

**LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM**

HERAUSGEGEBEN

VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM  
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

---

**Mathematik für Ökonomen**

**Übungsmethodische Lehrbriefe**

**1. LEHRBRIEF**

**Lineare Algebra**

**Lineare Optimierung**

**02 4027 01 1**

Mathematik für Ökonomen  
Übungsmethodische Lehrbriefe

1. Lehrbrief

Lineare Algebra  
Lineare Optimierung

Verfaßt von

Doz. Dr. Manfred B l i e f e r n i c h

Doz. Dr. Claus-Joachim W a g n e r

Hochschule für Ökonomie "Bruno Leuschner" Berlin

Sektion Wirtschaftsinformatik

**Redaktionsschluß: November 1988**

Ag 628/178/89/DDR/5550- ZLO 6032/89  
Druck und buchbinderische Verarbeitung:  
VEB Kongreß- und Werbedruck, Oberlungwitz

**2. Ausgabe**                      **1. Auflage**

Bestell-Nr. 02 4027 01 1

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden.

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden.



## Inhaltsverzeichnis

	Seite
0. Vorbemerkungen .....	5
1. Lineare Algebra .....	7
1.1. Basistransformation .....	7
1.1.1. Beispiele .....	7
1.1.2. Übungsaufgaben .....	10
1.2. Matrizenoperationen und Blockmatrizen .....	11
1.2.1. Beispiele .....	11
1.2.2. Übungsaufgaben .....	20
1.3. Matrixgleichungen .....	21
1.3.1. Beispiele .....	21
1.3.2. Übungsaufgaben .....	24
1.4. Verflechtungen - Anwendungen in der Ökonomie ....	24
1.4.1. Beispiele .....	25
1.4.2. Übungsaufgaben .....	36
1.5. Rang von Vektorsystemen und Matrizen .....	42
1.5.1. Beispiele .....	42
1.5.2. Übungsaufgaben .....	46
1.6. Lösung von Gleichungssystemen .....	48
1.6.1. Beispiele .....	48
1.6.2. Übungsaufgaben .....	51
1.7. Lösung von linearen Ungleichungssystemen .....	53
1.7.1. Beispiele .....	53
1.7.2. Übungsaufgaben .....	57
1.8. Zur Vertiefung der Theorie .....	57
1.9. Lösungen der Übungsaufgaben zu Abschnitt 1. ....	59
Lösungen zu 1.1.2. ....	59
Lösungen zu 1.2.2. ....	61
Lösungen zu 1.3.2. ....	62
Lösungen zu 1.4.2. ....	63
Lösungen zu 1.5.2. ....	66
Lösungen zu 1.6.2. ....	67
Lösungen zu 1.7.2. ....	71
2. Lineare Optimierung .....	72
2.1. Modelle der linearen Optimierung .....	72
2.1.1. Beispiele .....	72
2.1.2. Übungsaufgaben .....	78
2.2. Graphische Lösung .....	82



	Seite
2.2.1. Beispiele .....	82
2.2.2. Übungsaufgaben .....	87
2.3. Simplexmethode .....	90
2.3.1. Beispiele .....	90
2.3.2. Übungsaufgaben .....	102
2.4. Dualität .....	106
2.4.1. Beispiele .....	106
2.4.2. Übungsaufgaben .....	114
2.5. Parametrische Optimierung .....	114
2.5.1. Beispiele .....	114
2.5.2. Übungsaufgaben .....	119
2.6. Transportprobleme .....	120
2.6.1. Beispiele .....	120
2.6.2. Übungsaufgaben .....	136
2.7. Lösungen der Übungsaufgaben zu Abschnitt 2. ....	138
Lösungen zu 2.1.2. ....	138
Lösungen zu 2.2.2. ....	140
Lösungen zu 2.3.2. ....	142
Lösungen zu 2.4.2. ....	143
Lösungen zu 2.5.2. ....	146
Lösungen zu 2.6.2. ....	146

## O. Vorbemerkungen

In der vorliegenden Reihe der drei "Übungsmethodischen Lehrbriefe" für das Lehrgebiet "Mathematik für Ökonomen" werden die Lehrabschnitte Lineare Algebra, Lineare Optimierung, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt.

Ziel des Einsatzes dieser Lehrbriefe ist es, das Verstehen durch Anschaulichkeit und damit die Ergebnis- bzw. Erkenntniswirksamkeit Ihres Selbststudiums im Lehrgebiet Mathematik wesentlich zu verbessern.

Die Lehrbriefe unterscheiden sich von herkömmlichen Übungsaufgabenlehrbriefen vor allem dadurch, daß Ihr Selbständigkeitsgrad beim Lösen der jeweiligen Klasse der Übungsaufgaben systematisch angehoben wird. Dies wird erreicht, indem jeweils im Abschnitt "Beispiele" die lehrmethodischen Darlegungen - gewissermaßen das Wort des Lehrenden - das modifizierte Vorgehen beim Lösen der Aufgaben beschreiben und/oder die Spezifika mathematischer Darstellungen zur Lösungsverzielung und -beschreibung, wie Tableaus, Schemata, Graphiken, zur Anwendung gelangen. Beim Durcharbeiten dieser Abschnitte wird Ihnen deutlich, wie die konkrete Anwendung bzw. Umsetzung oder auch Interpretation allgemeingültiger mathematischer Verfahren, Vorschriften, Algorithmen etc. erfolgen muß.

Es wird hierfür empfohlen, sich vorher (nochmals) mit den zutreffenden Abschnitten im zweibändigen Lehrbuch "Mathematik für Ökonomen" vertraut zu machen und von vornherein Selbständigkeit im Durchdenken des Lösungsprozesses anzustreben. Dies verbessert zusätzlich Ihre Bedingungen für das nachfolgende selbständige Lösen der Aufgaben in den Abschnitten "Übungsaufgaben".

Lösen Sie nach Möglichkeit alle angebotenen Übungsaufgaben. Sie erreichen damit eine hohe Variation in der Methodenbeherrschung. Sollten bei der Lösung der Aufgaben Probleme auftreten, wenden Sie sich vertrauensvoll an Ihren Mathematikkonsulenten. Fordern Sie diesen auch auf, in den Lehrveranstaltungen mit den übungsmethodischen Lehrbriefen zu arbeiten und die im Selbststudium erarbeiteten Aufgabenlösungen sowie die Lösungswege zu beurteilen. Beachten Sie jedoch unbedingt: Die Arbeit mit den Lehrbriefen ersetzt keinesfalls das Studium des Lehrstoffes im o. g. Lehrbuch, sondern im Gegenteil, sie setzt dieses voraus!



Die durch den veränderten Grundstudienplan erforderliche Überarbeitung der vorliegenden "Übungsmethodischen Lehrbriefe" erfolgte unter folgenden Gesichtspunkten:

Die fast überall vorauszusetzende Verfügbarkeit von leistungsfähiger Rechentechnik läßt eine weitere Zurückdrängung der zu demonstrierenden Rechenaufgaben in Vorlesung und Seminar zugunsten verstärkter Berücksichtigung allgemeiner (theoretischer) Fragen geboten erscheinen. Dies wird in der Aufnahme eines gesonderten Abschnitts in der Linearen Algebra deutlich.

Es wird an verschiedenen Stellen empfohlen, die Aufgaben mit Hilfe von Kleincomputern zu lösen. Entsprechende Software ist in immer stärkerem Maße verfügbar.

Die Größenordnung der Aufgaben wurde trotzdem meist beibehalten, um auch weiterhin dem Aspekt der Methodenbeherrschung durch selbständiges Lösen Rechnung zu tragen.

Der Abschnitt Determinanten wurde gestrichen. Das schließt jedoch nicht aus, daß der Begriff der Determinante an einigen Stellen verwendet wird.



# 1. Lineare Algebra

## 1.1. Basistransformation

### 1.1.1. Beispiele

Durch eine Anzahl von Basistransformationen kann man ein lineares Gleichungssystem  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  in die kanonische Form überführen, die für das Ablesen der Lösung des Gleichungssystems besonders geeignet ist. Die Gewinnung der kanonischen Form wird tabellarisch vorgenommen; und die einzelnen Schritte werden dabei erläutert. In den Beispielen wird lexikographisch vorgegangen, d. h., es wird jeweils der kleinste mögliche Index (Reihe) für das Hauptelement gewählt. Das kann natürlich unter Umständen zu unbequemen Rechnungen führen.

1. Vorgelegt sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= -9 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 &= -6. \end{aligned}$$

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	$-\uparrow$
I		③	9	-6	-9	*
		-2	-8	2	-4	2
		3	8	-5	-6	-3
II	$x_1$	1	3	-2	-3	-3
		0	②	-2	-10	*
		0	-1	1	3	1
III	$x_1$	1	0	-5	-18	5
	$x_2$	0	1	1	5	-1
		0	0	②	8	*
IV	$x_1$	1	0	0	2	
	$x_2$	0	1	0	1	
	$x_3$	0	0	1	4	

In das erste Tableau werden die Ausgangswerte eingetragen. Da noch keine Variable als Basisvariable (BV) gewählt wurde, bestehen drei Wahlmöglichkeiten. In allen Beispielen soll der jeweils kleinste mögliche Index gewählt werden. ③ ist das Hauptelement. Es wird damit die Zeile 1 Hauptzeile und die Spalte 1 Hauptspalte. Die Hauptzeile wird mit dem Kehrwert des Hauptelementes

multipliziert ( $1/3$ ) und so die transformierte Hauptzeile gewonnen. In dem Tableau II notieren wir die transformierte Hauptzeile. Als Hilfsspalte führen wir die  $-\uparrow$ -Spalte ein, in der mit Ausnahme des Hauptelementes die negativen Werte der Hauptspalte stehen. Die restlichen Elemente werden wie folgt berechnet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{neues} \\ \text{Element} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{altes} \\ \text{Element} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{gleichzeitiges Ele-} \\ \text{ment } -\uparrow\text{-Spalte} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{gleich-} \\ \text{spaltiges} \\ \text{Element} \\ \text{der trans-} \\ \text{formierten} \\ \text{Hauptzeile} \end{array} \right\}$$

Für den Übergang von I zu II werden die Berechnungen ausführlich angegeben:

$$\tilde{d}_{21} = (-2) + 1 \cdot 2 = 0 \quad \tilde{d}_{22} = (-8) + 3 \cdot 2 = -2$$

$$\tilde{d}_{23} = 2 + (-2) \cdot 2 = -2 \quad \tilde{d}_{20} = -4 + (-3) \cdot 2 = -10$$

$$\tilde{d}_{31} = 3 + 1 \cdot (-3) = 0 \quad \tilde{d}_{32} = 8 + 3 \cdot (-3) = -1$$

$$\tilde{d}_{33} = -5 + (-2) \cdot (-3) = 1 \quad \tilde{d}_{30} = -6 + (-3) \cdot (-3) = 3$$

(2) ist jetzt das Hauptelement. Es entsteht im Ergebnis der Berechnungen das Tableau III, in dem nur noch  $x_3$  als Basisvariable gewählt werden kann. Das Hauptelement ist (2). Aus dem entstehenden Tableau IV läßt sich die Lösung des Gleichungssystems ablesen:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$  und  $x_3 = 4$ .

## 2. Die Gleichungssysteme

a)  $2x_1 - x_2 + x_3 = 7$  und b)  $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 26$

$$-3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = -15$$

$$-x_1 + 1/2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -9$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -1$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -5$$

$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4$$

sind zu lösen.

a)	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	-↑
I		(2)	-1	1	7	*
		-3	6	5	-15	3
		1	4	7	-1	-1
II	$x_1$	1	-1/2	1/2	7/2	1/2
		0	(9/2)	13/2	-9/2	*
		0	9/2	13/2	-9/2	-9/2
III	$x_1$	1	0	11/9	3	
	$x_2$	0	1	13/9	-1	
		0	0	0	0	

In a) ergibt sich im Tableau III, daß eine Gleichung überflüssig ist und damit kein weiterer Schritt ausgeführt werden kann. Die bei dieser Wahl der Basisvariablen ermittelte Basislösung ist  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$ . Allgemein lautet die Lösung des Gleichungssystems, die einen Freiheitsgrad hat,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11/9 \\ 13/9 \end{pmatrix} x_3$$



b)	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$	- ↑
I		(2)	3	-4	2	26	*
		-1	1/2	2	3	-9	1
		3	-1	5	-2	-5	-3
		3	3	5	6	4	-3
II	$x_1$	1	3/2	-2	1	13	-3/2
		0	(2)	0	4	4	*
		0	-11/2	11	-5	-44	11/2
		0	-3/2	11	3	-35	3/2
III	$x_1$	1	0	-2	-2	10	2
	$x_2$	0	1	0	2	2	0
		0	0	(11)	6	-33	*
		0	0	11	6	-32	-11
IV	$x_1$	1	0	0	-10/11	4	
	$x_2$	0	1	0	2	2	
	$x_3$	0	0	1	6/11	-3	
		0	0	0	0	1	

In b) stellt man fest, daß es in der Gleichung, die noch ohne Basisvariable ist, kein  $d_{ij} \neq 0$  gibt, aber  $b_i \neq 0$  ist. Das tritt auf, weil das Gleichungssystem einen Widerspruch enthält. Vielfach besteht die Notwendigkeit, ein lineares Gleichungssystem von einer kanonischen Form in eine andere kanonische Form zu überführen. Auch zur Lösung dieser Aufgabe verwendet man die Basistransformation. Wir gehen von

der kanonischen Form des Gleichungssystems 2a) aus und nutzen die Basistransformation, um  $x_3$  gegen  $x_1$  bzw. gegen  $x_2$  auszutauschen. Im Ergebnis erhalten wir zwei weitere Basislösungen des Gleichungssystems. Die überflüssige Gleichung wird in den Berechnungen weggelassen.

Austausch von  $x_1$  gegen  $x_3$

Austausch von  $x_2$  gegen  $x_3$

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	- ↑
$x_1$	1	0	(11/9)	3	*
$x_2$	0	1	13/9	-1	-13/9
$x_3$	9/11	0	1	27/11	
$x_2$	-13/11	1	0	-50/11	

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	- ↑
$x_1$	1	0	11/9	3	-11/9
$x_2$	0	1	(13/9)	-1	*
$x_1$	1	-11/13	0	50/13	
$x_3$	0	9/13	1	-9/13	

Die Basislösungen lauten  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50/11 \\ 27/11 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/13 \\ -9/13 \end{pmatrix}$ .



Aus den allgemeinen Lösungen  $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50/11 \\ 27/11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/11 \\ -13/11 \end{pmatrix} x_1$

und  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/13 \\ -9/13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11/13 \\ 9/13 \end{pmatrix} x_2$  lässt sich bei Wahl von

$x_1 = -8$  bzw. von  $x_2 = -14$  die Nichtbasislösung  
 $x_1 = -8$ ,  $x_2 = -14$  und  $x_3 = 9$  gewinnen.

### 1.1.2. Übungsaufgaben

1. Überführen Sie mit Hilfe der Basistransformation die folgenden Gleichungssysteme in die kanonische Form, und geben Sie die Lösungen an!

a)  $4x_1 + 5x_2 = 3$   
 $2x_1 + 3x_2 = -5$

b)  $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$   
 $-6x_1 + 4x_2 + 10x_3 = -2$   
 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

c)  $x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$   
 $-x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3$   
 $2x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 12x_4 = 3$   
 $-3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 4$

d)  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$   
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$   
 $-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 23$

2. Geben Sie sämtliche Basislösungen des Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \quad \text{an!}$$

3. Ermitteln Sie die existierenden Basislösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -4 ! \end{aligned}$$

## 1.2. Matrizenoperationen und Blockmatrizen

### 1.2.1. Beispiele

1. Gegeben sind folgende Matrizen bzw. Vektoren:

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{a}_4 \quad \underline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_6 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_7 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_8 = (6 \ 4 \ -2 \ 10) = \underline{a}_8^T \quad \underline{A}_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Charakterisieren Sie jede dieser Matrizen bzw. Vektoren möglichst umfassend! Geben Sie von allen Matrizen den Typ an! Bestimmen Sie, welche der Matrizen regulär bzw. singular sind! Bilden Sie die transponierten Matrizen!

Lösung:

$\underline{A}_1$ : Es handelt sich um eine obere Dreiecksmatrix vom Typ (4, 4).

Die zu  $\underline{A}_1$  gehörige Determinante

$$\det \underline{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ist gleich Null, da das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen der Dreiecksdeterminante gleich Null ist. Damit ist die Matrix  $\underline{A}_1$  singular.

$\underline{A}_2$ : Typ (4,4)

$$\det (\underline{A}_2) = 24 \neq 0$$

$\underline{A}_2$  ist regulär.  $\underline{A}_2$  ist eine Diagonalmatrix.

$\underline{A}_3$ : Typ (4,4)  $\det(\underline{A}_3) = 1 \neq 0$ .  
 $\underline{A}_3$  ist regulär.  $\underline{A}_3$  ist eine Einheitsmatrix.

$\underline{A}_4$ : Typ (4,1)  $\underline{a}_4$  ist eine spezielle Matrix - ein Vektor  
 (Spaltenvektor).

$\underline{A}_5$ : Typ (3,3)  
 $\det(\underline{A}_5) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\underline{A}_5$  ist singulär.

$\underline{A}_6$ : Typ (2,4)

$\underline{A}_7$ : Typ (4,2)  $\underline{A}_7 = -\underline{A}_6^T$

$\underline{A}_8$ : Typ (1,4)  $\underline{a}_8^T$  ist ein Zeilenvektor.

$\underline{A}_9$ : Typ (3,3)  
 $\det(\underline{A}_9) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -38 \neq 0$

$\underline{A}_9$  ist regulär.

2. Gegeben sind folgende Matrizen bzw. Vektoren:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = (3 \ 1 \ 2 \ -1) \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Man prüfe, welche der folgenden Operationen mit den obigen Matrizen bzw. Vektoren ausgeführt werden können. Führen Sie die möglichen Rechnungen durch!

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $3\underline{A} + 4\underline{B}$   | b) $\underline{A} + 2\underline{B}^T$                        | c) $2\underline{B} - \underline{A}$                        |
| d) $2\underline{B} - 3\underline{A}^T$ | e) $\underline{A} \underline{C} \underline{c}$               | f) $\underline{C} \underline{A} \underline{c}$             |
| g) $(\underline{A} \underline{C})^T$   | h) $(\underline{B} \underline{a})^T$                         | i) $\underline{a} \cdot \underline{b}$                     |
| j) $\underline{b} \cdot \underline{a}$ | k) $(2\underline{B} - 3\underline{A})^T \cdot \underline{C}$ | l) $\underline{A} \cdot \underline{b}$                     |
| m) $\underline{b} \underline{A}$       | n) $\underline{A}^T \underline{b}$                           | o) $\underline{B} \cdot (4\underline{a}) + 2\underline{c}$ |



Lösung:

- a) Diese Operation ist nicht ausführbar, da die Matrizenaddition nur für Matrizen vom gleichen Typ definiert ist.

$$\underline{A}_{4 \cdot 3} \quad \underline{B}_{3 \cdot 4}$$

- b) Die Operation ist durchführbar.

$$\underline{A}_{4 \cdot 3} \quad \underline{B}_{4 \cdot 3}^T$$

$$\underline{A} + 2\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + 2\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & 21 & 14 \end{pmatrix}$$

- c) Die Operation ist nicht durchführbar, da  $\underline{B}$  und  $\underline{A}$  unterschiedlichen Typ besitzen.
- d) Die Operation ist durchführbar, da  $\underline{B}$  und  $\underline{A}^T$  den gleichen Typ haben.

$$2\underline{B} - 3\underline{A}^T = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\underline{B} - 3\underline{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & -11 & -7 \\ -1 & -16 & 15 & -10 \end{pmatrix}$$

- e) Die Operation ist durchführbar, da  $\underline{A}$  und  $\underline{C}$ , aber auch  $\underline{C}$  und  $\underline{c}$  verkettet sind.

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \cdot & \underline{C} & \cdot & \underline{c} \\ 4 \cdot 3 & & 3 \cdot 3 & & 3 \cdot 1 \\ \hline & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & \underbrace{\hspace{4.5cm}} & & & \end{array}$$

Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor vom Typ (4,1).

$$\underline{A} \cdot \underline{C} \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 22 & 14 & -12 \\ -22 & -4 & 18 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{C} \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 22 & 14 & -12 \\ -22 & -4 & 18 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 86 \\ -84 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung des Falkschen Schemas läßt sich die Matrizenmultiplikation sehr übersichtlich gestalten. Durch Anfügen einer Hilfszeile, die sich durch Addition der Elemente in den einzelnen Spalten ergibt, ist eine Rechenkontrolle möglich.

				1	0	-4	1
				-1	1	2	2
				5	3	0	-3
	1	3	1	3	6	2	9
	4	2	4	22	14	-12	86
	-2	5	-3	-22	-4	18	-84
	0	7	6	23	25	14	31
Hilfszeile	3	17	8	26	41	22	42

- f) Die Operation ist nicht durchführbar, da keine Verkettung der Matrizen vorliegt.
- g) Die Operation ist ausführbar, da eine Verkettung der beiden Matrizen vorliegt.

$$\underline{A} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 22 & 14 & -12 \\ -22 & -4 & 18 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{C})^T = \begin{pmatrix} 3 & 22 & -22 & 23 \\ 6 & 14 & -4 & 25 \\ 2 & -12 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

Es gilt  $(\underline{A} \underline{C})^T = \underline{C}^T \underline{A}^T$ , so daß auch folgende Berechnung möglich ist:

			1	4	-2	0
			3	2	5	7
			1	4	-3	6
1	-1	5	3	22	-22	23
0	1	3	6	14	-4	25
-4	2	0	2	-12	18	14
-3	2	8	11	24	-8	62

- h) Die Operation ist durchführbar, da Verkettung zwischen B und a vorliegt.

$$(\underline{B} \underline{a})^T = \underline{a}^T \underline{B}^T = (1 \ 3 \ -2 \ 4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

				1	3	1
				2	1	-2
				0	2	3
				1	7	4
1	3	-2	4	11	30	5

$$(\underline{B} \underline{a})^T = (11 \ 30 \ 5)$$

- i) Die Operation ist durchführbar, die beiden Vektoren sind verkettet;

$$\underline{a} \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} (3 \ 1 \ 2 \ -1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & -4 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

- j) Die Operation ist durchführbar, die beiden Vektoren sind verkettet.

$$\underline{b} \underline{a} = (3 \ 1 \ 2 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2$$



- k) Die Operation ist nicht durchführbar, da B und A nicht vom gleichen Typ sind und daher nicht subtrahiert werden können.
- l) Die Operation ist nicht durchführbar, da A und b nicht verkettet sind.
- m) Die Operation ist durchführbar, da b und A verkettet sind.

$$\underline{b} \underline{A} = (3 \quad 1 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (3 \quad 14 \quad -5)$$

- n) Die Operation ist nicht durchführbar, da A<sup>T</sup> und b nicht verkettet sind.
- o) Die Operation ist durchführbar; B und a sind verkettet, B (4a) und 2c sind vom gleichen Typ.

$$\underline{B} \cdot (4\underline{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 120 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} (4\underline{a}) + 2\underline{c} = \begin{pmatrix} 44 \\ 120 \\ 20 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 124 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Man erkennt aus den Aufgaben:

Das Ergebnis der Multiplikation

- eines Zeilenvektors mit einer Matrix ergibt einen Zeilenvektor;
- einer Matrix mit einem Spaltenvektor ergibt einen Spaltenvektor;
- einer Matrix mit einer Matrix ergibt eine Matrix;
- eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor ergibt eine Matrix;
- eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ergibt einen Skalar, wobei jeweils eine entsprechende Verkettung vorausgesetzt wird.

3. Welche der folgenden Matrizen besitzt eine Inverse? Im Existenzfalle berechnen Sie diese!

$$\text{a) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$d) \underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung

a)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	1	0	0	4	2	-1
$x_2$	0	1	0	5	3	-2
$x_3$	0	0	1	3	2	(-1)
$x_1$	1	0	-1	(1)	0	0
$x_2$	0	1	-2	-1	1	0
$x_6$	0	0	-1	-3	-2	1
$x_4$	1	0	-1	1	0	0
$x_2$	1	1	-3	0	(-1)	0
$x_6$	3	0	-4	0	-2	1
$x_4$	1	0	-1	1	0	0
$x_5$	-1	-1	3	0	1	0
$x_6$	1	-2	2	0	0	1

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$	1	0	0	(1)	1	-1
$x_2$	0	1	0	-2	1	1
$x_3$	0	0	1	1	1	1
$x_4$	1	0	0	1	1	-1
$x_2$	2	1	0	0	(3)	-1
$x_3$	-1	0	1	0	0	2
$x_4$	1/3	-1/3	0	1	0	-2/3
$x_5$	2/3	1/3	0	0	1	-1/3
$x_3$	-1	0	1	0	0	(2)
$x_4$	0	-1/3	1/3	1	0	0
$x_5$	1/2	1/3	1/6	0	1	0
$x_6$	-1/2	0	1/2	0	0	1

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$



c)

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	1	0	6	9
$x_2$	0	1	8	12
$x_3$	1/6	0	1	3/2
$x_2$	8/6	1	0	0

Die Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

ist singulär.

d) Da die Matrix nicht quadratisch ist, läßt sich kein Inverse bilden.

4. Gegeben seien folgende Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$ , die durch Blockmatrizen dargestellt sind:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{21} = 4, \quad \underline{A}_{22} = (-2, 1)$$

$$\underline{B}_{11} = 2, \quad \underline{B}_{12} = (3, 1), \quad \underline{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\underline{A} \cdot \underline{B}$ .

Lösung:

Durch Aufschreiben der Gesamtmatrizen kann man sich von der Verkettbarkeit der Einzelmatrizen, welche Voraussetzung für die Anwendung der Formeln

$$\underline{C}_{11} = \underline{A}_{11}\underline{B}_{11} + \underline{A}_{12}\underline{B}_{21}, \quad \underline{C}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{B}_{12} + \underline{A}_{12}\underline{B}_{22},$$

$$\underline{C}_{21} = \underline{A}_{21}\underline{B}_{11} + \underline{A}_{22}\underline{B}_{21}, \quad \underline{C}_{22} = \underline{A}_{21}\underline{B}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{B}_{22}$$

ist, überzeugen.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \hline 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (3, 1) + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{21} = 4 \cdot 2 + (-2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + 0 = 8$$

$$\underline{c}_{22} = 4 \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} + (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (12 \ 4) + (-3 \ -3) = (9 \ 1)$$

Daraus folgt:

$$\underline{c} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 6 & 2 & 4 & & \\ \hline 9 & 9 & 6 & & \\ \hline 8 & 9 & 1 & & \end{array} \right).$$

5. Berechnen Sie mit Hilfe von Blockmatrizen das Produkt von  $\underline{A} \cdot \underline{B}$ .

$$\underline{A} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \underline{B} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Lösung:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{c}$$

$$\underline{c}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \left( \begin{array}{cc|c} 11 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 6 & 6 \\ \hline 15 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$



### 1.2.2. Übungsaufgaben

1. Gegeben sind die Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$ .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind die Matrizen

$$\underline{A} \underline{B}, \underline{A}^T, \underline{B}^T \underline{A}^T, \underline{B}^T, (\underline{A} \underline{B})^T, \underline{B} \underline{A}, (\underline{B} \underline{A})^T, \underline{B}^T \underline{A}^T.$$

2. Gegeben sind die Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$ .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind die Matrizen

$$\underline{A}^T, \underline{B}^T, \underline{A}^{-1}, \underline{B}^{-1}, (\underline{A}^T)^{-1}, (\underline{B}^T)^{-1}, \underline{A} \underline{B}, (\underline{A} \underline{B})^T, (\underline{A} \underline{B})^{-1},$$

$$((\underline{A} \underline{B})^T)^{-1}, \underline{B}^T \underline{A}^T, (\underline{A}^{-1})^T, (\underline{B}^{-1})^T.$$

3. Gegeben sind die Matrizen  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$ .

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Produkte  $\underline{A} \underline{B}$ ,  $\underline{B} \underline{A}$ ,  $\underline{A} \underline{C}$ ,  $\underline{C} \underline{A}$ ,  $\underline{B} \underline{C}$ ,  $\underline{C} \underline{B}$ .

4. Gegeben sind die beiden Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$ . Bilden Sie  $\underline{A} \underline{B}$ ,  $(\underline{A} \underline{B})^T$ ,  $\underline{A}^T$ ,  $\underline{B}^T$ ,  $\underline{B}^T \underline{A}^T$ , und bestätigen Sie die Gültigkeit der Regel

$$(\underline{A} \underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Welche der folgenden Matrizen besitzt eine Inverse? Im Existenzfall berechnen Sie diese!

$$\text{a) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Berechnen Sie:

a)  $((\underline{A} - \underline{B})\underline{B}^T)^T$ , b)  $((\underline{A}\underline{B}^T - \underline{A}^T))^{-1}T$ , c)  $((\underline{A}^T(\underline{A} - \underline{B}))^{-1})^T$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie das Ergebnis von c)!

Folgende Matrizenprodukte sind über Blockmatrizen zu berechnen:

7.

$$\underline{A} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right), \quad \underline{B} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

8.

$$\underline{A} = \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{array} \right), \quad \underline{B} = \left( \begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

### 1.3. Matrizengleichungen

#### 1.3.1. Beispiele

Berechnen Sie  $\underline{X}$  aus folgenden Matrizen Gleichungen! Stellen Sie dabei zuerst die allgemeine Form auf!

1.  $\underline{A}\underline{X} - \underline{B}\underline{X} = \underline{E} - \underline{C}\underline{X}$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\underline{A}\underline{X} - \underline{B}\underline{X} + \underline{C}\underline{X} = \underline{E}, \quad (\underline{A} - \underline{B} + \underline{C})\underline{X} = \underline{E}, \quad \underline{X} = (\underline{A} - \underline{B} + \underline{C})^{-1}$$

$$\underline{A} - \underline{B} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} - \underline{B} + \underline{C})^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$



$$2. \underline{A} \underline{X} + \underline{X} + \underline{C}^T \underline{X} = \underline{E} - \underline{A} - \underline{B} \underline{C} + \underline{C} \underline{X}$$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\underline{A} \underline{X} + \underline{X} + \underline{C}^T \underline{X} - \underline{C} \underline{X} = \underline{E} - \underline{A} - \underline{B} \underline{C}$$

$$(\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C}) \underline{X} = \underline{E} - \underline{A} - \underline{B} \underline{C}$$

$$\underline{X} = (\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C})^{-1} (\underline{E} - \underline{A} - \underline{B} \underline{C})$$

$$\underline{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E} - \underline{A} - \underline{B} \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E} - \underline{A} - \underline{B} \underline{C} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \\ -8 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C})^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\underline{X} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \\ -8 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -52 & -24 & -48 \\ 12 & -6 & 8 \\ -74 & -43 & -66 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad 2\underline{X} - (\underline{A} + \underline{B})^2 \underline{X} = \underline{E} - \underline{C} \underline{X}$$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$2\underline{X} - (\underline{A}^2 + \underline{A} \underline{B} + \underline{B} \underline{A} + \underline{B}^2) \underline{X} = \underline{E} - \underline{C} \underline{X}$$

$$2\underline{X} - \underline{A}^2 \underline{X} - \underline{A} \underline{B} \underline{X} - \underline{B} \underline{A} \underline{X} - \underline{B}^2 \underline{X} = \underline{E} - \underline{C} \underline{X}$$

$$(2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A} - \underline{B}^2 + \underline{C}) \underline{X} = \underline{E}$$

$$\underline{X} = (2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C})^{-1}$$

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \underline{A} \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} \underline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A} \underline{B} - \underline{B} \underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C})^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad \underline{X} - \underline{X} \underline{A} + \underline{X} \underline{B} = \underline{C}$$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\underline{X} (\underline{E} - \underline{A} + \underline{B}) = \underline{C} \quad \underline{X} = \underline{C} (\underline{E} - \underline{A} + \underline{B})^{-1}$$

$$\underline{E} - \underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{E} - \underline{A} + \underline{B})^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{X} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

5. Lösen Sie folgende Matrixgleichung nach  $\underline{X}$  auf:

$$2(\underline{X}\underline{A} + \underline{X}\underline{B}) = 2\underline{X} + \underline{C}^T.$$

Lösung:

$$2\underline{X}\underline{A} + 2\underline{X}\underline{B} - 2\underline{X} = \underline{C}^T, \quad \underline{X}(2\underline{A} + 2\underline{B} - 2\underline{E}) = \underline{C}^T,$$

$$\underline{X} = \underline{C}^T(2\underline{A} + 2\underline{B} - 2\underline{E})^{-1}$$

Berechnen Sie  $\underline{X}$  und  $\underline{Y}$  aus folgenden Gleichungssystemen. Geben Sie dabei zunächst die allgemeine Form an.

### 1.3.2. Übungsaufgaben

Für die nachfolgenden Matrixgleichungen bzw. -gleichungssysteme sind  $\underline{X}$  bzw.  $\underline{X}$  und  $\underline{Y}$  zu berechnen:

$$1. \underline{A}\underline{X} - \underline{X} = \underline{X} + \underline{A}^T\underline{X} + \underline{B}\underline{B}^T \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \underline{X}\underline{A} + \underline{X}(\underline{B} + \underline{C}^T) + \underline{D} = \underline{X} + \underline{E} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.4. Verflechtungen - Anwendungen in der Ökonomie

Obwohl der Umfang der einzelnen Aufgaben aus didaktisch-methodischen Gründen so gewählt wurde, daß eine Ermittlung der Lösung ohne Rechner zumutbar ist, wird empfohlen, die Aufgaben auch unter Nutzung von Kleinrechnern zu lösen.

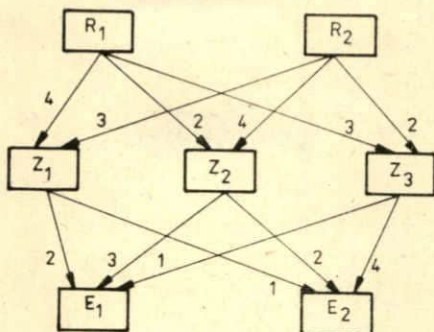
Dabei sollten Sie die Möglichkeiten von Variantenrechnungen, Erweiterungen und zusätzlichen ökonomischen Aufgabenstellungen nutzen.



### 1.4.1. Beispiele

#### Materialverflechtungen

1. Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen  $R_1$  und  $R_2$  in der ersten Produktionsstufe die Zwischenprodukte  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  her. In der zweiten Produktionsstufe werden aus diesen Zwischenprodukten die Endprodukte  $E_1$  und  $E_2$  gefertigt. Der Materialverbrauch von Stufe zu Stufe ist durch folgende Beziehungen gegeben:



- a) Es soll eine Gesamtmaterialverbrauchsmatrix aufgestellt werden, die in ihren Einzelementen den Rohstoffverbrauch pro Einheit des Endprodukts angibt.
- b) Wie groß ist der Gesamtrohstoffbedarf, wenn der Betrieb 1600 Einheiten  $E_1$  und 1260 Einheiten  $E_2$  herstellen soll?

Lösung:

- a) Der Materialfluß zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten kann durch folgende Matrix dargestellt werden:

$$\frac{M_1}{RZ} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

RZ bezeichnet den ökonomischen Typ von  $M_1$ .

Analog kann der Materialfluß zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten dargestellt werden:

$$\frac{M_2}{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ZE bezeichnet den ökonomischen Typ von  $M_2$ .

Gesucht ist nun die Materialverbrauchsmatrix  $M$  vom ökonomischen Typ RE. Sie entsteht durch Multiplikation von  $M_1$  und  $M_2$ :

$$\frac{M}{RE} = \frac{M_1}{RZ} \cdot \frac{M_2}{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrizenmultiplikation existiert die ökonomische und damit auch mathematische Verkettung.

$m_{11} = 17$  bedeutet z. B.: Zur Herstellung einer Einheit  $E_1$  sind 17 Einheiten  $R_1$  notwendig.

- b) Für den Gesamtrohstoffverbrauch leitet sich folgende Formel ab:

$$\frac{r}{R_1} = \frac{M}{RE} \cdot \frac{e}{E_1} \quad e \text{ läßt sich aus der Aufgabenstellung ablesen: } e^T = (1600 \ 1260).$$

Dann ist

$$r = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52400 \\ 55940 \end{pmatrix}.$$

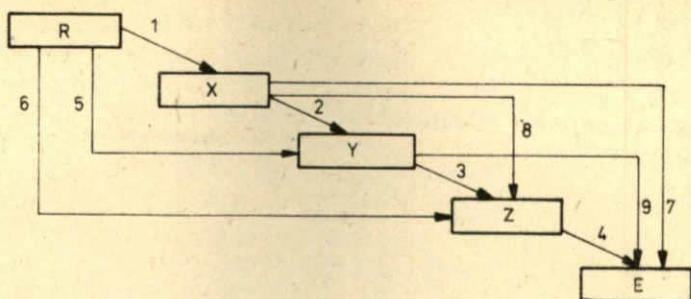
Zur Realisierung der Gesamtproduktion sind 52400 Einheiten  $R_1$  und 55940 Einheiten  $R_2$  notwendig.

2. Für eine Materialverflechtung sind folgende Angaben bekannt:
- Materialaufwandmatrizen zwischen den Produktionsstufen,
  - geforderte Produktionsmengen der Zwischenprodukte und Endprodukte,
  - Flußbild des Produktionsablaufs.

Geben Sie die Matrix  $M_{RE}$  pro eine Einheit Endproduktion und den Gesamtrohstoffbereitstellungsvektor  $r$  für Zwischenproduktion und Endproduktion in der allgemeinen Form an.

$$\frac{M_1}{RX}, \frac{M_2}{XY}, \frac{M_3}{YZ}, \frac{M_4}{ZE}, \frac{M_5}{RY}, \frac{M_6}{RZ}, \frac{M_7}{XE}, \frac{M_8}{XZ}, \frac{M_9}{YE}$$

$x, y, z, e$



Lösung:

Zunächst stellen wir fest, daß wir zwischen einem direkten Fluß und einem indirekten Fluß zu unterscheiden haben. Beim indirekten Materialfluß werden Zwischenproduktionsstufen übersprungen.

Bei der Aufstellung der Formel haben wir zu beachten:

- dem Hauptfluß entspricht im Matrizenkalkül eine Multiplikation (direkter Fluß),
- dem Nebenfluß (indirekter Fluß) eine Matrizenaddition, wobei gegebenenfalls die bereits erfolgten Verflechtungen zu berücksichtigen sind.

Für  $\underline{M}_{RE}$  folgt

$$\underline{M} = [(\underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2 + \underline{M}_5) \cdot \underline{M}_3 + \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_8 + \underline{M}_6] \underline{M}_4 + (\underline{M}_1 \underline{M}_2 + \underline{M}_5) \underline{M}_9 + \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_7.$$

Für  $\underline{r}$  sind die Rohstoffmengen für die Endprodukte, aber auch die für die Zwischenprodukte zu berechnen.

Das läßt sich wie folgt formulieren:

$$\underline{r}_g = \underline{r}_x + \underline{r}_y + \underline{r}_z + \underline{r}_e \quad \text{mit}$$

$$\underline{r}_x = \underline{M}_1 \cdot \underline{x}, \quad \underline{r}_y = (\underline{M}_1 \underline{M}_2 + \underline{M}_5) \underline{y},$$

$$\underline{r}_z = [(\underline{M}_1 \underline{M}_2 + \underline{M}_5) \underline{M}_3 + \underline{M}_1 \underline{M}_8 + \underline{M}_6] \underline{z}, \quad \underline{r}_e = \underline{M} \cdot \underline{e}.$$

3. Zwischen den Rohstoffen  $R_1$  und  $R_2$  und den Fertigprodukten  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  besteht die Beziehung

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$



Die Rohstoffe  $R_1$  und  $R_2$  sind in den Mengen  $r_1$  und  $r_2$  vorhanden. Zwischen welchen Schranken muß  $E_3$  liegen, damit die Problemstellung ökonomisch sinnvoll bleibt? Bedingung ist, daß die Rohstoffmengen  $r_1$  und  $r_2$  voll ausgenutzt werden.

$$\begin{array}{cccc} r_1 = 4800 & a_{11} = 50 & a_{12} = 30 & a_{13} = 2 \\ r_2 = 3000 & a_{21} = 40 & a_{22} = 40 & a_{23} = 1 \end{array}$$

Lösung:

Zunächst tragen wir die Informationen in

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 2 \\ 40 & 40 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Übersicht schreiben wir diese Matrizengleichung als ein Gleichungssystem

$$50e_1 + 30e_2 + 2e_3 = 4800$$

$$40e_1 + 40e_2 + e_3 = 3000.$$

Ökonomisch ist zu sichern

$$(*) \quad e_1 \geq 0, \quad e_2 \geq 0, \quad e_3 \geq 0.$$

Wir stellen fest, daß es sich um ein unterbestimmtes lineares inhomogenes Gleichungssystem handelt.

Wir können eine Variable unter den Bedingungen (\*) frei wählen und das Intervall bestimmen, für welches die anderen Bedingungen aus (\*) erfüllt bleiben.

Wir wählen z. B.  $e_3$  aus.

Daraus folgt:

$$50e_1 + 30e_2 = 4800 - 2e_3$$

$$40e_1 + 40e_2 = 3000 - e_3.$$

Wieder in Matrixschreibweise überführt, folgt

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{800} \begin{pmatrix} 40 & -30 \\ -40 & 50 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{800} \left[ \begin{pmatrix} 102000 \\ -42000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ -30 \end{pmatrix} e_3 \right].$$

Wieder als Gleichungssystem geschrieben,

$$e_1 = \frac{102000}{800} - \frac{50}{800} e_3, \quad (**)$$

$$e_2 = \frac{-42000}{800} + \frac{30}{800} e_3. \quad (***)$$

Für (\*\*) folgt mit  $e_1 \geq 0$ :

$$0 \leq \frac{102000}{800} - \frac{50}{800} e_3, \quad 50e_3 \leq 102000, \quad e_3 \leq 2040.$$

Für (\*\*\*) folgt mit  $e_2 \geq 0$

$$0 \leq -\frac{42000}{800} + \frac{30}{800} e_3, \quad 30e_3 \geq 42000, \quad e_3 \geq 1400.$$

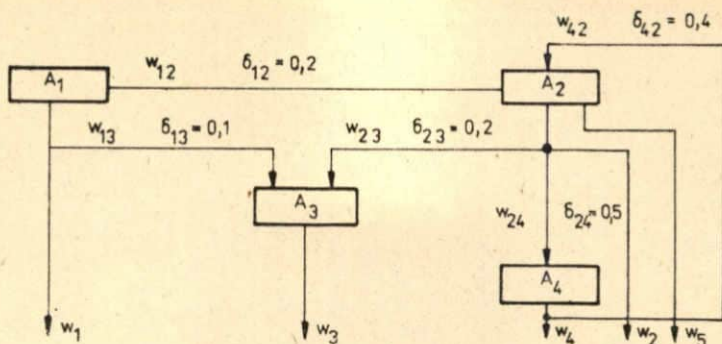
Schließlich folgt

$$1400 \leq e_3 \leq 2040 \quad \text{mit} \quad e_1 \geq 0, \quad e_2 \geq 0.$$

### Betriebswirtschaftliche Verflechtungen

Ein Betrieb besteht aus den vier Produktionsabteilungen (Verfahrensstufen)  $A_1$  bis  $A_4$ .

Die Verflechtung ist durch folgende Skizze gegeben:

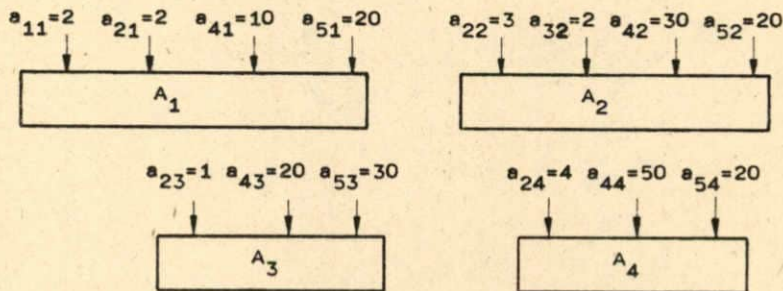


Die Abteilungen  $A_1$ ,  $A_3$  und  $A_4$  produzieren jeweils ein Produkt. In  $A_2$  fällt neben dem Hauptprodukt  $w_2$  noch ein zweites Produkt im konstanten Verhältnis an  $w_5 = 0,1 P_2$ .

Die Kapazitäten (in ME und bezogen auf das Hauptprodukt der Abteilung und eine Periode von 200 h Arbeitszeit) sind durch  $k^T = (450 \ 400 \ 250 \ 300)$  gegeben.

Als Aufwände werden drei Materialarten  $m_1$  bis  $m_3$ , Elektroenergie  $m_4$  und Lohn  $m_5$  betrachtet. Der Materialeinsatz ist durchsatzproportional. Bei Elektroenergie und Lohn ist außerdem eine Zeitproportionalität zu berücksichtigen.

Die Proportionalitätsfaktoren (für Material in ME/ME, für Elektroenergie in kWh/ME und für Lohn in WE/ME) sind der folgenden Skizze zu entnehmen:





Die zeitproportionalen Komponenten sind für  $m_4$  60 kWh/h und für  $m_5$  70 WE/h.

1. Es ist das erweiterte Grundmodell der direkten Verflechtung (Kopplungs-Aufwandmatrix) aufzustellen.
2. Welche Endproduktion  $\underline{w}$  kann der Betrieb in 200 Stunden Betriebszeit produzieren, wenn  $\underline{p}^T = (400 \ 300 \ 200 \ 200)$  gilt? Welche Aufwände sind dazu erforderlich?
3. Es ist das Modell der totalen Verflechtung (Produktionsfunktion) zu ermitteln.
4. Es sind  $\underline{p}$  und  $\underline{m}$  bei  $\underline{w}^T = (100 \ 200 \ 300 \ 300)$  und 200 Stunden Betriebszeit zu ermitteln.

Lösung:

Aus den in der Aufgabenstellung enthaltenen Angaben läßt sich das erweiterte Grundmodell zur direkten Verflechtung

$$\begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{f} \end{pmatrix}$$

aufstellen, wobei das Kuppelprodukt in  $A_2$  bei der Berechnung in den Aufwandteil des Modells einzubeziehen ist:

$$\begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{array}{cccc|c} 1 & -0,2 & -0,1 & -0,3 & 0 \\ 0 & 1 & -0,2 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0,4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 30 & 20 & 50 & 60 \\ 20 & 20 & 30 & 20 & 70 \end{array} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 160 \\ 200 \\ -80 \\ -30 \\ 800 \\ 2700 \\ 600 \\ 39000 \\ 38000 \end{pmatrix}$$

mit  $\underline{p}^T = (400 \ 300 \ 200 \ 200)$  und  $t = 200$ .

Um das Modell der totalen Verflechtung

$$\begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11}^{-1} & -v_{11}^{-1}v_{12} \\ v_{21}v_{11}^{-1} & v_{22} - v_{21}v_{11}^{-1}v_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{f} \end{pmatrix}$$

zu erhalten, ist  $V_{11}$  zu invertieren. Da in diesem Beispiel  $V_{12} = N$  gilt, ist außerdem nur noch die Multiplikation  $V_{21}V_{11}^{-1}$  auszuführen. Als erste Komponente im Vektor  $\underline{m}$  erscheint die Menge des in  $A_2$  erzeugten Kuppelproduktes.

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ w_5 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} = \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0,4 & 0,18 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,25 & 0,25 & 0,625 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0,5 & 0,1 & 1,25 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0,025 & 0,0625 & 0 \\ \hline 2 & 0,8 & 0,36 & 1 & 0 \\ 2 & 6,55 & 2,51 & 7,875 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0,5 & 1,25 & 0 \\ 10 & 66,5 & 34,3 & 86,25 & 60 \\ 20 & 43 & 40,6 & 47,5 & 70 \end{array} \right) \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 100 \\ 200 \\ 300 \\ \hline 300 \\ 200 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} 384 \\ 512,5 \\ 300 \\ \hline 505 \\ \hline 51,25 \\ 768 \\ 4625,5 \\ 1025 \\ 62465 \\ 51030 \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

### Volkswirtschaftliche Verflechtungen

1. Die Verflechtung zwischen zwei Wirtschaftszweigen ist durch folgende Tabelle gegeben:

		Zweig			
		1	2	$\underline{y}$	$\underline{x}$
Zweig	1	120	160	320	600
	2	120	560	120	800

- a) Es ist die Matrix  $\underline{M}$  zu berechnen.  
 b) Wie groß muß die Gesamtproduktion in den beiden Zweigen sein, damit ein Vektor der Endverwendung

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 350 \\ 130 \end{pmatrix}$$

gewährleistet werden kann? Die Angaben beziehen sich auf ME.

Lösung:

- a) Die Matrix  $\underline{M}$  enthält die direkten Aufwandskoeffizienten, die nach der Formel

$$m_{ik} = \frac{M_{ik}}{x_k}$$

zu berechnen sind:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 120/600 & 160/800 \\ 120/600 & 560/800 \end{pmatrix}.$$

- b) Die Berechnung der Gesamtproduktion für ein Planjahr bei vorgegebener Endverwendung für das Planjahr mit vorgegebener Matrix  $\underline{M}$  für ein Basisjahr erfolgt nach der Formel

$$\underline{x} = (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y}.$$

Numerische Lösung:

$$(\underline{E} - \underline{M}) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 350 \\ 130 \end{pmatrix};$$

$$(\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655 \\ 870 \end{pmatrix}.$$

Um die vorgegebene Endverwendung zu sichern, muß die Gesamtproduktion des Zweiges 1 655 ME und die des Zweiges 2 870 ME betragen.

2. Für drei Zweige wurden die Matrix  $\underline{M}$  der Verflechtungskoeffizienten  $m_{ik}$

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,20 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,30 \\ 0,20 & 0 & 0,15 \end{pmatrix}$$

und der Vektor  $\underline{i}$  mit den Importkoeffizienten

$$\underline{i}^T = (0,15 \quad 0,20 \quad 0,20) \text{ ermittelt.}$$

- a) Berechnen Sie die fehlenden Elemente der Matrix

$$(\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,34 & 0,44 \\ 0,46 & & \\ 0,32 & 0,08 & 1,28 \end{pmatrix} = \underline{B}.$$

- b) Ermitteln Sie den Vektor der komplexen Importkoeffizienten  $\underline{i}^{T*}$ .

- c) Es sei

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix} \text{ der Export und } \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 320 \end{pmatrix} \text{ der sonstige Verbrauch.}$$



Wie groß muß die Produktion  $\underline{x}$  sein, um den Endverbrauch  $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$  zu gewährleisten?

- d) Es ist geplant, den Export des 1. Zweiges um 50 zu erhöhen und den des 3. Zweiges um 30 zu verringern. Wie groß ist dann bei gleichbleibendem  $\underline{y}_2$  das Importaufkommen der drei Zweige? Die Zahlenangaben beziehen sich auf WE.

Lösung:

- a) Vereinfacht kann  $b_{22}$  nach folgender Formel berechnet werden:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E}.$$

Das Element  $b_{22}$  aus  $\underline{A}^{-1}$  berechnet man z. B. durch folgende Gleichung:

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1.$$

Dabei sind die  $a_{ik}$  die Elemente der Matrix  $(\underline{E} - \underline{M})$  und  $b_{ik}$  die der Inversen  $(\underline{E} - \underline{M})^{-1}$ .

$$-0,20 \cdot 0,34 + 0,8 \cdot b_{22} - 0,30 \cdot 0,08 = 1, \quad b_{22} = 1,365$$

Analog  $b_{23}$ :

$$a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 0, \quad b_{23} = 0,59$$

- b) Die komplexen Importkoeffizienten berechnet man nach der Formel

$$\underline{1}^T \cdot (\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \underline{1}^{T*}.$$

$$(0,15 \ 0,20 \ 0,20) \begin{pmatrix} 1,36 & 0,34 & 0,44 \\ 0,46 & 1,365 & 0,59 \\ 0,32 & 0,08 & 1,28 \end{pmatrix} = (0,36 \ 0,34 \ 0,44)$$

- c) Die Grundlage für die Berechnung der Gesamtproduktion des Planjahres bei vorgegebenem Endverbrauch für das Planjahr und der Verflechtungsmatrix für das Basisjahr ist die Formel

$$\underline{x} = (\underline{E} \cdot \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y}.$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,34 & 0,44 \\ 0,46 & 1,365 & 0,59 \\ 0,32 & 0,08 & 1,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 650 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1240 \\ 1140 \\ 880 \end{pmatrix}$$

- d) Die Formel für das Gesamtimportvolumen lautet:

$$I = \underline{1}^T (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y} \quad \text{oder} \quad I = \underline{1}^{T*} \cdot \underline{y}.$$

$$I = (0,15 \quad 0,20 \quad 0,20) \begin{pmatrix} 1,36 & 0,34 & 0,44 \\ 0,46 & 1,36 & 0,59 \\ 0,32 & 0,08 & 1,28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 470 \end{pmatrix}$$

$$I = (0,36 \quad 0,34 \quad 0,44) \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 470 \end{pmatrix}, \quad I = 252,0 + 136,0 + 206,8 = 594,8$$

Die einzelnen Glieder der Summe geben den Import für die einzelnen Zweige ( $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ ) an. Das Gesamtimportvolumen beträgt  $I = 594,8$  WE.

3. Gegeben ist die Verflechtungsmatrix einer volkswirtschaftlichen Verflechtungsbilanz mit drei Zweigen:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,15 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Weiter liegen Planzahlen für die Endverwendung in den beiden ersten Zweigen vor. Für  $y_3$  liegen keine Planzahlen vor. Dafür ist die Gesamtproduktion des dritten Zweiges festgelegt. Für die Gesamtproduktion der beiden ersten Zweige gibt es keine Vorgaben.

$$y_1 = 200, \quad y_2 = 250, \quad x_3 = 400$$

Es sind  $x_1$ ,  $x_2$  und  $y_3$  zu berechnen.

Lösung:

Ausgangspunkt ist die 1. Planungsfrage  $\underline{y} = (\underline{E} - \underline{M}) \cdot \underline{x}$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,8 & -0,15 \\ -0,1 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Die Trennung gesuchter und gegebener Größen führt zu

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,8 & 0 \\ -0,1 & -0,1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0,15 \\ 0 & 0 & -0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Weiter folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,8 & 0 \\ -0,1 & -0,1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0,15 \\ 0 & 0 & -0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 508 \\ 578 \\ 251,4 \end{pmatrix}.$$

#### 1.4.2. Übungsaufgaben

1. Einerseits besteht zwischen den Rohstoffen  $y_1$  und  $y_2$  und den Zwischenprodukten  $z_1$  und  $z_2$  die Beziehung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

und andererseits zwischen  $z_1$  und  $z_2$  und den Endprodukten  $x_1$  und  $x_2$  die Beziehung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wieviel Mengeneinheiten von  $x_1$  und  $x_2$  können hergestellt werden, wenn  $y_1 = 5400$  und  $y_2 = 3780$  Mengeneinheiten zur Verfügung stehen?

2. Für eine Materialverflechtung sind folgende Angaben bekannt:
- Materialaufwandmatrizen zwischen den Produktionsstufen,
  - geforderte Produktionsmengen der Zwischenprodukte und Endprodukte,
  - Flußbild des Produktionsablaufs.

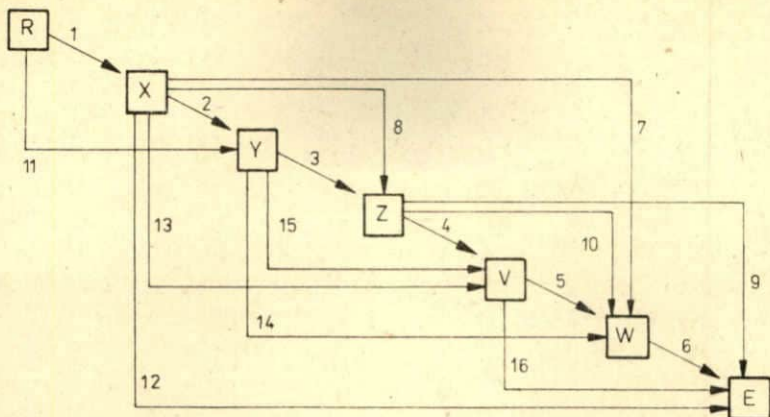
Geben Sie die Matrix  $M_{RE}$  pro eine Einheit Endproduktion und den Gesamtrohstoffbereitstellungsvektor  $\underline{r}$  für Zwischenproduktion und Endproduktion in der allgemeinen Form an.

$$\frac{M_1}{RX}, \frac{M_2}{XY}, \frac{M_3}{YZ}, \frac{M_4}{ZV}, \frac{M_5}{VW}, \frac{M_6}{WE}, \frac{M_7}{XW}, \frac{M_8}{XZ}, \frac{M_9}{ZE}, \frac{M_{10}}{ZW}, \frac{M_{11}}{RY}, \frac{M_{12}}{XV}, \frac{M_{13}}{XE}, \frac{M_{14}}{YW}$$

$$\frac{M_{15}}{YV}, \frac{M_{16}}{VE}$$

$\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{e}.$





3. Es besteht zwischen den Rohstoffen  $R_1$  und  $R_2$  und den Fertigprodukten die Beziehung

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Die Rohstoffe sind in folgenden Mengeneinheiten vorhanden:

$$\begin{aligned} R_1 &: 4700, \\ R_2 &: 1410. \end{aligned}$$

Es ist zu berechnen, unter welchen Bedingungen produziert werden muß, damit bei voller Auslastung der Rohstoffe die Produktion sinnvoll bleibt. Als variables Produkt sei  $E_3$  angenommen.

4. Ein Betrieb besteht aus den 4 Produktionsabteilungen  $A_1$  bis  $A_4$ , in denen jeweils ein Produkt hergestellt wird. Dazu werden die beiden Rohstoffe  $m_1$  und  $m_2$  eingesetzt. Außerdem werden als Aufwendungen Elektroenergie sowie Lohnkosten in die Berechnungen einbezogen. Alle Aufwandsarten sind kapazitätsabhängig. Der Elektroenergieverbrauch und die Lohnkosten haben außerdem einen zeitabhängigen Anteil.

In der folgenden Bilanz sind der direkte innere und der direkte äußere Verbrauch für den laufenden Planzeitraum angeführt:

Z. Herst. von Verbr. von	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	Prod.- kapaz. [ME]	Zeitabh. Anteil
A <sub>1</sub> [ME]	-	0	300	0	500	-
A <sub>2</sub> [ME]	250	-	150	200	600	-
A <sub>3</sub> [ME]	0	0	-	200	300	-
A <sub>4</sub> [ME]	0	0	0	-	100	-
m <sub>1</sub> [ME]	500	1800	300	0	-	-
m <sub>2</sub> [ME]	1000	2400	0	200	-	-
Energie [kWh]	2500	1200	900	600	-	2000
Lohn [WE]	2000	1200	300	400	-	1000

- 4.1. Bestimmen Sie die Höhe der Endproduktion für alle vier Abteilungen und die Höhe des Verbrauchs für alle vier Aufwandsarten im laufenden Planzeitraum!
- 4.2. Im folgenden Planzeitraum soll eine Endproduktion entsprechend  $\underline{w}^T = (200 \ 0 \ 150 \ 110)$  erzeugt werden. Welche Produktionskapazität ist dazu erforderlich, und welche Aufwände werden benötigt?
- 4.3. Es wird unterstellt, daß für die unter 4.2. genannte Endproduktion folgende Kapazitäten zur Verfügung stehen:

A<sub>1</sub>: 600, A<sub>2</sub>: 700, A<sub>3</sub>: 370 und A<sub>4</sub>: 120 ME.

Um wieviel ME müßte dann die Kapazität bei A<sub>3</sub> gesteigert werden, um die Reserven bei A<sub>2</sub> zur zusätzlichen Endproduktion von Erzeugnissen der Abteilung A<sub>3</sub> ausnutzen zu können? Wie hoch ist diese zusätzliche Endproduktion in A<sub>3</sub>? (In den Abteilungen A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> und A<sub>4</sub> soll keine zusätzliche Endproduktion über die unter 4.2. genannten Mengen hinaus erzeugt werden.)

5. Ein Betrieb besteht aus zwei miteinander verbundenen Abteilungen, die je ein Produkt herstellen. Die Beschaffenheit des Produktes und die eingegangenen Lieferverpflichtungen machen es erforderlich, im kommenden Planzeitraum täglich bei dreischichtiger Auslastung eine Endproduktion von

$$\underline{w}^T = (60 \ 120)$$

zu erbringen. Es steht eine Kapazität von  $\underline{k}^T = (360 \ 840)$  pro Tag zur Verfügung.



Die benötigten vier äußeren Aufwände können in den Tageshöchstmengen

$$\underline{m}^T = (2400 \quad 5600 \quad 2200 \quad 7400)$$

bereitgestellt werden.

Für die Berechnungen kann das folgende erweiterte Grundmodell der direkten Verflechtung (Betriebsfunktion) verwendet werden:

$$\begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 20 & 20 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 20 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Welche Produktion  $\underline{p}$  und Aufwände  $\underline{m}$  sind erforderlich, um die Planaufgabe erfüllen zu können? Reichen die in der Aufgabenstellung genannten Werte aus?

6. Die Verflechtung zwischen drei Industriezweigen in einem Basisjahr ist durch folgende Tabelle gegeben:

Zweige	1	2	3	$y_i$
1	240	72	140	348
2	80	264	180	76
3	0	120	400	480

- 6.1. Wie groß ist die Gesamtproduktion  $x_1$  jedes Zweiges im Basisjahr?
- 6.2. Die Verflechtung zwischen den Zweigen möge im folgenden Jahr die gleiche wie im Basisjahr sein. Wie groß muß dann die Gesamtproduktion  $x_1$  jedes Zweiges sein, damit die übrige Volkswirtschaft die Finalproduktion

$$\underline{y}^T = (200 \quad 500 \quad 800) \quad \text{erhalten kann?}$$

- 6.3. Unter der gleichen Annahme wie in 6.2. ist zu klären, wie groß die Finalproduktion  $y_1$  jedes Erzeugnisses ist, wenn die Gesamtproduktion  $\underline{x}^T = (1000 \quad 820 \quad 1440)$  beträgt.

7. Zwei Wirtschaftszweige sind durch folgende Verflechtungsmatrix miteinander verflochten:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$$



Außerdem erhalten diese Zweige für ihre Produktion folgende Lieferungen von Dritten (in Werteinheiten [WE]).

	Zweig 1	Zweig 2
Lieferung 1	10	80
Lieferung 2	40	40

- 7.1. Welche Gesamtproduktion ist in den zwei Zweigen erforderlich, wenn im kommenden Planjahr der 1. Zweig 100 [WE] und der 2. Zweig 120 [WE] an Dritte liefern soll?
- 7.2. Welche Produktionsmengen ( $x_{ij}$ ) müssen dabei unter den Zweigen ausgetauscht werden?
- 7.3. Wie groß müssen die Gesamtlieferungen Dritter sein, wenn im vergangenen Jahr der 1. Zweig 116 [WE] und der 2. Zweig 80 [WE] an Dritte leisteten?
8. Gegeben ist folgende Ausgangsinformation für eine volkswirtschaftliche Verflechtungsbilanz für ein Basisjahr. Für das Planjahr soll davon ausgegangen werden, daß die Produktion im Zweig 1 um 25 % und im Zweig 2 um 300 Einheiten gesteigert wird. Der Export des Zweiges 3 soll um 100 Einheiten erhöht werden bei gleichzeitiger Reduzierung der sonstigen Endverwendung um 51 Einheiten.

	Zweig 1	Zweig 2	Zweig 3	Export	Sonstige Endverwendungen	
Zweig 1	0	180	240	500	280	1200
Zweig 2	480	0	300	50	70	900
Zweig 3	324	225	0	700	251	1500
Import	200	180	500			
Sonstiges Aufkommen	196	315	460			

Zu berechnen sind:

- 8.1. die Gesamtproduktion des Zweiges 3 für das Planjahr.
- 8.2. die gesamte Endverwendung (Export und sonstige Endverwendung) der Zweige 1 und 2.
- 8.3. Wie verändern sich die sonstigen Endverwendungen in den Zweigen 1 und 2, wenn vorausgesetzt wird, daß der Export dieser Zweige konstant gehalten wird?

8.4. Wie verändert sich das gesamte Importvolumen im Planjahr gegenüber dem Basisjahr?

9. Die Verflechtung zwischen sieben Wirtschaftszweigen ist durch folgende Tabelle gegeben.

	1	2	3	4	5	6	7		Exp.	So	$\underline{y}$	$\underline{x}$
1	660	96	136	175	84	300	216	1667	600	2133	2733	4400
2	264	416	102	140	105	200	756	1983	300	917	1217	3200
3	220	128	578	210	84	500	1296	3016	50	334	384	3400
4	352	32	510	385	252	400	648	2579	400	521	921	3500
5	88	160	34	315	420	100	540	1657	50	393	443	2100
6	396	320	204	245	126	400	864	2555	300	2145	2445	5000
7	44	256	306	35	84	250	1188	2163	700	7937	8637	10800
Im- port	176	192	68	70	105	450	216					

9.1. Ermitteln Sie unter Nutzung der Kleinrechentchnik die Matrix  $\underline{M}$  der Verflechtungskoeffizienten, und geben Sie  $m_{25}$  und  $m_{63}$  an!

9.2. Die Verflechtung zwischen den Zweigen möge im folgenden Jahr die gleiche wie im Basisjahr sein. Wie groß muß dann die Gesamtproduktion  $x_i$  jedes Zweiges sein, damit die übrige Volkswirtschaft die Finalproduktion

$$\underline{y}^T = (2813 \quad 1196 \quad 266 \quad 1005 \quad 423 \quad 419 \quad 8822)$$

erhalten kann?

9.3. Wie entwickeln sich der Export und die Sonstige Endverwendung in den einzelnen Zweigen, wenn von der in 9.2. ermittelten Gesamtproduktion ausgegangen wird?

9.4. Berechnen Sie die Verflechtungstabelle für das Planjahr!

9.5. Wie entwickeln sich Export, Import und Außenhandelsaldo im Planjahr im Vergleich zum Basisjahr?



## 1.5. Rang von Vektorsystemen und Matrizen

### 1.5.1. Beispiele

1. Aus den Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ist eine konvexe Linearkombination (LK)

$$\underline{a}_4 = w_1 \underline{a}_1 + w_2 \underline{a}_2 + w_3 \underline{a}_3$$

zu bilden, bei der die Skalare  $w_1$  der Bedingung  $w_1 : w_2 : w_3 = 3 : 2 : 5$  genügen.

Da für eine konvexe LK die Bedingungen  $\sum_1 w_i = 1$  und

$0 \leq w_i \leq 1, i = 1, 2, 3$ , erfüllt sein müssen, folgt mit  $3 + 2 + 5 = 10$   $w_1 = 3/10, w_2 = 2/10$  und  $w_3 = 5/10$ . Daher gilt:

$$\underline{a}_4 = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{10} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -31 \\ 29 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,1 \\ 2,9 \\ -1,2 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben sind fünf Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ :

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2.1. Bestimmen Sie  $w_1$  und  $w_2$  so, daß  $w_1 \underline{a}_1 + w_2 \underline{a}_2 = \underline{a}_4$  ist.

2.2. Bestimmen Sie  $w_1, w_2$  und  $w_3$  so, daß

$$w_1 \underline{a}_1 + w_2 \underline{a}_2 + w_3 \underline{a}_3 = \underline{a}_5 \quad \text{ist.}$$

2.3. Prüfen Sie, ob sich aus  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  und  $\underline{a}_4$

$w_1 \underline{a}_1 + w_2 \underline{a}_2 + w_4 \underline{a}_4 = \underline{a}_5$  bilden läßt. Kann man die unter 2.1. und 2.2. gewonnenen Ergebnisse dabei verwenden?



BV	$w_1$	$w_2$	$w_0$	$- \uparrow$
	①	2	4	*
	3	-1	5	-3
	2	4	8	-2
$w_1$	1	2	4	-2
	0	⑦	-7	*
	0	0	0	0
$w_1$	1	0	2	
$w_2$	0	1	1	
	0	0	0	

Zu 2.1. Zur Bestimmung von  $w_1$  und  $w_2$  wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 &= 4 \\ 3w_1 - w_2 &= 5 \\ 2w_1 + 4w_2 &= 8 \end{aligned}$$

mit der Basistransformation gelöst. Die dritte Gleichung ist für die Ermittlung von  $w_1 = 2$  und  $w_2 = 1$  nicht erforderlich. Es gilt

$$\underline{a}_4 = 2\underline{a}_1 + \underline{a}_2.$$

BV	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_0$	$- \uparrow$
	①	2	5	0	*
	3	-1	2	6	-3
	2	4	-3	13	-2
$w_1$	1	2	5	0	-2
	0	⑦	-13	6	*
	0	0	-13	13	0
$w_1$	1	0	9/7	12/7	-9/7
$w_2$	0	1	13/7	-6/7	-13/7
	0	0	⑬	13	*
$w_1$	1	0	0	3	
$w_2$	0	1	0	1	
$w_3$	0	0	1	-1	

Zu 2.2. Zur Bestimmung von  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$  wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + 5w_3 &= 0 \\ 3w_1 - w_2 + 2w_3 &= 6 \\ 2w_1 + 4w_2 - 3w_3 &= 13 \end{aligned}$$

gelöst.

Die Lösung ergibt:

$$\underline{a}_5 = 3\underline{a}_1 + \underline{a}_2 - \underline{a}_3.$$

BV	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_0$	$- \uparrow$
	①	2	4	0	*
	3	-1	5	6	-3
	2	4	8	13	-2
$w_1$	1	2	4	0	-2
	0	⑦	-7	6	*
	0	0	0	13	0
$w_1$	1	0	2	-12/7	
$w_2$	0	1	1	-6/7	
	0	0	0	13	

Zu 2.3. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + 4w_3 &= 0 \\ 3w_1 - w_2 + 5w_3 &= 6 \\ 2w_1 + 4w_2 + 8w_3 &= 13 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Basistransformation führt zu dem Ergebnis, daß ein Widerspruch im Gleichungssystem vorhanden ist und folglich keine Lösung existiert. Dieses Ergebnis kann man auch aus den Ergebnissen

von 2.1. und 2.2. ableiten. Aus 2.1. ergibt sich, daß  $\underline{a}_4$  eine Linearkombination von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  ist, d. h., alle drei Vektoren

liegen in einer Ebene. Aus 2.2. ergibt sich wegen  $w_3 = -1 \neq 0$ , daß  $\underline{a}_5$  nicht in der durch  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  aufgespannten Ebene liegt und daher nicht als Linearkombination von Vektoren dieser Ebene dargestellt werden kann.

3. Gegeben sind die Vektoren  $\underline{a}_1^T = (1 \ 3 \ 4)$ ,  $\underline{a}_2^T = (0 \ 2 \ 1)$ ,  $\underline{a}_3^T = (1 \ 5 \ 5)$  und  $\underline{a}_4^T = (5 \ 9 \ 3)$ .

Die aus den Vektoren  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3; \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4; \underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  und  $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  gebildeten Vektorsysteme sind auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit zu untersuchen.

Hat man wie hier mehrere Vektorsysteme zu untersuchen, so löst man das zugehörige homogene Gleichungssystem für alle vier Vektoren. Eine gesonderte Spalte für  $w_0$  ist hier nicht erforderlich, da dort immer nur der Nullvektor zu notieren wäre. Aus Tableau III ergibt sich, daß  $w_3$  nicht Basisvariable werden kann, weil das Hauptelement 0 ist. Das Vektorsystem  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  ist linear abhängig.

BV	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$-\uparrow$	
I	①	0	1	5	*	
		3	2	5	9	-3
		4	1	5	3	-4
II	$w_1$	1	0	1	5	0
		0	②	2	-6	*
		0	1	1	-17	-1
III	$w_1$	1	0	1	5	-5
	$w_2$	0	1	1	-3	3
		0	0	0	-14	*
IV	$w_1$	1	0	1	0	
	$w_2$	0	1	1	0	
	$w_4$	0	0	0	1	

Die Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems  $\underline{A} \underline{w} = \underline{0}$  lautet:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} w_3 \quad \text{mit } w_3 = 1,$$

also  $w_1 = -1$  und  $w_2 = -1$ . Man prüft leicht

$$- \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Tableau III ist weiter ersichtlich, daß  $w_4$  Basisvariable werden kann, d. h., das

Vektorsystem  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$  ist linear unabhängig. Da im Tableau IV in der Spalte  $w_3$  zwei von Null verschiedene Elemente stehen, kann ein Tausch von  $w_1$  bzw.  $w_2$  gegen  $w_3$  ohne weiteres vorgenommen werden. Die Vektorsysteme  $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  und  $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  sind also beide linear unabhängig, denn das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, d. h., es existiert nur die Trivillösung.



4. Es ist der Rang des Vektorsystems

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$-\uparrow$
I		$\ominus 1$	3	2	-1	*
		4	-11	-10	5	-4
		2	-5	-6	3	-2
II	$x_1$	1	-3	-2	1	3
		0	$\ominus 1$	-2	1	*
		0	1	-2	1	-1
III	$x_1$	1	0	-8	4	-4
	$x_2$	0	1	-2	$\ominus 1$	*
		0	0	0	0	0
IV	$x_1$	1	4	0	0	
	$x_4$	0	1	-2	1	
		0	0	0	0	

Ein Vektorsystem aus vier ( $m$ ) Vektoren des  $R^3(R^n)$  ist wegen  $m > n$  auf jeden Fall linear abhängig. Zur Rangbestimmung reicht diese Aussage aber nicht aus, sondern es muß die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des Vektorsystems bestimmt werden, was mit Hilfe der Basistransformation erfolgt. Es lassen sich nur zwei Schritte durchführen, d. h., der Rang (Zahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren) ist gleich zwei. Aus dem

Tableau ergeben sich auch Schlüsse über Teilsysteme des zu untersuchenden Vektorsystems. Im Tableau III sind in den Spalten  $x_3$  und  $x_4$  die beiden ersten Elemente  $\neq 0$ . Es ist also möglich,  $x_3$  oder  $x_4$  gegen  $x_1$  oder  $x_2$  zu tauschen und zur Basisvariablen zu machen. Neben  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  sind also auch  $\underline{a}_1, \underline{a}_3$ ;  $\underline{a}_1, \underline{a}_4$ ;  $\underline{a}_2, \underline{a}_3$  und  $\underline{a}_2, \underline{a}_4$  linear unabhängig. Tauscht man z. B.  $x_4$  gegen  $x_2$  aus, so zeigt das entstehende Tableau IV, daß ein Austausch von  $x_1$  gegen  $x_3$  nicht möglich ist. Das Vektorsystem  $\underline{a}_3, \underline{a}_4$  ist linear abhängig.

5. Der Rang der Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist in Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda$  zu bestimmen.



	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$- \uparrow$
I		1	2	0	*
		3	7	1	-3
		2	-1	-5	-2
		-1	5	$\lambda$	1
II	$x_1$	1	2	0	-2
		0	1	1	*
		0	-5	5	5
		0	7	$\lambda$	-7
III	$x_1$	1	0	-2	
	$x_2$	0	1	1	
		0	0	0	
		0	0	$\lambda-7$	

Die Koeffizienten der Matrix werden der Basistransformation unterworfen. Aus Tableau III ist ersichtlich, daß bei  $\lambda = 7$  gilt:  $r(\underline{A}) = 2$  und bei  $\lambda \neq 7$   $r(\underline{A}) = 3$ . Für die Rechnung mit Parametern ist es günstig, sie gegebenenfalls durch Vertauschung von Zeilen und Spalten in die untere rechte Ecke zu bringen.

### 1.5.2. Übungsaufgaben

1. Aus den Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$$

sind mit den Skalaren

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
a)	3	-2	4	1
b)	1/2	0	1/3	1/6
c)	1	2	3	1/3

die Linearkombinationen  $\underline{a}_5$ ,  $\underline{a}_6$  und  $\underline{a}_7$  zu bilden, und es ist zu bestimmen, welche dieser Linearkombinationen nicht negativ bzw. konvex sind!

2. Gegeben sind die sechs Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ :

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2.1. Prüfen Sie, ob sich Zahlen  $w_1$  und  $w_2$  finden lassen, so daß

$$w_1 \underline{a}_1 + w_2 \underline{a}_2 = \underline{a}_5 \quad \text{gilt.}$$

2.2. Bestimmen Sie die Zahlen  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$ , für die gilt:

$$w_1 \underline{a}_1 + w_2 \underline{a}_2 + w_3 \underline{a}_3 = \underline{a}_4.$$

2.3. Bestimmen Sie die Zahlen  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_4$  so, daß  $\underline{a}_6$  eine Linearkombination der Vektoren  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  und  $\underline{a}_4$  ist.

2.4. Läßt sich eine Zahl  $w_6$  finden, so daß  $\underline{b} = w_6 \underline{a}_6$  eine konvexe Linearkombination von  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  und  $\underline{a}_4$  ist?

3. Gegeben sind die Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3.1. Es sind die Vektorsysteme  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  und  $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

3.2. Es sind die Ergebnisse von 3.1 zu nutzen, um zu entscheiden, ob sich  $\underline{a}_3$  als Linearkombination von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  bzw. von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_4$  darstellen läßt.

4. Es ist der Rang des Vektorsystems

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen und die Teilsysteme auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit zu untersuchen. Läßt sich  $\underline{a}_3$  als Linearkombination von  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  und  $\underline{a}_4$  darstellen?

5. Es ist der Rang des Vektorsystems

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda$  zu bestimmen.

6. Für die Matrizen

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 18 \\ 5 & -17 & 26 & 39 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 & 25 \\ 2 & 15 & -10 & 37 \\ -1 & -9 & 17 & 1 \\ 0 & 3 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

soll der Rang bestimmt werden.

7. Für welchen Wert von  $\lambda$  ergibt sich für

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 16 & -8 & 23 \\ 2 & 7 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

der minimale Rang?



## 1.6. Lösung von Gleichungssystemen

Obgleich der Umfang der Aufgaben aus didaktisch-methodischen Gründen so gewählt wurde, daß eine Ermittlung der Lösung ohne Rechner zumutbar ist, wird empfohlen, die Aufgaben auch unter Nutzung von Kleinrechnern zu lösen.

Dabei sollten Sie zusätzlich z. B. sämtliche existierenden Basislösungen bestimmen und Parameteränderungen so vornehmen, daß sich die Struktur der allgemeinen Lösung ändert.

Vor der Berechnung sollten Sie überprüfen, ob sich aus der Theorie der Gleichungssysteme von vornherein Aussagen ableiten lassen, die durch die Rechnung lediglich bestätigt werden müssen.

### 1.6.1. Beispiele

Der Hauptfall eines linearen quadratischen Gleichungssystems mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Variablen und dem Maximalrang wurde bereits im Abschnitt Basistransformation am Beispiel erörtert. Hier steht der allgemeine Fall im Vordergrund, der zuerst an einigen Beispielen demonstriert wird.

1. Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 - 7x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 11x_2 + 18x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

auf Lösbarkeit zu untersuchen und gegebenenfalls die allgemeine Lösung anzugeben.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$	$\rightarrow$
	①	3	6	-1	3	*
	-2	-7	-13	3	-4	2
	3	11	18	4	1	-3
$x_1$	1	3	6	-1	3	-3
	0	①	-1	1	2	*
	0	2	0	7	-8	-2
$x_1$	1	0	3	2	9	-3
$x_2$	0	1	1	-1	-2	-1
	0	0	①	9	-4	*
$x_1$	1	0	0	31/2	3	
$x_2$	0	1	0	7/2	-4	
$x_3$	0	0	1	-9/2	2	

Mit Hilfe der Basistransformation erhält man nach drei Schritten die Aussage der Lösbarkeit des Gleichungssystems ( $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ ) und die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 31/2 \\ 7/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} x_4.$$

Setzt man für  $x_4$  einen beliebigen Wert ein, so erhält man eine spezielle Lösung des Gleichungssystems. Für  $x_4 = 2$  ergibt sich  $x_1 = -28$ ,  $x_2 = -11$ ,  $x_3 = 11$ . Die Basislösung mit den BV  $x_1$ ,



$x_2$  und  $x_3$  erhält man, wenn man  $x_4 = 0$  setzt:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -4$ ,  $x_3 = 2$ . Da alle Elemente in der Spalte der Nichtbasisvariablen  $x_4 \neq 0$  sind, läßt sich  $x_4$  zur Gewinnung einer Basislösung gegen jede beliebige BV ( $x_1$ ,  $x_2$  oder  $x_3$ ) austauschen.

2. Untersuchen Sie das Gleichungssystem

$$2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 58$$

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5$$

$$-x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 5x_4 = 63$$

auf Lösbarkeit. Es ist gegebenenfalls die allgemeine Lösung anzugeben und eine Tabelle der Basislösungen.

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$	-↑
I		②	4	-4	-2	58	*
		3	-4	1	3	-5	-3
		-1	8	-5	-5	63	1
II	$x_1$	1	2	-2	-1	29	-2
		0	⊖10	7	6	-92	*
		0	10	-7	-6	92	-10
III	$x_1$	1	0	-0,6	0,2	10,6	
	$x_2$	0	1	-0,7	-0,6	9,2	
		0	0	0	0	0	

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$	-↑
IVa	$x_3$	-5/3	0	1	-1/3	-53/3	
	$x_2$	-7/6	1	0	-5/6	-19/6	
		0	0	0	0	0	
IVb	$x_4$	5	0	-3	1	53	
	$x_2$	3	1	-5/2	0	41	
		0	0	0	0	0	
IVc	$x_1$	1	-6/7	0	5/7	19/7	
	$x_3$	0	-10/7	1	6/7	-92/7	
		0	0	0	0	0	
IVd	$x_1$	1	1/3	⊖5/6	0	41/3	*
	$x_4$	0	-5/3	7/6	1	-46/3	-7/6
		0	0	0	0	0	0
	$x_3$	-6/5	-2/5	1	0	-82/5	
	$x_4$	7/5	-6/5	0	1	19/5	
		0	0	0	0	0	

Es lassen sich nur zwei Schritte ausführen. Aus dem Tableau III folgt  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ . Also ist die dritte Gleichung überflüssig, und das System ist lösbar. Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,6 \\ 9,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,6 \\ -0,7 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,6 \end{pmatrix} x_4$$

und hat also zwei Freiheitsgrade. Es gibt

$$\text{maximal } \binom{4}{2} = 6 \text{ Basislösungen.}$$

Die aus Tableau III abzulesende Basislösung lautet  $x_1 = 10,6$ ,  $x_2 = 9,2$ . Von Tableau III lassen sich vier weitere Basislösungen ermitteln, wenn jeweils die Basistransformation

$x_1$  gegen  $x_3$ ,  $x_1$  gegen  $x_4$ ,  $x_2$  gegen  $x_3$  und  $x_2$  gegen  $x_4$  realisiert werden. Vom Tableau IVd ausgehend, wird die Basislösung mit  $x_3$  und  $x_4$  als Basisvariable errechnet.

Die Tabelle der Basislösungen lautet:

	1	2	3	4	5	6
$x_1$	53/5	0	0	19/7	41/3	0
$x_2$	46/5	-19/6	41	0	0	0
$x_3$	0	-53/3	0	-92/7	0	-82/5
$x_4$	0	0	53	0	-46/3	19/5

3. Es ist das überbestimmte homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \quad \text{zu lösen.} \end{aligned}$$

Die Lösung wird mit Hilfe der Basistransformation durchgeführt. Die Spalte für  $x_0$  wird hier nicht mitgeführt. Nach drei Schritten ergibt sich der Rang  $r(\underline{A}) = 3$ . Die allgemeine Lösung weist also  $n - r = 4 - 3 = 1$  Freiheitsgrad auf. Sie lautet:

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	-	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	-
	①	1	1	-1	*	$x_1$	1	0	-3/2	0	3/2
	3	1	-2	-1	-3	$x_2$	0	1	5/2	-1	-5/2
	2	2	1	0	-2		0	0	⊖1	2	*
	1	-1	-3	-1	-1		0	0	1	-2	-1
	-1	-1	0	-1	1		0	0	1	-2	-1
$x_1$	1	1	1	-1	-1	$x_1$	1	0	0	-3	
	0	⊖2	-5	2	*	$x_2$	0	1	0	4	
	0	0	-1	2	0	$x_3$	0	0	1	-2	
	0	-2	-4	0	2		0	0	0	0	
	0	0	1	-2	0		0	0	0	0	

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x_4$$

4. Diskutieren Sie die Lösungsmöglichkeiten des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= c \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= c \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= c, \end{aligned}$$



$c \neq 0$  für die Werte des Parameters  $\lambda$ , und geben Sie für die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten die Lösungen an.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	$- \uparrow$	
I		① 1	$\lambda$	c	*	
		1	$\lambda$	1	c	-1
		$\lambda$	1	1	c	$-\lambda$
II	$x_1$	1	1	$\lambda$	c	-1
		0	① $(\lambda-1)$	$1-\lambda$	0	*
		0	$1-\lambda$	$1-\lambda^2$	$c(1-\lambda)$	$\lambda-1$
III	$x_1$	1	0	$\lambda+1$	c	$-(\lambda+1)$
	$x_2$	0	1	-1	0	1
		0	0	① $(1-\lambda)(2+\lambda)$	$c(1-\lambda)$	*
IV	$x_1$	1	0	0	$c/(\lambda+2)$	
	$x_2$	0	1	0	$c/(\lambda+2)$	
	$x_3$	0	0	1	$c/(\lambda+2)$	

Unabhängig von der Größe des Parameters  $\lambda$  läßt sich ein Schritt in der Basistransformation durchführen. Der Übergang von Tableau II zu Tableau III setzt aber voraus, daß das Hauptelement  $\neq 0$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\lambda \neq 1$  ist (unabhängig von der Wahl des Hauptelements).

Für  $\lambda = 1$  gilt  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 1$ , d. h., es wird nur die erste Gleichung für die Lösung in Betracht gezogen, denn die beiden anderen sind überflüssig.  $x_1 = c - x_2 - x_3$ . Die Lösung hat zwei Freiheitsgrade. Für  $\lambda \neq 1$  kommt man zu Tableau III. Für  $\lambda = -2$  wird das einzige als Hauptelement in Frage kommende Element Null. Dann gilt  $r(\underline{A}) = 2$ , aber  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ , d. h., das System ist unlösbar. Für  $\lambda \neq -2$  kommt man zu Tableau IV und liest als Lösung  $x_1 = x_2 = x_3 = c/(\lambda+2)$  ab, d. h.  $\forall \lambda \neq -2$  ergibt sich eine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem.

### 1.6.2. Übungsaufgaben

Untersuchen Sie folgende lineare Gleichungssysteme!

- a) Ist das Gleichungssystem lösbar?  
 b) Falls es lösbar ist, geben Sie die allgemeine Lösung und gegebenenfalls eine spezielle Lösung an.

1. $x_1 + x_2 - 4x_3 = -11$	2. $9x_1 + 8x_2 + x_3 = -2$
$2x_1 - x_2 + 7x_3 = 20$	$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5$	$6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1$
$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -25$	



$$\begin{aligned}
 3. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\
 & 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\
 & x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 = -11 \\
 & 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 20 \\
 & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\
 & 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 1 \\
 & 4x_1 - 6x_2 + 16x_3 = 0 \\
 & -6x_1 + 9x_2 - 24x_3 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 22 \\
 & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 40 \\
 & 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 62 \\
 & 4x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 84
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\
 & x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\
 & 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad & 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\
 & 8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \\
 & 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
 & 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\
 & 8x_1 + x_2 - 2x_3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\
 & 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 = -11 \\
 & 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 20 \\
 & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad & x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -6 \\
 & 2x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 = 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\
 & 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 10 \\
 & 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 22
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\
 & 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\
 & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8
 \end{aligned}$$

Überlegen Sie, ob bei dieser Aufgabe gegebenenfalls alle Basislösungen existieren. Versuchen Sie, diese Aussage aus der berechneten Lösung abzuleiten.

$$\begin{aligned}
 13. \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 34 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 48
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\
 & 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad & x_1 + x_2 = 0 \\
 & 3x_1 + 4x_2 = 0 \\
 & 2x_1 + 3x_2 = 0 \\
 & 6x_1 + 5x_2 = 0
 \end{aligned}$$

Oberprüfen Sie die Lösbarkeit der nachfolgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit vom Wert des Parameters  $\lambda$ .

Im Falle der Lösbarkeit ermitteln Sie die allgemeine Lösung!

19.  $2\lambda x_1 + 2x_2 = 20$       Hinweis: Vor Durchführung der Basis-  
 $4x_1 + x_2 = 28$       transformation Gleichungen und Variablen vertauschen.

20.  $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$       Hinweis: Vor Durchführung der Basis-  
 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$       transformation sind die beiden ersten  
 $2x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0$       Gleichungen zu vertauschen.

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungssysteme

21.  $x_1 - x_2 + x_3 = 0$  für die Fälle a)  $a = 0$ ,  
 $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$       b)  $a = 1$ ,  
 $3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = a$  und diskutieren Sie die Ergebnisse.

22.  $13x_1 - 4x_2 = 104$   
 $8x_1 + 5x_2 = -33$   
 $-3x_1 + x_2 = \lambda$

23. Für welchen Wert von  $\lambda$  wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \lambda x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

unlösbar? Durch welche Zahl muß die 8 auf der rechten Seite der letzten Gleichung ersetzt werden, damit für den gefundenen Wert von  $\lambda$  das Gleichungssystem wieder lösbar wird?

24. Die Größe  $\lambda$  ist so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda x_1 \\ bx_1 + cx_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  eine vom Nullvektor verschiedene Lösung haben.

## 1.7. Lösung von linearen Ungleichungssystemen

### 1.7.1. Beispiele

Die hier behandelte Problematik ist als Vorstufe zur linearen Optimierung zu sehen. Daher kann das dort gebotene Übungsmaterial zum Teil in diesem Abschnitt genutzt werden.

Wir beschränken uns auf die Lösung von normalen linearen Ungleichungssystemen  $\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}$ ,  $\underline{x} \geq \underline{0}$ ,  $\underline{b} \geq \underline{0}$ .

1. Gegeben ist das normale lineare Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 360 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 330 \\ -x_1 + x_2 &\leq 45 \quad x_2 \leq 60 \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Da es sich um ein normales lineares Ungleichungssystem handelt ( $\underline{b} \geq \underline{0}$ ), existiert auf jeden Fall die Trivillösung  $\underline{x} = \underline{0}$ . Im Lösungsprozeß ist als erstes das Ungleichungssystem durch die Addition des Schlupfvektors  $\tilde{\underline{x}}$  in die 1. Normalform, also in ein Gleichungssystem, überführt.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 360 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 &= 330 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 45 \\ x_2 + x_6 &= 60 \quad x_j \geq 0 \\ & \quad j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Ausgehend von der Trivillösung als erster zulässiger Basislösung, werden mit Hilfe der Basistransformation weitere zulässige Basislösungen generiert. Durch geeignete Wahl des Hauptelementes (Leitelementes) wird dafür Sorge getragen, daß man im Bereich der zulässigen Basislösungen bleibt. Neu gegenüber dem Vorgehen beim Übergang von einer kanonischen Form zu einer anderen sind:

1. Das Hauptelement kann nicht in einer Spalte ausgewählt werden, deren Variable im vorangehenden Schritt Nichtbasisvariable geworden war, denn das würde zu einer bereits berechneten zulässigen Basislösung zurückführen.
2. Beachtung der Zulässigkeit der Basislösung: Notwendig für das Verbleiben im Bereich der zulässigen Basislösungen ist die Wahl eines positiven Hauptelementes ( $a_{ij} > 0$ ), hinreichend die Wahl des minimalen Quotienten

$$\min_i \left( \frac{b_i}{a_{ij}} \mid a_{ij} > 0 \right).$$



	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_0$	Q	- ↑
← I	$x_3$	3	4	1	0	0	0	360	120*	-3
	$x_4$	④	2	0	1	0	0	330	165/2	*
	$x_5$	-1	1	0	0	1	0	45	-	1
	$x_6$	0	1	0	0	0	1	60	-	0
← → II	$x_3$	0	⑤/2	1	-3/4	0	0	225/2	45*	*
	$x_1$	1	1/2	0	1/4	0	0	165/2	165	-1/2
	$x_5$	0	3/2	0	1/4	1	0	255/2	255/3	-3/2
	$x_6$	0	1	0	0	0	1	60	60	-1
→ III	$x_2$	0	1	2/5	-3/10	0	0	45	-	3/10
	$x_1$	1	0	-1/5	4/10	0	0	60	150	-4/10
	$x_5$	0	0	-3/5	7/10	1	0	60	600/7	-7/10
	$x_6$	0	0	-2/5	③/10	0	1	15	50*	*
→ ← IV	$x_2$	0	1	0	0	0	1	60	-	0
	$x_1$	1	0	1/3	0	0	-4/3	40	120	-1/3
	$x_5$	0	0	①/3	0	1	-7/3	25	75*	*
	$x_4$	0	0	-4/3	1	0	10/3	50	-	4/3
← → V	$x_2$	0	1	0	0	0	1	60	60	-1
	$x_1$	1	0	0	0	-1	①	15	15*	*
	$x_3$	0	0	1	0	3	-7	75	-	7
	$x_4$	0	0	0	1	4	-6	150	-	6
→ VI	$x_2$	-1	1	0	0	1	0	45		
	$x_6$	1	0	0	0	-1	1	15		
	$x_3$	7	0	1	0	-4	0	180		
	$x_4$	6	0	0	1	-2	0	240		

Als erste BV wird  $x_1$  gewählt und  $Q = \frac{b_1}{a_{11}}$  berechnet, wobei die Bedingung  $a_{ij} > 0$  zu berücksichtigen ist. Nach dem Auswahlkriterium minimaler Quotient wird  $x_4$  NBV. Die Durchführung der Basistransformation führt zu II, wobei kenntlich gemacht wird, daß  $x_1$  in diesem Schritt in die Basis gekommen ist und nicht sofort wieder ausgetauscht werden darf. Daher muß in II die NBV  $x_2$  für die Aufnahme gewählt werden. Dann wird  $x_3$  NBV werden, was wiederum kenntlich gemacht wird. Im Tableau III muß  $x_4$  für die Aufnahme in die Basis gewählt werden (bei  $x_3$  würde Rückkehr zu Tableau II erfolgen). Bei Übergang zum Tableau IV erfolgt der Tausch von  $x_6$  gegen  $x_4$  als BV. Im Tableau IV muß  $x_3$  als BV für das nächste

Tableau vorgesehen werden (die Wahl von  $x_6$  führt zu Tableau III zurück). Dann wird mit dem Übergang zu Tableau V  $x_5$  als BV ausscheiden. In Tableau V wird aus den gleichen Gründen  $x_6$  als BV für die Basislösung in Tableau VI gewählt. Dabei scheidet  $x_1$  aus dem Kreis der BV aus. Mit Tableau VI sind alle zulässigen Basislösungen des vorgelegten Ungleichungssystems berechnet, denn die Aufnahme von  $x_1$  als BV würde zu Tableau III und die Aufnahme von  $x_5$  zu Tableau I führen.

Die Tabellen der zulässigen Basislösungen für die 1. bzw. 2. Normalform lauten:

	1	2	3	4	5	6
$x_1$	0	165/2	60	40	15	0
$x_2$	0	0	45	60	60	45
$x_3$	360	225/2	0	0	75	180
$x_4$	330	0	0	50	150	240
$x_5$	45	255/2	60	25	0	0
$x_6$	60	60	15	0	0	25

	1	2	3	4	5	6
$x_1$	0	165/2	60	40	15	0
$x_2$	0	0	45	60	60	45

Die allgemeinen Lösungen lauten für die 1. Normalform:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 360 \\ 330 \\ 45 \\ 60 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 165/2 \\ 0 \\ 225/2 \\ 0 \\ 255/2 \\ 60 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ 15 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 0 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \\ 75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 180 \\ 240 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und für die 2. Normalform:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 165/2 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \end{pmatrix} + w_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

jeweils mit  $\sum_{i=1}^6 w_i = 1$  und  $w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6$ .



### 1.7.2. Übungsaufgaben

Es ist die allgemeine Lösung der normalen Ungleichungssysteme

$$\begin{array}{l} 1. \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \quad \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 30 \\ \quad \quad x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ \quad \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2. \quad x_1 + x_2 \leq 18 \\ \quad \quad x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ \quad \quad -x_1 + x_2 \leq 7 \\ \quad \quad x_1 - x_2 \leq 12 \\ \quad \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

für die 2. Normalform anzugeben.

### 1.8. Zur Vertiefung der Theorie

Zeigen Sie:

1. Ist das Produkt zweier Matrizen  $A_1$  und  $A_2$  kommutativ, so sind  $A_1$  und  $A_2$  quadratisch und vom gleichen Typ. Gilt auch die Umkehrung?
2. Ist  $A$  eine Diagonalmatrix und sind alle Elemente in der Hauptdiagonalen von  $A$  voneinander verschieden, so ist jede Matrix  $B$ , deren Produkt mit  $A$  kommutativ ist, ebenfalls eine Diagonalmatrix.
3. Ein Vektorsystem  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ , in dem ein beliebiger Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, ist linear abhängig.
4. Ist ein Teilsystem eines Vektorsystems linear abhängig, so ist auch das gesamte Vektorsystem linear abhängig.
5. Sind drei Vektoren  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  und  $\underline{a}_3$  linear abhängig und  $\underline{a}_3$  läßt sich nicht durch eine Linearkombination von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  darstellen, so unterscheiden sich  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  nur durch einen konstanten Faktor.
6. Sind die Vektoren  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  und  $\underline{a}_3$  linear unabhängig, die Vektoren  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  und  $\underline{a}_4$  aber linear abhängig, so läßt sich  $\underline{a}_4$  als Linearkombination von  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  und  $\underline{a}_3$  darstellen.
7. Es sei eine Matrix mit  $m$  Zeilen und dem Rang  $r$  gegeben. Eine beliebige Auswahl von  $s$  Zeilen ergibt eine Matrix, deren Rang nicht kleiner als  $r + s - m$  ist.



8. Eine Matrix  $\underline{A}$  mit dem Rang  $r$  kann durch äquivalente Transformationen so umgeformt werden, daß eine Matrix  $\underline{B}$  mit den Elementen  $b_{11} = b_{22} = \dots = b_{rr} = 1$  und allen anderen Elementen gleich Null entsteht.
9. Wenn  $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$  und  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$  vom Typ  $(m, n)$ , so gilt  $r(\underline{C}) \leq r(\underline{A}) + r(\underline{B})$ .
10. Eine Matrix vom Rang  $r$  läßt sich als Summe von  $r$  Matrizen und dem Rang 1 darstellen. Weniger als  $r$  Matrizen und dem Rang 1 genügen für eine solche Darstellung nicht.
11. Es seien die Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  gegeben, die die gleiche Zeilenzahl haben.  
Es sei  $\underline{C} = (\underline{A} \ \underline{B})$ .  
Wenn  $r(\underline{C}) = r(\underline{A})$ , dann muß gelten  $r(\underline{A}) \geq r(\underline{B})$ .
12. Wie verändert sich das Produkt zweier verkettbarer Matrizen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$ , wenn
- 12.1. in  $\underline{A}$  die  $i$ -te und die  $j$ -te Zeile miteinander vertauscht werden,
  - 12.2. in  $\underline{A}$  die mit der Zahl  $c \neq 0$  multiplizierte  $j$ -te Zeile zur  $i$ -ten Zeile addiert wird,
  - 12.3. in  $\underline{B}$  die  $k$ -te und die  $l$ -te Spalte miteinander vertauscht werden?
13. Wie verändert sich die zu Matrix  $\underline{A}$  inverse Matrix  $\underline{A}^{-1}$ , wenn in  $\underline{A}$
- 13.1. die  $i$ -te und die  $j$ -te Zeile untereinander vertauscht werden,
  - 13.2. die mit der Zahl  $c \neq 0$  multiplizierte  $i$ -te Zeile zur  $j$ -ten Zeile addiert wird,
  - 13.3. die  $i$ -te Zeile mit einer Zahl  $c \neq 0$  multipliziert wird?

1.9. Lösungen der Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.

Lösungen zu 1.1.2.

1.a)

BV	$x_1$	$x_2$	$x_0$	$-\uparrow$
	④	5	3	*
	2	3	-5	-2
$x_1$	1	5/4	3/4	-5/4
	0	①/2	-13/2	*
$x_1$	1	0	17	
$x_2$	0	1	-13	

$$x_1 = 17, \quad x_2 = -13$$

b)

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	$-\uparrow$
	②	-1	-3	0	*
	-6	4	10	-2	6
	2	3	4	1	-2
$x_1$	1	-1/2	-3/2	0	1/2
	0	①	1	-2	*
	0	4	7	1	-4
$x_1$	1	0	-1	-1	1
$x_2$	0	1	1	-2	-1
	0	0	③	9	*
$x_1$	1	0	0	2	
$x_2$	0	1	0	-5	
$x_3$	0	0	1	3	

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 3$$

c)

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$	$-\uparrow$
	①	2	4	-1	1	*
	-1	-3	-5	4	3	1
	2	5	-10	-12	3	-2
	3	2	7	10	4	-3
$x_1$	1	2	4	-1	1	-2
	0	①	-1	3	4	*
	0	1	-18	-10	1	-1
	0	4	19	7	7	-4
$x_1$	1	0	2	5	9	-2
$x_2$	0	1	1	-3	-4	-1
	0	0	①	-7	5	*
	0	0	15	19	23	-15
$x_1$	1	0	0	81/19	181/19	-81/19
$x_2$	0	1	0	-64/19	-71/19	64/19
$x_3$	0	0	1	7/19	-5/19	-7/19
	0	0	0	①	512/19	*
$x_1$	1	0	0	0	1	
$x_2$	0	1	0	0	3	
$x_3$	0	0	1	0	-1	
$x_4$	0	0	0	1	2	

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

d)

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	- $\uparrow$
	(1)	1	1	0	*
	1	2	3	11	-1
	-1	3	4	23	-
$x_1$	1	1	1	0	-1
	0	(1)	2	11	*
	0	4	5	23	-4
$x_1$	1	0	-1	-11	1
$x_2$	0	1	2	11	-2
	0	0	(-3)	-21	*
$x_1$	1	0	0	-4	
$x_2$	0	1	0	-3	
$x_3$	0	0	1	7	

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = -3$$

$$x_3 = 7$$

2.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	- $\uparrow$
	(1)	1	1	5	*
	2	-1	3	4	-2
$x_1$	1	1	1	5	-1
	0	(-3)	1	-6	*
$x_1$	1	0	4/3	3	-4/3
$x_2$	0	1	(-1/3)	2	*
$x_1$	1	(4)	0	11	*
$x_3$	0	-3	1	-6	3
$x_2$	1/4	1	0	11/4	
$x_3$	3/4	0	1	9/4	

Es gibt

$$\binom{3}{2} = 3 \text{ Basislösungen.}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2,$$

$$x_1 = 11, \quad x_3 = -6,$$

$$x_2 = 11/4, \quad x_3 = 9/4$$

3. Maximale Anzahl der Basislösungen ist 4. Bei der Berechnung mit Hilfe der Basistransformation kommt man nach drei Schritten zur Basislösung  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ . Aus der Spalte für  $x_4$  ergibt sich, daß man lediglich  $x_1$  mit  $x_4$  vertauschen kann.



BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$	-A
	①	1	1	1	6	*
	1	-1	1	1	2	-1
	1	-1	-1	1	-4	-1
$x_1$	1	1	1	1	6	-1
	0	②	0	0	-4	*
	0	-2	-2	0	-10	2
$x_1$	1	0	1	1	4	-1
$x_2$	0	1	0	0	2	0
	0	0	②	0	-6	*
$x_1$	1	0	0	①	1	*
$x_2$	0	1	0	0	2	0
$x_3$	0	0	1	0	3	0
$x_4$	1	0	0	1	1	
$x_2$	0	1	0	0	2	
$x_3$	0	0	1	0	3	

Der Übergang zum nächsten Tableau bringt die Basislösung  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 1$ . Weitere Basislösungen existieren nicht.

#### Lösungen zu 1.2.2.

$$1. \quad \underline{A} \underline{B} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 20 \\ 6 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} \underline{A} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}^T \underline{B}^T = (\underline{B} \underline{A})^T = \begin{pmatrix} 24 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\underline{B}^T \underline{A}^T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 20 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \underline{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\underline{B}^{-1})^T = (\underline{B}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{A} \underline{B} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad (\underline{A} \underline{B})^T = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \underline{B}^T \underline{A}^T, \quad ((\underline{A} \underline{B})^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -5 \\ -11/2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \underline{A} \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} \underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{A} \underline{C} = \begin{pmatrix} 23 & 18 & 14 \\ -2 & 4 & -4 \\ 15 & 2 & 14 \end{pmatrix},$$

$$\underline{C} \underline{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -9 \\ 4 & 26 & 22 \\ -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} \underline{A} = \begin{pmatrix} 15 & -18 & -33 \\ -15 & 18 & 33 \\ 15 & -18 & -33 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} \underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 15 \\ -8 & 4 & -20 \\ -4 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \underline{A} \underline{B} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 20 \\ 6 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\underline{A} \underline{B})^T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 20 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^T \underline{A}^T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 20 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.a) \quad \underline{A}^{-1} = 1/7 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) \quad \underline{A}^{-1} = -1/4 \begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad \det(\underline{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad d) \quad \underline{A}^{-1} = -1/11 \begin{pmatrix} -5 & -3 & 9 & 2 \\ -6 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ 12 & -6 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

damit existiert keine Inverse.

$$6.a) \quad \left( (\underline{A} - \underline{B}) \underline{B}^T \right)^T^{-1} = \left[ (\underline{B} \underline{A}^T) - (\underline{B} \underline{B}^T) \right]^{-1} = 1/9 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6.b) \quad \left( \underline{A} (\underline{B}^T - \underline{A}^T) \right)^{-1} \underline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix} \quad 6.c) \quad \det(\underline{A}^T (\underline{A} - \underline{B})) = 0, \text{ womit die Aufgabe nicht lösbar ist, da keine Inverse existiert.}$$

$$7. \quad \underline{C} = \left( \begin{array}{cc|c} 19 & 21 & 23 \\ 30 & 17 & 49 \\ 4 & 5 & 11 \\ \hline 13 & 13 & 19 \end{array} \right)$$

$$8. \quad \underline{C} = \left( \begin{array}{cc|c} 35 & 47 & 47 \\ 32 & 44 & 52 \\ 43 & 42 & 48 \\ \hline 81 & 82 & 92 \end{array} \right)$$

Lösungen zu 1.3.2.

$$1. \quad \underline{X} = (\underline{A} - 2\underline{E} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{B} \underline{B}^T, \quad \underline{X} = -1/16 \begin{pmatrix} 4 & 20 & -8 \\ -4 & 20 & -16 \\ 8 & -24 & 152 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \underline{X} = (\underline{E} - \underline{D}) (\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}^T - \underline{E})^{-1}, \quad \underline{X} = -1/75 \begin{pmatrix} -12 & 21 \\ -34 & 22 \end{pmatrix}$$

## Lösungen zu 1.4.2.

### 1. Lösungsansatz

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 5400 \\ 3780 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad x_1 = 299, \quad x_2 = 6$$

$$2. \frac{M}{RE} = \left( \left\{ \left[ (M_{12}M_2 + M_{11}) M_3 + M_{18}M_8 \right] M_4 + M_{11}M_{12} + ( ) M_{15} \right\} M_5 \right. \\ \left. + M_{17}M_7 + [ ] M_{10} + ( ) M_{14} \right) M_6 + M_{13}M_{13} + [ ] M_9 \left\{ \right\} M_{16}$$

$$\frac{r}{R1} = r_x + r_y + r_z + r_v + r_w + r_e \quad \text{mit}$$

$$r_x = M_1 x, \quad r_y = ( ) y, \quad r_z = [ ] z, \quad r_v = \{ \} v, \quad r_w = ( ) w,$$

$$r_e = \frac{M}{RE} \cdot e.$$

$$3. 0 \leq e_3 \leq 587,5, \quad e_1 \geq 0, \quad e_2 \geq 0$$

$$4.1. (\underline{w}^T \underline{m}^T) = (200 \ 0 \ 100 \ 100 \quad 2600 \ 3600 \ 7200 \ 4900)$$

4.2. Es müssen die Koeffizienten  $a_{ik}$  bzw.  $b_{jk}$  berechnet werden.

$$\underline{v}_{-11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -0,5 & 1 & -0,5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{-21} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{-22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung von  $(\underline{p}^T \underline{m}^T)$  ist  $\underline{v}_{-11}^{-1}$  und  $\underline{v}_{-21} \underline{v}_{-11}^{-1}$  zu ermitteln.

$$\underline{v}_{-11}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{-21} \underline{v}_{-11}^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5 & 3 & 5 & 16 \\ 4 & 4 & 6 & 22 \\ 6 & 2 & 10 & 30 \\ 5 & 2 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{p}^T \underline{m}^T) = (570 \ 690 \ 370 \ 110 \quad 3010 \ 4120 \ 8000 \ 5470)$$

4.3. Volle Nutzung der Reserven bedeutet:  $0,5 w_1 + w_2 + w_3 + 4 w_4 = 700$ . (Zweite Zeile von  $\underline{v}_{-11}^{-1}$  ist mit  $\underline{w}$  zu multiplizieren und muß gleich der verfügbaren Kapazität sein.) Mit  $w_1 = 200$ ,  $w_2 = 0$  und  $w_4 = 110$  folgt  $w_3 = 160$ . Mit diesem  $\underline{w}^T = (200 \ 0 \ 160 \ 110)$  folgt als erforderliche Kapazität in



Abteilung 3: (0 0 1 2)  $\tilde{w} = 380$ . Es muß also die Kapazität in  $A_3$  um 10 ME erweitert werden.

$$5. \quad \underline{v}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_{21} \underline{v}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 52 & 16 \\ 8 & 2 \\ 68 & 22 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{p}^T \underline{m}^T) = (360 \quad 1200 \quad 2400 \quad 5520 \quad 720 \quad 7520)$$

6.1. Die Gesamtproduktion setzt sich aus den Lieferungen an andere Zweige und der Finalproduktion zusammen.

$$x_1 = 240 + 72 + 140 + 348 = 800$$

$$x_2 = 80 + 264 + 180 + 76 = 600$$

$$x_3 = 0 + 120 + 400 + 480 = 1000 \quad \underline{x}^T = (800 \quad 600 \quad 1000)$$

$$6.2. \quad \underline{M} = \begin{pmatrix} 240/800 & 72/600 & 140/1000 \\ 80/800 & 264/600 & 180/1000 \\ 0/800 & 120/600 & 400/1000 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y},$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 2,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 \\ 1670 \\ 1890 \end{pmatrix}$$

$$6.3. \quad \underline{y} = (\underline{E} - \underline{M}) \cdot \underline{x}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,12 & -0,14 \\ -0,1 & 0,56 & -0,18 \\ 0 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 820 \\ 1440 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 700 \end{pmatrix}$$

$$7.1. \quad \underline{x} = (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y}, \quad (\underline{E} - \underline{M}) = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,4 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \frac{1}{0,37} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \frac{1}{0,37} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$$

7.2. Die Grundlage für die Berechnung ist die Formel  $m_{ik} = \frac{M_{ik}}{x_k}$ , wobei die  $m_{ik}$  aus der Aufgabenstellung bekannt sind und der  $\underline{x}$ -Vektor berechnet wird:

$$M_{ik} = m_{ik} \cdot x_k, \quad M_{11} = 20, \quad M_{12} = 80, \quad M_{21} = 80, \quad M_{22} = 200$$

7.3. Für das Basisjahr gilt:

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 116 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich  $\underline{x}$  für das Basisjahr berechnen:

$$\underline{x} = \frac{1}{0,37} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 116 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich die Matrix der direkten äußeren Aufwendungen berechnen:

$$Q = \begin{pmatrix} 10/200 & 80/320 \\ 40/200 & 40/320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 & 1/4 \\ 1/5 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Schließlich gilt:  $Q \cdot \underline{x} = \underline{a}$ ,  $\underline{x}$ : Planjahr.

$$\begin{pmatrix} 1/20 & 1/4 \\ 1/5 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \end{pmatrix}$$

8. Nach Umformung und Einsetzen der Ausgangsinformationen folgt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -0,16 \\ 0 & -1 & -0,20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0,20 & 0 \\ 0,40 & -1 & 0 \\ 0,27 & 0,25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0,16 \\ 0 & -1 & -0,20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0,20 & 0 \\ 0,40 & -1 & 0 \\ 0,27 & 0,25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 987,2 \\ 259,96 \\ 1705 \end{pmatrix}$$

8.1.  $x_3 = 1705$

$$\underline{x}_p = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1705 \end{pmatrix}$$

8.2.  $y_1 = 987,2$   $y_2 = 259,96$   $\underline{y}_p = \begin{pmatrix} 987,2 \\ 259,96 \\ 1000 \end{pmatrix}$

8.3. Die sonstige Endverwendung des Zweiges 1 steigt von 280 um 207,2 auf 487,2, die des Zweiges 2 von 70 um 139,96 auf 209,96.

8.4. Import Planjahr:

$$I_p = \frac{1}{B}^T \cdot \underline{x}_p = (0,167 \quad 0,200 \quad 0,333) \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1705 \end{pmatrix} = 1058,265$$

Import Basisjahr:

$$I_B = \underline{i}_B^T \cdot \underline{x}_B = (0,167 \quad 0,200 \quad 0,333) \begin{pmatrix} 1200 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix} = 879,9$$

Der Import erhöht sich von 879,9 (Basisjahr) auf 1058,265 (Planjahr).

9.1.  $m_{25} = 0,05$      $m_{63} = 0,06$

9.2.  $\underline{x}^T = (4500 \quad 3200 \quad 3300 \quad 3600 \quad 2100 \quad 5000 \quad 11000)$

9.3. - 9.5.

Zweige	1	2	3	4	5	6	7	Exp.	Sonstige	$\underline{y}$	$\underline{x}$
1	675	96	132	180	84	300	220	617,6	2195,4	2813	4500
2	270	416	99	144	105	200	770	294,8	901,2	1196	3200
3	225	128	561	216	84	500	1320	34,6	231,4	266	3300
4	360	32	495	396	252	400	660	436,5	568,5	1005	3600
5	90	160	33	324	420	100	550	47,7	375,3	423	2100
6	405	320	198	252	126	400	880	296,8	2122,2	2419	5000
7	45	256	297	36	84	250	1210	715	8107	8822	11000
Import	180	192	66	72	105	450	220				

Export: 101,79 %

Import: 100,62 %

Außenhandelsaldo: 103,12 %.

Lösungen zu 1.5.2.

1.  $\underline{a}_5^T = (50 \quad 35 \quad -2)$

$\underline{a}_6^T = (6 \quad 13/2 \quad -1)$  , konvexe Linearkombination

$\underline{a}_7^T = (24 \quad 30 \quad 20)$  , nichtnegative Linearkombination

2.1.  $w_1 = -1, w_2 = 4$

2.2. Bei der Lösung des Gleichungssystems tritt ein Widerspruch auf:  $\underline{a}_4$  läßt sich nicht als Linearkombination der Vektoren  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  und  $\underline{a}_3$  darstellen.

2.3.  $w_1 = 2, w_2 = 1, w_4 = 2$



- 2.4. Mit  $w_6 = 0,2$  gilt  $\underline{b}^T = (-0,4 \ 2,2 \ 1,6)$ .  $\underline{b}$  ist eine konvexe Linearkombination von  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  und  $\underline{a}_4$  mit  $w_1 = 0,4$ ,  $w_2 = 0,2$  und  $w_3 = 0,4$ .
- 3.1. Das Vektorsystem  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$  ist linear unabhängig, während das Vektorsystem  $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$  linear abhängig ist. Es gilt z. B.  $2\underline{a}_1 + \underline{a}_3 - \underline{a}_4 = \underline{0}$ .
- 3.2. Aus 3.1. folgt:  $\underline{a}_3$  läßt sich nicht als Linearkombination von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  darstellen, wohl aber als Linearkombination von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_4$ , also  $\underline{a}_3 = \underline{a}_4 - 2\underline{a}_1$ .
4. Es lassen sich drei Variable zu Basisvariablen machen, d. h., der Rang des Vektorsystems ist drei. Im vierten Tableau zeigt ein Element Null an, daß  $x_3$  und  $x_4$  nicht vertauscht werden können. Das Vektorsystem  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$  ist also linear abhängig. Der Vektor  $\underline{a}_3$  läßt sich nicht als Linearkombination von  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  und  $\underline{a}_4$  darstellen.
5. Bei  $\lambda = 71/3$  ist der Rang des Vektorsystems 2, für  $\lambda \neq 71/3$  gleich 3.
6.  $r(\underline{A}_1) = 2$        $r(\underline{A}_2) = 4$
7.  $r(\underline{A}) = 2$  für  $\lambda = 11$ ,  $r(\underline{A}) = 3$  für alle  $\lambda \neq 11$ .

#### Lösungen zu 1.6.2.

1.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Das System ist überbestimmt, da } m > n. \text{ Da es den Maximalrang } r = n = 3 \text{ besitzt, ist die Lösung eindeutig.}$$

2.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Das System ist quadratisch und weist keinen Rangabfall auf. Es besitzt daher eine eindeutige Lösung.}$$

3.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 4$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{Das System ist quadratisch und weist keinen Rangabfall auf. Es besitzt daher eine eindeutige Lösung.}$$

4.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} x_3$$

Das System ist quadratisch und weist den Rangabfall 1 auf. Die allgemeine Lösung ist mit  $x_1$  und  $x_2$  als Basisvariablen angegeben.  $x_3$  ist freie Variable (Parameter).

5.  $r(\underline{A}) = 2$ , aber  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ . Das System ist quadratisch und weist in der Koeffizientenmatrix einen Rangabfall von 1 auf. Die Hinzunahme von  $\underline{b}$  erhöht den Rang von 2 auf 3. Das System enthält einen Widerspruch und ist nicht lösbar.

6.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_4$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes System, das den Maximalrang  $r = m = 2$  besitzt. Die angegebene allgemeine Lösung mit  $x_1$  und  $x_2$  als Basisvariablen ist von zwei Parametern abhängig.

7.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1/23 \begin{pmatrix} 67 \\ 51 \end{pmatrix} - 1/23 \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \end{pmatrix} x_3$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes System, das den Maximalrang  $r = m = 2$  besitzt. Die allgemeine Lösung (als Basisvariablen  $x_1$  und  $x_2$ ) ist von einem Parameter abhängig.

8.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist lösbar. Es handelt sich um ein unterbestimmtes System, das zusätzlich einen Rangabfall aufweist ( $m = 3$ ,  $r = 2$ ). Die allgemeine Lösung (BV:  $x_1$  und  $x_2$ )

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} x_4$$

ist von zwei Parametern abhängig.

9.  $r(\underline{A}) = 1$ ,  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist nicht lösbar. Es handelt sich um ein quadratisches System, das einen Rangabfall von 2 aufweist.
10.  $r(\underline{A}) = 2$ ,  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ , das System ist nicht lösbar. Es ist unterbestimmt ( $m = 3$ ,  $n = 5$ ) und weist in der Koeffizientenmatrix einen Rangabfall von 1 gegenüber dem Maximalrang auf.



11.  $r(\underline{A}) = 2$ ,  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3$$

Das System ist überbestimmt, weist aber gegenüber dem möglichen Maximalrang einen Rangabfall von 1 auf und hat daher einen Freiheitsgrad. Die Null im vor  $x_3$  stehenden Vektor macht deutlich, daß  $x_3$  nicht anstelle von  $x_2$  Basisvariable werden kann, d. h., die Basislösung  $(x_1, x_3)$  existiert nicht, was aus der Gleichheit der Koeffizienten bei  $x_1$  und  $x_3$  auch aus der Aufgabe direkt zu sehen ist.

12.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ -1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

Das System ist überbestimmt. Da es den Maximalrang aufweist, ist die Lösung eindeutig.

13.  $r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Das System ist überbestimmt. Da ein Rangabfall gegenüber dem Maximalrang auftritt, hat die allgemeine Lösung einen Freiheitsgrad.

14.  $r(\underline{A}) = 2$ . Da ein Rangabfall von 1 in diesem quadratischen homogenen System auftritt, existiert die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} x_3 .$$

15.  $r(\underline{A}) = 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_4$$

Der Rangabfall 1 in diesem quadratischen homogenen System bewirkt, daß die allgemeine Lösung von einem Parameter abhängt.

16.  $r(\underline{A}) = 3$  Der Maximalrang in diesem quadratischen homogenen System deutet auf eine eindeutige Lösung, also die Trivialsolution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

17.  $r(\underline{A}) = 2$  In diesem überbestimmten homogenen System tritt der Maximalrang auf, d. h., es existiert nur die Trivialsolution  $\underline{x} = \underline{0}$ .



18.  $r(\underline{A}) = 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} x_4$$

Gegenüber dem möglichen Maximalrang  $r = 4$  tritt in diesem überbestimmten homogenen System ein Rangabfall von 1 auf. Die allgemeine Lösung enthält einen Freiheitsgrad.

19.

	BV	$x_2$	$x_1$	$x_0$	$-\uparrow$
I		①	4	28	*
		2	$2\lambda$	20	-2
II	$x_2$	1	4	28	-4
		0	② $2\lambda - 8$	-36	*
III	$x_2$	1	0	$\frac{28\lambda - 40}{\lambda - 4}$	
	$x_1$	0	1	$\frac{-18}{\lambda - 4}$	

Aus Tableau II ist zu entnehmen:

Für  $2\lambda - 8 = 0$  oder  $\lambda = 4$  ist das System unlösbar, da  $r(\underline{A}) = 1$  und  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$ .

Für alle anderen Werte von  $\lambda$  lautet die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-18}{\lambda - 4} \\ \frac{28\lambda - 40}{\lambda - 4} \end{pmatrix}$$

z. B. für  $\lambda = 1$   $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 4$ .

20. Damit das homogene System eine nichttriviale Lösung hat, muß  $r(\underline{A}) < 3$  gelten. Für  $\lambda \neq 0$  ergibt sich lediglich die Triviale Lösung. Für  $\lambda = 0$  gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3$$

	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$-\uparrow$
		①	1	1	*
		3	2	1	-3
		2	1	$\lambda$	-2
$x_1$		1	1	1	-1
		0	② -1	-2	*
		0	-1	$\lambda - 2$	1
$x_2$		1	0	-1	
		0	1	2	
		0	0	$\lambda$	

21. a) Für  $a = 0$  handelt es sich um ein quadratisches homogenes System.  $r(\underline{A}) = 2$ , das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x_3$$

b) Für  $a = 1$  handelt es sich um ein quadratisches inhomogenes Gleichungssystem, das wegen  $r(\underline{A}) = 2$ , aber  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$  nicht lösbar ist.

22. Die Lösbarkeitsbedingung  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$  gilt für  $\lambda = -25$ .  
Dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix},$$

also eine eindeutige Lösung.

23.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_0$	- ↓
	②	3	-1	2	*
	3	$\lambda$	4	5	-3
	7	4	2	8	-7
$x_1$	1	$3/2$	$-1/2$	1	
	0	$\lambda - 9/2$	$11/2$	2	
	0	$-13/2$	$11/2$	1	

Nach einem Schritt ist zu erkennen, daß mit  $\lambda = -2$   $r(\underline{A}) = 2$ , aber  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$ , d. h., Unlösbarkeit des Systems folgt.  $r(\underline{A}, \underline{b}) = 2$  tritt mit 2 als letzter Komponente in der Spalte  $x_0$  ein. Wenn im ursprünglichen System anstelle von 8 der Wert 9 steht, tritt dieser Fall ein.

24. Es handelt sich um ein homogenes quadratisches System

$$\begin{aligned} (a - \lambda) x_1 + b x_2 &= 0 \\ b x_1 + (c - \lambda) x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Eine vom Nullvektor verschiedene Lösung tritt für  $D = 0$  ein.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

Die gesuchten Werte sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac + b^2} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac + b^2 \geq 0.$$

#### Lösungen zu 1.7.2.

$$1. \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad \sum_{i=1}^5 w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

$$2. \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} + w_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^6 w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

## 2. Lineare Optimierung

### 2.1. Modelle der linearen Optimierung

Die Lösungen für Beispiele und Übungsaufgaben dieses Abschnitts werden angegeben. Es wird empfohlen, gegebenenfalls unter Nutzung der Kleinrechentchnik selbständig zu lösen.

#### 2.1.1. Beispiele

1. Ein Betrieb kann aus einem Grundmaterial die drei Produkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  herstellen. Die Engpässe des Betriebes sind das Grundmaterial und die Maschinenzeiten in zwei Abteilungen. Die Produktion soll so erfolgen, daß das Reineinkommen maximal wird.

Die folgende Tabelle enthält die notwendigen Zahlenangaben:

	Verfügbare Menge	Verbrauch pro Einheit		
		$P_1$	$P_2$	$P_3$
Grundmaterial	12	1	1	1
Masch. Std. Abt. I	15	2	2	1
" " " II	18	3	2	2
Reineinkommen pro Einheit des Produkts		9	8	6

Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Entscheidungsvariablen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind die Produktionsmengen der drei Produkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ . Grundmaterial und Maschinenkapazitäten bilden zusammen mit den in der Tabelle angegebenen Aufwandskoeffizienten pro eine Einheit Endprodukt  $P_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) die Informationen für das System der Nebenbedingungen, die wie folgt formuliert werden können:



$$\begin{aligned} \text{NB: } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 18 \end{aligned}$$

Durch das  $\leq$  wird zum Ausdruck gebracht, daß die verfügbaren Kapazitäten nicht überschritten werden dürfen.

Die Information über das Reineinkommen pro Einheit Endprodukt läßt folgende Formulierung der Zielfunktion zu:

$$\text{ZF: } Z = 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 \longrightarrow \max$$

Schließlich ist noch zu sichern, daß die Variablen die Bedingungen der Nichtnegativität erfüllen.

$$\text{NNB: } x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$Z_{\text{opt}} = 66; \quad \underline{x}^T = (0, 6, 3, 3, 0, 0)$$

2. Ein metallverarbeitender Betrieb steht vor folgender Produktionsaufgabe:

Produkt	Menge
A	400
B	200
C	450

Zur Herstellung stehen ihm drei Maschinen zur Verfügung.

Maschine	Kapazität in Std.
M <sub>1</sub>	600
M <sub>2</sub>	500
M <sub>3</sub>	800

Der Betrieb kann zur Bearbeitung jedes Produkts zwei verschiedene technologische Verfahren in Anwendung bringen. Die Zeitnormen und Selbstkosten sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	A		B		C	
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>
M <sub>1</sub>	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4
M <sub>2</sub>	0,0	0,6	0,4	0,6	0,0	0,8
M <sub>3</sub>	0,8	0,8	0,6	1,2	0,4	0,6
Selbstkosten	29	26	27	26	36	33

Die Produktionsaufgabe soll mit minimalen Selbstkosten realisiert werden. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Zunächst legen wir die Variablen fest.

$x_1$ : Menge von Produkt A, die nach Technologie 1 hergestellt wird.  
 $x_2$ : " " " A, " " " 2 " "  
 $y_1$ : " " " B, " " " 1 " "

usw.

Formulieren wir zunächst die Nebenbedingungen, die sich auf die technologischen Zusammenhänge beziehen:

$$\begin{aligned} \text{NB: } 0,6x_1 + 0,6x_2 + 0,6y_1 + 0,6y_2 + 0,6z_1 + 0,4z_2 &\leq 600 \\ 0,0x_1 + 0,6x_2 + 0,4y_1 + 0,6y_2 + 0,0z_1 + 0,8z_2 &\leq 500 \\ 0,8x_1 + 0,8x_2 + 0,6y_1 + 1,2y_2 + 0,4z_1 + 0,6z_2 &\leq 800 \end{aligned}$$

Hinzu kommen die Nebenbedingungen zur Erfüllung der Produktionsaufgabe

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 400 && \text{Hier gilt unbedingt} \\ y_1 + y_2 &= 200 && \text{das Gleichheits-} \\ z_1 + z_2 &= 450 && \text{zeichen.} \end{aligned}$$

Die Zielfunktion läßt sich mit den Informationen über die Selbstkosten formulieren:

$$\text{ZF: } Z = 29x_1 + 26x_2 + 27y_1 + 26y_2 + 36z_1 + 33z_2 \longrightarrow \min$$

$$\text{NNB: } x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{opt}} &= 31275; \quad \underline{x}^T = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, s_1, s_2, s_3) \\ &= (0, 400, 0, 200, 275, 175, 5, 0, 25) \end{aligned}$$

3. Für eine Futtermittelmischung, die die Nährstoffe  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  enthalten soll, kommen vier Produkte A, B, C und D in Frage. Die Zahlenangaben über die Mindestmengen der drei Nährstoffe und den Gehalt der Nährstoffe in den einzelnen Produkten sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Nährstoff	P r o d u k t				Erforderliche Mindestmenge
	A	B	C	D	
$M_1$	3	2	4	1	38
$M_2$	5	1	1	2	36
$M_3$	1	5	2	3	50



Die Produkte A, B, C und D sind in solchen Mengen zu kaufen, daß die Zuführung der Nährstoffe in den angegebenen Mindestmengen bei minimalen Kosten garantiert ist.

Die Einkaufspreise betragen für A: 2 [WE], B: 3 [WE], C: 5 [WE], D: 1 [WE]. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Die Variablen  $x_j$   $j=1, 2, 3, 4$  entsprechen den von den Produkten A, B, C und D verwendeten Mengen. Für die erforderlichen Mengen der Produkte A, B, C und D lassen sich mit den Informationen aus der Tabelle folgende Nebenbedingungen formulieren:

$$\begin{array}{l} \text{NB: } 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 38 \\ \quad 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 36 \\ \quad x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 50 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Durch } \geq \text{ wird die Einhaltung} \\ \text{der Mindestmenge verlangt.} \end{array}$$

Die Vorgabe der Einkaufspreise führt zu folgender Zielfunktion:

$$\text{ZF: } Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \longrightarrow \min$$

$$\text{NNB: } x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$Z_{\text{opt}} = 30; \quad \underline{x}^T = (8, 0, 0, 14, 0, 32, 0)$$

4. In der Papierindustrie tritt häufig das Problem auf, wie aus Ausgangsrollen Papierrollen kleineren Formats zu schneiden sind. Angenommen, eine Maschine stelle Papierrollen von 195 cm Breite her. Aus diesen Rollen seien herzustellen:

49500 Rollen von 65 cm Breite,  
15840 " " 50 cm Breite,  
59400 " " 40 cm Breite.

Es sind möglichst wenig Ausgangsrollen zu schneiden. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Zur Festlegung der Variablen ist es erforderlich, Zuschnittvarianten zu bilden. Das erfolgt in nachstehender Tabelle:



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
50	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
40	0	0	1	0	2	3	1	2	3	4

$x_j$  - Anzahl der nach Zuschnittvariante  $j$  zu schneidenden Rollen

Daraus leiten sich unter Verwendung der Vorgaben über die gewünschte Rollenzahl die folgenden Nebenbedingungen ab:

NB:

$$\begin{array}{rcl}
 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \text{IV} & 49500 \\
 \quad x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 & \text{IV} & 15840 \\
 \quad \quad x_3 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 4x_{10} & \text{IV} & 59400
 \end{array}$$

Die Aussage, möglichst wenig Ausgangsrollen zu schneiden, ist gleichbedeutend damit, daß möglichst wenig Papierrollen nach den einzelnen Varianten zu schneiden sind.

Das führt zu folgender Zielfunktion:

ZF:  $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \longrightarrow \min$

NNB:  $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 10$

$Z_{\text{opt}} = 33220;$

$\underline{x}^T = (8140, 0, 0, 0, 15840, 9240, 0, 0, 0, 0, 0)$

5. Auf einem Bahnhof besteht durchschnittlich folgender Personalbedarf:
- |          |           |       |       |
|----------|-----------|-------|-------|
| Zwischen | 0 Uhr und | 4 Uhr | 4 AK  |
| "        | 4 "       | 8 "   | 6 AK  |
| "        | 8 "       | 12 "  | 12 AK |
| "        | 12 "      | 16 "  | 18 AK |
| "        | 16 "      | 20 "  | 16 AK |
| "        | 20 "      | 24 "  | 8 AK  |

Die Reichsbahnangehörigen können ihre Schicht um 0, 4, 8, 12, 16 bzw. 20 Uhr beginnen und arbeiten 8 Stunden hintereinander. Welcher Schichtplan erfordert den minimalen Einsatz von Arbeitskräften? Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Zunächst legen wir die Variablen fest:

$x_1$ : Anzahl der Arbeitskräfte, die um 0 Uhr die Arbeit beginnen  
 $x_2$ : Anzahl " " " " 4 Uhr " " "  
 .  
 .  
 $x_6$ : Anzahl " " " " 20 Uhr " " "

Damit lassen sich folgende Nebenbedingungen formulieren, durch die gesichert wird, daß die Arbeitszeit von 8 Stunden zusammenhängend ist. Es ist leicht zu überblicken, daß es dabei auftreten kann, daß Arbeitskräfte nur 4 Stunden täglich zum Einsatz kommen.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{NB: } x_1 + x_2 & \equiv & 6 \\
 & x_2 + x_3 & \equiv 12 \\
 & & x_3 + x_4 & \equiv 18 \\
 & & & x_4 + x_5 & \equiv 16 \\
 & & & & x_5 + x_6 & \equiv 8 \\
 & & & & & x_1 + x_6 & \equiv 4
 \end{array}$$

Der normale Einsatz von Arbeitskräften führt zu folgender Zielfunktion:

ZF:  $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$

Die Nichtnegativitätsbedingung lautet:

NNB:  $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

$Z_{\text{opt}} = 32; \underline{x}^T = (4, 6, 10, 8, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

6. Ein Betrieb produziert eine Legierung, die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen soll:

- a) spezifisches Gewicht  $\leq 1$ ,
- b) Gehalt des Bestandteiles s  $\geq 20\%$ ,
- c) Schmelztemperatur  $\geq 600^\circ\text{C}$ .

Die für die Produktion dieser Legierung in Frage kommenden Bestandteile sind die Rohstoffe  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ , die sich durch die in der Tabelle angegebenen Eigenschaften auszeichnen:

Eigenschaften	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Spez. Gewicht	0,96	0,92	1,04
Gehalt Bestandteil s	18 %	12 %	25 %
Schmelztemperatur	550 °C	600 °C	690 °C



Die Preise der einzelnen Rohstoffe betragen pro Mengeneinheit:  
 $P_1$ : 160 WE,  $P_2$ : 360 WE,  $P_3$ : 150 WE.

Es ist zu bestimmen, in welchen Proportionen die Rohstoffe  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  zu verwenden sind, um die Legierung mit den geforderten Eigenschaften bei möglichst niedrigen Ankaufskosten für die Rohstoffe zu erhalten. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Die Entscheidungsvariablen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  geben den Anteil an, mit dem die Rohstoffe  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  in die Legierung eingehen. Unter Verwendung der Angaben der Tabelle der festgelegten Eigenschaften lassen sich folgende Nebenbedingungen ableiten:

$$\begin{aligned} \text{NB: } & 0,96x_1 + 0,92x_2 + 1,04x_3 \leq 1 \\ & 18x_1 + 12x_2 + 25x_3 \leq 20 \\ & 550x_1 + 600x_2 + 690x_3 \leq 600 \end{aligned}$$

Hinzu kommt die Bilanzbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Bei der Aufstellung der Zielfunktion werden die Preise für die Rohstoffe verwendet.

$$\text{ZF: } Z = 160x_1 + 360x_2 + 150x_3 \longrightarrow \min$$

$$\text{NNB: } x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$Z_{\text{opt}} = 155; \underline{x}^T = (0,5 \quad 0, \quad 0,5, \quad 0, \quad 1,5, \quad 20)$$

### 2.1.2. Übungsaufgaben

- Ein Betrieb hat bei der Produktion von vier Massenartikeln in einem bestimmten Zeitabschnitt bei zwei wichtigen Grundmaterialien ( $G_1$ ,  $G_2$ ) nur begrenzte Mengen zu Verfügung; außerdem im gleichen Zeitabschnitt Engpässe bei zwei Bearbeitungsmaschinen ( $M_1$ ,  $M_2$ ). Die technischen Daten sind aus folgenden Zusammenstellungen zu entnehmen:

	Materialverbrauch in Kilogramm (pro Stück des Erzeugnisses)				Materialfonds
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	
$G_1$	4	-	1	4	1,3 [t]
$G_2$	5	6	2	3	2,1 [t]



	Bearbeitungszeit in Minuten (pro Einheit des Erzeugnisses)				Zeitfonds
	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	
$M_1$	5	4	-	6	20 [Stunden]
$M_2$	10	8	6	4	80 [Stunden]

Eine vertragliche Verpflichtung sieht vor, daß von den Erzeugnissen  $E_1$  und  $E_2$  insgesamt mindestens 150 Stück zu produzieren sind. Der Gewinn je Stück der Erzeugnisse beträgt für  $E_1$ : 0,80 WE,  $E_2$ : 1 WE,  $E_3$ : 0,60 WE,  $E_4$ : 0,30 WE.

Wie lautet das Optimierungsmodell, wenn der Betrieb die Ausnutzung so gestalten will, daß der größtmögliche Gewinn erzielt wird?

Für welches Produktionsprogramm erzielt der Betrieb einen maximalen Gewinn?

2. Zwischen vier Kraftwerkstypen  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  und  $T_4$  ist beim Ausbau des Energienetzes eines Gebietes so auszuwählen, daß die Gesamtkosten, bezogen auf ein Jahr, zu einem Minimum werden. Für das Gesamtgebiet sind eine jährliche Energieproduktion von 10000 Einheiten, ein tägliches Mindestaufkommen von 24 Einheiten und die Möglichkeit zur Abdeckung eines täglichen Spitzenbedarfs von 30 Einheiten zu sichern. Die Leistungen der vier Kraftwerkstypen sind:

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
Jährliche Energieproduktion	750	2000	800	2000
Tägliches Mindestaufkommen	2	5	1	4
Tägliche Maximalkapazität	3	7	3	7

Für das Bauprogramm steht eine Investitionsmenge von 105 WE zur Verfügung. Der Investitionsbedarf je Kraftwerk beträgt bei Typ  $T_1$  10 WE, bei Typ  $T_2$  20 WE, bei Typ  $T_3$  5 WE und bei Typ  $T_4$  25 WE. Die jährlichen Kosten je Kraftwerk betragen bei Typ  $T_1$  3 WE, bei Typ  $T_2$  6 WE, bei Typ  $T_3$  3 WE und bei Typ  $T_4$  7 WE. In welcher Anzahl sind die vier möglichen Kraftwerkstypen zu errichten? Formulieren Sie das Modell!

3. Aus Blechtafeln der Abmessung  $2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$  sollen  
 300 Tafeln der Sorte I  $0,5 \text{ m} \cdot 0,6 \text{ m}$ ,  
 150 Tafeln der Sorte II  $0,8 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m}$  und  
 300 Tafeln der Sorte III  $0,3 \text{ m} \cdot 1,0 \text{ m}$   
 geschnitten werden.

Zur Auswahl stehen sechs Zuschnittvarianten.

- Variante 1: 6 Tafeln Sorte I  
 " 2: 2 " " II und 4 Tafeln Sorte III  
 Variante 3: 2 Tafeln Sorte I und 2 Tafeln Sorte II und  
 2 " " III  
 " 4: 5 " " II  
 " 5: 4 " " I und 2 Tafeln Sorte II  
 " 6: 6 " " III

- a) Die Anzahl der zu zerschneidenden Blechtafeln soll minimal sein. Formulieren Sie das Modell!  
 b) Der Verschnitt soll minimal werden. Formulieren Sie das Modell!
4. In einer Paketumschlagstelle der Post sei die zeitliche Verteilung für die auszuführenden Tätigkeiten bekannt. Mittels Zeitnormativen kann daraus berechnet werden, wieviel Arbeitskräfte in den einzelnen Zeitabschnitten eines Tages erforderlich sind.

Arbeitskräftebedarf:

Zeitabschnitt	AK
4 - 6	18
6 - 8	33
8 - 10	30
10 - 12	48
12 - 14	54
14 - 16	21
16 - 18	111
18 - 20	123

Arbeitskräfte können nicht stundenweise eingesetzt werden, und es erfolgt deshalb folgende Schichtfestlegung:

- |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| 1. Voll | 4 - 12  | 4. Teil | 4 - 8   |
| 2. "    | 12 - 20 | 5. "    | 6 - 12  |
| 3. "    | 10 - 18 | 6. "    | 16 - 20 |



Zur Vereinfachung sollen Pausen und andere Arbeitsunterbrechungen unberücksichtigt bleiben.

Während die Teilarbeitskräfte für die gleiche Schicht vorzusehen sind, sollte jede Vollkraft sowohl Vormittags-, als auch Nachmittagsdienste verrichten. Daraus ergibt sich, daß die Arbeitskräftezahlen für die erste, zweite und dritte Schicht in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen müssen. Es wird festgelegt, daß die Summe der Arbeitskräfte in der zweiten und dritten Schicht höchstens doppelt so groß wie diejenige der ersten Schicht sein darf, weil dann der Dienststundenplan für jede Vollkraft auf eine Vormittagschicht höchstens zwei Nachmittagschichten festlegt.

Formulieren Sie das Modell!

5. Für die Pflanzenproduktion eines landwirtschaftlichen Betriebes stehen vier Kulturen  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  und  $K_4$  zur Auswahl. Die Gewinne je Erzeugniseinheit der Kultur betragen 10, 5, 8 und 3 WE. Für die Kulturen  $K_2$  und  $K_4$  sind Mindestproduktionsmengen in der Höhe von 8 bzw. 13 ME vorgeschrieben. Außerdem soll die Produktionsmenge der Kulturen  $K_1$  und  $K_3$  zusammen 21 ME nicht übersteigen.

Es liegen folgende weitere Angaben vor:

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
Benötigte Anbaufläche [ha/ME]	40	10	20	30
Benötigte Arbeitskräfte [AK/ME]	5	2	6	4
Kosten für Saatgut [WE/ME]	3	2	2	1
Aufwand an Mineraldünger [ME/ME]	5	7	2	6
Aufwand an Chemikalien zur Unkrautbekämpfung [ME/ME]	3	1	2	1
Kosten für fremde Leistungen [WE/ME]	1	2	1	-

Die gesamte zur Verfügung stehende Nutzfläche beträgt 1080 ha. Die Anzahl der vorhandenen Arbeitskräfte im betrachteten Zeitraum sei 108. 60 WE stehen für das Saatgut zur Verfügung, bei Mineraldünger sind es 210 ME, bei den Chemikalien 72 ME. Für fremde Leistungen sind 24 WE geplant, die nicht überschritten werden dürfen. Zu bestimmen sind diejenigen Produktionsmengen bei den vier Kulturen, die den Gesamtgewinn des Betriebes zu einem Maximum machen.

Formulieren Sie das Modell!



6. Drei Produkte können mit unterschiedlichen Technologien produziert werden. Grenzen für die Anwendung der einzelnen Technologien sind durch die Zeitfonds beim Fräsen, Drehen und Schweißen gegeben. Folgende Daten sind gegeben:

	Zeitaufwand für die Bearbeitung einer Einheit des Produkts Masch.-Std./Stück						Verfügbare Zeitfonds		
	Produkt 1 Technologie		Produkt 2 Technologie			Produkt 3 Technologie			
	1	2	3	1	2	3		1	2
Fräsen	2	2	1	3	0	4	3	3	200
Drehen	3	1	2	1	2	0	5	6	340
Schweißen	0	1	3	2	3	1	1	0	480
Gewinn/ Stück	11	7	5	9	6	7	18	15	

Formulieren Sie das Modell!

## 2.2. Graphische Lösung

### 2.2.1. Beispiele

Lösen Sie folgende lineare Optimierungsaufgaben!

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x_1 + x_2 \leq 10 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 16 \\
 & 3x_1 + x_2 \leq 24 \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \\
 & Z = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max
 \end{aligned}$$

Lösung:

Zunächst überführen wir die Nebenbedingungen (Ungleichungen) in die Achsenabschnittsform

$$\frac{x_1}{m} + \frac{x_2}{n} = 1$$

und erhalten

$$\text{I } \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\text{II } \frac{x_1}{16} + \frac{x_2}{8} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\text{III } \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{24} \stackrel{!}{=} 1.$$

Dabei bilden  $m$  und  $n$  die Abschnitte auf der  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse. Die Nebenbedingungen können somit in das Koordinatensystem eingezeichnet werden. Für jede Ungleichung ergibt sich eine Halbebene als Lösung (durch Einsetzen eines Punktes der Ebene, beispielsweise des Koordinatenursprunges in die Achsenabschnittsform, kann man die Halbebene der Lösungen bestimmen).

Es entsteht ein konvexer Lösungsbereich.

Um die Zielfunktion einzeichnen zu können, nehmen wir einen Zielfunktionswert an und formen die Zielfunktion ebenfalls in die Achsenabschnittsform um.

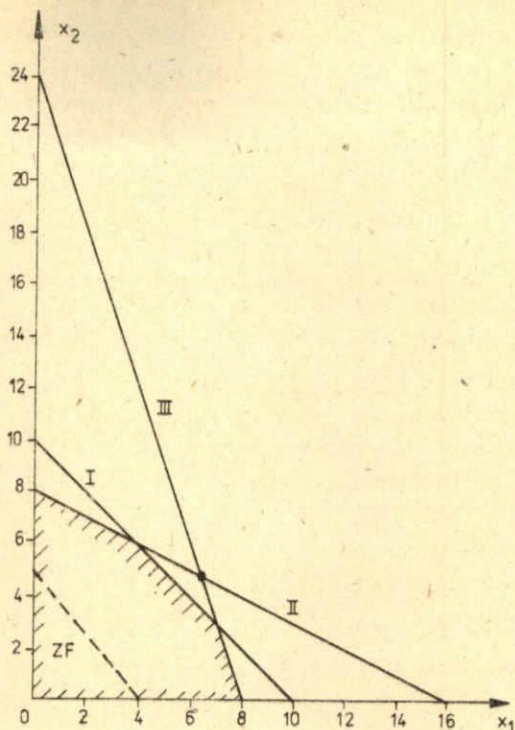
Annahme:  $Z = 20$       Daraus folgt:  $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} = 1.$

Diese Gerade verschieben wir parallel nach oben, bis der äußerste Punkt des konvexen Bereiches erreicht ist. Dieser Punkt stellt die optimale Lösung der linearen Optimierungsaufgabe dar. Wir können ablesen

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 3.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Zielfunktion erhält man den optimalen Zielfunktionswert

$$Z = 47.$$



$$\begin{aligned}
 2. \quad & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\
 & 2x_1 + 4x_2 \leq 40 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \quad Z = 6x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max
 \end{aligned}$$

Lösung:

Zunächst erfolgt wieder die Umformung in die Achsenabschnittsform

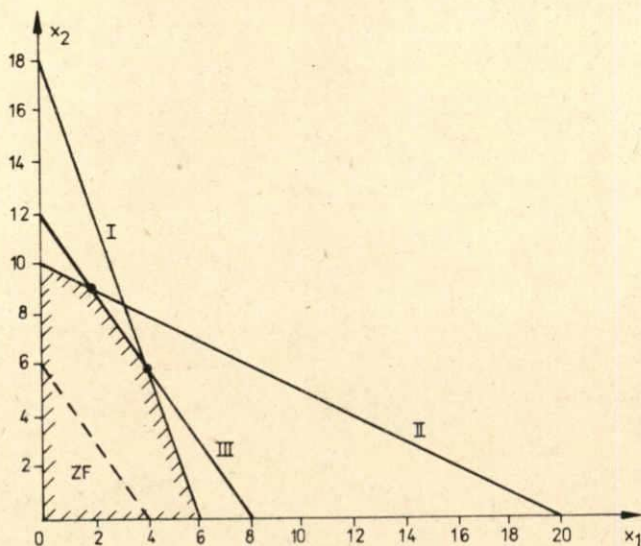
$$I \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{18} \leq 1$$

$$II \quad \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{10} \leq 1$$

$$III \quad \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{12} \leq 1$$

Mit der Annahme  $Z = 24$  folgt für die Zielfunktion

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} = 1.$$



Dieses Ergebnis tragen wir in das Koordinatensystem ein. Nunmehr verschieben wir wiederum die Zielfunktion durch den obersten Punkt des zulässigen Lösungsbereichs. Dabei stellen wir fest, daß die Zielfunktion parallel zur Nebenbedingung III verläuft. Die beiden Eckpunkte des zulässigen Lösungsbereichs



ches, aber auch alle dazwischenliegenden Punkte stellen optimale Lösungen dar. Es gibt also unendlich viele Lösungen und darunter zwei Basislösungen.

Die Lösungen lauten:

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 6 \quad Z = 48 \quad \text{Basislösung,}$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 9 \quad Z = 48 \quad \text{Basislösung,}$$

aber auch.

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{15}{2} \quad \text{führt zu } Z = 48.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & 4x_1 + 6x_2 \leq 12 \\ & 16x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq 3 \end{aligned}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$

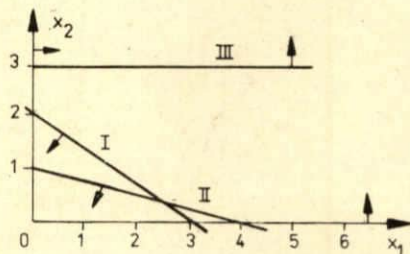
Lösung:

Zunächst stellen wir die Achsenabschnittsform auf.

$$\text{I} \quad \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 1$$

$$\text{II} \quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{1} \leq 1$$

$$\text{III} \quad \frac{x_2}{3} \geq 1$$



Nach Einzeichnen der Nebenbedingungen in das Koordinatensystem kann man feststellen, daß der Lösungsbereich eine leere Menge ist und die lineare Optimierungsaufgabe demzufolge nicht lösbar ist.

$$4. \quad -x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$2x_1 - 10x_2 \leq 20$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$Z_1 = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$$

$$Z_2 = -5x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$$

Die lineare Optimierungsaufgabe ist für beide Zielfunktionen graphisch zu lösen.

Lösung:

Wir betrachten zu diesem Zweck zunächst den Lösungsbereich.  
Die Achsenabschnittsformen für die Nebenbedingungen lauten:

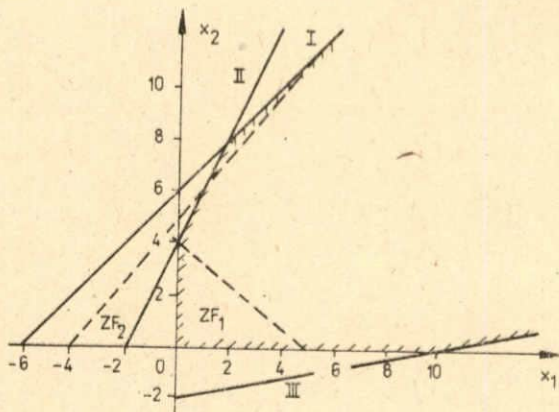
$$\text{I} \quad \frac{x_1}{-6} + \frac{x_2}{6} \leq 1$$

$$\text{II} \quad \frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{4} \leq 1$$

$$\text{III} \quad \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{2} \leq 1$$

Nunmehr betrachten wir die Zielfunktionen:

Wir stellen fest, der Lösungsbereich ist nach oben unbeschränkt.



$Z_1$ : Wir nehmen  $Z_1 = 20$  an und erhalten  $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} = 1$ .

Die Zielfunktion kann beliebig große Werte annehmen. Es existiert keine optimale Lösung.

$Z_2$ : Wir nehmen  $Z_2 = 20$  an und erhalten  $\frac{x_1}{-4} + \frac{x_2}{5} = 1$ .

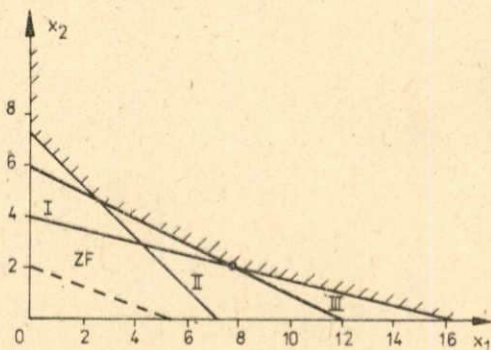
Durch Parallelverschiebung dieser Geraden finden wir

mit  $x_1 = 2$   $x_2 = 8$   
 $Z = 22$  die optimale Lösung.

5.  $x_1 + 4x_2 \geq 16$   
 $x_1 + x_2 \geq 7$   
 $x_1 + 2x_2 \geq 12$   
 $x_j \geq 0, j = 1, 2$   
 $Z = 20x_1 + 50x_2 \rightarrow \min$

Lösung:

Wir überführen die Nebenbedingungen in die Achsenabschnittsform



$$I \quad \frac{x_1}{16} + \frac{x_2}{4} \geq 1$$

$$II \quad \frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{7} \geq 1$$

$$III \quad \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{6} \geq 1.$$

Analog die Zielfunktion mit der Annahme  $Z = 100$

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Durch Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden nach unten bis zum äußersten Punkt erhält man die optimale Lösung

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 2 \quad \text{mit} \quad Z = 260.$$

### 2.2.2. Übungsaufgaben

$$1. \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 33$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 66$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$Z = 6x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$$

$$2. \quad 3x_1 + x_2 \leq 4500$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 7500$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3500$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$Z = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

$$3. \quad x_1 + x_2 \geq 11$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$Z_1 = 27x_1 + 36x_2 \rightarrow \max$$

$$Z_2 = 27x_1 + 36x_2 \rightarrow \min$$

$$4. \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$6x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$Z = 15x_1 + 33x_2 \rightarrow \min$$

$$5. \quad -4x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$-9x_1 + 9x_2 \leq 27$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2$$

$$Z_1 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$Z_2 = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min$$



$$\begin{aligned}
 6. \quad & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\
 & 2x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
 & \quad \quad 4x_2 \leq 16 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \\
 & Z = 5x_1 + 6x_2 \longrightarrow \min
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 16 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2 \\
 & Z = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max
 \end{aligned}$$

- a) Es ist die Lösung für die angegebene Aufgabe anzugeben.  
 b) Es ist die Lösung unter Berücksichtigung einer weiteren Nebenbedingung  $x_1 - x_2 \geq 2$  anzugeben.

8. Vorgegeben ist folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\begin{aligned}
 Z &= 20x_1 + 40x_2 \longrightarrow \max \\
 x_1 + x_2 &\leq 30 \\
 10x_1 + 6x_2 &\leq 240 \\
 x_1 &\leq 15 \\
 x_2 &\leq 20 \\
 x_1 &\geq 0 \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Aufgabenstellungen:

- 8.1. Es ist die graphische Lösung zu ermitteln.  
 8.2. Schreiben Sie die 1. Normalform der linearen Optimierungsaufgabe auf, und bestimmen Sie die Werte für die Schlupfvariablen.  
 8.3. Treffen Sie Aussagen über die Degeneration mit Hilfe der Definition für Basislösungen.  
 8.4. Bestimmen Sie  $c_1$  und  $c_2$  für den Fall, daß es unendlich viele Lösungen gibt und  $Z_{\text{opt}} = 750$  beträgt.

8.5. Wie lautet die optimale Lösung für die Zielfunktion

$$Z = 40x_1 + 30x_2 \rightarrow \max ?$$

8.6. Vergleichen Sie die Lösungen der drei Aufgaben miteinander (-Basislösungen-)

8.7. Vorgegeben sind folgende Punkte für die Grundaufgabe:

$P_1$  (10,10);  $P_2$  (20,18);  $P_3$  (0,20);  $P_4$  (11,17);

$P_5$  (24,0);  $P_6$  (15,15)

Ermitteln Sie, ob es sich um eine

- a) zulässige Lösung,
- b) nichtzulässige Lösung,
- c) zulässige Basislösung,
- d) nichtzulässige Basislösung,
- e) optimale Lösung,
- f) optimale Basislösung

handelt.

## 2.3. Simplexmethode

### 2.3.1. Beispiele

1. Vorgelegt ist die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 14 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Es soll die 1. Normalform ( $\underline{c}^T \underline{x} / \underline{A} \underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}$ ) ermittelt werden. Von dem dann entstandenen Gleichungssystem  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  sollen sämtliche zulässigen Basislösungen berechnet, und durch zusätzliche Berechnung der jeweiligen Zielfunktionswerte soll die optimale Basislösung gefunden werden.

Zur Überführung in die 1. Normalform werden zu den drei Ungleichungen Schlupfvariablen addiert, wodurch die Ungleichungen in Gleichungen überführt werden. Die Schlupfvariablen müssen ebenfalls der Nichtnegativitätsbedingung genügen.

Es handelt sich um ein normales lineares Ungleichungssystem, d. h.  $\underline{b} \geq \underline{0}$ .

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 14 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

Ohne weiteres ist als erste zulässige Basislösung  $x_3 = 4$ ,  $x_4 = 10$  und  $x_5 = 14$  sowie  $x_1 = x_2 = 0$  abzulesen. Sie bildet den Ausgangspunkt der Berechnungen mit Hilfe der elementaren Basis-  
transformation.



	BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-f
I	$x_3$	-1	1	1	0	0	4	-	1
	$x_4$	1	1	0	1	0	10	10	-1
	$x_5$	②	-1	0	0	1	14	7*	*
II	$x_3$	0	1/2	1	0	1/2	11	22	-1/2
	$x_4$	0	③/2	0	1	-1/2	3	2*	*
	$x_1$	1	-1/2	0	0	1/2	7	-	1/2
III	$x_3$	0	0	1	-1/3	②/3	10	15*	*
	$x_2$	0	1	0	2/3	-1/3	2	-	1/3
	$x_1$	1	0	0	1/3	1/3	8	24	-1/3
IV	$x_5$	0	0	3/2	-1/2	1	15	-	1/2
	$x_2$	0	1	1/2	1/2	0	7	14	-1/2
	$x_1$	1	0	-1/2	①/2	0	3	6*	*
V	$x_5$	1	0	1	0	1	18		
	$x_2$	-1	1	1	0	0	4		
	$x_4$	2	0	-1	1	0	6		

Als erstes werde  $x_1$  Basisvariable (BV). Damit scheidet  $x_5$  als BV aus. Im Tableau II soll  $x_2$  BV werden, wobei nach Ermittlung des minimalen Quotienten  $x_4$  aus der Basis ausscheidet. Im Tableau III wird  $x_5$  als BV für den nächsten Schritt gewählt ( $x_4$  würde zu Tableau II zurückführen).  $x_3$  wird Nichtbasisvariable (NBV). Um von Tableau IV zu einer weiteren zulässigen Basislösung zu gelangen, wird  $x_4$  als BV gewählt, wobei  $x_1$  NBV wird. Mit der Berechnung des Tableaus V sind sämtliche zulässigen Basislösungen ermittelt. Sie werden in einer Tabelle zusammengestellt, und zusätzlich wird der Wert von Z berechnet.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	Z
I	0	0	4	10	14	0
II	7	0	11	3	0	28
III	8	2	10	0	0	42
IV	3	7	0	0	15	47
V	0	4	0	6	18	20

Optimal ist die Basislösung IV mit  
 $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 7$   
und  $Z = 47$ .

2. Mit Hilfe der Simplexmethode soll die LO-Aufgabe

$$Z = 12x_1 + 30x_2 + 28x_3 \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 28$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 29$$

$$3x_1 + 8x_2 + 7x_3 \leq 89 \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

gelöst werden.

Die 1. Normalform der Aufgabe lautet:

$$\begin{array}{rcll} Z = 12x_1 + 30x_2 + 28x_3 & \rightarrow & \max & \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & & = 28 & \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 & & = 29 & \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + x_6 & & = 89 & \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 6. & & \end{array}$$

Eine erste zulässige Basislösung als Startpunkt für die Simplexmethode ist

$$x_4 = 28; \quad x_5 = 29; \quad x_6 = 89; \quad Z = 0.$$

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_0$	Q	-†
$x_4$	1	1	3	1	0	0	28	28	-1
← $x_5$	1	③	2	0	1	0	29	29/3*	*
$x_6$	3	8	7	0	0	1	89	89/8	-8
Z	-12	-30†	-28	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	-	30
$x_4$	2/3	0	7/3	1	-1/3	0	55/3	55/7	-7/3
→ $x_2$	1/3	1	2/3	0	1/3	0	29/3	29/2	-2/3
← $x_6$	1/3	0	⑤/3	0	-8/3	1	35/3	7*	*
Z	-2	<u>0</u>	-8†	<u>0</u>	10	<u>0</u>	290	-	8
← $x_4$	1/5	0	0	1	①7/5	7/5	2	10/17*	*
$x_2$	1/5	1	0	0	7/5	-2/5	5	25/7	-7/5
→ $x_3$	1/5	0	1	0	-8/5	3/5	7	-	8/5
Z	-2/5	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	-14/5†	24/5	346	-	14/5
← $x_5$	①/17	0	0	5/17	1	-7/17	10/17	10*	*
$x_2$	2/17	1	0	-7/17	0	3/17	71/17	71/2	-2/17
$x_3$	5/17	0	1	8/17	0	-1/17	135/17	27	-5/17
Z	-4/17†	<u>0</u>	<u>0</u>	14/17	<u>0</u>	62/17	5910/17	-	4/17
→ $x_1$	1	0	0	5	17	-7	10		
$x_2$	0	1	0	-1	-2	1	3		
$x_3$	0	0	1	-1	-5	2	5		
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	2	4	2	350		

Die Zielfunktion ist also als Funktion der Nichtbasisvariablen darzustellen. Das bereitet hier keine Schwierigkeiten. Es gilt

$$Z = 0 - (-12x_1 - 30x_2 - 28x_3) .$$

Bei der Auswahl der in die Basis kommenden Spalte wählt man unter den NBV diejenige aus, die den größten spezifischen Zuwachs für die Zielfunktion aufweist. Im Beispiel tritt das bei  $x_2$  mit einem spezifischen Zuwachs von 30 auf, während z. B. die Wahl von  $x_3$  nur einen spezifischen Zuwachs von 28 ergeben würde. Genauer wäre das Produkt: (Wert der neuen BV in der folgenden Basislösung)  $x$  (spez. Zuwachs). In unserem Beispiel  $\frac{29}{3} \cdot 30 = 290$ . Das erforder-



dert aber Zwischenrechnungen, die den Lösungsprozeß unterbrechen. Die Wahl der ausscheidenden Basisvariablen muß unter der Zielstellung: "Aufrechterhaltung der Zulässigkeit" erfolgen. Es erfolgt eine Orientierung auf den "Engpaß", die natürlich einen "Verbrauch", d. h. einen positiven Koeffizienten in der Spalte, voraussetzt. Alle anderen Koeffizienten brauchen bei der Engpaßbestimmung nicht berücksichtigt zu werden. Zur Engpaßberechnung ist die vorhandene "Menge" (Komponente in der Spalte  $x_0$ ) durch den spezifischen Verbrauch zu dividieren.

Es wird  $\min\left(\frac{28}{1}; \frac{29}{3}; \frac{89}{8}\right) = \frac{29}{3}$  berechnet, und daher scheidet  $x_5$  als BV aus. Der weitere Lösungsprozeß ist in den Tableaus dargestellt. Im dritten Tableau z. B. ist die Minimumbildung lediglich auf die Quotienten  $2/\frac{17}{5}$  und  $5/\frac{7}{5}$  zu beschränken, der negative Koeffizient  $-8/5$  ist nicht zu berücksichtigen. Nach vier Simplexschritten ist die optimale Lösung erreicht, denn in der Zeile Z stehen nur nichtnegative Werte. Die optimale Lösung lautet:  
 $x_1 = 10, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = x_5 = x_6 = 0$  und  $Z = 350$ .

3. Die LO-Aufgabe  $Z = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ (2) \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 36 \\ (3) \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (4) \quad & x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 35 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

ist mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen. Im Anschluß ist zu diskutieren, auf welchen Wert man die Beschränkungszahl bei (4) reduzieren könnte, ohne den Wert der Zielfunktion zu verändern. Für den Lösungsprozeß mit der Simplexmethode bedeutet das Auftreten der Gleichung (3) eine Komplikation, da damit nicht ohne weiteres eine erste zulässige Basislösung angegeben werden kann. Wenn man (3) auflöst und in (1), (2), (4) und die Zielfunktion einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} Z &= 7x_1 + 7x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 35 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

da  $x_3 = x_1 + x_2$ . Außerdem wurde in den beiden ersten Ungleichungen noch durch zwei dividiert. Die 1. Normalform lautet:

$$\begin{array}{rcll}
 Z = 7x_1 + 7x_2 & \rightarrow & \max & \\
 x_1 + x_2 + x_3 & & = & 10 \\
 2x_1 + x_2 + x_4 & & = & 18 \\
 2x_1 + 5x_2 + x_5 & & = & 35 \\
 x_j \geq 0, & j = & 1, 2, \dots, 5. & 
 \end{array}$$

Es liegt eine LO-Aufgabe vor, die keinerlei besondere Schwierigkeiten aufweist.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-†
$x_3$	1	1	1	0	0	10	10	-1
$\leftarrow x_4$	②	1	0	1	0	18	9*	*
$x_5$	2	5	0	0	1	35	35/2	-2
Z	-7†	-7	0	0	0	0	-	7
$\leftarrow x_3$	0	1/2	1	-1/2	0	1	2*	*
$\rightarrow x_1$	1	1/2	0	1/2	0	9	18	-1/2
$x_5$	0	4	0	-1	1	17	17/4	-4
Z	0	-7/2†	0	7/2	0	63	-	7/2
$\rightarrow x_2$	0	1	2	-1	0	2	-	1
$x_1$	1	0	-1	1	0	8	8	-1
$\leftarrow x_5$	0	0	-8	③	1	9	3*	*
Z	0	0	7	0†	0	70	-	0
$x_2$	0	1	-2/3	0	1/3	5		
$x_1$	1	0	5/3	0	-1/3	5		
$\rightarrow x_4$	0	0	-8/3	1	1/3	3		
Z	0	0	7	0	0	70		

Das Minimum ist nicht eindeutig. Man wählt den kleineren Index (lexikographisches Prinzip), also wird  $x_1$  BV. Nach zwei Schritten ist die optimale Lösung erreicht. Sie weist eine Besonderheit auf. In der letzten Zeile der Spalte der NBV  $x_4$  steht der Wert Null. Man kann also  $x_4$  als BV wählen, ohne den Wert der Zielfunktion zu verändern. Dann sind  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_4$  BV. Mithin ist auch jede konvexe Linearkombination der beiden optimalen zulässigen



Basislösungen eine optimale Lösung:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mit } w_1, w_2 \geq 0 \\ \text{und} \\ w_1 + w_2 = 1. \end{array}$$

Aus dieser Lösung ist auch zu erkennen, daß die Beschränkungszahl von (4) um 9 auf 26 reduziert werden kann, ohne daß der Wert der Zielfunktion der optimalen Basislösung mit den BV  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_5$  sich ändert. Dann ist in dieser Basislösung  $x_5 = 0$ , und die Lösung damit degeneriert. Um die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe zu erhalten, wird resubstituiert.

$$x_1 = 8 - c, \quad x_2 = 2 + c, \quad x_3 = 10, \quad Z = 70 \quad \text{mit } 0 \leq c \leq 3.$$

Die Grenzen für den Parameter  $c$  folgen durch Einsetzen in die ursprüngliche Aufgabe. Kritisch sind die Ungleichungen (2) und (4)

$$(2) \quad 3(8 - c) + 2 + c + 10 \leq 36 \quad \cap \quad 36 - 2c \leq 36 \quad \cap \quad c \geq 0$$

$$(4) \quad (8 - c) + 4(2 + c) + 10 \leq 35 \quad \cap \quad 26 + 3c \leq 35 \quad \cap \quad c \leq 3.$$

4. Vorgelegt sei die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 5x_1 + 4x_2 + 200 \rightarrow \max \\ -4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Simplexmethode soll versucht werden, eine optimale Lösung zu finden.

Die Aufgabe wird in die 1. Normalform überführt

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 10 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

Um alle Ausgangsdaten für das erste Simplextableau zu erhalten, wird die Zielfunktion als Funktion der NBV dargestellt

$$\tilde{Z} = 0 - (-5x_1 - 4x_2).$$



BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-†
$x_3$	-4	1	1	0	0	4	-	4
← $x_4$	①	-1	0	1	0	4	4*	*
$x_5$	2	-1	0	0	1	10	5	-2
$\tilde{Z}$	-5†	-4	0	0	0	0		5
$x_3$	0	-3	1	4	0	20	-	3
→ $x_1$	1	-1	0	1	0	4	-	1
← $x_5$	0	①	0	-2	1	2	2*	*
$\tilde{Z}$	0	-9†	0	5	0	20		9
$x_3$	0	0	1	-2	3	26	-	
$x_1$	1	0	0	-1	1	6	-	
→ $x_2$	0	1	0	-2	1	2	-	
$\tilde{Z}$	0	0	0	-13	9	38		

Nach zwei Simplexschritten stellt sich heraus, daß die Aufgabe unlösbar ist. Die Zielfunktion  $\tilde{Z}$  ist auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt. Im dritten Tableau zeigt der Koeffizient -13 in der letzten Zeile, daß die Wahl von  $x_4$  als BV den Zielfunktionswert vergrößern würde. Da in der zugehörigen Spalte keine nichtnegativen Koeffizienten auftreten, besteht kein Engpaß, keine Grenze für die Größe  $x_4$  als BV. Die Zielfunktion kann also auf der Menge der zulässigen Lösungen unbeschränkt wachsen, die Aufgabe ist nicht lösbar.

5. Die LO-Aufgabe  $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ist mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen.

Der Übergang zur 1. Normalform ergibt

$$\begin{array}{rcl}
 Z = 3x_1 + 2x_2 & \longrightarrow & \max \\
 x_1 + x_2 + x_3 & & = 2 \\
 2x_1 - x_2 + x_4 & & = 2 \\
 x_1 + x_2 - x_5 & & = 1 \\
 2x_1 - x_2 - x_6 & & = 1 \\
 x_j \geq 0, & j = 1, \dots, 6.
 \end{array}$$

Damit muß zur Gewinnung einer ersten zulässigen Basislösung eine Hilfsaufgabe formuliert werden. Zusätzliche Vorbereitungen sind nicht erforderlich, da die Bedingung  $\underline{b} \geq \underline{0}$  in der ersten Normalform bereits erfüllt ist. Die Hilfsaufgabe lautet

$$\begin{array}{rcl}
 (1) & \tilde{Z} = -(x_7 + x_8) & \longrightarrow \max \\
 (2) & x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\
 (3) & 2x_1 - x_2 + x_4 & = 2 \\
 (4) & x_1 + x_2 - x_5 + x_7 & = 1 \\
 (5) & 2x_1 - x_2 - x_6 + x_8 & = 1 \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 8.
 \end{array}$$

Damit sind  $x_3, x_4, x_7$  und  $x_8$  BV für eine erste zulässige Basislösung. Die Zielfunktion der Hilfsaufgabe muß als Funktion der NBV  $x_1, x_2, x_5$  und  $x_6$  dargestellt werden. Man löst (4) und (5) nach  $x_7$  bzw.  $x_8$  auf:

$$x_7 = 1 - x_1 - x_2 + x_5; \quad x_8 = 1 - 2x_1 + x_2 + x_6$$

und erhält durch Einsetzen in (1) und Zusammenfassung

$$\tilde{Z} = -2 - (-3x_1 + x_5 + x_6)$$

und kann nun mit dem Lösungsprozeß für die Hilfsaufgabe beginnen.

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_0$	Q	-†
$x_3$	1	1	1	0	0	0	0	0	2	2	-1
$x_4$	2	-1	0	1	0	0	0	0	2	1	-2
$x_7$	1	1	0	0	-1	0	1	0	1	1	-1
← $x_8$	②	-1	0	0	0	-1	0	1	1	1/2*	*
$\tilde{z}$	-3†	0	0	0	1	1	0	0	-2		3
$x_3$	0	3/2	1	0	0	1/2	0	-1/2	3/2	1	-3/2
$x_4$	0	0	0	1	0	1	0	-1	1	-	0
← $x_7$	0	3/2	0	0	-1	1/2	1	-1/2	1/2	1/3*	*
→ $x_1$	1	-1/2	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	-	1/2
$\tilde{z}$	0	-3/2†	0	0	1	-1/2	0	3/2	-1/2		3/2
$x_3$	0	0	1	0	1	0	-1	1	1		
$x_4$	0	0	0	1	0	1	0	1	1		
→ $x_2$	0	1	0	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3		
$x_1$	1	0	0	0	-1/3	-1/3	1/3	1/3	2/3		
$\tilde{z}$	0	0	0	0	0	0	1	1	0		

Nach zwei Simplexschritten ist die optimale Lösung der Hilfsaufgabe ermittelt. Da  $\tilde{z} = 0$  ist, ergibt sich ein Startpunkt (1. zulässige Basislösung) für die Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Um das erste Tableau aufstellen zu können, muß die ursprüngliche Zielfunktion  $Z = 3x_1 + 2x_2$  als Funktion der NBV  $x_5$  und  $x_6$  ausgedrückt werden. (Die künstlichen Variablen  $x_7$  und  $x_8$  sind in der eigentlichen Aufgabe nicht enthalten.) Aus den entsprechenden Zeilen des letzten Tableaus für die Lösung der Hilfsaufgabe ist abzulesen:

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6, \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6.$$



BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_0$	Q	-t
← $x_3$	0	0	1	0	①	0	1	1*	*
$x_4$	0	0	0	1	0	1	1	-	0
$x_2$	0	1	0	0	-2/3	1/3	1/3	-	2/3
$x_1$	1	0	0	0	-1/3	-1/3	2/3	-	1/3
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	-7/3†	-1/3	8/3		7/3
→ $x_5$	0	0	1	0	1	0	1	-	0
← $x_4$	0	0	0	1	0	①	1	1*	*
$x_2$	0	1	2/3	0	0	1/3	1	3	-1/3
$x_1$	1	0	1/3	0	0	-1/3	1	-	1/3
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	7/3	<u>0</u>	<u>0</u>	-1/3†	5		1/3
$x_5$	0	0	1	0	1	0	1		
→ $x_6$	0	0	0	1	0	1	1		
$x_2$	0	1	2/3	-1/3	0	0	2/3		
$x_1$	1	0	1/3	1/3	0	0	4/3		
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	7/3	1/3	<u>0</u>	<u>0</u>	16/3		

Durch Einsetzen in die Zielfunktion folgt

$$Z = 3 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6 \right) + 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 \right),$$

$$Z = \frac{8}{3} - \left( -\frac{7}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 \right).$$

Nach zwei Schritten ergibt sich die optimale Lösung

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0 \quad \text{und} \quad Z = \frac{16}{3}.$$

6. In einer LPG stehen für den Anbau von Mais und Flachs insgesamt 25,2 ha Anbaufläche zur Verfügung. Man kann mit einer Erntemenge von 50 kg auf 90 m<sup>2</sup> bei Mais und auf 300 m<sup>2</sup> bei Flachs rechnen. Die Anbaukosten sind 2 WE für 50 kg Mais und 6 WE für 50 kg Flachs. Sie dürfen 8000 WE nicht überschreiten. Als Mindesterntemengen lt. Plan seien jeweils 30 t festgelegt.

Der Gewinn soll maximiert werden. Wie sind die Anbauflächen zu wählen, wenn der Gewinn pro Tonne Mais 120 WE und pro Tonne Flachs 300 WE beträgt?

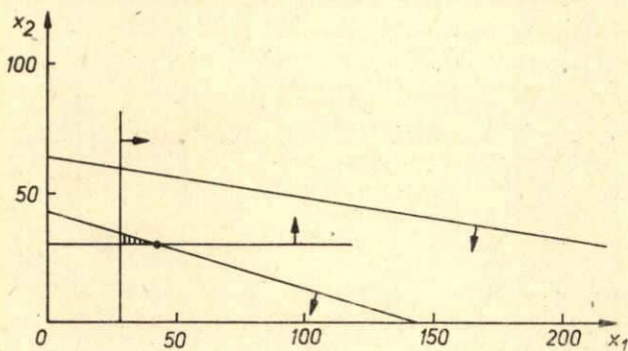
Es ist zuerst das mathematisch-ökonomische Modell aufzustellen und für jede vorkommende Größe die Einheit anzugeben.

Die zur Verfügung stehenden Angaben stimmen in den Einheiten nicht überein und müssen daher z. T. umgerechnet werden. Hier ist eine Umrechnung auf Tonnen und Hektar vorgenommen worden.

	Mais	Flachs
Ertrag in t pro ha	0,18	0,6
Anbaukosten in WE pro ha	40	120

$$\begin{aligned}
 Z &= 120x_1 + 300x_2 \rightarrow \max \\
 0,18x_1 + 0,6x_2 &\leq 25,2 \\
 20x_1 + 120x_2 &\leq 8000 \\
 x_1 &\geq 30 \\
 x_2 &\geq 30 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgendes LO-Modell, wenn mit  $x_j$  die geplante Erntemenge der Fruchtart  $j$  in Tonnen bezeichnet wird.



Es bietet sich die graphische Lösung an. Der Lösungsbereich ist relativ klein, weil zur Erzielung der geforderten Mindestmengen fast die gesamte Anbaufläche benötigt wird. Die Begrenzung der Anbaukosten ist unwirksam. Da der Maisanbau pro Hektar mehr Gewinn abwirft als der Anbau von Flachs, wird Flachs nur in der Mindestmenge angebaut. Die optimale Lösung lautet:

$$x_1 = 40 \text{ t}; \quad x_2 = 30 \text{ t}; \quad Z = 13\,800 \text{ WE}.$$

### 2.3.2. Übungsaufgaben

Es sind folgende LO- Aufgaben mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen:

1.  $Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$3x_1 + x_2 \leq 24$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

2.  $Z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_1 + 5x_3 + x_4 \leq 200$$

$$x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 200$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 150$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4.$$

Bemerkung: Die Gleichungen können nach einer Variablen aufgelöst werden. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung erheblich.

3.  $Z = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2.$$

4.  $Z = 33x_1 + 13x_2 + 18x_3 \rightarrow \max$

$$8x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 32$$

$$12x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 51$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 21$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3.$$

5. Lösen Sie alle Beispiele des Abschnitts 2.2. mit Hilfe der Simplexmethode!

6. Beispiel 6 dieses Abschnitts ist rechnerisch mit der Simplexmethode zu lösen.



7. Ein Maschinenbaubetrieb stellt die Produkte  $P_1$  und  $P_2$  her. Es wird eingeschätzt, daß die Maschinenkapazität in den vier Abteilungen  $A_1$  bis  $A_4$  die Produktionsmengen von  $P_1$  und  $P_2$  begrenzt, während aus der Materialversorgung und den Absatzmöglichkeiten keine Einschränkungen der Produktionsmengen zu erwarten sind. Der Betrieb will das Betriebsergebnis maximieren.

Folgende Angaben stehen für die Ermittlung eines optimalen Produktionsassortiments zur Verfügung:

Die Matrix  $A$  der erforderlichen Bearbeitungszeiten  $a_{ij}$  in Maschinenstunden der Abteilung  $i$  pro Mengeneinheit des Produktes  $j$  [ $h/ME_j$ ]. Der Vektor  $b$  der für die Planperiode verfügbaren Maschinenkapazität in Stunden [ $h$ ], sowie der Vektor  $c$  der Gewinnkoeffizienten in Währungseinheiten pro Mengeneinheit [ $WE/ME_j$ ].

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 8 \\ 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 56\ 000 \\ 48\ 000 \\ 40\ 000 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 34 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Es ist ein LO-Modell aufzustellen, zu lösen und die Lösung zu diskutieren!

8. Für eine ökonomische Aufgabenstellung liegt folgendes mathematisch-ökonomische Modell mit der entsprechenden optimalen Lösung vor:

$$\text{ZF: } Z = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 12x_4 \longrightarrow \max$$

$$\text{NB: } 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 60$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 45$$

$$2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 90$$

$$4x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leq 30$$

$$\text{NNB: } x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\underline{x}_{\text{opt}}^T = (0, 0, 10, 25, 20, 0, 20, 5, 0) \quad Z = 380$$

Für folgende Planvarianten, die sich aus dem Produktionsablauf ergeben haben, sind auf der Grundlage postoptimaler Berechnungen die Optimallösungen zu ermitteln.

8.1. Durch Einsatz einer anderen Technologie wird der Vektor  $\underline{a}_4$  verändert.

$$8.1.1. \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{a}'_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter soll  $\underline{a}_3$  verändert werden.

$$8.1.2. \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{a}'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.2. Der Kapazitätsvektor ändert sich.

$$8.2.1. \quad \underline{b}_1^T = (45, 45, 100, 120, 30)$$

$$8.2.2. \quad \underline{b}_2^T = (60, 60, 90, 100, 30)$$

8.3. Durch Umstrukturierung des Produktionsprozesses ist eine andere Gewinnverteilung an den unterschiedlichen Produkten möglich. Der Zielfunktionsvektor ändert sich wie folgt:

$$8.3.1. \quad \underline{c}_1^T = (6, 9, 9, 12)$$

$$8.3.2. \quad \underline{c}_2^T = (9, 10, 8, 9)$$

8.4. Es wird folgende Kapazitätsbeschränkung durch Aufnahme zusätzlicher Nebenbedingungen vorgenommen:

$$8.4.1. \quad 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 155$$

$$8.4.2. \quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leq 200$$

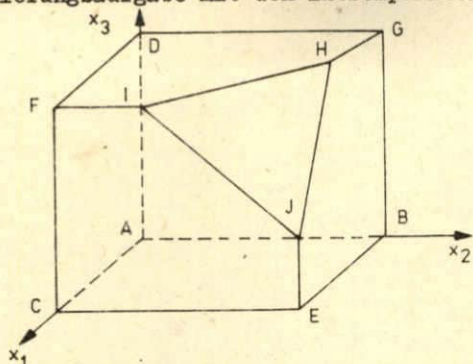
Anmerkungen

A<sub>1</sub>: Die postoptimalen Berechnungen gehen immer von der Grundaufgabe aus.

A<sub>2</sub>: Bei der numerischen Realisierung sind entweder die Rechentableaus für die Grundaufgabe zu verwenden (Rechnung ohne Kleinrechner) oder z. B. auf der Grundlage der revidierten Simplexmethode Kleinrechner zu nutzen.

A<sub>3</sub>: Die Aufgabe 8.4.2. sollte nur mit Kleinrechner gelöst werden.

9. Gegeben sei der dreidimensionale Lösungsraum einer linearen Optimierungsaufgabe mit den Extrempunkten A, B, ..., J.



- A = (0, 0, 0)
- B = (0, 1, 0)
- C = (1, 0, 0)
- D = (0, 0, 1)
- usw.
- J = (1,  $\frac{1}{2}$ , 1)

9.1. Sind die folgenden Paare von Extrempunkten benachbart?

- A, B      B, D      E, H      C, I

9.2. Es sei

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \rightarrow \max$$

$c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  und  $c_3 > 0$ .

Welche(r) Extrempunkt(e) ist (sind) optimal, wenn gilt:

- a)  $c_1 > c_2 > c_3$                       d)  $c_1 = c_2 = c_3$
- b)  $c_2 > c_1 > c_3$                       e)  $c_1 = c_2 < c_3$
- c)  $c_3 > c_2 > c_1$                       f)  $c_1 > c_2 = c_3$

9.3. Stellen Sie das System der Nebenbedingungen der linearen Optimierungsaufgabe als Ungleichungssystem auf!

9.4. Der Lösungsprozeß mit Hilfe der Simplexmethode beginne im Extrempunkt A und ende im Extrempunkt H.

Können dann die Schritte der Simplexmethode über folgende Extrempunkte führen?

- a) A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  G  $\rightarrow$  H
- b) A  $\rightarrow$  F  $\rightarrow$  J  $\rightarrow$  H
- c) A  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  I  $\rightarrow$  H
- d) A  $\rightarrow$  I  $\rightarrow$  H
- e) A  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  G  $\rightarrow$  H
- f) A  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  G  $\rightarrow$  H
- g) A  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  F  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  G  $\rightarrow$  H



## 9.5. Welche Variablen werden beim Übergang

- a)  $A \rightarrow B$ ,
- b)  $E \rightarrow I$ ,
- c)  $F \rightarrow J$ ,
- d)  $D \rightarrow G$

neue Basisvariablen bzw. neue Nichtbasisvariablen?

## 2.4. Dualität

### 2.4.1. Beispiele

Ausgangspunkt der Betrachtungen bei der Dualität wird stets die 2. Normalform sein. Wenn also gefordert ist, zu einer LO-Aufgabe die duale Aufgabe zu formulieren, so ist zuerst die 2. Normalform dieser Aufgabe zu bilden. Dann ist die duale Aufgabe zu formulieren.

1. Vorgelegt seien die LO-Aufgaben

$$\begin{array}{ll} \text{a) } Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \rightarrow \max & \text{b) } Z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10 & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 32 & 2x_1 - x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, \end{array}$$

zu denen jeweils die duale Aufgabe zu bilden ist. Zwei zueinander duale Aufgaben werden unter Zugrundelegung der 2. Normalform wie folgt formuliert:

$$\begin{array}{l} \max \left\{ \underline{c}^T \underline{x} / \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0 \right\} \\ \min \left\{ \underline{b}^T \underline{\hat{x}} / \underline{A}^T \underline{\hat{x}} \geq \underline{c}, \quad \underline{\hat{x}} \geq 0 \right\}. \end{array}$$

Im ersten Schritt werden die Systeme der Nebenbedingungen so umgeformt, daß sie die angegebene Form haben. Dabei werden die Gleichungen durch zwei entgegengesetzte Ungleichungen ersetzt und teilweise Ungleichungen mit  $(-1)$  multipliziert, um das gewünschte Relationszeichen zu erhalten.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \\
 & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 10 \\
 & -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \leq -10 \\
 & -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 32 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3,
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{b)} & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10 \\
 & -x_1 - x_2 + x_3 \geq -1 \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 14 \\
 & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq -14 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.
 \end{array}$$

Nunmehr kann der Übergang zur Dualaufgabe erfolgen.

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \quad \hat{Z} = 18\hat{x}_1 + 10\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 + 32\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 \rightarrow \min \\
 \quad 2\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 - 4\hat{x}_4 - \hat{x}_5 \leq 5 \\
 \quad -\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 + 6\hat{x}_4 + \hat{x}_5 \leq 4 \\
 \quad -\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 + 5\hat{x}_4 - \hat{x}_5 \leq -1 \\
 \quad \hat{x}_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5,
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b)} \quad \hat{Z} = 10\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 14\hat{x}_3 - 14\hat{x}_4 + 6\hat{x}_5 \rightarrow \max \\
 \quad 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 - 2\hat{x}_4 - \hat{x}_5 \leq 3 \\
 \quad 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4 + 2\hat{x}_5 \leq -1 \\
 \quad -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 + \hat{x}_5 \leq 2 \\
 \quad \hat{x}_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5.
 \end{array}$$

In den angegebenen Formulierungen treten nur gleichgerichtete Relationen auf. Durch Multiplikation mit  $(-1)$  kann bei Umkehrung des Relationszeichens erreicht werden, daß im Beschränkungsvektor nur nichtnegative Werte auftreten. Durch die Transformation  $\hat{x}_2^1 = \hat{x}_2 - \hat{x}_3$  bei a) und  $\hat{x}_3^1 = \hat{x}_3 - \hat{x}_4$  bei b) kann die Anzahl der Variablen reduziert werden. Die neue Variable  $\hat{x}_2^1$  bzw.  $\hat{x}_3^1$  ist aber nicht vorzeichenbeschränkt. Die resultierende Formulierung lautet dann:

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \quad \hat{Z} = 18\hat{x}_1 + 10\hat{x}_2^1 + 32\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 \rightarrow \min \\
 \quad 2\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2^1 - 4\hat{x}_4 - \hat{x}_5 \leq 5 \\
 \quad -\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2^1 + 6\hat{x}_4 + \hat{x}_5 \leq 4 \\
 \quad \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2^1 - 5\hat{x}_4 + \hat{x}_5 \leq 1 \\
 \quad \hat{x}_1, \hat{x}_4, \hat{x}_5 \geq 0,
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b)} \quad \hat{Z} = 10\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 14\hat{x}_3^1 + 6\hat{x}_5 \rightarrow \max \\
 \quad 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3^1 - \hat{x}_5 \leq 3 \\
 \quad -2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3^1 + 2\hat{x}_5 \leq 1 \\
 \quad -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3^1 + \hat{x}_5 \leq 2 \\
 \quad \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_5 \geq 0.
 \end{array}$$

2. Zu der LO-Aufgabe

$$\begin{aligned}
 Z &= 80x_1 + 195x_2 + 240x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 330 \\
 x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 420 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

ist die duale Aufgabe zu formulieren und mit Hilfe der Simplex-  
methode zu lösen. Aus dem optimalen Tableau dieser Aufgabe ist  
auch die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe abzuleiten.  
Zuerst ist die duale Aufgabe zu formulieren, wobei hier keine  
Transformationen durchzuführen sind.

$$\begin{aligned}
 \hat{Z} &= 330\hat{x}_1 + 420\hat{x}_2 \rightarrow \max \\
 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 &\leq 80 \\
 \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 &\leq 195 \\
 3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 &\leq 240 \\
 \hat{x}_1, \hat{x}_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Dann ist die 1. Normalform herzustellen und der Lösungsprozeß  
mit der Simplexmethode vorzunehmen.

$$\begin{aligned}
 \hat{Z} &= 330\hat{x}_1 + 420\hat{x}_2 \rightarrow \max \\
 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 &= 80 \\
 \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + \hat{x}_4 &= 195 \\
 3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + \hat{x}_5 &= 240 \\
 \hat{x}_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5
 \end{aligned}$$



	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$x_0$	Q	-†
$\hat{x}_3$	2	1	1	0	0	80	80	-1
$\hat{x}_4$	1	3	0	1	0	195	65	-3
← $\hat{x}_5$	3	(4)	0	0	1	240	60*	*
$\hat{Z}$	-330	-420†	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		420
← $\hat{x}_3$	(5/4)	0	1	0	-1/4	20	16*	*
$\hat{x}_4$	-5/4	0	0	1	-3/4	15	-	5/4
→ $\hat{x}_2$	3/4	1	0	0	1/4	60	80	-3/4
$\hat{Z}$	-15†	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	105	25200		15
→ $\hat{x}_1$	1	0	4/5	0	-1/5	16		
$\hat{x}_4$	0	0	1	1	-1	35		
$\hat{x}_2$	0	1	-3/5	0	2/5	48		
$\hat{Z}$	<u>0</u>	<u>0</u>	12	<u>0</u>	102	25440		

Der Lösungsprozeß führt nach zwei Schritten zu einer eindeutigen optimalen Lösung. Für das gelöste Problem ergibt sich:  $\hat{x}_1 = 16$ ,  $\hat{x}_2 = 48$ ,  $\hat{x}_4 = 35$  und  $\hat{Z} = 25440$ . Die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe ist in der letzten Zeile des Endtableaus, beginnend unter der ersten Zusatzvariablen, also unter  $\hat{x}_3$ , abzulesen.  $x_1 = 12$ ,  $x_3 = 102$ ,  $Z = 25440$ . In der letzten Zeile des Tableaus ist die Lösung des ursprünglichen Problems ebenfalls auf die 1. Normalform

$$\begin{aligned}
 Z &= 80x_1 + 195x_2 + 240x_3 \longrightarrow \min \\
 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 330 \\
 x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_5 &= 420 \\
 x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5
 \end{aligned}$$

bezogen. Die optimale Lösung lautet vollständig:  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 102$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0$  und  $Z = 25440$ . In der 2. Normalform der primalen Aufgabe sind beide Ungleichungen als Gleichungen erfüllt, d. h., die Schlupfvariablen sind gleich Null. Daher sind in der dualen Aufgabe die Problemvariablen  $\hat{x}_1 > 0$  und  $\hat{x}_2 > 0$ . Aus der Bedingung  $\hat{x}_{10} + 3\hat{x}_{20} < 195$  in der optimalen Lösung folgt aus den Dualitätssätzen  $x_2 = 0$  im Primal.

### 3. Die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned}
 Z &= 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geq 32 \\
 x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\geq 20 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 24 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

ist mit der dualen Simplexmethode zu lösen.

Der erste Schritt zur Vorbereitung der Lösung ist der Übergang zur 1. Normalform

$$\begin{aligned}
 Z &= 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 32 \\
 x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 &= 20 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 &= 24 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten im Zielfunktionsvektor nichtnegativ sind, kann man durch eine Transformation leicht eine Lösung finden, die dual zulässig ist und damit einen Startpunkt für den Lösungsprozeß mit Hilfe der dualen Simplexmethode bildet.

$$\begin{aligned}
 Z &= -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \rightarrow \max \\
 -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= -32 \\
 -x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_5 &= -20 \\
 -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 &= -24 \\
 x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6
 \end{aligned}$$

Damit bietet sich für diese Aufgabe die Lösung mit der dualen Simplexmethode an. Die erste dual zulässige Basislösung ergibt sich mit den BV  $x_4$ ,  $x_5$  und  $x_6$ . Hier wird zuerst die aus der Basis ausscheidende Variable nach dem Kriterium  $x_r = \min_i (x_i | x_i < 0)$  gewählt. Das ist im ersten Schritt  $x_4 = -32$ .

Um im Bereich der dual zulässigen Basislösungen zu bleiben, muß die Spalte (NBV, die jeweils zur BV wird) geeignet gewählt werden.



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_0$	$\rightarrow$
$\leftarrow x_4$	-2	-3	$\ominus 4$	1	0	0	$-32^*$	*
$x_5$	-1	-2	-5	0	1	0	-20	5
$x_6$	-2	-1	-2	0	0	1	-24	2
Z	6	5	$4\uparrow$	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	-4
Q	-3	$-5/3$	-1	-	-	-		
$\rightarrow x_3$	1/2	3/4	1	-1/4	0	0	8	1/4
$x_5$	3/2	7/4	0	-5/4	1	0	20	5/4
$\leftarrow x_6$	-1	1/2	0	$\ominus 1/2$	0	1	$-8^*$	*
Z	4	2	<u>0</u>	$1\uparrow$	<u>0</u>	<u>0</u>	-32	
Q	-4	-	-	-2	-	-		
$x_3$	1	1/2	1	0	0	-1/2	12	
$x_5$	4	1/2	0	0	1	-5/2	40	
$\rightarrow x_4$	2	-1	0	1	0	-2	16	
	2	3	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	2	-48	

Um die BV werdende Variable positiv werden zu lassen, muß das Leitelement  $d_{rk} < 0$  sein. Um im Bereich der dual zulässigen Basislösungen zu verbleiben, muß gelten

$$\frac{e_k}{d_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{e_j}{d_{rj}} \mid d_{rj} < 0 \right\}.$$

Die Quotienten berechnet man im Tableau in einer besonderen Zeile Q. Nach zwei Schritten erhält man eine auch primal zulässige und damit optimale Basislösung. Es ist  $x_1 = x_2 = x_6 = 0$ ,  $x_3 = 12$ ,  $x_4 = 16$ ,  $x_5 = 40$ ,  $Z = 48$ . Im Tableau erscheint der Zielfunktionswert mit einem Minuszeichen, weil die Zielfunktion am Anfang des Lösungsprozesses mit  $(-1)$  multipliziert wurde.

4. Gegeben ist die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Es ist die duale Aufgabe zu formulieren und von beiden Aufgaben die 1. Normalform zu bilden. Das Primal ist mit der Simplexmethode und das Dual mit der dualen Simplexmethode zu lösen. Die Ergebnisse sind zu diskutieren.

Das Dual lautet:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \rightarrow \min \\ -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 &\geq 2 \\ \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 &\geq 3 \\ \hat{x}_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Die 1. Normalformen sind Ausgangspunkt der Rechnungen

$$\begin{aligned} Z &\doteq 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max & \hat{Z} &= \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \rightarrow \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 & -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 & \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 - \hat{x}_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 &= 2 & \hat{x}_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5 & \hat{x}_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-†
← $x_3$	-1	①	1	0	0	1	1*	*
$x_4$	-1	2	0	1	0	4	2	-2
$x_5$	1	-4	0	0	1	2	-	4
Z	-2	-3†	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		3
→ $x_2$	-1	1	1	0	0	1	-	1
← $x_4$	①	0	-2	1	0	2	2*	*
$x_5$	-3	0	4	0	1	6	-	3
Z	-5†	<u>0</u>	3	<u>0</u>	<u>0</u>	3		5
$x_2$	0	1	-1	1	0	3		
→ $x_1$	1	0	-2	1	0	2		
$x_5$	0	0	-2	3	1	12		
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	-7	5	<u>0</u>	13		

Der Lösungsprozeß für das Primal bricht nach zwei Schritten ab. Dem negativen Wert in der letzten Zeile entsprechend müßte  $x_3$  im folgenden Schritt BV werden. Da der zu  $x_3$  gehörende Vektor nur nichtpositive Komponenten aufweist, ist es nicht möglich, von diesem Tableau ausgehend, mit Hilfe der Simplexmethode eine weitere

Basislösung zu berechnen. Die Zielfunktion kann auf der Menge der zulässigen Lösungen unbegrenzt wachsen.

Entsprechend müßte sich im Lösungsprozeß des Duals zeigen, daß es nicht möglich ist, zu einer primal zulässigen Lösung zu kommen. Als Ausgangspunkt der Berechnungen muß eine dual zulässige Basislösung gewählt werden, die man leicht durch Multiplikation der Gleichungen der 1. Normalform mit  $(-1)$  erhält. Es lassen sich ebenfalls zwei Schritte ausführen.

BV	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$x_0$	-†
$\hat{x}_4$	1	1	-1	1	0	-2	-1
$\leftarrow \hat{x}_5$	$\ominus 1$	-2	4	0	1	$-3^*$	*
$\hat{z}$	1†	4	2	<u>0</u>	<u>0</u>	0	-1
Q	-1	-2	-	-	-		
$\leftarrow \hat{x}_4$	0	$\ominus 1$	3	1	1	$-5^*$	*
$\rightarrow \hat{x}_1$	1	2	-4	0	-1	3	-2
$\hat{z}$	<u>0</u>	2†	6	<u>0</u>	1	-3	-2
Q	-	-2	-	-	-		
$\rightarrow \hat{x}_2$	0	1	-3	-1	-1	5	
$\hat{x}_1$	1	0	2	2	1	-7	
$\hat{z}$	0	<u>0</u>	12	2	3	-13	

Dann müßte zur Erreichung einer primal zulässigen Basislösung  $x_2$  als BV ausscheiden. Es sind aber alle Elemente der entsprechenden Zeile nichtnegativ, und somit ergibt sich nicht die Möglichkeit, eine primal zulässige Lösung zu erhalten. Im Dual zeigt sich, daß die Menge der primal zulässigen Lösungen leer ist. Beide Tableaus gestatten jeweils die Ablesung der zweiten Aufgabe.

## 2.4.2. Übungsaufgaben

1. Formulieren Sie zu den beiden folgenden Aufgaben die dualen Aufgaben:

$$\begin{aligned} \text{a) } Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max \\ 10x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 57 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= 13 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Z &= 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\geq 18 \\ x_2 - x_3 &\geq 1 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2. Lösen Sie unter Verwendung des Dualproblems bzw. der dualen Simplexmethode folgende Aufgaben:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min & \text{b) } Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12 & x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } Z &= 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 3x_2 &\geq 27 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 28 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4. \end{aligned}$$

3. Bilden Sie zu allen Beispielen des Abschnitts 2.2. die duale Aufgabe, und lösen Sie die Beispiele rechnerisch!

## 2.5. Parametrische Optimierung

### 2.5.1. Beispiele

Es werden lediglich spezielle Aufgaben der einparametrischen linearen Optimierung betrachtet.



1. Für das Intervall  $(-\infty < t < +\infty)$  sollen die Lösungen der einparametrischen linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} Z &= (2 + t) x_1 + (3 - t) x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 9 \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

gefunden werden, in der die Zielfunktion linear vom Parameter  $t$  abhängig ist.

Bei der Lösung ist im Unterschied zu nichtparametrischen Aufgaben zusätzlich für jede zulässige Basislösung das Intervall von  $t$  zu finden, für das diese Lösung optimal ist (charakteristischer Bereich). Die Grenzen des charakteristischen Bereiches werden durch die charakteristischen Punkte gebildet.

Bei der vorgelegten Aufgabe läßt sich ohne weiteres eine erste zulässige Basislösung finden, nachdem sie in die 1. Normalform überführt wurde.

$$\begin{aligned} Z &= (2 + t) x_1 + (3 - t) x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 9 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

$\underline{x}_1^T = (0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 9)$  ist die erste zulässige Basislösung, die optimal ist, wenn das Optimalitätskriterium erfüllt ist, d. h., wenn gilt (1)  $-2 - t \geq 0$ , (2)  $-3 + t \geq 0$ .

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-t
$\leftarrow x_3$	-1	(2)	1	0	0	4	2*	*
$x_4$	1	1	0	1	0	5	5	-1
$x_5$	2	-1	0	0	1	9	-	1
Z	-2-t	-3+t	0	0	0	0		3-t
$\rightarrow x_2$	-1/2	1	1/2	0	0	2	-	1/2
$\leftarrow x_4$	(3/2)	0	-1/2	1	0	3	2*	*
$x_5$	3/2	0	1/2	0	1	11	22/3	-3/2
Z	$-\frac{7}{2} - \frac{t}{2}$	0	$\frac{3}{2} - \frac{t}{2}$	0	0	6-2t		$\frac{7}{2} + \frac{t}{2}$

Es folgt für (1)  $t \leq -2$  und für (2)  $t \geq 3$ . Der Lösungsbereich für das Ungleichungssystem (1) - (2) ist also die leere Menge  $\emptyset$ .

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-t
$x_2$	0	1	1/3	1/3	0	3	9	-1/3
$x_1$	1	0	-1/3	2/3	0	2	-	1/3
$\rightarrow x_5$	0	0	①	-1	1	8	$8^*$	*
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	1/3-2t/3†	7/3+t/3	<u>0</u>	13-t		-1/3+2t/3
$\rightarrow x_2$	0	1	0	②/3	-1/3	1/3	$1^*$	*
$x_1$	1	0	0	1/3	1/3	14/3	13	-1/3
$\rightarrow x_3$	0	0	1	-1	1	8	-	1
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	8/3-t/3†	-1/3+2t/3	31/3+13t/3		-8/3+t/3
$\rightarrow x_4$	0	3/2	0	1	-1/2	1/2		
$x_1$	1	-1/2	0	0	1/2	9/2		
$x_3$	0	3/2	1	0	1/2	17/2		
Z	<u>0</u>	-4+t/2	<u>0</u>	<u>0</u>	1+t/2	$9 + \frac{9}{2}t$		

Wenn man für t einen kleinen Wert annimmt, muß  $x_2$  BV werden. Die resultierende Basislösung ist optimal für  $-7/2 - t/2 \geq 0$

$$3/2 - t/2 \geq 0,$$

d. h. für  $t \in (-\infty, -7]$ .

Läßt man t wachsen, so entspricht die NBV  $x_1$  nicht mehr dem Kriterium und muß BV werden. Die sich dann ergebende Basislösung mit den BV  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_5$  ist für  $1/3 - 2t/3 \geq 0$ ,  $7/3 + t/3 \geq 0$ , also für  $t \in [-7, 1/2]$  optimal.

Für größere Werte ist  $x_3$  zur BV zu tauschen. Die folgende Basislösung ist für  $8/3 - t/3 \geq 0$ ,  $-1/3 + 2t/3 \geq 0$ , also für  $t \in [1/2, 8]$  optimal.

Nimmt man  $t \geq 8$ , so muß  $x_4$  BV werden, und  $x_2$  wird NBV. Das Ungleichungssystem  $-4 + t/2 \geq 0$ ,  $1 + t/2 \geq 0$  gilt für  $t \in [8, +\infty)$ . Damit ist das gesamte Intervall untersucht. Die charakteristischen Werte sind -7, 1/2 und 8. Die Lösungen für die charakteristischen Intervalle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.



	$-\infty < t \leq -7$	$-7 \leq t \leq 1/2$	$1/2 \leq t \leq 8$	$8 \leq t < +\infty$
$x_1$	0	2	$13/3$	4
$x_2$	2	3	$2/3$	0
$x_3$	0	0	8	9
$x_4$	3	0	0	1
$x_5$	11	8	0	0
Z	$6 - 2t$	$13 - t$	$32/3 + 11t/3$	$8 + 4t$

Ist die Abhängigkeit von einem Parameter nicht für den Zielfunktionsvektor  $\underline{c}$ , sondern für den Ressourcenvektor  $\underline{b}$  gegeben, so kann man diese Aufgabe entweder direkt mit Hilfe der dualen Simplexmethode lösen oder durch Bildung der dualen Aufgabe auf den vorigen Fall - Parameterabhängigkeit im Zielfunktionsvektor  $\underline{c}$  - zurückführen.

2. Es werde am Beispiel der Aufgabe

$$\begin{aligned}
 Z &= 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max \\
 -x_1 + x_2 &\leq 4 + 2t \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 20 + t \\
 2x_1 + x_2 &\leq 28 - 3t \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

für  $-2 \leq t \leq 28/3$  die Lösung mit Hilfe der dualen Simplexmethode dargestellt. Zuerst wird die Aufgabe in die 1. Normalform überführt und dann für  $t = -2$  die optimale Lösung mit Hilfe der Simplexmethode ermittelt.



BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$	Q	-↑
← $x_3$	-1	①	1	0	0	$4 + 2t$	$4 + 2t^*$	*
$x_4$	1	2	0	1	0	$20 + t$	$10 + t/2$	-2
$x_5$	2	1	0	0	1	$28 - 3t$	$28 - 3t$	-1
Z	-3	-8↑	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		8
→ $x_2$	-1	1	1	0	0	$4 + 2t$	-	1
← $x_4$	③	0	-2	1	0	$12 - 3t$	$4 - t^*$	*
$x_5$	3	0	-1	0	1	$24 - 5t$	$6 - 5t/3$	-3
Z	-11↑	<u>0</u>	8	<u>0</u>	<u>0</u>	$32 + 16t$		11
$x_2$	0	1	$1/3$	$1/3$	0	$8 + t$	-	-1/3
→ $x_1$	1	0	②-2/3	$1/3$	0	$4 - t$	$-6 + 3t/2^*$	*
$x_5$	0	0	1	-1	1	$12 - 2t$	-	-1
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	$2/3↑$	$11/3$	<u>0</u>	$76 + 5t$		-2/3
Q	-	-	-1	-	-			
$x_2$	$1/2$	1	0	$1/2$	0	$10 + t/2$	-	-1/2
→ $x_3$	-3/2	0	1	-1/2	0	$-6 + 3t/2$	$12 - 3t$	1/2
← $x_5$	$3/2$	0	0	④-1/2	1	$18 - 7t/2$	$-36 + 7t^*$	*
Z	1	<u>0</u>	<u>0</u>	4↑	<u>0</u>	$80 + 4t$		-4
Q	-	-	-	-2	-	-		
$x_2$	2	1	0	0	1	$28 - 3t$		
$x_3$	-3	0	1	0	-1	$-24 + 5t$		
→ $x_4$	-3	0	0	1	-2	$-36 + 7t$		
Z	13	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	8	$224 - 24t$		

Nach zwei Simplexschritten ergibt sich die optimale Lösung. Der Bereich der primalen Zulässigkeit wird durch das Ungleichungssystem

$$8 + t \geq 0$$

$$4 - t \geq 0$$

$$12 - 2t \geq 0$$

bestimmt. Die Lösung ergibt  $t \in [-8; 4]$ . Für  $t > 4$  muß  $x_1$  NBV werden und durch  $x_3$  als BV ersetzt werden. Bei der dualen Simplexmethode muß die duale Zulässigkeit erhalten bleiben, und es werden die entsprechenden Quotienten gebildet.

Die primale Zulässigkeit der dann ermittelten Basislösung ist durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 10 + t/2 &\geq 0 \\ -6 + 3t/2 &\geq 0 \\ 18 - 7t/2 &\geq 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Die Lösung ergibt  $t \in [4; 36/7]$ . Für  $t > 36/7$  wird die BV  $x_5$  durch  $x_4$  ersetzt. Die anschließend berechnete Basislösung ist primal zulässig, wenn

$$\begin{aligned} 28 - 3t &\geq 0 \\ -24 + 5t &\geq 0 \\ -36 + 7t &\geq 0 \end{aligned}$$

ist. Das gilt für  $t \in [36/7; 28/3]$ . Damit ist das gesamte zu untersuchende Intervall für  $t$  überdeckt. Die Lösungen werden in einer Tabelle zusammengestellt:

	$-2 \leq t \leq 4$	$4 \leq t \leq 36/7$	$36/7 \leq t \leq 28/3$
$x_1$	$4 - t$	0	0
$x_2$	$8 + t$	$10 + t/2$	$28 - 3t$
$x_3$	0	$-6 + 3t/2$	$-24 + 5t$
$x_4$	0	0	$-36 + 7t$
$x_5$	$12 - 2t$	$18 - 7t/2$	0
Z	$76 + 5t$	$80 + 4t$	$224 - 24t$

### 2.5.2. Übungsaufgaben

1. Es ist die parametrische LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + (3 + t)x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 7 \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

für  $-\infty < t < +\infty$  zu lösen!

2. Es ist die parametrische LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 7x_1 + 4x_2 &\leq 28 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 30 - t \\ x_1 - x_2 &\leq 3 + t \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

für  $-3 \leq t \leq 30$  zu lösen!



## 2.6. Transportprobleme

Die Aufgaben sind aus didaktisch-methodischen Gründen so formuliert, daß die Lösung von Hand zumutbar ist. Da praktische Aufgaben wegen ihrer Dimension nur mit Hilfe von Rechentechnik gelöst werden können, ist es anzuraten, bei der Lösung der Aufgaben Kleinrechner zusätzlich zu nutzen.

### 2.6.1. Beispiele

1. Auf drei Güterbahnhöfen der Deutschen Reichsbahn stehen leere Güterwagen gleichen Typs, die auf vier anderen Güterbahnhöfen zur Beladung benötigt werden. Die Standorte und die Anzahl der dort zur Verfügung stehenden bzw. benötigten Güterwagen sind bekannt. (ME bedeutet Mengeneinheiten.)

Abgebende Güterbahnhöfe:  $A_1$ : 3 [ME];  $A_2$ : 18 [ME];  $A_3$ : 9 [ME]

Beziehende Bahnhöfe:  $B_1$ : 6 [ME];  $B_2$ : 8 [ME];  $B_3$ : 5 [ME];  
 $B_4$ : 11 [ME]

Die Güterwagen sind von den Güterbahnhöfen  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) unter geringstem Kostenaufwand zu den Güterbahnhöfen  $B_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) zu bringen. Dabei werden die Kosten für den Transport eines Güterwagens von  $A_i$  nach  $B_j$  den Entfernungen proportional angenommen und in  $\frac{\text{Geldeinheiten}}{\text{Mengeneinheiten}}$   $\left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}}\right]$  ausgedrückt. Diese Werte sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	12	10	8	11
$A_2$	12	10	14	14
$A_3$	8	8	11	13

(Transportkostentabelle)

$c_{ij}$   $i = 1, 2, 3$   
 $j = 1, 2, 3, 4$

Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

Lösung:

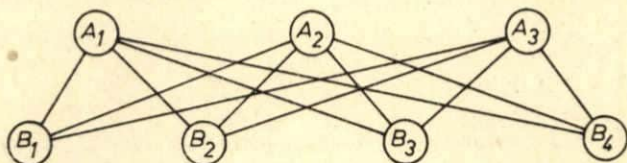
Entscheidungsvariable sind die Transportmengen von  $A_i$  nach  $B_j$ . Sie werden mit  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$ ) bezeichnet. Die Variablen lassen sich übersichtlich in einer Tabelle darstellen:



	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>13</sub>	x <sub>14</sub>
A <sub>2</sub>	x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	x <sub>23</sub>	x <sub>24</sub>
A <sub>3</sub>	x <sub>31</sub>	x <sub>32</sub>	x <sub>33</sub>	x <sub>34</sub>

(Transportmengentabelle)

Die Transportbeziehungen lassen sich in einer Skizze schematisch darstellen. Man erhält dadurch eine bessere Übersicht beim Aufstellen der Beziehungen für das mathematisch-ökonomische Modell.



Nebenbedingungen - Aufkommen:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 3$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 18$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 9$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, 3$$

Nebenbedingungen - Bedarf:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 11$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen lauten:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Abschließend die Zielfunktion:  $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

$$Z = 12x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 11x_{14} + 12x_{21} + 10x_{22} + 14x_{23} + 14x_{24} + 8x_{31} + 8x_{32} + 11x_{33} + 13x_{34} \rightarrow \min.$$

2. Drei Betriebe  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) stellen ein gleichartiges (homogenes) Gut in folgenden Mengeneinheiten her:

$$B_1: 23 \text{ [ME]}; \quad B_2: 13 \text{ [ME]}; \quad B_3: 10 \text{ [ME]} .$$

Die Produkte sind zu vier Endverbrauchern  $E_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) mit folgendem Bedarf zu transportieren:

$$E_1: 12 \text{ [ME]}; \quad E_2: 9 \text{ [ME]}; \quad E_3: 12 \text{ [ME]}; \quad E_4: 8 \text{ [ME]} .$$

Die Transportkosten sind in folgender Matrix gegeben:  $\begin{bmatrix} \text{GE} \\ \text{ME} \end{bmatrix}$

$$\frac{\text{G}}{\text{BE}} = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 10 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Da Angebot und Nachfrage nicht übereinstimmen, wird angenommen, daß in allen Betrieben Lagerungsmöglichkeiten für die nicht benötigten Produkte vorhanden sind bzw. in diesen Betrieben die Produktion entsprechend reduziert werden kann. Hierdurch entstehen keine zusätzlichen Kosten. Die Summe der Transportkosten ist zu minimieren.

### Lösung:

NB: Aufkommen

Bedarf:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 23$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 13$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 10$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8$$

Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt, da:

$$\sum_{i=1}^3 a_i > \sum_{j=1}^4 b_j$$

NNB:  $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$

ZF:  $Z = 14x_{11} + 12x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 5x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min$

Es handelt sich um eine offene Transportaufgabe, die durch Einfügen eines fiktiven Verbrauchers  $E_f$  mit den dazugehörigen fiktiven Transportmengen  $x_{if}$  in eine geschlossene Transportaufgabe überführt werden kann.



$$\begin{aligned}
 \text{NB: } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1f} = 23 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{2f} = 13 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{3f} = 10 \\
 & \quad \quad \quad x_{1f} + x_{2f} + x_{3f} = 5
 \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

erfüllt.

Das mathematisch-ökonomische Modell läßt sich auch schematisch in einer Tabelle angeben:

	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>f</sub>	a <sub>i</sub>
B <sub>1</sub>	14 x <sub>11</sub>	12 x <sub>12</sub>	10 x <sub>13</sub>	7 x <sub>14</sub>	0 x <sub>1f</sub>	23
B <sub>2</sub>	5 x <sub>21</sub>	8 x <sub>22</sub>	6 x <sub>23</sub>	3 x <sub>24</sub>	0 x <sub>2f</sub>	13
B <sub>3</sub>	10 x <sub>31</sub>	6 x <sub>32</sub>	5 x <sub>33</sub>	4 x <sub>34</sub>	0 x <sub>3f</sub>	10
b <sub>j</sub>	12	9	12	8	5	46

Die Kosten für den fiktiven Verbraucher sind mit Null anzusetzen, da die entsprechenden Mengen nicht transportiert werden. Dieses Tableau stellt gleichzeitig den Ausgangspunkt für die numerische Lösung der Transportaufgabe dar.

3. Die Produzenten (P<sub>i</sub>) erzeugen das gleiche Produkt, das zu vier Verbrauchern (V<sub>j</sub>) transportiert werden soll. Die Produzenten produzieren folgende Mengen (a<sub>i</sub>):

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>
a <sub>i</sub>	40	45	50

und die Verbraucher benötigen folgende Mengen (b<sub>j</sub>):

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>
b <sub>j</sub>	22	33	44	36



Die Transportkosten je Mengeneinheit auf der Transportstrecke  $P_i V_j$  sind  $c_{ij}$  und folgender Tabelle zu entnehmen:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$P_1$	8	3	3	4
$P_2$	6	7	5	8
$P_3$	1	8	10	2

Die insgesamt auftretenden Transportkosten sind zu minimieren. Folgende Aufgaben sind zu lösen:

- Stellen Sie das mathematisch-ökonomische Modell auf!
- Bestimmen Sie eine zulässige Basislösung mit Hilfe der Vogel-schen Approximationsmethode!
- Bestimmen Sie den optimalen Transportplan und die dabei entstehenden Transportkosten!

Lösung:

- Es handelt sich um eine geschlossene Transportaufgabe ohne Zusatzbedingungen, so daß das mathematisch-ökonomische Modell direkt aus der Aufgabenstellung abgeleitet werden kann.

$$\text{ZF: } Z = 8x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + x_{31} + 8x_{32} + 10x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{l} \text{NB: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40 \\ \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 \\ \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 33 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 44 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 36 \end{array}$$

$$\text{NNB: } x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Als Transporttableau erhält man:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$
$P_1$	8	3	3	4	46
	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	
$P_2$	6	7	5	8	45
	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	
$P_3$	1	8	10	2	50
	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	$x_{34}$	
$b_j$	22	33	44	36	135

b) Das zuletzt dargestellte Tableau ist der Ausgangspunkt für die Ermittlung einer zulässigen Basislösung. Die Ermittlung einer ersten zulässigen Basislösung nach der Vogelschen Approximationsmethode kann wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Berechnung der Differenzen zwischen den beiden niedrigsten Transportkostensätzen für sämtliche Reihen (Zeilen und Spalten).
2. Ermittlung der Reihe, in der die größte Differenz auftritt.
3. In der ausgewählten Reihe ist das Feld mit den geringsten Transportkosten mit der größtmöglichen Transportmenge zu belegen.

Da die Auswahl der Reihe unter 2. nicht eindeutig zu sein braucht, braucht auch die ermittelte zulässige Basislösung nicht eindeutig zu sein.

Zunächst bilden wir die Zeilen- und Spaltendifferenzen.

$$\begin{array}{ll}
 P_1: c_{12} - c_{13} = 3 - 3 = 0 & V_1: c_{21} - c_{31} = 6 - 1 = 5 \\
 P_2: c_{21} - c_{23} = 6 - 5 = 1 & V_2: c_{22} - c_{12} = 7 - 3 = 4 \\
 P_3: c_{34} - c_{31} = 2 - 1 = 1 & V_3: c_{23} - c_{13} = 5 - 3 = 2 \\
 & V_4: c_{14} - c_{34} = 4 - 2 = 2
 \end{array}$$

Die Ergebnisse werden in das Tableau eingetragen.

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$	Zeilendifferenzen
$P_1$	8	3	3	4	40	0
$P_2$	6	7	5	8	45	1
$P_3$	1	8	10	2	50	1
$b_j$	22	33	44	36	135	
	5	4	2	2		Spaltendifferenzen

Die größte Differenz tritt in der ersten Spalte mit 5 auf.

Das Feld mit den geringsten Transportkosten ist  $P_3V_1$ .

Dann ist

$$x_{31} = \min(a_3, b_1) = \min(50, 22) = 22.$$



Es folgt das neue Tableau, bei welchem die Kapazität von  $V_1$  bereits ausgelastet ist, was durch Striche in den Feldern  $P_1V_1$  und  $P_2V_1$  zum Ausdruck kommt.

Für das reduzierte Tableau sind die Differenzen neu zu berechnen, wobei die Spaltendifferenzen erhalten bleiben.

$$\begin{aligned} c_{12} - c_{13} &= 3 - 3 = 0 \\ c_{21} - c_{23} &= 7 - 5 = 2 \\ c_{32} - c_{34} &= 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

Diese Differenzen werden in das Tableau eingetragen.

Die größte Differenz ist in der dritten Zeile mit "6". Das Feld mit den kleinsten Kosten ist  $P_3V_4$  mit

$c_{34} = 2$ . Dieses Feld kann mit

$$x_{34} = \min(50 - 22, 36) = 28 \text{ belegt werden.}$$

Es folgt nebenstehendes Tableau:

In den weiteren Schritten ergeben sich die folgenden Tableaus:

Hier wurde in den Spalten  $V_2$  und  $V_4$  bei gleichen Differenzen die Spalte  $V_2$  ausgewählt, weil das Feld mit den geringsten Kosten hier einen kleineren Wert aufweist.

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$	
$P_1$	<u>8</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	40	0
$P_2$	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>5</u>	<u>8</u>	45	1
$P_3$	<u>1</u>	<u>8</u>	<u>10</u>	<u>2</u>	50	1
$b_j$	22	33	44	36	135	
	<del>8</del>	4	2	2		

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$	
$P_1$	<u>8</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	40	0
$P_2$	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>5</u>	<u>8</u>	45	1,2
$P_3$	<u>1</u>	<u>8</u>	<u>10</u>	<u>2</u>	50	1,6
$b_j$	22	33	55	36	135	
	<del>8</del>	4	2	2		

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$	
$P_1$	<u>8</u>	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	40	0
$P_2$	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>5</u>	<u>8</u>	45	1,2
$P_3$	<u>1</u>	<u>8</u>	<u>10</u>	<u>2</u>	50	1,6
$b_j$	22	33	44	36	135	
	<del>8</del>	<del>4</del>	2	2,4		



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$a_i$	
$P_1$	8	3	3	4	40	0,1
	-	(33)		(7)		
$P_2$	6	7	5	8	45	1,2,3
	-	-	-	-		
$P_3$	1	8	10	2	50	1,6
	(22)	-	-	(28)		
$b_j$	22	33	44	36	135	
	8	4	-2	2,4		

Jetzt können die restlichen Kapazitäten aufgeteilt werden, und wir erhalten die zulässige Basislösung:

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$a_i$
$P_1$	8	3	3	4	40
		(33)		(7)	
$P_2$	6	7	5	8	45
			(44)	(1)	
$P_3$	1	8	10	2	50
	(22)			(28)	
$b_j$	22	33	44	36	135

Der dazugehörige Zielfunktionswert lautet:

$$Z_1 = 33 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 44 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 22 \cdot 1 + 28 \cdot 2 = 433.$$

c) Die Optimalität wird mit Hilfe der modifizierten Distributionsmethode untersucht. Es gilt für die Basisvariablen:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Wir erhalten:

$$u_1 + v_2 = 3$$

$$u_1 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 5$$

$$u_2 + v_4 = 8$$

$$u_3 + v_1 = 1$$

$$u_3 + v_4 = 2$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes inhomogenes lineares Gleichungssystem mit einem Freiheitsgrad.

Wir wählen  $u_1 = 0$  und erhalten:

$$v_2 = 3, \quad v_4 = 4, \quad u_2 = 4, \quad v_3 = 1, \quad u_3 = -2, \quad v_1 = 3.$$

Für die Nichtbasisvariablen gelten die Bewertungen:

$$c'_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} .$$

Gilt für alle

$$c'_{ij} \leq 0 ,$$

so ist die Lösung optimal.

$c'_{ij} > 0$  für mindestens ein Element bedeutet, daß die Lösung noch nicht optimal ist.

Berechnung der  $c'_{ij}$ :

$$c'_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 3 - 8 = -5$$

$$c'_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 3 = -2$$

$$c'_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 4 + 3 - 6 = +1$$

$$c'_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 4 + 3 - 7 = 0$$

$$c'_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 3 - 8 = -7$$

$$c'_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 1 - 10 = -11$$

Das vollständige Tableau hat damit folgendes Aussehen:

Da  $c'_{21}$  die Optimalitätsbedingungen nicht erfüllt, ist die Aufgabe noch nicht optimal.

	$v_j$	3	3	1	4	
$u_i$		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$a_i$
0	$P_1$	8	3	3	4	40
4	$P_2$	6	7	5	8	45
-2	$P_3$	1	8	10	2	50
	$b_j$	22	33	44	36	135

Der notwendige Austauschzyklus lautet:

$\Delta$  ist maximal zu wählen; es darf nur so groß sein, daß die Bedingung  $x_{ij} \geq 0$  erhalten bleibt.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$a_i$
$P_1$					40
$P_2$	$\Delta^+$			$1-\Delta^-$	45
$P_3$	$22-\Delta^-$			$28+\Delta^+$	50
$b_j$	22	33	44	36	135



$P_2V_4$  ist das entscheidende Feld. Daraus folgt  $\Delta = 1$ . Der Umsetzungszyklus lautet:

$P_2V_1^+$ ;  $P_2V_4^-$ ;  $P_3V_4^+$ ;  $P_3V_1^-$ .

Das neue Tableau lautet:

	$v_j$	3	3	2	4	
$u_i$		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$
0	$P_1$	8	3	3	3	40
		-5	(33)	-1	(7)	
3	$P_2$	6	7	5	8	45
		(1)	-1	(44)	-1	
-2	$P_3$	1	8	10	2	50
		(21)	-7	-10	(29)	
	$b_j$	22	33	44	36	135

Berechnung des Zielfunktionswertes:

$$Z_2 = Z_1 - c_{21}^1 \cdot \Delta = 433 - 1 = 432 Z_{\text{opt}}$$

Es handelt sich um die optimale Lösung. Der optimale Transportplan hat folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{ll} P_1 \rightarrow V_2: x_{12} = 33 & P_2 \rightarrow V_3: x_{23} = 44 \\ P_1 \rightarrow V_4: x_{14} = 7 & P_3 \rightarrow V_1: x_{31} = 21 \\ P_2 \rightarrow V_1: x_{21} = 1 & P_3 \rightarrow V_4: x_{34} = 29. \end{array}$$

Es entstehen 432 [GE] Transportkosten.

4. Drei Produzenten ( $P_1$ ), die gleiche Produkte herstellen, haben fünf Verbraucher ( $V_j$ ), die je 20 [ME] benötigen, zu beliefern. Die Kapazitäten der Produzenten und die Transportkosten je ME sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$a_i$
$P_1$	6	7	3	10	2	36
$P_2$	3	9	6	8	1	33
$P_3$	4	13	8	7	3	31

Zur Zeit werden die Transporte nach folgendem Plan durchgeführt:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$
$P_1$		(9)	(20)		(7)
$P_2$	(20)				(13)
$P_3$		(11)		(20)	



- a) Berechnen Sie nach dem vorgegebenen Transportplan die Transportkosten!
- b) Stellen Sie fest, ob dieser Transportplan optimal ist!
- c) Sollte das nicht der Fall sein, so ermitteln Sie ein optimales Transportprogramm!

Lösung:

- a) Berechnung der Transportkosten

$$K = 7 \cdot 9 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 13 + 13 \cdot 11 + 7 \cdot 20 = 493$$

- b) Die Anwendung des Optimalitätskriteriums zeigt, daß es sich bei dem vorgelegten Plan um eine zulässige Basislösung handelt. Diese lautet, in Tableauform geschrieben:

	$v_j$	4	7	3	1	2	
$u_i$		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$a_i$
0	$P_1$	6	7	3	10	2	36
		-2	(9)	(20)	-9	(7)	
-1	$P_2$	3	9	6	8	1	33
		(20)	-3	-4	-8	(13)	
6	$P_3$	4	13	8	7	3	31
		+6	(11)	+1	(20)	+5	
	$b_j$	20	20	20	20	20	100

$Z_1 = 493.$

Da es  $c_{ij} > 0$  gibt, handelt es sich nicht um die optimale Lösung.

- c) Ausgehend von dem Tableau unter b), folgen die Verbesserungsschritte:

1. Schritt

	$v_j$	-2	7	3	1	-4	
$u_i$		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$a_i$
0	$P_1$	6	7	3	10	2	36
		-8	(16)	(20)	-9	-6	
5	$P_2$	3	9	6	8	1	33
		(13)	+3	+2	-2	(20)	
6	$P_3$	4	13	8	7	3	31
		(7)	(4)	+1	(20)		
	$b_j$	20	20	20	20	20	100

$$Z_2 = Z_1 - 6 \cdot 7 = 493 - 42 = 451$$

2. Schritt:

$v_j$	1	7	3	4	-1	
$u_i$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$a_i$
0 $P_1$	6 -5	7 16	3 20	10 -6	2 -3	36
2 $P_2$	3 9	9 4	6 -1	8 -2	1 20	33
3 $P_3$	4 11	13 -3	8 -2	7 20	3 -1	31
$b_i$	20	20	20	20	20	100

$$Z_3 = Z_2 - 3 \cdot 4 = 451 - 12 = 439 = Z_{\text{opt}}.$$

Die Optimallösung ergibt folgende Transportzuordnung:

$$\begin{aligned} x_{12} &= 16; & x_{21} &= 9; & x_{25} &= 20; & x_{34} &= 20 \\ x_{13} &= 20; & x_{22} &= 4; & x_{31} &= 11 & & \text{[ME]}. \end{aligned}$$

Es fallen 439 [GE] Transportkosten an, die Einsparung beträgt 54 [GE].

5. Vier Anlieferungsstellen  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) haben vier Bedarfsstellen  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 4$ ) mit gleichen Erzeugnissen zu beliefern. Die Kapazitäten  $A_i$  sind in Tonnen angegeben.

$A_1$ : 40;  $A_2$ : 50;  $A_3$ : 60;  $A_4$ : 70. Die Bedarfsträger benötigen je 50 Tonnen. Die Entfernungen [km] von  $A_i$  nach  $B_k$  sind folgender Tabelle zu entnehmen.

Für welchen Transportplan ist die Transportleistung minimal?

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	8	9	2	4
$A_2$	6	9	10	6
$A_3$	9	8	6	7
$A_4$	2	3	7	1

Lösung:

Aus den Zahlen der Aufgabe ergibt sich, daß es sich um ein offenes Transportproblem handelt,

das durch Einführung eines fiktiven Bedarfsträgers  $B_f$  in ein geschlossenes Transportproblem verwandelt werden kann.

Es wird mit Hilfe der Vogelschen Approximationsmethode eine erste zulässige Basislösung ermittelt. In der Spalte bzw. Zeile der Differenzen sind nacheinander die Differenzen bei der etappenweisen Ermittlung dieser ersten zulässigen Basislösung aufgeführt. Das Ausgangstableau lautet:



	$v_j$	6	7	2	3	0		
$u_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_f$	$a_i$	
0	$A_1$	8 -2	9 -2	2 40	4 -1	0 0	40	2
0	$A_2$	6 30	8 -1	10 -8	6 -3	0 20	50	6,0
4	$A_3$	9 +1	8 +3	6 10	7 50	0 +4	60	6,1,2
-4	$A_4$	2 20	3 50	7 -9	1 0	0 -1	70	1
	$b_j$	50	50	50	50	20	220	
		4,2,3	5,0	4	3,2,1	0		

Die erste zulässige Basislösung ist degeneriert. Um die modifizierte Distributionsmethode anwenden zu können, muß eine Basisvariable mit dem Wert Null eingeführt werden.

Man erhält die Optimallösung:

	$v_j$	2	4	2	2	4		
$u_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_f$	$a_i$	
0	$A_1$	8 -6	9 -5	2 40	4 -2	0 -4	40	
4	$A_2$	6 50	8 0	10 -4	6 0	0 0	50	
4	$A_3$	9 -3	8 30	6 10	7 -1	0 20	60	
-1	$A_4$	2 -1	3 20	7 -6	1 50	0 -5	70	
	$b_j$	50	50	50	50	20	220	

Bei der optimalen Lösung liegt ebenfalls Degeneration vor. Die Bewertungszahlen  $c'_{22} = 0$  und  $c'_{24} = 0$  besagen, daß es weitere optimale zulässige Basislösungen mit dem Zielfunktionswert  $Z_{opt} = 790$  [km] gibt. Die Lösung lautet

$$x_{13} = 40; \quad x_{21} = 50; \quad x_{32} = 30; \quad x_{33} = 10; \quad x_{42} = 20; \quad x_{44} = 50$$



sowie  $x_{3f} = 20$  (bei  $A_3$  werden 20 Tonnen nicht abtransportiert).

6. Ein Betrieb ist durch vorhandene freie Kapazitäten in der Lage, ein Produkt zusätzlich in den Produktionsplan aufzunehmen. Für dieses Produkt besteht in den einzelnen Quartalen folgender Bedarf:

1. Quartal 4000 [ME]                      3. Quartal: 3000 [ME]  
2. Quartal 5000 [ME]                    4. Quartal: 2000 [ME]

Zur Herstellung dieses Produktes kann der Betrieb zwei Maschinentypen  $M_1$  und  $M_2$  einsetzen, die mit unterschiedlichem Kostenaufwand arbeiten. Die freien Kapazitäten für die einzelnen Quartale und die Kosten sind in den folgenden Tabellen angegeben.

[ME]	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>
$M_1$	2000	5000	4000	1000
$M_2$	3000	2000	1000	1000

[GE/ME]	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>
$M_1$	3	1	2	4
$M_2$	2	1	4	5

Es besteht die Möglichkeit, im voraus für die nachfolgenden Quartale zu produzieren. Dabei entstehen Lagerhaltungskosten von 1 [GE] pro [ME] und [Quartal]. Es soll aus betrieblichen Gründen ausgeschlossen werden, daß im 2. Quartal eine Produktion für das 4. Quartal erfolgt.

- a) Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell in Tableauform!  
b) Geben Sie für die Aufgabe eine numerische Lösung an!

Lösung:

- a) Formulierung des allgemeinen Modells:

		Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	Q <sub>f</sub>	a <sub>i</sub>
Q <sub>1</sub>	M <sub>1</sub>	$\begin{matrix} c_{11}^1 \\ x_{11}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{12}^1 \\ x_{12}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{13}^1 \\ x_{13}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{14}^1 \\ x_{14}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{1f}^1 \\ x_{1f}^1 \end{matrix}$	a <sub>1</sub> <sup>1</sup>
	M <sub>2</sub>	$\begin{matrix} c_{11}^2 \\ x_{11}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{12}^2 \\ x_{12}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{13}^2 \\ x_{13}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{14}^2 \\ x_{14}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{1f}^2 \\ x_{1f}^2 \end{matrix}$	a <sub>1</sub> <sup>2</sup>
Q <sub>2</sub>	M <sub>1</sub>	$\begin{matrix} c_{21}^1 \\ x_{21}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{22}^1 \\ x_{22}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{23}^1 \\ x_{23}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{24}^1 \\ x_{24}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{2f}^1 \\ x_{2f}^1 \end{matrix}$	a <sub>2</sub> <sup>1</sup>
	M <sub>2</sub>	$\begin{matrix} c_{21}^2 \\ x_{21}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{22}^2 \\ x_{22}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{23}^2 \\ x_{23}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{24}^2 \\ x_{24}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{2f}^2 \\ x_{2f}^2 \end{matrix}$	a <sub>2</sub> <sup>2</sup>
Q <sub>3</sub>	M <sub>1</sub>	$\begin{matrix} c_{31}^1 \\ x_{31}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{32}^1 \\ x_{32}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{33}^1 \\ x_{33}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{34}^1 \\ x_{34}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{3f}^1 \\ x_{3f}^1 \end{matrix}$	a <sub>3</sub> <sup>1</sup>
	M <sub>2</sub>	$\begin{matrix} c_{31}^2 \\ x_{31}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{32}^2 \\ x_{32}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{33}^2 \\ x_{33}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{34}^2 \\ x_{34}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{3f}^2 \\ x_{3f}^2 \end{matrix}$	a <sub>3</sub> <sup>2</sup>
Q <sub>4</sub>	M <sub>1</sub>	$\begin{matrix} c_{41}^1 \\ x_{41}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{42}^1 \\ x_{42}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{43}^1 \\ x_{43}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{44}^1 \\ x_{44}^1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{4f}^1 \\ x_{4f}^1 \end{matrix}$	a <sub>4</sub> <sup>1</sup>
	M <sub>2</sub>	$\begin{matrix} c_{41}^2 \\ x_{41}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{42}^2 \\ x_{42}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{43}^2 \\ x_{43}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{44}^2 \\ x_{44}^2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} c_{4f}^2 \\ x_{4f}^2 \end{matrix}$	a <sub>4</sub> <sup>2</sup>
	b <sub>j</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>f</sub>	

Variable:  $x_{ij}^k$

i: Index für Produktionsquartal

j: Index für Bedarfsquartal

k: Index für Maschinentyp analog  $c_{ij}^k$

analog  $a_i^k, b_j$

b) Für die Formulierung des speziellen Modells gilt es, zusätzliche Aussagen über die  $c_{ij}^k$  zu machen.

1. Für  $c_{11}^1$  und  $c_{11}^2$  gelten die in der Aufgabenstellung angegebenen Werte. Es werden nur die Produktionskosten berücksichtigt:  $c_{11}^1 = 3$ ;  $c_{11}^2 = 2$ .

2. Für  $c_{12}^1$  und  $c_{12}^2$  sind zu den Produktionskosten für das 1. Quartal die Lagerungskosten für ein Quartal zu berücksichtigen:  $c_{12}^1 = 3 + 1 = 4$ ;  $c_{12}^2 = 2 + 1 = 3$ .

Analog für das 3. und 4. Quartal:

$$c_{13}^1 = 3 + 2 = 5; \quad c_{13}^2 = 2 + 2 = 4;$$

$$c_{14}^1 = 3 + 3 = 6; \quad c_{14}^2 = 2 + 3 = 5.$$



3. Für das fiktive Quartal lauten die Kosten  $c_{if}^k = 0$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  und  $k = 1, 2$ .

4. Produktion kann nur für das laufende Quartal oder für die folgenden Quartale erfolgen. Alle anderen Variablen  $x_{ij}^k$  müssen Null werden, was durch das Ansetzen hoher Kosten erreicht wird.

$c_{21}^1 = M$  und  $c_{21}^2 = M$  sichert diese Bedingung für das 2. und 1. Quartal. Durch  $c_{24}^1 = M$  und  $c_{24}^2 = M$  kann erreicht werden, daß im 2. Quartal nicht für das 4. Quartal produziert wird. Die restlichen Kostenelemente berechnet man analog. Gleiches gilt für die Berechnung der Koeffizienten für das 3. und 4. Quartal.

Das vollständige spezielle Modell ist in nachfolgendem Tableau angegeben. Es enthält gleichzeitig die optimale Lösung.

		Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	Q <sub>f</sub>	a <sub>i</sub>
Q <sub>1</sub>	M <sub>1</sub>	3 (1000)	4	5	6	0 (1000)	2000
	M <sub>2</sub>	2 (3000)	3	4	5	0	3000
Q <sub>2</sub>	M <sub>1</sub>	M	1 (3000)	2 (2000)	M	0	5000
	M <sub>2</sub>	M	1 (2000)	2	M	0	2000
Q <sub>3</sub>	M <sub>1</sub>	M	M	2 (1000)	3 (2000)	0 (1000)	4000
	M <sub>2</sub>	M	M	4	5	0 (1000)	1000
Q <sub>4</sub>	M <sub>1</sub>	M	M	M	4	0 (1000)	1000
	M <sub>2</sub>	M	M	M	5	0 (1000)	1000
	b <sub>j</sub>	4000	5000	3000	2000	5000	19000

$$Z = 26\ 000 \text{ [GE]}$$



## 2.6.2. Übungsaufgaben

1. In drei Ziegeleien ( $P_i$ ) werden Ziegelsteine gleicher Qualität hergestellt, die von vier Baustellen ( $V_j$ ) benötigt werden. Die Transportkosten und Kapazitäten entnehmen Sie folgender Tabelle:

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$a_i$
$P_1$	2	3	4	6	30
$P_2$	5	1	8	6	40
$P_3$	8	6	7	4	50
$b_j$	15	15	45	45	

- a) Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!
- b) Stellen Sie einen kostenminimalen Transportplan auf!

2. Lösen Sie Aufgabe 1 dieses Abschnittes numerisch!

3. Lösen Sie Aufgabe 2 dieses Abschnittes numerisch!

4. Von vier Kiesgruben ( $K_i$ ) sind fünf Baustellen ( $B_j$ ) durch LKW mit Kies zu versorgen. Die Verladekapazitäten in einer bestimmten Zeiteinheit sind:

$K_1$ : 40;  $K_2$ : 40;  $K_3$ : 25;  $K_4$ : 60 [ $m^3$ ].

In der gleichen Zeit werden von den Baustellen benötigt:

$B_1$ : 28;  $B_2$ : 35;  $B_3$ : 18;  $B_4$ : 32;  $B_5$ : 32 [ $m^3$ ].

Die Entfernungen [km] sind aus folgender Tabelle zu entnehmen:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$K_1$	4	1	10	2	8
$K_2$	3	4	9	3	5
$K_3$	5	2	11	8	9
$K_4$	8	3	7	5	2

Für welches Versorgungsprogramm wird die Transportleistung minimal, wenn jede Baustelle von jeder Kiesgrube beliefert werden kann?

- a) Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!
- b) Geben Sie den optimalen Transportplan an!

5. Fünf Verkaufsstellen ( $V_k$ ) werden von drei Auslieferungslagern ( $A_i$ ) nach folgendem Transportplan beliefert:

Die Kapazitäten der Auslieferungslager werden voll genutzt, und jede Verkaufsstelle erhält die benötigten Mengen. Die Kostenmatrix  $\underline{K}$  gibt die Transportkosten je ME an.

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>
A <sub>1</sub>			13		9
A <sub>2</sub>	10	12			
A <sub>3</sub>				14	8

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Transportkosten nach dem vorliegenden Plan!
  - Es ist zu prüfen, ob die Kosten minimal sind.
  - Es ist der optimale Transportplan aufzustellen. Es ist die Einsparung der Transportkosten zu berechnen.
6. Lösen Sie Aufgabe 3 dieses Abschnittes numerisch!
7. Für ein Transportproblem liegt folgende optimale Lösung vor:

$$Z = 648.$$

Es sind nachfolgende Kapazitätsänderungen und Kostenberichtigungen, jeweils von dieser optimalen Lösung ausgehend, zu diskutieren und eventuell auftretende Berichtigungen durchzuführen.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	a <sub>i</sub>
A <sub>1</sub>	18	14	15	21	17
A <sub>2</sub>	16	15	17	12	19
A <sub>3</sub>	18	16	16	14	9
b <sub>j</sub>	5	15	15	10	45

- Die Kosten bei A<sub>3</sub>B<sub>2</sub> werden 2 [GE/ME] auf 14 [GE/ME] verändert.
- Die Kosten bei A<sub>3</sub>B<sub>4</sub> erhöhen sich um 2 [GE/ME] auf 16 [GE/ME].
- Die Kosten bei A<sub>1</sub>B<sub>2</sub> erhöhen sich von 14 auf 16 [GE/ME].
- Die Kosten bei A<sub>1</sub>B<sub>2</sub> werden von 14 auf 10 [GE/ME] herabgesetzt.
- Der Bedarf von B<sub>2</sub> reduziert sich um 5 [ME] auf 10 [ME].
- Der Bedarf von B<sub>1</sub> und B<sub>4</sub> erhöht sich jeweils um 3 [ME]. Die Produktion bei A<sub>3</sub> wird um 6 [ME] erhöht.



8. Wir gehen bei dieser Aufgabe von der Grundaufgabenstellung der Aufgabe 2 dieses Abschnittes aus und formulieren folgende Zusatzbedingungen, die gleichzeitig zu berücksichtigen sind:

- a) Die Strecken  $A_1B_3$  und  $A_2B_1$  sind für den Transport gesperrt (Bauarbeiten).
- b) Die Kapazität von  $A_3$  muß ausgelastet werden (keine Lagerkapazität, keine Möglichkeit der Produktionsreduzierung).
- c) Auf den Strecken  $A_2B_1$ ,  $A_3B_2$  und  $A_3B_3$  kann nur eine begrenzte Menge transportiert werden, und zwar auf  
 $A_2B_1$ : höchstens 3 [ME],  
 $A_3B_2$ : höchstens 2 [ME],  
 $A_3B_3$ : höchstens 2 [ME].
- d) Auf der Strecke  $A_1B_3$  sind mindestens 2 [ME] zu transportieren.
- Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

## 2.7. Lösungen der Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.

Lösungen zu 2.1.2.

1. ZF:  $Z = 0,8x_1 + x_2 + 0,6x_3 + 0,3x_4 \rightarrow \max$

NB:  $4x_1 + x_3 + x_4 \leq 1300$

$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2100$

$5x_1 + 4x_2 + 6x_4 \leq 1200$

$10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 4800$

$x_1 + x_2 \leq 150$

NNB:  $x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$Z_{\text{opt}} = 510; \quad \underline{x}^T = (0, 150, 600, 0, 700, 0, 600, 0, 0)$

2. ZF:  $Z = 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \min$

NB:  $750x_1 + 2000x_2 + 800x_3 + 2000x_4 \geq 10\,000$

$2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \geq 24$

$3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 \geq 30$

$10x_1 + 20x_2 + 5x_3 + 25x_4 \geq 105$

NNB:  $x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$Z_{\text{opt}} = 30; \quad \underline{x}^T = (0, 5, 0, 0, 0, 1, 5, 5)$



3.

a) Die Variablen entsprechen den Zuschnittvarianten.

$$\underline{ZF}: Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

$$\underline{NB}: \begin{array}{rcl} 6x_1 & + 2x_3 & + 4x_5 \geq 300 \\ & 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 & \geq 150 \\ & 4x_2 + 2x_3 & + 6x_6 \geq 300 \end{array}$$

$$\underline{NNB}: x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

b) Die Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen bleiben erhalten.

Die Koeffizienten für die Zielfunktion stellen den Abfall dar.

$$\underline{ZF}: Z = 0,2x_1 + 0,16x_2 + 0,16x_3 + 0,4x_4 + 0,16x_5 + 0,2x_6 \rightarrow \min$$

a)  $Z_{\text{opt}} = 125$  ;  $\underline{x}^T = (50, 75, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

b)  $Z_{\text{opt}} = 22$  ;  $\underline{x}^T = (50, 75, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

4. Mit  $x_1$ : Anzahl der Arbeitskräfte der 1. Vollschiebt

⋮ .....

$x_6$ : Anzahl der Arbeitskräfte der 6. Teilschiebt

folgt:

$$\underline{ZF}: Z = 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 4x_6 \rightarrow \min$$

$$\underline{NB}: \begin{array}{rcl} x_1 & + x_4 & \leq 18 \\ x_1 & + x_4 + x_5 & \leq 33 \\ x_1 & + x_5 & \leq 30 \\ x_1 & + x_3 + x_5 & \leq 48 \\ & x_2 + x_3 & \leq 54 \\ & x_2 + x_3 & \leq 21 \\ & x_2 + x_3 + x_6 & \leq 111 \\ & x_2 + x_6 & \leq 123 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 & & \leq 0 \end{array}$$

$$\underline{NNB}: x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

$$Z_{\text{opt}} = 1020 ; \quad \underline{x}^T = (27, 39, 15, 0, 6, 84, 9, 0, 3, 0, 0, 33, 27, 0, 0)$$

5. ZF:  $Z = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$

NB:

$$\begin{array}{rcl} & x_2 & \leq 8 \\ & & x_4 \leq 13 \\ x_1 & + & x_3 \leq 21 \\ 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 & \leq & 1080 \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 & \leq & 108 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 60 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 & \leq & 210 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 72 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 24 \end{array}$$

NNB:  $x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$Z_{\text{opt}} = 87,2; \quad \underline{x}^T = (5,12, 15,2, 0, 13, 15,88, 332,2, 0, 1,24, 0, 28,44, 3,68, 0, 0)$

6. Es werden Variable mit zwei Indizes eingeführt ( $x_{ij}$ )

i: Index für Produkt  $i = 1, 2, 3$

j: Index für Technologie  $j = 1, 2, 3$  bzw.  $j = 1, 2$

ZF:  $Z = 11x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 9x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 18x_{31} + 15x_{32} \rightarrow \max$

NB:

$$\begin{array}{rcl} 2x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 3x_{21} & + & 4x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} \leq 200 \\ 3x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + x_{21} + 2x_{22} & + & 5x_{31} + 6x_{32} \leq 340 \\ x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + x_{31} & & \leq 480 \end{array}$$

NNB:  $x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$

$Z_{\text{opt}} = 1420; \quad \underline{x}_1^T = (0, 76, 0, 16, 124, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$\underline{x}_2^T = (0, 100, 0, 0, 120, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 20)$

Lösungen zu 2.2.2.

1. Die Achsenabschnittsformen lauten

$$\frac{x_3}{11} + \frac{x_2}{16,5} \leq 1; \quad \frac{x_1}{13,2} + \frac{x_2}{11} \leq 1; \quad \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{8} \leq 1.$$

Mit der Annahme von

$Z = 54$  folgt  $\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} = 1.$

Durch Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden findet man als äußersten Punkt des zulässigen Bereiches  $x_1 = 6; x_2 = 6$  mit dem Zielfunktionswert  $Z = 90.$

2. Die Achsenabschnittsformen lauten:

$$\frac{x_1}{1500} + \frac{x_2}{4500} \leq 1; \quad \frac{x_1}{1875} + \frac{x_2}{2500} \leq 1; \quad \frac{x_1}{3500} + \frac{x_2}{1750} \leq 1.$$

Annahme  $Z = 48 \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{8} = 1.$

Daraus folgt durch Parallelverschiebung

$$\begin{array}{lll} x_1 = 900 & x_2 = 1300 & Z = 15\,000 \\ x_1 = 1200 & x_2 = 900 & Z = 15\,000. \end{array}$$

Es gibt also unendlich viele optimale Lösungen, darunter zwei Basislösungen.

3. Maximierungsaufgabe:  $x_1 = 6 \quad x_2 = 6 \quad Z = 378$

Minimierungsaufgabe:  $x_1 = 8 \quad x_2 = 3 \quad Z = 324$

4.  $x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = 1 \quad Z = 53$

5. Für die Zielfunktion  $Z_1$  gibt es keine Lösung der Optimierungsaufgabe, da die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben unbeschränkt ist.

Für  $Z_2$  lautet die Lösung  $x_1 = 1 \quad x_2 = 4 \quad Z_2 = 9.$

6. Diese Aufgabe ist nicht lösbar, da der Lösungsbereich durch die leere Menge dargestellt wird. Die dritte Nebenbedingung stellt einen Widerspruch zu den übrigen Nebenbedingungen dar.

7. a)  $x_1 = 8/3 \quad x_2 = 20/3 \quad Z_a = 34 \frac{2}{3}$

b)  $x_1 = 6 \quad x_2 = 4 \quad Z_b = 34$

8.2.  $Z_1 = 20x_1 + 40x_2$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$10x_1 + 6x_2 + x_4 = 240.$$

$$x_1 + x_5 = 15$$

$$x_2 + x_6 = 20$$

Optimale Lösung:

$$\underline{x}_{\text{opt}_1}^T = (15, 15, 0, 0, 0, 5)$$

$$Z_1 = 900$$

8.4.  $G_1 = 25 \quad G_2 = 25 \quad Z_2 = 750$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_{21\text{opt}} = (15, 15, 0, 0, 0, 5) \\ \underline{x}_{22\text{opt}} = (10, 20, 0, 20, 5, 0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_{22\text{opt}} = (10, 20, 0, 20, 5, 0) \end{array} \right.$$

8.5.  $\underline{x}_{\text{opt}_3}^T = (10, 20, 0, 20, 5, 0)$

$$Z_3 = 1000$$

8.7.  $P_1: a, \quad P_2: b, \quad P_3: a, c, \quad P_4: a, e, \quad P_5: b, d,$

$P_6: a, c, e, f.$



### Lösungen zu 2.3.2.

1.  $Z = 47$      $x_1 = 7$      $x_2 = 3$      $x_4 = 3$

Die optimale Lösung ist eindeutig.

2.  $Z = 200$      $x_1 = 50$      $x_4 = 100$      $x_6 = 50$ . Da nach Substitution von  $x_1$  und  $x_3$  nur noch  $x_4$  in der Zielfunktion vorkommt, handelt es sich nur noch um die Ermittlung des Engpasses.

3. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert zuerst die Formulierung und Lösung einer Hilfsaufgabe. In der zweiten Etappe des Lösungsprozesses zeigt sich, daß die Zielfunktion der ursprünglichen Aufgabe auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt ist.

4. Über die Lösung einer Hilfsaufgabe erhält man

$$Z = 138 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 1 \quad x_7 = 4.$$

5. Lösungen s. Abschnitt 2.

6. Siehe graphische Lösung von Beispiel 6 des Abschnittes 2.3.1.

7.  $Z_{\text{opt}} = 325000$  WE     $x_1 = 7000$      $x_2 = 3000$

Die Kapazitäten in den Abteilungen  $A_2$  und  $A_4$  werden nicht ausgeschöpft. ( $x_4 = 18000$ ;  $x_6 = 11000$ )

8.1.1.  $Z_{\text{opt}} = 426$      $\underline{x}^T = (0, 9, 6, 24, 0, 0, 0, 78, 0)$

8.1.2. Lösung wie Originalaufgabe

Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.2.1.  $Z_{\text{opt}} = 380$      $\underline{x}^T = (0, 0, 10, 25, 5, 0, 25, 5, 0)$

Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.2.2.  $Z_{\text{opt}} = 468889$      $\underline{x}^T = (0, 5556, 15, 24.444, 15, 0, 59.444, 0, 0)$

8.3.1.  $Z_{\text{opt}} = 390$      $\underline{x}^T = (0, 0, 10, 25, 20, 0, 20, 5, 0)$

Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.3.2.  $Z_{\text{opt}} = 340,909$      $\underline{x}^T = (10.909, 17.727, 8.182, 0, 0, 0, 163.636, 150, 0)$

8.4.1.  $Z_{\text{opt}} = 380$      $\underline{x}^T = (0, 0, 10, 25, 20, 0, 20, 5, 0, 10)$

Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.4.2.  $Z_{\text{opt}} = 378.333$   $\underline{x}^T = (0, 0.833, 10, 24.167, 20, 0, 26.667, 12.5, 0, 0)$

9.1. Lediglich das Paar A, B stellt benachbarte Extrempunkte dar.

9.2. a) I b) I c) H d) H, I, J e) J, H f) I, J

9.3.  $x_1 \leq 1, x_2 \leq 1, x_3 \leq 1, x_1 + x_2 + x_3 \leq 5/2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

9.4. Bei der Lösung der linearen Optimierungsaufgabe mit der Simplexmethode könnten die Folgen a) und e) entstehen. Alle anderen Folgen enthalten nichtbenachbarte Punkte oder Zyklen, die allenfalls bei entarteten linearen Optimierungsaufgaben auftreten könnten.

9.5. Das System der Nebenbedingungen wird in die erste Normalform gebracht:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_6 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_7 &= 5/2 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned}$$

Dann ergibt sich:

- a)  $x_2$  wird BV und  $x_5$  wird NBV,
- b)  $x_3$  wird BV und  $x_6$  wird NBV,
- c)  $x_2$  wird BV und  $x_5$  wird NBV,
- d)  $x_2$  wird BV und  $x_5$  wird NBV.

Lösungen zu 2.4.2.

1. a)  $\hat{Z} = 57\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 + 13\hat{x}_4 \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} 10\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 2\hat{x}_4 &\equiv 1 \\ 4\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4 &\equiv 2 \\ -\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 - 6\hat{x}_4 &\equiv 3 \\ 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 4\hat{x}_4 &\equiv 4 \\ \hat{x}_1, \hat{x}_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die jeweils zwei bei der Umwandlung einer Gleichung entstehenden Variablen wurden im Dual in die dann nicht vorzeichenbeschränkten Variablen  $\hat{x}_2$  und  $\hat{x}_4$  zusammengefaßt.

b)  $\hat{Z} = 12\hat{x}_1 + 18\hat{x}_2 + \hat{x}_3 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned} 2\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 &\leq 5 \\ -\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\geq 1 \\ \hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\leq 4 \\ \hat{x}_2, \hat{x}_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

s. Bemerkung zu a)



2. a)  $x_1 = 3$     $x_2 = 2$     $z = 5$   
 b)  $x_1 = \frac{7}{2}$     $x_2 = \frac{3}{2}$     $z = 2$    optimale Lösung ist nicht  
 eindeutig.  
 c)  $x_1 = 12$     $x_2 = 1$     $x_3 = 12$     $x_4 = 15$     $z = 29$

3. Beispiel 1: Dual  $\hat{z} = 10\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 + 24\hat{x}_3 \rightarrow \min$   
 $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \geq 5$   
 $\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + \hat{x}_3 \geq 4$   
 $\hat{x}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung:  $\hat{x}_1 = 7/2$ ,    $\hat{x}_3 = 1/2$ ,    $\hat{z} = 47$

Beispiel 2: Dual  $\hat{z} = 18\hat{x}_1 + 40\hat{x}_2 + 24\hat{x}_3 \rightarrow \min$   
 $3\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \geq 6$   
 $\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \geq 4$   
 $\hat{x}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung:  $\hat{x}_1 = 0$     $\hat{x}_3 = 2$     $\hat{z} = 48$   
 bzw.  $\hat{x}_2 = 0$     $\hat{x}_3 = 2$     $\hat{z} = 48.$

Die duale Aufgabe ist also degeneriert, was wegen der Mehrdeutigkeit in der optimalen Lösung des Primals zu erwarten war.

Beispiel 3:  $\hat{z} = 12\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 \rightarrow \min$   
 $4\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 \geq 2$   
 $6\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3 \geq 3$   
 $\hat{x}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$

Zur Lösung mit der Simplexmethode muß nach Überführung in die  
 1. Normalform eine Hilfsaufgabe formuliert werden:

$$\hat{z} = -\hat{x}_6 - \hat{x}_7 \rightarrow \max$$

$$4\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 - \hat{x}_4 + \hat{x}_6 = 2$$

$$6\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3 - \hat{x}_5 + \hat{x}_7 = 3$$

$$\hat{x}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 7.$$

Die Lösung der Hilfsaufgabe führt auf eine degenerierte optimale Lösung mit dem Wert "Null" für die Hilfszielfunktion. Danach beginnt man mit der Lösung der ursprünglichen Aufgabe, wobei noch zu beachten ist, daß der Algorithmus auf die Maximierung zugeschnitten ist.



	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$	$x_0$	Q	-↑
← $\hat{x}_6$	4	(16)	0	-1	0	1	0	2	1/8*	*
$\hat{x}_7$	6	4	-1	0	-1	0	1	3	3/4	-4
$\hat{z}$	-10	-20↑	1	1	1	0	0	-5	-	20
→ $\hat{x}_2$	1/4	1	0	-1/16	0	1/16	0	1/8	1/2	-1/4
← $\hat{x}_7$	(5)	0	-1	1/4	-1	-1/4	1	5/2	1/2*	*
$\hat{z}$	-5↑	0	1	-1/4	1	5/4	0	-5/2	-	5
← $\hat{x}_2$	0	1	(1/20)	-3/40	1/20	3/40	-1/20	0		*
→ $\hat{x}_1$	1	0	-1/5	1/20	-1/5	-1/20	1/5	1/2		1/5
$\hat{z}$	0	0	0	0	0	1	1	0		-
-Z	0	0	-4/5↑	-3/10	11/5			-6		4/5
→ $\hat{x}_3$	0	20	1	-3/2	1			0		
$\hat{x}_1$	1	4	0	-1/4	0			1/2		
-Z	0	16	0	-3/2	3			-6		

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\hat{x}_3 - \frac{1}{20}\hat{x}_4 + \frac{1}{5}\hat{x}_5; \quad \hat{x}_2 = 0 - \frac{1}{20}\hat{x}_3 + \frac{3}{40}\hat{x}_4 - \frac{1}{20}\hat{x}_5$$

$$-Z = -12\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \rightarrow \max$$

$$-Z = -12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\hat{x}_3 - \frac{1}{20}\hat{x}_4 + \frac{1}{5}\hat{x}_5\right) - 4\left(-\frac{1}{20}\hat{x}_3 + \frac{3}{40}\hat{x}_4 - \frac{1}{20}\hat{x}_5\right) + 3\hat{x}_3$$

$$-Z = -6 + \frac{4}{5}\hat{x}_3 + \frac{3}{10}\hat{x}_4 - \frac{11}{5}\hat{x}_5$$

$$-Z = -6 - \left(-\frac{4}{5}\hat{x}_3 - \frac{3}{10}\hat{x}_4 + \frac{11}{5}\hat{x}_5\right)$$

Die Variable  $\hat{x}_4$  müßte BV werden. Da alle Koeffizienten in dem entsprechenden Vektor negativ sind, ergibt sich, daß die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nicht beschränkt ist.

$$\text{Beispiel 4: Dual } \hat{z} = 6\hat{x}_1 + 8\hat{x}_2 + 20\hat{x}_3 \rightarrow \min$$

$$-\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \geq 5 \quad (-5)$$

$$\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 \geq 4$$

$$\hat{x}_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\text{Opt. Lösung (mit } Z_2): \hat{x}_1 = 3 \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{2} \quad \hat{z} = 22.$$

Beispiel 5: Dual  $\hat{z} = 16\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2 + 12\hat{x}_3 \rightarrow \max$   
 $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \leq 20$   
 $4\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \leq 50$   
 $\hat{x}_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung:  $\hat{x}_1 = 5 \quad \hat{x}_3 = 15 \quad \hat{z} = 260.$

Lösungen zu 2.5.2.

1.

	$-\infty < t \leq -2$	$-2 \leq t \leq -1$	$-1 \leq t < +\infty$
$x_1$	7/2	2	0
$x_2$	0	3	5
$x_3$	3/2	0	0
$x_4$	0	0	2
Z	7	$13 + 3t$	$15 + 5t$

2.

	$-8 \leq t \leq 10$	$10 \leq t \leq 30$
$x_1$	$\frac{24}{11} + \frac{2}{11}t$	$6 - \frac{t}{5}$
$x_2$	$\frac{35}{11} - \frac{7}{22}t$	0
$x_3$	0	$-14 + \frac{7}{5}t$
$x_4$	0	0
$x_5$	$4 + \frac{t}{2}$	$-3 + \frac{6}{5}t$
Z	$\frac{59}{11} - \frac{3}{22}t$	$6 - \frac{1}{5}t$

Lösungen zu 2.6.2.

1. a) Mathematisch-ökonomisches Modell

ZF:  $z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + x_{22} + 8x_{23}$   
 $+ 6x_{24} + 8x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min$

NB:  $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30$      $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15$   
 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40$      $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$   
 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50$      $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$   
 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 45$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$$

$$\text{NNE: } x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

b) Der optimale Transportplan lautet:

$$x_{13} = 30; \quad x_{21} = 15; \quad x_{22} = 15; \quad x_{23} = 10; \quad x_{33} = 5; \\ x_{34} = 45 \text{ [ME] mit minimalen Kosten } Z = 505 \text{ [GE].}$$

2. Das Optimaltableau hat folgendes Aussehen:

	$v_j$	5	5	8	9	
$u_i$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$a_i$
0	$A_1$	12	10	8	11	3
		-7	-5	(3)	-2	
5	$A_2$	12	10	14	14	18
		-2	(7)	-1	(11)	
3	$A_3$	8	8	11	13	9
		(6)	(1)	(2)	-1	
	$b_j$	6	8	5	11	30

Die minimalen Kosten betragen  $Z = 326$  [GE].

3. Das Optimaltableau hat folgendes Aussehen:

	$v_j$	9	11	10	7	0	
$u_i$		$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_f$	$a_i$
0	$B_1$	14	12	10	7	0	23
		-5	-1	(11)	(7)	(5)	
-4	$B_2$	5	8	6	3	0	13
		(12)	-1	0	(1)	-4	
-5	$B_3$	10	6	5	4	0	10
		-6	(9)	(1)	-2	-5	
	$b_j$	12	9	12	8	5	46

Die minimalen Kosten betragen  $Z = 281$  [GE].

Da die Bewertungszahl  $c'_{ij} = c'_{23} = 0$  ist, und zwar für eine Nichtbasisvariable, ist die Optimallösung nicht eindeutig. Eine weitere zulässige Basislösung mit gleichem Zielfunktionswert lautet:



	$v_j$	9	11	10	7	0	
$u_i$		$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_f$	$a_i$
0	$B_1$	14 -5	12 -1	10 ⑩	7 ⑧	0 ⑤	23
-4	$B_2$	5 ⑫	8 -1	6 ①	3 0	0 -4	13
-5	$B_3$	10 -6	6 ⑨	5 ①	4 -2	4 -5	10
	$b_j$	12	9	12	8	5	46

$$Z = 281 \text{ [GE]}$$

4. a) Mathematisch-ökonomisches Modell:

$$\begin{aligned} \underline{ZF}: Z &= 4x_{11} + x_{12} + 10x_{13} + 2x_{14} + 8x_{15} + 3x_{21} + \dots \\ &+ 2x_{45} \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{NB}: x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\leq 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &\leq 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &\leq 25 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &\leq 60 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 28 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 35 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 18 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 32 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 32 \end{aligned}$$

$$\underline{NNB}: x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

b) Der optimale Transportplan lautet:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Lösung: } x_{12} &= 10; \quad x_{14} = 30; \quad x_{21} = 28; \quad x_{24} = 2; \\ x_{2f} &= 10; \quad x_{32} = 25; \quad x_{43} = 18; \quad x_{45} = 32; \\ x_{4f} &= 10 \text{ [m}^3\text{]} \quad Z = 400 \text{ [km]}; \\ 2. \text{ Lösung: } x_{12} &= 20; \quad x_{14} = 20; \quad x_{21} = 28; \quad x_{24} = 12; \\ x_{32} &= 15; \quad x_{3f} = 10; \quad x_{43} = 18; \quad x_{45} = 32; \\ x_{4f} &= 10 \text{ [m}^3\text{]} \\ Z &= 400 \text{ [km]}. \end{aligned}$$

Die Lösung ist nicht eindeutig. Es gibt zwei optimale Basislösungen.

5. a) Berechnung der Transportkosten laut Plan:

$$K = 1 \cdot 13 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 12 + 6 \cdot 14 + 8 \cdot 8 = 318.$$

- b) Die Lösung kann zur nicht degenerierten Basislösung erweitert werden, wodurch die Optimalität geprüft werden kann. Es handelt sich um keine Optimallösung.

	$v_j$	2	4	1	3	5	
$u_i$		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	
0	$A_1$	7	4	1	4	5	22
			0	(13)		(9)	
2	$A_2$	4	6	3	8	9	22
		(10)	(12)	(0)			
3	$A_3$	6	5	5	6	8	22
			+2		(14)	(8)	
		10	12	13	14	17	

- c) Man erhält folgendes Optimaltableau:

	$v_j$	2	3	1	4	5	
$u_i$		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$a_i$
0	$A_1$	7	4	1	4	5	22
		-5	-1	(1)	(4)	(17)	
2	$A_2$	4	6	3	8	9	22
		(10)	-1	(12)	-2	-2	
2	$A_3$	6	5	5	6	8	22
		-2	(12)	-2	(10)	-1	
	$b_j$	10	12	13	14	17	66

Die Transportbeziehungen mit dem optimalen Zielfunktionswert  $Z = 298$  [GE] lauten:

$$x_{13} = 1, \quad x_{15} = 17, \quad x_{23} = 12, \quad x_{34} = 10, \quad x_{14} = 4, \\ x_{21} = 10, \quad x_{32} = 12 \text{ [ME].}$$

Die Einsparung beträgt 20 [GE].

6. Die optimale Lösung wird in Tableauform angegeben. Dabei handelt es sich um keine eindeutige Lösung, denn wir stellen fest, daß die Bewertungszahlen  $c_{ij}^1$  auf den Feldern  $B_{22}E_2$   $B_{24}E_4$  mit Nichtbasisvariablen den Wert Null annehmen. Gleichzeitig müssen wir feststellen, daß die Lösung wegen  $x_{13} = 0$  als Basisvariable degeneriert ist.



Alle nicht eingetragenen Bewertungszahlen sind negativ und erfüllen so das Optimalitätskriterium.

	$v_j$	14	12	10	7	0	4	4		
$u_i$		$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_f$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$a_1$	
0	$B_1$	14 (3)	12 (7)	10 (0)	7 (8)	0 (5)	M	M	23	
-9	$B_{21}$	5 (3)	M	M	M	0	0	M	3	
-4	$B_{22}$	M	8 0	M	M	0	0	M	13	
-4	$B_{23}$	M	M	6 (10)	M	0	0	M	13	13
-4	$B_{24}$	M	M	M	3 0	0	0	M	13	
-4	$B_{2f}$	M	M	M	M	0	0	M	13	
-4	$B_{31}$	10 (6)	M	M	M	M	M	0	10	
-6	$B_{32}$	M	6 (2)	M	M	M	M	0	2	
-5	$B_{33}$	M	M	5 (2)	M	M	M	0	2	10
-4	$B_{34}$	M	M	M	4	M	M	0	10	
	$b_j$	12	9	12	8	5	42	14	92	

7. a) Optimale Lösung:  $x_{12} = 2$ ;  $x_{13} = 15$ ;  $x_{21} = 5$ ;  $x_{22} = 4$ ;  
 $x_{24} = 10$ ;  $x_{32} = 9$ ;  $Z = 639$ .

b) Es tritt keine Veränderung in der optimalen Lösung ein.

c) Optimale Lösung:  $x_{12} = 2$ ;  $x_{13} = 15$ ;  $x_{21} = 5$ ;  $x_{22} = 4$ ;  
 $x_{24} = 10$ ;  $x_{33} = 9$ ;  $Z = 661$ .

Man erhält die Basislösung von a); es ändern sich jedoch die Kosten und damit der Wert der Zielfunktion.

d) Optimale Lösung:  $x_{12} = 15$ ;  $x_{13} = 2$ ;  $x_{21} = 5$ ;  $x_{23} = 4$ ;  
 $x_{24} = 10$ ;  $x_{32} = 9$ ;  $Z = 592$ .



e) Optimale Lösung: (die Zuordnung ist nicht eindeutig)

$$\begin{aligned} 1. \text{ Lösung: } & x_{12} = 6; \quad x_{13} = 11; \quad x_{21} = 5; \quad x_{22} = 4; \\ & x_{24} = 10; \quad x_{33} = 4; \quad x_{3f} = 5; \quad Z = 573. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Lösung: } & x_{12} = 10; \quad x_{13} = 7; \quad x_{21} = 5; \quad x_{24} = 10; \\ & x_{33} = 8; \quad x_{2f} = 4; \quad x_{3f} = 1 \quad Z = 573. \end{aligned}$$

f) Optimale Lösung: (die Zuordnung ist nicht eindeutig)

$$\begin{aligned} 1. \text{ Lösung: } & x_{12} = 15; \quad x_{13} = 2; \quad x_{21} = 6; \quad x_{24} = 13; \\ & x_{31} = 2; \quad x_{33} = 13; \quad Z = 736. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Lösung: } & x_{12} = 15; \quad x_{13} = 2; \quad x_{21} = 8; \quad x_{24} = 11; \\ & x_{33} = 13; \quad x_{34} = 2; \quad Z = 736. \end{aligned}$$

8. Das mathematisch-ökonomische Modell lautet:

$$\begin{aligned} \underline{\text{ZF:}} \quad Z = & 14x_{11} + 12x_{12} + Mx_{13} + 7x_{14} + Mx_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} \\ & + 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} + 20 \rightarrow \min \end{aligned}$$

NB: Aufkommen:

Bedarf:

$$\begin{array}{rcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq & 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq & 13 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = & 10^* \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 12 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 9 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = & 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 8 \end{array}$$

\* Berücksichtigung der Zusatzbedingung b)

$$\underline{\text{NNB:}} \quad x_{1j} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\underline{\text{zusätzliche NB:}} \quad x_{13} = 0; \quad x_{21} = 0^*$$

\* durch  $c'_{13} = M, c'_{21} = M$  abgesichert

$$x_{21} \leq 3; \quad x_{23} \leq 2; \quad x_{33} \leq 2^{**}$$

\*\* Berücksichtigung der Zusatzbedingung c)

Unter Berücksichtigung von zusätzlichen Betrachtungen läßt sich diese Aufgabe auch in tabellarischer Form darstellen.

	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>f</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>		
B <sub>1</sub>	14	12	10	7	0	M	M	23	
B <sub>2</sub>	B <sub>21</sub>	5	M	M	M	0	0	M	3
	B <sub>22</sub>	M	8	M	M	0	0	M	13
	B <sub>23</sub>	M	M	6	M	0	0	M	13
	B <sub>24</sub>	M	M	M	3	0	0	M	13
	B <sub>2f</sub>	M	M	M	M	0	0	M	13
B <sub>3</sub>	B <sub>31</sub>	10	M	M	M	M	M	0	10
	B <sub>32</sub>	M	6	M	M	M	M	0	2
	B <sub>33</sub>	M	M	5	M	M	M	0	2
	B <sub>34</sub>	M	M	M	4	M	M	0	10
	12	9	12	8	5	42	14		