Lehrmaterial zur Ausbildung an Instituten für Lehrerbildung

MATHEMATIK

Der Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen

1988

Das vorliegende Lehrmaterial wurde von der Hauptabteilung Lehrerbildung des Ministeriums für Volksbildung als Manuskriptdruck herausgegeben.

Autor: Dr. Angelika Franke, Institut für Lehrerbildung Magdeburg

– unveränderter Nachdruck –

Hergestellt im Wissenschaftlich-Technischen Zentrum der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam

1/16/18/4.88/1033 Ag 124/21/88

EVP: 1,10 M

Der Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen

Seite

0. Vorwort

In der Schule haben wir verschiedene Zahlenbereiche kennengelernt. Wir haben in diesen Bereichen gerechnet und die Gesetzmäßigkeiten der Operationen angewendet.
In diesem Abschnitt soll das Prinzip des Aufbaus von Zahlenbereichen gezeigt werden. Entsprechend unserem Ausbildungsziel wird ausführlich auf den Aufbau des Bereiches der natürlichen Zahlen eingegangen und auf die Bereiche der rationalen und gebrochenen Zahlen ein Ausblick gegeben.

Die bei der Abhandlung gewonnenen Resultate werden dem Leser teilweise bekannt sein. Das wissenschaftliche Vorgehen wird dem Absolventen der POS aber nicht bewußt geworden sein. Das Anliegen der folgenden Ausführungen besteht vor allem darin, dem zukünftigen Lehrer den Aufbau einer mathematischen Theorie am Beispiel bewußt zu machen, die logischen Zusammenhänge aufzudecken und ihn mit grundlegenden Beweisgedanken vertraut zu machen.

Der Zahlbegriff ist ein grundlegender und sehr alter Begriff der Mathematik. Er ist das Resultat eines langwierigen und komplizierten historischen Entwicklungsprozesses, der ständigen Auseinandersetzung des Menschen mit der Umwelt. Entsprechend der marxistischen Erkenntnistheorie vertreten wir den Standpunkt, daß die Zahlen ihren Ursprung in der objektiven Realität haben. Es gibt jedoch auch idealistische Auffassungen, die diese Zusammenhänge leugnen, den Zahlbegriff als dem Menschen angeboren ansehen. Bekannt ist in diesem Zusammenhang der Ausspruch von Kronecker: "Die ganzen Zahlen hat Gott geschaffen, alles übrige ist Werk von Menschenhänden".
Über den Ursprung der Zahlen äußert sich Engels im Anti-Dühring: "Die Begriffe von Zahl und Figur sind nirgends anders hergekommen als aus der wirklichen Welt. Die zehn Finger, an denen die Menschen zählen, also erste arithmetische Operation vollziehen gelernt haben, sind alles andere, nur nicht eine freie Schöpfung des Verstandes". Das Studium der Entwicklung des Zahlbegriffs bestätigt die Auffassungen der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie und widerlegt die oben angeführte und ähnliche bürgerliche Theorien.

Wir wissen, daß die natürlichen Zahlen zwei wesentliche Aufgaben haben. Erstens kann man mit natürlichen Zahlen Anzahlen kennzeichnen, z. B. 15 Schüler, die an einer Arbeitsgemeinschaft teilnehmen. Natürliche Zahlen, die im Sinne von Anzahlen verwendet werden, nennt man KARDINALZAHLEN. Zweitens kann man mit Hilfe der natürlichen Zahlen die Elemente einer Menge durchnumerieren, d. h. man ordnet jedem Element dieser Menge eine natürliche Zahl zu. Diese Zahlen kennzeichnen dann die Stellung jedes einzelnen Elementes in einer Menge. Man nennt die so verwendeten Zahlen ORDINALZAHLEN.

Die Gewinnung der natürlichen Zahlen ist auf verschiedenen Wegen möglich. Wir wollen im 1. Kapitel die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen aus einem Vergleich von Mengen gewinnen. Man sagt auch, die natürlichen Zahlen werden genetisch auf der Grundlage der Mengenlehre definiert. Das entspricht weitgehend dem anschaulich-genetischen Vorgehen in der Polytechnischen Oberschule und spiegelt einige Aspekte des historisch gewachsenen Zahlbegriffs wider. Die natürlichen Zahlen können aber auch axiomatisch definiert werden, indem man einige Grundeigenschaften der natürlichen Zahlen als Axiome an den Anfang der Theorie stellt und durch mathematische Beweise alle weiteren interessierenden Eigenschaften ableitet. Diesen Weg werden wir im 2. Kapitel gehen.

1. Der genetische Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen

1.1. Die natürlichen Zahlen als endliche Kardinalzahlen

Wir gehen bei unseren Betrachtungen von einem Mengensystem $\mathfrak{M}$ aus, dessen Elemente Mengen 1. Stufe sind. Zwei beliebige Mengen aus $\mathfrak{M}$ werden nun bezüglich ihrer Mächtigkeit verglichen. Bei endlichen Mengen dürfen wir auch sagen, daß sie bezüglich der Anzahl ihrer Elemente verglichen werden. Dieser Vergleich gelingt auch ohne Benutzung des Zahlbegriffs, indem man eine Korrespondenz aus der einen Menge in die zweite Menge herstellt. Fordert man nun von dieser Korrespondenz, daß sie eine eindeutig umkehrbare Abbildung ist, so ergibt dieser Vergleich die drei Möglichkeiten, daß beide Mengen gleich viel Elemente oder eine Menge mehr Elemente als die andere enthält. Entsprechend der Definition der Gleichmächtigkeit heißen zwei Mengen M_1 und M_2 gleichmächtig genau dann, wenn eine eindeutig umkehrbare Abbildung von der Menge M_1 auf die Menge M_2 existiert. Die Relation Gleichmächtigkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation, d. h. sie ist reflexiv, transitiv und symmetrisch, was bereits in der Mengenlehre nachgewiesen wurde. Im betrachteten Mengensystem $\mathfrak{M}$ erzeugt sie also eine Einteilung in Äquivalenzklassen. Zu einer solchen Klasse gehören alle Mengen des Mengensystems $\mathfrak{M}$, die zueinander gleichmächtig sind. Von Unterschieden in der Art der Elemente dieser Mengen wird dabei abgesehen, d. h. abstrahiert. Jede derartige Klasse nennt man Kardinalzahl einer sie repräsentierenden Menge.

D1 (1.1.) Es sei M eine beliebige Menge eines Mengensystems $\mathfrak{M}$. Die Klasse aller zu einer Menge M gleichmächtigen Mengen aus $\mathfrak{M}$ heißt <u>Kardinalzahl von M.</u>

(In Zeichen: Kz (M))

D2 (1.1.) Eine Kardinalzahl einer Menge M (Kz (M)) heißt <u>natürliche Zahl</u> oder <u>endliche Kardinalzahl</u> genau dann, wenn M eine endliche Menge ist.

Eine natürliche Zahl ist also eine Klasse zueinander gleichmächtiger endlicher Mengen. Jede dieser so gebildeten Klassen außer der Kardinalzahl der leeren Menge enthält unendlich viele Repräsentanten.

Die Menge aller endlichen Kardinalzahlen bildet die Mengen der natürlichen Zahlen.
Wir ordnen nun jeder Kardinalzahl ein Zeichen und einen Namen, d. h. eine Ziffer und ein Zahlwort zu. Die leere Menge ist entsprechend der Russellschen Endlichkeitsdefinition eine endliche Menge, ihre Kardinalzahl also eine natürliche Zahl. Sie erhält das Zeichen "0" und den Namen "NULL". Also

D3 (1.1.) $\mathrm{Kz}\ (\emptyset) \underset{\mathrm{Df.}}{=} 0$

Ebenfalls nach der Russellschen Endlichkeitsdefinition können wir jede endliche Menge M mit einer Einermenge vereinigen, die ein beliebiges Element a des gegebenen Individuenbereiches enthält, welches aber nicht schon in M enthalten sein darf, und erhalten wieder eine endliche Menge.
Also ist $M' = \emptyset \cup \{a\}$ eine endliche Menge, und die Klasse, in der diese Menge enthalten ist, erhält das Zeichen "1" und den Namen "Eins". So fortfahrend läßt sich für jede Kardinalzahl ein Zeichen und ein Name festlegen:

$\mathrm{Kz}\ (\emptyset) = 0$

$\mathrm{Kz}\ (\emptyset \cup \{a\}) = \mathrm{Kz}\ (\{a\}) = 1$ mit $a \in J$

$\mathrm{Kz}\ (\{a\} \cup \{b\}) = \mathrm{Kz}\ (\{a; b\}) = 2$ mit $b \in J;\ a \neq b$

$\mathrm{Kz}\ (\{a, b\} \cup \{c\}) = \mathrm{Kz}\ (\{a; b; c\}) = 3$ mit $c \in J;\ c \neq a;\ c \neq b$

usw.

"Eins", "Zwei", "Drei"...sind die Namen dieser Zahlen; "1", "2", "3"...die entsprechenden Ziffern.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß bei einem geeigneten Individuenbereich zu jeder natürlichen Zahl eine nachfolgende gebildet werden kann und es unendlich viele natürliche Zahlen geben müßte. Entsprechend diesen Betrachtungen geht man in Klasse 1 bei der Gewinnung der natürlichen Zahlen vor. Die Schulanfänger arbeiten lange und intensiv mit konkreten Mengen, z. B. Mengen von Kastanien, Stäbchen und Rechenpfennigen. Sie vergleichen, ordnen, legen dazu, nehmen weg, bevor sie mit Zahlen rechnen. Im Mathematiklehrbuch der Klasse 1 Seite 9 wird beispielsweise die Gewinnung der Zahl 4 veranschaulicht. Wir finden dort folgende Darstellung:

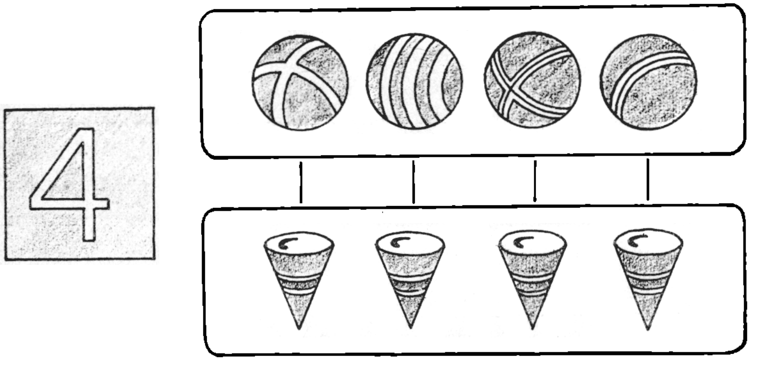


Bild 1 (1.1.)

Von den Unterschieden in der Art der Objekte wird abgesehen. Für einen Schüler ist es natürlich nicht gleichgültig, ob er vier Äpfel geschenkt bekommt oder vier Kastanien. Aber wenn er die Anzahl erfassen soll, dann sind die beiden Mengen gleichwertig. Der Schüler muß von gewissen Seiten der objektiven Realität abstrahieren - von Form, Größe, Farbe, Gewicht, Geschmack u. a. - um den Zahlbegriff zu erfassen. Als Gemeinsamkeit aller dargestellten Mengen bleibt nur, daß sie gleichmächtig sind (gleich viele Elemente besitzen). Im Unterricht der unteren Klassen ist es berechtigt, von "gleich vielen" Elementen zu sprechen, da nur endliche Mengen auftreten. Für diese Gemeinsamkeit wird dann das Wort "vier" bzw. das Zeichen "4" eingeführt.

Gestützt auf unsere Kenntnisse über den Abstraktionsprozeß fassen wir den Abschnitt 1.1. wie folgt zusammen:

Durch die Bildung von Äquivalenzklassen, deren Elemente Mengen sind, sind wir zu einer Menge höherer Stufe übergegangen. Wir haben den Abstraktionsprozeß zur Gewinnung der Kardinalzahlen und der natürlichen Zahlen geführt.

Wir stellen nun den allgemeinen Abstraktionsprozeß dem zur Gewinnung der Kardinalzahlen und der natürlichen Zahlen gegenüber.

	Abstraktionsprozeß allgemein	Abstraktionsprozeß Kardinalzahlen	Abstraktionsprozeß Natürliche Zahlen
1.	Vorgabe einer Ausgangsmenge	System von Mengen 1. Stufe	System von endlichen Mengen 1. Stufe
2.	Erklären einer Äquivalenzrelation in der Ausgangsmenge	Gleichmächtigkeit von Mengen	Gleichmächtigkeit von endlichen Mengen
3.	Zusammenfassen aller einander äquivalenten Elemente der Ausgangsmenge zu Äquivalenzklassen, die man in der Regel mit Namen versieht.	Jede Äquivalenzklasse enthält alle zueinander gleichmächtigen Mengen. Jede Äquivalenzklasse zueinander gleichmächtiger Mengen heißt Kardinalzahl.	Jede Äquivalenzklasse enthält alle zueinander gleichmächtigen endlichen Mengen. Jede Äquivalenzklasse zueinander gleichmächtiger Mengen heißt natürliche Zahl.
4.	Ersetzen der Ausgangsmenge durch die Menge der Äquivalenzklassen.	Ersetzen des Systems von Mengen 1. Stufe durch die Menge der Kardinalzahlen.	Ersetzen des Systems von endlichen Mengen 1. Stufe durch die Menge der natürlichen Zahlen.

Entsprechend dem Abstraktionsprozeß bemerken wir, daß folgende Schreibweisen gleichwertig sind:

$$\alpha = Kz\ (A) \quad \text{und} \quad A \in a$$

Beide drücken die Beziehung zwischen Klasse und Repräsentant aus.

1.2. Die Nachfolger-, die Kleiner- und die Gleichheitsrelation in der Menge der natürlichen Zahlen

Für den Unterricht in den unteren Klassen sind vor allem die Beziehung "Nachfolger einer natürlichen Zahl" und die Kleiner- bzw. Gleichheitsrelation von Bedeutung. Wir wollen deshalb diese Relationen definieren und auf ihre Eigenschaften eingehen. Die Definition der Beziehung "b ist Nachfolger von a" knüpft an die Überlegungen an, die wir bei der Bezeichnung der natürlichen Zahlen kennengelernt haben. Diese besagten: Mit jeder endlichen Menge M ist die Vereinigung von M mit einer Einermenge eine endliche Menge, deren Kardinalzahl also eine natürliche Zahl.

D1 (1.2.) Eine natürliche Zahl $b = Kz\ (B)$ heißt Nachfolger einer natürlichen Zahl $a = Kz\ (A)$ (in Zeichen: $b = a'$) genau dann, wenn es im verwendeten Individuenbereich ein α gibt, so daß gilt:

$$B \sim A \cup \{\alpha\} \quad \text{und} \quad \alpha \notin A.$$

Die durch diese Definition aufgezeigte Möglichkeit der wiederholten Nachfolgerbildung legt die Vermutung nahe, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. In dieser Aussage ist folgendes Problem enthalten: Jede natürliche Zahl ist eine Klasse e n d l i c h e r Mengen, die Menge der natürlichen Zahlen aber ist eine u n e n d l i c h e Menge, also von einer höheren Mächtigkeit, als es alle endlichen Mengen sind. Diese Aussage ist beweisbar, indem man in Anlehnung an die Dedekindsche Definition für die Endlichkeit bzw. Unendlichkeit von Mengen eine eindeutig umkehrbare Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen auf eine ihrer echten Teilmengen herstellt.

Die folgende Darstellung veranschaulicht eine solche Abbildung.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ | & | & | & | & & | & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

Abb. 1 (1.2.)

Entsprechend der Definition 1 (1.2.) lernt der Schüler der 1. Klasse den Nachfolger einer Zahl dadurch kennen, daß er jeweils ein weiteres Element zu einer Menge hinzufügt, die Repräsentant dieser Zahl ist.

Wir geben nun die Definition der Kleinerrelation an:

D2 (1.2.) Eine natürliche Zahl $a = Kz\,(A)$ heißt kleiner als eine natürliche Zahl $b = Kz\,(B)$ (in Zeichen: $a < b$) genau dann, wenn es eine eindeutig umkehrbare Abbildung von A auf eine echte Teilmenge von B gibt.

Betrachten wir das Beispiel $2 < 5$. In der Abbildung 2 (1.2.) werden die natürlichen Zahlen 2 und 5 durch die Mengen A und B repräsentiert. Die Menge A ist gleichmächtig einer Menge B^*, und es gilt $B^* \subset B$. Wir erkennen in der Abbildung 2 die Existenz einer eindeutig umkehrbaren Abbildung des Repräsentanten der Zahl 2 auf eine echte Teilmenge des Repräsentanten der Zahl 5. Also ist die Kardinalzahl, die durch die Menge A repräsentiert wird, kleiner als die durch B repräsentierte Kardinalzahl.

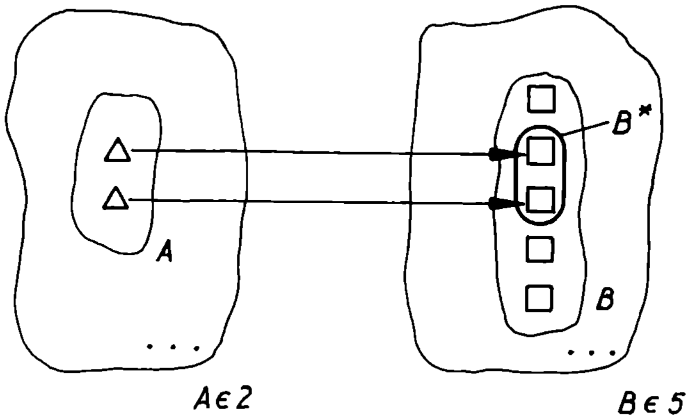


Abb. 2 (1.2.)

Diese Definition der Kleinerrelation ist die Grundlage für das anschauliche Vorgehen in Klasse 1 bei der Entscheidung, ob bzw. warum zwei natürliche Zahlen in der Kleinerrelation stehen (Lehrbuch Klasse 1, S. 12). Die Schüler müssen an mehreren Zahlenvergleichen erkennen, daß eine Zahl genau dann kleiner ist als eine andere Zahl, wenn eine diese Zahl repräsentierende Menge weniger Elemente enthält als eine die andere Zahl repräsentierende Menge.
Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die Entscheidung, ob eine Zahl kleiner als eine andere ist, nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt.

Satz 1 (1.2.) Die Kleinerrelation ist irreflexiv, transitiv und trichotom.

$\bigwedge_{a \in N} (\neg\, a < a)$ Irreflexivität der Kleinerrelation

$\bigwedge_{a,b,c \in N} ((a < b) \wedge (b < c) \Longrightarrow a < c)$ Transitivität der Kleinerrelation

Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt stets genau einer der Fälle $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$. Trichotomie der Kleinerrelation

In diesem Buch verzichten wir an dieser Stelle auf die Darstellung der erforderlichen Beweise. Im Abschnitt 2. dargestellten axiomatischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen wird die Kleinerrelation in N abermals und auf andere Weise definiert. Wir werden dort die genannten Eigenschaften noch einmal aufgreifen und zum Teil beweisen. Mit Hilfe der Kleinerrelation läßt sich in der Menge der natürlichen Zahlen eine Ordnung herstellen, wie das aus den Betrachtungen über zweistellige Relationen bekannt ist. Sind die natürlichen Zahlen in der Reihenfolge ihrer Ordnung entsprechend der Kleinerrelation, also 0; 1; 2; 3;...aufgeführt, dann sagt man auch, sie seien in der natürlichen Anordnung gegeben (1; 3; 5;..., 0; 2; 4;...ist z. B. keine natürliche Anordnung).

Der Leser mache sich den Unterschied zwischen der Nachfolgerrelation und der Kleinerrelation als Ordnungsrelation bewußt. Um deutlich zu machen, daß die Nachfolgerrelation nicht transitiv ist, spricht man gelegentlich auch vom unmittelbaren Nachfolger. Ein Charakteristikum der durch die Kleinerrelation geschaffenen Ordnung in N ist, daß es in N und in jeder Teilmenge von N stets eine kleinste Zahl gibt.
Die Gleichheitsrelation in N möge sich der Leser unter Beachtung, daß zwei Äquivalenzklassen genau dann einander gleich sind, wenn jeweils zwei beliebige Repräsentanten in der entsprechenden Relation stehen, selbständig erarbeiten.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Gleichheitsrelation wieder eine Äquivalenzrelation ist mit der Besonderheit, daß in jeder Klasse bezüglich dieser Relation nur ein einziges Element enthalten ist.

1.3. Die Peanoschen Sätze

Mit den bisher gewonnenen Ergebnissen können wir schon einige Sätze über natürliche Zahlen formulieren und beweisen. Die folgenden fünf Aussagen wurden, von unwesentlichen Änderungen abgesehen, von dem italienischen Mathematiker G. Peano (1858 - 1932) formuliert und als Grundlage einer axiomatisch aufgebauten Theorie der natürlichen Zahlen verwendet. Im mengentheoretischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen sind diese Aussagen mathematische Sätze, die mit Mitteln der Mengenlehre beweisbar sind. Unter 2. werden wir den anderen Weg zum Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen beschreiten und ihr diese Aussagen als Axiome voranstellen. Wir bezeichnen sie mit P I bis P V.

Satz 1 (1.3.) Für natürliche Zahlen sind folgende Aussagen (Peanosche Aussagen) wahr:

P I : Null ist eine natürliche Zahl.

P II : Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine natürliche Zahl n , die Nachfolger von n ist.

P III : Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

P IV : Eine natürliche Zahl ist nicht Nachfolger von verschiedenen natürlichen Zahlen, d. h.
aus $n_1' = n_2'$
folgt $n_1 = n_2$.

P V : Jede Menge M, welche
1. die Zahl Null enthält und
2. mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n',

enthält alle natürlichen Zahlen.

Es sollen zu drei dieser Aussagen die Beweisgedanken angegeben werden.

P I : Wir haben definiert, daß Kz $(\emptyset) = 0$, und da die leere Menge nach der Russellschen Endlichkeitsdefinition eine endliche Menge ist, gilt $0 \in N$.

P II: Entsprechend der Definition der Nachfolgerrelation in N bzw. der 2. Aussage der Russellschen Endlichkeitsdefinition existiert für jedes $A \in a$ eine endliche Menge $A \cup \{\alpha\}$ (wobei $\alpha \notin A$) als Repräsentant des Nachfolgers a' von a. Damit ist die Existenz von a' gezeigt, und es bleibt nachzuweisen, daß der Nachfolger eindeutig bestimmt. Wir zeigen, daß die Nachfolgerbildung von der Wahl der Repräsentanten A und $\{\alpha\}$ unabhängig ist. Wir nehmen an, daß es zwei verschiedene Zahlen a_1' und a_2' gibt, die Nachfolger von a sind.

Es sei $a_1' = \text{Kz}\,(A_1 \cup \{\alpha\})$ mit $\alpha \notin A_1$

$a_2' = \text{Kz}\,(A_2 \cup \{\beta\})$ mit $\beta \notin A_2$.

Aus $a = \text{Kz}\,(A_1) = \text{Kz}\,(A_2)$ folgt

$$A_1 \sim A_2.$$

Da $\{\alpha\} \sim \{\beta\}$, $\alpha \notin A_1$ und $\beta \notin A_2$ ist,

folgt $A_1 \cup \{\alpha\} \sim A_2 \cup \{\beta\}$, d. h.

$\text{Kz}\,(A_1 \cup \{\alpha\}) = \text{Kz}\,(A_2 \cup \{\beta\})$ und

damit entsteht im Widerspruch zu unserer Annahme

$$a_1' = a_2'.$$

Es gibt also genau eine Zahl a', die Nachfolger von a ist.

PIII: Für einen Nachfolger a' einer beliebigen natürlichen Zahl $a = \text{Kz}\,(A)$ gilt stets $a' = \text{Kz}\,(A \cup \{a\})$ mit $a \notin A$. Da somit $A \cup \{a\}$ wenigstens ein Element enthält, kann a' niemals Null sein, weil $0 = \text{Kz}\,(\emptyset)$ gilt.

Auf die Darstellung der Beweise für PIV und PV verzichten wir.

1.4. Zweistellige Operationen in der Menge der natürlichen Zahlen

Wir definieren nun Rechenoperationen für natürliche Zahlen, indem wir jeweils zu Repräsentanten übergehen und Mengenoperationen nutzen.

D1 (1.4.) Eine natürliche Zahl c heißt Summe der natürlichen Zahlen $a = Kz\ (A)$ und $b = Kz\ (B)$ genau dann, wenn $c = Kz\ (A \cup B)$ ist, wobei $A \cap B = \emptyset$ gilt.
(In Zeichen: $a + b = c$)
Die natürlichen Zahlen a und b nennen wir Summanden.

Wir müssen beachten, daß wir die Repräsentanten zur Klärung des Begriffs Summe willkürlich gewählt haben. Es ist bisher nicht abgesichert, daß sich die Summe bei Wahl anderer repräsentierender Mengen nicht ändert, d. h., daß sie von der Auswahl der Repräsentanten unabhängig ist. Wir zeigen deshalb, daß bei beliebigen verschiedenen Repräsentanten A_1 und A_2 von a und B_1 und B_2 von b $Kz\ (A_1 \cup B_1) = Kz\ (A_2 \cup B_2)$ gilt, wobei
$A_1 \cap B_1 = \emptyset$ und
$A_2 \cap B_2 = \emptyset$ ist.
Wenn $A_1 \backsim A_2$ gilt, gibt es eine eindeutig umkehrbare Abbildung von A_1 auf A_2. Gleiches gilt auch für B_1 und B_2. Da sowohl A_1 und B_1 als auch A_2 und B_2 disjunkte Mengen sind, gibt es auch eine Abbildung von
$A_1 \cup B_1$ auf $A_2 \cup B_2$, d. h.
es gilt
$A_1 \cup B_1 \backsim A_2 \cup B_2$.
Daraus folgt aber, daß $Kz\ (A_1 \cup B_1) = Kz\ (A_2 \cup B_2)$ ist und die Summenbildung repräsentantenunabhängig ist.
Damit liefert die Definition der Summe zweier natürlicher Zahlen eine Abbildungsvorschrift, die jedem Paar von natürlichen Zahlen eine eindeutig bestimmte Zahl als deren Summe zuordnet. Wenn wir ferner berücksichtigen, daß die Vereinigung endlicher Mengen stets wieder eine endliche Menge ist, so ergibt sich, daß die Summenbildung nicht nur eindeutig, sondern auch stets ausführbar ist.

D2 (1.4.) Wir nennen diejenige Abbildung von $N \times N$ in N, die allen geordneten Paaren natürlicher Zahlen deren Summe zuordnet, Addition in N.

Unmittelbar aus der Definition der Summe natürlicher Zahlen folgt:

Satz 1 (1.4.) $\bigwedge\limits_{n \in N} n' = n + 1$

Des weiteren gelten für die Addition natürlicher Zahlen die im folgenden angegebenen Gesetze.

Satz 2 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) + c = a + (b + c)$
(Gesetz der Assoziativität der Addition natürlicher Zahlen)

Beweis:

Voraussetzung: a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen.
Es gelte $a = Kz\ (A)$, $b = Kz\ (B)$, $c = Kz\ (C)$
mit $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.
(Solche Repräsentanten lassen sich immer finden.)

Behauptung: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Beweis: 1. $(a + b) + c = Kz\ ((A \cup B) \cup C)$ (Definition der Summe natürlicher Zahlen)
mit $A \cap B = \emptyset$ und
$(A \cup B) \cap C = \emptyset$
und
$a + (b + c) = Kz\ (A \cup (B \cup C))$
mit $B \cap C = \emptyset$ und
$A \cap (B \cup C) = \emptyset$

(Auf Grund der obigen Voraussetzung sind diese Forderungen an die Repräsentanten erfüllt.)

2.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(Assoziativität der Vereinigung von Mengen)
3.	$(A \cup B) \cup C \sim A \cup (B \cup C)$	(Satz von der Gleichmächtigkeit gleicher Mengen)
4.	$Kz\ ((A \cup B) \cup C) = Kz\ (A \cup (B \cup C))$	(Definition der Gleichheit von Äquivalenzklassen)
5.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(Definition der Summe natürlicher Zahlen)

q. e. d.

Die Behandlung des Assoziativgesetzes der Addition erfolgt inhaltlich bereits in Klasse 1. Es wird weiterhin dem Schüler der Klasse 2 bewußtgemacht zur Nutzung von Rechenvorteilen und zur Klärung und Begründung von Rechenwegen.

Satz 3 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:

$$a + b = b + a$$

(Gesetz der Kommutativität der Addition natürlicher Zahlen)

Den Beweis führe der Leser entsprechend Satz 2 (1.4.) selbständig.

Satz 4 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

1. Wenn $a < b$ ist, so ist $a + c < b + c$
2. Wenn $a = b$ ist, so ist $a + c = b + c$

(Gesetz der Monotonie der Addition bezüglich der Kleiner- und Gleichheitsrelation)

Für die 2. Aussage seien die Beweisgedanken angegeben. Es sei A = Kz (A) und b = Kz (B). Wir wählen $C \in c$ mit $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$. Solche Repräsentanten von c existieren stets. Laut Voraussetzung gilt $A \sim B$.
Wegen $A \sim B$, $C \sim C$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ folgt $A \cup C \sim B \cup C$, d. h. Kz $(A \cup C)$ = Kz $(B \cup C)$.

Es gilt also

$$\bigwedge_{a,\, b,\, c \in N} (a = b \longrightarrow a + c = b + c)$$

Der Leser überlege sich entsprechend die Beweisgedanken für die 1. Aussage des Satzes 1.

Als nächste Operation betrachten wir die Multiplikation. Zur inhaltlichen Klärung der Multiplikation gibt es zwei Möglichkeiten: die Rückführung auf die Addition gleicher Summanden und auf der Grundlage der Bildung der Produktmenge.
Die in der Schulmathematik dargestellte enge Beziehung zwischen Multiplikation und Addition, die Entwicklung der Multiplikation als Vielfachenbildung aus der Addition gleicher Summanden entspricht dem in Abschnitt 2.3. dargestellten axiomatisch begründeten Vorgehen. Für den genetischen Weg typisch ist wiederum die Rückführung auf zweckmäßige Hilfsmittel der Mengenlehre, die auch Veranschaulichungen ermöglichen.

D3 (1.4.) Eine natürliche Zahl c heißt Produkt der natürlichen Zahlen a = Kz (A) und b = Kz (B) genau dann, wenn c = Kz $(A \times B)$ ist.

(In Zeichen: $a \cdot b = c$)
Die Zahlen a und b heißen Faktoren.

Das entsprechend D3 (1.4.) definierte Produkt ist von der Wahl der Repräsentanten A und B unabhängig, d. h. es gilt:
Aus a = Kz (A_1) = Kz (A_2) und b = Kz (B_1) = Kz (B_2) folgt Kz $(A_1 \times B_1)$ = Kz $(A_2 \times B_2)$ = $a \cdot b$

Der Leser verdeutliche sich dies durch analoge Überlegungen wie die zu D1 (1.4.) angeführten.
Damit wird gemäß D5 (1.4.) einem Paar natürlicher Zahlen eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als deren Produkt zugeordnet. Da die Produktmenge zweier endlicher Mengen A und B stets wieder eine endliche Menge ist, gibt es also zu beliebigen natürlichen Zahlen stets ein ihnen zuzuordnendes Produkt, und wir können eine entsprechende Operation definieren.

D4 (1.4.) Wir nennen diejenige Abbildung von N x N in N, die allen geordneten Paaren natürlicher Zahlen deren Produkt zuordnet, Multiplikation in N.

Zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes wird den Schülern die Multiplikation an Aufgaben der folgenden Art deutlichgemacht:

Die beiden Jungen Hans und Ulli wollen jeder einmal mit jedem der drei Mädchen Lisa, Nina und Gisa Federball spielen. Wieviel Spiele müssen ausgetragen werden?

Es entstehen 6 Paare. Aus mehreren derartigen Aufgaben wird abstrahiert zur Gleichung $2 \cdot 3 = 6$

Für die Multiplikation gelten die folgenden wichtigen Gesetze:

Satz 5 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
(Gesetz der Assoziativität der Multiplikation natürlicher Zahlen)

Der Beweis wird unter Nutzung der Gleichmächtigkeit der Mengen $(A \times B) \times C$ und $A \times (B \times C)$ geführt. Die Möglichkeit einer eindeutig umkehrbaren Abbildung von der Menge $(A \times B) \times C$, deren Elemente geordnete Paare $((\alpha, \beta), \gamma)$ mit $\alpha \in A$, $\beta \in B$ und $\gamma \in C$ sind, auf die Menge $A \times (B \times C)$ mit den geordneten Paaren $(\alpha, (\beta, \gamma))$ wurde in der Mengenlehre gezeigt.

Aus dieser Gleichmächtigkeit folgt die Gleichheit der Kardinalzahlen dieser Mengen und damit

$$\bigwedge_{a,\, b,\, c \in N} ((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$$

Satz 6 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$a \cdot b = b \cdot a$
(Gesetz der Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen)

Der Beweis ergibt sich aus der Gleichmächtigkeit der Mengen $A \times B$ und $B \times A$ und möge vom Leser selbständig geführt werden. Im Zusammenhang mit der Addition kann als weitere Eigenschaft das Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition formuliert werden.

Satz 7 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

<u>Beweis:</u>

Voraussetzung: a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen.
Es gelte $a = Kz\,(A)$, $b = Kz\,(B)$, $c = Kz\,(C)$ mit $B \cap C = \emptyset$

Behauptung: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beweis: 1. $a \cdot (b + c) = Kz\,(A \times (B \cup C))$ mit $B \cap C = \emptyset$
und
$a \cdot b + a \cdot c = Kz\,((A \times B) \cup (A \times C))$ mit $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$
(Auf Grund von $B \cap C = \emptyset$ ist diese Forderung erfüllt.)
(Definition von Summe und Produkt natürlicher Zahlen)

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (Gesetz der Distributivität der Produktmengenbildung bezüglich der Vereinigung)

3. $A \times (B \cup C) \sim (A \times B) \cup (A \times C)$ (Satz von der Gleichmächtigkeit gleicher Mengen)

4. $Kz\ (A \times (B \cup C) = Kz\ ((A \times B) \cup (A \times C))$ (Definition der Gleichheit von Äquivalenzklassen)

5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Definition von Summe und Produkt natürlicher Zahlen)

q. e. d.

Da die Multiplikation kommutativ ist, läßt sich entsprechend zeigen, daß das Gesetz der Distributivität auch in der folgenden Form gilt:

Satz 8 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Die beiden Aussagen des Satzes 7 und 8 werden auch als links- bzw. rechtsseitige Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition bezeichnet. Wenn beide Aussagen zutreffen, spricht man schlechthin von der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition.

Satz 9 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
Wenn $a < b$ und $c \neq 0$ ist, so ist $a \cdot c < b \cdot c$
Wenn $a = b$ ist, so ist $a \cdot c = b \cdot c$
(Gesetz der Monotonie der Multiplikation bezüglich der Kleiner- und Gleichheitsrelation)

Auf den mengentheoretischen Beweis verzichten wir. Die in den Sätzen 1 bis 9 dargestellten Gesetze besitzen große Bedeutung für die Arbeit im Mathematikunterricht der Unterstufe. Es sollen einige Beispiele ihrer schulpraktischen Anwendung genannt werden. Durch die Nutzung des Gesetzes der Kommutativität kann die Anzahl der gedächtnismäßig zu beherrschenden Grundaufgaben wesentlich verringert werden. Die Grundlage der schriftlichen Verfahren der Rechenoperationen bilden neben der Darstellung der natürlichen Zahlen im dekadischen Positionssystem die Gesetze der Kommutativität, Assoziativität und Distributivität. Das Gesetz der Monotonie der Addition bezüglich der Gleichheitsrelation ermöglicht das Übertragen bereits behandelter Aufgabentypen auf neue Aufgaben, wie das bei folgenden Beispielen deutlich wird:

Wenn $6 + 3 = 9$, dann $16 + 3 = 19$
oder
wenn $58 + 3 = 61$, dann $258 + 3 = 261$.

Bevor wir uns der Definition von Subtraktion und Division in N zuwenden, wollen wir einige Bemerkungen zu verschiedenen Möglichkeiten des Definierens dieser Abbildungen machen. In diesem Abschnitt hat der bei der Addition und Multiplikation beschriebene Weg den Vorrang. Typisch für ihn ist die Definition einer Verknüpfung von natürlichen Zahlen vermittels ihrer Repräsentanten. Die Verknüpfung der Repräsentanten erfolgt mit Hilfe der für sie bereits definierten Operationen. Da die Repräsentanten natürlicher Zahlen Mengen sind, standen die Vereinigung von Mengen und die Bildung der Produktmenge als Hilfsmittel zur Verfügung. Wir haben ferner bemerkt, daß dieses mengentheoretisch begründete Vorgehen sich vorzüglich mit solchen Veranschaulichungen verbinden ließ, die Schülern der unteren Klassen gut verständlich sind. Dieses Vorgehen stellt eine Realisierung des "gemeinsamen Beschlusses von Minister der DDR und ZK der SED zur Verbesserung des Mathematikunterrichts" an den POS unserer Republik dar. Es ist Ausdruck des Prinzips der Wissenschaftlichkeit des Unterrichts und zeigt, wie bereits in den unteren Klassen Kenntnisse und fachspezifische Denk- und Arbeitsweisen an die Jugend unseres Staates vermittelt werden.

Der begonnene Weg ist bei der Einführung der Subtraktion noch praktikabel und steht in Übereinstimmung mit dem Vorgehen in Klasse 1. Die konsequent mengentheoretische Einführung der Division bietet fachtheoretische Probleme, deren vollständige Übertragung auf die Schulmathematik nicht ohne Schwierigkeiten möglich ist. Wir werden diesen Weg andeuten. Neben dem mengentheoretischen Weg gibt es den an der Algebra orientierten Weg der Einführung von Subtraktion und Division als Umkehroperationen von Addition bzw. Multiplikation. Dieser Weg ist im axiomatischen Aufbau der Theorie der einzig mögliche. Je nachdem, an welcher Entwicklungsstufe man den rein mengentheoretischen Weg verläßt und in der Abstraktheit des axiomatischen Weges bestehende Vorteile zu nutzen beginnt, hat man nun für die Einführung der Subtraktion und Division fachtheoretisch verschiedene Möglichkeiten. In der Schulpraxis bemerken wir, daß beide Wege geschickt kombiniert werden, um die Einheit von Konkretem und Abstraktem, Wissen und Können, Anschauung und Denken u. a. aus den Erziehungswissenschaften abgeleitete Prinzipien effektiv anzuwenden.

Mengentheoretisch wird die Differenz zweier natürlicher Zahlen dann folgendermaßen erklärt:

D5 (1.4.) Eine natürliche Zahl c heißt Differenz der natürlichen Zahlen $a = Kz\ (A)$ und
$b = Kz\ (B)$ genau dann, wenn
$c = Kz\ (A \setminus B)$ mit $B \subseteq A$ ist.
(In Zeichen: $c = a - b$)
Die Zahl a heißt Minuend, die Zahl b Subtrahend.

Die mengentheoretische Grundlage für die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist also nicht die Differenz zweier Mengen schlechthin, sondern ein Spezialfall. Als Repräsentant des Subtrahenden ist eine Teilmenge des Repräsentanten des Minuenden zu wählen. Eine solche Teilmenge existiert aber nur, wenn $a \geqq b$ gilt.
Es sei darauf hingewiesen, daß zur Kardinalzahl b alle endlichen Mengen der entsprechenden Mächtigkeit gehören und es also unter der Bedingung $a \geqq b$ immer einen Repräsentanten $B \in b$ gibt, der Teilmenge von $A \in a$ ist.

Wir führen wieder, wie bei Summe und Produkt bereits angegeben, Überlegungen an, die zeigen, daß die Differenz a - b eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert. Wir wählen

$A_1 \in a$, $B_1 \in b$ mit $B_1 \subseteq A_1$

und

$A_2 \in a$, $B_2 \in b$ mit $B_2 \subseteq A_2$

Dann gilt $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$, $A_1 \setminus B_1 \in a - b$, $A_2 \setminus B_2 \in a - b$.

Sobald die Gleichmächtigkeit von $A_1 \setminus B_1$ und $A_2 \setminus B_2$ gezeigt ist, ist die Eindeutigkeit der Differenz bewiesen.

D6 (1.4.) Wir nennen diejenige Abbildung aus N x N in N, die geordneten Paaren natürlicher Zahlen a und b deren Differenz zuordnet, Subtraktion in N.

Da, wie wir gesehen haben, nicht für jedes geordnete Paar natürlicher Zahlen eine Differenz existiert, diese im Falle der Existenz aber eindeutig ist, gilt:

Satz 12 (1.4.) Die Subtraktion in N ist eine partielle Operation, Sie ist ausführbar genau dann, wenn der Subtrahend kleiner oder gleich dem Minuenden ist.

Beim aufgezeigten Weg wurden Addition und Subtraktion unabhängig voneinander definiert. Zwischen beiden Operationen besteht folgender Zusammenhang, der ohne den notwendigen Beweis angegeben sei:

Satz 13 (1.4.) Die Subtraktion in N ist Umkehroperation der Addition in N, d. h.

$$\bigwedge_{a;\, b;\, c \in N} (c - a = b \Longleftrightarrow b + a = c)$$

Der Zusammenhang zwischen der Addition und der Subtraktion als deren Umkehrung muß dem Schüler bewußtgemacht werden. Ihm wird gezeigt, daß man die Differenz zweier Zahlen auch als Summand auffassen kann, zu dem der andere Summand und die Summe bekannt sind.

Beispiel 1 (1.4.)

$$25 + 6 = 31 \qquad 1.$$
$$31 - 6 = 25$$

$$25 + x = 31 \qquad 2.$$
$$31 - 25 = x$$

Addition und Subtraktion bezeichnet man als Rechenoperationen 1. Stufe.
Nach diesen Überlegungen zur Definition der Subtraktion stellen wir aus der Vielfalt der geltenden Gesetze eine kleine Auswahl dar.

Satz 10 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$
$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

(Gesetze der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Subtraktion)

Der Beweis erfolgt unter Nutzung des Distributivgesetzes der Produktmenge bezüglich der Differenz von Mengen. Da dieser Satz in der Mengenlehre nicht betrachtet wurde, verzichten wir auf den Beweis von Satz 12 (1.4.). Dem interessierten Leser fällt es nach Bereitstellung des genannten Beweismittels sicher nicht schwer, den Beweis zu führen.

Satz 11 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c mit $a \geqq c$ und $b \geqq c$ gilt:
Wenn $a < b$ ist, so ist $a - c < b - c$.
Wenn $a = b$ ist, so ist $a - c = b - c$.

(Gesetz der Monotonie der Subtraktion bezüglich der Kleiner- und Gleichheitsrelation)

Für die Subtraktion gilt weder das Gesetz der Kommutativität noch das Gesetz der Assoziativität, was sich leicht durch Angabe eines Gegenbeispiels nachweisen läßt.

Um die Division natürlicher Zahlen definieren zu können, muß der Quotient zweier natürlicher Zahlen erklärt werden.

D7 (1.4.) Eine natürliche Zahl c = Kz (C) heißt Quotient der natürlichen Zahlen a = Kz (A) und b = Kz (B) genau dann, wenn für den Repräsentanten C von c gilt, daß Kz (B x C) = Kz (A) ist.

(In Zeichen: c = a : b)
Die natürliche Zahl a heißt Dividend, b Divisor.

Die Definition des Quotienten unterscheidet sich von den Definitionen der Summe, der Differenz und des Produktes dadurch, daß der Repräsentant C des Quotienten c nicht explizit dargestellt wird. Einfacher erscheint hier die unmittelbare Definition des Quotienten ausgehend von einer entsprechenden Multiplikationsgleichung. Es ist bei vorgegebenen natürlichen Zahlen a und b eine natürliche Zahl c zu ermitteln, so daß b . c = a ist. Wie schon erwähnt, wird dieser Weg bei axiomatischem Aufbau der Theorie beschritten.

Wenn der Quotient existiert, ist er von der Wahl der Repräsentanten unabhängig, was entsprechend den Überlegungen bei Summe, Produkt und Differenz zu zeigen ist. Wir wollen überlegen, unter welchen Bedingungen der Quotient zweier natürlicher Zahlen bestimmt werden kann.
Wenn ein Quotient, der eindeutig bestimmt ist, existieren soll, muß gelten Kz (A) = Kz (B x C). Dies ist möglich, wenn $a \geqq b$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt bzw. wenn a = 0 und $b \neq 0$ ist. Die Begründung ergibt sich aus der Untersuchung der folgenden Fälle:

Fall 1: $a = 0 \wedge b = 0$
Aus Kz (A) = Kz (B x C) ergibt sich, daß $A \sim B \times C$ sein muß und damit $\emptyset \sim \emptyset \times C$.
Diese Gleichmächtigkeit besteht aber für jede beliebige endliche Menge. Damit ist c nicht eindeutig zu bestimmen.

Fall 2: $a \neq 0 \wedge b = 0$

Wir erhalten jetzt $A \sim \emptyset \times C$. Dies ist nur möglich, wenn $A = \emptyset$ ist, was aber im Widerspruch zu $a \neq 0$ steht. Ein Quotient c existiert also nicht.

Fall 3: $a = 0 \wedge b \neq 0$

Es muß gelten $\emptyset \sim B \times C$. Diese Gleichmächtigkeit ist gewährleistet, wenn $C = \emptyset$ und damit $c = 0$ ist.

Fall 4: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

4.1. $a < b$

Wie in allen anderen Fällen muß $A \sim B \times C$ gelten. Da aber $A \neq \emptyset$ gelten muß, muß auch $C \neq \emptyset$ sein. Da aber A nicht gleichmächtig zu B ist (wegen $a < b$), kann A auch nicht zu $B \times C$ gleichmächtig sein.

4.2. $a \geqq b$

Es muß wieder gelten $A \sim B \times C$.

Dies ist möglich, wenn A

I. in b paarweise disjunkte gleichmächtige Teilmengen

oder

II. in paarweise disjunkte Teilmengen mit b Elementen

zerlegt werden kann.

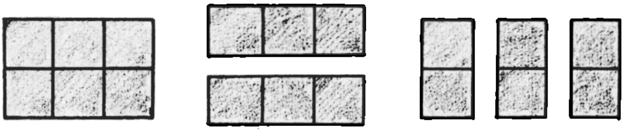
Nach diesen Überlegungen definieren wir die Division in N:

D8 (1.4.) Wir nennen diejenige Abbildung aus $N \times N$ in N, die geordneten Paaren natürlicher Zahlen a und b deren Quotienten zuordnet, Division in N.

Wir haben erkannt, daß die Division in N nicht immer ausführbar ist, und es gilt:

Satz 12 (1.4.) Die Division in N ist eine partielle Operation.

Die mengentheoretische Veranschaulichung der Quotientenbildung erfolgt in den unteren Klassen durch das Zerlegen einer Menge in eine gegebene Anzahl gleichmächtiger Teilmengen. Wir geben hier eine solche Veranschaulichung aus dem Mathematiklehrbuch der Klasse 1 wieder.



$6:2=3$

$3\cdot 2=6$

Bild 1 (1.4.)

Das folgende Beispiel zeigt, wie bei Aufgaben, die in Klasse 2 gelöst werden, die beiden Möglichkeiten der Zerlegung einer gegebenen Menge gefordert werden.[1]

Beispiel 2 (1.4.)

a) Die 24 Schüler einer Klasse wetteifern in drei gleich großen Gruppen um die beste Disziplin im Unterricht.
Wieviel Schüler gehören zu einer Gruppe?

b) Die 24 Schüler einer Klasse wetteifern in Gruppen zu je 8 Schülern um die beste Disziplin im Unterricht.
Wieviel Gruppen bilden die Schüler dieser Klasse?

Bei der Aufgabe a) ist die gegebene Menge in 3 disjunkte Teilmengen mit gleich vielen Elementen zu zerlegen. Jede dieser Teilmengen ist Repräsentant des Quotienten.

[1] Lehrtexte zur Methodik des Mathematikunterrichts in den unteren Klassen
VEB Kongreß- und Werbedruck Oberlungwitz 1976

Bei der Aufgabe b) ist die gegebene Menge in paarweise disjunkte Teilmengen mit 8 Elementen zu zerlegen. Der Quotient c ist die Anzahl der so entstehenden Teilmengen.

Der Bildung des Quotienten können also inhaltlich zwei verschiedene Sachverhalte zugrunde liegen.
Die Feststellung, daß der Divisor nicht Null sein darf, läßt sich an entsprechenden Multiplikationsaufgaben erläutern (vgl. Lehrbuch Mathematik Klasse 2) und mengentheoretisch begründen. Wenn beispielsweise $8 : 0 = x$ gelten soll, muß x die Gleichung $x \cdot 0 = 8$ erfüllen. Da es keine natürliche Zahl gibt, die diese Gleichung erfüllt, gibt es keine Zahl, die der Quotient von 8 und 0 ist. Für die zur Gleichung $0 : 0 = x$ gehörende Multiplikationsgleichung $x \cdot 0 = 0$ gibt es keine eindeutige Lösung, denn jede Zahl ergibt mit Null multipliziert das Produkt Null. Mengentheoretisch betrachtet hieße es, daß bei der Division $8 : 0$ der Dividend durch eine Menge A mit 8 Elementen repräsentiert wird, der Divisor durch die leere Menge und der Quotient durch eine Menge C, wobei $C \times \emptyset \sim A$ gelten muß. Da $C \times \emptyset$ aber immer die leere Menge ergibt, erfüllt keine Menge C diese Bedingung.

Zum Abschluß der Betrachtungen über die Division seien einige Eigenschaften angegeben. Das Gesetz der Distributivität der Division bezüglich der Addition und der Subtraktion gilt in der folgenden Form:

Satz 13 (1.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c ($c > 0$) gilt:

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$
$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

(Gesetz der rechtsseitigen Distributivität der Division bezüglich der Addition und der Subtraktion)

Dieser Satz sei ohne Beweis angegeben.

Daß die Aussageformen

$$a : (b + c) = a : b + a : c$$

und $a : (b - c) = a : b - a : c$

nicht allgemeingültig sind, läßt sich durch die Angabe eines Gegenbeispiels leicht zeigen.

2. Der axiomatische Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen

2.1. Bemerkungen zum axiomatischen Aufbau einer Theorie

Bevor wir die Theorie der natürlichen Zahlen mit Hilfe der axiomatischen Methode aufbauen, wollen wir klären, was wir unter einem derartigen Aufbau verstehen und welche Bedeutung er hat. Wenn ein Mathematiker eine mathematische Theorie aufbauen will, so sind ihm stets schon viele Begriffe und Aussagen des entsprechenden Gebietes bekannt. Der Aufbau einer mathematischen Theorie ist also erst auf einer ganz bestimmten Stufe der historischen Entwicklung möglich. In die Fülle der vorliegenden Begriffe und Aussagen soll eine bestimmte Ordnung nach logischen Gesichtspunkten gebracht werden. Es wird gefordert, daß jeder Begriff durch eine Definition auf bereits definierte Begriffe zurückgeführt wird und jeder Satz beweisbar ist, wobei nur auf bereits bewiesene Aussagen (Sätze) und Definitionen zurückgegriffen wird. Nun muß diesem Zurückführen an irgendeiner Stelle ein Ende gesetzt werden, d. h. es führt zu einem Anfang der Theorie. Bestimmte Begriffe und Aussagen müssen am Beginn einer Theorie stehen. Diese werden Grundbegriffe bzw. Axiome genannt. Grundbegriffe werden in dem betrachteten Aufbau der Theorie nicht definiert, denn eine Rückführung auf allgemeinere Begriffe ist nicht möglich, weil diese fehlen. Wenn Grundbegriffe insbesondere Beziehungen widerspiegeln, spricht man auch von Grundrelationen. Unter einem Axiom versteht man eine wahre Aussage, in die Grundbegriffe und Grundrelationen eingehen und die im betrachteten Aufbau der Theorie nicht bewiesen wird.

Zusammenfassend kann das Wesen des axiomatischen Vorgehens folgendermaßen charakterisiert werden:

I. Alle Grundbegriffe und Grundrelationen des zu axiomatisierenden Gebietes sind anzugeben, und jeder weitere Begriff ist durch Definition auf diese zurückzuführen.

II. Eine endliche Menge von Axiomen über das Gebiet ist anzugeben und zu zeigen, daß alle weiteren wahren Aussagen der Theorie und nur solche daraus ableitbar sind.

Eine derartige Menge von Axiomen bildet ein Axiomensystem.
Ein solches System muß

- widerspruchsfrei sein, d. h. es darf nicht möglich sein, daß sowohl eine Aussage als auch deren Negation beweisbar sind;

- vollständig sein; d. h., daß jede formulierbare Aussage, die in diese Theorie eingeordnet werden kann, oder deren Negation beweisbar sein muß.

Oftmals fordert man zusätzlich, daß kein Axiom aus einem anderen herleitbar sein darf.

Schematisch ließen sich die Beziehungen zwischen den sechs Elementen beim axiomatischen Aufbau einer Theorie folgendermaßen darstellen:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\text{Grundbegriffe}\\ \text{Grundrelationen}\end{array} \arrow[r, "\text{Definitionen}"'] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Begriffe} \arrow[r, "\text{Definitionen}"'] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Begriffe...} \arrow[d, leftrightarrow] \\
\text{Axiome} \arrow[r, "\text{Beweise}"'] & \text{Sätze} \arrow[r, "\text{Beweise}"'] & \text{Sätze...}
\end{tikzcd}$$

Bild 1 (2.1.)

Es ist möglich, daß verschiedene Theorien zu einem mathematischen Gebiet vorliegen. Dabei kann es auftreten, daß ein und dieselbe wahre Aussage in eine Theorie als Satz eingeht und bei einem anderen Vorgehen als Axiom auftritt. Das hängt von ihrer Stellung innerhalb der Theorie ab. Beim Vergleich der beiden Wege zum Aufbau von N wird dies dem Leser deutlich werden.

Der im Abschnitt 1. dargestellte genetische Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen erfüllt die genannten Forderungen an den axiomatischen Aufbau einer Theorie nicht. Wir haben uns dabei auf die Mengenlehre gestützt, diese wurde aber im Sinne unseres Ausbildungszieles nicht streng axiomatisch aufgebaut.

Wie bekannt, haben wir dort von bestimmten Prinzipien gesprochen. Diese Prinzipien entsprachen etwa einem Axiomensystem für die Entwicklung unserer mengentheoretischen Kenntnisse. Wir können sagen, daß wir den genetischen Weg in Anlehnung an einen axiomatischen Aufbau gegangen sind. In diesem Abschnitt werden wir die Theorie der natürlichen Zahlen so weit konsequent axiomatisch aufbauen, wie sie als fachtheoretische Grundlage für den Mathematikunterricht in den unteren Klassen erforderlich ist. Einen weiteren axiomatischen Aufbau einer Theorie werden wir bei der Behandlung der Geometrie kennenlernen.

2.2. Das Peanosche Axiomensystem und das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Beim axiomatischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen gehen wir von folgenden Aussagen, dem Peanoschen Axiomensystem, aus:

Peanosches Axiomensystem

P I : Null ist eine natürliche Zahl.
P II : Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger n'.
P III: Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
P IV : Jede natürliche Zahl ist Nachfolger höchstens einer natürlichen Zahl.
P V : Die Aussage

"Für alle natürlichen Zahlen n gilt H (n)"
ist wahr, wenn

1. H (0) wahr ist und
2. für eine beliebige natürliche Zahl k gezeigt werden kann, daß aus der Wahrheit von H (k) die Wahrheit von H (k') folgt.

Diese Axiome enthalten die Begriffe und Relationen "Null", "natürliche Zahl" und "...ist Nachfolger von...", die demzufolge Grundbegriffe bzw. Grundrelationen sind.

P I bis P V entsprechen den Peanoschen Aussagen, die im Abschnitt 1.3. angegeben wurden und deren Beweisbarkeit im mengentheoretischen Aufbau wir gezeigt haben. Für die Aussage P V wurde im Abschnitt 1.3. eine andere Formulierung angegeben. Dort wurde der Begriff Menge verwendet. Da dieser Begriff im axiomatischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen kein Grundbegriff ist, wurde er hier vermieden. Beide Aussagen sind aber gleichwertig, wenn man die in der mengentheoretischen Formulierung auftretende Menge M als diejenige Menge interpretiert, deren Elemente H (n) erfüllen.

Die als endliche Kardinalzahlen eingeführten natürlichen Zahlen 0; 1; 2;... erfüllen diese fünf Forderungen, wenn man von der Festlegung ausgeht, daß 0' = 1; 1' = 2; 2' = 3 usw. ist, wie vorn bewiesen wurde. Aber auch für die Elemente der Menge der geraden Zahlen 0; 2; 4; 6;... trifft dies zu, sofern die Nachfolgerrelation für sie so festgelegt wird, daß
0' = 2; 2' = 4; 4' = 6 usw. gilt. Man spricht deshalb davon, daß die Menge der natürlichen Zahlen e i n Modell des Peanoschen Axiomensystems ist. Es gibt neben der oben genannten Menge der geraden natürlichen Zahlen mit der entsprechenden Nachfolgerrelation noch weitere Modelle. Wenn wir z. B. den ab Klasse 1 vertrauten Sachverhalt betrachten, daß man auf einem Strahl, beginnend mit seinem Anfangspunkt, abstandsgleiche Punkte wählt, so läßt sich für diese Menge anschaulich folgendes feststellen:

Die Menge ist nicht leer. Jedes Element der Menge hat genau einen Nachfolger. Der Anfangspunkt des Strahls ist selbst nicht Nachfolger eines Punktes. Alle anderen Punkte sind Nachfolger genau eines Elementes der Menge. Jedes Element der Menge ist durch hinreichend häufige Nachfolgerbildung erreichbar. Das Peanosche Axiomensystem legt den konkreten Inhalt des Begriffs "natürliche Zahl" nicht eindeutig fest. Wir erkennen aber, daß die Beziehungen zwischen den Objekten, die natürliche Zahlen genannt werden, in jedem Modell einander entsprechen.
Alle weiteren Aussagen über natürliche Zahlen lassen sich auf die genannten fünf Axiome zurückführen. Dabei spielt das Axiom PV eine besondere Rolle, denn es liefert uns die Grundlage für ein Beweisverfahren, das beim Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen große Bedeutung besitzt.

Es ist das Beweisverfahren durch vollständige Induktion. Da man das Beweisverfahren benötigt, um beispielsweise Eigenschaften von Operationen zu beweisen, sollen die Grundgedanken des Verfahrens dargelegt werden. Wir heben noch einmal hervor, daß es beim axiomatischen Aufbau nicht zulässig ist, auf Hilfsmittel der Mengenlehre zurückzugreifen; sie stehen uns also auch nicht als Beweismittel zur Verfügung. PV wird auch als Prinzip der vollständigen Induktion bezeichnet. Um das Vorgehen bei einem Beweis nach diesem Prinzip zu veranschaulichen, wollen wir zunächst ein Beispiel angeben:[1)]

Beispiel 1 (2.2.)

Es sei eine Reihe Dominosteine so aufgestellt, daß das Umfallen eines Steines das Umfallen des nächsten zur Folge hat (Abb.1 (2.2.)).
Wenn nun tatsächlich der erste Stein umgeworfen wird, kann man schließen, daß alle Steine umfallen.

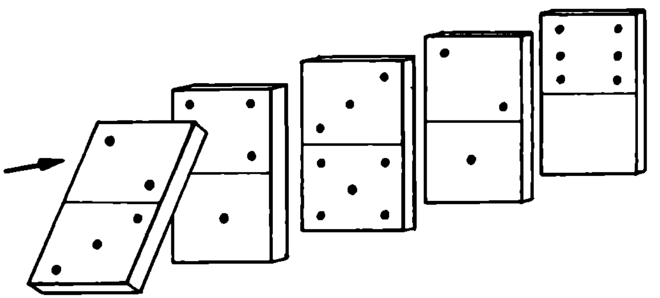


Abb. 1 (2.2.)

---

1) Nach H. Steinhaus "Kaleidoskop der Mathematik"
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959, S. 46

Es wird deutlich, daß zweierlei abgesichert sein muß, damit tatsächlich alle Steine umfallen:

1. Der erste Stein wird umgestoßen.
2. Jeder fallende Stein wirft den nächsten um.

Der Leser überlege sich den Sachverhalt, wenn jeweils nur eine der beiden Bedingungen gilt. Bei allen dann bestehenden Möglichkeiten ist die Aussage, daß alle Steine umfallen, falsch. Falls beispielsweise anstelle des ersten Steines der fünfte umgestoßen wird und die zweite Bedingung erfüllt ist, werden alle die hinter dem fünften Stein stehenden umfallen (Bild 2a (2.2.)). Falls 2. nicht erfüllt ist, gilt die Aussage nur für eine gewisse Anzahl von Steinen (Bild 2b (2.2.)).

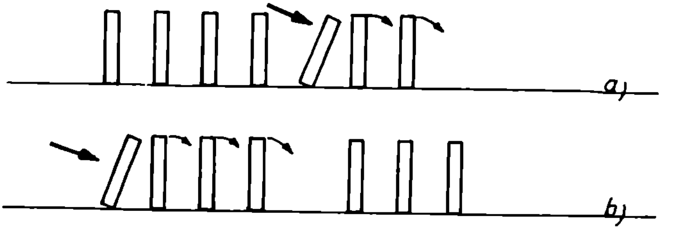


Bild 2 (2.2.)

Dem Leser möge bewußt werden, daß diese Veranschaulichung durch das gewählte Beispiel nur für endliche Mengen gilt. Die Bedeutung des Prinzips der vollständigen Induktion besteht darin, daß er den zugrunde liegenden Schluß auf eine unendliche Menge überträgt. Entsprechend den Überlegungen zum Beispiel 1 (2.2.) gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion, daß, falls im 1. Schritt nicht die Gültigkeit von H (0) gezeigt wird, sondern für eine gewisse Zahl $n = n_0$, also H (n_0), die Aussageform H (n) für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ zu einer wahren Aussage wird.

Das Verfahren der vollständigen Induktion verlangt also die folgenden Schritte:

1. Induktionsanfang

Bilden von H (n_0) für eine (möglichst kleine) natürliche Zahl und Beweis der Wahrheit dieser Aussage.

2. Induktionsschritt

Beweis der Allgemeingültigkeit der Implikation

H (k) $\longrightarrow$ H (k') für beliebiges k.

Dabei erfolgt der Beweis dieser Implikation nach dem uns vertrauten Verfahren, nämlich nachzuweisen, daß aus der Wahrheit der Voraussetzung (Vorderglied der Implikation) die Wahrheit der Behauptung (Nachglied der Implikation) folgt.
Also wird dieser Schritt gegliedert in:

a) Bilden von H (k) als Induktionsvoraussetzung
b) Bilden von H (k') als Induktionsbehauptung
c) Beweis von
"Aus H (k) folgt H (k')" als Induktionsbeweis

3. Induktionsschluß

Feststellung, daß mit den Schritten 1. (Induktionsanfang) und 2. (Induktionsschritt) bewiesen ist, daß P V angewendet werden kann und somit die Aussage "Für alle natürlichen Zahlen $n \geqq n_0$ gilt H (n)" wahr ist.

Das Verfahren soll an einem leicht verständlichen Beispiel (das aber strenggenommen nicht in den Rahmen des axiomatischen Aufbaus von N gehört) gezeigt werden. Zur Aufgabenstellung führt die Überlieferung, daß der Lehrer Büttner aus Braunschweig seinen Schülern, zu denen der neunjährige Karl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) gehörte, die Aufgabe stellte, die Zahlen 1 bis 40 zu addieren, um etwas Ruhe zu haben.
Die meisten Schüler rechneten nun:
1 + 2 = 3; 3 + 3 = 6; 6 + 4 = 10 usw.

Nicht aber Gauß. Er ordnete die Zahlen zu Paaren:

1 + 40; 2 + 39; ...; 20 + 21

und erhielt 20 Paare, deren Summe jeweils 41 betrug. Nun brauchte er nur noch zu multiplizieren $20 \cdot 41 = 820$.

Dies ist ein Spezialfall der Aufgabe, die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n zu bilden. Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen S_n vermuten wir dementsprechend:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = S_n = \frac{n}{2}(n + 1).$$

Durch vollständige Induktion ist zu zeigen, daß

$$\bigwedge_{n \in N \wedge n > 0} \left(1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)\right)$$

gilt.

Voraussetzung: n sei eine beliebige natürliche Zahl, $n > 0$

Behauptung: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$

Beweis durch vollständige Induktion

1. Induktionsanfang

Entsprechend dem Sachverhalt bilden wir H (1):

$$1 = \frac{1}{2}(1 + 1).$$

Wir erkennen, daß diese Aussage wahr ist.

2. Induktionsschritt

a) Induktionsvoraussetzung

Es gelte H (k):

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k}{2}(k + 1).$$

b) Induktionsbehauptung

Dann gilt auch H (k'), wobei wir berücksichtigen, daß $k' = k + 1$:

$$H(k + 1) = 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{k + 1}{2}(k + 1)+1$$
$$= \frac{k + 1}{2}(k + 2)$$

c) Induktionsbeweis

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k}{2} (k + 1)$$

Diese Gleichung wird entsprechend dem Ziel so äquivalent umgeformt, daß man die Induktionsbehauptung erhält:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k}{2} (k + 1) + (k + 1)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k (k + 1) + 2 (k + 1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1) (k + 2)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k + 1}{2} (k + 2)$$

3. Induktionsschluß

Damit ist gezeigt, daß aus der Wahrheit der Induktionsvoraussetzung die Wahrheit der Induktionsbehauptung folgt und im Zusammenhang mit dem Induktionsanfang geschlossen werden kann:

$$\bigwedge_{n \in N \wedge n > 0} \left(1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2} (n + 1)\right).$$

Abschließend sei durch folgende Darstellung deutlichgemacht, wie durch wiederholte Anwendung der Abtrennungsregel auf Induktionsanfang und Induktionsschritt schrittweise die Gültigkeit von H (n) für alle natürlichen Zahlen entsteht:

$$\begin{array}{lcl}
 & & H(0) \\
\left[H(0) \wedge ((H(0) \rightarrow H(1))\right] & \longrightarrow & H(1) \\
\left[H(1) \wedge (H(1) \rightarrow H(2))\right] & \longrightarrow & H(2) \\
\left[H(2) \wedge (H(2) \rightarrow H(3))\right] & \longrightarrow & H(3) \\
\vdots & & \\
\left[H(k-1) \wedge (H(k-1) \Longrightarrow H(k)\right] & \longrightarrow & H(k) \\
\vdots & & \\
\hline
 & & \bigwedge_{n \in N} (H(n))
\end{array}$$

2.3. Induktive Definition von Addition und Multiplikation in N

Im axiomatischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen werden die Operationen Addition und Multiplikation jeweils durch Angabe von zwei Rekursionsformeln definiert. Mit diesen gelingt es, unter ausschließlichem Gebrauch der Peanoschen Axiome und der in ihnen verwendeten Grundbegriffe und Grundrelation Summen bzw. Produkte zu ermitteln. Wir geben mit dem Ziel, die Addition in N zu definieren, folgende zwei Gleichungen an:

A 1 : $a + o = a$

A 2 : $a + b' = (a + b)'$

Wir veranschaulichen durch eine Reihe von Beispielen, daß diese Gleichungen schrittweise eine Abbildung von N x N auf N ermöglichen, die unseren Kenntnissen der Addition entspricht:

Beispiel 1 (2.3.)

a) $3 + 0 = 3$ (nach A 1)

b) $3 + 1 = 3 + 0'$ (nach P IV)
$= (3 + 0)'$ (nach A 2)
$= 3'$ (nach A 1)
$= 4$ (nach P II)

c) $3 + 2 = 3 + 1'$ (nach P IV)
$= (3 + 1)'$ (nach A 2)
$= 4'$ (gemäß Bsp. b)
$= 5$ (nach P II)

Es bedarf entsprechender fachtheoretischer Überlegungen, daß ein solches System aus zwei Gleichungen als Definiens einer bestimmten Operation gerechtfertigt ist. Es müßte gezeigt werden, daß es überhaupt und wenn, dann nur eine solche Operation gibt, deren geordnete Tripel die Gleichungen A 1 und A 2 erfüllen. Auf die entsprechenden Beweisführungen verzichten wir aus Schwierigkeitsgründen.

Wir teilen die Gültigkeit des folgenden Satzes mit:

Satz 1 (2.3.) Es gibt genau eine mit „+" bezeichnete Operation in der Menge der natürlichen Zahlen, die die Gleichungen A 2 und A 1 erfüllt.

Demgemäß können wir definieren:

D1 (2.3.) Diejenige Operation, die gemäß

A 1 : $a + 0 = a$

A 2 : $A + b' = (a + b)'$

jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen genau eine natürliche Zahl zuordnet, heißt Addition in N.

Im Beispiel 1b wurde gezeigt, daß $3 + 1 = 4$ gilt. Demgemäß vermuten wir, daß

$$\bigwedge_{a \in N} (a' = a + 1)$$

gilt.
Diese Aussage ist durch vollständige Induktion unmittelbar aus den Peanoschen Axiomen, A 1 und A 2 beweisbar.
Im Beispiel zur Erläuterung des Beweisverfahrens durch vollständige Induktion wurde diese Aussage bereits benutzt, was einen Vorgriff bedeutete, um das genannte Beispiel anführen zu können.

Für die Addition in N gelten die Gesetze der Assoziativität und der Kommutativität.

Satz 1 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion über c geführt (d. h., a und b werden als beliebige, aber feste natürliche Zahlen angenommen, und es wird nachgewiesen, daß die Aussageform für alle natürlichen Zahlen c zu einer wahren Aussage wird).

Beweis:

Voraussetzung: a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen

Behauptung: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Beweis durch vollständige Induktion über c

1. Induktionsanfang

H (0): $(a + b) + 0 = a + (b + 0)$ ist zu beweisen.

Linker Term: $(a + b) + 0 = a + b$ (nach A 1)

Rechter Term: $a + (b + 0) = a + b$ (nach A 1)

Also folgt:

$(a + b) + 0 = a + (b + 0)$, d. h., H(0) ist eine wahre Aussage.

2. Induktionsschritt

a) Induktionsvoraussetzung

Es gelte H (k):

$(a + b) + k = a + (b + k)$

b) Induktionsbehauptung

Dann gilt auch H (k'):

$(a + b) + k' = a + (b + k')$

c) Induktionsbeweis

$(a + b) + k = a + (b + k)$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$[(a + b) + k]' = [a + (b + k)]'$ (nach P II)

$(a + b) + k' = a + (b + k)'$ (nach A 2)

$(a + b) + k' = a + (b + k')$ (nach A 2)

3. Induktionsschluß

Es kann also aus der Wahrheit der Induktionsvoraussetzung auf die Wahrheit der Induktionsbehauptung geschlossen werden, und unter Berücksichtigung des Induktionsanfangs gilt:

$$\bigwedge_{a,\, b,\, c \in N} ((a + b) + c = a + (b + c)).$$

Der Beweis des Gesetzes der Kommutativität erfolgt durch vollständige Induktion über b. Dabei wird im Induktionsanfang die Wahrheit der Aussage

$$\bigwedge_{a \in N} (a + 0 = 0 + a)$$

und im Induktionsschritt die Wahrheit der Aussage

$$\bigwedge_{a,\, b \in N} (a + b' = a' + b)$$

benötigt.

Diese beiden Aussagen sollen zunächst als Hilfssätze bereitgestellt werden.

Satz 2 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a gilt:

$$a + 0 = 0 + a$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion über a geführt und enthält keine besonderen Schwierigkeiten. Wir verzichten deshalb auf seine Darstellung.

Satz 3 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt:

$$a + b' = a' + b$$

Voraussetzung: a und b sind beliebige natürliche Zahlen.

Behauptung: $a + b' = a' + b$

Beweis durch vollständige Induktion über b

<u>1. Induktionsanfang</u>

H (0): $a + 0' = a' + 0$ ist zu beweisen.

Linker Term:	$a + 0' = (a + 0)'$	(nach A 2)
	$= a'$	(nach A 1)
Rechter Term:	$a' + 0 = a'$	(nach A 1)
Also gilt:	$a + 0' = a' + 0$	

2. Induktionsschritt

a) Induktionsvoraussetzung

Es gelte H (k):

$a + k' = a' + k$

b) Induktionsbehauptung

Dann ist auch H (k') wahr:

$a + (k')' = a' + k'$.

c) Induktionsbeweis

$a + k' = a' + k$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$(a + k')' = (a' + k)'$ (nach P II)

$a + (k')' = a' + k'$ (nach A 2)

3. Induktionsschluß

Wir können also schließen, daß die Aussageform $a + b' = a' + b$ für alle natürlichen Zahlen zu einer wahren Aussage wird.

Satz 4 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a und b gilt:

$a + b = b + a$

(Gesetz der Kommutativität der Addition)

Beweis:

Voraussetzung: a, b sind beliebige natürliche Zahlen.

Behauptung: $a + b = b + a$

Beweis durch vollständige Induktion über b:

1. Induktionsanfang

H (0):

$a + 0 = 0 + a$

ist entsprechend Satz 2 (2.3.) eine wahre Aussage.

2. Induktionsschritt

a) Induktionsvoraussetzung
Es gelte H (k):
$a + k = k + a$

b) Induktionsbehauptung
Dann gilt auch H (k'):
$a + k' = k' + a$

c) Induktionsbeweis

$a + k = k + a$	(nach Induktionsvoraussetzung)
$(a + k)' = (k + a)'$	(nach P II)
$a + k' = k + a'$	(nach A 2)
$a + k' = k' + a$	(nach Satz 3 (2.3.)

3. Induktionsschluß

Also gilt nach P V

$$\bigwedge_{a,\, b \in N} (a + b = b + a)$$

Wir möchten darauf hinweisen, daß es im Schritt c) Induktionsbeweis auch möglich ist, von einem der Terme der Behauptung auszugehen und beispielsweise folgendermaßen unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung umzuformen:

$a + k' = (a + k)'$	(nach A 2)
$= (k + a)'$	(nach Induktionsvoraussetzung)
$= k + a'$	(nach A 2)

Also gilt $a + k' = k + a'$.

Es gelten für die Addition ferner noch die folgenden Sätze, die wir in den weiteren Abschnitten benötigen werden:

Satz 5 (2.3.)

$$\bigwedge_{a,\, b \in N} (a + b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \wedge b = 0)$$

Satz 6 (2.3.)

$$\bigwedge_{a,\, b \in N} (a + b = a \Longleftrightarrow b = 0)$$

Wir überlassen das Beweisen dieser beiden Sätze teilweise dem Leser. Es muß beachtet werden, daß infolge der in beiden Sätzen auftretenden Äquivalenzen insgesamt vier Teilbeweise erforderlich sind.
Die Allgemeingültigkeit der Implikationen
$a = 0 \wedge b = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
und
$b = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
ist auf Grund der Definition der Addition nachweisbar. Wir stellen den Beweis der Aussage

$$\bigwedge_{a,\, b \in N} (a + b = 0 \Longrightarrow a = 0 \wedge b = 0)$$

dar. Er bietet uns eine interessante Übungsmöglichkeit für das Verfahren des indirekten Beweises.

Voraussetzung: a, b sind beliebige natürliche Zahlen und
$a + b = 0$

Behauptung: $a = 0 \wedge b = 0$

Beweis (indirekt):

Wir gehen von der Annahme aus, die durch Negation der Behauptung gebildet wird. Es gelte:

$\neg(a = 0 \wedge b = 0)$

Entsprechend den uns bekannten aussagelogischen Äquivalenzen kann dieser Ausdruck umgeformt werden zu

$a \neq 0 \vee b \neq 0$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $b \neq 0$ gilt. Dann gibt es eine natürliche Zahl c, für die $c' = b$ gilt.

Entsprechend der Voraussetzung und A 2 folgt

$a + b = a + c' = (a + c)' = 0.$

Dies steht aber im Widerspruch zu P III.
Analog führt der Fall, daß $a \neq 0$ gilt, zu einem Widerspruch zu P III. D. h. aber, daß unsere Annahme falsch sein muß und damit deren Negation, also unsere Behauptung wahr ist.

Bei wahrer Voraussetzung läßt sich also die Wahrheit der Behauptung zeigen und daraus schließen, daß die formulierte Implikation allgemeingültig ist.

Abschließend wollen wir folgenden Satz bereitstellen, den wir bei weiteren Betrachtungen benötigen werden.

Satz 7 (2.3.) Für jedes Paar natürlicher Zahlen a und b gilt genau einer der drei Fälle:

1. $a = b$.
2. Es gibt eine natürliche Zahl $x \neq 0$ mit $a + x = b$.
3. Es gibt eine natürliche Zahl $y \neq 0$ mit $b + y = a$.

Wir wollen die Beweisgedanken skizzieren, ohne den Beweis vollständig darzustellen. Es ist zunächst zu zeigen, daß <u>höchstens</u> einer der drei Fälle auftreten kann.
Die unter 1. gegebene Beziehung ist sowohl mit 2. als auch 3. unverträglich, was aus Satz 6 (2.3.) folgt. Würden nun 2. und 3. gleichzeitig eintreten, so ergäbe sich aus $a + x = b$ und $b + y = a$ durch Einsetzen von

$a + x$ für b in der zweiten Gleichung

$a + (x + y) = a$. Also nach Satz 6 (2.3.) $x + y = 0$.

Nach Satz 5 (2.3.) ist die Summe zweier natürlicher Zahlen aber genau dann gleich Null, wenn beide Summanden Null sind.
Da $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gilt, ist also ein Widerspruch zu diesem Satz entstanden, die Fälle 2. und 3. können nicht gleichzeitig eintreten.
Es bleibt zu beweisen, daß auch stets wenigstens einer dieser 3 Fälle eintritt. Dies ist durch vollständige Induktion über a zu beweisen.
Wir stellen den Beweis teilweise dar, um dem Leser zu ermöglichen, selbständig weiterzuarbeiten.

<u>Beweis</u>

Voraussetzung: a, b sind beliebige natürliche Zahlen.

Behauptung: Es gilt mindestens einer der drei genannten Fälle.

Beweis durch vollständige Induktion über a.

<u>1. Induktionsanfang</u>

Wenn $a = 0$ ist, dann sind für b zwei Fälle möglich:
$b = 0$ und $b \neq 0$.
Wenn $b = 0$, gilt $a = b$, also Fall 1. des Satzes 7 (2.3.)
Wenn $b \neq 0$, dann ist Fall 2. des Satzes 7 (2.3.) mit $x = b$ erfüllt.

<u>2. Induktionsschritt</u>

Es ist zu zeigen: Wenn für beliebiges k und b einer der 3 Fälle zutrifft, dann gilt auch für k' und b mindestens einer der 3 Fälle. Es sind also Fallunterscheidungen vorzunehmen, indem für a und k von den drei möglichen Fällen auszugehen ist.

Fall α) $k = b$
Fall β) $k + x = b$ mit $x \neq 0$
Fall γ) $b + y = k$ mit $y \neq 0$

Wir stellen exemplarisch die Beweisschritte für den Fall β) dar.

a) Induktionsvoraussetzung

$H(k)$: $k + x = b$ mit $x \neq 0$ sei wahr.

b) Induktionsbehauptung

Dann gilt auch für k' und b mindestens einer der 3 Fälle.

c) Induktionsbeweis

Aus $k + x = b$ mit $x \neq 0$ folgt, daß
x darstellbar ist als $x = n' = n + 1$.
Damit kann die Induktionsvoraussetzung umgeformt werden zu

$k + (n + 1) = b$.

Nach den Gesetzen der Kommutativität und Assoziativität gilt
$(k + 1) + n = b$
und damit
$k' + n = b$.

Falls $n = 0$, gilt Fall 1 für k' und b.
Falls $n \neq 0$, gilt Fall 2 für k' und b.

3. Induktionsschluß

Damit ist gezeigt, daß, wenn für k und b der Fall 2. eintritt, für k' und b ebenfalls einer der 3 Fälle gilt. In Verbindung mit dem Induktionsanfang gilt die Aussage also für alle natürlichen Zahlen a.

Analog dazu sind die Fälle α) und γ) zu beweisen.

Als nächstes soll die induktive Definition durch Rekursionsformeln für die Multiplikation angegeben werden. Dabei verzichten wir in diesem Lehrbuch aus wiederum demselben Grunde auf jene Beweisführungen über die Berechtigung für derartige Definitionen, über deren Notwendigkeit wir bei der induktiven Definition der Addition gesprochen haben.

Wir definieren:

D2 (2.3.) Diejenige Operation, die gemäß

M1: $a \cdot 0 = 0$
M2: $a \cdot b' = a \cdot b + a$

jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen genau eine natürliche Zahl zuordnet, heißt Multiplikation in N.

Als erstes soll das Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition bewiesen werden, da dieses zum Beweis weiterer Gesetze benötigt wird.

Satz 8 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
und
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über c und soll für die letztgenannte Form des Gesetzes der Distributivität angegeben werden.

<u>Beweis:</u>

Voraussetzung: a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen.

Behauptung: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Beweis durch vollständige Induktion über c.

<u>1. Induktionsanfang</u>

H (0): $(a + b) \cdot 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$
ist zu beweisen.
Linker Term: $(a + b) \cdot 0 = 0$ (nach M1)
Rechter Term: $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 + 0 = 0$ (nach M1)
$= 0$ (nach A1)
Also gilt $(a + b) \cdot 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$

2. Induktionsschritt

a) Induktionsvoraussetzung

Es gelte H (k):

$(a + b) \cdot k = a \cdot k + b \cdot k$

b) Induktionsbehauptung

Dann ist auch H(k') wahr:

$(a + b) \cdot k' = a \cdot k' + b \cdot k'$

c) Induktionsbeweis

$(a + b) \cdot k = ak + bk$ (nach Induktionsvoraussetzung)

Durch Addition von (a + b) wird diese Gleichung äquivalent umgeformt, um zur Behauptung zu gelangen:

$(a + b) k + (a + b)$	$= ak + bk + (a + b)$	
$(a + b) k'$	$= ak + bk + (a + b)$	(nach A 2)
$(a + b) k'$	$= (ak + a) + (bk + b)$	(Gesetz der Assoziativität und Kommutativität der Addition in N)
$(a + b) k'$	$= ak' + bk'$	(nach A 2)

3. Induktionsschluß

Damit ist gezeigt, daß aus der Wahrheit der Induktionsvoraussetzung die Wahrheit der Induktionsbehauptung folgt und in Verbindung mit dem Induktionsanfang gilt:

$$\bigwedge_{a,\, b,\, c \in N} (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Satz 9 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(Gesetz der Assoziativität der Multiplikation natürlicher Zahlen.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über c. Beim Induktionsbeweis gelangt man durch Addition von a . b als äquivalente Umformung der als Induktionsvoraussetzung gegebenen Gleichung und des Gesetzes der Distributivität zur Induktionsbehauptung.

Satz 10 (2.3.) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(Gesetz der Kommutativität der Multiplikation natürlicher Zahlen)

Zum Beweis dieses Satzes benötigt man die Aussagen

$$\bigwedge_{a \in N} (0 \cdot a = 0)$$

und

$$\bigwedge_{a,b \in N} (a' \cdot b = a \cdot b + b).$$

Der Leser nutze die Übungsmöglichkeiten, die die Beweise dieser Aussagen und des Gesetzes der Kommutativität bieten.

Zum Abschluß der Betrachtungen über die Multiplikation seien die folgenden beiden Aussagen genannt und Anregungen für deren Beweis gegeben. Einen Teilbeweis werden wir darstellen.

Satz 11 (2.3.) $\bigwedge_{a,\, b \quad N} (a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$

Satz 12 (2.3.) $\bigwedge_{a,b \in N} (a \cdot b = 1 \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 1)$

Analog den Überlegungen zu Satz 5 und Satz 6 (2.3.) ist wieder die Allgemeingültigkeit jeweils zweier Implikationen zu zeigen, wobei sich dies bei

$a = 0 \vee b = 0 \Longrightarrow a \cdot b = 0$

und

$a = 1 \wedge b = 1 \Longrightarrow a \cdot b = 1$ sofort aus der Definition der Multiplikation ergibt.

Wir stellen den Beweis der Aussage

$$\bigwedge_{a,\, b \in N} (a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

dar.

<u>Beweis:</u>

Voraussetzung: a, b sind beliebige natürliche Zahlen und
$a \cdot b = 0$

Behauptung: $a = 0 \vee b = 0$

Beweis (indirekt)

1. Annahme

   Die Negation der Behauptung
   $\neg(a = 0 \vee b = 0)$
   wird umgeformt zu
   $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

2. Dann gibt es natürliche Zahlen
   a_1 und b_1, so daß gilt
   $a_1' = a$ und $b_1' = b$.
   Es gilt
   $a \cdot b = a_1' \cdot b_1'$.
   Durch Anwendung von M2 ergibt sich
   $a \cdot b = a_1' \cdot b + a_1'$
   und nach A 2
   $a \cdot b = (a_1' \cdot b_1 + a_1)'$.
   Entsprechend der Voraussetzung gilt also
   $a \cdot b = (a_1' \cdot b_1 + a_1)' = 0$.
   Das steht aber im Widerspruch zu P III. Demnach muß unsere Annahme falsch und damit unsere Behauptung wahr sein. Die formulierte Implikation ist allgemeingültig.

Die Wahrheit der zweiten Teilaussage des Satzes 12 (2.3.) ist ebenfalls indirekt zu beweisen. Auf eine Darstellung verzichten wir.

2.4. Die Kleinerrelation in N

Bereits bei der Behandlung der Addition der Zahlen bis 10 in den ersten Wochen der ersten Klasse verlangt der Lehrplan die Begründung der Kleiner-als-Beziehung und der Größer-als-Beziehung mit Hilfe der Addition. Dies geschieht auf der Grundlage der folgenden Definition:

D1 (2.4.) Eine natürliche Zahl a heißt kleiner als eine natürliche Zahl b (bzw. b heißt größer als a) genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n mit $n \neq 0$ derart gibt, daß $a + n = b$ gilt.
(In Zeichen: $a < b$ bzw. $b > a$)

Wenn $a = b$ oder $a > b$ gilt, so schreiben wir

$a \geqq b$ bzw. $a \leqq b$, wenn $a < b$ oder

$a = b$ zutrifft. Die Eigenschaften der Kleinerrelation kennen wir bereits aus dem genetischen Aufbau der Theorie der natürlichen Zahlen. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß sie aus den Peanoschen Axiomen unter Verwendung der mit Hilfe von A1 und A2 definierten Addition und ihrer Eigenschaften bewiesen werden können.

Satz 1 (2.4.) Die Kleinerrelation in N ist eine irreflexive Ordnungsrelation.

Es ist demgemäß nachzuweisen, daß die Relation irreflexiv, transitiv und trichotom ist. Die Trichotomie besagt hier, daß für beliebige natürliche Zahlen a und b stets genau einer der Fälle

$a < b, \quad b < a \quad \text{oder} \quad a = b$

eintritt. Dies folgt aus Satz 7 (2.3.).

Zum Nachweis der Irreflexivität ist die Aussage

$$\bigwedge_{a} \quad (a \in N \Rightarrow \quad \neg\ (a < a))$$

zu beweisen.

Voraussetzung: a ist eine beliebige natürliche Zahl.

Behauptung: $\neg\ (a < a)$

Beweis (indirekt):

1. Annahme: $a < a$
2. $a + x = a$ mit $x \neq 0$, $x \in N$ (nach Definition der Kleinerrelation)

Damit ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 6 (2.3.), die Annahme muß falsch sein, die Behauptung demnach wahr.

Die Transitivität besagt

$$\bigwedge_{a,\, b,\, c \in N} \quad (a < b \ \wedge \ b < c) \Longrightarrow \ a < c)$$

Beweis:

Voraussetzung: a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen mit $a < b \ \wedge \ b < c$

Behauptung: $a < c$

Beweis:

1. $a < b \ \wedge \ b < c$ (nach Voraussetzung)
2. $a + n_1 = b \quad b + n_2 = c$ (Definition der Kleinerrelation)
   $n_1 \neq 0; \ n_2 \neq 0$
   $n_1; \ n_2 \in N$
3. $a + n_1 + n_2 = c$ (äquivalente Umformung von Gleichungssystemen)

Da die Addition in N stets ausführbar ist, gilt:

$n_1 + n_2 \in N$ und aus 2. folgt

$n_1 + n_2 \neq 0$.

Also gilt

4. $a < c$ (Definition der Kleinerrelation)

q. e. d.

Damit ist nachgewiesen, daß die Kleinerrelation eine irreflexive Ordnungsrelation ist.

Bezüglich der bisher erklärten Operationen gelten für die Kleinerrelation die folgenden Aussagen:

Satz 2 (2.4.) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

(1) $a < b \Longrightarrow a + c < b + c$

(2) $(a < b \wedge c \neq 0) \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$

(Gesetz der Monotonie der Addition bzw. der Multiplikation bezüglich der Kleinerrelation)

Den Beweis von (1) stellen wir dar. Den dazu analogen Beweis für (2) möge der Leser selbständig führen.

Voraussetzung: a, b, c sind beliebige natürliche Zahlen mit $a < b$

Behauptung: $a + c < b + c$

Beweis:

1. $a < b$ (nach Voraussetzung)
2. $a + n = b$ (Definition der Kleinerrelation)
   $n \neq 0$; $n \in N$

Addiert man zu b eine beliebige natürliche Zahl c, so kann gezeigt werden:

3. $b + c = (a + n) + c$ (nach 2.)
   $n \neq 0$

$b + c = (a + c) + n$ (Kommutativität und Assoziativität der Addition in N)

4. $(a + c) + n = b + c \quad n \neq 0$
5. $a + c < b + c$ (nach Definition der Kleinerrelation)

q. e. d.

2.5. Die Subtraktion und Division in N als Umkehroperationen von Addition und Multiplikation

Ausgangspunkt ist zunächst der im Kapitel "Mengenlehre" bereitgestellte Begriff "eindeutige Umkehrbarkeit einer kommutativen Operation". Die in diesem Kapitel definierte Addition in N ist eine kommutative Operation, wie wir nachgewiesen haben. Da es Gleichungen der Form $a + x = b$ mit $a, b, x \in N$ gibt, die lösbar sind, ist die Operation umkehrbar. Ihre eindeutige Umkehrbarkeit wirft die Frage nach der Anzahl der Lösungen von Gleichungen der genannten Form auf. Es muß gezeigt werden, daß jede solche Gleichung höchstens eine Lösung besitzt. Dazu erwähnen wir, daß bereits in den unteren Klassen vermittelt wird, daß nicht jede solche Gleichung lösbar ist, z. B. $3 + x = 2$. Wenn sie aber lösbar ist, dann gibt es nur eine Lösung, z. B. hat die Gleichung $3 + x = 7$ nur die Lösung 4.

Satz 1 (2.5.) Die Addition in N ist eine eindeutig umkehrbare Operation.

Dies kann folgendermaßen gezeigt werden: Angenommen, es gäbe zwei verschiedene natürliche Zahlen x_1 und x_2 für die $a + x_1 = b$ und $a + x_2 = b$ gilt, also $a + x_1 = a + x_2$.
Da $x_1 \neq x_2$ sein soll, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $x_1 > x_2$ sei. Dann folgt nach dem Gesetz der Monotonie der Kleinerrelation bezüglich der Addition, daß $x_1 + a > x_2 + a$ gilt.

Dies steht im Widerspruch zu $a + x_1 = a + x_2$, und x_1 und x_2 können also nicht voneinander verschieden sein.
Ferner steht aus dem Kapitel "Mengenlehre" der Begriff Umkehroperation einer kommutativen Operation zur Verfügung. Demgemäß existiert eine Umkehroperation zur Addition in N. Diese Umkehroperation ist, wie das Beispiel $3 + x = 2$ zeigt, nur eine partielle Operation.

Wir definieren:

D1 (2.5.) Die Umkehroperation der Addition in N, die jedem geordneten Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen höchstens eine natürliche Zahl x so zuordnet, daß $a + x = b$ gilt, heißt Subtraktion in N.
(In Zeichen: $x = b - a$)
Die natürliche Zahl b heißt Minuend, a Subtrahend und $b - a$ Differenz.

Satz 2 (2.5.) Die Differenz zweier natürlicher Zahlen existiert genau dann, wenn der Subtrahend kleiner oder gleich dem Minuenden ist.

Dies ergibt sich aus der Definition der Kleinerrelation in N bzw. Satz 6 (2.3.).
Für die Subtraktion gilt weder das Gesetz der Kommutativität noch das Gesetz der Assoziativität, was sich an Hand von Beispielen zeigen läßt.

In ähnlicher Weise wie bei der Subtraktion gelangen wir zur Definition der Division in N. Es muß die Frage nach der Lösbarkeit und der eindeutigen Lösbarkeit von Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ mit $a, b, x \in N$ geklärt werden. Dabei müssen wir beachten, daß 3 Fälle möglich sind. Wir betrachten die folgenden Beispiele:

Die Gleichungen (1) $3 \cdot x = 7$
(2) $0 \cdot x = 7$
sind nicht lösbar. Die Gleichungen
(3) $3 \cdot x = 6$
(4) $3 \cdot x = 0$
sind lösbar und haben genau eine Lösung.

Die Gleichung (5) $0 \cdot x = 0$
ist nicht eindeutig lösbar, denn für jede natürliche Zahl x erhalten wir eine wahre Aussage. Wir können feststellen, daß für alle $a \neq 0$ die Gleichungen $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar sind. Nachzuweisen ist die Wahrheit dieser Aussage analog dem bei der Subtraktion gezeigten Weg. Unter Beachtung, daß der gegebene Faktor a nicht Null sein darf, können wir definieren:

D2 (2.5.) Die Umkehroperation der Multiplikation in N, die jedem geordneten Paar $[a; b]$ mit $b \neq 0$ natürlicher Zahlen höchstens eine natürliche Zahl x so zuordnet, daß $a \cdot x = b$ gilt, heißt Division in N.
(In Zeichen: $x = b : a$)
Die natürliche Zahl b heißt Dividend, a Divisor, $b : a$ Quotient.

Aus den Gleichungen (2) und (5) wurde deutlich, daß eine Division durch 0 bzw. ein Quotient $0 : 0$ nicht definiert werden durfte. Wir können an dieser Stelle noch keinen Satz über die Existenz eines Quotienten formulieren, da der dazu notwendige Begriff des Vielfachen einer natürlichen Zahl erst im Kapitel "Zahlentheorie" definiert wird. Der Leser möge sich bewußt machen, daß für die Division in N weder das Gesetz der Kommutativität noch das Gesetz der Assoziativität gelten.

Damit haben wir die vier Grundrechenoperationen und deren wichtigste Eigenschaften kennengelernt. Auf weitere Operationen in N und tiefergehende Untersuchungen von Eigenschaften wird entsprechend dem Ausbildungsziel nicht eingegangen.

3. Die Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen bis zum Bereich der rationalen Zahlen

3.1. Bemerkungen zu Zahlbereichserweiterungen

Im Abschnitt 3 behandeln wir eine Auswahl von Problemen der Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen bis zum Bereich der rationalen Zahlen. Die Auswahl erfolgt gemäß der Zielstellung,

- die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterung praxisorientiert und innermathematisch zu motivieren,

- die weitere Anwendung von fachtheoretischen Grundlagen des Fachunterrichts der unteren Klassen (Abstraktionsprozeß, Anwendung von Repräsentanten bei Definitionen und Beweisführungen) im Unterricht der Mittel- und Oberstufe aufzuzeigen und

- die Anwendung der Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten des Bereichs der natürlichen Zahlen beim genetischen Aufbau der weiteren Zahlenbereiche bewußt zu machen.

Im Bereich der natürlichen Zahlen sind, wie uns aus den vorhergehenden Abschnitten bekannt ist, die Addition und Multiplikation Abbildungen von N x N in N, also Operationen.
Unsere Betrachtungen zeigten weiter, daß die Subtraktion und die Division in N partielle Operationen sind. Es mußten Bedingungen an Minuend und Subtrahend bzw. Dividend und Divisor gestellt werden, damit die Differenz bzw. der Quotient existiert. Nun gibt es aber zahlreiche Aufgaben aus der Praxis, die es erforderlich machen, diese einschränkenden Bedingungen zu beseitigen.

Beispiel 1 (3.1.)

a) Eine Prämie von 130 Mark soll zu gleichen Teilen an vier Personen verteilt werden.
   Wieviel Mark erhält jede dieser Personen?

b) An einem bestimmten Tag um 18.00 Uhr betrug die Temperatur 4^{o} C. Am folgenden Tag war es um 6.00 Uhr um 7 Grad kälter. Welche Temperatur wurde gemessen?

Diese Aufgabenstellungen führen zu den Gleichungen

$$130 : 4 = x \qquad \text{bzw.} \qquad 4 - 7 = x.$$

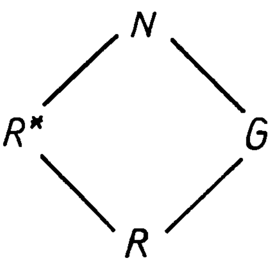
Beide Gleichungen sind in N nicht lösbar.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, den Bereich der natürlichen Zahlen zu einem Bereich zu erweitern, in dem die Subtraktion oder die Division uneingeschränkt ausführbar, also eine Operation ist. Demzufolge gibt es zwei Wege für eine Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen.

1. Neben der Addition und Multiplikation wird die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Division verlangt (mit Ausnahme der Division durch 0, die prinzipiell ausgeschlossen ist). Man erhält den Bereich R^* der gebrochenen Zahlen.

2. Neben der Addition und Multiplikation wird die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion gefordert. Man gelangt zum Bereich G der ganzen Zahlen.

Fordert man weiterhin die uneingeschränkte Ausführbarkeit der jeweils verbleibenden partiellen Operation, so gelangt man auf beiden Wegen zum Bereich R der rationalen Zahlen.



Sowohl die ganzen Zahlen als auch die gebrochenen Zahlen und die rationalen Zahlen sind aus unmittelbaren Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft entstanden (z. B. Wasserstandsangaben, Zeitberechnungen). Aufgabe der Mathematik ist es, eine theoretische Fassung des durch Erfahrung gewonnenen und gefestigten Wissens auf der Grundlage der der Mathematik eigenen Verfahren zu geben. Damit erfolgt eine Absicherung der Ergebnisse. Außerdem wird die Möglichkeit geschaffen, auf diesen Ergebnissen später aufzubauen. Die ganzen Zahlen, die gebrochenen Zahlen und die rationalen Zahlen werden nicht "aus dem Nichts geschaffen", sondern man benutzt dabei die im Bereich der natürlichen Zahlen geltenden Gesetze.

Analog dem Vorgehen in der Schule wollen wir einige prinzipielle Gesichtspunkte der Zahlenbereichserweiterungen, verbunden mit dem Weg

$$N - R^{*} - R$$

darstellen. Für den 2. Weg $N - G - R$ geben wir Hinweise. Bei einer Zahlbereichserweiterung ist man bestrebt, gewisse Bedingungen zu erfüllen:

1. Im erweiterten Bereich ist eine weitere Operation ausführbar, die bisher nicht oder nur eingeschränkt ausführbar war.

2. Alle im vorhandenen Bereich erklärten Operationen sind im erweiterten Bereich ebenfalls definiert, und die entsprechenden Gesetze gelten.

3. Im erweiterten Bereich (z. B. in R^{*}) soll es eine Teilmenge so geben, daß jedem Element des vorhandenen Zahlenbereichs (z. B. N) genau ein Element dieser Teilmenge zugeordnet werden kann und umgekehrt, also eine eindeutig umkehrbare Abbildung von der Teilmenge auf den gegebenen Zahlenbereich möglich ist. Dabei wird gefordert, daß sich die Elemente des neuen Zahlenbereiches bezüglich der Ordnungsrelation und bezüglich der Operationen genauso wie die ihnen zugeordneten Elemente des vorhandenen Zahlenbereiches verhalten.

3.2. Der Abstraktionsprozeß als Prinzip der Erweiterung von Zahlenbereichen

Bei der Gewinnung der Begriffe "gebrochene Zahl" und "rationale Zahl" führen wir einen Abstraktionsprozeß analog dem Prozeß zur Gewinnung des Begriffs "natürliche Zahl". Es wird zunächst der Prozeß zur Gewinnung der gebrochenen Zahlen dargestellt, wobei wir ferner einige Bemerkungen zur Motivation des Gebrauchs von Brüchen als Symbol einarbeiten. Da jeder Quotient $a : b$ $(b \neq 0)$ in N durch ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen gebildet wird und jeder solche Quotient ein Element des neuen Zahlenbereiches sein soll, wählen wir als Ausgangsmenge die Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen, deren 2. Element ungleich Null ist. Also wir gehen bei der Führung des Abstraktionsprozesses aus von der Menge

$$N \times (N \setminus \{0\}).$$

Ausgehend von in N ausführbaren Divisionsaufgaben (z. B. $6 : 3$; $18 : 9$ usw.) stellen wir fest, daß verschiedene geordnete Paare aus $(N \times (N \setminus \{0\})$ denselben Quotienten darstellen. Diese Forderung muß sich auf den durch Erweiterung zu konstruierenden Bereich übertragen. So motiviert sich die Definition der für den Abstraktionsprozeß erforderlichen Äquivalenzrelation in der Menge $N \times (N \setminus \{0\})$:

D1 (3.2.) Die geordneten Paare natürlicher Zahlen $[a; b]$ und $[c; d]$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ heißen quotientengleich genau dann, wenn

$a \cdot c = c \cdot b$

gilt. .

(In Zeichen: $[a; b] \underset{Q}{=} [c; d]$)

Beispiel 1 (3.2.)

$[4; 5] \underset{Q}{=} [12; 15]$, denn $4 \cdot 15 = 12 \cdot 5$

$[0; 6] \underset{Q}{=} [0; 1]$, denn $0 \cdot 1 = 0 \cdot 6$

$[3; 3] \underset{Q}{\neq} [3; 4]$, denn $3 \cdot 4 \neq 3 \cdot 3$

Wir zeigen, daß die in D1 (3.1.) definierte Quotientengleichheit eine Äquivalenzrelation in der Menge $N \times (N \setminus \{0\})$ ist. Bei diesem Nachweis werden wir stets von Gesetzen der in N definierten Multiplikation Gebrauch machen.
Die Relation ist reflexiv, d. h.

$$\bigwedge_{[a;\, b] \in N \times (N \setminus \{0\})} \left([a;\, b] \underset{Q}{=} [a;\, b]\right),$$

denn es gilt stets $a \cdot b = a \cdot b$

Die Relation ist symmetrisch, d. h.

$$\bigwedge_{[a;\, b],\, [c;\, d] \in N \times (N \setminus \{0\})} \left([a;\, b] \underset{Q}{=} [c;\, d] \Longrightarrow [c;\, d] \underset{Q}{=} [a;\, b]\right),$$

denn aus $a\, d = c\, b$ folgt $c\, b = a\, d$.

Die Relation ist transitiv, d. h.

$$\bigwedge_{[a;b];[c;d];[e;f] \in N \times (N \setminus \{0\})} \left([a;b] \underset{Q}{=} [c;d] \wedge [c;d] \underset{Q}{=} [e;f] \Longrightarrow [a;b] \underset{Q}{=} [e;f]\right)$$

Den Nachweis der Transitivität skizzieren wir wie folgt:

$$[a;b] \underset{Q}{=} [c;d] \Longrightarrow a\, d = c\, b$$

$$[c;d] = [e;f] \Longrightarrow c\, f = e\, d$$

Die Multiplikation beider Gleichungen ergibt:

$$a\, d\, c\, f = c\, b\, e\, d\ .$$

Auf Grund der eindeutigen Umkehrbarkeit der Multiplikation in N gilt:

$$a\, f = e\, b,$$

d. h. $[a;b] \underset{Q}{=} [e;f]$.

Die Klasseneinteilung der Ausgangsmenge bezüglich der erklärten Äquivalenzrelation liefert Klassen zueinander quotientengleicher Paare natürlicher Zahlen. Analog dem Vorgehen bei N ist eine solche Klasse eine Zahl des zu konstruierenden Zahlenbereiches.

D2 (3.2.) Jede Klasse quotientengleicher geordneter Paare natürlicher Zahlen, deren zweites Element ungleich Null ist, nennt man eine gebrochene Zahl.

Die Menge aller dieser Klassen bildet die Menge R^* der gebrochenen Zahlen.

Beispiel 2 (3.2.)

$$z_1 = \{[2;\underline{4}] \ ; \ [1;\underline{2}] \ ; \ [8;1\underline{6}] \ ; \ [5;1\underline{0}] \ ; \ \ldots\}$$

$$z_2 = \{[0;\underline{1}] \ ; \ [0;\underline{3}] \ ; \ [0;\underline{7}] \ ; \ [0;17\underline{6}]; \ \ldots\}$$

$$z_3 = \{[9;\underline{6}] \ ; \ [3;\underline{2}] \ ; \ [6;\underline{4}] \ ; \ [15;1\underline{0}]; \ \ldots\}$$

$$z_4 = \{[3;\underline{3}] \ ; \ [7;\underline{7}] \ ; \ [1;\underline{1}] \ ; \ [10;1\underline{0}]; \ \ldots\}$$

In der gesellschaftlichen Praxis entstand für einen Repräsentanten $[a;\underline{b}]$ einer gebrochenen Zahl die uns geläufige Symbolik $\frac{a}{b}$, bezüglich der wir die Begriffe Bruch, Zähler, Nenner kennen.
Um mit den in D2 (3.2.) definierten Zahlen ohne großen Aufwand rechnen und sie vergleichen zu können, ist es zweckmäßig, für jede Zahl eine Kurzbezeichnung einzuführen. Man wählt zur Darstellung der gebrochenen Zahl z ein beliebiges $[a;\underline{b}] \in z$ und schreibt das Symbol

$$z = \frac{a}{b}.$$

Demgemäß hat das Symbol $\frac{a}{b}$ eine zweite Bedeutung; es ist ein Zeichen für eine gebrochene Zahl. Die gebrochenen Zahlen z_1 und z_2 des Beispiels 2 (3.2.) lassen sich also darstellen als

$z_1 = \frac{2}{4}$ oder $z_1 = \frac{1}{2}$ oder $z_1 = \frac{8}{16}$ oder $z_1 = \frac{5}{10}$ usw.

$z_2 = \frac{0}{1}$ oder $z_2 = \frac{0}{3}$ oder $z_2 = \frac{0}{7}$ oder $z_2 = \frac{0}{176}$ usw.

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten für die Darstellung ein und derselben gebrochenen Zahl im Unterschied zur Eindeutigkeit der Bezeichnung der natürlichen Zahlen. Ungeachtet der Gleichheit der Symbolik muß uns stets der unterschiedliche Begriffsinhalt der Begriffe "gebrochene Zahl" und "Bruch" bewußt sein. Ein Bruch ist ein Element, ein Repräsentant einer gebrochenen Zahl, und eine gebrochene Zahl ist eine Klasse solcher Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen (d. h. Zähler und Nenner werden mit einer von Null verschiedenen Zahl multipliziert bzw. durch eine solche dividiert) auseinander hervorgehen.
Es gibt die folgenden Vereinbarungen über bevorzugte Schreibweisen gebrochener Zahlen:

1. Für alle gebrochenen Zahlen, deren erstes Element Null ist, also $[0;b] \in z$ bzw. $z = \frac{0}{b}$, schreibt man $z = 0$.
   Das Zeichen "0" wird also sowohl für die natürliche Zahl Null als auch für die gebrochene Zahl $z = \frac{0}{b}$ benutzt.

2. Sind die Glieder a und b eines geordneten Paares $[a;b] \in z$ gleich, so bevorzugt man $z = \frac{1}{1}$ als Darstellung für diese gebrochene Zahl.

3. Für gebrochene Zahlen z, mit $z \neq 0$ und $z \neq \frac{1}{1}$ wird genau die Schreibweise $z = \frac{a}{b}$ bevorzugt, für die die Differenz $a - b$ bzw. $b - a$ (je nachdem, ob $a > b$ oder $b > a$ gilt) am kleinsten ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß der am weitesten gekürzte Bruch, der Repräsentant von z ist, zur Darstellung genutzt wird.

Beispiel 3 (3.2.)

Für $z_1 = \{[2;4]\ ;\ [1;2]\ ;\ [8;16]\ ;\ [5;10]\ ;\ \ldots\}$
wird die Schreibweise $z = \frac{1}{2}$ bevorzugt;

für $z_2 = \{[0;1]\ ;\ [0;3]\ ;\ [0;7]\ ;\ [0;176]\ ;\ \ldots\}$ $\qquad z_2 = 0$;

für $z_3 = \left\{ [9;6]\ ;\ [3;2]\ ;\ [6;4]\ ;\ [15;10]\ ;\ \ldots \right\}$ $\qquad z = \frac{3}{2}$

und für

$$z_4 = \left\{ [3;3]\ ;\ [7;7]\ ;\ [1;1]\ ;\ \ldots \right\} \qquad z_4 = \frac{1}{1}\ .$$

Damit haben wir die Menge der gebrochenen Zahlen gewonnen und Zeichen für deren Elemente eingeführt.

Für den Aufbau der Menge der rationalen Zahlen aus der Menge der gebrochenen Zahlen sollen dem Leser im folgenden einige Anregungen für die selbständige Erarbeitung gegeben werden. Wir stellen die folgenden Definitionen bereit:

D3 (3.2.) Die geordneten Paare gebrochener Zahlen $[z_1;z_2]$ und $[z_3;z_4]$ heißen differenzengleich genau dann, wenn

$$z_1 + z_4 = z_3 + z_2$$

gilt.

(In Zeichen: $[z_1;z_2] \underset{D}{=} [z_3;z_4]$)

Der Leser möge nachweisen, daß eine Äquivalenzrelation in $R^* \times R^*$ vorliegt.

D4 (3.2.) Jede Klasse differenzengleicher geordneter Paare gebrochener Zahlen nennt man eine rationale Zahl.

Der Leser gebe Beispiele für rationale Zahlen an. Um zu Festlegungen über die Bezeichnung rationaler Zahlen zu kommen, geben wir die folgenden Hinweise.

Wenn für die Glieder z_1 und z_2 eines Repräsentanten einer rationalen Zahl $z_1 > z_2$ gilt, dann gibt es einen Repräsentanten $[z;0]$ mit $z = z_1 - z_2$ in dieser Klasse.

Diese rationalen Zahlen werden positiv genannt und durch $r = +z$ bezeichnet, wobei $z = z_1 - z_2$ ist.

Für alle rationalen Zahlen, bei denen $z_1 = z_2$ gilt, wird $r = 0$ als Zeichen vereinbart. Und falls $z_1 < z_2$ gilt, wird r eine negative Zahl genannt und durch $r = - z$ mit $z = z_2 - z_1$ bezeichnet.

Damit haben wir gezeigt, wie man von dem Bereich der natürlichen Zahlen ausgehend über die Menge R^* zu R gelangt. Wir haben anfangs darauf hingewiesen, daß auch der Weg

$$N - G - R$$

möglich ist. Dazu muß in der Ausgangsmenge $N \times N$ die Differenzengleichheit von geordneten Paaren natürlicher Zahlen als Äquivalenzrelation erklärt werden. Im Ergebnis des Abstraktionsprozesses gelangt man zum Begriff "ganze Zahl". Wird dann in $G \times (G \setminus \{0\})$ die Quotientengleichheit definiert, gelangt man zur Menge der rationalen Zahlen.

3.3. Bemerkungen zur Definition von Relationen und Operationen in R^* bzw. R

In diesem Abschnitt wollen wir an einigen Beispielen das Vorgehen beim Definieren von Relationen und Operationen zeigen. Im Hinblick auf unser Ausbildungsziel wird keine Vollständigkeit angestrebt. Wir erinnern daran, daß wir im mengentheoretischen Aufbau von N bei der Definition von Relationen und Operationen auf Beziehungen zwischen den Repräsentanten - also Mengen - bzw. Operationen mit den Repräsentanten zurückgegriffen haben. Entsprechend können die Relationen in R^* definiert werden, indem man zu den Repräsentanten übergeht. Da die Komponenten der Repräsentanten natürliche Zahlen sind, stehen uns alle in N definierten Relationen und Operationen zur Verfügung. Wir geben als Beispiel die Definition der Kleinerrelation in R^* an:

D1 (3.3.) Es sei $[\underline{a};\underline{b}]$ ein beliebiger Repräsentant der gebrochenen Zahl z_1 und $[\underline{c};\underline{d}]$ ein beliebiger Repräsentant der gebrochenen Zahl z_2. Die Zahl z_1 heißt kleiner als z_2 genau dann, wenn $a \cdot d < c \cdot b$ gilt.

Wir wissen, daß es bei Definitionen mit Hilfe von Repräsentanten erforderlich ist, die Repräsentantenunabhängigkeit nachzuweisen. Wir verzichten darauf, nehmen aber zur Kenntnis, daß diese Repräsentantenunabhängigkeit tatsächlich bewiesen werden kann. Ebenso wollen wir bei den nachfolgend zu gebenden Definitionen verfahren.

Satz 1 (3.3.) Die Kleinerrelation in der Menge der gebrochenen Zahlen ist eine irreflexive Ordnungsrelation.

Da die Kleinerrelation gebrochener Zahlen durch die Definition über die Repräsentanten auf die Kleinerrelation natürlicher Zahlen zurückgeführt wird, kann beim Beweis dieses Satzes auf entsprechende Eigenschaften der Relation in N zurückgegriffen werden. Auf eine Darstellung der Beweise verzichten wir.

Als Beispiel für eine Operation in R^* wollen wir die Addition definieren.

D2 (3.3.) Es seien z_1 und z_2 gebrochene Zahlen, wobei $[a;b] \in z_1$ und $[c;d] \in z_2$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ gelte.
Eine gebrochene Zahl z_3 heißt Summe von z_1 und z_2 genau dann, wenn $[a \cdot d + b \cdot c;\ b \cdot d]$ ein Repräsentant von z_3 ist.
(In Zeichen: $z_3 = z_1 + z_2$)

Ein Repräsentant von z_3 wird durch die Summe bzw. das Produkt natürlicher Zahlen bestimmt. Da zu jedem Paar natürlicher Zahlen eine Summe bzw. ein Produkt existiert, kann ein solcher Repräsentant von z_3 immer bestimmt werden.
Sobald auch die Eindeutigkeit der Summenbildung bewiesen ist, kann definiert werden:

D3 (3.3.) Wir nennen diejenige Abbildung von $N \times N$ in N, die allen geordneten Paaren gebrochener Zahlen deren Summe zuordnet, Addition in R^*.

Entsprechend können mit Hilfe von $[a;b] \in z_1$, $[c;d] \in z_2$ und $[a.b;\ b.d] \in z_1 \cdot z_2$ Produkt und Multiplikation in R^{*} definiert werden.

Um die Anwendung der Eigenschaften und Gesetze des Bereichs der natürlichen Zahlen zu demonstrieren, greifen wir aus der Theorie der gebrochenen Zahlen einen Satz heraus, den wir auch beweisen wollen.

Satz 2 (3.3.) Für alle gebrochenen Zahlen $z_1;\ z_2$ gilt:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

(Gesetz der Kommutativität der Addition in R^{*})

<u>Beweis:</u>

Voraussetzung: $z_1;\ z_2$ sind beliebige gebrochene Zahlen, wobei $[a;b] \in z_1$ und $[c;d] \in z_2$ sei.

Behauptung: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Beweis: Nach der Definition der Summe gebrochener Zahlen ist

$[a\ d + c\ b;\ b\ d] \in z_1 + z_2$

und

$[c\ b + d\ a;\ d\ b] \in z_2 + z_1$.

Nach dem Gesetz der Kommutativität der Addition und der Multiplikation natürlicher Zahlen gilt

$[a\ d + c\ b;\ b\ d] = [c\ b + a\ d;\ d\ b]$.

Also ist

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Nachdem wir eine Auswahl von Definitionen und Sätzen des Aufbaus der Menge R^* der gebrochenen Zahlen dargestellt haben, kommen wir auf die im Abschnitt 3.1. gestellten Forderungen zurück. Die von uns genannten Definitionen und der von uns bewiesene Satz der Kommutativität der Addition in R^* zeigen, wie die Forderung 2. erfüllt werden kann. Zur Forderung 3. zeigen wir am Beispiel der gebrochenen Zahlen $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{1}$ und $\frac{5}{1}$, daß sie sich bezüglich der Kleinerrelation und der Addition analog verhalten zu den natürlichen Zahlen 2, 3 und 5.

$\frac{2}{1} < \frac{3}{1}$, denn $2 \cdot 1 < 3 \cdot 1$ (nach D1 (3.3.)), gilt analog zu $2 < 3$.

$\frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1}$, denn $[2 \cdot 1 + 3 \cdot 1;\ 1 \cdot 1] =_Q [5;\ 1]$, gilt analog zu $2 + 3 = 5$.

Bezüglich der Forderung 1. betrachten wir die Gleichung $z_1 \cdot x = z_3$ mit $[a;\ b] \in z_1$ und $[c;\ d] \in z_3$. Zur Untersuchung der Umkehrbarkeit der Multiplikation muß gezeigt werden, daß es eine gebrochene Zahl x gibt, die diese Gleichung erfüllt. Die durch $[b \cdot c;\ a \cdot d]$ repräsentierte gebrochene Zahl z_2 ist eine Lösung der Gleichung, denn mit $[a;\ b] \in z_1$ und $[b \cdot c;\ a \cdot d] \in z_2$ gilt $[a \cdot b \cdot c;\ a \cdot b \cdot d] =_Q [c;\ d]$ und ist damit ein Repräsentant von z_3. Wir verzichten auf den Beweis der unbeschränkten und eindeutigen Lösbarkeit solcher Gleichungen. Bei seiner Durchführung wäre zu beachten, daß b, d und z_1 nicht Null sein dürfen.

Zum Abschluß geben wir die Definition der Summe zweier rationaler Zahlen an, um an einem Beispiel zu zeigen, daß die Operationen in R mit Hilfe der in R^* definierten Operationen erklärt werden können.

D4 (3.3.) Es seien r_1 und r_2 rationale Zahlen, mit

$[z_1; z_2] \in r_1$ und $[z_3; z_4] \in r_2$.

Eine rationale Zahl r_3 heißt Summe von r_1 und r_2 genau dann, wenn $[z_1 + z_3; z_2 + z_4]$ ein Repräsentant von r_3 ist.

(In Zeichen: $r_3 = r_1 + r_2$)

Entsprechend der am Anfang des Abschnitts gegebenen Zielstellung soll damit der Ausblick auf die Zahlenbereiche R^* und R abgeschlossen werden.

4. Bezeichnungssysteme für natürliche Zahlen

4.1. Grundforderungen an Bezeichnungssysteme

In den vorangehenden Abschnitten haben wir durch Abstraktion den Begriff natürliche Zahl gebildet. Für einige Elemente der Menge der natürlichen Zahlen wurden Zeichen vereinbart. Dieses Vorgehen entsprach der in der Logik dargestellten Objekt-Abbild-Zeichen-Relation. Bevor wir auf spezielle Zahlendarstellungen eingehen, soll noch einmal herausgestellt werden, daß es notwendig ist, deutlich zwischen Zahl und Ziffer zu unterscheiden. "Während die Zahlen Objekte begrifflicher Natur sind, sind die zugehörigen Zahlreichen oder Ziffern letztlich geometrische Figuren einer bestimmten Gestalt".[1]
Von der Zahl 5 kann man sagen, daß sie der Nachfolger der Zahl 4 ist oder daß die Zahl 5 kleiner als die Zahl 7 ist, nicht aber von den Ziffern 4, 5 bzw. 7. An die Tafel geschrieben werden können dagegen nur die Ziffern 4, 5, 7 und Zeichen für die betreffenden Relationen.

Mit der Entwicklung des Zahlbegriffs entstanden verschiedene Systeme zur Bezeichnung der Zahlen. Wir wollen auf einige dieser Systeme näher eingehen und das Wesen des uns vertrauten dekadischen Positionssystems darstellen. Für weitere interessante Fragen, z. B. der historischen Entwicklung und der vielen Darstellungsweisen, die sich in verschiedenen Kulturkreisen herausgebildet haben, verweisen wir auf die vielfältige Literatur. Beim Aufbau des Bereichs der natürlichen Zahlen kamen wir zu der Erkenntnis, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt.

---

1) Asser, G. "Grundbegriffe der Mathematik I"
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978

Nun ist es aber unmöglich, immer neue Zahlzeichen bzw. Zahlwörter zu finden. So trat bald in allen Kulturkreisen das Problem auf, neue Zahlzeichen durch Zusammensetzungen bereits vorhandener zu gewinnen. Dabei bewährten sich in der gesellschaftlichen Praxis Bezeichnungssysteme, die garantieren, daß

- die Zeichen sich schnell und bequem schreiben lassen,
- auch Zeichen für beliebig große Zahlen geschrieben werden können,
- möglichst mühelos gerechnet werden kann.

Diesen Forderungen entsprechen die heute gebräuchlichen Positionssysteme.

4.2. Nicht-positionelle Bezeichnungssysteme

Als Beispiel eines nicht-positionellen Bezeichnungssystems sei die sehr einfache Darstellung durch Zählstriche, die hintereinander gesetzt werden, genannt. Der Darstellung /////// entspricht die Zahl 7. Das wird für größere Zahlen sehr bald unübersichtlich. Es wurden deshalb Bündelungen vorgenommen (z. B. von je 5 Strichen durch einen Querstrich).
~~////~~ // stellt die Zahl 7 dar. Durch Addition der durch die Bündel und die einzelnen Striche bezeichneten Zahlen ergibt sich die dargestellte Zahl. Da die so bezeichneten Zahlen jeweils additiv verknüpft werden, spricht man von einem Additionssystem. Als weiteres Additionssystem soll das römische Zahlensystem genannt werden. An alten Gebäuden findet man zuweilen römische Ziffern. So bezeichnet MCDXIX die Zahl 1419. Aber auch heute werden diese Zahlzeichen verwendet, z. B. zur Kennzeichnung herausragender gesellschaftlicher Ereignisse wie X. Parteitag der SED, VIII. Pädagogischer Kongreß usw.
Die Römer verwendeten die folgenden Zahlzeichen:

Zeichen	M	D	C	L	X	V	I
bezeichnete Zahl	1000	500	100	50	10	5	1

Die Zeichen M, C, X und I sind die Grundzeichen; D, L, V sind Hilfszeichen.

Bei der Darstellung mit Hilfe der gegebenen Zeichen gelten die folgenden Regeln:

1. Gleiche Zeichen haben unabhängig von ihrer Stellung in einer Zeichenreihe stets die gleiche Bedeutung.

2. Stehen gleiche Zeichen nebeneinander oder Zeichen größerer Zahlen unmittelbar links von Zeichen kleinerer Zahlen, so sind die Zahlen zu addieren.

3. Steht ein Zeichen einer kleineren Zahl unmittelbar links von einem Zeichen für eine größere Zahl, so ist die kleinere Zahl von der größeren zu subtrahieren. Es ist nicht gestattet, mehrere Grundzeichen oder ein Hilfszeichen voranzustellen.

Beispiel 1 (4.1.) M C M L X X X I - Zahlzeichen für die Zahl 1981

$$1981 = 1000 + (1000 - 100) + 50 + 10 + 10 + 10 + 1$$

M C M L X I X - Zahlzeichen für die Zahl 1969

$$1969 = 1000 + (1000 - 100) + 50 + 10 + (10 - 1)$$

C M L - Zahlzeichen für die Zahl 950

$$950 = (1000 - 100) + 50$$

4.3. Positionssysteme

Uns ist die Darstellung der natürlichen Zahlen im dekadischen bzw. dezimalen Positionssystem vertraut. In diesem System läßt sich jede beliebig große Zahl eindeutig darstellen. Für das Rechnen mit natürlichen Zahlen, vor allem mit Hilfe der schriftlichen Verfahren, hat sich diese Darstellungsform als die günstigste erwiesen. Um bei unseren folgenden Ausführungen deutlich zwischen Zahl und Zeichen der Zahl unterscheiden zu können, wollen wir (in Anlehnung an G. Asser[1]) ein drucktechnisches Mittel anwenden:

0; 1; 2; ... 9 soll bedeuten, daß wir von Zahlen,
$\underline{0}$; $\underline{1}$; $\underline{2}$; ... $\underline{9}$, daß wir von Ziffern sprechen.

Zur Darstellung im dekadischen Positionssystem werden den Zahlen 0 bis 9 zunächst Ziffern zugeordnet, nämlich die Zeichen $\underline{0}$; $\underline{1}$; $\underline{2}$; $\underline{3}$; $\underline{4}$; $\underline{5}$; $\underline{6}$; $\underline{7}$; $\underline{8}$; $\underline{9}$; diese Zeichen sind die sogenannten arabischen Ziffern. Die Anzahl der Zeichen, die auch Grundziffern genannt werden, ist die Basis 10 des Systems.
Mit diesen 10 Ziffern als Grundziffern kann jede beliebige natürliche Zahl dargestellt werden. Man benutzt dazu eine Zusammensetzung der Zahlen mit Hilfe der Addition und Multiplikation. Jede natürliche Zahl läßt sich in eine Summe zerlegen, bei der die Summanden Vielfache von Zehnerpotenzen sind.

Beispiel 1 (4.3.)

a) $3425 = 3.1000 + 4.100 + 2.10 + 5.1$
$ = 3.10^3 + 4.10^2 + 2.10^1 + 5.10^0$

b) $71502 = 7.10\,000 + 1.1000 + 5.100 + 0.10 + 2.1$
$ = 7.10^4 + 1.10^3 + 5.10^2 + 0.10^1 + 2.10^0$

---

[1] G. Asser; A. a. O.

Als Faktoren der Zehnerpotenzen treten dabei nur die Zahlen 0 bis 9 auf; also die Zahlen, die durch die Grundziffern dargestellt werden. Zur Darstellung einer Zahl vereinbart man jetzt, die Ziffernfolge dieser Faktoren vollständig so nebeneinander zu schreiben, daß am weitesten links die Ziffer des Faktors der höchsten Zehnerpotenz steht und dann jeweils die Ziffer der Faktoren der nächstkleineren Zehnerpotenzen folgen. Also

$\underline{3}\ \underline{4}\ \underline{2}\ \underline{5}$ ist die Ziffer der Zahl 3425,

$\underline{7}\ \underline{1}\ \underline{5}\ \underline{0}\ \underline{2}$ ist die Ziffer von 71502.

Demnach kann jede natürliche Zahl durch eine endliche Folge der Grundziffern dargestellt werden, wobei die Stelle (Position) einer Ziffer,an der sie in der Zifferndarstellung auftritt, Bestandteil ihrer Bedeutung ist. Die Eindeutigkeit der Darstellung wird durch die Kenntnis der Basis und die Form und Stellung (Position) der Ziffern in der Darstellung gesichert. Im dekadischen Positionssystem bedeutet die Darstellung einer natürlichen Zahl n durch

$$\underline{a_k}\quad \underline{a_{k-1}}\quad \underline{a_{k-2}}\quad \cdots\quad \underline{a_3}\quad \underline{a_2}\quad \underline{a_1}\quad \underline{a_0}$$

das Zeichen von

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

wobei

$$0 \leq a_i \leq 9 \text{ mit } i = 0; \ldots; k;\ a_k \neq 0 \text{ und } k \geq 0 \text{ gilt.}$$

Wir vereinbaren die Schreibweise

$$n \triangleq_{10} \underline{a_k}\quad \underline{a_{k-1}}\quad \cdots\quad \underline{a_1}\quad \underline{a_0}$$

(Lies: Die natürliche Zahl n wird im dekadischen Positionssystem durch die Ziffernfolge

$$\underline{a_k}\quad \underline{a_{k-1}}\quad \underline{a_{k-2}}\quad \cdots\quad \underline{a_1}\quad a_0$$

bezeichnet.)

Ebenso wie die Zahl 10 kann jede natürliche Zahl $m \geqq 2$ als Basis für ein Positionssystem gewählt werden. Grundlage dafür ist der folgende Satz.

Satz 1 (4.3.) Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich bei gegebener Basis $m \geqq 2$ in der Form

$$n = a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} + \ldots + a_1 m + a_0$$

darstellen, wobei $k \geqq 0$,

$a_k \neq 0$ gilt und die a_i $(i = 1;\ 2;\ \ldots\ k)$

die Werte 0; 1; ...; $(m - 1)$ annehmen können. Die Koeffizienten a_i und der Exponent k sind durch n und die gegebene Basis m eindeutig bestimmt.

Auf eine Beweisdarstellung verzichten wir.
Es ergibt sich für n die Darstellung

$$n \mathrel{\hat{=}}_m \underline{a_k}\ \ \underline{a_{k-1}}\ \ \ldots\ \ \underline{a_1}\ \ \underline{a_0}$$

mit $0 \leqq a_i \leqq m - 1$ und man spricht von einer Darstellung im m-adischen Positionssystem. Im System mit der Basis 2, das auch Dualsystem genannt wird, benötigt man also für die Darstellung einer Zahl nur zwei Grundziffern, etwa 0 und 1.

Beispiel 2 (4.3.)

a) Es ist die Zahl $n = 135$ im Dualsystem darzustellen. Die höchste Potenz von $m = 2$, für die $2^k \leqq 135$ gilt, ist $2^7 = 128$.
Wir führen die Division mit Rest von 135 und 2^7 durch und erhalten
$135 + 1.2^7 + 7$. Nun muß weiterhin auf die gleiche Art der Rest 7 durch die höchste Potenz von 2, für die gilt $2^k \leqq 7$, dividiert werden. Wir erhalten $7 = 1.2^2 + 3$ und weiter $3 = 1.2^1 + 1$ und $1 = 1.2^0$. Es folgt:
$135 = 1.2^7+0.2^6+0.2^5+0.2^4+1.2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$
$135 \mathrel{\hat{=}}_2 \underline{1}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{1}$

b) $713 = 1.2^9+0.2^8+1.2^7+1.2^6+0.2^5+0.2^4+1.2^3+0.2^2+0.2^1+1.2^0$

$713 \mathrel{\hat{=}}_2 \underline{1}\,\underline{0}\,\underline{1}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{1}\,\underline{0}\,\underline{0}\,\underline{1}$

Das Dualsystem hat besondere Bedeutung in der Rechentechnik und elektronischen Datenverarbeitung, weil seine zwei Grundziffern - meistens verwendet man 0 und L - sich technisch leicht realisieren lassen, z. B. durch Fließen oder Nichtfließen eines Stromes in einem bestimmten Stromkreis. Jedoch ergibt sich der Nachteil, daß die Darstelllng natürlicher Zahlen mit Hilfe der beiden Ziffern 0 und 1 sehr lang - im Durchschnitt etwa dreimal so lang wie im Dezimalsystem - werden kann. Für das Positionssystem mit der Basis 8 werden die Grundziffern $\underline{0}$; $\underline{1}$; ...; $\underline{7}$ benötigt. Wird die Basis 12 verwendet, müssen Zeichen für die Zahlen 10 und 11 eingeführt werden, etwa $10 \mathrel{\hat{=}}_{12} \underline{z}$ und $11 \mathrel{\hat{=}}_{12} \underline{e}$, die in diesem System ebenfalls Grundziffern sind.

Beispiel 3 (4.3.)

$137 \mathrel{\hat{=}}_8 \underline{2}\,\underline{1}\,\underline{1}$, denn

$137 = 2.8^2 + 1.8^1 + 1.8^0$

$13242 \mathrel{\hat{=}}_{12} \underline{7}\,\underline{7}\,\underline{e}\,\underline{6}$, denn

$13242 = 7.12^3 + 7.12^2 + 11.12^1 + 6.12^0$.

Die Darstellung von Zahlen in Positionssystemen ist eine Grundlage für die schriftlichen Rechenverfahren. Die Gleichung

$n = a_k\ m^k + a_k\ m^{k-1} + \ldots + a_1\ m^1 + a_0$,

die Gesetze der Assoziativität und der Kommutativität der Addition bzw. Multiplikation und der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition sind weitere Grundlagen. An je einem Beispiel der Addition und der Multiplikation soll die Bedeutung der Positionsschreibweise für die schriftlichen Verfahren gezeigt werden (vgl. Methodik des Mathematikunterrichts, Teil 2, S. 161 ff.)

Es ist die Summe von 531 und 427 zu bestimmen.

1. $531 = 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

$427 = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

(entsprechend der Darstellung im dekadischen Positionssystem)

2. $531 + 427 = 5.10^2+3.10^1+1.10^0+4.10^2+2.10^1+7.10^0$

3. $531 + 427 = 5.10^2+4.10^2+3.10^1+2.10^1+1.10^0+7.10^0$

(Gesetz der Kommutativität der Addition in N)

4. $531 + 427 = (5.10^2+4.10^2)+(3.10^1+2.10^1)+(1.10^0+7.10^0)$

(Gesetz der Assoziativität der Addition in N)

5.

5. $531 + 427 = (5+4) \cdot 10^2 + (3+2) \cdot 10^1 + (1+7) \cdot 10^0$

(Gesetz der Distributivität der Multiplikation bezüglich der Addition in N)

6. $531 + 427 = 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

Also folgt auf Grund der Darstellung im dekadischen Positionssystem

7. 531 + 427 = 958.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Lösungsvorschrift:

Man schreibt die Zahlen so, daß die Faktoren gleicher Zehnerpotenzen untereinander stehen und addiert diese Faktoren von rechts beginnend. Für Aufgaben, bei denen ein Übertrag erfolgen muß, ist die Erkenntnis wichtig, daß $10 \cdot 10^n = 10^{n+1}$ ist. Dieser Sachverhalt ist im Lehrbuch der Klasse 3 folgendermaßen formuliert: Das 10-fache einer Zehnerpotenz ergibt die nächstgrößere Zehnerpotenz.

Beispiel

Beispiel 4 (4.3.)

$$\begin{array}{r} 531 \\ +\ 397 \\ \hline 928 \\ \hline\hline \end{array}$$

Der Koeffizient von 10^2 ergibt sich als

$9 + 3 = 12$

$12.10^2 = (10+2).10^2 = 10.10^2 + 2.10^2 = 1.10^3 + 2.10^2$

Es entsteht also der Übertrag 1, der an der nächsten Stelle addiert werden muß.

Wir stellen nun ein Beispiel für das schriftliche Verfahren der Multiplikation dar.

Wenn ein mehrstelliger Faktor mit einer einstelligen Zahl zu multiplizieren ist, ergibt sich das Verfahren auf folgender Grundlage:

$$\begin{aligned} 423 \cdot 2 &= (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0) \cdot 2 \\ &= 4 \cdot 10^2 \cdot 2 + 2 \cdot 10^1 \cdot 2 + 3 \cdot 10^0 \cdot 2 \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 2 \cdot 10^0 \\ &= 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \\ &= 846 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Regel, daß die Koeffizienten der Zehnerpotenzen mit der einstelligen Zahl multipliziert werden. Bei der Multiplikation mehrstelliger Faktoren mit mehrstelligen Faktoren wird folgende Zerlegung vorgenommen:

$$\begin{aligned} 584 \cdot 76 = 584\ (70+6) &= 584 \cdot 70 + 584 \cdot 6 \\ &= 584 \cdot 7 \cdot 10 + 584 \cdot 6 \end{aligned}$$

Dabei werden zwei Aufgaben der Multiplikation nach dem oben erklärten Verfahren gelöst und die Zwischenprodukte addiert.

$$\begin{array}{r} 584 \cdot 70 \\ \hline 40880 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 584 \cdot 6 \\ \hline 3504 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40\ 880 \\ +\ \ 3\ 504 \\ \hline 44\ 384 \\ \hline\hline \end{array}$$

In rationaller Formwerden diese Schritte zusammengefaßt und in der gebräuchlichen Weise geschrieben:

$$\begin{array}{r} \underline{584 \cdot 76} \\ 4088 \\ \underline{3504} \\ 44384 \\ ======= \end{array}$$

Durch die Ausnutzung der auf dem dekadischen Positionssystem beruhenden Ziffernschreibweise ermöglicht die Anwendung der schriftlichen Verfahren ein rationelles, sicheres und schnelles Rechnen. Von besonderer Bedeutung für die Schüler der unteren Klassen ist dabei Sicherheit im Lösen, Übertragen und Anwenden der Grundaufgaben. Unter Grundaufgaben der Addition versteht man alle Additionsaufgaben in N mit genau zwei einstelligen Summanden. Entsprechend sind Grundaufgaben der Multiplikation alle Multiplikationsaufgaben in N mit genau zwei einstelligen Faktoren. Auf die schriftlichen Verfahren der Subtraktion und der Division soll nicht eingegangen werden.

Mit den folgenden Beispielen geben wir einen Einblick in die Anwendung der schriftlichen Verfahren der Addition und der Multiplikation natürlicher Zahlen, die im Positionssystem mit der Basis 2 bzw. 8 dargestellt sind. Dabei werden wir feststellen, daß die für das dekadische Positionssystem angegebenen Lösungsschritte übertragbar sind, da sie sich aus der Anwendung arithmetischer Gesetze ergeben. Je nach dem gewählten Positionssystem ändern sich aber die für die Lösung der Aufgaben notwendigen Grundaufgaben. Wir geben zunächst in Form von Tabellen die Grundaufgaben der Addition und Multiplikation im Dualsystem bzw. im 8-adischen Positionssystem an.

Grundaufgaben im Dualsystem:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Grundaufgaben im 8-adischen Positionssystem:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Für jedes dieser Positionssysteme geben wir nun jeweils eine nach schriftlichem Verfahren gelöste Aufgabe der Addition und der Multiplikation an.

Beispiel 5 (4.3.)

a)
```
   10110
+   1011
  100001
  ======
```

b)
```
10110 · 1011
  101100
    10110
     10110
  11110010
============
```

Beispiel 6 (4.3.)

a)
```
   3742
+  5631
  11573
  =====
```

b)
```
3742 · 5631
 23552
  27514
   13646
     3742
 26666022
============
```

In Anlehnung an die Ausführungen in den "Lehrtexten zur Methodik des Mathematikunterrichts in den unteren Klassen" einige erläuternde Darstellungen bezüglich der auszuführenden Rechenschritte. Wie in der angegebenen Literatur unterstreichen wir die hinzuschreibenden Teilergebnisse einmal und die zu berücksichtigenden Überträge zweimal.

Lösungsschritte zu Aufgabe 5 (4.3.) a):

$$\begin{aligned}
&1 + 0 = \underline{1}\\
&1 + 1 = 10 = \underline{\underline{1}}0 + \underline{0}\\
\underline{\underline{1}} + {}&0 + 1 = 10 = \underline{\underline{1}}0 + \underline{0}\\
\underline{\underline{1}} + {}&1 + 0 = 10 = \underline{\underline{1}}0 + \underline{0}\\
\underline{\underline{1}} + {}&1 \phantom{{}+0} = \underline{10}
\end{aligned}$$

Lösungsschritte zur ersten Teilmultiplikation des Beispiels 6 (4.3.) b):

$3742 \cdot 5$

$5 \cdot 2 = 12$		$12 = \underline{\underline{1}}0 + 2$
$5 \cdot 4 = 24$	$24 + \underline{\underline{1}} = 25$	$25 = \underline{\underline{2}}0 + \underline{5}$
$5 \cdot 7 = 43$	$43 + \underline{\underline{2}} = 45$	$45 = \underline{\underline{4}}0 + \underline{5}$
$5 \cdot 3 = 17$	$17 + \underline{\underline{4}} = \underline{23}$	

Diese Beispiele sollten die Bedeutung der Darstellung der natürlichen Zahlen in Positionssystemen verdeutlichen. Für den Unterricht in den unteren Klassen ist das dekadische Positionssystem und die darauf beruhende Ziffernschreibweise Voraussetzung für das Verständnis der schriftlichen Verfahren der Grundrechenoperationen.

5. Zum Rechnen mit Näherungswerten

5.1. Zum Begriff "Näherungswert"

Bei vielen praktischen Problemen sind der Genauigkeit der Zahlen- und Größenangaben Grenzen gesetzt. Messungen zum Beispiel lassen sich nie absolut genau durchführen. Die Genauigkeit eines Meßwertes hängt von der Präzision des verwendeten Meßinstrumentes und von den Fertigkeiten der messenden Personen ab. Selbst feinste Meßgeräte, wie beispielsweise elektronische Instrumente für Längen- und Zeitmessungen, liefern bis zu einem gewissen Grade fehlerbehaftete Meßergebnisse. Wird in einer Rechnung anstelle von irrationalen Zahlen wie π, $\sqrt{2}$, lg 5 usw. mit endlichen Dezimalbrüchen gerechnet, erhält man keine genauen Ergebnisse. Auch die Angabe, daß 200 000 Menschen an einer Demonstration teilgenommen haben, wird nie heißen, daß es genau 200 000 gewesen sind, denn ein Zählen ist praktisch unmöglich. Man kann in den genannten und vielen anderen Fällen nur mit Näherungswerten arbeiten. Wir werden wesentliche Gemeinsamkeiten aller dieser aus der gesellschaftlichen und mathematischen Praxis stammenden Problemstellungen abstrahieren, die den Begriff "Näherungswert" charakterisieren, ohne ihn jedoch zu definieren:

1. Jeder Näherungswert einer Zahl ist wieder eine Zahl.

2. Zu einer gegebenen Zahl kann es beliebig viele Näherungswerte geben, d. h. die Zuordnung von Näherungswerten zu einer Zahl ist nicht eindeutig.

3. Jeder Näherungswert einer Zahl weicht im Regelfall um einen gewissen Fehler von dieser Zahl ab.

4. Das Ersetzen einer Zahl durch einen Näherungswert erfolgt, wenn die Angabe eines genauen Wertes nicht möglich ist oder mit dem Ziel, durchzuführende Operationen oder Verknüpfungen zu vereinfachen, den Fehler dabei aber hinreichend klein zu halten.

Diese vier Aussagen bezogen sich nur auf Zahlen. In einem der einleitenden Beispiele traten aber auch Größen auf. In der Praxis können wir davon ausgehen, daß Größen stets durch Maßzahlen bezüglich vorgegebener Maßeinheiten dargestellt werden können. Näherungswerte von Größen können dadurch stets auf Näherungswerte für Zahlen zurückgeführt werden. Deshalb wollen wir, abgesehen von erforderlichen Besonderheiten, Näherungswerte für Zahlen und Größen nicht unterscheiden. Um deutlich zu machen, daß es sich bei bestimmten Angaben von Zahlen oder Größen um Näherungswerte handelt, wird das Zeichen " $\approx$ " (gelesen: angenähert gleich) verwendet .

Ohne den Begriff "Näherungswert" definiert zu haben, werden wir, den Bedürfnissen der Praxis entsprechend, mit ihm arbeiten müssen. Zu den dabei auftretenden Problemen gehört die Frage nach dem Unterschied von genauem Wert und Näherungswert, ihre Abweichung voneinander, gleichsam der "Fehler des Näherungswertes gegenüber dem genauen Wert". Es wird weiterhin zu klären sein, wie man mit Näherungswerten operiert, wie sich ihre "Genauigkeit" - vielleicht besser "Ungenauigkeit" - beim Operieren auswirkt.

Um den Bedürfnissen der Praxis gerecht zu werden, wird bereits in den unteren Klassen begonnen, mit Näherungswerten zu arbeiten. Es sollen im folgenden zunächst die Verfahren zur Bestimmung von Näherungswerten, die in den unteren Klassen von Bedeutung sind, geklärt und einige Aussagen zur Fehlerrechnung gemacht werden.

5.2. Verfahren zur Bestimmung von Näherungswerten

Als erstes Verfahren soll das Bestimmen von Näherungswerten durch das Runden betrachtet werden.

D1 (5.2.) Das Zuordnen eines Näherungswertes zu einer Zahl nach festgelegten Regeln heißt Runden.

In der POS verwendet man die unter TGL 1333 gegebenen Regeln. Die in der zweiten der genannten Eigenschaften negierte Eindeutigkeit entspricht der Möglichkeit, auf unterschiedlich vorgegebene Zehnerpotenzen zu runden. Es wird zunächst festgelegt, auf Vielfache welcher Zehnerpotenz zu runden ist. Zur Kennzeichnung wird vereinbart, einen Pfeil über das Zeichen des entsprechenden Vielfachen zu setzen. Zum Beispiel bedeutet 1 2 $\overset{\downarrow}{3}$ 1, daß auf Vielfache von 10^1 und 3 $\overset{\downarrow}{3}$ 6 5 1, daß auf Vielfache von 10^3 zu runden ist.

Gerundet wird nach folgenden Regeln:

- Folgt auf das (durch $\downarrow$) gekennzeichnete Vielfache einer Zehnerpotenz eine der Ziffern 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird abgerundet, d. h. die gekennzeichnete Ziffer wird beibehalten, und alle folgenden Ziffern werden durch Nullen ersetzt. Die voranstehende Ziffernfolge bleibt unverändert.

- Folgt auf das (durch $\downarrow$) gekennzeichnete Vielfache einer Zehnerpotenz eine der Ziffern 6, 7, 8 oder 9, so wird aufgerundet. Das gekennzeichnete Vielfache wird durch das nachfolgende Vielfache und alle folgenden Ziffern durch Nullen ersetzt. Die voranstehende Ziffernfolge kann sich dabei verändern.

- Folgt auf das (durch $\downarrow$) gekennzeichnete Vielfache einer Zehnerpotenz die Ziffer 5 und folgen weitere von Null verschiedene Ziffern, so wird aufgerundet.

- Folgt auf das (durch $\downarrow$) gekennzeichnete Vielfache einer Zehnerpotenz die Ziffer 5 und folgen keine weiteren Ziffern oder nur Nullen, so wird die Geradezahlregel angewendet, d. h. es wird abgerundet, wenn das gekennzeichnete Vielfache eine gerade Zahl ist und aufgerundet, wenn es eine ungerade Zahl ist.

Beispiel 1 (5.2.)

$$3\overset{\downarrow}{6}78 \approx 3700$$

$$3\overset{\downarrow}{5}275 \approx 35000$$

$$87\overset{\downarrow}{6}523 \approx 877000$$

$$87\overset{\downarrow}{7}500 \approx 878000$$

$$87\overset{\downarrow}{6}500 \approx 876000$$

$$21\overset{\downarrow}{9}85 \approx 22000$$

Diese Rundungsregeln gelten für Wissenschaft und Technik. Es sei erwähnt, daß in einigen praktischen Fällen anders verfahren wird, z. B. bei Tarifberechnungen von Verkehrsmitteln, im Geld- und Finanzwesen.

Um Näherungswerte für die Ergebnisse von Rechnungen zu erhalten, lernen wir zwei weitere Verfahren kennen, die Überschlagsbildung und das Abschätzen.

D2 (5.2.) Das Zuordnen eines Näherungswertes zu einem Termwert, dessen Ermittlung das Ausführen mindestens einer Operation verlangt, heißt Überschlag.

Beispiel 2 (5.2.)

(Die Aufgaben sind den Lehrbüchern für Mathematik der Klassen 3 und 4 entnommen.)

3 2 3 · 3	Überschlag: $323 \cdot 3$	$\approx 300 \cdot 3$
	x	≈ 900
9 3 7 4 : 29	Überschlag: $9374:29$	$\approx 9000:30$
	x	≈ 300
3 0 6 6 : 42	Überschlag: $3066:42$	$\approx 2800:40$
	x	≈ 70

Die Näherungswerte beim Überschlag werden so gewählt, daß man bequem und sicher rechnen und in der Regel die mündlichen Verfahren zur Lösung nutzen kann. Dabei müssen die Näherungswerte nicht durch Runden entstanden sein, insbesondere bei Divisionsaufgaben führen gerundete Zahlen oftmals nicht zu vereinfachten Aufgaben.

D3 (5.2.) Das Zuordnen von zwei Näherungswerten x_1, x_2 zu einer Zahl x, so daß gilt $x_1 \leqq x \leqq x_2$ heißt Abschätzen. x_1 und x_2 heißen untere bzw. obere Schranke.

Beispiel 3 (5.2.)

$$73\,000 < 73\,478 < 74\,000$$
$$3\,800 < 3\,822 < 3\,900$$

Abschätzen ist oft mit Überschlagen verbunden. Häufig gelangt man nämlich durch zwei geeignete Überschläge zur Abschätzung eines Operationsergebnisses. Durch geeignetes Ersetzen der Zahlen durch kleinere oder größere Zahlen ermittelt man eine untere und eine obere Schranke für dieses Ergebnis.

Beispiel 4 (5.2.)

$$50 < \sqrt{3450} < 60$$
$$500 \cdot 7 < 546 \cdot 7 < 550 \cdot 7$$
$$400 < \frac{5380 \cdot 23}{247} < 900$$

Die folgenden zwei Verfahren gelten für das Bestimmen von Näherungswerten für Größen. Wir teilen dem Leser mit, daß auch jede Größe Ergebnis eines Abstraktionsprozesses ist, so ist z. B. jede Streckenlänge eine Klasse zueinander kongruenter Strecken, und jede Strecke repräsentiert genau eine Streckenlänge. Das Messen vollzieht sich durch Ermitteln, wie oft ein Repräsentant einer als Einheitsgröße gewählten Größe in einem Repräsentanten der zu messenden Größe enthalten ist. Diese "Anzahl" ist die Maßzahl der zu messenden Größe bezüglich der verwendeten Maßeinheit. Für das Anwenden der Mathematik innerhalb der Naturwissenschaften und der Technik können wir Messen wie folgt definieren:

D4 (5.2.) Das Zuordnen von Näherungswerten zu einer Größe unter Verwendung eines auf eine bestimme Einheit bezogenen Meßinstrumentes heißt Messen.

Die ständige Auseinandersetzung des Menschen mit seiner Umwelt verlangt Fertigkeiten bei der angenäherten quantitativen Bestimmung von Größen ohne Benutzung von Meßinstrumenten.

D5 (5.2.) Das Zuordnen von Näherungswerten zu einer Größe ohne Verwenden von Meßinstrumenten durch Vergleich mit einer bekannten Größe heißt Schätzen.

Um schätzen zu können, muß man Vorstellungen über bestimmte Repräsentanten einer Größe besitzen (z. B. über eine Strecke, deren Länge 100 m beträgt, oder einen Gegenstand der Masse 1 kg).

5.3. Einige Begriffe der Fehlerrechung

Näherungswerte sind fehlerbehaftete Zahlen. Daraus entsteht in der mathematischen Praxis die Notwendigkeit, mit fehlerbehafteten Zahlen zu operieren. Demgemäß werden wir etwas über den Begriff "Fehler eines Näherungswertes" und die Auswirkungen von Fehlern der zu verknüpfenden Zahlen auf das Rechenergebnis sagen. Dem Leser wird klar sein, daß der Fehler eines Faktors bei der Multiplikation derart vervielfacht werden kann, daß der Fehler des Produkts wesentlich größer ist als der des Faktors. Bei der Addition zweier Näherungswerte kann der Fehler der Summe größer werden, als es die Fehler der Summanden waren. Solche "Fortpflanzung" von Fehlern ist zwar unvermeidlich, aber gesetzmäßig zu erfassen. Eine spezielle Disziplin der Mathematik, die Fehlerrechnung, untersucht u. a. diese Gesetze der Fehlerauswirkung auf Operationsergebnisse. Die Fehlerrechnung in der Mathematik hat also nichts zu tun mit Fehlern etwa auf Grund von Flüchtigkeiten, Nichtbeachten von Gesetzen oder ungültigen Schlüssen. Ihre Beherrschung läßt in Verbindung mit der seitens der Praxis an die Ergebnisse gestellten Genauigkeitsforderungen Schlüsse zu über anzuwendende Meßmethoden und zulässige Fehler von Ausgangswerten. Wir wollen in diesem Abschnitt mit einigen Fehlerarten bekanntmachen und darüber hinaus dem interessierten Leser aufzeigen, wie man mit Hilfe der Kenntnis dieser Fehlerarten Schlüsse über die Fehler von Ergebnissen der vier Grundrechenoperationen bei Verwendung von Näherungswerten ziehen kann.

Der Fehler eines Näherungswertes a einer Zahl x kann durch die Differenz $a - x$ bzw. $x - a$ erfaßt werden.

D1 (5.3.) Der absolute Fehler ε eines Näherungswertes a einer Zahl x ist die Differenz $\varepsilon = a - x$.

Ferner bezeichnet man den Betrag des absoluten Fehlers $/a - x/$ mit dem Symbol Δa.

Solange wir unsere Betrachtungen auf den Bereich der natürlichen Zahlen beschränken, in dem die Differenz a - x also nicht stets existiert, können wir nur definieren:

D1 (5.3.) Der absolute Fehler ε eines Näherungswertes a einer Zahl x ist die Differenz $\varepsilon = a - x$ oder $\varepsilon = x - a$.

Ebenso läßt sich der Fehler eines Näherungswertes durch eine Quotientenbildung erfassen.

D2 (5.3.) Der relative Fehler δ eines Näherungswertes a einer Zahl x ist der Quotient $\delta = \frac{a - x}{x}$

Dem Leser wird bewußt sein, daß der Quotient (a - x) : x in N für den praxisbedeutsamen Fall, daß die Differenz a - x kleiner als x ist, nicht existiert. Deshalb wollen wir Beispiele zum relativen Fehler stets aus geeigneten Zahlenbereichen wählen. Es sei darauf hingewiesen, daß der relative Fehler - der besseren Vergleichbarkeit wegen - meistens in Prozent angegeben wird.

Beispiel 1 (5.3.)

gegebene Zahl x und Näherungswert a	$x = 382$ $a = 380$	$x = 3{,}82$ $a = 3{,}80$
absoluter Fehler	$\varepsilon = 382 - 380$ $\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 3{,}80 - 3{,}82$ $\varepsilon = -0{,}02$ $\Delta a = 0{,}02$
relativer Fehler	$\delta = 2 : 382 \notin N$	$\delta = \frac{0{,}02}{3{,}82} \approx 0{,}005$

Eine andere Möglichkeit, Aussagen über die Genauigkeit eines Näherungswertes zu treffen, besteht in der Charakterisierung der den Näherungswert bezeichnenden Ziffern.

D3 (5.3.) Ziffern eines Näherungswertes a einer Zahl x heißen gültig genau dann, wenn sie mit den entsprechenden Ziffern der Zahl x übereinstimmen.

Gültige Ziffern werden sich also auch bei einem verfeinerten Näherungswert nicht ändern. Alle beim Runden nicht veränderten Ziffern bleiben gültige Ziffern.

Beispiel 2 (5.3.)

7 6 8 7 $\approx$ 7 6 9 0 Die Ziffern 7 - 6 sind gültige Ziffern. des Näherungswertes.

7 6 8 5 $\approx$ 7 6 8 0 Die Ziffern 7 - 6 - 8 sind gültige Ziffern des Näherungswertes.

D4 (5.3.) Eine Ziffer eines Näherungswertes a einer Zahl x heißt zuverlässig genau dann, wenn der absolute Fehler von a nicht größer als 0,5 Einheiten des Stellenwertes der betreffenden Ziffer ist.

Ein Näherungswert, dessen absoluter Fehler nicht größer als 0,5 Einheiten des Stellenwertes der letzten angegebenen Ziffer ist, hat also nur zuverlässige Ziffern.

Beispiel 3 (5.3.)

$6{,}3 \cdot 2{,}21 = 13{,}923 \approx 13{,}9$

Der absolute Fehler des Produkts ist $\varepsilon = 0{,}023$.
Alle Ziffern des Näherungswertes sind gültige Ziffern. Alle Ziffern des Näherungswertes sind zuverlässige Ziffern, denn $0{,}023 < 0{,}5 \cdot 10^{-1}$.
Würten wir sagen, $6{,}3 \cdot 2{,}21 \approx 12$, so wäre der absolute Fehler des Produkts $\varepsilon = 1{,}923$.
Der Vergleich mit obiger Rechnung ergibt:
Die Ziffer 2 des Näherungswertes ist weder gültig noch zuverlässig, denn $1{,}923 > 0{,}5 \cdot 10^{0}$. Die Ziffer 1 ist gültig und zuverlässig.

Geben wir an $6,3 \cdot 2,21 \approx 14$, so ist die Ziffer 1 des Näherungswertes gültig und zuverlässig.
Die Ziffer 4 des Näherungswertes ist nicht gültig, aber zuverlässig, denn $\varepsilon = 0,077$ und $0,077 < 0,5 \cdot 10^0$.

Der Leser mache sich bewußt, daß bei gerundeten Zahlen alle Ziffern von links beginnend bis einschließlich der Stelle, auf die gerundet wurde, zuverlässige Ziffern sind.

Beispiel 4 (5.3.)

	Zahl	Näherungswert	absoluter Fehler	zuverlässige Ziffern
a)	397,5	398	$0,5 \leqq 0,5 \cdot 10^0$	3 - 9 - 8
b)	1799,7	1800	$0,3 \leqq 0,5 \cdot 10^0$	1 - 8 - 8 - 0
c)	1778	1800	$22 \leqq 0,5 \cdot 10^0$	1 - 8

Zeile c) im Beispiel 4 (5.3.) zeigt uns, daß beim Runden nichtzulässige Ziffern Null auftreten können, wenn das Rundungsergebnis eine natürliche Zahl ist. Sie müssen geschrieben werden, um den Stellenwert der Ziffern 1 und 8 erkennen zu lassen. Dieser Tatbestand sei Anlaß zu folgender Bemerkung: In der mathematischen Praxis ist es üblich, nur zuverlässige Ziffern zu schreiben,und zwar für jede Zahl möglichst viele solche. Demgemäß haben z. B. 23,1 bzw. 23,1000 unterschiedliche Bedeutung. 23,1000 bedeutet, daß der Fehler nicht größer als $0,5 \cdot 10^{-4}$ ist, wohingegen der Fehler von 23,1 weitaus größer sein kann. Greifen wir Zeile c) des Beispiels 4 (5.3.) wieder auf, so ist es auch dort möglich, durch Anwenden der Potenzschreibweise die Regel einzuhalten, nur zuverlässige Ziffern zu schreiben.

$$1\,7\,7\,7\,8 \approx 18 \cdot 10^2$$

Somit gelingt es, den am Beispiel 23,1 bzw. 23,1000 dargestellten Unterschied auch auf den Bereich der natürlichen Zahlen zu übertragen und die beiden Näherungswerte der Zeilen b) bzw. c) des Beispiels 4 (5.3.) müssen geschrieben werden

$1\,8\,0\,0$ in b) bzw. $18 \cdot 10^2$ in c).

Diese Überlegungen führen zu einem weiteren Begriff, den wir zunächst definieren und danach an einigen Beispielen illustrieren.

D5 (5.3.) Alle Ziffern eines Näherungswertes mit Ausnahme der Nullen links von der ersten von Null verschiedenen Ziffer und den nicht zuverlässigen Nullen rechts von der letzten von Null verschiedenen Ziffer heißen wesentliche Ziffern.

D. h. in Zeile b) des Beispiels 4 (5.3.) besitzt der Näherungswert 4 wesentliche Ziffern, während in Zeile c) nur 2 wesentliche Ziffern auftreten, die beiden Ziffern Null sind unwesentliche Ziffern.

Beispiel 5 (5.3.)

x		a	der Näherungswert enthält
368538,16	$\approx$	369000	2 gültige Ziffern 3 zuverlässige Ziffern 3 wesentliche Ziffern
0,003784	$\approx$	0,0038	4 gültige Ziffern 5 zuverlässige Ziffern 2 wesentliche Ziffern
0 , 4 2 9 8 3	$\approx$	0,430	2 gültige Ziffern 4 zuverlässige Ziffern 3 wesentliche Ziffern

Fassen wir die Erkenntnisse zu gültigen, zuverlässigen und wesentlichen Ziffern zusammen, so kann man feststellen:

- Die höchste Qualitätsstufe in Näherungswerten geschriebener Ziffern sind die gültigen Ziffern.

- Es können Ziffern auftreten, die nicht gültig, aber noch so genau sind, daß sie als zuverlässig gelten.

- Es können Ziffern auftreten, die nicht einmal mehr zuverlässig sind.

- Es können Ziffern Null auftreten, die nicht wesentlich sind. Stehen sie rechts von der letzten von Null verschiedenen Ziffer, so sind es auch keine zuverlässigen Ziffern.
  Das heißt, daß bei der Darstellung einer natürlichen Zahl alle zuverlässigen Ziffern auch wesentliche Ziffern sind.

5.4. Ausblick auf das Rechnen mit Näherungswerten

Wir deuteten auf Seite 92 motivierend an, daß beim Verknüpfen von Näherungswerten das Ergebnis selbst ein Näherungswert sein kann, dessen Genauigkeit nur geringer sein kann als die Genauigkeit der verknüpften Näherungswerte. Die Theorie stellt die folgenden Angaben für die Verknüpfungsergebnisse bereit:

1. Fehler des Ergebnisses in Abhängigkeit der Fehler der verknüpften Näherungswerte
2. Abschätzung der Verknüpfungsergebnisse mit Hilfe der verknüpften Näherungswerte

Unter Zuhilfenahme im Bereich rationaler und reeller Zahlen definierter Operationen, des Operators Δ für den Betrag des absoluten Fehlers Δa ($\Delta a = /a - x/$) und der damit entstehenden Darstellung $\frac{\Delta a}{x}$ des relativen Fehlers einer Zahl x geben wir folgende Gesetze an:

(1a) Bei der Addition und Subtraktion addieren sich die absoluten Fehler der verknüpften Zahlen

$$\Delta (a \pm b) = \Delta a + \Delta b$$

(1b) Bei der Multiplikation und Division addieren sich die relativen Fehler der verknüpften Zahlen

$$\frac{\Delta (a \cdot b)}{a \cdot b} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

und $$\frac{\Delta (a : b)}{a : b} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

Bezeichnet man eine untere Schranke eines Näherungswertes durch $\underline{a}$ bzw. $\underline{b}$ und eine obere Schranke durch $\overline{a}$ bzw. $\overline{b}$, gelten die folgenden Abschätzungen:

(2a) $\underline{a} + \underline{b} < a + b < \overline{a} + \overline{b}$

(2b) $\underline{a} - \overline{b} < a - b < \overline{a} - \underline{b}$

(2c) $\underline{a} \cdot \underline{b} < a \cdot b < \overline{a} \cdot \overline{b}$

(2d) $\underline{a} : \overline{b} < a \cdot b < \overline{a} : \underline{b}$

Nicht die explizite Behandlung, sondern die sinnvolle Überlegung an geeigneten formalen und Anwendungsaufgaben, die der Lehrer in Kenntnis dieser Gesetzmäßigkeiten fachlich und didaktisch methodisch gut vorbereiten muß, charakterisiert den Weg, die Schüler bereits im Mathematikunterricht der unteren Klassen an das Problem der Näherungsrechnung gemäß dem Lehrplan der Klassen 1 bis 4 heranzuführen.