

LEHRBRIEFE FÜR DAS HOCHSCHULFERNSTUDIUM

Herausgegeben

von der Zentralstelle für das Hochschulfernstudium
des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen

MATHEMATIK FÜR ÖKONOMEN

Übungsmethodische Lehrbriefe

2. LEHRBRIEF

Lineare Optimierung (Fortsetzung)
Analysis

02 4027 02 0

Mathematik für Ökonomen

Übungsmethodische Lehrbriefe

2. Lehrbrief

Lineare Optimierung (Fortsetzung)

Analysis

Verfaßt von

Doz. Dr. Manfred B l i e f e r n i c h

Doz. Dr. Claus-Joachim W a g n e r

Dr. Vera V i e l i t z

Hochschule für Ökonomie "Bruno Leuschner" Berlin

Sektion Leitung, Informationsverarbeitung und Statistik

Redaktionsschluß: August 1984

Ag 628/517/87/DDR/1200- ZLO 884/87

Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Zentralstelle für Lehr- und Organisationsmittel des
Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen, Zwickau

1. Ausgabe 2. Auflage

Bestell-Nr. 02 4027 02 0

Verfaßt für die Zentralstelle für das Hochschulfremdstudium des Ministeriums für Hoch- und
Fachschulwesen Dresden.

Herausgegeben im Auftrag des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen der Deutschen
Demokratischen Republik von der Zentralstelle für das Hochschulfremdstudium Dresden.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
2. Lineare Optimierung (Fortsetzung)	4
2.3. Simplexmethode	4
2.3.1. Beispiele	4
2.3.2. Übungsaufgaben	17
2.4. Dualität	18
2.4.1. Beispiele	18
2.4.2. Übungsaufgaben	26
2.5. Parametrische Optimierung	26
2.5.1. Beispiele	26
2.5.2. Übungsaufgaben	31
2.6. Transportprobleme	32
2.6.1. Beispiele	32
2.6.2. Übungsaufgaben	51
Lösungen zu Abschnitt 2.	53
3. Analysis	66
3.1. Mengen, Ungleichungen	66
3.2. Formales Differenzieren	66
3.3. Zahlenfolgen	67
3.3.1. Beispiele	67
3.3.2. Übungsaufgaben	69
3.4. Differentialrechnung für Funktionen in einer unabhängigen Variablen	70
3.4.1. Beispiele	70
3.4.2. Übungsaufgaben	75
3.5. Differentialrechnung für Funktionen in mehreren unabhängigen Variablen	78
3.5.1. Beispiele	78
3.5.2. Übungsaufgaben	85
3.6. Methode der kleinsten Quadrate, Trendfunktionen	88
3.6.1. Beispiele	88
3.6.2. Übungsaufgaben	94

2. Lineare Optimierung (Fortsetzung)

2.3. Simplexmethode

2.3.1. Beispiele

1. Vorgelegt ist die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 14 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Es soll die 1. Normalform ($\underline{c}^T \underline{x} / \underline{A} \underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \underline{0}$) ermittelt werden. Von dem dann entstandenen Gleichungssystem $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$ sollen sämtliche zulässigen Basislösungen berechnet, und durch zusätzliche Berechnung der jeweiligen Zielfunktionswerte soll die optimale Basislösung gefunden werden.

Zur Überführung in die 1. Normalform werden zu den drei Ungleichungen Schlupfvariablen addiert, wodurch die Ungleichungen in Gleichungen überführt werden. Die Schlupfvariablen müssen ebenfalls der Nichtnegativitätsbedingung genügen.

Es handelt sich um ein normales lineares Ungleichungssystem, d. h. $\underline{b} \geq \underline{0}$.

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 14 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

Ohne weiteres ist als erste zulässige Basislösung $x_3 = 4$, $x_4 = 10$ und $x_5 = 14$ sowie $x_1 = x_2 = 0$ abzulesen. Sie bildet den Ausgangspunkt der Berechnungen mit Hilfe der elementaren Basis-
transformation.

	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
I	x_3	-1	1	1	0	0	4	-	1
	x_4	1	1	0	1	0	10	10	-1
	x_5	②	-1	0	0	1	14	7*	*
II ←	x_3	0	1/2	1	0	1/2	11	22	-1/2
	x_4	0	③/2	0	1	-1/2	3	2*	*
	x_1	1	-1/2	0	0	1/2	7	-	1/2
III →	x_3	0	0	1	-1/3	②/3	10	15*	*
	x_2	0	1	0	2/3	-1/3	2	-	1/3
	x_1	1	0	0	1/3	1/3	8	24	-1/3
IV	x_5	0	0	3/2	-1/2	1	15	-	1/2
	x_2	0	1	1/2	1/2	0	7	14	-1/2
	x_1	1	0	-1/2	①/2	0	3	6*	*
V	x_5	1	0	1	0	1	18		
	x_2	-1	1	1	0	0	4		
	x_4	2	0	-1	1	0	6		

Als erstes werde x_1 Basisvariable (BV). Damit scheidet x_5 als BV aus. Im Tableau II soll x_2 BV werden, wobei nach Ermittlung des minimalen Quotienten x_4 aus der Basis ausscheidet. Im Tableau III wird x_5 als BV für den nächsten Schritt gewählt (x_4 würde zu Tableau II zurückführen). x_3 wird Nichtbasisvariable (NBV). Um von Tableau IV zu einer weiteren zulässigen Basislösung zu gelangen, wird x_4 als BV gewählt, wobei x_1 NBV wird. Mit der Berechnung des Tableaus V sind sämtliche zulässigen Basislösungen ermittelt. Sie werden in einer Tabelle zusammengestellt, und zusätzlich wird der Wert von Z berechnet.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z
I	0	0	4	10	14	0
II	7	0	11	3	0	28
III	8	2	10	0	0	42
IV	3	7	0	0	15	47
V	0	4	0	6	18	20

Optimal ist die Basislösung IV mit

$x_1 = 3$, $x_2 = 7$
und $Z = 47$.

2. Mit Hilfe der Simplexmethode soll die LO-Aufgabe

$$Z = 12x_1 + 30x_2 + 28x_3 \rightarrow \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 28$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 29$$

$$3x_1 + 8x_2 + 7x_3 \leq 89 \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

gelöst werden.

Die 1. Normalform der Aufgabe lautet:

$$\begin{array}{rcll} Z = 12x_1 + 30x_2 + 28x_3 & \rightarrow & \max & \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & & = 28 & \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 & & = 29 & \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + x_6 & & = 89 & \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, 6. & & \end{array}$$

Eine erste zulässige Basislösung als Startpunkt für die Simplexmethode ist

$$x_4 = 28; \quad x_5 = 29; \quad x_6 = 89; \quad Z = 0.$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	Q	-†
x_4	1	1	3	1	0	0	28	28	-1
← x_5	1	(3)	2	0	1	0	29	29/3*	*
x_6	3	8	7	0	0	1	89	89/8	-8
Z	-12	-30†	-28	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	-	30
x_4	2/3	0	7/3	1	-1/3	0	55/3	55/7	-7/3
→ x_2	1/3	1	2/3	0	1/3	0	29/3	29/2	-2/3
← x_6	1/3	0	(5/3)	0	-8/3	1	35/3	7*	*
Z	-2	<u>0</u>	-8†	<u>0</u>	10	<u>0</u>	290	-	8
← x_4	1/5	0	0	1	(17/5)	7/5	2	10/17*	*
x_2	1/5	1	0	0	7/5	-2/5	5	25/7	-7/5
→ x_3	1/5	0	1	0	-8/5	3/5	7	-	8/5
Z	-2/5	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	-14/5†	24/5	346	-	14/5
← x_5	(1/17)	0	0	5/17	1	-7/17	10/17	10*	*
x_2	2/17	1	0	-7/17	0	3/17	71/17	71/2	-2/17
x_3	5/17	0	1	8/17	0	-1/17	135/17	27	-5/17
Z	-4/17†	<u>0</u>	<u>0</u>	14/17	<u>0</u>	62/17	5910/17	-	4/17
→ x_1	1	0	0	5	17	-7	10		
x_2	0	1	0	-1	-2	1	3		
x_3	0	0	1	-1	-5	2	5		
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	2	4	2	350		

Die Zielfunktion ist also als Funktion der Nichtbasisvariablen darzustellen. Das bereitet hier keine Schwierigkeiten. Es gilt

$$Z = 0 - (-12x_1 - 30x_2 - 28x_3) .$$

Bei der Auswahl der in die Basis kommenden Spalte wählt man unter den NBV diejenige aus, die den größten spezifischen Zuwachs für die Zielfunktion aufweist. Im Beispiel tritt das bei x_2 mit einem spezifischen Zuwachs von 30 auf, während z. B. die Wahl von x_3 nur einen spezifischen Zuwachs von 28 ergeben würde. Genauer wäre

das Produkt: (Wert der neuen BV in der folgenden Basislösung) x (spez. Zuwachs). In unserem Beispiel $\frac{29}{3} \cdot 30 = 290$. Das erfordert aber Zwischenrechnungen, die den Lösungsprozeß unterbrechen. Die Wahl der ausscheidenden Basisvariablen muß unter der Zielstellung: "Aufrechterhaltung der Zulässigkeit" erfolgen. Es erfolgt eine Orientierung auf den "Engpaß", die natürlich einen "Verbrauch", d. h. einen positiven Koeffizienten in der Spalte, voraussetzt. Alle anderen Koeffizienten brauchen bei der Engpaßbestimmung nicht berücksichtigt zu werden. Zur Engpaßberechnung ist die vorhandene "Menge" (Komponente in der Spalte x_0) durch den spezifischen Verbrauch zu dividieren.

Es wird $\min(\frac{28}{1}; \frac{29}{3}; \frac{89}{8}) = \frac{29}{3}$ berechnet, und daher scheidet x_5 als BV aus. Der weitere Lösungsprozeß ist in den Tableaus dargestellt. Im dritten Tableau z. B. ist die Minimumbildung lediglich auf die Quotienten $2/\frac{17}{5}$ und $5/\frac{7}{5}$ zu beschränken, der negative Koeffizient $-8/5$ ist nicht zu berücksichtigen. Nach vier Simplexschritten ist die optimale Lösung erreicht, denn in der Zeile Z stehen nur nichtnegative Werte. Die optimale Lösung lautet:

$x_1 = 10$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ und $Z = 350$.

$$\begin{aligned}
 3. \text{ Die LO-Aufgabe} \quad Z &= 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\
 (1) \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\
 (2) \quad 3x_1 + x_2 + x_3 &\leq 36 \\
 (3) \quad x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
 (4) \quad x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 35 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

ist mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen. Im Anschluß ist zu diskutieren, auf welchen Wert man die Beschränkungszahl bei (4) reduzieren könnte, ohne den Wert der Zielfunktion zu verändern. Für den Lösungsprozeß mit der Simplexmethode bedeutet das Auftreten der Gleichung (3) eine Komplikation, da damit nicht ohne weiteres eine erste zulässige Basislösung angegeben werden kann. Wenn man (3) auflöst und in (1), (2), (4) und die Zielfunktion einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
 Z &= 7x_1 + 7x_2 \rightarrow \max \\
 x_1 + x_2 &\leq 10 \\
 2x_1 + x_2 &\leq 18 \\
 2x_1 + 5x_2 &\leq 35 \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

da $x_3 = x_1 + x_2$. Außerdem wurde in den beiden ersten Ungleichungen noch durch zwei dividiert. Die 1. Normalform lautet:

$$\begin{aligned} Z &= 7x_1 + 7x_2 && \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 18 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 &= 35 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

Es liegt eine LO-Aufgabe vor, die keinerlei besondere Schwierigkeiten aufweist.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-†
x_3	1	1	1	0	0	10	10	-1
← x_4	②	1	0	1	0	18	9*	*
x_5	2	5	0	0	1	35	35/2	-2
Z	-7†	-7	0	0	0	0	-	7
← x_3	0	1/2	1	-1/2	0	1	2*	*
→ x_1	1	1/2	0	1/2	0	9	18	-1/2
x_5	0	4	0	-1	1	17	17/4	-4
Z	0	-7/2†	0	7/2	0	63	-	7/2
→ x_2	0	1	2	-1	0	2	-	1
x_1	1	0	-1	1	0	8	8	-1
← x_5	0	0	-8	③	1	9	3*	*
Z	0	0	7	0†	0	70	-	0
x_2	0	1	-2/3	0	1/3	5		
x_1	1	0	5/3	0	-1/3	5		
→ x_4	0	0	-8/3	1	1/3	3		
Z	0	0	7	0	0	70		

Das Minimum ist nicht eindeutig. Man wählt den kleineren Index (lexikographisches Prinzip), also wird x_1 BV. Nach zwei Schritten ist die optimale Lösung erreicht. Sie weist eine Besonderheit auf. In der letzten Zeile der Spalte der NBV x_4 steht der Wert Null. Man kann also x_4 als BV wählen, ohne den Wert der Zielfunktion zu verändern. Dann sind x_1 , x_2 und x_4 BV. Mithin ist auch jede konvexe Linearkombination der beiden optimalen zulässigen

Basislösungen eine optimale Lösung:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mit } w_1, w_2 \geq 0 \\ \text{und} \\ w_1 + w_2 = 1. \end{array}$$

Aus dieser Lösung ist auch zu erkennen, daß die Beschränkungszahl von (4) um 9 auf 26 reduziert werden kann, ohne daß der Wert der Zielfunktion der optimalen Basislösung mit den BV x_1 , x_2 und x_5 sich ändert. Dann ist in dieser Basislösung $x_5 = 0$, und die Lösung damit degeneriert. Um die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe zu erhalten, wird resubstituiert.

$$x_1 = 8 - c, \quad x_2 = 2 + c, \quad x_3 = 10, \quad Z = 70 \quad \text{mit} \quad 0 \leq c \leq 3.$$

Die Grenzen für den Parameter c folgen durch Einsetzen in die ursprüngliche Aufgabe. Kritisch sind die Ungleichungen (2) und (4)

$$(2) \quad 3(8 - c) + 2 + c + 10 \leq 36 \cap 36 - 2c \leq 36 \cap c \geq 0$$

$$(4) \quad (8 - c) + 4(2 + c) + 10 \leq 35 \cap 26 + 3c \leq 35 \cap c \leq 3.$$

4. Vorgelegt sei die LO-Aufgabe

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 200 \rightarrow \max$$

$$-4x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Mit Hilfe der Simplexmethode soll versucht werden, eine optimale Lösung zu finden.

Die Aufgabe wird in die 1. Normalform überführt

$$\tilde{Z} = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$-4x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + x_5 = 10$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

Um alle Ausgangsdaten für das erste Simplextableau zu erhalten, wird die Zielfunktion als Funktion der NBV dargestellt

$$\tilde{Z} = 0 - (-5x_1 - 4x_2).$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
x_3	-4	1	1	0	0	4	-	4
← x_4	①	-1	0	1	0	4	4*	*
x_5	2	-1	0	0	1	10	5	-2
$\tilde{z}$	-5↑	-4	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		5
x_3	0	-3	1	4	0	20	-	3
→ x_1	1	-1	0	1	0	4	-	1
← x_5	0	①	0	-2	1	2	2*	*
$\tilde{z}$	<u>0</u>	-9↑	<u>0</u>	5	<u>0</u>	20		9
x_3	0	0	1	-2	3	26	-	
x_1	1	0	0	-1	1	6	-	
→ x_2	0	1	0	-2	1	2	-	
$\tilde{z}$	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	-13	9	30		

Nach zwei Simplexschritten stellt sich heraus, daß die Aufgabe unlösbar ist. Die Zielfunktion $\tilde{z}$ ist auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt. Im dritten Tableau zeigt der Koeffizient -13 in der letzten Zeile, daß die Wahl von x_4 als BV den Zielfunktionswert vergrößern würde. Da in der zugehörigen Spalte keine nichtnegativen Koeffizienten auftreten, besteht kein Engpaß, keine Grenze für die Größe x_4 als BV. Die Zielfunktion kann also auf der Menge der zulässigen Lösungen unbeschränkt wachsen, die Aufgabe ist nicht lösbar.

5. Die LO-Aufgabe $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ist mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen.

Der Übergang zur 1. Normalform ergibt

$$\begin{aligned}
 Z &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
 2x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\
 x_1 + x_2 - x_5 &= 1 \\
 2x_1 - x_2 - x_6 &= 1 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.
 \end{aligned}$$

Damit muß zur Gewinnung einer ersten zulässigen Basislösung eine Hilfsaufgabe formuliert werden. Zusätzliche Vorbereitungen sind nicht erforderlich, da die Bedingung $b \geq 0$ in der ersten Normalform bereits erfüllt ist. Die Hilfsaufgabe lautet

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \tilde{Z} &= -(x_7 + x_8) \rightarrow \max \\
 (2) \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
 (3) \quad 2x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\
 (4) \quad x_1 + x_2 - x_5 + x_7 &= 1 \\
 (5) \quad 2x_1 - x_2 - x_6 + x_8 &= 1 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 8.
 \end{aligned}$$

Damit sind x_3 , x_4 , x_7 und x_8 BV für eine erste zulässige Basislösung. Die Zielfunktion der Hilfsaufgabe muß als Funktion der NBV x_1 , x_2 , x_5 und x_6 dargestellt werden. Man löst (4) und (5) nach x_7 bzw. x_8 auf:

$$x_7 = 1 - x_1 - x_2 + x_5; \quad x_8 = 1 - 2x_1 + x_2 + x_6$$

und erhält durch Einsetzen in (1) und Zusammenfassung

$$\tilde{Z} = -2 - (-3x_1 + x_5 + x_6)$$

und kann nun mit dem Lösungsprozeß für die Hilfsaufgabe beginnen.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	Q	-f
x_3	1	1	1	0	0	0	0	0	2	2	-1
x_4	2	-1	0	1	0	0	0	0	2	1	-2
x_7	1	1	0	0	-1	0	1	0	1	1	-1
← x_9	②	-1	0	0	0	-1	0	1	1	1/2*	*
$\tilde{Z}$	-3f	0	0	0	1	1	0	0	-2		3
x_3	0	3/2	1	0	0	1/2	0	-1/2	3/2	1	-3/2
x_4	0	0	0	1	0	1	0	-1	1	-	0
← x_7	0	3/2	0	0	-1	1/2	1	-1/2	1/2	1/3*	*
→ x_1	1	-1/2	0	0	0	-1/2	0	1/2	1/2	-	1/2
$\tilde{Z}$	0	-3/2f	0	0	1	-1/2	0	3/2	-1/2		3/2
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	1	1		
x_4	0	0	0	1	0	1	0	1	1		
→ x_2	0	1	0	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	1/3		
x_1	1	0	0	0	-1/3	-1/3	1/3	1/3	2/3		
$\tilde{Z}$	0	0	0	0	0	0	1	1	0		

Nach zwei Simplexschritten ist die optimale Lösung der Hilfsaufgabe ermittelt. Da $\tilde{Z} = 0$ ist, ergibt sich ein Startpunkt (1. zulässige Basislösung) für die Lösung der ursprünglichen Aufgabe. Um das erste Tableau aufstellen zu können, muß die ursprüngliche Zielfunktion $Z = 3x_1 + 2x_2$ als Funktion der NBV x_5 und x_6 ausgedrückt werden. (Die künstlichen Variablen x_7 und x_8 sind in der eigentlichen Aufgabe nicht enthalten.) Aus den entsprechenden Zeilen des letzten Tableaus für die Lösung der Hilfsaufgabe ist abzulesen:

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6, \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6.$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	Q	- ↑
← x_3	0	0	1	0	①	0	1	1*	*
x_4	0	0	0	1	0	1	1	-	0
x_2	0	1	0	0	-2/3	1/3	1/3	-	2/3
x_1	1	0	0	0	-1/3	-1/3	2/3	-	1/3
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	-7/3†	-1/3	8/3		7/3
→ x_5	0	0	1	0	1	0	1	-	0
← x_4	0	0	0	1	0	①	1	1*	*
x_2	0	1	2/3	0	0	1/3	1	3	-1/3
x_1	1	0	1/3	0	0	-1/3	1	-	1/3
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	7/3	<u>0</u>	<u>0</u>	-1/3†	5		1/3
x_5	0	0	1	0	1	0	1		
→ x_6	0	0	0	1	0	1	1		
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	2/3		
x_1	1	0	1/3	1/3	0	0	4/3		
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	7/3	1/3	<u>0</u>	<u>0</u>	16/3		

Durch Einsetzen in die Zielfunktion folgt

$$Z = 3 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6 \right) + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 \right),$$

$$Z = \frac{8}{3} - \left(-\frac{7}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 \right).$$

Nach zwei Schritten ergibt sich die optimale Lösung

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_5 = 1, \quad x_6 = 1, \quad x_3 = x_4 = 0 \quad \text{und} \quad Z = \frac{16}{3}.$$

6. In einer LPG stehen für den Anbau von Mais und Flachs insgesamt 25,2 ha Anbaufläche zur Verfügung. Man kann mit einer Erntemenge von 50 kg auf 90 m² bei Mais und auf 300 m² bei Flachs rechnen. Die Anbaukosten sind 2 WE für 50 kg Mais und 6 WE für 50 kg Flachs. Sie dürfen 8000 WE nicht überschreiten. Als Mindesterntemengen lt. Plan seien jeweils 30 t festgelegt.

Der Gewinn soll maximiert werden. Wie sind die Anbauflächen zu wählen, wenn der Gewinn pro Tonne Mais 120 WE und pro Tonne Flachs 300 WE beträgt?

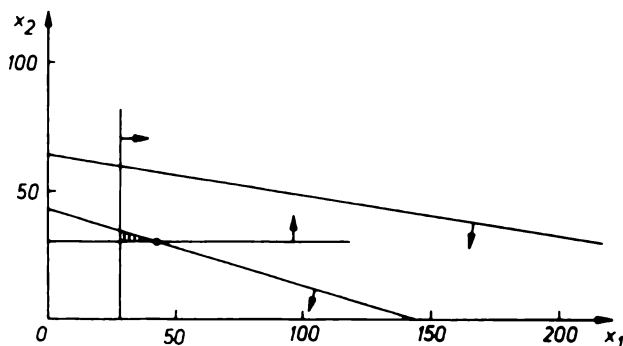
Es ist zuerst das mathematisch-ökonomische Modell aufzustellen und für jede vorkommende Größe die Einheit anzugeben.

Die zur Verfügung stehenden Angaben stimmen in den Einheiten nicht überein und müssen daher z. T. umgerechnet werden. Hier ist eine Umrechnung auf Tonnen und Hektar vorgenommen worden.

	Mais	Flachs
Ertrag in t pro ha	0,18	0,6
Anbaukosten in WE pro ha	40	120

$$\begin{aligned}
 Z &= 120x_1 + 300x_2 \rightarrow \max \\
 0,18x_1 + 0,6x_2 &\leq 25,2 \\
 20x_1 + 120x_2 &\leq 8000 \\
 x_1 &\geq 30 \\
 x_2 &\geq 30 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgendes LO-Modell, wenn mit x_j die geplante Erntemenge der Fruchtart j in Tonnen bezeichnet wird.



Es bietet sich die graphische Lösung an. Der Lösungsbereich ist relativ klein, weil zur Erzielung der geforderten Mindestmengen fast die gesamte Anbaufläche benötigt wird. Die Begrenzung der Anbaukosten ist unwirksam. Da der Maisanbau pro Hektar mehr Gewinn abwirft als der Anbau von Flachs, wird Flachs nur in der Mindestmenge angebaut. Die optimale Lösung lautet:

$$x_1 = 40 \text{ t}; \quad x_2 = 30 \text{ t}; \quad Z = 13\,800 \text{ WE}.$$

7. Ein Maschinenbaubetrieb stellt die Produkte P_1 und P_2 her. Es wird eingeschätzt, daß die Maschinenkapazität in den vier Abteilungen A_1 bis A_4 die Produktionsmengen von P_1 und P_2 begrenzt, während aus der Materialversorgung und den Absatzmöglichkeiten keine Einschränkungen der Produktionsmengen zu erwarten sind. Der Betrieb will das Betriebsergebnis maximieren.

Folgende Angaben stehen für die Ermittlung eines optimalen Produktionsassortiments zur Verfügung:

Die Matrix $\underline{A}$ der erforderlichen Bearbeitungszeiten a_{ij} in Maschinenstunden der Abteilung 1 pro Mengeneinheit des Produktes j [h/ME_j]. Der Vektor $\underline{b}$ der für die Planperiode verfügbaren Maschinenkapazität in Stunden [h], sowie der Vektor $\underline{c}$ der Gewinnkoeffizienten in Währungseinheiten pro Mengeneinheit [WE/ME_j].

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 8 \\ 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 50\ 000 \\ 56\ 000 \\ 48\ 000 \\ 40\ 000 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} 34 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Es ist ein LO-Modell aufzustellen, zu lösen und die Lösung zu diskutieren!

Als erstes sind als Entscheidungsvariablen die Produktionsmengen x_1 und x_2 einzuführen, die den Vektor $\underline{x}$ ergeben. Das LO-Modell lautet

$$Z = \underline{c}^T \underline{x} \rightarrow \max$$

$$\underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq \underline{0}$$

oder ausführlich

$$Z = 34x_1 + 29x_2 \rightarrow \max$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 50\ 000$$

$$2x_1 + 8x_2 \leq 56\ 000$$

$$6x_1 + 2x_2 \leq 48\ 000$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 40\ 000 \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Zur Lösung muß man in die 1. Normalform transformieren. Die eingeführten Schlupfvariablen lassen sich ökonomisch als nicht genutzte Maschinenkapazität in [h] deuten.

$$Z = 34x_1 + 29x_2 \rightarrow \max$$

$$5x_1 + 5x_2 + x_3 = 50\ 000$$

$$2x_1 + 8x_2 + x_4 = 56\ 000$$

$$6x_1 + 2x_2 + x_5 = 48\ 000$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_6 = 40\ 000$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

Eine erste zulässige Basislösung läßt sich leicht mit $x_3 = 50000$, $x_4 = 56000$, $x_5 = 48000$ und $x_6 = 40000$ angeben. Es wird also vor-

erst nicht produziert, und sämtliche Produktionskapazitäten stehen zur Disposition. Zur vollständigen Ermittlung des ersten Simplextableaus ist die Zielfunktion als Funktion der NBV darzustellen

$$Z = 0 - (-34x_1 - 29x_2) .$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	Q	-†
x_3	5	5	1	0	0	0	50000	10000	-5
x_4	2	8	0	1	0	0	56000	28000	-2
← x_5	⑥	2	0	0	1	0	48000	8000*	*
x_6	2	5	0	0	0	1	40000	20000	-2
Z	-34†	-29	0	0	0	0	0		34
← x_3	0	(10/3)	1	0	-5/6	0	10000	3000*	*
x_4	0	22/3	0	1	-1/3	0	40000	60000/11	-22/3
→ x_1	1	1/3	0	0	1/6	0	8000	24000	-1/3
x_6	0	13/3	0	0	-1/3	1	24000	72000/13	-13/3
Z	0	-53/3†	0	0	17/3	0	272000		53/3
→ x_2	0	1	3/10	0	-1/4	0	3000		
x_4	0	0	-11/5	1	3/2	0	18000		
x_1	1	0	-1/10	0	1/4	0	7000		
x_6	0	0	-13/10	0	3/4	1	11000		
Z	0	0	53/10	0	5/4	0	325000		

Die Berechnungen führen nach zwei Simplexschritten zur optimalen Lösung. Es müssen 7000 ME von P_1 und 3000 ME von P_2 hergestellt werden, um das maximale Betriebsergebnis von 325000 WE zu erzielen. Die Kapazitäten in den Abteilungen A_2 und A_4 werden nicht ausgeschöpft ($x_4 = 18000$ und $x_6 = 11000$).

2.3.2. Übungsaufgaben

Es sind folgende LO- Aufgaben mit Hilfe der Simplexmethode zu lösen:

$$1. \quad Z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\3x_1 + x_2 &\leq 24 \\x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad Z &= 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max \\2x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 100 \\x_1 + 5x_3 + x_4 &\leq 200 \\x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 200 \\x_1 + x_2 + x_4 &= 150 \\x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4.\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Gleichungen können nach einer Variablen aufgelöst werden. Dadurch vereinfacht sich die Berechnung erheblich.

$$\begin{aligned}3. \quad Z &= 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\-2x_1 + x_2 &\leq 2 \\-x_1 + x_2 &\leq 4 \\2x_1 + x_2 &\geq 6 \\2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad Z &= 33x_1 + 13x_2 + 18x_3 \rightarrow \max \\8x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\leq 32 \\12x_1 + 9x_2 + 7x_3 &\leq 51 \\5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 21 \\x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \\x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

5. Lösen Sie alle Beispiele des Abschnitts 2.2. mit Hilfe der Simplexmethode!

6. Beispiel 6 dieses Abschnitts ist rechnerisch mit der Simplexmethode zu lösen.

2.4. Dualität

2.4.1. Beispiele

Ausgangspunkt der Betrachtungen bei der Dualität wird stets die 2. Normalform sein. Wenn also gefordert ist, zu einer LO-Aufgabe die duale Aufgabe zu formulieren, so ist zuerst die 2. Normalform dieser Aufgabe zu bilden. Dann ist die duale Aufgabe zu formulieren.

1. Vorgelegt seien die LO-Aufgaben

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 \rightarrow \max & \text{b) } Z = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10 \\
 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 10 & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\
 -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 32 & 2x_1 - x_2 + x_3 = 14 \\
 x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
 x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3,
 \end{array}$$

zu denen jeweils die duale Aufgabe zu bilden ist. Zwei zueinander duale Aufgaben werden unter Zugrundelegung der 2. Normalform wie folgt formuliert:

$$\begin{array}{l}
 \max \left\{ \underline{c}^T \underline{x} / \underline{A} \underline{x} \leq \underline{b}, \quad \underline{x} \geq 0 \right\} \\
 \min \left\{ \underline{b}^T \underline{\hat{x}} / \underline{A}^T \underline{\hat{x}} \geq \underline{c}, \quad \underline{\hat{x}} \geq 0 \right\}.
 \end{array}$$

Im ersten Schritt werden die Systeme der Nebenbedingungen so umgeformt, daß sie die angegebene Form haben. Dabei werden die Gleichungen durch zwei entgegengesetzte Ungleichungen ersetzt und teilweise Ungleichungen mit (-1) multipliziert, um das gewünschte Relationszeichen zu erhalten.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 & \text{b) } 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10 \\
 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 10 & -x_1 - x_2 + x_3 \geq -1 \\
 -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \leq -10 & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 14 \\
 -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 32 & -2x_1 + x_2 - x_3 \geq -14 \\
 -x_1 + x_2 - x_3 \leq -2 & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
 x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.
 \end{array}$$

Nunmehr kann der Übergang zur Dualaufgabe erfolgen.

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \hat{Z} = 18\hat{x}_1 + 10\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 + 32\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 \rightarrow \min \\
 2\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 - 4\hat{x}_4 - \hat{x}_5 \geq 5 \\
 -\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 + 6\hat{x}_4 + \hat{x}_5 \geq 4 \\
 -\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 + 5\hat{x}_4 - \hat{x}_5 \geq -1 \\
 \hat{x}_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \hat{Z} &= 10\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 14\hat{x}_3 - 14\hat{x}_4 + 6\hat{x}_5 \rightarrow \max \\
 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 - 2\hat{x}_4 - \hat{x}_5 &\leq 3 \\
 2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4 + 2\hat{x}_5 &\leq -1 \\
 -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\leq 2 \\
 \hat{x}_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5.
 \end{aligned}$$

In den angegebenen Formulierungen treten nur gleichgerichtete Relationen auf. Durch Multiplikation mit (-1) kann bei Umkehrung des Relationszeichens erreicht werden, daß im Beschränkungsvektor nur nichtnegative Werte auftreten. Durch die Transformation $\hat{x}'_2 = \hat{x}_2 - \hat{x}_3$ bei a) und $\hat{x}'_3 = \hat{x}_3 - \hat{x}_4$ bei b) kann die Anzahl der Variablen reduziert werden. Die neue Variable $\hat{x}'_2$ bzw. $\hat{x}'_3$ ist aber nicht vorzeichenbeschränkt. Die resultierende Formulierung lautet dann:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \hat{Z} &= 18\hat{x}_1 + 10\hat{x}'_2 + 32\hat{x}_4 - 2\hat{x}_5 \rightarrow \min \\
 2\hat{x}_1 + 3\hat{x}'_2 - 4\hat{x}_4 - \hat{x}_5 &\geq 5 \\
 -\hat{x}_1 + 4\hat{x}'_2 + 6\hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\geq 4 \\
 \hat{x}_1 + 2\hat{x}'_2 - 5\hat{x}_4 + \hat{x}_5 &\leq 1 \\
 \hat{x}_1, \hat{x}_4, \hat{x}_5 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \hat{Z} &= 10\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 14\hat{x}'_3 + 6\hat{x}_5 \rightarrow \max \\
 3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 2\hat{x}'_3 - \hat{x}_5 &\leq 3 \\
 -2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}'_3 + 2\hat{x}_5 &\geq 1 \\
 -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}'_3 + \hat{x}_5 &\leq 2 \\
 \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_5 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

2. Zu der LO-Aufgabe

$$\begin{aligned}
 Z &= 80x_1 + 195x_2 + 240x_3 \rightarrow \min \\
 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 330 \\
 x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geq 420 \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

ist die duale Aufgabe zu formulieren und mit Hilfe der Simplex-methode zu lösen. Aus dem optimalen Tableau dieser Aufgabe ist auch die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe abzuleiten. Zuerst ist die duale Aufgabe zu formulieren, wobei hier keine Transformationen durchzuführen sind.

$$\begin{aligned}
 \hat{z} &= 330\hat{x}_1 + 420\hat{x}_2 \rightarrow \max \\
 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 &\leq 80 \\
 \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 &\leq 195 \\
 3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 &\leq 240 \\
 \hat{x}_1, \hat{x}_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Dann ist die 1. Normalform herzustellen und der Lösungsprozeß mit der Simplexmethode vorzunehmen.

$$\begin{aligned}
 \hat{z} &= 330\hat{x}_1 + 420\hat{x}_2 \rightarrow \max \\
 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 &= 80 \\
 \hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 + \hat{x}_4 &= 195 \\
 3\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + \hat{x}_5 &= 240 \\
 \hat{x}_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5
 \end{aligned}$$

	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	x_0	Q	-†
$\hat{x}_3$	2	1	1	0	0	80	80	-1
$\hat{x}_4$	1	3	0	1	0	195	65	-3
← $\hat{x}_5$	3	(4)	0	0	1	240	60*	*
$\hat{z}$	-330	-420†	0	0	0	0		420
← $\hat{x}_3$	(5/4)	0	1	0	-1/4	20	16*	*
$\hat{x}_4$	-5/4	0	0	1	-3/4	15	-	5/4
→ $\hat{x}_2$	3/4	1	0	0	1/4	60	80	-3/4
$\hat{z}$	-15†	0	0	0	105	25200		15
→ $\hat{x}_1$	1	0	4/5	0	-1/5	16		
$\hat{x}_4$	0	0	1	1	-1	35		
$\hat{x}_2$	0	1	-3/5	0	2/5	48		
$\hat{z}$	0	0	12	0	102	25440		

Der Lösungsprozeß führt nach zwei Schritten zu einer eindeutigen optimalen Lösung. Für das gelöste Problem ergibt sich: $\hat{x}_1 = 16$, $\hat{x}_2 = 48$, $\hat{x}_4 = 35$ und $\hat{z} = 25440$. Die optimale Lösung der ursprünglichen Aufgabe ist in der letzten Zeile des Endtableaus, beginnend unter der ersten Zusatzvariablen, also unter $\hat{x}_3$, abzulesen. $x_1 = 12$, $x_3 = 102$, $z = 25440$. In der letzten Zeile des Tableaus ist die Lösung des ursprünglichen Problems ebenfalls auf die 1. Normalform

$$\begin{aligned}
Z &= 80x_1 + 195x_2 + 240x_3 \rightarrow \min \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 330 \\
x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_5 &= 420 \\
x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5
\end{aligned}$$

bezogen. Die optimale Lösung lautet vollständig: $x_1 = 12$, $x_2 = 0$, $x_3 = 102$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ und $Z = 25440$. In der 2. Normalform der primalen Aufgabe sind beide Ungleichungen als Gleichungen erfüllt, d. h., die Schlupfvariablen sind gleich Null. Daher sind in der dualen Aufgabe die Problemvariablen $\hat{x}_1 > 0$ und $\hat{x}_2 > 0$. Aus der Bedingung $\hat{x}_{10} + 3\hat{x}_{20} < 195$ in der optimalen Lösung folgt aus den Dualitätssätzen $x_2 = 0$ im Primal.

3. Die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned}
Z &= 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\geq 32 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\geq 20 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 24 \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

ist mit der dualen Simplexmethode zu lösen.

Der erste Schritt zur Vorbereitung der Lösung ist der Übergang zur 1. Normalform

$$\begin{aligned}
Z &= 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 32 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_5 &= 20 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 &= 24 \\
x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6
\end{aligned}$$

Da die Koeffizienten im Zielfunktionsvektor nichtnegativ sind, kann man durch eine Transformation leicht eine Lösung finden, die dual zulässig ist und damit einen Startpunkt für den Lösungsprozeß mit Hilfe der dualen Simplexmethode bildet.

$$\begin{aligned}
Z &= -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 \rightarrow \max \\
-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= -32 \\
-x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_5 &= -20 \\
-2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 &= -24 \\
x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6
\end{aligned}$$

Damit bietet sich für diese Aufgabe die Lösung mit der dualen

Simplexmethode an. Die erste dual zulässige Basislösung ergibt sich mit den BV x_4 , x_5 und x_6 . Hier wird zuerst die aus der Basis ausscheidende Variable nach dem Kriterium $x_r = \min_1 (x_1 | x_1 < 0)$ gewählt. Das ist im ersten Schritt $x_4 = -32$.

Um im Bereich der dual zulässigen Basislösungen zu bleiben, muß die Spalte (NBV, die jeweils zur BV wird) geeignet gewählt werden.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0	$-\uparrow$
$\leftarrow x_4$	-2	-3	$\ominus 4$	1	0	0	-32*	*
x_5	-1	-2	-5	0	1	0	-20	5
x_6	-2	-1	-2	0	0	1	-24	2
Z	6	5	4↑	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0	-4
Q	-3	-5/3	-1	-	-	-		
$\rightarrow x_3$	1/2	3/4	1	-1/4	0	0	8	1/4
x_5	3/2	7/4	0	-5/4	1	0	20	5/4
$\leftarrow x_6$	-1	1/2	0	$\ominus 1/2$	0	1	-8*	*
Z	4	2	<u>0</u>	1↑	<u>0</u>	<u>0</u>	-32	
Q	-4	-	-	-2	-	-		
x_3	1	1/2	1	0	0	-1/2	12	
x_5	4	1/2	0	0	1	-5/2	40	
$\rightarrow x_4$	2	-1	0	1	0	-2	16	
	2	3	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	2	-48	

Um die BV werdende Variable positiv werden zu lassen, muß das Leitelement $d_{rk} < 0$ sein. Um im Bereich der dual zulässigen Basislösungen zu verbleiben, muß gelten

$$\frac{e_k}{d_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{e_j}{d_{rj}} \mid d_{rj} < 0 \right\}.$$

Die Quotienten berechnet man im Tableau in einer besonderen Zeile Q. Nach zwei Schritten erhält man eine auch primal zulässige und damit optimale Basislösung. Es ist $x_1 = x_2 = x_6 = 0$, $x_3 = 12$, $x_4 = 16$, $x_5 = 40$, $Z = 48$. Im Tableau erscheint der Zielfunktionswert mit einem Minuszeichen, weil die Zielfunktion am Anfang des Lösungsprozesses mit (-1) multipliziert wurde.

4. Gegeben ist die LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Es ist die duale Aufgabe zu formulieren und von beiden Aufgaben die 1. Normalform zu bilden. Das Primal ist mit der Simplexmethode und das Dual mit der dualen Simplexmethode zu lösen. Die Ergebnisse sind zu diskutieren.

Das Dual lautet:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \rightarrow \min \\ -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 &\geq 2 \\ \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 &\geq 3 \\ \hat{x}_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Die 1. Normalformen sind Ausgangspunkt der Rechnungen

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max & \hat{Z} &= \hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \rightarrow \min \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 & -\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 & \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 - \hat{x}_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 &= 2 & \hat{x}_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5 & \hat{x}_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
← x_3	-1	①	1	0	0	1	1*	*
x_4	-1	2	0	1	0	4	2	-2
x_5	1	-4	0	0	1	2	-	4
Z	-2	-3↑	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		3
→ x_2	-1	1	1	0	0	1	-	1
← x_4	①	0	-2	1	0	2	2*	*
x_5	-3	0	4	0	1	6	-	3
Z	-5↑	<u>0</u>	3	<u>0</u>	<u>0</u>	3		5
x_2	0	1	-1	1	0	3		
→ x_1	1	0	-2	1	0	2		
x_5	0	0	-2	3	1	12		
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	-7	5	<u>0</u>	13		

Der Lösungsprozeß für das Primal bricht nach zwei Schritten ab. Dem negativen Wert in der letzten Zeile entsprechend müßte x_3 im folgenden Schritt BV werden. Da der zu x_3 gehörende Vektor nur nichtpositive Komponenten aufweist, ist es nicht möglich, von diesem Tableau ausgehend, mit Hilfe der Simplexmethode eine weitere Basislösung zu berechnen. Die Zielfunktion kann auf der Menge der zulässigen Lösungen unbegrenzt wachsen.

Entsprechend müßte sich im Lösungsprozeß des Duals zeigen, daß es nicht möglich ist, zu einer primal zulässigen Lösung zu kommen. Als Ausgangspunkt der Berechnungen muß eine dual zulässige Basislösung gewählt werden, die man leicht durch Multiplikation der Gleichungen der 1. Normalform mit (-1) erhält. Es lassen sich ebenfalls zwei Schritte ausführen.

BV	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	x_0	-t
$\hat{x}_4$	1	1	-1	1	0	-2	-1
$\leftarrow \hat{x}_5$	$\ominus$	-2	4	0	1	-3*	*
$\hat{z}$	1†	4	2	<u>0</u>	<u>0</u>	0	-1
Q	-1	-2	-	-	-		
$\leftarrow \hat{x}_4$	0	$\ominus$	3	1	1	-5*	*
$\rightarrow \hat{x}_1$	1	2	-4	0	-1	3	-2
$\hat{z}$	<u>0</u>	2†	6	<u>0</u>	1	-3	-2
Q	-	-2	-	-	-		
$\rightarrow \hat{x}_2$	0	1	-3	-1	-1	5	
$\hat{x}_1$	1	0	2	2	1	-7	
$\hat{z}$	0	<u>0</u>	12	2	3	-13	

Dann müßte zur Erreichung einer primal zulässigen Basislösung x_2 als BV ausscheiden. Es sind aber alle Elemente der entsprechenden Zeile nichtnegativ, und somit ergibt sich nicht die Möglichkeit, eine primal zulässige Lösung zu erhalten. Im Dual zeigt sich, daß die Menge der primal zulässigen Lösungen leer ist. Beide Tableaus gestatten jeweils die Ablesung der zweiten Aufgabe.

2.4.2. Übungsaufgaben

1. Formulieren Sie zu den beiden folgenden Aufgaben die dualen Aufgaben:

$$\begin{aligned} \text{a) } Z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max \\ 10x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 57 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= 13 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } Z &= 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 12 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 18 \\ x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

2. Lösen Sie unter Verwendung des Dualproblems bzw. der dualen Simplexmethode folgende Aufgaben:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min & \text{b) } Z = -x_1 + x_2 \rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 12 & x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } Z &= 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min \\ 3x_1 + 3x_2 &\leq 27 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 28 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4. \end{aligned}$$

3. Bilden Sie zu allen Beispielen des Abschnitts 2.2. die duale Aufgabe, und lösen Sie die Beispiele rechnerisch!

2.5. Parametrische Optimierung

2.5.1. Beispiele

Es werden lediglich spezielle Aufgaben der einparametrischen linearen Optimierung betrachtet.

1. Für das Intervall $(-\infty < t < +\infty)$ sollen die Lösungen der einparametrischen linearen Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} Z &= (2 + t) x_1 + (3 - t) x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 9 \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

gefunden werden, in der die Zielfunktion linear vom Parameter t abhängig ist.

Bei der Lösung ist im Unterschied zu nichtparametrischen Aufgaben zusätzlich für jede zulässige Basislösung das Intervall von t zu finden, für das diese Lösung optimal ist (charakteristischer Bereich). Die Grenzen des charakteristischen Bereiches werden durch die charakteristischen Punkte gebildet.

Bei der vorgelegten Aufgabe läßt sich ohne weiteres eine erste zulässige Basislösung finden, nachdem sie in die 1. Normalform überführt wurde.

$$\begin{aligned} Z &= (2 + t) x_1 + (3 - t) x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 9 \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

$\underline{x}_1^T = (0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 9)$ ist die erste zulässige Basislösung, die optimal ist, wenn das Optimalitätskriterium erfüllt ist, d. h., wenn gilt (1) $-2 - t \geq 0$, (2) $-3 + t \geq 0$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	$-\uparrow$
$\leftarrow x_3$	-1	②	1	0	0	4	2*	*
x_4	1	1	0	1	0	5	5	-1
x_5	2	-1	0	0	1	9	-	1
Z	$-2-t$	$-3+t$	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		$3-t$
$\rightarrow x_2$	-1/2	1	1/2	0	0	2	-	1/2
$\leftarrow x_4$	③/2	0	-1/2	1	0	3	2*	*
x_5	3/2	0	1/2	0	1	11	22/3	-3/2
Z	$-\frac{7}{2} - \frac{t}{2}$	<u>0</u>	$\frac{3}{2} - \frac{t}{2}$	<u>0</u>	<u>0</u>	$6-2t$		$\frac{7}{2} + \frac{t}{2}$

Es folgt für (1) $t \leq -2$ und für (2) $t \geq 3$. Der Lösungsbereich für das Ungleichungssystem (1) - (2) ist also die leere Menge $\emptyset$.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-t
x_2	0	1	$1/3$	$1/3$	0	3	9	$-1/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	2	-	$1/3$
$\leftarrow x_5$	0	0	①	-1	1	8	8^*	*
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	$1/3 - 2t/3$	$7/3 + t/3$	<u>0</u>	$13 - t$		$-1/3 + 2t/3$
$\leftarrow x_2$	0	1	0	②③	$-1/3$	$2/3$	1^*	*
x_1	1	0	0	$1/3$	$1/3$	$13/3$	13	$-1/3$
$\leftarrow x_3$	0	0	1	-1	1	8	-	1
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	$8/3 - t/3$	$-1/3 + 2t/3$	$32/3 + 11t/3$		$-8/3 + t/3$
$\rightarrow x_4$	0	$3/2$	0	1	$-1/2$	1		
x_1	1	$-1/2$	0	0	$1/2$	4		
x_3	0	$3/2$	1	0	$1/2$	9		
Z	<u>0</u>	$-4 + t/2$	<u>0</u>	<u>0</u>	$1 + t/2$	$8 + 4t$		

Wenn man für t einen kleinen Wert annimmt, muß x_2 BV werden. Die resultierende Basislösung ist optimal für $-7/2 - t/2 \geq 0$

$$3/2 - t/2 \geq 0,$$

d. h. für $t \in (-\infty, -7]$.

Läßt man t wachsen, so entspricht die NBV x_1 nicht mehr dem Kriterium und muß BV werden. Die sich dann ergebende Basislösung mit den BV x_1 , x_2 und x_5 ist für $1/3 - 2t/3 \geq 0$, $7/3 + t/3 \geq 0$, also für $t \in [-7, 1/2]$ optimal.

Für größere Werte ist x_3 zur BV zu tauschen. Die folgende Basislösung ist für $8/3 - t/3 \geq 0$, $-1/3 + 2t/3 \geq 0$, also für $t \in [1/2, 8]$ optimal.

Nimmt man $t \geq 8$, so muß x_4 BV werden, und x_2 wird NBV. Das Ungleichungssystem $-4 + t/2 \geq 0$, $1 + t/2 \geq 0$ gilt für $t \in [8, +\infty)$. Damit ist das gesamte Intervall untersucht. Die charakteristischen Werte sind -7 , $1/2$ und 8 . Die Lösungen für die charakteristischen Intervalle sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	$-\infty < t \leq -7$	$-7 \leq t \leq 1/2$	$1/2 \leq t \leq 8$	$8 \leq t < +\infty$
x_1	0	2	$13/3$	4
x_2	2	3	$2/3$	0
x_3	0	0	8	9
x_4	3	0	0	1
x_5	11	8	0	0
z	$6 - 2t$	$13 - t$	$32/3 + 11t/3$	$8 + 4t$

Ist die Abhängigkeit von einem Parameter nicht für den Zielfunktionsvektor $\underline{c}$, sondern für den Ressourcenvektor $\underline{b}$ gegeben, so kann man diese Aufgabe entweder direkt mit Hilfe der dualen Simplexmethode lösen oder durch Bildung der dualen Aufgabe auf den vorigen Fall - Parameterabhängigkeit im Zielfunktionsvektor $\underline{c}$ - zurückführen.

2. Es werde am Beispiel der Aufgabe

$$\begin{aligned}
 z &= 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max \\
 -x_1 + x_2 &\leq 4 + 2t \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 20 + t \\
 2x_1 + x_2 &\leq 28 - 3t \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

für $-2 \leq t \leq 28/3$ die Lösung mit Hilfe der dualen Simplexmethode dargestellt. Zuerst wird die Aufgabe in die 1. Normalform überführt und dann für $t = -2$ die optimale Lösung mit Hilfe der Simplexmethode ermittelt.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Q	-↑
← x_3	-1	①	1	0	0	$4 + 2t$	$4 + 2t^*$	*
x_4	1	2	0	1	0	$20 + t$	$10 + t/2$	-2
x_5	2	1	0	0	1	$28 - 3t$	$28 - 3t$	-1
Z	-3	-8↑	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0		8
→ x_2	-1	1	1	0	0	$4 + 2t$	-	1
← x_4	③	0	-2	1	0	$12 - 3t$	$4 - t^*$	*
x_5	3	0	-1	0	1	$24 - 5t$	$6 - 5t/3$	-3
Z	-11↑	<u>0</u>	8	<u>0</u>	<u>0</u>	$32 + 16t$		11
x_2	0	1	$1/3$	$1/3$	0	$8 + t$	-	-1/3
→ x_1	1	0	② $-2/3$	$1/3$	0	$4 - t$	$-6 + 3t/2^*$	*
x_5	0	0	1	-1	1	$12 - 2t$	-	-1
Z	<u>0</u>	<u>0</u>	$2/3↑$	$11/3$	<u>0</u>	$76 + 5t$		-2/3
Q	-	-	-1	-	-			
x_2	$1/2$	1	0	$1/2$	0	$10 + t/2$	-	-1/2
→ x_3	$-3/2$	0	1	$-1/2$	0	$-6 + 3t/2$	$12 - 3t$	$1/2$
← x_5	$3/2$	0	0	④ $-1/2$	1	$18 - 7t/2$	$-36 + 7t^*$	*
Z	1	<u>0</u>	<u>0</u>	$4↑$	<u>0</u>	$80 + 4t$		-4
Q	-	-	-	-2	-	-		
x_2	2	1	0	0	1	$28 - 3t$		
x_3	-3	0	1	0	-1	$-24 + 5t$		
→ x_4	-3	0	0	1	-2	$-36 + 7t$		
Z	13	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	8	$224 - 24t$		

Nach zwei Simplexschritten ergibt sich die optimale Lösung. Der Bereich der primalen Zulässigkeit wird durch das Ungleichungssystem

$$8 + t \geq 0$$

$$4 - t \geq 0$$

$$12 - 2t \geq 0$$

bestimmt. Die Lösung ergibt $t \in [-8; 4]$. Für $t > 4$ muß x_1 **NBV** werden und durch x_3 als BV ersetzt werden. Bei der dualen Simplexmethode muß die duale Zulässigkeit erhalten bleiben, und es werden die entsprechenden Quotienten gebildet.

Die primale Zulässigkeit der dann ermittelten Basislösung ist durch das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 10 + t/2 &\geq 0 \\ -6 + 3t/2 &\geq 0 \\ 18 - 7t/2 &\geq 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Die Lösung ergibt $t \in [4; 36/7]$. Für $t > 36/7$ wird die BV x_5 durch x_4 ersetzt. Die anschließend berechnete Basislösung ist primal zulässig, wenn

$$\begin{aligned} 28 - 3t &\geq 0 \\ -24 + 5t &\geq 0 \\ -36 + 7t &\geq 0 \end{aligned}$$

ist. Das gilt für $t \in [36/7; 28/3]$. Damit ist das gesamte zu untersuchende Intervall für t überdeckt. Die Lösungen werden in einer Tabelle zusammengestellt:

	$-2 \leq t \leq 4$	$4 \leq t \leq 36/7$	$36/7 \leq t \leq 28/3$
x_1	$4 - t$	0	0
x_2	$8 + t$	$10 + t/2$	$28 - 3t$
x_3	0	$-6 + 3t/2$	$-24 + 5t$
x_4	0	0	$-36 + 7t$
x_5	$12 - 2t$	$18 - 7t/2$	0
Z	$76 + 5t$	$80 + 4t$	$224 - 24t$

2.5.2. Übungsaufgaben

1. Es ist die parametrische LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + (3 + t)x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 7 \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

für $-\infty < t < +\infty$ zu lösen!

2. Es ist die parametrische LO-Aufgabe

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 7x_1 + 4x_2 &\leq 28 \\ 5x_1 + 6x_2 &\leq 30 - t \\ x_1 - x_2 &\leq 3 + t \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

für $-3 \leq t \leq 30$ zu lösen!

2.6. Transportprobleme

2.6.1. Beispiele

1. Auf drei Güterbahnhöfen der Deutschen Reichsbahn stehen leere Güterwagen gleichen Typs, die auf vier anderen Güterbahnhöfen zur Beladung benötigt werden. Die Standorte und die Anzahl der dort zur Verfügung stehenden bzw. benötigten Güterwagen sind bekannt. (ME bedeutet Mengeneinheiten.)

Abgebende Güterbahnhöfe: A_1 : 3 [ME]; A_2 : 18 [ME]; A_3 : 9 [ME]

Beziehende Bahnhöfe: B_1 : 6 [ME]; B_2 : 8 [ME]; B_3 : 5 [ME];
 B_4 : 11 [ME]

Die Güterwagen sind von den Güterbahnhöfen A_i ($i = 1, 2, 3$) unter geringstem Kostenaufwand zu den Güterbahnhöfen B_j ($j = 1, 2, 3, 4$) zu bringen. Dabei werden die Kosten für den Transport eines Güterwagens von A_i nach B_j den Entfernungen proportional angenommen und in $\frac{\text{Geldeinheiten}}{\text{Mengeneinheiten}}$ $\left[\frac{\text{GE}}{\text{ME}}\right]$ ausgedrückt. Diese Werte sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	10	8	11
A_2	12	10	14	14
A_3	8	8	11	13

(Transportkostentabelle)

c_{ij} $i = 1, 2, 3$
 $j = 1, 2, 3, 4$

Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

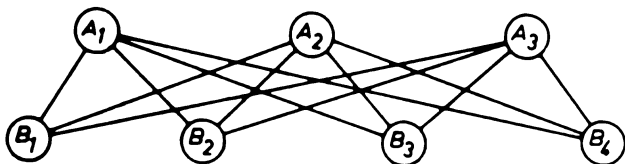
Lösung:

Entscheidungsvariable sind die Transportmengen von A_i nach B_j . Sie werden mit x_{ij} ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$) bezeichnet. Die Variablen lassen sich übersichtlich in einer Tabelle darstellen:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

(Transportmengentabelle)

Die Transportbeziehungen lassen sich in einer Skizze schematisch darstellen. Man erhält dadurch eine bessere Übersicht beim Aufstellen der Beziehungen für das mathematisch-ökonomische Modell.



Nebenbedingungen - Aufkommen:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 3 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 18 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 9 \end{aligned} \quad \sum_{j=1}^4 x_{1j} = a_1 \quad i = 1, 2, 3$$

Nebenbedingungen - Bedarf:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 6 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 8 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 5 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 11 \end{aligned} \quad \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen lauten:

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Abschließend die Zielfunktion: $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

$$\begin{aligned} Z &= 12x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 11x_{14} + 12x_{21} + 10x_{22} + 14x_{23} \\ &+ 14x_{24} + 8x_{31} + 8x_{32} + 11x_{33} + 13x_{34} \rightarrow \min. \end{aligned}$$

2. Drei Betriebe B_i ($i = 1, 2, 3$) stellen ein gleichartiges (homogenes) Gut in folgenden Mengeneinheiten her:

$$B_1: 23 \text{ [ME]}; \quad B_2: 13 \text{ [ME]}; \quad B_3: 10 \text{ [ME]}.$$

Die Produkte sind zu vier Endverbrauchern E_j ($j = 1, 2, 3, 4$) mit folgendem Bedarf zu transportieren:

$$E_1: 12 \text{ [ME]}; \quad E_2: 9 \text{ [ME]}; \quad E_3: 12 \text{ [ME]}; \quad E_4: 8 \text{ [ME]}.$$

Die Transportkosten sind in folgender Matrix gegeben: $\begin{bmatrix} \text{GE} \\ \text{ME} \end{bmatrix}$

$$\underset{\text{HE}}{C} = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 10 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Da Angebot und Nachfrage nicht übereinstimmen, wird angenommen, daß in allen Betrieben Lagerungsmöglichkeiten für die nicht benötigten Produkte vorhanden sind bzw. in diesen Betrieben die Produktion entsprechend reduziert werden kann. Hierdurch entstehen keine zusätzlichen Kosten. Die Summe der Transportkosten ist zu minimieren.

Lösung:

NB: Aufkommen

Bedarf:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 23$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 13$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 10$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 12$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8$$

Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt, da:

$$\sum_{i=1}^3 a_i > \sum_{j=1}^4 b_j$$

$$\text{MNB: } x_{1j} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\begin{aligned} \text{ZF: } Z = & 14x_{11} + 12x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + 5x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} \\ & + 3x_{24} + 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine offene Transportaufgabe, die durch Einfügen eines fiktiven Verbrauchers E_f mit den dazugehörigen fiktiven Transportmengen x_{1f} in eine geschlossene Transportaufgabe überführt werden kann.

$$\begin{aligned} \text{NB: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1f} &= 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{2f} &= 13 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{3f} &= 10 \\ x_{1f} + x_{2f} + x_{3f} &= 5 \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

erfüllt.

Das mathematisch-ökonomische Modell läßt sich auch schematisch in einer Tabelle angeben:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_f	a_i
B_1	14 x_{11}	12 x_{12}	10 x_{13}	7 x_{14}	0 x_{1f}	23
B_2	5 x_{21}	8 x_{22}	6 x_{23}	3 x_{24}	0 x_{2f}	13
B_3	10 x_{31}	6 x_{32}	5 x_{33}	4 x_{34}	0 x_{3f}	10
b_j	12	9	12	8	5	46

Die Kosten für den fiktiven Verbraucher sind mit Null anzusetzen, da die entsprechenden Mengen nicht transportiert werden. Dieses Tableau stellt gleichzeitig den Ausgangspunkt für die numerische Lösung der Transportaufgabe dar.

3. Wir gehen bei dieser Aufgabe von der Grundaufgabenstellung der Aufgabe 2 dieses Abschnittes aus und formulieren folgende Zusatzbedingungen, die gleichzeitig zu berücksichtigen sind:

- Die Strecken A_1B_3 und A_2B_1 sind für den Transport gesperrt (Bauarbeiten).
- Die Kapazität von A_3 muß ausgelastet werden (keine Lagerkapazität, keine Möglichkeit der Produktionsreduzierung).
- Auf den Strecken A_2B_1 , A_3B_2 und A_3B_3 kann nur eine begrenzte Menge transportiert werden, und zwar auf
 A_2B_1 : höchstens 3 [ME],
 A_3B_2 : höchstens 2 [ME],
 A_3B_3 : höchstens 2 [ME].
- Auf der Strecke A_1B_3 sind mindestens 2 [ME] zu transportieren.

Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!

Lösung:

Zunächst stellen wir fest, daß die Zusatzbedingung d) den Optimierungsspielraum zwar einsengt, diese Einschränkung aber vor Aufstellen des mathematisch-ökonomischen Modells berücksichtigt werden kann. Es sind nur die Kapazitäten bei A_1 und B_3 jeweils um 2 Mengeneinheiten zu reduzieren

$$A_1: 21 \text{ [ME]}$$

$$B_3: 10 \text{ [ME]} .$$

In der Zielfunktion sind 20 GE zu addieren. Die Zusatzbedingung a) kann im Modell realisiert werden, indem man die Kosten sehr hoch ("M") wählt und so sichert, daß auf diesen Strecken kein Transport erfolgt

$$c'_{13} = M$$

$$c'_{21} = M .$$

Die weiteren Zusatzbedingungen lassen sich durch zusätzliche Nebenbedingungen berücksichtigen.

Das mathematisch-ökonomische Modell lautet:

$$\begin{aligned} \underline{\text{ZF:}} \quad Z = & 14x_{11} + 12x_{12} + Mx_{13} + 7x_{14} + Mx_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} \\ & + 10x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} + 20 \rightarrow \min \end{aligned}$$

NB: Aufkommen:

Bedarf:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq 13 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = 10^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} & = 12 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} & = 9 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} & = 8 \end{aligned}$$

* Berücksichtigung der Zusatzbedingung b)

$$\underline{\text{NNB:}} \quad x_{1j} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\underline{\text{zusätzliche NB:}} \quad x_{13} = 0; \quad x_{21} = 0^*$$

* durch $c'_{13} = M$, $c'_{21} = M$ abgesichert

$$x_{21} \leq 3; \quad x_{23} \leq 2; \quad x_{33} \leq 2^{**}$$

** Berücksichtigung der Zusatzbedingung c)

Unter Berücksichtigung von zusätzlichen Betrachtungen läßt sich diese Aufgabe auch in tabellarischer Form darstellen.

Hierzu zunächst einige vorbereitende Betrachtungen.

Für die Aufkommensbedingungen gilt:

$$(1) \ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 23 \quad \cap \quad (1') \ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1f} = 23$$

$$(2) \ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 13 \quad \cap \quad (2') \ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{2f} = 13$$

$$(3) \ x_{21} \leq 3$$

$$\text{Weiter gilt (4) } x_{22} \leq 13; \ x_{23} \leq 13; \ x_{24} \leq 13; \ x_{2f} \leq 13$$

$$\cap (4') \quad x_{21} + \lambda_2^{(1)} = 3$$

$$x_{22} + \lambda_2^{(2)} = 13$$

$$x_{23} + \lambda_2^{(3)} = 13$$

$$x_{24} + \lambda_2^{(4)} = 13$$

$$x_{2f} + \lambda_2^{(f)} = 13.$$

Durch Addition der Gleichungen (4') folgt:

$$(4'') \quad x_{21} + \lambda_2^{(1)} + x_{22} + \lambda_2^{(2)} + x_{23} + \lambda_2^{(3)} + x_{24} + \lambda_2^{(4)} + x_{2f} + \lambda_2^{(f)} = 3 + 13 + 13 + 13 + 13,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{2f} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_2^{(4)} + \lambda_2^{(f)} = 55,$$

$$\text{mit (2')} \text{ folgt (4''')} \lambda_2^{(1)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_2^{(4)} + \lambda_2^{(f)} = 55 - 13 = 42,$$

$$(5) \ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10, \quad (6) \ x_{32} \leq 2; \quad x_{33} \leq 2.$$

Weiter gilt:

$$(7) \ x_{31} \leq 10; \ x_{32} \leq 10; \quad (7') \ x_{31} + \lambda_3^{(1)} = 10; \ x_{32} + \lambda_3^{(2)} = 2; \\ x_{33} + \lambda_3^{(3)} = 2; \ x_{34} + \lambda_3^{(4)} = 10.$$

$$\text{Analog folgt (7''')} \lambda_3^{(1)} + \lambda_3^{(2)} + \lambda_3^{(3)} + \lambda_3^{(4)} = 24 - 10 = 14.$$

$$(8) \ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 12, \quad (9) \ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9,$$

$$(10) \ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10, \quad (11) \ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8.$$

Damit ist eine Darstellung in einem Tableau möglich:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_f	A_2	A_3			
B_1	14	12	10	7	0	M	M	23		
B_2	B_{21}	5	M	M	M	0	0	M	3	13
	B_{22}	M	8	M	M	0	0	M	13	
	B_{23}	M	M	6	M	0	0	M	13	
	B_{24}	M	M	M	3	0	0	M	13	
	B_{2f}	M	M	M	M	0	0	M	13	
B_3	B_{31}	10	M	M	M	M	M	0	10	10
	B_{32}	M	6	M	M	M	M	0	2	
	B_{33}	M	M	5	M	M	M	0	2	
	B_{34}	M	M	M	4	M	M	0	10	
	12	9	12	8	5	42	14			

4. Die Produzenten (P_1) erzeugen das gleiche Produkt, das zu vier Verbrauchern (V_j) transportiert werden soll. Die Produzenten produzieren folgende Mengen (a_1):

	P_1	P_2	P_3
a_1	40	45	50

und die Verbraucher benötigen folgende Mengen (b_j):

	V_1	V_2	V_3	V_4
b_j	22	33	44	36

Die Transportkosten je Mengeneinheit auf der Transportstrecke P_1V_j sind c_{1j} und folgender Tabelle zu entnehmen:

	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	8	3	3	4
P_2	6	7	5	8
P_3	1	8	10	2

Die insgesamt auftretenden Transportkosten sind zu minimieren. Folgende Aufgaben sind zu lösen:

- Stellen Sie das mathematisch-ökonomische Modell auf!
- Bestimmen Sie eine zulässige Basislösung mit Hilfe der Vogel-schen Approximationsmethode!
- Bestimmen Sie den optimalen Transportplan und die dabei ent-stehenden Transportkosten!

Lösung:

- a) Es handelt sich um eine geschlossene Transportaufgabe ohne Zu-satzbedingungen, so daß das mathematisch-ökonomische Modell direkt aus der Aufgabenstellung abgeleitet werden kann.

$$\underline{ZF}: Z = 8x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} \\ + x_{31} + 8x_{32} + 10x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{ll} \underline{MB}: x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 45 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 33 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 44 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 36 \end{array}$$

$$\underline{NNB}: x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Als Transporttableau erhält man:

	v_1	v_2	v_3	v_4	a_i
P_1	8 x_{11}	3 x_{12}	3 x_{13}	4 x_{14}	46
P_2	6 x_{21}	7 x_{22}	5 x_{23}	8 x_{24}	45
P_3	1 x_{31}	8 x_{32}	10 x_{33}	2 x_{34}	50
b_j	22	33	44	36	135

- b) Das zuletzt dargestellte Tableau ist der Ausgangspunkt für die Ermittlung einer zulässigen Basislösung. Die Ermittlung einer ersten zulässigen Basislösung nach der Vogel-schen Approximationsmethode kann wie folgt zusammengefaßt werden:
- Berechnung der Differenzen zwischen den beiden niedrigsten Transportkostensätzen für sämtliche Reihen (Zeilen und Spalten).
 - Ermittlung der Reihe, in der die größte Differenz auftritt.

3. In der ausgewählten Reihe ist das Feld mit den geringsten Transportkosten mit der größtmöglichen Transportmenge zu belegen.

Da die Auswahl der Reihe unter 2. nicht eindeutig zu sein braucht, braucht auch die ermittelte zulässige Basislösung nicht eindeutig zu sein.

Zunächst bilden wir die Zeilen- und Spaltendifferenzen.

$$\begin{aligned} P_1: c_{12} - c_{13} &= 3 - 3 = 0 & V_1: c_{21} - c_{31} &= 6 - 1 = 5 \\ P_2: c_{21} - c_{23} &= 6 - 5 = 1 & V_2: c_{22} - c_{12} &= 7 - 3 = 4 \\ P_3: c_{34} - c_{31} &= 2 - 1 = 1 & V_3: c_{23} - c_{13} &= 5 - 3 = 2 \\ & & V_4: c_{14} - c_{34} &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse werden in das Tableau eingetragen.

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	Zeilendifferenzen
P_1	8	3	3	4	40	0
P_2	6	7	5	8	45	1
P_3	1	8	10	2	50	1
b_j	22	33	44	36	135	
	5	4	2	2	Spaltendifferenzen	

Die größte Differenz tritt in der ersten Spalte mit 5 auf.
Das Feld mit den geringsten Transportkosten ist P_3V_1 .
Dann ist

$$x_{31} = \min(a_3, b_1) = \min(50, 22) = 22.$$

Es folgt das neue Tableau, bei welchem die Kapazität von V_1 bereits ausgelastet ist, was durch Striche in den Feldern P_1V_1 und P_2V_1 zum Ausdruck kommt.

Für das reduzierte Tableau sind die Differenzen neu zu berechnen, wobei die Spaltendifferenzen

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	
P_1	8	3	3	4	40	0
P_2	6	7	5	8	45	1
P_3	1	8	10	2	50	1
b_j	22	33	44	36	135	
	5	4	2	2		

erhalten bleiben.

$$c_{12} - c_{13} = 3 - 3 = 0$$

$$c_{21} - c_{23} = 7 - 5 = 2$$

$$c_{32} - c_{34} = 8 - 2 = 6$$

Diese Differenzen werden in das Tableau eingetragen.

Die größte Differenz ist in der dritten Zeile mit "6". Das Feld mit den kleinsten Kosten ist P_3V_4 mit

$c_{34} = 2$. Dieses Feld kann mit

$$x_{34} = \min(50 - 22, 36) = 28 \text{ belegt werden.}$$

Es folgt nebenstehen-
des Tableau:

In den weiteren
Schritten ergeben

sich die folgenden Tableaus:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_1	
P_1	8 -	3	3	4	40	0
P_2	6 -	7	5	8	45	1,2
P_3	1 (22)	8 -	10 -	2 (28)	50	1,6
b_j	22	33	55	36	135	
	8	4	2	2		

Hier wurde in den
Spalten V_2 und V_4
bei gleichen Diffe-
renzen die Spalte V_2
ausgewählt, weil das
Feld mit den gering-
sten Kosten hier
einen kleineren Wert
aufweist.

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_1	
P_1	8 -	3 (33)	3	4	40	0
P_2	6 -	7 -	5	8	45	1,2
P_3	1 (22)	8 -	10 -	2 (28)	50	1,6
b_j	22	33	44	36	135	
	8	4	2	2,4		

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_1	
P_1	8 -	3 (33)	3	4 (7)	40	0,1
P_2	6 -	7 -	5 -	8 -	45	1,2,3
P_3	1 (22)	8 -	10 -	2 (28)	50	1,6
b_j	22	33	44	36	135	
	8	4	2	2,4		

Jetzt können die restlichen Kapazitäten aufgeteilt werden, und wir erhalten die zulässige Basislösung:

	v_1	v_2	v_3	v_4	a_j
P_1	8	3	3	4	40
		(33)		(7)	
P_2	6	7	5	8	45
			(44)	(1)	
P_3	1	8	10	2	50
	(22)			(28)	
b_j	22	33	44	36	135

Der dazugehörige Zielfunktionswert lautet:

$$Z_1 = 33 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 44 \cdot 5 + 1 \cdot 8 + 22 \cdot 1 + 28 \cdot 2 = 433.$$

c) Die Optimalität wird mit Hilfe der modifizierten Distributionsmethode untersucht. Es gilt für die Basisvariablen:

$$u_1 + v_j = c_{1j}.$$

Wir erhalten:

$$u_1 + v_2 = 3$$

$$u_1 + v_4 = 4$$

$$u_2 + v_3 = 5$$

$$u_2 + v_4 = 8$$

$$u_3 + v_1 = 1$$

$$u_3 + v_4 = 2$$

Es handelt sich um ein unterbestimmtes inhomogenes lineares Gleichungssystem mit einem Freiheitsgrad.

Wir wählen $u_1 = 0$ und erhalten:

$$v_2 = 3, \quad v_4 = 4, \quad u_2 = 4, \quad v_3 = 1, \quad u_3 = -2, \quad v_1 = 3.$$

Für die Nichtbasisvariablen gelten die Bewertungen:

$$c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

Gilt für alle

$$c_{ij} \leq 0,$$

so ist die Lösung optimal.

$c_{ij} > 0$ für mindestens ein Element bedeutet, daß die Lösung noch nicht optimal ist.

Berechnung der c_{ij} :

$$c_{11}' = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 3 - 8 = -5$$

$$c_{13}' = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 3 = -2$$

$$c_{21}' = u_2 + v_1 - c_{21} = 4 + 3 - 6 = +1$$

$$c_{22}' = u_2 + v_2 - c_{22} = 4 + 3 - 7 = 0$$

$$c_{32}' = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 3 - 8 = -7$$

$$c_{33}' = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 1 - 10 = -11$$

Das vollständige Tableau hat damit folgendes Aussehen:

Da c_{21}' die Optimalitätsbedingungen nicht erfüllt, ist die Aufgabe noch nicht optimal.

	v_1	3	3	1	4	
u_1		v_1	v_2	v_3	v_4	a_i
0	P_1	8	3	3	4	40
		-5	(33)	-2	(7)	
4	P_2	6	7	5	8	45
		+1	0	(44)	(1)	
-2	P_3	1	8	10	2	50
		(22)	-7	-11	(28)	
	b_j	22	33	44	36	135

Der notwendige Austauschzyklus lautet:

Δ ist maximal zu wählen; es darf nur so groß sein, daß die Bedingung $x_{ij} \geq 0$ erhalten bleibt.

P_2V_4 ist das entscheidende Feld. Daraus folgt $\Delta = 1$. Der Umsetzungszyklus lautet:

$P_2V_1^+$; $P_2V_4^-$; $P_3V_4^+$; $P_3V_1^-$.

Das neue Tableau lautet:

	v_1	v_2	v_3	v_4	a_i
P_1					40
P_2	Δ^+			$1-\Delta^-$	45
P_3	$22-\Delta$			$28+\Delta^+$	50
b_j	22	33	44	36	135

	v_1	3	3	2	4	
u_1		v_1	v_2	v_3	v_4	a_i
0	P_1	8	3	3	3	40
		-5	(33)	-1	(7)	
3	P_2	6	7	5	8	45
		(1)	-1	(44)	-1	
-2	P_3	1	8	10	2	50
		(21)	-7	-10	(29)	
	b_j	22	33	44	36	135

Berechnung des Zielfunktionswertes:

$$Z_2 = Z_1 - c_{21}^i \cdot \Delta = 433 - 1 = 432 \quad Z_{\text{opt}}.$$

Es handelt sich um die optimale Lösung. Der optimale Transportplan hat folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{ll} P_1 \rightarrow V_2: x_{12} = 33 & P_2 \rightarrow V_3: x_{23} = 44 \\ P_1 \rightarrow V_4: x_{14} = 7 & P_3 \rightarrow V_1: x_{31} = 21 \\ P_2 \rightarrow V_1: x_{21} = 1 & P_3 \rightarrow V_4: x_{34} = 29 \end{array}$$

Es entstehen 432 [GE] Transportkosten.

5. Drei Produzenten (P_1), die gleiche Produkte herstellen, haben fünf Verbraucher (V_j), die je 20 [ME] benötigen, zu beliefern. Die Kapazitäten der Produzenten und die Transportkosten je ME sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
P_1	6	7	3	10	2	36
P_2	3	9	6	8	1	33
P_3	4	13	8	7	3	31

Zur Zeit werden die Transporte nach folgendem Plan durchgeführt:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
P_1		(9)	(20)		(7)
P_2	(20)				(13)
P_3		(11)		(20)	

- Berechnen Sie nach dem vorgegebenen Transportplan die Transportkosten!
- Stellen Sie fest, ob dieser Transportplan optimal ist!
- Sollte das nicht der Fall sein, so ermitteln Sie ein optimales Transportprogramm!

Lösung:

a) Berechnung der Transportkosten

$$K = 7 \cdot 9 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 13 + 13 \cdot 11 + 7 \cdot 20 = 493$$

- b) Die Anwendung des Optimalitätskriteriums zeigt, daß es sich bei dem vorgelegten Plan um eine zulässige Basislösung handelt. Diese lautet, in Tableauform geschrieben:

	v_1	4	7	3	1	2	
u_1		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	a_1
0	P_1	6	7	3	10	2	36
		-2	(9)	(20)	-9	(7)	
-1	P_2	3	9	6	8	1	33
		(20)	-3	-4	-8	(13)	
6	P_3	4	(13)	8	7	3	31
		+6	(11)	+1	(20)	+5	
	b_1	20	20	20	20	20	100

$Z_1 = 493$.

Da es $o_{1j} > 0$ gibt, handelt es sich nicht um die optimale Lösung.

- c) Ausgehend von dem Tableau unter b), folgen die Verbesserungsschritte:

1. Schritt

	v_1	-2	7	3	1	-4	
u_1		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	a_1
0	P_1	6	7	3	10	2	36
		-8	(16)	(20)	-9	-6	
5	P_2	3	9	6	8	1	33
		(13)	+3	+2	-2	(20)	
6	P_3	4	(13)	8	7	3	31
		(7)	(4)	+1	(20)		
	b_1	20	20	20	20	20	100

$$Z_2 = Z_1 - 6 \cdot 7 = 493 - 42 = 451$$

2. Schritt:

	v_1	1	7	3	4	-1	
u_1		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	a_1
0	P_1	6	7	3	10	2	36
		-5	(16)	(20)	-6	-3	
2	P_2	3	9	6	8	1	33
		(9)	(4)	-1	-2	(20)	
3	P_3	4	13	8	7	3	31
		(11)	-3	-2	(20)	-1	
	b_1	20	20	20	20	100	

$$Z_3 = Z_2 - 3 \cdot 4 = 451 - 12 = 439 = Z_{\text{opt}}.$$

Die Optimallösung ergibt folgende Transportzuordnung:

$$\begin{aligned} x_{12} &= 16; & x_{21} &= 9; & x_{25} &= 20; & x_{34} &= 20 \\ x_{13} &= 20; & x_{22} &= 4; & x_{31} &= 11 & & \text{[ME]}. \end{aligned}$$

Es fallen 439 [GE] Transportkosten an, die Einsparung beträgt 54 [GE].

6. Vier Anlieferungsstellen A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) haben vier Bedarfsstellen B_k ($k = 1, 2, \dots, 4$) mit gleichen Erzeugnissen zu beliefern. Die Kapazitäten A_i sind in Tonnen angegeben.

$A_1: 40$; $A_2: 50$; $A_3: 60$; $A_4: 70$. Die Bedarfsträger benötigen je 50 Tonnen. Die Entfernungen [km] von A_i nach B_k sind folgender Tabelle zu entnehmen.

Für welchen Transportplan ist die Transportleistung minimal?

Lösung:

Aus den Zahlen der Aufgabe ergibt sich, daß es sich um ein offenes Transportproblem handelt,

das durch Einführung eines fiktiven Bedarfsträgers B_5 in ein geschlossenes Transportproblem verwandelt werden kann.

Es wird mit Hilfe der Vogelschen Approximationsmethode eine erste zulässige Basislösung ermittelt. In der Spalte bzw. Zeile der Differenzen sind nacheinander die Differenzen bei der etappenweisen Ermittlung dieser ersten zulässigen Basislösung aufgeführt. Das Ausgangstableau lautet:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	9	2	4
A_2	6	9	10	6
A_3	9	8	6	7
A_4	2	3	7	1

	v_j	6	7	2	3	0		
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	
0	A_1	8 -2	9 -2	2 (40)	4 -1	0 (0)	40	2
0	A_2	6 (30)	8 -1	10 -8	6 -3	0 (20)	50	6,0
4	A_3	9 +1	8 +3	6 (10)	7 (50)	0 +4	60	6,1,2
-4	A_4	2 (20)	3 (50)	7 -9	1 0	0 -1	70	1
	b_j	50	50	50	50	20	220	
		4,2,3	5,0	4	3,2,1	0		

Die erste zulässige Basislösung ist degeneriert. Um die modifizierte Distributionmethode anwenden zu können, muß eine Basisvariable mit dem Wert Null eingeführt werden.

Man erhält die Optimallösung:

	v_j	2	4	2	2	4		
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i	
0	A_1	8 -6	9 -5	2 (40)	4 -2	0 -4	40	
4	A_2	6 (50)	8 0	10 -4	6 0	0 (0)	50	
4	A_3	9 -3	8 (30)	6 (10)	7 -1	0 (20)	60	
-1	A_4	2 -1	3 (20)	7 -6	1 (50)	0 -5	70	
	b_j	50	50	50	50	20	220	

Bei der optimalen Lösung liegt ebenfalls Degeneration vor. Die Bewertungszahlen $c_{22}^1 = 0$ und $c_{24}^1 = 0$ besagen, daß es weitere optimale zulässige Basislösungen mit dem Zielfunktionswert $Z_{\text{opt}} = 790$ [km] gibt. Die Lösung lautet

$x_{13} = 40$; $x_{21} = 50$; $x_{32} = 30$; $x_{33} = 10$; $x_{42} = 20$; $x_{44} = 50$

sowie $x_{3f} = 20$ (bei A_3 werden 20 Tonnen nicht abtransportiert).

7. Ein Betrieb ist durch vorhandene freie Kapazitäten in der Lage, ein Produkt zusätzlich in den Produktionsplan aufzunehmen. Für dieses Produkt besteht in den einzelnen Quartalen folgender Bedarf:

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1. Quartal 4000 [ME] | 3. Quartal: 3000 [ME] |
| 2. Quartal 5000 [ME] | 4. Quartal: 2000 [ME] |

Zur Herstellung dieses Produktes kann der Betrieb zwei Maschinentypen M_1 und M_2 einsetzen, die mit unterschiedlichem Kostenaufwand arbeiten. Die freien Kapazitäten für die einzelnen Quartale und die Kosten sind in den folgenden Tabellen angegeben.

[ME]	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄
M ₁	2000	5000	4000	1000
M ₂	3000	2000	1000	1000

[GE/ME]	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄
M ₁	3	1	2	4
M ₂	2	1	4	5

Es besteht die Möglichkeit, im voraus für die nachfolgenden Quartale zu produzieren. Dabei entstehen Lagerhaltungskosten von 1 [GE] pro [ME] und [Quartal]. Es soll aus betrieblichen Gründen ausgeschlossen werden, daß im 2. Quartal eine Produktion für das 4. Quartal erfolgt.

- Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell in Tableauform!
- Geben Sie für die Aufgabe eine numerische Lösung an!

Lösung:

- Formulierung des allgemeinen Modells:

		Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_f	a_1
Q_1	M_1	x_{11}^1 c_{11}^1	x_{12}^1 c_{12}^1	x_{13}^1 c_{13}^1	x_{14}^1 c_{14}^1	x_{1f}^1 c_{1f}^1	a_1^1
	M_2	x_{21}^2 c_{21}^2	x_{22}^2 c_{22}^2	x_{23}^2 c_{23}^2	x_{24}^2 c_{24}^2	x_{2f}^2 c_{2f}^2	a_1^2
Q_2	M_1	x_{21}^1 c_{21}^1	x_{22}^1 c_{22}^1	x_{23}^1 c_{23}^1	x_{24}^1 c_{24}^1	x_{2f}^1 c_{2f}^1	a_2^1
	M_2	x_{21}^2 c_{21}^2	x_{22}^2 c_{22}^2	x_{23}^2 c_{23}^2	x_{24}^2 c_{24}^2	x_{2f}^2 c_{2f}^2	a_2^2
Q_3	M_1	x_{31}^1 c_{31}^1	x_{32}^1 c_{32}^1	x_{33}^1 c_{33}^1	x_{34}^1 c_{34}^1	x_{3f}^1 c_{3f}^1	a_3^1
	M_2	x_{31}^2 c_{31}^2	x_{32}^2 c_{32}^2	x_{33}^2 c_{33}^2	x_{34}^2 c_{34}^2	x_{3f}^2 c_{3f}^2	a_3^2
Q_4	M_1	x_{41}^1 c_{41}^1	x_{42}^1 c_{42}^1	x_{43}^1 c_{43}^1	x_{44}^1 c_{44}^1	x_{4f}^1 c_{4f}^1	a_4^1
	M_2	x_{41}^2 c_{41}^2	x_{42}^2 c_{42}^2	x_{43}^2 c_{43}^2	x_{44}^2 c_{44}^2	x_{4f}^2 c_{4f}^2	a_4^2
	b_1	b_1	b_2	b_3	b_4	b_f	

Variable: x_{ij}^k

i: Index für Produktionsquartal

j: Index für Bedarfsquartal

k: Index für Maschinentyp analog c_{ij}^k

analog a_1^k, b_j

b) Für die Formulierung des speziellen Modells gilt es, zusätzliche Aussagen über die c_{ij}^k zu machen.

1. Für c_{11}^1 und c_{11}^2 gelten die in der Aufgabenstellung angegebenen Werte. Es werden nur die Produktionskosten berücksichtigt: $c_{11}^1 = 3$; $c_{11}^2 = 2$.

2. Für c_{12}^1 und c_{12}^2 sind zu den Produktionskosten für das 1. Quartal die Lagerungskosten für ein Quartal zu berücksichtigen: $c_{12}^1 = 3 + 1 = 4$; $c_{12}^2 = 2 + 1 = 3$.

Analog für das 3. und 4. Quartal:

$c_{13}^1 = 3 + 2 = 5$; $c_{13}^2 = 2 + 2 = 4$;

$c_{14}^1 = 3 + 3 = 6$; $c_{14}^2 = 2 + 3 = 5$.

3. Für das fiktive Quartal lauten die Kosten $c_{if}^k = 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und $k = 1, 2$.

4. Produktion kann nur für das laufende Quartal oder für die folgenden Quartale erfolgen. Alle anderen Variablen x_{ij}^k müssen Null werden, was durch das Ansetzen hoher Kosten erreicht wird.

$c_{21}^1 = M$ und $c_{21}^2 = M$ sichert diese Bedingung für das 2. und 1. Quartal. Durch $c_{24}^1 = M$ und $c_{24}^2 = M$ kann erreicht werden, daß im 2. Quartal nicht für das 4. Quartal produziert wird. Die restlichen Kostenelemente berechnet man analog. Gleiches gilt für die Berechnung der Koeffizienten für das 3. und 4. Quartal.

Das vollständige spezielle Modell ist in nachfolgendem Tableau angegeben. Es enthält gleichzeitig die optimale Lösung.

		q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q _f	a _i
q ₁	M ₁	3 (1000)	4	5	6	0 (1000)	2000
	M ₂	2 (3000)	3	4	5	0	3000
q ₂	M ₁	M	1 (3000)	2 (2000)	M	0	5000
	M ₂	M	1 (2000)	2	M	0	2000
q ₃	M ₁	M	M	2 (1000)	3 (2000)	0 (1000)	4000
	M ₂	M	M	4	5	0 (1000)	1000
q ₄	M ₁	M	M	M	4	0 (1000)	1000
	M ₂	M	M	M	5	0 (1000)	1000
	b _i	4000	5000	3000	2000	5000	19000

$$Z = 26\,000 \text{ [GE]}$$

2.6.2. Übungsaufgaben

1. In drei Ziegeleien (P_1) werden Ziegelsteine gleicher Qualität hergestellt, die von vier Baustellen (V_j) benötigt werden. Die Transportkosten und Kapazitäten entnehmen Sie folgender Tabelle:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
P_1	2	3	4	6	30
P_2	5	1	8	6	40
P_3	8	6	7	4	50
b_j	15	15	45	45	

- Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!
- Stellen Sie einen kostenminimalen Transportplan auf!

2. Lösen Sie Aufgabe 1 dieses Abschnittes numerisch!

3. Lösen Sie Aufgabe 2 dieses Abschnittes numerisch!

4. Von vier Kiesgruben (K_1) sind fünf Baustellen (B_j) durch LKW mit Kies zu versorgen. Die Verladekapazitäten in einer bestimmten Zeiteinheit sind:

K_1 : 40; K_2 : 40; K_3 : 25; K_4 : 60 [m^3].

In der gleichen Zeit werden von den Baustellen benötigt:

B_1 : 28; B_2 : 35; B_3 : 18; B_4 : 32; B_5 : 32 [m^3].

Die Entfernungen [km] sind aus folgender Tabelle zu entnehmen:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
K_1	4	1	10	2	8
K_2	3	4	9	3	5
K_3	5	2	11	8	9
K_4	8	3	7	5	2

Für welches Versorgungsprogramm wird die Transportleistung minimal, wenn jede Baustelle von jeder Kiesgrube beliefert werden kann?

- Formulieren Sie das mathematisch-ökonomische Modell!
- Geben Sie den optimalen Transportplan an!

5. Fünf Verkaufsstellen (V_k) werden von drei Auslieferungslagern (A_1) nach folgendem Transportplan beliefert:

Die Kapazitäten der Auslieferungslager werden voll genutzt, und jede Verkaufsstelle erhält die benötigten Mengen. Die Kostenmatrix $\underline{K}$ gibt die Transportkosten je ME an.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
A_1			(13)		(9)
A_2	(10)	(12)			
A_3				(14)	(8)

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die Transportkosten nach dem vorliegenden Plan!
 - Es ist zu prüfen, ob die Kosten minimal sind.
 - Es ist der optimale Transportplan aufzustellen. Es ist die Einsparung der Transportkosten zu berechnen.
6. Lösen Sie Aufgabe 3 dieses Abschnittes numerisch!
7. Für ein Transportproblem liegt folgende optimale Lösung vor:

$$Z = 648$$

Es sind nachfolgende Kapazitätsänderungen und Kostenberichtigungen, jeweils von dieser optimalen Lösung ausgehend, zu diskutieren und eventuell auftretende Berichtigungen durchzuführen.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	(18)	(14)	(15)	(21)	17
A_2	(16)	(15)	(17)	(12)	19
A_3	(18)	(16)	(16)	(14)	9
b_j	5	15	15	10	45

- Die Kosten bei A_3B_2 werden 2 [GE/ME] auf 14 [GE/ME] verändert.
- Die Kosten bei A_3B_4 erhöhen sich um 2 [GE/ME] auf 16 [GE/ME].
- Die Kosten bei A_1B_2 erhöhen sich von 14 auf 16 [GE/ME].
- Die Kosten bei A_1B_2 werden von 14 auf 10 [GE/ME] herabgesetzt.
- Der Bedarf von B_2 reduziert sich um 5 [ME] auf 10 [ME].
- Der Bedarf von B_1 und B_4 erhöht sich jeweils um 3 [ME]. Die Produktion bei A_3 wird um 6 [ME] erhöht.

Lösungen zu Abschnitt 2.

Lösungen zu 2.1.2.

1. ZF: $Z = 0,8x_1 + x_2 + 0,6x_3 + 0,3x_4 \rightarrow \max$

NB:
$$\begin{array}{rclcl} 4x_1 & & + x_3 & + x_4 & \leq 1300 \\ 5x_1 & + 6x_2 & + 2x_3 & + 3x_4 & \leq 2100 \\ 5x_1 & + 4x_2 & & + 6x_4 & \leq 1200 \\ 10x_1 & + 8x_2 & + 6x_3 & + 4x_4 & \leq 4800 \\ x_1 & + x_2 & & & \leq 240 \end{array}$$

NNB: $x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

2. ZF: $Z = 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 \rightarrow \min$

NB:
$$\begin{array}{rclcl} 750x_1 & + 2000x_2 & + 800x_3 & + 2000x_4 & = 10\,000 \\ 2x_1 & + 5x_2 & + x_3 & + x_4 & \geq 24 \\ 3x_1 & + 7x_2 & + 3x_3 & + 7x_4 & \geq 30 \\ 10x_1 & + 20x_2 & + 5x_3 & + 25x_4 & \leq 105 \end{array}$$

NNB: $x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$

3.

a) Die Variablen entsprechen den Zuschnittvarianten.

ZF: $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$

NB:
$$\begin{array}{rclcl} 6x_1 & & + 2x_3 & & + 4x_5 & \geq 100 \\ & 2x_2 & + 2x_3 & + 5x_4 & + 2x_5 & \geq 50 \\ & 4x_2 & + 2x_3 & & & + 6x_6 & \geq 100 \end{array}$$

NNB: $x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 6.$

b) Die Nebenbedingungen und Nichtnegativitätsbedingungen bleiben erhalten.

Die Koeffizienten für die Zielfunktion stellen den Abfall dar.

ZF: $Z = 0,2x_1 + 0,16x_2 + 0,16x_3 + 0,4x_4 + 0,16x_5 + 0,2x_6 \rightarrow \min$

4. Mit x_1 : Anzahl der Arbeitskräfte der 1. Vollsicht
:
:
 x_6 : Anzahl der Arbeitskräfte der 6. Teilschicht
folgt:

ZF: $Z = 8x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 4x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{array}{rcll}
 \text{NB: } & x_1 & + x_4 & \geq 6 \\
 & x_1 & + x_4 + x_5 & \geq 11 \\
 & x_1 & + x_5 & \geq 10 \\
 & x_1 + x_3 & + x_5 & \geq 16 \\
 & x_2 + x_3 & & \geq 18 \\
 & x_2 + x_3 & & \geq 7 \\
 & x_2 + x_3 & + x_6 & \geq 37 \\
 & x_2 & + x_6 & \geq 41 \\
 & x_2 + x_3 & & \leq 2x_1
 \end{array}$$

$$\text{NNB: } x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

$$5. \text{ ZP: } Z = 36x_1 + 24x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 60x_5 + 55x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcll}
 \text{NB: } & & x_3 & \geq 10 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & & \geq 45 \\
 & x_1 & & \leq 25 \\
 & & x_2 & \leq 50 \\
 & & & x_3 \leq 25 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & & \leq 55 \\
 & & x_4 & \geq 10 \\
 & & & x_5 \geq 11 \\
 & & x_4 & \leq 16 \\
 & & & x_5 \leq 22 \\
 & & & x_6 \leq 14 \\
 & & & x_4 + x_5 + x_6 \leq 50 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & = & 100
 \end{array}$$

$$\text{NNB: } x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

$$6. \text{ ZP: } Z = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcll}
 \text{NB: } & & x_2 & \geq 8 \\
 & & & x_4 \geq 13 \\
 & x_1 & + x_3 & \leq 21 \\
 & 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 & \leq & 1080 \\
 & 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 & \leq & 108 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 60 \\
 & 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 & \leq & 210 \\
 & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 72 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 24
 \end{array}$$

$$\text{NNB: } x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

7. Es werden Variable mit zwei Indizes eingeführt (x_{ij})

i: Index für Produkt $i = 1, 2, 3$

j: Index für Technologie $j = 1, 2, 3$ bzw. $j = 1, 2$

$$\underline{\text{ZF:}} \quad Z = 11x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 9x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 18x_{31} \\ + 15x_{32} \rightarrow \max$$

NB:

$$2x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} \leq 200$$

$$3x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 5x_{31} + 6x_{32} \leq 340$$

$$x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + x_{31} \leq 480$$

$$\underline{\text{NNB:}} \quad x_{ij} \geq 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$$

Lösungen zu 2.2.2.

1. Die Achsenabschnittsformen lauten

$$\frac{x_1}{11} + \frac{x_2}{16,5} \leq 1; \quad \frac{x_1}{13,2} + \frac{x_2}{11} \leq 1; \quad \frac{x_1}{24} + \frac{x_2}{8} \leq 1.$$

Mit der Annahme von

$$Z = 54 \text{ folgt } \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{6} = 1.$$

Durch Parallelverschiebung der Zielfunktionsgeraden findet man als äußersten Punkt des zulässigen Bereiches $x_1 = 6$; $x_2 = 6$ mit dem Zielfunktionswert $Z = 90$.

2. Die Achsenabschnittsformen lauten:

$$\frac{x_1}{1500} + \frac{x_2}{4500} \leq 1; \quad \frac{x_1}{1875} + \frac{x_2}{2500} \leq 1; \quad \frac{x_1}{3500} + \frac{x_2}{1750} \leq 1.$$

$$\text{Annahme } Z = 48 \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{8} = 1.$$

Daraus folgt durch Parallelverschiebung

$$x_1 = 900 \quad x_2 = 1300 \quad Z = 15\,000$$

$$x_1 = 1200 \quad x_2 = 900 \quad Z = 15\,000.$$

Es gibt also unendlich viele optimale Lösungen, darunter zwei Basislösungen.

$$3. \text{ Maximierungsaufgabe: } x_1 = 6 \quad x_2 = 6 \quad Z = 378$$

$$\text{Minimierungsaufgabe: } x_1 = 8 \quad x_2 = 3 \quad Z = 324$$

$$4. \quad x_1 = \frac{4}{3} \quad x_2 = 1 \quad Z = 53$$

5. Für die Zielfunktion Z_1 gibt es keine Lösung der Optimierungsaufgabe, da die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben unbeschränkt ist.

Für Z_2 lautet die Lösung $x_1 = 1 \quad x_2 = 4 \quad Z_2 = 9$.

6. Diese Aufgabe ist nicht lösbar, da der Lösungsbereich durch die leere Menge dargestellt wird. Die dritte Nebenbedingung stellt einen Widerspruch zu den übrigen Nebenbedingungen dar.

7. a) $x_1 = 4 \quad x_2 = 6 \quad Z_a = 36$

b) $x_1 = 6 \quad x_2 = 4 \quad Z_b = 34$

Lösungen zu 2.3.2.

1. $Z = 47 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 3 \quad x_4 = 3$

Die optimale Lösung ist eindeutig.

2. $Z = 200 \quad x_1 = 50 \quad x_4 = 100 \quad x_6 = 50$. Da nach Substitution von x_1 und x_3 nur noch x_4 in der Zielfunktion vorkommt, handelt es sich nur noch um die Ermittlung des Engpasses.

3. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert zuerst die Formulierung und Lösung einer Hilfsaufgabe. In der zweiten Etappe des Lösungsprozesses zeigt sich, daß die Zielfunktion der ursprünglichen Aufgabe auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt ist.

4. Über die Lösung einer Hilfsaufgabe erhält man

$$Z = 138 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 1 \quad x_7 = 4.$$

5. Lösungen s. Abschnitt 2.

6. Siehe graphische Lösung von Beispiel 6 des Abschnittes 2.3.1.

Lösungen zu 2.4.2.

1. a) $\hat{Z} = 57\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 + 13\hat{x}_4 \rightarrow \min$
 $10\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 2\hat{x}_4 \geq 1$
 $4\hat{x}_1 - 2\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4 \geq 2$
 $-\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 - 6\hat{x}_4 \geq 3$
 $3\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + 4\hat{x}_4 \geq 4$
 $\hat{x}_1, \hat{x}_3 \geq 0$

Die jeweils zwei bei der Umwandlung einer Gleichung entstehenden Variablen wurden im Dual in die dann nicht vorgezeichenbeschränkten Variablen $\hat{x}_2$ und $\hat{x}_4$ zusammengefaßt.

b) $\hat{Z} = 12\hat{x}_1 + 18\hat{x}_2 + \hat{x}_3 \rightarrow \max$
 $2\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 \leq 5$
 $-\hat{x}_1 + 3\hat{x}_2 - \hat{x}_3 \geq 1$
 $\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 \leq 4$
 $\hat{x}_2, \hat{x}_3 \geq 0$

s. Bemerkung zu a)

2. a) $x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad Z = 5$

b) $x_1 = \frac{7}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad Z = 2$ optimale Lösung ist nicht eindeutig.

c) $x_1 = 12 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 12 \quad x_4 = 15 \quad Z = 29$

3. Beispiel 1: Dual $\hat{Z} = 10\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 + 24\hat{x}_3 \rightarrow \min$
 $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \leq 5$
 $\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + \hat{x}_3 \leq 4$
 $\hat{x}_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung: $\hat{x}_1 = 7/2, \quad \hat{x}_3 = 1/2, \quad \hat{Z} = 47$

Beispiel 2: Dual $\hat{Z} = 18\hat{x}_1 + 40\hat{x}_2 + 24\hat{x}_3 \rightarrow \min$
 $3\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \geq 6$
 $\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \geq 4$
 $\hat{x}_1 \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung: $\hat{x}_1 = 0 \quad \hat{x}_3 = 2 \quad \hat{Z} = 48$
 bzw. $\hat{x}_2 = 0 \quad \hat{x}_3 = 2 \quad \hat{Z} = 48.$

Die duale Aufgabe ist also degeneriert, was wegen der Mehrdeutigkeit in der optimalen Lösung des Primals zu erwarten war.

Beispiel 3: $\hat{Z} = 12\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 \rightarrow \min$
 $4\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 \geq 2$
 $6\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3 \geq 3$
 $\hat{x}_1 \geq 0 \quad i = 1, 2, 3.$

Zur Lösung mit der Simplexmethode muß nach Überführung in die 1. Normalform eine Hilfsaufgabe formuliert werden:

$$\begin{aligned}\hat{z} &= -\hat{x}_6 - \hat{x}_7 \rightarrow \max \\ 4\hat{x}_1 + 16\hat{x}_2 &\quad - \hat{x}_4 \quad + \hat{x}_6 = 2 \\ 6\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3 &\quad - \hat{x}_5 + \hat{x}_7 = 3 \\ \hat{x}_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, 7.\end{aligned}$$

Die Lösung der Hilfsaufgabe führt auf eine degenerierte optimale Lösung mit dem Wert "Null" für die Hilfszielfunktion. Danach beginnt man mit der Lösung der ursprünglichen Aufgabe, wobei noch zu beachten ist, daß der Algorithmus auf die Maximierung zugeschnitten ist.

	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$	x_0	Q	-†
← $\hat{x}_6$	4	(16)	0	-1	0	1	0	2	1/8*	*
$\hat{x}_7$	6	4	-1	0	-1	0	1	3	3/4	-4
$\hat{z}$	-10	-20†	1	1	1	0	0	-5	-	20
→ $\hat{x}_2$	1/4	1	0	-1/16	0	1/16	0	1/8	1/2	-1/4
← $\hat{x}_7$	(5)	0	-1	1/4	-1	-1/4	1	5/2	1/2*	*
$\hat{z}$	-5†	0	1	-1/4	1	5/4	0	-5/2	-	5
← $\hat{x}_2$	0	1	(1/20)	-3/40	1/20	3/40	-1/20	0		*
→ $\hat{x}_1$	1	0	-1/5	1/20	-1/5	-1/20	1/5	1/2		1/5
$\hat{z}$	0	0	0	0	0	1	1	0		-
-Z	0	0	-4/5†	-3/10	11/5			-6		4/5
→ $\hat{x}_3$	0	20	1	-3/2	1			0		
$\hat{x}_1$	1	4	0	-1/4	0			1/2		
-Z	0	16	0	-3/2	3			-6		

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\hat{x}_3 - \frac{1}{20}\hat{x}_4 + \frac{1}{5}\hat{x}_5; \quad \hat{x}_2 = 0 - \frac{1}{20}\hat{x}_3 + \frac{3}{40}\hat{x}_4 - \frac{1}{20}\hat{x}_5$$

$$-Z = -12\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 \rightarrow \max$$

$$-Z = -12\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\hat{x}_3 - \frac{1}{20}\hat{x}_4 + \frac{1}{5}\hat{x}_5\right) - 4\left(-\frac{1}{20}\hat{x}_3 + \frac{3}{40}\hat{x}_4 - \frac{1}{20}\hat{x}_5\right) + 3\hat{x}_3$$

$$-Z = -6 + \frac{4}{5}\hat{x}_3 + \frac{3}{10}\hat{x}_4 - \frac{11}{5}\hat{x}_5$$

$$-Z = -6 - \left(-\frac{4}{5}\hat{x}_3 - \frac{3}{10}\hat{x}_4 + \frac{11}{5}\hat{x}_5\right)$$

Die Variable $\hat{x}_4$ mußte BV werden. Da alle Koeffizienten in dem entsprechenden Vektor negativ sind, ergibt sich, daß die Ziel-

funktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nicht beschränkt ist.

Beispiel 4: Dual $\hat{Z} = 6\hat{x}_1 + 8\hat{x}_2 + 20\hat{x}_3 \rightarrow \min$
 $-\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \geq 5 \quad (-5)$
 $\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - 10\hat{x}_3 \geq 4$
 $\hat{x}_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung (mit Z_2): $\hat{x}_1 = 3 \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{2} \quad \hat{Z} = 22.$

Beispiel 5: Dual $\hat{Z} = 16\hat{x}_1 + 7\hat{x}_2 + 12\hat{x}_3 \rightarrow \max$
 $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \leq 20$
 $4\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 \leq 50$
 $\hat{x}_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3.$

Opt. Lösung: $\hat{x}_1 = 5 \quad \hat{x}_3 = 15 \quad \hat{Z} = 260.$

Lösungen zu 2.5.2.

1.

	$-\infty < t \leq -2$	$-2 \leq t \leq -1$	$-1 \leq t < +\infty$
x_1	7/2	2	0
x_2	0	3	5
x_3	3/2	0	0
x_4	0	0	2
Z	7	$13 + 3t$	$15 + 5t$

2.

	$-8 \leq t \leq 10$	$10 \leq t \leq 30$
x_1	$\frac{24}{11} + \frac{2}{11}t$	$6 - \frac{t}{5}$
x_2	$\frac{35}{11} - \frac{7}{22}t$	0
x_3	0	$-14 + \frac{7}{5}t$
x_4	0	0
x_5	$4 + \frac{t}{2}$	$-3 + \frac{6}{5}t$
Z	$\frac{59}{11} - \frac{3}{22}t$	$6 - \frac{1}{5}t$

Lösungen zu 2.6.2.

1. a) Mathematisch-ökonomisches Modell

$$\underline{ZP}: Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + x_{22} + 8x_{23} \\ + 6x_{24} + 8x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min$$

$$\underline{NB}: \begin{array}{lcl} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30 & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40 & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 45 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$$

$$\underline{NHB}: x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

b) Der optimale Transportplan lautet:

$$x_{13} = 30; \quad x_{21} = 15; \quad x_{22} = 15; \quad x_{23} = 10; \quad x_{33} = 5; \\ x_{34} = 45 \text{ [ME] mit minimalen Kosten } Z = 505 \text{ [GE].}$$

2. Das Optimaltableau hat folgendes Aussehen:

	v_j	5	5	8	9	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
0	A_1	12 -7	10 -5	8 (3)	11 -2	3
5	A_2	12 -2	10 (7)	14 -1	14 (1)	18
3	A_3	8 (6)	8 (1)	11 (2)	13 -1	9
	b_j	6	8	5	11	30

Die minimalen Kosten betragen $Z = 326 \text{ [GE]}$.

3. Das Optimaltableau hat folgendes Aussehen:

	v_j	9	11	10	7	0	
u_i		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	a_i
0	B_1	$\begin{array}{ c } \hline 14 \\ \hline \end{array}$ -5	$\begin{array}{ c } \hline 12 \\ \hline \end{array}$ -1	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{11}$	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{7}$	$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{5}$	23
-4	B_2	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{12}$	$\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline \end{array}$ -1	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ 0	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{1}$	$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$ -4	13
-5	B_3	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$ -6	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{9}$	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{1}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$ -2	$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$ -5	10
	b_j	12	9	12	8	5	46

Die minimalen Kosten betragen $Z = 281$ [GE].

Da die Bewertungszahl $c'_{ij} = c'_{23} = 0$ ist, und zwar für eine Nichtbasisvariable, ist die Optimallösung nicht eindeutig.

Eine weitere zulässige Basislösung mit gleichem Zielfunktionswert lautet:

	v_j	9	11	10	7	0	
u_i		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	a_i
0	B_1	$\begin{array}{ c } \hline 14 \\ \hline \end{array}$ -5	$\begin{array}{ c } \hline 12 \\ \hline \end{array}$ -1	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{10}$	$\begin{array}{ c } \hline 7 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{8}$	$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{5}$	23
-4	B_2	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{12}$	$\begin{array}{ c } \hline 8 \\ \hline \end{array}$ -1	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{1}$	$\begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$ 0	$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$ -4	13
-5	B_3	$\begin{array}{ c } \hline 10 \\ \hline \end{array}$ -6	$\begin{array}{ c } \hline 6 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{9}$	$\begin{array}{ c } \hline 5 \\ \hline \end{array}$ $\textcircled{1}$	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$ -2	$\begin{array}{ c } \hline 4 \\ \hline \end{array}$ -5	10
	b_j	12	9	12	8	5	46

$Z = 281$ [GE]

4. a) Mathematisch-ökonomisches Modell:

$$\begin{aligned} \underline{\text{ZF:}} \quad Z &= 4x_{11} + x_{12} + 10x_{13} + 2x_{14} + 8x_{15} + 3x_{21} + \dots \\ &+ 2x_{45} \rightarrow \min \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{NB:}} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\leq 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &\leq 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &\leq 25 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &\leq 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 28 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 35 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 18 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 32 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 32
\end{aligned}$$

$$\text{NNB: } x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

b) Der optimale Transportplan lautet:

$$\begin{aligned}
1. \text{ Lösung: } x_{12} &= 10; \quad x_{14} = 30; \quad x_{21} = 28; \quad x_{24} = 2; \\
x_{25} &= 10; \quad x_{32} = 25; \quad x_{43} = 18; \quad x_{45} = 32; \\
x_{41} &= 10 \text{ [m}^3\text{]} \quad Z = 400 \text{ [km]};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ Lösung: } x_{12} &= 20; \quad x_{14} = 20; \quad x_{21} = 28; \quad x_{24} = 12; \\
x_{32} &= 15; \quad x_{35} = 10; \quad x_{43} = 18; \quad x_{45} = 32; \\
x_{41} &= 10 \text{ [m}^3\text{]} \\
Z &= 400 \text{ [km]}.
\end{aligned}$$

Die Lösung ist nicht eindeutig. Es gibt zwei optimale Basislösungen.

5. a) Berechnung der Transportkosten laut Plan:

$$K = 1 \cdot 13 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 12 + 6 \cdot 14 + 8 \cdot 8 = 318.$$

b) Die Lösung kann zur nicht degenerierten Basislösung erweitert werden, wodurch die Optimalität geprüft werden kann. Es handelt sich um keine Optimallösung.

	v_j	2	4	1	3	5	
u_i		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
0	λ_1	7	4	1	4	5	22
			0	(13)		(9)	
2	λ_2	4	6	3	8	9	22
		(10)	(12)	(0)			
3	λ_3	6	5	5	6	8	22
			+2		(14)	(8)	
		10	12	13	14	17	

o) Man erhält folgendes Optimaltableau:

	v_1	2	3	1	4	5	
u_i		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	a_i
0	A_1	-5	-1	1	4	17	22
2	A_2	10	-1	12	-2	-2	22
2	A_3	-2	12	-2	10	-1	22
	b_j	10	12	13	14	17	66

Die Transportbeziehungen mit dem optimalen Zielfunktionswert $Z = 298$ [GE] lauten:

$x_{13} = 1$, $x_{15} = 17$, $x_{23} = 12$, $x_{34} = 10$, $x_{14} = 4$,
 $x_{21} = 10$, $x_{32} = 12$ [ME].

Die Einsparung beträgt 20 [GE].

6. Die optimale Lösung wird in Tableauform angegeben. Dabei handelt es sich um keine eindeutige Lösung, denn wir stellen fest, daß die Bewertungszahlen c'_{ij} auf den Feldern $B_{22}E_2$ $B_{24}E_4$ mit Nichtbasisvariablen den Wert Null annehmen.

Gleichzeitig müssen wir feststellen, daß die Lösung wegen $x_{13} = 0$ als Basisvariable degeneriert ist.

Alle nicht eingetragenen Bewertungszahlen sind negativ und erfüllen so das Optimalitätskriterium.

	v_1	14	12	10	7	0	4	4		
u_1		E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	λ_2	λ_3	a_1	
0	B_1	14 (3)	12 (7)	10 (0)	7 (8)	0 (5)	M	M	23	
-9	B_{21}	5 (3)	M	M	M	0	0	M	3	
-4	B_{22}	M	8 0	M	M	0	0	M	13	
-4	B_{23}	M	M	6 (10)	M	0	0	M	13	13
-4	B_{24}	M	M	M	3 0	0	0	M	13	
-4	B_{25}	M	M	M	M	0	0	M	13	
-4	B_{31}	10 (6)	M	M	M	M	M	0 (4)	10	
-6	B_{32}	M	6 (2)	M	M	M	M	0	2	
-5	B_{33}	M	M	5 (2)	M	M	M	0	2	10
-4	B_{34}	M	M	M	4	M	M	0 (10)	10	
	b_1	12	9	12	8	5	42	14	92	

7. a) Optimale Lösung: $x_{12} = 2$; $x_{13} = 15$; $x_{21} = 5$; $x_{22} = 4$;
 $x_{24} = 10$; $x_{32} = 9$; $Z = 639$.

b) Es tritt keine Veränderung in der optimalen Lösung ein.

c) Optimale Lösung: $x_{12} = 2$; $x_{13} = 15$; $x_{21} = 5$; $x_{22} = 4$;
 $x_{24} = 10$; $x_{33} = 9$; $Z = 661$.

Man erhält die Basislösung von a); es ändern sich jedoch die Kosten und damit der Wert der Zielfunktion.

d) Optimale Lösung: $x_{12} = 15$; $x_{13} = 2$; $x_{21} = 5$; $x_{23} = 4$;
 $x_{24} = 10$; $x_{32} = 9$; $Z = 592$.

e) Optimale Lösung: (die Zuordnung ist nicht eindeutig)

1. Lösung: $x_{12} = 6$; $x_{13} = 11$; $x_{21} = 5$; $x_{22} = 4$;
 $x_{24} = 10$; $x_{33} = 4$; $x_{35} = 5$; $Z = 573$.

$$\begin{array}{llllll} \text{2. Lösung: } x_{12} = 10; & x_{13} = 7; & x_{21} = 5; & x_{24} = 10; \\ & x_{33} = 8; & x_{2f} = 4; & x_{3f} = 1 & Z = 573. \end{array}$$

f) Optimale Lösung: (die Zuordnung ist nicht eindeutig)

$$\begin{array}{llllll} \text{1. Lösung: } x_{12} = 15; & x_{13} = 2; & x_{21} = 6; & x_{24} = 13; \\ & x_{31} = 2; & x_{33} = 13; & & Z = 736. \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{2. Lösung: } x_{12} = 15; & x_{13} = 2; & x_{21} = 8; & x_{24} = 11; \\ & x_{33} = 13; & x_{34} = 2; & & Z = 736. \end{array}$$

3. Analysis

3.1. Mengen, Ungleichungen

Übungsaufgaben

1. Gegeben seien die beiden Mengen

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 6\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 8\}.$$

Bilden Sie die Mengen $N = M_1 \cup M_2$, $T = M_1 \cap M_2$, $S = M_1 \setminus M_2$!

2. Welche Relationen bestehen zwischen den Mengen

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x - 40 = 0\}, \quad M_2 = \{x \in \mathbb{R} / x + 6 = 1\}, \\ M_3 = \{-5, 8\}?$$

3. Gegeben seien die beiden Mengen

$$M = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}, \quad N = \{y \in \mathbb{R} / -2 \leq y \leq 2\}.$$

Veranschaulichen Sie in der Ebene die Menge

$$M \times N = \{(x, y) / x \in M \text{ und } y \in N\}!$$

4. Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben alle reellen Zahlen x , die jeweils die Ungleichungen erfüllen!

$$4.1. \frac{x-1}{x+1} \geq 2, \quad x \neq -1; \quad 4.2. -x^2 - 4x + 5 > 0;$$

$$4.3. |x+6| < 3; \quad 4.4. \sqrt{4x^2 + 8x + 4} > 8!$$

3.2. Formales Differenzieren

Übungsaufgaben

5. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad 2. f(x) = \sin x^3, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$3. f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad |x| < 1; \quad 4. f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-2}, \quad x^2 \neq 2;$$

$$5. f(x) = x^2 \cdot \cos x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad 6. f(x) = x \cdot \ln x^2, \quad x \neq 0;$$

$$7. f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (x^2 + 7x + 14), \quad x \in \mathbb{R}!$$

3.3. Zahlenfolgen

3.3.1. Beispiele

B1: Geben Sie die ersten 4 Glieder der Zahlenfolge

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

an! Untersuchen Sie diese Zahlenfolge hinsichtlich Beschränktheit und Monotonie!

Lösung

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

für $n = 1$ folgt $a_1 = 2$; für $n = 2$ folgt $a_2 = \frac{5}{2}$;

für $n = 3$ folgt $a_3 = \frac{10}{3}$; für $n = 4$ folgt $a_4 = \frac{17}{4}$;

$$\{a_n\} = \left\{ 2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \dots \right\}.$$

Die Zahlenfolge ist nach unten beschränkt: $k = 2$,

$$2 \leq \frac{n^2 + 1}{n}, \quad n > 0, \text{ so folgt } 2n \leq n^2 + 1.$$

$$0 \leq n^2 - 2n + 1, \quad 0 \leq (n - 1)^2, \text{ gilt für alle } n = 1, 2, \dots$$

Untere Schranken sind auch $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ usw.

Die Folge wächst nach oben unbeschränkt.

Die Folge ist streng monoton wachsend: $a_n < a_{n+1}$.

$$\frac{n^2 + 1}{n} < \frac{(n + 1)^2 + 1}{n + 1}, \quad n > 0, \quad n + 1 > 0$$

$$(n^2 + 1)(n + 1) < (n^2 + 2n + 2)n$$

$$n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$1 < n^2 + n \quad \text{für alle } n = 1, 2, \dots$$

B2: Mit Hilfe der Grenzwertsätze ist der Grenzwert der Folge $\{a_n\}$ zu bestimmen mit

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 1}{3n^2 + 5}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lösung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{5}{n^2} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}, \text{ denn: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 0.$$

B3: Ein Geldbetrag a wird auf einem Sparkonto festgelegt und jährlich mit p Prozent verzinst. Die Zinsen werden am Ende jedes Jahres dem Geldbetrag zugeschlagen.

1. Auf welchen Betrag b wächst der Geldbetrag nach n Jahren an?
2. Berechnen Sie b für $a = 1000$ M bei $p = 3\frac{1}{4}\%$ für $n = 5$ Jahre!
3. Berechnen Sie b für $a = 1000$ M, $p = 3\frac{1}{4}\%$, $n = 5$ Jahre, wenn die Zinsen am Ende eines jeden Monats zum Betrag hinzugefügt werden!

Lösung

1. Anfangsbetrag: $a_0 = a$

Betrag am Ende des 1. Jahres: $a_1 = a + a \frac{p}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Betrag am Ende des 2. Jahres: } a_2 &= a_1 + a_1 \frac{p}{100} \\ &= a_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ &= a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Betrag am Ende des 3. Jahres: } a_3 &= a_2 + a_2 \frac{p}{100} \\ &\vdots \\ &= a_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ &\vdots \\ a_3 &= a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \end{aligned}$$

Betrag am Ende des n -ten Jahres:

$$a_n = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Es entsteht eine Zahlenfolge

$$\{a_n\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

mit $a_n = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

2. $b = a_5$ $a_5 = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$, $a_5 = 1000 \left(1 + \frac{3,25}{100}\right)^5$,
 $b = 1173,41$ M.

3. Bei einer monatlichen Verzinsung ist der Zinssatz $\frac{p}{12}$. Die Addition der Zinsen zum Geldbetrag a ergibt bei n Jahren $12 \cdot n$. Daraus folgt:

$$a_n = a \left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot n},$$

$$b = a_5 = 1000 \left(1 + \frac{3,25}{1200}\right)^{60}, \quad b = 1176,19 \text{ M.}$$

3.3.2. Übungsaufgaben

6. Geben Sie mindestens die ersten 6 Glieder der Zahlenfolgen a_n , die durch die nachstehenden Zuordnungsvorschriften bestimmt sind!

$$1. a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$$2. a_n = (-1)^n \frac{n+3}{2n}$$

$$3. a_n = \frac{2n^2 - 1}{3n + 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Untersuchen Sie diese Zahlenfolgen hinsichtlich Beschränktheit und Monotonie.

7. Weisen Sie die Konvergenz der nachstehenden Zahlenfolgen nach:

$$1. \{a_n\} = \left\{ \frac{2n-1}{n} \right\};$$

$$2. \{a_n\} = \left\{ \frac{3n-1}{2n+1} \right\}!$$

8. Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze die Grenzwerte der nachstehenden Zahlenfolgen:

$$1. \{a_n\} = \left\{ \frac{4n^2 + 2}{3n^2 + 2n - 1} \right\}; \quad 2. \{a_n\} = \left\{ \frac{n^3 + 3n^2 - 2}{2n^3 - 4n + 1} \right\};$$

$$3. \{a_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n - 1}{n - 1} \right\}; \quad 4. \{a_n\} = \left\{ \frac{2n + 3}{n^2 - 4n + 2} \right\}!$$

9. Gegeben seien die Zahlenfolgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mit

$$a_n = \frac{pn^3 + qn - 4}{rn^3 - 2n^2 + 5};$$

$$b_n = \frac{pn^3 + qn + 2}{rn^2 - 2n + 1}.$$

- Wählen Sie für die Parameter p , q , r jeweils ein System von reellen Zahlen so, daß eine Nullfolge entsteht!
 - Wählen Sie für die Parameter p , q , r jeweils ein System von reellen Zahlen so, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ gilt!
10. Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ konvergente Zahlenfolgen. Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$. Weiterhin gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (2b_n - 3a_n) = 5$. Bestimmen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$!

11. Ein Waldbestand kann sich ungestört mehrere Jahre hindurch ständig um 4 % im Jahr vermehren. Wieviel Kubikmeter Holz wird er nach 12 Jahren liefern, wenn zum Zeitpunkt der Schätzung 1 Million Kubikmeter veranschlagt werden?
(Die Vermehrung des Waldes erfolgt zwar stetig, die Rechnungsabschlüsse der Forstverwaltung erfolgen aber in jährlichen Zwischenräumen.)

3.4. Differentialrechnung für Funktionen in einer unabhängigen Variablen

3.4.1. Beispiele

- B4: Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = \ln x^2 - \frac{5}{4}x$, $x > 0$. Bestimmen Sie die Stelle x_0 so, daß die Tangente an die Funktionskurve im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ mit der positiven Richtung der x-Achse einen Winkel von 135° bildet.

Lösung

$\alpha = 135^\circ$, Anstieg der Tangente in x_0 : $m = \tan \alpha = f'(x_0)$,
 $\tan \alpha = \tan 135^\circ = -1$, daher $f'(x_0) = -1$,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} - \frac{5}{4}, \quad f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{4}, \quad f'(x_0) = \frac{2}{x_0} - \frac{5}{4},$$

$$\frac{2}{x_0} - \frac{5}{4} = -1, \quad x_0 = 8.$$

- B5: Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (x^2 + 3x + 4)$,
 $x \in D(f)$.

Untersuchen Sie die Funktion auf

- Monotonieverhalten und Extremwerte,
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte!

Lösung

$D(f)$: $x \in (-\infty, \infty)$, stetig in $D(f)$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (x^2 + 3x + 4)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} (x^2 + 3x + 4) + e^{-\frac{1}{2}x} (2x + 3)$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \right)$$

Monotonie:

A: $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ monoton wachsend,

$$e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) \geq 0, \quad e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \text{ für alle } x \in (-\infty, \infty).$$

$$\text{Daher folgt } f'(x) \geq 0 \text{ wenn } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \geq 0, \quad / \cdot (-2)$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ für } x_1 = -1, x_2 = 2,$$

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \quad (\text{Zerlegung in Linearfaktoren}),$$

also: $(x + 1)(x - 2) \leq 0$ Lösung durch Fallunterscheidung (s. Aufgabe 4.2.)

1. Fall: $x + 1 \geq 0$ und $x - 2 < 0$

$$x \geq -1 \quad x < 2 \quad L_1: [-1, 2)$$

2. Fall: $x + 1 < 0$ und $x - 2 \geq 0$

$$x < -1 \quad x \geq 2 \quad L_2: \emptyset$$

$$f'(x) = 0 \text{ für } x_1 = -1, x_2 = 2$$

$f(x)$ ist monoton wachsend für $x \in [-1, 2]$.

B: $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ monoton fallend,

$$e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) \leq 0, \quad e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ wenn } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \leq 0, \quad x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x + 1)(x - 2) \geq 0, \text{ Fallunterscheidung!}$$

$f(x)$ ist in $(-\infty, -1]$ monoton fallend,

in $[-1, 2]$ monoton wachsend,

in $[2, \infty)$ monoton fallend.

Eine hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extremwertes in x_0 ist für eine in einer Umgebung von x_0 , $x_0 \in D(f)$, differenzierbaren Funktion ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung in x_0 . Die gegebene Funktion $y = f(x)$ ist in $D(f)$ differenzierbar. Die erste Ableitung wechselt in $x_{01} = -1$ und in $x_{02} = 2$ jeweils ihr Vorzeichen. Daraus folgt das Vorhandensein von Extrema in $x_{01} = -1$ Minimum, $x_{02} = 2$ Maximum.

Krümmungsverhalten:

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x \right), \quad e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) \geq 0, \quad f(x) \text{ ist konvex,}$$

$$\text{also: } \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x \right) \geq 0, \quad x(x-5) \geq 0, \quad \text{Fallunterscheidung}$$

$$1. \text{ Fall: } x \geq 0 \text{ und } x-5 \geq 0 \quad L_1: [5, \infty)$$

$$2. \text{ Fall: } x \leq 0 \text{ und } x-5 \leq 0 \quad L_2: (-\infty, 0]$$

$$f''(x) \leq 0, \quad f(x) \text{ ist konkav,}$$

$$\text{also: } \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x \leq 0, \quad x(x-5) \leq 0, \quad \text{Fallunterscheidung}$$

$$1. \text{ Fall: } x \geq 0 \text{ und } x-5 \leq 0 \quad L_1: [0, 5]$$

$$2. \text{ Fall: } x \leq 0 \text{ und } x-5 \leq 0 \quad L_2: \emptyset$$

$$f(x) \text{ ist in } (-\infty, 0] \text{ konvex,}$$

$$\text{in } [0, 5] \text{ konkav,}$$

$$\text{in } [5, \infty) \text{ konvex.}$$

Eine hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes in x_w ist für eine in einer Umgebung von x_w , $x_w \in D(f)$, zweimal differenzierbaren Funktion ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung in x_w . Für die gegebene Funktion wechselt die zweite Ableitung ihr Vorzeichen in $x_{w1} = 0$ und in $x_{w2} = 5$.

Daraus folgt das Vorhandensein von zwei Wendepunkten in $x_{w1} = 0$ und in $x_{w2} = 5$.

- B6:** Die Nutzungsdauer einer Maschine betrage t Zeiteinheiten. Die mittleren Gesamtkosten K (in TM) hängen von der Nutzungsdauer ab und betragen

$$K(t) = \frac{392}{t} + 2(t+1), \quad t > 0.$$

1. Bestimmen Sie die kostenminimale Nutzungsdauer der Maschine!
2. Wie hoch sind die minimalen Gesamtkosten?

Lösung

1. Gesucht ist ein Minimum für die Funktion $K(t)$. (Extremwertaufgabe)

$$K(t) = \frac{392}{t} + 2 \cdot (t+1), \quad t > 0.$$

$$K'(t) = \frac{dK(t)}{dt} = -\frac{392}{t^2} + 2, \quad K'(t) = 0, \quad -\frac{392}{t^2} + 2 = 0,$$

$$t^2 = 196, \quad t_0 = 14 \quad (\text{da } t > 0, \text{ entfällt } t = -14).$$

$t_0 = 14$ ist stationärer Punkt, möglicher Extremwert.

Nachweis des Extremwertes:

$$K''(t) = \frac{d^2K(t)}{dt^2} = \frac{784}{t^3}, \quad K''(14) > 0, \quad t_0 = 14 \text{ Min.}$$

$$2. \quad K(14) = \frac{392}{14} + 2(14 + 1), \quad K(14) = 54$$

Kostenminimale Nutzungsdauer der Maschine: 14 Zeiteinheiten,
minimale Gesamtkosten: 54 000 M.

B7: Die Produktionskosten y (in Mark) eines Erzeugnisses sind abhängig von der Menge x (in Stück) des zu produzierenden Erzeugnisses:

$$y(x) = 2x^3 - 200x^2 + 6000x, \quad x > 0.$$

Aus der Bedarfsforschung und der Produktionskapazität des Betriebes ergibt sich eine Mindestforderung an die Produktion von 60 Stück und ein maximal mögliches Produktionsvolumen von 100 Stück.

1. Ermitteln Sie die Menge x_0 , für die die Stückkosten minimal werden!
2. Berechnen Sie die minimalen Stückkosten!

Lösung

1. $y(x)$: Gesamtkosten, $k(x)$: Kosten pro Stück, $k(x) = \frac{y(x)}{x}$

$$k(x) = 2x^2 - 200x + 6000, \quad x > 0.$$

Gesucht: minimale Stückkosten (Extremwertaufgabe).

$$k'(x) = 4x - 200, \quad k'(x) = 0, \quad 4x - 200 = 0, \quad x_0 = 50$$

Nachweis des Extremwertes: $k''(x_0) \neq 0$

$$k''(x) = 4, \quad k''(50) = 4 > 0, \quad x_0 = 50 \text{ Min.}$$

$k(x)$ besitzt ein relatives Minimum bei $x_0 = 50$. Laut Vorgabe soll gelten: $x_0 \in [60, 100]$. Das relative Minimum $x_0 = 50$ gehört nicht dem vorgegebenen Intervall an.

$k(x)$ ist monoton fallend in $(0, 50]$.

$$k'(x) = 4x - 200 \leq 0, \quad 4x \leq 200, \quad x \leq 50, \quad x > 0.$$

$k(x)$ ist monoton wachsend in $[50, 100]$.

$$k'(x) = 4x - 200 \geq 0, \quad 4x \geq 200, \quad x \geq 50, \quad x \leq 100.$$

Für das vorgegebene Intervall liegen daher die minimalen Stückkosten bei einer Menge von $x_0 = 60$ Stück.

$$2. k(60) = 2 \cdot 60^2 - 200 \cdot 60 + 6000, \quad k(60) = 1200 \text{ M.}$$

Die minimalen Kosten pro Stück entstehen bei der Produktion einer Menge $x_0 = 60$ Stück im vorgegebenen Intervall und betragen 1200 M je Stück.

B8: Aus statistischen Erfassungen seien die folgenden Kennziffern und ihr funktionaler Zusammenhang bekannt:

y_1 : Ausgaben in Mark pro Monat für eine Ware A

y_2 : Ausgaben in Mark pro Monat für eine Ware B

x : Haushaltseinkommen in Mark pro Monat.

$$y_1(x) = 0,5 e^{0,002x} \quad 400 \leq x \leq 1500$$

$$y_2(x) = \frac{x}{2} + 50 \quad 400 \leq x \leq 1500$$

1. Bestimmen Sie die relativen Elastizitäten der beiden Kennziffern y_1 bzw. y_2 !
2. Charakterisieren Sie das Verhalten der Elastizitäten für die angegebenen Haushaltseinkommen x !
3. Bestimmen Sie die relativen Elastizitäten für ein Durchschnittseinkommen von 900 M, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Lösung

$$1. y_1(x) = 0,5 e^{0,002x} \quad 400 \leq x \leq 1500$$

$$y_2(x) = \frac{x}{2} + 50 \quad 400 \leq x \leq 1500$$

$$\text{relative Elastizität: } \epsilon(y, x) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

$$y_1'(x) = 0,001 e^{0,002x}$$

$$\epsilon(y_1, x) = \frac{0,001 e^{0,002x} \cdot x}{0,5 e^{0,002x}}, \quad \epsilon(y_1, x) = 0,002x$$

$$y_2'(x) = \frac{1}{2}, \quad \epsilon(y_2, x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{\frac{x}{2} + 50}, \quad \epsilon(y_2, x) = \frac{x}{x + 100}$$

$$2. \epsilon(y_1, x) = 0,002x \quad 400 \leq x \leq 1500$$

$$\epsilon(y_1, x) < 1 \quad \text{für} \quad 400 \leq x < 500 \quad \text{unterproportional}$$

$$\epsilon(y_1, x) = 1 \quad \text{für} \quad x = 500 \quad \text{proportional}$$

$$\epsilon(y_1, x) > 1 \quad \text{für} \quad 500 < x \leq 1500 \quad \text{überproportional}$$

$$\epsilon(y_2, x) = \frac{x}{x+100} \quad 400 \leq x \leq 1500$$

$$\epsilon(y_2, x) < 1 \quad \text{für } 400 \leq x \leq 1500 \quad \text{unterproportional}$$

$$3. x_0 = 900 \quad \epsilon(y_1, x) = 0,002x, \quad \epsilon(y_1, x_0) = 1,8$$

Wenn sich das Haushaltseinkommen $x_0 = 900$ M um 1 % erhöht, so werden die Ausgaben y_1 für die Ware A um 1,8 % erhöht.

$$\epsilon(y_2, x) = \frac{x}{x+100}, \quad \epsilon(y_2, x_0) = 0,9$$

Wenn sich das Haushaltseinkommen $x_0 = 900$ um 1 % erhöht, so werden die Ausgaben y_2 für die Ware B um 0,9 % erhöht.

3.4.2. Übungsaufgaben

12. Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{12} (x^2 - 4x - 5), \quad x \in D(f).$$

Berechnen Sie den Winkel, unter dem die Funktionskurve dieser Funktion die x-Achse im Bereich $(0, \infty)$ schneidet!

13. Gegeben sei die Funktion

$$y = f(x) = 4x - (2x + 1) e^x, \quad x \in D(f).$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Funktionskurve im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ mit $x_0 = 0$!

14. Gegeben sei die Funktion

$$y = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in D(f).$$

Fertigen Sie von dieser Funktion eine vollständige Kurvendiskussion an, und stellen Sie diese Funktion auf Millimeterpapier graphisch dar!

15. Ein Geldfonds y wachse kontinuierlich in der Zeit gemäß der Funktion

$$y(t) = 10^3 \cdot e^{0,01t}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

1. Welche durchschnittliche Geschwindigkeit des Wachstums hatte der Geldfonds im Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$?
2. Welcher Wachstums geschwindigkeit unterliegt dieser Geldfonds im Zeitpunkt $t_1 = 1$, $t_5 = 5$, $t_{10} = 10$?
3. Untersuchen Sie Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion $y(t)$!

4. Bilden Sie das Wachstumstempo für die Entwicklung des Geldfonds y !

16. Der Ausstattungsgrad mit Kühlschränken je 100 Haushalte entwickelte sich nach statistischen Angaben in den Jahren von 1964 bis 1978 annähernd nach der Funktion

$$y(t) = \frac{1}{1 + 0,48 e^{-0,34t}}, \quad -7 \leq t \leq 7.$$

Dabei wurde für 1964 $t_0 = -7$ und für 1978 $t_{14} = 7$ gesetzt. Die ermittelte Funktion entspricht dem Typ

$$y(t) = \frac{a}{1 + b e^{-ct}} \quad \text{mit } a, b, c > 0.$$

Untersuchen Sie die Eigenschaften dieser Funktion, und beachten Sie anschließend, daß für die gegebene Funktion $a = 1$, $b = 0,48$, $c = 0,34$ gilt!

17. Die Effektivität eines Arbeitskollektivs hängt von seiner Größe in folgender Weise ab:

$$E = \frac{40 n^2}{3n^3 + 1200}.$$

1. Berechnen Sie die Größe des Kollektivs, die eine maximale Effektivität bringt!
2. Zu wieviel Prozent kann die maximale Effektivität realisiert werden, wenn als zusätzliche Bedingung $n \geq 15$ hinzukommt?

18. Für eine Drehmaschine betrage während der Nutzungsdauer von x Jahren der abzuschreibende Betrag 50 000 M und die Reparaturkosten (in 1000 M) $R(x) = \frac{1}{20}(5x^2 + 9x + 4)$. Wie groß muß die Nutzungsdauer gewählt werden, damit die durchschnittlichen Kosten pro Jahr minimal werden? Wie hoch sind dann die minimalen Durchschnittskosten pro Jahr?

19. Stellen Sie die durchschnittlichen Kosten y je Telefongespräch in Abhängigkeit von der Anzahl x der Gespräche je Monat dar, wenn die Grundgebühr 9,00 M je Monat und die Kosten für ein Gespräch 0,15 M betragen!

Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion $y = f(x)$, und skizzieren Sie diesel!

20. Für den Verkauf von Ölfarbe verwendet man geschlossene zylindrische Blechdosen mit einem Fassungsvermögen von $V = 250 \text{ cm}^3$. Wie groß müssen Durchmesser und Höhe der Dosen gewählt werden, damit für die Herstellung möglichst wenig Blech verbraucht wird?

21. Zwischen der Produktionsmenge x eines Erzeugnisses im Produktionszeitraum T und den Gesamtkosten y bestehe ein Zusammenhang, der durch die Funktion

$$y(x) = 0,02x^3 - 0,8x^2 + 200x, \quad x > 0$$

gegeben ist.

1. Ermitteln Sie eine Anzahl x_0 der zu produzierenden Mengeneinheiten (ME) so, daß die Kosten pro Mengeneinheit (Stückkosten) minimal werden!
2. Es ist eine Mindestproduktion von 30 und eine Höchstproduktion von 40 ME gefordert. Wieviel ME des Erzeugnisses sind unter diesen Bedingungen zu produzieren, wenn die Stückkosten minimal werden sollen?
3. Geben Sie die nach 2. berechneten minimalen Kosten an!

22. Die Entwicklung einer ökonomischen Kennziffer y in der Zeit erfolgt nach statistischen Angaben gemäß der Funktion

$$y(t) = \frac{2t}{t+1}, \quad t > 0.$$

1. Untersuchen Sie, ob die Kennziffer y einem Sättigungswert zustrebt!
2. Untersuchen Sie, ob die durch die angegebene Funktion bestimmte Kennziffer beschleunigt, linear, gebremst wachsend ist!
3. Bestimmen Sie das Wachstumstempo $w(t, y)$ für diese Kennziffer!
4. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Wachstumstempos, und geben Sie an, ob die Kennziffer progressiv, exponentiell oder degressiv wachsend ist.

23. Ein Betrieb hat innerhalb eines halben Jahres einen Kunden mit 30 000 ME eines Erzeugnisses zu beliefern. Der Abnehmer hat für dieses Erzeugnis keinen Lagerraum. Der Betrieb beliefert den Abnehmer kontinuierlich mit diesem Erzeugnis. Für den Betrieb betragen die Lagerhaltungskosten 0,3 ME pro ME und Monat, die Vorbereitungs- und Durchführungskosten für die

Produktion eines Loses 120 WE. Es ist die optimale Losgröße zu berechnen, das Minimum der Kosten, die Anzahl n der zu produzierenden Lose und der Zeitabschnitt, nach dem die neu produzierte Losgröße zur Verfügung stehen muß.

24. Ein Betrieb hat innerhalb eines Jahres einen Abnehmer mit 24 000 ME seines Erzeugnisses zu beliefern. Der Abnehmer hat für dieses Erzeugnis keinen Lagerraum vorgesehen. Daher muß der Betrieb täglich gleiche Mengen an den Abnehmer liefern. Dem Betrieb entstehen Lagerhaltungskosten von 0,05 WE pro Mengeneinheit und Monat. Die optimale Losgröße wurde zu 6 000 ME bei minimalen Gesamtkosten bestimmt. Wie groß sind für den Betrieb die Vorbereitungs- und Durchführungskosten für die Produktion eines Loses, wenn von Fehlmengen und weiteren entstehenden konstanten Kosten abgesehen ist?
- Der Betrieb hat vorher in einer Serie 5000 ME hergestellt. Wie groß sind die Gesamtkosteneinsparungen, wenn in Zukunft unter sonst gleichen Bedingungen die optimale Losgröße produziert wird?

25. Der funktionale Zusammenhang vom Pro-Kopf-Verbrauch an Fleisch und Fleischerzeugnissen in Abhängigkeit vom Einkommen entwickelte sich in den Jahren 1973 bis 1979 annähernd nach der Funktion

$$y = f(x) = \frac{100}{1 + 65 \cdot e^{-0,00616x}}, \quad 830 \leq x \leq 1006.$$

Bestimmen Sie die relative Elastizität für die Kennsiffer $y(x)$, und untersuchen Sie das Verhalten der relativen Elastizität bezüglich der verschiedenen Einkommen!

3.5. Differentialrechnung für Funktionen in mehreren unabhängigen Variablen

3.5.1. Beispiele

- B9: Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktion

$$y = f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in D(f)$$

Lösung

Damit zu (x_1, x_2) genau ein Bild y existiert, ist zu beachten:

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0, \quad \text{also} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Das sind alle Punkte der x_1, x_2 -Ebene innerhalb und auf der Peripherie des Einheitskreises um den Koordinatenursprung.

$$D(f) = \{(x_1, x_2) / x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Damit ergibt sich $W(f): 0 \leq y \leq 1$.

B10: Von der Funktion $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sind einige Niveaulinien (Höhenlinien) in der x, y -Ebene zu skizzieren. Dadurch entsteht eine sogenannte "Karte der Fläche", durch die man sich geometrische Vorstellungen der durch f erzeugten Fläche im $\mathbb{R}^3$ machen kann.

Lösung

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad z \geq 0$$

Die Höhenlinien entstehen, indem $z = \text{const.}$ gesetzt wird. Dadurch entstehen parallel zur x, y -Ebene Schnittkurven auf der Fläche im $\mathbb{R}^3$, die in die x, y -Ebene projiziert werden (z. B. Darstellung von Gebirgen auf geographischen Karten).

$$D(f): (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$W(f): 0 \leq z < \infty$$

$$z = 0 \quad x^2 + y^2 = 0 \quad P_0 \text{ Koordinatenursprung } (0, 0)$$

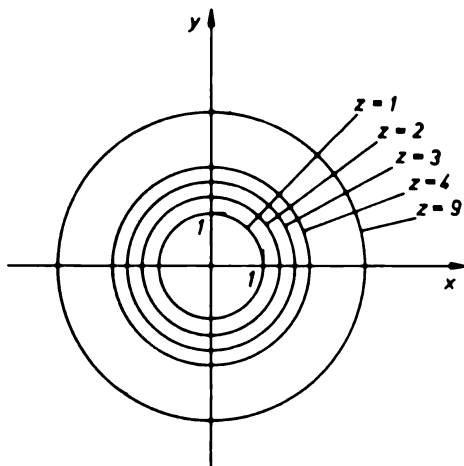
$$z = 1 \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{Kreis mit } r = 1 \text{ um } P_0,$$

$$z = 2 \quad x^2 + y^2 = 2 \quad \text{Kreis mit } r = \sqrt{2} \text{ um } P_0,$$

$$z = 3 \quad x^2 + y^2 = 3 \quad \text{Kreis mit } r = \sqrt{3} \text{ um } P_0,$$

$$z = 4 \quad x^2 + y^2 = 4 \quad \text{Kreis mit } r = 2 \text{ um } P_0,$$

$$z = 9 \quad x^2 + y^2 = 9 \quad \text{Kreis mit } r = 3 \text{ um } P_0$$



Die Fläche ist ein
Paraboloid.

B11: Falls die Fläche $z = f(x, y)$ im $\mathbb{R}^3$ die x, y -Ebene schneidet, entsteht in dieser Ebene eine Schnittkurve für $z = 0$. Ebenso können Schnittkurven mit der y, z -Ebene für $x = 0$ bzw. mit der x, z -Ebene für $y = 0$ entstehen. Diese Schnittkurven mit den Koordinatenebenen unterstützen möglicherweise eine geometrische Veranschaulichung der durch $z = f(x, y)$ erzeugten Fläche.

Versuchen Sie, sich auf diese Weise die Funktion

$$z = f(x, y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

zu veranschaulichen.

Lösung

$$z = -\frac{1}{2}x - 2y + 2$$

1. $z = 0$, Schnittkurve

mit x, y -Ebene;

$P(x, y)$;

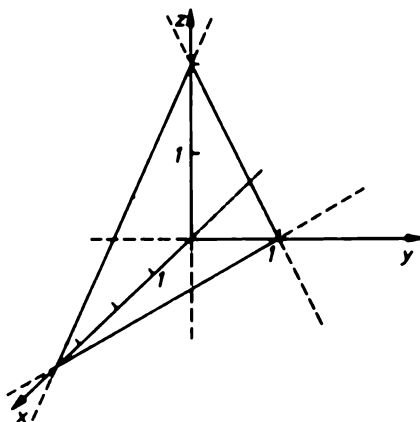
$$-\frac{1}{2}x - 2y + 2 = 0$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Gerade durch die

Punkte $P_1(0, 1)$ und

$P_2(4, 0)$



2. $x = 0$, Schnittkurve mit y, z -Ebene; $P(y, z)$; $z = -2y + 2$,
Gerade durch $P_1(0, 2)$; $P_2(1, 0)$
3. $y = 0$, Schnittkurve mit x, z -Ebene, $P(x, z)$,
 $z = -\frac{1}{2}x + 2$, Gerade durch $P_1(0, 2)$; $P_2(4, 0)$
 $z = f(x, y)$ ist eine Ebene (s. Übungsaufgabe 27.1).

B12: Für $z = f(x, y) = e^x \cos y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D(f)$ sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung zu bilden.

Lösung

Es gelten die bekannten Regeln für das Differenzieren von Funktionen in einer unabhängigen Variablen. Für $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ wird bei der partiellen Ableitung erster Ordnung nach der Variablen x_1 nur nach dieser Variablen differenziert, während die übrigen Variablen als konstant betrachtet werden.

$$z = f(x, y) = e^x \cos y + \sqrt{x^2 - y^2} \quad (x, y) \in D(f)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = e^x \cos y + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}} \quad \sqrt{x^2 - y^2} = (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_x = e^x \cos y + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad y = \text{const.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y = -e^x \sin y + \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \quad x = \text{const.}$$

B13: Die Funktion $z = f(x, y)$ besitzt in einer gewissen Umgebung des Punktes $P_0 = (x_0, y_0)$ stetige partielle Ableitungen nach x bzw. y . Dann ist der Funktionswertzuwachs Δz in dieser Umgebung $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Δz läßt sich näherungsweise durch das vollständige Differential $dz = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y$ bestimmen.

Berechnen Sie Δz sowie dz , und vergleichen Sie die erhaltenen Werte für

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{für} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Delta x = 0,1, \quad \Delta y = 0,2$$

Lösung

$$\Delta z = [(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2] - [x_0^2 + y_0^2]$$

$$\Delta z = [(1 + 0,1)^2 + (1 + 0,2)^2] - [1^2 + 1^2]$$

$$\Delta z = (1,21 + 1,44) - 2; \Delta z = 2,65 - 2; \Delta z = 0,65$$

$$\begin{aligned}
 z &= f(x, y) = x^2 + y^2; & f_x &= 2x, & f_y &= 2y, & P_0 &= (1, 1) \\
 dz &= 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + 2y_0 \Delta y & \Delta x &= 0,1 & \Delta y &= 0,2 \\
 dz &= 0,2 + 0,4 & dz &= 0,6 \\
 \Delta z - dz &= 0,05
 \end{aligned}$$

B14: Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2$. Bestimmen Sie für den Punkt $(x_0, y_0) = (2, \frac{1}{2})$ die Richtung in der x, y -Ebene, in der die Fläche am stärksten ansteigt.

Lösung

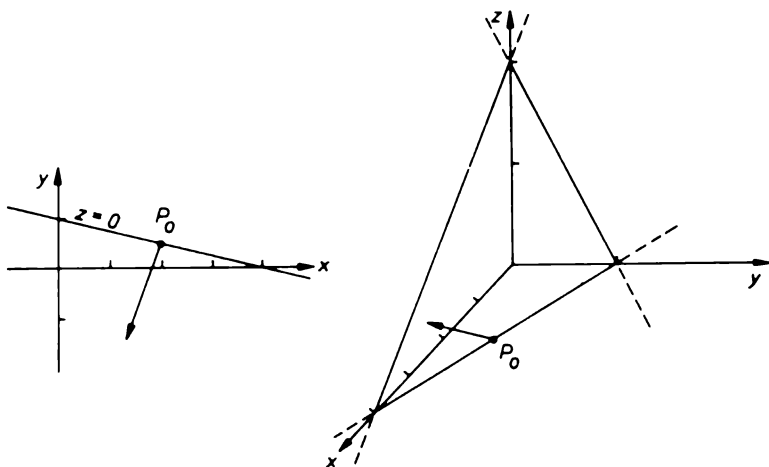
$z = f(x, y)$ besitzt in der Umgebung des Punktes P_0 stetige partielle Ableitungen. Der Vektor

$$\text{grad } f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

zeigt im Punkt P_0 in die Richtung des größten Anstiegs der Fläche $z = f(x, y)$

$$f_x = -\frac{1}{2}, \quad f_y = -2, \quad \text{grad } f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche $z = -\frac{1}{2}x - 2y + 2$ ist eine Ebene, s. Beispiel B11, dargestellt durch die Höhenlinien in den Lösungen zu Aufgabe 28.2. Auf der Höhenlinie $z = 0$ wird im Punkt $P_0 = (2, \frac{1}{2})$ der Vektor $(-\frac{1}{2}, -2)$ eingetragen. Dann zeigt dieser Vektor, vom Punkt P_0 ausgehend, in der x, y -Ebene in die Richtung des größten Anstiegs der Ebene.



B15: Von der Funktion

$$s = f(x, y) = x^3 + 7x^2 - 4xy + y^2 - 45x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sind alle stationären Punkte zu ermitteln und diese auf Extremwerte zu untersuchen.

Lösung

Es werden die partiellen Ableitungen erster Ordnung gebildet und diese gleich Null gesetzt.

$$f_x = 3x^2 + 14x - 4y - 45; \quad f_y = -4x + 2y$$

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 + 14x - 4y - 45 & = & 0 \\ -4x + 2y & = & 0 \quad / \cdot 2 \quad + \\ \hline 3x^2 + 6x - 45 & = & 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0, \text{ daraus folgt: } x_1 = 3, x_2 = -5.$$

Durch Einsetzen von x_1, x_2 in die zweite Gleichung folgt:

$$y_1 = 6, \quad y_2 = -10.$$

$$\text{Stationäre Punkte: } P_1(3, 6); \quad P_2(-5, -10)$$

Überprüfen der stationären Punkte auf Extrema:

$$D = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

$$f_{xx} = 6x + 14, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = -4$$

$$\text{für } P_1: f_{xx}(3, 6) = 32, \quad f_{yy}(3, 6) = 2, \quad f_{xy}(3, 6) = -4$$

$$D_1 = 32 \cdot 2 - (-4)^2, \quad D_1 = 48 > 0$$

$P_1(3, 6)$ ist ein relativer Extremwert; wegen $f_{xx}(3, 6) > 0$ ist P_1 ein Minimum.

$$\text{für } P_2: f_{xx}(-5, -10) = -16, \quad f_{yy}(-5, -10) = 2;$$

$$f_{xy}(-5, -10) = -4$$

$$D_2 = (-16) \cdot 2 - (-4)^2, \quad D_2 = -48 < 0$$

Da $D_2 < 0$, ist P_2 kein Extremwert.

B16: Die Zahl 12 ist so in drei Summanden zu zerlegen, daß deren Produkt ein Maximum wird.

Lösung

Es handelt sich um eine Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung.

$$x + y + z = 12, \quad \text{Produkt: } P = f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \rightarrow \max$$

1. Lösung mit Hilfe der Methode von Lagrange:

$$x + y + z - 12 = 0, \quad g(x, y, z) = x + y + z - 12;$$

$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z)$$

$$F_x = y \cdot z + \lambda; \quad F_y = x \cdot z + \lambda, \quad F_z = x \cdot y + \lambda$$

$$F_\lambda = x + y + z - 12$$

$$y \cdot z + \lambda = 0 \quad y \cdot z = -\lambda; \quad x \cdot z = -\lambda, \quad x \cdot y = -\lambda$$

$$x \cdot z + \lambda = 0 \quad \text{daraus folgt: } x = y = z$$

$$x \cdot y + \lambda = 0$$

$$x + y + z - 12 = 0 \quad \text{hieraus folgt: } 3x = 12, \quad x = 4$$

$$\text{und somit: } y = 4, \quad z = 4$$

$$\text{Dann ist } P = f(x, y, z) = 64.$$

Bei Veränderungen von x , y und z , so daß $x + y + z = 12$ bleibt, wird das Produkt P kleiner als 64.

Für $x = 4$, $y = 4$, $z = 4$ wird das Produkt $P = 64$ maximal.

2. Die Nebenbedingung wird z. B. nach z aufgelöst und in

$P = f(x, y, z)$ eingesetzt.

$$z = 12 - x - y \quad P = f(x, y) = x \cdot y (12 - x - y)$$

$$f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$$

$$f_x = 12y - 2xy - y^2 \quad y(12 - 2x - y) = 0$$

$$f_y = 12x - 2xy - x^2 \quad x(12 - 2y - x) = 0$$

$$x = 0, \quad y = 0 \text{ entfallen.}$$

$$12 - 2x - y = 0, \quad y = 12 - 2x$$

$$12 - 2y - x = 0, \quad 12 - 2(12 - 2x) - x = 0 \quad x = 4.$$

$$\text{Dann folgt: } y = 4, \quad z = 4.$$

$$\text{Stationärer Punkt: } P_0 = (4, 4)$$

Nachweis des Extremwertes

$$f_{xx} = -2y$$

$$f_{xy} = 12 - 2x - 2y$$

$$f_{yy} = -2x$$

$$f_{xx}(4, 4) = -8, \quad f_{yy}(4, 4) = -8, \quad f_{xy}(4, 4) = -4$$

$$D = 64 - 16 > 0 \quad \text{Extremwert liegt vor.}$$

$$f_{xx}(4, 4) = -8 < 0 \quad \text{Extremwert ist ein Maximum.}$$

Daher: Mit $x = 4$, $y = 4$, $z = 4$ ist das Produkt ein Maximum.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß auf diesem zweiten Weg nicht alle Variablen gleichwertig, symmetrisch, behandelt werden. Dabei besteht die Möglichkeit, daß nicht

alle stationären Punkte, nicht alle Extremwerte gefunden werden.

Der Nachweis des Extremums bei der Methode von Lagrange ist schwieriger. Dies ist jedoch bei Funktionen in mehr als zwei unabhängigen Variablen auch der Fall.

3.5.2. Übungsaufgaben

26. Bestimmen Sie die größtmöglichen Definitionsbereiche der folgenden Funktionen!

$$1. y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in D(f)$$

$$2. y = f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_2} + e^{-x_1}, \quad (x_1, x_2) \in D(f)$$

$$3. y = f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2}, \quad (x_1, x_2) \in D(f)$$

$$4. z = f(x, y) = \ln(x^2 - y^2 - 1), \quad (x, y) \in D(f)$$

$$5. z = f(x, y) = \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}}, \quad (x, y) \in D(f)$$

27. Skizzieren Sie von den folgenden Funktionen jeweils einige Niveaulinien in der x, y -Ebene!

$$1. z = f(x, y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$2. z = f(x, y) = 3x + 2y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$3. z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D(f)$$

28. Skizzieren Sie für die beiden folgenden Funktionen die Schnittkurven mit den Koordinatenebenen

$$1. z = f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$2. z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Versuchen Sie, sich ein Bild der Fläche im $\mathbb{R}^3$ zu machen, indem Sie zusätzlich Höhenlinien einzeichnen!

29. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die partiellen Ableitungen erster Ordnung!

$$1. z = f(x, y) = 3x^3 - 5x^2y + 7xy^2 - 3y + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$2. y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 \sin 2x_2, \quad (x_1, x_2) \in D(f)$$

$$3. y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \in D(f)$$

$$4. z = f(x, y) = \frac{3x^2 + 2xy^2}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

30. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen partielle Ableitungen erster Ordnung an einer festen angegebenen Stelle!

$$1. z = f(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 - 4x - 5y + 6$$

$$\text{an der Stelle } x_0 = 2, y_0 = -3$$

$$2. y = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 \cdot \sin 2x_2 \quad P_0 = (1, \frac{\pi}{4})$$

$$3. y = f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2) \quad f_{x_3}(2, 0, 3)$$

$$4. y = f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 5x_1x_2 - x_2^2} \quad f_{x_2}(1, 0)$$

31. Bilden Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der folgenden Funktionen!

$$1. y = f(x_1, x_2) = x_1^5 + 2x_1^3 x_2^2 + 2x_2^5 \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$2. z = f(x, y) = \frac{1 + xy}{1 - xy} \quad x \cdot y \neq 1$$

$$3. z = f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x-y} \quad x \neq y$$

32. Berechnen Sie den Funktionswertzuwachs Δz sowie das vollständige Differential dz für die Funktion

$$z = f(x, y) = x \cdot y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{mit } x_0 = 2, y_0 = 3, \Delta x = 0,2, \Delta y = -0,11$$

33. Eine Wirkungsgröße z hängt von zwei sie beeinflussenden Faktoren ab:

$$z = f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Bestimmen Sie mittels des Gradienten der Funktion, in welcher Richtung der (x, y) -Ebene die Wirkungsgröße z den größten Zuwachs erhält, wenn vom Punkt $(x_0, y_0) = (10, 20)$ ausgegangen wird!

34. Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen jeweils alle stationären Punkte, und untersuchen Sie diese auf mögliche relative Extremwerte!

$$1. z = f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 2y + 5, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$2. z = f(x, y) = 5(x + 2y - 1) - (x^2 + xy - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$3. z = f(x, y) = 2x^3 + 4xy - 2y^2 + 5, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$4. y = f(x_1, x_2) = x_1^3 + 10x_1^2 - 4x_1x_2 - 9x_1 + x_2^2 - 3x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$5. z = f(x, y) = x + y + \frac{c}{x \cdot y}, \quad c > 0, \quad x, y > 0$$

35. Zu einem Kombinat gehören zwei Betriebe, die beide dasselbe Erzeugnis herstellen. In Abhängigkeit von den Produktionsmengen x_1 bzw. x_2 im ersten bzw. zweiten Betrieb entwickle sich der Gesamtgewinn G gemäß der Funktion

$$G(x_1, x_2) = 27x_1 + 27x_2 - \left(\frac{1}{2}x_1^2 + 2 + x_2^2 - 15x_2^2 + 90x_2\right), \quad x_1, x_2 \geq 0$$

1. Berechnen Sie, mit welcher Erzeugnismenge die Kombinatleitung jeden der beiden Betriebe beauftragen sollte, damit der Gesamtgewinn maximal wird!
2. Weisen Sie die Existenz des Extremums nach!
3. Berechnen Sie den maximalen Gewinn!

36. Gegeben sei die Funktion

$$y = f(x_1, x_2) = ax_1^2 + 3x_1x_2 + bx_2^2 - 5x_1 - 2x_2 + 5, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie a und b so, daß in $(x_1, x_2) = (2, -1)$ ein stationärer Punkt vorliegt!

Setzen Sie a und b in $f(x_1, x_2)$ ein, und überprüfen Sie, ob ein relativer Extremwert vorliegt!

37. Gegeben sei $z = f(x, y) = x^3 - 3axy + y^3$, $a \neq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie die gegebene Funktion auf eventuell vorhandene relative Extremwerte, geben Sie diese und die Art des Extremums an!

38. Gegeben sei

$$z = f(x, y) = -\frac{1}{2}x - 2y + 2 \text{ mit } 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1.$$

Bestimmen Sie die absoluten Extremwerte der Funktion

$$z = f(x, y)!$$

39. Gegeben sei die Funktion:

$$z = f(x, y) = x^2 + 2y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y = x^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Untersuchen Sie die Funktion auf relative Extremwerte erstens nach der Methode von Lagrange, zweitens durch Auflö-

sen der Nebenbedingung nach einer Variablen und Einsetzen in $z = f(x, y)$! Zur Überprüfung und Veranschaulichung skizzieren Sie einige Höhenlinien von $z = f(x, y)$ sowie $y = x^2 - 1$

40. Gegeben sei $y = f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^3$,
 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $2x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0$.

Untersuchen Sie $y = f(x_1, x_2, x_3)$ unter der Nebenbedingung auf stationäre Punkte sowie möglicherweise vorhandene Extremwerte!

41. Die Zahl a ist so in ein Produkt von drei positiven Faktoren zu zerlegen, daß die Summe der reziproken Werte der einzelnen Faktoren ein Minimum wird.
42. Von einem Karton sollen Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm betragen. Für welche Maße hat der Karton den größten Rauminhalt?
43. Gegeben sei $z = f(x, y) = x^2y$ mit $y = 1 - x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie f unter der gegebenen Nebenbedingung auf Extremwerte!
44. Das elliptische Paraboloid $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2$ wird von der Ebene $4x - 8y - z + 24 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, geschnitten. Bestimmen Sie den höchsten und tiefsten Punkt der entstehenden Schnittkurve!

3.6. Methode der kleinsten Quadratsummen, Trendfunktionen

3.6.1. Beispiele

B17: Die Anzahl der in der DDR zugelassenen Personenkraftwagen in Mio Stück stieg in den Jahren 1976 bis 1982 laut statistischem Jahrbuch wie folgt:

Jahr	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	2,052	2,237	2,392	2,533	2,678	2,812	2,922

1. Berechnen Sie

- eine lineare Trendfunktion,
- eine quadratische Trendfunktion, die die Entwicklung widerspiegelt!

2. Welche der beiden Trendfunktionen ist den gegebenen statistischen Werten besser angepaßt?
3. Berechnen Sie den Prognosewert für das Jahr 1984!

Lösung

1. Es sind äquidistante, gleichmäßige Zeitabschnitte gegeben. $n = 7$ (ungerade Anzahl von Meßwerten), $\Delta x_1 = 1$. Anwendung der Normalgleichungen mit $[x] = 0$ und somit auch $[x^3] = 0$.

Es können die vereinfachten Normalgleichungen angewendet werden.

Linearer Trend: $y = a_0 + a_1 x$, $a_0 = \frac{[s]}{n}$, $a_1 = \frac{[sx]}{[x^2]}$.

Quadratische Trendfunktion: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,

$$a_0 = \frac{[s] \cdot [x^4] - [x^2][s \cdot x^2]}{n \cdot [x^4] - [x^2]^2}, \quad a_1 = \frac{[sx]}{[x^2]},$$

$$a_2 = \frac{n \cdot [sx^2] - [s][x^2]}{n \cdot [x^4] - [x^2]^2}, \quad n[x^4] - [x^2]^2 \neq 0.$$

Anmerkung: Wird in den Normalgleichungen $[x] = 0$ und $[x^3] = 0$ gesetzt, so ergibt sich aus der zweiten Gleichung a_1 . Aus dem verbleibenden Gleichungssystem ergeben sich a_0 bzw. a_2 durch Anwendung der Cramerschen Regel.

Jahr	1	x_1	s_1	x_1^2	x_1^4	$s_1 \cdot x_1$	$s_1 x_1^2$
1976	1	-3	2,052	9	81	-6,156	18,468
1977	2	-2	2,237	4	16	-4,474	8,948
1978	3	-1	2,392	1	1	-2,392	2,392
1979	4	0	2,533	0	0	0,000	0,000
1980	5	1	2,678	1	1	2,678	2,678
1981	6	2	2,812	4	16	5,624	11,248
1982	7	3	2,922	9	81	8,766	26,298
	$n = 7$		17,626	28	196	4,046	70,032

a) Lineare Trendfunktion: $y = a_0 + a_1 x$

$$a_0 = \frac{17,626}{7}, \quad a_0 = 2,518$$

$$a_1 = \frac{4,046}{28}, \quad a_1 = 0,1445 \quad \underline{\underline{y = 2,518 + 0,1445 x}}$$

b) Quadratische Trendfunktion: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$a_1 = \frac{4,046}{28}, \quad a_1 = 0,1445$$

$$a_0 = \frac{17,626 \cdot 196 - 28 \cdot 70,032}{7 \cdot 196 - 28^2}, \quad a_0 = 2,540$$

$$a_2 = \frac{7 \cdot 70,032 - 17,626 \cdot 28}{7 \cdot 196 - 28^2}, \quad a_2 = -0,00562$$

$$y = 2,540 + 0,1445 x - 0,00562 x^2$$

2. Laut Ansatz soll $S = \sum_1 (y_1 - s_1)^2$ möglichst klein werden

(Summe der quadratischen Abweichungen).

s_1 : statistische Meßwerte

y_1 : berechnete Werte der Trendfunktion

Linearer Trend				Quadratischer Trend	
1	s_1	y_1	$(y_1 - s_1)^2$	y_1	$(y_1 - s_1)^2$
1	2,052	2,0845	0,001060	2,0559	0,0000152
2	2,237	2,2290	0,000064	2,2285	0,0000719
3	2,392	2,3735	0,000342	2,3899	0,0000045
4	2,533	2,5180	0,000225	2,5400	0,0000490
5	2,678	2,6625	0,000240	2,6789	0,0000008
6	2,812	2,8070	0,000025	2,8065	0,0000303
7	2,922	2,9515	0,000870	2,9232	0,0000014
			0,002826		0,000173

$S = \sum_1 (y_1 - s_1)^2$ ist für die quadratische Trendfunktion kleiner als für die lineare. Die Anpassung der quadratischen Trendfunktion ist also besser. Dies ist vom Sachverhalt her einleuchtend, da mit fortschreitenden Jahren der Zuwachs der Anzahl der jährlich zugelassenen PKW abnehmen wird (Wachstumstempo bzw. Wachstumsrate werden kleiner) und schließlich sogar in späteren Jahren einem Sättigungswert zustreben könnte unter gleichbleibenden Bedingungen. Aus diesem Grund ist die quadratische Funktion für die kurzfristige Vorhersage, etwa für die nächsten zwei Jahre, geeignet, jedoch für die Prognose auf längere Zeiträume nicht geeignet. Nach Erreichen des Scheitelpunktes der Parabel ($a_2 < 0$, Maximum) werden die Funktionswerte kleiner.

3. Prognosewert für 1984: $i = 9$, $x_9 = 5$
 $y = 2,540 + 0,7225 - 0,1405$; $y_{84} = 3,122$ Mio Stück

B18: Der durchschnittliche Grundmittelbestand in der Volkswirtschaft im produzierenden Bereich entwickelte sich von 1977 bis 1982 in 10^{11} Mark wie folgt:

Jahr	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	4,098	4,328	4,576	4,827	5,105	5,360

Bei der vorliegenden Zeitreihe ist eine annähernd konstante Wachstumsrate bzw. ein annähernd konstantes Wachstumstempo festzustellen. Als Trendfunktion ist daher eine Exponentialfunktion geeignet. Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion $y = a \cdot e^{bx}$!

Geben Sie den Prognosewert für 1983 an!

Lösung

Näherungsweise Bestimmung von a und b durch Transformation in eine lineare Funktion:

$$\ln y = \ln a + bx \ln e, \quad \ln e = 1$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

$$Y = A_0 + A_1 x \quad \text{mit} \quad Y = \ln y, \quad A_0 = \ln a, \quad A_1 = b$$

Die Transformation ist auch auf die Meßwerte s_1 anzuwenden
 $S_1 = \ln s_1$.

Anwendung der Normalgleichungen mit $[x] = 0$:

$$A_0 = \frac{[S]}{n}, \quad [S] = \sum_1 \ln s_1; \quad A_1 = \frac{[xS]}{[x^2]}, \quad [xS] = \sum_1 x_1 \ln s_1$$

Anzahl der Meßwerte: $n = 6$, $\Delta x_1 = 2$

Jahr	i	x_1	s_1	$\ln s_1$	x_1^2	$x_1 \ln s_1$	y_1	$(y_1 - s_1)^2$
1977	1	-5	4,098	1,4105	25	-7,0525	4,1021	0,0000168
1978	2	-3	4,328	1,4651	9	-4,3953	4,3297	0,0000029
1979	3	-1	4,576	1,5208	1	-1,5208	4,5699	0,0000372
1980	4	1	4,827	1,5742	1	1,5742	4,8235	0,0000123
1981	5	3	5,105	1,6302	9	4,8906	5,0911	0,0001932
1982	6	5	5,360	1,6790	25	8,3950	5,3736	0,0001850
$n = 6$				9,2798	70	1,8912		0,0021124

$$A_0 = \frac{9,2798}{6}, \quad A_0 = 1,5466$$

$$A_0 = \ln a, \quad \ln a = 1,5466, \quad \underline{a = 4,695}$$

Zu beachten: Ist $\ln a = x$, so folgt $e^x = a$.

$$A_1 = \frac{1,8912}{70}, \quad A_1 = 0,02702, \quad A_1 = b, \quad \underline{b = 0,027}$$

$$\underline{y = 4,695 \cdot e^{0,027x}}$$

Aus $\sum_1 (y_1 - s_1)^2$ ist zu ersehen, daß die berechnete Exponentialfunktion recht gut die Entwicklung widerspiegelt.

Prognosewert für 1983: $i = 7, \quad x_7 = 7$

$$y = 4,695 e^{0,189}; \quad \underline{y_{83} = 5,672 \cdot 10^{11} \text{ Mark}}$$

B19: Von zwei ökonomischen Kennziffern seien nach statistischen Angaben die folgenden Zeitreihen für ihre Entwicklung bekannt:

Für y_1 :	1977	1978	1979	1980	1981	1982
	0,36	0,50	0,70	0,98	1,37	1,92

Für y_2 :	1976	1977	1978	1979	1980	1981
	1,1	2,2	4,2	7,1	11	15,8

Bestimmen Sie jeweils den Typ der Trendfunktion, die die Entwicklung der Kennziffer am besten widerspiegelt!

Lösung

Zur Wahl der Trendfunktion wäre eine ökonomische Analyse des Datenmaterials zu beachten. Aus mathematischer Sicht ist folgendes Vorgehen zu empfehlen:

Wenn $\Delta s_1 \approx \text{const.}$, so lineare Funktion als Ansatz,

$\Delta s_1 = s_1 - s_{1-1}$, erste Differenzen der Meßwerte.

Wenn $\Delta^2 s_1 \approx \text{const.}$, so quadratische Funktion als Ansatz,

$\Delta^2 s_1 = \Delta s_1 - \Delta s_{1-1}$, zweite Differenzen der Meßwerte.

Wenn $r_t \approx \text{const.}$, so Exponentialfunktion als Ansatz,

$$r_t = \frac{s_1}{s_{1-1}}, \quad \text{Wachstumsrate.}$$

Wenn die Meßwerte der Zeitreihe einem Sättigungswert zustreben, so können als Trendfunktionen z. B. gewählt werden:

$$y = \frac{ax}{b+x} \quad (\text{Törnquistfunktion}),$$

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}}; \quad a, b, c > 0 \quad (\text{logistische Funktion}).$$

Δs_1 wird kleiner, r_t wird kleiner.

Bei der Wahl ist besonders auf die Eigenschaften der Funktion zu achten, die der ökonomischen Analyse der Zeitreihe entsprechen müssen.

Für y_1 :	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1 :	0,36	0,50	0,70	0,98	1,37	1,92
Δs_1 :	0,14	0,20	0,28	0,39	0,55	
$\Delta^2 s_1$:		0,06	0,08	0,11	0,16	
r_t :	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	

Da r_t annähernd konstant ist, wird eine Exponentialfunktion als Trendfunktion gewählt.

$$y = ae^{bx} \quad \text{oder} \quad y = a \cdot b^x$$

Für y_2 :	1976	1977	1978	1979	1980	1981
s_1 :	1,1	2,2	4,2	7,1	11	15,8
Δs_1 :	1,1	2,0	2,9	3,9	4,8	
$\Delta^2 s_1$:		0,9	0,9	1,0	0,9	
r_t :	2	1,9	1,69	1,55	1,44	

Ist $\Delta^2 s_1$ annähernd konstant, so wird die quadratische Funktion $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ als Trendfunktion gewählt.

Anmerkung: Bei den beiden vorliegenden Zeitreihen ist der Typ der zu wählenden Trendfunktion gut erkennbar. Bei statistischem Material aus Betrieben oder z. B. aus dem statistischen Jahrbuch gibt es für den zu wählenden Typ meist verschiedene Möglichkeiten. Als ein Kriterium für die Güte der Anpassung kann $S = \sum_1 (y_1 - s_1)^2$ gelten. Diese Summe der quadratischen Abweichungen ist eine absolute Größe, die nur beim Vergleich verschiedener Trendfunktionen für den gleichen Sachverhalt sinnvoll ist. Sie kann relativiert werden, indem diese Größe zu der Summe $\sum_1 (s_1 - \bar{s})^2$ ins Verhältnis gesetzt wird.

$\bar{s} = \frac{[s]}{n}$, Durchschnitt der Meßwerte. Je näher der so erhaltene Quotient bei Null liegt, um so besser ist die Anpassung.

3.6.2. Übungsaufgaben

45. Die Ausgaben des Staatshaushaltes für das Bildungswesen in der DDR in Mrd. Mark entwickelten sich von 1976 bis 1982 wie folgt:

Jahr	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
a_1	8,907	9,273	9,539	9,675	9,836	10,605	10,959

Berechnen Sie für die angegebene Zeitreihe die lineare Trendfunktion $y = a_0 + a_1 x$!

Berechnen Sie den Prognosewert für 1984!

Schätzen Sie die Wahl des Typs der Trendfunktion ein!

46. Nach vorliegenden statistischen Angaben stieg die Produktion von Personenkraftwagen in der DDR in den letzten Jahren (in 10^4 Stück) folgendermaßen:

Jahr	1977	1978	1979	1980	1981	1982
a_1	16,72	17,10	17,13	17,68	18,02	18,29

Berechnen Sie die Koeffizienten der quadratischen Funktion $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$!

Berechnen Sie den Prognosewert für 1983!

47. Der durchschnittliche Grundmittelbestand der Volkswirtschaft im nichtproduzierenden Bereich entwickelte sich nach statistischen Angaben von 1976 bis 1982 in 10^2 Mrd. Mark wie folgt:

Jahr	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
a_1	2,146	2,192	2,244	2,292	2,334	2,388	2,436

1. Bei Betrachtung des statistischen Materials über einen längeren Zeitraum erscheint als günstiger Ansatz eine Exponentialfunktion $y = a \cdot e^{bx}$. Berechnen Sie die Parameter a und b !

2. Berechnen Sie für den angegebenen Zeitraum eine lineare Trendfunktion, und überprüfen Sie die Anpassung an die Meßwerte!

3. Welche Schlußfolgerungen ergeben sich?

48. Nach statistischen Angaben entwickelte sich die Produktion der spanabhebenden Werkzeugmaschinen in der DDR in Mrd. Mark

wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Jahr	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	1,491	1,667	1,802	1,926	2,043	2,176	2,344

1. Berechnen Sie die Parameter a und b für die den Trend widerspiegelnde Exponentialfunktion $y = a \cdot b^x$!
2. In welchem Jahr wird für die Produktion annähernd ein Wert von 2,725 Mrd. Mark erreicht?

49. Die Produktion von Armaturen in Mrd. Mark ist in den Jahren 1977 bis 1982 wie folgt gewachsen:

Jahr	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	0,964	1,009	1,053	1,130	1,191	1,216

1. Berechnen Sie die Trendfunktion $y = ab^x$!
2. Berechnen Sie die Abweichung des statistischen Wertes vom Funktionswert für das Jahr 1981!
3. Bestimmen Sie den Prognosewert für 1983!

50. Die Empfangsgenehmigungen je 100 Haushalte für Fernsehen haben in den Jahren von 1978 bis 1982 wie folgt zugenommen:

Jahr	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	86,5	88,0	88,1	89,2	89,7

Bestimmen Sie als Trendfunktion die Funktion $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

51. Der Außenhandelsumsatz der DDR in Mrd. Valuta-Mark entwickelte sich wie folgt:

Jahr	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	96,9	108,8	120,1	132,9	145,1

Berechnen Sie als Trendfunktionen

a) $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$!

b) $y = a_0 + a_1x$!

Vergleichen Sie die Anpassung der beiden Trendfunktionen!

52. Für die jährlich durch die Deutsche Reichsbahn transportierte Düngemittelmenge wird angenommen, daß sie sich durch die

Funktion $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ beschreiben läßt. Laut statistischen Angaben ist die Entwicklung wie folgt:

Jahr	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
s_1	5734	7934	9156	9840	9732	11541	12740

s_1 : transportierte Menge an Düngemitteln in 1000 Tonnen

Berechnen Sie die Parameter der Trendfunktion! Berechnen Sie die Werte der Trendfunktion für 1979 und für 1981!

53. Das Nationaleinkommen der DDR in Mrd. Mark entwickelte sich in den Jahren 1977 bis 1982 wie folgt:

Jahr	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	166,0	172,2	179,2	187,0	196,1	201,0

Es kann ein exponentieller Trend angenommen werden. Berechnen Sie die Trendfunktion $y = a \cdot e^{bx}$!

Berechnen Sie den Prognosewert für 1984!

54. Geben Sie für die beiden folgenden Zeitreihen jeweils den Funktionstyp an, der nach Ihrer Meinung die Entwicklung am besten widerspiegeln könnte!

1.

Jahr	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
s_1	2,69	3,46	4,45	5,71	7,33	9,41	12,08

2.

Jahr	1970	1972	1974	1976	1978	1980	1982	1984
s_1	1,45	2,65	3,17	3,46	3,65	3,78	3,87	3,95

55. Aus den statistischen Angaben des Gesundheitswesens ergeben sich für die Anzahl der Anstaltsgeborenen je 100 insgesamt geborene Kinder die folgenden Daten:

Jahr	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
s_1	94,2	95,5	96,6	97,5	98,1	98,5	98,9	99,1	99,1

Die vorliegende Zeitreihe ist ein Beispiel dafür, daß die Meßwerte s_1 einem Sättigungswert zustreben. Berechnen Sie die Parameter der Funktion $y = \frac{ax}{x+b}$, die diese Entwicklung widerspiegelt!

56. Nach statistischen Angaben ist der Ausstattungsbestand je 100 Haushalte mit Haushaltswaschmaschinen folgendermaßen gewachsen:

Jahr	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
s_1	70,0	73,0	75,7	77,6	78,8	79,9	84,4	87,7	90,8

Werden die statistischen Angaben ab 1975 betrachtet, die entsprechenden Wachstumsraten untersucht und dem Sachverhalt entsprechend unterstellt, daß die Meßwerte einem Sättigungswert zustreben werden, so erscheint die logistische Funktion als Trendfunktion geeignet, um diese Entwicklung annähernd wiederzugeben. Als Sättigungswert soll $a = 100$ angenommen werden. Berechnen Sie die Parameter b und c der Funktion

$$y = \frac{a}{1 + be^{-cx}} !$$

Berechnen Sie einige Werte der Trendfunktion $y_1 = f(x_1)$, und vergleichen Sie diese mit den statistischen Angaben! Untersuchen Sie das Verhalten der Wachstumsrate für die Jahre 1974 bis 1982!