LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
HERAUSGEGEBEN
VON DER ZENTRALSTELLE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM
DES MINISTERIUMS FÜR HOCH- UND FACHSCHULWESEN

Mathematik für Ökonomen

Übungsmethodische Lehrbriefe

1. LEHRBRIEF

Lineare Algebra

Lineare Optimierung

02 4027 01 1

Mathematik für Ökonomen

Übungsmethodische Lehrbriefe

1. Lehrbrief

Lineare Algebra

Lineare Optimierung

Verfaßt von

Doz. Dr. Manfred B l i e f e r n i c h

Doz. Dr. Claus-Joachim W a g n e r

Hochschule für Ökonomie "Bruno Leuschner" Berlin

Sektion Wirtschaftsinformatik

02 4027 01 1

Redaktionsschluß: November 1988

Ag 628/178/89/DDR/5550- ZLO 6032/89
Druck und buchbinderische Verarbeitung:
VEB Kongreß- und Werbedruck, Oberlungwitz

2. Ausgabe 1. Auflage
Bestell-Nr. **02 4027 01 1**

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen Dresden.
Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium Dresden.

Inhaltsverzeichnis

Seite

0. Vorbemerkungen

In der vorliegenden Reihe der drei "Übungsmethodischen Lehrbriefe" für das Lehrgebiet "Mathematik für Ökonomen" werden die Lehrabschnitte Lineare Algebra, Lineare Optimierung, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt.
Ziel des Einsatzes dieser Lehrbriefe ist es, das Verstehen durch Anschaulichkeit und damit die Ergebnis- bzw. Erkenntniswirksamkeit Ihres Selbststudiums im Lehrgebiet Mathematik wesentlich zu verbessern.
Die Lehrbriefe unterscheiden sich von herkömmlichen Übungsaufgabenlehrbriefen vor allem dadurch, daß Ihr Selbständigkeitsgrad beim Lösen der jeweiligen Klasse der Übungsaufgaben systematisch angehoben wird. Dies wird erreicht, indem jeweils im Abschnitt "Beispiele" die lehrmethodischen Darlegungen - gewissermaßen das Wort des Lehrenden - das modifizierte Vorgehen beim Lösen der Aufgaben beschreiben und/oder die Spezifika mathematischer Darstellungen zur Lösungsverzielung und -beschreibung, wie Tableaus, Schemata, Graphiken, zur Anwendung gelangen. Beim Durcharbeiten dieser Abschnitte wird Ihnen deutlich, wie die konkrete Anwendung bzw. Umsetzung oder auch Interpretation allgemeingültiger mathematischer Verfahren, Vorschriften, Algorithmen etc. erfolgen muß.
Es wird hierfür empfohlen, sich vorher (nochmals) mit den zutreffenden Abschnitten im zweibändigen Lehrbuch "Mathematik für Ökonomen" vertraut zu machen und von vornherein Selbständigkeit im Durchdenken des Lösungsprozesses anzustreben. Dies verbessert zusätzlich Ihre Bedingungen für das nachfolgende selbständige Lösen der Aufgaben in den Abschnitten "Übungsaufgaben".
Lösen Sie nach Möglichkeit alle angebotenen Übungsaufgaben. Sie erreichen damit eine hohe Variation in der Methodenbeherrschung. Sollten bei der Lösung der Aufgaben Probleme auftreten, wenden Sie sich vertrauensvoll an Ihren Mathematikkonsulenten. Fordern Sie diesen auch auf, in den Lehrveranstaltungen mit den übungsmethodischen Lehrbriefen zu arbeiten und die im Selbststudium erarbeiteten Aufgabenlösungen sowie die Lösungswege zu beurteilen.
Beachten Sie jedoch unbedingt: Die Arbeit mit den Lehrbriefen ersetzt keinesfalls das Studium des Lehrstoffes im o. g. Lehrbuch, sondern im Gegenteil, sie setzt dieses voraus!

Die durch den veränderten Grundstudienplan erforderliche Überarbeitung der vorliegenden "Übungsmethodischen Lehrbriefe" erfolgte unter folgenden Gesichtspunkten:
Die fast überall vorauszusetzende Verfügbarkeit von leistungsfähiger Rechentechnik läßt eine weitere Zurückdrängung der zu demonstrierenden Rechenaufgaben in Vorlesung und Seminar zugunsten verstärkter Berücksichtigung allgemeiner (theoretischer) Fragen geboten erscheinen. Dies wird in der Aufnahme eines gesonderten Abschnitts in der Linearen Algebra deutlich.
Es wird an verschiedenen Stellen empfohlen, die Aufgaben mit Hilfe von Kleincomputern zu lösen. Entsprechende Software ist in immer stärkerem Maße verfügbar.
Die Größenordnung der Aufgaben wurde trotzdem meist beibehalten, um auch weiterhin dem Aspekt der Methodenbeherrschung durch selbständiges Lösen Rechnung zu tragen.
Der Abschnitt Determinanten wurde gestrichen. Das schließt jedoch nicht aus, daß der Begriff der Determinante an einigen Stellen verwendet wird.

1. Lineare Algebra

1.1. Basistransformation

1.1.1. Beispiele

Durch eine Anzahl von Basistransformationen kann man ein lineares Gleichungssystem $\underline{A}\ \underline{x} = \underline{b}$ in die kanonische Form überführen, die für das Ablesen der Lösung des Gleichungssystems besonders geeignet ist. Die Gewinnung der kanonischen Form wird tabellarisch vorgenommen; und die einzelnen Schritte werden dabei erläutert.
In den Beispielen wird lexikographisch vorgegangen, d. h., es wird jeweils der kleinste mögliche Index (Reihe) für das Hauptelement gewählt. Das kann natürlich unter Umständen zu unbequemen Rechnungen führen.

1. Vorgelegt sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= -9 \\ -2x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 &= -6\,. \end{aligned}$$

	BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\uparrow$
		3	9	-6	-9	*
I		-2	-8	2	-4	2
		3	8	-5	-6	-3
	x_1	1	3	-2	-3	-3
II		0	-2	-2	-10	*
		0	-1	1	3	1
	x_1	1	0	-5	-18	5
III	x_2	0	1	1	5	-1
		0	0	2	8	*
	x_1	1	0	0	2	
IV	x_2	0	1	0	1	
	x_3	0	0	1	4	

In das erste Tableau werden die Ausgangswerte eingetragen. Da noch keine Variable als Basisvariable (BV) gewählt wurde, bestehen drei Wahlmöglichkeiten. In <u>allen</u> Beispielen soll der jeweils kleinste mögliche Index gewählt werden. 3 ist das Hauptelement. Es wird damit die Zeile 1 Hauptzeile und die Spalte 1 Hauptspalte. Die Hauptzeile wird mit dem Kehrwert des Hauptelementes multipliziert (1/3) und so die transformierte Hauptzeile gewonnen. In dem Tableau II notieren wir die transformierte Hauptzeile. Als Hilfsspalte führen wir die $-\uparrow$-Spalte ein, in der mit Ausnahme des Hauptelements die negativen Werte der Hauptspalte stehen. Die restlichen Elemente werden wie folgt berechnet:

$$\left\{\begin{matrix}\text{neues}\\\text{Element}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{altes}\\\text{Element}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{gleichzeiliges Ele-}\\\text{ment} - \uparrow \text{-Spalte}\end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix}\text{gleich-}\\\text{spaltiges}\\\text{Element}\\\text{der trans-}\\\text{formierten}\\\text{Hauptzeile}\end{matrix}\right\}$$

Für den Übergang von I zu II werden die Berechnungen ausführlich angegeben:

$\tilde{d}_{21} = (-2) + 1 \cdot 2 = 0 \quad \tilde{d}_{22} = (-8) + 3 \cdot 2 = -2$

$\tilde{d}_{23} = 2 + (-2) \cdot 2 = -2 \quad \tilde{d}_{20} = -4 + (-3) \cdot 2 = -10$

$\tilde{d}_{31} = 3 + 1 \cdot (-3) = 0 \quad \tilde{d}_{32} = 8 + 3 \cdot (-3) = -1$

$\tilde{d}_{33} = -5 + (-2)(-3) = 1 \quad \tilde{d}_{30} = -6 + (-3) \cdot (-3) = 3$

-2 ist jetzt das Hauptelement. Es entsteht im Ergebnis der Berechnungen das Tableau III, in dem nur noch x_3 als Basisvariable gewählt werden kann. Das Hauptelement ist 2. Aus dem entstehenden Tableau IV läßt sich die Lösung des Gleichungssystems ablesen: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 4$.

2. Die Gleichungssysteme

a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= -15 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$ und b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 26 \\ -x_1 + 1/2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -9 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= -5 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$

sind zu lösen.

a)

	BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\Sigma$
I		2	-1	1	7	*
		-3	6	5	-15	3
		1	4	7	- 1	-1
II	x_1	1	-1/2	1/2	7/2	1/2
		0	9/2	13/2	-9/2	*
		0	9/2	13/2	-9/2	-9/2
III	x_1	1	0	11/9	3	
	x_2	0	1	13/9	-1	
		0	0	0	0	

In a) ergibt sich im Tableau III, daß eine Gleichung überflüssig ist und damit kein weiterer Schritt ausgeführt werden kann. Die bei dieser Wahl der Basisvariablen ermittelte Basislösung ist $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Allgemein lautet die Lösung des Gleichungssystems, die einen Freiheitsgrad hat,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11/9 \\ 13/9 \end{pmatrix} x_3 .$$

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	$-\uparrow$
b) I		2	3	-4	2	26	*
		-1	1/2	2	3	-9	1
		3	-1	5	-2	-5	-3
		3	3	5	6	4	-3
II	x_1	1	3/2	-2	1	13	-3/2
		0	2	0	4	4	*
		0	-11/2	11	-5	-44	11/2
		0	- 3/2	11	3	-35	3/2
III	x_1	1	0	-2	-2	10	2
	x_2	0	1	0	2	2	0
		0	0	11	6	-33	*
		0	0	11	6	-32	-11
IV	x_1	1	0	0	-10/11	4	
	x_2	0	1	0	2	2	
	x_3	0	0	1	6/11	-3	
		0	0	0	0	1	

In b) stellt man fest, daß es in der Gleichung, die noch ohne Basisvariable ist, kein $d_{ij} \neq 0$ gibt, aber $b_i \neq 0$ ist. Das tritt auf, weil das Gleichungssystem einen Widerspruch enthält.

Vielfach besteht die Notwendigkeit, ein lineares Gleichungssystem von einer kanonischen Form in eine andere kanonische Form zu überführen. Auch zur Lösung dieser Aufgabe verwendet man die Basistransformation. Wir gehen von der kanonischen Form des Gleichungssystems 2a) aus und nutzen die Basistransformation, um x_3 gegen x_1 bzw. gegen x_2 auszutauschen. Im Ergebnis erhalten wir zwei weitere Basislösungen des Gleichungssystems. Die überflüssige Gleichung wird in den Berechnungen weggelassen.

Austausch von x_1 gegen x_3

BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\uparrow$
x_1	1	0	11/9	3	*
x_2	0	1	13/9	-1	-13/9
x_3	9/11	0	1	27/11	
x_2	-13/11	1	0	-50/11	

Austausch von x_2 gegen x_3

BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\uparrow$
x_1	1	0	11/9	3	-11/9
x_2	0	1	13/9	-1	*
x_1	1	-11/13	0	50/13	
x_3	0	9/13	1	-9/13	

Die Basislösungen lauten $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50/11 \\ 27/11 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/13 \\ -9/13 \end{pmatrix}$.

Aus den allgemeinen Lösungen $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50/11 \\ 27/11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9/11 \\ -13/11 \end{pmatrix} x_1$

und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/13 \\ -9/13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11/13 \\ 9/13 \end{pmatrix} x_2$ läßt sich bei Wahl von

$x_1 = -8$ bzw. von $x_2 = -14$ die Nichtbasislösung
$x_1 = -8,\ \ x_2 = -14$ und $x_3 = 9$ gewinnen.

1.1.2. Übungsaufgaben

1. Überführen Sie mit Hilfe der Basistransformation die folgenden Gleichungssysteme in die kanonische Form, und geben Sie die Lösungen an!

a) $\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 &= -5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 10x_3 - 12x_4 &= 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 23 \end{aligned}$

2. Geben Sie sämtliche Basislösungen des Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5\ , \qquad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$ an!

3. Ermitteln Sie die existierenden Basislösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -4 \end{aligned}$$!

1.2. Matrizenoperationen und Blockmatrizen

1.2.1. Beispiele

1. Gegeben sind folgende Matrizen bzw. Vektoren:

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{a}_4 \quad \underline{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_6 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_7 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{A}_8 = (6\ 4\ -2\ 10) = \underline{a}_8^T \quad \underline{A}_9 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Charakterisieren Sie jede dieser Matrizen bzw. Vektoren möglichst umfassend! Geben Sie von allen Matrizen den Typ an! Bestimmen Sie, welche der Matrizen regulär bzw. singulär sind! Bilden Sie die transponierten Matrizen!

Lösung:

$\underline{A}_1$: Es handelt sich um eine obere Dreiecksmatrix vom Typ (4 , 4).
Die zu $\underline{A}_1$ gehörige Determinante

$$\det \underline{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ist gleich Null, da das Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen der Dreiecksdeterminante gleich Null ist. Damit ist die Matrix $\underline{A}_1$ singulär.

$\underline{A}_2$: Typ (4,4)

$$\det(\underline{A}_2) = 24 \neq 0$$

$\underline{A}_2$ ist regulär. $\underline{A}_2$ ist eine Diagonalmatrix.

$\underline{A}_3$: Typ (4,4) det $(\underline{A}_3) = 1 \neq 0$.
$\underline{A}_3$ ist regulär. $\underline{A}_3$ ist eine Einheitsmatrix.

$\underline{A}_4$: Typ (4,1) $\underline{a}_4$ ist eine spezielle Matrix - ein Vektor (Spaltenvektor).

$\underline{A}_5$: Typ (3,3)

$$\det(\underline{A}_5) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\underline{A}_5$ ist singulär.

$\underline{A}_6$: Typ (2,4)

$\underline{A}_7$: Typ (4,2) $\underline{A}_7 = -\underline{A}_6^T$

$\underline{A}_8$: Typ (1,4) $\underline{a}_8^T$ ist ein Zeilenvektor.

$\underline{A}_9$: Typ (3,3)

$$\det(\underline{A}_9) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -10 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -38 \neq 0$$

$\underline{A}_9$ ist regulär.

2. Gegeben sind folgende Matrizen bzw. Vektoren:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = (3\ 1\ 2\ -1) \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Man prüfe, welche der folgenden Operationen mit den obigen Matrizen bzw. Vektoren ausgeführt werden können. Führen Sie die möglichen Rechnungen durch!

a) $3\underline{A} + 4\underline{B}$ b) $\underline{A} + 2\underline{B}^T$ c) $2\underline{B} - \underline{A}$
d) $2\underline{B} - 3\underline{A}^T$ e) $\underline{A}\ \underline{C}\underline{c}$ f) $\underline{C}\ \underline{A}\ \underline{c}$
g) $(\underline{A}\ \underline{C})^T$ h) $(\underline{B}\ \underline{a})^T$ i) $\underline{a} \cdot \underline{b}$
j) $\underline{b} \cdot \underline{a}$ k) $(2\underline{B} - 3\underline{A})^T \cdot \underline{C}$ l) $\underline{A} \cdot \underline{b}$
m) $\underline{b}\ \underline{A}$ n) $\underline{A}^T\ \underline{b}$ o) $\underline{B} \cdot (4\underline{a}) + 2\underline{c}$

Lösung:

a) Diese Operation ist nicht ausführbar, da die Matrizenaddition nur für Matrizen vom gleichen Typ definiert ist.

$$\underline{A}_{4\cdot 3} \qquad \underline{B}_{3\cdot 4}$$

b) Die Operation ist durchführbar.

$$\underline{A}_{4\cdot 3} \qquad \underline{B}^T_{4\cdot 3}$$

$$\underline{A} + 2\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + 2\underline{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 0 \\ -2 & 9 & 3 \\ 2 & 21 & 14 \end{pmatrix}$$

c) Die Operation ist nicht durchführbar, da $\underline{B}$ und $\underline{A}$ unterschiedlichen Typ besitzen.

d) Die Operation ist durchführbar, da $\underline{B}$ und $\underline{A}^T$ den gleichen Typ haben.

$$2\underline{B} - 3\underline{A}^T = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\underline{B} - 3\underline{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & -11 & -7 \\ -1 & -16 & 15 & -10 \end{pmatrix}$$

e) Die Operation ist durchführbar, da $\underline{A}$ und $\underline{C}$, aber auch $\underline{C}$ und $\underline{c}$ verkettet sind.

$$\underset{4\cdot 3}{\underline{A}} \cdot \underset{3\cdot 3}{\underline{C}} \cdot \underset{3\cdot 1}{\underline{c}}$$

Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor vom Typ (4,1).

$$\underline{A} \cdot \underline{C} \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 22 & 14 & -12 \\ -22 & -4 & 18 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{C} \cdot \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 22 & 14 & -12 \\ -22 & -4 & 18 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 86 \\ -84 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung des Falkschen Schemas läßt sich die Matrizenmultiplikation sehr übersichtlich gestalten. Durch Anfügen einer Hilfszeile, die sich durch Addition der Elemente in den einzelnen Spalten ergibt, ist eine Rechenkontrolle möglich.

				1	0	-4	1
				-1	1	2	2
				5	3	0	-3
	1	3	1	3	6	2	9
	4	2	4	22	14	-12	86
	-2	5	-3	-22	-4	18	-84
	0	7	6	23	25	14	31
Hilfszeile	3	17	8	26	41	22	42

f) Die Operation ist nicht durchführbar, da keine Verkettung der Matrizen vorliegt.

g) Die Operation ist ausführbar, da eine Verkettung der beiden Matrizen vorliegt.

$$\underline{A} \cdot \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 22 & 14 & -12 \\ -22 & -4 & 18 \\ 23 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{C})^T = \begin{pmatrix} 3 & 22 & -22 & 23 \\ 6 & 14 & -4 & 25 \\ 2 & -12 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

Es gilt $(\underline{A}\ \underline{C})^T = \underline{C}^T \underline{A}^T$, so daß auch folgende Berechnung möglich ist:

			1	4	-2	0
			3	2	5	7
			1	4	-3	6
1	-1	5	3	22	-22	23
0	1	3	6	14	-4	25
-4	2	0	2	-12	18	14
-3	2	8	11	24	-8	62

h) Die Operation ist durchführbar, da Verkettung zwischen $\underline{B}$ und $\underline{a}$ vorliegt.

$$(\underline{B}\ \underline{a})^T = \underline{a}^T\ \underline{B}^T = (1 \quad 3 \quad -2 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

				1	3	1
				2	1	-2
				0	2	3
				1	7	4
1	3	-2	4	11	30	5

$(\underline{B}\ \underline{a})^T = (11 \quad 30 \quad 5)$

i) Die Operation ist durchführbar, die beiden Vektoren sind verkettet;

$$\underline{a}\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} (3 \quad 1 \quad 2 \quad -1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & 6 & -3 \\ -6 & -2 & -4 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

j) Die Operation ist durchführbar, die beiden Vektoren sind verkettet.

$$\underline{b}\ \underline{a} = (3 \quad 1 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2$$

k) Die Operation ist nicht durchführbar, da $\underline{B}$ und $\underline{A}$ nicht vom gleichen Typ sind und daher nicht subtrahiert werden können.

l) Die Operation ist nicht durchführbar, da $\underline{A}$ und $\underline{b}$ nicht verkettet sind.

m) Die Operation ist durchführbar, da $\underline{b}$ und $\underline{A}$ verkettet sind.

$$\underline{b}\,\underline{A} = (3 \quad 1 \quad 2 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (3 \quad 14 \quad -5)$$

n) Die Operation ist nicht durchführbar, da $\underline{A}^T$ und $\underline{b}$ nicht verkettet sind.

o) Die Operation ist durchführbar; $\underline{B}$ und $\underline{a}$ sind verkettet, $\underline{B}\,(4\underline{a})$ und $2\underline{c}$ sind vom gleichen Typ.

$$\underline{B} \cdot (4\underline{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 120 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}\,(4\underline{a}) + 2\underline{c} = \begin{pmatrix} 44 \\ 120 \\ 20 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 124 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Man erkennt aus den Aufgaben:
Das Ergebnis der Multiplikation
- eines Zeilenvektors mit einer Matrix ergibt einen Zeilenvektor;
- einer Matrix mit einem Spaltenvektor ergibt einen Spaltenvektor;
- einer Matrix mit einer Matrix ergibt eine Matrix;
- eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor ergibt eine Matrix;
- eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ergibt einen Skalar,

wobei jeweils eine entsprechende Verkettung vorausgesetzt wird.

3. Welche der folgenden Matrizen besitzt eine Inverse? Im Existenzfalle berechnen Sie diese!

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

d) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0	0	4	2	-1
x_2	0	1	0	5	3	-2
x_3	0	0	1	3	2	-1
x_1	1	0	-1	1	0	0
x_2	0	1	-2	-1	1	0
x_6	0	0	-1	-3	-2	1
x_4	1	0	-1	1	0	0
x_2	1	1	-3	0	-1	0
x_6	3	0	-4	0	-2	1
x_4	1	0	-1	1	0	0
x_5	-1	-1	3	0	1	0
x_6	1	-2	2	0	0	1

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0	0	1	1	-1
x_2	0	1	0	-2	1	1
x_3	0	0	1	1	1	1
x_4	1	0	0	1	1	-1
x_2	2	1	0	0	3	-1
x_3	-1	0	1	0	0	2
x_4	1/3	-1/3	0	1	0	-2/3
x_5	2/3	1/3	0	0	1	-1/3
x_3	-1	0	1	0	0	2
x_4	0	-1/3	1/3	1	0	0
x_5	1/2	1/3	1/6	0	1	0
x_6	-1/2	0	1/2	0	0	1

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	6	9
x_2	0	1	8	12
x_3	1/6	0	1	3/2
x_2	8/6	1	0	0

Die Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

ist singulär.

d) Da die Matrix nicht quadratisch ist, läßt sich kein Inverse bilden.

4. Gegeben seien folgende Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$, die durch Blockmatrizen dargestellt sind:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_{21} = 4, \quad \underline{A}_{22} = (-2, 1)$$

$$\underline{B}_{11} = 2, \quad \underline{B}_{12} = (3, 1), \quad \underline{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\underline{A} \cdot \underline{B}$.

Löeung:

Durch Aufschreiben der Gesamtmatrizen kann man sich von der Verkettbarkeit der Einzelmatrizen, welche Voraussetzung für die Anwendung der Formeln

$$\underline{C}_{11} = \underline{A}_{11}\underline{B}_{11} + \underline{A}_{12}\underline{B}_{21}, \qquad \underline{C}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{B}_{12} + \underline{A}_{12}\underline{B}_{22},$$

$$\underline{C}_{21} = \underline{A}_{21}\underline{B}_{11} + \underline{A}_{22}\underline{B}_{21}, \qquad \underline{C}_{22} = \underline{A}_{21}\underline{B}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{B}_{22}$$

ist, überzeugen.

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ \hdashline 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \underline{B} = \left(\begin{array}{c:cc} 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C} = \left(\begin{array}{c:cc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hdashline \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

$$\underline{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} 2 + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (3\ 1) + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{21} = 4 \cdot 2 + (-2\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 + 0 = 8$$

$$\underline{C}_{22} = 4\,(3\;\;1) + (-2\;\;1)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (12\;\;4) + (-3\;\;-3) = (9\;\;1)$$

Daraus folgt:

$$\underline{C} = \left(\begin{array}{c|cc} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ \hline 8 & 9 & 1 \end{array}\right).$$

5. Berechnen Sie mit Hilfe von Blockmatrizen das Produkt von $\underline{A} \cdot \underline{B}$.

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \underline{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Lösung:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{C}$$

$$\underline{C}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{C} = \left(\begin{array}{cc|c} 11 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \\ \hline 15 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

1.2.2. Übungsaufgaben

1. Gegeben sind die Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind die Matrizen

$\underline{A}\,\underline{B}$, $\underline{A}^T$, $\underline{B}^T\underline{A}^T$, $\underline{B}^T$, $(\underline{A}\,\underline{B})^T$, $\underline{B}\,\underline{A}$, $(\underline{B}\,\underline{A})^T$, $\underline{B}^T\underline{A}^T$.

2. Gegeben sind die Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind die Matrizen

$\underline{A}^T$, $\underline{B}^T$, $\underline{A}^{-1}$, $\underline{B}^{-1}$, $(\underline{A}^T)^{-1}$, $(\underline{B}^T)^{-1}$, $\underline{A}\,\underline{B}$, $(\underline{A}\,\underline{B})^T$, $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1}$, $((\underline{A}\,\underline{B})^T)^{-1}$, $\underline{B}^T\underline{A}^T$, $(\underline{A}^{-1})^T \cdot (\underline{B}^{-1})^T$.

3. Gegeben sind die Matrizen $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Produkte $\underline{A}\,\underline{B}$, $\underline{B}\,\underline{A}$, $\underline{A}\,\underline{C}$, $\underline{C}\,\underline{A}$, $\underline{B}\,\underline{C}$, $\underline{C}\,\underline{B}$.

4. Gegeben sind die beiden Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$. Bilden Sie $\underline{A}\,\underline{B}$, $(\underline{A}\,\underline{B})^T$, $\underline{A}^T$, $\underline{B}^T$, $\underline{B}^T\underline{A}^T$, und bestätigen Sie die Gültigkeit der Regel

$$(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\,\underline{A}^T \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Welche der folgenden Matrizen besitzt eine Inverse? Im Existenzfall berechnen Sie diese!

a) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ d) $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Berechnen Sie:

a) $(((\underline{A} - \underline{B})\underline{B}^T)^T)^{-1}$, b) $((\underline{A}(\underline{B}^T - \underline{A}^T))^{-1})^T$, c) $((\underline{A}^T(\underline{A} - \underline{B}))^{-1})^T$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie das Ergebnis von c)!

Folgende Matrizenprodukte sind über Blockmatrizen zu berechnen:

7.

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right), \qquad \underline{B} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

8.

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{array}\right) \qquad \underline{B} = \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ \hline 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

1.3. Matrizengleichungen

1.3.1. Beispiele

Berechnen Sie $\underline{X}$ aus folgenden Matrizengleichungen! Stellen Sie dabei zuerst die allgemeine Form auf!

1. $\underline{A}\,\underline{X} - \underline{B}\,\underline{X} = \underline{E} - \underline{C}\,\underline{X}$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$\underline{A}\,\underline{X} - \underline{B}\,\underline{X} + \underline{C}\,\underline{X} = \underline{E}$, $(\underline{A} - \underline{B} + \underline{C})\underline{X} = \underline{E}$, $\underline{X} = (\underline{A} - \underline{B} + \underline{C})^{-1}$

$$\underline{A} - \underline{B} + \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} - \underline{B} + \underline{C})^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $\underline{A}\,\underline{X} + \underline{X} + \underline{C}^T\,\underline{X} = \underline{E} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{C} + \underline{C}\,\underline{X}$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\underline{A}\,\underline{X} + \underline{X} + \underline{C}^T\underline{X} - \underline{C}\,\underline{X} = \underline{E} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{C}$$

$$(\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C})\underline{X} = \underline{E} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{C}$$

$$\underline{X} = (\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C})^{-1}\,(\underline{E} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{C})$$

$$\underline{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{B}\,\underline{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E} - \underline{A} - \underline{B}\,\underline{C} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \\ -8 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} + \underline{E} + \underline{C}^T - \underline{C})^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\underline{X} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \\ -8 & -4 & -7 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -52 & -24 & -48 \\ 12 & -6 & 8 \\ -74 & -43 & -66 \end{pmatrix}.$$

3. $2\underline{X} - (\underline{A} + \underline{B})^2\underline{X} = \underline{E} - \underline{C}\,\underline{X}$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$2\underline{X} - (\underline{A}^2 + \underline{A}\,\underline{B} + \underline{B}\,\underline{A} + \underline{B}^2)\,\underline{X} = \underline{E} - \underline{C}\,\underline{X}$$

$$2\underline{X} - \underline{A}^2\underline{X} - \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{X} - \underline{B}\,\underline{A}\,\underline{X} - \underline{B}^2\underline{X} = \underline{E} - \underline{C}\,\underline{X}$$

$$(2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A} - \underline{B}^2 + \underline{C})\,\underline{X} = \underline{E}$$

$$\underline{X} = (2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C})^{-1}$$

$$\underline{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}\,\underline{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2\,\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A}\,\underline{B} - \underline{B}\,\underline{A} - \underline{B}^2 - \underline{C} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2\underline{E} - \underline{A}^2 - \underline{A}\,\underline{B} - \underline{BA} - \underline{B}^2 - \underline{C})^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. $\underline{X} - \underline{X}\,\underline{A} + \underline{X}\,\underline{B} = \underline{C}$

mit

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\underline{X}\,(\underline{E} - \underline{A} + \underline{B}) = \underline{C} \qquad \underline{X} = \underline{C}\,(\underline{E} - \underline{A} + \underline{B})^{-1}$$

$$\underline{E} - \underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{E} - \underline{A} + \underline{B})^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{X} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

5. Lösen Sie folgende Matrizengleichung nach $\underline{X}$ auf:

$2\,(\underline{X}\,\underline{A} + \underline{X}\,\underline{B}) = 2\underline{X} + \underline{C}^T.$

Lösung:

$2\underline{X}\,\underline{A} + 2\underline{X}\,\underline{B} - 2\underline{X} = \underline{C}^T, \quad \underline{X}(2\underline{A} + 2\underline{B} - 2\underline{E}) = \underline{C}^T,$

$\underline{X} = \underline{C}^T(2\underline{A} + 2\underline{B} - 2\underline{E})^{-1}$

Berechnen Sie $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ aus folgenden Gleichungssystemen. Geben Sie dabei zunächst die allgemeine Form an.

1.3.2. Übungsaufgaben

Für die nachfolgenden Matrizengleichungen bzw. -gleichungssysteme sind $\underline{X}$ bzw. $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ zu berechnen:

1. $\underline{A}\,\underline{X} - \underline{X} = \underline{X} + \underline{A}^T\underline{X} + \underline{B}\,\underline{B}^T$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\underline{X}\,\underline{A} + \underline{X}\,(\underline{B} + \underline{C}^T) + \underline{D} = \underline{X} + \underline{E}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

   $\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\underline{D} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

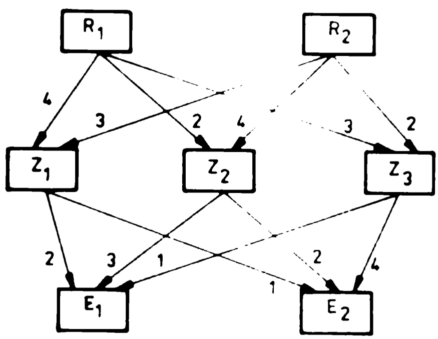
1.4. Verflechtungen - Anwendungen in der Ökonomie

Obwohl der Umfang der einzelnen Aufgaben aus didaktisch-methodischen Gründen so gewählt wurde, daß eine Ermittlung der Lösung ohne Rechner zumutbar ist, wird empfohlen, die Aufgaben auch unter Nutzung von Kleinrechnern zu lösen.
Dabei sollten Sie die Möglichkeiten von Variantenrechnungen, Erweiterungen und zusätzlichen ökonomischen Aufgabenstellungen nutzen.

1.4.1. Beispiele

Materialverflechtungen

1. Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 in der ersten Produktionsstufe die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her. In der zweiten Produktionsstufe werden aus diesen Zwischenprodukten die Endprodukte E_1 und E_2 gefertigt. Der Materialverbrauch von Stufe zu Stufe ist durch folgende Beziehungen gegeben:



a) Es soll eine Gesamtmaterialverbrauchsmatrix aufgestellt werden, die in ihren Einzelelementen den Rohstoffverbrauch pro Einheit des Endprodukts angibt.

b) Wie groß ist der Gesamtrohstoffbedarf, wenn der Betrieb 1600 Einheiten E_1 und 1260 Einheiten E_2 herstellen soll?

Lösung:

a) Der Materialfluß zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten kann durch folgende Matrix dargestellt werden:

$$\underset{RZ}{\underline{M}_1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ RZ bezeichnet den ökonomischen Typ von $\underline{M}_1$.

Analog kann der Materialfluß zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten dargestellt werden:

$$\underset{ZE}{\underline{M_2}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ZE bezeichnet den ökonomischen Typ von $\underline{M}_2$.

Gesucht ist nun die Materialverbrauchsmatrix $\underline{M}$ vom ökonomischen Typ RE. Sie entsteht durch Multiplikation von $\underline{M}_1$ und $\underline{M}_2$:

$$\underset{RE}{\underline{M}} = \underset{RZ}{\underline{M_1}} \cdot \underset{ZE}{\underline{M_2}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 19 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrizenmultiplikation existiert die ökonomische und damit auch mathematische Verkettung.

$m_{11} = 17$ bedeutet z. B.: Zur Herstellung einer Einheit E_1 sind 17 Einheiten R_1 notwendig.

b) Für den Gesamtrohstoffverbrauch leitet sich folgende Formel ab:

$$\underset{R_1}{\underline{r}} = \underset{RE}{\underline{M}} \cdot \underset{E_1}{\underline{e}}$$

$\underline{e}$ läßt sich aus der Aufgabenstellung ablesen: $\underline{e}^T = (1600 \; 1260)$.

Dann ist

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 20 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52400 \\ 55940 \end{pmatrix}.$$

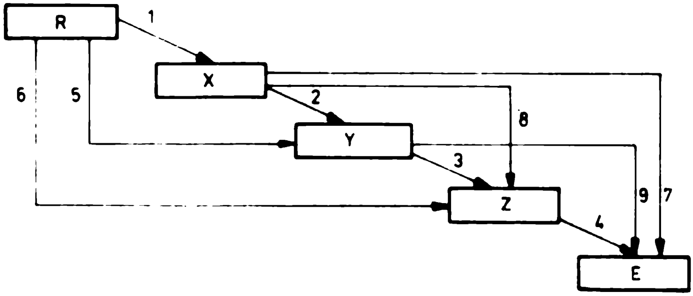
Zur Realisierung der Gesamtproduktion sind 52400 Einheiten R_1 und 55940 Einheiten R_2 notwendig.

2. Für eine Materialverflechtung sind folgende Angaben bekannt:
- Materialaufwandmatrizen zwischen den Produktionsstufen,
- geforderte Produktionsmengen der Zwischenprodukte und Endprodukte,
- Flußbild des Produktionsablaufs.

Geben Sie die Matrix $\underline{M}_{RE}$ pro eine Einheit Endproduktion und den Gesamtrohstoffbereitstellungsvektor $\underline{r}$ für Zwischenproduktion und Endproduktion in der allgemeinen Form an.

$$\underset{RX}{\underline{M_1}},\; \underset{XY}{\underline{M_2}},\; \underset{YZ}{\underline{M_3}},\; \underset{ZE}{\underline{M_4}},\; \underset{RY}{\underline{M_5}},\; \underset{RZ}{\underline{M_6}},\; \underset{XE}{\underline{M_7}},\; \underset{XZ}{\underline{M_8}},\; \underset{YE}{\underline{M_9}}$$

$$\underline{x},\; \underline{y},\; \underline{z},\; \underline{e}$$



Lösung:

Zunächst stellen wir fest, daß wir zwischen einem direkten Fluß und einem indirekten Fluß zu unterscheiden haben. Beim indirekten Materialfluß werden Zwischenproduktionsstufen übersprungen.

Bei der Aufstellung der Formel haben wir zu beachten:

- dem Hauptfluß entspricht im Matrizenkalkül eine Multiplikation (direkter Fluß),
- dem Nebenfluß (indirekter Fluß) eine Matrizenaddition, wobei gegebenenfalls die bereits erfolgten Verflechtungen zu berücksichtigen sind.

Für $\underline{M}_{RE}$ folgt

$$\underline{M} = \left[(\underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2 + \underline{M}_5) \cdot \underline{M}_3 + \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_8 + \underline{M}_6\right] \underline{M}_4 + (\underline{M}_1 \underline{M}_2 + \underline{M}_5)\underline{M}_9 + \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_7 .$$

Für $\underline{r}$ sind die Rohstoffmengen für die Endprodukte, aber auch die für die Zwischenprodukte zu berechnen.
Das läßt sich wie folgt formulieren:

$$\underline{r}_g = \underline{r}_x + \underline{r}_y + \underline{r}_z + \underline{r}_e \qquad \text{mit}$$

$$\underline{r}_x = \underline{M}_1 \cdot \underline{x}, \quad \underline{r}_y = (\underline{M}_1 \underline{M}_2 + \underline{M}_5)\underline{y},$$

$$\underline{r}_z = \left[(\underline{M}_1 \underline{M}_2 + \underline{M}_5)\underline{M}_3 + \underline{M}_1 \underline{M}_8 + \underline{M}_6\right] \underline{z}, \quad \underline{r}_e = \underline{M} \cdot \underline{e}.$$

3. Zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2 und den Fertigprodukten E_1, E_2 und E_3 besteht die Beziehung

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} .$$

Die Rohstoffe R_1 und R_2 sind in den Mengen r_1 und r_2 vorhanden. Zwischen welchen Schranken muß E_3 liegen, damit die Problemstellung ökonomisch sinnvoll bleibt? Bedingung ist, daß die Rohstoffmengen r_1 und r_2 voll ausgenutzt werden.

$$r_1 = 4800 \quad a_{11} = 50 \quad a_{12} = 30 \quad a_{13} = 2$$
$$r_2 = 3000 \quad a_{21} = 40 \quad a_{22} = 40 \quad a_{23} = 1$$

Lösung:

Zunächst tragen wir die Informationen in

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 2 \\ 40 & 40 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Übersicht schreiben wir diese Matrizengleichung als ein Gleichungssystem

$$50e_1 + 30e_2 + 2e_3 = 4800$$
$$40e_1 + 40e_2 + e_3 = 3000 .$$

Ökonomisch ist zu sichern

$$(*) \qquad e_1 \geq 0 , \quad e_2 \geq 0 , \quad e_3 \geq 0 .$$

Wir stellen fest, daß es sich um ein unterbestimmtes lineares inhomogenes Gleichungssystem handelt.
Wir können eine Variable unter den Bedingungen (*) frei wählen und das Intervall bestimmen, für welches die anderen Bedingungen aus (*) erfüllt bleiben.
Wir wählen z. B. e_3 aus.
Daraus folgt:

$$50e_1 + 30e_2 = 4800 - 2e_3$$
$$40e_1 + 40e_2 = 3000 - e_3 .$$

Wieder in Matrizenschreibweise überführt, folgt

$$\begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 30 \\ 40 & 40 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] .$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{800} \begin{pmatrix} 40 & -30 \\ -40 & 50 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix} - e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] .$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{800} \left[\begin{pmatrix} 102000 \\ -42000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ -30 \end{pmatrix} e_3 \right] .$$

Wieder als Gleichungssystem geschrieben,

$$e_1 = \frac{102000}{800} - \frac{50}{800} e_3 , \qquad (**)$$

$$e_2 = \frac{-42000}{800} + \frac{30}{800} e_3 . \qquad (***)$$

Für (**) folgt mit $e_1 \geqq 0$:

$$0 \leqq \frac{102000}{800} - \frac{50}{800} e_3 , \quad 50 e_3 \leqq 102000 , \quad e_3 \leqq 2040 .$$

Für (***) folgt mit $e_2 \geqq 0$

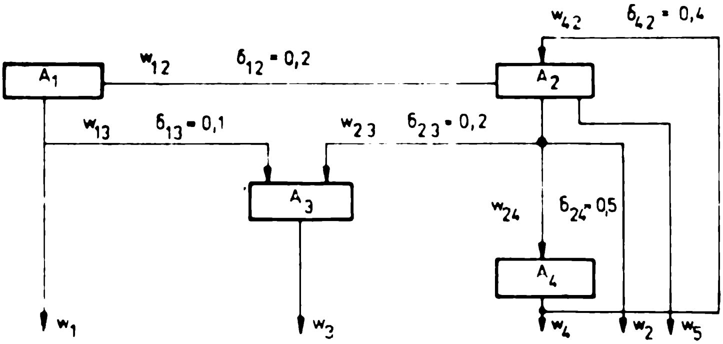
$$0 \leqq - \frac{42000}{800} + \frac{30}{800} e_3 , \quad 30 e_3 \geqq 42000 , \quad e_3 \geqq 1400 .$$

Schließlich folgt

$$1400 \leqq e_3 \leqq 2040 \quad \text{mit} \quad e_1 \geqq 0 , \quad e_2 \geqq 0 .$$

<u>Betriebswirtschaftliche Verflechtungen</u>

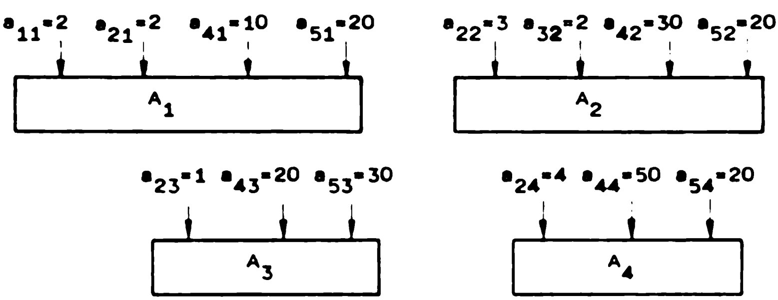
Ein Betrieb besteht aus den vier Produktionsabteilungen (Verfahrensstufen) A_1 bis A_4.
Die Verflechtung ist durch folgende Skizze gegeben:



Die Abteilungen A_1, A_3 und A_4 produzieren jeweils ein Produkt. In A_2 fällt neben dem Hauptprodukt w_2 noch ein zweites Produkt im konstanten Verhältnis an $w_5 = 0,1\ p_2$.

Die Kapazitäten (in ME und bezogen auf das Hauptprodukt der Abteilung und eine Periode von 200 h Arbeitszeit) sind durch $\underline{k}^T = (450\ 400\ 250\ 300)$ gegeben.

Als Aufwände werden drei Materialarten m_1 bis m_3, Elektroenergie m_4 und Lohn m_5 betrachtet. Der Materialeinsatz ist durchsatzproportional. Bei Elektroenergie und Lohn ist außerdem eine Zeitproportionalität zu berücksichtigen.
Die Proportionalitätsfaktoren (für Material in ME/ME, für Elektroenergie in kWh/ME und für Lohn in WE/ME) sind der folgenden Skizze zu entnehmen:



Die zeitproportionalen Komponenten sind für m_4 60 kWh/h und für m_5 70 WE/h.

1. Es ist das erweiterte Grundmodell der direkten Verflechtung (Kopplungs-Aufwandmatrix) aufzustellen.
2. Welche Endproduktion $\underline{w}$ kann der Betrieb in 200 Stunden Betriebszeit produzieren, wenn $\underline{p}^T = (400\ 300\ 200\ 200)$ gilt? Welche Aufwände sind dazu erforderlich?
3. Es ist das Modell der totalen Verflechtung (Produktionsfunktion) zu ermitteln.
4. Es sind $\underline{p}$ und $\underline{m}$ bei $\underline{w}^T = (100\ 200\ 300\ 300)$ und 200 Stunden Betriebszeit zu ermitteln.

Lösung:

Aus den in der Aufgabenstellung enthaltenen Angaben läßt sich das erweiterte Grundmodell zur direkten Verflechtung

$$\begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{11} & \underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{21} & \underline{V}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{f} \end{pmatrix}$$

aufstellen, wobei das Kuppelprodukt in A_2 bei der Berechnung in den Aufwandteil des Modells einzubeziehen ist:

$$\begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}3 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}2 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 30 & 20 & 50 & 60 \\ 20 & 20 & 30 & 20 & 70 \end{array}\right) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \hline t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 160 \\ 200 \\ 80 \\ \hline 30 \\ \hline 800 \\ 2700 \\ 600 \\ 39000 \\ 38000 \end{pmatrix}$$

mit $\underline{p}^T = (400\ 300\ 200\ 200)$ und $t = 200$.

Um das Modell der totalen Verflechtung

$$\begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{11}^{-1} & -\underline{V}_{11}^{-1}\underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{21}\underline{V}_{11}^{-1} & \underline{V}_{22} - \underline{V}_{21}\underline{V}_{11}^{-1}\underline{V}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{f} \end{pmatrix}$$

zu erhalten, ist $\underline{V}_{11}$ zu invertieren. Da in diesem Beispiel $\underline{V}_{12} = \underline{N}$ gilt, ist außerdem nur noch die Multiplikation $\underline{V}_{21}\underline{V}_{11}^{-1}$ auszuführen. Als erste Komponente im Vektor $\underline{m}$ erscheint die Menge des in A_2 erzeugten Kuppelproduktes.

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ w_5 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0{,}4 & 0{,}18 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1{,}25 & 0{,}25 & 0{,}625 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}1 & 1{,}25 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}125 & 0{,}025 & 0{,}0625 & 0 \\ \hline 2 & 0{,}8 & 0{,}36 & 1 & 0 \\ 2 & 6{,}55 & 2{,}51 & 7{,}875 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & 0{,}5 & 1{,}25 & 0 \\ 10 & 66{,}5 & 34{,}3 & 86{,}25 & 60 \\ 20 & 43 & 40{,}6 & 47{,}5 & 70 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 384 \\ 512.5 \\ 300 \\ 505 \\ \hline 51.25 \\ \hline 768 \\ 4625.5 \\ 1025 \\ 62465 \\ 51030 \end{pmatrix}$$

Volkswirtschaftliche Verflechtungen

1. Die Verflechtung zwischen zwei Wirtschaftszweigen ist durch folgende Tabelle gegeben:

		Zweig 1	2	$\underline{y}$	$\underline{x}$
Zweig	1	120	160	320	600
	2	120	560	120	800

a) Es ist die Matrix $\underline{M}$ zu berechnen.

b) Wie groß muß die Gesamtproduktion in den beiden Zweigen sein, damit ein Vektor der Endverwendung

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} 350 \\ 130 \end{pmatrix}$$

gewährleistet werden kann? Die Angaben beziehen sich auf ME.

Lösung:

a) Die Matrix $\underline{M}$ enthält die direkten Aufwandskoeffizienten, die nach der Formel

$$m_{ik} = \frac{M_{ik}}{x_k}$$

zu berechnen sind:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} {}^{120}/600 & {}^{160}/800 \\ {}^{120}/600 & {}^{560}/800 \end{pmatrix}.$$

b) Die Berechnung der Gesamtproduktion für ein Planjahr bei vorgegebener Endverwendung für das Planjahr mit vorgegebener Matrix $\underline{M}$ für ein Basisjahr erfolgt nach der Formel

$$\underline{x} = (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y} \; .$$

Numerische Lösung:

$$(\underline{E}-\underline{M}) = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 350 \\ 130 \end{pmatrix};$$

$$(\underline{E}-\underline{M})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1,5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655 \\ 870 \end{pmatrix}.$$

Um die vorgegebene Endverwendung zu sichern, muß die Gesamtproduktion des Zweiges 1 655 ME und die des Zweiges 2 870 ME betragen.

2. Für drei Zweige wurden die Matrix $\underline{M}$ der Verflechtungskoeffizienten m_{ik}

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,20 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,30 \\ 0,20 & 0 & 0,15 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\underline{i}$ mit den Importkoeffizienten

$$\underline{i}^T = (0,15 \quad 0,20 \quad 0,20) \qquad \text{ermittelt.}$$

a) Berechnen Sie die fehlenden Elemente der Matrix

$$(\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,34 & 0,44 \\ 0,46 & & \\ 0,32 & 0,08 & 1,28 \end{pmatrix} = \underline{B} \; .$$

b) Ermitteln Sie den Vektor der komplexen Importkoeffizienten $\underline{i}^{T*}$.

c) Es sei

$$\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix} \text{ der Export und } \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} 400 \\ 250 \\ 320 \end{pmatrix} \text{ der sonstige Verbrauch.}$$

Wie groß muß die Produktion $\underline{x}$ sein, um den Endverbrauch $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$ zu gewährleisten?

d) Es ist geplant, den Export des 1. Zweiges um 50 zu erhöhen und den des 3. Zweiges um 30 zu verringern. Wie groß ist dann bei gleichbleibendem $\underline{y}_2$ das Importaufkommen der drei Zweige?

Die Zahlenangaben beziehen sich auf WE.

Lösung:

a) Vereinfacht kann b_{22} nach folgender Formel berechnet werden:

$$\underline{A} \cdot A^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{E} \,.$$

Das Element b_{22} aus $\underline{A}^{-1}$ berechnet man z. B. durch folgende Gleichung:

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = 1 \,.$$

Dabei sind die a_{ik} die Elemente der Matrix $(\underline{E} - \underline{M})$ und b_{ik} die der Inversen $(\underline{E} - \underline{M})^{-1}$.

$-0{,}20 \cdot 0{,}34 + 0{,}8 \cdot b_{22} - 0{,}30 \cdot 0{,}08 = 1 \,, \quad b_{22} = 1{,}365$

Analog b_{23}:

$a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 0 \,, \quad b_{23} = 0{,}59$

b) Die komplexen Importkoeffizienten berechnet man nach der Formel

$$\underline{i}^T \cdot (\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \underline{i}^{T*} \,.$$

$$(0{,}15\ 0{,}20\ 0{,}20) \begin{pmatrix} 1{,}36 & 0{,}34 & 0{,}44 \\ 0{,}46 & 1{,}365 & 0{,}59 \\ 0{,}32 & 0{,}08 & 1{,}28 \end{pmatrix} = (0{,}36\ 0{,}34\ 0{,}44)$$

c) Die Grundlage für die Berechnung der Gesamtproduktion des Planjahres bei vorgegebenem Endverbrauch für das Planjahr und der Verflechtungsmatrix für das Basisjahr ist die Formel

$$\underline{x} = (\underline{E} \cdot \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y} \,.$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1{,}36 & 0{,}34 & 0{,}44 \\ 0{,}46 & 1{,}365 & 0{,}59 \\ 0{,}32 & 0{,}08 & 1{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 650 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1240 \\ 1140 \\ 880 \end{pmatrix}$$

d) Die Formel für das Gesamtimportvolumen lautet:

$$I = \underline{i}^T (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y} \quad \text{oder} \quad I = \underline{i}^{T*} \cdot \underline{y} \,.$$

$$I = (0{,}15 \quad 0{,}20 \quad 0{,}20)\begin{pmatrix} 1{,}36 & 0{,}34 & 0{,}44 \\ 0{,}46 & 1{,}36 & 0{,}59 \\ 0{,}32 & 0{,}08 & 1{,}28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 470 \end{pmatrix}$$

$$I = (0{,}36 \quad 0{,}34 \quad 0{,}44)\begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 470 \end{pmatrix}, \quad I = 252{,}0 + 136{,}0 + 206{,}8 = 594{,}8$$

Die einzelnen Glieder der Summe geben den Import für die einzelnen Zweige (x_1, x_2 und x_3) an. Das Gesamtimportvolumen beträgt I = 594,8 WE.

3. Gegeben ist die Verflechtungsmatrix einer volkswirtschaftlichen Verflechtungsbilanz mit drei Zweigen:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Weiter liegen Planzahlen für die Endverwendung in den beiden ersten Zweigen vor. Für y_3 liegen keine Planzahlen vor. Dafür ist die Gesamtproduktion des dritten Zweiges festgelegt. Für die Gesamtproduktion der beiden ersten Zweige gibt es keine Vorgaben.

$$y_1 = 200, \quad y_2 = 250, \quad x_3 = 400$$

Es sind x_1, x_2 und y_3 zu berechnen.

Lösung:

Ausgangspunkt ist die 1. Planungsfrage $\underline{y} = (\underline{E} - \underline{M}) \cdot \underline{x}$

Es folgt:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}15 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Die Trennung gesuchter und gegebener Größen führt zu

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & -0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Weiter folgt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,8 & 0 \\ -0,1 & -0,1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0,15 \\ 0 & 0 & -0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 250 \\ 400 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 508 \\ 578 \\ 251,4 \end{pmatrix}.$$

1.4.2. <u>Übungsaufgaben</u>

1. Einerseits besteht zwischen den Rohstoffen y_1 und y_2 und den Zwischenprodukten z_1 und z_2 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

und andererseits zwischen z_1 und z_2 und den Endprodukten x_1 und x_2 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

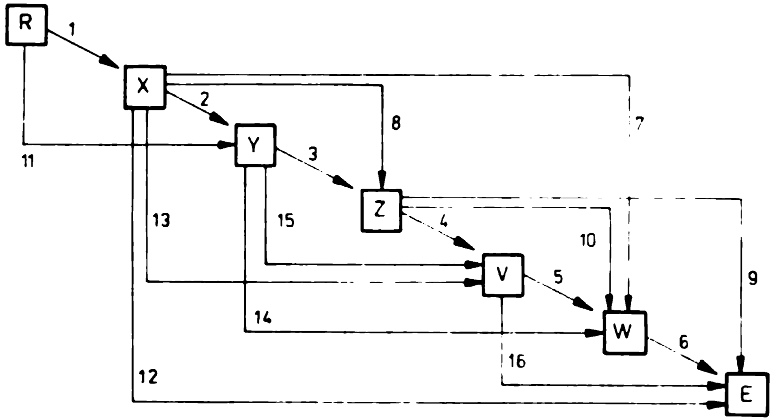
Wieviel Mengeneinheiten von x_1 und x_2 können hergestellt werden, wenn $y_1 = 5400$ und $y_2 = 3780$ Mengeneinheiten zur Verfügung stehen?

2. Für eine Materialverflechtung sind folgende Angaben bekannt:
   - Materialaufwandmatrizen zwischen den Produktionsstufen,
   - geforderte Produktionsmengen der Zwischenprodukte und Endprodukte,
   - Flußbild des Produktionsablaufs.

   Geben Sie die Matrix $\underline{M}_{RE}$ pro eine Einheit Endproduktion und den Gesamtrohstoffbereitstellungsvektor $\underline{r}$ für Zwischenproduktion und Endproduktion in der allgemeinen Form an.

$\underset{RX}{\underline{M_1}}$, $\underset{XY}{\underline{M_2}}$, $\underset{YZ}{\underline{M_3}}$, $\underset{ZV}{\underline{M_4}}$, $\underset{VW}{\underline{M_5}}$, $\underset{WE}{\underline{M_6}}$, $\underset{XW}{\underline{M_7}}$, $\underset{XZ}{\underline{M_8}}$, $\underset{ZE}{\underline{M_9}}$, $\underset{ZW}{\underline{M_{10}}}$, $\underset{RY}{\underline{M_{11}}}$, $\underset{XV}{\underline{M_{12}}}$, $\underset{XE}{\underline{M_{13}}}$, $\underset{YW}{\underline{M_{14}}}$,

$\underset{YV}{\underline{M_{15}}}$, $\underset{VE}{\underline{M_{16}}}$ $\qquad \underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{e}$.



3. Es besteht zwischen den Rohstoffen R_1 und R_2 und den Fertigprodukten die Beziehung

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} .$$

Die Rohstoffe sind in folgenden Mengeneinheiten vorhanden:

R_1: 4700 ,
R_2: 1410 .

Es ist zu berechnen, unter welchen Bedingungen produziert werden muß, damit bei voller Auslastung der Rohstoffe die Produktion sinnvoll bleibt. Als variables Produkt sei E_3 angenommen.

4. Ein Betrieb besteht aus den 4 Produktionsabteilungen A_1 bis A_4, in denen jeweils ein Produkt hergestellt wird. Dazu werden die beiden Rohstoffe m_1 und m_2 eingesetzt. Außerdem werden als Aufwendungen Elektroenergie sowie Lohnkosten in die Berechnungen einbezogen. Alle Aufwandsarten sind kapazitätsabhängig. Der Elektroenergieverbrauch und die Lohnkosten haben außerdem einen zeitabhängigen Anteil.
In der folgenden Bilanz sind der direkte innere und der direkte äußere Verbrauch für den laufenden Planzeitraum angeführt:

Verbr. von \ Z. Herst. von		A_1	A_2	A_3	A_4	Prod.-kapaz. [ME]	Zeitabh. Anteil
A_1	[ME]	-	0	300	0	500	-
A_2	[ME]	250	-	150	200	600	-
A_3	[ME]	0	0	-	200	300	-
A_4	[ME]	0	0	0	-	100	-
m_1	[ME]	500	1800	300	0	-	-
m_2	[ME]	1000	2400	0	200	-	-
Energie	[kWh]	2500	1200	900	600	-	2000
Lohn	[WE]	2000	1200	300	400	-	1000

4.1. Bestimmen Sie die Höhe der Endproduktion für alle vier Abteilungen und die Höhe des Verbrauchs für alle vier Aufwandsarten im laufenden Planzeitraum!

4.2. Im folgenden Planzeitraum soll eine Endproduktion entsprechend $\underline{w}^T = (200\ 0\ 150\ 110)$ erzeugt werden. Welche Produktionskapazität ist dazu erforderlich, und welche Aufwände werden benötigt?

4.3. Es wird unterstellt, daß für die unter 4.2. genannte Endproduktion folgende Kapazitäten zur Verfügung stehen:

A_1: 600, A_2: 700, A_3: 370 und A_4: 120 ME.

Um wieviel ME müßte dann die Kapazität bei A_3 gesteigert werden, um die Reserven bei A_2 zur zusätzlichen Endproduktion von Erzeugnissen der Abteilung A_3 ausnutzen zu können? Wie hoch ist diese zusätzliche Endproduktion in A_3?
(In den Abteilungen A_1, A_2 und A_4 soll keine zusätzliche Endproduktion über die unter 4.2. genannten Mengen hinaus erzeugt werden.)

5. Ein Betrieb besteht aus zwei miteinander verbundenen Abteilungen, die je ein Produkt herstellen. Die Beschaffenheit des Produktes und die eingegangenen Lieferverpflichtungen machen es erforderlich, im kommenden Planzeitraum täglich bei dreischichtiger Auslastung eine Endproduktion von

$$\underline{w}^T = (60\ 120)$$

zu erbringen. Es steht eine Kapazität von $\underline{k}^T = (360\ 840)$ pro Tag zur Verfügung.

Die benötigten vier äußeren Aufwände können in den Tageshöchstmengen

$$\underline{m}^T = (2400 \quad 5600 \quad 2200 \quad 7400)$$

bereitgestellt werden.
Für die Berechnungen kann das folgende erweiterte Grundmodell der direkten Verflechtung (Betriebsfunktion) verwendet werden:

$$\begin{pmatrix} \underline{w} \\ \underline{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_{11} & \underline{V}_{12} \\ \underline{V}_{21} & \underline{V}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \underline{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 20 & 20 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 20 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Welche Produktion $\underline{p}$ und Aufwände $\underline{m}$ sind erforderlich, um die Planauflage erfüllen zu können? Reichen die in der Aufgabenstellung genannten Werte aus?

6. Die Verflechtung zwischen drei Industriezweigen in einem Basisjahr ist durch folgende Tabelle gegeben:

Zweige	1	2	3	y_i
1	240	72	140	348
2	80	264	180	76
3	0	120	400	480

6.1. Wie groß ist die Gesamtproduktion x_i jedes Zweiges im Basisjahr?

6.2. Die Verflechtung zwischen den Zweigen möge im folgenden Jahr die gleiche wie im Basisjahr sein. Wie groß muß dann die Gesamtproduktion x_i jedes Zweiges sein, damit die übrige Volkswirtschaft die Finalproduktion

$$\underline{y}^T = (200 \quad 500 \quad 800) \qquad \text{erhalten kann?}$$

6.3. Unter der gleichen Annahme wie in 6.2. ist zu klären, wie groß die Finalproduktion y_i jedes Erzeugnisses ist, wenn die Gesamtproduktion $\underline{x}^T = (1000 \quad 820 \quad 1440)$ beträgt.

7. Zwei Wirtschaftszweige sind durch folgende Verflechtungsmatrix miteinander verflochten:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Außerdem erhalten diese Zweige für ihre Produktion folgende Lieferungen von Dritten (in Werteinheiten [WE]).

	Zweig 1	Zweig 2
Lieferung 1	10	80
Lieferung 2	40	40

7.1. Welche Gesamtproduktion ist in den zwei Zweigen erforderlich, wenn im kommenden Planjahr der 1. Zweig 100 [WE] und der 2. Zweig 120 [WE] an Dritte liefern soll?

7.2. Welche Produktionsmengen (x_{ij}) müssen dabei unter den Zweigen ausgetauscht werden?

7.3. Wie groß müssen die Gesamtlieferungen Dritter sein, wenn im vergangenen Jahr der 1. Zweig 116 [WE] und der 2. Zweig 80 [WE] an Dritte leisteten?

8. Gegeben ist folgende Ausgangsinformation für eine volkswirtschaftliche Verflechtungsbilanz für ein Basisjahr. Für das Planjahr soll davon ausgegangen werden, daß die Produktion im Zweig 1 um 25 % und im Zweig 2 um 300 Einheiten gesteigert wird. Der Export des Zweiges 3 soll um 100 Einheiten erhöht werden bei gleichzeitiger Reduzierung der sonstigen Endverwendung um 51 Einheiten.

	Zweig 1	Zweig 2	Zweig 3	Export	Sonstige Endverwendungen	
Zweig 1	0	180	240	500	280	1200
Zweig 2	480	0	300	50	70	900
Zweig 3	324	225	0	700	251	1500
Import	200	180	500			
Sonstiges Aufkommen	196	315	460			

Zu berechnen sind:

8.1. die Gesamtproduktion des Zweiges 3 für das Planjahr.

8.2. die gesamte Endverwendung (Export und sonstige Endverwendung) der Zweige 1 und 2.

8.3. Wie verändern sich die sonstigen Endverwendungen in den Zweigen 1 und 2, wenn vorausgesetzt wird, daß der Export dieser Zweige konstant gehalten wird?

8.4. Wie verändert sich das gesamte Importvolumen im Planjahr gegenüber dem Basisjahr?

9. Die Verflechtung zwischen sieben Wirtschaftszweigen ist durch folgende Tabelle gegeben.

	1	2	3	4	5	6	7		Exp.	So	$\underline{y}$	$\underline{x}$
1	660	96	136	175	84	300	216	1667	600	2133	2733	4400
2	264	416	102	140	105	200	756	1983	300	917	1217	3200
3	220	128	578	210	84	500	1296	3016	50	334	384	3400
4	352	32	510	385	252	400	648	2579	400	521	921	3500
5	88	160	34	315	420	100	540	1657	50	393	443	2100
6	396	320	204	245	126	400	864	2555	300	2145	2445	5000
7	44	256	306	35	84	250	1188	2163	700	7937	8637	10800
Import	176	192	68	70	105	450	216					

9.1. Ermitteln Sie unter Nutzung der Kleinrechentechnik die Matrix $\underline{M}$ der Verflechtungskoeffizienten, und geben Sie m_{25} und m_{63} an!

9.2. Die Verflechtung zwischen den Zweigen möge im folgenden Jahr die gleiche wie im Basisjahr sein. Wie groß muß dann die Gesamtproduktion x_i jedes Zweiges sein, damit die übrige Volkswirtschaft die Finalproduktion

$$\underline{y}^T = (2813 \quad 1196 \quad 266 \quad 1005 \quad 423 \quad 419 \quad 8822)$$

erhalten kann?

9.3. Wie entwickeln sich der Export und die Sonstige Endverwendung in den einzelnen Zweigen, wenn von der in 9.2. ermittelten Gesamtproduktion ausgegangen wird?

9.4. Berechnen Sie die Verflechtungstabelle für das Planjahr!

9.5. Wie entwickeln sich Export, Import und Außenhandelssaldo im Planjahr im Vergleich zum Basisjahr?

1.5. Rang von Vektorsystemen und Matrizen

1.5.1. Beispiele

1. Aus den Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ist eine konvexe Linearkombination (LK)

$$\underline{a}_4 = w_1\underline{a}_1 + w_2\underline{a}_2 + w_3\underline{a}_3$$

zu bilden, bei der die Skalare w_i der Bedingung $w_1 : w_2 : w_3 = 3 : 2 : 5$ genügen.

Da für eine konvexe LK die Bedingungen $\sum\limits_i w_i = 1$ und $0 \leq w_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt sein müssen, folgt mit $3 + 2 + 5 = 10$ $w_1 = 3/10$, $w_2 = 2/10$ und $w_3 = 5/10$. Daher gilt:

$$\underline{a}_4 = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{10}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -31 \\ 29 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}1 \\ 2{,}9 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben sind fünf Vektoren des R^3:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2.1. Bestimmen Sie w_1 und w_2 so, daß $w_1\underline{a}_1 + w_2\underline{a}_2 = \underline{a}_4$ ist.

2.2. Bestimmen Sie w_1, w_2 und w_3 so, daß

$$w_1\underline{a}_1 + w_2\underline{a}_2 + w_3\underline{a}_3 = \underline{a}_5 \quad \text{ist.}$$

2.3. Prüfen Sie, ob sich aus $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_4$

$$w_1\underline{a}_1 + w_2\underline{a}_2 + w_4\underline{a}_4 = \underline{a}_5$$

bilden läßt. Kann man die unter 2.1. und 2.2. gewonnenen Ergebnisse dabei verwenden?

BV	w_1	w_2	w_o	$-\uparrow$
	1	2	4	*
	3	-1	5	-3
	2	4	8	-2
w_1	1	2	4	-2
	0	-7	-7	*
	0	0	0	0
w_1	1	0	2	
w_2	0	1	1	
	0	0	0	

Zu 2.1. Zur Bestimmung von w_1 und w_2 wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 &= 4 \\ 3w_1 - w_2 &= 5 \\ 2w_1 + 4w_2 &= 8 \end{aligned}$$

mit der Basistransformation gelöst. Die dritte Gleichung ist für die Ermittlung von $w_1 = 2$ und $w_2 = 1$ nicht erforderlich. Es gilt

$$\underline{a}_4 = 2\underline{a}_1 + \underline{a}_2 .$$

BV	w_1	w_2	w_3	w_o	$-\uparrow$
	1	2	5	0	*
	3	-1	2	6	-3
	2	4	-3	13	-2
w_1	1	2	5	0	-2
	0	-7	-13	6	*
	0	0	-13	13	0
w_1	1	0	9/7	12/7	-9/7
w_2	0	1	13/7	-6/7	-13/7
	0	0	-13	13	*
w_1	1	0	0	3	
w_2	0	1	0	1	
w_3	0	0	1	-1	

Zu 2.2. Zur Bestimmung von w_1, w_2 und w_3 wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + 5w_3 &= 0 \\ 3w_1 - w_2 + 2w_3 &= 6 \\ 2w_1 + 4w_2 - 3w_3 &= 13 \end{aligned}$$

gelöst.

Die Lösung ergibt:

$$\underline{a}_5 = 3\underline{a}_1 + \underline{a}_2 - \underline{a}_3 .$$

BV	w_1	w_2	w_3	w_o	$-\uparrow$
	1	2	4	0	*
	3	-1	5	6	-3
	2	4	8	13	-2
w_1	1	2	4	0	-2
	0	-7	-7	6	*
	0	0	0	13	0
w_1	1	0	2	-12/7	
w_2	0	1	1	-6/7	
	0	0	0	13	

Zu 2.3. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + 4w_3 &= 0 \\ 3w_1 - w_2 + 5w_3 &= 6 \\ 2w_1 + 4w_2 + 8w_3 &= 13 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Basistransformation führt zu dem Ergebnis, daß ein Widerspruch im Gleichungssystem vorhanden ist und folglich keine Lösung existiert. Dieses Ergebnis kann man auch aus den Ergebnissen von 2.1. und 2.2. ableiten. Aus 2.1. ergibt sich, daß $\underline{a}_4$ eine Linearkombination von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ ist, d. h., alle drei Vektoren liegen in einer Ebene. Aus 2.2. ergibt sich wegen $w_3 = -1 \neq 0$, daß $\underline{a}_5$ nicht in der durch $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ aufgespannten Ebene liegt und daher nicht als Linearkombination von Vektoren dieser Ebene dargestellt werden kann.

3. Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}_1^T = (1 \quad 3 \quad 4)$, $\underline{a}_2^T = (0 \quad 2 \quad 1)$, $\underline{a}_3^T = (1 \quad 5 \quad 5)$ und $\underline{a}_4^T = (5 \quad 9 \quad 3)$.
Die aus den Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$; $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$; $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ und $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ gebildeten Vektorsysteme sind auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit zu untersuchen.
Hat man wie hier mehrere Vektorsysteme zu untersuchen, so löst man das zugehörige homogene Gleichungssystem für alle vier Vektoren. Eine gesonderte Spalte für w_0 ist hier nicht erforderlich, da dort immer nur der Nullvektor zu notieren wäre. Aus Tableau III ergibt sich, daß w_3 nicht Basisvariable werden kann, weil das Hauptelement 0 ist. Das Vektorsystem $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ ist linear abhängig.

	BV	w_1	w_2	w_3	w_4	$-\uparrow$
		1	0	1	5	*
I		3	2	5	9	-3
		4	1	5	3	-4
	w_1	1	0	1	5	0
II		0	2	2	-6	*
		0	1	1	-17	-1
	w_1	1	0	1	5	-5
III	w_2	0	1	1	-3	3
		0	0	0	-14	*
	w_1	1	0	1	0	
IV	w_2	0	1	1	0	
	w_4	0	0	0	1	

Die Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems $\underline{A}\,\underline{w} = \underline{0}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} w_3 \quad \text{mit } w_3 = 1,$$

also $w_1 = -1$ und $w_2 = -1$. Man prüft leicht

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Tableau III ist weiter ersichtlich, daß w_4 Basisvariable werden kann, d. h., das Vektorsystem $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$ ist linear unabhängig. Da im Tableau IV in der Spalte w_3 zwei von Null verschiedene Elemente stehen, kann ein Tausch von w_1 bzw. w_2 gegen w_3 ohne weiteres vorgenommen werden. Die Vektorsysteme $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ und $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ sind also beide linear unabhängig, denn das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, d. h., es existiert nur die Triviallösung.

4. Es ist der Rang des Vektorsystems

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$-\uparrow$
I		-1	3	2	-1	*
		4	-11	-10	5	-4
		2	-5	-6	3	-2
II	x_1	1	-3	-2	1	3
		0	1	-2	1	*
		0	1	-2	1	-1
III	x_1	1	0	-8	4	-4
	x_2	0	1	-2	1	*
		0	0	0	0	0
IV	x_1	1	4	0	0	
	x_4	0	1	-2	1	
		0	0	0	0	

Ein Vektorsystem aus vier (m) Vektoren des $R^3(R^n)$ ist wegen $m > n$ auf jeden Fall linear abhängig. Zur Rangbestimmung reicht diese Aussage aber nicht aus, sondern es muß die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des Vektorsystems bestimmt werden, was mit Hilfe der Basistransformation erfolgt. Es lassen sich nur zwei Schritte durchführen, d. h., der Rang (Zahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren) ist gleich zwei. Aus dem Tableau ergeben sich auch Schlüsse über Teilsysteme des zu untersuchenden Vektorsystems. Im Tableau III sind in den Spalten x_3 und x_4 die beiden ersten Elemente $\neq 0$. Es ist also möglich, x_3 oder x_4 gegen x_1 oder x_2 zu tauschen und zur Basisvariablen zu machen. Neben $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ sind also auch $\underline{a}_1$, $\underline{a}_3$; $\underline{a}_1$, $\underline{a}_4$; $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ und $\underline{a}_2$, $\underline{a}_4$ linear unabhängig. Tauscht man z. B. x_4 gegen x_2 aus, so zeigt das entstehende Tableau IV, daß ein Austausch von x_1 gegen x_3 nicht möglich ist. Das Vektorsystem $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ ist linear abhängig.

5. Der Rang der Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

ist in Abhängigkeit vom Parameter λ zu bestimmen.

	BV	x_1	x_2	x_3	- ↑
		1	2	0	*
I		3	7	1	-3
		2	-1	-5	-2
		-1	5	λ	1
	x_1	1	2	0	-2
II		0	1	1	*
		0	-5	5	5
		0	7	λ	-7
	x_1	1	0	-2	
III	x_2	0	1	1	
		0	0	0	
		0	0	$\lambda - 7$	

Die Koeffizienten der Matrix werden der Basistransformation unterworfen. Aus Tableau III ist ersichtlich, daß bei $\lambda = 7$ gilt: $r(\underline{A}) = 2$ und bei $\lambda \neq 7$ $r(\underline{A}) = 3$. Für die Rechnung mit Parametern ist es günstig, sie gegebenenfalls durch Vertauschung von Zeilen und Spalten in die untere rechte Ecke zu bringen.

1.5.2. Übungsaufgaben

1. Aus den Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -24 \end{pmatrix}$$

sind mit den Skalaren

	w_1	w_2	w_3	w_4
a)	3	-2	4	1
b)	1/2	0	1/3	1/6
c)	1	2	3	1/3

die Linearkombinationen $\underline{a}_5$, $\underline{a}_6$ und $\underline{a}_7$ zu bilden, und es ist zu bestimmen, welche dieser Linearkombinationen nicht negativ bzw. konvex sind!

2. Gegeben sind die sechs Vektoren des R^3:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_6 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2.1. Prüfen Sie, ob sich Zahlen w_1 und w_2 finden lassen, so daß
$w_1\underline{a}_1 + w_2\underline{a}_2 = \underline{a}_5$ gilt.

2.2. Bestimmen Sie die Zahlen w_1, w_2 und w_3, für die gilt:

$w_1\underline{a}_1 + w_2\underline{a}_2 + w_3\underline{a}_3 = \underline{a}_4$.

2.3. Bestimmen Sie die Zahlen w_1, w_2 und w_4 so, daß $\underline{a}_6$ eine Linearkombination der Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_4$ ist.

2.4. Läßt sich eine Zahl w_6 finden, so daß $\underline{b} = w_6\underline{a}_6$ eine konvexe Linearkombination von $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_4$ ist?

3. Gegeben sind die Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3.1. Es sind die Vektorsysteme $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ und $\underline{a}_1$, $\underline{a}_3$, $\underline{a}_4$ auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen.

3.2. Es sind die Ergebnisse von 3.1 zu nutzen, um zu entscheiden, ob sich $\underline{a}_3$ als Linearkombination von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ bzw. von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_4$ darstellen läßt.

4. Es ist der Rang des Vektorsystems

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen und die Teilsysteme auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit zu untersuchen. Läßt sich $\underline{a}_3$ als Linearkombination von $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_4$ darstellen?

5. Es ist der Rang des Vektorsystems

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3\lambda \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter λ zu bestimmen.

6. Für die Matrizen

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 18 \\ 5 & -17 & 26 & 39 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 & 25 \\ 2 & 15 & -10 & 37 \\ -1 & -9 & 17 & 1 \\ 0 & 3 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

soll der Rang bestimmt werden.

7. Für welchen Wert von λ ergibt sich für

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 16 & -8 & 23 \\ 2 & 7 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$$

der minimale Rang?

1.6. Lösung von Gleichungssystemen

Obgleich der Umfang der Aufgaben aus didaktisch-methodischen Gründen so gewählt wurde, daß eine Ermittlung der Lösung ohne Rechner zumutbar ist, wird empfohlen, die Aufgaben auch unter Nutzung von Kleinrechnern zu lösen.
Dabei sollten Sie zusätzlich z. B. sämtliche existierenden Basislösungen bestimmen und Parameteränderungen so vornehmen, daß sich die Struktur der allgemeinen Lösung ändert.
Vor der Berechnung sollten Sie überprüfen, ob sich aus der Theorie der Gleichungssysteme von vornherein Aussagen ableiten lassen, die durch die Rechnung lediglich bestätigt werden müssen.

1.6.1. Beispiele

Der Hauptfall eines linearen quadratischen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Variablen und dem Maximalrang wurde bereits im Abschnitt Basistransformation am Beispiel erörtert. Hier steht der allgemeine Fall im Vordergrund, der zuerst an einigen Beispielen demonstriert wird.

1. Es ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 - 7x_2 - 13x_3 + 3x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 11x_2 + 18x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

auf Lösbarkeit zu untersuchen und gegebenenfalls die allgemeine Lösung anzugeben.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o	$-\downarrow$
	1	3	6	-1	3	*
	-2	-7	-13	3	-4	2
	3	11	18	4	1	-3
x_1	1	3	6	-1	3	-3
	0	-1	-1	1	2	*
	0	2	0	7	-8	-2
x_1	1	0	3	2	9	-3
x_2	0	1	1	-1	-2	-1
	0	0	-2	9	-4	*
x_1	1	0	0	31/2	3	
x_2	0	1	0	7/2	-4	
x_3	0	0	1	-9/2	2	

Mit Hilfe der Basistransformation erhält man nach drei Schritten die Aussage der Lösbarkeit des Gleichungssystems ($r(\underline{A}) = r(\underline{A}, \underline{b}) = 3$) und die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 31/2 \\ 7/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} x_4 .$$

Setzt man für x_4 einen beliebigen Wert ein, so erhält man eine spezielle Lösung des Gleichungssystems. Für $x_4 = 2$ ergibt sich $x_1 = -28$, $x_2 = -11$, $x_3 = 11$.
Die Basislösung mit den BV x_1,

x_2 und x_3 erhält man, wenn man $x_4 = 0$ setzt: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$. Da alle Elemente in der Spalte der Nichtbasisvariablen $x_4 \neq 0$ sind, läßt sich x_4 zur Gewinnung einer Basislösung gegen jede beliebige BV (x_1, x_2 oder x_3) austauschen.

2. Untersuchen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= 58 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= -5 \\ -x_1 + 8x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= 63 \end{aligned}$$

auf Lösbarkeit. Es ist gegebenenfalls die allgemeine Lösung anzugeben und eine Tabelle der Basislösungen.

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	$-\uparrow$
		2	4	-4	-2	58	*
I		3	-4	1	3	-5	-3
		-1	8	-5	-5	63	1
	x_1	1	2	-2	-1	29	-2
II		0	-10	7	6	-92	*
		0	10	-7	-6	92	-10
	x_1	1	0	-0,6	0,2	10,6	
III	x_2	0	1	-0,7	-0,6	9,2	
		0	0	0	0	0	

Es lassen sich nur zwei Schritte ausführen. Aus dem Tableau III folgt $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 2$. Also ist die dritte Gleichung überflüssig, und das System ist lösbar. Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,6 \\ 9,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,6 \\ -0,7 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 0,2 \\ -0,6 \end{pmatrix} x_4$$

und hat also zwei Freiheitsgrade. Es gibt maximal $\binom{4}{2} = 6$ Basislösungen.

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	$-\uparrow$
	x_3	-5/3	0	1	-1/3	-53/3	
IVa	x_2	-7/6	1	0	-5/6	-19/6	
		0	0	0	0	0	
	x_4	5	0	-3	1	53	
IVb	x_2	3	1	-5/2	0	41	
		0	0	0	0	0	
	x_1	1	-6/7	0	5/7	19/7	
IVc	x_3	0	-10/7	1	6/7	-92/7	
		0	0	0	0	0	
	x_1	1	1/3	-5/6	0	41/3	*
IVd	x_4	0	-5/3	7/6	1	-46/3	-7/6
		0	0	0	0	0	0
	x_3	-6/5	-2/5	1	0	-82/5	
	x_4	7/5	-6/5	0	1	19/5	
		0	0	0	0	0	

Die aus Tableau III abzulesende Basislösung lautet $x_1 = 10,6$, $x_2 = 9,2$. Von Tableau III lassen sich vier weitere Basislösungen ermitteln, wenn jeweils die Basistransformation

x_1 gegen x_3, x_1 gegen x_4, x_2 gegen x_3 und x_2 gegen x_4 realisiert werden. Vom Tableau IVd ausgehend, wird die Basislösung mit x_3 und x_4 als Basisvariable errechnet.

Die Tabelle der Basislösungen lautet:

	1	2	3	4	5	6
x_1	53/5	0	0	19/7	41/3	0
x_2	46/5	-19/6	41	0	0	0
x_3	0	-53/3	0	-92/7	0	-82/5
x_4	0	0	53	0	-46/3	19/5

3. Es ist das überbestimmte homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{{}- x_4} &= 0 \\
x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\
-x_1 - x_2 \phantom{{}- 3x_3} - x_4 &= 0
\end{aligned}$$

zu lösen.

Die Lösung wird mit Hilfe der Basistransformation durchgeführt. Die Spalte für x_0 wird hier nicht mitgeführt. Nach drei Schritten ergibt sich der Rang $r(\underline{A}) = 3$. Die allgemeine Lösung weist also $n - r = 4 - 3 = 1$ Freiheitsgrad auf. Sie lautet:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$-\uparrow$
	1	1	1	-1	*
	3	1	-2	-1	-3
	2	2	1	0	-2
	1	-1	-3	-1	-1
	-1	-1	0	-1	1
x_1	1	1	1	-1	-1
	0	-2	-5	2	*
	0	0	-1	2	0
	0	-2	-4	0	2
	0	0	1	-2	0

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	$-\uparrow$
x_1	1	0	-3/2	0	3/2
x_2	0	1	5/2	-1	-5/2
	0	0	-1	2	*
	0	0	1	-2	-1
	0	0	1	-2	-1
x_1	1	0	0	-3	
x_2	0	1	0	4	
x_3	0	0	1	-2	
	0	0	0	0	
	0	0	0	0	

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} x_4$$

4. Diskutieren Sie die Lösungsmöglichkeiten des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= c \\
x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= c \\
\lambda x_1 + x_2 + x_3 &= c \ .
\end{aligned}$$

$c \neq 0$ für die Werte des Parameters λ, und geben Sie für die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten die Lösungen an.

	BV	x_1	x_2	x_3	x_0	- ♦
		1	1	λ	c	*
I		1	λ	1	c	-1
		λ	1	1	c	$-\lambda$
	x_1	1	1	λ	c	-1
II		0	$\lambda-1$	$1-\lambda$	0	*
		0	$1-\lambda$	$1-\lambda^2$	$c(1-\lambda)$	$\lambda-1$
	x_1	1	0	$\lambda+1$	c	$-(\lambda+1)$
III	x_2	0	1	-1	0	1
		0	0	$(1-\lambda)(2+\lambda)$	$c(1-\lambda)$	*
	x_1	1	0	0	$c/(\lambda+2)$	
IV	x_2	0	1	0	$c/(\lambda+2)$	
	x_3	0	0	1	$c/(\lambda+2)$	

Unabhängig von der Größe des Parameters λ läßt sich ein Schritt in der Basistransformation durchführen. Der Übergang von Tableau II zu Tableau III setzt aber voraus, daß das Hauptelement $\neq 0$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\lambda \neq 1$ ist (unabhängig von der Wahl des Hauptelements).

Für $\lambda = 1$ gilt $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 1$, d. h., es wird nur die erste Gleichung für die Lösung in Betracht gezogen, denn die beiden anderen sind überflüssig. $x_1 = c - x_2 - x_3$. Die Lösung hat zwei Freiheitsgrade. Für $\lambda \neq 1$ kommt man zu Tableau III. Für $\lambda = -2$ wird das einzige als Hauptelement in Frage kommende Element Null. Dann gilt $r(\underline{A}) = 2$, aber $r(A,b) = 3$, d. h., das System ist unlösbar. Für $\lambda \neq -2$ kommt man zu Tableau IV und liest als Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = c/(\lambda+2)$ ab, d. h. $\forall \lambda \neq -2$ ergibt sich eine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem.

1.6.2. Übungsaufgaben

Untersuchen Sie folgende lineare Gleichungssysteme!

a) Ist das Gleichungssystem lösbar?

b) Falls es lösbar ist, geben Sie die allgemeine Lösung und gegebenenfalls eine spezielle Lösung an.

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= -11 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -25 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 9x_1 + 8x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 14 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= -11 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= -11 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= -6 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 &= 24 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 19 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 9x_2 - 6x_3 - 7x_4 &= 22 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 16x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 9x_2 - 24x_3 &= 3 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 8 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 22 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 62 \\ 4x_1 + 11x_2 + 4x_3 &= 84 \end{aligned}$$

Überlegen Sie, ob bei dieser Aufgabe gegebenenfalls alle Basislösungen existieren. Versuchen Sie, diese Aussage aus der berechneten Lösung abzuleiten.

12. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -4 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 34 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 48 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Überprüfen Sie die Lösbarkeit der nachfolgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit vom Wert des Parameters λ.
Im Falle der Lösbarkeit ermitteln Sie die allgemeine Lösung!

19. $$\begin{aligned} 2\lambda x_1 + 2x_2 &= 20 \\ 4x_1 + x_2 &= 28 \end{aligned}$$

Hinweis: Vor Durchführung der Basistransformation Gleichungen und Variablen vertauschen.

20. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Vor Durchführung der Basistransformation sind die beiden ersten Gleichungen zu vertauschen.

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungssysteme

21. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= a \end{aligned}$$

für die Fälle a) $a = 0$, b) $a = 1$, und diskutieren Sie die Ergebnisse.

22. $$\begin{aligned} 13x_1 - 4x_2 &= 104 \\ 8x_1 + 5x_2 &= -33 \\ -3x_1 + x_2 &= \lambda \end{aligned}$$

23. Für welchen Wert von λ wird das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \lambda x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

unlösbar? Durch welche Zahl muß die 8 auf der rechten Seite der letzten Gleichung ersetzt werden, damit für den gefundenen Wert von λ das Gleichungssystem wieder lösbar wird?

24. Die Größe λ ist so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda x_1 \\ bx_1 + cx_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}$$

mit $a, b, c \in R$ eine vom Nullvektor verschiedene Lösung haben.

1.7. Lösung von linearen Ungleichungssystemen

1.7.1. Beispiele

Die hier behandelte Problematik ist als Vorstufe zur linearen Optimierung zu sehen. Daher kann das dort gebotene Übungsmaterial zum Teil in diesem Abschnitt genutzt werden.

Wir beschränken uns auf die Lösung von normalen linearen Ungleichungssystemen $\underline{A}\ \underline{x} \leqq \underline{b},\ \underline{x} \geqq \underline{0},\ \underline{b} \geqq \underline{0}$.

1. Gegeben ist das normale lineare Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leqq 360 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leqq 330 \\ -x_1 + x_2 &\leqq 45 \qquad x_2 \leqq 60 \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

Da es sich um ein <u>normales</u> lineares Ungleichungssystem handelt ($\underline{b} \geqq \underline{0}$), existiert auf jeden Fall die Triviallösung $\underline{x} = \underline{0}$. Im Lösungsprozeß ist als erstes das Ungleichungssystem durch die Addition des Schlupfvektors $\underline{\tilde{x}}$ in die 1. Normalform, also in ein Gleichungssystem, überführt.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} 3x_1 & + 4x_2 & + x_3 & & & & = 360 & \\ 4x_1 & + 2x_2 & & + x_4 & & & = 330 & \\ -x_1 & + x_2 & & & + x_5 & & = 45 & \\ & x_2 & & & & + x_6 & = 60 & x_j \geqq 0 \\ & & & & & & & j = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

Ausgehend von der Triviallösung als erster zulässiger Basislösung, werden mit Hilfe der Basistransformation weitere zulässige Basislösungen generiert. Durch geeignete Wahl des Hauptelementes (Leitelementes) wird dafür Sorge getragen, daß man im Bereich der zulässigen Basislösungen bleibt. Neu gegenüber dem Vorgehen beim Übergang von einer kanonischen Form zu einer anderen sind:

1. Das Hauptelement kann nicht in einer Spalte ausgewählt werden, deren Variable im vorangehenden Schritt Nichtbasisvariable geworden war, denn das würde zu einer bereits berechneten zulässigen Basislösung zurückführen.

2. Beachtung der Zulässigkeit der Basislösung: Notwendig für das Verbleiben im Bereich der zulässigen Basislösungen ist die Wahl eines positiven Hauptelementes ($a_{ij} > 0$), hinreichend die Wahl des minimalen Quotienten

$$\min_i \left(\frac{b_i}{a_{ij}},\ a_{ij} > 0 \right).$$

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	Q	- ↑
	x_3	3	4	1	0	0	0	360	120 *	-3
←	x_4	4	2	0	1	0	0	330	165/2	*
I	x_5	-1	1	0	0	1	0	45	-	1
	x_6	0	1	0	0	0	1	60	-	0
←	x_3	0	5/2	1	-3/4	0	0	225/2	45*	*
→	x_1	1	1/2	0	1/4	0	0	165/2	165	-1/2
II	x_5	0	3/2	0	1/4	1	0	255/2	255/3	-3/2
	x_6	0	1	0	0	0	1	60	60	-1
→	x_2	0	1	2/5	-3/10	0	0	45	-	3/10
	x_1	1	0	-1/5	4/10	0	0	60	150	-4/10
III	x_5	0	0	-3/5	7/10	1	0	60	600/7	-7/10
←	x_6	0	0	-2/5	3/10	0	1	15	50*	*
	x_2	0	1	0	0	0	1	60	-	0
	x_1	1	0	1/3	0	0	-4/3	40	120	-1/3
IV ←	x_5	0	0	1/3	0	1	-7/3	25	75*	*
→	x_4	0	0	-4/3	1	0	10/3	50	-	4/3
	x_2	0	1	0	0	0	1	60	60	-1
←	x_1	1	0	0	0	-1	1	15	15*	*
V →	x_3	0	0	1	0	3	-7	75	-	7
	x_4	0	0	0	1	4	-6	150	-	6
	x_2	-1	1	0	0	1	0	45		
→	x_6	1	0	0	0	-1	1	15		
VI	x_3	7	0	1	0	-4	0	180		
	x_4	6	0	0	1	-2	0	240		

Als erste BV wird x_1 gewählt und $Q = \frac{b_i}{a_{i1}}$ berechnet, wobei die Bedingung $a_{ij} > 0$ zu berücksichtigen ist. Nach dem Auswahlkriterium minimaler Quotient wird x_4 NBV. Die Durchführung der Basistransformation führt zu II, wobei kenntlich gemacht wird, daß x_1 in diesem Schritt in die Basis gekommen ist und nicht sofort wieder ausgetauscht werden darf. Daher muß in II die NBV x_2 für die Aufnahme gewählt werden. Dann wird x_3 NBV werden, was wiederum kenntlich gemacht wird. Im Tableau III muß x_4 für die Aufnahme in die Basis gewählt werden (bei x_3 würde Rückkehr zu Tableau II erfolgen). Bei Übergang zum Tableau IV erfolgt der Tausch von x_6 gegen x_4 als BV. Im Tableau IV muß x_3 als BV für das nächste

Tableau vorgesehen werden (die Wahl von x_6 führt zu Tableau III zurück). Dann wird mit dem Übergang zu Tableau V x_5 als BV ausscheiden. In Tableau V wird aus den gleichen Gründen x_6 als BV für die Basislösung in Tableau VI gewählt. Dabei scheidet x_1 aus dem Kreis der BV aus. Mit Tableau VI sind alle zulässigen Basislösungen des vorgelegten Ungleichungssystems berechnet, denn die Aufnahme von x_1 als BV würde zu Tableau III und die Aufnahme von x_5 zu Tableau I führen.

Die Tabellen der zulässigen Basislösungen für die 1. bzw. 2. Normalform lauten:

	1	2	3	4	5	6
x_1	0	165/2	60	40	15	0
x_2	0	0	45	60	60	45
x_3	360	225/2	0	0	75	180
x_4	330	0	0	50	150	240
x_5	45	255/2	60	25	0	0
x_6	60	60	15	0	0	25

	1	2	3	4	5	6
x_1	0	165/2	60	40	15	0
x_2	0	0	45	60	60	45

Die allgemeinen Lösungen lauten für die 1. Normalform:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 360 \\ 330 \\ 45 \\ 60 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 165/2 \\ 0 \\ 225/2 \\ 0 \\ 255/2 \\ 60 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 60 \\ 15 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 0 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \\ 75 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ w_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 180 \\ 240 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

und für die 2. Normalform:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 165/2 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 15 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$+ w_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

jeweils mit $\sum_{i=1}^{6} w_i = 1$ und $w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$

1.7.2. Übungsaufgaben

Es ist die allgemeine Lösung der normalen Ungleichungssysteme

1. $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq 30 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 21 \\ x_1,\quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 48 \\ -x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1 - x_2 &\leq 12 \\ x_1,\quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

für die 2. Normalform anzugeben.

1.8. Zur Vertiefung der Theorie

Zeigen Sie:

1. Ist das Produkt zweier Matrizen $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ kommutativ, so sind $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ quadratisch und vom gleichen Typ. Gilt auch die Umkehrung?

2. Ist $\underline{A}$ eine Diagonalmatrix und sind alle Elemente in der Hauptdiagonalen von $\underline{A}$ voneinander verschieden, so ist jede Matrix $\underline{B}$, deren Produkt mit $\underline{A}$ kommutativ ist, ebenfalls eine Diagonalmatrix.

3. Ein Vektorsystem $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, ... $\underline{a}_n$, in dem ein beliebiger Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, ist linear abhängig.

4. Ist ein Teilsystem eines Vektorsystems linear abhängig, so ist auch das gesamte Vektorsystem linear abhängig.

5. Sind drei Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ linear abhängig und $\underline{a}_3$ läßt sich nicht durch eine Linearkombination von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ darstellen, so unterscheiden sich $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ nur durch einen konstanten Faktor.

6. Sind die Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ linear unabhängig, die Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ und $\underline{a}_4$ aber linear abhängig, so läßt sich $\underline{a}_4$ als Linearkombination von $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ darstellen.

7. Es sei eine Matrix mit m Zeilen und dem Rang r gegeben. Eine beliebige Auswahl von s Zeilen ergibt eine Matrix, deren Rang nicht kleiner als r + s - m ist.

8. Eine Matrix $\underline{A}$ mit dem Rang r kann durch äquivalente Transformationen so umgeformt werden, daß eine Matrix $\underline{B}$ mit den Elementen $b_{11} = b_{22} = \ldots\ldots = b_{rr} = 1$ und allen anderen Elementen gleich Null entsteht.

9. Wenn $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$ und $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ vom Typ (m, n), so gilt $r(\underline{C}) \leq r(\underline{A}) + r(\underline{B})$.

10. Eine Matrix vom Rang r läßt sich als Summe von r Matrizen und dem Rang 1 darstellen. Weniger als r Matrizen und dem Rang 1 genügen für eine solche Darstellung nicht.

11. Es seien die Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$ gegeben, die die gleiche Zeilenzahl haben.
    Es sei $\underline{C} = (\underline{A}\ \underline{B})$.
    Wenn $r(\underline{C}) = r(\underline{A})$, dann muß gelten $r(\underline{A}) \geqq r(\underline{B})$.

12. Wie verändert sich das Produkt zweier verkettbarer Matrizen $\underline{A}$ und $\underline{B}$, wenn

    12.1. in $\underline{A}$ die i-te und die j-te Zeile miteinander vertauscht werden,

    12.2. in $\underline{A}$ die mit der Zahl $c \neq 0$ multiplizierte j-te Zeile zur i-ten Zeile addiert wird,

    12.3. in $\underline{B}$ die k-te und die l-te Spalte miteinander vertauscht werden?

13. Wie verändert sich die zu Matrix $\underline{A}$ inverse Matrix $\underline{A}^{-1}$, wenn in $\underline{A}$

    13.1. die i-te und die j-te Zeile untereinander vertauscht werden,

    13.2. die mit der Zahl $c \neq 0$ multiplizierte i-te Zeile zur j-ten Zeile addiert wird,

    13.3. die i-te Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$ multipliziert wird?

1.9. Lösungen der Übungsaufgaben zu Abschnitt 1.

Lösungen zu 1.1.2.

1.a)

BV	x_1	x_2	x_o	$-\uparrow$
	4	5	3	*
	2	3	-5	-2
x_1	1	5/4	3/4	-5/4
	0	1/2	-13/2	*
x_1	1	0	17	
x_2	0	1	-13	

$x_1 = 17, \quad x_2 = -13$

b)

BV	x_1	x_2	x_3	x_o	$-\uparrow$
	2	-1	-3	0	*
	-6	4	10	-2	6
	2	3	4	1	-2
x_1	1	-1/2	-3/2	0	1/2
	0	1	1	-2	*
	0	4	7	1	-4
x_1	1	0	-1	-1	1
x_2	0	1	1	-2	-1
	0	0	3	9	*
x_1	1	0	0	2	
x_2	0	1	0	-5	
x_3	0	0	1	3	

$x_1 = 2, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 3$

c)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o	$-\uparrow$
	1	2	4	-1	1	*
	-1	-3	-5	4	3	1
	2	5	-10	-12	3	-2
	3	2	7	10	4	-3
x_1	1	2	4	-1	1	-2
	0	-1	-1	3	4	*
	0	1	-18	-10	1	-1
	0	4	19	7	7	-4
x_1	1	0	2	5	9	-2
x_2	0	1	1	-3	-4	-1
	0	0	-19	-7	5	*
	0	0	15	19	23	-15
x_1	1	0	0	81/19	181/19	-81/19
x_2	0	1	0	-64/19	-71/19	64/19
x_3	0	0	1	7/19	-5/19	-7/19
	0	0	0	256/19	512/19	*
x_1	1	0	0	0	1	
x_2	0	1	0	0	3	
x_3	0	0	1	0	-1	
x_4	0	0	0	1	2	

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = -1$
$x_4 = 2$

d)

BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\uparrow$
	1	1	1	0	*
	1	2	3	11	-1
	-1	3	4	23	-
x_1	1	1	1	0	-1
	0	1	2	11	*
	0	4	5	23	-4
x_1	1	0	-1	-11	1
x_2	0	1	2	11	-2
	0	0	-3	-21	*
x_1	1	0	0	-4	
x_2	0	1	0	-3	
x_3	0	0	1	7	

$x_1 = -4$
$x_2 = -3$
$x_3 = 7$

2.

BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\uparrow$
	1	1	1	5	*
	2	-1	3	4	-2
x_1	1	1	1	5	-1
	0	-3	1	-6	*
x_1	1	0	4/3	3	-4/3
x_2	0	1	-1/3	2	*
x_1	1	4	0	11	*
x_3	0	-3	1	-6	3
x_2	1/4	1	0	11/4	
x_3	3/4	0	1	9/4	

Es gibt

$\binom{3}{2} = 3$ Basislösungen.

$x_1 = 3, \quad x_2 = 2,$
$x_1 = 11, \quad x_3 = -6,$
$x_2 = 11/4, \quad x_3 = 9/4$

3. Maximale Anzahl der Basislösungen ist 4. Bei der Berechnung mit Hilfe der Basistransformation kommt man nach drei Schritten zur Basislösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Aus der Spalte für x_4 ergibt sich, daß man lediglich x_1 mit x_4 vertauschen kann.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	$-\uparrow$
	1	1	1	1	6	*
	1	-1	1	1	2	-1
	1	-1	-1	1	-4	-1
x_1	1	1	1	1	6	-1
	0	-2	0	0	-4	*
	0	-2	-2	0	-10	2
x_1	1	0	1	1	4	-1
x_2	0	1	0	0	2	0
	0	0	-2	0	-6	*
x_1	1	0	0	1	1	*
x_2	0	1	0	0	2	0
x_3	0	0	1	0	3	0
x_4	1	0	0	1	1	
x_2	0	1	0	0	2	
x_3	0	0	1	0	3	

Der Übergang zum nächsten Tableau bringt die Basislösung $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$.
Weitere Basislösungen existieren nicht.

Lösungen zu 1.2.2.

1.
$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 20 \\ 6 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \underline{B}\,\underline{A} = \begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad \underline{A}^T\underline{B}^T = (\underline{B}\,\underline{A})^T = \begin{pmatrix} 24 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\underline{B}^T\underline{A}^T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 20 & 8 & 1 \end{pmatrix},\quad \underline{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \underline{B}^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$\underline{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \underline{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \underline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\quad (\underline{B}^{-1})^T = (\underline{B}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 10 & 7 \end{pmatrix},\quad (\underline{A}\,\underline{B})^T = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \underline{B}^T\underline{A}^T,\quad ((\underline{A}\,\underline{B})^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -5 \\ -11/2 & 8 \end{pmatrix}$$

3. $\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\underline{B}\,\underline{C} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\underline{A}\,\underline{C} = \begin{pmatrix}23&18&14\\-2&4&-4\\15&2&14\end{pmatrix}$,

$\underline{C}\,\underline{A} = \begin{pmatrix}7&-2&-9\\4&26&22\\-2&6&8\end{pmatrix}$, $\underline{B}\,\underline{A} = \begin{pmatrix}15&-18&-33\\-15&18&33\\15&-18&-33\end{pmatrix}$, $\underline{C}\,\underline{B} = \begin{pmatrix}6&-3&15\\-8&4&-20\\-4&2&-10\end{pmatrix}$

4. $\underline{A}\,\underline{B} = \begin{pmatrix}24&0&20\\6&3&8\\0&1&1\end{pmatrix}$, $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \begin{pmatrix}24&6&0\\0&3&1\\20&8&1\end{pmatrix}$, $\underline{B}^T\underline{A}^T = \begin{pmatrix}24&6&0\\0&3&1\\20&8&1\end{pmatrix}$

5.a) $\underline{A}^{-1} = 1/7\begin{pmatrix}5&-3\\-1&2\end{pmatrix}$, b) $\underline{A}^{-1} = -1/4\begin{pmatrix}4&0&-8\\0&-2&2\\-2&1&1\end{pmatrix}$,

c) $\det(\underline{A}) = \begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&5\\3&3&8\end{vmatrix} = 0$

damit existiert keine Inverse.

d) $\underline{A}^{-1} = -1/11\begin{pmatrix}-5&-3&9&2\\-6&3&2&-2\\-2&1&-3&3\\12&-6&-4&-7\end{pmatrix}$

6.a) $\left(\left((\underline{A}-\underline{B})\underline{B}^T\right)^T\right)^{-1} = \left[(\underline{B}\,\underline{A}^T) - (\underline{B}\,\underline{B}^T)\right]^{-1} = 1/9\begin{pmatrix}-3&0\\-2&-3\end{pmatrix}$

6.b) $\left(\left(\underline{A}\,(\underline{B}^T - \underline{A}^T)\right)^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix}1&1\\2&3/2\end{pmatrix}$

6.c) $\det(\underline{A}^T(\underline{A}-\underline{B})) = 0$, womit die Aufgabe nicht lösbar ist, da keine Inverse existiert.

7. $\underline{C} = \left(\begin{array}{cc|c}19&21&23\\30&17&49\\\hline 4&5&11\\13&13&19\end{array}\right)$

8. $\underline{C} = \left(\begin{array}{c|cc}35&47&47\\32&44&52\\\hline 43&42&48\\81&82&92\end{array}\right)$

Lösungen zu 1.3.2.

1. $\underline{X} = (\underline{A} - 2\underline{E} - \underline{A}^T)^{-1}\underline{B}\,\underline{B}^T$, $\underline{X} = -1/16\begin{pmatrix}4&20&-8\\-4&20&-16\\8&-24&152\end{pmatrix}$

2. $\underline{X} = (\underline{E} - \underline{D})\,(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}^T - \underline{E})^{-1}$, $\underline{X} = -1/75\begin{pmatrix}-12&21\\-34&22\end{pmatrix}$

Lösungen zu 1.4.2.

1. Lösungsansatz

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 5400 \\ 3780 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 299 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad x_1 = 299, \quad x_2 = 6$$

2. $$\frac{M}{RE} = \left\{ \left[(\underline{M}_1\underline{M}_2 + \underline{M}_{11})\, \underline{M}_3 + \underline{M}_1\underline{M}_8 \right] \underline{M}_4 + \underline{M}_1\underline{M}_{12} + (\quad)\, \underline{M}_{15} \right\} \underline{M}_5$$
$$+ \underline{M}_1\underline{M}_7 + [\quad]\, \underline{M}_{10} + (\quad)\, \underline{M}_{14}\; \underline{M}_6 + \underline{M}_1\underline{M}_{13} + [\quad]\, \underline{M}_9 \{\quad\}\, \underline{M}_{16}$$

$\frac{r}{R1} = \underline{r}_x + \underline{r}_y + \underline{r}_z + \underline{r}_v + \underline{r}_w + \underline{r}_e$ mit

$\underline{r}_x = \underline{M}_1\underline{x}$, $\underline{r}_y = (\quad)\underline{y}$, $\underline{r}_z = [\quad]\underline{z}$, $\underline{r}_v = \{\quad\}\underline{v}$, $\underline{r}_w = (\quad)\underline{w}$,

$r_e = \frac{M}{RE} \cdot \underline{e}$.

3. $0 \leqq e_3 \leqq 587{,}5$, $e_1 \geqq 0$, $e_2 \geqq 0$

4.1. $(\underline{w}^T\ \underline{m}^T) = (200\ 0\ 100\ 100 \quad 2600\ 3600\ 7200\ 4900)$

4.2. Es müssen die Koeffizienten a_{ik} bzw. b_{jk} berechnet werden.

$$\underline{V}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{V}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{V}_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Für die Berechnung von $(\underline{p}^T\underline{m}^T)$ ist $\underline{V}_{11}^{-1}$ und $\underline{V}_{21}\,\underline{V}_{11}^{-1}$ zu ermitteln.

$$\underline{V}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}5 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{V}_{21}\underline{V}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 3 & 5 & 16 \\ 4 & 4 & 6 & 22 \\ 6 & 2 & 10 & 30 \\ 5 & 2 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

$(\underline{p}^T\underline{m}^T) = (570\ 690\ 370\ 110 \quad 3010\ 4120\ 8000\ 5470)$

4.3. Volle Nutzung der Reserven bedeutet: $0{,}5\, w_1 + w_2 + w_3 + 4\, w_4 = 700$. (Zweite Zeile von $\underline{V}_{11}^{-1}$ ist mit $\underline{w}$ zu multiplizieren und muß gleich der verfügbaren Kapazität sein.) Mit $w_1 = 200$, $w_2 = 0$ und $w_4 = 110$ folgt $w_3 = 160$. Mit diesem $\underline{\tilde{w}}^T = (200\ 0\ 160\ 110)$ folgt als erforderliche Kapazität in

Abteilung 3: $(0\ 0\ 1\ 2)\ \tilde{\underline{w}} = 380$. Es muß also die Kapazität in A_3 um 10 ME erweitert werden.

5. $\underline{V}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \underline{V}_{21}\underline{V}_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 52 & 16 \\ 8 & 2 \\ 68 & 22 \end{pmatrix}$,

$(\underline{p}^T\underline{m}^T) = (360\ 1200\ \ 2400\ 5520\ 720\ 7520)$

6.1. Die Gesamtproduktion setzt sich aus den Lieferungen an andere Zweige und der Finalproduktion zusammen.

$$x_1 = 240 + 72 + 140 + 348 = 800$$
$$x_2 = 80 + 264 + 180 + 76 = 600$$
$$x_3 = 0 + 120 + 400 + 480 = 1000 \qquad \underline{x}^T = (800\quad 600\quad 1000)$$

6.2. $$\underline{M} = \begin{pmatrix} ^{240}/800 & ^{72}/600 & ^{140}/1000 \\ ^{80}/800 & ^{264}/600 & ^{180}/1000 \\ ^{0}/800 & ^{120}/600 & ^{400}/1000 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y}\ ,$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 2,1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,7 & 1,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 \\ 1670 \\ 1890 \end{pmatrix}$$

6.3. $$\underline{y} = (\underline{E} - \underline{M}) \cdot \underline{x}\ ,\ \underline{y} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,12 & -0,14 \\ -0,1 & 0,56 & -0,18 \\ 0 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 820 \\ 1440 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 700 \end{pmatrix}$$

7.1. $$\underline{x} = (\underline{E} - \underline{M})^{-1} \cdot \underline{y}\ , \quad (\underline{E} - \underline{M}) = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,4 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{E} - \underline{M})^{-1} = \frac{1}{0,37} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \frac{1}{0,37} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix}$$

7.2. Die Grundlage für die Berechnung ist die Formel $m_{ik} = \frac{M_{ik}}{x_k}$, wobei die m_{ik} aus der Aufgabenstellung bekannt sind und der $\underline{x}$-Vektor berechnet wird:

$$M_{ik} = m_{ik} \cdot x_k\ , \quad M_{11} = 20\ ,\ M_{12} = 80\ ,\ M_{21} = 80\ ,\ M_{22} = 200$$

7.3. Für das Basisjahr gilt: $\quad \underline{y} = \begin{pmatrix} 116 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Damit läßt sich $\underline{x}$ für das Basisjahr berechnen:

$$\underline{x} = \frac{1}{0,37}\begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 116 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich die Matrix der direkten äußeren Aufwendungen berechnen:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} {}^{10}/200 & {}^{80}/320 \\ {}^{40}/200 & {}^{40}/320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 & 1/4 \\ 1/5 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Schließlich gilt: $\underline{Q} \cdot \underline{x} = \underline{e}$, $\quad \underline{x}$: Planjahr.

$$\begin{pmatrix} 1/20 & 1/4 \\ 1/5 & 1/8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \end{pmatrix}$$

8. Nach Umformung und Einsetzen der Ausgangsinformationen folgt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -0,16 \\ 0 & -1 & -0,20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0,20 & 0 \\ 0,40 & -1 & 0 \\ 0,27 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -0,16 \\ 0 & -1 & -0,20 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0,20 & 0 \\ 0,40 & -1 & 0 \\ 0,27 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 987,2 \\ 259,96 \\ 1705 \end{pmatrix}$$

8.1. $x_3 = 1705 \qquad \underline{x}_p = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1705 \end{pmatrix}$

8.2. $y_1 = 987,2 \qquad y_2 = 259,96 \qquad \underline{y}_p = \begin{pmatrix} 987,2 \\ 259,96 \\ 1000 \end{pmatrix}$

8.3. Die sonstige Endverwendung des Zweiges 1 steigt von 280 um 207,2 auf 487,2, die des Zweiges 2 von 70 um 139,96 auf 209,96.

8.4. Import Planjahr:

$$I_p = \underline{i}_B^T \cdot \underline{x}_p = (0,167 \quad 0,200 \quad 0,333)\begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 1705 \end{pmatrix} = 1058,265$$

Import Basisjahr:

$$I_B = \underline{i}_B^T \cdot \underline{x}_B = (0{,}167 \quad 0{,}200 \quad 0{,}333) \begin{pmatrix} 1200 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix} = 879{,}9$$

Der Import erhöht sich von 879,9 (Basisjahr) auf 1058,265 (Planjahr).

9.1. $a_{25} = 0{,}05 \qquad a_{63} = 0{,}06$

9.2. $\underline{x}^T = (4500 \quad 3200 \quad 3300 \quad 3600 \quad 2100 \quad 5000 \quad 11000)$

9.3. - 9.5.

Zweige	1	2	3	4	5	6	7	Exp.	Sonstige	$\underline{y}$	$\underline{x}$
1	675	96	132	180	84	300	220	617,6	2195,4	2813	4500
2	270	416	99	144	105	200	770	294,8	901,2	1196	3200
3	225	128	561	216	84	500	1320	34,6	231,4	266	3300
4	360	32	495	396	252	400	660	436,5	568,5	1005	3600
5	90	160	33	324	420	100	550	47,7	375,3	423	2100
6	405	320	198	252	126	400	880	296,8	2122,2	2419	5000
7	45	256	297	36	84	250	1210	715	8107	8822	11000
Import	180	192	66	72	105	450	220				

Export: 101,79 %
Import: 100,62 %
Außenhandelssaldo: 103,12 %.

Lösungen zu 1.5.2.

1. $\underline{a}_5^T = (50 \quad 35 \quad -2)$

$\underline{a}_6^T = (\ 6 \quad 13/2 \quad -1)$, konvexe Linearkombination

$\underline{a}_7^T = (24 \quad 30 \quad 20)$, nichtnegative Linearkombination

2.1. $w_1 = -1,\ w_2 = 4$

2.2. Bei der Lösung des Gleichungssystems tritt ein Widerspruch auf: $\underline{a}_4$ läßt sich nicht als Linearkombination der Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ darstellen.

2.3. $w_1 = 2,\ w_2 = 1,\ w_4 = 2$

2.4. Mit $w_6 = 0{,}2$ gilt $\underline{b}^T = (-0{,}4 \quad 2{,}2 \quad 1{,}6)$. $\underline{b}$ ist eine konvexe Linearkombination von $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_4$ mit $w_1 = 0{,}4$, $w_2 = 0{,}2$ und $w_3 = 0{,}4$.

3.1. Das Vektorsystem $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ ist linear unabhängig, während das Vektorsystem $\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ linear abhängig ist. Es gilt z. B. $2\underline{a}_1 + \underline{a}_3 - \underline{a}_4 = \underline{0}$.

3.2. Aus 3.1. folgt: $\underline{a}_3$ läßt sich nicht als Linearkombination von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ darstellen, wohl aber als Linearkombination von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_4$, also $\underline{a}_3 = \underline{a}_4 - 2\underline{a}_1$.

4. Es lassen sich drei Variable zu Basisvariablen machen, d. h., der Rang des Vektorsystems ist drei. Im vierten Tableau zeigt ein Element Null an, daß x_3 und x_4 nicht vertauscht werden können. Das Vektorsystem $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$ ist also linear abhängig. Der Vektor $\underline{a}_3$ läßt sich nicht als Linearkombination von $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_4$ darstellen.

5. Bei $\lambda = 71/3$ ist der Rang des Vektorsystems 2, für $\lambda \neq 71/3$ gleich 3.

6. $r(\underline{A}_1) = 2 \qquad r(\underline{A}_2) = 4$

7. $r(\underline{A}) = 2$ für $\lambda = 11$, $r(\underline{A}) = 3$ für alle $\lambda \neq 11$.

<u>Lösungen zu 1.6.2.</u>

1. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 3$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das System ist überbestimmt, da $m > n$. Da es den Maximalrang $r = n = 3$ besitzt, ist die Lösung eindeutig.

2. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 3$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das System ist quadratisch und weist keinen Rangabfall auf. Es besitzt daher eine eindeutige Lösung.

3. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 4$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das System ist quadratisch und weist keinen Rangabfall auf. Es besitzt daher eine eindeutige Lösung.

4. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} x_3$$

Das System ist quadratisch und weist den Rangabfall 1 auf. Die allgemeine Lösung ist mit x_1 und x_2 als Basisvariablen angegeben. x_3 ist freie Variable (Parameter).

5. $r(\underline{A}) = 2$, aber $r(\underline{A},\underline{b}) = 3$. Das System ist quadratisch und weist in der Koeffizientenmatrix einen Rangabfall von 1 auf. Die Hinzunahme von $\underline{b}$ erhöht den Rang von 2 auf 3. Das System enthält einen Widerspruch und ist nicht lösbar.

6. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_4$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes System, das den Maximalrang $r = m = 2$ besitzt. Die angegebene allgemeine Lösung mit x_1 und x_2 als Basisvariablen ist von zwei Parametern abhängig.

7. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1/23 \begin{pmatrix} 67 \\ 51 \end{pmatrix} - 1/23 \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \end{pmatrix} x_3$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes System, das den Maximalrang $r = m = 2$ besitzt. Die allgemeine Lösung (als Basisvariablen x_1 und x_2) ist von einem Parameter abhängig.

8. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist lösbar. Es handelt sich um ein unterbestimmtes System, das zusätzlich einen Rangabfall aufweist ($m = 3$, $r = 2$), Die allgemeine Lösung (BV: x_1 und x_2)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} x_4$$

ist von zwei Parametern abhängig.

9. $r(\underline{A}) = 1$, $r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist nicht lösbar. Es handelt sich um ein quadratisches System, das einen Rangabfall von 2 aufweist.

10. $r(\underline{A}) = 2$, $r(\underline{A},\underline{b}) = 3$, das System ist nicht lösbar. Es ist unterbestimmt ($m = 3$, $n = 5$) und weist in der Koeffizientenmatrix einen Rangabfall von 1 gegenüber dem Maximalrang auf.

11. $r(\underline{A}) = 2$, $r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3$$

Das System ist überbestimmt, weist aber gegenüber dem möglichen Maximalrang einen Rangabfall von 1 auf und hat daher einen Freiheitsgrad. Die Null im vor x_3 stehenden Vektor macht deutlich, daß x_3 nicht anstelle von x_2 Basisvariable werden kann, d. h., die Basislösung (x_1, x_3) existiert nicht, was aus der Gleichheit der Koeffizienten bei x_1 und x_3 auch aus der Aufgabe direkt zu sehen ist.

12. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 3$, das System ist lösbar,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ -1/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

Das System ist überbestimmt. Da es den Maximalrang aufweist, ist die Lösung eindeutig.

13. $r(\underline{A}) = r(\underline{A},\underline{b}) = 2$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Das System ist überbestimmt. Da ein Rangabfall gegenüber dem Maximalrang auftritt, hat die allgemeine Lösung einen Freiheitsgrad.

14. $r(\underline{A}) = 2$. Da ein Rangabfall von 1 in diesem quadratischen homogenen System auftritt, existiert die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} x_3 \,.$$

15. $r(\underline{A}) = 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} x_4$$

Der Rangabfall 1 in diesem quadratischen homogenen System bewirkt, daß die allgemeine Lösung von einem Parameter abhängt.

16. $r(\underline{A}) = 3$ Der Maximalrang in diesem quadratischen homogenen System deutet auf eine eindeutige Lösung, also die Triviallösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

17. $r(\underline{A}) = 2$ In diesem überbestimmten homogenen System tritt der Maximalrang auf, d. h., es existiert nur die Triviallösung $\underline{x} = \underline{0}$.

18. $r(\underline{A}) = 3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} x_4$$

Gegenüber dem möglichen Maximalrang $r = 4$ tritt in diesem überbestimmten homogenen System ein Rangabfall von 1 auf. Die allgemeine Lösung enthält einen Freiheitsgrad.

19.

	BV	x_2	x_1	x_0	$-\uparrow$
I		1	4	28	*
		2	2λ	20	-2
II	x_2	1	4	28	-4
		0	$2\lambda-8$	-36	*
III	x_2	1	0	$\frac{28\lambda-40}{\lambda-4}$	
	x_1	0	1	$\frac{-18}{\lambda-4}$	

Aus Tableau II ist zu entnehmen:
Für $2\lambda - 8 = 0$ oder $\lambda = 4$ ist das System unlösbar, da $r(\underline{A}) = 1$ und $r(\underline{A},\underline{b}) = 2$.
Für alle anderen Werte von λ lautet die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-18}{\lambda - 4} \\ \frac{28\lambda - 40}{\lambda - 4} \end{pmatrix}$$

z. B. für $\lambda = 1$ $x_1 = 6$, $x_2 = 4$.

20. Damit das homogene System eine nichttriviale Lösung hat, muß $r(\underline{A}) < 3$ gelten. Für $\lambda \neq 0$ ergibt sich lediglich die Triviallösung. Für $\lambda = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 .$$

BV	x_1	x_2	x_3	$-\uparrow$
	1	1	1	*
	3	2	1	-3
	2	1	λ	-2
x_1	1	1	1	-1
	0	-1	-2	*
	0	-1	$\lambda-2$	1
x_1	1	0	-1	
x_2	0	1	2	
	0	0	λ	

21. a) Für $a = 0$ handelt es sich um ein quadratisches homogenes System. $r(\underline{A}) = 2$, das System ist lösbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} x_3$$

b) Für $a = 1$ handelt es sich um ein quadratisches inhomogenes Gleichungssystem, das wegen $r(\underline{A}) = 2$, aber $r(\underline{A},\underline{b}) = 3$ nicht lösbar ist.

22. Die Lösbarkeitsbedingung $r(\underline{A},\underline{b}) = 2$ gilt für $\lambda = -25$. Dann ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix},$$

also eine eindeutige Lösung.

23.

BV	x_1	x_2	x_3	x_0	$-\Sigma$
	2	3	-1	2	*
	3	λ	4	5	-3
	7	4	2	8	-7
x_1	1	3/2	-1/2	1	
	0	$\lambda-9/2$	11/2	2	
	0	-13/2	11/2	1	

Nach einem Schritt ist zu erkennen, daß mit $\lambda = -2$ $r(\underline{A}) = 2$, aber $r(\underline{A},\underline{b}) = 3$, d. h., Unlösbarkeit des Systems folgt. $r(\underline{A},\underline{b}) = 2$ tritt mit 2 als letzter Komponente in der Spalte x_0 ein. Wenn im ursprünglichen System anstelle von 8 der Wert 9 steht, tritt dieser Fall ein.

24. Es handelt sich um ein homogenes quadratisches System

$$(a - \lambda)\, x_1 + bx_2 = 0$$
$$bx_1 + (c - \lambda)\, x_2 = 0\,.$$

Eine vom Nullvektor verschiedene Lösung tritt für $D = 0$ ein.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

Die gesuchten Werte sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{a + c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 - ac + b^2} \quad \text{mit} \quad \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 - ac + b^2 \geqq 0\,.$$

Lösungen zu 1.7.2.

1. $$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $\sum_{i=1}^{5} w_i = 1$, $w_i \geqq 0$ $\quad i = 1, 2, \ldots, 5$

2. $$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} + w_4 \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} + w_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} + w_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit $\sum_{i=1}^{6} w_i = 1 \ , \quad w_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 6$

2. Lineare Optimierung

2.1. Modelle der linearen Optimierung

Die Lösungen für Beispiele und Obungsaufgaben dieses Abschnitts werden angegeben. Es wird empfohlen, gegebenenfalls unter Nutzung der Kleinrechentechnik selbständig zu lösen.

2.1.1. Beispiele

1. Ein Betrieb kann aus einem Grundmaterial die drei Produkte P_1, P_2, P_3 herstellen. Die Engpässe des Betriebes sind das Grundmaterial und die Maschinenzeiten in zwei Abteilungen. Die Produktion soll so erfolgen, daß das Reineinkommen maximal wird.

   Die folgende Tabelle enthält die notwendigen Zahlenangaben:

	Verfügbare Menge	Verbrauch pro Einheit P_1	P_2	P_3
Grundmaterial	12	1	1	1
Masch. Std. Abt. I	15	2	2	1
" " " II	18	3	2	2
Reineinkommen pro Einheit des Produkts		9	8	6

   Formulieren Sie das Modell!

   Lösung:

   Entscheidungsvariablen x_1, x_2 und x_3 sind die Produktionsmengen der drei Produkte P_1, P_2 und P_3. Grundmaterial und Maschinenkapazitäten bilden zusammen mit den in der Tabelle angegebenen Aufwandskoeffizienten pro eine Einheit Endprodukt P_i (i=1, 2, 3) die Informationen für das System der Nebenbedingungen, die wie folgt formuliert werden können:

$$
\begin{aligned}
\underline{\text{NB}}:\quad x_1 + x_2 + x_3 &\leqq 12\\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 15\\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leqq 18
\end{aligned}
$$

Durch das $\leqq$ wird zum Ausdruck gebracht, daß die verfügbaren Kapazitäten nicht überschritten werden dürfen.

Die Information über das Reineinkommen pro Einheit Endprodukt läßt folgende Formulierung der Zielfunktion zu:

$$\underline{\text{ZF}}:\quad Z = 9x_1 + 8x_2 + 6x_3 \longrightarrow \max$$

Schließlich ist noch zu sichern, daß die Variablen die Bedingungen der Nichtnegativität erfüllen.

$$\underline{\text{NNB}}:\quad x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, 3$$

$$Z_{opt} = 66; \quad \underline{x}^T = (0, 6, 3, 3, 0, 0)$$

2. Ein metallverarbeitender Betrieb steht vor folgender Produktionsaufgabe:

Produkt	Menge
A	400
B	200
C	450

Zur Herstellung stehen ihm drei Maschinen zur Verfügung.

Maschine	Kapazität in Std.
M_1	600
M_2	500
M_3	800

Der Betrieb kann zur Bearbeitung jedes Produkts zwei verschiedene technologische Verfahren in Anwendung bringen. Die Zeitnormen und Selbstkosten sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	A		B		C	
	T_1	T_2	T_1	T_2	T_1	T_2
M_1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4
M_2	0,0	0,6	0,4	0,6	0,0	0,8
M_3	0,8	0,8	0,6	1,2	0,4	0,6
Selbstkosten	29	26	27	26	36	33

Die Produktionsaufgabe soll mit minimalen Selbstkosten realisiert werden. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Zunächst legen wir die Variablen fest.

x_1: Menge von Produkt A, die nach Technologie 1 hergestellt wird.

x_2: " " " A, " " " 2 " "

y_1: " " " B, " " " 1 " "

usw.

Formulieren wir zunächst die Nebenbedingungen, die sich auf die technologischen Zusammenhänge beziehen:

$$\underline{\text{NB}}:\quad \begin{aligned} 0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}6y_1 + 0{,}6y_2 + 0{,}6z_1 + 0{,}4z_2 &\leqq 600 \\ 0{,}0x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4y_1 + 0{,}6y_2 + 0{,}0z_1 + 0{,}8z_2 &\leqq 500 \\ 0{,}8x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}6y_1 + 1{,}2y_2 + 0{,}4z_1 + 0{,}6z_2 &\leqq 800 \end{aligned}$$

Hinzu kommen die Nebenbedingungen zur Erfüllung der Produktionsaufgabe

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 400 \\ y_1 + y_2 &= 200 \\ z_1 + z_2 &= 450 \end{aligned}$$

Hier gilt unbedingt das Gleichheitszeichen.

Die Zielfunktion läßt sich mit den Informationen über die Selbstkosten formulieren:

$$\underline{\text{ZF}}:\quad Z = 29x_1 + 26x_2 + 27y_1 + 26y_2 + 36z_1 + 33z_2 \longrightarrow \min$$

$$\underline{\text{NNB}}:\quad x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \geqq 0$$

$$Z_{opt} = 31275;\quad \underline{x}^T = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 400, 0, 200, 275, 175, 5, 0, 25)$$

3. Für eine Futtermittelmischung, die die Nährstoffe M_1, M_2 und M_3 enthalten soll, kommen vier Produkte A, B, C und D in Frage. Die Zahlenangaben über die Mindestmengen der drei Nährstoffe und den Gehalt der Nährstoffe in den einzelnen Produkten sind aus der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Nährstoff	Produkt A	B	C	D	Erforderliche Mindestmenge
M_1	3	2	4	1	38
M_2	5	1	1	2	36
M_3	1	5	2	3	50

Die Produkte A, B, C und D sind in solchen Mengen zu kaufen, daß die Zuführung der Nährstoffe in den angegebenen Mindestmengen bei minimalen Kosten garantiert ist.
Die Einkaufspreise betragen für A: 2 [WE], B: 3 [WE], C: 5 [WE], D: 1 [WE]. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:
Die Variablen x_j j=1, 2, 3, 4 entsprechen den von den Produkten A, B, C und D verwendeten Mengen. Für die erforderlichen Mengen der Produkte A, B, C und D lassen sich mit den Informationen aus der Tabelle folgende Nebenbedingungen formulieren:

<u>NB</u>:
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &\geqq 38 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\geqq 36 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\geqq 50 \end{aligned}$$

Durch $\geqq$ wird die Einhaltung der Mindestmenge verlangt.

Die Vorgabe der Einkaufspreise führt zu folgender Zielfunktion:

<u>ZF</u>: $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \longrightarrow \min$

<u>NNB</u>: $x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, 3, 4$

$Z_{opt} = 30; \quad \underline{x}^T = (8, 0, 0, 14, 0, 32, 0)$

4. In der Papierindustrie tritt häufig das Problem auf, wie aus Ausgangsrollen Papierrollen kleineren Formats zu schneiden sind. Angenommen, eine Maschine stelle Papierrollen von 195 cm Breite her. Aus diesen Rollen seien herzustellen:

   49500 Rollen von 65 cm Breite,
   15840 " " 50 cm Breite,
   59400 " " 40 cm Breite.

   Es sind möglichst wenig Ausgangsrollen zu schneiden.
   Formulieren Sie das Modell!

Lösung:
Zur Festlegung der Variablen ist es erforderlich, Zuschnittvarianten zu bilden. Das erfolgt in nachstehender Tabelle:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
50	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
40	0	0	1	0	2	3	1	2	3	4

x_j - Anzahl der nach Zuschnittvariante j zu schneidenden Rollen

Daraus leiten sich unter Verwendung der Vorgaben über die gewünschte Rollenzahl die folgenden Nebenbedingungen ab:

NB:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqq 49500 \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 \geqq 15840 \\ x_3 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 4x_{10} \geqq 59400 \end{array}$$

Die Aussage, möglichst wenig Ausgangsrollen zu schneiden, ist gleichbedeutend damit, daß möglichst wenig Papierrollen nach den einzelnen Varianten zu schneiden sind.

Das führt zu folgender Zielfunktion:

ZF: $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \longrightarrow \min$

NNB: $x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, 10$

$Z_{opt} = 33220;$

$\underline{x}^T = (8140, 0, 0, 0, 15840, 9240, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

5. Auf einem Bahnhof besteht durchschnittlich folgender Personalbedarf:

Zwischen	0 Uhr	und	4 Uhr	4 AK
"	4 "	"	8 "	6 AK
"	8 "	"	12 "	12 AK
"	12 "	"	16 "	18 AK
"	16 "	"	20 "	16 AK
"	20 "	"	24 "	8 AK

Die Reichsbahnangehörigen können ihre Schicht um 0, 4, 8, 12, 16 bzw. 20 Uhr beginnen und arbeiten 8 Stunden hintereinander. Welcher Schichtplan erfordert den minimalen Einsatz von Arbeitskräften? Formulieren Sie das Modell!

Lösung:

Zunächst legen wir die Variablen fest:

x_1: Anzahl der Arbeitskräfte, die um 0 Uhr die Arbeit beginnen
x_2: Anzahl " " " " 4 Uhr " " "
.
.
.
x_6: Anzahl " " " " 20 Uhr " " "

Damit lassen sich folgende Nebenbedingungen formulieren, durch die gesichert wird, daß die Arbeitszeit von 8 Stunden zusammenhängend ist. Es ist leicht zu überblicken, daß es dabei auftreten kann, daß Arbeitskräfte nur 4 Stunden täglich zum Einsatz kommen.

$$\underline{\text{NB}}: \quad \begin{array}{lllllllll} x_1 & + x_2 & & & & & & \geqq & 6 \\ & x_2 & + x_3 & & & & & \geqq & 12 \\ & & x_3 & + x_4 & & & & \geqq & 18 \\ & & & x_4 & + x_5 & & & \geqq & 16 \\ & & & & x_5 & + x_6 & & \geqq & 8 \\ x_1 & & & & & + x_6 & & \geqq & 4 \end{array}$$

Der normale Einsatz von Arbeitskräften führt zu folgender Zielfunktion:

$$\underline{\text{ZF}}: \quad Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \longrightarrow \min$$

Die Nichtnegativitätsbedingung lautet:

$$\underline{\text{NNB}}: \quad x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, 3$$

$$Z_{opt} = 32; \ \underline{x}^T = (4, 6, 10, 8, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

6. Ein Betrieb produziert eine Legierung, die sich durch folgende Eigenschaften auszeichnen soll:

   a) spezifisches Gewicht $\leqq$ 1,
   b) Gehalt des Bestandteiles s $\geqq$ 20 %,
   c) Schmelztemperatur $\geqq$ 600 °C.

   Die für die Produktion dieser Legierung in Frage kommenden Bestandteile sind die Rohstoffe P_1, P_2 und P_3, die sich durch die in der Tabelle angegebenen Eigenschaften auszeichnen:

Eigenschaften	P_1	P_2	P_3
Spez. Gewicht	0,96	0,92	1,04
Gehalt Bestandteil s	18 %	12 %	25 %
Schmelztemperatur	550 °C	600 °C	690 °C

Die Preise der einzelnen Rohstoffe betragen pro Mengeneinheit:
P_1: 160 WE, P_2: 360 WE, P_3: 150 WE.
Es ist zu bestimmen, in welchen Proportionen die Rohstoffe P_1, P_2 und P_3 zu verwenden sind, um die Legierung mit den geforderten Eigenschaften bei möglichst niedrigen Ankaufskosten für die Rohstoffe zu erhalten. Formulieren Sie das Modell!

Lösung:
Die Entscheidungsvariablen x_1, x_2 und x_3 geben den Anteil an, mit dem die Rohstoffe P_1, P_2 und P_3 in die Legierung eingehen. Unter Verwendung der Angaben der Tabelle der festgelegten Eigenschaften lassen sich folgende Nebenbedingungen ableiten:

<u>NB</u>:
$$
\begin{aligned}
0{,}96x_1 + 0{,}92x_2 + 1{,}04x_3 &\leqq 1\\
18\,x_1 + 12\,x_2 + 25\,x_3 &\geqq 20\\
550\,x_1 + 600\,x_2 + 690\,x_3 &\geqq 600
\end{aligned}
$$

Hinzu kommt die Bilanzbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Bei der Aufstellung der Zielfunktion werden die Preise für die Rohstoffe verwendet.

<u>ZF</u>: $Z = 160x_1 + 360x_2 + 150x_3 \longrightarrow \min$

<u>NNB</u>: $x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2, 3$

$Z_{opt} = 155;\ \underline{x}^T = (0{,}5\ \ 0,\ \ 0{,}5,\ \ 0,\ \ 1{,}5,\ \ 20)$

2.1.2. <u>Übungsaufgaben</u>

1. Ein Betrieb hat bei der Produktion von vier Massenartikeln in einem bestimmten Zeitabschnitt bei zwei wichtigen Grundmaterialien (G_1, G_2) nur begrenzte Mengen zu Verfügung; außerdem im gleichen Zeitabschnitt Engpässe bei zwei Bearbeitungsmaschinen (M_1, M_2). Die technischen Daten sind aus folgenden Zusammenstellungen zu entnehmen:

	Materialverbrauch in Kilogramm (pro Stück des Erzeugnisses)				Materialfonds
	E_1	E_2	E_3	E_4	
G_1	4	-	1	4	1,3 [t]
G_2	5	6	2	3	2,1 [t]

	Bearbeitungszeit in Minuten (pro Einheit des Erzeugnisses) E_1	E_2	E_3	E_4	Zeitfonds
M_1	5	4	-	6	20 [Stunden]
M_2	10	8	6	4	80 [Stunden]

Eine vertragliche Verpflichtung sieht vor, daß von den Erzeugnissen E_1 und E_2 insgesamt mindestens 150 Stück zu produzieren sind. Der Gewinn je Stück der Erzeugnisse beträgt für E_1: 0,80 WE, E_2: 1 WE, E_3: 0,60 WE, E_4: 0,30 WE.

Wie lautet das Optimierungsmodell, wenn der Betrieb die Ausnutzung so gestalten will, daß der größtmögliche Gewinn erzielt wird?

Für welches Produktionsprogramm erzielt der Betrieb einen maximalen Gewinn?

2. Zwischen vier Kraftwerkstypen T_1, T_2, T_3 und T_4 ist beim Ausbau des Energienetzes eines Gebietes so auszuwählen, daß die Gesamtkosten, bezogen auf ein Jahr, zu einem Minimum werden. Für das Gesamtgebiet sind eine jährliche Energieproduktion von 10000 Einheiten, ein tägliches Mindestaufkommen von 24 Einheiten und die Möglichkeit zur Abdeckung eines täglichen Spitzenbedarfs von 30 Einheiten zu sichern. Die Leistungen der vier Kraftwerkstypen sind:

	T_1	T_2	T_3	T_4
Jährliche Energieproduktion	750	2000	800	2000
Tägliches Mindestaufkommen	2	5	1	4
Tägliche Maximalkapazität	3	7	3	7

Für das Bauprogramm steht eine Investitionsmenge von 105 WE zur Verfügung. Der Investitionsbedarf je Kraftwerk beträgt bei Typ T_1 10 WE, bei Typ T_2 20 WE, bei Typ T_3 5 WE und bei Typ T_4 25 WE. Die jährlichen Kosten je Kraftwerk betragen bei Typ T_1 3 WE, bei Typ T_2 6 WE, bei Typ T_3 3 WE und bei Typ T_4 7 WE. In welcher Anzahl sind die vier möglichen Kraftwerkstypen zu errichten? Formulieren Sie das Modell!

3. Aus Blechtafeln der Abmessung 2 m · 1 m sollen

300 Tafeln der Sorte I   0,5 m · 0,6 m,

150 Tafeln der Sorte II   0,8 m · 0,4 m   und

300 Tafeln der Sorte III   0,3 m · 1,0 m

geschnitten werden.

Zur Auswahl stehen sechs Zuschnittvarianten.

Variante 1:	6	Tafeln	Sorte	I
" 2:	2	"	"	II und 4 Tafeln Sorte III
Variante 3:	2	Tafeln	Sorte	I und 2 Tafeln Sorte II und
	2	"	"	III
" 4:	5	"	"	II
" 5:	4	"	"	I und 2 Tafeln Sorte II
" 6:	6	"	"	III

a) Die Anzahl der zu zerschneidenden Blechtafeln soll minimal sein. Formulieren Sie das Modell!

b) Der Verschnitt soll minimal werden.
Formulieren Sie das Modell!

4. In einer Paketumschlagstelle der Post sei die zeitliche Verteilung für die auszuführenden Tätigkeiten bekannt. Mittels Zeitnormativen kann daraus berechnet werden, wieviel Arbeitskräfte in den einzelnen Zeitabschnitten eines Tages erforderlich sind.

Arbeitskräftebedarf:

Zeitabschnitt	AK
4 - 6	18
6 - 8	33
8 - 10	30
10 - 12	48
12 - 14	54
14 - 16	21
16 - 18	111
18 - 20	123

Arbeitskräfte können nicht stundenweise eingesetzt werden, und es erfolgt deshalb folgende Schichtfestlegung:

1. Voll	4 - 12	4. Teil	4 - 8
2. "	12 - 20	5. "	6 - 12
3. "	10 - 18	6. "	16 - 20

Zur Vereinfachung sollen Pausen und andere Arbeitsunterbrechungen unberücksichtigt bleiben.
Während die Teilarbeitskräfte für die gleiche Schicht vorzusehen sind, sollte jede Vollkraft sowohl Vormittags-, als auch Nachmittagsdienste verrichten. Daraus ergibt sich, daß die Arbeitskräftezahlen für die erste, zweite und dritte Schicht in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen müssen. Es wird festgelegt, daß die Summe der Arbeitskräfte in der zweiten und dritten Schicht höchstens doppelt so groß wie diejenige der ersten Schicht sein darf, weil dann der Dienststundenplan für jede Vollkraft auf eine Vormittagsschicht höchstens zwei Nachmittagsschichten festlegt.
Formulieren Sie das Modell!

5. Für die Pflanzenproduktion eines landwirtschaftlichen Betriebes stehen vier Kulturen K_1, K_2, K_3 und K_4 zur Auswahl. Die Gewinne je Erzeugniseinheit der Kultur betragen 10, 5, 8 und 3 WE. Für die Kulturen K_2 und K_4 sind Mindestproduktionsmengen in der Höhe von 8 bzw. 13 ME vorgeschrieben. Außerdem soll die Produktionsmenge der Kulturen K_1 und K_3 zusammen 21 ME nicht übersteigen.
Es liegen folgende weitere Angaben vor:

	K_1	K_2	K_3	K_4
Benötigte Anbaufläche [ha/ME]	40	10	20	30
Benötigte Arbeitskräfte [AK/ME]	5	2	6	4
Kosten für Saatgut [WE/ME]	3	2	2	1
Aufwand an Mineraldünger [ME/ME]	5	7	2	6
Aufwand an Chemikalien zur Unkrautbekämpfung [ME/ME]	3	1	2	1
Kosten für fremde Leistungen [WE/ME]	1	2	1	-

Die gesamte zur Verfügung stehende Nutzfläche beträgt 1080 ha. Die Anzahl der vorhandenen Arbeitskräfte im betrachteten Zeitraum sei 108. 60 WE stehen für das Saatgut zur Verfügung, bei Mineraldünger sind es 210 ME, bei den Chemikalien 72 ME. Für fremde Leistungen sind 24 WE geplant, die nicht überschritten werden dürfen. Zu bestimmen sind diejenigen Produktionsmengen bei den vier Kulturen, die den Gesamtgewinn des Betriebes zu einem Maximum machen.
Formulieren Sie das Modell!

5. Drei Produkte können mit unterschiedlichen Technologien produziert werden. Grenzen für die Anwendung der einzelnen Technologien sind durch die Zeitfonds beim Fräsen, Drehen und Schweißen gegeben. Folgende Daten sind gegeben:

	Zeitaufwand für die Bearbeitung einer Einheit des Produkts Masch.-Std./Stück									Verfügbare Zeitfonds
	Produkt 1 Technologie 1	2	3	Produkt 2 Technologie 1	2	3	Produkt 3 Technologie 1	2		
Fräsen	2	2	1	3	0	4	3	3		200
Drehen	3	1	2	1	2	0	5	6		340
Schweißen	0	1	3	2	3	1	1	0		480
Gewinn/ Stück	11	7	5	9	6	7	18	15		

Formulieren Sie das Modell!

2.2. Graphische Lösung

2.2.1. Beispiele

Lösen Sie folgende lineare Optimierungsaufgaben!

1. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 24 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2 \\ Z = 5x_1 + 4x_2 &\longrightarrow \max \end{aligned}$$

Lösung:

Zunächst überführen wir die Nebenbedingungen (Ungleichungen) in die Achsenabschnittsform

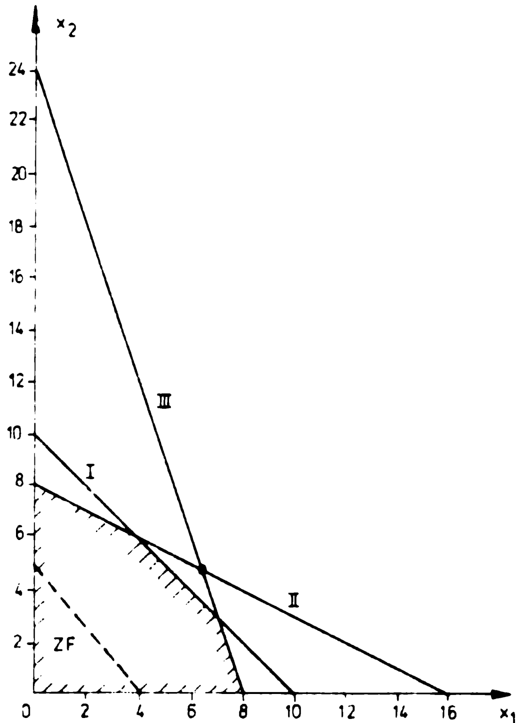
$$\frac{x_1}{m} + \frac{x_2}{n} = 1$$

und erhalten

$$\text{I} \quad \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} \leq 1$$

$$\text{II} \quad \frac{x_1}{16} + \frac{x_2}{8} \leq 1$$

$$\text{III} \quad \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{24} \leq 1 .$$



Dabei bilden m und n die Abschnitte auf der x_1- bzw. x_2-Achse. Die Nebenbedingungen können somit in das Koordinatensystem eingezeichnet werden. Für jede Ungleichung ergibt sich eine Halbebene als Lösung (durch Einsetzen eines Punktes der Ebene, beispielsweise des Koordinatenursprungspunktes in die Achsenabschnittsform, kann man die Halbebene der Lösungen bestimmen). Es entsteht ein konvexer Lösungsbereich.
Um die Zielfunktion einzeichnen zu können, nehmen wir einen Zielfunktionswert an und formen die Zielfunktion ebenfalls in die Achsenabschnittsform um.

Annahme: $Z = 20$ Daraus folgt: $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} = 1 .$

Diese Gerade verschieben wir parallel nach oben, bis der äußerste Punkt des konvexen Bereiches erreicht ist. Dieser Punkt stellt die optimale Lösung der linearen Optimierungsaufgabe dar. Wir können ablesen

$$x_1 = 7 , \qquad x_2 = 3 .$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Zielfunktion erhält man den optimalen Zielfunktionswert

$$Z = 47 .$$

2. $3x_1 + x_2 \leqq 18$
$2x_1 + 4x_2 \leqq 40$
$3x_1 + 2x_2 \leqq 24 \quad x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2 \quad Z = 6x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$

Lösung:
Zunächst erfolgt wieder die Umformung in die Achsenabschnittsform

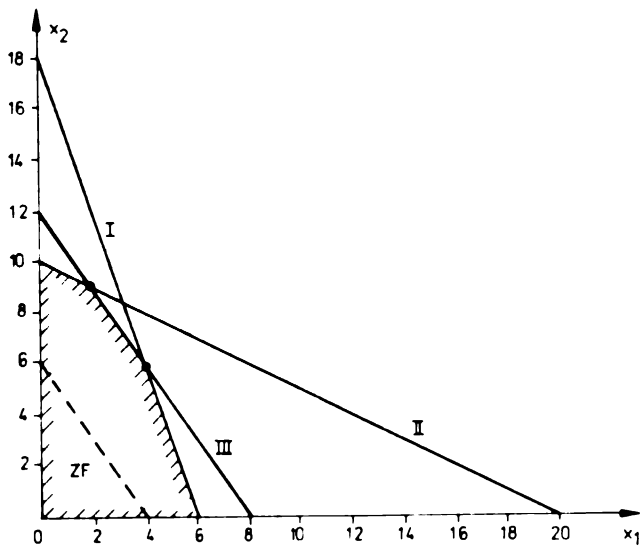
$$\text{I} \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{18} \leqq 1$$

$$\text{II} \quad \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{10} \leqq 1$$

$$\text{III} \quad \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{12} \leqq 1$$

Mit der Annahme $Z = 24$ folgt für die Zielfunktion

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} = 1 .$$



Dieses Ergebnis tragen wir in das Koordinatensystem ein. Nunmehr verschieben wir wiederum die Zielfunktion durch den obersten Punkt des zulässigen Lösungsbereichs. Dabei stellen wir fest, daß die Zielfunktion parallel zur Nebenbedingung III verläuft. Die beiden Eckpunkte des zulässigen Lösungsberei-

ches, aber auch alle dazwischenliegenden Punkte stellen optimale Lösungen dar. Es gibt also unendlich viele Lösungen und darunter zwei Basislösungen.
Die Lösungen lauten:

$x_1 = 4 \quad x_2 = 6 \quad Z = 48$ Basislösung,

$x_1 = 2 \quad x_2 = 9 \quad Z = 48$ Basislösung,

aber auch

$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{15}{2}$ führt zu $Z = 48$.

3. $4x_1 + 6x_2 \leqq 12$
$16x_1 + 4x_2 \leqq 4$
$x_2 \geqq 3$

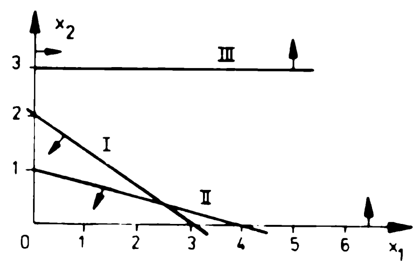
$Z = 2x_1 + 3x_2 \longrightarrow \max \qquad x_j \geqq 0 \qquad j = 1, 2$

Lösung:
Zunächst stellen wir die Achsenabschnittsform auf.

I $\quad \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leqq 1$

II $\quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{1} \leqq 1$

III $\quad \frac{x_2}{3} \geqq 1$



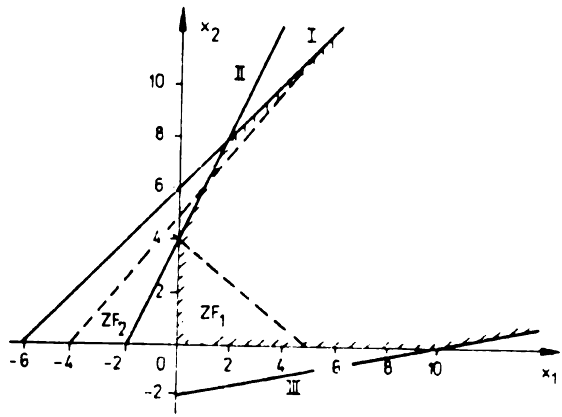
Nach Einzeichnen der Nebenbedingungen in das Koordinatensystem kann man feststellen, daß der Lösungsbereich eine leere Menge ist und die lineare Optimierungsaufgabe demzufolge nicht lösbar ist.

4. $-x_1 + x_2 \leqq 6$
$-4x_1 + 2x_2 \leqq 8$
$2x_1 - 10x_2 \leqq 20$
$x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2 \qquad Z_1 = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$
$Z_2 = -5x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$

Die lineare Optimierungsaufgabe ist für beide Zielfunktionen graphisch zu lösen.

Lösung:

Wir betrachten zu diesem Zweck zunächst den Lösungsbereich. Die Achsenabschnittsformen für die Nebenbedingungen lauten:



I $\quad \frac{x_1}{-6} + \frac{x_2}{6} \leqq 1$

II $\quad \frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{4} \leqq 1$

III $\quad \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{2} \leqq 1$.

Nunmehr betrachten wir die Zielfunktionen:

Wir stellen fest, der Lösungsbereich ist nach oben unbeschränkt.

Z_1: Wir nehmen $Z_1 = 20$ an und erhalten $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} = 1$.

Die Zielfunktion kann beliebig große Werte annehmen. Es existiert keine optimale Lösung.

Z_2: Wir nehmen $Z_2 = 20$ an und erhalten $\frac{x_1}{-4} + \frac{x_2}{5} = 1$.

Durch Parallelverschiebung dieser Geraden finden wir

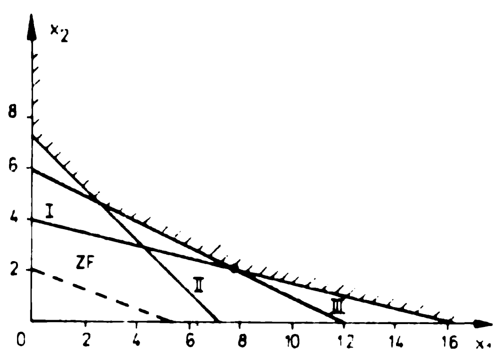
$x_1 = 2 \qquad x_2 = 8$

mit $\quad Z = 22 \qquad$ die optimale Lösung.

5. $x_1 + 4x_2 \geqq 16$
$x_1 + x_2 \geqq 7$
$x_1 + 2x_2 \geqq 12$

$x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2$

$Z = 20x_1 + 50x_2 \longrightarrow \min$



Lösung:

Wir überführen die Nebenbedingungen in die Achsenabschnittsform

I $\quad \frac{x_1}{16} + \frac{x_2}{4} \geq 1$

II $\quad \frac{x_1}{7} + \frac{x_2}{7} \geq 1$

III $\quad \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{6} \geq 1$.

Analog die Zielfunktion mit der Annahme $Z = 100$

$$\frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Durch Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden nach unten bis zum äußersten Punkt erhält man die optimale Lösung $x_1 = 8$, $x_2 = 2$ mit $Z = 260$.

2.2.2. Übungsaufgaben

1. $3x_1 + 2x_2 \leq 33$
   $5x_1 + 6x_2 \leq 66$
   $x_1 + 3x_2 \leq 24$
   $x_j \geq 0, j = 1, 2$
   $Z = 6x_1 + 9x_2 \longrightarrow \max$

2. $3x_1 + x_2 \leq 4500$
   $4x_1 + 3x_2 \leq 7500$
   $x_1 + 2x_2 \leq 3500$
   $x_j \geq 0, j = 1, 2$
   $Z = 8x_1 + 6x_2 \longrightarrow \max$

3. $x_1 + x_2 \geq 11$
   $3x_1 + 2x_2 \leq 30$
   $x_1 + 2x_2 \leq 18$
   $x_j \geq 0, j = 1, 2$
   $Z_1 = 27x_1 + 36x_2 \longrightarrow \max$
   $Z_2 = 27x_1 + 36x_2 \longrightarrow \min$

4. $3x_1 + 2x_2 \geq 6$
   $6x_1 + x_2 \geq 6$
   $x_2 \geq 1$
   $x_j \geq 0, j = 1, 2$
   $Z = 15x_1 + 33x_2 \longrightarrow \min$

5. $-4x_1 + 2x_2 \leq 4$
   $-9x_1 + 9x_2 \leq 27$
   $x_j \geq 0, j = 1, 2$
   $Z_1 = x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$
   $Z_2 = x_1 + 2x_2 \longrightarrow \min$

6. $2x_1 + x_2 \geq 6$

$2x_1 + 4x_2 \geq 12$

$3x_1 + 4x_2 \leq 12$

$4x_2 \leq 16$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$

$Z = 5x_1 + 6x_2 \longrightarrow \min$

7. $2x_1 + 2x_2 \leq 20$

$x_1 + 2x_2 \leq 16$

$2x_1 + x_2 \leq 12$

$x_j \geq 0, j = 1, 2$

$Z = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$

a) Es ist die Lösung für die angegebene Aufgabe anzugeben.

b) Es ist die Lösung unter Berücksichtigung einer weiteren Nebenbedingung $x_1 - x_2 \geq 2$ anzugeben.

8. Vorgegeben ist folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$Z = 20x_1 + 40x_2 \longrightarrow \max$

$x_1 + x_2 \leq 30$

$10x_1 + 6x_2 \leq 240$

$x_1 \leq 15$

$x_2 \leq 20$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

Aufgabenstellungen:

8.1. Es ist die graphische Lösung zu ermitteln.

8.2. Schreiben Sie die 1. Normalform der linearen Optimierungsaufgabe auf, und bestimmen Sie die Werte für die Schlupfvariablen.

8.3. Treffen Sie Aussagen über die Degeneration mit Hilfe der Definition für Basislösungen.

8.4. Bestimmen Sie c_1 und c_2 für den Fall, daß es unendlich viele Lösungen gibt und $Z_{opt} = 750$ beträgt.

8.5. Wie lautet die optimale Lösung für die Zielfunktion

$$Z = 40x_1 + 30x_2 \longrightarrow max\ ?$$

8.6. Vergleichen Sie die Lösungen der drei Aufgaben miteinander (-Basislösungen-)!

8.7. Vorgegeben sind folgende Punkte für die Grundaufgabe:

P_1 (10,10); P_2 (20,18); P_3 (0,20); P_4 (11,17);

P_5 (24,0); P_6 (15,15)

Ermitteln Sie, ob es sich um eine

a) zulässige Lösung,
b) nichtzulässige Lösung,
c) zulässige Basislösung,
d) nichtzulässige Basislösung,
e) optimale Lösung,
f) optimale Basislösung

handelt.

2.3. Simplexmethode

2.3.1. Beispiele

1. Vorgelegt ist die LO-Aufgabe

$$
\begin{aligned}
Z = 4x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \max \\
-x_1 + x_2 &\leqq 4 \\
x_1 + x_2 &\leqq 10 \\
2x_1 - x_2 &\leqq 14 \\
x_1 \geqq 0, \quad x_2 &\geqq 0 .
\end{aligned}
$$

Es soll die 1. Normalform ($\underline{c}^T \underline{x} \,/\, \underline{A}\,\underline{x} = \underline{b},\ \underline{x} \geqq \underline{0}$) ermittelt werden. Von dem dann entstandenen Gleichungssystem $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ sollen sämtliche zulässigen Basislösungen berechnet, und durch zusätzliche Berechnung der jeweiligen Zielfunktionswerte soll die optimale Basislösung gefunden werden.

Zur Überführung in die 1. Normalform werden zu den drei Ungleichungen Schlupfvariablen addiert, wodurch die Ungleichungen in Gleichungen überführt werden. Die Schlupfvariablen müssen ebenfalls der Nichtnegativitätsbedingung genügen.

Es handelt sich um ein normales lineares Ungleichungssystem, d. h. $\underline{b} \geqq \underline{0}$.

$$
\begin{aligned}
Z = 4x_1 + 5x_2 & &\longrightarrow \max \\
-x_1 + x_2 + x_3 & &= 4 \\
x_1 + x_2 \qquad + x_4 & &= 10 \\
2x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 & &= 14 \\
x_j \geqq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 5 & &
\end{aligned}
$$

Ohne weiteres ist als erste zulässige Basislösung $x_3 = 4$, $x_4 = 10$ und $x_5 = 14$ sowie $x_1 = x_2 = 0$ abzulesen. Sie bildet den Ausgangspunkt der Berechnungen mit Hilfe der elementaren Basistransformation.

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	$-\uparrow$
	x_3	-1	1	1	0	0	4	-	1
I	x_4	1	1	0	1	0	10	10	-1
←	x_5	2	-1	0	0	1	14	7*	*
	x_3	0	1/2	1	0	1/2	11	22	-1/2
II ←	x_4	0	3/2	0	1	-1/2	3	2*	*
→	x_1	1	-1/2	0	0	1/2	7	-	1/2
←	x_3	0	0	1	-1/3	2/3	10	15*	*
III →	x_2	0	1	0	2/3	-1/3	2	-	1/3
	x_1	1	0	0	1/3	1/3	8	24	-1/3
→	x_5	0	0	3/2	-1/2	1	15	-	1/2
IV	x_2	0	1	1/2	1/2	0	7	14	-1/2
←	x_1	1	0	-1/2	1/2	0	3	6*	*
	x_5	1	0	1	0	1	18		
V	x_2	-1	1	1	0	0	4		
→	x_4	2	0	-1	1	0	6		

Als erstes werde x_1 Basisvariable (BV). Damit scheidet x_5 als BV aus. Im Tableau II soll x_2 BV werden, wobei nach Ermittlung des minimalen Quotienten x_4 aus der Basis ausscheidet. Im Tableau III wird x_5 als BV für den nächsten Schritt gewählt (x_4 würde zu Tableau II zurückführen). x_3 wird Nichtbasisvariable (NBV). Um von Tableau IV zu einer weiteren zulässigen Basislösung zu gelangen, wird x_4 als BV gewählt, wobei x_1 NBV wird. Mit der Berechnung des Tableaus V sind sämtliche zulässigen Basislösungen ermittelt. Sie werden in einer Tabelle zusammengestellt, und zusätzlich wird der Wert von Z berechnet.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
I	0	0	4	10	14	0
II	7	0	11	3	0	28
III	8	2	10	0	0	42
IV	3	7	0	0	15	47
V	0	4	0	6	18	20

Optimal ist die Basislösung IV mit $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ und $Z = 47$.

2. Mit Hilfe der Simplexmethode soll die LO-Aufgabe

$$Z = 12x_1 + 30x_2 + 28x_3 \longrightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\leqq 28 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leqq 29 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 &\leqq 89 \qquad x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

gelöst werden.

Die 1. Normalform der Aufgabe lautet:

$$\begin{aligned} Z = 12x_1 + 30x_2 + 28x_3 & \longrightarrow \max \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 28 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 &= 29 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + x_6 &= 89 \\ x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6. \end{aligned}$$

Eine erste zulässige Basislösung als Startpunkt für die Simplexmethode ist

$$x_4 = 28; \quad x_5 = 29; \quad x_6 = 89; \quad Z = 0 .$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	Q	-↑
x_4	1	1	3	1	0	0	28	28	-1
←x_5	1	3	2	0	1	0	29	29/3*	*
x_6	3	8	7	0	0	1	89	89/8	-8
Z	-12	-30↑	-28	0	0	0	0	-	30
x_4	2/3	0	7/3	1	-1/3	0	55/3	55/7	-7/3
→x_2	1/3	1	2/3	0	1/3	0	29/3	29/2	-2/3
←x_6	1/3	0	5/3	0	-8/3	1	35/3	7*	*
Z	-2	0	-8↑	0	10	0	290	-	8
←x_4	1/5	0	0	1	17/5	7/5	2	10/17*	*
x_2	1/5	1	0	0	7/5	-2/5	5	25/7	-7/5
→x_3	1/5	0	1	0	-8/5	3/5	7	-	8/5
Z	-2/5	0	0	0	-14/5↑	24/5	346	-	14/5
⇄x_5	1/17	0	0	5/17	1	-7/17	10/17	10*	*
x_2	2/17	1	0	-7/17	0	3/17	71/17	71/2	-2/17
x_3	5/17	0	1	8/17	0	-1/17	135/17	27	-5/17
Z	-4/17↑	0	0	14/17	0	62/17	5910/17	-	4/17
→x_1	1	0	0	5	17	-7	10		
x_2	0	1	0	-1	-2	1	3		
x_3	0	0	1	-1	-5	2	5		
Z	0	0	0	2	4	2	350		

Die Zielfunktion ist also als Funktion der Nichtbasisvariablen darzustellen. Das bereitet hier keine Schwierigkeiten. Es gilt

$$Z = 0 - (-12x_1 - 30x_2 - 28x_3) .$$

Bei der Auswahl der in die Basis kommenden Spalte wählt man unter den NBV diejenige aus, die den größten spezifischen Zuwachs für die Zielfunktion aufweist. Im Beispiel tritt das bei x_2 mit einem spezifischen Zuwachs von 30 auf, während z. B. die Wahl von x_3 nur einen spezifischen Zuwachs von 28 ergeben würde. Genauer wäre das Produkt: (Wert der neuen BV in der folgenden Basislösung) x (spez. Zuwachs). In unserem Beispiel $\frac{29}{3} \cdot 30 = 290$. Das erfordert aber Zwischenrechnungen, die den Lösungsprozeß unterbrechen. Die Wahl der ausscheidenden Basisvariablen muß unter der Zielstellung: "Aufrechterhaltung der Zulässigkeit" erfolgen. Es erfolgt eine Orientierung auf den "Engpaß", die natürlich einen "Verbrauch", d. h. einen positiven Koeffizienten in der Spalte, voraussetzt. Alle anderen Koeffizienten brauchen bei der Engpaßbestimmung nicht berücksichtigt zu werden. Zur Engpaßberechnung ist die vorhandene "Menge" (Komponente in der Spalte x_0) durch den spezifischen Verbrauch zu dividieren.

Es wird $\min\left(\frac{20}{1}; \frac{29}{3}; \frac{89}{8}\right) = \frac{29}{3}$ berechnet, und daher scheidet x_5 als BV aus. Der weitere Lösungsprozeß ist in den Tableaus dargestellt. Im dritten Tableau z. B. ist die Minimumbildung lediglich auf die Quotienten $2/\frac{17}{5}$ und $5/\frac{7}{5}$ zu beschränken, der negative Koeffizient $-8/5$ ist nicht zu berücksichtigen. Nach vier Simplexschritten ist die optimale Lösung erreicht, denn in der Zeile Z stehen nur nichtnegative Werte. Die optimale Lösung lautet:
$x_1 = 10,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5,\ x_4 = x_5 = x_6 = 0$ und $Z = 350$.

3. Die LO-Aufgabe

$$
\begin{array}{lrcl}
 & Z = 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \longrightarrow & \max \\
(1) & x_1 + x_2 + x_3 & \leqq & 20 \\
(2) & 3x_1 + x_2 + x_3 & \leqq & 36 \\
(3) & x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\
(4) & x_1 + 4x_2 + x_3 & \leqq & 35 \\
 & x_j \geqq 0, \quad j & = & 1, 2, 3
\end{array}
$$

ist mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen. Im Anschluß ist zu diskutieren, auf welchen Wert man die Beschränkungszahl bei (4) reduzieren könnte, ohne den Wert der Zielfunktion zu verändern. Für den Lösungsprozeß mit der Simplexmethode bedeutet das Auftreten der Gleichung (3) eine Komplikation, da damit nicht ohne weiteres eine erste zulässige Basislösung angegeben werden kann. Wenn man (3) auflöst und in (1), (2), (4) und die Zielfunktion einsetzt, erhalt man

$$
\begin{array}{rcl}
Z = 7x_1 + 7x_2 & \longrightarrow & \max \\
x_1 + x_2 & \leqq & 10 \\
2x_1 + x_2 & \leqq & 18 \\
2x_1 + 5x_2 & \leqq & 35 \\
x_1 \geqq 0, & & x_2 \geqq 0,
\end{array}
$$

da $x_3 = x_1 + x_2$. Außerdem wurde in den beiden ersten Ungleichungen noch durch zwei dividiert. Die 1. Normalform lautet:

$$\begin{aligned} Z = 7x_1 + 7x_2 & \longrightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 18 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 &= 35 \\ x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Es liegt eine LO-Aufgabe vor, die keinerlei besondere Schwierigkeiten aufweist.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	$-\dagger$
x_3	1	1	1	0	0	10	10	-1
$\longleftarrow x_4$	2	1	0	1	0	18	9*	*
x_5	2	5	0	0	1	35	35/2	-2
Z	$-7\uparrow$	-7	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	-	7
$\longleftarrow x_3$	0	1/2	1	-1/2	0	1	2*	*
$\longrightarrow x_1$	1	1/2	0	1/2	0	9	18	-1/2
x_5	0	4	0	-1	1	17	17/4	-4
Z	$\underline{0}$	$-7/2\uparrow$	$\underline{0}$	7/2	$\underline{0}$	63	-	7/2
$\longrightarrow x_2$	0	1	2	-1	0	2	-	1
x_1	1	0	-1	1	0	8	8	-1
$\longleftarrow x_5$	0	0	-8	3	1	9	3*	*
Z	$\underline{0}$	$\underline{0}$	7	$0\uparrow$	$\underline{0}$	70	-	0
x_2	0	1	-2/3	0	1/3	5		
x_1	1	0	5/3	0	-1/3	5		
$\longrightarrow x_4$	0	0	-8/3	1	1/3	3		
Z	$\underline{0}$	$\underline{0}$	7	$\underline{0}$	0	70		

Das Minimum ist nicht eindeutig. Man wählt den kleineren Index (lexikographisches Prinzip), also wird x_1 BV. Nach zwei Schritten ist die optimale Lösung erreicht. Sie weist eine Besonderheit auf. In der letzten Zeile der Spalte der NBV x_4 steht der Wert Null. Man kann also x_4 als BV wählen, ohne den Wert der Zielfunktion zu verändern. Dann sind x_1, x_2 und x_4 BV. Mithin ist auch jede konvexe Linearkombination der beiden optimalen zulässigen

Basislösungen eine optimale Lösung:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } w_1, w_2 \geqq 0 \text{ und } w_1 + w_2 = 1.$$

Aus dieser Lösung ist auch zu erkennen, daß die Beschränkungszahl von (4) um 9 auf 26 reduziert werden kann, ohne daß der Wert der Zielfunktion der optimalen Basislösung mit den BV x_1, x_2 und x_5 sich ändert. Dann ist in dieser Basislösung $x_5 = 0$, und die Lösung damit degeneriert. Um die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe zu erhalten, wird resubstituiert.

$$x_1 = 8 - c, \quad x_2 = 2 + c, \quad x_3 = 10, \quad Z = 70 \quad \text{mit} \quad 0 \leqq c \leqq 3.$$

Die Grenzen für den Parameter c folgen durch Einsetzen in die ursprüngliche Aufgabe. Kritisch sind die Ungleichungen (2) und (4)

$$(2) \quad 3\,(8 - c) + 2 + c + 10 \leqq 36 \curvearrowright 36 - 2c \leqq 36 \curvearrowright c \geqq 0$$

$$(4) \quad (8 - c) + 4\,(2+c) + 10 \leqq 35 \curvearrowright 26 + 3c \leqq 35 \curvearrowright c \leqq 3.$$

4. Vorgelegt sei die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z = 5x_1 + 4x_2 + 200 &\longrightarrow \max \\ -4x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ x_1 - x_2 &\leqq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\leqq 10 \\ x_1 \geqq 0, \quad x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Simplexmethode soll versucht werden, eine optimale Lösung zu finden.

Die Aufgabe wird in die 1. Normalform überführt

$$\begin{aligned} \tilde{Z} = 5x_1 + 4x_2 &\longrightarrow \max \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 10 \\ x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Um alle Ausgangsdaten für das erste Simplextableau zu erhalten, wird die Zielfunktion als Funktion der NBV dargestellt

$$\tilde{Z} = 0 - (-5x_1 - 4x_2)\ .$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
x_3	-4	1	1	0	0	4	-	4
← x_4	1	-1	0	1	0	4	4*	*
x_5	2	-1	0	0	1	10	5	-2
$\tilde{Z}$	-5↑	-4	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0		5
x_3	0	-3	1	4	0	20	-	3
→ x_1	1	-1	0	1	0	4	-	1
← x_5	0	1	0	-2	1	2	2*	*
$\tilde{Z}$	$\underline{0}$	-9↑	$\underline{0}$	5	$\underline{0}$	20		9
x_3	0	0	1	-2	3	26	-	
x_1	1	0	0	-1	1	6	-	
→ x_2	0	1	0	-2	1	2	-	
$\tilde{Z}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	-13	9	38		

Nach zwei Simplexschritten stellt sich heraus, daß die Aufgabe unlösbar ist. Die Zielfunktion $\tilde{Z}$ ist auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt. Im dritten Tableau zeigt der Koeffizient -13 in der letzten Zeile, daß die Wahl von x_4 als BV den Zielfunktionswert vergrößern würde. Da in der zugehörigen Spalte keine nichtnegativen Koeffizienten auftreten, besteht kein Engpaß, keine Grenze für die Größe x_4 als BV. Die Zielfunktion kann also auf der Menge der zulässigen Lösungen unbeschränkt wachsen, die Aufgabe ist nicht lösbar.

5. Die LO-Aufgabe

$$
\begin{aligned}
Z = 3x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \max \\
x_1 + x_2 &\leqq 2 \\
2x_1 - x_2 &\leqq 2 \\
x_1 + x_2 &\geqq 1 \\
2x_1 - x_2 &\geqq 1 \\
x_1 \geqq 0, \quad x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

ist mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen.

Der Übergang zur 1. Normalform ergibt

$$
\begin{aligned}
Z = 3x_1 + 2x_2 &\longrightarrow \max \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 2 \\
2x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 2 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_5 \quad &= 1 \\
2x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad - x_6 &= 1 \\
x_j \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Damit muß zur Gewinnung einer ersten zulässigen Basislösung eine <u>Hilfsaufgabe</u> formuliert werden. Zusätzliche Vorbereitungen sind nicht erforderlich, da die Bedingung $\underline{b} \geqq \underline{0}$ in der ersten Normalform bereits erfüllt ist. Die Hilfsaufgabe lautet

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \tilde{Z} = -(x_7 + x_8) \longrightarrow \max \\
&(2) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
&(3) \quad 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\
&(4) \quad x_1 + x_2 - x_5 + x_7 = 1 \\
&(5) \quad 2x_1 - x_2 - x_6 + x_8 = 1 \\
&\qquad x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 8.
\end{aligned}
$$

Damit sind x_3, x_4, x_7 und x_8 BV für eine erste zulässige Basislösung. Die Zielfunktion der Hilfsaufgabe muß als Funktion der NBV x_1, x_2, x_5 und x_6 dargestellt werden. Man löst (4) und (5) nach x_7 bzw. x_8 auf:

$$x_7 = 1 - x_1 - x_2 + x_5 \;; \qquad x_8 = 1 - 2x_1 + x_2 + x_6$$

und erhält durch Einsetzen in (1) und Zusammenfassung

$$\tilde{Z} = -2 - (-3x_1 + x_5 + x_6)$$

und kann nun mit dem Lösungsprozeß für die Hilfsaufgabe beginnen.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0	Q	$-\uparrow$
x_3	1	1	1	0	0	0	0	0	2	2	-1
x_4	2	-1	0	1	0	0	0	0	2	1	-2
x_7	1	1	0	0	-1	0	1	0	1	1	-1
$\leftarrow x_8$	2	-1	0	0	0	-1	0	1	1	1/2*	*
$\tilde{Z}$	$-3\uparrow$	0	$\underline{0}$	$\underline{0}$	1	1	$\underline{0}$	$\underline{0}$	-2		3
x_3	0	3/2	1	0	0	1/2	0	-1/2	3/2	1	-3/2
x_4	0	0	0	1	0	1	0	-1	1	-	0
$\leftarrow x_7$	0	3/2	0	0	-1	1/2	1	-1/2	1/2	1/3*	*
$\rightarrow x_1$	1	-1/2	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	-	1/2
$\tilde{Z}$	$\underline{0}$	$-3/2\uparrow$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	1	-1/2	$\underline{0}$	3/2	-1/2		3/2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	1	1		
x_4	0	0	0	1	0	1	0	1	1		
$\rightarrow x_2$	0	1	0	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3		
x_1	1	0	0	0	-1/3	-1/3	1/3	1/3	2/3		
$\tilde{Z}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	0	1	1	0		

Nach zwei Simplexschritten ist die optimale Lösung der Hilfsaufgabe ermittelt. Da $\tilde{Z} = 0$ ist, ergibt sich ein Startpunkt (1. zulässige Basislösung) für die Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Um das erste Tableau aufstellen zu können, muß die ursprüngliche Zielfunktion $Z = 3x_1 + 2x_2$ als Funktion der NBV x_5 und x_6 ausgedrückt werden. (Die künstlichen Variablen x_7 und x_8 sind in der eigentlichen Aufgabe nicht enthalten.) Aus den entsprechenden Zeilen des letzten Tableaus für die Lösung der Hilfsaufgabe ist abzulesen:

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6 , \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 .$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	Q	$-\uparrow$
$\leftarrow x_3$	0	0	1	0	1	0	1	1*	*
x_4	0	0	0	1	0	1	1	-	0
x_2	0	1	0	0	-2/3	1/3	1/3	-	2/3
x_1	1	0	0	0	-1/3	-1/3	2/3	-	1/3
Z	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$-7/3\uparrow$	-1/3	8/3		7/3
$\rightarrow x_5$	0	0	1	0	1	0	1	-	0
$\leftarrow x_4$	0	0	0	1	0	1	1	1*	*
x_2	0	1	2/3	0	0	1/3	1	3	-1/3
x_1	1	0	1/3	0	0	-1/3	1	-	1/3
Z	$\underline{0}$	$\underline{0}$	7/3	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$-1/3\uparrow$	5		1/3
x_5	0	0	1	0	1	0	1		
$\rightarrow x_6$	0	0	0	1	0	1	1		
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	2/3		
x_1	1	0	1/3	1/3	0	0	4/3		
Z	$\underline{0}$	$\underline{0}$	7/3	1/3	$\underline{0}$	$\underline{0}$	16/3		

Durch Einsetzen in die Zielfunktion folgt

$$Z = 3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6\right),$$

$$Z = \frac{8}{3} - \left(-\frac{7}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6\right).$$

Nach zwei Schritten ergibt sich die optimale Lösung

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0 \quad \text{und} \quad Z = \frac{16}{3}.$$

6. In einer LPG stehen für den Anbau von Mais und Flachs insgesamt 25,2 ha Anbaufläche zur Verfügung. Man kann mit einer Erntemenge von 50 kg auf 90 m^2 bei Mais und auf 300 m^2 bei Flachs rechnen. Die Anbaukosten sind 2 WE für 50 kg Mais und 6 WE für 50 kg Flachs. Sie dürfen 8000 WE nicht überschreiten. Als Mindesterntemengen lt. Plan seien jeweils 30 t festgelegt.

Der Gewinn soll maximiert werden. Wie sind die Anbauflächen zu wählen, wenn der Gewinn pro Tonne Mais 120 WE und pro Tonne Flachs 300 WE beträgt?

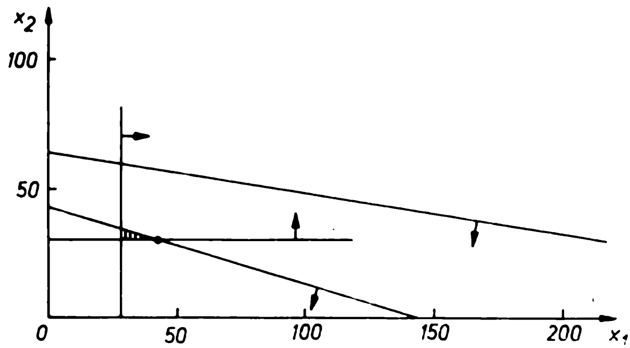
Es ist zuerst das mathematisch-ökonomische Modell aufzustellen und für jede vorkommende Größe die Einheit anzugeben.

Die zur Verfügung stehenden Angaben stimmen in den Einheiten nicht überein und müssen daher z. T. umgerechnet werden. Hier ist eine Umrechnung auf Tonnen und Hektar vorgenommen worden.

	Mais	Flachs
Ertrag in t pro ha	0,18	0,6
Anbaukosten in WE pro ha	40	120

$$
\begin{aligned}
Z = 120x_1 + 300x_2 &\longrightarrow \max \\
0{,}18x_1 + 0{,}6x_2 &\leqq 25{,}2 \\
20x_1 + 120x_2 &\leqq 8000 \\
x_1 &\geqq 30 \\
x_2 &\geqq 30 \\
x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich folgendes LO-Modell, wenn mit x_j die geplante Erntemenge der Fruchtart j in Tonnen bezeichnet wird.



Es bietet sich die graphische Lösung an. Der Lösungsbereich ist relativ klein, weil zur Erzielung der geforderten Mindestmengen fast die gesamte Anbaufläche benötigt wird. Die Begrenzung der Anbaukosten ist unwirksam. Da der Maisanbau pro Hektar mehr Gewinn abwirft als der Anbau von Flachs, wird Flachs nur in der Mindestmenge angebaut. Die optimale Lösung lautet:

$x_1 = 40$ t; $\quad x_2 = 30$ t; $\quad Z = 13\,800$ WE .

2.3.2. Übungsaufgaben

Es sind folgende LO- Aufgaben mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen:

1.
$$\begin{aligned} Z = 5x_1 + 4x_2 &\longrightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leqq 10 \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 16 \\ 3x_1 + x_2 &\leqq 24 \\ x_j &\geqq 0, \quad j = 1, 2 . \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} Z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &\longrightarrow \max \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\leqq 100 \\ x_1 + 5x_3 + x_4 &\leqq 200 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 200 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 150 \\ x_j &\geqq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 4 . \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Gleichungen können nach einer Variablen aufgelöst werden. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung erheblich.

3.
$$\begin{aligned} Z = 5x_1 + 6x_2 &\longrightarrow \max \\ -2x_1 + x_2 &\leqq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\geqq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leqq 6 \\ x_j &\geqq 0 \quad j = 1, 2 . \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} Z = 33x_1 + 13x_2 + 18x_3 &\longrightarrow \max \\ 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leqq 32 \\ 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 &\leqq 51 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leqq 21 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geqq 3 \\ x_j &\geqq 0 \quad j = 1, 2, 3 . \end{aligned}$$

5. Lösen Sie alle Beispiele des Abschnitts 2.2. mit Hilfe der Simplexmethode!

6. Beispiel 6 dieses Abschnitts ist rechnerisch mit der Simplexmethode zu lösen.

7. Ein Maschinenbaubetrieb stellt die Produkte P_1 und P_2 her. Es wird eingeschätzt, daß die Maschinenkapazität in den vier Abteilungen A_1 bis A_4 die Produktionsmengen von P_1 und P_2 begrenzt, während aus der Materialversorgung und den Absatzmöglichkeiten keine Einschränkungen der Produktionsmengen zu erwarten sind. Der Betrieb will das Betriebsergebnis maximieren.

Folgende Angaben stehen für die Ermittlung eines optimalen Produktionssortiments zur Verfügung:

Die Matrix $\underline{A}$ der erforderlichen Bearbeitungszeiten a_{ij} in Maschinenstunden der Abteilung i pro Mengeneinheit des Produktes j $[h/ME_j]$. Der Vektor $\underline{b}$ der für die Planperiode verfügbaren Maschinenkapazität in Stunden $[h]$, sowie der Vektor $\underline{c}$ der Gewinnkoeffizienten in Währungseinheiten pro Mengeneinheit $[WE/ME_j]$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 8 \\ 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 56\,000 \\ 48\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 34 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Es ist ein LO-Modell aufzustellen, zu lösen und die Lösung zu diskutieren!

8. Für eine ökonomische Aufgabenstellung liegt folgendes mathematisch-ökonomische Modell mit der entsprechenden optimalen Lösung vor:

$$\begin{aligned}
\text{ZF:}\quad & Z = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 12x_4 \longrightarrow \max \\
\text{NB:}\quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leqq 60 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leqq 45 \\
& 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leqq 90 \\
& 4x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leqq 120 \\
& x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \leqq 30 \\
\text{NNB:}\quad & x_i \geqq 0 \qquad\qquad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

$$\underline{x}^T_{opt} = (0,\ 0,\ 10,\ 25,\ 20,\ 0,\ 20,\ 5,\ 0) \qquad Z = 380$$

Für folgende Planvarianten, die sich aus dem Produktionsablauf ergeben haben, sind auf der Grundlage postoptimaler Berechnungen die Optimallösungen zu ermitteln.

8.1. Durch Einsatz einer anderen Technologie wird der Vektor $\underline{a}_4$ verändert.

8.1.1.

$$\underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{a}'_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weiter soll $\underline{a}_3$ verändert werden.

8.1.2.

$$\underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{a}'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.2. Der Kapazitätsvektor ändert sich.

8.2.1. $\underline{b}_1^T = (45,\ 45,\ 100,\ 120,\ 30)$

8.2.2. $\underline{b}_2^T = (60,\ 60,\ 90,\ 100,\ 30)$

8.3. Durch Umstrukturierung des Produktionsprozesses ist eine andere Gewinnverteilung an den unterschiedlichen Produkten möglich. Der Zielfunktionsvektor ändert sich wie folgt:

8.3.1. $\underline{c}_1^T = (6,\ 9,\ 9,\ 12)$

8.3.2. $\underline{c}_2^T = (9,\ 10,\ 8,\ 9)$

8.4. Es wird folgende Kapazitätsbeschränkung durch Aufnahme zusätzlicher Nebenbedingungen vorgenommen:

8.4.1. $3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leqq 155$

8.4.2. $4x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \leqq 200$

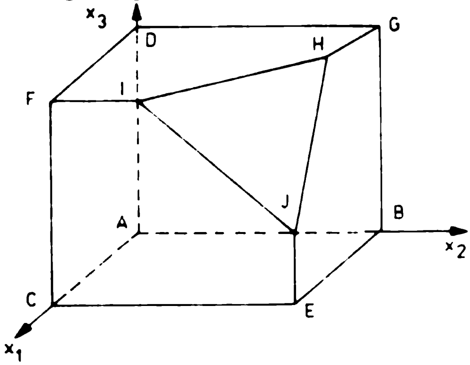
Anmerkungen

A_1: Die postoptimalen Berechnungen gehen immer von der Grundaufgabe aus.

A_2: Bei der numerischen Realisierung sind entweder die Rechentableaus für die Grundaufgabe zu verwenden (Rechnung ohne Kleinrechner) oder z. B. auf der Grundlage der revidierten Simplexmethode Kleinrechner zu nutzen.

A_3: Die Aufgabe 8.4.2. sollte nur mit Kleinrechner gelöst werden.

9. Gegeben sei der dreidimensionale Lösungsraum einer linearen Optimierungsaufgabe mit den Extrempunkten A, B, ..., J.



A = (0, 0, 0)
B = (0, 1, 0)
C = (1, 0, 0)
D = (0, 0, 1)
usw.
J = $(1, \frac{1}{2}, 1)$

9.1. Sind die folgenden Paare von Extrempunkten benachbart?

A, B B, D E, H C, I

9.2. Es sei

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \longrightarrow \max$$

$c_1 > 0$, $c_2 > 0$ und $c_3 > 0$.

Welche(r) Extrempunkt(e) ist (sind) optimal, wenn gilt:

a) $c_1 > c_2 > c_3$ d) $c_1 = c_2 = c_3$

b) $c_2 > c_1 > c_3$ e) $c_1 = c_2 < c_3$

c) $c_3 > c_2 > c_1$ f) $c_1 > c_2 = c_3$

9.3. Stellen Sie das System der Nebenbedingungen der linearen Optimierungsaufgabe als Ungleichungssystem auf!

9.4. Der Lösungsprozeß mit Hilfe der Simplexmethode beginne im Extrempunkt A und ende im Extrempunkt H.
Können dann die Schritte der Simplexmethode über folgende Extrempunkte führen?

a) A $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ H
b) A $\longrightarrow$ F $\longrightarrow$ J $\longrightarrow$ H
c) A $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ I $\longrightarrow$ H
d) A $\longrightarrow$ I $\longrightarrow$ H
e) A $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ H
f) A $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ A $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ H
g) A $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ F $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ A $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ H

9.5. Welche Variablen werden beim Übergang

a) $A \longrightarrow B$,

b) $E \longrightarrow I$,

c) $F \longrightarrow J$,

d) $D \longrightarrow G$

neue Basisvariablen bzw. neue Nichtbasisvariablen?

2.4. Dualität

2.4.1. Beispiele

Ausgangspunkt der Betrachtungen bei der Dualität wird stets die 2. Normalform sein. Wenn also gefordert ist, zu einer LO-Aufgabe die duale Aufgabe zu formulieren, so ist zuerst die 2. Normalform dieser Aufgabe zu bilden. Dann ist die duale Aufgabe zu formulieren.

1. Vorgelegt seien die LO-Aufgaben

a)
$$\begin{aligned} Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 &\longrightarrow \max \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &\leqq 18 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 10 \\ -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leqq 32 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geqq 2 \\ x_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} Z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 &\longrightarrow \min \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\geqq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leqq 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 14 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqq 6 \\ x_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

zu denen jeweils die duale Aufgabe zu bilden ist. Zwei zueinander duale Aufgaben werden unter Zugrundelegung der 2. Normalform wie folgt formuliert:

$$\max \left\{ \underline{c}^T \underline{x} \; / \; \underline{A}\,\underline{x} \leqq \underline{b}, \quad \underline{x} \geqq 0 \right\}$$

$$\min \left\{ \underline{b}^T \underline{\hat{x}} \; / \; A^T \underline{\hat{x}} \geqq \underline{c}, \quad \underline{\hat{x}} \geqq 0 \right\}.$$

Im ersten Schritt werden die Systeme der Nebenbedingungen so umgeformt, daß sie die angegebene Form haben. Dabei werden die Gleichungen durch zwei entgegengesetzte Ungleichungen ersetzt und teilweise Ungleichungen mit (-1) multipliziert, um das gewünschte Relationszeichen zu erhalten.

a) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\leqq 18 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\leqq 10 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\leqq -10 \\ -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leqq 32 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\leqq -2 \\ x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\geqq 10 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\geqq -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\geqq 14 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\geqq -14 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqq 6 \\ x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$

Nunmehr kann der Übergang zur Dualaufgabe erfolgen.

a) $$\begin{aligned} \hat{z} = 18\hat{x}_1 + 10\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 + 32\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 &\longrightarrow \min \\ 2\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 - 4\hat{x}_4 - \hat{x}_5 &\geqq 5 \\ -\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 + 6\hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\geqq 4 \\ -\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 + 5\hat{x}_4 - \hat{x}_5 &\geqq -1 \\ \hat{x}_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5 &, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \hat{z} = 10\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 14\hat{x}_3 - 14\hat{x}_4 + 6\hat{x}_5 &\longrightarrow \max \\ 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 - 2\hat{x}_4 - \hat{x}_5 &\leqq 3 \\ 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4 + 2\hat{x}_5 &\leqq -1 \\ -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\leqq 2 \\ \hat{x}_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5 &. \end{aligned}$$

In den angegebenen Formulierungen treten nur gleichgerichtete Relationen auf. Durch Multiplikation mit (-1) kann bei Umkehrung des Relationszeichens erreicht werden, daß im Beschränkungsvektor nur nichtnegative Werte auftreten. Durch die Transformation $\hat{x}_2' = \hat{x}_2 - \hat{x}_3$ bei a) und $\hat{x}_3' = \hat{x}_3 - \hat{x}_4$ bei b) kann die Anzahl der Variablen reduziert werden. Die neue Variable $\hat{x}_2'$ bzw. $\hat{x}_3'$ ist aber nicht vorzeichenbeschränkt. Die resultierende Formulierung lautet dann:

a) $$\begin{aligned} \hat{z} = 18\hat{x}_1 + 10\hat{x}_2' + 32\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 &\longrightarrow \min \\ 2\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2' - 4\hat{x}_4 - \hat{x}_5 &\geqq 5 \\ -\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2' + 6\hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\geqq 4 \\ \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2' - 5\hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\leqq 1 \\ \hat{x}_1, \hat{x}_4, \hat{x}_5 &\geqq 0, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \hat{z} = 10\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 14\hat{x}_3' + 6\hat{x}_5 &\longrightarrow \max \\ 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3' - \hat{x}_5 &\leqq 3 \\ -2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3' + 2\hat{x}_5 &\geqq 1 \\ -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3' + \hat{x}_5 &\leqq 2 \\ \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_5 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2. Zu der LO-Aufgabe

$$
\begin{aligned}
Z = 80x_1 + 195x_2 + 240x_3 &\longrightarrow \min \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geqq 330 \\
x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geqq 420 \\
x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

ist die duale Aufgabe zu formulieren und mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen. Aus dem optimalen Tableau dieser Aufgabe ist auch die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe abzuleiten. Zuerst ist die duale Aufgabe zu formulieren, wobei hier keine Transformationen durchzuführen sind.

$$
\begin{aligned}
\hat{Z} = 330\hat{x}_1 + 420x_2 &\longrightarrow \max \\
2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 &\leqq 80 \\
\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 &\leqq 195 \\
3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 &\leqq 240 \\
\hat{x}_1, \hat{x}_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Dann ist die 1. Normalform herzustellen und der Lösungsprozeß mit der Simplexmethode vorzunehmen.

$$
\begin{aligned}
\hat{Z} = 330\hat{x}_1 + 420\hat{x}_2 &\longrightarrow \max \\
2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 &= 80 \\
\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + \hat{x}_4 &= 195 \\
3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + \hat{x}_5 &= 240 \\
\hat{x}_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	x_0	Q	$-\uparrow$
$\hat{x}_3$	2	1	1	0	0	80	80	-1
$\hat{x}_4$	1	3	0	1	0	195	65	-3
$\leftarrow \hat{x}_5$	3	4	0	0	1	240	60*	*
$\hat{z}$	-330	-420↑	0	0	0	0		420
$\leftarrow \hat{x}_3$	5/4	0	1	0	-1/4	20	16*	*
$\hat{x}_4$	-5/4	0	0	1	-3/4	15	-	5/4
$\rightarrow \hat{x}_2$	3/4	1	0	0	1/4	60	80	-3/4
$\hat{z}$	-15↑	0	0	0	105	25200		15
$\rightarrow \hat{x}_1$	1	0	4/5	0	-1/5	16		
$\hat{x}_4$	0	0	1	1	-1	35		
$\hat{x}_2$	0	1	-3/5	0	2/5	48		
$\hat{z}$	0	0	12	0	102	25440		

Der Lösungsprozeß führt nach zwei Schritten zu einer eindeutigen optimalen Lösung. Für das gelöste Problem ergibt sich: $\hat{x}_1 = 16$, $\hat{x}_2 = 48$, $\hat{x}_4 = 35$ und $\hat{z} = 25440$. Die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe ist in der letzten Zeile des Endtableaus, beginnend unter der ersten Zusatzvariablen, also unter $\hat{x}_3$, abzulesen. $x_1 = 12$, $x_3 = 102$, $Z = 25440$. In der letzten Zeile des Tableaus ist die Lösung des ursprünglichen Problems ebenfalls auf die 1. Normalform

$$
\begin{aligned}
Z = 80x_1 + 195x_2 + 240x_3 &\longrightarrow \min \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 330 \\
x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_5 &= 420 \\
x_j \geqq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 5 &
\end{aligned}
$$

bezogen. Die optimale Lösung lautet vollständig: $x_1 = 12$, $x_2 = 0$, $x_3 = 102$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ und $Z = 25440$. In der 2. Normalform der primalen Aufgabe sind beide Ungleichungen als Gleichungen erfüllt, d. h., die Schlupfvariablen sind gleich Null. Daher sind in der dualen Aufgabe die Problemvariablen $\hat{x}_1 > 0$ und $\hat{x}_2 > 0$. Aus der Bedingung $\hat{x}_{10} + 3\hat{x}_{20} < 195$ in der optimalen Lösung folgt aus den Dualitätssätzen $x_2 = 0$ im Primal.

3. Die LO-Aufgabe

$$
\begin{aligned}
Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\longrightarrow \min \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geqq 32 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\geqq 20 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqq 24 \\
x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

ist mit der dualen Simplexmethode zu lösen.
Der erste Schritt zur Vorbereitung der Lösung ist der Übergang zur 1. Normalform

$$
\begin{aligned}
Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\longrightarrow \min. \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \qquad\qquad &= 32 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad - x_5 \qquad &= 20 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad\qquad - x_6 &= 24 \\
x_j \geqq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6 &.
\end{aligned}
$$

Da die Koeffizienten im Zielfunktionsvektor nichtnegativ sind, kann man durch eine Transformation leicht eine Lösung finden, die dual zulässig ist und damit einen Startpunkt für den Lösungsprozeß mit Hilfe der dualen Simplexmethode bildet.

$$
\begin{aligned}
Z = -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 &\longrightarrow \max \\
-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 \qquad\qquad &= -32 \\
- x_1 - 2x_2 - 5x_3 \qquad + x_5 \qquad &= -20 \\
-2x_1 - x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + x_6 &= -24 \\
x_j \geqq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 6 &
\end{aligned}
$$

Damit bietet sich für diese Aufgabe die Lösung mit der dualen Simplexmethode an. Die erste dual zulässige Basislösung ergibt sich mit den BV x_4, x_5 und x_6. Hier wird zuerst die aus der Basis ausscheidende Variable nach dem Kriterium $x_r = \min\limits_i (x_i \mid x_i < 0)$ gewählt. Das ist im ersten Schritt $x_4 = -32$.

Um im Bereich der <u>dual</u> zulässigen Basislösungen zu bleiben, muß die Spalte (NBV, die jeweils zur BV wird) geeignet gewählt werden.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	$-\uparrow$
$\leftarrow x_4$	-2	-3	-4	1	0	0	-32*	*
x_5	-1	-2	-5	0	1	0	-20	5
x_6	-2	-1	-2	0	0	1	-24	2
Z	6	5	4↑	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	-4
Q	-3	-5/3	-1	-	-	-		
$\rightarrow x_3$	1/2	3/4	1	-1/4	0	0	8	1/4
x_5	3/2	7/4	0	-5/4	1	0	20	5/4
$\leftarrow x_6$	-1	1/2	0	-1/2	0	1	- 8*	*
Z	4	2	$\underline{0}$	1↑	$\underline{0}$	$\underline{0}$	-32	
Q	-4	-	-	-2	-	-		
x_3	1	1/2	1	0	0	-1/2	12	
x_5	4	1/2	0	0	1	-5/2	40	
$\rightarrow x_4$	2	-1	0	1	0	-2	16	
	2	3	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	2	-48	

Um die BV werdende Variable positiv werden zu lassen, muß das Leitelement $d_{rk} < 0$ sein. Um im Bereich der dual zulässigen Basislösungen zu verbleiben, muß gelten

$$\frac{e_k}{d_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{e_j}{d_{rj}} \middle| \; d_{rj} < 0 \right\}.$$

Die Quotienten berechnet man im Tableau in einer besonderen Zeile Q. Nach zwei Schritten erhält man eine auch primal zulässige und damit optimale Basislösung. Es ist $x_1 = x_2 = x_6 = 0$, $x_3 = 12$, $x_4 = 16$, $x_5 = 40$, $Z = 48$. Im Tableau erscheint der Zielfunktionswert mit einem Minuszeichen, weil die Zielfunktion am Anfang des Lösungsprozesses mit (-1) multipliziert wurde.

4. Gegeben ist die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z = 2x_1 + 3x_2 &\longrightarrow \max \\ - x_1 + x_2 &\leqq 1 \\ - x_1 + 2x_2 &\leqq 4 \\ x_1 - 4x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 . \end{aligned}$$

Es ist die duale Aufgabe zu formulieren und von beiden Aufgaben die 1. Normalform zu bilden. Das Primal ist mit der Simplexmethode und das Dual mit der dualen Simplexmethode zu lösen. Die Ergebnisse sind zu diskutieren.

Das Dual lautet:

$$\begin{aligned}
\hat{z} = \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 &\longrightarrow \min \\
-\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 &\geqq 2 \\
\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 &\geqq 3 \\
\hat{x}_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, 3 .
\end{aligned}$$

Die 1. Normalformen sind Ausgangspunkt der Rechnungen

$$\begin{aligned}
z = 2x_1 + 3x_2 &\longrightarrow \max \\
-x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
-x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
x_1 - 4x_2 + x_5 &= 2 \\
x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\hat{z} = \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 &\longrightarrow \min \\
-\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 &= 2 \\
\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 - \hat{x}_5 &= 3 \\
\hat{x}_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	$-\uparrow$
$\leftarrow x_3$	-1	1	1	0	0	1	1*	*
x_4	-1	2	0	1	0	4	2	-2
x_5	1	-4	0	0	1	2	-	4
z	-2	-3↑	0	0	0	0		3
$\rightarrow x_2$	-1	1	1	0	0	1	-	1
$\leftarrow x_4$	1	0	-2	1	0	2	2*	*
x_5	-3	0	4	0	1	6	-	3
z	-5↑	0	3	0	0	3		5
x_2	0	1	-1	1	0	3		
$\rightarrow x_1$	1	0	-2	1	0	2		
x_5	0	0	-2	3	1	12		
z	0	0	-7	5	0	13		

Der Lösungsprozeß für das Primal bricht nach zwei Schritten ab. Dem negativen Wert in der letzten Zeile entsprechend müßte x_3 im folgenden Schritt BV werden. Da der zu x_3 gehörende Vektor nur nichtpositive Komponenten aufweist, ist es nicht möglich, von diesem Tableau ausgehend, mit Hilfe der Simplexmethode eine weitere

Basislösung zu berechnen. Die Zielfunktion kann auf der Menge der zulässigen Lösungen unbegrenzt wachsen.

Entsprechend müßte sich im Lösungsprozeß des Duals zeigen, daß es nicht möglich ist, zu einer primal zulässigen Lösung zu kommen. Als Ausgangspunkt der Berechnungen muß eine dual zulässige Basislösung gewählt werden, die man leicht durch Multiplikation der Gleichungen der 1. Normalform mit (-1) erhält. Es lassen sich ebenfalls zwei Schritte ausführen.

BV	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	x_0	-↑
$\hat{x}_4$	1	1	-1	1	0	-2	-1
← $\hat{x}_5$	-1	-2	4	0	1	-3*	*
$\hat{z}$	1↑	4	2	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	-1
Q	-1	-2	-	-	-		
← $\hat{x}_4$	0	-1	3	1	1	-5*	*
→ $\hat{x}_1$	1	2	-4	0	-1	3	-2
$\hat{z}$	$\underline{0}$	2↑	6	$\underline{0}$	1	-3	-2
Q	-	-2	-	-	-		
→ $\hat{x}_2$	0	1	-3	-1	-1	5	
$\hat{x}_1$	1	0	2	2	1	-7	
$\hat{z}$	0	$\underline{0}$	12	2	3	-13	

Dann müßte zur Erreichung einer primal zulässigen Basislösung x_2 als BV ausscheiden. Es sind aber alle Elemente der entsprechenden Zeile nichtnegativ, und somit ergibt sich nicht die Möglichkeit, eine primal zulässige Lösung zu erhalten. Im Dual zeigt sich, daß die Menge der primal zulässigen Lösungen leer ist. Beide Tableaus gestatten jeweils die Ablesung der zweiten Aufgabe.

2.4.2. Übungsaufgaben

1. Formulieren Sie zu den beiden folgenden Aufgaben die dualen Aufgaben:

a)
$$
\begin{aligned}
Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &\longrightarrow \max \\
10x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &\leqq 57 \\
3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geqq 10 \\
2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= 13 \\
x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, \ldots, 4 ,
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
Z = 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 &\longrightarrow \min \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\
4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\geqq 18 \\
x_2 - x_3 &\geqq 1 \\
x_j \geqq 0, \quad j &= 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

2. Lösen Sie unter Verwendung des Dualproblems bzw. der dualen Simplexmethode folgende Aufgaben:

a)
$$
\begin{aligned}
Z = x_1 + x_2 &\longrightarrow \min \\
2x_1 + x_2 &\geqq 8 \\
2x_1 + 3x_2 &\geqq 12 \\
x_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2,
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
Z = -x_1 + x_2 &\longrightarrow \min \\
2x_1 + x_2 &\geqq 2 \\
x_1 - x_2 &\geqq 2 \\
x_1 + x_2 &\geqq 5 \\
x_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2,
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
Z = 2x_1 + 5x_2 &\longrightarrow \min \\
3x_1 + 3x_2 &\geqq 27 \\
2x_1 + x_2 &\geqq 10 \\
x_1 + 3x_2 &\geqq 15 \\
2x_1 + 4x_2 &\geqq 28 \\
x_j \geqq 0 \quad j &= 1, 2, \ldots, 4 .
\end{aligned}
$$

3. Bilden Sie zu allen Beispielen des Abschnitts 2.2. die duale Aufgabe, und lösen Sie die Beispiele rechnerisch!

2.5. Parametrische Optimierung

2.5.1. Beispiele

Es werden lediglich spezielle Aufgaben der einparametrischen linearen Optimierung betrachtet.

1. Für das Intervall $(-\infty < t < +\infty)$ sollen die Lösungen der einparametrischen linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} Z = (2 + t)\, x_1 + (3 - t)\, x_2 &\longrightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 &\leqq 4 \\ x_1 + x_2 &\leqq 5 \\ 2x_1 - x_2 &\leqq 9 \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

gefunden werden, in der die Zielfunktion linear vom Parameter t abhängig ist.

Bei der Lösung ist im Unterschied zu nichtparametrischen Aufgaben zusätzlich für jede zulässige Basislösung das Intervall von t zu finden, für das diese Lösung optimal ist (charakteristischer Bereich). Die Grenzen des charakteristischen Bereiches werden durch die charakteristischen Punkte gebildet.

Bei der vorgelegten Aufgabe läßt sich ohne weiteres eine erste zulässige Basislösung finden, nachdem sie in die 1. Normalform überführt wurde.

$$\begin{aligned} Z = (2 + t)\, x_1 + (3 - t)\, x_2 &\longrightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 4 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 5 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \\ x_j \geqq 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, 5 & \end{aligned}$$

$\underline{x}_1^T = (0\ 0\ 4\ 5\ 9)$ ist die erste zulässige Basislösung, die optimal ist, wenn das Optimalitätskriterium erfüllt ist, d. h., wenn gilt (1) $-2 - t \geqq 0$, (2) $-3 + t \geqq 0$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	$-\uparrow$
$\leftarrow x_3$	-1	2	1	0	0	4	2*	*
x_4	1	1	0	1	0	5	5	-1
x_5	2	-1	0	0	1	9	-	1
Z	$-2-t$	$-3+t\uparrow$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0		$3-t$
$\rightarrow x_2$	-1/2	1	1/2	0	0	2	-	1/2
$\leftarrow x_4$	3/2	0	-1/2	1	0	3	2*	*
x_5	3/2	0	1/2	0	1	11	22/3	-3/2
Z	$-\frac{7}{2} - \frac{t}{2}$	$\underline{0}$	$\frac{3}{2} - \frac{t}{2}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$6-2t$		$\frac{7}{2} + \frac{t}{2}$

Es folgt für (1) $t \leqq -2$ und für (2) $t \geqq 3$. Der Lösungsbereich für das Ungleichungssystem (1) - (2) ist also die leere Menge $\emptyset$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
x_2	0	1	1/3	1/3	0	3	9	-1/3
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	2	-	1/3
← x_5	0	0	1	-1	1	8	8*	*
z	0	0	1/3-2t/3↑	7/3+t/3	0	13-t		-1/3+2t/3
← x_2	0	1	0	2/3	-1/3	1/3	1*	*
x_1	1	0	0	1/3	1/3	14/3	13	-1/3
→ x_3	0	0	1	-1	1	8	-	1
z	0	0	0	8/3-t/3↑	-1/3+2t/3	31/3+13t/3		-8/3+t/3
→ x_4	0	3/2	0	1	-1/2	1/2		
x_1	1	-1/2	0	0	1/2	9/2		
x_3	0	3/2	1	0	1/2	17/2		
z	0	-4+t/2	0	0	1+t/2	$9 + \frac{9}{2}t$		

Wenn man für t einen kleinen Wert annimmt, muß x_2 BV werden. Die resultierende Basislösung ist optimal für

$$-7/2 - t/2 \geqq 0$$
$$3/2 - t/2 \geqq 0,$$

d. h. für $t \in (-\infty, -7]$.

Läßt man t wachsen, so entspricht die NBV x_1 nicht mehr dem Kriterium und muß BV werden. Die sich dann ergebende Basislösung mit den BV x_1, x_2 und x_5 ist für $1/3 - 2t/3 \geqq 0$, $7/3 + t/3 \geqq 0$, also für $t \in [-7, 1/2]$ optimal.

Für größere Werte ist x_3 zur BV zu tauschen. Die folgende Basislösung ist für $8/3 - t/3 \geqq 0$, $-1/3 + 2t/3 \geqq 0$, also für $t \in [1/2, 8]$ optimal.

Nimmt man $t \geqq 8$, so muß x_4 BV werden, und x_2 wird NBV. Das Ungleichungssystem $-4 + t/2 \geqq 0$, $1 + t/2 \geqq 0$ gilt für $t \in [8, +\infty)$. Damit ist das gesamte Intervall untersucht. Die charakteristischen Werte sind -7, 1/2 und 8. Die Lösungen für die charakteristischen Intervalle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	$-\infty < t \leqq -7$	$-7 \leqq t \leqq 1/2$	$1/2 \leqq t \leqq 8$	$8 \leqq t < +\infty$
x_1	0	2	13/3	4
x_2	2	3	2/3	0
x_3	0	0	8	9
x_4	3	0	0	1
x_5	11	8	0	0
Z	6 - 2t	13 - t	32/3 + 11t/3	8 + 4t

Ist die Abhängigkeit von einem Parameter nicht für den Zielfunktionsvektor $\underline{c}$, sondern für den Ressourcenvektor $\underline{b}$ gegeben, so kann man diese Aufgabe entweder direkt mit Hilfe der dualen Simplexmethode lösen oder durch Bildung der dualen Aufgabe auf den vorigen Fall - Parameterabhängigkeit im Zielfunktionsvektor $\underline{c}$ - zurückführen.

2. Es werde am Beispiel der Aufgabe

$$\begin{aligned} Z = 3x_1 + 8x_2 &\longrightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leqq 4 + 2t \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 20 + t \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 28 - 3t \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

für $-2 \leqq t \leqq 28/3$ die Lösung mit Hilfe der dualen Simplexmethode dargestellt. Zuerst wird die Aufgabe in die 1. Normalform überführt und dann für $t = -2$ die optimale Lösung mit Hilfe der Simplexmethode ermittelt.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
← x_3	-1	1	1	0	0	4 + 2t	4 + 2t*	*
x_4	1	2	0	1	0	20 + t	10 + t/2	-2
x_5	2	1	0	0	1	28 - 3t	28 - 3t	-1
Z	-3	-8↑	0	0	0	0		8
→ x_2	-1	1	1	0	0	4 + 2t	-	1
← x_4	3	0	-2	1	0	12 - 3t	4 - t*	*
x_5	3	0	-1	0	1	24 - 5t	6 - 5t/3	-3
Z	-11↑	0	8	0	0	32 + 16t		11
x_2	0	1	1/3	1/3	0	8 + t	-	-1/3
⇄ x_1	1	0	-2/3	1/3	0	4 - t	-6 + 3t/2*	*
x_5	0	0	1	-1	1	12 - 2t	-	-1
Z	0	0	2/3↑	11/3	0	76 + 5t		-2/3
Q	-	-	-1	-	-			
x_2	1/2	1	0	1/2	0	10 + t/2	-	-1/2
→ x_3	-3/2	0	1	-1/2	0	-6 + 3t/2	12 - 3t	1/2
← x_5	3/2	0	0	-1/2	1	18 - 7t/2	-36 + 7t*	*
Z	1	0	0	4↑	0	80 + 4t		-4
Q	-	-	-	-2	-	-		
x_2	2	1	0	0	1	28 - 3t		
x_3	-3	0	1	0	-1	-24 + 5t		
→ x_4	-3	0	0	1	-2	-36 + 7t		
Z	13	0	0	0	8	224 - 24t		

Nach zwei Simplexschritten ergibt sich die optimale Lösung. Der Bereich der primalen Zulässigkeit wird durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 8 + t &\geqq 0 \\ 4 - t &\geqq 0 \\ 12 - 2t &\geqq 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Die Lösung ergibt $t \in [-8; 4]$. Für $t > 4$ muß x_1 NBV werden und durch x_3 als BV ersetzt werden. Bei der dualen Simplexmethode muß die duale Zulässigkeit erhalten bleiben, und es werden die entsprechenden Quotienten gebildet.

Die primale Zulässigkeit der dann ermittelten Basislösung ist durch das Ungleichungssystem

$$10 + t/2 \geqq 0$$
$$-6 + 3t/2 \geqq 0$$
$$18 - 7t/2 \geqq 0$$

bestimmt. Die Lösung ergibt $t \in [4; 36/7]$. Für $t > 36/7$ wird die BV x_5 durch x_4 ersetzt. Die anschließend berechnete Basislösung ist primal zulässig, wenn

$$28 - 3t \geqq 0$$
$$-24 + 5t \geqq 0$$
$$-36 + 7t \geqq 0$$

ist. Das gilt für $t \in [36/7; 28/3]$. Damit ist das gesamte zu untersuchende Intervall für t überdeckt. Die Lösungen werden in einer Tabelle zusammengestellt:

	$-2 \leqq t \leqq 4$	$4 \leqq t \leqq 36/7$	$36/7 \leqq t \leqq 28/3$
x_1	$4 - t$	0	0
x_2	$8 + t$	$10 + t/2$	$28 - 3t$
x_3	0	$-6 + 3t/2$	$-24 + 5t$
x_4	0	0	$-36 + 7t$
x_5	$12 - 2t$	$18 - 7t/2$	0
Z	$76 + 5t$	$80 + 4t$	$224 - 24t$

2.5.2. Übungsaufgaben

1. Es ist die parametrische LO-Aufgabe

$$Z = 2x_1 + (3 + t)x_2 \longrightarrow \max$$
$$x_1 + x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 7 \qquad x_1, x_2 \geqq 0$$

für $-\infty < t < +\infty$ zu lösen!

2. Es ist die parametrische LO-Aufgabe

$$Z = x_1 + x_2 \longrightarrow \max$$
$$7x_1 + 4x_2 \leqq 28$$
$$5x_1 + 6x_2 \leqq 30 - t$$
$$x_1 - x_2 \leqq 3 + t \qquad x_1, x_2 \geqq 0$$

für $-3 \leqq t \leqq 30$ zu lösen!

2.6. Transportprobleme

Die Aufgaben sind aus didaktisch-methodischen Gründen so formuliert, daß die Lösung von Hand zumutbar ist. Da praktische Aufgaben wegen ihrer Dimension nur mit Hilfe von Rechentechnik gelöst werden können, ist es anzuraten, bei der Lösung der Aufgaben Kleinrechner zusätzlich zu nutzen.

2.6.1. Beispiele

1. Auf drei Güterbahnhöfen der Deutschen Reichsbahn stehen leere Güterwagen gleichen Typs, die auf vier anderen Güterbahnhöfen zur Beladung benötigt werden. Die Standorte und die Anzahl der dort zur Verfügung stehenden bzw. benötigten Güterwagen sind bekannt. (ME bedeutet Mengeneinheiten.)

Abgebende Güterbahnhöfe: A_1: 3 [ME]; A_2: 18 [ME]; A_3: 9 [ME]

Beziehende Bahnhöfe: B_1: 6 [ME]; B_2: 8 [ME]; B_3: 5 [ME]; B_4: 11 [ME]

Die Güterwagen sind von den Güterbahnhöfen A_i (i = 1, 2, 3) unter geringstem Kostenaufwand zu den Güterbahnhöfen B_j (j = 1, 2, 3, 4) zu bringen. Dabei werden die Kosten für den Transport eines Güterwagens von A_i nach B_j den Entfernungen proportional angenommen und in $\frac{\text{Geldeinheiten}}{\text{Mengeneinheiten}}$ $\left[\frac{GE}{ME}\right]$ ausgedrückt. Diese Werte sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	10	8	11
A_2	12	10	14	14
A_3	8	8	11	13

(Transportkostentabelle)

c_{ij} $\quad$ i = 1, 2, 3
j = 1, 2, 3, 4

Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

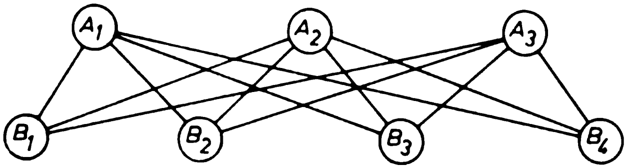
Lösung:

Entscheidungsvariable sind die Transportmengen von A_i nach B_j. Sie werden mit x_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4) bezeichnet. Die Variablen lassen sich übersichtlich in einer Tabelle darstellen:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

(Transportmengentabelle)

Die Transportbeziehungen lassen sich in einer Skizze schematisch darstellen. Man erhält dadurch eine bessere Übersicht beim Aufstellen der Beziehungen für das mathematisch-ökonomische Modell.



Nebenbedingungen - Aufkommen:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 3$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 18$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 9$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, 3$$

Nebenbedingungen - Bedarf:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 5$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 11$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_i \ .$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen lauten:

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4 \ .$$

Abschließend die Zielfunktion: $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$

$$Z = 12x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 11x_{14} + 12x_{21} + 10x_{22} + 14x_{23} + 14x_{24} + 8x_{31} + 8x_{32} + 11x_{33} + 13x_{34} \longrightarrow \min \ .$$

2. Drei Betriebe B_i (i = 1, 2, 3) stellen ein gleichartiges (homogenes) Gut in folgenden Mengeneinheiten her:

B_1: 23 [ME]; B_2: 13 [ME]; B_3: 10 [ME] .

Die Produkte sind zu vier Endverbrauchern E_j (j = 1, 2, 3, 4) mit folgendem Bedarf zu transportieren:

E_1: 12 [ME]; E_2: 9 [ME]; E_3: 12 [ME]; E_4: 8 [ME] .

Die Transportkosten sind in folgender Matrix gegeben: $\left[\frac{GE}{ME}\right]$

$$\frac{C}{ME} = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 10 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Da Angebot und Nachfrage nicht übereinstimmen, wird angenommen, daß in allen Betrieben Lagerungsmöglichkeiten für die nicht benötigten Produkte vorhanden sind bzw. in diesen Betrieben die Produktion entsprechend reduziert werden kann. Hierdurch entstehen keine zusätzlichen Kosten. Die Summe der Transportkosten ist zu minimieren.

<u>Lösung</u>:

<u>NB</u>: Aufkommen

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leqq 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leqq 13 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leqq 10 \end{aligned}$$

Bedarf:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 12 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 9 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 12 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 8 \end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt, da:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{4} b_j$$

<u>NNB</u>: $x_{ij} \geqq 0$ $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3, 4$

<u>ZF</u>: $$Z = 14x_{11} + 12x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 5x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} \longrightarrow \min$$

Es handelt sich um eine offene Transportaufgabe, die durch Einfügen eines fiktiven Verbrauchers E_f mit den dazugehörigen fiktiven Transportmengen x_{if} in eine geschlossene Transportaufgabe überführt werden kann.

$\underline{\text{NB}}$:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1f} &= 23 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{2f} &= 13 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{3f} &= 10 \\
x_{1f} + x_{2f} + x_{3f} &= 5
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

erfüllt.

Das mathematisch-ökonomische Modell läßt sich auch schematisch in einer Tabelle angeben:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_f	a_i
B_1	$\boxed{14}$ x_{11}	$\boxed{12}$ x_{12}	$\boxed{10}$ x_{13}	$\boxed{7}$ x_{14}	$\boxed{0}$ x_{1f}	23
B_2	$\boxed{5}$ x_{21}	$\boxed{8}$ x_{22}	$\boxed{6}$ x_{23}	$\boxed{3}$ x_{24}	$\boxed{0}$ x_{2f}	13
B_3	$\boxed{10}$ x_{31}	$\boxed{6}$ x_{32}	$\boxed{5}$ x_{33}	$\boxed{4}$ x_{34}	$\boxed{0}$ x_{3f}	10
b_j	12	9	12	8	5	46

Die Kosten für den fiktiven Verbraucher sind mit Null anzusetzen, da die entsprechenden Mengen nicht transportiert werden. Dieses Tableau stellt gleichzeitig den Ausgangspunkt für die numerische Lösung der Transportaufgabe dar.

3. Die Produzenten (P_i) erzeugen das gleiche Produkt, das zu vier Verbrauchern (V_j) transportiert werden soll. Die Produzenten produzieren folgende Mengen (a_i):

	P_1	P_2	P_3
a_i	40	45	50

und die Verbraucher benötigen folgende Mengen (b_j):

	V_1	V_2	V_3	V_4
b_j	22	33	44	36

Die Transportkosten je Mengeneinheit auf der Transportstrecke P_iV_j sind c_{ij} und folgender Tabelle zu entnehmen:

	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	8	3	3	4
P_2	6	7	5	8
P_3	1	8	10	2

Die insgesamt auftretenden Transportkosten sind zu minimieren. Folgende Aufgaben sind zu lösen:

a) Stellen Sie das mathematisch-ökonomische Modell auf!

b) Bestimmen Sie eine zulässige Basislösung mit Hilfe der Vogelschen Approximationsmethode!

c) Bestimmen Sie den optimalen Transportplan und die dabei entstehenden Transportkosten!

<u>Lösung</u>:

a) Es handelt sich um eine geschlossene Transportaufgabe ohne Zusatzbedingungen, so daß das mathematisch-ökonomische Modell direkt aus der Aufgabenstellung abgeleitet werden kann.

<u>ZF</u>: $Z = 8x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + x_{31} + 8x_{32} + 10x_{33} + 2x_{34} \longrightarrow \min$

<u>NB</u>:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 40 \qquad & x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 22 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 45 & x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 33 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 50 & x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 44 \\ & & x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 36 \end{aligned}$$

<u>NNB</u>: $x_{ij} \geqq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3, 4$

Als Transporttableau erhält man:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
P_1	$\boxed{8}$ x_{11}	$\boxed{3}$ x_{12}	$\boxed{3}$ x_{13}	$\boxed{4}$ x_{14}	46
P_2	$\boxed{6}$ x_{21}	$\boxed{7}$ x_{22}	$\boxed{5}$ x_{23}	$\boxed{8}$ x_{24}	45
P_3	$\boxed{1}$ x_{31}	$\boxed{8}$ x_{32}	$\boxed{10}$ x_{33}	$\boxed{2}$ x_{34}	50
b_j	22	33	44	36	135

b) Das zuletzt dargestellte Tableau ist der Ausgangspunkt für die Ermittlung einer zulässigen Basislösung. Die Ermittlung einer ersten zulässigen Basislösung nach der Vogelschen Approximationsmethode kann wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Berechnung der Differenzen zwischen den beiden niedrigsten Transportkostensätzen für sämtliche Reihen (Zeilen und Spalten).
2. Ermittlung der Reihe, in der die größte Differenz auftritt.
3. In der ausgewählten Reihe ist das Feld mit den geringsten Transportkosten mit der größtmöglichen Transportmenge zu belegen.

Da die Auswahl der Reihe unter 2. nicht eindeutig zu sein braucht, braucht auch die ermittelte zulässige Basislösung nicht eindeutig zu sein.

Zunächst bilden wir die Zeilen- und Spaltendifferenzen.

P_1: $c_{12} - c_{13} = 3 - 3 = 0$
P_2: $c_{21} - c_{23} = 6 - 5 = 1$
P_3: $c_{34} - c_{31} = 2 - 1 = 1$

V_1: $c_{21} - c_{31} = 6 - 1 = 5$
V_2: $c_{22} - c_{12} = 7 - 3 = 4$
V_3: $c_{23} - c_{13} = 5 - 3 = 2$
V_4: $c_{14} - c_{34} = 4 - 2 = 2$

Die Ergebnisse werden in das Tableau eingetragen.

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	Zeilendifferenzen
P_1	8	3	3	4	40	0
P_2	6	7	5	8	45	1
P_3	1	8	10	2	50	1
b_j	22	33	44	36	135	
	5	4	2	2	Spaltendifferenzen	

Die größte Differenz tritt in der ersten Spalte mit 5 auf. Das Feld mit den geringsten Transportkosten ist P_3V_1. Dann ist

$$x_{31} = \min(a_3, b_1) = \min(50, 22) = 22 .$$

Es folgt das neue Tableau, bei welchem die Kapazität von V_1 bereits ausgelastet ist, was durch Striche in den Feldern P_1V_1 und P_2V_1 zum Ausdruck kommt.

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	
P_1	8 –	3	3	4	40	0
P_2	6 –	7	5	8	45	1
P_3	1 / 22	8	10	2	50	1
b_j	22	33	44	36	135	
	~~5~~	4	2	2		

Für das reduzierte Tableau sind die Differenzen neu zu berechnen, wobei die Spaltendifferenzen erhalten bleiben.

$$c_{12} - c_{13} = 3 - 3 = 0$$
$$c_{21} - c_{23} = 7 - 5 = 2$$
$$c_{32} - c_{34} = 8 - 2 = 6$$

Diese Differenzen werden in das Tableau eingetragen.

Die größte Differenz ist in der dritten Zeile mit "6". Das Feld mit den kleinsten Kosten ist P_3V_4 mit $c_{34} = 2$. Dieses Feld kann mit $x_{34} = \min(50 - 22,\ 36) = 28$ belegt werden. Es folgt nebenstehendes Tableau:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	
P_1	8 –	3	3	4	40	0
P_2	6 –	7	5	8	45	1,2
P_3	1 / 22	8 –	10 –	2 / 28	50	~~1,6~~
b_j	22	33	55	36	135	
	~~5~~	4	2	2		

In den weiteren Schritten ergeben sich die folgenden Tableaus:

Hier wurde in den Spalten V_2 und V_4 bei gleichen Differenzen die Spalte V_2 ausgewählt, weil das Feld mit den geringsten Kosten hier einen kleineren Wert aufweist.

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	
P_1	8 –	3 / 33	3	4	40	0
P_2	6 –	7 –	5	8	45	1,2
P_3	1 / 22	8 –	10 –	2 / 28	50	~~1,6~~
b_j	22	33	44	36	135	
	~~5~~	~~4~~	2	2,4		

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	
P_1	8 / –	3 / 33	3 /	4 / 7	40	~~0,1~~
P_2	6 / –	7 / –	5 / –	8 / –	45	1,2,3
P_3	1 / 22	8 / –	10 / –	2 / 28	50	~~1,6~~
b_j	22	33	44	36	135	
	~~5~~	~~4~~	·2	2,4		

Jetzt können die restlichen Kapazitäten aufgeteilt werden, und wir erhalten die zulässige Basislösung:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
P_1	8 /	3 / 33	3 /	4 / 7	40
P_2	6 /	7 /	5 / 44	8 / 1	45
P_3	1 / 22	8 /	10 /	2 / 28	50
b_j	22	33	44	36	135

Der dazugehörige Zielfunktionswert lautet:

$$Z_1 = 33 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 44 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 22 \cdot 1 + 28 \cdot 2 = 433 .$$

c) Die Optimalität wird mit Hilfe der modifizierten Distributionsmethode untersucht. Es gilt für die Basisvariablen:

$$u_i + v_j = c_{ij} .$$

Wir erhalten:

$$u_1 + v_2 = 3$$
$$u_1 + v_4 = 4$$
$$u_2 + v_3 = 5$$
$$u_2 + v_4 = 8$$
$$u_3 + v_1 = 1$$
$$u_3 + v_4 = 2$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes inhomogenes lineares Gleichungssystem mit einem Freiheitsgrad.

Wir wählen $u_1 = 0$ und erhalten:

$v_2 = 3,\; v_4 = 4,\; u_2 = 4,\; v_3 = 1,\; u_3 = -2,\; v_1 = 3.$

Für die Nichtbasisvariablen gelten die Bewertungen:

$$c'_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \,.$$

Gilt für alle

$$c'_{ij} \leqq 0 \,,$$

so ist die Lösung optimal.

$c'_{ij} > 0$ für mindestens ein Element bedeutet, daß die Lösung noch nicht optimal ist.

Berechnung der c'_{ij}:

$$\begin{aligned}
c'_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 3 - 8 = -5\\
c'_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 3 = -2\\
c'_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = 4 + 3 - 6 = +1\\
c'_{22} &= u_2 + v_2 - c_{22} = 4 + 3 - 7 = 0\\
c'_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 3 - 8 = -7\\
c'_{33} &= u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 1 - 10 = -11
\end{aligned}$$

Das vollständige Tableau hat damit folgendes Aussehen:

Da c'_{21} die Optimalitätsbedingungen nicht erfüllt, ist die Aufgabe noch nicht optimal.

	v_j	3	3	1	4	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
0	P_1	8 / -5	3 / 33	3 / -2	4 / 7	40
4	P_2	6 / +1	7 / 0	5 / 44	8 / 1	45
-2	P_3	1 / 22	8 / -7	10 / -11	2 / 28	50
	b_j	22	33	44	36	135

Der notwendige Austauschzyklus lautet:

Δ ist maximal zu wählen; es darf nur so groß sein, daß die Bedingung $x_{ij} \geqq 0$ erhalten bleibt.

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
P_1					40
P_2	Δ^+			$1-\Delta^-$	45
P_3	$22-\Delta^-$			$28+\Delta^+$	50
b_j	22	33	44	36	135

P_2V_4 ist das entscheidende Feld. Daraus folgt $\Delta = 1$. Der Umsetzungszyklus lautet:

$P_2V_1^+$; $P_2V_4^-$; $P_3V_4^+$; $P_3V_1^-$.

Das neue Tableau lautet:

	v_j	3	3	2	4	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
0	P_1	8 / -5	3 / 33	3 / -1	3 / 7	40
3	P_2	6 / 1	7 / -1	5 / 44	8 / -1	45
-2	P_3	1 / 21	8 / -7	10 / -10	2 / 29	50
	b_j	22	33	44	36	135

Berechnung des Zielfunktionswertes:

$$Z_2 = Z_1 - c'_{21} \cdot \Delta = 433 - 1 = 432\ Z_{opt}\ .$$

Es handelt sich um die optimale Lösung. Der optimale Transportplan hat folgendes Aussehen:

$P_1 \rightarrow V_2$:	$x_{12} = 33$	$P_2 \rightarrow V_3$:	$x_{23} = 44$
$P_1 \rightarrow V_4$:	$x_{14} = 7$	$P_3 \rightarrow V_1$:	$x_{31} = 21$
$P_2 \rightarrow V_1$:	$x_{21} = 1$	$P_3 \rightarrow V_4$:	$x_{34} = 29$.

Es entstehen 432 [GE] Transportkosten.

4. Drei Produzenten (P_i), die gleiche Produkte herstellen, haben fünf Verbraucher (V_j), die je 20 [ME] benötigen, zu beliefern. Die Kapazitäten der Produzenten und die Transportkosten je ME sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
P_1	6	7	3	10	2	36
P_2	3	9	6	8	1	33
P_3	4	13	8	7	3	31

Zur Zeit werden die Transporte nach folgendem Plan durchgeführt:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
P_1		9	20		7
P_2	20				13
P_3		11		20	

a) Berechnen Sie nach dem vorgegebenen Transportplan die Transportkosten!

b) Stellen Sie fest, ob dieser Transportplan optimal ist!

c) Sollte das nicht der Fall sein, so ermitteln Sie ein optimales Transportprogramm!

<u>Lösung</u>:

a) Berechnung der Transportkosten

$$K = 7 \cdot 9 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 13 + 13 \cdot 11 + 7 \cdot 20 = 493$$

b) Die Anwendung des Optimalitätskriteriums zeigt, daß es sich bei dem vorgelegten Plan um eine zulässige Basislösung handelt. Diese lautet, in Tableauform geschrieben:

	v_j	4	7	3	1	2	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
0	P_1	6 / -2	7 / 9	3 / 20	10 / -9	2 / 7	36
-1	P_2	3 / 20	9 / -3	6 / -4	8 / -8	1 / 13	33
6	P_3	4 / +6	13 / 11	8 / +1	7 / 20	3 / +5	31
	b_j	20	20	20	20	20	100

$Z_1 = 493.$

Da es $c'_{ij} > 0$ gibt, handelt es sich nicht um die optimale Lösung.

c) Ausgehend von dem Tableau unter b), folgen die Verbesserungsschritte:

1. Schritt

	v_j	-2	7	3	1	-4	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
0	P_1	6 / -8	7 / 16	3 / 20	10 / -9	2 / -6	36
5	P_2	3 / 13	9 / +3	6 / +2	8 / -2	1 / 20	33
6	P_3	4 / 7	13 / 4	8 / +1	7 / 20	3	31
	b_j	20	20	20	20	20	100

$$Z_2 = Z_1 - 6 \cdot 7 = 493 - 42 = 451$$

2. Schritt:

	v_j	1	7	3	4	-1	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
0	P_1	6 / -5	7 / 16	3 / 20	10 / -6	2 / -3	36
2	P_2	3 / 9	9 / 4	6 / -1	8 / -2	1 / 20	33
3	P_3	4 / 11	13 / -3	8 / -2	7 / 20	3 / -1	31
	b_j	20	20	20	20	20	100

$$Z_3 = Z_2 - 3 \cdot 4 = 451 - 12 = 439 = Z_{opt} .$$

Die Optimallösung ergibt folgende Transportzuordnung:

$x_{12} = 16;\quad x_{21} = 9;\quad x_{25} = 20;\quad x_{34} = 20$

$x_{13} = 20;\quad x_{22} = 4;\quad x_{31} = 11$ [ME].

Es fallen 439 [GE] Transportkosten an, die Einsparung beträgt 54 [GE].

5. Vier Anlieferungsstellen A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) haben vier Bedarfsstellen B_k ($k = 1, 2, \ldots, 4$) mit gleichen Erzeugnissen zu beliefern. Die Kapazitäten A_i sind in Tonnen angegeben.

A_1: 40; A_2: 50; A_3: 60; A_4: 70. Die Bedarfsträger benötigen je 50 Tonnen. Die Entfernungen [km] von A_i nach B_k sind folgender Tabelle zu entnehmen.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	9	2	4
A_2	6	9	10	6
A_3	9	8	6	7
A_4	2	3	7	1

Für welchen Transportplan ist die Transportleistung minimal?

Lösung:

Aus den Zahlen der Aufgabe ergibt sich, daß es sich um ein offenes Transportproblem handelt, das durch Einführung eines fiktiven Bedarfsträgers B_f in ein geschlossenes Transportproblem verwandelt werden kann.

Es wird mit Hilfe der Vogelschen Approximationsmethode eine erste zulässige Basislösung ermittelt. In der Spalte bzw. Zeile der Differenzen sind nacheinander die Differenzen bei der etappenweisen Ermittlung dieser ersten zulässigen Basislösung aufgeführt. Das Ausgangstableau lautet:

	v_j	6	7	2	3	0		
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	a_i	
0	A_1	8 / -2	9 / -2	2 / 40	4 / -1	0 / 0	40	2
0	A_2	6 / 30	8 / -1	10 / -8	6 / -3	0 / 20	50	6,0
4	A_3	9 / +1	8 / +3	6 / 10	7 / 50	0 / +4	60	6,1,2
-4	A_4	2 / 20	3 / 50	7 / -9	1 / 0	0 / -1	70	1
	b_j	50	50	50	50	20	220	
		4,2,3	5,0	4	3,2,1	0		

Die erste zulässige Basislösung ist degeneriert. Um die modifizierte Distributionsmethode anwenden zu können, muß eine Basisvariable mit dem Wert Null eingeführt werden.

Man erhält die Optimallösung:

	v_j	2	4	2	2	4	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	a_i
0	A_1	8 / -6	9 / -5	2 / 40	4 / -2	0 / -4	40
4	A_2	6 / 50	8 / 0	10 / -4	6 / 0	0 / 0	50
4	A_3	9 / -3	8 / 30	6 / 10	7 / -1	0 / 20	60
-1	A_4	2 / -1	3 / 20	7 / -6	1 / 50	0 / -5	70
	b_j	50	50	50	50	20	220

Bei der optimalen Lösung liegt ebenfalls Degeneration vor. Die Bewertungszahlen $c'_{22} = 0$ und $c'_{24} = 0$ besagen, daß es weitere optimale zulässige Basislösungen mit dem Zielfunktionswert $Z_{opt} = 790$ [km] gibt. Die Lösung lautet

$x_{13} = 40$; $x_{21} = 50$; $x_{32} = 30$; $x_{33} = 10$; $x_{42} = 20$; $x_{44} = 50$

sowie $x_{3F} = 20$ (bei A_3 werden 20 Tonnen nicht abtransportiert).

6. Ein Betrieb ist durch vorhandene freie Kapazitäten in der Lage, ein Produkt zusätzlich in den Produktionsplan aufzunehmen. Für dieses Produkt besteht in den einzelnen Quartalen folgender Bedarf:

1. Quartal 4000 [ME]
2. Quartal 5000 [ME]
3. Quartal: 3000 [ME]
4. Quartal: 2000 [ME]

Zur Herstellung dieses Produktes kann der Betrieb zwei Maschinentypen M_1 und M_2 einsetzen, die mit unterschiedlichem Kostenaufwand arbeiten. Die freien Kapazitäten für die einzelnen Quartale und die Kosten sind in den folgenden Tabellen angegeben.

[ME]	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
M_1	2000	5000	4000	1000
M_2	3000	2000	1000	1000

[GE/ME]	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
M_1	3	1	2	4
M_2	2	1	4	5

Es besteht die Möglichkeit, im voraus für die nachfolgenden Quartale zu produzieren. Dabei entstehen Lagerhaltungskosten von 1 [GE] pro [ME] und [Quartal]. Es soll aus betrieblichen Gründen ausgeschlossen werden, daß im 2. Quartal eine Produktion für das 4. Quartal erfolgt.

a) Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell in Tableauform!
b) Geben Sie für die Aufgabe eine numerische Lösung an!

<u>Lösung:</u>

a) Formulierung des allgemeinen Modells:

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_f	a_i
Q_1	M_1	x_{11}^1 c_{11}^1	x_{12}^1 c_{12}^1	x_{13}^1 c_{13}^1	x_{14}^1 c_{14}^1	x_{1f}^1 c_{1f}^1	a_1^1
	M_2	x_{11}^2 c_{11}^2	x_{12}^2 c_{12}^2	x_{13}^2 c_{13}^2	x_{14}^2 c_{14}^2	x_{1f}^2 c_{1f}^2	a_1^2
Q_2	M_1	x_{21}^1 c_{21}^1	x_{22}^1 c_{22}^1	x_{23}^1 c_{23}^1	x_{24}^1 c_{24}^1	x_{2f}^1 c_{2f}^1	a_2^1
	M_2	x_{21}^2 c_{21}^2	x_{22}^2 c_{22}^2	x_{23}^2 c_{23}^2	x_{24}^2 c_{24}^2	x_{2f}^2 c_{2f}^2	a_2^2
Q_3	M_1	x_{31}^1 c_{31}^1	x_{32}^1 c_{32}^1	x_{33}^1 c_{33}^1	x_{34}^1 c_{34}^1	x_{3f}^1 c_{3f}^1	a_3^1
	M_2	x_{31}^2 c_{31}^2	x_{32}^2 c_{32}^2	x_{33}^2 c_{33}^2	x_{34}^2 c_{34}^2	x_{3f}^2 c_{3f}^2	a_3^2
Q_4	M_1	x_{41}^1 c_{41}^1	x_{42}^1 c_{42}^1	x_{43}^1 c_{43}^1	x_{44}^1 c_{44}^1	x_{4f}^1 c_{4f}^1	a_4^1
	M_2	x_{41}^2 c_{41}^2	x_{42}^2 c_{42}^2	x_{43}^2 c_{43}^2	x_{44}^2 c_{44}^2	x_{4f}^2 c_{4f}^2	a_4^2
	b_j	b_1	b_2	b_3	b_4	b_f	

Variable: x_{ij}^k

i: Index für Produktionsquartal

j: Index für Bedarfsquartal

k: Index für Maschinentyp analog c_{ij}^k

analog a_i^k, b_j

b) Für die Formulierung des speziellen Modells gilt es, zusätzliche Aussagen über die c_{ij}^k zu machen.

1. Für c_{11}^1 und c_{11}^2 gelten die in der Aufgabenstellung angegebenen Werte. Es werden nur die Produktionskosten berücksichtigt: $c_{11}^1 = 3$; $c_{11}^2 = 2$.
2. Für c_{12}^1 und c_{12}^2 sind zu den Produktionskosten für das 1. Quartal die Lagerungskosten für ein Quartal zu berücksichtigen: $c_{12}^1 = 3 + 1 = 4$; $c_{12}^2 = 2 + 1 = 3$.
   Analog für das 3. und 4. Quartal:
   $c_{13}^1 = 3 + 2 = 5$; $c_{13}^2 = 2 + 2 = 4$;
   $c_{14}^1 = 3 + 3 = 6$; $c_{14}^2 = 2 + 3 = 5$.

3. Für das fiktive Quartal lauten die Kosten $c_{if}^{k} = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und $k = 1, 2$.

4. Produktion kann nur für das laufende Quartal oder für die folgenden Quartale erfolgen. Alle anderen Variablen x_{ij}^{k} müssen Null werden, was durch das Ansetzen hoher Kosten erreicht wird.

$c_{21}^{1} = M$ und $c_{21}^{2} = M$ sichert diese Bedingung für das 2. und 1. Quartal. Durch $c_{24}^{1} = M$ und $c_{24}^{2} = M$ kann erreicht werden, daß im 2. Quartal nicht für das 4. Quartal produziert wird. Die restlichen Kostenelemente berechnet man analog. Gleiches gilt für die Berechnung der Koeffizienten für das 3. und 4. Quartal.

Das vollständige spezielle Modell ist in nachfolgendem Tableau angegeben. Es enthält gleichzeitig die optimale Lösung.

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_f	a_i
Q_1	M_1	$\boxed{3}$ 1000	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$ 1000	2000
	M_2	$\boxed{2}$ 3000	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	3000
Q_2	M_1	$\boxed{M}$	$\boxed{1}$ 3000	$\boxed{2}$ 2000	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$	5000
	M_2	$\boxed{M}$	$\boxed{1}$ 2000	$\boxed{2}$	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$	2000
Q_3	M_1	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{2}$ 1000	$\boxed{3}$ 2000	$\boxed{0}$ 1000	4000
	M_2	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 1000	1000
Q_4	M_1	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 1000	1000
	M_2	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{M}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$ 1000	1000
	b_j	4000	5000	3000	2000	5000	19000

$Z = 26\,000$ [GE]

2.6.2. Übungsaufgaben

1. In drei Ziegeleien (P_i) werden Ziegelsteine gleicher Qualität hergestellt, die von vier Baustellen (V_j) benötigt werden. Die Transportkosten und Kapazitäten entnehmen Sie folgender Tabelle:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
P_1	2	3	4	6	30
P_2	5	1	8	6	40
P_3	8	6	7	4	50
b_j	15	15	45	45	

a) Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

b) Stellen Sie einen kostenminimalen Transportplan auf!

2. Lösen Sie Aufgabe 1 dieses Abschnittes numerisch!

3. Lösen Sie Aufgabe 2 dieses Abschnittes numerisch!

4. Von vier Kiesgruben (K_i) sind fünf Baustellen (B_j) durch LKW mit Kies zu versorgen. Die Verladekapazitäten in einer bestimmten Zeiteinheit sind:
K_1: 40; K_2: 40; K_3: 25; K_4: 60 [m^3].
In der gleichen Zeit werden von den Baustellen benötigt:
B_1: 28; B_2: 35; B_3: 18; B_4: 32; B_5: 32 [m^3].
Die Entfernungen [km] sind aus folgender Tabelle zu entnehmen:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
K_1	4	1	10	2	8
K_2	3	4	9	3	5
K_3	5	2	11	8	9
K_4	8	3	7	5	2

Für welches Versorgungsprogramm wird die Transportleistung minimal, wenn jede Baustelle von jeder Kiesgrube beliefert werden kann?

a) Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

b) Geben Sie den optimalen Transportplan an!

5. Fünf Verkaufsstellen (V_k) werden von drei Auslieferungslagern (A_i) nach folgendem Transportplan beliefert:

Die Kapazitäten der Auslieferungslager werden voll genutzt, und jede Verkaufsstelle erhält die benötigten Mengen. Die Kostenmatrix $\underline{K}$ gibt die Transportkosten je ME an.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1			13		9
A_2	10	12			
A_3				14	8

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Transportkosten nach dem vorliegenden Plan!

b) Es ist zu prüfen, ob die Kosten minimal sind.

c) Es ist der optimale Transportplan aufzustellen. Es ist die Einsparung der Transportkosten zu berechnen.

6. Lösen Sie Aufgabe 3 dieses Abschnittes numerisch!

7. Für ein Transportproblem liegt folgende optimale Lösung vor:

$Z = 648$.

Es sind nachfolgende Kapazitätsänderungen und Kostenberichtigungen, jeweils von dieser optimalen Lösung ausgehend, zu diskutieren und eventuell auftretende Berichtigungen durchzuführen.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$\boxed{18}$	$\boxed{14}$ 11	$\boxed{15}$ 6	$\boxed{21}$	17
A_2	$\boxed{16}$ 5	$\boxed{15}$ 4	$\boxed{17}$	$\boxed{12}$ 10	19
A_3	$\boxed{18}$	$\boxed{16}$	$\boxed{16}$ 9	$\boxed{14}$	9
b_j	5	15	15	10	45

a) Die Kosten bei A_3B_2 werden 2 [GE/ME] auf 14 [GE/ME] verändert.

b) Die Kosten bei A_3B_4 erhöhen sich um 2 [GE/ME] auf 16 [GE/ME].

c) Die Kosten bei A_1B_2 erhöhen sich von 14 auf 16 [GE/ME].

d) Die Kosten bei A_1B_2 werden von 14 auf 10 [GE/ME] herabgesetzt.

e) Der Bedarf von B_2 reduziert sich um 5 [ME] auf 10 [ME].

f) Der Bedarf von B_1 und B_4 erhöht sich jeweils um 3 [ME]. Die Produktion bei A_3 wird um 6 [ME] erhöht.

8. Wir gehen bei dieser Aufgabe von der Grundaufgabenstellung der Aufgabe 2 dieses Abschnittes aus und formulieren folgende Zusatzbedingungen, die gleichzeitig zu berücksichtigen sind:

a) Die Strecken A_1B_3 und A_2B_1 sind für den Transport gesperrt (Bauarbeiten).
b) Die Kapazität von A_3 muß ausgelastet werden (keine Lagerkapazität, keine Möglichkeit der Produktionsreduzierung).
c) Auf den Strecken A_2B_1, A_3B_2 und A_3B_3 kann nur eine begrenzte Menge transportiert werden, und zwar auf
   A_2B_1: höchstens 3 [ME],
   A_3B_2: höchstens 2 [ME],
   A_3B_3: höchstens 2 [ME].
d) Auf der Strecke A_1B_3 sind mindestens 2 [ME] zu transportieren.

Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

2.7. Lösungen der Übungsaufgaben zu Abschnitt 2.

Lösungen zu 2.1.2.

1. ZF: $Z = 0{,}8x_1 + x_2 + 0{,}6x_3 + 0{,}3x_4 \longrightarrow \max$

NB:
$$\begin{aligned}
4x_1 \qquad\quad + x_3 + x_4 &\leqq 1300\\
5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leqq 2100\\
5x_1 + 4x_2 \qquad\quad + 6x_4 &\leqq 1200\\
10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\leqq 4800\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad &\geqq 150
\end{aligned}$$

NNB: $x_j \geqq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$Z_{opt} = 510$; $\underline{x}^T = (0, 150, 600, 0, 700, 0, 600, 0, 0)$

2. ZF: $Z = 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \longrightarrow \min$

NB:
$$\begin{aligned}
750x_1 + 2000x_2 + 800x_3 + 2000x_4 &\geqq 10\,000\\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &\geqq 24\\
3x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\geqq 30\\
10x_1 + 20x_2 + 5x_3 + 25x_4 &\leqq 105
\end{aligned}$$

NNB: $x_j \geqq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$Z_{opt} = 30$; $\underline{x}^T = (0, 5, 0, 0, 0, 1, 5, 5)$

3.

a) Die Variablen entsprechen den Zuschnittvarianten.

ZF: $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \longrightarrow \min$

NB:
$$\begin{array}{lllllll}
6x_1 & & + 2x_3 & & + 4x_5 & & \geq 300 \\
 & 2x_2 & + 2x_3 & + 5x_4 & + 2x_5 & & \geq 150 \\
 & 4x_2 & + 2x_3 & & & + 6x_6 & \geq 300
\end{array}$$

NNB: $x_j \geq 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, 6.$

b) Die Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen bleiben erhalten.

Die Koeffizienten für die Zielfunktion stellen den Abfall dar.

ZF: $Z = 0{,}2x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}16x_3 + 0{,}4x_4 + 0{,}16x_5$
$+ 0{,}2x_6 \longrightarrow \min$

a) $Z_{opt} = 125$; $\underline{x}^T = (50, 75, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

b) $Z_{opt} = 22$; $\underline{x}^T = (50, 75, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

4. Mit x_1: Anzahl der Arbeitskräfte der 1. Vollschicht
$\vdots$ ....
x_6: Anzahl der Arbeitskräfte der 6. Teilschicht

folgt:

ZF: $Z = 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 4x_6 \longrightarrow \min$

NB:
$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & + x_4 & & & \geq 18 \\
x_1 & & & + x_4 & + x_5 & & \geq 33 \\
x_1 & & & & + x_5 & & \geq 30 \\
x_1 & & + x_3 & & + x_5 & & \geq 48 \\
 & x_2 & + x_3 & & & & \geq 54 \\
 & x_2 & + x_3 & & & & \geq 21 \\
 & x_2 & + x_3 & & & + x_6 & \geq 111 \\
 & x_2 & & & & + x_6 & \geq 123 \\
-2x_1 & + x_2 & + x_3 & & & & \leq 0
\end{array}$$

NNB: $x_j \geq 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, 6.$

$Z_{opt} = 1020$; $\underline{x}^T = (27, 39, 15, 0, 6, 84, 9, 0, 3, 0, 0, 33, 27, 0, 0)$

5. **ZF:** $Z = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \longrightarrow \max$

NB:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & & & \geqq & 8 \\
 & & & & & & x_4 & \geqq & 13 \\
x_1 & & & + & x_3 & & & \leqq & 21 \\
40x_1 & + & 10x_2 & + & 20x_3 & + & 30x_4 & \leqq & 1080 \\
5x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & \leqq & 108 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leqq & 60 \\
5x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & \leqq & 210 \\
3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leqq & 72 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leqq & 24
\end{array}$$

NNB: $x_j \geqq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

$Z_{opt} = 87{,}2$; $\underline{x}^T = (5.12, 15.2, 0, 13, 15.88, 332.2, 0, 1.24, 0, 28.44, 3.68, 0, 0)$

6. **Es werden Variable mit zwei Indizes eingeführt (x_{ij})**
i: Index für Produkt $\quad i = 1, 2, 3$
j: Index für Technologie $\quad j = 1, 2, 3$ bzw. $j = 1, 2$

ZF: $Z = 11x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 9x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 18x_{31} + 15x_{32} \longrightarrow \max$

NB:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcr}
2x_{11} & + & 2x_{12} & + & x_{13} & + & 3x_{21} & & & + & 4x_{23} & + & 3x_{31} & + & 3x_{32} & \leqq & 200 \\
3x_{11} & + & x_{12} & + & 2x_{13} & + & x_{21} & + & 2x_{22} & & & + & 5x_{31} & + & 6x_{32} & \leqq & 340 \\
 & & x_{12} & + & 3x_{13} & + & 2x_{21} & + & 3x_{22} & + & x_{23} & + & x_{31} & & & \leqq & 480
\end{array}$$

NNB: $x_{ij} \geqq 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$

$Z_{opt} = 1420$; $\underline{x}_1^T = (0, 76, 0, 16, 124, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

$\underline{x}_2^T = (0, 100, 0, 0, 120, 0, 0, 0, 0, 0, 20)$

Lösungen zu 2.2.2.

1. **Die Achsenabschnittsformen lauten**

$$\frac{x_3}{11} + \frac{x_2}{16{,}5} \leqq 1; \quad \frac{x_1}{13{,}2} + \frac{x_2}{11} \leqq 1; \quad \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{8} \leqq 1.$$

Mit der Annahme von

$Z = 54$ **folgt** $\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} = 1.$

Durch Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden findet man als äußersten Punkt des zulässigen Bereiches $x_1 = 6$; $x_2 = 6$ mit dem Zielfunktionswert $Z = 90$.

2. Die Achsenabschnittsformen lauten:

$$\frac{x_1}{1500} + \frac{x_2}{4500} \leq 1; \quad \frac{x_1}{1875} + \frac{x_2}{2500} \leq 1; \quad \frac{x_1}{3500} + \frac{x_2}{1750} \leq 1.$$

Annahme $Z = 48 \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{8} = 1.$

Daraus folgt durch Parallelverschiebung

$x_1 = 900 \qquad x_2 = 1300 \qquad Z = 15\,000$

$x_1 = 1200 \qquad x_2 = 900 \qquad Z = 15\,000.$

Es gibt also unendlich viele optimale Lösungen, darunter zwei Basislösungen.

3. Maximierungsaufgabe: $x_1 = 6 \quad x_2 = 6 \quad Z = 378$

Minimierungsaufgabe: $x_1 = 8 \quad x_2 = 3 \quad Z = 324$

4. $x_1 = \frac{4}{3} \qquad x_2 = 1 \qquad Z = 53$

5. Für die Zielfunktion Z_1 gibt es keine Lösung der Optimierungsaufgabe, da die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben unbeschränkt ist.

Für Z_2 lautet die Lösung $x_1 = 1 \qquad x_2 = 4 \qquad Z_2 = 9.$

6. Diese Aufgabe ist nicht lösbar, da der Lösungsbereich durch die leere Menge dargestellt wird. Die dritte Nebenbedingung stellt einen Widerspruch zu den übrigen Nebenbedingungen dar.

7. a) $x_1 = 8/3 \qquad x_2 = 20/3 \qquad Z_a = 34\ 2/3$

b) $x_1 = 6 \qquad x_2 = 4 \qquad Z_b = 34$

8.2. $Z_1 = 20x_1 + 40x_2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 30 \qquad & x_1 + x_5 &= 15 \\ 10x_1 + 6x_2 + x_4 &= 240 \qquad & x_2 + x_6 &= 20 \end{aligned}$$

Optimale Lösung:

$\underline{\underline{x}}^T_{opt_1} = (15,\ 15,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5) \qquad Z_1 = 900$

8.4. $C_1 = 25 \quad C_2 = 25 \quad Z_2 = 750$

$$\begin{cases} \underline{\underline{x}}_{21opt} = (15,\ 15,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5) \\ \underline{\underline{x}}_{22opt} = (10,\ 20,\ 0,\ 20,\ 5,\ 0) \end{cases}$$

8.5. $\underline{\underline{x}}^T_{opt_3} = (10,\ 20,\ 0,\ 20,\ 5,\ 0) \qquad Z_3 = 1000$

8.7. P_1: a, P_2: b, P_3: a, c, P_4: a, e, P_5: b, d,

P_6: a, c, e, f.

Lösungen zu 2.3.2.

1. $Z = 47 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 3 \quad x_4 = 3$
   Die optimale Lösung ist eindeutig.

2. $Z = 200 \quad x_1 = 50 \quad x_4 = 100 \quad x_6 = 50$. Da nach Substitution von x_1 und x_3 nur noch x_4 in der Zielfunktion vorkommt, handelt es sich nur noch um die Ermittlung des Engpasses.

3. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert zuerst die Formulierung und Lösung einer Hilfsaufgabe. In der zweiten Etappe des Lösungsprozesses zeigt sich, daß die Zielfunktion der ursprünglichen Aufgabe auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt ist.

4. Über die Lösung einer Hilfsaufgabe erhält man
   $Z = 138 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 1 \quad x_7 = 4$.

5. Lösungen s. Abschnitt 2.

6. Siehe graphische Lösung von Beispiel 6 des Abschnittes 2.3.1.

7. $Z_{opt} = 325000$ WE $\quad x_1 = 7000 \quad x_2 = 3000$
   Die Kapazitäten in den Abteilungen A_2 und A_4 werden nicht ausgeschöpft. ($x_4 = 18000$; $x_6 = 11000$)

8.1.1. $Z_{opt} = 426 \quad \underline{x}^T = (0, 9, 6, 24, 0, 0, 0, 78, 0)$

8.1.2. Lösung wie Originalaufgabe
Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.2.1. $Z_{opt} = 380 \quad \underline{x}^T = (0, 0, 10, 25, 5, 0, 25, 5, 0)$
Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.2.2. $Z_{opt} = 468889 \quad \underline{x}^T = (0, 5556, 15, 24.444, 15, 0, 59.444, 0, 0)$

8.3.1. $Z_{opt} = 390 \quad \underline{x}^T = (0, 0, 10, 25, 20, 0, 20, 5, 0)$
Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.3.2. $Z_{opt} = 340{,}909 \quad \underline{x}^T = (10.909, 17.727, 8.182, 0, 0, 0, 163.636, 150, 0)$

8.4.1. $Z_{opt} = 380 \quad \underline{x}^T = (0, 0, 10, 25, 20, 0, 20, 5, 0, 10)$
Die Aussage ist ohne neue Berechnung möglich.

8.4.2. $Z_{opt} = 378.333 \quad \underline{x}^T = (0,\ 0.833,\ 10,\ 24.167,\ 20,\ 0,\ 26.667,\ 12.5,\ 0,\ 0)$

9.1. Lediglich das Paar A, B stellt benachbarte Extrempunkte dar.

9.2. a) I b) I c) H d) H, I, J e) J, H f) I, J

9.3. $x_1 \leqq 1$, $x_2 \leqq 1$, $x_3 \leqq 1$, $x_1 + x_2 + x_3 \leqq 5/2$

$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$

9.4. Bei der Lösung der linearen Optimierungsaufgabe mit der Simplexmethode könnten die Folgen a) und e) entstehen. Alle anderen Folgen enthalten nichtbenachbarte Punkte oder Zyklen, die allenfalls bei entarteten linearen Optimierungsaufgaben auftreten könnten.

9.5. Das System der Nebenbedingungen wird in die erste Normalform gebracht:

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & & + x_4 & & & = 1 \\ & x_2 & & & + x_5 & & = 1 \\ & & x_3 & & & + x_6 & = 1 \\ x_1 + & x_2 + & x_3 & & & \quad + x_7 & = 5/2 \end{array}$$

$x_i \geqq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, 7$

Dann ergibt sich:

a) x_2 wird BV und x_5 wird NBV,
b) x_3 wird BV und x_6 wird NBV,
c) x_2 wird BV und x_5 wird NBV,
d) x_2 wird BV und x_5 wird NBV.

Lösungen zu 2.4.2.

1. a)
$$\begin{aligned} \hat{z} = 57\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 + 13\hat{x}_4 &\longrightarrow \min \\ 10\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 2\hat{x}_4 &\geqq 1 \\ 4\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4 &\geqq 2 \\ -\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 - 6\hat{x}_4 &\geqq 3 \\ 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 4\hat{x}_4 &\geqq 4 \\ \hat{x}_1, \hat{x}_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Die jeweils zwei bei der Umwandlung einer Gleichung entstehenden Variablen wurden im Dual in die dann nicht vorzeichenbeschränkten Variablen $\hat{x}_2$ und $\hat{x}_4$ zusammengefaßt.

b)
$$\begin{aligned} \hat{z} = 12\hat{x}_1 + 18\hat{x}_2 + \hat{x}_3 &\longrightarrow \max \\ 2\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 &\leqq 5 \\ -\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\geqq 1 \\ \hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\leqq 4 \\ \hat{x}_2, \hat{x}_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

s. Bemerkung zu a)

2. a) $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad Z = 5$

b) $x_1 = \frac{7}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad Z = 2$ optimale Lösung ist nicht eindeutig.

c) $x_1 = 12 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 12 \quad x_4 = 15 \quad Z = 29$

3. Beispiel 1: Dual $\hat{Z} = 10\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 + 24\hat{x}_3 \longrightarrow \min$

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 &\geqq 5\\
\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + \hat{x}_3 &\geqq 4\\
\hat{x}_i \geqq 0 \qquad i &= 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}
$$

Opt. Lösung: $\hat{x}_1 = 7/2, \quad \hat{x}_3 = 1/2, \quad \hat{Z} = 47$

Beispiel 2: Dual $\hat{Z} = 18\hat{x}_1 + 40\hat{x}_2 + 24\hat{x}_3 \longrightarrow \min$

$$
\begin{aligned}
3\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 &\geqq 6\\
\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 &\geqq 4\\
\hat{x}_i \geqq 0 \qquad i &= 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}
$$

Opt. Lösung: $\hat{x}_1 = 0 \quad \hat{x}_3 = 2 \quad \hat{Z} = 48$

bzw. $\hat{x}_2 = 0 \quad \hat{x}_3 = 2 \quad \hat{Z} = 48.$

Die duale Aufgabe ist also degeneriert, was wegen der Mehrdeutigkeit in der optimalen Lösung des Primals zu erwarten war.

Beispiel 3: $\hat{Z} = 12\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 \longrightarrow \min$

$$
\begin{aligned}
4\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 \qquad &\geqq 2\\
6\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\geqq 3\\
\hat{x}_i \geqq 0 \qquad i &= 1,\ 2,\ 3.
\end{aligned}
$$

Zur Lösung mit der Simplexmethode muß nach Überführung in die 1. Normalform eine Hilfsaufgabe formuliert werden:

$$
\begin{aligned}
\hat{Z} = -\hat{x}_6 - \hat{x}_7 &\longrightarrow \max\\
4\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 - \hat{x}_4 + \hat{x}_6 &= 2\\
6\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3 - \hat{x}_5 + \hat{x}_7 &= 3\\
\hat{x}_i \geqq 0 \qquad i &= 1,\ 2,\ \ldots,\ 7.
\end{aligned}
$$

Die Lösung der Hilfsaufgabe führt auf eine degenerierte optimale Lösung mit dem Wert "Null" für die Hilfszielfunktion. Danach beginnt man mit der Lösung der ursprünglichen Aufgabe, wobei noch zu beachten ist, daß der Algorithmus auf die Maximierung zugeschnitten ist.

	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$	x_0	Q	$-\uparrow$
$\leftarrow \hat{x}_6$	4	16	0	-1	0	1	0	2	1/8*	*
$\hat{x}_7$	6	4	-1	0	-1	0	1	3	3/4	-4
$\hat{z}$	-10	-20$\uparrow$	1	1	1	$\underline{0}$	$\underline{0}$	-5	-	20
$\rightarrow \hat{x}_2$	1/4	1	0	-1/16	0	1/16	0	1/8	1/2	-1/4
$\leftarrow \hat{x}_7$	5	0	-1	1/4	-1	-1/4	1	5/2	1/2*	*
$\hat{z}$	-5$\uparrow$	$\underline{0}$	1	-1/4	1	5/4	$\underline{0}$	-5/2	-	5
$\leftarrow \hat{x}_2$	0	1	1/20	-3/40	1/20	3/40	-1/20	0		*
$\rightarrow \hat{x}_1$	1	0	-1/5	1/20	-1/5	-1/20	1/5	1/2		1/5
$\hat{z}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	0	0	1	1	0		-
$-z$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	-4/5$\uparrow$	-3/10	11/5			-6		4/5
$\rightarrow \hat{x}_3$	0	20	1	-3/2	1			0		
$\hat{x}_1$	1	4	0	-1/4	0			1/2		
$-z$	$\underline{0}$	16	$\underline{0}$	-3/2	3			-6		

$\hat{x}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\hat{x}_3 - \frac{1}{20}\hat{x}_4 + \frac{1}{5}\hat{x}_5; \quad \hat{x}_2 = 0 - \frac{1}{20}\hat{x}_3 + \frac{3}{40}\hat{x}_4 - \frac{1}{20}\hat{x}_5$

$-z = -12\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \longrightarrow \max$

$-z = -12(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\hat{x}_3 - \frac{1}{20}\hat{x}_4 + \frac{1}{5}\hat{x}_5) - 4(-\frac{1}{20}\hat{x}_3 + \frac{3}{40}\hat{x}_4 - \frac{1}{20}\hat{x}_5)$
$\quad + 3\hat{x}_3$

$-z = -6 + \frac{4}{5}\hat{x}_3 + \frac{3}{10}\hat{x}_4 - \frac{11}{5}\hat{x}_5$

$-z = -6 - (-\frac{4}{5}\hat{x}_3 - \frac{3}{10}\hat{x}_4 + \frac{11}{5}\hat{x}_5)$

Die Variable $\hat{x}_4$ müßte BV werden. Da alle Koeffizienten in dem entsprechenden Vektor negativ sind, ergibt sich, daß die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nicht beschränkt ist.

Beispiel 4: Dual $\hat{z} = 6\hat{x}_1 + 8\hat{x}_2 + 20\hat{x}_3 \longrightarrow \min$

$$\begin{aligned} -\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 &\geq 5 \; (-5) \\ \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 &\geq 4 \\ \hat{x}_i &\geq 0; \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Opt. Lösung (mit Z_2): $\hat{x}_1 = 3 \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{2} \quad \hat{z} = 22.$

Beispiel 5: Dual $\hat{z} = 16\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2 + 12\hat{x}_3 \longrightarrow \max$

$$\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \leqq 20$$
$$4\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \leqq 50$$
$$\hat{x}_i \geqq 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

Opt. Lösung: $\hat{x}_1 = 5 \quad \hat{x}_3 = 15 \quad \hat{z} = 260.$

Lösungen zu 2.5.2.

1.

	$-\infty < t \leqq -2$	$-2 \leqq t \leqq -1$	$-1 \leqq t < +\infty$
x_1	7/2	2	0
x_2	0	3	5
x_3	3/2	0	0
x_4	0	0	2
z	7	$13 + 3t$	$15 + 5t$

2.

	$-8 \leqq t \leqq 10$	$10 \leqq t \leqq 30$
x_1	$\frac{24}{11} + \frac{2}{11}t$	$6 - \frac{t}{5}$
x_2	$\frac{35}{11} - \frac{7}{22}t$	0
x_3	0	$-14 + \frac{7}{5}t$
x_4	0	0
x_5	$4 + \frac{t}{2}$	$-3 + \frac{6}{5}t$
z	$\frac{59}{11} - \frac{3}{22}t$	$6 - \frac{1}{5}t$

Lösungen zu 2.6.2.

1. a) Mathematisch-ökonomisches Modell

<u>ZF</u>: $z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + x_{22} + 8x_{23} + 6x_{24} + 8x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \longrightarrow \min$

<u>NB</u>:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30 \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40 \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 45$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$$

NNB: $x_{ij} \geqq 0 \qquad i = 1, 2, 3; \qquad j = 1, 2, 3, 4.$

b) Der optimale Transportplan lautet:

$x_{13} = 30$; $x_{21} = 15$; $x_{22} = 15$; $x_{23} = 10$; $x_{33} = 5$; $x_{34} = 45$ [ME] mit minimalen Kosten Z = 505 [GE].

2. Das Optimaltableau hat folgendes Aussehen:

	v_j	5	5	8	9	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	$\boxed{12}$ -7	$\boxed{10}$ -5	$\boxed{8}$ 3	$\boxed{11}$ -2	3
5	A_2	$\boxed{12}$ -2	$\boxed{10}$ 7	$\boxed{14}$ -1	$\boxed{14}$ 11	18
3	A_3	$\boxed{8}$ 6	$\boxed{8}$ 1	$\boxed{11}$ 2	$\boxed{13}$ -1	9
	b_j	6	8	5	11	30

Die minimalen Kosten betragen Z = 326 [GE].

3. Das Optimaltableau hat folgendes Aussehen:

	v_j	9	11	10	7	0	
u_i		E_1	E_2	E_3	E_4	E_f	a_i
0	B_1	$\boxed{14}$ -5	$\boxed{12}$ -1	$\boxed{10}$ 11	$\boxed{7}$ 7	$\boxed{0}$ 5	23
-4	B_2	$\boxed{5}$ 12	$\boxed{8}$ -1	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{0}$ -4	13
-5	B_3	$\boxed{10}$ -6	$\boxed{6}$ 9	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{4}$ -2	$\boxed{0}$ -5	10
	b_j	12	9	12	8	5	46

Die minimalen Kosten betragen Z = 281 [GE].

Da die Bewertungszahl $c'_{ij} = c'_{23} = 0$ ist, und zwar für eine Nichtbasisvariable, ist die Optimallösung nicht eindeutig. Eine weitere zulässige Basislösung mit gleichem Zielfunktionswert lautet:

	v_j	9	11	10	7	0	
u_i		E_1	E_2	E_3	E_4	E_f	a_i
0	B_1	$\boxed{14}$ -5	$\boxed{12}$ -1	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{7}$ 8	$\boxed{0}$ 5	23
-4	B_2	$\boxed{5}$ 12	$\boxed{8}$ -1	$\boxed{6}$ 1	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{0}$ -4	13
-5	B_3	$\boxed{10}$ -6	$\boxed{6}$ 9	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{4}$ -2	$\boxed{4}$ -5	10
	b_j	12	9	12	8	5	46

$Z = 281$ [GE]

4. a) Mathematisch-ökonomisches Modell:

ZF: $Z = 4x_{11} + x_{12} + 10x_{13} + 2x_{14} + 8x_{15} + 3x_{21} + \ldots + 2x_{45} \longrightarrow \min$

NB:
$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\leqq 40\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &\leqq 40\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &\leqq 25\\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &\leqq 60\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 28\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 35\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 18\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 32\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 32
\end{aligned}$$

NNB: $x_{ij} \geqq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4 \qquad j = 1, 2, \ldots, 5$

b) Der optimale Transportplan lautet:

1. Lösung: $x_{12} = 10$; $x_{14} = 30$; $x_{21} = 28$; $x_{24} = 2$; $x_{2f} = 10$; $x_{32} = 25$; $x_{43} = 18$; $x_{45} = 32$; $x_{4f} = 10$ [m^3] $Z = 400$ [km];

2. Lösung: $x_{12} = 20$; $x_{14} = 20$; $x_{21} = 28$; $x_{24} = 12$; $x_{32} = 15$; $x_{3f} = 10$; $x_{43} = 18$; $x_{45} = 32$; $x_{4f} = 10$ [m^3] $Z = 400$ [km].

Die Lösung ist nicht eindeutig. Es gibt zwei optimale Basislösungen.

5. a) Berechnung der Transportkosten laut Plan:

$K = 1 \cdot 13 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 12 + 6 \cdot 14 + 8 \cdot 8 = 318.$

b) Die Lösung kann zur nicht degenerierten Basislösung erweitert werden, wodurch die Optimalität geprüft werden kann. Es handelt sich um keine Optimallösung.

	v_j	2	4	1	3	5	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	
0	A_1	7	4 / 0	1 / 13	4	5 / 9	22
2	A_2	4 / 10	6 / 12	3 / 0	8	9	22
3	A_3	6	5 / +2	5	6 / 14	8 / 8	22
		10	12	13	14	17	

c) Man erhält folgendes Optimaltableau:

	v_j	2	3	1	4	5	
u_i		V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
0	A_1	7 / -5	4 / -1	1 / 1	4 / 4	5 / 17	22
2	A_2	4 / 10	6 / -1	3 / 12	8 / -2	9 / -2	22
2	A_3	6 / -2	5 / 12	5 / -2	6 / 10	8 / -1	22
	b_j	10	12	13	14	17	66

Die Transportbeziehungen mit dem optimalen Zielfunktionswert $Z = 298$ [GE] lauten:

$x_{13} = 1$, $x_{15} = 17$, $x_{23} = 12$, $x_{34} = 10$, $x_{14} = 4$, $x_{21} = 10$, $x_{32} = 12$ [ME].

Die Einsparung beträgt 20 [GE].

6. Die optimale Lösung wird in Tableauform angegeben. Dabei handelt es sich um keine eindeutige Lösung, denn wir stellen fest, daß die Bewertungszahlen c'_{ij} auf den Feldern $B_{22}E_2$ $B_{24}E_4$ mit Nichtbasisvariablen den Wert Null annehmen.
Gleichzeitig müssen wir feststellen, daß die Lösung wegen $x_{13} = 0$ als Basisvariable degeneriert ist.

Alle nicht eingetragenen Bewertungszahlen sind negativ und erfüllen so das Optimalitätskriterium.

	v_j		14	12	10	7	0	4	4		
u_i			E_1	E_2	E_3	E_4	E_f	λ_2	λ_3	a_i	
0	B_1		14 (3)	12 (7)	10 (0)	7 (8)	0 (5)	M	M	23	
-9		B_{21}	5 (3)	M	M	M	0	0	M	3	
-4		B_{22}	M	8 0	M	M	0	0 (13)	M	13	
-4	B_2	B_{23}	M	M	6 (10)	M	0	0 (3)	M	13	13
-4		B_{24}	M	M	M	3 0	0	0 (13)	M	13	
-4		B_{2f}	M	M	M	M	0	0 (13)	M	13	
-4		B_{31}	10 (6)	M	M	M	M	M	0 (4)	10	
-6		B_{32}	M	6 (2)	M	M	M	M	0	2	
-5	B_3	B_{33}	M	M	5 (2)	M	M	M	0	2	10
-4		B_{34}	M	M	M	4	M	M	0 (10)	10	
		b_j	12	9	12	8	5	42	14	92	

7. a) Optimale Lösung: $x_{12} = 2;\ x_{13} = 15;\ x_{21} = 5;\ x_{22} = 4;$
$x_{24} = 10;\ x_{32} = 9;\quad Z = 639.$

b) Es tritt keine Veränderung in der optimalen Lösung ein.

c) Optimale Lösung: $x_{12} = 2;\ x_{13} = 15;\ x_{21} = 5;\ x_{22} = 4;$
$x_{24} = 10;\ x_{33} = 9;\quad Z = 661.$
Man erhält die Basislösung von a); es ändern sich jedoch die Kosten und damit der Wert der Zielfunktion.

d) Optimale Lösung: $x_{12} = 15;\ x_{13} = 2;\ x_{21} = 5;\ x_{23} = 4;$
$x_{24} = 10;\ x_{32} = 9;\quad Z = 592.$

e) Optimale Lösung: (die Zuordnung ist nicht eindeutig)

1. Lösung: $x_{12} = 6$; $x_{13} = 11$; $x_{21} = 5$; $x_{22} = 4$;
$x_{24} = 10$; $x_{33} = 4$; $x_{3f} = 5$; $Z = 573$.

2. Lösung: $x_{12} = 10$; $x_{13} = 7$; $x_{21} = 5$; $x_{24} = 10$;
$x_{33} = 8$; $x_{2f} = 4$; $x_{3f} = 1$ $Z = 573$.

f) Optimale Lösung: (die Zuordnung ist nicht eindeutig)

1. Lösung: $x_{12} = 15$; $x_{13} = 2$; $x_{21} = 6$; $x_{24} = 13$;
$x_{31} = 2$; $x_{33} = 13$; $Z = 736$.

2. Lösung: $x_{12} = 15$; $x_{13} = 2$; $x_{21} = 8$; $x_{24} = 11$;
$x_{33} = 13$; $x_{34} = 2$; $Z = 736$.

8. **Das mathematisch-ökonomische Modell lautet:**

<u>ZF</u>: $Z = 14x_{11} + 12x_{12} + Mx_{13} + 7x_{14} + Mx_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24}$
$+ 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} + 20 \longrightarrow \min$

<u>NB</u>: **Aufkommen:**

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqq 23$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqq 13$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10^{*}$$

Bedarf:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8$$

* Berücksichtigung der Zusatzbedingung b)

<u>NNB</u>: $x_{ij} \geqq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3, 4$

<u>zusätzliche NB</u>: $x_{13} = 0$; $x_{21} = 0^{*}$

* durch $c'_{13} = M$, $c_{21} = M$ abgesichert

$x_{21} \leqq 3$; $x_{23} \leqq 2$; $x_{33} \leqq 2^{**}$

** Berücksichtigung der Zusatzbedingung c)

Unter Berücksichtigung von zusätzlichen Betrachtungen läßt sich diese Aufgabe auch in tabellarischer Form darstellen.

		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	A_2	A_3		
	B_1	14	12	10	7	0	M	M	23	
B_2	B_{21}	5	M	M	M	0	0	M	3	13
	B_{22}	M	8	M	M	0	0	M	13	
	B_{23}	M	M	6	M	0	0	M	13	
	B_{24}	M	M	M	3	0	0	M	13	
	B_{25}	M	M	M	M	0	0	M	13	
B_3	B_{31}	10	M	M	M	M	M	0	10	10
	B_{32}	M	6	M	M	M	M	0	2	
	B_{33}	M	M	5	M	M	M	0	2	
	B_{34}	M	M	M	4	M	M	0	10	
		12	9	12	8	5	42	14		