mengen, ferner auf Gleichungen und Ungleichungen sowie auf die Geometrie findet der Leser in den Kapiteln 3 und 6.

Aufgaben 4 und 5

## 1.3. Über das Begründen mathematischer Aussagen

Zum Schluß sei noch kurz auf das Begründen von mathematischen Aussagen, d. h. auf den Nachweis ihrer Richtigkeit, eingegangen. Jeder Lehrer, vor allem der Mathematiklehrer, muß sich Rechenschaft darüber ablegen, ob die in seinem Unterricht auftretenden Begründungen schlüssig sind oder nicht. Was heißt es, einen Satz $a$ aus irgendeiner mathematischen Theorie, z. B. aus der ebenen Geometrie, beweisen? Es heißt, den Satz $a$ auf andere, bereits bewiesene geometrische Sätze $b$, $c$, $d$, ... und auf Definitionen zurückführen. Die Sätze $b$, $c$, $d$, ... müssen ihrerseits wieder auf begründete Sätze und Definitionen gestützt werden und so fort. Bei den dabei stattfindenden Umformungen und Zusammensetzungen von Aussagen werden mathematische Schlußregeln angewendet. Diesem Zurückführen muß einmal an irgendeiner Stelle ein Ende gesetzt werden.
Ein System von Sätzen, das wir für ausreichend halten, um z. B. die Geometrie auf sie zu stützen, bezeichnen wir als ein **Axiomensystem** der Geometrie. Allgemein ist ein Axiomensystem einer Theorie eine Zusammenstellung von Aussagen über bestimmte Eigenschaften und Beziehungen von Gegenständen dieser Theorie, die großenteils der Erfahrung entnommen sind und sich in der Praxis bewährt haben. Diese Gegenstände und diese zwischen ihnen bestehenden Beziehungen werden als „Grundbegriffe der axiomatisierten Theorie" bezeichnet. Zu den Grundbegriffen der Elementargeometrie zählt man z. B. Begriffe wie „Punkt", „Gerade", „Ebene", aber auch Beziehungen wie „parallel", „liegt auf ...", „... liegt zwischen ...", z. B. „Punkt $P$ liegt auf der Geraden $g$", „Punkt $B$ liegt zwischen den Punkten $A$ und $C$". In Hilberts Axiomensystem der Geometrie, das hier als Vorbild dienen kann, tritt u. a. neben den genannten Grundbegriffen auch die Kongruenz (Gleichheit) von Strecken, Winkeln und Dreiecken auf, dagegen z. B. nicht die axiale Symmetrie. Sie ist in Hilberts Auf-

bau der Geometrie [1] ein abgeleiteter Begriff, der mit Hilfe von Definitionen auf die in den Axiomen beschriebenen Grundbegriffe zurückgeführt werden kann. Was dabei die Grundbegriffe: Punkt, Gerade, ..., parallel, zwischen, liegt auf ... usw. inhaltlich bedeuten, wird in den Axiomen nicht gesagt. Es werden nur zwischen ihnen bestehende Beziehungen durch die Axiome beschrieben.
Als Beispiele seien einige Axiome aus HILBERTS Aufbau der Geometrie angeführt:

> Zu zwei Punkten $A$, $B$ gibt es stets genau eine Gerade $g$, auf der $A$ und $B$ liegen.
>
> Wenn $A$, $B$ zwei Punkte einer Geraden $g$ und ferner $A'$ ein Punkt derselben oder einer anderen Geraden $g'$ ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden $g'$ von $A'$ aus stets einen und nur einen Punkt $B'$ finden derart, daß die Strecke $\overline{A'B'}$ der Strecke $\overline{AB}$ kongruent (gleich) ist. (Kurz ausgedrückt: Jede Strecke kann auf einer beliebigen Geraden von einem beliebigen Punkt aus nach einer beliebigen Seite abgetragen werden.)
>
> Ist $g$ eine beliebige Gerade und $A$ ein nicht auf $g$ liegender Punkt, so gibt es in der durch $A$ und $g$ bestimmten Ebene genau eine zu $g$ parallele Gerade, auf der $A$ liegt (Parallelenaxiom).
>
> Sind zwei Strecken $c$ und $\overline{AB} = a$ gegeben, so gibt es eine natürliche Zahl $n$ mit folgender Eigenschaft: wird $c$ von $A$ aus auf dem Strahl $AB$ $n$-mal abgetragen bis zu dem Punkt $A_n$, so liegt $B$ zwischen $A$ und $A_n$. Oder, anschaulicher ausgedrückt: Durch genügend häufiges Abtragen von $c$ auf $a$ von $A$ aus kann man nach endlich vielen Schritten über $B$ hinaus gelangen (ARCHIMEDisches Axiom).

Es ist hier nicht möglich, das gesamte Axiomensystem anzuführen. Der interessierte Leser muß auf Spezialliteratur verwiesen werden (z. B. [2], [3], S. 33 ff., [4], S. 6). Es sei nur noch erwähnt, daß sich widerspruchsfreie „nichteuklidische" Geometrien, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt, aufbauen lassen, wie bereits vor über 100 Jahren durch N. J. LOBATSCHEWSKI (1793 bis 1856), B. RIEMANN (1826 bis 1866) und J. BÓLYAI (1802 bis 1860) gezeigt wurde. Auch ohne das ARCHIMEDische Axiom läßt sich eine widerspruchsfreie „nichtarchimedische" Geometrie aufbauen.
Wenn der Mathematiker eine mathematische Theorie aufbauen will, so sind ihm stets schon viele Begriffe und Sachverhalte des betreffenden Gegenstandsbereichs bekannt. In dieser Fülle sucht er nun Ordnung zu schaffen, indem er ein logisches Gebäude errichtet. In ihm soll jeder Satz aus den vorangegangenen Sätzen und Definitionen folgen. Damit wird der Satz letztlich auf die Grundbegriffe und Axiome gestützt, aus denen er mittels mathematischer Schlußregeln hergeleitet werden kann. Wenn solch ein logischer Aufbau einer mathematischen Theorie gelingt, so stehen am Anfang die Schlußregeln und die ausgewählten Grundbegriffe und Axiome. Auf die Forderungen, die bei der Auswahl eines Systems von Axiomen und Grundbegriffen gestellt werden, und auf einige dabei entstehende Schwierigkeiten kann hier nicht eingegangen werden. Sie sind Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung.

Aufgabe 6

Dem Leser, der sich mit den oben nur angeschnittenen logischen Fragen näher beschäftigen möchte, sei das sehr ansprechende Buch „Mathematische Logik für

Anfänger" von VARGA [5] empfohlen, das wegen seiner zahlreichen lebensnahen Beispiele besonders dem Pädagogen viele Anregungen geben kann. Für ein in mathematischer Beziehung weiterführendes Studium sei auf die „Einführung in die mathematische Logik" von ASSER [6] und auf die „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" hingewiesen. In mehreren älteren Jahrgängen dieser Zeitschrift wird auch auf philosophische Fragen eingegangen.

## 1.4. Aufgaben: Einige logische Grundlagen

1. Zeigen Sie, daß die Allaussage c) von S. 14 wahr ist!

2. Verändern Sie die Aussageform 2) von S. 15 so, daß
   a) eine wahre Existenzaussage,
   b) eine wahre Allaussage entsteht!

3. Verwandeln Sie die Aussage $\overline{p \textit{ und } q}$ in eine Alternative! (↑ S. 20)

4. Zeigen Sie, daß
   $H_1: p \Rightarrow q$ und
   $H_2: \overline{p}$ *oder* $q$
   äquivalente Aussagen sind! Benutzen Sie beim Nachweis die Wahrheitswertetafeln für $H_1$ und $H_2$! (↑ S. 24)

5. Zeigen Sie, daß
   $H_1: p \Leftrightarrow q$ und
   $H_2: \overline{p} \Leftrightarrow \overline{q}$
   äquivalente Aussagen sind! (↑ S. 24)

6. a) Wählen Sie drei Punkte $A$, $B$, $C$ wie in Bild 1.2.a und verbinden Sie $C$ mit $B$, $B$ mit $A$! Konstruieren Sie Punkt $D$, indem Sie um $C$ mit $|\overline{AB}|$, d. i. die Länge der Strecke $\overline{AB}$, und um $A$ mit $|\overline{BC}|$ als Radien Kreise schlagen! Verbinden Sie $D$ mit $C$ und $A$!
   b) Konstruieren Sie in einer zweiten Zeichnung Punkt $D'$ mit Hilfe von Parallelverschiebung (Bild 1.2.b)!
   c) Beweisen Sie mit Hilfe kongruenter Dreiecke die Aussagen
   $$\left.\begin{array}{l}\overline{DC} \parallel \overline{AB}\\ \overline{DA} \parallel \overline{BC}\end{array}\right\} \text{Bild 1.2.a}$$
   und
   $$\left.\begin{array}{l}|\overline{D'C}| = |\overline{AB}|\\ |\overline{D'A}| = |\overline{BC}|\ !\end{array}\right\} \text{Bild 1.2.b}$$
   d) Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen
   $H_1$: *In dem konvexen Viereck ABCD sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang!*
   $H_2$: *In dem Viereck ABCD sind je zwei gegenüberliegende Seiten parallel!*
   (↑ S. 25)

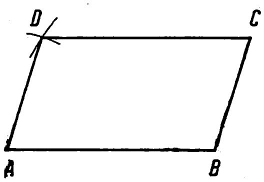



Bild 1.2.a

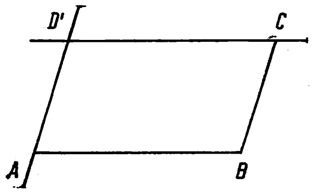



Bild 1.2.b

7. Bei der II. Berliner Mathematik-Olympiade 1962 wurde für die dritte Stufe der Klasse 8 folgende Knobelaufgabe gestellt:

Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verläßt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind jeweils zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald: 1. Ich habe den Ring nicht.
2. Fritz hat den Ring.
3. Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.

Fritz: 1. Ich habe den Ring nicht.
2. Ewald irrt sich, wenn er meint, daß ich den Ring habe.
3. Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: „Ich muß nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat.“ Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

# 2. MENGEN

## 2.1. Der Mengenbegriff

Wir lesen an einer Litfaßsäule die Ankündigung der Neueinstudierung einer Oper. In der für die Staatsoper vorgesehenen Spalte sind unter dem Titel *Othello* und einigen weiteren Angaben die Namen der Hauptdarsteller angeführt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Tomowa-Sintow | Springer | Ritzmann | Stryczek | |
| Büchner | Vogel | Reeh | Garduhn | Lunow |

Durch diese Zusammenfassung werden einige Sänger aus der Gesamtheit der Sänger der Staatsoper herausgehoben. Solch eine Zusammenfassung von Individuen wollen wir als **Menge** bezeichnen. An einer andern Stelle derselben Litfaßsäule lesen wir die an alle Eltern gerichtete Aufforderung, ihre zwischen dem 1. 6. 1964 und dem 31. 5. 1965 geborenen Kinder zur Schule anzumelden. Die dadurch erfaßten Kinder bilden wiederum eine Menge, die aber – im Gegensatz zum ersten Beispiel – nicht durch namentliche Aufzählung gegeben wird. Vielmehr werden die jetzt anzumeldenden Kinder durch das besondere Merkmal „geboren zwischen dem ... und dem ..." aus der Gesamtheit aller Kinder herausgehoben.
Im täglichen Leben, in der Wirtschaft, in der Technik, in der Wissenschaft, in der Verwaltung eines Gemeinwesens ist man oft genötigt, gewisse Objekte zu einer Gesamtheit zusammenzufassen. Man läßt sich dabei von Ähnlichkeiten, von gemeinsamen Eigenschaften leiten und vernachlässigt Merkmale, durch die sie sich voneinander unterscheiden. Es kann sich dabei um Menschen oder Tiere, um Städte, Völker der Gegenwart oder Vergangenheit, um irgendwelche Gegenstände, um Zahlen, Buchstaben, Wörter, um Ereignisse oder dergleichen handeln. Solche Objekte wollen wir ohne Rücksicht auf ihren speziellen Charakter als **Individuen**, die entsprechenden Zusammenfassungen als **Mengen** bezeichnen. Im ersten Beispiel waren die Individuen Sänger der Staatsoper, im zweiten Beispiel Kinder. *Es muß stets unmißverständlich feststehen, ob ein Individuum $m$ zu einer Menge $M$ gehören soll oder nicht.* Wenn $m$ zur Menge gehört, sagen wir, daß $m$ **Element** von $M$ ist und schreiben dafür $m \in M$, andernfalls $m \notin M$.
Im ersten Beispiel ist z. B. Garduhn Element der Menge der Hauptdarsteller von *Othello*, Wenglor aber nicht. Wenn die Menge durch namentliche Aufführung ihrer Elemente

oder – falls sie unendlich viele Elemente besitzt – durch Hinschreiben einiger Elemente charakterisiert wird, so unterscheiden wir die Menge von ihren Elementen durch eine geschweifte Klammer; z. B. schreiben wir die aus den Elementen $a, b, c$ bestehende Menge als $\{a, b, c\}$ oder die Menge $N$ der natürlichen Zahlen als $\{1, 2, 3, \ldots\}$ (↑ S. 203). Wie das zweite Beispiel von Seite 28 zeigt, ist es bisweilen nicht möglich oder nicht angebracht, eine Menge durch Aufzählung ihrer Elemente anzugeben. In diesem Fall braucht man ein zuverlässiges Kriterium dafür, ob ein Individuum Element der Menge ist. So sucht z. B. der Zoologe, der ein Tier aus fossilen Funden rekonstruiert hat, nach untrüglichen Kennzeichen dafür, ob dieses Tier zur Menge der Tiere einer bestimmten Tiergattung gehört; der Kartograph, der auf seiner Karte Städte nach ihrer Größe durch verschiedene Markierung bezeichnen will, trifft die Entscheidung, ob eine bestimmte Stadt in die Menge der Städte mit einer gewissen Markierung gehört, nach der Einwohnerzahl; ob ein bestimmtes Verhalten eines Verkehrsteilnehmers zur Menge der Verkehrsvergehen gehört, kann an Hand der Straßenverkehrsordnung entschieden werden. Dagegen bildet die Gesamtheit der „guten Schüler" einer Klasse zunächst keine Menge in unserem Sinne, denn es kann Meinungsverschiedenheiten darüber geben, ob ein bestimmter Schüler als „gut" zu bezeichnen ist oder nicht. Erst wenn klare Merkmale dafür festgesetzt werden, kann von der Menge der „guten Schüler" gesprochen werden.

---

**Zusammenfassung:**
**Mengen sind Zusammenfassungen von Individuen eines bestimmten Bereichs. Jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt. Ist $a$ ein beliebiges Individuum und $M$ eine gegebene Menge, so gilt entweder $a \in M$ oder $a \notin M$.**

---

In der Mathematik spielen Mengen eine große Rolle, und zwar sind hier die Elemente abstrakter Natur. Man betrachtet z. B. neben der oben erwähnten Menge $N$ der natürlichen Zahlen die Menge $R$ der rationalen Zahlen, die Menge der stetigen reellen Funktionen einer Variablen über der reellen Achse, die Menge der Bewegungen der Ebene, die eine gegebene Figur in sich überführen, die Menge der geometrischen, der arithmetischen Folgen, Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen.
Weitere Beispiele von Mengen:

$M_1$ : Menge der Einwohner von A-Stadt am 1. 1. 1971 um 12 Uhr.
$M_2$ : Menge der Personen des Telefonverzeichnisses von A-Stadt für 1971.
$M_3$ : Menge der Mitglieder einer bestimmten Sportvereinigung von A-Stadt.
$M_4$ : Das Alphabet als Menge von Buchstaben.
$M_5$ : Menge der Werktagsnamen einer Woche.
$M_6$ : Menge der Lehrer, die den Leser in seinem ersten Schuljahr unterrichtet haben.
$M_7$ : Menge der Schaltjahre zwischen 1961 und 1963.
$M_8$ : Menge der in einer Lottoziehung gezogenen Zahlen, z. B. $\{7, 20, 23, 54, 76\}$.
$M_9$ : Menge der Primzahlen.
$M_{10}$: Menge der geraden Primzahlen.
$M_{11}$: Menge der geraden ganzen positiven Zahlen.
$M_{12}$: Menge der Punkte in der durch diese Buchseite veranschaulichten Ebene.

$M_{13}$: Menge der Geraden einer Ebene.

$M_{14}$: Menge derjenigen Geraden von $M_{13}$, die durch einen bestimmten fest gegebenen Punkt $A$ dieser Ebene gehen.

$M_{15}$: Menge derjenigen Geraden von $M_{13}$, die zu einer bestimmten fest gegebenen Geraden parallel sind.

Überblicken wir die Menge dieser Beispiele, die sich beliebig vergrößern läßt, so stellen wir fest:

a) Der Gebrauch des Wortes „Menge“ in der Mathematik weicht in verschiedener Hinsicht von dem der Umgangssprache ab, in der es oft in einem unbestimmten Sinn gebraucht wird, etwa: „Eine Menge Menschen war auf der Straße.“ Damit will man sagen, daß viele Menschen dort waren, ohne an eine Zusammenfassung dieser Menschen zu einem Ganzen zu denken. Ferner wird im täglichen Leben und auch in der Physik und Chemie zuweilen von einer bestimmten „Menge Wasser“ oder einer „Gasmenge“ gesprochen. Eine Menge im mathematischen Sinn stellt dies aber erst dann dar, wenn etwa die Gesamtheit der in dem Behälter enthaltenen Moleküle gemeint ist. Natürlich bildet die Gesamtheit von mehreren mit Wasser gefüllten Gläsern auch eine Menge im mathematischen Sinn.
Dagegen würde man in der Umgangssprache bei den Mengen $M_7$ und $M_{10}$ nicht von „Mengen“ sprechen. Zwischen 1961 und 1963 gab es kein Schaltjahr, diese Menge hat keine Elemente, sie ist leer.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Menge ohne Elemente wird als **leere Menge** bezeichnet und als $\varnothing$ geschrieben.

Die Menge $M_{10}$ der geraden Primzahlen enthält nur ein einziges Element, die Zahl 2. Auch hier spricht der Mathematiker von einer Menge, geschrieben $\{2\}$. Bei der Bildung von Mengen brauchen wir also keine Voruntersuchung anzustellen, ob es Individuen der verlangten Art überhaupt gibt. Wir können z. B. die Menge der Schüler von Klasse 1, 2, 3, ... betrachten, die über zwei Meter groß sind.

b) In der Mathematik werden neben **endlichen** Mengen auch **unendliche** Mengen betrachtet, das sind Mengen, die unendlich viele Elemente haben. Um uns den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Mengen konkret vor Augen zu führen, wollen wir uns eine sehr schnell arbeitende Maschine vorstellen, die jedem Element einer bestimmten Menge $M$ einen Stempel aufdrückt. Wird die Maschine einmal mit dieser Arbeit fertig – sei es auch in einer Zeit, die dreimal so lange dauert, wie unsere Erde existiert, oder noch länger, so heißt $M$ endlich, andernfalls unendlich. $N$, $R$, $M_9$, $M_{11}$ bis $M_{15}$ sind unendliche Mengen.
Wir werden später eine Eigenschaft unendlicher Mengen kennenlernen, die ihre Unterscheidung von endlichen Mengen ohne Vorstellung einer Abstempelung oder eines ähnlichen Verfahrens ermöglicht.

c) Die Zugehörigkeit eines Individuums zu einer Menge kann stets durch eine bestimmte Eigenschaft charakterisiert werden. Die Menge $M_1$ ist der Eigenschaft eines Bürgers eines bestimmten Landes, am 1. 1. 1971 Einwohner von A-Stadt zu sein, zugeordnet, die durch den Personalausweis nachgewiesen werden kann; die Menge $M_3$ ist der

Eigenschaft zugeordnet, Mitglied dieser Sportvereinigung in A-Stadt zu sein, nachweisbar durch den Mitgliedsausweis; die Menge $M_9$ der Primzahlen ist die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind und die Eigenschaft haben, nur durch 1 und sich selbst teilbar zu sein; die Menge $M_{12}$ umfaßt alle Raumpunkte mit der Eigenschaft, auf der betreffenden Ebene zu liegen, feststellbar mit Hilfe eines idealen Lineals; auch die Menge $M_8$ kann durch eine Eigenschaft erklärt werden, nämlich durch die Eigenschaft einer natürlichen Zahl, mit einer der Zahlen 7, 20, 23, 54, 76 übereinzustimmen.
Zu jeder dieser Mengen gehört also eine ganz bestimmte Eigenschaft. Um die Beziehung Menge–Eigenschaft allgemeiner zu fassen, brauchen wir noch einen Begriff, der oben schon einmal anklang, als von den „Individuen eines bestimmten Bereichs" die Rede war: den Begriff des **Grundbereichs**. Das ist derjenige Bereich, dem wir bei Bildung einer Menge die Individuen entnehmen.
Greifen wir zur Verdeutlichung dieses Begriffs auf obenstehende Beispiele von Mengen zurück. Es gilt: Dienstag $\in M_5$, aber Sonntag $\notin M_5$; ein Kürbis gehört nicht zur Menge $M_1$ der Einwohner von A-Stadt; ein Element von $M_1$ wiederum gehört nicht zur Menge $N$, denn ein Mensch ist keine natürliche Zahl. Aus diesen Beispielen erkennt der Leser bereits, daß es zweckmäßig ist, die Elementbeziehung nur bei solchen Individuen zu prüfen, die *in Frage kommen*. Der Mathematiker entnimmt bei Bildung einer Menge die Elemente oft einem bereits verfügbar vorliegenden Individuenbereich, der dann als Grundbereich (oder Grundmenge) bezeichnet wird. Zum Beispiel kann als Grundbereich für die Mengen $M_1$, $M_2$, $M_3$ die Menge aller Einwohner von A-Stadt bezeichnet werden, als Grundmenge für $M_8$, $M_9$, $M_{10}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Für $M_8$ hätte übrigens auch die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 als Grundbereich ausgereicht.
Jetzt kann die Zugehörigkeit einer Menge zu einer bestimmten Eigenschaft allgemein formuliert werden.
Sei $\mathsf{H}$ eine Aussage über Individuen eines Grundbereichs. Ist $x$ solch ein Individuum, so soll $\mathsf{H}(x)$ (gelesen: „$\mathsf{H}$ von $x$") bedeuten, daß $x$ die durch $\mathsf{H}$ ausgedrückte Eigenschaft besitzt. Drückt z. B. $\mathsf{H}_P$ die Eigenschaft einer natürlichen Zahl aus, nur durch 1 und sich selbst teilbar und größer als 1 zu sein, so bedeutet $\mathsf{H}_P(7)$, daß die natürliche Zahl 7 nur durch 1 und sich selbst teilbar und größer als 1 ist. $\mathsf{H}_P(8)$ wäre dagegen falsch, denn 8 ist auch durch andere Zahlen teilbar. Alle natürlichen Zahlen, für die $\mathsf{H}_P$ gilt, bilden die Menge der Primzahlen. Darum wurde bei der Bezeichnung $\mathsf{H}_P$ für die erwähnte Teilbarkeitsaussage der Index P gewählt.
Zu jeder Aussageform $\mathsf{H}(a)$ gibt es eine Menge $M$ von Individuen $a$, für die $\mathsf{H}(a)$ gilt. Das bedeutet erstens, daß jedes Individuum, das die Eigenschaft $\mathsf{H}$ besitzt, zu $M$ gehört, und zweitens, daß jedes Element von $M$ die Eigenschaft $\mathsf{H}$ besitzt. Natürlich kann $M$ die leere Menge sein.
In der Mathematik schreibt man dafür kurz:

$$\mathsf{H}(a) \Leftrightarrow a \in M,$$

gelesen: „$\mathsf{H}(a)$ genau dann, wenn $a$ Element von $M$".
Die Aussagen $\mathsf{H}(a)$ und $a \in M$ sind äquivalent. Die Menge $M$ wird auch folgendermaßen geschrieben:

$$M = \{a;\ \mathsf{H}(a)\},$$

(W), zwischen den 1964 geborenen (A) und den 1965 geborenen (B), wir können nach den einzelnen Stadtbezirken Teilmengen bilden usw. Veranschaulichen wir uns die Aufteilung der Menge $M$ in $J$ und $W$ bzw. die in $A$ und $B$ durch ein Diagramm. Bei diesem werden die Teilmengen $J$ und $W$ durch vertikale, $A$ und $B$ durch horizontale Unterteilung des $M$ darstellenden Rechtecks veranschaulicht und durch Schraffierung bzw. Farbe unterschieden (Bild 2.1.).

ERKLÄRUNG:

▷ Allgemein heißt die Menge $A$ **Teilmenge** der Menge $M$, wenn jedes Element von $A$ in $M$ enthalten ist. Dafür schreiben wir: $A \subseteqq M$ (lies: $A$ Teilmenge von $M$). $M$ wird bisweilen auch Obermenge von $A$ genannt. Jede Menge ist eine Teilmenge ihrer Grundmenge.

Nach unserer Erklärung ist jede Menge Teilmenge von sich selbst. Damit weicht die mathematische Terminologie wieder von dem Sprachgebrauch des täglichen Lebens ab. Auch in der Wissenschaft galt es bis Mitte des vorigen Jahrhunderts als unwidersprochenes Axiom, daß ein Teil stets kleiner sein müsse als das Ganze. Später wird sich zeigen, wie fruchtbar die zunächst befremdende mathematische Begriffsbildung der Teilmenge ist.
Wir verschärfen den Begriff der Teilmenge:

ERKLÄRUNG:

▷ Die Menge $A$ heißt **echte Teilmenge** von der Menge $M$, wenn $A$ Teilmenge von $M$ ist und wenn es in $M$ mindestens ein Element gibt, das nicht Element von $A$ ist. Stimmt die Teilmenge mit der ganzen Menge überein, so heißt sie **unechte Teilmenge.**

Jede Menge hat aber außer sich selbst noch eine weitere Teilmenge, die leere Menge. Ist nämlich $M$ eine beliebige Menge, so folgt aus $m \in \emptyset$: $m \in M$, da der Vordersatz falsch ist. (Vgl. die Definition der Implikation Kap. 1, S. 20 f.). Ist die Menge $M$ selbst die leere Menge, so fallen diese beiden Mengen natürlich zusammen. Man beachte: Die leere Menge hat keine Elemente, sie hat aber eine (unechte) Teilmenge, nämlich sich selbst.
Auch bei anderen Mengen ist es wichtig, die Teilmengenbeziehung deutlich von der Elementbeziehung zu unterscheiden. Die erste Beziehung kann zwischen zwei Mengen, die zweite zwischen einem Individuum und einer Menge bestehen. (Später wird sich zeigen, daß die Elemente einer Menge selbst Mengen sein können.) Zum Beispiel sind die Zahlen 2, 4, 6 Elemente der Menge der geraden natürlichen Zahlen, die Menge $\{2, 4, 6\}$ ist Teilmenge von ihr. In den auf den Seiten 29 und 30 aufgeführten Mengen kamen verschiedentlich Mengen vor, die Teilmengen anderer dort genannter Mengen waren, z. B.

$$M_2 \subseteqq M_1, \; M_{10} \subseteqq M_9, \; M_{14} \subseteqq M_{13}.$$

## 2.3. Komplementärmengen

Kehren wir noch einmal zu dem ersten Beispiel zurück. Betrachten wir die Menge $M$ aller Sänger und Sängerinnen der Staatsoper als Grundmenge, so hebt sich sofort neben der Menge $A$ der Hauptdarsteller noch eine Menge $B$ als Teilmenge von $M$ heraus, nämlich die Menge derjenigen Sänger und Sängerinnen der Deutschen Staatsoper, die nicht zu den Darstellern der Oper *Othello* gehören. Diese Menge $B$ soll als Komplementärmenge von $A$ in $M$ bezeichnet werden. Man schreibt: $B = \bar{A}$. Folgendes Diagramm (Bild 2.2.), bei dem $M$ als ein Oval dargestellt wird, mag die drei Mengen $M$, $A$, $\bar{A}$ veranschaulichen.

ERKLÄRUNG:

▷ Ist allgemein $A$ Teilmenge von $M$, so ist die **Komplementärmenge** $\bar{A}$ von $A$ in $M$ diejenige Teilmenge von $M$, die alle nicht zu $A$ gehörenden Elemente umfaßt.

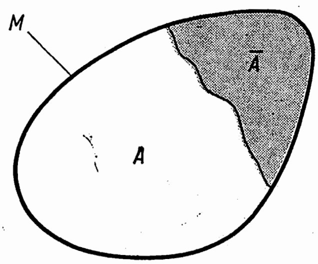


Bild 2.2.

Zur Unterscheidung der Komplementärmenge $\bar{A}$ von der Menge $A$ wurde nicht zufällig der Querstrich über $A$ benutzt: Er soll an die Verneinung $\overline{\mathsf{E}}$ einer Aussage $\mathsf{E}$ erinnern. Ist nämlich Menge $M$ durch die Eigenschaft $\mathsf{H}$ charakterisiert:

$$M = \{m;\ \mathsf{H}(m)\},$$

und die Teilmenge $A$ von $M$ durch die Eigenschaft $\mathsf{E}$:

$$A = \{a;\ \mathsf{H}(a) \text{ und } \mathsf{E}(a)\},$$

dann umfaßt $\bar{A}$ genau alle diejenigen Elemente von $M$, die die Eigenschaft $\mathsf{E}$ nicht besitzen; für sie ist $\mathsf{E}(m)$ eine falsche Aussage. Mithin ist

$$\bar{A} = \{a;\ \mathsf{H}(a) \text{ und } \overline{\mathsf{E}(a)}\}.$$

Ist speziell $A = M$, so ist $\bar{A} = \emptyset$, ist $A = \emptyset$, so ist $\bar{A} = M$. Stets ist die Komplementärmenge von $\bar{A}$ wieder $A$.

---

**Zusammenfassung:**
**Die Menge $A$ heißt Teilmenge einer Menge $M$, $A \subseteq M$, wenn jedes Element von $A$ auch Element von $M$ ist, d. h., wenn gilt**
**$u \in A \rightarrow u \in M$ (wenn $u \in A$, so $u \in M$).**
**Jede Menge enthält sich selbst und die leere Menge als Teilmengen. Es gibt nur eine leere Menge, geschrieben als $\emptyset$. Ist $A \subseteq M$, so existiert genau eine Teilmenge $\bar{A} \subseteq M$, die Komplementärmenge von $A$, der die nicht zu $A$ gehörenden Elemente von $M$ angehören. Ist also $m \in M$, so ist entweder $m \in A$ oder $m \in \bar{A}$.**

---

Aufgabe 2

## 2.4. Mengen im Mathematikunterricht

Der Leser, der uns bis hierher gefolgt ist, wird vielleicht fragen: „Wozu beschäftigen wir uns mit Mengen? Dies sind doch alles ganz selbstverständliche Dinge! Und warum sollen wir als Lehrer Mengen im Mathematikunterricht verwenden? Unsere Kinder haben doch bisher auch ohne Mengen Rechnen und Geometrie gelernt!" Darauf kann man erwidern: Jawohl, das ist möglich, es wurde ja sogar bis in unser Jahrhundert hinein höhere Mathematik ohne Mengenlehre betrieben. Mit Hilfe von Mengen lassen sich aber viele Begriffe klarer fassen. So wird z. B. heute in der Schule der Funktionsbegriff mit Hilfe von Mengen erklärt (↗ Kapitel 4). Auf weitere Beispiele aus dem Schulstoff wird noch später eingegangen. Außerdem lassen sich die logischen Beziehungen, die man im Mathematikunterricht benutzt, mit Hilfe von Mengen klarer einsehen, und das ist für den Unterricht wichtig.

Mancher Lehrer, der in den Klassen 5 und 6 Geometrie unterrichtet, hat z. B. die Erfahrung gemacht, daß folgende Aussagen Schwierigkeiten bereiten:

> Es gibt gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige Dreiecke. Ein Dreieck, das nicht gleichseitig ist, braucht nicht ungleichseitig zu sein, es kann gleichschenklig sein. Ein Dreieck, das nicht gleichschenklig ist, kann auch nicht gleichseitig sein.

Wenn hierbei Schwierigkeiten auftreten, sollte man zunächst untersuchen, ob der logische Sachverhalt klar ist. Er läßt sich sehr einfach durch die Teilmengenbezeichnung darstellen, etwa wie in Bild 2.3. Dabei stellen die als kleine Kreise gezeichneten Punkte

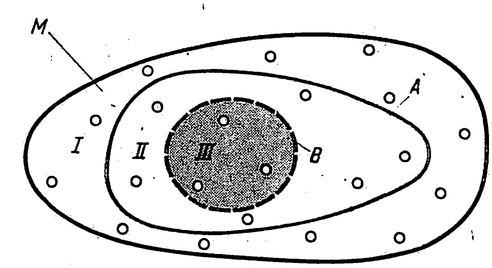



Bild 2.3.

Dreiecke dar. $M$, die Menge aller Dreiecke, wird als ein Oval wiedergegeben. Die Teilmenge $A$ von $M$ (alle gleichschenkligen Dreiecke) ist blau umrandet, deren Teilmenge $B$ (alle gleichseitigen Dreiecke) ist zusätzlich durch ein blaues Raster gekennzeichnet. Dadurch zerfällt $M$ in drei Gebiete, I, II und III. I ist das Gebiet von $M$, das außerhalb des blau umrandeten Ovals liegt, II das Gebiet innerhalb dieses Ovals, aber außerhalb der Teilmenge $B$, III fällt mit $B$ zusammen. An Hand des Bildes kann man klären, was es bedeutet, wenn ein Dreieck im Gebiet I (ungleichseitiges Dreieck), im Gebiet II (gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck), im Gebiet III (gleichseitiges Dreieck) liegt. Ist die Komplementärmenge eingeführt worden, so lassen sich die Gebiete I, II, III leicht charakterisieren: I ist die Komplementärmenge von $A$ in $M$, II die von $B$ in $A$. Die logischen Beziehungen werden auf diese Weise abstrakt und doch anschaulich erfaßt. Wenn der Sachverhalt geklärt ist, muß die korrekte

Sprechweise geübt werden. Das wird hier dadurch erleichert, daß Sprechen und Zeigen koordiniert werden können. In der Umgangssprache wird die Verneinung (gut – nicht gut) oft verwechselt mit dem Gegensatz (gut – schlecht). In der Mathematik brauchen wir aber genaue Unterscheidungen, z. B. bei der Verneinung einer Aussage. Ein „nicht gleichseitiges“ Dreieck braucht kein ungleichseitiges Dreieck zu sein. Das Mengendiagramm von Bild 2.3. zeigt dies deutlich.

Aufgabe 3

Entsprechende Betrachtungen wie bei den Dreiecken lassen sich überall dort durchführen, wo Ober- und Unterbegriffe auftreten, z. B. bei der Einteilung der konvexen Vierecke (Bild 2.4.). Dabei heißt eine Figur (ein Körper) konvex, wenn für zwei be-

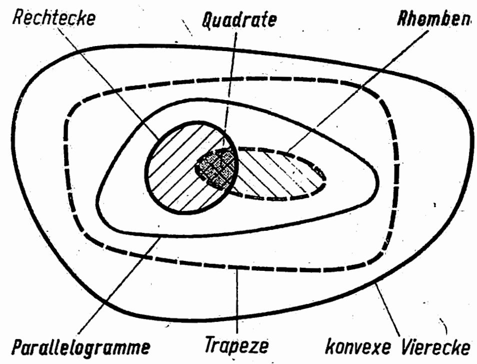



Bild 2.4.

liebige Punkte aus dem Inneren der Figur (des Körpers) ihre Verbindungsstrecke nur aus inneren Punkten der Figur (des Körpers) besteht. Die schwarz und blau schraffierte Menge der Quadrate ist Teilmenge der Menge der Rechtecke, aber auch der Menge der Rhomben. Die Menge der Rechtecke und die der Rhomben sind ihrerseits Teilmengen der Menge der Parallelogramme, diese wieder Teilmenge der Menge der Trapeze, diese schließlich Teilmenge der Vierecksmenge. Wieder ergibt sich die Möglichkeit zu logischen Übungen, indem man einen Punkt in irgendeinem der so entstandenen Gebiete angibt und nach dem speziellen Charakter des betreffenden Vierecks fragt.

Der Mengenbegriff ermöglicht auch eine genaue Unterscheidung zwischen „Kreis“ (Menge aller Punkte auf der Kreislinie), „offener Kreisfläche“ (Menge aller Punkte im Inneren des Kreises), „geschlossener Kreisfläche“ (Menge aller Punkte im Inneren und auf dem Rand), desgleichen bei anderen Figuren.

Entsprechend kann zwischen Begrenzungsfläche und Innerem eines Raumteils unterschieden werden.

Gute Dienste leisten Punktmengen in der Geometrie vor allem anstelle der früheren *geometrischen Örter*, die in der Regel an bestimmte Konstruktionsaufgaben gebunden waren. Ist z. B. ein Punkt $A$ gegeben und nach allen Punkten $P$ der Ebene (des Raumes) gefragt, die den Abstand 3 cm von $A$ haben, so pflegte man im traditionellen Unterricht zu sagen, der Kreis (die Kugel) um $A$ mit dem Radius 3 cm sei der 'geometrische Ort' für die Punkte $P$. Damit drückte man die Äquivalenz von zwei Aussagen aus:

$P$ liegt auf dem Kreis (der Kugeloberfläche) genau dann, wenn $|\overline{PA}| = 3$ cm ist.

Allgemein suchte man zu einer bestimmten Forderung $F$ an einen Punkt $P$ den zugehörigen geometrischen Ort $M_F$, so daß man sagen konnte:

$P$ liegt auf $M_F$ genau dann, wenn $P$ die Forderung $F$ erfüllt.

Dabei merkten die Schüler oft nicht, daß es sich hier um zwei äquivalente Teilaussagen handelt: „Wenn Punkt $P$ die Eigenschaft $F$ hat, so liegt er auf $M_F$" und „wenn Punkt $P$ auf $M_F$ liegt, so hat er die Eigenschaft $F$". Oft wurde einer der beiden Sätze nicht beachtet. Unter Benutzung der oben eingeführten Bezeichnung für Mengen kann man kurz, vollständig und unmißverständlich formulieren: $M_F = \{P; F(P)\}$, gelesen: „$M_F$ ist die Menge aller Punkte $P$ mit der Eigenschaft $F$".

Wenn die Schüler den Mengenbegriff richtig erfaßt haben, ist ihnen ohne weiteres klar, daß $M_F$ **alle und nur die Punkte** mit der Eigenschaft $F$ umfaßt. Dabei kann die Grundmenge die Menge der Punkte der Ebene oder des Raumes sein. Je nachdem ist $M_F$ die Kreislinie oder die Kugeloberfläche. Auf diese Weise kann der für die Schüler befremdliche Terminus *geometrischer Ort* oder der früher benutzte Ausdruck Bestimmungslinie vermieden werden. Der Begriff der Punktmenge hat sich im Geometrieunterricht der höheren Klassen der Oberschule bereits durchgesetzt.

Wenn wir die räumliche Anschauung entwickeln wollen, empfiehlt es sich nämlich, frühzeitig räumliche und ebene Betrachtungen nebeneinander zu betreiben; dann kommen wir jedoch mit der „Bestimmungslinie" nicht weit. Der Begriff der Punktmenge ist wesentlich allgemeiner. Außerdem trägt die Anwendung des Mengenbegriffs in der Geometrie zu seiner Festigung bei. Für das Arbeiten mit Punktmengen im Unterricht ist die oben erwähnte knappe Formulierung $M_F = \{P; F(P)\}$ nicht unbedingt erforderlich. Wichtig ist vor allem, daß die Schüler beim Aufsuchen der Punktmenge zunächst mehrere Punkte mit der verlangten Eigenschaft – etwa nach Augenmaß – finden, die Form von $M_F$ vermuten und dann Punkte, die nicht zu $M_F$ gehören, auf die verlangte Eigenschaft hin überprüfen.

Aufgaben 4 und 5

Auch der Begriff der Teilmenge (↗ S. 34) kann zur Verdeutlichung bei Beweisen herangezogen werden. Soll z. B. der Satz bewiesen werden:

Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang,

so empfiehlt es sich, den Satz zunächst in die „wenn-so"-Form zu bringen, durch die Voraussetzung und Behauptung ersichtlich werden. Dazu suchen wir einen Oberbegriff zum Begriff „Parallelogramm", z. B. „konvexes Viereck". Die Menge $P$ aller Parallelogramme bildet eine Teilmenge der Grundmenge $V$ aller konvexen Vierecke. Wir formulieren den Satz jetzt folgendermaßen:

Wenn das konvexe Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist, so sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang.

*Voraussetzung:* $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

*Behauptung:* $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$.

Alle konvexen Vierecke mit der Eigenschaft, daß in ihnen je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, bilden eine Teilmenge $S$ von $V$. Unser Satz sagt dann aus: $P \subseteqq S$. Übrigens gilt auch $S \subseteqq P$, also $S = P$. Der Satz ist nämlich umkehrbar:

Wenn das konvexe Viereck $ABCD$ je zwei gleich lange gegenüberliegende Seiten hat, so ist es ein Parallelogramm.

Die beiden Aussagen: „Das konvexe Viereck $ABCD$ ist ein Element von $P$" und „das konvexe Viereck $ABCD$ ist Element von $S$" sind äquivalent (↗ Kapitel 1, Aufgabe 5). Wenn das Viereck nicht konvex ist, so ist der Satz nicht allgemeingültig, wie Bild 2.5.

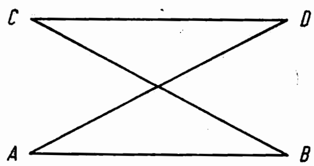


Bild 2.5.

zeigt. Hier ist das Viereck zwar Element von $S$, wenn man $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ als gegenüberliegende Seiten erklärt, aber das Viereck ist kein Parallelogramm.
Führen wir einen allgemeinen Beweis, so haben wir stets zu zeigen, daß die Menge $V$ der mathematischen Gegenstände, für die die Voraussetzung zutrifft, eine Teilmenge der Menge $B$ derjenigen Gegenstände ist, die der Behauptung genügen.
Ein leichtfertiges Schließen kann mit Hilfe von Mengenbildung oft leicht entlarvt werden. Als Beispiel diene die Feststellung: „Es gibt unter den Hunden, die viel bellen ($M_1$), solche, die nicht beißen ($M_2$)" (also $M_2 \subset M_1$) in Verbindung mit dem „Schluß": „Hunde, die viel bellen, beißen nicht" ($M_1 \subset M_2$). Diese Teilmengenbeziehung kann nicht aus der ersten geschlossen werden. Der zweite Satz kann sich nicht auf den ersten stützen. Solche und ähnliche Fehlschlüsse treten häufiger auf, als man denkt.
Prüfen wir folgenden Schluß:

Satz a): Es gibt Parallelogramme, die keine Rechtecke sind.

Satz b): Es gibt Parallelogramme, bei denen die Diagonalen nicht senkrecht aufeinanderstehen.

Satz c): Also stehen im Rechteck die Diagonalen aufeinander senkrecht.
Die Sätze a) und b) sind richtig, der Satz c) ist falsch. Der Irrtum bei dem Schluß wird bei der Betrachtung der entsprechenden Mengen deutlich (Bild 2.6.). Seien wieder $P$ die Menge aller Parallelogramme, $R$ die Menge aller Rechtecke, $D$ die Menge aller Parallelogramme, bei denen die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen (das sind Rhomben). Es gilt: $R \subseteqq P$, $D \subseteqq P$. Dann sagt Satz a) aus, daß die Komplementärmenge $\overline{R}$ von $R$ in $P$ nicht leer ist; Satz b) sagt aus, daß die Komplementärmenge $\overline{D}$

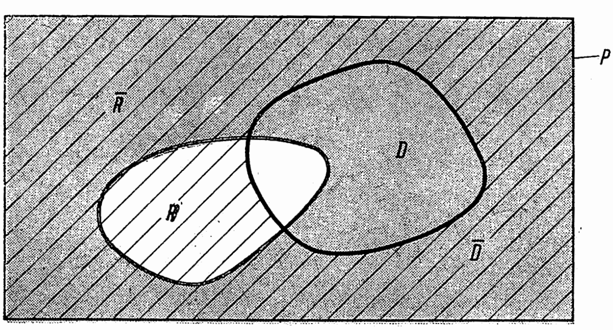


Bild 2.6.

von $D$ in $P$ gleichfalls nicht leer ist und Satz c) sagt aus: $R \subseteqq D$. Das Bild 2.6., in dem $\overline{D}$ schraffiert und $\overline{R}$ blau gerastert ist, macht deutlich: $R$ und $D$ haben zwar einen nichtleeren Durchschnitt (die Menge der Quadrate), aber es gilt nicht $R \subseteqq D$, das heißt, es gibt Rechtecke, bei denen die Diagonalen nicht senkrecht aufeinander stehen. Satz c) kann nicht aus a) und b) geschlossen werden. Noch überzeugendere Beispiele für die Brauchbarkeit des Mengenbegriffs liefert die Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen, die im Kapitel 7 behandelt wird.
Wenn weitere Begriffe aus der Mengenlehre eingeführt sind, wird sich erneut zeigen, wie brauchbar der Mengenbegriff im Mathematikunterricht bereits von der ersten Klasse an ist. In der Tat wird er jetzt in unserem Mathematikunterricht von Anfang an verwendet. Eine kurze systematische Einführung in die ersten Grundlagen der Mengenlehre – vor allem die Element- und die Teilmengenbeziehung – wird im Lehrplan für Klasse 6[1] gefordert.

## 2.5. Operationen mit Mengen

### 2.5.1. *Durchschnitt von Mengen*

Wir suchen in unserer Schule zwecks Unterstützung eines bevorstehenden Ferienlagers Schüler, die einen Lehrgang „Erste Hilfe bei Unfällen" absolviert haben und die außerdem bereits bei einem Ferienlager im Sanitätsdienst geholfen haben. Nennen wir die erste Eigenschaft eines Schülers $\mathsf{H}_1$, die zweite $\mathsf{H}_2$ und die zugehörigen Mengen $M_1$ bzw. $M_2$. Es ist also $M_1 = \{m;\ \mathsf{H}_1(m)\}$, $M_2 = \{m;\ \mathsf{H}_2(m)\}$. Wir suchen diejenige Menge $D$ von Schülern, die zugleich die Eigenschaften $\mathsf{H}_1$ und $\mathsf{H}_2$ besitzen. $D = \{m;\ \mathsf{H}_1(m) \text{ und } \mathsf{H}_2(m)\}$. Die Menge $D$ ist Teilmenge sowohl von $M_1$ als auch von $M_2$, kann daher auch geschrieben werden als $D = \{m;\ m \in M_1 \text{ und } m \in M_2\}$. Die zu $M_1$ gehörenden Schüler seien $a, b, c, d$, die zu $M_2$ gehörenden $a, d, h, k, j$. Dann gehören die Schüler $a$ und $d$ zu $D$ und sonst keine. Diese Menge $D = \{a, d\}$ wird als Durchschnittsmenge, kurz auch **Durchschnitt** der Mengen $M_1$ und $M_2$, bezeichnet.
Allgemein versteht man unter dem Durchschnitt zweier Mengen $M_1$, $M_2$ die Menge ihrer gemeinsamen Elemente, die natürlich unter Umständen die leere Menge ist. Man schreibt sie

$$D = M_1 \cap M_2,$$

gelesen: „$D$ ist der Durchschnitt der Mengen $M_1$ und $M_2$."
Dafür kann auch geschrieben werden:

$$m \in M_1 \cap M_2 \Leftrightarrow m \in M_1 \text{ und } m \in M_2.$$

Das heißt: $m$ ist Element von $D$ genau dann, wenn sowohl $m \in M_1$ als auch $m \in M_2$ gilt. Der Durchschnitt von $M_1$ und $M_2$ ist also gemeinsame Teilmenge von $M_1$ und $M_2$.
Wir veranschaulichen $D$, indem wir $M_1$ und $M_2$ als Ovale darstellen, die wir zum Schnitt

[1] Lehrplan für Mathematik, Klassen 5 bis 8. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1971, S. 31.

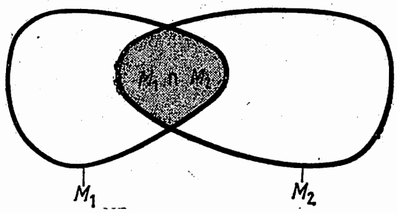



Bild 2.7.

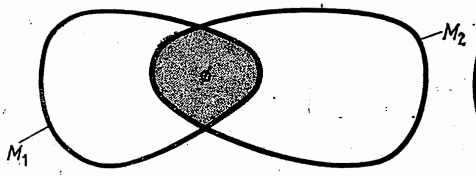



Bild 2.8.a

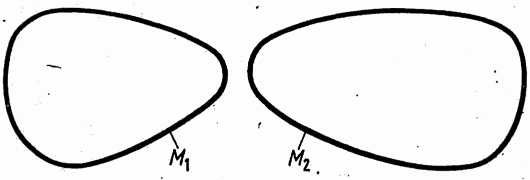



Bild 2.8.b

bringen (Bild 2.7.). Ist der Durchschnitt leer, so schreiben wir das Zeichen für die leere Menge in den Durchschnitt (Bild 2.8.a). Es kann jedoch auch die Darstellung 2.8.b verwendet werden. Der Name *Durchschnitt* erinnert an das Schneiden der beiden Ovale. An die Bedeutung des Wortes Durchschnitt als einer Mittelbildung darf man dabei nicht denken.

Ist der Durchschnitt $D$ von $M_1$ und $M_2$ die leere Menge, so heißen $M_1$ und $M_2$ elementefremd. Auch in diesem Fall ist $D$ Teilmenge von $M_1$ und $M_2$, da ja die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist (↑ S. 34).

Es wurden jetzt mehrfach Mengen als Ovale und ihre Elemente als Punkte dargestellt. Dabei spielt die Natur der Elemente keine Rolle. Insofern kann diese Darstellung als abstrakt bezeichnet werden. Andererseits bringt sie aber die Elementbeziehung recht anschaulich zum Ausdruck. Diese Mengendarstellung, die auch als **Venndiagramm** bezeichnet wird, wird daher im folgenden häufig benutzt werden. Um den Leser an ihre Verwendung zu gewöhnen, sei folgendes Beispiel durchgeführt:

Die Grundmenge $M$ sei die Menge aller Punkte einer Geraden. Dazu gehören die Punkte $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$. Es sei $M_1$ die auf dem Strahl $A_1B_1$, $M_2$ die auf dem Strahl $A_2B_2$ liegende Punktmenge. Die Anfangspunkte $A_1$ bzw. $A_2$ gehören mit zur Menge. Die Mengen $M_1$,

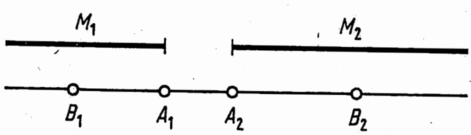



Bild 2.9.a

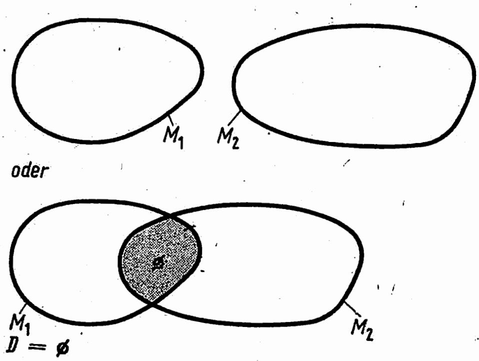



Bild 2.9.b

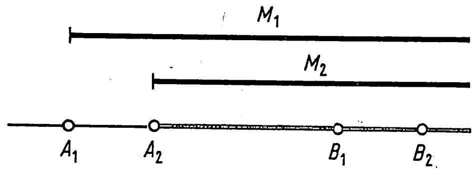


Bild 2.10.a

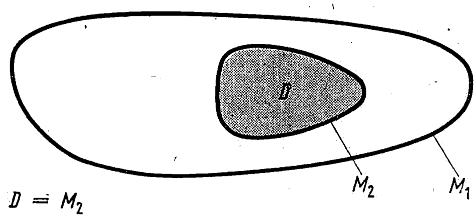


Bild 2.10.b

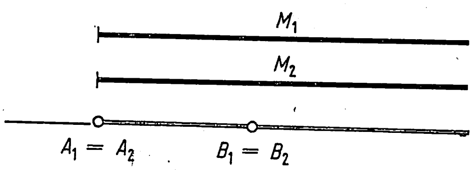


Bild 2.11.a

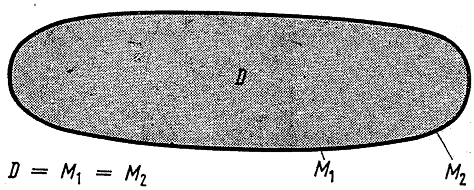


Bild 2.11.b

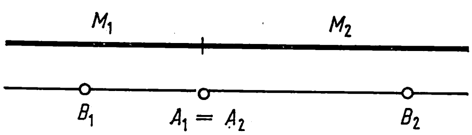


Bild 2.12.a

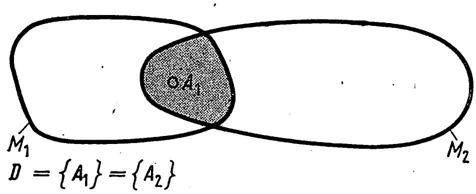


Bild 2.12.b

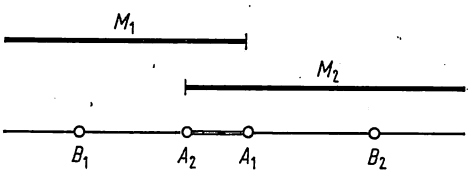


Bild 2.13.a

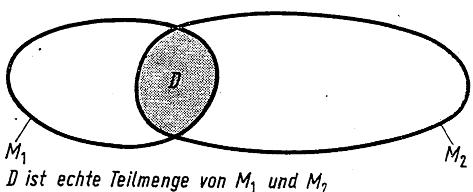


Bild 2.13.b

$M_2$, $D = M_1 \cap M_2$ sollen bei einigen Lagen der Punkte als Venndiagramme dargestellt werden (Bild 2.9. bis 2.13.).
Weitere Beispiele, bei denen $M$ die Grundmenge bedeutet:

$M$: Menge der Punkte einer Ebene;
$M_1$: Menge der Punkte einer in dieser Ebene liegenden Geraden $g_1$;
$M_2$: Menge der Punkte einer Geraden $g_2$ dieser Ebene.
$D$ besteht, falls die beiden Geraden einander schneiden, aus einem einzigen Element, dem Schnittpunkt, anderenfalls ist $D$ die leere Menge.

$M$: Menge aller Figuren einer Ebene;
$M_1$: Menge aller Rechtecke dieser Ebene;
$M_2$: Menge aller regelmäßigen Vielecke dieser Ebene.
$D$ besteht dann aus allen Quadraten dieser Ebene.

$M$: Menge aller Figuren einer Ebene;
$M_1$: Menge aller regelmäßigen Vielecke dieser Ebene;
$M_2$: Menge aller Rhomben (d. h. aller Parallelogramme mit vier gleich langen Seiten) dieser Ebene;
$D$ ist wieder die Menge aller Quadrate dieser Ebene.

$M$: Menge aller natürlichen Zahlen;
$M_1$: Menge der Teiler von 10 (d. h., $M_1 = \{1, 2, 5, 10\}$),
$M_2$: Menge der Teiler von 16 (d. h., $M_2 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$);
$D$ ist die Menge der gemeinsamen Teiler (d. h., $D = \{1, 2\}$).

Die Durchschnittsbildung kann auf mehr als zwei Mengen ausgedehnt werden, indem man erst zwei beliebige der Mengen schneidet, die Durchschnittsmenge mit einer weiteren Menge und so fort. In den folgenden Diagrammen (Bild 2.14.a und b) wird dies für drei Mengen dargestellt:

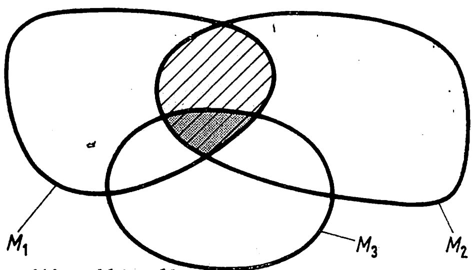


Bild 2.14.a

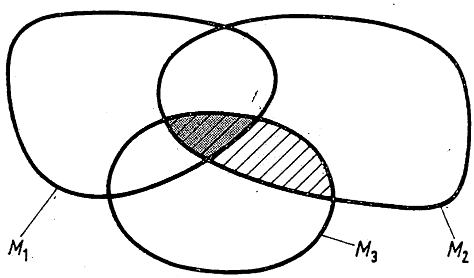


Bild 2.14.b

Daß allgemein $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$ gilt, bedarf eines Beweises. Dieser ergibt sich aus der Definition des Durchschnitts. Der Leser findet einen ähnlichen, aber etwas schwierigeren Beweis, der als Muster dienen mag, auf S. 48 f.

**Zusammenfassung:**
**Die Durchschnittsmenge $M_1 \cap M_2$ von $M_1$ und $M_2$ enthält alle gemeinsamen Elemente von $M_1$ und $M_2$ und keine weiteren.**
**$m \in D \Leftrightarrow m \in M_1$ und $m \in M_2$.**
**$D = M_1 \cap M_2 = \{m; m \in M_1$ und $m \in M_2\}$.**
**Stets ist $D$ gemeinsame Teilmenge von $M_1$ und $M_2$. Sind keine gemeinsamen Elemente vorhanden, so ist $D = \varnothing$. $M_1$ und $M_2$ heißen dann elementefremd.**

Aufgaben 6 bis 8

## 2.5.2. *Vereinigungsmenge*

Wir betrachten wieder folgende beiden Schülermengen $M_1$ und $M_2$:
$M_1$ enthalte diejenigen Schüler einer Schule, die einen Lehrgang „Erste Hilfe" absolviert haben (Eigenschaft $\mathsf{H}_1$), $M_2$ diejenigen, die in einem Ferienlager irgendwann einmal Sanitätsdienst geleistet haben (Eigenschaft $\mathsf{H}_2$). Es seien wieder $M_1 = \{a, b, c, d\}$ und $M_2 = \{a, d, h, k, j\}$. Wir stellen jetzt nur die Forderung, daß ein Schüler die Eigenschaft $\mathsf{H}_1$ oder $\mathsf{H}_2$ besitzt. Die Menge $V$ dieser Schüler vereinigt also alle Schüler, die mindestens einer der beiden Mengen $M_1$, $M_2$ angehören. Sie besteht aus den Schülern $a, b, c, d, h, k, j$.
Diese Menge $V = \{a, b, c, d, h, k, j\}$ wird als **Vereinigungsmenge** der Mengen $M_1$, $M_2$ bezeichnet. Sie enthält $M_1$ und $M_2$ als Teilmengen. Entsprechend wird für zwei beliebige Mengen $M_1$ und $M_2$, die Teilmengen der gleichen Grundmenge $M$ sind, die Vereinigungsmenge $V$ erklärt, die sämtliche Elemente von $M_1$ und $M_2$ enthält. Wir führen für $V$ folgende symbolische Schreibweise ein:

$V = M_1 \cup M_2$ (gelesen: „$V$ gleich $M_1$ vereinigt mit $M_2$").

Dafür kann auch geschrieben werden:

$$V = \{m;\ m \in M_1 \text{ oder } m \in M_2\} \text{ oder auch } V = \{m;\ \mathsf{H}_1(m) \text{ oder } \mathsf{H}_2(m)\}.$$

Es sei daran erinnert, daß dieses *oder* nicht die ausschließende Bedeutung des *entweder-oder* hat (vgl. Kapitel 1); vielmehr kann ein Schüler sehr wohl beide Eigenschaften zugleich besitzen, wie die Schüler $a$ und $d$.
Wir stellen die Vereinigungsmenge zweier durch je ein Oval angegebener Mengen $M_1$ und $M_2$ durch die blaue Fläche (Bild 2.15.) dar.

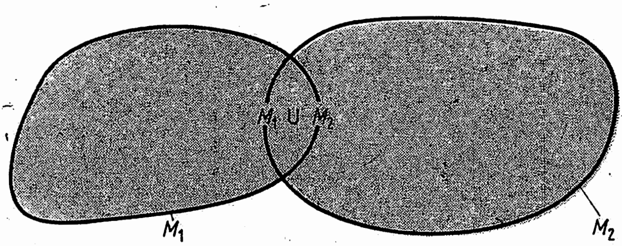


Bild 2.15.

Im ersten Schuljahr wird die Addition von zwei natürlichen Zahlen durch Vereinigung von zwei elementefremden Mengen (Kugeln, Strichen usw.) eingeführt. Sie kann durch Aneinandersetzen der beiden Mengen durchgeführt werden.
Im Lehrbuch für Klasse 7[2] wird **der absolute Betrag** von rationalen Zahlen eingeführt. Unter $|x|$ ist die positive der beiden Zahlen $x$ und $-x$ zu verstehen, und es ist $|0| = 0$. Zum Beispiel $|+3| = +3$, $|-3| = +3$.
Wir stellen uns die Aufgabe, die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| > 3$ für den absoluten Betrag von $x$ im Bereich der rationalen Zahlen zu suchen.

---

2 Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 38.

Die Ungleichung lösen bedeutet, alle Zahlen $x$ zu suchen, für die $x > +3$ (I) oder $x < -3$ (II) ist. Die Lösungsmengen $L_1$ und $L_2$ sind an der Zahlengeraden blau dargestellt (Bild 2.16.). Dabei bedeutet die durch den Bogen $\supset$ bzw. $\subset$ gekennzeichnete

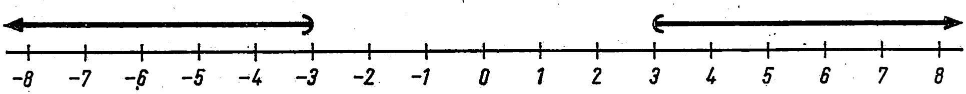



Bild 2.16.

Begrenzung des Strahls, daß der betreffende Punkt nicht zur Menge zu zählen ist. Die Lösungsmenge $L$ der Ungleichung $|x| > 3$ ist die Vereinigungsmenge der Mengen $L_1$ und $L_2$.

* Folgendes etwas schwierigere Beispiel für die Darstellung einer Vereinigungsmenge als Venndiagramm rückt den abstrakten Charakter dieser Darstellung in den Vordergrund. Wir gehen von einer Grundmenge $G$ aus, die aus allen Figuren der Zeichenebene besteht. Dazu gehören alle Punkte, Geraden, Kreise, Vielecke usw. der Ebene. Sie werden unterschiedslos als Individuen angesehen, d. h., ein Kreis, eine Gerade oder ein Vieleck werden nicht als Punktmengen, sondern als selbständige Gebilde betrachtet. Eine Gerade $g$ der Ebene teilt diese in zwei Halbebenen. Die in einer dieser beiden Halbebenen liegende Punktmenge sei $M_1$. Die Punkte von $g$ sollen nicht mit zu $M_1$ gezählt werden. Unter $M_2$ soll die Menge aller Punkte einer Geraden $h$ verstanden werden (Bild 2.17.a). Es sollen $G$ und $M_1 \cup M_2$ als Venndiagramm gezeichnet werden. Dann sind die in der Abbildung angegebenen Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, die Kreislinie $k$ und die Geraden $g$ und $h$ in das Venndiagramm einzutragen (Bild 2.17. b).

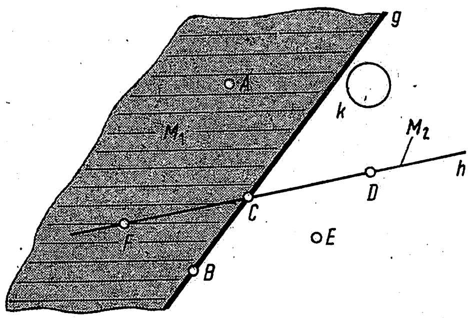



Bild 2.17.a

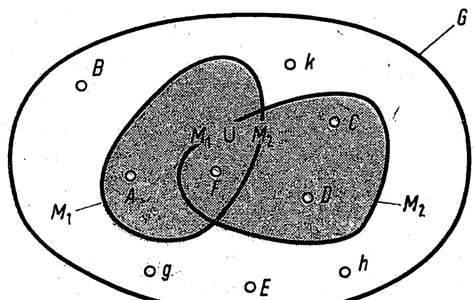



Bild 2.17.b

In dem Venndiagramm fällt zunächst auf, daß die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, die Kreislinie $k$ und die Geraden $g$ und $h$ in gleicher Weise als Punkte dargestellt werden. Alle diese Gebilde sind ja unterschiedslos Individuen aus $G$, mußten also im Venndiagramm als Punkte angegeben werden. Die Punkte $A$ und $F$ liegen in $M_1$, die Punkte $F$, $C$, $D$ in $M_2$. Alle diese Punkte gehören mithin zu $M_1 \cup M_2$. Punkt $E$ gehört weder zu $M_1$ noch zu $M_2$. Dasselbe gilt für die Elemente $g$ und $h$ von $G$, denn als Individuum aus $G$ gehört $h$ weder zu der Punktmenge $M_1$ noch zu der Punktmenge $M_2$. Wir müssen nämlich zwischen der auf $h$ liegenden Punktmenge, der unter anderen die Punkte $F$, $C$, $D$ angehören, und der Geraden $h$ als Element von $G$ unterscheiden. Ebenso muß zwischen $g$ und der auf $g$ liegenden Punktmenge unterschieden werden. Diese Punktmenge, zu der die Punkte $B$ und $C$ gehören, tritt in dem Venndiagramm nicht in Erscheinung.

Im ersten Schuljahr wird die Addition mit Überschreiten eines Zehners, z. B. $8 + 5$ in der Regel folgendermaßen eingeführt:

$8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3$. Hierbei liegt die Vereinigung von drei Mengen vor, die in verschiedener Weise zusammengefaßt werden.

Unter der Vereinigungsmenge von drei oder mehr Mengen ist die Menge aller Elemente der Grundmenge zu verstehen, die mindestens einer der zu vereinigenden Mengen angehören. Wir können sie sukzessive durch Vereinigung zweier Mengen bilden, indem wir erst $M_1$ und $M_2$ und dann die so entstandene Menge mit $M_3$ vereinigen und so fort, oder wir fangen mit zwei beliebig anderen dieser Mengen an. Das Ergebnis ist das gleiche. In Bild 2.18.a und b sind zwei verschiedene Wege bei der Vereinigung von drei Mengen durch zwei Diagramme veranschaulicht.

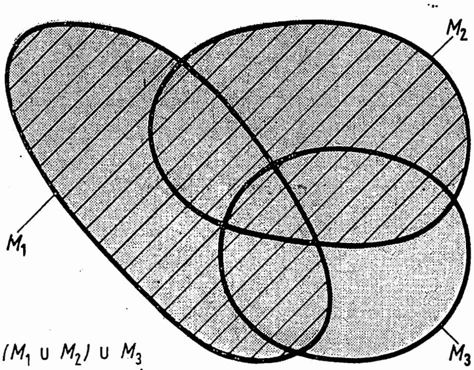



Bild 2.18.a

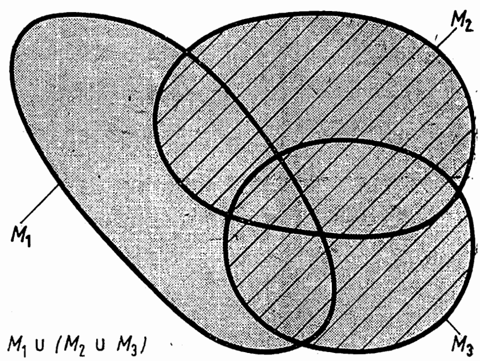



Bild 2.18.b

Wir stellen fest: Die Reihenfolge der Vereinigungen spielt keine Rolle. Den Beweis für drei Mengen findet der Leser auf S. 48 f.

Stellen wir Durchschnitts- und Vereinigungsmenge einander gegenüber, so finden wir: $M_1 \subseteqq V$, $M_2 \subseteqq V$; dagegen $D \subseteqq M_1$, $D \subseteqq M_2$. Wir können daraus eine Kette von Teilmengen herstellen: $D \subseteqq M_1 \subseteqq V$, oder, anders geschrieben,

$$(M_1 \cap M_2) \subseteqq M_1 \subseteqq (M_1 \cup M_2), \quad (M_1 \cap M_2) \subseteqq M_2 \subseteqq (M_1 \cup M_2).$$

**Zusammenfassung:**

**Die Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_2$ von $M_1$ und $M_2$ enthält alle Individuen, die zu mindestens einer der Mengen $M_1$, $M_2$ gehören und keine weiteren. D. h.,**

**$m \in V \Leftrightarrow m \in M_1$ oder $m \in M_2$.**

**$V = M_1 \cup M_2 = \{m; m \in M_1$ oder $m \in M_2\}$.**

**$M_1$ und $M_2$ sind Teilmengen von $V$.**

Aufgaben 9 bis 16

## 2.5.3. *Differenzmenge*

Wir greifen noch einmal auf die Menge $M$ der zur Schule anzumeldenden Kinder zurück. $W$ sei wieder die Teilmenge der Mädchen, $Z$ die Menge der aus gesundheitlichen oder anderen Gründen vorläufig zurückgestellten Kinder. Wir wollen die Menge $C$ derjenigen Mädchen betrachten, die nicht zurückgestellt wurden, also eingeschult werden. Diese Menge $C$ nennen wir die **Differenzmenge** aus $W$ und $Z$ und schreiben sie

$$C = W \setminus Z,$$

gelesen: „$C$ gleich $W$ minus $Z$".
Allgemein versteht man unter der Differenzmenge $A \setminus B$ die Menge derjenigen Elemente von $A$, die nicht zu $B$ gehören. Die Differenzmenge $C = A \setminus B$ kann folgendermaßen geschrieben werden.

$$A \setminus B = \{m;\ m \in A \text{ und } m \notin B\}.$$

Die Komplementärmenge einer Menge $A$ in der Grundmenge $M$ ist dann

$$\bar{A} = M \setminus A.$$

Die Differenzmenge $A \setminus B$ ist stets eine Teilmenge von $A$. Ist $B = \emptyset$, so ist $A \setminus B = A$; ist $B = A$, so ist $A \setminus B = \emptyset$; ist $B = \bar{A}$, so ist $A \setminus B = A$. Wir stellen den letzten und einige andere Fälle durch Diagramme dar. Im Bild 2.19.a bis d ist die Menge $M$ schwarz, $A$ blau umrandet. $B = \bar{A}$ ist schraffiert und $A \setminus B$ blau gerastert.

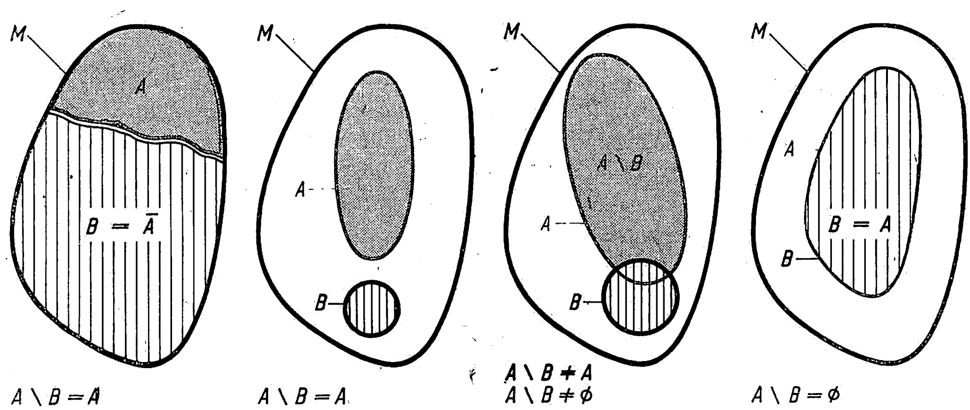



Bild 2.19.a–d

> **Zusammenfassung:**
> **Unter der Differenzmenge $C = A \setminus B$ verstehen wir die Menge aller Elemente von $A$, die nicht zu $B$ gehören.**
> **$C = \{m;\ m \in A \text{ und } m \notin B\}$.**

Aufgaben 17 bis 22

## 2.6. Etwas aus der Mengenalgebra

Wir haben u. a. zwei Operationen kennengelernt, durch die je zwei Mengen eine weitere Menge zugeordnet wird, die in Spezialfällen mit einer der Ausgangsmengen zusammenfallen kann: zum Beispiel die Vereinigung und den Durchschnitt. Wir fühlen uns dadurch an das Rechnen mit Zahlen erinnert. Auch für Zahlen eines beliebigen Zahlenbereichs, z. B. für rationale Zahlen, gibt es zwei Operationen, durch die je zwei rationalen Zahlen wieder eine rationale Zahl zugeordnet wird, die in Spezialfällen mit einer der Ausgangszahlen zusammenfallen kann, die Addition und die Multiplikation. Zwischen diesen beiden Rechenoperationen einerseits und den Mengenoperationen andererseits bestehen in der Tat einige Parallelen, die in folgender Übersicht zusammengestellt wurden:

| Zahlen | | Mengen |
|---|---|---|
| 1. Für alle $a$, $b$ gilt | | Für alle $M_1$, $M_2$ gilt |
| $a + b = b + a$, | | $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$, |
| $a \cdot b = b \cdot a$. | | $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$. |
| | (Kommutativgesetze) | |
| 2. Für alle $a$, $b$, $c$ gilt | | Für alle $M_1$, $M_2$, $M_3$ gilt |
| $a + (b + c) = (a + b) + c$, | | $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, |
| $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. | | $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$. |
| | (Assoziativgesetze) | |
| 3. Für alle $a$, $b$, $c$ gilt | | |
| $a(b + c) = ab + ac$. | (Distributivgesetz) | |

Das erste Gesetz über die Vertauschbarkeit von $M_1$ mit $M_2$ liegt auf der Hand. Das zweite Gesetz wurde auch bereits erwähnt und durch ein Diagramm erläutert. Wir wollen es jetzt für Vereinigungsmengen beweisen. Der Leser, dem es mehr auf einen Überblick ankommt, mag die nun folgenden Beweise überschlagen oder durch veranschaulichende Diagramme ersetzen.

Der Einfachheit halber nennen wir die links vom Gleichheitszeichen stehende Menge $A$, die rechts stehende $B$, also $A = M_1 \cup (M_2 \cup M_3)$, $B = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$. Wir haben nach der Erklärung der Gleichheit von Mengen (↑ S. 32) zu zeigen, daß ein beliebiges Element $a$ von $A$ zu $B$ gehört und umgekehrt ein beliebiges Element $b$ von $B$ auch zu $A$ gehört.

| 1. Teil | 2. Teil |
|---|---|
| *Voraussetzung:* $a \in A$ | *Voraussetzung:* $a \in B$ |
| *Behauptung:* $a \in B$ | *Behauptung:* $a \in A$ |

*Beweis des ersten Teils:*
Wir gehen auf die Definition der Vereinigungsmenge zurück. Die Voraussetzung $a \in A$ bedeutet: $a \in M_1$ (1) oder $a \in M_2 \cup M_3$ (2). Nach dem im Kapitel 1 erklärten Sprachgebrauch von „oder" muß mindestens einer der Fälle (1), (2) eintreten. Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Wenn (1), also $a \in M_1$, gilt, so folgt daraus, daß $a$ auch Element von $M_1 \cup M_2$ sein muß, da $M_1$ eine Teilmenge von $M_1 \cup M_2$ ist. Aus dem entsprechenden Grund gilt dann $a \in B$. In diesem Fall ist die Behauptung bewiesen.

Tritt (1) nicht ein, so muß (2), also $a \in M_2 \cup M_3$, bestehen. Wir unterscheiden wieder $a \in M_2$ (2a) und $a \in M_3$ (2b). Tritt Fall (2a) ein, so ist $a$ als Element von $M_2$ auch Element von $M_1 \cup M_2$, also auch von $B$. Tritt Fall (2b) ein, so ist $a$ als Element von $M_3$ gleichfalls Element von $B$.
In allen Fällen folgt aus $a \in A$, daß $a \in B$ gilt.
Der *Beweis des zweiten Teils* verläuft entsprechend und kann daher dem Leser überlassen bleiben: Er übertrage das Beweisprinzip auf den Nachweis des Assoziativgesetzes für den Durchschnitt!
Wie steht es nun mit dem Distributivgesetz? Gibt es auch hier etwas Analoges für die Operationen mit Mengen? Da wir nicht wissen, ob der Addition von Zahlen die Vereinigung oder der Durchschnitt von Mengen entsprechen wird, setzen wir probeweise zwei Gesetze an: Gilt für beliebige Mengen $M_1, M_2, M_3$

a) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$
b) $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$?

Wir wollen uns zunächst den Inhalt der ersten Vermutung an Hand eines Beispiels klarmachen und verwenden dazu das Bild 2.1. von Seite 33 bzw. Bild 2.20. Im Bild 2.20. wurde zwecks Vereinfachung die $M$ andeutende Umrandung der gesamten Figur weggelassen.

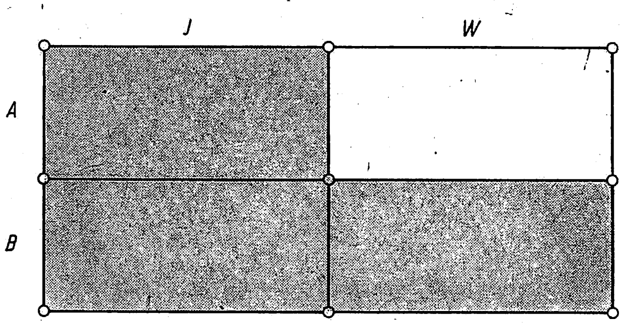


Bild 2.20.

An Hand dieser Figur soll die Beziehung

$$J \cup (W \cap B) = (J \cup W) \cap (J \cup B) \quad (*)$$

veranschaulicht werden.
Die in (*) links stehende Menge wird dargestellt durch die Vereinigung des linken Streifens mit dem rechten unteren Teilrechteck. Dabei entsteht die blau gerasterte Fläche. Rechts steht in (*) der Durchschnitt der gesamten Menge $J \cup W = M$ mit $J \cup B$.
Da $J \cup B$ Teilmenge von $M$ ist, steht rechts $J \cup B$. Diese Menge wird gleichfalls durch die blau gerasterte Fläche wiedergegeben.
Dadurch wird einsichtig, daß Gesetz a) für die Mengen $J$, $W$, $B$ gilt.
Wir versuchen jetzt den allgemeinen Beweis von a) und setzen wieder die linke Seite gleich $A$, die rechte gleich $B$.

1. Teil
*Voraussetzung:* $a \in A$
*Behauptung:* $a \in B$

*Beweis:*
$a \in A$ bedeutet, daß $a$ mindestens einer der beiden Mengen $M_1$ oder $M_2 \cap M_3$ angehört. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung. Wenn $a$ Element von $M_1$ ist, so gehört es auch zu der Obermenge $M_1 \cup M_2$ und ebenso zu $M_1 \cup M_3$, mithin zu ihrem Durchschnitt, also zu $B$. Wenn $a$ aber nicht Element von $M_1$ ist, so muß es zu $M_2 \cap M_3$ gehören. Als Element von $M_2$ gehört es zu der Obermenge $M_1 \cup M_2$, als Element von $M_3$ zu der Obermenge $M_1 \cup M_3$. Auch in diesem Fall gehört $a$ zu $B$.

2. Teil
*Voraussetzung:* $b \in B$
*Behauptung:* $b \in A$
*Beweis:*
$b \in B$ bedeutet, daß $b$ zugleich den Mengen $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cup M_3$ angehört. Das erste bedeutet: $b \in M_1$ oder $b \in M_2$, das zweite $b \in M_1$ oder $b \in M_3$. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung. Falls $b \in M_1$, so ist sicher $b$ in der Obermenge $A$ von $M_1$ enthalten, die $M_1$ mit einer anderen Menge vereinigt. Ist aber $b$ nicht in $M_1$ enthalten, so muß $b$ sowohl in $M_2$ als auch in $M_3$, also auch in dem Durchschnitt $M_2 \cap M_3$, mithin ebenfalls in der Obermenge $A$ liegen.
Wir haben damit bewiesen: $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$, d. h., die in a) vermutete Beziehung ist richtig. Satz a) stellt also ein allgemeines Gesetz dar, das die Vereinigung mit dem Durchschnitt von Mengen verbindet.
Der Vollständigkeit halber wollen wir uns auch an der Vermutung b) versuchen. Wieder bedeute $A$ die links stehende Menge, $A = M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$, während $B = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ sei.

1. Teil
*Voraussetzung:* $a \in A$
*Behauptung:* $a \in B$
*Beweis:*
$a \in A$ bedeutet, daß $a$ sowohl zu $M_1$ gehört (1) als auch zu $M_2 \cup M_3$ (2); $a \in M_2 \cup M_3$ sagt aus, daß $a$ mindestens einer der beiden Mengen $M_2$ oder $M_3$ angehört. Gehört $a$ zu $M_2$, so gehört es wegen (1) auch zu $M_1 \cap M_2$; gehört $a$ aber nicht zu $M_2$, so muß $a$ wegen (2) zu $M_3$, also – wieder wegen (1) – zu $M_1 \cap M_3$ gehören. $a$ gehört also zu $M_1 \cap M_2$ oder zu $M_1 \cap M_3$, mithin zu der Vereinigungsmenge dieser beiden Mengen. Folglich gilt $a \in B$.

2. Teil
*Voraussetzung:* $b \in B$
*Behauptung:* $b \in A$
*Beweis:*
$b \in B$ bedeutet, daß $b$ mindestens einer der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ oder $M_1 \cap M_3$ angehört. Auf alle Fälle gilt also $b \in M_1$ (1). Außerdem ist $b$ noch Element von $M_2$ oder von $M_3$, also sicher Element von $M_2 \cup M_3$, mithin – wegen (1) – Element von $A$. Wir haben damit wieder gezeigt: $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$. Folglich ist auch die Vermutung b) richtig!
Wir kommen dadurch zu dem bemerkenswerten Ergebnis, daß es für die beiden Operationen mit Mengen, Vereinigung und Durchschnitt, *zwei* Distributivgesetze gibt;

die gleichartig gebaut sind. Man braucht nur überall in einem der Gesetze die Zeichen „$\cup$" und „$\cap$" zu vertauschen, um zu dem zweiten Gesetz zu gelangen. Wenn wir bei dem Ansatz eines Distributivgesetzes für Mengen im Stillen die Hoffnung hegten, es würde uns eine Handhabe dafür geben, welche der beiden Mengenoperationen, Vereinigung oder Durchschnitt, wir als analog zur Addition, welche als analog zur Multiplikation bezeichnen könnten, so sehen wir uns in der Erwartung getäuscht. Vielleicht wird uns später die Heranziehung der Differenzmenge zur Erkenntnis verhelfen, welche Mengenoperation eher als Analogon zur Multiplikation von Zahlen angesehen werden kann.

Machen wir uns einmal klar, was es für Zahlen bedeuten würde, wenn es zwei Distributivgesetze gäbe: Für beliebige $a$, $b$, $c$ würde nicht nur gelten: $a \cdot (b + c) = ab + ac$, sondern auch $a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c)$!

Nun gibt es allerdings Tripel von Zahlen (d. h. drei Zahlen), für die auch $a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c)$ richtig ist, z. B. für $a = 0$; $b, c$ beliebig. Wenn wir aber einen zur Mengenlehre analogen Satz aufstellen wollten, würde er aussagen: „Für *jedes* Tripel $a$, $b$, $c$ gilt $a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c)$", und das ist falsch. Wir sehen aus diesem Beispiel, wie wichtig es ist, deutlich zu unterschieden zwischen den beiden Aussagen „*Es gibt ein* Tripel $[a, b, c]$, so daß $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$ gilt" (Existenzaussage), und „*Für jedes* Tripel $[a, b, c]$ gilt $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$" (Allaussage). Die erste Aussage ist richtig, die zweite falsch.

---

**Zusammenfassung:**
**Für Vereinigung und Durchschnitt von beliebigen Mengen $M_1$, $M_2$, $M_3$ gelten folgende Gesetze:**

$$\boldsymbol{M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1}$$
$$\boldsymbol{M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1} \qquad \textbf{(Kommutativgesetze)}$$

$$\boldsymbol{M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3}$$
$$\boldsymbol{M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3} \qquad \textbf{(Assoziativgesetze)}$$

$$\boldsymbol{M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)}$$
$$\boldsymbol{M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)} \qquad \textbf{(Distributivgesetze)}$$

---

Aufgabe 23

## 2.7. Gesetze der Differenzbildung

Wir wollen jetzt untersuchen, ob es entsprechende Gesetze für die Differenzbildung gibt. Dies wäre zu vermuten, wenn die Differenzbildung eine Umkehroperation zur Vereinigung von Mengen darstellt, entsprechend wie die Subtraktion von Zahlen die Umkehroperation der Addition ist. Das ist für Mengen aber keineswegs der Fall.
Es gilt

| für Zahlen: | für Mengen: |
|---|---|
| $a + (b - a) = b$ | $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ (↑ S. 47) |

Es ist also fraglich, ob es ein Distributivgesetz für die Differenz von Mengen gibt, das

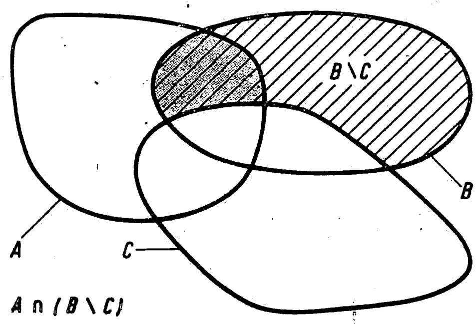


Bild 2.21.a

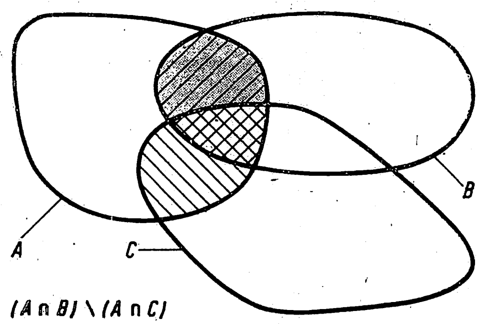


Bild 2.21.b

dem – z. B. im Bereich der positiven und negativen Zahlen unbeschränkt gültigen – Gesetz $a(b - c) = ab - ac$ genau entspricht. Wir setzen probeweise an:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) \qquad \text{(a)}$$
$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) \qquad \text{(b)}$$

a) In den Bildern 2.21. a und b sind die drei Mengen $A$, $B$, $C$ jeweils schwarz umrandet. In 2.21.a ist $B \setminus C$ schraffiert, $M_1 = A \cap (B \setminus C)$ blau gefärbt. In 2.21.b sind $A \cap B$ und $A \cap C$ verschieden schraffiert und $M_2 = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ blau gefärbt. Der Augenschein zeigt, daß in dieser Lage der Mengen $M_1 = M_2$ ist. Der Beweis soll jetzt allgemein geführt werden.
Sei $M_1 = A \cap (B \setminus C)$, $M_2 = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ und $m_1 \in M_1$ (Bild 2.21.a und b). Dann gilt $m_1 \in A$ und $m_1 \in (B \setminus C)$. Das letzte bedeutet $m_1 \in B$ und $m_1 \notin C$. Also gilt $m_1 \in (A \cap B)$. Da $m_1$ nicht Element von $C$ ist, kann $m_1$ auch nicht Element von $A \cap C$ sein, da dies ja eine Teilmenge von $C$ ist. Aus $m_1 \in (A \cap B)$ und $m_1 \notin (A \cap C)$ ergibt sich $m_1 \in M_2$. Es gilt also sicher $M_1 \subseteqq M_2$. Sei jetzt $m_2 \in M_2$. Das bedeutet, daß $m_2$ Element von $A \cap B$, also sowohl Element von $A$ als auch von $B$, aber nicht Element von $A \cap C$ ist. Dann kann $m_2$ aber nicht Element von $C$ sein, denn aus $m_2 \in A$ und $m_2 \in C$ würde – entgegen unserer Feststellung über $m_2$ – folgen: $m_2 \in (A \cap C)$. Da das Element des Durchschnitts, das heißt $m_2$, in $B$, aber nicht in $C$ liegt, gehört es zu $B \setminus C$. Als Element von $A$ ist es Element von $M_1$. Also gilt auch $M_2 \subseteqq M_1$, mithin $M_1 = M_2$. Die Aussage (a) ist also allgemeingültig.

Bild 2.22.a

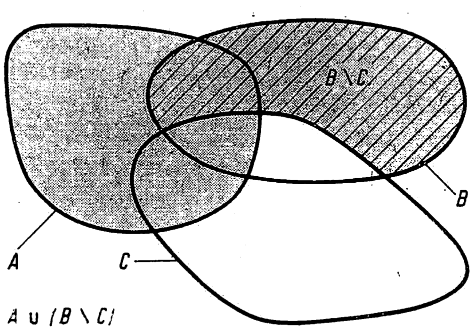
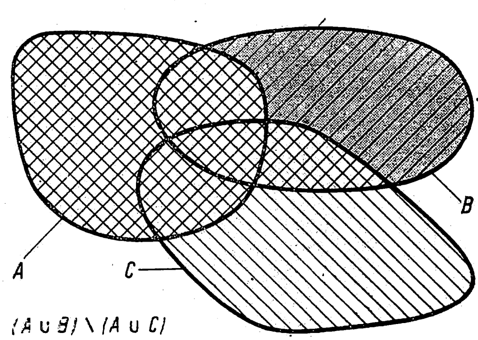



Bild 2.22.b



b) Hier zeigen bereits die Diagramme, daß kein allgemeingültiges Gesetz vorliegt. In Bild 2.22.a ist $B \setminus C$ schraffiert und $M_1 = A \cup (B \setminus C)$ blau gefärbt. In Bild 2.22.b sind $A \cup B$ und $A \cup C$ verschieden schraffiert und $M_2 = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ blau gefärbt. Die Mengen $M_1$ und $M_2$ sind verschieden, man kann bei der vorgegebenen Lage Elemente der einen Menge angeben, die nicht zur anderen gehören. Im Gegensatz zu Fall (a) erübrigt sich hier ein weiterer Nachweis, daß (b) keine allgemeingültige Formel ist. Es genügt, einen einzigen Fall aufzuzeigen, in dem die Formel nicht gilt. Dies ist geschehen.

Die Gültigkeit des Distributivgesetzes

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) \qquad \text{(a)}$$

läßt eine Analogie zwischen Durchschnittsbildung von Mengen und der Multiplikation von Zahlen vermuten.

Was ergibt sich, wenn wir auf der linken Seite von (a) bzw. (b) die Klammern anders setzen, also die Mengen $(A \cap B) \setminus C$ bzw. $(A \cup B) \setminus C$ bilden? Es gelten, wie hier nicht bewiesen wird, die Gesetze

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C), \qquad \text{(c)}$$
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C). \qquad \text{(d)}$$

Diese Formeln zeigen, daß eben doch keine volle Analogie zwischen den Operationen mit Mengen und denen mit Zahlen besteht, denn für Zahlen würden die entsprechenden Formeln lauten:

$$a \cdot b - c = (a - c) \cdot (b - c) \quad \text{bzw.}$$
$$(a + b) - c = (a - c) + (b - c).$$

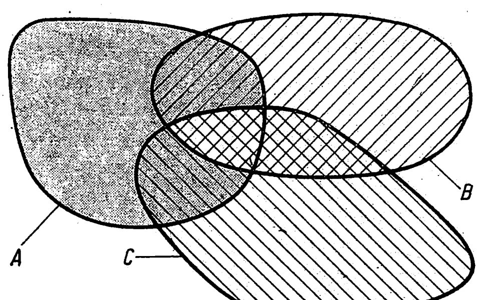
Das sind keine allgemeingültigen Formeln.

Weiter gelten für die Differenzbildung von Mengen folgende Gesetze, die hier nur durch Diagramme (Bild 2.23.a und b, Bild 2.24.a und b) veranschaulicht werden sollen, wobei die blau gefärbte Fläche jeweils die in der Unterschrift genannte Menge darstellt.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \qquad \text{(e)}$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \text{(f)}$$

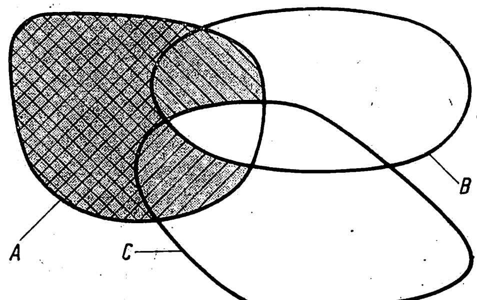
Der Leser beachte, daß in diesen Formeln rechts und links die Zeichen „$\cap$“ und „$\cup$“ vertauscht sind!

Bild 2.23.a




$A \setminus (B \cap C)$

Bild 2.23.b




$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

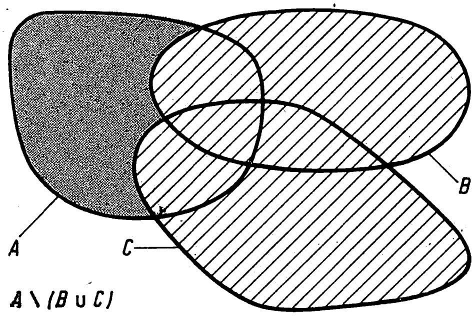



Bild 2.24.a

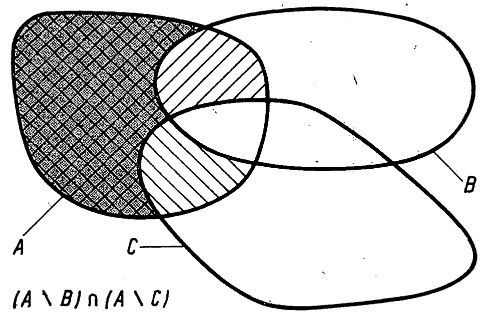



Bild 2.24.b

---

**Zusammenfassung:**
**Für die Differenzbildung gelten folgende Gesetze:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ | (a) | $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ | (d) |
| $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ | (c) | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ | (e) |
| | | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ | (f) |

---

Aufgabe 24

## 2.8. Mengen verschiedener Stufen

In unserem Haus gibt es 8 Mieter. Parterre wohnen zwei Familien, im ersten Stock außer meiner Familie eine Familie mit fünf Personen, im zweiten Stock wohnen ein kinderloses Ehepaar und eine dreiköpfige Familie, und im Dachgeschoß haben sich ein Maler und ein Ingenieur, beide alleinstehend, eingerichtet. Das sind acht Mengen $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$, $F_6$, $F_7$, $F_8$ mit verschiedener Elementeanzahl. $F_7$ und $F_8$ sind Einermengen. Die Mietsparteien $F_1, F_2, \ldots, F_8$ bilden ihrerseits Elemente einer neuen Menge $M$ (Menge der Mietsparteien). Diese Menge $M$, deren Elemente wieder Mengen sind, wollen wir eine **Menge zweiter Stufe** nennen. Wir können daneben die Menge $M'$ aller Hausbewohner betrachten. Sie ist nicht mit $M$ identisch, denn die Elemente von $M'$ sind einzelne Personen, die von $M$ Mietsparteien. Zum Beispiel ist mein Nachbar Element von $M'$, aber nicht von $M$; seine Familie ist Element von $M$, aber nicht von $M'$. Man beachte, daß auch die Grundmengen, denen man die Elemente von $M$ bzw. $M'$ entnehmen kann, verschieden sind: Im ersten Fall kann die Menge aller Mietsparteien der Straße als Grundmenge dienen, im zweiten die aller Einwohner der Straße.
Die Mengen, mit denen wir es früher zu tun hatten, hatten stets Individuen als Elemente. Solche Mengen wollen wir **Mengen erster Stufe** nennen. Mengen zweiter Stufe haben Elemente, die selbst Mengen erster Stufe sind. Mengen zweiter Stufe heißen auch **Mengensysteme.** Mengen, die als Elemente Mengensysteme enthalten, heißen **Mengen dritter Stufe** oder **Mengenfamilien.** Entsprechend werden Mengen vierter Stufe usw. gebildet.

Mengen verschiedener Stufen treten im täglichen Leben häufig auf: Streichhölzer werden in Schachteln, Schachteln zu Paketen, Pakete in Kartons gepackt. Mengen von Schachteln sind Mengen zweiter Stufe, Mengen von Paketen solche dritter Stufe, wenn Streichhölzer als Individuen betrachtet werden.

Man unterscheide auch hier eine Menge von drei Streichholzpaketen, die eine Mengenfamilie darstellen, von der entsprechenden Menge, deren Elemente einzelne Streichhölzer sind, und die eine Menge erster Stufe ist.

Jede Schulklasse hat Schüler, also Individuen, als Elemente, sie ist eine Menge erster Stufe. Unsere Schule ist als Menge von Klassen eine Menge zweiter Stufe. Dagegen ist die Schule, als Gesamtheit aller Schüler aufgefaßt, eine Menge erster Stufe. Daneben kann man die Schulen eines Stadtbezirkes zu einer Menge dritter Stufe zusammenfassen.

Wenn ich die Punkte einer Ebene als Individuenbereich zugrunde lege, so stellt die auf einer Geraden dieser Ebene liegende Punktmenge eine Menge erster Stufe dar; daneben kann ich diese Gerade als Element der Menge aller Geraden der Ebene betrachten. Diese Menge aller Geraden ist dann, bezogen auf Punkte, eine Menge zweiter Stufe.

**Zusammenfassung:**
**Mengen von Individuen heißen Mengen erster Stufe.**
**Mengen, deren Elemente Mengen erster Stufe sind, heißen Mengen zweiter Stufe oder Mengensysteme.**
**Mengen, deren Elemente Mengen zweiter Stufe sind, heißen Mengen dritter Stufe oder Mengenfamilien.**
**Mengen, deren Elemente Mengen $k$-ter Stufe sind, heißen Mengen $(k+1)$-ter Stufe.**

Wir wollen jetzt zu einer beliebigen Menge $M$ diejenige Menge zweiter Stufe betrachten, *die die Teilmengen von $M$ zu Elementen hat.*

Diese Menge wird als **Potenzmenge von $M$** bezeichnet und $P(M)$ geschrieben (gelesen „$P$ von $M$“).

Sei $M$ z. B. die Menge $\{a, b, c\}$. Die Teilmengen sind $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{a\}$, $M_3 = \{b\}$, $M_4 = \{c\}$, $M_5 = \{a, b\}$, $M_6 = \{a, c\}$, $M_7 = \{b, c\}$, $M_8 = M = \{a, b, c\}$.

$M_1, M_2, \ldots, M_8$ sind die Elemente von $P(M)$. Ist $M = \emptyset$, so ist $P(M)$ diejenige Menge, die die leere Menge als einziges Element enthält, denn, wie auf Seite 34 erwähnt wurde, hat die Nullmenge genau eine Teilmenge, nämlich sich selbst. $P(\emptyset)$ ist also nicht leer, sondern eine Einermenge. Ist $M$ eine Einermenge, etwa $M = \{u\}$, so besteht $P(M)$ aus zwei Elementen, nämlich aus $\emptyset$ und $\{u\}$. Die Potenzmenge hat stets mehr Elemente als die Ausgangsmenge.

Jetzt habe die Menge $M$ fünf Elemente. Wir wollen die Anzahl der Elemente von $P(M)$ berechnen. Dazu schreiben wir uns die Elemente von $M$ auf. Sie seien

$$i, j, k, l, m.$$

Eine Teilmenge von $M$ bilden, heißt, irgendwelche dieser Elemente herauszugreifen. Unter die herausgegriffenen Elemente wollen wir „ja“ schreiben, unter die übrigen „nein“. Dann sieht eine Teilmenge etwa so aus:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i$, | $j$, | $k$, | $l$, | $m$ |
| nein | nein | ja | ja | nein |

Das wäre die Teilmenge $\{k, l\}$. Der leeren Menge entspricht die Belegung jedes Elements mit „nein", der ganzen Menge die jedes Elements mit „ja". Wenn wir die Anzahl der Elemente der Potenzmenge ermitteln wollen, brauchen wir nur auszuzählen, wieviel verschiedene Belegungen der fünf Elemente durch „ja" bzw. „nein" möglich sind. Nun können wir unter jeden Buchstaben unabhängig vom anderen „ja" oder „nein" schreiben. Im ganzen sind dies also $2^5$ Belegungen. Hat $M$ allgemein $n$ Elemente, so hat die Potenzmenge $2^n$ Elemente. Unsere oben erwähnten Beispiele bestätigen diese Berechnung: Ist $n = 0$ (d. h. $M = \emptyset$), so ist die Anzahl der Elemente $p$ von $P(M)$: $p = 2^0 = 1$. Ist $n = 1$ ($M$ also eine Einermenge), so ist $p = 2^1$. Ist $n = 3$, so ist $p = 2^3 = 8$.
Wir führen noch eine Kurzschreibweise für $P(M)$ ein:

$$P(M) = \{T;\ T \subseteqq M\},$$

gelesen: „$P$ von $M$ ist die Menge aller Mengen $T$, die Teilmengen von $M$ sind."

---

**Zusammenfassung:**
**Die Potenzmenge $P$ ($M$) ist die Menge aller Teilmengen von $M$. Ist $M$ eine Menge $k$-ter Stufe, so ist $P$ ($M$) eine Menge ($k$ + 1)-ter Stufe.**

---

Aufgabe 25

## 2.9. Geordnete Paare, Kreuzprodukt

In einer Tanzstunde gibt es 10 Herren und 8 Damen. Stellen wir uns vor, jeder der Herren hätte sich vorgenommen, mindestens einmal mit jeder Dame zu tanzen. Dabei würden im Laufe der Zeit $10 \cdot 8$, also 80 Paare entstehen. Bezeichnen wir die Herren mit $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ und die Damen mit $v_1, v_2, \ldots, v_8$, so haben wir die Paare

$$\begin{array}{l}
[u_1, v_1], [u_1, v_2], \ldots, [u_1, v_8], \\
[u_2, v_1], [u_2, v_2], \ldots, [u_2, v_8], \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
[u_{10}, v_1], [u_{10}, v_2], \ldots, [u_{10}, v_8].
\end{array}$$

Dabei haben wir entgegen den Geboten der Höflichkeit den Herren den Vortritt gelassen. Wir wollen ein solches Paar, das z. B. von dem Herren $u_3$ und der Dame $v_5$ gebildet wird, als ein **geordnetes Paar** bezeichnen. Geordnete Paare traten ohne besondere Erklärung schon im Kapitel 1 auf. Ein solches geordnetes Paar ist zunächst eine Zweiermenge. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Mengen spielt aber hier die Reihenfolge eine Rolle. Jeder Leser wird sich vermutlich eine durchaus zutreffende Vorstellung davon machen können, was unter einem geordneten Paar $[a, b]$ zu verstehen ist, wenn $a$ ein Element einer Menge $A$, $b$ ein Element einer Menge $B$ ist.
In der Unterstufe treten geordnete Paare an zahlreichen Stellen des Mathematikunterrichts auf. Jede zweistellige Zahl, z. B. 27, ist ein geordnetes Paar $[a, b]$, das von

dem Paar $[b, a] = 72$ wohl zu unterscheiden ist. Das Paar $[2, 7]$ kann auch als Summe $2 + 7$ oder als Produkt $2 \cdot 7$ oder als Ungleichung $2 < 7$ gedeutet werden. Auf diese qualitative Mehrdeutigkeit des Mengenbegriffs wurde schon auf S. 33 hingewiesen. Die letzten Beispiele zeigen, daß es Fälle gibt, in denen $[a, b] = [b, a]$ ist. Stets ist dies der Fall bei Paaren der Form $[a, a]$.
Wir wollen jetzt versuchen, den neuen Begriff des geordneten Paares allein mit Hilfe von Mengenbildungen auszudrücken. Wir gewinnen damit ein weiteres Beispiel dafür, wie elastisch und fruchtbar mit Mengen gearbeitet werden kann, und sehen daran, wie die Mengenlehre als Fundament für weitere Begriffsbildungen dient. Der Leser, der sich an die formale Art des Schließens in der Mengenlehre noch nicht gewöhnt hat, mag die folgenden Ausführungen beim ersten Lesen überschlagen und sich nur merken, daß das Paar $[a, b]$ von dem Paar $[b, a]$ zu unterscheiden ist.
Die jetzt folgende Zurückführung des Begriffs „geordnetes Paar" auf gewöhnliche Zweiermengen fand der polnische Mathematiker KURATOWSKI.

* Wir suchen einen Ausdruck für das geordnete Paar $[a, b]$. Es unterscheidet sich schon in der Schreibweise von der gewöhnlichen Menge $\{a, b\}$, bei der die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt. Dazu müssen wir uns eine Zweiermenge so bauen, daß die Bevorzugung eines Elements, das im geordneten Paar als erstes fungieren soll, zum Ausdruck gelangt. Zu diesem Zweck betrachten wir die Einermenge $\{a\}$ und daneben die Zweiermenge $\{a, b\}$, bei der, wie üblich, die Reihenfolge der Elemente gleichgültig ist. Jetzt bilden wir aus diesen beiden Mengen eine neue Menge höherer Stufe $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, die wir als geordnetes Paar $[a, b]$ bezeichnen. Damit ist das gewünschte Resultat erreicht. Natürlich ist in der Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ die Reihenfolge der beiden Elemente, das sind $\{a\}$ und $\{a, b\}$, gleichgültig.
Es gilt $[a, b] = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ oder

$$[a, b] = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Entsprechend ist unter dem geordneten Paar $[b, a]$ folgendes zu verstehen:

$$[b, a] = \{\{b\}, \{a, b\}\} \text{ oder}$$
$$[b, a] = \{\{a, b\}, \{b\}\}.$$

Daraus erkennen wir, daß ein geordnetes Paar tatsächlich eine Zweiermenge im üblichen Sinn ist. Sind die Ausgangsmengen $U$, $V$, denen ich die Elemente $a$, $b$ entnehme, Mengen erster Stufe, so ist das geordnete Paar $[a, b]$ eine Menge zweiter Stufe, da ihre Elemente Mengen erster Stufe sind.
Wir können jetzt folgenden Satz für geordnete Paare beweisen:

SATZ:

▷ Zwei geordnete Paare sind dann und nur dann gleich, wenn die entsprechenden Elemente übereinstimmen.

*Behauptung:* $[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow c = a$ und $d = b$.

*Beweis:*
Wir brauchen nur zu zeigen:

$$[a, b] = [c, d] \Rightarrow c = a \text{ und } d = b.$$

Die Behauptung in der entgegengesetzten Richtung des Pfeils ist trivial. Wir beweisen daher nur den ersten Teil.

*Voraussetzung:* $[a, b] = [c, d]$.

*Behauptung:* $c = a$ und $d = b$.

*Beweis:*
Nach Definition des geordneten Paares ist

$$[a, b] = \{\{a\}, \{a, b\}\},$$
$$[c, d] = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Die Voraussetzung bedeutet, daß die rechts stehenden Mengen dieselben Elemente haben. Es ist also entweder

$$\{c\} = \{a\} \text{ und } \{c, d\} = \{a, b\} \quad (1) \text{ oder}$$
$$\{c\} = \{a, b\} \text{ und } \{c, d\} = \{a\} \quad (2).$$

Wir untersuchen zunächst den Fall (1). Aus $\{c\} = \{a\}$ folgt $c = a$, das ist der erste Teil der Behauptung. Dann ist auch $\{c, d\} = \{a, d\}$, und wegen $\{c, d\} = \{a, b\}$, also $\{a, d\} = \{a, b\}$, muß dann auch $d = b$ sein. Im Fall (1) ist also die Behauptung bewiesen.
Jetzt muß noch der Fall (2) untersucht werden. Die Mengen $\{c\}$ und $\{a, b\}$ können nur dann gleich sein, wenn $a$, $b$ und $c$ ein und dasselbe Element bezeichnen. In diesem Fall ist $\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$, und das geordnete Paar $[a, b]$ ist gleich $\{\{a\}, \{a\}\} = [a, a]$.
Im Fall (2) ist aber zugleich $\{c, d\} = \{a\}$, also $c = d = a$, mithin $[c, d] = \{\{a\}, \{a\}\} = [a, a]$.
Fall (2) tritt demnach dann und nur dann ein, wenn alle in beiden Paaren auftretenden Elemente gleich sind, $a = b = c = d$. Dann ist die Behauptung gleichfalls richtig. Damit ist der Satz bewiesen.

Unser Satz zeigt erneut den Unterschied zwischen $[a, b]$ und $\{a, b\}$. Aus $\{a, b\} = \{c, d\}$ folgt keineswegs, daß $c = a$ und $d = b$ ist. Es könnte auch $c = b$ und $d = a$ sein. Bei dem geordneten Paar ist die Reihenfolge wesentlich.

**Zusammenfassung:**
**Unter dem geordneten Paar $[a, b]$ verstehen wir die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Das geordnete Paar $[a, b]$ ist gleich dem geordneten Paar $[c, d]$ dann und nur dann, wenn $c = a$ und $d = b$ ist.**

Geordnete Paare von Gegenständen führen uns auf eine neue Begriffsbildung. Besitzt ein Kindergarten zum Beispiel eine Menge $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ von gleichgroßen Puppen und eine Menge $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ dazu passender Puppenkleider, so stellt die Bekleidung einer Puppe $P_i$ mit dem Kleid $K_j$ ein geordnetes Paar $[P_i, K_j]$ dar. Die aus 12 Elementen bestehende Menge aller dieser Paare wird als **Kreuzprodukt oder Mengenprodukt** bezeichnet und $P \times K$ geschrieben.
Ist in unserem Ausgangsbeispiel (↗ S. 56) $U$ die Menge der Herren, $V$ die der Damen, so ist $U \times V$ die dort elementweise aufgeführte Menge aller $[u_i, v_j]$.

ERKLÄRUNG:

▷ Besteht $U$ aus den Elementen $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $V$ aus den Elementen $v_1, v_2, \ldots, v_n$, so bilden alle geordneten Paare $[u_i, v_j]$ die Elemente einer neuen Menge, die als **Kreuzprodukt** oder **Mengenprodukt** der Mengen $U$ und $V$ bezeichnet und $U \times V$ geschrieben wird. Sind $U$ und $V$ Mengen erster Stufe, so ist $U \times V$ als Menge von Paaren eine Menge dritter Stufe.

Im Mathematikunterricht treten geordnete Paare häufig auf, zum Beispiel bei Rechenoperationen wie $a + b$, $a - b$, $a:b$, $a^b$, wobei durchaus $[a, b] = [b, a]$ sein kann. Auch Mengenprodukte kommen vom ersten Schuljahr an vor, wenn sie auch dort nicht als solche bezeichnet werden.
Besonders wichtig sind Mengen geordneter Paare bei Erweiterungen von Zahlenbereichen. Zum Beispiel ist ein Bruch ja nichts anderes als ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen. Der Zähler gehört dabei der Menge $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, der Nenner der Menge $N \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ an, und die Menge aller Brüche kann als $N \times (N \setminus \{0\})$ bezeichnet werden.

Aufgabe 26

## 2.10. Antinomien der Mengenlehre

Der Leser, der uns bisher gefolgt ist, wird es vielleicht als unnötig umständlich empfunden haben, daß wir überall die Elemente einem bestimmten Individuenbereich entnommen haben. Das geschah, um eine schrankenlose Mengenbildung einzudämmen. Der folgende Abschnitt soll diese Vorsicht begründen.
Noch Cantor (Georg Cantor, 1845 bis 1918), der Begründer der Mengenlehre, definierte:

> „Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen."

Diese Definition ermöglicht die Bildung von Mengen, die uns auf Widersprüche führen. Stellen wir uns die Menge $M_3$ (↑ S. 29) vor, die alle Mitglieder einer bestimmten Sportvereinigung umfaßt. Wir wollen hier einmal die Sektion Rudern herausgreifen. Hier gebe es mehrere Mannschaften, die zusammen trainieren. Um ihre Höchstform zu erreichen, massieren sich die Ruderer teils selbst, teils werden sie von dem Sportkameraden Krause, der selbst Ruderer ist, massiert. Krause ist als Hilfsmasseur angestellt mit der Weisung, alle Kameraden zu massieren, die sich nicht selbst massieren. Für jede dieser Massagen soll er 0,50 M erhalten. Nehmen wir an, es gäbe 14 Ruderer in der Sektion, und Krause führe 7 Massagen an einem Tag aus. Bei der Abrechnung gibt es Differenzen. Der Sektionsleiter setzt für den Sportkameraden Krause 7 Massagen à 0,50 M an, also 3,50 M. Der Hauptkassierer erhebt Einspruch: „Ihr habt unter euren 14 Leuten 8 Selbstmassierer, also werden nur 6 Massagen bezahlt. Krause hat nur 3,00 M zu bekommen." Dieses Dilemma läßt sich nur dann lösen, wenn geklärt wird, ob Krause jede im Rahmen der Sektion ausgeführte Massage mit 0,50 M bezahlt bekommt, oder nur diejenigen Massagen, die er seinen Klubkameraden, nicht sich selbst, angedeihen läßt.

Die hier bestehende Schwierigkeit spiegelt die Widersprüchlichkeit eines hier verwendeten Mengenbegriffs wider: Es handelt sich um die Menge $M$ derjenigen Ruderer, die sich nicht selbst massieren, sondern von Sportkamerad Krause massiert werden. Wer also nicht von ihm massiert wird, gehört nicht zur Menge $M$. $M$ scheint nach der CANTORschen Erklärung eine zulässige Menge zu sein. Es muß sich also für jeden Ruderer entscheiden lassen, ob er zu $M$ gehört oder nicht. Wie steht es nun mit Krause selbst, der ja zur Grundmenge der Sektion Rudern gehört? Wenn er zu $M$ gehört, massiert er sich nicht selbst, denn $M$ ist ja die Zusammenfassung aller Nichtselbstmassierer, d. h., er wird vom Hilfsmasseur massiert. Da er selbst dieser Hilfsmasseur ist, gehört er also doch zu den Selbstmassierern. Er ist also nicht Element der Menge $M$, denn das führt auf einen Widerspruch. – Nehmen wir also an, Krause sei nicht Element von $M$. Dann massiert er sich selbst; wer aber vom Hilfsmasseur massiert wird, gehört nicht zu den Selbstmassierern, ist also Element von $M$. Wir kommen zu der merkwürdigen Aussage:
Wenn Krause zu $M$ gehört, so gehört er nicht zu $M$, wenn er nicht zu $M$ gehört, so gehört er zu $M$.
Die Menge $M$ ist auf unzulässige Weise gebildet worden. Allerdings kann nicht behauptet werden, daß das obenstehende Beispiel ein ernsthaftes Argument gegen die Bildung des mathematischen Mengenbegriffs darstellt. Dieser bleibt davon unberührt, ob irgend jemand eine absurde Anordnung mit widersprüchlichen Rechtsfolgen erläßt.
Da wir aber hier immerhin auf ein Problem – eine der sogenannten **Antinomien der Mengenlehre** – gestoßen sind, das eine Grundlagenkrise in der Mathematik hervorgerufen hat, wollen wir noch ein in ein mathematisches Gewand gekleidetes Beispiel anführen, das von dem englischen Mathematiker und Philosophen RUSSELL (BERTRAND RUSSELL, 1872 bis 1970) stammt:
Sei $M$ die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten. Offenbar gibt es solche Mengen. Alle auf S. 29 und 30 aufgeführten Mengen $M_1$ bis $M_{15}$ fallen in diese Rubrik. Genau alle Mengen mit dieser Eigenschaft sollen die Elemente von $M$ bilden. Nehmen wir nun an, $M$ enthalte sich selbst als Element. Dann gehört $M$ als Element von $M$ zur Rubrik der Mengen, die sich nicht als Element enthalten. Das widerspricht unserer Annahme. $M$ kann sich also nicht selbst als Element enthalten. Dann gehört aber $M$ zur Rubrik derjenigen Mengen, die als Elemente zu $M$ zu zählen sind, das heißt $M$ enthält sich doch als Element. In beiden Fällen gerät man zwangsläufig in einen Widerspruch. Wenn $M$ sich als Element enthält, kommt man zu dem Schluß, daß es sich nicht als Element enthalten kann. Enthält $M$ aber sich selbst nicht als Element, so muß es sich als Element enthalten. Die Bildung der Menge $M$ ist unzulässig. Die schon von CANTOR versuchte Bildung einer „Menge aller Mengen" führt auf ähnliche Widersprüche, auf die aber hier nicht eingegangen werden soll. Sie sind der mathematische Hintergrund, den HUBERT CREMER dem kleinen Scherzgedicht „Das Nachtgebet" zugrunde gelegt hat. Der Schluß des Gedichtes enthält in scherzhafter Weise eine Anspielung auf die wissenschaftliche Haltung des Mathematikers: Er „glaubt" nur an das, was er selbst vorausgesetzt oder einwandfrei aus seinen Voraussetzungen hergeleitet hat, ohne daß die Folgerungen irgendwo auf Widersprüche stoßen. Der hier benutzte naive Mengenbegriff gehört leider nicht zu den unbedingt widerspruchsfreien Begriffsbildungen. Es können Widersprüche entstehen, wenn man Dinge zu Mengen zusammenfaßt, die selbst erst durch diese Mengenbildung definiert werden. Die

Das Nachtgebet

Sie kniet an ihrem Bettchen,
bevor sie schlafen geht,
die liebe kleine Primzahl,
und spricht ihr Nachtgebet:
„Allmächtige Menge der Mengen,
ich glaub', daß Du existierst
und wunderbarerweise
Dich ewig neu gebierst,
daß Du mit weiser Stärke
die Welt der Mengen lenkst,
daß Du an alle Seelen
und auch an meine denkst."
Drauf legt sie sich zufrieden
und stillbeglückt zur Ruh.
Du liebe kleine Primzahl,
ach, könnt' ich doch glauben wie Du![1]

Objekte, die man zu Mengen zusammenfassen will, muß man sich vor der Mengenbildung als existent vorstellen können. Dann entfällt die RUSSELLsche Antinomie, aber auch die Finanzsorgen des Hilfsmasseurs Krause können der Mengenlehre nicht mehr gefährlich werden, denn er verdankt seine Existenz in unserem Problem auch nur der nicht widerspruchsfreien Bildung der Menge $M$ der „Nichtselbstmassierer". Aus diesem Grunde wurde bei Mengenbildungen von einer bereits bestehenden Grundmenge ausgegangen.
Wir vermeiden widersprüchliche Mengenbildungen, wenn wir uns vornehmen:

> Bei der Bildung einer Menge sollen nach Möglichkeit keine Mengen verschiedener Stufe als Elemente auftreten. Wenn dies nicht vermieden werden kann, muß man sich davon überzeugen, daß die so gebildete Menge auf keine Widersprüche führt.

Nun gibt sich aber der Mathematiker mit solchen allgemeinen Formulierungen, wie sie CANTOR gegeben hat, verbunden mit gewissen Verbotsvorschriften, nicht zufrieden, zumal es sich um einen fundamentalen Begriff der Mathematik handelt. Er braucht einen scharf umrissenen Mengenbegriff, mit dem er zuverlässig arbeiten kann. Nun ist der Mengenbegriff so allgemeiner Art, daß er nicht durch Definition auf einen noch allgemeineren Begriff zurückgeführt werden kann. Er wird in der Mathematik daher als **Grundbegriff** behandelt, d. h. als ein Begriff, der ohne Definition an den Anfang einer Theorie gestellt wird. Eine Menge läßt sich eben nur durch ihre Elemente beschreiben. Daher kann man sich den Mengenbegriff inhaltlich nur durch viele Beispiele klarmachen, wie dies oben versucht wurde.
Wenn sich auch der **Begriff der Menge** einer mathematischen Definition entzieht, so kann doch wenigstens die **Bildung von Mengen** durch Grundsätze (Axiome) präzi-

[1] Entnommen aus *Der Häufungspunkt*, Manuskript von HUBERT CREMER.

siert werden, die, wie die mathematische Praxis gezeigt hat, zum Aufbau der Mengenlehre im üblichen Umfang ausreichen: Aus ihnen lassen sich mit Hilfe von Schlußregeln und Definitionen die Sätze der Mengenlehre gewinnen.
Nur der Vollständigkeit halber, nicht, um daraus im folgenden Nutzen zu ziehen, sei zum Schluß ein **Axiomensystem für die Mengenlehre** angeführt. Einige der in ihm enthaltenen Sätze wurden bereits mehrfach verwendet.

1a. Das Mengenbildungsprinzip für Mengen erster Stufe:
Es sei eine Aussageform $\mathsf{H}(a)$, die sich auf Individuen bezieht, gegeben. Dann gibt es eine Menge $M$, so daß für jedes Individuum $a$ gilt: $a \in M$ genau dann, wenn $\mathsf{H}(a)$ zutrifft.

1b. Das Mengenbildungsprinzip für Mengen zweiter Stufe:
Sei $\mathsf{H}(A)$ eine Aussageform, die sich auf Mengen erster Stufe bezieht. Dann gibt es ein Mengensystem $\mathfrak{M}$, so daß für jede Menge $A$ erster Stufe gilt: $A \in \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathsf{H}(A)$ zutrifft.

2. Das Extensionalitätsprinzip:
Zwei Mengen $M$ und $M'$ sind gleich genau dann, wenn für jedes $a$ gilt: $a \in M$ genau dann, wenn $a \in M'$.

3. Das Auswahlprinzip:
Wenn $\mathfrak{M}$ ein nichtleeres Mengensystem ist und wenn auch jede Menge $M$, die Element von $\mathfrak{M}$ ist, nicht leer ist und wenn ferner je zwei verschiedene Mengen aus $\mathfrak{M}$ kein Element gemeinsam haben, dann gibt es eine Auswahlmenge $A$, die mit jeder Menge des Mengensystems $\mathfrak{M}$ genau ein Element gemeinsam hat.

4. Das Unendlichkeitsprinzip:
Es gibt wenigstens eine unendliche Menge.

Auf die entsprechenden Axiome für Mengen höherer Stufen soll hier nicht eingegangen werden. Es sei nur noch bemerkt, daß die Anzahl dieser Axiome, sobald man sich auf Mengen bis zu einer bestimmten Stufe beschränkt, endlich ist.
In Axiom 1 sind zwecks Vermeidung von Antinomien gewisse auf Widersprüche führende Aussageformen auszuschließen, z. B. die Aussageform $\mathsf{H}(M)$: „$M$ enthält sich selbst als Element". Die in diesem Buch zur Mengenbildung verwendeten Eigenschaften sind nicht von dieser Art. Der Leser, der sich hierüber genauer informieren möchte, muß auf die Spezialliteratur verwiesen werden (z. B. [7], [8]).
Das Auswahlaxiom lenkte von seiner ersten Formulierung durch Cantor an die besondere Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich. Die Forschungen der letzten Jahrzehnte haben ergeben: So wie man eine widerspruchsfreie Geometrie ohne das Parallelenaxiom oder ohne das Archimedische Axiom aufbauen kann (↗ Kapitel 1, S. 25), so läßt sich auch eine widerspruchsfreie Mengenlehre ohne Auswahlaxiom entwickeln. Dieses Axiom ist also von den anderen Axiomen der Mengenlehre unabhängig. Die neuen hier erreichten Ergebnisse sind wegen ihrer weittragenden Konsequenzen von großer Bedeutung. Sie werden in Kapitel 6 über unendliche Mengen erneut zur Sprache kommen. Der interessierte Leser sei auf die dort angegebene Spezialliteratur verwiesen.

## 2.11. Aufgaben: Mengen

1. Bei den folgenden Beispielen wird links die Grundmenge, rechts die charakteristische Eigenschaft genannt. Geben Sie Elemente der betreffenden Menge an!
Menge der Säugetiere – im Wasser leben
Menge der Bewohner Ihres Hauses – älter als 70 Jahre sein
die Menge $\{24, 25, 26, 27, 28\}$ – Primzahl sein (↑ S. 33)

2. Geben Sie zu den Beispielen von Aufgabe 1 jeweils Elemente der Komplementärmenge an! (↑ S. 35)

3. In welchem der Gebiete I, II, III von Bild 2.3. kann ein rechtwinkliges Dreieck liegen? Begründen Sie Ihre Antwort! (↑ S. 37)

4. Beschreiben Sie die Lage der Punktmengen $M = \{P; \mathsf{H}(P)\}$ für folgende Eigenschaft $\mathsf{H}$:
   a) $P$ soll von zwei festen Punkten $A$, $B$ gleichen Abstand haben.
   b) $P$ soll von einer gegebenen Geraden $g$ den Abstand 5 cm haben.
   c) $P$ soll von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleichen Abstand haben.
   d) $P$ soll von den Ecken eines gegebenen Dreiecks gleich weit entfernt sein.
   e) $P$ soll von den Seiten eines gegebenen Dreiecks gleich weit entfernt sein.
   *f) $A$ und $B$ sind gegebene Punkte. Die Strahlen $PA$ und $PB$ sollen einen Winkel von 30° bilden.
   *g) $P$ soll von zwei gegebenen Punkten $A$, $B$ das Abstandsverhältnis 5:3 haben.
   *h) $P$ soll von einer Geraden $g$ denselben Abstand haben wie von einem gegebenen Punkt $A$.

   Als Grundmenge ist jeweils die Menge aller Punkte der Zeichenebene anzusehen. (↑ S. 38)

5. Legen Sie bei Aufgabe 4a) bis c) die Menge aller Punkte des Raumes zugrunde! (↑ S. 38)

6. Es sei $M_1$ die auf der Strecke $\overline{AB}$, $M_2$ die auf der Strecke $\overline{CE}$ liegende Punktmenge. Bilden Sie $D = M_1 \cap M_2$ und übersetzen Sie die Lagen der Strecken von Bild 2.25.a bis d in Venndiagramme für $M_1$, $M_2$ und $D = M_1 \cap M_2$! (↑ S. 43)

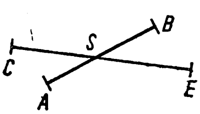


Bild 2.25.a

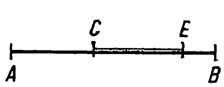


Bild 2.25.b

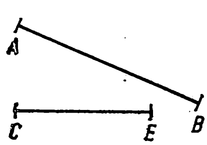


Bild 2.25.c

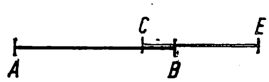


Bild 2.25.d

7. Es sei die Grundmenge $M$ die Menge der auf einer Ebene liegenden Punkte, $g_1$ und $g_2$ seien zwei Geraden dieser Ebene. Welchen Lagen von $g_1$, $g_2$ entsprechen folgende Aufgaben:

$$M_1 \cap M_2 \begin{cases} \text{ist eine unendliche Menge} \\ \text{enthält genau einen Punkt } S \\ \text{enthält keinen Punkt? } (\uparrow \text{S. } 43) \end{cases}$$

8. Zeichnen Sie Venndiagramme für $A \cap B \cap C$, wobei
a) $A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C \neq \emptyset, \quad B \cap C = \emptyset$,
b) $A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset$ ist! (↑ S. 43)

9. Es seien in einer Grundmenge $G$
$M_1 = \{m;\ \mathsf{H}_1(m)\}$, $M_2 = \{m;\ \mathsf{H}_2(m)\}$, $D = M_1 \cap M_2$;
Beweisen Sie $\overline{D} = \{m;\ \overline{\mathsf{H}_1(m)}$ oder $\overline{\mathsf{H}_2(m)}\}$!
Drücken Sie $\overline{D}$ durch $M_1$ und $M_2$ aus!
Stellen Sie die Mengen in einem Venndiagramm dar! (↑ S. 46)

10. $G$, $M_1$, $M_2$ haben die Bedeutung von Aufgabe 9; $V = M_1 \cup M_2$.
Beweisen Sie $\overline{V} = \{m;\ \overline{\mathsf{H}_1(m)}$ und $\overline{\mathsf{H}_2(m)}\}$!
Drücken Sie $\overline{V}$ durch $M_1$ und $M_2$ aus!
Stellen Sie die Mengen in einem Venndiagramm dar! (↑ S. 46)

11. Bilden Sie jeweils den Durchschnitt und die Vereinigung der Mengen $M_1$ und $M_2$, wobei die Grundmenge mit $M$ bezeichnet ist:
a) $M_1 = M_2$
b) $M_1$ beliebig, $M_2 = \emptyset$
c) $M_1 = M_2 = \emptyset$
d) $M_1 \subseteqq M_2$

Für die Aufgaben e), f) und g) gilt:
$M = N$ sei die Menge der natürlichen Zahlen.

e) $M_1$: Menge aller geraden Zahlen unterhalb 20
$M_2$: Menge aller durch drei teilbaren Zahlen unterhalb 20
f) $M_1$: Menge der Vielfachen von 12
$M_2$: Menge der Vielfachen von 20
g) $M_1$: Menge der Teiler von 12
$M_2$: Menge der Teiler von 20 (↑ S. 46)

12. a) $M$ sei die Menge aller Punkte einer Ebene.
$M_1$ sei die Punktmenge einer Kreisscheibe dieser Ebene, wobei der Rand nicht mitgerechnet wird.
$M_2$ sei die Menge der Punkte im Inneren und auf dem Rand eines einbeschriebenen Quadrats.
Bilden Sie den Durchschnitt und die Vereinigungsmenge der Mengen $M_1$, $M_2$!
b) $M$ wie in Aufgabe 12a).
$M_1$ wie in Aufgabe 12a), wobei der Rand mitzurechnen ist.
$M_2$ sei die Menge der Punkte im Innern eines umbeschriebenen Quadrats.
Bilden Sie den Durchschnitt und die Vereinigung der Mengen $M_1$ und $M_2$!

Anleitung zu Aufgabe 12: Unterscheiden Sie eine Figur ohne Rand (auch offene Punktmenge genannt) von einer Figur mit Rand (auch geschlossene Punktmenge genannt), indem Sie die Figur im ersten Fall mit gestricheltem, im zweiten mit durchgezogenem Rand zeichnen! (↑ S. 46)

13. Bilden Sie Durchschnitts- und Vereinigungsmenge für die Mengen $M_{14}$ und $M_{15}$ von S. 30! (↑ S. 46)

14. Gegeben seien zwei verschiedene Mengen $A$ und $B$. Unter welchen Bedingungen ist jeweils die folgende Aussage richtig?

a) $B \subseteqq (A \cup B)$ b) $(A \cup B) \subseteqq B$ c) $B = A \cap B$

d) $(A \cup B) \subseteqq A$ e) $(A \cap B) \subseteqq A$ f) $A \subseteqq (A \cap B)$

(↑ S. 46)

15. Die Elemente der Mengen $A, B, C$ seien einer Grundmenge $M$ entnommen. Unter $n(X)$ soll die Elementeanzahl der Menge $X$ verstanden werden. Zeigen Sie die Richtigkeit der Formel

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$ ! (↑S. 46)

16. In einer Schule mit 600 Schülern wird eine Umfrage veranstaltet, welche Jugendzeitschriften abonniert werden. Es werden gelesen: „Technikus" (von 50 Schülern), „Urania" (von 40 Schülern) und „Wissenschaft und Fortschritt" (von 25 Schülern). Weiter wird festgestellt, daß 15 Schüler zugleich „Technikus" und „Urania" abonniert haben, 10 Schüler zugleich „Technikus" und „Wissenschaft und Fortschritt" und 5 Schüler zugleich „Urania" und „Wissenschaft und Fortschritt". Kein Schüler hat zugleich alle drei Zeitschriften abonniert.
Wieviel Schüler dieser Schule haben genau eine der drei Zeitschriften abonniert und wieviel gar keine? (↑ S. 46)

17. a) Die Grundmenge $M$ umfasse alle Kinder einer Schule,
$M_1$ alle Kinder der Klassen 1, 2, 3, 4,
$M_2$ alle Mädchen aus $M$.
Die Grundmenge $M$ wird dadurch in vier elementefremde Teilmengen I, II, III, IV zerlegt (Bild 2.26.). Die einzelnen Felder der Figur umfassen bestimmte Schülergruppen. Kennzeichnen Sie diese!

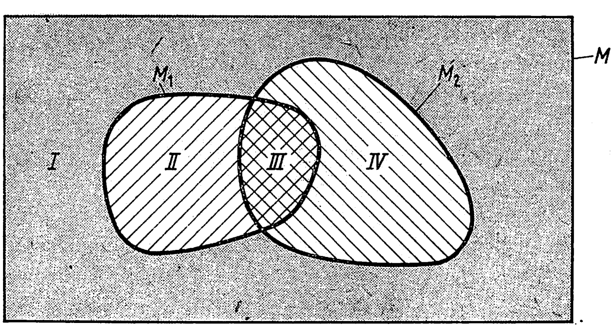



Bild 2.26.

b) Die Felder I, II, III und IV (Bild 2.26.) können folgendermaßen beschrieben werden:
$\mathrm{I} \triangleq M \setminus (M_1 \cup M_2)$, $\mathrm{II} \triangleq M_1 \setminus M_2$, $\mathrm{III} \triangleq M_1 \cap M_2$, $\mathrm{IV} \triangleq M_2 \setminus M_1$.
Versuchen Sie, diese Felder ohne Verwendung der Differenzbildung zu kennzeichnen, z. B. $\mathrm{I} \triangleq \overline{M_1 \cup M_2}$! (↑ S. 47)

**18.** Beweisen Sie, daß allgemein für zwei Mengen $M_1$, $M_2$ gilt:
$(M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1) \Leftrightarrow M_2 = M_1$! (↑ S. 47)

**19.** Es sei $M$ die Menge aller Punkte einer Ebene, $g_1$ eine beliebige Gerade dieser Ebene und $M_1$ eine der beiden Halbebenen, in die $g_1$ die Ebene teilt. Zeichnen Sie eine zweite Gerade $g_2$ in dieser Ebene und bestimmen Sie $M_2$ als eine der beiden durch $g_2$ entstehenden Halbebenen so, daß
a) $M_1 \subset M_2$, b) $M_1 \cup M_2 = M$, c) $M_1 \setminus M_2 = \varnothing$!
(Bei $M_1$ und $M_2$ ist der Rand jeweils mitzuzählen.) (↑ S. 47)

**20.*** $M$ sei die Menge aller Punkte einer Ebene. Es sei $A$ ein Punkt aus $M$. $K$ sei die Menge der Punkte von $M$, die den Abstand $r = 3$ cm von $A$ haben (Kreislinie). $F$ sei die Punktmenge der zu $K$ gehörenden Kreisscheibe ohne Rand (offene Kreisscheibe), $G$ die zugehörige Kreisscheibe mit Rand (geschlossene Kreisscheibe).

a) Drücken Sie jede der drei Mengen $G$, $F$, $K$ mit Hilfe der Zeichen $\cup$, $\cap$ oder $\setminus$ durch die beiden anderen Mengen aus!
b) Was ist unter einer offenen, was unter einer geschlossenen Kreisscheibe mit dem Radius $r = 0$ cm zu verstehen?
c) Was ist die Vereinigungsmenge aller offenen Kreisscheiben um $A$ als Mittelpunkt mit beliebigem Radius? Ändert sich in der letzten Antwort etwas, wenn statt der offenen Kreisscheiben solche mit Rand zugrunde gelegt werden? (↑ S. 47)

**21.** Es seien zwei einander schneidende Kreise $K_1$ und $K_2$ gegeben, die zugehörigen offenen Kreisscheiben seien $F_1$ und $F_2$, die zugehörigen geschlossenen Kreisscheiben $G_1$ und $G_2$.
Was bedeuten

a) $K_1 \setminus K_2$    b) $G_1 \setminus G_2$    c) $G_1 \cup G_2$    d) $G_1 \cap G_2$
e) $(G_1 \cup G_2) \setminus (K_1 \cup K_2)$    f) $(G_1 \setminus K_1) \cap G_2$    g) $(G_1 \setminus F_1) \cap (G_2 \setminus F_2)$?
(↑ S. 47)

**22.*** Gegeben sind folgende Figuren (Bild 2.27. a und b),
ein Dreieck $D$, ein Kreis $K$, ein Quadrat $Q$. Unter $D \,//\, K$ soll die Menge aller Punkte verstanden werden, die in $D$ oder in $K$, aber nicht in beiden Figuren zugleich liegen. In Bild 2.27. a ist $D \,//\, K$ horizontal und $Q$ vertikal schraffiert. In Bild 2.27. b ist $Q \cap D$ horizontal, $Q \cap K$ vertikal schraffiert.

a) Überzeugen Sie sich davon, daß
$Q \cap (D \,//\, K) = (Q \cap D) \,//\, (Q \cap K)$ gilt!
b) Wie steht es, wenn Sie die Zeichen $//$ und $\cap$ in dieser Gleichung miteinander vertauschen?
c) Drücken Sie $B \,//\, K$ durch die Symbole $\cap$, $\cup$, $\setminus$ aus! (↑ S. 47)

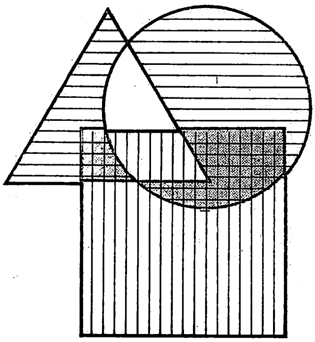


Bild 2.27.a

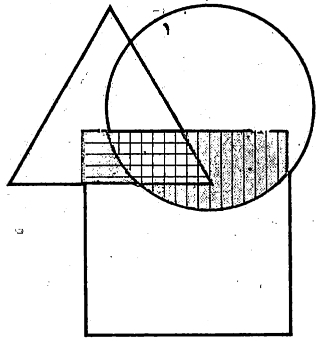


Bild 2.27.b

**23.** Welche Gestalt nehmen die Distributivgesetze
a) für $M_1 = \emptyset$, b) für $M_2 = \emptyset$, c) für $M_1 = M_2 = \emptyset$ an? (↑ S. 51)

**24.*** Es seien $A$, $B$, $C$ Teilmengen von $M$. Beweisen Sie
a) $A \cap \overline{B} = A \setminus B$
b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$!
Zeichnen Sie Venndiagramme für die links und rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Mengen!
d) Welche Gestalt nimmt Formel c) an, wenn $B$ Teilmenge von $A$ ist und $A$ und $C$ elementefremd sind? (↑ S. 54)

**25.** Es sei $M$ eine endliche Menge, $P(M)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie, daß sich die Anzahl $n'$ der Elemente von $P(M)$ verdoppelt, wenn Sie zu $M$ ein Element zufügen! Die Formel $n' = 2^n$ ($n$ = Elementezahl von $M$) soll dabei nicht benutzt werden. (↑ S. 56)

**26.** Es sei $M = \{a, b, c, d, e\}$.
a) Wieviel Elemente besitzt $M \times M$?
b) Wieviel Elemente besitzt $M \times \emptyset$? (↑ S. 59)

# 3. RELATIONEN

Leihen wir unser Ohr einmal dem Gespräch bei einem Kaffeeklatsch!
„Verkehrt Herr A. noch mit Fräulein B.?" – „Sicher! Die beiden stehen sogar in ganz intimen Beziehungen!" – „Na, daran zweifle ich. Wenn da überhaupt von Liebe die Rede sein kann, ist es gewiß eine einseitige. Ich glaube, das sind eher freundschaftliche Beziehungen."
Intime Beziehungen – freundschaftliche Beziehungen – Liebe – ja, was ist das eigentlich die Liebe? Ist sie eine Beziehung **zwischen** zwei Menschen, die beide zu einer Einheit zusammenfaßt, oder ist sie nur eine gefühlsbetonte Hinwendung eines Menschen zu einem anderen, die unabhängig davon ist, ob sie erwidert wird? Prof. Dr. Hanns Schwarz schreibt dazu [9]: „Es scheint mit der Definition der Liebe ähnlich zu sein wie mit der Intelligenz: Jeder glaubt sie zu besitzen, aber keiner weiß so recht, was sie ist." Und später: „Ob ein Zusammenprall der Gefühle wahre Liebe ist, wird ... im Miteinanderwachsen entschieden."
Hier soll jedoch nicht der aussichtslose Versuch unternommen werden, zur Definition der Liebe einen neuen Gedanken beizusteuern. Interessant ist für uns hier nur die Tatsache, daß es sich doch wohl um eine **Beziehung** handelt, sei sie nun beiderseitig oder einseitig von einem Menschen auf einen anderen gerichtet.

## 3.1. Der Relationsbegriff

Beziehungen umgeben uns überall. Zwischen Dingen und Personen können die verschiedensten Beziehungen bestehen: Ein Gegenstand kann über, unter, neben einem anderen liegen, ein Mensch kann in freundschaftlichen, verwandtschaftlichen, beruflichen Beziehungen zu einem anderen stehen, ein Gegenstand kann einer Person gehören, eine Person kann Verfügungsrecht über gewisse Gegenstände haben usw. In der Ordnung des täglichen Lebens, der Wirtschaft, des Handels, des Rechtswesens und

natürlich auch innerhalb jeder Wissenschaft spielen Beziehungen eine wichtige Rolle. Das gilt auch für die Mathematik. Der Mathematiker betrachtet Beziehungen („Relationen“) zwischen den Elementen von Mengen, er untersucht die Eigenschaften von Relationen, hebt besonders häufig vorkommende wichtige Typen von Relationen heraus und verwendet sie für den Aufbau seiner Wissenschaft.
Gehen wir von einem Beispiel aus.

BEISPIEL 1:
Auf meinem Tisch liegt eine Menge $M$ von Büchern (Bild 3.1.). Es sind sechs Bände meines Konversationslexikons, in denen ich mich über einen bestimmten Gegenstand informieren will, Band 2, 7, 11, 12, 14, 15. Drei Bände liegen übereinander, Band 15 über Band 14, darunter liegt Band 2, daneben die beiden Bände 11 und 12, und zwar 12 über 11, und einzeln liegt Band 7, in dem ich gerade gelesen habe. Greife ich irgendein Paar von Büchern $a$, $b$ heraus, so liegt entweder $a$ über $b$ oder nicht.
Die Beziehung (Relation) „über einem anderen Buch liegen“ soll durch den Buchstaben $R$ abgekürzt werden. „$a R b$“ soll bedeuten: „Buch $a$ liegt über Buch $b$“. Es gilt also $12\ R\ 11$, $14\ R\ 2$, $15\ R\ 14$, $15\ R\ 2$, aber z. B. nicht $7\ R\ 11$ und nicht $11\ R\ 12$. Sehen wir einmal von dem speziellen räumlichen Charakter der Beziehung $R$ ab, um ganz allgemein Relationen mit Hilfe von Mengen zu erklären. Wir verwenden für die Menge $M$ der Bücher die Darstellung als Venndiagramm, stellen also die einzelnen Bücher als Punkte dar. Die Beziehung $R$ soll durch einen Pfeil angezeigt werden. (Dieser Pfeil hat natürlich nichts zu tun mit dem in Kapitel 1 verwendeten Pfeil, der die Beziehung „wenn – so“ ausdrückt.) Wenn wir die jetzt überflüssig gewordene Umrandung von $M$ fortlassen, entsteht Bild 3.2. Die Gesamtheit der Pfeile repräsentiert dann die Relation $R$.

Aufgabe 1

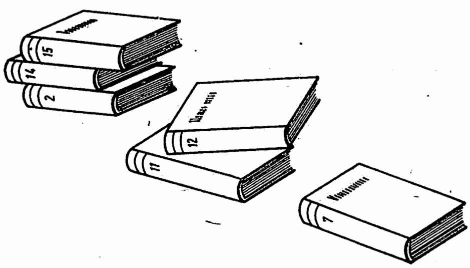


Bild 3.1.

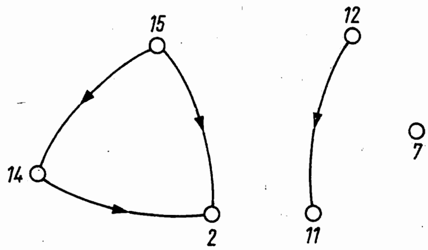



Bild 3.2.

In dem folgenden Beispiel gehen wir von zwei Mengen aus.

BEISPIEL 2:
$M_1$ sei die Menge der Einwohner von A-Stadt, $M_2$ die von B-Stadt. Es sei $m_1$ ein beliebiges Element von $M_1$, $m_2$ ein beliebiges Element von $M_2$. Die Schreibweise $m_1 R m_2$ soll bedeuten, daß der Einwohner von A-Stadt $m_1$ mit dem Einwohner von B-Stadt $m_2$ „korrespondiert“, d. h., daß er irgendwann einmal eine Postsendung, sei es einen Brief, eine Drucksache, ein Paket, eine Geldsendung oder dergleichen, an $m_2$ geschickt hat. Dann läßt sich genau feststellen, ob $m_1 R m_2$ gilt oder nicht. Ausschlaggebend dafür

soll die Befragung des Einwohners von A-Stadt $m_1$ sein. Wir stellen die beiden Mengen $M_1$ und $M_2$ wieder mit Hilfe von Punkten dar, wobei hier natürlich nur einige gezeichnet werden, und verwenden wieder Pfeile für die Beziehung. Wie im vorigen Beispiel können von einem Element aus $M_1$ mehrere Pfeile, ein oder gar kein Pfeil ausgehen, ein Element aus $M_2$ kann Endpunkt mehrerer Pfeile sein, es kann ein oder gar kein Pfeil an ihm enden (Bild 3.3.).

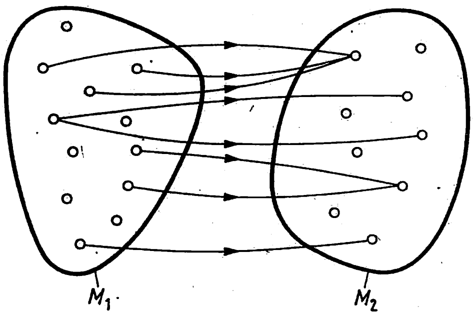


Bild 3.3.

Man beachte, daß wie im ersten Beispiel die Reihenfolge eine Rolle spielt, daß die Relation jetzt aber im Gegensatz zu jenem Beispiel zwischen den Elementen zweier verschiedener Mengen besteht. Ändern wir das Beispiel ab, indem wir die Vereinigungsmenge $M$ von $M_1$ und $M_2$ bilden und die Relation sinngemäß für alle Elemente aus $M$ erklären, so wird $m_1 R m_2$ zwar oft, aber nicht immer verbunden sein mit $m_2 R m_1$. Zum Beispiel versendet ein in A-Stadt wohnender Lotterieeinnehmer ($m_1$) regelmäßig in alle Orte des Landes Postwurfsendungen mit Reklameangeboten, die von vielen Empfängern ungelesen in den Papierkorb geworfen werden. Dieses Schicksal mag auch die Sendung von $m_1$ an $m_2$ erlitten haben. Aus $m_1 R m_2$ kann also nicht geschlossen werden $m_2 R m_1$.

In den folgenden Beispielen ist wieder $M_1 = M_2$, so daß die Umrandung der Menge weggelassen werden kann.

BEISPIEL 3:
Im dritten Beispiel soll $M$ die Menge aller Einwohner eines bestimmten Landes bedeuten. Sind $a$ und $b$ Elemente von $M$, so soll $a R b$ bedeuten: „$a$ verdient den Lebensunterhalt für $b$." Dies wird oft der Fall sein, wenn $a$ Vater oder Mutter von $b$ ist. Wir benutzen wieder die Pfeildarstellung. Der Punkt, der das Element $a$ bezeichnet, soll der Einfachheit halber auch mit $a$ bezeichnet werden.
Sobald von irgendeinem Punkt $a$ überhaupt ein oder mehrere Pfeile ausgehen, wird auch ein Pfeil von $a$ zu $a$ zurückführen müssen; denn wenn $a$ für den Lebensunterhalt von anderen Personen aufkommt, wird man annehmen dürfen, daß $a$ seinen eigenen Lebensunterhalt auch bestreitet. Wir wollen solch einen Pfeil, der von $a$ zu $a$ (in beiden Richtungen!) führt, durch eine am Punkt $a$ angebrachte Schleife wiedergeben. Nicht jeder Punkt trägt eine Schleife; zum Beispiel haben in Bild 3.4. die Punkte $b$, $e$, $f$, $g$ keine Schleife. Bild 3.4. kann folgende Situation widerspiegeln: Herr $a$ unterhält seine alte Mutter $b$, das berufstätige Ehepaar $c$, $d$ hat drei kleine Kinder $e$, $f$, $g$, die Personen $h$ und $i$ sind berufstätig und alleinstehend.

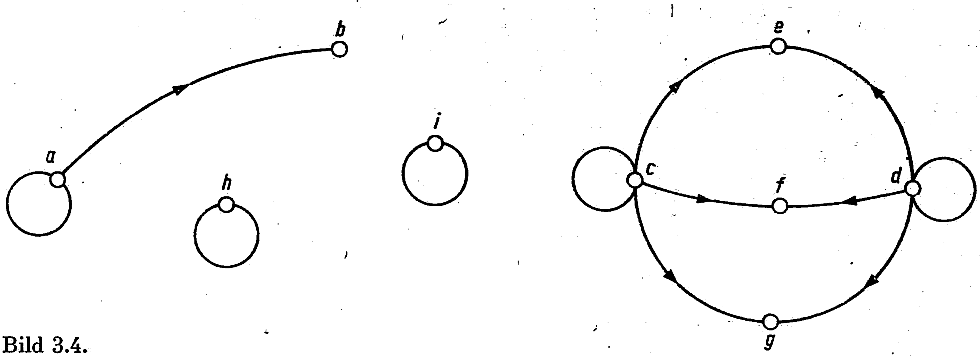



Bild 3.4.

BEISPIEL 4:
Wir wählen als Menge $M$ die Gesamtheit der Schüler einer bestimmten Straße von C-Stadt. Schüler der Volkshochschule sollen dabei nicht mitgezählt werden. Sind $a$ und $b$ Elemente von $M$, so soll $aRb$ bedeuten: „$a$ besucht dieselbe Schule wie $b$." Schüler Peter steht z. B. zu seinem Freund Christian nicht in der Relation $R$, wenn sie verschiedene Schulen besuchen. In Bild 3.5. werden 9 Schüler erfaßt, die in die Schulen $A$, $B$, $C$ gehen.

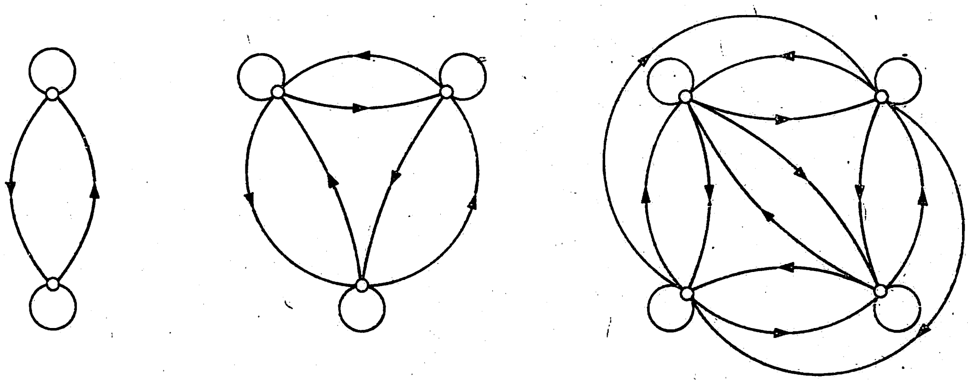



Bild 3.5.

Benutzen wir wieder die Pfeildarstellung, so geht immer dann, wenn ein Pfeil von $a$ zu $b$ geht, auch ein Pfeil von $b$ zu $a$. Ferner stellen wir fest, daß, wenn ein Pfeil von $a$ zu $b$ und einer von $b$ zu $c$ geht, auch einer von $a$ zu $c$ führen muß. Außerdem muß jeder Punkt eine Schleife tragen (denn jeder Schüler geht in dieselbe Schule wie er selbst!).

BEISPIEL 5:
Als nächstes Beispiel wollen wir die Menge aller Schüler und Schülerinnen einer bestimmten Schule betrachten, und $aRb$ soll bedeuten: „$a$ hat $b$ als Schwester." Wenn also $b$ ein Junge ist, so besteht $aRb$ für kein $a$, auch wenn $a$ und $b$ Geschwister sind. Zum Beispiel seien die Schüler Dieter, Monika und Renate Geschwister, desgleichen Stefan und Uwe, während Bodo und Petra keine Geschwister in der Schule haben. Die Pfeildarstellung liefert Bild 3.6.

Aufgabe 2

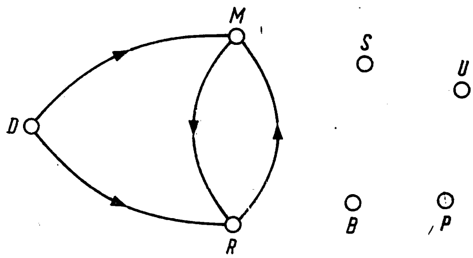



Bild 3.6.

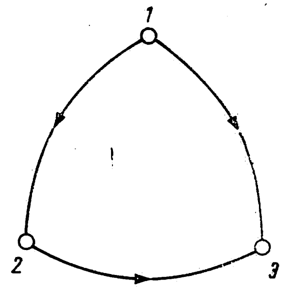



Bild 3.7.

BEISPIEL 6:

Im folgenden Beispiel sei $M$ die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3. Unter $aRb$ soll verstanden werden: „$a$ ist kleiner als $b$." Zum Beispiel gilt $1 < 3$, aber nicht $3 < 3$ (Bild 3.7.). Soll $a\ R\ b$ dagegen bedeuten, daß $a$ nicht größer ist als $b$, so muß in Bild 3.7. noch jedes Element mit einer Schleife versehen werden. Legen wir für $M$ die Menge aller natürlichen Zahlen zugrunde, so erhalten wir aus jedem geordneten Paar $[a, b]$, das in der Relation $R$ ($a$ nicht größer als $b$) steht, sofort eine unendliche Menge weiterer Paare $[a, c]$, für die $a\ R\ c$ gilt, nämlich alle Paare mit $b < c$.
Die Tatsache, daß der Bereich der natürlichen Zahlen durch diese Relation geordnet ist, stellt eine seiner wichtigsten Eigenschaften dar. Dies wird später durch die allgemeinen Betrachtungen geordneter Mengen in Kapitel 6 untermauert werden. Leider war der frühere Rechenunterricht zu einseitig auf die Rechenoperationen ausgerichtet und überging die wichtigen Ordnungsbeziehungen völlig, obwohl sie ohne Zweifel, wie sich gezeigt hat, bereits von Kindern im siebenten Lebensjahr erfaßt werden können. Die dafür aufzuwendende Zeit beeinträchtigt die Einübung der Rechenoperationen keineswegs, kommt ihr vielmehr zugute, weil Größenvergleiche ein nur formales Erarbeiten der Rechenoperationen verhindern. Mit Recht gehören die Größer-, die Kleiner und die Gleichheitsrelation jetzt zum Stoff des Mathematikunterrichts von Klasse 1. Die ‚Größer-kleiner'-Beziehung bildet die Grundlage für die wichtige Lehre von den Ungleichungen. Sie soll uns später noch mehr beschäftigen.

Aufgabe 3

BEISPIEL 7:

Wir wenden uns jetzt einer anderen Beziehung zwischen Zahlen zu, die gleichfalls in der Unterstufe und später in der Bruchrechnung eine Rolle spielt, der Teilbarkeit einer Zahl durch eine andere.
$M$ sei wieder die Menge der natürlichen Zahlen. Wir erklären $aRb$ als „$a$ teilt $b$", kurz geschrieben $a \mid b$. Zum Beispiel gilt $3 \mid 12$. Für jede natürliche Zahl $a$ gilt $1 \mid a$ und $a \mid a$. Wie soeben liefert uns jedes Paar $[a, b]$, für das $aRb$ gilt, sofort unendlich viele weitere Paare $[a, c]$ mit $aRc$, nämlich mindestens alle Paare $[a, c]$, bei denen $c$ ein Vielfaches von $b$ ist. In Bild 3.8. haben wir uns auf die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 beschränkt und der Übersichtlichkeit halber die Schleifen weggelassen.

Aufgabe 4

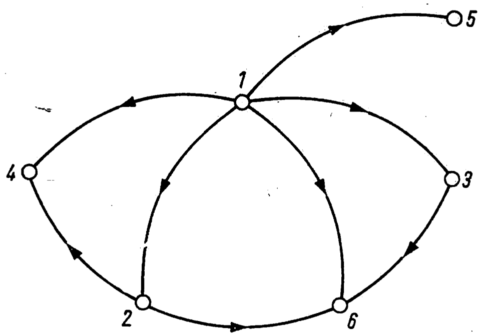



Bild 3.8.

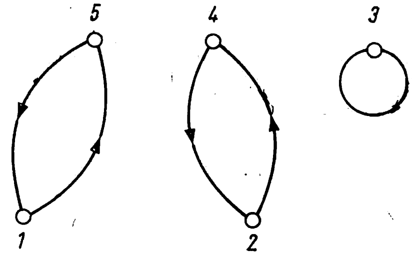



Bild 3.9.

BEISPIEL 8:
Wählen wir jetzt als Beziehung eine Zerlegung, wie sie oft im ersten Schuljahr vorkommt. Es sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Unter $a R b$ soll verstanden werden: „$a + b = 6$." Dann gilt $1 R 5$, $2 R 4$, $3 R 3$, $4 R 2$, $5 R 1$ (Bild 3.9.).

Für das nächste Beispiel brauchen wir einige Erläuterungen über den Begriff des rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems.
Dem Leser wird von der Schule her noch die Zahlengerade bekannt sein, die der Veranschaulichung der rationalen Zahlen und – wenigstens teilweise – der Operationen mit ihnen dient. Da der Aufbau von Zahlenbereichen einem späteren Kapitel vorbehalten ist, soll hier nur kurz daran erinnert werden, daß eine **rationale Zahl** durch einen positiven oder negativen Bruch $\frac{a}{b}$ ($a$, $b$ sind ganze Zahlen) bzw. durch 0 dargestellt werden kann; dabei gehören Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen, zu derselben rationalen Zahl. Jeder rationalen Zahl denken wir einen Punkt einer horizontal verlaufenden Geraden („Zahlengeraden") zugeordnet, der Größe nach von links nach rechts. Wir müssen uns diese Gerade als lückenlos durch Punkte erfüllt vorstellen. Die Frage ist nur, ob auf der Zahlengeraden der rationalen Zahlen jedem Punkt auch eine Zahl entspricht. Zwischen zwei Punkten, die mit rationalen Zahlen beziffert sind, liegt dann immer noch mindestens einer, der dieselbe Eigenschaft hat, zum Beispiel der genau in der Mitte zwischen ihnen liegende. So liegt zwischen den Punkten von $\frac{53}{100}$ und $\frac{54}{100}$ der Punkt für die rationale Zahl $\frac{107}{200}$. Es gilt $\frac{53}{100} < \frac{107}{200} < \frac{54}{100}$. Obwohl die Punkte, die zu rationalen Zahlen gehören, auf der Zahlengeraden überall dicht liegen, gibt es unendlich viele Punkte, die nicht mit rationalen Zahlen versehen sind; zum Beispiel hat ein Kreis, dessen Durchmesser ein Zentimeter lang ist, einen Umfang, dessen Länge die Maßzahl $\pi$ hat. Denkt man sich eine Strecke der Länge $\pi$ cm vom Nullpunkt aus abgetragen, so gelangt man zu einem Punkt, der, wie hier nicht bewiesen werden kann, keiner rationalen Zahl entspricht. Allerdings läßt sich durch konkrete Messungen nicht entscheiden, ob zu einem vorgegebenen Punkt eine rationale Zahl gehört oder nicht. Messungen führen nämlich stets auf Näherungswerte, und diese lassen sich stets durch rationale Zahlen wiedergeben. Die Anzahl der sicheren Dezimalen hängt dabei von der Art der Instrumente und der angewandten Sorgfalt ab.

Zahlen wie $+\pi$, $-\pi$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt[3]{10}$ und unendlich viele andere gehören dem Bereich $P$ der **reellen Zahlen** an. Von ihm brauchen wir hier nur folgende Tatsache: Man kann jeder reellen Zahl einen Punkt einer horizontal verlaufenden Geraden zuweisen, wieder der Größe nach von links nach rechts. Diese Punkte erfüllen dann die Gerade, die als Zahlengerade der reellen Zahlen bezeichnet werden kann, lückenlos.
Wir zeichnen jetzt eine horizontal und eine vertikal verlaufende Gerade. An ihren Schnittpunkt schreiben wir den Buchstaben $O$, eine Abkürzung für das lateinische Wort *origo* (Ursprung). Wir wählen eine Strecke als Einheit und tragen sie auf beiden Geraden in beiden Richtungen von $O$ aus ab. Die Endpunkte werden wie in Bild 3.10.

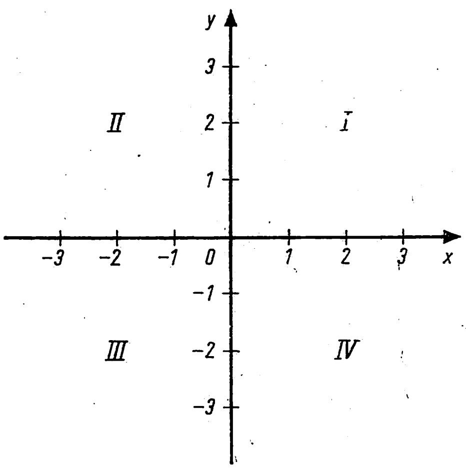



Bild 3.10.

beziffert. Den Richtungssinn, in der die Zahlen wachsen, geben wir durch eine Pfeilspitze an. Auf jeder der beiden Geraden denken wir uns den ganzen Zahlenbereich $P$ abgetragen. Wir haben damit zwei aufeinander senkrechte Zahlengeraden. Solch ein Geradenpaar wird nach dem französischen Mathematiker DESCARTES (RENÉ DESCARTES, 1596 bis 1650; latinisiert CARTESIUS) als **kartesisches rechtwinkliges Koordinatensystem** bezeichnet. Der Punkt $O$ heißt der **Koordinatenursprung**, die horizontal verlaufende Gerade **$x$-Achse**, die vertikal verlaufende **$y$-Achse**, beide zusammen **Koordinatenachsen**. Die Strecke $\overline{O1}$ heißt **Einheitsstrecke**. Die vier Teile, in die die Ebene durch die Koordinatenachsen zerlegt wird, sind die **Quadranten**. Wir wollen sie durch die römischen Ziffern I, II, III, IV voneinander unterscheiden.
Ist $A$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so fällen wir von $A$ aus auf die Koordinatenachsen die Lote und gelangen zu den Punkten $A'$ bzw. $A''$. Die zu diesen Punkten gehörenden Zahlen lesen wir ab. In Bild 3.11. sind es die Zahlen $-3$ auf der $x$-Achse, $+2$ auf der $y$-Achse. Umgekehrt gehört zu jeder Zahl $x$ ein Punkt $A'$ der $x$-Achse, zu jeder Zahl $y$ ein Punkt $A''$ der $y$-Achse. Ziehen wir wie in Bild 3.11. durch $A'$ und $A''$ die Senkrechten zu den Achsen, so erhalten wir einen Schnittpunkt $A$, der zu dem geordneten Zahlenpaar $[x, y]$ gehört. In Bild 3.12. sind die Punkte angegeben, die zu den Paaren $[2, 1]$, $[-2, 1]$, $[-2, -2]$, $[1, -1]$ gehören.
Die beiden Zahlen $x$ und $y$, die in Bild 3.11. den Punkt $A$ charakterisieren, heißen die Koordinaten von $A$, und zwar wird $x$ als **$x$-Koordinate** oder **Abszisse**, $y$ als **$y$-Koordinate**

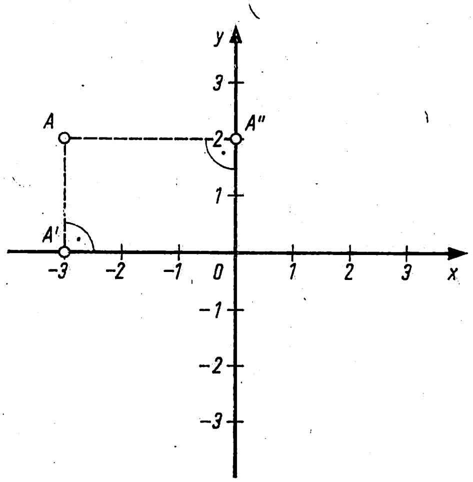


Bild 3.11.

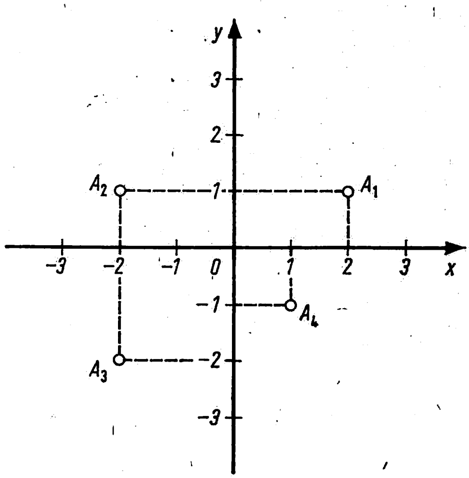


Bild 3.12.

oder kurz **Ordinate** von $A$ bezeichnet. Es ist üblich, einen Punkt $A$ in bezug auf das Koordinatensystem in der Form $A(x; y)$ anzugeben. Jeder Punkt der Ebene wird durch ein geordnetes Zahlenpaar gekennzeichnet. Der Koordinatenursprung $O$ entspricht dem Paar $[0, 0]$, die Punkte der $x$-Achse den Paaren $[x, 0]$, die der $y$-Achse den Paaren $[0, y]$. Die ganze Ebene als Punktmenge kann als Bild des Kreuzproduktes $P \times P$ der Menge der reellen Zahlen auf sich selbst aufgefaßt werden.

Wir suchen nun alle Punkte der Ebene, die die $x$-Koordinate $+3$ haben (Bild 3.13.). Alle diese Punkte liegen auf einer Geraden $g$ und füllen sie ganz aus. Die Gerade $g$ verläuft durch den Punkt $A'$ (3; 0) der $x$-Achse und steht auf dieser senkrecht. Jeder ihrer Punkte $P$ trägt eine Bezifferung der Form $P(3; y)$. Es ist üblich, die Gerade $g$ durch die Gleichung $x = 3$ zu beschreiben (Näheres hierzu ↑ 325 ff.). Entsprechend bilden wir die Menge aller Punkte, für die $y = -2$ ist. Sie liegen auf einer Geraden $h$, die sie völlig ausfüllen und die durch den Punkt $A''$ $(0; -2)$ der $y$-Achse geht und dort auf dieser senkrecht steht. Ein Punkt $Q$ der Geraden $h$ kann geschrieben werden als $Q$ $(x; -2)$. Die Gleichung von $h$ lautet $y = -2$.

Nach dieser kleinen Auffrischung der Schulkenntnisse über das Koordinatensystem wenden wir uns jetzt dem nächsten Beispiel zu.

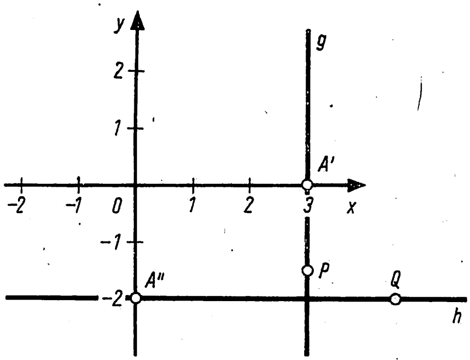


Bild 3.13.

BEISPIEL 9:

$M$ sei die Menge der Punkte der Ebene, dargestellt durch ihre Koordinaten $x$, $y$ in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem. Wir wollen versuchen, diese Punkte zu ordnen. Dazu verabreden wir die Festsetzung: „Punkt $P_1$ $(x_1; y_1)$ liegt vor Punkt $P_2$ $(x_2; y_2)$, wenn $x_1 < x_2$ und zugleich $y_1 < y_2$ ist". Das wollen wir kurz ausdrücken durch $P_1 R P_2$. Halten wir einmal einen Punkt $P_0$ fest und veranschaulichen wir uns die Lage aller Punkte $A$, die in diesem Sinn „vor" $P_0$ liegen, für die also gilt $A R P_0$, sowie aller Punkte $C$, die „hinter" $P_0$ liegen, für die also gilt $P_0 R C$.

Dies gelingt uns am besten, wenn wir uns vorstellen, daß die Ebene durch den Punkt $P_0$ wie in Bild 3.14. in vier Felder eingeteilt wird, die in $P_0$ zusammenstoßen. Wir wollen dabei $P_0$ zu keinem der Felder zählen. Alle Punkte des Feldes I liegen „hinter" $P_0$, alle des Feldes III „vor" $P_0$. Von den Feldern II und IV kann man weder das eine noch das andere aussagen. Ist also $A$ ein Punkt aus I, $B$ aus II, $C$ aus III, $D$ aus IV,

so gilt $P_0 R A$, $C R P_0$,

aber nicht $B R P_0$ oder $P_0 R B$,

ebenso nicht $D R P_0$ oder $P_0 R D$.

Auf alle Fälle kann man von jedem Punktepaar $[P, Q]$ sagen, ob $P R Q$ gilt oder nicht. Man beachte, daß bei der so erklärten Relation natürlich $P_0 R P_0$ für keinen Punkt $P_0$ gilt. Auch die Punkte der Geraden $x = x_0$ und $y = y_0$ liegen weder „vor" noch „hinter" $P_0$.

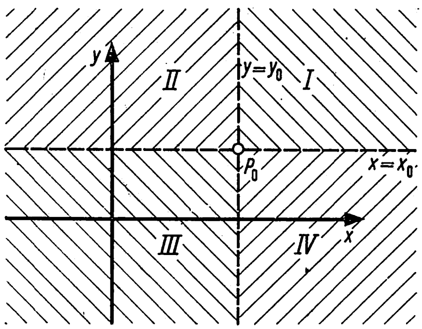


Bild 3.14.

Aufgabe 5

BEISPIEL 10:

Wir gehen jetzt von den Punkten zu den Geraden einer Ebene über. Als Relation wählen wir die Parallelität. Dabei heißen zwei Geraden parallel, wenn sie die gleiche Richtung haben. Jede Gerade ist demnach zu sich selbst parallel. Wählen wir beliebig zwei Geraden der Ebene, so gilt entweder die Relation $a R b$, oder sie gilt nicht. Das Entsprechende ist der Fall, wenn wir als Relation die Beziehung des Aufeinandersenkrechtstehens betrachten. Bild 3.15.a stellt sechs Geraden dar, von denen einige zueinander parallel sind und einige aufeinander senkrecht stehen. Bild 3.15.b spiegelt die Relation *Gerade a parallel zu Gerade b*, Bild 3.15. c die Relation *Gerade a senkrecht zu Gerade b* wider.

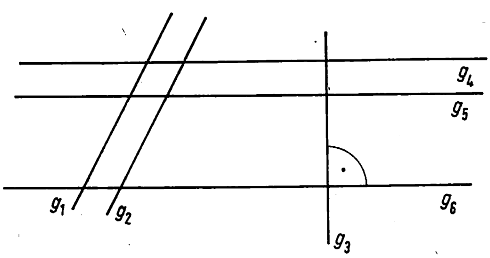


Bild 3.15.a

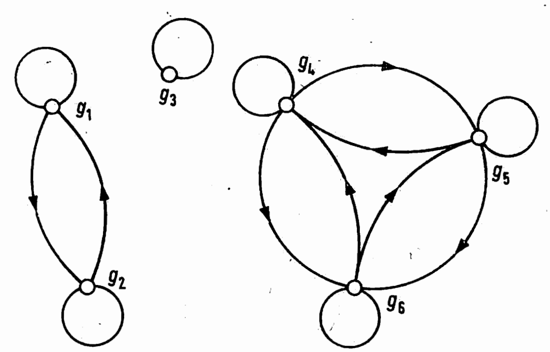



Bild 3.15.b

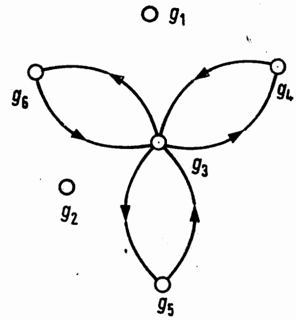



Bild 3.15.c

BEISPIEL 11:
Wählen wir nun als Menge $M$ die Menge aller Bürger eines bestimmten Landes. Die Relation $R$ bedeute: „Vater sein". Unter $aR\,b$ verstehen wir also: „$a$ ist Vater von $b$". Von je zwei Elementen $a$, $b$ aus $M$ müßte stets entweder gelten „$aR\,b$" oder „nicht $aR\,b$". Nun gibt es aber Prozesse, in denen eine Vaterschaft angefochten wird, und das zeigt, daß die Feststellung $aR\,b$ nicht ohne weiteres immer zu treffen ist. Dennoch ist objektiv entweder $a$ Vater von $b$ oder nicht. Der Mathematiker spricht dann und nur dann von einer Relation, wenn er sicher ist, daß sie für gewisse Elemente entweder besteht oder nicht besteht. Das bedeutet nicht, daß dies stets in jedem konkreten Fall entschieden werden kann. Das Vatersein stellt also im mathematischen Sinn eine Relation dar, auch wenn wir vielleicht in einzelnen Fällen nicht entscheiden können, ob $aR\,b$ gilt oder nicht.

BEISPIEL 12:
Wählen wir noch ein anderes Beispiel. Es sei $M$ die Menge aller Teichmuscheln des Müggelsees. Die Muscheln $a$ und $b$ seien Elemente von $M$. Die Relation $aR\,b$ soll bedeuten: „Die Muschel $a$ hat gleiches Geschlecht wie die Muschel $b$". Dies scheint eine klar entscheidbare Relation zu sein. Leider trügt der Schein. Zwar gibt es männliche und weibliche Teichmuscheln, aber auch – vor allem in stehenden Gewässern – zwittrige Tiere (vgl. [10], S. 239). Ist Muschel $a$ männlichen Geschlechts, haben wir aber mit Muschel $b$ unglücklicherweise einen Zwitter erwischt, so ist nicht zu entscheiden, ob $b$ mit $a$ gleichgeschlechtlich ist oder nicht. Wir können von einer Relation im mathematischen Sinne nicht sprechen.

Überblicken wir die Beispiele, so stellen wir fest, daß jede Relation $R$ zwischen den Elementen zweier Mengen $A$, $B$ eine Eigenschaft der geordneten Paare $[a, b]$ ($a \in A$, $b \in B$, $aR\,b$) charakterisiert. Dabei kann $B = A$ sein. Ist z. B. $A$ die Menge der Einwohner von A-Stadt, $B$ die von B-Stadt und bedeutet $R$ wieder wie in Beispiel 2: „$a$ korrespondiert mit $b$", so läßt sich dies als eine Besonderheit derjenigen geordneten Paare $[a, b]$ auffassen, für die $aR\,b$ gilt. Diese Besonderheit kommt sicher nicht allen Paaren $[a, b]$ zu.
Da in dem geordneten Paar $[x, y]$ zwei leere Stellen zu besetzen sind, heißt $R$ eine **zweistellige Relation.**

ERKLÄRUNG:

▷ Eine zweistellige Relation $R$ zwischen den Mengen $A$ und $B$ charakterisiert eine **Eigenschaft der geordneten Paare** $[a, b]$ ($a \in A$, $b \in B$). Für jedes geordnete Paare $[a, b]$ muß feststehen, ob es die betreffende Eigenschaft besitzt oder nicht, d. h., ob $a R b$ gilt oder nicht gilt.

Mit den Hilfsmitteln des zweiten Kapitels können wir dieser Erklärung eine andere Fassung geben, die jede Relation selbst als Menge kennzeichnet. Wir hatten oben festgestellt, daß jeder Eigenschaft von Individuen eines bestimmten Bereichs genau eine Menge von Individuen zugeordnet ist: Sie enthält als Elemente gerade diejenigen Individuen, die die betreffende Eigenschaft besitzen. Geordnete Paare können als Individuen aufgefaßt werden, die dem Bereich $A \times B$ angehören. Die zu der Relation $R$ gehörende Eigenschaft führt also auf genau eine Menge von Paaren $[a, b]$. Diese zu $R$ gehörende Menge geordneter Paare ist also eine Teilmenge der Kreuzmenge $A \times B$. Wir wollen diese Teilmenge direkt mit $R$ bezeichnen und kommen zu folgender Erklärung:

ERKLÄRUNG:

▷ Eine **zweistellige Relation** $R$ zwischen den Elementen der Mengen $A$ und $B$ ist eine **Teilmenge der Kreuzmenge** $A \times B$:

$R \subseteqq A \times B$.

Jede **Teilmenge** von $A \times B$ stellt eine **Relation** dar. Eine Relation ist genau beschrieben, wenn die geordneten Paare, die in der Relation stehen, angegeben werden.

Aufgabe 6

Wir wissen, daß in der Mathematik eine Zusammenfassung von Individuen nur dann als „Menge" bezeichnet wird, wenn von jedem Individuum festgestellt werden kann, ob es zu der Zusammenfassung gehört oder nicht. Also kann im mathematischen Sinn von einer Relation $R$, die ja eine Menge geordneter Paare $[a, b]$ ist, dann und nur dann gesprochen werden, wenn für jedes Paar $[a, b]$ feststeht, ob $a R b$ gilt oder nicht. In dem Beispiel 12 („vom gleichen Geschlecht sein") war dies nicht der Fall.
Da eine Menge durch die Angabe ihrer Elemente ohne Rücksicht auf deren weitere Besonderheiten völlig bestimmt ist, wird auch eine Relation durch die Angabe aller Paare, die ihr angehören, festgelegt. Dabei wird von allen qualitativen Besonderheiten abgesehen. So können zwei für eine bestimmte Menge von Personen erklärte Relationen, etwa „$a$ wohnt eine Treppe höher als $b$" und „$a$ ist um zwei Jahre älter als $b$", zufällig aus genau denselben Paaren bestehen. Mathematisch besteht kein Unterschied zwischen diesen beiden so verschieden erklärten Relationen. In diesem Sinne ist der obenstehende Satz zu verstehen, daß eine Relation durch die Angabe aller zu ihr gehörenden Paare genau festgelegt ist.

Da jede Relation eine Menge ist, können wir auch ihre Teilmenge betrachten.
Gehen wir zum Beispiel als Grundmenge von der Menge aller Figuren $F_1$, $F_2$, $F_3$, ... einer Ebene aus, und betrachten wir zunächst als Relation die geometrische Kongruenz (Deckungsgleichheit) von Figuren. Zur Bezeichnung dieser Relation wählen

wir diesmal, um an die Kongruenz zu erinnern, den Buchstaben $K$. Demnach bedeutet $F_1 K F_2$: $F_1 \cong F_2$. Wenn zwei Figuren kongruent sind, so sind sie auch flächeninhaltsgleich. Die Relation der Flächeninhaltsgleichheit von Figuren werde mit dem Buchstaben $I$ bezeichnet. Aus $F_1 K F_2$ folgt also $F_1 I F_2$, oder, anders ausgedrückt: Wenn das Paar $[F_1, F_2]$ zu $K$ gehört, so gehört es auch zu $I$. Die Paarmenge $K$ ist eine (echte) Teilmenge der Paarmenge $I$, und somit kann die Relation $K$ als Teilrelation der Relation $I$ bezeichnet werden. Weitere Beispiele von Teilrelationen werden uns später (↑ z. B. S. 87) begegnen.

Wir haben jetzt zwei Schreib- und mehrere Sprechweisen für das Bestehen einer zweistelligen Relation $R$ zwischen den Mengen $A$ und $B$ kennengelernt. Es sei wieder $a \in A$ und $b \in B$.

1. $a R b$, gesprochen: „$a$ steht zu $b$ in der Relation $R$", oder auch: „Zwischen $a$ und $b$ besteht die Relation $R$".
2. $[a, b] \in R$, gesprochen: „Das geordnete Paar $[a, b]$ hat eine bestimmte durch $R$ charakterisierte Eigenschaft", oder „das geordnete Paar $[a, b]$ ist Element der Teilmenge $R$ von $A \times B$" oder „es gehört zu $R$".

In den meisten der obenstehenden Beispiele war $A = B = M$. In diesen Fällen spricht man von einer „Relation über der Menge $M$", Vielfach werden in der Mathematik unter „Relationen" nur Relationen über einer Menge $M$ und nicht zwischen verschiedenen Mengen $A$, $B$ verstanden. Wir wollen aber bei unserer umfassenderen Definition bleiben. Nach Bedarf können wir zu dem Fall $A = B = M$ übergehen. Um uns an die verschiedenen mathematischen Fassungen des Begriffs der Relation zu gewöhnen, wollen wir noch weitere Beispiele betrachten.

BEISPIEL 13:

Es sei $A$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10, $B$ die Menge $\{11\}$. $R$ bestehe aus denjenigen Paaren $[a, b]$, für die $a < b$ gilt. Jedes Element von $A \times B$ hat diese Eigenschaft, gehört mithin zu $R$. $R$ ist mit der gesamten Kreuzmenge identisch. Ist umgekehrt $A = \{11\}$, $B$ die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ und $R$ wieder gegeben durch $a < b$, so trifft $aRb$ für kein Paar aus $A \times B$ zu, $R$ ist also die leere Menge.

BEISPIEL 14:

$A$ sei die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10, $B$ die von 15 bis 25, beide Mengen mit Einschluß der ersten und letzten Zahl verstanden. Das Paar $[a, b]$ soll der Relation $R$ angehören, wenn $b$ das Doppelte von $a$ ist. Dann besteht $R$ aus den geordneten Paaren $[8, 16]$, $[9, 18]$, $[10, 20]$.

BEISPIEL 15:

Es sei $R$ folgende über der Menge $N$ der natürlichen Zahlen erklärte Relation: In $aRb$ soll $b$ der unmittelbare Nachfolger von $a$ sein. $R$ besteht also aus den Paaren $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, ... $R$ ist eine echte Teilmenge von $N \times N$, denn Paare wie $[4, 4]$ oder $[7, 6]$ gehören nicht zu $R$. (Wir sehen hier wie auch im Folgenden 1 als kleinste natürliche Zahl an. ↑ S. 203)

Diese Relation, die sog. Nachfolgerrelation, spielt eine wichtige Rolle beim Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen. Im vorliegenden Beispiel stellten wir uns auf den Standpunkt, daß wir den Bereich der natürlichen Zahlen bereits zur Verfügung haben.

BEISPIEL 16:

Wir wählen jetzt eine Relation als Beispiel, die uns später noch intensiver beschäftigen wird. Dabei wird neben der Menge $N$ der natürlichen Zahlen $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ noch die Vereinigungsmenge $N' = N \cup \{0\}$, also die Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ gebraucht. Die Menge $M$, über der eine Relation erklärt werden soll, sei selbst bereits eine Kreuzmenge, und zwar $M = N' \times N$. Die Menge $M$ enthält also als Elemente Paare wie $[3, 5]$, $[0, 7]$, $[2, 2]$ usw. Es sei gleich verraten, daß es jetzt „in die Brüche" gehen soll. Das Paar $[3, 5]$ soll nämlich in der Form $\frac{3}{5}$ geschrieben werden und diesen Bruch bedeuten. Der Leser beachte, daß die Menge $N$, der die Nenner der Brüche angehören, die Null nicht enthält (↑ S. 203). Als Nenner von Brüchen ist ja 0 nicht zulässig. Um eine Relation über $M$ zu erklären, müssen wir noch einmal eine Kreuzmenge bilden, nämlich $M \times M$. Es ist $M \times M = (N' \times N) \times (N' \times N)$. Ein Element von $M \times M$ wäre z. B. das geordnete Paar $\left[\frac{3}{5}, \frac{7}{1}\right]$, dessen Elemente ihrerseits wieder geordnete Paare sind. Wir definieren eine Teilmenge $R$ von $M \times M$ folgendermaßen:

Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ sollen genau dann zu $R$ gehören, wenn sie durch Kürzen bzw. Erweitern auseinander hervorgehen. Es gilt also $\left[\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right] \in R$, wenn $ab' = ba'$ ist.

Zum Beispiel sind die Bruchpaare $\left[\frac{3}{5}, \frac{6}{10}\right]$, $\left[\frac{2}{1}, \frac{6}{3}\right]$, $\left[\frac{7}{20}, \frac{70}{200}\right]$, $\left[\frac{3}{3}, \frac{5}{5}\right]$ Elemente von $R$, dagegen nicht Bruchpaare wie $\left[\frac{7}{1}, \frac{3}{5}\right]$ oder $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$. Diese für den Aufbau des Bereichs der rationalen Zahlen wichtige Relation wird später aufgegriffen werden.

Das folgende Beispiel ist weniger kompliziert, sollte aber als Vorbereitung auf spätere Betrachtungen nicht übergangen werden.

BEISPIEL 17:

Es sei $A$ die Menge von Arbeitern, die in einer Maschinenhalle arbeiten, $B$ die Menge der dort stehenden Maschinen. In der Halle befinden sich 7 Arbeiter und 8 Maschinen, von denen eine, Maschine Nr. 5, stillsteht. Ein Arbeiter ist mit Nebenarbeiten beschäftigt, die anderen bedienen teils allein, teils zu mehreren eine Maschine, teils bedienen Arbeiter mehrere Maschinen. Die Arbeiter seien $a, b, c, d, e, f, g$, die Maschinen

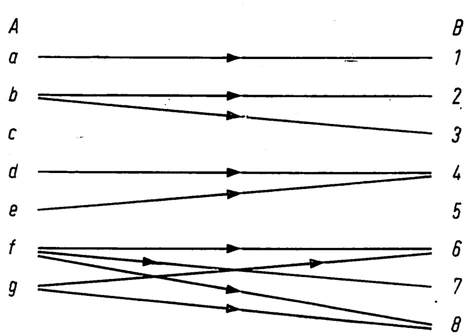


Bild 3.16.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Unter $a\ R\ i$ soll verstanden werden, daß der Arbeiter $a$ die Maschine $i$ bedient ($i = 1, 2, \ldots, 8$). Wir wollen $R$ wieder durch Pfeile angeben (Bild 3.16.). $R$ besteht also aus den Paaren:

$[a, 1]$, $[b, 2]$, $[b, 3]$, $[d, 4]$, $[e, 4]$, $[f, 6]$, $[f, 7]$, $[f, 8]$, $[g, 6]$, $[g, 8]$.

Dieses Beispiel, auf das später zurückgegriffen wird, ist einem Artikel von WERNER TIETZ aus *Mathematik in der Schule* entnommen ([11], S. 161). Dort wird allerdings eine Teilmenge der Kreuzmenge $A \times B$ nicht als Relation, sondern als Abbildung bezeichnet. Auf den Abbildungsbegriff wird im nächsten Kapitel „Abbildungen, Funktionen" eingegangen werden.

Bei der in diesem Buch zugrunde gelegten Terminologie fallen die Begriffe Relation und Abbildung inhaltlich zusammen. Auf die Gründe, warum hier für denselben mathematischen Gegenstand zwei verschiedene Termini benutzt werden, kann erst im Kapitel 4 eingegangen werden. Leider ist der Sprachgebrauch hierbei in der Mathematik nicht einheitlich. Das ist für den noch nicht mit der Materie vertrauten Leser störend. Wenn er sich aber stets an die vorangegangene Definition des betreffenden Begriffs hält, sind Irrtümer ausgeschlossen. Zu erklären ist diese – in einer so exakten Wissenschaft wie der Mathematik wohl kaum vermutete – Mehrgleisigkeit der Terminologie wahrscheinlich dadurch, daß diese Begriffe der mathematischen Grundlagenforschung im engsten Sinne angehören, die noch verhältnismäßig jungen Datums ist und sich laufend entwickelt. Mit der Zeit wird es hoffentlich zu einer Koordinierung der Terminologie auch auf diesem Gebiet kommen. Im vorliegenden Buch sind die Bezeichnungen nach dem Mathematischen Wörterbuch [12] ausgerichtet. Danach bedeuten sowohl eine Abbildung als auch eine Relation eine Teilmenge der Kreuzmenge.

BEISPIEL 18:

Das folgende Beispiel bezieht sich auf die im vorigen Kapitel eingeführte Potenzmenge einer Menge, das ist die Menge aller ihrer Teilmengen (↑ S. 55). Es lohnt sich, diesen Begriff in Erinnerung zu bringen, da er uns bei den Ordnungsrelationen erneut begegnen wird.

Es sei $M$ die Potenzmenge $P(U)$ der Menge $U = \{1, 3, 5, 7\}$. Die Elemente von $M$ sind also sämtliche Teilmengen von $U$. Zu $M$ gehören z. B. folgende Elemente:

$M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{1\}$, $M_3 = \{3\}, \ldots,$ $M_{12} = \{1, 3, 5\}$, $M_{14} = \{1, 5, 7\}$, $M_{16} = U$ usw.

Die Anzahl der Elemente von $M$ ist $2^4 = 16$. Wir erklären über dieser Menge $M$ eine Relation $R$: Das geordnete Mengenpaar $[M_i, M_k]$ soll zu $R$ gehören, wenn $M_i \subseteq M_k$ gilt ($M_i$ Teilmenge von $M_k$). Zum Beispiel gelten für jeden Index $i$ die Beziehungen

$M_i\ R\ M_i$, jede Menge ist ja Teilmenge von sich selbst.

$M_1\ R\ M_i$, da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist; $M_i\ R\ M_{16}$, da $M_{16} = U$. Dagegen gilt z. B. $M_2 \not\subseteq M_3$, $M_3 \not\subseteq M_4$. Diese Relation wird als **Mengeninklusion** bezeichnet.

Zum Schluß wollen wir noch einige Beispiele aus der Geometrie betrachten. Sie sollen zum Verständnis der sogenannten **Abbildungsgeometrie** beitragen, die zu einer neuen Systematik innerhalb der Geometrie geführt hat.

BEISPIEL 19:

Es sei $A$ die Menge aller Punkte einer Ebene, $B$ die Menge aller Geraden der gleichen Ebene. $P\ R\ g$ soll bedeuten: Punkt $P$ liegt auf der Geraden $g$.

Diese Relation wird in der Geometrie als **Inzidenzbeziehung** bezeichnet. Sie spielt in der Abbildungsgeometrie eine wichtige Rolle. Bei dem traditionellen Aufbau der ebenen Geometrie (auch „Planimetrie“ genannt) werden die Eigenschaften von bestimmten Figuren (Dreiecken, Vierecken, Kreisen, Ellipsen usw.) untersucht. Seit einigen Jahrzehnten hat sich unter dem Einfluß der Arbeiten von Felix Klein (1849 bis 1925) ein abbildungsgeometrischer Aufbau der Geometrie durchgesetzt ([13], S. 460). Dabei untersucht man nicht in erster Linie spezielle Figuren, sondern ganz allgemein diejenigen Eigenschaften von Figuren, die bei einem bestimmten Typ von Abbildungen der ganzen Ebene auf sich – sog. Transformationen der Ebene – erhalten bleiben. Eine Transformation der Ebene ist eine punktweise eindeutige, sogar umkehrbar eindeutige Abbildung der Ebene auf sich, das heißt: Jedem Punkt der Ebene entspricht genau ein in dieser Ebene liegender Bildpunkt, und jeder bei der Transformation entstandene Punkt rührt von genau einem Punkt her (↑ S. 120).
Eine solche Transformation ist z. B. die in der Unterstufe behandelte Verschiebung. Man sucht in diesem Fall nach denjenigen Eigenschaften von Figuren, die sich bei allen Verschiebungen der Ebene nicht ändern. Solche Eigenschaften werden als „**Invarianten** der Verschiebung“ bezeichnet. Entsprechend werden Invarianten anderer Typen von Transformationen, z. B. von Drehungen und Streckungen der Ebene, gesucht. Zum Beispiel ist die Größe eines jeden Winkels eine solche Invariante bei

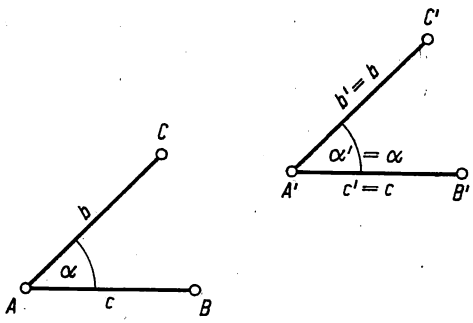



Bild 3.17.a

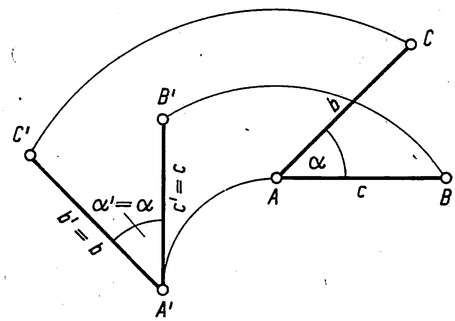



Bild 3.17.b

Bild 3.17.c

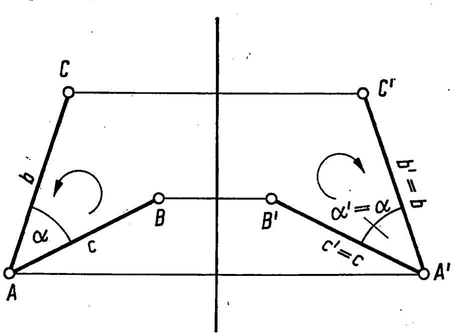
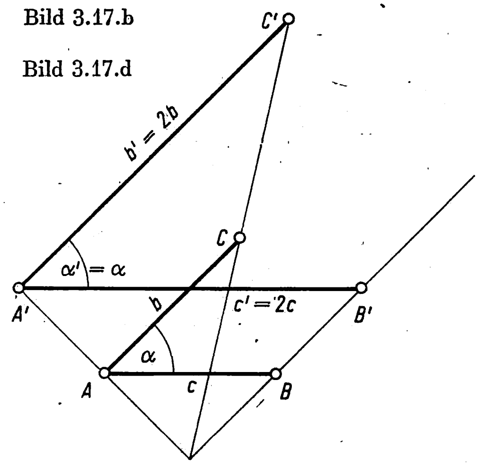



Bild 3.17.d



jeder Verschiebung, Drehung, Umklappung und Streckung der Ebene von einem Punkte aus (Bild 3.17.a bis d). Bei den Verschiebungen und den Drehungen treten noch weitere Invarianten hinzu, zum Beispiel die Streckenlänge, die Parallelität von Geraden, der Flächeninhalt und der Umlaufsinn einer geschlossenen Figur.

[Den Umlaufsinn einer geschlossenen Figur erhalten heißt: Man umfahre eine geschlossene Figur so, daß das Innere links bleibt, und berühre dabei nacheinander die Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, ... Deren Bilder seien $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, ... Umfährt man die Bildfigur in dieser Reihenfolge der Bilder, so liegt das Innere der Bildfigur wieder links.]

Auch die Umklappung der Ebene (axiale Symmetrie) läßt Winkel, Streckenlängen und Flächeninhalte unverändert, ändert aber den Umlaufsinn jeder Figur (Bild 3.17.c). Eine weitere wichtige Invariante all dieser Abbildungen werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.
Die Abbildungsgeometrie ermöglicht tiefere Einblicke in geometrische Strukturen, bringt durch die Herausarbeitung allgemeiner Prinzipien große Vereinfachungen mit sich und eröffnet weite Perspektiven, u. a. wesentliche Verbindungen mit der Algebra. Seit einigen Jahren setzt sich, gefordert durch die neuen Lehrpläne, die Abbildungsgeometrie auch im Schulunterricht durch.
Eine der wichtigsten Invarianten, die allen auf der Schule behandelten geometrischen Abbildungen einer Ebene auf sich gemeinsam ist, stellt die oben erklärte Inzidenzrelation dar. Um ihre Bedeutung ins rechte Licht zu setzen und den Leser dabei an Hand eines einfachen Beispiels in abbildungsgeometrische Gedankengänge einzuführen, soll jetzt eine Abbildung der Ebene auf sich etwas genauer betrachtet werden, die Verschiebung.
In Bild 3.17.a wurde stillschweigend von einer besonderen Eigenschaft jeder Verschiebung Gebrauch gemacht: Wenn die Punkte $P, G, R, \ldots$ auf einer Geraden liegen, so liegen ihre bei der Verschiebung entstehenden Bildpunkte $P'$, $G'$, $R'$, ... wieder auf einer Geraden (Bild 3.17.e). Wir können diese zweite Gerade als Bild von $g$ bei der Verschiebung betrachten und sie demnach als $g'$ bezeichnen. Dann kann man diesen Sachverhalt so ausdrücken: Liegt Punkt $P$ auf einer Geraden $g$, so liegt sein Bildpunkt $P'$ auf der Bildgeraden $g'$ von $g$. Das bedeutet, daß bei einer Verschiebung die Inzidenzrelation nicht geändert wird, sie ist eine Invariante der Verschiebung. Wir sagen auch: Die Verschiebung ist eine *kollineare Transformation der Ebene.* Diese Erhaltung der Geradlinigkeit bei einer Verschiebung wurde früher für so selbstverständlich gehalten, daß sie in vielen Schulbüchern überhaupt nicht erwähnt wurde. Daß sie nur für gewisse, keineswegs für alle Transformationen der Ebene gilt, zeigt ein einfaches Gedankenexperiment: Man veranschauliche sich die Ebene durch eine dünne Gummihaut, auf der eine Gerade gezeichnet ist. Durch ungleichmäßiges Spannen der Haut kann man nicht nur eine Verschiebung, sondern auch eine Verbiegung der Geraden erreichen. Dennoch liegt eine Transformation der Ebene vor, denn jeder Punkt $P$ hat genau ein Bild, und jeder auf der verzerrten Ebene liegende Punkt $Q'$ ist aus genau einem Punkt $Q$ entstanden. Diese Transformation der Ebene sichert also nicht die Geradlinigkeit, sie ist nicht kollinear.
Wenden wir uns jetzt anderen Transformationen der Ebene zu, die kollinear sind, bei denen also die Inzidenzrelation und damit die Geradlinigkeit erhalten bleibt, zunächst der Umklappung.

Wir denken uns die Ebene durch ein größeres Stück Papier realisiert. Dieses Blatt kniffen wir längs einer beliebigen Geraden $s$, die wir als **Symmetrieachse** bezeichnen werden. Die Menge $A$ der Punkte der Ebene enthält die Menge der auf $s$ liegenden Punkte als Teilmenge. Jedem Punkt $P$ von $A$ ordnen wir nun den direkt über bzw. unter ihm liegenden Punkt $P'$ von $A$ zu. Wir finden ihn, indem wir durch den Punkt $P$ des Blattes eine Nadel stechen, die den in der anderen Halbebene liegenden Punkt $P'$ trifft. Liegt $P$ auf $s$, so fällt natürlich $P'$ mit $P$ zusammen. Ebensogut hätten wir das gefaltete Blatt wenden und von der anderen Seite aus einstechen können. Geschieht dies bei Punkt $P'$, so treffen wir wieder auf $P$ (Bild 3.17.f und g).

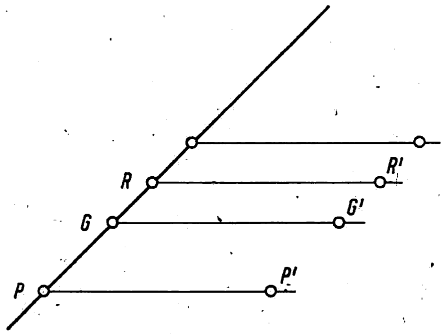


Bild 3.17.e

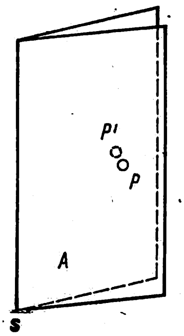


Bild 3.17.f

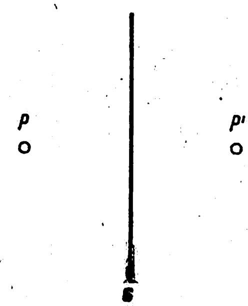


Bild 3.17.g

Dieses Vorgehen verleitet dazu, die Symmetrie, auf die wir hier hinauswollen, als Abbildung der einen durch $s$ erzeugten Halbebene auf die andere aufzufassen. Dann aber müßte $s$ zu beiden Halbebenen gezählt werden, und es würden Schwierigkeiten auftreten, die erst später zur Sprache kommen können. Vor allem würde eine solche Auffassung nicht den Prinzipien der Abbildungsgeometrie entsprechen, deren Vorzüge schon genannt wurden. Hier soll daher die oben experimentell veranschaulichte Abbildung als solche **der ganzen Ebene auf sich** aufgefaßt werden. Dann sind die Punkte $P$ und $P'$ Elemente von $A$, und die zwischen ihnen bestehende Beziehung kann als Relation über $A$ erklärt werden. Diese neue Relation soll zum Unterschied zur Inzidenzrelation $R$ und wegen ihrer Bestimmtheit durch die Gerade $s$ mit dem Buchstaben $R_s$ bezeichnet werden. Die Relation $R_s$ ist demnach eine Teilmenge von $A \times A$. Wenn $P\ R_s\ P'$ besteht, so bedeutet dies, daß bei Einstich der Nadel in $P$ der Punkt $P'$ getroffen wird. Man sagt dann: **$P'$ ist das Bild von $P$** bei der durch $s$ bestimmten Symmetrieabbildung, oder kürzer: **$P'$ ist der zu $P$ symmetrische Punkt.** Der zu $P'$ symmetrische Punkt ist dann wieder $P$. Ein Punkt, der mit seinem Bild zusammenfällt, wird als **Fixpunkt** bezeichnet. Die Symmetrieachse $s$ besteht aus lauter Fixpunkten, und außer diesen gibt es bei unserer Abbildung keine.
Bewegt sich nun $P$ auf einer Geraden $g$, so bewegt sich $P'$ ebenfalls auf einer Geraden. Wir wollen sie mit $g'$ bezeichnen und dadurch andeuten, daß $g'$ sämtliche zu den Punkten von $g$ symmetrischen Punkte enthält. Daher heißt $g'$ auch die zu $g$ in bezug auf die Symmetrieachse $s$ symmetrische Gerade oder ihre Bildgerade (Bild 3.17.g).
Wir sehen: Bei der Symmetrieabbildung der Ebene bleibt die Eigenschaft von Punkten, auf einer Geraden zu liegen, erhalten. Dafür sagt man auch: Die Symmetrieabbildung

ist kollinear. Statt dessen können wir unter Benutzung der oben definierten Inzidenzrelation $R$ sagen: Bei der Symmetrieabbildung bleibt die Inzidenzrelation $R$ zwischen einem Punkt und einer Geraden erhalten, oder: Die Inzidenzrelation ist eine Invariante der Umklappung. Das bedeutet also: Liegen zwei Punkte $P$ und $Q$ der Ebene auf einer Geraden $g$, so liegen ihre Bildpunkte $P'$ und $Q'$ auf der Bildgeraden $g'$ von $g$. Unter Verwendung der Symbole $R$ und $R_s$ können wir das auch kurz so ausdrücken:
Wenn $P\,R_s\,P'$ und $Q\,R_s\,Q'$ gilt – d. h., wenn $P'$ der zu $P$, $Q'$ der zu $Q$ hinsichtlich $s$ symmetrische Punkt ist –, dann folgt aus $PRg$ und $QRg$ – d. h. Punkt $P$ und Punkt $Q$ auf Geraden $g$ – $P'Rg'$ und $Q'Rg'$.
Weiter können wir schließen: Schneidet eine Gerade $g$ die Symmetrieachse $s$ in einem Punkt $S$, so geht auch $g'$ durch $S$, da $S$ als Punkt der Symmetrieachse mit seinem Bild zusammenfällt, andererseits dieses Bild aber auf dem Bild von $g$, also auf $g'$, liegen muß. Auf Grund dieser Tatsache ist es möglich, ohne weitere Kenntnisse aus der Symmetrielehre allein mit Hilfe des Lineals zu einem beliebigen Punkt $Q$ der Ebene den in bezug auf $s$ symmetrischen Punkt $Q'$ zu konstruieren, sofern nur ein einziges Paar symmetrischer Punkte $[P, P']$ und $s$ gegeben sind. Dabei soll das Lineal nur zur Verbindung von zwei Punkten benutzt werden, die Symmetrieachse $s$ soll gezeichnet vorliegen und $\overline{PQ}$ nicht parallel zu $s$ sein.
Dazu geht man folgendermaßen vor (Bild 3.18.):

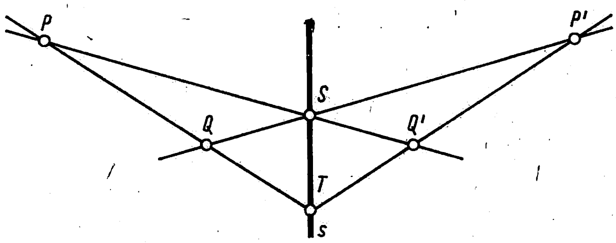



Bild 3.18.

Wir zeichnen zunächst die Gerade $PQ$. Sie schneidet $s$ in einem Punkt $T$. Da $Q$ auf der Geraden $PT$ liegt, muß der Bildpunkt $Q'$ auf der Bildgeraden von $PT$, das ist die Gerade $P'T$, liegen, denn $T'$ fällt mit $T$ zusammen. Dadurch wissen wir schon etwas über die Lage von $Q'$, aber noch nicht genug. Wir kennen jedoch noch eine zweite Gerade durch $Q$, deren Bildgerade wir konstruieren können, nämlich die Gerade $QP'$. Sie möge $s$ in $S$ schneiden. Ihre Bildgerade ist die Gerade $SP$. Sie muß gleichfalls den Punkt $Q'$ enthalten. Der Bildpunkt $Q'$ von $Q$ ergibt sich als Schnittpunkt der Geraden $TP'$ und $SP$.
Diese Konstruktion wurde dadurch ermöglicht, daß wir $R_s$ als Abbildung der ganzen Ebene auf sich aufgefaßt haben, und nicht als Abbildung einer Halbebene auf die andere.
Bei einer Symmetrieabbildung, wie wir sie hier experimentell veranschaulicht haben, geht jede Figur in eine deckungsgleiche über. Daraus ergeben sich die bekannten Sätze der Symmetrielehre, zum Beispiel der Satz, daß die Verbindungsgerade zweier symmetrischer Punkte auf der Symmetrieachse senkrecht steht, usw.

Im Geometrieunterricht empfiehlt es sich, so wie es bisher meist üblich war, von der Symmetrie als **Eigenschaft** gewisser ebener oder räumlicher Gebilde auszugehen, dabei einander entsprechende Punkte und Symmetrieachsen bzw. -ebenen suchen zu lassen und einige Entdeckungen über die Lage entsprechender Punkte zur Symmetrieachse (bzw. -ebene) zu provozieren. Dann gehe man mit einem für die Schüler deutlichen Absatz zu dem abstrakten Problem über: An die Tafel wird eine Gerade $s$ als Symmetrieachse und ein Punkt $P$ gezeichnet. Wo liegt der „entsprechende" Punkt? So steuert man auf die Symmetrie als Abbildung der ganzen Ebene zu. Bei der Feststellung ihrer Eigenschaften lege man besonderen Wert auf die früher meist vernachlässigte wichtigste Invariante, die Kollinearität. Um zu zeigen, daß es sich hier durchaus nicht um etwas Selbstverständliches handelt, sollte man den Schülern an dieser Stelle ruhig einmal Abbildungen vorstellen, die **nicht** kollinear sind, bei denen nämlich eine Gerade in eine gekrümmte Linie oder in einen Punkt abgebildet wird. Dazu kann man, wie oben erwähnt, eine Gummihaut verwenden, oder man benutzt die Projektion mittels einer Linse, die den Fehler der Bildwölbung aufweist (Näheres s. z. B. [14], S. 608). Man kann auch auf die senkrechte Eintafelprojektion eines Körpers auf eine Ebene hinweisen. Solch kurzer Blick über den durch den Lehrplan gegebenen Rahmen hinaus erfordert wenig Zeit, trägt aber sehr effektiv zur Klärung der Begriffe und zur mathematischen Bildung der Schüler bei.

Auf die Zusammensetzung zweier Symmetrieabbildungen wird im folgenden Kapitel eingegangen werden.

Es sei noch bemerkt, daß sich in einigen Büchern anstelle des Ausdrucks „Abbildungsgeometrie" der Terminus „Bewegungsgeometrie" befindet. Er wurde hier aus zwei Gründen vermieden. Erstens hat es sich in der Methodik des Mathematikunterrichts eingebürgert, eine gewisse unterrichtstechnische Maßnahme als „Bewegungsgeometrie" zu bezeichnen, nämlich das Ausschneiden und Bewegen von Figuren oder von Teilen von Figuren. Solche Bewegungen können auch in der Abbildungsgeometrie gelegentlich mit Nutzen verwendet werden. Der Inhalt der beiden Begriffe ist aber ganz verschieden. Der andere Grund besteht darin, daß die Vorstellung einer Bewegung uns bei manchen geometrischen Abbildungen im Stich läßt, zum Beispiel bei solchen projektiven Abbildungen der Ebene in sich, bei denen das Innere eines Kreises in sein Äußeres übergeht.

Aufgaben 7 und 8

BEISPIEL 20:

Für $A$ und $B$ seien wieder Punktmengen gewählt, und zwar zwei offene Halbebenen einer Ebene, die durch eine Gerade $g$ erzeugt werden. Auf $g$ liege der Punkt $P_0$. Der Punkt $P$ von $A$ soll zu dem Punkt $Q$ von $B$ in der Relation $R$ stehen, wenn die Verbindungsstrecke von $P$ mit $Q$ durch $P_0$ geht.

Um uns diese Relation zu veranschaulichen, zeichnen wir ein Büschel von Geraden durch $P_0$ (Bild 3.19.). Jede dieser Geraden zerfällt in zwei durch $P_0$ erzeugte Halbgeraden. Jeder Punkt einer in der Halbebene $A$ liegenden Halbgeraden steht zu einem beliebigen Punkt der in $B$ liegenden zugehörigen Halbgeraden in der Relation $R$.

BEISPIEL 21:

Es sei $M$ die Menge aller Punkte einer bestimmten Geraden, und $P_0$ sei ein fester Punkt von $M$. Die Relation $R$ enthalte die Punktepaare $[P, P']$ aus $M \times M$, die durch $P_0$ nicht getrennt werden (Bild 3.20.). Insbesondere gehören auch alle Punktepaare $[P, P]$,

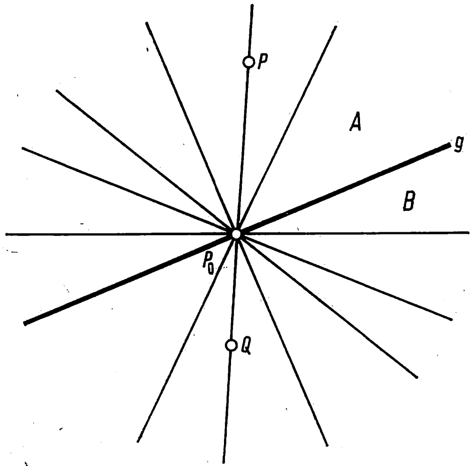



Bild 3.19.

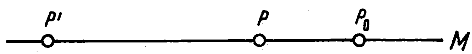



Bild 3.20.

also auch $[P_0, P_0]$, zu $R$. Der Abstand zweier Punkte $A$, $B$ der Geraden, also die Länge der Strecke $\overline{AB}$, soll mit $|\overline{AB}|$ bezeichnet werden. Wir bilden jetzt eine Teilmenge $T$ von $R$, indem wir alle Punktepaare $[P, P']$ aus $R$ betrachten, die hinsichtlich $P_0$ ein festes Abstandsverhältnis, sagen wir 3:1, haben: Das Paar $[P, P']$ soll dann und nur dann zu $T$ gehören, wenn $|\overline{P'P_0}| : |\overline{PP_0}| = 3:1$ oder wenn $P = P' = P_0$ ist. Wie bei der Symmetrieabbildung sollen $P'$, $Q'$, ... als Bilder von $P$, $Q$, ... bezeichnet werden. Statt des Verhältnisses 3:1 hätte natürlich auch jedes andere Verhältnis benutzt werden können.

Die Paarmenge $T$ ist natürlich wieder eine Teilmenge von $M \times M$ und damit eine Relation über $M$. Sie ordnet jedem von $P_0$ verschiedenen Punkt von $M$ genau einen anderen Punkt von $M$ und nur dem Punkt $P_0$ den gleichen Punkt als Bildpunkt zu. Dabei wird jeweils der Abstand des Punktes von $P_0$ verdreifacht. Wir können diesen Sachverhalt als eine **Streckung** auf der Geraden von dem Punkt $P_0$ aus auffassen. Die Relation $T$ wird in der Geometrie als eine *gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung der Geraden auf sich mit dem Fixpunkt $P_0$ bezeichnet.*

Aufgabe 9

BEISPIEL 22:

Wir wollen diese Betrachtung auf die ganze Ebene übertragen. Es sei $M$ die Menge aller Punkte der Ebene, $P_0$ ein beliebiger, aber von nun an fester Punkt von $M$. Über $M$ erklären wir folgende Relation:

$P\,R\,P'$ soll bedeuten, daß $P'$ auf dem Strahl $P_0P$ liegt. Nun wählen wir aus der Paarmenge $R$ folgende Teilmenge $S$ aus: Das Paar $[P, P']$ soll Element von $S$ sein, wenn $|\overline{P'P_0}| : |\overline{PP_0}|$ eine für alle Punktepaare konstante positive Zahl, sagen wir $\frac{3}{2}$, ist.

Das Paar $[P_0, P_0]$ soll gleichfalls zu $S$ gehören. Wieder ist die Menge $S$ als Paarmenge eine Teilmenge von $M \times M$ und somit eine Relation über $M$. Dabei wird jedem von $P_0$ verschiedenen Punkt $P$ der Ebene genau ein Punkt $P'$ als Bildpunkt zugeordnet, nämlich derjenige Punkt des Strahls $P_0P$, für den $|\overline{P'P_0}| : |\overline{PP_0}| = 3:2$ ist, und $P_0$ wird sich selbst zugeordnet, ist also Fixpunkt.

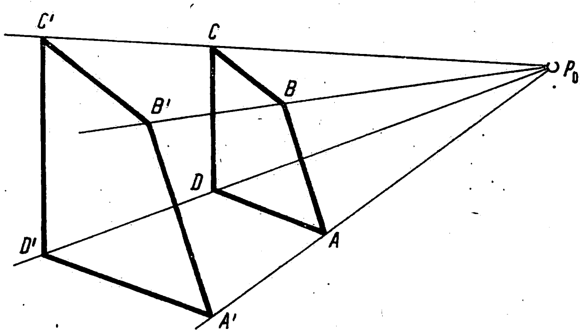



Bild 3.21.

Entsprechend dem vorigen Beispiel bedeutet diese Zuordnung eine Streckung – diesmal der ganzen Ebene – von dem Streckungszentrum $P_0$ aus. Dabei wird die Entfernung jedes Punktes von $P_0$ im Verhältnis $3:2$ vergrößert. Natürlich hätte an Stelle von $3:2$ wieder ein beliebiges anderes Verhältnis gewählt werden können. Eine solche Streckung wird auch als *gleichsinnige Ähnlichkeitsbildung der Ebene auf sich selbst mit dem Fixpunkt* $P_0$ bezeichnet. Eine beliebige Figur $ABCD$ geht nämlich dabei in eine „ähnliche" (d. h. in eine maßstäblich vergrößerte) Figur $A'B'C'D'$ mit gleichem Umlaufsinn über (Bild 3.21.).
Um das nachzuweisen, müssen wir uns erst vergewissern, daß, falls ein Punkt $P$ auf einer Geraden läuft, sein zugeordneter Punkt $P'$ sich gleichfalls auf einer Geraden bewegt.
Anders ausgedrückt: Wir müssen zeigen, daß bei der Ähnlichkeitsabbildung die Inzidenzbeziehung Punkt-Gerade (↑ Beispiel 19) erhalten bleibt, oder: daß die Ähnlichkeitsabbildung kollinear ist. Dann geht eine Gerade wieder in genau eine Gerade, eine Strecke in genau eine Strecke, eine Figur $ABCD$ in genau eine Bildfigur $A'B'C'D'$ über. Von dieser Figur müssen wir zeigen, daß sie in der Tat durch maßstäbliche Vergrößerung der Figur $ABCD$ entstanden ist.
Für die Nachweise benutzen wir die bekannten Strahlensätze und die Umkehrung des ersten Strahlensatzes. Sie lauten:

1. Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich zwei beliebige Abschnitte auf dem einen Strahl zueinander ebenso wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl, und die auf den Parallelen abgeschnittenen Strecken verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf einem der Strahlen, vom Scheitelpunkt aus gemessen.

2. Wird ein Strahlenbüschel so von zwei Geraden geschnitten, daß sich die Abschnitte auf einem Strahl zueinander verhalten wie die entsprechenden Abschnitte auf einem anderen Strahl, so sind die Geraden parallel.
   (Aus Bild 3.22. wird klar, was unter „entsprechend" zu verstehen ist.)

*Voraussetzung:* $BD$ parallel $AC$ (Bild 3.22.)

*Behauptung:* $|\overline{SA}|:|\overline{AB}| = |\overline{SC}|:|\overline{CD}|$ und
$|\overline{BD}|:|\overline{AC}| = |\overline{SD}|:|\overline{SC}|$

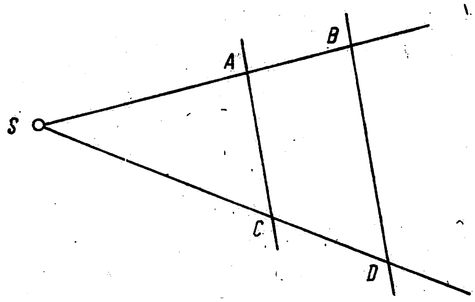



Bild 3.22.

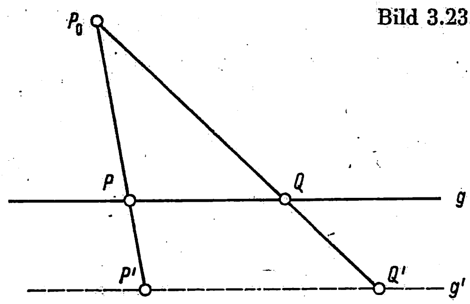



Bild 3.23.

Umkehrung des ersten Teils:

*Voraussetzung:* $|\overline{SA}| : |\overline{AB}| = |\overline{SC}| : |\overline{CD}|$

*Behauptung:* $BD$ parallel $AC$

Mit Hilfe dieser Sätze können wir nachweisen, daß die Figur $A'B'C'D'$ eine maßstäbliche Vergrößerung der Figur $ABCD$ im Verhältnis $3:2$ darstellt.
Der Punkt $P$ bewege sich auf einer Geraden $g$ bis zu einem Punkt $Q$. (Bild 3.23. zeigt einen Fall, in dem $g$ nicht durch $P_0$ geht.) Das Bild von $P$ sei $P'$, das von $Q$ sei $Q'$, und es ist $|\overline{Q'P_0}| : |\overline{QP_0}| = |\overline{P'P_0}| : |\overline{PP_0}| = 3:2$. Also ist nach Satz 2 die Gerade $P'Q'$ parallel zu der Geraden $g$. Da $P$, $g$ und $P'$ festliegen, ist die Parallele zu $g$ durch $P'$ eindeutig bestimmt. Sie werde mit $g'$ bezeichnet. Wo auch Punkt $Q$ auf $g$ liegen mag, sein Bild muß auf $g'$ liegen. Die Bezeichnung $g'$ soll darauf hinweisen, daß diese Gerade alle Bilder von Punkten der Geraden $g$ und nur solche enthält. Die Gerade $g'$ kann daher auch als Bild der Geraden $g$ bei der Ähnlichkeitsabbildung bezeichnet werden. Bewegt sich ein Punkt $P$ auf einer Geraden $g$, so bewegt sich der ihm zugeordnete Punkt $P'$ auf dieser zu $g$ parallelen Geraden $g'$. Das ist auch dann richtig, wenn $g$ durch $P_0$ geht. In diesem Falle ist $g' = g$, also auch $g' \parallel g$. Die Ähnlichkeitsabbildung ist mithin kollinear. Der Figur $ABCD$ entspricht demnach genau eine Bildfigur $A'B'C'D'$, wobei die Seite $\overline{A'B'}$ parallel zu der Seite $\overline{AB}$ ist, $\overline{B'C'}$ parallel zu der Seite $\overline{BC}$ usw. (Bild 3.21.). Ferner bestehen die Verhältnisgleichungen:

$|\overline{A'P_0}| : |\overline{AP_0}| = |\overline{B'P_0}| : |\overline{BP_0}| = |\overline{C'P_0}| : |\overline{CP_0}| = \ldots = 3:2$. Da $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ ist, ergibt sich nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes (bei uns zweiter Teil von Satz 1):

$|\overline{A'B'}| : |\overline{AB}| = |\overline{A'P_0}| : |\overline{AP_0}| = 3:2$, ebenso $|\overline{B'C'}| : |\overline{BC}| = 3:2, \ldots$, d. h., die Figur $A'B'C'D'$ ist aus der Figur $ABCD$ in der Tat durch maßstäbliche Vergrößerung entstanden. Der Gedankengang bleibt der gleiche, wenn statt $3:2$ ein beliebiges Verhältnis gewählt worden wäre.
Das Entsprechende gilt für den in Bild 3.24. gezeichneten Kreis. Die Kreislinie enthält genau alle Punkte der Ebene, die von $M$ denselben Abstand $r$ haben. Ein beliebig eingezeichneter Radius $\overline{MV}$ geht bei der Streckung im Verhältnis $2:1$ in eine parallele Strecke $\overline{M'V'}$ über. Wir schließen wie oben: $|\overline{M'V'}| : |\overline{MV}| = |\overline{M'P_0}| : |\overline{MP_0}| = 2:1$.

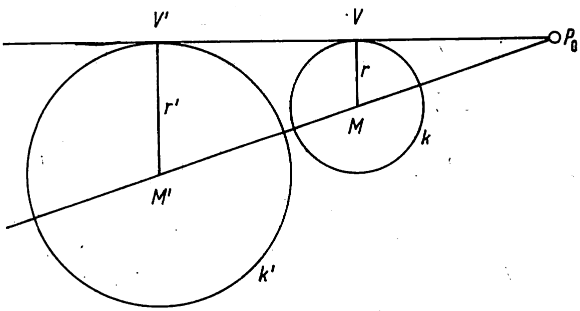



Bild 3.24.

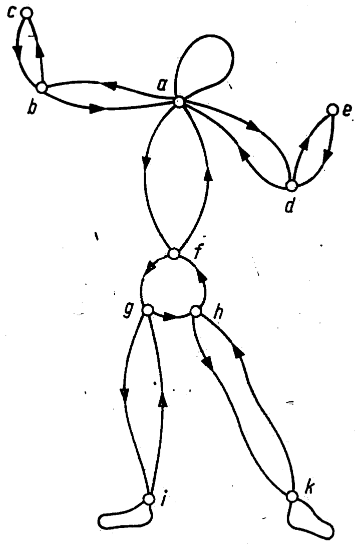



Bild 3.25.

Alle Punkte von $k$ gehen also in Punkte über, die von $M'$ den Abstand $2r$ haben. Diese Punkte liegen auf einem Kreis um $M'$, dem Bild des Kreises um $M$. Auch hier ist der Gedankengang unabhängig von der zufälligen Wahl des Verhältnisses. Die durch die Relation $S$ vermittelte Abbildung der Ebene kann also mit Recht als eine Ähnlichkeitsabbildung bezeichnet werden.
Die Beispiele seien durch eine kleine Aufgabe abgeschlossen: Der Leser gebe einige Elemente von der in Bild 3.25. angegebenen Relation als Teilmenge von $M \times M$ ($M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, k\}$) an, z. B. $[a, b] \in R$, $[b, a] \in R$, $[a, a] \in R$, $[a, f] \in R, \ldots$

## 3.2. Mehrstellige Relationen

Bisher haben wir uns ausschließlich mit zweistelligen Relationen beschäftigt. Der Begriff des geordneten Paares und damit der Begriff der Relation lassen sich sinngemäß übertragen auf (geordnete) Tripel (geordnete Dreiermengen), Quadrupel (geordnete Vierermengen) usw.
Gegeben seien zunächst drei Mengen $A$, $B$, $C$, die übrigens nicht voneinander verschieden zu sein brauchen. Es sei $a$ ein beliebiges Element von $A$, $b$ von $B$, $c$ von $C$. Es ist anschaulich klar, was unter dem geordneten Tripel $[a, b, c]$ zu verstehen ist, nämlich eine Dreiermenge, bei der die Reihenfolge der Elemente festgelegt ist. Entsprechend wie bei geordneten Paaren gilt $[a, b, c] = [a', b', c']$ dann und nur dann, wenn $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ ist.

* Für eine spätere wichtige Anwendung wird aber eine genaue mathematische Definition des geordneten Tripels gebraucht. Wir gehen von dem geordneten Paar $[a, b]$

aus und erklären $[a, b, c]$ als die Zweiermenge $\{[a, b], \{\{c\}\}\}$. Da $[a, b]$ und $\{\{c\}\}$ Mengen zweiter Stufe sind (↑ S. 57), ist $[a, b, c]$ eine Menge dritter Stufe. Unter $A \times B \times C$ wird die Menge aller Tripel $[a, b, c]$, also eine Menge vierter Stufe, verstanden. Diese Menge wäre eigentlich mit $(A \times B) \times C$ zu bezeichnen. Entsprechend ließe sich $A \times (B \times C)$ definieren. Bei endlichen Mengen $A$, $B$, $C$ kann man durch einfaches Aufschreiben aller Elemente feststellen, daß die Menge $(A \times B) \times C$ „im wesentlichen" mit der Menge $A \times (B \times C)$ übereinstimmt. Das bedeutet: Man kann die Elemente der beiden Mengen so eineindeutig einander zuordnen, daß kein Element übrig bleibt. Ist nämlich $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$, so hat ein Element von $(A \times B) \times C$ die Form $\{[a_i, b_k], \{\{c_l\}\}\}$; ihm entspricht als Bild in $A \times (B \times C)$ das Element $\{\{\{a_i\}\}, [b_k, c_l]\}$. Die Mengen $(A \times B) \times C$ und $A \times (B \times C)$ haben gleich viele Elemente, sie sind „von gleicher Mächtigkeit". Eine nähere Erklärung dieser Zusammenhänge erfolgt später (↑ S. 269). Hier soll unter $A \times B \times C$ das Kreuzprodukt $(A \times B) \times C$ im oben erklärten Sinn verstanden werden. Dann kann $A \times B \times C$ als Menge aller Tripel $[a, b, c]$ aufgefaßt werden.
Um eine dreistellige Relation zu erklären, knüpfen wir an die Definition der zweistelligen Relation als Teilmenge der Kreuzmenge an, die sich ohne weiteres übertragen läßt.

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einer für die Mengen $A$, $B$, $C$ erklärten **dreistelligen Relation** ist eine Teilmenge der Kreuzmenge $A \times B \times C$ zu verstehen. Jede Teilmenge von $A \times B \times C$ stellt eine dreistellige Relation dar. Dabei können $A$, $B$, $C$ übereinstimmen.

Aufgabe 10

BEISPIEL 23:

Im Beispiel 23 sollen alle drei Mengen übereinstimmen. $M$ sei die Menge aller im Jahre 1963 lebend oder tot geborenen Kinder in einem bestimmten Land. Es seien $a$, $b$, $c$ Elemente von $M$. Die Relation $R$ wird erklärt als Menge aller Tripel $[a, b, c]$, für die $a$, $b$, $c$ Drillinge sind. Selbst wenn diese Menge leer sein sollte, stellt sie eine dreistellige Relation über $M$ dar.

BEISPIEL 24:

„Zwillinge" gibt es auch in der Lehre von der Teilbarkeit der natürlichen Zahlen. Zwei Primzahlen, deren Differenz zwei beträgt, werden **Primzahlzwillinge** genannt. Zum Beispiel sind 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13, 17 und 19, 29 und 31 Primzahlzwillinge. Gibt es nun auch „Primzahldrillinge" $a$, $b$, $c$, so könnte man fragen, wobei die Primzahlen $a$, $b$, $c$ sich jeweils um zwei unterscheiden? *Ein* solches Primzahltripel gibt es sicher, nämlich $[3, 5, 7]$. Gibt es noch weitere? Nun, größere Drillinge kann es nicht geben, wie folgende Überlegung zeigt: Sei $a$ der „jüngste" Drilling, d. h. die kleinste der drei Zahlen. Die Primzahl $a$ darf nicht durch 3 teilbar sein. Nehmen wir an, sie lasse bei Division durch 3 den Rest 1, wie z. B. die Zahl 7. Dann ist aber die um 2 größere Zahl durch 3 teilbar, also keine Primzahl. Läßt $a$ aber bei Division durch 3 den Rest 2, wie z. B. 17, so ist die um 4 größere Zahl $c$ durch 3 teilbar, also keine Primzahl. Es kann also keine weiteren „Primzahldrillinge" in dieser Bedeutung geben. Dennoch können wir natürlich die entsprechende dreistellige Relation $R$ über der Menge der natürlichen Zahlen erklären. Es ist dann $R = \{[3, 5, 7]\}$. (Zuweilen spricht man auch von Primzahldrillingen bei Primzahlen der Form $p$, $p+2$, $p+6$. Beispiele für solche Tripel sind [5, 7, 11] und [10 014 491, 10 014 493, 10 014 497]).

BEISPIEL 25:

In diesem Beispiel betrachten wir die Menge der natürlichen Zahlen. Das Tripel $[a, b, c]$ soll zu der Relation $R$ gehören, wenn $a + b = c$ ist. Zum Beispiel gilt $[2, 3, 5] \in R$ wegen $2 + 3 = 5$, $[0, 1, 1] \in R$ wegen $0 + 1 = 1$, aber $[0, 0, 1] \notin R$.
Auch durch $a \cdot b = c$ können wir eine dreistellige Relation erklären. Allgemein können wir jede Rechenoperation, die in einem Zahlenbereich $Z$ definiert ist, als eine dreistellige Relation über $Z$ auffassen, denn durch die Operation wird je zwei Zahlen aus $Z$ wieder genau eine Zahl aus $Z$ zugeordnet. Die dabei entstehende Relation ist eine Teilmenge von $Z \times Z \times Z$. Eine Besonderheit derjenigen dreistelligen Relationen, die durch die Addition oder die Multiplikation zweier Zahlen $a$, $b$ gegeben sind, liegt darin, daß mit $[a, b, c]$ auch $[b, a, c]$ in der Relation liegt.

BEISPIEL 26:

Im Speisesaal eines Ferienheimes sind eine Menge $A$ von Brotscheiben, eine Menge $B$ von Butterkugeln und eine Menge $C$ von Wurstscheiben aufgestellt. Das Tripel $[a, b, c]$ soll zur Relation $R$ gehören, wenn die Butterkugel $b$ sich mit der Wurstscheibe $c$ auf der Brotschnitte $a$ vereinigt findet. Dann ist $R$ eine echte Teilmenge von $A \times B \times C$, von der kaum anzunehmen ist, daß sie die leere Menge sein wird.

BEISPIEL 27:

Zum Schluß betrachten wir ein Beispiel aus der Geometrie, das sich von Tripeln auf beliebige $n$-Tupel übertragen läßt.
Es sei $M$ die Menge der Punkte einer Ebene, $x \in M$, $y \in M$, $z \in M$. Das Tripel $[x, y, z]$ soll zu der Relation $R$ gehören, wenn die Punkte $x$, $y$, $z$ ein entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn durchlaufendes Dreieck aufspannen (Bild 3.26.).

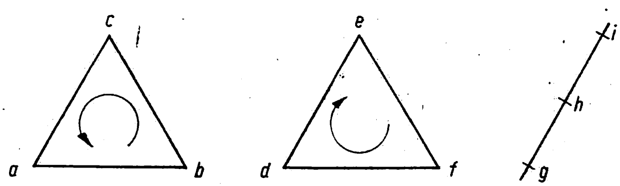



Bild 3.26.

Das Tripel $[a, b, c]$ ist z. B. Element von $R$, die Tripel $[d, e, f]$ und $[g, h, i]$ sind es nicht. Übrigens sind mit dem Tripel $[a, b, c]$ auch die Tripel $[b, c, a]$ und $[c, a, b]$ Elemente von $R$. Man sagt, diese Tripel gehen durch **zyklische Vertauschung** aus dem Tripel $[a, b, c]$ hervor. Mit jedem Tripel, das in $R$ enthalten (bzw. nicht enthalten) ist, sind auch die beiden durch zyklische Vertauschung aus ihm entstandenen Tripel in $R$ enthalten (bzw. nicht enthalten).

## 3.3. Eigenschaften zweistelliger Relationen

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns wieder auf zweistellige Relationen beschränken, und zwar auf Relationen über einer Menge $M$. Welche Eigenschaften kann eine solche Relation, also eine Teilmenge von $M \times M$, haben?

### 3.3.1. *Reflexivität*

Vergleichen wir einmal die Bilder 3.2., 3.4., 3.5. von den Seiten 69 bis 70 dieses Kapitels miteinander.
Bild 3.2. bezieht sich auf die für eine Menge von Büchern erklärte Relation „über einem anderen Buch liegen", Bild 3.4. auf die Relation „den Lebensunterhalt für jemanden verdienen", Bild 3.5. auf die Relation „in dieselbe Schule gehen". In Bild 3.5. trägt jeder Punkt eine Schleife, in Bild 3.4. ist dies bei einigen, in Bild 3.2. bei keinem Punkt der Fall. Dabei bedeutete die Schleife bei einem Punkt $a$, daß für das Element $a$ von $M$ gilt $aRa$.
Da ein Buch nie über sich selbst liegen kann, ist hier $aRa$ stets falsch. Verdient eine Person den Lebensunterhalt für eine Person $b$, die kein Einkommen hat, so verdient sie sicherlich auch ihren eigenen Lebensunterhalt. Dann ist $aRa$ richtig, $bRb$ aber falsch. Bei der Relation „in dieselbe Schule gehen" ist schließlich $aRa$ für jedes $a$ richtig.
In dem letzten Fall, wo für jedes Element $a$ von $M$ gilt $aRa$, heißt die Relation $R$ **reflexiv** (rückbezüglich). Stellen wir eine reflexive Relation durch Pfeile dar, so erkennen wir ihre Reflexivität daran, daß jeder Punkt eine Schleife trägt. Die Relationen „über einem anderen Buch liegen" und „für jemanden den Lebensunterhalt verdienen" sind nicht reflexiv. Man hüte sich bei der zuletzt erwähnten Relation vor der Redeweise, $R$ sei *bald* reflexiv, *bald nicht*. Vielmehr heißt $R$ *dann und nur dann* reflexiv, wenn für *jedes* $a$ aus $M$ gilt $aRa$.
Gilt dagegen für *kein einziges* $a$ von $M$ die Beziehung $aRa$, so heißt $R$ **irreflexiv**.
Die Relation „über einem anderen Buch liegen" ist irreflexiv, desgleichen die Relation „Gerade $a$ steht auf Gerade $b$ senkrecht" (↗ Beispiel 10, S. 76). Dagegen ist die Relation „für jemanden den Lebensunterhalt verdienen" weder reflexiv noch irreflexiv.

ERKLÄRUNG:

▷ Ist $R$ eine über der Menge $M$ erklärte zweistellige Relation und gilt $aRa$ für jedes Element $a$ von $M$, so heißt $R$ **reflexiv**; gilt $aRa$ für kein Element $a$ von $M$, so heißt $R$ **irreflexiv**.

Weitere Beispiele für reflexive Relationen:

| $M$ sei | $aRb$ bedeutet |
|---|---|
| die Menge aller Schüler einer Schule, | $a$ geht in dieselbe Klasse wie $b$, |

| | |
|---|---|
| die Menge aller Kinder einer Stadt, | $a$ und $b$ haben dieselben Eltern, |
| die Menge aller nicht auf einer bestimmten Geraden liegenden Punkte der Ebene, | Punkt $a$ liegt in derselben durch die Gerade bestimmten Halbebene wie der Punkt $b$, |
| die Menge aller Geraden der Ebene, | $a$ ist parallel zu $b$, |
| die Menge der natürlichen Zahlen, | $a$ teilt $b$, |
| die Potenzmenge einer beliebigen Menge, | $a$ ist Teilmenge von $b$. |

Der Leser behalte das erste Beispiel („in dieselbe Klasse gehen") im Gedächtnis! Es wird uns erneut bei weiteren Eigenschaften von Relationen begegnen, deren Kombination zu einem wichtigen Typ von Relationen, den sogenannten Äquivalenzrelationen, führen wird (↑ S. 102ff., insbesondere S. 104).
Bei dem Beispiel der Parallelität beachte der Leser ihre Definition, nach der jede Gerade zu sich selbst parallel ist!

Beispiele für irreflexive Relationen:

| | |
|---|---|
| $M$ sei | $aRb$ bedeutet |
| die Menge aller Einwohner einer Stadt, | $a$ ist älter als $b$, |
| eine Menge von Mädchen, | $a$ hat $b$ als Schwester, |
| die Menge aller natürlichen Zahlen, | $a$ ist kleiner als $b$, |
| die Menge aller Punkte einer Ebene, | Punkt $a$ liegt „vor" Punkt $b$ im Sinn von Beispiel 9 (S. 76). |

Beispiele für Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind:

| | |
|---|---|
| $M$ sei | $aRb$ bedeutet |
| die Menge aller Punkte der Ebene, | Punkt $a$ ist symmetrisch zu Punkt $b$ hinsichtlich der Geraden $s$, |
| die Menge aller Punkte einer Geraden, | Punkt $b$ ist aus Punkt $a$ durch eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Fixpunkt $P_0$ entstanden, |
| die Menge aller Punkte einer Ebene, | Punkt $b$ ist aus Punkt $a$ durch eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Fixpunkt $P_0$ entstanden, |
| die Menge aller natürlicher Zahlen, | $b = 2a$, |
| die Menge aller Einwohner eines bestimmten Landes, | $a$ korrespondiert mit $b$. |

Bemerkungen zu den letzten Beispielen: Bei der Symmetrierelation gilt für jeden Punkt $a$ der Symmetrieachse bzw. der Symmetrieebene $aRa$, aber sonst für keinen Punkt. Bei den Ähnlichkeitsabbildungen gilt $aRa$ nur für den Punkt $a = P_0$. Bei der für natürliche Zahlen erklärten Relation $b = 2a$ gilt $aRa$ nur für $a = 0$. Bei der Korrespondenz-Relation muß in Betracht gezogen werden, daß jemand an seine eigene Adresse Post absendet, z. B. von einer Reise ein Paket mit Wäsche. In solchem Fall gilt $aRa$.

### 3.3.2. *Transitivität*

Wir kommen jetzt zu einer anderen Eigenschaft, die Relationen zukommen kann. Wenn z. B. Günther Schulze mit Fritz Lehmann und dieser mit Dieter Krüger befreundet ist, kann es durchaus sein, daß Günther und Dieter sich nicht leiden mögen. Bei anderen Relationen dagegen (z. B. bei der Relation „über einem anderen Buch liegen") folgt aus $aRb$ (Buch $a$ liegt über Buch $b$) und $bRc$ (Buch $b$ liegt über Buch $c$), daß auch $aRc$ gilt (Buch $a$ liegt über Buch $c$). Wenn stets aus $aRb$ und $bRc$ folgt, daß auch $aRc$ gilt, so heißt die Relation **transitiv.**

Der Leser beachte, daß – wie bei der Reflexivität – die Eigenschaft *allen* Elementen der Menge zukommen muß, bei denen die Voraussetzungen, $aRb$ und $bRc$, erfüllt sind. Wählen wir für die Menge $M$ z. B. die Menge aller Geraden des Raumes und bedeutet $aRb$, daß Gerade $a$ auf Gerade $b$ senkrecht steht, so kann für bestimmte Geraden $a, b, c$ mit $aRb$ und $bRc$ zugleich erfüllt sein $aRc$, wenn etwa die Geraden $a, b, c$ ein rechtwinkliges räumliches Koordinatensystem bilden. Dies gilt aber sicher nicht für alle Geraden $a, b, c$. Zum Beispiel kann $aRb$ und $bRc$ gelten, Gerade $c$ aber zu Gerade $a$ parallel sein. Diese Relation ist also nicht transitiv.

ERKLÄRUNG:

▷ Wenn bei einer über einer Menge $M$ erklärten zweistelligen Relation für alle $a, b, c$ aus $M$ das Bestehen von $aRb$ und $bRc$ zur Folge hat $aRc$, so heißt die Relation **transitiv.**

Man beachte, daß dabei für $c$ ein beliebiges Element eingesetzt werden kann, das zu $b$ in der Relation $R$ steht!

Weitere Beispiele für transitive Relationen:

| $M$ sei | $aRb$ bedeutet |
|---|---|
| die Menge aller Schüler einer Schule, | $a$ geht in dieselbe Klasse wie $b$, |
| die Menge aller nicht auf einer gegebenen Geraden $g$ liegenden Punkte der Ebene, | $a$ liegt in derselben durch $g$ gebildeten Halbebene wie $b$, |
| die Menge aller Punkte der Ebene, | $a$ liegt „vor" Punkt $b$ im Sinne von Beispiel 9, |
| die Menge aller Geraden der Ebene, | $a$ ist parallel zu $b$, |
| die Menge der natürlichen Zahlen, | $a < b$, |
| die Menge der natürlichen Zahlen, | $a \mid b$ ($a$ teilt $b$), |
| die Menge der natürlichen Zahlen, | $a$ ist ein Vielfaches von $b$. |

Beispiele für nicht transitive Relationen:

| $M$ sei | $aRb$ bedeutet |
|---|---|
| die Menge der natürlichen Zahlen, | $a + b = 7$, |
| die Menge der natürlichen Zahlen, | $a = b'$ (unmittelbarer Nachfolger von $b$), |
| die Menge aller Geraden des Raumes, | $a$ bildet mit $b$ einen Winkel von 30°. |

Bemerkung zu dem Beispiel $a + b = 7$: Aus $aRb$ und $bRc$ folgt, daß $c = a$ ist. Aus $aRb$ $(a + b = 7)$ und $bRa$ $(b + a = 7)$ folgt aber nicht $aRa$ $(a + a = 7)$.

Stellen wir die Relation mit Hilfe von Pfeilen dar, so erkennen wir die Transitivität daran, daß immer dann, wenn ein Pfeil von $a$ zu $b$ und einer von $b$ zu $c$ führt, auch direkt einer von $a$ zu $c$ führt.

### 3.3.3. *Symmetrie*

Zu Anfang dieses Kapitels war von der Liebe die Rede, und es blieb dort dahingestellt, ob die Liebe eine auf Gegenseitigkeit beruhende Beziehung ist. Um diese Beziehung als Beispiel für eine mathematische Relation verwenden zu können, müßten wir in der Lage sein, „$a$ liebt $b$" einwandfrei zu definieren. Wir haben aber genug Beispiele für Relationen, bei denen aus $aRb$ folgt $bRa$, z. B. bei der Parallelität von Geraden, bei der gewöhnlichen Gleichheit zweier Größen, bei der für Punkte erklärten Relation „auf derselben Geraden liegen", bei der für Schüler erklärten Beziehung „in dieselbe Klasse gehen". Dagegen ist die Kleinerbeziehung für Zahlen nicht von dieser Art, denn wenn $a < b$ richtig ist, ist $b < a$ sicher falsch. Bedeutet $aRb$: „$b$ ist Schwester von $a$", so kann $bRa$ richtig und falsch sein, je nachdem, ob $a$ ein Junge oder ein Mädchen ist.

ERKLÄRUNG:

▷ Wenn für eine Relation $R$ aus $aRb$ stets $bRa$ folgt, so heißt $R$ **symmetrisch.**

Auch hier hüte man sich vor der Annahme, eine Relation könne bald symmetrisch, bald nicht symmetrisch sein (etwa die Relation: $b$ ist Schwester von $a$). Wie aus unserer Erklärung hervorgeht, heißt $R$ nur dann symmetrisch, wenn $aRb$ stets $bRa$ nach sich zieht.

Wir heben aus den nicht symmetrischen Relationen noch zwei besondere Typen heraus: Bei der Kleinerbeziehung folgt aus $aRb$ stets, daß $bRa$ falsch ist. In diesem Fall wird die Relation **asymmetrisch** genannt. Daneben stellen wir folgende Relation $R$: $aRb$ bedeute, daß entweder $a = b$ oder, falls $a \neq b$ ist, $a < b$ sein soll. Wir schreiben diese Relation auch $a \leqq b$ (gelesen: „$a$ kleiner gleich $b$").

Die Relation $a \leqq b$ ist sicher nicht symmetrisch; ist aber $a = b$, so hat $a \leqq b$ zur Folge $b \leqq a$. Der Fall $a = b$ ist aber der einzige, in dem die Relation „kleiner-gleich" umgekehrt werden kann. Eine solche Relation $R$, bei der aus $aRb$ und $bRa$ folgt $a = b$, heißt **antisymmetrisch** oder **identitiv.**

Wir kennen ein weiteres Beispiel einer antisymmetrischen Relation, nämlich die Relation: $a$ teilt $b$. Wenn sowohl $a \mid b$ als auch $b \mid a$ richtig ist, so muß $a = b$ sein. Antisymmetrie besteht auch bei der Teilmengenbeziehung (Beispiel 18): $M$ sei die Potenzmenge einer beliebigen Menge $U$. $M_i$ und $M_k$ seien Elemente von $M$, also Teilmengen von $U$. $M_i R M_k$ bedeute, daß $M_i$ Teilmenge von $M_k$ ist. Aus $M_i \subseteqq M_k$ und $M_k \subseteqq M_i$ folgt dann, daß $M_i = M_k$ ist.

Weitere Beispiele für symmetrische Relationen:

| $M$ sei | $aRb$ bedeutet |
|---|---|
| die Menge aller Schüler, | $a$ geht in dieselbe Klasse wie $b$; |

| | |
|---|---|
| die Menge aller Geraden, | $a$ ist senkrecht zu $b$, |
| die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 6, 7\}$, | $a + b = 7$, |
| die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, 60\}$, | $a \cdot b = 60$, |
| ein bestimmter Personenkreis, | $a$ ist direkt verschwägert mit $b$, |
| eine beliebige Zahlenmenge, | $a = b$. |

Beispiele für asymmetrische Relationen:

| | |
|---|---|
| $M$ sei | $aR\,b$ bedeute |
| die Menge aller Bürger einer Stadt, | $a$ verdient den Lebensunterhalt für $b$, |
| die Menge von übereinander liegenden Gegenständen, | $a$ liegt über $b$. |

Beispiele für antisymmetrische Relationen:

| | |
|---|---|
| $M$ sei | $aR\,b$ bedeute |
| die Menge der in einem Haus lebenden Personen, | $a$ ist höchstens so alt wie $b$, |
| die Menge der in einem Jahr an einem bestimmten Ort gemessenen Wasserstände, | $a$ ist nicht höher als $b$, |
| eine beliebige Zahlenmenge, | $a = b$. |

Die gewöhnliche Gleichheit ist also sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch.

Beispiele für Relationen, die weder symmetrisch noch asymmetrisch, noch antisymmetrisch sind:

| | |
|---|---|
| $M$ sei | $aR\,b$ bedeute |
| die Menge der Schüler einer Schule, | $b$ ist Schwester von $a$, |
| die Menge $\{1, 2, 3\}$, | $a^b \leqq 8$. |

Bemerkungen zum letzten Beispiel: Es gilt einerseits zugleich $1^2 < 8$ und $2^1 < 8$, andererseits aber $2^3 \leqq 8$, aber $3^2 > 8$. Diese Relation ist also in der Tat weder symmetrisch noch asymmetrisch, noch antisymmetrisch.
Ehe wir weitere Eigenschaften von Relationen kennenlernen, die uns eine Typisierung von Relationen nahelegen, wollen wir die bisher behandelten Eigenschaften von Relationen noch einmal zusammenfassen.

**Zusammenfassung:**
**Wenn für jedes $m \in M$ gilt $mRm$, so heißt $R$ reflexiv.**
**Wenn für jedes $m \in M$ falsch ist $mRm$, so heißt $R$ irreflexiv.**
**Wenn für beliebige $a, b, c$ aus $M$ die Gültigkeit von $aRb$ und $bRc$ nach sich zieht $aRc$, so heißt $R$ transitiv.**
**Wenn für beliebige $a, b$ aus $M$ die Gültigkeit von $aRb$ zur Folge hat die von $bRa$, so heißt $R$ symmetrisch.**
**Wenn für beliebige $a, b$ aus $M$ die Gültigkeit von $aRb$ stets nach sich zieht, daß $bRa$ falsch ist, so heißt $R$ asymmetrisch.**
**Wenn aus $aRb$ und $bRa$ stets $a = b$ folgt, so heißt $R$ antisymmetrisch.**

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß es Relationen gibt, die weder reflexiv noch irreflexiv, weder symmetrisch noch asymmetrisch oder antisymmetrisch sind.

Aufgaben 11 bis 15

## 3.4. Ordnungsrelationen

Um jetzt weiteren wichtigen Eigenschaften von Relationen auf die Spur zu kommen, wollen wir uns vorstellen, daß ein Bücherfreund seine Bibliothek ordnen will. Dabei muß er irgendein Prinzip zugrunde legen, das den Vergleich zweier Bücher ermöglicht; denn er möchte ja entscheiden, ob das eine Buch vor oder hinter dem anderen stehen soll. Nehmen wir an, er habe sich für eine bestimmte Reihenfolge seiner Regale und Bücherbretter entschieden. Nun könnte er auf den Gedanken kommen, die Bücher nach den Autoren alphabetisch zu ordnen. Abgesehen davon, das dies einen wahren Bücherfreund kaum befriedigen wird, führt es ihn auf Schwierigkeiten, wenn er eine Gedichtsammlung verschiedener Dichter unter seinen Büchern hat. Ordnet er aber nach dem Titel alphabetisch, so gerät er in Verlegenheit, wo er sein Buch *18 – 20 – passe*, ein heiteres Buch des Eulenspiegel-Verlages über das Skatspiel, einordnen soll. Vernünftiger ist es sicher, die Bücher nach ihrem Inhalt zu ordnen. Sollen aber die wissenschaftlichen Bücher vor oder hinter der Belletristik stehen? Und wenn hierfür eine Reihenfolge festgelegt ist, wie sollen innerhalb eines Gebiets die Bücher geordnet werden? Und gehört das Buch *Wen die Götter lieben* von INFELD, dessen Held der geniale junge Mathematiker EVARISTE GALOIS ist, auf Grund seines Inhalts zur mathematischen, historischen oder schöngeistigen Literatur? Dann muß unser Bücherfreund noch allerlei Nebenbedingungen berücksichtigen, wie Länge und Abstand der Bücherbretter, die Häufigkeit des Gebrauchs usw. Wir sehen, es ist gar nicht so einfach, eine klare Ordnung herzustellen.

Nehmen wir an, unserem Bücherfreund sei es gelungen, ein Ordnungssystem zu finden, nach dem er entscheiden kann, ob Buch $a$ vor oder hinter Buch $b$ kommt. Es stehe $a$ vor $b$. Jetzt vergleicht er Buch $b$ mit einem Buch $c$, und zwar ergibt sich, daß $c$ hinter $b$ einzuordnen ist. Dann steht Buch $c$ in der Rangordnung auch hinter Buch $a$. Auf diese Weise wird über der Menge $M$ der Bücher der Bibliothek eine Relation, eine sogenannte **Ordnungsrelation**, geschaffen. Ordnungsrelationen spielen eine wichtige Rolle beim Aufbau des Zahlenbereichs, bei der Lehre von den Ungleichungen, bei Bildung des Grenzbegriffs und in weiteren Gebieten des Schulstoffs. Sie sind für das Verständnis der Lehrpläne unbedingt erforderlich und werden daher im folgenden ausführlich behandelt.

Eine Ordnungsrelation, die beim Ordnen von Büchern helfen soll, muß folgende Eigenschaften haben: Für je zwei Bücher $a$ und $b$ muß entweder $aRb$ („$a$ vor $b$") oder $bRa$ gelten; $R$ ist transitiv; schließlich ist $R$ natürlich auch irreflexiv, denn kein Buch kann vor sich selbst stehen. Die erstgenannte Eigenschaft wollen wir als **Linearität** bezeichnen.

In der Mathematik ist die Bezeichnung „linear" für die entsprechende Eigenschaft einer reflexiven Ordnungsrelation (z. B. kleiner gleich) üblich. Linearität bedeutet hierbei, daß von den beiden Relationen $a \leqq b$, $b \leqq a$ mindestens eine gilt. Die entsprechende Eigenschaft einer

irreflexiven Ordnungsrelation wird in der Regel als Konnexität bezeichnet. Doch sind auch diese Termini nicht ganz einheitlich (vgl. z. B. [15], S. 65, auch hier wird bei reflexiven Ordnungsrelationen von Konnexität gesprochen).
Um dem Leser ein weiteres Fremdwort zu ersparen, wurde für die beiden einander entsprechenden Eigenschaften bei einer irreflexiven bzw. einer reflexiven Ordnungsrelation derselbe Ausdruck „linear" benutzt.

ERKLÄRUNG:

▷ Wenn eine über der Menge $M$ erklärte Relation die Eigenschaft hat, daß für jedes Paar $[a, b]$ aus $M \times M$ mindestens eine der Beziehungen $a\,R\,b$, $b\,R\,a$, $b = a$ gilt, so heißt $R$ linear. Eine Relation, die linear, transitiv und irreflexiv ist, heißt eine **irreflexive Ordnungsrelation.**

„Ordnung schaffen" bedeutet doch, jedem Ding seinen festen Platz im Ganzen geben, eine gewisse Reihenfolge herstellen, so wie man Punkte auf einer Geraden oder einer nicht geschlossenen Linie anordnen kann. Die Vergleichbarkeit zweier Dinge, die erst eine Plazierung ermöglicht, wird durch die Linearität gesichert, die Möglichkeit einer konsequenten Reihung durch die Transitivität.
Nicht alle transitiven, irreflexiven Relationen, die wir in unseren Beispielen kennenlernten, sind Ordnungsrelationen. Erinnern wir uns z. B. wieder der für die Menge aller Punkte der Ebene erklärten Relation „Punkt $P$ liegt vor Punkt $Q$", wenn sowohl die $x$- als auch die $y$-Koordinate von $P$ kleiner als die entsprechende von $Q$ ist (Beispiel 9 von S. 76). Diese Relation ist sicher transitiv und irreflexiv. Der Punkt $P$ (2; 3) liegt in diesem Sinne vor dem Punkt $Q$ (7; 8), aber der Punkt $P$ (3; 5) liegt weder vor noch hinter dem Punkt $Q$ (7; 2). Diese Relation ist nicht linear, denn nicht alle Punkte sind miteinander vergleichbar. Die Relation ist nicht dazu geeignet, alle Punkte der Ebene „linear" zu ordnen, sie können nicht auf Grund dieser Relation in einer bestimmten Reihenfolge auf einer Kurve untergebracht werden. Allerdings ist dies für einen Teil der Punkte möglich. Wir werden diese Relation daher später unter die sogenannten **Halbordnungen** einreihen. Natürlich bedeutet dies nicht, daß sich die Menge aller Punkte der Ebene nicht durch eine andere Relation, etwa auf einer vom Koordinatenursprung ausgehenden Spirale, anordnen ließe.
Dagegen sind die gewöhnliche Kleinerbeziehung für Zahlen, die Ordnung der Städte nach der Einwohnerzahl, die Ordnung der Nebenflüsse eines Flusses von der Quelle zur Mündung hin irreflexive Ordnungsrelationen. Im Beispiel der Städte müssen wir allerdings den Fall ausschließen, daß zwei Städte dieselbe Einwohnerzahl haben, im dritten Beispiel den Fall, daß an derselben Stelle ein links- und ein rechtsseitiger Nebenfluß einmünden.
Es leuchtet ein, daß eine irreflexive Ordnungsrelation stets asymmetrisch sein muß. Wenn Buch $a$ vor Buch $b$ im Regal steht, so kann das Umgekehrte eben nicht der Fall sein. Die Asymmetrie braucht aber unter den definierenden Eigenschaften der irreflexiven Ordnungsrelation nicht genannt zu werden. Sie ergibt sich bereits aus den anderen Eigenschaften als logische Folge. Nehmen wir nämlich an, eine irreflexive Ordnungsrelation wäre nicht asymmetrisch. Dann müßte es mindestens ein Paar $[a, b]$ geben, für das sowohl $a R\, b$ als auch $b R\, a$ gelten würde; dann müßte auf Grund der Transitivität aber auch $a R\, a$ gelten, was der Irreflexivität widerspricht.

SATZ:

▷ Eine irreflexive Ordnungsrelation ist stets asymmetrisch.

Es sei hier noch eine Bemerkung zu der Formulierung der Linearität angefügt. Bei den oben angeführten Beispielen für irreflexive Ordnungsrelationen – man denke insbesondere an die Kleinerbeziehung – gilt nicht nur *mindestens eine*, sondern *genau eine* der drei Möglichkeiten $a < b$, $b < a$, $a = b$. Es mag den Leser befremden, daß bei der obenstehenden Erklärung das Wort „mindestens" verwendet wurde. Dies beruht auf einer Eigentümlichkeit der Arbeit des Mathematikers: Er beschränkt bei Definitionen seine Forderungen gern auf ein Mindestmaß. Wir sahen bereits, daß die Asymmetrie, die ja allen irreflexiven Ordnungsrelationen eigen ist, nicht in der Erklärung genannt wurde, weil dieser Begriff daraus ableitbar ist. Das Entsprechende gilt für die obengenannte Eigenschaft, die sicher eine stärkere Forderung beinhaltet als die Linearität.

SATZ:

▷ Ist $R$ eine über der Menge $M$ erklärte irreflexive Ordnungsrelation, so besteht für jedes Elementenpaar $[a, b]$ aus $M$ genau eine der Beziehungen $aRb$, $bRa$, $a = b$.

Wir beweisen zunächst, daß $aRb$ und $a = b$ nicht zugleich bestehen können. Wäre dies nämlich der Fall, so könnten wir in $aRb$ das Element $a$ durch $b$ ersetzen und gelangten zu $bRb$, was der Irreflexivität widerspricht. Daß aber $aRb$ mit $bRa$ unverträglich ist, haben wir bereits oben gesehen. Der Satz ist also richtig.
Nun gibt es auch *reflexive* Relationen, die zur Herstellung einer Ordnung in einer Menge geeignet sind. Als Beispiel diene uns die Relation $R$ „kleiner-gleich". Legen wir für $M$ einmal die Menge der positiven rationalen Zahlen zugrunde, so können wir diese auf Grund der „kleiner-gleich"-Relation auf dem Zahlenstrahl linear anordnen. Wählen wir z. B. $a = \frac{5}{9}$ und $b = \frac{15}{26}$, so gilt $aRb$, da $\frac{5}{9} = \frac{15}{27}$ und $\frac{15}{27} < \frac{15}{26}$ ist. Hätten wir $b = \frac{15}{27}$ gewählt, so würde gleichfalls $aRb$ gelten, diesmal, weil beide Elemente gleich sind. Daher gilt in diesem Fall auch $bRa$, allerdings nur in solchen Fällen. Die Relation „kleiner-gleich" ist ja, wie wir bereits wissen (↗ S. 96), antisymmetrisch. Dies gehört zu den typischen Eigenschaften einer **reflexiven Ordnungsrelation**:

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Relation heißt eine **reflexive Ordnungsrelation**, wenn sie reflexiv, transitiv, linear und antisymmetrisch ist.

Wir kehren jetzt noch einmal zu der für die Punkte der Ebene erklärten Relation „Punkt $P$ liegt vor Punkt $Q$" (↗ S. 76) zurück. Wie wir dort gesehen haben, ist diese Relation zwar weder eine irreflexive noch eine reflexive Ordnungsrelation. Ihr fehlt die Linearität, die anderen Eigenschaften einer irreflexiven Ordnungsrelation besitzt sie aber. Eine solche Relation wird als eine **irreflexive Halbordnung** bezeichnet. Sie stellt zwar keine vollständige Ordnung in der betreffenden Menge her, hat aber gewisse ordnende Eigenschaften.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine irreflexive, transitive, asymmetrische Relation wird als **irreflexive Halbordnung** bezeichnet.

Wie die soeben behandelte für Punkte erklärte Relation eine irreflexive Halbordnung darstellt, so stellt die für natürliche Zahlen erklärte Teilerrelation eine **reflexive Halbordnung** dar: Sie ist zwar wie jede reflexive Ordnungsrelation reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, aber nicht linear; denn z. B. die natürlichen Zahlen $a = 6$ und $b = 9$ sind im Sinne der Relation nicht vergleichbar. Es gilt weder $a = b$ noch $a \mid b$, noch $b \mid a$. Die Teilerrelation stellt daher keine Ordnungsrelation dar. Auf Grund ihrer Eigenschaften kann man sie aber als eine Halbordnung bezeichnen.

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einer **reflexiven Halbordnung** versteht man eine reflexive, transitive, antisymmetrische Relation.

Der Leser unterschätze nicht die ordnungschaffende Qualität, die einer Halbordnung zukommen kann! Er wird doch z. B. davon überzeugt sein, daß die Anordnung der Fernsprechteilnehmer in einem Fernsprechbuch, die der Vokabeln in einem Wörterbuch recht zweckdienlich sind und ein rasches, sicheres Finden des Gesuchten ermöglichen. Und doch handelt es sich in beiden Fällen nur um irreflexive *Halb*ordnungen. In beiden liegt nämlich eine *lexikographische* Anordnung der Wörter vor. Die lexikographische Anordnung beruht auf dem Alphabet. Vergleichen wir zum Beispiel die beiden Namen Brauer und Breuer. Der erste Buchstabe, in dem sich die beiden Namen unterscheiden, ist das a bzw. e. Da im Alphabet a vor e steht, ist Brauer vor Breuer einzuordnen. Wenn wir zwei gleichstellige Zahlen der Größe nach vergleichen, zum Beispiel 467 903 119 und 467 903 120, so wenden wir das gleiche Prinzip an, wobei die Stelle des Alphabets hier eingenommen wird von der Ordnung der Ziffern von 0 bis 9: Die erste Ziffer, von links an gezählt, in der sich die beiden Zahlen unterscheiden, ist entscheidend. In dem Beispiel ist die zweite Zahl die größere, da beide Zahlen in den ersten sieben Ziffern übereinstimmen; die 8. Ziffer bei der zweiten Zahl aber größer ist als bei der ersten. Ist die Stellenzahl der beiden Zahlen allerdings verschieden wie bei 467 903 119 und 1 000 000 000, so entscheidet diese, das heißt, die zweite Zahl ist größer, obwohl fast alle ihre Ziffern kleiner sind als die der ersten Zahl. Stimmen nun zwei Wörter in allen Buchstaben überein, ohne dasselbe Element zu bezeichnen, so läßt sich nicht entscheiden, welches Wort vor das andere gesetzt werden soll. So finden wir im Berliner Fernsprechbuch mehrere Namen zwei- und sogar dreimal, z. B. Gerhard Meier, Hans Meier, Heinrich Meier, Herbert Lehmann, Karl Lehmann (3mal), Hans Thiele. Sie bezeichnen ganz verschiedene Personen, wie an den verschiedenen Berufen und Adressen zu erkennen ist. Auch im Fremdsprachenlexikon sind viele völlig gleiche Wörter mit ganz verschiedener Bedeutung verzeichnet, z. B. Strauß, Tor und viele andere für das „Teekessel"-Spiel geeignete Wörter mit mehrfacher Bedeutung.
Bleiben wir bei dem Beispiel des Fernsprechbuches. $M$ sei die Menge der in ihm verzeichneten Personen, und $aRb$ bedeute, der Name von $a$ rangiere in der lexikographischen Anordnung vor dem Namen von $b$. Dann ist die Forderung, daß mindestens ine der Beziehungen $aRb$, $bRa$, $a = b$ zutreffen soll, zwar für die weitaus meisten,

aber nicht für alle Elemente von $M$ erfüllt, nämlich nicht für Personen, die Namensvettern sind. Sie sind ja verschiedene Personen, es gilt aber für sie weder $a\,R\,b$ noch $b\,R\,a$. Die Relation $R$ ist nicht linear, sie hat aber alle Eigenschaften einer irreflexiven Halbordnung.
Wir wollen noch auf ein weiteres Beispiel für eine reflexive Halbordnung hinweisen, nämlich auf die für die Potenzmenge $M$ einer Menge $U$ erklärte Teilmengenbeziehung. Wenn $M_i$ und $M_k$ Elemente von $M$, also Teilmengen von $U$ sind, von denen keine in der anderen enthalten ist, beide aber verschieden sind, so gilt weder $M_i\,R\,M_k$ noch $M_k\,R\,M_i$, noch $M_i = M_k$.
Es ist selbstverständlich, daß jede (reflexive bzw. irreflexive) Ordnungsrelation auch eine (reflexive bzw. irreflexive) Halbordnung darstellt.

## 3.5. Äquivalenzrelationen

Wir haben gesehen, daß die einzelnen Eigenschaften, die einer Relation zukommen können, in den verschiedensten Kombinationen auftreten und daß dadurch gewisse Typen von Relationen (irreflexive, reflexive Ordnungen oder Halbordnungen) charakterisiert werden.
Jetzt wollen wir uns einer sehr häufig auftretenden Kombination von drei Eigenschaften von Relationen zuwenden, die einen weiteren wichtigen Typ, die sogenannten **Äquivalenzrelationen**, kennzeichnet. Die Bezeichnung „äquivalent" wurde schon in Kapitel 1 benutzt, und zwar für gleichwertige Aussagen $a$ und $b$, für die also gilt: Aus $a$ folgt $b$, und aus $b$ folgt $a$.
Es sei $M$ die Menge aller Aussagen aus irgendeinem Teilgebiet der Mathematik, z. B. aus der Geometrie. Wenn $a$ und $b$ Aussagen sind, so soll $aR\,b$ wie soeben erklärt werden durch: „Aus $a$ folgt $b$, und aus $b$ folgt $a$". Welche Eigenschaften hat diese Relation? Sie ist selbstverständlich reflexiv, denn für jede Aussage $a$ gilt: „Aus $a$ folgt $a$." Die Relation $R$ ist auf Grund ihrer Definition auch symmetrisch. Sie ist schließlich auch transitiv: Denn wenn $aR\,b$ und $bR\,c$ besteht, d. h. wenn $a$ und $b$ sowie $b$ und $c$ gleichwertige Aussagen sind, so sind auch $a$ und $c$ gleichwertig, es gilt $aR\,c$. Wir wollen diese für Aussagen erklärte Äquivalenzrelation jetzt verallgemeinern.

ERKLÄRUNG:
▷ Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt eine **Äquivalenzrelation.**

Ist $R$ eine Äquivalenzrelation, so schreiben wir statt $aR\,b$ auch $a \sim b$ (gelesen: „$a$ äquivalent $b$").

Weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen:

| $M$ ist | $aR\,b$ bedeute |
|---|---|
| die Menge aller Schüler einer Schule, | $a$ geht in dieselbe Klasse wie $b$, |
| die Menge aller Kinder einer Stadt, | $a$ und $b$ haben dieselben Eltern, |

| | |
|---|---|
| die Menge aller natürlichen Zahlen, | $a$ hat dieselbe Quersumme wie $b$, |
| die Menge aller natürlichen Zahlen, | $a$ läßt bei Teilung durch 5 denselben Rest wie $b$, |
| die Menge aller Punkte einer Geraden $g$, die nicht mit dem Punkt $P_0$ von $g$ zusammenfallen, | $a$ liegt in derselben durch $P_0$ bestimmten Halbgeraden wie $b$, |
| die Menge aller nicht auf einer bestimmten Geraden $g$ liegenden Punkte der Ebene, | $a$ liegt in derselben durch $g$ bestimmten Halbebene wie $b$, |
| die Menge aller Geraden, | $a$ parallel $b$, |
| beliebig, | $a$ gleich $b$ ($a = b$). |

Wir wollen uns noch einmal der für irgendeinen Personenkreis erklärten Relation $aRb$: „$a$ hat $b$ zur Schwester" zuwenden. Diese Relation ist sicher nicht symmetrisch, denn wenn eine Person $a$ männlichen Geschlechts eine Schwester $b$ hat, so folgt aus $aRb$ nicht $bRa$.

Wie steht es aber, wenn wir von einer Menge weiblicher Personen ausgehen? In diesem Fall folgt aus $aRb$ stets $bRa$, die Relation ist jetzt symmetrisch. Ist sie auch transitiv? Nehmen wir an, $a$, $b$, $c$ seien drei Schwestern. In diesem Fall folgt aus $aRb$ und $bRc$ sicher $aRc$. Es sieht so aus, als ob die Relation transitiv wäre. Wie steht es aber, wenn wir – was uns nach der Erklärung der Transitivität von S. 95 doch freisteht – für $c$ wieder $a$ einsetzen? Wenn $R$ transitiv wäre, müßte gelten: Aus $aRb$ und $bRa$ folgt $aRa$. Nun ist doch aber die weibliche Person $a$ nicht ihre eigene Schwester! Wir hatten diese Relation ja schon (S. 94) als Beispiel einer irreflexiven Relation aufgeführt. Also ist unsere Relation sicher keine Äquivalenzrelation.

Es scheint, daß eine Relation, die zwar symmetrisch, aber nicht reflexiv ist, auch nicht transitiv sein kann, denn gerade die Tatsache, daß die Relation „Schwester sein" irreflexiv ist, störte bei unseren Überlegungen scheinbar die Transitivität. Wenn dies aber wirklich so wäre, müßte die Transitivität bei einer symmetrischen Relation die Reflexivität nach sich ziehen. Dann wäre aber bei unserer Erklärung der Äquivalenzrelationen eine der drei Forderungen, nämlich die der Reflexivität, überflüssig! Es scheint, daß man folgendermaßen schließen kann:

„$R$ ist symmetrisch. Also ist, wenn $aRb$ richtig ist, auch $bRa$ richtig. $R$ ist aber auch transitiv. Mithin folgt aus $aRb$ und $bRa$, daß auch $aRa$ gelten muß. Also ist $R$ reflexiv."

Das ist aber ein Fehlschluß. Er beruht darauf, daß die beiden Aussagen „aus $aRb$ folgt $bRa$" und „$aRb$ und $bRa$ sind zugleich wahr" nicht dasselbe bedeuten. Sie sind nicht gleichwertige (äquivalente) Aussagen, sie haben nicht dieselbe Wahrheitswertetabelle (↑ S. 21 f.). Ein Gegenbeispiel mag den Leser davon überzeugen, daß die Reflexivität keine logische Folge aus der Symmetrie und der Transitivität ist.

Konstruieren wir also eine Relation, die zwar symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist:

Es sei $M$ die Menge von 10 verschiedenen, sonst beliebigen Elementen, $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$, und $R$ sei die nur aus dem einzigen Paar $[a_1, a_1]$ bestehende Menge. Dann ist $R$ sicher als Teilmenge der Kreuzmenge $M \times M$ eine Relation über $M$. $a_i \, R \, a_k$ besteht dann und nur dann, wenn $i = k = 1$ ist.

Diese Relation $R$ ist symmetrisch. Denn in dem einzigen Fall, in dem $a_i \, R \, a_k$ besteht, ist auch $a_k \, R \, a_i$ richtig. Aus $a_i \, R \, a_k$ folgt also $a_k \, R \, a_i$. Aus dem gleichen Grund ist $R$ aber auch transitiv. Denn die Transitivität bedeutet: Jedesmal, wenn $a_i \, R \, a_k$ und $a_k \, R \, a_n$ besteht, muß auch $a_i \, R \, a_n$ bestehen. Nun ist die Voraussetzung aber nur richtig für $i = k = n = 1$, und dann gilt eben auch $a_i \, R \, a_n$. Die Relation $R$ ist aber nicht reflexiv: Zwar gilt $a_1 \, R \, a_1$, aber für kein weiteres der zehn Elemente gilt $a_i \, R \, a_i$. Damit haben wir eine Relation gefunden, die symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist. Sie zeigt uns, daß die Reflexivität neben der Symmetrie und der Transitivität bei Äquivalenzrelationen extra gefordert werden muß.

Die Bedeutung der Äquivalenzrelationen beruht auf einem wichtigen mathematischen Zusammenhang, den wir noch nicht berührt haben. Wir wollen ihn uns zunächst an Hand eines Beispiels klarmachen.

BEISPIEL 28:
Es sei $M$ die Menge aller Schüler einer beliebigen Schule, und $a R b$ bedeute: „$b$ geht in dieselbe Klasse wie $a$“. Diese Relation $R$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Menge $M$ wird nun durch diese Relation $R$ in folgender Weise aufgespalten: Alle Schüler, die einander „äquivalent“ sind, gehen in dieselbe Klasse. Die Menge $M$ zerfällt also in lauter Klassen, die üblichen Schulklassen. Keine der Klassen stellt die leere Menge dar, und alle Klassen zusammen liefern sämtliche Schüler von $M$. Es ist unmöglich, daß ein Schüler zugleich zwei Klassen angehört. Unsere Teilmengen von $M$ sind also „elementefremd“. Die Menge $M$ wird durch die Äquivalenzrelation „in dieselbe Klasse gehen“ in lauter nichtleere, elementefremde Teilmengen zerlegt oder, wie wir in diesem Fall sagen wollen, gefasert. Natürlich ist die Menge $M'$ aller Schulklassen nicht identisch mit der Ausgangsmenge $M$ aller Schüler der Schule. Man erkennt dies schon daran, daß $M$ eine Menge erster Stufe, $M'$ aber zweiter Stufe ist. Außerdem ist die Anzahl der Elemente von $M$ bedeutend größer als die von $M'$.
Wir wollen den gefundenen Sachverhalt allgemein in einem Satz formulieren und diesen beweisen.

SATZ:
▷ Jede für eine Menge $M$ erklärte Äquivalenzrelation führt zu einer Faserung von $M$, d. h. zu einer Aufspaltung von $M$ in lauter nichtleere, elementefremde Teilmengen, die zusammen die gesamte Menge $M$ ausmachen.

Um unseren Satz zu beweisen, bilden wir zunächst einmal auf Grund der Äquivalenz die Teilmengen und zeigen dann, daß keine von ihnen leer ist, daß sie die Menge $M$ ganz ausschöpfen und daß zwei verschiedene Teilmengen kein Element gemeinsam haben können.
Wir wählen ein beliebiges Element $m$ von $M$ aus und suchen alle Elemente von $M$, die zu $m$ äquivalent sind, d. h. alle $m'$, für die $m \, R \, m'$ besteht. Diese Teilmenge von $M$ wollen wir mit $T_m$ bezeichnen. Sicher ist $T_m$ nicht leer, da ja wegen $m \, R \, m$ (Reflexivität!) das Element $m$ darin liegt. Nun kann es durchaus sein, daß $T_m$ bereits die ganze Menge $M$ erschöpft. Bedeutet $M$ z. B. die Menge aller derjenigen Schüler einer Schule, die sich gerade auf dem Sportplatz befinden, und bedeutet $a \, R \, b$ wieder „$b$ geht

in dieselbe Klasse wie $a$", so ist es möglich, daß sich auf dem Sportplatz genau alle Schüler einer bestimmten Schulklasse befinden, die jetzt ihren Unterricht in Körpererziehung erhalten. In diesem Fall gibt es nur eine einzige „Äquivalenzklasse", und sie stimmt mit $M$ überein. Hierfür ist unser Satz richtig.
Andernfalls enthält $M$ noch mindestens ein Element $k$, das nicht zu $m$ äquivalent ist, d. h. für das $mRk$ nicht gilt. Wir sammeln wieder alle zu $k$ äquivalenten Elemente in einer Teilmenge, die wir jetzt $T_k$ nennen. Wenn keine Elemente von $M$ mehr übrigbleiben, ist $M$ in die beiden Teilmengen $T_m$ und $T_k$ aufgegliedert. Andernfalls fahren wir in der beschriebenen Weise fort, bis jedes Element von $M$ in einer der Klassen untergebracht ist. Die Einteilung von $M$ in $T_m, T_k, \ldots$ ist also erschöpfend.
Jetzt zeigen wir, daß zwei verschiedene so gebildete Teilmengen kein Element gemeinsam haben können. Wäre dies nämlich für $T_i$ und $T_j$ der Fall und wäre $x$ dieses gemeinsame Element, so würde wegen $x \in T_i$ gelten: $xRi$ und wegen $x \in T_j$: $jRx$. (Wir haben hier von der Symmetrie der Relation $R$ Gebrauch gemacht.) Aus $jRx$ und $xRi$ folgt aber auf Grund der Transitivität $jRi$, ein Widerspruch bezüglich unserer Annahme, daß $j$ nicht Element von $T_i$ sein sollte. Die Teilmengen sind also in der Tat elementefremd.
Nun gilt auch die Umkehrung:

SATZ:
▷ Es sei $M$ eine beliebige Menge, die in lauter nichtleere, elementefremde Teilmengen aufgespalten ist; die Vereinigungsmenge all dieser Teilmengen ergibt also genau wieder $M$. Über $M$ sei folgende Relation $R$ erklärt: $aRb$ soll bedeuten, daß $b$ in derjenigen Teilmenge liegt, der $a$ angehört. Dann ist $R$ eine Äquivalenzrelation.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir an, die Teilmengen seien nach irgendeinem ihrer Elemente benannt als $M_u, M_v, \ldots$, also $u \in M_u$, $v \in M_v, \ldots$ und $M = M_u \cup M_v \cup \ldots$ Solch eine Benennung ist sicher auf Grund unserer Voraussetzungen zulässig, denn es kann ja nicht zwei verschiedene Mengen geben, die $u$ enthalten. Das Element $a$ von $M$ gehöre zu $M_u$. Dann bedeutet $aRb$, daß auch $b$ zu $M_u$ gehört. Natürlich gilt dann auch $bRa$. Es gelte weiter $bRc$. Das Element $c$ von $M$ gehört also gleichfalls zu $M_u$, also gilt $aRc$. Aus $aRb$ und $bRc$ folgt stets $aRc$, die Relation $R$ ist transitiv. Da jedes Element natürlich mit sich selbst in einer Klasse liegt, ist die Relation $R$ auch reflexiv, sie ist eine Äquivalenzrelation.
Wir haben damit gezeigt, daß Äquivalenzrelationen und nur solche Relationen zur „Faserung" einer Menge führen. Wir wollen die Teilmengen, in die die Menge dabei zerfällt, als **Äquivalenzklassen** bezeichnen. Heißt die Ausgangsmenge $M$, so soll die Menge ihrer Äquivalenzklassen als $M'$ bezeichnet werden. Der Übergang von der Menge $M$ zu der um eine Stufe höheren Menge $M'$ wird in der Mathematik als **Abstraktionsprozeß** bezeichnet. Wir wollen versuchen, uns klarzumachen, daß hierbei das gleiche geschieht, das wir in der Umgangssprache als Abstrahieren bezeichnen.
Zu diesem Zweck wollen wir uns noch einmal den mathematischen Vorgang klarmachen.

1. Wir gehen von einer Menge $M$ von Individuen (z. B. der Menge aller Säugetiere) aus.

2. Wir erklären für sie eine Äquivalenzrelation (z. B. zu einer bestimmten Tiergattung gehören).
3. Wir fassen alle einander äquivalenten Elemente von $M$ jeweils zu einer Klasse zusammen (jede Klasse besteht aus einer Tiergattung).
4. Wir ersetzen die aus Individuen bestehende Menge $M$ durch die Menge $M'$ der so gebildeten Klassen ($M'$ ist die Menge aller zur Kategorie der Säugetiere gehörenden Tiergattungen).

Nehmen wir z. B. die Aussage „Der Hund ist ein Säugetier". Der bestimmte Artikel könnte den Eindruck erwecken, als sei hierbei von einem Individuum die Rede. Das ist aber mit der Aussage nicht gemeint, sie bezieht sich weder auf meinen Schäferhund Rolf noch auf einen anderen bestimmten Hund, und bei dem Begriff „Säugetier" hat man auch gar nicht die Menge $M$ aller einzelnen Tiere vor Augen, zu denen der Goldhamster des kleinen Peter genauso gehört wie die weißen Mäuse seines Bruders oder jeder Elefant des Berliner Tierparks. Vielmehr denkt man an die Menge $M'$ der Säugetiergattungen „Goldhamster", „Maus", „Elefant" usw. und drückt den Sachverhalt aus, daß die Tiergattung Hund Element der Menge $M'$ ist. Dabei „abstrahieren" wir von den unter Umständen recht erheblichen Unterschieden, die zwischen einem Zwergdackel und einem Bernhardiner bestehen, genau wie bei der Tiergattung Pferd von den Unterschieden zwischen einem Rennpferd und einem Ackergaul oder zwischen Schimmel und Rappen.

Abstraktionen dieser Art bedeuten doch nichts anderes, als daß wir – infolge der von klein auf geübten Gewohnheit natürlich unbewußt – eine Relation über der Menge $M$ bilden: $a\,R\,b$ bedeutet dabei, daß $b$ derselben Tiergattung angehört wie $a$. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Alle Hunde sind einander jetzt für uns äquivalent, alle Katzen, alle Elefanten usw.

Was geht vor sich, wenn wir einen schlecht lesbaren Brief entziffern? Wir stellen etwa fest: „Dies hier soll der Buchstabe *r* sein. Das Wort heißt dann *morgen*." Damit meinen wir doch: Dieser besondere Schriftzug gehört in die Klasse aller Schriftzüge, die, ob mit Tinte oder Bleistift, mit großen oder kleinen Zügen, krakelig oder klar geschrieben, den Buchstaben *r* bedeuten. Der spezielle Schriftzug vertritt den Buchstaben *r*. Sobald wir ihn mit der Absicht zu lesen – und nicht etwa als Graphologe – ins Auge fassen, abstrahieren wir von den individuellen Besonderheiten und sehen in ihm nur den Vertreter des Buchstabens *r*. Die Buchstaben unseres Alphabets sind dabei wieder nichts anderes als Äquivalenzklassen. Die Menge $M$ ist jetzt die Menge aller Schrift- oder Druckzeichen für Laute in unserer Sprache; sind $a$ und $b$ solche Zeichen, so bedeutet die Relation $aR\,b$, daß $b$ den gleichen Buchstaben darstellt wie $a$ (das braucht nicht immer leicht zu entscheiden zu sein!). Das Alphabet ist dann die Menge $M'$. *Lesen* bedeutet nichts anderes, als die speziellen Druck- oder Schriftzeichen eines Briefes oder Buches in die Klassen von $M'$ einzuordnen. (Das Aussprechen des so Erfaßten ist hierbei außer acht gelassen.)

Ein spezieller Schriftzug *vertritt* einen bestimmten Buchstaben, ein bestimmter in einem Kinderbuch abgebildeter Pudel die Gattung Hund, allgemein ein Individuum seiner Klasse die ganze Klasse. Welches Individuum ich zur Vertretung wähle, spielt keine Rolle, da ja alle Elemente einer Klasse untereinander äquivalent (gleichwertig) sind. Will der Direktor einer Klasse mitteilen, wo und wann sie sich zum morgigen

Wandertag trifft, so braucht er das nur irgendeinem Schüler der Klasse mitzuteilen. Dieser vertritt in diesem Fall seine Klasse. Welcher es ist, spielt dann keine Rolle (korrektes Verhalten des Schülers vorausgesetzt).
Alle diese Betrachtungen, die dem Leser vielleicht selbstverständlich erscheinen, sind für die Anwendung von Äquivalenzrelationen in der Mathematik wichtig. Hier geschieht im Grunde nichts anderes, als oben an den nichtmathematischen Beispielen beschrieben wurde.

Aufgaben 16 und 17

Wenden wir uns solchen Beispielen aus der Mathematik zu.

BEISPIEL 29:
$N$ sei die Menge der natürlichen Zahlen. Die Relation $aRb$: „die Zahl $b$ läßt bei Division durch 9 denselben Rest wie $a$“, ist eine Äquivalenzrelation. Die entsprechende Faserung von $N$ ergibt folgendes Bild:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |

Jede Spalte bildet eine Äquivalenzklasse. Sie soll nach dem an der Spitze stehenden Element benannt werden. So werden wir die mit der 6 beginnende Spalte in der Regel als (6) bezeichnen. Ebensogut hätten wir einen anderen Vertreter dieser Spalte wählen und sie mit (33) benennen können. Alle Zahlen einer Spalte lassen denselben „Neunerrest“. Die Menge $N'$ ist die Menge der Spalten. Obwohl $N$ eine unendliche Menge ist, besitzt $N'$ nur 9 Elemente. Mit diesen 9 Elementen (1), (2), ..., (9) kann nun in einer sehr bequemen und fruchtbaren Weise gerechnet werden (Näheres darüber vgl. S. 253ff.).
Handelt es sich nur um Fragen der Teilbarkeit durch 9, so kann z. B. gerechnet werden $(23) + (34) = (3)$; denn 23 gehört der mit 5 beginnenden Spalte an, also läßt 23 bei Teilung durch 9 den Rest 5 (bekanntlich auch zu erkennen an der Quersumme!), 34 läßt den Rest 7. Addiert man 23 und 24, indem man zuerst ihre durch 9 teilbaren Bestandteile, dann ihre Neunerreste addiert, so entsteht eine durch 9 teilbare Zahl, zu der $7 + 5$, also 12, zu addieren ist. Die Summe läßt mithin bei Division durch 9 in der Tat den Rest 3. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} n_1 &= k_1 \cdot 9 + r_1, \\ n_2 &= k_2 \cdot 9 + r_2, \text{ so ist} \\ n_1 + n_2 &= k \cdot 9 + (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Auf dieser Addition in $N'$ und auf der gleichfalls leicht einzusehenden Tatsache, daß die Quersumme jeder Zahl nach 9 denselben Rest läßt wie die Zahl selbst, beruht ein einfaches Verfahren, um eine Addition zu prüfen. Dies sei an einem Beispiel dargestellt:

$$\left.\begin{array}{r}736427\\894632\\366999\\874312\end{array}\right\}+$$
$$\overline{2872370}$$

Wir kontrollieren die Addition, indem wir neben jeden Summanden und neben die Summe jeweils die entsprechende Quersumme schreiben. Werden auch diese Zahlen noch zu groß, also unübersichtlich, so bilden wir einfach noch einmal die Quersummen. Der Neunerrest ändert sich dabei nicht.

| | Quersumme | Spalte | |
|---|---|---|---|
| 736427 | 29 | (2) | |
| 894632 | 32 | (5) | Die Summe ergibt (20) = (2) |
| 366999 | 42 | (6) | |
| 874312 | 25 | (7) | |
| 2872370 | 29 | (2) | |

Der Rest der Summe und die Summe der Reste stimmen überein. Wäre dies nicht der Fall, so wäre die Addition falsch. Allerdings garantiert diese sog. **Neunerprobe** noch nicht die Richtigkeit der Rechnung; denn wenn man sich zum Beispiel bei der Reihenfolge der Ziffern geirrt hat, dann ändert sich die Quersumme, also der Neunerrest nicht. Erscheint demnach dieses Kontrollverfahren bei der Addition noch nicht recht lohnend, so ändert sich dies, wenn aufwendigere Rechenoperationen wie Multiplikationen und Divisionen zu prüfen sind. Doch soll auf dieses Problem hier nicht eingegangen werden.

Dieses Arbeiten mit den „Restklassen nach 9“, wie die Spalten unseres Schemas auch in der Zahlentheorie heißen, zeigt, wie nützlich die Verwendung von Relationen sein kann. In Kursen für mathematisch interessierte Schüler sind solche und ähnliche Anwendungen von Relationen schon vielfach mit gutem Erfolg behandelt worden.

BEISPIEL 30:

Als weiteres Beispiel für die Anwendung von Äquivalenzrelationen greifen wir das Beispiel 16 von S. 80 auf: $M$ sei die Menge $(N \cup \{0\}) \times N$, wobei wir die Paare, die Elemente von $M$ sind, in Form von Brüchen schreiben wollen, $\frac{3}{5}, \frac{7}{1}$ usw. Über $M$ erklären wir folgende Relation $R$: $\alpha R \alpha'$ $\left(\alpha = \frac{a}{b}, \alpha' = \frac{a'}{b'}\right)$ soll bedeuten, daß $ab' = ba'$ ist. Zum Beispiel gilt $\frac{3}{5} \, R \, \frac{6}{10}$, da $3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$ ist. Die Relation $R$ ist natürlich reflexiv, $\frac{a}{b} \, R \, \frac{a}{b}$, da $ab = ab$ ist. Sie ist auch symmetrisch, denn $\alpha R \alpha'$ bedeutet $ab' = ba'$, und $\alpha' R \alpha$ bedeutet $a'b = ab'$, also dasselbe. Wie steht es mit der Transitivität? Sei $\alpha'' = \frac{a''}{b''}$, und es bestehe $\alpha R \alpha'$ sowie $\alpha' R \alpha''$. Dann gelten die Gleichungen

$$ab' = ba' \quad (1) \qquad a'b'' = a''b' \quad (2)$$

Wir multiplizieren beide Seiten von (1) mit $a''b''$ und erhalten $ab'a''b'' = ba'a''b''$, umgeordnet: $ab''(a''b') = a''b(a'b'')$. Die rechts und links in Klammern stehenden Produkte sind nach (2) gleich. Wenn sie von 0 verschieden sind, kann man auf beiden Seiten durch den gemeinsamen Faktor dividieren und erhält $ab'' = ba''$, also $\alpha R \alpha''$. Ein Verschwinden eines der Produkte $a''b'$ oder $a'b''$ ist wegen $M = (N \cup \{0\}) \times N$ nur dann möglich, wenn $a'$ oder $a''$ verschwindet. Wegen der Voraussetzung $\alpha R \alpha'$ und $\alpha' R \alpha''$ müssen, wenn eines der Elemente $a, a', a''$ von $N$ verschwindet, auch die beiden anderen verschwinden, und es gilt daher sicher gleichfalls unsere Behauptung, daß $\alpha R \alpha''$ ist. Also ist die Relation $R$ auch transitiv. Sie ist eine Äquivalenzrelation und bewirkt daher eine Faserung der Menge $M$ aller Brüche. Alle äquivalenten Brüche, d. h. alle, die durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervorgehen, befinden sich in derselben Klasse. Welchen Vertreter der Klasse wir wählen, wenn wir mit den Äquivalenzklassen rechnen wollen, ist ganz gleichgültig, denn die Klasse von $\frac{3}{5}$ ist ja dieselbe wie die von $\frac{6}{10}$. Im Gegensatz zum vorigen Beispiel haben wir aber jetzt unendlich viele Klassen. Sie sind nichts anderes als die sogenannten gebrochenen Zahlen (absolut-rationale Zahlen). Dabei ist der Bruch $\frac{3}{5}$ als Vertreter der gebrochenen Zahl $\left(\frac{3}{5}\right)$, die man auch als $\left(\frac{6}{10}\right)$ schreiben kann, aufzufassen. In dem Kapitel „Aufbau der Zahlenbereiche" kommen wir noch einmal auf dieses Beispiel zurück.
Jetzt wollen wir Anwendungen von Äquivalenzrelationen in der Geometrie betrachten.

BEISPIEL 31:
Es sei $M$ die Menge aller Geraden der Ebene, $a$ und $b$ seien Geraden aus $M$, und $a \, R \, b$ bedeute, daß $a$ zu $b$ parallel ist. Die Relation $R$ ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen, in die $M$ durch $R$ zerfällt, sind die verschiedenen Richtungen.
Für den Geometrieunterricht ist die Verbindung des Richtungsbegriffs mit der Parallelität recht fruchtbar. Parallele Geraden haben dieselbe Richtung. Eine Richtungsänderung wird durch einen Winkel beschrieben (Bild 3.27.). Dann ergibt sich der Satz, daß Scheitelwinkel einander gleich sind, unmittelbar und braucht nicht über Nebenwinkel bewiesen zu werden. Die Winkel $\alpha$ und $\alpha'$ bezeichnen dieselbe Richtungsänderung der Geraden $g$, also ist $\alpha' = \alpha$. Daß sie überhaupt als zwei Winkel in Erscheinung treten, liegt daran, daß in der Schule der Winkel gewöhnlich durch Drehung eines *Strahls* erklärt wird. Ebenso leicht ist einzusehen, daß Stufenwinkel an Parallelen einander gleich sind (Bild 3.28.). Seien $g$ und $g'$ die beiden Parallelen, $s$ die schneidende Gerade, $\alpha$ und $\alpha'$ ein Stufenwinkelpaar. Die Gerade $s$ hat gegenüber den parallelen

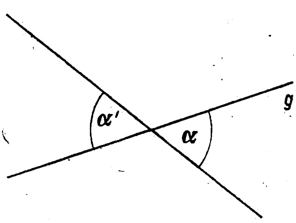


Bild 3.27.

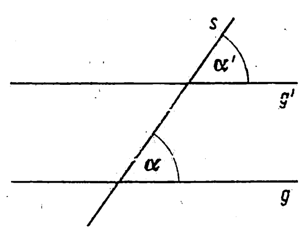


Bild 3.28.

Geraden $g$ und $g'$ dieselbe Richtungsänderung, schließt also mit ihnen den gleichen Winkel ein.

Wenngleich es manche Vorteile mit sich bringt, den Winkel mit der Richtungsänderung von Geraden zu verbinden, so sollte man ihn im Anfangsunterricht doch nicht so definieren. Man bedenke, daß man den Geraden einen Richtungssinn geben mußte, um von Winkeln zu sprechen, die größer oder gleich 180° sind! Schon der Satz von der Winkelsumme im Dreieck könnte sonst nicht formuliert werden. Es ist aber durchaus möglich, Winkel zunächst durch Drehungen eines Strahls zu erklären und sie dann doch, ohne bei dem anschaulichen Sachverhalt der Scheitelwinkel einen schwerfälligen Beweismechanismus aufzuziehen, mit der Richtungsänderung von Geraden verbinden. Dabei werden die Schüler an das Arbeiten mit der Äquivalenzrelation der Parallelität von Geraden gewöhnt. Dessenungeachtet ist der Nachweis, daß Scheitelwinkel gleich sind, gestützt auf die Definition von Scheitel- und Nebenwinkeln, als gelegentliche Beweisübung zu empfehlen.

Der Winkelbegriff ist überhaupt wohl der interessanteste und schwierigste jener geometrischen Begriffe, die in der Schule als Grundbegriffe behandelt werden. Der Lehrer sollte sich in der Planimetrie, der Stereometrie, der Trigonometrie Rechenschaft darüber ablegen, mit welchem Winkelbegriff er jeweils arbeitet.

Wir kommen jetzt zu zwei wichtigen Äquivalenzrelationen, der **Kongruenz** und der **Ähnlichkeit** von ebenen Figuren. Doch gehen wir zunächst von Körpern aus, von Werkstücken, die von einer Maschine automatisch hergestellt werden. Exakt ausgerichtet, alle von gleicher Gestalt und Größe, in allen Ausmessungen gleich, verlassen sie die Maschine. Der Mathematiker nennt solche Körper, falls eine ideale Gleichheit besteht, gleichsinnig **kongruent**[1]. Solche Gebilde lassen sich in Parallellage bringen, so daß der eine Körper als Ergebnis einer Parallelverschiebung des anderen erscheint: Alle Seitenflächen, Kanten und Winkel des einen Körpers besitzen dieselbe Größe wie die ihnen bei der Verschiebung entsprechenden Stücke des anderen Körpers. Reihenhäuser sind z. B. kongruent, wenn sie nach dem gleichen Bauplan gebaut sind.

Wir wollen den Begriff der Kongruenz jetzt auf ebene Figuren anwenden und uns dazu aus zwei aufeinandergelegten Papierblättern zwei kongruente Vierecke ausschneiden. Die beiden Vierecke sind deckungsgleich, alle einander bei der Deckung entsprechenden Stücke, die Seiten und die dazwischenliegenden Winkel, sind gleich groß. Wenn wir die Vierecke jetzt in die Buchebene legen und eines von ihnen drehen, ist die Kongruenz zum anderen Viereck nicht ohne weiteres zu erkennen. Das kann noch weiter erschwert werden, indem wir ein Viereck umklappen (ungleichsinnige Kongruenz). Haben wir solche Figuren vor uns, von denen wir nicht wissen, ob sie kongruent sind, so brauchen wir Kriterien, um die Kongruenz prüfen zu können (sofern wir das Papier nicht zerschneiden dürfen!). Wir versuchen die Ecken des einen Vierecks so den Ecken des anderen zuzuordnen, daß die entsprechenden Seiten und Winkel gleich groß sind. Dabei ist es nicht erforderlich, in beiden Vierecken *alle* Seiten und Winkel zu überprüfen; vielmehr ist die Kongruenz bereits gesichert, wenn man dies von je fünf geeignet gewählten Stücken in entsprechender Lage bei beiden Vierecken weiß.

---

[1] Aus dem Lateinischen, congruere, dem Wesen nach übereinstimmen, einander entsprechen.

Freilich ist ein mathematisch exakter Nachweis einer bestehenden Kongruenz nur bei einem axiomatischen Aufbau der Geometrie mit einer axiomatischen Fassung des Kongruenzbegriffs möglich, wie ihn zum Beispiel DAVID HILBERT in seinen Grundlagen der Geometrie lieferte (↑ S. 25). Solch ein Vorgehen würde in Klasse 6, in der jetzt die Kongruenz von Figuren behandelt wird, auf wenig Verständnis bei den Schülern stoßen. Zwar können Kinder dieser Altersstufe wohl dahin geführt werden, daß sie Drahtstücke oder Bleistiftstriche unterscheiden von den idealen Geraden und Kurven der Planimetrie, sie können also Verständnis gewinnen für die Notwendigkeit, in der Geometrie mit idealen Gebilden zu arbeiten. Aber auch dann werden sie in der Regel gezeichnete oder ausgeschnittene Figuren als Stellvertreter der idealen Gebilde ansehen. Daher wird der Lehrer in Klasse 6 die Kongruenz in der oben beschriebenen anschaulichen Weise als Deckungsgleichheit konkreter Figuren einführen und auch keine Bedenken haben, sie eventuell durch Messungen prüfen zu lassen. Dabei genügt dann bei Dreiecken, deren Kongruenz man prüfen will, die Messung von je drei, bei Vierecken von je fünf geeignet gewählten Stücken.

Es ist demnach entscheidbar, ob zwei ebene Vielecke kongruent sind oder nicht. Zunächst sieht man auf den ersten Blick, ob sie gleich viele Ecken haben. Ist dies nicht der Fall, so liegt sicher keine Kongruenz vor. Ist aber die Anzahl der Ecken gleich, dann können Messungen bzw. Konstruktionsangaben herangezogen werden. Bezeichnet man die Menge aller ebenen Vielecke mit $M$, so stellt die Kongruenz eine Relation $R$ über $M$ dar, denn von jedem Figurenpaar $[a, b] \in M \times M$ läßt sich entscheiden, ob $a$ kongruent zu $b$ ist oder nicht. Im Fall der Kongruenz schreiben wir $a \cong b$ (gelesen: „$a$ ist kongruent zu $b$"). Offenbar ist die Kongruenz eine Äquivalenzrelation. Die Menge $M$ aller ebenen Vielecke zerfällt dadurch in unendlich viele Klassen, von denen jede unendlich viele kongruente Figuren enthält.

Wären wir allein von der Menge $M$ aller Dreiecke einer Ebene ausgegangen, so hätten wir auch bereits unendlich viele Äquivalenzklassen zu der Kongruenzrelation erhalten. Jede Klasse enthält unendlich viele Dreiecke, die zueinander kongruent sind. Ein beliebiges von ihnen kann die ganze Klasse vertreten.

Nehmen wir an, der Lehrer Krause habe in einer sechsten Klasse als Hausaufgabe gestellt, ein Dreieck aus den Seiten $a = 3{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 5{,}0$ cm zu konstruieren. In der nächsten Mathematikstunde sieht er die Hefte durch und stellt bei Monika fest: „Du hast nicht das verlangte Dreieck gezeichnet." Natürlich gibt es unendlich viele Dreiecke, die die verlangten Stücke enthalten. Sie sind auf Grund eines bestimmten Kongruenzkriteriums, des sogenannten Seitenkongruenzsatzes, alle miteinander kongruent. Nehmen wir an, in der Klasse seien 25 richtig konstruierte Dreiecke vorhanden. Wenn Herr Krause zu Monikas Nachbarin Helga sagt: „Du hast das richtige Dreieck", so denkt er nicht an die Menge $M$ aller Dreiecke, sondern an die Menge $M'$ aller Klassen kongruenter Dreiecke. Die von ihm verlangte Klasse wird durch das von Helga konstruierte Dreieck vertreten. Es ist „das" verlangte Dreieck.

Der bestimmte Artikel sagt aus, daß es ein solches Dreieck und nur eines gibt. Das wäre nicht richtig, wenn man sich auf die Menge $M$ aller Dreiecke bezöge. Man meint vielmehr die Menge $M'$ der Klassen. Wenn man alle einander kongruenten Dreiecke miteinander identifiziert, gibt es in der Tat nur ein einziges verlangtes Dreieck. In diesem Sinn kann man sagen: „Die Konstruktion eines Dreiecks aus $a$, $b$, $c$ ist, falls sie möglich ist, eindeutig."

BEISPIEL 32:
Wir hatten auf Seite 87 f. eine Figur durch Streckung von einem festen Zentrum $P_0$ aus maßstäblich vergrößert. Man bezeichnet zwei Figuren als **ähnlich**, wenn die eine aus der anderen durch maßstäbliche Vergrößerung hervorgegangen ist. Ist eine Figur gegenüber der anderen aus der Parallellage herausgedreht, eventuell auch noch umgeklappt, so kann die Ähnlichkeit nicht ohne weiteres erkannt werden. Man beachte, daß es nicht genügt, die Seiten der Figuren zu messen. Zum Beispiel stehen die Seiten eines Quadrats $ABCD$ und die eines nichtquadratischen Rhombus $A'B'C'D'$ im gleichen Verhältnis, aber nicht die Diagonalen. Diese beiden Figuren sind also nicht ähnlich.
Wenn wir uns wieder auf ebene Polygone beschränken, so ist durch eine ausreichende Anzahl von Messungen oder durch Kenntnis des Konstruktionsplans feststellbar, ob bei zwei Polygonen Ähnlichkeit vorliegt oder nicht. Auch hier kann man auf Grund geometrischer Sätze, der sogenannten Ähnlichkeitskriterien, schon mit einer gewissen Mindestanzahl an Messungen auskommen, die sich – entsprechend wie bei der Kongruenz – nach der Eckenzahl richtet. Ist $M$ wieder die Menge aller ebenen Vielecke, so stellt auch die Ähnlichkeit von Figuren eine Relation über $M$ dar, die sich wie die Kongruenz als Äquivalenzrelation erweist. Die Menge $M$ zerfällt dadurch wieder in lauter Klassen, von denen eine jede nur einander ähnliche Figuren enthält. Die Menge der Klassen ist dann die Menge $M'$.
Die Kongruenz und die Ähnlichkeit gehören zu den sogenannten **geometrischen Verwandtschaften.** Die engste „Verwandtschaft", die man sich zwischen zwei Figuren vorstellen kann, ist zweifellos die Identität. Auch die Identität ist eine Äquivalenzrelation. Hier enthält aber jede Äquivalenzklasse nur ein einziges Element. Die Menge $M'$ der Klassen hat gerade so viel Elemente wie die Menge $M$ aller Figuren. Nicht ganz so nahe verwandt sind kongruente Figuren. Sie stimmen zwar in allen Ausmessungen überein, können sich aber durch die Lage und auch durch den Umlaufsinn – wenn eine Figur umgeklappt worden ist – unterscheiden. Noch loser verwandt sind ähnliche Figuren. Sie können sich nicht nur in Lage und Umlaufsinn, sondern auch in der absoluten Größe unterscheiden. Dabei stimmen die Winkel, die zwischen zugeordneten Seiten ähnlicher Figuren liegen, überein. Es gibt noch weitere geometrische Verwandtschaften von ebenen Figuren, bei denen auch die Winkel verändert werden, z. B. die Affinität, bei der die Parallelität von Geraden erhalten bleibt. Die Ähnlichkeit ist im Sinn von Seite 78 f. eine Teilrelation der Affinität, die Kongruenz eine Teilrelation der Ähnlichkeit. Auf weitere geometrische Verwandtschaften kann in diesem Buch nicht eingegangen werden.

Aufgaben 18 und 19

## 3.6. Aufgaben: Relationen

1. Es sei $M$ die Menge der Monate $m_1, m_2, \ldots, m_{12}$. Die Relation $m_i \, R \, m_k$ soll bedeuten, daß $m_k$ unmittelbarer Nachfolger von $m_i$ ist und gleich viel Tage besitzt. Bilden Sie die zu $R$ gehörende Pfeildarstellung! (↗ S. 69)

2. a) In Bild 3.29. bedeuten die schwarzen Kreise Jungen, die weißen Mädchen. Die Pfeile stellen die Relation $aRb$: „$b$ ist Schwester von $a$" dar. Ver-

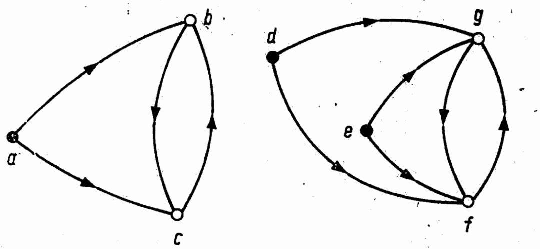



Bild 3.29.

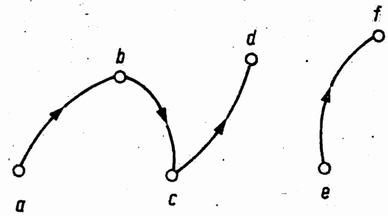



Bild 3.30.

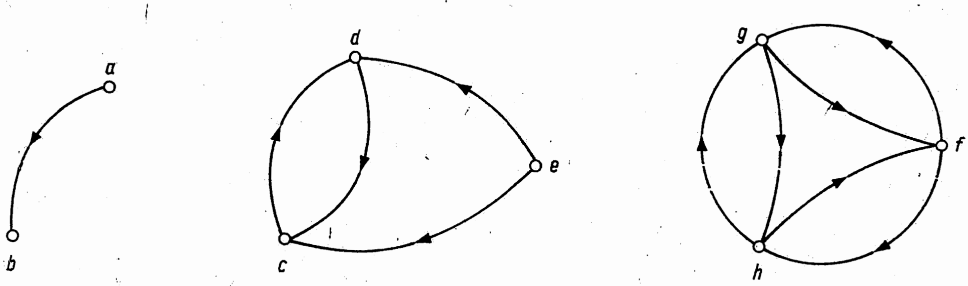



Bild 3.31.

suchen Sie, die Verbindungen von $a$, $b$, $c$ und die von $d$, $e$, $f$, $g$ zu interpretieren!

b) Auch bei den Bildern 3.30. und 3.31. soll es sich um dieselbe Relation handeln. Dabei sind im Gegensatz zu Bild 3.29. die Punkte für Jungen und Mädchen nicht unterschieden. Ist es möglich, etwas darüber auszusagen, ob in Bild 3.30. alle Pfeile gezeichnet sind?

c) Bild 3.31. soll vollständig sein. Welche der Punkte stellen Jungen dar? (↑ S. 71)

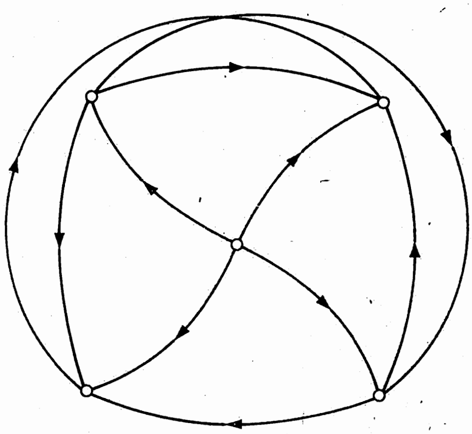


Bild 3.32.

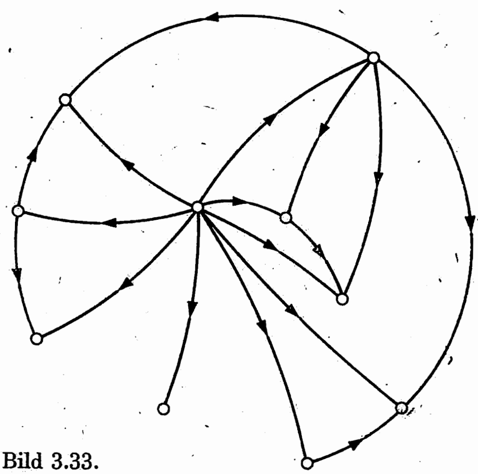


Bild 3.33.

3. In Bild 3.32. bedeuten die Punkte die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5. Der Pfeil bezeichnet die Relation $a < b$. Schreiben Sie an die Punkte die zugehörigen Zahlen! (↑ S. 72)

4. Im Bild 3.33. bedeuten die Punkte die Zahlen 1, 2, 3, ..., 10 und der Pfeil die Relation $a \mid b$ ( $a$ teilt $b$). Schreiben Sie an die Punkte die zugehörigen Zahlen (Die Schleifen an den Punkten werden weggelassen.)! (↑ S. 72)

5. Wählen Sie in dem Gebiet I von Bild 3.14. (↑ S. 76) einen Punkt $P_1$, und ziehen Sie durch diesen die Parallelen zu den Koordinatenachsen. Dadurch zerfällt das Gebiet I in vier neue Gebiete. Numerieren Sie diese im gleichen Sinn wie I, II, III, IV mit 1, 2, 3, 4, und charakterisieren Sie die Lage eines Punktes $P(x; y)$ im Inneren jedes dieser Gebiete durch Ungleichungen!

6. a) Um die zu der Relation $aRb$: $a < b$ gehörenden Paare in einer anderen Form zu kennzeichnen, schreiben wir die Elemente der Menge, zum Beispiel $M = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, einmal nebeneinander und einmal untereinander, am besten auf kariertes Papier, so daß ein quadratisches Schema (Bild 3.34.) entsteht. Das eingezeichnete Kreuz bedeute $2 < 5$. Vervollständigen Sie das Schema durch Zufügung der fehlenden Kreuze!

| $a < b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | × | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | |

Bild 3.34.

Wenden Sie die Schemadarstellung von Aufgabe 6.a) auf die Zahlen von 1 bis 12 und auf folgende Relationen an:

b) die Teilerrelation $a \mid b$

c) die Relation $a + b = 16$! (↑ S. 78)

7. Zeigen Sie mit den in Beispiel 19 (S. 81 ff.) entwickelten Hilfsmitteln: Ist bei einer Symmetrieabbildung $R_s$ eine Gerade $g$ parallel zu $s$, so ist es auch ihre Bildgerade $g'$.

8. Auf Seite 85 wurde gezeigt, wie allein mit Hilfe des Lineals zu einem beliebigen Punkt $Q$ bei gegebener Symmetrieachse der symmetrische Punkt $Q'$ konstruiert werden kann, sofern ein symmetrisches Punktepaar $[P, P']$ bereits gezeichnet vorliegt und die Gerade $PQ$ nicht parallel zur Symmetrieachse verläuft. Die letzte Forderung soll jetzt fortfallen. Es seien also gegeben: Die Symmetrieachse $s$, das symmetrische Punktepaar $[P, P']$ und

ein Punkt $Q$ so, daß $PQ$ parallel zu $s$ ist. Allein mit Hilfe des Lineals ist $Q'$ zu konstruieren. Dabei darf das Lineal nur zur Verbindung zweier Punkte benutzt werden.

9. Gegeben sei eine Gerade und auf ihr ein Punkt $P_0$. Die Menge aller Punkte dieser Geraden sei $M$. Sind $P$ und $Q$ Punkte aus $M$, so soll $P\,R'\,Q$ bedeuten, daß die Menge $\{\overline{PP_0}\}$ – das soll die Menge der auf der abgeschlossenen Strecke $\overline{PP_0}$ liegenden Punkte sein – mit der Menge $\{\overline{QP_0}\}$ den Durchschnitt $\{P_0\}$ besitzt; $\{\overline{PP_0}\} \cap \{\overline{QP_0}\} = \{P_0\}$. Das Paar $[P_0, P_0]$ soll nicht zu $R'$ gehören. Was kann man über die Lage der Punkte $P$ und $Q$, für die $P\,R'\,Q$ gilt, aussagen? Setzen Sie die Relation $R'$ zu der Relation $R$ von Beispiel 21 (S. 86f.) in Beziehung!

10. In einer Ebene sei ein beliebiges Dreieck $D$ gegeben. Es sei $M$ die Menge aller Geraden dieser Ebene. Die dreistellige Relation $R$ enthalte alle diejenigen Tripel von Geraden der Ebene, die sich jeweils in einem einzigen Punkt im Innern oder auf dem Rand von $D$ schneiden. Zum Beispiel gehören die drei durch die Winkelhalbierenden von $D$ bestimmten Geraden zu $R$. Gehören auch die durch die Höhen, die Mittelsenkrechten, die Seitenhalbierenden von $D$ gegebenen Geraden zu $R$? (↑ S. 91)

11. Weisen Sie nach, daß die leere Relation sowohl symmetrisch als auch asymmetrisch, sowohl transitiv als auch nichttransitiv ist! (↑ S. 98)

12. Wie drückt sich in der Schemadarstellung von Aufgabe 6 die Reflexivität bzw. Irreflexivität der Relationen aus? (↑ S. 98)

13. Wie drückt sich in der Schemadarstellung von Aufgabe 6.a) und 6.b) die Transitivität der Relationen aus? (↑ S. 98)

14. a) Wie drückt sich in der Schemadarstellung von Aufgabe 6.c) die Symmetrie der Relation aus?
    b) Verallgemeinern Sie die Aussage für die Relation $a + b = u$ ($a$, $b$, $u$ sind bestimmte natürliche Zahlen)! (↑ S. 98)

15. Es sei $M$ die Menge der in einem Aquarium lebenden Tiere. Die Menge $M$ enthält Fische, Schnecken, Muscheln, Wasserflöhe, Infusorien. Die Relation $a\,R\,b$ bedeute, daß Tier $a$ dem Tier $b$ zur Nahrung dient. Stellen Sie Eigenschaften dieser Relation fest! (Transitivität oder dgl.)! (↑ S. 98)

16. In Beispiel 4 (S. 71) mögen zwei Schüler der Schule $C$ und einer der Schule $A$ denselben Volkshochschulkurs besuchen (s. Bild 3.5.). Die Relation $aRb$ bedeute wieder: „$a$ und $b$ besuchen dieselbe Schule“. Dabei ist aber jetzt die Volkshochschule einbegriffen. Stellt $R$ eine Äquivalenzrelation dar? Begründen Sie Ihre Antwort! (↑ S. 107)

17. Prüfen Sie, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind:
    a) Die Relation $R'$ von Aufgabe 9,
    b) die Relation $R$ von Beispiel 23 (↑ S. 91),
    c) das Senkrechtstehen von Geraden,

d) folgende Relation $R$: In der Zeichenebene werde durch eine feste Gerade $h$ eine Halbebene $H$ ausgezeichnet. $M$ sei die Menge aller Geraden der ganzen Ebene. Es bedeute $g_1 \, R \, g_2$, daß $g_1 \cap g_2$ im Inneren von $H$ liegt. (↑ S. 107)

18. Es sei $M$ die Menge aller Dreiecke einer Ebene, und $aRb$ bedeute, daß Dreieck $a$ zu Dreieck $b$ ähnlich ist, $\triangle a \sim \triangle b$. Die Relation $a \, R' \, b$ bedeute, daß Dreieck $a$ zu Dreieck $b$ kongruent ist, $\triangle a \cong \triangle b$. Zeigen Sie, daß $R'$ eine Teilrelation von $R$ ist! Was können Sie über ein Dreieckspaar $[a, b]$ aussagen, das zu $R \setminus R'$ gehört? (↑ S. 112)

19.* Weisen Sie nach, daß bei beliebig vorgegebener Menge $M$ die Mengeninklusion eine reflexive Halbordnung in der Potenzmenge von $M$ darstellt! (↑ S. 112)

# 4. ABBILDUNGEN, FUNKTIONEN

In diesem Kapitel sollen Relationen von einem besonderen Standpunkt aus behandelt werden. Im vorigen Kapitel blieb unberücksichtigt, wieviel Elemente der einen Menge mit einem bestimmten Element der anderen Menge durch eine Relation zu einem Paar vereinigt werden. Gerade solche Fragen sollen jetzt im Vordergrund stehen.

## 4.1. Abbildung von Mengen, der Funktionsbegriff

Beispiel 17 des vorigen Kapitels (↑ S. 80) stellte eine Relation zwischen einer Menge $A$ von Arbeitern, $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, und einer Menge $B$ von Maschinen, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, dar. Die Relation bedeutete, daß ein bestimmter Arbeiter eine bestimmte Maschine bedient. Folgende Paare waren gegeben:

$$R = \{[a, 1], [b, 2], [b, 3], [d, 4], [e, 4], [f, 6], [f, 7], [f, 8], [g, 6], [g, 8]\}.$$

Das Element $b$ von $A$ tritt mit zwei Elementen von $B$ gepaart auf, nämlich mit 2 und mit 3, das Element $f$ von $A$ sogar mit drei Elementen, nämlich mit 6, 7 und 8. Andererseits ist das Element 4 von $B$ zweiter Partner in zwei Paaren, in $[d, 4]$ und in $[e, 4]$. Das Element $c$ von $A$ hat gar keinen Partner und das Element 5 von $B$ ebenfalls nicht. Von einem Element von $A$ gehen also bei der Pfeildarstellung 0, 1, 2 oder 3 Pfeile aus, bei einem Element von $B$ kommen 0, 1 oder 2 Pfeile an.
Bei derartigen Betrachtungen bezeichnet man die vorliegende Relation auch als Abbildung aus der Menge $A$ in die Menge $B$.

ERKLÄRUNG:

▷ Sind zwei gleiche oder verschiedene Mengen $A$, $B$ gegeben, so wird eine Teilmenge der Kreuzmenge $A \times B$ als **Abbildung aus $A$ in $B$** bezeichnet. Ist speziell $B = A$, so heißt eine Teilmenge von $A \times A$ auch eine **Abbildung aus $A$ in sich.**

Der Leser lasse sich durch diesen neuen Terminus nicht verwirren. In mathematischer Beziehung sind „Abbildung“ und „Relation“ verschiedene Ausdrücke für denselben Gegenstand. Welcher Terminus gewählt wird, hängt von der jeweiligen Blickrichtung ab. So wird der Mathematiker z. B. nicht von „Äquivalenzabbildungen“, sondern von „Äquivalenzrelationen“ sprechen. Andererseits wird er, wenn er untersucht, wieviel Elemente der einen Menge mit einem bestimmten der anderen Menge gepaart sind, den Ausdruck „Abbildung“ vor „Relation“ bevorzugen. Auch denkt man wohl, wenn man von einer „Relation“ spricht, mehr an die einzelnen Paare, während beim Terminus „Abbildung“ der Blick eher auf das Ganze gerichtet ist. Schon im vorigen Kapitel (↑ S. 81) wurde darauf hingewiesen, daß die beiden Begriffe denselben Inhalt haben.

Es sei allerdings nicht verschwiegen, daß der Terminus „Abbildung“ nicht überall in diesem Sinn gebraucht wird, sondern in eingeengter Bedeutung: Es werden dann unter „Abbildungen“ nur eindeutige Abbildungen – diese werden wir im folgenden als „Funktionen“ bezeichnen – verstanden (↑ S. 120). Dies ist zum Beispiel der Fall in Frankreich („application = „fonction“), in der BRD und teilweise in der Sowjetunion (vgl. [16], S. 70). Die in vorliegendem Buch verwendete Terminologie stimmt, wie bereits bemerkt, mit der des Mathematischen Wörterbuchs überein.

Liegt nun wie in obenstehendem Beispiel eine Abbildung aus der Menge $A$ in die Menge $B$ vor, so heißt jedes Element von $B$, das mit einem bestimmten Element $a$ von $A$ gepaart auftritt, **ein Bild von $a$** bei der Abbildung. In unserem Beispiel ist Bild von $a$ nur ein Element, während $f$ drei Bilder hat. Umgekehrt heißt jedes Element von $A$, das mit einem bestimmten Element von $B$, etwa mit 6, gepaart ist, **ein Urbild von** 6 bei der Abbildung. Urbilder von 6 sind die Elemente $f$ und $g$ von $A$. Die Menge aller Elemente aus $A$, die überhaupt mit mindestens einem Element von $B$ gepaart sind, heißt der **Vorbereich** der Abbildung, die Menge aller Elemente von $B$, die mit mindestens einem Element von $A$ gepaart sind, der **Nachbereich** der Abbildung. Der Vorbereich ist also die Menge der Urbilder sämtlicher Elemente von $B$, der Nachbereich die Menge der Bilder aller Elemente von $A$. In diesem Fall ist der Vorbereich $Vb$ der Abbildung

$$Vb = \{a, b, d, e, f, g\},$$

der Nachbereich

$$Nb = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}.$$

Die Menge $Vb$ ist in diesem Fall eine echte Teilmenge von $A$, die Menge $Nb$ eine echte Teilmenge von $B$.

Es gibt natürlich auch Abbildungen, bei denen $Vb$ mit $A$ oder $Nb$ mit $B$ übereinstimmt. Um dafür ein Beispiel zu finden, brauchen wir ja nur von den Mengen $A$ bzw. $B$ diejenigen Elemente wegzulassen, die ohne Partner sind. Bilden wir aus $A$ die Menge $A' = A \setminus \{c\}$, so besitzt jedes der Elemente von $A'$ ein Bild. In diesem Fall spricht man von einer Abbildung **von $A'$ in $B$.** Bildet man $B' = B \setminus \{5\}$, so hat jedes Element von $B'$ ein Urbild in $A$. In diesem Fall liegt eine Abbildung **aus $A$ auf $B'$** vor. Reduzieren wir zugleich $A$ auf $A'$ und $B$ auf $B'$, so haben wir es mit einer Abbildung **von $A'$ auf $B'$** zu tun.

**Zusammenfassung:**
**Jede Teilmenge der Kreuzmenge $A \times B$ heißt eine Abbildung aus $A$ in $B$. Die Menge der Elemente von $A$, deren Bilder in $B$ liegen, heißt Vorbereich der Abbildung, die Menge der Elemente von $B$, die Urbilder in $A$ haben, Nachbereich der Abbildung. Es ist stets $Vb \subseteqq A$, $Nb \subseteqq B$. Ist speziell $Vb = A$, so liegt eine Abbildung von $A$ vor, ist $Nb = B$, so handelt es sich um eine Abbildung auf $B$.**

Es gibt also drei Spezialfälle von Abbildungen aus einer Menge $A$ in eine Menge $B$, die in folgender Übersicht zusammengestellt werden.

$Vb \subseteqq A$, $Nb \subseteqq B$

Abbildung aus $A$ in $B$

| $Vb$ \ $Nb$ | $\subset B$ | $= B$ |
|---|---|---|
| $\subset A$ | Abbildung aus $A$ in $B$ | Abbildung aus $A$ auf $B$ |
| $= A$ | Abbildung von $A$ in $B$ | Abbildung von $A$ auf $B$ |

Diese Typen von Abbildungen sollen nun durch Beispiele charakterisiert werden.

BEISPIEL 1:
Wir betrachten ein Quadrat. Die Menge der im Inneren und auf dem Rand des Quadrates liegenden Punkte sei $A$, die Menge der auf einer Seite liegenden Punkte mit Einschluß der Endpunkte sei $B$. Wenn wir die Punkte von $A$ auf die Menge $B$ projizieren, so liegt eine Abbildung *aus $A$ in $B$* vor. Ja, man kann sogar genauer sagen, daß es sich um eine Abbildung *von $A$ auf $B$* handelt, denn jeder Punkt von $A$ tritt in mindestens einem Paar auf, und ebenso steht es mit $B$. Es ist also $Vb = A$, $Nb = B$.
In den jetzt folgenden Beispielen sind die Individuen keine mathematischen Objekte.

BEISPIEL 2:
Es sei $A$ die Menge der Schüler einer Klasse, $B$ die Menge der Städte des Landes, in dem die Schüler wohnen. Zu jedem Schüler notieren wir, in welcher Stadt er bereits gewesen ist. Wir erhalten dadurch eine Abbildung *aus $A$ in $B$*. Liegt hier wie im vorigen Beispiel eine Abbildung von $A$ auf $B$ vor? Dann müßte jeder Schüler schon in mindestens einer Stadt gewesen sein, was bei einer Stadtschule natürlich der Fall ist, und jede Stadt müßte von mindestens einem Schüler der Klasse besucht worden sein. Dies ist kaum denkbar. Die vorliegende Abbildung aus $A$ in $B$ ist also bestenfalls eine Abbildung *von $A$ in $B$*.

BEISPIEL 3:
Wir ordnen jedem Schüler einer Stadt diejenige Straße zu, in der er wohnt. Damit ist eine Abbildung von der Menge $A$ der Schüler in die Menge $B$ der Straßen gegeben, denn jeder Schüler wohnt in einer Straße, es kann aber Straßen geben, in denen kein Schüler wohnt. Also ist $Vb = A$, $Nb \subseteqq B$.
Ändern wir dieses Beispiel dahin ab, daß $B$ nur diejenigen Straßen enthält, in denen mindestens ein Schüler wohnt, so liegt sogar eine Abbildung *von $A$ auf $B$* vor.

In diesem Fall haben wir ein Beispiel für einen speziellen Typus von Abbildungen: Jedem Element von $A$ entspricht genau ein Element von $B$ – jeder Schüler wohnt ja in genau einer Straße – und $B$ stimmt mit dem Nachbereich überein. Abbildungen dieser Art spielen in der Mathematik eine besonders wichtige Rolle. Daher hat man für sie einen besonderen Terminus eingeführt, der dem Leser sicher schon bekannt ist, ihm aber hier in einem neuen Zusammenhang begegnet: Es handelt sich um eine **Funktion.** Auf der Schule werden lineare, quadratische Funktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische und andere Funktionen eingeführt, bei denen jeder Zahl einer bestimmten Menge durch eine ganz bestimmte Vorschrift wieder eine Zahl einer bestimmten Menge zugeordnet wird. Um solch eine durch Zahlen charakterisierte Funktion handelt es sich bei dem Beispiel, in dem jedem Schüler seine Straße zugeordnet wird, natürlich nicht. Die in der Schule behandelten Funktionen stellen aber Spezialfälle dar, die den Funktionsbegriff keineswegs ausschöpfen.

Mit Hilfe des Abbildungsbegriffs kann der Funktionsbegriff ganz allgemein gefaßt werden: Dabei wird der Begriff *eindeutige Abbildung* gebraucht, der schon früher bei Erklärung des Begriffs *Transformation der Ebene* verwendet wurde (↑ S. 82). Eine Abbildung heißt eindeutig, wenn jedem Element des Vorbereichs $A$ genau ein Element des Nachbereichs $B$ zugeordnet wird. Ist zum Beispiel $A$ die Menge derjenigen Menschen, die Karten für eine bestimmte Theatervorstellung gekauft haben, und $B$ die Menge der Plätze in diesem Theater, so wird eine eindeutige Abbildung von $A$ in $B$ dadurch gegeben, daß sich jeder auf seinen Platz setzt. Bleiben dabei keine Plätze leer, so liegt sogar eine **eindeutige Abbildung von *A* auf *B*** vor, das ist eine *Funktion.*

ERKLÄRUNG:

▷ Eine **Funktion** ist eine eindeutige Abbildung einer Menge $A$ auf eine Menge $B$. Die Menge $A$ heißt der Definitionsbereich, die Menge $B$ der Wertevorrat der Funktion. Ist $b \in B$ bei der Funktion $f$ das Bild von $a$ ($a \in A$), schreiben wir

$b = f(a)$, gelesen: „$b$ gleich $f$ von $a$“,

und nennen $b$ den Wert der Funktion an der Stelle $a$.

Man bezeichnet $a$ als unabhängige, $b$ als abhängige Variable[1] (Näheres ↑ S. 126).

Der Begriff *Variable* wurde bereits im ersten Kapitel erwähnt. Dort wurde unter einer Variablen ein Zeichen verstanden, für das ein Element aus einem vorher verabredeten Bereich einzusetzen ist (↑ S. 16). Dieser Bereich ist jetzt für die unabhängige Variable der Definitionsbereich $A$, für die abhängige Variable der Wertevorrat $B$.

Funktionen treten schon vom ersten Schuljahr an häufig im Unterricht auf, natürlich ohne daß sie als solche bezeichnet werden, zum Beispiel bei Tabellen wie

| $a$ | $a+1$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |

[1] Aus dem Lateinischen, variabilis, veränderlich.

Hier ist $a$ die unabhängige, $a + 1$ die abhängige Variable. Definitionsbereich und Wertevorrat werden durch den Umfang der den Schülern bekannten Zahlen eingeengt.
Variable treten nicht nur bei Funktionen auf. Wir lernten sie schon in Kapitel 2 innerhalb von **Formeln** kennen, zum Beispiel: Für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt $a(b + c) = ab + ac$ (↑ S. 48). Wenn man den Begriff der Variablen einführen will, so kann man in einfachen Formeln, etwa in dem Kommutativgesetz der Addition, die Variablen als Leerstellen schreiben: $\square + \bigcirc = \bigcirc + \square$.
Schließlich kommen Variable auch in Gleichungen und Ungleichungen vor, zum Beispiel $5 + x = 7$, $|x| > 3$ (↑ S. 44). Der Bereich, aus dem Elemente für $x$ einzusetzen sind, wird in den ersten Schuljahren durch die den Schülern bekannten Zahlen gegeben. Später muß er ausdrücklich genannt werden. In Kapitel 7 wird dies ausführlich begründet.
Eine Funktion mit dem Definitionsbereich $A$ und dem Wertevorrat $B$ ist also eine *eindeutige Abbildung von $A$ auf $B$*. Dabei kann ein bestimmtes Element $a \in A$ nur in genau einem Paar als erstes Element auftreten. In vielen Fällen stimmt $B$ mit $A$ überein. Dann stellt die Funktion eine eindeutige Abbildung von $A$ auf sich dar. Eine solche Funktion wird zum Beispiel durch folgende Zuordnung gegeben:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{array}$$

Hier ist $A = B$ die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

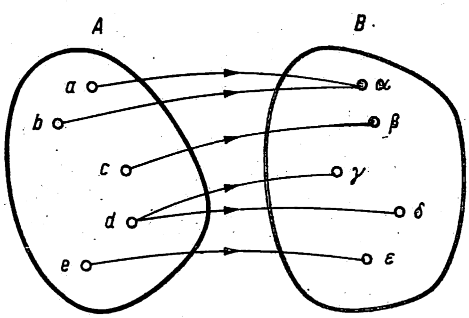


Bild 4.1.a

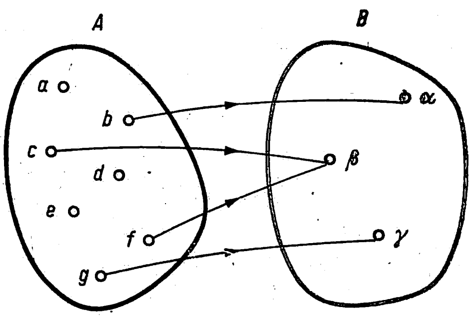


Bild 4.1.b

Bild 4.1.c

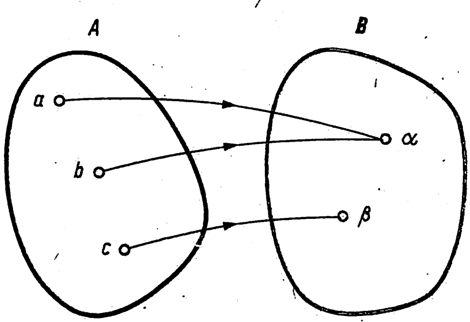
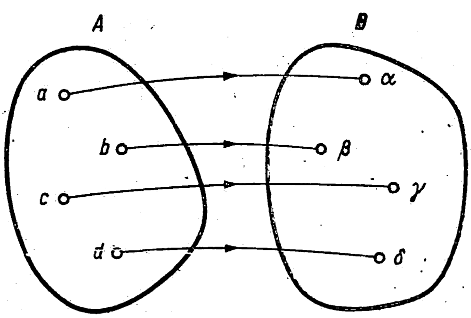



Bild 4.1.d



Woran erkennt man bei einer im Venndiagramm durch Pfeile gegebenen Abbildung, ob sie eine Funktion darstellt?
Die in Bild 4.1.a vorliegende Abbildung stellt keine Funktion dar, weil von dem Element $d$ zwei Pfeile ausgehen. Die in Bild 4.1.b gegebene Abbildung stellt erst dann eine Funktion dar, wenn man aus $A$ die Elemente entfernt, von denen kein Pfeil ausgeht, also $a$, $d$, $e$. In Bild 4.1.c und d wird jeweils eine Funktion dargestellt.
Bei der Darstellung einer Abbildung im Venndiagramm mit Hilfe von Pfeilen erkennt man eine Funktion daran, daß von jedem Element des Vorbereichs genau ein Pfeil ausgeht.
Betrachten wir nun einige weitere Beispiele für Abbildungen daraufhin, ob dabei speziell Funktionen vorliegen.

BEISPIEL 4:
Es sei $A$ die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100, $B$ die Menge $\{u, v\}$. Wenn das Element $a$ von $A$ eine Primzahl ist, so soll ihm das Element $u$ von $B$ zugeordnet werden, anderenfalls $v$.
Damit ist eine Abbildung der Menge $A$ auf die Menge $B$ gegeben, denn der Vorbereich ist die ganze Menge $A$, und da es zwischen 1 und 100 sowohl Primzahlen als auch zusammengesetzte Zahlen gibt, fällt der Nachbereich mit $B$ zusammen. Schließlich ist die Abbildung eindeutig, denn jede Zahl aus $A$ hat in $B$ nur genau ein Bild, entweder $u$ oder $v$. Mithin liegt eine Funktion $f$ mit dem Definitionsbereich $A$ und dem Wertevorrat $B = \{u, v\}$ vor. Zum Beispiel ist $f(1) = v$, denn die Zahl 1 wird nicht zu den Primzahlen gezählt, $f(2) = u$, $f(3) = u$, $f(4) = v$, $f(5) = u$, ... Die Abbildung $f$ stellt eine Funktion dar.
In den folgenden drei Beispielen treten wieder nichtmathematische Individuen auf.

BEISPIEL 5:
Ähnlich dem vorigen Beispiel ist folgendes. Es sei $A$ eine Menge sinnvoller Aussagen, $B$ die zweielementige Menge $\{w, f\}$. Ordnet man jeder wahren Aussage das Element $w$, jeder falschen das Element $f$ von $B$ zu, so liegt eine Funktion vor, sofern $A$ sowohl wahre als auch falsche Aussagen enthält, wie es zum Beispiel bei einem Schülervortrag der Fall sein mag. Enthält $A$ dagegen nur wahre Aussagen, wie man es von einem Lehrbuchtext erwartet, so liegt nach der oben gegebenen Definition keine Funktion, sondern nur eine Abbildung *von A in B* vor.

BEISPIEL 6:
Wir ordnen jedem Schüler einer Klasse seine Schuhgröße zu. Stellt die dadurch gegebene Abbildung der Menge der Schüler auf die Menge der vorkommenden Schuhgrößen eine Funktion dar? Nun, wenn man ein Kind nach seiner Schuhgröße fragt, wird man oft zwei Nummern als Antwort erhalten. In diesem Fall liegt sicher keine Funktion vor, da ja einem Element des Vorbereichs dann zwei Elemente des Nachbereichs entsprechen. Bestimmen wir aber in solch einem Fall die größere der genannten Schuhgrößen als Bild, so ist die Abbildung eine Funktion.

BEISPIEL 7:
Auch in folgender Denksportaufgabe, die dem Leser vielleicht in dieser oder ähnlicher Form bekannt ist, treten Funktionen auf: Ein Autofahrer kommt an eine Wegkreuzung

in der Nähe einer Stadt, die er umfahren möchte. Er weiß, daß einer der beiden Wege in die Stadt hinein, der andere um sie herum führt, er weiß aber nicht, welcher. Da sieht er zwei Straßenarbeiter. Dabei fällt ihm etwas Merkwürdiges ein, das er über diese beiden Arbeiter erfahren hat: einer von den beiden sagt stets die Wahrheit, der andere, ein Schalk, hat es sich zum Sport gemacht, stets die Unwahrheit zu sagen. Leider weiß der Autofahrer wieder nicht, welcher der Wahrheitssager, welcher der Lügner ist. Dennoch gelingt es ihm, durch eine einzige Frage, die er einem beliebigen der beiden Arbeiter stellt, den richtigen Weg zu erkunden.
Wie mag diese Frage lauten?
So zum Beispiel: „Ich möchte um die Stadt herum fahren. Welchen Weg würde mir Ihr Kollege zeigen?“ Der Autofahrer weiß dann, daß er auf alle Fälle den nicht gezeigten Weg wählen muß. Folgen wir seinen Schlüssen!
Der gefragte Arbeiter sei $a$, der andere $b$. Es bestehen zwei Möglichkeiten:

1. $a$ ist der Lügner,

2. $a$ ist der Wahrheitssager.

1. In diesem Fall gibt $a$ die richtige Wegangabe seines Kollegen, der ja stets die Wahrheit sagt, falsch wieder, zeigt also auf den falschen Weg.

2. Ist $a$ der Wahrheitssager, so gibt er wahrheitsgetreu die falsche Wegangabe seines lügnerischen Kollegen wieder, zeigt also gleichfalls auf den falschen Weg.

Der nicht gezeigte Weg führt also um die Stadt herum.
Inwiefern kommen hier nun Funktionen vor?
Zunächst gibt es zwei Wege, $w_1$ und $w_2$. Jedem von ihnen ist ein Ziel zugeordnet, $z_1$ bzw. $z_2$. Dabei sei $z_1$ das gewünschte Ziel. Hier liegt eine für die Zweiermenge $\{w_1, w_2\}$ erklärte Funktion vor, die den Wertevorrat $\{z_1, z_2\}$ besitzt. Allerdings ist sie dem Kraftfahrer zunächst unbekannt, da er zwar Definitionsbereich und Wertevorrat, aber nicht die Zuordnung in den Paaren kennt. Nennen wir diese Funktion $f_1$. Er hat nun herauszufinden, ob $f_1(w_1) = z_1$ oder $f_1(w_2) = z_1$ ist. Da sieht der Fahrer die beiden Straßenarbeiter $a$ und $b$. Jedem von ihnen ist eines der beiden Prädikate „lügt“ – „sagt die Wahrheit“ zugeordnet. Wieder liegt eine Funktion vor – sie heiße $f_2$ –, die in der gleichen Weise wie die Funktion $f_1$ dem Autofahrer unbekannt ist.
Schließlich findet sich eine dritte Funktion $f_3$, indem der Gefragte auf einen der beiden Wege, $w_1$ oder $w_2$, zeigt. Die Funktion $f_3$ ist nur für eine Einermenge, nämlich für $\{a\}$, erklärt.
Der Autofahrer erfährt zunächst $f_3(a)$. Nehmen wir an, es sei $f_3(a) = w_1$. Die Funktion $f_3$ ist also die Menge $\{[a, w_1]\}$. Daraus findet der Frager die Zuordnung von $f_1$. Dem gezeigten Weg $w_1$ ist nämlich das nicht gewünschte Ziel $z_2$ zugeordnet. Jetzt ist ihm also die Menge $f_1$ bekannt, es ist

$$f_1 = \{[w_1, z_2], [w_2, z_1]\}.$$

Die Funktion $f_2$ lernt der Autofahrer übrigens nicht kennen. Er erfährt aus der Antwort nicht, ob $a$ der Lügner oder der Wahrheitssager ist. Der Witz der Aufgabe liegt ja gerade darin, daß man ohne Kenntnis der Zuordnung von $f_2$ die gesuchte Zuordnung in $f_1$ herausbekommt.

Das Beispiel lehrt uns u. a.:
*Um eine Funktion zu kennen, sind folgende Angaben erforderlich: Definitionsbereich, Wertevorrat, die Zuordnung Urbild – Bild.*
Dabei erübrigt sich eigentlich durch die Zuordnungsvorschrift in den Paaren der Funktion die besondere Angabe des Wertevorrats. Das sehen wir besonders deutlich an dem folgenden Beispiel.

BEISPIEL 8:
Es sei $A$ die Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, und eine Abbildung $f$ von $A$ sei durch die Paare

$$[1, a], [2, b], [3, c], [4, d], [5, e]$$

gegeben. Der Wertevorrat von $f$ ist also die Menge $\{a, b, c, d, e\}$.

Aufgabe 1

## 4.2. Umkehrung von Abbildungen

Das letzte Beispiel führt uns wieder auf einen neuen Typus von Abbildungen. Zunächst ist $f$ eine Funktion, denn jedes Element von $A$ hat genau ein Bild. Um die besondere Eigenschaft von $f$ zu finden, wollen wir noch einmal zu einer beliebigen Abbildung zurückkehren. Zu jeder Abbildung $f$ können wir doch eine zweite Abbildung – nennen wir sie $f^{-1}$ – dadurch bilden, daß wir in jedem der Paare, durch die die Abbildung gegeben ist, die Reihenfolge umkehren, also Vor- und Nachbereich miteinander vertauschen. Die Abbildung $f^{-1}$ heißt dann die **zu $f$ inverse Abbildung.** So gehört zu der Abbildung des ersten Beispiels (Zuordnung Quadratpunkt – Punkt einer Seite, ↑S. 119) diejenige inverse Abbildung, die einen Punkt $P$ einer Seite mit jedem Quadratpunkt paart, der auf der Senkrechten in $P$ auf der Seite liegt.
Bildet man $f^{-1}$ in dem speziellen Fall, wo $f$ eine Funktion darstellt, so kann wieder eine Funktion vorliegen. Dieser Fall tritt bei dem Beispiel 8 ein. Stellen wir hier $f$ und $f^{-1}$ gegenüber!

| | Definitionsbereich | Wertevorrat | Funktion |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ | $\{a, b, c, d, e\}$ | $\{[1, a], [2, b], \ldots, [5, e]\}$ |
| $f^{-1}$ | $\{a, b, c, d, e\}$ | $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ | $\{[a, 1], [b, 2], \ldots, [e, 5]\}$ |

Es tritt aber keineswegs immer der Fall ein, daß die zu einer Funktion inverse Abbildung wieder eine Funktion ist. Denken wir z. B. an das Beispiel 4, bei dem einer natürlichen Zahl aus $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ entweder $u$ oder $v$ zugeordnet wurde, je nachdem, ob die Zahl Primzahl ist oder nicht. Bei der inversen Abbildung haben sowohl $u$ als auch $v$ mehrere Bilder, sie stellt also keine Funktion dar.
Diejenigen Funktionen, deren inverse Abbildung wieder eine Funktion ist, bilden einen wichtigen Typus von Funktionen. Man nennt sie **umkehrbare Funktionen.** Sie sind daran erkennbar, daß verschiedenen Elementen des Definitionsbereichs verschiedene Bilder entsprechen.

ERKLÄRUNG:

▷ Stellen sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ Funktionen dar, so heißt $f$ eine **umkehrbare Funktion** oder eine **eineindeutige Abbildung von $A$ auf $B$** und $f^{-1}$ die zu $f$ **inverse Funktion.**

Die zu $f^{-1}$ inverse Funktion $(f^{-1})^{-1}$ ist natürlich wieder eine Funktion, und zwar $f$ selbst.

---

**Zusammenfassung:**
**Ist $f$ eine Abbildung mit dem Vorbereich $A$ und dem Nachbereich $B$, so bezeichnet man mit $f^{-1}$ diejenige Abbildung, die $B$ als Vorbereich, $A$ als Nachbereich hat, und bei der in jedem Paar von $f$ die Reihenfolge der Partner vertauscht ist. Die Abbildung $f^{-1}$ heißt die zu $f$ inverse Abbildung. Ist speziell $f$ eine Funktion, so ist in manchen Fällen $f^{-1}$ wieder eine Funktion. In diesem Fall heißt $f$ eine umkehrbare Funktion und $f^{-1}$ die zu $f$ inverse Funktion. Definitionsbereich und Wertevorrat vertauschen in diesem Fall ihre Rollen.**

---

Im folgenden Abschnitt werden wir auf die Bildung der inversen Funktion zurückkommen und weitere Eigenschaften von ihr erfahren. Umkehrbare Funktionen, also eineindeutige Abbildungen einer Menge auf eine andere oder auf sich selbst, sind für den Mengenvergleich und dadurch für den Aufbau des Zahlenbereichs von großer Bedeutung und werden uns daher noch öfter beschäftigen.

Aufgabe 2

## 4.3. „Zahl-Zahl"-Funktion

Wir wenden uns jetzt solchen Funktionen zu, wie sie im Mathematikunterricht der Schule im Vordergrund stehen. Bei ihnen wird einer Zahl nach einer bestimmten Vorschrift wieder eine Zahl zugeordnet. Definitionsbereich und Wertevorrat sind also Zahlenmengen. Solche Funktionen sollen Zahl-Zahl-Funktionen heißen. Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, bei dem diese beiden Mengen übereinstimmen und endlich sind.

BEISPIEL 9:
Es sei $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, und die Abbildung bestehe aus den Paaren [1, 5], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1]. Damit liegt eine eineindeutige Abbildung von $A$ auf sich vor; sowohl die gegebene Abbildung als auch die zu ihr inverse Abbildung sind Funktionen, denn zwei verschiedenen Elementen entsprechen verschiedene Bilder. Eine solche eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge auf sich wird als **Permutation**[1] bezeichnet.
Die identische Abbildung, die jedes Element sich selbst zuordnet, stellt natürlich gleichfalls eine Permutation dar. Die Lehre von den Permutationen spielt u. a. in der Kombinatorik eine wichtige Rolle (vgl. z. B. [17], S. 7 bis 22).

---

[1] Aus dem Lateinischen, permutare, verändern, vertauschen.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel, bei dem aber der Definitionsbereich und der Wertevorrat jetzt unendliche Zahlenmengen sind.

BEISPIEL 10:
Die Funktion $f$ soll jeder Zahl $x$ die Zahl $x + 1$ zuordnen. Der Definitionsbereich sei
a) die Menge der ganzen Zahlen $\{0, +1, +2, \ldots, -1, -2, \ldots\}$,
b) die Menge der rationalen Zahlen,
c) die Menge der reellen Zahlen,
d) die Menge der reellen Zahlen, die größer oder gleich 3 sind.

Solange wir es, wie bisher, mit einem endlichen Definitionsbereich zu tun hatten, konnte die Funktion als Paarmenge explizit aufgeschrieben werden. Das ist bei dem Beispiel 10 nicht mehr möglich. Um dennoch wenigstens einen geschlossenen Ausdruck für die Funktion angeben zu können, bedient man sich zweier **Variabler,** für die meist die Buchstaben $x$ und $y$ benutzt werden, und schreibt die Funktion als $y = x + 1$. Dabei wird $x$ als die **unabhängige Variable,** $y$ als die **abhängige Variable** bezeichnet. Diese Schreibweise für die oben angegebene Funktion ist sicher vielen Lesern geläufig. Sie ist auch recht bequem und wird daher – ergänzt durch Angabe des Definitionsbereichs – häufig im folgenden verwendet werden. Man muß aber bedenken, daß es sich dabei um eine stark verkürzte Ausdrucksweise handelt, die, wenn die tatsächlichen Zusammenhänge nicht klar erkannt werden, leicht zu Mißverständnissen führen kann. Daher soll im folgenden zunächst noch einmal auf den Begriff der Variablen eingegangen werden, von dem sich häufig bei Schülern gewisse irreführende Vorstellungen festsetzen. Nicht selten fassen sie eine Variable – übrigens wortgetreu – als eine veränderliche Größe auf, die sie sich als einen laufenden Punkt vorstellen. Nun ist aber die Veränderlichkeit keineswegs ein wesentliches Merkmal der Variablen, wie sie heute allgemein in der Mathematik verstanden wird. So stellt z. B. die Abbildung, die jeder reellen Zahl $x$ zuordnet $y = 3$, eine Funktion dar. Sie besteht aus allen Paaren $[x, 3]$ $(x \in P)$. Die „abhängige" Veränderliche $y$ verändert sich dabei überhaupt nicht, sie ist eine von $x$ unabhängige Konstante. Auch die unabhängige Veränderliche kann konstant sein, wenn nämlich der Definitionsbereich eine Einermenge ist wie bei der Funktion $f_3$ in Beispiel 7 (↗ S. 122). Zusammenfassend gelangen wir zu folgender Erklärung:

ERKLÄRUNG:
▷ Unter einer **Variablen** oder Veränderlichen soll ein Zeichen in einem Ausdruck verstanden werden, für das ein beliebiges Element einer verabredeten Menge eingesetzt werden kann. Ist die Menge, auf die eine Variable $x$ bezogen wird, der Definitionsbereich einer Funktion $f$, so bezeichnet man $x$ als unabhängige Variable und $y$ – das ist dasjenige Element des Wertevorrats, das durch $f$ dem Element $x$ zugeordnet wird – als abhängige Variable. Man nennt auch $y$ den Wert der Funktion $f$ an der Stelle $x$.

Wenn $f$ und ein Element $x_0$ des Definitionsbereichs gegeben sind, kann über $y_0 = f(x_0)$ als Bild von $x$ nicht mehr frei verfügt werden. Insofern ist der Ausdruck „abhängige Variable" für $y$ gerechtfertigt. Dieser Terminus darf aber, wie das Beispiel $y = 3$ zeigt, nicht so verstanden werden, als ob $y$ sich unbedingt mit der unabhängigen Variablen

$x$ ändern müßte. Der heutige Sprachgebrauch in der Mathematik weicht hierin von der ursprünglichen Wortbedeutung ab.
Mit Hilfe von Variablen ist man in der Lage, in vielen Fällen, auch wenn der Definitionsbereich eine unendliche Menge ist, einen geschlossenen Ausdruck für die Funktion anzugeben. Dies ist der Fall, wenn z. B. die Zuordnung gegeben wird durch $y = x + 1$ oder $y = x^2 + 3x - 4$ oder $y = \sin x$, $y = 3^x$, $y = \log x$ oder dgl., also durch einen **analytischen Ausdruck**, der sich für jedes $x$ berechnen oder einer Tabelle entnehmen läßt. Was unter einem „analytischen Ausdruck" genau zu verstehen ist, wird in der mathematischen Grundlagenforschung auf induktivem Wege präzisiert, und zwar in ähnlicher Weise, wie es im ersten Kapitel für den Begriff „sinnvolle Aussage" angedeutet wurde.
Es hat sich eingebürgert, solch einen analytischen Ausdruck allgemein mit $f(x)$ oder mit $g(x)$, $F(x)$ usw. zu bezeichnen und diejenige Funktion, die einem Wert von $x$ des Definitionsbereichs zuordnet $f(x)$, in der Form zu schreiben

$$y = f(x), \quad \text{gelesen: „}y \text{ gleich } f \text{ von } x\text{"}.$$

Nun kann die Schreibweise $y = f(x)$ für die Funktion $f$ zu dem Irrtum führen, $y$, nicht $f$ sei die Funktion. Solch eine Verwechslung der abhängigen Veränderlichen $y$ mit der Funktion $f$ wird begünstigt durch Redewendungen in der Physik und in anderen Wissenschaften wie: „der Luftdruck ist eine Funktion der Höhe über dem Erdboden", „beim mathematischen Pendel ist die Schwingungsdauer $t$ eine Funktion der Pendellänge $l$", „die Häufigkeit magnetischer Wirbelstürme ist eine Funktion der Sonnenfleckenbildung", „die Abkühlung des Erdkerns ist eine Funktion der Zeit", „die Steigerung der Arbeitsproduktivität ist eine Funktion des gesellschaftlichen Bewußtseins". Sehen wir davon ab, daß in einigen Beispielen die auftretenden Begriffe wie „Sonnenfleckenbildung", „gesellschaftliches Bewußtsein" sicherlich nicht rein quantitativ durch eine einzige Variable erfaßt werden können und daß wohl in allen Beispielen nicht nur eine einzige unabhängige Variable vorhanden ist – z. B. hängt der Luftdruck nicht nur von der Höhe, sondern auch von der Wetterlage ab –, und richten wir unser Augenmerk einzig auf das jeweilige Satzsubjekt, von dem ausgesagt wird, es sei „eine Funktion von ...". Im Sinne des mathematischen Sprachgebrauchs müßte es in all diesen Fällen heißen: „Der Luftdruck (bzw. die Schwingungsdauer $t$ ...) ist die abhängige Veränderliche bei einer Funktion, wobei die unabhängige Veränderliche durch die Höhe (bzw. durch die Pendellänge $l$ ...) gegeben ist." Dabei müßte genaugenommen nicht vom Luftdruck usw., sondern von der Menge der betreffenden Maßzahlen gesprochen werden. In der Regel soll durch die oben beschriebenen, in Lehrbüchern häufig anzutreffenden Redewendungen eine kausale Abhängigkeit ausgedrückt werden. Obwohl z. B. beim mathematischen Pendel die Schwingungsdauer $t$ von der Pendelmasse $m$ nicht kausal abhängt, liegt bei der Zuordnung $[m, t]$ ebensogut eine Funktion vor wie bei der Zuordnung $[l, t]$; nur handelt es sich im ersten Fall um eine konstante Funktion, ähnlich wie bei der oben erwähnten Zuordnung $[x, 3]$ für alle reellen $x$. Ob zwischen abhängiger und unabhängiger Variabler ein Kausalzusammenhang besteht, spielt für den mathematischen Funktionsbegriff keine Rolle. So liegt z. B. auch dann eine Funktion vor, wenn ein Pilot auf Grund von Luftdruckmessungen seine Höhe über dem Erdboden bestimmt (denn zu jedem abgelesenen Luftdruck gehört genau eine Höhe), obwohl hier von einer kausalen Abhängigkeit nicht die Rede sein kann.

In der Mathematik ist die Funktion lediglich eine gewisse Menge geordneter Paare. In der Mengenschreibweise läßt sie sich unter Benutzung des Symbols $f(x)$ folgendermaßen schreiben:

$$f = \{[x, y];\ [x, y] \in A \times B \text{ und } x \to y\}.$$

Dabei ist $A$ der Definitionsbereich, $B$ der Wertevorrat von $f$, und die Zuordnung $x \to y$ ist eindeutig.

Diese etwas schwerfällige Schreibweise läßt sich vereinfachen. Die explizite Angabe von $B$ ist nicht erforderlich, da die eindeutige Zuordnung $x \to y$ gegeben ist. Daher soll von jetzt an folgende Mengenschreibweise einer Funktion benutzt werden:

$$f = \{[x, y];\ x \in A \text{ und } x \to y\}, \tag{I}$$

wobei $A$ der Definitionsbereich der Funktion ist.

Gelesen wird dies:

> „$f$ ist die Menge aller geordneten Paare $[x, y]$, wobei $x$ Element des Definitionsbereichs $A$ und $y$ das Bild von $x$ bei einer bestimmten eindeutigen Zuordnung ist."

Gemäß der Erklärung von S. 120 bedeutet die kurze symbolische Schreibweise $y = f(x)$ nur: „$y$ ist der Wert der Funktion $f$ an der Stelle $x$." Das Gleichheitszeichen in $y = f(x)$ ist nicht so zu verstehen, als ob $y$ mit $f$ zu identifizieren wäre.

Bei Zahl-Zahl-Funktionen, die durch einen analytischen Ausdruck gegeben sind, besteht der gleiche Zusammenhang zwischen $x$, $y$ und $f$ wie bei anderen Funktionen: $x$ ist ein Element des Definitionsbereichs, $y$ sein Bild bei der eindeutigen Abbildung $f$ und $f$ selbst die Menge der geordneten Paare $[x, y]$. Die kurze Schreibweise

$$y = f(x) \tag{II}$$

zur Kennzeichnung einer Funktion $f$ an Stelle der genaueren Schreibweise (I) ist also in diesem Sinn zu verstehen.

Es ist aber noch ein anderer Punkt bei der Schreibweise (II) zu beachten: Das Fehlen der Angabe eines Definitionsbereichs. Bisweilen mag er sich bei mathematischen Texten aus dem Vorangegangenen ergeben. Oft aber liegt hier eine stillschweigend getroffene – jedoch keineswegs selbstverständliche – Verabredung vor: Es soll nämlich als Definitionsbereich die größte Menge angesehen werden, für die der analytische Ausdruck $f(x)$ noch sinnvoll ist. So wäre als Definitionsbereich für $y = \frac{1}{x-3}$ anzusehen der Bereich $P \setminus \{3\}$ (im Reellen), für $y = \tan x$ der Bereich $P \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. (Der Leser, dem trigonometrische oder andere der erwähnten Funktionen nicht bekannt sind, kann diese Beispiele überschlagen, ohne daß das Verständnis des Folgenden beeinträchtigt wird.) In diesem Sinn sind manche Übungsaufgaben in der Analysis zu verstehen, in denen nach „dem" Definitionsbereich der Funktionen $y = \frac{x^2}{x}$ oder $y = \frac{1}{\sin x}$ gefragt wird oder bei denen angegeben werden soll, ob $y = \frac{x^2}{x}$ und $y = x$ dieselbe Funktion darstellen. Gegen solche Aufgaben ist nichts einzuwenden, solange Klarheit darüber besteht, daß ihnen die Verabredung zugrunde liegt, die größtmögliche Menge als Definitionsbereich anzugeben. Anderenfalls ist z. B. die Frage, ob $y = \frac{x^2}{x}$ und $y = x$ dieselbe Funktion darstellen, nicht einmal mit „ja“ oder „nein“ zu beantworten: In jedem Definitionsbereich reeller Zahlen, der 0 nicht enthält, sind beide Funktionen identisch, da sie aus denselben Paaren bestehen. Wählt man aber für die Funktionen $y = x$ den Bereich $P$ der reellen Zahlen, für $y = \frac{x^2}{x}$ den größtmöglichen Bereich $P \setminus \{0\}$, so liegen verschiedene Funktionen vor, denn die erste enthält das Paar $[0, 0]$, die zweite nicht. Bei der Vereinbarung, den größtmöglichen Definitionsbereich zu wählen, tritt der zweite Fall ein, und die Antwort hat zu lauten: „Die Funktionen sind nicht identisch.“

Um allen Mißverständnissen aus dem Wege zu gehen, wird im folgenden der Definitionsbereich angegeben werden, wenn die Zuordnung durch $y = f(x)$ gegeben wird. Dabei ist natürlich zu berücksichtigen, daß der Wahl des Definitionsbereichs durch die Besonderheit des analytischen Ausdrucks gewisse Schranken gesetzt sind, z. B. ist bei der Funktion $y = \frac{1}{x-3}$ der Ausschluß der Zahl 3 erforderlich.

Die oben dargelegten Bedenken bei der Darstellung einer Funktion durch $y = f(x)$ sind in den früheren Schulbüchern zu wenig beachtet worden. Dies hat sicher dazu beigetragen, daß sich bei den Schülern unklare Auffassungen über den Funktionsbegriff herausbildeten.

Die Schreibweisen (I) und (II) für Funktionen sollen noch auf die in Beispiel 10 (↑ S. 126) gegebenen Funktionen angewendet werden

a) $f = \{[x, y];\, x \in G \text{ und } y = x + 1\},$ (I)
$y = x + 1 \; (x \in G),$ (II)

b) $f = \{[x, y];\, x \in R \text{ und } y = x + 1\},$ (I)
$y = x + 1 \; (x \in R),$ (II)

c) $f = \{[x, y];\, x \in P \text{ und } y = x + 1\},$ (I)
$y = x + 1 \; (x \in P),$ (II)

d) $f = \{[x, y];\, x \in P \text{ und } x \geqq 3 \text{ und } y = x + 1\},$ (I)
$y = x + 1 \; (x \in P \text{ und } x \geqq 3).$ (II)

Häufig kommen Funktionen vor, die über dem Bereich $N$ der natürlichen Zahlen erklärt sind. Solch eine Funktion $f$ ist zu schreiben in der Form:

$$f = \{[x, y];\, x \in N \text{ und } y = f(x)\}.$$

In solch einem Fall ist es üblich, die unabhängige Variable mit $n$ zu bezeichnen und $f(n)$ als $a_n$ anzugeben. Die unabhängige Variable erscheint also als Index.

ERKLÄRUNG:

▷ Funktionen, die jeder natürlichen Zahl $n > 0$ eine reelle Zahl $a_n$ zuordnen, werden als **Folgen** bezeichnet.

Beispiel für eine Folge:

$$f = \left\{[x, y];\; x \in N \text{ und } y = \frac{1}{x}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen $n$, $a_n$ schreiben wir

$$f = \left\{[n, a_n];\ n \in N \text{ und } a_n = \frac{1}{n}\right\}, \tag{I}$$

kurz geschrieben:

$$a_n = \frac{1}{n}. \tag{II}$$

Aufgaben 3 und 4

Bisher wurden nur Funktionen einer einzigen unabhängigen Variablen $x$ betrachtet. Ehe wir uns der grafischen Darstellung solcher Funktionen zuwenden, sollen jetzt Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler betrachtet werden.
Als Beispiel diene die Formel für den Umfang eines Rechtecks mit den Seiten $x_1$ und $x_2$: $y = 2x_1 + 2x_2$. Dabei können $x_1$ und $x_2$ beliebige positive reelle Zahlen sein. Wir legen also für den Definitionsbereich $A_1$ bzw. $A_2$ von $x_1$ bzw. $x_2$ jeweils den Bereich $P^+$ der positiven reellen Zahlen zugrunde. Dann wird die den Rechtecksumfang darstellende Funktion als Menge folgendermaßen geschrieben:

$$F = \{[x_1, x_2, y];\ x_1 \in P^+,\ x_2 \in P^+,\ y = 2x_1 + 2x_2\},$$

gesprochen: „$F$ ist die Menge aller geordneter Tripel $[x_1, x_2, y]$, wobei die unabhängigen Variablen $x_1$ und $x_2$ dem Bereich $P^+$ entnommen sind und dem Paar $[x_1, x_2]$ das Bild $y = 2x_1 + 2x_2$ zugeordnet wird" (geordnete Paare [Tripel] $\uparrow$ S. 90 f.).
Der Leser wird dieser Darstellung leicht entnehmen, daß man Funktionen zweier unabhängiger Variabler auch als solche einer einzigen unabhängigen Variablen auffassen kann. Im letzten Beispiel wäre als ihr Definitionsbereich $A$ anzusetzen $A = P^+ \times P^+$, während $B$ unverändert bleibt. Dieser Auffassung entspräche die Schreibweise:

$$F = \{[x_1, x_2, y];\ [x_1, x_2] \in (P^+ \times P^+) \text{ und } y = 2x_1 + 2x_2\}.$$

In diesem Fall kann man die Frage nach der Umkehrbarkeit stellen:
Bildet die inverse Abbildung $F^{-1}$ auch eine Funktion? Dann müßte in $F$ jedem $y$ genau ein Paar $[x_1, x_2]$ entsprechen. Das ist nicht der Fall: Zu dem Umfang $y = 12$ gehören zum Beispiel $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ als Seitenlängen, ferner $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, ebenso $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ und unendlich viele weitere Paare, da ja nicht nur natürliche Zahlen als Seitenlängen in Frage kommen.
Diese Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf mehrere unabhängige Variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausdehnen.

ERKLÄRUNG:

▷ Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige Variable mit den Definitionsbereichen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, und jedem $n$-Tupel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sei genau ein Element $y$ aus einer Menge $B$, dem Wertevorrat, zugeordnet. Dann heißt die eindeutige Abbildung von $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ auf $B$ eine **Funktion der $n$ unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$**.

Aufgabe 5

Wir wollen uns jetzt der Veranschaulichung von Funktionen *einer* Variablen zuwenden. Ein bekanntes Mittel dazu ist die Darstellung im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem (↑ S. 74). Zunächst soll eine Funktion dargestellt werden, die keine Zahl-Zahl-Funktion ist, nämlich

$$f = \{[1, c], [2, a], [3, d], [4, b], [5, c]\}.$$

Der Definitionsbereich wird auf einer waagerechten Achse, der Wertebereich auf einer dazu senkrechten Achse abgetragen, wobei der Abstand der Punkte auf den Achsen keine Rolle spielt (Bild 4.2.). Jedem Paar $[x, y]$ wird der entsprechende Punkt zugeordnet. Diese Punkte sollen durch kleine Kreise markiert werden. In unserem Fall besteht das Bild der Funktion aus fünf durch Kreise markierten Punkten.
Der Leser mache sich klar, daß die graphische Darstellung der Funktion $f$ sich selbst auf eine Funktion, die zum Unterschied von $f$ mit $F$ bezeichnet werden soll, stützt: Der Definitionsbereich von $F$ umfaßt die Paare von $f$, also $[1, c]$, $[2, a]$, $[3, d]$, $[4, b]$, $[5, c]$, der Wertevorrat ist die Menge der fünf Punkte; also ist $F$ eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen. Jedem Element der Funktion $f$ entspricht genau ein Punkt. Es gilt dieses Mal auch das Umgekehrte: Jedem Punkt des Wertevorrats von $F$ entspricht genau ein zu $f$ gehörendes Paar. $F$ ist also eine umkehrbare Funktion, die graphische Darstellung spiegelt mithin die Funktion $f$ wirklich wider.

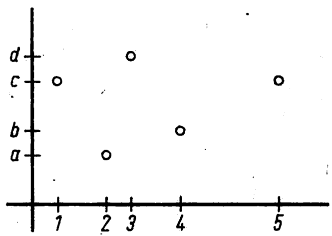


Bild 4.2.

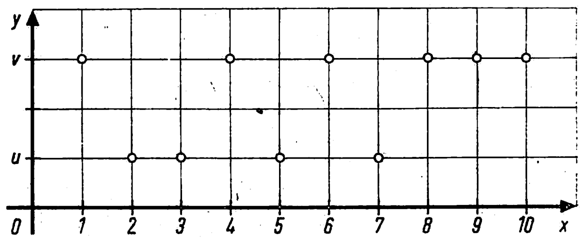


Bild 4.3.

Wir stellen jetzt die Funktion von Beispiel 4 (↑ S. 122) dar (Bild 4.3.), wollen aber den Definitionsbereich der Funktion auf die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 einschränken. Die Funktion wird gegeben durch

$$f(x) = \left\{\begin{matrix} u, \text{ wenn } x \text{ Primzahl} \\ v, \text{ wenn } x \text{ keine Primzahl} \end{matrix}\right\} \text{ ist} \quad (x \in N \text{ und } 1 \leqq x \leqq 10).$$

Als nächste werde die Funktion von Beispiel 9 (↑ S. 125), eine Zahl-Zahl-Funktion, dargestellt. Sie wird gegeben durch

$$f = \{[x, y];\, x \in N \text{ und } 1 \leqq x \leqq 5 \text{ und } y = 6 - x\}$$

und besteht aus den Paaren

$$f = \{[1, 5], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1]\} \quad \text{(Bild 4.4.)}.$$

BEISPIEL 11:

$$f = \{[x, y];\, x \in N \text{ und } 1 \leqq x \leqq 5 \text{ und } y = 3\}.$$

Diese Funktion besteht aus den Paaren

$$f = \{[1, 3], [2, 3], [3, 3], [4, 3], [5, 3]\} \quad \text{(Bild 4.5.)}.$$

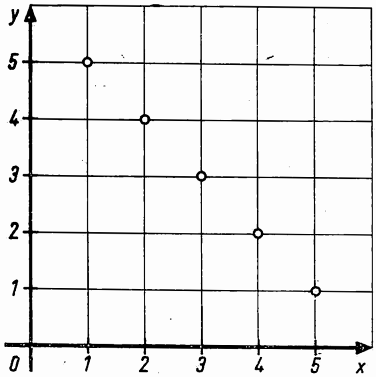



Bild 4.4.

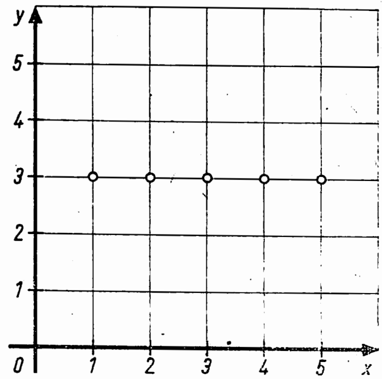



Bild 4.5.

Das ist eine „konstante" Funktion mit dem gleichen Definitionsbereich wie die vorige. Ihr Wertevorrat besteht nur aus der Zahl 3.

Wir wenden uns jetzt der Darstellung von Funktionen mit unendlichen Mengen als Definitionsbereich zu. Dafür verwenden wir die Funktionen von Beispiel 10, zunächst 10a ($y = x + 1$; $x \in G$). Wir entwerfen zuerst eine sogenannte **Wertetabelle.**

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ | $+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ | $+3$ | $+4$ |

Bei der Aufstellung der Wertetabelle können natürlich nur eine begrenzte Anzahl von $x$-Werten herausgegriffen und die zugehörigen $y$-Werte berechnet werden. Ist der Definitionsbereich eine endliche Menge mit nicht zu vielen Elementen, wie in den vorangegangenen Beispielen, so gibt die Wertetabelle die Funktion einwandfrei wieder. Bei den Funktionen von Beispiel 10 ist dies nicht erreichbar. Die angegebene Wertetabelle gibt eine Funktion an, die eine Menge von nur acht Elementen bildet, während die Funktion des Beispiels 10a eine unendliche Menge darstellt. Bild 4.6. zeigt die durch die Wertetabelle gegebene Funktion. Ihr Bild besteht aus acht Punkten, die sämtlich auf einer Geraden liegen. Soll die Funktion von Beispiel 10a dargestellt werden, so muß man sich die Folge der Punkte, die in gleichem Abstand auf der Geraden liegen, nach beiden Richtungen unbegrenzt fortgesetzt denken.

Wir wenden uns jetzt zuerst dem Beispiel 10c zu ($y = x + 1$; $x \in P$) und stellen eine Wertetabelle auf.

| $x$ | $-3$ | $-2{,}5$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+2$ | $+3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | $-1{,}5$ | $-1$ | $-0{,}5$ | $0$ | $+1$ | $+2$ | $+3$ | $+4$ |

Diesmal muß nach Zeichnung der durch die Wertetabelle gegebenen Punkte nicht nur extrapoliert, sondern auch interpoliert werden, denn alle Zahlen zwischen $-3$ und $-2{,}5$ usw. gehören ja zum Definitionsbereich. Wir erhalten die ganze Gerade als Bild der Funktion. Es ist üblich, das grafische Bild direkt nach der Funktion zu benennen (Bild 4.7.).

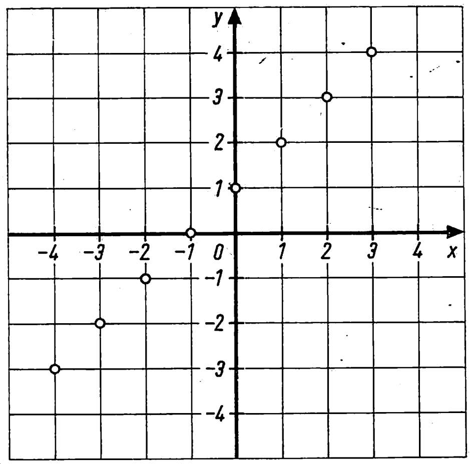



Bild 4.6.

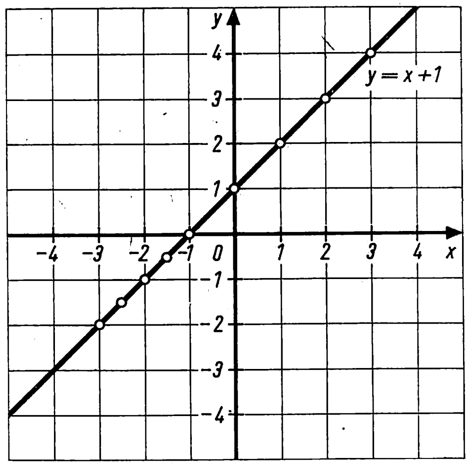



Bild 4.7.

Wertetabelle zu Beispiel 10d ($y = x + 1$; $x \in P$ und $x \geqq 3$):

| $x$ | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 |

Das Bild der Funktion besteht aus der Punktmenge eines Strahls (Bild 4.8.).
Etwas problematisch wird die Darstellung der durch Beispiel 10b gegebenen Funktion ($y = x + 1$; $x \in R$), weil hier als Definitionsbereich der Bereich der rationalen Zahlen angegeben ist. In solch einem Fall besteht das Bild der Funktion aus unendlich vielen Punkten, die auf der Geraden zwar dicht liegen, aber dennoch auf ihr unendlich viele

Bild 4.8.

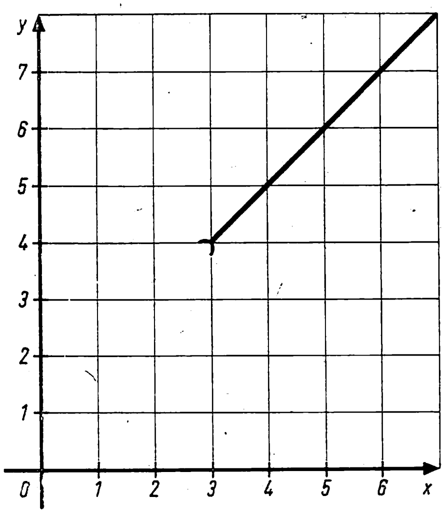
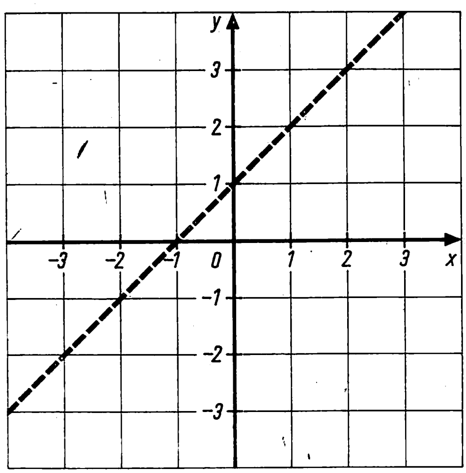



Bild 4.9.



Lücken lassen. Um dies anzudeuten, wollen wir in solch einem Fall die betreffende Gerade gestrichelt zeichnen (Bild 4.9.).

Der Vergleich der Bilder der Funktionen von Beispiel 10, aber auch schon die mengentheoretische Fassung des Funktionsbegriffs zeigen:

> Zwei Funktionen sind dann und nur dann gleich, wenn sie aus denselben Paaren bestehen.

Die in Beispiel 10a bis d gegebenen Funktionen sind alle voneinander verschieden, obwohl die gleiche Zuordnungsvorschrift vorliegt.

Wir stellen noch einige Funktionen grafisch dar.

BEISPIEL 12:

$y = x^2 \ (x \in P)$ (Bild 4.10.)

Das Bild der Funktion besteht wieder aus einer lückenlos erfüllten Kurve, die aber diesmal keine Gerade darstellt. Um den Verlauf der Kurve in der Nähe des Ursprungs genauer wiedergeben zu können, schließen wir in die Wertetabelle einige $x$-Werte zwischen 0 und $\pm 1$ ein:

| $x$ | 0 | $+1$ | $-1$ | $+2$ | $-2$ | $+3$ | $+3$ | $\pm\frac{1}{2}$ | $\pm\frac{1}{3}$ | $\pm\frac{4}{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $+1$ | $+1$ | $+4$ | $+4$ | $+9$ | $+9$ | $+\frac{1}{4}$ | $+\frac{1}{9}$ | $+\frac{16}{25}$ |

Diese Kurve wird übrigens als **Parabel** bezeichnet. Sie liegt im ersten und zweiten Quadranten des Koordinatensystems symmetrisch zur $y$-Achse. Die Tangente an die Parabel im Ursprung ist die $x$-Achse. Der Schnittpunkt der Symmetrieachse mit der Parabel wird als ihr Scheitel bezeichnet. In unserem Fall ist der Ursprung der Scheitel;

Bild 4.10.

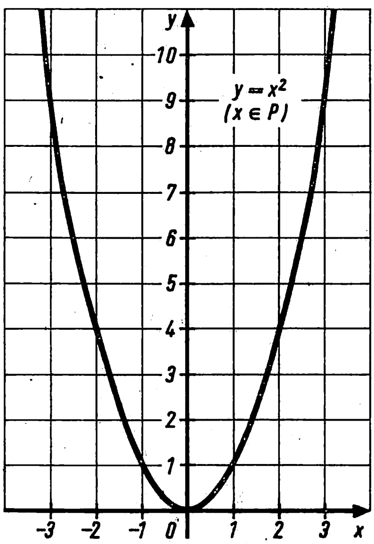
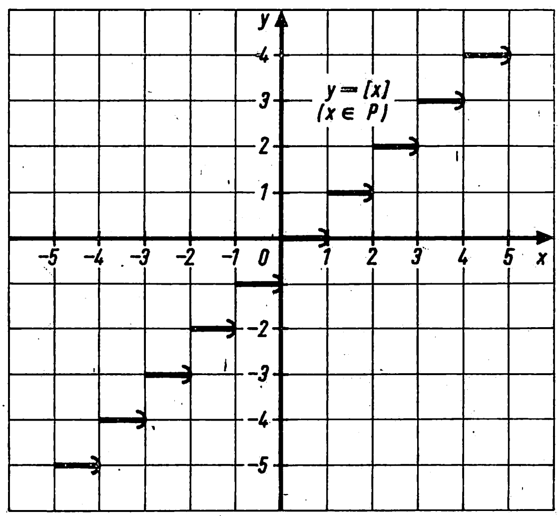



Bild 4.11.



BEISPIEL 13:
Unter $[x]$ (gelesen: „$x$ in eckigen Klammern") wird die größte ganze Zahl kleiner gleich $x$ verstanden. Zum Beispiel ist $[3{,}6] = 3$, $[4] = 4$, $[-2{,}5] = -3$. Der Leser stelle eine Wertetabelle für die Funktion $y = [x]$ $(x \in P)$ auf und berücksichtige dabei die Punkte $+1{,}5$; $-1{,}5$; $+2{,}5$; $-2{,}5$; ... der $x$-Achse!
Das Bild dieser Funktion besteht aus unendlich vielen Strecken, die die Länge von einer Einheit haben und parallel zur $x$-Achse verlaufen (Bild 4.11.). Der linke Eckpunkt zählt zur Strecke, der rechte nicht. Dies ist durch die Klammer am rechten Streckenende angedeutet.

Aufgabe 6

BEISPIEL 14:
Neben die Gleichung $y = x + 1$ von Beispiel 10c (↑S. 126), die in Bild 4.7. im Koordinatensystem dargestellt worden ist, soll jetzt die entsprechende Ungleichung $y < x + 1$ gestellt werden. Die Ungleichung vermittelt eine Abbildung des Bereichs $P$ der reellen Zahlen in sich. Zu jeder reellen Zahl $x$ gehören in diesem Fall unendlich viele reelle Zahlen $y$ als Bild. Wir wollen uns auch diese Abbildung im Koordinatensystem veranschaulichen (Bild 4.12. und 4.13.). Sei $Q$ der zu der Zahl $x_0$ gehörende Punkt der $x$-Achse. Zu $Q$ gehören alle Punkte des Strahls, der in $Q$ auf der $x$-Achse senkrecht steht und oben durch die Gerade $y = x + 1$ begrenzt wird.

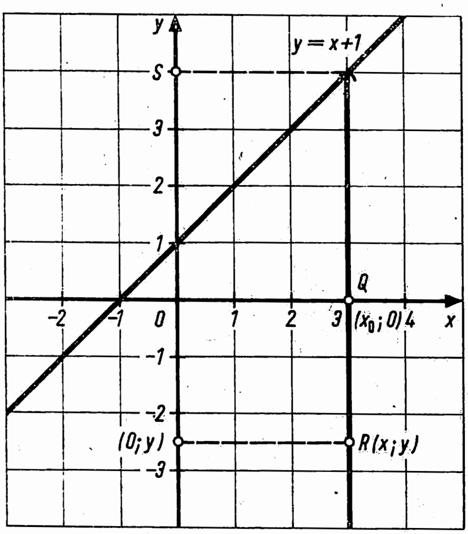



Bild 4.12.

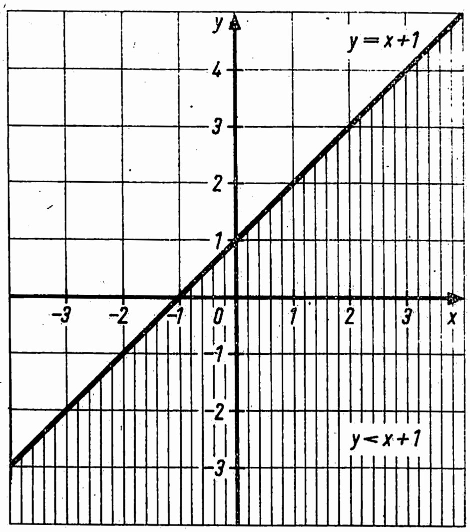



Bild 4.13.

Jedem Punkt $R$ dieses Strahls entspricht eine Zahl auf der $y$-Achse, die ein Bild von $x_0$ ist. Das auf der $x$-Achse durch Punkt $Q$ dargestellte Element $x_0$ des Vorbereichs ist mit jeder Zahl $y$ gepaart, deren Bild auf der $y$-Achse unterhalb von $S$ liegt. Die durch die Ungleichung vermittelte Abbildung stellt daher keine Funktion dar. Ihr Bild ist die ganze gestrichelte Halbebene unterhalb der Geraden $y = x + 1$ (Bild 4.13.).

## 4.4. Eigenschaften von Funktionen

In den höheren Klassen werden Eigenschaften von Funktionen, die durch einen analytischen Ausdruck gegeben sind, untersucht: Periodizität, Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. Sie bilden die Grundlage für die klassische Analysis. Entsprechend wie bei den Relationen soll auch bei Funktionen auf die elementarsten Eigenschaften eingegangen werden. Jedoch soll hier nach Möglichkeit der Rahmen etwas weiter gespannt werden als in der Schule, wo in der Regel nur Zahl-Zahl-Funktionen behandelt werden. So werden Beispiele aus dem nichtmathematischen Bereich herangezogen, um die Erfassung der neuen Begriffe zu erleichtern. Für den Schulunterricht ist als Vorbereitung gut geeignet der Artikel von MARIE ZAJACZKOWSKA ([18], S. 434).

### 4.4.1. *Umkehrbarkeit*

Eine wichtige Eigenschaft mancher Funktionen ist ihre Umkehrbarkeit. Wir nannten eine Funktion $f$ umkehrbar, wenn die zu ihr inverse Abbildung $f^{-1}$ auch eine Funktion darstellt. Diese Eigenschaft wurde bereits behandelt. Mit der Praxis der Darstellung von inversen Funktionen, wenn die Funktion gezeichnet vorliegt, werden wir uns später beschäftigen. Wir haben es hier mit einer sehr wichtigen Klasse von Funktionen zu tun, die noch oft verwendet werden wird. Ein ausführliches Beispiel wurde in Kapitel 3 ($\nearrow$ S. 81) durch die Umklappung der Ebene gegeben.

### 4.4.2. *Periodizität*

Jetzt soll eine weitere wichtige Eigenschaft mancher Funktionen behandelt werden: die **Periodizität**. Sie ist nur von Belang, wenn der Definitionsbereich hinreichend groß ist. Wie weit dabei „hinreichend" zu fassen ist, wird aus den nächsten Beispielen deutlich werden.

BEISPIEL 15:
Sei $A$ die Menge der Monate, die seit dem 1. Januar 1800 bis zur Gegenwart verstrichen sind. Dann umfaßt $A$ über 2000 Elemente. Wir denken sie uns in ihrer zeitlichen Abfolge durchnumeriert: $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Die Menge $B$ umfasse als Elemente die Namen Januar, Februar, . . . , Dezember, die wir durch J, F, Mä, Ap, M, Jn, Jl, A, S, O, N, D abkürzen wollen. Jedem Element $m_i$ von $A$ soll der Name des betreffenden Monats zugeordnet werden. Wir veranschaulichen die dadurch gegebene Funktion durch Pfeile:

$$\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 & m_7 & m_8 & m_9 & m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathrm{J} & \mathrm{F} & \mathrm{M\ddot{a}} & \mathrm{Ap} & \mathrm{M} & \mathrm{Jn} & \mathrm{Jl} & \mathrm{A} & \mathrm{S} & \mathrm{O} & \mathrm{N} & \mathrm{D} & \mathrm{J} & \mathrm{F} & \ldots
\end{array}$$

Die Werte J, F, Mä . . . werden immer wieder in gleicher Abfolge vorkommen. Eine solche Funktion heißt *periodisch mit der Periodenlänge 12.* Der periodische Charakter

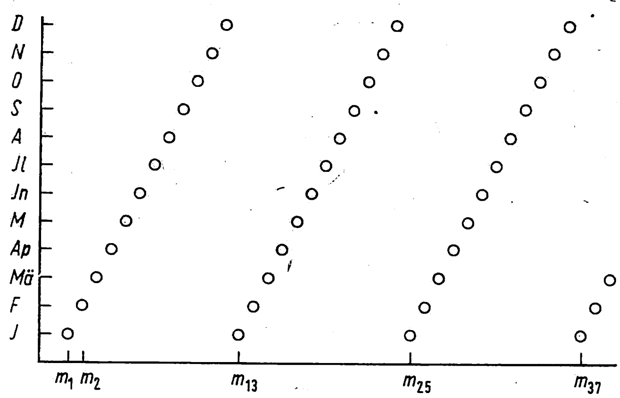



Bild 4.14.

der Funktion wäre nicht in Erscheinung getreten, wenn der Definitionsbereich etwa auf die 12 Monate eines Jahres beschränkt worden wäre. Die grafische Darstellung der Funktion im Koordinatensystem zeigt deutlich ihre Periodizität (Bild 4.14.).

BEISPIEL 16:
Wir beobachten ab 12 Uhr mittags den Wechsel der Farben an einer Verkehrsampel. Für 30″ erscheint in der Hauptverkehrsrichtung grün, dann 5″ lang gelb, die nächsten 20″ rot, darauf wieder 5″ gelb, wonach wieder für 30″ auf grün geschaltet wird usw. Ist $A$ die Menge der seit 12 Uhr verstrichenen Sekunden, $B$ die Menge {grün, gelb, rot}, so liegt die in Abb. 4.15. wiedergegebene Funktion vor. Sie ist streckenweise konstant und hat eine Periode von 60″. Immer nach dieser Zeit zeigt die Ampel dieselbe Farbe. Daß sich die Farbe gelb in kürzeren Abständen wiederholt, darf bei Bestimmung der Periode nicht berücksichtigt werden: Auch dann, wenn die Beobachtung mit „gelb" beginnt, ist die Periode erst dann abgelaufen, wenn *jede* Farbe mindestens einmal erschienen ist.

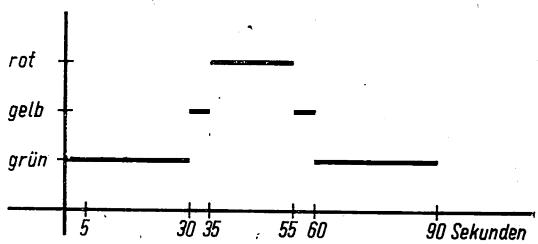



Bild 4.15.

Wir wenden uns jetzt mathematischen Beispielen zu, die für den Schulunterricht von besonderem Interesse sind.

BEISPIEL 17:
In Kapitel 3 wurden die natürlichen Zahlen in Restklassen nach der Division durch 9 eingeteilt (↑ S. 107). Dadurch erhalten wir ein Beispiel für eine Funktion mit neungliedriger Periode. Der Definitionsbereich ist $N$, die Menge der natürlichen Zahlen,

der Wertevorrat umfaßt die neun Elemente (1), (2), ..., (9); das sind die Namen, die wir den Spalten gegeben hatten.

Die Zuordnung durch Pfeile sieht jetzt so aus:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (1) | (2) | (3) | ... |

Das Bild im Koordinatensystem ähnelt dem von Beispiel 15 (Bild 4.14.).
An Stelle von 9 kann eine beliebige andere natürliche Zahl gewählt werden (↗ Beispiele 18 und 19).

BEISPIEL 18:

Eine große Rolle im Anfangsunterricht spielt die Einteilung der natürlichen Zahlen in gerade und ungerade Zahlen. Ihr liegt die Restklassenbildung von $N$ nach Division durch 2 zugrunde, also eine periodische Funktion mit der Periode 2. Es ist wieder $A = N$, $B$ die Zweiermenge $\{u$ (ungerade), $g$ (gerade)$\}$ (Koordinatendarstellung ↗ Bild 4.16.). Der Leser vergleiche Bild 4.16. mit Bild 4.3., bei dem der Bildbereich ebenfalls nur zwei Elemente enthält, ohne daß eine periodische Funktion vorliegt.
Was ist unter einer Funktion mit einer eingliedrigen Periode zu verstehen? Auch dafür haben wir schon ein Beispiel kennengelernt, nämlich in der „konstanten" Funktion $y = 3$ (↗ S. 132, Bild 4.5.).

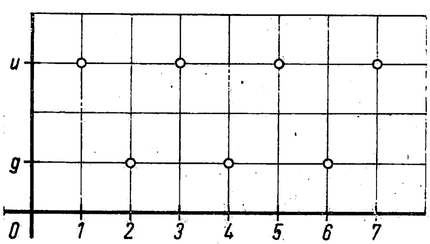



Bild 4.16.

BEISPIEL 19:

Eine Funktion mit sechsgliedriger Periode erhält man durch die Dezimalen des Quotienten bei Division einer natürlichen Zahl durch 7. Wir dividieren zum Beispiel 5 durch 7 und schreiben die Division ausführlich.

5 : 7 = 0,71428571
Rest 5
50
Rest 1
10
Rest 3
30
Rest 2
20
Rest 6
60
Rest 4
40
Rest 5
50
Rest 1
10
Rest 3

Da sich die Reste, die ja stets kleiner als 7 sind, wiederholen müssen, gilt das gleiche für die Dezimalen des Quotienten, der bekanntlich kurz geschrieben wird:

$$0{,}\overline{714285}$$

Um zu zeigen, daß auch hier eine periodische Funktion vorliegt, werden Definitionsbereich $A$, Wertevorrat $B$ und Zuordnung angegeben. Die Menge $A$ besteht aus den Stellen $z_1, z_2, z_3, \ldots$, die bei der Division hinter dem Komma auftreten, die Menge $B$ ist $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Jedem $z_i$ wird die Ziffer zugeordnet, die diese Stelle besetzt, so daß folgende Pfeilzuordnung entsteht:

$$\begin{array}{cccccc|ccccc}
z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 & 2 & \ldots
\end{array}$$

Es entsteht eine sechsgliedrige periodische Funktion.
Um eine allgemeine Erklärung für eine periodische Funktion zu finden, müssen wir uns klarmachen, daß der Definitionsbereich eine *geordnete* Menge sein muß, das heißt eine Menge, über der eine irreflexive Ordnungsrelation erklärt ist, wie es zum Beispiel die nach wachsender Größe geordnete Folge der natürlichen Zahlen darstellt. (Eine ausführliche Behandlung geordneter Mengen erfolgt in Kapitel 6.) Dann ist entscheidbar, ob ein Element $x_i$ des Definitionsbereichs vor oder hinter einem anderen Element $x_k$ steht, und man kann die Koordinatendarstellung benutzen. Bei einer periodischen Funktion wiederholen sich dann mit wachsendem $x$ die Funktionswerte $f(x)$ in stets gleicher Abfolge.

Bei den bisher behandelten Beispielen war der Wertevorrat eine *endliche* Menge. Es sollen jetzt Beispiele folgen, in denen er eine *unendliche* Menge ist.

BEISPIEL 20:
Die Menge $A$ stelle die Zeit, etwa in Minuten gemessen, von einem bestimmten Zeitpunkt an dar. Dann ist $A$ eine kontinuierliche unendliche Menge von reellen Zahlen. Jedem Zeitpunkt werde die zugehörige Zeigerstellung des großen Zeigers einer bestimmten Uhr zugeordnet, gemessen an dem Winkel, den dieser Zeiger mit der Null-Uhr-Stellung bildet. Der Wertevorrat ist also die Menge aller Winkel von 0° bis 360°, gleichfalls eine kontinuierliche unendliche Menge von reellen Zahlen. Immer nach demselben Zeitablauf, nämlich nach 60′, wiederholt sich die Zeigerstellung. Die vorliegende Funktion, deren Definitionsbereich und Wertevorrat unendliche Mengen sind, ist periodisch. Die Periodenlänge beträgt 60′.

BEISPIEL 21:
* Jedem Schüler der oberen Klassen sind die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus bekannt. Wenn wir den Winkel nicht im Grad-, sondern im Bogenmaß messen, können wir $\sin x$ und $\cos x$ für alle reellen Zahlen erklären. Da jeder um $2\pi$ (das entspricht einem Winkel von 360° im Gradmaß) vergrößerte oder verkleinerte Winkel auf denselben im Gradmaß gemessenen Winkel führt, gilt für alle reellen Zahlen $x$:

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x \quad (k \text{ ganz}).$$

Ordnen wir jeder reellen Zahl den zugehörigen Sinus als Funktionswert zu, so erhalten wir eine periodische Funktion mit der Periode $2\pi$ (Bild 4.17.) Das Gleiche gilt für den

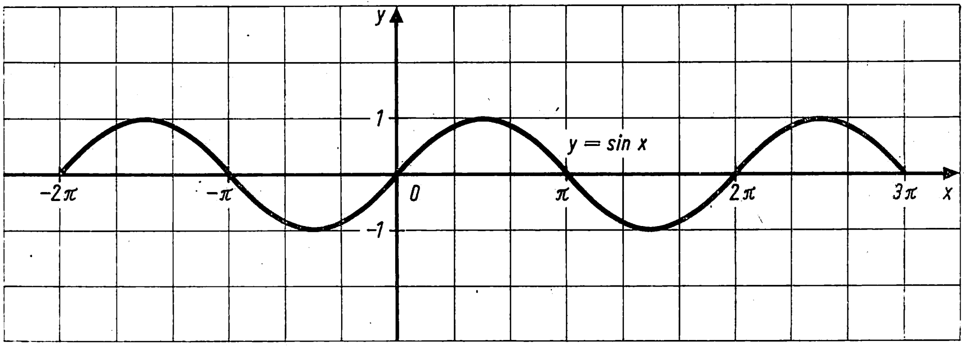



Bild 4.17.

Kosinus. Die Periodenlänge ist die *kleinste* positive Größe, nach deren Addition Periodizität eintritt. Natürlich wiederholen sich die Funktionswerte auch bei Vergrößerung von $x$ um $6\pi$, $10\pi$ usw., aber diese Werte sind alle größer als $2\pi$, genau gesagt: Vielfache von $2\pi$. Auch im Beispiel 15 wurde 12, nicht 24 oder 36 als Periode angegeben, obwohl natürlich dort auch gilt

$$f(m_{i+24}) = f(m_i), \quad f(m_{i+36}) = f(m_i) \text{ usw.}$$

Wir gelangen zu folgender

ERKLÄRUNG:

▷ Es sei $y = f(x)$ eine Funktion mit einem Definitionsbereich $A$ reeller Zahlen. Dann heißt $f$ **periodisch** genau dann, wenn es eine positive reelle Zahl $k$ gibt, so daß für jedes $x$ aus $A$ gilt:

$f(x + k) = f(x)$

Die kleinste derartige Zahl $k$ heißt die **Periode der Funktion.**

Aufgaben 7 und 8

### 4.4.3. *Monotonie*

Für die nächsten Eigenschaften, die hier behandelt werden, sollen nur Zahl-Zahl-Funktionen in Betracht gezogen werden.

BEISPIEL 22:

Der Definitionsbereich $A$ sei die Menge der Jahre, die seit der Geburt eines bestimmten Kindes bis zu seinem 15. Geburtstag verstrichen sind, die Menge $B$ seine Körpergrößen, in Zentimetern gemessen. Jedem Element von $A$ werde die jeweilige Körpergröße zugeordnet. Beide Mengen sind nach der Größe geordnet, die erste nach der ablaufenden Zeit, die zweite nach der Länge. Wenn das Kind älter wird, wächst es im allgemeinen, wird jedenfalls nicht kleiner. Wir haben es mit einer *monoton wachsenden* Funktion zu tun. Ändern wir das Beispiel dahin ab, daß wir für $A$ die Zeitspanne vom 50. bis zum 70. Geburtstag eines Menschen zugrundelegen, so wird die entsprechende Funktion *monoton abnehmen.*

ERKLÄRUNG:

▷ Gegeben sei eine über der Menge $A$ definierte Zahl-Zahl-Funktion $f$. Die Zahlen von $A$ und vom Wertevorrat $B$ seien der Größe nach geordnet. Es seien $x_1$ und $x_2$ Elemente von $A$ und $x_1 < x_2$. Die Funktion $f$ heißt **monoton wachsend (abnehmend)** genau dann, wenn gilt:
$f(x_1) \leqq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geqq f(x_2)$).
Die Funktion heißt **streng monoton wachsend** bzw. **abnehmend,** wenn das Gleichheitszeichen dabei nicht gilt.

Im Lehrplan[1] wird mit *monoton* das bezeichnet, was hier *streng monoton* genannt wurde. Wenn auch das Gleichheitszeichen zugelassen ist, wird im Lehrplan von *Monotonie im weiteren Sinne* gesprochen.

Die in Beispiel 22 definierte Funktion kann wohl kaum als streng monoton bezeichnet werden, da ein Kind oft längere Zeit im Längenwachstum stehenbleibt. Das Entsprechende gilt für alternde Menschen. Die in den Beispielen 10 (↑ S. 126, vgl. Bilder 4. 6. bis 4. 9. und 13 (↑ S. 135, Bild 4.11.) auftretenden Funktionen $y = x + 1$ bzw. $y = [x]$ sind monoton wachsend, die von Beispiel 10 sogar im strengen Sinn. Dagegen ist die durch Beispiel 12 (↑ S. 134, Bild 4.10.) gegebene Funktion weder monoton wachsend noch abnehmend. Man kann aber aus ihr leicht zwei sogar streng monotone Funktionen $f_1$ und $f_2$ konstruieren, indem man den Definitionsbereich $P$ zerschneidet in $P_1$ $(x < 0)$ und $P_2$ $(x \geqq 0)$, die Zuordnung $y = x^2$ aber beibehält. Dann ist $f_1$ streng monoton fallend, $f_2$ streng monoton wachsend.
Wie die Periodizität läßt sich auch die Monotonie leicht an der Darstellung im Koordinatensystem ablesen.
Wir werden bald von einer wichtigen Eigenschaft streng monotoner Funktionen Gebrauch machen:

SATZ 1:

▷ Eine streng monotone Funktion ist stets umkehrbar.

Es ist zu zeigen, daß jedem $y$ des Wertevorrats von $f$ *genau ein* $x$ des Definitionsbereichs durch die zu $f$ inverse Abbildung $f^{-1}$ zugeordnet wird. Bei streng monotonen Funktionen ist dies der Fall, da mit wachsendem $x$ auch $f(x)$ beständig wächst bzw. abnimmt, so daß sich ein bereits einmal angenommener Wert von $y$ nicht wiederholt. Periodische Funktionen sind daher nie umkehrbar, es sei denn, man beschränkt den Definitionsbereich auf die Länge einer einzigen Periode. Bei streng monotonen Funktionen kann die Zuordnung $x \to y$ durch einen Doppelpfeil $x \leftrightarrow y$ angedeutet werden.
Daß dies für Funktionen, die nicht *streng* monoton sind, nicht gilt, zeigt ein Blick auf Bild 4.11., das die (nicht streng) monotone Funktion $y = [x]$ darstellt. Hier gehören zum Beispiel zu $y = 3$ alle $x$-Werte zwischen 3 und 4.

Aufgabe 9

[1] Lehrplan für Mathematik, Erweiterte Oberschule Klassen 11 und 12 (Ausgabe 1972). Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 20.

### 4.4.4. *Beschränktheit*

Ebenso anschaulich wie die Monotonie ist eine weitere Eigenschaft mancher Zahl-Zahl-Funktionen: ihre Beschränktheit. Wieder können wir auf frühere Beispiele zurückgreifen, zunächst als Gegenbeispiele. Die in den Beispielen 10a, b, c, 12, 13 (↑ S. 126, 134 f.) vorliegenden Funktionen sind nicht beschränkt, das heißt, mit wachsendem $x$ wachsen die Funktionswerte beständig oder nehmen beständig ab, wobei jede dem Betrag nach beliebig groß vorgegebene Zahl überschritten bzw. unterschritten wird. Das Gegenstück dazu bilden die beschränkten Funktionen. Bei einer solchen Funktion kann stets eine reelle Zahl angegeben werden, die nicht überschritten und eine, die nicht unterschritten wird. Gilt nur eine der beiden Beschränkungen, so heißt die Funktion nach oben bzw. nach unten beschränkt. Selbstverständlich sind alle Zahl-Zahl-Funktionen, deren Wertevorrat nur endlich viele Elemente besitzt, beschränkt. Dazu gehören z. B. die Funktionen $y = 3$ (der Wertevorrat enthält nur ein einziges Element) und die Wertetabelle mit acht Elementen (↑ S. 132f., Bild 4.5. und 4.6.). Die bereits einmal abgeänderte Funktion $y = x^2$ von Beispiel 12 kann bei einer Verstümmelung des Definitionsbereichs in eine beschränkte Funktion verwandelt werden. Man amputiere lediglich die „Außenstücke", betrachte also etwa als Definitionsbereich alle reellen Zahlen zwischen $-100$ und $+100$, wobei die Grenzen eingeschlossen seien. Die kleinste nicht überschrittene Zahl ist in diesem Fall 10000. Beispiel 10d ($y = x + 1$ für $x \geqq 3$) stellt eine nach unten beschränkte Funktion dar.

ERKLÄRUNG:

▷ Es sei $f$ eine Funktion, deren Definitionsbereich und Wertevorrat der Größe nach geordnete Zahlen seien. Dann heißt $f$ **nach oben (unten) beschränkt** genau dann, wenn es eine reelle Zahl $r$ gibt, so daß für alle $x$ des Definitionsbereichs gilt $f(x) < r$ (bzw. $f(x) > r$). Die Funktion $f$ heißt **beschränkt,** wenn es eine positive Zahl $r$ gibt, so daß für alle $x$ gilt $|f(x)| < r$ (das heißt: $-r < f(x) < +r$).

### 4.4.5. *Stetigkeit*

Als weiteres Beispiel wollen wir eine Funktion betrachten, die uns noch später mehrfach beschäftigen wird.

BEISPIEL 23:

Es sei $A = P$ der Bereich der reellen Zahlen und $y = \frac{1}{x}$. Der aufmerksame Leser wird merken, daß hier gar keine Funktion vorliegt, denn für das Element $x = 0$ gibt es kein $y$. Wir treffen die Festsetzung: An dieser Stelle soll $y = 3$ sein. Dann liegt eine Funktion vor. Sie ist in Bild 4.18. im Koordinatensystem andeutungsweise dargestellt. Das Bild der Funktion zerfällt in drei Teile: den linken und rechten Kurvenbogen – sie werden zusammen als Hyperbel bezeichnet – und den isolierten Punkt (0; 3). Zweifellos ist diese Funktion nicht beschränkt, werden doch die Funktionswerte in der Nähe des Nullpunktes über alle Maßen groß bzw. klein. Aber auch hier kann dem

Übel durch eine Verstümmelung des Definitionsbereichs abgeholfen werden: Man beschränke sich auf ein Intervall, das die Null nicht enthält, etwa auf die reellen Zahlen $x \geqq \frac{1}{100}$. Für die in der Erklärung geforderte Zahl $r$ kann dann $r = 100$, das ist der höchste erreichbare Funktionswert, gewählt werden. Bei beschränkten monotonen Funktionen wie der vorliegenden befindet sich der absolut genommen höchste Funktionswert stets an einem Intervallende. Der Leser überzeuge sich durch Berechnung geeigneter Werte davon, daß sich die Hyperbelzweige für große positive und negative $x$ der $x$-Achse, für absolut genommen sehr kleine $x$ der $y$-Achse anschmiegen, ohne diese Geraden jemals zu erreichen. Jede Hyperbel besteht aus zwei Ästen, die sich zwei Geraden (in unserem Fall sind dies die Koordinatenachsen) in dieser Weise anschmiegen. Die beiden Geraden heißen die Asymptoten[1] der Hyperbel (Bild 4.18.).

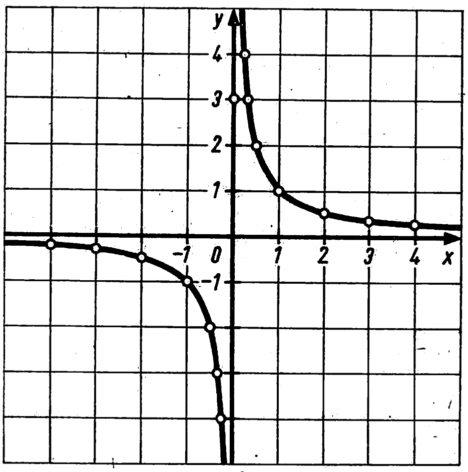



Bild 4.18.

Das letzte Beispiel führt uns zugleich auf eine weitere wichtige Eigenschaft von Funktionen, mit der diese Analyse abgeschlossen werden soll.

Die Kurve von $y = \frac{1}{x}$ „springt“ an der Stelle $x = 0$, wenn man die $x$-Achse von links nach rechts verfolgt, von sehr hohen negativen Funktionswerten (die sogar, absolut genommen, unbeschränkt hoch werden) zu dem isolierten Punkt (0; 3) und von dort zu unbeschränkt großen positiven Funktionswerten. Man sagt: „Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ *unstetig*, sie macht dort einen unendlich großen Sprung.“ Aber auch Funktionen mit endlichen „Sprüngen“ haben wir schon kennengelernt, zum Beispiel die Funktion $y = [x]$ (↑ S. 134, Bild 4.11). Diese Funktion macht bei jeder natürlichen Zahl einen Sprung um 1; es gibt also hier unendlich viele endliche Sprünge. Die Funktion ist an diesen Stellen gleichfalls „unstetig“. An allen anderen Stellen sind beide hier genannten Funktionen „stetig“, die Funktionswerte schließen sich lückenlos aneinander an. Wenn sich die Variable $x$ nur um wenig ändert, so ändert sich auch $y$

---

[1] Aus dem Griechischen ἀσυμπίπτειν = nicht zusammenfallen.

mit dieser $\delta$-Länge im ganzen Definitionsbereich aus. Natürlich brauchte $\delta$, wenn $x_0$ weit vom Nullpunkt entfernt liegt, nicht so klein zu sein, und eine zeichnerische Bestimmung würde hier ein weit größeres $\delta$ liefern. Zur Stetigkeit ist aber nicht erforderlich, das größte, sondern überhaupt ein Intervall um $x_0$ mit der verlangten Eigenschaft anzugeben.
Rechnen wir den angegebenen Fall durch. Wir gehen von der ungünstigsten Stelle $x_0 = \frac{1}{20}$ aus. Für $\varepsilon$ verlangen wir $\frac{1}{10}$. Der zu $x_0$ gehörige Funktionswert ist $y_0 = 20$. Von diesem Punkt der $y$-Achse aus legen wir das $\varepsilon$-Intervall, und zwar in diesem Fall nach unten. Die Intervallenden werden gegeben durch $y_0 = 20$ und $y_0' = 20 - \frac{1}{10}$, also $y_0' = \frac{199}{10}$. Zu diesem Wert von $y_0'$ gehört $x_0' = \frac{1}{y_1}$, $x_0' = \frac{10}{199}$. Das Intervall auf der $x$-Achse hat die Länge $x_0' - x_0 = \frac{10}{199} - \frac{1}{20} = \frac{200-199}{199 \cdot 20} = \frac{1}{3980}$. Um eine bequemere Zahl zu erhalten, verkleinern wir das Intervall noch ein wenig. Dann werden sich die $y$-Werte, die zu diesem Intervall gehören, erst recht um weniger als $\frac{1}{10}$ voneinander unterscheiden. Es ist $\frac{1}{3980} > \frac{1}{4000}$. Wir wählen $\delta = \frac{1}{4000}$. Dieses $\delta$ ist sicher eine sehr kleine Zahl, die sich in Bild 4.20. nicht mehr wiedergeben läßt. Sie reicht aber für den ganzen Definitionsbereich aus. Das heißt: Wählt man einen Punkt $x_0$ beliebig im Definitionsbereich und legt um $x_0$ ein Intervall von der Länge $\frac{1}{4000}$, so unterscheiden sich die zugehörigen $y$-Werte höchstens um $\frac{1}{10}$ von $y_0$, also auch untereinander. Meist werden sich die Funktionswerte bedeutend weniger voneinander unterscheiden, weil, wie die Zeichnung zeigt, die $y$-Werte in großer Entfernung vom Nullpunkt sehr dicht beieinander liegen. In unserem Fall, in dem wir mit einem einzigen Wert von $\delta$ für das ganze Intervall auskommen, wo also die Zahl **nicht von der Lage des Punktes $x_0$ abhängt,** sprechen wir von **gleichmäßiger Stetigkeit.** Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ ist in jedem Intervall $a \leqq x \leqq b$, das den Nullpunkt nicht enthält, gleichmäßig stetig.

Aufgabe 10

Natürlich hängt die Länge von $\delta$ auch von der Art der Funktion ab. Zum Beispiel kommt man bei der „konstanten" Funktion $y = 3$ bei beliebig klein vorgegebenen $\varepsilon$ mit jedem $\delta$ aus, ja, $\delta$ darf den ganzen Definitionsbereich umfassen, da sich ja die Funktionswerte überhaupt nicht ändern. Diese Funktion ist also sicher in ihrem ganzen Definitionsbereich gleichmäßig stetig. Der Leser könnte einwenden, daß es sich bei der Funktion $y = 3$ um eine „entartete" Funktion handele, die eine Ausnahmestellung einnehme. Wir haben aber bereits eine andere – sicher nicht „entartete" – Funktion kennengelernt, die gleichfalls über dem ganzen Definitionsbereich $P$ gleichmäßig stetig ist, die für alle reellen Zahlen erklärte Funktion $y = x + 1$ (↗ Bild 4.7., S. 133). Der Nachweis dafür soll hier allgemeiner für eine ganze Schar von Funktionen geführt werden, für die sogenannten linearen Funktionen der Form $y = mx + n$. Dabei soll $m \neq 0$ vorausgesetzt werden, da $m = 0$ auf konstante Funktionen führt, von denen wir den Spezialfall $n = 3$ bereits behandelt haben. Durch die Form $y = mx + n$ wird in der Tat eine Schar von Funktionen gegeben; man könnte allerdings diesen Ausdruck auch als Bezeichnung für eine einzige Funktion auffassen, dann wären aber drei unabhängige Variable vorhanden, $m$, $n$ und $x$. Wir interessieren uns hier jedoch nur für Funktionen der einen Variablen $x$, und wir wollen den Nachweis erbringen, daß jede Funktion dieser Schar gleichmäßig stetig ist.

Das Bild jeder solchen Funktion ist bekanntlich eine Gerade, deren Steilheit durch die Größe von $m$ bestimmt wird. Daher rührt auch der Name „lineare"[1] Funktion.

Wir schreiben zunächst, um die Rechnung an einem einfachen Beispiel zu zeigen, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ vor und greifen ein beliebiges $x_0$ heraus. Dann ist $y_0 = mx_0 + n$. Um die Stelle $y_0$ legen wir auf der $y$-Achse symmetrisch das Intervall von der Länge $\frac{1}{50}$. Es sei $y_1 = y_0 + \frac{1}{100}$, $y_2 = y_0 - \frac{1}{100}$. Da jede Funktion der hier betrachteten Schar streng monoton ist (wachsend oder abnehmend, je nach dem Vorzeichen von $m$), kann die Umkehrfunktion gebildet werden: $x = \frac{y - n}{m}$. Der zu $y_1$ gehörige Wert von $x$ heiße $x_1$, der zu $y_2$ gehörige $x_2$.

Dann gilt:

$$y_1 = (mx_0 + n) + \frac{1}{100} \qquad\qquad y_2 = (mx_0 + n) - \frac{1}{100}$$

$$x_1 = \frac{y_1 - n}{m} \qquad\qquad x_2 = \frac{y_2 - n}{m}$$

$$= \frac{\left(mx_0 + n + \frac{1}{100}\right) - n}{m} \qquad\qquad = \frac{\left(mx_0 + n - \frac{1}{100}\right) - n}{m}$$

$$= \frac{mx_0 + \frac{1}{100}}{m} \qquad\qquad = \frac{mx_0 - \frac{1}{100}}{m}$$

$$= x_0 + \frac{1}{100\,m} \qquad\qquad = x_0 - \frac{1}{100\,m}$$

$$\delta = |x_1 - x_2| = \left|\left(x_0 + \frac{1}{100\,m}\right) - \left(x_0 - \frac{1}{100\,m}\right)\right|$$

$$= \frac{2}{100\,|m|}$$

$$= \frac{0,02}{|m|}$$

Statt $\delta = \frac{1}{50}$ hätte jedes beliebige positive $\delta$ gewählt werden können. Die Durchrechnung dafür ergibt also eine positive Zahl, die mit $\delta$ beliebig klein wird.

[1] Aus dem Lateinischen, linea, Gerade.

Dieses Ergebnis für $\delta$ ist von der Stelle $x_0$ unabhängig, da $x_0$ im Ergebnis überhaupt nicht auftritt. Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit jeder Funktion der Schar $y = mx + n$ bewiesen. Dagegen spielt die Größe von $m$ eine Rolle bei der Bestimmung von $\delta$. Man kommt nicht mit demselben $\delta$ für alle Funktionen der Schar aus, sondern für jede ergibt sich ein anderer Wert von $\delta$ in Abhängigkeit von $m$. Die Größe von $m$ bestimmt nämlich die Steilheit der Geraden, also den Wachstumsgrad von $y$, und je steiler die Kurve ist, desto kleiner muß $\delta$ bei vorgegebenem $\varepsilon$ genommen werden.
Im Gegensatz zu diesen Funktionen ist die Funktion $y = x^2$, sofern als Definitionsbereich $P$ gewählt wird, sicher nicht gleichmäßig stetig, obwohl in jedem einzelnen Punkt Stetigkeit besteht. Das ist schon daran zu erkennen, daß die Kurve immer steiler wird, je weiter man sich vom Nullpunkt entfernt (↑ Bild 4.10.). Verkleinern wir jedoch den Definitionsbereich nach beiden Seiten, indem wir ein abgeschlossenes Intervall, etwa $(-10, +10)$ zugrundelegen, so besteht wieder gleichmäßige Stetigkeit.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine über dem Bereich $A$ definierte Funktion $f$ heißt an der Stelle $x_0$ **stetig**, wenn es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ eine positive Zahl $\delta$ gibt, so daß für $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|y - y_0| < \varepsilon$. Die Zahl $\delta$ hängt im allgemeinen von $\varepsilon$ und von der Stelle $x_0$ ab. Ist $\delta$ von $x_0$ unabhängig, gilt also für jedes $x_0$ aus $A$: Falls $|x - x_0| < \delta$, so $|y - y_0| < \varepsilon$ **mit demselben $\delta$**, so heißt $f$ **gleichmäßig stetig.**

SATZ 2:

▷ Eine in jedem Punkt eines abgeschlossenen Intervalls stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Auf den Beweis dieses für die neue Analysis wichtigen Satzes kann hier nicht eingegangen werden. Daß es auch Funktionen gibt, die in offenen Intervallen gleichmäßig stetig sind, hat die Untersuchung der Schar linearer Funktionen gezeigt.

Aufgabe 11

Die bisher gewählten Beispiele beschränkten sich der Einfachheit halber auf monotone Funktionen. Es ist aber keineswegs so, daß nur bei diesen Funktionen die Prüfung auf Stetigkeit so einfach wäre. Auch die Stetigkeit der periodischen – also nichtmonotonen – Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und anderer läßt sich leicht nachweisen. Aus Platzmangel muß der Leser auf die bereits erwähnte Spezialliteratur verwiesen werden (vgl. z. B. [17], S. 553 ff.).
Mit dem Begriff der Stetigkeit scheint ein Zusammenhang des Funktionsbildes verbunden zu sein. Daß dieses Sprünge enthält, ist aber keineswegs ausschlaggebend für die Unstetigkeit der Funktion. So ist jede endliche Funktion, das heißt, jede Funktion, die aus nur endlich vielen Paaren $[x, y]$ besteht, wie zum Beispiel eine Wertetabelle für irgend eine Funktion, als stetig zu bezeichnen. Hier sind es nämlich im Gegensatz zu der Funktion $y = [x]$ nicht nur die $y$-Werte, die einen Sprung ausführen, sondern zugleich auch die $x$-Werte. Um klarer zu sehen, gehen wir auf die Erklärung der Stetigkeit einer Funktion $f$ zurück.

Sie besagt, wenn $x$ und $x_0$ Elemente des Definitionsbereichs sind: Die Funktion $f$ ist im Punkte $x_0$ stetig genau dann, wenn bei Annäherung der $x$-Werte an $x_0$ sich die $y$-Werte unbegrenzt dem Wert $y = f(x_0)$ nähern. Bedeutet $z \twoheadrightarrow a$, daß sich die Variable $z$ der festen Zahl $a$ unbegrenzt nähert, so läßt sich die Stetigkeit an der Stelle $x_0$ kurz so formulieren: $f$ stetig genau dann, wenn $(x \twoheadrightarrow x_0) \Rightarrow (y \twoheadrightarrow y_0)$. Die Implikation $(x \twoheadrightarrow x_0) \Rightarrow (y \twoheadrightarrow y_0)$ ist aber für jede Funktion, die aus nur endlich vielen Paaren $[x, y]$ besteht, erfüllt, da die Voraussetzung $x \twoheadrightarrow x_0$ stets falsch ist. Der Leser sei daran erinnert, daß die Implikation $\mathsf{H}_1 \Rightarrow \mathsf{H}_2$ nur in einem einzigen Fall falsch ist, nämlich wenn $\mathsf{H}_1$ richtig, $\mathsf{H}_2$ aber falsch ist (↑ Kap. 1, S. 21). Mithin ist jede Funktion, die aus endlich vielen Paaren besteht, der Anschauung zum Trotz als stetig zu bezeichnen. Ein Sprung bei den $y$-Werten an der Stelle $x_0$ ist dann und nur dann für die Unstetigkeit der Funktion entscheidend, wenn $x_0$ Grenzwert einer $x$-Folge ist, wie es in Bild 4.24. (↑ S. 154) bei der Hyperbel bei $x = 0$ und bei der Funktion $y = [x]$ an allen ganzzahligen Stellen der $x$-Achse der Fall ist.
Damit sei die Untersuchung von Funktionen auf gewisse Eigenschaften hin abgeschlossen. Für die weitere Analyse muß der Leser auf die Spezialliteratur verwiesen werden (vgl. z. B. [19]; [20]; [4]).
Kehren wir jetzt zu den im vorigen Kapitel behandelten Relationen zurück, um sie von einem anderen Standpunkt aus zu betrachten.

## 4.5. Verkettung von Abbildungen

BEISPIEL 24:
Es sei eine Relation $R$ „Vater sein" gegeben; $a\,R\,b$ heiße: $a$ hat $b$ zum Vater (Bild 4.21.a). Wir wollen eine Menge $M$ von Personen annehmen, in der stets entscheidbar ist, ob $a\,R\,b$ gilt oder nicht. Ferner bedeute die Relation $e\,S\,g$: $e$ hat $g$ zur Mutter (Bild 4.21.b).
Wir setzen in der Menge $M$ einmal die Abbildungen $R$ und $S$ zusammen. In Bild 4.21.c steht $a$ zu vier Personen, zu $c$, $d$, $f$, $g$, in der Relation des Enkels bzw. der Enkelin, und zwar ist $d$ Großvater väterlicherseits, $f$ mütterlicherseits, $c$ Großmutter väterlicherseits, $g$ mütterlicherseits von $a$.
Wenn $a$ männlichen Geschlechts ist, stellen die drei Personen $a$, $b$, $d$ zwei Väter und zwei Söhne dar!

Aufgaben 12 und 13


Bild 4.21.a


Bild 4.21.b

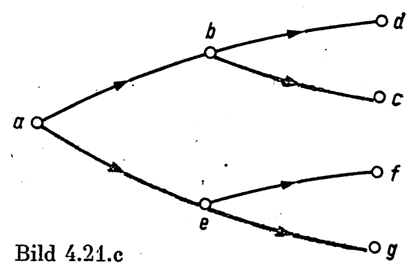



Bild 4.21.c

Wir können in Bild 4.21.c die Beziehungen „Großvater väterlicherseits" usw. durch direkt von $a$ nach $d$ bzw. $c$ bzw. $f$ bzw. $g$ verlaufende Pfeile darstellen. Jede dieser Relationen ist aus zwei Relationen zusammengesetzt. So ergibt sich aus $aRb$ ($b$ ist Vater von $a$) und $bSc$ ($c$ ist Mutter von $b$) eine Relation $aT_1c$ ($c$ ist Großmutter väterlicherseits von $a$). Die Relation $T_1$ setzt sich aus den beiden Relationen $R$ und $S$ zusammen. Wir wollen sie schreiben als

$$T_1 = S \circ R.$$

Dabei ist die Reihenfolge zu beachten.

Um zu erklären, warum bei der Zusammensetzung die Reihenfolge $S \circ R$ und nicht die umgekehrte gewählt wird, wollen wir die in Frage kommenden Relationen einmal als Abbildungen auffassen. Dazu brauchen wir eine Menge $M$ von Personen, die mindestens $a, b, c, d, e, f, g$ enthält. Jede der Relationen $R$, $S$, $T_1$ stellt dann eine Abbildung aus $M$ in $M$ dar. Benutzen wir die bei Funktionen eingeführte Schreibweise für das Bild, so ist $b = R(a)$, $c = S(b)$, also $c = S(R(a)) = T_1(a)$.

Die Relation

$$T_2 = R \circ S$$

ordnet der Person $a$ den Großvater mütterlicherseits zu.

Es ist $f = R(a) = R(S(a)) = T_2(a)$. Also ist $R \circ S \neq S \circ R$.

Natürlich kann man auch eine Abbildung mit sich selbst zusammensetzen; z. B. sind in Bild 4.21.c zusammengesetzt $R$ mit $R$: $d = R(R(a)) = T_3(a)$ ($d$ ist Großvater väterlicherseits von $a$),

$$T_3 = R \circ R,$$

und $S$ mit $S$: $g = S(S(a)) = T_4(a)$ ($g$ ist Großmutter mütterlicherseits von $a$),

$$T_4 = S \circ S.$$

---

**Zusammenfassung:**
**Bei der Zusammensetzung von zwei Abbildungen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{S}$ ist die Reihenfolge zu beachten. Es ist im allgemeinen**
$\boldsymbol{S \circ R \neq R \circ S}$.
**Damit die zusammengesetzte Abbildung nicht die leere Menge ergibt, ist notwendig und hinreichend, daß der Nachbereich der ersten mit dem Vorbereich der zweiten Abbildung einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.**

---

Der Leser vergleiche jetzt einmal die Bilder 4.21.c und 4.22. In beiden können die Relationen $R$ und $S$ als Abbildungen aus $M$ in $M$ aufgefaßt werden. In Gegensatz zu dem oben betrachteten Fall lassen sich aber in Bild 4.22. die Relationen nicht zusammensetzen. Das liegt daran, daß der Nachbereich der einen Abbildung ($R$ bzw. $S$) kein Element mit dem Vorbereich der anderen Abbildung gemeinsam hat. Bildet man formal $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, so stellt jede dieser Paarmengen die leere Menge dar.

Aufgabe 14

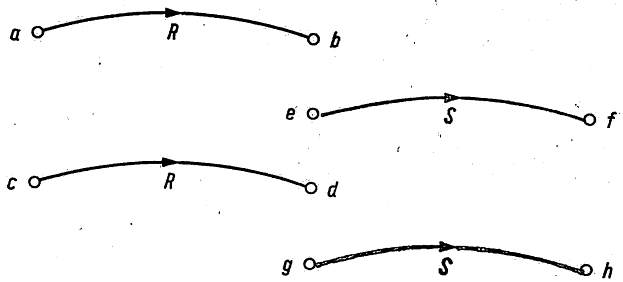



Bild 4.22.

Wir wollen jetzt einmal irgendeine Abbildung $R$ mit ihrer inversen Abbildung $R^{-1}$ zusammensetzen (↑ S. 124). Denken wir, um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, an die Abbildung, die jeder Person $a$ aus einer Menge $M$ ihren Vater $b$ zuordnet, der gleichfalls Element von $M$ sei. Es bedeutet also:

$b = R(a)$: $b$ ist Vater von $a$,
$a = R^{-1}(b)$: $a$ ist Kind von $b$.

Setzen wir jetzt zusammen:
$b = R(R^{-1}(b))$. so ist der Person $b$ wieder $b$ zugeordnet, es entsteht die Identität. Ebenso gilt: $a = R^{-1}(R(a))$. Auch hier entsteht die Identität. In dem speziellen Fall, wo eine Abbildung $T$ die zu $R$ inverse Abbildung ist, darf also $R$ mit $T$ vertauscht werden. Bezeichnen wir die identische Abbildung, die jedes Element sich selbst zuordnet, mit $E$, so können wir schreiben:

$$R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = E.$$

Der folgende Abschnitt (bis S. 156) kann übergangen werden, ohne daß das Verständnis des folgenden beeinträchtigt wird.

## 4.6. Zusammensetzung von Funktionen

* Wir wollen jetzt die an einigen Beispielen durchgeführten Operationen der Zusammensetzung von Relationen bzw. Abbildungen speziell auf Funktionen anwenden, und zwar auf solche Zahl-Zahl-Funktionen, die durch einen analytischen Ausdruck gegeben sind.

BEISPIEL 25:
Gehen wir von einem einfachen Beispiel aus. Die beiden Funktionen, die zusammengesetzt oder, wie wir jetzt sagen wollen, verkettet werden sollen, seien

$$f_1 = \left\{[x, y];\, x \in P \text{ und } x > 0 \text{ und } y = \frac{1}{x}\right\},$$
$$f_2 = \{[y, z];\, y \in P \text{ und } y > 0 \text{ und } z = y + 1\}.$$

Um Verwechslungen vorzubeugen, wurden die Variablen in $f_2$ anders benannt als in $f_1$.

Verwenden wir für $x \in P$ und $x > 0$ die Kurzschreibweise $x \in P^+$, so ist

$$y = f_1(x) \quad x \in P^+,$$
$$z = f_2(y) \quad y \in P^+.$$

Wir wollen $f_2 \circ f_1$ bilden, also $z = \frac{1}{x} + 1$. Diese Funktion soll bezeichnet werden mit $f_3$, also

$$z = f_3(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Welches ist der größtmögliche Definitionsbereich der durch Verkettung von $f_1$ mit $f_2$ entstandenen Funktion $f_3$? Der Definitionsbereich von $f_2$ ist der Bereich der positiven reellen Zahlen, das ist aber zugleich der Wertevorrat von $f_1$; denn für reelle positive $x$ nimmt $y = \frac{1}{x}$ jede positive reelle Zahl einmal als Wert an. Das Bild $z = f_3(x)$ existiert überall dort, wo der Wert $y = f_1(x)$ in den Definitionsbereich von $z = f_2(y)$ fällt. In unserem Beispiel kann als Definitionsbereich gleichfalls der ganze Bereich der positiven reellen Zahlen gewählt werden. Wir können $f_3$ in der Form darstellen:

$$f_3 = \left\{[x, z];\ x \in P \text{ und } x > 0 \text{ und } z = \frac{1}{x} + 1\right\}.$$

Hätten wir als Definitionsbereich für $f_1$ bzw. $f_2$ den Bereich $P \setminus \{0\}$ bzw. $P$ gewählt, was bei den analytischen Ausdrücken für $f_1$ und $f_2$ durchaus möglich gewesen wäre, so hätte sich als größtmöglicher Definitionsbereich für $f_3$ ergeben $P \setminus \{0\}$. Der Wertevorrat von $f_1$ ist dann nämlich auch $P \setminus \{0\}$ und sein Durchschnitt mit dem Definitionsbereich von $f_2$ gleichfalls $P \setminus \{0\}$.
Ganz allgemein gilt, daß der Definitionsbereich der durch Verkettung der Funktionen $f_1$ und $f_2$ entstehenden Funktion $f_3$ stets nur eine (echte oder unechte) Teilmenge des Definitionsbereichs von $f_1$ sein kann. Soll $f_3$ als Verkettung von $f_1$ mit $f_2$ dargestellt werden, so ist eventuell der für $f_1$ mögliche Definitionsbereich einzuschränken. Setzt man eine umkehrbare Funktion $f$ mit $f^{-1}$ zusammen, so entsteht die identische Funktion $x = x$, denn $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$.

BEISPIEL 26:
Daß auch wirklich eine Verkleinerung des Definitionsbereichs erforderlich werden kann, zeigt die Verkettung der oben erklärten Funktionen $f_1$ und $f_2$ in umgekehrter Reihenfolge. Wir bezeichnen wieder mit $x$ und $y$ die Variablen der ersten, mit $y$ und $z$ die der zweiten Funktion und untersuchen folgende Verkettung:

$$f_2 = \{[x, y];\ x \in P \text{ und } y = x + 1\},$$
$$f_1 = \left\{[y, z];\ y \in P \setminus \{0\} \text{ und } z = \frac{1}{y}\right\},$$
$$f_4 = f_1 \circ f_2.$$

Der analytische Ausdruck für $f_4$ lautet jetzt $z = \frac{1}{x+1}$.
Der Wertevorrat von $f_2$ ist auch wieder $P$, der Definitionsbereich von $f_1$ aber eine echte Teilmenge davon, nämlich $P \setminus \{0\}$. Die Zahl 0 ist in $f_2$ das Bild von $x = -1$.

In dem Definitionsbereich von $f_4$ ist diese Zahl auszuschließen, was auch unmittelbar an dem analytischen Ausdruck für $f_4$, $z = \frac{1}{x+1}$, abgelesen werden kann. Mithin ist der größte in Frage kommende Definitionsbereich für $f_4$: $P \setminus \{-1\}$. Soll $f_4$ als Verkettung zweier Funktionen mit der oben angegebenen Zuordnung dargestellt werden, so ist der Definitionsbereich für $f_1$ einzuschränken:

$$f_1^* = \{[x, y];\, x \in P \setminus \{-1\} \text{ und } y = x + 1\}, \quad f_2^* = f_2, \quad f_4 = f_1^* \circ f_2,$$

$$f_4 = \left\{[x, z];\, x \in P \setminus \{-1\} \text{ und } z = \frac{1}{x+1}\right\}.$$

Das Beispiel zeigt erneut, daß $f_3 = f_2 \circ f_1$ und $f_4 = f_1 \circ f_2$ verschieden sind.

BEISPIEL 27:
Wir wollen gleich ein weiteres Beispiel anschließen, bei dem der Definitionsbereich einer durch Verkettung aus zwei Funktionen entstandenen Funktion $f_3$ noch weit stärker zu reduzieren ist. Es seien

$$f_1 = \{[x, y];\, x \in P \text{ und } y = -|x|\},$$

$$f_2 = \{[y, z];\, y \in P \text{ und } y \geqq 0 \text{ und } z = \sqrt{y}\}.$$

Es soll gebildet werden $f_3 = f_2 \circ f_1$. Der Leser vergleiche diese Funktion $f_1$ mit der Funktion $y = |x|$! Der Wertevorrat von $f_1$ besteht aus allen reellen nichtpositiven Zahlen $y$ (Bild 4.23.).

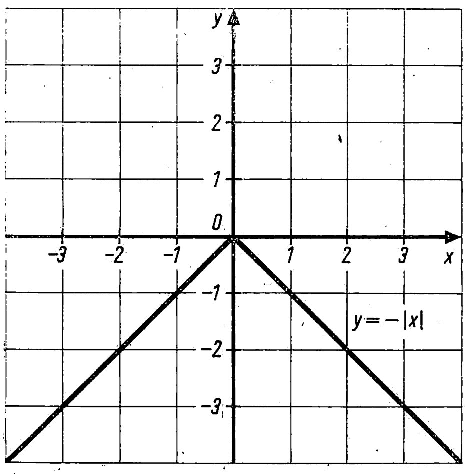



Bild 4.23.

Der Definitionsbereich von $y$ in $f_2$ kann höchstens aus den nichtnegativen reellen Zahlen $y$ bestehen. Diese Menge ist in der Tat als Definitionsbereich für $f_2$ gewählt. Ihr Durchschnitt mit dem Wertevorrat von $f_1$ ist die Einermenge $\{0\}$.
Die Verkettungsfunktion $f_3 = f_2 \circ f_1$ besteht nur aus dem Zahlenpaar $[0, 0]$. Dies läßt sich wieder aus dem analytischen Ausdruck für $f_3$ ablesen:

$$z = f_3(x) = \sqrt{-|x|}.$$

Da dieser Ausdruck nur für $x = 0$ erklärt ist, gilt:

$$f_3 = \{[x, z];\ x \in \{0\} \text{ und } z = \sqrt{-|x|} = \{[0, 0]\},$$

und $f_3$ kann als Verkettung $f_2^* \circ f_1^*$ folgender Funktionen dargestellt werden:

$$f_1^* = \{[x, y];\ x \in \{0\} \text{ und } y = -|x|\},$$

$$f_2^* = \{[y, z];\ y \in \{0\} \text{ und } z = \sqrt{y}\}.$$

Wir kehren jetzt zu Beispiel 26 zurück. Statt $f_1^*$ wird jetzt wieder $f_1$ geschrieben. Die drei hierin auftretenden Funktionen $f_1$, $f_2$, $f_4$ sollen jetzt grafisch dargestellt werden.

$$f_1 = \{[x, y];\ x \in P \setminus \{-1\} \text{ und } y = x + 1\} \qquad \text{(Bild 4.24.a)}$$

$$f_2 = \left\{[y, z];\ y \in P \setminus \{0\} \text{ und } z = \frac{1}{y}\right\} \qquad \text{(Bild 4.24.b)}$$

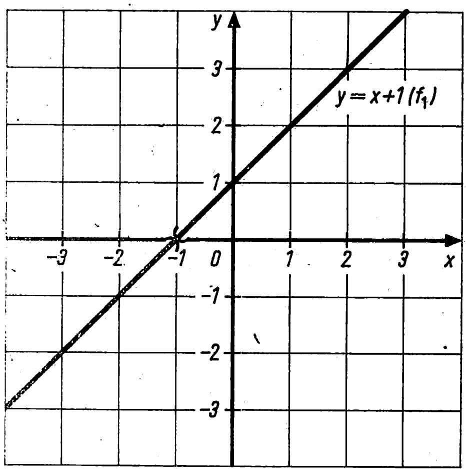



Bild 4.24.a

Bild 4.24.b

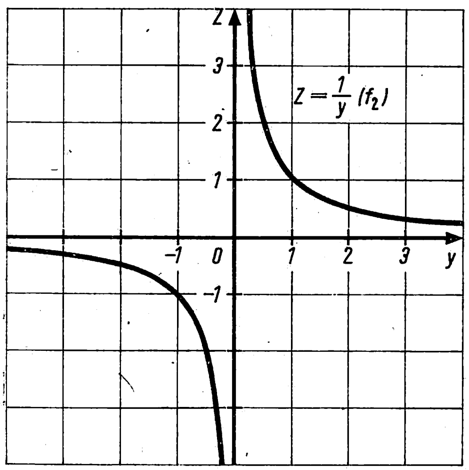
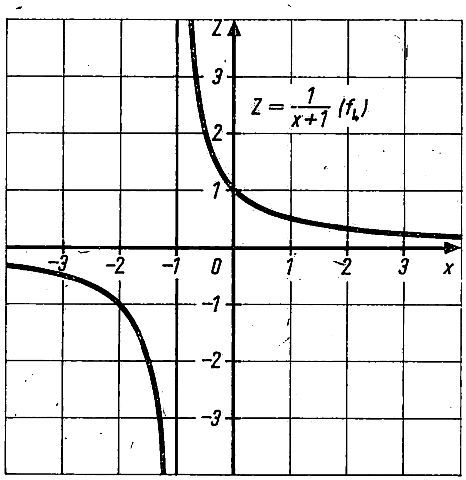



Bild 4.24.c



$$f_4 = \left\{[x, z];\, x \in P \setminus \{-1\} \text{ und } z = \frac{1}{x+1}\right\} \qquad \text{(Bild 4.24.c)}$$

Die in Bild 4.24.b dargestellte Kurve ist eine Hyperbel.

Wertetabelle für $f_4$:

| $x$ | 0 | +1 | +2 | +3 | −2 | −3 | −4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | +1 | $+\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{3}$ | $+\frac{1}{4}$ | −1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ |

Die Hyperbel von Bild 4.24.c ist gegenüber der von Bild 4.24.b um eine Einheit nach links verschoben.

Wie erhalten wir allgemein den größtmöglichen Definitionsbereich einer durch Verkettung zweier gegebener Funktionen entstandenen Funktion? Sei

$$f_1 = \{[x, y];\, x \in A_1 \text{ und } y = f_1(x)\},$$
$$f_2 = \{[y, z];\, y \in A_2 \text{ und } z = f_2(y)\}.$$

Es soll gebildet werden $f_2 \circ f_1$. Der Durchschnitt $D$ des Wertevorrats von $f_1$ mit $A_2$ sei nicht leer. Dann gibt es eine Teilmenge $A_3$ von $A_1$, die alle diejenigen Elemente von $A_1$ enthält, deren Bilder in $D$ fallen.

Damit ist natürlich nicht gesagt, daß es immer leicht, ja, daß es überhaupt immer möglich ist, die Menge $A_3$ zu bestimmen. Zum Beispiel

$$f_1 = \{[x, y];\, x \in P \text{ und } y = x^5 - 6x^2 + x^2 - 3\},$$
$$f_2 = \left\{[y, z];\, y \in P \setminus \{0\} \text{ und } z = \frac{1}{y}\right\}.$$

Der Durchschnitt $D$ ist in diesem Fall eine Teilmenge von $P \setminus \{0\}$. Es müssen also aus $P$ alle diejenigen Zahlen $x$ ausgeschlossen werden, für die $x^5 - 6x^2 + x^2 - 3 = 0$ ist, eine Aufgabe, die in diesem Buch nicht einmal näherungsweise behandelt werden kann.

Wenn $D$ nicht leer ist und somit die Teilmenge $A_3$ von $A$ existiert, so haben wir damit den größtmöglichen Definitionsbereich von der durch Verkettung von $f_1$ und $f_2$ entstandenen Funktion $f_3$ gefunden. Er ist auch für $f_1$ der größtmögliche Definitionsbereich.

$$f_3 = \{[x, z];\, x \in A_3 \text{ und } z = f_2(f_1(x))\}.$$

BEISPIEL 28:

Es sollen verkettet werden

$$f_1 = \{[x, y];\, x \in P \text{ und } y = \sin x\},$$
$$f_2 = \{[y, z];\, y \in P^+ \text{ und } z = \log y\}.$$

Dabei ist wieder unter $P^+$ die Menge aller positiven reellen Zahlen und unter $\log y$ der Logarithmus von $y$ zur Basis 10 zu verstehen. Um $A_3$ zu finden, müssen alle reellen Zahlen bestimmt werden, für die $\sin x$ positiv ist. Nun ist der Sinus positiv für $2n\pi < x < (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots)$ (↗Bild 4.17., S. 140). Es ist also

$$A_3 = \{x;\, x \in P \text{ und } 2n\pi < x < (2n+1)\pi\}.$$

Dies ist auch der Definitionsbereich für $f_1^*$, also

$$f_1^* = \{[x, y]; x \in A_3 \text{ und } y = \sin x\}, \quad f_3 = f_2 \circ f_1^*.$$

$$f_3 = \{[x, z]; x \in A_3 \text{ und } z = \log(\sin x)\}.$$

---

**Zusammenfassung:**
**Gegeben seien zwei Funktionen**
$\boldsymbol{f_1 = \{[x, y]; x \in A_1 \text{ und } x \rightarrow y\}}$,
$\boldsymbol{f_2 = \{[y, z]; y \in A_2 \text{ und } y \rightarrow z]}$,
**wobei $\boldsymbol{y = f_1(x)}$ und $\boldsymbol{z = f_2(y)}$ bestimmte eindeutige Abbildungen bedeuten.**
**Der Durchschnitt $\boldsymbol{D}$ des Wertevorrats von $\boldsymbol{f_1}$ mit $\boldsymbol{A_2}$ sei nicht leer. Dann gibt es eine Teilmenge $\boldsymbol{A_3}$ von $\boldsymbol{A_1}$, die alle diejenigen Elemente von $\boldsymbol{A_1}$ enthält, deren Funktionswerte $\boldsymbol{f_1(x)}$ in $\boldsymbol{D}$ fallen.**
**Schränkt man den Definitionsbereich von $\boldsymbol{f_1}$ ein und bildet**
$\boldsymbol{f_1^* = \{[x, y]; x \in A_3 \text{ und } x \rightarrow y\}}$, **so ist die durch Verkettung $\boldsymbol{f_2 \circ f_1^*}$ entstehende Funktion $\boldsymbol{f_3}$ gegeben durch**
$\boldsymbol{f_3 = \{[x, z]; x \in A_3 \text{ und } x \rightarrow z\}}$.
**Die Reihenfolge ist bei der Verkettung zu beachten.**

---

Aufgabe 15

## 4.7. Transformationen der Ebene

Als Anwendung der Zusammensetzung von Abbildungen und speziell von Funktionen sollen jetzt einige spezielle Abbildungen der Ebene auf sich, sogenannte Transformationen, betrachtet werden. Unter einer Transformation wird eine eineindeutige Abbildung der Ebene auf sich verstanden. Eine solche Abbildung der Ebene auf sich, die Umklappung oder Symmetrieabbildung, war bereits in Kapitel 3 als Beispiel einer für alle Punkte der Ebene erklärte zweistellige Relation behandelt worden. Sie hätte ebensogut hier als Beispiel einer Transformation der Ebene betrachtet werden können. Dies wird im nächsten Abschnitt unter neuen Gesichtspunkten geschehen. Zunächst aber soll eine andere Transformation der Ebene betrachtet werden, die bereits im Lehrplan[1] der Klasse 4 vorgeschrieben ist: die Verschiebung oder Translation. Dazu empfiehlt sich die Einführung eines neuen Begriffs, des Vektors. Hier kann nur eine propädeutische Einführung dieses Begriffs gegeben werden. Der Leser, der sich mit der Vektorrechnung vertrauter machen will, muß auf Spezialliteratur verwiesen werden. (vgl. z. B. [21]; [22]; [23]).
Der Leser denke sich einen beliebigen Punkt in der Ebene geradlinig bewegt, bis er mit dem Punkt $P'$ zur Deckung kommt. Die Anfangslage $P$ werde mit der Endlage $P'$ durch einen geraden Pfeil verbunden, der also durch Länge und Richtung die Bewegung des Punktes wiedergibt. Solch einen Pfeil kann man sich in jedem Punkt der Ebene

[1] Lehrplan Mathematik, Klasse 4. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972.

angebracht denken. In der unendlichen Menge der so entstandenen Pfeile betrachten wir die Relation „gleiche Länge und gleiche Richtung haben". Sie stellt, wie man sofort sieht, eine Äquivalenzrelation dar. Die zugehörigen Äquivalenzklassen wollen wir **Vektoren** nennen und mit den Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... bezeichnen. Als Vertreter eines Vektors $\mathfrak{a}$ kann also ein an einem beliebigen Punkt der Ebene angebrachter Pfeil der betreffenden Länge und Richtung gelten. Alle Pfeile, die zu einem bestimmten Vektor gehören, sind gleich lang und zueinander parallel.

Es sei nun $O$ der Ursprung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems der Ebene. Dann kann jeder Vektor durch einen in $O$ angebrachten Pfeil dargestellt werden. Der Vektor $\mathfrak{a}$ führe von $O$ zu einem Punkt $A$ mit den Koordinaten $a_1$, $a_2$. Wir bezeichnen diese Koordinaten von $A$ als die **Komponenten** des Vektors $\mathfrak{a}$. Jedes Paar reeller Zahlen $[x, y]$ stellt einen Vektor dar. Die Komponenten des zu Punkt $A$ führenden Vektors $\mathfrak{a}$ sind identisch mit den kartesischen Koordinaten des Punktes $A$ $(a_1; a_2)$. Mit Vektoren können nun verschiedene Operationen vorgenommen werden, die eine gewisse Analogie mit den für Zahlen erklärten Rechenoperationen aufweisen. So kann man zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ $(a_1; a_2)$, $\mathfrak{b}$ $(b_1; b_2)$ ihre **Summe** $\mathfrak{c}$ $(c_1; c_2)$ zuordnen. Der Vektor $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ hat die Komponenten $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$. Setzen wir den Anfangspunkt eines den Vektor $\mathfrak{b}$ darstellenden Pfeils an den Endpunkt des in $O$ angetragenen Vektors $\mathfrak{a}$, so führt der Vektor $\mathfrak{c}$ zu dem Endpunkt des Pfeils für $\mathfrak{b}$. Ergänzt man die aus den beiden Pfeilen für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zusammengesetzte Figur zu einem Parallelogramm, so gibt $\mathfrak{c}$ die von $O$ ausgehende Diagonale des Parallelogramms an. Man sagt auch:

Vektoren werden nach dem Parallelogrammgesetz addiert.

Physikalisch läßt sich die Addition der beiden Vektoren als eine Zusammensetzung von zwei Bewegungen deuten: Unterwirft man den Punkt $O$ erst der durch $\mathfrak{a}$, dann der durch $\mathfrak{b}$ dargestellten Bewegung, so gelangt er an denjenigen Punkt, den er bei der durch den Vektor $\mathfrak{c}$ dargestellten Bewegung direkt erreicht. Vertauscht man die Reihenfolge der beiden Bewegungen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, denkt sich also $\mathfrak{b}$ in $O$ und $\mathfrak{a}$ an den Endpunkt von $\mathfrak{b}$ angetragen, so wird derselbe Punkt erreicht (Bild 4.25.). In der gleichen Weise, also nach dem Parallelogrammgesetz, werden u. a. Geschwindigkeiten und Kräfte zusammengesetzt, die gleichfalls durch Vektoren dargestellt werden.

Für die Addition von Vektoren gilt das Kommutativgesetz, da dieses für die Komponenten, die ja reelle Zahlen sind, gilt. Aus dem entsprechenden Grund gilt auch das Assoziativgesetz für die Addition von Vektoren.

Bild 4.25.

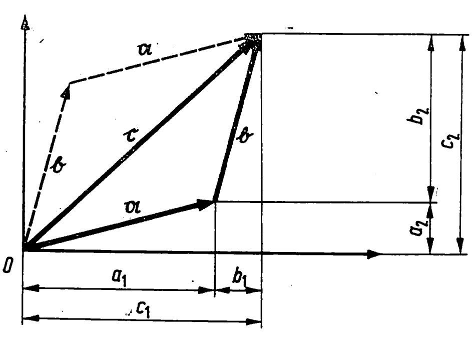
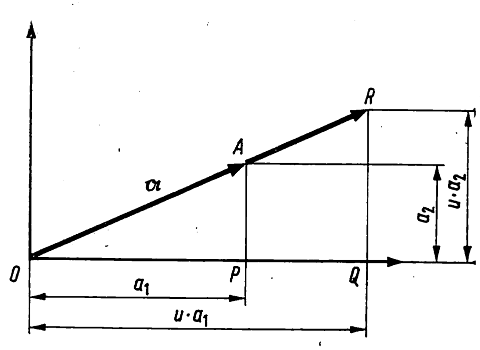



Bild 4.26.



Noch eine zweite Operation ist für das Folgende von Bedeutung: Multipliziert man jede Komponente eines Vektors mit einer bestimmten reellen Zahl $u$, so entsteht wieder ein Vektor. Der Vektor mit den Komponenten $u\,a_1$, $u\,a_2$ wird als $u \cdot \mathfrak{a}$ bezeichnet. Seine Länge ist das $u$-fache der Länge des Vektors $\mathfrak{a}$. In Bild 4.26. ist der Vektor $\mathfrak{a}$ durch den von $O$ zu dem Punkt $A$ führenden Pfeil dargestellt. Da die Dreiecke $OPA$ und $OQR$ ähnlich sind (sie stimmen in dem rechten Winkel und in dem Verhältnis der angrenzenden Seiten überein), fällt der durch $OR$ angegebene Vektor $u \cdot \mathfrak{a}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{a}$. Man kann sagen, daß durch Multiplikation mit der reellen Zahl $u$ der Vektor um den Betrag von $u$ gedehnt bzw. gestaucht wird, je nachdem, ob $|u|$ größer oder kleiner als 1 ist. Ist $u$ eine negative Zahl, so wird außerdem die Richtung von $\mathfrak{a}$ umgekehrt.

Für diese Operation gelten die beiden folgenden Distributivgesetze

$$u\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = u \cdot \mathfrak{a} + u \cdot \mathfrak{b},$$
$$(u_1 + u_2) \cdot \mathfrak{a} = u_1 \cdot \mathfrak{a} + u_2 \cdot \mathfrak{a}.$$

(Der Beweis wird in Aufgabe 16 verlangt.)

Aufgabe 16

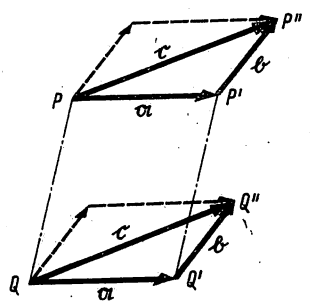
### 4.7.1. *Translation*

In Kapitel 3 wurden in Beispiel 19 bereits Verschiebungen, Drehungen, Streckungen und Umklappungen der Ebene mit einigen ihrer Invarianten erwähnt (↗ S. 81ff.). Jetzt sollen Zusammensetzungen dieser geometrischen Abbildungen als Beispiele für die Verkettung von Funktionen behandelt werden.

Wir wollen zunächst alle Punkte der Ebene in einer bestimmten Richtung um ein bestimmtes Stück verschieben. Die Verschiebungsstrecke werde durch den Vektor $\mathfrak{a}$ angegeben. Wir denken uns in jedem Punkt der Ebene den Vektor $\mathfrak{a}$ angetragen. Zur Veranschaulichung der Bewegung der ganzen Ebene kann man ein durchsichtiges Blatt auf das die Ebene darstellende Papierblatt legen, Punkte darauf markieren und es um den Vektor $\mathfrak{a}$ verschieben. Die Bilder erfüllen wieder die ganze Ebene. Eine solche Verschiebung der Ebene auf sich wird als **Translation** bezeichnet.

Eine Translation ordnet jedem Punkt der Ebene wieder genau einen Punkt dieser Ebene zu. Dabei entsprechen zwei verschiedenen Punkten verschiedene Bilder. Jede Translation stellt also eine Funktion, sogar eine umkehrbare Funktion dar, die für alle Punkte der Ebene definiert ist. Die durch den Vektor $\mathfrak{a}$ vermittelte Translation soll mit $f_\mathfrak{a}$ bezeichnet werden. Wir schreiben $P' = f_\mathfrak{a}(P)$, $Q' = f_\mathfrak{a}(Q)$ usw. (Bild 4.27). Jede Figur geht bei einer Translation in eine gleichsinnig kongruente Figur über (↗ S. 82).

Bild 4.27.




Bei einer Translation geht jede Strecke, z. B. die Strecke $\overline{PQ}$, in eine parallele und gleich lange Strecke $\overline{P'Q'}$ über; denn da $\overline{QQ'}$ parallel zu $\overline{PP'}$ und gleich lang ist, ist das Viereck $QQ'P'P$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 17

Jetzt sei ein zweiter Verschiebungsvektor $\mathfrak{b}$ gegeben, die zugehörige Verschiebung heiße $f_{\mathfrak{b}}$. Es sei $P'' = f_{\mathfrak{b}}(P')$, $Q'' = f_{\mathfrak{b}}(Q')$ usw. Der Vorbereich von $f_{\mathfrak{b}}$ stimmt mit dem Nachbereich von $f_{\mathfrak{a}}$ überein. Daher kann auf jeden Punkt der Ebene erst die eine, dann die andere Verschiebung angewendet werden. Dabei geht $P$ in $P''$, $Q$ in $Q''$ usw. über. Statt über die Verschiebungen um den Vektor $\mathfrak{a}$ und dann um den Vektor $\mathfrak{b}$ hätte auch sofort um den Vektor $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ verschoben werden können.
Da $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ ist, können die Verschiebungen $f_{\mathfrak{a}}$ und $f_{\mathfrak{b}}$ miteinander vertauscht werden. Ist speziell der Vektor $\mathfrak{b}$ dem Vektor $\mathfrak{a}$ entgegengesetzt gleich, $\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$, so macht die zweite Verschiebung die erste rückgängig. Bei Verkettung der beiden Abbildungen entsteht die Identität, die jeden Punkt an seinem Platz läßt. Die Identität wollen wir auch als Translation, und zwar um den Vektor Null, auffassen.

### 4.7.2. *Rotation*

Als zweites Beispiel betrachten wir die Drehung der Ebene um einen festen Punkt $O$. Wieder liegt eine umkehrbare Funktion vor. Es werde jeder Strahl durch $O$ um den Winkel $\alpha$ gedreht. Der Punkt $O$ bleibt als einziger bei der Bewegung an seinem Platz. Einen solchen Punkt hatten wir früher (↑ S. 84) als **Fixpunkt** bezeichnet. Jeder andere Punkt der Ebene bewegt sich auf einem Kreis um $O$ um den Zentriwinkel $\alpha$. Bei einer Rotation bleibt die Länge jeder Strecke erhalten, während ihre Richtung um den Winkel $\alpha$ geändert wird (Bild 4.28.a; Beweis siehe Aufgabe 18). Jede Figur geht wie bei der Translation in eine gleichsinnig kongruente Figur über.

Aufgabe 18

Diese als **Rotation** bezeichnete Bewegung wollen wir mit einer zweiten – gleichfalls um den Punkt $O$ – zusammensetzen. Diesmal soll um den Winkel $\beta$ gedreht werden. Das Resultat der beiden nacheinander ausgeführten Drehungen ist wieder eine Drehung um $O$, und zwar um den Winkel $\alpha + \beta$. Auch hier ist die Reihenfolge, in der die beiden Drehungen um $O$ ausgeführt werden, gleichgültig. Verwenden wir für die Abbildungen entsprechende Symbole wie bei der Translation, so ergibt sich in Bild 4.28.b:

$$P' = f_\alpha(P), \quad P'' = f_\beta(P') = f_{\alpha+\beta}(P), \quad f_{\alpha+\beta} = f_\beta \circ f_\alpha.$$

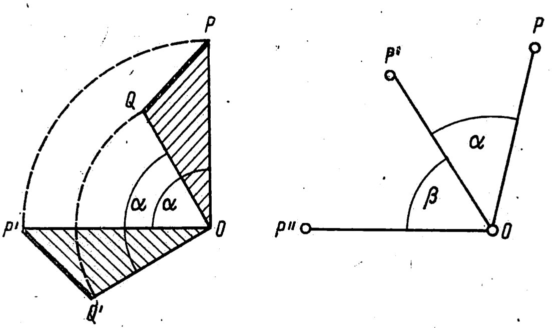



Bild 4.28.a/Bild 4.28.b

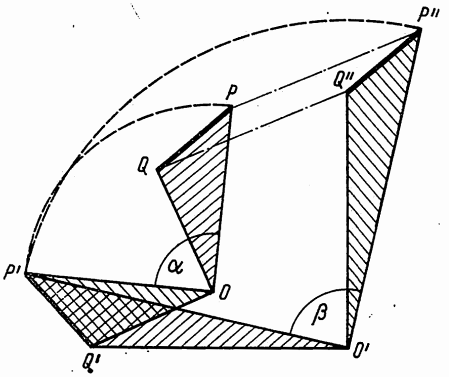


Bild 4.29.

Anders sieht es aus, wenn die zweite Drehung nicht um den Punkt $O$, sondern um einen von $O$ verschiedenen Punkt $O'$ ausgeführt wird. In Bild 4.29. ist $\alpha = \beta = 90°$, aber die zweite Drehung der ersten entgegengesetzt, gewählt. Das Bild zeigt, daß jetzt offenbar eine Translation entsteht. In der Tat: Sind $P$ und $Q$ verschiedene Punkte der Ebene, $P \neq O$, $P \neq O'$, $Q \neq O$, $Q \neq O'$, und ist wieder $P' = f_\alpha(P)$, $Q' = f_\alpha(Q)$, $P'' = f_\beta(P')$, $Q'' = f_\beta(Q')$, so geht das Dreieck $QOP$ bei der Drehung $f_\alpha$ in das kongruente Dreieck $Q'OP'$ über, wobei $\overline{Q'P'} \perp \overline{QP}$ ist, da ja eine Drehung von 90° vorgenommen wurde (↑ Aufgabe 18). Bei der zweiten Drehung $f_\beta$ um $O'$ geht das Dreieck $Q'O'P'$ über in das kongruente Dreieck $Q''O'P''$, wobei wieder $\overline{Q''P''} \perp \overline{Q'P'}$ ist. Daraus folgt, daß $\overline{Q''P''}$ parallel zu $\overline{QP}$ ist. Außerdem gilt für die Längen $|\overline{Q'P'}| = |\overline{QP}|$, $|\overline{Q''P''}| = |\overline{Q'P'}|$, mithin $|\overline{Q''P''}| = |\overline{QP}|$. Das Viereck $QQ''P''P$ hat demnach zwei parallele und gleich lange Seiten, nämlich $\overline{Q''P''}$ und $\overline{QP}$, es stellt also ein Parallelogramm dar. Dann ist auch $|\overline{QQ''}| = |\overline{PP''}|$ und $\overline{QQ''}$ parallel $\overline{PP''}$. Da $Q$ ein ganz beliebiger von $P$ und $O$ verschiedener Punkt der Ebene sein kann, stellt tatsächlich in diesem Fall die Zusammensetzung der beiden Rotationen eine Translation dar. Das Bild von $O$ bei dieser Translation ist in Bild 4.29. nicht gezeichnet. Bei anderer Wahl der Winkel $\alpha$, $\beta$ wird die Zusammensetzung im allgemeinen keine Translation ergeben.

---

**Zusammenfassung:**
**Bei Zusammensetzung zweier Translationen entsteht wieder eine Translation. Ist die zweite Translation der ersten entgegengesetzt gleich, so entsteht bei Zusammensetzung die Identität, die auch als Verschiebung (um den Nullvektor) aufgefaßt werden kann. Bei Zusammensetzung zweier Rotationen um denselben Punkt entsteht wieder eine Rotation um den gleichen Punkt. Ist speziell $\beta = -\alpha$, so führt die Rotation gleichfalls zur Identität.**

---

## 4.7.3. *Axiale Symmetrie*

Als drittes Beispiel soll noch einmal die axiale Symmetrie behandelt werden. In Kapitel 3 (S. 83 ff.) war sie als zweistellige Relation zwischen den Punkten der Ebene erklärt worden. Dabei wurden bestimmte wichtige Eigenschaften dieser Relation untersucht. Wenn die axiale Symmetrie jetzt als eineindeutige Abbildung aufgefaßt wird, so steht das keineswegs in Gegensatz dazu, handelt es sich doch in beiden Fällen um eine Teilmenge einer Kreuzmenge (vgl. die Ausführungen von S. 117 f.). Im folgenden steht die Zusammensetzung von Symmetrien im Vordergrund.

Es sei eine Gerade $s$ gegeben, um die die Ebene geklappt werde. Jeder Punkt der Gerade $s$ ist dabei Fixpunkt, jeder andere Punkt $P$ geht in einen zu $P$ in bezug auf $s$ symmetrischen Punkt $P'$ über. Es liegt wieder eine für alle Punkte der Ebene erklärte umkehrbare Funktion vor. Sie führt eine Figur in eine ungleichsinnig kongruente, d. h. in eine spiegelbildlich gleiche über (Bild 4.30.). Der Umlaufsinn jeder geschlossenen Figur wird umgekehrt (↑ S. 83). Die Gerade $s$ heißt **Symmetrieachse.** Wir schreiben $P' = f_s(P)$. Führen wir noch eine Symmetrieabbildung mit derselben Achse $s$ aus, so entsteht Identität, es ist $P'' = f_s(P') = f_s(f_s(P)) = P$. Die **identische Abbildung,** die alle Punkte an ihrem Platz läßt, kann aber nicht als Symmetrieabbildung bezeichnet werden.

Was entsteht nun, wenn wir zwei Symmetrieabbildungen mit verschiedenen Symmetrieachsen nacheinander ausführen?

Nehmen wir an, die zweite Symmetrieachse $s'$ sei parallel zu $s$. Ihr Abstand von $s$ sei $d$. In Bild 4.31. sind zwei Punkte, $P$ und $Q$, und eine Figur den beiden Abbildungen $f_s$ und

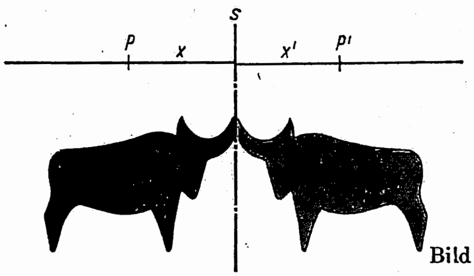
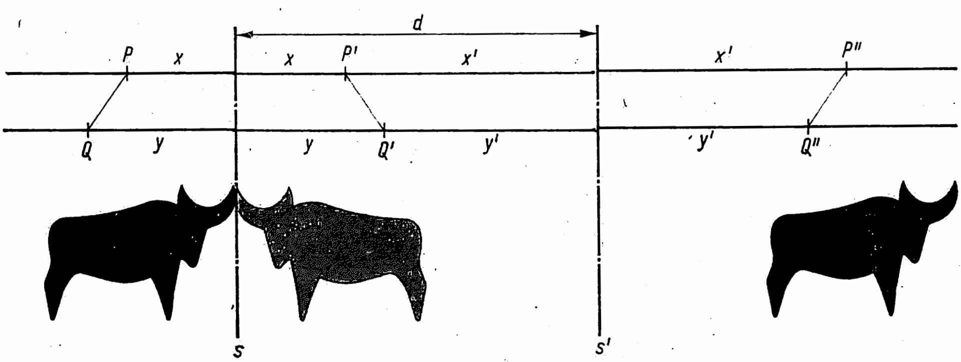



Bild 4.30.

Bild 4.31.



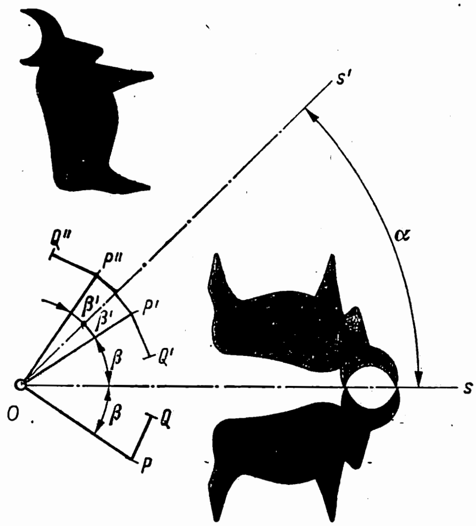



Bild 4.32.

$f_s'$ unterworfen worden. Es ist $P' = f_s(P)$, $P'' = f_{s'}(P')$. Aus den Sätzen der Symmetrielehre ergibt sich, daß dabei eine Translation entsteht. Denn unter Verwendung der Bezeichnungen von Bild 4.31. ist $x + x' = d$, $y + y' = d$, $|\overline{PP''}| = |\overline{QQ''}| = 2\,d$, ferner $\overline{PP'} \perp s$, $\overline{P'P''} \perp s'$, also, da $s$ parallel zu $s'$ ist, $\overline{PP''} \perp s$, ebenso $\overline{QQ''} \perp s$. Die zusammengesetzte Abbildung $f_{s'} \circ f_s$ stellt also in der Tat eine Translation dar. Dabei hat der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{PP''}$ die Länge $2\,d$, und er steht auf den Symmetrieachsen senkrecht.

Jetzt schließe die Symmetrieachse $s'$ mit $s$ den von 0 verschiedenen Winkel $\alpha$ ein (Bild 4.32.). Aus den Sätzen der Symmetrielehre ergibt sich, daß der auf beiden Symmetrieachsen liegende Punkt $O$ von den symmetrischen Punktepaaren $[P, P']$ und $[P', P'']$ gleich weit entfernt ist. Also ist $|\overline{OP''}| = |\overline{OP}|$. Ferner ist in Bild 4.32. $\beta + \beta' = \alpha$, nach Sätzen der Symmetrielehre also $\sphericalangle\, POP'' = 2\beta + 2\beta' = 2\alpha$. Ebenso schließt man $\sphericalangle\, QOQ'' = 2\alpha$. Diesmal ergibt die Nacheinanderausführung der Transformationen $f_s$ und $f_{s'}$ eine Drehung um $O$, und zwar um den Winkel $2\alpha$.

**Zusammenfassung:**
**Führt man zwei axialsymmetrische Transformationen der Ebene hintereinander aus, so entsteht keine axialsymmetrische Transformation, sondern entweder die Identität ($s' = s$) oder eine Translation ($s'$ parallel zu $s$) oder eine Rotation um den Schnittpunkt der beiden Achsen.**

Umgekehrt können jede Translation und jede Rotation aus axialen Symmetrieabbildungen zusammengesetzt werden. Genauer gesagt: Zu jeder Translation $f_{\mathfrak{a}}$ gibt es mindestens ein Paar auf dem Vektor $\mathfrak{a}$ senkrecht stehender Geraden $s$, $s'$, so daß ein beliebiger Punkt $P$ bei den nacheinander ausgeführten Symmetrieabbildungen $f_s$ und $f_{s'}$ übergeht in den Punkt $P' = f_{\mathfrak{a}}(P)$. Entsprechend lautet die Formulierung für eine beliebige Rotation. Es gibt in beiden Fällen sogar unendlich viele Möglichkeiten, die Symmetrieachsen $s$ und $s'$ auszuwählen. Dies soll im folgenden verdeutlicht werden.

Ist $|\overline{PP'}| = |\mathfrak{a}| = a$, so kann man einen Punkt $S$ auf der Geraden $PP'$ beliebig wählen, legt durch $S$ senkrecht zur Geraden $PP'$ die Gerade $s$ und findet auf der Geraden $PP'$ im Abstand $d = \frac{a}{2}$ von $S$ in der durch den Vektor $\mathfrak{a}$ angegebenen Richtung den Punkt $S'$, durch den man parallel zu $s$ die Gerade $s'$ legt (Bild 4.33.). Der Vergleich von Bild 4.33. mit Bild 4.31. zeigt, daß der Punkt $P$ durch die Spiegelungen an $s$ und $s'$ in den Punkt $P'$ übergeführt wird.

Aufgabe 19

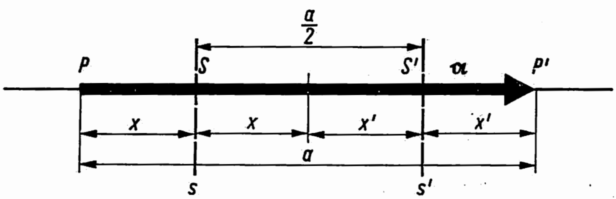



Bild 4.33.

**Zusammenfassung:**
**Da sich jede Translation und jede Rotation der Ebene aus axialen Symmetrieabbildungen der Ebene zusammensetzen läßt, können die Symmetrieabbildungen als Bausteine angesehen werden, aus denen die Bewegungen der Ebene in sich aufgebaut werden könnte.**

Die fundamentale Rolle der Symmetrieabbildungen wird noch klarer, wenn wir einige Tatsachen aus der Kongruenzlehre heranziehen. Aus den Symmetriesätzen und aus den Kongruenzkriterien für Dreiecke ergibt sich:

SATZ:
▷ Bei einer Symmetrieabbildung – und daher natürlich auch bei einer Translation oder Rotation – geht jede Figur in eine kongruente über.

Zum Beispiel wird ein Fünfeck $ABCDE$ dabei abgebildet in ein kongruentes Fünfeck $A'B'C'D'E'$, d. h., die entsprechenden Seiten und Winkel sind gleich.
Wichtig ist nun besonders die Umkehrung des soeben erwähnten Satzes:

SATZ:
▷ Ist ein Paar gleichsinnig kongruenter Figuren $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ gegeben, so gibt es stets eine endliche Folge von Symmetrieabbildungen, die $ABC\ldots$ in $A'B'C'\ldots$ überführt. Sind die beiden Figuren gleichsinnig kongruent, so gibt es stets entweder eine Translation oder eine Rotation, die $ABC\ldots$ überführt in $A'B'C'\ldots$

Zum Nachweis dieses Satzes soll zunächst nur ein Figurenpaar betrachtet werden, das aus je einer Strecke $\overline{AB}$ bzw. $\overline{A'B'}$ besteht. Der Fall, daß $\overline{A'B'}$ parallel zu $\overline{AB}$ ist,

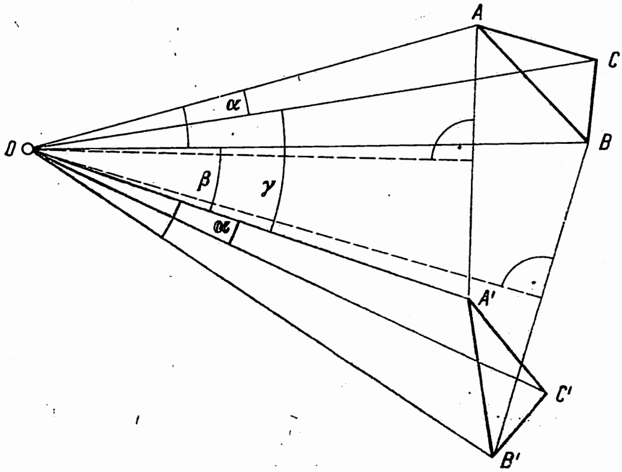


Bild 4.34.

war Gegenstand von Aufgabe 17. Sei jetzt $\overline{A'B'}$ nicht parallel zu $\overline{AB}$. Dann wird behauptet, daß es einen Punkt $O$ gibt, so daß $\overline{A'B'}$ durch Drehung um $O$ aus $\overline{AB}$ hervorgeht. Um den Punkt $O$ zu finden, braucht man nur wie in Bild 4.34. $A'$ mit $A$, $B'$ mit $B$ zu verbinden und die Mittelsenkrechten auf diesen Strecken zu konstruieren. Da $\overline{A'B'}$ und $\overline{AB}$ nicht zueinander parallel sind, schneiden die Mittelsenkrechten einander in einem Punkt $O$. Dieser Punkt $O$ hat, wie im folgenden gezeigt wird, die verlangte Eigenschaft.

Zunächst ist zu zeigen, daß $|\overline{OA'}| = |\overline{OA}|$, $|\overline{OB'}| = |\overline{OB}|$ ist. Dies folgt einfach daraus, daß $O$ auf den beiden Mittelsenkrechten liegt.

Zweitens ist zu zeigen, daß $\overline{OB'}$ aus $\overline{OB}$ durch dieselbe Drehung aus $O$ hervorgeht wie $\overline{OA'}$ aus $\overline{OA}$. Nun ist $|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}|$ (nach Voraussetzung, da ja kongruente Figuren vorliegen sollten). Also stimmen in den Dreiecken $A'OB'$ und $AOB$ alle entsprechenden drei Seiten paarweise überein, die Dreiecke sind mithin kongruent. Demnach ist $\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle AOB$.

Sei $\quad\sphericalangle BOA' = \beta$.

Dann ist $\sphericalangle AOA' = \sphericalangle AOB + \beta$

und $\quad\sphericalangle BOB' = \sphericalangle A'OB' + \beta$,

also sind die beiden Drehwinkel gleich.

Sind nun außer den Punkten $A$ und $B$, $A'$ und $B'$ die Punkte $C$ und $C'$ wie in Bild 4.34. so gegeben, daß $\triangle\, A'B'C'$ gleichsinnig kongruent zu $\triangle\, ABC$ ist, so läßt sich zeigen, daß Punkt $C'$ aus $C$ durch dieselbe Drehung um $O$ entsteht wie $A'$ aus $A$ und $B'$ aus $B$. Dies wird in zwei Schritten gezeigt.

*Behauptung:* 1. $|\overline{OC'}| = |\overline{OC}|$

2. $\sphericalangle COC' = \sphericalangle AOA'$

Zum *Beweis* von 1. betrachte man die Dreiecke $AOC$ und $A'OC'$. Sie sind kongruent. Denn aus der oben bewiesenen Kongruenz der Dreiecke $AOB$ und $A'OB'$ ergibt sich

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OA'B';$$

aus der vorausgesetzten Kongruenz der Dreiecke $A'B'C'$ und $ABC$ ergibt sich weiter, daß

$\sphericalangle\, CAB = \sphericalangle\, C'A'B'$ ist.

Da nun $\sphericalangle\, OAC = \sphericalangle\, OAB + \sphericalangle\, BAC$ und

$\sphericalangle\, OA'C' = \sphericalangle\, OA'B' + \sphericalangle\, B'A'C'$ ist,

folgt, daß $\sphericalangle\, OAC = \sphericalangle\, OA'C'$ ist;

weiter gilt $|\overline{OA}| = |\overline{OA'}|$ (oben bewiesen) und

$|\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|$ (wegen der vorausgesetzten Kongruenz der Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$);

daher stimmen die Dreiecke $OAC$ und $OA'C'$ in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, sind also in der Tat kongruent. Also ist $|\overline{OC'}| = |\overline{OC}|$. Damit ist der erste Teil bewiesen. Zum Nachweis der zweiten Behauptung zerlege man den Winkel $COC'$ in $\sphericalangle\, COA' = \gamma$ und $\sphericalangle\, A'OC' = \alpha$.

Aus der soeben bewiesenen Kongruenz folgt, daß auch $\sphericalangle\, AOC = \alpha$ ist. Nun ist $\sphericalangle\, AOA' = \alpha + \gamma$ und $\sphericalangle\, COC' = \gamma + \alpha$, also sind beide Winkel gleich, wie oben behauptet.

Der Beweis läßt sich ganz entsprechend fortsetzen, wenn weitere Punkte $DEF\ldots$ bzw. $D'E'F'\ldots$ gegeben sind, die einander entsprechende Ecken gleichsinnig kongruenter Figuren darstellen. Sind zwei ungleichsinnig kongruente Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ gegeben, so führe man zunächst die erste Figur $ABC\ldots$ durch Spiegelung an einer beliebigen Geraden $s$ in die Figur $A''B''C''\ldots$ über, die dann zu $A'B'C'\ldots$ gleichsinnig kongruent ist.

**Zusammenfassung:**
**Durch zwei gleichsinnig kongruente Figuren der Ebene ist eindeutig eine Translation (wenn entsprechende Seiten der Figuren einander parallel sind) oder eine Rotation (in allen anderen Fällen) bestimmt. Sind die Figuren ungleichsinnig kongruent, so ist außerdem noch eine Symmetrieabbildung hinzuzuziehen.**

Da sich der gesamte geometrische Schulstoff bis zur Ähnlichkeitslehre auf der Dreieckskongruenz aufbauen und diese sich auf Symmetrieabbildung, Translation oder Rotation, also letzten Endes auf Symmetrieabbildungen, zurückführen läßt, bilden diese das Fundament des geometrischen Elementarstoffs.

Die Ähnlichkeitslehre erfordert dann noch die Abbildung der Ebene durch zentrische Streckung; eine solche wurde in Kapitel 3, S. 87 ff., als zweistellige Relation behandelt. Die dort gefundenen Ergebnisse können hier übernommen werden. Die zentrische Streckung spielt für die Ähnlichkeitslehre eine ähnlich fundamentale Rolle wie die Symmetrieabbildung für die Kongruenzlehre.

Auf affine und projektive Transformationen der Ebene soll nicht eingegangen werden. Es sei nur bemerkt, daß dabei eineindeutige Abbildungen und ihre Zusammensetzungen eine ebenso fundamentale Rolle spielen wie in der Kongruenzgeometrie. Hier muß auf die einschlägige Spezialliteratur verwiesen werden [24]. Damit seien die geometrischen Anwendungen von Abbildungen abgeschlossen.

## 4.8. Umkehrung von Funktionen

Wir kehren jetzt zu Funktionen zurück, die durch einen analytischen Ausdruck gegeben sind, und zwar wollen wir uns jetzt mit umkehrbaren Funktionen beschäftigen. Es sei daran erinnert, daß es zu jeder Abbildung $F$ genau eine inverse Abbildung $F^{-1}$ gibt. Das ist diejenige Abbildung, bei der in jedem Paar von $F$ die beiden Partner vertauscht sind. Ist die Abbildung speziell eine Funktion $f$, so existiert sicher die Abbildung $f^{-1}$, sie braucht aber keine Funktion zu sein. Wenn $f^{-1}$ eine Funktion ist, so heißt $f$ **umkehrbar** und $f^{-1}$ die zu $f$ **inverse Funktion** oder **Umkehrfunktion**.
Es entstehen nun zwei Fragen.

1. Wie sieht der analytische Ausdruck für $f^{-1}$ aus, wenn der für $f$ gegeben ist?
2. Wie kann die graphische Darstellung von $f^{-1}$ aus der von $f$ gewonnen werden?

Gehen wir wieder von einem einfachen Beispiel aus:
Gegeben sei die Funktion

$$f = \{[x, y];\ x \in P \text{ und } y = 3x + 2\}.$$

Diese Funktion ist, wie sich zeigen wird, umkehrbar. In $f^{-1}$ ist $y$ die unabhängige, $x$ die abhängige Variable. Dazu muß die Gleichung

$$y = 3x + 2$$

nach $x$ aufgelöst werden. Zu diesem Zweck subtrahieren wir zunächst auf beiden Seiten 2 und dividieren dann durch 3. Wir erhalten

$$x = \frac{y-2}{3}.$$

Durch diesen Ausdruck wird jedem reellem Wert von $y$ genau ein reeller Wert von $x$ zugeordnet. Die inverse Abbildung $f^{-1}$ ist also eine Funktion. Wir schreiben sie

$$\text{(a)}\qquad f^{-1} = \left\{[y, x];\ y \in P \text{ und } x = \frac{y-2}{3}\right\}.$$

Damit ist eigentlich die erste Frage für unser Beispiel schon beantwortet. Nur stört bei der Darstellung von $f^{-1}$ noch die ungewohnte Bezeichnung von $y$ als unabhängiger, $x$ als abhängiger Variabler. Wir wollen daher eine Umbenennung vornehmen und $y$ als $X$, $x$ als $Y$ bezeichnen. Die großen Buchstaben werden gewählt, um Verwechslungen vorzubeugen. Mit $y = X$, $x = Y$ geht (a) über in

$$\text{(b)}\qquad f^{-1} = \left\{[X, Y];\ X \in P \text{ und } Y = \frac{X-2}{3}\right\}.$$

Wir stellen jetzt eine Wertetabelle für $f$ auf.

| $x$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $5$ | $-1$ | $3$ | $1$ |

Das Bild von $f$ ist eine Gerade (Bild 4.35.). Dieselbe Wertetabelle können wir zur Darstellung von $f^{-1}$ benutzen, da ja diese Funktion aus allen Paaren $[y, x]$ besteht. Der

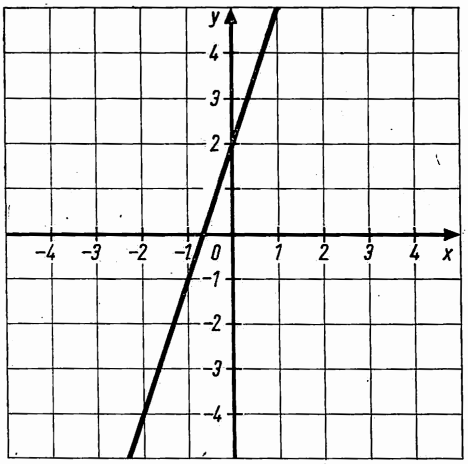



Bild 4.35.

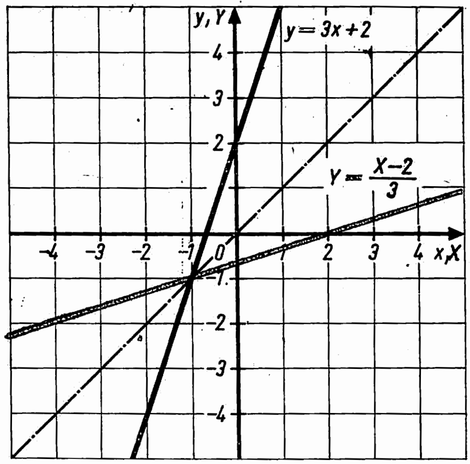



Bild 4.36.

Leser errechne weitere Paare von $f$ und kontrolliere, indem er von $y$ ausgeht und $x$ durch den in (a) gegebenen Ausdruck für $f^{-1}$ ermittelt!

Wir können die in Bild 4.35. gezeichnete Gerade auch als Bild von $f^{-1}$ ansehen; nur ist dann die $y$-Achse als die der unabhängigen, die $x$-Achse als die der abhängigen Variablen zu betrachten, wobei noch auf die Orientierung zu achten ist. Das ist wieder recht störend, da wir daran gewöhnt sind, die unabhängige Variable auf einer horizontalen, die abhängige auf einer vertikalen Achse abzutragen. Wir können dann auch besser verschiedene Funktionen miteinander vergleichen oder verknüpfen. Nun verhilft uns die oben durchgeführte Umbenennung von $y$ in $X$, $x$ in $Y$ dazu, die inverse Funktion in dasselbe Achsenkreuz einzuzeichnen. Wir denken uns an die $x$-Achse in Bild 4.35. auch $X$, an die $y$-Achse auch $Y$ angeschrieben und tragen nun die Werte aus unserer Tabelle ein:

| $X$ | 2 | 5 | $-1$ | 3 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 0 | 1 | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |

In Bild 4.36. sind beide Kurven im gleichen Achsenkreuz dargestellt. Dabei fällt auf, daß die Symmetrieachse der durch die beiden Geraden gebildeten Figur durch den Ursprung des Koordinatensystems geht und den ersten und dritten Quadranten zu halbieren scheint.

Wir wollen uns davon überzeugen, daß die Vertauschung der Variablen $x$ und $y$ jeden Punkt der Ebene überführt in den zu ihm hinsichtlich der genannten Winkelhalbierenden symmetrisch gelegenen Punkt.

Wir verwenden die Bezeichnungen von Bild 4.37. Dem Punkt $P(x; y)$ wird zugeordnet der Punkt $P'(y; x) = P'(X; Y)$. $Q$ sei der Schnittpunkt von $\overline{PC}$ mit $\overline{P'C'}$. Wir werden sehen, daß die Punkte $O$ und $Q$ beide auf der Symmetrieachse der Punkte $P$, $P'$ liegen. Zunächst ist wegen der Kongruenz der nicht gezeichneten Dreiecke $APO$

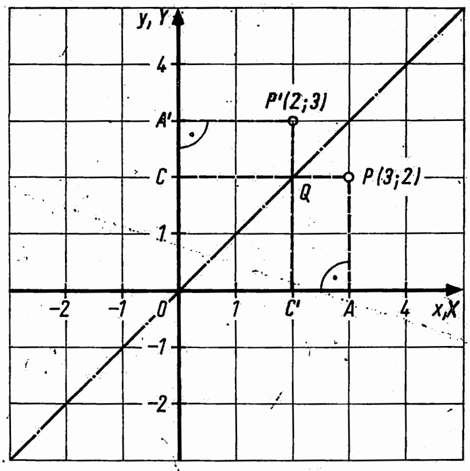



Bild 4.37.

und $A'P'O$ (sie stimmen in dem rechten Winkel und den angrenzenden Seiten überein) $|\overline{OP'}| = |\overline{OP}|$. Ferner ist $|\overline{QP}| = x - X$ und $|\overline{QP'}| = Y - y$. Wegen $X = y$, $Y = x$ stimmt $|\overline{QP'}|$ mit $|\overline{QP}|$ überein. Die beiden Punkte $O$ und $Q$ haben die Eigenschaft, von $P$ und $P'$ gleich weit entfernt zu sein. Sie müssen also nach den bekannten Sätzen der Symmetrielehre auf der Symmetrieachse von $\overline{PP'}$ liegen. Nun ist aber die Gerade $OQ$ in der Tat die Winkelhalbierende des ersten Quadranten. Das sieht man so ein: Es ist $|\overline{QC'}| = y$ und $|\overline{QC}| = X$, also auch $|\overline{QC}| = y$. Das Rechteck $OC'QC$ enthält also zwei benachbarte gleich lange Seiten, ist mithin ein Quadrat. Die Diagonale dieses Quadrats steigt unter 45° an, halbiert also den ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems.

Damit ist gezeigt, daß die Variablenvertauschung eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten bewirkt. Wenn das Bild einer Abbildung $f$ im kartesischen Koordinatensystem bereits gezeichnet vorliegt, so kann das von $f^{-1}$ einfach durch Umklappung an der genannten Geraden gewonnen werden. Dies gilt ganz allgemein auch dann, wenn $f$ keine Funktion darstellt. Also gilt:

SATZ:

▷ Die Kurve einer umkehrbaren Funktion $f$ und die der zu $f$ inversen Funktion $f^{-1}$ liegen zueinander symmetrisch hinsichtlich der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.

Wir wenden dieses Ergebnis an, um die Bilder einiger Umkehrfunktionen $f^{-1}$ zu zeichnen, wenn die von $f$ uns schon bekannt sind.

BEISPIEL 29:

Es sei $f = \{[x, y];\ x \in P \text{ und } x \geqq 0 \text{ und } y = x^2\}$.

Wir müssen den Definitionsbereich in dieser Weise beschränken, damit die Umkehrfunktion existiert. An Hand des Bildes 4.10. (↑ S. 134) ist zu erkennen, daß die Umkehrabbildung von $y = x^2$, wenn $P$ als Definitionsbereich zugrunde gelegt wird, keine Funktion ist.

Der Kurvenverlauf, der rechts von der $y$-Achse liegende Teil einer Parabel, ist uns bereits bekannt. Die Zeichnung ist besonders einfach, wenn wir uns einer Schablone bedienen. Allerdings muß darauf geachtet werden, daß die auf den Achsen gewählten Einheiten gleich sind.

Wir führen die Bildung der inversen Funktion in zwei Schritten durch.

1. Auflösung des analytischen Ausdrucks für $f$ nach $x$.
2. Vertauschung der Variablen.

1. $\quad f^{-1} = \{[y, x];\ y \in P \text{ und } y \geqq 0 \text{ und } x = \sqrt{y}\}.$

2. $\quad y = X,\ x = Y,$

$\quad f^{-1} = \{[X, Y];\ X \in P \text{ und } X \geqq 0 \text{ und } Y = \sqrt{X}\}.$

Das Bild von $f^{-1}$ wird aus dem Bild von $f$ durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten gewonnen.

Wir fügen in Bild 4.38. noch das Bild der Funktion

$$\bar{f} = \{[x, y];\ x \in P \text{ und } x < 0 \text{ und } y = x^2\}$$

hinzu und bilden wieder die inverse Funktion:

1. $\quad \bar{f}^{-1} = \{[y, x];\ y \in P \text{ und } y > 0 \text{ und } x = -\sqrt{y}\}.$

2. $\quad y = X,\ x = Y,$

$\quad \bar{f}^{-1} = \{[X, Y];\ X \in P \text{ und } X > 0 \text{ und } Y = -\sqrt{X}\}.$

Die Bilder von $f$ und $f^{-1}$ liegen im ersten Quadranten, die von $\bar{f}$ und $\bar{f}^{-1}$ im zweiten bzw. vierten Quadranten.

Der Leser beachte, daß zwar die Vereinigungsmenge von $f$ und $\bar{f}$ eine Funktion bildet, nicht aber die von $f^{-1}$ und $\bar{f}^{-1}$.

Die soeben behandelten Funktionen gehören zu den **Potenzfunktionen.** Hierbei bildet die unabhängige Variable die Basis einer Potenz mit einer natürlichen Zahl als Exponenten. Wir wollen zu einer weiteren Potenzfunktion die inverse Funktion bilden.

Bild 4.38.

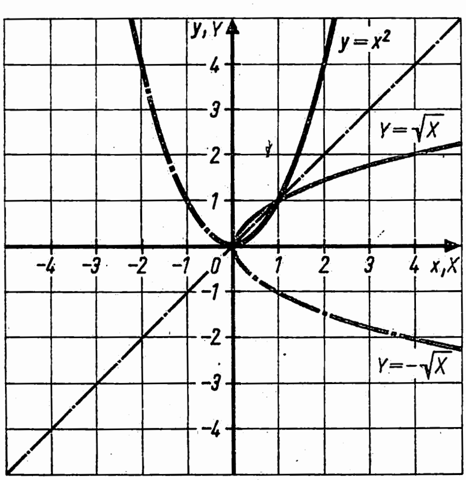
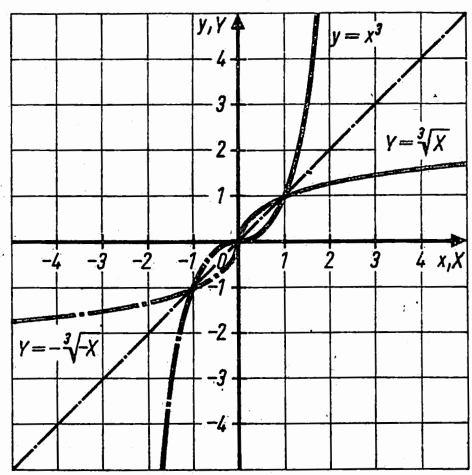



Bild 4.39.



BEISPIEL 30:

$$f = \{[x, y]; x \in P \text{ und } x \geqq 0 \text{ und } y = x^3\},$$

$$f^{-1} = \{[X, Y]; X \in P \text{ und } X \geqq 0 \text{ und } Y = \sqrt[3]{X}\}.$$

Daneben stellen wir wieder

$$\bar{f} = \{[x, y]; x \in P \text{ und } x < 0 \text{ und } y = x^3\}.$$

Bei Bildung der Umkehrfunktion ist zu beachten, daß Wurzeln nur für positive Radikanden erklärt sind. (Näheres vgl. Kapitel 5, S. 222.) So existiert $\sqrt[3]{-8}$ nicht, obwohl es eine Zahl, nämlich $-2$, gibt, deren dritte Potenz $-8$ ist. Das bringen wir zum Ausdruck, indem wir in $\sqrt[3]{8} = +2$ beide Seiten mit $-1$ multiplizieren: $-\sqrt[3]{8} = -2$.
Für negatives $X$ ist also $Y = -\sqrt[3]{-X}$ zu setzen. Also wird

$$\bar{f}^{-1} = \{[X, Y]; X \in P \text{ und } X < 0 \text{ und } Y = -\sqrt[3]{-X}\} \text{ (Bild 4.39.).}$$

BEISPIEL 31:

* Im Gegensatz zu den Potenzfunktionen steht bei den Exponentialfunktionen die unabhängige Variable im Exponenten. Die Basis ist eine von 0 und 1 verschiedene positive reelle Zahl. Wir wählen als Basis die Zahl 2 und untersuchen die Funktion $f = \{[x, y]; x \in P \text{ und } y = 2^x\}$. Dazu ist ein Vorgriff auf das nächste Kapitel erforderlich. Das Notwendige sei hier kurz zusammengestellt:

Die Potenz $a^b$ ($a \in P$, $b \in P$, $[a, b] \neq [0, 0]$ ist für den Fall, daß $b$ eine natürliche Zahl $n$ ist, erklärt als das Produkt aus $n$ Faktoren $a$. Ist $b = -n (n \in N)$, so wird definiert

$$a^b = a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

ist $b$ eine positive rationale Zahl, $b = \frac{r}{s}$ und $s \neq 0$, so ist $a^b = a^{\frac{r}{s}}$ erklärt als $\sqrt[s]{a^r}$ und

$$a^{\left(-\frac{r}{s}\right)} = \frac{1}{\sqrt[s]{a^r}};$$

Ist $b$ eine irrationale Zahl, z. B. $b = \sqrt{2}$, so kann man der Zahl $a^b$ beliebig nahe kommen, indem man $b$ hinreichend genau durch rationale Zahlen annähert. Mit den Hilfsmitteln der Analysis läßt sich $a^b$ ($a$, $b$ reell, $[a, b] \neq [0, 0]$) exakt definieren.

Jetzt kann eine Wertetabelle aufgestellt werden.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $-1$ | $-2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

Das Bild der Funktion (Bild 4.40.) liegt im ersten und zweiten Quadranten. Sie schmiegt sich für dem Betrage nach große negative $x$-Werte der $x$-Achse an, ohne sie je zu erreichen. Die Funktion ist im ganzen Bereich $P$ umkehrbar. Die Umkehrung stellt die Logarithmusfunktion dar, im vorliegenden Fall zur Basis 2.

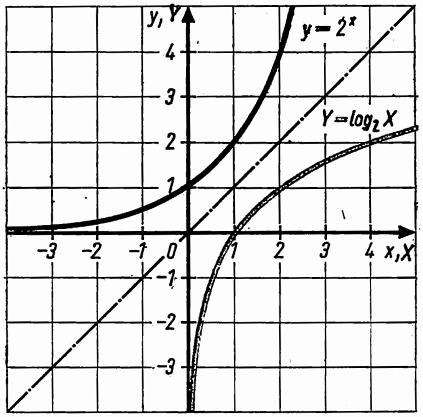



Bild 4.40.

$$f^{-1} = \{[X, Y];\ X \in P \text{ und } X > 0 \text{ und } Y = \log_2 X\}.$$

Die Funktion $Y = \log_2 X$ ist für $X = 0$ nicht erklärt. Für sehr kleine positive $X$-Werte schmiegt sich ihr Bild der $Y$-Achse an, ohne sie je zu erreichen.

Aufgaben 20 und 21

## 4.9. Geregelte Mengen, Isomorphie

Wir wenden uns jetzt einem ganz neuen Gedanken zu, der für spätere Untersuchungen den Weg bereiten soll, dem Prinzip der **Analogie,** das für die Mathematik von großer Bedeutung ist. Auch im täglichen Leben beobachten wir Analogien und bedienen uns solcher, z. B. bei der Registrierung irgendwelcher Vorgänge: Ein Mensch wird geboren, er heiratet, bekommt Kinder, stirbt. All diese Ereignisse spiegeln sich wider in Eintragungen, die auf dem Standesamt in den Akten der betreffenden Person gesammelt werden und aus denen wiederum die Lebensdaten dieses Menschen abgelesen werden können. Eine Schachpartie kann mit Hilfe der kartesischen Koordinaten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ bzw. 1, 2, 3, ..., 8 genau wiedergegeben werden. Oder: Ein Physiker, Biologe, Chemiker oder Arzt macht einen Versuch und hält das Geschehen in Notizen, Skizzen usw. fest. Später kann er den Vorgang aus der Analogie mit seiner Aufzeichnung wieder rekonstruieren.

Unsere grafische Darstellung einer Zahl-Zahl-Funktion bot uns gleichfalls ein Beispiel für eine Analogie: die zwischen der Funktion und der zugehörigen Kurve. Dabei sind die einander zugeordneten Mengen verschiedenartig: Die Funktion besteht aus einer Menge von geordneten Zahlenpaaren, die Kurve aus einer Menge von Punkten.

Bei einer Analogie kann die Entsprechung stärker oder schwächer ausgeprägt sein: Die **Struktur einer Menge** kann sich mehr oder weniger genau in einer anderen Menge widerspiegeln. Wenn ein Hirte in früheren Zeiten für jedes Tier seiner Herde einen Stein auf die Erde legte, so bestand zwischen der Menge der Tiere und der der niedergelegten Steine eine Analogie: Jedem Tier entsprach genau ein Stein und umgekehrt. Eine strengere Analogie besteht zwischen der dekadisch gegliederten Folge der natürlichen

Zahlen von 1 bis 100 und den Kugeln einer Rechenmaschine, die an 10 Stangen zu je 10 aufgereiht sind. Hier wird die Zehnerteilung der Zahlenfolge durch das Modell nachgeahmt. Dadurch können Rechnungen, insbesondere Additionen und Subtraktionen mit Überschreiten einer Zehnergrenze, veranschaulicht werden.
Mit ähnlichen Analogien zwischen Mengen wollen wir uns jetzt beschäftigen.
Die Entsprechung Tier—Stein bei obenstehendem Beispiel ist in der Sprache der Mengenlehre nichts anderes als eine eineindeutige Abbildung der Menge $A$ der Tiere auf die Menge $B$ der Steine. Eine eineindeutige Abbildung wird z. B. auch vermittelt zwischen den Punkten der $x$-Achse und denen der $y$-Achse durch die Funktion $y = 3x + 2$ (Bild 4.35.), ferner zwischen den Punkten der $x$-Achse und denen der positiven $y$-Achse ($y > 0$) durch die Funktion $y = 2^x$ (Bild 4.40.). Die gesuchte Zuordnung kann der betreffenden Wertetabelle entnommen werden. Sie läßt sich aber auch direkt an der Kurve ablesen, indem man von dem Punkt der $x$-Achse vertikal bis zur Kurve geht und von diesem Kurvenpunkt aus in horizontaler Richtung zur $y$-Achse weitergeht. Der dabei gefundene Punkt der $y$-Achse ist das gesuchte Bild von $x$. Der Leser bestimme auf umgekehrte Weise die Bilder einiger Punkte der $y$-Achse an Hand der Bilder 4.35. und 4.40.!
Solche eineindeutigen Abbildungen einer Menge $A$ auf eine Menge $B$ bilden die Grundlage des Zahlbegriffs. Sie werden in den nächsten Kapiteln häufig angewendet werden. Die durch die Funktionen $y = 3x + 2$ bzw. $y = 2^x$ vermittelten Abbildungen einer Menge $A$ auf eine Menge $B$ zeigen aber noch eine weitergehende Analogie: Liegt ein Punkt $Q$ *links* von einem Punkt $P$ der $x$-Achse, so liegt sein Bild $Q'$ auf der $y$-Achse *unter* dem Bild $P'$ von $P$. Wir führen auf der $x$-Achse eine Ordnung ein, indem wir sagen: „$Q$ liegt vor $P$“ (geschrieben: $Q \prec P$), wenn $Q$ auf der $x$-Achse links von $P$ liegt; auf der $y$-Achse soll „$Q'$ vor $P'$“ ($Q' \prec P'$) bedeuten, daß $Q'$ unter $P'$ liegt. Dann können wir über die Abbildung $y = 3x + 2$ sagen:
1. Jedem Punkt der $x$-Achse entspricht genau ein Punkt der $y$-Achse und umgekehrt,
2. liegt $Q$ vor $P$, so liegt sein Bild vor dem Bild von $P$, oder: aus $Q \prec P$ folgt $Q' \prec P'$.
Daß die Analogien bei dieser und bei anderen Funktionen noch wesentlich weitergeführt werden können, ohne daß höhere Hilfsmittel benutzt werden, zeigen interessante Schulversuche, die Frau Professor Krygowska in Krakow durchführte[25].
Wir wollen jetzt ganz allgemein **Analogien zwischen geordneten Mengen** untersuchen. In den früheren Beispielen traten uns in den Bereichen $N$ der natürlichen Zahlen, $G$ der ganzen Zahlen, $R$ der rationalen und $P$ der reellen Zahlen schon geordnete Mengen gegenüber. Weiter wurden geordnete Zweiermengen (geordnete Paare) untersucht. Wir hatten gefunden, daß das geordnete Paar $[a, b]$ dann und nur dann mit dem geordneten Paar $[a', b']$ übereinstimmt, wenn $a' = a$, $b' = b$ ist (↑ S. 57). Auch geordnete Tripel kamen schon vor. Um ein geordnetes Paar oder Tripel von der entsprechenden ungeordneten Menge mit denselben Elementen zu unterscheiden, haben wir statt der runden eckige Klammern verwendet. Das wollen wir jetzt auf geordnete Mengen mit beliebig vielen Elementen übertragen. Wir unterscheiden also zwischen der ungeordneten Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, die zum Beispiel auch als $\{3, 2, 5, 1, 4\}$ geschrieben werden kann, und der geordneten Menge $[1, 2, 3, 4, 5]$, die von der geordneten Menge $[3, 2, 5, 1, 4]$ verschieden ist.
Im Kapitel 3 wurden die Eigenschaften von Ordnungsrelationen beschrieben. Insbesondere gilt:

SATZ:

▷ Ist $R$ eine über einer Menge $M$ erklärte irreflexive Ordnungsrelation, so gilt für jedes Elementepaar $[a, b]$ von Elementen aus $M$ genau eine der drei Beziehungen $aRb$ (d. h. $a$ vor $b$) oder $bRa$ ($b$ vor $a$) oder $b = a$ (↑ S. 100).

Nun ist es aber wichtig zu wissen, durch welche irreflexive Ordnungsrelation $M$ geordnet wird. Eine Menge von Menschen kann nach der Größe, dem Alter, nach der Rangfolge in irgendeinem Wettbewerb geordnet sein. Wenn bei der einen Ordnung $a$ vor $b$ steht, kann es bei einer anderen Ordnung umgekehrt sein. Daher ist es üblich, bei Benennung einer geordneten Menge $M$ auch die ordnende Relation $R$ anzugeben. Die durch $R$ geordnete Menge wird dann als $(M, R)$ geschrieben. Unbedingt notwendig ist die Angabe von $R$ dann, wenn $M$ unendlich viele Elemente enthält. Die Ordnungsrelation wird man dann durch allgemeine Merkmale zu charakterisieren suchen. So wurde oben die Ordnung der auf der $x$-Achse liegenden Punktmenge beschrieben durch „von links nach rechts", entsprechend auf der $y$-Achse durch „von unten nach oben". Natürlich hätte auch im umgekehrten Sinn geordnet werden können. Mengen reeller Zahlen können nach ihrer Größe geordnet werden, also $a \prec b$ ($a$ vor $b$), wenn $a < b$ bzw. wenn $b < a$.

---

**Zusammenfassung:**
**Eine Menge $M$ heißt durch eine Relation $R$ geordnet, wenn $R$ eine irreflexive Ordnungsrelation über $M$ ist. Die so geordnete Menge wird zur Unterscheidung von der ungeordneten Menge $M$ und zur Kennzeichnung der verwendeten Ordnungsrelation mit $(M, R)$ bezeichnet.**

---

Wir wollen nun weitere Beispiele betrachten, bei denen eine die Ordnung erhaltende Analogie zwischen zwei Mengen besteht. In Bild 4.41. sind vier Holzpüppchen (sogenannte Matrjoschkas) dargestellt, die sich ineinanderstecken lassen, ein beliebtes Spielzeug aus der Sowjetunion. Die Menge dieser Püppchen sei $M$. Für $M$ ist eine Ordnungsrelation $R$ (Größer-sein) erklärt. Das Püppchen $a$ kommt vor $b$, wenn $b$ sich in $a$ hineinstecken läßt. Die Menge $M$ vergleichen wir mit der Menge $M' = \{1, 2, 3, 4\}$, die wir durch die Kleiner-Relation ordnen wollen: $a' \prec b'$, wenn $a' < b'$. Die Püppchen und die Zahlen von $M'$ können eineindeutig einander zugeordnet werden. Wenn der größten Puppe die kleinste Zahl und so fort zugeteilt wird, so bleibt die Ordnung

Bild 4.41.

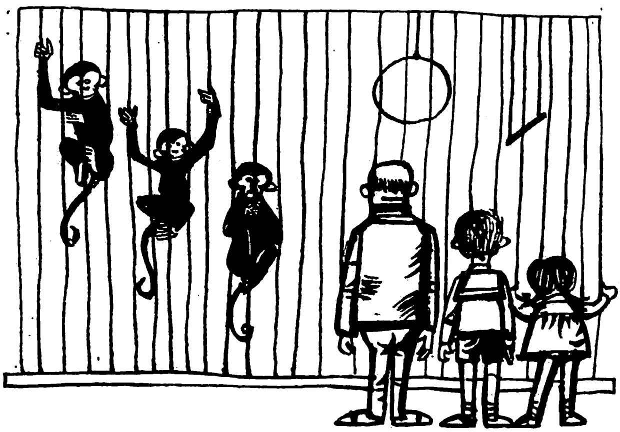


Bild 4.42.

erhalten. Sind $a$, $b$ Elemente von $M$, $a'$, $b'$ ihre Bilder in $M'$, so folgt aus $a \prec b$, daß in $M'$ gleichfalls $a' \prec b'$ ist. Die Menge $M$ wird eineindeutig unter Erhaltung der Ordnung auf $M'$ abgebildet. In solch einem Fall heißen die beiden Mengen **isomorph**[1] hinsichtlich der in ihnen erklärten Ordnung, oder man sagt auch: $(M, R)$ ist zu $(M', R')$ **ähnlich.**
In Bild 4.42. sehen wir gleichfalls zwei geordnete Mengen $M$ und $M'$: $M$ besteht aus drei Besuchern des Tierparks, $M'$ aus drei Affen, die offenbar die Größenverhältnisse der vor ihnen stehenden Besucher durch ihren Standort – oder besser: Hängeort – nachahmen wollen. Die Menge $M$ ist durch die Relation $R$ (Größer-sein) geordnet, die Menge $M'$ der Affen durch die Relation $R'$ (höher über dem Erdboden sein). Es ist wieder $(M, R)$ ähnlich zu $(M', R')$.

BEISPIEL 32:
Betrachten wir ein Zahlenbeispiel für ähnliche Mengen. Es sei $N$ wieder die Menge der natürlichen Zahlen, die wir in „natürlicher Reihenfolge“ ordnen wollen, also $[1, 2, 3, 4, 5, \ldots] = (N, R)$. Es ist $a \prec b$, wenn $a < b$.
Unter $N'$ soll die Menge der sogenannten Stammbrüche, $\left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right]$, verstanden werden. In $N'$ steht $a'$ vor $b'$, $a' \prec b'$, wenn $a' > b'$ ist. Die Ordnungsrelation heiße $R'$. Es ist also

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right] = (N', R').$$

Ordnen wir der natürlichen Zahl $n$ den Stammbruch $\frac{1}{n}$, der Relation $R$ die Relation $R'$ zu, so entsprechen sich beide Mengen unter Erhaltung der Ordnung, sie sind ähnlich. Die Analogie der beiden Mengen dieses Beispiels läßt sich aber noch weiter verfolgen. Wenn in $N$ gilt $a \cdot b = c$ (z. B. $2 \cdot 3 = 6$), so gilt für die entsprechenden Elemente $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\right)$, also: *Das Produkt der Bilder ist das Bild des Produktes.*

---
[1] Aus dem Griechischen, gleichgestaltet.

Es besteht demnach auch hinsichtlich der Multiplikation vollständige Analogie zwischen den beiden Mengen.
Versuchen wir, ob das Entsprechende für die Addition gilt!
Es ist z. B. $3 + 5 = 8$, aber $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq \frac{1}{8}$. Hinsichtlich der Addition besteht also keine Analogie zwischen den beiden Mengen. Nun können die Rechenoperationen Addition, Multiplikation usw. ja auch, wie wir in Kapitel 3 (S. 92) gesehen haben, als Relationen angesehen werden, allerdings nicht als zweistellige wie die Ordnung, sondern als dreistellige. Ein geordnetes Tripel von natürlichen Zahlen gehört entweder zu der Relation $R_A$ (Addition) bzw. zu der Relation $R_M$ (Multiplikation) oder nicht. So gehört das Tripel [2, 3, 5] zu $R_A$, da $2 + 3 = 5$ ist, aber nicht zu $R_M$, da $2 \cdot 3 \neq 5$ ist. Das Tripel [3, 4, 4] gehört weder zu $R_A$ noch zu $R_M$. Es ist nun für die Beschreibung von Analogien zwischen Mengen angebracht, bei Angabe einer Menge nicht nur die Ordnungsrelation, sondern auch weitere in ihr erklärte Relationen mit zu nennen, z. B. ($N$; $R$, $R_A$, $R_M, \ldots$).

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Menge $M$, in der eine oder mehrere Relationen $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ erklärt sind, heißt eine **geregelte Menge**. Sie wird geschrieben als ($M$; $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$).

Man drückt dann die Analogie zwischen den Mengen

$$[1, 2, 3, \ldots] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right]$$

kurz so aus:

Die Mengen ($N$; $R$, $R_M$) und ($N'$; $R'$, $R'_M$) sind **isomorph.**

Hierbei wurde für die in $N'$ erklärte Multiplikation ein anderes Symbol als $R_M$ gewählt, weil $R_M$ zunächst nur für natürliche Zahlen (etwa als wiederholte Addition) erklärt zu sein braucht.
Analogien spielen auch in der Schulmathematik eine so große Rolle, daß manche Schüler sie unkritisch verwenden, indem sie zum Beispiel $2 \sin x = \sin 2x$ setzen. Durch die Funktion $y = \sin x \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ werden die reellen Zahlen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ eineindeutig auf die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 abgebildet (↗ Bild 4.17., S. 140). Dabei bleibt die Ordnung erhalten, da $y = \sin x$ in diesem Intervall streng monoton ist. Dagegen bleibt die Addition reeller Zahlen bei dieser Abbildung **nicht** erhalten, es gilt im allgemeinen

$$\sin(x_1 + x_2) \neq \sin x_1 + \sin x_2.$$

In der unbewußten Annahme einer Analogie treten hier oft Schülerfehler auf, ein Grund für den Lehrer, an solchen „verführerischen“ Stellen besonders aufmerksam zu kontrollieren.
Dagegen liegt bei Abbildung spezieller linearer Funktionen der Form $y = ax$ in der Tat eine solche Analogie vor.
Folgen wir hier den Gedankengängen, die in dem Artikel von Krygowska ausgedrückt

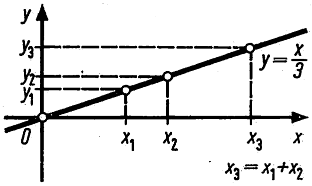


Bild 4.43.

werden. Wir betrachten einen Spezialfall.

Wählen wir die Funktion $y=\frac{1}{3}x$. Sie kann über der ganzen reellen $x$-Achse erklärt werden, und ihr Wertevorrat besteht wieder aus allen reellen Zahlen. Die Abbildung vermittelt eine die Ordnung erhaltende Abbildung der auf der $x$-Achse abgetragenen reellen Zahlen auf die Menge der reellen Zahlen auf der $y$-Achse. Außerdem gilt für diese Funktion $f$ darüber hinaus:

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

da $\frac{1}{3}(x_1+x_2)=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2$ ist. Dagegen gilt das Entsprechende für die Multiplikation nicht, $f(x_1\cdot x_2)\neq f(x_1)\cdot f(x_2)$ (Bild 4.43.).

Interessant und sehr anregend für die Erarbeitung der Potenzfunktionen in der Schule ist die Beachtung der hier bestehenden Isomorphie. Dem Beispiel 32 entspricht das folgende Beispiel.

BEISPIEL 33:

Wählen wir die für nichtnegative reelle Zahlen erklärte umkehrbare Funktion $y=x^3$, deren Wertevorrat gleichfalls aus der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen besteht (Bild 4.44.). Für diese Funktion gilt

$$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2),$$

denn $\quad (x_1\cdot x_2)^3=x_1^3\cdot x_2^3.$

Hier besteht Isomorphie zwischen Definitionsbereich und Wertevorrat hinsichtlich der Ordnung und der Multiplikation, nicht aber hinsichtlich der Addition, denn es ist im allgemeinen

$$f(x_1+x_2)\neq f(x_1)+f(x_2),$$
$$(x_1+x_2)^3\neq x_1^3+x_2^3 \qquad \text{außer für } x_1=0 \text{ oder } x_2=0.$$

Noch interessanter ist eine entsprechende Betrachtung bei den Exponentialfunktionen.

BEISPIEL 34:

Greifen wir die Funktion $y=3^x$ heraus.
Für diese Funktion gilt

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2),$$

da $\quad 3^{x_1+x_2}=3^{x_1}\cdot 3^{x_2}$ (Bild 4.45.).

Die Relation $R_A$ (Addition) von reellen Zahlen auf der $x$-Achse wird hier abgebildet auf die Relation $R_M$ (Multiplikation) von reellen Zahlen auf der $y$-Achse.

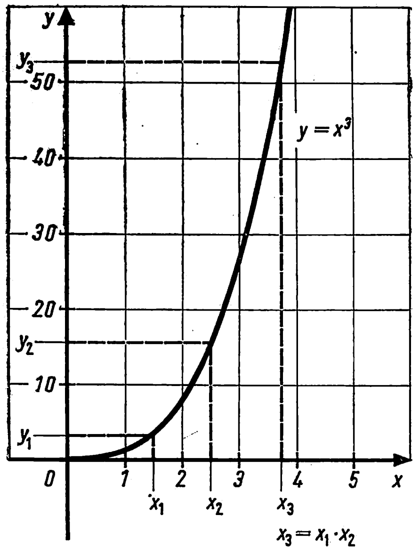



Bild 4.44.

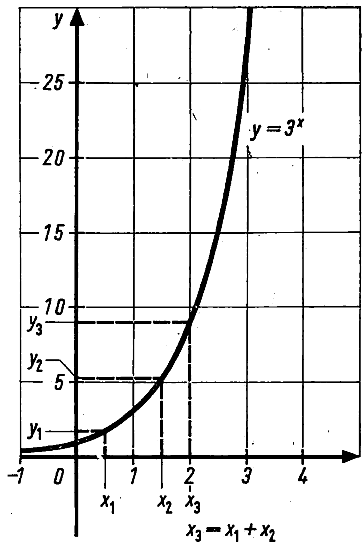



Bild 4.45.

Verwenden wir die abstrakte Relationsschreibweise für eine Rechenoperation, so kann man die drei Beispiele 32 bis 34 in folgender Weise zusammenfassen:
Gegeben ist eine Zahlenmenge $M$, die eineindeutig durch eine Funktion $f$ auf eine Menge $M'$ abgebildet wird. In jeder der beiden Mengen sind je eine zweistellige Relation (die Ordnung) und mehrere dreistellige Relationen (zum Beispiel Addition, Multiplikation) erklärt. In der Menge $M$ sollen sie mit $R^{(2)}$, $R_1^{(3)}$, $R_2^{(3)}$, ihre „Bilder" in der Menge $M'$ entsprechend, durch den Strich unterschieden, bezeichnet werden. Dann gilt für jedes der Beispiele:

Aus $[x_1, x_2] \in R^{(2)}$ folgt $[f(x_1), f(x_2)] \in R_2'$
(Erhaltung der jeweils erklärten Ordnung),

und

aus $[x_1, x_2, x_3] \in R_i^{(3)}$ folgt $[f(x_1), f(x_2), f(x_3)] \in R_i'^{(3)}$.
(Das heißt: Wird mit den $x$ die Operation $R_i^{(3)}$ ausgeführt, so wird mit den Funktionsbildern die entsprechende Operation $R_i'^{(3)}$ ausgeführt.)

Dabei braucht natürlich, wie Beispiel 32 und 34 zeigen, eine Relation $R$ nicht mit ihrem „Bild" R' übereinzustimmen, die Ordnung kann anders erklärt sein, der Addition kann die Multiplikation entsprechen usw.

Aufgaben 22 bis 24

Bei der folgenden Zusammenfassung gehen wir von zwei Mengen aus, in denen verschiedene Relationen erklärt sind. Sie können zwei-, drei- oder mehrstellig sein. Hinsichtlich einiger dieser Relationen kann Analogie bestehen, ohne daß dies für alle erklärten Relationen gilt. Beispiele dafür haben wir soeben kennengelernt: Zwischen den geordneten Mengen

$$[1, 2, 3, \ldots] \quad \text{und} \quad \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right]$$

besteht Isomorphie nicht nur hinsichtlich der jeweils in ihnen erklärten Ordnung, sondern auch hinsichtlich der Multiplikation, aber nicht hinsichtlich der Addition.
Die Möglichkeiten der Entsprechung werden in der folgenden Zusammenfassung allgemein ausgedrückt:

---

**Zusammenfassung:**
**Eine Menge $M$ sei durch die Relationen $R_1, R_2, \ldots, R_n$ geregelt, die ein-, zwei-, ..., $k$-stellig sein können (dabei ist $k$ eine natürliche Zahl). Den Elementen von $M$ mögen eineindeutig die Elemente einer Menge $M'$ entsprechen, die durch die Relationen $R'_1, R'_2, \ldots, R'_i$ geregelt sei. Dabei soll $R'_1$ gleichstellig sein mit $R_1$ (ist z. B. $R_1$ eine zweistellige Relation, etwa eine Ordnungsrelation, so soll auch $R'_1$ zweistellig sein), $R'_2$ mit $R_2$ und so fort bis zu einem Index $r$, der natürlich höchstens so groß sein kann wie der kleinere der beiden Indizes $n$ und $i$. Es liege nun eine eineindeutige Zuordnung auch zwischen diesen Relationen vor,**
**$R_1 \leftrightarrow R'_1, R_2 \leftrightarrow R'_2, \ldots, R_r \leftrightarrow R'_r$, d. h.:**
**Wenn zwischen gewissen Elementen aus $M$ eine der Relationen $R_k$ $(1 \leqq k \leqq r)$ besteht, so soll zwischen ihren Bildelementen in $M'$ die zugeordnete Relation $R'_k$ bestehen.**
**Dann heißen die Mengen $M$ und $M'$ isomorph hinsichtlich dieser $r$ Relationen, oder man sagt:**
**$(M; R_1, R_2, \ldots, R_r)$ und $(M'; R'_1, R'_2, \ldots, R'_r)$ sind isomorph.**

---

Es gibt also keine Isomorphie schlechthin zwischen zwei Mengen, sondern nur eine Isomorphie hinsichtlich gewisser Relationen.
Durch solche Isomorphien kann die abstrakte Struktur einer Menge beschrieben werden. So ist es möglich, ganze Typen von Mengen zugleich mathematisch zu erfassen. Der axiomatische Aufbau einer Theorie beschreibt seinen Gegenstandsbereich nur bis auf Isomorphie hinsichtlich derjenigen Relationen, die durch die Axiome festgelegt sind. Darauf beruhen unter anderen auch die *Dualitätsprinzipien* der projektiven Geometrie [24].
Auf weitere Beispiele soll hier nicht weiter eingegangen werden, da solche im nächsten Kapitel beim Aufbau des Zahlenbereichs häufig vorkommen werden.

## 4.10. Aufgaben: Abbildungen, Funktionen

1. Prüfen Sie die Beispiele 1 bis 3 (↑ S. 119) daraufhin, ob die Abbildung eine Funktion darstellt! (Begründen Sie Ihre Entscheidung!) (↑ S. 124)

2. a) Bilden Sie zu den Beispielen 1 bis 6 die inversen Abbildungen! Nennen Sie deren Vor- und Nachbereich und schreiben Sie einige Paare auf! Verkleinern Sie gegebenenfalls die Menge $A$ derart, daß die inverse Abbildung eine Funktion darstellt!
   b) Stellen die zu den Abbildungen 4.1.a bis d (↑ S. 121) inversen Abbildungen Funktionen dar? (↑ S. 125)

3. Schreiben Sie die nachstehenden Folgen ausführlich als Funktionen! Geben Sie ihre ersten vier und das 10. Glied an!

$a_n = 2n + 1$, $a_n = 2^n$, $a_n = n$ (↑ S. 130)

4. Eine Folge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ heißt zu der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ proportional, wenn es eine von Null verschiedene reelle Zahl $k$ gibt, so daß für alle $n$ gilt: $b_n = k \cdot a_n$ $(k > 0)$. Zeigen Sie, daß die für die Menge aller Folgen erklärte Proportionalität eine Äquivalenzrelation ist! (↑ S. 130)

5. Gegeben ist folgende Funktion zweier unabhängiger Veränderlicher:

$F = \{[x_1, x_2, y]; x_1 \in N \setminus \{0\}, x_2 \in N \setminus \{0\} \text{ und } y = x_1 \cdot x_2\}$.

Stellen Sie $F$ als Funktion einer einzigen Variablen dar und untersuchen Sie ihre Umkehrbarkeit! (↑ S. 130)

6. Stellen Sie die Funktionen $y = |x|$ und $y = |3 - x|$, $(-5 \leqq x \leqq +5)$, im Koordinatensystem dar! (↑ S. 135)

7.* Berechnen Sie die Perioden von $y = \sin 2x$ und $y = \sin \frac{x}{3}$! (↑ S. 140)

8.* Beweisen Sie: Ist $f(x)$ eine für alle natürlichen Zahlen erklärte periodische Funktion mit der Periode $h$, und ist $f(x + k) = f(x)$, so ist $k$ ein Vielfaches von $h$. (↑ S. 140)

9. Untersuchen Sie die Funktionen von Aufgabe 6 auf Monotonie! (↑ S. 141)

10. Bestimmen Sie für die Funktion $y = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ und $\varepsilon = \frac{1}{10}$ an den Stellen $x_0 = \frac{1}{2}$ und $x_1 = 2$ geeignete Intervall-Längen $\delta_0$ bzw. $\delta_1$! (↑ S. 146)

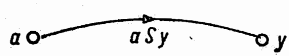
11. Zeichnen Sie die Kurven für folgende Funktionen aus der Schar $y = mx + n$:

$m = 2, \quad n = 0$
$m = 2, \quad n = 3$
$m = -2, \ n = 3$
$m = 1, \quad n = -2.$

Errechnen Sie für jede dieser Funktionen für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ einen Wert $\delta$, so daß überall für $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt: $|y_1 - y_2| < \frac{1}{100}$. (↑ S. 148)

12. In Bild 4.46. a und b soll bedeuten:

$aRx$: $a$ hat $x$ zum Vater, (Bild 4.46.a) 


$a\,S\,y$: $a$ hat $y$ zur Mutter. (Bild 4.46.b) 


In welchem Verwandtschaftsverhältnis stehen in Bild 4.46.c die Personen $a$ und $d$, $a$ und $c$, $b$ und $f$, $a$ und $f$, $e$ und $c$, $a$ und $e$, $d$ und $c$, $k$ und $c$, $g$ und $i$, $g$ und $m$, $n$ und $j$? (Es werden nur eheliche Kinder in Betracht gezogen, die aus derselben Ehe stammen.) (↑ S. 149)

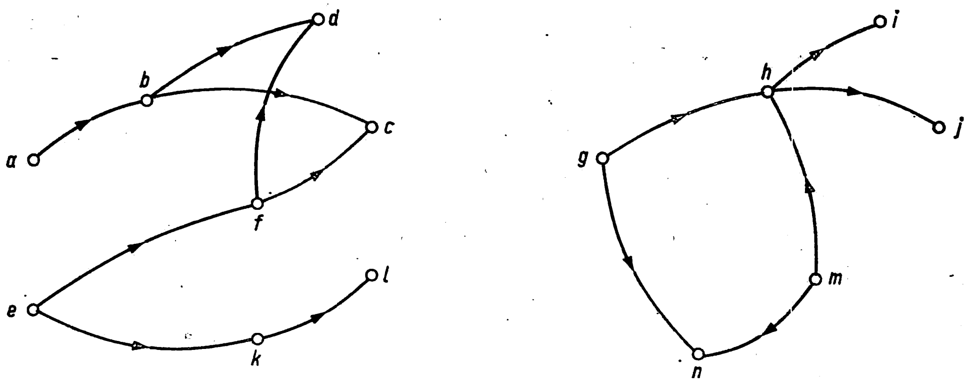



Bild 4.46.c

**13.** Im Bild 4.46.c soll $R$ dieselbe Bedeutung haben wie in Aufgabe 12, aber $a\,S\,y$ soll bedeuten: $a$ hat $y$ zum Bruder.

a) Ergänzen Sie in Bild 4.46.c die fehlenden Pfeile!

b) Beantworten Sie die entsprechenden Fragen wie in Aufgabe 12, dazu die nach dem Verhältnis zwischen $b, f$ und $c$ sowie zwischen $l$ und $f$!

c) Bilden Sie nach dem Muster von S. 149 f. zusammengesetzte Funktionen! Benutzen Sie dabei Bild 4.46.c! (↑ S. 149)

**14.** Suchen Sie in Bild 4.46.c Paare aus $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$! (↑ S. 150)

**15.** Bilden Sie mittels der Zuordnung $z = \log(x + 1)$ eine Funktion $f_3$ als Verkettung zweier Funktionen, $f_3 = f_2 \circ f_1$, und wählen Sie möglichst große Definitionsbereiche! (↑ S. 156)

**16.** Beweisen Sie die beiden für Vektoren geltenden Distributivgesetze von S. 158!

**17.*** Bei einer Transformation der Ebene gehe ein Punkt $A$ in $A'$, $B$ in $B'$ usw. über. Sind $A$, $B$ beliebige Punkte, so geht der von $A$ zu $B$ führende Vektor $\overrightarrow{AB}$ in den Vektor $\overrightarrow{A'B'}$ über. Es soll für alle Punktepaare $[A, B]$ gelten $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Zeigen Sie, daß dann die Transformation eine Translation ist! (↑ S. 158)

**18.*** Beweisen Sie, daß bei Drehung der Ebene um den Winkel $\alpha$ um den Punkt $O$ die Länge jeder Strecke $\overline{PQ}$ erhalten bleibt und daß die Gerade $P'Q'$ mit der Geraden $PQ$ den Winkel $\alpha$ einschließt! (↑ S. 159)

**19.** Zeigen Sie, daß eine beliebige Drehung der Ebene um den Punkt $O$ um den Winkel $\alpha$ als Ergebnis zweier Symmetrieabbildungen dargestellt werden kann! (↑ S. 163)

**20.** Beweisen Sie, daß die Funktion

$$f = \left\{[x, y];\, x \in P\setminus\{0\} \text{ und } y = \frac{1}{x}\right\}$$

mit ihrer inversen Funktion und ihre Kurve mit ihrem Spiegelbild hinsichtlich der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten übereinstimmt! (↑ S. 171)

21.* Welche linearen Funktionen fallen mit ihren inversen Funktionen zusammen? Was ergibt die Spiegelung ihrer Bilder an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten? (↑ S. 171)

22. Zeichnen Sie die Funktion $y = \sqrt[3]{x}$ für den Definitionsbereich $M$ der nichtnegativen reellen Zahlen! Nennen Sie den Bildbereich $M'$ und weisen Sie in $M$ erklärte Relationen $R_1, R_2, \ldots$ sowie in $M'$ erklärte Relationen $R'_1, R'_2, \ldots$ auf, so daß $(M; R_1, R_2, \ldots)$ isomorph ist zu $(M'; R'_1, R'_2, \ldots)$! (↑ S. 177)

23.* Lösen Sie die entsprechende Aufgabe wie Nr. 22 für die Funktion $y = {}_3\log x$ (Logarithmus von $x$ zur Basis 3) über dem Definitionsbereich der positiven reellen Zahlen! (↑ S. 177)

24.* In einer Menge $M$ sei eine beliebige reflexive Halbordnung $R$ erklärt. Sind also $a, b, c$ Elemente von $M$, so gilt $aRa$ (Reflexivität), ferner
aus $aRb$ und $bRc$ folgt $aRc$ (Transitivität), und schließlich
aus $aRb$ und $bRa$ folgt $b = a$ (Antisymmetrie).
Die für die Potenzmenge $P(U)$ einer beliebigen Menge $U$ erklärte Teilmengenrelation sei mit $I$ bezeichnet. Sind also $M_1$ und $M_2$ Elemente von $P(M)$, das heißt, Teilmengen von $U$, so bedeutet $M_1 \, I \, M_2$: $M_1 \subseteq M_2$.
Die Relation $I$ ist eine Halbordnung. (↑ S. 101)
Zeigen Sie: Zu jeder durch eine beliebige reflexive Halbordnung $R$ geregelten Menge $M$ gibt es eine Menge $U$, so daß $(M; R)$ isomorph ist zu $(P(U); I)$! (↑ S. 177)

# 5. AUFBAU DER ZAHLENBEREICHE

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den **Zahlen**, einem der wichtigsten Anwendungsgebiete von Mengen und Relationen.
Die Zahlen stellen ein geistiges Werkzeug dar, mit dessen Hilfe wir Gegenstände, Lebewesen, Ereignisse, Gedankendinge usw. ordnen und zählen; ferner rechnen wir mit Zahlen. Dadurch können wir aus gegebenen Zahlen unbekannte erschließen. Die Menschen haben sich dieses wertvolle Werkzeug geschmiedet und im Zuge ihrer sich entwickelnden Bedürfnisse immer mehr verfeinert. So entstanden mehrere Zahlenbereiche, die zunächst nicht scharf voneinander getrennt wurden.
Es sind dies:
Der Bereich $N$ der **natürlichen Zahlen** 0, 1, 2, 3, . . .;
der Bereich $R^*$ der **gebrochenen Zahlen**, die durch Brüche dargestellt werden können, z. B. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{7}$;
der Bereich $G$ der **ganzen Zahlen** . . . , $-2, -1, 0, +1, +2, \ldots$;
der Bereich $R$ der **rationalen Zahlen**, die sich schon äußerlich durch das Vorzeichen von den gebrochenen Zahlen unterscheiden;
der Bereich $P$ der **reellen Zahlen**, der außer den rationalen Zahlen auch alle irrationalen Zahlen wie $\pi$ oder $\sqrt{2}$ umfaßt;
schließlich der Bereich $K$ der **komplexen Zahlen**.
Es wird den Leser vielleicht befremden, daß die Null hier zu den natürlichen Zahlen hinzugenommen wurde. Ob man das tut oder die Null als Element eines höheren Zahlenbereichs einführt, hängt von den Absichten des Aufbaus ab. Bei einem später dargelegten Weg (↑S. 202ff.) wird wieder von $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ausgegangen werden.
Wenn wir Zahlen verwenden, so entnehmen wir sie je nach dem beabsichtigten Zweck einem dieser Bereiche. Beim Rechnen müssen wir dann, um Fehler zu vermeiden, die in dem betreffenden Zahlenbereich geltenden Gesetze beachten, die nicht in jedem Bereich die gleichen sind.
Mit zunehmender Entwicklung der mathematischen Grundlagenforschung begann der Mathematiker, sich über den Charakter der einzelnen Zahlenbereiche und ihre sukzessive

Konstruktion Rechenschaft abzulegen. Diesem mathematischen Weg des Aufbaus soll im folgenden nachgegangen werden. Wir müssen uns dabei auf den Standpunkt stellen, daß wir noch nichts über Zahlen wissen.

## 5.1. Natürliche Zahlen – Mengentheoretischer Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen

Der einfachste Zahlenbereich, auf dem alle anderen aufbauen, ist der der natürlichen Zahlen. Über diesen Zahlenbereich äußerte sich der Berliner Mathematiker KRONECKER (LEOPOLD KRONECKER, 1823 bis 1892) folgendermaßen: „Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." Damit wollte er ausdrücken, daß dieser Zahlenbereich uns als etwas Fertiges gegeben ist und erst von ihm aus weitere Zahlenbereiche konstruiert werden. Aber auch die natürlichen Zahlen selbst sind das Ergebnis einer Begriffsbildung, die sich im Verlauf einer Jahrtausende langen Erfahrung im Vergleichen, Ordnen, Zählen von Mengen und im Rechnen herausgebildet hat: Man sah nämlich von allen qualitativen Besonderheiten, die Mengen zukommen können, ab – mit Ausnahme der einen Eigenschaft, die gleiche Anzahl von Elementen zu haben. Das wurde dann nachträglich mit mathematischen Mitteln nachgebildet. Wie dies vor sich geht, soll im folgenden beschrieben werden, und zwar auf zwei verschiedenen Wegen. Beim ersten wird der Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen nur auf Mengen gestützt (**genetischer Aufbau**), beim zweiten auf Sätze, die einige uns aus der Erfahrung bekannte Eigenschaften dieses Zahlenbereichs ausdrücken (**axiomatischer Aufbau**).

### 5.1.1. *Mengenvergleiche, Kardinalzahlen*

Wir haben nicht mehr und nicht weniger zu tun, als den uns ja bereits bekannten mathematischen Abstraktionsprozeß für Mengen durchzuführen. Er muß so gestaltet sein, daß Mengen mit gleicher Elementezahl in dieselbe Äquivalenzklasse kommen. Bei dem Vergleich zweier Mengen dürfen wir uns natürlich nicht der Zahlen bedienen, da wir ja diese gerade begründen wollen.
Wie geht ein Mensch vor, der zwei Mengen vergleichen will, die er aus irgendeinem Grund nicht durchzählen kann oder will? Stellen wir uns vor, Frau X deckt den Tisch für sechs Personen. Sie nimmt sechs flache und sechs tiefe Teller aus dem Schrank, ordnet sie auf dem Tisch und trägt dann ihrer kleinen Tochter Helga auf, die Bestecke dazu zu legen. Helga kann noch nicht bis sechs zählen. Trotzdem weiß die Mutter, daß Helga mit ihrer Arbeit fertig werden wird. Helga nimmt so viele Messer aus der Schublade, wie ihre kleinen Hände fassen können und legt zu jedem Tellerpaar ein Messer. Dabei zeigt sich, daß sie sogar ein Messer zuviel gegriffen hatte. Sie trägt es zurück und bringt Gabeln und Löffel gleich zusammen. Diesmal fehlen zwei Löffel. Sie nimmt einen

Löffel und noch einen Löffel aus der Schublade und legt sie auf den Tisch zu den Tellern, wo noch keine Löffel sind. Jetzt stimmt alles, die Gedecke sind komplett.
Auch wir Erwachsenen können in die Lage geraten, bei Mengenvergleichen auf das Durchzählen zu verzichten. Denken wir uns eine Gesellschaft von mehreren Personen, die in einem größeren Raum umherstehen oder ihre Plätze wechseln, so daß sie schlecht zählbar sind. Der Gastgeber hat jedem Gast ein Glas Wein zugedacht. Er füllt zu diesem Zweck eine Menge Gläser und bittet jeden Gast, sich ein Glas zu holen. Hat jeder ein Glas in der Hand und bleiben keine Gläser übrig, so hat es der Wirt gerade getroffen; die Menge der gefüllten Gläser hat dieselbe Anzahl von Elementen wie die Menge der Gäste. Bleiben Gläser übrig, so hat die Menge der Gläser, fehlen Gläser, so hat die Menge der Gäste mehr Elemente.
Diesen Vergleich von zwei Mengen, der eine Vorstufe des Zählens darstellt, drücken wir jetzt in der Sprache der Mengenlehre aus. Dazu brauchen wir noch ein Mengensystem $\mathfrak{S}$, das die zu vergleichenden Mengen enthält, im ersten Beispiel die Menge der flachen Teller, die der tiefen Teller, die der Messer, die der Gabeln, die der Löffel; im zweiten Beispiel müssen mindestens die Menge der Gläser und die Menge der Gäste im System $\mathfrak{S}$ enthalten sein. Wir verallgemeinern jetzt und gelangen zu folgender

ERKLÄRUNG:

▷ Gegeben sei ein System $\mathfrak{S}$ von Mengen. Zwei Mengen aus $\mathfrak{S}$ heißen **gleichmächtig** oder **von gleicher Mächtigkeit**, wenn es eine eineindeutige Abbildung von der einen auf die andere Menge gibt. Dabei heißt eine Abbildung $F$ eineindeutig, wenn sowohl $F$ als auch die zu $F$ inverse Abbildung $F^{-1}$ eindeutig sind, oder, anders ausgedrückt, wenn $F$ eine umkehrbare Funktion ist.

Es braucht nicht besonders gesagt zu werden, daß bei keiner der beiden Mengen ein Element übrig bleiben soll, das liegt schon in der Ausdrucksweise: Abbildung „von der einen Menge auf die andere“ eingeschlossen.
Wir haben durch die elementweise eineindeutige Zuordnung einen Weg gefunden, um die Gleichzahligkeit von endlichen Mengen festzustellen, ohne zu zählen. Im nächsten Kapitel werden wir diesen Begriff auch auf unendliche Mengen übertragen. Allerdings wird es dabei, wie wir sehen werden, aus verschiedenen Gründen sinnlos, von einer „Anzahl von Elementen“ zu reden. Mit Rücksicht darauf wollen wir schon jetzt dem Begriff der Mächtigkeit vor dem der Elementeanzahl den Vorzug geben.
Es sei noch auf einen Punkt hingewiesen, der bei endlichen Mengen so selbstverständlich scheint, daß man ihn kaum beachtet: Auf welche Weise die Zuordnung vorgenommen wird, spielt – zumindest für den Vergleich endlicher Mengen – keine Rolle. Wieviel Messer beim Tischdecken übrigbleiben, wieviel Löffel fehlen, ist ganz unabhängig davon, wie die Zuordnung zu den Tellern vorgenommen wurde. Obwohl wir es vorläufig nur mit endlichen Mengen zu tun haben, sei schon hier darauf hingewiesen, daß dies bei unendlichen Mengen nicht mehr der Fall ist.
Um jetzt, wie oben geplant, den Abstraktionsprozeß durchführen zu können, müssen wir uns davon überzeugen, daß die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation ist. Nun, eine Relation zumindest liegt auf alle Fälle vor. Greifen wir nämlich zwei beliebige Mengen $A$ und $B$ aus dem Mengensystem $\mathfrak{S}$ heraus. Entweder läßt $A$ sich eineindeutig auf $B$ abbilden oder nicht. *Die Gleichmächtigkeit von Mengen*

*stellt also eine Relation $R$ über $\mathfrak{S}$ dar.* Das Paar $[A, B]$ ist entweder Element von $R$ oder nicht. Die Menge $R$ ist dabei eine Teilmenge von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$.
Wir wollen jetzt untersuchen, ob diese Relation $R$ der Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation ist. Dazu sind die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nachzuweisen.
Wir wiederholen: Es sei $\mathfrak{S}$ ein System beliebiger Mengen $A, B, C, \ldots$, und die Relation $A\ R\ B$ bedeute, daß $A$ sich eineindeutig auf $B$ abbilden läßt.
*Reflexivität:* Jede Menge kann – z. B. durch die identische Abbildung, die jedes Element sich selbst zuordnet, – eineindeutig auf sich selbst abgebildet werden.
*Symmetrie*: Die Abbildung von $A$ auf $B$ soll ja umkehrbar eindeutig sein, also ist die Relation symmetrisch.
*Transitivität*: Wird $A$ durch die Abbildung $f$ eineindeutig auf die Menge $B$ und $B$ durch die Abbildung $g$ eineindeutig auf die Menge $C$ abgebildet, so existiert nach Kapitel 4 auch mindestens eine eineindeutige Abbildung von $A$ auf $C$, nämlich die, die durch Verkettung von $f$ mit $g$ entsteht.
Demnach gilt:

*Die Gleichmächtigkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation.*

Durch diese Relation der Gleichmächtigkeit wird das Mengensystem $\mathfrak{S}$ in Äquivalenzklassen aufgespalten. Mengen $A$ und $B$, die derselben Klasse angehören, heißen schlechthin **äquivalent,** geschrieben $A \sim B$. Diese Schreibweise bedeutet also, daß es eine eineindeutige Abbildung von $A$ auf $B$ gibt.
Da die Faserung des Mengensystems $\mathfrak{S}$ in Klassen gleichmächtiger Mengen von größter Bedeutung für die Bildung des Begriffs der natürlichen Zahl ist, sei hier an die Eigenschaften einer Klasseneinteilung durch eine Äquivalenzrelation erinnert:

1. Jedes Element von $\mathfrak{S}$, also jede Menge aus dem System, gehört zu genau einer Klasse.
2. Keine Klasse ist leer.
3. Alle Mengen einer Klasse sind äquivalent.
4. Mengen, die verschiedenen Klassen angehören, sind nicht äquivalent; der Durchschnitt zweier Klassen ist also leer.

ERKLÄRUNG:

▷ Jede Äquivalenzklasse nach der Gleichmächtigkeit wird als **Kardinalzahl** bezeichnet.

Die Sätze „Alle Mengen einer Klasse sind gleichmächtig (äquivalent)“ und „sie haben dieselbe Kardinalzahl“ stellen nur verschiedene Ausdrucksweisen desselben Sachverhalts dar. Wenn im folgenden zwei Mengen als „äquivalent“ bezeichnet werden, so ist damit nicht irgendeine Äquivalenzrelation, sondern stets die spezielle der Gleichmächtigkeit gemeint.
Zu jeder Kardinalzahl gibt es eine Menge, die diese Kardinalzahl repräsentiert, oder, was dasselbe bedeutet, die Element dieser Kardinalzahl ist. Die Kardinalzahlen sind als Klassen von Mengen selbst Mengen zweiter Stufe, wenn die verglichenen Ausgangsmengen Mengen erster Stufe sind.
Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge wird durch ihre Kardinalzahl völlig bestimmt, denn zwei endliche Mengen können dann und nur dann eineindeutig auf-

einander abgebildet werden, wenn sie gleiche Elementeanzahl besitzen. Wir erfassen also durch den auf die Kardinalzahl führenden Abstraktionsprozeß mathematisch im wesentlichen das, was in der Umgangssprache unter dem Namen „**Kardinalzahl**" oder „Grundzahl" bekannt ist.

### 5.1.2. *Endliche Mengen*

Die Kardinalzahlen von endlichen Mengen wollen wir als natürliche Zahlen bezeichnen. Allerdings spiegeln wir damit die natürlichen Zahlen nur in ihrer Eigenschaft als Anzahlen, nicht in ihrem Charakter als **Ordinalzahlen** wider. Das eigentliche Zählen setzt nämlich *geordnete* Mengen voraus, in denen jedes Element einen bestimmten Platz hat. Wir zählen dann: der erste, der zweite, ... und verwenden dabei Ordnungszahlen. Was in mathematischer Beziehung Ordnungszahlen eigentlich sind, soll erst im nächsten Kapitel untersucht werden, da ihre Besonderheit sich erst bei unendlichen Mengen recht erfassen läßt.
Um nur die Anzahl der Elemente einer Menge festzustellen, brauchen wir die Ordnungszahlen nicht. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf **Kardinalzahlen**, da diese die wichtigsten Eigenschaften unserer natürlichen Zahlen widerspiegeln und zum Aufbau des Zahlenbereichs völlig ausreichen.
Nun müssen wir uns nur noch überlegen, wie wir den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Mengen mathematisch fassen wollen. Anschaulich ist dieser Unterschied sicherlich klar, und wir haben uns ja auch in den vorangegangenen Kapiteln bei den Beispielen darauf verlassen, daß hierbei keine Zweifel möglich sind. Dennoch brauchen wir jetzt, wo es um das Fundament für die natürlichen Zahlen geht, eine genaue mathematische Charakterisierung der endlichen Mengen.
Dazu greifen wir eine typische Eigenschaft von endlichen Mengen heraus, wobei **endlich** vorläufig im Sinne unserer gewöhnlichen Vorstellungen zu verstehen ist. Diese Eigenschaft werden wir dann der mathematischen Definition der Endlichkeit zugrunde legen. Betrachten wir eine „endliche" Menge von Gegenständen und fügen wir dieser noch einen neuen Gegenstand hinzu, so ist die neue Menge zwar „größer" als die erste, aber immer noch „endlich". Dies ist in der Tat charakteristisch für endliche Mengen; denn fügt man einer **unendlichen** Menge ein Element hinzu, so ist sie nicht „größer" geworden. Was das bedeutet, wird im nächsten Kapitel deutlich werden. Mathematisch drückt sich dieses Hinzunehmen eines Gegenstandes als Bildung einer Vereinigungsmenge aus. Um zu einer mathematischen Kennzeichnung der Endlichkeit von Mengen zu gelangen, brauchen wir noch eine Grundmenge von Individuen, aus der wir die Elemente für die Bildung von endlichen Mengen schöpfen. Sie werde mit $U$ bezeichnet. Ist also $M$ eine „endliche" Teilmenge von $U$ und $a$ ein beliebiges Element von $U$, das in $M$ oder $U \setminus M$ liegen kann, so ist $M \cup \{a\}$ sicher wieder eine „endliche" Menge. Wir fügen noch hinzu, daß auch die leere Menge „endlich" heißen soll, was kaum auf Widerspruch stoßen wird. Dann können wir folgende „endliche" Mengen bilden:
$\emptyset$, $\quad M = \emptyset \cup \{a\} = \{a\} \quad (a \in U)$, $\quad M' = M \cup \{b\} = \{a, b\} \quad (b \in U,\ b \neq a)$, $M'' = M' \cup \{c\} = \{a, b, c\}$ $(c \in U,\ c \neq a,\ c \neq b)$, und so fort. Eine Grenze wird uns,

wenn $U$ fest gegeben ist, nur in dem Fall gesetzt, daß $U$ sich erschöpft. Wählen wir eine hinreichend große Menge als Grundmenge $U$, so ist das Reservoir groß genug, um Material für die Bildung von Vereinigungsmengen zu liefern. Die nach obenstehender Anweisung gebildeten Mengen $M = \{a\}$, $M' = \{a, b\}$, $M'' = \{a, b, c\}, \ldots$ werden als Einermenge, Zweiermenge, Dreiermenge usw. bezeichnet.

Der Leser beachte, daß wir bei der Bildung von Zweiermengen, Dreiermengen usw. die Zahlwörter 2, 3, ... nicht benutzt haben. Die Bildung der Zweiermenge zum Beispiel entspricht dem konkreten Handeln, wenn Helga „einen Löffel und noch einen Löffel" aus der Schublade nimmt. Man braucht nur zwischen den Elementen $a$ und $b$ unterscheiden zu können, eine Forderung, die schon bei der Bildung von Mengen in Kapitel 2 erhoben wurde. Bei Dreiermengen ist dann zu verlangen, daß man $a$, $b$, $c$ unterscheiden kann und so fort. Bei der Einermenge besteht insofern eine gewisse Schwierigkeit, als im Deutschen das Wort für den unbestimmten Artikel „ein" (d. i. irgendein) Löffel übereinstimmt mit dem adjektivisch gebrauchten bestimmten Zahlwort „ein" (d. i. ein einziger) Löffel. Bei der Bildung von Einermengen benutzten wir den unbestimmten Artikel (wir nahmen nämlich *irgendein* Element aus $U$), und mit Einermengen bildeten wir dann erst das *bestimmte Zahlwort* „eins". Also auch hier liegt keine erschlichene Scheindefinition vor.

Damit ist aber der Begriff der Endlichkeit noch nicht genau genug umrissen. Wir wissen zwar jetzt, daß die leere Menge und die Mengen $M$, $M'$, $M''$, ... endlich sind, aber es könnte ja noch endliche Mengen geben, die nicht nach diesem Rezept gebildet sind. Dies soll ausgeschlossen werden. Damit gelangen wir zu folgender mathematischer Charakterisierung der Endlichkeit einer Menge:

ERKLÄRUNG:

▷ 1) Die leere Menge ist endlich.

2) Ist $M$ endlich, gehören ferner die Elemente von $M$ einem Individuenbereich $U$ an, der noch weitere Elemente enthält, und ist $a$ ein beliebiges Element von $U$, so ist die Vereinigungsmenge $M \cup \{a\}$ auch endlich.

3) Eine Menge ist nur dann endlich, wenn sie auf diese Art gebildet werden kann.

Diese drei Forderungen sind in folgender Erklärung präzisiert:

ERKLÄRUNG:

▷ Das System $\mathfrak{S}$ aller endlichen Mengen ist das „kleinste" Mengensystem, das

1. die leere Menge enthält,
2. mit einer Menge $M$ auch die Menge $M' = M \cup \{a\}$ ($a$ beliebiges Element der Grundmenge) enthält.

Das bedeutet: Ist $\mathfrak{T}$ irgendein Mengensystem, in dem 1) und 2) gelten, so ist $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$. Diese Erklärung der Endlichkeit von Mengen, die auf den englischen Mathematiker und Philosophen RUSSELL (BERTRAND RUSSELL, 1872 bis 1970) zurückgeht, ist nach dem Rekursionsverfahren[1] gebildet. Es wird eine endliche Menge, die leere Menge,

[1] Aus dem Lateinischen, recurrere, zurückgeben auf.

angegeben und gezeigt, wie man von einer vorliegenden endlichen Menge aus weitere endliche Mengen konstruieren kann.
In dieser Form ist die Endlichkeitsdefinition besonders gut für Beweise geeignet. Dies zeigt sich z. B. beim Beweis folgenden Satzes, dessen Inhalt unmittelbar einleuchtet.

SATZ:

▷ Die Vereinigungsmenge von zwei endlichen Mengen ist wieder endlich.

Der Leser, dem es mehr auf einen Überblick ankommt, kann den folgenden Beweis überspringen.

* Sei $M_0$ eine beliebige endliche Menge und $\mathfrak{S}$ das System derjenigen endlichen Mengen, die, mit $M_0$ vereinigt, wieder auf eine endliche Menge führen (Grundbereich $U$). Das Mengensystem $\mathfrak{S}$ ist sicher nicht leer. Es enthält z. B. nach 1) die leere Menge, es enthält aber auch, da $M_0$ endlich ist, gemäß 2) alle Einermengen. Sei $M$ eine beliebige Menge aus $\mathfrak{S}$, $a$ ein beliebiges Element von $U$, das nicht in $M$ enthalten zu sein braucht. Nun ist $M_0 \bigcup M$ endlich, da $M \in \mathfrak{S}$; also ist $(M_0 \bigcup M) \bigcup \{a\}$ nach 2) auch endlich. Auf Grund des für die Vereinigung von Mengen geltenden Assoziativgesetzes ist

$$(M_0 \bigcup M) \bigcup \{a\} = M_0 \bigcup (M \bigcup \{a\});$$
$$M \bigcup \{a\} = M'$$

ist mithin auch Element von $\mathfrak{S}$. Das Mengensystem $\mathfrak{S}$ enthält 1. die leere Menge, 2. mit einer Menge $M$ auch die Menge $M' = M \bigcup \{a\}$ ($a$ beliebig). $\mathfrak{S}$ enthält also nach der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition alle endlichen Mengen. Mithin ist die Vereinigungsmenge zweier endlicher Mengen wieder endlich.

Jetzt können wir auch präzisieren, was unter einer unendlichen Menge verstanden werden soll.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt **unendlich.**

Der Leser mag vielleicht diese Erklärung als überflüssig belächeln. Er bedenke aber, daß die Vorsilbe „un-" im Deutschen im allgemeinen nicht eine bloße Verneinung bedeutet. Zum Beispiel wird in der Elementargeometrie das ungleichseitige Dreieck folgendermaßen erklärt: „Ein Dreieck heißt ungleichseitig, wenn es kein Paar gleich langer Seiten besitzt." Ein Dreieck, das nicht gleichseitig ist, in dem also nicht alle drei Seiten gleich lang sind, braucht noch nicht ungleichseitig zu sein, es kann durchaus gleichschenklig sein.
Daß wir endliche Mengen mit 1000000 und mehr Elementen bilden können, daß es also „hinreichend große" Grundmengen gibt, wird gesichert durch das am Schluß des zweiten Kapitels erwähnte

Axiom:
Es gibt mindestens eine unendliche Menge.

In der Folge der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., in der es ja keine letzte Zahl gibt, haben wir ein Beispiel einer unendlichen Menge. Da wir aber bei Bildung der natür-

lichen Zahlen diese Folge noch nicht zur Verfügung haben, denke der Leser, um ein Beispiel einer unendlichen Menge vor Augen zu haben, etwa an die eine Gerade erfüllende Menge von Punkten.
Neben der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition werden auch andere verwendet. Wir werden später eine Definition kennenlernen, die sich auf eine typische Eigenschaft *unendlicher* Mengen stützt. Jedoch ist die RUSSELLsche Definition gut für die Konstruktion der natürlichen Zahlen geeignet.
Es sei noch darauf hingewiesen, daß wir oben von Mengen erster Stufe, zum Beispiel von Mengen von Gegenständen, ausgegangen sind und durch deren Vergleich Kardinalzahlen gewonnen haben. Auch die Definition der Endlichkeit wurde oben nur für Mengen erster Stufe ausgesprochen. Ebensogut hätten wir Mengen zweiter, dritter oder beliebiger Stufen miteinander vergleichen und auch die Endlichkeit für solche Mengen erklären können. Wir wollen uns aber hier auf Mengen erster Stufe als Ausgangspunkt beschränken, weil wir damit für die Bildung natürlicher Zahlen auskommen.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine **Kardinalzahl** heißt **endlich**, wenn sie Kardinalzahl einer endlichen Menge ist.
Unter einer **natürlichen Zahl** ist eine endliche Kardinalzahl zu verstehen:

Die Kardinalzahl der Einermengen, also der Mengen der Form $\{a\}$, wird als 1, die Kardinalzahl der Zweiermengen, also der Mengen der Form $\{a, b\}$ $(a \neq b)$ als 2, die Kardinalzahl der Mengen $\{a, b, c\}$ (alle Elemente verschieden) als 3 usw. bezeichnet. Wir fügen noch als 0 die Kardinalzahl der leeren Menge hinzu. Die leere Menge nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als es nur eine einzige leere Menge gibt und daher die betreffende Klasse nur aus einem Element, der Menge $\emptyset$, besteht.
Es sei darauf hingewiesen, daß bei der Bildung der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... nicht in irgendeiner versteckten Art vom Zählen bereits Gebrauch gemacht wurde.
Damit haben wir unser erstes Ziel erreicht: Die natürliche Zahl ist als Abstraktionsklasse ungeordneter Mengen unabhängig von qualitativen Besonderheiten der gezählten Dinge und von deren Anordnung.
Jede natürliche Zahl kann durch eine beliebige Menge der betreffenden Klasse vertreten werden. So kann die Drei dargestellt werden durch drei Schweine oder drei Häuser oder drei Punkte.

**Zusammenfassung:**
**Wir hatten für die Mengen $A$, $B$, $C$, ... eines Mengensystems $\mathfrak{S}$ eine Relation $R$ erklärt. $ARB$ bedeute, daß die Elemente von $A$ denen von $B$ eineindeutig zugeordnet werden können und beide Mengen sich dabei erschöpfen. Die Mengen $A$ und $B$ heißen dann gleichmächtig. Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation, die das Mengensystem $\mathfrak{S}$ in elementfremde Klassen von Mengen, genannt Kardinalzahlen, spaltet. Durch die Bedingungen 1, 2, 3 von S. 187 wurde die Endlichkeit von Mengen erster Stufe charakterisiert. Die Kardinalzahlen endlicher Mengen – wir nennen sie auch endliche Kardinalzahlen – wurden als natürliche Zahlen bezeichnet.**

### 5.1.3. *Die Nachfolgerrelation für natürliche Zahlen*

Nun mag sich der Leser fragen: Stimmen diese sogenannten natürlichen Zahlen, die ja nichts anderes als gewisse Abstraktionsklassen darstellen, wirklich mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., mit denen er als Kind zählen und rechnen gelernt hat, überein? Diese Frage kann an dieser Stelle noch nicht voll bejaht werden. Zum mindesten spiegeln aber die endlichen Kardinalzahlen wesentliche Eigenschaften der natürlichen Zahlen wider.

Eine der auffälligsten und wichtigsten Eigenschaften des Bereichs $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist es, daß jede Zahl genau eine unmittelbar auf sie folgende und – abgesehen von der Null – genau eine unmittelbar vorangehende besitzt. Dies ist ja der Grund dafür, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Brüche, die man der Größe nach ordnet – so, wie sie zum Beispiel auf dem Zahlenstrahl angetragen werden, – haben nicht diese Eigenschaft.

Diese Besonderheit der natürlichen Zahlen soll jetzt für endliche Kardinalzahlen nachgewiesen werden.

Zu diesem Zweck greifen wir jetzt noch einmal auf das Prinzip zurück, nach dem wir von einer endlichen Menge aus eine weitere bildeten.

ERKLÄRUNG:

▷ Sei $M$ eine endliche Menge mit der Kardinalzahl $m$. Es sei $a$ ein Element der Grundmenge $U$, aber $a \notin M$. Die Kardinalzahl der endlichen Menge $M' = M \cup \{a\}$ sei $m'$. Dann heißt $m'$ der **unmittelbare Nachfolger** von $m$.

Da wir die natürlichen Zahlen als endliche Kardinalzahlen definiert haben, ist damit eine Relation $R$ über der Menge der natürlichen Zahlen erklärt, die sogenannte *Nachfolgerrelation*. Sind $m$ und $m'$ natürliche Zahlen, so gilt $m R m'$ (das heißt: $m'$ ist der unmittelbare Nachfolger von $m$) genau dann, wenn die endliche Kardinalzahl $m'$ aus der endlichen Kardinalzahl $m$ gemäß obenstehender Erklärung gebildet ist.

Statt „unmittelbarer Nachfolger“ wird von jetzt an einfach nur „Nachfolger“ geschrieben. Da in diesem Abschnitt nur von unmittelbaren Nachfolgern, nicht von später nachfolgenden Elementen die Rede ist, braucht kein Mißverständnis befürchtet zu werden.

Der Nachfolger der natürlichen Zahl 0 ist demnach 1, der von 1 ist 2, der von 2 ist 3 und so fort. Die Nachfolgerrelation für natürliche Zahlen ist irreflexiv, asymmetrisch und nichttransitiv. Die Beweise dafür ergeben sich unmittelbar aus der Erklärung des Nachfolgers. Damit haben wir die im Bereich unserer altbekannten natürlichen Zahlen bestehende Nachfolgerrelation für die endlichen Kardinalzahlen nachgebildet.

Jetzt ist für die so definierten Nachfolger noch nachzuweisen, daß der mit ihrer Hilfe gebildete Bereich diejenigen Eigenschaften besitzt, die für den uns bekannten Bereich der natürlichen Zahlen typisch sind. Wir fassen sie in den folgenden Sätzen 1 bis 4 (Sätze über natürliche Zahlen) zusammen und ergänzen ihre Aufzählung durch einen fünften Satz, der eine nicht so offen vor Augen liegende Eigenschaft der natürlichen Zahlen ausdrückt.

SÄTZE über natürliche Zahlen:

▷ 1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl hat genau einen unmittelbaren Nachfolger.
3. Jede natürliche Zahl ist unmittelbarer Nachfolger von höchstens einer natürlichen Zahl.
4. Die natürliche Zahl 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
5. Wenn eine Menge $K$
   a) die Null enthält und
   b) mit jeder natürlichen Zahl $m$ auch deren unmittelbaren Nachfolger $m'$ enthält, dann enthält $K$ alle natürlichen Zahlen.

Dem Leser, dem es mehr auf einen Überblick ankommt, kann den folgenden Beweis überspringen.

✱ Um Satz 1 bis 5 zu beweisen, denken wir uns zunächst überall, wo „natürliche Zahl" steht, dafür „endliche Kardinalzahl" geschrieben. Die Eigenschaften 1, 2, 4 ergeben sich unmittelbar aus der Definition der endlichen Kardinalzahlen und der des Nachfolgers.
Um die Eigenschaft 3 zu beweisen, nehmen wir an, es gäbe zwei endliche Kardinalzahlen $m_1$ und $m_2$ mit demselben Nachfolger $m_1' = m_2'$. Die Klasse $m_1$ werde vertreten durch die endliche Menge $M_1$, die Klasse $m_2$ durch die endliche Menge $M_2$. Dann sind die Mengen $M_1'$ und $M_2'$, die durch Hinzunehmen eines weiteren Elements entstehen, gleichmächtig, da ihre Kardinalzahlen gleich sind. Sei $M_1' = M_1 \cup \{a\}$, $(a \notin M_1)$. Solch eine Vertretermenge von $m_1'$ gibt es sicher. Entsprechend sei $M_2' = M_2 \cup \{b\}$, $(b \notin M_2)$. Wir schließen nun folgendermaßen aus der Äquivalenz von $M_1'$ und $M_2'$ auf die von $M_1$ und $M_2$: Wir ordnen die Elemente $a$ und $b$ von $M_1'$ bzw. $M_2'$ einander zu. Dann müssen wegen $a \notin M_1$ und $b \notin M_2$ auch die Differenzmengen $M_1 = M_1' \setminus \{a\}$ und $M_2 = M_2' \setminus \{b\}$ eineindeutig aufeinander abbildbar sein, sie gehören zu derselben Klasse, also ist $m_1 = m_2$.
Bei diesem Beweis haben wir uns darauf gestützt, daß zwei endliche Mengen, die sich bei einer eineindeutigen Zuordnung ihrer Elemente zugleich erschöpfen, das bei jeder elementweise eineindeutigen Zuordnung tun. Auch dies gilt nicht für unendliche Mengen, wie im Kapitel 6 gezeigt wird.
Um die Eigenschaft 5 einer Menge $K$ von Kardinalzahlen zu beweisen, kleiden wir sie in die Form von Voraussetzung und Behauptung.
*Voraussetzung:* 1. $0 \in K$,
2. Wenn $k \in K$, so auch $k' \in K$.
*Behauptung:* $K$ enthält alle endlichen Kardinalzahlen.
*Beweis:* Wir gehen von den Kardinalzahlen, die ja als Klassen gleichmächtiger Mengen Ergebnisse eines Abstraktionsprozesses sind, zurück zu den Mengen, die diese Klassen vertreten. Da $K$ nach Voraussetzung 1 sicher nicht die leere Menge ist, gibt es Mengen, deren Kardinalzahlen zu $K$ gehören. Die Gesamtheit dieser Mengen (das ist ein Mengensystem) werde mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Die Elemente der zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Mengen sollen einem unendlichen Individuenbereich $U = \{a, b, c, \ldots\}$ angehören.
Der Beweis soll so geführt werden, daß für das Mengensystem $\mathfrak{M}$ die Eigenschaften a) und b) der Russellschen Endlichkeitsdefinition nachgewiesen werden:
a) Das Mengensystem $\mathfrak{M}$ enthält die leere Menge.
b) $\mathfrak{M}$ enthält mit einer Menge $A$ auch die Menge $A' = A \cup \{b\}$ $(b \in U;\, b \notin A)$.
Nach der Russellschen Endlichkeitsdefinition enthält das Mengensystem $\mathfrak{M}$ dann alle endlichen Mengen.
Da $\mathfrak{M}$ nur solche Mengen enthält, deren Kardinalzahlen in $K$ liegen, muß $K$ demnach alle endlichen Kardinalzahlen enthalten. Damit wäre dann unsere Behauptung bewiesen.

Man achte bei der folgenden Durchführung des soeben skizzierten Beweises auf folgende Entsprechungen:

| | |
|---|---|
| Kardinalzahlen | Mengen mit solchen Kardinalzahlen |
| $k_1, k_2, k_3, \ldots$ | $A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}, \ldots$ |
| Menge, die solche Kardinalzahlen als Elemente besitzt: | zugehöriges Mengensystem, das die Mengen $A_{k_i}$ als Elemente besitzt: |
| $K$ | $\mathfrak{M}$ |

Die Elemente der Mengen $A_{k_i}$ werden einem Individuenbereich $U = \{a, b, c, \ldots\}$ entnommen. Wir wenden uns jetzt der Untersuchung des Mengensystems $\mathfrak{M}$ zu. Da $K$ die Kardinalzahl 0 enthält, muß $\mathfrak{M}$ die leere Menge enthalten. Forderung a) ist also erfüllt. Sei jetzt $k$ eine beliebige von 0 verschiedene Kardinalzahl von $K$. Wir wählen eine Menge $A_k$, die der Klasse $k$ angehört. Eine solche gibt es sicher (↑ S. 189). Wegen der Voraussetzung 2 gehört auch $k'$, der Nachfolger von $k$, zu $K$. Nach der Definition des Nachfolgers läßt sich $k'$ vertreten durch die Menge $A_{k'} = A_k \cup \{b\}$, wobei $b$ ein beliebiges, nicht in $A_k$ enthaltenes Element der Grundmenge $U$ ist. Da $k'$ zu $K$ gehört, gehört $A_{k'}$ zu $\mathfrak{M}$. Das Mengensystem erfüllt also die Forderungen a) und b) der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition, enthält mithin alle endlichen Mengen. Demnach enthält $K$ alle endlichen Kardinalzahlen. Dies aber war die Behauptung.

Damit sind die Sätze 1 bis 5 für natürliche Zahlen bewiesen. Diese Sätze bilden das Fundament für die Lehre von den natürlichen Zahlen. Ihre Formulierung geht auf R. DEDEKIND (1888) und G. PEANO (1889) zurück. Sie werden nach dem Letztgenannten als PEANOsches Axiomensystem bezeichnet.[1]

**Zusammenfassung:**

**Unter einer natürlichen Zahl verstehen wir die Kardinalzahl einer endlichen Menge. Um zu erklären, wann eine Menge endlich heißt, legen wir eine hinreichend große Grundmenge $U$ zugrunde, aus der wir die Elemente für unsere Mengen schöpfen. Wir erklären dann endliche Mengen durch die Sätze:**

**a) Die leere Menge ist endlich,**

**b) wenn $M$ eine endliche Menge ist, so ist auch $M \cup \{a\}$ ($a$ beliebig, $a \in U$) endlich,**

**c) eine Menge ist nur dann endlich, wenn sie auf die durch a) und b) beschriebene Art gebildet ist.**

**Wir fügen noch hinzu:**

**Mengen, die nicht endlich sind, heißen unendlich. Es gibt mindestens eine unendliche Menge.**

**Die endlichen Mengen lassen sich auch schreiben als $\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_1, a_2\}$ ($a_1 \neq a_2$), $\{a_1, a_2, a_3\}$ ($a_1 \neq a_2$ usw.), ... Sie haben die Kardinalzahlen 0, 1, 2, 3, ...**

**Die natürliche Zahl $m'$ heißt Nachfolger der natürlichen Zahl $m$, wenn folgendes gilt: $M$ sei eine beliebige Menge mit der Kardinalzahl $m$. Es gibt in $U$ ein nicht in $M$ liegendes Element $a$, so daß $M'$ äquivalent zu $M \cup \{a\}$ ist. Kurz ausgedrückt: „$m'$ ist Nachfolger von $m$" bedeutet:**

**$M'$ ist äquivalent zu $M \cup \{a\}$, ($a \in U$, $a \notin M$).**

Für die natürlichen Zahlen gelten die fünf PEANOschen Axiome. Sie besagen, daß jede Zahl genau einen unmittelbaren Nachfolger und höchstens einen unmittelbaren Vor-

[1] GIUSEPPE PEANO, 1858 bis 1932.
RICHARD DEDEKIND, 1831 bis 1916.

gänger hat. Die Null hat keinen Vorgänger. Die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften, d. h., jede Menge, die die Null und mit einer natürlichen Zahl $m$ deren unmittelbaren Nachfolger enthält, umfaßt die ganze Menge der natürlichen Zahlen. Bei dem hier durchgeführten mengentheoretischen Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen wurden die PEANOschen Axiome bewiesen.

Es könnte einen Leser, der mit dem Terminus „Axiom" die Vorstellung eines unbeweisbaren Satzes verbindet, befremden, daß hier Axiome bewiesen werden. Auch in älteren methodischen Werken (z. B. bei LIETZMANN: Wesen der mathematischen Erkenntnis) wird vielfach unter einem Axiom ein unmittelbar einleuchtender Satz verstanden, der eines Beweises „weder fähig noch bedürftig" ist. Dies könnte dahin mißverstanden werden, daß es eine absolut geltende Einteilung aller mathematischen Sätze in Axiome und beweisbare Sätze gäbe. Ob aber ein Satz beweisbar ist oder nicht, ob er also als Axiom gilt oder nicht, hängt von seiner Stellung im Aufbau der betreffenden mathematischen Theorie ab. So werden die PEANOschen Sätze im nächsten Abschnitt tatsächlich als unbewiesene Sätze an den Anfang gestellt, also als „Axiome" (auch in LIETZMANNS Sinn) behandelt, während sie hier bewiesen wurden. Auch die Behauptung, ein Axiom müsse evident sein, bedürfe also keiner Begründung, ist anfechtbar. (Zum Begriff des Axioms vgl. auch Kap. 1, S. 24f.)

Wir hätten die natürlichen Zahlen auch unmittelbar, ohne auf Mengen zurückzugreifen, durch die fünf PEANOschen Axiome charakterisieren können. Die Rechenoperationen und die Kleiner-Relation lassen sich dann gestützt auf die Nachfolgerbeziehung erklären. Die für sie geltenden Rechengesetze und die weiteren Sätze aus der Theorie der natürlichen Zahlen kann man dann allein aus den PEANOschen Axiomen beweisen.
Dieser Weg soll auch nach Abschluß der mengentheoretischen Einführung der natürlichen Zahlen, die auch als **genetischer Aufbau**[1] des Bereichs der natürlichen Zahlen bezeichnet wird, beschritten werden.
Allerdings bietet der oben begonnene genetische Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen mancherlei Vorteile, u. a. entspricht er wahrscheinlich etwa der Entwicklung des Begriffs der natürlichen Zahl beim Kinde und auch der historischen Entwicklung.
Jetzt müssen wir, um mit natürlichen Zahlen in der gewohnten Weise operieren zu können, noch erklären, wann eine natürliche Zahl kleiner heißen soll als eine andere, und wie man mit natürlichen Zahlen rechnet.

### 5.1.4. *Ordnung*

Um die Kleiner-Relation für die natürlichen Zahlen zu erklären, greifen wir wieder auf die Kardinalzahlen endlicher Mengen zurück. Stellen wir uns das Bild vor, wie Helga den Tisch deckt. Teller, Messer und Gabeln liegen schon auf dem Tisch. Helga hat die Löffel in der Hand und will sie zu den Tellern legen, zu jedem Gedeck einen Löffel. Die Menge der Löffel hat aber weniger Elemente als die Menge der Gedecke. Es sind im

[1] Aus dem Griechischen; etwa zu übersetzen als der erzeugende Aufbau. In Gegensatz dazu steht der axiomatische Aufbau.

allgemeinen nur drei Fälle möglich: entweder ist die Menge der Löffel gleichmächtig mit der Menge der Gedecke, oder sie „reicht nicht", d. h., es bleiben Gedecke ohne Löffel, oder es sind zuviel Löffel da.
Wie die Gleichmächtigkeit, so können wir auch die „niedrigere" bzw. „höhere" Mächtigkeit von Mengen mit Hilfe der eineindeutigen Zuordnung der Elemente der betreffenden Mengen erklären.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine endliche Menge $A$ heißt von **niedrigerer Mächtigkeit** als eine Menge $B$, wenn $A$ einer echten Teilmenge von $B$ äquivalent ist. Die Menge $B$ heißt dann auch von **höherer Mächtigkeit.**

Es gilt nun folgender Satz:

SATZ:

▷ Wenn zwei endliche Mengen $A$, $B$ nicht äquivalent sind, so ist entweder $A$ von niedrigerer oder von höherer Mächtigkeit als $B$. Etwas anderes ist nicht möglich.

Der Beweis dieses Satzes zeigt wieder die Leistungsfähigkeit der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition (↗ S. 187). Um uns bequemer ausdrücken zu können, wollen wir zwei Mengen $M_1$, $M_2$, für die der Satz gilt, „vergleichbar" nennen. Wir wollen zeigen, daß das System aller mit der endlichen Menge $M_1$ vergleichbaren Mengen

a) die leere Menge enthält,
b) mit einer Menge $M$ auch die Menge $M' = M \cup \{a\}$ ($a$ beliebiges Element der Grundmenge $U$) enthält.

Dann enthält nach der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition dieses System alle endlichen Mengen, also sind alle endlichen Mengen vergleichbar.

*Beweis von a)*: Die leere Menge ist sicher mit $M_1$ vergleichbar, denn wenn $M_1$ selbst die leere Menge ist, so ist $\emptyset = M_1$, also äquivalent mit $M_1$, andernfalls ist $\emptyset$ mit einer echten Teilmenge von $M_1$, nämlich mit $\emptyset$, gleichmächtig, sogar identisch. Wir erinnern daran, daß die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist.

*Beweis von b)*: Wir nehmen an, wir wüßten bereits, daß $M$ mit $M_1$ vergleichbar ist. Dann haben wir zu zeigen, daß dann auch $M' = M \cup \{a\}$ mit $M_1$ vergleichbar ist. Wir untersuchen jeden der drei Fälle, in denen $M$ mit $M_1$ vergleichbar ist, einzeln.
1. $M$ sei mit $M_1$ gleichmächtig. Dann ist $M_1$ mit einer Teilmenge von $M' = M \cup \{a\}$ äquivalent, denn $M'$ enthält ja $M$ als Teilmenge. In diesem Fall ist also auch $M'$ mit $M_1$ vergleichbar.
2. $M_1$ sei einer echten Teilmenge von $M$ äquivalent. Dann ist $M_1$ erst recht einer echten Teilmenge von M' äquivalent. Auch in diesem Fall sind M' und $M_1$ vergleichbar.
3. Es sei $M$ einer echten Teilmenge $T$ von $M_1$ äquivalent.
Wir zeigen, daß dann $M' = M \cup \{a\}$ entweder äquivalent zu $M_1$ oder immer noch zu einer echten Teilmenge von $M_1$ äquivalent ist.
$\alpha$) Ist $a \in M$, so ist $M' = M \cup \{a\} = M$, also ist $M'$ auch zu $T$ äquivalent.
$\beta$) Ist $a \notin M$, so wählen wir aus $M_1 \setminus T$ ein Element $b$. Wenn wir die Zuordnung zwischen $M$ und $T$ beibehalten und das Element $a$ dem Element $b$ zuordnen, so ist $M' \sim T \cup \{b\}$,

und die rechts stehende Menge ist dann entweder gleich $M_1$ oder immer noch eine echte Teilmenge von $M_1$.

In beiden Fällen ist $M$ mit $M_1$ vergleichbar.

Der Satz ist damit bewiesen.

Wir erklären jetzt durch den Vergleich endlicher Mächtigkeiten eine Ordnungsrelation für natürliche Zahlen. Um zwei natürliche Zahlen $m_1$ und $m_2$ zu vergleichen, wählen wir eine beliebige Menge $M_1$ aus der Klasse der endlichen Kardinalzahl $m_1$ und eine Menge $M_2$ aus der Klasse von $m_2$ aus (↑ S. 189). Ist $M_1$ einer echten Teilmenge $T$ von $M_2$ äquivalent, so heißt $m_1$ kleiner als $m_2$. Wir sind aber nur dann zu solch einer Erklärung berechtigt, wenn die Entscheidung, ob $m_1$ kleiner als $m_2$ ist, von der Wahl der Vertretermenge unabhängig ist. Ersetzen wir $M_1$ durch eine äquivalente Menge $M_1'$ und $M_2$ durch eine äquivalente Menge $M_2'$, so ergibt sich aus $M_1 \sim T$, $M_1' \sim M_1$ als Folge der Transitivität der Gleichmächtigkeit sofort, daß $M_1' \sim M_1' \sim T$, und daß $T$ einer echten Teilmenge $T'$ von $M_2'$ äquivalent sein muß, mithin $M_1'$ ebenfalls. Die oben erklärte Relation, die wir in der üblichen Weise $m_1 < m_2$ schreiben wollen, ist also unabhängig von der Wahl des Vertreters.

ERKLÄRUNG:

▷ Die natürliche Zahl $m_1$ heißt **kleiner** als die natürliche Zahl $m_2$, wenn eine beliebige Menge aus der Klasse $m_1$ einer echten Teilmenge von einer Menge der Klasse $m_2$ äquivalent ist.

Es wird den Leser vielleicht befremden, daß jetzt erst die Kleinerrelation für natürliche Zahlen wie etwas Neues erklärt wird, nachdem doch schon mehrfach – vor allem in Kapitel 3 – Gebrauch von ihr gemacht wurde. In der Tat wurde die Bekanntschaft mit der Kleinerrelation für natürliche Zahlen und für Brüche vorausgesetzt. Wenn der Leser aber zurückblättert, wird er feststellen, daß diese Relation dort nur in Beispielen, nie zum Aufbau des Folgenden benutzt wurde. Jetzt geht es aber um die Konstruktion der natürlichen Zahlen aus Mengen. Wir stellen uns auf den Standpunkt, als wüßten wir noch nicht, wann eine natürliche Zahl $m_1$ kleiner heißt als eine natürliche Zahl $m_2$.

Es entsteht nun die Frage, ob die oben erklärte Kleinerrelation für natürliche Zahlen tatsächlich eine irreflexive Ordnungsrelation ist, wie wir es erwarten. Dazu ist zu zeigen, daß sie irreflexiv, transitiv und linear ist (Zum Begriff „linear" ↑ Kap. 3, S. 98). Dies soll im folgenden durchgeführt werden, um den Leser an die erforderliche Arbeitsweise zu gewöhnen.

*Irreflexivität:* Daß die Relation irreflexiv ist, d. h., daß für kein $m$ gilt $m < m$, liegt einfach daran, daß keine endliche Menge einer echten Teilmenge von sich äquivalent sein kann. Wenn im nächsten Kapitel unendliche Mengen betrachtet werden, wird dieser Punkt besonders beachtet werden müssen.

Für die folgenden Beweise sei $M_i$ stets ein Repräsentant von $m_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

*Transitivität:* Sei $m_1 < m_2$ und $m_2 < m_3$. Dann ist $M_1$ einer echten Teilmenge $T_2$ von $M_2$ und $M_2$ einer echten Teilmenge von $T_3$ von $M_3$ äquivalent. Offenbar ist die echte Teilmenge $T_2$ von $M_2$ bei der Abbildung von $M_2$ auf $T_3$ einer echten Teilmenge $T$ von $T_3$ äquivalent. Natürlich ist $T$ dann erst recht eine echte Teilmenge von $M_3$. Daher gilt $M_1 \sim T_2 \sim T$, $T \subset M_3$. Also gilt $m_1 < m_3$. Die Relation ist mithin transitiv.

Die *Linearität* braucht nicht bewiesen zu werden. Sie folgt aus dem Satz von S. 194.

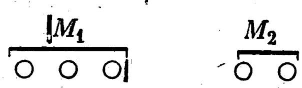
**Zusammenfassung:**
**Für zwei endliche Mengen $M_1, M_2$ gilt:**
**Wenn $M_1$ nicht mit $M_2$ gleichmächtig ist, so ist entweder $M_1$ einer echten Teilmenge von $M_2$ oder $M_2$ einer echten Teilmenge von $M_1$ äquivalent.**
**Eine natürliche Zahl $m_1$ heißt kleiner als die natürliche Zahl $m_2$, wenn eine beliebige Vertretermenge $M_1$ von $m_1$ einer echten Teilmenge von $M_2$ äquivalent ist. Diese Relation ist unabhängig von der Auswahl der Vertretermengen.**
**Die für natürliche Zahlen erklärte Kleinerrelation stellt eine irreflexive Ordnungsrelation dar.**

### 5.1.5. *Rechenoperationen*

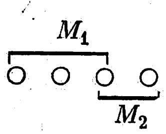
Wir kommen jetzt zur Erklärung der Rechenoperationen für natürliche Zahlen, also für endliche Kardinalzahlen. Daß auch mit „unendlichen“ Kardinalzahlen gerechnet werden kann – allerdings in einer vom Üblichen stark abweichenden Art – wird im Kapitel 6 gezeigt werden.

**Addition**

Um die Addition einzuführen, denken wir daran, wie wir im ersten Schuljahr bei dieser Gelegenheit vorgehen. Nehmen wir an, wir hätten eine genügende Menge Kastanien zur Verfügung. Um $3 + 2$ zu errechnen, legen wir eine Dreiermenge $M_1$ und eine Zweiermenge $M_2$ von Kastanien.




Dann bilden wir die Vereinigungsmenge. Der Vergleich mit einer Fünfermenge zeigt, daß die Vereinigungsmenge fünf Elemente besitzt. Wir erklären also die Addition durch die Vereinigung zweier Vertretermengen.
Nun dürfen aber die Mengen $M_1$ und $M_2$ nicht folgendermaßen ausgewählt werden:




Jetzt würde die Vereinigungsmenge nur vier Elemente haben. Wenn wir das soeben beschriebene Verfahren sinngemäß nachbilden, gelangen wir zu folgender Erklärung der Addition.

ERKLÄRUNG:
▷ Unter der **Summe** $m_1 + m_2$ der zwei natürlichen Zahlen $m_1, m_2$ verstehen wir die Kardinalzahl $m_3$ der Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_2$, wobei $M_1$ und $M_2$ elementefremde endliche Mengen mit der Kardinalzahl $m_1$ bzw. $m_2$ sind.

Nun wollen wir einem Paar natürlicher Zahlen, z. B. [3,2] *genau eine* natürliche Zahl, nämlich 5, als Summe zuordnen. Wir müssen uns daher vergewissern, daß die Zahl $m_3$ von der Wahl der Vertretermengen $M_1$, $M_2$ unabhängig ist.
Sei $M_1^* \sim M_1$, $M_2^* \sim M_2$, und auch $M_1^*$ und $M_2^*$ seien elementefremd. Dann ist sicher

$$(M_1^* \cup M_2^*) \sim (M_1 \cup M_2).$$

Man braucht nämlich nur auf die links stehende Menge nacheinander die beiden Abbildungen anzuwenden, die $M_1^*$ in $M_1$ bzw. $M_2^*$ in $M_2$ überführen. Wir gelangen über $M_1^*$ und $M_2^*$ also zu derselben Kardinalzahl $m_3$.

SATZ:

▷ Zu je zwei natürlichen Zahlen $m_1$, $m_2$ gehört genau eine Summe $m_3 = m_1 + m_2$. Die Zuordnung $[m_1, m_2] \rightarrow m_3$ wird als Addition bezeichnet.

Für die Addition von zwei natürlichen Zahlen gilt:

SATZ:

▷ Sind $m_1$ und $m_2$ beliebige natürliche Zahlen, so ist $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus der im Kapitel 2 behandelten Tatsache, daß die Bildung der Vereinigungsmenge kommutativ ist (↑ S. 48). Weiter gilt das Assoziativgesetz der Addition:

SATZ:

▷ Sind $m_1$, $m_2$, $m_3$ beliebige natürliche Zahlen, so ist
$(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$.

Der Beweis ergibt sich aus dem entsprechenden Satz für Vereinigungsmengen (↑ Kap. 2, S. 48).
Es liegt nahe, wie man die Addition von mehr als zwei Summanden, also
$m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, erklärt:
Man bildet wiederholt Vereinigungsmengen $M = ((\ldots(M_1 \cup M_2) \cup M_3) \ldots) \cup M_n$. Die Vertretermengen müssen paarweise elementefremd sein, d. h. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cap M_3 = \emptyset, \ldots, M_2 \cap M_3 = \emptyset, \ldots, M_{n-1} \cap M_n = \emptyset$. Bei der Vereinigungsmenge $M$ können die Klammern weggelassen werden. Unter der Summe
$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ist dann die Kardinalzahl von $M$ zu verstehen.

## Subtraktion

Wir wollen jetzt die Differenz aus zwei natürlichen Zahlen $m_1$, $m_2$ erklären. Zuvor erweitern wir die Definition der Kleinerrelation von S. 195 durch folgende

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Zahl $m_2$ **heißt kleiner gleich** $m_1$, geschrieben $m_2 \leqq m_1$ ($m_1$ und $m_2$ sind natürliche Zahlen), wenn entweder $m_2 < m_1$ oder $m_2 = m_1$ ist, wenn also $m_2$ nicht größer als $m_1$ ist.

Um die Differenz von zwei natürlichen Zahlen $m_1 - m_2$ $(m_2 \leqq m_1)$ zu bilden, greifen wir auf die Differenzmenge zurück. Wegen $m_2 \leqq m_1$ ist jede Vertretermenge der endlichen Kardinalzahl $m_2$ einer Teilmenge einer beliebigen Menge $M_1$ aus der Klasse $m_1$ äquivalent. Sei $M_2$ solch eine Teilmenge. Wir bilden $M_3 = M_1 \setminus M_2$. Diese Menge ist sicherlich endlich. Ihre Kardinalzahl sei $m_3$. Dann heißt $m_3$ **Differenz** aus $m_1$ und $m_2$, geschrieben $m_3 = m_1 - m_2$. Der Nachweis, daß diese Differenz von der Wahl der Vertretermenge unabhängig ist, bleibe dem Leser überlassen.

Aufgabe 1

ERKLÄRUNG:

▷ Ist die natürliche Zahl $m_2$ kleiner oder gleich der natürlichen Zahl $m_1$, so ist die Differenz $m_3 = m_1 - m_2$ eindeutig bestimmt. Die Zuordnung $[m_1, m_2] \to m_3$ wird als **Subtraktion** bezeichnet.

Es ist $M_3$ die leere Menge, wenn $M_2 = M_1$, also $m_2 = m_1$ ist; $M_3$ ist mit $M_1$ identisch, wenn $M_2$ die leere Menge ist. Aus diesen Fällen ergibt sich: $0 \leqq m_1 - m_2 \leqq m_1$, $m_1 - m_1 = 0$, $m_1 - 0 = m_1$.

Ferner folgt aus $(M_1 \setminus M_2) \cup M_2 = M_1$, wobei $M_2 \subseteqq M_1$ ist,

$$(m_1 - m_2) + m_2 = m_1.$$

(Man beachte, daß $M_1 \setminus M_2$ und $M_2$ elementefremd sind!)

**Multiplikation**

Um das Produkt aus zwei natürlichen Zahlen, etwa $3 \cdot 4$, zu erklären, greifen wir wieder auf ein Verfahren zurück, das im ersten Schuljahr angewendet werden kann. Wir legen drei Reihen von je vier Kastanien hin:

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

Die Vereinigungsmenge $M$ ist einer Zwölfermenge äquivalent. Dieses Verfahren bilden wir nach und wählen drei paarweise elementefremde Vierermengen, die wir vereinigen.

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \\ A' &= \{a_1', a_2', a_3', a_4'\}, \\ A'' &= \{a_1'', a_2'', a_3'', a_4''\}, \\ M &= A \cup A' \cup A''. \end{aligned}$$

Auch hier ist wieder wichtig, daß die Mengen elementefremd sind. Wir haben damit das Produkt aus zwei natürlichen Zahlen auf eine wiederholte Addition gleicher Summanden zurückgeführt. Um aber das Kommutativgesetz der Multiplikation bequem herleiten zu können, brauchen wir noch eine weitere Betrachtung. Man könnte, um zu zeigen, daß $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ ist, das Schema mit den Kastanienreihen von der Seite ansehen, so daß man vier Dreierreihen untereinander sieht.
Wir wollen hier einen anderen Weg einschlagen.
Erinnern wir uns des Beispiels in Kapitel 2, das der Einführung des Kreuzprodukts zweier Mengen diente: Drei Herren (Menge $A$) nehmen sich vor, daß jeder von ihnen

mit jeder der anwesenden vier Damen (Menge $B$) tanzt (↑ S. 56). Dabei werden $3 \cdot 4 = 12$ Paare gebildet. Sie stellen die Elemente der Kreuzmenge $A \times B$ dar. Um dieses Vorgehen formal darzustellen, wählen wir als Vertretermenge für die Vier die Menge $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, als Vertretermenge für die Drei eine Menge $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Jetzt bilden wir die Kreuzmenge $A \times B$:

$$\text{(II)} \qquad \begin{array}{l} \{[a_1, b_1], [a_2, b_1], [a_3, b_1], [a_4, b_1], \\ \ [a_1, b_2], [a_2, b_2], [a_3, b_2], [a_4, b_2], \\ \ [a_1, b_3], [a_2, b_3], [a_3, b_3), [a_4, b_3]\}. \end{array}$$

Der Vergleich von (I) mit (II) zeigt, daß sich die Elemente von $A \cup A' \cup A''$ eineindeutig den Elementen von $A \times B$ zuordnen lassen, indem wir der Reihenfolge nach vorgehen, und daß sich beide Mengen dabei erschöpfen. Dieses Vorgehen, das wir uns an einer Vierermenge und einer Dreiermenge klargemacht haben, können wir auf beliebige endliche Mengen übertragen. Hier soll auf die Durchführung verzichtet werden.

ERKLÄRUNG:

▷ Unter dem **Produkt** $a \cdot b$ zweier natürlicher Zahlen $a$, $b$ verstehen wir die Kardinalzahl der Kreuzmenge $A \times B$, wobei $A$ bzw. $B$ beliebige Mengen mit der Kardinalzahl $a$ bzw. $b$ sind.

Wir brauchen diesmal nicht zu fordern, daß $A$ und $B$ elementefremd sein sollen. Der Leser prüfe dies am Schema (II) nach, indem er etwa $b_1$ durch $a_1$ ersetzt.
Das Produkt ist wieder eindeutig bestimmt. Ersetzen wir nämlich $A$ und $B$ durch äquivalente Mengen $A'$ bzw. $B'$, so gilt

$$(A' \times B') \sim (A \times B).$$

Die eindeutige Zuordnung $[a, b] \rightarrow c = ab$ wird als **Multiplikation** bezeichnet.
Die Definition des Produkts zweier natürlicher Zahlen mit Hilfe des Kreuzprodukts zweier endlicher Mengen liefert uns sofort das **Kommutativgesetz der Multiplikation**: $a \cdot b = b \cdot a$. Es gilt für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, da das Kreuzprodukt $B \times A$ mit $A \times B$ gleichmächtig ist. Um das zu erkennen, stellen wir $B \times A$ wieder in einem Schema auf, ändern aber die Reihenfolge ab, in der wir die Elemente der Kreuzmenge hinschreiben. (Dies ist möglich, da wir es mit beliebigen, nicht notwendig geordneten Mengen von Paaren zu tun haben.)

$$\text{(III)} \qquad \begin{array}{l} \{[b_1, a_1], [b_1, a_2], [b_1, a_3], [b_1, a_4], \\ \ [b_2, a_1], [b_2, a_2], [b_2, a_3], [b_2, a_4], \\ \ [b_3, a_1], [b_3, a_2], [b_3, a_3], [b_3, a_4]\}. \end{array}$$

Die in Schema (III) geschriebene Menge ist, wie man bei Zuordnung der Paare in der aufgeschriebenen Reihenfolge sieht, gleichmächtig mit der des Schemas (II).
Mit Hilfe des Kreuzprodukts ergibt sich ferner folgender Satz:

SATZ:

▷ Für beliebige natürliche Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt stets
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Der entsprechende Satz für das Kreuzprodukt lautet nämlich:

SATZ:

▷ Für beliebige Mengen $A, B, C$ gilt stets $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

Dies ergibt sich aus den Betrachtungen von Kap. 3, S. 91. Die Ausdehnung des Assoziativgesetzes auf mehrere Faktoren soll hier nicht behandelt werden, da sich die dafür erforderlichen Betrachtungen leichter bei dem im nächsten Abschnitt besprochenen axiomatischen Aufbau der natürlichen Zahlen durchführen lassen (S. 202ff.). Schließlich gilt für Addition und Multiplikation das **Distributivgesetz**:

SATZ:

▷ Sind $a, b, c$ beliebige natürliche Zahlen, so gilt stets $a(b + c) = ab + ac$.

Um ein Beispiel für derartige Beweise zu geben, soll diese Behauptung hier bewiesen werden. Dazu müssen wir zeigen:

$$A \times (B \cup C) \sim (A \times B) \cup (A \times C) \quad (B \cap C = \emptyset).$$

Links vom Äquivalenzzeichen steht die Menge, die entsteht, wenn wir jedes Element von $A$ mit jedem Element von $B$ und dann mit jedem Element von $C$ paaren. Dabei entstehen verschiedene Elemente, denn wegen der Definition der Addition haben wir für die Vertretermengen $B$ und $C$ der endlichen Kardinalzahlen $b$ und $c$ elementefremde Mengen gewählt. Es ergeben sich, wenn man sich die Elemente hintereinander hingeschrieben denkt, genau die Elemente der Vereinigungsmenge $(A \times B) \cup (A \times C)$. Da $A \times B$ und $A \times C$ elementefremd sind, steht rechts ein Repräsentant für die Kardinalzahl $ab + ac$. Damit ist das Distributivgesetz bewiesen.

Aufgabe 2

**Zusammenfassung:**

**Die Addition von natürlichen Zahlen $a, b$ wird erklärt durch die Kardinalzahl der Vereinigungsmenge $A \cup B$, wobei $A$ und $B$ Vertreter von $a$ bzw. $b$ und elementefremd sind.**

**Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen $a - b$ $(b \leqq a)$, wird erklärt als die Kardinalzahl der Differenzmenge $A \setminus B$, wobei $A$ aus der Klasse $a$, $B$ aus der Klasse $b$ $(B \subseteq A)$ gewählt ist.**

**Das Produkt $a \cdot b$ wird erklärt als Kardinalzahl von $A \times B$.**

**Die Summe, die Differenz und das Produkt von zwei natürlichen Zahlen sind unabhängig von der Auswahl der Vertretermengen, sofern nur die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Für die Addition und die Multiplikation gelten folgende Gesetze $(a, b, c \in N)$:**

| | | |
|---|---|---|
| **Kommutativgesetz** | **der Addition** | $a + b = b + a$ |
| | **der Multiplikation** | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| **Assoziativgesetz** | **der Addition** | $(a + b) + c = a + (b + c)$ |
| | **der Multiplikation** | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ |
| **Distributivgesetz** | | $a(b + c) = ab + ac$ |

**Division**

Uns fehlt jetzt noch die Erklärung der Division. Wir definieren sie mit Hilfe der Multiplikation.
Es seien $a$ und $b$ natürliche Zahlen, $b \neq 0$. Wenn es eine natürliche Zahl $c$ gibt, so daß $a = b \cdot c$, so heißt $c$ **Quotient aus $a$ und $b$**, geschrieben $c = a:b$.
Nun wissen wir, daß die Division von natürlichen Zahlen nicht immer ausführbar ist, ebenso wie die Subtraktion. Zum Beispiel 5:2 „geht nicht", wie die Schüler sagen. Sicher ist aber, daß in denjenigen Fällen, wo „es geht", etwas ganz Bestimmtes herauskommt. So ergibt die Division 72:6 die natürliche Zahl 12. Wer etwas anderes errechnet, irrt sich. Es gilt nämlich folgender Satz:

SATZ:

▷ Wenn ein Quotient $a:b$ existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

Wir wollen uns den Beweis dieses wichtigen Satzes noch aufsparen, weil wir ihn später bequem mit Hilfe eines gleichfalls bedeutsamen Rechengesetzes führen können.
Wir formulieren zunächst die sogenannten **Monotoniegesetze**.

Für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt:
Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
Aus $a < b$ und $c \leqq a$ folgt $a - c < b - c$.
Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$.
Aus $a = b$ folgt $a + c = b + c$, $a \cdot c = b \cdot c$, $a - c = b - c$.

Von den Beweisen, die sich sämtlich auf die entsprechenden Definitionen stützen, sei hier nur eine Probe gegeben.

*Voraussetzung:* $a < b$.

*Behauptung:* $a + c < b + c$.

Zum *Beweis* wählen wir als Vertretermengen $A$, $B$, $C$, wobei $C$ zu $A$ elementefremd sein soll. Es sei ferner $C_1$ eine zu $B$ elementefremde Menge, die zu $C$ äquivalent sei. Beide Mengen haben also die Kardinalzahl $c$. Aus $a < b$ folgt, daß $A$ einer echten Teilmenge $T$ von $B$ äquivalent ist: $A \sim T$, $T \subset B$. Dann gilt:

$$A \cup C \sim T \cup C_1.$$

$T$ ist als Teilmenge von $B$ zu $C_1$ elementefremd. Ferner ist $T \cup C_1$ eine echte Teilmenge von $B \cup C_1$. Also gilt $a + c < b + c$.
Jetzt läßt sich die eindeutige Bestimmtheit des Quotienten leicht beweisen. Nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene natürliche Zahlen $c_1$ und $c_2$, so daß $a:b = c_1$ und $a:b = c_2$. Sei etwa $c_1 < c_2$. Daraus folgt aber aus dem Monotoniegesetz für die Multiplikation wegen $b > 0$, daß $c_1 \cdot b < c_2 \cdot b$ ist. Da aber in dieser Ungleichung rechts und links die natürliche Zahl $a$ steht, ist dies ein Widerspruch. Es muß $c_1 = c_2$ sein.
Die Zuordnung $[a, b] \rightarrow c = a:b$ heißt **Division**.
Damit sind wir an dem Ziel, das wir uns gesteckt hatten, die grundlegenden Eigenschaften der natürlichen Zahlen nachzuweisen, angelangt. Zwar könnten wir noch

Potenz, Wurzel, Logarithmus einführen. Wir werden jedoch diese „höheren“ Rechenoperationen erst im nächsten Abschnitt kurz behandeln.

Aufgabe 3

### Einige weitere Rechenregeln

Selbstverständlich gibt es noch viele weitere Sätze über das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Zum Beispiel gelten unter der Voraussetzung, daß alle vorkommenden Operationen ausführbar sind, für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ die Formeln:

$$\begin{aligned} a(b-c) &= ab - ac \\ a + (b-c) &= (a+b) - c \\ a - (b+c) &= (a-b) - c \\ a - (b-c) &= (a-b) + c \\ (b+c):a &= b:a + c:a \quad (a \neq 0) \\ ac:bc &= a:b \quad (b > 0, c > 0) \end{aligned}$$

Die Beweise lassen sich mit Hilfe der bisher behandelten Rechengesetze führen. Ein Zurückgehen auf Mengen ist nicht mehr erforderlich. Die Durchführung im einzelnen würde hier zu weit führen. Nur für die zuletzt genannten Formeln sei ein Beweis geführt, weil es sich hier um die Grundlage für das Erweitern und Kürzen von Brüchen handelt.

*Voraussetzung:* $b > 0$, $c > 0$.

*Behauptung:* Für alle $a$, $b$, $c$ gilt, sofern ausführbar: $ac : bc = a:b$.

Zum Beweis setzen wir $a:b = x$. Dann gilt $x \cdot b = a$. Durch Multiplikation mit der von 0 verschiedenen Zahl $c$ wird daraus auf Grund des oben angeführten Monotoniegesetzes $x \cdot bc = ac$ oder $x = ac : bc$.

Aufgabe 4 und 5

## 5.2. Natürliche Zahlen – Axiomatischer Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen

Wie oben schon angedeutet, soll jetzt aus verschiedenen Gründen noch ein zweiter Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen vorgenommen werden, der sich nicht auf die Mengenlehre stützt. Bei diesem Weg wollen wir uns vorläufig auf den Standpunkt stellen, als ob die natürlichen Zahlen bereits vorlägen. Wir werden ihre Eigenschaften untersuchen und dabei zu den PEANOschen Axiomen gelangen. Die Theorie der natürlichen Zahlen soll dann aber *allein gestützt auf die* PEANO*schen Axiome* entwickelt werden. Dabei ist es ganz gleichgültig, wie wir zu diesen Axiomen gelangt sind. Am Schluß wird sich zeigen, daß alle Zahlenbereiche, auf die die PEANOschen Axiome „passen“, hinsichtlich der Nachfolgerrelation isomorph sind. Wenn die Rechenoperationen und die Ordnung entsprechend erklärt werden, erstreckt sich die Isomorphie auch auf diese Relationen. Man kommt infolgedessen beim Rechnen in solchen isomorphen Bereichen stets zu entsprechenden Resultaten. Dies wird dann eine der wichtigsten Grundlagen bei Erweiterungen unseres Zahlenbereichs sein.

Wenn wir jetzt unser bekanntes System der natürlichen Zahlen analysieren, wollen wir zur Abwechslung einmal die Null *nicht* als natürliche Zahl ansehen. Damit soll zugleich dokumentiert werden, daß es eine reine Frage der Verabredung – und der Zweckmäßigkeit – ist, ob man 0 als natürliche Zahl ansieht oder nicht. Hier handelt es sich nämlich nicht um ein tiefliegendes philosophisches Problem, wie zuweilen – allerdings nie von Mathematikern oder Wissenschaftlern, die in die Probleme der Mathematik eingedrungen sind – behauptet wird.

Wir betrachten also die Folge 1, 2, 3, 4, .... Auf jede Zahl folgt unmittelbar eine andere. Es gibt also keine letzte Zahl. Umgekehrt kann jede natürliche Zahl – abgesehen von der Eins – als Nachfolger genau einer anderen angesehen werden. Die Eins ist kein Nachfolger. Sie ist die erste natürliche Zahl. Die Bezeichnung, Nachfolger bzw. Vorgänger zu sein, ist eindeutig. So ist z. B. der Nachfolger von 99099 die Zahl 99100, der Vorgänger von 100000 ist 99999.

Es gibt aber noch eine sehr wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen, die nicht so auf der Hand liegt. Um sie zu finden, stellen wir uns den Holzturm eines trigonometrischen Punktes vor. Wer einmal am Fuß solch eines Gerüsts stand und sich an der weiten Aussicht erfreute, der wollte vielleicht noch „höher hinaus" und besah sich die kräftigen Holzsprossen, die zur Spitze führen, genauer. Sie sehen recht vertrauenerweckend aus, und ihr Abstand ist auch nicht zu groß. Steht man auf einer, so kann man gewiß die nächste Sprosse erreichen. Aber leider sind die unteren Sprossen durch Bretter verschlossen. Die erste freie Stufe liegt hoch über der Reichweite unserer Arme. Wenn wir uns nicht auf eine waghalsige und noch dazu offenbar verbotene Kletterei einlassen wollen, können wir nicht nach oben gelangen.

Vergleichen wir das Erklimmen einer Sprosse von der nächsttieferen aus mit dem Weiterschreiten in der Folge der natürlichen Zahlen, so hinkt dieser Vergleich insofern, als es nur endlich viele Sprossen, aber unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Etwas besser ist folgender Vergleich:

Wir stellen uns einen Turm vor, der sich in zwei Merkmalen von unserem Holzgerüst unterscheidet: Er soll unendlich hoch sein, und es soll in ihm eine Wendeltreppe aufwärts führen, deren erste Stufe uns – im Gegensatz zum vorliegenden Beispiel – erreichbar ist. Dann können wir sicher, wenn wir wollen, jede beliebige Stufe erreichen. Um die dazu erforderliche Zeit wollen wir uns nicht kümmern. Wir denken uns jetzt die Stufen 1, 2, 3, ... numeriert. Dann können wir unsere Erfahrung auf Zahlen übertragen und sagen: Wenn wir mit 1 anfangen und von einer natürlichen Zahl stets zu ihrem Nachfolger gelangen können, so ist jede natürliche Zahl erreichbar.

Nun soll die Aussage $\mathsf{H}(a)$ bedeuten: Die natürliche Zahl $a$ hat die Eigenschaft $\mathsf{H}$. Nehmen wir an, $\mathsf{H}(1)$ sei eine wahre Aussage. Nehmen wir weiter an, wir könnten aus der Gültigkeit von $\mathsf{H}(n)$ für ein beliebiges $n$ die Gültigkeit von $\mathsf{H}$ für den Nachfolger $n'$ von $n$ folgern. Dann ist die Aussage $\mathsf{H}$ sicher für jedes $n$ richtig. Wir können die Gültigkeit von $\mathsf{H}$ nämlich von einer Stufe zur nächsten übertragen, und da die erste Stufe im Gegensatz zur Sprossenleiter auf dem trigonometrischen Punkt erreichbar ist, muß die Aussage $\mathsf{H}$ für jede beliebige natürliche Zahl gelten.

Betrachten wir als Beispiel den Fall, daß $\mathsf{H}(a)$ bedeutet: Die Anzahl der Möglichkeiten, wie man eine Menge von $a$ Elementen aufschreiben kann, ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a$. (Der Leser beachte, daß Mengen in diesem Abschnitt nur in Beispielen vorkommen! Der Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen wird hier nicht auf Mengen gestützt.) Wir

wollen die Richtigkeit von H für eine beliebige natürliche Zahl prüfen. Sicher ist H(1) richtig, denn eine Einermenge kann man nur auf eine Art hinschreiben.
Nehmen wir an, es gebe irgendein $n$, so daß H($n$) gilt. Das bedeutet: Eine Menge $M_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ von $n$ Elementen, die einer Grundmenge entnommen sind, kann auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ Weisen geschrieben werden. Es sei $u_{n+1}$ ein Element der Grundmenge, das nicht in $M_n$ enthalten ist. Wir bilden die Vereinigungsmenge

$$M_n \cup \{u_{n+1}\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}\}.$$

Das neu hinzugenommene Element $u_{n+1}$ kann an erster, zweiter, ..., $n$-ter oder $(n+1)$-ter Stelle stehen. Wo aber immer es steht, die übrigen $n$ Elemente können dann in einer beliebigen Reihenfolge geschrieben werden. Wenn wir schon wissen, daß die Anzahl der Möglichkeiten für $n$ Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ beträgt, so muß die Anzahl der Möglichkeiten für $n+1$ Elemente $(n+1)$ mal so groß sein, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)$ betragen. Nun ist H(1) richtig, d. h., die Anzahl der Möglichkeiten für ein Element ist 1. Aus H(1) folgt H(2), d. h., die Zahl der Möglichkeiten für zwei Elemente ist $1 \cdot 2$. Die Menge $M_2 = \{u_1, u_2\}$ kann in der Tat auch geschrieben werden als $\{u_2, u_1\}$. Aus H(2) folgt H(3). Es ist

$$\begin{aligned} M_3 &= \{u_1, u_2, u_3\} = \{u_1, u_3, u_2\} = \{u_2, u_1, u_3\} = \{u_2, u_3, u_1\} \\ &= \{u_3, u_1, u_2\} = \{u_3, u_2, u_1\}. \end{aligned}$$

Das sind $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ Möglichkeiten und so weiter.
Daß wir „und so weiter“ sagen dürfen, ist eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Wir können sie in der Form folgenden Satzes formulieren:

SATZ:

▷ Angenommen, eine Aussage über natürliche Zahlen sei richtig für 1; (a)
es sei erwiesen, daß aus ihrer Gültigkeit für irgendeine natürliche Zahl $n$ die Gültigkeit für deren Nachfolger $n'$ folgt; (b)
dann gilt die Aussage für jede beliebige natürliche Zahl. (c)

Dieser Satz wird als **Prinzip der vollständigen Induktion** bezeichnet. Die Annahme (a) wird als **Induktionsanfang**, die Folgerung von H($n'$) aus H($n$) als **Induktionsschritt** bezeichnet. Dabei wird H($n$) die **Induktionsvoraussetzung**, H($n'$) die **Induktionsbehauptung** genannt.
Ein Leser, der mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nicht vertraut ist, könnte auf den Gedanken kommen, daß in seiner Aussage ein Zirkelschluß vorliegt. Die Induktionsvoraussetzung besagt doch: Wir nehmen an, daß der Satz für irgendeine – also für eine beliebige – natürliche Zahl $n$ bereits gilt. Dies ist aber doch gerade die Aussage (c), die erst bewiesen werden soll! Es sieht so aus, als ob wir annehmen, die Behauptung sei richtig, und dann daraus schließen, daß sie in der Tat richtig ist! Dies wäre freilich ein unzulässiger Zirkelschluß. Dem ist aber nicht so.
Hier liegt der gleiche Unterschied vor, der schon in Kapitel 2 gelegentlich bei der „falschen“ Formel „$a + (bc) = (a + b)(a + c)$“ erwähnt wurde (↗ S. 51). An dieser Stelle ist bereits auf den Unterschied zwischen den folgenden beiden Aussagen hingewiesen worden:

1. „*Es gibt* Zahlen $a$, $b$, $c$, so daß $a + bc = (a + b)(a + c)$ ist" (richtige Aussage!).
2. „*Für alle* Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt $a + bc = (a + b)(a + c)$" (falsche Aussage!).

Daher kann ja von der Formel $a + bc = (a + b)(a + c)$ weder ausgesagt werden, daß sie richtig, noch daß sie falsch ist, mag dies auch zunächst seltsam anmuten.

Der Inhalt der Behauptung (c) des Prinzips der vollständigen Induktion ist aber:

„*Für jedes* $n$ gilt $\mathsf{H}(n)$".

Der Inhalt der Induktionsvoraussetzung in (b) ist:

„Wir nehmen an, *es gibt ein* $n$, so daß $\mathsf{H}(n)$ gilt."

Dies ist eine andere, und zwar eine viel schwächere Aussage als (c). Es wird nur die Existenz *einer einzigen* natürlichen Zahl $k$ vorausgesetzt, für die $\mathsf{H}(k)$ gilt. Wenn daraus $\mathsf{H}(k + 1)$ geschlossen werden kann, so gilt $\mathsf{H}(n)$ für *jedes* $n$. Die Verwendung von zwei verschiedenen Buchstabensymbolen $k$ und $n$ soll dem oben beschriebenen Irrtum vorbeugen.[1]

BEISPIEL:

Die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen beträgt

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. *Induktionsanfang:*

   Für $n = 1$ ist die Formel richtig: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

2. *Induktionsschritt:*

   Es wird nun gezeigt, daß aus der Richtigkeit der Formel für $n = k$ ihre Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

*Induktionsvoraussetzung:* Die Formel sei für $n = k$ richtig, also

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

*Induktionsbehauptung:* Die Formel gilt auch für $n = k + 1$, also

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

*Beweis der Induktionsbehauptung:* Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird umgeformt:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Das ist aber gerade die in der Induktionsbehauptung aufgestellte Formel. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt dann aus Induktionsanfang und Induktionsschritt die Gültigkeit der behaupteten Formel für alle natürlichen Zahlen $n$.

---

[1] Vgl. Mathematik, Lehrbuch für die erweiterte Oberschule, Klasse 11. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 12ff.

Wir fassen noch einmal die gefundenen Eigenschaften der uns bekannten natürlichen Zahlen zu fünf Sätzen zusammen, in denen der Leser unschwer die PEANOschen Axiome von Seite 191 f. wiedererkennen wird.

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
3. 1 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
5. Wenn eine Aussage über natürliche Zahlen für 1 richtig ist, und wenn aus ihrer Richtigkeit für irgendeine natürliche Zahl $n$ ihre Richtigkeit für den Nachfolger $n'$ folgt, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Natürlich kennen wir noch eine Reihe weiterer Eigenschaften der natürlichen Zahlen, sie lassen sich aber alle auf diese fünf Axiome zurückführen. Bei solchen Beweisen spielt das 5. Axiom, das den Schluß der vollständigen Induktion rechtfertigt, wie die unten durchgeführten Beispiele zeigen, eine besondere Rolle.
Die Folge der natürlichen Zahlen beginnt hier also mit der 1. Den Nachfolger von 1 können wir mit $1'$, den von $1'$ mit $1''$ bezeichnen usw. Wir setzen $1' = 2$, $2' = 3, \ldots$ und verwenden das Dezimalsystem, um mit 10 Grundziffern auszukommen.

### 5.2.1. *Rechenoperationen*

Mit den natürlichen Zahlen rechnen wir nach bestimmten Regeln. Das bedeutet, daß je zwei natürlichen Zahlen $a$, $b$ nach einer bestimmten Vorschrift wieder genau eine natürliche Zahl zugeordnet wird, die übrigens unter Umständen mit $a$ oder $b$ übereinstimmen kann.

**Addition**

Wir erklären jetzt zunächst die Addition, und zwar mit Hilfe der **Rekursionsformeln:**

$(A_1)\quad m + 1 = m'$ und $(A_2)\quad m + n' = (m + n)'$

Nach diesen Formeln ist

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 1' = 2 \\ 2 + 1 &= 2' = 3 \\ 3 + 1 &= 3' = 4 \\ &\vdots \\ m + 1 &= m' \\ m + 1' &= m + 2 = (m + 1)' = m'' \\ & \quad\; m + 3 = m''' \\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit wird die Erklärung der Summe zweier beliebiger natürlicher Zahlen letzten Endes auf $1+1$ zurückgeführt.
Durch die Rekursionsformeln $(A_1)$ und $(A_2)$ ist die Addition von zwei beliebigen natürlichen Zahlen eindeutig erklärt. Das kann mit Hilfe des sogenannten DEDEKINDschen Rechtfertigungssatzes für rekursive Definitionen nachgewiesen werden.

**Multiplikation**

Die Multiplikation wird gleichfalls rekursiv definiert, und zwar durch die Formeln:

$(M_1)$ $\quad m \cdot 1 = m$ und $(M_2)$ $\quad m \cdot n' = m \cdot n + m$

Es ist also

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 1 = 1\\
&1 \cdot 1' = 1 \cdot 2 = 1 \cdot 1 + 1 = 2\\
&1 \cdot 2' = 1 \cdot 3 = 1 \cdot 2 + 1 = 3\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
&m \cdot 1 = m\\
&m \cdot 1' = m \cdot 2 = m \cdot 1 + m = m + m\\
&m \cdot 2' = m \cdot 3 = m \cdot 2 + m = m + m + m\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

**Rechengesetze**

Für die Addition und die Multiplikation gelten folgende **Rechengesetze**:
Für alle natürlichen Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt das Assoziativgesetz

| der Addition | | der Multiplikation | |
|---|---|---|---|
| (1a) | $(a+b)+c = a+(b+c)$ | (1m) | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, |

ferner das Kommutativgesetz

| der Addition | | der Multiplikation | |
|---|---|---|---|
| (2a) | $a+b = b+a$ | (2m) | $a \cdot b = b \cdot a$ |

und schließlich das Distributivgesetz

(3) $\quad a(b+c) = ab + ac.$

Alle diese Sätze lassen sich aus den Definitionen der Rechenoperationen und den PEANOschen Axiomen beweisen. Um eine Probe dafür zu geben, sei der Beweis für (1a) durchgeführt. Er verläuft durch vollständige Induktion über $c$ in folgenden Schritten:

a) *Induktionsanfang:*

$$\begin{aligned}
(a+b)+1 &= (a+b)' &&\text{(nach } A_1)\\
&= a+b' &&\text{(nach } A_2)\\
&= a+(b+1) &&\text{(nach } A_1)
\end{aligned}$$

Das Gesetz ist also richtig für $c = 1$.

b) *Induktionsschritt:*

*Induktionsvoraussetzung:* Der Satz gelte für $c = n$.

$$(a + b) + n = a + (b + n)$$

*Induktionsbehauptung:* Der Satz gilt für $c = n'$.

$$(a + b) + n' = a + (b + n')$$

Zum *Beweis* des Induktionsschrittes setzen wir an:

$$\begin{aligned}(a + b) + n' &= [(a + b) + n]' && \text{(nach } A_2\text{)}\\ &= [a + (b + n)]' && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &= a + (b + n)' && \text{(nach } A_2\text{)}\\ &= a + (b + n') && \text{(nach } A_2\text{)}\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen. Der Satz gilt mithin für alle $c$. Man erklärt nun – wieder rekursiv – die Addition und Multiplikation von beliebig vielen natürlichen Zahlen:

($A_3$) $\quad a_1 + a_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3$

($A_4$) $\quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n'} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n'}$.

Dann läßt sich durch vollständige Induktion mit Hilfe der Definitionen ($A_3$, $A_4$) und der Gesetze (1a) und (2a) beweisen, daß in dem Ausdruck $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ die Summanden beliebig durch Klammern zusammengefaßt oder vertauscht werden können. Entsprechend wird bei der Multiplikation verfahren.

**Potenzieren**

Schließlich führen wir noch für die natürlichen Zahlen das Potenzieren ein durch

($P_1$) $\quad a^1 = a \quad$ und $\quad$ ($P_2$) $\quad a^{n'} = (a^n) \cdot a$.

Nach diesen Formeln ist

$$a^2 = (a^1) \cdot a = a \cdot a$$
$$a^{2'} = a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Dann ist auf Grund des DEDEKINDschen Rechtfertigungssatzes die Potenz $a^n$ für alle natürlichen Zahlen $a$, $n$ eindeutig erklärt. Die Rechenoperation des Potenzierens ist weder assoziativ noch kommutativ, denn es ist z. B.

$(2^3)^2 = 8^2 = 64$, aber $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$, und $3^2 = 9$, aber $2^3 = 8$.

Für das Multiplizieren und Potenzieren von Potenzen gelten die Gesetze:

Für alle natürlichen Zahlen $a$, $n$, $m$ ist

(4) $\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\qquad$ (5) $\quad a^n \cdot b^n = (ab)^n$, $\qquad$ (6) $\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Die Beweise für die Formeln (4) bis (6) werden sämtlich durch Rückgang auf die Definition der Potenz und vollständige Induktion geführt. Als Beispiel sei der Beweis der Formel (4) hier eingefügt.

*Behauptung:* Für alle natürlichen Zahlen $a$, $m$, $n$, gilt

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Der Satz stellt für ein festes $a$ und ein festes $m$ eine Aussage $\mathsf{H}(n)$ dar, die durch vollständige Induktion über $n$ bewiesen wird.

a) *Induktionsanfang:*

$$\begin{aligned} a^1 \cdot a^m &= a \cdot a^m && \text{(nach } P_1) \\ &= a^m \cdot a && \text{(nach 2 m)} \\ &= a^{m'} && \text{(nach } P_2) \\ &= a^{m+1} && \text{(nach } A_1) \\ a^1 \cdot a^m &= a^{1+m} && \text{(nach 2 a)} \end{aligned}$$

Formel (4) ist richtig für $n = 1$.

b) *Induktionsschritt:*

*Induktionsvoraussetzung:* $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

*Induktionsbehauptung:* $a^{n'} \cdot a^m = a^{n'+m}$

Wir setzen an:

$$\begin{aligned} a^{n'} \cdot a^m &= a^n \cdot a \cdot a^m && \text{(nach } P_2) \\ &= a^n \cdot a^m \cdot a && \text{(nach 2 m)} \\ &= a^{n+m} \cdot a && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= a^{(n+m)'} && \text{(nach } P_2) \\ &= a^{(m+n)'} && \text{(nach 2 a)} \\ &= a^{m+n'} && \text{(nach } A_2) \\ a^{n'} \cdot a^m &= a^{n'+m} && \text{(nach 2 a)} \end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung gewonnen und Formel (4) bewiesen.

### 5.2.2. *Ordnung*

Durch die Nachfolgerrelation wurde bereits für benachbarte Zahlen eine Ordnung festgesetzt. Für zwei beliebige natürliche Zahlen $a$, $b$ wird eine Ordnungsrelation jetzt folgendermaßen erklärt:

ERKLÄRUNG:

▷ Wenn es zu den natürlichen Zahlen $a$ und $b$ eine natürliche Zahl $c$ gibt, so daß $a = b + c$, so heißt $a$ **größer** als $b$ $(a > b)$.

(Der Leser beachte, daß 0 jetzt nicht als natürliche Zahl erklärt ist!)
Dadurch ist über $N$ eine zweistellige Relation erklärt, die folgende Eigenschaften hat:

1. $a > a$ ist für jedes $a$ falsch.
2. Aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$.

(Denn aus $a > b$ folgt die Existenz einer Zahl $d$, so daß $a = b + d$, und aus $b > c$ folgt die Existenz von $e$, so daß $b = c + e$. Also ist $a = (c + e) + d = c + (e + d)$, also $a > c$.)

3. Für beliebige verschiedene Zahlen $a$, $b$ gilt stets entweder $a > b$ oder $b > a$.[1]

[1] Den Beweis findet der Leser z. B. bei ASSER, G.: Einführung in die höhere Mathematik ([26], Teil I, S. 53 ff.). Allerdings wird hier die Beziehung „kleiner — gleich" zugrunde gelegt und die Null demgemäß in das System der natürlichen Zahlen einbezogen. Der Beweis ist aber auf die hier erklärte Relation leicht übertragbar.

Also gilt der Satz:

SATZ:

▷ Die für natürliche Zahlen erklärte Größerrelation ist irreflexiv, transitiv und linear, sie stellt eine irreflexive Ordnungsrelation dar.

**Monotoniegesetze**

Weiter gilt, wenn $a$, $b$, $c$ beliebige natürliche Zahlen sind:
Ist $a = b$, so ist für jedes $c$:

(7) $\quad a + c = b + c, \qquad a \cdot c = b \cdot c.$

Ist $a > b$, so ist für jedes $c$:

(8) $\quad a + c > b + c,$ (9) $\quad a \cdot c > b \cdot c.$

Formel (7) ergibt sich daraus, daß man jede Zahl durch eine gleiche ersetzen kann. Formel (8) und (9) mag der Leser selbst beweisen.

**Umkehroperationen: Differenz und Quotient**

Wenn es zu den natürlichen Zahlen $a$ und $b$ eine natürliche Zahl $x$ gibt, so daß $a + x = b$ ist, so wird $x$ als **Differenz aus $a$ und $b$** bezeichnet, geschrieben $x = b - a$.
Wenn es zu $a$ und $b$ eine natürliche Zahl $y$ gibt, so daß $a \cdot y = b$ ist, so wird $y$ als **Quotient aus $b$ und $a$** bezeichnet, geschrieben $y = b : a$ oder auch als $\frac{b}{a}$.
Es gelten auf Grund dieser Definitionen die Formeln

(10) $\quad (b - a) + a = a + (b - a) = b$ und

(11) $\quad (b : a) \cdot a = a \cdot (b : a) = b.$

Dann sind die Operationen des Subtrahierens und des Dividierens eindeutig erklärt. Für die Subtraktion kann das folgendermaßen gezeigt werden: Angenommen, es gäbe zwei verschiedene natürliche Zahlen $x'$ und $x''$, für die $a + x' = b$ und $a + x'' = b$ ist. Sei $x' > x''$. Dann folgt aus dem Monotoniegesetz (8), daß auch $a + x' > a + x''$ sein müßte, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht.
Ebenso wird aus der Monotonie der Multiplikation die Eindeutigkeit des Quotienten bewiesen.
Jetzt können auch die Umkehroperationen zum Potenzieren eindeutig erklärt werden.

**Wurzel und Logarithmus**

ERKLÄRUNG:

▷ Gibt es zu den natürlichen Zahlen $a$ und $n$ eine natürliche Zahl $b$ so, daß $b^n = a$ ist, so heißt $b$ die **$n$-te Wurzel** aus $a$.

Um den Gebrauch des bestimmten Artikels dabei zu rechtfertigen, muß noch die Eindeutigkeit der $n$-ten Wurzel gezeigt werden. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene $n$-te Wurzeln aus $a$, $b_1$ und $b_2$, und es sei $b_1 < b_2$. Aus dem Monotoniegesetz für die Multiplikation folgt dann, daß $b_1^2 < b_1 b_2 < b_2^2$, $b_1^3 < b_2^3, \ldots$, und nach vollständiger Induktion: $b_1^n < b_2^n$. Das widerspricht der Annahme.

ERKLÄRUNG:

▷ Gibt es zu den natürlichen Zahlen $a$ und $b$ ein $n$, so daß $a^n = b$ ist, so heißt $n$ der **Logarithmus** von $b$ zur Basis $a$.
$n = \log_a b$.

Hier folgt die Eindeutigkeit daraus, daß die Potenzen $a^1, a^2, a^3, \ldots$ für $a > 1$ eine Folge stets wachsender (dafür sagt man auch: „monoton wachsender") Zahlen darstellen. (Der Leser beweise dies mit Hilfe der vollständigen Induktion!) Wäre $a^{n_1} = a^{n_2}$, aber etwa $n_1 < n_2$, so würde zwischen $a^{n_1} < a^{n_2}$ und $a^{n_1} = a^{n_2}$ ein Widerspruch bestehen.
Beispiele für Wurzeln und Logarithmen im Bereich der natürlichen Zahlen:
$2 = \sqrt[3]{8}$ und $3 = \log_2 8$ wegen $2^3 = 8$, $3 = \sqrt[5]{243}$ und $5 = \log_3 243$ wegen $3^5 = 243$.
Für das Rechnen mit Wurzeln und Logarithmen gelten die bekannten Gesetze. (Näheres siehe [4], S. 27 ff. oder [29], S. 54 ff.)

### 5.2.3. *Rechenoperationen verschiedener Stufen*

Addition und Subtraktion werden als **Rechenoperationen erster** Stufe, Multiplikation und Division als **Operationen zweiter Stufe**, Potenzieren, Wurzelziehen und Logarithmieren als solche **dritter Stufe** bezeichnet. Ziehen wir die Behandlung der Rechenoperationen in den Schulen in Betracht, so kann man folgendes Schema aufstellen:

Rechenoperationen

| | | |
|---|---|---|
| 1. Stufe: | Addition, Subtraktion | Unterstufe |
| 2. Stufe: | Multiplikation, Division | |
| 3. Stufe: | Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren | Oberstufe |

Mit dem soeben durchgeführten Aufbau, der sich allein auf die PEANOschen Axiome stützt, haben wir das gleiche erreicht wie bei der Gewinnung der natürlichen Zahlen als endlicher Kardinalzahlen aus der Mengenlehre. Bei dem soeben durchgeführten „axiomatischen Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen" wurde durch die PEANOschen Axiome eine Grundbeziehung, die Nachfolgerrelation, eingeführt, von der man nichts weiter zu wissen braucht, als was in den Axiomen über sie ausgesagt wird. Alle weiteren Eigenschaften der natürlichen Zahlen ließen sich dann daraus gewinnen, indem, auf den Axiomen fußend, Rechenoperationen und Ordnung erklärt wurden.
Nun gibt es, wie wir sehen werden, verschiedene Zahlenmengen, in denen die PEANOschen Axiome erfüllt sind. Wichtig ist daher folgender Satz:

SATZ:

▷ Alle Zahlenbereiche mit einer Nachfolgerrelation, in denen die PEANOschen Axiome gelten, sind hinsichtlich dieser Relation zueinander isomorph.

Dafür kann auch gesagt werden:

▷ Das PEANOsche Axiomensystem charakterisiert den Bereich der natürlichen Zahlen nur bis auf Isomorphie eindeutig.

Es ist nicht schwer, diesen Satz zu beweisen. Es seien $N$ und $N_{(1)}$ zwei Zahlenbereiche, in denen je eine Nachfolgerrelation $R$ bzw. $R_{(1)}$ erklärt ist. Beide sollen den PEANOschen Axiomen genügen. Wie die Zuordnung zwischen den Elementen von $N$ und $N_{(1)}$ vorzunehmen ist, liegt auf der Hand. Dem Element „1" von $N$ wird das Element „$1_{(1)}$" von $N_{(1)}$ zugeordnet. Ist dem Element $m$ von $N$ bereits das Element $m_{(1)}$ von $N_{(1)}$ zugeordnet, so soll dem Nachfolger $m'$ die Zahl $m'_{(1)}$ zugeordnet werden. Es entsprechen sich also 1 und $1_{(1)}$, $1'$ und $1'_{(1)}$, $1''$ und $1''_{(1)}$ usw. Dann ist auf Grund des 5. PEANOschen Axioms die eineindeutige Zuordnung für alle Zahlen aus $N$ erklärt. Denn die Menge der Zahlen aus $N$, für die die Zuordnung erklärt ist, enthält die Eins und mit jedem Element $m$ dessen unmittelbaren Nachfolger $m'$, also die ganze Menge $N$. In den Zahlenbereichen $N$ und $N_{(1)}$ läßt sich je eine Arithmetik entwickeln, die stets zu einander entsprechenden Resultaten führt. Das Rechnen in den beiden Bereichen gleicht sich völlig. Unter Verwendung der in Kapitel 4 (↑ S. 178) eingeführten Terminologie kann dies so formuliert werden: Die geregelten Mengen $(N, R)$ und $(N_{(1)}, R_{(1)})$ sind isomorph.

Daher sind wir berechtigt, die PEANOschen Axiome als charakteristisch für den Bereich der natürlichen Zahlen anzusehen. Ein Zahlenbereich, in dem sie gelten, besitzt die typischen Eigenschaften des uns wohlvertrauten Zahlenbereichs, in dem wir in den ersten Schuljahren zählen und rechnen gelernt haben.

Damit ist die auf Seite 190 gestellte Frage beantwortet. Da die Menge der endlichen Kardinalzahlen die PEANOschen Axiome erfüllt, dürfen wir sie als natürliche Zahlen ansehen.

Stellen wir zum Schluß den genetischen und den axiomatischen Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen einander gegenüber, so ist der erste Weg insofern vorzuziehen, als hierbei die natürlichen Zahlen wirklich erzeugt werden, während sie bei dem zweiten Weg nur ihrer Struktur nach (d. h. bis auf Isomorphie) beschrieben werden. Dennoch ist für die mathematische Arbeit der axiomatische Weg in mancherlei Hinsicht vorteilhafter. Es lassen sich nicht nur viele Beweise bequemer führen, sondern man beherrscht auch durch die Axiome ganz verschiedene, der Struktur nach aber gleiche Bereiche.

Der Vorzug bequemerer Beweise besteht teilweise auch bei einem dritten Weg: Man beweist beim genetischen Aufbau, wie oben geschehen, die PEANOschen Axiome und stützt sich beim weiteren Aufbau nur noch auf diese, nicht mehr auf die Mengenlehre. Für den Schulunterricht allerdings, in dem wir ja die einzelnen Zahlenbereiche inhaltlich erzeugen müssen, kommt nur der genetische Weg in Frage.

In diesem Buch wird beim Aufbau der weiteren Zahlenbereiche der genetische Weg beibehalten.

## 5.3. Gebrochene Zahlen

Gestern wollte ich in einem Laden eine Halbliterflasche Milch holen. Da es keine mehr gab, nahm ich zwei Viertelliterflaschen. Ich hatte genug Geld mit, um das Pfand für die zweite Flasche zu bezahlen, und in meiner Tasche war auch genug Platz, darum machte es mir nichts aus. Es kommt auf dasselbe hinaus, ob ich $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{4}$ Liter Milch trinke;

die Menge an Fett, Kasein, Flüssigkeit, die ich in beiden Fällen zu mir nehme, ist dieselbe. Entsprechend ist es, wenn ich statt einer Tüte mit $\frac{1}{4}$ kg Zucker zwei Tüten mit je $\frac{1}{8}$ kg kaufe.

Die beiden Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$, ebenso die Brüche $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{8}$ stellen die gleiche Quantität dar.

Dennoch besteht ein Unterschied zwischen den genannten Bruchpaaren. Ihre „Verpackung" ist verschieden. Daß dieser Unterschied praktisch sehr wesentlich sein kann, sehen wir an folgendem Beispiel:

Zum Säubern einer Naht brauche ich $\frac{1}{2}$ m Band. Ich finde im Nähkorb zwei in Farbe und Material passende Bänder, aber jedes ist nur etwa $\frac{1}{4}$ m lang, so daß ich stückeln müßte. Das sieht aber nicht gut aus. In diesem Fall ist für mich $\frac{2}{4}$ durchaus nicht dasselbe wie $\frac{1}{2}$.

In der Schule lernten wir früher: „Die beiden Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind der Form nach verschieden, aber dem Wert nach gleich." Was soll man aber unter dem „Wert" eines Bruches verstehen?

Mit Hilfe der in den ersten Kapiteln entwickelten Hilfsmittel kann man hier durchaus zur Klarheit gelangen. Man braucht dazu nur von der auf der Hand liegenden Tatsache auszugehen, daß der **Bruch** ein **geordnetes Paar** von natürlichen Zahlen ist. Die erste wird „Zähler", die zweite „Nenner" genannt. Daß wir die Zahlen nicht durch ein Komma getrennt nebeneinander, sondern durch einen horizontalen Strich getrennt untereinander schreiben, soll uns nicht stören. Auf alle Fälle sehen wir schon aus dieser Tatsache, daß Brüche keine natürlichen Zahlen sind. Schon dadurch können manche Irrtümer vermieden werden.

Als Zweites wollen wir daran denken, daß wir ja mit den Brüchen **rechnen** wollen. Rechnen aber kann man nur mit **Zahlen**. Wir müssen also aus den Brüchen vollwertige Zahlen machen mit allem Drum und Dran, das dazu gehört. Was das ist, wissen wir nun schon ungefähr von den natürlichen Zahlen her: Wir werden die neuen Zahlen durch eine Kleinerrelation ordnen müssen, wir brauchen Erklärungen für die Addition, Multiplikation usw. Dann werden wir die grundlegenden Rechengesetze, das sind die Kommutativ- und die Assoziativgesetze für Addition und Multiplikation, das Distributivgesetz und die Monotoniegesetze, irgendwie gewinnen müssen, denn ohne sie würde das Rechnen sehr schwierig. Soweit können wir dem früheren Vorgehen bei natürlichen Zahlen gewisse Richtlinien entnehmen.

Hier tritt aber noch etwas hinzu, das bei den natürlichen Zahlen unproblematisch war. Wir müssen erklären, *wann zwei neue Zahlen gleich sein sollen*. Bei dieser Festsetzung werden wir uns danach richten, wozu die neuen Zahlen dienen sollen. Vielleicht werden wir uns erst einmal darüber klar, was die neuen Zahlen *nicht* sollen: Sie sollen sicher keine *Anzahlen* darstellen. Ich kann mich wohl dreimal oder viermal, aber nicht $\frac{3}{4}$ mal-auf einen Stuhl setzen. Dagegen kann man mit Hilfe von Brüchen sehr wohl *Quantitäten* angeben, das haben wir ja oben getan. Daraus kann man schon entnehmen, wie man die Gleichheit zweier neuer Zahlen festsetzen wird: Gleiche Zahlen müssen dieselbe Quantität widerspiegeln. Das ist zwar noch ganz unmathematisch ausgedrückt und hört sich vorläufig noch nicht viel besser an, als daß sie „denselben Wert" haben sollen. Es wird uns aber doch auf den richtigen Weg führen.

Ehe wir an die mathematische Konstruktion der neuen Zahlen gehen, wollen wir noch weitere Eigenschaften von ihnen vorherbestimmen. Da ist zunächst eine ganz wichtige Eigenschaft zu nennen, nämlich, daß sich mit den neuen Zahlen jede *beliebige Teilung* widerspiegeln lassen soll. Ich kann eine Torte in Halbe, Viertel, Achtel, Sechzehntel, aber auch in Drittel, Sechstel, Neuntel, Zwölftel usw. teilen. Für die neuen Zahlen bedeutet dies, daß sich im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen jede Division durchführen lassen soll.

Auch das Ausmessen einer Länge mit einem Stab bekannter Länge führt auf das Problem des Teilens. Nehmen wir an, wir haben eine Strecke $a$ mit einem Gliedermaßstab von 1 m Länge auszumessen. Es zeigt sich beispielsweise, daß der Stab siebenmal abgetragen werden kann und noch ein Stück von der Strecke $a$ übrig bleibt. Die Strecke $a$ ist also zwischen 7 m und 8 m lang. Wir messen weiter mit $\frac{1}{10}$ der Einheit, also mit der Meßstrecke 1 dm, und schließlich mit $\frac{1}{100}$ m, also mit 1 cm. Nehmen wir an, wir haben eine Länge von 7,35 m festgestellt. Dann ist die Länge von $a$ gleich $7\,\text{m} + \frac{3}{10}\,\text{m} + \frac{5}{100}\,\text{m}$. In anderen Fällen, wo eine größere Genauigkeit verlangt und mit feineren Meßinstrumenten gearbeitet wird, kann die Messung auf Tausendstel, Zehntausendstel, ... eines Meters fortgesetzt werden. In der Praxis kommt man stets mit einer endlichen Anzahl von Dezimalen aus. Die Angabe einer Länge mit 0,30762 m bedeutet, in Bruchteilen von Metern ausgedrückt:

$$\frac{3}{10}\,\text{m} + \frac{7}{1\,000}\,\text{m} + \frac{6}{10\,000}\,\text{m} + \frac{2}{100\,000}\,\text{m}.$$

Also auch beim Messen stoßen wir auf die Forderung, daß sich die Division mit Hilfe der „gebrochenen Zahlen" ausführen lassen soll. Wir werden später sehen, daß das Problem der Messung noch zu weiteren Forderungen führt (↗ S. 239 ff.).

Schließlich ist noch eine Eigenschaft zu verlangen:

Auch die natürlichen Zahlen spiegeln ja Quantitäten wider. Ein Liter mißt ja dieselbe Quantität wie $\frac{2}{2}$ l, 3 m dieselbe wie $\frac{6}{2}$ m. Die natürlichen Zahlen sollen sich also – das werden wir verlangen müssen – in den Bereich der neuen Zahlen *einbetten* lassen.

Diese geforderten Eigenschaften sollen jetzt in eine mathematische Form gekleidet werden.

### 5.3.1. *Paare natürlicher Zahlen*

Wir entnehmen der vorangegangenen Aufzählung von Eigenschaften: Die neuen Zahlen sollen mit Hilfe geordneter Paare natürlicher Zahlen gebildet werden.
Die Paare $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$, allgemein $\frac{a}{b}$ und $\frac{ca}{cb}$, wobei $a, b, c$ natürliche Zahlen sind (Die Null kommt unter ihnen nach Festsetzung von Seite 203 nicht vor!), sollen dieselbe neue Zahl darstellen. Die Division soll unbeschränkt ausführbar sein.
Alle Rechenoperationen, die mit natürlichen Zahlen möglich sind, sollen sich auch mit den neuen Zahlen ausführen lassen.
Die neuen Zahlen sollen einen Teilbereich enthalten, der dem Bereich der natürlichen Zahlen entspricht. Wir wollen nämlich – eingedenk unserer Erfahrungen mit den natürlichen Zahlen – vorsichtig sein mit der Forderung, daß der Bereich der natürlichen Zahlen *selbst* im neuen Bereich enthalten sein soll. Wir haben auch am Schluß des vorigen Abschnitts gesehen, daß es genügt, dies von einem dem Bereich $N$ *isomorphen* Bereich zu fordern.
Alle diese Forderungen werden erfüllt, wenn wir den neuen Bereich folgendermaßen konstruieren:
Wir bilden geordnete **Paare natürlicher Zahlen,** die wir als Brüche schreiben.

### 5.3.2. *Quotientengleichheit*

Wir greifen das Beispiel von Seite 108 auf mit folgender

ERKLÄRUNG:

▷ Zwei Paare $\frac{m_1}{n_1}$ und $\frac{m_2}{n_2}$ sollen **quotientengleich** heißen, geschrieben $\frac{m_1}{n_1} \underset{(Q)}{=} \frac{m_2}{n_2}$, wenn $m_1 n_2 = m_2 n_1$ ist.

Dies ist übrigens, da $m_1$, $n_1$, $m_2$, $n_2$ natürliche Zahlen sind, bereits im Bereich $N$ der natürlichen Zahlen entscheidbar. Zum Beispiel gilt $\frac{2}{3} \underset{(Q)}{=} \frac{8}{12}$, da $2 \cdot 12 = 8 \cdot 3$ ist. Damit haben wir der unmathematischen Ausdrucksweise vom „gleichen Wert“ zweier Brüche eine exakte mathematische Form gegeben.
Zwei Brüche – so wollen wir die Zahlenpaare von jetzt an nennen – sind entweder quotientengleich oder nicht. Die Quotientengleichheit stellt also eine Relation $R$ über dem Bereich $N \times N$ aller Brüche dar. Wir wollen diese Relation näher untersuchen.
Zunächst gilt für alle $m, n$: $\frac{m}{n} R \frac{m}{n}$ wegen $m n = m n$. Die Relation $R$ ist also reflexiv. Ferner folgt aus $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_2}{n_2}$ nach Definition der Quotientengleichheit stets $\frac{m_2}{n_2} R \frac{m_1}{n_1}$, die Relation ist also symmetrisch. Schließlich ist sie auch transitiv. Denn wenn $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_2}{n_2}$

und $\frac{m_2}{n_2} R \frac{m_3}{n_3}$ besteht, so bedeutet dies:

(a) $\quad m_1 n_2 = m_2 n_1 \quad$ bzw.

(b) $\quad m_2 n_3 = m_3 n_2$.

Wir multiplizieren beide Seiten von (a) mit $m_3 n_3$ und ordnen um:

(a) $\quad (m_1 n_3) \cdot (m_3 n_2) = (m_3 n_1) \cdot (m_2 n_3)$

Die an zweiter Stelle rechts und links stehenden Klammerausdrücke sind nach (b) gleich, also gilt: $m_1 n_3 = m_3 n_1$, d. h., der Bruch $\frac{m_1}{n_1}$ ist quotientengleich dem Bruch $\frac{m_3}{n_3}$. (Der Leser beachte, daß die Null in unserem Zahlenbereich nicht vorkommt!)

Es gilt also $\frac{m_1}{n_1} R \frac{m_3}{n_3}$, die Relation ist in der Tat transitiv. Die Quotientengleichheit stellt demnach eine Äquivalenzrelation dar, durch die die Menge $N \times N$ in elementefremde Klassen aufgespalten wird. Alle Brüche ein und derselben Klasse sind quotientengleich, und jeder Bruch gehört nach den Ausführungen über Äquivalenzrelationen von Kapitel 3 (↑ S. 104 f.) in genau eine Klasse. **Jede dieser Klassen soll nun eine neue Zahl darstellen.** Diese neuen Zahlen $\alpha$, $\beta$, ... sollen zur Unterscheidung von den natürlichen Zahlen **gebrochene Zahlen** heißen. In der Literatur werden diese Zahlen bisweilen auch als **absolut-rationale Zahlen** bezeichnet (↑ Beispiel S. 108 f.).

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einer **gebrochenen Zahl** wird eine Klasse quotientengleicher Paare $\frac{m}{n}$ verstanden, wobei $m$ und $n$ natürliche Zahlen sind.

Jede gebrochene Zahl kann durch einen beliebigen Bruch der betreffenden Klasse dargestellt werden. So sind $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$ Vertreter ein und derselben gebrochenen Zahl. Meist wird als Darstellung ein gekürzter Bruch bevorzugt, also für die soeben aufgezählten Brüche der Bruch $\frac{1}{2}$. Um aber den Bruch $\frac{1}{2}$ von der dadurch dargestellten gebrochenen Zahl zu unterscheiden, schreiben wir gebrochene Zahlen mit einer geschweiften Klammer, also $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Mit dieser Erklärung der neuen Zahlen haben wir die oben ausgesprochene Forderung, wonach die neuen Zahlen ganz bestimmte Quantitäten widerspiegeln sollen, erfüllt. Die Zahl $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ stimmt ja nach unserer Festsetzung mit der Zahl $\left\{\frac{2}{4}\right\}$ überein.

### 5.3.3. *Einführung einer Ordnung*

Die Zwecke, die uns zur Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen veranlaßten, verlangen einen vollständig geordneten Zahlenbereich. Wir führen in ihm eine Ordnungsrelation $R'$ ein, indem wir auf die Vertreter zurückgreifen. Die Zahl $\alpha$ werde vertreten durch den Bruch $\frac{m}{n}$, die Zahl $\beta$ durch $\frac{r}{s}$; also $\alpha = \left\{\frac{m}{n}\right\}$, $\beta = \left\{\frac{r}{s}\right\}$.

ERKLÄRUNG:

▷ In Anlehnung an die Quotientengleichheit soll $\alpha$ **kleiner als** $\beta$ ($\alpha < \beta$) heißen genau dann, wenn $ms < rn$ ist.

Der Leser beachte, daß dies wieder bereits im Bereich $N$ der natürlichen Zahlen entschieden werden kann. So ist z. B. die Zahl $\left\{\frac{7}{9}\right\} < \left\{\frac{11}{14}\right\}$, da $7 \cdot 14 < 11 \cdot 9$ ist. Eigentlich müßten in dem neuen Zahlenbereich für die Kleiner- und Größerrelation, für die Addition, Subtraktion usw. neue Zeichen eingeführt werden, etwa $\dot{<}$, $\dot{+}$ usw. Da aber, wie noch gezeigt wird, der neue Zahlenbereich einen zu $N$ hinsichtlich der Ordnung isomorphen Teilbereich enthält, können keine Widersprüche zu den dort verwendeten Zeichen entstehen. Die alten Symbole werden hier also sozusagen auf Vorschuß verwendet.
Es muß aber zunächst gezeigt werden, daß diese Ordnungsrelation von der Wahl der Vertreter für $\alpha$ und $\beta$ unabhängig ist.

Hierbei und im folgenden soll $x'$ nicht mehr den Nachfolger von $x$ bedeuten, sondern eine beliebige natürliche Zahl.

Sei $\frac{m}{n} \underset{(Q)}{=} \frac{m'}{n'}$, $\frac{r}{s} \underset{(Q)}{=} \frac{r'}{s'}$ und $\alpha < \beta$.
Es gelten also die Beziehungen

(a) $mn' = m'n$

(b) $rs' = r's$

(c) $ms < rn$.

Es ist zu zeigen, daß dann auch

$$m's' < r'n'$$

gilt.
Wir multiplizieren beide Seiten von (c) mit $n's'$, benutzen das in $N$ geltende Monotoniegesetz für die Multiplikation und ordnen beide Seiten um:

$$(mn')\,(ss') < (rs')\,(nn').$$

Die ersten Klammern rechts und links ersetzen wir auf Grund von (a) bzw. (b) durch gleiche Ausdrücke:

$$(m'n)\,(ss') < (r's)\,(nn'),$$

nach Umordnung:

$$(m's')\,(ns) < (r'n')\,(ns),$$

und auf Grund des Monotoniegesetzes der Multiplikation:

$m's' < r'n'$, was zu zeigen war.

Diese neue Relation $R'$ stellt wieder, wie sich leicht zeigen läßt, eine irreflexive Ordnungsrelation dar.

Aufgabe 6

Unter den neuen Zahlen treten auch solche auf, die durch unechte Brüche wie $\frac{3}{1}$ oder $\frac{18}{2}$ dargestellt werden. Es sei schon jetzt darauf hingewiesen, daß zwischen solchen gebrochenen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$, die durch unechte Brüche $\frac{a}{1}, \frac{b}{1}, \ldots$ dargestellt werden können, und den natürlichen Zahlen $a, b, \ldots$ eine genaue Entsprechung besteht. So ist $\beta = \left\{\frac{b}{1}\right\}$ kleiner als $\alpha = \left\{\frac{a}{1}\right\}$ dann und nur dann, wenn $b < a$ ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Ordnungsrelation. Zum Beispiel ist $\beta = \left\{\frac{3}{1}\right\}$ kleiner als $\alpha = \left\{\frac{18}{2}\right\} = \left\{\frac{9}{1}\right\}$, da $3 \cdot 1$ kleiner als $9 \cdot 1$ ist. Aus diesem Grund durfte für die Ordnungsrelation im neuen Zahlenbereich das gleiche Symbol „$<$" verwendet werden wie für natürliche Zahlen.

### 5.3.4. *Rechenoperationen*

Wie soll nun mit den neuen Zahlen gerechnet werden? Wir erklären zunächst eine Addition, die durch das gleiche Zeichen „$+$" ausgedrückt werden soll wie bei den natürlichen Zahlen. Eine Verwechslung ist kaum möglich. Außerdem wird sich – wie bei der Ordnungsrelation – zeigen, daß die Addition von solchen gebrochenen Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellbar sind, der Addition der Zähler, die ja natürliche Zahlen sind, genau entspricht.

**Addition**

ERKLÄRUNG:

▷ Sei wieder $\alpha = \left\{\frac{m}{n}\right\}$ und $\beta = \left\{\frac{r}{s}\right\}$. Dann soll unter **der Summe** $\alpha + \beta$ die gebrochene Zahl $\left\{\frac{ms + rn}{sn}\right\}$ verstanden **werden.**

Diese komplizierte Festsetzung mag den Leser zunächst befremden. Er denke aber daran, daß wir ja die bekannte Addition von Brüchen herausbekommen wollen. In der Tat ist zum Beispiel

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} + \left\{\frac{4}{7}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 5}{5 \cdot 7}\right\} = \left\{\frac{41}{35}\right\}$$

oder

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} + \left\{\frac{5}{6}\right\} = \left\{\frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 6}\right\} = \left\{\frac{27}{18}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Das Ergebnis der Addition ist von der Wahl der Vertreter unabhängig. (Beweis siehe Aufgabe 7.)

### Subtraktion

ERKLÄRUNG:

▷ Die **Subtraktion** $\alpha - \beta$ wird für $\alpha > \beta$ entsprechend erklärt wie die Addition: Es soll sein $\alpha - \beta = \left\{\frac{ms - rn}{ns}\right\}$.

In der Tat ist der Zähler $ms - rn$ eine natürliche Zahl, so daß der so gebildete Ausdruck $\alpha - \beta$ auf alle Fälle eine gebrochene Zahl darstellt. Der Beweis der Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl verläuft wie bei der Addition. Für die Einführung der Addition und der Subtraktion gebrochener Zahlen im Schulunterricht empfiehlt es sich, diese Operationen nur für Repräsentanten mit gleichem Nenner zu erklären, da es ja in jeder der beiden Klassen Brüche mit dem gleichen Nenner gibt: $\left\{\frac{m}{n}\right\} \pm \left\{\frac{r}{n}\right\} = \left\{\frac{m \pm r}{n}\right\}$. Auf die Unabhängigkeit des Ergebnisses von der Wahl des Repräsentanten wäre (ohne formalen Beweis!) hinzuweisen.

Aufgabe 7

### Multiplikation

ERKLÄRUNG:

▷ Unter dem **Produkt** $\alpha \cdot \beta$ soll $\left\{\frac{mr}{ns}\right\}$ verstanden werden.

Zum Beispiel ist $\left\{\frac{3}{2}\right\} \cdot \left\{\frac{5}{6}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 6}\right\} = \left\{\frac{15}{12}\right\} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$.
Diese Festsetzung entspricht der Schulregel für die Multiplikation von Brüchen: „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner". Die im Schulunterricht erhobene Forderung, vor der Ausrechnung zu kürzen, soll uns jetzt hier nicht interessieren.

### Division

Wichtig ist es dagegen, eine Division $\alpha : \beta$ so zu erklären, daß sie stets im neuen Zahlenbereich ausführbar ist.

ERKLÄRUNG:

▷ Wir setzen für den **Quotienten** fest: $\alpha : \beta = \left\{\frac{ms}{nr}\right\}$.

Weil $n \cdot r \neq 0$ ist (↑ S. 216) und weil im Zähler und Nenner hierbei nur natürliche Zahlen stehen, ist $\alpha : \beta$ wieder eine gebrochene Zahl. Natürlich muß für die Multiplikation und die Division wieder die Unabhängigkeit von der Wahl des Repräsentanten gezeigt werden. Der Nachweis sei dem Leser überlassen.

Aufgabe 8

### Rechengesetze

Für die so neu erklärten Rechenoperationen gelten die Rechengesetze (1), (2), (3) von Seite 207. Ferner gelten die Monotoniegesetze.

Der Nachweis sei am Beispiel des Kommutativgesetzes der Multiplikation durchgeführt. Es ist $\alpha \cdot \beta = \left\{\frac{m \cdot r}{n \cdot s}\right\} = \left\{\frac{r \cdot m}{s \cdot n}\right\} = \beta \cdot \alpha$. In entsprechender Weise werden die anderen Beweise geführt, indem man auf das entsprechende Gesetz für natürliche Zahlen zurückgreift, das als bewiesen angesehen werden kann.
Damit läßt sich leicht nachweisen, daß für gebrochene Zahlen die Subtraktion die Umkehrung der Addition, die Division die Umkehrung der Multiplikation ist.

Aufgaben 9 und 10

**Der Zahlenstrahl der gebrochenen Zahlen**

Zwischen zwei gebrochenen Zahlen $\alpha$ und $\beta$ gibt es stets mindestens eine weitere gebrochene Zahl, nämlich z. B. $(\alpha + \beta) \cdot \frac{1}{2}$, das sogenannte arithmetische Mittel von $\alpha$ und $\beta$. Bezeichnen wir es mit $\alpha'$, so liegt zwischen $\alpha$ und $\alpha'$ wieder deren arithmetisches Mittel und so fort.
Denken wir uns jetzt die gebrochenen Zahlen der Größe nach auf einer Geraden aufgetragen, so liegen die dabei markierten Punkte auf der Geraden überall dicht, d. h., es gibt zwischen zwei Punkten, die mit Zahlen versehen sind, wieder mindestens einen solchen, ja, sogar unendlich viele solcher Punkte.
Wir werden später sehen, daß dennoch zwischen diesen so markierten Punkten unendlich viele Lücken bestehen, also Punkte, zu denen keine gebrochene Zahl gehört.

**Gebrochene und natürliche Zahlen**

Wie schon oben angedeutet wurde, enthält der Bereich der gebrochenen Zahlen eine Teilmenge, die dem Bereich $N$ der natürlichen Zahlen genau entspricht. Jeder natürlichen Zahl $k$ ordnen wir die gebrochene Zahl $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ zu. Dann liegt eine eineindeutige Abbildung von $N$ auf die Menge der gebrochenen Zahlen $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ vor, die eine echte Teilmenge der Menge aller gebrochenen Zahlen darstellt. Für diese speziellen gebrochenen Zahlen liefern die oben erklärten Rechenoperationen:

$$\left\{\frac{k}{1}\right\} \pm \left\{\frac{i}{1}\right\} = \left\{\frac{k \pm i}{1}\right\} \text{ bzw. } \left\{\frac{k}{1}\right\} \cdot \left\{\frac{i}{1}\right\} = \left\{\frac{k \cdot i}{1}\right\}.$$

Um die Entsprechung auch für die Division zu zeigen, müssen wir annehmen, daß $i$ ein Teiler von $k$ ist, $k = c \cdot i$, wobei $c$ eine natürliche Zahl ist. Dann gilt in $N$:

$$k : i = c$$

und im Bereich der gebrochenen Zahlen

$$\left\{\frac{k}{1}\right\} : \left\{\frac{i}{1}\right\} = \left\{\frac{k \cdot 1}{1 \cdot i}\right\} = \left\{\frac{c \cdot i \cdot 1}{i \cdot 1}\right\} = \left\{\frac{c}{1}\right\}.$$

Also entsprechen sich auch die Quotienten. Der Bereich $N'$ der gebrochenen Zahlen der Form $\left\{\frac{a}{1}\right\}$ ist also isomorph zu $N$ hinsichtlich der Ordnung und sämtlicher Rechenoperationen.

Nun genügt der Bereich $N'$ den PEANOschen Axiomen, wenn man als Nachfolger von $\left\{\frac{a}{1}\right\}$ die gebrochene Zahl $\left\{\frac{a'}{1}\right\}$ erklärt. Wir können nach einer früheren Bemerkung (↗ S. 212) den Bereich $N'$ ersetzen durch den Bereich der natürlichen Zahlen. Dann ist der ganze Bereich der gebrochenen Zahlen eine Obermenge, also eine Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen, und der Einklang hinsichtlich der Rechenoperationen und der Ordnung, den wir gefordert hatten, ist gesichert. Je nach Bedarf können wir von der natürlichen Zahl $a$ wieder zu der gebrochenen Zahl $\left\{\frac{a}{1}\right\}$ übergehen, z. B. wenn $2 - \frac{1}{3}$ gerechnet werden soll.

### Permanenzprinzip

Natürlich bildete diese Vereinfachung den Leitgedanken, als wir die Ordnung und die Rechenoperationen im neuen Zahlenbereich festsetzten. Diese Definitionen waren keinesfalls willkürlich. Sie erfolgten vielmehr in dieser Form, um die soeben erwähnte Isomorphie zu sichern. Das ist der Inhalt des sogenannten **Permanenzprinzips**. Es geht auf den Mathematiker HANKEL (HERRMANN HANKEL, 1839 bis 1873) zurück, der vor etwa 100 Jahren als „Prinzip von der Erhaltung der formalen Rechengesetze" forderte, bei Erweiterungen eines Zahlenbereichs sollten die Rechengesetze des Ausgangsbereichs nach Möglichkeit auch im erweiterten Bereich gelten. Freilich wurde damals der Erweiterungsprozeß noch nicht so klar durchschaut, wie es heute unter Benutzung von Mengen und Relationen möglich ist. Für uns enthält das Permanenzprinzip die Forderung, Ordnung und Operationen im erweiterten Zahlenbereich so festzusetzen, daß der neue Bereich einen zum alten isomorphen Teilbereich enthält. Im Gegensatz zum Prinzip der vollständigen Induktion hat das Permanenzprinzip keine Beweiskraft, es ist lediglich ein methodischer Leitgedanke.

Jetzt dürfen wir bei den gebrochenen Zahlen die Klammern weglassen und für $\left\{\frac{7}{1}\right\}$ wie üblich 7, für $\left\{\frac{8}{4}\right\}$ einfach 2, für $\left\{\frac{3}{5}\right\} = \left\{\frac{3}{1}\right\} : \left\{\frac{5}{1}\right\}$ den Bruch $\frac{3}{5}$ oder auch den Dezimalbruch 0,6 schreiben.

Dann können wir sagen, daß jede gebrochene Zahl als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellbar ist, und wir können alle Rechnungen mit gebrochenen Zahlen einfach mit gewöhnlichen Brüchen ausführen. Wir wollen uns aber immer daran erinnern, daß sowohl begrifflich als auch mengentheoretisch ein Unterschied zwischen dem Bruch $\frac{3}{5}$ und der gebrochenen Zahl $\frac{3}{5}$ besteht. Dies geht aus den Betrachtungen zu Beginn dieses Abschnitts hervor: Die *gebrochene Zahl* $\frac{3}{5}$, die eine Quantität widerspiegelt, stimmt mit der gebrochenen Zahl $\frac{6}{10}$ überein. Das läßt sich z. B. an den in der Schule viel benutzten Kreisteilen gut veranschaulichen. Der *Bruch* $\frac{3}{5}$ unterscheidet sich in mancherlei Hinsicht von dem Bruch $\frac{6}{10}$: Die beiden Brüche haben verschiedene Zähler und Nenner. Die gleiche Quantität ist verschieden „verpackt". Bei mancherlei

Gelegenheit, wo uns der eine Bruch zustatten kommt, ist uns der andere kaum von Nutzen. Mengentheoretisch springt der Unterschied zwischen dem Bruch $\frac{3}{5}$ und der gleichlautenden gebrochenen Zahl schon dadurch ins Auge, daß der erste als geordnetes Paar von natürlichen Zahlen eine Menge zweiter Stufe, die gebrochene Zahl aber als Klasse von quotientengleichen Brüchen eine Menge dritter Stufe ist. Dabei werden natürliche Zahlen als Individuen verstanden. Als endliche Kardinalzahlen aufgefaßt, sind natürliche Zahlen eigentlich selbst schon Mengen zweiter Stufe, also sind gebrochene Zahlen dann Mengen fünfter Stufe.

**Potenzen und Wurzeln**

Wir erklären jetzt noch die Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}$ ($\gamma$ eine gebrochene Zahl) zunächst für den Fall, daß $\gamma = \frac{n}{1}$ eine natürliche Zahl ist. Die Definition $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ erfolgt rekursiv, wobei jetzt $n'$ wieder den Nachfolger von $n$ bedeutet:

ERKLÄRUNG:

▷ $$\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n'} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \frac{a}{b}.$$

Also gilt: $\left(\frac{a}{b}\right)^{2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{3} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \text{ usw.}$$

ERKLÄRUNG:

▷ Die **Potenz** $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}$ $\left(\alpha = \frac{r}{s}\right)$ wird nun folgendermaßen erklärt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\frac{a}{b}\right)^{r}}.$$

Dabei ist unter der $s$-ten Wurzel aus $\frac{p}{q}$ $(s \in N)$ folgendes zu verstehen:

Gibt es zu den gebrochenen Zahlen $\frac{p}{q}$ und $s$ $(s \in N)$ eine gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$, so daß $\left(\frac{m}{n}\right)^{s} = \frac{p}{q}$ ist, so heißt $\frac{m}{n}$ eine $s$-te Wurzel aus $\frac{p}{q}$, geschrieben $\frac{m}{n} = \sqrt[s]{\frac{p}{q}}$.

Die $s$-te Wurzel aus einer gebrochenen Zahl ist, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt. In diesem Fall existiert auch $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{r}{s}}$ und ist eindeutig bestimmt.

Der Nachweis, der mit Hilfe der Monotoniegesetze möglich ist, sei dem Leser überlassen.

BEISPIEL:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}; \quad \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

Bildet man im Bereich der gebrochenen Zahlen erneut quotientengleiche Paare und führt man die entsprechenden Schritte wie soeben aus, so gelangt man zu einem Zahlenbereich, der dem der gebrochenen Zahlen isomorph ist, also zu keiner neuen Erweiterung. Die Durchführung würde hier zu weit führen.

**Zusammenfassung:**
**Der Bereich der gebrochenen Zahlen, der von jetzt an mit $R^*$ bezeichnet werden wird, enthält einen Teilbereich, der dem der natürlichen Zahlen hinsichtlich der Ordnung, der Addition und der Multiplikation isomorph ist.**

Wenn im Mathematikunterricht der oben beschriebene Weg – natürlich unter Berücksichtigung didaktischer Gesichtspunkte – beschritten wird, so erlernen die Schüler nicht nur das Umgehen mit Brüchen, sondern sie erkennen außerdem, daß hier ein neuer Zahlenbereich mit neuer Gesetzlichkeit aufgebaut wird. Hierbei bietet die konsequente Stützung auf das Permanenzprinzip gute Möglichkeiten, die Festsetzungen der Rechenoperationen mathematisch einwandfrei und in natürlicher Weise zu motivieren. Dadurch kann auch ein solideres Fundament für Übungen gelegt werden als bei den früher üblichen, oft halsbrecherischen Plausibilitätsbetrachtungen, insbesondere für die Multiplikation von Brüchen. Gerade hier lagen im früheren Unterricht besondere Schwierigkeiten, die sich nicht selten noch in späteren Jahren bemerkbar machten, sobald es „in die Brüche" ging. Zudem können die Schüler dadurch, daß die Isomorphie eines Teilbereiches zum Ausgangsbereich als Leitprinzip benutzt wird, in eine moderne mathematische Betrachtungsweise eingeführt werden, die ein Jahr später bei Einführung der rationalen Zahlen ganz entsprechend verwendet und dadurch gefestigt wird. Damit seien die Betrachtungen über diesen Zahlenbereich abgeschlossen.

### Dezimalbrüche

Bevor wir uns einem neuen Zahlenbereich zuwenden, wollen wir noch eine Betrachtung über *Dezimalbrüche* anstellen. Bei der Einführung des Bereichs $R^*$ kamen Zehnerbrüche in beiden Schreibweisen, als gewöhnliche und als Dezimalbrüche, vor. Es handelte sich dort um endliche oder abbrechende Dezimalbrüche, d. h. um solche, bei denen auf das Komma nur endlich viele Ziffern folgen.
Bekanntlich kann mit Hilfe des üblichen Divisionsverfahrens jeder gewöhnliche Bruch in einen Dezimalbruch entwickelt werden.
Beispiele: $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{7}{5} = 1{,}4$; $\frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots$ Dabei entsteht entweder ein endlicher oder ein unendlicher periodischer Dezimalbruch.
Um uns davon zu überzeugen, wollen wir einmal die Division $3:7$ in allen einzelnen Schritten durchführen, entsprechend der in Beispiel 19 (Kapitel 4) für periodische Funktionen angestellten Betrachtung. (↑ S. 138)

$3 : 7 = 0{,}428571428\ldots$

30

20

60

40

50

10

30+

20

60

Wir erkennen daraus:

1. Die Division bricht nie ab.
2. Der angekreuzte Rest 3 bei der 7. Division stimmt mit dem ersten Rest überein, und jetzt wiederholen sich zwangsläufig alle Reste und damit auch die Teilquotienten 4, 2, 8, 5, 7, 1. Der Dezimalbruch ist also *periodisch*.

An dem Beispiel sehen wir auch den Grund dafür, daß bei der Division 3 : 7 höchstens die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 auftreten können. Sie treten hier auch alle wirklich auf. Daher entstehen zunächst einmal 6 verschiedene Teilquotienten: 4, 2, 8, 5, 7, 1. Nach spätestens 6 Schritten müssen sich die Reste wiederholen.
Ist allgemein eine Division $a : b$ durchzuführen, wobei $a$ und $b$ beliebige natürliche Zahlen sind, so können höchstens $b - 1$ Reste auftreten. Daraus folgt:

SATZ:

▷ Die Dezimalentwicklung des Quotienten aus zwei natürlichen Zahlen ist, wenn sie nicht abbricht, periodisch.

Übrigens läßt sich auch ein abbrechender Dezimalbruch als periodischer Dezimalbruch, in dem sich 0 wiederholt, schreiben.
Bei der Division 5 : 6 treten nicht alle fünf möglichen Reste 1, 2, 3, 4, 5, sondern nur 5 und 2 auf, und die Zwei wiederholt sich. Es entsteht in diesem Fall eine eingliedrige Periode. Auf den Grund für solche Unterschiede kann hier nicht eingegangen werden. Der Nachweis dafür setzt nämlich einige Kenntnisse aus der elementaren Zahlentheorie, das ist die Lehre von der Teilbarkeit der natürlichen Zahlen, voraus. Der interessierte Leser sei hier auf Spezialliteratur verwiesen (z. B. [27]). Daß umgekehrt jeder periodische Dezimalbruch eine gebrochene Zahl darstellt, kann mit Hilfe unendlicher Reihen leicht bewiesen werden.
Es gilt:

SATZ:

▷ Jeder periodische Dezimalbruch ist als Quotient aus zwei natürlichen Zahlen darstellbar.

* Der Nachweis soll hier an Hand eines Beispiels geführt werden. Der allgemeine Beweis läuft entsprechend.

Es sei $\alpha = 7{,}34\overline{653}$.

$$\alpha = 7 + \frac{34}{100} + \frac{653}{10^5} + \frac{653}{10^8} + \frac{653}{10^{11}} + \dots$$

$$\alpha = 7 + \frac{34}{100} + \frac{653}{10^5}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \dots\right).$$

In der Klammer steht eine unendliche geometrische Reihe:

$$1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{1000}{1000 - 1} = \frac{1000}{999}$$

$$\alpha = 7 + \frac{34}{100} + \frac{653}{100\,000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{7 \cdot 99\,900 + 34 \cdot 999 + 653}{99\,900}$$

Dies ist aber der Quotient aus zwei natürlichen Zahlen.
(Bei dem Beweis wurden Sätze aus der Reihenlehre benutzt.)

**Zusammenfassung:**

**Jede gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$ läßt sich als Dezimalbruch schreiben. Die dabei entstehende Dezimalentwicklung ist entweder endlich, das heißt, sie bricht ab, oder sie ist periodisch. Umgekehrt kann jeder periodische Dezimalbruch als Quotient zweier natürlicher Zahlen geschrieben werden, ist demnach eine gebrochene Zahl.**

Die Dezimalbrüche, die bisher vorgekommen sind, stellen also keinen neuen Zahlenbereich dar, sondern sind nur andere Schreibweisen für gebrochene Zahlen.

## 5.4. Rationale Zahlen

Wir kommen jetzt zu demjenigen Zahlenbereich, der in der Schule gegenwärtig im Mathematikunterricht[1] nach der Bruchrechnung erarbeitet wird, zum Bereich $R$ der rationalen Zahlen, der auch die Null enthält.
In der Schule wurde zu seiner Einführung gern das Thermometer benutzt. Der Wert dieses Beispiels besteht darin, daß es die praktische Bedeutung der positiven und negativen rationalen Zahlen zeigt und ihre Unterbringung auf der Zahlengeraden demonstriert. In ähnlicher Weise werden Wasserstands-, Höhenmessungen und Toleranzen verwendet.
Alle diese Beispiele sind zwar geeignet, die Einführung eines Zahlenbereichs mit einander „entgegengesetzten" Zahlen zu motivieren, sie spiegeln aber nicht den mathematischen Prozeß der Bildung der neuen Zahlen wider. Besser steht es mit folgendem Einführungsbeispiel:

[1] Lehrplan für Mathematik, Klassen 5 bis 8. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1971.

BEISPIEL:
Unter den Klassen einer Schule wird ein Wettbewerb veranstaltet, bei dem Sauberkeit, Ordnung und Schmuck der Klassenräume sowie Pünktlichkeit und Disziplin der Schüler durch Plus- bzw. Minuspunkte gewertet werden. Nun sollen zunächst nicht die Pluspunkte als positive Zahlen, die Minuspunkte als negative Zahlen gedeutet werden; um dies zu vermeiden, könnte man, wenn man die stilistische Unschönheit in Kauf nehmen will, vielleicht von guten bzw. schlechten Punkten sprechen. Man gehe dann folgendermaßen vor: Klasse 7a hat 5 gute Punkte und einen halben schlechten. Ihr wird für den Klassenvergleich die Zahl $\left(+\frac{9}{2}\right)$ zugeteilt. Die Parallelklasse erwarb sogar 6 gute Punkte, die aber durch $\frac{3}{2}$ schlechte Punkte beeinträchtigt wurden. Diese Klasse erhielt gleichfalls $\left(+\frac{9}{2}\right)$ bei der Wertung. Eine andere Klasse erwarb nur 3 gute und $\frac{5}{2}$ schlechte Punkte und erhielt die Zahl $\left(+\frac{1}{2}\right)$. Wieder bei einer anderen Klasse sah es noch schlechter aus: Einem einzigen guten Punkt standen drei schlechte Punkte gegenüber, so daß ihr die Zahl $(-2)$ zuerkannt wurde.
Wir stellen die Ergebnisse für diese vier Klassen zusammen:

| | Gute Punkte | schlechte Punkte | Ergebnis |
|---|---|---|---|
| 1. Klasse | 5 | $\frac{1}{2}$ | $\left(+\frac{9}{2}\right)$ |
| 2. Klasse | 6 | $\frac{3}{2}$ | $\left(+\frac{9}{2}\right)$ |
| 3. Klasse | 3 | $\frac{5}{2}$ | $\left(+\frac{1}{2}\right)$ |
| 4. Klasse | 1 | 3 | $(-2)$ |

Weitere Beispiele liefert das kaufmännische Rechnungswesen, das übrigens bei seinem Aufblühen in Italien im 15. Jahrhundert nicht wenig zur Entwicklung und Propagierung der neuen Zahlen beigetragen hat.[1] Auch hier entsteht die positive bzw. negative Zahl erst bei der Bilanz durch Gegenüberstellung von Aktiva und Passiva.

### 5.4.1. *Paare gebrochener Zahlen*

Wir wollen wieder zusammenstellen, was die neuen Zahlen leisten sollen. Sie sollen bei Gegenüberstellungen von gebrochenen Zahlen wie 5 und $\frac{1}{2}$ oder 1 und 3 den Über-

[1] Die ersten gedruckten mathematischen Bücher waren eine kaufmännische Arithmetik (Treviso 1478) und eine lateinische Ausgabe der *Elemente* von EUKLID (Venedig 1482).

schuß der einen gegenüber der anderen Zahl angeben, wobei die Reihenfolge der Partner im Paar zu beachten ist. „Differenzengleiche“ Paare wie $\left[5, \frac{1}{2}\right]$ und $\left[6, \frac{3}{2}\right]$ sollen die gleiche (positive) Zahl ergeben, Paare wie [1, 3] und [4, 6] die gleiche (negative) Zahl. Alle Rechenoperationen, die im Bereich der gebrochenen Zahlen ausführbar sind, sollen auch im neuen Zahlenbereich möglich sein. Außerdem soll sich in ihm uneingeschränkt die Subtraktion ausführen lassen. Schließlich gilt es noch – wie bei der vorigen Erweiterung des Zahlenbereichs – unseren Ausgangsbereich, den Bereich $R^*$, in den neuen Bereich, den wir mit $R$ bezeichnen wollen, einzubetten. Das stellt gewisse Forderungen an die Definitionen der Ordnung und der Rechenoperationen in $R$: Sie müssen so erklärt werden, daß in einem gewissen zu $R^*$ isomorphen Teilbereich von $R$ ebenso gerechnet werden kann wie in $R^*$.
Wir übersetzen diese Forderungen wieder in die Sprache der Mengen und Relationen und halten dabei dieselben Schritte ein wie beim Aufbau des vorigen Zahlenbereichs. Der Unterschied besteht erstens darin, daß wir jetzt nicht von dem Bereich $N$ der natürlichen Zahlen, sondern von dem Bereich $R^*$ ausgehen, zweitens darin, daß wir eine andere Äquivalenzrelation benutzen werden. Dementsprechend werden dann natürlich auch Ordnung und Rechenoperationen anders zu erklären sein.
Die Elemente von $R^*$ sollen jetzt nicht mehr mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden, da diese stets für die Zahlen des neuen Bereichs verwendet werden, sondern mit lateinischen. Sonst sind die entsprechenden Schritte durchzuführen wie bei der Konstruktion von $R^*$. Sie sind aus den Überschriften dieses Abschnittes erkennbar.

Wir bilden **geordnete Paare gebrochener Zahlen** $[m, n]$, zum Beispiel $\left[\frac{7}{2}, 2\right]$ oder [5, 7].

### 5.4.2. *Differenzengleichheit*

Wir wollen erreichen, daß differenzengleiche Paare auf ein und dieselbe neue Zahl führen. Wann ist das Paar $[m, n]$ differenzengleich dem Paar $[m', n']$? Da im Bereich $R^*$ der gebrochenen Zahlen die Subtraktion nur dann ausführbar ist, wenn der Minuend größer als der Subtrahend ist, müssen wir die Fälle $m > n$ und $n > m$ unterscheiden. Im ersten Fall müßte $m - n = m' - n'$, im zweiten $n - m = n' - m'$ sein. Wir vereinigen beide Fälle, wenn wir fordern, daß $m + n' = m' + n$ sein soll. Dies hat außerdem den Vorteil, daß nur die (in $R^*$ unbegrenzt ausführbare) Addition verwendet wird und ohne Größenbetrachtung in $R^*$ entschieden werden kann, ob zwei Paare differenzengleich sind.

ERKLÄRUNG:

▷ Zwei Paare $[m, n]$ und $[m', n']$ $(m, n, m', n' \in R^*)$ heißen **differenzengleich**, wenn $m + n' = m' + n$ ist (geschrieben $[m, n] \underset{(D)}{=} [m', n']$).

Zum Beispiel gilt
$[18{,}5,\ 15] \underset{(D)}{=} [14,\ 10{,}5]$, da $18{,}5 + 10{,}5 = 14 + 15$ ist.

Zwei geordnete Paare von Elementen aus $R^*$ sind entweder differenzengleich oder nicht. Die Differenzengleichheit ist also eine über der Kreuzmenge $R^* \times R^*$ erklärte Relation. Ähnlich wie bei der Quotientengleichheit von Paaren natürlicher Zahlen kann man zeigen, daß die Differenzengleichheit von Paaren gebrochener Zahlen eine Äquivalenzrelation ist.
Wie wir mit Hilfe der Quotientengleichheit zu neuen Zahlen gelangten, so werden wir auch hier neue Zahlen gewinnen. Die Menge $R^* \times R^*$ zerfällt durch die Äquivalenzrelation der Differenzengleichheit in lauter nichtleere elementefremde Klassen von Paaren. **Jede dieser Klassen wird als rationale Zahl bezeichnet.**

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einer **rationalen Zahl** wird die Klasse differenzengleicher Paare $[m, n]$ verstanden, wobei $m$ und $n$ gebrochene Zahlen sind.

Eine rationale Zahl kann durch ein beliebiges Paar ihrer Klasse vertreten werden. Den Bereich aller rationalen Zahlen bezeichnen wir als $R$.
In der Schule gab es früher keine Einführung der rationalen Zahlen durch geordnete Paare mit anschließender Klassenbildung. Sie wurden vielmehr mit Hilfe des Thermometers, Höhenmaßstabes und dergl. unmittelbar als positive bzw. negative Zahlen – wobei die Null einbezogen wurde – erarbeitet. Eine Antwort auf die Frage, was eine rationale Zahl denn nun eigentlich sei, kann dadurch nicht gegeben werden. Dagegen wird im Lehrbuch für Klasse 7[1] im Grunde der soeben beschriebene Weg gewählt; nur wird statt von dem geordneten Paar $[a, b]$ von der „Differenz“ $a - b$ gesprochen. Die Anführungsstriche zeigen dabei an, daß es sich hier nicht um die früher in anderen Zahlenbereichen erklärte Differenz handelt. Die Definition der rationalen Zahl durch Klassenbildung erfolgt dann wie oben beschrieben. Damit wird der Forderung nach einem logisch einwandfreien und dabei für die Schüler faßlichen Aufbau des neuen Zahlenbereichs Rechnung getragen.

Aufgabe 11

### 5.4.3. *Ordnung der rationalen Zahlen*

Um eine Ordnung für die neuen Zahlen zu erklären, schlagen wir diesmal einen anderen Weg ein, der uns auch gleich die Scheidung in positive und negative Zahlen und die Null liefern wird.
Wir vergleichen die Partner in einem Paar $[m, n]$. Nehmen wir an, daß $n < m$ ist. Wir zeigen zunächst, daß dann auch bei einem beliebigen zu $[m, n]$ differenzengleichen Paar $[m', n']$ entsprechend $n' < m'$ ist. Dann ist dies nämlich eine für die ganze Klasse, also für die betreffende rationale Zahl, typische Eigenschaft.
Aus $n < m$ folgt durch Addition von $m' + n'$:

[1] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1972, S. 30 ff.

$$n+(m'+n')<m+(m'+n'),\ \text{oder}\ (n+m')+n'<(m+n')+m',$$

und wegen $m+n'=m'+n$ folgt weiter, daß, wie behauptet, $n'<m'$ gilt.
Dabei haben wir eines der Monotoniegesetze in $R^*$ angewendet. Wegen $n<m$ stellt $m-n$ eine gebrochene Zahl $u$ dar. Wir schreiben die Klasse von $[m, n]$ jetzt als $(+u)$. Dabei darf das Pluszeichen in der Klammer nicht mit einem Operationszeichen verwechselt werden. Wir bezeichnen es als **Vorzeichen** der rationalen Zahl und verbinden es durch Klammern fest mit $u$. Ist $n<m$ und $[m, n] \underset{(D)}{=} [m', n']$, so stellen beide Paare dieselbe rationale Zahl $(+u)$ dar, denn aus $m+n'=m'+n$ folgt:

$$u=m-n=m'-n'.$$

Eine solche Zahl $(+u)$ $(u\in R^*)$ nennen wir jetzt eine **positive rationale Zahl.** Man kann also zum Beispiel die rationale Zahl der Klasse $\left[\frac{12}{5}, \frac{3}{5}\right]$ einfach als $\left(+\frac{9}{5}\right)$ schreiben.
Ist aber in einem Paar $[m, n]$ $(m, n\in R^*)$ die erste Zahl $m$ gleich der zweiten Zahl $n$, so ist in allen differenzengleichen Paaren $[m', n']$ auch $m'=n'$. Wir verabreden als Zeichen für die Klasse all dieser Zahlenpaare „0".
Es bleibt noch der Fall $m<n$ zu betrachten. In diesem Fall existiert sicher die gebrochene Zahl $n-m=w$. Wie oben zeigt man, daß bei jedem differenzengleichen Paar $[m', n']$ die gleiche Differenz $n'-m'=w$ entsteht. Wir bezeichnen die Klasse eines solchen Paares als $(-w)$ und nennen eine solche rationale Zahl **negativ.** Auch hier ist das Minuszeichen kein Operationszeichen, sondern ein Vorzeichen, das fest zu seiner Zahl gehört.
Ist $u$ eine beliebige Zahl aus $R^*$, so sind $(+u)$ und $(-u)$ positive bzw. negative rationale Zahlen. Die rationalen Zahlen erhalten wir alle in der Form $(\pm u)$ ($u$ beliebig, $u\in R^*$); nur muß 0 noch hinzugenommen werden. Die Zahlen des neuen Bereichs sollen wieder mit griechischen Buchstaben bezeichnet werden.
Wir setzen nun eine Ordnung für rationale Zahlen folgendermaßen fest: Sind die rationalen Zahlen $\alpha$ und $\beta$ beide positiv,

$$\alpha=(+u),\quad \beta=(+v)\ (u, v\in R^*),$$

so soll zwischen $\alpha$ und $\beta$ dieselbe Kleiner-Relation bestehen wie zwischen den gebrochenen Zahlen $u$ und $v$. Also $\alpha<\beta$ dann und nur dann, wenn $u<v$. Zum Beispiel ist $(+5)$ kleiner als $(+7)$, da $5<7$ ist.
Sind $\alpha$ und $\beta$ beide negativ,

$$\alpha=(-u),\quad \beta=(-v)\ (u, v\in R^*),$$

so sollen sie in der umgekehrten Größenrelation stehen wie $u$ und $v$, also $\alpha<\beta$ dann und nur dann, wenn $u>v$. Zum Beispiel ist $(-5)>(-7)$, da $5<7$. Jede positive Zahl soll größer sein als 0 und als jede negative Zahl. 0 soll größer sein als jede negative Zahl.

Für die neuen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ werden wieder dieselben Symbole „$<$", „$+$", „$-$" etc. verwendet, eine Ungenauigkeit, die wie bei der Konstruktion des Bereichs $R^*$ später durch den Nachweis einer bestimmten Isomorphie gerechtfertigt werden wird.

Der Leser überzeuge sich davon, daß dadurch eine irreflexive Ordnungsrelation gegeben ist! Der Bereich der rationalen Zahlen ist auf diese Weise vollständig geordnet.

Aufgabe 12

### 5.4.4. *Rechenoperationen*

**Addition, Subtraktion**

Wir erklären jetzt für die rationalen Zahlen $\alpha$ und $\beta$ eine Addition durch Rückgang auf die Paare aus $R^*$.

ERKLÄRUNG:

▷ Die Zahlen $\alpha, \beta$ seien vertreten durch die Paare $[m, n]$ bzw. $[r, s]$. Unter der **Summe** $\alpha + \beta$ verstehen wir dann die Klasse von $[m + r, n + s]$.

Ist z. B. $\alpha$ die Klasse des Paares $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right]$, $\beta$ die des Paares $\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{1}\right]$, so ist $\alpha + \beta$ die Klasse des Paares

$$\left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2}, \frac{1}{6} + \frac{1}{1}\right] = \left[\frac{11}{6}, \frac{7}{6}\right].$$

ERKLÄRUNG:

▷ Unter der **Differenz** der Zahlen $\alpha, \beta$ verstehen wir die Klasse von $[m + s, n + r]$.

Bedeuten $m, n, r, s$ dieselben gebrochenen Zahlen wie im letzten Beispiel, so ist $\alpha - \beta$ die Klasse des Paares

$$\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{1}, \frac{1}{6} + \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right];$$

Der Leser beachte, daß die Bildung der Differenz $\alpha - \beta$ im Bereich $R^*$ nur Additionen verlangt, also im neuen Bereich stets ausführbar ist!
Addition wie auch Subtraktion sind in $R$ stets ausführbar. Beide Operationen sind, wie sich leicht zeigen läßt, von der Wahl der Vertreterpaare unabhängig.
Weiter gilt $(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$, d. h., die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition (↑ Aufgabe 14).
Das Kommutativ- und Assoziativgesetz lassen sich durch einfaches Aufschreiben der Paare verifizieren.

Aufgabe 13 und 14

Betrachten wir die Addition für positive und negative Zahlen gesondert, so ergibt sich eine Anzahl von Regeln, zum Beispiel:

a) $$(+u) + (+v) = (+(u + v)) \qquad (u, v \in R^*)$$

b) $$(+u) + (-v) = \begin{cases} (+(u - v)), & \text{falls } v < u \\ (-(v - u)), & \text{falls } u < v \\ 0, & \text{falls } u = v \end{cases}$$

c) $$(-u) + (+v) = \begin{cases} (+(v - u)), & \text{falls } u < v \\ (-(u - v)), & \text{falls } v < u \\ 0, & \text{falls } u = v \end{cases}$$

d) $\quad (-u)+(-v)= \ (-(u+v))$

e) $\quad (+u)-(+v)=\begin{cases}(+(u-v)), & \text{falls } v<u\\ (-(v-u)), & \text{falls } u<v\\ 0, & \text{falls } u=v\end{cases}$

f) $\quad (+u)-(-v)= \ (+(u+v))$

g) $\quad (-u)-(+v)=(-(u+v))$

h) $\quad (-u)-(-v)=\begin{cases}(+(v-u)), & \text{falls } u<v\\ (-(u-v)), & \text{falls } v<u\\ 0, & \text{falls } u=v\end{cases}$

Um eine Probe für die Beweise zu geben, sei die Formel b) nachgewiesen. Es sei $\alpha=(+u)$ die Klasse von $[m, n]$, $m=n+u$, $\beta=(-v)$ die Klasse von $[r, s]$, $s=r+v$. Dann ist $\alpha+\beta$ die Klasse von $[n+u+r, n+r+v]$. Dieses Paar ist differenzengleich dem Paar $[u, v]$.

1. Fall: $v<u$. Nach der auf Seite 229 getroffenen Festsetzung ist die Klasse des Paares $[u, v]$ dann als $(+w)$ zu bezeichnen, wobei $w=u-v$ ist. Also ist in diesem Fall die Formel richtig.
2. Fall: $u<v$. Dann ist die Klasse des Paares $[u, v]$ als $(-z)$ zu bezeichnen mit $z=v-u$. In diesem Fall ist $(+u)+(-v)$ also gleich $-(v-u)$. Damit ist Formel b) für den zweiten Fall nachgewiesen.
3. Fall: $u=v$ Die Klasse des Paares $[u, u]$ ist als die rationale Zahl 0 erklärt.

Damit ist die Formel b) für alle drei Fälle bewiesen.
Der Nachweis der Formel für $(+u)+(+v)$ kann wegen seiner Einfachheit hier übergangen werden.
Für die Differenz gelten die Formeln e), f), g), h).
Der Leser konkretisiere die Formeln a) bis h) durch Einsetzen von Zahlen!

Aufgabe 15

Die Einführung der Addition und Subtraktion rationaler Zahlen im Schulunterricht stellte von jeher eines der schwierigsten methodischen Probleme des Mathematikunterrichts dar und erfordert auch heute noch ein behutsames und sehr langsames Vorgehen. Das gilt unabhängig davon, ob die Rechenregeln a) bis h) wie hier als beweisbare Sätze gewonnen oder zur Definition von Addition und Subtraktion verwendet werden, wie es im Prinzip im Lehrbuch für Klasse 7[1] geschieht. Ein Rechnen nur auf Grund der Formeln a) bis h) ist praktisch kaum möglich. Das liegt an der Vielzahl der Formeln mit den zusätzlichen Fallunterscheidungen. In der älteren und jüngeren methodischen Literatur wurden daher für diesen Unterrichtskomplex die verschiedensten Vereinfachungen und Hilfen angeboten. So wird, um die Definition plausibel zu machen, verschiedentlich das Permanenzprinzip verwendet. Eine große Vereinfachung wird dadurch erreicht, daß frühzeitig der Begriff „entgegengesetzte Zahl" eingeführt und die Subtraktion als Umkehrung der Addition definiert wird: Die Subtraktion einer Zahl ist auszuführen als Addition der entgegengesetzten Zahl. Dadurch fallen die Formeln für die Subtraktion fort. Im Unterricht ist darauf zu achten, daß die Schüler die Definitionen nicht als bewiesene Sätze ansehen, und daß sie recht bald und sicher mit den neuen Zahlen rechnen lernen.

---

[1] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 7. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 39 ff.

### Multiplikation

Die Zahlen $\alpha$ und $\beta$ seien wieder durch die Paare $[m, n]$ bzw. $[r, s]$ vertreten. Im vorigen Zahlenbereich $R^*$ hatten sich die Paare $[m, n]$ letzten Endes als Quotienten der natürlichen Zahlen $m$ und $n$ herausgestellt. Dementsprechend war die Erklärung der Multiplikation dort sehr einfach („Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner"). Dafür war die Formel für die Addition etwas unhandlich. In dem Zahlenbereich $R$ dagegen entspricht ein Paar $[m, n]$ von gebrochenen Zahlen der Differenz aus diesen beiden Zahlen. Demzufolge ließ sich die Addition hier durch einen einfach gebauten Ausdruck erklären, während wir jetzt für die Multiplikation eine etwas kompliziertere Formel brauchen. Wir wollen uns – sozusagen im Unreinen – das Paar $[m, n]$ durch die Differenz $m—n$, das Paar $[r, s]$ durch die Differenz $r—s$ ersetzt denken, um eine zweckmäßige Festsetzung der Multiplikation in $R$ zu finden. Es ergibt sich

$$(m - n)(r - s) = (mr + ns) - (ms + nr).$$

Diese Überlegung ist nur als ein heuristisches Verfahren aufzufassen, keinesfalls als eine Herleitung; denn im allgemeinen werden die verwendeten Differenzen in $R^*$ ja gar nicht existieren. Unsere Betrachtung zeigt uns aber, daß wir gut daran tun, das Produkt der rationalen Zahlen $\alpha$ und $\beta$ durch die Klasse des Paares $[mr + ns, ms + nr]$ zu erklären.

ERKLÄRUNG:

▷ Wir verstehen unter dem **Produkt** $\alpha \cdot \beta$ der rationalen Zahlen $\alpha$ (dargestellt durch das Paar $[m, n]$) und $\beta$ (dargestellt durch $[r, s]$) die Klasse des Paares $[mr + ns, ms + nr]$.

Natürlich muß nun noch gezeigt werden, daß sich bei Ersetzung eines Faktors durch ein differenzengleiches Paar dieselbe Klasse des Produkts ergibt. Der Nachweis soll hier dadurch geführt werden, daß das Paar $[m, n]$ durch das differenzengleiche Paar $[m', n']$ ersetzt wird.

*Voraussetzung:* $[m, n] \underset{(\mathrm{D})}{=} [m', n']$

oder

$$m + n' = m' + n.$$

*Behauptung:* $[mr + ns, ms + nr] \underset{(\mathrm{D})}{=} [m'r + n's, m's + n'r]$.

Zum Beweis multiplizieren wir die beiden Seiten der Gleichung $m + n' = m' + n$ einmal mit $r$, dann mit $s$ und addieren die Seiten beider Gleichungen, nachdem wir bei einer der Gleichungen noch die Seiten vertauscht haben. Wir erhalten

$$mr + n'r = m'r + nr,$$
$$m's + ns = ms + n's.$$

Addiert und umgeordnet:

$$(mr + ns) + (m's + n'r) = (m'r + n's) + (ms + nr),$$

das ist aber die Behauptung.

Damit ist die Multiplikation rationaler Zahlen eindeutig erklärt. Für die Praxis ist diese Definition allerdings wenig geeignet. Machen wir uns das an einem Beispiel klar. Sei $\alpha$ die Klasse des Paares [3, 5], also $\alpha = (-2)$, $\beta$ die Klasse des Paares [10, 7], also $\beta = (+3)$. Dann ist $\alpha \cdot \beta$ nach Definition die Klasse von

$$[3 \cdot 10 + 5 \cdot 7, 3 \cdot 7 + 5 \cdot 10] = [65, 71] = (-6).$$

Wir hätten dasselbe Resultat erhalten, wenn wir die rationalen Zahlen wie auf S. 228 f. als positive und negative Zahlen bzw. 0 behandelt hätten. Bei unserem Beispiel kämen wir dann auf die einfache Rechnung

$$(-2) \cdot (+3) = (-(2 \cdot 3)) = (-6).$$

Für die Multiplikation gelten nämlich die Regeln:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (+u) \cdot (+v) = (+uv) \\ \text{b)} & (+u) \cdot (-v) = (-uv) \\ \text{c)} & (-u) \cdot (+v) = (-uv) \\ \text{d)} & (-u) \cdot (-v) = (+uv) \\ \text{e)} & (+u) \cdot 0 = 0 \cdot (+u) = 0 \\ \text{f)} & (-v) \cdot 0 = 0 \cdot (-v) = 0 \end{array}\right\} \quad (u, v \in R^*)$$

Wir beweisen zum Beispiel die Formel $(-u) \cdot (-v) = (+uv)$, $(u, v \in R^*)$. Sei $\alpha = (-u)$ vertreten durch das Paar $[m, m+u]$, die Zahl $\beta = (-v)$ durch das Paar $[r, r+v]$. Dann ist $\alpha \cdot \beta$ nach Definition des Produkts die Klasse des Paares

$$[mr + (m+u)(r+v), m(r+v) + r(m+u)].$$

Dieses ist aber nach Ausrechnung gleich dem Paar

$$[mr + mr + ur + mv + uv, mr + mv + mr + ur].$$

Hier stehen rechts vom Komma vier von den links stehenden Gliedern. Es fehlt nur das Glied $u\,v$, das links vom Komma steht. Das Produkt $\alpha \cdot \beta$ ist also nach obiger Festsetzung als $(+uv)$ zu bezeichnen.

Aufgabe 16

Mit den Formeln a) bis f) für die Multiplikation steht es ähnlich wie mit den Formeln von S. 230 f. für die Addition und Subtraktion. Auch sie können als Definitionen benutzt werden. Hier sind die Schwierigkeiten bedeutend geringer als bei Addition und Subtraktion. Dabei kann, um die Festsetzung plausibel zu machen, die Forderung verwendet werden, daß in dem zu $R^*$ isomorphen Teilbereich von $R$ ebenso gerechnet werden soll wie in $R^*$. Wie bei der Addition bedarf es großer Vorsicht, damit bei den Schülern nicht infolge der Plausibilitätsbetrachtungen der Eindruck entsteht, die Formeln seien bewiesen.

Für die Multiplikation gelten das Kommutativ- und Assoziativgesetz, wie die Durchrechnung nach einigen Umformungen ergibt. Um ein Beispiel für solche Beweise zu geben, sei das Distributivgesetz $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ bewiesen. Es sollen vertreten sein $\alpha$ durch $[m, n]$, $\beta$ durch $[r, s]$, $\gamma$ durch $[w, z]$. Dann ist die Summe $\beta + \gamma$ die Klasse von $[r+w, s+z]$ und $\alpha(\beta + \gamma)$ die von

$$[m(r+w) + n(s+z), m(s+z) + n(r+w)].$$

Daneben bilden wir $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$. Die Klasse $\alpha\beta$ enthält das Paar $[mr + ns, ms + nr]$, die Klasse $\alpha\gamma$ das Paar $[mw + nz, mz + nw]$.
Daher wird $\alpha\beta + \alpha\gamma$ repräsentiert durch das Paar

$$[mr + ns + mw + nz, ms + nr + mz + nw].$$

Rechnet man in dem Paar von $\alpha(\beta + \gamma)$ die Klammern aus und vergleicht, so ergibt sich Identität.

### 5.4.5. *Monotoniegesetze in R*

Jetzt müssen die Monotoniegesetze für den Bereich $R$ bewiesen werden. Hierbei ist zu beachten, daß zwar die Gesetze für die Addition oder Subtraktion einer beliebigen rationalen Zahl auf beiden Seiten einer Ungleichung in $R$ die gleiche Form haben wie in $R^*$, aber nicht die Gesetze für die Multiplikation oder für die Division, die allerdings erst später erklärt wird.
Es seien $\alpha, \beta, \gamma$ Elemente von $R$ und $\alpha < \beta$.
Dann gilt

$$\alpha \pm \gamma < \beta \pm \gamma$$

$$\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma, \qquad \text{falls } \gamma > 0,$$

und

$$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma = 0, \quad \text{falls } \gamma = 0,$$

$$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma, \qquad \text{falls } \gamma < 0.$$

Zum Beispiel folgt aus $(+3) < (+5)$:

$$(+3) \cdot (-1) > (+5) \cdot (-1),$$

$$(-3) > (-5).$$

Wenn man die Gesetze für die Multiplikation positiver und negativer Zahlen beachtet, so ist der Nachweis leicht. Ist z. B. $\alpha = (-u)$, $\beta = (+v)$, $(u, v \in R^*)$, so gilt $\alpha < \beta$.
Sei $\gamma = (-w)$ $(w \in R^*)$.
Dann ist $\alpha \cdot \gamma = (+uw)$, $\beta \cdot \gamma = (-vw)$, und da $\beta \cdot \gamma < 0$, $\alpha \cdot \gamma > 0$ ist, besteht die Ungleichung

$$\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma.$$

Aufgabe 17

Mit Hilfe dieser Monotoniegesetze läßt sich wieder zeigen, daß es zu zwei gegebenen rationalen Zahlen $\alpha, \beta$ höchstens eine rationale Zahl $\gamma$ gibt, so daß $\beta \cdot \gamma = \alpha$ ist. Falls es also einen Quotienten $\alpha : \beta$ gibt, so ist er eindeutig bestimmt. Daß es mindestens einen solchen Quotienten gibt, ergibt sich aus der Festsetzung der Division.

**Division**

ERKLÄRUNG:

▷ Die **Division** wird für rationale Zahlen folgendermaßen erklärt:

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\ \alpha=(+u),\beta=(+v) & \alpha:\beta=\left(+\frac{u}{v}\right) & \\ 2)\ \alpha=(+u),\beta=(-v) & \alpha:\beta=\left(-\frac{u}{v}\right) & \\ 3)\ \alpha=(-u),\beta=(+v) & \alpha:\beta=\left(-\frac{u}{v}\right) & \\ 4)\ \alpha=(-u),\beta=(-v) & \alpha:\beta=\left(+\frac{u}{v}\right) & \\ \multicolumn{3}{l}{5)\ \alpha=0, \beta \text{ beliebig, aber ungleich } 0, \quad \alpha:\beta=0} \end{array}\right\} \quad (u, v \in R^*)$$

Der Leser beachte, daß $\frac{u}{v}$ in $R^*$ stets existiert!

In jedem der Fälle ist $(\alpha:\beta)\cdot\beta=\alpha$, die Bezeichnung „Quotient" daher gerechtfertigt. Der Nachweis stützt sich auf die Definitionen von Multiplikation und Division sowie auf die Gleichung $\frac{u}{v}\cdot v=u$, die für gebrochene Zahlen gilt (↑ Aufgabe 10).

Die Eindeutigkeit ist gleichfalls, wie oben erwähnt, gesichert.

Die Division durch 0 wird nicht erklärt. Wäre nämlich für irgendeine rationale Zahl $\alpha$ ein Quotient $\alpha:0$ als eine rationale Zahl $\beta$ erklärt, so müßte sich aus der Gleichung $\alpha:0=\beta$ durch Multiplikation beider Seiten mit dem Divisor 0 ergeben: $\alpha=0\cdot\beta=0$. Die Division durch 0 ließe sich also bei Aufrechterhaltung unserer Regeln für den Umgang mit Gleichungen höchstens für $\alpha=0$ erklären. In diesem Fall ergäbe sich aber:

$$0:0=\beta,$$

nach Multiplikation mit 0:

$$0=\beta\cdot 0.$$

Dies ist aber nach Definition der Multiplikation für jede rationale Zahl $\beta$ erfüllt. Die Division durch 0 müßte also, falls überhaupt erklärbar, unendlich vieldeutig sein. Mit solch einer Rechenoperation können wir in unserem Zahlenbereich $R$ nichts anfangen. Daher wird die Division durch Null nicht zugelassen.

Die oben stehenden Monotoniegesetze können jetzt ergänzt werden:

**Monotoniegesetze für die Division**

Ist $\alpha<\beta$, so gilt

$$\alpha:\gamma\begin{cases}<\beta:\gamma, \text{ falls } \gamma>0\\ >\beta:\gamma, \text{ falls } \gamma<0.\end{cases}$$

Die Beweise ergeben sich einfach durch die Definitionen der Division und der Kleinerbeziehung. Die Null tritt als Divisor nicht auf.

Aufgaben 18 und 19

Jetzt soll noch der **absolute Betrag** $|\alpha|$ einer rationalen Zahl erklärt werden.

ERKLÄRUNG:

▷ Der **absolute Betrag** von $\alpha$, kurz auch „Betrag von $\alpha$", $|\alpha|$, soll von den beiden Zahlen $\alpha=(\pm u)$, $-\alpha=(\mp u)$ die nicht negative sein.

Dafür können wir auch schreiben:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{für } \alpha > 0 \\ 0 & \text{für } \alpha = 0 \\ -\alpha & \text{für } \alpha < 0. \end{cases}$$

Zum Beispiel ist $\left|-\frac{3}{2}\right| = \left|+\frac{3}{2}\right| = \left(+\frac{3}{2}\right)$ und $|0| = 0$.

Aus den Definitionen ergibt sich unmittelbar

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad |\alpha : \beta| = |\alpha| : |\beta| \quad (\beta \neq 0),$$

ferner die sog. Dreiecksungleichung

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|,$$

wie ein Blick auf die Formeln a) bis d) von S. 230 f. zeigt.

**Rationale und gebrochene Zahlen**

Es fehlt noch die Einbettung des alten in den neuen Zahlenbereich. Wir wollen den Bereich $R^*$ mit dem positiven Bereich der rationalen Zahlen vergleichen. Die rationale Zahl $(+u)$ soll der gebrochenen Zahl $u$, die rationale Zahl $(+v)$ der gebrochenen Zahl $v$ zugeordnet werden. Prüfen wir, ob dann das Bild von $(+u)+(+v)$ auch $u+v$, das Bild von $(+u)\cdot(+v)$ auch $u \cdot v$ ist! Wir brauchen dazu nur die Regeln (S. 230 f. und S. 233) für die Addition bzw. die Multiplikation positiver Zahlen anzuwenden:

$$(+u)+(+v) = (+(u+v)), \; (+u)\cdot(+v) = (+uv).$$

Dasselbe gilt für die sowohl in $R^*$ als auch in $R$ stets ausführbare Division $\frac{u}{v}$ bzw. $(+u):(+v)$ sowie für die Subtraktion, soweit sie in $R^*$ ausführbar ist. (↗ Formel e) von S. 231!)

Da auch die Ordnung für rationale Zahlen so festgesetzt wurde, daß die positive Zahl $(+u)$ kleiner ist als die positive Zahl $(+v)$ genau dann, wenn $u < v$ ist, besteht auch hinsichtlich der Ordnung eine genaue Entsprechung zwischen $R^*$ und dem Teilbereich der positiven rationalen Zahlen.

> **Zusammenfassung:**
> **Der Bereich $R$ der rationalen Zahlen enthält einen Teilbereich, den der positiven rationalen Zahlen, der dem Bereich der gebrochenen Zahlen hinsichtlich der Ordnung, der Addition und der Multiplikation isomorph ist.**

Wir schreiben jetzt für die positive rationale Zahl $(+u)$ einfach $u$. Da sich durch Vergleich der Regeln b) und e) bzw. d) und g) von Seite 230 f. ergibt:

$$(\pm u)+(-v) = (\pm u)-(+v),$$

können wir einfach schreiben:

$$(\pm u)-(+v) = (\pm u) - v.$$

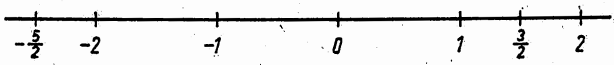



Bild 5.1.

Ein Fehler kann hier durch Weglassen des positiven Vorzeichens nicht entstehen. (Bild 5.1.).
Wir haben mit dem Bereich der rationalen Zahlen unsere Absicht erreicht, einen Zahlenbereich zu schaffen, in dem die sogenannten vier *Grundrechenoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation* und *Division*, unbeschränkt ausführbar sind, und der einen zum Bereich der gebrochenen Zahlen isomorphen Teilbereich enthält.
Eine erneute Bildung differenzengleicher Paare in $R$ führt auf einen zu $R$ isomorphen Bereich. Das läßt sich auf ähnliche Art nachweisen wie die entsprechende Aussage für den Bereich $R^*$. Eine neue Erweiterung ist so nicht möglich.

## 5.5. Reelle Zahlen

### 5.5.1. *Allgemeines*

Was haben wir bisher erreicht? Mit Hilfe des Bereichs der natürlichen Zahlen können wir endliche Mengen durchzählen und ordnen, wir können in diesem Zahlenbereich unbeschränkt die Addition und die Multiplikation ausführen. Der Bereich $R^*$ ermöglicht uns beliebige Divisionen und praktische Längenmessungen. In ihm ist außer der Addition und Multiplikation auch die Division unbeschränkt ausführbar. Der Bereich $R$ ermöglicht auch eine Gegenüberstellung von positiven und negativen Zahlen.
In $R$ sind die sogenannten vier Grundrechenoperationen, Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division, unbeschränkt ausführbar. Lediglich bei der Division muß der Fall, daß der Divisor gleich 0 ist, ausgeschlossen werden.
Damit sind die beim Teilen und Messen praktisch anfallenden Aufgaben lösbar. Die Messung führt dabei auf einen endlichen Dezimalbruch.
Der Zahlenbereich $R$ der rationalen Zahlen scheint also für die in der Praxis anfallenden Aufgaben ausreichend zu sein. In der Tat bedient man sich bei sehr vielen Rechnungen dieses Zahlenbereichs.
Dennoch erfordern viele Probleme der Praxis noch weitere Zahlenbereiche. Schon eine mathematisch exakte Behandlung der Streckenmessung führt auf ein solches Problem. Wir werden sehen, daß zu seiner Bewältigung der Zahlenbereich der rationalen Zahlen nicht ausreicht.
Wir hatten eine Strecke $a$ mit einem Gliedermaßstab auszumessen (↗ S. 214). Die Messung ergab $|a| = 7{,}35$ m. (Dabei ist wieder unter $|a|$ die Länge der Strecke $a$, genauer gesagt, die Maßzahl ihrer Länge, zu verstehen.) Hätten wir nur einen unteilbaren Meterstab ohne Skale zur Verfügung gehabt, so wäre die Messung nicht ausführbar gewesen. Da wir aber Zentimeter an unserem Gliedermaßstab ablesen konnten, hatten wir die Möglichkeit, die Zentimeterstrecke als Meßstrecke zu benutzen. Die 1-Meter-Strecke enthält 100 dieser kleinen Meßstrecken, die gegebene Strecke $a$ enthält 735.

Beide Strecken haben also ein *gemeinsames* Maß. Sie sind, wie der Mathematiker sagt, **kommensurabel**[1].

ERKLÄRUNG:

▷ Gegeben seien zwei Strecken $a$ und $b$. Wenn es eine Strecke $d$ gibt, die sich ohne Rest sowohl auf $a$ als auch auf $b$ abtragen läßt, so heißen $a$ und $b$ **kommensurabel**, andernfalls **inkommensurabel**.

Hier müssen wir uns zunächst fragen: Ist es denn überhaupt denkbar, daß zwei Strecken kein gemeinsames Maß haben, also inkommensurabel sind? Müßte man nicht bei genügend feiner Unterteilung der einen Strecke stets zu einer Meßstrecke gelangen, die sich in *beiden* Strecken ohne Rest abtragen läßt? Bei praktischen Messungen, bei denen wir mit mehr oder weniger exakt gefertigten dreidimensionalen Meßgeräten oder mit optischen oder elektrischen Meßvorrichtungen arbeiten, ist dies sicher der Fall, da ja der Genauigkeit selbst bei größter Sorgfalt gewisse Grenzen gesetzt sind. Dies gilt aber nicht für die mathematischen Bereiche. Hier muß ein absolut exaktes System für Messungen entwickelt werden, das allen Ansprüchen an Genauigkeit genügt. Wenn wir mit solchen Forderungen an die Streckenmessung gehen, so reicht in der Tat der Bereich der rationalen Zahlen nicht mehr aus. Wir werden sehen, daß z. B. eine Quadratseite und die zugehörige Diagonale zwei inkommensurable Strecken sind. Dieses Ergebnis war schon den Griechen bekannt und hat ihnen nicht wenig Kopfschmerzen bereitet. Erst seit dem vorigen Jahrhundert besitzen wir einen exakten Aufbau desjenigen Zahlenbereichs, in dem sich auch das Problem der Messung inkommensurabler Strecken bewältigen läßt: das ist der **Bereich $P$ der reellen Zahlen.** Diese Entwicklung ist mit den Namen der deutschen Mathematiker WEIERSTRASS, DEDEKIND und CANTOR unlösbar verbunden.

Doch beschäftigen wir uns zunächst noch ein wenig mit *kommensurablen* Strecken.
Eine Strecke $a$ und ein beliebiges Vielfaches von ihr sind natürlich stets kommensurabel. In diesem Fall kann als Meßstrecke $d = a$ gewählt werden.
Ist $d$ eine Meßstrecke, mit der sich zwei kommensurable Strecken $a$ und $b$ messen lassen, so sind auch die Strecken $\frac{d}{2}, \frac{d}{3}, \frac{d}{4}, \ldots$ Meßstrecken. Unter allen Meßstrecken für $a$ und $b$ gibt es eine größte. Sie heißt **das gemeinsame Maß** von $a$ und $b$.
Wenn zwei Strecken $a$ und $b$ kommensurabel sind und $e$ ihr gemeinsames Maß ist, so gibt es zwei natürliche Zahlen $m$ und $n$, so daß

$$|a| = m \cdot |e|$$
$$|b| = n \cdot |e|$$

also $$|a| : |b| = \frac{m}{n} \text{ ist.}$$

Das Maßzahlverhältnis der Längen von $a$ und $b$ ist also eine rationale Zahl. Gibt es umgekehrt zu den Längen $|a|$ und $|b|$ zwei natürliche Zahlen $m$ und $n$, so daß

$$|a| : |b| = \frac{m}{n},$$

[1] Aus dem Lateinischen, miteinander meßbar.

also rational ist, so sind die Strecken $a$ und $b$ kommensurabel. Der Leser mache sich dies an Beispielen klar und denke bei den Zahlen an Lösungsangaben in Zentimetern, z. B. $|a| = 4$, $|b| = 6$. Es ist $|a|:|b| = \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$. Eine Strecke $e$ von der Länge 2 cm ist das gemeinsame Maß. Ist $|a| = 3{,}7$ und $|b| = 4{,}8$, so ist $|a|:|b| = \frac{3{,}7}{4{,}8}$. Jetzt ist eine Strecke von der Länge 0,1 cm das gemeinsame Maß.

Sind zwei Strecken $a$ und $b$ kommensurabel und wird $a$ mit $b$ als Maßstab gemessen, so ist die Messung nach endlich vielen Schritten beendet. In der Praxis ist dies, wie schon gesagt, stets der Fall. Man kann die Meßstrecke in so kleine gleiche Teile zerlegen, daß beim Anlegen an die zu messende Strecke die Endmarke der Strecke praktisch mit einem Teilstrich der Skale zur Deckung gebracht werden kann.

Nun arbeitet der Mathematiker aber bei Längenmessungen nicht mit dreidimensionalen Zollstöcken oder Stäben mit mehr oder weniger rauher Oberfläche und mehr oder weniger ebenen Begrenzungsflächen, sondern mit idealisierten Gebilden, nämlich mit Strecken.

Eine Strecke ist eindimensional, absolut geradlinig, ihre Enden genau punktförmig. Stellen wir uns zwei solche Strecken $a = \overline{CD}$ und $b$ vor (Bild 5. 2.). Strecke $a$ soll

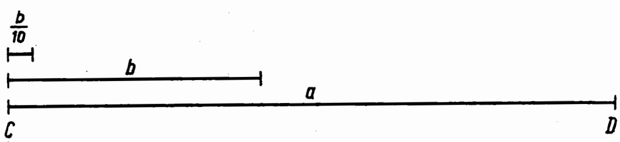


Bild 5.2.

durch Strecke $b$ gemessen werden. Dabei ist es höchst unwahrscheinlich, daß bei wiederholtem Abtragen von $b$ auf $a$ ein Endpunkt von $b$ genau auf den Endpunkt $D$ von $a$ fällt. Nehmen wir an, es bleibt ein Rest.

Wir verwenden nun wie oben den zehnten Teil von $b$, also die Strecke $\frac{b}{10}$ als Meßstrecke. Messen wir $a$ mit dieser Strecke aus, so hat sich aber die Wahrscheinlichkeit, mit einem Endpunkt der Meßstrecke genau auf $D$ zu treffen, nicht erhöht. Das wird uns klar, wenn wir uns vorstellen, daß wir die Nachbarschaft von $D$ mit einem zehnfach vergrößernden Glas betrachten. Dann liegt der gleiche Fall vor wie bei der Messung mit $b$. Auch dann, wenn wir $b$ in 100 oder 1000 gleiche Teile teilen und solch eine kleine Teilstrecke zur Messung verwenden könnten, wäre es theoretisch nicht anders. Das bedeutet aber, daß eine solche Messung ein nie abbrechender Prozeß ist.

Man könnte einwenden, daß man ja die Strecke $b$ versuchsweise auch in 3, 9, 27, ... oder in irgendwelche andere gleiche Teile zerlegen könnte und daß durch diese unendlich vielen Möglichkeiten doch eine größere Wahrscheinlichkeit besteht, den Punkt $D$ mit einem Endpunkt der kleinen Meßstrecke zu treffen. Bildlich gesprochen wirft man ein ungeheuer feinmaschiges Netz über den Punkt $D$ und hofft, daß er in einer der Maschen schließlich hängen bleibt. In der Tat, ist speziell $|a| = \frac{1}{3}$ (m), $|b| = 1$ (dm), also $a$ und $b$ kommensurabel, so führt die fortgesetzte Zehnteilung von $b$ auf einen nie abbrechenden Meßprozeß, bei Dreiteilung von $b$ aber gelangt man schon nach einem Schritt zum

Abschluß: Die Meßstrecke ist $\frac{|b|}{3}$, sie geht in $b$ dreimal, in $a$ zehnmal auf. Dennoch werden wir im nächsten Kapitel sehen, daß bei beliebig gegebenen Strecken $a$, $b$ (auch bei Berücksichtigung der unendlich vielen Teilungsmöglichkeiten für $b$) die Wahrscheinlichkeit, mit einem Endpunkt einer Teilstrecke von $b$ genau auf den Punkt $D$ zu treffen, gering ist. Wir denken uns jetzt wie in Bild 5.3. eine Zahlengerade mit $b$ als Einheitsstrecke und $a$ von 0 aus in positiver Richtung bis zum Punkt $D$ abgetragen.

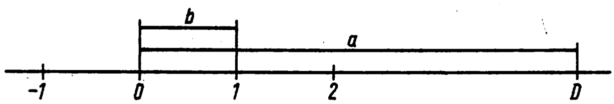



Bild 5.3.

Wenn der Meßvorgang bei fortgesetzter Zehnteilung von $b$ abbricht, ist die Koordinate von $D$ ein endlicher, anderenfalls ein unendlicher Dezimalbruch. Ist der Dezimalbruch periodisch, so stellt das Verhältnis $|a|:|b|$ eine rationale Zahl dar. In dem Fall unseres Beispiels von Seite 239 $\left(|a| = \frac{1}{3}\,m, |b| = 1\text{ dm}\right)$ steht bei $D$ die Zahl 3,3333 ...

Wie aber, wenn die Strecken $a$ und $b$ *inkommensurabel* sind? In diesem Fall kann die Koordinate von $D$ *keine rationale Zahl* sein, wie wir gesehen haben. Andererseits werden wir doch der Länge der Strecke $\overline{OD}$ eine ganz bestimmte Zahl als Maßzahl ihrer Länge zuordnen müssen. Wenn der Fall der Inkommensurabilität eintreten könnte, stünden wir vor dem Problem, neue Zahlen zu schaffen.

Wir können das Problem auch so stellen: Denkt man sich die rationalen Zahlen der Größe nach auf einer Geraden aufgetragen – wir nennen diese Gerade dann die Zahlengerade der rationalen Zahlen –, und greift man einen beliebigen Punkt $D$ auf dieser Geraden heraus, so ist es fraglich, ob $D$ Träger einer Zahl ist. Ja, es wird sich sogar zeigen, daß Lücken auf dieser Zahlengeraden sehr viel häufiger sind als Punkte, die mit Zahlen versehen sind. Darauf kann allerdings erst im nächsten Kapitel, wenn unendliche Mengen miteinander verglichen werden, eingegangen werden.

Die jetzt unmittelbar zu lösende Aufgabe besteht darin, nachzuweisen, daß es mindestens eine, und dann, daß es sogar unendlich viele Lücken auf der Zahlengeraden des Bereichs $R$ gibt. Zu diesem Zweck konstruieren wir ein Paar inkommensurabler Strecken, das schon im griechischen Altertum bekannt war: Wir zeichnen ein Quadrat mit der Seite $a$ und ziehen darin die Diagonale $d$ (Bild 5.4.). Dann wird behauptet: $d$ ist nicht durch $a$

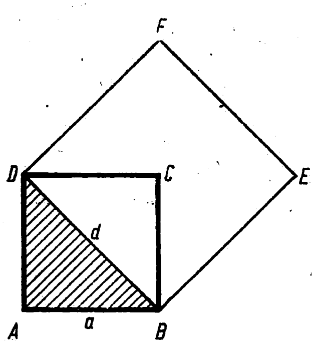



Bild 5.4.

meßbar. Anders ausgedrückt: Es gibt keine Meßstrecke $e$, die sich sowohl in $a$ als auch in $d$ ohne Rest abtragen läßt. Das soll jetzt nachgewiesen werden. Gäbe es nämlich eine solche Strecke $e$, so müßte es zwei natürliche Zahlen $m$ und $n$ geben, so daß

$$|a| = n \cdot |e|$$
$$|d| = m \cdot |e|$$

ist. Es wäre dann also

$$\frac{|d|}{|a|} = \frac{m\,|e|}{n\,|e|} = \frac{m}{n}.$$

Nun liegt die Länge der Strecke $d$ zwischen der von $a$ und der von $2\,a$. Dies sieht man folgendermaßen ein: In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber. Der größte Winkel in $\triangle\, ABD$ ist der rechte Winkel. Ihm liegt die Seite $d$ gegenüber. Also ist $d$ größer als $a$. Ferner ist in jedem Dreieck die Summe von zwei Seiten größer als die dritte Seite, also ist $d$ kleiner als $2\,a$. Es gilt also:

$$a < d < 2\,a,$$

oder: $\frac{|d|}{|a|}$ ist eine Zahl zwischen 1 und 2. Also müßte $\frac{m}{n}$ ein unechter Bruch sein. Wenn $e$ das größte gemeinsame Maß von $d$ und $a$ ist, was wir annehmen dürfen, dann sind $m$ und $n$ teilerfremd. Wäre nämlich $m = k \cdot m'$, $n = k \cdot n'$, $(k \in N)$, so wäre $k \cdot e$ ein gemeinsames Maß von $d$ und $a$, das größer wäre als $e$.
Nun ist, wie Bild 5.4. zeigt, das rechtwinklige Dreieck $DBC$ in dem Quadrat $DBEF$ viermal, in dem kleinen Quadrat $ABCD$ aber nur zweimal enthalten. Also ist

$$|d|^2 = 2\,|a|^2$$

oder $$\frac{|d|^2}{|a|^2} = 2,$$

(Wir haben es hier mit einem Spezialfall des Satzes von PYTHAGORAS über das rechtwinklige Dreieck zu tun.)
Wenn nun, wie wir angenommen haben, der Quotient $\frac{|d|}{|a|}$ eine rationale Zahl ist, so dürften wir nach der Erklärung des Wurzelziehens im Bereich $R^*$ (↑ S. 222) schreiben:

$$\frac{|d|}{|a|} = \sqrt{2},$$

und wir wüßten überdies, daß diese Zahl $\sqrt{2}$ zwischen 1 und 2 liegen muß.

$$\frac{|d|}{|a|} = \frac{m}{n} \qquad (m, n \in N).$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Dies ist aber unmöglich. Da nämlich $m$ und $n$ teilerfremde natürliche Zahlen sind, kann die Primfaktorzerlegung von $m$ keine Primzahl enthalten, die in der Zerlegung von $n$ vorkommt. Dann gilt das gleiche aber auch von $m^2$ und $n^2$. Es kann sich kein Faktor wegkürzen, der Quotient $\frac{m^2}{n^2}$ kann also nicht 2 sein.

Also gilt:

SATZ:
▷ Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Aufgabe 20

Damit ist wenigstens ein Paar inkommensurabler Strecken gewonnen: Seite und Diagonale eines beliebigen Quadrats.
Wir zeichnen jetzt eine Zahlengerade und markieren auf ihr besonders die Einheitsstrecke $\overline{01}$. Über dieser Einheitsstrecke errichten wir das Quadrat. Seine Diagonale nennen wir wieder $d$. Jetzt schlagen wir um den Punkt 0 den Kreis mit $|d|$ und gelangen zu einem rechts von 0 gelegenen Punkt $D$ der Zahlengeraden, dem sicher keine rationale Zahl entspricht (Bild 5.5.).

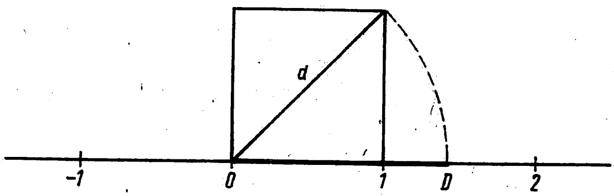


Bild 5.5.

Wir hatten früher gefunden: Zwischen zwei Punkten der $x$-Achse mit rationalen Koordinaten liegt immer noch ein derartiger Punkt oder: Die Punkte mit rationalen Koordinaten liegen auf der Zahlengeraden dicht (↗ S. 220). Jetzt hat sich aber ergeben: Es gibt dennoch Punkte, die keine rationalen Zahlen als Koordinaten haben, z. B. den Punkt $D$.

Wenn wir nur rationale Zahlen zur Verfügung haben, so können wir der Strecke $\overline{0D}$ keine Länge zuordnen. Wir brauchen daher neue Zahlen, mit deren Hilfe wir jeder Strecke eine nichtnegative Zahl als Länge zuordnen können.
Beziehen wir diese Forderung wieder auf die Zahlengerade, so bedeutet das: Die neuen Zahlen müssen ihre Zahlengerade lückenlos erfüllen, so daß jedem Punkt der Geraden eine Zahl entspricht.
Wir wollen an das Problem noch von einer algebraischen Seite herangehen. Wie wir gesehen haben, gibt es keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist. Von dem neuen Zahlenbereich werden wir verlangen, daß in ihm nicht nur alle Grundrechenoperationen ausführbar sind, sondern daß sich in ihm auch alle Wurzeln aus nichtnegativen Zahlen ziehen lassen.

Demgemäß wird der neue Zahlenbereich $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ usw. als neue Zahlen enthalten.

Dem Punkt $D$ wird dann gerade die reelle Zahl $\sqrt{2}$ zuzuordnen sein. Das Vorhandensein der Wurzeln genügt allerdings noch nicht, um die Lücken auf der Zahlengeraden zu schließen. Ein Zahlenbereich, der außer den rationalen noch alle Wurzeln aus nichtnegativen rationalen Zahlen enthält, läßt auf seiner Zahlengeraden noch immer unendlich viele Lücken frei. Darauf wird im nächsten Kapitel (↑ S. 283) eingegangen werden. Wir fordern aber von dem neuen Zahlenbereich, daß kein einziger Punkt seiner Zahlengeraden ohne Zahl bleibt. Schließlich verlangen wir von ihm, daß er seinen Ausgangsbereich, den der rationalen Zahlen, im gleichen Sinn als Teilbereich enthält, wie dies bei den früher aufgebauten Zahlenbereichen entsprechend der Fall war.

Wie soll nun der neue Zahlenbereich – der Bereich der reellen Zahlen – konstruiert werden? Die Paarbildung führt diesmal leider nicht weiter. Dafür gibt es aber gleich mehrere Wege, die zum Ziel führen. Um dem Leser von den verschiedensten Seiten her einen Einblick in den neuen Zahlenbereich zu geben, sollen einige Verfahren hier in ihren Grundgedanken skizziert werden. Eine exakte Darlegung auch nur eines dieser Wege würde den Rahmen dieses Buches sprengen.

Alle nun folgenden Überlegungen werden durchgeführt am Beispiel des Punktes $D$ der Zahlengeraden, der mit Hilfe einer Quadratdiagonalen konstruiert worden war, bzw. der ihm zugeordneten reellen Zahl, die als $\sqrt{2}$ bezeichnet wird.

## 5.5.2. *Intervallschachtelung*

Oben wurde das Bild gebraucht, daß man den Punkt $D$ in einem unendlich vielmaschigen Netz fangen wollte. Um eine umständliche Ausdrucksweise zu vermeiden, sollen jetzt Punkte der Zahlengeraden, denen eine rationale Zahl entspricht, „rationale Punkte" genannt werden. Den Maschen dieses Netzes entsprechen rationale Punkte. Zwar kann Punkt $D$ – um im Bilde zu bleiben – an keiner dieser Maschen hängenbleiben, denn ihm entspricht, wie wir gesehen haben, keine rationale Zahl. Dennoch läßt sich unser Fisch mit dem ganzen Netz fangen, wenn es nur geschickt gelegt wird. Das Netz, das wir über den Punkt $D$ werfen wollen, besteht aus einer unendlichen Folge von Intervallen mit rationalen Endpunkten, wobei ein Intervall immer ganz im Inneren des vorangehenden liegt und die Längen der Intervalle sich unbegrenzt der Null nähern. Dabei kann einer

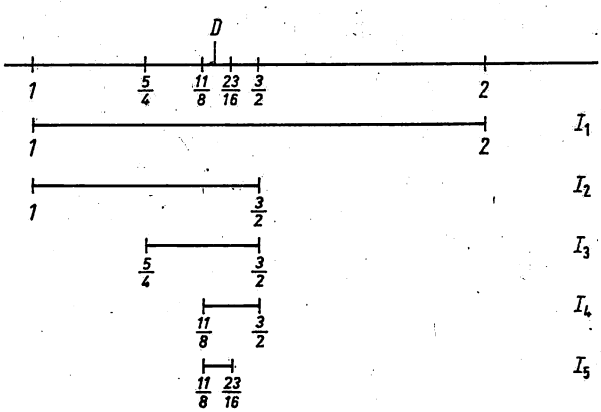



Bild 5.6.

der Endpunkte eines Intervalls mit einem Endpunkt des vorausgehenden Intervalls zusammenfallen. Die Intervalle werden so ausgesucht, daß stets Punkt $D$ im Innern des Intervalls liegt. Solch eine Folge von Intervallen soll als **Intervallschachtelung** bezeichnet werden. Die ersten fünf Intervalle werden in Bild 5.6. wiedergegeben.

Ein erstes Intervall $I_1$, das für diesen Zweck brauchbar ist, kennen wir schon, das von 1 bis 2. Es enthält sicherlich, wie oben gezeigt wurde, Punkt $D$ in seinem Inneren. Jetzt wird dieses Intervall der Zahlengeraden halbiert und der (rationale) Mittelpunkt daraufhin geprüft, ob er rechts oder links von $D$ liegt. Dazu brauchen wir nur die ihm zugehörige Zahl, das ist $\frac{3}{2}$, zu quadrieren und zu sehen, ob die entstehende Zahl größer oder kleiner als 2 ist. Es ist $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ größer als 2, also liegt $D$ links von dem rationalen Netzpunktknoten $\frac{3}{2}$. Daher wird jetzt mit dem linken Intervall, also mit $I_2 = \left(1 / \frac{3}{2}\right)$ weitergearbeitet. Erneutes Halbieren führt auf $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Es ist $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$ kleiner als 2. Punkt $D$ liegt diesmal in dem rechten Intervall, in $I_3 = \left(\frac{5}{4} / \frac{3}{2}\right)$. Dessen Mittelpunkt gehört wegen $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ und $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$ zu $\frac{11}{8}$, und das Quadrat von $\frac{11}{8}$, $\frac{121}{64}$, ist wieder kleiner als 2. In dieser Weise geht es weiter. Beim nächsten Schritt entsteht das Intervallende $\frac{23}{16}$, das rechts von $D$ liegt. Bis jetzt ist es uns schon gelungen, das Netz bis auf weniger als $\frac{7}{100}$ der Einheit zusammenzuziehen. Es ist nämlich

$$\frac{11}{8} = 1,375 < \sqrt{2} < \frac{23}{16} = 1,4375$$

und $1,4375 - 1,375 = 0,0625$. Das ist die Länge des fünften Intervalls unserer Folge. So rücken wir dem Punkt $D$ immer näher. Es gibt auch nur diesen einen Punkt, der allen Intervallen der unendlichen Folge angehört. Allerdings können wir ihn nie erreichen. sondern uns ihm nur unbegrenzt nähern. Dadurch gelangen wir zu einer angenäherten Darstellung von $\sqrt{2}$ durch eine Folge abbrechender Dezimalbrüche, wobei die Genauigkeit beliebig gesteigert werden kann.

Freilich ist durch die Intervallfolge $I_1, I_2, \ldots$ die reelle Zahl $\sqrt{2}$ noch nicht exakt erfaßt. Wir stehen jetzt an einer Stelle, die – wie bei den früher eingeführten Zahlenbereichen – das Ansetzen einer Äquivalenzrelation erfordert. Es gibt nämlich unendlich viele Intervallschachtelungen, die sich auf den Punkt $D$ zusammenziehen. Man braucht ja nur statt mit Halbierung mit Dreiteilung oder Zehnteilung der Intervalle zu arbeiten und erhält dabei ganz verschiedene Folgen. Wir wollen alle solche Folgen von Intervallen mit rationalen Endpunkten, die sich auf den Punkt $D$ zusammenziehen, als einander **äquivalent** bezeichnen. Damit liegt nämlich, wie unmittelbar einsichtig ist, eine für solche Intervallfolgen erklärte Äquivalenzrelation vor.

ERKLÄRUNG:

▷ Jede Äquivalenzklasse von Intervallschachtelungen wird als **reelle Zahl** bezeichnet.

Von nun an vollzieht sich der Aufbau des neuen Zahlenbereichs in entsprechenden Schritten wie bei den früheren Erweiterungen: Es wird für die neuen Zahlen eine Ordnung, es werden Rechenoperationen erklärt; dann werden die Unabhängigkeit von den repräsentierenden Intervallschachtelungen und schließlich die Rechengesetze bewiesen. Dazu gehören vor allem das Kommutativ- und Assoziativgesetz der Addition und der Multiplikation, das Distributivgesetz und die Monotoniegesetze, die entsprechend lauten wie im Bereich $R$ der rationalen Zahlen. Der Bereich aller so erklärten reellen Zahlen soll mit $P$ bezeichnet werden.
Es mag etwas seltsam erscheinen, daß diesmal **Abstraktionsklassen von Intervallschachtelungen** als **Zahlen** bezeichnet werden. Ein Recht zu dieser Festsetzung haben wir sicher, wenn Klassen, die speziell zu **rationalen** Punkten führen, sich genauso verhalten wie rationale Zahlen. Das bedeutet: Der Bereich der durch die Klassen definierten reellen Zahlen muß einen Teilbereich enthalten, der hinsichtlich der Ordnung und der Rechenoperationen dem Bereich der rationalen Zahlen isomorph ist.
Dies ist tatsächlich der Fall. Bei einer beliebigen Einschachtelung können wir ja auch einen rationalen Punkt erhalten. Zum Beispiel führt die Intervallfolge

$$I_1 = (0/1), \quad I_2 = (0{,}3/0{,}4), \quad I_3 = (0{,}33/0{,}34), \quad I_4 = (0{,}333/0{,}334), \ldots$$

auf den Punkt mit der rationalen Zahl $\frac{1}{3}$ (oder $0{,}\overline{3}$). Den Bereich der Klassen von Intervallfolgen, die sich auf einen rationalen Punkt zusammenziehen, können wir ersetzen durch den Bereich $R$. Die Erklärung der Ordnung und der Rechenoperationen in $P$ wird nämlich so vorgenommen, daß sie für den Spezialfall, in dem die betreffenden Zahlen rational sind, mit der entsprechenden Erklärung in $R$ übereinstimmt. Der Zahlenbereich $P$ stellt somit eine Erweiterung des Bereichs $R$ dar (Nachweis z. B. in [17], S. 7 bis 22).
Bildet man erneut Intervallschachtelungen im Bereich $P$, so entstehen, wie hier nicht bewiesen werden kann, wieder reelle Zahlen. Der Bereich $P$ erfüllt, wenn die reellen Zahlen der Größe nach auf einer Geraden aufgetragen werden, diese lückenlos.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt **irrational.**

Die reellen Zahlen $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[5]{6}$, ... sind sämtlich irrational. Auch die Zahl $\pi$, die das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines beliebigen Kreises angibt, ist irrational. Der Bereich der reellen Zahlen besteht aus den rationalen reellen und irrationalen reellen Zahlen. (Diese Einführung der reellen Zahlen findet der Leser ebenfalls dargelegt in [17], S. 173 ff.)
Durch das Verfahren der Intervallschachtelung wird jeder Punkt der Zahlengeraden erfaßt. Man hat das oben beschriebene Verfahren, den Punkt $D$ durch fortgesetzt halbierte Intervalle einzufangen, im Scherz verglichen mit dem Fangen eines bestimmten Löwen in einer Wüste. Man halbiert das Terrain der Wüste. In einer der beiden Hälften muß sich der Löwe befinden. Dieses Gebiet halbiert man dann wieder und so fort bis man zu einem Terrain gelangt ist, das den Löwen enthält und kleiner ist als der Löwenkäfig, den man für diesen Zweck bereithält. Den braucht man jetzt nur noch über den Löwen zu stülpen, und die Großwildjagd ist beendet.

### 5.5.3. *Fundamentalfolgen*

Ein anderes Verfahren zur Einführung der reellen Zahlen ist dem der Intervallschachtelung nahe verwandt. Betrachten wir bei den Intervallen, mit denen wir den Punkt $D$ eingefangen haben, einmal die Folgen der unteren Intervallenden, dann die der oberen, so erhalten wir die Folgen

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 1;\ 1;\ \frac{5}{4};\ \frac{11}{8};\ \frac{11}{8};\ \ldots \text{ und} \\ 2;\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{23}{16};\ \ldots \end{cases}$$

Das erste ist eine Folge nicht abnehmender Zahlen, das zweite eine Folge nicht zunehmender Zahlen. Die entsprechenden Punktfolgen nähern sich dem Punkt $D$ unbegrenzt, die eine von links, die andere von rechts.
Solch eine Folge, deren sämtliche Glieder sich einer einzigen, ganz bestimmten Zahl unbegrenzt nähern, heißt **konvergent**. Konvergent sind z. B. außer den beiden obengenannten Folgen auch die Folgen:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} 0;\ 0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots \\ 1;\ 0{,}4;\ 0{,}34;\ 0{,}334;\ \ldots \end{cases}$$

Jede der beiden Folgen (II) hat den Grenzwert $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$, dem sich die Glieder unbegrenzt nähern.
Weitere Beispiele bilden die Folge $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots$ mit dem Grenzwert 0, die Folge $2-\frac{1}{2};\ 2-\frac{1}{4};\ 2-\frac{1}{6};\ \ldots$ mit dem Grenzwert 2, usw.
Nicht konvergent ist dagegen die Folge der natürlichen Zahlen, die ja über alle Grenzen wächst. Nicht konvergent ist auch die Folge $0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots$
Wir wollen nun die reellen Zahlen als Grenzwerte solcher konvergenter Folgen erhalten. Da wir ja aber die Lage des Punktes $D$ – wie auch aller anderen Lücken auf der Zahlengeraden der rationalen Zahlen – noch gar nicht zahlenmäßig erfassen können, müssen wir nach inneren Merkmalen suchen, die eine „konvergente" Folge auszeichnen: Eine Folge $a_1;\ a_2;\ \ldots$ mit einem einzigen Grenzwert hat nämlich die Eigenschaft, daß mit fortschreitendem $n$ ihre Glieder immer dichter aneinander rücken, oder (was dasselbe besagt) daß die absolut genommene Differenz zweier beliebiger Glieder der Folge sich dann um weniger unterscheiden als eine noch so klein vorgegebene Zahl $\varepsilon$. (Zur Wahl dieses Buchstabens ↗ Kap. 4, S. 144.) Präziser ausgedrückt bedeutet dies: Zu der Folge $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$ gibt es bei beliebig klein vorgegebener positiver Zahl $\varepsilon$ eine natürliche Zahl $N$ – die im allgemeinen von $\varepsilon$ abhängt – derart, daß für $n > N$ und alle $m$ gilt: $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$. Man braucht also, um die Konvergenz einer Folge zu beurteilen, ihren Grenzwert gar nicht zu kennen. Dieses „innere" Merkmal konvergenter Folgen wird nach dem französischen Mathematiker CAUCHY (AUGUSTIN LOUIS CAUCHY, 1789 bis 1857) CAUCHYsches Konvergenzkriterium genannt. Eine Folge $a_n$, die nach diesem Kriterium konvergiert, wird als **Fundamentalfolge** bezeichnet.

Aufgabe 21

Man erklärt nun wieder eine Äquivalenzrelation für solche **Fundamentalfolgen**. Dabei sorgt man natürlich dafür, daß Folgen wie die von (I) oder die von (II) in je eine Klasse kommen. In jeder Klasse gibt es unendlich viele Folgen, da wir ja auch unendlich viele Intervallfolgen zur Einschachtelung benutzen können. Die Fundamentalfolgen können aber auch auf ganz beliebige andere Weise gewonnen worden sein. Daß hier von den bereits bekannten Intervallenden ausgegangen wurde, geschah nur, um ein konkretes Beispiel zu finden.

ERKLÄRUNG:

▷ Jede Klasse von äquivalenten Fundamentalfolgen wird als **reelle Zahl** bezeichnet.

Dann werden Rechenoperationen und Ordnung erklärt, die Unabhängigkeit von der Wahl der vertretenden Folge wird gezeigt, und die Rechengesetze werden bewiesen. Daß eine Klasse von Fundamentalfolgen als (reelle) Zahl bezeichnet werden kann, beruht – wie bei den Klassen von Intervallschachtelungen – darauf, daß die Klassen sich in den speziellen Fällen, wo sie auf rationale Zahlen führen, ebenso verhalten wie diese Zahlen. So kann die Klasse der Folge

$$0;\ 0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333;\ \ldots$$

der rationalen Zahl $\frac{1}{3}$ zugeordnet werden, und die für die Klassen erklärten Rechenoperationen und die Ordnung entsprechen denen des Bereiches $R$.
Auch die mit Hilfe von Fundamentalfolgen erklärten reellen Zahlen lassen auf der Zahlengeraden keine Lücken. Fundamentalfolgen von reellen Zahlen führen nämlich wieder auf reelle Zahlen. Ebenso läßt sich zeigen, daß sich in dem neuen Bereich alle Wurzeln aus nichtnegativen Zahlen ziehen lassen.
Der hiermit angedeutete Weg geht auf den Hallenser Mathematiker Georg Cantor zurück, von dem im nächsten Kapitel noch oft die Rede sein wird. Eine genaue Darstellung dieses Weges wird in der Enzyklopädie der Elementarmathematik beschrieben. ([16], S. 163 ff.)
Wir haben auf zwei verschiedenen Wegen genetisch einen Zahlenbereich gewonnen, den wir mit demselben Namen, Bereich der reellen Zahlen, bezeichnet haben. Die Berechtigung dazu liegt in der Tatsache, daß beide Bereiche hinsichtlich der in ihnen erklärten Ordnung und Rechenoperationen einander isomorph sind. Es kann eine eineindeutige Beziehung zwischen den Klassen von Intervallschachtelungen und den Klassen von Fundamentalfolgen hergestellt werden, bei der auch die Rechenoperationen und die Ordnung einander entsprechen.

### 5.5.4. *Reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche*

Bevor weitere Wege zur Charakterisierung der reellen Zahlen gezeigt werden, soll auf ihre bekannte Darstellung als unendliche Dezimalbrüche eingegangen werden.
Wir knüpfen an die Messung einer Strecke durch Zehnteilung der Meßstrecke

(↗ S. 239) an. Für die Strecke $\overline{OD}$ von Bild 5.5. (↗ S. 242) ergibt sich dann ein unendlicher Dezimalbruch. Er kann weder abbrechen noch periodisch sein, da die dem Punkt $D$ entsprechende Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einer **reellen Zahl** ist ein unendlicher Dezimalbruch zu verstehen.

Da auch jeder abbrechende Dezimalbruch als unendlicher Dezimalbruch geschrieben werden kann, werden auf diese Weise auch alle rationalen Zahlen erfaßt. Allerdings ist dabei folgendes zu beachten: Die beiden unendlichen Dezimalbrüche 0,24999 ... und 0,25000 ... stellen dieselbe reelle (speziell rationale) Zahl 0,25 dar, denn bei genügend langer Fortsetzung der Folge $a_n$:

$$0{,}2;\ 0{,}24;\ 0{,}249;\ 0{,}2499;\ 0{,}24999;\ \ldots$$

wird $0{,}25 - a_n$ kleiner als jedes noch so kleine positive $\varepsilon$.
Der Grenzwert dieser Folge, also der unendliche Dezimalbruch $0{,}24\overline{9}$, ist demnach 0,25. Um Eindeutigkeit zu erreichen, muß entweder die Neuner- oder die Nullperiode ausgeschlossen werden. Dann könnte man die reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche einführen. Im Lehrbuch der Klasse 9[1] wird definiert: „Eine reelle Zahl ist ein unendlicher Dezimalbruch ohne Neunerperiode."
Dieser Weg scheint besonders einfach: Man braucht keinen Abstraktionsprozeß mit Äquivalenzrelation und Klassenbildung durchzuführen; das Verfahren knüpft unmittelbar an die Streckenmessung an und läßt sich auch Schülern der Klasse 8 oder 7 klarmachen.

Aufgabe 22

Es soll aber nicht verschwiegen werden, daß gegen die Identifizierung der reellen Zahlen mit den unendlichen Dezimalbrüchen Bedenken geäußert werden: Bisher wurden Dezimalbrüche als **Schreibweisen** für Zahlen aufgefaßt, nicht als diese Zahlen selbst, die ja genetisch konstruiert wurden (↗ S. 223 f.). Eigentlich ist ein unendlicher Dezimalbruch auch nur eine Darstellungsweise der reellen Zahl. Wenn jetzt unendliche Dezimalbrüche mit reellen Zahlen **identifiziert** werden, gerät man in einen logischen Widerspruch. Ein Zeichen für die Zahl 3 ist eben nicht mit der Zahl 3 identisch. Aber auch dann, wenn man aus didaktischen und praktischen Gründen über diese logische Ungenauigkeit hinwegsieht, bleibt noch eine weitere Schwierigkeit: Die Definitionen der Rechenoperationen und die Beweise der Rechengesetze sind recht unbequem. Grenzbetrachtungen lassen sich hier nicht vermeiden.
Im Unterricht unserer allgemeinbildenden Schulen besteht die Hauptschwierigkeit darin, daß die reellen Zahlen in einer Altersstufe eingeführt werden müssen, in der im allgemeinen das Verständnis für Grenzbetrachtungen durch den vorangegangenen Unterricht noch nicht genügend entwickelt worden ist. Es wurden erfolgreiche Versuche durchgeführt, in welcher Weise dies frühzeitig im Unterricht geschehen kann (Näheres siehe [28]).
Die von berufener Seite vorgeschlagenen Maßnahmen haben sich bewährt und sollten allgemein von den ersten Klassen an Beachtung finden. So sollte der Begriff der Folge

---

[1] Mathematik, Lehrbuch für Klasse 9. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972, S. 21.

planmäßig entwickelt werden. Vom 5. bzw. 6. Schuljahr an können dann Nullfolgen wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ untersucht bzw. Grenzbetrachtungen an periodischen Dezimalbrüchen durchgeführt werden. Hat man Grenzbetrachtungen nicht genügend vorbereitet, so entstehen später begriffliche Unklarheiten: Da beim Rechnen im Bereich der reellen Zahlen meist mit endlichen Näherungswerten operiert werden muß, z. B. mit 1,414 für $\sqrt{2}$ oder mit 3,14 für $\pi$, wird nicht selten im Lauf der Zeit der begriffliche Unterschied zwischen Zahl und Näherungswert verwischt, so daß die Besonderheit der reellen Zahlen vergessen wird.

Auch der Teilbereich der unendlichen Dezimalbrüche besitzt einen Teilbereich, den der periodischen Dezimalbrüche – wobei auch die Periode 0 zu beachten ist –, der dem Ausgangsbereich hinsichtlich der Ordnung und der ausführbaren Rechenoperationen isomorph ist. Im Lehrbuch für Klasse 9 wird zwar mit Recht auf den begrifflichen Unterschied zwischen der reellen Zahl $0{,}\overline{3}$ und der gebrochenen Zahl $0{,}\overline{3}$ hingewiesen; Isomorphiebetrachtungen, die hier allerdings recht schwierig wären, fehlen. Sie stellen aber auch bei andersartigen Einführungen der reellen Zahlen einen wunden Punkt dar.

Statt der Dezimalbrüche kann man sich beliebiger Brüche in anderen Zahlensystemen bedienen, z. B. der Dualbrüche. Darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden. Eine weitere Darstellung der reellen Zahl, nämlich die durch einen sogenannten Kettenbruch, ist für viele Zwecke brauchbarer als die durch einen unendlichen Dezimalbruch, da ein unendlicher Kettenbruch viel schneller konvergiert (d. h. nach weniger Schritten in eine vorgeschriebene Nähe des Grenzwertes gelangt) als ein unendlicher Dezimalbruch.

Der Leser muß auch hier auf andere Literatur verwiesen werden (z. B. [29], S. 84 ff.).

### 5.5.5. *Erzeugung der reellen Zahlen durch Schnitte*

Während das Verfahren der Intervallschachtelung auf WEIERSTRASS (KARL THEODOR WEIERSTRASS, 1815 bis 1897), das Verfahren der Fundamentalfolgen auf CANTOR zurückgeht, verdanken wir die Einführung der reellen Zahlen durch Schnitte RICHARD DEDEKIND. Um zum Beispiel $\sqrt{2}$ zu bestimmen, teilt man alle rationalen Zahlen in zwei Klassen, eine Unterklasse, die alle rationalen Zahlen enthält, deren Quadrat kleiner als 2 ist, und eine Oberklasse, die alle Zahlen enthält, deren Quadrat größer als zwei ist.

ERKLÄRUNG:

▷ Allgemein wird unter einem **Schnitt** im Bereich $R$ eine Einteilung der nach der Größe geordneten rationalen Zahlen mit folgenden Eigenschaften verstanden:

1. Jede rationale Zahl gehört einer und nur einer Klasse an.
2. Keine Klasse ist leer.
3. Jede Zahl der Unterklasse ist kleiner als jede Zahl der Oberklasse.

Bezeichnet man die Unterklasse mit $A$, die dazugehörige Oberklasse mit $A'$, so wird ein Schnitt auch charakterisiert durch die Angaben:

1. $A \cup A' = R$, $A \cap A' = \emptyset$.
2. $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$.
3. Ist $a \in A$ und $a' \in A'$, so ist $a < a'$.

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einer **reellen Zahl** wird ein Schnitt im Bereich der rationalen Zahlen verstanden.

Nun können mehrere verschiedene Fälle auftreten. Die Unterklasse kann ein größtes, dabei die Oberklasse kein kleinstes Element haben. Dieser Fall tritt z. B. ein bei dem Schnitt, in dem $A$ alle rationalen Zahlen $\leqq 3$ enthält. Weiter kann die Oberklasse $A'$ ein kleinstes, die Unterklasse aber kein größtes Element besitzen ($A'$ enthält z. B. alle Zahlen $\geqq 3$). Diesen Fall wollen wir ausschließen, weil dann der Schnitt dieselbe Zahl darstellt wie im ersten Fall.
In diesen beiden Fällen trifft der Schnitt auf eine rationale Zahl. Der Fall, daß sowohl die Unterklasse ein größtes als auch die Oberklasse ein kleinstes Element besitzen – nennen wir es $a$ bzw. $a'$ –, kann nicht eintreten, da ja zwischen den beiden rationalen Zahlen $a$ und $a'$ noch mindestens eine rationale Zahl liegt, die weder $A$ noch $A'$ angehören würde. Von besonderem Interesse ist aber der Fall, daß weder $A$ ein größtes noch $A'$ ein kleinstes Element besitzt. Dann definiert der Schnitt eine Irrationalzahl. Solch ein Fall tritt z. B. ein, wenn die Unterklasse $A$ alle rationalen Zahlen umfaßt, deren Quadrat kleiner als 2 ist, die Oberklasse $A'$ alle rationalen Zahlen, deren Quadrat größer als 2 ist. In $A$ liegen u. a. alle negativen Zahlen, ferner 0, 1, 1,4, 1,41, 1,441, in $A'$ alle Zahlen, die größer als 2 sind, und u. a. 2, 1,5, 1,42, 1,415 usw. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Einteilung einen Schnitt darstellt. Er definiert die reelle Zahl $\sqrt{2}$.

Aufgabe 23

Führt man in dem Bereich der durch die Schnitte erklärten reellen Zahlen wieder einen Schnitt aus, so hat in ihm stets entweder die Unterklasse ein größtes oder die Oberklasse ein kleinstes Element. Es entstehen also keine neuen Zahlen. Dann werden wieder Rechenoperationen und Ordnung erklärt. Trägt man die so definierten reellen Zahlen der Größe entsprechend auf einer Geraden auf, so wird diese lückenlos erfüllt. Auch dieser Bereich der reellen Zahlen ist dem Bereich der Klassen von Intervallschachtelungen isomorph. Eine ausführliche Darstellung der reellen Zahlen durch Schnitte findet der Leser z. B. bei FICHTENHOLZ ([4], S. 7 ff.).

### 5.5.6. *Axiomatische Methode*

Als letztes Verfahren, bei dem der Bereich der reellen Zahlen allerdings nicht erzeugt, sondern nur in seiner Struktur beschrieben wird, sei die **axiomatische Methode** genannt. Der Leser erinnere sich an den axiomatischen Aufbau des Bereichs der natürlichen

Zahlen. In entsprechender Weise ist es möglich, den Bereich $P$ der reellen Zahlen durch seine Eigenschaften bis auf Isomorphie genau zu beschreiben.
Stellen wir uns den Bereich $P$ der reellen Zahlen vor, etwa so, wie er uns wohl am handgreiflichsten gegeben ist, als Bereich der unendlichen Dezimalbrüche. Unter seinen Eigenschaften, die jetzt zusammengestellt werden sollen, werden sich einige befinden, die bereits für den Bereich $R$ der rationalen Zahlen typisch sind. Es wird also nebenbei eine axiomatische Charakterisierung dieses Zahlenbereichs abfallen.

**Eigenschaften des Bereichs $P$ der reellen Zahlen**

(1) In $P$ sind eine Addition und eine Multiplikation erklärt. Durch jede dieser beiden Operationen wird jedem geordneten Paar reeller Zahlen wieder genau eine reelle Zahl zugeordnet.
(2) Beide Operationen sind assoziativ und kommutativ.
(3) Es gilt das Distributivgesetz.
(4) Die Addition ist eindeutig umkehrbar. Es gibt also zu zwei reellen Zahlen $a, b$ genau eine reelle Zahl $x$, so daß $a + x = b$ ist. Durch $x = b - a$ wird in $P$ eine Subtraktion erklärt.
(5) Es gibt in $P$ mindestens ein von Null verschiedenes Element.

Hier muß man sich fragen, ob aus den Eigenschaften (1) bis (4) schon die Existenz einer Zahl 0 in $P$ folgt, oder ob man diese nicht auch besonders fordern muß.
Zunächst folgt aus der Umkehrbarkeit der Addition, daß zu einem beliebigen Element $a$ von $P$ ein Element $x_0$ existiert, so daß $a + x_0 = a$ ist. Dieses Element $x_0$, das „neutrale Element der Addition", läßt dann aber jedes Element $m$ von $P$ ungeändert. Denn ist $m$ ein beliebiges Element von $P$, so gibt es wegen (4) ein Element $x_1$, so daß $m = a + x_1$ ist. Also ist

$$\begin{aligned} m + x_0 &= (a + x_1) + x_0 = a + (x_1 + x_0) = a + (x_0 + x_1) = (a + x_0) + x_1 \\ &= a + x_1 = m. \end{aligned}$$

Für jedes $m$ aus $P$ gilt also $m + x_0 = m$. Dieses Element $x_0$ hat also in der Tat die additive Eigenschaft der uns wohlbekannten rationalen Zahl 0.
Es kann aber auch nicht mehrere Elemente dieser Art geben. Wäre nämlich $x_0'$ ein zweites Element von $P$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $m$ gilt $m + x_0' = m$, so müßte gelten:

$$x_0' = x_0' + x_0 = x_0 + x_0' = x_0.$$

Wir dürfen dieses eindeutig bestimmte Element $x_0$ sicher dann als 0 bezeichnen, wenn es auch die bekannte multiplikative Eigenschaft der Null hat, daß für jedes $m$ gilt: $m \cdot 0 = 0$.
Ehe dies gezeigt wird, sei festgestellt, daß es wegen (4) zu jedem $a$ in $P$ ein Element $\bar{a}$ gibt, so daß $a + \bar{a} = x_0$ ist. Dieses Element $\bar{a}$ werde mit $(-a)$ bezeichnet. Dann gilt $a + (-a) = a + (x_0 - a) = (a + x_0) - a = a - a = x_0$. Das Element $x_0$ kann also als Differenz $a - a$ ($a$ beliebig aus $P$) dargestellt werden. Nun bilden wir

$$m \cdot x_0 = m(a - a) = ma - ma = x_0.$$

Das Element $x_0$ hat also auch die multiplikative Eigenschaft der Null und wird daher einfach als 0 bezeichnet.

Die Existenz der Null in $P$ ergibt sich also aus (1) bis (4) und braucht nicht besonders gefordert zu werden. Dagegen ist die Feststellung (5), daß es in $P$ mindestens ein von 0 verschiedenes Element gibt, nicht überflüssig. Denn ein Bereich, der nur aus der Null besteht, für den also $0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0$ ist, würde auch die Eigenschaften (1) bis (4) haben.

Wir untersuchen jetzt die Multiplikation weiter und finden:

(6) Ist $b$ ein beliebiges und $a$ ein von 0 verschiedenes Element von $P$, so existiert genau ein Element $y$, so daß $a \cdot y = b$ ist. Durch $y = b : a$ wird in $P$ eine Division erklärt.
Die Multiplikation ist also eindeutig umkehrbar, wobei die Division durch 0 ausgeschlossen ist.

Wie $P$ ein neutrales Element der Addition, die Null, enthält, so besitzt $P$ auch genau ein „neutrales Element der Multiplikation", die Eins.
Der Nachweis dafür läßt sich in ganz entsprechender Weise erbringen, wie es oben für die Null durchgeführt wurde.

Aufgabe 24

Daß es in $P$ die Zahlen 2, 3, 4, ..., $-1$, $-2$, $-3$, ... ferner alle anderen rationalen Zahlen $\pm \frac{m}{n}$ $(n \neq 0,\ m, n \in N)$ gibt, braucht nicht extra gefordert zu werden. Denn es existiert $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3, \ldots, 0 - 1 = -1$, $-1 - 1 = -2, \ldots, 1 : 2 = \frac{1}{2}$ usw.

Der Bereich $P$ enthält also den ganzen Bereich $R$.
Wir fassen die bisher gefundenen Eigenschaften noch einmal zusammen.

**Zusammenfassung:**

1. **Im Bereich $P$ sind zwei Operationen, eine Addition und eine Multiplikation, erklärt, durch die jedem geordneten Paar $[a, b]$ von reellen Zahlen wieder genau eine reelle Zahl $a + b$ bzw. $a \cdot b$ zugeordnet wird.**
2. **Beide Operationen sind assoziativ und kommutativ.**
3. **Es gilt das Distributivgesetz.**
4. **Die Addition ist eindeutig umkehrbar.**
5. **Es gibt in $P$ mindestens ein von 0 verschiedenes Element.**
6. **Ist $b$ ein beliebiges und $a$ ein von 0 verschiedenes Element von $P$, so gibt es in $P$ ein Element $y$, so daß $a \cdot y = b$ ist. (Umkehrbarkeit der Multiplikation)**

In einem Zahlenbereich mit den Eigenschaften (1) bis (6) kann man in der gewohnten Weise die sogenannten „rationalen Rechenoperationen", das sind Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division (Divisor ungleich Null), ausführen. Solch ein Bereich wird daher als „Rationalitätsbereich" oder mit dem heute allgemein üblichen Ausdruck als Körper bezeichnet.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Menge, in der zwei dreistellige Relationen, Addition und Multiplikation, erklärt sind und in der (1) bis (6) erfüllt sind, heißt ein **Körper**.

Wir haben bereits einen Körper kennengelernt, den Körper $R$ der rationalen Zahlen. Auch der Bereich $P$ der reellen Zahlen bildet einen Körper.
Nun haben aber $R$ und $P$ noch besondere Eigenschaften, die nicht allen Körpern zukommen. Beide Bereiche werden nämlich durch die Null in je zwei Bereiche, einen positiven und einen negativen, geteilt. Sie sind, wie man sagt, **angeordnet**.
Daß nicht jeder Körper angeordnet ist, zeigt folgendes Beispiel:

In der Menge $N$ der natürlichen Zahlen erklären wir folgende Relation $R$: $n_1 \, R \, n_2$ soll bedeuten, daß $n_1$ und $n_2$ bei Division durch 3 denselben Rest lassen. Die Relation $R$ ist eine Äquivalenzrelation. Sie spaltet $N$ in Klassen äquivalenter Elemente. Diese Klassen sind in Spalten in untenstehendem Schema der natürlichen Zahlen angegeben (vgl. das entsprechende Schema für die Reste nach 9 auf Seite 107).

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Die drei Elemente der gefaserten Menge $N'$ sollen geschrieben werden als (1), (2), (0).
Wir führen für sie eine Addition ein durch

$$\begin{aligned} &(0) + (i) = (i) + (0) = (i) \qquad i = 0, 1, 2 \\ &(1) + (1) = (2) \\ &(1) + (2) = (2) + (1) = (0) \\ &(2) + (2) = (1) \end{aligned}$$

und eine Multiplikation durch

$$\begin{aligned} &(0) \cdot (i) = (i) \cdot (0) = (0) \qquad i = 0, 1, 2 \\ &(1) \cdot (i) = (i) \cdot (1) = (i) \\ &(2) \cdot (2) = (1) \end{aligned}$$

Dann sind die Körperaxiome 1 bis 6 von S. 251 f. erfüllt. (Beweis s. Aufgabe 25.) Die aus nur drei Elementen bestehende Menge $N'$ der *Restklassen nach dem Modul 3* bildet also einen Körper, in dem man rechnen kann.

Aufgabe 25

Das in Kapitel 3, S. 107 f. gebildete Restklassensystem nach dem Modul 9 bildet keinen Körper. Aus den Körperaxiomen folgt nämlich allgemein die Eindeutigkeit der Division. Daraus wieder folgt, daß in einem Körper ein Produkt nur dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist. Dieser für das Rechnen so wichtige Satz gilt in der Menge der Restklassen nach 9 nicht, da hier $(3) \cdot (3) = (0)$ ist. Immerhin gelten hier noch die Axiome 1, 2, 3, 4, 5 von Seite 251, so daß die in Kapitel 5 ausgeführten Rechenoperationen zu eindeutig bestimmten Resultaten führen.
Daß das oben gebildete System $N'$ der Restklassen nach 3 einen Körper bildet, hängt damit zusammen, daß 3 eine Primzahl ist. Dieser Körper ist aber nicht angeordnet. Erklärt man zu dem Element $a$ das Element $-a$ durch $a + (-a) = 0$, so ist für unseren Fall wegen $(1) + (2) = (0)$ das Element $(2) = -(1)$ und das Element $(1) = -(2)$ zu setzen. Der Körper wird also durch (0) nicht in zwei verschiedene Bereiche geteilt.

ERKLÄRUNG:

▷ Es sei für die Elemente eines Körpers eine Eigenschaft, **positiv** zu sein, erklärt, die folgenden Forderungen genügt: Für jedes Element $a$ des Körpers besteht genau eine der drei Beziehungen, $a$ ist positiv, $a = 0$, $(-a)$ ist positiv. Außerdem gilt: Wenn $a$ und $b$ positiv sind, so sind auch $a + b$ und $a \cdot b$ positiv. Dann heißt der Körper **angeordnet**.

In diesem Fall kann nämlich in dem Körper eine Ordnung definiert werden durch: $a > b$ genau dann, wenn es in dem Körper ein positives Element $c$ gibt, so daß $b + c = a$ ist. In dem oben beschriebenen Körper $N'$ ist das nicht möglich. Hier besteht eine zyklische Ordnung, vergleichbar der einer Gesellschaft von drei Personen, die um einen runden Tisch herum sitzen, oder der Ordnung von drei Ecken eines Dreiecks (↗ Kap. 3, S. 92ff.).

Ferner besitzen die Körper $R$ und $P$ folgende Eigenschaft:

(7) Ist $b$ eine bestimmte positive (rationale oder reelle) Zahl, die beliebig klein sein kann, so ist es, wenn $b$ hinreichend oft zu sich selbst addiert wird, möglich, jede beliebige Zahl $a$ des Körpers zu übertreffen (**Archimedisches Axiom**).

Ist $a$ negativ oder 0, so ist schon $1 \cdot b = b$ größer als $a$. Anderenfalls gibt es eine natürliche Zahl $n$, so daß $n \cdot b > a$ ist. Wir können die positive Zahl $b$ als Länge einer Meßstrecke auffassen. Ist auch $a$ positiv, so kann $a$ als Länge einer zu messenden Strecke gedeutet werden. Die Aussage: Es gibt eine natürliche Zahl $n$, so daß $n \cdot b > a$ ist, bedeutet dann, daß man bei hinreichend oft wiederholtem Anlegen der Meßstrecke an die zu messende Strecke diese schließlich übertrifft. Ohne diese Tatsache wäre keine Messung möglich.

Die soeben beschriebene Eigenschaft der Körper $R$ und $P$ bedeutet, daß diese Körper archimedisch geordnet sind.

ERKLÄRUNG:

▷ Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch geordnet**, wenn er folgende Eigenschaften besitzt: Zu jedem Element $a$ und zu jedem positiven Element $b$ des Körpers gibt es eine natürliche Zahl $n$, so daß $n \cdot b > a$ ist. (Vgl. das Archimedische Axiom der Geometrie, Kapitel 1, S. 25.)

Man kann die in dem Archimedischen Axiom ausgesprochene Eigenschaft auch für Bereiche, die nicht die Körpereigenschaft besitzen, formulieren. Zum Beispiel ist auch die Menge der natürlichen Zahlen, wie mit Hilfe der Peanoschen Axiome bewiesen werden kann, archimedisch geordnet. In den Körpern $R$ und $P$ bildet die archimedische Ordnung die Grundlage für die Bildung von Intervallen, von Fundamentalfolgen, von Dezimaldarstellungen (Näheres vgl. [16], S. 174 ff.).

Alle bisher gefundenen Eigenschaften besitzen sowohl der Körper $R$ als auch $P$. In einem wichtigen Punkt unterscheiden sich aber diese beiden Körper voneinander: Nicht alle konvergenten Folgen von Elementen aus $R$ besitzen auch in $R$ ihren Grenzwert. Zum Beispiel liegt der Grenzwert der Folge 1; 1,4; 1,41; 1,414; . . . , das ist zugleich der Grenzwert der Folge $1; \frac{5}{4}; \frac{11}{8}; \frac{45}{32}; \ldots$, nämlich $\sqrt{2}$, nicht in $R$. In $P$ gilt:

(8) Jede Fundamentalfolge besitzt einen Grenzwert, der dem Körper angehört (Vollständigkeitsaxiom).

Der Körper $R$ ist demnach nicht vollständig, aber $P$ ist vollständig. Damit ist die axiomatische Charakterisierung des Körpers $P$ beendet. Wenn eine Teilmenge eines Körpers $K$, die selbst einen Körper darstellt, als Unterkörper von $K$ bezeichnet wird, so kann man jetzt den Körper der reellen Zahlen in folgender Weise charakterisieren:

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einem **Körper der reellen Zahlen** verstehen wir einen vollständigen, archimedisch angeordneten Körper. Er besitzt den Körper der rationalen Zahlen als Unterkörper.

Es läßt sich zeigen, daß durch das oben angegebene Axiomensystem der Bereich der reellen Zahlen bis auf Isomorphie genau angegeben wird. Die in diesem Kapitel auf verschiedenen Wegen konstruierten Bereiche der reellen Zahlen erfüllen dieses Axiomensystem.
Damit sei die Betrachtung dieses Zahlenbereichs abgeschlossen.

Aufgabe 26

## 5.6. Komplexe Zahlen

Wir haben mit dem Körper der reellen Zahlen einen Zahlenbereich gewonnen, in dem sämtliche erklärten Rechenoperationen mit allen Elementen ausführbar sind. In $P$ existieren aber nicht $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-3}$ usw.; denn da jede reelle Zahl entweder positiv, negativ oder 0 ist und das Quadrat, allgemein jede Potenz mit geradem Exponenten, einer solchen Zahl stets größer oder gleich 0 ist, kann man in $P$ Wurzeln mit geradem Wurzelexponenten aus negativen Zahlen nicht definieren.
Wir schaffen jetzt einen Zahlenbereich, in dem auch das Wurzelziehen ohne jede Einschränkung erklärt ist. Wir verlangen von dem neuen Bereich außerdem, daß er den Körper der reellen Zahlen enthält. Es wird zweckmäßig sein, den neuen Zahlenbereich so zu konstruieren, daß er gleichfalls einen Körper bildet.
Dieses wird dann die letzte Erweiterung des Zahlenbereichs sein, die wir vornehmen. Freilich könnte der Erweiterungsprozeß noch fortgesetzt werden, und dies geschieht auch in der Mathematik. Jedoch haben die dann entstehenden Bereiche nicht mehr die Eigenschaft, einen Körper zu bilden, die Multiplikation ist in ihnen nämlich nicht mehr so erklärbar, daß sie kommutativ ist.
Bei der Erzeugung des neuen Zahlenbereichs, des Bereichs der **komplexen Zahlen**, gehen wir wieder genetisch vor. Wir bilden also geordnete Paare $[a, b]$ reeller Zahlen. Als Äquivalenzrelation wählen wir diesmal die gewöhnliche Gleichheit von geordneten Paaren. Das Paar $[c, d]$ ist also dann und nur dann äquivalent dem Paar $[a, b]$, wenn $c = a$ und $d = b$ ist.
Die Festsetzung einer besonderen Äquivalenzrelation und eine besondere Klassenbildung sind also in diesem Fall nicht erforderlich, denn jedes geordnete Paar reeller Zahlen ist nur zu sich selbst äquivalent. Wir führen für solch ein Paar einen neuen Namen ein:

ERKLÄRUNG:

▷ Jedes Paar $[a, b]$ wird als **komplexe Zahl** $Z = (a, b)$ **bezeichnet.**

Ehe wir die Rechenoperationen erklären, wollen wir uns überlegen, wo wir die neuen Zahlen unterbringen können. Die Zahlengerade ist lückenlos durch die reellen Zahlen besetzt. Erinnern wir uns der Ausführungen von Kapitel 3 über das Koordinatensystem! Wir hatten zwei Zahlengeraden mit dem Nullpunkt aufeinander und zueinander rechtwinklig in eine Ebene gelegt (↑ S. 74). Mit Hilfe dieses kartesischen Koordinatensystems konnten wir jedem geordneten Paar reeller Zahlen genau einen Punkt der Ebene zuordnen. Das machen wir uns jetzt zunutze, indem wir jeder komplexen Zahl $(a, b)$ den durch die Koordinaten $a$ und $b$ bestimmten Punkt der Ebene zuordnen. Diese Zuordnung ist dann eineindeutig.
Wir sehen zugleich, daß der Bereich der komplexen Zahlen in der Sprache der Relationen als Kreuzprodukt $P \times P$ bezeichnet werden kann.
In Bild 5.7. sind folgende komplexe Zahlen eingezeichnet:

$$Z_1 = (3, 0),\ Z_2 = (1, 1),\ Z_3 = (-2, 3),\ Z_4 = (0, -2).$$

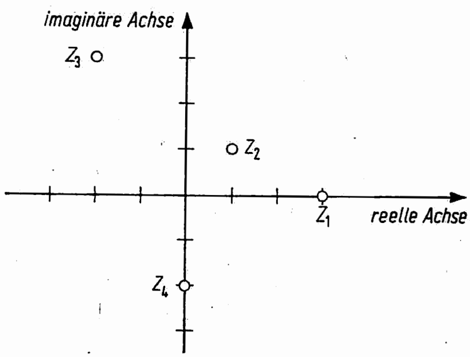



Bild 5.7.

Den Punkten der $x$-Achse entsprechen die Zahlen $(a, 0)$ ($a$ reell), den Punkten der $y$-Achse die Zahlen $(0, b)$ ($b$ reell).
Die Ebene der komplexen Zahlen wird nach dem deutschen Mathematiker GAUSS (KARL FRIEDRICH GAUSS, 1777 bis 1855), durch den dieses Gebiet sehr gefördert worden ist, **GAUSSsche Ebene** genannt. Die horizontale Achse wird **reelle Achse**, die vertikale **imaginäre Achse** genannt.
Es stößt auf Schwierigkeiten, in dem Bereich der komplexen Zahlen, den wir mit $K$ bezeichnen wollen, eine Ordnung einzuführen.

Aufgabe 27

### 5.6.1. *Rechenoperationen*

ERKLÄRUNG:

▷ Unter der **Summe** der komplexen Zahlen $(a, b)$ und $(c, d)$ verstehen wir die komplexe Zahl $(a + c, b + d)$.

Dann gelten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz der Addition.
Addieren wir zwei Zahlen $(a, 0)$, $(b, 0)$, so erhalten wir $(a + b, 0)$, also wieder eine Zahl der $x$-Achse. Das Entsprechende gilt auch auf der $y$-Achse.

ERKLÄRUNG:

▷ Das **Produkt** aus den beiden komplexen Zahlen $(a, b)$ und $(c, d)$ erklären wir als die komplexe Zahl $(ac - bd, bc + ad)$.

Es wird sich zeigen, daß mit dieser scheinbar komplizierten Festsetzung genau das erreicht wird, was wir beabsichtigen, nämlich die unbeschränkte Ausführbarkeit des Wurzelziehens. Daß die Multiplikation kommutativ ist, sieht man sofort. Eine einfache, aber etwas langatmige Durchrechnung liefert auf Grund der Definition unmittelbar den Nachweis für das Assoziativgesetz. Weiter gilt das Distributivgesetz für die Addition und Multiplikation, wie auch die Durchrechnung ergibt.
Multiplizieren wir die beiden Zahlen $(a, 0)$ und $(c, 0)$, so ergibt sich $(ac - 0, 0 + 0)$, also $(a\,c, 0)$. Das ist wieder eine Zahl der $x$-Achse.
Ordnen wir der reellen Zahl $x$ die komplexe Zahl $(x, 0)$ zu, so besteht Isomorphie des Bereichs der reellen Zahlen mit dem Teilbereich der komplexen Zahlen $(x, 0)$ hinsichtlich der Addition und Multiplikation, so daß wir die komplexe Zahl $(x, 0)$ durch die reelle Zahl $x$ ersetzen können. Die auf der imaginären Achse abgebildeten Zahlen $(0, b)$ heißen *rein imaginäre Zahlen.* Das Produkt zweier rein imaginärer Zahlen liefert eine reelle Zahl.

Aufgabe 28

Mittels einfacher trigonometrischer Umformungen erhält man eine recht übersichtliche Form des Produkts, aus der sich leicht das Assoziativgesetz sowie einfache Ausdrücke für $z_1 \cdot z_2$, für $z^n$ und für $\sqrt[n]{z}$ ergeben. Wegen Platzmangels muß der Leser hier auf andere Literatur verwiesen werden ([29], S. 87 f.).

ERKLÄRUNG:

▷ Unter dem **Quotienten** $(a, b) : (c, d)$ $((c, d) \neq (0, 0))$ wird die komplexe Zahl

$$\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

verstanden.

Eine einfache Ausrechnung ergibt, daß das Produkt aus dieser Zahl und $(c, d)$ wieder $(a, b)$ liefert.

Aufgabe 29

Die so erklärte Division kann demnach als Umkehroperation der Multiplikation bezeichnet werden.
Für die so definierten Rechenoperationen lassen sich auch die weiteren Körperaxiome beweisen. Der Körper $K$ der komplexen Zahlen enthält einen zum Körper $P$ der reellen Zahlen isomorphen Unterkörper.
Wir denken uns jetzt die komplexen Zahlen direkt an den zugehörigen Punkten angeschrieben. Der Koordinatenursprung trägt dann die Zahl (0, 0). Von diesem Punkt aus ziehen wir zu einem beliebigen Punkt $Z$ einen Pfeil. Solch einen Pfeil wollen wir als *Vektor der* GAUSS*schen Ebene* bezeichnen. Ein Vektor ist durch seine Länge und Richtung bestimmt, andererseits aber auch durch seine **Komponenten**, das sind seine Projektionen auf die Achsen. Auf S. 157 wurde die Addition von Vektoren nach dem Parallelogrammgesetz erklärt. Die vom Anfangspunkt ausgehende Diagonale ergibt nach Länge und Richtung den Summenvektor der beiden Vektoren. Jeder Vektor ist die Summe seiner beiden Komponentenvektoren.

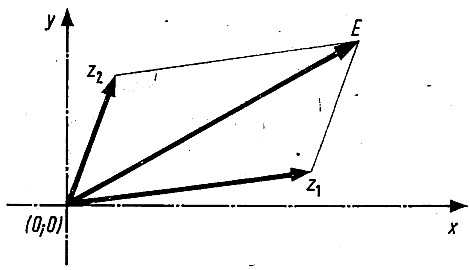


Bild 5.8.

Dies gilt auch für die Addition der Vektoren $z_1$ und $z_2$, die vom Punkt (0, 0) zu den Punkten mit den komplexen Zahlen $z_1$ bzw. $z_2$ laufen (Bild 5.8.). (Der Einfachheit halber sollen die Zahl, der ihr zugeordnete Punkt und der zugehörige Vektor alle mit dem gleichen Buchstaben $z$ bezeichnet werden.) Der Beweis dafür, daß der nach dem Parallelogrammgesetz konstruierte Punkt tatsächlich mit der Zahl $z_1 + z_2$ zu beziffern ist, kann mit geometrischen Hilfsmitteln leicht erbracht werden.

Aufgabe 30

Eine geometrische Deutung der Multiplikation ist mit Hilfe von ähnlichen Dreiecken möglich: Man zeichne das Dreieck (0, 0), (1, 0), $z_1$ und konstruiere das ähnliche Dreieck (0, 0), $z_2$, $z_1 \cdot z_2$, indem man an den Vektor $z_2$ in (0, 0) den Winkel zwischen dem Vektor $z_1$ und der $x$-Achse, an den Vektor $z_2$ in Punkt $z_2$ den Winkel bei dem Punkt (1, 0) anträgt. Den Nachweis für die Richtigkeit der Konstruktion erhält man leicht mit Hilfe der schon oben erwähnten trigonometrischen Hilfsmittel.
Wir wollen jetzt einmal die Summe einer komplexen Zahl $(a, 0)$ der reellen Achse mit einer komplexen Zahl $(0, b)$ der imaginären Achse bilden. Die Summe ergibt $(a, b)$. Umgekehrt kann jede komplexe Zahl $z = (x, y)$ als Summe der komplexen Zahlen $(x, 0)$ und $(0, y)$ aufgefaßt werden. Wir bezeichnen nun die Zahlen $(a, 0)$ einfach mit $a$, also speziell die Zahl (1, 0) mit 1. Die Zahl (0, 1) der imaginären Achse bezeichnen wir dagegen mit dem Buchstaben $i$, der uns an das Wort „imaginär“[1] erinnert. Wir bilden

[1] Aus dem Lateinischen, gedacht, nur vorgestellt, eingebildet; Gegenstück zu „reell“.

das Produkt $y \cdot i$, also $(y, 0) \cdot (0, 1)$. Nach Definition der Multiplikation ergibt sich $(y \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y)$. Die Zahl $(0, y)$ wird sinngemäß als $y\,i$ bezeichnet. Daher kann die komplexe Zahl $z = (x, y)$ als $z = x + iy$ geschrieben werden. Dadurch entstehen viele Vereinfachungen.
Bilden wir das Produkt $i \cdot i$ nach der Definition des Produkts, so erhalten wir:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = -1.$$

Damit ist bewiesen, daß $i \cdot i$, auch als $i^2$ bezeichnet, $-1$ ergibt. Daher können wir $i$ als eine Quadratwurzel aus $-1$ bezeichnen.
Unter der Potenz $z^n$ ($n$ ist eine natürliche Zahl) wird wie üblich das $n$-fach wiederholte Produkt $z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ verstanden. Dann lassen sich mit Hilfe der Trigonometrie einfache Formeln für $z^n$ und für $\sqrt[n]{z}$ angeben. Der Leser muß auch hier auf andere Literatur verwiesen werden (vgl. [29], S. 87 f.).
Es sei nur an einem Beispiel gezeigt, daß Wurzeln aus negativen reellen Zahlen in $K$ enthalten sind. Es gilt nämlich auch im Bereich der komplexen Zahlen das Wurzelgesetz $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Demnach ist $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\ \sqrt{-1} = 2\,i$. Aber auch $-2\,i$ ist eine Quadratwurzel aus $-4$.

**Zusammenfassung:**

**In dem Körper $K$ der komplexen Zahlen $z = x + iy$ existieren sämtliche Wurzeln $\sqrt[n]{z}$. In $K$ gibt es einen Unterkörper, nämlich den Bereich der Zahlen $z = x + i \cdot 0$, der zum Körper $P$ der reellen Zahlen hinsichtlich der dort ausführbaren Rechenoperationen isomorph ist.**

Leider kann hier mangels erforderlicher Hilfsmittel keine Vorstellung von den schönen Gesetzmäßigkeiten des Körpers der komplexen Zahlen gegeben werden. Sie bilden die Grundlagen für die Funktionentheorie, eine der interessantesten Disziplinen der Mathematik.

## 5.7. Rückblick

Wir wollen vom Ende unseres Weges aus noch einmal den Aufbau der verschiedenen Zahlenbereiche überblicken.
Den Ausgangspunkt bildete der Bereich $N$ der natürlichen Zahlen. In ihm sind die Subtraktion und die Division nur beschränkt ausführbar. Von $N$ aus hatten wir den Bereich $R^*$ der gebrochenen Zahlen erzeugt, in dem die Division sich stets ausführen ließ. Den nächsten Zahlenbereich bildete der Körper $R$ der rationalen Zahlen, in dem außerdem die Subtraktion unbeschränkt ausführbar ist. Da $R$ die Null enthält, muß von jetzt an bei der Division die Null als Divisor ausgeschlossen werden. Aus $R$ war der Körper $P$ der reellen Zahlen gewonnen worden, der neben den rationalen auch die irrationalen Zahlen – darunter die nichtrationalen Wurzeln aus nichtnegativen Zahlen – enthält. Schließlich hatten wir den Körper $K$ der komplexen Zahlen konstruiert, in

dem sämtliche Rechenoperationen, auch das Wurzelziehen aus negativen Zahlen, unbeschränkt ausführbar sind. (Der Leser findet diesen Weg ausführlich beschrieben in [30].)

In der mathematischen Literatur und in mathematischen Vorlesungen wird der Aufbau allerdings meist in anderer Weise vorgenommen: Man macht zunächst die Subtraktion unbeschränkt ausführbar. Zu diesem Zweck bildet man Paare von Elementen aus $N$ und erklärt für diese Paare als Äquivalenzrelation die Differenzengleichheit. Der Zahlenbereich $G$, den man so erhält, besteht aus allen positiven und negativen ganzen Zahlen und der Null, $G = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$. Die Division, die in $G$ natürlich ebenso beschränkt ausführbar ist wie in $N$, erfordert zwecks unbeschränkter Ausführbarkeit einen neuen Zahlenbereich, der wieder durch Paarbildung von Elementen aus $G$, verbunden mit der Äquivalenzrelation der Quotientengleichheit, entsteht. Der dabei entstehende Bereich ist kein anderer als der Bereich $R$, der, wie wir gesehen haben, die Eigenschaften eines Körpers besitzt. Damit vereinigen sich die beiden verschiedenen Wege des Aufbaus in $R$. (Diesen Aufbau findet der Leser z. B. in [16] und [26].)

**Übersicht über den Aufbau der Zahlenbereiche**

*Bereich N der natürlichen Zahlen*
(1, 2, 3, ...)

/ \

*Bereich $R^*$ der gebrochenen Zahlen* — *Bereich G der ganzen Zahlen*

$\left(\text{Beispiele: } \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}\right)$ — (Beispiele: $-95, -12, 0, +5, +12$)

\ /

*Körper R der rationalen Zahlen*
$\left(\text{Beispiele: } \pm\frac{3}{5}, \pm 7\right)$

|

*Körper P der reellen Zahlen*
(Beispiele: $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt[3]{10}, \pm\frac{3}{5}, \pm\pi, \pm 7, \pm\sqrt{\pi}$)

|

*Körper K der komplexen Zahlen*
$\left(\text{Beispiele: } 3 + 4i, -\sqrt{2} + i, 1 - \pi i, 2, -\frac{3}{7}\right)$

Die komplexen Zahlen werden zur Zeit im obligatorischen Unterricht unserer allgemeinbildenden Schulen nicht behandelt.

Der Aufbau in der Reihenfolge $N - - R^* - - R - - P$ ist gegenwärtig in der Schule üblich. Er entspricht der historischen Entwicklung und wohl auch der psychischen Entwicklung des Kindes, das ja im täglichen Leben häufiger und früher mit Brüchen in Berührung kommt als mit negativen Zahlen. In mathematischer Beziehung sind beide Wege gleichwertig. Daß in der Mathematik meist der rechts skizzierte Weg $N - - G - - R - - P - - K$ bevorzugt wird, liegt wahrscheinlich daran, daß der

Bereich $G$ eine algebraische Struktur besitzt, die der eines Körpers ähnelt: Er stellt einen sogenannten **Integritätsbereich** dar. Für einen Integritätsbereich gelten die Körperaxiome mit Ausnahme des Axioms, das die unbeschränkte Umkehrung der Multiplikation (Divisor ungleich 0) fordert.
Es gibt noch weitere Möglichkeiten zum Aufbau der Zahlenbereiche. Zum Beispiel kann man, um mit einem Schlage alle Längenmessungen ausführbar zu machen, von $N$ aus unmittelbar den Integritätsbereich $P^*$ der absolut-reellen Zahlen aufbauen. In diesem Fall wird man sich zweckmäßigerweise der unendlichen Dezimalbrüche bedienen. Von $P^*$ aus gelangt man dann wieder durch Paarbildung über die Differenzengleichheit als Äquivalenzrelation zum Körper $P$ der reellen Zahlen (vgl. [31], S. 400 ff.).

## 5.8. Aufgaben: Aufbau der Zahlenbereiche

1. Zeigen Sie, daß die Bildung der Differenz $m_3 = m_1 - m_2$ ($m_1$, $m_2$, $m_3$ sind natürliche Zahlen) von der Wahl der Vertretermengen für $m_1$ und $m_2$ unabhängig ist! (↑ S. 198)

2. Zeigen Sie durch Aufstellung entsprechender Kreuzprodukte von Mengen, daß $3 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 1 = 3$ ist! (↑ S. 200)

3.* Beweisen Sie: Für natürliche Zahlen $a$, $b$, $c$ folgt aus $a < b$ und $c > 0$, daß $ac < bc$. (↑ S. 202)

4.* Beweisen Sie unter der Voraussetzung, daß die links vom Gleichheitszeichen stehenden Rechenoperationen ausführbar sind, das Rechengesetz
$a - (b + c) = (a - b) - c$! (↑ S. 202)

5.* Ein Leser, der sich mit Aufgabe 24 von Kapitel 2 beschäftigt hatte, schloß aus der für Mengenoperationen geltenden Formel d) von S. 53
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
indem er von den Mengen zu den Kardinalzahlen überging:
$(a + b) - c = (a - c) + (b - c)$.
Mit Bestürzung stellt er fest, daß unsere Arithmetik auf wackligen Füßen zu stehen scheint. Können Sie ihn beruhigen? (↑ S. 202)

6. Weisen Sie nach, daß die für gebrochene Zahlen erklärte Kleinerrelation $R'$ eine irreflexive Ordnungsrelation darstellt! (↑ S. 217)

7. Weisen Sie für die Addition und Subtraktion von gebrochenen Zahlen die Unabhängigkeit vom Repräsentanten nach! (↑ S. 219)

8. Weisen Sie für die Multiplikation und Division von gebrochenen Zahlen die Unabhängigkeit vom Repräsentanten nach! (↑ S. 219)

9. Beweisen Sie das Monotoniegesetz für die Addition gebrochener Zahlen! (↑ S. 220)

10. Beweisen Sie für beliebige gebrochene Zahlen $\alpha, \beta$ ($\beta \neq 0$):
$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha, \quad (\alpha : \beta) \cdot \beta = \alpha$! (↑ S. 220)

11. Zeigen Sie, daß die über $R^* \times R^*$ erklärte Relation der Differenzengleichheit eine Äquivalenzrelation ist! ($\uparrow$ S. 228)

12.* Es sei $\alpha$ die Klasse des Paares $[m, n]$, $\beta$ die des Paares $[r, s]$ ($m$, $n$, $r$, $s$ sind gebrochene Zahlen). Zeigen Sie, daß $\alpha < \beta$ äquivalent ist mit $m + s < r + n$! ($\uparrow$ S. 229)

13. Zeigen Sie, daß für rationale Zahlen Addition und Subtraktion von den Vertreterpaaren unabhängig sind! ($\uparrow$ S. 230)

14. Beweisen Sie für rationale Zahlen $\alpha$, $\beta$:
$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$! ($\uparrow$ S. 230)

15.* Beweisen Sie die Richtigkeit der Formeln e), f), g), h) von S. 231!

16. Beweisen Sie:
$(+u) \cdot (-v) = (-uv)$! ($\uparrow$ S. 233)

17. Es seien $\alpha, \beta, \gamma$ Elemente aus $R$ und $\alpha < \beta, \gamma \neq 0$. Zeigen Sie die Richtigkeit von $\alpha \pm \gamma < \beta \pm \gamma$! ($\uparrow$ S. 234)

18.* Beweisen Sie für $\gamma < 0$, daß aus $\alpha < \beta$ folgt
$\alpha : \gamma > \beta : \gamma$! ($\uparrow$ S. 235)

19. Beweisen Sie:
$(\alpha + \beta) : \gamma = \alpha : \gamma + \beta : \gamma$! ($\uparrow$ S. 235)

20. Zeigen Sie, daß es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 3 ist! ($\uparrow$ S. 242)

21. Geben Sie für die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ und $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ eine Zahl $N$ an, die dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium genügt! ($\uparrow$ S. 246)

22. Stellen Sie den Dezimalbruch $\alpha = 0{,}24\overline{9}$ mit Hilfe einer geometrischen Reihe dar und berechnen Sie daraus den Bruch $\frac{p}{q} = 0{,}24\overline{9}$! ($\uparrow$ S. 248)

23. Zeigen Sie, daß die Einteilung aller rationalen Zahlen in die Unterklasse $A$ (alle rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 2 ist) und die Oberklasse $A'$ (alle rationalen Zahlen, deren Quadrat größer als 2 ist) einen Schnitt darstellt! ($\uparrow$ S. 250)

24. Weisen Sie auf Grund der Eigenschaften (1) bis (6) (S. 251f.) für $P$ die Existenz und Eindeutigkeit eines neutralen Elements der Multiplikation nach! ($\uparrow$ S. 252)

25. Weisen Sie für die Menge $N'$ der Restklassen nach dem Modul 3 bei der dort erklärten Addition und Multiplikation die Körpereigenschaften 2) bis 6) nach! ($\uparrow$ S. 253)

26. Übertragen Sie die Betrachtungen über den Restklassenkörper nach 3 (S. 253) auf das Restklassensystem $N^{(2)}$ nach 2, indem Sie in $N^{(2)}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren! Stellt $N^{(2)}$ einen Körper dar? ($\uparrow$ S. 255)

27. Es sei $M$ die Menge der komplexen Zahlen. Für die komplexen Zahlen $z$ sei folgende Relation $R_0$ erklärt: $z_1 \, R_0 \, z_2$ bedeute, daß sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von $z_1$ kleiner sind als der Realteil bzw. der Imaginärteil von $z_2$, also mit naheliegender Abkürzung:
$R(z_1) < R(z_2)$ und $I(z_1) < I(z_2)$.
Ist $R_0$ eine Ordnungsrelation? (↑ S. 256)

28. Zeigen Sie, daß das Produkt zweier rein imaginärer Zahlen reell ist! (↑ S. 257)

29. Beweisen Sie, daß
$[(a, b) : (c, d)] \cdot [(c, d)] = (a, b)$ ist! $((c, d) \neq (0, 0))$ (↑ S. 257)

30. Zeigen Sie, daß der auf S. 258 nach dem Parallelogrammgesetz konstruierte Endpunkt $E$ der Diagonalen mit $z_1 + z_2$ zu bezeichnen ist!

# 6. VERGLEICH UNENDLICHER MENGEN

Der geheimnisvolle, für viele mit einer besonderen Dynamik beladene Begriff des Unendlichen hat seit jeher auf unsere Dichter und Denker Anziehungskraft ausgeübt. HÖLDERLIN begeisterte sich an ihm in seinen Versen:

> Ha! Die frohen Geister ringen
> zur Unendlichkeit hinan,
> tiefer ahndungsvoller dringen
> wir in diesen Ozean.[1]

GOETHE, wesentlich kühler, verwendet in einem seiner besinnlichen Gedichte das Bild einer unendlichen Kette, die uns an die Menge der ganzen Zahlen $\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$ erinnert:

> Ein kleiner Ring
> begrenzt unser Leben,
> und viele Geschlechter
> reihen sich dauernd
> an ihres Daseins
> unendliche Kette.[2]

Die Geschichte des Unendlichen in der Philosophie ist ein Buch mit vielen Kapiteln. ARISTOTELES kommt das große Verdienst zu, bereits bis zu einem gewissen Grade eine Analyse des Unendlichen durchgeführt zu haben.[3] Er unterschied zwischen dem

[1] Hymne an die Freundschaft.
[2] Grenzen der Menschheit.
[3] ARISTOTELES: Physik, 3. Buch, Kapitel 4 bis 8.

potentiell **Unendlichen,** das in der Möglichkeit besteht, fortgesetzt einer Größe eine andere hinzuzusetzen, z. B. von einer natürlichen Zahl aus ständig weiterzuzählen, und dem **aktual Unendlichen** als einer bestimmten unendlich großen Zahl. Nur der ersten Form des Unendlichen sprach er Existenzberechtigung zu, und die Mathematiker hielten bis ins vorige Jahrhundert hinein an dieser Meinung fest. Dadurch wurden gewisse Verbotsschranken geschaffen, die der Erforschung unendlicher Mengen jahrtausendelang im Wege standen.

Im 16. Jahrhundert äußerte GALILEI (GALILEO GALILEI, 1564 bis 1642) einen Gedanken, der zwar damals noch keine Früchte trug, aber im 19. Jahrhundert aufgegriffen und von CANTOR zur Durchbrechung der Schranken verwendet wurde. GALILEI ordnete jeder natürlichen Zahl ihre Quadratzahl zu:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & \ldots \end{array}$$

Keine natürliche Zahl, keine Quadratzahl bleibt daher ohne Partner. Es entsteht also eine elementweise eineindeutige Zuordnung der Menge der natürlichen Zahlen zu einer echten Teilmenge. Daraus schloß nun aber GALILEI nicht etwa, daß man beiden Mengen die gleiche „Anzahl" von Elementen zuschreiben müsse, sofern man bei unendlichen Mengen von solch einem Begriff reden wolle, sondern er resignierte vor diesem scheinbaren Widerspruch und meinte, im Unendlichen verschwömmen alle Unterschiede, etwa so, wie des Nachts alle Katzen grau seien. Es habe also keinen Zweck, hier einen Hebel anzusetzen.

LEIBNIZ und SPINOZA beschäftigten sich gleichfalls intensiv mit dem Unendlichen. So formulierte SPINOZA in seiner *Ethik* [32], die er rein deduktiv (more geometrico)[1] aufbaute, den Satz:

Es gibt nur eine Substanz, und die ist unendlich.

Bei den daraus gezogenen Folgerungen geriet er dann in Widersprüche, die zu einem großen Teil auf Verwechslungen zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen beruhten.

KANT unterschied in seinen Antinomien der reinen Vernunft ([33], S. 292 ff., insbesondere S. 341 bis 348) sehr wohl zwischen diesen beiden Arten des Unendlichen. Mit der aristotelischen strikten Ablehnung des aktual Unendlichen war er nicht einverstanden, trat ihm dieses doch zum Beispiel als Gesamtheit der Punkte einer Strecke oder des Universums entgegen. Da es aber zu seiner Zeit noch keine mathematische Begründung des aktual Unendlichen gab, geriet auch er in Widersprüche. Diese verwendete er neben anderen Argumenten dazu, eine prinzipielle Erkennbarkeit der Welt als eines Ganzen zu widerlegen.

Etwa 50 Jahre später griff als erster der Theologe und Mathematiker BOLZANO (BERNHARD BOLZANO, 1781 bis 1848) in seiner Schrift *Paradoxien des Unendlichen*[2] den Gedanken von GALILEI auf. Folgen wir ihm ein Stück bei seinen Überlegungen!

Auf einer Strecke $\overline{AC}$ liege ein Punkt $B$, beispielsweise in der Mitte (Bild 6.1.). Ein Punkt $X$ bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit von $A$ nach $B$. Mit ihm zugleich beginne ein Punkt $Y$, der doppelt so schnell von $A$ nach $C$ läuft, seine Bahn.

---

[1] Lateinisch, nach geometrischer Art.

[2] Diese Schrift erschien erst 1851.

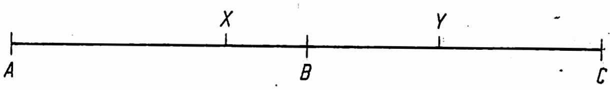


Bild 6.1.

Während $X$ die Strecke $\overline{AB}$ überstreicht, durchläuft $Y$ die Strecke $\overline{AC}$. Jeder Stellung von $X$ entspricht genau eine von $Y$ und umgekehrt. Wenn eine der beiden Längen $\overline{AX}$ oder $\overline{AY}$ gegeben ist, läßt sich die andere aus der Proportion

$$|\overline{AX}| : |\overline{AY}| = |\overline{AB}| : |\overline{AC}| = 1 : 2$$

berechnen. Es scheint also, daß es auf der ganzen Strecke $\overline{AC}$ nicht „mehr" Punkte gibt als auf der Teilstrecke $\overline{AB}$!

Dennoch schreckte BOLZANO vor diesem Schluß zurück: „... bloß aus diesem Umstande ist es – so sehen wir – noch keineswegs erlaubt zu schließen, daß diese beiden Mengen, wenn sie unendlich sind, in Hinsicht auf die Vielzahl ihrer Teile (d. h., wenn wir von allen Verschiedenheiten derselben absehen) einander gleich seien ...".[1] Zu stark wirkte auch noch in BOLZANO die These nach, die seit Jahrtausenden für wahr gehalten wurde, daß nämlich das Ganze notwendig größer sei, d. h. auch mehr Elemente habe, als jeder seiner Teile. Dieser Satz ist zweifellos richtig, wenn es sich um endliche Mengen handelt. Will man aber zu einem fruchtbaren Vergleich unendlicher Mengen gelangen, so muß man von dieser These Abstand nehmen. Ja, es erweist sich geradezu als Merkmal einer unendlichen Menge, daß sie im Sinne der BOLZANOschen eineindeutigen Zuordnung „ebensoviel" Elemente besitzen kann wie eine Teilmenge.

Dieser kühne Gedanke ist von GEORG CANTOR vollzogen und in sein Gebäude der Mengenlehre eingefügt worden. Damit gelang ihm auch der Zugang zu dem aktual Unendlichen, das er als das „eigentliche Unendliche" bezeichnete. Er fand, daß es sehr verschiedene „unendlich große" Zahlen gibt. Ferner entdeckte er, daß man diese Zahlen ähnlich den natürlichen Zahlen in einer unendlichen Folge anordnen kann, die manche Ähnlichkeit mit der Folge der natürlichen Zahlen hat.

Der Begriff des Unendlichen verlor durch die mathematische Analyse allerdings viel von seinem geheimnisvollen Charakter, gewann aber andererseits durch die klare Fassung und die dadurch ermöglichte Gliederung und Ordnung. Auch jetzt noch enthält er genug Merkwürdigkeiten. Oder ist es nicht erstaunlich, daß es auf einer winzig kleinen Strecke „ebensoviel" Punkte gibt wie in unserem Raum, der sich doch nach drei Dimensionen ins Unendliche erstreckt, und der unendlich viele solche Punktmengen, wie sie auf der kleinen Strecke liegen, enthält? Und ist es weniger verwunderlich, daß es nicht „mehr" Brüche gibt als natürliche Zahlen, obwohl diese doch isoliert liegen, da jede von ihnen einen unmittelbaren Nachfolger hat, während die Menge der nach der Größe geordneten Brüche „in sich dicht" ist, das heißt, daß zwischen zwei Brüchen, mögen sie auch noch so dicht beieinander liegen, immer noch ein Bruch zu finden ist!

Es wird sich weiter zeigen, daß die mathematische Konstruktion von Unendlichkeiten in ihrer Kühnheit dem Flug der dichterischen Phantasie kaum nachsteht, ganz zu schweigen davon, daß keine dichterische Schau zu solch einer Abstufung, Gliederung und Ordnung in unendlichen Bereichen fähig ist wie die mathematische Analyse.

[1] BOLZANO, B.: Paradoxien des Unendlichen, § 21.

Es mag dem Leser zunächst aussichtslos erscheinen, angesichts der vielfältigen Struktur unendlicher Mengen überhaupt zu einem Vergleich ihrer Mächtigkeit zu gelangen. Da gibt es die Menge der natürlichen Zahlen, die wie die Menge der ganzen Zahlen aus isoliert liegenden Elementen besteht. Dies ist nicht mehr der Fall bei der Menge der rationalen Zahlen, wenn wir sie uns der Größe nach geordnet denken, und bei der Menge der reellen Zahlen, in die alle genannten Mengen als Teilmengen eingeschachtelt sind. Für die reellen Zahlen gilt noch insbesondere: Ordnet man ihnen die Punkte einer Geraden eineindeutig zu, so wird die Gerade lückenlos erfüllt. – Da gibt es weiter die Mengen aller Punkte, aller Geraden, aller Kreise einer Ebene, des Raumes, die Menge aller Punkte einer Strecke, die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 – alles unendliche Mengen von ganz verschiedenartiger Struktur. In dieses schier unübersehbare Gebiet hat nun Georg Cantor einen Vorstoß gewagt, bei dem wir ihm folgen wollen.

## 6.1. Kardinalzahlen

Den Schlüssel zu dem Tor, das den Weg in das unbekannte Gebiet öffnet, finden wir in dem schon von Galilei und Bolzano verwendeten Begriff der eineindeutigen Abbildung einer Menge auf eine andere. Auch wir hatten ihn bereits benutzt, als wir den Begriff der Kardinalzahl einer endlichen Menge bildeten. Wir waren im vorigen Kapitel davon ausgegangen, daß der Vergleich zweier endlicher Mengen auch einem Kind, das noch gar nicht zählen kann, ohne weiteres möglich ist. Es braucht nur festzustellen, ob bei einer eineindeutigen Zuordnung der Elemente beide Mengen sich erschöpfen oder ob bei einer der beiden Mengen Elemente übrigbleiben. Diese Praxis des Mengenvergleichs hatten wir in die Sprache der Mathematik übersetzt. Halten wir uns noch einmal die dabei gewonnenen Ergebnisse vor Augen, um daraus Hinweise für den Vergleich unendlicher Mengen zu schöpfen!
Läßt sich eine Menge elementweise eineindeutig auf eine andere abbilden, so nannten wir sie gleichmächtig oder äquivalent mit der anderen. Wir hatten festgestellt, daß die Gleichmächtigkeit von endlichen Mengen eine Äquivalenzrelation ist. Die dadurch gegebene Klasseneinteilung in einem System $\mathfrak{S}$ von endlichen Mengen führte uns auf die endlichen Kardinalzahlen, die Klassen von $\mathfrak{S}$. Eine endliche Kardinalzahl ist also eine Klasse von einander äquivalenten Mengen. Ist dagegen eine Menge $A$ auf eine echte Teilmenge von $B$ abbildbar, so nannten wir die Kardinalzahl von $A$ kleiner als die von $B$. Die damit für endliche Kardinalzahlen erklärte Relation stellt, wie wir gesehen haben, eine irreflexive Ordnungsrelation dar.
Diesen Begriff der Kardinalzahl und seine Eigenschaften wollen wir jetzt auf unendliche Mengen zu übertragen suchen.

BEISPIEL 1:
Vergleichen wir zum Beispiel die Menge $N$ der natürlichen Zahlen mit der Menge $U$ der ungeraden natürlichen Zahlen und ordnen wir die Elemente der beiden Mengen, wie es Galilei mit den Quadratzahlen getan hatte, in folgender Weise einander zu,

wobei von jetzt an in Zahlenbeispielen, sofern kein Mißverständnis entstehen kann, die Zuordnungspfeile durch bloßes Untereinanderschreiben ersetzt werden.

$$\begin{array}{l} N: \{1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ldots\} \\ U: \{1,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 9,\ldots\} \end{array}$$

Es handelt sich also um die Abbildung $n \rightarrow 2n-1$. Jedem Element von $N$ entspricht demnach eineindeutig eins von $U$. Daher werden wir die Mengen $N$ und $U$, wie bei endlichen Mengen, gleichmächtig nennen.

Und doch liegt die Sache bei unendlichen Mengen etwas anders. Bei endlichen Mengen ist es nämlich ganz gleichgültig, wie wir die eineindeutige Zuordnung vornehmen. Wir können zum Beispiel die Menge $A = \{a, b, c, d, e\}$ auf die Menge $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ abbilden, indem wir $a$ und 1, $b$ und 2, ..., $e$ und 5 einander entsprechen lassen. Wenn sich bei irgendeiner Abbildung beide Mengen zugleich erschöpfen, so tun sie es bei jeder Abbildung. (Da in diesem Kapitel fast ausschließlich eineindeutige Abbildungen vorkommen, soll, falls nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist, unter „Abbildung“ stets eine eineindeutige Abbildung verstanden werden.)

Prüfen wir, ob dies auch für unendliche Mengen gilt!

Wir bilden einmal $U$ auf eine andere Weise ab:

$$\begin{array}{l} U: \{1,\ \ \ \ \ \ \ 3,\ \ \ \ \ \ \ 5,\ \ \ \ \ \ \ 7,\ldots\} \\ N: \{1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ldots\}. \end{array}$$

Dies ist eine Abbildung von $U$ in $N$, nicht auf $N$. Die Menge $U$ ist auf eine echte Teilmenge von $N$, nämlich auf sich selbst, abgebildet. Die Gleichmächtigkeit von $U$ und $N$ tritt dabei nicht in Erscheinung.

Überzeugen wir uns davon, daß dieser Fall nicht nur bei Zahlenmengen eintreten kann.

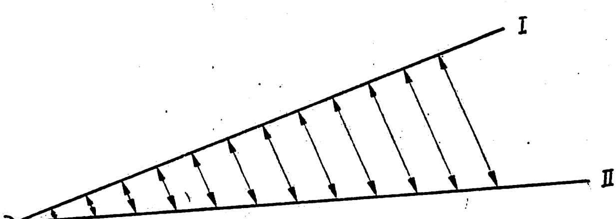



Bild 6.2.

BEISPIEL 2:

Gegeben seien zwei Strahlen I und II mit gemeinsamem Anfangspunkt (Bild 6.2.). Es sei $A$ die auf Strahl I, $B$ die auf Strahl II liegende Punktmenge, wobei jeweils der Anfangspunkt nicht mit zur Menge zählen soll. Die unendlichen Mengen $A$ und $B$ sind selbstverständlich äquivalent. Wir können ja zum Beispiel die beiden Strahlen so aufeinanderlegen, daß ihre Anfangspunkte sich decken und jeder Punkt von II auf einem von I liegt. Die Punktmengen $A$ und $B$ werden dabei nicht verändert. Die aufeinanderliegenden Punkte entsprechen sich eineindeutig. Um aber die Abbildung von $A$ auf $B$ besser sichtbar zu machen, legen wir die Strahlen wie in Bild 6.2. und bilden durch parallele Strahlen ab.

Daneben stellen wir eine eineindeutige Abbildung von $A$ in $B$. Die Menge $A$ ist jetzt auf die echte Teilmenge $T$ von $B$ abgebildet. Offenbar lassen sich beliebig viele Teilmengen $T$ dieser Art bilden. (Bild 6.3.).

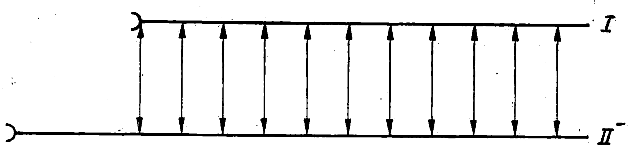



Bild 6.3.

Ebenso könnten wir natürlich $B$ auf eine echte Teilmenge $T'$ von $A$ abbilden.
Wir haben also wieder die merkwürdige Tatsache zu verzeichnen, daß zugleich $A$ auf $B$ und auf eine echte Teilmenge von $B$ abgebildet werden kann. Bei gleichmächtigen endlichen Mengen ist dies nicht möglich, und gerade dadurch konnten wir ja auf Seite 194f. so einfach eine Kleinerrelation für endliche Kardinalzahlen erklären. So bequem läßt sich ein Mengenvergleich bei unendlichen Mengen also nicht durchführen, denn zweckmäßigerweise werden wir einer Menge nur eine einzige Kardinalzahl und nicht zwei oder noch mehr zuschreiben. Wir dürfen uns also nicht daran stoßen, daß wir in Beispiel 1 und 2 einmal die eine Menge auf die ganze andere, dann auf eine echte Teilmenge der anderen abgebildet haben. Wenn es uns gelingt, nur eine einzige Abbildung der einen auf die andere Menge herzustellen, so sind die beiden Mengen gleichmächtig. Wir kümmern uns dann nicht darum, ob außerdem diese Menge auf eine echte Teilmenge der anderen abbildbar ist. Finden wir also zunächst keine Abbildung einer unendlichen Menge auf eine andere, so haben wir noch nicht das Recht, ihnen die Gleichmächtigkeit abzusprechen. Dazu müssen wir vielmehr nachweisen, daß eine Abbildung der einen auf die ganze andere unmöglich ist. Hier liegen also wesentlich andere Verhältnisse vor als bei endlichen Mengen. Gemeinsam ist endlichen und unendlichen Mengen lediglich, daß die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation darstellt. Der Nachweis dafür verläuft bei unendlichen Mengen ebenso wie bei endlichen. Übrigens wurden Abbildungen einer unendlichen Menge auf eine andere bereits im Kapitel 4 (↗ z. B. S. 172) verwendet.
Wir kommen so zu folgender

ERKLÄRUNG:

▷ Es sei $\mathfrak{S}$ ein System beliebiger Mengen. Zwei Mengen aus $\mathfrak{S}$ heißen **äquivalent** oder **gleichmächtig**, wenn sich eine von ihnen eineindeutig auf die andere abbilden läßt. Die Nichtäquivalenz kann nur dann behauptet werden, wenn die Unmöglichkeit einer solchen Abbildung gezeigt worden ist.

Der Leser behalte im Gedächtnis, daß – wie im vorigen Kapitel – „Äquivalenz" bei Mengen stets **Gleichmächtigkeit** bedeutet. Es sei noch auf einen weiteren Punkt hingewiesen. Beispiel 1 zeigte, daß eine unendliche Menge auf eine echte Teilmenge von sich selbst abgebildet werden kann. Gerade diese Tatsache hatte ja bei GALILEI und später bei BOLZANO Bedenken dagegen wach werden lassen, die elementweise eineindeutige Zuordnung zur Grundlage des Vergleichs unendlicher Mengen zu machen. Wir müssen uns, wenn wir weiterkommen wollen, von der jahrtausendelang als „Axiom" angesehenen These lösen, daß das Ganze notwendig „größer" sein müsse als jeder seiner Teile.
Damit wird auch der Begriff „Anzahl der Elemente" bei unendlichen Mengen anrüchig. Der Leser tut gut daran, sich jetzt von den inhaltlichen Vorstellungen des Anzahl-

begriffs zu lösen, weil er sonst in Schwierigkeiten gerät, die ihm, wie den früheren Mathematikern, den weiteren Weg versperren könnten. Wir werden also von jetzt an nicht mehr von der Elementeanzahl, sondern nur noch von der Mächtigkeit oder der Kardinalzahl einer Menge sprechen.
Es gilt der Satz, daß jede unendliche Menge mindestens eine echte Teilmenge besitzt, der sie äquivalent ist. (Der Beweis befindet sich z. B. in [26], S. 36 ff., und [16], S. 78.) Dies bedeutet natürlich nicht, daß eine unendliche Menge jeder echten Teilmenge äquivalent ist. Zum Beispiel kann sie nie einer endlichen Teilmenge äquivalent sein. Aber auch wenn die Teilmenge unendlich ist, braucht sie nicht mit der ganzen Menge gleichmächtig zu sein. Wir werden später Beispiele dafür kennenlernen.
Die RUSSELLsche Definition für die Endlichkeit einer Menge (↑ S. 187) beruht darauf, daß es unmöglich ist, durch schrittweise Zufügung einzelner Elemente von einer endlichen zu einer unendlichen Menge zu gelangen.
Jedes System $\mathfrak{S}$ unendlicher Mengen zerfällt durch die Äquivalenzrelation der Gleichmächtigkeit in lauter nichtleere elementefremde Klassen von Mengen. Damit gelangen wir zum allgemeinen Begriff der Kardinalzahl.

ERKLÄRUNG:

▷ Ist $M$ eine Menge aus $\mathfrak{S}$ und ist $\alpha$ die Klasse von $M$, so heißt $\alpha$ die **Kardinalzahl** von $M$. Eine Zahl $\beta$ heißt ihrerseits Kardinalzahl, wenn es eine Menge $M$ gibt, so daß $\beta$ die Klasse von $M$ ist.

Die Kardinalzahlen unendlicher Mengen heißen transfinite[1] Kardinalzahlen. Eine Zahl $\beta$ ist transfinite Kardinalzahl, wenn sich eine unendliche Menge $A$ angeben läßt, deren Kardinalzahl $\beta$ ist. Wir werden im folgenden sehen, daß sich transfinite Kardinalzahlen in einigen wesentlichen Punkten von endlichen Kardinalzahlen unterscheiden. Gemeinsam ist beiden die Definition durch die eineindeutige Zuordnung von Elementen.
Der Begriff der eineindeutigen Zuordnung und die anderen uns bekannten Begriffe der Mengenlehre reichen allerdings zu einer exakten Begründung der oben verheißenen Resultate nicht aus. Ihre Erarbeitung würde den Rahmen dieses Buches sprengen. Hier ist ja auch nur beabsichtigt, den Leser über die schönen und merkwürdigen Ergebnisse dieses Gebiets zu informieren und dadurch einerseits sein Bild von der Mengenlehre, andererseits seine Kenntnisse unserer Zahlenbereiche abzurunden.
Dieser Weg scheint auch darum statthaft, weil die Ausführungen der vorigen Kapitel das Verständnis für die hier auftretenden neuen Gedanken vorbereitet haben dürften. Hin und wieder sollen Proben von Beweisen einen Einblick in die eigenartigen, geistvollen Schlußweisen CANTORs geben. Wenn ein Leser, hierdurch oder durch die verblüffenden Resultate beeindruckt, mehr und Genaueres über dieses Gebiet zu erfahren wünscht, muß er zu einer der Monographien über die Mengenlehre greifen (z. B. [34], [7], [26], [36], [37], S. 190 bis 203).
Auf einen Punkt soll noch aufmerksam gemacht werden: Auch bei unendlichen Mengen ist der Mengenbegriff in seiner strengen mathematischen Fassung zu benutzen, wonach stets einwandfrei feststehen muß, ob ein Individuum zu einer Menge gehört oder nicht.

[1] Aus dem Lateinischen, unbegrenzt, unendlich.

Wenn also im folgenden zum Beispiel von einer auf einer Strecke liegenden Punktmenge die Rede ist, so muß angegeben werden, ob einer der Endpunkte oder beide zur Menge zu zählen sind, obwohl das Hinzunehmen von ein oder zwei Elementen für den Vergleich unendlicher Mengen belanglos scheint. Zwar werden die späteren Ausführungen diese Meinung bestätigen, dennoch müssen solche Unterschiede zunächst beachtet werden.
Wir wollen uns jetzt mit solchen unendlichen Mengen beschäftigen, die mit der Menge der natürlichen Zahlen äquivalent sind.

BEISPIEL 3:
Es soll $A$ die Menge bedeuten, die aus $N$ durch Weglassen der ersten 10 Elemente entsteht. Wir bilden ab:

$$\begin{array}{llllllll} N: \{ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots\} \\ A: \{11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, \ldots\}. \end{array}$$

Beide Mengen sind äquivalent.
Wir dürfen verallgemeinern:

SATZ:
▷ Wenn die Menge $A$ aus der Menge $N$ durch Weglassen von $n$ Elementen entsteht, wobei $n$ eine beliebige natürliche Zahl ist, so hat $A$ dieselbe Mächtigkeit wie $N$.

Damit haben wir wieder eine Teilmenge von $N$ gefunden, der $N$ äquivalent ist. Allgemein gilt:

SATZ:
▷ Ist $B$ eine unendliche Teilmenge von $N$, so hat $B$ die gleiche Mächtigkeit wie $N$.

(Der Beweis des Satzes befindet sich z. B. in [34], S. 8.)
Dieser für $N$ gültige Satz kann keinesfalls auf beliebige unendliche Mengen übertragen werden.

BEISPIEL 4:
Wir ziehen jetzt einen anderen Zahlenbereich zum Vergleich mit $N$ heran, den Bereich der ganzen Zahlen. Hier scheint zunächst die Sache wesentlich anders zu liegen, denn die Menge $G$ reicht sozusagen mit ihren Elementen nach zwei Seiten ins Unendliche, ähnlich wie die Kette der Generationen in GOETHES Gedicht. Dennoch können wir die Äquivalenz von $G$ mit $N$ durch folgende Abbildung zeigen:

$$\begin{array}{llllllll} N: \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ldots\} \\ G: \{0, & +1, & -1, & +2, & -2, & +3, & -3, \ldots\}. \end{array}$$

Dabei haben wir davon Gebrauch gemacht, daß $G$ eine nicht geordnete Menge ist.
Wir sehen, daß die Kardinalzahl von $N$ häufig auftritt. Daher führen wir einen neuen Namen für Mengen, die zu $N$ äquivalent sind, ein: Wir nennen sie **abzählbar**. Es ist

nämlich möglich, bei einer Menge $A$, die zu $N$ gleichmächtig ist, die Elemente durchzunumerieren. Bei $G$ sieht dies so aus: $a_1 = 0$, $a_2 = +1$, $a_3 = -1$, $a_4 = +2, \ldots$ Der Leser hüte sich aber vor einer Verwechslung der Begriffe „abzählen“ und „zählen“! Zählen lassen sich die Elemente einer abzählbaren, also unendlichen Menge natürlich nicht. Eine abzählbare Menge kann aber stets als eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geschrieben werden, und jede solche Folge ist natürlich abzählbar.

Weitere Beispiele für Folgen:

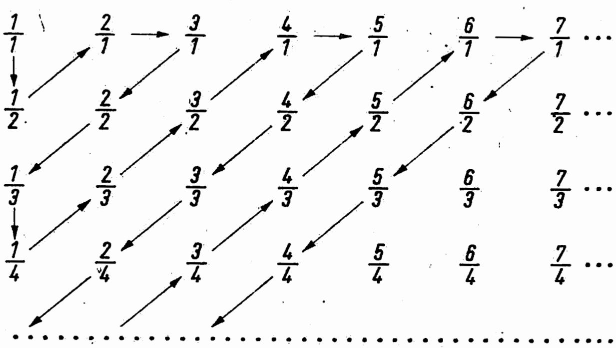
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots; \quad 1, -2, 3, -4, \ldots; \quad -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Aufgabe 1

Da die Kardinalzahl abzählbarer Mengen häufig vorkommt – vorläufig wissen wir nicht einmal, ob es überhaupt andere unendliche Kardinalzahlen gibt –, führen wir dafür ein neues Symbol ein. In der Mathematik wird gern für Kardinalzahlen der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets, aleph, geschrieben $\aleph$, herangezogen. Die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen wird mit $\aleph_0$ bezeichnet.

BEISPIEL 5:

Jetzt wollen wir die Mächtigkeit der Menge $R^*$ der positiven rationalen Zahlen untersuchen. Wir schreiben die Elemente in Form gewöhnlicher Brüche und ordnen sie so an, daß in den gezeichneten Schräglinien die Summe von Zähler und Nenner 3, 4, 5, ... beträgt.




Dabei haben wir zwar ein und dieselbe rationale Zahl mehrfach aufgeschrieben, da ja Brüche, die durch Erweitern bzw. Kürzen auseinander hervorgehen, dieselbe gebrochene Zahl darstellen, z. B.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{20}{30} = \cdots,$$

aber für die Abzählung, die wir jetzt vornehmen, spielt das keine Rolle. Wir fangen bei $\frac{1}{1}$ an, das als $a_1$ bezeichnet wird, und gehen in Richtung der Pfeile weiter, so daß $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{1}$, $a_4 = \frac{3}{1}$, $a_5 = \frac{1}{3}$, (einen Bruch, der durch Erweitern eines bereits abgezählten entstanden ist, lassen wir einfach fort) $a_6 = \frac{1}{4}$, $a_7 = \frac{2}{3}$, $a_8 = \frac{3}{2}$, $a_9 = \frac{4}{1}, \ldots$

Bei dieser Abzählung werden alle Elemente von $R^*$ tatsächlich erfaßt. Man kann zum Beispiel ohne allzugroße Mühe herausfinden, welche Nummer ein bestimmter Bruch erhält.

Aufgabe 2

Damit ist gezeigt, daß die Menge aller Brüche von gleicher Mächtigkeit ist wie die Menge der natürlichen Zahlen. Um die Merkwürdigkeit dieses Resultats zu erfassen, halte sich der Leser vor Augen, daß der Bereich der Brüche „in sich dicht" ist.
Das heißt:
Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen, mögen sie noch so dicht beieinander liegen, gibt es immer noch eine, zum Beispiel ihr arithmetisches Mittel. So liegt zwischen $\frac{43}{100}$ und $\frac{44}{100}$ der Bruch $\frac{87}{200}$, zwischen $\frac{43}{100}$ und $\frac{87}{200}$ der Bruch $\frac{173}{400}$, usw.
Auf diese Weise lassen sich durch Bildung des arithmetischen Mittels (und auf viele andere Arten!) zwischen $\frac{43}{100}$ und $\frac{44}{100}$ beliebig verschiedene Brüche einschalten.
Zwischen zwei natürlichen Zahlen, mögen sie auch noch so weit voneinander entfernt sein, etwa zwischen 1 und 1000000, liegen dagegen stets nur endlich viele verschiedene natürliche Zahlen.
Wenn diese beiden Mengen $N$ und $R^*$ aufeinander abgebildet werden, so mußte bei $R^*$ die natürliche Reihenfolge der Elemente der Größe nach aufgegeben werden. Dieser Punkt wird später noch deutlicher werden.
Wir haben so das erstaunliche Resultat erhalten, daß die Menge der positiven rationalen Zahlen abzählbar ist. Dann ist natürlich die Menge $R$ aller rationalen Zahlen auch abzählbar. Man braucht die negativen rationalen Zahlen nur nach dem gleichen Schema anzuordnen wie oben die positiven Zahlen, die jetzt mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bezeichnet werden sollen. Man beginnt mit 0, dann folgt $a_1$, darauf $-a_1$, dann $a_2$, $-a_2$ usw. Diese Abzählung erfaßt alle rationalen Zahlen.

Aufgabe 3

Daß die Menge $R$, die sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, der Menge $R^*$ äquivalent ist, wundert uns weniger, nachdem uns schon die Abbildung des Bereichs $G$ der ganzen Zahlen auf den Bereich $N$ der natürlichen Zahlen gelungen ist (↑ Beispiel 4 von S. 271). Wir zählten den „negativen" Teil der Menge nach dem gleichen Prinzip wie vorher den „positiven" ab, klappten ihn dann sozusagen in den positiven Teil hinein, indem wir die beiden Teilmengen elementweise ineinander schoben. Diesen Gedanken werden wir in einem späteren Beispiel aufgreifen. Das eigentlich Merkwürdige besteht in der Äquivalenz der nur aus isolierten Elementen bestehenden Menge $N$ mit der in sich dichten Menge $R^*$. Nach der Umordnung der Menge $R^*$ hat jedes Element einen unmittelbaren Nachfolger, ganz wie beim Bereich der natürlichen Zahlen. Selbstverständlich ist auch die Menge $R$ in dieser Anordnung nicht mehr der Größe nach geordnet.

**Zusammenfassung:**
**Die Menge der ganzen Zahlen und die der rationalen Zahlen sind abzählbar.**

In dem bei Abzählung der Brüche verwendeten Schema von S. 272 steht in jeder Reihe eine abzählbare Menge, und es gibt abzählbar viele solche Reihen. Die Zahlen des Schemas bilden die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen abzählbaren Mengen.
Ist

$$\begin{matrix} \{a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\} \end{matrix}$$

die Vereinigungsmenge der in den Zeilen stehenden beliebigen abzählbaren Mengen und zählen wir ihre Elemente nach dem gleichen Prinzip ab wie die Brüche, so ergibt sich:

SATZ:
▷ Die Vereinigungsmenge abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist selbst abzählbar.

Natürlich ist die Vereinigungsmenge endlich vieler abzählbarer Mengen gleichfalls abzählbar. Der Fall von zwei abzählbaren Mengen lag in Beispiel 4 (Menge der ganzen Zahlen) vor. Das dort angewandte Verfahren läßt sich ohne weiteres auf die Abzählung einer beliebigen endlichen Anzahl von abzählbaren Mengen übertragen.

**Zusammenfassung:**
**Menge $A$ gleichmächtig mit Menge $B$: $A$ ist auf $B$ eineindeutig abbildbar.**
**Jede unendliche Menge besitzt mindestens eine echte Teilmenge, der sie äquivalent ist.**
**Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.**
**Die Äquivalenzklassen heißen Kardinalzahlen.**
**Die Kardinalzahl der abzählbaren Mengen, das sind diejenigen Mengen, die mit der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind, wird mit $\aleph_0$ bezeichnet.**
**Zu der Kardinalzahl $\aleph_0$ gehören z. B.**
**jede unendliche Teilmenge von $N$,**
**die Menge $G$ der ganzen Zahlen,**
**die Menge $R^*$ der positiven rationalen Zahlen,**
**die Menge $R$ der rationalen Zahlen.**

BEISPIEL 6:
Wir wenden uns jetzt wieder einigen Mengen aus der Geometrie zu. Es sei $A$ die Menge aller Kreise mit dem Radius 5 cm, $B$ sei die Menge aller Punkte einer Ebene. Jedem Element von $B$ ordnen wir denjenigen Kreis aus $A$ zu, der diesen Punkt zum Mittelpunkt hat. Dies stellt eine Abbildung von $B$ auf $A$ dar. Beide Mengen sind gleichmächtig. Statt der Menge $A$ können wir auch die Menge aller Kugeln des Raumes mit dem Radius 5 cm, statt der Menge $B$ die Menge aller Punkte des Raumes wählen. Wir sind dabei so verfahren, als wenn wir eine Menge Menschen statt nach Köpfen nach Nasenspitzen zählen.
Während in den vorigen Beispielen die Art der Zuordnung beim Vergleich der beiden Mengen ziemlich nahelag und daher ihre Äquivalenz wohl ohne weiteres einleuchtet, kann man dies von dem nun folgenden Beispiel durchaus nicht behaupten.

BEISPIEL 7:

Es sei $A$ die Menge aller Punkte einer beliebig langen Strecke $\overline{DE}$, wobei wir die Endpunkte nicht mit zur Menge zählen wollen, $B$ die Menge aller Punkte einer Geraden. Wird es jetzt gelingen, die nach beiden Seiten ins Unendliche ausgedehnte und die ganze Gerade lückenlos erfüllende zweite Punktmenge so zusammenzuquetschen, daß ihre Elemente auf der beiderseits begrenzten Strecke Platz finden? Man sieht ohne weiteres, wie die Abbildung nicht aussehen kann, wenn beide Mengen als äquivalent erwiesen werden sollen, nämlich nicht entsprechend wie in Bild 6.4. Denn dabei erhalten

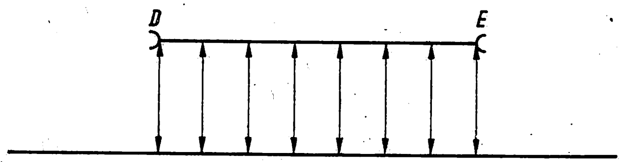



Bild 6.4.

wir nur eine Abbildung von $A$ in $B$, nicht auf $B$. Wir helfen uns mit folgendem Trick: Wir machen die Strecke $\overline{DE}$ zur Basis eines gleichschenkligen Dreiecks. Durch die Projektion von Bild 6.5. wird die auf $\overline{DE}$ liegende Punktmenge abgebildet auf diejenige Punktmenge, die auf dem geknickten Streckenzug $\overline{DGE}$ liegt. Wir setzen jetzt das Dreieck wie in Bild 6.6. mit der Spitze $G$ auf die Gerade, so daß die Strecke $\overline{DE}$ parallel

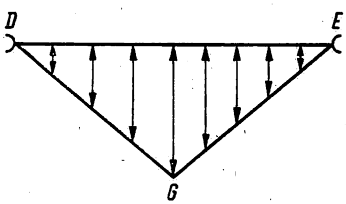



Bild 6.5.

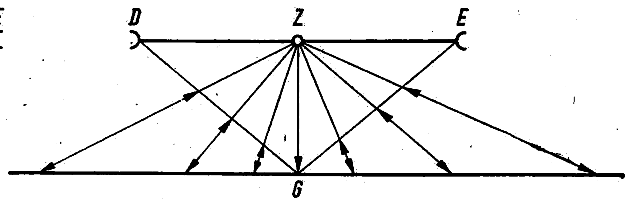



Bild 6.6.

zur Geraden verläuft. Der Mittelpunkt von $\overline{DE}$ sei $Z$. Wir ziehen von $Z$ aus durch jeden Punkt von $\overline{DG}$ und von $\overline{GE}$ einen Strahl, der die Gerade in genau einem Punkt trifft. Die auf $\overline{DG}$ liegende Punktmenge wird dadurch auf den links von $G$ liegenden Teil der Geraden, die Punktmenge auf $\overline{GE}$ auf den rechts liegenden Teil, $G$ auf sich selbst abgebildet. Die Punktmenge $A$ ist äquivalent der Punktmenge auf der geknickten Strecke $\overline{DGE}$, diese zur Punktmenge $B$ auf der Geraden, also sind $A$ und $B$ äquivalent. Dies ist um so erstaunlicher, als die Strecke $\overline{DE}$ beliebig kurz sein kann.

Aufgabe 4

BEISPIEL 8:

Wir übertragen das Problem von Aufgabe 4d (↗ S. 309) auf den dreidimensionalen Raum. Die Menge $A$ enthalte alle Punkte einer Kugeloberfläche, wobei wir jetzt einen einzigen Punkt $Z$ ausschließen. Unter $B$ soll die Menge aller Punkte einer Ebene verstanden werden. Wir legen die Kugel so auf die Ebene, daß $Z$ oben liegt, und projizieren die Punkte der Kugeloberfläche durch Strahlen von $Z$ aus auf die Ebene. Dadurch wird die

Menge $A$ auf die Menge $B$ abgebildet, wodurch ihre Äquivalenz gezeigt ist. Diese Abbildung, die in der Funktionentheorie eine Rolle spielt, wird als **stereographische Projektion** bezeichnet. Sie hat eine merkwürdige Eigenschaft, die mit den Hilfsmitteln der Funktionentheorie leicht zu beweisen ist: Jede auf einer Kreislinie liegende Punktmenge der Kugelfläche wird durch sie übergeführt in eine Punktmenge der Ebene, die gleichfalls auf einer Kreislinie liegt. Der Leser stelle sich den zugehörigen Kegel projizierender Strahlen vor, der von zwei verschiedenen Ebenen in Kreisen geschnitten wird!

BEISPIEL 9:
Unter $A$ soll die Punktmenge auf einer Kreislinie unter Ausschluß eines Punktes $Z$ verstanden werden, unter $B$ die Menge aller Punkte einer Strecke $\overline{CD}$ unter Ausschluß der Endpunkte. Um die Abbildung herzustellen, wollen wir uns vorstellen, daß ein Punkt $P$, beginnend mit dem Punkt $Z$, die Kreislinie mit gleichbleibender Bahngeschwindigkeit und zugleich mit ihm ein Punkt $P'$, ebenfalls mit gleichbleibender Geschwindigkeit, die Strecke durchläuft. Die Zeit, die $P'$ dafür braucht, soll der Umlaufszeit des Punktes $P$ gleich sein. Wenn wir jedem Punkt $P$ der Kreislinie denjenigen Punkt $P'$ der Strecke zuordnen, der ebensolange unterwegs ist wie $P$, so haben wir eine Abbildung von $A$ auf $B$ hergestellt (Bild 6.7.). Dabei ist zu beachten, daß hierbei der Pfeil im Gegensatz zu seiner sonstigen Verwendung als Zuordnungspfeil die Bewegungsrichtung angibt.

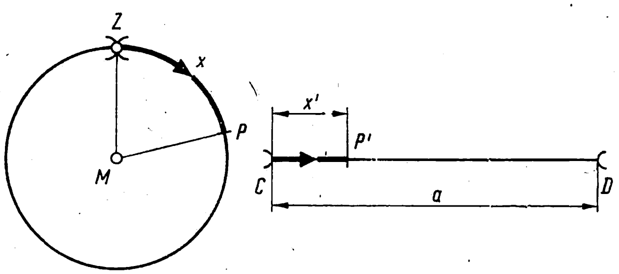


Bild 6.7.

Wir können auch einen analytischen Ausdruck für diese Abbildung angeben. Zu diesem Zweck nennen wir den Kreismittelpunkt $M$, die Länge der Strecke $a$, und $x$ sei der im Bogenmaß gemessene Winkel, den der Strahl $MP$, von der Anfangslage an gemessen, überstreicht. Wir finden zu einem in Gradmaß gegebenen Winkel $\alpha$ das Bogenmaß $\widehat{\alpha}$ durch die Proportion $\widehat{\alpha} : \pi = \alpha^\circ : 180^\circ$. Der Abstand des Punktes $P'$ der Strecke $\overline{CD}$ von $C$ sei $x'$. Dann besteht die Proportion:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{x'}{a}.$$

Der Ausdruck für die Abbildung ist dann:

$$x' = \frac{a}{2\pi} \cdot x.$$

Weitere Beispiele für Abbildungen einer unendlichen Menge auf eine andere befinden sich in Kapitel 4, S. 174 ff.
Bisher haben wir unter anderem einige unendliche Punktmengen, die auf Geraden, Strahlen, Strecken, Kreisbögen, Flächen lagen, miteinander verglichen. Jetzt soll ein-

mal eine zweidimensionale mit einer eindimensionalen Punktmenge, und zwar die Menge der Punkte im Innern eines bestimmten Quadrats mit der auf einer Quadratseite liegenden Punktmenge, verglichen werden.
Wenn in den unteren Schulklassen die Formel für den Rechteckinhalt gewonnen werden soll (die Seiten werden zunächst in vollen Zentimetern, Dezimetern oder Metern angegeben), so zerlegt man das Rechteck meist in Streifen, deren Breite die entsprechende Einheit ist, und findet die Maßzahl des Inhalts durch Multiplikation. Schon von dorther drängt sich die Meinung auf, es müsse im Rechteck „viel mehr" Punkte geben als in einem Streifen und erst recht mehr als auf einer Seite. Nach den Erfahrungen mit den unendlichen Punktmengen auf Strecken, Strahlen, Geraden sind wir aber mit solchen Aussagen etwas vorsichtiger geworden.

BEISPIEL 10:
Wir wollen jetzt die zu vergleichenden Mengen präzisieren. In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem bilden die Punkte 0, (0; 1), (1; 1), (1; 0) die Ecken eines Quadrats. Die Menge der Punkte im Inneren dieses Quadrats sei die Menge $A$, und $B$ sei das offene Intervall (0, 1) der $x$-Achse, d. h. die Menge der auf der $x$-Achse gelegenen Punkte mit $0 < x < 1$. Es sollen alle Punkte des Quadrats auf der Strecke untergebracht werden, wobei wir immer die Forderung im Auge behalten müssen, daß die Zuordnung eineindeutig sein muß. Wir können also zum Beispiel die Zuordnung nicht so vornehmen, daß wir einfach die Punkte des Quadrats auf eine Seite projizieren. Das Prinzip, nach dem die Abbildung durchgeführt wird, soll hier nur angedeutet werden. Ein beliebiger Punkt $P$ des Quadrats habe die Koordinaten $x$ und $y$. Jede dieser beiden reellen Zahlen läßt sich in Form eines unendlichen Dezimalbruchs $0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ bzw. $0, b_1\, b_2\, b_3 \ldots$ darstellen. Wir bilden nun zu diesen beiden Dezimalbrüchen einen dritten, gleichfalls zwischen 0 und 1 liegenden Dezimalbruch $0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots$, indem wir die Dezimalen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von $x$ und die $b_1, b_2, b_3, \ldots$ von $y$ nach einer bestimmten Regel durcheinandermischen, so daß sich umgekehrt auch aus jedem Dezimalbruch $0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots$ wieder die Dezimalen von $x$ und $y$ herausfinden lassen. Das Einfachste wäre natürlich, wenn dies durch einfache Abwechslung der $a_i$ mit den $b_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) geschähe, man also $c_1 = a_1, c_2 = b_1, c_3 = a_2, c_4 = b_2, \ldots$ setzen würde. Wird zum Beispiel $x$ durch den Dezimalbruch $0{,}321094\ldots$, $y$ durch den Dezimalbruch $0{,}014293\ldots$ dargestellt, so würde der zusammengesetzte Dezimalbruch beginnen mit $0{,}\overline{3}\underline{0}\overline{2}\underline{1}\overline{1}\underline{4}\overline{0}\underline{2}\overline{9}\underline{9}\overline{4}\underline{3}\ldots$ In den überstrichenen Ziffern erkennt der Leser die Dezimalzahlen von $x$, in den unterstrichenen die von $y$. Ganz so einfach geht es leider nicht. Hier spielt uns nämlich die Tatsache, daß zwei Dezimalbrüche wie $0{,}145999\ldots$ und $0{,}146000\ldots$ dieselbe Zahl darstellen, einen Streich. Dennoch läßt sich diese Klippe mit einiger Vorsicht und Erfindungskraft überwinden. (Der Leser findet eine genaue Darstellung in [30], S. 178 ff.) Auf alle Fälle können wir einen Dezimalbruch $0, c_1\, c_2\, c_3 \ldots$ bilden, der sich eineindeutig dem Paar $[x, y]$ zuordnen läßt. Dieser Dezimalbruch charakterisiert einen Punkt $P'$ zwischen 0 und 1 auf der $x$-Achse, der also der Menge $B$ angehört. Die Zuordnung $P \leftrightarrow P'$ leistet das Verlangte.
Die Punktmenge im Inneren des Quadrats soll auf die der ganzen Ebene erweitert werden. Zuvor brauchen wir aber noch eine Betrachtung über die Mächtigkeit des Bereichs der reellen Zahlen.

BEISPIEL 11:
Es sei $A$ die Menge aller reellen Zahlen, $B$ die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 unter Ausschluß der Grenzen. Dieses Mal verhilft die Transitivität der Äquivalenzrelation zum Nachweis der Äquivalenz von $A$ mit $B$. Die Menge der reellen Zahlen kann eineindeutig auf die Menge der Punkte einer Geraden abgebildet werden, wobei, wie wir wissen, die Gerade tatsächlich lückenlos erfüllt wird. Die Menge $A$ ist also der Menge aller Punkte einer Geraden äquivalent, und diese, wie wir in Beispiel 7 gesehen haben, der auf einer beliebigen Strecke liegenden offenen Punktmenge. Für diese Strecke kann man die auf dem Zahlenstrahl zwischen den Punkten 0 und 1 liegende Strecke wählen, die wiederum auf die Menge der reellen Zahlen $0 < x < 1$ abgebildet werden kann. Dies ist aber unsere Menge $B$. Also ist $B$ von gleicher Mächtigkeit wie $A$. Nachdem wir uns mit der erstaunlichen Tatsache abgefunden haben, daß die Punktmenge auf einer Geraden gleichmächtig ist mit der auf einer beliebig kleinen Strecke liegenden, kann uns die Äquivalenz der Menge aller reellen Zahlen mit der Menge der zwischen 0 und 1 liegenden reellen Zahlen auch nicht weiter erschüttern, und wir werden zugeben müssen, daß wir sogar statt des offenen Intervalls $(0 / 1)$ das offene Intervall $(0 / 0{,}001)$ hätten wählen können, ohne die Äquivalenz zu beeinträchtigen.

BEISPIEL 12:
Jetzt enthalte die Menge $A$ alle Punkte der Ebene, während die Menge $B$ wieder aus allen Punkten der Strecke von 0 bis 1 auf der $x$-Achse unter Ausschluß der Grenzen bestehe. Wir werden wieder die Äquivalenz der beiden Mengen nachweisen. Die ganze Ebene, die sich nach allen Richtungen ins Unendliche erstreckt, wird also, als Punktmenge aufgefaßt, auf das Innere einer kleinen Strecke zusammengedrückt werden. Wir gehen dabei folgendermaßen vor:
Es sei $P(x; y)$ ein beliebiger Punkt von $A$. Wir bestimmen das Bild von $P$ auf folgende Weise: Vermöge der im Beispiel 11 beschriebenen Abbildung entspricht jeder der beiden reellen Zahlen $x$, $y$ genau eine zwischen 0 und 1 gelegene reelle Zahl $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ bzw. $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ (Dies ist auch dann der Fall, wenn $x$ oder $y$ selbst schon eine Zahl zwischen 0 und 1 ist!)
Den Punkt $P'$ ($P' \in B$) mit der Koordinate $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ bestimmen wir nun genauso wie in Beispiel 10. Die Zuordnung des Punktes $P$ von $A$ zu dem Punkt $P'$ von $B$ ist eineindeutig, die ganze Ebene enthält nicht „mehr" Punkte als eine beliebig kurze Strecke, denn auf eine solche können wir die Strecke $\overline{01}$ der $x$-Achse abbilden.

BEISPIEL 13:
Wir gehen noch eine Dimension höher. Unter $A$ soll jetzt die Menge aller Punkte des dreidimensionalen Raumes verstanden werden, während $B$ die Bedeutung des letzten Beispiels behalten soll. Der Punkt $P$ aus $A$ hat jetzt drei Koordinaten $x$, $y$, $z$, die sämtlich durch reelle Zahlen dargestellt werden. Wieder läßt sich nach einem bestimmten Verfahren, das dem von Beispiel 10 analog ist, ein Dezimalbruch $0, c_1 c_2 c_3 \ldots$ bilden, der dem geordneten Zahlentripel $[x, y, z]$ eineindeutig zugeordnet werden kann. Auch der dreidimensionale Raum enthält nicht „mehr" Punkte als eine beliebig kurze Strecke!

Wir kommen jetzt zu einem Beispiel, das zunächst ganz anders scheint als die bisher behandelten, dem letzten jedoch in seiner Struktur völlig gleicht.

BEISPIEL 14:
Wir vergleichen jetzt nicht zwei Punktmengen, sondern $A$ sei die Menge aller Kreise einer Ebene mit beliebigem Radius. Dagegen sei $B$ dieselbe Punktmenge wie in den letzten Beispielen, also die Menge aller auf der $x$-Achse zwischen 0 und 1 liegenden Punkte.
Jeder Kreis der Ebene läßt sich durch drei reelle Zahlen kennzeichnen, von denen die letzte positiv ist: Die ersten beiden sind die Koordinaten seines Mittelpunktes, die letzte gibt die Länge des Radius an. Die Menge $A$ ist also äquivalent der Menge aller reellen Tripel $[x, y, r]$ mit $r > 0$. Damit ist dieser Fall im wesentlichen auf die im vorigen Beispiel verwendete Abbildung zurückgeführt. Es ist nur auf die Sonderstellung von $r$ $(r > 0)$ zu achten. Aber auch darin liegen keine besonderen Schwierigkeiten, wenn man geeignete Abbildungen heranzieht. Statt der Kreise hätten wir offenbar auch Kugeln im Raum mit beliebigem Radius als Menge $A$ wählen können.

Wir wollen hier einen Augenblick verweilen und unsere bisher erreichten Resultate noch einmal überblicken.
Wir sahen, daß die Menge $A$ der Punkte einer Geraden mit der Menge $B$ der Punkte im Innern einer beliebigen Strecke gleichmächtig ist. Man kann also sozusagen die Menge $A$ zusammendrücken auf eine beliebig kleine Strecke. Dies ist darum merkwürdig, weil wir doch diese Strecke als einen echten Teil der Trägergeraden von $A$ auffassen können und die Menge $B$ doch schon allein die Strecke lückenlos ausfüllt. Wo sollen die viel „zahlreicheren" Punkte der Geraden da noch auf der Strecke Platz finden? Dies wäre in der Tat problematisch, wenn wir die Abbildung so gewählt hätten, daß wir die Teilmenge $B$ von $A$ identisch auf sich abgebildet hätten (↗ Bild 6.4.). Damit wäre uns schwerlich gelungen, die Äquivalenz von $A$ mit $B$ nachzuweisen. Wir erinnern uns der früheren Bemerkung, daß das Mißlingen einer Abbildung von $A$ auf $B$ noch keineswegs dazu berechtigt, die Äquivalenz der Mengen anzuzweifeln. Es genügt die Angabe einer einzigen Abbildung zum Nachweis der Äquivalenz, und diese wurde oben gezeigt.
Wir sehen, daß wir unsere althergebrachten Vorstellungen vom Unendlichen revidieren müssen. Im Gegensatz zu endlichen Mengen ist es eben bei unendlichen Mengen nicht gleichgültig, wie wir die Zuordnung bei der Abbildung vornehmen. Außerdem gibt der Vergleich der Mengen $A$ und $B$ wieder ein Beispiel für die Äquivalenz einer unendlichen Menge mit einer echten Teilmenge.
Noch erstaunlicher scheint es, daß wir die Menge aller Punkte der Ebene, ja, des Raumes auf dieselbe „kleine" Menge $B$ abbilden konnten. Hier suggeriert uns der Dimensionsbegriff noch zusätzlich die Vorstellung besonderer Größe. In Wirklichkeit hat dies mit unserem mengentheoretischen Problem überhaupt nichts zu tun.
Die Vielseitigkeit des Abbildungsbegriffs ermöglichte uns ferner den Mengenvergleich bei so heterogenen Mengen wie der aller Kugeln des Raumes mit der aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

**Zusammenfassung:**
**Mengen von gleicher Mächtigkeit wie die Menge aller reellen Zahlen sind**
**die Menge aller Punkte einer Geraden,**
**die Menge aller Punkte einer Strecke ohne die Endpunkte,**
**die Menge aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1,**
**die Menge aller Punkte im Inneren eines Quadrats,**
**die Menge aller Punkte einer Ebene,**
**die Menge aller Punkte des Raumes,**
**die Menge aller Kreise einer Ebene mit beliebigem Radius,**
**die Menge aller Kugeln mit beliebigem Radius.**

ERKLÄRUNG:

▷ Die Kardinalzahl dieser Mengen wird mit $c$ (**Continuum**) bezeichnet.

Wir haben jetzt drei Systeme von Mengen kennengelernt:
Die abzählbaren Mengen gehören zum ersten System, zum zweiten System zählen wir die Mengen mit der Kardinalzahl $c$. Dem dritten System gehören die Mengen aller Punkte einer Strecke mit Einschluß der Endpunkte an (↗ Aufgabe 4a).
Alle Mengen jedes dieser drei Systeme sind untereinander äquivalent. Ja, es ist sogar durchaus möglich, daß eine Menge des einen dieser drei Mengensysteme mit einer Menge eines der beiden anderen Systeme gleichmächtig ist. Vielleicht gibt es gar am Ende nur eine einzige unendliche Kardinalzahl?
Zuvor wollen wir zur Ergänzung ein viertes Mengensystem hinzufügen, das alle auf einer einseitig abgeschlossenen Strecke liegenden Punktmengen enthält. Der Leser weise selbst nach, daß der Übergang von einer Strecke dieser Art zu einer kleineren, bei der gleichfalls ein Endpunkt zur Menge gezählt wird, deren Mächtigkeit nicht ändert!
Wir werden nachweisen, daß in der Tat die Mengen der Systeme 2, 3, 4 alle miteinander äquivalent sind. Es handelt sich um die Mengensysteme:

System 2:
Menge aller reellen Zahlen,
Menge aller Punkte einer Geraden,
Menge aller reellen Zahlen $x$ mit $0 < x < 1$,
Menge aller Punkte im Inneren eines Quadrats,

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

(Vgl. obige Zusammenfassung, die in verschiedener Weise erweitert werden kann.)

System 3:
Menge aller Punkte einer beliebigen Strecke mit Einschluß der Endpunkte

System 4:
Menge aller Punkte einer beliebigen Strecke mit Einschluß nur eines Endpunktes

Oben wurde gezeigt, daß die Mengen jedes der drei Systeme 2, 3, 4 untereinander äquivalent sind.

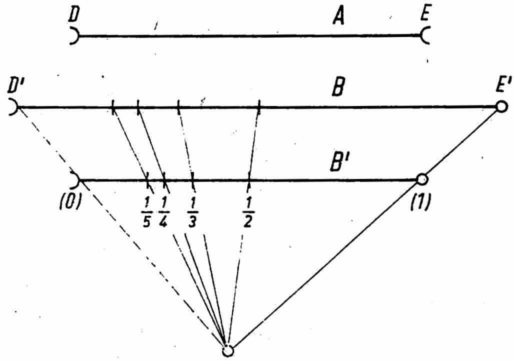



Bild 6.8.

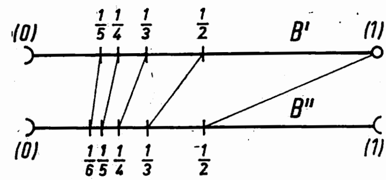



Bild 6.9.

Um zu zeigen, daß alle hier aufgezählten Mengen zueinander gleichmächtig sind, brauchen wir aus jedem System jeweils nur eine Menge herauszugreifen, dann sind auf Grund der Transitivität alle Mengen der betreffenden Systeme gleichmächtig. Zunächst vergleichen wir die Mengen des zweiten und vierten Systems. Es sei $A$ eine auf einer Strecke $\overline{DE}$ ohne Endpunkte liegende Punktmenge, $B$ eine solche, die auf einer einseitig abgeschlossenen Strecke $\overline{D'E'}$ liegt. Wir überlegen uns zunächst, daß $B$ mindestens eine abzählbare echte Teilmenge enthält. Die Punkte von $B$ können nämlich eineindeutig den reellen Zahlen des Intervalls $0 < x \leqq 1$ zugeordnet werden (↑ Beispiel 11, S. 278). Diese Zahlenmenge bezeichnen wir mit $B'$. In $B'$ sind unter anderem die Zahlen der Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ enthalten. Bei der eineindeutigen Abbildung von $B$ auf $B'$ entspricht dieser Folge eine abzählbare Teilmenge von $B$ (Bild 6.8.). Also enthält $B$ in der Tat mindestens eine abzählbare Teilmenge. Jetzt werde $B'$ eineindeutig folgendermaßen auf die echte Teilmenge $B'' = B' \setminus \{1\}$ abgebildet: Die Teilmenge $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$ von $B'$ wird eineindeutig gemäß Bild 6.9. abgebildet auf die Teilmenge $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$ von $B''$, bei der also nur das erste Glied der Folge weggelassen ist. Jede andere Zahl von $B'$ wird sich selbst zugeordnet. Dadurch wird $B'$ auf $B''$ abgebildet. Die Menge $B''$ ist also gleichmächtig mit $B'$. Außerdem ist $B''$, das ist ja die Menge aller $x$ mit $0 < x < 1$, nach unseren früheren Ergebnissen gleichmächtig mit einer Punktmenge, die auf einer beliebigen Strecke ohne Einschluß der Endpunkte liegt (↑ S. 278). Also ist auch $B''$ äquivalent mit $A$. Wir haben also: $A \sim B'' \sim B$, mithin $A \sim B$.

Wir haben gefunden: Die Menge der Punkte einer offenen Strecke ist gleichmächtig mit der Menge der Punkte einer Strecke, bei der wir einen Endpunkt hinzuzählen. Es macht also für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge nichts aus, ob man einen Punkt fortläßt. Dieses Ergebnis war zu erwarten.

Außerdem haben wir gefunden, daß jede Menge von der Mächtigkeit $c$ mindestens eine abzählbare Teilmenge enthält. Von einer solchen Teilmenge darf man sogar endlich viele Punkte weglassen, ohne die Mächtigkeit zu verändern, da dies für abzählbare

Mengen gilt. Der Satz, daß man von einer unendlichen Menge endlich viele Elemente weglassen kann, ohne die Mächtigkeit zu verändern, gilt ganz allgemein. Demnach sind auch die Mengen des dritten Mengensystems (Punktmengen auf abgeschlossenen Strecken) denen des zweiten und vierten Systems äquivalent.

Damit ist gezeigt, daß die Mengen des 2., 3. und 4. Mengensystems sämtlich untereinander äquivalent sind. Dabei hat es uns fast so viel Mühe gekostet, lediglich zwei Elemente einer unendlichen Menge, nämlich die Endpunkte einer Strecke, unschädlich zu machen, wie die Punktmenge des ganzen Universums in eine Zigarrenkiste zu verpacken und dann noch in die Menge der Punkte einer winzigen Strecke zu verzaubern.

Die Kardinalzahl der Mengensysteme 2, 3 und 4 erhielt oben (↑ S. 280) die Bezeichnung $c$. Dieser Buchstabe soll an das lateinische Wort „**Continuum**" erinnern. Typisch für alle Mengen mit dieser Mächtigkeit ist es ja, daß sie einen **kontinuierlichen Bereich** ausfüllen, der nirgends Löcher hat. Eine Menge mit der Mächtigkeit $c$ wird auch als Kontinuum bezeichnet. Als Vertretermenge wird gewöhnlich die Menge aller Punkte einer Geraden oder die Menge aller reellen Zahlen gewählt.

Nun bleibt noch das Problem, ob das Kontinuum abzählbar ist, oder, anders gesagt, ob die Kardinalzahlen $c$ und $\aleph_0$ übereinstimmen. Es wird sich zeigen, daß dies nicht der Fall ist.

SATZ:

▷ Das Kontinuum ist nicht abzählbar.

Unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, heißen **überabzählbar**. Das Kontinuum stellt also, wie zu zeigen ist, eine überabzählbare Menge dar. Gemäß dem schon mehrfach erwähnten Grundsatz, daß dazu die prinzipielle Unmöglichkeit einer entsprechenden Abbildung nachgewiesen werden muß, nehmen wir an, es gebe irgendeine Abbildung des Kontinuums auf eine abzählbare Menge. Dies muß dann auf einen Widerspruch geführt werden.

Das Kontinuum werde vertreten durch die Menge aller positiven reellen Zahlen zwischen 0 und 1, die als unendliche Dezimalbrüche gegeben seien. Die ersten reellen Zahlen der Abzählung seien

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0{,}\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots \\
\alpha_2 &= 0{,}\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots \\
\alpha_3 &= 0{,}\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots \\
\alpha_4 &= 0{,}\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hierbei sind alle $a_i, b_i, c_i, d_i, \ldots$ Zahlen zwischen 0 und 9 (Grenzen eingeschlossen). Dabei müssen wir allerdings den Fall, daß bei einem Dezimalbruch von irgendeiner Stelle an lauter Neunen stehen, ausschließen, da zum Beispiel 0,34000... und 0,339999... dieselbe Zahl darstellen. Der jetzt zu führende Beweis wird durch diese Einschränkung nicht wesentlich betroffen. Die Aufzählung $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ müßte bei Annahme der Abzählbarkeit des Kontinuums alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten.

Nun kann aber eine reelle Zahl $\alpha$ angegeben werden, die bei dieser Abzählung nicht vorkommt. Wir bilden den Dezimalbruch $\alpha = 0, A_1\, A_2\, A_3\, A_4 \ldots$ in folgender Weise:

$A_1$ sei eine beliebige Zahl zwischen 0 und 9 (exklusive), die aber von $a_1$ verschieden sein soll. Solch eine Ziffer gibt es sicher. Die Dezimale $A_2$ soll von $b_2$, $A_3$ von $c_3$, $A_4$ von $d_4$, usw. verschieden sein. Der Dezimalbruch $\alpha$ kann in der Aufzählung nicht vorkommen, denn von jedem aufgeschriebenen Dezimalbruch unterscheidet er sich in mindestens einer Dezimalen. Da die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl eindeutig ist – der Leser sei daran erinnert, daß wir eine Darstellung, die mit lauter Neunen ausläuft, ausgeschlossen haben –, kann die reelle Zahl $\alpha$ in der Aufzählung nicht vorkommen. Eine irgendwie geartete Abbildung des Kontinuums auf die Menge der natürlichen Zahlen ist unmöglich, $c$ und $\aleph_0$ sind verschiedene Kardinalzahlen.

Das Prinzip dieses von CANTOR stammenden Verfahrens, eine Zahl zu konstruieren, die sich in den Diagonalstellen des Schemas

$$\begin{array}{l} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots \\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \ldots \\ c_1\, c_2\, c_3\, c_4 \ldots \\ d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}$$

von den aufgeschriebenen Elementen unterscheidet, wird als **Diagonalverfahren** bezeichnet.

Damit sind wir an einem Angelpunkt angelangt. Bis jetzt hätte man annehmen können, es gäbe wirklich, wie noch GALILEI glaubte, nur eine Art „Unendlich", denn in den Beispielen hatten wir nur Gleichmächtigkeit zwischen unendlichen Mengen festgestellt. Der CANTORsche Beweis für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums zeigt, daß es unter den transfiniten Kardinalzahlen mindestens zwei Arten gibt, daß also auf alle Fälle von einer Abstufung des Unendlichen gesprochen werden kann. Dabei mag es den Leser, der nicht viel mit irrationalen Zahlen zu tun hat, eigenartig berühren, daß die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. Nimmt man aber noch die irrationalen Zahlen hinzu, so entsteht eine Menge, der wir eine höhere Mächtigkeit zusprechen müssen. Hier ist sogar eine noch schärfere Aussage möglich. Unter den irrationalen Zahlen gibt es nämlich zwei Arten, die algebraisch-irrationalen, das sind Wurzeln algebraischer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten wie $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{10}$, und die transzendent-irrationalen Zahlen, die diese Eigenschaft nicht besitzen. Die Irrationalzahl $\sqrt{2}$ ist Wurzel der Gleichung $x^2 - 2 = 0$, $\sqrt[3]{5}$ von $x^3 - 5 = 0$. Summe, Differenz, Produkt und – falls der Divisor ungleich 0 ist – der Quotient von algebraischen Zahlen sind wieder algebraisch (Näheres z. B. in [38], S. 65). Mit einem Verfahren, das der Abzählung der Brüche ähnelt, hat CANTOR die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen nachgewiesen. Die Störenfriede sind also die transzendenten Zahlen, von denen einem auf Anhieb meist nur die Zahlen $\pi$ und $e$, die Basis der natürlichen Logarithmen, einfallen. Man bedenke aber, daß die meisten Logarithmen zu einer beliebigen Basis transzendente Zahlen sind! Dennoch ist das von CANTOR gewonnene Resultat, daß es unter den reellen Zahlen wesentlich „mehr" (im Sinne der Mengenlehre) transzendente als algebraische Zahlen gibt, verblüffend. Dieser Sachverhalt liegt auch einem Scherzgedicht zugrunde:[1]

[1] Verfasser dieses Gedichts ist Prof. Dr. HUBERT CREMER. Erschienen ist das hier aus dem Gedächtnis wiedergegebene Gedicht in seiner Sammlung: *Der Häufungspunkt*.

Die Zwei und ihr Logarithmus,
die liebten einander gar sehr.
Ein rationales Verhältnis,
das war ihr ganzer Begehr.
Sie kamen zum strengen Gelehrten.
Der sprach kategorisch: „Nein!
Ein rationales Verhältnis
kann zwischen euch nimmermehr sein!
Denn du bist solch Transzendenter
vom Zahlenproletariat,
und du bist als einzige gerade
die erste vom Primzahlstaat."
Sie rang voll Verzweiflung die Hände,
doch er erwiderte schnell:
„Will's rational auch nicht gehen,
so geht es doch sicher reell!"
Und gibt der errötenden Schönen
geschwinde den Hochzeitskuß,
und das ist der kurzen Geschichte
nicht ganz moralischer Schluß.

Doch wenden wir uns wieder ernsteren Betrachtungen zu. Wir wollen an den oben durchgeführten Beweis von der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums noch eine Betrachtung knüpfen, die einen noch genaueren Vergleich der Kardinalzahl $\aleph_0$ mit $c$ ermöglicht. Dazu sehen wir uns das Diagonalverfahren noch einmal an. Wir überlegen uns, daß ja die Bevorzugung des Zehnersystems bei der Darstellung einer reellen Zahl bei dem Beweis gar keine Rolle spielt. Auch wenn wir statt der neun zur Auswahl stehenden Ziffern nur eine einzige zur Verfügung haben, ist der Beweis durchführbar. Wir werden im folgenden das Diagonalverfahren auf reelle Zahlen anwenden, die statt im Dezimal- im dyadischen System gegeben sind. Dabei wird die Potenzmenge ins Spiel kommen, die uns dann zu der gesuchten Beziehung zwischen $\aleph_0$ und $c$ führt.
Bekanntlich läßt sich jede reelle Zahl auch im **Zweiersystem (dyadisches System)** schreiben. Während zum Beispiel die Darstellung der natürlichen Zahl 7 803 im System der Zehnerpotenz lautet:

$$7\,803 = \underline{7} \cdot 10^3 + \underline{8} \cdot 10^2 + \underline{0} \cdot 10^1 + \underline{3} \cdot 10^0,$$

stellt sie sich im Zweiersystem folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} 7\,803 = {} & \underline{1} \cdot 2^{12} + \underline{1} \cdot 2^{11} + \underline{1} \cdot 2^{10} + \underline{1} \cdot 2^{9} + \underline{0} \cdot 2^{8} + \underline{0} \cdot 2^{7} + \\ & + \underline{1} \cdot 2^{6} + \underline{1} \cdot 2^{5} + \underline{1} \cdot 2^{4} + 1 \cdot 2^{3} + \underline{0} \cdot 2^{2} + \underline{1} \cdot 2^{1} + \underline{1} \cdot 2^{0}, \end{aligned}$$

in Ziffernschreibweise:

1111001111011.

Auch in der Darstellung einer reellen Zahl, die kleiner ist als 1, treten dementsprechend hinter dem Komma nur die Ziffern 0 und 1 auf. Um dies einzusehen, schreiben wir uns die ersten Zweierpotenzen mit negativem Exponenten auf:

$$\begin{aligned}
2^{-1} &= 0{,}5 \\
2^{-2} &= 0{,}25 \\
2^{-3} &= 0{,}125 \\
2^{-4} &= 0{,}0625 \\
2^{-5} &= 0{,}03125 \\
2^{-6} &= 0{,}015625 \\
\vdots\ & \quad \vdots
\end{aligned}$$

So ergibt sich zum Beispiel als dyadische Darstellung von 0,15:

$$\begin{aligned}
0{,}15 &= 0{,}125 + 0{,}025 = 0{,}125 + 0{,}015625 + \ldots \\
&= 0 \cdot 2^0 + \underline{0} \cdot 2^{-1} + \underline{0} \cdot 2^{-2} + \underline{1} \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + \underline{0} \cdot 2^{-5} + \underline{1} \cdot 2^{-6} + \ldots \\
&= 2^{-3} + 2^{-6} + \ldots,
\end{aligned}$$

in Ziffernschreibweise:

$$0{,}001001\ldots$$

Natürlich wird dabei im allgemeinen ein abbrechender Dezimalbruch in dyadischer Darstellung unendlich viele Stellen hinter dem Komma haben. Die Rechenschwierigkeiten bei der Umwandlung einer reellen Zahl in einen sogenannten dyadischen Bruch brauchen uns aber nicht abzuschrecken. Auf alle Fälle stellt eine beliebige dyadische Darstellung $0, e_1 e_2 e_3 \ldots$ ($e_i$ ist entweder 0 oder 1) eine reelle Zahl $\alpha$ zwischen 0 und 1 dar, und dies genügt für unsere Zwecke. Wir erhalten alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1, wenn wir in $\alpha$ die Stellen $e_1 e_2 e_3 \ldots$ beliebig durch 0 oder 1 belegen. Diese Belegung mit zwei Werten erinnert uns an die Berechnung der Elementeanzahl einer Potenzmenge $P(M)$, wenn $M$ eine gegebene endliche Menge ist.

Wir wollen uns daher jetzt die entsprechende Berechnung bei der Potenzmenge $P(M)$ von Kapitel 2 (↑ S. 55ff.) ins Gedächtnis rufen. Um die Anzahl der Teilmengen von $M$ zu finden, gingen wir so vor, daß wir die Elemente von $M$ aufschrieben und unter jedes Element „ja" oder „nein" setzten, je nachdem, ob wir es für eine Teilmenge auswählten oder nicht. Jeder Teilmenge entspricht eine Belegung der Elemente von $M$ durch die Worte „ja" – „nein", zum Beispiel entspricht der Belegung

| $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ |
|---|---|---|---|---|
| ja | nein | ja | ja | ja |

der Menge $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ die Teilmenge $M' = \{m_1, m_3, m_4, m_5\}$ von $M$. Für die Anzahl der Teilmengen ergab sich daher $2^m$, wenn $m$ die Mächtigkeit der Menge $M$ ist. (Wegen $2^m > m$ ist übrigens die Mächtigkeit der Potenzmenge $P(M)$ für endliche Mengen $M$ stets größer als die von $M$. Wir werden später das Entsprechende für unendliche Mengen feststellen.)

Statt der Worte „ja" – „nein" könnten wir nun ebensogut die Ziffern 0, 1 schreiben. Wenn wir dann noch ein Komma vor die Darstellung setzen, so entspricht der obenstehenden Teilmenge $M'$ der dyadische Bruch 0,01000. Jeder Teilmenge von $M$ entspricht im Beispiel ein fünfziffriger dyadischer Bruch. Denken wir uns jetzt statt der endlichen Menge $M$ die unendliche Menge $N$ der natürlichen Zahlen, so entspricht jedem dyadischen Bruch mit unendlich vielen Ziffern $0,e_1 e_2 e_3 \ldots$ genau eine Teilmenge von $N$. Andererseits stellt jeder dieser dyadischen Brüche, wie wir gesehen haben, genau eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 dar. Die Potenzmenge $P(M)$ wird dadurch eineindeutig auf die Menge der dyadisch dargestellten reellen Zahlen zwischen 0 und 1, also auf das Kontinuum, abgebildet. Wir finden also:

SATZ:

▷ Das Kontinuum ist überabzählbar. Es ist gleichmächtig mit der Potenzmenge von $N$.

Bisher kennen wir nur die beiden unendlichen Kardinalzahlen $\aleph_0$ und $c$. Wir wissen bereits, daß das Kontinuum mindestens eine abzählbare echte Teilmenge enthält und daß es selbst nicht abzählbar ist.
Damit ist ein Beispiel dafür gewonnen, daß eine unendliche Teilmenge nicht jeder unendlichen echten Teilmenge äquivalent ist (↗ S. 270). Wenn wir eine Kleinerrelation auch für unendliche Kardinalzahlen einführen wollen, werden wir $\aleph_0$ sicher als kleiner bezeichnen als $c$.
In Anlehnung an die frühere Erklärung der Kleinerrelation für endliche Kardinalzahlen werden wir zunächst die Kardinalzahl einer unendlichen Menge $A$ kleiner nennen als die der unendlichen Menge $B$, wenn $A$ einer echten Teilmenge von $B$ äquivalent ist. Das reicht aber noch nicht. Denken wir an die Beispiele 1, 3, 5 von S. 267ff., wo wir eine Menge auf eine echte Teilmenge von sich selbst abgebildet hatten! Es kann durchaus vorkommen, daß eine unendliche Menge $A$ einer echten Teilmenge einer Menge $B$ und zugleich der ganzen Menge $B$ äquivalent ist. In diesem Fall haben $A$ und $B$ dieselbe Kardinalzahl. Von einer Kleinerrelation kann dann keine Rede sein. Andererseits gibt es aber, wie wir gesehen haben, Beispiele dafür – wir werden später noch mehr kennenlernen –, daß eine Menge $A$ einer echten Teilmenge $T$ einer Menge $B$, aber nicht der ganzen Menge äquivalent ist. (In solch einem Fall kann $B$ natürlich nicht zu seiner Teilmenge $T$ äquivalent sein.) In diesem Fall werden wir die Kardinalzahl von $A$ kleiner nennen als die von $B$.

ERKLÄRUNG:

▷ Die Kardinalzahl $a$ einer Menge $A$ heißt kleiner als die Kardinalzahl $b$ einer Menge $B$ ($a < b$), wenn
1. eine Abbildung von $A$ auf eine echte Teilmenge von $B$ angegeben werden kann,
2. eine Abbildung von $A$ auf die ganze Menge $B$ unmöglich ist.

Kann aber nicht der Fall eintreten, daß $A$ mit einer echten Teilmenge von $B$ und bei einer anderen Abbildung $B$ mit einer echten Teilmenge von $A$ gleichmächtig ist? In diesem Fall könnte unsere Erklärung der Kleinerrelation für Kardinalzahlen sinnlos werden. Dieser Fall ist uns sogar schon mehrfach begegnet, zum Beispiel bei den auf je einem Strahl liegenden Punktmengen $A$ und $B$, ferner bei den Mengen der ungeraden natürlichen Zahlen $U = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ und $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ (↗ S. 268).
Wir bilden hierbei ab:

erstens 1, 3, 5, ...
1, 2, 3, 4, 5, ...,

zweitens

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots$$
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,\ldots$$

Damit wird $U$ auf eine echte Teilmenge von $N$ und $N$ auf eine echte Teilmenge von $U$ abgebildet. Nur sind in diesen beiden Beispielen die ineinander abgebildeten Mengen jeweils **gleichmächtig**. Dies gilt ganz allgemein. Auch in diesem Falle, wo eine Menge $A$ einer echten Teilmenge von $B$ und $B$ seinerseits einer echten Teilmenge von $A$ äquivalent ist, können beide Mengen verglichen werden.

SATZ:

▷ Wenn eine Menge $A$ auf eine echte Teilmenge einer Menge $B$ und $B$ auf eine echte Teilmenge von $A$ abgebildet werden kann, so sind die Mengen $A$ und $B$ gleichmächtig.

Dieser Satz wird als **Bernsteinscher Äquivalenzsatz** bezeichnet. Sein Beweis ist nicht allzu schwierig, aber etwas lang. Er wird daher hier übergangen. Der Leser, der sich über ihn zu informieren wünscht, sei auf die Spezialliteratur verwiesen (vgl. z. B. [36], Bd. I, S. 297 ff., und [34], S. 16).

Offenbar ist die Entscheidung darüber, ob $a$ kleiner ist als $b$, unabhängig davon, wie die Menge $A$ aus der Klasse $a$ und die Menge $B$ aus der Klasse $b$ ausgewählt werden. Anders ausgedrückt: Ist $A$ von niedrigerer Mächtigkeit als $B$ und ist $A'$ äquivalent zu $A$, $B'$ äquivalent zu $B$, so ist auch $A'$ von niedrigerer Mächtigkeit als $B'$. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Gleichmächtigkeit transitiv ist.

Durch die obenstehende Erklärung ist eine Kleinerrelation für Kardinalzahlen gegeben. Wir wollen prüfen, ob sie – wie die entsprechende Relation für endliche Kardinalzahlen – eine Ordnungsrelation ist.

Laut Definition ist die Relation zunächst irreflexiv, denn die Menge $A$ heißt ja ausdrücklich nur dann von niedrigerer Mächtigkeit als die Menge $B$, wenn $A$ nicht zu $B$ äquivalent ist.

Wir prüfen jetzt die Transitivität. Sei $A$ von kleinerer Mächtigkeit als $B$ und $B$ von kleinerer Mächtigkeit als eine Menge $C$. Dann ist $A$ einer echten Teilmenge $B'$ von $B$, aber nicht zur ganzen Menge $B$ äquivalent, und $B$ ist mit einer echten Teilmenge $C'$ von $C$, aber nicht mit der ganzen Menge $C$ gleichmächtig. Bei der letztgenannten Abbildung gehe die Teilmenge $B'$ von $B$ in die Teilmenge $C''$ von $C'$ über. Nun ist $C''$ sicher eine echte Teilmenge von $C$. Da $A$ mit $B'$ und $B'$ mit $C''$ gleichmächtig ist, muß wegen der Transitivität der Gleichmächtigkeit auch $A$ mit $C''$, also mit einer echten Teilmenge von $C$, gleichmächtig sein. Um zu zeigen, daß die Kardinalzahl von $A$ tatsächlich kleiner ist als die von $C$, muß noch gezeigt werden, daß $A$ nicht äquivalent zur ganzen Menge $C$ sein kann. Aus $A \sim C$ würde sich ergeben:

$$C \sim A \sim C'' \sim B'.$$

Ferner galt: $B \sim C'$; dabei ist $B'$ echte Teilmenge von $B$, $C'$ eine von $C$. Es wäre also $B$ einer echten Teilmenge $C'$ von $C$ und $C$ seinerseits einer echten Teilmenge $B'$ von $B$ äquivalent. Nach dem Bernsteinschen Satz würde daraus folgen: $B \sim C$, ein Widerspruch gegen die Voraussetzung, daß die Kardinalzahl von $B$ kleiner als die von $C$ sein soll. Die Kardinalzahl von $A$ ist kleiner als die von $C$, die Relation ist transitiv.

Wenn unsere Relation auch noch linear ist, können wir sie als Ordnungsrelation ansprechen. Wir haben dazu folgendes zu prüfen: Wenn zwei beliebige Mengen $A$ und $B$ gegeben sind, so tritt mindestens einer der folgenden drei Fälle ein: Die Kardinalzahl von $A$ ist kleiner oder größer als die von $B$, oder beide sind gleich groß. Um uns von dieser Eigenschaft zu überzeugen, stützen wir uns auf das in Kapitel 2 (↗ S. 62) formulierte **Auswahlaxiom**:

> Wenn $\mathfrak{M}$ ein nichtleeres Mengensystem ist, wenn auch jede Menge $M$, die Element von $\mathfrak{M}$ ist, nicht leer ist und wenn ferner je zwei verschiedene Mengen von $\mathfrak{M}$ kein Element gemeinsam haben, dann gibt es eine Auswahlmenge, die mit jeder Menge $M$ des Mengensystems $\mathfrak{M}$ genau ein Element gemeinsam hat.

Wir betrachten das aus den zu vergleichenden Mengen $A$, $B$ bestehende Mengensystem $\mathfrak{M}$. Um das Auswahlaxiom anwenden zu können, nehmen wir vorerst an, $A$ und $B$ seien elementefremd. Dann ist es auf Grund des Axioms möglich, zugleich aus $A$ und $B$ je ein Element herauszugreifen, $a$ bzw. $b$. Diese beiden Elemente ordnen wir einander zu. Da $A$ und $B$ unendliche Mengen sind, sind $A \setminus \{a\}$ und $B \setminus \{b\}$ nicht leer. Sie sind ebenfalls elementefremd. Daher kann das Auswahlaxiom auf diese Mengen wieder angewendet werden. Die jetzt ausgewählten Elemente seien $a'$ bzw. $b'$. Wir ordnen sie wieder einander zu und fahren in dieser Weise fort. Entweder werden beide Mengen dabei gleichzeitig erschöpft – dann sind sie sicher äquivalent –, oder nicht – dann sind sie möglicherweise äquivalent, oder eine ist von niedrigerer Mächtigkeit als die andere. Mindestens einer dieser Fälle muß eintreten.
Wir müssen uns noch von der Einschränkung, daß der Durchschnitt von $A$ mit $B$ leer sein soll, befreien. Nehmen wir an, $A$ und $B$ hätten den Durchschnitt $D \neq \emptyset$. Ist $D = A$, so ist $A$ einer echten Teilmenge von $B$ äquivalent, und $A$ und $B$ sind vergleichbar. Ebenso steht es, wenn $D = B$ ist. Andernfalls sind die Mengen $A \setminus D$ und $B \setminus D$ nicht leer und elementefremd, mit ihnen kann daher, wie oben angegeben, verfahren werden. Jedes Element von $A$, das in $D$ liegt, ordnen wir außerdem sich selbst zu. Dann ist eine Abbildung der ganzen Menge $A$ auf oder in die Menge $B$ oder eine Abbildung der ganzen Menge $B$ auf oder in die Menge $A$ hergestellt. Auch in diesem Fall sind also die Mengen $A$ und $B$ vergleichbar. Auf diese Weise kann man sich die Linearität der Relation plausibel machen. Ein Beweis dafür, daß die für Kardinalzahlen erklärte Kleinerrelation linear ist, erfordert die Heranziehung weiterer Hilfsmittel, zum Beispiel des Zornschen Lemmas, auf das hier aus Platzmangel nicht eingegangen werden kann. (Näheres auch in [36], Bd. I, S. 280, und [15], S. 538 bis 550.)

In der Lehrbuchliteratur wird in der Regel erst der sog. Wohlordnungssatz (↗ S. 279) mit Hilfe des Auswahlaxioms bewiesen. Zwei beliebige Mengen $A$, $B$, die hinsichtlich ihrer Kardinalzahl verglichen werden sollen, können demnach als wohlgeordnet angenommen werden. Für diese wohlgeordneten Mengen wird dann die Vergleichbarkeit, also die Linearität der Kleinerrelation, nachgewiesen ([36], Bd. I, S. 300 ff.).

Die für beliebige Kardinalzahlen erklärte Kleinerrelation bzw. die für Mengen erklärte Relation „von niedrigerer Mächtigkeit sein" ist irreflexiv, transitiv und linear, sie stellt also eine irreflexive Ordnungsrelation dar. In dieser Hinsicht entspricht die für beliebige Kardinalzahlen erklärte Kleinerrelation der für natürliche Zahlen erklärten Kleinerrelation.

**Zusammenfassung:**
**Sind zwei Mengen $A$, $B$ gegeben, so sind folgende Fälle möglich:**

1. **Die Menge $A$ ist auf die Menge $B$ abbildbar. (Es sei daran erinnert, daß nach Festsetzung „abbildbar" bedeutet: eineindeutig abbildbar.)**
2. **Die Menge $A$ ist auf eine echte Teilmenge von $B$, aber außerdem auf die ganze Menge $B$ abbildbar. Dann tritt dasselbe ein wie bei Fall 1, beide Mengen sind gleichmächtig.**
3. **Die Menge $A$ ist auf eine echte Teilmenge von $B$, und $B$ ist auf eine echte Teilmenge von $A$ abbildbar. Dann besteht gleichfalls Gleichmächtigkeit. (Satz von BERNSTEIN)**
4. **Die Menge $A$ ist auf eine echte Teilmenge von $B$, aber nicht auf die ganze Menge $B$ abbildbar. Dann ist die Mächtigkeit von $A$ niedriger, die Kardinalzahl von $A$ kleiner als die von $B$.**

**Beispiele: $\aleph_0 < c$, jede endliche Kardinalzahl ist kleiner als $\aleph_0$.**

SATZ:

▷ Zwei beliebige endliche oder unendliche Mengen sind stets vergleichbar.

Wir wissen nach obenstehender Erklärung der Kleinerrelation, daß jede endliche Kardinalzahl sicher kleiner ist als jede unendliche Kardinalzahl, denn jede endliche Menge ist ja einer echten Teilmenge einer beliebigen unendlichen Menge, aber sicher nicht dieser ganzen Menge äquivalent. Wir kennen damit zwar unendlich viele Kardinalzahlen, aber nur zwei transfinite Kardinalzahlen. Daß es in Wirklichkeit weitere, ja, unendlich viele weitere transfinite Kardinalzahlen gibt, wird gesichert durch folgenden Satz.

SATZ:

▷ Es seien $A$ und $B$ zwei beliebige nichtleere Mengen, und $B$ enthalte mindestens zwei Elemente. Die Menge aller verschiedenen eindeutigen Abbildungen von $A$ in $B$ sei $F$. (Das Wort „Abbildung" hat hier wieder die allgemeine Bedeutung wie in Kapitel 4, braucht also nicht die Eineindeutigkeit einzuschließen!) Dann ist die Mächtigkeit der Menge $F$ höher als die der Menge $A$. Ist $a$ die Kardinalzahl von $A$, $b$ die von $B$, so wird die von $F$ mit $b^a$ bezeichnet. Es ist $b^a > a$.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das CANTORsche Diagonalverfahren. Er ist interessant, aber für den weniger geübten Leser nicht leicht zu durchschauen. Daher sei vorerst der Inhalt des Satzes an folgendem Beispiel endlicher Mengen veranschaulicht:

Fünf Kunden, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ (Menge $A$), wollen je 1 Dtzd. Bowlengläser kaufen. Es werden drei Muster, $b_1, b_2, b_3$ (Menge $B$), angeboten. Jeder Kunde entscheidet sich für ein Muster. Dadurch entsteht ein Paar $[a_i, b_k]$. Von jedem Muster sind mindestens fünf Dutzend Gläser vorhanden, so daß zum Beispiel alle fünf Kunden dasselbe Muster wählen können. Die Menge aller durch die fünf Personen möglichen Käufe bildet die Menge $F$ der Abbildung von $A$ in $B$. Ein Element von $F$ ist z. B.

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \\ b_1, b_1, b_1, b_1, b_1 \end{pmatrix},$$

ein anderes

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \\ b_2, b_1, b_3, b_3, b_3 \end{pmatrix}.$$

Da jeder Kunde unabhängig vom anderen das Muster $b_1$, $b_2$ oder $b_3$ wählen kann, enthält $F$ genau $3^5$ Elemente, also wesentlich mehr als $A$.
Wäre nur ein Muster angeboten worden, so besäße $F$ nur ein einziges Element, also weniger als $A$. Die Voraussetzung des Satzes, daß $B$ mindestens zwei Elemente besitzen soll, ist also wesentlich. Enthält $B$ genau zwei Elemente – dies können die Worte „ja", „nein" sein –, so liefert jede Abbildung von $A$ in $B$, also jedes Element von $F$, eine Teilmenge von $A$. Die Menge $F$ ist also in diesem Fall äquivalent mit der Potenzmenge von $A$ und hat $2^5$ Elemente (↑ S. 56).
Der nun folgende Beweis ist ein Beispiel für die in der Mengenlehre üblichen Schlußweisen. Er ist nicht ganz einfach und kann, da er für das Verständnis des Folgenden nicht erforderlich ist, übergangen werden.

*Behauptung:*
Es seien $A$ und $B$ zwei beliebige Mengen, und $B$ enthalte mindestens zwei verschiedene Elemente. Die Menge $F$ aller verschiedenen eindeutigen Abbildungen von $A$ in $B$ ist dann von höherer Mächtigkeit als die Menge $A$.

Auf Grund der Definition der Kleinerrelation für Kardinalzahlen ist zu zeigen:
1. $A$ ist eineindeutig auf eine echte Teilmenge von $F$ abbildbar.
2. Es gibt keine eineindeutige Abbildung von $A$ auf die ganze Menge $F$.

Beim Beweis beachte der Leser, daß wir es hier mit zwei Arten von Abbildungen zu tun haben, die nicht durcheinandergebracht werden dürfen: einmal mit den eindeutigen (im allgemeinen aber nicht eineindeutigen) Abbildungen des Vorbereichs $A$ in den Nachbereich $B$, das sind die Elemente von $F$, dann mit der eineindeutigen Abbildung von $A$ auf eine Teilmenge von $F$, die wir nachzuweisen haben bzw. auf die ganze Menge $F$, deren Möglichkeit wir zu widerlegen haben.

*Beweis von 1:* Die Menge $B$ besitzt nach Voraussetzung mindestens zwei verschiedene Elemente $b_1$, $b_2$. Wir versuchen jetzt eine eineindeutige Abbildung von $A$ auf eine Teilmenge von $F$ auf folgende Weise: Einem beliebigen Element $a$ von $A$ soll diejenige Abbildung $f_a$ aus $F$ entsprechen, die dem Element $a$ das Element $b_1$, jedem anderen Element des Vorbereichs $A$ aber das Element $b_2$ des Nachbereichs $B$ zuordnet. Kurz läßt sich dies schreiben:
$f_a(a) = b_1, f_a(a') = b_2$ für $a' \in A$ und $a' \neq a$. Diese Abbildungen $f_a$ bilden eine Teilmenge $F_0$ von $F$. Jedem Element $a$ von $A$ entspricht genau ein Element von $F_0$. Es ist noch zu zeigen, daß verschiedenen Elementen von $A$ verschiedene Elemente von $F_0$ entsprechen, daß also die Zuordnung zwischen $A$ und $F_0$ eineindeutig ist.
Sei $a' \in A$ und $a'' \in A$ und $a' \neq a''$. Dem Element $a'$ ist das Element $f_{a'}$, von $F_0$, dem Element $a''$ das Element $f_{a''}$ von $F_0$ zugeordnet. Nun gilt nach der Festsetzung der Abbildung von $F_0$: $f_{a'}(a') = b_1, f_{a''}(a') = b_2$. Es gilt also ein Element des gemeinsamen Vorbereichs $A$, für das die beiden Abbildungen $f_{a'}$ und $f_{a''}$ verschiedene Werte annehmen: An der Stelle $a'$ unterscheiden sich die beiden Abbildungen voneinander.
Der Leser zeige, daß auch an der Stelle $a''$ des Vorbereichs die beiden Abbildungen $f_{a'}$ und $f_{a''}$ verschiedene Werte annehmen!
Der Werteverlauf der beiden Abbildungen $f_{a'}$ und $f_{a''}$ ist also nicht der gleiche, es handelt sich um verschiedene Abbildungen. Durch die Zuordnung $a \to f_a$ ist also die Menge $A$ eineindeutig auf die Teilmenge $F_0$ von $F$ abgebildet.

Der erste Teil des Satzes ist damit bewiesen Es würde für den Beweis des ganzen Satzes keineswegs ausreichen, wenn gezeigt würde, daß $F_0$ eine echte Teilmenge von $F$ ist, denn bei einer anderen Abbildung könnte sich $A$ dennoch als äquivalent zu $F$ erweisen. Es muß vielmehr bewiesen werden, daß es eine solche Abbildung von $A$ auf $F$ nicht geben kann. Der zweite Teil des Beweises muß also unabhängig vom ersten geführt werden.

*Beweis von 2:* Der Beweis werde indirekt geführt. Nehmen wir an, es gäbe irgendeine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von $A$ und denen von $F$. Dabei möge einem beliebigen Element $x$ von $A$ die Abbildung $g_x$ entsprechen. Die Elemente $x$ von $A$ und $g_x$ von $F$ sind also einander zugeordnet. Jetzt wird ein Element $g$ von $F$ nachgewiesen, das von allen $g_x$ verschieden, also keinem Element von $A$ zugeordnet ist. Dabei wird die Tatsache benutzt, daß zwei eindeutige Abbildungen $g_i$ und $g_k$ von $A$ in $F$ sicher dann verschieden sind, wenn es in $A$ ein Element $a$ gibt, so daß $g_i(a)$ und $g_k(a)$ verschiedene Elemente von $F$ sind; denn zwei Abbildungen sind dann und nur dann gleich, wenn sie in ihrem gesamten Werteverlauf übereinstimmen.

Wir konstruieren jetzt die Abbildung $g$ folgendermaßen: Dem Element $x$ von $A$ soll ein Element $y$ von $B$ entsprechen, das von $g_x(x)$ verschieden ist. Dies ist sicher möglich, da ja $B$ mindestens zwei Elemente besitzen soll. Sind zum Beispiel $b_1$ und $b_2$ zwei verschiedene Elemente von $B$ und ist zufällig $g_x(x) = b_1$, so setzen wir $g(x) = b_2$. Sind $a, b, c, \ldots$ Elemente von $A$, so unterscheidet sich $g$ von $g_a$ an der Stelle $a$, von $g_b$ an der Stelle $b$, von $g_c$ an der Stelle $c$ usw. Damit ist die Annahme, die Menge $A$ könnte der ganzen Menge $F$ äquivalent sein, auf einen Widerspruch geführt.

Es ist gezeigt: Die Menge $A$ ist einer echten Teilmenge $F_0$ der Menge aller eindeutigen Abbildungen von $A$ in $B$ äquivalent, aber nicht der ganzen Menge $F$. Die Menge $F$ hat also eine höhere Mächtigkeit als $A$.

Überblickt man den zweiten Teil des Beweises, so wird man in dem Konstruktionsprinzip für die Abbildung $g$ das CANTORsche Diagonalverfahren wiedererkennen.

Als Spezialfall des obengenannten Satzes ergibt sich:

SATZ:

▷ Ist $A$ eine endliche oder unendliche Menge, so hat die Potenzmenge von $A$ eine höhere Mächtigkeit als $A$.

Die Kardinalzahl von $A$ sei $a$. Die Kardinalzahl der Potenzmenge von $A$ wird dann mit $2^a$ bezeichnet. Dies stellt eine Verallgemeinerung der entsprechenden Angabe für endliche Mengen dar. Damit sind uns jetzt unendlich viele transfinite Kardinalzahlen gegeben.

$$\aleph_0, \quad 2^{\aleph_0} = c, \quad 2^c, \quad \aleph_0^c, \quad c^{\aleph_0}, \quad c^c, \quad (c^c)^c, \ldots$$

## 6.1.1. *Rechnen mit Kardinalzahlen*

Wir können jetzt in Anlehnung an die für endliche Kardinalzahlen erklärten Rechenoperationen ganz allgemein für Kardinalzahlen $a$ und $b$ eine Addition erklären. Dazu orientieren wir uns an der Erklärung der Addition endlicher Kardinalzahlen (↗ S. 196). Wir brauchen also nur eine Menge $A$ aus der Klasse $a$ und eine dazu elementefremde Menge $B$ aus der Klasse $b$ auszuwählen und die Vereinigungsmenge zu bilden. Es ist stets möglich, eine zu $A$ elementefremde Menge $B$ zu bilden.

ERKLÄRUNG:

▷ Die Kardinalzahl der Vereinigungsmenge zweier elementefremder Mengen mit den Kardinalzahlen $a, b$ wird als **Summe** $a + b$ erklärt. Unter dem **Produkt** $a \cdot b$ wird die Kardinalzahl der Kreuzmenge $A \times B$ verstanden. In diesem Fall braucht nicht vorausgesetzt zu werden, daß $A$ mit $B$ elementefremd ist.

Aufgabe 5

Hält man sich die Beispiele 1 bis 12 vor Augen, so gelangt man zu einer eigenartigen Arithmetik für transfinite Kardinalzahlen, für die hier einige Beispiele gegeben seien:

$$\aleph_0 + 1 = 1 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + 2 = 2 + \aleph_0 = \aleph_0, \ldots$$
$$\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0 \quad (n \in N),$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad c + c = c, \; c \cdot c = c.$$

Der Leser bedenke, daß sich die abzählbare Menge der Brüche als Kreuzmenge $N \times N$ mit der Kardinalzahl $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ darstellen läßt und daß die Punktmenge im Innern eines Quadrats, die ja die Kreuzmenge des Kontinuums mit sich selbst darstellt, gleichfalls die Mächtigkeit $c$ besitzt.

Die kleinste transfinite Kardinalzahl ist $\aleph_0$. Das folgt aus der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition. Die Frage, ob es zwischen $\aleph_0$ und $c$ eine Kardinalzahl gibt, wird als Kontinuumproblem bezeichnet. Die Kontinuumhypothese verneint diese Frage und bezeichnet demgemäß $c = 2^{\aleph_0}$ mit $\aleph_1$. Die verallgemeinerte Kontinuumhypothese besagt, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 0$ gilt: $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, daß es also zwischen $\aleph_n$ und $2^{\aleph_n}$ keine Kardinalzahl gibt. Diese Annahme wird auch als Aleph-Hypothese bezeichnet. Sie scheint ein Problem zu sein, das sich im Rahmen der bisherigen axiomatischen Mengenlehre nicht entscheiden läßt, das also aus den Axiomen (zum Beispiel von Kapitel 2) weder ableitbar noch widerlegbar ist. Man müßte die Kontinuumhypothese als neues Axiom hinzufügen. (GÖDEL zeigte 1940, daß sie mit dem Wohlordnungssatz verträglich, COHEN 1964, daß sie von ihm unabhängig ist.)

Wie schon im zweiten Kapitel gelegentlich in der Diskussion über das Auswahlaxiom gesagt wurde, lag hier ein Schwerpunkt der neueren mathematischen Grundlagenforschung. Der interessierte Leser muß hier auf die Spezialliteratur verwiesen werden, wobei Zusammenfassungen der neueren Ergebnisse im Augenblick nur in kurzen Berichten vorliegen ([39], S. 15 bis 20; [40]; [41], S. 39 bis 54; [42], S. 217 bis 232).

Überblicken wir die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels, so sehen wir, daß die Kardinalzahlen in einem gewissen Sinn als Verallgemeinerungen der natürlichen Zahlen an-gesprochen werden können. Es ist für sie eine Kleinerrelation erklärt, die den Vergleich endlicher oder unendlicher Mengen ermöglicht, und man kann gewisse Rechenoperationen mit ihnen durchführen. Eines aber haben die natürlichen Zahlen den Kardinalzahlen voraus: Man kann mit ihnen zählen.

Was bedeutet das? Wenn man eine endliche Menge von Dingen abzählen will, so muß irgendeine Reihenfolge eingehalten werden. Wir haben es also mit einer geordneten Menge zu tun. Die Kardinalzahlen sind aber Klassen ungeordneter Mengen.

Nun ist es allerdings bei endlichen Mengen gleichgültig, wie die Menge geordnet ist, wenn man die Anzahl der Elemente bestimmen will. Natürlich ändert sich dabei die Platznummer, die ein bestimmtes Element erhält. Das letzte Element erhält aber stets diejenige Platznummer, die zugleich die Anzahl der Elemente angibt. Zum Beispiel erhält das letzte Element einer Fünfermenge stets, wie auch die Elemente angeordnet sind, die Platznummer 5.

Die natürliche Zahl 5 hat sowohl den Charakter einer Kardinalzahl – d. h., sie ist die Klasse der ungeordneten Fünfermengen – als auch den einer Ordinalzahl.

Was aber eigentlich Ordinalzahlen sind, soll im kommenden Abschnitt dargelegt werden. Dabei werden die Eigenschaften geordneter Mengen zu untersuchen und es wird zu prüfen sein, ob auch bei unendlichen Mengen – wie es bei endlichen Mengen der Fall ist – zu jeder Kardinalzahl genau eine Ordinalzahl gehört und umgekehrt. Schließlich werden die besonderen Eigenschaften unendlicher Ordinalzahlen betrachtet werden.

## 6.2. Ordinalzahlen

Was tut ein Kind beim Zählen? Es tippt mit dem Finger auf einen Gegenstand und sagt „eins", dann auf den nächsten und sagt „zwei" und so fort. Die zuletzt genannte Zahl gibt die Anzahl der gezählten Gegenstände an. Beim Zählen geschieht also zweierlei: Jeder Gegenstand wird mit einem Zahlwort belegt, mit einer Platznummer: der erste, der zweite usw., und es wird mit der letzten Platznummer zugleich die Anzahl der gezählten Dinge gefunden. Ob dies Puppen, Teller, Messer, Menschen sind, die gezählt werden, beeinflußt den Zählvorgang nicht, das heißt zum mindestens dann nicht, wenn der Zählende den Zählvorgang beherrscht. Für Kinder unter sechs Jahren ist es zum Beispiel nicht gleichgültig, was gezählt wird. Ihr Zahlbegriff ist noch nicht qualitätsunabhängig (Näheres vgl. z. B. in [44]). Wir wollen aber hier voraussetzen, daß diese Entwicklungsstufe bereits überwunden ist.

Dann findet beim Zählen ein Abstraktionsprozeß statt. Diesen wollen wir jetzt mathematisch erfassen. Unser Weg dabei ist uns vorgezeichnet. Soll das Ergebnis des Abstraktionsprozesses eine bestimmte Ordnung der Menge widerspiegeln, so muß von zwei Mengen, die derselben Abstraktionsklasse angehören sollen, mehr verlangt werden als bloße Gleichmächtigkeit: Jede von ihnen muß geordnet sein, und die Ordnung in beiden Mengen muß sich entsprechen.

Wir wiederholen noch einmal, was das bedeutet. Immer dann, wenn in der Menge $A$ das Element $a$ vor dem Element $a'$ steht (geschrieben $a \prec a'$), so soll dasselbe für die Bilder $b$ und $b'$ in $B$ gelten, also $b$ vor $b'$. Dies ist zum Beispiel der Fall bei den beiden äquivalenten geordneten Mengen $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ und $B=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$. Wenn in $N$ das Element $a$ vor dem Element $a'$ steht, das heißt, wenn $a \prec a'$ gilt, so steht auch das Bild von $a$ in $B$, $b=\frac{1}{a}$, vor dem Bild von $a'$, $b'=\frac{1}{a'}$, $b \prec b'$. Daß hier zwar $a < a'$, aber $b' < b$ ist, darf uns nicht stören, denn die Ordnung der Elemente in einer Menge braucht nicht mit der Ordnung der Größe nach übereinzustimmen.

Nach den Erklärungen von Kapitel 4 (↑ S. 175) heißen geregelte Mengen, die eineindeutig aufeinander unter Erhaltung gewisser in ihnen erklärten Relationen abgebildet werden können, isomorph hinsichtlich dieser Relationen. Ist eine solche Relation die in den Mengen erklärte Ordnung der Elemente, so heißen die Mengen speziell ähnlich. In unserem Beispiel sind also $N$ und $B$ ähnliche Mengen. Nicht ähnlich sind dagegen die beiden geordneten Mengen $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ und $\{\ldots, 5, 4, 3, 2, 1\}$, obwohl sie natürlich gleichmächtig sind. Die erste Menge hat nämlich ein erstes, ein zweites, ein drittes Element, die zweite aber nicht.

Desgleichen besteht keine Ähnlichkeit zwischen den geordneten Mengen $\{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\{2, 3, 4, \ldots, 1\}$.

Wir hatten in Kapitel 4 eine Menge $M$, die durch eine Relation $R$ geregelt ist, in der Form $(M, R)$ geschrieben. Wir können dann wie auf S. 174 die Ähnlichkeit von Mengen folgendermaßen erklären:

ERKLÄRUNG:

▷ Ist eine Menge $M$ durch eine Relation $R$, eine dazu äquivalente Menge $M_1$ durch eine Relation $R_1$ geordnet, und folgt aus $aRb$ $(a, b \in M)$, daß auch $a_1 R_1 b_1$ $(a_1, b_1 \in M_1$, $a_1$ Bild von $a$, $b_1$ Bild von $b)$ gilt, so heißen die geordneten Mengen $(M, R)$ und $(M_1, R_1)$ **ähnlich.**

Weitere Beispiele für ähnliche geordnete Mengen:

BEISPIEL 15:

$$(A, R) = [1, 2, 3, 4, 5],$$
$$(A, R_1) = [2, 5, 4, 1, 3].$$

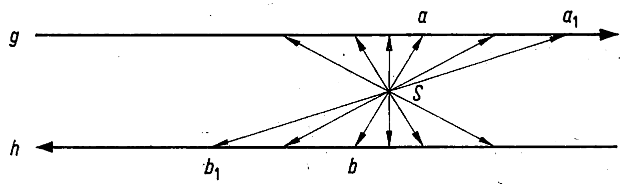
Hier bedeutet $R$ nichts anderes, als daß 4 vor 5, 3 vor 4, 2 vor 3 und 1 vor 2 steht; entsprechend bedeutet $R_1$: 1 vor 3, 4 vor 1, 5 vor 4 und 2 vor 5.

Wir ordnen die untereinanderstehenden Elemente einander zu. Zum Beispiel steht in der geordneten Menge $(A, R)$ das Element 3 vor 4, in der geordneten Menge $(A, R_1)$ steht entsprechend das Bild von 3, die 4, vor dem Bild von 4, der 1.

Zwei endliche geordnete Mengen, die gleichmächtig sind, sind stets ähnlich.

BEISPIEL 16:

Es sei $(A, R)$ die Menge aller Punkte der gerichteten Geraden $g$ und $(B, R_1)$ die Menge aller Punkte der entgegengesetzt gerichteten parallelen Geraden $h$. Bild 6. 10. zeigt, wie wir die Zuordnung unter Erhaltung der Ordnung vornehmen können. Dabei ist die Orientierung auf den Geraden durch dicke Pfeilspitzen angegeben, um Verwechslungen mit den Zuordnungspfeilen zu vermeiden. Die Lage des Punktes $S$ innerhalb des von der Geraden $g$ und $h$ gebildeten Streifens ist beliebig.




$a \prec a_1 \Rightarrow b \prec b_1$

Bild 6.10.

An beiden Beispielen läßt sich erkennen, daß bei der Ähnlichkeit – ganz entsprechend wie bei der Gleichmächtigkeit von unendlichen Mengen – die Art der Zuordnung eine Rolle spielt. Hätten wir in Beispiel 15 zugeordnet 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3, 4 – 4, 5 – 5, so wäre die Ähnlichkeit der beiden Mengen nicht in Erscheinung getreten, denn in $(A, R)$ gilt z. B. $3 \prec 5$, in $(A, R_1)$ aber $5 \prec 3$. Und hätten wir in Beispiel 16 alle untereinanderliegenden Punkte der beiden Geraden wie in Bild 6.11. einander zugeordnet, so wäre $a_1 \prec a_2$, aber für die Bilder würde gelten $b_2 \prec b_1$, die Ähnlichkeit ist durch diese Abbildung nicht nachweisbar. Dennoch besteht Ähnlichkeit.

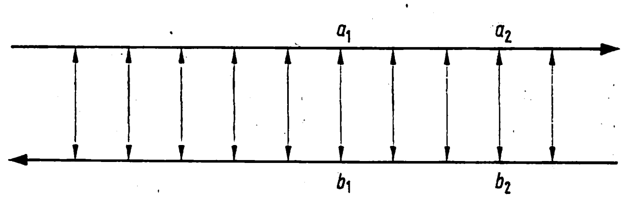



Bild 6.11.

Wenn wir bei einer eineindeutigen Abbildung einer geordneten Menge $A$ auf eine geordnete Menge $B$ Ähnlichkeit nicht feststellen können, so haben wir noch kein Recht dazu, den Mengen die Ähnlichkeit abzusprechen. Zu diesem Zweck muß nachgewiesen werden, daß eine Abbildung, bei der die Elemente des Nachbereichs ebenso geordnet sind wie die des Vorbereichs, unmöglich ist. Eine die Ähnlichkeit der beiden Mengen ausweisende Abbildung soll als **ähnliche Abbildung** bezeichnet werden. Die Aufweisung einer einzigen ähnlichen Abbildung von $A$ auf $B$ genügt zum Nachweis der Ähnlichkeit der beiden Mengen.

Wir erkennen aus den früheren Beispielen:

Ähnlichkeit zwischen zwei geordneten Mengen kann nie bestehen, wenn eine ein erstes Element besitzt, die andere aber nicht; wenn eine ein erstes und ein zweites Element besitzt, die andere aber nur ein erstes, aber kein zweites, oder auch kein erstes; wenn eine Menge ein letztes (und vorletztes) Element besitzt, die zweite aber nicht (bzw. nur ein letztes, aber kein vorletztes) und in entsprechenden weiteren Fällen. Natürlich kann Ähnlichkeit nie bestehen, wenn keine Äquivalenz vorliegt.

Wir wollen jetzt allgemein einen Abstraktionsprozeß für geordnete Mengen durchführen. Dazu gehen wir von einem System $\mathfrak{S}$ von geordneten Mengen aus. Dann stellt, wie unmittelbar einsichtig ist, die Ähnlichkeit eine reflexive, symmetrische, transitive Relation, also eine Äquivalenzrelation dar. Alle einander ähnlichen Mengen aus $\mathfrak{S}$ gehören derselben Klasse an. Diese Klasse spiegelt eine ganz bestimmte Ordnung aller Mengen mit ein und derselben Kardinalzahl wider. Wir bezeichnen sie daher als **Ordnungstypus** der betreffenden geordneten Mengen.

ERKLÄRUNG:

▷ Unter einem **Ordnungstypus** einer geordneten Menge verstehen wir die Abstraktionsklasse aller zu dieser Menge ähnlichen Mengen.

Alle Mengen desselben Ordnungstypus sind ähnlich. Mengen, die verschiedenen Ordnungstypen angehören, sind nicht ähnlich, auch wenn sie gleichmächtig sind.
So gehören die äquivalenten Mengen

$$(N, R) = [1, 2, 3, 4, 5, \ldots]$$

und

$$(N, {}^*R) = [\ldots, 5, 4, 3, 2, 1]$$

nicht demselben Ordnungstypus an. Dagegen haben endliche Mengen stets denselben Ordnungstypus, falls sie gleichmächtig sind.

### 6.2.1. *Ähnlichkeit von geordneten unendlichen Mengen*

Wir wollen jetzt, um uns die Verhältnisse, die bei unendlichen geordneten Mengen vorliegen können, klarzumachen, weitere Beispiele verschieden geordneter Mengen mit gleicher Kardinalzahl betrachten.

BEISPIEL 17:
Diejenige Relation, die die Menge $N$ der natürlichen Zahlen nach der Größe ordnet, bezeichnen wir mit $R_0$. Die durch diese Ordnungsrelation geordnete Menge der natürlichen Zahlen heißt auch **natürlich geordnet.**

$$(N, R_0) = [1, 2, 3, 4, 5, \ldots]$$

Diesen Ordnungstypus wollen wir mit $\omega$ bezeichnen.
Wir ordnen jetzt die Menge $N$ durch eine andere Relation $R_1$ so, daß das erste Element 1 vorn gestrichen und hinten angefügt wird:

$$(N, R_1) = [2, 3, 4, \ldots, 1].$$

Das Entsprechende tun wir mit dem Element 2:

$$(N, R_2) = [1, 3, 4, \ldots, 2].$$

Daneben stellen wir

$$(N, R_3) = [3, 4, 5, \ldots, 1, 2]$$

und

$$(N, R_4) = [1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots].$$

Die geordneten Mengen $(N, R_1)$, $(N, R_2)$, $(N, R_3)$ besitzen ein letztes Element. Sie können also weder zu $(N, R_0)$ noch zu $(N, R_4)$ ähnlich sein. Auch können weder $(N, R_1)$ noch $(N, R_2)$ zu $(N, R_3)$ ähnlich sein, da die letztgenannte geordnete Menge außer einem letzten noch ein vorletztes Element besitzt, die anderen aber nicht. Die geordnete Menge $(N, R_4)$ schließlich kann auch zu $(N, R_0)$ nicht ähnlich sein, denn es gibt in ihr zwei Elemente ohne unmittelbaren Vorgänger, die 1 und die 2, während es in $(N, R_0)$ nur ein Element dieser Art, die Eins, gibt. Eine ähnliche Abbildung ist nur zwischen $(N, R_1)$ und $(N, R_2)$ möglich, und zwar durch diejenige eineindeutige Abbildung, die 1 und 2 miteinander vertauscht und alle anderen Elemente in sich überführt. Äquivalent sind natürlich alle oben aufgeschriebenen Mengen. Sie haben ja alle die Kardinalzahl $\aleph_0$.

Aufgabe 6

BEISPIEL 18:

$$(N, {}^*R) = [\ldots, n, n-1, \ldots, 3, 2, 1].$$

Die durch die Ordnungsrelation ${}^*R$ geordnete Menge der natürlichen Zahlen heißt **umgekehrt geordnet.**
Wieder ist $(N, {}^*R)$ keiner der bisher betrachteten Mengen ähnlich. Dagegen besteht Ähnlichkeit zu der geordneten Menge $\left[\ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right]$. Wir bezeichnen den Ordnungstypus von $(N, {}^*R)$ mit ${}^*\omega$.

BEISPIEL 19:
Die Ordnung der Menge $[0, +1, +2, \ldots, -1, -2, \ldots]$ der ganzen Zahlen ist wieder wesentlich verschieden von der folgenden Ordnung der ganzen Zahlen

$$(G, R_5) = [\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots].$$

Die so geordnete Menge ist keiner der bisher betrachteten geordneten Mengen ähnlich, wohl aber der folgendermaßen geordneten Menge $N$:

$$(N, R_5) = \ldots, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, \ldots].$$

BEISPIEL 20:
Wir wenden uns jetzt Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums zu. Als Vertreter des Kontinuums $C$ wählen wir die Punktmenge, die auf einer mit Richtungssinn versehenen Geraden liegt. Die so geordnete Menge $C$ werde mit $(C, R_0)$ bezeichnet. Wir bilden $(C, R_0)$ ähnlich auf die Menge aller Punkte einer gerichteten Strecke ab und bedienen uns dabei der Zuordnungen von Beispiel 7 (↑ Bild 6.5. und 6.6., S. 275), so daß die auf der Geraden liegende geordnete Punktmenge zuerst durch Projektion von $Z$ aus auf die geordnete Punktmenge des Streckenzugs $DGE$ und diese dann durch Parallelprojektion auf die geordnete Punktmenge der Strecke $\overline{DE}$ (ohne Endpunkte) abgebildet wird (Bild 6.12.).
Diese beiden Mengen sind, wie ohne weiteres ersichtlich ist, ähnlich geordnet.

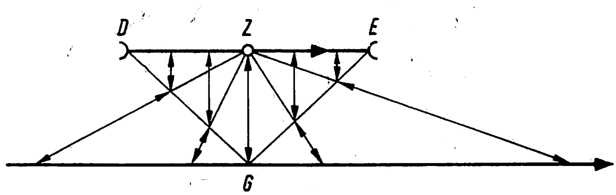


Bild 6.12.

BEISPIEL 21:
Von den Abbildungen des vorangehenden Abschnitts greifen wir noch Beispiel 9 (↑ Bild 6. 7., S. 276) heraus. Die Punkte des Kreises und die der Strecke sollen in Pfeilrichtung geordnet werden. Es liegt eine ähnliche Abbildung vor.

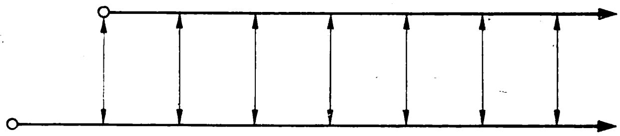


Bild 6.13.

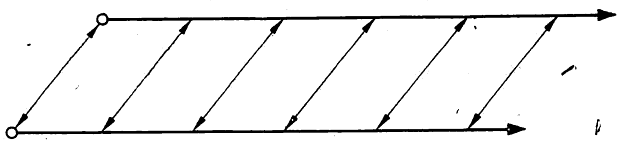


Bild 6.14.

BEISPIEL 22:
Wir bilden einen Strahl mit Hilfe der in Bild 6.13. dargestellten Punktzuordnung auf einen anderen Strahl ab. Obwohl auf beiden Strahlen die gleiche Ordnung festgelegt ist, wird durch diese Abbildung die Ähnlichkeit nicht gesichert, denn die Ähnlichkeit schließt ja ein, daß eine eineindeutige Abbildung von der einen Menge auf die andere vorliegt, und hier ist die auf dem einen Strahl liegende Menge eineindeutig in, nicht auf die andere abgebildet. Dennoch sind die beiden so geordneten Mengen ähnlich, z. B. vermöge der Abbildung von Bild 6.14. Wir erinnern uns daran, daß wir die Gleichmächtigkeit, also auch die Ähnlichkeit zweier Mengen nur dadurch abstreiten können, daß wir die Unmöglichkeit einer eineindeutigen Abbildung der einen auf die andere nachweisen.

Aufgabe 7

### 6.2.2. *Ordnungstypen*

Überblicken wir die Beispiele dieses Abschnitts, so können wir feststellen:
Geordnete unendliche Mengen, die äquivalent sind, können ähnlich sein, müssen es aber nicht sein.
Es gilt folgender Satz, der wohl durch obenstehende Beispiele ausreichend plausibel erscheint und hier ohne Beweis mitgeteilt wird.

SATZ:
▷ Eine unendliche Menge kann auf unendlich viele verschiedene Arten geordnet werden. (Den Beweis findet der Leser z. B. in [34], Kap. III.)

Anders ausgedrückt:

Zu ein und derselben transfiniten Kardinalzahl gehören unendlich viele Ordnungstypen.

Damit zeigt sich wieder ein grundlegender Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Mengen, denn zu jeder endlichen Kardinalzahl gehört ja nur genau ein Ordnungstyp. Wir bezeichnen diesen ebenso wie die entsprechende Kardinalzahl mit 1, 2, 3, ... Eine entsprechende eineindeutige Zuordnung zwischen unendlichen (transfiniten) Kardinalzahlen zu ihren Ordnungstypen gibt es nicht.
Für Ordnungstypen lassen sich aber in entsprechender Weise wie für Kardinalzahlen Rechenoperationen erklären.

### 6.2.3. *Summe von Ordnungstypen*

Seien $\alpha$ und $\beta$ zwei Ordnungstypen, Es seien $A$ und $B$ geordnete Mengen aus den Klassen $\alpha$ bzw. $\beta$, aber $B$ sei so ausgewählt, daß die beiden Mengen elementefremd sind. Wir bilden die Vereinigungsmenge $C = A \cup B$ und setzen in ihr folgende Ordnung fest: Alle Elemente von $A$ sollen vor denen von $B$ rangieren, und in den Teilmengen $A$ und $B$ von $C$ soll dieselbe Ordnung bestehen, die vorher in diesen Mengen vorlag. Da $A$ und $B$ keine Elemente gemeinsam haben, bei denen sich Widersprüche in der Reihenfolge ergeben könnten, ist die Menge $A \cup B$ gleichfalls geordnet. Ihr Ordnungstyp wird als Summe $\alpha + \beta$ der Ordnungstypen $\alpha$ und $\beta$ bezeichnet.
Hier ist aber im Gegensatz zu Kardinalzahlen zu beachten, daß $\alpha + \beta$ im allgemeinen verschieden von $\beta + \alpha$ sein wird, denn bei $\beta + \alpha$ rangieren die Elemente von $B$ vor denen von $A$. Vergleichen wir zum Beispiel den Ordnungstyp $\omega + 1$ mit $1 + \omega$. Der Ordnungstyp $\omega$ werde vertreten durch die geordnete Menge $[2, 3, 4, \ldots]$, der von 1 durch $[1]$. Dann liegen elementefremde Mengen vor. Die Vereinigungsmenge ergibt die geordnete Menge $[2, 3, 4, \ldots, 1] = (N, R_1)$. Diese Menge hat also den Ordnungstyp $\omega + 1$. Kehren wir dagegen die Reihenfolge in der Summe um, bilden also $1 + \omega$, so gehen wir von der Vereinigungsmenge $[1] \cup [2, 3, 4, \ldots] = [1, 2, 3, 4, \ldots]$ aus. Ihr Ordnungstyp ist $\omega$.
Wir haben gefunden:

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega, \quad 1 + \omega = \omega.$$

Entsprechend erhalten wir $\omega + 2$ durch die Vereinigungsmenge von $[3, 4, 5, \ldots]$ mit $[1, 2]$; die Menge $(N, R_3) = [3, 4, 5, \ldots, 1, 2]$ hat also den Ordnungstyp $\omega + 2$. Dagegen ist $2 + \omega$ als Ordnungstyp der Vereinigungsmenge $[1, 2] \cup [3, 4, 5, \ldots]$ wieder gleich $\omega$. Allgemein gilt: $\omega + n \neq n + \omega, n + \omega = \omega$, wenn $n$ eine natürliche Zahl ist. Der Ordnungstyp von $[1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots]$ wird sinngemäß als $\omega + \omega$ bezeichnet. Er ist von $\omega$ verschieden, da das Element 2 keinen Vorgänger hat. Der Ordnungstyp $^*\omega + \omega$ kann durch die geregelte Menge $(N, R_5)$ (↑ S. 297) repräsentiert werden. Er stimmt überein mit dem Ordnungstyp der geregelten Menge $(G, R_5)$ von S. 297.
Für die Addition von Ordnungstypen gilt das Assoziativgesetz $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$, da eine geordnete Vertretermenge der links stehenden Kardinalzahl $(K_1 \cup K_2) \cup K_3$ ähnlich auf $K_1 \cup (K_2 \cup K_3)$ abgebildet werden kann.
Statt $\omega + \omega$ wird auch $\omega \cdot 2$ geschrieben. Dagegen wird der Ordnungstyp $2 \cdot \omega$ zum Beispiel vertreten durch die Vereinigungsmenge abzählbar vieler elementefremder geordneter Paare:

$$[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup [a_3, b_3] \cup \ldots = [a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots],$$

diese aber hat den Typ $\omega$. Auch für das Produkt von Ordnungstypen gilt also das Kommutativgesetz nicht.

Geht man statt von Paaren von geordneten $n$-Tupeln aus, so findet man analog: $n \cdot \omega = \omega$, aber $\omega \cdot n \neq \omega$, denn der Ordnungstyp von

$$[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots],$$

also $\omega \cdot n$, ist von $\omega$ verschieden.

Um den Ordnungstyp $\omega \cdot \omega$ zu bilden, denken wir uns die in der letzten Klammer stehende geordnete Menge fortgesetzt, indem wir nicht $n$, sondern abzählbar viele Folgen $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ vereinigen ($i = 1, 2, \ldots$):

$$[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{31}, a_{32}, \ldots].$$

Den Ordnungstyp dieser Menge bezeichnen wir als $\omega^2$.

In naheliegender Weise können allgemein Produkte und Potenzen von Ordnungstypen erklärt werden, doch soll dies hier nicht durchgeführt werden. Der Leser sei auf die Spezialliteratur verwiesen ([34], S. 41 ff.).

Wir stellen noch einmal einige Ordnungstypen, die wir kennengelernt haben, zusammen und geben jeden durch einen Vertreter an:

| Ordnungstypen | Vertreter |
|---|---|
| $\omega$ | $[1, 2, 3, \ldots]$ |
| $\omega + 1$ | $[2, 3, 4, \ldots, 1]$ |
| $\omega + 2$ | $[3, 4, 5, \ldots, 1, 2]$ |
| $\omega + n$ | $[n+1, n+2, n+3, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, n]$ |
| $\vdots$ | |
| $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ | $[1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots]$ |
| $\vdots$ | |
| $\omega \cdot 3$ | $[1, 4, 7, \ldots, 2, 5, 8, \ldots, 3, 6, 9, \ldots]$ |
| $\vdots$ | |
| $\omega \cdot n$ | $[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots]$ |
| $\omega \cdot \omega = \omega^2$ | $[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{31}, a_{32}, \ldots]$ |
| $1 + \omega = \omega$ | |
| $2 + \omega = \omega$ | |
| $\ldots$ | |
| $n + \omega = \omega$ | |
| $2 \cdot \omega = \omega$ | $[a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots]$ |
| $3 \cdot \omega = \omega$ | $[a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, \ldots]$ |

Es ist also

$$\omega + 1 \neq 1 + \omega, \text{ allgemein } \omega + n \neq n + \omega,$$
$$\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega, \text{ allgemein } \omega \cdot n \neq n \cdot \omega.$$

Wir wollen uns jetzt noch einmal vor Augen halten, wo wir jetzt stehen. Wir waren von ungeordneten zu geordneten Mengen übergegangen, weil die Kardinalzahlen nicht alle Eigenschaften der natürlichen Zahlen widerspiegeln. Insbesondere läßt sich mit ihnen eine Menge nicht durchzählen. Bei näherer Betrachtung des Zählvorganges stießen wir auf einen Abstraktionsprozeß. Er führte uns auf Klassen geordneter Mengen, auf Ordnungstypen. Leisten nun die Ordnungstypen das Erwartete, das heißt, ermöglichen sie eine Ordnung auch der transfiniten Kardinalzahlen, die in etwa der der natürlichen Zahlen entspricht? Davon kann leider keine Rede sein. Wir haben nämlich gar keine Möglichkeit, Ordnungstypen miteinander zu vergleichen. Es ist also nicht möglich, mit ihrer Hilfe einer unendlichen Menge auf einer Art Größenskala einen bestimmten Platz anzuweisen, wie wir das bei endlichen Mengen können.

### 6.2.4. *Wohlordnung, Ordnungszahl*

Um die Richtung zu finden, in der weiter zu suchen ist, wollen wir uns einmal ganz allgemein überlegen, wie eine Menge aussehen muß, wenn sie sich „durchzählen" lassen soll. Natürlich kann man eine unendliche Menge, auch wenn sie geordnet ist, nicht im gleichen Sinn durchzählen wie eine endliche. Dennoch lassen sich vielleicht wenigstens einige wesentliche Züge des Zählprozesses auf unendliche Mengen übertragen. Aus diesem Grund wollen wir noch einmal versuchen, das Typische beim Zählen endlicher Mengen herauszufinden, dabei aber den Abstraktionsprozeß, den wir ja bereits durchgeführt haben, beiseite lassen. Dann heben sich als wesentlich zwei Punkte heraus:

1. Es muß möglich sein, anzufangen, das heißt, die zu zählende Menge muß ein erstes Element haben.
2. Wir zählen ein Ding nach dem anderen. Haben wir eine Teilmenge bereits abgezählt, so muß ein nächstes Element vorhanden sein, damit wir weiterzählen können: Ist $M$ die zu zählende geordnete Menge und ist die Teilmenge $T$ bereits gezählt, so muß die Komplementärmenge $M \setminus T$ von $T$ in $M$ ein erstes Element haben.

Bei geordneten endlichen Mengen ist dies stets der Fall, nicht aber bei geordneten unendlichen Mengen. Dies zeigen zum Beispiel die geordneten Mengen

$[\ldots, 3, 2, 1]$ (Typ $^*\omega$),
$[\ldots, 5, 3, 1, 2, 4, \ldots]$ (Typ $^*\omega + \omega$).

Daneben stehen Mengen, bei denen jede Teilmenge (also auch die ganze Menge!) ein erstes Element hat, zum Beispiel

$[1, 2, 3, \ldots]$ (Typ $\omega$),
$[2, 3, 4, \ldots, 1]$ (Typ $\omega + 1$),
$[n + 1, n + 2, \ldots, 1, 2, 3, \ldots, n]$ (Typ $\omega + n$),
$[1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots]$ (Typ $\omega \cdot 2$).

ERKLÄRUNG:

▷ Wir bezeichnen eine geordnete Menge, bei der jede (echte oder unechte) Teilmenge ein erstes Element besitzt, als **wohlgeordnet**.

Die leere Menge ist wohlgeordnet; denn die Wohlordnung bedeutet: Für jede Teilmenge $M'$ gilt: Wenn $M'$ nicht leer ist, besitzt $M'$ ein erstes Element. Diese

Implikation trifft für die leere Menge zu, da der Vordersatz für sie falsch ist (↗ Kap. 1, S. 20 ff.): Sie besitzt ja nur eine einzige Teilmenge, sich selbst, und diese hat keine Elemente.

Die obenstehenden Beispiele zeigen, daß gleichmächtige geordnete Mengen unendlich viele verschiedene Ordnungstypen haben können. Denn die Mengen von den Typen $\omega, \omega + 1, \omega + n, \omega \cdot 2, \ldots$ sind ja sämtlich abzählbar. Es läßt sich beweisen, daß auch gleichmächtige wohlgeordnete Mengen unendlich vielen Ordnungstypen angehören können.

Natürlich ist jede endliche Menge wohlgeordnet, wie auch immer sie geordnet sei. Sie ist sogar von vorn und von hinten wohlgeordnet: Jede Teilmenge hat nicht nur ein erstes, sondern auch ein letztes Element.

Die nach der Größe geordneten reellen Zahlen – man nennt sie auch das natürlich geordnete Kontinuum – stellen keine wohlgeordnete Menge dar. Auch die Gesamtheit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit $0 \leqq x \leqq 1$ ist nicht wohlgeordnet, obwohl diese Menge ein erstes und sogar ein letztes Element besitzt, denn die beim Weglassen des ersten Elements entstehende Teilmenge hat kein erstes Element. Aus demselben Grund ist die abzählbare Menge der natürlich geordneten rationalen Zahlen $0 \leqq x \leqq 1$ nicht wohlgeordnet. Dagegen ist die Menge der positiven rationalen Zahlen, wenn man sie gemäß der Abzählung in Beispiel 5 (S. 272 f.) ordnet, wohlgeordnet.

Aus der Definition der Wohlordnung folgt: *Dafür, daß eine Menge wohlgeordnet ist, ist notwendig, aber nicht hinreichend, daß sie ein erstes Element besitzt.*

Es zeigt sich nun, daß die Struktur einer wohlgeordneten Menge besonders einfach ist. So hat in ihr jedes Element – wie in der Menge der natürlichen Zahlen – einen unmittelbaren Nachfolger. Das ergibt sich daraus, daß die Teilmenge aller Elemente, die auf ein Element $x$ der Menge folgen, ein erstes Element besitzt. Dagegen gilt im Gegensatz zur Menge der natürlichen Zahlen nicht, daß jedes Element (außer dem ersten) auch einen unmittelbaren Vorgänger hat. Das zeigt die wohlgeordnete Menge

$$(N, R_1) = \{2, 3, 4, \ldots, 1\},$$

bei der die Eins keinen unmittelbaren Vorgänger hat.

Mit den besonderen Eigenschaften wohlgeordneter Mengen hängt es zusammen, daß ihre Ordnungstypen für unsere Zwecke gut geeignet erscheinen. Wie im folgenden gezeigt werden soll, leisten sie in der Tat das, was wir von „Ordnungszahlen" erwarten. Insbesondere sind sie – im Gegensatz zu anderen Ordnungstypen – miteinander vergleichbar. Daher erscheint der Name „Ordnungszahlen" für sie gerechtfertigt. Allerdings ist die so erklärte Ordnungszahl begrifflich nicht dasselbe wie die Ordnungszahl der Umgangssprache. Diese ist nämlich auf die Elemente einer geordneten Menge bezogen: Man spricht ja von dem ersten, zweiten, dritten ... Element der Menge, wobei diese Attribute der Elemente grammatisch als Ordnungszahlen bezeichnet werden. Dagegen ist die oben definierte Ordnungszahl ein Charakteristikum der ganzen Menge, nicht eines einzelnen Elements. Eine Verbindung zwischen den beiden verschiedenen Bedeutungen des Wortes „Ordnungszahl" wird hergestellt durch die Tatsache, daß eine endliche Menge, deren letztes Element im umgangssprachlichen Sinn die Ordnungszahl $n$ hat, im mathematischen Sinn gleichfalls die Ordnungszahl $n$ besitzt. Ein entsprechender Unterschied zwischen der mathematischen und der umgangssprachlichen Bedeutung des Begriffs besteht bei der Kardinalzahl nicht.

ERKLÄRUNG:

▷ Die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen bezeichnen wir als **Ordnungszahlen.**

Da jede endliche Menge wohlgeordnet ist, sind alle endlichen Ordnungstypen auch Ordnungszahlen. Bei unendlichen Mengen ist dies nicht der Fall. Die Ordnungstypen $\omega$, $\omega + 1, \ldots, \omega + n$, $\omega + \omega$, die übrigens alle zu $\aleph_0$ gehören, sind zwar zugleich Ordnungszahlen, nicht aber $^*\omega$, $^*\omega + \omega$, ferner der Ordnungstyp der natürlich geordneten rationalen und der der natürlich geordneten reellen Zahlen.
Die Ordnungstypen nichtwohlgeordneter Mengen wollen wir jetzt beiseite lassen. Dann gehören immer noch zu ein und derselben transfiniten Kardinalzahl, zum Beispiel zu $\aleph_0$, unendlich viele Ordnungszahlen. Dies läßt zunächst unsere Absicht, mit Hilfe der Ordnungszahlen so etwas wie eine Folge der Kardinalzahlen herzustellen, als aussichtslos erscheinen.
Nun gibt es aber für wohlgeordnete Mengen eine Reihe von interessanten Sätzen, die uns weiterhelfen werden. Um einen Einblick in den Charakter der betreffenden Beweise zu geben, sind sie im folgenden, soweit sie nicht zu umfangreich oder zu schwierig sind, wiedergegeben. Der Leser, dem es mehr auf Resultate ankommt, mag sie überschlagen.

SATZ 1:

▷ Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst wohlgeordnet.

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß die Teilmengenbeziehung transitiv ist.

ERKLÄRUNG:

▷ Ist $x$ ein beliebiges Element einer wohlgeordneten Menge $M$, so soll unter dem **Abschnitt** $A(x)$ (gelesen „$A$ von $x$") diejenige Teilmenge von $M$ verstanden werden, die alle dem Element $x$ in $M$ vorangehenden Elemente enthält. Also
$A(x) = \{y \in M \text{ und } y \prec x\}$,
in Worten: $A(x)$ ist die Menge aller Elemente $y$, für die gilt: $y$ ist Element von $M$ und $y$ liegt in $M$ vor $x$.

Zum Beispiel gibt es für die Menge $(N, R_1) = [2, 3, 4, 5, \ldots, 1]$ mit der Ordnungszahl $\omega + 1$ einen Abschnitt $A(4) = [2, 3]$ mit der Ordnungszahl 2; der Abschnitt $A(1)$ ist die geordnete Menge $[2, 3, 4, \ldots]$, die die Ordnungszahl $\omega$ hat.
Nach Satz 1 ist jeder Abschnitt einer wohlgeordneten Menge selbst wohlgeordnet.
Jetzt soll ein wichtiger Satz bewiesen werden, der sich auf Ähnlichkeitsabbildungen einer wohlgeordneten Menge auf sich bezieht.

SATZ 2:

▷ Eine wohlgeordnete Menge $M$ sei ähnlich auf sich abgebildet. Dann gehört das Bild eines beliebigen Elementes $x$ von $M$ nicht zu $A(x)$.

Mit anderen Worten: Eine wohlgeordnete Menge kann ähnlich höchstens „nach hinten" auf sich abgebildet werden, das Bild eines ihrer Elemente kann nicht vor dem Element rangieren.

* Zum Beweis bezeichnen wir die Ähnlichkeitsabbildung mit $f$, das Bild von $x$ mit $f(x)$. Der Beweis soll indirekt geführt werden. Nehmen wir an, es gäbe irgendein Element $x$, dessen Bild $f(x)$ in $A(x)$ liegt. Die Menge der Elemente $x$ mit dieser Eigenschaft bildet eine Teilmenge von $M$, muß mithin ein erstes Element haben. Nennen wir es $x_0$. Dann liegt also $f(x_0)$ in $A(x_0)$. Nun ist $f(x_0)$ selbst ein Element von $M$. Bezeichnen wir es mit $x_1$. Als Element von $M$ hat $x_1$ sein Bild $f(x_1)$ wieder in $M$. Dabei gehört $x_1 = f(x_0)$ dem Abschnitt $A(x_0)$ an. Also gilt $x_1 \prec x_0$. Da $f$ eine Ähnlichkeitsabbildung darstellt, folgt aus $x_1 \prec x_0$, daß auch $f(x_1) \prec f(x_0)$ ist. Also ist $f(x_1) \prec x_1$. Nun sollte aber $x_0$ das erste Element dieser Art sein; $x_1$, das ihm vorangeht, hat aber auch die Eigenschaft, daß sein Bild ihm vorangeht. Damit stoßen wir auf einen Widerspruch. Es kann solch ein Element $x$, dessen Bild vor $x$ liegt, bei einer Ähnlichkeitsabbildung nicht geben.

Aus Satz 2 ergibt sich als wichtige Folgerung

SATZ 3:

▷ Es gibt keine Ähnlichkeitsabbildung einer wohlgeordneten Menge $M$ in einen Abschnitt einer Teilmenge $M'$ von $M$.

Machen wir uns zunächst die Aussage dieses Satzes klar. Die wohlgeordnete Menge $M$ sei zum Beispiel die Menge $[1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots]$ mit der Ordnungszahl $\omega \cdot 2$. Wir wählen als Teilmenge $M'$ von $M$: $[2, 6, 10, 14, \ldots]$. Der Satz sagt nun u. a. aus, daß $M'$ keinen einzigen Abschnitt besitzt, in den $M$ ähnlich abgebildet werden kann. Ebenso steht es, wenn wir eine beliebige andere Teilmenge von $M'$, also auch $M$ selbst, ausgewählt hätten. Wenn der Satz richtig ist, wissen wir zugleich, daß keine wohlgeordnete Menge ähnlich in einen ihrer Abschnitte abgebildet werden kann. Damit wären wir ein gutes Stück weiter.

Der Beweis von Satz 3 ist nicht schwer. Gäbe es nämlich in $M'$ ein Element $x$, so daß $M$ sich ähnlich in den Abschnitt $A'(x)$ der Teilmenge $M'$ von $M$ abbilden ließe, so müßte das Bild von $x$ in $A'(x)$, also auch in $A(x)$ liegen. Dies widerspricht aber der Aussage von Satz 2, daß das Bild von $x$ nicht vor $x$ liegen kann.

Aus Satz 3 ergibt sich wieder eine wichtige Folgerung:

SATZ 4:

▷ Zwei verschiedene Abschnitte einer wohlgeordneten Menge $M$ können nicht ähnlich aufeinander abgebildet werden.

Sind nämlich $A(x_1)$ und $A(x_2)$ zwei verschiedene ähnliche Abschnitte von $M$ und geht $x_1$ in $M$ dem Element $x_2$ voraus, so muß einerseits $A(x_1)$ eine Teilmenge, und zwar ein Abschnitt von $A(x_2)$ sein; andererseits wäre $A(x_1)$ durch Ähnlichkeitsabbildung aus der wohlgeordneten Menge $A(x_2)$ entstanden. Dann wäre die wohlgeordnete Menge $A(x_2)$ ähnlich auf einen ihrer Abschnitte, nämlich auf $A(x_1)$, abgebildet. Dies widerspricht Satz 3.

SATZ 5:

▷ Es gibt höchstens eine Ähnlichkeitsabbildung einer wohlgeordneten Menge auf eine andere.

* Zum Beweis nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene Ähnlichkeitsabbildungen $f_1$ und $f_2$ der wohlgeordneten Menge $A$ auf die wohlgeordnete Menge $B$. Dann können die beiden Funktionen $f_1$ und $f_2$ nicht in ihrem gesamten Verlauf übereinstimmen. Es muß also in $A$ ein Element $a$ geben, für das $f_1(a) = b_1$ verschieden von dem Element $f_2(a) = b_2$ ist $(b_1, b_2 \in B)$. In der wohlgeordneten Menge $B$ muß eines der Elemente $b_1$, $b_2$ vor dem anderen liegen. Sei etwa $b_1 \prec b_2$. Da nun $A$ durch $f_1$ ähnlich auf $B$ abgebildet wird und $b_1$ dabei das Bild von $a$ ist, müssen alle dem Element $a$ in $A$ vorangehenden Elemente bei der Abbildung in solche Elemente von $B$ übergehen, die vor $b_1$ liegen; liegt umgekehrt ein Element $b'$ von $B$ vor $b_1$, gehört also $b'$ dem Abschnitt $A(b_1)$ an, so muß es durch die ähnliche Abbildung $f^{-1}$ in ein Element $a'$ von $A$ übergeführt werden, das vor $a$, also im Abschnitt $A(a)$ liegt. Demnach muß der ganze Abschnitt $A(a)$ ähnlich sein dem Abschnitt $A(b_1)$ von $B$. Ebenso kann man aber schließen, daß $A(a)$ durch die Abbildung $f_2$ ähnlich auf den Abschnitt $A(b_2)$ von $B$ abgebildet wird.
Also gilt: $A(b_1)$ ähnlich zu $A$, $A$ ähnlich zu $A(b_2)$.
Auf Grund der Transitivität wäre damit der Abschnitt $A(b_1)$ ähnlich auf einen anderen Abschnitt, nämlich $A(b_2)$, der Menge $B$ abgebildet. Da $B$ aber wohlgeordnet ist, steht dies im Widerspruch zu Satz 4, daß zwei verschiedene Abschnitte einer wohlgeordneten Menge nicht ähnlich aufeinander abgebildet werden können.

Wir können Satz 5 jetzt auf den Fall, daß $B$ mit $A$ übereinstimmt, anwenden und erhalten als Folgerung, daß eine wohlgeordnete Menge höchstens durch eine einzige Ähnlichkeitsabbildung auf sich abgebildet werden kann. Nun gibt es immer eine Ähnlichkeitsabbildung einer geordneten Menge auf sich, nämlich die identische Abbildung, die jedes Element sich selbst zuordnet. Also gilt

SATZ 6:

▷ Eine wohlgeordnete Menge kann nur durch die identische Abbildung ähnlich auf sich abgebildet werden.

Wir wollen dieses Resultat noch einmal überdenken. Wir hatten bereits (↗ S. 297) festgestellt, daß die geregelte Menge

$$(N, R_1) = [2, 3, 4, \ldots, 1]$$

der geregelten Menge

$$(N, R_2) = [1, 3, 4, \ldots, 2]$$

ähnlich ist. Handelt es sich nicht beide Male um dieselbe Menge $N$? Die Ähnlichkeitsabbildung wird hier zweifellos nicht durch die identische Abbildung bewirkt, sondern durch die Zuordnung 2–1, 3–3, 4–4, ..., 1–2. Steht das nicht im Widerspruch zu Satz 6? Nun, dabei haben wir außer acht gelassen, daß zwar als ungeordnete Mengen $\{2, 3, 4, \ldots, 1\}$ und $\{1, 3, 4, \ldots, 2\}$ übereinstimmen, nicht aber als geordnete (sogar wohlgeordnete) Mengen. Es liegt also gar kein Fall für Satz 6, sondern einer für Satz 5 (zwei verschiedene wohlgeordnete Mengen) vor, und die oben angegebene Abbildung ist eben diejenige, die als einzige $(N, R_1)$ ähnlich auf $(N, R_2)$ abbildet.
Von entscheidender Bedeutung ist folgender Satz, auf dessen Beweis hier verzichtet werden muß:

SATZ 7:

▷ Zwei wohlgeordnete Mengen $A$, $B$ sind entweder ähnlich, oder eine von ihnen ist einem gewissen Abschnitt der anderen ähnlich.

Aufgabe 8

Damit ist gesichert, daß zum mindesten wohlgeordnete Mengen hinsichtlich ihrer Ordnungstypen vergleichbar sind. Wir sind daher jetzt in der Lage, für Ordnungszahlen eine vollständige Ordnung zu erklären.

ERKLÄRUNG:

▷ Die Ordnungszahl $\alpha$ heißt **kleiner** als die Ordnungszahl $\beta$ ($\alpha < \beta$), wenn eine beliebige wohlgeordnete Menge der Klasse $\alpha$ einem Abschnitt einer beliebigen Menge aus der Klasse $\beta$ ähnlich ist.

Dabei ist es völlig gleichgültig, welche Vertretermengen ausgewählt werden; das liegt daran, daß die Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist.
Die so erklärte Kleinerbeziehung stellt in der Tat eine irreflexive Ordnungsrelation dar. Der Nachweis bleibe dem Leser überlassen.

Aufgabe 9

Die Vergleichbarkeit beliebiger Ordnungszahlen ist damit gesichert.
Wir wissen auf Grund der allgemeinen Betrachtungen des 3. Kapitels (↑ S. 99), daß die für Ordnungszahlen erklärte Kleinerrelation auch asymmetrisch ist. Jede Menge von Ordnungszahlen ist also durch die Kleinerrelation linear geordnet. Man kann darüber hinaus zeigen, daß solch eine Menge sogar wohlgeordnet ist, doch soll der Beweis dieser gleichfalls sehr wichtigen Eigenschaft der Ordnungszahlen hier übergangen werden. (Alle hier ausgelassenen Beweise findet der Leser z. B. in [34], Kap. I und III.)

**Zusammenfassung:**
**Die Ordnungstypen von wohlgeordneten Mengen werden als Ordnungszahlen bezeichnet. Zwei wohlgeordnete Mengen $A$, $B$ sind entweder ähnlich – dann sind ihre Ordnungszahlen gleich –, oder eine von ihnen, etwa $A$, ist einem Abschnitt der Menge $B$ ähnlich. Im zweiten Fall heißt die Ordnungszahl von $A$ kleiner als die Ordnungszahl von $B$. Die dadurch erklärte Relation ist eine irreflexive Ordnungsrelation.**

Für Ordnungszahlen ist bereits, da sie ja Ordnungstypen sind, eine Addition erklärt. Ebenso steht es mit der Multiplikation. Mit Ordnungszahlen kann man aber nicht nur rechnen, sie sind auch vergleichbar. Dies haben sie den Ordnungstypen voraus. Von ganz besonderer Bedeutung ist daher der berühmt-berüchtigte Wohlordnungssatz, der von CANTOR bereits vermutet, später von ZERMELO (ERNST ZERMELO, 1871 bis 1953) und anderen bewiesen wurde.[1]

[1] Beweis des Wohlordnungssatzes durch ZERMELO: 1904.

SATZ 8 (Wohlordnungssatz):

▷ Jede Menge läßt sich wohlordnen.

Auf den Beweis dieses Satzes, der die Krone aller Betrachtungen über Ordnungszahlen bildet, kann hier gleichfalls nicht eingegangen werden. Er stützt sich auf das Auswahlaxiom und ist daher nur in einer Mengenlehre gültig, in der dieses Axiom vorausgesetzt wird. Wie schon in Kapitel 2 (↗ S. 62) bemerkt wurde, läßt sich eine widerspruchsfreie Mengenlehre auch ohne das Auswahlprinzip aufbauen. Es gibt Mengen, die sich im Rahmen solch einer Mengenlehre nicht wohlordnen lassen. Setzt man dagegen den Wohlordnungssatz voraus, so folgt daraus das Auswahlprinzip. Der Leser, der sich näher über diese Probleme unterrichten möchte, sei auf die bereits früher (↗ S. 292) genannte Spezialliteratur und auf das Buch über Mengenlehre von KLAUA ([36], Bd. I, S. 268 bis 274) verwiesen.

In dem in Kapitel 2 aufgestellten Axiomensystem, das allen hier durchgeführten Überlegungen zugrunde liegt, ist das Auswahlaxiom enthalten. Damit ist die Geltung des Wohlordnungssatzes gesichert. Es sei nur vermerkt, daß der Beweis kein allgemeines Konstruktionsprinzip enthält, dem man die Durchführung der Wohlordnung beliebig gegebener Mengen entnehmen könnte. Zwar gelingt die Wohlordnung vieler Mengen ohne weiteres (allerdings nicht durch Hilfsmittel, die im Beweis gegeben würden). Bei endlichen Mengen ist der Satz überflüssig, sie sind von vornherein, wie sie auch geordnet seien, wohlgeordnet. Mengen mit der Kardinalzahl $\aleph_0$ können sogar auf unendlich viele Arten wohlgeordnet werden. Die wohlgeordneten Mengen $(N, R_1)$, $(N, R_2)$, $(N, R_3)$, $(N, R_4)$ und natürlich auch die wohlgeordnete Menge $(N, R_0)$ stellen Beispiele dafür dar. Dagegen stößt schon die Wohlordnung des Kontinuums auf Schwierigkeiten. Man versuche nur, sich eine Ordnung der reellen Zahlen vorzustellen, bei der jedes Element einen unmittelbaren Nachfolger hat! Dennoch wissen wir, daß aus den Axiomen der Mengenlehre, wie sie heute von den meisten Mathematikern verwendet werden, der Wohlordnungssatz folgt, daß sich also auch das Kontinuum wohlordnen läßt.

Der Leser verfalle nicht dem Irrtum, aus der Tatsache, daß dann jedes Element des Kontinuums einen unmittelbaren Nachfolger besitzt, ließe sich die Abzählbarkeit des Kontinuums herleiten! Zwar beginnt das Kontinuum nach seiner Umwandlung in eine wohlgeordnete Menge mit einer Folge, aber auf diese folgt eine weitere und so fort, wobei überabzählbar viele Folgen vorhanden sind.

Mit dem Wohlordnungssatz ist das Beiseitelassen derjenigen Ordnungstypen, die keine Ordnungszahlen darstellen, gerechtfertigt. Da sich jede Menge wohlordnen läßt und sich dabei ihre Kardinalzahl nicht ändert, kann man jede Kardinalzahl durch eine wohlgeordnete Menge vertreten lassen.

Jetzt kann eine Klassifikation von Ordnungszahlen durchgeführt werden.

ERKLRÄUNG:

▷ Die endlichen Ordnungszahlen 1, 2, 3, . . . und die Ordnungszahl 0 der leeren Menge werden (Ordnungs-)**Zahlen der ersten Zahlklasse** genannt.
Die unendlichen Ordnungszahlen der abzählbaren wohlgeordneten Mengen heißen abzählbar-transfinite (Ordnungs-)Zahlen oder **Zahlen der zweiten Zahlklasse**.

Zu den Zahlen der zweiten Zahlklasse gehören also die Ordnungszahlen

$$\omega,\ \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n\ (n \in N), \ldots, \omega+\omega=\omega \cdot 2,$$
$$\omega \cdot 2+1, \omega \cdot 2+2, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot \omega,$$
$$\omega \cdot \omega+1, \omega \cdot \omega+2, \ldots, \omega \cdot \omega+\omega, \ldots$$

Jede Menge, die eine dieser Ordnungszahlen repräsentiert, ist abzählbar. Dagegen ist die Menge aller Zahlen der zweiten Zahlklasse, wie hier gleichfalls nicht bewiesen werden kann, überabzählbar.
Auch für folgenden wichtigen Satz kann hier der Beweis nicht erbracht werden:

SATZ 9:
▷ Jede Menge von Ordnungszahlen, die nach der Kleinerrelation geordnet ist, ist wohlgeordnet.

Dieser Satz hat zur Folge, daß in solch einer Menge jede Ordnungszahl einen unmittelbaren Nachfolger hat. Auf $\omega$ folgt z. B. unmittelbar $\omega+1$ als nächste Ordnungszahl, auf $\omega \cdot \omega$ folgt $\omega \cdot \omega+1$. Es gibt keine Ordnungszahl dazwischen. Damit besitzen die Ordnungszahlen die Nachfolger-Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Aber noch eine weitere (bereits auf S. 293f. erwähnte) wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen zeichnet sie aus: Beim Zählen einer endlichen Menge gibt die letzte Ordnungszahl (wir sprechen die Ordnungszahlen gewöhnlich: der erste, der zweite, ...) die Kardinalzahl der ganzen Menge an. Da wir beim Zählen die Elemente der Menge mit den Ordnungszahlen 1, 2, 3, ... belegt haben, sind die gezählte Menge und die Menge der zugeordneten Ordnungszahlen gleichmächtig. Die letzte Ordnungszahl gibt beim Zählen also zugleich die Anzahl der vorangegangenen Ordnungszahlen an. Zum Beispiel kann die Ordnungszahl 5 repräsentiert werden durch die geordnete Menge [1, 2, 3, 4, 5].
Bei transfiniten Ordnungszahlen gilt das Entsprechende. Nur ist hier in Rechnung zu setzen, daß nach unseren Festsetzungen die wohlgeordnete Menge aller Ordnungszahlen, die kleiner oder gleich einer Ordnungszahl $\alpha$ sind, die Ordnungszahl $\alpha+1$ hat. So ist, da die Ordnungszahl der

Menge [1, 2, 3, 4, ...] gleich $\omega$ ist,
die der Menge [1, 2, 3, 4, ..., $\omega$] gleich $\omega+1$,
die der Menge [1, 2, 3, ..., $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2$] gleich $\omega \cdot 2+1$ usw.

Auf Grund dieser Eigenschaften kann man die nach der Kleinerrelation geordnete Menge der Ordnungszahlen als eine Fortsetzung der Folge der natürlichen Zahlen ins Transfinite hinein ansehen. Wir haben mit dieser Menge nämlich eine Größenskala gewonnen, mit der wir nicht nur endliche, sondern auch unendliche Mengen messen können. Dies geschieht folgendermaßen: Ist $M$ eine beliebig gegebene unendliche Menge, so läßt sie sich wohlordnen. Diese wohlgeordnete Menge ist genau einem Abschnitt der folgenden wohlgeordneten Menge der Ordnungszahlen ähnlich:
$1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2+1, \omega \cdot 2+2, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot 4, \omega^2, \omega^2+1, \ldots, c, c+1, c+2, \ldots, c+\omega, \ldots$ Ist sie zum Beispiel ähnlich dem Abschnitt von $\omega^2$, so ist ihre Ordnungszahl $\omega^2$.
Damit haben wir unser Ziel, unendliche Mengen größenmäßig zu erfassen, erreicht.
Diese Betrachtungen sollen durch eine Antinomie der Mengenlehre abgeschlossen

werden, die schon 1896 von CANTOR selbst brieflich HILBERT mitgeteilt, aber erst 1897 durch den italienischen Mathematiker BURALI-FORTI (CAESARE BURALI-FORTI, 1861 bis 1931), veröffentlicht wurde.

Wir wissen, daß jede Menge von Ordnungszahlen, die der Größe nach geordnet sind, wohlgeordnet ist, also eine Ordnungszahl besitzt. Sei jetzt $M$ die Menge aller Ordnungszahlen. Ihre Ordnungszahl sei $m$. Nun muß $m$ selbst in der Menge $M$ enthalten sein. Die Menge $M_1$ aller Ordnungszahlen, die kleiner gleich $m$ sind, ist selbst wohlgeordnet und eine Teilmenge von $M$. Die Ordnungszahl von $M_1$ ist $m + 1$. Wir stoßen damit auf den Widerspruch, daß $m + 1 \leqq m$ sein muß, da die Ordnungszahl einer Teilmenge nicht größer sein kann als die der ganzen Menge.

Die scheinbar wohlbestimmte Menge aller Ordnungszahlen ist also mit einem Widerspruch behaftet. Auch diese Menge weist ein Merkmal der Selbstbezüglichkeit auf: Durch die Annahme, daß eine Gesamtheit von Objekten Elemente enthält, die nur mittels der Gesamtheit definiert werden können, entsteht ein Zirkelschluß. Solche Mengen können bei einem konsequent axiomatischen Aufbau der Mengenlehre, wie er in den neueren Lehrbüchern (vgl. z. B. [7]) zu finden ist, nicht gebildet werden.

## 6.3. Aufgaben: Vergleich unendlicher Mengen

1. Wie kann ein $n$-tes Glied der auf S. 272 angeführten Folgen bei entsprechender Fortsetzung heißen? Bilden Sie das 10. Glied!

2. Welche Platznummer erhält bei dem Abzählverfahren für gebrochene Zahlen $\frac{5}{4}$? (↗ S. 273)

3. Welche rationale Zahl steht bei der Abzählung von S. 272 auf dem 13. Platz? (↗ S. 273)

4. Konstruieren Sie eine Abbildung, durch die die Äquivalenz folgender Mengen $A$ und $B$ nachgewiesen wird!
   a) $A$: Menge aller Punkte einer Strecke $\overline{DE}$,
      $B$: Menge aller Punkte einer Strecke $\overline{D'E'}$, beide mit Einschluß der Endpunkte.
   b) $A$: Menge der Punkte eines Strahls $OA$ ohne den Anfangspunkt $O$,
      $B$: Menge der Punkte einer Strecke ohne Endpunkte.
   c) $A$: wie in Aufgabe b),
      $B$: Die auf einem Halbkreisbogen ohne Zurechnung der Endpunkte liegende Punktmenge.
   d) $A$: Menge der Punkte einer Geraden,
      $B$: Menge aller Punkte einer Kreislinie mit Ausschluß eines einzigen Punktes $Z$.

   Hinweis zur Lösung: Bringen Sie die Träger der Punktmengen in eine geeignete Lage und benutzen Sie Projektionen ähnlich wie in Bild 6.6.! (↗ S. 275)

5. Zeigen Sie, daß Summe und Produkt zweier Kardinalzahlen von den Vertretermengen unabhängig sind! (↗ S. 292)

6. Weisen Sie nach, daß folgende Paare geordneter Mengen einander ähnlich sind:
$(N, R_0)$ und $[3, 4, 5, \ldots]$,
$(N, R_3)$ und $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$,
$(N, R_4)$ und $[0, +1, +2, \ldots, -1, -2, \ldots]$! (↗ S. 297)

7. Prüfen Sie Bild 6.1. (S. 266), in dem der Strecke $\overline{AX}$ die Strecke $\overline{AY}$ mit doppelter Länge zugeordnet ist, und Bild 6.6. (S. 275) daraufhin, ob bei verschieden gewählten Orientierungen der Träger der Mengen
a) eine ähnliche Abbildung vorliegt,
b) ähnliche Mengen vorliegen und
c) versuchen Sie, im Fall b) eine ähnliche Abbildung anzugeben! (↗ S. 298)

8. Es seien $B_1$, $B_2$ zwei wohlgeordnete Mengen und $B_1$ einem Abschnitt von $B_2$ ähnlich. Zeigen Sie, daß $B_1$ dann nicht der ganzen Menge $B_2$ ähnlich sein kann! (↗ S. 306)

9. Weisen Sie nach, daß die auf S. 306 für Ordnungszahlen erklärte Kleiner-Relation eine irreflexive Ordnungsrelation ist!

# 7. ANWENDUNGEN VON MENGEN IM SCHULSTOFF

In den vorangegangenen Kapiteln kamen schon vielfach Anwendungen von Mengen und Relationen im Schulstoff vor. Es sei hier noch einmal erinnert an Punktmengen (z. B. sog. geometrische Örter), an die Anwendung von Teilmengen zur Herstellung eines systematischen Überblicks (Einteilung der Dreiecke, der Vierecke), an Abbildungen der Ebene auf sich (Symmetrie-, Kongruenz-, Ähnlichkeitsabbildungen), vor allem an den Aufbau der Zahlenbereiche und an den Funktionsbegriff. Dabei wird sicherlich die jeweils oben gegebene Darstellung nicht ohne weiteres auf den Unterricht übertragbar sein. Es wird noch vieler methodischer Überlegungen und Erprobungen in der Praxis bedürfen, bis Klarheit darüber besteht, ob, wie und in welchem Umfang bei den genannten Unterrichtsgegenständen Mengen und Relationen heranzuziehen sind. Dies bezieht sich auch auf die folgenden Ausführungen, die sich zwar auf Gegenstände des Schulstoffs beziehen, aber z. T. über die Lehrplanforderungen hinausgehen.

## 7.1. Anwendungen in der Gleichungslehre

Im folgenden soll auf ein weiteres Lehrplangebiet eingegangen werden, das in den vorigen Kapiteln kaum berührt wurde, und in dem die Verwendung von Begriffen der Mengenlehre wesentlich zur Klärung beitragen kann: auf die Lehre von Gleichungen und Ungleichungen und auf ihre Anwendung in der Koordinatengeometrie.[1] Dabei werden uns häufig außer Zahlen die Variablen $a, b, c, \ldots, x, y, z$ begegnen. Im Einklang mit der Erklärung von Kapitel 1 (S. 15 f.) und 4 (S. 126) soll unter einer Variablen ein

[1] Die Ausführungen dieses Kapitels stützen sich im wesentlichen auf Untersuchungen von Dr. Kurt Ilgner, die durch eine Anzahl von Schulversuchen in Berlin-Weißensee erprobt wurden und die den Gegenstand seiner Dissertation bilden.

Zeichen verstanden werden, für das ein beliebiges Element aus einem bestimmten Bereich eingesetzt werden kann. In diesem Kapitel wird dieser Bereich fast immer ein Zahlenbereich sein.
Zahlen und Variablen werden in der Mathematik mit dem gemeinsamen Namen **Terme** bezeichnet. Sind $t_1$ und $t_2$ Terme, so sollen auch $t_1 \pm t_2$, $t_1 \cdot t_2$, $t_1^{t_2}$ (falls $[t_1, t_2] \neq [0, 0]$) und (falls $t_2 \neq 0$) $\frac{t_1}{t_2}$ Terme sein. Ferner soll auch $|t|$ ein Term sein. Gegebenenfalls wird nachträglich die Menge der Terme erweitert werden, zum Beispiel durch trigonometrische Ausdrücke.

ERKLÄRUNG:

▷ Werden zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen „=“ bzw. durch ein Ungleichheitszeichen „>“ oder „<“ verbunden, so entsteht eine **Gleichung** bzw. eine **Ungleichung**.

BEISPIELE:

$$3+5=4+4,\quad 3+5=5+6,\quad 2x-3=\frac{3}{x^2},\quad 7-2a=5+3b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a+b)^2=a^2+b^2,$$
$$7-2<4+5,\quad 7-2<1+3,\quad 1-x>3x,\quad y<x,\quad 3y>x+z.$$

Den Leser wird es vielleicht befremden, daß in diesen Beispielen auch falsche Gleichheits- bzw. Ungleichheitsaussagen auftreten. In obenstehender Erklärung wird aber nicht verlangt, daß bei Verbindung zweier Terme durch das Zeichen „=“ bzw. „<“ oder „>“ eine **wahre** Aussage entsteht. Zum Beispiel ist ja auch eine falsche Schülerantwort eine Aussage.
Uns werden insbesondere solche Gleichungen und Ungleichungen interessieren, in denen Variablen auftreten. In den Beispielen kamen solche mit einer, zwei und drei Variablen vor. Solche Gleichungen und Ungleichungen sind keine Aussagen, über deren Wahrheit oder Falschheit entschieden werden kann. Dies ist aber sicher möglich, wenn für die Variablen Zahlen aus einem bestimmten Zahlenbereich eingesetzt werden. So ist die Gleichung $3+x=2$ weder als wahr noch als falsch zu bezeichnen. $3+0=2$ ist eine falsche, $3+(-1)=2$ eine wahre Aussage. Entsprechend ist $x<y$ weder wahr noch falsch. $5<9$ dagegen eine wahre, $5<4$ eine falsche Ungleichheitsaussage. Gleichungen und Ungleichungen, die Variablen enthalten, sind Aussageformen (↑ Kap. 1, S. 15). Allerdings kam bereits ein Beispiel vor, in dem nur Variablen auftraten, und das doch vielfach als eine schlechthin wahre Aussage gilt, nämlich die sogenannte binomische Formel

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Auf solche Fälle soll später eingegangen werden.
Die einfachsten unter den Gleichungen mit Variablen sind die sogenannten **linearen Gleichungen mit einer Variablen**, zum Beispiel

$x+3=7$ (im Bereich $G$ der ganzen Zahlen),
$a+2=5$ (im Bereich $N$ der natürlichen Zahlen),

$$5 - 2y = 6y - \frac{13}{2} \text{ (im Bereich } R \text{ der rationalen Zahlen),}$$

$$3x - 5 = \pi - \sqrt[3]{10} \text{ (im Bereich } P \text{ der reellen Zahlen).}$$

In ihnen tritt die Variable nur in der ersten Potenz auf.
Für die Variable kann ein beliebiges Buchstabensymbol benutzt werden, doch wird gewöhnlich der Buchstabe $x$ verwendet. Sind mehrere Variablen vorhanden, so bevorzugt man die letzten Buchstaben des Alphabets.

### 7.1.1. *Lösen von Gleichungen und Ungleichungen*

Was heißt nun: eine Gleichung, etwa

(a) $\quad 7 - 2x = 22 + 3x$

„lösen"? An Stelle der Variablen wollen wir zunächst ein leeres Kästchen schreiben, in das wir Zahlen – sagen wir aus $R$ – einsetzen dürfen:

(b) $\quad 7 - 2 \cdot \square = 22 + 3 \cdot \square.$

Die Menge $R$ heißt der **Grundbereich** für die Gleichung. Ist die Gleichung mit ihrem Grundbereich vorgegeben, so müssen die in der Gleichung auftretenden Zahlen diesem Grundbereich sämtlich angehören und die in den Termen enthaltenen Rechenoperationen sämtlich in ihm ausführbar sein. Andernfalls ist der Grundbereich entsprechend abzuändern. So könnte z. B. für die Gleichung $3x - \sqrt{5} = \pi - \sqrt[3]{10}$ der Bereich $R$ nicht als Grundbereich gewählt werden, weil $\sqrt{5}$, $\pi$ und $\sqrt[3]{10}$ nicht Elemente von $R$ sind und beim Einsetzen von rationalen Zahlen für $x$ die in den Termen enthaltenen Rechenoperationen in $R$ nicht ausgeführt werden können. *Der Grundbereich muß die in der Gleichung auftretenden Zahlen enthalten, und die in den Termen auftretenden Operationen müssen in ihm ausführbar sein.*
Wir suchen jetzt für die Gleichung (b) eine solche rationale Zahl, die, in das Kästchen eingesetzt, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Zahl ergibt, also kurz gesagt, zu einer wahren Aussage führt. Gelingt uns dies, so heißt die gefundene Zahl **Lösung der Gleichung**, und wir sagen, daß die gefundene Zahl **die Gleichung erfüllt.**

ERKLÄRUNG:

▷ **Eine Gleichung lösen** heißt, alle Zahlen aus dem Grundbereich finden, die die Gleichung erfüllen. Sie bilden die **Lösungsmenge** der Gleichung.

Es ist keineswegs selbstverständlich, daß solche Zahlen bei einer bestimmten Gleichung existieren. Zum Beispiel gibt es im Grundbereich $N$ der natürlichen Zahlen für die Gleichung

(c) $\quad 3 + x = 2$

und im Grundbereich $G$ der ganzen Zahlen für die Gleichung

(d) $\quad 3x = 2$

keine Lösung, die Lösungsmenge ist leer. Dagegen besitzt die Gleichung (c) im Grundbereich $G$ die Lösungsmenge $L = \{-1\}$ und die Gleichung (d) im Grundbereich $R$ die Lösungsmenge $L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. Das Entsprechende gilt für Ungleichungen. Die Ungleichung $x < 0$ ist im Grundbereich $N$ „unlösbar“, d. h., die Lösungsmenge ist die leere Menge; wird aber für den Grundbereich der Bereich $G$ der ganzen Zahlen vorgegeben, so hat dieselbe Ungleichung sogar eine unendliche Lösungsmenge: sie besteht aus allen negativen Zahlen.
Wir stellen fest:

*Die Lösungsmenge einer Gleichung oder Ungleichung hängt von der Art des Grundbereichs ab.*

In einer Gleichung können mehrere Variablen $a, b, c, \ldots$ außer $x$ auftreten, die alle auf denselben Grundbereich $M$ bezogen sind. Nehmen wir an, daß die Gleichung „nach $x$ aufgelöst“ werden soll. Das bedeutet, daß alle Zahlen von $M$ zu suchen sind, die, in die Gleichung für $x$ eingesetzt, diese zu einer richtigen Gleichheitsaussage machen, welche Zahlen aus $M$ auch immer für $a, b, c, \ldots$ eingesetzt werden. Diese Auszeichnung der Variablen $x$, nach der aufgelöst werden soll, muß zum Ausdruck gebracht werden. Fehlt eine solche Angabe z. B. bei der Gleichung $ax + b = c$ (Grundbereich $R$), so kann die Aufgabe so verstanden werden, daß alle Zahlen aus $R$ zu bestimmen sind, die, in das Kästchen bei

$$ax + \square = c$$

eingesetzt, zu einer wahren Aussage führen, gleich welche Zahlen für $a, x, c$ eingesetzt werden. Aber auch $a$ bzw. $c$ bzw. $x$ können als die Variable aufgefaßt werden, nach denen die Gleichung aufgelöst werden soll.
Es können auch mehrere Variablen ausgezeichnet werden, nach denen eine Gleichung aufzulösen ist. Zum Beispiel kann nach allen Zahlenpaaren des Grundbereichs gefragt werden, die, für $x$ und $y$ in

$$ax + by = c$$

eingesetzt, diese Gleichung zu einer richtigen Gleichheitsaussage machen, gleich welche Zahlen des Grundbereichs für $a, b, c$ eingesetzt werden.
Entsprechendes gilt wieder für Ungleichungen. *Diejenigen Variablen, nach denen jeweils eine Gleichung bzw. Ungleichung aufgelöst werden soll, sind zu kennzeichnen.*

**Zusammenfassung:**
**Für jede Gleichung (Ungleichung), die Variablen enthält, muß ein Grundbereich $A$ angegeben werden, aus dem die für die Variablen einsetzbaren Zahlen entnommen sind. Diese Menge $A$ ist so zu bestimmen, daß alle in der Gleichung auftretenden Zahlen in $A$ enthalten und die vorgeschriebenen Operationen in $A$ ausführbar sind. Diejenigen Variablen, nach denen jeweils die Gleichung aufgelöst werden soll, sind zu kennzeichnen. Die Aufgabe besteht dann darin, alle Zahlen aus $A$ zu finden, die, in die Gleichung für die jeweils ausgezeichneten Variablen eingesetzt, diese zu einer richtigen Aussage machen. Diese Zahlen bilden die Lösungsmenge $L$ der Gleichung.**

Wenn z. B. die Gleichung $ax + b = c$ nach $x$ aufgelöst werden soll (Grundbereich $R$), so trägt folgende Schreibweise diesen Forderungen Rechnung:

$$L = \{x;\, x \in R,\ a \in R,\ b \in R,\ c \in R \text{ und } ax + b = c\},$$

gelesen: „Gesucht ist die Menge $L$ aller Zahlen aus $R$, die an Stelle von $x$ in $ax + b = c$ ($a$, $b$, $c$, beliebig rational) eingesetzt, die Gleichung erfüllen", oder auch: „Gesucht sind alle rationalen Zahlen, die, an Stelle von $x$ in $ax + b = c$ ($a$, $b$, $c$ beliebig rational) eingesetzt, zu einer wahren Gleichheitsaussage führen." Soll die Gleichung nach $b$ aufgelöst werden, so ist die Lösungsmenge zu schreiben:

$$L = \{b;\, b \in R,\ a \in R,\ x \in R,\ c \in R \text{ und } ax + b = c\},$$

gelesen: „Gesucht ist die Menge $L$ aller Zahlen aus $R$, die, an Stelle von $b$ in $ax + b = c$ eingesetzt, die Gleichung erfüllen, gleich, welche Zahlen aus $R$ für $a$, $x$, $c$ eingesetzt werden." Die beiden Aufgaben werden natürlich verschiedene Lösungsmengen ergeben. Wir schreiben noch einmal die Lösungsmenge von Gleichung (c) (↑ S. 313) als Beispiel für die Abhängigkeit vom Grundbereich auf:

$$L = \{x;\, x \in N \text{ und } 3 + x = 2\},$$
$$L = \emptyset$$

aber:

$$L = \{x;\, x \in G \text{ und } 3 + x = 2\},$$
$$L = \{-1\}, \text{ oder}$$
$$L = \{x;\, x \in R \text{ und } 3 + x = 2\},$$
$$L = \{-1\}.$$

Für die Lösungsmenge der Ungleichung $x < 3$ schreiben wir im Grundbereich $N$ bzw. $G$:

$$L = \{x;\, x \in N \text{ und } x < 3\},$$
$$L = \{1, 2\}, \text{ bzw.}$$
$$L = \{x;\, x \in G \text{ und } x < 3\},$$
$$L = \{x;\, x \in G \text{ und } x < 0\} \cup \{0, +1, +2\}.$$

Entsprechend erklären und schreiben wir die Lösungsmenge bei Gleichungen mit zwei und mehr Variablen. Zum Beispiel soll die Gleichung $8 - 2a = 5 + 3b$ in $R$ nach den Variablen $a$ und $b$ aufgelöst werden. Wir denken uns jetzt an Stelle von $a$ und $b$ verschieden umrandete Leerstellen:

$$8 - 2 \cdot \square = 5 + 3 \cdot \triangle$$

Die verschiedene Umrandung der freien Stelle soll andeuten, daß nicht an beiden Stellen dieselbe Zahl eingesetzt werden muß. Zum Beispiel kann eingesetzt werden:

$$8 - 2 \cdot \boxed{3} = 5 + 3 \cdot \overset{\triangle}{9}$$

Das Paar [3, 9] ist allerdings keine Lösung, da $8 - 6 \neq 5 + 27$.
Wir schreiben die Lösungsmenge

$$L = \{[a, b];\, [a, b] \in R \times R \text{ und } 8 - 2a = 5 + 3b\},$$

in Worten: „Wir suchen alle Zahlenpaare aus $R \times R$, die, an Stelle von $a$ bzw. $b$ in die Gleichung $8 - 2a = 5 + 3b$ eingesetzt, diese erfüllen, d. h. zu einer wahren Gleichheitsaussage führen.“ Es mag den Leser vielleicht befremden, daß nicht einfach gesagt wird, $a$ und $b$ müßten dem Bereich $R$ entnommen sein, und daß nicht hinter dem Semikolon geschrieben wird: $a \in R$, $b \in R$. In der Schreibweise der Lösungsmenge wurde aber hinter dem Semikolon der Bereich angegeben, dem das vor dem Semikolon genannte Element angehört. Da $[a, b]$ ein geordnetes Paar ist ($a \in R$ und $b \in R$), wurde als Grundbereich $R \times R$ genannt.

Soll dagegen dieselbe Gleichung nur nach $a$ aufgelöst werden, so ist dies folgendermaßen auszudrücken:

$$L = \{a;\, a \in R \text{ und } b \in R \text{ und } 8 - 2a = 5 + 3b\},$$

in Worten:

„Wir suchen für jedes $b$ aus $R$ alle Zahlen aus $R$, die, für $a$ in die Gleichung

$$8 - 2a = 5 + 3b$$

eingesetzt, diese erfüllen.“ Wir erkennen, wie unmißverständlich bei aller Kürze die Schreibweise der Lösungsmenge ist. In diesem Fall fungiert $b$ als Parameter, von dem $a$ im allgemeinen abhängt.

Ganz entsprechend erklären wir die Lösung einer Ungleichung.

$$L = \{x;\, x \in N \text{ und } x < 10\},$$

in Worten:

„Wir suchen alle natürlichen Zahlen, die, für $x$ in $x < 10$ eingesetzt, die Ungleichung erfüllen, d. h. sie zu einer wahren Ungleichheitsaussage machen.“ In diesem Fall ist

$$L = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9,\}.$$[1]

Noch ein Beispiel für eine Ungleichung mit mehreren Variablen:

$$L = \{[x, y];\, [x, y] \in R \times R \text{ und } y < x\},$$

in Worten:

„Gesucht sind alle Paare rationaler Zahlen, die für $x$ bzw. $y$ in $y < x$ eingesetzt, die Ungleichung erfüllen.“ In diesem Fall enthält die Lösungsmenge unendlich viele Paare $[x, y]$, z. B. $\left[7, \frac{3}{2}\right]$ oder $[-3, -5]$.

Wir wollen jetzt versuchen, die Gleichung

(1) $\quad 7 - 2x = 22 + 3x$ (Grundbereich $R$)

durch Erraten zu lösen. Setzen wir die rationale Zahl 0 ein, so ergibt sich

| links | rechts |
|---|---|
| $7 - 2 \cdot \boxed{0}$ | $22 + 3 \cdot \boxed{0}$. |

Links steht 7, rechts 22. Das sind verschiedene Zahlen; 0 ist also kein Element der Lösungsmenge. Versuchen wir es mit der rationalen Zahl 1:

| links | rechts |
|---|---|
| $7 - 2 \cdot \boxed{1}$ | $22 + 3 \cdot \boxed{1}$. |

[1] Der Bereich der natürlichen Zahlen wird hier verstanden als die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Es ist also $0 \notin N$.

Links steht 5, rechts 25; auch 1 ist keine Lösung. Setzen wir 3 ein, so ergibt sich $1 = 31$, wieder eine falsche Aussage. Wenn wir es mit negativen Zahlen versuchen, so führt schließlich das Einsetzen von $-3$ auf

| links | rechts |
|---|---|
| $7 - 2 \cdot \boxed{-3}$ | $22 + 3 \cdot \boxed{-3}$, |

$13 = 13$, die rationale Zahl $-3$ gehört zur Lösungsmenge. Lassen wir es zunächst dahingestellt, ob die Lösungsmenge von (1) noch weitere Elemente enthält, und versuchen wir, die Methode des planmäßigen Erratens durch ein systematisches Vorgehen zu ersetzen.

Wir betrachten hier nur den einfachsten Typ von Gleichungen, lineare Gleichungen. Darunter gibt es wiederum eine Klasse besonders leicht zu lösender Gleichungen: Die Gleichung $x = 4$ (Grundbereich $P$) läßt die Lösung sofort erkennen; es gibt genau eine Zahl des Grundbereichs, die gleich 4 ist, nämlich die 4 selbst. Also können wir schreiben:

$$L = \{x;\, x \in P \text{ und } x = 4\} = \{4\}.$$

Wenn es uns gelingt, Gleichungen vom Typ der Gleichung (1) zu einer Gleichung der Form $x = \ldots$ umzuwandeln, in der $x$ isoliert auftritt, so ist die Lösungsmenge sofort ersichtlich. Das Entsprechende gilt für Ungleichungen.

Eine Handhabe für die gewünschten Umformungen von Gleichungen und Ungleichungen bieten die Rechengesetze, die in dem jeweiligen Grundbereich gelten, insbesondere die Monotoniegesetze:

| | |
|---|---|
| Ist $a < b$, so ist | $a \pm c < b \pm c$; |
| ist $c > 0$, so ist außerdem | $a \cdot c < b \cdot c$ und $a : c < b : c$; |
| ist $c < 0$, so ist | $a \cdot c > b \cdot c$ und $a : c > b : c$. |
| Ist $a = b$, so ist | $a \pm c = b \pm c$, $a \cdot c = b \cdot c$ und, falls $c \neq 0$, $a : c = b : c$. |

Wir ergänzen diese Rechengesetze durch ein weiteres, das wir brauchen werden:

> Ein Produkt von Termen ist dann und nur dann gleich 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.

BEISPIEL 1:

Wie nehmen jetzt an, in Gleichung

$$(1) \qquad 7 - 2x = 22 + 3x$$

bedeute $x_0$ bereits eine Lösung, das heißt, eine Zahl, für die die Gleichheitsaussage

$$(1^*) \qquad 7 - 2x_0 = 22 + 3x_0$$

wahr ist. Sie bleibt wahr, wenn wir auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren. Diese Operation wollen wir dadurch andeuten, daß wir neben der Gleichung einen senkrechten Strich ziehen und daneben die auf beiden Seiten auszuführende Rechenoperation schreiben, zunächst die Subtraktion von $3x_0$, dann die von 7.

| | | |
|---|---|---|
| | $7 - 2x_0 = 22 + 3x_0$ | $\mid -3x_0$ |
| (1a) | $7 - 5x_0 = 22$ | $\mid -7$ |
| (1b) | $-5x_0 = 15.$ | |

Diese Gleichheitsaussage bleibt wahr, wenn wir auf beiden Seiten durch dieselbe von 0 verschiedene Zahl dividieren:

(1b) $\quad -5x_0 = 15 \qquad | : (-5)$

(1c) $\quad x_0 = -3,$

Dies ist eine Gleichung der gewünschten Art. Damit wissen wir: Wenn überhaupt die „Ausgangsgleichung" (1) eine Lösung hat, so muß dies auch Lösung von (1a), (1b), (1c) sein, und für (1c) kommt nur die Zahl $-3$ in Frage. Wenn also (1) überhaupt eine nichtleere Lösungsmenge hat, so ist $L = \{-3\}$.
Daraus folgt aber noch nicht unmittelbar, daß überhaupt die Ausgangsgleichung eine Lösung hat. In unserem Fall allerdings wissen wir es zufällig, weil wir bereits vorher durch Probieren festgestellt hatten, daß die Zahl $-3$ die Gleichung (1) erfüllt.
Wenn wir jetzt weitere lineare Gleichungen in die Form $x = \ldots$ überführen, so muß geprüft werden, ob die so gefundene Zahl tatsächlich die Ausgangsgleichung erfüllt. Denn wir sind ja von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Ausgangsgleichung für eine bestimmte Zahl $x_0$ erfüllt sei. Diese Prüfung ist nicht überflüssig. Wir werden dies durch einige Beispiele belegen. Vorher sei eine Bemerkung über die Schreibweise eingefügt, die im folgenden zu beachten ist:
Eine Gleichung oder Ungleichung, die eine Variable enthält, ist eine Aussageform, und als solche weder richtig noch falsch. Operieren kann man aber nur mit wahren Aussagen. Um nämlich zwischen den beiden Seiten nach Multiplikation mit $(-1)$ das richtige Zeichen ($=, <, >$) setzen zu können, muß man wissen, ob vor der Multiplikation die auf der linken Seite stehende Zahl gleich, kleiner oder größer als die rechts stehende Zahl war. Man muß sich also die Gleichung in eine Aussage umgeschrieben denken, bei der für die Variable $x$ eine bestimmte Zahl $x_0$ des Grundbereichs eingesetzt ist, wie dies oben geschah, als von der Form (1) zur Aussage (1*) übergegangen wurde. Aus Gründen der Bequemlichkeit ist es üblich, die Schreibweise mit $x$ beizubehalten.

BEISPIEL 2:
Es sollen 50 Eier in drei verschieden große Kartons verpackt werden. In den größten Karton passen 6 Eier mehr als in den mittleren, in diesen wieder 6 Eier mehr als in den kleinsten Karton. Wie ist zu packen, wenn jeder Karton ganz gefüllt werden soll?
Zwecks Lösung der Aufgabe müssen wir zunächst den Text analysieren. Wenn wir wissen, wieviel Eier in den kleinsten Karton passen – nennen wir diese Anzahl $x$ –, so haben wir auch die Anzahl der Eier des mittleren und des größten Kartons. Im ganzen sind 50 Eier zu verpacken. Wir stellen dies übersichtlich dar:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{kleinster Karton:} & x \text{ Eier} \\ \text{mittlerer Karton:} & (x+6) \text{ Eier} \\ \text{größter Karton:} & (x+6)+6 \text{ Eier} \end{array}\right\} \text{ zusammen 50 Eier.}$$

Wir gelangen zu folgender Gleichung:

(2) $\quad x + (x+6) + [(x+6)+6] = 50.$

Unsere Aufgabe läßt sich jetzt schreiben:

$$L = \{x; x \in N \text{ und } x + (x+6) + [(x+6)+6] = 50\}.$$

Dabei muß $N$ als Grundbereich angegeben werden, weil es sich um die Anzahl der Eier handelt. Wir formen weiter um:

(2a) $x + x + 6 + x + 6 + 6 = 50$

(2b) $3x + 18 = 50 \mid -18$

(2c) $3x = 32 \mid : 3$

(2d) $x = \frac{32}{3}$

Wir haben gefunden: Wenn eine Lösung existiert, so muß sie die Zahl $\frac{32}{3}$ sein. Diese Zahl ist aber nicht Element von $N$. Mithin hat die Gleichung (2) keine Lösung.

$$L = \{x; x \in N \text{ und } 3x + 18 = 50\} = \emptyset.$$

Die gestellte Aufgabe ist unlösbar, die Verpackung in der verlangten Form ist nicht ausführbar.

BEISPIEL 3:
Wir lösen zur Übung noch eine lineare Gleichung.

$$x - 7 = 6 - x \text{ (Grundbereich } R)$$
$$L = \{x; x \in R \text{ und } x - 7 = 6 - x\}$$

Angenommen, $x_0$ sei Lösung. Dann müßte gelten:

$$x_0 - 7 = 6 - x_0 \quad \mid + (x_0 + 7)$$
$$2x_0 = 13 \quad \mid : 2$$
$$x_0 = \frac{13}{2}$$

Wir prüfen, ob $\frac{13}{2}$ Lösung ist, indem wir diese Zahl auf beiden Seiten der Gleichung für $x$ einsetzen:

| linke Seite | rechte Seite |
|---|---|
| $\frac{13}{2} - 7$ | $6 - \frac{13}{2}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

Beide Seiten sind gleich, $\frac{13}{2}$ ist die einzige Lösung, $L = \left\{\frac{13}{2}\right\}$.

Nachdem wir zwei numerisch gegebene lineare Gleichungen gelöst haben, wollen wir uns der allgemeinen Form einer solchen Gleichung zuwenden.

$$L = \{x; x \in R \text{ und } ax = b\} \qquad (a, b \text{ beliebig}),$$

(3) $ax = b.$

Hier sind zwei Parameter, $a$ und $b$, vorhanden, von denen die Lösung im allgemeinen abhängt.
Jetzt ist eine Fallunterscheidung erforderlich.

1. $a \neq 0$. Wir dividieren durch $a$.

$$ax = b \qquad | : a$$
$$x = \frac{b}{a}$$

Prüfung durch Einsetzen dieses Ausdrucks in (3) links und rechts:

linke Seite: $a \cdot \frac{b}{a}$ — rechte Seite: $b$

$b$ — $b$

Im 1. Fall ist $L$ wie bei den bereits gelösten linearen Zahlengleichungen eine Einermenge, $L = \left\{\frac{a}{b}\right\}$.

2. $a = 0$.

α) Ist $b \neq 0$, so lautet die Gleichung (3) $0 \cdot x = b$ $(b \neq 0)$.
Es gibt aber keine Zahl, die, für $x$ in die letzte Gleichung eingesetzt, auf eine wahre Aussage führt. Daher ist $L = \emptyset$.

β) Ist $b = 0$, so lautet die Gleichung (3) $0 \cdot x = 0$.
Diese Gleichung ist für jede Zahl des Grundbereichs erfüllt. Die Lösungsmenge hat unendlich viele Elemente, sie stimmt mit dem ganzen Grundbereich überein, $L = R$.
Wir stellen die Fälle noch einmal zusammen.

$$ax = b$$

$$\begin{array}{ll} a \neq 0: & L = \left\{\frac{b}{a}\right\}, \\ a = 0,\ b \neq 0: & L = \emptyset, \\ a = 0,\ b = 0: & L = R \end{array}$$

Damit ist die Gleichung in allen Fällen gelöst.

Aufgaben 1, 2 und 3

### 7.1.2. *Identitäten*

Der letzte Fall führt uns auf eine Gleichung eines bestimmten Typs, den wir uns näher ansehen wollen, auf eine sogenannte **Identität**. Bilden wir folgende Menge:

$$L = \{x;\ x \in P \text{ und } (x - 1)(x + 1) + 3 = x^2 + 2\}$$
$$(x - 1)(x + 1) + 3 = x^2 + 2$$
$$(x^2 - 1) + 3 = x^2 + 2$$
$$x^2 + 2 = x^2 + 2$$

Die linke und die rechte Seite der zu $L$ gehörenden Gleichung stimmen für jede Zahl des Grundbereichs, die wir für $x$ einsetzen, überein; es ist wieder $L$ mit dem ganzen Grundbereich identisch, $L = P$. Die Gleichung stellt eine **Identität** dar.

ERKLÄRUNG:

▷ Gleichungen, deren Lösungsmenge mit dem Grundbereich übereinstimmen, heißen **identisch erfüllte Gleichungen** oder **Identitäten**.

Eine Identität wird zu einer wahren Aussage, wenn beliebige Zahlen des Grundbereichs für die Variablen eingesetzt werden.
Weitere Beispiele für Identitäten:

$$4(x+5) = 20 + 4x, \qquad x \in R;\ L = R$$
$$(y+2)(y-2) = y^2 - 4,\ y \in R;\ L = R$$
$$\frac{2(a+1)-6}{2} = a - 2, \qquad x \in R;\ L = R$$

### 7.1.3. *Unerfüllbare Gleichungen und Ungleichungen*

Ein Gegenstück zu den identisch erfüllten Gleichungen bilden diejenigen Gleichungen, die durch **kein** Element des Grundbereichs erfüllt werden. Die Lösungsmenge ist dann die leere Menge. Solche Gleichungen werden als **unerfüllbare Gleichungen** bezeichnet. Entsprechend ist die Bezeichnung **unerfüllbare Ungleichung** zu verstehen.

ERKLÄRUNG:

▷ Eine Gleichung (Ungleichung), die bei keiner Ersetzung der Variablen durch Zahlen aus dem Grundbereich in eine wahre Aussage übergeht, heißt **unerfüllbar.**

Wir hatten oben bei Auflösung der Gleichung $ax = b$ schon im Fall $a = 0,\ b \neq 0$ eine unerfüllbare Gleichung kennengelernt.
Weitere Beispiele für unerfüllbare Gleichungen:

$$5 + x = 2, \qquad x \in N;\ L = \emptyset$$
$$5x = 2, \qquad x \in G;\ L = \emptyset$$
$$x^2 = 3, \qquad x \in R;\ L = \emptyset\ (\sqrt{3} \text{ ist irrational!})$$
$$x^2 = -1, \qquad x \in P;\ L = \emptyset$$
$$3(x+2) - 1 = 2(2+x) + x, \quad x \in P;\ L = \emptyset$$
$$x^2 + y^2 = 0, \qquad [x, y] \in (P \setminus \{0\}) \times P;\ L = \emptyset$$

Im letzten Beispiel ist $[x, y]$ ein Paar reeller Zahlen und $x \neq 0$.
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ ist aber nur durch das hier ausgeschlossene Paar $[0, 0]$ erfüllbar.
Beispiele für unerfüllbare Ungleichungen:

$$x < 0, \qquad x \in N;\ L = \emptyset$$
$$+2 < x < +3, \qquad x \in G;\ L = \emptyset$$
$$|x| < 0, \qquad x \in P;\ L = \emptyset$$
$$x^2 + y^2 < 0, \quad [x, y] \in P \times P;\ L = \emptyset$$

Kehren wir noch einmal zu den binomischen Formeln zurück. Die Gleichung

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ist für alle reellen Zahlen $a, b$ erfüllt. Also ist

$$L = \{[a, b]; [a, b] \in P \times P \text{ und } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\} = P \times P.$$

Die binomische Formel stellt also eine Identität dar. Das gleiche gilt von den anderen binomischen Formeln. Dies ist gemeint, wenn die binomischen Formeln ohne weiteres als „richtig“ bezeichnet werden. Man sollte aber doch besser bei ihrer ersten Formulierung hinzufügen: Für alle (rationalen, reellen usw.) Zahlen $a, b$ gilt ... Man kann ihr dann besser die oft aus Gedankenlosigkeit von Schülern genannte Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

gegenüberstellen, die zwar für unendlich viele, aber nicht für alle Zahlen des Grundbereichs richtig ist. Für alle Paare $[0, b]$ und $(a, 0]$ ist nämlich $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ eine richtige Aussage, aber für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ ist die Formel stets falsch. Denn die linke Seite beträgt $a^2 + 2ab + b^2$, so daß die Gleichung übergeht in

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= a^2 + b^2 \quad | -(a^2 + b^2) \\ 2ab &= 0, \end{aligned}$$

und daraus folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Bei dieser Gelegenheit kann man im Unterricht auf Existenz- und Allaussagen eingehen (↑ S. 16). „Es gibt reelle Zahlen $a, b$, für die $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ eine richtige Aussage wird“ und „Für alle reellen Zahlen $a, b$ ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eine richtige Aussage.“ Die zweite Gleichung ist eine Identität, die erste nicht.

Es seien noch einige Beispiele durchgerechnet, die zum Teil über den Schulstoff hinausgehen.

BEISPIEL 4:

Gegeben sei die folgende Gleichung, wobei der Grundbereich aus bestimmten Gründen noch offen gelassen wird.

$$(4) \qquad \frac{4}{x-5} = \frac{5}{3x-15} \quad \Big| \cdot (x-5)(3x-15)$$

$$(4a) \qquad 4(3x-15) = 5(x-5)$$

$$12x - 60 = 5x - 25 \quad | -5x + 60$$

$$(4b) \qquad 7x = 35 \quad | :7$$

$$(4c) \qquad x = 5\,.$$

Die Zahl 5 erfüllt aber die Ausgangsgleichung (4) nicht, weil die Terme $\frac{4}{x-5}$ und $\frac{5}{3x-15}$ für $x = 5$ nicht erklärt sind. Der Grundbereich für Gleichung (4) könnte mit $R \setminus \{5\}$ oder $P \setminus \{5\}$ angegeben werden, so daß die Lösungsmenge im zweiten Fall zu schreiben ist:

$$L = \left\{x; x \in P \setminus \{5\} \text{ und } \frac{4}{x-5} = \frac{5}{3x-15}\right\} = \emptyset.$$

Gleichung (4) ist in jedem Zahlenbereich unerfüllbar.

**Aufgabe 4**

BEISPIEL 5:

Ein weiteres andersartiges Beispiel diene der Warnung vor einem unkritischen Arbeiten mit Gleichungen.

(5) $\quad 3 + |x| = 2 \quad | - 3$

(5a) $\quad |x| = -1.$

Wenn eine Lösung von (5) existiert, so muß sie den absoluten Betrag — 1 haben. Es gibt aber keine Zahl mit solch einem Betrag. Legen wir den Bereich der reellen Zahlen zugrunde, so lautet die Lösung der Aufgabe

$$L = \{x; x \in P \text{ und } 3 + |x| = 2\} = \emptyset.$$

Der Leser wird sich vielleicht aus seiner Schulzeit an das oben bei gewöhnlichen linearen Gleichungen durchgeführte Umformungsverfahren als eines unbedingt zuverlässigen Lösungsverfahrens erinnern. (In der Tat ist es auch, wie wir sehen werden, in sehr vielen Fällen zuverlässig.) Die „Probe", bei der die gefundene Lösung in die „Ausgangsgleichung" eingesetzt wurde, galt dabei oft nur als Kontrolle der durchgeführten Rechnungen. Unsere Beispiele zeigen aber, daß das Einsetzen der gefundenen Zahlen in die Ausgangsgleichung zur Lösung gehört. Goniometrische Gleichungen, die in der Trigonometrie eine Rolle spielen, und Wurzelgleichungen liefern viele weitere Beweise dafür, daß die Prüfung gefundener Lösungen der umgeformten Gleichung notwendig ist.

Für den Leser, der mit diesen Gebieten vertraut ist, sei dafür ein Beispiel angefügt:

BEISPIEL 6: *

(6) $\quad 8 - \sqrt{4x - 15} = 13.$ (Wir lassen den Grundbereich zunächst fort.)

Damit

$\sqrt{4x - 15}$ ein Term ist, muß gefordert werden:

$4x - 15 \geqq 0,\ x \geqq \frac{15}{4}$. Der Grundbereich sei

$$S = \left\{x; x \in P \text{ und } x \geqq \frac{15}{4}\right\}.$$

Gleichung (6) führt nach Subtraktion von 8 zunächst auf

(6a) $\quad -\sqrt{4x - 15} = 5$ (Lösungsmenge $L_a$).

Diese Gleichung geht durch Quadrieren beider Seiten (Monotoniegesetz) über in

(6b) $\quad 4x - 15 = 25$, und diese in

$x = 10$ (Lösungsmenge $L_b = \{10\}$).

Die Zahl 10 erfüllt aber die Wurzelgleichung (6) nicht:

| links steht in der Gleichung | rechts steht in der Gleichung |
|---|---|
| $8 - \sqrt{4 \cdot 10 - 15}$ | 13 |
| $8 - \sqrt{25}$ | 13 |
| $8 - 5$ | 13 |
| $3$ | 13 |

Der Leser beachte dabei, daß die Quadratwurzel aus einer positiven Zahl stets positiv ist. Es haben (6) und (6a), ferner (6b) und (6c) dieselbe Lösungsmenge $L_a$ bzw. $L_b$, nicht aber (6a) und (6b). Zwar gilt $L_a \subseteqq L_b$, aber nicht $L_b \subseteqq L_a$. Gleichung (6) hat keine Lösung, obwohl 10 die Bedingung $x \geqq \frac{15}{4}$ erfüllt.

$$L = \{x;\, x \in S \text{ und } 8 - \sqrt{4x - 15} = 13\} = \emptyset.$$

Aufgabe 5

## 7.1.4. *Äquivalente Umformungen*

Wir wollen jetzt noch einmal die bei Gleichung (1) (↗ S. 317 f.) entwickelten weiteren Gleichungen nebeneinanderstellen:

(1) $\quad 7 - 2x = 22 + 3x$

(1a) $\quad 7 - 5x = 22$

(1b) $\quad -5x = 15$

(1c) $\quad x = -3\,.$

Die Lösungsmenge $L$ von (1) ist sicher in der von (1a), wir nennen sie $L_a$, enthalten, denn wenn eine Zahl, für $x$ eingesetzt, (1) erfüllt, so erfüllt sie auch (1a); also gilt $L \subseteqq L_a$. Ebenso gilt aber auch $L_a \subseteqq L$, denn von Gleichung (1a) gelangt man zu (1), indem man auf beiden Seiten $3x$ addiert.

(1a) $\quad 7 - 5x = 22 \qquad | + 3x$

$\quad\quad\;\; 7 - 2x = 22 + 3x\,.$

Ist also (1a) für eine bestimmte Zahl $x$ erfüllt, so ist es auch (1). Mithin gilt: $L = L_a$. Ebenso schließt man $L_a = L_b$, $L_b = L_c$, also $L_c = L$. Da $L_c = \{-3\}$ ist, ist auch $L = \{-3\}$.

Im Fall der Gleichung (1) ist also das Umformungsverfahren tatsächlich zuverlässig, es liefert die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung.

Wir haben die volle Lösung der Gleichung (1) gefunden, indem wir die Gleichung zu der Gleichung (1c) umgeformt haben, die dieselbe Lösungsmenge hat. Solche Gleichungen nennen wir **äquivalent.**

ERKLÄRUNG:

▷ Zwei Gleichungen mit derselben Lösungsmenge heißen **äquivalente Gleichungen.**

Aufgaben 6, 7, 8

Bei den Beispielen 4 und 6 lagen nichtäquivalente Umformungen vor. So gilt für

(4) $\quad \dfrac{4}{x-5} = \dfrac{5}{3x-15}$

und

(4a) $4(3x-15)=5(x-5)$

zwar $L \subseteqq L_a$, aber nicht $L_a \subseteqq L$. (Grundmenge $P \setminus \{5_1\}$).
Zu beachten ist:
In jedem Fall, indem wir nicht sicher sind, ob die Umformungen zu äquivalenten Gleichungen geführt haben, gehört zur Lösung das Einsetzen der gefundenen Zahlen in die Ausgangsgleichung.

Im folgenden Beispiel tritt ein neues Lösungsverfahren auf.

BEISPIEL 7:
Wir suchen nach allen Paaren $[x, y]$ reeller Zahlen, die die Gleichung

$$(5x+4)\cdot(y-3)=0$$

erfüllen, also

(7) $$L=\{[x,y];\ [x,y]\in P\times P \text{ und } (5x+4)\,(y-3)=0\}.$$

Hier soll ein Produkt aus zwei Faktoren gleich 0 sein, also muß mindestens ein Faktor gleich 0 sein.
Fall a): Der erste Faktor ist gleich 0. Wir bilden die Lösungsmenge

$$L_a=\{[x,y];\ [x,y]\in P\times P \text{ und } 5x+4=0\}.$$

$L_a$ besteht aus allen Paaren reeller Zahlen, bei denen die erste Zahl $-\frac{4}{5}$ beträgt, die zweite aber beliebig ist, also

$$L_a=\left\{[x,y];\ [x,y]\in\left\{-\frac{4}{5}\right\}\times P\right\}.$$

Fall b): Der zweite Faktor ist gleich 0. Wir bilden $L_b$:

$$L_b=\{[x,y];\ [x,y]\in P\times P \text{ und } y-3=0\}.$$

$L_b$ besteht aus allen Paaren reeller Zahlen, bei denen die zweite Zahl 3 beträgt, also

$$L_b=\{[x,y];\ [x,y]\in P\times\{3\}\}.$$

Jede Zahl aus $L_a$ oder $L_b$ gehört zu der Lösungsmenge $L$ der Gleichung $(5x+4)\cdot(y-3)=0$, also ist $L$ die Vereinigungsmenge dieser beiden Mengen,

$$L=L_a\cup L_b.$$

Dieses Beispiel macht uns noch auf einen Sachverhalt aufmerksam, der später durch die Veranschaulichung im Koordinatensystem noch deutlicher werden wird (↑ S. 330 ff.).
Wir haben zu unterscheiden zwischen folgenden Gleichungen:

1) $x=-\frac{4}{5}$, $x\in P$. Hier wird nach allen Elementen von $P$, also nach allen reellen Zahlen gefragt, die die Gleichung $x=-\frac{4}{5}$ erfüllen. Die Lösungsmenge

$$L_1=\left\{x;\ x\in P \text{ und } x=-\frac{4}{5}\right\}$$ besteht aus nur einem Element,

$$L_1=\left\{-\frac{4}{5}\right\}.$$

2) $x = -\frac{4}{5}$, $[x, y] \in P \times P$; jetzt werden alle *Zahlenpaare*, also alle Elemente von $P \times P$ gesucht, die die Gleichung erfüllen. Die Lösungsmenge

$$L_2 = \left\{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } x = -\frac{4}{5}\right\}$$

besteht aus unendlich vielen Zahlenpaaren, nämlich aus allen solchen, die Koordinaten von Punkten der Geraden $x = -\frac{4}{5}$ sind.

Zum Beispiel gilt $\left[-\frac{4}{5}, +1\right] \in L_2$, $\left[-\frac{4}{5}, 0\right] \in L_2$, aber $[0, 0] \notin L_2$.

Die Lösungsmenge $L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } (5x + 4)(y - 3) = 0\}$ wird später (↗ S. 333) noch einmal aufgegriffen werden.

BEISPIEL 8:

(8) $\quad \sin 2x \cdot \tan x = 0$

Damit (8) wirklich als Gleichung bezeichnet werden kann, erweitern wir zunächst den auf S. 312 erklärten Termbegriff so, daß mit $t$ auch $\sin t$ und $\tan t$ als Terme gelten; dabei ist aber zu beachten, daß $\tan t$ für ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$, also für die Zahlen $(2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ $(n \in G)$ nicht erklärt ist. Wir betrachten daher die Gleichung (8) in dem Grundbereich

$$P^* = P \setminus \left\{(2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad (n \in G)\right\}.$$

Die linke Seite der Gleichung (8) stellt das Produkt von zwei Termen dar. Wir betrachten gesondert die Fälle a) $\tan x = 0$, b) $\sin 2x = 0$.

Die Lösungsmenge $L_a$ ist durch folgende unendliche Menge gegeben:

$$L_a = \{x;\ x \in P^* \text{ und } \tan x = 0\} = \{n \cdot \pi;\ n \in G\};$$

b) Der in (8) links stehende Ausdruck $\sin 2x$ wird 0 für $2x = n\pi$ $(n \in G)$, also für $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$. Dabei ist aber zu beachten, daß die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ nicht im Grundbereich enthalten sind. Daraus ergibt sich

$$L_b = \{x;\ x \in P^* \text{ und } \sin 2x = 0\} = \{n \cdot \pi;\ n \in G\}.$$

Es gilt wieder: $L = L_a \cup L_b$. Wegen $L_a = L_b$ ergibt sich $L = \{n\pi;\ n \in G\}$.

Aufgabe 9

Wir wollen noch die Lösungsmengen einiger Ungleichungen bilden.

1.) $3x - 5 < x - 2$, $\quad x \in P \quad L = \{x;\ x \in P \text{ und } 3x - 5 < x - 2\}$.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &< x - 2 && \mid +5 \\ 3x &< x + 3 && \mid -x \\ 2x &< 3 && \mid :2 \\ x &< \frac{3}{2} && \qquad L = \left\{x;\ x \in P \text{ und } x < \frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Der Leser bestätige die Lösung durch Einsetzen einer Zahl aus $L$. Die Lösungsmenge ist auf der Zahlengeraden des Bildes 7.1. durch den dick ausgezogenen Strich markiert.

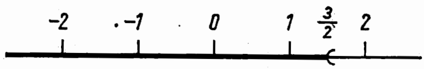


Bild 7.1.

2.) $3x - 5 < 8x + 15, \quad x \in P \qquad L = \{x; x \in P \text{ und } 3x - 5 < 8x + 15\}.$

$$\begin{aligned} 3x - 5 &< 8x + 15 && \mid + 5 \\ 3x &< 8x + 20 && \mid - 8x \\ -5x &< 20 && \mid : (-5) \text{ (vgl. das entsprechende Monotoniegesetz von S. 235)} \\ x &> -4 \end{aligned}$$

$L = \{x; x \in P \text{ und } x > -4\}$ (Bild 7.2.)

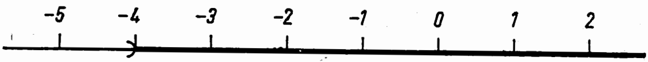


Bild 7.2.

3.) $|x| < 5, \quad x \in N \qquad L = \{x; x \in N \text{ und } |x| < 5\}$
$L = \{1, 2, 3, 4\}$ (Bild 7.3.)

Bild 7.3.

4.) $|x| < 5, \quad x \in G \qquad L = \{x; x \in G \text{ und } |x| < 5\}$
$L = \{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$ (Bild 7.4.)

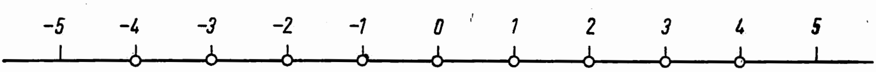


Bild 7.4.

5.) $|x| < 5, \quad x \in P \qquad L = \{x; x \in P \text{ und } |x| < 5\}$ (Bild 7.5.)

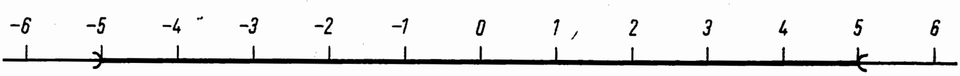


Bild 7.5.

6.) $a \cdot |x| < b, \qquad L = \{x; x \in P \text{ und } a \cdot |x| < b\}$

Hier sind wieder nach dem Charakter der reellen Zahlen $a$ und $b$ Fallunterscheidungen erforderlich.

Fall a): $a > 0, b > 0$. Dann ist auch $\frac{b}{a} > 0$.

$$|x| < \frac{b}{a}, \quad L = \left\{x; x \in P \text{ und } -\frac{b}{a} < x < +\frac{b}{a}\right\} \text{ (Bild 7.6.)}$$

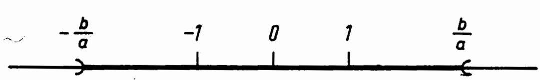


Bild 7.6.

Fall b): $a > 0, b < 0$.

$|x| < \frac{b}{a} < 0$, $L = \emptyset$. In diesem Fall ist die Ungleichung unerfüllbar.

Fall c): $a > 0, b = 0$.

$|x| < 0$, wieder ist $L = \emptyset$.

Fall d): $a = 0, b > 0$.

$0 \cdot |x| < b$. Diese Ungleichung ist für alle reellen Zahlen erfüllt. $L = P$ (identisch erfüllte Ungleichung).

Fall e): $a = 0, b < 0$.

$0 \cdot |x| < b < 0$, unerfüllbar, $L = \emptyset$.

Fall f): $a = 0, b = 0$.

$0 \cdot |x| < 0$, unerfüllbar, $L = \emptyset$.

Fall g): $a < 0, b > 0, \frac{b}{a} < 0$. Nach dem Monotoniegesetz von S. 235 gilt dann

$|x| > \frac{b}{a}$, identisch für alle reellen Zahlen erfüllt, $L = P$.

Fall h): $a < 0, b < 0$.

$|x| > \frac{b}{a} > 0$,

$L_1 = \left\{x; x \in P \text{ und } x < -\frac{b}{a}\right\}$

$L_2 = \left\{x; x \in P \text{ und } x > +\frac{b}{a}\right\}$ $\quad L = L_1 \cup L_2$. (Bild 7.7.)

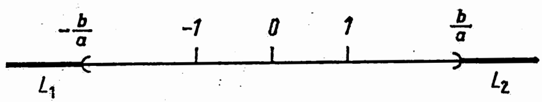


Bild 7.7.

Fall i): $a < 0, b = 0$.

$|x| > 0$, identisch erfüllt, außer für $x = 0$. (Bild 7.8.)

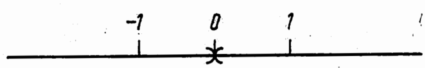


Bild 7.8.

Zum Abschluß dieser Anwendungen des Mengenbegriffs auf Gleichungen und Ungleichungen sei noch eine kritische Betrachtung der in der Schule früher üblichen Gleichungslehre gestattet. Der Begriff der Gleichung wurde gewöhnlich in einer etwas fragwürdigen Art als „Gleichheit" an Hand einer Tafelwaage gewonnen. Die Variable wurde als „Unbekannte" bezeichnet. Darin steckt verborgen die Hypothese, daß es solch eine Zahl geben müsse, die, obwohl zunächst unbekannt, sicher Lösung der Gleichung ist. Aus dieser Einführung der Gleichung erklären sich wohl zum Teil die früher häufig beobachteten Reaktionen unserer Schüler bei unerfüllbaren oder identisch erfüllten Gleichungen, wie sie in mathematischen Wettbewerben bisweilen auftreten. Schüler äußerten sich dann etwa: „Das ist keine Gleichung“, „die Gleichung ist falsch“ und ähnlich. Die binomischen Formeln zum Beispiel wurden den Schülern selten als Identitäten bewußt. Der neue Lehrplan sieht eine systematisch entwickelte Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen vor, die mathematisch einwandfrei und den Möglichkeiten der einzelnen Klassenstufen angepaßt ist. Versuche, die schon vor Jahren in dieser Richtung durchgeführt wurden, verliefen durchaus erfolgreich. Es ist zu hoffen, daß die Modernisierung der Gleichungs- und der Funktionslehre, dieser beiden so überaus wichtigen Gebiete der Schulmathematik, bald in einer besseren mathematischen Bildung unserer Absolventen Früchte tragen wird. Das ist gesichert, wenn der Lehrer die mengentheoretische Begründung dieser Gebiete beherrscht. Damit wird nicht gefordert, daß bei jeder im Unterricht auftretenden Gleichung die Lösung unbedingt als Menge zu schreiben ist. Nach gründlicher Klärung bei Einführung in dieses Gebiet sollte später die Schreibweise $L = \{\ldots\}$ nur dort verwendet werden, wo Ungenauigkeiten oder Mißverständnisse zu befürchten sind. Wie man sich einerseits vor mathematischen Fehlern hüten muß, so soll man doch andererseits unnötige Schwerfälligkeit und Pedanterie im Unterricht vermeiden.

## 7.2. Punktmengen

Auf S. 327f. war die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x\,|x| < b$$

in einigen typischen Fällen an der Zahlengeraden dargestellt worden. In dem nun folgenden Abschnitt sollen die Lösungsmengen von weiteren Gleichungen und Ungleichungen als ebene Punktmengen veranschaulicht werden.

Wir gehen dabei entsprechend vor wie bei der graphischen Darstellung von Funktionen in Kapitel 4 (↑ S. 131ff.). Es liege ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem vor. Die vier Quadranten bezeichnen wir wie in Bild 3.10., S. 74, mit I, II, III, IV. Es sei ferner $M$ die Menge aller Punkte der Ebene. Die Menge $P$ der reellen Zahlen kann isomorph hinsichtlich der Ordnung auf die von links nach rechts orientierte Punktmenge der $x$-Achse, die mit $M_1$ bezeichnet werde, abgebildet werden, ebenso aber auch auf die von unten nach oben gerichtete Punktmenge $M_2$ auf der $y$-Achse. Dann ist die Kreuzmenge $P \times P$ eineindeutig auf $M$ abgebildet. Zu jedem geordneten Zahlenpaar $[a; b]$ gehört genau ein Punkt von $M$ mit der $x$-Koordinate $a$ und der $y$-Koordinate $b$, und umgekehrt gehört zu jedem Punkt von $M$ genau ein geordnetes Paar reeller Zahlen.

Auf S. 75 traten u. a. die Geraden $x = 3$ und $y = -2$ auf. Die folgende Betrachtung soll vor einem Mißverständnis warnen, das bei einer kommentarlosen Angabe $x = 3$ bzw. $y = -2$ entstehen kann. Die Gerade $x = 3$ verläuft durch den Punkt $(3; 0)$ parallel zur $y$-Achse (Bild 7.9.). Die auf ihr liegende Punktmenge kann geschrieben werden in der Form:

$$\{g\} = \{P(x; y);\ P \in M \text{ und } x = 3\},$$

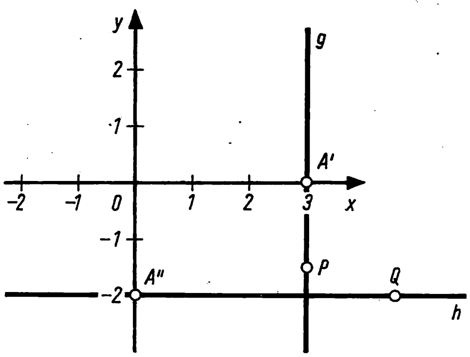


Bild 7.9.

zu lesen: „$g$ ist die Menge aller Punkte $P$ mit den Koordinaten $x$ und $y$, für die $x = 3$ ist“ (unter $P$ ist hier nicht der Körper der reellen Zahlen zu verstehen).
Entsprechend kann die auf der Geraden $h$ ($y = -2$) liegende Punktmenge geschrieben werden:

$$\{h\} = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = -2\};$$

Schränken wir in den Ausdrücken für die Menge $\{g\}$ bzw. $\{h\}$ die Menge $M$ aller Punkte der Ebene ein auf die Menge $M_1$ der Punkte auf der $x$-Achse bzw. auf die Menge $M_2$ der Punkte auf der $y$-Achse, das heißt: bringen wir die Geraden $g$ bzw. $h$ zum Schnitt mit einer Koordinatenachse, so ist nach der Bezeichnung von Bild 7.9.

$$\{A'\} = \{P(x; y);\ P \in M_1 \text{ und } x = 3\},$$
$$\{A''\} = \{Q(x; y);\ Q \in M_2 \text{ und } y = -2\}.$$

Beide Mengen sind Einermengen, sie enthalten nur einen einzigen Punkt, der auf der $x$- bzw. auf der $y$-Achse liegt. Die kommentarlose Angabe $x = 3$ läßt völlig offen, ob es sich um den Punkt $A'$ oder um die ganze auf der Geraden $g$ liegende unendliche Punktmenge handelt. Desgleichen kann $y = -2$ den Punkt $A''$ oder die auf $h$ liegende unendliche Punktmenge bedeuten. Dagegen sind obenstehende Angaben für die Mengen $\{g\}$, $\{h\}$, $\{A'\}$, $\{A''\}$ unmißverständlich. Die Angabe der Grundmenge ist hier ebenso unerläßlich wie bei Gleichungen oder Ungleichungen.
Jetzt sollen die abgeschlossenen Punktmengen der vier Quadranten mit $M_{\mathrm{I}}$, $M_{\mathrm{II}}$, $M_{\mathrm{III}}$, $M_{\mathrm{IV}}$ bezeichnet werden. Wir erinnern daran, daß eine Punktmenge abgeschlossen heißt, wenn ihr Rand mit hinzugerechnet wird. Dann kann $M_{\mathrm{I}}$ folgendermaßen charakterisiert werden:

$$M_{\mathrm{I}} = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } x \geqq 0,\ y \geqq 0\},$$

die von $M_{\mathrm{II}}$ durch

$$M_{\mathrm{II}} = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } x \leqq 0,\ y \geqq 0\}, \text{ usw.}$$

Aufgabe 10

Jetzt sind wir in der Lage, die Lösungsmengen linearer Gleichungen und Ungleichungen graphisch darzustellen. Von nun an bedeutet $P$ stets wieder die Menge der reellen Zahlen.

BEISPIEL 9:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y = 2x\}.$$

Diese Menge $L$ stellt eine Funktion dar, wobei $x$ die unabhängige, $y$ die abhängige Variable ist. Zu jeder Zahl, die für $x$ eingesetzt wird, ergibt sich genau eine Zahl für $y$. Das Bild der Funktion stellt, wie dem Leser aus der Lehre von der Proportionalität her erinnerlich sein wird, eine durch den Ursprung laufende Gerade dar, die durch den ersten und dritten Quadranten verläuft (Bild 7.10.). Die Gerade $g$ mit der Gleichung $x = 3$ (Bild 7.9.) ist dagegen nicht Bild einer Funktion, weil hier zu dem $x$-Wert 3 unendlich viele $y$-Werte gehören! Wohl aber stellt die Gerade $h$ von Bild 7.9. eine Funktion dar, denn zu jedem Wert von $x$ gehört wegen der Definition der Funktion als eindeutiger Abbildung genau ein Wert von $y$, nämlich $-2$.

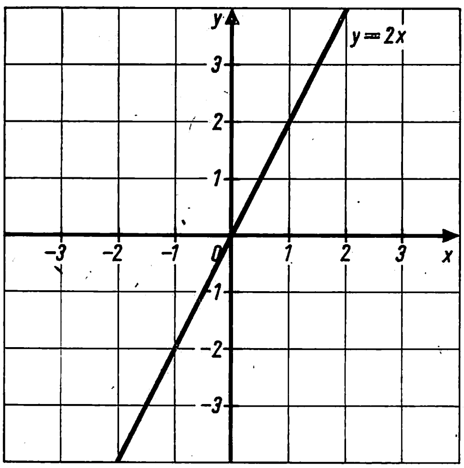



Bild 7.10.

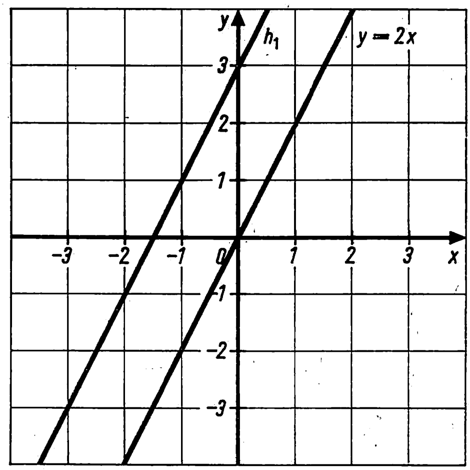



Bild 7.11.

BEISPIEL 10:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y = 2x + 3\}.$$

Wieder liegt eine Funktion vor. Wir gewinnen ihr Bild aus dem der Funktion $y = 2x$ $(x \in P)$, indem wir jeden Punkt der Geraden um drei Einheiten nach oben verschieben (Bild 7.11.). Es entsteht wieder eine Gerade. Sie werde mit $h_1$ bezeichnet. Wir erinnern uns daran, daß wir die auf der $y$-Achse liegende Punktmenge mit $M_2$ bezeichnet hatten. Dann ist

$$\{h_1\} \cap M_2 = \{Q(0; 3)\};$$

d. h., die Gerade $h_1$ schneidet die $y$-Achse in dem Punkt $(0; 3)$. Statt von der Geraden $y = 2x$ hätten wir von einer beliebigen Geraden $y = mx$ durch den Ursprung ausgehen und von jedem ihrer Punkte aus beliebig nach oben oder unten parallel zur $y$-Achse $b$ Einheiten abtragen können, wobei $m$ und $b$ beliebige positive oder negative Zahlen sind. Die Gleichung von $h_1$ ist dann $y = mx + b$. Die Zahl $m$ gibt den Anstieg der Geraden an.

Durch die Gleichungsform $y = mx + b$ werden die Senkrechten auf der $x$-Achse nicht erfaßt; ihnen entspricht die Gleichungsform $x =$ const. Sollen alle Geraden der Ebene durch eine Gleichung erfaßt werden, so muß sie die Form haben

$$cx + dy = e \quad (c, d \neq 0, 0).$$

Für die Senkrechten auf der $x$-Achse ist $d = 0$, also $x = \frac{e}{c}$, für die Senkrechten auf der $y$-Achse ist $c = 0$, also $y = \frac{e}{d}$.

---

**Zusammenfassung:**
**Jede Punktmenge**
**$\{Q(x; y);\ Q \in M$ und $y = mx + b\}$**
**umfaßt für jedes reelles $m$ und $b$ genau alle Punkte einer Geraden, die die $y$-Achse im Punkt $(0; b)$ schneidet und deren Richtung durch den Faktor $m$ von $x$ bestimmt ist. Der allgemeinste Ausdruck für eine Gerade ist:**
**$\{Q(x; y);\ Q \in M$ und $cx + dy = e\}$.**

---

BEISPIEL 11:
Um die gegenseitige Entsprechung zwischen der Lösungsmenge einer Gleichung mit zwei Variablen und ihrem Bild im Koordinatensystem noch deutlicher zu machen, wird für Punktmengen von jetzt an der Buchstabe $L'$ verwendet. Element der Menge $L$ ist ein Zahlenpaar $[x, y]$, dem in der Punktmenge $L'$ der Punkt $Q(x; y)$ entspricht. Auf S. 316 trat folgende Lösungsmenge auf:

$$L = \{[a, b];\ [a, b] \in R \times R \text{ und } 8 - 2a = 5 + 3b\}.$$

An Stelle der Variablen $a$, $b$ wollen wir $x$ bzw. $y$ schreiben. Dem Zahlenpaar $[x, y]$ entspricht ein Punkt $Q(x; y)$. Der Zahlenmenge $L$ entspricht dabei eine Punktmenge $L'$. Wenn die Menge der Punkte $Q(x; y)$ mit rationalen $x$ und $y$ mit $M^*$ bezeichnet wird, ist dann zu schreiben:

$$L' = \{Q(x; y);\ Q \in M^* \text{ und } 8 - 2x = 5 + 3y\}.$$

Die Menge $M^*$ enthält im Gegensatz zu $M$ nur Punkte mit rationalen Koordinaten. Wir formen die Gleichung um:

$$\begin{aligned} 8 - 2x &= 5 + 3y \qquad & | -5 \\ 3 - 2x &= 3y & | :3 \\ y &= -\frac{2}{3}x + 1, \end{aligned}$$

also

$$L' = \left\{Q(x; y);\ Q \in M^* \text{ und } y = -\frac{2}{3}x + 1\right\}.$$

Das Bild ist eine durchlöcherte Gerade, die den Anstieg $-\frac{2}{3}$ hat und die $y$-Achse im Punkt $(0; 1)$ schneidet. Sie besteht nur aus Punkten mit rationalen Koordinaten, hat also unendlich viele Lücken (Bild 7.12.).

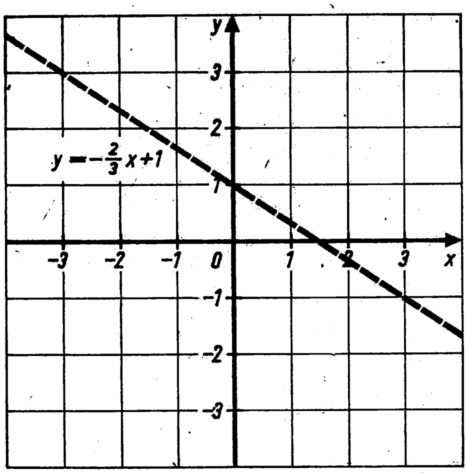



Bild 7.12.

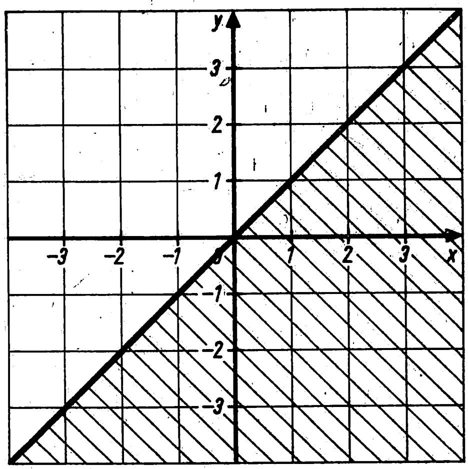



Bild 7.13.

BEISPIEL 12:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y < x\}$$

Wir bilden $L'$:

$$L' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y < x\}.$$

Wir zeichnen die Gerade $y = x$. Alle Punkte $Q$, für die $y < x$ ist, erfüllen die unter dieser Geraden liegende Halbebene (Bild 7.13.).

BEISPIEL 13:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\},$$
$$L' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\}.$$

Da die gestellte Bedingung für jedes Zahlenpaar, also für jeden Punkt der Ebene $M$ erfüllt ist, stellt $L'$ die ganze Ebene dar, $L' = M$.

BEISPIEL 14:

$$L = \{x;\ x \in P \text{ und } |x| = 2\} = \{+2, -2\},$$
$$L' = \{Q_1(+2; 0);\ Q_2(-2; 0)\}.$$

Die Menge $L'$ besteht nur aus zwei Punkten.

BEISPIEL 15:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } (5x + 4)(y - 3) = 0\}.$$

Hier liegt zwar keine lineare Gleichung mehr vor, doch läßt sich die Gleichung auf zwei lineare Gleichungen zurückführen (↑ Beispiel 7, S. 325):

$$5x + 4 = 0,\ [x, y] \in P \times P \quad (L_1),$$
$$y - 3 = 0,\ [x, y] \in P \times P \quad (L_2), \qquad L = L_1 \cup L_2.$$

Die Bilder der Lösungsmengen $L_1'$, $L_2'$, $L'$ sind dementsprechend:

$$L_1' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } 5x + 4 = 0\},$$
$$L_2' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y - 3 = 0\}, \qquad L' = L_1' \cup L_2'.$$

$L_1'$ stellt die auf der $x$-Achse senkrechte Gerade $x = -\frac{4}{5}$, $L_2'$ die auf der $y$-Achse senkrechte Gerade $y = 3$ dar. Die Lösungsmenge $L'$ wird dargestellt durch die auf den beiden Geraden liegende Punktmenge (Bild 7.14.).

BEISPIEL 16:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y = 2x - 3 \text{ und } y = x + 1\}.$$

Hier stellt $L$ die Lösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen dar. Auf solche Systeme wurde im ersten Teil dieses Kapitels nicht eingegangen, weil ihre rechnerische Lösung nicht beabsichtigt ist. Uns interessiert hier die graphische Darstellung der Lösungsmenge. Wir bilden $L'$:

$$L' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = 2x - 3 \text{ und } y = x + 1\}.$$

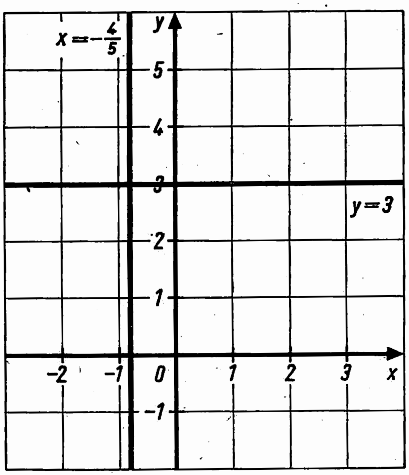



Bild 7.14.

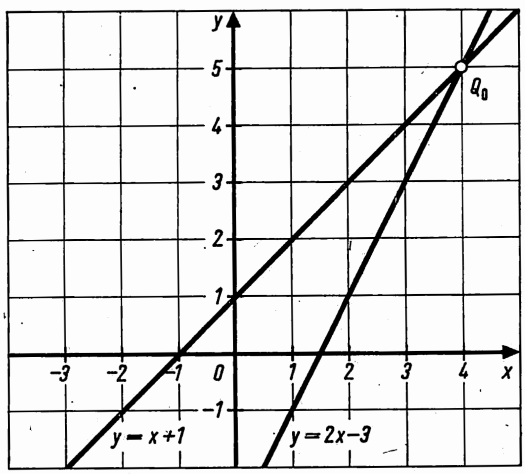



Bild 7.15.

An die Punkte $Q$ werden jetzt zwei Bedingungen gestellt: Erstens sollen sie auf der Geraden $y = 2x - 3$ liegen, zweitens auf der Geraden $y = x + 1$. Nur diejenigen Punkte kommen für die Lösung in Frage, die beide Bedingungen zugleich erfüllen. Es gibt aber nur einen Punkt, der den beiden auf den Geraden liegenden Punktmengen zugleich angehört, ihren Schnittpunkt (Bild 7.15.). Wir stellen $L'$ als Durchschnitt dar:

$$L' = L_1' \cap L_2',$$
$$L_1' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = 2x - 3\},$$
$$L_2' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = x + 1\},$$
$$L' = \{Q_0(4; 5)\}.$$

BEISPIEL 17:

$$L = \left\{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } 3y + 2x = 5 \text{ und } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right\}.$$

Wir bilden wieder $L'$ als Durchschnitt von $L_1'$ und $L_2'$:

$$L_1' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } 3y + 2x = 5\},$$

$$L_2' = \left\{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right\}. \qquad \text{(Bild 7.16.)}$$

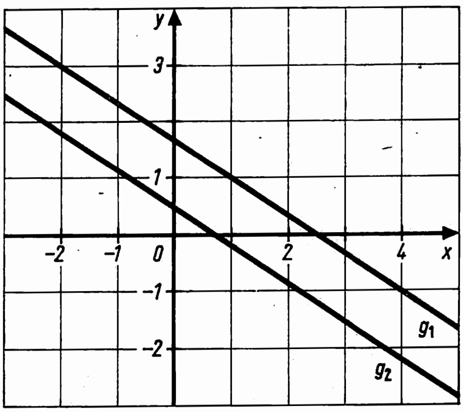



Bild 7.16.

Die Geraden $g_1$ und $g_2$ sind parallel, fallen aber nicht zusammen. Sie haben beide die gleiche Steigung $m = -\frac{2}{3}$, gehen aber durch verschiedene Punkte der $y$-Achse. Es gibt keinen Punkt, der beiden Bedingungen zugleich genügt, die Durchschnittsmenge $L'$ ist die leere Menge: $L' = L_1' \cap L_2' = \emptyset$. Das System der beiden Gleichungen

$$3x + 2y = 5$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

ist also unerfüllbar.

BEISPIEL 18:

$$L = \left\{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y < -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \text{ und } y > -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right\}.$$

Wir bilden wieder $L'$ als Durchschnitt von $L_1'$ und $L_2'$:

$$L_1' = \left\{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y < -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right\},$$

$$L_2' = \left\{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y > -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right\}.$$

In den Gleichungen $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ und $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ wird der Leser die Gleichungen von Beispiel 17 wiedererkennen. Die Punktmenge $L_1'$, die zu der Ungleichung $y < -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ gehört, bedeckt die ganze Halbebene unterhalb von $g_1$, die Punktmenge $L_2'$ die ganze Halbebene oberhalb von $g_2$, ihr Durchschnitt umfaßt genau alle Punkte des zwischen $g_1$ und $g_2$ liegenden Streifens (Bild 7.16).

BEISPIEL 19:

$$L = \left\{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \ \text{ und } 3y + 2x = 5 \text{ und } y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right\},$$

$$L' = L_1' \cap L_2',$$

$$L_1' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } 3y + 2x = 5\},$$

$$L_2' = \left\{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right\}.$$

Wieder sind die beiden Geraden parallel, wie an der gleichen Steigung zu erkennen ist. Sie fallen aber jetzt zusammen, da beide durch denselben Punkt $\left(0; \frac{5}{3}\right)$ der $y$-Achse gehen. Es ist $L' = L_1' = L_2'$. Als Lösung ergibt sich eine unendliche Punktmenge, nämlich alle Punkte der Geraden $L'$.

Damit sind die Möglichkeiten, die sich bei der Lösung eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen in $P$ ergeben können, erschöpft: Es gibt entweder genau eine Lösung, d. h. ein Zahlenpaar aus $P \times P$ (im Koordinatensystem entspricht ihm ein Punkt), eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen (im geometrischen Bild eine Gerade) oder das System ist unerfüllbar. Im zweiten Fall hüte sich der Leser vor dem Irrtum, daß das Gleichungssystem, da es ja unendlich viele Lösungen habe, identisch erfüllt sei. Geometrisch ist sofort einzusehen, daß nicht jeder Punkt der Koordinatenebene $M$ die gestellte Bedingung erfüllt, sondern eben nur jeder Punkt der gefundenen Geraden.

Bild 7.17.

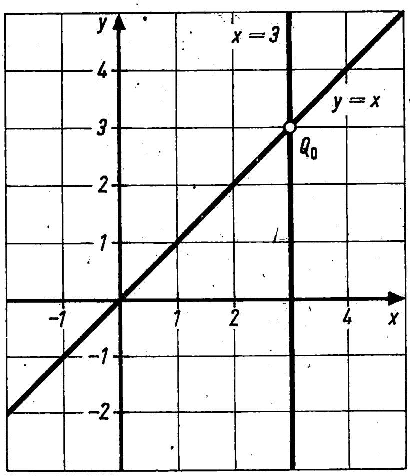
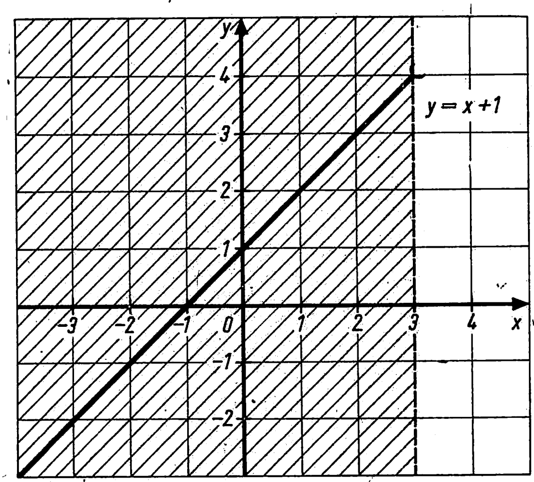



Bild 7.18.



Wir behandeln noch einige Beispiele.

BEISPIEL 20:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } x = 3 \text{ und } y = x\},\ L' = \{Q_0(3; 3)\}.$$

(Bild 7.17.)

BEISPIEL 21:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } x < 3 \text{ und } y = x + 1\},$$
$$L' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } x < 3 \text{ und } y = x + 1\},$$
$$L' = L_1' \cap L_2',$$
$$L_1' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } x < 3\},$$
$$L_2' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y = x + 1\}.$$

$L_1'$ stellt den links von der Geraden $x = 3$ liegenden Teil der Ebene dar, $L_2'$ die Gerade $y = x + 1$. Der Durchschnitt beider Mengen besteht aus derjenigen Halbgeraden von der Geraden $y = x + 1$, der in die schraffierte Halbebene fällt. Die Punkte dieser Halbgeraden stellen die Lösungsmenge $L$ dar. Dabei ist der Punkt (3; 4) nicht mitzuzählen (Bild 7.18.).

BEISPIEL 22:

$$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y > 2x - 3 \text{ und } y < x - 1\},$$
$$L' = \{Q(x; y);\ Q \in M \text{ und } y > 2x - 3 \text{ und } y < x - 1\},$$
$$L' = L_1' \cap L_2'.$$

$L_1'$, das jetzt nicht mehr explizit hingeschrieben werden soll, besteht aus allen Punkten der Ebene oberhalb der Geraden $y = 2x - 3$, $L_2'$ aus allen Punkten der Ebene unterhalb der Geraden $y = x - 1$. Der Durchschnitt der beiden Ebenen-Teilmengen ist in Bild 7.19. schraffiert.

Aufgabe 11

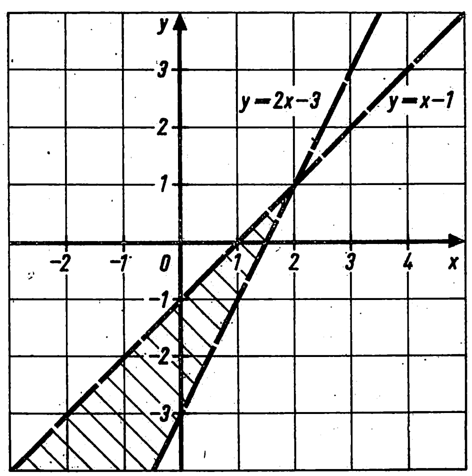



Bild 7.19.

## 7.3. Weitere Anwendungen von Mengen und Relationen im Schulunterricht

Bisher betrachteten wir Anwendungen von Mengen und Relationen in der Lehre von den Gleichungen und Ungleichungen. Überblicken wir die Anwendungen von Mengen im gesamten Schulstoff daraufhin, welche Begriffe aus der Mengenlehre hier in Frage kommen, so sind dies, neben dem Begriff der Menge selbst, die Elementbeziehung, die Teilmengenbeziehung, Vereinigung und Durchschnitt von Mengen, Differenzmengen, Mengen verschiedener Stufe, Begriff des geordneten Paars, Kreuzmenge.
Mengen kommen im Mathematikunterricht schon im ersten Schuljahr vor. So wird sich der Ausdruck „Menge" zweifellos schon bei der allmählichen Gewinnung der ersten natürlichen Zahlen einstellen. Er sollte zunächst weiter zwanglos als Begriff der Umgangssprache benutzt werden. Dies gilt auch von dem Begriff Teilmenge, falls er sich in natürlicher Weise ergeben sollte, zum Beispiel bei der Feststellung, daß die Viererfolge eine Teilmenge der Zweierfolge ist. Bevor Mengen systematisch in der Gleichungs- und Funktionslehre verwendet werden, muß der mathematische Mengenbegriff dem umgangssprachlichen Begriff gegenübergestellt werden. Dazu sollten Mengen gebildet werden, bei denen sich nachträglich herausstellt, daß sie nur ein oder gar kein Element enthalten (Menge der Schüler der Klasse mit einem bestimmten Vornamen, einem bestimmten Alter oder dergl.). Für die weitere Entwicklung des Mengenbegriffs kann auf Kapitel 2 (↗ S. 28 bis 40) verwiesen werden. Arithmetik und Geometrie bieten zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten: Zahlen oder Punkte eines abgeschlossenen oder offenen Intervalls, Punktmengen einer Strecke, eines Strahls, einer Geraden, Inneres, Äußeres, Rand einer Figur. Die Vertrautheit mit Teilmengen zahlt sich dann zum Beispiel bei der Einteilung der Dreiecke oder Vierecke nach einer bestimmten Systematik aus (Bild 7.20.):

Menge der Dreiecke

Vertikale Unterteilung:
- Menge der spitzwinkligen Dreiecke
- Menge der rechtwinkligen Dreiecke
- Menge der stumpfwinkligen Dreiecke

Horizontale Unterteilung:
- Menge der ungleichschenkligen Dreiecke
- Menge der gleichschenkligen Dreiecke

Teilmenge von der Menge der gleichschenkligen und der spitzwinkligen Dreiecke:
- Menge der gleichseitigen Dreiecke

Hier kann die Teilmengenbeziehung zu einem besseren Überblick verhelfen und neue Übungsmöglichkeiten eröffnen. Wird eine Tafel mit einem ähnlichen Diagramm wie in Bild 7.20. in der Klasse aufgehängt, so kann der Lehrer, indem er auf einen Punkt eines der Gebiete (z. B. $A$, $B$, $C$, ...) zeigt, Zeichnung und Beschreibung eines entsprechenden Dreiecks verlangen (z. B. $A$: gleichschenklig, spitzwinklig, nicht gleichseitig, $B$: gleichschenklig, rechtwinklig, $D$: stumpfwinklig, ungleichseitig, d. h. nicht gleichschenklig). Durch solche Übungen, die sich ohne viel Aufforderungen zügig —

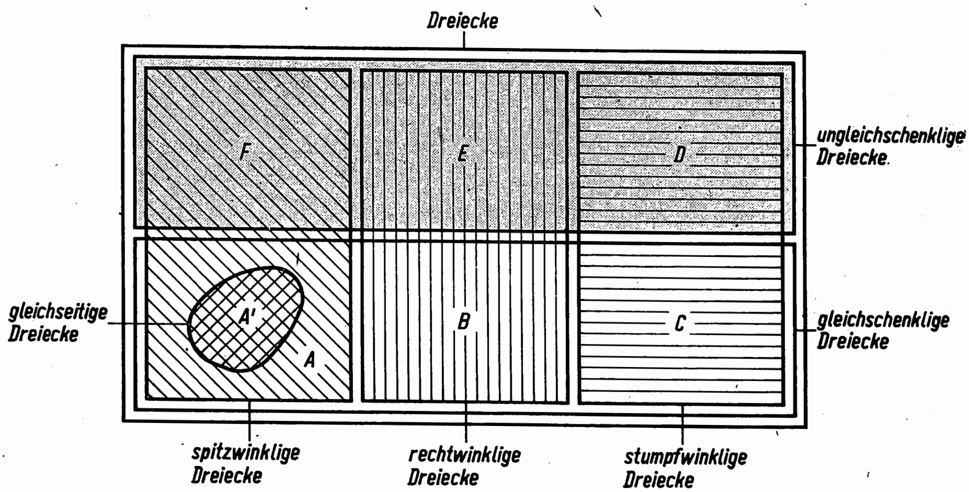



Bild 7.20.

sogar von mehreren Schülern zugleich – an der Wandtafel durchführen lassen, kann die Effektivität des Unterrichts gesteigert werden.
Hinweise auf weitere Verwendungen von Mengen sind in den vorangehenden Kapiteln enthalten.
Auch Relationen durchziehen den gesamten Schulstoff vom ersten Jahr an: Die Ordnungsrelationen in den einzelnen Zahlenbereichen; die verschiedenen Äquivalenzrelationen bei Bildung der Kardinalzahlen, bei Erweiterung des Zahlenbereichs, die Gleichheitsrelation, die Kongruenz und die Ähnlichkeit; die Inzidenzrelation von Punkt und Gerade, von Gerade und Ebene, von Punkt und Ebene. Unter diesen Relationen treten solche mit unterschiedlichen Eigenschaften auf. Besonders wichtig ist für viele Gesetze die Transitivität gewisser Relationen (Ordnungsrelationen, Teilerrelation und anderer Halbordnungen, Äquivalenzrelationen).
Der Lehrer muß die hier vorliegenden Sachverhalte natürlich kennen. Eine andere Frage ist es, wieviel davon in den Unterricht einfließen kann. Sollen Relationen als Teilmengen von Kreuzmengen erklärt werden? Soll der Terminus „Relation" oder vielleicht „Beziehung" überhaupt im Unterricht fallen? Wahrscheinlich wird dies nur dann im Unterricht ankommen, wenn die Schüler bereits mehrere Relationen, die in verschiedenartigen Mengen erklärt sind, kennengelernt haben: Senkrechtstehen, Teilbarkeit, Gleichheit, Kleinersein, Parallelität u. a. Wenn es Erfolg verspricht, kann man versuchen, ihre Aufmerksamkeit von den Elementen fort auf die Beziehung selbst zu richten, nach deren Eigenschaften zu fragen und entsprechende Gruppierungen von Relationen vorzunehmen.
In den letzten Jahren hat Frau R. Hermann in Halle interessante Unterrichtsversuche in dieser Richtung durchgeführt, die durchaus zum Optimismus berechtigen. Ihre Resultate sind in ihrer Dissertation niedergelegt („Vorbereitung des Funktions- und Relationsbegriffs im Unterricht der unteren Klassen", Halle 1969).

## 7.4. Aufgaben: Anwendungen von Mengen im Schulstoff

**1.** Bestimmen Sie folgende Lösungsmengen, indem Sie die Besonderheiten der Parameter berücksichtigen!
a) $L = \{x;\, x \in P,\ a \in P,\ b \in P,\ c \in P$ und $ax + b = c\}$
b) $L = \{b;\, b \in P,\ a \in P,\ x \in P,\ c \in P$ und $ax + b = c\}$ (↗ S. 320)

**2.** Bestimmen Sie $L = \{[a, b];\ [a, b] \in R \times R$ und $2a + 4b = 4a - 8b\}$! (↗ S. 320)

**3.** Geben Sie zu Aufgabe 1 die Lösungsmengen an, wenn Sie $P$ erst durch $G$, dann durch $N$ ersetzen! (↗ S. 320)

**4.** Bestimmen Sie

$$L = \left\{x;\ x \in P \setminus \{3\} \text{ und } \frac{3}{x-3} = \frac{7}{2x-6}\right\}! \quad (↗ \text{ S. } 322)$$

**5.** Bestimmen Sie
a) $L = \{x;\, x \in P$ und $4 \cdot |x| - 10 = |x| + 5\}$,
b) $L = \{x;\, x \in P$ und $3 + |x| < 5\}$,
c) $L = \{x;\, x \in P$ und $3 + |x| > 5\}$! (↗ S. 324)

**6.** Prüfen Sie, ob die Äquivalenz von Gleichungen wirklich eine Äquivalenzrelation ist! (↗ S. 324)

**7.** Geben Sie einen Grundbereich an, in dem $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 7$ und $x + 1 = 7$ äquivalente Gleichungen sind! (↗ S. 324)

**8.*** Bestimmen Sie alle reellen $x$, die folgende Gleichungen jeweils erfüllen:

$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{2} & \text{(a)} \\ 1 & \text{(b)} \\ 2 & \text{(c)} \end{array}\right. \quad (↗ \text{ S. } 324)$$

**9.** Für welche reellen Zahlen $x$ gilt: $\sin 2x = 2 \sin x$? (↗ S. 326)

**10.** $M_1$ und $M_2$, $M_{\mathrm{I}}$ bis $M_{\mathrm{IV}}$ sollen die auf S. 330 erklärte Bedeutung im Koordinatensystem haben. Schreiben Sie $M_{\mathrm{III}}$, $M_{\mathrm{IV}}$, $M_{\mathrm{I}} \setminus M_1 \setminus M_2$, $M_{\mathrm{II}} \setminus M_1$, $M_{\mathrm{II}} \setminus M_2$ als Lösungsmengen von Ungleichungen!

Bild 7.21.

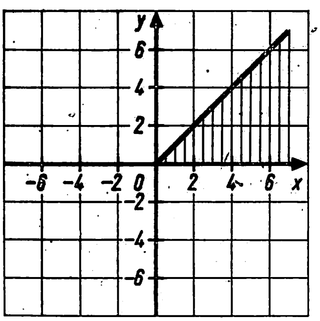



Bild 7.22.

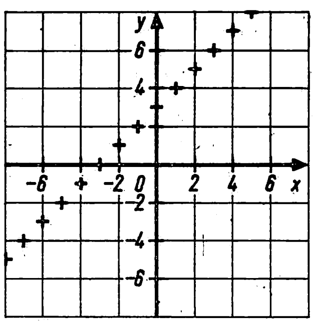
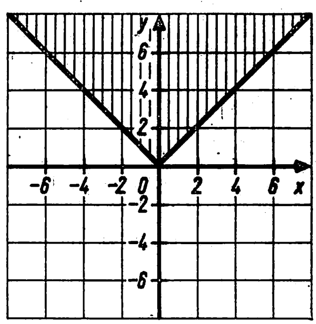



Bild 7.23.



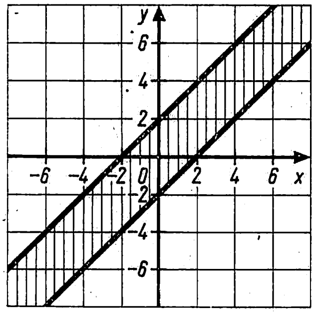



Bild 7.24.

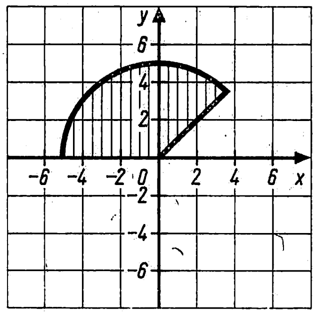



Bild 7.25.

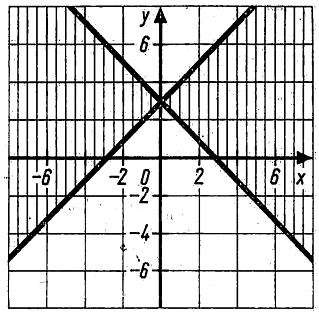



Bild 7.26.

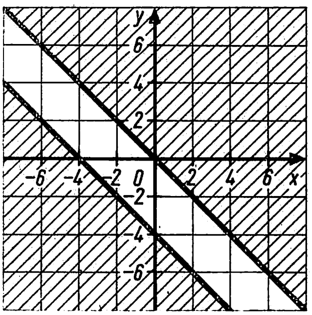



Bild 7.27.

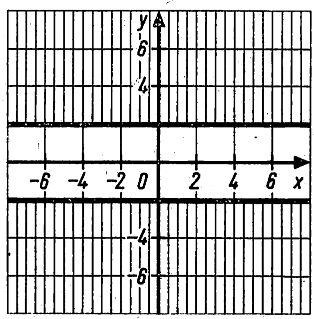



Bild 7.28.

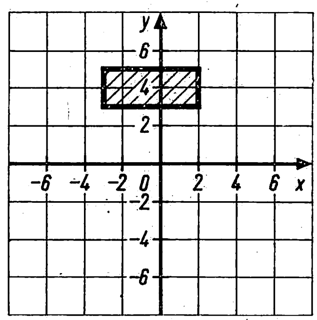



Bild 7.29.

**11.** Schreiben Sie die in den Bildern 7.21. bis 7.29. durch Kreuze oder durch Schraffierung angedeuteten Punktmengen als Bilder von Gleichungen oder Ungleichungen! (Die Ränder sind jeweils dazuzuzählen.) (↑ S. 337)
In Bild 7.23. sind die Halbgeraden und die Schraffierung nach oben fortgesetzt zu denken. In Bild 7.22., 7.24. und 7.26. bis 7.28. sind die Kreuze bzw. die Geraden und Schraffierungen nach beiden Seiten fortgesetzt zu denken.

# 8. LÖSUNGEN

## Kapitel 1: Einige logische Grundlagen

1. Wenn $n > 2$ und gerade wäre, hätte $n$ den Teiler 2 und wäre mithin keine Primzahl.

2. a) Es gibt Zahlenpaare $[a, b]$, für die gilt: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
b) Für alle reellen Zahlenpaare $[a, b]$ gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3. Wenn die Aussage $\mathsf{H}$: $\overline{p \text{ und } q}$ wahr, also $p$ *und* $q$ falsch sein soll, so muß mindestens eine der beiden Aussagen $p$, $q$ falsch sein. Das ist genau die Bedeutung der Aussage $\mathsf{H}_1$: $\bar{p}$ *oder* $\bar{q}$. Die Aussagen $\mathsf{H}$ und $\mathsf{H}_1$ haben dieselbe Wahrheitswertetafel:

| $p \backslash q$ | *w* | *f* |
|---|---|---|
| *w* | f | w |
| *f* | w | w |

4. Beide Aussagen haben die folgende Wahrheitswertetafel:

| $p \backslash q$ | *w* | *f* |
|---|---|---|
| *w* | w | f |
| *f* | w | w |

5. Die Äquivalenz $\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}$ bedeutet, daß $\bar{p}$ und $\bar{q}$ zugleich wahr bzw. falsch sind, das heißt, daß $p$ und $q$ zugleich falsch bzw. wahr sind. Also gilt $p \Leftrightarrow q$. Ebenso wird die Umkehrung gezeigt.

6. *Voraussetzung:* $\mathsf{H}_1$, *Behauptung:* $\mathsf{H}_2$ (Bild 8.1.)
Durch die Verbindung von $A$ und $C$ entstehen zwei kongruente Dreiecke, da

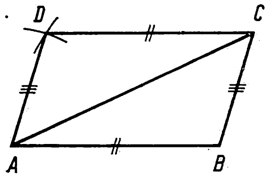


Bild 8.1.

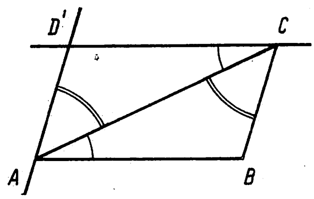


Bild 8.2.

$|\overline{AC}| = |\overline{AC}|$, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$ ist.
Also gilt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$. Der Satz von den Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen ist umkehrbar. Also folgt $DC \parallel AB$ und entsprechend $AD \parallel BC$, also $H_2$.

*Voraussetzung:* $H_2$, *Behauptung:* $H_1$ (Bild 8.2.)
Es entstehen wieder zwei kongruente Dreiecke durch Ziehen der Diagonalen $AC$; denn wegen des Wechselwinkelsatzes, einmal angewendet auf das Parallelenpaar $[AB, D'C]$, das andere Mal auf das Paar $[AD', BC]$, sind die gleich gekennzeichneten Winkel einander gleich, und die Kongruenz ist nach wsw gesichert.
Also sind die gegenüberliegenden Seiten jeweils gleich lang, und es gilt $H_1$.

7. Von den drei Aussagen von Fritz ist eine falsch, die beiden anderen sind dann richtig.
Angenommen, die erste Aussage sei falsch. Dann hat er selbst den Ring; seine dritte Aussage, daß Erika den Ring habe, ist also entgegen der Spielregel falsch. Dieser Fall führt auf einen Widerspruch. Nehmen wir an, seine zweite Aussage wäre falsch. Dann irrt sich Ewald nicht, also hat Fritz den Ring. Wieder ist dann die dritte Aussage von Fritz, daß Erika den Ring hätte, falsch, und es entsteht ein Widerspruch. Also muß die dritte Aussage von Fritz falsch sein, das heißt, Erika hat den Ring nicht. Da auch, wie wir gesehen haben, Fritz ihn nicht hat, kommen nur Ewald und Brigitte als Verdächtige in Frage. Von Ewalds Aussagen ist die zweite falsch, also die erste wahr. Nur Brigitte kann den Ring haben.

## Kapitel 2: Mengen

1. Unter den Zahlen 24, 25, 26, 27, 28 gibt es keine Primzahl, die Menge ist leer.

2. Die Komplementärmenge der letztgenannten Menge ist die ganze Menge $\{24, 25, 26, 27, 28\}$.

3. Hierzu Bild 2.3. von S. 36.
Das rechtwinklige Dreieck kann in I oder in II liegen, aber nicht in III, da im gleichseitigen Dreieck jeder Winkel 60° beträgt.

4. $M$ ist folgende Punktmenge:

a) die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ (Symmetrieachse),

b) die beiden im Abstand von 5 cm verlaufenden Parallelen zu $g$,

c) die Winkelhalbierende (Symmetrieachse der Strahlen),

d) der Umkreismittelpunkt (Einermenge!),

e) der Inkreismittelpunkt (Einermenge!).

f) Man konstruiere über $\overline{AB}$ die beiden gleichseitigen Dreiecke $ABM_1$ und $ABM_2$. $M$ ist die Punktmenge auf den in Bild 8.3. blau ausgezogenen Kreisbögen mit $|\overline{AB}|$ als Radius um $M_1$ und $M_2$. Denn ist $P$ ein beliebiger Punkt dieser Menge, so ist nach dem Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel

$$\sphericalangle APB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle AM_1B = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°.$$

Da der Peripheriewinkelsatz umkehrbar ist, muß auch jeder Scheitelpunkt $P$ eines Winkels von 30°, dessen Schenkel durch $A$ und $B$ gehen, zu $M$ gehören (Bild 8.3.).

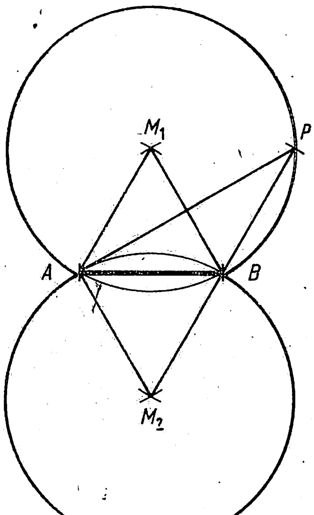



Bild 8.3.

g) Bei der Lösung werden Sätze von der harmonischen Teilung einer Strecke gebraucht.

Man teile $\overline{AB}$ mit Hilfe der Strahlensätze von innen (Punkt $D_1$) und von außen (Punkt $D_2$) im Verhältnis 5 : 3. Der Kreis über $\overline{D_1D_2}$ liefert die gefragte Punktmenge (Bilder 8.4. und 8.5.).

Begründung: Die Punkte $(A, B; D_1, D_2)$ bilden ein harmonisches Punktequadrupel, die Strahlen $(PA, PB; PD_1, PD_2)$ infolgedessen ein harmonisches Strahlenquadrupel. Die Strahlen $PD_1$ und $PD_2$ stehen nach dem THALESsatz aufeinander senkrecht, wenn $P$ auf dem Kreis liegt.

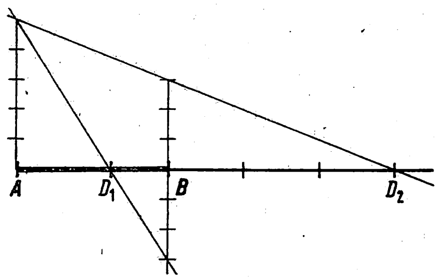



Bild 8.4.

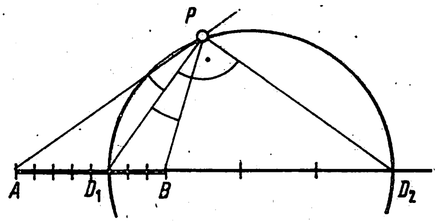



Bild 8.5.

Nach einem Satz über harmonische Strahlenbüschel halbiert dann der Strahl $PD_1$ den Winkel $APB$. Die Winkelhalbierende $PD_1$ im Dreieck $ABP$ teilt bekanntlich die Seite $\overline{AB}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten. Folglich gilt:

$|\overline{PA}| : |\overline{PB}| = |\overline{AD_1}| : |\overline{BD_1}| = 5 : 3.$ (*)

Da $PD_2$ auf $PD_1$ senkrecht steht, ist $PD_2$, wie man leicht errechnet, die Außenwinkelhalbierende von $\triangle ABP$ bei $P$. Die Gleichung (*) gilt daher auch, wenn $D_1$ durch $D_2$ ersetzt wird, nur liegt dann Teilung von außen vor.

Umgekehrt liegen alle Punkte $P$ mit der verlangten Eigenschaft auf dem konstruierten Kreis: Denn wenn die Proportion $|\overline{PA}| : |\overline{PB}| = 5 : 3$ gilt, so ist $PD_1$ Innenwinkelhalbierende, $PD_2$ Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $ABP$ bei $P$, und diese beiden Geraden stehen aufeinander senkrecht. Also liegt $P$ auf dem THALESkreis über $\overline{D_1D_2}$.

h) $M$ ist die Punktmenge auf der Parabel, die $g$ als Leitlinie und $A$ als Brennpunkt hat (Definition der Parabel). (Bild 8.6.)

5. $M$ ist die Punktmenge

a) auf der Mittelebene von $\overline{AB}$ (Symmetrieebene von $\overline{AB}$),

b) auf dem Zylindermantel um $g$ als Achse, Radius $r = 5$ cm,

c) auf der Symmetrieebene der beiden Strahlen. Das ist die Ebene, die auf der Ebene des Winkels senkrecht steht und durch seine Winkelhalbierende geht.

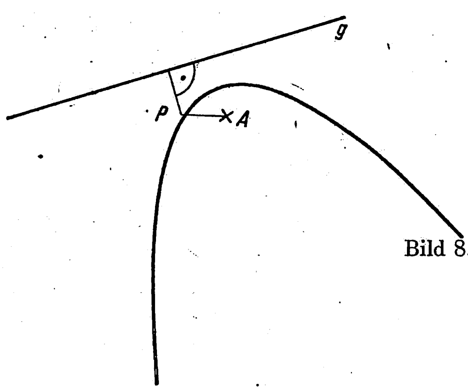
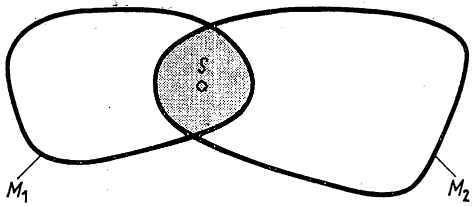
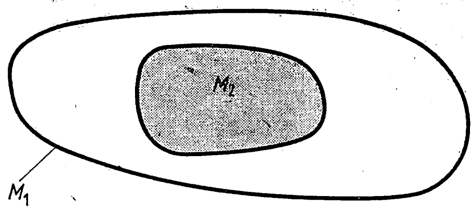



Bild 8.6.



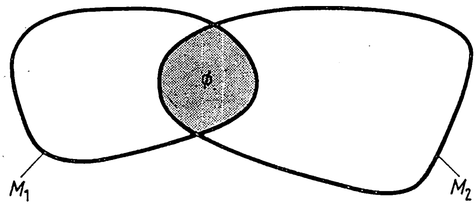

$D = \{S\}$ (Einermenge)

Bild 8.7.a



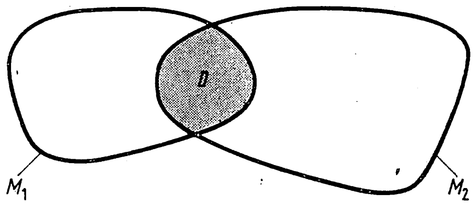

$D = M_2$

Bild 8.7.b




$D = \phi$

Bild 8.7.c




(D ist eine unendliche Menge)
$D = M_1 \cap M_2$

Bild 8.7.d

**6.** a) Siehe Bild 8.7.a. b) Siehe Bild 8.7.b.
c) Siehe Bild 8.7.c. d) Siehe Bild 8.7.d.

**7.** a) $g_1 = g_2$ b) $g_1$ nicht parallel $g_2$ c) $g_1 \parallel g_2$, aber $g_1 \neq g_2$.

**8.** a) Siehe Bild 8.8.a. b) Siehe Bild 8.8.b.

**9.** Es ist $\{m;\ \mathrm{H}_i(m)\} = \{m;\ m \in M_i\}$ $(i = 1, 2)$, also ist zu zeigen:
$\overline{D} = \{m;\ m \in \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2\}$.
Die auf der rechten Seite stehende Menge werde mit $A$ bezeichnet. Dann liegt ein beliebiges Element $a$ von $A$ mindestens in einer der beiden Mengen $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$. Es kann also nicht sowohl in $M_1$ als auch in $M_2$ liegen und gehört also nicht deren Durchschnitt $D$ an. Also ist $a$ Element von $\overline{D}$.
Sei nun $b$ ein Element von $\overline{D}$. Dann kann $b$ nicht zugleich in $M_1$ und in $M_2$ liegen. $b$ ist also Element von $\overline{M}_1$ oder von $\overline{M}_2$, gehört mithin zu ihrer Vereinigungsmenge (Bild 8.9.a und b; $D$ ist schwarz, $\overline{D}$ blau, $\overline{M}_1$ horizontal, $\overline{M}_2$ vertikal schraffiert und $\overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$ blau gerastert.).

Bild 8.8.a

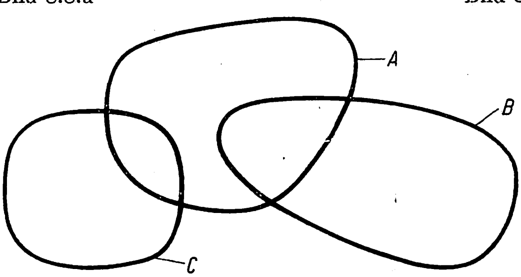
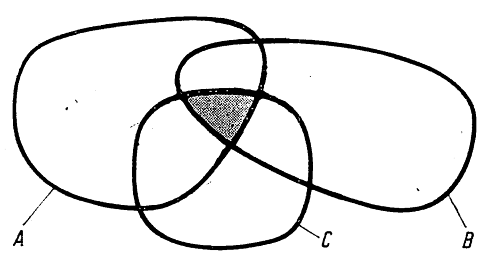



Bild 8.8.b



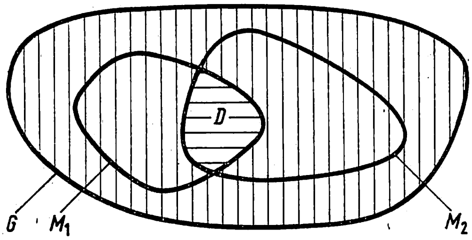



Bild 8.9.a

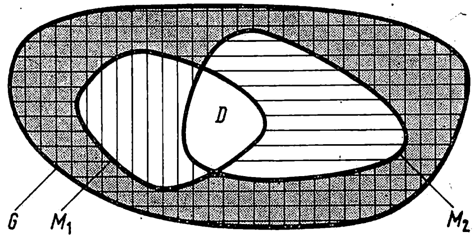



Bild 8.9.b

Also:
Ist $D = \{m;\, m \in M_1 \cap M_2\}$, so ist
$\overline{D} = \{m;\, m \in \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2\}$.

**10.** Die in der Behauptung rechts stehende Menge heiße $A$, und $a$ sei ein Element von $A$. Es ist zu zeigen, daß $a$ Element von $\overline{V}$ ist. Als Element von $A$ gehört $a$ weder zu $M_1$ noch zu $M_2$, also auch nicht zu ihrer Vereinigung $V$. Also gilt $a \in \overline{V}$.

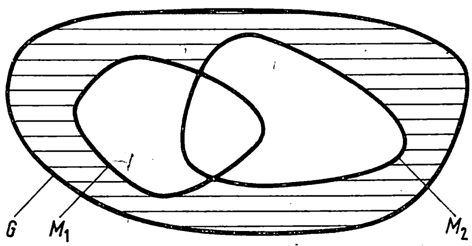



Bild 8.10.a

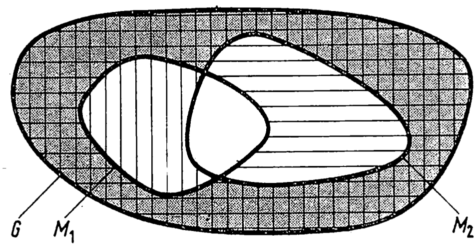



Bild 8.10.b

Sei nun $b$ ein Element von $\overline{V}$. Dann gehört $b$ weder zu $M_1$ noch zu $M_2$, da es sonst zu $V$ gehören würde. Also ist $b$ Element von $\overline{M}_1$ und von $\overline{M}_2$, also auch von ihrem Durchschnitt (Bild 8.10.a und b; $\overline{V}$ ist blau schraffiert, $\overline{M}_1$ ist horizontal, $\overline{M}_2$ vertikal schraffiert, $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2$ ist blau gerastert.).
Also:
Ist $V = \{m;\, m \in M_1 \cup M_2\}$, so ist
$\overline{V} = \{m;\, m \in \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2\}$.

**11.** a) $M_1 \cap M_1 = M_1$; $\quad M_1 \cup M_1 = M_1$
b) $M_1 \cap \emptyset = \emptyset$; $\quad M_1 \cup \emptyset = M_1$
c) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$; $\quad \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
d) $M_1 \cap M_2 = M_1$; $\quad M_1 \cup M_2 = M_2$
e) $M_1 \cap M_2 = \{6, 12, 18\}$; $M_1 \cup M_2 = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$
f) $M_1 \cap M_2 = \{60, 120, 180, \ldots\}$;
$M_1 \cup M_2 = \{12, 20, 24, 36, 40, 48, 60, 72, \ldots\}$
g) $M_1 \cap M_2 = \{1, 2, 4\}$; $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 20\}$

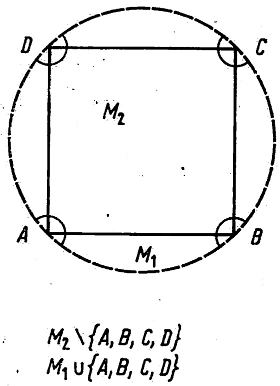



Bild 8.11.a

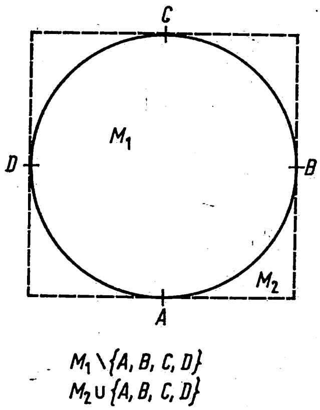



Bild 8.11.b

**12.** a) Siehe Bild 8.11.a:
Durchschnitt: $M_2 \setminus \{A, B, C, D\}$
Vereinigung: $M_1 \cup \{A, B, C, D\}$

b) Siehe Bild 8.11.b:
$M_1 \setminus \{A, B, C, D\}$
$M_2 \cup \{A, B, C, D\}$

**13.** Die bei der Menge $M_{14}$ zugrunde gelegte Gerade heiße $g$. Die Parallelität von Geraden (und auch von Ebenen) ist so festgesetzt, daß jede Gerade (bzw. jede Ebene) zu sich selbst parallel ist (↗ Kap. 3, S. 76). Dann geht genau eine zu $g$ parallele Gerade $h$ durch den Punkt $A$, wobei $h = g$ sein kann, wenn nämlich $A$ auf $g$ liegt. Es ist also $D = \{h\}$ eine Einermenge. Die Vereinigungsmenge besteht aus allen Büschelgeraden durch $A$ und der Parallelenschar.

**14.** a) Für alle Mengen $A$, $B$ richtig;
b) $A \subseteqq B$; c) $B \subseteqq A$; d) $B \subseteqq A$; e) für alle $A$, $B$ richtig;
f) wegen $A \cap B \subseteqq A$ und $A \subseteqq A \cap B$ gilt $A = A \cap B$, das heißt $A \subseteqq B$.

**15.** Bildet man $U = n(A) + n(B) + n(C)$, so werden Elemente mehrfach gezählt, die in den Durchschnitten liegen. In der Vereinigungsmenge treten sie aber nur genau einmal auf. Wir subtrahieren zunächst ihre Anzahlen von $U$:
$U_1 = U - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$. Jetzt wurde aber zuviel subtrahiert. Da $A \cap B \cap C$ Teilmenge sowohl von $A \cap B$ als auch von $A \cap C$ sowie von $B \cap C$ ist, wurden die Elemente von $A \cap B \cap C$ dreimal entfernt. Sie durften aber, da sie in der Vereinigungsmenge $A \cup B \cup C$ genau einmal auftreten, nur zweimal weggenommen werden. Also ist ihre Anzahl $n(A \cap B \cap C)$ wieder zu addieren.

**16.** In Anlehnung an Aufgabe **15** führen wir folgende Bezeichnungen ein:
Menge der Schüler, die „Technikus" lesen: $A$, ihre Anzahl $n(A)$,
Menge der Schüler, die „Urania" lesen: $B$, ihre Anzahl $n(B)$,
Menge der Schüler, die „Wissenschaft und Fortschritt" lesen: $C$, ihre Anzahl $n(C)$.
Es ist $n(A) = 50$, $n(B) = 40$, $n(C) = 25$,
$n(A \cap B) = 15$, $n(A \cap C) = 10$, $n(B \cap C) = 5$, $n(A \cap B \cap C) = 0$.

Gesucht ist die Anzahl

$$R = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(B) - n(B \cap A) - n(B \cap C)$$
$$+ n(C) - n(C \cap A) - n(C \cap B)$$
$$= 50 - 15 - 10 + 40 - 15 - 5 + 25 - 10 - 5$$
$$= 25 + 20 + 10$$
$$= 55.$$

55 Schüler lesen genau eine der drei Zeitschriften.

Um die Anzahl $W$ derjenigen Schüler zu ermitteln, die keine der drei Zeitschriften abonniert haben, muß man von 600 die Zahl $n(A \cup B \cup C)$ subtrahieren, denn in $A \cup B \cup C$ ist jeder Schüler, der abonniert hat, genau einmal gezählt.

$W = 600 - n(A \cup B \cup C)$. Nach Aufgabe 15 ist

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$= 50 + 40 + 25 - 15 - 10 - 5 + 0 = 85,$$

also $\qquad W = 600 - 85 = 515.$

515 Schüler haben keine der genannten Zeitschriften abonniert.

**17.** a) I umfaßt alle Jungen der Klassen 5, 6, 7, ...,
II alle Jungen der Klassen 1, 2, 3, 4,
III alle Mädchen der Klassen 1, 2, 3, 4,
IV alle Mädchen der Klassen 5, 6, 7, ...

b) I $\hat{=}$ $\overline{M_1 \cup M_2}$, II $\hat{=}$ $M_1 \cap \overline{M_2}$, III $\hat{=}$ $M_1 \cap M_2$, IV $\hat{=}$ $\overline{M_1} \cap M_2$

**18.** Wenn $M_1 \setminus M_2$ ein Element $m$ besäße, so wäre $m \in M_1$, $m \notin M_2$, aber $m$ wäre wegen $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ auch Element von $M_2 \setminus M_1$, das heißt: $m$ wäre Element von $M_2$, aber nicht von $M_1$. Aus diesem Widerspruch geht hervor, daß $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ leer ist, mithin ist $M_1 = M_2$.

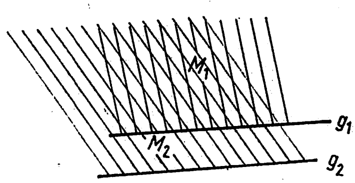


Bild 8.12.a

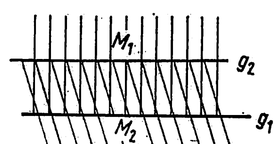


Bild 8.12.b

**19.** a) Siehe Bild 8.12.a: $g_1 \parallel g_2$, $\quad g_1$ im Gebiet von $M_2$.
b) Siehe Bild 8.12.b: $g_1 \parallel g_2$, $\quad g_1$ im Gebiet von $M_2$, $\quad g_2$ im Gebiet von $M_1$.
c) Siehe Bild 8.12.a: $g_1 \parallel g_2$, $\quad g_1$ im Gebiet von $M_2$.
Natürlich sind in jedem Fall auch die spiegelbildlichen Lagen möglich.

**20.** a) $G = F \cup K$, $\quad F = G \setminus K$, $\quad K = G \setminus F$.
b) Offene Kreisscheibe mit dem Radius 0: die leere Menge; geschlossene Kreisscheibe mit dem Radius 0: $\{A\}$.
c) Vereinigung aller offenen (geschlossenen) Kreisscheiben: die ganze Menge $M$.

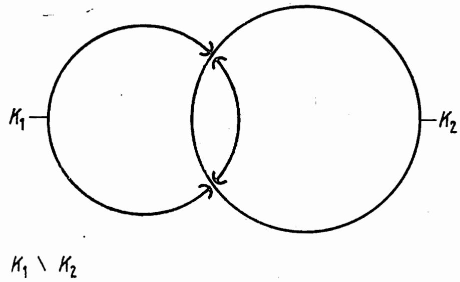



Bild 8.13.a

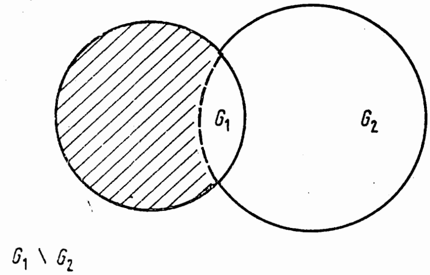



Bild 8.13.b

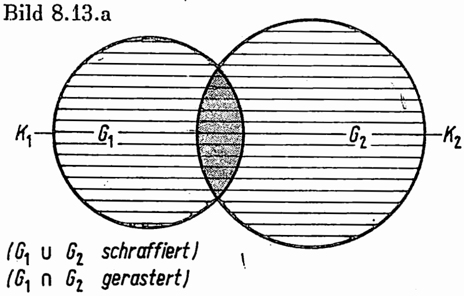



Bild 8.13.c

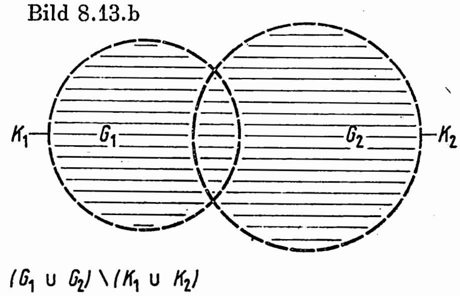



Bild 8.13.d

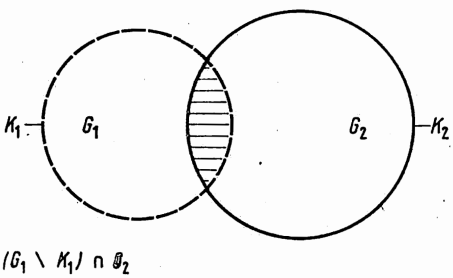



Bild 8.13.e

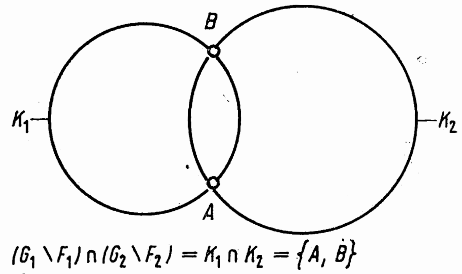



Bild 8.13.f

**21.** **a)** Siehe Bild 8.13.a: $K_1 \setminus K_2$ (der blaue Kreis hat zwei Lücken)
**b)** Siehe Bild 8.13.b: $G_1 \setminus G_2$ (der rechte Rand des Kreisteils zählt nicht zur Menge)
**c)** und **d)** Siehe Bild 8.13.c: ($G_1 \cup G_2$ schraffiert, $G_1 \cap G_2$ gerastert)
**e)** Siehe Bild 8.13.d: $(G_1 \cup G_2) \setminus (K_1 \cup K_2)$
**f)** Siehe Bild 8.13.e: $(G_1 \setminus K_1) \cap G_2 = F_1 \cap G_2$ (der rechte Rand zählt nicht zur Menge)
**g)** Siehe Bild 8.13.f: $(G_1 \setminus F_1) \cap (G_2 \setminus F_2) = K_1 \cap K_2 = \{A, B\}$

**22.** **a)** *Behauptung:* $Q \cap (D \,//\, K) = (Q \cap D) \,//\, (Q \cap K)$
Zu zeigen ist (vgl. 22.c)
$Q \cap [(D \cup K) \setminus (D \cap K)] = [(Q \cap D) \cup (Q \cap K)] \setminus [(Q \cap D) \cap (Q \cap K)]$.
Nun ist $(Q \cap D) \cap (Q \cap K) = Q \cap (D \cap K)$ und
$(Q \cap D) \cup (Q \cap K) = Q \cap (D \cup K)$. (↑ S. 51)

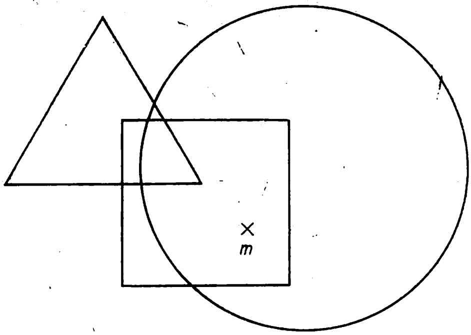



Bild 8.14.

Auf der rechten Seite der Behauptung steht also die Menge
$W = [Q \cap (D \cup K)] \setminus [Q \cap (D \cap K)]$.
Auf der linken Seite der Behauptung steht die Menge
$U = Q \cap [(D \cup K) \setminus (D \cap K)]$.
Sie läßt sich umformen mit Hilfe der Formel
$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (vgl. S. 54),
indem man $A = Q$, $B = D \cup K$, $C = D \cap K$ setzt:
$U = [Q \cap (D \cup K)] \setminus [Q \cap (D \cap K)]$.
Das ist aber die Menge $W$. Also gilt: $A = B$.

b) Nach Vertauschung der beiden Symbole lautet die Formel:
$Q \,//\, (D \cap K) = (Q \,//\, D) \cap (Q \,//\, K)$.
Diese Formel ist nicht allgemeingültig, wie das Gegenbeispiel des Punktes $m$ von Bild 8.14. zeigt.
Das eingezeichnete Element $m$ gehört zu $Q \,//\, (D \cap K)$. Es gehört aber nicht zu der rechts stehenden Menge, denn es ist zwar Element von $Q \,//\, D$, aber nicht von $Q \,//\, K$, da es sowohl zu $Q$ als auch zu $K$ gehört.

c) $D \,//\, K = (D \cup K) \setminus (D \cap K)$.

**23.** a) 1. $\emptyset \cup (M_2 \cap M_3) = (\emptyset \cup M_2) \cap (\emptyset \cup M_3)$, das heißt:
$$M_2 \cap M_3 = M_2 \cap M_3.$$
2. $\emptyset \cap (M_2 \cup M_3) = (\emptyset \cap M_2) \cup (\emptyset \cap M_3)$, das heißt:
$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

b) 1. $M_1 \cup (\emptyset \cap M_3) = (M_1 \cup \emptyset) \cap (M_1 \cup M_3)$, das heißt:
$$M_1 = M_1 \cap (M_1 \cup M_3) = M_1.$$
2. $M_1 \cap (\emptyset \cup M_3) = (M_1 \cap \emptyset) \cup (M_1 \cap M_3)$, das heißt:
$$M_1 \cap M_3 = \emptyset \cup (M_1 \cap M_3) = M_1 \cap M_3.$$

c) 1. $\emptyset \cup (\emptyset \cap M_3) = (\emptyset \cup \emptyset) \cap (\emptyset \cup M_3)$, das heißt:
$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset \cap M_3$ oder
$$\emptyset = \emptyset$$
2. $\emptyset \cap (\emptyset \cup M_3) = (\emptyset \cap \emptyset) \cup (\emptyset \cap M_3)$, das heißt:
$\emptyset \cap M_3 = \emptyset \cup \emptyset$, also
$$\emptyset = \emptyset.$$

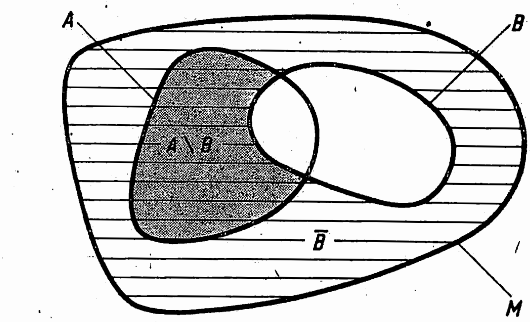



Bild 8.15.a

$A \cap \overline{B} = A \setminus B$

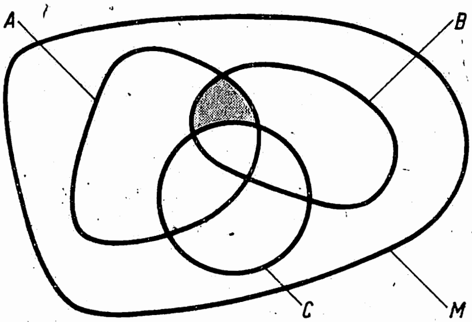
24. a) *Behauptung:* $A \cap \overline{B} = A \setminus B$ (Bild 8.15.a; $\overline{B}$ schraffiert, $A \setminus B$ blau).

1. Teil: *Voraussetzung:* $m \in A \cap \overline{B}$, *Behauptung:* $m \in A \setminus B$.

$(m \in A \cap \overline{B}) \Rightarrow (m \in A$ und $m \notin B)$, also $m \in A \setminus B$.

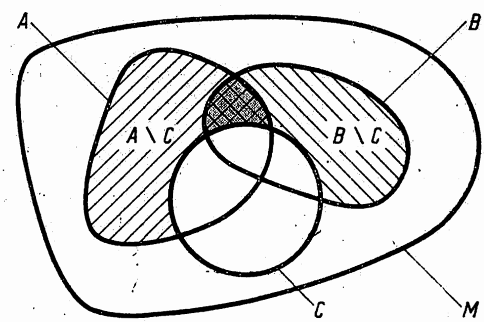
2. Teil: *Voraussetzung:* $m \in A \setminus B$, *Behauptung:* $m \in A \cap \overline{B}$.

$(m \in A \setminus B) \Rightarrow (m \in A$ und $m \notin B)$, also $m \in \overline{B}$, also $m \in A \cap \overline{B}$.




$(A \cap B) \setminus C$

Bild 8.15.b




$(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Bild 8.15.c

b) *Behauptung:* $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ (Bild 8.15.b, c).
Die links stehende Menge heiße $U$, die rechts stehende $W$.

1. Teil: *Voraussetzung:* $m \in U$, *Behauptung:* $m \in W$.

$m \in U$, dann $m \in A \cap B$, aber $m \notin C$. Dann ist $m$ Element von $A \setminus C$ und auch Element von $B \setminus C$, also auch von $W$.

2. Teil: *Voraussetzung:* $m \in W$, *Behauptung:* $m \in U$.

$m \in W$, dann $m \in A$ und $m \in B$, aber $m \notin C$. Daraus folgt $m \in U$.

c) *Behauptung:* $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (Bild 8.15.d, e).

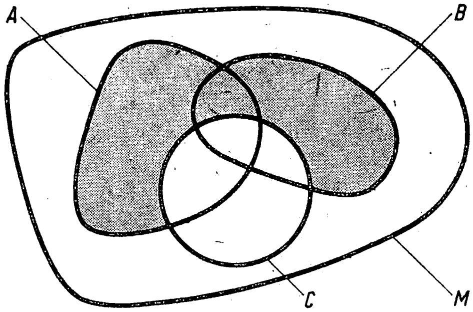
Die links bzw. rechts stehenden Mengen heißen wieder $U$ bzw. $W$.

1. Teil. *Voraussetzung:* $m \in U$, *Behauptung:* $m \in W$.

$m \in U$ erfordert wegen $m \in A \cup B$ eine Fallunterscheidung:

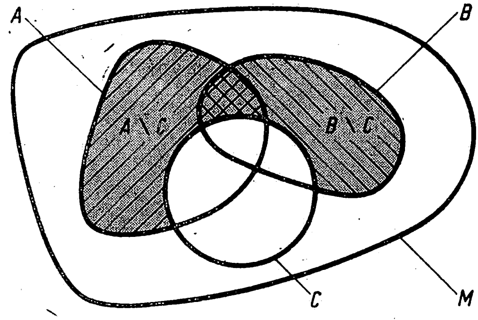
α) $m \in A$, $m \notin C$, also $m \in A \setminus C$; also $m \in W$.

β) $m \in B$, $m \notin C$, also $m \in B \setminus C$; also $m \in W$.




$(A \cup B) \setminus C$

Bild 8.15.d




$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Bild 8.15.e

2. Teil. *Voraussetzung:* $m \in W$, *Behauptung:* $m \in U$.
$m \in W$ erfordert wieder eine Fallunterscheidung:
$\alpha$) $m \in A \setminus C$, das heißt $m \in A$, $m \notin C$, $m \in A \cup B$; also $m \in U$.
$\beta$) $m \in B \setminus C$, das heißt $m \in B$, $m \in C$, $m \in A \cup B$; also $m \in U$.

d) $B \subseteqq A$, $A \cap C = \emptyset$.
Formel c) lautet dann: $A \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
oder, da $A$ keine Elemente von $C$ enthält, also auch $B$ nicht,
$A = A \cup B = A$.

25. Die Anzahl der Elemente von $M$ sei $n$, die von $P(M)$ sei $n'$. Es sei $a \notin M$, $M \cup \{a\} = M_1$. Die Anzahl der Elemente von $P(M_1)$ sei $n_1'$. Zu zeigen ist: $n_1' = 2n'$.
Eine Teilmenge von $M_1$ ist entweder Teilmenge von $M$, oder sie entsteht aus einer solchen durch Vereinigung mit der Menge $\{a\}$. Umgekehrt tritt jede dieser Mengen auf, und sie sind alle verschieden. Andere Teilmengen besitzt $M_1$ nicht. Mithin ist ihre Anzahl doppelt so groß wie die der Teilmengen von $M$.

26. a) $M \times M$ besitzt $5 \cdot 5 = 25$ Elemente, da z. B. $[a, b] \neq [b, a]$ ist.
b) $M \times \emptyset = \emptyset$ besitzt kein Element.

## Kapitel 3: Relationen

1. Die Elemente von $R$ sind $[m_7, m_8]$ und $[m_{12}, m_1]$ (Juli-August und Dezember-Januar).

2. a) Der Junge $a$ hat die Schwestern $b$ und $c$, die Brüder $e$ und $d$ haben die Schwestern $f$ und $g$.
b) Mindestens $b$, $c$, $d$, $f$ bedeuten Mädchen. Es fehlen mithin sicher die Pfeile $c$-$b$, $d$-$c$, $b$-$d$, $d$-$b$, $a$-$c$, $a$-$d$. Über $a$ und $e$ sind keine weiteren Aussagen möglich, da von hier nur Pfeile ausgehen.

c) Die Punkte $a$ und $e$ sind nur Ausgangspunkte, nicht Endpunkte von Pfeilen. Sie stellen also Jungen dar, alle anderen Punkte stellen Mädchen dar.

3. Derjenige Punkt, von dem zu jedem anderen Punkt Pfeile gehen, stellt die Eins dar, derjenige, an dem vier Pfeile enden, die Fünf, derjenige, von dem drei Pfeile ausgehen, die Zwei und so weiter. Es entsteht Bild 8.16.

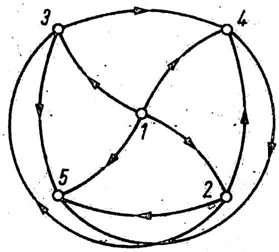



Bild 8.16.

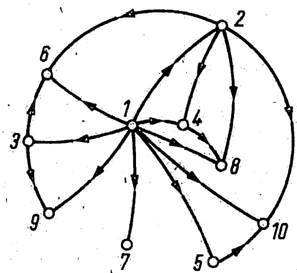



Bild 8.17.

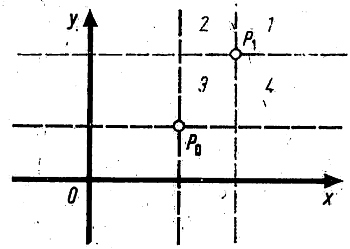



Bild 8.18.

4. Derjenige Punkt, von dem aus Pfeile zu jedem anderen Punkt gehen, stellt die Eins dar. Der einzige Punkt, der nur Endpunkt ist, und zwar Endpunkt eines einzigen Pfeils, muß die Sieben bedeuten. Wegen $5 \mid 10$ ist die Fünf bei demjenigen Punkt zu suchen, von dem nur ein Pfeil ausgeht. Wegen $3 \mid 6$ und $3 \mid 9$ steht die Drei bei dem einzigen Punkt, von dem genau zwei Pfeile ausgehen und wegen $2 \mid 4$, $2 \mid 6$, $2 \mid 8$, $2 \mid 10$ haben wir die Zwei bei demjenigen Punkt zu suchen, von dem 4 Pfeile ausgehen, usw. Es entsteht Bild 8.17.

5. In Bild 8.18. ist 1 ein offener Quadrant der Ebene,
2 ein nach oben offener Streifen, 3 ein Rechteck,
4 ein nach rechts offener Streifen.
$P$ in Gebiet 1: $x > x_1$, $\quad y > y_1$
$P$ in Gebiet 2: $x_0 < x < x_1$, $y > y_1$
$P$ in Gebiet 3: $x_0 < x < x_1$, $y_0 < y < y_1$
$P$ in Gebiet 4: $x > x_1$, $\quad y < y_1$

6. a)

| $a < b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| 2 | | | × | × | × | × | × | × | × | × |
| 3 | | | | × | × | × | × | × | × | × |
| 4 | | | | | × | × | × | × | × | × |
| 5 | | | | | | × | × | × | × | × |
| 6 | | | | | | | × | × | × | × |
| 7 | | | | | | | | × | × | × |
| 8 | | | | | | | | | × | × |
| 9 | | | | | | | | | | × |
| 10 | | | | | | | | | | |

b)

| $a \mid b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| 2 | | × | | × | | × | | × | | × | | × |
| 3 | | | × | | | × | | | × | | | × |
| 4 | | | | × | | | | × | | | | × |
| 5 | | | | | × | | | | | × | | |
| 6 | | | | | | × | | | | | | × |
| 7 | | | | | | | × | | | | | |
| 8 | | | | | | | | × | | | | |
| 9 | | | | | | | | | × | | | |
| 10 | | | | | | | | | | × | | |
| 11 | | | | | | | | | | | × | |
| 12 | | | | | | | | | | | | × |

c)

| $a + b = 16$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | × |
| 5 | | | | | | | | | | | × | |
| 6 | | | | | | | | | | × | | |
| 7 | | | | | | | | | × | | | |
| 8 | | | | | | | | × | | | | |
| 9 | | | | | | | × | | | | | |
| 10 | | | | | | × | | | | | | |
| 11 | | | | | × | | | | | | | |
| 12 | | | | × | | | | | | | | |

7. Der Beweis läßt sich leicht durch Kontraposition führen. Nehmen wir an, die Gerade $g'$ sei nicht parallel zu $s$. Dann hätte sie mit $s$ einen Schnittpunkt $S$ gemeinsam. Da $S$ auf der Symmetrieachse liegt, muß das Bild $S'$ von $S$ mit $S$ zusammenfallen, andererseits aber, da $S$ auf $g'$ liegt, auf dem Bild von $g'$, das ist die Gerade $g$, liegen. Mithin schneiden sich in $S$ auch $g$ und $s$, was der Voraussetzung widerspricht. Also gilt $g' \parallel s$.

Unter Verwendung der im Text (↑ S. 85) verwendeten Symbole stellt sich der Beweis folgendermaßen dar:

*Voraussetzung:* $g\ R_s\ g'$ *Behauptung:* $g' \parallel s$

$g \parallel s$

*Beweis* durch Kontraposition.

Annahme: $g'$ nicht parallel zu $s$. $\{g'\} \cap \{s\} = \{S\}$. Durch $S\ R_s\ S'$ ist $S'$ eindeutig bestimmt. Wegen $S\ R\ s$ ist $S' = S$. Wegen $g'\ R_s\ g$ und $S\ R\ g'$ gilt $S'\ R\ g$, also $\{S'\} = \{s\} \cap \{g\}$, entgegen der Voraussetzung.

8. Man wähle einen Punkt $A$, der auf derselben Seite der Symmetrieachse wie $P$ und $Q$, aber nicht auf der Geraden $PQ$ liegt. Nach dem auf S. 85 angegebenen Verfahren konstruiere man das Bild $A'$ von $A$. Mit Hilfe des symmetrischen Paares $[A, A']$ gewinnt man nach dem gleichen Verfahren das Bild $Q'$ von $Q$ (Bild 8.19.).

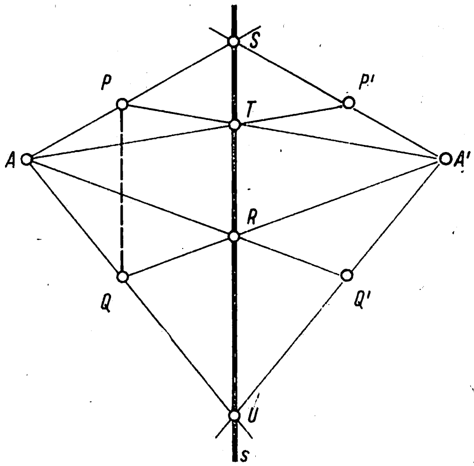



Bild 8.19.

Kurzbeschreibung der Konstruktion: $\{AP\} \cap \{s\} = \{S\}$, $\{AP'\} \cap \{s\} = \{T\}$, $\{PT\} \cap \{P'S\} = \{A'\}$, $\{AQ\} \cap \{s\} = \{U\}$, $\{A'Q\} \cap \{s\} = \{R\}$, $\{AR\} \cap \{A'U\} = \{Q'\}$.

9. Die Relation $R'$ enthält genau alle Punktpaare aus $M$, die durch $P_0$ getrennt werden. Das Paar $[P_0, P_0]$ gehört nicht dazu. Wird in Beispiel 21 dieselbe Gerade als Träger der Punktmenge $M$ gewählt, so ist $R$ die Komplementärmenge zu $R'$ in $M \times M$; denn entweder wird $[P, Q]$ durch $P_0$ getrennt, dann gehört dieses Paar zu $R'$, oder nicht, dann gehört es zu $R$.

10. Die Höhen, die Mittelsenkrechten und die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich zwar jeweils in einem Punkt, aber dieser Punkt kann bei den Höhen und bei den Mittelsenkrechten außerhalb des gegebenen Dreiecks $D$ liegen, wenn nämlich $D$ einen stumpfen Winkel hat. Die durch die drei Seitenhalbierenden gegebenen Geraden gehören zu $R$.

11. Wenn eine über $M$ erklärte Relation $R$ leer ist, so enthält $R$ kein einziges Paar aus $M \times M$. Symmetrie bedeutet: Wenn $a\,R\,b$, so $b\,R\,a$. Die Voraussetzung ist nicht erfüllt, die Implikation also richtig (↑ Kap. 1, S. 21). Asymmetrie bedeutet: Wenn $a\,R\,b$, so gilt nicht $b\,R\,a$. Auch dies ist aus dem gleichen Grund richtig. Die Schlußweisen für den Nachweis der Transitivität und Nichttransitivität sind genauso.

12. Im Schema von Aufgabe 6a) ist die Irreflexivität der Relation daran zu erkennen, daß die Hauptdiagonale frei von Kreuzen ist; im Schema von Aufgabe 6b) zeigt sich die Reflexivität daran, daß jede Stelle der Hauptdiagonalen ein Kreuz trägt. Daß die in Aufgabe 6c) dargestellte Relation weder reflexiv noch irreflexiv ist, erkennt man daran, daß nur die Stelle [8, 8] der Hauptdiagonalen durch ein Kreuz besetzt ist.

13. Die Transitivität einer Relation drückt sich in der Schemadarstellung in folgender Weise aus: Stehen bei $[a, b]$ und bei $[b, c]$ Kreuze, so steht auch bei $[a, c]$ ein Kreuz. Das heißt: Die vierte Ecke des durch die Punkte $[a, b]$, $[b, b]$, $[b, c]$ gebildeten Rechtecks trägt gleichfalls ein Kreuz. Das ist in der Darstellung von Aufgabe 6a) und b) der Fall.

14. Wenn aus $aRb$ folgen soll $bRa$, so muß mit dem Platz $[a, b]$ auch der Platz $[b, a]$ angekreuzt sein. Diese beiden Plätze liegen symmetrisch zur Hauptdiagonalen. In dem Schema der Relation $a + b = 16$ stehen die Kreuze in einer Geraden, die zur Nebendiagonalen parallel verläuft, also liegen sie symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
Dasselbe gilt, wenn $a + b = u$, $1 < u < 25$. Für $u = 2$ gibt es nur ein einziges Kreuz bei $[1, 1]$, für $u = 24$ nur bei $[12, 12]$. Auch diese einelementigen Relationen sind symmetrisch. Ist $u = 1$ oder $u \geqq 25$, so ist $R$ leer und nach Aufgabe 11 gleichfalls symmetrisch.

15. Die Relation $R$ ist irreflexiv, denn kein Tier frißt sich selbst. Sie ist sicher auch asymmetrisch, denn wenn Tier $a$ dem Tier $b$ zur Beute wird, ist das Umgekehrte – wenigstens bei unseren Aquarienbewohnern – nicht der Fall. Die Relation ist ferner nicht transitiv, sie stellt also weder eine Äquivalenz- noch eine Ordnungsrelation dar.

16. $R$ ist keine Äquivalenzrelation, denn die vier Teilmengen (Schule 1, Schule 2, Schule 3, Volkshochschule), in die die Menge $M$ der Schüler zerfällt, sind nicht elementefremd.

17. a) $R'$ ist keine Äquivalenzrelation, denn sie ist nicht reflexiv, da $[P_0, P_0] \notin R'$.
b) $R$ ist eine Äquivalenzrelation, denn $PRP'$ bedeutet, daß der Strahl $P_0P'$ mit dem Strahl $P_0P$ zusammenfällt. Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.
c) Die Relation ist nicht reflexiv, also keine Äquivalenzrelation.
d) Siehe Bild 8.20.
$R$ ist keine Äquivalenzrelation, obwohl $R$ symmetrisch ist: falls $g_1 \times g_2$ in $H$ liegt, also $[g_1, g_2] \in R$ gilt, so gilt auch $[g_2, g_1] \in R$. Dagegen ist $R$ weder reflexiv noch transitiv, wie die Hinzuziehung der Geraden $g_3$ zeigt: Aus $[g_1, g_2] \in R$ und $[g_2, g_3] \in R$ folgt nicht $[g_1, g_3] \in R$.

18. Zwei Dreiecke, die kongruent sind, sind auch ähnlich (Streckungsverhältnis 1 : 1). Also ist $R'$ eine Teilrelation von $R$. Die Relation $R \setminus R'$ enthält genau alle einander ähnlichen, aber nicht inhaltsgleichen Dreieckspaare.

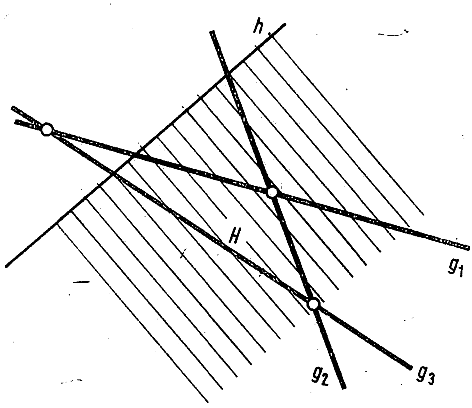


Bild 8.20.

19. Es seien $U = P(M)$ die Potenzmenge von $M$ und $M_1, M_2, \ldots$ Elemente von $U$, also Teilmengen von $M$. Es ist zu zeigen, daß die Teilmengenbeziehung von Mengen eine in $U$ erklärte Halbordnung ist. Die Mengeninklusion ist für Paare von Elementen aus $U$ erklärt, also eine Relation über $U$.
Für alle $i$ gilt $M_i \subseteqq M_i$ (Reflexivität);
aus $M_i \subseteqq M_k$ und $M_k \subseteqq M_r$ folgt $M_i \subseteqq M_r$ (Transitivität);
und wenn zugleich $M_i \subseteqq M_k$ und $M_k \subseteqq M_i$ ist, so ist auf Grund des Extensionalitätsprinzips (↑ S. 62) $M_i = M_k$ (Antisymmetrie).
Damit ist gezeigt, daß die Mengeninklusion eine reflexive Halbordnung darstellt.

## Kapitel 4: Abbildungen, Funktionen

1. Beispiel 1 stellt eine eindeutige Abbildung von $A$ auf $B$ dar, ist also eine Funktion.
Beispiel 2 ist keine Funktion, da $Nb \subset B$.
Beispiel 3 ist genau dann eine Funktion, wenn die Stadt so wenig Straßen hat, daß in jeder mindestens ein Schüler wohnt.

2. a) Die inverse Abbildung zu der von Beispiel 1 bildet $B$ auf $A$ ab. Zu einem Punkt $P$ einer Quadratseite gehören als Bilder alle Punkte, die auf der Senkrechten in $P$ auf der Seite liegen (keine Funktion). Ersetzt man $A$ durch die auf einer Diagonalen liegende Punktmenge, so stellt die inverse Abbildung eine Funktion dar.

Die inverse Abbildung zu Beispiel 2 hat den Vorbereich $B$, den Nachbereich $A$. Einer Stadt wird als Bild jeder Schüler zugeordnet, der bereits in dieser Stadt war. Da es mehr Städte als Schüler gibt, ist $f^{-1}$ eine Abbildung aus $B$ auf $A$ oder in $A$, außerdem wohl kaum eindeutig, also keine Funktion.

Zu Beispiel 3: Die inverse Abbildung ordnet jeder Straße die in ihr wohnenden Schüler zu. Wird als Vorbereich nur die Menge derjenigen Straßen gewählt, in der Schüler wohnen, so kann $f^{-1}$ immer noch mehrdeutig sein, wenn nämlich mehrere Schüler in derselben Straße wohnen. Es ist $f^{-1}$ Abbildung von $B$ auf $A$, aber möglicherweise nicht eindeutig, also nicht entscheidbar, ob Funktion.

Die inverse Abbildung zu Beispiel 4 bildet die Menge $\{u, v\}$ auf die Menge der natürlichen Zahlen ab. Wegen der Mehrdeutigkeit liegt keine Funktion vor.

Zu Beispiel 5: Die Abbildung $f^{-1}$ bildet $B$ auf $A$ ab. Sie stellt dann und nur dann eine Funktion dar, wenn $A$ genau aus einer wahren und einer falschen Aussage besteht.

Zu Beispiel 6: Selbst bei Einschränkung der Menge der Schuhgrößen bildet die inverse Abbildung keine Funktion, da sie nicht eindeutig ist.

b) Die inversen Abbildungen zu Bild 4.1.a und c stellen keine Funktionen dar, da $\alpha$ zwei Bilder hat.
Die inverse Abbildung zu 4.1.b stellt aus demselben Grund keine Funktion dar ($\beta$ hat zwei Bilder).
Die inverse Abbildung von 4.1.d ist eine Funktion.

3. a) $a_n = 2n + 1$: $f = \{[x, y];\ x \in N \text{ und } y = 2x + 1\}$
$a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, $a_{10} = 21$.
b) $a_n = 2^n$: $f = \{[x, y];\ x \in N \text{ und } y = 2^x\}$
$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$, $a_{10} = 2^{10} = 1024$.
c) $a_n = n$: $f = \{[x, y];\ x \in N \text{ und } y = x\}$
$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_{10} = 10$.

4. Es seien $a_n$, $b_n$, $c_n$ drei Folgen und die $b$-Folge zur $a$-Folge sowie die $c$-Folge zur $b$-Folge proportional. Dann gibt es eine Zahl $k_1 \neq 0$, so daß für alle $n$ gilt: $b_n = k_1 a_n$ und eine Zahl $k_2 \neq 0$ mit $c_n = k_2 b_n$ für alle $n$. Für $k = 1$ ist für alle Folgen und für alle $n$: $a_n = 1 \cdot a_n$, also ist die Folge zu sich selbst proportional. Ferner gilt für alle $n$: $a_n = \frac{1}{k_1} \cdot b_n$, also ist die Relation symmetrisch. Schließlich gilt $c_n = k_1 k_2 a_n$ für alle $n$, also ist wegen $k_1 \cdot k_2 \neq 0$ auch die $c$-Folge zur $a$-Folge proportional. Die Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation.

5. Setzt man zur Abkürzung $N' = N \setminus \{0\}$, so ist
$F = \{[x_1, x_2, y];\ [x_1, x_2] \in N' \times N' \text{ und } y = x_1 \cdot x_2\}$.
Die dazu inverse Abbildung bildet die Zahl $y$ auf ein Paar $[x_1, x_2]$ ab. Da stets $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$, im allgemeinen aber $[x_1, x_2] \neq [x_2, x_1]$, ist die Zuordnung $y \to [x_1, x_2]$ nicht eindeutig, liefert also keine Funktion.

6. Siehe Bild 8.21. und Bild 8.22.

7. $\sin[2(x + h)] = \sin(2x + 2h) = \sin 2x$, denn bei Addition der Periode $h$ zur Variablen $x$ soll sich der Funktionswert wiederholen.

Bild 8.21.

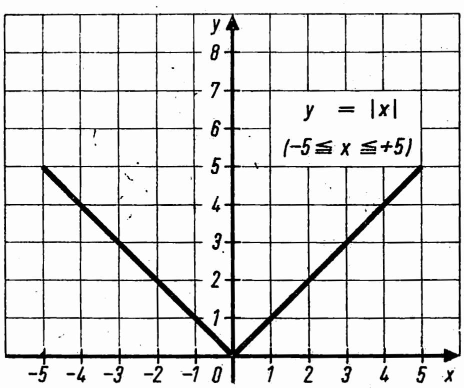
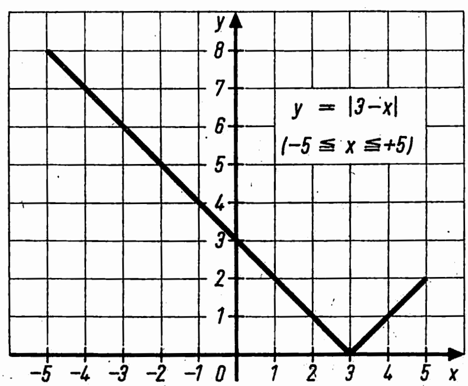



Bild 8.22.



Da die Periode von $\sin x$ die Zahl $2\pi$ ist, gilt $2h = 2\pi$, $h = \pi$. Die Periode von $\sin 2x$ ist $\pi$.

$$\sin \frac{x+h}{3} = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{h}{3}\right) = \sin \frac{x}{3}$$

$$\frac{h}{3} = 2\pi, \; h = 6\pi.$$

Die Periode von $\sin \frac{x}{3}$ ist $h = 6\pi$.

8. Es ist sicher $k \geqq h$, da $h$ die *kleinste* positive Zahl ist, für die bei beliebigem $x$ gilt: $f(x+h) = f(x)$. Ist $k = h$, so ist die Behauptung richtig. Andernfalls dividieren wir $k$ durch $h$, wobei der entstehende Rest kleiner als $h$ ist:

$k = n \cdot h + r \quad (0 \leqq r < h)$

$f(x+k) = f(x+nh+r) = f(x)$,

$f(x+h) = f(x)$, also

$f(x+h+h) = f(x)$,

$f(x+h+h+h) = f(x), \ldots$

$f(x+nh) = f(x)$, also

$f(x) = f(x+nh+r) = f[(x+r)+nh] = f(x+r)$, also $f(x) = f(x+r)$.

Wegen $r < h$ muß der Rest $r = 0$, mithin $k$ ein Vielfaches von $h$ sein.

9. Keine der beiden Funktionen ist monoton. Jedoch kann man aus jeder von ihnen zwei monotone, sogar streng monotone Funktionen gewinnen, indem man den Definitionsbereich an der Knickstelle des Bildes, also bei $x = 0$ bzw. $x = 3$, zerschneidet. Man gewinnt

die monoton fallende Funktion $y = |x|$ für $-5 \leqq x \leqq 0$,

die monoton steigende Funktion $y = |x|$ für $0 < x \leqq +5$,

die monoton fallende Funktion $y = |3 - x|$ für $-5 \leqq x \leqq +3$,

die monoton steigende Funktion $y = |3 - x|$ für $+3 < x \leqq +5$.

(Bild 8.21. und 8.22.)

10. Für $x_0 = \frac{1}{2}$ ist $y_0 = 2$, für $x_1 = 2$ ist $y_1 = \frac{1}{2}$. Da $\varepsilon = \frac{1}{10}$ vorgegeben ist, sind die Intervallgrenzen bei $y_0$ auf der $y$-Achse durch $y_0^{(1)} = 2 + \frac{1}{20}$, $y_0^{(2)} = 2 - \frac{1}{20}$ gegeben. $y_0^{(1)} = \frac{41}{20}$, $y_0^{(2)} = \frac{39}{20}$. Zu diesen Intervallgrenzen gehört $x_0^{(1)} = \frac{20}{41}$ bzw. $x_0^{(2)} = \frac{20}{39}$. Es ist

$$|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| = \frac{20}{39} - \frac{20}{41} = \frac{40}{1599} > \frac{40}{1600}.$$

Man kann setzen $\delta_0 = \frac{1}{40} = 0{,}025$.

Für die Stelle $x_1$ ergibt die Berechnung

$$y_1^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}, \qquad y_1^{(2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20},$$

$$x_1^{(1)} = \frac{20}{11}, \qquad x_1^{(2)} = \frac{20}{9},$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(2)}| = \frac{20}{9} - \frac{20}{11} = \frac{40}{99} > \frac{2}{5}.$$

Man kann setzen $\delta_1 = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

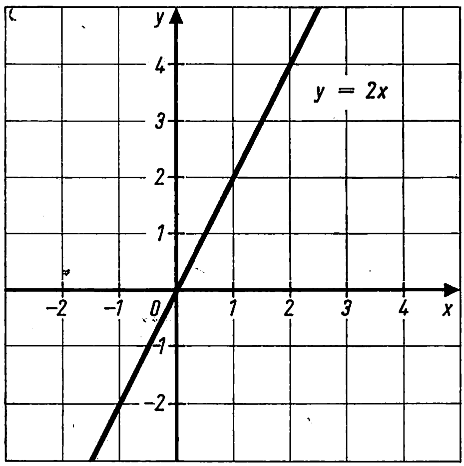



Bild 8.23.a

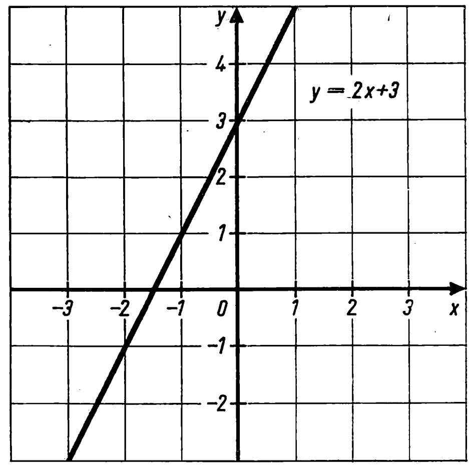



Bild 8.23.b

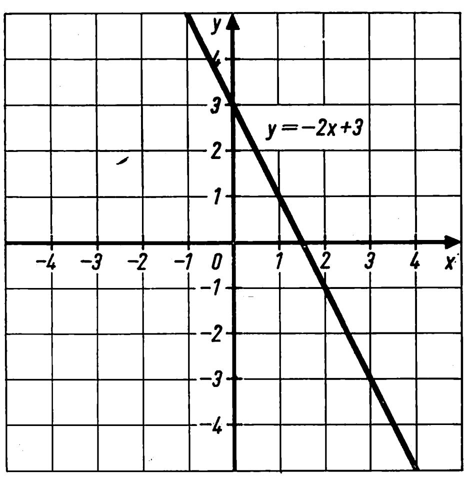



Bild 8.23.c

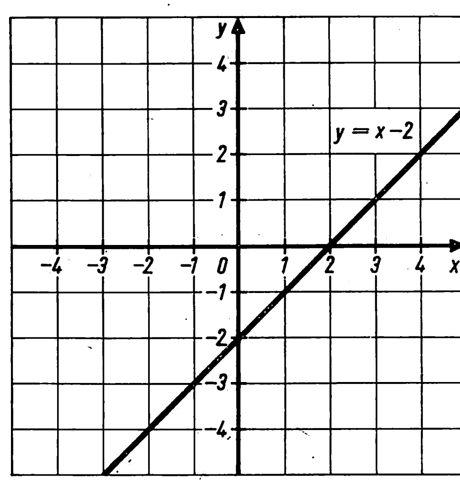



Bild 8.23.d

**11.** Siehe Bild 8.23.a bis d.
In der Rechnung von S. 147 ist überall 100 zu ersetzen durch 200, so daß sich für $\delta$ ergibt:
$$\delta = \frac{2}{200\,|m|} = \frac{0{,}01}{|m|}.$$
Für die ersten drei linearen Funktionen ergibt sich damit $\delta = 0{,}005$. Das

Vorzeichen von $m$ spielt keine Rolle, da hier nur der absolute Betrag von $m$ eingeht.
Für die vierte lineare Funktion ergibt sich $\delta = 0{,}01$.

**12.** Es ist: $d$ Großvater väterlicherseits, $c$ Großmutter väterlicherseits von $a$ (und übrigens auch von $e$); $b$ und $f$ sind Brüder, da beide $d$ als Vater und $c$ als Mutter haben und männlichen Geschlechts sind; $f$ ist Onkel von $a$; $c$ ist Großmutter von $e$ (s. o.); $a$ und $e$ stehen im Cousin- oder Cousinen-Verhältnis; $d$ und $c$ sind oder waren verheiratet, Frau $c$ ist die Schwiegermutter von Frau $k$, da diese mit Herrn $f$ verheiratet ist; $i$ ist die Großmutter mütterlicherseits von $g$; $g$ und $m$ sind Geschwister; Herr $j$ ist der Schwiegervater von Herrn $n$, da Herr $n$ mit Frau $h$ verheiratet ist und diese Herrn $j$ zum Vater hat.

**13.** a) Da $b$ und $f$ als Endpunkte von Pfeilen Personen männlichen Geschlechts bedeuten, stellen $b$, $f$, $c$ drei Brüder dar. Zwischen ihnen müssen hin und zurück blaue Pfeile laufen. Das Geschlecht von $e$ ist unbekannt. Daher kann kein blauer Pfeil von $k$ nach $e$ gezogen werden. Die Brüder $b$, $c$, $f$ haben denselben Vater $d$. Es muß also ein schwarzer Pfeil von $c$ zu $d$ gezogen werden. Da $k$ und $e$ Geschwister sind, haben sie denselben Vater $f$. Von $k$ zu $f$ ist also ein schwarzer Pfeil zu ziehen. Die Personen $l$ und $f$ sind identisch.

Im rechten Teil der Skizze ist $h$ als Endpunkt von Pfeilen männlichen Geschlechts; $h$ und $i$ sind also Brüder. Daher ist von $i$ zu $h$ ein blauer Pfeil zu ziehen. Zwar sind auch $m$ und $g$ Geschwister von ihnen, aber da ihr Geschlecht nicht bekannt ist, kann kein blauer Pfeil zu ihnen gezogen werden. Dagegen weiß man, daß $n$ auch Vater von $h$ und $i$ ist. Also sind von $h$ und $i$ aus schwarze Pfeile nach $n$ zu ziehen. Die Personen $j$ und $n$ sind identisch (beide Vater von $h$).

b) Es ist:
$d$ Großvater väterlicherseits von $a$,
$c$ Onkel von $a$,
$b$ und $f$ sind Brüder,
$f$ ist Onkel von $a$,
$c$ ist Onkel von $e$,
$a$ und $e$ stehen im Cousin- oder Cousinen-Verhältnis,
$d$ ist Vater von $c$,
$i$ ist Bruder von $g$,
$g$ und $m$ sind Geschwister,
$n$ und $j$ sind identisch,
$b$, $f$ und $c$ sind Brüder,
$l$ und $f$ sind identisch.

c) Es bedeute $R$ wieder die Vater-, $S$ die Bruder-Relation. Dann bedeutet $S \circ R$ die Verwandtschaft: Onkel sein. Sie sei mit $O$ bezeichnet. Es gilt: $f = S(b)$, $b = R(a)$, also $f = S \circ R\ (a)$, $f = O(a)$ ($f$ ist Onkel von $a$).
Es bedeute $N$ die Verwandtschaft: Neffe (Nichte) sein. Es ist $a = R^{-1}(b)$,

$b = S(f)$, also $a = R^{-1}(S(f)) = R^{-1} \circ S(f) = N(f)$ ($a$ ist Nichte oder Neffe von $f$).

Ferner bedeute $E$ die Verwandtschaft Enkel(in) sein. Dann ist $a = R^{-1}(b)$, $b = R^{-1}(d)$, also $a = R^{-1} \circ R^{-1}(d) = E(d)$ ($a$ ist Enkel(in) von $d$).

Schließlich bedeute $C$ die Verwandtschaft: Vetter oder Base sein. Dann ist $a = R^{-1}(b)$, $b = S(f)$, $f = R(e)$, $a = R^{-1} \circ S \circ R(e)$, $a = C(e)$. ( $a$ ist Vetter oder Base von $e$.)

**14.**
$$c = S(R(a)) = S \circ R(a) = T_1(a)$$
$$j = R(S(g)) = R \circ S(g) = T_2(g)$$
$$d = R(R(a)) = R \circ R(a) = T_3(a)$$
$$i = S(S(g)) = S \circ S(g) = T_4(g)$$

**15.** Da der Logarithmus nur für positive Werte der Variablen erklärt ist, wird $A_3$ bestimmt als die Menge

$A_3 = \{x; x > -1\}$,

$f_1 = \{[x, y]; x \in A_3 \text{ und } y = x + 1\}$,

$f_2 = \{[y, z]; y \in P^+ \text{ und } z = \log y\}$.

Dann wird $z$ als Funktion von $x$ geschrieben in der Form

$f_3 = f_2 \circ f_1 = \{[x, z]; x \in A_3 \text{ und } z = \log(x + 1)\}$ (Bild 8. 24.).

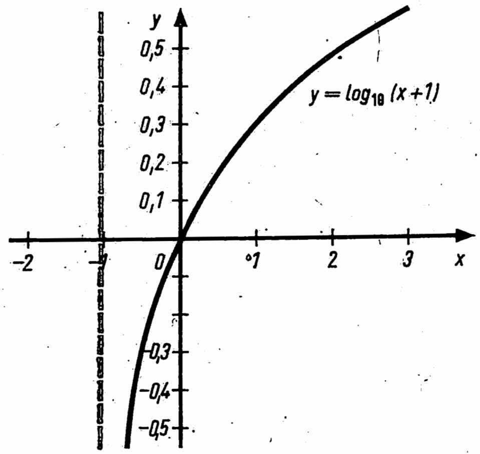



Bild 8.24.

**16.** *1. Behauptung:* $u(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = u\mathfrak{a} + u\mathfrak{b}$.

Die Komponenten des links stehenden Vektors sind:

$u(a_1 + b_1)$, $u(a_2 + b_2)$,

die des rechts stehenden Vektors:

$ua_1 + ub_1$, $ua_2 + ub_2$.

Wegen des für reelle Zahlen geltenden Distributivgesetzes sind die Komponenten identisch, also ist die Behauptung richtig.

*2. Behauptung:* $(u_1 + u_2)\,\mathfrak{a} = u_1\mathfrak{a} + u_2\mathfrak{a}$.

Der Vergleich der Komponenten liefert wegen

$(u_1 + u_2)\,a_1 = u_1a_1 + u_2a_1$,

$(u_1 + u_2)\,a_2 = u_1a_2 + u_2a_2$ die Behauptung.

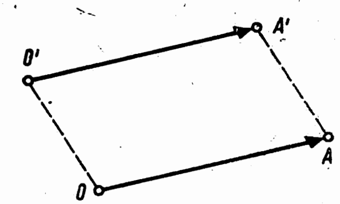



Bild 8.25.

**17.** Es werde für den Koordinatenursprung ein beliebiger, aber nun festgehaltener Punkt $O$ der Ebene gewählt, und $A$ sei ein anderer beliebiger Punkt der Ebene. Die vorgelegte Transformation heiße $T$. Bei Anwendung von $T$ geht $O$ über in $O' = T(O)$, $A$ in $A' = T(A)$ und der Vektor $\overrightarrow{OA}$ in den Vektor $\overrightarrow{O'A'}$, der nach Voraussetzung dem Vektor $\overrightarrow{OA}$ gleich ist (Bild 8.25.). Es ist zu zeigen, daß der Vektor $\overrightarrow{AA'}$ ein konstanter Vektor ist, das heißt, daß er sich bei beliebiger Wahl von $A$ nicht ändert. Dann ist $T$ eine Translation.
In dem konvexen Viereck $OAA'O'$ sind die gegenüberliegenden Seiten $\overline{OA}$ und $\overline{O'A'}$ parallel und gleich lang. Also ist das Viereck ein Parallelogramm, und es ist $\overline{AA'}$ parallel zu $\overline{OO'}$ und gleich lang, das heißt: Der Vektor $\overrightarrow{AA'}$ ist bei beliebiger Wahl von $A$ gleich dem festen Vektor $\overrightarrow{OO'}$, also konstant.

**18.** Fall 1: Der Drehpunkt $O$ liege auf der Strecke $\overline{PQ}$ (Bild 8.26.a).
Dann ist $|\overline{OP}| = |\overline{OP'}|$

$$|\overline{OQ}| = |\overline{OQ'}|.$$

Die Addition ergibt $|\overline{OP'}| + |\overline{OQ'}| = |\overline{OP}| + |\overline{OQ}|$, also $|\overline{P'Q'}| = |\overline{PQ}|$. Ferner sind $\sphericalangle\, P'OP$ und $\sphericalangle\, Q'OQ$ als Scheitelwinkel gleich. In Fall 1 ist die Behauptung richtig.
Fall 2: Der Drehpunkt $O$ liege nicht auf $PQ$ (Bild 8.26.b). (Der Fall, daß $O$ zwar nicht auf der Strecke $\overline{PQ}$, aber auf der Geraden $PQ$ liegt, erledigt sich in ähnlicher Weise wie Fall 1, wobei die Addition durch eine Subtraktion ersetzt wird.) Dann ist $\sphericalangle\, POP' = \sphericalangle\, QOQ' = \alpha$.
Die Innenwinkel von $\triangle\, OPQ$ seien $\beta, \gamma, \delta$, die von $\triangle\, OP'Q'$ seien $\beta', \gamma', \delta'$.
Dann ist

$$|\overline{OP'}| = |\overline{OP}|,\ |\overline{OQ'}| = |\overline{OQ}|,\ \beta' = \alpha - \sphericalangle\, P'OQ = \beta.$$

Also sind die Dreiecke $OP'Q'$ und $OPQ$ kongruent (Seite, Winkel, Seite) und

Bild 8.26.a

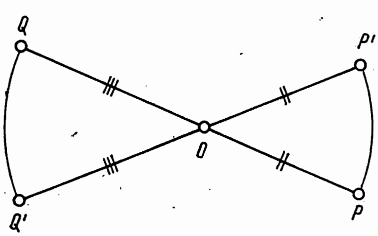
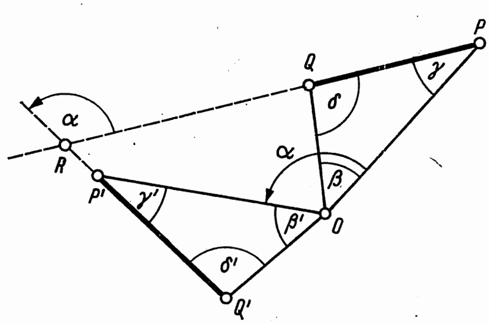



Bild 8.26.b



mithin $|\overline{P'Q'}| = |\overline{PQ}|$. Damit ist die Erhaltung der Länge bei der Drehung gezeigt.
Sei jetzt $R$ der Schnittpunkt der Geraden $PQ$ mit der Geraden $P'Q'$. In dem Viereck $RQ'OQ$ beträgt, da die Winkelsumme 360° ist,

$$\sphericalangle QRQ' = 360° - \delta' - \alpha - (180° - \delta) \text{ und (wegen } \delta' = \delta)$$
$$= 180° - \alpha.$$

Entsprechend dem Drehsinn von $\alpha$ ist der Winkel zwischen $P'Q'$ und $PQ$ als $180° - \sphericalangle QRQ'$ zu nehmen. Er beträgt demnach $\alpha$.

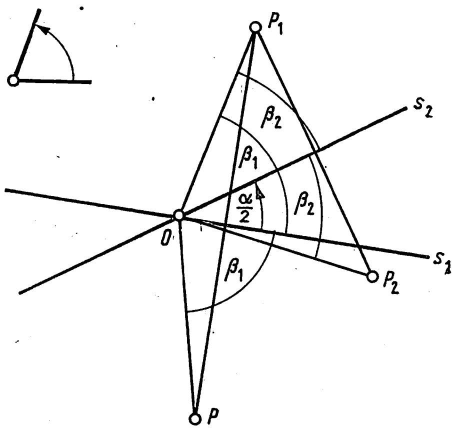


Bild 8.27.a

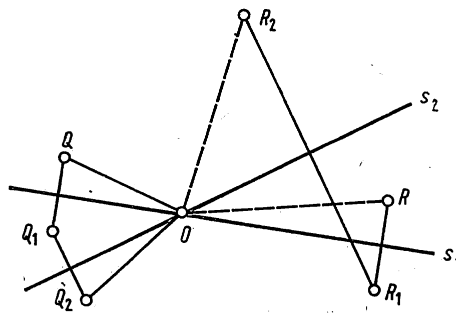


Bild 8.27.b

**19.** Man zeichne eine beliebige Gerade $s_1$ durch den Koordinatenursprung $O$, der als Drehpunkt angenommen wird, und gleichfalls durch $O$ diejenige Gerade $s_2$, die mit $s_1$ den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ im gleichen Drehsinn wie der gegebene Winkel $\alpha$ bildet (Bild 8.27.a). Dann stellt die Verknüpfung der Spiegelungen an $s_1$ und $s_2$ die Drehung um $O$ um den Winkel $\alpha$ dar.
*Beweis:* Sei $P$ ein beliebiger von $O$ verschiedener Punkt der Ebene, $P_1$ sein Bild bei der Spiegelung an $s_1$, $P_2$ das Bild von $P_1$ bei der Spiegelung an $s_2$. Dann ist

$$\sphericalangle POP_2 = \sphericalangle POP_1 - \sphericalangle P_1OP_2$$
$$= 2\beta_1 - 2\beta_2.$$

Wegen $\sphericalangle (s_1, s_2) = \frac{\alpha}{2}$ und $\beta_2 = \beta_1 - \frac{\alpha}{2}$ wird

$$\sphericalangle POP_2 = 2\beta_1 - 2\left(\beta_1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha.$$

Ferner ist nach einem bekannten Symmetriegesetz $|\overline{OP_2}| = |\overline{OP_1}| = |\overline{OP}|$. Die Verknüpfung der beiden Symmetrieabbildungen stellt also eine Drehung um den Winkel $\alpha$ dar.
Im Bild 8.27.b sind noch zwei andere Punkte $R$ und $Q$ mit ihren Bildern gezeichnet. Die Beweise verlaufen ähnlich.

20. Es ist

$$f = \left\{[x, y];\ x \in P \setminus \{0\} \text{ und } y = \frac{1}{x}\right\}$$

$$f^{-1} = \left\{[X, Y];\ X \in P \setminus \{0\} \text{ und } Y = \frac{1}{X}\right\}.$$

Die beiden Funktionen sind identisch, da die Bezeichnung der Variablen keine Rolle spielt. Wählt man einen Kurvenpunkt $P(x; y)$ von $f$, so liegt der dazu symmetrische Punkt $P'(y; x)$ auch auf der Kurve von $f$, denn aus $y = \frac{1}{x}$ folgt $x = \frac{1}{y}$;

21. Die Gleichung einer linearen Funktion lautet: $y = mx + b$ $(x, y \in P)$. Die dazu inverse Funktion hat, wenn statt $X$, $Y$ wieder $x$, $y$ geschrieben wird, die Gleichung: $y = \frac{x-b}{m}$. Sie ist für $m \neq 0$ gleichfalls eine lineare Funktion. Wenn beide dieselbe Gerade darstellen sollen, muß gelten:

1. $m = \frac{1}{m}$, das heißt: $m^2 = 1$, $m = \pm 1$,

2. $b = -\frac{b}{m}$, das heißt: $b(m+1) = 0$, also $b = 0$, $m$ beliebig, oder $m = -1$, $b$ beliebig.

Daraus ergibt sich, daß folgende lineare Funktionen mit ihren inversen Funktionen übereinstimmen: $y = x$, $y = -x$, $y = -x + b$ ($b$ beliebig). Ihre Bilder sind: die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten (Sie geht bei der Spiegelung an sich selbst punktweise in sich über.), ferner alle Parallelen zu der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten (Diese Geraden werden durch die Winkelhalbierende des ersten Quadranten in zwei Halbgeraden zerschnitten, von denen die eine bei der Spiegelung in die andere übergeht.). (Bild 8.28.)
Andere lineare Funktionen mit der verlangten Eigenschaft gibt es nicht.

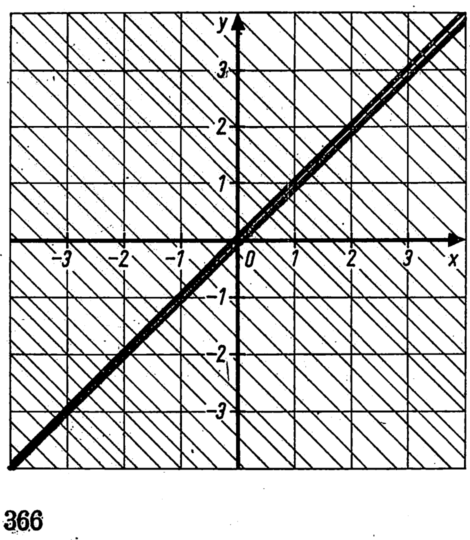



Bild 8.28.

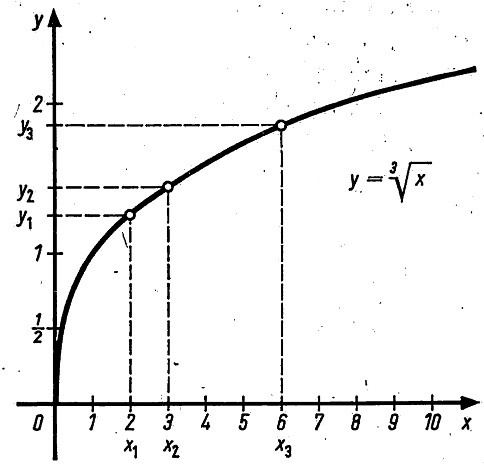



Bild 8.29.

**22.** Bild 8.29. Der Bildbereich $M'$ stimmt mit dem Definitionsbereich $M$ der nichtnegativen Zahlen überein. Da die Wurzelfunktionen streng monoton sind, bleibt bei der Abbildung $f$ von $M$ auf $M'$ die Ordnung erhalten. Ist $y_1 = \sqrt[3]{x_1}$ und $y_2 = \sqrt[3]{x_2}$, so ist bei dieser Abbildung $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ wegen $\sqrt[3]{x_1 x_2} = \sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[3]{x_2}$. Es ist also $M$ isomorph zu $M'$ hinsichtlich der Größerrelation und der Multiplikation. In Bild 8.29. ist $x_3 = x_1 \cdot x_2$, $y_3 = y_1 \cdot y_2$.

**23.** Die Funktion $y = \log_3 x$ bildet den Definitionsbereich $M$ der positiven reellen Zahlen ab auf den Bereich $M'$ der reellen Zahlen. Da die Logarithmusfunktion streng monoton wachsend ist, bleibt dabei die Ordnung erhalten. Ferner gilt für jede Basis: $\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2$. Die Multiplikation in $M$ geht also über in die Addition in $M'$. Bezeichnet man die Ordnungsrelation, die in $M$ und in $M'$ in gleicher Weise erklärt ist, mit $R$, die Multi-

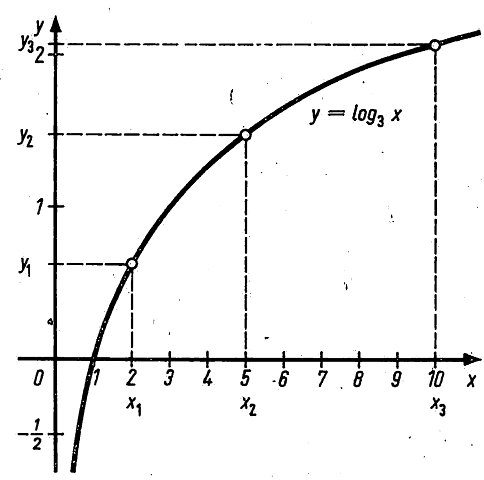



Bild 8.30.

plikation in $M$ mit $R_1$ und die Bilder der Relationen mit $R'$ bzw. $R_1'$, so gilt: $(M; R, R_1)$ und $(M'; R', R_1')$ sind isomorph. Dabei darf $R'$ durch $R$ ersetzt werden (Bild 8.30., wo $x_3 = x_1 \cdot x_2$, $y_3 = y_1 + y_2$ ist).

24. (Zur Konkretisierung des Folgenden denke der Leser bei $R$ etwa an die für natürliche Zahlen erklärte Teilerrelation, für die $aRb$ bedeutet $a \mid b$).
Zu einem beliebigen Element $b$ von $M$ bilde man die Menge $M_b$ aller Elemente $a$ von $M$, für die $a R b$ gilt. Die Vereinigungsmenge aller $M_b$ sei $U$. Es wird gezeigt, daß $U$ die verlangten Eigenschaften hat, also:
1. Die Zuordnung $b \to M_b$ ist eineindeutig.
2. Aus $a R b$ folgt $M_a \, I \, M_b$ und umgekehrt.
Wenn 1. und 2. bewiesen ist, gilt: $(M; R)$ isomorph zu $(P(U); I)$.
1. $M_b$ enthält nach Definition genau alle Elemente $m$, für die $mRb$ gilt.
*Annahme:* $M_b$ ist bei der Zuordnung nicht nur Bild von $b$, sondern auch Bild eines Elementes $c$ von $M$. Wegen der Reflexivität von $R$ gilt $b \in M_b$, $c \in M_c$. Nach der Annahme ist $M_b = M_c$, also $cRb$ und $bRc$; wegen der Antisymmetrie von $R$ ist dann $b = c$.
2. Sei $aRb$ und sei $m$ ein beliebiges Element von $M_a$. Dann folgt aus der Definition von $M_a$: $mRa$. Dies liefert in Verbindung mit $aRb$ wegen der Transitivität von $R$: $mRb$, also $m \in M_b$. Mithin gilt $M_a \subseteqq M_b$ oder $M_a \, I \, M_b$.
Sei umgekehrt $M_d \subseteqq M_e$. Wegen $d \in M_d$ (s. o.) gilt dann: $d \in M_e$, also nach Definition von $M_e$: $dRe$.
Also gilt $(M; R)$ isomorph zu $(P(U); I)$.

## Kapitel 5: Aufbau der Zahlenbereiche

1. Es seien $m_1$ die Kardinalzahl einer Menge $M_1$, $m_2$ die einer Menge $M_2$, $M_2 \subset M_1$. Die Mengen $M_1'$, $M_2'$ seien den Mengen $M_1$ bzw. $M_2$ äquivalent, ferner $M_2' \subset M_1'$ (↑ S. 195). Bildet man die Differenzmenge $M_3' = M_1' \setminus M_2'$ und benutzt man die Zuordnungen von $M_1'$ zu $M_1$ und von $M_2'$ zu $M_2$, so ergibt sich eine eineindeutige Zuordnung der Elemente von $M_3'$ zu denen von $M_3$. Also ist die Differenz $m_3 = m_1 - m_2$ der Kardinalzahlen von der Wahl der Vertretermengen unabhängig.

2. Vertretermenge von 0 ist die leere Menge $\emptyset$. Das Kreuzprodukt $A \times \emptyset$ ist für jede Menge $A$ leer. Also ist $3 \cdot 0 = 0$. Es seien $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b\}$ Vertretermengen der Kardinalzahlen 3 bzw. 1. Dann ist $A \times B = \{[a_1, b], [a_2, b], [a_3, b]\}$. Ordnet man dem Element $a_i$ das Paar $[a_i, b]$ zu, so ist die Äquivalenz von $A \times B$ mit $A$ ersichtlich. Daraus folgt die Gleichheit der Kardinalzahlen: $3 \cdot 1 = 3$.

3. Es seien die endlichen Mengen $A$, $B$, $C$ Vertretermengen von $a$, $b$, $c$, wobei $A$ einer echten Teilmenge $B'$ von $B$ äquivalent und $C$ nicht leer ist. Aus $A \sim B'$ folgt $A \times C \sim B' \times C$ (↑ S. 200), wobei $B' \times C$ eine echte Teilmenge von $B \times C$ ist. Mithin gilt für die zugehörigen Kardinalzahlen $ac < bc$.

**4.** Für alle natürlichen Zahlen mit $b + c \leqq a$ gilt:

*Behauptung:* $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Zunächst zeigen wir, daß, wenn die linke Seite der Gleichung sinnvoll ist, es auch die rechte ist. Repräsentanten für $a$, $b$, $c$ seien die Mengen $A$, $B$, $C$ mit $B \cap C = \emptyset$. Nach S. 198 ist es möglich, $B$ und $C$ so zu wählen, daß $B \cup C$ Teilmenge von $A$ ist. Dann ist $a - (b + c)$ die Kardinalzahl von $A \setminus (B \cup C)$. Mit $B \cup C$ ist auch $B$ Teilmenge von $A$. Wir zerspalten $A$ in zwei elementefremde Teilmengen: $A = (A \setminus B) \cup B$. Da $C$ elementefremd zu $B$, aber gleichfalls Teilmenge von $A$ ist, muß $C$ Teilmenge von $A \setminus B$ sein. Es ist also $c \leqq a - b$ und $(a - b) - c$ eine natürliche Zahl $\geqq 0$.

Jetzt wird gezeigt:

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Die links vom Gleichheitszeichen stehende Menge heiße $M_1$, die rechts stehende $M_2$.

a) Es sei $m_1 \in M_1$. Dann gilt $m_1 \in A$, $m_1 \notin B \cup C$, also $m_1 \notin B$ und $m_1 \notin C$. Mithin gilt $m_1 \in A \setminus B$ und – wegen $m_1 \notin C$ – $m_1 \in M_2$.

b) Es sei $m_2 \in M_2$. Dann gilt $m_2 \in A \setminus B$ und $m_2 \notin C$. Aus $m_2 \in A \setminus B$ folgt: $m_2 \in A$, $m_2 \notin B$, und daraus in Verbindung mit $m_2 \notin C$: $m_2 \notin B \cup C$. Mithin gilt $m_2 \in M_1$. Also ist $M_1 = M_2$.

**5.** Aus der für beliebige Mengen $A$, $B$, $C$ geltenden Formel

(I) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (↑ S. 53)

leitete der Leser für die entsprechenden Kardinalzahlen $a$, $b$, $c$ die (nicht allgemeingültige!) Formel

(II) $(a + b) - c = (a - c) + (b - c)$

ab. Er ließ dabei außer acht, daß der Übergang von $A \cup B$ zu der Kardinalzahl $a + b$ die Wahl der Mengen $A$ und $B$ und daß die Substraktion von $c$ die Wahl der Menge $C$ aus den Klassen $a$ bzw. $b$ bzw. $c$ stark einschränkt. Es ist zu fordern: $A \cap B = \emptyset$, $C$ Teilmenge von $A$ und Teilmenge von $B$ (↑ S. 200). Dann ist $C$ auch Teilmenge von $A \cup B$. Diese Forderungen sind nur dann miteinander vereinbar, wenn $C$ die leere Menge ist. Dann ist $c = 0$, und die Formel (I) lautet: $A \cup B = A \cup B$, also Formel (II): $a + b = a + b$.

**6.** Es ist zu zeigen:

1. $\alpha\ R'\ \alpha$ gilt für kein $\alpha$ (Irreflexivität).
2. Aus $\alpha\ R'\ \beta$ und $\beta\ R'\ \gamma$ folgt $\alpha\ R'\ \gamma$ (Transitivität).
3. Für zwei beliebige verschiedene gebrochene Zahlen $\alpha$, $\beta$ gilt entweder $\alpha\ R'\ \beta$ oder $\beta\ R'\ \alpha$ (Linearität).

*Beweis* von 1.: Es sei $\frac{m}{n}$ ein Repräsentant von $\alpha$, $\frac{r}{s}$ einer von $\beta$, $\frac{p}{q}$ einer von $\gamma$. Nach der Erklärung der Kleinerbeziehung von Seite 217 für gebrochene Zahlen bedeutet $\alpha\ R'\ \beta$: $ms < rn$. Also würde $\alpha\ R'\ \alpha$ bedeuten $mn < mn$, im Widerspruch zu der Eindeutigkeit der Multiplikation natürlicher Zahlen.

*Beweis* von 2.: Es gelte $\alpha\ R'\ \beta$, $\beta\ R'\ \gamma$. Das heißt: $ms < rn$, $rq < ps$. Multipliziert man die beiden Seiten der ersten Ungleichung mit $q$, die der zweiten

mit $n$ (beide Faktoren sind von 0 verschieden), so ergibt sich wegen der für natürliche Zahlen $m, s, r, n, p, q$ geltenden Monotoniegesetze:
$msq < rnq < psn$, und wegen $s \neq 0$: $mq < pn$, also $\alpha < \gamma$.
*Beweis* von 3.: Die von 0 verschiedenen Produkte $ms$ und $rn$ sind als natürliche Zahlen sicher vergleichbar, da die für natürliche Zahlen erklärte Kleinerrelation linear ist. Wegen $ms \neq rn$ gilt daher entweder $ms < rn$ oder $ms > rn$, also gilt entweder $\alpha < \beta$ oder $\beta < \alpha$.
Die für gebrochene Zahlen erklärte Kleinerrelation ist also eine irreflexive Ordnungsrelation.

7. Es sei
$$\alpha = \left\{\frac{m}{n}\right\}, \beta = \left\{\frac{r}{s}\right\}, \text{ also } \alpha + \beta = \left\{\frac{ms + rn}{ns}\right\}.$$
Ferner sei
$$\frac{m'}{n'} \underset{(\mathrm{Q})}{=} \frac{m}{n} \qquad (1)$$
$$\frac{r'}{s'} \underset{(\mathrm{Q})}{=} \frac{r}{s} \qquad (2)$$
*Behauptung:* $\dfrac{m's' + r'n'}{n's'} \underset{(\mathrm{Q})}{=} \dfrac{ms + rn}{ns}$

*Beweis:* $m'n = mn' \quad | \cdot ss' \qquad (1')$
$r's = rs' \quad | \cdot nn' \qquad (2')$
addiert und umgestellt:
$ns(m's' + r'n') = n's'(ms + rn)$. Dies ist die Behauptung.
Bei dem entsprechenden Nachweis für Subtraktionen ist $\beta \leqq \alpha$ vorauszusetzen. Dann sind die auftretenden Operationen ausführbar. Der Beweis verläuft wie oben, nur ist „+“ zu ersetzen durch „—“.

8. Die Bezeichnungen seien dieselben wie in der vorigen Lösung. Es ist
$$\alpha \cdot \beta = \left\{\frac{mr}{ns}\right\}, \quad \alpha' \cdot \beta' = \left\{\frac{m'r'}{n's'}\right\}.$$
Zu zeigen ist: $(mr)(n's') = (m'r')(ns)$.
Diese Gleichung ergibt sich, wenn man in (1′), (2′) der Lösung der vorigen Aufgabe die beiden linken und die beiden rechten Seiten miteinander multipliziert.
Für die Absicherung der Division ist zu zeigen: $\alpha : \beta = \alpha' : \beta'$, also $msn'r' = m's'nr$. Dies ergibt sich in der gleichen Weise wie bei der Multiplikation, nur muß man in einer der Gleichungen (1′), (2′) die beiden Seiten miteinander vertauschen.

9. Es ist zu zeigen, daß aus $\alpha < \beta$ folgt $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.
Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von Aufgabe **6** bedeutet $\alpha + \gamma$: $\left\{\dfrac{mq + np}{nq}\right\}$, $\beta + \gamma$: $\left\{\dfrac{rq + ps}{sq}\right\}$. Multipliziert man in der Ungleichung $ms < rn$ beide Seiten mit $q^2$ und addiert $nspq$, so gilt auf Grund der für natürliche Zahlen geltenden Monotoniegesetze: $msq^2 + nspq < rnq^2 + nspq$, oder, nach Anwendung des gleichfalls für natürliche Zahlen geltenden Distributivgesetzes: $(mq + np)\,sq < (rq + ps)\,nq$. Das ist gleichbedeutend mit $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

**10.** a) Es ist zu zeigen: $(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$.

Ein Repräsentant von $\alpha - \beta$ ist $\frac{ms - rn}{ns}$ und

von $(\alpha - \beta) + \beta$: $\frac{(ms - rn) s + rns}{ns \cdot s} = \frac{ms^2}{ns^2} \underset{(Q)}{=} \frac{m}{n}$.

b) Es ist zu zeigen $(\alpha : \beta) \cdot \beta = \alpha$,

also unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$\frac{ms}{nr} \cdot \frac{r}{s} \underset{(Q)}{=} \frac{m}{n}$.

Das ist richtig, da die linke Seite auf Grund des Assoziativgesetzes für die Multiplikation von gebrochenen Zahlen gleich

$\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{s}{r} \cdot \frac{r}{s}\right) \underset{(Q)}{=} \frac{m}{n}$ ist.

**11.** Es ist zu zeigen:

1. Die Reflexivität (sie ist wegen $m + n = m + n$ trivial),
2. die Symmetrie (auch sie ist wegen $m + n' = m' + n$ selbstverständlich),
3. die Transitivität der Relation.

Dafür führen wir noch das Paar $[m'', n'']$ ein. Es sei $[m, n] \underset{(D)}{=} [m', n']$, $[m', n'] \underset{(D)}{=} [m'', n'']$,

ausgeschrieben:

$m + n' = m' + n,\ m' + n'' = m'' + n'$.

Addiert man zur ersten Gleichung $n''$, zur zweiten $n$, so ergibt sich:

$m + n' + n'' = m' + n + n''$,

$m' + n + n'' = m'' + n' + n$, also

$m + n' + n'' = m'' + n' + n$

und, da die Monotoniegesetze für die gebrochenen Zahlen $m, n, \ldots$ gelten: $m + n'' = m'' + n$, mithin $[m, n] \underset{(D)}{=} [m'', n'']$. Auch die Transitivität der Differenzengleichheit ist gesichert. Diese ist also eine Äquivalenzrelation.

**12.** Es seien vertreten $\alpha$ durch $[m, n]$, $\beta$ durch $[r, s]$.

Um die Äquivalenz der beiden Aussagen zu zeigen, ist zu beweisen:

(1) Aus $\alpha < \beta$ folgt $m + s < r + n$,

(2) aus $m + s < r + n$ folgt $\alpha < \beta$.

Zu (1): *Voraussetzung:* $\alpha < \beta$, *Behauptung:* $m + s < r + n$. Es sind fünf Fälle für $\alpha < \beta$ zu untersuchen.

1. $\alpha$ und $\beta$ sind positiv, $\alpha = (+u)$, $\beta = (+v)$, also nach S. 229: $n < m$, $s < r$, $u = m - n$, $v = r - s$, und $u < v$. Das bedeutet $m - n < r - s$. Wird auf beiden Seiten dieser Ungleichung $s + n$ addiert, so folgt aus den in $R^+$ geltenden Monotoniegesetzen $m + s < r + n$.
2. $\alpha = 0$, $\beta$ positiv, $\beta = (+v)$, also $m = n$, $s < r$. Addiert man $m$ zu dieser Ungleichung, so entsteht die Behauptung.
3. $\alpha$ negativ, $\beta = 0$, also $r = s$, $m < n$. Addiert man $s$ zu dieser Ungleichung, so entsteht die Behauptung.
4. $\alpha$ negativ, $\beta$ positiv, also $m < n$, $s < r$. Die Addition dieser beiden Ungleichungen führt auf die Behauptung.

5. $\alpha$ und $\beta$ negativ, also $m < n$, $r < s$. Es ist $u = n - m$, $v = s - r$ und nach S. 229 $s - r < n - m$. Die Addition von $m + r$ führt auf die Behauptung.

Damit ist der erste Teil bewiesen.

Zu (2): *Voraussetzung:* $m + s < r + n$, *Behauptung:* $\alpha < \beta$.

Hier sind mehr Fallunterscheidungen erforderlich.

1. $m < n$, $s \leqq r$. Das bedeutet: $\alpha$ negativ, $\beta$ positiv oder $\beta = 0$, also $\alpha < \beta$.
2. $m = n$, $s < r$, also $\alpha = 0$, $\beta$ positiv, mithin $\alpha < \beta$.
3. $m < n$, $r < s$. Dann sind $\alpha$ und $\beta$ negativ. Subtrahiert man $m + r$ von der Ungleichung $m + s < r + n$, so entsteht $s - r < n - m$, das heißt $v < u$, und nach den Ausführungen von S. 229: $\alpha < \beta$.
4. $n < m$, $s < r$. Dann sind $\alpha$ und $\beta$ positiv. Subtrahiert man $n + s$ von der Ungleichung $m + s < r + n$, so entsteht $m - n < r - s$, das heißt $u < v$, und nach den Ausführungen von S. 229: $\alpha < \beta$.
5. $m < r$, $s \leqq n$. Hier sind weitere Fallunterscheidungen nötig.
   a) Gilt $r \leqq s$, also $m < r \leqq s \leqq n$, mithin $m < n$, so ist entweder $\beta = 0$ und $\alpha$ negativ, also $\alpha < \beta$, oder es sind $\alpha$ und $\beta$ negativ. In diesem Fall wird die Ungleichung $m + s < r + n$ weiterbehandelt wie in Fall 3.
   b) Ist $s < r$, also $\beta$ positiv, so ist $m < n$, $m = n$ und $n < m$ möglich. Diese Fälle werden wie in Fall 1, 2 oder 4 weiterbehandelt und führen durchweg auf $\alpha < \beta$.
6. $m = r$, $s < n$; 7. $m < r$, $n < s$; 8. $r < m$, $s < n$.
   Die Fälle 6, 7 und 8 werden entsprechend wie Fall 5 behandelt.

Damit ist auch der zweite Teil bewiesen und die Äquivalenz der beiden Aussagen gezeigt.

13. Es sei $[m, n] \underset{(D)}{=} [m', n']$, also $m + n' = m' + n$ (1) und

$[r, s] \underset{(D)}{=} [r', s']$, also $r + s' = r' + s$ (2).

Zu zeigen ist für die Summe: $[m + r, n + s] \underset{(D)}{=} [m' + r', n' + s']$. Addiert man zu (1) $r + s'$, zu (2) $m' + n$, so ergibt sich:

$m + n' + r + s' = m' + n + r + s'$ bzw.

$m' + n + r + s' = r' + s + m' + n$, also

$(m + r) + (n' + s') = (m' + r') + (n + s)$,

was zu zeigen war.

Für die Differenz ist zu zeigen: $[m + s, n + r] \underset{(D)}{=} [m' + s', n' + r']$. Addiert man zu (1) $s + r'$, zu (2) $m' + n$, so ergibt sich:

$m + n' + s + r' = m' + n + s + r'$ bzw.

$m' + n + s + r' = r + s' + m' + n$, also

$(m + s) + (n' + r') = (m' + s') + (n + r)$,

was zu zeigen war.

14. Die Bezeichnungen seien dieselben wie in den Lösungen zu den vorigen Aufgaben. Die rationale Zahl $\alpha - \beta$ wird vertreten durch das Paar $[m + s, n + r]$ und $(\alpha - \beta) + \beta$ durch $[m + s + r, n + r + s]$. Dieses Paar ist differenzengleich zu $[m, n]$, da $(m + s + r) + n = (n + r + s) + m$ gilt. Also ist $(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$.

15. Wir stellen $\alpha$ dar durch das Paar $[m, n]$, $\beta$ durch $[r, s]$. Dann ist nach Definition der Subtraktion $\alpha - \beta$ darstellbar durch das Paar $[m + s, n + r]$. Nach Maßgabe des Vorzeichens von $\alpha$ und $\beta$ entstehen daraus die linken Seiten von e) bis h). (↑ S. 231)

e) $\alpha = (+u)$, also $m = n + u$, $\beta = (+v)$, also $r = s + v$. (↑ 229 ff.)

$$[m + s, n + r] = [n + u + s, n + s + v]$$
$$= [(n + s) + u, (n + s) + v] \underset{(D)}{=} [u, v].$$

$\alpha - \beta$ kann durch das Paar $[u, v]$ dargestellt werden. Also:

$$(+u) - (+v) = \begin{cases} +(u - v), & \text{falls } v < u \\ -(v - u), & \text{falls } u < v \\ 0, & \text{falls } u = v. \end{cases}$$

f) $\alpha = (+u)$ (wie bei e)), $\beta = (-v)$, also $s = r + v$.

$[m + s, n + r] = [n + u + r + v, n + r] = [(n + r) + (u + v), (n + r)]$.

Dies ist eine Darstellung der positiven rationalen Zahl $+(u + v)$.

Also: $(+u) - (-v) = +(u + v)$.

g) $\alpha = (-u)$, also $n = m + u$, $\beta = (+v)$ (wie bei e)),

$[m + s, n + r] = [m + s, m + u + s + v] = [(m + s), (m + s) + (u+v)]$.

Dies ist eine Darstellung der negativen rationalen Zahl $-(u + v)$. Also:

$(-u) - (+v) = -(u + v)$.

h) $\alpha = (-u)$ (wie bei g)), $\beta = (-v)$ (wie bei f)),

$[m + s, n + r] = [m + r + v, m + u + r] = [(m + r) + v, (m + r) + u] \underset{(D)}{=} [v, u]$.

$\alpha - \beta$ ist darstellbar durch das Paar $[v, u]$. Mithin gilt

$$(-u) - (-v) = \begin{cases} +(v - u), & \text{falls } u < v \\ -(u - v), & \text{falls } v < u \\ 0, & \text{falls } u = v. \end{cases}$$

16. Es sei wieder $\alpha = (+u)$, vertreten durch $[m, n]$ mit $m = n + u$, $\beta = (-v)$ durch $[r, s]$ mit $s = r + v$.

$\alpha \cdot \beta$ wird dann nach Seite 232 dargestellt durch

$[(n + u)r + n(r + v), (n + u)(r + v) + nr] =$

$[2nr + ur + nv, 2nr + ur + nv + uv]$.

Also:

$(+u) \cdot (-v) = (-uv)$.

17. Es seien $[m, n]$ ein Vertreter von $\alpha$, $[r, s]$ einer von $\beta$, $[p, q]$ einer von $\gamma$. Dann ist

$\alpha + \gamma$ vertreten durch $[m + p, n + q]$,
$\beta + \gamma$ vertreten durch $[r + p, s + q]$,
$\alpha - \gamma$ vertreten durch $[m + q, n + p]$,
$\alpha - \beta$ vertreten durch $[r + q, s + p]$.

$\alpha < \beta$ bedeutet $m + s < n + r$. (✳) (Vgl. Lösung zu Aufgabe 12!)

Zu zeigen ist

1. $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, d. h. $(m + p) + (s + q) < (n + q) + (r + p)$
2. $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$, d. h. $(m + q) + (s + p < (n + p) + (r + q)$.

Addiert man auf beiden Seiten der Ungleichung (✳) $p + q$, so erhält man 1. und 2.

18. Es sei $\gamma \Rightarrow (-c)$, $c \in R^+$ und $\alpha < \beta$. Zu zeigen ist: $\beta : \gamma < \alpha : \gamma$. Für $\alpha < \beta$ sind fünf Fälle möglich (vgl. Lösung von Aufgabe 12):

1. $\alpha = (+u)$, $\beta = (+v)$, $u < v$. Nach Erklärung der Division in $R$ (vgl. S. 234 f.) ist dann $\alpha : \gamma = \left(-\frac{u}{c}\right)$, $\beta : \gamma = \left(-\frac{v}{c}\right)$, $u, v, c \in R^+$. Aus $u < v$ folgt in $R^+$: $\frac{u}{c} < \frac{v}{c}$, also in $R$: $\left(-\frac{v}{c}\right) < \left(-\frac{u}{c}\right)$, also $\beta : \gamma < \alpha : \gamma$.
2. $\alpha = 0$, $\beta = (+v)$. Dann ist $\alpha : \gamma = 0$, $\beta : \gamma$ negativ;
3. $\alpha = (-u)$, $\beta = 0$. Dann ist $\alpha : \gamma$ positiv, $\beta : \gamma = 0$;
4. $\alpha = (-u)$, $\beta = (+v)$. Dann ist $\alpha : \gamma$ positiv, $\beta : \gamma$ negativ.

In den Fällen 2., 3., 4. ist also $\beta : \gamma < \alpha : \gamma$.

5. $\alpha = (-u)$, $\beta = (-v)$, $v < u$. Es ist $\alpha : \gamma = \left(+\frac{u}{c}\right)$, $\beta : \gamma = \left(+\frac{v}{c}\right)$. Aus $v < u$ folgt in $R^+$: $\frac{v}{c} < \frac{u}{c}$, also in $R$: $\left(+\frac{v}{c}\right) < \left(+\frac{u}{c}\right)$; das heißt, $\beta : \gamma < \alpha : \gamma$.

19. Angenommen, die Behauptung wäre falsch, Dann wäre
$(\alpha + \beta) : \gamma \underset{(<)}{>} \alpha : \gamma + \beta : \gamma$.
Nach Multiplikation dieser Ungleichung mit $\gamma$ folgt durch Anwendung des für rationale Zahlen geltenden Distributivgesetzes (↑ 233 f.) und aus $(\delta : \gamma) \cdot \gamma = \delta$ der Widerspruch $\alpha + \beta \underset{(<)}{>} \alpha + \beta$.

20. Annahme, es gäbe eine rationale Zahl $r$ mit $r^2 = 3$, $r = \frac{m}{n}$, also $m^2 = n^2 \cdot 3$. Die natürlichen Zahlen $m$ und $n$ können als teilerfremd angesehen werden. Dann kann $m^2$ nicht Vielfaches von $n^2$ sein.

21. Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ und die positive Zahl $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Es ist $N$ so zu bestimmen, daß für $n > N$ und beliebiges $m$ gilt: $|a_{n+m} - a_n| < \frac{1}{1000}$.

Es ist $|a_{n+m} - a_n| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} = \frac{n+m-n}{n(n+m)} < \frac{n+m}{n(n+m)} = \frac{1}{n}$.

Für $N = 1000$ und $n > N$ wird $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$, also erst recht $|a_{n+m} - a_n| < \frac{1}{1000}$

22. Es ist $\alpha = 0{,}24\overline{9}$

$$= 0{,}24 + 9\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \ldots\right).$$

In der Klammer steht die geometrische Reihe

$\frac{1}{1000}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right)$ mit $q = \frac{1}{10} < 1$.

Die unendliche geometrische Reihe

$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$ hat für $|q| < 1$ eine Summe $S$, und es ist $S = \frac{a}{1-q}$.

Also wird $\alpha = 0{,}24 + 9 \frac{1}{1000\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = 0{,}24 + \frac{1}{100} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$.

23. Eine beliebige rationale Zahl $r$ hat die Eigenschaft, daß $r^2$ entweder größer oder kleiner als 2 ist, da mit $r$ auch $r^2$ zu $R$ gehört und $R$ linear geordnet ist. Also gehört $r$ entweder zu $A$ oder zu $A'$. (1)
Da zum Beispiel $1^2 < 2$ und $3^2 > 2$, ist keine der beiden Klassen $A$, $A'$ leer. (2)
Aus $r_1 \in A$, also $r_1^2 < 2$ und $r_2 \in A'$, also $r_2^2 > 2$ folgt $r_1^2 < r_2^2$, mithin $r_1 < r_2$. (3)
Die drei für einen Schnitt erforderlichen Eigenschaften sind also vorhanden.

24. 1. Auf Grund von (6) (↑ S. 252) gibt es zu einem Element $a \neq 0$ von $P$ genau ein $y_0$ in $P$, so daß gilt: $a \cdot y_0 = a$. Es ist zu zeigen, daß für jedes $m \neq 0$, $m \in P$, gilt: $my_0 = m$. Nach (6) gilt:
Sei $m$ ein beliebiges von $a$ und von 0 verschiedenes Element von $P$. Dann gibt es in $P$ ein Element $y_1$, so daß $m = a \cdot y_1$ ist. Also gilt:
$m = ay_1 = (ay_0)\,y_1 = a\,(y_0y_1) = a\,(y_1y_0) = (ay_1)\,y_0 = my_0.$
Das Element $y_0$ ist also neutrales Element der Multiplikation.
2. Zum Nachweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, daß $y_0'$ gleichfalls neutrales Element der Multiplikation wäre. Dann ist $y_0 = y_0 \cdot y_0' = y_0'$.

25. Der Kürze halber soll hier für $(i)$ einfach $i$ geschrieben werden ($i = 0, 1, 2$). Die Kommutativität von Addition und Multiplikation kann direkt aus den Erklärungen dieser Operationen abgelesen werden. Die Assoziativgesetze müssen für alle Einzelfälle geprüft werden, z. B.

$(0 + 1) + 2 = 1 + 2 = 0$ $\qquad$ $(0 + 2) + 1 = 2 + 1 = 0$
$0 + (1 + 2) = 0 + 0 = 0$ $\qquad$ $0 + (2 + 1) = 0 + 0 = 0$

$(1 + 2) + 2 = 0 + 2 = 2$ $\qquad$ $(2 + 1) + 2 = 0 + 2 = 2$
$1 + (2 + 2) = 1 + 1 = 2$ $\qquad$ $2 + (1 + 2) = 2 + 0 = 2$ usw.

Der Nachweis für die Multiplikation vereinfacht sich, da der Faktor 0, der das Verschwinden des Produkts zur Folge hat, außer acht gelassen werden kann.

$(1 \cdot 2) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 1$ $\qquad$ $(2 \cdot 2) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$
$1 \cdot (2 \cdot 2) = 1 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $2 \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$(2 \cdot 1) \cdot 1 = 2 \cdot 1 = 2$
$2 \cdot (1 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 2$ usw. Damit ist Axiom 2 von S. 251 nachgewiesen.

Beim Nachweis des Distributivgesetzes $a(b + c) = ab + ac$ können die Fälle $a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 0$ außer acht gelassen werden, da es hier offensichtlich erfüllt ist.

$2 \cdot (1 + 1) = 2 \cdot 2 = 1$ $\qquad$ $1 \cdot (2 + 1) = 1 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 1$ $\qquad$ $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 0$

$2 \cdot (2 + 2) = 2 \cdot 1 = 2$
$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 1 + 1 = 2$ usw. Damit gilt Axiom 3.

Die eindeutige Umkehrbarkeit der Addition kann unmittelbar aus ihrer Definition abgelesen werden, da bei beliebigem erstem Summanden jede der drei Zahlen von $N'$ auf genau eine Weise erreicht werden kann. Das Entsprechende gilt für die Multiplikation, sofern der erste Faktor ungleich 0 ist. Also gelten die Axiome 4 und 6.

Axiom 5 ist erfüllt, da $N'$ zwei von 0 verschiedene Elemente enthält.

26. $N^{(2)}$ enthält zwei Elemente, (0) und (1).
Erklärung der Addition:
$(0) + (i) = (i) + (0) = (i) \qquad (i = 0{,}1)$
$(1) + (1) = (0)$
Erklärung der Multiplikation:
$(0) \cdot (i) = (i) \cdot (0) = (0)$
$(1) \cdot (i) = (i) \qquad (i = 0{,}1)$
Der Nachweis der Axiome 2 bis 6 ist noch einfacher als in Aufgabe 25 und kann daher hier übergangen werden. Auch dieser Körper ist nicht angeordnet.

27. $R_0$ ist keine Ordnungsrelation, aber eine irreflexive Halbordnung (↑ S. 101). Der Fall entspricht genau dem Beispiel 9 von Kapitel 3 (↑ S. 76).

28. Es sei $z_1 = (0, b)$, $z_2 = (0, d)$. Dann ist $z_1 \cdot z_2 = (0 - bd, 0 + 0)$, also $z_1 \cdot z_2 = -bd$, mithin reell.

29. Es ist zu zeigen: $\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) \cdot (c, d) = (a, b)$. (↑ S. 257)
Die Ausführung der Multiplikation führt auf das Paar

$$\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \cdot c - \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot d, \quad \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot c + \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \cdot d\right)$$

$$= \left(\frac{ac^2 + bcd - bcd + ad^2}{c^2 + d^2}, \quad \frac{bc^2 - acd + acd + bd^2}{c^2 + d^2}\right)$$

$$= \left(\frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2} \cdot a, \quad \frac{c^2 + d^2}{c^2 + d^2} \cdot b\right) = (a, b).$$ (Der Nenner ist nach Voraussetzung von 0 verschieden.)

30. Bild 8.31.:
Es ist $\triangle OAz_2 \cong \triangle z_1BE$ [denn $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, $|\overline{Oz_2}| = |\overline{z_1E}|$, $\sphericalangle(Oz_2, x) = \sphericalangle(z_1E, z_1B)$].
Also ist
$|\overline{z_1B}| = |\overline{OA}| = x_2$,
$|\overline{BE}| = |\overline{Az_2}| = y_2$.
Da $|\overline{OC}| = x_1$, $|\overline{Cz_1}| = |\overline{DB}| = y_1$ ist, gilt
$|\overline{OD}| = |\overline{OC}| + |\overline{CD}| = x_1 + x_2$,
$|\overline{DE}| = |\overline{DB}| + |\overline{BE}| = y_1 + y_2$.
Der Punkt $E$ hat also die Koordinaten $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$, ist mithin als $z_1 + z_2$ zu bezeichnen.

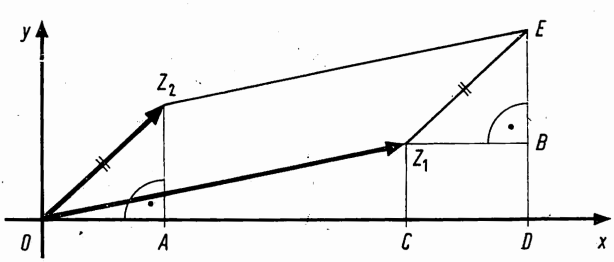


Bild 8.31.

## Kapitel 6: Vergleich unendlicher Mengen

1. Das $n$-te Glied der ersten Folge kann bei entsprechender Fortsetzung heißen: $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, es ist $a_{10} = \frac{1}{2^9} = 512$, bei der zweiten Folge $b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$, $b_{10} = -10$, bei der dritten Folge $c_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$, $c_{10} = +\frac{10}{11}$.

2. Die Summe von Zähler und Nenner beträgt 9. Der Bruch steht in der 7. Schräge an 5. Stelle. Zu streichen sind zwecks Ermittlung der Platznummer die Brüche $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{6}{2}, \frac{4}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$. Der Bruch $\frac{5}{4}$ erhält die Platznummer 25.

3. Es ist $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = +\frac{1}{2}$, $c_5 = -\frac{1}{2}$, $c_6 = 2$, $c_7 = -2$, $c_8 = 3$, $c_9 = -3$, $c_{10} = \frac{1}{3}$, $c_{11} = -\frac{1}{3}$, $c_{12} = \frac{1}{4}$, $c_{13} = -\frac{1}{4}$.
Die rationale Zahl $-\frac{1}{4}$ steht an 13. Stelle.

4. a) Bild 8.32.a b) Bild 8.32.b c) Bild 8.32.c d) Bild 8.32.d

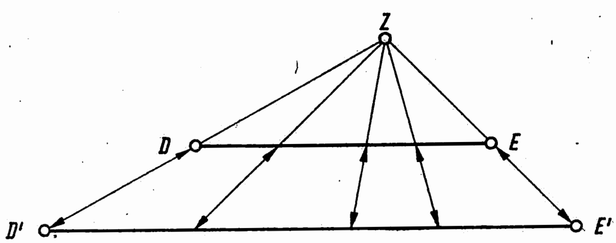



Bild 8.32.a

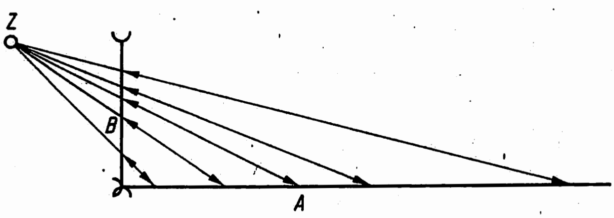



Bild 8.32.b

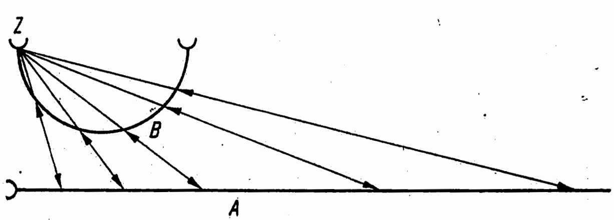



Bild 8.32.c

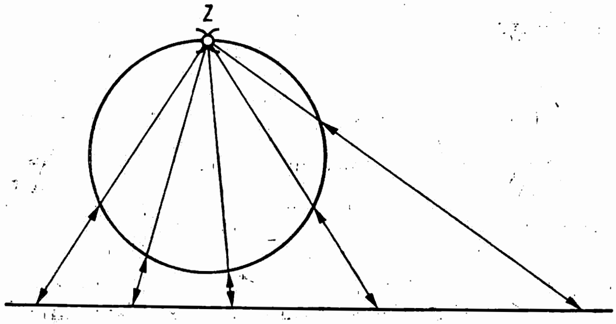



Bild 8.32.d

**5.** Es sei $A$ eine Menge mit der Kardinalzahl $a$, $B$ eine mit der Kardinalzahl $b$, $A$ zu $B$ elementefremd, $A$ gleichmächtig mit $A'$, $B$ mit $B'$, und $A'$ zu $B'$ elementefremd. Dann existiert mindestens je eine Abbildung von $A$ auf $A'$ und von $B$ auf $B'$. Unter Verwendung dieser Abbildungen ist sofort ersichtlich, daß $A' \cup B'$ äquivalent zu $A \cup B$ und $A' \times B'$ äquivalent zu $A \times B$ ist.

**6.** Die ähnliche Abbildung wird durch Untereinanderschreiben der Elemente gezeigt.

$$(N, R_0) = [1, \; 2, \; 3, 4, 5, \ldots, \; n, \ldots]$$
$$[3, \; 4, \; 5, 6, 7, \ldots, n+2, \ldots],$$

$$(N, R_3) = [3, \; 4, \; 5, \ldots, \; n+2, \ldots, 1, 2]$$
$$\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n+2}{n+3}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right],$$

$$(N, R_4) = [1, \; 3, \; 5, \ldots, \; 2n-1, \ldots, \; 2, \; 4, \; 6, \ldots, 2m, \ldots]$$
$$[0, +1, +2, \ldots, +(n-1), \ldots, -1, -2, -3, \ldots, -m, \ldots].$$

**7.** Bei der Orientierung $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ stellt die Zuordnung eine ähnliche Abbildung dar, aber nicht, wenn die Orientierung von $\overline{AB}$ umgekehrt wird, also Punkt $X$ von $B$ nach A läuft. Aber auch dann sind die beiden Punktmengen ähnlich. Die Proportion, die in diesem Fall die Lage von $Y$ bestimmt, lautet:

$|\overline{BX}| : |\overline{AY}| = 1:2$ (Bild 8.33.a).

Wird außerdem die Orientierung von $\overline{AC}$ umgekehrt, läuft also $Y$ von $C$ nach $A$, so gilt

$|\overline{BX}| : |\overline{CY}| = 1:2$ (Bild 8.33.b).

Dann weist die Zuordnung von $Y$ zu $X$ die Ähnlichkeit nach. Zu Bild 6.6. (↑ S. 275):

Wenn Strecke und Gerade gleich orientiert sind, liegt eine ähnliche Abbildung vor, aber nicht, wenn die Strecke umgekehrt orientiert wird. In diesem Fall projiziere man die Strecke $\overline{DE}$ wie in Bild 8.33.c von einem außerhalb gelegenen Punkt $Z$ aus auf eine parallele Strecke $\overline{D'E'}$, die mit der Geraden gleich orientiert ist, und verfahre mit $\overline{D'E'}$ wie im Bild 6.6. Die Zusammensetzung dieser ähnlichen Abbildungen ist wieder ähnlich, wodurch die Ähnlichkeit der auf der Strecke liegenden Punktmenge mit der auf der Geraden liegenden gezeigt ist.

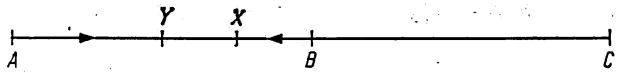



Bild 8.33.a

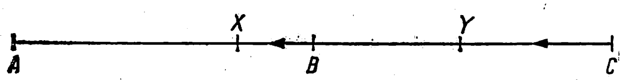



Bild 8.33.b

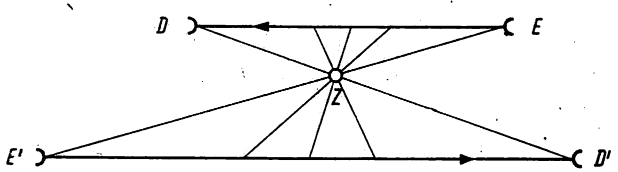



Bild 8.33.c

8. Es sei $B_1$ ähnlich zu $A(x)$, $x \in B_2$. Wäre $B_1$ ähnlich zu $B_2$, so entstünde ein Widerspruch zu Satz 3: $B_2$ ähnlich zu $B_1$, $B_1$ ähnlich zu $A(x)$, also $B_2$ ähnlich zu einem seiner Abschnitte.

9. Zunächst ist wegen Satz 3 die Relation *irreflexiv*.
Sei nun $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_2 < \beta_3$. Die Ordnungszahlen $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ seien durch die wohlgeordneten Mengen $B_1$, $B_2$, $B_3$ vertreten. Dann gibt es in $B_2$ ein Element $x$, so daß $B_1$ dem Abschnitt $A(x)$ von $B_2$ ähnlich ist, und es gibt in $B_3$ ein Element $y$, so daß $B_2$ dem Abschnitt $A(y)$ von $B_3$ ähnlich ist. Die ähnliche Abbildung von $B_2$ auf $A(y)$ heiße $f$. Durch $f$ wird der in $B_2$ liegende Abschnitt $A(x)$ auf einen Abschnitt $A(z)$ von $B_3$ abgebildet, wobei $z$ vor $y$ liegt. (Vgl. das symbolisch aufzufassende Bild 8.34.) Es ist also $B_1$ ähnlich auf den Abschnitt $A(x)$, $A(x)$ ähnlich auf den Abschnitt $A(z)$, mithin $B_1$ ähnlich auf einen Abschnitt von $B_3$ abgebildet. Also gilt $\beta_1 < \beta_3$. Die Relation ist transitiv. Schließlich sichert Satz 7 die Linearität der Relation.

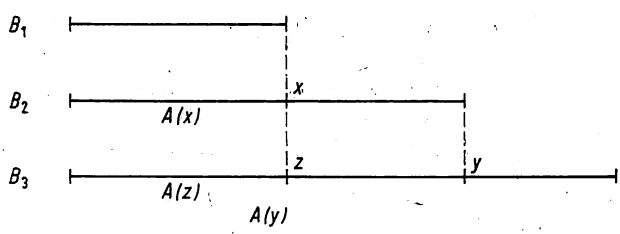



Bild 8.34.

**1.** a) I. $a = 0,\ b \neq c$; $L_{\mathrm{I}} = \emptyset$
II. $a = 0,\ b = c$; $L_{\mathrm{II}} = P$ (identisch erfüllte Gleichung)
III. $a \neq 0$; $L_{\mathrm{III}} = \left\{\frac{c-b}{a}\right\}$

b) $L = \{c - ax\}$

**2.** $L = \{[a, b];\ [a, b] \in R \times R$ und $a = 6b\}$

**3.** a) I. $a = 0,\ b \neq c$; $L_{\mathrm{I}} = \emptyset$,
II. $a = 0,\ b = c$; $L_{\mathrm{II}} = G$ bzw. $L_{\mathrm{II}} = N$;
III. Fallunterscheidung:
$\alpha$) $a \mid c - b,\ c - b = d \cdot a$, dann $L_\alpha = \{d\}$;
$\beta$) $a \nmid c - b$, dann $L_\beta = \emptyset$ (gilt für $G$ und $N$)

b) In $G$ gilt $L = \{c - ax\}$;
in $N$ Fallunterscheidung:
$\alpha$) $c > ax$, dann $L_\alpha = \{c - ax\} \neq \emptyset$;
$\beta$) $c \leqq ax$, dann $L_\beta = \emptyset$.

**4.** $\frac{3}{x-3} = \frac{7}{2x-6}$ hat zur Folge: $7x - 21 = 6x - 18$, $x = 3$.
Als Lösung kommt höchstens $x = 3$ in Frage. Dieser Wert ist aber auszuschließen, da $3 \notin P \setminus \{3\}$; $L = \emptyset$.

**5.** a) Lösung von
$4\,|x| - 10 = |x| + 5$ ist $|x| = 5$, mithin $L = \{+5, -5\}$

b) $|x| < 2$, $L = \{x;\ x \in P$ und $-2 < x < +2\}$

c) $|x| > 2$, $L_1 = \{x;\ x \in P$ und $x > +2\}$
$L_2 = \{x;\ x \in P$ und $x < -2\}$ $\quad L = L_1 \cup L_2$

**6.** Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen. Dies ist eine für die Menge der Gleichungen erklärte Relation. Dabei ist „Gleichung" im Sinne der Erklärung von S. 312 zu verstehen. Die Relation „dieselbe Lösungsmenge besitzen" ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation. Dabei fallen alle Gleichungen mit derselben Lösungsmenge in eine Klasse.

**7.** In $P \setminus \{1\}$ sind die beiden Gleichungen äquivalent, desgl. in $R \setminus \{1\}$ und in $G \setminus \{1\}$.

**8.**
$$\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{(a)} \\ 1 & \text{(b)} \\ 2 & \text{(c)} \end{cases} \tag{1}$$

Damit die Lösung reell ist, muß zunächst gefordert werden, daß $2x - 1 \geqq 0$, also $x \geqq \frac{1}{2}$ ist. Dann ist auch $x + \sqrt{2x-1}$, der Radikand des ersten Summanden von (1), positiv. Wir überzeugen uns noch davon, daß für $x \geqq \frac{1}{2}$ der Radikand des zweiten Summanden, $x - \sqrt{2x-1}$, nicht negativ wird.

Die Annahme $x - \sqrt{2x-1} < 0$ führt für $x \geqq \frac{1}{2}$ auf $0 < x < \sqrt{2x-1}$ und nach Quadrieren dieses positiven Ausdrucks auf $x^2 < 2x - 1$ oder $x^2 - 2x + 1 < 0$. Dies führt aber, da links das Quadrat von $x - 1$ steht, auf einen Widerspruch. Mithin ist für $x \geqq \frac{1}{2}$ in der Tat der zweite Radikand nichtnegativ.

Als Grundbereich für die Gleichungen (a), (b), (c) setzen wir fest:

$S = \left\{x; x \in P \text{ und } x \geqq \frac{1}{2}\right\}$.

Nach Quadrieren entsteht aus (1)

$$\left.\begin{matrix}\text{(a) } 2\\ \text{(b) } 1\\ \text{(c) } 4\end{matrix}\right\} = x + \sqrt{2x-1} + x - \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})(x-\sqrt{2x-1})} \quad (1')$$

$$= 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)}$$

$$= 2x + 2\sqrt{(x-1)^2} \qquad \text{(und wegen } \sqrt{u^2} = |u|\text{)}$$

$$= 2x + 2|x-1| = 2(x + |x-1|).$$

Zu (a): $2 = 2(x + |x-1|), \quad x + |x-1| = 1.$

*Fallunterscheidung:*

I. $x \geqq 1$, $|x-1| = x - 1$,

$1 = x + x - 1$, $x = 1$. Die Forderung $x \geqq \frac{1}{2}$ ist erfüllt; als Lösung kommt in diesem Fall nur der Wert 1 in Frage (Probe!).

II. $x < 1$, $|x-1| = 1 - x$, $x + 1 - x = 1$, $1 = 1$. In diesem Falle ist die Gleichung identisch erfüllt. Es kommen alle $x$ aus dem Intervall $\frac{1}{2} \leqq x < 1$ als Lösung in Frage.

Bevor die Lösungsmenge gebildet wird, ist zu prüfen, ob der Übergang von (1) zu (1′) eine äquivalente Umformung darstellt, da sonst Lösungen verlorengehen bzw. nicht zutreffende Lösungen entstanden sein können. In der Tat handelt es sich zunächst um keine äquivalente Umformung, vielmehr ist (1′) äquivalent mit den beiden Gleichungen

(1) und $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = -\sqrt{2}$ (1″).

Es ist also $L_{(1)} = L_{(1')} \setminus L_{(1'')}$. Die Gleichung (1″) hat aber für $x \geqq \frac{1}{2}$ keine Lösung, da die linke Seite, wie oben gezeigt wurde, dann positiv ist. In dem Bereich $S$ ist daher $L_{(1'')} = \emptyset$ und $L_{(1)} = L_{(1')}$. In diesem Bereich sind (1) und (1′) äquivalente Gleichungen.

Also ist im Fall (a):

$L_{\mathrm{I}} = \{1\} \quad (x \geqq 1)$

$L_{\mathrm{II}} = \left\{x; x \in P \text{ und } \frac{1}{2} \leqq x < 1\right\} \quad (x < 1)$

Es ist $L_a = L_{\mathrm{I}} \cup L_{\mathrm{II}}$, also

$L_a = \left\{x; x \in P \text{ und } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right\}$.

Für Fall (b) und (c) gilt die oben durchgeführte Betrachtung über die Äquivalenz der Umformung entsprechend; die Gleichungen (1), in denen rechts eine negative Zahl steht, brauchen nicht in Betracht gezogen zu werden.

Zu (b): $2(x + |x - 1|) = 1, x + |x - 1| = \frac{1}{2}$

I. $x \geqq 1$, $\frac{1}{2} = 2x - 1$, $x = \frac{3}{4}$. Da die Zahl $\frac{3}{4}$ aber die Bedingung $x \geqq 1$ nicht erfüllt, ist $L_I = \emptyset$.

II. $x < 1$, $\frac{1}{2} = x + 1 - x$, $\frac{1}{2} = 1$, unerfüllbar, $L_{II} = \emptyset$.

$L_b = L_I \cup L_{II} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

Zu (c): $2(x + |x - 1|) = 4$, $x + |x - 1| = 2$.

I. $x \geqq 1$, $2x - 1 = 2$, $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$. Die Bedingung $x \geqq 1$ ist erfüllt, also $L_I = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

II. $x < 1$, $x + 1 - x = 2$, $1 = 2$, unerfüllbar, $L_{II} = \emptyset$, $L_c = L_I \cup L_{II}$

$L_c = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

9. Für alle reellen $x$ gilt
$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$.
Aus $2 \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x$ folgt: $\sin x (\cos x - 1) = 0$.
$L_1 = \{x; x \in P \text{ und } \sin x = 0\}$,
$L_2 = \{x; x \in P \text{ und } \cos x = 1\}$,
$L = L_1 \cup L_2$.
$L_1$ enthält alle $x = k\pi$ ($k$ ganz), $L_2$ alle $x = 2k\pi$ ($k$ ganz), mithin enthält $L$ alle $x = k\pi$.
Für alle reellen Zahlen $x$, die Vielfaches von $\pi$ sind, gilt $\sin 2x = 2 \sin x$.

10. $M_{III} = \{Q(x; y); Q \in M \text{ und } x \leqq 0, y \leqq 0\}$,
$M_{IV} = \{Q(x; y); Q \in M \text{ und } x \geqq 0, y \leqq 0\}$.
Für das Folgende ist zu beachten, daß die Punkte der $x$-Achse gegeben werden durch die Paare $[x, 0]$, die der $y$-Achse durch $[0, y]$.
$M_I \setminus M_1 \setminus M_2 = \{Q(x; y); Q \in M \text{ und } x > 0, y > 0\}$,
$M_{II} \setminus M_1 = \{Q(x; y); Q \in M \text{ und } x \leqq 0, y > 0\}$,
$M_{II} \setminus M_2 = \{Q(x; y); Q \in M \text{ und } x < 0, y \geqq 0\}$.

11. a) Bild 7.21.:
$L = \{[x, y]; [x, y] \in P \times P \text{ und } 0 \leqq x \leqq 6{,}5 \text{ und } 0 \leqq y \leqq x\}$.
b) Bild 7.22.:
$L = \{[x, y]; [x, y] \in G \times G \text{ und } y = x + 3\}$.
c) Bild 7.23.:
$L = \{[x, y]; [x, y] \in P \times P \text{ und } y \geqq |x|\}$.
d) Bild 7.24.:
$L = \{[x, y]; [x, y] \in P \times P \text{ und } x - 2 \leqq y \leqq x + 2\}$.

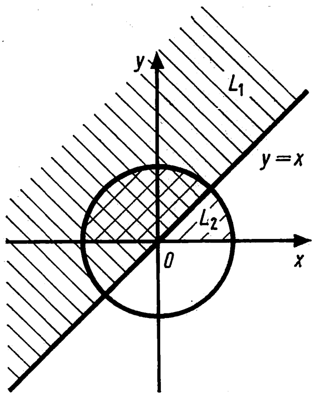



Bild 8.35.

e) Bild 7.25.: Beachte für die Lösung Bild 8.35.!
$L_1 = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y \geqq x\}$,
$L_2 = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } |x| \leqq 5 \text{ und } 0 \leqq y \leqq \sqrt{25 - x^2}\}$,
$L = L_1 \cap L_2$.

f) Bild 7.26.:
$L_1 = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } x \geqq 0 \text{ und } -x + 3 \leqq y \leqq +x + 3\}$,
$L_2 = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } x \leqq 0 \text{ und } x + 3 \leqq y \leqq -x + 3\}$,
$L = L_1 \cup L_2$.

g) Bild 7.27.:
$L_1 = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y \geqq -x\}$,
$L_2 = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } y \leqq -x - 4\}$,
$L = L_1 \cup L_2$.

h) Bild 7.28.:
$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } |y| \geqq 2\}$.

i) Bild 7.29.:
$L = \{[x, y];\ [x, y] \in P \times P \text{ und } -3 \leqq x \leqq +2 \text{ und } 3 \leqq y \leqq 5\}$.

# LITERATURVERZEICHNIS


[1] HILBERT, D.: *Grundlagen der Geometrie.*
B. G. Teubner, Stuttgart 1958.

[2] PICKERT, G.: *Ebene Inzidenzgeometrie.*
Otto Salle Verlag, Frankfurt und Hamburg 1958.

[3] EFIMOW, N. W.: *Höhere Geometrie.*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.

[4] FICHTENHOLZ, G. M.: *Differential- und Integralrechnung*, Band I.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.

[5] VARGA, T.: *Mathematische Logik für Anfänger.*
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Teil I: *Aussagenlogik*, Berlin 1970, Teil II: *Prädikatenlogik*, Berlin 1973.
Verlag Harri Deutsch, Teil I: *Aussagenlogik*, Frankfurt/M. und Zürich 1972, Teil II: *Prädikatenlogik*, Frankfurt/M. und Zürich 1973.

[6] ASSER, G.: *Einführung in die mathematische Logik*, Teil I.
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965, und Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. und Zürich 1965.

[7] KAMKE, E.: *Mengenlehre.*
de Gruyter, Berlin 1965.

[8] FRAENKEL, A.: *Einleitung in die Mengenlehre.*
Springer-Verlag, Berlin 1928.

[9] SCHWARZ, H.: *Über die Liebe.*
In: „Neues Deutschland", Beilage Nr. 1 vom 4. 1. 1964.

[10] KÜKENTHAL-MATTHES: *Leitfaden für das zoologische Praktikum.*
VEB Gustav Fischer Verlag, Jena 1959, und Verlag Gustav Fischer, Stuttgart 1959.

[11] TIETZ, W.: *Zur Definition des Funktionsbegriffs.*
In: „Mathematik in der Schule", 1 (1963), Heft 3.

[12] Autorenkollektiv: *Mathematisches Wörterbuch.*
Herausgeber: NAAS, J., und SCHMID, H. L.
Akademie-Verlag GmbH und B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Berlin und Leipzig 1961, und B. G. Teubner, Stuttgart.

[13] KLEIN, F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Vortrag).
In: KLEIN, F.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I. Berlin 1921.

[14] Brockhaus: *ABC Naturwissenschaften und Technik.* (bzw. *Technik und Naturwissenschaft*).
VEB F. A. Brockhaus Verlag, Leipzig 1968 (bzw. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. und Zürich)

[15] Autorenkollektiv: *Grundzüge der Mathematik,* Band I.
Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1962.

[16] Autorenkollektiv: *Enzyklopädie der Elementarmathematik,* Band I.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954.

[17] v. MANGOLDT-KNOPP: *Einführung in die höhere Mathematik,* Band I.
S. Hirzel Verlag, Leipzig 1950, und S. Hirzel Verlag, Stuttgart.

[18] ZAJĄCZKOWSKA, M.: *Funktionen im Schulunterricht.*
In: „Mathematik in der Schule“, 1 (1963), Heft 6.

[19] v. MANGOLDT-KNOPP: *Einführung in die höhere Mathematik,* Band II.
S. Hirzel Verlag, Leipzig 1954, und S. Hirzel Verlag, Stuttgart.

[20] Autorenkollektiv: *Enzyklopädie der Elementarmathematik,* Band III.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

[21] BREMER-BELKNER: *Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra.*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972, und Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. und Zürich 1972.

[22] SCHMIDT, H.: *Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung.*
VEB Verlag Technik, Berlin 1953.

[23] LENZ, H.: *Grundlagen der Elementarmathematik.*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.

[24] GROSCHE, G.: *Projektive Geometrie.*
Math.-Naturwissenschaftliche Bibliothek, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957.

[25] KRYGOWSKA, Z.: *Funktionen und der Begriff des Isomorphismus.*
In: „Mathematik in der Schule“, 1 (1963), Heft 4.

[26] ASSER, G.: *Einführung in die höhere Mathematik.* Teil I und II.
Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam, 1955.

[27] LEMAN-SCHOENEBERG: *Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie.*
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

[28] PIETZSCH, G.: *Zum Grenzwertproblem.*
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967.

[29] Autorenkollektiv: *Kleine Enzyklopädie Mathematik.*
VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965, und Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M. und Zürich.

[30] Vogel, A.: *Klassische Grundlagen der Analysis.*
S. Hirzel Verlag, Leipzig 1952.

[31] Rautenberg, W.: *Ein kurzer und direkter Weg von den naürlichen zu den reellen Zahlen mit anschließender Begründung der Bruchrechnung.*
In: „Mathematik in der Schule", 9 (1969), Heft 6.

[32] Spinoza: *Ethik, Prop. I, 10 schol., prop. 14, cor. 1.*

[33] Kant, I.: *Kritik der reinen Vernunft.*
Verlag Knaur.

[34] Alexandrow, P. S.: *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen.*
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

[35] Fraenkel, A.: *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.*
In: „Wissenschaft und Hypothese", B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927.

[36] Klaua, D.: *Allgemeine Mengenlehre,* Band I und II.
Akademie-Verlag, Berlin 1970.

[37] v. Krbek, F.: *Eingefangenes Unendlich.*
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1952.

[38] Hecke, E.: *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen.*
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1954.

[39] Church, A.: *Paul Cohen and the Continuum Problem.*
Bericht des Internationalen Mathematikerkongresses, Moskau 1966.

[40] Gödel, K.: *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.*
Princeton 1940.

[41] Cohen, P. J.: *Independence results in set theory. The theory of models.*
Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkely, Amsterdam 1965.

[42] Cohen, P. J.: *Animal model for set theory.*
Bulletin of the American Mathematical Society 69, 1963.

[43] Skolem, Th.: *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre.*
Bericht über den 5. Kongreß der skandinavischen Mathematiker im Juli 1922, Helsingfors 1923.

[44] Gast, H.: *Der Umgang mit Zahlen und Zahlgebilden in der frühen Kindheit.*
In: „Zeitschrift für Psychologie", Band 161, Hefte 1 und 2.
Verlag Jochen Ambrosius Barth, Berlin 1957.

[45] Kamke, E.: *Allgemeine Mengenlehre.*
In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 1.
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1939.

# SACHWORTVERZEICHNIS


Abbildung 81, **117 ff.**
—, ähnliche 174, **295**
—, eindeutige 120
—, eineindeutige **125**, 172, 184, 268 ff.
—, identische **151**, 161, 185
—, inverse 124, **166 ff.**
Abbildungsgeometrie **81 ff.**, 156 ff.
Abschnitt (von wohlgeordneten Mengen) 303 ff.
absoluter Betrag 44, 235, 323
absolut-rationale Zahlen, siehe gebrochene Zahlen
Abstraktionsklasse, siehe Äquivalenzklasse
Abstraktionsprozeß **105**, 184, 301
Abzählbarkeit 271 ff.
Addition
— von gebrochenen Zahlen 218
— von Kardinalzahlen 292
— von komplexen Zahlen 257
— von natürlichen Zahlen 196, 206
— von Ordnungstypen 299 f.
— von Ordnungszahlen 306 ff.
— von rationalen Zahlen 230 ff.
— von Vektoren 157, 258
Ähnlichkeit
—, geometrische **87 ff.**, 110, 165
— von Mengen 174, **294 f.**
Ähnlichkeitsabbildung
—, geometrische 87
— von geordneten Mengen 295
äquivalente Umformung (von Gleichungen) 324 ff.
Äquivalenz
— von Aussagen 22 f.
— von Gleichungen 324 ff.
— von Mengen 185, **269 ff.**
Äquivalenzklasse **105 f.**, 185, 228, 244, 267
Äquivalenzrelation **102 ff.**, 185, 228, 244
aktual unendlich 265
Aleph 272, 292
algebraische Zahl 283
Allaussage 16, 322
Alternative 19 f.
Analogie 171 ff.
analytischer Ausdruck 127, 166
Antinomien der Mengenlehre 59 ff., 308 f.
Antisymmetrie (von Relationen) 96 f.
Anzahl 184 f., 269 f.
ARCHIMEDische Ordnung 254
Assoziativgesetze
— für gebrochene Zahlen 219
— für komplexe Zahlen 257
— für Mengen 48 ff.
— für natürliche Zahlen 197, 200, 207
— für rationale Zahlen 233
— für reelle Zahlen 251
Asymmetrie (von Relationen) 96 f.
Asymptote 143
Aufbau des Zahlenbereichs
—, axiomatischer, für natürliche Zahlen 202 ff.
—, axiomatischer, für reelle Zahlen 250 ff.
—, genetischer, für natürliche Zahlen 183 ff., 193
—, genetischer, für reelle Zahlen 243 ff.

Aussage 14ff., 312
Aussageform 15f., 312
Aussagenfunktion 18
Aussagenverbindung 17ff.
Auswahlaxiom (Auswahlprinzip) **62f.**, 288, 307
Axiom, siehe auch Axiomensystem **24f.**, 62, 192f,
axiomatische Methode
— zur Einführung der natürlichen Zahlen 202ff.
— zur Einführung der reellen Zahlen 250ff.
axiomatischer Aufbau, siehe axiomatische Methode
Axiomensystem
— der Geometrie 24f.
— für Mengen 62
— für natürliche Zahlen 206
— für rationale Zahlen 253
— für reelle Zahlen 255ff.

Begründungsverfahren 24ff.
BERNSTEINscher Äquivalenzsatz 287
Beschränktheit 142
Bewegungsgeometrie 86
Beweis 24
Bild 118, 128, 174
binomische Formeln 322
BOLZANO 265f.
Brüche 73, 108f., 174, **212ff.**, 272f.
BURALI-FORTI 309

CANTOR 59, 238, 247, **266f.**, 270, 283, 309f.
Continuum, siehe Kontinuum

Deckungsgleichheit, siehe Kongruenz
DEDEKIND 207, 238, 249
DEDEKINDscher Rechtfertigungssatz 207
DEDEKINDscher Schnitt 249
Definition (beim Aufbau einer mathematischen Theorie) 24
Definitionsbereich 120ff., 125ff., 152ff.
Dezimalbrüche **223ff.**, 277
—, endliche 223
—, periodische 224
—, unendliche 223, **247f.**
Diagonalverfahren **283**, 291
Differenz, siehe Subtraktion
Differenzengleichheit 227ff.
Differenzmenge 47
Disjunktion 20

Distributivgesetze
— für Mengen 48ff.
— für Zahlen 48, 200, 207, 233, 251
Division
— durch Null 235f.
— von gebrochenen Zahlen 219f.
— von natürlichen Zahlen 201, 210
— von rationalen Zahlen 234f.
Doppelpfeil (bei äquivalenten Aussagen) 22
Drehung (siehe auch Rotation) 82f., **159f.** 163f.
dreistellige Relation 91
Durchschnitt von Mengen 40f.
— in der Gleichungslehre 334ff.
dyadisches System 284f.

Eigenschaften
— von Funktionen 136ff.
— von zweistelligen Relationen 93ff.
eindeutige Bestimmtheit (von Dreieckskonstruktionen) 111
Element 28ff.
elementfremd 41, 43
Endlichkeit von Mengen 30, **187ff.**
entgegengesetzte Zahlen 231
„entweder-oder“, siehe Disjunktion
Erfüllen (einer Gleichung) 313, 321
— (einer Ungleichung) 321
Existenzaussage 16, 322
Exponentialfunktion 170
Extensionalitätsaxiom (Extensionalitätsprinzip) 62

Faserung (einer Menge) 104ff.
FERMATsche Vermutung 14
Fixpunkt 84, 87, 159
Folge 129
Fundamentalfolge 246f.
Funktion 120ff.
—, identische 125
—, inverse 125, 166ff.
—, umkehrbare **125**, 141, 168

ganze Zahlen **182**, 260f., 271, 297
GAUSSsche Ebene 256
gebrochene Zahlen 212ff.
— in der Schule 223
gemeinsames Maß 238
genetischer Aufbau, siehe Aufbau des Zahlenbereichs
geometrischer Ort 37f.

geometrische Abbildung 156ff.
geometrische Verwandtschaft 112
geordnetes Paar 56ff., 78, 213, 215, 227
Gesetze der Differenzbildung für Mengen 51ff.
Gleichheit
— als Äquivalenzrelation 103
— von komplexen Zahlen 255
— von Mengen 32
Gleichheitsaussage 312
Gleichmächtigkeit 184f., 189, 269ff.
Gleichungen 312ff.
—, goniometrische 323, 326
—, identisch erfüllte 320
—, lineare 312
—, unlösbare (unerfüllbare) 321
— von Geraden 75, 330ff.
Gleichungslehre 311ff.
— in der Schule 328f.
Gleichungssysteme 334
graphische Darstellung 131ff., 329ff.
Grenzwert 246, 254
Grundbegriff 24f.
Grundbereich 31
— in der Gleichungslehre 313ff.

Halbordnung
—, irreflexive 101f.
—, reflexive 101f.
HILBERT 24f.
Hyperbel 142f., 155

Identität
— bei Transformationen 159f.
— in der Gleichungslehre 320f.
identitiv 96
imaginäre Achse 256
Implikation 20ff.
Individuum 28
Individuenbereich 31
Induktion
—, vollständige 204f.
inkommensurabel 238
Integritätsbereich 261
Intervall 144ff., 243
Intervallschachtelung 243ff.
Invarianten
(bei einer Transformation) 82f.
Inzidenzbeziehung (Inzidenzrelation) 82f.
Irrationalzahl 245, 250, 283
Irreflexivität (einer Relation) 93f.
Isomorphie 175ff., 223, 236, 247, 255

Kardinalzahl 185ff., 267ff., 270
—, endliche 189
—, transfinite 270
Kettenbruch 249
Klasseneinteilung (durch Äquivalenzrelation) 105f.
Klassenvertreter, siehe Repräsentant
Kleinerbeziehung, siehe auch Ungleichungen
— für gebrochene Zahlen 217f.
— für Kardinalzahlen 286
— für natürliche Zahlen 195, 209f.
— für Ordnungszahlen 306
— für rationale Zahlen 228f.
— für reelle Zahlen 245, 247, 254
Kleiner-gleich-Relation 100
— für natürliche Zahlen 197
Körper 252
—, angeordneter 253f.
—, archimedisch geordneter 254f.
kollinear 85, 88
kommensurabel 238
Kommutativgesetz
— für gebrochene Zahlen 220f.
— für komplexe Zahlen 257
— für Mengen 48ff.
— für natürliche Zahlen 197, 200, 207
— für rationale Zahlen 233
— für reelle Zahlen 251
Komplementärmenge 35
komplexe Zahlen 255ff.
Komponenten (von Vektoren) 157, 258
Kongruenz 110f., 158, 163f., 339
—, gleichsinnige 158, 163, 165
—, ungleichsinnige 165
Konjunktion 18f.
Kontinuum 280ff., 286
Kontinuumshypothese 292ff.
Kontraposition 23
Konvergenz 246
konvex 38f.
Koordinatensystem, rechtwinkliges 74ff.
Kosinusfunktion 139f.
Kreuzprodukt, siehe Mengenprodukt

Linearität (von Relationen) 98f.
Lösungsmenge einer Gleichung 313ff.
Logarithmus 211

Mächtigkeit 194, 270ff.
— der Menge der algebraischen Zahlen 283f.
— der Menge der ganzen Zahlen 273

— der Menge der gebrochenen Zahlen 272 f.
— der Menge der irrationalen Zahlen 283
— der Menge der natürlichen Zahlen 271
— der Menge der rationalen Zahlen 273
— der Menge der reellen Zahlen 280
— der Menge der transzendenten Zahlen 283
—, gleiche, siehe Gleichmächtigkeit
— von ähnlichen Mengen 294
mehrstellige Relation 90 ff.
Mengen 28 ff.
—, ähnliche 174, **294 ff.**
— bildung 61 f.
—, endliche 30, **186 ff.** 269 f.
—, geordnete 173, **293 ff.**
—, geregelte 175 ff.
—, leere 30, 187
—, unendliche 30, 62, 188, 192, 264 ff.
— in der Schule 36 ff., 311, 338 ff,
— verschiedener Stufen 54 ff.
Mengenalgebra 48 ff.
Mengenbegriff 28 ff.
Mengenbildungsaxiom (Mengenbildungsprinzip) 62
Mengendiagramm 37 ff.
Mengenfamilie 54 f.
Mengeninklusion 81
Mengenprodukt 58 f.
Mengensystem 54 f.
Mengenvergleich 32, **264 ff.**
monoton
— abnehmend 141
— wachsend 141
streng- 141
Monotoniegesetze
— für gebrochene Zahlen 210
— für natürliche Zahlen 201, 210
— für rationale Zahlen 219 234
Multiplikation
— von gebrochenen Zahlen 219
— von Kardinalzahlen 292
— von komplexen Zahlen 257
— von natürlichen Zahlen 198 ff., 207
— von Ordnungstypen 299 f.
— von Ordnungszahlen 306
— von rationalen Zahlen 232 ff.
— von reellen Zahlen 251

Nachbereich 118
Nachfolger, unmittelbarer 79, **190**
Nachfolgerrelation 79, **190 ff.**, 302, 307
— für natürliche Zahlen **190 ff.**
negativ 229 ff,
Neunerprobe 108
Neunerrest 107 f.
Null 189, 191, 229, 235, 251 f.

„oder" 19 f.
Operationen
— mit Mengen 40 ff.
— mit Zahlen, siehe Rechenoperationen
Ordinalzahl, siehe Ordnungszahl
Ordnung der natürlichen Zahlen 193 ff., 209 296 ff.
—, natürliche 296
—, umgekehrte 297
Ordnungsrelationen 98 ff.
—, irreflexive 99 f.
—, reflexive 101
Ordnungstypen 295 f.
— abzählbarer Mengen 296 ff.
Ordnungszahl 186, **303 ff.**

Parabel 134
Parallelenaxiom 25
Parallelität von Geraden 25, 76, 94
Parallelogrammgesetz 157, 258
PEANOsches Axiomensystem 193, **206**, 211, 221
Periodenlänge 140
Periodizität 136 ff.
Permanenzprinzip 221 ff.
Permutation 125
Pfeil (bei Relationen) 69 ff.
positiv 229, 254
potentiell unendlich 265
Potenzfunktionen 169
Potenzieren
— von gebrochenen Zahlen 222 f.
— von natürlichen Zahlen 208
Potenzmenge **55**, 285 f., 291
Prädikat 15
Primzahlzwillinge 91
Probe
— bei Gleichungen 323
Produkt, siehe Multiplikation
Punktmengen 37 f., 275, 329 ff,

Quadrant 74 ff., 331
Quotient, siehe Division
Quotientengleichheit 215 ff.

Rationale Zahlen 225 ff.
— in der Schule 231

Rechengesetze
— für gebrochene Zahlen 219 f.
— für natürliche Zahlen 197 ff., 207
— für Ordnungstypen 299 f.
— für rationale Zahlen 233
— für reelle Zahlen 251 ff.
— gegenübergestellt zu Gesetzen der Mengenalgebra 48 f.
— in Anwendung auf die Gleichungslehre 317
Rechenoperationen
— als dreistellige Relationen 92
— für gebrochene Zahlen 218 ff.
— für Kardinalzahlen 292
— für komplexe Zahlen 257 ff.
— für natürliche Zahlen 196 ff., 206 ff.
— für Ordnungszahlen 306
— für rationale Zahlen 230 ff.
— für reelle Zahlen 251 ff.
— innerhalb der Gleichungslehre 317
— verschiedener Stufen 211
reelle Achse 256
reelle Zahlen 237 ff., 277 ff.
— in der Schule 248
Reflexivität (einer Relation) 93 f.
Rekursionsverfahren 206
Relationen 68 ff.
— im Schulunterricht 311, 339
— über einer Menge 79
Relationsbegriff 68 ff.
Repräsentant 106, siehe Vertreter
Restklassen 108, 253
Rotation 82, **159 f.**, 162 f.
RUSSELL 60, **187 f.**
RUSSELLsche Endlichkeitsdefinition 187 f., 292

Schleife (bei Pfeildarstellungen) 70
Schnitt 249
Sinusfunktion 139, 326
Sprung (einer Funktion) 143
Stetigkeit 142 ff.
—, gleichmäßige 148
Strahlensätze 88 f.
Streckenmessung 214, **237 ff.**
Streckung, zentrische 86 f., 165
Struktur (von Mengen) 178
Subtraktion
— von gebrochenen Zahlen 219
— von natürlichen Zahlen 198, 210
— von rationalen Zahlen 230 f.
Summe, siehe Addition

Symmetrie
— axiale **84 ff.**, 161 f.
— von Relationen 96 f.
Symmetrieachse 84, 161 ff.

Teilmenge 33 ff.
Term 312
Transformation der Ebene auf sich 82 f., **156 ff.**
Transitivität (von Relationen) 95 f.
Translation 158
transzendente Zahl 283 f.
Tripel 51, 90 f.

überabzählbar 282
Umformen (von Gleichungen) 317 f.
Umkehrbarkeit (von Funktionen) 136, 166
Umkehrung (von Funktionen) 166 ff.
Umlaufsinn 83
Umklappung, siehe auch axiale Symmetrie 73 ff.
unendlich 30, 62, 188, **264 ff.**
Unendlichkeitsaxiom (Unendlichkeitsprinzip) 62
Ungleichungen 313 ff.
—, unerfüllbare 321
unstetig 143
Urbild 118

Variable 15 ff., **126 ff.**, 311 ff.
—, abhängige 126
—, unabhängige 126
—nvertauschung 166 ff.
Vektor **157 ff.**, 258
Venndiagramm 41 ff., 69
Vereinigungsmenge 44 ff.
— in der Gleichungslehre 325 ff.
Vergleich von Mengen 32, 194, **264 ff.**
Verkettung
— von Funktionen 151 ff.
— von Relationen 149 ff.
Verneinung 18
Verschiebung, siehe Translation
Vertreter 106, 185, 216, 228
vollständige Induktion 204 ff.
Vollständigkeitsaxiom (Vollständigkeitsprinzip) 254
Vorbereich **118 ff.**
Vorzeichen 229

Wahrheit (von Aussagen) 14 ff., 312
Wahrheitstafel 18 ff.

Wahrheitswert 18
WEIERSTRASS 238
Wert (einer Funktion an einer Stelle) 120
Wertetabelle 132 ff.
Wertevorrat 120, 124
Wohlordnung 301 ff.
Wohlordnungssatz 307
Wurzeln
— aus gebrochenen Zahlen 222
— aus komplexen Zahlen 259
— aus natürlichen Zahlen 210
— aus rationalen Zahlen 241 ff., 248
— aus reellen Zahlen 255
Wurzelgleichungen 323

Zahlenbereiche 182, 260
Zahlen
— der ersten, zweiten Zahlklasse 307
Zahlengerade 74, 240, 242
„Zahl – Zahl" – Funktionen 125 ff.
Zeichenreihe 13
ZERMELO 306
Zuordnung 121, 126 f.
—, eineindeutige 184 ff., 267 ff.
Zusammensetzung von Funktionen, siehe Verkettung
Zweiersystem, siehe dyadisches System