LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

Herausgegeben
von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium
des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen

VORBEREITUNG AUF DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM MATHEMATIK

1. LEHRBRIEF

1. veränderte Ausgabe

02 0009 01 1

Vorbereitung
auf das Hochschulfernstudium
Mathematik

1. Lehrbrief

1. veränderte Ausgabe

Verfaßt von

Dr. paed. Dieter S c h l e ß i n g
Technische Universität Dresden
Sektion Mathematik

Dr. paed. Wilhelm D e n z
Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden

02 0009 01 1

Redaktionsschluß: März 1984

Das druckfertige Manuskript wurde an der Technischen Universität Dresden hergestellt.

Ag 628/127/86/DDR/5000- ZLO 6041/86

Druck und buchbinderische Verarbeitung:
VEB Kongreß- und Werbedruck, Oberlungwitz

Bestell-Nr. 02 0009 01 1

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden.

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die vorliegenden Lehrbriefe dienen der Vorbereitung auf das Hochschulfernstudium für Bewerber aller technischen, wirtschaftswissenschaftlichen und agrarwissenschaftlichen Studienrichtungen.
Für die Aufnahme und erfolgreiche Durchführung des Hochschulfernstudiums werden mathematische Voraussetzungen benötigt, die in diesen Lehrbriefen zusammengestellt sind. Es handelt sich dabei um Lehrstoff, der in den zur Hochschulreife führenden Bildungseinrichtungen vermittelt wurde. Diese mathematischen Grundlagen sind nicht nur für das Studium des Lehrgebietes Mathematik notwendig, sondern sie stellen darüber hinaus für eine Reihe weiterer Grundlagenlehrgebiete entscheidende Studienvoraussetzungen dar.

Den Informationsmaterialien für Bewerber zum Hochschulfernstudium ist zu entnehmen, welche Abschnitte dieser Lehrbriefe für die Studienvorbereitung einer bestimmten Grundstudienrichtung zutreffend sind.

Diese Vorbereitungslehrbriefe sind kein Lehrmaterial im üblichen Sinne, d. h. der enthaltene Lehrstoff wird nicht ausführlich eingeführt, hergeleitet und erläutert, sondern er wird im wesentlichen nur für den konkreten Zweck der Studienvorbereitung kompendiarisch zusammengestellt, systematisiert und seine Anwendung in ausgewählten Beispielen demonstriert, weil vorausgesetzt werden kann, daß dieser Stoff in der Vorbildung behandelt wurde.

Werden einem Bewerber beim Studium der Lehrbriefe größere Wissenslücken bewußt, die mit Hilfe dieser Lehrbriefe nicht geschlossen werden können, so sind die Lehrbücher der Vorbildung (EOS, Fachschulausbildung) in die Studienvorbereitung einzubeziehen.

Die vorliegenden Vorbereitungslehrbriefe besitzen folgenden Aufbau:

1. Jedem Hauptabschnitt sind Hinweise vorangestellt, die der weiterführenden Information und Motivation bezogen auf

das betreffende Stoffgebiet dienen.

2. In dem als Kompendium dienenden Unterabschnitt „Grundlegende Begriffe und Sätze" sind jeweils die stofflichen Schwerpunkte dieses Gebietes zusammengestellt, die für die Reaktivierung der notwendigen Kenntnisse erforderlich sind.
   Dabei werden mit dem Symbol $\square$ wichtige Definitionen und Sätze und mit dem Symbol ● erläuternde Beispiele gekennzeichnet.
3. Im Unterabschnitt „Beispiele und Anwendungen" wird jeweils demonstriert, welche Fähigkeiten und Fertigkeiten in diesem Stoffgebiet benötigt werden.
4. Der jeweilige Unterabschnitt „Übungsaufgaben" dient der selbständigen Tätigkeit und damit der Festigung bzw. Aneignung der notwendigen Fähigkeiten und Fertigkeiten. Die Anordnung der Aufgaben ist nach steigendem Schwierigkeitsgrad vorgenommen worden, so daß leistungsstarke Bewerber die ersten Aufgaben durchaus übergehen können.
   Aufgaben, die mit +) gekennzeichnet sind, dienen der weiteren Vertiefung und sollten nur dann gelöst werden, wenn die vorhergehenden Aufgaben sicher beherrscht werden.
   Die im Lösungsteil des jeweiligen Lehrbriefes befindlichen Lösungen sind für die Selbstkontrolle bestimmt und sollten deshalb nicht vor der Bearbeitung der Aufgaben eingesehen werden.

1. Elemente der Mengenlehre

Der Mengenbegriff wird sowohl im täglichen Leben als auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen sehr häufig gebraucht.
Viele Probleme in den Naturwissenschaften, in der Technik und in der Ökonomie lassen sich mit Hilfe der Mengenlehre exakt und übersichtlich formulieren.
Für die Mathematik selbst ist die Mengenlehre von grundlegender Bedeutung, da sich alle derzeit bekannten mathematischen Teilgebiete mengentheoretisch begründen lassen. Ein moderner Zugang zur Mathematik ist heute ohne die Grundlagen der Mengenlehre undenkbar.
Deshalb ist es für die Vorbereitung auf Ihr Studium notwendig, daß Sie sich mit dem Mengenbegriff so weit vertraut machen, wie es der Inhalt dieses Abschnittes angibt. Diese Elemente der Mengenlehre werden in den nachfolgenden Stoffgebieten reelle Zahlen, Gleichungen, Ungleichungen, elementare Funktionen unmittelbar benötigt.

1.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

1.1.1. Der Mengenbegriff

$\boxed{1}$ Eine <u>Menge</u> ist eine (gedankliche) Zusammenfassung <u>wohlbestimmter</u> und <u>wohlunterschiedener</u> Objekte der Realität oder des Denkens. Die Objekte werden <u>Elemente</u> der Menge genannt.

- Menge aller Fernstudenten der TU Dresden. Die Elemente der Menge sind die Studenten.
- Menge aller Seminargruppen im Fernstudium der TU Dresden. Die Elemente der Menge sind die Seminargruppen. (Hier sind die Elemente der Menge selbst wieder Mengen.)
- <u>Zahlenmengen</u>:

  N: Menge der natürlichen Zahlen,
  G: Menge der ganzen Zahlen,
  P: Menge der rationalen Zahlen,
  R: Menge der reellen Zahlen,
  K: Menge der komplexen Zahlen.

$\boxed{2}$ M sei eine Menge. Dann bedeutet

$x \in M$: x ist <u>Element</u> von M,

$x \notin M$: x ist <u>nicht Element</u> von M.

● $7 \in N$; $-1 \notin N$; $-1 \in G$; $0{,}5 \in P$; $\sqrt{5} \notin P$; $\sqrt{5} \in R$.

1.1.2. <u>Charakterisierung einer Menge</u>

Häufig auftretende Mengen werden mit bestimmten Buchstaben bezeichnet. Allgemein können Mengen auf zwei Arten angegeben werden.

$\boxed{1}$ $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Charakterisierung einer Menge M durch die Angabe ihrer Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

● $M = \{1,5,3\} = \{1,3,5\} = \{5,3,1\}$; $1 \in M$; $0 \notin M$.

Offensichtlich ist die Charakterisierung durch $\boxed{1}$ nur für <u>endliche Mengen</u> (d. h. Mengen, die nur endlich viele Elemente besitzen) möglich. Wie obiges Beispiel zeigt, kommt es dabei auf die Reihenfolge der Elemente nicht an.

$\boxed{2}$ $M = \{x \mid \ldots\}$ Charakterisierung einer Menge M durch die Angabe der Eigenschaft(en), auf Grund derer ein Objekt Element dieser Menge ist.

● $A = \{x \mid x \in R \text{ und } x < 0\}$ Menge aller negativen reellen Zahlen.

● $B = \{x \mid x \text{ gerade Zahl}\} = \{x \mid x = 2k \text{ und } k = 1,2,3,\ldots\}$ Menge aller positiven geraden Zahlen.

● $C = \{x \mid x \in R \text{ und } x > 4\}$ Menge aller reellen Zahlen, die größer sind als 4.

<u>Bemerkung</u>:

In der Schule ist z. B. für die Menge C auch die Schreibweise üblich: $C = \{x > 4;\ x \in R\}$.

Ferner kann auch die Kurzschreibweise $C = \{x \mid x > 4\}$ benutzt werden, wenn Klarheit darüber besteht, daß alle Elemente x reelle Zahlen sind.

● $L = \{x \mid x^2 = 4\} = \{2,-2\}$ Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 4$.

- $M = \{x \mid x \in R \text{ und } x^2 = -1\}$ enthält <u>kein</u> Element. M ist eine <u>leere Menge</u>.
  Für die leere Menge wird das Zeichen $\emptyset$ verwendet.

1.1.3. Mengenrelationen

$\boxed{1}$ Zwei Mengen A und B heißen <u>gleich</u>, wenn A dieselben Elemente wie B besitzt (Bild 8/1).
Schreibweise: $A = B$, Sprechweise: "A gleich B".

$\boxed{2}$ Ist jedes Element von A auch Element von B, so heißt A <u>Teilmenge</u> von B (Bild 8/2).
Schreibweise: $A \subset B$, Sprechweise: "A enthalten in B" oder "A Teilmenge von B".

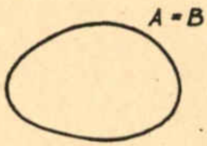


Bild 8/1

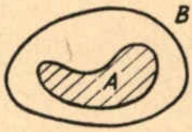


Bild 8/2

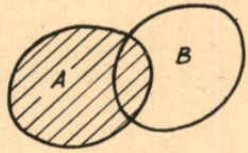


Bild 8/3

<u>Bemerkung</u>:
$A \not\subset B$ (Sprechweise: "A ist nicht enthalten in B") bedeutet: Es gibt mindestens ein Element $a \in A$, das nicht in B liegt (Bild 8/3).

- $N \subset R$, $\{1,2,3\} \subset N$.
- $\{3\} \subset N$, $\{3\}$ ist eine einelementige Menge; $3 \in N$, $3 \in \{3\}$.
- $\boxed{A \subset A}$ Die Relation "$\subset$" schließt die Gleichheit mit ein.
- $\boxed{\emptyset \subset A}$ Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

1.2. Beispiele und Anwendungen

<u>Beispiel 1</u>:
In der Formulierung "eine Menge Ärger" wird der Mengenbegriff in der Bedeutung von "viel" gebraucht. Diese Bedeutung steht hier nicht zur Diskussion.
Wird aber z. B. von einer "Menge von Häusern" gesprochen, so entspricht das der getroffenen Mengendefinition. Hierbei

werden Objekte (Häuser) zusammengefaßt, die

1. wohlbestimmt (sie besitzen alle die ein Haus charakterisierenden Eigenschaften) und
2. wohlunterschieden (z. B. durch die Hausnummern) sind.

Beispiel 2:

Zwischen den Mengen

$M_1 = \{x \mid x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0\}$,
$M_2 = \{x \mid x \in G \text{ und } x < 3\}$,
$M_3 = \{x \mid x < 3\}$,
$M_4 = G$,
$M_5 = R$

bestehen folgende Relationen:

$M_1 = \{-\frac{1}{2}, 2\} \not\subset M_2$; $M_1 \subset M_3 \subset M_5$;
$M_2 \subset M_3$; $M_2 \subset M_4 \subset M_5$; $M_3 \not\subset M_4$.

1.3. Übungsaufgaben

A1/1. Bestimmen Sie alle Teilmengen der Menge $A = \{1,2,3\}$!

A1/2. Gegeben sind folgende Zahlenmengen:
$A = \{1,2\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{0,1,2\}$, $D = \{x \mid x^2 - x = 0\}$.
Welche Mengenrelationen bestehen zwischen diesen Mengen?

A1/3. Warum ist die Menge aller Seminargruppen im Fernstudium der TU Dresden nicht gleich der Menge aller Fernstudenten der TU Dresden?

$A \cap B$ Teilmenge (Durchschnitt) (in bd. enth.)
$A \cup B$ Vereinigung

$A \setminus B$ Differenz
$B \setminus A$ alle Elem., die in B vork., aber nicht in A

$\{\ \}$, $\emptyset$ leere Menge

2. Reelle Zahlen

Zu den fundamentalen Begriffen der Mathematik gehört auch der Zahlbegriff. Die Zahlen stellen ein geistiges Werkzeug dar, mit dessen Hilfe der Mensch alle Dinge und Erscheinungen der objektiven Realität quantifizieren und ordnen kann.
In diesem Abschnitt werden die Ihnen aus Ihrer Vorbildung her bekannten Zahlenbereiche systematisiert und die wesentlichen Eigenschaften der reellen Zahlen und die Gesetze, denen sie genügen, zusammengestellt.
Der sichere Umgang mit reellen Zahlen gehört zu den Grundvoraussetzungen für alle mathematischen Betrachtungen.

2.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

1 | N | Natürliche Zahlen: 0,1,2,3,...

Bemerkung 1:
Die Null wird nach Verabredung zu den natürlichen Zahlen hinzugenommen.

2 Benutzt man eine natürliche Zahl, um die Anzahl der Elemente einer Menge anzugeben, so nennt man sie Kardinalzahl. Ist die natürliche Zahl ein Mittel, um innerhalb ein und derselben Menge Ordnung zu schaffen, so heißt sie Ordinalzahl.

- "Wir waren zwei Reiter, ich ritt an zweiter Stelle."

3 Im Bereich[1] der natürlichen Zahlen sind Addition und Multiplikation uneingeschränkt durchführbar, nicht aber die Subtraktion und die Division.

- Die Gleichungen $5 + x = 2$ und $3 \cdot y = 7$ haben im Bereich der natürlichen Zahlen keine Lösungen.

[1] Zahlenbereich ist eine Menge von Zahlen, in der neben gewissen Rechenoperationen durch "$\leq$" auch eine Ordnungsrelation erklärt ist.

4 | G | Ganze Zahlen: ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...

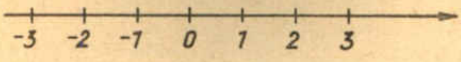


Bild 11/1

Grafische Veranschaulichung der Menge G auf der Zahlengeraden.

5 Im Bereich der ganzen Zahlen ist nun auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.

Bemerkung 2:

Die beiden Zeichen "+" (plus) und "-" (minus) werden jetzt in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet. Einmal sind sie Rechenzeichen (= Operationszeichen) und geben somit an, welche Rechenoperationen durchgeführt werden soll. Zum anderen werden dieselben Zeichen auch als Vorzeichen der Zahlen verwendet. In dieser Eigenschaft geben sie an, ob die Zahl positiv oder negativ ist.

- Operationszeichen

  (+7) + (-2) - (+4)

  Vorzeichen

6 Es gilt stets: $\boxed{-(-a) = a}$

7 | P | Rationale Zahlen: $a = \frac{m}{n}$; m,n ganze Zahlen; $n \neq 0$

Bemerkung 3:

Rationale Zahlen lassen sich durch Brüche $\frac{m}{n}$ darstellen. Es sei besonders hervorgehoben, daß der Nenner n des Bruches von Null verschieden sein muß.

8 In P sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, ausgenommen die Division durch Null, stets ausführbar.

Die Division durch Null ist nicht erlaubt.

9 Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen stets unendlich viele rationale Zahlen, man sagt, die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden dicht.

● $5 \in P,\ 6 \in P;\quad r_1 = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} \in P,\ 5 < r_1 < 6;$

$$r_2 = \frac{5 + \frac{11}{2}}{2} = \frac{21}{4} \in P,\ 5 < r_2 < r_1, \dots .$$

$\boxed{10}$ Eine Zahl a ist genau dann rational, wenn ihre Dezimalbruchentwicklung endlich ist oder eine Periode besitzt.

● $\frac{3}{2} = 1{,}5;\ \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3};\ \frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ldots$
$= 0{,}\overline{142857}.$

Jeder rationalen Zahl läßt sich ein Punkt auf der Zahlengeraden zuordnen. Dennoch läßt sich nicht umgekehrt jedem Punkt der Zahlengeraden eine rationale Zahl zuordnen; es gibt also noch "Lücken".

● Es muß auf der Zahlengeraden einen Punkt P geben, dessen Abstand x vom Nullpunkt gleich der Länge der Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den gleichlangen Katheten der Länge 1 ist (Bild 12/1).
Für die Maßzahl x des Abstandes des Punktes P vom Nullpunkt gilt nach dem Satz von Pythagoras:

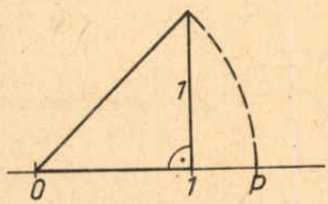


Bild 12/1

$x^2 = 2$, d. h. $x = \sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ ist <u>keine</u> rationale Zahl.

$\boxed{11}$ In P ist das Wurzelziehen nicht uneingeschränkt ausführbar.

● $x_1 = \sqrt{4} = 2 \in P,\quad x_2 = \sqrt{5} \notin P.$

$\boxed{12}$ Alle nichtrationalen Zahlen heißen <u>irrational</u>.

$\boxed{13}$ Jede irrationale Zahl besitzt eine nichtperiodische (unendliche) Dezimalbruchentwicklung.

● $e = 2{,}71828\ \ldots$ Basis des natürlichen Logarithmus

$\pi = 3{,}14159\ \ldots\ \frac{\text{Kreisumfang}}{\text{Kreisdurchmesser}}$

Für numerische Rechnungen werden irrationale Zahlen (unendliche Dezimalbruchentwicklungen) durch rationale Zahlen (endliche Dezimalbruchentwicklungen) angenähert. Das geschieht durch Abbrechen (Runden) der Dezimalbruchentwicklung nach den bekannten Rundungsregeln.

- $\sqrt{2}$: 1,4; 1,41; 1,414.
  π: 3,14; 3,1415.

14 Die <u>rationalen Zahlen</u> und die <u>irrationalen Zahlen</u> bilden zusammen die Menge der <u>reellen Zahlen</u>. Diese füllen die Zahlengerade lückenlos aus; d. h., jeder reellen Zahl entspricht ein Punkt auf der Zahlengeraden und umgekehrt.

15 Der <u>absolute Betrag</u> einer reellen Zahl a ist $|a|$.

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geqq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}}$$

Der Betrag einer Zahl ist somit stets positiv oder Null: $|a| \geqq 0$.

Geometrisch stellt der Betrag einer Zahl den Abstand dieser Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden dar.

- Der Abstand der Zahl $a = -3$ vom Nullpunkt ist $|-3| = 3$.

16 Für reelle Zahlen gelten folgende Grundgesetze:

(A_1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativität der Addition

(A_2) $a + b = b + a$ Kommutativität der Addition

(A_3) Es gibt eine Zahl 0 mit $a + 0 = a$.

(A_4) $a + x = 0$ besitzt die Lösung $x = -a$.

(M_1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assoziativität der Multiplikation

(M_2) $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität der Multiplikation

(M_3) Es gibt eine Zahl 1 mit $a \cdot 1 = a$.

(M_4) $a \cdot y = 1$ besitzt die Lösung $y = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$.

Verknüpfung von <u>Addition</u> und <u>Multiplikation</u>:

(AM) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributivität.

Übersicht zum Aufbau der reellen Zahlen

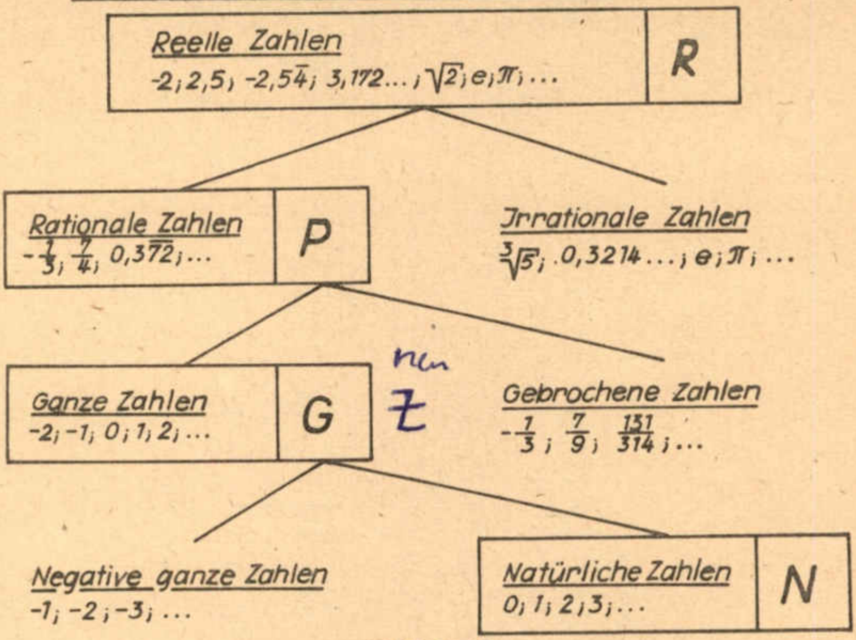


Bild 14/1

2.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

In den Grundgesetzen 2.1. $\boxed{16}$ sind nur Eigenschaften der Addition und Multiplikation erklärt. Subtraktion und Division lassen sich auf diese zurückführen:

$$b - a = b + (-a), \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad b \neq 0.$$

Beispiel 2:

Aus den Grundgesetzen 2.1. $\boxed{16}$ lassen sich alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen ableiten.

a) Es gilt $a \cdot 0 = 0$, denn

$$a \cdot 0 \underset{(A_3)}{=\!=} a \cdot 0 + 0 \underset{(A_4)}{=\!=} a \cdot 0 + [a + (-a)] \underset{(A_1)}{=\!=} [a \cdot 0 + a] + [-a]$$

$$\underset{(M_3)}{=\!=} [a \cdot 0 + a \cdot 1] + [-a] \underset{(AM)}{=\!=} a[0 + 1] + [-a] \underset{(A_3)}{=\!=} a \cdot 1 + (-a)$$

$$\underset{(M_3)}{=\!=} a + (-a) \underset{(A_4)}{=\!=} = 0.$$

b) Es gilt $0 : a = \frac{0}{a} = 0 \; (a \neq 0)$, denn $0 \cdot a = 0$.

c) <u>Aber</u> $\frac{a}{0} = x \; (a \neq 0)$ ist <u>sinnlos</u>, weil es kein x gibt, so daß $0 \cdot x = a$.
Auch $\frac{0}{0} = x$ ist <u>sinnlos</u>, da $0 \cdot x = 0$ für jedes x erfüllt ist.

<u>Beispiel 3:</u>
$a = 0,1\overline{26}$ ist eine rationale Zahl. Sie soll als Bruch $a = \frac{p}{q}$ dargestellt werden:

$$\begin{array}{r|l} - & \begin{aligned} 1000a &= 126,\overline{26} \\ 10a &= 1,\overline{26} \end{aligned} \\ \hline & 990a = 125 \end{array}$$

$$a = \frac{125}{990} = \frac{25}{198}\,.$$

2.3. <u>Übungsaufgaben</u>

A2/1. Die Summe und das Produkt zweier Zahlen eines Zahlenbereiches sind wieder Zahlen dieses Bereiches.
Untersuchen Sie, ob die Menge der irrationalen Zahlen ein Zahlenbereich ist!

A2/2. Teilen Sie die nachfolgenden reellen Zahlen in rationale und irrationale Zahlen ein!
-5; π; $3,14159$; $3,141\overline{59}$; $3,14159\ldots$;
$0,101010\ldots$; $\sqrt{0,\overline{36}}$; e; $\sqrt{5}$; $-1,21$; $\lg 8$.

A2/3. Geben Sie eine rationale Zahl x an, die zwischen den Zahlen a und b liegt!
a) $a = -2,19$; $b = -2,191$.
b) $a = \frac{17}{23}$; $b = \frac{18}{23}$.

A2/4. Geben Sie eine rationale Zahl z_1 und eine irrationale Zahl z_2 an, die zwischen den Zahlen $0,\overline{271}$ und $0,\overline{27}$ liegen!

A2/5. Schreiben Sie $a = 0,24\overline{32}$ als Bruch!

3. Arithmetische Rechenoperationen mit Variablen

Dieser Abschnitt dient der Reaktivierung von Fertigkeiten in der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mehrgliedriger Terme, in der Bruch-, Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung. Das Rechnen mit Klammern, die Faktorenzerlegung, das Gleichnamigmachen von Brüchen, der sichere Umgang mit den Potenz-, Wurzel- und Logarithmengesetzen sind die Schwerpunkte dieses Komplexes.
Die aufgeführten elementarmathematischen Rechenarten werden im Studium vollständig vorausgesetzt. Deshalb ist eine gründliche Wiederholung und Reaktivierung der notwendigen Rechenfertigkeiten unbedingt erforderlich.

3.1. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mehrgliedriger Terme

3.1.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ Unter einem Term versteht man Ziffern, Variable und arithmetische Verknüpfungen zwischen ihnen.

● $a,\ 3 + 7,\ 4 + a,\ \frac{5}{6}(3 - a)b,\ a + b,\ (x + y) : z, \ldots$

$\boxed{2}$ Die Rechenoperation der höheren Stufe ist vor der Rechenoperation der niederen Stufe auszuführen.

● $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14.$

Soll von dieser Regel abgewichen werden, sind Klammern zu setzen.

● $(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20.$

$\boxed{3}$ Einige Vorzeichenregeln

$-(+a) = -a$ $-(-a) = +a$
$(-a)(+b) = -(ab)$ $(+a)(-b) = -(ab)$ $(-a)(-b) = +(ab)$

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

4 Auflösen und Setzen von Klammern

Auflösen $\longrightarrow$

$a + (b - c) = a + b - c,$
$a - (b + c) = a - b - c,$
$a - (b - c) = a - b + c.$

$\longleftarrow$ Setzen

Bemerkung 1:

Es kann vorkommen, daß innerhalb einer Klammer noch weitere Klammern (runde, eckige, geschweifte,...) auftreten. Mehrfache Klammern werden i. a. von innen nach außen aufgelöst.

● $-[4 + (2 - 3)3] = -[4 + (-1) \cdot 3] = -[4 - 3] = -1.$

5 Multiplikation von mehrgliedrigen Termen

Ausmultiplizieren $\longrightarrow$

$a(b + c + d) = ab + ac + ad,$
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd,$
$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd,$
$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd.$

$\longleftarrow$ Ausklammern (Faktorenzerlegung)

● $\frac{1}{3} g h^3 + \frac{1}{3} g^3 h = \frac{1}{3} g \cdot h(h^2 + g^2).$

6 Binomische Formeln

Für reelle Zahlen a, b gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

7 <u>Division mehrgliedriger Terme durch eine Zahl</u>

$(a + b + c) : d = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}; \quad d \neq 0.$

8 <u>Division zweier mehrgliedriger Terme</u>

Bei der Division zweier mehrgliedriger Terme wird wie bei der Division einer mehrstelligen Zahl durch eine mehrstellige Zahl verfahren.

$$
\begin{array}{l}
(6a^2 + 7a + 2) : (3a + 2) = 2a + 1 \\
\underline{-(6a^2 + 4a)} \\
\qquad\qquad 3a + 2 \\
\qquad\quad \underline{-(3a + 2)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

wird subtrahirt?

<u>Rechenvorschrift:</u>

(1) Ordnen der Glieder des Dividenden und des Divisors nach fallenden Potenzen.

(2) Division des <u>ersten</u> Gliedes des Dividenden ($6a^2$) durch das <u>erste</u> Glied des Divisors ($3a$).

(3) Multiplikation des erhaltenen Quotienten ($2a$) mit dem <u>ganzen</u> Divisor ($3a + 2$).

(4) Subtraktion des sich ergebenen Produkts ($6a^2 + 4a$) vom Dividenden.

(5) Das Verfahren wird mit dem verbleibenden Rest des Dividenden so lange fortgeführt, bis die Division aufgeht oder ein nicht mehr durch den Divisor teilbarer Rest übrigbleibt.

$$
\begin{array}{ll}
(6 + 3x^2 + 8x) : (2 + 3x), & \\
(3x^2 + 8x + 6) : (3x + 2) = x + 2 \quad \text{Rest } 2 & \\
\underline{-(3x^2 + 2x)} & \\
\qquad\qquad 6x + 6 & = x + 2 + \frac{2}{3x + 2} \\
\qquad\quad \underline{-(6x + 4)} & \\
\qquad\qquad\quad 2 &
\end{array}
$$

ordnen

3.1.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& 12 - 3[12 + (4 - 5)] + \{- 5 - [4 - 2(5 + 12)] + 4\} \\
= {} & 12 - 3[12 + (-1)] \quad + \{- 5 - [4 - 2 \cdot 17] \quad + 4\} \\
= {} & 12 - 3 \cdot 11 \quad + \{- 5 - [-30] + 4\} = 12 - 33 + 29 = 8.
\end{aligned}
$$

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
& (u + v)[u^2 - (3u - v)(2u + 3v) - (3u + v)(3u - 2v) + v^2] \\
= {} & (u + v)[u^2 - (6u^2 + 7uv - 3v^2) - (9u^2 - 3uv - 2v^2) + v^2] \\
= {} & (u + v)[6v^2 - 4uv - 14u^2] = 6v^3 + 2uv^2 - 18u^2v - 14u^3.
\end{aligned}
$$

Beispiel 3:

$$
\begin{aligned}
& 48u^2v^2 : [(-4u)(+3v)] - 4u[(-8uv) : (-2u)] \\
= {} & (+48u^2v^2) : (-12uv) \quad - 4u(+4v) = - 4uv - 16uv = - 20uv.
\end{aligned}
$$

Beispiel 4:

a) $$
\begin{aligned}
& (\tfrac{1}{3} u + 9v)^2 - (\tfrac{1}{3} u - 9v)^2 - (\tfrac{1}{3} u + 9v)(\tfrac{1}{3} u - 9v) \\
= {} & \tfrac{1}{9} u^2 + 6uv + 81v^2 - (\tfrac{1}{9} u^2 - 6uv + 81v^2) - (\tfrac{1}{9} u^2 - 81v^2) \\
= {} & 81v^2 + 12uv - \tfrac{1}{9} u^2.
\end{aligned}
$$

b) $a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2.$

c) $16u^2 - 2v^2 = (4u + \sqrt{2}\, v)(4u - \sqrt{2}\, v).$

Beispiel 5:

a) $$
\begin{array}{l}
(12a^3 - 10a^2b + 9ab^2 + 14b^3) : (3a + 2b) = 4a^2 - 6ab + 7b^2 \\
\underline{- (12a^3 + 8a^2b)} \\
\qquad - 18a^2b + 9ab^2 + 14b^3 \\
\qquad \underline{- (- 18a^2b - 12ab^2)} \\
\qquad\qquad 21ab^2 + 14b^3 \\
\qquad\qquad \underline{- (21ab^2 + 14b^3)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

b) $(27x^3 - 57x^2 + 73x - 18) : (9x - 7) = 3x^2 - 4x + 5$ Rest 17

$$
\begin{array}{l}
\underline{-\ (27x^3 - 21x^2)} \\
\quad - 36x^2 + 73x - 18 \\
\quad \underline{-\ (-\ 36x^2 + 28x)} \\
\qquad\quad 45x - 18 \\
\qquad\quad \underline{-\ (45x - 35)} \\
\qquad\qquad 17
\end{array}
\qquad = 3x^2 - 4x + 5 + \frac{17}{9x - 7}
$$

<u>Probe</u>: $(3x^2 - 4x + 5 + \frac{17}{9x - 7})(9x - 7)$

$= (3x^2 - 4x + 5)(9x - 7) + 17$

$= 27x^3 - 36x^2 + 45x - 21x^2 + 28x - 35 + 17$

$= 27x^3 - 57x^2 + 73x - 18.$

3.1.3. <u>Übungsaufgaben</u>

A3/1. Welche der folgenden Zahlen ist größer? Welche besitzt den größeren absoluten Betrag?

$a = 3{,}5 - [(2{,}1 + 1{,}6) - (3{,}8 - 2{,}9)] - 0{,}3$

$b = (5{,}5 + 7{,}2) - \{0{,}2 + (3{,}6 - 1{,}4) - [1{,}6 - (0{,}4 + 3{,}5)] + 9{,}1\}.$

A3/2. Berechnen Sie

a) $(3x^2 - 2x + 4)(2x - 5) - [(3x + 4)^2 - (4x - 3)^2]$,

b) $(10a^2bc^4 - 16ab^2c^3 + 18a^2b^3c^2 - 4ab^2c^5) : (2abc^2)$!

A3/3. Geben Sie für die folgenden Terme Produktdarstellungen an!

a) $4a^2 + 12ab + 9b^2$,

b) $64Q^2 - 36R^2$,

c) $xy - x + 1 - y$.

A3/4. Berechnen Sie mit Probe

a) $(u^3 - v^3) : (u - v)$,

b) $(x^3 - 4x^2 + 6x - 5) : (x - 2)$,

c) $(20b^2 + 6a^2 - 13ab) : (2a - 5b)$,

d) $(4x^4 + 81y^8) : (2x^2 - 6xy^2 + 9y^4)$!

3.2. Bruchrechnung

3.2.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ $\frac{a}{b}$ mit Zähler $a \in N$ und Nenner $b \in N$, $b \neq 0$.
Falls $a < b$, heißt $\frac{a}{b}$ echter Bruch;
falls $a \geq b$, heißt $\frac{a}{b}$ unechter Bruch.

$\boxed{2}$ Brüche mit gleichem Nenner heißen gleichnamig.

$\boxed{3}$ Erweitern

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0.$$

Kürzen

$\boxed{4}$ Rechenregeln

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Bemerkung:
Für die Addition und Subtraktion von Brüchen ist es erforderlich, daß diese gleichnamig sind. Das zweckmäßige „Gleichnamigmachen" von Brüchen erläutert Beispiel 3.

3.2.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:
Erweitern und Kürzen von Brüchen

a) $\frac{0{,}005}{0{,}07} = \frac{0{,}005 \cdot 1000}{0{,}07 \cdot 1000} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$,

b) $\frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$,

c) $\frac{6a^2 - 9ab}{4a^2 - 9b^2} = \frac{3a(2a - 3b)}{(2a + 3b)(2a - 3b)} = \frac{3a}{2a + 3b}$.

Beispiel 2:

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

a) $$\frac{8u-3v}{u^2-v^2}-\frac{4u-7v}{u^2-v^2}=\frac{8u-3v-(4u-7v)}{u^2-v^2}=\frac{4u+4v}{u^2-v^2}$$
$$=\frac{4(u+v)}{(u+v)(u-v)}=\frac{4}{u-v},$$

b) $$\frac{2a}{a+b}-\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{2a}{a+b}-\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a}{a+b}-\frac{a}{a+b}$$
$$=\frac{2a-a}{a+b}=\frac{a}{a+b}.$$

Beispiel 3:

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Bildung des Hauptnenners (HN):

Der Hauptnenner ist das einfachste gemeinschaftliche Vielfache aller Teilnenner. Sind die Teilnenner natürliche Zahlen, so ist der Hauptnenner ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches.

a) $$\frac{101}{42}-\frac{5}{8}-\frac{41}{36}=\frac{101\cdot 12}{504}-\frac{5\cdot 63}{504}-\frac{41\cdot 14}{504}$$
$$=\frac{1212-315-574}{504}=\frac{323}{504};$$

Nebenrechnung:

Primfaktorenzerlegung der Teilnenner	Erweiterungsfaktoren
$42 = 2\cdot 3\cdot 7$	$2^2\cdot 3 = 12$
$8 = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$	$3^2\cdot 7 = 63$
$36 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 2^2\cdot 3^2$	$2\cdot 7 = 14$

HN: $2^3\cdot 3^2\cdot 7 = 504$

b) $$\frac{5b-12}{3ab-5b^2}+\frac{5(12-3a)}{9a^2-15ab}=\frac{(5b-12)3a}{3ab(3a-5b)}+\frac{5(12-3a)b}{3ab(3a-5b)}$$
$$=\frac{(5b-12)3a+5(12-3a)b}{3ab(3a-5b)}=\frac{-12(3a-5b)}{3ab(3a-5b)}=-\frac{4}{ab};$$

Nebenrechnung:

Zerlegung der Teilnenner	Erweiterungsfaktoren
$3ab - 5b^2 = b(3a-5b)$	$3a$
$9a^2 - 15ab = 3a(3a-5b)$	b

HN: $3ab(3a-5b)$

2.

c) $\dfrac{3m}{9m^2 - 24mn + 16n^2} - \dfrac{3m}{9m^2 - 16n^2} + \dfrac{1}{3m + 4n}$

$= \dfrac{3m(3m + 4n) - 3m(3m - 4n) + (3m - 4n)^2}{(3m - 4n)^2(3m + 4n)} = \dfrac{9m^2 + 16n^2}{(3m - 4n)^2(3m + 4n)}.$

Nebenrechnung:

Zerlegung der Teilnenner	Erweiterungsfaktoren
$9m^2 - 24mn + 16n^2 = (3m - 4n)^2$	$3m + 4n$
$9m^2 - 16n^2 = (3m + 4n)(3m - 4n)$	$3m - 4n$
$3m + 4n$	$(3m - 4n)^2$

HN: $(3m - 4n)^2(3m + 4n)$

Beispiel 4:

Multiplikation und Division von Brüchen

a) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^4 + a^2b^2} \cdot \dfrac{a^3b + ab^3}{a^2 - b^2} = \dfrac{(a^2 + 2ab + b^2)(a^3b + ab^3)}{(a^4 + a^2b^2)(a^2 - b^2)}$

$= \dfrac{(a + b)^2\, ab(a^2 + b^2)}{a^2(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)} = \dfrac{(a + b)b}{a(a - b)} = \dfrac{ab + b^2}{a^2 - ab},$

b) $\dfrac{6x^2 + 18y}{2xy - 10} \cdot \dfrac{5x^2y - 25x}{3y - 6x} : \dfrac{5x^2 + 15y}{4xy - 8x^2}$

$= \dfrac{6(x^2 + 3y)5x(xy - 5)4x(y - 2x)}{2(xy - 5)3(y - 2x)5(x^2 + 3y)} = 4x^2.$

Beispiel 5:

Doppelbrüche

a) $\dfrac{\frac{4}{9}a + \frac{3}{4}b}{\frac{2}{3}a - \frac{1}{12}b} = \dfrac{\frac{4a\cdot 4 + 3b\cdot 9}{36}}{\frac{2a\cdot 4 - b}{12}} = \dfrac{\frac{16a + 27b}{36}}{\frac{8a - b}{12}} = \dfrac{16a + 27b}{36} \cdot \dfrac{12}{8a - b}$

$= \dfrac{1}{3}\,\dfrac{16a + 27b}{8a - b},$

b) Die Rechnung verläuft zügiger, wenn man sämtliche Glieder des Doppelbruches sofort auf den Hauptnenner aller auftretenden Teilnenner erweitert:

$\dfrac{\frac{4}{9}a + \frac{3}{4}b}{\frac{2}{3}a - \frac{1}{12}b} = \dfrac{4a\cdot 4 + 3b\cdot 9}{2a\cdot 12 - b\cdot 3} = \dfrac{16a + 27b}{24a - 3b} = \dfrac{16a + 27b}{3(8a - b)}.$

Nebenrechnung:

Zerlegung der Teilnenner	Erweiterungsfaktoren
$9 = 3^2$	$2^2 \;= 4$
$4 = 2^2$	$3^2 \;= 9$
$3 = 3$	$2^2 \cdot 3 = 12$
$12 = 2^2 \cdot 3$	3
HN: $2^2 \cdot 3^2 = 36$	

3.2.3. Übungsaufgaben

A3/5. a) $\dfrac{-0{,}123}{8{,}2}$, b) $\dfrac{50a^3 - 72ab^2}{20ab + 24b^2}$,

c) $\dfrac{a^2c - a^2d + b^2d - b^2c}{a^4 - b^4}$.

A3/6. a) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} - \frac{7}{12} + \frac{23}{48}$, b) $\dfrac{3a + 7}{a^2 - 3a} + \dfrac{3}{a - 3} - \dfrac{a - 1}{3a - a^2} + \dfrac{2}{a}$,

c) $\dfrac{4x + 5y}{x^2 + 2xy} - \dfrac{3x - 2y}{4y^2 + 2xy} + \dfrac{x^2 - 15y^2}{3x^2y + 6xy^2}$.

A3/7. a) $\dfrac{24ab + 12b^2}{18c^2 - 6cd} \cdot \dfrac{3cd - 9d^2}{16a^2 + 8ab}$, b) $\dfrac{27x + 81y}{12x + 8y} : \dfrac{4x - 12y}{54x + 36y}$.

A3/8. a) $\dfrac{\frac{7}{8} + \frac{7}{12}}{4 - \frac{1}{4}}$, b) $\dfrac{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2} - \frac{2}{uv} + \frac{1}{v^2}}$, c) $\dfrac{\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a + b}}{1 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$.

3.3. Potenzrechnung

3.3.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ $\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\ldots\; \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n}$ a reelle Zahl, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Es heißen: a Grundzahl oder Basis,
n Hochzahl oder Exponent,
a^n Potenz.

$\boxed{2}$ Spezialfälle: $a^1 = a$, $0^n = 0$, $1^n = 1$.

$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$ nur mögl. bei gl. Basis u. gl. Radik.

$\boxed{3}$ Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a \neq 0)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (b \neq 0)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$\boxed{4}$ Die Potenzgesetze gelten auch bei Erweiterung des Potenzbegriffes auf negative ganze Exponenten, einschließlich der Null, weil festgesetzt wird:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a^0 = 1 & & (a \neq 0) \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} & & (a \neq 0) \end{array}}$$

Bemerkung:
Die Potenzgesetze gelten bei positiver Basis a auch für gebrochene Exponenten $\frac{m}{n}$ (m ganze Zahl, n = 1,2,...) und sogar für reelle Exponenten α. Es gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a}) \quad \text{? (vgl. 3.4.1. } \boxed{5}\text{)}.$$

Damit wird der Zusammenhang zu den Wurzelgesetzen hergestellt.

- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = 2.$
- $e^{\pi} \cdot e^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}+\pi}.$

3.3.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, aber $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, also $a^n \neq n^a$.

b) Die größte Zahl, die man mit 3 Ziffern schreiben kann, ist 9^{9^9}, denn $9 + 9 + 9 < 9 \cdot 9 \cdot 9 < 999 < 99^9 < (9^9)^9 < 9^{99} < 9^{9^9} = 9^{387420489}$. Um diese Zahl hintereinander aufzuschreiben, braucht man einen Streifen Papier, der etwa von Leipzig bis Helsinki reicht oder man könnte damit 33 Bücher mit je 800 Seiten und 14000 Ziffern je Seite füllen.

Beispiel 2:

$$(-3)^4 = 81, \quad (-0{,}1)^3 = -\,0{,}001$$

$$\boxed{(-a)^{2n} = +\,a^{2n} \qquad (-a)^{2n+1} = -\,a^{2n+1}}$$

Potenzen mit negativer Basis sind bei geradzahligem Exponenten positiv, bei ungeradzahligem Exponenten negativ.

Beispiel 3:

a) $2^3 \cdot 5^3 = (2\cdot 5)^3, \quad \frac{2^3}{5^3} = (\frac{2}{5})^3 = (0{,}4)^3 = 0{,}064;$

b) $2^3 \cdot 2^4 = 2^7, \qquad \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4;$

c) $(2^3)^4 = 2^{12};$

d) $3^0 = 1, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad 0{,}1^{-2} = \frac{1}{0{,}1^2} = 100,$

$(\frac{17}{12})^{-3} = \frac{1}{(\frac{17}{12})^3} = \left(\frac{1}{\frac{17}{12}}\right)^3 = (\frac{12}{17})^3.$

Beispiel 4:

a) $0{,}8^{-3} \cdot 0{,}5^{-3} = (0{,}8\cdot 0{,}5)^{-3} = (0{,}4)^{-3} = \frac{1}{0{,}064} = \frac{1000}{64} = \frac{125}{8};$

b) $(5^{-2})^3 \cdot (2^3)^{-2} = 5^{-6} \cdot 2^{-6} = 10^{-6} = 0{,}000001;$

c) $\frac{(a^{-3})^2}{(a^4)^{-3}} = \frac{a^{-6}}{a^{-12}} = a^{-6-(-12)} = a^{-6+12} = a^6;$

d) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8};$

e) $(-5)^{-4} \cdot (-2)^{-3} = \frac{1}{(-5)^4} \cdot \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{5^4(-2)^3} = -\frac{1}{5(2\cdot 5)^3}$

$= -\frac{1}{5000};$

f) $(\frac{11}{9})^{-1} = \frac{1}{(\frac{11}{9})} = \frac{9}{11};$

Beispiel 5:

$$\frac{(6x^2y^{-3})^3}{(2xy^2)^2} : \frac{(3x^6y^{-1})^4}{4x^{-4}(-y)^3} = \frac{6^3x^6y^{-9} \cdot 4x^{-4}(-y)^3}{2^2x^2y^4 \cdot 3^4x^{24}y^{-4}}$$

$$= \frac{8}{3}(-1)^3\, x^{-24}\, y^{-6} = -\frac{8}{3x^{24}y^6}.$$

Beispiel 6:

Produkte und Quotienten von Potenzen mit verschiedenen Basen und verschiedenen Exponenten oder gar Summen und Differenzen irgendwelcher Potenzen lassen sich nicht nach Potenzgesetzen vereinfachen. Häufig sind aber Umformungen durch Faktorenzerlegung oder durch Anwendung der binomischen Formeln möglich:

$$a^6 \cdot b^7 = a^6 \cdot b^{6+1} = a^6b^6 \cdot b = (a \cdot b)^6 \cdot b,$$

$$a^6 \cdot b^{12} = a^6b^{2\cdot 6} = a^6 \cdot (b^2)^6 = (a \cdot b^2)^6,$$

$$2^n \cdot 6^m = 2^n \cdot (2 \cdot 3)^m = 2^n \cdot 2^m \cdot 3^m = 2^{n+m} \cdot 3^m,$$

$$a^5 + a^5 + a^5 = 3a^5,$$

$$a^3 + a^2 = a^{2+1} + a^2 = a^2 \cdot a + a^2 = a^2(a + 1),$$

$$3^n + 3^{n+2} = 3^n(1 + 3^2) = 10 \cdot 3^n,$$

$$12x^2y^3 + 18xy^4 - 6x^3y^2 = 2\cdot 2\cdot 3x\cdot xy^2\cdot y + 2\cdot 3\cdot 3xy^2y^2$$
$$- 2\cdot 3xx^2y^2 = 6xy^2(2xy + 3y^2 - x^2),$$

$$25a^4 - 64b^6 = (5a^2)^2 - (8b^3)^2 = (5a^2 + 8b^3)(5a^2 - 8b^3).$$

3.3.3. Übungsaufgaben

A3/9. a) $2^3 - (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^3$,

b) $18(a - 1)^3 - 3(1 - a)^3 - 16(a - 1)^3 - 4(1 - a)^3 + 3(1 - a)^3$,

c) $\frac{1}{q^{n-3}} - \frac{q^2 - 1}{q^{n+1}} - \frac{q^2 - 1}{q^{n-1}}$.

A3/10. Berechnen Sie mit Hilfe von Zehnerpotenzen

$$\frac{0{,}001 \cdot 120000}{0{,}000003}\ !$$

A3/11. a) $\frac{15ax^3 \cdot 3b^n(x-1)^2}{2by^3 \cdot 10a^n(x+1)^2} : \frac{3b^{n-1}(1-x)^3}{8a^{n+1}(1+x)^2}$,

b) $(a^{4n} - b^{4n}) : (a^{2n} - b^{2n})$.

A3/12. a) $(4\,\frac{2}{3})^3 : (\frac{7}{9})^3$, b) $\frac{24^5}{16^3}$,

c) $(\frac{5u-2v}{4})^3 : (\frac{25u^2-4v^2}{8})^3$, d) $\frac{(ax+ay)^{n+1} \cdot b^n}{(abx+aby)^{n-1}}$,

e)+) $(a+b)^{-\frac{3}{2}} + (a+b)^{-\frac{1}{2}}$.

A3/13. a) $(xy)^{-2} : (xy)^{-5}$, b) $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-2}-y^{-2}}$,

c) $\frac{24a^3b^{-5}}{7c^3} : \frac{8b^{-4}c^{-4}}{21a^{-3}b^{-5}}$.

3.4. Wurzelrechnung

3.4.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ Ist a eine reelle nichtnegative Zahl und n eine positive ganze Zahl, dann versteht man unter

$$\boxed{b = \sqrt[n]{a}}$$

diejenige nichtnegative Zahl b, für die $b^n = a$ gilt.

$\sqrt[n]{a}$ heißt n-te Wurzel aus a,
a heißt Radikand,
n heißt Wurzelexponent,
b heißt der Wert der Wurzel.

$\boxed{2}$ Entsprechend dieser Festsetzung sind die Gleichungen $b^n = a$ und $b = \sqrt[n]{a}$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$ gleichwertig. Daraus folgt $(\sqrt[n]{a})^n = a$ oder $\sqrt[n]{b^n} = b$, d. h. Potenzieren und Radizieren (Wurzelziehen) mit gleichen Exponenten heben einander auf.

- $\sqrt[4]{81} = 3$, denn $3^4 = 81$, $3 \geqq 0$.
Obwohl auch $(-3)^4 = 81$ gilt, ist -3 keine 4te Wurzel aus 81, da $b = -3 < 0$.
Die Wurzel ist nur für Werte $b \geqq 0$ definiert.

$\boxed{3}$ Spezialfälle: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$.

Da für $\sqrt[1]{a} = a$ gilt, wird das Zeichen $\sqrt[1]{\ }$ nicht benutzt.

Für $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kürzer $\sqrt{a}$ (ohne Wurzelexponenten).

$\boxed{4}$ Wurzelgesetze

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$(a \geqq 0,\ b > 0)$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a > 0$, m ganze Zahl$)$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$	$(a > 0$, p pos. ganze Zahl$)$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$	$(a \geqq 0)$

$\boxed{5}$ Jede Wurzel läßt sich als Potenz mit einem gebrochenen (besser: rationalen) Exponenten schreiben.

Es gilt:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$(a \geqq 0$, n positive ganze Zahl$)$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$(a > 0$, n positive ganze Zahl, m ganze Zahl$)$

Mit $a^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ darf nach den Potenzgesetzen gerechnet werden.

3.4.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = (\sqrt[3]{5})^3 = 5.$

Beispiel 2:

Die Beschränkung auf Wurzelwerte $b \geqq 0$ wurde eingeführt, um das Radizieren zu einer eindeutigen Rechenoperation zu machen.

Addi/Sub. : nur mögl. b. gl. Wurzelexp. u. gleichen Radikanden

$a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$

Denn ohne diese Beschränkung könnte man z. B. dem Ausdruck $\sqrt{4}$ zwei Werte zuordnen, nämlich +2 und -2, weil sowohl $(+2)^2 = 4$ als auch $(-2)^2 = 4$ ist. Damit wäre aber das Wurzelziehen nicht eindeutig.

Beispiel 3:
Ohne die Einschränkung auf nichtnegative Radikanden $a \geqq 0$ bei der Definition der Wurzel könnte man z. B. für $\sqrt[3]{-64}$ die Zahl -4 angeben, denn $(-4)^3 = -64$. Damit ergäbe sich folgender Widerspruch:

$$-4 = \sqrt[3]{-64} = \sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{64^2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Wurzeln mit negativen Radikanden sind nicht definiert.

Beispiel 4:

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{mit} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geqq 0 \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$ ist nur unter der Voraussetzung $a \geqq 0$ richtig. In dem Ausdruck $\sqrt{a^2}$ kann aber a selbst auch negativ sein. Deshalb darf man nicht leichtfertig Wurzel- und Potenzexponenten gegeneinander kürzen. Man muß sich vorher überzeugen, ob die Voraussetzung $a \geqq 0$ erfüllt ist.

Beispiel 5:

a) $5\sqrt[4]{3} + 2\sqrt[4]{3} = 7\sqrt[4]{3}$,

b) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{3}$ läßt sich nicht weiter vereinfachen, ohne die Wurzeln zu ziehen,

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$,

d) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$,

e) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{27}$, f) $\sqrt[3]{\dfrac{6}{125}} = \dfrac{\sqrt[3]{6}}{5}$,

g) $(\sqrt[3]{2})^5 = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$,

h) $\sqrt[12]{a^4b^8} = \sqrt[3]{ab^2} \quad (a \geqq 0,\ b \geqq 0)$,

i) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[20]{3^5} \cdot \sqrt[20]{3^4} = \sqrt[20]{3^9}$,

j) $\sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[7]{3^3} = \sqrt[35]{3^{28}} \cdot \sqrt[35]{3^{15}} = \sqrt[35]{3^{43}} = 3\ \sqrt[35]{3^8}$,

k) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$, l) $\sqrt[4]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[8]{a^5}$,

m) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2 - 2ab + b^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{(a-b)^2}} = \sqrt[3]{|a-b|}$,

n) $$\frac{\sqrt{27^3}}{\sqrt[6]{3^5}} = \frac{27^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{5}{6}}} = \frac{(3^3)^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{5}{6}}} = \frac{3^{\frac{9}{2}}}{3^{\frac{5}{6}}} = 3^{\frac{27-5}{6}} = 3^{\frac{22}{6}} = 3^{\frac{11}{3}} = 3^{(3+\frac{2}{3})}$$
$$= 3^3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 27\ \sqrt[3]{9}.$$

Beispiel 6:

Rationalmachen des Nenners

Tritt im Nenner eines Bruches eine Wurzel auf, so läßt man diese in der Regel dort nicht stehen. Wie man den Nenner rational macht, zeigen die folgenden Beispiele:

a) $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$, | mult. pl. mit Nenner

b) $\frac{6}{2+\sqrt{2}} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{4-2} = 3(2-\sqrt{2})$,

c) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})} = \frac{18+12\sqrt{6}+12}{18-12} = 5+2\sqrt{6}$.

3.4.3. Übungsaufgaben

A3/14. a) $\sqrt{5x}\ \sqrt{15y}\ \sqrt{27xy}$, b) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{36}$,

c) $\sqrt{125} + \sqrt{90} - \sqrt{80} - \sqrt{40}$, d) $\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250}$,

e) $(\sqrt{20} - \sqrt{12})\sqrt{2}$, f) $(\sqrt{35} + \sqrt{21})^2$,

g) $(4\sqrt{2} + 5\sqrt{3})(7\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$, h) $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{2}}$.

A3/15. Stellen Sie die folgenden Brüche mit rationalem Nenner dar!

a) $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$, b) $\frac{25}{5-\sqrt{5}}$, c) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3\sqrt{6}-4\sqrt{3}}$.

A3/16. a) $\sqrt[3]{10^{-7}} \cdot \sqrt{10^7}$, b) $\sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt[6]{x^5}$, c) $\frac{\sqrt[8]{a^7}}{\sqrt[6]{a^5}}$, d) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{32}}$

A3/17.+) Jemand rechnet folgendermaßen:

$x = \sqrt{a^2 - 2a + 1} - a = \sqrt{(a-1)^2} - a = a - 1 - a = -1.$

Für $a = 0$ erhält man jedoch $x = 1$. Wo steckt der Fehler?

A3/18.+) Unter welchen Bedingungen sind jeweils die folgenden Wurzeln definiert?

a) $\sqrt{b}$, b) $\sqrt[3]{-a}$, c) $\sqrt[m]{\frac{1}{x}}$,

d) $\sqrt{x - y}$, e) $\sqrt{1 - a}$, f) $\sqrt[4]{3b - 2}$.

3.5. Logarithmenrechnung

3.5.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ Sind a und b positive reelle Zahlen und $b \neq 1$, dann versteht man unter

$$\boxed{n = \log_b a}$$

diejenige reelle Zahl n, für die $b^n = a$ gilt.

$\log_b a$ heißt Logarithmus von a zur Basis b,
b heißt Basis,
a heißt Numerus,
n heißt Logarithmus.

$\boxed{2}$ Entsprechend dieser Festsetzung und nach 3.4.1. sind die Gleichungen

K $b^n = a$, $b = \sqrt[n]{a}$ und $n = \log_b a$ mit $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$

gleichwertig. Sie sind jeweils nur nach einer anderen der drei Größen a, b und n aufgelöst. Man sagt, das Radizieren ist die erste Umkehrung und das Logarithmieren die zweite Umkehrung des Potenzierens. Also heben sich auch Logarithmieren und Potenzieren bei gleicher Basis b gegenseitig auf.

Es gilt: $b^{\log_b a} = a$ und $\log_b (b^n) = n$.

$\log_a a = 1$

$a^{\log_a b} = b$

$$\boxed{b^n = a}$$

$$\boxed{b = \sqrt[n]{a}} \qquad \boxed{n = \log_b a}$$

$\boxed{3}$ Spezialfälle:

$\log_b 1 = 0$, da $b^0 = 1$; $\log_b b = 1$, da $b^1 = b$.

Bemerkung 1:
Logarithmen sind Exponenten, die nicht notwendig ganze Zahlen sein müssen; sie sind im allgemeinen beliebig reell.

$\boxed{4}$ Logarithmengesetze

$$\boxed{\begin{aligned} \log_b(x \cdot y) &= \log_b x + \log_b y \\ \log_b \frac{x}{y} &= \log_b x - \log_b y \\ \log_b x^{\alpha} &= \alpha \cdot \log_b x \qquad (\alpha \text{ bel. reell}) \end{aligned}}$$

Aus dem letzten Gesetz folgt für $\alpha = \frac{1}{n}$ der Spezialfall:

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x}$$

Bemerkung 2:
Mit der Logarithmenrechnung wird eine Rechenart stets auf die der nächstniederen Stufe zurückgeführt. Darin besteht ihre praktische Bedeutung.

$\boxed{5}$ Umrechnungsformeln für Logarithmen mit verschiedenen Basen

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Spezielle Basen:

Basis 10 : $\log_{10} x = \lg x$ heißt dekadischer Logarithmus.

Basis $e = 2{,}71828\ldots$: $\log_e x = \ln x$ heißt natürlicher Logarithmus.

$$\boxed{\begin{aligned} \lg x &= (\lg e)(\ln x) = 0{,}43429 \cdot \ln x \\ \ln x &= (\ln 10)(\lg x) = 2{,}30259 \cdot \lg x \end{aligned}}$$

eulersche Zahl

[6] <u>Dekadischer (BRIGGSCHER) Logarithmus</u>

$$\begin{aligned}
\lg 100 &= \lg 10^2 = 2\\
\lg 10 &= \lg 10^1 = 1\\
\lg 1 &= \lg 10^0 = 0\\
\lg 0{,}1 &= \lg 10^{-1} = -1\\
\lg 0{,}01 &= \lg 10^{-2} = -2
\end{aligned}$$

..10......................

$$\boxed{\lg 10^n = n}$$

● Mit $\lg 2{,}13 = 0{,}3284$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lg 21{,}3 &= \lg(2{,}13\cdot 10) &&= \lg 2{,}13 + \lg 10\\
& &&= 0{,}3284 + 1 = 1{,}3284\\
\lg 0{,}00213 &= \lg(2{,}13\cdot 0{,}001) &&= \lg 2{,}13 + \lg 0{,}001\\
& &&= 0{,}3284 - 3
\end{aligned}$$

allgemein:

$$\boxed{\lg x = \lg(r\cdot 10^k) = \lg r + \lg 10^k = \lg r + k \lg 10 = \lg r + k}$$

$\lg r$ $(1 \leqq r < 10)$ heißt <u>Mantisse</u>, k heißt <u>Kennzahl</u>.

[7] a) Jeder Logarithmus besteht aus <u>Kennziffer</u> und <u>Mantisse</u>.

b) Numeri mit gleicher Ziffernfolge haben stets dieselbe Mantisse.

c) Die Logarithmen der Numeri zwischen 0 und 1 haben eine negative Kennziffer.

<u>Bemerkung 3</u>:

Man führt numerische Rechnungen mit dekadischen Logarithmen aus, wenn Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln mehrstelliger Dezimalzahlen auftreten, Rechenstabgenauigkeit nicht ausreicht und ein elektronischer Rechner nicht zur Verfügung steht.

Dazu ist eine <u>Logarithmentafel</u> erforderlich. Diese enthält nur die Mantissen, da die Kennziffern der Logarithmen in jedem Falle leicht an Hand der Dezimalstellen zu bestimmen sind.

3.5.2. Beispiele und Anwendungen

a) $\log_5 625 = 4$, denn $5^4 = 625$;

b) $\log_8 0{,}5 = -\frac{1}{3}$, denn $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$;

c) $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$, denn $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$;

d) $\log_{\frac{1}{k}} (k^2) = -2$, denn $(\frac{1}{k})^{-2} = k^2$.

Beispiel 2:

a) $\log_2 (64 \cdot 8) = \log_2 64 + \log_2 8 = 6 + 3 = 9$,

b) $\log_2 (\frac{64}{8}) = \log_2 64 - \log_2 8 = 6 - 3 = 3$,

c) $\log_2 3^5 = 5 \log_2 3$,

d) $\log_2 \sqrt[3]{5} = \log_2 5^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 5$.

Beispiel 3:

a) $$\lg \frac{2\sqrt{a+b}\, a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}\,(a+c)^2} = \lg 2 + \frac{1}{2}\lg (a+b) + 3 \lg a + 2 \lg b - \frac{1}{3} \lg c - 2 \lg (a+c),$$

b) $$\lg (a+b) + 2 \lg (a-b) - \frac{1}{2} \lg (a^2 - b^2)$$
$$= \lg \frac{(a+b)(a-b)^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \lg \frac{(a^2 - b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$
$$= \lg \sqrt{a^2 - b^2}\,(a-b).$$

Beispiel 4:

a) Aufschlagen 4-stelliger dekadischer Logarithmen gegebener Numeri aus einer 4-stelligen Logarithmentafel.

1) $a = 35{,}40$: Kennzahl $k = 1$, Mantisse aus Tafel 5490, also $\lg a = 1{,}5490$;

2) $a = 7{,}670$: $k = 0$, Mantisse 8848, also $\lg a = 0{,}8848$;

3) $a = 0{,}04910$: $k = -2$, Mantisse 6911, also $\lg a = 0{,}6911 - 2$.

b) Aufschlagen der Numeri zu gegebenen Logarithmen

1) $\lg a = 2{,}8021$: Ziffernfolge des Numerus aus der Tafel 6340, Kennzahl $k = 2$, also $a = 634{,}0$;

2) $\lg a = 0{,}3139 - 3$: Ziffernfolge des Numerus 2060, $k = -3$, also $a = 0{,}002060$;

3) $\lg a = 0{,}6493$: Ziffernfolge des Numerus 4460, $k = 0$, also $a = 4{,}460$.

Beispiel 5:

a) Bestimmung von $\lg 6{,}254 = x$ durch lineare Interpolation.

Aus einer vierstelligen Logarithmentafel entnimmt man folgende Werte:

Numerus	Logarithmus
6,26	0,7966
6,25	0,7959
6,254	x

Tafeldifferenz (Mantissendifferenz) in Einheiten der letzten Stelle: $D = 7$,

Zuwachs der zugehörigen Numeri in Einheiten der letzten Stelle: 10,

Zuwachs zum "zwischengeschalteten" Numerus: $n = 4$.

Unter der Annahme, daß der zugehörige Mantissenzuwachs d der Änderung im Numerus proportial ist (vgl. Bild 37/1), ergibt sich: $7 : 10 = d : 4$, also $d = \frac{7}{10} \cdot 4 = 2{,}8 \approx 3$.

Somit ist:

$$\begin{array}{r} 0{,}7959 \\ +\quad 3 \\ \hline \lg 6{,}254 = 0{,}7962. \end{array}$$

Allgemein gilt: $D : 10 = d : n$, also $d = \frac{D}{10} \cdot n$.

Vielen Logarithmentafeln sind Proportionstafeln beigegeben, aus denen die Vielfachen von $\frac{D}{10}$ sofort abgelesen werden können.

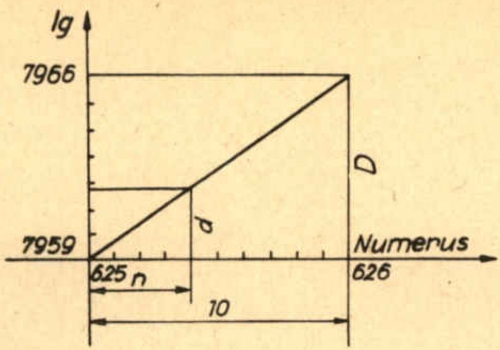


Bild 37/1

b) Gesucht ist x mit lg x = 1,4172 bis zur vierten gültigen Ziffer. Aus der Tafel entnimmt man folgende Werte:

Numerus	Logarithmus
26,20	1,4183
26,10	1,4166
x	1,4172

D = 17, d = 6. Aus der Proportionsgleichung von Beispiel 5a) ergibt sich $n = \frac{10 \cdot d}{D} = \frac{10 \cdot 6}{17} \approx 4$.

Somit ist:

$$\begin{array}{r} 26{,}10 \\ +\quad 4 \\ \hline x = 26{,}14. \end{array}$$

<u>Beispiel 6</u>:

a) $x = 160{,}6 \cdot 0{,}2856 \cdot 0{,}006998 = a \cdot b \cdot c,$

$\lg x = \lg a + \lg b + \lg c.$

lg a	2,2057	
lg b	0,4558 - 1	+.
lg c	0,8450 - 3	+
lg x	3,5065 - 4	
	0,5065 - 1	

<u>x = 0,3210</u>.

b) $x = \sqrt[5]{0{,}009028} = \sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$,

$\lg x = \frac{1}{5} \lg a.$

lg a	0,9556 - 3	
	2,9556 - 5	: 5
lg x	0,5911 - 1	

$\underline{x = 0{,}3900}$.

Beispiel 6b) zeigt, daß die negative Kennziffer oft erst umzuformen ist, damit die entsprechende Rechenoperation ausgeführt werden kann.

c) $x = 16{,}24^{\pi} = a^{\pi}$, $\lg x \quad = \pi \lg a$,

$\lg(\lg x) = \lg \pi + \lg(\lg a).$

lg a	1,2106	
lg(lg a)	0,0830	
lg π	0,4971	+
lg(lg x)	0,5801	

$\lg x = 3{,}803$, $\underline{x = 6353}$.

d) Bei umfangreichen logarithmischen Rechnungen achte man auch auf zweckmäßige und schreibarbeitsparende Anordnung. Das Aufsuchen des Numerus von Zwischenresultaten ist überflüssig, wenn mit dem Logarithmus weitergerechnet wird.

$$x = \frac{7{,}34 \cdot \sqrt{43{,}34}}{9{,}6^2 \cdot \sqrt[3]{18{,}2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{c^2 \cdot \sqrt[3]{d}},$$

$\lg x = (\lg a + \frac{1}{2} \lg b) - (2 \cdot \lg c + \frac{1}{3} \lg d) = Z - N.$

lg a	0,8657	+	
lg b	1,6369		
$\frac{1}{2}$ lg b	0,8185		
Z	1,6842		−
lg c	0,9823		
2 lg c	1,9646	+	
lg d	1,2601		
$\frac{1}{3}$ lg d	0,4200		
N	2,3846		

$\lg x = 0{,}2996 - 1$, $\underline{x = 0{,}1993}$.

3.5.3. Übungsaufgaben

A3/19. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach den Exponenten auf:

a) $2^4 = 16$, b) $a^{-7} = x$, c) $x^0 = 1$, d) $\sqrt{64} = 8$!

A3/20. Bestimmen Sie x aus folgenden Gleichungen:

a) $\log_2 x = 5$, b) $\log_x 25 = 2$, c) $\log_3 \frac{1}{9} = x$,

d) $\log_x 0{,}000001 = -6$, e) $\log_x 1 = 0$!

A3/21. Wenden Sie die Logarithmengesetze an!

a) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$, b) $\lg \left(\frac{a^3}{b}\right)^{\frac{5}{4}}$, c) $\lg (a^2 - b^2)$,

d) $\lg 2a + 2 \lg b + 2 \lg 2c$,

e) $\lg \frac{a}{b} + \lg (ab) - 2 \lg (a - b)$,

f) $\frac{1}{2} \log (a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \log (a - b) - \frac{1}{3} \log (a + b)$.

A3/22. Bestimmen Sie x !

a) $x = \lg 0{,}0754$, b) $\lg x = 0{,}6042 - 3$,

c) $\lg 2{,}345 = x$, d) $\lg x = 0{,}0086 - 1$.

A3/23. Berechnen Sie logarithmisch unter Verwendung einer vierstelligen Tafel!

a) $628 \cdot 2{,}349$, b) $\left(\frac{0.7583}{0.04704}\right)^5$, c) $\sqrt[3]{\frac{39430}{478^2}}$.

A3/24. Berechnen Sie ln 17, wenn lg 17 aus einer 4-stelligen Tafel entnommen wird!

A3/25.+) Vereinfachen Sie weitestgehend

$$z = \frac{\log_a \left(\frac{a^x}{y}\right) \log_b (y \cdot a^x)}{\log_b a} \quad (a > 1,\ b > 1,\ y > 0) !$$

4. Gleichungen

In diesem Abschnitt sind die gebräuchlichsten Gleichungsarten zusammengestellt.
Sicherheit im Lösen von Gleichungen gehört zu den Grundvoraussetzungen für ein Hochschulstudium. Nicht nur in der Mathematik, sondern praktisch in allen Lehrgebieten werden mittels Gleichungen analytische Zusammenhänge hergestellt und untersucht.
Deshalb ist die Reaktivierung der Kenntnisse und Fertigkeiten im Umgang mit Gleichungen in dem in diesem Abschnitt aufgezeigten Umfang für den Studienanfänger von besonderer Bedeutung.

4.1. Proportionen

4.1.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

1 Besitzen zwei Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ den gleichen Wert, so nennt man

$$\boxed{a : b = c : d}$$

Verhältnisgleichung oder Proportion.

Bemerkung:
In einer Proportion müssen natürlich $b \neq 0$ und $d \neq 0$ vorausgesetzt werden.

2 In jeder Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder:

$$\boxed{a \cdot d = b \cdot c}$$

heißt Produktgleichung.

3 Mit $a : b = c : d$ gelten auch die Proportionen
$d : b = c : a$, $a : c = b : d$, $d : c = b : a$.

4 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist gleichbedeutend mit $a = ck$, $b = dk$, k heißt Proportionalitätsfaktor.

5 $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$ heißt fortlaufende Proportion und ist gleichbedeutend mit $a_1 = a_2k$, $b_1 = b_2k$, $c_1 = c_2k$.

$\boxed{6}$ Zwei Größen x und y heißen zueinander <u>direkt proportional</u>, falls $y = kx$ gilt. Sie heißen <u>indirekt proportional</u>, falls $y = k \cdot \frac{1}{x}$ gilt.

4.1.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:
Teilung einer Strecke

Eine Strecke $a = 4{,}68$ m soll im Verhältnis 7 : 2 geteilt werden.

$x : y = 7 : 2$; $x = 7k$, $y = 2k$; $x + y = a$; $9k = a$,

$k = \frac{a}{9} = \frac{4{,}68\text{ m}}{9} = 0{,}52$ m; $\underline{x = 3{,}64\text{ m}}$; $\underline{y = 1{,}04\text{ m}}$.

Beispiel 2:
Bestimmung der vierten Proportionalen

Ein Kraftfahrzeug hat einen Benzinverbrauch von 8,9 ℓ auf 100 km. Wieviel km kann es mit einem Tankinhalt von 44 ℓ fahren?

Lösung: $8{,}9 : 100 = 44 : x$, $8{,}9x = 44 \cdot 100$, $\underline{x \approx 494{,}38}$.
Es können also rund 494,4 km zurückgelegt werden.

Beispiel 3:
Prozent- und Zinsrechnung

$b : a = p : 100$	b Prozentwert, a Grundwert, p Prozentsatz.
$z : a = p : 100$	z Zinsen, a Kapital, p Zinssatz.

4.1.3. Übungsaufgaben

A4/1. Welche Zahl läßt sich so in drei Summanden zerlegen, daß diese im Verhältnis 23 : 11 : 7 stehen und der größte von ihnen die Summe der beiden anderen um 100 übertrifft? Wie groß sind die Summe und die Summanden?

A4/2. Wieviel Zinsen bringen 1250,- M in 6 Jahren, wenn das verliehene Kapital mit 3 % verzinst wird und die Zinsen am Ende eines jeden Jahres vereinnahmt werden?

A4/3. Ein Draht mit der Länge $l_1 = 400$ m und dem Durchmesser $d_1 = 4$ mm hat die Masse $m_1 = 36{,}7$ kg. Wieviel Meter Draht aus dem gleichen Material, aber vom Durchmesser $d_2 = 6$ mm besitzt die Masse $m_2 = 90$ kg?

A4/4. Bestimmen Sie das arithmetische und das geometrische Mittel der Zahlen 18 und 2. Beim GM sind die Verhältnisse gleich!!

4.2. Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

4.2.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

[1] Eine Gleichung heißt lineare Gleichung für eine Unbekannte x, wenn sie sich durch äquivalente Umformungen auf die Form

$$\boxed{ax + b = 0}$$

bringen läßt.

[2] Äquivalente Umformungen sind:

1. Zusammenfassung entsprechender Glieder, die auf derselben Seite der Gleichung stehen.
2. Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Terms auf beiden Seiten.
3. Multiplikation bzw. Division beider Seiten mit bzw. durch dieselbe von Null verschiedene Zahl.

[3] Für $a \neq 0$ besitzt die lineare Gleichung die einzige Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

● $3x + 7 = \frac{2x + 3}{2}$,

$$3x + 7 = x + \frac{3}{2} \quad |- x - 7,$$

$$2x = -\frac{11}{2} \quad |: 2,$$

$$x = -\frac{11}{4}.$$

Durch nichtäquivalente Umformungen können Lösungen verschwinden oder hinzukommen.
Bei der Division beider Seiten einer Gleichung durch eine Variable oder ein Term, muß der Divisor stets ungleich Null sein. Es ist dabei darauf zu achten, daß keine Werte ausge-

schlossen werden, die eine Lösung der Ausgangsgleichung sind.

● $x(x - 7) = x(x - 3) \quad |: x \qquad (x \neq 0),$

$x - 7 = x - 3$ ist unlösbar.

Aber: $x(x - 7) = x(x - 3),$

$$x^2 - 7x = x^2 - 3x,$$
$$-4x = 0,$$
$$x = 0$$

ist die Lösung der Ausgangsgleichung.

Bei der Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einer Variablen oder einem Term kommen die Werte als Lösung hinzu, für die die betreffende Variable oder der Term gleich Null wird.

● $x - 1 = x$ besitzt keine Lösung.

$$x - 1 = x \quad | \cdot (x - 1),$$
$$(x - 1)(x - 1) = x(x - 1),$$
$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - x,$$
$$x = 1.$$

$x = 1$ ist aber keine Lösung der Ausgangsgleichung, denn die Probe ergibt: $1 - 1 \neq 1$.

4.2.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

$$\frac{3x - 19}{3} - \frac{x - 4}{2} = 12 \quad |\cdot 6,$$
$$2(3x - 19) - 3(x - 4) = 72,$$
$$6x - 38 - 3x + 12 = 72,$$
$$6x - 3x = 38 - 12 + 72,$$
$$3x = 98,$$
$$\underline{x = \frac{98}{3}}.$$

Beispiel 2:

$$\frac{4x - 1}{3x + 2} - \frac{2x + 5}{3x - 2} = \frac{6x^2 + 7}{9x^2 - 4}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(3x + 2)(3x - 2) \neq 0$:

$$(4x - 1)(3x - 2) - (2x + 5)(3x + 2) = 6x^2 + 7,$$
$$12x^2 - 3x - 8x + 2 - 6x^2 - 15x - 4x - 10 = 6x^2 + 7,$$
$$-30x = 15,$$
$$\underline{x = -\tfrac{1}{2}}.$$

Da $x = -\frac{1}{2}$ die obige Bedingung $(3x + 2)(3x - 2) \neq 0$ erfüllt, liegt damit die (einzige) Lösung der Ausgangsgleichung vor.

Beispiel 3:

$$\frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{x^2 - x}{x - 1} + x + 1.$$

Multiplikation mit dem Nenner $(x - 1) \neq 0$:

$$2x^2 - 2 = x^2 - x + (x + 1)(x - 1),$$
$$2x^2 - 2 = x^2 - x + x^2 - 1,$$
$$x = 1.$$

Da $x = 1$ die obige Bedingung $(x - 1) \neq 0$ nicht erfüllt, besitzt die Gleichung keine Lösung.

Beispiel 4:

$$\frac{a}{1 - bx} = \frac{b}{1 - ax} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0),$$

Für $(1 - bx) \neq 0$ und $(1 - ax) \neq 0$ gilt:

$$a(1 - ax) = b(1 - bx),$$
$$a - a^2x = b - b^2x,$$
$$(b^2 - a^2)x = b - a.$$

I. Fall: Für $\underline{(b^2 - a^2) \neq 0}$, also $b^2 \neq a^2$ gilt:

$$x = \frac{b - a}{b^2 - a^2} = \frac{1}{b + a}.$$

Für $b^2 = a^2$ gibt es zwei Fälle, nämlich $b = a$ und $b = -a$.

II. Fall: Für $\underline{b = a}$ gilt $0 \cdot x = 0$. Jede reelle Zahl x ist Lösung der Gleichung, ausgenommen $x = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$.

III. Fall: Für $\underline{b = -a}$ gilt $0 \cdot x = -2a \neq 0$. Deshalb besitzt die Gleichung in diesem Falle keine Lösung.

Dieses Beispiel zeigt:
Zur Bestimmung der Lösung einer Gleichung ist oft eine Fallunterscheidung erforderlich. Denken Sie immer daran, daß zu jeder mathematischen Aussage die Kenntnis des Gültigkeitsbereiches gehört. Hier sind dies die Lösbarkeitsbedingungen der Gleichungen.

Beispiel 5:
Beispiel für das Lösen einer Sachaufgabe
Von zwei Orten A und B, die 140 km voneinander entfernt sind, fahren zwei Lastwagen einander entgegen, der erste mit der Geschwindigkeit 60 km/h, der zweite mit 45 km/h. Die Abfahrt erfolgt gleichzeitig. Wann und wo begegnen sie sich?
Entfernung zwischen A und B: $s = 140$ km,
Geschwindigkeit des 1. Wagens: $v_1 = 60$ km/h,
Geschwindigkeit des 2. Wagens: $v_2 = 45$ km/h,
Fahrzeit beider Wagen bis zur Begegnung: t,
Weg des 1. Wagens bis zur Begegnung: s_1,
Weg des 2. Wagens bis zur Begegnung: s_2.

$$s_1 = v_1 t, \quad s_2 = v_2 t, \quad s_1 + s_2 = s,$$

$$s = v_1 t + v_2 t = (v_1 + v_2)t,$$

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{140 \text{ km}}{(60 + 45)\text{km/h}} = \frac{4}{3} \text{ h} = 80 \text{ Minuten.}$$

Daraus folgt $s_1 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{4}{3} \text{ h} = 80 \text{ km}$ und

$$s_2 = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{4}{3} \text{ h} = 60 \text{ km}.$$

4.2.3. Übungsaufgaben

A4/5. $(x + 1)(x + a) + b = 2a + (x + 2)(x + b)$.

A4/6. $\frac{5x - 3}{8} - \frac{6x + 7}{7} + 3 = 0$.

A4/7. $\frac{10x - 1}{6x + 3} - \frac{6x + 2}{2(2x - 1)} = \frac{4x^2 - 60x + 2}{24x^2 - 6}$.

A4/8. $\frac{bx}{a} - \frac{a}{b}(x - a) = b$.

147
54
93

A4/9. Lösen Sie die folgenden Formeln nach den angegebenen Größen auf:

a) $v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$, nach s_1 und t_1;

b) $J = \frac{n \cdot U}{nR_i + R_a}$, nach n und R_a !

A4/10. Auf einer Auslandsfahrt sind Sie gezwungen, an einer Tankstelle zu tanken, die keine Mischsäule hat. Der Tank ihres Autos faßt noch 21 Liter, das Mischungsverhältnis muß 1 : 50 sein.
Wieviel Liter Benzin und wieviel Liter Öl sind zu tanken, wenn der Tank voll werden soll?

A4/11. Welche Zeit benötigt ein mit konstanter Geschwindigkeit von 48 km/h fahrender 10 m langer Omnibus, um beim Überholen einer Zugmaschine mit zwei Hängern von insgesamt 15 m Länge an dieser vorbeizufahren, wenn deren konstante Geschwindigkeit 36 km/h beträgt?
Welche Strecke hat der Omnibus dabei zurückzulegen?

4.3. Quadratische Gleichungen

4.3.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

1 Eine Gleichung mit einer Unbekannten x heißt eine quadratische Gleichung, wenn sie sich durch Umformungen auf die Form

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

bringen läßt.

Die Lösungen der quadratischen Gleichung werden mit der quadratischen Ergänzung gefunden. Man bildet unter Anwendung der binomischen Formel

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0,$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geqq 0.$$

Nach Abschnitt 3.4.2., Beispiel 4, läßt sich aus der linken Seite die Wurzel ziehen:

$$|x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Die Auflösung des absoluten Betrages liefert:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{für} \quad (x + \frac{p}{2}) \geqq 0,$$

$$-(x + \frac{p}{2}) = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{für} \quad (x + \frac{p}{2}) < 0.$$

Daraus folgen die <u>beiden Lösungen</u> (auch <u>Wurzeln</u> genannt) der quadratischen Gleichung:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

2 Die Lösungen einer quadratischen Gleichung werden nach folgender <u>Lösungsformel</u> ermittelt:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}}$$

3 Der Radikand $D = (\frac{p}{2})^2 - q$ heißt <u>Diskriminante</u> und ist für die Anzahl der existierenden Lösungen entscheidend:

1. $D > 0$: zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2,
2. $D = 0$: eine Lösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$ (Doppelwurzel),
3. $D < 0$: keine reelle Lösung.

4 Eine <u>Rechenkontrolle</u> ist mit dem <u>VIETAschen Wurzelsatz</u> möglich:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Es gilt:

$$\underline{x^2 + px + q} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2$$
$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = \underline{(x - x_1)(x - x_2)}.$$

5 Liegt eine quadratische Gleichung in der Gestalt $(x - a)(x - b) = 0$ vor, so kann man ihre Lösungen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ sofort ablesen.

4.3.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = -\left(-\tfrac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2}; \quad \underline{x_1 = 2}, \quad \underline{x_2 = -1}.$$

Rechenkontrolle: $x_1 + x_2 = 2 - 1 = 1 = -p,$

$x_1 \cdot x_2 = -2 = q.$

Beispiel 2:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x^2 - x + \tfrac{1}{4} = 0,$$

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}}; \quad x_{1,2} = \tfrac{1}{2}, \; x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}$$ (Doppelwurzel);

oder: $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0,$

$|2x - 1| = 0,$

$-(2x - 1) = 0$ und $2x - 1 = 0$; $\underline{x_{1,2} = \tfrac{1}{2}}$ (Doppelwurzel).

Beispiel 3:

$$2x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{2} = 0, \quad D = \tfrac{p^2}{4} - q = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4} < 0,$$

also besitzt die Gleichung keine reelle Lösung.

Beispiel 4:

a) $4x^2 - 25 = 0, \quad x^2 = \tfrac{25}{4},$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\tfrac{25}{4}},$

$|x| = \tfrac{5}{2}; \quad \underline{x_1 = \tfrac{5}{2}}, \quad \underline{x_2 = -\tfrac{5}{2}}.$

b) $x^2 - 6x = 0,$

$x(x - 6) = 0; \quad \underline{x_1 = 0}, \quad \underline{x_2 = 6}.$

c) $(2x - 3)^2 = 49,$ (Die linke Seite der Gleichung wird nicht erst ausmultipliziert!)

$|2x - 3| = 7,$

für $2x - 3 \geqq 0$: $\quad 2x - 3 = 7, \quad \underline{x_1 = 5},$

für $2x - 3 < 0$: $\quad -(2x - 3) = 7, \quad \underline{x_2 = -2}.$

Beispiel 5:

$$(x - 3)(2 - 3x) = 0.$$

Die Gleichung braucht nicht ausmultipliziert zu werden. Ein Produkt ist genau denn gleich Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist.

Aus diesem Satz folgt:

$$(x - 3) = 0, \quad \underline{x_1 = 3}; \qquad (2 - 3x) = 0, \quad \underline{x_2 = \tfrac{2}{3}}.$$

Beispiel 6:

$$x^2 - 6x + 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 4} = 3 \pm \sqrt{5},$$

$$\underline{x_1 = 3 + \sqrt{5} \approx 5,2361},$$

$$\underline{x_2 = 3 - \sqrt{5} \approx 0,7639}.$$

Die Probe wird mit den exakten Werten, nicht mit den Näherungswerten durchgeführt:

$$(3 + \sqrt{5})^2 - 6(3 + \sqrt{5}) + 4 = 0,$$

$$9 + 6\sqrt{5} + 5 - 18 - 6\sqrt{5} + 4 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Beispiel 7:

Biquadratische Gleichung

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0.$$

Man setzt $z = x^2$: $\quad z^2 - 29z + 100 = 0,$

$$z_{1,2} = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\frac{841}{4} - 100},$$

$$z_{1,2} = \frac{29}{2} \pm \frac{21}{2}; \quad z_1 = 25, \quad z_4 = 4.$$

$$z_1 = 25, \quad \text{d.h.} \quad x^2 = 25; \quad \underline{x_1 = 5}, \quad \underline{x_2 = -5}$$

$$z_2 = 4, \quad \text{d.h.} \quad x^2 = 4; \quad \underline{x_3 = 2}, \quad \underline{x_4 = -2}.$$

Beispiel 8:

Zwei Drähte, deren Widerstände sich um 1 Ohm unterscheiden, ergeben bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von $\frac{2}{3}$ Ohm. Wie groß sind die Einzelwiderstände?

Es sind bekannt: Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung $r = \frac{2}{3}$ Ohm,
Differenz der beiden Widerstände $d = 1$ Ohm.

Es sind unbekannt: Widerstand des 1. Drahtes: x,
Widerstand des 2. Drahtes: y.

Es gilt: $y - x = d$ (nach Aufgabenstellung),
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{r}$ (Parallelschaltung).

$$y = x + d, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x + d} = \frac{1}{r}; \quad (2x + d)r = x(x + d),$$

$$x^2 + (d - 2r)x - dr = 0, \quad x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{2}{3}}, \quad x_{1,2} = \frac{1}{6} \pm \frac{5}{6},$$

$$x_1 = 1 \text{ Ohm}, \qquad x_2 = -\frac{2}{3} \text{ Ohm}.$$

$x_2 < 0$ kommt als Lösung dieser Aufgabe nicht in Frage.
$x = 1$ Ohm und $y = 2$ Ohm ist damit einzige Lösung der Aufgabe.

4.3.3. Übungsaufgaben

A4/12. $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0.$ A4/13. $\frac{5 + 2x}{3 - 2x} - \frac{4 - 3x}{x} = \frac{2x}{x - 1}.$

A4/14. $9x^2 - 12x + 4 = 0.$ A4/15. $x^2 + 2x + 5 = 0.$

A4/16. a) $(ax + b)(ax - b) = 0,$

b) $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0,$

c)$^{+)}$ $x^2 - 6|x| + 8 = 0$ (Fallunterscheidung!).

A4/17. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0.$ A4/18. $2x - 21\sqrt{x} + 10 = 0.$

A4/19.$^{+)}$ Lösen Sie die Gleichung $a^2 + \frac{a}{x} + x = 0$ $(x \neq 0)$ nach a auf! Für welche Werte von x besitzt die Gleichung reelle Lösungen?

A4/20. Bestimmen Sie die quadratischen Gleichungen mit den Wurzeln:

a) $2; -3$, b) $0; 1$, c) $3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2}$, d) $\frac{a + b}{a - b}; \frac{a - b}{a + b}$!

A4/21. Wenn man den Durchmesser eines Kreises um 3 cm vergrößert, so wird der Flächeninhalt des Kreises verdoppelt. Wie groß war der Durchmesser des ursprünglichen Kreises?

4.4. Wurzelgleichungen

4.4.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ Gleichungen, in denen die Unbekannte x im Radikanden einer Wurzel auftritt, heißen Wurzelgleichungen.

$\boxed{2}$ Die auftretenden Wurzeln können durch ein- oder mehrmaliges Potenzieren der Gleichung beseitigt werden.

$\boxed{3}$ Durch das Potenzieren der Wurzelgleichung können sich Lösungen ergeben, die die Ausgangsgleichung jedoch nicht erfüllen. Solche „Scheinlösungen" sind durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auszuschließen. Die Probe ist damit nicht nur Rechenkontrolle, sondern zur Ermittlung der tatsächlichen Lösungen logisch notwendig.

4.4.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

a)
$$\begin{aligned} \sqrt{2x+5} - 5 &= 0, \\ \sqrt{2x+5} &= 5, \\ 2x + 5 &= 25, \\ x &= 10, \end{aligned}$$

Probe:
$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 10 + 5} - 5 &= 0, \\ \sqrt{25} - 5 &= 0, \\ 5 - 5 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung: $x = 10$.

b)
$$\begin{aligned} \sqrt{2x+5} + 5 &= 0, \\ \sqrt{2x+5} &= -5, \\ 2x + 5 &= 25, \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{25} + 5 \neq 0$.

$x = 10$ ist also keine Lösung der Ausgangsgleichung. Daß die Gleichung keine Lösung besitzt, hätte man sofort erkennen können, da $\sqrt{2x+5} \geqq 0$ sein muß.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} &= \sqrt{2x-1}, \\ (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^2 &= (\sqrt{2x-1})^2, \\ x - 2\sqrt{x}\,\sqrt{x-1} + x - 1 &= 2x - 1, \\ -2\sqrt{x(x-1)} &= 0, \\ 4x(x-1) &= 0, \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

Probe: $x_1 = 0$: $\sqrt{0} - \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ nicht definiert.

$x_2 = 1$: $\sqrt{1} - \sqrt{0} = \sqrt{1}$,

$1 = 1$.

Lösung: $x = 1$.

Beispiel 3:

$$\sqrt{2x + 13} + \sqrt{3x - 17} = \sqrt{x + 30}.$$

Quadrieren: $2x + 13 + 2\sqrt{(2x + 13)(3x - 17)} + 3x - 17 = x + 30$,

Ordnen: $2\sqrt{(2x + 13)(3x - 17)} = -4x + 34$,

Division durch 2: $\sqrt{(2x + 13)(3x - 17)} = -2x + 17$,

Quadrieren: $(2x + 13)(3x - 17) = 4x^2 - 68x + 289$,

Ausmultiplizieren und ordnen: $2x^2 + 73x - 510 = 0$,

$$x^2 + \frac{73}{2}x - \frac{510}{2} = 0,$$

$$x_{1,2} = -\frac{73}{4} \pm \sqrt{\frac{5329}{16} + \frac{4080}{16}},$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = \frac{85}{2}.$$

Probe: $x_1 = 6$: $\sqrt{25} + \sqrt{1} = \sqrt{36}$,

$5 + 1 = 6$.

$x_2 = \frac{85}{2}$: $\sqrt{98} + \sqrt{\frac{221}{2}} \neq \sqrt{\frac{145}{2}}$.

Lösung: $x = 6$.

4.4.3. Übungsaufgaben

A4/22. $x + \sqrt{x^2 - 25} = 25$.

A4/23. $\sqrt{x} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x + 8}$.

A4/24. $\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x + 7}} = 4$.

A4/25.+) $\sqrt{a - x} - \sqrt{b - x} = \frac{a - b}{\sqrt{b - x}}$.

4.5. Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

4.5.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ Gleichungen, in denen die Unbekannte x im Exponenten einer Potenz oder einer Wurzel auftritt, heißen Exponentialgleichungen.

- $2^x = 16$, $a^{3-x} = 2b^x$, $\sqrt[x+1]{0{,}26} = 100$.

$\boxed{2}$ Gleichungen, in denen die Unbekannte x im Numerus eines Logarithmus oder als Basis eines Logarithmus auftritt, heißen logarithmische Gleichungen.

- $\lg(3x - 1) = 0{,}301$, $\log_x 36 = 2$, $\lg 5^x + \lg 2^x - 1 = 0$.

Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen gehören zu den transzendenten Gleichungen, die sich nur in einfachen Fällen nach der Unbekannten auflösen lassen. In allen anderen Fällen sind Näherungslösungen erforderlich.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich nur mit den einfachsten Formen dieser Gleichungsarten.

$\boxed{3}$ Einfache Exponentialgleichungen können durch Logarithmieren gelöst werden, während bei einfachen logarithmischen Gleichungen Exponieren zum Ziel führt.

$\boxed{4}$ Bei der Lösung von Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen ist die Probe durch Einsetzen der gewonnenen Werte in die Ausgangsgleichung logisch notwendig.

4.5.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Exponentialgleichungen

a)
$$3^x = \frac{1}{9},$$
$$\lg 3^x = \lg \frac{1}{9},$$
$$x \lg 3 = \lg 1 - \lg 9 = -\lg 9,$$
$$x = \frac{-\lg 9}{\lg 3} = \frac{-\lg 3^2}{\lg 3} = \frac{-2\lg 3}{\lg 3} = \underline{-2}.$$

Probe: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

b) $\sqrt[x]{\frac{25}{22}} = \frac{15}{7}$,

$(\frac{25}{22})^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$,

$\frac{1}{x} \lg \frac{25}{22} = \lg \frac{15}{7}$,

$$x = \frac{\lg \frac{25}{22}}{\lg \frac{15}{7}} = \frac{\lg 25 - \lg 22}{\lg 15 - \lg 7} = \frac{0,0555}{0,3310},$$

$\underline{x = 0,1677}$.

Probe: linke Seite: $\sqrt[0,1677]{\frac{25}{22}} = (\frac{25}{22})^{\frac{1}{0,1677}}$,

$$\frac{1}{0,1677} \lg \frac{25}{22} = \frac{0,0555}{0,1677} = 0,3309.$$

rechte Seite: $\lg \frac{15}{7} = 0,3310$.

Die Lösung $x = 0,1677$ wird bestätigt, die auftretende Differenz in der Probe resultiert aus den Rundungsfehlern der Logarithmenwerte.

c) $(\frac{4}{5})^{x-7} = (\frac{25}{16})^{x+3}$,

$(\frac{4}{5})^{x-7} = (\frac{5}{4})^{2(x+3)}$,

$(x - 7)\lg \frac{4}{5} = 2(x + 3)\lg \frac{5}{4}$.

Da $\lg \frac{5}{4} = \lg(\frac{4}{5})^{-1} = - \lg \frac{4}{5}$, folgt aus der Gleichung:

$$(x - 7) = - 2(x + 3),$$

$$\underline{x = \frac{1}{3}}.$$

Probe: linke Seite: $(\frac{4}{5})^{\frac{1}{3}-7} = (\frac{4}{5})^{-\frac{20}{3}} = (\frac{5}{4})^{\frac{20}{3}}$,

rechte Seite: $(\frac{25}{16})^{\frac{1}{3}+3} = (\frac{5}{4})^{2(\frac{10}{3})} = (\frac{5}{4})^{\frac{20}{3}}$.

Beispiel 2:

Logarithmische Gleichungen

a) $\log_3 9x = 5,$

$$3^{\log_3 9x} = 3^5,$$

$$9x = 3^5,$$

$$\underline{x} = \frac{243}{9} = \underline{27}.$$

Probe: $\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5.$

b) $\log_x \frac{1}{64} = -6$. Nach der Definition des Logarithmus ist diese Gleichung gleichwertig mit

$$x^{-6} = \frac{1}{64},$$

$$x^{-6} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}, \quad \text{d.h.} \quad \underline{x = 2}.$$

Probe: $\log_2 \frac{1}{64} = -6$, denn $2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$.

c) $2 \lg(x - 1) = \lg(x + 5),$

$$10^{2 \lg(x-1)} = 10^{\lg(x+5)},$$

$$(x - 1)^2 = x + 5,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1.$$

Probe:

$x_1 = 4$: $\quad 2 \lg 3 - \lg 9 = 2 \lg 3 - \lg 3^2 = 2 \lg 3 - 2 \lg 3 = 0.$

$x_2 = -1$: entfällt als Lösung, da $\lg(-1 - 1) = \lg(-2)$ nicht definiert ist.

Einzige Lösung: $\underline{x = 4}$.

4.5.3. Übungsaufgaben

A4/26. a) $2^{x-1} = 3,$ b) $3^{2x-4} = 729.$

A4/27. $2^{x-7} = 4^{x+3}.$ A4/28. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-6}.$

A4/29. a) $\log_x 243 = 5$,

b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$.

A4/30. $\lg x^6 = \lg x^3 + 6$.

A4/31. $\lg(\frac{8}{x+4} - 1) = \lg(\frac{16}{4-x}) - \lg(x+4)$.

5. Ungleichungen

Dieser Abschnitt dient der Reaktivierung von Grundkenntnissen über Ungleichungen und der Herausbildung von Rechenfertigkeiten beim Umgang mit linearen Ungleichungen einer Variablen.

Diese Voraussetzungen werden unmittelbar zu Studienbeginn bei der Behandlung komplizierterer Ungleichungen benötigt. Da die Rechenregeln für alle Ungleichungen gelten, ist es wichtig, daß Sie den Umgang mit diesen Rechengesetzen am Beispiel des einfachsten Ungleichungstyps üben und festigen.

Ungleichungen werden u. a. zur Bestimmung und Kennzeichnung von Definitionsbereichen und Intervallen benutzt. Diese Anwendungen sind für den Studienbeginn besonders wichtig (vgl. auch Abschnitt „Elementare Funktionen").

5.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

$\boxed{1}$ Ungleichungen sind Ausdrücke, in denen die Zeichen

$<$ kleiner als

$>$ größer als

$\leqq$ gleich oder kleiner als (höchstens gleich)

$\geqq$ gleich oder größer als (mindestens gleich)

vorkommen.

Bemerkung 1:

Steht zwischen zwei Ausdrücken das Zeichen $\lessgtr$ oder $\neq$, so wird damit nur angezeigt, daß die beiden Ausdrücke verschieden voneinander sind. Es handelt sich nicht um Ungleichungen im obigen Sinne.

Werden Terme durch obige Ungleichheitszeichen verbunden, so liegen Ungleichungen mit Variablen vor. Im folgenden werden nur Ungleichungen mit einer Variablen betrachtet.

● $3a + 1 > -2$ (1)

$x^2 + x - 6 > 0,$ (2)

$2u \leqq 3u + 5,$ (3)

$\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} \geqq 1.$ (4)

2 Lösungen einer Ungleichung mit einer Variablen sind alle Zahlen, die die Ungleichung erfüllen (d. h. die Ungleichung zu einer wahren Aussage machen).
Die Gesamtheit aller Lösungen bzgl. des gegebenen Grundbereiches der Variablen heißt Lösungsmenge der Ungleichung.

3 Zwei Ungleichungen heißen äquivalent (oder gleichwertig), wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Das Auflösen einer Ungleichung erfolgt durch schrittweises Umformen in einander äquivalente Ungleichungen. Diese äquivalenten Umformungen werden mit dem Ziel durchgeführt, die Variable zu isolieren.

In diesem Abschnitt sollen nur Ungleichungen der Form $ax + b > 0$ bzw. $ax + b \geqq 0$ (mit $a \neq 0$) sowie zu diesen Formen äquivalente Ungleichungen gelöst werden.

4 Für das Umformen von Ungleichungen gelten die folgenden allgemeingültigen Regeln:

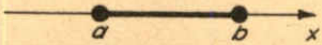
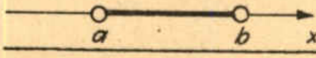
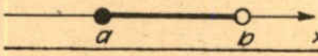
1. In einer Ungleichung darf man auf beiden Seiten die gleiche reelle Zahl (oder Term[1]) addieren oder subtrahieren;
   d. h., aus $a < b$ und c beliebig folgt:
   $$a \pm c < b \pm c.$$
2. Eine Ungleichung darf man mit einer positiven Zahl multiplizieren oder durch eine positive Zahl dividieren;
   d. h., aus $a < b$ und $c > 0$ folgt:
   $$a \cdot c < b \cdot c \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$
3. Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um;
   d. h., aus $a < b$ und $d < 0$ folgt:
   $$a \cdot d > b \cdot d \quad \text{oder} \quad \frac{a}{d} > \frac{b}{d}.$$

[1] Der Term muß natürlich im gleichen Grundbereich (z. B. Menge aller reellen Zahlen) wie die Variable der gegebenen Ungleichung definiert sein.

Bemerkung 2:

In der Regel 3. liegen die eigentlichen Unterschiede im Rechnen zwischen Gleichungen und Ungleichungen.

5 Ungleichungen zur Kennzeichnung von Intervallen

Darstellung	Bedeutung
abgeschlossenes Intervall $a \leqq x \leqq b$ oder $[a,b]$[1] 	Menge aller reellen Zahlen von a bis b (einschließlich a und b).
offenes Intervall $a < x < b$ oder (a,b) 	Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b (ausschließlich a und b).
halboffenes Intervall $a \leqq x < b$ oder $[a,b)$ 	Menge aller reellen Zahlen zwischen a und b (einschließlich a, aber nicht b).

5.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Es sind alle reellen Zahlen x gesucht, die die Ungleichung $2x - 3 < x + 1$ erfüllen.

Die Lösungen der Ungleichung werden durch äquivalente Umformungen unter Anwendung der Umformungsregeln ermittelt.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< x + 1 \quad |+3, \\ 2x &< x + 4 \quad |-x, \\ \underline{x} &\underline{< 4}. \end{aligned}$$

Alle drei Ungleichungen sind einander äquivalent; die letzte liefert die Lösungen: die Ungleichung wird von allen reellen Zahlen x erfüllt, für die $x < 4$ gilt. Damit lautet die Lösungsmenge L:

$$L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x < 4\} \quad \text{oder} \quad L = (-\infty, 4).$$

---

[1] In der Schule wird dafür die Symbolik $\langle a;b \rangle$ verwendet.

Beispiel 2:

$x + \frac{3}{2} \leqq 2x + 1$. Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen dieser Ungleichung.

$$\begin{aligned} x + \tfrac{3}{2} &\leqq 2x + 1 &&| - 2x,\\ -x + \tfrac{3}{2} &\leqq 1 &&| - \tfrac{3}{2},\\ -x &\leqq -\tfrac{1}{2} &&| : (-1),\\ \underline{x \geqq \tfrac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösungsmenge L lautet:

$$L = \{x \mid x \in G \text{ und } x \geqq \tfrac{1}{2}\} = \{1,2,3,\ldots\}.$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} &\tfrac{3}{2}x + 3 > x \quad \text{und} \quad x \in R.\\ &\tfrac{1}{2}x + 3 > 0,\\ &\tfrac{1}{2}x > -3,\\ &\underline{x > -6}. \end{aligned}$$

Lösungsmenge $L = \{x \mid x \in R \text{ und } x > -6\}$ oder $L = (-6,+\infty)$. Für diese Lösungen soll die Probe durchgeführt werden. Zu diesem Zweck schreibt man die Lösungsmenge als Gleichung: aus $x > -6$ wird $x = -6 + a$ mit $a > 0$ ($a \in R$).

$x = -6 + a$ wird in die gegebene Ungleichung eingesetzt und liefert:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}(-6 + a) + 3 &> -6 + a,\\ -9 + \tfrac{3}{2}a + 3 &> -6 + a,\\ \tfrac{3}{2}a &> a. \end{aligned}$$

Da $a > 0$ vorausgesetzt wurde, ist die letzte Ungleichung immer richtig und damit das Ergebnis bestätigt.

Beispiel 4:

$$\frac{2}{1 - x} \geqq 1 \quad \text{und} \quad x \in R.$$

Auch diese Ungleichung ist linear, denn sie läßt sich durch äquivalente Umformungen auf die Form $ax + b \geqq 0$ bringen.

Zur Ermittlung der Lösungen muß die Ungleichung mit $1 - x$ multipliziert werden. Da aber bei der Multiplikation (nach Regel 2. und 3.) das Vorzeichen des Faktors Einfluß auf das

Ungleichheitszeichen hat, muß eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

<u>1. Fall</u>: $1 - x > 0$,
$\underline{x < 1}$.

(Warum darf es nicht $1 - x \geqq 0$ heißen?)

$$\frac{2}{1 - x} \geqq 1,$$
$$2 \geqq 1 - x,$$
$$\underline{x \geqq - 1}.$$

Somit: $\underline{-1 \leqq x < 1}$.

<u>2. Fall</u>: $1 - x < 0$,
$\underline{x > 1}$.

$$\frac{2}{1 - x} \geqq 1,$$
$$2 \leqq 1 - x,$$
$$\underline{x \leqq - 1}.$$

$x > 1$ und $x \leqq - 1$ sind ein Widerspruch, deshalb liefert der 2. Fall keine Lösungen.

Lösungsmenge $L = \{x \mid x \in R \text{ und } -1 \leqq x < 1\}$ oder
$L = [-1,1)$.

5.3. <u>Übungsaufgaben</u>

Es sind die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen zu bestimmen:

A5/1. $2x + 3 \leqq x + 4$, A5/2. $2x - 17 < 13 + 6x$,

A5/3. $2(x + 3) \leqq 3(x - 2) - x$, A5/4. $3x + 4 < 5(2 - x) + 8x$,

A5/5. $-7a - 1 > 2(a + 4) - 3a$,

A5/6. $3(x + 2) - 4x < 3(2x - 1) + 4$,

A5/7.$^{+)}$ $\frac{1}{3 - x} < 1$.

A5/8.$^{+)}$ Eine Stadt liegt an einem Fluß. Oberhalb der Stadt entsteht am Fluß ein Naherholungszentrum. In welcher Entfernung von der Stadt sollte die Dampferanlegestelle des Erholungsgebietes gebaut werden, damit die reine Fahrzeit des Dampfers von der Stadt zu dieser Stelle und zurück nicht größer als $1\frac{1}{2}$ h ist? Die Geschwindigkeit des Dampfers sei 12 kmh^{-1}, die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses sei 4kmh^{-1}.

Lösungen

A1/1. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$.

A1/2. $A \subset C$, $B \subset C$, $B = D$.

A1/3. Die Elemente der einen Menge sind Seminargruppen, während die Elemente der anderen Menge Fernstudenten sind.

A2/1. Es ist z. B. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3 \in N$. Die irrationalen Zahlen bilden keinen Zahlenbereich.

A2/2.

rat. Z.	-5; $3{,}14159$; $3{,}14\overline{159}$; $0{,}101010\ldots$; $\sqrt{0{,}\overline{36}}$; $-1{,}21$
irrat. Z.	π; $3{,}14159\ldots$; e; $\sqrt{5}$; lg 8

A2/3. a) z. B. -2, 1903.

b) z. B. $\left(\frac{17}{23} + \frac{18}{23}\right) : 2 = \frac{35}{46}$.

A2/4. $z_1 = 0{,}272 \in P$; $z_2 = 0{,}2726\ldots \in R$.

A2/5.
$$\begin{aligned} 10000a &= 2432{,}\overline{32} \\ -\quad 100a &= 24{,}\overline{32} \\ \hline 9900a &= 2408 \\ a &= \frac{2408}{9900} = \frac{602}{2475}. \end{aligned}$$

A3/1. $a = 0{,}4$, $b = -1{,}1$, $a > b$, $|b| > |a|$.

A3/2. a) $6x^3 - 12x^2 - 30x - 27$,

b) $5ac^2 - 8bc + 9ab^2 - 2bc^3$.

A3/3. a) $(2a + 3b)^2$, b) $(8Q + 6R)(8Q - 6R)$, c) $(x - 1)(y - 1)$.

A3/4. a) $u^2 + uv + v^2$, b) $x^2 - 2x + 2 - \frac{1}{x-2}$,

c) $3a + b + \frac{25b^2}{2a - 5b}$, d) $2x^2 + 9y^4 + 6xy^2$.

A3/5. a) $-\frac{3}{200}$, b) $\frac{a(5a - 6b)}{2b}$, c) $\frac{c - d}{a^2 + b^2}$.

A3/6. a) $\frac{5}{144}$, b) $\frac{9}{a - 3}$, c) $\frac{30y - 7x}{6xy + 12y^2}$.

A3/7. a) $\frac{3bcd - 9bd^2}{12ac^2 - 4acd}$, b) $\frac{243x + 729y}{8x - 24y}$.

A3/8. a) $\frac{7}{18}$, b) $\frac{u + v}{u - v}$, c) $\frac{a^2 + b^2}{2a^2}$.

A3/9. a) -8, b) $6(a - 1)^3$, c) $\frac{1}{q^{n+1}}$.

A3/10. $\frac{10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^7$.

A3/11. a) $\frac{6a^2x^3}{y^3(1 - x)}$, b) $a^{2n} + b^{2n}$.

A3/12. a) 216, b) 1944, c) $\frac{8}{(5u + 2v)^3}$, d) $a^2b(x + y)^2$,

e) $(a + b)^{-\frac{3}{2}}[1 + (a + b)] = (a + b)^{-\frac{1}{2}}[(a + b)^{-1} + 1]$.

A3/13. a) $(xy)^3$, b) $\frac{y^2 + x^2}{y^2 - x^2}$, c) $9b^{-6}c$.

A3/14. a) $45xy$, b) $6\sqrt[3]{4}$, c) $\sqrt{5}(1 + \sqrt{2})$, d) $3\sqrt[3]{4} - 9\sqrt[3]{2}$,

e) $2\sqrt{10} - 2\sqrt{6}$, f) $56 + 14\sqrt{15}$, g) $26 + 27\sqrt{6}$, h) $\sqrt[3]{2}$.

A3/15. a) $\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$, b) $\frac{5}{4}(5 + \sqrt{5})$, c) $1 + \sqrt{2}$.

A3/16. a) $10\sqrt[6]{10}$, b) $x^2\sqrt[4]{x}$, c) $\sqrt[24]{a}$, d) $\sqrt[12]{2}$.

A3/17. $\sqrt{(a - 1)^2} = |a - 1|$.

A3/18. a) $b \geqq 0$; b) $-a \geqq 0$, d.h. $a \leqq 0$; c) $\frac{1}{x} \geqq 0$, d.h. $x \geqq 0$;

d) $x - y \geqq 0$, d.h. $x \geqq y$; e) $1 - a \geqq 0$, d.h. $a \leqq 1$;

f) $3b - 2 \geqq 0$, d.h. $b \geqq \frac{2}{3}$.

A3/19. a) $\log_2 16 = 4$, b) $\log_a x = -7$, c) $\log_x 1 = 0$,

d) $64^{\frac{1}{2}} = 8$, $\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$.

A3/20. a) $x = 32$, b) $x = 5$, c) $x = -2$, d) $x = 10$, e) $x > 0$, $x \neq 1$.

A3/21. a) $-(\frac{1}{2}\lg a + \lg b)$, b) $\frac{5}{4}(3 \lg a - \lg b)$,

c) $\lg(a + b) - \lg(a - b)$, d) $\lg 8ab^2c^2$,

e) $\lg\left(\frac{a}{a-b}\right)^2$, f) $\lg \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a^2 - b^2}}$.

A3/22. a) $x = 0{,}8774 - 2 = -1{,}1226$, b) $x = 0{,}004020$,
c) $x = 0{,}3702$, d) $x = 0{,}1020$.

A3/23. a) 1475, b) 1089000, c) 0,5567.

A3/24. $\ln 17 = 2{,}30259 \cdot \lg 17 = 2{,}30259 \cdot 1{,}2304 = 2{,}832$.

A3/25. $z = x^2 - (\log_a y)^2$.

A4/1. $460 + 220 + 140 = 820$.

A4/2. Zinsen nach n Jahren bei einfacher Verzinsung:
$z_n = \frac{p}{100} \cdot a \cdot n$; $z_6 = 225$ Mark.

A4/3. Die Massen verhalten sich wie die Rauminhalte:
$m_1 : m_2 = \frac{d_1^2}{4}\pi \ell_1 : \frac{d_2^2}{4}\pi \ell_2$, $\ell_2 = \frac{m_2 d_1^2 \ell_1}{m_1 d_2^2} = 436$ m.

A4/4. arithm. Mittel: $\frac{18 + 2}{2} = 10$;
geometr. Mittel: $18 : x = x : 2$, $x^2 = 2 \cdot 18$, $x = \sqrt{36} = 6$.

A4/5. Für $a - b - 1 \neq 0$: $x = \frac{a + b}{a - b - 1}$.

A4/6. $x = 7$.

A4/7. $x = 1$.

A4/8. $a \cdot b \neq 0$ und für $b^2 \neq a^2$: $x = a$,
$a \cdot b \neq 0$ und für $b^2 = a^2$: x beliebig.

A4/9. a) $s_1 = s_2 - v(t_2 - t_1)$, $t_1 = \frac{vt_2 + s_1 - s_2}{v}$;
b) $n = \frac{R_a \cdot J}{U - R_i J}$, $R_a = \frac{n(U - R_i J)}{J}$.

A4/10. Gesamtvolumen: 21 ℓ, Mischungsverhältnis: 1 : 50.
x Anteil Öl (in ℓ), y Anteil Benzin (in ℓ),
$x = 21 - y$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{50}$.
Daraus folgt: $\frac{21 - y}{y} = \frac{1}{50}$, $y \approx 20{,}6$.

$x = 21 - 20{,}6 = 0{,}4$. Ergebnis: 20,6 ℓ Benzin,
0,4 ℓ Öl.

A4/11. Omnibus: $v_o = 48$ km/h, $\ell_o = 10$ m;
Zugmaschine: $v_z = 36$ km/h, $\ell_z = 15$ m.
t Überholzeit, s_o Überholweg des Omnibus, s_z in der Zeit t zurückgelegter Weg der Zugmaschine.

$s_o = s_z + 25$ m. Da $\frac{s_o}{v_o} = t = \frac{s_z}{v_z}$ ist, folgt:

$\frac{s_z + 25\text{ m}}{v_o} = \frac{s_z}{v_z}$ und daraus $s_z = \frac{25\text{ m} \cdot 36}{12} = 75$ m.

$s_o = 75\text{ m} + 25\text{ m} = 100$ m. $t = \frac{75\text{ m} \cdot \text{h}}{36\text{ km}} = \frac{75}{36} \cdot 3{,}6\text{s} = 7{,}5\text{s}$.

A4/12. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. A4/13. $x_1 = \frac{6}{5}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

A4/14. $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$. A4/15. keine reellen Lösungen.

A4/16. a) $x_1 = \frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{b}{a}$ $(a \neq 0)$.

b) $x_{1,2} = \frac{5 - \sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2}$.

c) I. Fall $(x \geqq 0)$: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

II. Fall $(x < 0)$: $x_3 = -2$, $x_4 = -4$.

A4/17. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4}$ nicht reell.

A4/18. $x_1 = 100$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

A4/19. $a^2 + \frac{1}{x} a + x = 0$, $a_{1,2} = -\frac{1}{2x} \pm \frac{1}{2|x|}\sqrt{1 - 4x^3}$;

$a_{1,2}$ reell für $x \leqq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ und $x \neq 0$.

A4/20. a) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6 = 0$,

b) $x(x - 1) = x^2 - x = 0$, c) $x^2 - 6x + 7 = 0$,

d) $x^2 - 2\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\,x + 1 = 0$.

A4/21. d Maßzahl des Durchmessers des ursprünglichen Kreises (in cm).

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{\pi d^2}{4} \\ 2A = \frac{\pi(d + 3)^2}{4} \end{array}\right\} \quad d^2 - 6d - 9 = 0, \quad d_{1,2} = 3 \pm \sqrt{18} = 3 \pm 3\sqrt{2};$$

$d_1 = 3 + 3\sqrt{2}$, $d_2 = 3 - 3\sqrt{2}$.

Da $(3 - 3\sqrt{2}) < 0$, kommt d_2 für die Lösung der Aufgabe nicht in Frage. Der Durchmesser des ursprünglichen Kreises beträgt $(3 + 3\sqrt{2})$ cm.

A4/22. $x = 13$.

A4/23. $x = 1$, ($x = -\frac{25}{3}$ Scheinlösung).

A4/24. $x = 9$, ($x = 21$ Scheinlösung).

A4/25. Vor.: $x \leqq a$, $x < b$. Lösung: $x = a$, falls $a < b$.

A4/26. a) $x = 2{,}585$, b) $x = 5$.

A4/27. $x = -13$.

A4/28. $x = 4$.

A4/29. a) $x = 3$, denn $3^5 = 243$, b) $x = 5$, denn $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

A4/30. $6 \lg x - 3 \lg x = 6$, $\lg x = 2$, $x = 100$.

A4/31. $\lg(\frac{4 - x}{4 + x}) = \lg \frac{16}{(4 - x)(4 + x)}$, $4 - x = \frac{16}{4 - x}$, $x_1 = 0$, ($x_2 = 8$ entfällt, Probe!).

A5/1. $x \leqq 1$. $L = \{x \mid x \in R \text{ und } x \leqq 1\}$ oder $L = (-\infty, 1]$.

A5/2. $x > -\frac{15}{2}$. $L = \{x \mid x \in R \text{ und } x > -\frac{15}{2}\}$ oder $L = (-\frac{15}{2}, +\infty)$.

A5/3. $2x + 6 \leqq 2x - 6$ liefert mit $6 \leqq -6$ einen Widerspruch. Diese Ungleichung besitzt keine Lösungen. $L = \emptyset$.

A5/4. $3x + 4 < 3x + 10$ wird von allen reellen Zahlen x erfüllt, da $4 < 10$ stets richtig ist. $L = R$.

A5/5. $a < -\frac{3}{2}$. $L = \{a \mid a \in R \text{ und } a < -\frac{3}{2}\}$ oder $L = (-\infty, -\frac{3}{2})$.

A5/6. $x > \frac{5}{7}$. $L = \{x \mid x \in R \text{ und } x > \frac{5}{7}\}$ oder $L = (\frac{5}{7}, +\infty)$.

A5/7. Fallunterscheidung erforderlich.

1. Fall: $3 - x > 0$
$x < 3.$

$\frac{1}{3 - x} < 1$
$1 < 3 - x$
$x < 2.$

2. Fall: $3 - x < 0$
$x > 3.$

$\frac{1}{3 - x} < 1$
$1 > 3 - x$
$x > 2.$

Die in Frage kommenden Intervalle lassen sich auf der Zahlengeraden veranschaulichen.

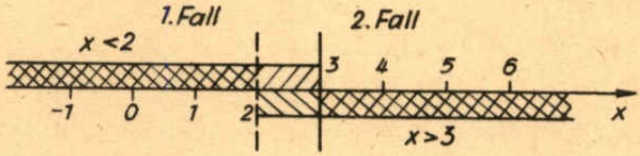


Bild 67/1

Damit setzt sich die Lösungsmenge aus den Intervallen $(-\infty,2)$ und $(3,+\infty)$ zusammen.

A5/8. t maximale Fahrzeit für Hin- und Rückfahrt,
v_1 Geschwindigkeit des Dampfers,
v_2 Strömungsgeschwindigkeit des Flusses,
s Entfernung von der Stadt.

Geschwindigkeit des Dampfers bei der Hinfahrt: $v_1 - v_2$,
Geschwindigkeit des Dampfers bei der Rückfahrt: $v_1 + v_2$.

Zeit für Hinfahrt: $t_1 = \frac{s}{v_1 - v_2}$,

Zeit für Rückfahrt: $t_2 = \frac{s}{v_1 + v_2}$.

Für die Gesamtfahrzeit gilt: $\frac{s}{v_1 - v_2} + \frac{s}{v_1 + v_2} \leqq t$.

Daraus folgt: $s \leqq \frac{t(v_1^2 - v_2^2)}{2v_1} = 8$ km.

Die Anlegestelle sollte höchstens 8 km von der Stadt entfernt sein.

Notizen