

LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

HERAUSGEGEBEN

VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

Vorbereitung auf das Hochschulfernstudium - Mathematik

2. LEHRBRIEF

Vorbereitung
auf das Hochschulfernstudium
Mathematik

2. Lehrbrief

Verfaßt von
Dr. paed. Dieter S c h l e s i n g
Technische Universität Dresden
Sektion Mathematik

Redaktionsschluß: Dezember 1986

Druck und buchbinderische Verarbeitung:

**Zentralstelle für Lehr- und Organisationsmittel des
Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen, Zwickau**

Ag 628/70/87/DDR/4000 - ZLO 638/87

2. Ausgabe

1. Auflage

Bestell-Nr. 02 0009 02 0

**Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulforschung des Ministeriums für Hoch- und
Fachschulwesen Dresden.**

**Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen
Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulforschung Dresden.**

Inhaltsverzeichnis

	Seite
6. Gleichungssysteme	4
6.1. Grundlegende Begriffe und Sätze	4
6.2. Beispiele und Anwendungen	7
6.3. Übungsaufgaben	9
7. Planimetrie	11
7.1. Grundlegende Begriffe und Sätze	11
7.1.1. Gerade, Strahl, Strecke, Winkel	11
7.1.2. Strahlensätze	13
7.1.3. Das Dreieck	14
7.1.4. Vierecke	16
7.1.5. Der Kreis	17
7.1.6. Formeln zur Berechnung ebener Figuren	18
7.2. Beispiele und Anwendungen	19
7.3. Übungsaufgaben	24
8. Stereometrie	26
8.1. Grundlegende Begriffe und Sätze	26
8.2. Beispiele und Anwendungen	31
8.3. Übungsaufgaben	34
9. Trigonometrie und Goniometrie	36
9.1. Grundlegende Begriffe und Sätze	36
9.1.1. Die Winkelfunktionen	36
9.1.2. Goniometrische Gleichungen	41
9.2. Beispiele und Anwendungen	42
9.3. Übungsaufgaben	49
10. Analytische Geometrie der Ebene	51
10.1. Das Koordinatensystem	51
10.2. Die Strecke	52
10.3. Die Gerade	54
10.4. Der Kreis	60
10.5. Die Parabel	62
10.6. Ellipse und Hyperbel	66
Lösungen	72

6. Gleichungssysteme

Alle praktischen Probleme, in denen zwei oder mehr Unbekannte auftreten, führen im allgemeinen auf ein Gleichungssystem, d. h. auf mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Das Lösen solcher Gleichungssysteme ist deshalb von besonderer Bedeutung für die Praxis.

In diesem Abschnitt werden Lösungsverfahren für das einfachste Gleichungssystem - zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten - zusammengestellt und ihre Anwendungen gezeigt.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Anwendung dieser Lösungsmethoden auf drei (oder mehr) Gleichungen mit drei (oder mehr) Unbekannten prinzipiell möglich ist und im Einzelfall auch in nachfolgenden Abschnitten benötigt wird.

Die Behandlung allgemeiner linearer Gleichungssysteme erfolgt im Studium; dieser Abschnitt dient der unmittelbaren Vorbereitung der linearen Algebra, eines der ersten Stoffgebiete der Mathematikausbildung an der Hochschule.

Anwendungsaufgaben erfordern häufig die Lösung von Systemen nichtlinearer Gleichungen. In vielen einfachen Fällen führen die hier beschriebenen Verfahren ebenfalls zum Ziel.

6.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- 1 Zwei Gleichungen für die Unbekannten x und y in der Form

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}$$

heißten ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

- 2 Zur Lösung von 1 werden die zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt. Dies besorgen das Einsetzungsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren und das Additionsverfahren.

- 3 Beim Einsetzungsverfahren wird eine der beiden Gleichungen nach einer Unbekannten aufgelöst. Der entstehende Ausdruck

ist dann an Stelle dieser Unbekannten in die andere Gleichung einzusetzen.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & 3x + y = 15 & (1) & \quad \text{Lösung: Aus (1) folgt} \\
 & 5x - 6y = 2. & (2) & \quad y = 15 - 3x. & (3) \\
 & & & \quad \text{Aus (3) und (2) folgt} \\
 & & & \quad 5x - 6(15 - 3x) = 2, \\
 & & & \quad \underline{x = 4.} & (4) \\
 & & & \quad (4) \text{ und (3) ergibt} \\
 & & & \quad y = 15 - 3 \cdot 4, \underline{y = 3.}
 \end{aligned}$$

Probe (für beide Gleichungen): $3 \cdot 4 + 3 = 15$,
 $5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 2$.

- 4 Eine Variante des Einsetzungsverfahrens ist das Gleichsetzungsverfahren. Hier werden beide Gleichungen nach derselben Unbekannten aufgelöst und die entstehenden Ausdrücke einander gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad & 3x + y = 15 & y = 15 - 3x & \quad 15 - 3x = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}, \\
 & 5x - 6y = 2, & y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}, & \quad \underline{x = 4}, \underline{y = 3}.
 \end{aligned}$$

- 5 Im Additionsverfahren werden beide Gleichungen von 1 mit geeigneten Faktoren multipliziert, so daß eine der beiden Unbekannten herausfällt, wenn man die Gleichungen addiert.

$$\begin{array}{rcl}
 \bullet \quad & 3x + y = 16 & | \cdot 6 | \\
 & 5x - 6y = 2 & | \quad | + \\
 \hline
 & 23x & = 92, \\
 & \underline{x = 4}, & \underline{y = 3}.
 \end{array}$$

- 6 Ein lineares Gleichungssystem kann
1. genau eine Lösung oder
 2. unendlich viele Lösungen oder
 3. keine Lösung besitzen.

$$\bullet \text{ a) } \begin{array}{r|l} 4x + 5y = 18 & \\ x + y = 4 & \cdot (-4) \end{array} +$$

$$\underline{y = 2, \quad x = 2.}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|l} 4x + 5y = 18 & \cdot (-3) \\ 12x + 15y = 54 & \end{array} +$$

$$\underline{0 = 0.}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r|l} 4x + 5y = 18 & - \\ 4x + 5y = 20 & \end{array}$$

$$\underline{0 = + 2.}$$

Das Gleichungssystem b) besteht eigentlich nur aus einer Gleichung (die zweite Gleichung unterscheidet sich von der ersten nur durch den Faktor 3). In diesem Falle ist eine Variable frei wählbar, das System b) besitzt unendlich viele Lösungen:

$$y = \frac{18 - 4x}{5}, \quad \underline{x \text{ frei wählbar}}, \quad \text{z. B. } \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 3 & 4 & \dots \\ y & 2 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} & \dots \end{array}$$

Das Gleichungssystem c) besitzt keine Lösung. Die Gleichungen widersprechen einander. Das Additionsverfahren führt deshalb auf den Widerspruch $0 = + 2$.

- [7] Die Lösungsverfahren [3], [4] und [5] lassen sich auch auf größere lineare Gleichungssysteme anwenden. Das Lösungsprinzip beruht hier auf der schrittweisen Elimination der Unbekannten. Ist eine Unbekannte bestimmt, lassen sich alle übrigen „rückwärts“ durch Einsetzen ermitteln.

$$\bullet \quad x - y - z = 20 \quad (1)$$

$$-x + 3y - z = 40 \quad (2)$$

$$-x - y - 5z = 80. \quad (3)$$

$$\text{Addition von (1) und (2): } 2y - 2z = 60, \quad (4)$$

$$\text{Addition von (1) und (3): } -2y - 6z = 100, \quad (5)$$

$$\text{Addition von (4) und (5): } -8z = 160, \quad \underline{z = -20.} \quad (6)$$

$$(6) \text{ einsetzen in (4): } 2y + 40 = 60, \quad \underline{y = 10.} \quad (7)$$

$$(6), (7) \text{ einsetzen in (1):}$$

$$x - 10 + 20 = 20, \quad \underline{x = 10.} \quad (8)$$

Probe: Einsetzen von (6), (7), (8) in die Ausgangsgleichungen (1), (2), (3).

Bemerkung:

Die Verfahren [3], [4] und [5] sind logisch gleichwertig. Zur Lösung größerer linearer Gleichungssysteme wird jedoch hauptsächlich der Gaußsche Algorithmus benutzt, dessen Grundlage das Additionsverfahren ist.

[8] Die Lösungsverfahren [3], [4] und [5] lassen sich auch auf einfache Systeme nichtlinearer Gleichungen anwenden.

$$\bullet \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

$$x + y = 1. \quad (2)$$

Aus (2) folgt $y = 1 - x$; einsetzen in (1) liefert:

$$\begin{aligned} x^2 + (1 - x)^2 &= 1, \\ x^2 + 1 - 2x + x^2 &= 1, \\ 2x^2 - 2x &= 0, \\ 2x(x-1) &= 0; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

(3) einsetzen in $y = 1 - x$ liefert $y_1 = 1, y_2 = 0$. Damit ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 0, y_1 = 1$ und $x_2 = 1, y_2 = 0$.

Probe: Einsetzen der Lösungspaare in die Ausgangsgleichungen (1) und (2).

6.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Das Gleichungssystem $(x + 2)(y - 1) = (x + 5)(y - 2)$

$$(x - 4)(y + 7) = (x - 3)(y + 4)$$

muß zunächst durch Ausmultiplizieren und Ordnen auf die Form

[1] gebracht werden:

$$\begin{array}{r|l} x - 3y = -8 & \\ 3x - y = 16 & \cdot (-3) \\ \hline x - 3y = -8 & \\ -9x + 3y = -48 & + \\ \hline -8x = -56, & x = 7, \quad y = 5. \end{array}$$

Probe (am Ausgangssystem): $9 \cdot 4 = 12 \cdot 3,$
 $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9.$

Beispiel 2:

Das nichtlineare System $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 13$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 9$$

läßt sich durch die Substitution $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$ auf ein lineares Gleichungssystem für u und v zurückführen:

$$\begin{array}{r|l} 2u + v = 13 & \cdot 3 \\ 3u - 2v = 9 & + \end{array}$$

$$7u = 35, \quad u = 5, \quad v = 3, \quad \text{also} \quad \underline{x = \frac{1}{u} = \frac{1}{5}}, \quad \underline{y = \frac{1}{v} = \frac{1}{3}}.$$

Probe: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 13,$

$$3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9.$$

Beispiel 3:

Das Gleichungssystem $2x + ay = -6$

$$ax + 8y = 12$$

enthält den Parameter a .

$$\begin{array}{r|l} 2x + ay = -6 & \cdot a \\ ax + 8y = 12 & \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2ax + a^2y = -6a & \\ -2ax - 16y = -24 & + \end{array}$$

$$(a^2 - 16)y = -6(a + 4). \quad (1)$$

Um Gleichung (1) zu lösen, muß man $(a^2 - 16) \neq 0$ voraussetzen, das ergibt:

$$(a^2 - 16) = (a + 4)(a - 4) \neq 0, \quad \text{d. h.} \quad a \neq 4 \quad \text{und} \quad a \neq -4.$$

$$\text{Damit wird } y = \frac{-6(a + 4)}{(a + 4)(a - 4)} = \underline{\underline{\frac{-6}{a - 4}}} \quad \text{und} \quad x = \underline{\underline{\frac{12}{a - 4}}}.$$

Bemerkung:

1. Setzt man $a = 4$, so liefert das Gleichungssystem einen Widerspruch, es existiert keine Lösung.

$$\begin{array}{r|l} 2x + 4y = -6 & \cdot (-2) \\ 4x + 8y = 12 & + \end{array}$$
$$0 = 24 \quad \text{Widerspruch!}$$

2. Setzt man $a = -4$, so werden beide Gleichungen proportional, es existieren unendlich viele Lösungen.

$$\begin{array}{r|l}
 2x - 4y = -6 & \cdot 2 \\
 -4x + 8y = 12 & \\
 \hline
 0 = 0 & +
 \end{array}$$

Lösung: x beliebig,
 $y = \frac{6 + 2x}{4}.$

Beispiel 4:

Es stehen zwei Sorten Alkohol zur Verfügung: 72prozentiger und 96prozentiger. Wieviel muß man von jeder Sorte nehmen, um 50 l 80prozentigen Alkohol zu erhalten?

Lösung: x l des 72prozentigen und y l des 96prozentigen Alkohols ergeben 50 l 80prozentigen Alkohol:

$$x + y = 50. \quad (1)$$

1 l des 72prozentigen Alkohols ergibt 0,72 l reinen Alkohol, x l des 72prozentigen Alkohols ergibt folglich $0,72 \cdot x$ l reinen Alkohol. Der Vergleich der vorhandenen Mengen an reinen Alkohol ergibt entsprechend:

$$0,72 \cdot x + 0,96 \cdot y = 0,80 \cdot 50. \quad (2)$$

Das Gleichungssystem mit den beiden Gleichungen (1) und (2) besitzt die Lösung $x = 33\frac{1}{3}$ und $y = 16\frac{2}{3}$. Es müssen demnach $33\frac{1}{3}$ l des 72prozentigen und $16\frac{2}{3}$ l des 96prozentigen Alkohols gemischt werden, um 50 l 80prozentigen Alkohol zu erhalten.

6.3. Übungsaufgaben

A6/1. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 18x - 31y = 5 & \text{b) } 3,5x - 3,8y = -4,7 \\
 24x - 53y = -5, & 2,1x - 1,9y = -1,3, \\
 \text{c) } 2x - 4y = -8 & \text{d) } x + 2y = 6(x - 3y) \\
 -\frac{1}{2}x + 3y = 8, & 7(x - 3y) = \frac{x}{4} + 6, \\
 \text{e) } \frac{7}{x} - \frac{2}{y} = 4 & \text{f)*) } \frac{3x-2}{x-4} - \frac{y+8}{y-2} = 2 \\
 \frac{5}{x} - \frac{2}{y} = 3, & \frac{x+1}{x-3} + \frac{y-7}{y+1} = 2.
 \end{array}$$

A6/2. Für welche Werte von a besitzt das Gleichungssystem

$$2x + ay = 2$$

$$\frac{1}{2} + 6y = a$$

Lösungen? Wie lauten diese?

A6/3. Er ist doppelt so alt, wie sie alt war, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Beide zusammen sind 42 Jahre alt. Wie alt ist er, und wie alt ist sie?

A6/4. Eine zweiziffrige Zahl, deren erste Ziffer dreimal so groß ist wie die zweite, besitzt die Quersumme 8. Wie heißt die Zahl?

A6/5. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 2x + 3y - z = 18 & \text{b) } a^2 + b^2 = c^2 \\ 3x - 2y + z = 8 & (a + 2)^2 + (b + 3)^2 - 211 = c^2 \\ x + 2y + z = 24, & (a - 3)^2 + (b - 2)^2 - 179 = c^2. \end{array}$$

A6/6. Ein Messingstück mit dem Volumen $1,1 \text{ dm}^3$ besitzt die Masse $9,405 \text{ kg}$. Welche Masseanteile Kupfer und Zink sind darin enthalten?

(Dichten: $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$, $\rho_{\text{Zn}} = 7,14 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.)

A6/7. Wann und wieviel Kilometer von Leipzig entfernt treffen sich zwei Radfahrer, wenn der eine in Dresden um 6.00 Uhr in Richtung Leipzig mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, der andere in Leipzig um 6.30 Uhr in Richtung Dresden mit durchschnittlich $22 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ losfährt? (Entfernung Dresden - Leipzig 120 km .)

7. Planimetrie

Die beiden Abschnitte 7. Planimetrie und 8. Stereometrie bringen eine Zusammenstellung der wichtigsten Begriffe und Zusammenhänge dieser elementargeometrischen Stoffgebiete. Es handelt sich um einen Stoff, der größtenteils bereits in den zur Hochschulreife führenden Ausbildungen als Wiederholungsstoff der allgemeinbildenden Schule aufgetreten ist. Er ist erfahrungsgemäß bei vielen Studienanfängern in Vergessenheit geraten. Da im Hochschulstudium keine geometrischen Grundlagen mehr behandelt werden, aber in Anwendungen (z. B. für Extremwertaufgaben, Rotationskörperberechnungen, aber auch in der Physik und in der Technischen Mechanik) diese immer wieder benötigt werden, ist eine Reaktivierung dieser Grundlagen unerlässlich.

Darüber hinaus sind diese Gebiete geeignet, das geometrische Vorstellungsvermögen zu schulen und die Fertigkeiten im Umgang mit Formelsammlungen zu festigen.

7.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

7.1.1. Gerade, Strahl, Strecke, Winkel

- 1 Je nachdem, ob eine gerade Linie auf keiner, auf einer Seite oder auf beiden Seiten begrenzt ist, heißt sie Gerade, Strahl oder Strecke.
- 2 Dreht man einen Strahl um seinen Anfangspunkt S, so entsteht ein Winkel α mit dem Scheitel S und den Schenkeln a und b (Bild 11/1).

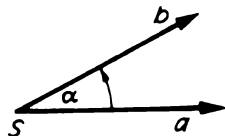


Bild 11/1

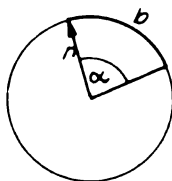


Bild 11/2

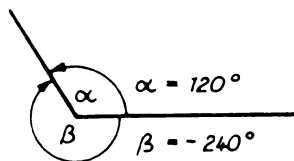


Bild 11/3

3 Winkelmaße

1. Gradmaß (Bezeichnung: α°)

Teilung des Vollwinkels (Vollkreises) in 360 gleiche Teile. 1° ist der 360. Teil eines Vollwinkels.

$1^\circ = 60'$ (Minuten), $1' = 60''$ (Sekunden).

2. Bogenmaß (Bezeichnung: $\hat{\alpha}$, $\text{arc } \alpha$)

Das Bogenmaß eines Winkels α ist das Verhältnis der Länge des zugehörigen Kreisbogens zur Länge des Radius (Bild 11/2).

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{b}{r}.$$

(Vgl. Kreisbogen, Abschnitt 7.2., Beispiel 8.)

Umrechnung Gradmaß - Bogenmaß:

$$\hat{\alpha} \hat{=} \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ, \quad \alpha^\circ \hat{=} \frac{180^\circ}{\pi} \hat{\alpha}$$

● Es gilt also: $2\pi \hat{=} 360^\circ$, $\pi \hat{=} 180^\circ$,

$$1^\circ \hat{=} \frac{\pi}{180} = 0,01745\dots, \quad 1 \hat{=} \frac{180^\circ}{\pi} = 57,296\dots^\circ.$$

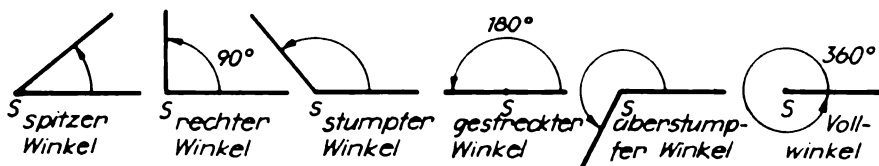
4 Drehrichtung

Gibt der Winkel eine bestimmte Drehung an, so wird die Drehrichtung durch das Vorzeichen des Winkelmaßes angegeben (Bild 11/3).

Positive Drehrichtung: entgegen dem Uhrzeigersinn,

negative Drehrichtung: in der Richtung des Uhrzeigers.

5 Einteilung der Winkel



6 Schneiden sich zwei Geraden, so entstehen Nebenwinkel und Scheitelwinkel. Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° , Scheitelwinkel sind gleich.

- In Bild 13/1 sind z. B.:
 $\alpha + \beta = 180^\circ$ und $\gamma + \delta = 180^\circ$ Nebenwinkel,
 $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ Scheitelwinkel.

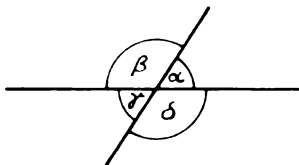


Bild 13/1

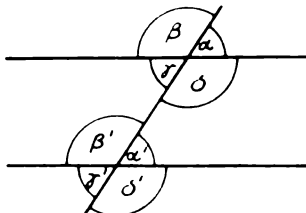


Bild 13/2

7. Werden zwei parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten, entstehen Stufenwinkel (gleichliegende Winkel), Wechselwinkel und entgegengesetzt liegende Winkel. Für diese gilt:

Stufenwinkel an Parallelen sind gleich,
 Wechselwinkel an Parallelen sind gleich,
 entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen ergänzen sich zu 180° .

- Im Bild 13/2 sind z. B.:
 $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ Stufenwinkel,
 $\alpha = \gamma'$ und $\beta = \delta'$ Wechselwinkel,
 $\alpha + \delta' = 180^\circ$ und $\gamma = \beta' = 180^\circ$ entgegengesetzt liegende Winkel.

7.1.2. Strahlensätze

Wird ein Strahlenbüschel durch eine Schar paralleler Geraden geschnitten, so gelten für die entstehenden Strecken folgende Proportionen (Bild 13/3).

1. Strahlensatz

$$\begin{aligned} SA : SC &= SE : SD \\ SA : AC &= SE : ED \\ SA : SF &= SE : SE \end{aligned}$$

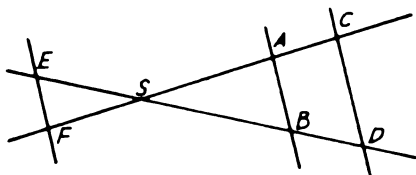


Bild 13/3

2. Strahlensatz

$$\begin{aligned} AB : CD &= SA : SC = SE : SD \\ AB : EF &= SA : SF = SE : SE \end{aligned}$$

7.1.3. Das Dreieck

7.1.3.1. Seiten- und Winkelbeziehungen

[1] Dreiecksungleichungen

1. Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite, d. h.,

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b.$$

2. Der Betrag der Differenz zweier Seiten ist stets kleiner als die dritte Seite, d. h.,

$$|b - c| < a, \quad |a - c| < b, \quad |a - b| < c.$$

[2] Winkelbeziehungen (Bild 14/1)

In jedem beliebigen Dreieck gilt:

1. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

2. Ein Außenwinkel ist gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel;

$$\text{z. B. } \beta_1 = \alpha + \gamma.$$

3. Der größeren Seite liegt stets der größere Winkel gegenüber und umgekehrt; d. h., wenn $\alpha < \beta$, so ist auch $a < b$.

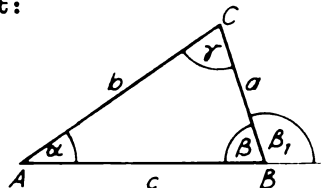


Bild 14/1

● Besondere Dreiecke

Gleichschenkliges Dreieck: $a = b$ und $\alpha = \beta$.

Gleichseitiges Dreieck: $a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

7.1.3.2. Dreieckstransversalen und deren Schnittpunkte

- [1] Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich stets in einem Punkt (Bild 15/1).

- [2] Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S der Dreiecksfläche. Dieser teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1 (Bild 15/2).

- [3] Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises (Inkreises, Bild 15/3).

- 4 Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises (Umkreises, Bild 15/4).

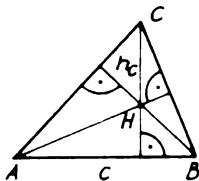


Bild 15/1

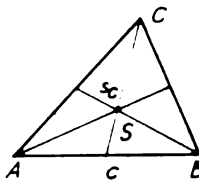


Bild 15/2

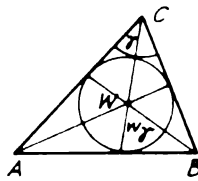


Bild 15/3

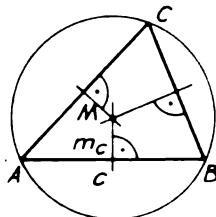


Bild 15/4

7.1.3.3. Rechtwinkliges Dreieck

- 1 Satz des Pythagoras: Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten (Bild 15/5).

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- In Bild 15/6 gilt: $d^2 = a^2 + b^2$, also $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Für $a = b$ ergibt sich $d = a\sqrt{2}$.
- In Bild 15/7 gilt: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} a^2$, also $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$.

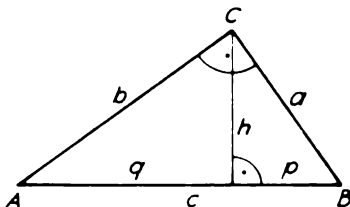


Bild 15/5

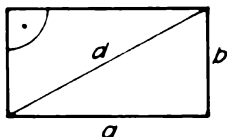


Bild 15/6

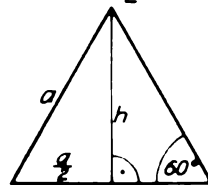


Bild 15/7

- 2 Kathetensatz: Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Produkt, gebildet aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt (Bild 15/5).

$$b^2 = c \cdot q \quad a^2 = c \cdot p$$

- 3 Höhensatz: Das Quadrat der Höhe auf die Hypotenuse ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte (Bild 15/5).

$$h^2 = p \cdot q$$

7.1.3.4. Ähnlichkeit von Dreiecken

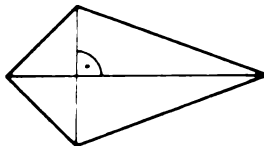
- 1 Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie eine der folgenden Übereinstimmungen besitzen:
1. in zwei Winkeln,
 2. im Verhältnis zweier Seiten und im eingeschlossenen Winkel,
 3. im Verhältnis zweier Seiten und in dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel,
 4. in den Verhältnissen der drei Seiten.
- 2 In ähnlichen Dreiecken sind einander entsprechende Strecken zueinander proportional, d. h., es gilt:
 $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$.
- 3 Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten, d. h., es gilt:
 $A : A_1 = a^2 : a_1^2 = b^2 : b_1^2 = c^2 : c_1^2$.

7.1.4. Vierecke

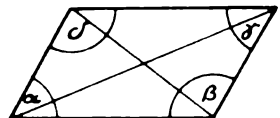
- 1 Die Summe der vier Innenwinkel eines Vierecks beträgt 360° .
- 2 Einteilung der Vierecke (Bild 16/1)
- a) nach der Länge der Seiten:
allgemeines Viereck (alle vier Seiten verschieden lang),
Drachenviereck (zwei Paare gleich langer Nachbarseiten),
Parallelogramm (zwei Paare gleich langer Gegenseiten);
 - b) nach der Lage der Seiten zueinander:
allgemeines Viereck (keine parallelen Seiten),
Trapez (ein Paar paralleler Seiten),
Parallelogramm (zwei Paare paralleler Seiten).



Trapez



Drachenviereck



Parallelogramm

Bild 16/1

- 3 In jedem Parallelogramm gilt:
1. Diagonalen halbieren einander.
 2. Je zwei benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°
(in Bild 16/1 z. B.: $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha + \delta = 180^\circ$).
 3. Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
(in Bild 16/1: $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$).

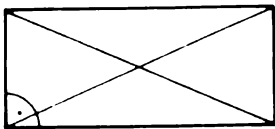
4 Besondere Parallelogramme (Bild 17/1)

Rechteck: Alle vier Winkel sind rechte Winkel.

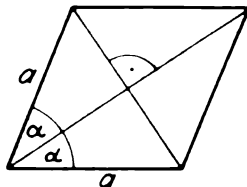
Rhombus: Alle vier Seiten sind gleich lang.

Quadrat: Alle vier Seiten sind gleich lang (Rhombus), und alle vier Winkel sind rechte Winkel (Rechteck).

Die Diagonalen sind im Rechteck (und im Quadrat) gleich lang, im Rhombus (und im Quadrat) stehen sie senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

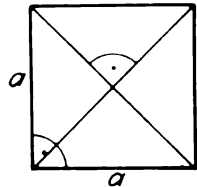


Rechteck



Rhombus

Bild 17/1



Quadrat

7.1.5. Der Kreis

- 1 Eine Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet, heißt Sekante. Das Stück der Geraden innerhalb des Kreises heißt Sehne. Hat eine Gerade mit einem Kreis nur einen Punkt gemeinsam, so heißt sie Tangente.

- 2 Die Tangente steht auf dem Berührungsradius $\overline{MA}$ senkrecht (Bild 17/2).

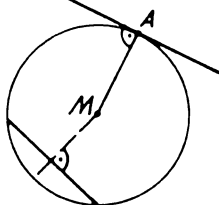


Bild 17/2

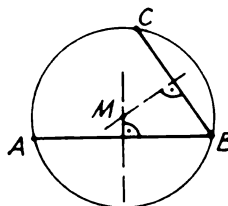


Bild 17/3

3 Die Mittelsenkrechte einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises (Bild 17/2).

4 Ein Kreis ist durch drei Punkte bestimmt (Bild 17/3).

5 Winkelbeziehungen im Kreis

1. Jeder Peripheriewinkel α ist halb so groß wie der zum gleichen Kreisbogen gehörende Zentriwinkel β ($2\alpha = \beta$, Bild 18/1).
2. Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen sind gleich groß ($\alpha = \alpha'$, Bild 18/2).
3. Peripheriewinkel über dem Halbkreis sind rechte Winkel (Satz des Thales, Bild 18/3).
4. Der Sehnentangentenwinkel γ ist ebenso groß wie jeder Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen ($\alpha = \gamma$, Bild 18/4).

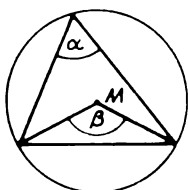


Bild 18/1

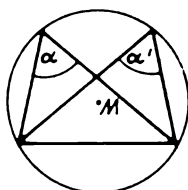


Bild 18/2

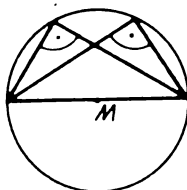


Bild 18/3

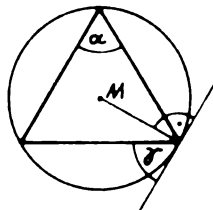


Bild 18/4

7.1.6. Formeln zur Berechnung ebener Figuren

A Flächeninhalt, U Umfang

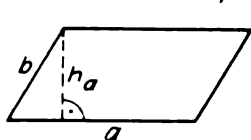


Bild 18/5

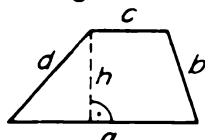


Bild 18/6

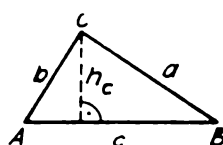


Bild 18/7

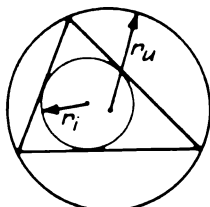


Bild 18/8

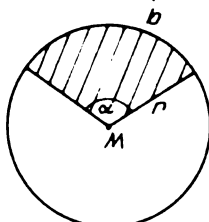


Bild 18/9

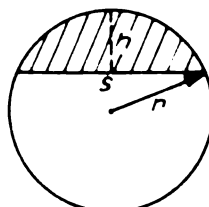


Bild 18/10

<u>Parallelogramm</u>	(Bild 18/5)	$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b.$
<u>Trapez</u>	(Bild 18/6)	$A = \frac{a + c}{2} \cdot h.$
<u>Dreieck</u>	(Bild 18/7)	$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2},$ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$ $A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r_u} = r_l \cdot s,$ $U = a + b + c = 2s,$
Umkreisradius	(Bild 18/8)	$r_u = \frac{b \cdot c}{2h_a} = \frac{a \cdot c}{2h_b} = \frac{a \cdot b}{2h_c},$
Inkreisradius	(Bild 18/8)	$r_l = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$
<u>Kreis</u>		$A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$ $(\pi = \frac{U}{d} = 3,14159...),$ $U = 2\pi r = \pi d,$
Kreisbogen	(Bild 18/9)	$b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \cdot r,$
Kreisausschnitt	(Bild 18/9)	$A = \frac{b \cdot r}{2},$
Kreisabschnitt	(Bild 18/10)	$A = \frac{1}{2}[b \cdot r - s(s-h)],$
Sehne		$s = 2 \sqrt{h \cdot r - h^2},$
Abschnittshöhe		$h = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - s^2} \quad (h < r).$

7.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Aus der Gleichheit der Scheitelwinkel ergibt sich der wichtige Satz: Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich. Im Bild 20/1 gilt: $\alpha = \beta$.

Beispiel 2:

Mit Hilfe der Strahlensätze ist es möglich, eine Strecke $\overline{AB}$ in n gleiche Teile zu zerlegen (in Bild 20/2 ist $n = 4$). Von A aus trägt man auf einem beliebigen Strahl n gleiche Teile ab. Parallelen zu $\overline{BC}$ ergeben dann auf $\overline{AB}$ die geforderte Teilung.

Beispiel 3:

Es soll der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks (vgl. Bild 15/7) berechnet werden. Nach 7.1.3.3. 1 ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$. Damit ist

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

Beispiel 4:

Eine Leiter der Länge ℓ wird in der Entfernung d von einer senkrechten Wand aufgestellt (Bild 20/3). In welcher Höhe h berührt die Leiter die Wand?

Lösung: $h^2 = \ell^2 - d^2 = (\ell + d)(\ell - d)$, damit $h = \sqrt{(\ell + d)(\ell - d)}$.

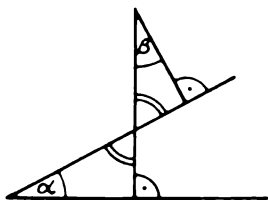


Bild 20/1

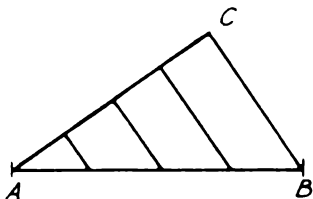


Bild 20/2

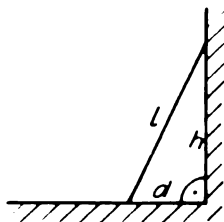


Bild 20/3

Beispiel 5:

Durch einen Punkt H ist eine Gerade g zu legen, die H mit dem nicht zugänglichen Schnittpunkt C zweier gegebener nicht paralleler Geraden g_1 und g_2 verbindet (siehe Bild 21/1). Bild 21/2 zeigt die Lösung dieser Aufgabe. Die Punkte A und B werden so bestimmt, daß H Höhenschnitt des Dreiecks ABC wird. Die Höhe h_c ist dann die gesuchte Gerade g .

Beispiel 6:

Für einen gotischen Spitzbogen (Bild 21/3) soll der Radius r_3 bestimmt werden, wenn $r_1 = b$ gegeben ist!

Aus Bild 21/3 folgt: $r_1 = b$, $r_2 = \frac{b}{4}$ und mit dem Satz des Pythagoras

$$\text{und} \quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 \quad (1)$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BC}^2,$$

$$(r_1 - r_3)^2 - \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 = (r_2 + r_3)^2 - r_2^2,$$

$$(b - r_3)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{4} + r_3\right)^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2,$$

$$\underline{r_3 = \frac{3}{10} b.}$$

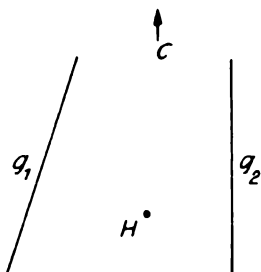


Bild 21/1

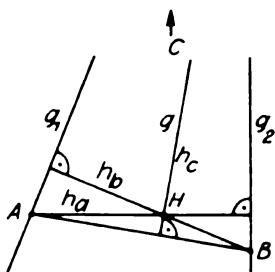


Bild 21/2

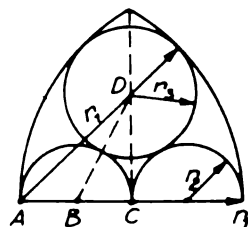


Bild 21/3

Beispiel 7:

Mit Hilfe ähnlicher Dreiecke kann man Größen bestimmen, die nicht direkt meßbar sind. In Bild 21/4 ist die Breite x eines Flusses zu ermitteln.

Die Dreiecke ABC und BDE sind ähnlich, deshalb gilt für ihre Seiten (vgl. 7.1.3.4. [2]):
 $x : d = a : b$, und daraus folgt die Breite des Flusses

$$x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

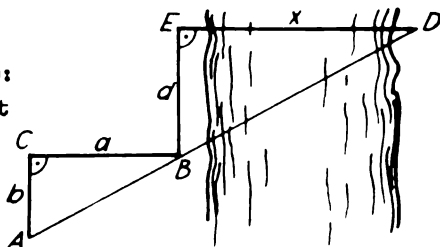


Bild 21/4

Beispiel 8:

Die Länge des den Kreissektor begrenzenden Bogens b ergibt sich aus der folgenden Proportion (Bild 23/1):

$$b : \alpha^\circ = U : 360^\circ,$$

$$b : \alpha^\circ = 2\pi r : 360^\circ,$$

$$b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \cdot r.$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Kreissektors (Bild 23/1):

$$A : \alpha^\circ = \pi r^2 : 360^\circ,$$

$$A = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ \cdot r^2 = \frac{b}{2} \cdot r.$$

Aus der Formel für die Bogenlänge ist ersichtlich, daß der Winkel α durch das Verhältnis des zugehörigen Kreisbogens zur Länge des Radius bestimmt ist. In Ergänzung zum Bogenmaß eines Winkels (7.1.1. [3]) kann nun auch die folgende Definition angegeben werden:

Unter dem Bogenmaß $\widehat{\alpha}$ eines Winkels α versteht man die Maßzahl des Bogens, der im Einheitskreis (Radius: eine Längeneinheit) zum Winkel α gehört.

Beispiel 9:

Im Bild 23/2 ist $r = 1$ m, $h = 0,5$ m und $\alpha = 60^\circ$ gegeben. Es soll unter Verwendung der Formeln aus 7.1.6. berechnet werden:

- die Länge der Sehne s ,
- der Flächeninhalt A_D des Dreiecks ABM,
- die Länge des zum Winkel α gehörigen Kreisbogens b ,
- der Flächeninhalt A_S des zum Winkel α gehörigen Kreissektors (Kreisausschnittes),
- der Flächeninhalt A_A des Kreisabschnittes (Kreissegmentes) der Höhe h !

Lösung:

$$a) \quad s = 2 \sqrt{r^2 - h^2} = 2 \sqrt{0,75 \text{ m}^2} \approx 1,73 \text{ m}.$$

$$b) \quad a = r - h, \quad A_D = \frac{s \cdot a}{2} = \frac{s(r-h)}{2} \approx \frac{1,73 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m}}{2} \approx 0,43 \text{ m}^2.$$

$$c) \quad b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \cdot r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 60^\circ \cdot 1 \text{ m} = \frac{\pi}{3} \text{ m} \approx 1,05 \text{ m}.$$

$$d) \quad A_S = \frac{b}{2} \cdot r = \frac{1,05 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{2} \approx 0,53 \text{ m}^2.$$

$$e) \quad A_A = \frac{1}{2}[b \cdot r - s(r - h)] \approx \frac{1}{2}(1,05 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} - 1,73 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m}) \\ \approx 0,09 \text{ m}^2.$$

Rechenkontrolle: $A_A = A_S - A_D \approx 0,10 \text{ m}^2$ (Rundungsfehler).

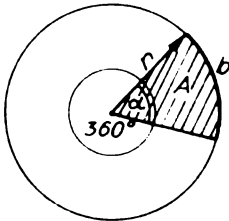


Bild 23/1

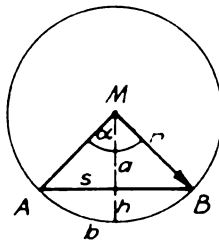


Bild 23/2

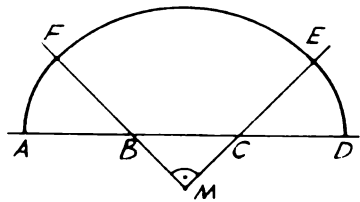


Bild 23/3

Beispiel 10:

Die Länge des in Bild 23/3 dargestellten Korbbogens soll berechnet werden. Der Korbbogen besteht aus drei Kreisbögen, deren Mittelpunkte in B, M und C liegen.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a, \quad \overline{BM} = \overline{MC}, \quad \overline{AB} = \overline{BF}, \quad \overline{CD} = \overline{CE}.$$

$$1. \quad \angle MBC = \angle BCM = \angle DCE = \angle ABF = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ.$$

$$2. \quad \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{MC}^2, \quad \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 = \frac{1}{2} \overline{BC}^2 = \frac{1}{2} a^2, \quad \overline{MB} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \sqrt{2} a.$$

$$3. \quad b = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ \cdot r,$$

$$\widehat{AF} = \widehat{DE} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 45^\circ \cdot a = \frac{\pi}{4} a,$$

$$\widehat{FE} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) a = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\right) a.$$

$$\text{Länge des Korbbogens: } \widehat{AF} + \widehat{DE} + \widehat{FE} = \frac{\pi}{2} a \left(2 + \frac{1}{2} \sqrt{2}\right).$$

7.3. Übungsaufgaben

A7/1. Zum Schleifen eines Spiralbohrers von 20 mm Durchmesser soll eine Lehre nach Bild 24/1 angefertigt werden. Berechnen Sie h !

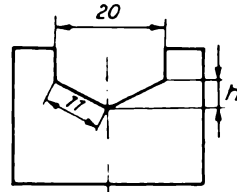


Bild 24/1

A7/2. Berechnen Sie die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks von $a = 4$ cm Seitenlänge!

A7/3. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $A = 10 \text{ cm}^2$ und der Basis $c = 4$ cm. Berechnen Sie die Länge der Schenkel a und die Höhe h_c !

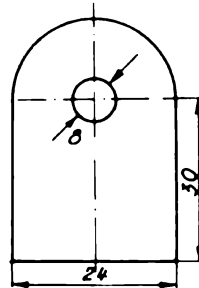


Bild 24/2

A7/4. Wie groß ist der Blechbedarf A für das in Bild 24/2 dargestellte Werkstück?

A7/5. Berechnen Sie den Inkreisradius r_i und den Umkreisradius r_u des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $a = 6$ cm und $b = 8$ cm!

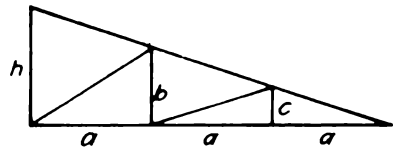


Bild 24/3

A7/6. Berechnen Sie die Strecken b und c des in Bild 24/3 dargestellten Dachbinders für $h = 3,5$ m und $a = 2,8$ m!

A7/7. In Bild 24/4 ist die Breite des Flusses zwischen den Punkten E und C zu bestimmen. Gemessen wurden die Strecken $\overline{AD} = 15$ m, $\overline{AE} = 9$ m und $\overline{AB} = 148$ m.

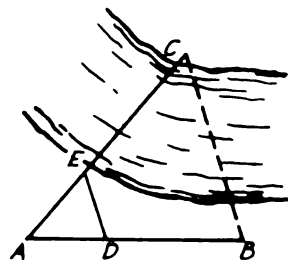


Bild 24/4

- A7/8. Ein Kupferdraht mit 2 mm^2 Querschnitt soll durch einen Aluminiumdraht mit dreifachem Querschnitt ersetzt werden. Welchen Durchmesser muß der Aluminiumdraht erhalten?
- A7/9. Wie groß sind in einem Kreis mit dem Radius $r = 4 \text{ cm}$ der zum Bogen $b = 6 \text{ cm}$ gehörige Mittelpunktswinkel α und der Flächeninhalt A des zugehörigen Sektors (Kreisausschnitts)?
- A7/10. Berechnen Sie aus Bild 25/1 r_2 in Abhängigkeit von r_1 !
- A7/11. Berechnen Sie im Dachbinder des Bildes 25/2 die Balkenlängen b , c , d , wenn $a = 12 \text{ m}$ und $h = 4 \text{ m}$ gegeben sind!

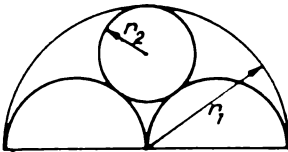


Bild 25/1

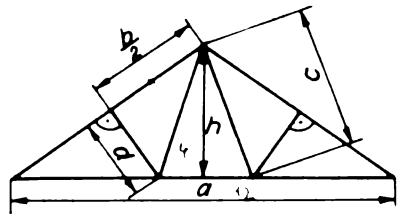


Bild 25/2

8. Stereometrie

Die Stereometrie befaßt sich mit der Bestimmung und Messung räumlicher Gebilde (Körper).

8.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- [1] Körper sind durch ebene oder gekrümmte Flächen allseitig abgeschlossene räumliche Gebilde.

Die Summe der Begrenzungsflächen heißt Oberfläche, der vollständig eingeschlossene Raum heißt Volumen (Rauminhalt) des Körpers.

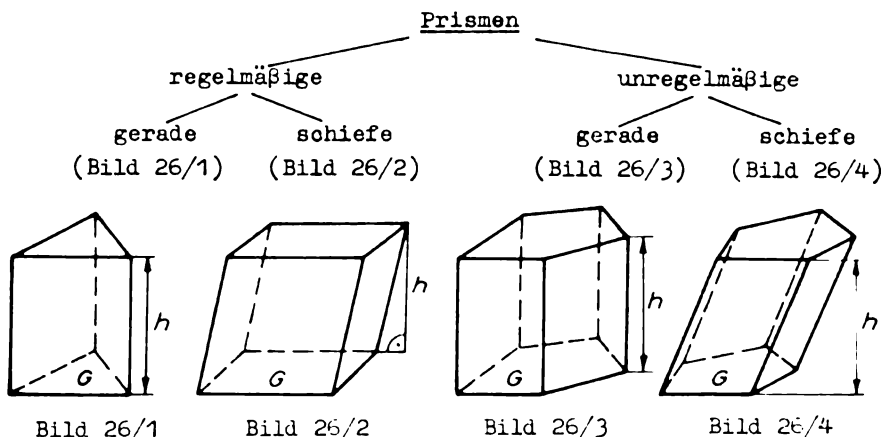
- [2] Polyeder (Ebenflächner) sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt werden.

Dazu gehören: Prismen, Pyramiden, Pyramidenstümpfe.

- [3] Ein Prisma wird begrenzt durch zwei gleiche und zueinander parallele n -Ecke (Grund- und Deckfläche) und n Parallelogramme (Seitenflächen).

Sind die Grundflächen regelmäßige bzw. unregelmäßige n -Ecke, so entstehen regelmäßige bzw. unregelmäßige Prismen.

Alle Seitenkanten des Prismas sind gleich lang und parallel. Stehen die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht, so spricht man von einem geraden Prisma, anderenfalls heißt es ein schiefes Prisma.



- Der Quader ist ein vierseitiges gerades Prisma, bei dem Grund-, Deck- und Seitenflächen Rechtecke sind.
- Der Würfel ist die Sonderform des Quaders, bei dem alle begrenzenden Flächen Quadrate sind.
- Ein schiefes vierseitiges Prisma (z. B. Bild 26/2) heißt Parallelepiped oder Spat.

- 4 Eine Pyramide wird von einem n -Eck (Grundfläche) und n Dreiecken (Seitenflächen) begrenzt.
Ist die Grundfläche ein regelmäßiges bzw. unregelmäßiges n -Eck, so entsteht eine regelmäßige bzw. unregelmäßige Pyramide.

Liegt die Spitze einer regelmäßigen Pyramide senkrecht über dem Mittelpunkt des Umkreises (gleich dem Mittelpunkt des Inkreises) der Grundfläche, so handelt es sich um eine gerade Pyramide (z. B. Bild 27/1), andernfalls heißt sie schiefe Pyramide (z. B. Bild 27/2).

- Das Tetraeder ist eine regelmäßige gerade Pyramide, deren Grund- und Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.

- 5 Wird eine Pyramide parallel zu ihrer Grundfläche durchgeschnitten, so entsteht ein Pyramidenstumpf (Bild 27/3).

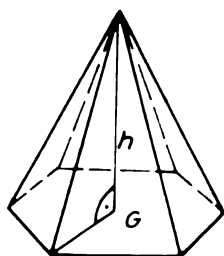


Bild 27/1

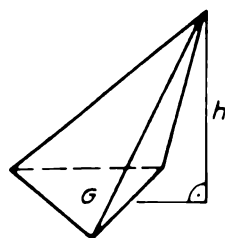


Bild 27/2

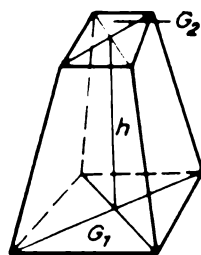


Bild 27/3

- 6 Der gerade Kreiszylinder (Bild 28/1), der gerade Kreiskegel (Bild 28/2), der gerade Kreiskegelstumpf (Bild 28/3) und die Kugel gehören zu den Körpern, die (teilweise oder vollständig) durch gekrümmte Flächen begrenzt werden. Für die Berechnung der Oberfläche von Zylindern und Kegeln ist es erforderlich, eine Abwicklung der gekrümmten Mantelflächen vorzunehmen.

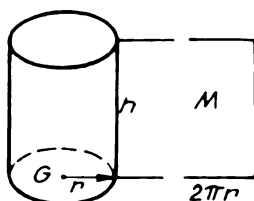


Bild 28/1

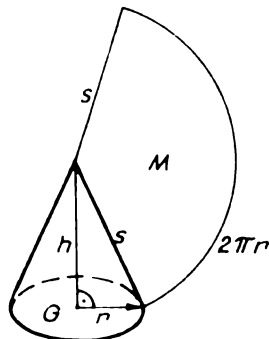


Bild 28/2

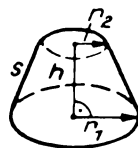


Bild 28/3

- Für den Zylinder ist der Mantel M ein Rechteck mit den Kantenlängen h und $2\pi r$ (Bild 28/1).
- Für einen Kegel ist der Mantel M ein Kreisausschnitt (Kreissektor) mit dem Bogen $b = 2\pi r$ und dem Radius s (Bild 28/2).

- 7 Wird eine Kugel in bestimmter Weise geschnitten, so entstehen Kugelteile.

Die gebräuchlichsten Kugelteile sind:

Kugelabschnitt oder Kugelsegment (Bild 29/1),

Kugelschicht (Bild 29/2),

Kugelausschnitt oder Kugelsektor (Bild 29/3).

Die gekrümmte Mantelfläche des Kugelabschnitts heißt Kugelkappe (oder Kalotte), der Mantel der Kugelschicht heißt Kugelzone.

Die Flächen Kugelkappe und Kugelzone werden zur Bestimmung der Oberflächen von Kugelteilen benötigt.

- Die Oberfläche eines Kugelausschnitts (Bild 29/3) setzt sich zusammen aus einer Kugelkappe und der Mantelfläche eines Kegels.

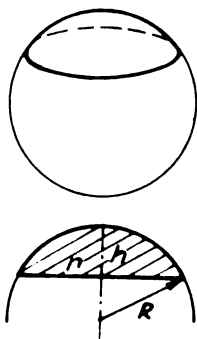


Bild 29/1

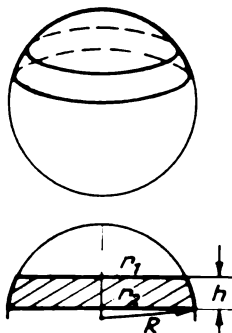


Bild 29/2

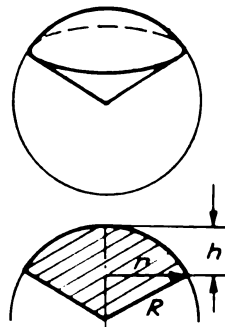


Bild 29/3

8 Formeln zur Berechnung von Körpern

G Grundfläche, h Höhe, s Mantellinie, r Kreisradius,
R Kugelradius, V Volumen, M Mantelfläche, O Oberfläche.

<u>Prisma</u>	(Bilder 26/1 bis 26/4)	$V = G \cdot h.$
<u>Pyramide</u>	(Bilder 27/1 und 27/2)	$V = \frac{1}{3} G \cdot h,$
Pyramidenstumpf	(Bild 27/3)	$V = \frac{h}{3} (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2).$
<u>Zylinder</u>	(Bild 28/1)	$V = G \cdot h, \quad M = 2\pi r h.$
<u>Kegel</u>		$V = \frac{1}{3} G \cdot h,$
gerader Kreiskegel	(Bild 28/2)	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad M = \pi r s,$
gerader Kreiskegelstumpf	(Bild 28/3)	$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$ $M = \pi s(r_1 + r_2).$
<u>Kugel</u>		$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad O = 4\pi R^2,$
Kugelabschnitt	(Bild 29/1)	$V = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2)$ $= \frac{\pi h^2}{3} (3R - h),$ $O = \pi(2Rh + r^2),$ $M = 2\pi Rh,$
Kugelkappe		
Kugelschicht	(Bild 29/2)	$V = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2),$ $O = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2),$ $M = 2\pi Rh,$
Kugelzone		
Kugelausschnitt	(Bild 29/3)	$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$ $O = \pi R(2h + r).$

8.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Das einfachste Prisma ist der Würfel (Bild 31/1).

$$V = G \cdot h = a^2 \cdot a = \underline{a^3}, \quad O = \underline{6a^2}.$$

Seitenflächendiagonale $d_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \underline{a\sqrt{2}},$

Raumdiagonale $d_2 = \sqrt{d_1^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \underline{a\sqrt{3}}.$

Beispiel 2:

Ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit der Grundkante a besitzt das Volumen $V = a^3 \sqrt{3}$. Wie groß ist seine Höhe h ?

$$V = G \cdot h, \quad G = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \quad a^3 \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot h, \quad \underline{h = 4a}.$$

Beispiel 3:

Eine regelmäßige vierseitige Pyramide besitzt die Grundkante a und die Höhe $h = 2a$ (Bild 31/2). Gesucht sind das Volumen V , die Oberfläche O , die Seitenlänge s und die Seitenflächenhöhe m der Pyramide!

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2a = \underline{\frac{2}{3} a^3},$$

$$m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2, \quad m = \underline{\frac{a}{2} \sqrt{17}},$$

$$s^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9}{2} a^2, \quad s = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2} a},$$

$$O = G + 4A = a^2 + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{17} = \underline{(1 + \sqrt{17}) a^2}.$$

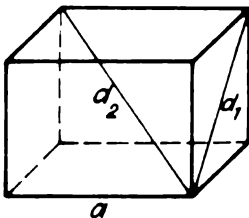


Bild 31/1

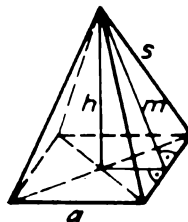


Bild 31/2

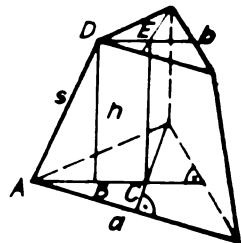


Bild 31/3

Beispiel 4:

Ein gerader Pyramidenstumpf besitzt als Grund- bzw. Deckfläche jeweils ein gleichseitiges Dreieck mit den Seitenlängen a bzw. b . Die Länge der Seitenkante ist s (Bild 31/3). Gesucht ist sein Volumen!

$$h^2 = s^2 - \overline{AB}^2, \quad \overline{AB} = \overline{AC} - \overline{DE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{3} \sqrt{3}(a-b),$$

$$h = \sqrt{s^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2},$$

$$V = \frac{h}{3} (G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2) \\ = \frac{1}{3} \sqrt{s^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2} \left(\frac{a^2}{4} \sqrt{3} + \frac{ab}{4} \sqrt{3} + \frac{b^2}{4} \sqrt{3} \right),$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12} (a^2 + ab + b^2) \sqrt{s^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}.$$

Beispiel 5:

Ein gerader Kreiszylinder (Radius r_1 und Höhe $h_1 = 2r_1$) und ein gerader Kreiskegel (Radius r_2 und Mantellinie $s = 2r_2$) besitzen eine gleichgroße Oberfläche. Gesucht ist das Verhältnis der beiden Volumina zueinander!

$$\text{Zylinder: } O_Z = \pi r_1^2 + 2\pi r_1 h_1 = 5\pi r_1^2,$$

$$\text{Kegel: } O_K = \pi r_2^2 + \pi r_2 s = 3\pi r_2^2.$$

$$\text{Aus } O_Z = O_K \text{ folgt } r_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} r_1.$$

$$V_Z = \pi r_1^2 h_1 = 2\pi r_1^3, \quad V_K = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 \quad \text{mit} \quad h_2 = \sqrt{s^2 - r_2^2} = r_2 \sqrt{3},$$

$$V_K = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r_2^3 = \frac{5}{9} \sqrt{5} \pi r_1^3,$$

$$V_Z : V_K = 2\pi r_1^3 : \frac{5}{9} \sqrt{5} \pi r_1^3 = 1 : 0,62.$$

Beispiel 6:

Ein gerader Kreiskegelstumpf mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 2$ cm ist 4 cm hoch. Wie groß sind Volumen und Mantelfläche des Körpers?

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \text{ cm} (25 + 10 + 4) \text{ cm}^2 = 52\pi \text{ cm}^3 \\ \approx \underline{163,4 \text{ cm}^3},$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{16 \text{ cm}^2 + 9 \text{ cm}^2} = 5 \text{ cm},$$

$$M = \pi s (r_1 + r_2) = \pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} \approx \underline{110 \text{ cm}^2}.$$

Beispiel 7:

Eine Kugel vom Radius R wird durch zwei parallele Schnitte in drei höhengleiche Körper, nämlich zwei Kugelabschnitte und eine Kugelschicht, zerlegt (Bild 33/1). Gesucht sind die Volumina dieser Körper!

$$\text{Kugelabschnitt: } V_A = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4R^2}{9} (3R - \frac{2R}{3}) = \underline{\underline{\frac{28}{81} \pi R^3}}.$$

$$\text{Kugelschicht: } r_1 = r_2, \quad r_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} R^2.$$

$$V_S = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2R}{3} (6 \cdot \frac{8}{9} R^2 + \frac{4}{9} R^2) = \underline{\underline{\frac{52}{81} \pi R^3}}.$$

$$\text{Probe: } V_{\text{Kugel}} = 2V_A + V_S = 2 \cdot \frac{28}{81} \pi R^3 + \frac{52}{81} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

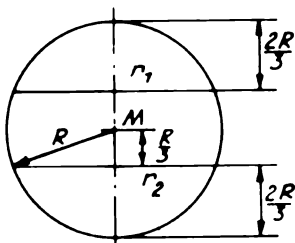


Bild 33/1

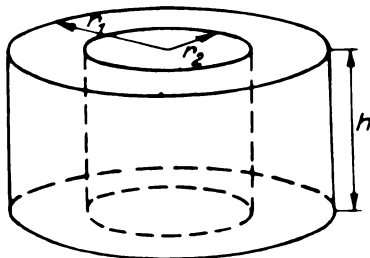


Bild 33/2

Beispiel 8:

Gegeben ist ein Hohlzylinder mit den Radien r_1 und r_2 und der Höhe $h = r_1$ (Bild 33/2).

Wie groß muß r_1 sein, damit der Hohlzylinder dem (inneren) Zylinder mit dem Radius r_2 und der Höhe $h = r_1$ volumengleich ist?

$$V_H = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi h (r_1^2 - r_2^2) = \pi r_1 (r_1^2 - r_2^2),$$

$$V_Z = \pi r_2^2 h = \pi r_2^2 r_1,$$

$$V_H = V_Z, \quad \pi r_2^2 r_1 = \pi r_1 (r_1^2 - r_2^2), \quad \underline{\underline{r_1 = \sqrt{2} r_2}}.$$

8.3. Übungsaufgaben

- AS/1. In ein würfelförmiges Gefäß, das innen die Kantenlänge 50 cm besitzt, werden 18 l einer Flüssigkeit gefüllt. Wie hoch ist der Flüssigkeitsstand h im Gefäß?
- AS/2. Wie groß ist die Oberfläche eines regelmäßigen dreiseitigen Prismas, dessen Grundfläche eine Seitenlänge $a = 60$ cm besitzt und dessen Volumen $V = 900 \text{ cm}^3$ beträgt?
- AS/3. Bestimmen Sie die Masse von 100 Aluminiumnieten mit den in Bild 34/1 gegebenen Abmessungen! ($\rho = \frac{m}{V} = 2,7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.)
- AS/4. Berechnen Sie den Radius R einer Kugel, deren Oberfläche gleich der Oberfläche eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe $h = 4r$ ist!
- AS/5. Berechnen Sie die Raumdiagonale d eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes, dessen Grundfläche $G_1 = a^2$, Deckfläche $G_2 = \frac{a^2}{4}$ und Volumen $V = a^3$ gegeben sind (Bild 34/2).
- AS/6. Wie lang ist die Grundseite a einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide, wenn ihre Oberfläche $O = 360 \text{ cm}^2$ und ihr Volumen $V = 400 \text{ cm}^3$ beträgt?
- AS/7. Aus einem halbkreisförmigen Blech (Radius r_1) soll der Mantel eines Kreiskegels geformt werden. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Kegels?
- AS/8. In einem geraden Kreiskegelstumpf von 5 cm Höhe und $140\pi \text{ cm}^3$ Rauminhalt unterscheiden sich die Grundkreisradien um 6 cm. Wie groß sind diese?

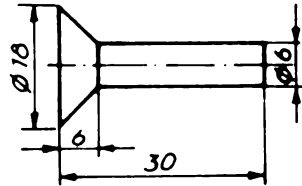


Bild 34/1

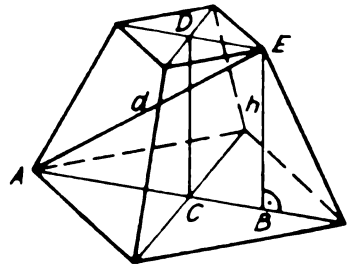


Bild 34/2

18/9⁺) Der Kegelmantel M_{Ke} eines Kugelsektors soll gleich der zugehörigen Kugelkappenfläche M_{Ka} sein. Bestimmen Sie die Höhe des Kugelabschnitts (Kugelradius R)!

9. Trigonometrie und Goniometrie

Trigonometrie heißt Dreiwinkelmessung. In dieser elementarmathematischen Disziplin werden Dreiecke und geradlinig begrenzte ebene Figuren, die sich bekanntlich alle in Dreiecke zerlegen lassen, mit Hilfe ihrer Winkel berechnet. Man benutzt dazu die Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen).

In der Goniometrie wird mit solchen Funktionen, die von Winkeln abhängen, gerechnet.

Da die Winkelfunktionen von großer praktischer Bedeutung sind und ihre Kenntnis im Studium vollständig vorausgesetzt wird, ist es notwendig, entsprechende Fertigkeiten in trigonometrischen Berechnungen zu reaktivieren. Dabei ist der sichere Umgang mit Formelsammlung und elektronischem Taschenrechner eine wesentliche Voraussetzung.

Weitere Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen werden im Abschnitt 11. behandelt, der sich mit den wichtigen elementaren Funktionen der Mathematik befaßt, zu denen auch die trigonometrischen Funktionen gehören.

9.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

9.1.1. Die Winkelfunktionen

- 1 Für spitze Winkel α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) sind folgende Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck definiert.

Mit den Bezeichnungen von Bild 37/1 gilt:

$\text{Sinus } \alpha = \sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} ,$
$\text{Kosinus } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} ,$
$\text{Tangens } \alpha = \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} ,$
$\text{Kotangens } \alpha = \cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a} .$

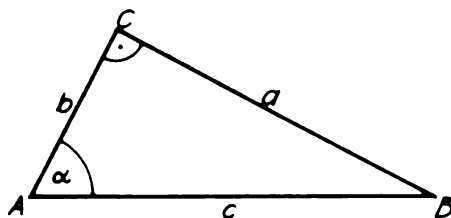
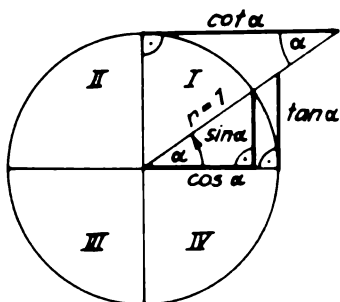
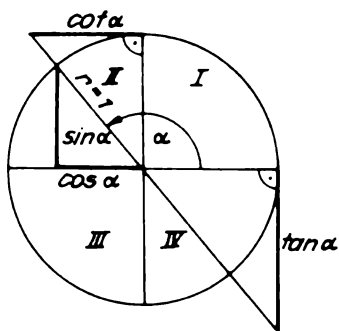


Bild 37/1

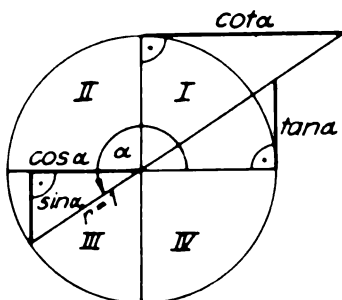
- 2 Die Erweiterung der Seitenverhältnisse aus 1 auf beliebige Winkel erfolgt durch ihre Definition am Einheitskreis (Bild 37/2).



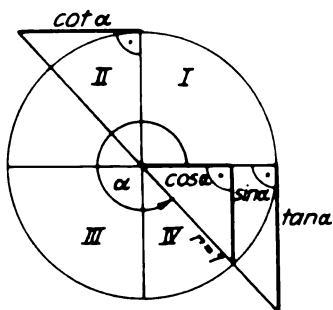
$$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$



$$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$



$$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$$



$$270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$$

Bild 37/2

- 3 Ist x ein Winkel im Bogenmaß, lassen sich mit 1 und 2 die Funktionen $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ und $y = \cot x$ erklären.

Die Werte der trigonometrischen Funktionen sind reelle Zahlen. Sie besitzen in den einzelnen Quadranten folgende Vorzeichen:

Trigon. Funktion	Quadrant			
	I	II	III	IV
$\sin$	+	+	-	-
$\cos$	+	-	-	+
$\tan$	+	-	+	-
$\cot$	+	-	+	-

Während die Werte der Funktionen Sinus und Kosinus alle zwischen -1 und $+1$ liegen, können Tangens und Kotangens jeden beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß $\tan 90^\circ$ und $\tan 270^\circ$ sowie $\cot 0^\circ$, $\cot 180^\circ$ und $\cot 360^\circ$ nicht definiert sind.

Wie Bild 37/2 zeigt, werden für diese Winkel jeweils zwei Seiten der betreffenden Dreiecke zu Parallelen, und damit existiert kein endlicher Wert der betrachteten Winkelfunktion.

Diese Tatsache wird durch folgende Schreibweise ausgedrückt:

$$\tan 90^\circ = \pm \infty, \quad \tan 270^\circ = \pm \infty,$$

$$\cot 0^\circ = \pm \infty, \quad \cot 180^\circ = \pm \infty, \quad \cot 360^\circ = \pm \infty.$$

- 4 In Zahlentafeln sind die Werte der trigonometrischen Funktionen für Winkel α im I. Quadranten ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) enthalten.

Für beliebige Winkel können die Werte der trigonometrischen Funktionen durch Zurückführen auf Winkel des I. Quadranten bestimmt werden.

Dafür gelten die folgenden Beziehungen:

a) $\sin(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \sin \alpha,$
 $\cos(n \cdot 360^\circ + \alpha) = \cos \alpha,$
 $\tan(n \cdot 180^\circ + \alpha) = \tan \alpha,$
 $\cot(n \cdot 180^\circ + \alpha) = \cot \alpha.$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

b) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$
 $\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$
 $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha,$
 $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$

c)

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
sin	cos α	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
cos	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	cos α
tan	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$	$\mp \cot \alpha$	$\pm \tan \alpha$
cot	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$	$\mp \tan \alpha$	$\pm \cot \alpha$

- $\sin(-1000^\circ) = -\sin 1000^\circ = -\sin(2 \cdot 360^\circ + 280^\circ)$
 $= -\sin 280^\circ = -\sin(270^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ = 0,9848.$
 Ein elektronischer Taschenrechner liefert schneller den
 genaueren Wert $\sin(-1000^\circ) = 0,98480775.$

5 Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen gleicher Winkels:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, & \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1, \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}, & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}, \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, & 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

6 Trigonometrische Funktionen von Summen und Differenzen (Additionstheoreme):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}, \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}. \end{aligned}$$

7

Trigonometrische Funktionen des halben und des doppelten Winkels:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, & \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1, \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}, \\ \cot 2\alpha &= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}.\end{aligned}$$

Bemerkung:

Weitere Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen sind im Bedarfsfalle den einschlägigen Formelsammlungen zu entnehmen.

8

Formeln zur Berechnung in schiefwinkligen Dreiecken (Bild 40/1):

Sinussatz:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c.$$

Kosinussatz:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.\end{aligned}$$

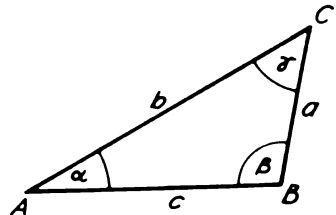


Bild 40/1

Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

9.1.2. Goniometrische Gleichungen

1 Eine Gleichung zwischen trigonometrischen Funktionen eines Winkels (einschließlich seiner Vielfachen) heißt goniometrische Gleichung mit einer Unbekannten.

$$\begin{aligned}\bullet \quad \sin \alpha + \sin 2\alpha &= 2 \sin 3\alpha, \\ \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{2}[\tan \alpha - \tan(\alpha + \frac{\pi}{2})], \\ \sin^2 x + 4 \cot^2 x &= 5.\end{aligned}$$

2 Lösungsverfahren für goniometrische Gleichungen:

1. Umformung der gegebenen Gleichung mit Hilfe der Beziehungen 9.1.1. **4** bis **7** so weit, daß nur noch eine trigonometrische Funktion des gesuchten Winkels α auftritt.
2. Falls erforderlich, wird die trigonometrische Funktion substituiert und die entstehende algebraische Gleichung gelöst.
3. Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen (9.1.1. **4** a)) besitzen goniometrische Gleichungen unendlich viele Lösungen.
Man beschränkt sich jedoch auf alle Winkel α mit $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ als mögliche Lösungen.
4. Mit den als mögliche Lösungen ermittelten Winkeln ist in der gegebenen Gleichung unbedingt die Probe durchzuführen, um eventuell auftretende Scheinlösungen auszusondern.

$$\bullet \quad 2 \sin x + \cos x = 2.$$

Nach 9.1.1. **5** gilt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und damit

$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}2 \sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 2, \\ \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 2 - 2 \sin x, \\ 1 - \sin^2 x &= 4 - 8 \sin x + 4 \sin^2 x, \\ 5 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 &= 0.\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung in $\sin x$ kann gelöst werden, indem man $\sin x = z$ substituiert.

$$5z^2 - 8z + 3 = 0,$$

$$z^2 - \frac{8}{5}z + \frac{3}{5} = 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{4}{5} \pm \sqrt{\frac{16}{25} - \frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \pm \frac{1}{5},$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{3}{5}.$$

Mit $z = \sin x$ ergibt das folgende Winkel zwischen 0° und 360° :

$$z_1 = 1, \text{ d. h., } \sin x = 1: \quad x_1 = 90^\circ.$$

$$z_2 = \frac{3}{5}, \text{ d. h., } \sin x = \frac{3}{5} = 0,6: \quad x_2 = 36,87^\circ \text{ (} x_2 \text{ im I. Quadranten). Da } \sin x \text{ für Winkel im I. und II. Quadranten positiv ist (9.1.1. } \boxed{3} \text{), gilt nach 9.1.1. } \boxed{4} \text{ c): } x_3 = 180^\circ - x_2 = 143,13^\circ \text{ (} x_3 \text{ im II. Quadranten).}$$

Probe (in der Ausgangsgleichung):

$$x_1 = 90^\circ: \quad 2 \sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cdot 1 + 0 = 2.$$

$$x_2 = 36,87^\circ: \quad 2 \sin 36,87^\circ + \cos 36,87^\circ = 2 \cdot 0,6 + 0,8 = 2.$$

$$\begin{aligned} x_3 = 143,13^\circ: \quad 2 \sin 143,13^\circ + \cos 143,13^\circ \\ = 2 \sin(180^\circ - 36,87^\circ) + \cos(180^\circ - 36,87^\circ) \\ = 2 \sin 36,87^\circ - \cos 36,87^\circ = 2 \cdot 0,6 - 0,8 \neq 2. \end{aligned}$$

Die Probe ergibt: $x_1 = 90^\circ$ und $x_2 = 36,87^\circ$ sind Lösungen der goniometrischen Gleichung, $x_3 = 143,13^\circ$ ist keine Lösung.

9.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Einige spezielle Werte der Winkelfunktionen lassen sich aus dem Quadrat (Bild 43/1) oder dem gleichseitigen Dreieck (Bild 43/2) ermitteln. So gilt zum Beispiel:

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \tan 60^\circ = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Es lässt sich folgender Zusammenhang in Form einer Gedächtnis-
hilfe aufstellen:

$$\begin{aligned}\sin 0^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{0} = \cos 90^\circ, \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{1} = \cos 60^\circ, \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} = \cos 45^\circ, \\ \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} = \cos 30^\circ, \\ \sin 90^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{4} = \cos 0^\circ.\end{aligned}$$

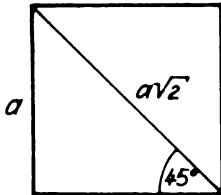


Bild 43/1

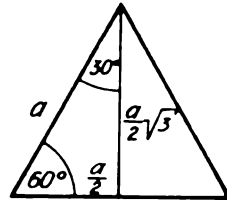


Bild 43/2

Mit den Ausführungen zu 9.1.1. [2], [3] und der Beziehung
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$ erhält man die nachfolgende Übersicht
über spezielle Werte der Winkelfunktionen:

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cot	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \pi$	2π

Beispiel 2:

Die folgenden Ausführungen sind nur noch von Interesse, falls ein elektronischer Taschenrechner nicht zur Verfügung steht. Für Winkel zwischen 0° und 90° können die Werte der trigonometrischen Funktionen den bekannten Zahlentafeln entnommen werden. Ist der betreffende Winkel selbst nicht angegeben, so sucht man den nächstkleineren Winkel auf. Der Zwischenwert wird wie in Lehrbrief 1, Abschn. 3.5., Beispiel 5, durch Interpolation ermittelt. Dabei ist zu beachten, daß bei der Kosinus- und Kotangensfunktion die Funktionswerte für wachsende Winkel abnehmen. Das gleiche gilt für das Aufsuchen der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Hierbei ist folgendes zu beachten: Die meisten Werte der Winkelfunktionen sind kleiner als 1, ihre Logarithmen müßten also negative Kennziffern erhalten. Deshalb wird meistens zur Vereinfachung des Rechenweges in den Tabellen eine um 10 größere Kennzahl angegeben. Diesen Wert muß man in Rechnungen selbstverständlich wieder abziehen. Die nachfolgenden Zahlenbeispiele entsprechen einer vierstelligen Zahlentafel.

- a) $\cos 29,87^\circ = ?$ $d = \frac{D \cdot n}{10} = \frac{9 \cdot 7}{10} \approx 6,$
 $\cos 29,80^\circ = 0,8678,$
 $\cos 29,90^\circ = 0,8669,$
also $\cos 29,87^\circ = 0,8678 - 0,0006 = 0,8672.$
- b) $\log \tan \alpha = 9,7639 - 10, \quad \alpha = ?$
 $\log \tan 30,1^\circ = 9,7632 - 10, \quad n = \frac{10 \cdot d}{D} = \frac{10 \cdot 7}{17} \approx 4,$
 $\log \tan 30,2^\circ = 9,7649 - 10,$
also $\alpha = 30,14^\circ.$
- c) $\log \cot 51,28^\circ = ?$ $d = \frac{D \cdot n}{10} = \frac{16 \cdot 8}{10} \approx 13,$
 $\log \cot 51,2^\circ = 9,9053 - 10,$
 $\log \cot 51,3^\circ = 9,9037 - 10,$
also $\log \cot 51,28^\circ = 9,9053 - 10 - 0,0013 = 9,9040 - 10.$

In den obigen Rechnungen sind die Winkel in der Dezimalteilung gegeben. Das erfordert natürlich die entsprechende

Darstellung in der Tafel. Manche Tafeln besitzen jedoch eine Teilung der Winkel nach Grad, Minuten und Sekunden. Für den Bedarfsfall findet man in Formelsammlungen eine Tabelle zur Umrechnung von einer Winkeldarstellung in die andere.

Will man den Wert einer trigonometrischen Funktion eines Winkels im Bogenmaß aus der Tafel bestimmen, muß man den Winkel nach 7.1.1. [3] zunächst in das Gradmaß umrechnen oder wiederum eine Umrechnungstafel benutzen.

Beispiel 3:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist $a = 0,264 \text{ m}$ und $b = 0,213 \text{ m}$. Gesucht sind die Winkel α und β sowie die Hypotenuse c .

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{0,264 \text{ m}}{0,213 \text{ m}} = 1,239, \quad \alpha = \underline{51,1^\circ},$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = \underline{38,9^\circ}.$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{0,264 \text{ m}}{\sin 51,1^\circ} = \frac{0,264 \text{ m}}{0,7782} = \underline{0,339 \text{ m}}.$$

Beispiel 4:

Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei $c = 10,25 \text{ cm}$. Der Winkel α ist $65,43^\circ$. Wie groß ist der Winkel β , und wie lang sind die Katheten?

$$\beta = 90^\circ - \alpha^\circ = \underline{24,57^\circ}.$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = 10,25 \text{ cm} \cdot \sin 65,43^\circ = 10,25 \text{ cm} \cdot 0,9094$$

$$= \underline{9,32 \text{ cm}}.$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 10,25 \text{ cm} \cdot \cos 65,43^\circ = 10,25 \text{ cm} \cdot 0,4158$$

$$= \underline{4,26 \text{ cm}}.$$

Beispiel 5:

In einem schiefwinkligen Dreieck sind die Seite $b = 15 \text{ cm}$, die Winkel $\beta = 35,3^\circ$ und $\gamma = 86,7^\circ$ gegeben. Gesucht sind der Winkel α und die Seiten a und c .

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \underline{58^\circ}.$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta \text{ (Sinussatz!)},$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{15 \text{ cm} \cdot \sin 58^\circ}{\sin 35,3^\circ} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 0,8480}{0,5779} = \underline{22,01 \text{ cm}}.$$

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma,$$

$$c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{15 \text{ cm} \cdot \sin 86,7^\circ}{\sin 35,3^\circ} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 0,9983}{0,5779} = \underline{25,91 \text{ cm}}.$$

Beispiel 6:

In einem schiefwinkligen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben:

$$b = 23,45 \text{ cm}, \quad c = 88,27 \text{ cm}, \quad \alpha = 32,43^\circ.$$

Zu bestimmen ist die Dreiecksseite a !

$$\text{Kosinussatz: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{23,45^2 + 88,27^2 - 2 \cdot 23,45 \cdot 88,27 \cdot \cos 32,43^\circ} \text{ cm}.$$

Falls für die Berechnung solcher Ausdrücke kein elektronischer Rechner zur Verfügung steht, ist es zweckmäßig, die Berechnung logarithmisch auszuführen:

<u>lg b</u>	<u>1,3701</u>	<u>· 2</u>	+	
lg b ²	2,7402			b ² = 549,8
<u>lg c</u>	<u>1,9458</u>	<u>· 2</u>	+	
lg c ²	3,8916			c ² = 7791,5
lg 2	0,3010		+	b ² + c ² = 8341,3
<u>lg cos α</u>	<u>9,9264 - 10</u>		+	
<u>lg 2bc cos α</u>	<u>3,5433</u>			2bc cos α = 3494,0
lg a ²	3,6855			a ² = 4847,3
lg a	1,8428			Lösung: <u>a = 69,63 cm.</u>

Beispiel 7:

Von einem Dreieck mit den Seiten $a = 12,3 \text{ cm}$, $b = 16,2 \text{ cm}$ und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma = 81,51^\circ$ sind die übrigen Winkel und die Seite c zu bestimmen.

Zunächst wird der Kosinussatz angewandt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

$$= \sqrt{12,3^2 + 16,2^2 - 2 \cdot 12,3 \cdot 16,2 \cdot \cos 81,51^\circ},$$

$$c = \sqrt{151,29 + 262,44 - 58,83} = \underline{18,83 \text{ cm}}.$$

Der Sinussatz liefert den zweiten Winkel: $\sin \beta : \sin \gamma = b : c$,

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \gamma}{c} = \frac{16,2 \text{ cm} \cdot \sin 81,51^\circ}{18,83 \text{ cm}} = \frac{16,2 \cdot 0,9890}{18,83} = 0,8509.$$

Da der Sinus im I. und II. Quadranten positiv ist, kommen als Winkel in Frage:

$$\beta_1 = 58,31^\circ \quad \text{und} \quad \beta_2 = 180^\circ - 58,31^\circ = 121,69^\circ.$$

Da jedoch $b < c$ ist, muß auch $\beta < \gamma$ sein, denn im Dreieck liegt der größeren Seite auch immer der größere Winkel gegenüber.

$$\text{Damit ist } \beta = \beta_1 = \underline{58,31^\circ} \quad \text{und} \quad \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = \underline{40,18^\circ}.$$

Beispiel 8:

Um die Breite x eines Flusses zu bestimmen, wird von einem 20 m vom Flußufer entfernt stehendem Haus das gegenüberliegende Ufer aus zwei verschiedenen Höhen anvisiert (siehe Bild 47/1):

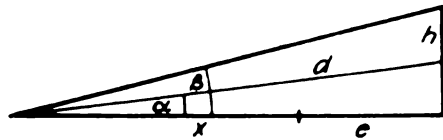


Bild 47/1

$$\alpha = 8,4^\circ, \quad \beta = 14,6^\circ, \quad h = 6 \text{ m}, \quad e = 20 \text{ m}.$$

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$d = h \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} = h \cdot \frac{\cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)},$$

$$\cos \alpha = \frac{x + e}{d}, \quad x = d \cdot \cos \alpha - e,$$

$$x = \frac{h \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} - e = \frac{6 \text{ m} \cdot \cos 14,6^\circ \cdot \cos 8,4^\circ}{\sin 6,2^\circ} - 20 \text{ m}$$

$$= \frac{6 \cdot 0,9677 \cdot 0,9893}{0,1080} \text{ m} - 20 \text{ m} = 53,19 \text{ m} - 20 \text{ m} \approx \underline{33 \text{ m}}.$$

Beispiel 9:

Von einem Dreieck sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben. Es soll der Flächeninhalt A bestimmt werden.

$$a = 15,36 \text{ m}, \quad b = 26,84 \text{ m}, \quad \gamma = 116^\circ 30'.$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 15,36 \text{ m} \cdot 26,84 \text{ m} \cdot \sin 116,5^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15,36 \cdot 26,84 \cdot \sin(90^\circ + 26,5^\circ) \text{ m}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15,36 \cdot 26,84 \cdot \cos 26,5^\circ \text{ m}^2 = \frac{1}{2} \cdot 15,36 \cdot 26,84 \cdot 0,8949 \text{ m}^2 \\ &= \underline{184,47 \text{ m}^2}. \end{aligned}$$

Beispiel 10:

Goniometrische Gleichungen

a) $\tan x + \frac{3}{\tan x} = 4 \quad | \cdot \tan x,$

$$\tan^2 x + 3 = 4 \tan x,$$

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0, \quad z = \tan x \text{ gesetzt},$$

$$z^2 - 4z + 3 = 0, \quad z_{1,2} = 2 \pm 1.$$

$$\text{Aus } z_1 = \tan x = 3 \text{ folgt: } \underline{x_1 = 71,57^\circ}, \quad \underline{x_2 = 251,57^\circ},$$

$$\text{aus } z_2 = \tan x = 1 \text{ folgt: } \underline{x_3 = 45^\circ}, \quad \underline{x_4 = 225^\circ}.$$

Die Probe ergibt: Alle vier Lösungen erfüllen die Ausgangsgleichung.

b) $4 \cos^2 x - 4 \sin x = 1,$

$$4(1 - \sin^2 x) - 4 \sin x = 1,$$

$$\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0, \quad \sin x = z \text{ gesetzt},$$

$$z^2 + z - \frac{3}{4} = 0, \quad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm 1.$$

$$\text{Aus } z_1 = \sin x = \frac{1}{2} \text{ folgt: } \underline{x_1 = 30^\circ}, \quad \underline{x_2 = 150^\circ}.$$

$z_2 = -1,5$ liefert keine Lösungen, da der Sinus nur für Werte $-1 \leq \sin x \leq 1$ definiert ist.

Die Probe bestätigt, daß x_1 und x_2 Lösungen der Ausgangsgleichung sind.

c) $\cos x + 2 \sin 2x = 0,$

$$\cos x + 4 \sin x \cos x = 0,$$

$$\cos x(1 + 4 \sin x) = 0.$$

Ein Produkt ist gleich Null, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist:

$$\cos x = 0, \quad \underline{x_1 = 90^\circ}, \quad \underline{x_2 = 270^\circ}.$$

$1 + 4 \sin x = 0, \quad \sin x = -\frac{1}{4} = -0,25.$ Es gilt
 $\sin 14,48^\circ = 0,25$ und $\sin(180^\circ + 14,48^\circ) = -0,25$
sowie $\sin(360^\circ - 14,48^\circ) = -0,25.$ Daraus folgt:

$$\underline{x_3 = 194,48^\circ}, \quad \underline{x_4 = 345,52^\circ}.$$

Alle vier Lösungen erfüllen die Ausgangsgleichung.

9.3. Übungsaufgaben

A9/1. Geben Sie die folgenden Winkel im Bogenmaß bzw. im Gradmaß an!

- a) $36^\circ,$ b) $145^\circ 17' 18'',$ c) $287,71^\circ,$
d) $\frac{5\pi}{4},$ e) $0,82,$ f) $5,63.$

A9/2. Bestimmen Sie nachfolgende Funktionswerte!

- a) $\sin 245,34^\circ,$ b) $\cos 246,57^\circ,$
c) $\tan(-463,19^\circ),$ d) $\cot 112,12^\circ,$
e) $\lg \sin 26,68^\circ,$ f) $\lg \tan 85,3^\circ.$

A9/3. Für welche Winkel zwischen 0° und 360° gilt

- a) $\sin \alpha = 0,8516,$ b) $\cos \alpha = -0,5821,$
c) $\lg \sin \alpha = 9,7498,$ d) $\lg \cot x = 0,0952?$

A9/4. In einem rechtwinkligen Dreieck sind der Winkel $\alpha = 16,2^\circ$ und die Hypotenuse $c = 83,25$ cm gegeben. Bestimmen Sie die übrigen Seiten und Winkel!

- A9/5. Ein Turm wirft bei einem Einfallswinkel des Sonnenlichtes von $\alpha = 54^\circ$ einen Schatten der Länge $\ell = 24,8$ m (vgl. Bild 50/1). Wie hoch ist der Turm?

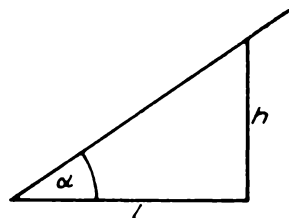


Bild 50/1

- A9/6. Von den Endpunkten A und B einer Strecke $c = 78,2$ m erscheint ein dritter Punkt C unter den Winkeln $\alpha = 110,3^\circ$ und $\beta = 35,8^\circ$. Wie weit liegt der Punkt C jeweils von A und B entfernt?
- A9/7. In einem schiefwinkligen Dreieck betragen die Seitenlängen $a = 7,82$ cm, $b = 12,18$ cm und $c = 10,06$ cm. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks?
- A9/8. Die Seiten $a = 14,93$ cm, $b = 9,66$ cm und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\gamma = 107,5^\circ$ sind von einem Dreieck bekannt. Wie groß ist sein Flächeninhalt?
- A9/9. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe $h = 4,5$ m und dem von den beiden Schenkeln eingeschlossenen Winkel $\gamma = 35^\circ$!
- A9/10. Die Spitze eines Fernsehturmes wird von einem Punkt der durch seinen Fußpunkt gehenden, waagerechten Ebene anvisiert. Dabei wird ein Erhebungswinkel $\alpha = 20^\circ$ gemessen. Nachdem man sich dem Turm um $d = 400$ m auf dieser Ebene genähert hat, findet man den Erhebungswinkel $\beta = 36^\circ$. Wie hoch ist der Turm?
- A9/11. Lösen Sie die folgenden goniometrischen Gleichungen!
- $4 \cos^2 x + 5 \cos x = \frac{7}{2},$
 - $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x = \cot x,$
 - $\sin x = 8 \cos 2x.$

10. Analytische Geometrie der Ebene

In der analytischen Geometrie werden geometrische Untersuchungen mit rechnerischen Methoden durchgeführt. Geometrische Gebilde werden in ihrer Lage durch Zahlenangaben bestimmt, ihre Eigenschaften werden numerisch ermittelt. Deshalb bildet die analytische Geometrie eine wesentliche Grundlage für die sogenannte „Höhere Mathematik“. Sie findet Anwendung durch die Vektorrechnung, und sie wird praktisch für alle koordinatengebundenen Betrachtungen in der Mathematik, in den Naturwissenschaften und in der Technik benötigt. Kenntnisse über die analytische Geometrie der Kegelschnitte (Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel) sind Voraussetzungen für eine Reihe von Anwendungen der Differential- und der Integralrechnung für Funktionen einer und mehrerer Variabler.

10.1. Das Koordinatensystem

- [1] Unter einem Koordinatensystem versteht man zwei einander schneidende Zahlengeraden (Koordinatenachsen).
Stehen diese Zahlengeraden senkrecht aufeinander, so handelt es sich um ein kartesisches Koordinatensystem.
Die eine Koordinatenachse heißt Abszissenachse (x-Achse), die andere Ordinatenachse (y-Achse). Der Schnittpunkt der beiden Achsen heißt Koordinatenanfangspunkt, Ursprung oder Nullpunkt.
- [2] Die Lage eines Punktes in der Ebene wird eindeutig durch seine vorzeichenbehafteten Abstände von beiden Koordinatenachsen bestimmt (vgl. Bild 52/1):
Abszisse: vorzeichenbehafteter Abstand x von der y -Achse,
Ordinate: vorzeichenbehafteter Abstand y von der x -Achse.
- [3] Durch ein Koordinatensystem wird jedem Punkt P der Ebene eindeutig ein geordnetes Zahlenpaar $(x;y)$ zugeordnet.
Man schreibt $P(x;y)$ und spricht: "Punkt P mit den Koordinaten x und y ."
 - In Bild 52/1 gilt:
 $A(-2;3)$, $B(-3;-3)$, $C(1;-2)$, $D(4;0)$.

- 4 Die Koordinatenachsen teilen die Ebene in vier Quadranten. Diese werden im mathematisch positiven Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) mit I, II, III, IV bezeichnet (vgl. Bild 52/1).

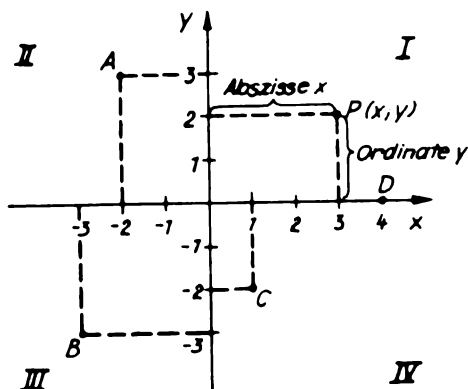


Bild 52/1

10.2. Die Strecke

10.2.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- 1 Die Strecke $\overline{AB}$ ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B in einer Ebene (Bild 52/2). Kommt es auf den Durchlaufsinne einer Strecke an, so muß man Anfangspunkt und Endpunkt der Strecke festlegen. Solche Strecken heißen orientiert. Oft wird dafür die Schreibweise $\vec{AB}$ benutzt. Wird auf die Angabe von Richtungspfeilen verzichtet, so gilt stets der zuerst genannte Punkt als Anfangspunkt, der zuletzt genannte Punkt als Endpunkt der Strecke.

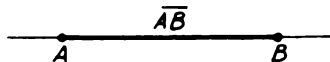


Bild 52/2

- 2 Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ gibt den Abstand der Punkte A und B voneinander an. Sind $A(x_1; y_1)$ und $B(x_2; y_2)$ Punkte in einem Koordinatensystem, so wird der Abstand $\overline{AB}$ mit dem Satz von Pythagoras bestimmt (Bild 53/1). Es gilt:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- 3 Unter der Richtung einer Strecke versteht man den Tangens ihres Winkels φ gegen die positive x-Achse. Nach Bild 53/1 gilt:

$$\tan \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_2 \neq x_1).$$

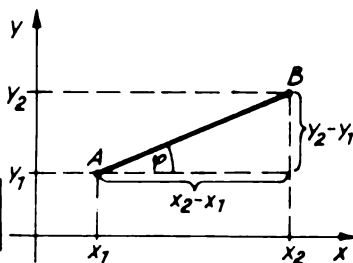


Bild 53/1

10.2.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Gegeben sind die Punkte $P_1(-2;3)$ und $P_2(4;-5)$. Die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$ beträgt:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(4 + 2)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Die Richtung der Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist:

$$\tan \varphi = \frac{-5 - 3}{4 - (-2)} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

Beispiel 2:

Teilung einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ im Verhältnis $m : n$.

Gesucht ist der Punkt $T(x_T, y_T)$, der die Strecke $\overline{P_1P_2}$ im Verhältnis $m : n$ teilt, d. h., es muß gelten:

$$\overline{P_1T} : \overline{TP_2} = m : n.$$

Nach Bild 53/2 ergibt sich mit dem Strahlensatz (vgl. Abschnitt 7.1.2.):

$$\frac{x_T - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m}{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_T - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{n}.$$

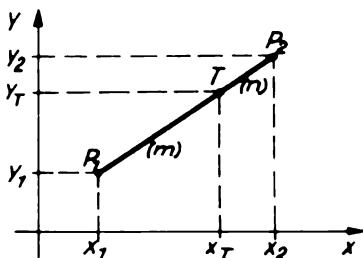


Bild 53/2

Damit lauten die Koordinaten des Teilungspunktes T:

$$x_T = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \quad y_T = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}.$$

Will man eine Strecke halbieren, so ist das der Spezialfall $m : n = 1 : 1$. Die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{P_1P_2}$ sind dann:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Soll die Strecke $\overline{P_1P_2}$ mit $P_1(2;1)$ und $P_2(7;5)$ im Verhältnis $3 : 2$ geteilt werden, so besitzt also der Teilungspunkt die Koordinaten:

$$x_T = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 7}{5} = 5 \quad \text{und} \quad y_T = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 5}{5} = 3,4.$$

10.2.3. Übungsaufgaben

A10/1. Berechnen Sie Länge und Richtung der Strecke $\overline{P_1P_2}$!

- a) $P_1(1;2)$, $P_2(5;5)$; b) $P_1(-2;3)$, $P_2(4;-5)$;
c) $P_1(2,8;0,6)$, $P_2(-2,2;12,6)$.

A10/2. Berechnen Sie die Länge der Seiten und der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC!

- a) $A(-2;1)$, $B(4;-2)$, $C(4;4)$,
b) $A(1;13)$, $B(-4;1)$, $C(4;7)$.

10.3. Die Gerade

10.3.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- 1 Eine Kurve ist der geometrische Ort für alle die Punkte, die durch ein und dieselbe geometrische Eigenschaft festgelegt sind.

Liegt eine Kurve in einem x,y -Koordinatensystem, so sind für einen beliebigen Punkt der Kurve die Koordinaten x und y voneinander abhängig. Läßt sich diese Abhängigkeit durch eine Gleichung zwischen x und y ausdrücken, so heißt diese die Gleichung der Kurve.

Die Koordinaten aller Punkte der Kurve erfüllen die Gleichung der Kurve, während für alle Punkte, die nicht auf der Kurve liegen, die Gleichung nicht erfüllt ist.

2 Durch zwei Punkte verläuft genau eine Gerade.

Für einen beliebigen Punkt $P(x;y)$ einer Geraden g im x,y -Koordinatensystem gilt nach Bild 55/1:

$$\tan \varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Setzt man $m = \tan \varphi$, so entsteht nach Umformung die Gleichung

$$y = mx + b.$$

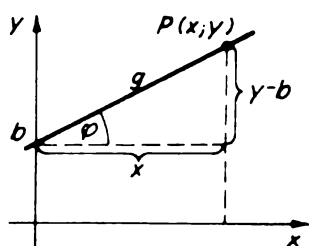


Bild 55/1

3 $y = mx + b$ heißt die Normalform der Geradengleichung.

$m = \tan \varphi$ heißt der Richtungsfaktor oder die Richtung der Geraden (der Winkel φ wird gegen die positive x -Achse gemessen), b ist der Abschnitt auf der y -Achse.

● Sonderfälle:

$b = 0$: $y = mx$ Gerade durch den Ursprung,

$m = 0$: $y = b$ Parallele zur x -Achse,

$b = 0, m = 0$: $y = 0$ Gleichung der x -Achse.

Bemerkung:

Für die y -Achse und jede Parallele zur y -Achse versagt die Normalform der Geradengleichung, denn b und $m = \tan \frac{\pi}{2}$ existieren in diesem Falle nicht.

4 Alle Gleichungen von Geraden lassen sich auf die Form

$$Ax + By + C = 0 \quad (A, B \text{ nicht beide gleich Null})$$

bringen. Diese Form heißt die allgemeine Geradengleichung.

● $A = 2, B = 0, C = -4$: $2x - 4 = 0$ oder $x = 2$

Parallele zur y -Achse.

● $A \neq 0, B = 0, C = 0$: $x = 0$ Gleichung der y -Achse.

● $B \neq 0$: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ Normalform 3 .

● $C = 0$: $Ax + By = 0$ Gerade durch den Ursprung.

- 5 Verläuft eine Gerade nicht durch den Ursprung (d. h., in [4] ist $C \neq 0$) und liegt sie zu keiner Koordinatenachse parallel, so kann sie in der Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

dargestellt werden, wenn a und b die Abschnitte auf den Achsen sind (vgl. Bild 56/1). Diese Gleichungsform heißt Achsenabschnittsgleichung der Geraden.

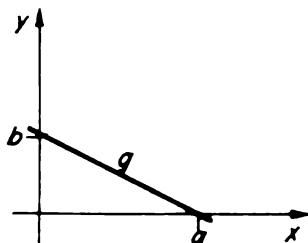


Bild 56/1

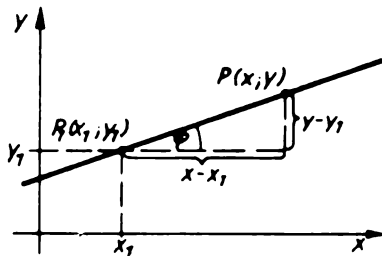


Bild 56/2

- 6 Sind der Richtungsfaktor $m = \tan \varphi$ und ein Punkt $P_1(x_1; y_1)$ einer Geraden g bekannt, so erhält man nach Bild 56/2 die Punktrichtungsgleichung der Geraden:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad (\text{für } P \neq P_1).$$

- 7 Sind von einer Geraden zwei Punkte $P_1(x_1; y_1)$ und $P_2(x_2; y_2)$ gegeben, so ist der Richtungsfaktor nach 10.2.1. [3] durch $m = \tan \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bestimmt, und man erhält mit [6] die Zweipunktgleichung der Geraden:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1).$$

- 8 Schnittpunkt zweier Geraden

Die Koordinaten des Schnittpunktes von zwei Geraden müssen die Gleichungen beider Geraden erfüllen. Deshalb bedeutet die Ermittlung dieses Schnittpunktes das Lösen eines Gleichungssystems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten (vgl. Abschnitt 6.).

9 Schnittwinkel zweier Geraden

Zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen

$$y = m_1 x + b_1,$$

$$y = m_2 x + b_2$$

bilden mit der positiven x-Achse die Winkel φ_1 und φ_2 . Unter dem Schnittwinkel φ der beiden Geraden versteht man den Winkel, um den man die erste Gerade um den Schnittpunkt im mathematisch positiven Sinn (entgegen dem Uhrzeiger) bis zum Zusammenfallen mit der zweiten Geraden drehen muß. Nach Bild 57/1 ist der Schnittwinkel $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

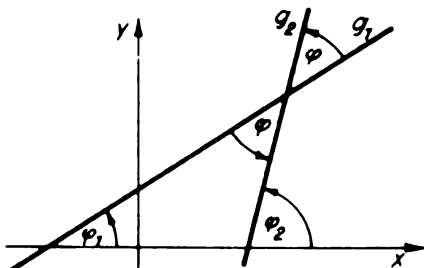


Bild 57/1

- a) Für parallele Geraden gilt: $\varphi = 0$, d. h., $\varphi_1 = \varphi_2$ und damit

$$m_1 = m_2.$$

- b) Für aufeinander senkrecht stehende Geraden ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und damit $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$.

Aus $\tan \varphi_2 = \tan(\frac{\pi}{2} + \varphi_1) = -\cot \varphi_1 = -\frac{1}{\tan \varphi_1}$ folgt:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad (m_1 \neq 0).$$

- c) Für beliebige Winkel zweier Geraden (ausgenommen $\varphi = \frac{\pi}{2}$) gilt für $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ nach Anwendung des Additionstheorems der Tangensfunktion (vgl. 9.1.1. [5]):

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \quad (m_1 \cdot m_2 \neq -1).$$

10.3.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Die Geradengleichung $2x + 3y + 1 = 0$ lautet in Normalform $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Da diese Gerade nicht durch den Ursprung geht und zu keiner Koordinatenachse parallel liegt, lässt sie sich auch als Achsenabschnittsgleichung darstellen:

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1.$$

Beispiel 2:

Durch den Punkt $P_1(2;5)$ soll eine Gerade gelegt werden, die mit der positiven x-Achse einen Winkel von 60° bildet.

Punktrichtungsgleichung:

$$m = \tan \varphi = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\frac{y-5}{x-2} = \sqrt{3}, \quad y-5 = \sqrt{3}(x-2), \quad \underline{y = \sqrt{3}x + (5 - 2\sqrt{3})}.$$

Beispiel 3:

Es sind der Schnittpunkt und der Schnittwinkel der beiden Geraden $5x + 4y - 22 = 0$ und $3x - 5y + 9 = 0$ gesucht.

$$\begin{array}{rcl} 5x + 4y - 22 = 0 & | & \cdot 3 \\ 3x - 5y + 9 = 0 & | & \cdot 5 \\ \hline 15x + 12y - 66 = 0 & | & \\ 15x - 25y + 45 = 0 & | & - \\ \hline & & 37y - 111 = 0 \end{array}$$

$$\underline{y = 3}; \quad 5x + 4 \cdot 3 - 22 = 0, \quad \underline{x = 2}.$$

Schnittpunkt $P(2;3)$.

Für die Bestimmung des Schnittwinkels ist die Normalform erforderlich.

$$\text{Aus } 5x + 4y - 22 = 0 \text{ folgt: } y = -\frac{5}{4}x + \frac{11}{2}.$$

$$\text{Aus } 3x - 5y + 9 = 0 \text{ folgt: } y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5}. \text{ Das heißt,}$$

$$m_1 = -\frac{5}{4} \text{ und } m_2 = \frac{3}{5}.$$

Nach 10.3.1. $\boxed{9}$ ist

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{5}{4}}{1 + (-\frac{5}{4}) \cdot (\frac{3}{5})} = \frac{37}{5} = 7,4$$

und damit der Schnittwinkel $\varphi = 82,3^\circ$.

Beispiel 4:

Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden ist gleichbedeutend mit der Lösung eines Gleichungssystems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Diesen Schnittpunkt (und damit die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems) kann man graphisch durch Eintragen der Geraden in ein Koordinatensystem ermitteln.

a) $3x + 4y = 3,$ b) $2x - 4y = -8,$ c) $x + y = 2,$
 $3x + 4y = 8.$ $-\frac{1}{2}x + 3y = 8.$ $4x + 4y = 8.$

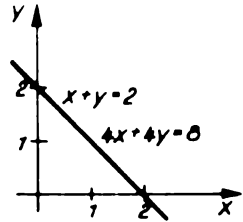
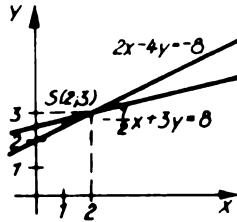
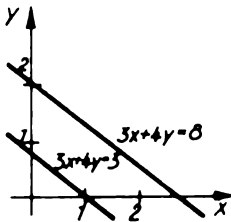


Bild 59/1

Wie Bild 59/1 verdeutlicht, bestehen für zwei Geraden folgende Möglichkeiten:

- a) kein Schnittpunkt (Geraden sind parallel),
- b) genau ein Schnittpunkt (Geraden sind verschieden voneinander und nicht parallel),
- c) unendlich viele gemeinsame Punkte (Geraden fallen zusammen).

10.3.3. Übungsaufgaben

A10/3. Bilden Sie von den folgenden Geradengleichungen die Normalform und die Achsenabschnittsform, falls diese existieren, und zeichnen Sie die Geraden!

- a) $2x + 3y - 1 = 0,$ b) $4x - 6y = 0,$
c) $3x + 2y + 10 = 0.$

A10/4. Bestimmen Sie die Normalform der Gleichung einer Geraden durch P_1 , die mit der positiven x-Achse den Winkel φ bildet!

- a) $P_1(2;3), \quad \varphi = 45^\circ,$ b) $P_1(-1;-3), \quad \varphi = 30^\circ.$

A10/5. Bestimmen Sie die Normalform der Gleichung einer Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 !

a) $P_1(-3;3)$, $P_2(-1;-4)$; b) $P_1(1;5)$, $P_2(4;7)$.

A10/6. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch $P_1(2;4)$ geht und auf der Geraden $3x + 2y = 5$ senkrecht steht!

A10/7. Die Seiten a , b , c eines Dreiecks haben die Gleichungen
a: $y + 8 = 0$; b: $12x + 5y - 32 = 0$; c: $4x - 3y + 8 = 0$.
Berechnen Sie

- die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks,
- die Längen der Seiten,
- die Winkel des Dreiecks!

10.4. Der Kreis

10.4.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem gegebenen Punkt M, dem Mittelpunkt, den gleichen Abstand r haben. r heißt der Radius des Kreises.
- Liegt der Mittelpunkt M des Kreises im Koordinatenursprung, so ergibt sich aus der Definition [1] und Bild 60/1 für jeden Punkt $P(x;y)$ des Kreises mit dem Radius r :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Diese Beziehung heißt Mittelpunktsleichung des Kreises.

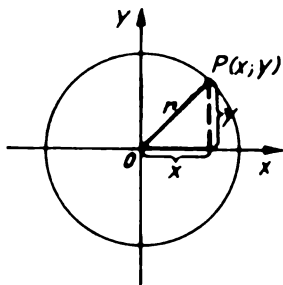


Bild 60/1

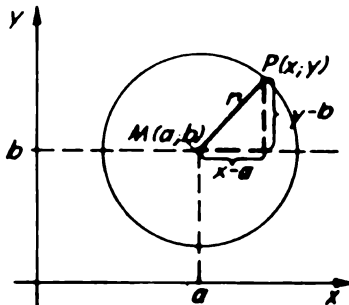


Bild 60/2

- [3] Der Mittelpunkt M eines Kreises habe die Koordinaten a und b. Der Radius sei r. Dann gilt für alle Punkte des Kreises: $\overline{MP} = r$.

Nach Bild 60/2 folgt daraus die allgemeine Kreisgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Wichtige Folgerungen:

1. Durch die Angabe von M und r ist ein Kreis eindeutig bestimmt.
2. Die Mittelpunkts Gleichung [2] ist ein Spezialfall der allgemeinen Kreisgleichung [3].

10.4.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Gesucht ist die Gleichung des Kreises um O durch den Punkt

$P_1(4;3)$:

$$4^2 + 3^2 = r^2, \quad r^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Beispiel 2:

Gesucht ist die Gleichung des Kreises um M(2;3) durch $P_1(7;3)$:

Für einen Kreis um M gilt:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = r^2.$$

Da P_1 auf dem Kreis liegen soll, müssen seine Koordinaten die Kreisgleichung erfüllen:

$$(7 - 2)^2 + (3 - 3)^2 = r^2, \\ 5^2 + 0^2 = r^2, \quad r = 5.$$

Kreisgleichung: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Beispiel 3:

Durch 3 Punkte in der Ebene ist ein Kreis eindeutig bestimmt.

Gesucht ist die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte

$P_1(6;2)$, $P_2(4;6)$ und $P_3(-3;5)$ geht.

Zu bestimmen sind damit die 3 Unbekannten a, b und r der allgemeinen Kreisgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Jeder der gegebenen Punkte muß die Kreisgleichung erfüllen,

damit erhält man:

$$\left. \begin{aligned} (6 - a)^2 + (2 - b)^2 &= r^2 \\ (4 - a)^2 + (6 - b)^2 &= r^2 \\ (-3 - a)^2 + (5 - b)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Gleichungen für die} \\ 3 \text{ Unbekannten } a, b, r. \end{array}$$

Ausmultiplizieren und Subtrahieren von je 2 Gleichungen ergibt:

$$\left. \begin{aligned} -4a + 8b &= 12 \\ -14a - 2b &= -18 \end{aligned} \right\} \underline{a = 1}, \underline{b = 2}.$$

Durch Einsetzen in eine Ausgangsgleichung wird $r = 5$ ermittelt.

Die Kreisgleichung lautet

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

10.4.3. Übungsaufgaben

A10/8. Wie lautet die Gleichung des Kreises um O, der durch P_1 geht?

$$a) P_1(-5; -12), \quad b) P_2(3\sqrt{2}; -3\sqrt{2}).$$

A10/9. Wie lautet die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt M, der durch den Punkt P_1 geht?

$$a) M(0; 5), \quad P_1(-3; 1); \quad b) M(1; -1), \quad P_1(1; 0).$$

A10/10. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Kreise $M_1(0; 0)$, $r_1 = 5$ und $M_2(7; 7)$, $r_2 = 5$!

A10/11. Wie lautet die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte $P_1(8; 2)$, $P_2(5; 3)$ und $P_3(10; -2)$ geht?

10.5. Die Parabel

10.5.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- [1] Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer festen Geraden, der Leitlinie, und von einem festen Punkt, dem Brennpunkt, gleichen Abstand haben.

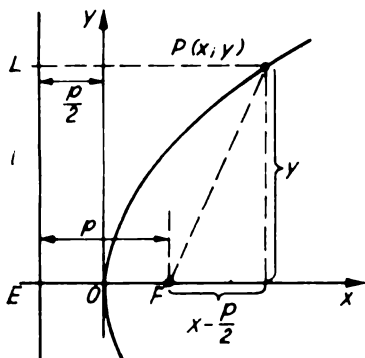


Bild 63/1

l Leitlinie,
F Brennpunkt,
 $\overline{EF} = p$.

Nach Definition 1 gilt für jeden Punkt P der Parabel:

$$\overline{PF} = \overline{PL}.$$

Das entspricht nach Bild 63/1

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2},$$

und daraus folgt:

$$y^2 = 2px.$$

2 Die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

heißt Scheiteltgleichung der Parabel.

Sie ist erfüllt für alle $x \geq 0$, sie ist nicht erfüllbar für alle $x < 0$.

Zu jedem $x > 0$ gehören zwei nur durch Vorzeichen unterschiedene Werte von y . Die Parabel hat also die x -Achse zur Symmetrieachse. Diese heißt Parabelachse. Der Scheitelpunkt der Parabel liegt im Koordinatenursprung. Die Größe $p > 0$ heißt Halbparameter, und die Größe $2p$ heißt Parameter der Parabel. Die Kurve ist nach rechts offen.

Durch Vertauschen von x und y und durch Ändern des Vorzeichens des Parameters $2p$ in $-2p$ erhält man andere Lagen der Parabel.

3 Hauptlagen der Parabel (Bild 64/1).

I. $y^2 = 2px$; $x \geq 0$; Kurve rechts offen.

II. $x^2 = 2py$; $y \geq 0$; Kurve oben offen.

III. $y^2 = -2px$; $x \leq 0$; Kurve links offen.

IV. $x^2 = -2py$; $y \leq 0$; Kurve unten offen.

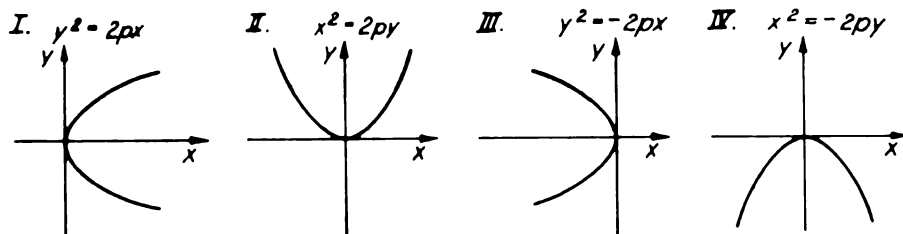


Bild 64/1

4 Besitzt der Scheitel S einer Parabel die Koordinaten $x = a$ und $y = b$ und ist die Parabelachse zur x-Achse parallel, so lautet die Parabelgleichung

$$(y - b)^2 = \pm 2p(x - a).$$

Bei positivem Vorzeichen der rechten Gleichungsseite ist die Parabel nach rechts geöffnet (Bild 64/2), bei negativem Vorzeichen ist sie nach links geöffnet.

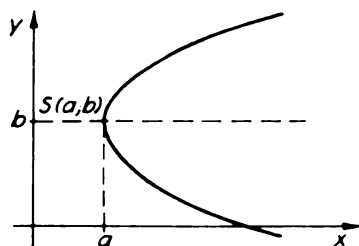


Bild 64/2

5 Analog 4 gilt für eine Parabel mit $S(a;b)$, deren Parabelachse parallel zur y-Achse ist, die Parabelgleichung

$$(x - a)^2 = \pm 2p(y - b).$$

Bei positivem Vorzeichen der rechten Gleichungsseite ist die Parabel nach oben geöffnet, bei negativem Vorzeichen ist sie nach unten geöffnet.

10.5.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Bestimmung der Lage der Parabel $8x - y^2 + 16y - 80 = 0$:

$y^2 - 16y = 8x - 80$. Mit quadratischer Ergänzung wird daraus

$$y^2 - 16y + 64 = 8x - 80 + 64,$$

$$(y - 8)^2 = 8(x - 2).$$

Scheitel $S(2;8)$; Achse parallel zur x-Achse;

Parabel ist nach rechts offen.

Beispiel 2:

Von einer Parabel sind der Scheitel $S(12;-6)$ und der Brennpunkt $F(9;-6)$ bekannt. Es ist ihre Gleichung zu bestimmen.

Nach Bild 63/1 ist $\overline{SF} = \frac{p}{2} = 3$, d. h., $2p = 12$.

F liegt links von S; Parabelachse liegt parallel zur x-Achse; Parabel ist links offen.

$$(y + 6)^2 = -12(x - 12).$$

Beispiel 3:

Gesucht ist die Gleichung der Parabel, die durch die drei Punkte $P_1(0;12)$, $P_2(12;0)$ und $P_3(9;6)$ geht und deren Achse zur x-Achse parallel ist.

Die gesuchte Parabelgleichung hat die Form

$$(y - b)^2 = c(x - a).$$

Die drei Punkte P_1 , P_2 , P_3 müssen diese Gleichung erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} (12 - b)^2 = c(-a) \\ (-b)^2 = c(12 - a) \\ (6 - b)^2 = c(9 - a) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Gleichungen für die} \\ 3 \text{ Unbekannten } a, b, c. \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert:

$$a = 12, \quad b = 0, \quad c = -12.$$

Parabelgleichung: $y^2 = -12(x - 12)$.

10.5.3. Übungsaufgaben

A10/12. Geben Sie die Lage folgender Parabeln an!

- a) $x^2 - 4y + 8x = 0$, b) $4x + y^2 + 8y - 48 = 0$,
 c) $x^2 + 6x + 5y + 4 = 0$.

A10/13. Es ist eine Parabel so zu bestimmen, daß sie durch die drei Punkte $P_1(6;0)$, $P_2(7;7)$ und $P_3(8;16)$ geht und ihre Achse zur y-Achse parallel liegt.

10.6. Ellipse und Hyperbel

10.6.1. Grundlegende Begriffe und Sätze

- 1 Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte P, deren Entfernungen von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, eine konstante Summe Differenz besitzen.

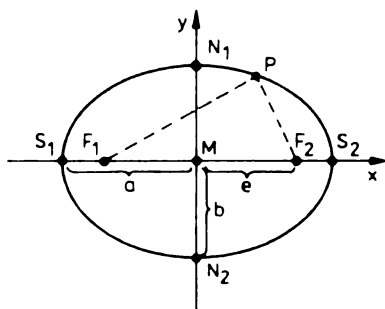


Bild 66/1

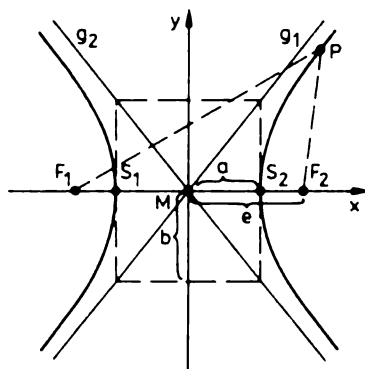


Bild 66/2

F_1, F_2 Brennpunkte; S_1, S_2, N_1, N_2 Scheitelpunkte;
 $\overline{S_1S_2} = 2a$ Hauptachse; $\overline{N_1N_2} = 2b$ Nebenachse der Ellipse;
 $\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$ lineare Exzentrizität.

Es gilt:

für die Ellipse: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$,

für die Hyperbel: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$ (negatives Vorzeichen gilt für den linken Hyperbelast).

Mit den Größen a und c läßt sich die Größe b ermitteln.

Für die Ellipse gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.
Hyperbel

Damit läßt sich auch für die Hyperbel eine Nebenachse der Länge $2b$ festlegen (siehe Bild 66/2).

Die x -Achse und die y -Achse sind Symmetrieachsen der Ellipse bzw. Hyperbel (vgl. Bilder 66/1 und 66/2).

- Die Ellipse in Mittelpunktslage (Bild 66/1) hat die Scheitel $S_1(a;0)$, $S_2(-a;0)$, $S_3(0;b)$, $S_4(0;-b)$. Die Hyperbel in Mittelpunktslage (Bild 66/2) hat die Scheitel $S_1(a;0)$ und $S_2(-a;0)$.

- [2] Liegt die Hauptachse einer Ellipse bzw. Hyperbel auf der x -Achse des Koordinatensystems, so gelten die Mittelpunktsgleichungen

Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Für den Spezialfall $a = b$ nimmt die Ellipsengleichung die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, d. h., $x^2 + y^2 = a^2$, an. Das entspricht einem Kreis mit dem Radius a .

- [3] Die Geraden g_1 und g_2 (Bild 66/2) heißen Asymptoten der Hyperbel. Diesen Geraden kommen die Hyperbeläste für betragsmäßig immer größer werdende x -Werte beliebig nahe. Die Asymptoten besitzen die Gleichungen

$$g_1: y = \frac{b}{a} x, \quad g_2: y = -\frac{b}{a} x.$$

Bemerkung:

Sind a und b einer Hyperbel gegeben, so lassen sich die Asymptoten wie in Bild 66/2 mit Hilfe des gestrichelten Rechtecks zeichnen und die Hyperbel anschließend leicht skizzieren.

- 4 Liegt die Hauptachse einer Ellipse bzw. Hyperbel parallel zur x -Achse des Koordinatensystems und besitzt ihr Mittelpunkt M die Koordinaten $x = c$ und $y = d$ (vgl. Bild 68/1), so gelten die Gleichungen

Ellipse

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1,$$

Hyperbel

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} - \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1.$$

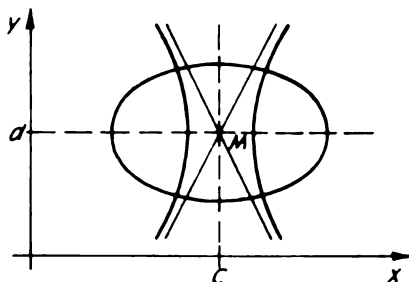


Bild 68/1

10.6.2. Beispiele und Anwendungen

Beispiel 1:

Die Ellipse mit dem Mittelpunkt $M(0;0)$ und den Halbachsen $a = 4$ und $b = 3$ hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Beispiel 2:

Bei einer Ellipse, deren Hauptachse parallel zur x -Achse liegt, ist $A(2;6)$ der linke Scheitel und $C(7;3)$ der untere Scheitel. Gesucht ist die Gleichung der Ellipse. Aus Bild 69/1 wird ersichtlich:

$$M(7;6), \quad a = 7 - 2 = 5, \quad b = 6 - 3 = 3.$$

Ellipsengleichung: $\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1.$

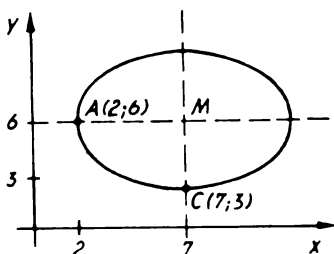


Bild 69/1

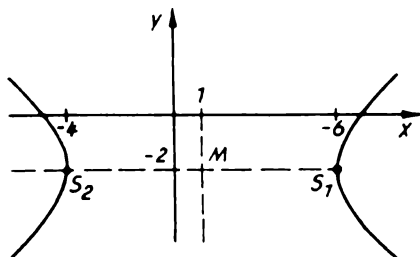


Bild 69/2

Beispiel 3:

Es sind die Scheitel der Hyperbel $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ zu bestimmen.

Aus der Gleichung folgt:

$$M(1;-2), \quad a = 5, \quad b = 4.$$

Wie aus Bild 69/2 ersichtlich, sind die Scheitel $S_1(6;-2)$ und $S_2(-4;-2)$.

Beispiel 4:

Die Gleichung $x^2 - y^2 + 2x + 4y + 6 = 0$ ist die Gleichung einer Hyperbel. Diese soll im x,y -System skizziert werden. Quadratische Ergänzung liefert die Hyperbelgleichung in der Form $(x+1)^2 - (y-2)^2 = -9$. Daraus ergibt sich

$$- \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1. \text{ Im Gegensatz zu den Formeln aus}$$

10.6.1. [4] sind hier auf der linken Seite der Gleichung die Vorzeichen vertauscht. Analog zu den Ausführungen in 10.5.1. [4], [5] bedeutet dies, daß die Hauptachse der Hyperbel parallel zur y -Achse verläuft. Es ergibt sich weiter: $M(-1;2)$, $a = 3$, $b = 3$ (Bild 70/1).

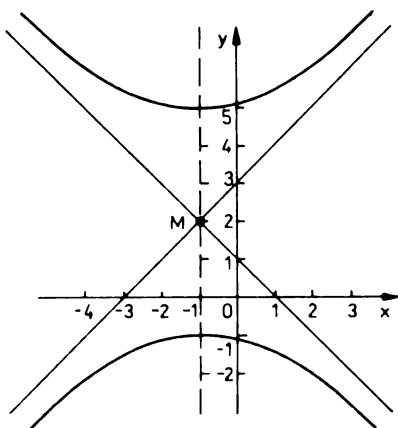


Bild 70/1

Beispiel 5: Von einer Ellipse in Mittelpunktslage sind der Scheitelpunkt $S_2(5;0)$ und der Brennpunkt $F_2(4;0)$ bekannt. Aus der Beziehung $e^2 = a^2 - b^2$ ergibt sich $b = 3$ und z. B. $N_1(0;3)$, Bild 70/2.

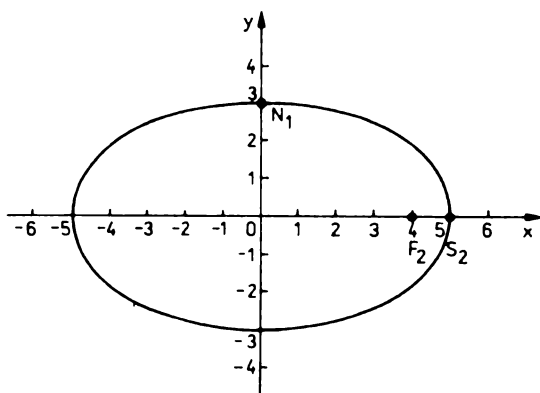


Bild 70/2

10.6.3. Übungsaufgaben

A10/14. Wie lautet die Mittelpunktsleichung

- a) der Ellipse mit den Halbachsen $a = 2$, $b = 1$,
- b) der Hyperbel mit der Hauptachse 6 und der Nebenachse 8 ?

A10/15. Eine Ellipse in Mittelpunktslage besitzt eine Halbachse 5 und geht durch den Punkt $P_1(3;-8)$.

Wie lautet ihre Gleichung?

A10/16. Eine Ellipse in Mittelpunktslage geht durch die Punkte $P_1(-18;-20)$ und $P_2(24;15)$.

Wie lautet ihre Gleichung?

A10.17. Skizzieren Sie die folgenden Kurven!

- a) $4x^2 + y^2 + 40x + 20y + 100 = 0$,
- b) $y^2 + 4x + 20y + 100 = 0$,
- c) $25x^2 + 4y^2 - 200x + 40y + 400 = 0$,
- d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$,
- e) $5x^2 + 40x + 25y + 230 = 0$,
- f) $y^2 - x^2 + 2x - 2y = 4$,
- g) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$,
- h) $4x^2 - 9y^2 - 24x = 0$.

A10/18. Skizzieren Sie die folgenden Kurven, und ermitteln Sie deren Schnittpunkte!

$$(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 4, \quad y = 2x - 2.$$

A10/19.^{†)} Gegeben sind die Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ sowie eine Parabel, deren Scheitelpunkt im Mittelpunkt der Ellipse liegt. Der Brennpunkt der Parabel liegt im Brennpunkt F_2 der Ellipse. Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Kurven!

Lösungen

- A6/1. a) $x = 2, y = 1$; b) $x = 3, y = 4$; c) $x = 2, y = 3$;
d) $x = 4, y = 1$; e) $x = 1, y = 1$; f) $x = 5, y = 3$.

A6/2. $a \neq 12$: $x = a + 12, y = \frac{2(1-a)}{a-12}$; $a = 12$: keine Lösung.

A6/3. Er: x Jahre alt, Sie: y Jahre alt.

$$x + y = 42, \quad x = 2[y - (x - y)]. \quad x = 24, y = 18.$$

A6/4. $x = 3y, x + y = 8$; $x = 6, y = 2$. Die Zahl heißt 62.

A6/5. a) $x = 4, y = 6, z = 8$; b) $a = 18, b = 21, c = 27,7$.

A6/6. Es gilt: $m = \rho \cdot V$. x Masse Kupfer, y Masse Zink.

$$x + y = 9,405 \text{ kg und } \frac{x}{8,9} \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}} + \frac{y}{7,14} \frac{\text{dm}^3}{\text{kg}} = 1,1 \text{ dm}^3.$$

$$\text{Daraus folgt: } x = 7,843 \text{ kg Cu, } y = 1,562 \text{ kg Zn.}$$

A6/7. x Entfernung von Leipzig, y benötigte Zeit.

$$\text{Radfahrer von Leipzig: } \frac{x}{y} = 22 \frac{\text{km}}{\text{h}},$$

$$\text{Radfahrer von Dresden: } \frac{(120 \text{ km} - x)}{(y + 0,5 \text{ h})} = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Daraus folgt: $x = 57,6 \text{ km}, y = 2,62 \text{ h}$. Der Treff erfolgt also um 9.07 Uhr, 57,6 km von Leipzig entfernt.

A7/1. $h = 4,58 \text{ mm}$.

A7/2. $h = 2\sqrt{3} \text{ cm}, A = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A7/3. $a = 5,39 \text{ cm}, h_c = 5 \text{ cm}$. A7/4. $A = 8,96 \text{ cm}^2$.

A7/5. $s = \frac{a + b + c}{2}$: rechtwinkliges Dreieck: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$.

$$r_1 = \frac{A}{s} = \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \text{ cm},$$

$$r_u = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A} = \frac{c}{2} = 5 \text{ cm}.$$

A7/6. Strahlensatz: $3a : h = 2a : b, \quad b = \frac{2}{3} h = 2,33 \text{ m},$
 $3a : h = a : c, \quad c = \frac{h}{3} = 1,17 \text{ m}.$

A7/7. ABC und ADE sind ähnliche Dreiecke. Es gilt:

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AD}, \quad \overline{AC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AE}}{\overline{AD}} = 88,8 \text{ m},$$

$$\text{Breite des Flusses: } \overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = 79,8 \text{ m}.$$

A7/8. $d = 2,76 \text{ mm}.$

A7/9. $\alpha = \frac{b \cdot 180^\circ}{\pi \cdot r} = 85,94^\circ, \quad A = \frac{1}{2} b \cdot r = 12 \text{ cm}^2.$

A7/10. $\left(\frac{r_1}{2} + r_2\right)^2 = (r_1 - r_2)^2 + \left(\frac{r_1}{2}\right)^2, \quad r_2 = \frac{r_1}{3}.$

A7/11. Mit Bild 73/1 erhält man:

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4h^2} = 7,21 \text{ m},$$

$$d = \frac{h}{2a} \sqrt{a^2 + 4h^2} = 2,40 \text{ m},$$

$$c = \frac{a^2 + 4h^2}{4a} = 4,33 \text{ m}.$$

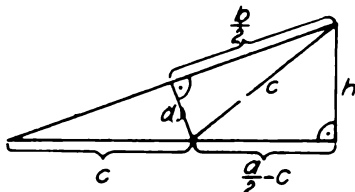


Bild 73/1

A8/1. $h = 7,2 \text{ cm}.$

A8/2. $V = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} h,$

$$0 = \frac{a^2}{2} \sqrt{3} + 3ah = \frac{a^2}{2} \sqrt{3} + \frac{3a \cdot 4V}{\sqrt{3} a^2} = \sqrt{3} \left(\frac{a^2}{2} + \frac{4V}{a} \right) \approx 3221,6 \text{ cm}^3.$$

A8/3. $V = \pi r_1^2 \cdot h_1 + \frac{\pi h_2}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2),$

$$r_1 = 3 \text{ mm}, \quad r_2 = 9 \text{ mm}, \quad h_1 = 24 \text{ mm}, \quad h_2 = 6 \text{ mm};$$

$$m = \rho \cdot V = 0,382 \text{ kg}.$$

A8/4. $O_K = 4\pi R^2, \quad O_Z = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 4r = 10\pi r^2;$

$$O_K = O_Z, \quad R = \frac{r}{2} \sqrt{10}.$$

A8/5. $d^2 = h^2 + \overline{AB}^2, \quad h = \frac{3V}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2} = \frac{12}{7} \text{ a},$

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{DE} = \frac{3}{4} a\sqrt{2}, \quad d = \frac{3}{28} a\sqrt{354}.$$

AB/6. Mit den Beziehungen der Pyramide in Bild 31/2 gilt:

$$V = \frac{a^2 h}{3} = 400,$$

$$h = \frac{1200}{a^2}.$$

$$0 = a^2 + 4 \frac{a \cdot m}{2} = 360, \quad m = \frac{360 - a^2}{2a}.$$

$$m^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{360 - a^2}{2a}\right)^2 = \left(\frac{1200}{a^2}\right)^2 + \frac{a^2}{4};$$

$$a_1 = 10 \text{ cm},$$

$$a_2 = 4\sqrt{5} \text{ cm}.$$

AB/7. Vgl. Bild 74/1:

$$\text{Halbkreis: } A = \frac{\pi r_1^2}{2},$$

$$\text{Kegel: } s = r_1,$$

$$M = \pi r_2 \cdot s = \pi r_2 r_1.$$

$$\frac{\pi r_1^2}{2} = \pi r_2 r_1, \quad r_2 = \frac{r_1}{2}.$$

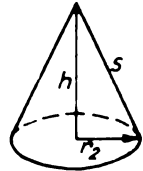
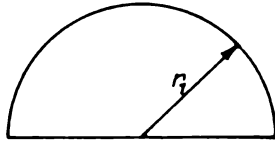


Bild 74/1

$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2} r_1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1. \quad V = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h = \frac{\sqrt{3}}{24} \pi r_1^3.$$

AB/8. $r_2 = r_1 + 6$.

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi h}{3} [r_1^2 + r_1 (r_1 + 6) + (r_1 + 6)^2] = 140\pi,$$

$$r_1^2 + 6r_1 - 16 = 0,$$

$$r_{1,1} = 2, \quad (r_{1,2} = -8);$$

$$r_1 = 2 \text{ cm},$$

$$r_2 = 8 \text{ cm}.$$

AB/9. Vgl. Bild 74/2:

$$M_{Ka} = 2\pi R h, \quad M_{Ke} = \pi r s = \pi r R.$$

$$2\pi R h = \pi r R, \quad 2h = r.$$

$$r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2},$$

$$5h^2 - 2Rh = 0, \quad h = \frac{2}{5} R.$$

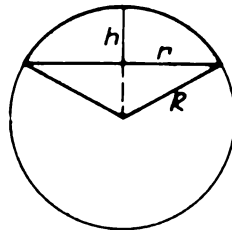


Bild 74/2

A9/1. a) $36^\circ \hat{=} \frac{\pi}{5} = 0,6283,$

b) $145^\circ 17' 18'' = 145^\circ + 0,283^\circ + 0,005^\circ$
 $= 145,288^\circ \hat{=} \frac{145,288^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = 2,536,$

c) $287,71^\circ \hat{=} 5,021,$

d) $\frac{5\pi}{4} \hat{=} 225^\circ,$

e) $0,82 \hat{=} \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,82 = 46,98^\circ,$ f) $5,63 \hat{=} 322,58^\circ.$

A9/2. a) $-0,9088,$

b) $-0,3976,$

c) $4,2669,$

d) $0,6464,$

e) $0,6523 - 1,$

f) $1,0850.$

A9/3. a) $58,39^\circ, 121,61^\circ;$

b) $125,6^\circ, 234,4^\circ;$

c) $34,20^\circ, 145,80^\circ;$

d) $38,77^\circ, 218,77^\circ.$

A9/4. $a = 23,23 \text{ cm}, b = 79,95 \text{ cm}, \beta = 73,8^\circ, \gamma = 90^\circ.$

A9/5. $h = l \cdot \tan \alpha = 24,8 \text{ m} \cdot \tan 54^\circ \approx 34,13 \text{ m}.$

A9/6. Anwendung des Sinussatzes; $a \approx 131,5 \text{ m}, b \approx 82,0 \text{ m}.$

A9/7. Anwendung des Kosinussatzes; $\alpha = 39,75^\circ, \beta = 84,88^\circ,$
 $\gamma = 55,37^\circ.$

A9/8. $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \approx 68,77 \text{ m}^2.$

A9/9. $A = \frac{c \cdot h_c}{2}.$ Nach Bild 75/1 gilt:

$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{h_c}, c = 2h_c \cdot \tan \frac{\gamma}{2}.$

$A = h_c^2 \cdot \tan \frac{\gamma}{2} \approx 6,38 \text{ m}^2.$

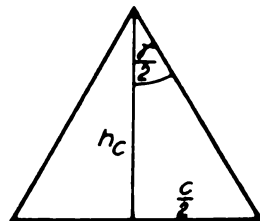


Bild 75/1

$$\Delta 9/10. \gamma = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ,$$

$$\delta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 16^\circ.$$

$$\text{Sinussatz: } \frac{\sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{a}{d},$$

$$a = \frac{d \cdot \sin 20^\circ}{\sin 16^\circ}.$$

$$\sin \beta = \frac{h}{a} \text{ (Bild 76/1).}$$

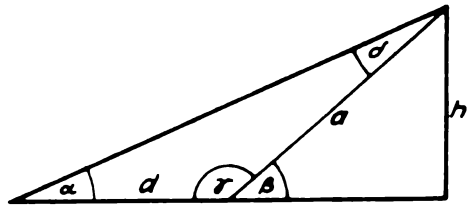


Bild 76/1

$$h = a \cdot \sin 36^\circ = \frac{d \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 36^\circ}{\sin 16^\circ} \approx 292 \text{ m.}$$

$$\Delta 9/11. \text{ a) } \cos x = \frac{1}{2} : x_1 = 60^\circ, x_2 = 300^\circ \text{ (} \cos x = -\frac{7}{4} \text{ existiert nicht!).}$$

$$\text{b) } x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ, x_3 = 60^\circ, x_4 = 120^\circ.$$

$$\text{c) } x_1 = 42,58^\circ, x_2 = 137,42^\circ.$$

$$\Delta 10/1. \text{ a) } 5, \tan \varphi = \frac{3}{4}; \text{ b) } 10, \tan \varphi = -\frac{4}{3}; \text{ c) } 13, \tan \varphi = -\frac{12}{5}.$$

$$\Delta 10/2. \text{ a) } \begin{array}{lll} \overline{BC} = a = 6, & M_a(4;1), & s_a = 6, \\ \overline{AC} = b = 6,71, & M_b(1;2,5), & s_b = 5,41, \\ \overline{AB} = c = 6,71, & M_c(1;-0,5), & s_c = 5,41. \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{lll} a = 10, & M_a(0;4), & s_a = 9,06, \\ b = 6,71, & M_b(2,5;10), & s_b = 11,10, \\ c = 13, & M_c(-1,5;7), & s_c = 5,5. \end{array}$$

$$\Delta 10/3. \text{ Normalform: } \begin{array}{ll} \text{a) } y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, & \text{b) } y = \frac{2}{3}x, \\ \text{c) } y = -\frac{3}{2}x - 5. \end{array}$$

$$\text{Achsenabschnittsform: a) } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1,$$

$$\text{b) existiert nicht, da Gerade durch den Ursprung,}$$

$$\text{c) } \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{-5} = 1.$$

Δ10/4. Punktrichtungsgleichung.

$$a) \frac{y-3}{x-2} = 1, \quad y = x + 1.$$

$$b) \frac{y+3}{x+1} = \frac{1}{3} \sqrt{3}, \quad y = \frac{1}{3} \sqrt{3} x - (3 - \frac{1}{3} \sqrt{3}).$$

Δ10/5. Zweipunktegleichung.

$$a) \frac{y-3}{x+3} = \frac{-4-3}{-1+3}, \quad y = -\frac{7}{2} x - \frac{15}{2}.$$

$$b) \frac{y-5}{x-1} = \frac{7-5}{4-1}, \quad y = \frac{2}{3} x + \frac{13}{3}.$$

Δ10/6. Richtungsfaktor der gegebenen Geraden $m_1 = -\frac{3}{2}$.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{y-4}{x-2} = \frac{2}{3}, \quad 3y - 2x = 8 \quad \text{oder} \quad y = \frac{2}{3} x + \frac{8}{3}.$$

$$\Delta 10/7. \quad a) \quad \text{Punkt C: } \left. \begin{array}{l} y + 8 = 0 \\ 12x + 5y - 32 = 0 \end{array} \right\} x = 6; \quad y = -8; \quad C(6; -8),$$

$$\text{Punkt B: } \left. \begin{array}{l} y + 8 = 0 \\ 4x - 3y + 8 = 0 \end{array} \right\} x = -8; \quad y = -8; \quad B(-8; -8),$$

$$\text{Punkt A: } \left. \begin{array}{l} 12x + 5y - 32 = 0 \\ 4x - 3y + 8 = 0 \end{array} \right\} x = 1; \quad y = 4; \quad A(1; 4).$$

$$b) \quad a = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4, \quad b = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$c = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15.$$

c) Für den Schnittwinkel zweier Geraden gilt

$$\tan \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Für die Geraden des Dreiecks sind

$$m_a = 0; \quad m_b = -\frac{12}{5}; \quad m_c = \frac{4}{3}.$$

$$\tan \varphi_A = \frac{m_b - m_c}{1 + m_b m_c} = \frac{56}{33}, \quad \varphi_A = 59,49^\circ,$$

$$\tan \varphi_B = \frac{m_c - m_a}{1 + m_c m_a} = \frac{4}{3}, \quad \varphi_B = 53,12^\circ,$$

$$\tan \varphi_C = \frac{m_a - m_b}{1 + m_a m_b} = \frac{12}{5}, \quad \varphi_C = 67,39^\circ.$$

$$\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C = 180^\circ.$$

A10/8. a) $x^2 + y^2 = 169$, b) $x^2 + y^2 = 36$.

A10/9. a) $x^2 + (y - 5)^2 = 25$, b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

A10/10. Die Koordinaten des Schnittpunktes erfüllen beide Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{und} \quad (x - 7)^2 + (y - 7)^2 = 25.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die beiden Schnittpunkte $P_1(4;3)$ und $P_2(3;4)$.

A10/11. Jeder dieser 3 Punkte muß die allgemeine Kreisgleichung erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} (8 - a)^2 + (2 - b)^2 &= r^2 \\ (5 - a)^2 + (3 - b)^2 &= r^2 \\ (10 - a)^2 + (-2 - b)^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Gleichungen für die} \\ 3 \text{ Unbekannten } a, b, r. \end{array}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet: $a = 5$,
 $b = -2$, $r = 5$.

Kreisgleichung: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

A10/12. a) $(x + 4)^2 = 4(y + 4)$. S(-4;-4); Achse parallel zur y-Achse; Parabel nach oben offen.

b) $(y + 4)^2 = -4(x - 16)$. S(16;-4); Achse parallel zur x-Achse; Parabel nach links offen.

c) $(x + 3)^2 = -5(y - 1)$. S(-3;1); Achse parallel zur y-Achse; Parabel nach unten offen.

A10/13. Die gesuchte Parabelgleichung hat die Form

$$(x - a)^2 = c(y - b).$$

Einsetzen der gegebenen Punkte liefert 3 Gleichungen für die Unbekannten a , b , c .

Lösung: $a = 3$, $b = -9$, $c = 1$.

Parabelgleichung: $(x - 3)^2 = y + 9$.

A10/14. a) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

A10/15. $a = 5$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ liefert $b = 10$.

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$.

(Der Ansatz $b = 5$ führt zum Widerspruch!)

A10/16. Beide Punkte müssen die Ellipsengleichung erfüllen:

$$\frac{18^2}{a^2} + \frac{20^2}{b^2} = 1, \quad \frac{24^2}{a^2} + \frac{15^2}{b^2} = 1.$$

Daraus folgt: $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{900}$, $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{625}$.

Ellipsengleichung: $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{625} = 1$.